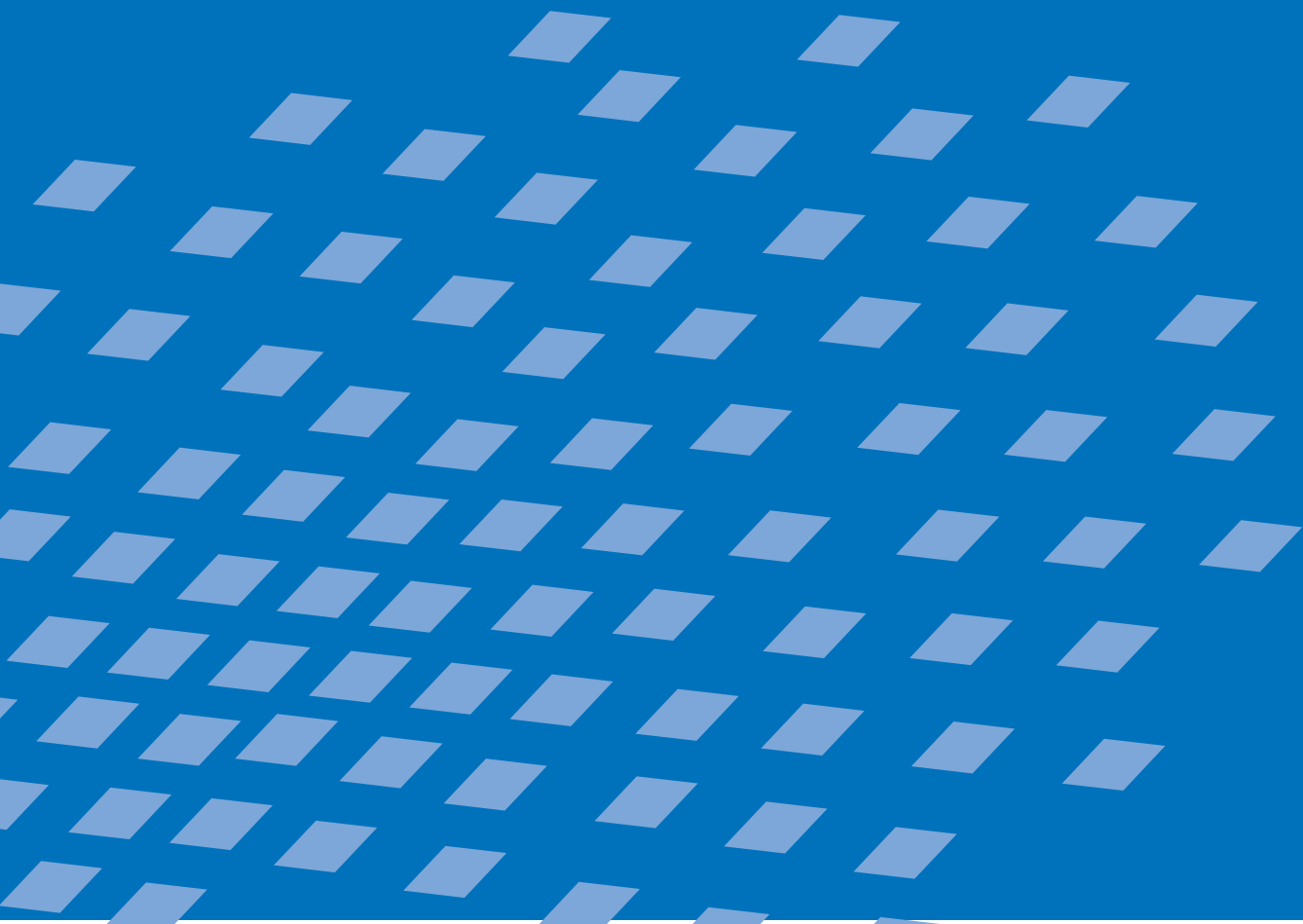




Universität Stuttgart  
Institut für Baustatik  
Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

# Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung

Manfred Bischoff



**Theorie und Numerik einer  
dreidimensionalen Schalenformulierung**

von

**Manfred Bischoff**

Bericht Nr. 30 (1999)  
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1999

---

Berichte können über das Institut für Baustatik, Universität Stuttgart,  
Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart, bezogen werden.

# **Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Manfred Bischoff**

aus Freudenstadt

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Mische  
Mitberichter: em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein  
Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juli 1999

Institut für Baustatik, Universität Stuttgart  
Stuttgart 1999

## Zusammenfassung

Das 7-Parameter-Schalenmodell in der Form, wie es von Büchter und Ramm (1992) vorgestellt wurde, ist eine Erweiterung konventioneller schubweicher Theorien mit fünf Freiheitsgraden. Die Anwendung dieses Modells ist insbesondere dann sinnvoll, wenn vollständig dreidimensionale Stoffgesetze verwendet werden sollen, womit auch Probleme mit großen Deformationen und großen Verzerrungen berechnet werden können. Aufgrund der gemischten Formulierung kann der siebte Freiheitsgrad auf Elementebene eliminiert werden. Dadurch ist der numerische Aufwand nicht viel größer als bei „normalen“ Schalenelementen. Es kann also auch effizient zur Berechnung von Schalen eingesetzt werden, für die eine konventionelle Schalentheorie ausreichend ist.

Büchter und Ramm (1992) beschreiben das 7-Parameter-Schalenmodell im Zusammenhang mit einer Finite-Elemente- (FE-)Formulierung. Der siebte Parameter wird dabei auf Ebene der Elemente mit einer gemischten Methode eingeführt. In dieser Arbeit wird das 7-Parameter-Modell unabhängig von der FE-Formulierung hergeleitet. Es kann in dieser Form als Semidiskretisierung des Schalenkontinuums in Dickenrichtung interpretiert werden. Der wichtigste Unterschied zu den meisten konventionellen Schalentheorien besteht darin, daß diese Diskretisierung auf der Basis eines Mehrfeldfunktionals beruht. Auf diese Weise kann ein System von Differentialgleichungen angegeben werden, das das 7-Parameter-Modell als zweidimensionale, kontinuierliche Theorie mit sieben kinematischen Freiheitsgraden pro materiellem Punkt der Schalenmittelfläche beschreibt.

Es wird angestrebt, eine physikalische Interpretation der kinematischen und statischen Variablen zu geben, die beim 7-Parameter-Modell auftauchen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf solchen Größen, die bei konventionellen 5-Parameter-Formulierungen nicht auftreten. Die Untersuchungen geben einen Einblick in das mechanische Verhalten des Modells. Für den linearen Anteil der Querschubverzerrungen wird ein neuer Schubkorrekturfaktor vorgeschlagen, der bei membrandominierten Verformungen den Fehler bezüglich der dreidimensionalen Lösung deutlich vermindern kann. Es wird gezeigt, daß das 7-Parameter-Modell in bezug auf die Anzahl der kinematischen und statischen Variablen optimal ist. Es sind genau diejenigen Anteile enthalten, die für eine vollständig dreidimensionale Materialbeschreibung notwendig sind.

Schließlich wird ein Konzept zur Formulierung effizienter finiter Elemente für das 7-Parameter-Schalenmodell vorgestellt. Dabei werden aus der Literatur bekannte Methoden mit eigenen Entwicklungen kombiniert. Eine Besonderheit besteht darin, daß eine einheitliche Formulierung für drei- und viereckige Elemente mit Ansätzen beliebigen Polynomgrades angegeben werden kann. Außerdem wird eine Verbesserung bei der Behandlung von Schalen mit Knicken vorgeschlagen. Das Konzept wird im Rahmen dieser Arbeit für lineare und quadratische Drei- und Viereckelemente verwirklicht. In numerischen Berechnungen linearer sowie materiell und geometrisch nichtlinearer Probleme werden die Eigenschaften der vorgestellten Elemente untersucht.

## Abstract

The 7-parameter shell model as proposed by Büchter and Ramm (1992) is an extension of conventional shear deformation theories with five degrees of freedom. Application of this model is especially sensible if complete three-dimensional constitutive laws ought to be applied allowing also to solve problems involving large deformations and large strains. Based on a mixed formulation the seventh degree of freedom can be eliminated on the element level. Thus, the numerical effort is only slightly larger compared to ‘usual’ shell elements. The model can consequently also be utilized for analyses of such shell structures, where a conventional shell formulation would be sufficient.

Büchter and Ramm (1992) describe the 7-parameter shell model along with a finite element formulation. Here, the seventh degree of freedom is introduced on the element level by means of a hybrid-mixed formulation. In the present work the 7-parameter model is derived independent from a finite element formulation. In this context it can be interpreted as semi-discretization of the shell continuum in thickness direction. The decisive difference to most of the conventional shell theories is that this discretization is based on a multifield variational formulation. By this procedure a system of partial differential equations can be obtained, describing the 7-parameter model as a two-dimensional, continuous theory with seven kinematical degrees of freedom per material point of the reference surface.

It is also intended to give a physical interpretation of the kinematic and static variables appearing in the model. Here, the main emphasis is put on those quantities, which do not show up in a conventional 5-parameter formulation. The investigations provide some insight into the mechanical behavior of the model. For the linear part of the transverse shear strains a new shear correction factor is proposed, which can reduce the error with respect to the three-dimensional solution in membrane dominated situations. It is shown that the 7-parameter model is ‘optimal’ concerning the number of kinematic and static variables involved. This means that exactly those components are involved which are necessary for a complete three-dimensional material description.

Finally, a concept for the formulation of efficient finite elements for the 7-parameter model is presented. Here, established methods from the literature are combined with own developments. A special feature of the proposed concept is that a unified formulation for triangular and rectangular elements of arbitrary polynomial order is obtained. In addition, an improvement in the treatment of shells with kinks is proposed. In the course of the present study the concept is realized for linear and quadratic triangular and rectangular elements. The features of the proposed elements are investigated in numerical experiments, including both linear and geometrically and materially non-linear problems.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in den Jahren 1993 bis 1999.

Meinen herzlichsten Dank spreche ich dem Leiter des Instituts und Hauptberichter dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, aus. Seine wissenschaftliche Qualität, sein motivierender Führungsstil und seine menschliche Größe haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Die Zusammenarbeit mit ihm, in einem kreativen und fachlich vielfältigen Umfeld, hat meine wissenschaftliche Ausrichtung wesentlich geprägt. Das ausgeprägte persönliche Vertrauensverhältnis habe ich stets als ideale Basis für eine erfolgreiche Arbeit empfunden.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Miede und Herrn em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein danke ich herzlich für die Übernahme des Mitberichts. Ihr aufrichtiges Interesse an meiner Arbeit und die intensiven Diskussionen haben mich sehr gefreut und haben einen großen Beitrag zur schriftlichen Ausarbeitung geleistet.

Ich danke allen Kommilitonen und Kollegen, die mich während meiner Zeit an der Universität Stuttgart begleitet haben. Die vielen fachlichen Diskussionen und menschlichen Kontakte waren und sind für mich eine einmalige und bereichernde Erfahrung. Insbesondere Kai-Uwe Bletzinger, Christopherus Braun, Markus Braun, Christof Hauber, Horst Menrath und Wolfgang A. Wall hatten einen starken Einfluß auf meine fachliche und persönliche Entwicklung. Ihnen sei an dieser Stelle für die mir entgegengebrachte, aufrichtige Freundschaft herzlich Dank gesagt.

Meinen lieben Eltern, Gisela und Helmut Bischoff, sowie meinem Bruder Ulrich danke ich für ihre andauernde, bedingungslose Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir immer gewährt haben.

Carina Seibold und Christopherus Braun danke ich für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts und die hilfreichen Verbesserungsvorschläge.

Schließlich danke ich der deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung der Arbeit im Rahmen verschiedener Einzelprojekte, die mir eine optimale Freiheit bei der Durchführung meiner Forschungsarbeit gewährte.





# Inhalt

<b>Bezeichnungen</b> .....	vii
<b>1 Einführung</b> .....	1
1.1 Motivation und Stand der Technik .....	1
1.2 Ziele dieser Arbeit .....	7
<b>2 Kontinuumsmechanische Grundlagen</b> .....	9
2.1 Differentialgeometrie .....	9
2.2 Kinematik .....	10
2.3 Materialgesetze .....	11
2.4 Gleichgewichtsbedingungen .....	12
2.5 Energieprinzipien .....	13
<b>3 Platten- und Schalenmodelle höherer Ordnung</b> .....	22
3.1 Überblick .....	22
3.2 Semidiskretisierung des Schalenkontinuums in Dickenrichtung .....	23
3.3 Linearer Verschiebungsansatz — Poisson–Dicken–Locking .....	26
3.4 Das (1,1,2)–Plattenmodell .....	29
3.5 Zusammenfassung .....	31
<b>4 7–Parameter–Schalenformulierung</b> .....	33
4.1 Grundgedanke .....	33
4.2 Kinematische Annahmen des 7–Parameter–Modells .....	33
4.3 Kinematische Variablen .....	36
4.4 Statische Variablen .....	38
4.5 Vorabintegration des Stoffgesetzes .....	39
4.6 Starke Form der Bestimmungsgleichungen .....	41
4.7 Alternative Formulierungen .....	44
4.8 Zusammenfassung .....	45
<b>5 Die Bedeutung der statischen und kinematischen Variablen</b> .....	47
5.1 Modellproblem: zweidimensionaler Balken mit Dickenänderung .....	47
5.2 Kinematische und statische Variablen der 7–Parameter–Formulierung .....	57
5.3 Bedeutung der kinematischen Größen .....	59
5.4 Bedeutung der statischen Größen .....	64
5.5 Bedeutung des Stoffgesetzes .....	67
5.6 Zusammenfassung .....	72

<b>6</b>	<b>Diskretisierung mit finiten Elementen</b> .....	74
6.1	Degenerationskonzept .....	74
6.2	Diskretisierung .....	76
6.3	Linearisierung .....	78
6.4	Künstliche Versteifungseffekte, Locking .....	81
6.5	Zusammenfassung .....	97
<b>7</b>	<b>Effiziente finite Elemente für das 7-Parameter-Modell</b> .....	99
7.1	Überblick .....	99
7.2	Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS) .....	101
7.3	Die Discrete-Shear-Gap-Methode (DSG) .....	106
7.4	Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS) .....	114
7.5	Stabilisierungsverfahren .....	120
7.6	Zusammenfassung .....	124
<b>8</b>	<b>Diskussion von Vor- und Nachteilen der 7-Parameter-Formulierung</b> .....	125
8.1	Verwendung vollständig dreidimensionaler Stoffgesetze .....	125
8.2	Große Verzerrungen .....	125
8.3	Lasteinleitung und kinematische Randbedingungen .....	126
8.4	Schalen mit Knicken .....	126
8.5	Dreidimensionale Effekte im Membrananteil .....	131
8.6	Vergleich mit 3D-Elementen .....	133
8.7	Zusammenfassung .....	135
<b>9</b>	<b>Numerische Experimente</b> .....	137
9.1	Patchtest .....	137
9.2	Verzerrungsempfindlichkeit .....	139
9.3	Konvergenzraten bei linearen Problemen .....	143
9.4	Geometrisch und materiell nichtlineare Probleme .....	150
<b>10</b>	<b>Schlußbetrachtungen und Ausblick</b> .....	158
	<b>Literatur</b> .....	160
	<b>Anhang</b> .....	170
A	Tensorrechnung .....	170
B	Mechanik .....	172
C	Finite Elemente .....	173
D	Energiemethoden und Variationsrechnung .....	181

## Bezeichnungen

In der vorliegenden Arbeit werden nach Möglichkeit deutsche Bezeichnungen verwendet, auch in solchen Fällen, in denen englische Begriffe unter Umständen geläufiger sind (zum Beispiel „Zwangsbedingungsfaktor“ anstatt „constraint count“). Englische Bezeichnungen, die im Rahmen einer Fachsprache als eingedeutscht betrachtet werden können, werden jedoch übernommen (zum Beispiel „Locking“ anstatt „Blockieren“).

Wo nicht ausdrücklich abweichend vereinbart, gilt das Folgende: bei Indexschreibweise nehmen kleine, lateinische Indizes die Werte 1 bis 3 an, kleine griechische Indizes die Werte 1 und 2. Bei der Formulierung der finiten Elemente laufen große, lateinische Indizes von 1 bis  $n$ , wenn  $n$  die Anzahl der Knoten pro Element ist. Grundsätzlich gilt die Einsteinsche Summationskonvention.

In absoluter Schreibweise bezeichnen kleine, fettgedruckte Buchstaben Vektoren und große, fettgedruckte Buchstaben Tensoren zweiter und höherer Stufe. Matrizen werden ebenfalls mit fetten Großbuchstaben bezeichnet, eine Verwechslung mit Tensoren sollte in dem jeweiligen Kontext ausgeschlossen sein. Skalare sind in Standardschrift gesetzt. Für die Notation bezüglich Tensorgleichungen, insbesondere die Definition der verjüngenden und dyadischen Produkte, wird auf Teil A des Anhangs verwiesen.

Die Variablen bedeuten im Einzelnen:

$a$	Metriktensor der Schalenmittelfläche
$a_i, a^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche
$a_3 = g_3$	Direktor
$A$	1. allgemein: zweidimensionales Gebiet, meist Rand von $V$ 2. nur Kapitel 5: Querschnittsfläche beim Balken
$dA$	differentielles Flächenelement
$A^e$	Fläche eines finiten Schalenelements
$A_u$	der Teil von $A$ (Rand von $V$ ) mit vorgegebenen Verschiebungen (kinematische Randbedingungen)
$A_S$	der Teil von $A$ (Rand von $V$ ) mit vorgegebenen Spannungen (Lasten)
$\partial A_u^e$	der Teil des Randes von $A^e$ mit vorgegebenen Verschiebungen
$\partial A_S^e$	der Teil des Randes von $A^e$ mit vorgegebenen Spannungen
$b$	Volumenlasten (im Sinne einer Beschleunigung)
$B$	diskretisierter Differentialoperator („B-Operator“)
$c$	skalare Konstante (unterschiedliche Bedeutung)
$C^n$	Raum der $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen
$C$	Materialtensor
$d$	Vektor der Knotenverschiebungen $v_h$ und Differenzverschiebungen $w_h$
$D$	Materialtensor der Schalentheorie (= $C$ über die Dicke integriert)
$\tilde{D}$	Verzerrungsmatrix (EAS-Methode)

$E$	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}$	Green–Lagrangescher Verzerrungstensor
$\mathbf{E}^u$	verschiebungsabhängiger Green–Lagrangescher Verzerrungstensor („kompatible“ Verzerrungen beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu)
$\tilde{\mathbf{E}}$	Tensor der zusätzlichen Verzerrungen beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$f$	skalare Konstante (unterschiedliche Verwendung)
$\mathbf{F}$	materieller Deformationsgradient
$\mathbf{F}_C$	in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\mathbf{F}$
$\mathbf{F}_L$	in $\theta^3$ linearer Anteil von $\mathbf{F}$
$G$	Schubmodul
$g_{ij}, g^{ij}, g_i^j$	ko–, kontra– und gemischtvariante Komponenten des Metrikensors $\mathbf{g}$
$\mathbf{g}$	Metrikensor (Einheitstensor)
$\mathbf{g}_C$	in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\mathbf{g}$
$\mathbf{g}_L$	in $\theta^3$ linearer Anteil von $\mathbf{g}$
$\bar{\mathbf{g}}_i, \bar{\mathbf{g}}^i$	ko– und kontravariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$	Direktor
$h$	Schalendicke
$\mathbf{H}$	materieller Verschiebungsgradient
$I$	Trägheitsmoment beim Balken
$J$	Jacobi–Determinante
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix (Verschiebungsmethode)
$\tilde{\mathbf{K}}$	Steifigkeitsmatrix (EAS–Methode)
$\ell$	Länge
$\mathbf{L}$	Kopplungsmatrix (EAS–Methode)
$\mathbf{m}$	statische Variablen, in $\theta^3$ linearer Anteil von $\mathbf{S}$ , energetisch konjugiert zu $\boldsymbol{\beta}$
$m^i$	(Momenten–) Lastkomponente in $\theta^i$ –Richtung (energetisch konjugiert zu $w_i$ )
$m^{ij}$	kontravariante Komponenten von $\mathbf{m}$ , energetisch konjugiert zu $\alpha_{ij}$
$\mathbf{n}$	statische Variablen, in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\mathbf{S}$ , energetisch konjugiert zu $\mathbf{a}$
$\hat{\mathbf{n}}$	Normalenvektor
$n^i$	Lastkomponente in $\theta^i$ –Richtung (energetisch konjugiert zu $v_i$ )
$n^{ij}$	kontravariante Komponenten von $\mathbf{n}$ , energetisch konjugiert zu $\beta_{ij}$
$P$	Kraft („Einzellast“)
$\mathbf{P}$	Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor erster Art

$\mathbf{r}$	Ortsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche
$\mathbf{R}$	innere Kräfte
$\tilde{\mathbf{R}}$	EAS–Anteil der inneren Kräfte
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{s}$	statische Variablen, in $\theta^3$ quadratischer Anteil von $\mathbf{S}$ , energetisch konjugiert zu $\boldsymbol{\gamma}$
$\mathbf{S}$	Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor zweiter Art
$\mathbf{S}^u$	zu $\mathbf{E}^u$ energetisch konjugierte Spannungen beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\tilde{\mathbf{S}}$	zu $\tilde{\mathbf{E}}$ energetisch konjugierte Spannungen beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{t}^S$	Vektor der von $\mathbf{S}$ abhängigen Spannungen
$\mathbf{t}^u$	Vektor der von $\mathbf{S}^u$ abhängigen Spannungen
$\hat{\mathbf{t}}$	Vektor der vorgegebenen Spannungen
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor eines Punktes des Schalenkörpers
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgegebene Verschiebungen (kinematische Randbedingungen)
$\mathcal{U}$	Funktionsraum
$v_{\gamma\xi}^I$	Schubklaffung in $\xi$ –Richtung am Knoten $I$ (DSG–Methode)
$v_{\gamma\eta}^I$	Schubklaffung in $\eta$ –Richtung am Knoten $I$ (DSG–Methode)
$\mathbf{v}$	Verschiebung eines Punktes der Schalenmittelfläche
$V$	dreidimensionales, vom Schalenkörper in der Referenzkonfiguration eingenommenes Gebiet
$dV$	differentielles Volumenelement
$\mathcal{V}$	Funktionsraum
$\mathcal{V}_A$	Raum der für $\mathbf{A}_h$ zulässigen Funktionen
$\mathbf{w}$	Differenzvektor (Differenzverschiebung eines Punktes der Schalenoberseite zu deren Mittelfläche)
$W^{int}$	Verzerrungsenergiedichtefunktion (in $V$ )
$W_{2D}^{int}$	Verzerrungsenergiedichtefunktion (in $A$ )
$x^i$	kartesische (orthonormierte) Koordinaten
$\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$	Ortsvektor eines Punktes der Referenz– bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{Z}$	Schalenshifter
$\alpha$	Schubkorrekturfaktor für konstanten Anteil $\alpha_{\alpha 3}$ der Querschubverzerrungen
$\mathbf{a}$	kinematische Variablen, in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\mathbf{E}$ , energetisch konjugiert zu $\mathbf{n}$

$\alpha^u$	in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\mathbf{E}^u$ , energetisch konjugiert zu $\mathbf{n}^u$
$\tilde{\alpha}$	in $\theta^3$ konstanter Anteil von $\tilde{\mathbf{E}}$ , energetisch konjugiert zu $\tilde{\mathbf{n}}$
$\beta$	Schubkorrekturfaktor für linearen Anteil $\beta_{\alpha 3}$ der Querschubverzerrungen
$\beta_x$	Rotation um die $x$ -Achse
$\beta_y$	Rotation um die $y$ -Achse
$\boldsymbol{\beta}$	kinematische Variablen, in $\theta^3$ linearer Anteil von $\mathbf{E}$ , energetisch konjugiert zu $\mathbf{m}$
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol
$\epsilon$	linearisierte, eindimensionale Verzerrung
$\boldsymbol{\epsilon}$	linearisierter Verzerrungstensor
$\phi$	Rotation beim Balken
$\Phi$	$C^0$ -kontinuierliche Ansatzfunktionen bei Mehrschichtmodellen
$\gamma$	Querschubwinkel beim Balken
$\boldsymbol{\gamma}$	kinematische Variablen, in $\theta^3$ quadratischer Anteil von $\mathbf{E}$ , energetisch konjugiert zu $\mathbf{s}$
$\eta$	zweite Koordinatenrichtung im Elementkoordinatensystem (entspricht $\theta^2$ )
$\kappa$	Krümmung beim Balken
$\lambda, \mu$	Lamé-Konstante
$\lambda_s$	Stabilisierungsparameter bei stabilisierten Plattenelementen
$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$	Lagrange-Multiplikatoren (mit $\mathbf{S}$ und $\mathbf{t}^S$ physikalisch zu identifizieren)
$\hat{\mu}$	Betrag des Schalenshifters $\mathbf{Z}$
$\nu$	Querdehnzahl (Poisson-Zahl)
$\Pi$	potentielle Energie
$\tilde{\Pi}$	Komplementärenergie
$\Pi_{HW}$	potentielle Energie beim Prinzip von Hu–Washizu
$\Pi_{HR}$	potentielle Energie beim Prinzip von Hellinger–Reissner
$\Pi_{HW}^{\text{mod}}$	potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\Pi_{HW}^{\text{mod,int}}$	innere potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\Pi_{HW}^{\text{mod,ext}}$	äußere potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\Pi_h$	diskretisierte potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu–Washizu
$\rho$	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor (oder linearisierter Spannungstensor)
$\theta^i$	krummlinige, konvektive Koordinaten
$d\theta^i$	inkrementelles, krummliniges Linienelement

$\xi$  erste Koordinatenrichtung im Elementkoordinatensystem (entspricht  $\theta^1$ )

Operatoren und sonstige Vereinbarungen:

$\operatorname{div} \mathbf{A}$  Divergenz von  $\mathbf{A}$  bezogen auf die Referenzkonfiguration

$\operatorname{grad} \mathbf{a}$  Gradient von  $\mathbf{a}$  bezogen auf die Referenzkonfiguration

$\frac{\partial a}{\partial b} = a_{,b}$  partielle Ableitung von  $a$  nach  $b$

$\delta a$  Variation von  $a$

$\Delta a$  Inkrement bezüglich  $a$

$\operatorname{LIN} a$  Linearisierung von  $a$

$|\mathbf{A}|$  Determinante von  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^T$  Transponierte von  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{-1}$  Inverse von  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}_h$  Diskretisierung von  $\mathbf{A}$

$\bar{\mathbf{A}}$   $\mathbf{A}$  in der Momentankonfiguration

$a_i$  auf einen kontravarianten Basisvektor bezogene Komponenten von  $\mathbf{a}$

$A_{ij}$  auf kontravariante Basisvektoren bezogene Komponenten von  $\mathbf{A}$

$\operatorname{span} \{a, b\}$  von  $a$  und  $b$  aufgespannter Funktionenraum





# 1 Einführung

## 1.1 Motivation und Stand der Technik

Schalen sind flächenhafte Strukturen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß eine ihrer räumlichen Ausdehnungen wesentlich geringer ist, als die beiden anderen. Die Geometrie einer Schale kann durch die Definition ihrer Mittelfläche und der Dicke eindeutig beschrieben werden. Schalen spielen in vielen Bereichen von Natur und Technik eine bedeutende Rolle. Im Bauingenieurwesen kommen sie beispielsweise in Form von Behältern und Rohren oder als Dachkonstruktionen von Hallen vor. Platten und Scheiben, zwei der wesentlichen Elemente der meisten Baukonstruktionen, stellen Sonderfälle von Schalen dar. Aus konstruktiver Sicht am spektakulärsten sind vielleicht die großen, gemauerten Schalen der Renaissance, wie die Domkuppeln in Florenz oder Rom. In der Sprache des Maschinenbaus und der Luft- und Raumfahrttechnik kommt das Wort „Schale“ zwar nicht so häufig vor wie bei den Bauingenieuren. Man kann jedoch davon ausgehen, daß alles, was dort als „Blech“ bezeichnet wird, aus statischer Sicht eine Schale ist. Von der Autokarosserie über die Tragfläche eines Flugzeugs bis hin zur Außenhaut einer Rakete sind Schalentragwerke auch in diesen Disziplinen das Mittel der Wahl, wenn das Verhältnis von Steifigkeit und Gewicht möglichst groß sein soll.

Im Idealfall tragen Schalen ihre Lasten ohne Biegung nur über Membrankräfte ab und nutzen damit das Material optimal aus. Sie eignen sich vor allem zu Konstruktionen, die einen Eindruck von Leichtigkeit und Eleganz vermitteln sollen (Hallen, Stadiondächer) oder aus praktischen Gründen leicht sein müssen (Flugzeuge, Raketen). Obwohl die Zeit der großen Kuppelbauten gewiß vorüber ist, wächst deshalb die Bedeutung von Schalen noch heute an.

Schlanke Schalen, die ein großes Verhältnis von ertragbarer Last zu Eigengewicht haben, sind auf der anderen Seite jedoch empfindlich gegen Imperfektionen, also leichte Abweichungen der Geometrie von der Soll-Form oder Unregelmäßigkeiten in der Belastung. Diese Mischung aus Leistungsfähigkeit auf der einen und Empfindlichkeit auf der anderen Seite, macht die Schale zur „Primadonna unter den Tragwerken“ (Ramm (1986)). Nicht zuletzt deshalb sind zuverlässige Berechnungsmethoden für Schalen besonders wichtig.

Versuche, das Tragverhalten von Schalen rechnerisch zu erfassen, wurden bereits vor mehr als fünfhundert Jahren gemacht. Dabei waren vor allem Überlegungen über den Kraftfluß und die daraus folgende, optimale Form der Wölbung von Mauerwerkskuppeln von Bedeutung. Haben die Römer aus religiösen und ästhetischen Gründen noch die Kreisform bei Bögen und Schalen bevorzugt, ging man am Ende des Mittelalters dazu über, die Stützlinie, die Umkehrform der Hängelinie, als geeigneter zu betrachten. Einen ausführlichen Überblick über die historische Entwicklung der Berechnung von Bögen und Schalen, die vor allem im Zusammenhang mit Mauerwerkskuppeln stattfand, gibt Edoardo Benvenuto im zweiten Band seiner Monographie über die Geschichte der Strukturmechanik (Benvenuto (1991)).

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts verlagerten sich die Überlegungen über das Deformations- und Tragverhalten von Schalen von anschaulichen, mechanischen Betrachtungen und Methoden der graphischen Statik hin zu eher mathematisch orientierten, analytischen Theorien.

Interessanterweise war für die ersten Versuche, eine *Biegetheorie* der Schalen aufzustellen, die Motivation nicht die, das Tragverhalten von Kuppeln zu berechnen, sondern es ging dabei um die Ermittlung der Eigenfrequenzen von Glocken, um deren optimale Form für den gewünschten

Klang analytisch bestimmen zu können. August E.H. Love (1888) schrieb in seinem berühmten Aufsatz: „*This paper is really an attempt to construct a theory of the vibrations of bells.*“

Obwohl diese Theorie noch heute als korrekt gilt, bestanden zu dieser Zeit noch etliche falsche Vorstellungen über das tatsächliche physikalische Verhalten von Schalen, die sich zwar nicht auf die mathematische Formulierung selbst, aber auf deren Interpretation und Lösung auswirkten. Im Zusammenhang mit Loves Veröffentlichung der heute nach ihm benannten Biegetheorie entbrannte eine Diskussion über die Bedeutung von Membran- und Biegedeformationen bei Schwingungen offener Kugelschalen. Während Love davon ausging, daß die wesentlichen Effekte in reinen Membranzuständen zu finden seien, war Lord Rayleigh vom genauen Gegenteil überzeugt. In einem Aufsatz über die Schwingungen von Saiten, Membranen, Platten und Schalen hatte Rayleigh (1877) auf die Möglichkeit reiner Biegeverformungen (ohne jeglichen Membrananteil) bei offenen Kugelschalen hingewiesen und jene als die maßgebenden identifiziert. Der Begriff der *dehnungslosen Verformungen* (*inextensional bending*) geht vermutlich auf diese Arbeit zurück.

Man weiß heute, daß im Grunde beide Unrecht hatten. Im Gegensatz zu Loves Hypothese sind die entscheidenden Schwingungsformen vor allem Biege- und nicht Membranschwingungen. Rayleigh lag jedoch auch nicht ganz richtig, weil reine dehnungslose Verformungen bei nicht abwickelbaren Schalen streng genommen nicht möglich sind. Rayleighs Resultate für die Eigenfrequenzen lagen jedoch deutlich näher an den in Versuchen gemessenen als diejenigen von Love. Tatsächlich sind nämlich bei Kugelschalen mit freien Rändern Biegeverformungen möglich, die nur von vernachlässigbar kleinen Membranverzerrungen begleitet werden. In einer Abhandlung von Calladine (1988), die aus Anlaß des hundertjährigen Jubiläums von Loves richtungsweisender Veröffentlichung erschienen ist, wird über diesen und etliche andere interessante Aspekte im Zusammenhang mit der Loveschen Schalentheorie berichtet.

Der wesentliche gedankliche Schritt bei Loves Schalentheorie war die Reduktion eines dreidimensionalen Körpers auf eine zweidimensionale Fläche auf der Basis bestimmter vereinfachender und mechanisch plausibler Annahmen. Diese Methode hatte bereits Kirchhoff (1850) bei der Herleitung der ersten korrekten Plattentheorie angewandt. Naghdi (1972) bezeichnet diese Vorgehensweise in seinem Überblicksartikel als „Herleitung aus der Kontinuumsmechanik“ („Derivation from continuum theory“). Deutliche Hinweise auf Zusammenhänge zwischen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie gibt Neuber (1949). Johnson und E. Reissner (1958) beschreiben eine Methode um Schalenmodelle aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik mit Hilfe der *asymptotischen Analyse* (siehe Kapitel 3 dieser Arbeit) herzuleiten. Der Aufsatz beschränkt sich allerdings auf die Behandlung symmetrischer Deformationen von Zylinderschalen.

Bei Koiter (1960) werden die Schalenannahmen nicht für die Kinematik, sondern für die Verzerrungsenergie des Schalenkörpers getroffen. Die „willkürlichen“ Einschränkungen bezüglich der Deformationen des Schalenkontinuums entfallen und werden durch die Annahme eines näherungsweise ebenen Spannungszustandes in der Verzerrungsenergiefunktion ersetzt. Die Gleichgewichtsbedingungen erhält Koiter aus dieser Energieformulierung mit Hilfe von Variationsmethoden. In der erwähnten Arbeit wird auch eine Ungereimtheit in Loves Theorie in bezug auf die korrekte Abbildung von Starrkörperrotationen beseitigt. Koiters Schalentheorie kann vielleicht als erste konsistente Herleitung von Schalengleichungen für dünne Schalen aus der Kontinuumsmechanik bezeichnet werden; in der mathematischen Literatur wird im Zusammenhang mit Schalenmodellen für dünne Schalen meist vom „Koiter-Modell“ gesprochen. Koiter gibt außerdem einen Ausblick in die geometrisch nichtlineare Theorie.

Naghdi (1972) (siehe auch Green und Naghdi (1970)) liefert schließlich eine umfassende Herleitung von Schalenmodellen beliebiger Ordnung aus den Gleichungen der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik auf der Grundlage der Thermodynamik. Ein wesentlicher Schritt dieser Herleitung ist die polynomiale Entwicklung der Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale, die bei Verwendung unendlich vieler Terme zu einem vollständig dreidimensionalen Modell führt (ein solches Modell bezeichnet man heute als *Multidirektormodell*). Anschließend können durch gezieltes Weglassen von Termen höherer Ordnung beliebig genaue Schalengleichungen erhalten werden. Naghdi verwendet diese Methode unter anderem zur Herleitung einer physikalisch und geometrisch nichtlinearen Theorie mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen. Schalentheorien mit „Reissner–Mindlin–Kinematik“ werden deshalb oft mit seinem Namen in Verbindung gebracht.

Krätzig (1971) beschreibt ebenfalls eine Herleitung einer physikalisch und geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen aus der Thermodynamik. Die Arbeit beruht im wesentlichen auf den vorher beschriebenen Ideen von Naghdi, es wird jedoch besonderer Wert auf eine allgemeine, nichtlineare Beschreibung des Stoffgesetzes und der kinematischen Gleichungen Wert gelegt. Eine schubweiche Schalentheorie mit Berücksichtigung der Dickenänderung wurde ebenfalls von Krätzig (1993) vorgestellt. Dabei steht der Gedanke im Vordergrund, daß die Berücksichtigung oder Vernachlässigung bestimmter Terme in den Schalengleichungen dazu führen soll, daß in allen Einzelbeziehungen die gleichen Unschärfen enthalten sind und damit eine „bestmögliche“ Theorie erhalten wird.

In der mathematisch orientierten Literatur werden Herleitungen aus der Kontinuumstheorie, meistens für Platten, vor allem mit Hilfe der Methode der asymptotischen Analyse durchgeführt. Die vermutlich erste Arbeit dieser Art stammt von Goodier (1938). Morgenstern (1959) gelingt mit dieser Technik die erste mathematische Rechtfertigung der Kirchhoffschen Theorie. Ciarlet und Destuynder (1979) leiten die Kirchhoffsche Plattentheorie mit Hilfe einer variationellen Methode auf der Basis des gemischten Funktionals nach Hellinger–Reissner (Anhang D) her, ohne a priori Annahmen für den Verlauf der Verschiebungen oder Kräfte zu machen. Asymptotische Analysen der Randschichtterme bei Plattenmodellen mit Berücksichtigung der Querschubverzerrungen findet man bei Arnold und Falk (1996); Dauge und Gruais (1996) beschreiben schließlich Modelle beliebiger Ordnung. Die asymptotische Analyse von Schalentheorien ist im Moment noch Gegenstand der Forschung, erste Ansätze findet man bei John (1965), der Fehlerschranken für eine nichtlineare Schalentheorie angibt, sowie Sanchez–Palencia (1990), der eine asymptotische Analyse für flache Schalen beschreibt. Einen guten Überblick über diese Entwicklungen findet man bei Antmann (1995).

Die Herleitung von Schalentheorien aus den dreidimensionalen Gleichungen ist mathematisch anspruchsvoll. Deshalb schlugen die Brüder E. und F. Cosserat (Cosserat und Cosserat (1909)) vor, gleich von einem zweidimensionalen Modell auszugehen und die Gleichgewichtsbedingungen mit Hilfe von Schnittgrößen (Kräften und Momenten) unabhängig von der dreidimensionalen Theorie zu postulieren. Die mathematische Beschreibung einer solchen *Cosserat–Fläche* beruht auf der Idee des gerichteten Kontinuums von Duhem (1893). Demnach wird eine Fläche im Raum nicht nur durch die Ortsvektoren zu jedem ihrer Punkte definiert, sondern besitzt auch ein davon unabhängiges Vektorfeld. Die Schalengleichungen werden dann direkt mit Hilfe der aus diesem Modell erhältlichen Kinematen, nämlich den Verschiebungen der Flächenpunkte und den Rotationen der Vektoren („*Direktoren*“, Ericksen und Truesdell (1958)), aufgestellt.

Diese „direkte Methode“ („direct approach“, Naghdi (1972)) entspricht im wesentlichen dem, was heute in der Literatur als *geometrisch exakte* Schalentheorie bezeichnet wird. Der Terminus „exakt“ soll dabei zum Ausdruck bringen, daß das zweidimensionale mechanische Modell bei seiner rechnerischen oder numerischen Umsetzung nicht durch vereinfachende Annahmen verändert wird, wie das bei der Herleitung aus einem ursprünglich dreidimensionalen Modell geschieht. Das bedeutet jedoch nicht, daß diese Modelle „genauer“ sind als solche, die aus der dreidimensionalen Theorie hergeleitet werden. Bei geometrisch exakten Schalentheorien wird ein Vergleich mit der dreidimensionalen Theorie erst gar nicht angestellt. Das Hauptproblem der direkten Vorgehensweise besteht also darin, die Schnittgrößen, Verzerrungen und Krümmungen (statische und kinematische Variable) mit Spannungen und Verzerrungen des dreidimensionalen Körpers zu identifizieren. Die Frage nach geeigneten Stoffgesetzen ist deshalb für solche Schalentheorien nicht einfach zu beantworten. Schalentheorien, die auf der Definition der Cosserat-Fläche beruhen, wurden unter anderem von Günther (1962), Reissner (1964), Green et al. (1965) für lineare sowie von Cohen und de Silva (1966), Simo und Fox (1989) für geometrisch nichtlineare Probleme vorgestellt.

Prinzipiell können beide Vorgehensweisen zum gleichen Ergebnis, d.h. zum gleichen Differentialgleichungssystem, führen. Die Unterschiede bestehen lediglich in der Art und Weise, in der die Näherungen bezüglich der dreidimensionalen Theorie in das Modell einfließen. Bei der Herleitung aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik werden dabei explizit Terme vernachlässigt, denen eine untergeordnete Bedeutung zugeschrieben wird. Bei der direkten Methode wird zunächst nichts vernachlässigt. Das künstliche, zweidimensionale Modell ist jedoch keiner physikalischen Erfahrung zugänglich. Die Fehler treten damit beim Stoffgesetz auf, das nur postuliert, aber nicht hergeleitet werden kann. Aus demselben Grund ist auch die Rückrechnung von Spannungen aus Schnittgrößen gewissermaßen willkürlich.

Heute werden Schalenmodelle oft ausschließlich für die Berechnung mit finiten Elementen entworfen. Schalentheorie und Schalenelement stellen dann eine kaum noch zu trennende Einheit dar. Ende der sechziger Jahre wurde eine Methode zur Herleitung von Schalenelementen entwickelt, die den wenig schmeichelhaften Namen *Degenerationskonzept* trägt (Ahmad et al. (1968)). Dabei wird zunächst das dreidimensionale Kontinuum diskretisiert und sodann die dreidimensionalen finiten Elemente durch Einführen relativer Freiheitsgrade zu Schalenelementen „degeneriert“ (siehe Abschnitt 6.1). Eigentlich handelt es sich also um *degenerierte Kontinuumselemente*. Das Degenerationskonzept wurde von Ramm (1976) auf geometrisch nichtlineare Probleme erweitert (siehe auch Hughes und Liu (1981), Ramm und Sättele (1981)).

Die Äquivalenz von Degenerationskonzept und Schalentheorie wurde später von Büchter (1992) (siehe auch Büchter und Ramm (1992b)) gezeigt. Danach liegt der einzige Unterschied bei der Diskretisierung, und zwar in der Art der Parametrisierung der Rotationen: Während bei „echten“ Schalenelementen die Rotationsfreiheitsgrade interpoliert werden, beziehen sich die Ansatzfunktionen beim Degenerationskonzept auf Differenzverschiebungen, die sich allerdings auch über Winkelveränderungen abbilden lassen.

Die drei verschiedenen Möglichkeiten, zu Schalenelementen zu gelangen, sind in Abb. 1.1 schematisch zusammengestellt. Dabei wird nochmals deutlich, daß die den Schalenmodellen zugrundeliegenden Vereinfachungen gegenüber der dreidimensionalen Theorie an verschiedenen Stellen eingebracht werden. Bei der direkten Methode wird ein mechanisches Modell zunächst ohne Bezug zur dreidimensionalen Theorie postuliert, während bei der Herleitung aus der Kontinuumsmechanik explizit Terme untergeordneter Bedeutung weggelassen werden. Das Degenerati-

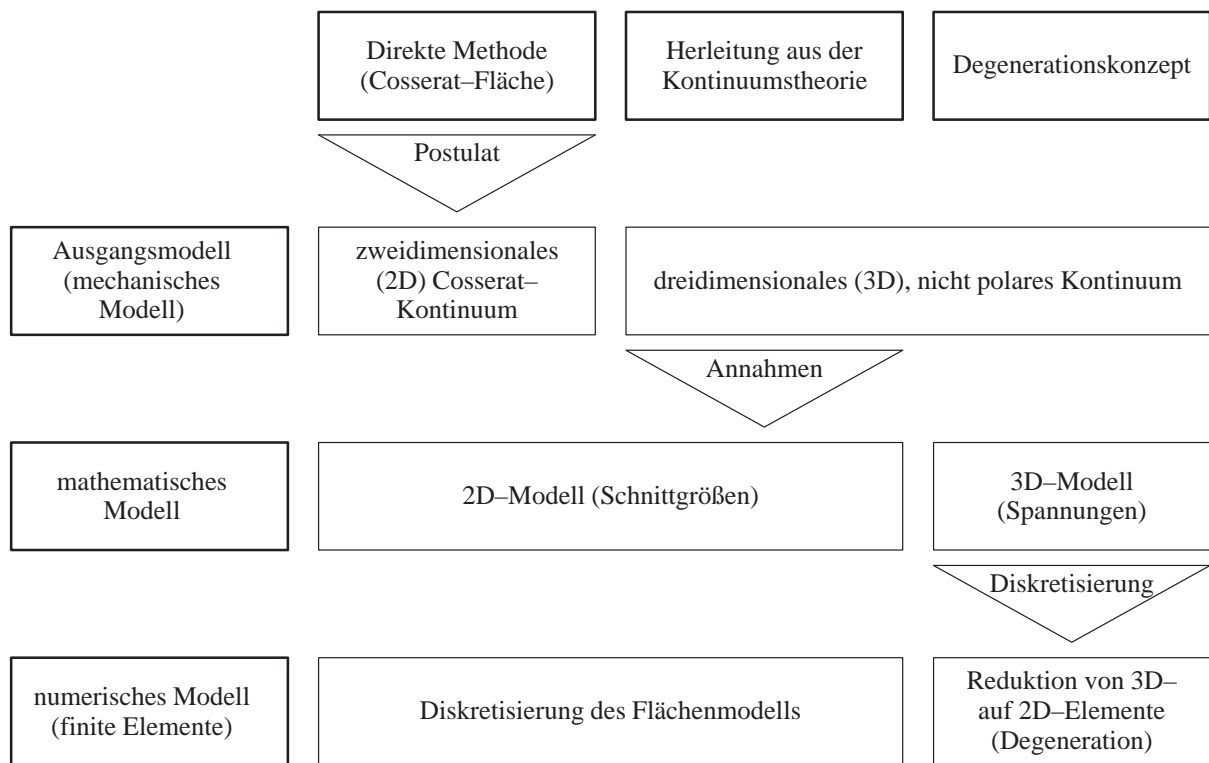


Abb. 1.1: Unterschiedliche Möglichkeiten zur Herleitung von Schalelementen

onskonzept führt Vereinfachungen durch die Diskretisierung in Dickenrichtung der Schale (*Semidiskretisierung* des Schalenkontinuums) ein.

