Universität Stuttgart
Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Nic Bartsch

Kontinuierliche Redundanzverteilung mit dem Donati-Theorem

Motivation

Das Konzept der Redundanzverteilung in elastischen Systemen basiert auf dem Grad der statischen Unbestimmtheit. Die genaue Verteilung der statischen Unbestimmtheit, oder auch Redundanzverteilung im Tragwerk zu kennen, bringt einige Vorteile mit sich. Es können Aussagen zu der Sicherheit, Zuverlässigkeit und Duktilität im Falle vom Versagen einzelner Tragwerksteile bezogen auf das Gesamttragwerk getroffen werden. Dies hängt damit zusammen, dass statisch unbestimmte Tragwerke Lasten entlang unterschiedlicher Wege abtragen und somit nicht jedes Bauteil denselben Beitrag zum Lastabtrag liefert. Neben den bereits bestehenden Möglichkeiten die Redundanz zu bestimmen wird in dieser Arbeit die Anwendung des Donati-Theorems zur Bestimmung der kontinuierlichen Redundanzverteilung untersucht.

Donati-Theorem

Im Wesentlichen gibt das Donati-Theorem zwei Bedingungen vor, welche, wenn sie erfüllt werden, die Kompatibilität des Tensorfeldes der Verzerrungsgrößen $\varepsilon(x)$ im elastischen Gebiet Ω implizieren. Die Kompatibilitätsgleichung:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T(x)\boldsymbol{\sigma}(x)\, d\Omega = 0$$

Und die Gleichgewichtsgleichung:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

Die Gleichgewichtsgleichung kann, aufgrund der Definition der Divergenz, so wie sie ist aber nicht direkt zur Bestimmung der kontinuierlichen Redundanzverteilung verwendet werden. Sie wird deswegen aus einer mechanischen Sichtweise als Gleichgewichtsbedingung neu interpretiert. Es wird anstatt der Divergenz ein Differentialoperator verwendet der für jede Bauteiltheorie neu bestimmt werden muss.

Vorgehen zur Bestimmung der kontinuierlichen Redundanzverteilung

1. Spannungsansatz $\boldsymbol{\sigma}(x)$ (Anwendung der Gleichgewichtsgleichung)

	Fachwerktheorie	Euler-Bernoulli-Balkentheorie	Bresse-Timoschenko-Balkentheorie
Spannungsgrößen $\boldsymbol{\sigma}(x)$	C^N	$C_1^M x + C_2^M$	$\begin{bmatrix} C_1^M x + C_2^M \\ C^V \end{bmatrix}$

2. Elastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{el}}(x,s)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{el}}(x,s) = -\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(x)\boldsymbol{\alpha}^T(s), \qquad x,s \in \Omega$$

3. Bestimmung von $\boldsymbol{\alpha}^T(s)$ (Anwendung der Kompatibilitätsgleichung)

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T(x,s)\boldsymbol{\sigma}(x)d\Omega = 0, \qquad x,s \in \Omega \;\text{ mit } \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{el}} + \boldsymbol{\varepsilon}^0$$

4. kontinuierlichen Redundanzfunktion $\mathbf{R}(x,s)$

$$-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{el}}(x,s) = \mathbf{R}(x,s)$$

5. Redundanzdichte $\overline{\mathbf{R}}(x)$

$$\overline{\mathbf{R}}(x) = \mathbf{R}(x,x)$$

6. Spur der Redundanzdichte

$$\operatorname{tr}_\Omega\left(\int_\Omega \overline{\mathbf{R}}(x)dx\right) := \sum_i \int_\Omega \overline{R}_{ii}(x)dx = \sum_i r_{ii} = n_s =: r$$

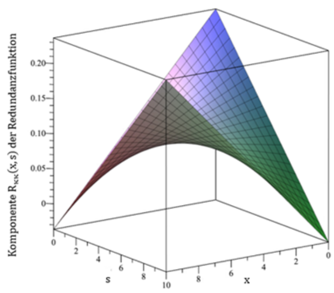
Betreuer: Lisa-Marie Krauß, M.Sc.
Tamara Prokosch, M.Sc.

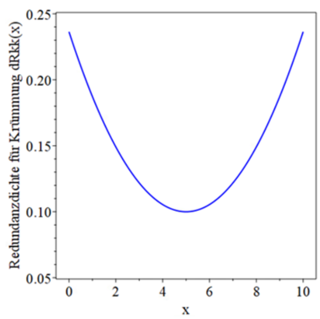
Beispiel eines Timoschenko-Balkens

Die kontinuierliche Redundanzverteilung und die zugehörige Redundanzdichte aus dem Krümmungsanteil sind hier exemplarisch als Gleichung und in graphischer Form dargestellt

$$\mathbf{R}(x,s) = \begin{bmatrix} R_{\kappa\kappa} & R_{\kappa\gamma} \\ R_{\gamma\kappa} & R_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} = -\frac{1}{l(GA_s l^2 + 12EI)} \begin{bmatrix} \left(-4l^2 + (6s+6x)l - 12sx\right)GA_s - 12EI & 6GA_s(l-2x) \\ 6EI(l-2s) & -12EI \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_{\kappa\kappa}(x) = \frac{\left(4l^2 - 12x + 12x^2\right)GA_s + 12EI}{l\left(GA_s l^2 + 12EI\right)}$$





Ergebnis

Die Anwendung des Donati-Theorems für die Bestimmung der kontinuierlichen Redundanzverteilungen in Tragwerken nach der Fachwerktheorie, Euler-Bernoulli-Balkentheorie und Bresse-Timoschenko-Balkentheorie wurde gezeigt und angewandt. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Redundanz stark von den Steifigkeitsverhältnissen und von der Lagerung sowie Topologie eines Tragwerks abhängig ist.

Literatur

Gade, J., Tkachuk, A., von Scheven, M. & Bischoff, M., 2021. A continuum-mechanical theory of redundancy in elastostatic structures. *International Journal of Solids and Structures*, Band 226-227

https://www.ibb.uni-stuttgart.de

Baustatik und Baudynamik