Universität Stuttgart
Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Loris Leon Burth

Einfluss der numerischen Integration auf die Qualität von Finite-Elemente-Lösungen unter Einsatz finiter Scheibenelemente

Problemstellung

Bei der Finite-Elemente-Methode unter Einsatz finiter Scheibenelemente müssen Integrale gelöst werden, um die Elementsteifigkeitsmatrizen zu bestimmen. Dabei wird numerisch mit Quadraturen integriert. Der Integrand dabei hängt von der Elementgeometrie ab. Für parallelogramförmige Elemente ist der Integrand ein Polynom, das mit genügend Stützstellen mit der üblicherweise verwendeten Gauß-Legendre-Quadratur exakt integriert werden kann. Für andere Geometrien ist die Gauß-Legendre-Quadratur im Allgemeinen nicht exakt.

Fehlerschranke des Integrationsfehlers

Mit der Restgliedformel [1]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I(f) = \frac{\partial_x^{(2n_{GP})} f(x)\Big|_{x=\zeta}}{(2n_{GP})!} \int_a^b \prod_{i=1}^{n_{GP}} (x-x_i)^2\,\mathrm{d}x,$$

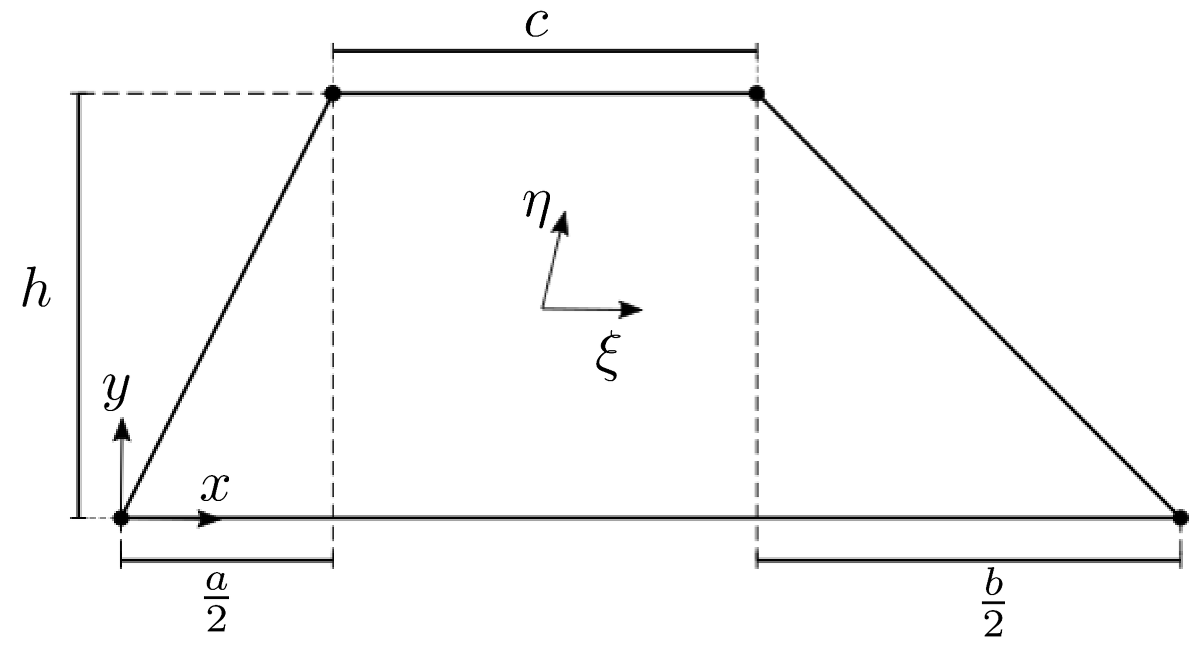
$\zeta \in (a,b)$

für die einfache Gauß-Legendre-Quadratur mit n_{GP} Stützstellen lässt sich eine Fehlerschranke für den Integrationsfehler in jedem Eintrag der Elementsteifigkeitsmatrix abhängig von dem Integranden herleiten:

$$\left|\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta - I_\eta(I_\xi(f))\right|$$
$$\leq \max_{\substack{\zeta_1\in[-1,1]\\ \zeta_2\in[-1,1]}} \Bigg| \frac{1}{(2n_{GP})!}\int_{-1}^{1}\prod_{i=1}^{n_{GP}}(x-x_i)^2\,\mathrm{d}x$$
$$\Bigg[\frac{\partial_\eta^{(2n_{GP})}\partial_\xi^{(2n_{GP})} f(\xi,\eta)\Big|_{(\xi,\eta)=(\zeta_1,\zeta_2)}}{(2n_{GP})!}\int_{-1}^{1}\prod_{i=1}^{n_{GP}}(x-x_i)^2\,\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{i=1}^{n_{GP}}\left(w_i\partial_\eta^{(2n_{GP})} f(\xi_i,\eta)\Big|_{\eta=\zeta_2} + w_i\partial_\xi^{(2n_{GP})} f(\xi,\eta_i)\Big|_{\xi=\zeta_1}\right)\Bigg]\Bigg|.$$