Neben den oben beschriebenen Schalenmodellen für dünne bis mäßig dicke Schalen wurden in der Vergangenheit auch Theorien höherer Ordnung entwickelt. Zu ihnen zählt beispielsweise das von Naghdi (1972) beschriebene Modell. Obwohl es dort nur als Vehikel zur Herleitung einer konventionellen Schalenformulierung dient, können solche Modelle sinnvoll sein, wenn Rand-schichteffekte oder andere Effekte höherer Ordnung, zum Beispiel bei sehr dicken oder geschichteten Schalen, berücksichtigt werden sollen. In Kapitel 3 wird ein kurzer Überblick über einige Varianten von Schalenmodellen höherer Ordnung gegeben.

Finite Elemente für Schalen weisen gewöhnlich Versteifungsprobleme („Locking“) auf. Einige dieser Locking-Probleme hängen mit der Schlankheit und der Krümmung der Elemente zusammen, diese kommen also nur bei Schalen (nicht bei Platten und Scheiben) vor. Die Entwicklung effizienter Schalelemente nimmt deshalb eine Sonderstellung im Bereich der Elementtechnologie ein, da sie die Sonderfälle der Platten und Scheiben sowie etliche zusätzliche Aspekte in sich vereint. Obwohl in diesem Bereich bereits viele Fortschritte gemacht wurden, gibt es immer noch offene Fragen und ungelöste Probleme. Für einen Überblick über die bei Schalen auftretenden Locking-Phänomene wird an dieser Stelle auf Abschnitt 6.4 verwiesen.

Aufgrund der Vielzahl der Veröffentlichungen zum Thema „lockingfreie Schalelemente“ scheint es unmöglich, einen Überblick über die wesentlichen historischen Entwicklungen in diesem Bereich zu geben. In Abschnitt 7.1 wird lediglich eine Auswahl der wichtigsten Methoden, die in einem Zusammenhang mit den in dieser Arbeit verwendeten Verfahren stehen, kurz be-

sprochen. Bis heute kann nur für sehr wenige Formulierungen gesagt werden, daß sie sich wirklich durchgesetzt hätten.

Zur Vermeidung von Querschublocking ist die *Assumed–Natural–Strain–Methode (ANS)*, (Abschnitt 7.2) von Hughes und Tezduyar (1981), sowie Bathe und Dvorkin (1985) eine der attraktivsten Möglichkeiten, und sowohl in kommerziellen als auch in wissenschaftlichen Programmen wahrscheinlich auch die am weitesten verbreitete. Doch auch hier haben jüngste Arbeiten gezeigt, daß immer noch wesentliche Verbesserungen notwendig und möglich sind (Lyly et al. (1993), Abschnitt 7.5.2). In der vorliegenden Arbeit wird außerdem die *Discrete–Shear–Gap–Methode (DSG)* von Bletzinger et al. (1998) beschrieben, die im Fall viereckiger Elemente zu gleichwertigen Ergebnissen führt, jedoch etwas allgemeiner formuliert ist, als die ANS–Methode und dadurch auf drei– und viereckige Elemente beliebiger Polynomordnung anwendbar ist.

Der Membrananteil der Schale wird häufig mit Hilfe der *Enhanced–Assumed–Strain–Methode (EAS)* (Abschnitt 7.4) von Simo und Rifai (1990) modifiziert um Schublocking und volumetrisches Locking zu vermeiden. Außerdem wird dadurch der Effekt des Membranlocking verringert und in bestimmten Sonderfällen ganz vermieden. Auch bei dieser, vor allem bei zwei– und dreidimensionalen Kontinuumelementen, weit verbreiteten Methode bestehen noch Probleme, beispielsweise bei der Behandlung großer Deformationen (Abschnitt 7.5.3).

Die Entwicklung numerischer Methoden und leistungsfähiger Computer erschließt immer neue Anwendungsbereiche, die die Pioniere der Schalentheorien sicherlich nicht im Auge hatten. Neben dynamischen, materiell und geometrisch nichtlinearen Analysen, beispielsweise Crashsimulationen, können auch biomedizinischen Fragestellungen, wie das Verformungsverhalten von Arterien, behandelt werden. Die Berechtigung aktueller Forschung im Bereich der Schalentheorien und deren numerischer Umsetzung wird zuweilen mit dem Hinweis auf die Möglichkeit vollständig dreidimensionaler Analysen in Frage gestellt. Dem steht jedoch die überwältigende Vielfalt dünnwandiger Konstruktionen in Natur und Technik gegenüber, deren Berechnung mit vollständig dreidimensionalen Analysemethoden bei weitem weniger effizient ist als mit Schalenmodellen.

Seit Anfang der neunziger Jahre wird in der Literatur verstärkt die Idee *dreidimensionaler Schalenformulierungen* aufgegriffen. Sie streben eine Kombination zwischen der Effizienz von Schalenelementen und der Genauigkeit von Kontinuumelementen an (Kühhorn und Schoop (1992), Büchter und Ramm (1992a), Sansour (1995), Betsch et al. (1996), Parisch (1995), Miehe (1998) und andere). Die entscheidende Eigenschaft dieser Modelle ist, daß sie — im Gegensatz zu konventionellen Schalenformulierungen — den vollständig dreidimensionalen Spannungs– und Verzerrungszustand berücksichtigen. Das wird dadurch erreicht, daß die Dickenänderung der Schale als zusätzlicher Freiheitsgrad eingeführt wird. Die Deformation des Direktors (der Schalenormalen) wird dabei üblicherweise nicht durch einen Rotationstensor, sondern mit Hilfe eines Differenzvektors abgebildet, was die mathematische Formulierung deutlich vereinfacht.

Die Erweiterung in die dritte Dimension erschließt die Anwendung unveränderter, dreidimensionaler Stoffgesetze, die Behandlung von Problemen mit großen Verzerrungen und die Berechnung dicker Schalen. Trotzdem bleibt der klassische Anwendungsbereich der dünnen Schalen erhalten. Da geschickt formulierte, dreidimensionale Schalenmodelle vom numerischen Standpunkt aus gesehen nur wenig aufwendiger sind als konventionelle Schalenmodelle, scheinen die Vorteile der breiteren Anwendungsmöglichkeiten zu überwiegen. Die vorliegende Arbeit behandelt ein von Büchter und Ramm (1992a) vorgeschlagenes *7–Parameter–Schalenmodell* (siehe auch

Büchter et al. (1994), Bischoff und Ramm (1997)) und seine effiziente Umsetzung mit der Methode der finiten Elemente.

## 1.2 Ziele dieser Arbeit

In der vorliegenden Arbeit werden theoretische, physikalische und numerische Aspekte des 7-Parameter-Modells von Büchter und Ramm (1992a) untersucht. Die Hauptziele sind

- die mathematische und physikalische Analyse des 7-Parametermodells im Hinblick auf seine Gültigkeit als Schalenmodell,
- eine mechanische Interpretation der Bedeutung derjenigen Größen, die im Vergleich zu einem 5-Parameter-Modell zusätzlich auftreten sowie
- ein Konzept zur Formulierung effizienter finiter Elemente.

Bei der Herleitung der Schalenformulierung wird ein Weg beschritten, der die Ansicht unterstützt, daß der mit Hilfe eines Mehrfeldfunktionals ergänzte, siebte Parameter ein Bestandteil des Schalenmodells und nicht seiner Diskretisierung ist. Die Herleitung der Schalengleichungen aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie kann dabei als Semidiskretisierung in Dickenrichtung mit einer gemischten Methode interpretiert werden. Obwohl das Ziel dabei eine schwache Form zur Herleitung finiter Elemente ist, kann auch ein Differentialgleichungssystem angegeben werden, das prinzipiell analytischen Lösungsmethoden zugänglich ist. Das 7-Parameter-Modell könnte deshalb auch als *Schalentheorie* begriffen werden.

Ein zweiter Schwerpunkt der Arbeit ist die physikalische Interpretation des 7-Parameter-Schalenmodells. Es wird gezeigt, welche inneren Variablen und Randbedingungen im Vergleich zu konventionellen Schalentheorien hinzukommen und was deren Bedeutung ist. Inspiriert durch diese Überlegungen, wird ein neuer Schubkorrekturfaktor „höherer Ordnung“ vorgeschlagen, der die Abweichung zur vollständig dreidimensionalen Lösung verringert.

Schließlich wird ein Konzept zur effizienten Formulierung dieses Modells mit finiten Elementen vorgestellt. Mit Hilfe von bekannten Methoden und eigenen Entwicklungen werden sämtliche Locking-Effekte der Standard-Verschiebungselemente beseitigt und die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente verringert. Außerdem wird eine Verbesserung bei der Behandlung von Schalen mit Knicken vorgeschlagen.

In *Kapitel 2* werden zunächst die wesentlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik dargestellt, die zum Verständnis der Arbeit und zur Klärung der Nomenklatur benötigt werden. Variationsmethoden und Funktionale werden nur kurz behandelt. Ausführlichere Herleitungen der wichtigsten Prinzipien sind im Anhang gegeben. Detailliert dargestellt ist die Herleitung einer modifizierten Form des Prinzips von Hu-Washizu, das später als Grundlage für das 7-Parameter-Modell dient.

*Kapitel 3* behandelt prinzipielle Möglichkeiten zur Formulierung von Schalenmodellen höherer Ordnung. Es wird gezeigt, daß die Erweiterung konventioneller Schalenmodelle um nur einen Freiheitsgrad in Dickenrichtung (6-Parameter-Modell) im allgemeinen nicht ausreicht, um vollständig dreidimensionale Stoffgesetze anwenden zu können. Für den Sonderfall der Platten wird eine — dem 7-Parameter-Modell äquivalente — Formulierung besprochen, deren asymptotische Korrektheit mathematisch nachweisbar ist.

In *Kapitel 4* wird eine 7-Parameter-Schalentheorie auf der Basis eines Mehrfeldfunktionals hergeleitet, die mit dem in Büchter und Ramm (1992a) beschriebenen Konzept identisch ist. Es wird hier jedoch besonderer Wert darauf gelegt, die Entwicklung der Theorie von der Formulierung der finiten Elemente zu trennen. Das betrifft insbesondere die Einführung des siebten Freiheitsgrades mit Hilfe einer modifizierten Form des Funktionals von Hu-Washizu.

*Kapitel 5* beschäftigt sich mit der Diskussion der physikalischen Bedeutung kinematischer und statischer Variabler. Dabei zeigt sich, daß der Begriff der Schnittgrößen für dreidimensionale Schalenmodelle nicht mehr in jedem Fall berechtigt ist. In diesem Kapitel werden außerdem die Bedeutung von kinematischen und statischen Randbedingungen diskutiert und ein Schubkorrekturfaktor „höherer Ordnung“ eingeführt. Schließlich werden einige Aussagen zu den Voraussetzungen gemacht, die ein Schalenmodell erfüllen muß, damit es im Rahmen einer gewissen Approximationsgüte für vollständig dreidimensionale Stoffgesetze geeignet ist.

In *Kapitel 6* wird die numerische Umsetzung des Schalenmodells mit finiten Elementen beschrieben, die sich zunächst jedoch auf Standard-Verschiebungselemente beschränkt. Die Herleitung folgt im wesentlichen dem Degenerationskonzept. Die bekannten Versteifungs- (Locking-) Probleme dieser Modelle werden sodann aus unterschiedlichen — anschaulichen und analytischen — Perspektiven beleuchtet. Dabei taucht, im Vergleich zu konventionellen Schalenmodellen, ein zusätzlicher Lockingeffekt auf, der seine Ursache in der Dickenänderung der Schale hat und zu parasitären Normalspannungen in Dickenrichtung führt. Modifikationen dieser Finite-Elemente-Formulierung werden in *Kapitel 7* vorgeschlagen. Sie sollen die Effizienz steigern (Locking vermeiden) und die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente verringern. Dabei werden bekannte Methoden mit eigenen Entwicklungen kombiniert.

Die Vor- und Nachteile der so entstandenen Schalenelemente im Vergleich zu dreidimensionalen Kontinuumselementen auf der einen und konventionellen Schalenelementen auf der anderen Seite werden in *Kapitel 8* diskutiert und anhand von numerischen Beispielen belegt. Außerdem wird in diesem Kapitel eine neue Methode zur Behandlung von Schalen mit Knicken vorgestellt.

Schließlich werden in *Kapitel 9* numerische Experimente dokumentiert, die durchgeführt wurden, um die Effizienz der vorgeschlagenen Elemente zu testen. Die ausgewählten Beispiele umfassen sowohl lineare als auch geometrisch und materiell nichtlineare Problemstellungen mit großen Verzerrungen. Auch hier werden Vergleiche mit konventionellen Schalenelementen und Kontinuumselementen angestellt. Wo möglich, werden Ergebnisse anderer Versionen dreidimensionaler Schalenmodelle zum Vergleich herangezogen.



## 2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden kurz die wesentlichen Definitionen und Begriffe eingeführt, die für die Herleitung einer Schalenformulierung aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik notwendig sind. Für ein tiefgreifendes Studium der Kontinuumsmechanik und der Variationsmethoden wird auf die Literatur verwiesen, empfehlenswert sind unter anderem Malvern (1969), Marsden und Hughes (1983), Stein und Barthold (1996), Washizu (1968), Oden und Reddy (1976), Bufler (1990).

### 2.1 Differentialgeometrie

Zur Beschreibung des Schalenkörpers im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum seien zwei Koordinatensysteme definiert: ein kartesisches Koordinatensystem  $x_i$ , das von den orthonormierten Vektoren  $e^i = e_i$  aufgespannt wird, und ein krummliniges, konvекtives Koordinatensystem  $\theta^i$ , das als fest mit dem (Schalen-) Körper verbunden gedacht werden kann (Abb. 2.1). Mit ihrer Hilfe wird eine materielle Beschreibung von geometrisch nichtlinearen Deformationsvorgängen im *Lagrangeschen* Sinne (*Lagrangean formulation*) verwirklicht. Das bedeutet, daß die Bezeichnung eines materiellen Punktes mit seiner Lage in einer *Referenzkonfiguration* (unverformte oder Ausgangslage) identisch ist. Die dritte Richtung  $\theta^3$  legt später, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Dickenrichtung des Schalenkörpers fest. Bei der Herleitung von finiten Elementen werden die beiden anderen Richtungen  $\theta^1$  und  $\theta^2$  mit den Elementkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$  identifiziert.

Ein Feld von Ortsvektoren  $x(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  legt die Lage des Körpers in der Referenzkonfiguration fest. Die *Momentankonfiguration* (aktuelle oder verformte Lage) wird durch  $\bar{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  beschrieben. Allgemein gilt, daß Größen in der Momentankonfiguration mit einem Querstrich markiert sind. Häufig werden in der Literatur Kleinbuchstaben für Größen der Momentankonfiguration

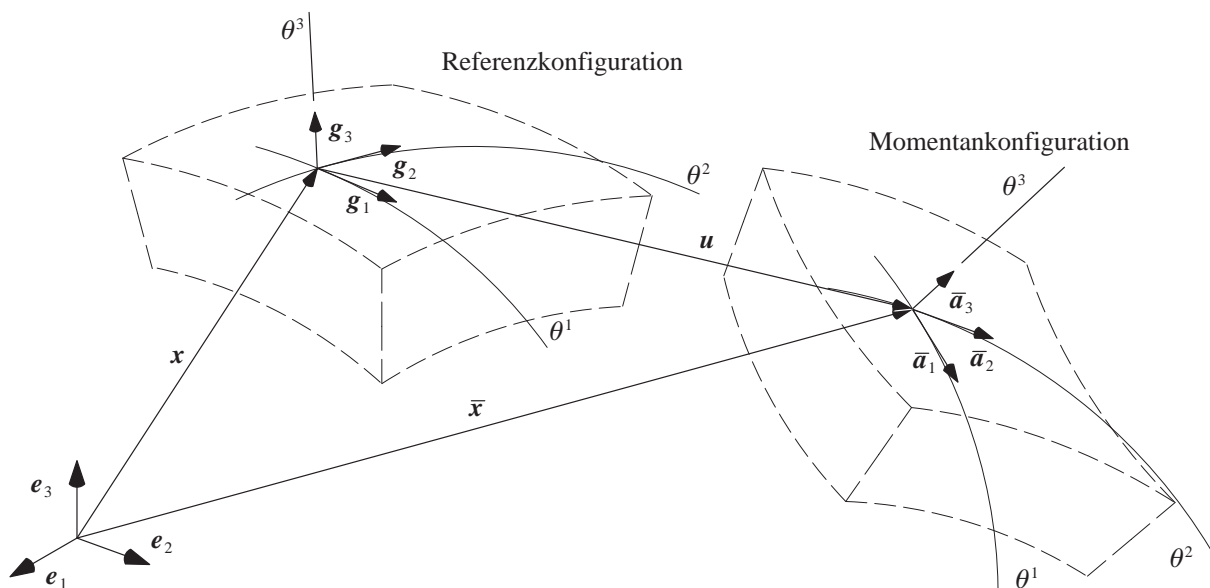


Abb. 2.1: Geometrie und Kinematik in krummlinigen Koordinaten

tion und Großbuchstaben für Größen der Referenzkonfiguration verwendet. In dieser Arbeit bezeichnen Kleinbuchstaben jedoch Vektoren und Großbuchstaben Tensoren oder Matrizen.

Die *ko- und kontravarianten Basisvektoren* des krummlinigen Koordinatensystems sind in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

und in der Momentankonfiguration

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i}, \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.2)$$

Ihre Dualitätseigenschaft

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = g_j^i = \delta_j^i \quad (2.3)$$

wird beim Aufstellen von Energieausdrücken benötigt. Für zwei energetisch konjugierte Tensoren zweiter Stufe (siehe Anhang A für die Definition des dyadischen Produktes  $\otimes$ )

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.4)$$

gilt mit (2.3) für das Skalarprodukt

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A^{ij} B_{ij}. \quad (2.5)$$

Das Skalarprodukt ist also unabhängig von der Metrik. Der *Metriktensor* (Einheitstensor) in seinen ko- und kontravarianten Darstellungen ist

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (2.6)$$

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (2.7)$$

Mit den Ortsvektoren sowie den ko- und kontravarianten Basisvektoren in beiden Konfigurationen liegt die vollständige Beschreibung der Geometrie vor. Alle Verzerrungsmaße und geometrischen Abbildungen können auf diese Größen zurückgeführt werden. Da die in dieser Arbeit behandelte Schalenformulierung aus der dreidimensionalen, nicht polaren Kontinuumsmechanik hergeleitet wird, werden schalentypische Größen, wie der Krümmungstensor (zweite Fundamentalförm der Schalenmittelfläche), nicht benötigt.

## 2.2 Kinematik

Als kinematische Gleichungen werden diejenigen Gleichungen bezeichnet, die die geometrischen Größen zueinander in Beziehung setzen. In der Strukturmechanik sind das im Gebiet die Verzerrungen und Verschiebungen, auf dem Rand die Verschiebungen und ihre vorgegebenen Werte.

Die Ortsvektoren der Momentan- und Referenzkonfigurationen hängen über die Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \quad (2.8)$$

miteinander zusammen. Die ko- und kontravarianten Basisvektoren beider Konfigurationen werden durch eine Vorwärtstransformation (push forward)

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i, \quad \bar{\mathbf{g}}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{g}^i, \quad (2.9)$$

beziehungsweise Rückwärtstransformation (pull back)

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{g}}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{g}}^i, \quad (2.10)$$

ineinander überführt (Marsden, Hughes (1983)). Dazu wird der *materielle Deformationsgradient*

$$\mathbf{F} := \text{grad } \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} := \text{grad } \mathbf{u} \quad (2.11)$$

benötigt.  $\mathbf{F}$  ist ein, im allgemeinen unsymmetrischer, Tensor zweiter Stufe. Um die oben beschriebenen Vorwärts- und Rückwärtstransformationen durchführen zu können muß er eindeutig umkehrbar sein. Die Voraussetzung dafür ist, daß seine Determinante  $J$  (*Jacobi-Determinante*) ungleich Null ist. Weiterhin muß die durch  $\mathbf{F}$  beschriebene Abbildung stetig sein, was physikalisch bedeutet, daß sich während der Deformation das Material nicht selbst durchdringt. Daraus folgt die Forderung nach positiver Definitheit von  $\mathbf{F}$ ,

$$J := \det \mathbf{F} > 0. \quad (2.12)$$

Ein für große Verzerrungen geeignetes Maß ist der *Green-Lagrangesche Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) stellt gleichzeitig die kinematische Feldgleichung für die Lagrangesche Beschreibung dar. Sie ist eine der drei Gebietsgleichungen, die ein statisches Randwertproblem definieren. Die zugehörige kinematische Randbedingung

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } A_u \quad (2.14)$$

setzt das Verschiebungsfeld in Beziehung zu vorgegebenen Verschiebungen.

### 2.3 Materialgesetze

Als Materialgesetz, Stoffgesetz oder konstitutive Beziehungen werden diejenigen Gleichungen bezeichnet, die die statischen und kinematischen Größen ineinander überführen. Bei einer Lagrangeschen Betrachtungsweise sind das in der Regel der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und der *Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor zweiter Art* (*PK2*)  $\mathbf{S}$ .

In diesem Abschnitt sollen nur kurz einige Bezeichnungen geklärt werden. Für eine exakte Beschreibung der in den numerischen Experimenten in Kapitel 9 verwendeten Stoffgesetze wird auf Simo et al. (1985), Wriggers (1988) und Roehl (1994) verwiesen. Auf die Herleitung des Schalenmodells und der finiten Elemente in dieser Arbeit hat die Formulierung des Stoffgesetzes keinen Einfluß.

Der Materialtensor vierter Stufe wird mit  $\mathbf{C}$  bezeichnet. Existiert ein Potential, so gilt

$$\mathbf{C} := \frac{\partial^2 W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}, \quad (2.15)$$

wobei  $W^{int}(\mathbf{E})$  die *Verzerrungsenergie* darstellt (Anhang D). Bei einem linearen Materialgesetz vom *St.–Venant–Kirchhoffschen* Typ stellt er eine eindeutige, lineare Beziehung zwischen dem Green–Lagrangeschen Verzerrungstensor und dem zweiten Piola–Kirchhoffschen Spannungstensor her.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad . \quad (2.16)$$

Bei isotropem Materialverhalten reichen zwei Parameter zur vollständigen Beschreibung der Materialeigenschaften aus. In der mathematischen Literatur werden dazu meist die Lamé–Konstanten

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.17)$$

verwendet. In der Ingenieurliteratur werden der etwas anschaulichere E–Modul  $E$  und die Querdehnzahl oder Poissonzahl  $\nu$  bevorzugt. Die Komponenten des Materialtensors in Abhängigkeit der Lamé–Konstanten sind dann

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu [g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{kj}] \quad . \quad (2.18)$$

Das Stoffgesetz oder konstitutive Gesetz (2.16) ist die zweite Feldgleichung, die zur mathematischen Beschreibung der mechanischen Aufgabenstellung benötigt wird.

## 2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Die statischen Gleichungen setzen die inneren und äußeren Kräfte miteinander in Beziehung. Sind sie erfüllt, so befindet sich das System im Gleichgewicht. Auf eine Herleitung dieses Sonderfalls aus den allgemeineren Impuls– und Drallsätzen wird an dieser Stelle verzichtet. Die statische Feldgleichung, die die Gleichgewichtsbedingung im Gebiet beschreibt lautet

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Die Komponenten des *ersten Piola–Kirchhoffschen (PK1) Spannungstensors*

$$\mathbf{P} = P^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.20)$$

sind nicht mit den physikalischen Spannungen identisch, da sie sich nicht vollständig auf die verformte Konfiguration beziehen. Die Spannungskomponenten  $P^{ij}$  geben also keine Antwort auf die Frage, wieviel Kraft pro Flächeneinheit an einem bestimmten materiellen Punkt wirkt. Das einzige physikalisch so zu interpretierende Spannungsmaß ist der *Cauchy–Spannungstensor*

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j \quad . \quad (2.21)$$

Mit ihm steht der PK1–Spannungstensor in folgender Beziehung

$$\mathbf{P} := \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (2.22)$$

Aufgrund seiner Symmetrie ist jedoch der PK2–Spannungstensor

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (2.23)$$

für eine Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen häufig besser geeignet. Die statische Gleichung (2.19) lautet dann

$$\operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = 0 . \quad (2.24)$$

Der Cauchy–Spannungstensor läßt sich mit Hilfe des Deformationsgradienten aus dem PK2–Spannungstensor ermitteln.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{|\mathbf{F}|} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T . \quad (2.25)$$

Die statische Randbedingung

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } A_S \quad (2.26)$$

fordert schließlich die Erfüllung des Gleichgewichts auf dem Rand des betrachteten Gebietes. Der Vektor  $\hat{\mathbf{t}}$  der vorgegebenen Kräfte wird mit Hilfe des Normalenvektors  $\hat{\mathbf{n}}$  in Beziehung zu den Spannungen gesetzt. Ebenso wie beim Gleichgewicht im Gebiet (2.19) wird dabei der PK1–Spannungstensor verwendet, da sich die geometrische Größe (der Normalenvektor) auf die Ausgangskonfiguration bezieht, das Gleichgewicht aber am verformten System aufgestellt wird. Damit stehen alle Gleichungen zur Beschreibung eines statischen Randwertproblems zur Verfügung. Gleichgewicht, Kinematik und Materialgesetz müssen jedoch nicht notwendigerweise in dieser Form dargestellt werden. Wird die Gleichgewichtsbeziehung (2.19) anstelle von (2.24) verwendet, also PK1– anstatt PK2–Spannungen, dann lauten die kinematische Gleichung

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \mathbf{u} , \quad (2.27)$$

und das Stoffgesetz

$$\frac{\partial W^{int}(\mathbf{P})}{\mathbf{P}} = \mathbf{H} \quad (2.28)$$

(siehe die Herleitung des Prinzips von Hellinger–Reissner in Teil D des Anhangs).

## 2.5 Energieprinzipien

Als Grundlage zur Herleitung von Finite–Elemente–Formulierungen werden in der Regel Funktionale herangezogen. Für den einfachsten und bis heute am weitesten verbreiteten Typ, nämlich die reinen Verschiebungselemente, ist das das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*. Daneben können beispielsweise das *Prinzip von Hellinger–Reissner* und das *Prinzip von Hu–Washizu* verwendet werden, um gemischte oder hybrid–gemischte Elemente zu formulieren. Bei diesen Elementen werden neben Ansätzen für die Verschiebungen auch Spannungen und/oder Verzerrungen diskretisiert.

Einen Überblick über Funktionale und Variationsmethoden findet man beispielsweise bei Stein (1964), Oden und Reddy (1976), Bufler (1983), Bufler (1990), Felippa (1989) (siehe auch Felippa (1994)) stellt mit seinen parametrisierten Funktionalen einen „Baukasten“ zur Verfügung, der die oben genannten Prinzipien als Sonderfälle enthält.

In der vorliegenden Arbeit werden vor allem das Prinzip von Hu–Washizu und eine modifizierte Version dieses Prinzips benötigt. Die genaue Herleitung der weiter unten verwendeten Funktionale ist in Teil D des Anhangs gegeben. Neben der dort gezeigten Herleitung der Funktionale aus Energieprinzipien ist es auch möglich, sie in allgemeiner Fassung mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen zu erhalten. Eine wichtige Konsequenz daraus ist, daß die Existenz eines Potentials für die Anwendung dieser Variationsprinzipien nicht vorausgesetzt werden muß.

### 2.5.1 Notation

Tensoren und Vektoren werden in absoluter Schreibweise dargestellt. Ein Kopfzeiger weist auf eine explizite Abhängigkeit von einer anderen, freien Variablen innerhalb eines Funktionals hin (Felippa (1989)). Während also  $\mathbf{E}$  für den Verzerrungstensor als freie Größe im Funktional steht, sind die Verzerrungen  $\mathbf{E}^u$  über die kinematischen Gleichungen an die Verschiebungen und die Verzerrungen  $\mathbf{E}^S$  über das Stoffgesetz an die Spannungen gekoppelt (Felippa (1989)),

$$\mathbf{E}^u = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{g}) , \quad \mathbf{E}^S = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{S} . \quad (2.29)$$

### 2.5.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist die Grundlage zur Herleitung von finiten Elementen nach der Verschiebungsmethode. Wenn ein Potential existiert, kann es aus dem *Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie* (Anhang D) durch Einsetzen der kinematischen Gleichungen (Eliminationsmethode) hergeleitet werden. Es besagt, daß in einem mechanischen System, das sich im Gleichgewicht befindet, eine beliebige geometrisch verträgliche, infinitesimale Auslenkung (virtuelle Verschiebung)  $\delta \mathbf{u}$  keine Arbeit verrichtet (Gleichungen (D.16) und (D.17) im Anhang),

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 . \quad (2.30)$$

Freie Variablen sind die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ . Wird zur Lösung des Variationsproblems ein Diskretisierungsverfahren, wie die Methode der finiten Elemente, verwendet, dann müssen die Ansatzfunktionen gewissen Anforderungen genügen um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten. Da die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  im Funktional in der ersten Ableitung vorkommen, müssen die entsprechenden Ansatzfunktionen in diesem Fall dem Sobolevraum

$$H^1 := \{u_i(x, y, z) : D^\alpha u_i \in L_2 ; \quad |\alpha| \leq 1\} \quad (2.31)$$

entnommen werden. Das heißt die ersten schwachen Ableitungen der Ansatzfunktionen ( $D^\alpha u_i$  ist die  $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $u_i$ ) müssen im Raum  $L_2$  der quadratintegrierbaren Funktionen enthalten sein. Zur genauen Definition dieser Räume und ihrer Eigenschaften wird auf Braess (1997) verwiesen. Für einen Ansatz mit finiten Elementen bedeutet das, daß die Verschiebungsfunktionen an den Elementrändern kompatibel sein müssen.

Die Eulerschen Differentialgleichungen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen sind die Gleichgewichtsbedingungen (2.19) und die statischen Randbedingungen (2.26). Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen hat drei Nebenbedingungen, nämlich die kinematische Feldgleichung (2.13), das Stoffgesetz (2.16) und die kinematischen Randbedingungen (2.14).

### 2.5.3 Prinzip von Hu–Washizu

Grundlage des Prinzips von Hu–Washizu (Hu (1955), Washizu (1955)) ist, wie beim Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Gleichung (D.9) im Anhang). Die kinematischen Gleichungen werden hier allerdings mit Hilfe von *Lagrange-Multiplikatoren* ( $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{t}^S$ ) in das Funktional eingebracht (Multiplikatorenmethode). Die freien Variablen sind die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , Spannungen  $\mathbf{S}$  und Verzerrungen  $\mathbf{E}$ .

$$\begin{aligned}
\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) &= \int_V \left[ W^{int}(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right] dV \\
&\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} .
\end{aligned} \tag{D.34}$$

Einmalige Variation und partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) &= \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right] dV \\
&\quad - \int_V [\delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} + \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] dV \\
&\quad - \int_{A_S} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Das Funktional hat keine Nebenbedingungen, es sind also alle dahinter stehenden, starken Gleichungen Eulergleichungen. Für eine Formulierung mit finiten Elementen bedeutet das, daß alle drei Feldgrößen diskretisiert werden müssen. Während die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  im Funktional (D.34) wieder aus  $H^1$  sein müssen, genügen für  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{E}$  jeweils Ansätze aus  $L_2$ , das heißt die Ansatzfunktionen dürfen an den Elementrändern Sprünge aufweisen. Eine wichtige Konsequenz daraus ist, daß die entsprechenden Gleichungen lokal gelöst, und damit die Unbekannten Größen auf Elementebene durch statische Kondensation eliminiert werden können (Kapitel 6).

#### 2.5.4 Modifikation des Prinzips von Hu–Washizu

Eine modifizierte Form des Prinzips von Hu–Washizu taucht erstmals bei Simo und Rifai (1990) auf, wo es zur Herleitung von finiten Elementen verwendet wird. Es wird dort nicht explizit als „neues Variationsprinzip“ vorgestellt, sondern entsteht aus dem Prinzip von Hu–Washizu durch eine Reparametrisierung der Verzerrungen (Enhanced–Assumed–Strain– (EAS–) Methode, Abschnitt 7.4).

Man kann dieses Funktional jedoch auch als Grundlage eines eigenständigen Prinzips verstehen. Dazu wird das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Gleichung (D.9) im Anhang) benötigt,

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = \int_V W^{int}(\mathbf{E}) dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA = \min. . \tag{2.33}$$

Es ist den statischen Gleichungen äquivalent. Die kinematischen Gleichungen sind noch nicht berücksichtigt. Die freien Variablen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{E}$  stehen also zunächst weder durch eine variationelle noch durch eine Nebenbedingung zueinander in Beziehung. Dasselbe gilt für die kinematischen Randbedingungen mit den vorgegebenen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$ . Das Stoffgesetz ist implizit als Ne-

benbedingung enthalten, da über die Definition der Verzerrungsenergiedichte  $W^{int}$  (Gleichung (D.1) im Anhang) eine Aussage über die Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen gemacht wird.

Der wesentliche Schritt bei der Herleitung des *modifizierten Prinzips von Hu–Washizu* ist die Wahl eines alternativen Satzes von Feldgleichungen. Das wird dadurch erreicht, daß als freie Variablen neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und den Spannungen  $\mathbf{S}$  nicht die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  verwendet werden, sondern ein zusätzliches Verzerrungsfeld

$$\tilde{\mathbf{E}} := \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \mathbf{E} - \mathbf{E}^u . \quad (2.34)$$

Es handelt sich dabei schlicht um eine Substitution („Reparametrisierung“) von Variablen. Gleichung (2.34) beschreibt einen Zusammenhang zwischen den zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$ , den Gesamtverzerrungen  $\mathbf{E}$  und den Verschiebungen, von denen  $\mathbf{E}^u$  abhängt.  $\tilde{\mathbf{E}}$  ist also eigentlich das Residuum der kinematischen Gleichung. Obwohl die physikalische Einheit von  $\tilde{\mathbf{E}}$  die einer Verzerrung ist und im Funktional die Variable  $\mathbf{E}$  verdrängt, repräsentiert diese Größe also nicht nur die Verzerrungen, sondern enthält auch einen Anteil, der von den Verschiebungen abhängt. Als Folge dieser Manipulation sind die Eulergleichungen des entstehenden Funktionals Mischformen der bekannten Feldgleichungen. Sowohl die kinematischen als auch die statischen Randbedingungen bleiben unverändert.

Die kinematische Gebietsgleichung lautet mit diesen reparametrisierten Verzerrungen

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

und wird zusammen mit der kinematischen Randbedingung mit Hilfe der Multiplikatorenmethode in das Funktional (2.33) eingebracht. Außerdem werden die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  gemäß Gleichung (2.34) durch  $\mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}$  ersetzt.

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) &= \int_V [W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) - \lambda : \tilde{\mathbf{E}}] dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV \\ &\quad - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die physikalischen Einheiten der Lagrange-Parameter  $\lambda$  und  $\boldsymbol{\mu}$  sind die einer Spannung und eines Spannungsvektors auf der Oberfläche. Sie dürfen aus den im Anhang erläuterten Gründen jedoch zunächst nicht mit diesen physikalischen Größen identifiziert werden.

Die erste Variation von (2.36) ist

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} &= \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \delta \mathbf{E}^u - \delta \lambda : \tilde{\mathbf{E}} - \lambda : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right] dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \delta \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 . \end{aligned} \quad (2.37)$$



Zur Herleitung der Eulerschen Differentialgleichungen wird der zweite Term in (2.37) etwas umgeformt:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \delta \mathbf{E}^u = \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \text{grad } \delta \mathbf{u} . \quad (2.38)$$

Mit Hilfe der Produktregel (A.9) und des Gaußschen Integralsatzes (A.11)

$$\int_V \text{grad } \delta \mathbf{u} : \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} dV = \int_{A_S} \mathbf{t}^u \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} \right) dV \quad (2.39)$$

können die Terme dann nach den Variationen von  $\mathbf{u}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\lambda$  und  $\boldsymbol{\mu}$  sortiert werden.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} = & \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} \right) - \delta \lambda : \tilde{\mathbf{E}} - \lambda : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right] dV \\ & - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u) dA + \int_{A_u} \delta \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dabei gilt die Abkürzung  $\mathbf{t}^u = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \mathbf{E}^u} \cdot \mathbf{n}$ .

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgen die Eulergleichungen des modifizierten Prinzips von Hu–Washizu im Gebiet

$$\text{div} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \mathbf{E}^u} \right) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} , \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \lambda , \quad (2.42)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} , \quad (2.43)$$

mit

$$\mathbf{E}^u = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) , \quad \mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{u} - \mathbf{g} , \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^u . \quad (2.44)$$

und auf den Rändern

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S , \quad (2.45)$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u . \quad (2.46)$$

Um diese Gleichungen in eine Beziehung zu den bekannten mechanischen Feldgleichungen setzen zu können, muß der Lagrange–Parameter  $\lambda$  mit einer physikalischen Größe identifiziert werden. Aufgrund der Einheit von  $\lambda$  kann das — wie beim Prinzip von Hu–Washizu — nur der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  sein. Dieser ist aber bereits durch die Werkstoffbeziehung (2.16) (bzw. allgemeiner in Gleichung (D.1) im Anhang) definiert. Die Identifikation des Lagrange–Parameters  $\lambda$  mit dem Spannungstensor  $\mathbf{S}$  bedeutet also dessen erneute Definition

$$\mathbf{S} := \lambda \mathbf{1} . \quad (2.47)$$

$\mathbf{S}$  erfüllt das ursprünglich als Nebenbedingung enthaltene Stoffgesetz jetzt nur noch schwach. An dieser Stelle ist es wichtig anzumerken, daß noch keine Diskretisierung stattgefunden hat. Es wird davon ausgegangen, daß die Verzerrungstensoren  $\mathbf{E}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}$  und  $\mathbf{E}^u$  alle aus demselben Funktionenraum  $\mathcal{V}_E$  stammen. Später werden die Funktionenräume durch die Einführung einer Orthogonalitätsbedingung und die Diskretisierung eingeschränkt. Dadurch verändert sich die physikalische Bedeutung der verschiedenen Verzerrungs- und Spannungstensoren. Insbesondere repräsentieren die Spannungen  $\tilde{\mathbf{S}}$  dann nur noch die zu den zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  energetisch konjugierten Spannungen.

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{S}^u = \frac{\partial W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \mathbf{E}^u} , \quad \tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}})}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \quad (2.48)$$

lauten die Eulergleichungen im Gebiet schließlich

$$\operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} , \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_\lambda , \quad (2.50)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} . \quad (2.51)$$

Alle drei Feldgleichungen sind also Eulergleichungen. Die dritte Gleichung ist offensichtlich die kinematische Gleichung, die beiden anderen jeweils Mischformen aus dem Stoffgesetz und der Gleichgewichtsbedingung. Die Spannungstensoren  $\mathbf{S}^u$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  sind dabei beide sowohl von  $\mathbf{u}$  als auch von  $\tilde{\mathbf{E}}$  abhängig. Sie sind jedoch im allgemeinen nicht identisch, wenn  $\mathbf{E}^u$  und  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus unterschiedlichen Funktionenräumen stammen.

Der zweite Lagrange-Parameter  $\mu$  kommt in den Eulergleichungen nicht vor. Er dient lediglich als Testfunktion für die kinematische Randbedingung. Ohne die Bedeutung der obigen Gleichungen zu verändern kann deshalb  $\mu = \mathbf{t}^S$  definiert werden (siehe auch die Herleitung des Prinzips von Hu-Washizu in Anhang D).

### 2.5.5 Die Orthogonalitätsbedingung und ihre Bedeutung für die Eulergleichungen

Für eine Diskretisierung mit finiten Elementen müssen Ansätze für die Verschiebungen, die zusätzlichen Verzerrungen und die Spannungen gemacht werden. Um den Diskretisierungsaufwand zu verringern, schlagen Simo und Rifai (1990) jedoch vor, die Spannungen aus der Formulierung zu eliminieren. Dazu müssen die Ansätze für die Spannungen und die zusätzlichen Verzerrungen einer Orthogonalitätsbedingung genügen, die besagt, daß das Integral des Skalarproduktes dieser Größen über das Gebiet eines finiten Elementes identisch Null ist.

$$\int_{V_e} \mathbf{S}_h : \tilde{\mathbf{E}}_h \, dV = 0 \quad \forall \mathbf{S}_h \in \mathcal{V}_S , \tilde{\mathbf{E}}_h \in \mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}} . \quad (2.52)$$

Dabei sind  $\mathcal{V}_S$  und  $\mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  die Räume der Ansatzfunktionen für die Spannungen und die zusätzlichen Verzerrungen. Die Orthogonalitätsbedingung gilt also nicht nur für die Lösung, sondern für jede innerhalb der Ansatzräume mögliche Kombination von  $\mathbf{S}_h$  und  $\tilde{\mathbf{E}}_h$ . In der Literatur wird diese

Bedingung meist recht kurz abgehandelt und — wenn überhaupt — damit begründet, daß die Spannungen aus dem Funktional eliminiert werden sollen. Die Bedeutung dieser Bedingung ist jedoch viel weitreichender, als daß sie nur den Diskretisierungsaufwand verringerte.

Wenn die Bedingung (2.52) erfüllt ist, entfallen alle Gebietsterme in (2.40) und den nachfolgenden Gleichungen, die die Spannungen  $\mathcal{S}$  (bzw. den Lagrange-Parameter  $\lambda$ ) enthalten. Das Prinzip

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} = & \int_V \left[ \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \mathbf{E}^u} \right) - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV \\ & - \int_{A_S} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u) dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

hat dann nur noch zwei Eulergleichungen im Gebiet, nämlich

$$\text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathcal{S}^u) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

und

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathbf{0} . \quad (2.54)$$

Die Randbedingungen ändern sich durch diesen Eingriff nicht.

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S , \quad (2.45)$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u . \quad (2.46)$$

Die erste Eulergleichung im Gebiet (2.41) hat sich durch die Orthogonalitätsbedingung ebenfalls nicht verändert. Die zweite sieht jedoch zunächst etwas überraschend aus und ist offensichtlich nur dann sinnvoll, wenn  $\tilde{\mathcal{S}}$  nicht die gesamten Spannungen repräsentiert.

An dieser Stelle wird klar, daß die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung in einem kontinuierlichen Problem (also vor der Diskretisierung) nur dann möglich ist, wenn die Räume  $\mathcal{V}_S$  und  $\mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  der Spannungen  $\mathcal{S}$  und zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  keine energetisch konjugierten Komponenten enthalten. Daraus folgt direkt, daß  $\tilde{\mathcal{S}}$ , das genau diejenigen Spannungen enthält, die zu  $\tilde{\mathbf{E}}$  energetisch konjugiert sind, verschwinden muß.

Soll keine Spannungskomponente a priori als Null angenommen werden, ist der einzig mögliche, triviale „Ansatz“ für das kontinuierliche Problem

$$\mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}} = \emptyset , \quad (2.55)$$

also das ursprüngliche Prinzip von Hu–Washizu ohne  $\tilde{\mathbf{E}}$ . Die Modifikation des Prinzips sowie die Orthogonalitätsbedingung sind also tatsächlich nur dann sinnvoll, wenn eine Diskretisierung stattfindet. Diese Erkenntnis wird in Kapitel 4 bei der Herleitung der 7-Parameter-Schalenformulierung auf der Basis dieses Funktionals wieder aufgegriffen.

Bereits hier kann jedoch festgestellt werden, daß durch die Orthogonalitätsbedingung offensichtlich eine Gleichung als Eulergleichung „verlorengegangen“ ist. Die Vermutung, daß diese Gleichung die Werkstoffgleichung sein muß, liegt nahe. Andelfinger und Ramm (1991) haben einen

Zusammenhang zwischen EAS–Elementen, die auf dem modifizierten Prinzip von Hu–Washizu beruhen, und solchen, die aus dem Prinzip von Hellinger–Reissner hergeleitet werden, festgestellt. Danach führen beide Methoden zu identischen Steifigkeitsmatrizen, wenn die Ansätze für die Spannungen und die erweiterten Verzerrungen zueinander komplementär sind. Das ist so zu verstehen, daß diese Ansatzfunktionen zusammengenommen gerade den Raum der Ansätze für die Verschiebungen aufspannen, sie jedoch keine gemeinsamen Elemente haben, wie beispielsweise

$$S^{11} \in \text{span} \{ 1, \eta \}, \quad E^{11} \in \text{span} \{ \xi, \xi\eta \} \quad (2.56)$$

bei einem bilinearen Scheibenelement. Interessanterweise erfüllen solche Paare von Funktionen auch immer die Orthogonalitätsbedingung. Da beim Prinzip von Hellinger–Reissner das Stoffgesetz stark erfüllt ist, muß das auch für die äquivalenten EAS–Elemente gelten.

Später gelingt es Yeo und Lee (1997), die von Andelfinger und Ramm (1991) entdeckte Äquivalenz für bestimmte Elementtypen zu beweisen. Bischoff et al. (1998) stellen unabhängig davon eine Klasse von äquivalenten EAS– und Hellinger–Reissner–Elementen vor.

