Universität Stuttgart
Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Nicolas Rühle

Alternative Pfadverfolgungsmethoden für die Strukturanalyse bei großen Verformungen

Trust-Region-Verfahren

Bei den Trust-Region-Verfahren handelt es sich um eine Klasse von Optimierungsverfahren, die im Gegensatz zu einem klassischen Abstiegsverfahren, wie dem Newton-Raphson-Verfahren, zuerst eine maximale Schrittweite Δ festlegt bevor man einen neue Iterierte berechnet. Man vertraut einer quadratischen Approximation m(p) einer Zielfunktion f(x) innerhalb dieses Vertrauensgebiets Δ.

Eine neue Iterierte berechnet man indem man das Trust-Region-Teilproblem löst:

$$\min\ m(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^T\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{H}\mathbf{p} \text{ u.d.N. } |\mathbf{p}| \leq \Delta$$

Ist dieses Teilproblem gelöst, so bewertet man die Qualität des Testschrittes p durch den Quotienten ρ:

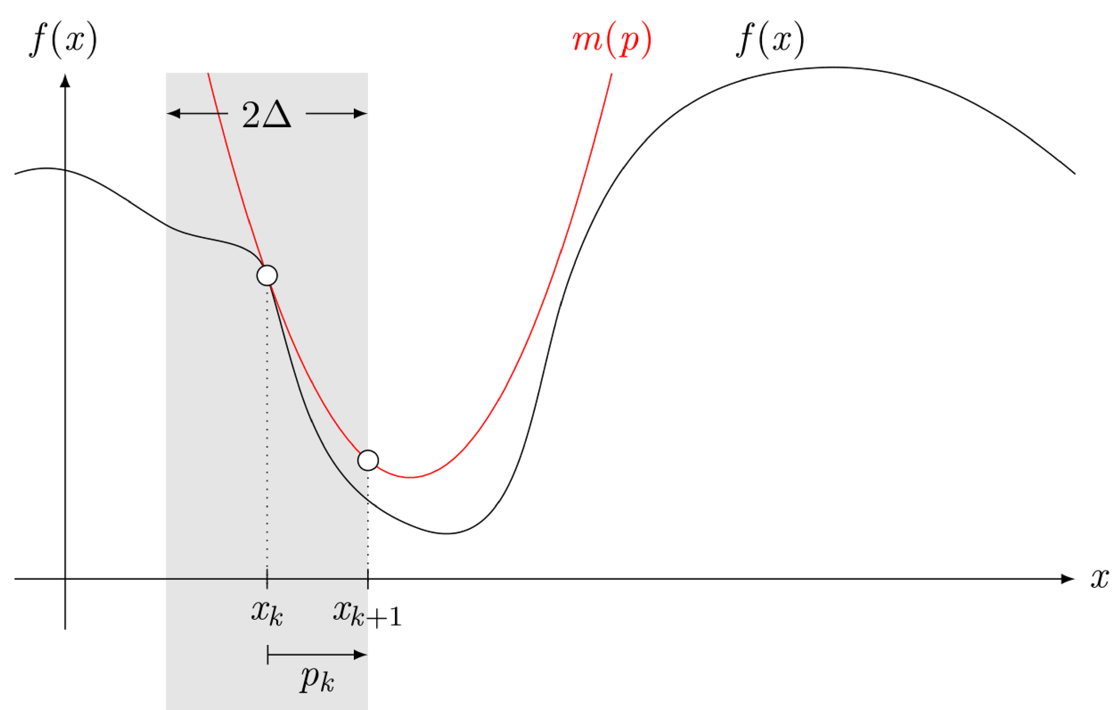
$$\rho = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{p})}{f(\mathbf{x}) - m(\mathbf{p})}$$

Anhand von ρ wird auch die Größe des Vertrauensgebiets Δ verändert:

$$\begin{aligned} \rho_k \geq \eta_2 \quad &\rightarrow \quad \Delta_{k+1} = \gamma_2\Delta_k, \quad & x_{k+1} = x_k + p_k \\ \eta_1 \leq \rho_k < \eta_2 \quad &\rightarrow \quad \Delta_{k+1} = \Delta_k, \quad & x_{k+1} = x_k + p_k \\ \eta_1 > \rho_k \quad &\rightarrow \quad \Delta_{k+1} = \gamma_1\Delta_k, \quad & x_{k+1} = x_k \end{aligned}$$

