

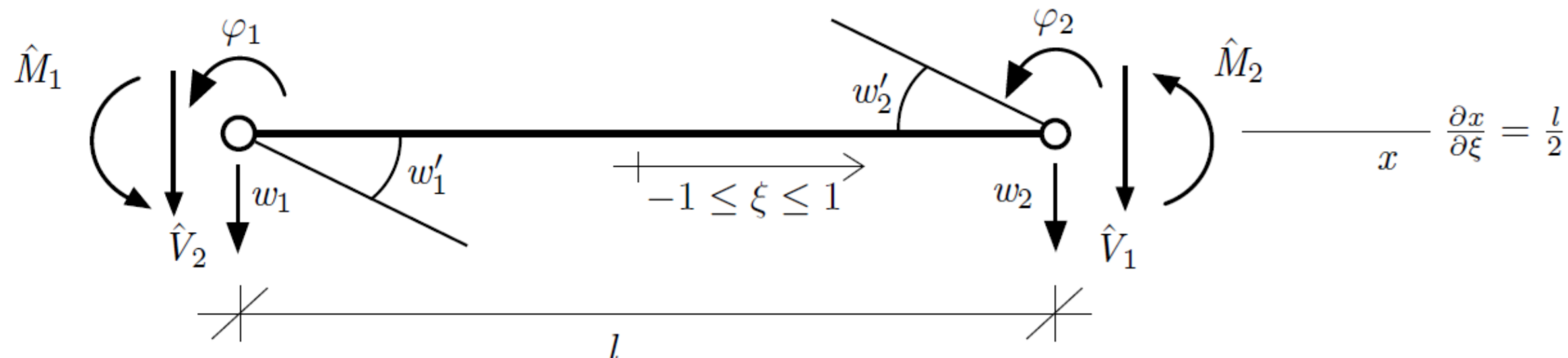
# Implementierung und Analyse von finiten Balkenelementen

## Zielsetzung

Implementierung eines finiten Bernoulli-Balkenelements und eines finiten Timoschenko-Balkenelements in den institutseigenen Finite-Elemente-Solver NumPro mit anschließender Analyse der implementierten Elemente

## Balkentheorien

Schubstarre Bernoulli-Balkentheorie:



Bernoulli-Balken-Element

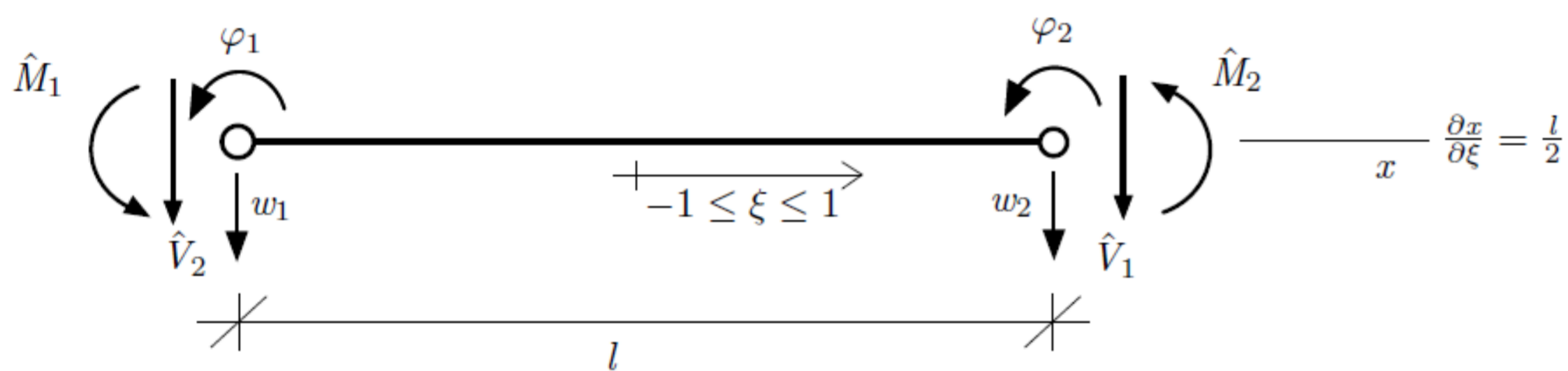
- 1 Freiheitsgrad pro Materialpunkt  
Durchbiegung  $w$
- Verdrehung abhängig von der Durchbiegung :

$$\varphi = \frac{dw(x)}{dx} = -w'$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