Zwischen dem Funktional

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{t}^S) &= \int_V W^{\text{int}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV \\ &- \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (2.57)$$

und dem Funktional von Hellinger–Reissner besteht also ein enger Zusammenhang.

Abgesehen von der Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung gilt für die zulässigen Ansatzräume dasselbe wie beim Prinzip von Hu–Washizu. Das bedeutet, die Ansätze für die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  müssen aus  $H^1$ , diejenigen für die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus  $L_2$  gewählt werden.

### 2.5.6 Prinzip von Hellinger–Reissner

Das Prinzip von Hellinger–Reissner (Hellinger (1914), Reissner (1950)) ist die Basis für hybride Spannungselemente (Pian und Chen (1982), Pian und Sumihara (1984)). Es kann aus dem *Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie* oder aus dem Prinzip von Hu–Washizu hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) &= \int_V \left[ - \frac{\partial \tilde{W}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{S}} : \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{S} : \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \right] dV \\ &- \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Das Prinzip enthält die kinematischen und die statischen Gleichungen in schwacher Form, d. h. als Eulergleichungen. Die einzige Nebenbedingung ist das Stoffgesetz. Freie Variablen sind die

Spannungen  $S$  und die Verschiebungen  $u$ . Das zugehörige Funktional (D.50) ist im Anhang zu finden. Die Anforderungen an die Ansatzräume für die Verschiebungen und Spannungen sind dieselben wie beim Prinzip von Hu–Washizu.

## 3 Platten- und Schalenmodelle höherer Ordnung

### 3.1 Überblick

Als Platten- und Schalenmodelle höherer Ordnung werden im Folgenden solche Modelle bezeichnet, die im Vergleich zu den „klassischen“ Formulierungen von Kirchhoff (1850) für Platten und Love (1888) für Schalen (*3-Parameter-Formulierung*) verfeinerte „Ansätze“ in Dickenrichtung für die physikalischen Größen verwenden. Dabei können sowohl die Verläufe der Verschiebungen als auch diejenigen von Verzerrungen und Spannungen betroffen sein.

Eine der ersten Erweiterungen der *Kirchhoffschen Plattentheorie* wurde von Reissner (1944) (siehe auch Reissner (1945)) vorgestellt. Sie bestand darin, die Querschubverzerrungen bei Verformungsberechnungen von Platten mit zu berücksichtigen. Dadurch konnte im Vergleich zur Kirchhoffschen Theorie ein Widerspruch bei der Formulierung der kinematischen Randbedingungen aufgelöst werden: Die unphysikalische Drilleinspannung an gelenkig gelagerten Rändern entfiel und damit auch die Notwendigkeit der Berechnung einer Ersatzquerkraft zur korrekten Ermittlung der Auflagerreaktionen. Die *Reissnersche Plattentheorie* verzichtet auch auf die Annahme verschwindender Normalspannungen in Dickenrichtung. Mit Hilfe des gemischten Funktionals von Hellinger-Reissner (Hellinger (1914), Reissner (1950)), das Ansätze für Verschiebungen und Spannungen erlaubt, wird ein kubischer Verlauf dieser Spannungen angesetzt. Dennoch ist für die Herleitung der Reissnerschen Plattentheorie eine Modifikation des dreidimensionalen Stoffgesetzes notwendig.

Eine Plattentheorie mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen, die auf einer reinen Verschiebungsformulierung basiert, wurde vermutlich als erstes von Hencky (1947) vorgestellt. Sie wird jedoch meistens Mindlin (1951) zugeschrieben. In dem letztgenannten Aufsatz wird zwar auch eine Plattentheorie unter Berücksichtigung der Querschubverzerrungen vorgestellt, das Hauptaugenmerk liegt jedoch auf der Bedeutung der Querschubverzerrungen bei dynamischen Analysen. Tatsächlich wird bis heute die Kirchhoffsche Theorie zur statischen Berechnung von dünnen Platten als ausreichend betrachtet. Sie ist beispielsweise im Bauwesen aufgrund der Verfügbarkeit von analytischen Lösungen in Form von Tafelwerken noch immer die am meisten verwendete Theorie. Bei Plattenschwingungen haben die Querschubverzerrungen jedoch auch bei dünnen Platten einen merklichen Einfluß.

Ein Beitrag von Bollé (1947), der im gleichen Jahr erschien wie Henckys Aufsatz und ebenfalls eine Theorie schubweicher Platten beschreibt, blieb bis heute fast unbeachtet. Das liegt vermutlich daran, daß er in einer weitgehend unbekanntem Zeitschrift veröffentlicht wurde. Eric Reissner (1985) äußert die Vermutung, daß auch Mindlin deswegen nichts von Bollés Arbeit gewußt hat. Der wesentliche Unterschied von schubweichen Plattenformulierungen, die auf einem Verschiebungsansatz beruhen, zu Reissners Vorgehensweise besteht darin, daß die Normalspannungen in Dickenrichtung als Null angenommen werden. Mit Hilfe dieser Annahmen wird die entsprechende Gleichung für die transversalen Normaldehnungen aus dem Stoffgesetz statisch kondensiert.

Die Herleitung einer Schalenformulierung mit Berücksichtigung der Querschubverzerrungen wird von Naghdi (1972) ausführlich beschrieben. In Anlehnung an die schubweichen Plattenformulierungen werden solche Schalenmodelle auch oft als Modelle mit *Reissner-Mindlin-Kinematik* bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird dafür meist der Begriff *5-Parameter-Formulierung* verwendet, da das Modell in der Regel fünf kinematische Freiheitsgrade besitzt.

Schubweiche Schalenformulierungen spielen heute die größere Rolle für die Entwicklung von finiten Elementen. Sie werden jedoch gewöhnlich noch nicht als Theorien „höherer Ordnung“ bezeichnet.

Die Tatsache, daß Schalenmodelle niedriger Ordnung eine Modifikation der Stoffgesetzes erfordern, führt mit der Entwicklung von immer komplexeren Werkstoffformulierungen zu wachsenden Problemen. Das liegt zum einen an der Notwendigkeit der Kondensation des Stoffgesetzes, zum anderen an der Beschränkung auf kleine Verzerrungen.

Die Eignung von Schalenmodellen unterschiedlicher Ordnung für die Anwendung dreidimensionaler Stoffgesetze wird von Paumier und Raoult (1996) mathematisch diskutiert. Bereits vorher tauchen jedoch Platten- und Schalenformulierungen für FE-Analysen auf, die genau diese gewünschte Eigenschaft der Eignung für dreidimensionale Stoffgesetze haben. Büchter und Ramm (1992a) (siehe auch Büchter et al. (1994)) stellen eine nichtlineare Schalenformulierung vor, die geeignet ist, vollständig dreidimensionale Stoffgesetze ohne jegliche Veränderung zu implementieren. Dieses 7-Parameter-Modell wird in Kapitel 4 beschrieben. Es basiert auf dem modifizierten Funktional von Hu-Washizu, mit dessen Hilfe neben der Approximation von Verschiebungen auch Ansätze für die Verzerrungen gemacht werden können. Das Konzept wird später unter anderem von Betsch et al. (1996), Eberlein und Wriggers (1997), Bischoff und Ramm (1997) sowie Eckstein (1999) für verschiedene Anwendungen aufgegriffen und weiterentwickelt. Weitere dreidimensionale Schalenformulierungen, die jedoch auf einer reinen Verschiebungsmethode basieren, stammen von Kühhorn und Schoop (1992) für Sandwich-Schalen, von Sansour (1995) sowie von Basar und Ding (1996).

In der Literatur sind auch noch komplexere Modelle zu finden. Beispielsweise beschreiben Lo et al. (1977) eine Theorie, die zu einem Differentialgleichungssystem 22. Ordnung führt.

Allgemein lassen sich Platten- und Schalenmodelle höherer Ordnung in zwei Klassen aufteilen:

- *hierarchische Modelle*, die die Verschiebungen in Polynomen  $n$ -ter Ordnung in Dickenrichtung approximieren, und
- *Mehrschicht-Modelle (multilayer formulations)*, bei denen solche Ansätze schichtweise gemacht werden.

Mit solchen Modellen ist es theoretisch möglich, eine beliebig genaue Approximation der dreidimensionalen Lösung zu erreichen, indem der Polynomgrad bzw. die Anzahl der Schichten erhöht wird. Hierarchische Modelle sind in der Mathematik insbesondere für die Untersuchung von Randschichteffekten bei der asymptotischen Analyse von Platten- und Schalentheorien hilfreich (Abschnitt 3.4.2).

Das Interesse an Modellen höherer Ordnung stammt also einerseits aus dem Wunsch, für endliche Dicken eine bessere Approximation des dreidimensionalen Verhaltens von Platten und Schalen zu erreichen. Zum anderen können sie der mathematischen Analyse bestehender Modelle „niedriger Ordnung“ dienen (Asymptotik). Eine dritte Motivation, die auch die treibende Kraft für die Entwicklung der in dieser Arbeit beschriebenen 7-Parameter-Theorie war, ist der Wunsch, im Rahmen einer numerischen Behandlung der Schalengleichungen unveränderte dreidimensionale Stoffgesetze einsetzen zu können.

### 3.2 Semidiskretisierung des Schalenkontinuums in Dickenrichtung

Der Vorgang, bei der Entwicklung von Platten- und Schalenformulierungen bestimmte Annahmen zu treffen, kann formal als Diskretisierung betrachtet werden. Da diese Annahmen jedoch

nur eine Richtung, nämlich die Dickenrichtung, betreffen, ist der Begriff *Semidiskretisierung* vielleicht treffender. Wie bei der Semidiskretisierung der Bewegungsgleichung in der Dynamik wird auch hier eine Dimension des Problems diskretisiert, während die anderen zunächst kontinuierlich bleiben. Die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte entspricht beispielsweise einem linearen Ansatz in Dickenrichtung für die Verschiebungen parallel zur Schalenmittelfläche. Die Annahme der Undehnbarkeit in Dickenrichtung entspricht der Annahme konstanter Querverschiebungen. Im Rahmen der im vorigen Abschnitt eingeführten Terminologie können die hierarchischen Modelle als *p-Version* betrachtet werden, bei der die Theorie dadurch verfeinert wird, daß immer höhere Polynome zur Approximation der Verschiebungen verwendet werden. Schichtweise Theorien entsprechen demnach einer *h-Version*. Hier wird bei festem Polynomgrad die Anzahl der Schichten („Elemente in Dickenrichtung“) erhöht.

### 3.2.1 $C^\infty$ -kontinuierliche Ansätze — *p*-Methode (hierarchische Modelle)

Naghdi (1972) (siehe auch Green et al. (1968)) präsentiert eine Herleitung von Schalentheorien beliebiger Ordnung, indem er eine Approximation des Verlaufs der Verschiebungen in Dickenrichtung mit unendlich vielen Polynomen steigender Ordnung beschreibt. Das Verschiebungsfeld in einem dreidimensionalen Körper mit einer ausgezeichneten Mittelfläche kann demnach mit

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{N=1}^{\infty} (\theta^3)^N \mathbf{w}_N(\theta^1, \theta^2) \quad (3.1)$$

angegeben werden.  $\mathbf{u}$  ist ein dreidimensionales Verschiebungsfeld in Abhängigkeit der krummlinigen Koordinaten  $\theta^i$ .  $\theta^1$  und  $\theta^2$  liegen in der Schalenmittelfläche, während  $\theta^3$  die Dickenrichtung der Schale anzeigt. Dieses Verschiebungsfeld kann mit Hilfe der Mittelflächenverschiebung  $\mathbf{v}$  und unendlich vielen Differenzvektoren  $\mathbf{w}_N$ , die jeweils nur Funktionen der Koordinaten auf der Schalenmittelfläche sind, beschrieben werden. Der Ansatz in Dickenrichtung ist in diesem Fall unendlich oft stetig differenzierbar, weshalb er auch als  $C^\infty$ -kontinuierlich bezeichnet werden kann. Bei der Formulierung von hierarchischen Modellen werden anstatt der in Gleichung (3.1) angedeuteten einfachen Polynome gewöhnlich Legendre-Polynome verwendet, um die einzelnen Approximationsstufen voneinander zu entkoppeln (Abb. 3.1). Übrigens weist bereits Neuber (1949) auf die enge Verbindung zwischen der dreidimensionalen Kontinuumstheorie und der Theorie der Schalen hin und leitet eine Schalentheorie aus den dreidimensionalen Gleichungen mit der Hilfe von Reihenentwicklungen in Dickenrichtung her.

Naghdis Ansatz diente ursprünglich nur als Vehikel für die Herleitung konventioneller Schalenmodelle, indem die Summe über  $N$  auf eine endliche Anzahl  $n$  von Summanden beschränkt

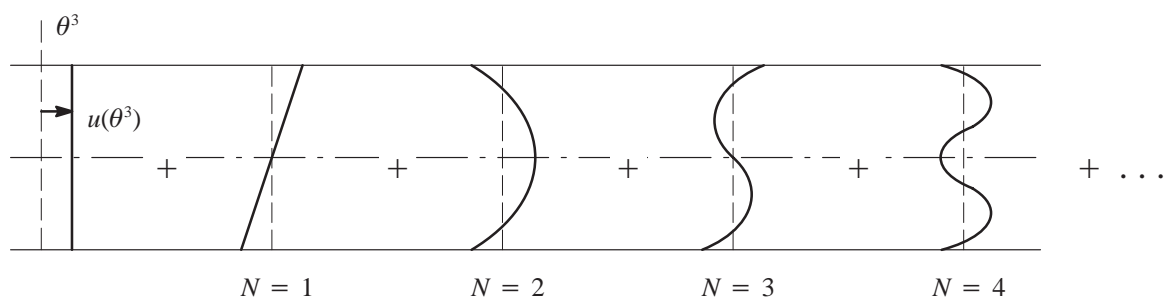


Abb. 3.1: Verschiebungsansätze in Dickenrichtung bei hierarchischen Modellen



wurde. Durch die fortschreitende Entwicklung numerischer Methoden ist es heute allerdings auch möglich, die komplizierten Differentialgleichungen zu lösen, die Theorien mit  $n > 1$  mit sich bringen. Modelle, wie das von Naghdi (1972), werden in der mathematischen Literatur als hierarchische Modelle bezeichnet. Die Qualität der Ergebnisse ist dabei abhängig von der Anzahl  $n$  der Glieder der Hierarchie, die berücksichtigt werden.

An hierarchische Modelle werden zwei prinzipielle Forderungen gestellt:

- Erstens soll für  $n \rightarrow \infty$  und feste Dicke die Lösung des Modells gegen die Lösung der dreidimensionalen Theorie streben; die Hierarchie heißt dann *konsistent*.
- Zweitens soll für gegen Null gehende Dicke und festes  $n$  die Lösung des Modells zur dreidimensionalen Lösung streben. Ein solches Modell wird *asymptotisch korrekt* genannt (Abschnitt 3.4.2).

Die zweite Forderung ist dabei möglicherweise nicht für alle  $n$  zu erfüllen, sondern erst ab einer bestimmten Mindestanzahl von Termen gewährleistet.

Die einzige Einschränkung bezüglich einer dreidimensionalen Theorie besteht dann nur noch darin, daß der Körper topologisch als Schale beschreibbar ist. Hierarchische Modelle wurden von Babuska und Li (1991,1992) sowie von Schwab (1996) eingehend analysiert.

### 3.2.2 $C^0$ -kontinuierliche Ansätze — $h$ -Methode

Mehrschicht-Theorien stellen neben den hierarchischen Modellen die zweite Klasse von Modellen höherer Ordnung dar. Die Verschiebungen in Dickenrichtung werden dabei nicht als ein Polynom  $n$ -ter Ordnung in Dickenrichtung entwickelt, sondern schichtweise approximiert. Werden beispielsweise  $n - 1$  Schichten mit Polynomen erster Ordnung gewählt, so gilt

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \sum_{N=1}^n \Phi_N(\theta^3) \mathbf{w}_N(\theta^1, \theta^2) . \quad (3.2)$$

Dabei seien  $\theta^1$  und  $\theta^2$  wieder die Koordinaten der Schalenmittelfläche. Die Ansatzfunktionen  $\Phi_N$  sind so gewählt, daß sie an der  $N$ -ten Schichtgrenze 1 und an allen anderen Schichtgrenzen 0 sind. Dazwischen sollen sie schichtweise linear verlaufen (Abb. 3.2).

Eine der ersten Formulierungen dieser Art wird von Epstein und Huttelmaier (1983) vorgestellt. Finite Schalenelemente mit schichtweise linearen Ansätzen für die Verschiebungen werden unter anderem von Reddy (1987), Gruttmann und Wagner (1994) sowie von Braun (1995) (siehe auch Braun et al. (1994)) beschrieben. Solche Formulierungen eignen sich besonders für die Berechnung von geschichteten Strukturen (Laminaten), da die schichtweisen Ansätze Diskontinuitäten

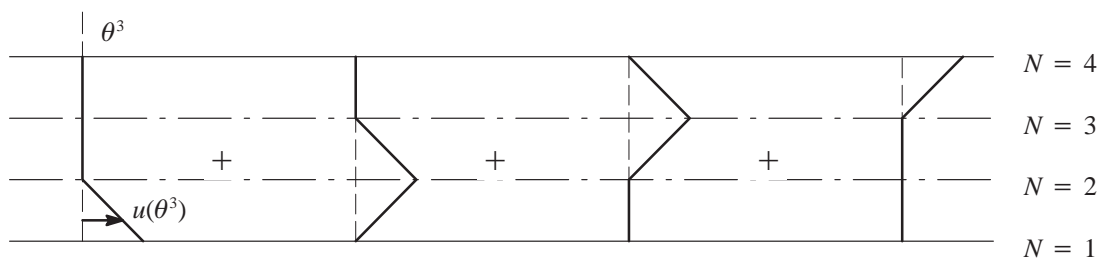


Abb. 3.2: Verschiebungsansätze in Dickenrichtung bei Mehrschicht-Modellen

in den Verschiebungsableitungen und damit beispielsweise Knicke in den Verschiebungsverläufen erlauben. Das ist mit hierarchischen Modellen in der oben beschriebenen Form nicht möglich. Solche Phänomene können auftreten, wenn die einzelnen Schichten aus Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften bestehen. Sie sind beispielsweise bei Sandwichkonstruktionen besonders ausgeprägt.

Der in Gleichung (3.2) dargestellte Ansatz ist deshalb  $C^0$ -kontinuierlich. Die  $C^0$ -Kontinuität ist jedoch nicht notwendig mit linearen Ansatzfunktionen innerhalb der Schichten verbunden. Grundsätzlich ist jede Kombination von  $C^n$ -Kontinuität und Polynomen  $m$ -ter Ordnung möglich, was einer  $h$ - $p$ -Version der Semidiskretisierung in Dickenrichtung entspricht.

### 3.2.3 Vorabintegration des Stoffgesetzes, kinematische und statische Variablen

Die in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 beschriebenen Schalenmodelle repräsentieren im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  die vollständig dreidimensionale Theorie. Dennoch schafft der Bezug zu einer ausgezeichneten Referenzfläche die Möglichkeit einer zweidimensionalen Betrachtung. Der entscheidende Schritt bei der Reduktion von drei auf zwei Dimensionen ist dabei die Vorabintegration des Stoffgesetzes in Dickenrichtung. Bei konventionellen Schalentheorien werden dabei aus reinen Materialeigenschaften, wie dem E-Modul oder der Querdehnzahl, strukturelle Eigenschaften, wie Dehn- und Biegesteifigkeiten. Weiterhin findet ein Übergang von Spannungen auf Schnittgrößen, wie Querkräfte und Momente statt. Zu Normal- und Schubverzerrungen kommen Krümmungen und Verwindungen hinzu. Allgemein können diese integrierten Größen als *statische und kinematische Variable* bezeichnet werden. Ihre physikalische Bedeutung im Zusammenhang mit der 7-Parameter-Formulierung wird in Kapitel 5 diskutiert (siehe auch Bischoff und Ramm (1999)).

Im Rahmen einer variationellen Formulierung bedeutet der Vorgang der Vorabintegration, daß das Funktional unter Ausnutzung der Annahmen (3.1) bzw. (3.2) zunächst in  $\theta^3$ -Richtung integriert wird, wonach sämtliche Größen nur noch von den Koordinaten der Referenzfläche abhängig sind (Abschnitte 4.4 und 4.5). Für Theorien niedriger Ordnung mit einfachen, linearen Stoffgesetzen kann diese Integration analytisch erfolgen. Bei nichtlinearen Stoffgesetzen und Theorien höherer Ordnung wird die Integration im Rahmen einer Formulierung mit finiten Elementen numerisch durchgeführt.

Die Integration einer bestimmten Spannungskomponente in Dickenrichtung führt zu  $n + 1$  unterschiedlichen statischen Variablen, wenn  $n$  die Ordnung in  $\theta^3$  dieser Komponente ist. Ein in Dickenrichtung linearer Verlauf der Normalspannungen  $S^{11}$  erlaubt beispielsweise die Definition von Membrankräften und Biegemomenten. Die Dickenintegration „filtert“ gleichsam die Anteile der Spannungsverläufe heraus, die entweder zu einer resultierenden Kraft oder einem resultierenden Moment führen. Dasselbe gilt sinngemäß für Anteile höherer Ordnung, wenn Legendre-Polynome verwendet werden. Die Vorabintegration ist sowohl für eine Interpretation der mechanischen Variablen als auch für die Effizienz des numerischen Modells von zentraler Bedeutung.

## 3.3 Linearer Verschiebungsansatz — Poisson-Dicken-Locking

Ein gemeinsames Mitglied beider in Abschnitt 3.2 besprochenen Modellklassen ist eine *6-Parameter-Formulierung* mit linearen Verschiebungsansätzen in Dickenrichtung. Der Verschiebungsansatz

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (3.3)$$

kann aus Gleichung (3.1) gewonnen werden, wenn die Summe bei  $N = 1$  abgebrochen wird. Im Mehrschichtmodell (3.2) ist diese Formulierung für  $\Phi_1(\theta^3) = 1 - \theta^3$  und  $\Phi_2(\theta^3) = \theta^3$  ebenfalls enthalten ( $n = 2$ ). Werden die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in Abhängigkeit der kontravarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{g}^i(\theta^3 = 0) \quad (3.4)$$

ausgedrückt,

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{a}^i \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = v_i \mathbf{a}^i, \quad \mathbf{w} = w_i \mathbf{a}^i, \quad (3.5)$$

so gilt

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1, \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2, \\ u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Um beurteilen zu können, ob dieses Modell höherer Ordnung bereits für die Implementierung vollständig dreidimensionaler Stoffgesetze geeignet ist, soll zunächst die Notwendigkeit einer Modifikation beim Mindlinschen Modell erläutert werden. Der Einfachheit halber geschieht das für eine geometrisch und materiell lineare Theorie.

Der Verschiebungsansatz für das 5-Parameter-Modell kann in Komponenten wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1, \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2, \\ u_3 &= v_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Im Vergleich zum 6-Parameter-Modell fehlt die Komponente  $w_3$  des Differenzvektors, also die Dickenänderung. Für dieses 5-Parameter-Modell verschwinden die linearisierten Normalverzerrungen in Dickenrichtung

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^3} = 0. \quad (3.8)$$

Die Normalverzerrungen parallel zur Schalenmittelfläche verlaufen dagegen linear in  $\theta^3$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta^1} = \frac{\partial v_1}{\partial \theta^1} + \theta^3 \frac{\partial w_1}{\partial \theta^1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial v_2}{\partial \theta^2} + \theta^3 \frac{\partial w_2}{\partial \theta^2}. \quad (3.9)$$

Aufgrund des Querdehneffekts entstehen dadurch Normalspannungen  $\sigma_{33}$  in Dickenrichtung

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \epsilon_{33} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right) = \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}), \quad (3.10)$$

die physikalisch nicht zu begründen sind ( $\lambda$  ist dabei die Lamé-Konstante nach Gleichung (2.17)). Wird ein Verschiebungsansatz nach (3.7) ohne weitere Überlegungen im Sinne einer Semidiskretisierung angewendet, so entsteht kein asymptotisch korrektes Modell. Die Lösung für gegen Null gehende Schalendicke entspricht nicht der 3D-Lösung. Auch für endliche Dicken bekommt

man damit unbrauchbare Ergebnisse. Aufgrund der künstlichen „Zwangsspannungen“  $\sigma_{33}$  verhält sich das Modell zu steif.

Mindlin (1951) löst dieses Problem durch die Annahme  $\sigma_{33} = 0$ . Über das Stoffgesetz können damit die Normalverzerrungen  $\epsilon_{33}$  in Abhängigkeit der beiden anderen Normalverzerrungskomponenten ausgedrückt werden.

$$\epsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu - 1} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) . \quad (3.11)$$

Dadurch entfällt der Zwang aus dem zu geringen Verschiebungsansatz. Die Schale kann sich in Dickenrichtung zwängungsfrei ausdehnen oder zusammenziehen. Der Nachteil dieses Modells ist die dazu notwendige statische Kondensation von  $\epsilon_{33}$  aus den konstitutiven Gleichungen.

Das 6-Parameter-Modell nach Gleichung (3.3) liefert in  $\theta^3$  konstante Normalverzerrungen in Dickenrichtung

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^3} = w_3 . \quad (3.12)$$

Für die Normalspannungen in Dickenrichtung gilt damit

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1 + \nu} \left( w_3 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta^1} + \theta^3 \frac{\partial w_1}{\partial \theta^1} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta^2} + \theta^3 \frac{\partial w_2}{\partial \theta^2} + w_3 \right) \right) . \quad (3.13)$$

Während also die Normalverzerrungen  $\epsilon_{33}$  in  $\theta^3$  konstant sind, verlaufen die energetisch konjugierten Spannungen  $\sigma_{33}$  wieder linear in Dickenrichtung. Im Vergleich zum 5-Parameter-Modell sorgt der konstante Anteil von  $\epsilon_{33}$  dafür, daß Membranzustände nun korrekt abgebildet werden können. Für Biegezustände entstehen jedoch immer noch parasitäre Normalspannungen in Dickenrichtung. Die linear verlaufenden Normalverzerrungen  $\epsilon_{11}$  und  $\epsilon_{22}$  führen durch den Querdehneffekt zu linear verlaufenden Zwangsspannungen  $\sigma_{33}$ . Der Zwang entsteht dadurch, daß die dazu energetisch konjugierten linear verlaufenden Normalverzerrungen  $\epsilon_{33}$  im Ansatz (3.3) nicht enthalten sind. Anschaulich kann dieser Sachverhalt anhand der Biegung eines Balkens erklärt werden (Verhoeven (1993), Braun et al. (1994)). Aufgrund der Querdehnung dehnen sich die auf der Druckseite liegenden Fasern in Querrichtung aus, diejenigen auf der Zugseite ziehen sich zusammen. Insgesamt bleibt die Dicke des Balkens dabei gleich. Die materielle Mittelfaser bewegt sich jedoch ein Stück in Richtung Zugseite. Der geometrische Zwang beim 6-Parameter-Modell, das eine solche Bewegung nicht abbilden kann, besteht also darin, daß die *materielle* Mittellinie in der *geometrischen* Mitte des Balkens festgehalten wird (Abschnitt 5.3.1).

Die Folge ist, daß das 6-Parameter-Modell sich für  $\nu \neq 0$  bei Biegung zu steif verhält. Dieser Versteifungs-Effekt ist bereits in den sechziger Jahren im Zusammenhang mit der Anwendung von linearen Kontinuums-elementen zur Berechnung von Schalentragwerken beobachtet worden. Oft wird er jedoch irrtümlich mit Konditionierungsproblemen erklärt, die zwar bei Berechnung von dünnen Schalen mit 3D-Elementen ebenfalls auftreten, jedoch nicht die Erklärung für diesen Effekt sind. Da der Versteifungseffekt von der Querdehnzahl oder Poisson-Zahl abhängt, wird er in dieser Arbeit mit *Poisson-Dickenlocking* bezeichnet, um ihn von einem zweiten, erst viel später entdeckten (Ramm et al. (1995)) Dickenlocking-Effekt begrifflich zu trennen (Abschnitt 6.4.10).

Der Grund für dieses zu steife Verhalten der 5- und 6-Parameter-Modelle kann auf die fehlende Balance von Verläufen energetisch konjugierter Verzerrungen und Spannungen zurückgeführt werden (Abb. 3.3), dasselbe Phänomen, das auch zu Locking bei finiten Elementen führt.

	5-Parameter-Modell mit 3D-Stoffgesetz	6-Parameter-Modell mit 3D-Stoffgesetz	7-Parameter-Modell mit 3D-Stoffgesetz
Normalverzerrungen $\epsilon^{33}$	0	konstant in $\theta^3$	linear in $\theta^3$
Normalspannungen $\sigma^{33}$	linear in $\theta^3$	linear in $\theta^3$	linear in $\theta^3$

Abb. 3.3: Verzerrungs- und Spannungsverläufe in Dickenrichtung für unterschiedliche Modelle

Eine Möglichkeit, Poisson-Dickenlocking zu vermeiden besteht darin, den linearen Anteil der Spannungen explizit als Null anzunehmen. Der entsprechende Anteil der Dehnungen muß dann wie bei einer 5-Parameter-Formulierung durch statische Kondensation aus den Werkstoffgleichungen eliminiert werden. Alternativ dazu kann das Verschwinden der transversalen Normalspannungen im Rahmen einer Penalty-Formulierung im schwachen Sinne erzwungen werden. Dadurch bleibt die erwünschte Eigenschaft der vollständig dreidimensionalen Materialbeschreibung erhalten.

In beiden Fällen wird die künstliche Versteifung durch eine Reduktion des Modells erreicht. In dieser Arbeit wird das Modell dagegen mit einem siebten Parameter erweitert und dadurch Poisson-Dickenlocking vermieden. In Kapitel 4 wird eine solche 7-Parameter-Formulierung beschrieben, bei der der Verschiebungsansatz nach (3.3) mit einer zusätzlichen, linearen Komponente der transversalen Normalverzerrungen mit Hilfe eines Mehrfeldfunktionals ergänzt wird. Es besteht auch die Möglichkeit, indirekt für einen solchen linearen Verlauf der transversalen Normalverzerrungen  $\epsilon_{33}$  zu sorgen, indem der Verlauf der Querverschiebungen  $u_3$  quadratisch angesetzt wird. Dieses Modell wird für den Sonderfall der Platten im folgenden Abschnitt besprochen.

### 3.4 Das (1,1,2)-Plattenmodell

#### 3.4.1 Linear-quadratischer Ansatz für die Verschiebungen

Hildebrand et al. (1949) beschreiben vermutlich die erste Plattentheorie, die die Anwendung vollständiger, dreidimensionaler Stoffgesetze ohne jegliche Modifikation erlaubt und die Bezeichnung „Theorie höherer Ordnung“ verdient. Der Verschiebungsansatz in Dickenrichtung ist so gewählt, daß keine künstlichen Zwangsspannungen auftreten. Es müssen also keine expliziten, einschränkenden Annahmen für die Spannungsverläufe gemacht werden,

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 , \\
 u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 , \\
 u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3 + (\theta^3)^2 \bar{w}_3 .
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Der Verlauf der Normalverzerrungen

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \theta^3} = w_3 + 2 \theta^3 \bar{w}_3
 \tag{3.15}$$

ist linear in  $\theta^3$ . Der siebte Freiheitsgrad  $\bar{w}_3$  beschreibt dabei die Bewegung der materiellen Mittelfaser relativ zur Deckel- und Bodenfläche der Platte und vermeidet dadurch Poisson-Dickenlocking.

Im Rahmen einer mathematischen Analyse einer Hierarchie von Plattentheorien, die mit Verschiebungsansätzen arbeiten, zeigen Paumier und Raoult (1996), daß mindestens Polynome erster Ordnung für die Verschiebungen parallel zur Mittelfläche und Polynome zweiter Ordnung für die Querverschiebungen benötigt werden, wenn das Modell asymptotisch korrekt sein soll, ohne daß das Stoffgesetz verändert werden müßte. Dieses  $(1,1,2)$ -Modell entspricht gerade dem Modell von Hildebrand et al. (1949), Gleichungen (3.14). Die Bezeichnung  $(1,1,2)$ -Modell ist in der Mathematik üblich und gibt die Polynomordnungen in  $\theta^3$  der drei Verschiebungskomponenten an (linear, linear, quadratisch).

### 3.4.2 Asymptotische Analyse

Bisher wurde in diesem Kapitel fast ausschließlich das „klassische“, typisch ingenieurmäßige Vorgehen bei der Entwicklung von Platten- und Schalenmodellen beschrieben. Es besteht darin, plausible Annahmen für den Verlauf von Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen in Dickenrichtung zu treffen. Ziel ist es dabei, das beobachtete Verhalten der Struktur möglichst gut zu approximieren. Die entscheidenden physikalischen Effekte sollen von dem Modell abgebildet werden können. Je komplexer das Modell gewählt wird, desto kleiner sollte dieser Fehler sein.

Ein anderer Zugang zu Platten- und Schalentheorien ist die asymptotische Analyse. Hier wird nicht die Frage gestellt, ob für eine gegebene, dünne Struktur eine Näherungslösung eines zweidimensionalen Modells noch eine „erträgliche“ Abweichung zur exakten dreidimensionalen Lösung hat. Es wird vielmehr gefordert, daß die Lösung für gegen Null gehende Dicke mit der dreidimensionalen übereinstimmt. Der asymptotische Grenzwert, den beide Modelle liefern, soll derselbe sein. Eine Theorie, die diese Forderung erfüllt, ist asymptotisch korrekt. Mit Hilfe der asymptotischen Analyse kann auch festgestellt werden, für welche Lasten und Randbedingungen eine Platten- oder Schalentheorie noch gültig ist. Außerdem besteht die Möglichkeit von Fehlerabschätzungen.

Die Kirchhoff-Theorie ist eine solche asymptotisch korrekte Theorie. Mehr als hundert Jahre nach ihrer Entwicklung durch Kirchhoff (1850) gelang es Morgenstern (1959), das zu beweisen. Morgenstern vertritt in diesem Aufsatz die Ansicht, daß „Annahmen“, wie das Ebenbleiben der Querschnitte oder die Normalenhypothese, nur „entweder überflüssig oder falsch“ sein könnten und leitet die Kirchhoffsche Theorie mathematisch rigoros aus den dreidimensionalen Gleichungen her. Die Kernaussage der asymptotischen Betrachtungsweise ist die, daß ein *führender Term* existiert, demgegenüber alle anderen Terme mit gegen Null gehender Dicke verschwinden. Aus der Sicht der Asymptotik bedeutet deswegen beispielsweise die Erweiterung um Querschubverzerrungen keinen Vorteil, da deren Einfluß ohnehin im Grenzübergang verschwindet. Eine Auswahl wichtiger Beiträge zur asymptotischen Analyse von Platten und Schalen wurde in Abschnitt 1.1 gegeben.

Im Rahmen der asymptotischen Analyse von Platten und Schalen sind Theorien höherer Ordnung insofern bedeutsam, als sie zur Behandlung von Randschichteffekten (boundary layers) dienen können. Es ist auch möglich zu zeigen, daß Theorien höherer Ordnung unter gewissen Voraussetzungen *asymptotisch besser* sind als andere, also schneller gegen die dreidimensionale Lösung konvergieren (Mielke (1995)).

In Rössle et al. (1999) wird für den Fall allseitiger Einspannung im Rahmen der linearisierten Elastizitätstheorie gezeigt, daß das (1,1,2)–Plattenmodell denselben asymptotischen Grenzwert liefert wie die Kirchhofftheorie und die dreidimensionale Theorie. Im Gegensatz zu den Formulierungen von Mindlin (1951) und Reissner (1944) ist dafür jedoch keine Kondensation des Stoffgesetzes notwendig. Das bestätigt die Ergebnisse von Paumier und Raoult (1996), die bereits vorher auf die asymptotische Korrektheit dieses Modells hingewiesen haben. Weiterhin werden in Rössle et al. (1999) Fehlerabschätzungen zur dreidimensionalen Lösung zur Verfügung gestellt. Die für das (1,1,2)–Modell zu erwartende Konvergenzordnung ist demnach nicht höher als die des Kirchhoff–Modells. Es ist also nicht asymptotisch besser. Numerische Erfahrungen mit solchen Modellen zeigen jedoch, daß die Abweichungen zur dreidimensionalen Lösung in der Regel geringer sind.

Die Beweistechnik in Rössle et al. (1999) ist im wesentlichen dieselbe, die von Morgenstern (1959) angewandt wurde, um zu zeigen, daß die Kirchhofftheorie asymptotisch korrekt ist. Der formale Beweis wird hier jedoch nicht wiederholt. Stattdessen sollen die beiden wesentlichen Schlußfolgerungen aus der asymptotischen Analyse zitiert werden:

- Es existiert ein mathematischer Beweis, daß das (1,1,2)–Modell ein asymptotisch korrektes Modell zur Berechnung von Platten unter Berücksichtigung der Dickenänderung ist. Zu seiner Anwendung sind keinerlei Änderungen im Stoffgesetz notwendig.
- Das (1,1,2)–Modell ist das niedrigste Modell in einer hierarchischen Reihe von reinen Verschiebungsmodellen, das diese Eigenschaften hat. Es kann also — im Rahmen dieser Hierarchie — als optimaler Kompromiß zwischen der Genauigkeit einer dreidimensionalen und der Effizienz einer zweidimensionalen Formulierung betrachtet werden.

Das in dieser Arbeit besprochene 7–Parameter–Modell entspricht insofern nicht dem (1,1,2)–Modell, als es nicht auf einer reinen Verschiebungsmethode basiert. Die Ergebnisse von Rössle et al. (1999) können also nicht ohne weiteres darauf übertragen werden. Dennoch gibt es starke Argumente für die Annahme, daß das 7–Parameter–Modell in dieser Form ebenfalls asymptotisch korrekt und in bezug auf die Effizienz dem (1,1,2)–Modell sogar überlegen ist (Abschnitt 5.5.2).

### 3.5 Zusammenfassung

Der Anwendungsbereich von Platten– und Schalentheorien ist nicht auf dünnwandige Flächentragwerke beschränkt. Durch Verfeinerung der Modellannahmen im Sinne einer Semidiskretisierung des Kontinuums in Dickenrichtung können „beliebig genaue“ Approximationen der dreidimensionalen Lösung erreicht werden. Die einzige Einschränkung besteht dabei darin, daß die Topologie der Struktur der einer Schale entspricht.

Platten– und Schalenmodelle höherer Ordnung können zur Analyse von Flächentragwerken eingesetzt werden, wenn die Genauigkeit konventioneller Theorien nicht mehr ausreicht, eine vollständig dreidimensionale Analyse jedoch zu aufwendig erscheint. Das 7–Parameter–Modell befindet sich dabei gerade an der Grenze zwischen den klassischen, schubweichen Schalentheorien und Theorien höherer Ordnung mit einem komplizierten Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung.

Das damit eng verwandte (1,1,2)–Plattenmodell erweist sich als das Glied einer Reihe hierarchischer Modelle, welches im Hinblick auf die Möglichkeit, vollständig dreidimensionale Stoffgesetze anwenden zu können, optimale Effizienz besitzt. Es ist mathematisch nachweisbar, daß dieses Modell asymptotisch korrekt ist. Eine asymptotische Analyse entsprechender Schalenmodelle ist Gegenstand aktueller Forschung.



## 4 7-Parameter-Schalenformulierung

### 4.1 Grundgedanke

Ausgangspunkt des in dieser Arbeit behandelten 7-Parameter-Schalenmodells ist der Wunsch, die Anzahl der globalen Freiheitsgrade bei einer Formulierung mit finiten Elementen möglichst gering zu halten, dabei aber gleichzeitig die Anwendung vollständig dreidimensionaler Stoffgesetze zu ermöglichen. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, daß ein linearer Ansatz für die Verschiebungen, also ein 6-Parameter-Modell, dazu im allgemeinen nicht ausreicht. Die Ursache dafür ist der konstante Verlauf der transversalen Normalverzerrungen  $E_{33}$ . Er führt bei Biegebeanspruchung und einer von Null verschiedenen Querdehnzahl zu linear verlaufenden, parasitären Normalspannungen in Dickenrichtung und damit zu Poisson-Dickenlocking. Bei bestimmten Stoffgesetzen, zum Beispiel Plastizität für große Verzerrungen, führt das zu sehr großen Versteifungen, die die Ergebnisse völlig unbrauchbar machen.

Eine mögliche Lösung dieses Problems besteht darin, einen quadratischen Ansatz für die Verschiebungen in Dickenrichtung zu wählen, um einen linearen Verlauf von  $E_{33}$  zu erhalten. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade auf sieben (Abschnitte 3.4 und 4.7).

Eine andere Vorgehensweise wird von Büchter und Ramm (1992a) vorgeschlagen. Hier wird der Verschiebungsansatz mit sechs Freiheitsgraden um einen Verzerrungsfreiheitsgrad erweitert. Dieser zusätzliche, siebte Freiheitsgrad wird mit Hilfe der EAS-Methode (Abschnitt 7.4) auf Ebene der finiten Elemente eingeführt. Durch die statische Kondensation dieses zusätzlichen Freiheitsgrades auf Elementebene bleibt die globale Anzahl von sechs Freiheitsgraden erhalten.

In der Vergangenheit wurde viel über die Bedeutung dieses siebten Parameters diskutiert. Einige Autoren sprechen von einer 6-Parameter-Formulierung und schreiben die EAS-Erweiterung dem Themenkomplex der „Elementtechnologie“ zu (Betsch et al. (1995), Eberlein und Wriggers (1997)).

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, die Herleitung des Schalenmodells von dessen Diskretisierung mit finiten Elementen zu trennen. In Abschnitt 3.2 wurde zwar gezeigt, daß die Modellannahmen als (Semi-)Diskretisierung in Dickenrichtung interpretiert werden können, diese ist jedoch nicht notwendig mit einer weiteren Diskretisierung in die beiden anderen Richtungen verbunden. Beide Approximationen werden *nacheinander* und *voneinander unabhängig* durchgeführt. Wird in den folgenden Kapiteln von einer Diskretisierung gesprochen, so ist damit die Diskretisierung der Schalengleichungen in einem zweidimensionalen Gebiet gemeint.

### 4.2 Kinematische Annahmen des 7-Parameter-Modells

Schalenmodelle werden oft als „Kinematikmodelle“ mit einem Ansatz für den Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung beschrieben (Kapitel 3). Die Verzerrungen folgen aus den kinematischen Gleichungen, die Spannungen bzw. Schnittgrößen aus den konstitutiven Beziehungen. Um asymptotisch korrekte Schalenmodelle zu erhalten, muß zur Herleitung dieser konstitutiven Beziehungen das ursprünglich dreidimensionale Stoffgesetz modifiziert werden.

Alternativ dazu können auch Ansätze für andere physikalische Größen, wie Verzerrungen und Spannungen, gemacht werden. Reissner (1944) (siehe auch Reissner (1945)) beschreitet diesen Weg bei der Herleitung seiner Version einer Theorie schubweicher Platten. Die variationelle Grundlage dafür ist das Prinzip von Hellinger–Reissner (Hellinger (1914), Reissner (1950)). In dieser Arbeit wird eine Theorie schubweicher Schalen, die auch deren Dickenänderung berücksichtigt, dargestellt. Die variationelle Basis ist eine modifizierte Form des Prinzips von Hu–Washizu. Im Sinn der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Modelle kann diese Vorgehensweise als Semidiskretisierung mit einer gemischten Methode bezeichnet werden.

#### 4.2.1 Variationelle Basis — modifiziertes Prinzip von Hu–Washizu

Die variationelle Basis des 7-Parameter-Schalenmodells ist das modifizierte Prinzip von Hu–Washizu, das in Abschnitt 2.5.4 beschrieben wurde. In dem zugrundeliegenden Funktional

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{t}^S) &= \int_V W^{\text{int}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV \\ &- \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

sind die freien Variablen die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$ , die zusammen mit den „kompatiblen“ (aus den Verschiebungen berechneten) Verzerrungen den Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} \quad (4.2)$$

bilden. Die Spannungen treten aufgrund der Orthogonalitätsbedingung (2.52) nur noch implizit in einem Randterm auf. In den Eulerschen Differentialgleichungen im Gebiet sind sie überhaupt nicht enthalten (Abschnitt 2.5.4).

