Universität Stuttgart
Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Teresa Pleger

Redundanz im Gleichgewicht von Stabtragwerken

Tragwerksanalyse

Zum Verständnis von Tragwerken und deren Tragverhalten sind die Brauchbarkeit sowie der Grad der statischen Unbestimmtheit wichtige Größen.

Durch eine Redundanzanalyse der Gleichgewichtsmatrix kann die Redundanzmatrix ermittelt werden. Diese bietet eine Möglichkeit, auch komplexe Systeme zu ermitteln.

In dieser Arbeit wurde ein Algorithmus für die Redundanzanalyse von zwei- und dreidimensionalen Fachwerken entwickelt. Außerdem wurden Beispieltragwerke verschiedener Charakteristiken analysiert sowie Interpretationsansätze diskutiert.

Redundanzmatrix

Berechnungsvorschriften für Fachwerke:

- $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]$
- $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{S}\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{A}$	Kompatibilitätsmatrix (Transponierte: Gleichgewichtsmatrix)
$\mathbf{C}$	Werkstoffmatrix mit Elementsteifigkeiten
$\mathbf{F}$	Flexibilitätsmatrix ($\mathbf{C}^{-1}$)
$\mathbf{S}$	Eigenspannungsmatrix

Mechanische Interpretation:
Die Zeilen der Redundanzmatrix können als Gleichgewichtsgruppen interpretiert werden, d.h. sie stellen Normalkraftzustände dar, für die das System in einem inneren Gleichgewicht steht.

In einer Spalte e finden sich die negativen elastischen Längenänderungen infolge einer Einheitslängenänderung des Elements e.

Auf der Hauptdiagonalen finden sich die Redundanzanteile. Diese geben ein Maß für den Beitrag zur statischen Unbestimmtheit an. Je höher der Redundanzanteil eines Elements, desto geringer ist dessen Beitrag zum Lastabtrag des Systems.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ergibt sich zu $n_s = \mathrm{Sp}(\mathbf{R}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{R})$.

Brauchbare Systeme

Für statisch bestimmte Systeme ergibt sich als Redundanzmatrix grundsätzlich eine Null-Matrix, es existiert nur das triviale innere Gleichgewicht, es treten keine elastischen Längenänderungen und dadurch auch keine Zwangskräfte auf.

Die Redundanzanteile von statisch unbestimmten Systemen sind von den Steifigkeitsverhältnissen der Stäbe abhängig. Eine Erhöhung der Elementsteifigkeit hat einen geringeren Redundanzanteil zur Folge.

Wird ein brauchbares räumliches System in seine Ebenen zerlegt, so sind die ebenen Systeme ebenfalls brauchbar. Allerdings können zusätzliche statische Unbestimmtheiten auftreten, wenn keine vollständige Entkopplung der Ebenen erfolgt.

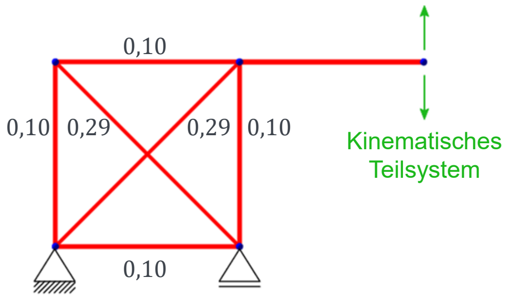
Kinematische Systeme

Bei kinematischen Systemen ist die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ singulär, weshalb die Redundanzmatrix über die erste Berechnungsvorschrift nicht berechnet werden kann. Stattdessen kann eine modifizierte Redundanzmatrix $\mathbf{R}_{\mathrm{m}}$ über eine Pseudoinverse $\mathbf{K}^{+}$ ermittelt werden. Diese ist identisch zu der über die zweite Berechnungsvorschrift berechneten Redundanzmatrix $\mathbf{R}$.

Die Spur der Redundanzmatrix eines kinematischen Systems kann interpretiert werden als der Grad der statischen Unbestimmtheit

- eines vergleichbaren (durch Einführung zusätzlicher Lagerbedingungen) brauchbaren Systems
- eines brauchbaren Teilsystems
- für einen bestimmten kompatiblen Lastfall

Numerisches Beispiel



Brauchbares Teilsystem

Literatur

VON SCHEVEN, M.; RAMM, E.; BISCHOFF, M.: *Quantification of the Redundancy Distribution in Truss and Beam Structures*. In: International Journal of Solids and Structures 213 (2021), März, S. 41-49.

Betreuerin: Tamara Prokosch, M. Sc.
https://www.ibb.uni-stuttgart.de

Baustatik und Baudynamik