- Durch schubstarre Definition locking-frei

Schubweiche Timoschenko-Balkentheorie



Timoschenko-Balken-Element

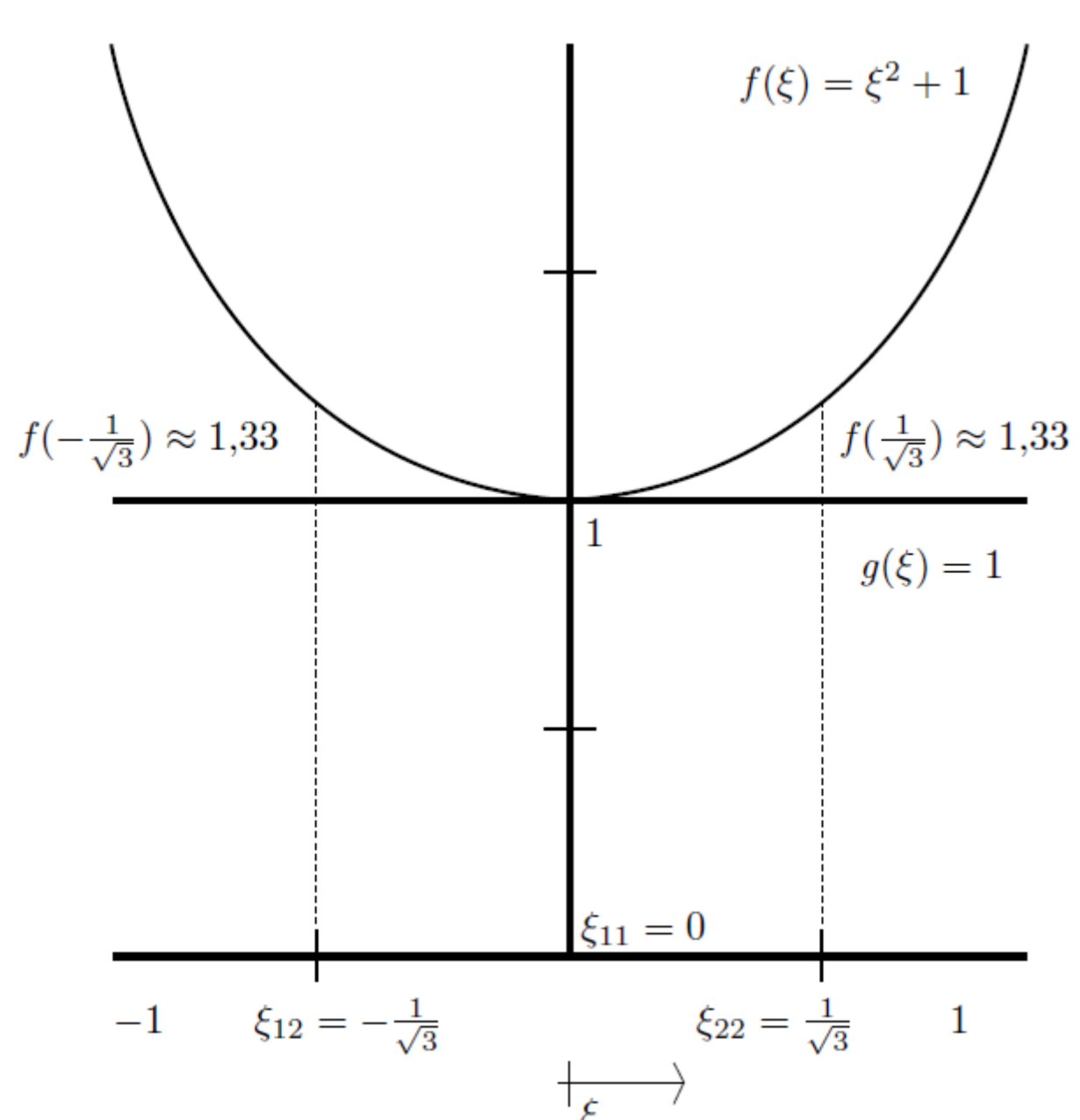
- 2 Freiheitsgrade pro Materialpunkt  
Durchbiegung  $w$  und Verdrehung  $\varphi$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{l} & -\frac{GA}{2} & -\frac{GA}{l} & -\frac{GA}{2} \\ -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{3} + \frac{EI}{l^2} & \frac{GA}{2l} & \frac{GA}{6} - \frac{EI}{l^2} \\ -\frac{GA}{l} & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{l} & \frac{GA}{2} \\ -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{6} - \frac{EI}{l^2} & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{3} + \frac{EI}{l^2} \end{bmatrix}$$

