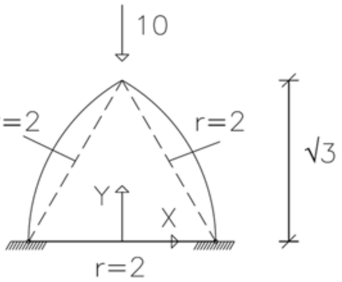
# Direkte Steifigkeitsmethode für gekrümmte Strukturen

Konstantinos Kaplanis

## Problemstellung und Motivation

Gekrümmte Strukturen mit gerade Stäbe:

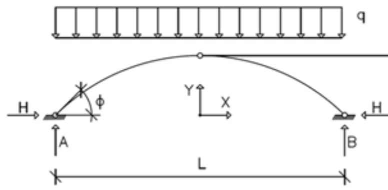
- Größeres Approximationsfehler
- Langsame Berechnung
- Modellierung mit vielen Elementen





$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

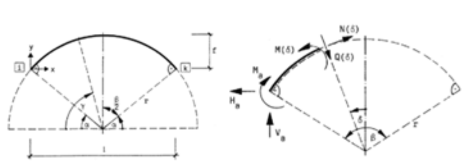
Grundelement I




$$H = \frac{qL^2}{8f}$$

## Herleitung der Steifigkeitsmatrix eines gekrümmten Elementes

### Schnittgrößen



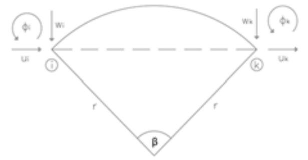

© Schneider, J., Hilfsblattsammlung

$$\begin{aligned} x &= r \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\gamma)) \\ y &= r \cdot (\sin(\gamma) - \sin(\alpha)) \\ f &= r \cdot (1 - \sin(\alpha)) \\ l &= 2 \cdot r \cdot \sin(\beta/2) \\ \alpha &= 90° - \beta/2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} M(\delta) \\ Q(\delta) \\ N(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \cdot (\cos(\delta) - \cos(\beta/2)) & r \cdot (\sin(\beta/2) - \sin(\delta)) \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \\ V_a \end{bmatrix}$$

### Lokale Freiheitsgrade

- 6 Freiheitsgrade pro Element
- Verschiebungsfreiheitsgrade parallel bzw. senkrecht zur Bogensehne (vorteilhaft u.a. für die Berechnung der Schnittgrößen)
- Verdrehungsfreiheitsgrade positiv im mathematischen Sinne
- Transformation zu Globalsystem wie bei gerade Stabelemente



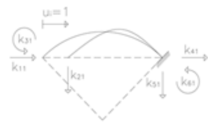

### Herleitung

Aufstellen der Flexibilitätsmatrizen $\mathbf{d}^{11}$, $\mathbf{d}^{22}$ (mit PvK)

$$\mathbf{d}^{11} = \begin{bmatrix} d_{11}^{11} & d_{12}^{11} & d_{13}^{11} \\ d_{21}^{11} & d_{22}^{11} & d_{23}^{11} \\ d_{31}^{11} & d_{32}^{11} & d_{33}^{11} \end{bmatrix} \text{ mit } d_{ik}^{11} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left( \frac{N_i(\delta) \cdot N_k(\delta)}{EA} + \frac{M_i(\delta) \cdot M_k(\delta)}{EI} \right) \cdot r \cdot d\delta, \text{ analog für } \mathbf{d}^{22}$$

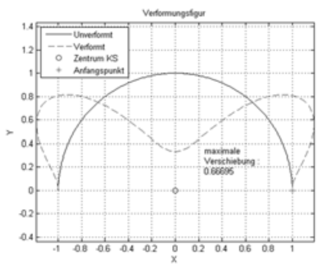
$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{11} & \mathbf{k}^{12} \\ \mathbf{k}^{21} & \mathbf{k}^{22} \end{bmatrix}, \text{ mit } \mathbf{k}^{11} = (\mathbf{d}^{11})^{-1} \text{und } \mathbf{k}^{22} = (\mathbf{d}^{22})^{-1}$$

- $\mathbf{k}^{21}$ aus Gleichgewicht.
- Dafür entsprechende Einträge von
- $\mathbf{k}^{11}$ als eingeprägte „Lasten".
- $\mathbf{k}^{12} = (\mathbf{k}^{21})^T$ aus Energiegründen.




## Beispiele

### MATLAB

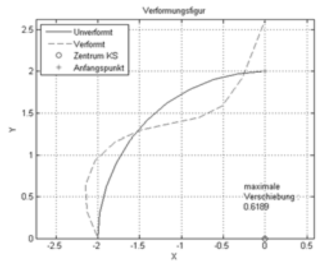



4 Elemente

$$\mathbf{F\_2} = \begin{bmatrix} 4.5910 \\ -5.0000 \\ -1.1058 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 10.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ -4.5910 \\ -5.0000 \\ 1.1058 \end{bmatrix}$$

200 Elemente

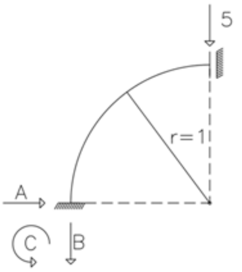
$$\mathbf{F\_2} = \begin{bmatrix} 4.5910 \\ -5.0000 \\ -1.1058 \\ \dots \\ (Nullen) \\ \dots \\ 0.0000 \\ 10.0000 \\ -0.0000 \\ \dots \\ (Nullen) \\ \dots \\ -4.5910 \\ -5.0000 \\ 1.1058 \end{bmatrix}$$



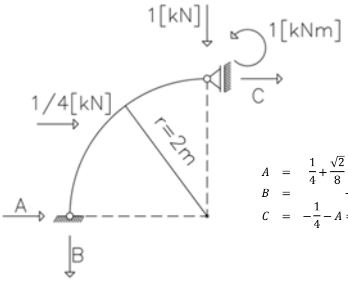

10 Elemente

$$\mathbf{F\_2} = \begin{bmatrix} 0.4268 \\ -1.0000 \\ -0.0000 \\ \dots \\ (Nullen) \\ \dots \\ -0.6768 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

### Handrechnung




$$\begin{aligned} A &= 0 - 4.5910 \cdot (-1) + 1.5148 \cdot 0 = 4.5910[kN] \\ B &= -5 - 4.5910 \cdot 0 + 1.5148 \cdot 0 = -5[kN] \\ C &= 5 - 4.5910 \cdot 1 + 1.5148 \cdot (-1) = -1.1058[kNm] \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} = 0.4268[kN] \\ B &= -1[kN] \\ C &= -\frac{1}{4} - A = -0.6768[kN] \end{aligned}$$

**Literatur:**


- E. Ramm, M. Bischoff, B. Oesterle: Baustatik II, 2012
- J. Schneider: Hilfsblattsammlung, URL http://www.iwmb.tu-darmstadt.de/media/iwmb/l/statik_2/Hilfsblattsammlung.pdf



**Institut für Baustatik und Baudynamik**

Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff