

Baha Yavuz

Motivation und Zielsetzung

Das Pantheon ist ein antiker Tempel aus dem 2. Jahrhundert. Ihre kennzeichnende offene Kuppel besitzt dabei die geometrische Besonderheit, dass die Kuppelwand nach oben hin immer dünner wird. Diese Besonderheit ermöglicht, dass die unbewehrte Betonkuppel ein geringeres Gesamtgewicht erreicht. Dank der Fortschritte in der computergestützten Berechnung ist heute die Finite-Elemente-Methode die gebräuchlichste Methode zur Berechnung solcher Kuppeln. Die Membrantheorie bietet eine Alternative zur FEM und weist im Idealfall ein gleichwertiges Ergebnis auf.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Kuppel des Pantheons anhand der Membrantheorie zu berechnen und diese mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Theorie zu vergleichen. Somit wird die Eignung der Membrantheorie zur Berechnung von Kuppelschalen mit veränderlicher Dicke bewertet.

Membrantheorie

Schalen sind Flächentragwerke mit einer gekrümmten Ebene. Kuppeln, wie die des Pantheons, sind rotationssymmetrische Kugelschalen. Die Berechnung von Schalen kann aufwendig sein. Doch die Membrantheorie ermöglicht eine Vereinfachung des Schalensystems. Hierfür werden Annahmen getroffen. Die wichtigsten sind dabei:

- „dünne“ Schale im Vergleich zu ihrem Radius
- vernachlässigbare Verschiebungen
- Auflagerkräfte wirken tangential zur Schale
- Randverschieblichkeit wird nicht eingeschränkt
- Gleichmäßige Belastung der Schale
- Querkräfte, Momente, Schub und Verwindungen sind vernachlässigbar
- Schnittkräfte sind über die Dicke konstant

Die Berechnung mit der Membrantheorie bietet eine Handrechenmethode zur Berechnung von Schalen. Da die gesamten Annahmen in der Realität nicht vollständig einzuhalten sind, sind die Lösungen der Membrantheorie lediglich Annäherungen. Zur Ausführung der Berechnungen wurde dabei die CAS-Software Maple verwendet. Die Vergleichsberechnung mit der FEM wurde in der statisch-mechanischen Analyse von Ansys durchgeführt.

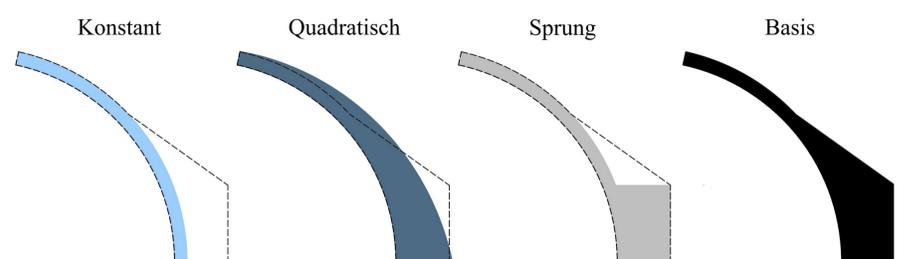
Es wurden die Schnittkräfte und die Verschiebungen berechnet. Die Schnittkräfte werden als Meridiankraft und als Ringkraft bezeichnet. Diese verlaufen entlang der Schalenmittelfläche. Die Verschiebungen werden in Meridian- und Normalenrichtung berechnet. Alle Ergebnisse sind in Abhängigkeit des Meridianwinkels φ und können daher als Graphen angezeigt werden.

Betreuung:

Maximilian Schilling, M. Sc.

Modellierung

Um die geometrischen Merkmale der Kuppel bewerten zu können, wurden vier verschiedene Modelle erstellt. Außerdem können bessere Aussagen über die Eignung der Membrantheorie getroffen werden. Das Modell „Basis“ stellt hierbei eine vereinfachte Form des echten Querschnitts des Pantheons dar. Das Modell „Konstant“ bietet einen Idealfall zur Berechnung mit der Membrantheorie, da hier die meisten Voraussetzungen bereits eingehalten sind. Die anderen Modelle weisen keine „dünne“ Schalen im unteren Bereich auf und weisen gegebenenfalls durch den sprunghaften Verlauf der Schalendicke eine un stetige Belastung auf.



Ergebnisse

Es wurden die Schalen bei Belastungen durch Eigengewicht berechnet und diese mit den Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode kontrolliert. Es wurde ersichtlich, dass die Membrantheorie im Fall von Modell „Konstant“ gleichwertige Ergebnisse liefert. Hier bietet die Membrantheorie eine gute Alternative zu Finite-Elemente-Methode.

Im Fall der Modelle mit veränderlicher Dicke sind die Verschiebungen deutlich höher als in der FEM. Bei den Verschiebungen kam es außerdem zu rechnerischen Schwierigkeiten. Daher ist die Berechnung von Verschiebungen in diesen Fällen nicht zu empfehlen. Im Modell „Quadratisch“ und „Basis“ sind sich die Verläufe der Schnittkräfte mit den Verläufen der FEM sehr ähnlich und bieten ebenso eine Alternative. Jedoch ist zu beachten, dass die Schnittkräfte in den FEM-Ergebnissen nicht über die Dicke konstant sind. Das ist besonders deutlich an den dickeren Stellen der Schale zu sehen. Somit kommt man auf den Schluss, dass Pantheon durch ihre hohe Schalenstärke kein gutes Beispiel zur Berechnung mit der Membrantheorie ist.

Literatur

Pflüger, Alf: Elementare Schalenstatik. Springer Verlag, 1981

Hirschfeld, Kurt: Rotationsschalen, 1972

Grasshoff u. a.: The Bern Digital Pantheon Project, 2009