- Locking-behaftetes Element

## Lockingvermeidung durch SRI

- Integration mit einem anstatt von zwei nötigen Gaußpunkten für eine exakte Integration beim finiten Timoschenko-Balkenelement



$$\sum_{i=1}^2 f(\xi_{i2}) \omega_{i2} = f(\xi_{12} = -\frac{1}{\sqrt{3}}) \omega_{12} + f(\xi_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}) \omega_{22} = 1,33 * 1 + 1,33 * 1 = 2,66$$

$$\sum_{i=1}^1 f(\xi_{i1}) \omega_{i1} = g(\xi_{11}) \omega_{11} = f(\xi_{11} = 0) \omega_{11} = g(\xi_{11} = 0) \omega_{11} = 1 * 2 = 2$$

Beispiel für Unterschiede in der Integration mit einem oder zwei Gaußpunkten

- Unterschiede des Schubanteils der Elementsteifigkeitsmatrix des Timoschenko-Balkenelements bei der Integration mit zwei bzw. einem Gaußpunkt

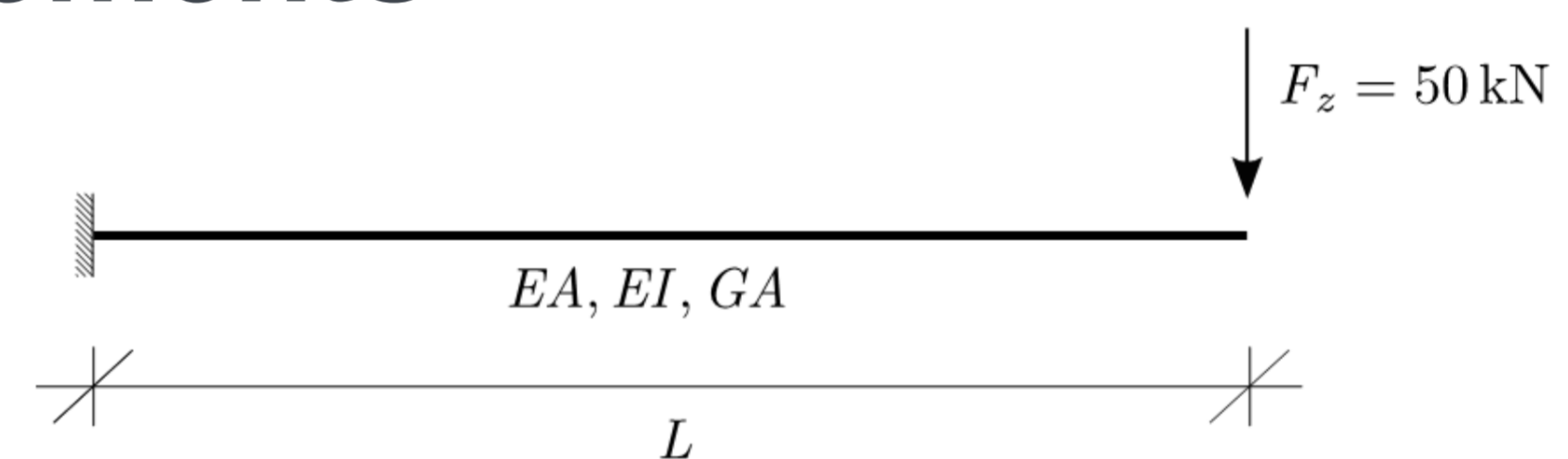
$$\mathbf{k}_s = \frac{GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} & -1 & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} \\ -1 & \frac{l}{2} & 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}$$

Berechnung mit zwei Gaußpunkten

$$\mathbf{k}_s^{SRI} = \frac{GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l}{2} & -1 & -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ -1 & \frac{l}{2} & 1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix}$$

