Universität Stuttgart
Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Lukas Ruh

Konzepte zum Aufbau und Entwurf von Stabtragwerken

Methode der Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen

Durch die von Herrn Prof. Pellegrino (Caltech) gefundenen Gleichungen können bei Fachwerk die Verschiebung aller Knoten berechnet werden (Pellegrino 1990, S.1329-1350), (Pellegrino 1993, S.3025-3035).

Diese Gleichungen sind für statisch bestimmte Systeme:

1. Gleichgewichtsgleichung

$$\boldsymbol{A\sigma} = \boldsymbol{l}$$

2. Kompatibilitätsgleichung

$$\boldsymbol{Bd} = \boldsymbol{e}$$

3. Werkstoffgleichung

$$\boldsymbol{e} = \underline{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F\sigma}$$

Diese Gleichungen sind für statisch bestimmte Systeme:

Die redundanten Stäbe in einem statisch überbestimmten System werden gestrichen und mit einer -1 in der Self-Stress-Matrix eingeführt.

1. Gauß Transformation

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{l}) \overset{Gauß}{\Longrightarrow} (\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{l}})$$

2. Eigenspannungsgleichung

$$\boldsymbol{SS^T FSS\alpha} = -\boldsymbol{SS^T}(\underline{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F\sigma}')$$

3. Gleichgewichtsgleichung

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{SS\alpha}$$

4. Kompatibilitätsgleichung

$$\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}$$

5. Werkstoffgleichung

$$\boldsymbol{e} = \underline{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F\sigma}$$

$\boldsymbol{A}: Gleichgewichtsmatrix, \boldsymbol{\sigma}: Spannungsvektor, \boldsymbol{l}: Einwirkungs-vektor, \boldsymbol{B}: Kompatibilitätsmatrix\ (\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T),$
$\boldsymbol{d}: Verschiebungen, \boldsymbol{e}: Dehnungen, \underline{\boldsymbol{e}}: Dehnungen\ resultierend\ aus\ Temperatur\ etc., \boldsymbol{F}: Flexibilitätenmatrix, \boldsymbol{SS}: Self-Stress-Matrix, \boldsymbol{\alpha}: Lösungsvektor\ für\ Self-Stress-Zustand$

Zerlegung der Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen in Grundtragwerke eines Fachwerks

Die Grundtragwerke eines Fachwerks sind der Balken auf drei Auflagerkräften und das Drei-Gelenk-Tragwerk.

Diese bilden in der Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen, bei systematischer Zuordnung der Freiheitsgrade und den Elementen, Untermatrizen.

Die Untermatrizen für den Balken auf drei Auflagerkräften sind 4×1 Matrizen und die Untermatrizen des Drei-Gelenk-Tragwerks sind theoretisch 6×2 Matrizen.

Dies führt zu einer verallgemeinerten Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen (siehe Abbildung 1).

Es sind jedoch nicht nur aus der Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen die Grundtragwerke abzulesen, da auch andere Kombinationen von Elementen zu Freiheitsgraden die selben Untermatrizen erzeugen.

$$\mathbf{A}_{Allgemein} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Abbildung 1

Literatur

Pellegrino 1990

Pellegrino, S.: Analysis of Prestressed Mechanisms. In: *International Journal of Solids and Structures* 26 (1990), Nr. 12, S. 1329–1350. – ISSN 00207683

Pellegrino 1993

Pellegrino, S.: Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium Matrix. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 21, S. 3025–3035. – ISSN 00207683

Betreuer: Dr.-Ing. Malte von Scheven