Parametrisierung eines Trapezes

Beispielhaft wird ein Trapez unter Verwendung von linearen Ansatzfunktionen und zwei Stützstellen zur Integration untersucht. Dieses kann wie folgt parametrisiert werden:



Integrationsfehler bei Trapezen

Das trapezförmige Element wird mit den Materialparametern bei einem Elastizitätsmodul von 100 und einer Querkontraktionszahl von 0.3 untersucht. Der Integrationsfehler ist für gleichschenklige Trapeze kleiner als bei anderen Trapezen mit gleichem Integrationsfehler.

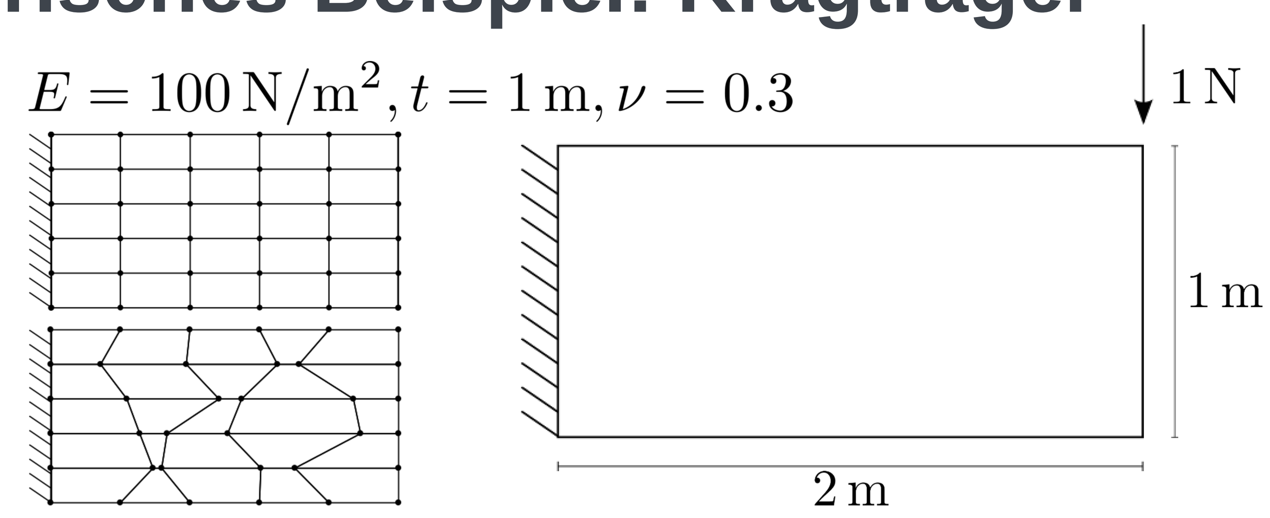
An Trapeze angepasste Gauß-Quadratur

Die Integration über ξ ist mit der Gauß-Legendre-Quadratur und 2 Stützstellen exakt. Für die Integration über η wird eine exakte Gauß-Quadratur mit 2 Stützstellen zur Gewichtsfunktion

$$w(\eta) = \frac{h}{16|\mathbf{J}|} = \frac{1}{a+b-(a+b)\eta+4c}$$

wie in [2] konstruiert. Es werden explizite Formeln für die Stützstellen und Gewichte für diese Quadratur in Abhängigkeit von $a+b$ und c erhalten.

Numerisches Beispiel: Kragträger



Position des Knotens unten rechts im deformierten Zustand:

- Unterschied durch unterschiedliche Diskretisierung $\approx 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Fehler bei Trapezdiskretisierung mit GL-Quadratur $\approx 10^{-4}\,\mathrm{m}$

Literatur

[1] R. Rannacher: Einführung in die Numerische Mathematik. 2017, S. 87.

[2] Freund, R; Hoppe, R.: Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1. Springer Berlin Heidelberg, 2007. S. 186-196.

Betreuer: Tobias Willmann
Institut für Baustatik und Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff
https://www.ibb.uni-stuttgart.de

Baustatik und Baudynamik