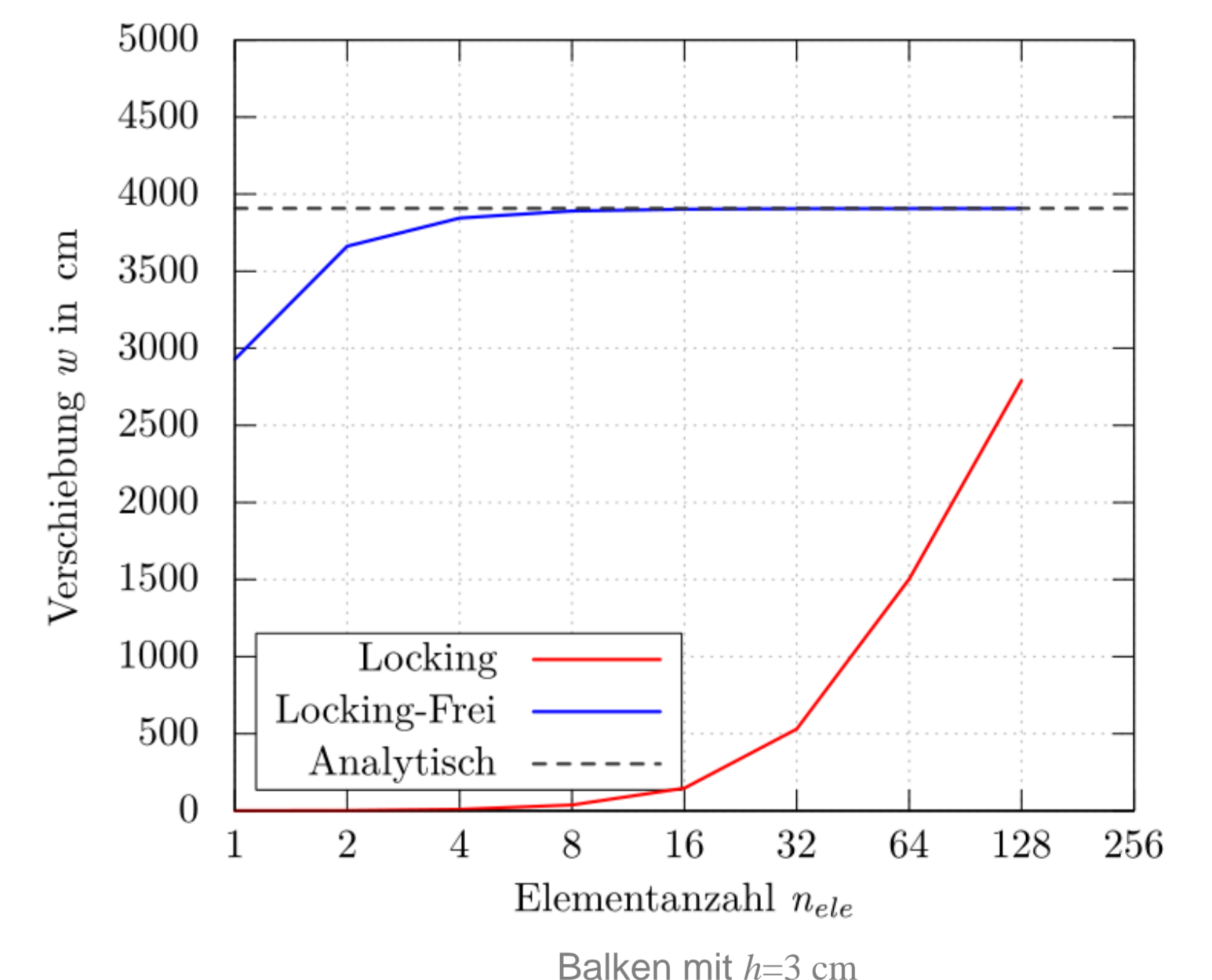
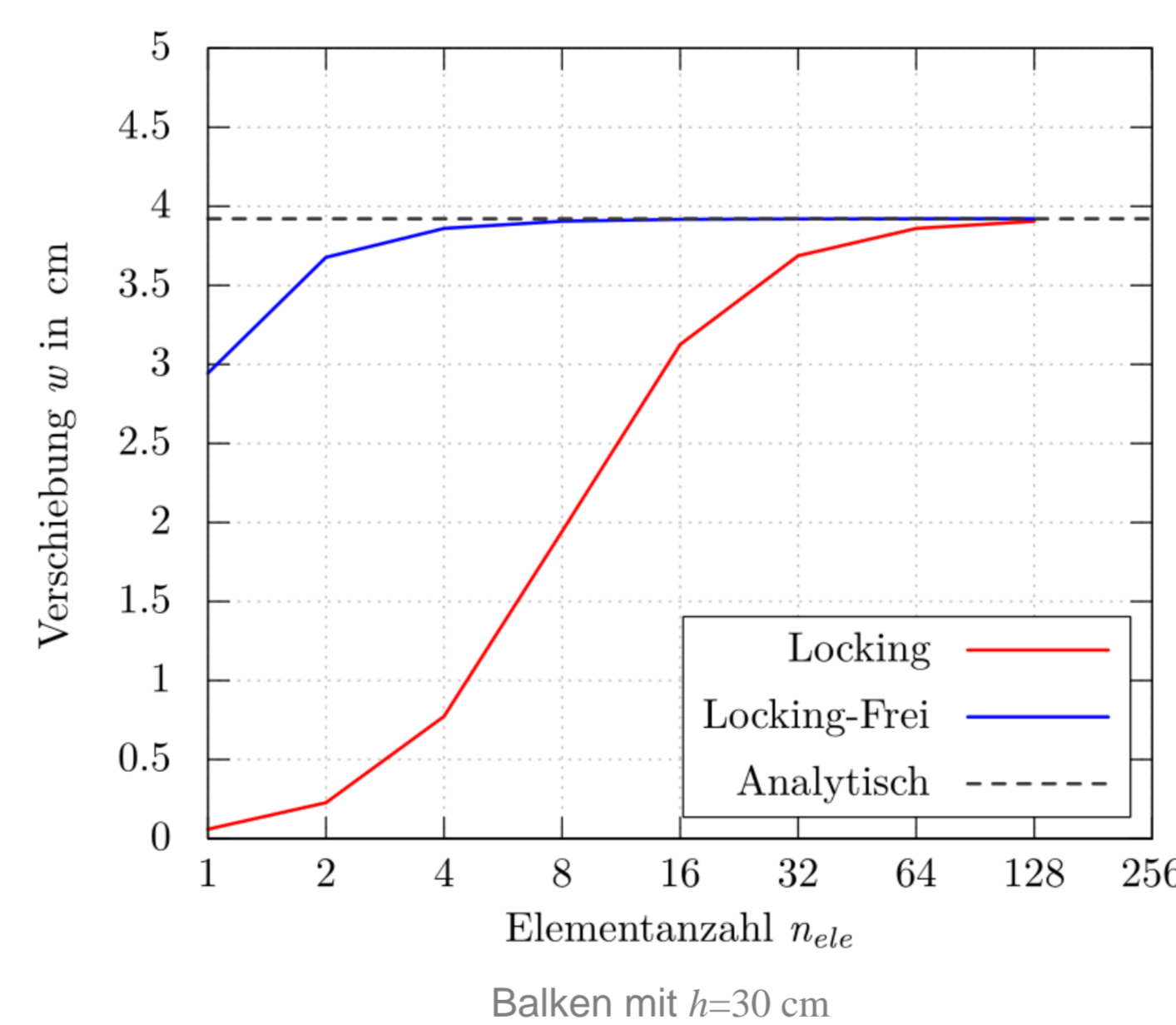
Berechnung mit einem Gaußpunkten

## Analyse des finiten Timoschenko-Balkenelements



Kragarm mit Belastung  $F_z = 50 \text{ kN}$

- Auswertung von  $w(x=L)$  am freien Ende mit unterschiedlicher Schlankheit und Elementanzahl



## Literatur

- von Scheven, Bischoff: *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Institut für Baustatik und Baudynamik, 2016. – 1–150 S
- Barthold, Rotthaus, Gerzen, Kijanski K.: *Einführung in die Finite Elemente Methode: Stabtragwerke*, 2013. - 152–237 S

## Betreuer

Dipl.-Ing. Tobias Willerdig