#### 4.2.2 Ansätze in Dickenrichtung für Verschiebungen und Verzerrungen

Sämtliche kinematischen Größen, wie Verschiebungen und Verzerrungen, können berechnet werden, wenn die Geometrie der Schale in der Referenz- und der Momentankonfiguration bekannt ist (Abb. 4.1). Dazu werden die kovarianten Basisvektoren auf der Schalenmittelfläche ( $\theta^3 = 0$ ) aus den Richtungsableitungen der Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  und  $\bar{\mathbf{r}}$  berechnet,

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad , \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \quad . \quad (4.3)$$

Der Direktor  $\mathbf{a}_3$  wird senkrecht auf  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  errichtet und bekommt definitionsgemäß die Länge  $h/2$ , wobei  $h$  die Schalendicke ist.

$$\mathbf{a}_3 = \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad . \quad (4.4)$$

Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  eines beliebigen Punktes im Schalenraum in der Referenzkonfiguration kann dann mit Hilfe des entsprechenden Ortsvektors  $\mathbf{r}$  der Schalenmittelfläche und des Direktors  $\mathbf{a}_3$  ausgedrückt werden,

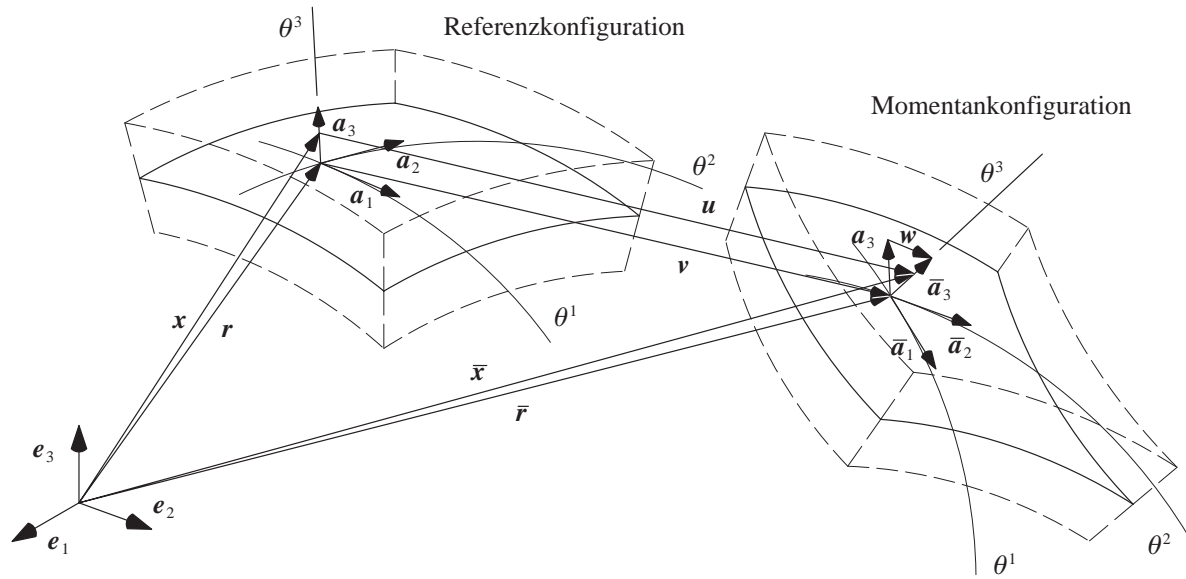


Abb. 4.1: Geometrie und Kinematik des 7-Parameter-Schalenmodells

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 . \quad (4.5)$$

Dasselbe gilt für die Momentankonfiguration,

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3 . \quad (4.6)$$

Damit sind beide Konfigurationen durch  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{a}_3$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{r}}$  und  $\bar{\mathbf{a}}_3$  eindeutig definiert.

Der Ortsvektor

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v} \quad (4.7)$$

eines Punktes der Mittelfläche in der verformten Lage liefert zusammen mit der Aktualisierung des Direktors mit Hilfe des Differenzvektors  $\mathbf{w}$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{w} \quad (4.8)$$

einen Ausdruck für die Verschiebung

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{v} + \theta^3 (\mathbf{a}_3 + \mathbf{w}) - \mathbf{r} - \theta^3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} \quad (4.9)$$

eines Punktes im Schalenraum. Damit hat die 7-Parameter-Schalenformulierung zunächst sechs Freiheitsgrade, die sich direkt aus dem Verschiebungsansatz in Dickenrichtung ergeben. Es sind dies die drei Verschiebungen  $v_1, v_2$  und  $v_3$  der Schalenmittelfläche sowie die drei Komponenten  $w_1, w_2$  und  $w_3$  des Differenzvektors.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 , \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 , \\ u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3 . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zusätzlich zu den Verzerrungen, die aus den Verschiebungen berechnet werden können, wird ein linearer Normalverzerrungsanteil in Dickenrichtung als siebter Parameter eingeführt, um das in Abschnitt 3.3 beschriebene Poisson-Dickenlocking zu vermeiden,

$$E_{33} = E_{33}^u + \tilde{E}_{33} . \quad (4.11)$$

Verwirklicht wird dieser Ansatz mit Hilfe des Mehrfeldfunktionals (4.1), das Ansätze für Verschiebungen und zusätzliche Verzerrungen erlaubt.

### 4.3 Kinematische Variablen

In der dreidimensionalen, nicht polaren Kontinuumsmechanik treten insgesamt sechs verschiedene Verzerrungsgrößen auf, nämlich drei Normalverzerrungen  $E_{11}, E_{22}, E_{33}$  und drei Schubverzerrungen  $E_{12}, E_{13}, E_{23}$ . Diese sechs Größen geben den gesamten Verformungszustand des Körpers an einem materiellen Punkt an.

Um bei der Herleitung von Schalentheorien ein dreidimensionales auf ein zweidimensionales Problem reduzieren zu können, müssen Krümmungen und Verzerrungen als energetisch konjugierte Größen zu den Schnittkräften definiert werden. Bei einer klassischen 5-Parameter-Schalenformulierung ohne Berücksichtigung der Verzerrungen in Dickenrichtung sind das die Membranverzerrungen, die Krümmungen sowie die Querschubverzerrungen.

Bei der 7-Parameter-Schalenformulierung kommen zu diesen bekannten Verzerrungen und Krümmungen weitere kinematische Variablen hinzu. Ihre Definition richtet sich nach dem Verlauf der Verzerrungen in Dickenrichtung. Für ihre Berechnung werden also zunächst die Komponenten des dreidimensionalen Verzerrungstensors benötigt.

#### 4.3.1 Ko- und kontravariante Basisvektoren des Schalenkörpers

Bei einer Schalenformulierung in krummlinigen Koordinaten orientiert sich die Darstellung sämtlicher Größen an den Tangentialräumen jedes Punktes und den zugehörigen Basisvektoren. Die kovarianten Basisvektoren an einem bestimmten Punkt des Schalenkörpers entsprechen nach Gleichung (2.1) den partiellen Richtungsableitungen des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  bzw.  $\bar{\mathbf{x}}$  zu diesem Punkt nach den krummlinigen Koordinaten,

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} , \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} . \quad (2.1)$$

Mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.2 gemachten Annahmen für die Geometrie und die Deformation des Schalenkörpers können die Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  und  $\bar{\mathbf{g}}_i$  in Abhängigkeit von Größen der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden,

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} , \quad (4.12)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} . \quad (4.13)$$

Mit der Definition der kovarianten Basisvektoren, Gleichung (4.3), gilt schließlich

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} , \quad (4.14)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} , \quad (4.15)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 , \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{a}}_3 . \quad (4.17)$$

#### 4.3.2 Komponenten des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors

Der Green–Lagrangesche Verzerrungstensor ist in der dreidimensionalen Kontinuumstheorie eine Funktion aller drei Koordinaten  $\theta^i$ . Durch die kinematischen Annahmen aus Abschnitt 4.2.2 ist der Verlauf der Komponenten von  $\mathbf{E}$  in Dickenrichtung jedoch von vornherein auf quadratische Polynome in  $\theta^3$  beschränkt.

Die Komponenten des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}}$  lassen sich somit in konstante, lineare und quadratische Anteile in  $\theta^3$  aufspalten,

$$E_{ij} = E_{ij}^u + \tilde{E}_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{h}{2}\theta^3 \beta_{ij} + \frac{h^2}{4}(\theta^3)^2 \gamma_{ij} . \quad (4.18)$$

Abweichend von Büchter und Ramm (1992a) werden hier bei den Definitionen von  $\beta_{ij}$  und  $\gamma_{ij}$  die Faktoren  $\frac{h}{2}$  und  $\frac{h^2}{4}$  eingeführt, um die mechanische Interpretation der resultierenden kinematischen und statischen Variablen sowie der zugehörigen Steifigkeiten zu vereinfachen. Auf diese Weise kann  $\beta_{11}$  beispielsweise direkt als Krümmung interpretiert werden (Abschnitt 5.1.2).

Die Ausdrücke für die Komponenten von  $\mathbf{E}^u$

$$E_{ij}^u = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = \alpha_{ij}^u + \frac{h}{2}\theta^3 \beta_{ij}^u + \frac{h^2}{4}(\theta^3)^2 \gamma_{ij}^u \quad (4.19)$$

in Abhängigkeit der kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche können durch Einsetzen der Gleichungen (4.14) bis (4.16) in (4.19) berechnet werden.

$$\alpha_{\alpha\beta}^u = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta) , \quad (4.20)$$

$$\beta_{\alpha\beta}^u = \frac{1}{h}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}) , \quad (4.21)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^u = \frac{2}{h^2}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}) , \quad (4.22)$$

$$\alpha_{\alpha 3}^u = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3) , \quad (4.23)$$

$$\beta_{\alpha 3}^u = \frac{1}{h}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3) , \quad (4.24)$$

$$\gamma_{\alpha 3}^u = 0 , \quad (4.25)$$

$$\alpha_{33}^u = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3) , \quad (4.26)$$

$$\beta_{33}^u = 0 , \quad (4.27)$$

$$\gamma_{33}^u = 0 . \quad (4.28)$$

Gemäß dem Ansatz in Gleichung (4.11) leisten die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{E}_{ij}$  nur zum linearen Anteil der Normalverzerrungen in Dickenrichtung einen Beitrag,

$$E_{ij} = E_{ij}^u \quad \text{für } (i,j) \neq (3,3) , \quad E_{33} = E_{33}^u + \tilde{E}_{33} = \alpha_{33}^u + \theta^3 \tilde{\beta} . \quad (4.29)$$

Die einzelnen Komponenten sind

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \alpha_{ij}^u, \\ \beta_{ij} &= \beta_{ij}^u \quad \text{für } (i,j) \neq (3,3), \quad \beta_{33} = \tilde{\beta}_{33}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}^u, \quad \gamma_{i3} = \gamma_{3i} = 0.\end{aligned}\tag{4.30}$$

#### 4.4 Statische Variablen

Ähnlich wie bei den kinematischen Größen führt die Reduktion von drei auf zwei Dimensionen auf die Definition resultierender statischer Variablen. In konventionellen Balken-, Platten- und Schalentheorien werden sie als Schnittgrößen bezeichnet, da sie die resultierenden Kräfte und Momente in einem senkrecht zur Mittellinie bzw. -fläche geführten Schnitt repräsentieren. Für eine 5-Parameter-Schalentheorie sind diese Schnittgrößen die Membrankräfte, Momente und Querkräfte. Sie stellen die energetisch konjugierten Größen zu den Verzerrungen und Krümmungen dar. Bei der 7-Parameter-Formulierung entstehen zusätzlich dazu weitere statische Größen, die man nicht alle als Schnittgrößen oder „Spannungsergebende“ (stress resultants) bezeichnen kann. Die physikalische Bedeutung dieser statischen Variablen höherer Ordnung wird in Kapitel 5 dieser Arbeit näher untersucht (siehe auch Bischoff und Ramm (1999)).

Das eigentliche Ziel der Definition statischer Variablen aus den Spannungen ist es, die Integration über das Schalenvolumen  $V$  in eine Integration über die Schalenmittelfläche  $A$  umzuwandeln. Die erste Voraussetzung dafür ist, eine Beziehung zwischen einem differentiellen Volumenelement  $dV$  und einem differentiellen Flächenelement  $dA$  herzustellen. Bezeichnet man den Betrag des Schalenshifters

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^i\tag{4.31}$$

mit  $\hat{\mu} = |\mathbf{Z}|$ , so gilt

$$\int_V (\cdot) dV = \int_A \int_{-1}^1 (\cdot) \hat{\mu} d\theta^3 dA.\tag{4.32}$$

Aus der Darstellung des differentiellen Volumenelements in Abhängigkeit der kovarianten Basisvektoren des Schalenraums

$$dV = |\mathbf{J}| d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1, \quad |\mathbf{J}| = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3,\tag{4.33}$$

und des differentiellen Flächenelements in Abhängigkeit der kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche

$$dA = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| d\theta^2 d\theta^1\tag{4.34}$$

folgt mit

$$dV = \hat{\mu} d\theta^3 dA\tag{4.35}$$

für den Betrag des Schalenshifters

$$\hat{\mu} = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.\tag{4.36}$$

Die statischen Variablen können dann wie folgt definiert werden.

$$n^{ij} = \int_{-1}^1 S^{ij} \hat{\mu} d\theta^3, \quad (4.37)$$

$$m^{ij} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{ij} \frac{h}{2} \hat{\mu} d\theta^3, \quad (4.38)$$

$$s^{ij} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^2 S^{ij} \frac{h^2}{4} \hat{\mu} d\theta^3. \quad (4.39)$$

Darin sind die bekannten Membrankräfte  $n^{\alpha\beta}$  und Querkräfte  $n^{\alpha 3}$  sowie die Momente  $m^{\alpha\beta}$  enthalten. Die physikalische Bedeutung sämtlicher kinematischer und statischer Variablen wird in Abschnitt 5.4 ausführlich diskutiert.

Die Verzerrungsenergie kann damit, zusammen mit den Definitionen der kinematischen Variablen (4.18), als Integral über die Schalenmittelfläche dargestellt werden.

$$W_{2D}^{int} = \frac{1}{2} (n^{ij} \alpha_{ij} + m^{ij} \beta_{ij} + s^{ij} \gamma_{ij}) \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow \Pi_{HW}^{mod,int} = \int_V W^{int} dV = \int_A W_{2D}^{int} dA. \quad (4.41)$$

## 4.5 Vorabintegration des Stoffgesetzes

In den vorangegangenen Abschnitten wurden kinematische Variablen  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  und  $\gamma_{ij}$  sowie statische Variablen  $n^{ij}$ ,  $m^{ij}$  und  $s^{ij}$  eingeführt, um eine zweidimensionale Darstellung der dreidimensionalen Schalengleichungen zu erhalten. Der letzte Schritt der Reduktion auf zwei Dimensionen ist die Vorabintegration des Stoffgesetzes. Damit werden diese Größen direkt miteinander in Beziehung gesetzt. Nachdem bisher keinerlei einschränkende Annahmen oder Näherungen vorgenommen wurden (mit Ausnahme des Verschiebungsansatzes (4.9)), kommen an dieser Stelle weitere Unschärfen in die Formulierung hinein, deren Auswirkungen von Büchter (1992) ausführlich diskutiert werden.

Mit der Definition

$$D_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^K C^{ijkl} \left(\frac{h}{2}\right)^K \hat{\mu} d\theta^3, \quad K \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (4.42)$$

folgt für den Fall einer St.–Venant–Kirchhoffschen Materialbeschreibung das „Materialgesetz“ für das 7–Parameter–Schalenmodell

$$\begin{bmatrix} n^{ij} \\ m^{ij} \\ s^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} \\ D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & D_4^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \\ \gamma_{ij} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Der Betrag des Schalenshifters bei der Berechnung des Stoffgesetzes wird näherungsweise als

$$\hat{\mu} \approx |\mathbf{a}_3| = \frac{h}{2} \quad (4.44)$$

angenommen. Der Fehler, der damit begangen wird, besteht darin, daß die Veränderlichkeit der Steifigkeit „infinitesimaler Materialfasern“ durch deren über die Dicke veränderliche Länge vernachlässigt wird.

Weiterhin kann der Verlauf der Verzerrungen in Dickenrichtung als linear angenommen werden, wenn die Gradienten der Dickenänderung und der Querschubverzerrungen klein sind. Die in  $\theta^3$  quadratischen Terme können dann gestrichen werden,

$$\mathbf{E} \approx \alpha_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j + \frac{h}{2} \theta^3 \beta_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (4.45)$$

Gleichung (4.43) vereinfacht sich dadurch zu

$$\begin{bmatrix} n^{ij} \\ m^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Durch diese Annahme wird der Einfluß der quadratischen Terme bei der Längsdehnung von Materialfasern parallel zur Mittelfläche im Biegeanteil und bei Dickenänderungen vernachlässigt (vgl. Abb. 5.3). Ein merklicher Fehler kann daher nur bei starken Biegeverformungen verhältnismäßig dicker oder stark gekrümmter Schalen (Büchter et al. (1994)), sowie bei starken Gradienten in der Dickenänderung auftreten.

Die Verzerrungsenergie in Abhängigkeit der kinematischen Variablen ist damit

$$W_{2D}^{int} = \frac{1}{2} \left( \alpha_{ij} D_0^{ijkl} \alpha_{kl} + 2 \alpha_{ij} D_1^{ijkl} \beta_{kl} + \beta_{ij} D_2^{ijkl} \beta_{kl} \right). \quad (4.47)$$

Aussagen über die Größenordnung der Fehler, die aus diesen beiden Annahmen folgen, findet man beispielsweise bei Büchter (1992).

Üblicherweise werden bei Platten- und Schalentheorien Schubkorrekturfaktoren eingeführt, um einen realistischeren Verlauf der Querschubspannungen über die Dicke zu berücksichtigen. Das ist auch bei der 7-Parameter-Theorie hilfreich und wird in Kapitel 5 besprochen.

Für nichtlineare Materialmodelle, die nicht in der Form (4.43) dargestellt werden können, bleibt der Vorgang der Dickenintegration prinzipiell derselbe. Trotzdem können dieselben Algorithmen verwendet werden, wie bei reinen Kontinuums-elementen, da für die Dickenintegration keine speziellen Annahmen in bezug auf das Stoffgesetz erforderlich sind. Für Beispiele zur Anwendung des 7-Parameter-Modells auf materiell nichtlineare Probleme wird auf die Literatur verwiesen (Büchter et al. (1994), Betsch et al. (1996), Wriggers et al. (1996)).



## 4.6 Starke Form der Bestimmungsgleichungen

Obwohl für die Formulierung finiter Elemente nicht benötigt, sollen hier die Eulerschen Differentialgleichungen für das 7-Parameter-Modell auf der Basis des modifizierten Prinzips von Hu–Washizu hergeleitet werden. Dabei steht nicht ihre mathematische, sondern ihre anschauliche, physikalische Bedeutung im Vordergrund. Nach der Herleitung der Gleichungen wird dazu die Diskussion der Bedeutung der Orthogonalitätsbedingung aus Abschnitt 2.5.5 wiederaufgenommen.

Zur Vereinfachung und ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden im Folgenden nur Volumenlasten im Rahmen eines reinen Neumann-Problems berücksichtigt. Damit verschwinden die Randterme, die die statischen und kinematischen Randbedingungen enthalten. Das vereinfacht deutlich die Handhabung der ohnehin etwas länglichen Ausdrücke.

Das auf diesen Sonderfall beschränkte, modifizierte Prinzip von Hu–Washizu lautet

$$\delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} = \int_V \left[ \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \mathbf{E}^u} : \delta \mathbf{E}^u - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV = 0 . \quad (4.48)$$

Das Integral über die Volumenlasten läßt sich unter der Annahme, daß  $\mathbf{b}$  höchstens linear in  $\theta^3$  verläuft,

$$\mathbf{b}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{b}_C(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{b}_L(\theta^1, \theta^2) \quad (4.49)$$

und mit Gleichung (4.44) in ein Flächenintegral umwandeln,

$$\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV \approx \int_A \rho \left[ h \mathbf{b}_C \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{h}{3} \mathbf{b}_L \cdot \delta \mathbf{w} \right] dA . \quad (4.50)$$

Die Definition der Tensoren

$$\delta \alpha^u = \delta \alpha_{ij}^u \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j , \quad \delta \beta^u = \delta \beta_{ij}^u \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j , \quad (4.51)$$

$$\delta \tilde{\beta} = \frac{h}{2} \theta^3 \delta \beta_{33} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3 = \theta^3 \delta \tilde{\beta} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3 \quad (4.52)$$

reduziert zusammen mit den Gleichungen (4.41) und (4.50) das Prinzip (4.48) auf zwei Dimensionen.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} &= \int_A \left[ \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \alpha^u} : \delta \alpha^u + \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \beta^u} : \delta \beta^u + \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \tilde{\beta}} : \delta \tilde{\beta} \right] dV \\ &\quad - \int_A \rho \left[ h \mathbf{b}_C \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{h}{3} \mathbf{b}_L \cdot \delta \mathbf{w} \right] dA = 0 . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Es wird nun weiterhin angenommen, daß

$$\text{grad } \mathbf{u} \approx \text{grad } \mathbf{v} + \theta^3 \text{grad } \mathbf{w} \quad (4.54)$$

gilt. Damit kann der Deformationsgradient in konstante und lineare Anteile in  $\theta^3$  aufgespalten werden,

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{g} \approx \mathbf{F}_C + \theta^3 \mathbf{F}_L . \quad (4.55)$$

Für eine detaillierte Diskussion verschiedener Annahmen bei der Vorabintegration über die Dicke siehe Büchter (1992). Der konstante und lineare Anteil des Deformationsgradienten sind dann

$$\mathbf{F}_C = \text{grad } \mathbf{v} + \mathbf{g} , \quad (4.56)$$

$$\mathbf{F}_L = \text{grad } \mathbf{w} . \quad (4.57)$$

Damit kann die Variation der mit  $\mathbf{u}$  „kompatiblen“ Verzerrungen, unter Vernachlässigung der in  $\theta^3$  quadratischen Terme

$$\delta \mathbf{E}^u = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} \approx \delta \boldsymbol{\alpha}^u + \frac{h}{2} \theta^3 \delta \boldsymbol{\beta}^u \quad (4.58)$$

in Abhängigkeit von Größen der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden.

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^u + \frac{h}{2} \theta^3 \delta \boldsymbol{\beta}^u = (\mathbf{F}_C^T + \theta^3 \mathbf{F}_L^T) \cdot (\text{grad } \delta \mathbf{v} + \theta^3 \text{grad } \delta \mathbf{w}) \quad (4.59)$$

$$\Rightarrow \delta \boldsymbol{\alpha}^u = \mathbf{F}_C^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{v} , \quad (4.60)$$

$$\delta \boldsymbol{\beta}^u = \frac{2}{h} (\mathbf{F}_C^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{w} + \mathbf{F}_L^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{v}) . \quad (4.61)$$

Für die Variation der Verzerrungsenergie nach den statischen Variablen ergibt sich

$$\frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} : \delta \boldsymbol{\alpha}^u = \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} : \mathbf{F}_C^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{v} = \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} : \text{grad } \delta \mathbf{v} , \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} : \delta \boldsymbol{\beta}^u = \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} : \frac{2}{h} (\mathbf{F}_C^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{w} + \mathbf{F}_L^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{v}) , \quad (4.63)$$

$$= \frac{2}{h} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} : \text{grad } \delta \mathbf{w} + \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} : \text{grad } \delta \mathbf{v} \right) .$$

Nach partieller Integration (Produktregel (A.9) und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (A.11)) der ersten beiden Terme in Gleichung (4.53)

$$\int_A \text{grad } \delta \mathbf{v} : \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} dA = \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_C^{\alpha^u} \cdot \delta \mathbf{v} ds - \int_A \delta \mathbf{v} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} \right) dA , \quad (4.64)$$

$$\int_A \text{grad } \delta \mathbf{w} : \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} dA = \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_C^{\beta^u} \cdot \delta \mathbf{w} ds - \int_A \delta \mathbf{w} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) dA , \quad (4.65)$$

$$\int_A \text{grad } \delta \mathbf{v} : \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} dA = \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_L^{\beta^u} \cdot \delta \mathbf{v} ds - \int_A \delta \mathbf{v} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{int}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) dA , \quad (4.66)$$

kann nach den Variationen von  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  sortiert werden.

$$\begin{aligned}
\delta II_{HW}^{\text{mod}} = & \int_A \left[ \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}} : \delta \tilde{\boldsymbol{\beta}} - \delta \mathbf{v} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} \right) - \delta \mathbf{w} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) \right. \\
& \left. - \delta \mathbf{v} \cdot \text{div} \left( \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) - \rho \left[ h \mathbf{b}_C \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{h}{3} \mathbf{b}_L \cdot \delta \mathbf{w} \right] \right] dA \quad (4.67) \\
& - \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_C^{\alpha^u} \cdot \delta \mathbf{v} \, ds - \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_C^{\beta^u} \cdot \delta \mathbf{w} \, ds - \int_{\partial A_s} \mathbf{t}_L^{\beta^u} \cdot \delta \mathbf{v} \, ds = 0 .
\end{aligned}$$

Dabei gelten für die neu entstandenen Randterme die folgenden Abkürzungen.

$$\mathbf{t}_C^{\alpha^u} = \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad \mathbf{t}_C^{\beta^u} = \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad \mathbf{t}_L^{\beta^u} = \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (4.68)$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgen die Eulergleichungen des modifizierten Prinzips von Hu–Washizu im Gebiet

$$\text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} \right) + \text{div} \left( \mathbf{F}_L \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) + \rho h \mathbf{b}_C = \mathbf{0} , \quad (4.69)$$

$$\text{div} \left( \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} \right) + \rho \frac{h}{3} \mathbf{b}_L = \mathbf{0} , \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \mathbf{0} . \quad (4.71)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^u} = \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \alpha_{ij}^u} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = n^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{n}^u , \quad \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \boldsymbol{\beta}^u} = \mathbf{m}^u , \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \frac{\partial W_{2D}^{\text{int}}}{\partial \beta_{33}} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 = D_2^{33kl} \beta_{kl} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 = \tilde{m}^{33} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 \quad (4.73)$$

können die Eulergleichungen des 7-Parameter-Schalenmodells in Abhängigkeit der statischen Variablen ausgedrückt werden,

$$\text{div} (\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{n}^u) + \text{div} (\mathbf{F}_L \cdot \mathbf{m}^u) + \rho h \mathbf{b}_C = \mathbf{0} , \quad (4.74)$$

$$\text{div} (\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{m}^u) + \rho \frac{h}{3} \mathbf{b}_L = \mathbf{0} , \quad (4.75)$$

$$\tilde{m}^{33} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{m}^{33} = 0 . \quad (4.76)$$

Die ersten beiden Gleichungen repräsentieren offensichtlich die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte (4.74) und die Momente (4.75). Der zweite Term in Gleichung (4.74) berücksichtigt

den aus der Krümmung resultierenden Beitrag der in Dickenrichtung linear verlaufenden Spannungen zum Membrananteil. Die dritte Gleichung fordert explizit, daß der zu den zusätzlichen Verzerrungen energetisch konjugierte Anteil der statischen Variablen  $m^{33} = \tilde{m}^{33}$  verschwindet.

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß die Null auf der rechten Seite von Gleichung (4.76) eine Folge der Orthogonalitätsbedingung (2.52) bei der Formulierung des modifizierten Prinzips von Hu–Washizu ist (Gleichung (2.54)). Die Forderung nach der Orthogonalität der Spannungen und zusätzlichen Verzerrungen, hat also zur Folge, daß die zu den zusätzlichen Verzerrungen energetisch konjugierten Spannungen verschwinden. Die aus den Verschiebungen berechneten Spannungen bzw. statischen Variablen  $n^u$  und  $m^u$  müssen also gegen die variationell konsistenten Spannungen konvergieren.

Das eben hergeleitete System von Differentialgleichungen ist prinzipiell auch analytischen Lösungsmethoden zugänglich. Es repräsentiert die kinematischen und statischen Gleichungen eines Schalenmodells mit Dickenänderung und hat als Nebenbedingung eine Orthogonalitätsbedingung. Diese Bedingung garantiert letzten Endes die punktweise Erfüllung des Stoffgesetzes a priori. Die unbekanntenen Größen sind die Verschiebungen  $v$ , die Differenzverschiebungen  $w$  und die zusätzliche kinematische Variable  $\tilde{\beta}$ . All diese Größen sind auf der Schalenmittelfläche stetig verteilt. Es hat in diesem Sinne also noch keine Diskretisierung mit finiten Elementen stattgefunden. In dieser Form kann das 7–Parameter–Schalenmodell also durchaus auch als Schalentheorie begriffen werden.

Selbstverständlich sind zu einer rigorosen Darstellung einer Schalentheorie detaillierte Angaben über die vorgenommenen Vereinfachungen (vgl. Gleichung (4.54)) und Abschätzungen der daraus resultierenden Fehler notwendig. Auf die Diskussion dieser Details und die Angabe von Fehlerabschätzungen wird an dieser Stelle jedoch verzichtet. Es wird trotzdem deutlich, daß die Ergänzung eines siebten Parameters mit der „EAS–Methode“ auch im Sinne einer kontinuierlichen Theorie möglich ist, die nicht notwendigerweise auf eine Formulierung mit finiten Elementen hinausläuft.

#### 4.7 Alternative Formulierungen

Außer dem 7–Parameter–Modell von Büchter und Ramm (1992a) tauchen noch andere dreidimensionale Schalenformulierungen in der Literatur auf. Eine der wichtigsten Gruppen stellen dabei Modelle dar, die mit reinen Verschiebungsansätzen arbeiten. Anstatt das 6–Parameter–Modell (Abschnitt 3.3) mit Hilfe eines Mehrfeldfunktionals durch einen linearen Verzerrungsansatz in Dickenrichtung zu ergänzen, werden diese Verzerrungen indirekt mit Hilfe eines quadratischen Verschiebungsansatzes eingebracht.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 , \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 , \\ u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3 + (\theta^3)^2 \bar{w}_3 . \end{aligned} \tag{4.77}$$

Dieser Ansatz entspricht genau demjenigen des (1,1,2)–Modells für Platten und geht deshalb vermutlich bereits auf Hildebrand et al. (1949) zurück. Ein finites Plattenelement, dem dieser Ansatz zugrunde liegt wird von Verhoeven (1993) beschrieben. Entsprechende Schalenformulierungen und deren numerische Umsetzung mit finiten Elementen werden von Kühorn und Schoop (1992) sowie Sansour (1995) (siehe auch Bischoff (1993)) vorgestellt.

Diese Formulierungen haben gegenüber der in dieser Arbeit besprochenen Version eines 7-Parameter-Modells den Nachteil, daß auch global sieben Freiheitsgrade pro Knoten verwendet werden, der numerische Aufwand also höher ist. Auf die Rechengenauigkeit wirkt sich dieser Mehraufwand im allgemeinen nicht aus. Allerdings besteht bei den Verschiebungsmodellen die Möglichkeit, statische und kinematische Randbedingungen für den siebten Freiheitsgrad vorzugeben. Außerdem ist für den konstanten Anteil der Querschubverzerrungen kein Schubkorrekturfaktor notwendig, da die Querschubverzerrungen bereits im geometrisch linearen Anteil

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha 3}^{lin} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,3} + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}) \\
 &= \frac{1}{2}[(\mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) \cdot (\mathbf{w} + 2\theta^3 \bar{\mathbf{w}}) + \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha} + (\theta^3)^2 \bar{\mathbf{w}}_{,\alpha})]
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

quadratisch in  $\theta^3$  verlaufen.

Um die Anzahl der globalen Freiheitsgrade auf sechs zu reduzieren, schlägt Sansour (1995) (siehe auch Parisch (1995)) vor, den quadratischen Verschiebungsanteil als inkompatible Verschiebung einzuführen, die keine kinematischen Rand- oder Übergangsbedingungen zu erfüllen hat. Der siebte Parameter kann dann ebenfalls auf Elementebene kondensiert werden. Damit fallen die meisten Vor- und Nachteile im Vergleich zum Modell von Büchter und Ramm (1992) weg. Lediglich der Unterschied im Verlauf der Querschubverzerrungen bleibt erhalten. Der enge Zusammenhang zwischen beiden Formulierungen läßt sich mit der bereits von Simo und Rifai (1990) erwähnten Äquivalenz von EAS-Elementen und Elementen mit inkompatiblen Verschiebungsansätzen (Taylor et al. (1976)) erklären.

Einige Autoren (Parisch (1995), Miehe (1998), Seifert (1998)) schlagen einen umgekehrten Weg in Richtung dreidimensionaler Schalenelemente ein, indem sie ‘schalenartige 3D-Elemente’ formulieren. Solche Modelle werden zuweilen auch als *oberflächenorientierte* Schalentheorien (Schoop (1986)) bezeichnet. Die Idee ist dabei, im Grunde Kontinuumselemente zu verwenden, sie aber gezielt so zu formulieren, daß sie günstige Konvergenzeigenschaften besitzen, wenn eine ihrer drei Ausdehnungen viel kleiner ist als die beiden anderen. Die Kinematik des Schalenkörpers wird also nicht ausgehend von einer Mittelfläche über Differenzverschiebungen abgebildet, sondern die Verschiebungen werden zwischen Knoten an den Schalenlaibungen interpoliert. Für eine Formulierung mit finiten Elementen bedeutet das, daß wie bei den Schalenmodellen beispielsweise die ANS-Methode für zwei der drei Schubverzerrungskomponenten eingesetzt wird, die definitionsgemäß als ‘Querschubverzerrungen’ betrachtet werden. Es ist auch möglich, eine Vorabintegration des Stoffgesetzes in eine ausgezeichnete Richtung vorzunehmen, so daß die Effizienz dieser Elemente der von Schalenelementen entspricht.

Die Hauptunterschiede zwischen schalenartigen 3D-Elementen und dreidimensionalen Schalenelementen bestehen im Pre- und Postprocessing, also bei der Modellbildung, der Vernetzung sowie bei der Darstellung und Interpretation der Ergebnisse. Die Unterschiede zwischen dreidimensionalen Schalenelementen und Kontinuumselementen werden in Abschnitt 8.6 diskutiert.

## 4.8 Zusammenfassung

Das 7-Parameter-Schalenelementmodell kann als kontinuierliche Theorie, ohne Bezug zu einer Formulierung mit finiten Elementen, aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie hergeleitet werden. Dazu werden, im Rahmen einer variationellen Formulierung auf der Basis eines Mehrfeldfunk-

tionals, geeignete Annahmen für den Verlauf von Verschiebungen und Verzerrungen in Dickenrichtung gemacht. Darüberhinaus werden Terme vernachlässigt, deren Berücksichtigung nicht notwendig ist, um vollständig dreidimensionale Stoffgesetze verwenden zu können. Diese Annahmen beschränken den Verlauf aller Verzerrungs- und Spannungskomponenten auf lineare Funktionen in Dickenrichtung.

Die schalentypische Vorabintegration des Stoffgesetzes über die Dicke bleibt erhalten. Zusätzlich zu den von konventionellen Schalentheorien bekannten Schnittgrößen entstehen dabei allerdings weitere statische Variablen, die weder als Schnittgrößen noch als Kräfte interpretiert werden können. Ihre Bedeutung und die der entsprechenden kinematischen Variablen wird im folgenden Kapitel ausführlich diskutiert.

Das Modell hat pro materiellem Punkt der Schalenmittelfläche sieben Freiheitsgrade, die die Verschiebungen der Mittelfläche und die Deformation des Querschnitts beschreiben. Bis auf Unterschiede beim Verlauf der Querschubverzerrungen und den Randbedingungen entspricht dieses Modell reinen Verschiebungsmodellen mit einem quadratischen Verlauf der Querverschiebungen über die Dicke. Die 7-Parameter-Schalenformulierung ist geeignet, Effekte großer Verzerrungen zusammen mit beliebigen dreidimensionalen Stoffgesetzen zu berücksichtigen.

## 5 Die Bedeutung der statischen und kinematischen Variablen

Schalentheorien sind nicht nur deshalb so bedeutsam, weil sie die effiziente Berechnung von dünnwandigen Flächentragwerken ermöglichen, sondern auch, weil sie einen einfachen mechanischen Einblick in deren wesentliches Tragverhalten vermitteln können. Begriffe wie „Membranzustand“ oder „dehnungslose Verformungen“ können aus der bloßen Betrachtung einer Schale als dreidimensionalen Körper nicht entstehen. Es ist deshalb wichtig, sich darüber im Klaren zu sein, welche Verformungszustände mit welchen kinematischen Größen gekoppelt sind und welche Kräfte dabei wirken.

Bei 5-Parameter-Modellen sind die kinematischen Größen die Membranverzerrungen, Krümmungen und Querschubverzerrungen. Die dazu energetisch konjugierten Kraftgrößen sind die Membrankräfte, Biegemomente und Querkkräfte. Die mechanische Bedeutung dieser Variablen ist Ingenieuren vertraut. Ihre Kenntnis ist eine wichtige Voraussetzung für eine sinnvolle Modellbildung und zur Überprüfung der Plausibilität von Rechenergebnissen.

Beim 7-Parameter-Schalenmodell entstehen durch die beiden zusätzlichen Freiheitsgrade weitere kinematische und statische Variablen. Das führt zum einen dazu, daß bestimmte dreidimensionale Effekte näherungsweise berücksichtigt werden können, die bei einer Schalentheorie ohne Dickenänderung vernachlässigt werden. Andererseits erweist es sich jedoch als schwierig, diese Effekte höherer Ordnung mechanisch zu klassifizieren und einleuchtende, aussagekräftige Kurzbezeichnungen dafür zu finden. Insbesondere ist bei den statischen Variablen die Interpretation als Schnittgröße im Sinne einer resultierenden Kraft oder eines resultierenden Momentes nicht immer möglich (Abschnitt 5.4).

### 5.1 Modellproblem: zweidimensionaler Balken mit Dickenänderung

Einige der mechanischen Phänomene, die bei Schalen auftreten, können bereits bei einem einfachen ebenen Balken beobachtet werden. Das gilt für die „Membran“- und Biegezustände, zusammen mit den zugehörigen Normal- und Querkkräften sowie den Biegemomenten. Einzig die Verwindung der Schale, die der Torsion des Balkens entspricht, findet beim ebenen Balken keine Entsprechung.

Der Balken kann also als Modellproblem dienen, um die grundlegenden Unterschiede zwischen einer Formulierung mit und ohne Dickenänderung zu untersuchen. Das hat den Vorteil, daß die mathematische Formulierung sehr viel einfacher ist und damit den Blick auf die mechanische Bedeutung der auftretenden Terme nicht verstellt. Das 7-Parameter-Modell für Schalen wird für diesen Sonderfall zu einem 5-Parameter-Balkenmodell. Im Laufe der Untersuchungen wird außerdem eine Einschränkung auf gerade Balken vorgenommen um die mathematische Formulierung weiter zu vereinfachen. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse werden im darauffolgenden Abschnitt auf Schalen übertragen.

#### 5.1.1 Kinematische Annahmen für den 2D-Balken

Die Bezeichnungen werden im wesentlichen aus Kapitel 4 übernommen. Lateinische Indizes nehmen allerdings nur die Werte 1 oder 3 an, was auch für die Summationskonvention gilt, also beispielsweise

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = u_1 \mathbf{g}^1 + u_3 \mathbf{g}^3 . \quad (5.1)$$

Die variationelle Basis der Balkenformulierung ist die modifizierte Form des Prinzips von Hu–Washizu, die in Abschnitt 2.5.4 beschrieben ist.

Ein 5–Parameter–Balkenmodell (Abb. 5.1) kann durch den Ansatz

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} , \quad -1 \leq \theta^3 \leq 1 \quad (5.2)$$

für die Verschiebungen und

$$\beta_{33} = \frac{2}{h} \tilde{\beta} , \quad \text{mit } h = \text{Balkendicke} \quad (5.3)$$

für die Verzerrungen definiert werden. Es entspricht dem in Kapitel 4 beschriebenen 7–Parameter–Schalenmodell. Die Freiheitsgrade sind die Verschiebungen  $v_1, v_3$ , die Differenzverschiebungen  $w_1, w_3$  sowie die erweiterte Verzerrungskomponente  $\tilde{\beta}$ .

Die Komponenten des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors  $E_{ij} = E_{ij}^u + \tilde{E}_{ij}$  setzen sich aus den verschiebungsabhängigen Verzerrungen

$$E_{ij}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) , \quad \text{mit } \mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 + \theta^3 \mathbf{a}_{3,1} , \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \quad (5.4)$$

(vgl. Gleichungen (4.14) und (4.16)) und den erweiterten Verzerrungen

$$\tilde{E}_{ij} = 0 \quad \text{für } (i,j) \neq (3,3) , \quad \tilde{E}_{33} = \frac{h}{2} \theta^3 \beta_{33} = \theta^3 \tilde{\beta} \quad (5.5)$$

zusammen.

Die Komponenten des Verzerrungstensors lassen sich damit in der folgenden Form aufschreiben:

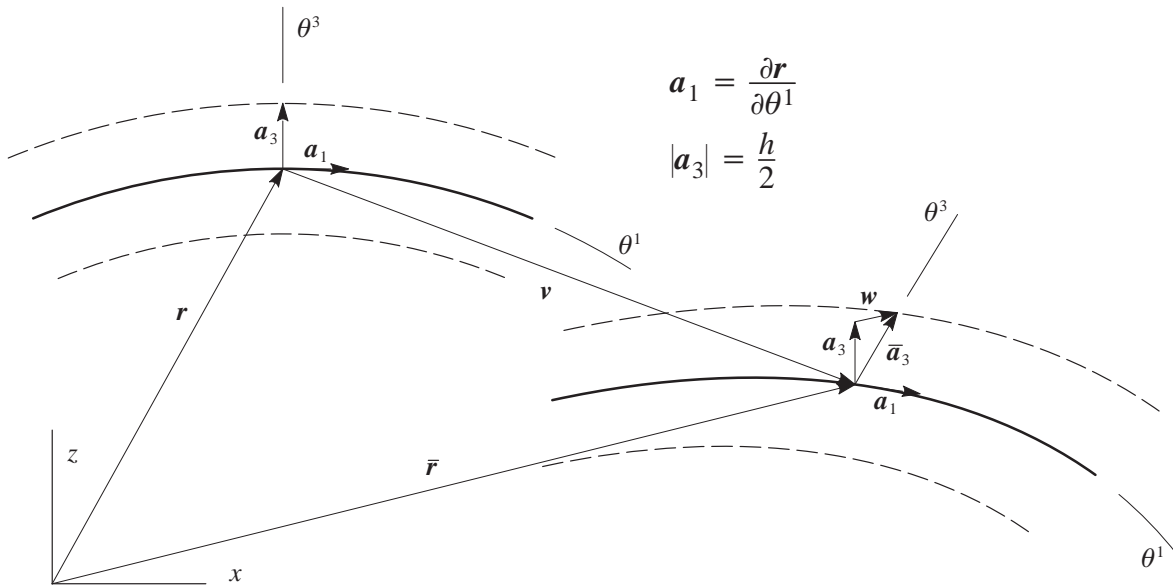


Abb. 5.1: Kinematik des zweidimensionalen, krummlinigen Balkens



$$\begin{aligned}
E_{11} &= (\mathbf{a}_1 + \theta^3 \mathbf{a}_{3,1}) \cdot (\mathbf{v}_{,1} + \theta^3 \mathbf{w}_{,1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,1} + \theta^3 \mathbf{w}_{,1}) \cdot (\mathbf{v}_{,1} + \theta^3 \mathbf{w}_{,1}) \\
&= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_{,1} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} \\
&\quad + \theta^3 [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w}_{,1} + \mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} + \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{w}_{,1}] \\
&\quad + (\theta^3)^2 \left[ \mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{w}_{,1} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{w}_{,1} \right],
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
E_{13} &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{a}_1 + \theta^3 \mathbf{a}_{3,1}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{v}_{,1} + \theta^3 \mathbf{w}_{,1}) + (\mathbf{v}_{,1} + \theta^3 \mathbf{w}_{,1}) \cdot \mathbf{w} \right] \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_{,1} + \mathbf{v}_{,1} \cdot \mathbf{w}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta^3 [\mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w}_{,1} + \mathbf{w}_{,1} \cdot \mathbf{w}] = E_{31},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$E_{33} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} . \tag{5.8}$$

### 5.1.2 Kinematische und statische Variablen des 2D-Balkens

Für den Übergang von einer zweidimensionalen auf eine eindimensionale Beschreibung des Balkenkörpers werden kinematische und statische Variablen definiert. Die kinematischen Variablen sind — wie bei der Schalentheorie — die konstanten, linearen und quadratischen Anteile der Verzerrungsverläufe in Dickenrichtung,

$$E_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{h}{2} \theta^3 \beta_{ij} + \frac{h^2}{4} (\theta^3)^2 \gamma_{ij} . \tag{5.9}$$

Die Faktoren  $h/2$  und  $h^2/4$  dienen auch hier wieder der besseren mechanischen Identifikation der in  $\theta^3$  linearen und quadratischen Verzerrungsanteile (vgl. Gleichung (4.18)). Die statischen Variablen folgen daraus als deren energetisch konjugierte Größen. Der Betrag  $\hat{\mu}$  des Shifters kann unter den gleichen Voraussetzungen wie im vorigen Kapitel vereinfacht als  $\hat{\mu} = h/2$  angenommen werden.

Zur Vereinfachung gehen die folgenden Formeln von einem ursprünglich geraden Balken aus. Dadurch wird eine umständliche Schreibweise und die Einführung von Christoffel-Symbolen vermieden. Anstatt kovarianter Ableitungen können einfache partielle Ableitungen verwendet werden. Die Verzerrungen können somit in Abhängigkeit der Verschiebungskomponenten ausgedrückt werden und es gilt

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v} = v_i , \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{w} = w_i , \quad \mathbf{a}_{3,1} = \mathbf{0} . \tag{5.10}$$

Es muß betont werden, daß diese Annahme nur getroffen wird, um die nun folgenden mathematischen Ausdrücke möglichst einfach zu halten. Sie betrifft nicht die generelle Gültigkeit der weiter vorne angegebenen Formeln. Mit Hilfe der Abkürzung  $\frac{\partial(\ )}{\partial \theta^1} = (\ )'$  erhält man die folgenden Beziehungen:

$$\alpha_{11} = v_1' + \frac{1}{2} [(v_1')^2 + (v_3')^2] , \quad n^{11} = \int_{-1}^1 S^{11} \frac{h}{2} d\theta^3 , \tag{5.11}$$

$$\beta_{11} = \frac{2}{h} [w_1' + v_1' w_1' + v_3' w_3'] , \quad m^{11} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{11} \frac{h^2}{4} d\theta^3 , \quad (5.12)$$

$$\gamma_{11} = \frac{2}{h^2} [(w_1')^2 + (w_3')^2] , \quad s^{11} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^2 S^{11} \frac{h^3}{8} d\theta^3 , \quad (5.13)$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2} [w_1 + v_3' + v_1' w_1 + v_3' w_3] , \quad n^{13} = \int_{-1}^1 S^{13} \frac{h}{2} d\theta^3 , \quad (5.14)$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{h} [w_3' + w_1' w_1 + w_3' w_3] , \quad m^{13} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{13} \frac{h^2}{4} d\theta^3 , \quad (5.15)$$

$$\alpha_{33} = w_3 + \frac{1}{2} [w_1^2 + w_3^2] , \quad n^{33} = \int_{-1}^1 S^{33} \frac{h}{2} d\theta^3 , \quad (5.16)$$

$$\beta_{33} = \frac{2}{h} \tilde{\beta} , \quad m^{33} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{33} \frac{h^2}{4} d\theta^3 . \quad (5.17)$$

Die in  $\theta^3$  quadratischen Terme  $\gamma_{11}$  und  $s^{11}$  werden gewöhnlich vernachlässigt, da sie in den meisten Fällen eine untergeordnete Bedeutung haben. Nur bei der Berechnung von dicken Balken (oder Schalen), bei starken Krümmungen oder bei großen Verzerrungen im Zusammenhang mit Biegeverformungen (also eigentlich „dehnungslosen“ Verformungen) können diese Verzerrungen bedeutsam werden (Büchter et al. (1994)).