Um das Trust-Region-Teilproblem zu lösen gibt es in der Literatur verschiedenste Lösungsätze:

- Cauchy Methode
- Dogleg und Double-Dogleg Methode
- Steihaug-Toint Methode



Für die strukturmechanische Probleme ist die Zielfunktion die potentielle Energie eines Systems. Sie wird direkt minimiert.

$$\Pi = \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{ext}} = \ \min.$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}u} = F_{\text{int}}(u) - F_{\text{ext}}(u) = 0 \rightarrow F_{\text{int}}(u) = F_{\text{ext}}(u)$$

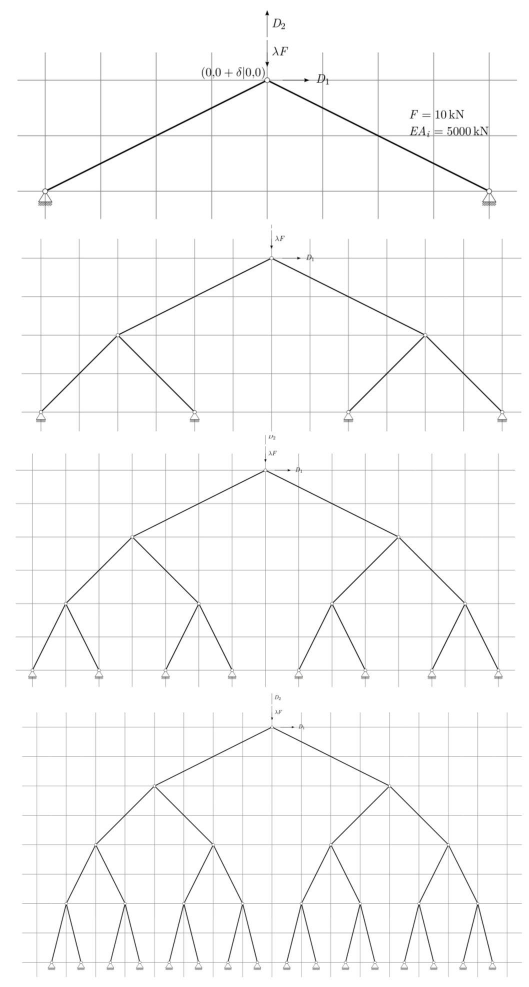
$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}u} = 0 \rightarrow \text{Extremum} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}u^2} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{Minimum} \\ = 0 \rightarrow \text{Sattelpunkt} \\ < 0 \rightarrow \text{Maximum} \end{cases}$$

Betreuer: Dipl.-Ing. Steffen Roth und Alexander Müller, M.Sc.

Numerisches Beispiel

Trust-Region-Verfahren sind deutlich effizienter als das Newton-Raphson-Verfahren. Mit der Steihaug-Toint Methode berechnet man mit deutlich weniger Iterationen, Assemblieroperationen sowie deutlich schneller den Pfad eines Tragwerks.

Sys.-Fhg.	Cauchy	Dogleg	D.-Dogleg	Steihaug-T.	Newton-R.
	Iterationen (Lastinkrementübergreifend)				
2	553	113	113	113	333
6	2024	214	214	129	297
14	nicht konv.	355	362	165	589
30	nicht konv.	791	1147	225	235
	Anzahl des Neuberechnens von Matrizen und Vektoren				
2	551	111	111	111	353
6	2015	193	193	123	1902
14	nicht konv.	302	309	151	609
30	nicht konv.	713	1045	194	255
	Anzahl der Assemblierungsoperationen				
2	1062	182	182	182	706
6	11970	1038	1038	618	1902
14	nicht konv.	3948	4046	1834	8526
30	nicht konv.	20790	30750	5220	7650
	Anzahl von Matrixinversen ($\mathbf{H}^{-1}$ bzw. $\mathbf{K}_T^{-1}$)				
2	0	94	94	0	333
6	0	195	195	0	297
14	nicht konv.	336	343	0	589
30	nicht konv.	772	1128	0	235
	Zeitmessung in Sekunden (Mittel aus 5 Berechnungen)				
2	1,0538	0,4966	0,4744	0,2698	0,379
6	3,8532	0,7056	0,6202	0,2774	0,4088
14	nicht konv.	1,0444	0,8952	0,3652	0,738
30	nicht konv.	2,5094	3,2288	0,5356	0,6718



Literatur

Geiger, C.; Kanzow, C.: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.