Mit den Definitionen (5.11) bis (5.17) und unter Vernachlässigung von  $\gamma_{11}$  und  $s^{11}$  kann die innere Energie des Balkens in die Form

$$\begin{aligned} \Pi^{int} = \int_{\ell} \frac{1}{2} [ & \alpha_{11} n^{11} + \beta_{11} m^{11} + 2 (\alpha_{13} n^{13} + \beta_{13} m^{13}) \\ & + \alpha_{33} n^{33} + \beta_{33} m^{33} ] d\theta^1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

gebracht werden, wobei die Symmetrie der Schubverzerrungen verwendet wurde.

Die mechanische Bedeutung der kinematischen Größen ist leicht anhand der Darstellung der zugehörigen Deformation zu veranschaulichen (Abb. 5.2). Zur Vereinfachung werden zunächst nur die geometrisch linearen Anteile betrachtet. Die geometrisch nichtlinearen Effekte werden in Abschnitt 5.1.3 behandelt.

Der konstante Anteil der zur Balkenachse parallelen Normalverzerrungen  $\alpha_{11}$  beschreibt die Längsdehnung des Balkens (Membranverzerrungen bei der Schale). Die dazu energetisch konjugierte Größe ist die Normalkraft  $n^{11}$ .

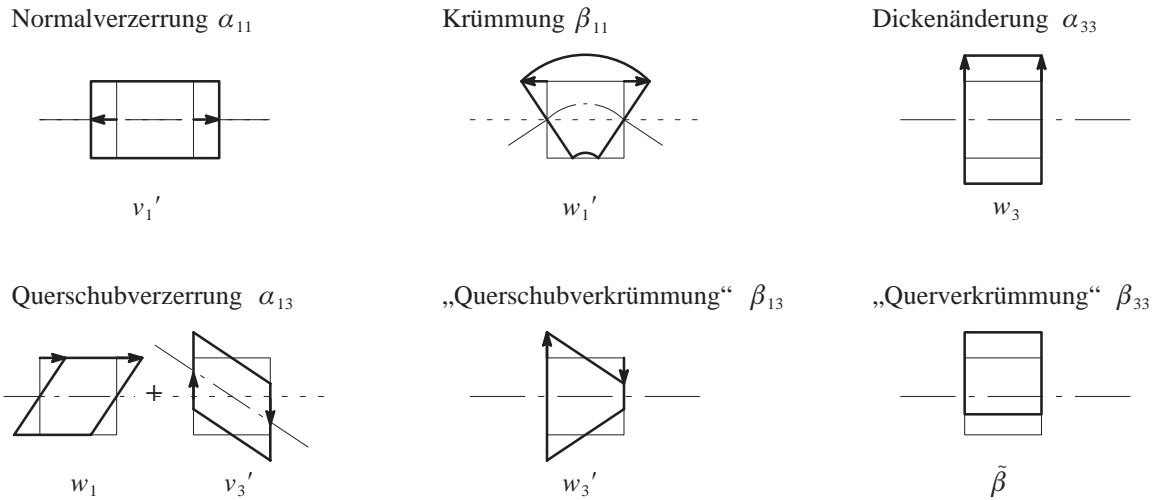


Abb. 5.2: Kinematische Variablen des 5-Parameter Balkenmodells

Bei der Verwendung des Rotationswinkels  $\phi$  als Freiheitsgrad zur Beschreibung der Drehung des Direktors ist die zum Biegemoment energetisch konjugierte Größe die Krümmung

$$\kappa = \phi' . \quad (5.19)$$

Bei einer Direktorlänge von  $|\mathbf{a}_3| = \frac{h}{2}$  und einer Kinematik kleiner Rotationen kann  $\phi$  in Abhängigkeit von  $w_1$  ausgedrückt werden,

$$\phi \approx \tan \phi = \frac{w_1}{\frac{h}{2}} = \frac{2w_1}{h} . \quad (5.20)$$

Für die Krümmung  $\kappa$  folgt damit

$$\kappa = \phi' = \frac{2}{h} w_1' = \beta_{11} . \quad (5.21)$$

Das heißt,  $\beta_{11}$  ist die Krümmung des Balkens. Die energetisch konjugierte Größe  $m^{11}$  entspricht damit dem zugehörigen Biegemoment. Wäre in den Gleichungen (5.9) und (4.18) der Faktor  $h/2$  nicht eingeführt worden, wäre diese Analogie verlorengegangen.

Die Querschubverzerrung  $\alpha_{13}$  ist die letzte der kinematischen Variablen, die auch bei der Timoshenko-Balkentheorie auftaucht. Alle weiteren kinematischen Größen resultieren aus der Annahme einer veränderlichen Balkendicke. Trotzdem ist hier bereits ein interessantes Detail anzumerken, das bei der Beschreibung klassischer Balken- und Schalentheorien üblicherweise nicht erwähnt wird.

Unter Ausnutzung der Symmetrie werden die Terme  $\alpha_{13}n^{13}$  und  $\alpha_{31}n^{31}$  gewöhnlich zu  $2\alpha_{13}n^{13} = \gamma n^{13}$  zusammengefaßt, wobei  $\gamma$  den Schubwinkel darstellt,

$$\alpha_{13} n^{13} + \alpha_{31} n^{31} = (\alpha_{13} + \alpha_{31}) n^{13} = \gamma n^{13} . \quad (5.22)$$

Mit der Definition von  $n^{13}$  nach Gleichung (5.14) als Integral über die in einem zur Balkenachse senkrecht liegenden Schnitt in  $\theta^3$ -Richtung wirkenden Schubkräfte liegt die mechanische Interpretation als die resultierende Querkraft auf der Hand.

Genausogut könnten jedoch beide Terme separat behandelt werden. Dann müßte eine weitere statische Variable

$$n^{31} = \int_{-1}^1 S^{31} \frac{h}{2} d\theta^3 \quad (5.23)$$

verwendet werden, um damit den entsprechenden Anteil der inneren Energie auszudrücken. Die Spannungen  $S^{31}$  sind im Balkenquerschnitt jedoch gar nicht definiert. Es handelt sich um Spannungen die längs der Balkenachse in einem zu ihr parallelen Schnitt wirken. Die Interpretation als *Schnittgröße* ist damit für  $n^{31}$  nicht möglich. Auch der Begriff *Spannungsergebnis* wäre falsch, da es sich nicht um eine resultierende Kraft handelt. Die Querkraft ist also in Wirklichkeit nicht die energetisch konjugierte Größe zum gesamten Schubwinkel, sondern nur zur Hälfte des Schubwinkels.

Die Frage nach der mechanischen Signifikanz der statischen Variablen  $n^{31}$  mag als akademisches Gedankenspiel anmuten, da die Definition des anschaulichen Schubwinkels und der Querkraft für die exakte Darstellung der Gleichungen ausreicht. Bei den im Folgenden beschriebenen statischen Variablen ist es jedoch notwendig, sich dieser Frage zu stellen, da sie sich nicht ohne weiteres in das übliche Bild von Schnittgrößen und Balkenkinematik einfügen lassen.

In Gleichung (5.15) sind die kinematischen und statischen Variablen  $\beta_{13}$  und  $m^{13}$  definiert, die aus dem linearen Verlauf der Querschubverzerrungen bzw. –spannungen resultieren. Hier gilt die gleiche Überlegung, die bereits beim linearen Anteil des Querschubs angestellt wurde. Auch hier könnte als statische Größe ebensogut ein  $m^{31}$  definiert werden.

Abgesehen von dieser Betrachtung bleibt die Frage nach der mechanischen Bedeutung von  $m^{13}$ . In Abschnitt 5.2 wird dafür der Begriff *Querschubmoment* eingeführt, weil die entsprechenden Spannungen linear über den Querschnitt verlaufen. Genau wie beim Biegemoment ist die resultierende Kraft gleich Null. Im Gegensatz dazu verschwindet jedoch auch das resultierende Moment, da der Hebelarm des zugehörigen Kräftepaars Null ist. Obwohl das Querschubmoment damit für die Bildung des Gleichgewichts mit äußeren Kräften unbedeutend ist, darf es trotzdem nicht ohne weiteres weggelassen werden, da es zusammen mit der entsprechenden kinematischen Größe einen Beitrag zur inneren Energie leistet.

Für die *Quernormalkraft*  $n^{33}$  sind ebenfalls streng genommen weder die Bezeichnungen Kraft noch Schnittgröße geeignet. Im Gegensatz zu den Schubspannungen gibt es hier keine entsprechenden Spannungen, die in der Querschnittsfläche wirken. Die Bezeichnung Quernormalkraft soll zum Ausdruck bringen, daß die integrale Größe  $n^{33}$  aus *Normalspannungen* resultiert, die in *Querrichtung* wirken — um eine *Kraft* handelt es sich jedoch nur rein formal aufgrund der physikalischen Einheit. Die dazu energetisch konjugierte Größe  $\alpha_{33}$  ist dagegen mechanisch einfach als Dickenänderung zu interpretieren.

Der zugehörige lineare Anteil  $\beta_{33}$ , der als einziger nicht aus einer Verschiebungsableitung folgt, sondern als eigenständiger Freiheitsgrad  $\tilde{\beta}$  definiert ist, entspricht einem linearen Verlauf der Dickenänderung. Die physikalische Bedeutung dieses Verzerrungsanteils als Relativverschiebung der materiellen Mittellinie wurde bereits in Abschnitt 3.3 erläutert und wird in den Abschnitten 5.3 und 5.4 noch einmal im Zusammenhang mit der 7-Parameter-Schalenformulierung diskutiert. Die dazu energetisch konjugierte statische Variable, das „*Quermoment*“  $m^{33}$ , repräsentiert den linearen Verlauf der transversalen Normalspannungen in Dickenrichtung, multipliziert mit der Dickenkoordinate  $\theta^3$ .

### 5.1.3 Geometrisch nichtlineare Anteile

Grundsätzlich stellen die geometrisch nichtlinearen Terme die Effekte großer Verschiebungen und Verzerrungen innerhalb einer bestimmten Verschiebungsform dar. Zum Beispiel kommen bei den Normalverzerrungen  $\alpha_{11}$  zum linearen Anteil  $v_1'$  noch die Quadrate der partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten  $v_1$  und  $v_3$  hinzu (Gleichung (5.11)). Sie tragen den Effekten großer Verzerrungen und Rotationen Rechnung, was in Abb. 5.3 anhand einer Analogie einer Materialfaser zu einem eindimensionalen Dehnstab illustriert ist. Die Gestalt dieser Terme hängt von der Wahl des Verzerrungsmaßes ab; hier wird der Green–Lagrangesche Verzerrungstensor verwendet. Im Prinzip ändern diese nichtlinearen Anteile nichts an der anschaulichen Interpretation der entsprechenden kinematischen Variablen und werden deshalb im Folgenden nicht separat behandelt.

Eine Ausnahme stellen die Komponenten  $\gamma_{11}$  dar, die den in  $\theta^3$  quadratischen Verlauf der Verzerrungen  $E_{11}$  repräsentieren. Für sie existiert kein entsprechender linearer Term. Sie folgen bei geometrischer Nichtlinearität aus dem linearen Verlauf der Verschiebungen in  $\theta^3$ .

Abb. 5.4 verdeutlicht, daß diese quadratische Verteilung von  $E_{11}$  in Dickenrichtung aus zwei Teilen besteht. Der erste Teil  $(w_1')^2$  ist in der nichtlinearen Beziehung zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen bei der Längsdehnung einer Materialfaser parallel zur Balkenachse begründet. Die angedeutete lineare Verteilung von  $u_1$  in Dickenrichtung gehört zu einer Biegeverformung des Balkens. Dieser Anteil von  $\gamma_{11}$  tritt also bereits bei einem nichtlinearen Bernoulli– oder Timoshenko–Balkenmodell auf. Der zweite Teil  $(w_3')^2$  kommt nur bei solchen Modellen vor, die die Dickenänderung des Balkens während der Deformation berücksichtigen. Er beschreibt die Dehnung oder Stauchung einer Materialfaser bei einer in  $\theta^1$ -Richtung veränderlichen Dickenänderung (Abb. 5.4, rechts), was beispielsweise bei einer Membranverformung vorkommt, wenn die Querdehnzahl ungleich Null ist. Bei einer geometrisch linearen Theorie verschwinden die Terme  $\gamma_{11}$ .

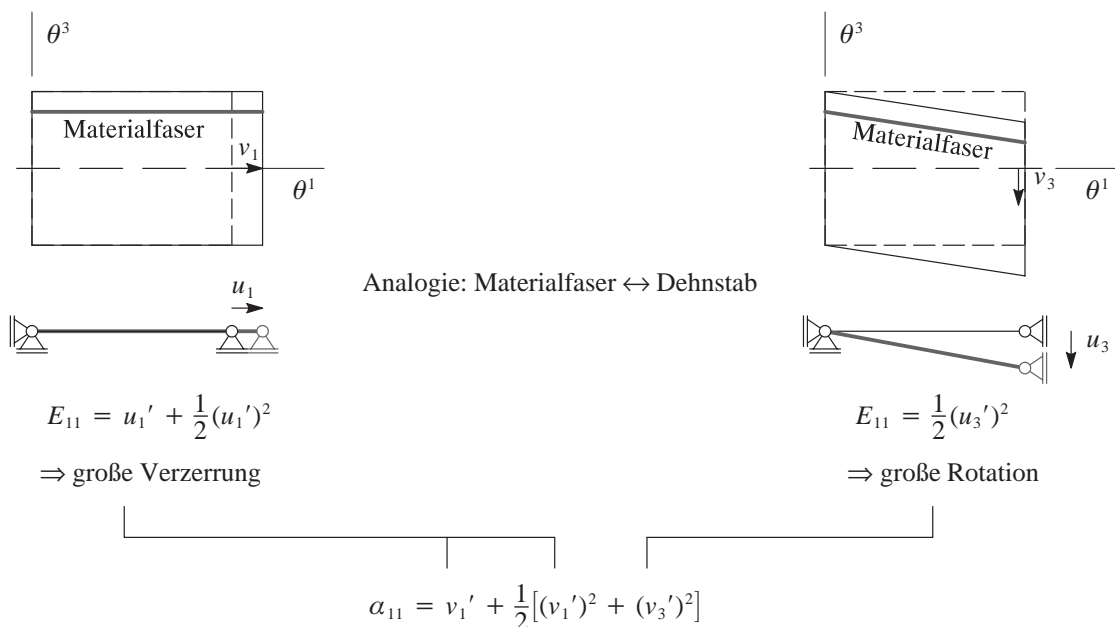


Abb. 5.3: Geometrisch nichtlineare Effekte bei der Verformung einer einzelnen Faser

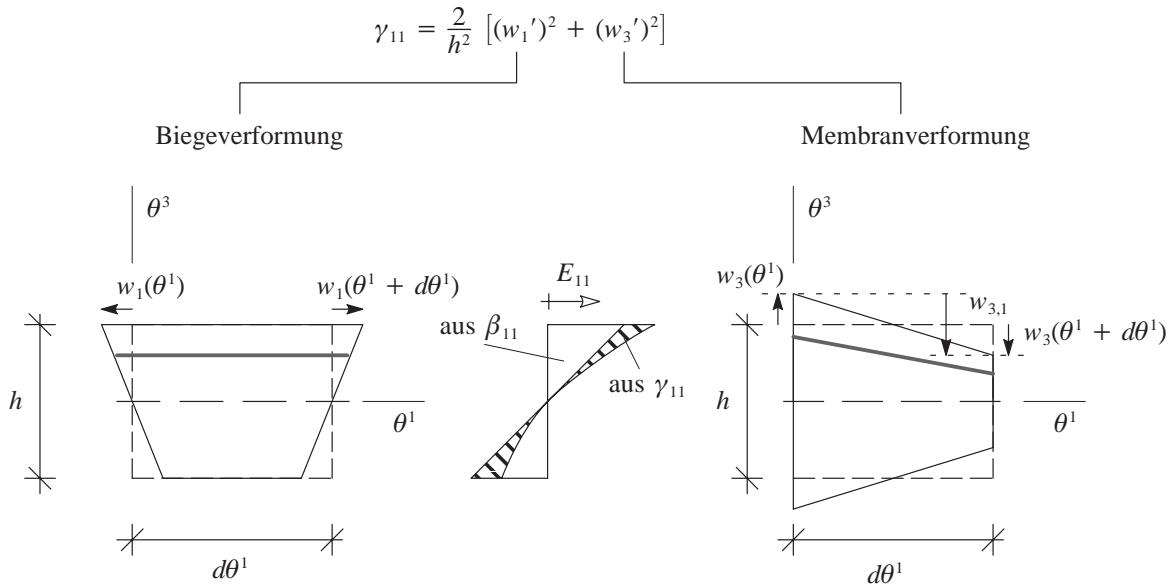


Abb. 5.4: Kinematische Variable  $\gamma_{11}$

#### 5.1.4 Bedeutung des Stoffgesetzes

Wie bei der dreidimensionalen Schalenformulierung soll hier ein vollständiges, unmodifiziertes Stoffgesetz verwendet werden. Für den Fall isotroper Elastizität im Rahmen einer St.–Venant–Kirchhoffschen Materialbeschreibung ist es die vollständig zweidimensionale Spannungs–Verzerrungsbeziehung  $\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$  für den ebenen Spannungszustand. Es kann in Komponenten

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (5.24)$$

oder — wieder unter der Annahme einer orthonormierten Basis, d.h. eines geraden Balkens — als Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{33} \\ S^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{33} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

geschrieben werden ( $E$  bezeichnet den Elastizitätsmodul,  $\nu$  ist die Querdehnzahl). Ziel ist es, ohne zusätzliche Annahmen, wie beispielsweise dem Verschwinden der Normalspannungen in Dickenrichtung, eine Beziehung zwischen den statischen und kinematischen Größen herzustellen. Zu diesem Zweck werden das Materialgesetz (5.25) und die Definition der kinematischen Größen (5.9) in die Definition der statischen Variablen, Gleichungen (5.11) bis (5.17), eingesetzt.

$$n^{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 [\alpha_{11} + \nu \alpha_{33}] \frac{h}{2} d\theta^3, \quad (5.26)$$

$$n^{33} = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 \left[ \nu \alpha_{11} + \alpha_{33} \right] \frac{h}{2} d\theta^3, \quad (5.27)$$

$$n^{13} = \frac{E}{1 + \nu} \int_{-1}^1 \alpha_{13} \frac{h}{2} d\theta^3, \quad (5.28)$$

$$m^{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 (\theta^3)^2 \left[ \beta_{11} + \nu \beta_{33} \right] \frac{h^3}{8} d\theta^3, \quad (5.29)$$

$$m^{33} = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 (\theta^3)^2 \left[ \nu \beta_{11} + \beta_{33} \right] \frac{h^3}{8} d\theta^3, \quad (5.30)$$

$$m^{13} = \frac{E}{1 + \nu} \int_{-1}^1 (\theta^3)^2 \beta_{13} \frac{h^3}{8} d\theta^3. \quad (5.31)$$

Durch die Integration über die Dicke werden aus den Komponenten des Materialtensors  $C$  der zweidimensionalen Kontinuumsmechanik die Komponenten der „Werkstoffmatrix“  $D$  für den 5-Parameter-Balken.

$$\begin{bmatrix} n^{11} \\ n^{33} \\ n^{13} \\ m^{11} \\ m^{33} \\ m^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1 - \nu^2} & \frac{\nu EA}{1 - \nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu EA}{1 - \nu^2} & \frac{EA}{1 - \nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha GA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EI}{1 - \nu^2} & \frac{\nu EI}{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu EI}{1 - \nu^2} & \frac{EI}{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta GI \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{33} \\ 2\alpha_{13} \\ \beta_{11} \\ \beta_{33} \\ 2\beta_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

$A$  bezeichnet hier die Querschnittsfläche und  $I$  das Flächenträgheitsmoment ( $b$ =Balkenbreite).  $G$  ist der Schubmodul.

$$A = b \cdot h, \quad I = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.33)$$

Die Bedeutung und Wahl der Schubkorrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  werden in Abschnitt 5.5.1 besprochen.

Die Materialmatrix besteht aus zwei vollständig entkoppelten Blöcken, die jeweils ein ähnliches Format wie das ursprüngliche Stoffgesetz aus Gleichung (5.25) besitzen. Der hauptsächliche Un-

terschied besteht darin, daß sie jetzt von der Dicke  $h$  abhängig sind. Membran- und Biegeverformungen sind für gerade Balken am materiellen Punkt voneinander entkoppelt. Auch die Null-Terme innerhalb der einzelnen Blöcke resultieren aus der Tatsache, daß die  $\theta^1$ - und  $\theta^3$ -Richtung zueinander orthogonal sind.

Es ist entscheidend, daß auch die Vektoren der kinematischen und statischen Variablen vollständig sind. Wird beispielsweise auf einen Ansatz für den linearen Anteil der Normalverzerrungen in Dickenrichtung  $\beta$  verzichtet (Gleichung (5.3)), so entsteht ein Ungleichgewicht zwischen Verschiebungs- und Spannungsgrößen: Während der lineare Anteil  $\beta^{33}$  bei den verallgemeinerten Verzerrungen dadurch wegfällt, bleibt  $m^{33}$  aufgrund des Querdehneffektes bei den verallgemeinerten Schnittgrößen erhalten. Dadurch entstehen physikalisch nicht zu begründende — „parasitäre“ — Normalspannungen in Dickenrichtung die Ursache für das in Abschnitt 3.3 beschriebene Poisson-Dickenlocking. Die Forderung der Vollständigkeit der konstitutiven Gleichungen wird in Abschnitt 5.5 noch einmal diskutiert.

### 5.1.5 Gleichgewichtsbedingungen

Einige interessante Details im Zusammenhang mit der Erweiterung der Balkentheorie auf zwei Dimensionen (bzw. der Schale auf drei Dimensionen) können anhand der Gleichgewichts-Differentialgleichungen diskutiert werden. Zur Vereinfachung und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind die folgenden Gleichungen für den geometrisch linearen Fall angegeben:

$$n_{,1}^{11} = -n^1, \quad (5.34)$$

$$n_{,1}^{13} = -n^3, \quad (5.35)$$

$$m_{,1}^{11} - \frac{h}{2} n^{13} = -m^1, \quad (5.36)$$

$$m_{,1}^{13} - \frac{h}{2} n^{33} = -m^3, \quad (5.37)$$

$$m^{33} = 0. \quad (5.38)$$

Dabei ist  $n^i$  eine verteilte Last in  $\theta^i$ -Richtung.  $m^1$  steht für eine verteilte Momentenbelastung. Der Lastterm  $m^3$  kann aus Einspannkräften resultieren. Er verursacht eine Stauchung oder Dehnung des Balkens in Dickenrichtung, Abb. 5.12. Offensichtlich entsprechen die ersten drei Gleichungen (5.34) bis (5.36) den üblichen Gleichgewichtsbedingungen, die auch für einen Bernoulli- oder Timoshenko-Balken gelten. Die drei Unbekannten  $n^{11}$ ,  $n^{13}$  und  $m^{11}$  können aus diesen Gleichungen eindeutig bestimmt werden. Eine Balkentheorie, die nur diese drei Gleichgewichtsbedingungen „kennt“, ist also innerlich statisch bestimmt. Diese Gleichungen enthalten auch alle „echten“ Schnittgrößen, also jene Kräfte und Momente, die zur Erfüllung des Gleichgewichts an einem Schnitt notwendig sind.

Die beiden Gleichungen (5.37) und (5.38) sind von den anderen vollständig entkoppelt und enthalten nur statische Variablen „höherer Ordnung“. Da nur zwei Gleichungen für insgesamt drei weitere statische Variablen zur Verfügung stehen, können diese nicht alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Es müssen zusätzlich zu erfüllende Kompatibilitätsbedingungen berücksichtigt werden, die mit den kinematischen und den Werkstoffgleichungen zusammenhängen. Die vollständig zweidimensionale Balkentheorie ist also wie das Kontinuum innerlich statisch unbestimmt.



Es ist außerdem bemerkenswert, daß die Eulergleichung (5.38) das Verschwinden des Quermoments  $m^{33}$  fordert. Die zugehörigen Spannungen sind gerade die parasitären Spannungen, die bei Poisson–Dickenlocking auftreten, das somit vermieden wird. Trotzdem scheint es zunächst etwas überraschend zu sein, daß im kontinuierlichen Problem das Quermoment  $m^{33}$ , unabhängig von statischen und kinematischen Randbedingungen, genau Null sein soll. Dieser Umstand kann vielleicht etwas besser verstanden werden, wenn berücksichtigt wird, daß die zu  $m^{33}$  energetisch konjugierten Verzerrungen  $\beta_{33}$  in den kinematischen Randbedingungen des zugehörigen Variationsprinzips gar nicht auftauchen. Es können also keine Spannungen aus geometrischem Zwang entstehen. Auf der Lastseite taucht ebenfalls kein Term auf, der zu einem Quermoment  $m^{33}$  ungleich Null führen könnte. Solche Terme tauchen lediglich auf dem Rand auf, gehen also nicht in die Eulerschen Gleichungen des Gebiets ein.

Im Rahmen einer Formulierung mit finiten Elementen wird Gleichung (5.38) nur näherungsweise erfüllt. Es können also Werte  $m^{33} \neq 0$  erwartet werden, die mit der Verfeinerung des Netzes in Balkenlängsrichtung verschwinden. Für eine Diskretisierung der erweiterten Verzerrungsparameter  $\tilde{\beta}$  in der gleichen Ordnung wie das Verschiebungsfeld (also beispielsweise eine quadratische Verteilung von  $\tilde{\beta}$  in einem dreiknotigen Balkenelement) wird die Bedingung  $m^{33} = 0$  jedoch, unabhängig von der Netzfeinheit, exakt erfüllt. Erklärbar ist dieses Phänomen mit Hilfe der Analogie zwischen Elementen, die aus den Funktionalen von Hu–Washizu bzw. Hellinger–Reissner hergeleitet werden (Andelfinger und Ramm (1993), Yeo und Lee (1997), Bischoff et al. (1999)). Das oben erwähnte dreiknotige Balkenelement mit quadratischem Ansatz für  $\tilde{\beta}$  ist demnach einem Hellinger–Reissner–Element äquivalent, bei dem als „Ansatz“ für das Quermoment  $m^{33}$  dasselbe explizit zu Null gesetzt wird. Die in Abschnitt 2.5.5 erwähnte Komplementarität ist durch die Ansätze

$$\begin{aligned} v_3 &\in \text{span} \{ 1, \theta^1, (\theta^1)^2 \}, \\ \beta_{33} &\in \text{span} \{ 1, \theta^1, (\theta^1)^2 \}, \\ m^{33} &\in \text{span} \{ \} \end{aligned} \tag{5.39}$$

gegeben.

## 5.2 Kinematische und statische Variablen der 7-Parameter-Formulierung

Nach diesen einleitenden Betrachtungen anhand eines einfachen, zweidimensionalen Balkenmodells soll im Folgenden die mechanische Bedeutung der kinematischen und statischen Variablen der 7-Parameter-Schalenformulierung diskutiert werden (Abb. 5.5). Aufgrund ihrer unterschiedlichen physikalischen Bedeutung ist es sinnvoll, diese nach der Wirkungsrichtung der zugehörigen Spannungen und der Ebene, in der diese Spannungen wirken, zu unterscheiden. Die graphischen Darstellungen der zugehörigen Verformung gehen dabei der Einfachheit halber von der Deformation eines ursprünglich ebenen Schalenstückes aus. Zusätzlich zu der Information, welche kinematischen und statischen Größen zu welcher Verformung gehören, ist angegeben, ob die betreffende Deformation zum Membran- oder Biegezustand der Schale gerechnet wird.

Die Bezeichnungen der kinematischen und statischen Variablen folgen einem bestimmten Schema: Kraftgrößen, die aus dem über die Dicke konstanten Verlauf von Normalspannungen resultieren, werden Normalkräfte genannt. Aus einem linearen Verlauf resultierende statische Variablen heißen Momente. Kräfte, die aus Schubspannungen resultieren, werden als Schub-

kräfte bezeichnet. Konsequenterweise müßte dann das Verwindungsmoment eigentlich Schubmoment heißen. Darauf wird jedoch zugunsten des anschaulicheren Begriffs Verwindungsmoment verzichtet. Oft wird diese statische Variable auch als Drillmoment bezeichnet. Bei Schalenformulierungen mit drei Rotationsparametern besteht dann jedoch die Gefahr der Verwechslung mit dem Moment, das den Direktor um seine Längsachse dreht (Drillrotation). Ist die Wirkungsrichtung der Kraft senkrecht zur Schalenmittelfläche, so wird die entsprechende Bezeichnung mit der Vorsilbe „Quer-“ versehen. Aus der konstanten Verteilung der Querschub-

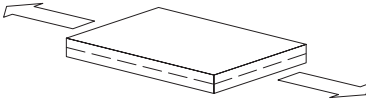


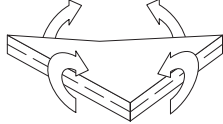
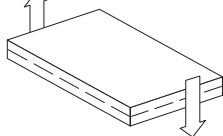
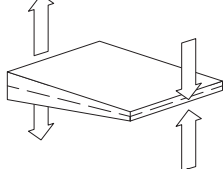
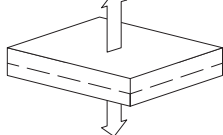
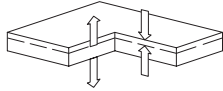
	Verformung	Verzerrung Schnittkraft	Bezeichnung	Membran- (M) oder Biegezustand (B)
5- und 7-Parameter-Modell		$\alpha_{11}, \alpha_{22}$ $n^{11}, n^{22}$	Normalverzerrungen Normalkräfte	(M)
		$\alpha_{12}$ $n^{12}$	Schubverzerrung Schubkraft	(M)
		$\beta_{11}, \beta_{22}, (\gamma_{11}, \gamma_{22})$ $m^{11}, m^{22}, (s^{11}, s^{22})$	Verkrümmungen Momente (Bimomente)	(B)
		$\beta_{12}, (\gamma_{12})$ $m^{12}, (s^{12})$	Verwindung Verwindungsmoment (-bimoment)	(B)
		$\alpha_{13}, \alpha_{23}$ $n^{13}, n^{23}$	Querschubverzerrungen Querkräfte	(B)
nur 7-Parameter-Modell		$\beta_{13}, \beta_{23}$ $m^{13}, m^{23}$	Querschubverkrümmungen Querschubmoment	(M)
		$\alpha_{33}$ $n^{33}$	Quernormalverzerrung Quernormalkraft	(M)
		$\beta_{33}$ $m^{33}$	Querkrümmung Quermoment	(B)

Abb. 5.5: Verformungen, Verzerrungen und Schnittgrößen der Schale

spannungen resultieren so die Querschubkräfte (oder kurz: Querkräfte). Aus deren linearer Verteilung ergibt sich das Querschubmoment. Die in Dickenrichtung konstanten Normalspannungen  $S^{33}$  werden zur Quernormalkraft zusammengefaßt, der entsprechende lineare Anteil zum Quermoment.

Die Identifikation von Verzerrungen und Spannungen mit gleichen Indizes ( $E_{ij}$  und  $S^{ii}$ ) als „Normal“-Verzerrungen sowie solcher mit gemischten Indizes ( $E_{ij}$  und  $S^{ij}$ , mit  $i \neq j$ ) als „Schub“-Verzerrungen bzw. –Spannungen ist nur gültig, wenn  $\theta^i$  und  $\theta^j$  zueinander orthogonal sind. Von diesem Sonderfall gehen alle Bezeichnungen in diesem Kapitel aus. Die Allgemeinheit der zugrundeliegenden Gleichungen ist dadurch nicht beschränkt.

Für eine anschauliche Interpretation der kinematischen und statischen Variablen ist eine Darstellung der Verzerrungen in Abhängigkeit der Verschiebungen geeignet. Der Ansatz für die Verschiebungen des 7-Parameter-Modells wird deshalb, wie in Abschnitt 5.1.1, in den Verschiebungskomponenten dargestellt.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + \theta^3 w_1 , \\ u_2 &= v_2 + \theta^3 w_2 , \\ u_3 &= v_3 + \theta^3 w_3 . \end{aligned} \tag{5.40}$$

Die Komponenten des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors (Gleichung (4.18)), können damit in Abhängigkeit der 7 Parameter  $u_i$ ,  $v_i$  und  $\tilde{\beta}$  ausgedrückt werden.

### 5.3 Bedeutung der kinematischen Größen

#### 5.3.1 Kinematische Variablen

Aufgrund ihrer unterschiedlichen physikalischen Bedeutung ist es sinnvoll, nicht nur diejenigen Anteile getrennt voneinander zu betrachten, die einen unterschiedlichen Verlauf in  $\theta^3$  haben, sondern auch zu berücksichtigen, in welcher Richtung und in welchem Schnitt die dazugehörigen Kräfte wirken. Es werden die Komponenten

$$E_{ij} = E_{ij}^u + \tilde{E}_{ij} \quad \text{mit} \tag{5.41}$$

$$E_{ij}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) , \quad \tilde{E}_{33} = \theta^3 \tilde{\beta} \tag{5.42}$$

in Anteile parallel zur Schalenmittelfläche  $E_{\alpha\beta}$ , Querschubanteile  $E_{31}$  sowie Normalverzerrungen in Dickenrichtung  $E_{33}$  aufgespalten.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) + (\mathbf{a}_\beta + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\beta}) \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) \right] , \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) + (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{w} \right] , \tag{5.44}$$

$$E_{33} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + \theta^3 \tilde{\beta} . \tag{5.45}$$

In Abb. 5.5 sind alle daraus folgenden Verformungsanteile zusammengefaßt. Außerdem wird dort ein Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen gegeben.

Aus denselben Gründen wie in Abschnitt 5.1.2 wird auch hier die Annahme einer ursprünglich flachen Struktur, also einer Scheibe oder Platte, getroffen.

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v} = v_i, \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{w} = w_i, \quad \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{0}. \quad (5.46)$$

Wie vorne dient diese Vereinfachung nur dazu, die folgenden mathematischen Ausdrucks zu vereinfachen und betrifft nicht die Gültigkeit des 7-Parameter-Modells für allgemeine Schalen. Die Verzerrungskomponenten lassen sich nun durch partielle Ableitungen der Verschiebungskomponenten ausdrücken.

Die konstanten Anteile der Verzerrungen parallel zur Mittelfläche

$$\alpha_{11} = v_{1,1} + \frac{1}{2} v_{i,1} v_{i,1}, \quad (5.47)$$

$$\alpha_{22} = v_{2,2} + \frac{1}{2} v_{i,2} v_{i,2}, \quad (5.48)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1} + v_{i,1} v_{i,2}) = \alpha_{21} \quad (5.49)$$

bezeichnen die Membranverzerrungen. Dabei sind  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{22}$  Normalverzerrungen, während  $\alpha_{12}$  die Schubverzerrung in der Schalenebene beschreibt. Die zum in  $\theta^3$  linearen Verlauf der Verzerrungen  $E_{\alpha\beta}$  gehörenden Komponenten

$$\beta_{11} = \frac{2}{h}(w_{1,1} + v_{i,1} w_{i,1}), \quad (5.50)$$

$$\beta_{22} = \frac{2}{h}(w_{2,2} + v_{i,2} w_{i,2}), \quad (5.51)$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{h}(w_{1,2} + w_{2,1} + v_{i,1} w_{i,2} + v_{i,2} w_{i,1}) = \beta_{21} \quad (5.52)$$

entsprechen den Verkrümmungen. Dabei sind  $\beta_{11}$  und  $\beta_{22}$  Biegeverkrümmungen.  $\beta_{12}$  kann als Verwindung der Schalenebene bezeichnet werden.

Die konstanten Anteile

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2}(w_1 + v_{3,1} + v_{i,1} w_i) = \alpha_{31}, \quad (5.53)$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2}(w_2 + v_{3,2} + v_{i,2} w_i) = \alpha_{32} \quad (5.54)$$

der Querschubverzerrungen sind energetisch konjugiert zu den Querkräften. Bei 5-Parameter-Schalentheorien sind das die einzigen Größen, bei denen Spannungen senkrecht zur Schalenmittelfläche auftreten. Bei 3-Parameter-Formulierungen vom Kirchhoff-Loveschen Typ werden diese Verzerrungen als Null angenommen. Die linearen Anteile

$$\beta_{13} = \frac{1}{h}(w_{3,1} + w_{i,1} w_i) = \beta_{31}, \quad (5.55)$$

$$\beta_{23} = \frac{1}{h}(w_{3,2} + w_{i,2} w_i) = \beta_{32} \quad (5.56)$$

treten wiederum nur bei der 7-Parameter-Formulierung auf. Aus der Darstellung der zugehörigen Verformung in Abb. 5.6 ist ersichtlich, daß das Auftreten dieses Verzerrungstyps mit einer Dickenänderung der Schale verbunden ist.

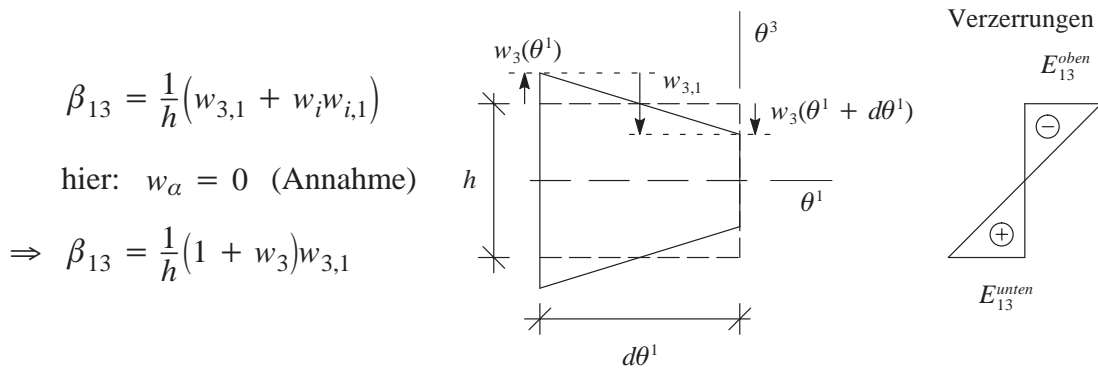


Abb. 5.6: Querschubverkrümmung  $\beta_{\alpha 3}$

Abgesehen von einer direkten Belastung aus der Oberfläche, z.B. durch Einklemmen oder Einspannen, können diese Verzerrungen aus Membranverzerrungen im Zusammenhang mit dem Querdehneffekt entstehen. In Bereichen veränderlicher Normalverzerrungen  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$  treten auch veränderliche Dicken auf, was zu den in den Abb. 5.5 und 5.6 angedeuteten Verformungszuständen führt. In dem Überblick in Abb. 5.5 sind die linearen Anteile der Querschubverzerrungen deshalb dem Membranzustand (M) der Schale zugeordnet.

Die mechanische Bedeutung dieses Verzerrungstyps für das Tragverhalten der Schale ist im allgemeinen gering und könnte deshalb auch vernachlässigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird er jedoch berücksichtigt, um das Ziel einer vollständig dreidimensionalen Werkstoffbeschreibung erreichen zu können.

Ein quadratischer Anteil der Querschubverzerrungen  $\gamma_{\alpha 3}$  taucht in der in dieser Arbeit beschriebenen Form eines 7-Parameter-Modells nicht auf. Bei reinen Verschiebungsmodellen, mit einem quadratischen Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung (Kühhorn und Schoop (1992), Parisch (1995), Sansour (1995)), sind diese Anteile vorhanden. Das hat zur Folge, daß diese Formulierungen ohne einen Schubkorrekturfaktor  $\alpha$  für den konstanten Anteil der Querschubverzerrungen auskommen. Für den linearen Anteil der Querschubverzerrungen kann jedoch auch bei solchen Formulierungen ein Schubkorrekturfaktor sinnvoll sein (Abschnitt 5.5.1). Bei Platten sind keine Schubkorrekturfaktoren mehr notwendig (Rössle et al. (1999)).

Auch der konstante Anteil der Normalverzerrungen in Dickenrichtung

$$\alpha_{33} = w_3 + \frac{1}{2} w_i w_i \tag{5.57}$$

tritt nur beim 7-Parameter-Modell auf. Er ist implizit auch in den 3- und 5-Parameter-Formulierungen enthalten. Bei der Mindlinschen und der Kirchhoff-Theorie kann er aus der Annahme verschwindender Normalspannungen in Dickenrichtung über das Stoffgesetz aus den Membranspannungen rückgerechnet werden. In dem Widerspruch zur Annahme der Inextensibilität in Dickenrichtung ( $\Rightarrow E_{33} = 0$ ) spiegelt sich die Heuristik wider, die hinter diesen beiden Theorien steckt. Bei Reissner (1944) werden die transversalen Normalverzerrungen zwar auch aus der Formulierung eliminiert, es gibt dort jedoch keinen Widerspruch, da Reissner sich eines Variationsprinzips bedient, bei dem die kinematischen Gleichungen nicht stark erfüllt zu sein brauchen. Außerdem wird bei Reissner nicht angenommen, daß die Normalspannungen in Dickenrichtung verschwinden.

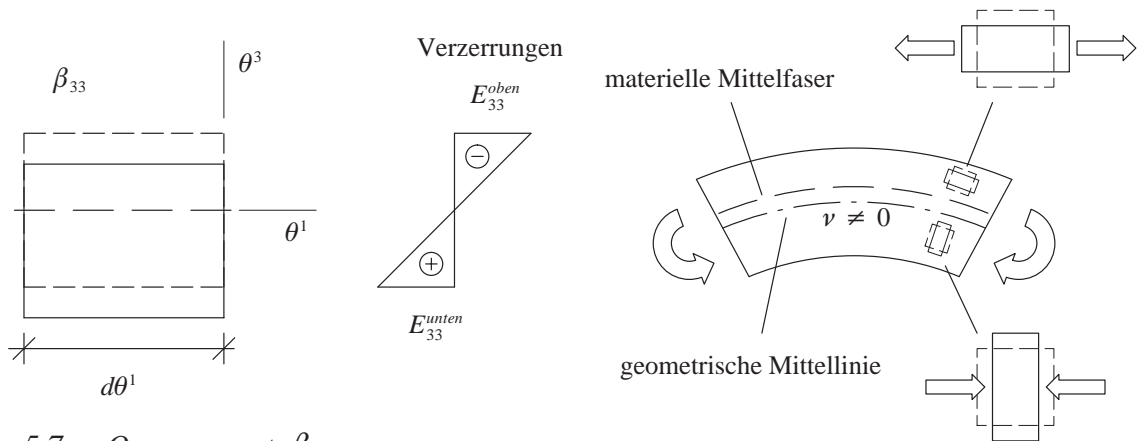


Abb. 5.7: Quermoment  $\beta_{33}$

Wie die linearen Querschubanteile gehören die konstanten Normalverzerrungen in Dickenrichtung zum Membranzustand der Schale. Auch sie können durch Einspannungen, durch Einwirkungen auf die Oberfläche der Schale und durch den Querdehneffekt entstehen.

Zum Biegezustand (B) gehören die linearen Anteile der Normalverzerrungen in Dickenrichtung

$$\beta_{33} = \frac{2}{h} \tilde{\beta} . \quad (5.58)$$

Das sind die einzigen Verzerrungsanteile bei der 7-Parameter-Formulierung, die nicht direkt aus den Verschiebungsableitungen folgen, sondern als zusätzliche Verzerrungen mit Hilfe des modifizierten Prinzips von Hu-Washizu in die Formulierung eingebracht werden.

Die zu diesen Verzerrungen gehörende Deformation der Schale entspricht einer Bewegung der materiellen Schalenmittelfläche in  $\theta^3$ -Richtung relativ zu der Ober- und Unterseite der Schale (Abb. 5.5 und 5.7). Diese Art der Verformung tritt normalerweise nur im Zusammenhang mit Biegung auf. Eine Belastung, die direkt zu dieser Verformung führt, ist zwar theoretisch möglich, aber unrealistisch.

Bei reiner Biegung, wie sie in Abb. 5.7 dargestellt ist, werden die unteren Fasern (Druckseite) parallel zur Schalenmittelfläche gestaucht und damit aufgrund des Querdehneffekts in Dickenrichtung gestreckt. Auf der Oberseite (Zugseite) der Schale verhält es sich gerade umgekehrt. Insgesamt bleibt die Schalendicke also gleich. Die Faser, die vor der Deformation in der Schalenmittelfläche lag, bewegt sich jedoch in Richtung Zugseite. Bei einer Poissonzahl von  $\nu = 0$  tritt dieser Effekt deshalb nicht auf. Für solche Materialien ist die in Abschnitt 3.3 beschriebene 6-Parameter-Formulierung ausreichend. Im allgemeinen führt das Fehlen dieser Verzerrungsanteile zu einer künstlichen Versteifung, dem Poisson-Dickenlocking, Abschnitt 3.3.

### 5.3.2 Kinematische Randbedingungen

Kinematische Randbedingungen können aufgrund der Struktur der Eulergleichung (2.46) nur für die sechs Verschiebungskomponenten der 7-Parameter-Formulierung vorgeschrieben werden. Als Folge des verwendeten Variationsprinzips unterliegt der siebte Parameter keinerlei geometrischem Zwang. Deshalb können auch an voll eingespannten Rändern Normalverzerrungen in Dickenrichtung auftreten, die als inkompatible Relativbewegung der Schalenmittelfläche interpretierbar sind. In einer 7-Parameter-Formulierung, die auf einem reinen Verschiebungsmodell beruht, können sowohl eine kinematische Randbedingung als auch ein entsprechender Lastterm

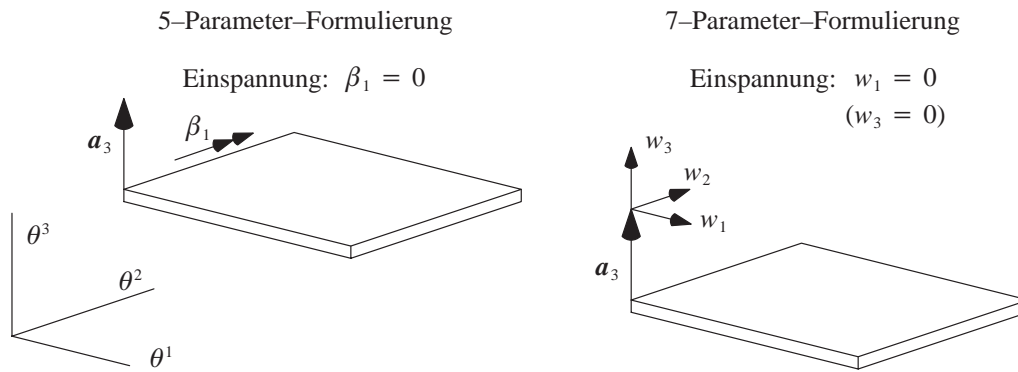


Abb. 5.8: Kinematische Randbedingungen

für den siebten Parameter definiert werden. Der oben beschriebene Effekt kann damit unterdrückt werden. Wird der siebte Parameter allerdings, wie bei Parish (1995) und Sansour (1995), als inkompatibel angenommen und im Rahmen einer FE-Formulierung mittels statischer Kondensation auf Elementebene eliminiert, dann tritt derselbe Effekt auf wie bei den in dieser Arbeit beschriebenen Elementen.

Die Unterdrückung der ersten drei Komponenten  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  hat mechanisch die gleiche Bedeutung wie bei klassischen Platten- und Schalentheorien. Das Festhalten der Differenzvektorkomponenten  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  unterscheidet sich von der klassischen Vorstellung einer „Einspannung“ bei der Verwendung von Rotationen als Freiheitsgrade. In Abb. 5.8 ist der Sonderfall einer Platte, deren Mittelfläche in der  $\theta^1\theta^2$ -Ebene liegt, dargestellt. Eine Einspannung des zur  $\theta^2$ -Achse parallelen Randes bezüglich einer Rotation um diese Achse wird bei der 7-Parameter-Formulierung dadurch erreicht, daß die Komponente des Differenzvektors in  $\theta^1$ -Richtung „festgehalten“ wird:  $w_1 = 0$ . In entsprechender Weise kann eine Verwindungseinspannung (hard support) am selben Rand verwirklicht werden, indem  $w_2 = 0$  gesetzt wird. Der bei manchen finiten Schalenelementen zur Behandlung von Schalen mit Knicken eingeführte Drillfreiheitsgrad  $\beta_3$  findet keine Entsprechung bei der Differenzvektorformulierung. Das ist jedoch eher ein Vorteil als ein Nachteil, da diese Drillrotationen kontinuumsmechanisch nicht als Freiheitsgrad an einem materiellen Punkt zu begründen sind (zur Behandlung von Schalen mit Knicken siehe Abschnitt 8.4).

Der verbleibende, sechste Freiheitsgrad  $w_3$  der 7-Parameter-Formulierung beschreibt die Dickenänderung der Schale. Bei einer Einspannung ist also zu überlegen, ob die tatsächlichen Verhältnisse so sind, daß die Dickenänderung aufgrund der Einspannung behindert ist. Diese Annahme trifft beispielsweise bei einer Stahlbetondecke, die mit einer Betonwand monolithisch verbundenen ist, recht gut zu. Bei einer Einspannung als Symmetrierandbedingung muß die Dickenänderung jedoch zugelassen werden.

Durch die Kombination von Randbedingungen für Verschiebungen und Differenzverschiebungen können theoretisch auch exzentrische Lager modelliert werden. Die Bedingung

$$v_z - w_z = 0 \quad (5.59)$$

entspricht beispielsweise einem Lager auf der Unterseite des Plattenkörpers,

$$u_z = v_z + \theta^3 \quad w_z = v_z + \theta^3 v_z \quad \Rightarrow \quad u_z = 0 \quad \text{für} \quad \theta^3 = -1 \quad (5.60)$$

## 5.4 Bedeutung der statischen Größen

### 5.4.1 Statische Variablen

Die Definition von Schnittgrößen basiert ursprünglich auf der Überlegung, daß durch die Führung eines Schnittes durch das System innere Kräfte und Momente frei werden, die es im Gleichgewicht halten. Dabei geht man davon aus, daß der Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche geführt wird und faßt die Verläufe der Normal- und Schubspannungen zu resultierenden Kräften und Momenten zusammen. Konventionelle 3- und 5-Parameter-Schalenformulierungen enthalten mit den Membran- und Querkräften, sowie den Biege- und Verwindungsmomenten alle denkbaren und zur Erfüllung des Gleichgewichts notwendigen Schnittgrößen. Wie bereits im Zusammenhang mit der zweidimensionalen Balkentheorie angedeutet wurde, können alle weiteren, in Modellen höherer Ordnung vorkommenden, statischen Variablen in diesem Sinne streng genommen nicht als Schnittgrößen bezeichnet werden.

Die statischen Variablen können durch Integration der Spannungskomponenten über die Dicke berechnet werden. In Abschnitt 4.4 wurden die statischen Variablen  $n^{ij}$ ,  $m^{ij}$  und  $s^{ij}$  auf diese Weise hergeleitet. Sie sind so definiert (Gleichungen (4.37) – (4.39)), daß sie zu den in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen kinematischen Variablen energetisch konjugiert sind (Gleichung (4.40)).

Die Anteile  $n^{\alpha\beta}$ , die sich aus der Integration der konstanten Komponenten von  $S^{\alpha\beta}$  ergeben, werden Membrankräfte genannt. Es handelt sich dabei um Normal- und Schubkräfte in der Schalenenebene. Die Biegemomente  $m^{11}$  und  $m^{22}$  entstehen aus der Integration der linearen Anteile der Normalspannungen  $S^{11}$  und  $S^{22}$  über die Dicke, das Verwindungsmoment  $m^{12}$  aus der Integration der Schubspannungen  $S^{12}$ . Schließlich tauchen auch bei den statischen Größen quadratische Anteile  $s^{\alpha\beta}$  in Dickenrichtung auf, die zu den in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Verzerrungen  $\gamma_{\alpha\beta}$  energetisch konjugiert sind. Mechanisch können diese Schnittgrößen als Bimomente interpretiert werden (Abb. 5.9). Statisch haben sie dieselbe Bedeutung wie die Bimomente, die bei der Wölbkrafttorsion von Balken auftreten. Allerdings resultieren diese aus Querschnittsverwölbungen und sind nicht eine Folge geometrischer Nichtlinearität.

Bei der Beschreibung der zugehörigen Verzerrungen  $\gamma_{\alpha\beta}$  wurde erwähnt, daß diese Anteile aufgrund ihrer untergeordneten Bedeutung für die meisten Probleme in dieser Arbeit vernachlässigt werden können. Dasselbe gilt damit auch für die Bimomente  $s^{\alpha\beta}$ , welche im übrigen die einzigen statischen Variablen der 7-Parameter-Formulierung sind, die bei einer geometrisch linearen Theorie verschwinden.

Das Integral der konstanten Anteile der Querschubspannungen  $n_{\alpha 3}$  repräsentiert die Querkräfte. Bei 3- und 5-Parameter-Formulierungen sind das die einzigen Kräfte, die senkrecht zur Scha-

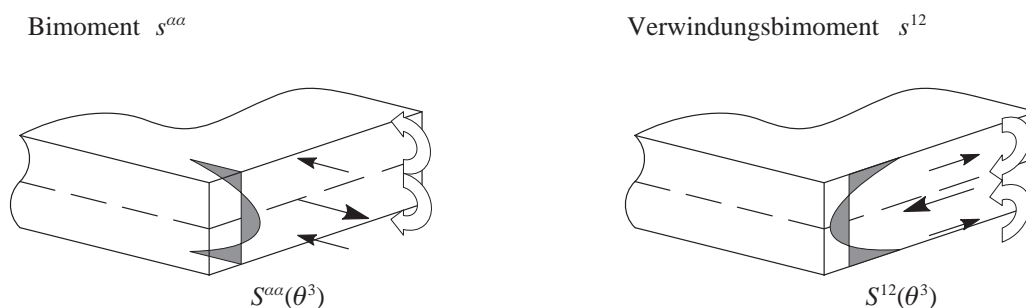


Abb. 5.9: Bimomente  $s^{\alpha\beta}$



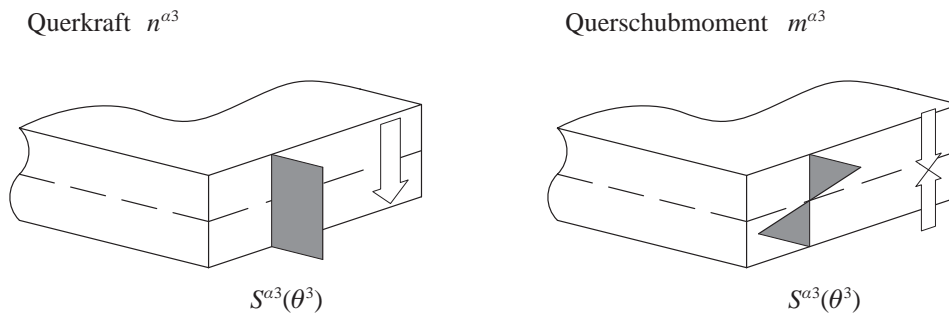


Abb. 5.10: Quer(schub)kraft  $n^{\alpha 3}$  und Querschubmoment  $m^{\alpha 3}$

lenmittelfläche wirken. Obwohl jedoch in einer 7-Parameter-Formulierung zusätzliche statische Variablen auftauchen, deren zugehörige Spannungen in  $\theta^3$ -Richtung wirken, bleiben auch dort die Querkräfte die einzigen resultierenden Kräfte in Dickenrichtung. Das liegt daran, daß die anderen statischen Variablen entweder mit sich selbst im Gleichgewicht stehen ( $m^{\alpha 3}$ ) oder nicht im Querschnitt wirken ( $n^{33}$  und  $m^{33}$ ).

Die Integrale über den linearen Verlauf der Querschubspannungen  $m^{\alpha 3}$  wurden in Abb. 5.5 als Querschubmomente bezeichnet. Sie treten nur bei der 7-Parameter-Formulierung auf. Der Terminus „Moment“ wurde hier gewählt, weil der zugehörige Verlauf der Querschubspannungen genau demjenigen der Normalspannungen beim Biegemoment bzw. der Schubspannungen beim Verwindungsmoment entspricht. Wie beim Biegemoment ist beim Querschubmoment die resultierende Kraft gleich Null. Allerdings gilt dies — im Gegensatz zum Biegemoment — auch für das resultierende Moment, da der Hebelarm der entgegengerichteten Kräfte null ist (Abb. 5.10). Die zum Querschubmoment gehörenden Spannungen sind also mit sich selbst im Gleichgewicht. Wenn sie aufgrund von kinematischen oder statischen Randbedingungen entstehen, wirken sie sich daher nach dem Prinzip von St. Venant nur lokal aus. Zum globalen Gleichgewicht leistet das Querschubmoment keinen Beitrag.

Die quadratischen Anteile der Querschubverzerrungen sind auch bei der 7-Parameter-Formulierung identisch Null, d.h.  $\gamma_{\alpha 3} = 0$ . Da für die dazu energetisch konjugierten statischen Variablen  $s^{\alpha 3}$  dasselbe gilt, führt diese Tatsache jedoch nicht zu unerwünschten Versteifungseffekten.

Damit sind alle Spannungen behandelt, die in einem Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche frei werden. Die verbleibenden statischen Variablen entstehen aus der Integration von Normalspannungen  $S^{33}$  senkrecht zur Schalenmittelfläche. Wie bereits im Zusammenhang mit der zweidimensionalen Balkenformulierung erwähnt, können diese statischen Variablen eigentlich weder als Kräfte noch als Schnittgrößen bezeichnet werden, da sie weder wirklich resultierende Kräfte darstellen noch im Querschnitt der Schale wirken. Trotzdem müssen sie berücksichtigt werden, da sie zur inneren Energie beitragen und den Effekt transversaler Normalspannungen innerhalb der Schale berücksichtigen.

Die in  $\theta^3$  konstanten Anteile  $n^{33}$  (Abb. 5.11)

$$n^{33} = S^{33} \cdot h \quad (5.61)$$

hängen mit den Zug- oder Druckspannungen zusammen, die entstehen, wenn die Schale in Dickenrichtung gedehnt oder gestaucht wird. Die Einheit [kN/m] setzt sich also aus [kN/m<sup>2</sup>] (Spannung  $S^{33}$ ) und [m] (Dicke  $h$ ) zusammen. Eine einfache mechanische Interpretation dieser Größe ist schwierig zu finden. Reduziert man das dreidimensionale Problem gedanklich auf ein

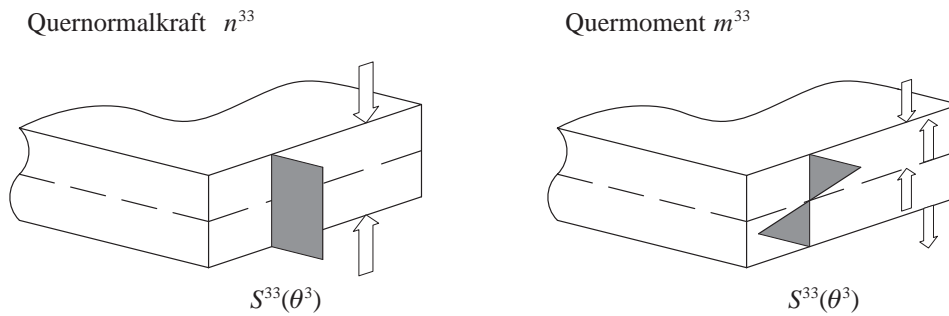


Abb. 5.11: Quernormalkraft  $n^{33}$  und Quermoment  $m^{33}$

eindimensionales in  $\theta^3$ -Richtung, so entspricht  $n^{33}$  der Federkraft  $P$  eines linearen Dehnstabes, multipliziert mit dessen Länge  $\ell$ . Bei einer Verlängerung des Stabes um  $\Delta\ell$  gilt

$$\Delta\ell = \frac{P \ell}{EA} \quad \Leftrightarrow \quad P \ell = EA \Delta\ell = EA \int_0^\ell \epsilon \, dx = \int_0^\ell P \, dx =: n^{33} . \quad (5.62)$$

Offensichtlich verhält sich  $n^{33}$  zu  $P$  (oder  $S^{33}$  bei der Schale) wie  $\Delta\ell$  zu  $\epsilon$  (bzw.  $E_{33}$ ). Die Quernormalkraft könnte also als „Kraftmenge“ interpretiert werden. Der Wert  $n^{33}$  resultiert gleichsam daraus, daß die Spannungen entlang der  $\theta^3$ -Richtung auf einen Punkt „zusammengeschoben“ werden.

Es ist interessant zu bemerken, daß die energetisch konjugierten Verzerrungen  $\alpha_{33}$  im Gegensatz dazu unmittelbar einer mechanischen Interpretation zugänglich sind. Sie entsprechen gerade der Dickenänderung der Schale. Bei dem eindimensionalen Gedankenmodell ist das die Stabdehnung.

Für das Quermoment  $m^{33}$  gilt sinngemäß das gleiche. Auch hier ist der Begriff „Moment“ nur insofern berechtigt, als er der eingangs dieses Kapitels erläuterten Systematik der Bezeichnung statischer Variablen entspricht. Die physikalische Deutung dieser Kraftgröße ist auch hier noch am ehesten indirekt über die Deformation möglich, die sie verursacht. Während die Quernormalkraft die Schale insgesamt in Dickenrichtung dehnt oder staucht, sorgt das Quermoment auf der einen Seite der Mittellinie für eine Streckung, auf der anderen für eine Stauchung (Abschnitt 3.3).

#### 5.4.2 Statische Randbedingungen und Belastung

Für die statischen Randbedingungen gilt — im Gegensatz zu den kinematischen — daß auch für die aus den zusätzlichen Verzerrungen folgenden verallgemeinerten Schnittgrößen Randbedingungen vorgegeben werden können (siehe Eulergleichung (2.45)). Bei einer Formulierung mit finiten Elementen werden die Lasten jedoch gewöhnlich am Gesamtsystem definiert, in dem diese Anteile nicht mehr auftreten. Sie werden vor dem Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Systemsteifigkeit durch statische Kondensation eliminiert (Abschnitt 6.3).

Bei finiten Elementen gehen die statischen Randbedingungen und die Lastterme im Gebiet in dieselben Größen, nämlich die konsistenten Knotenlasten, ein. Es genügt deshalb, im Folgenden nur die Gebietsterme zu betrachten.

Die meisten Lasten bei Schalen — abgesehen von ihrem Eigengewicht — entstehen aus Kontakt anderer Körper oder Fluide mit der Oberseite oder der Unterseite der Schale. Bei einer zweidi-

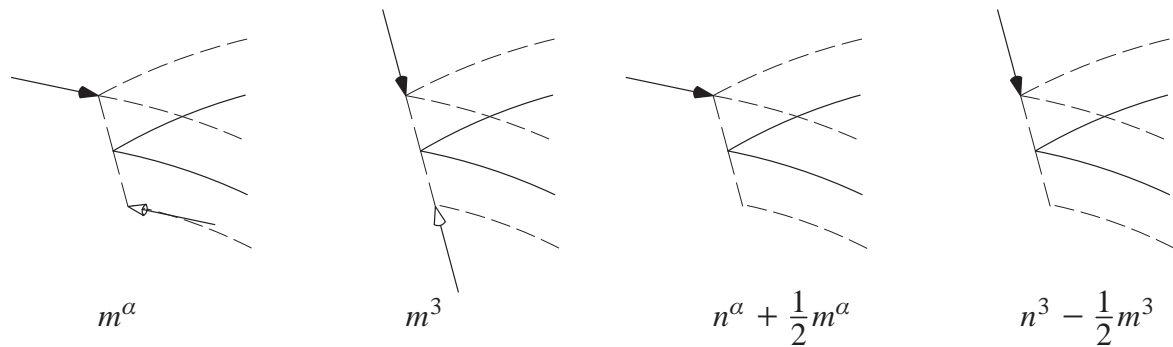


Abb. 5.12: Belastung in Richtung der Differenzverschiebungen — Oberflächenlasten

mensionalen Modellierung der Schale werden diese Lasten als auf deren Mittelfläche wirkend angenommen. Bei der 7-Parameter-Formulierung besteht jedoch die Möglichkeit, die Art der Lasteinleitung genauer zu berücksichtigen (Ramm et al. (1995)). Dazu wird der Gebietsterm der Lasten über die Dicke integriert und in Komponenten zerlegt,

$$\int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = \int_A \left[ n^\alpha \delta u_\alpha + n^3 \delta u_3 + m^\alpha \delta w_\alpha + m^3 \delta w_3 \right] dA . \quad (5.63)$$

Die Belastungen in Schalenebene  $n^\alpha$  unterscheiden sich nicht von denen klassischer Schalenformulierungen. Dasselbe gilt zunächst für die Querbelastung  $n^3$  auf der Schalenmittelfläche. Meistens nicht berücksichtigt, aber trotzdem bereits bei 3- und 5-Parameter-Formulierungen möglich, sind verteilte Momentenbelastungen  $m^\alpha$ . Sie können beispielsweise aus exzentrischen Tangentiallasten (z.B. aus vorgehängten Fassaden) entstehen. Während jedoch bei einer 5-Parameter-Formulierung ein solches Moment direkt auf einen Rotationsfreiheitsgrad wirkt, gehört es bei der 7-Parameter-Formulierung zu einer zur Schalenmittelfläche parallelen Differenzvektorkomponente. Das resultierende Moment folgt daraus in Abhängigkeit der Schalendicke als Kräftepaar (Abb. 5.12).

Schließlich taucht noch ein vierter Lastterm  $m^3$  auf, der aus zwei sich gegenüberliegenden, miteinander im Gleichgewicht stehenden Kräften besteht, die senkrecht auf die Schalenoberfläche wirken. Eine Kombination von  $m^3$  mit  $n^3$  kann damit für die Berücksichtigung von Lasten, die auf der Schalenober oder -unterseite wirken, verwendet werden (Ramm et al. (1995)). Die Genauigkeit in bezug auf die dreidimensionale Lösung nimmt damit zu. Trotzdem kann diese Approximation die numerische Simulation dreidimensionaler Effekte an Lasteinleitungspunkten mit Hilfe von mehreren dreidimensionalen finiten Elementen über die Dicke nicht ersetzen.

In Abb. 5.12 sind die Lastterme  $m^\alpha$  und  $m^3$  graphisch dargestellt. Der nicht ausgefüllte Pfeil auf der Schalenunterseite soll darauf hinweisen, daß die Belastung in Richtung einer der Differenzverschiebungen am dreidimensionalen Schalenkörper Kräfte in zwei entgegengesetzte Richtungen zur Folge hat. Bei einer Kombination mit  $n^\alpha$  bzw.  $n^3$  können damit Lasten simuliert werden, die nicht auf der Schalenmittelfläche liegen.

## 5.5 Bedeutung des Stoffgesetzes

Es wurde bereits mehrfach erwähnt, daß die Verwendung vollständiger, dreidimensionaler Stoffgesetze eine zentrale Motivation für die Entwicklung des vorliegenden Schalenmodells war. Die

Definition des Materialtensors bedarf beim 7-Parameter-Modell keinerlei Modifikationen oder Annahmen für den Übergang von drei auf zwei Dimensionen.

Im Rahmen einer Formulierung mit finiten Elementen wird die dazu notwendige Vorabintegration des Stoffgesetzes über die Dicke im allgemeinen numerisch durchgeführt. Um jedoch die mechanische Bedeutung der einzelnen Komponenten des Materialtensors diskutieren zu können, wird er in diesem Abschnitt für ein linear-elastisches, homogenes, isotropes Material explizit hergeleitet. Die daraus ableitbaren Schlußfolgerungen lassen sich insofern verallgemeinern, als bei anderen Materialmodellen sich zwar die einzelnen Werte in der Materialmatrix ändern und zusätzliche Kopplungsterme entstehen können, ihre mechanische Bedeutung aber prinzipiell dieselbe bleibt.

Die Herleitung folgt im wesentlichen der, die bereits im Zusammenhang mit dem zweidimensionalen Balken mit Dickenänderung verwendet wurde. Ausgangspunkt ist dabei die vollständig dreidimensionale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für einen linear-elastischen, isotropen Werkstoff bei kleinen Verzerrungen. Wie in den vorigen Abschnitten wird auch hier davon ausgegangen, daß die  $\theta^1$ - und die  $\theta^2$ -Richtung zueinander orthogonal sind, um Begriffe wie Dehn- und Schubsteifigkeit verwenden zu können.

$$S^{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} . \quad (5.64)$$

Dabei entsprechen die beiden Koeffizienten den Lamé-Konstanten nach Gleichung (2.17). Das Stoffgesetz kann auch in Matrizenform dargestellt werden,

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{33} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\nu} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} , \quad (5.65)$$

deren Struktur sich später — ebenso wie beim Balken — im Stoffgesetz für die Schale widerspiegeln wird. Diesen Beziehungen liegt die Definition der Komponenten des Werkstofftensors nach Gleichung (2.18) zugrunde.

Bei der Vorabintegration des Stoffgesetzes (Gleichung (4.42))

$$D_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^K C^{ijkl} \left(\frac{h}{2}\right)^{(K+1)} d\theta^3 , \quad K \in \{0, 1, 2\} \quad (5.66)$$

wird die Annahme  $\hat{\mu} = h/2$  aus Abschnitt 4.5 übernommen. Außerdem werden hier gleich die Steifigkeiten weggelassen, die zu den Anteilen  $\gamma_{ij}$  und  $s^{ij}$  gehören.

Für den Sonderfall der Platte kann diese Vorabintegration exakt analytisch durchgeführt werden, da die lokale Basis dann orthogonal ist. Die Komponenten des Werkstofftensors (Gleichung (2.18))

$$C^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu [\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj}] \quad (5.67)$$

sind in diesem Fall, im Gegensatz zu den Schalen, unabhängig von  $\theta^3$ .

Mit den Abkürzungen

$$\bar{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \bar{h} = \frac{h^3}{12}, \quad (5.68)$$

$$h_q = \alpha h, \quad \bar{h}_q = \beta \bar{h}$$

(zur Definition der Schubkorrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  siehe Abschnitt 5.5.1) bekommt das Stoffgesetz für eine 7-Parameter-Plattenformulierung die folgende Form.

$$\begin{bmatrix} n^{11} \\ n^{22} \\ n^{33} \\ n^{12} \\ n^{13} \\ n^{23} \\ m^{11} \\ m^{22} \\ m^{33} \\ m^{12} \\ m^{13} \\ m^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}h & \lambda h & \lambda h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda h & \bar{E}h & \lambda h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda h & \lambda h & \bar{E}h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gh & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gh_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Gh_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{E}\bar{h} & \lambda\bar{h} & \lambda\bar{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\bar{h} & \bar{E}\bar{h} & \lambda\bar{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\bar{h} & \lambda\bar{h} & \bar{E}\bar{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\bar{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\bar{h}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\bar{h}_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 2\alpha_{12} \\ 2\alpha_{13} \\ 2\alpha_{23} \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ 2\beta_{12} \\ 2\beta_{13} \\ 2\beta_{23} \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Bei Schalen sind die beiden Nebendiagonalblöcke ebenfalls besetzt. Ebenso wie beim oben beschriebenen zweidimensionalen Balken mit Dickenänderung spiegelt sich in diesem über die Dicke integrierten Stoffgesetz die Struktur des ursprünglichen dreidimensionalen Stoffgesetzes wieder. Es besteht aus zwei — bei Platten entkoppelten — Blöcken, die sich lediglich im Beitrag der Schalendicke zur entsprechenden Steifigkeit unterscheiden. Bei den konstanten Anteilen ist das die Schalendicke  $h$  bei den linearen das Trägheitsmoment  $\bar{h} = h^3/12$ .

Der entscheidende Punkt in Gleichung (5.69) ist der, daß ein „Gleichgewicht“ zwischen den statischen und den kinematischen Größen besteht. Jeder kinematischen Variable ist eine statische Variable zugeordnet. Wie beim 2D-Balken würde das Weglassen der zusätzlichen Verzerrung  $\tilde{\beta}$  dazu führen, daß der lineare Anteil der Normalverzerrung in Dickenrichtung  $\beta_{33}$  identisch verschwinden würde, während die entsprechende Kraftgröße  $m^{33}$  aufgrund des Querdehneffekts immer noch aufträte. Dieses Ungleichgewicht führte dann zu parasitären Spannungen in Dickenrichtung (Poisson-Dickenlocking) und damit zu einer für Biegeprobleme unbrauchbaren Theorie (Abschnitt 3.3).

Es ist interessant zu bemerken, daß bei der Formulierung von finiten Elementen, sei es für Scheiben, Balken, Platten, Schalen oder dreidimensionale Körper, genau derselbe Effekt auftritt. Die störenden Locking-Phänomene lassen sich immer auf ein „Ungleichgewicht“ zwischen statischen und kinematischen Größen zurückführen.

### 5.5.1 Schubkorrekturfaktoren

Bei Platten- und Schalentheorien ist es üblich, Schubkorrekturfaktoren einzuführen, um einen realistischeren Verlauf der Querschubspannungen zu berücksichtigen. Obwohl das einen Eingriff in die konstitutiven Gleichungen bedeutet, ist es kein Widerspruch zu der Forderung, unveränderte dreidimensionalen Stoffgesetze verwenden zu können. Erstens bedeutet die Berücksichtigung eines Schubkorrekturfaktors lediglich eine Modifikation einzelner Steifigkeitswerte im integrierten Stoffgesetz, ohne daß eine Kondensation oder sonstige Umformungen notwendig wären. Zweitens sind Schubkorrekturfaktoren nicht notwendig, um eine asymptotisch korrekte Theorie zu erhalten. Sie verringern nur die Abweichung zur dreidimensionalen Lösung in der inneren Energie für endliche Dicken. Im Folgenden werden geeignete Schubkorrekturfaktoren für die 7-Parameter-Theorie für isotrope Materialgesetze hergeleitet. Dazu werden der konstante und der lineare Anteil der Querschubspannungen getrennt betrachtet.

Der konstante Anteil  $n^{\alpha 3}$  gehört zum Biegeanteil der Deformation und entspricht damit dem, der auch bei konventionellen Schalenformulierungen mit Reissner-Mindlin-Kinematik auftritt. Für Balken mit prismatischen Querschnitt kann gezeigt werden, daß dieser Verlauf in Wirklichkeit parabelförmig ist. Für Platten und Schalen ist das zumindest eine gute Näherung (Abb. 5.13).

Ausgangspunkt der Herleitung eines entsprechenden Schubkorrekturfaktors sei eine gegebene Querkraft  $n^{\alpha 3} = h S_0^{\alpha 3}$ . Der Stich für eine parabelförmige Spannungsverteilung mit gleicher Resultierenden ist dann  $3/2 S_0^{\alpha 3}$  (Abb. 5.13). Die zugehörige Verzerrungsenergie für ein isotropes Material ist für die konstante Spannungsverteilung

$$\Pi_{n^{\alpha 3}} = \frac{1}{Gh} \int_{-1}^1 (S_0^{\alpha 3})^2 \frac{h}{2} d\theta^3 = \frac{h (S_0^{\alpha 3})^2}{Gh}, \quad (5.70)$$

für die parabelförmige Verteilung jedoch

$$\bar{\Pi}_{n^{\alpha 3}} = \frac{1}{Gh} \int_{-1}^1 \left[ \frac{3}{2} S_0^{\alpha 3} (1 - (\theta^3)^2) \right]^2 \frac{h}{2} d\theta^3 = \frac{6}{5} \frac{h (S_0^{\alpha 3})^2}{Gh} = \frac{6}{5} \Pi_{n^{\alpha 3}}. \quad (5.71)$$

Um diesen Unterschied auszugleichen, wird üblicherweise in der Schubsteifigkeit anstatt der Schalendicke  $h$  eine korrigierte Schalendicke

$$h_\alpha = \alpha h \quad (5.72)$$

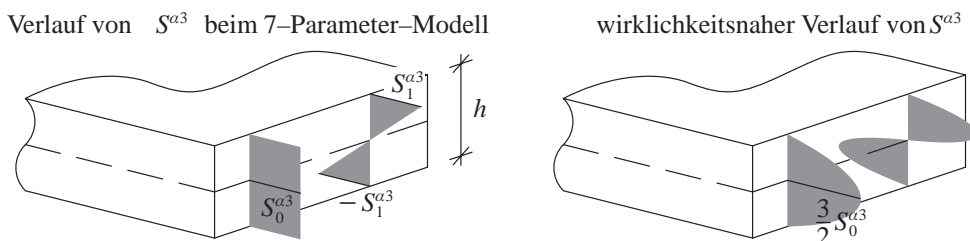


Abb. 5.13: Verlauf der Querschubspannungen beim 7-Parameter-Modell

verwendet, wobei  $\alpha$  als Schubkorrekturfaktor bezeichnet wird. Ziel ist es, eine korrigierte Verzerrungsenergie  $\Pi_{n^{\alpha 3}}$  zu erhalten, die der des parabelförmigen Spannungsverlaufes entspricht. Aus (5.71) und (5.70) folgt

$$\frac{6}{5} \frac{h (S_0^{\alpha 3})^2}{Gh} = \bar{\Pi}_{n^{\alpha 3}} = \Pi_{n^{\alpha 3}} = \frac{h (S_0^{\alpha 3})^2}{Gh_\alpha} \Rightarrow \frac{6}{5} \frac{1}{h} = \frac{1}{h_\alpha} \quad (5.73)$$

und damit ein Schubkorrekturfaktor von  $\alpha = 5/6$ . Diesen Wert findet man auch meist in der Literatur im Zusammenhang mit Schubweichen Platten- und Schalentheorien.

In der Literatur bisher noch unberücksichtigt blieb die Möglichkeit, auch die linearen Anteile der Querschubspannungen durch einen Schubkorrekturfaktor  $\beta$  zu verbessern. Intuitiv kann man als physikalisch realistischen Verlauf eine kubische Verteilung der Querschubspannungen annehmen (Abb. 5.13). Die Herleitung von  $\beta$  erfolgt dann analog zu der von  $\alpha$ . Zunächst wird eine Spannungsverteilung gesucht, die die gleiche „Resultierende“ hat wie der lineare Verlauf. Die Resultierende ist hier jedoch keine Kraft, sondern das Querschubmoment  $m^{\alpha 3}$ . Dazu wird der kubische Verlauf als

$$S^{\alpha 3}(\theta^3) = f S_1^{\alpha 3} [\theta^3 - (\theta^3)^3] \quad (5.74)$$

angesetzt. Dieser Ansatz gewährleistet, daß erstens keine resultierende Querkraft entsteht und zweitens die Schubspannungen an der Schalenober und -unterseite verschwinden. Dabei ist  $f$  ein zunächst unbekannter Faktor, der so zu bestimmen ist, daß das Querschubmoment dem des linearen Verlaufes entspricht.

$$m^{\alpha 3} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{\alpha 3} \frac{h^2}{4} d\theta^3 = \int_{-1}^1 \theta^3 (S_1^{\alpha 3} \theta^3) \frac{h^2}{4} d\theta^3 = S_1^{\alpha 3} \frac{h^2}{6} . \quad (5.75)$$

Für den kubischen Verlauf der Querschubspannungen ist das Querschubmoment

$$m^{\alpha 3} = \int_{-1}^1 \theta^3 (f S_1^{\alpha 3} [\theta^3 - (\theta^3)^3]) \frac{h^2}{4} d\theta^3 = f S_1^{\alpha 3} \frac{h^2}{15} , \quad (5.76)$$

woraus sich ein Faktor  $f = 5/2$  ergibt. Die inneren Energien für den linearen Verlauf

$$\Pi_{m^{\alpha 3}} = \frac{1}{Gh} \int_{-1}^1 (S_1^{\alpha 3} \theta^3)^2 \frac{h}{2} d\theta^3 = \frac{1}{3} \frac{h (S_1^{\alpha 3})^2}{Gh} \quad (5.77)$$

und den kubischen Verlauf der Querschubspannungen

$$\bar{\Pi}_{m^{\alpha 3}} = \frac{1}{Gh} \int_{-1}^1 \left( \frac{5}{2} S_1^{\alpha 3} [\theta^3 - (\theta^3)^3] \right)^2 \frac{h}{2} d\theta^3 = \frac{10}{21} \frac{h (S_a^{\alpha 3})^2}{Gh} = \frac{10}{7} \Pi_{m^{\alpha 3}} \quad (5.78)$$

liefern schließlich den Wert für den Schubkorrekturfaktor  $\beta$ , der sich auf die Querschnittsgröße  $\bar{h}$  bezieht,

$$\bar{h}_\beta = \beta \bar{h} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{7}{10} . \quad (5.79)$$

Die Auswirkungen der Schubkorrekturfaktoren auf die Resultate werden im Kapitel 8 untersucht.

### 5.5.2 Vollständigkeit von Schalentheorien für 3D-Materialgesetze

Das 7-Parameter-Schalenmodell berücksichtigt alle in  $\theta^3$  konstanten und linearen Verläufe sämtlicher Verzerrungen und Spannungen. Es werden keine weggelassen und keine hinzugefügt. Für isotrope Materialgesetze kann die Berücksichtigung zusätzlicher Anteile, wie etwa eines quadratischen Verlaufs der Querschubverzerrungen, das Modell verfeinern und die Qualität der Ergebnisse verbessern. Für allgemeine, anisotrope Materialgesetze scheint es jedoch nicht sinnvoll, den Verlauf in Dickenrichtung nur für einzelne Verzerrungsanteile zu verändern. Das würde durch die Kopplung aller Verzerrungen und Spannungen gleicher Ordnung in  $\theta^3$  zu parasitären Verzerrungen oder Spannungen und damit zu künstlichen Versteifungen führen. Für eine Formulierung, die in der Lage sein soll, Membran- und Biegeeffekte abzubilden, ist eine solche Erweiterung ohnehin nicht notwendig. Für ein Modell, das auch höhere Effekte berücksichtigt, ist es jedoch notwendig, die Vektoren der kinematischen und statischen Variablen jeweils für alle Komponenten  $E_{ij}$  und  $S^{ij}$  auf einen quadratischen, kubischen oder höheren Verlauf zu erweitern.

Das bedeutet zugleich, daß die 7-Parameter-Formulierung, in der Form, wie sie von Büchter und Ramm (1992a) vorgeschlagen wurde, diejenige Version einer dreidimensionalen Schalenformulierung ist, die mit dem geringstmöglichen Aufwand an kinematischen und statischen Variablen auskommt.

Libai und Simmonds (1998) vertreten die Ansicht, daß die Kirchhoff-Theorie nur von konstitutiven Annahmen abgeleitet werden sollte, anstatt, wie üblich, von kinematischen. Mit Hilfe eines geeigneten Aufbaus der konstitutiven Beziehungen der Schale ist es demnach möglich, diejenigen Terme zu eliminieren, die nicht zur inneren Energie beitragen sollen, wie zum Beispiel Normalspannungen und -verzerrungen in Dickenrichtung. Dieser Standpunkt hat eine gewisse Verwandtschaft zur Annahme eines „ebenen Verzerrungszustandes“ bei Koiter (1960), der nur diejenigen Terme bei der Bildung der inneren Energie berücksichtigt, deren Spannungen parallel zur Schalenmittelfläche wirken. Querkräfte können zwar vorhanden sein, sie tragen jedoch nichts zur inneren Energie bei. Koiter (1960) beabsichtigt mit dieser Vorgehensweise den Widerspruch zwischen den Annahmen verschwindender Normalspannungen und -verzerrungen zu vermeiden.

Die Idee von Libai und Simmonds (1998) kann leicht mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen nach Gleichung (5.69) veranschaulicht werden. Wird angenommen, daß die Vektoren der kinematischen Variablen auch die quadratischen Terme  $\gamma_{ij}$  enthalten, während die zugehörigen Terme in der Materialmatrix Null sind, dann ändert sich nichts an der inneren Energie und damit auch nichts an der Ordnung des entsprechenden Modells. Das bedeutet, daß die Form des Materialgesetzes alleine die Approximationsordnung steuern kann, unabhängig von den kinematischen Annahmen. In der Betrachtungsweise von Libai und Simmonds (1998) führt also die Forderung nach einem vollständig dreidimensionalen Stoffgesetz und einer linearen Veränderlichkeit aller kinematischen und statischen Variablen in Dickenrichtung zwangsläufig zu einem 7-Parameter-Modell in der hier beschriebenen Form.

## 5.6 Zusammenfassung

Das 7-Parameter-Schalenmodell beinhaltet kinematische und statische Variablen, die bei konventionellen schubweichen Schalentheorien nicht vorkommen. Diese statischen Variablen höhe-



rer Ordnung können jedoch nicht als Schnittgrößen interpretiert werden. Die resultierenden Kräfte im Querschnitt sind Null, sie tragen also nichts zur Erfüllung des globalen Gleichgewichts bei. Das liegt daran, daß die zugehörigen Spannungen entweder mit sich selbst im Gleichgewicht stehen oder in einem Schnitt senkrecht zur Schale gar nicht frei werden.

Die Berücksichtigung dieser Größen steigert die Modellgenauigkeit im Vergleich zur Lösung nach der dreidimensionalen Kontinuumstheorie. Außerdem besteht die Möglichkeit mit zusätzlichen statischen und kinematischen Randbedingungen dreidimensionale Effekte näherungsweise zu berücksichtigen. Ein Schubkorrekturfaktor höherer Ordnung kann die Ergebnisse für den Membrananteil des Modells noch verbessern.

Die physikalische Analyse der 7-Parameter-Formulierung ist einerseits zu dessen Verständnis wichtig und die Voraussetzung für eine sinnvolle Modellbildung und Interpretation der Ergebnisse. Sie zeigt jedoch auch, daß das 7-Parameter-Modell in der Form, wie es von Büchter und Ramm (1992a) vorgeschlagen wurde, im Hinblick auf die Anzahl der berücksichtigten kinematischen und statischen Variablen optimal ist. Es werden genau diejenigen Anteile berücksichtigt, die notwendig sind, um vollständig dreidimensionale Stoffgesetze verwenden zu können. In diesem Sinne stellt es die niedrigst mögliche Approximationsstufe eines Schalenmodells dar, die für vollständig dreidimensionale Stoffgesetze geeignet ist.

## 6 Diskretisierung mit finiten Elementen

In Kapitel 4 ist eine Schalentheorie beschrieben, deren Entwicklung ursprünglich nicht auf analytische Lösungsverfahren abzielt, sondern auf eine Diskretisierung der Geometrie sowie der Kinematiken. Der Übergang von einer dreidimensionalen auf eine zweidimensionale Beschreibung ist damit vor der Diskretisierung erfolgt, was nicht dem Konzept der Degeneration, sondern der „klassischen“ Vorgehensweise bei der Herleitung finiter Schalenelemente entspricht.

Wird dieser Weg beschritten, müssen einige Fragen beantwortet werden, die mit der Approximation der Geometrie zusammenhängen. Insbesondere die Definition des Direktorfeldes kann nicht ohne weiteres von der kontinuierlichen Theorie übernommen werden, wenn ein isoparametrisches Konzept verfolgt wird, Geometrie und Kinematik also mit denselben Ansätzen approximiert werden. Die krummlinigen Koordinatenlinien werden üblicherweise mit dem natürlichen Elementkoordinatensystem identifiziert. An Diskretisierungsknicken ist die Definition des Direktors deshalb nicht mehr eindeutig. Die diskretisierte Schalenstruktur verstößt gegen mathematisch begründete Anforderungen an die Glattheit der Geometrie.

Um dieses Problem umgehen zu können, wird in diesem Abschnitt eine — der 7-Parameter-Theorie entsprechende — Schalenformulierung mit finiten Elementen beschrieben, die aus dem Degenerationskonzept hergeleitet wird. In der Dissertationsschrift von Büchter (1992) (siehe auch Büchter und Ramm (1992b)) wird die Äquivalenz von Degenerationskonzept und Schalentheorie gezeigt. Der einzige Unterschied ist demnach bei der Interpolation der Rotationsfreiheitsgrade innerhalb des einzelnen finiten Elements zu sehen. Da in der vorliegenden Formulierung jedoch mit Differenzverschiebungen gearbeitet wird, fällt schließlich auch dieser Unterschied weg (Abschnitt 6.1).

Die Diskretisierung der Schalengleichungen in  $\theta^1$ - und  $\theta^2$ -Richtung (in der Schalenfläche) kann damit völlig getrennt von der (Semi-)Diskretisierung des Schalenkontinuums in  $\theta^3$ -Richtung (in Dickenrichtung) betrachtet werden, obwohl das beim Degenerationskonzept im Prinzip nicht der Fall ist. Anstatt der Methode der finiten Elemente ist genau so gut jedes andere Diskretisierungsverfahren, zum Beispiel die Randelementmethode, denkbar.

### 6.1 Degenerationskonzept

Ausgangspunkt des Degenerationskonzeptes ist die Diskretisierung des Schalenkörpers mit dreidimensionalen *Kontinuumselementen* (*bricks*). Dabei ist die Annahme eines bestimmten Ansatzes in Dickenrichtung der Schale gleichbedeutend mit den entsprechenden Annahmen bei der Herleitung einer Schalentheorie (Semidiskretisierung). Im Fall der 7-Parameter-Formulierung werden lineare Ansätze für die Verschiebungen und Normalverzerrungen in Dickenrichtung gemacht (Gleichungen (4.9) und (4.11)).

Die Diskretisierung in der Schalenebene ist davon prinzipiell unabhängig. Es ist ohne weiteres möglich, Kontinuumselemente zu formulieren, die in einer Richtung lineare und in den beiden anderen Richtungen quadratische Ansätze verwenden. In Abb. 6.1 ist dieser Fall dargestellt. Nicht abgebildet ist der Ansatz für die erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

Die Schalenmittelfläche ist als diejenige Fläche definiert, die an jedem Punkt zu den Außenflächen der Schale den gleichen Abstand hat. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}^K$  zur Schalenmittelfläche am Knoten

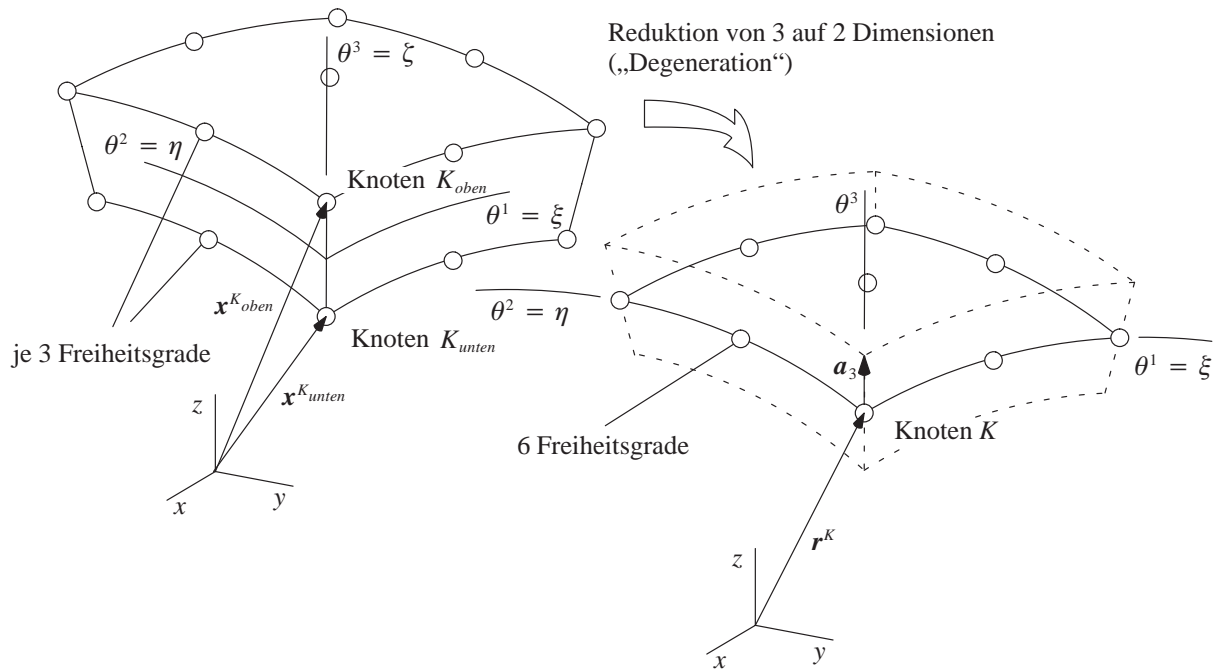


Abb. 6.1: Degenerationskonzept

$K$  ist damit genau das arithmetische Mittel zwischen den Ortsvektoren des entsprechenden Knotenpaars des dreidimensionalen Elements,

$$\mathbf{r}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{K_{oben}} + \mathbf{x}^{K_{unten}}), \quad K \in \{ 1, 2, \dots, n \}. \quad (6.1)$$

Hier und im Folgenden weisen große, lateinische Buchstaben als Kopf- und Fußzeiger auf die Elementnumerierung hin. Für die Summationskonvention gilt folglich, daß von 1 bis  $n$  summiert werden muß, wenn  $n$  die Anzahl der Knoten des finiten Elementes ist.

Bei der Berechnung des Direktors tritt die einzige Abweichung von „degenerierten“ zu „echten“ Schalenelementen auf, was die Diskretisierung der Geometrie anbelangt. In Gleichung (4.4) wurde der Direktor als Vektor definiert, der auf den kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  der Schalenmittelfläche senkrecht steht. Bei einer  $C^0$ -kontinuierlichen Diskretisierung der Schalengeometrie ist diese Definition an den Elementrändern aufgrund der Diskretisierungsknicke jedoch nicht eindeutig.

Beim Degenerationskonzept ergibt sich der Direktor, wenn seine Länge auf die halbe Schalendicke festgelegt werden soll, als die Hälfte der Differenz zwischen den Ortsvektoren der Knoten  $K_{oben}$  und  $K_{unten}$

$$\mathbf{a}_3^K = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{K_{oben}} - \mathbf{x}^{K_{unten}}). \quad (6.2)$$

Dadurch ist auch an Knoten, an denen die diskretisierte Schalenfläche Knicke aufweist, ein eindeutiger Direktor definiert.

In einem Computerprogramm ist es aus offensichtlichen Gründen nicht sinnvoll, zunächst ein dreidimensionales Modell zu generieren, um daraus mit Hilfe von (6.1) und (6.2) ein Flächenmodell zu erhalten. Es ist effizienter sogleich ein Flächenmodell zu erstellen und die Direktoren in jedem Element knotenweise als Kreuzprodukt der kovarianten Basisvektoren (Gleichung (4.4)) zu errichten. An Knoten, die zu mehreren Elementen gehören, können die Direktoren

ren anschließend gemittelt werden. Diese Mittelung hat jedoch nichts mit einer Vereinfachung oder Näherung zu tun, sondern folgt direkt aus dem Degenerationskonzept. Es wird dadurch gleichsam im nachhinein die Diskretisierung der zum Schalenmodell gehörenden, dreidimensionalen Struktur festgelegt.

Zwei verschiedene Möglichkeiten, einen gemeinsamen Direktor an Knickstellen zu errichten werden in Abschnitt 8.4 besprochen. Dort wird auch ein neues Konzept vorgestellt, das die numerischen Ergebnisse noch etwas verbessert.

Dem isoparametrischen Konzept der gleichen Diskretisierung von Geometrie und Kinematik folgend, werden die Verschiebungen und Differenzverschiebungen der Schalenmittelfläche und des Direktors mit den gleichen Formeln berechnet,

$$\mathbf{v}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{K_{oben}} + \mathbf{u}^{K_{unten}}), \quad \mathbf{w}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{K_{oben}} - \mathbf{u}^{K_{unten}}). \quad (6.3)$$

Dabei sind  $\mathbf{u}^{K_{oben}}$  und  $\mathbf{u}^{K_{unten}}$  die Verschiebungen des dreidimensionalen Modells an den zu  $K$  gehörenden oberen und unteren Knoten des Brick-Elementes.

## 6.2 Diskretisierung

Ausgangspunkt für die Formulierung eines mechanische Problems mit finiten Elementen ist eine schwache Form. Bei der 7-Parameter-Formulierung wird dazu eine modifizierte Form des Prinzips von Hu-Washizu verwendet, die auf einer Idee von Simo und Rifai (1990) basiert, Abschnitt 2.5.4. Die daraus ableitbare *Enhanced-Assumed-Strain- (EAS-)Methode* (Methode der erweiterten Verzerrungsansätze) wurde ursprünglich entwickelt, um zwei- und dreidimensionale finite Elemente formulieren zu können, bei denen keine künstlichen Versteifungseffekte auftreten. In dieser Arbeit wird die EAS-Methode deshalb in Abschnitt 7.4 nochmals aus dem Blickwinkel der Elementtechnologie behandelt.

Im Rahmen der hier beschriebenen Schalentheorie wird das modifizierte Prinzip von Hu-Washizu (bzw. die EAS-Methode) lediglich dazu verwendet, den fehlenden linearen Verzerungsanteil in Dickenrichtung zu ergänzen (Büchter und Ramm (1992)). Obwohl es sich also bereits hier streng genommen um „EAS-Elemente“ handelt, weisen die in diesem Abschnitt beschriebenen finiten Schalenelemente noch alle Locking-Phänomene auf, die von reinen Verschiebungselementen bekannt sind. Einzig das in Abschnitt 3.3 beschriebene Problem des Poisson-Dickenlocking ist durch die Addition des zusätzlichen Verzerrungsanteils eliminiert. Allerdings unterscheidet sich dieser Versteifungseffekt auch insofern prinzipiell von allen anderen, als er mit zunehmender Netzverfeinerung nicht abklingt, da in Dickenrichtung nicht verfeinert wird. Seine Beseitigung ist also nicht dazu geeignet die Konvergenz zur richtigen Lösung zu beschleunigen, sondern gewährleistet diese überhaupt erst.

Vom Standpunkt der Elemententwicklung aus gesehen, sind die Elemente, die in diesem Abschnitt beschrieben sind, reine Verschiebungselemente. Der EAS-Anteil in Dickenrichtung gehört zur Schalentheorie.

Mit den Abkürzungen aus Gleichung (2.48) und

$$\delta \Pi_{HW}^{mod,ext} = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA, \quad (6.4)$$

sowie der Annahme, daß die Orthogonalitätsbedingung (2.52) von den Ansatzräumen  $\mathcal{V}_S$  und  $\mathcal{V}_{\tilde{E}}$  erfüllt sei (siehe Abschnitt 7.4 für die Herleitung geeigneter Ansatzfunktionen), vereinfacht sich Gleichung (2.37) zu

$$\delta \Pi_{HW}^{\text{mod}} = \int_V [\tilde{S} : \delta \tilde{E} + S^u : \delta E^u] dV - \delta \Pi_{HW}^{\text{mod,ext}} . \quad (6.5)$$

Die freien Variablen (Unbekannten) in diesem Funktional sind die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

Bei der Formulierung von finiten Elementen ist es üblich, Verzerrungen und Spannungen in Vektoren zusammenzufassen, wobei auch die Symmetrie ausgenutzt wird. Der Materialtensor vierter Stufe  $\mathbf{C}$  ist damit als Matrix darstellbar. Im Folgenden bezeichnen

- $\mathbf{E}_h^u$  den Vektor der approximierten kinematischen Variablen in Abhängigkeit der Verschiebungen (Gleichung (C.50) im Anhang),
- $\tilde{\mathbf{E}}_h$  den Vektor der approximierten zusätzlichen kinematischen Variablen (Gleichung (C.43) im Anhang),
- $\mathbf{S}_h^u$  den Vektor der approximierten, zu  $\mathbf{E}_h^u$  energetisch konjugierten, statischen Variablen (Gleichung (C.53) im Anhang) und
- $\tilde{\mathbf{S}}_h$  den Vektor der approximierten, zu  $\tilde{\mathbf{E}}_h$  energetisch konjugierten, statischen Variablen (Gleichung (C.54) im Anhang).

Trotz dieses Übergangs von einer tensoriellen auf eine matrizielle Darstellung wird die Notation im wesentlichen beibehalten.

Für eine übersichtliche Schreibweise werden die Verschiebungsfreiheitsgrade  $\mathbf{v}^K$  und  $\mathbf{w}^K$  eines Elementes in einem einzigen Vektor  $\mathbf{d}$  zusammengefaßt (Gleichung (C.42)). Die Diskretisierung der Verschiebungen und erweiterten Verzerrungen kann damit als

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} , \quad \mathbf{N} \in H^1 , \quad (6.6)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} , \quad \mathbf{M} \in L_2 \quad (6.7)$$

geschrieben werden. Die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  sind durch die Knotenanzahl und Elementgestalt eindeutig festgelegt (falls keine hierarchischen Elemente verwendet werden sollen). Die Ansätze  $\mathbf{M}$  für die zusätzlichen Verzerrungen sind zwar auch von diesen Parametern abhängig, jedoch nicht eindeutig bestimmt. In Kapitel 7.4 werden die Wahl dieser Funktionen und die zugrundeliegenden Bedingungen ausführlich diskutiert.

Die (Differenz-)Verschiebungsfreiheitsgrade  $\mathbf{w}^K$  und  $\mathbf{v}^K$  müssen wie bei reinen Verschiebungselementen an den Elementgrenzen stetig sein, um die Integritätsbedingungen nicht zu verletzen. Die eigentlich nur schwach zu erfüllende, kinematische Randbedingung, Gleichung (2.46), wird also durch die diskretisierten Verschiebungen identisch erfüllt. Der dritte Term in (6.4) verschwindet.

Die Parameter  $\mathbf{a}$  sind elementweise definierte Koeffizienten einer Ansatzfunktion von  $\tilde{\mathbf{E}}$ . Sie sind nicht an die Knoten gebunden, und die durch sie definierten Funktionen brauchen über die Elementgrenzen hinweg nicht stetig zu sein, um die variationelle Konsistenz zu gewährleisten. Eine detaillierte Definition der Matrizen  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{M}$ , die die Ansatzfunktionen enthalten, ist in Teil C des Anhangs gegeben.

Die Diskretisierung des Funktionals (6.5) läßt sich damit wie folgt darstellen:

$$\delta \Pi_{HW}^{mod,e}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) \approx \delta \Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = \int_{A^e} [\tilde{\mathbf{S}}_h \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}_h + \mathbf{S}_h^u \cdot \delta \mathbf{E}_h^u] dA - \delta \Pi_h^{ext} . \quad (6.8)$$

Der Kopfzeiger  $e$  weist darauf hin, daß es sich bei Gleichung (6.8) um eine Integration über die Fläche eines einzelnen finiten Elements handelt.

Die Variationen der kompatiblen und erweiterten Verzerrungen sind

$$\delta \mathbf{E}_h^u = \frac{\partial \mathbf{E}_h^u}{\partial \mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} = \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \delta \mathbf{d} \quad (6.9)$$

und

$$\delta \tilde{\mathbf{E}}_h = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_h}{\partial \mathbf{a}} \cdot \delta \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \delta \mathbf{a} . \quad (6.10)$$

Das diskretisierte, variierte Funktional kann damit in Abhängigkeit von  $\delta \mathbf{d}$  und  $\delta \mathbf{a}$  dargestellt werden.

$$\delta \Pi_h = \int_{A^e} \tilde{\mathbf{S}}_h \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} dA \delta \mathbf{a} + \int_{A^e} \mathbf{S}_h^u \cdot \mathbf{E}_{h,d}^u dA \delta \mathbf{d} - \delta \Pi_h^{ext} = 0 , \quad (6.11)$$

$$\delta \Pi_h^{ext} = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{d} . \quad (6.12)$$

Die partiellen Ableitungen der Verzerrungen und Spannungen nach den Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{d}$  und den Verzerrungsparametern  $\mathbf{a}$  sind in Anhang C gegeben.

### 6.3 Linearisierung

Im Gegensatz zu einem linearen Problem der Form

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (6.13)$$

können Probleme, bei denen der Tangentialoperator  $\mathbf{K}$  von den Verschiebungen abhängt,

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} , \quad (6.14)$$

im allgemeinen nicht direkt gelöst werden. In Gleichung (6.14) wird dabei noch die Einschränkung gemacht, daß der Lastvektor  $\mathbf{P}$  von den Verschiebungen unabhängig ist. Zur Behandlung von verschiebungsabhängigen Lasten wird auf die Literatur verwiesen (Hibbitt (1979), Argyris und Symeonidis (1981), Schweizerhof und Ramm (1984), Mok et al. (1999) und andere).

Zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme ist es zweckmäßig, iterative Prädiktor-Korrektor-Verfahren, wie das *Newton-Raphson-Verfahren*, anzuwenden. Im einfachsten Fall kann das Problem als Nullstellensuche für eine skalarwertige Vektorfunktion

$$G(\mathbf{d}, \lambda) = \delta \Pi_h^{int}(\mathbf{d}) - \delta \Pi_h^{ext}(\lambda) = 0 \quad (6.15)$$

formuliert werden. Die Funktion  $G(\mathbf{d}, \lambda)$  ist bekannt,  $\lambda$  ist ein skalarer Faktor zur Skalierung der Last

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_0 . \quad (6.16)$$

Gesucht wird der Vektor  $\bar{\mathbf{d}}$ , der Gleichung (6.15) erfüllt.

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} : G(\bar{\mathbf{d}}, \lambda) = 0 . \quad (6.17)$$

Ausgehend von einem bereits bekannten Gleichgewichtszustand  $\bar{\mathbf{d}}^i$  für den Lastfaktor  $\lambda^i$  liefert der *Prädiktorschritt* eine lineare Approximation der gesuchten Verschiebung  $\bar{\mathbf{d}}^{i+1}$ .

$$\text{LIN } G(\bar{\mathbf{d}}^i) = G(\bar{\mathbf{d}}^i) + \left. \frac{\partial G(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}^i} \cdot \Delta \mathbf{d}^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}^i . \quad (6.18)$$

LIN  $G(\bar{\mathbf{d}}^i)$  wird als *Linearisierung* von  $G(\mathbf{d})$  an der Stelle  $\bar{\mathbf{d}}^i$  bezeichnet und es gilt

$$G(\bar{\mathbf{d}}^{i+1}) = \text{LIN } G(\bar{\mathbf{d}}^i) + R(\bar{\mathbf{d}}^i) . \quad (6.19)$$

Werden bei der Ableitung nach den unbekanntem Knotenparametern in Gleichung (6.18) keine Terme vernachlässigt oder sonstige Näherungen gemacht, heißt die Linearisierung *konsistent*. Das *Residuum* (Restglied)  $R(\bar{\mathbf{d}}^i)$  repräsentiert die Glieder höherer Ordnung der Taylorreihenentwicklung von  $G(\bar{\mathbf{d}}^i)$ , die in Gleichung (6.18) nach dem linearen Term abgebrochen wird. Der bekannte, im Gleichgewicht befindliche Zustand  $\bar{\mathbf{d}}^i$  ist zunächst der unverformte Ausgangszustand  $\bar{\mathbf{d}}^0 = \mathbf{0}$ , später das Resultat des jeweils vorhergehenden Inkrementes. Die Lösung  $\Delta \mathbf{d}^i$  der linearen Gleichung (6.18) liefert einen ersten Näherungswert für den gesuchten Verschiebungsvektor

$$\mathbf{d}^{i+1} = \bar{\mathbf{d}}^i + \Delta \mathbf{d}^i \quad (6.20)$$

und damit den Ausgangswert für den ersten *Korrektorschritt*.

Der Vorgang

$$(1) \quad \text{LIN } G(\mathbf{d}^i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}^i , \quad (6.21)$$

$$(2) \quad \mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}^i + \Delta \mathbf{d}^i \quad \rightarrow \quad i := i + 1 \quad \rightarrow \quad (1) \quad (6.22)$$

wird dann in weiteren Korrektorschritten solange wiederholt, bis sich das Residuum  $R$  innerhalb einer festgelegten Fehlerschranke  $f$  befindet.

$$R(\mathbf{d}^{i+1}) = G(\mathbf{d}^{i+1}) - \text{LIN } G(\mathbf{d}^i) \leq f . \quad (6.23)$$

Der Vektor  $\mathbf{d}^{i+1}$  wird dann als Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (6.15) betrachtet.

$$G(\mathbf{d}^{i+1}) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}^{i+1} \approx \bar{\mathbf{d}}^{i+1} . \quad (6.24)$$

Durch sukzessive Steigerung von  $\lambda$  können einzelne Punkte einer Last–Verschiebungskurve in einem *inkrementellen* Verfahren berechnet werden. Das ist insbesondere dann notwendig, wenn das Newton–Raphson–Verfahren nicht konvergiert, weil die Last bzw. der Lastschritt zu groß ist (Gallagher (1973)). Neben diesem lastgesteuerten Verfahren sind *verschiebungsgesteuerte* Verfahren (Argyris (1965), Larsen und Popov (1974)) und *Bogenlängenverfahren* (Wempner (1971), Riks (1972)) üblich, um bei statischen Analysen den Last–Verformungspfad zu verfolgen. Für die numerischen Beispiele in Kapitel 9 wurden hauptsächlich verschiebungsgesteuerte Verfahren und ein Bogenlängenverfahren nach Crisfield (1981) und Ramm (1981) eingesetzt, siehe auch Reitinger (1994).

Im Rahmen eines solchen inkrementellen Prädiktor–Korrektor–Verfahrens wird also die Linearisierte Form von (6.11) benötigt

$$\delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = \text{LIN } \delta\Pi_h(\bar{\mathbf{d}}^i, \bar{\mathbf{a}}^i) + R(\bar{\mathbf{d}}^i, \bar{\mathbf{a}}^i) \quad (6.25)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{LIN } \delta\Pi_h(\bar{\mathbf{d}}^i, \bar{\mathbf{a}}^i) &= \delta\Pi_h(\bar{\mathbf{d}}^i, \bar{\mathbf{a}}^i) \\ &+ \left. \frac{\partial\delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial\mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}^i} \cdot \Delta\mathbf{d} + \left. \frac{\partial\delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial\mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\bar{\mathbf{a}}^i} \cdot \Delta\mathbf{a} . \end{aligned} \quad (6.26)$$

Für diese Linearisierung müssen die zweiten Gâteaux–Ableitungen des variierten Funktionals gebildet werden.

$$\frac{\partial\delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial\mathbf{d}} = \delta\mathbf{d} \int_{A^e} \left[ \mathbf{E}_{h,dd}^u \cdot \mathbf{S}_h^u + \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_{h,d}^u \right] dA + \delta\mathbf{a} \int_{A^e} \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{h,d} dA , \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial\delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial\mathbf{a}} = \delta\mathbf{d} \int_{A^e} \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_{h,\alpha}^u dA + \delta\mathbf{a} \int_{A^e} \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{h,\alpha} dA . \quad (6.28)$$

Damit kann das linearisierte (inkrementelle) Elementgleichungssystem aufgestellt werden,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{d} \\ \Delta\mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} , \quad (6.29)$$

wobei

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g \quad (6.30)$$

die elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix sowie die geometrische Steifigkeitsmatrix enthält.

$$\mathbf{K}_{e+u} = \int_{A^e} \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_{h,d}^u dA = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} dA , \quad (6.31)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_{A^e} \mathbf{E}_{h,dd}^u \cdot \mathbf{S}_h^u dA = \int_{A^e} \mathbf{B}_{,d}^T \cdot \mathbf{S}_h^u dA . \quad (6.32)$$

Durch den in  $\mathbf{a}$  linearen Ansatz für die erweiterten Verzerrungen leisten diese keinen Beitrag zur geometrischen Steifigkeit. Weiterhin enthält das Gleichungssystem (6.29) die Kopplungsmatrix  $\mathbf{L}$  und die Verzerrungsmatrix  $\tilde{\mathbf{D}}$ , mit

$$\mathbf{L}^T = \int_{A^e} \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{h,d} dA = \int_{A^e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} dA , \quad (6.33)$$

$$\mathbf{L} = \int_{A^e} \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_{h,\alpha}^u dA = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} dA , \quad (6.34)$$



$$\tilde{\mathbf{D}} = \int_{A^e} \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{h,\alpha} dA = \int_{A^e} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} dA , \quad (6.35)$$

sowie die Vektoren der inneren Kräfte

$$\mathbf{R} = \int_{A^e} \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_h^u dA , \quad \tilde{\mathbf{R}} = \int_{A^e} \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_h dA . \quad (6.36)$$

Die Formeln, die die Materialmatrix  $\mathbf{D}$  enthalten, gelten für lineares Materialverhalten. In diesem Fall ist wegen

$$\tilde{\mathbf{D}}^T = \tilde{\mathbf{D}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{M})^T \quad (6.37)$$

auch die Symmetrie des Gleichungssystems (6.29) leicht zu erkennen, die die Voraussetzung für die Bezeichnung der Nebendiagonalglieder mit  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{L}^T$  ist.

Die Ableitungen der Vektoren der kinematischen und statischen Variablen sind in Anhang C aufgeführt. Da die Ansatzräume für die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus  $L_2$  gewählt werden können (Abschnitt 2.5.5), brauchen die inneren Verzerrungsparameter  $\alpha$  über die Elementgrenzen hinweg nicht kompatibel zu sein und können auf Elementebene eliminiert werden.

Das inkrementelle Elementgleichungssystem bekommt damit dieselbe Form wie bei einem reinen Verschiebungselement,

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g - \mathbf{L}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{L})}_{\hat{\mathbf{K}}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \mathbf{P} - \underbrace{\mathbf{R} + \mathbf{L}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{R}}}_{-\hat{\mathbf{R}}} . \quad (6.38)$$

Durch die statische Kondensation der zusätzlichen Verzerrungsparameter ist ein „aufgeweichtes“ Verschiebungsmodell entstanden. Obwohl die Basis für die EAS–Methode ein Mehrfeldfunktional ist, gibt es Hinweise darauf, daß es sich dabei nicht wirklich um eine „gemischte“ Methode handelt. Das Elementgleichungssystem (6.29) enthält nicht die für gemischte Verfahren typische Null auf der Hauptdiagonalen. Das liegt daran, daß die Spannungen durch die Orthogonalitätsbedingung zuvor eliminiert worden sind. Die Größen, die letztendlich diskretisiert werden, sind kinematische Größen, nämlich Verschiebungen und zusätzliche Verzerrungen.

Die Spannungsrückrechnung kann wie bei reinen Verschiebungselementen über das Stoffgesetz erfolgen. Dazu werden zunächst die Verzerrungen  $\mathbf{E}_h = \mathbf{E}_h^u + \tilde{\mathbf{E}}_h$  in Abhängigkeit der Verschiebungen  $\mathbf{d}$  und Verzerrungsparameter  $\alpha$  berechnet. Daraus können die Spannungen über das Stoffgesetz ermittelt werden. Simo und Rifai (1990) bezweifelten die variationelle Konsistenz dieser Spannungen. Durch die Entdeckung des Zusammenhangs zwischen der EAS–Methode und Elementen, die auf dem Funktional von Hellinger–Reissner beruhen (Andelfinger und Ramm (1993), Yeo und Lee (1996) sowie Bischoff et al. (1999)), wurde dieser Zweifel jedoch beseitigt. Beim Funktional von Hellinger–Reissner ist die Werkstoffgleichung punktweise exakt erfüllt, für die äquivalenten EAS–Elemente gilt also dasselbe.

## 6.4 Künstliche Versteifungseffekte, Locking

Bereits zu Pionierzeiten der FE–Methode in den sechziger Jahren wurde erkannt, daß finite Elemente, deren Herleitung auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruht (Verschiebungs-

elemente), ungenaue und in bestimmten Grenzfällen sogar völlig unbrauchbare Ergebnisse liefern. Da das Phänomen sich darin äußert, daß die Verschiebungen stark unterschätzt werden, das Element sich einer Verformung gleichsam „verschließt“, hat sich dafür der englische Begriff „*Locking*“ etabliert (Hughes et al. (1977)).

Eine eindeutige Definition von Locking existiert nicht. Unterschiedliche Autoren haben deshalb auch voneinander abweichende Konzepte entwickelt, dessen Ursache zu ergründen, zu erklären oder zu quantifizieren. Die Abschnitte 6.4.1 bis 6.4.3 beschäftigen sich mit drei grundsätzlich unterschiedlichen Betrachtungsweisen künstlicher Versteifungseffekte. In Abschnitt 6.4.4 wird die Bedeutung des Patchtests diskutiert.

In den darauffolgenden Abschnitten werden sämtliche bei der 7-Parameter-Schalenformulierung auftretenden Locking-Phänomene beschrieben. Dabei tritt, neben den von 5-Parameter-Modellen her bekannten, ein zusätzlicher Versteifungseffekt auf, der mit der Dickenänderung der Schale zusammenhängt. Das für Scheiben und Platten gesagte gilt jeweils auch für die Membran- und Biegeanteile von Schalenelementen.

#### 6.4.1 Die mechanische Sichtweise

Die vielleicht einfachste, weil anschaulichste Methode ist die, das Auftreten parasitärer Spannungen zum Indikator für Locking zu machen. Als parasitär werden diejenigen Spannungen bezeichnet, die in der exakten Lösung nicht vorkommen. Das sind beispielsweise Querkräfte bei reiner Biegung eines Plattenelements (Querschublocking) oder Membranspannungen bei dehnungslosen Verformungen von Schalen (Membranlocking).

Die daraus resultierenden, parasitären inneren Energieanteile führen zu einer zusätzlichen, künstlichen Steifigkeit. Das Verhältnis dieser zusätzlichen Steifigkeit zur Gesamtsteifigkeit kann in Abhängigkeit eines Parameters gegen eins gehen. Erst diese Tatsache macht das Problem des Locking so dramatisch. Bei Querschublocking von Platten und Schalen ist dieser Parameter die Dicke. Volumetrisches Locking wird für  $\nu \rightarrow 0,5$  immer ausgeprägter.

Bei den meisten Locking-Effekten kann das Auftreten parasitärer Spannungen mit einer fehlenden Balance der Ansatzfunktionen in Zusammenhang gebracht werden, die sich darin äußert, daß Spannungen aus geometrischem Zwang entstehen. Dieser Zwang wird dadurch hervorgerufen, daß die Verläufe bestimmter Verzerrungsanteile einen niedrigeren Polynomgrad haben, als die der dazu energetisch konjugierten Spannungen. So kann zum Beispiel bei schubweichen Balkenelementen, bei denen Verschiebungen und Rotationen mit den gleichen Funktionen interpoliert werden, die Bernoulli-Bedingung nicht erfüllt werden, weil die Rotationen eine Ordnung höher verlaufen, als die Ableitung der Biegelinie. Der Schubwinkel kann deshalb nur für den trivialen Fall von Starrkörperverschiebungen identisch Null werden (Abschnitt 6.4.7). Hier besteht ein enger Zusammenhang zu der in Kapitel 5 diskutierten Vollständigkeit der Verzerrungen und Spannungen bei Schalentheorien mit dreidimensionalen Stoffgesetzen.

Diese rein anschauliche, mechanische Betrachtungsweise hat jedoch die Schwäche, daß die Identifikation parasitärer Spannungen einer gewissen Willkür des Betrachters unterliegt. Eine strenge Anwendung dieses Kriteriums führt zu dem Ergebnis, daß dreieckige Scheibenelemente locking-frei sind, was im Widerspruch zum tatsächlichen Verhalten dieser Elemente steht. Dieses Problem wird in Abschnitt 6.4.6 etwas ausführlicher besprochen. Für das Verständnis der mechanischen Ursache von Locking bleibt jedoch das Wissen um die parasitären Verzerrungen und Spannungen unerlässlich.

Die mechanische Analyse der Versteifungseffekte war auch die Voraussetzung für wesentliche Entwicklungen im Bereich der Elementtechnologie. Die Methode der inkompatiblen Verschiebungen von Taylor et al. (1976) und die Assumed–Natural–Strain– (ANS–) Methode von Hughes und Tezduyar (1981) sowie Bathe und Dvorkin (1985) tragen eindeutig die Handschrift solcher physikalischer Überlegungen.

#### 6.4.2 Die numerische Sichtweise

Etwas formaler ist eine Betrachtungsweise, die auf eine Idee von Hughes (1987) zurückgeht. Dabei wird die Tendenz eines Elementes, zu steif zu reagieren, mit Hilfe einer Kennzahl, dem *Zwangsbedingungsfaktor* (*constraint ratio* oder *constraint count*)  $r$ , gemessen. Für reine Verschiebungselemente ist diese Kennzahl über das Verhältnis der Anzahl der Freiheitsgrade  $n_{Kn} \cdot n_{FG}$  (= Anzahl der Knoten  $\times$  Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten) zur Anzahl der Zwangs- oder Nebenbedingungen  $n_Z$  im Gesamtsystem definiert.

$$r = \frac{n_{Kn} \cdot n_{FG}}{n_Z} . \quad (6.39)$$

Eine solche Zwangsbedingung kann beispielsweise die Kirchhoff–Bedingung bei Platten und Schalen oder die Inkompressibilitätsbedingung bei (nahezu) inkompressiblem Materialverhalten sein. Bei den Freiheitsgraden ist zu beachten, daß nur diejenigen mitgezählt werden, die auch einen Beitrag zur entsprechenden Deformation leisten. Zum Beispiel werden bei der Beurteilung von Schalenelementen in bezug auf Querschublocking lediglich die drei „Plattenfreiheitsgrade“ berücksichtigt, beim volumetrischen Locking nur die beiden „Scheibenfreiheitsgrade“.

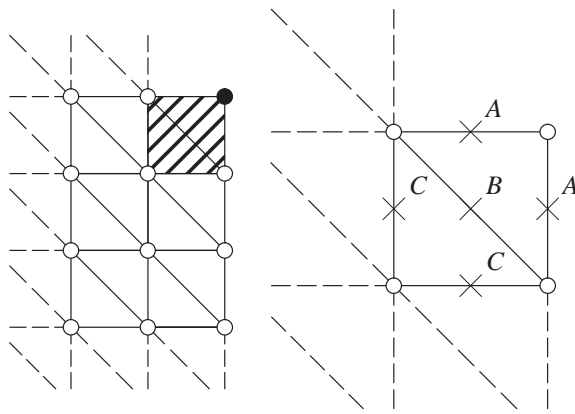
Der optimale Wert von  $r$  ist das Verhältnis  $r_k$  im kontinuierlichen Problem. Ist  $r < r_k$ , so neigt das Element zu Versteifungen. Ist hingegen  $r > r_k$  wird die betreffende Zwangsbedingung möglicherweise schlecht repräsentiert. Das kann sich darin äußern, daß bestimmte Größen oszillieren (z.B. der Druck bei Fluidelementen). Im Extremfall wird das Element instabil und besitzt zusätzliche Nulleigenwerte (*Zero Energy Modes*). Ist  $r < 1$ , so ist mit starkem Locking zu rechnen. Es können dann nicht mehr alle Zwangsbedingungen erfüllt werden, weil weniger Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, als Bedingungen zu erfüllen sind. Das Element neigt zur trivialen Lösung (z.B.  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  für die Bedingung  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ).

Da die Definition von  $r$  sich auf die Anzahl der Freiheitsgrade im Gesamtsystem bezieht, ist der Zwangsbedingungsfaktor streng genommen von der Diskretisierung abhängig. Um  $r$  als reine Elementeigenschaft definieren zu können, geht man von einem unendlich großen, strukturierten Netz aus. Ein spaltenweise aufgebautes Netz aus  $n^2$  bilinearen Viereckelementen besitzt  $(n + 1)^2$  Knoten. Das Verhältnis von Knoten zu Elementen für ein unendlich großes Netz von Viereckelementen ist damit

$$n_{Kn}^{[4]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 . \quad (6.40)$$

Wird dieses Netz durch Unterteilung jedes Vierecks in zwei Dreiecke in ein Dreiecksnetz verwandelt (Abb. 6.2), so besitzt dieses  $2n^2$  Elemente, und für das Verhältnis der Knotenanzahl zur Elementanzahl gilt der Grenzwert

$$n_{Kn}^{[3]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \frac{1}{2} . \quad (6.41)$$



dreiknotige Elemente: 1 Knoten pro Elementpaar  
 sechsknotige Elemente: 4 Knoten pro Elementpaar

A	$n$	Zwangsbedingungen
B	$2n - k$	Zwangsbedingungen
C	$n - k$	Zwangsbedingungen
im Elementinnern: $n$ Zwangsbedingungen		
$n$	maximale Anzahl der unabhängigen Zwangsbedingungen	
$k$	Anzahl der an Elementgrenzen kompatiblen Zwangsbedingungen	

Abb. 6.2: Anzahl der Freiheitsgrade pro Dreieckelement für unendlich große Netze

Ein Netz aus  $n^2$  biquadratischen Viereckelementen hat  $(2n + 1)^2$  Knoten und es gilt

$$n_{Kn}^{[9]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2} = 4 \quad (6.42)$$

$$\Rightarrow n_{Kn}^{[6]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2} = 2 \quad (6.43)$$

Werden diese Grenzwerte zugrundegelegt, ist der Zwangsbedingungsfaktor nur noch von der Anzahl der Freiheitsgrade, der Elementgestalt und der Anzahl der Gauß-Punkte abhängig. Letztere beeinflusst  $r$  insofern, als die fragliche Nebenbedingung an jedem Gauß-Punkt erfüllt sein muß. Das bedeutet, daß  $r$  kleiner — und das Element damit steifer — wird, wenn die Anzahl der Gauß-Punkte erhöht wird (was im umgekehrten Sinn den Erfolg der Unterintegration erklärt). Das gilt jedoch nur soweit, bis diejenige Zahl von Gauß-Punkten erreicht ist, die zur exakten Integration notwendig ist. Bei einer weiteren Steigerung der Zahl der Integrationspunkte werden die Zwangsbedingungen linear abhängig und der Zwangsbedingungsfaktor wird nicht weiter verringert.

Integrationspunkte, die auf dem Elementrand liegen, können zu einer Verringerung der Zahl der Zwangsbedingungen führen, weil dadurch möglicherweise einige der Bedingungen mit denjenigen am Nachbarelement gekoppelt sind. Ist beispielsweise die Kirchhoff-Bedingung für die Biegung um die Achse senkrecht zur Elementkante in einem Element auf dieser Kante erfüllt, so ist sie am Nachbarelement ebenfalls erfüllt. Das verringert die Anzahl der Zwangsbedingungen und hat damit einen günstigen Einfluß auf den Zwangsbedingungsfaktor. Abb. 6.2 illustriert die Zahl der zusätzlichen Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen bei der Addition eines Paares von dreieckigen Elementen beim spaltenweisen Aufbau eines „unendlich“ großen Netzes. Bei dreiknotigen Elementen kommt demnach pro Elementpaar nur ein Knoten hinzu (Gleichung (6.41)), bei sechsknotigen Elementen sind es vier. Geht man davon aus, daß insgesamt  $n$  Bedingungen zu erfüllen und davon  $k$  Bedingungen an den Rändern kompatibel sind, so sind an den mit A bezeichneten Integrationspunkten jeweils  $n$  zusätzliche Bedingungen zu erfüllen. An Punkt B sind es  $2n - k$ . Bei den Punkten C sind es nur  $n - k$  Bedingungen, da  $k$  Bedingungen von den bereits existierenden Elementen erfüllt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden für Dreieckelemente drei verschiedene Integrationstypen verwendet: eine Einpunkt-Integration mit einem Integrationspunkt in Elementmitte ( $\xi = \eta = 1/3$ ), eine Dreipunkt-Integration mit Integrationspunkten auf den Seitenmitten so-

wie die Sechspunkt-Regel nach Gauß-Radau, bei der wiederum alle Integrationspunkte im Elementinnern liegen (Anhang C). Im Gegensatz zu Vierecken führt eine Unterintegration von dreieckigen Scheibenelementen (also einpunkt-integrierte dreiknotige und dreipunkt-integrierte sechsknotige Elemente) nicht zu inneren Kinematiken.

Für die Anzahl der Zwangsbedingungen dreieckiger Elemente gilt damit bei einer Einpunkt-Integration

$$n_Z^{[3]} = \frac{1}{2}(2n) = n, \quad (6.44)$$

bei einer Dreipunkt-Integration

$$n_Z^{[3]} = \frac{1}{2}(2n + 2n - k + 2(n - k)) = 3n - \frac{3}{2}k, \quad (6.45)$$

und bei einer Sechspunkt-Integration

$$n_Z^{[6]} = \frac{1}{2}(6 \cdot 2n) = 6n. \quad (6.46)$$

„Halbe“ Zwangsbedingungen treten auf, weil nicht bei jedem zusätzlichen Dreieck gleichviele Bedingungen hinzukommen (Abb. 6.2).

Ein Nachteil der numerischen Sichtweise besteht darin, daß einer möglichen Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente überhaupt nicht Rechnung getragen wird. Außerdem täuscht die Größenordnung von  $r$  mitunter über die tatsächlichen Steifigkeiten hinweg. So scheint beispielsweise das dreiknotige Scheibenelement nach Maßgabe des Zwangsbedingungsfaktors weicher zu sein als das vierknotige, was jedoch nicht der Wirklichkeit entspricht.

### 6.4.3 Die mathematische Sichtweise

In der mathematischen Literatur findet man den Begriff Locking nicht oder nur als Querverweis auf die Ingenieurliteratur. Braess (1997) äußert in seinem Buch über finite Elemente die Meinung: „Aus mathematischer Sicht würde man lieber von einem schlecht konditionierten Problem sprechen als von Locking.“ Entscheidend für das Auftreten des Effektes ist die Existenz eines sehr kleinen Parameters in einem singular gestörten Problem. Er läßt das Verhältnis der Koeffizienten im Gleichungssystem (zum Beispiel die Steifigkeiten) sehr groß werden, und die durch die Unverträglichkeit der Ansätze entstehenden parasitären Terme werden übermäßig vergrößert. „Lockt“ das Element, dann kann keine gleichmäßige Konvergenz bezüglich dieses Parameters erwartet werden, das heißt die Konvergenzrate hängt von diesem Parameter ab.

Mit Hilfe des Céa-Lemmas läßt sich der Fehler bei Verschiebungsformulierungen nach oben abschätzen, wobei die obere Schranke des Fehlers von einer Konstanten  $c$  abhängt. Ist diese Konstante sehr groß, dann kann nicht ausgeschlossen werden, daß auch die Fehler sehr groß werden. Bei der Berechnung nahezu inkompressibler Materialien ist  $c$  beispielsweise das Verhältnis der Lamé-Konstanten zueinander (der Kompressionsmodul), das für  $\nu \rightarrow 0,5$  gegen unendlich strebt. Das bedeutet, daß auch der Fehler gegen unendlich gehen kann — die mathematische Erklärung für volumetrisches Locking. Eine detaillierte Darstellung der mathematischen Voraussetzungen für die Gültigkeit des Céa-Lemmas und dessen Bedeutung für einige ausgewählte Beispiele ist bei Braess (1997) zu finden. Der Zusammenhang zwischen dem Phänomen des Locking und der Inf-Sup-Bedingung beziehungsweise der Babuska-Brezzi-Bedingung wird in Abschnitt 6.4.5 diskutiert.

Wichtige Beiträge zur Problematik des Locking aus mathematischer Sicht stammen von Arnold (1981) sowie Babuska und Suri (1992).

#### 6.4.4 Der Patch-Test

Der Patch-Test wurde ursprünglich von Bruce Irons in Bazeley et al. (1965) als Methode vorgeschlagen, die Konvergenz von finiten Elementen gegen die wahre Lösung mit einfachen Mitteln unter Beweis zu stellen. Neben der numerischen Verifikation bietet er auch die Möglichkeit einer analytischen Betrachtung. Der Patchtest überprüft, ob ein Element für beliebige Netze eine konstante Verteilung aller Zustandsgrößen exakt abbilden kann.

Ein numerischer Patch-Test für Scheibenelemente kann durchgeführt werden, indem ein rechteckiges Gebiet (Patch) mit drei mal drei beliebig verzerrten, finiten Elementen diskretisiert wird. Wichtig ist dabei, daß mindestens ein Element ganz von anderen umschlossen sein muß, um die korrekte Darstellung von Starrkörperbewegungen überprüfen zu können. Mit diesem Netz wird sodann eine Scheibe unter konstantem Zug (oder Druck) bzw. Schub berechnet. Die Ergebnisse sollten in allen Größen (Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen) und an jedem Punkt exakt der analytischen Lösung entsprechen.

Begründet werden kann diese Forderung damit, daß Elemente, die zumindest konstante Zustände und Starrkörperbewegungen exakt abbilden können, jeden beliebigen Zustand zu approximieren in der Lage sind, wenn das Netz fein genug ist. Anschaulich gesprochen, kann jede Funktion durch eine stückweise konstante („Treppen“-) Funktion beliebig genau angenähert werden.

In der Fachliteratur herrscht heute weitgehend Einigkeit über die Tatsache, daß das Bestehen dieses Tests für die Konvergenz von finiten Elementen weder notwendig noch hinreichend ist. Die Steifigkeitsmatrizen von Elementen, die den Patchtest nicht bestehen, jedoch trotzdem gegen die richtige Lösung konvergieren sollen, müssen dann allerdings von der Schlankheit abhängig sein. Das ist beispielsweise bei Plattenelementen der Fall, bei denen die Steifigkeitsverhältnisse sich mit der Schlankheit ändern.

Ist, wie zum Beispiel bei Scheibenelementen, die Steifigkeitsmatrix unabhängig von der Dicke, d.h. die Dicke ist nur ein Proportionalitätsfaktor, so muß der Patchtest bestanden werden. Andernfalls läßt sich die Konvergenz zur exakten Lösung leicht widerlegen. Dazu wird das Netz, mit dem der Patchtest durchgeführt wurde (Abb. 6.3) in der Art verfeinert, daß sich das jeweils feinere Netz aus mehreren Wiederholungen des groben Netzes zusammensetzt. Bei Elementen, die den Patchtest nicht bestehen, kann dabei beobachtet werden, daß der Fehler nicht etwa abnimmt sondern konstant bleibt oder mit wachsender Elementanzahl gar zunimmt. Das trifft beispielsweise für das quadratische ANS-Element von Pinsky und Jang (1987) zu.

Die stabilisierten ANS-Plattenelemente von Lyly et al. (1993) (Abschnitt 7.5.2) bestehen zwar nicht den Patchtest für konstante Querkräfte, konvergieren jedoch trotzdem gegen die wahre Lö-

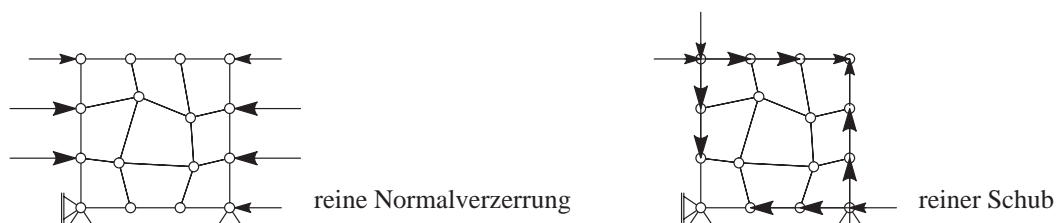


Abb. 6.3: Patch-Tests für Scheibenelemente

sung. Hier sorgt der schlankheitsabhängige Stabilisierungsparameter dafür, daß der Fehler mit zunehmender Elementanzahl verschwindet. Bilineare Plattenelemente, die auf einer reinen Verschiebungsmethode basieren, bestehen den Patchtest für reine Biegung nicht, da der Biegezustand von parasitären Querkraften überlagert wird (Querschublocking, Abschnitt 6.4.7). Bei der Verfeinerung des Netzes ändert sich jedoch die Schlankheit der einzelnen Elemente, der störende Effekt verschwindet und auch diese Elemente konvergieren gegen die richtige Lösung.

Die Bedeutung des Patch-Tests in bezug auf die Problematik des Locking ist nicht besonders groß, da er nichts über die Konvergenzrate aussagt. So bestehen zum Beispiel die einfachsten Verschiebungselemente für Scheiben den Patchtest, sind jedoch nicht frei von Locking. Wird der Patchtest nicht bestanden, ist es zwar wahrscheinlich, daß die Konvergenzrate nicht hoch ist und damit Locking auftritt, das ist jedoch nicht sicher.

#### 6.4.5 Die Inf-Sup-Bedingung und die Babuska-Brezzi-Bedingung

Eine wichtige, aber nicht selbstverständliche Eigenschaft von finiten Elementen ist die Konvergenz gegen eine eindeutige Lösung. Das setzt voraus, daß die entsprechende variationelle Formulierung überhaupt eine solche eindeutige Lösung besitzt. Die notwendigen mathematischen Bedingungen im Fall linearer Elastizität sind beispielsweise von Braess (1997) ausführlich dargestellt worden. Einen kurzen, leicht verständlichen Überblick über die wichtigsten Begriffe findet man außerdem bei Haußer (1996). Mechanisch motivierte Stabilitäts- und Konvergenzbedingungen werden von Stein und Rolfes (1990) beschrieben.

Der folgende Abschnitt erhebt nicht den Anspruch einer mathematisch rigorosen Herleitung dieser Bedingungen, sondern hat deren anschauliche Interpretation und die Diskussion ihrer Konsequenzen bei der Entwicklung alternativer Elementformulierungen zum Ziel.

Eine eindeutige Lösung existiert, wenn das Funktional die *Kontinuitätsbedingung* und die *Elliptizitätsbedingung* erfüllt. Aufgrund ihrer Bedeutung bei der Herleitung von finiten Elementen beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf bilineare Funktionale. Sie sind dadurch definiert, daß sie ein Paar von Elementen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  auf einen Skalar abbilden,

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathcal{V}_u \times \mathcal{V}_v \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u \quad , \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_v . \quad (6.47)$$

Dabei sind  $\mathcal{V}_u$  und  $\mathcal{V}_v$  Hilberträume,  $\mathbb{R}$  ist die Menge der reellen Zahlen. Ein bilineares Funktional ist stetig und beschränkt und erfüllt damit die Kontinuitätsbedingung, wenn gilt

$$|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 . \quad (6.48)$$

Anschaulich gesprochen bedeutet das, daß die Anwendung des Funktionals auf  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  keine Werte liefert, die im Vergleich zu deren Normen über alle Grenzen wachsen. Dadurch bleibt bei finiten Elementen für endliche Verschiebungen auch die Verzerrungsenergie beschränkt.

Ein stetiges und beschränktes Funktional ist V-elliptisch (koerzitiv) wenn gilt

$$|F(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \beta \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \beta \|\mathbf{u}\| . \quad (6.49)$$

Diese Bedingung entspricht einer Abschätzung des Funktionals nach unten und bedeutet, daß für unendlich große  $\mathbf{u}$  auch  $F(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  unendlich groß werden muß. Sie ist zum Beispiel bei bestimmten unterintegrierten Elementen verletzt, was zur Folge hat, daß dort unendlich große Verschiebungen bei endlichen Lasten auftreten können. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist gewährleistet, daß kein relativer Extremwert im Unendlichen auftritt.

Hat das Funktional zwei unterschiedliche Argumente  $F(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , dann ist die Bedingung (6.49) zu streng. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man den Sonderfall von bezüglich  $F$  orthogonalen Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  betrachtet.

Für die Existenz von Lösungen ist jedoch eine abgeschwächte Form der Bedingung ausreichend. Es wird dabei nicht gefordert, daß (6.49) für jedes Paar  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  gilt, sondern nur, daß ein  $\mathbf{u}$  gefunden werden kann, das für beliebige  $\mathbf{v}$  diese Bedingung erfüllt. Da es sich dabei sicher um das  $\mathbf{u}$  handelt, das den Quotienten aus dem Funktional  $F$  und der Norm von  $\mathbf{u}$  maximiert, kann diese Bedingung mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sup_{\mathbf{u}} \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \beta \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_v. \quad (6.50)$$

Offensichtlich ist das  $\mathbf{v}$ , für das  $\|\mathbf{v}\|$  den größten Wert annimmt, und damit  $\frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$  minimiert in bezug auf diese Bedingung kritisch, also

$$\inf_{\mathbf{v}} \sup_{\mathbf{u}} \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \geq \beta. \quad (6.51)$$

Gleichung (6.51) stellt die bekannte *Inf-Sup-Bedingung* dar und gewährleistet die V-Elliptizität eines Funktionals, nicht aber dessen Beschränktheit. Gleichung (6.48) muß also weiterhin berücksichtigt werden. Auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen übertragen, bedeuten  $\mathbf{u}$  die Verschiebungen und  $\mathbf{v}$  deren Variation, bzw. die virtuellen Verschiebungen.

Beschränktheit und Koerzitivität liefern gemeinsam eine Abschätzung des Funktionals nach oben und unten. Für die finiten Elemente bedeutet das, daß  $F$  nur gegen Null gehen kann, wenn  $\mathbf{u}$  gegen Null geht, also keine inneren Kinematiken auftreten. Im Fall kompressibler Elastizitätsprobleme erfüllen voll integrierte 2D- und 3D-Verschiebungselemente die Inf-Sup-Bedingung.

Bei finiten Elementen, die auf Mehrfeldfunktionalen beruhen oder deren Formulierung auf ein solches zurückgeführt werden kann, ist die Lage etwas komplizierter. Wesentliche Beiträge zur Existenz von Lösungen stammen von Babuska und Azis (1972) sowie von Brezzi (1974), die zugehörige Bedingung wird deshalb meistens als *Babuska-Brezzi-Bedingung*, mitunter auch als *Ladyshenskaya-Babuska-Brezzi- (LBB-)Bedingung*, bezeichnet.

Die Bedeutung der Babuska-Brezzi-Bedingung soll im Folgenden am Beispiel des Funktionals von Hellinger-Reissner erläutert werden. Dabei treten im Funktional  $F$  zwei Bilinearformen

$$a(\mathbf{S}, \mathbf{S}) \quad \text{und} \quad b(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \quad (6.52)$$

auf. Nach Braess (1997) ist die Babuska-Brezzi-Bedingung erfüllt, wenn gilt

1. Die Bilinearform  $a(\mathbf{S}, \mathbf{S})$  ist V-elliptisch

$$|a(\mathbf{S}, \mathbf{S})| \geq \alpha \cdot \|\mathbf{S}\|^2 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{V}_{\bar{S}}, \quad (6.53)$$

wobei der Parameter  $\alpha$  unabhängig von  $h$  sein muß, wenn  $h$  eine typische Elementabmessung ist („Verfeinerungsparameter“).

2. Die Bilinearform  $b(\mathbf{S}, \mathbf{u})$  erfüllt die Inf-Sup-Bedingung

$$\inf_{\mathbf{u}} \sup_{\mathbf{S}} \frac{|b(\mathbf{S}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{S}\| \|\mathbf{u}\|} \geq \beta \quad , \quad \mathbf{S} \in \mathcal{V}_S, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u \quad (6.54)$$

ebenfalls mit von  $h$  unabhängiger Konstante  $\beta$ .



Die Elliptizitätsbedingung unter 1. kann dabei auf einen Unterraum  $\mathcal{V}_{\bar{S}}$  von  $\mathcal{V}_S$  beschränkt werden, der diejenigen Spannungen enthält, die bezüglich der Bilinearform  $b$  zu  $\mathbf{u}$  orthogonal sind,

$$\mathcal{V}_{\bar{S}} = \{ \mathbf{S} : \mathbf{S} \in \mathcal{V}_S ; \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_u \} . \quad (6.55)$$

Die Babuska–Brezzi–Bedingung fordert nicht die Beschränktheit des Funktionals, dafür aber die Unabhängigkeit der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  von der Diskretisierung. Wie die Inf–Sup–Bedingung für Verschiebungselemente sorgt die Ungleichung (6.54) dafür, daß keine inneren Kinematiken auftreten.

Bei Elementen, die nicht frei von Locking sind, ist der Parameter  $\beta$  nicht unabhängig von der Diskretisierung und die Babuska–Brezzi–Bedingung nicht erfüllt. Es ist zu beobachten, daß  $\beta$  mit zunehmender Netzverfeinerung immer kleiner wird. Das kann anschaulich so interpretiert werden, daß die von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  verrichtete Arbeit  $b(\mathbf{S}, \mathbf{u})$  im Vergleich zu den absoluten Größen  $\|\mathbf{S}\|$  und  $\|\mathbf{u}\|$  zu klein ist.

Chapelle und Bathe (1993) schlagen vor, die Erfüllung der Babuska–Brezzi–Bedingung durch eine Reihe von numerischen Berechnungen von  $\beta$  mit unterschiedlichen Netzen zu überprüfen. Elemente, die diesen numerischen Inf–Sup–Test nicht bestehen, erfüllen sicher nicht die Babuska–Brezzi–Bedingung. Der umgekehrte Schluß ist jedoch nicht möglich. Ein positives Ergebnis beim Inf–Sup–Test gibt lediglich Anlaß zur Vermutung, daß das Element frei von Locking und inneren Kinematiken ist. Es ist jedoch kein Beweis.

Mathematisch rigorose Beweise für die Erfüllung der Babuska–Brezzi–Bedingung sind schwer zu führen. Das liegt unter anderem daran, daß die Bedingungen am Gesamtsystem aufgestellt werden müssen und deshalb nicht an einzelnen finiten Elementen analysiert werden können. Die Art der Bedingungen gibt jedoch Aufschluß darüber, wie Elemente zu formulieren sind, die diese Bedingungen zumindest bestehen könnten.

Es ist offensichtlich, daß bei der Wahl der Diskretisierung von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{S}$  auf gut aufeinander abgestimmte Ansätze geachtet werden muß. Wird  $\mathcal{V}_S$  „zu dünn“ gewählt, kann es passieren daß ein  $\mathbf{u}$  existiert, das zu allen  $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_S$  bezüglich  $b(\mathbf{S}, \mathbf{u})$  orthogonal ist. Bedingung (6.54) ist dann verletzt, und es können innere Kinematiken auftreten. Ist andererseits  $\mathcal{V}_S$  „zu dick“, so tritt Locking auf. Für die Ungleichung (6.54) bedeutet das, daß Paare  $(\mathbf{S}, \mathbf{u})$  existieren, für die  $\|\mathbf{S}\|$  sehr groß wird, während  $b(\mathbf{S}, \mathbf{u})$  verhältnismäßig klein bleibt, weil in  $\mathcal{V}_u$  die energetisch konjugierten Größen zu den „überflüssigen“ Spannungen fehlen. Der Parameter  $\beta$  wird nicht Null, aber mit immer feineren Netzen immer kleiner, was einen Verstoß gegen die Forderung nach Unabhängigkeit von  $h$  bedeutet.

#### 6.4.6 Schublocking

Schublocking kann bei Scheiben und Schalen auftreten. Bedeutsam wird dieser Effekt nur, wenn in der Scheiben– oder Schalenebene eine Art „Biegebeanspruchung“ stattfindet, wie beispielsweise bei der Berechnung eines wandartigen Trägers als Scheibe.

In Abb. 6.4 ist eine solche Biegebelastung für drei verschiedene Typen von Verschiebungselementen zusammen mit den jeweiligen Deformationen und Spannungen dargestellt. Bei den viereckigen Elementen stellt sich ein in  $y$ –Richtung („Dicken“–Richtung des Trägers) linearer Verlauf von Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  („Biegenormalspannungen“) ein. Beim linearen Element entstehen zusätzlich Schubspannungen, die nicht in das Bild von der „reinen Biegung“ passen

und deshalb als parasitär bezeichnet werden könnten. Beim quadratischen Element sind diese Spannungen Null. Das Element „lockt“ also bei dieser Belastung nicht.

Beim linearen Dreieckelement entstehen ebenfalls Schubspannungen. Sie als parasitär zu bezeichnen wäre jedoch falsch, da sie nicht an einen Biegezustand gekoppelt sind: Die Normalspannungen sind nämlich ebenfalls konstant. Das Dreieckelement kann also einen solchen „Biegezustand“ überhaupt nicht darstellen. Der Verzerrungszustand der beiden dreieckigen Elemente in Abb. 6.4 besteht jeweils aus der Überlagerung einer reinen Normalverzerrung in  $x$ -Richtung und einer reinen Schubverzerrung, die, jede für sich, exakt repräsentiert werden.

Hier wird die bereits in Abschnitt 6.4.1 erwähnte Schwäche der mechanischen Sichtweise von Locking offenbar. Obwohl in diesem Fall lineare Dreieckelemente, bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden, steifer reagieren, gelten sie als lockingfrei, da keine parasitären Spannungen auftreten. Dieser Widerspruch tritt nur bei Scheibenelementen und Kontinuums-elementen auf und liegt offensichtlich an der etwas willkürlichen Definition des Begriffs „Biegung“ im Zusammenhang mit dem Auftreten linearer Normalverzerrungen innerhalb eines Elementes.

Betrachtet man den Zwangsbedingungsfaktor  $r$  der drei- und viereckigen Elemente, so bietet sich ein etwas anderes Bild. Die zu erfüllende Nebenbedingung ist das Verschwinden der Schubverzerrungen

$$\epsilon_{xy} = 0 . \tag{6.56}$$

Das bedeutet also genau eine skalare Bedingung pro Integrationspunkt. Für das mit einem Gauß-Punkt exakt integrierte dreiknotige Element ( $n = 1, k = 0$ ) ergibt sich ein Wert von

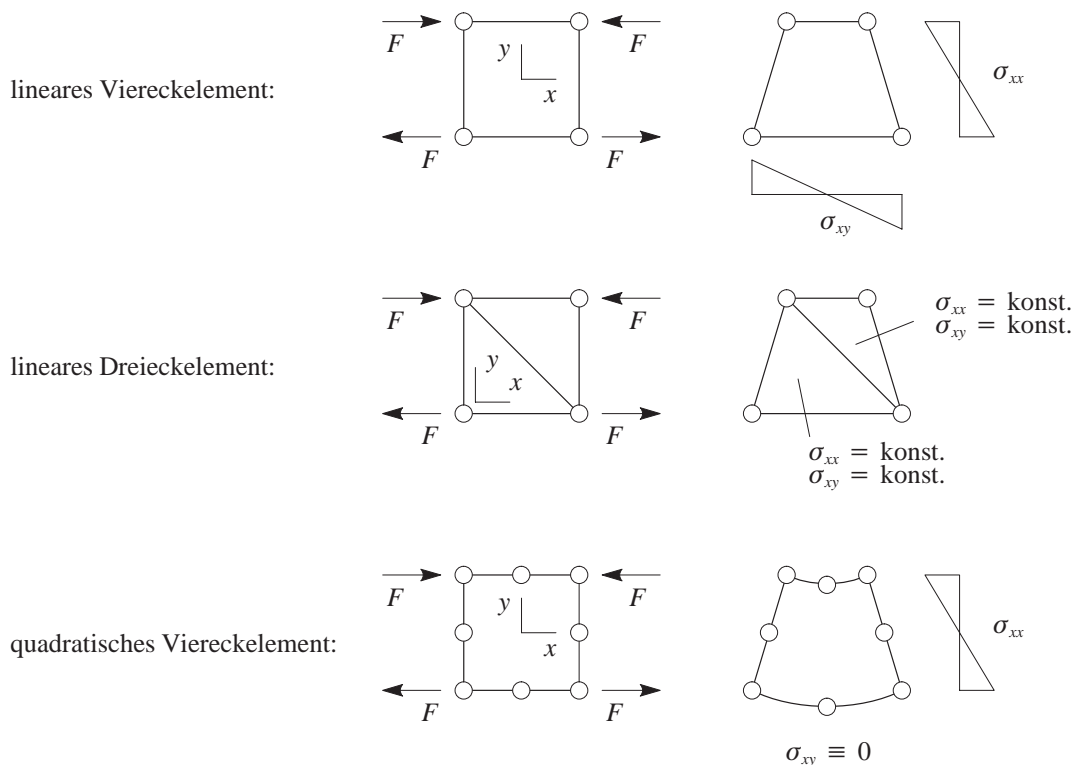


Abb. 6.4: Scheibenelemente unter „Biegebeanspruchung“ ( $\nu = 0,0$ )

$$r_{T1} = \frac{n_{Kn}^{[3]} \cdot n_{FG}}{n_Z} = \frac{1/2 \cdot 2}{1} = 1 . \quad (6.57)$$

Um den Schubanteil des vierknotigen Elementes voll zu integrieren sind vier Integrationspunkte notwendig. Für die Zwangsbedingungszahl des vollintegrierten, vierknotigen Elementes gilt damit

$$r_{Q1} = \frac{n_{Kn}^{[4]} \cdot n_{FG}}{n_Z} = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} . \quad (6.58)$$

Der ideale Wert für das kontinuierliche Problem ist mit

$$r_k = \frac{2}{1} = 2 \quad (6.59)$$

wesentlich höher als die Werte der beiden linearen Verschiebungselemente — ein klarer Hinweis auf Locking. Mit dieser Definition ist das Dreieckelement also weit davon entfernt, lockingfrei zu sein. Es bleibt jedoch bemerkenswert, daß der Zwangsbedingungsfaktor mit  $r_{T1} = 1$  günstiger ist als der des linearen Vierecks  $r_{Q1} = 1/2$ .

Das in Abb. 6.4 noch zusätzlich dargestellte achtknotige, unterintegrierte Element hat einen Zwangsbedingungsfaktor von

$$r_{S2RI} = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2} \quad (6.60)$$

und ist somit nicht völlig frei von Locking. Selektiv reduziert integrierte, vierknotige und neun-knotige Elemente haben hingegen den optimalen Wert von  $r = 2$ ,

$$r_{Q1SRI} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2 , \quad r_{Q2SRI} = \frac{4 \cdot 2}{4} = 2 . \quad (6.61)$$

Aus mathematischer Sicht ist Schublocking bei Scheibenelementen praktisch nicht existent. Der kleine Parameter, der im Céa–Lemma zu der ungünstig hohen Fehlerschranke führt, ist hier das Seitenverhältnis der Elemente. Es erreicht nicht die Größenordnungen, wie beispielsweise das Verhältnis der Lamé–Konstanten bei nahezu inkompressiblen Materialien (volumetrisches Locking) oder die Schlankheit bei Schalen (Membran– und Querschublocking).

#### 6.4.7 Querschublocking

Querschublocking kann bei schubweichen Platten– und Schalenelementen auftreten. Der Versteifungseffekt ist abhängig von der Dicke und wird mit zunehmender Schlankheit immer dramatischer. Im Vergleich zum Schublocking, das nur bei bestimmten Geometrien und Belastungen einen starken Einfluß auf das Elementverhalten hat, ist der Einfluß des Querschublocking fatal. Berechnungen von dünnen Platten, vor allem aber von in der Regel viel schlankeren Schalen mit reinen Verschiebungselementen niedriger Ordnung sind praktisch nicht mit vertretbarem Aufwand möglich. Insbesondere die Querkräfte sind mit großen Fehlern behaftet. Typisch für Querschublocking ist das „Oszillieren“ der Querkräfte, weshalb bereits eine simple Glättung meist eine merkliche Verbesserung ihrer Qualität bringt.

Die Ursache des Querschublocking kann sowohl bei dreieckigen als auch bei viereckigen Elementen mit dem Auftreten parasitärer Querkräfte bei reiner Biegebeanspruchung erklärt werden. Werden lineare Ansatzfunktionen verwendet, verläuft der Schubwinkel linear innerhalb eines

Elements. Der Beitrag aus den Verschiebungen ist jedoch lediglich konstant. Der lineare Anteil der Rotationen kann deshalb nicht von einem Anteil aus den Verschiebungen „ausbalanciert“ werden. Die Konsequenz ist, daß die Bernoulli– bzw. Kirchhoff–Bedingung nicht im ganzen Element erfüllt werden kann.

Im Gegensatz zu den Überlegungen bei Scheibenelementen, bei denen der Begriff der Biegung etwas willkürlich ist, ist es bei Plattenelementen offensichtlich notwendig, reine Biegezustände abbilden zu können. Lineare Verschiebungselemente sind dazu nicht in der Lage und bestehen den Patchtest für reine Biegung nicht. Konvergenz zur wahren Lösung ist für endliche Dicken zwar gewährleistet, da die parasitären Querkräfte mit Netzverfeinerung gegen Null gehen. Die Konvergenzrate, insbesondere in bezug auf die Querkräfte, ist jedoch für praktische Anwendungen zu gering.

Der starke Einfluß dieses Locking–Effekts bei Verschiebungselementen spiegelt sich auch in den Zwangsbedingungsanzahlen wieder. Für reine Plattenelemente mit drei Freiheitsgraden pro Knoten ergibt sich ein Optimum von

$$r_k = \frac{3}{2} . \quad (6.62)$$

Die beiden Zwangsbedingungen sind dabei die Kirchhoff–Bedingungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung

$$w_{,x} + \beta_y = 0 , \quad w_{,y} - \beta_x = 0 \quad (6.63)$$

( $w$  ist die Verschiebung eines Punktes der Plattenmittelfläche,  $\beta_x$  und  $\beta_y$  sind die Rotationen um die  $x$ - und  $y$ -Achse).

Für ein dreiknotiges Verschiebungselement mit drei Integrationspunkten ist der Zwangsbedingungsfaktor mit

$$r_{T1} = \frac{3}{6 \cdot 2 - 3} = \frac{1}{3} \quad (6.64)$$

deutlich unter dem kritischen Wert von 1. Bei bilinearen Viereckelementen sind die Verhältnisse mit  $r_{Q1} = 0,375$  nicht viel besser. Die Faktoren für einige andere Elemente sind in Abb. 6.7 zusammengestellt.

Die mathematische Erklärung für das Problem des Querschublocking ist das Auftreten eines kleinen Parameters — der Plattendicke. Je schlanker die Platte ist, desto stärker wird der Versteifungseffekt. Für gegen Null gehende Dicke geht das Verhältnis der parasitären Steifigkeit zur Biegesteifigkeit gegen unendlich. Diese Tatsache ist auch in numerischen Experimenten verifizierbar. Daß die Elemente schließlich doch gegen die wahre Lösung konvergieren liegt daran, daß sich der Begriff der Schlankheit nicht auf die Gesamtstruktur, sondern auf das einzelne Element bezieht. Mit Netzverfeinerung wird also die „Schlankheit“ immer kleiner und damit der kleine Parameter relativ größer. Der Locking–Effekt verschwindet.

#### 6.4.8 Membranlocking

Membranlocking tritt nur bei gekrümmten Balken– und Schalenelementen auf. Der Begriff bezeichnet den Versteifungseffekt der sich einstellt, wenn reine Biegezustände (dehnungslose Verformungen) von parasitären Membranspannungen begleitet werden. Oft wird der Begriff irrtüm-

lich anstelle von Schublocking und volumetrischem Locking verwendet, die bei Scheiben und im Membrananteil der Schale auftreten.

Obwohl die Bedeutung dieses Locking-Effekts vergleichbar mit der von Querschublocking ist, wird er in der Literatur bei weitem nicht so häufig behandelt. Das liegt vermutlich daran, daß die Ursachen des Querschublocking an den sehr viel einfacheren Platten studiert werden können und so ein attraktiveres Betätigungsfeld darstellen. Die dort gefundenen Konzepte lassen sich dann verhältnismäßig leicht auf Schalen übertragen. Beim Membranlocking besteht diese Möglichkeit nicht. Außerdem beeinflussen sich Querschublocking und Membranlocking gegenseitig, was eine Analyse der Ursachen schwierig macht.

Lineare Elemente sind frei von Membranlocking. Bei bilinearen Elementen tritt es nur auf, wenn die Elemente nicht eben sind.

Membranlocking kann bereits bei einem einfachen, gekrümmten Balkenelement beobachtet werden, das hier als Modellproblem dienen soll. In Abb. 6.5 ist ein quadratisches Balkenelement mit den zugehörigen Bezeichnungen und Koordinatensystemen dargestellt.

Die Geometrie des Balkens wird mit Hilfe der üblichen Lagrange-Funktionen in Abhängigkeit des Elementkoordinatensystems ausgedrückt,

$$d(\xi) = d_0 - \frac{4d_0}{l^2} \xi^2, \quad (6.65)$$

Wird eine linearisierte Theorie zugrundegelegt, so entspricht eine reine Biegedeformation des Balkens einem in  $\xi$  quadratischen Verlauf der auf das lokale Elementkoordinatensystem bezogenen Verschiebungen  $u_\eta$ .

$$u_\eta(\xi) = -c \xi^2; \quad u_\xi(\xi) = 0. \quad (6.66)$$

Die Membranverzerrungen in lokalen Koordinaten  $\epsilon_{\xi\xi} = u_{\xi,\xi}$  sind damit identisch Null. Der Verlauf der Rotationen entspricht nach der Bernoulli-Bedingung

$$\gamma = u_\eta' + \beta = 0 \quad (6.67)$$

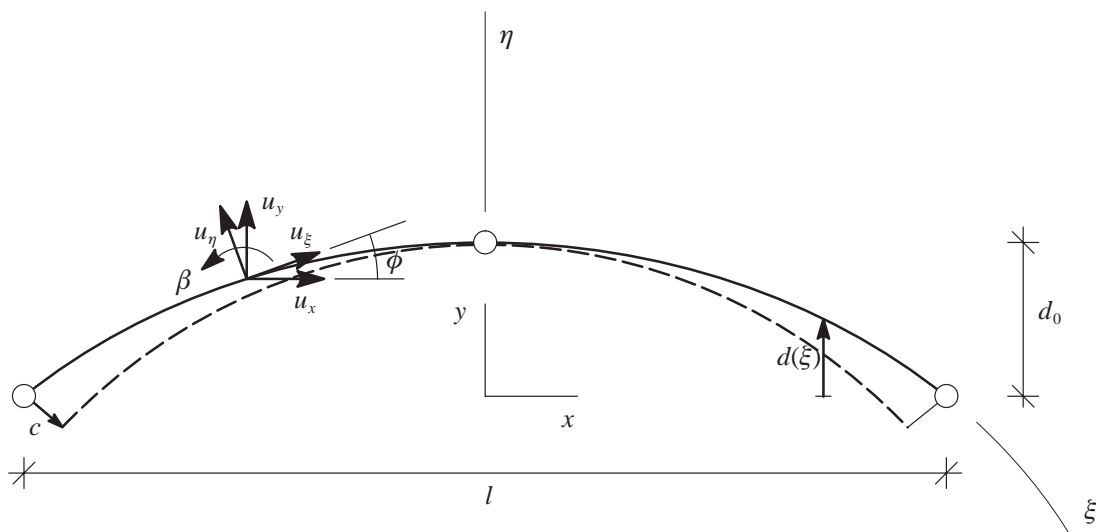


Abb. 6.5: Quadratisches, gekrümmtes Balkenelement

der negativen Ableitung des Verschiebungsverlaufs. Die Krümmungen  $\kappa$  sind konstant.

$$\beta(\xi) = 2 c \xi \quad \Rightarrow \quad \kappa(\xi) = \beta'(\xi) = 2 c . \quad (6.68)$$

Ein solcher Verschiebungsverlauf ist mit den zur Verfügung stehenden quadratischen Ansatzfunktionen für  $u_x$  und  $u_y$  nicht darstellbar. Das liegt daran, daß sich die Verschiebungen des Elements nicht auf die lokale Basis des  $\xi, \eta$ -Systems, sondern auf eine kartesische Basis beziehen. Die Umrechnung der lokalen auf die kartesischen Verschiebungskomponenten liefert

$$u_x = u_\xi \cos \phi - u_\eta \sin \phi , \quad (6.69)$$

$$u_y = u_\xi \sin \phi + u_\eta \cos \phi . \quad (6.70)$$

Die Gleichungen (6.66), eingesetzt in (6.69) und (6.70), zeigen, daß für eine exakte Darstellung dieser reinen Biegedeformation die Funktionen  $u_x(\xi)$  und  $u_y(\xi)$  nicht etwa quadratische Parabeln, sondern transzendente Funktionen sein müßten.

Dehnungslose Verformungen können also nicht exakt dargestellt werden. Es treten parasitäre Normalverzerrungen in der Balkenachse auf — die Ursache für Membranlocking. Außerdem entstehen auch parasitäre Querschubverzerrungen, da die Bernoulli-Bedingung nicht exakt erfüllt werden kann.

Bei Schalentragwerken sind die Ursachen für Membranlocking dieselben wie beim Balken. Neben den parasitären Normalkräften  $n_{11}$  und  $n_{22}$  werden hier auch Membran-Schubkräfte  $n_{12}$  geweckt. Für den Zwangsbedingungsfaktor bedeutet das, daß drei Nebenbedingungen  $n_{\alpha\beta} = 0$  berücksichtigt werden müssen. Bei einer Schalentheorie mit fünf Freiheitsgraden (die Dickenänderung bei der 7-Parameter-Formulierung leistet keinen Beitrag zur Erfüllung der drei Nebenbedingungen) ergibt sich also ein optimaler Wert von

$$r_k = \frac{5}{3} = 1,6 . \quad (6.71)$$

Wie bereits erwähnt, haben lineare Elemente keine Probleme mit Membranlocking, da sie keine gekrümmten Flächen approximieren können. Durch den gemischten Term in den Ansatzfunktionen haben jedoch bereits die bilinearen Viereckelemente einen Krümmungsanteil. Deshalb kann hier auch Membranlocking auftreten. Der zugehörige Zwangsbedingungsfaktor ist

$$r_{Q1} = \frac{5}{4 \cdot 3} = 0,41\bar{6} , \quad (6.72)$$

was auf starkes Locking hinweist. Die Faktoren anderer Elemente sind in Abb. 6.7 zu finden. Wird, wie bei degenerierten Schalenelementen üblich, an Diskretisierungsknicken ein gemittelter Direktor eingeführt, so tritt bereits bei linearen Elementen Membranlocking auf, da innerhalb des Elements die Verkrümmung nicht Null ist.

Der Parameter, der aus mathematischer Sicht für das Phänomen des Membranlocking verantwortlich ist, ist die Schalendicke. Locking bei Schalen wird jedoch in der mathematischen Literatur selten beschrieben. Eine mathematische Analyse von Membranlocking bei Zylinderschalen findet man bei Pitkäranta (1991).

#### 6.4.9 Volumetrisches Locking

Volumetrisches Locking hängt — im Gegensatz zu allen anderen Locking-Effekten, die im wesentlichen kinematische Phänomene sind — von einem Materialparameter, nämlich der Poisson-

Zahl  $\nu$ , ab. Deshalb findet man in der Literatur auch mitunter den Begriff *Poisson–Locking*. Der Versteifungseffekt wird für  $\nu \rightarrow 0,5$  immer stärker. Bei  $\nu = 0,0$  tritt kein volumetrisches Locking auf.

Die zu erfüllende Zwangsbedingung ist die Divergenzfreiheit des Verschiebungsfeldes

$$\lim_{\nu \rightarrow 0,5} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (6.73)$$

für inkompressibles Material. Dieselbe Bedingung ist bei Plastizität in Fließzonen zu erfüllen. Bei zwei Verschiebungsfreiheitsgraden ergibt sich für das Kontinuum ein optimaler Zwangsbedingungsfaktor von  $r_K = 2/1 = 2$ .

Aus mechanischer Sicht sind dreieckige Scheibenelemente frei von volumetrischem Locking, da keine parasitären Spannungen auftreten. Aufgrund der Vollständigkeit der Ansatzfunktionen sind sämtliche Verzerrungs- und Spannungsverläufe optimal aufeinander abgestimmt. Der Zwangsbedingungsfaktor des linearen Elementes ist mit

$$r_{T1} = \frac{1}{1} = 1 \quad (6.74)$$

jedoch deutlich kleiner, als der optimale Wert  $r_K$ . Für das bilineare Viereckelement ergibt sich ein ungünstigerer Zwangsbedingungsfaktor

$$r_{Q1} = \frac{2}{4} = 0,5 \quad (6.75)$$

als beim Dreieck. Tatsächlich ist das Verhalten dreiknotiger Elemente unabhängig von der Poisson–Zahl. Der Zwangsbedingungsfaktor gibt hier eine zu pessimistische Prognose (vgl. Haußer (1996)).

In der mathematischen Analyse von volumetrischem Locking bietet sich ein recht klares Bild der Ursachen. Für  $\nu \rightarrow 0,5$  geht nämlich der Kompressionsmodul gegen unendlich, was bedeutet, daß auch die Konstante im Céa–Lemma über alle Grenzen wächst (Braess (1997)).

Das in Abschnitt 3.3 beschriebene Poisson–Dickenlocking hat genau dieselben Ursachen. Die parasitären Normalspannungen wirken dabei nicht in Membranrichtung, sondern in Dickenrichtung. Ein prinzipieller Unterschied ist der, daß Poisson–Dickenlocking nicht mit Netzverfeinerung verschwindet, da nicht in Dickenrichtung verfeinert wird.

#### 6.4.10 Dickenlocking bei gekrümmten Elementen

Der Effekt des Dickenlocking bei gekrümmten Elementen (*curvature thickness locking*) wurde zuerst von Ramm et al. (1994) (siehe auch Ramm et al. (1995)) erwähnt. Er tritt nur bei Schalenformulierungen mit Dickenänderung auf, und dort auch nur dann, wenn eine Differenzvektorformulierung mit gemitteltem Direktor verwendet wird. Er äußert sich in parasitären Normalspannungen in Dickenrichtung. Wie beim Membranlocking genügt die Betrachtung eines gekrümmten Balkens um die Ursachen des Versteifungseffektes anschaulich zu erklären.

Bei reiner Biegung eines linearen Balkenelements (Abb. 6.6), stehen die Differenzvektoren  $\mathbf{w}^K$  senkrecht auf den Direktoren  $\mathbf{a}_3^K$ , wenn die Querdehnzahl  $\nu = 0$  ist und eine linearisierte Theorie vorausgesetzt wird. Durch die lineare Interpolation des Differenzvektors im Element entsteht zu dessen Mitte hin eine Komponente parallel zum Direktor, der dadurch gedehnt oder gestaucht wird. Die daraus entstehenden Verzerrungen führen zu einem zusätzlichen Beitrag zur inneren

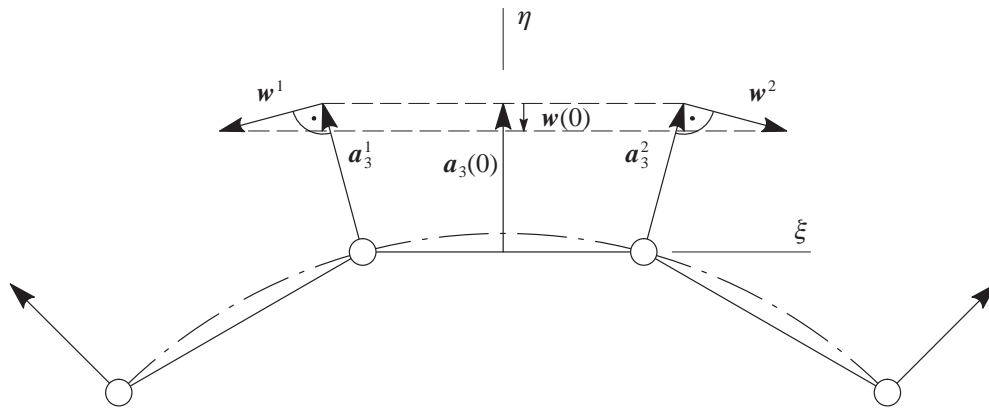


Abb. 6.6: Parasitäre Normalverzerrungen in Dickenrichtung bei reiner Biegung

Energie des Elements und damit zu einer Versteifung. Offensichtlich ist dieser Effekt umso stärker, je größer der Winkel zwischen den Direktoren und je schlanker der Balken ist, da dann die transversale Dehnsteifigkeit zunimmt.

Aus numerischer Sicht handelt es sich auch hier wieder um eine einzige skalare Nebenbedingung

$$n^{33} = 0, \quad (6.76)$$

die von den Schalenelementen erfüllt werden muß. Als optimalen Zwangsbedingungsfaktor erhält man

$$r_K = 4, \quad (6.77)$$

wenn man davon ausgeht, daß vier der sieben Freiheitsgrade (die drei „Plattenfreiheitsgrade“, die beim Querschublocking berücksichtigt werden, zusammen mit dem konstanten Anteil der Dickenänderung) zu diesem Effekt beitragen. Lineare Dreieckelemente weisen hier ( $n = 1$ ,  $k = 1$ ) einen Zwangsbedingungsfaktor von

$$r_{T1} = \frac{4}{6-3} = 1,3 \quad (6.78)$$

auf. Vierknotige Elemente kommen auf einen Wert von

$$r_{Q1} = \frac{4}{4} = 1. \quad (6.79)$$

Beide Werte weisen auf ein deutlich zu steifes Verhalten hin. Durch eine simple Unterintegration der entsprechenden Anteile der Steifigkeitsmatrix mit einem Gauß-Punkt in der Mitte des Elements, kann bei vierknotigen Elementen der Zwangsbedingungsfaktor auf den optimalen Wert von  $r_K = 4$  erhöht werden. Dieses Verfahren wurde von Ramm et al. (1994) vorgeschlagen. Bei näherer Betrachtung der Ursachen des Effektes scheint jedoch eine bilineare Interpolation von  $\alpha_{33}$  mit Hilfe der ANS-Methode nach Betsch et al. (1996) sowie Bischoff und Ramm (1997) sinnvoller zu sein (Abschnitt 7.2.4).

In der mathematischen Literatur findet man keine Hinweise auf diesen Effekt. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß auch hier eine Rückführung auf den Einfluß des kleinen Parameters der Dicke möglich ist.



#### 6.4.11 Vergleich der verschiedenen Definitionen von Locking

In der Tat unterscheiden sich diese verschiedenen Auffassungen vom Locking–Begriff nicht nur in der Methodik, sondern führen auch zu unterschiedlichen Resultaten.

Die mechanische Sichtweise, die Locking über das Auftreten parasitärer Spannungen definiert, hat den Nachteil, daß die Qualität dreieckiger Scheibenelemente überschätzt wird. Ihr wesentlicher Vorteil ist die Anschaulichkeit. Sie hilft, Strategien zu entwickeln, den jeweiligen Effekt zu vermeiden. Außerdem wird der Tatsache Rechnung getragen, daß sich verzerrte Elemente im allgemeinen schlechter verhalten als unverzerrte.

Die numerische Sichtweise stellt eine einfache Methode dar, die Neigung von Elementen zum Versteifen zu „berechnen“. Es stellt sich jedoch heraus, daß der Zwangsbedingungsfaktor nur bedingt dazu geeignet ist, die auftretenden Effekte wirklich zu quantifizieren. Zwar haben Elemente höherer Ansatzordnung günstigere Werte, was durch numerische Experimente bestätigt wird, jedoch kommen Dreieckelemente im Vergleich zu den Vierecken mitunter zu gut weg. Ein weiterer Nachteil ist, daß die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente keinen Einfluß auf den Zwangsbedingungsfaktor hat.

Der Hauptvorteil der mathematischen Sichtweise besteht sicher in der Rigorosität. Als einzige der drei vorgestellten Zugänge zur Locking–Problematik macht sie Aussagen zu allen (bekannten) Locking–Problemen. Eine Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente wird bei Stenberg (1993) als Instabilität der Formulierung bezeichnet, weil sie mit Oszillationen bestimmter Zustandsgrößen (namentlich der Querkräfte bei Platten) verbunden ist. Aus mechanischer Sicht ist das ein Locking–Effekt, da diese Größen erstens parasitär sind und zweitens zu künstlichen Steifigkeiten führen. Eine rein mathematische Betrachtungsweise schafft allerdings nur mühsam einen Zugang zu den physikalischen Ursachen der Versteifungseffekte.

### 6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Konzept zur Formulierung von finiten Schalenelementen mit Berücksichtigung der Dickenänderung beschrieben. Obwohl in der kontinuierlichen Theorie dabei sieben Freiheitsgrade pro materiellem Punkt der Schalenmittelfläche benötigt werden, haben die entsprechenden finiten Elemente nur sechs Freiheitsgrade pro Knoten. Der siebte Freiheitsgrad kann auf Elementebene eliminiert werden und taucht beim Zusammenbau und der Lösung des Strukturgleichungssystems nicht mehr auf. Aus algorithmischer Sicht können die Elemente nach dem Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix wie reine Verschiebungselemente behandelt werden. Bei der Berechnung der Spannungen muß dabei allerdings der „innere“, siebte Freiheitsgrad berücksichtigt werden.

Für die 7–Parameter–Schalenelemente entfällt die Unterscheidung in „degenerierte“ oder „echte“ Schalenelemente. Die wesentlichen Merkmale der Diskretisierung lassen sich mit beiden Konzepten verwirklichen.

- Es werden krummlinig–konvektive Koordinaten verwendet.
- Geometrie und Kinematik werden isoparametrisch diskretisiert.
- Die Integration des Stoffgesetzes über die Dicke erfolgt vorab.

Nach Büchter (1992) ist bei 5–Parameter–Schalenformulierungen der einzige Unterschied zwischen degenerierten und „echten“ Schalenelementen die Art der Interpolation der Rotationen,









	$n_{FG}$ $n$ $k$	 T1	 Q1	 Q1RI	 T2	 Q2	 Q2RI	 S2RI	 S3RI	kont.
Schub-Locking $\alpha_{12} = 0$	2 1 0	$0, \bar{3}$	0,5	2	$0, \bar{72}$	$0, \bar{8}$	2	1,5	$1, \bar{1}$	2
Querschub-Locking $\alpha_{a3} = 0$	3 2 1	$0, \bar{3}$	0,375	1,5	0,8	$0, \bar{6}$	1,5	1,125	$0,8 \bar{3}$	1,5
Membran-Locking $\alpha_{a\beta} = 0$	5 3 1	$0, \bar{3}$	$0,41 \bar{6}$	$1, \bar{6}$	0,769	$0, \bar{740}$	$1, \bar{6}$	1,25	$0,92 \bar{5}$	$1, \bar{6}$
volumetrisches Locking $div \mathbf{u} = 0$	2 1 0	$0, \bar{3}$	0,5	2	$0, \bar{72}$	$0, \bar{8}$	2	1,5	$1, \bar{1}$	2
Dicken-Locking $\alpha_{33} = 0$	4 1 1	$1, \bar{3}$	1	4	$1, \bar{3}$	$1, \bar{7}$	4	3	$2, \bar{2}$	4

Abb. 6.7: Zwangsbedingungsfaktoren für reine Verschiebungselemente

wobei bei ersteren Differenzverschiebungen und bei letzteren die Rotationen selbst interpoliert werden. Bei der vorliegenden Theorie wird von Anfang an mit Differenzverschiebungen gearbeitet, so daß auch dieser letzte Unterschied wegfällt.

7-Parameter-Schalenelemente zeigen dieselben Locking-Effekte die auch bei konventionellen schubweichen Formulierungen auftauchen. Darüberhinaus taucht ein zusätzliches Versteifungsproblem auf, das bei gekrümmten Strukturen unter Biegung zu parasitären Normalspannungen in Dickenrichtung führt.

In Abb. 6.7 sind die Zwangsbedingungsfaktoren für einige gängige Verschiebungselemente in bezug auf die hier besprochenen Locking-Effekte zusammengestellt. Dabei sind dreieckige Elemente mit einem T (triangle), viereckige mit einem Q (quadrilateral) und Elemente ohne Mittelknoten mit einem S (Serendipity) bezeichnet. Die folgende Zahl gibt den Polynomgrad an. RI steht für „reduziert integriert“. Zum Vergleich ist in der letzten Spalte der optimale Wert des kontinuierlichen Problems angegeben.

Es fällt auf, daß die reduziert integrierten, viereckigen Lagrange-Elemente Q1RI und Q2RI jeweils den optimalen Wert aufweisen, was bei den dreieckigen nicht der Fall ist. Die vierknotigen Elemente haben aber den entscheidenden Nachteil, daß innere Kinematiken auftreten. Im folgenden Kapitel werden deshalb Methoden vorgestellt, die zu optimalen Zwangsbedingungsfaktoren führen, ohne innere Kinematiken hervorzurufen. Einige Verfahren reduzieren im Vergleich zu unterintegrierten Elementen zudem noch die Verzerrungsempfindlichkeit.

## 7 Effiziente finite Elemente für das 7-Parameter-Modell

### 7.1 Überblick

Gleich zu Anfang muß gesagt werden, daß es unmöglich ist, einen vollständigen Überblick über Elementformulierungen zu geben, die eine Alternative zu reinen Verschiebungselementen darstellen. Das wird dadurch eindrücklich belegt, daß Hughes et al. (1977) eine entsprechende Bemerkung bereits in der Mitte der siebziger Jahre an den Anfang eines Aufsatzes über effiziente Plattenelemente gestellt haben („*The literature is extensive and we will not make an attempt to review it here*“). Inzwischen sind mehr als zwei Jahrzehnte vergangen, und die Forschungstätigkeit im Themenbereich *Elementtechnologie* hält nahezu unvermindert an.

Die Betrachtungen in diesem einführenden Abschnitt beschränken sich deshalb auf diejenigen Methoden, die in der Strukturmechanik, insbesondere im Zusammenhang mit schubweichen Schalenelementen, eine gewisse Bedeutung erlangt und einen Bezug zu den Formulierungen haben, die letztendlich für das 7-Parameter-Modell ausgewählt werden. Das Ziel bei der Entwicklung dieser Verfahren war es immer, die bei Verschiebungselementen auftretenden Locking-Effekte zu vermeiden, die Elemente also „weicher“ zu machen. Obwohl es zunächst viele verschiedene Wege zu geben scheint, dieses Ziel zu erreichen, hat sich in den letzten Jahren immer wieder herausgestellt, daß diese Methoden miteinander verwandt oder gar äquivalent sind, also zu identischen Steifigkeitsmatrizen führen (Pian (1982), Simo und Hughes (1986), Simo und Rifai (1990), Andelfinger und Ramm (1993)).

Das Problem des Querschublocking besteht für schubstarre Platten- und Schalenelemente nach der Kirchhoff-Loveschen Theorie nicht (siehe zum Beispiel Morley (1991), Batoz et al. (1980) sowie Argyris (1997)). Diese „dünnen“ Platten- und Schalenelemente (thin shell elements) werden im Weiteren nicht betrachtet.

Zu den ersten und zugleich wichtigsten Entwicklungen gehört die Idee von Herrmann (1965) und Fraeijs de Veubeke (1965), finite Elemente mit Hilfe von gemischten Funktionalen herzuleiten (siehe auch Pian (1964)). Eine der bedeutendsten Arbeiten ist hier der Aufsatz von Pian und Sumihara (1984), in dem ein einfaches, zweidimensionales Element auf der Basis des Funktionals von Hellinger-Reissner vorgeschlagen wird. Dabei werden, neben Ansätzen für die Verschiebungen, auch Spannungsansätze gemacht. Dieses Element gehört trotz einer gewissen Verzerrungsempfindlichkeit bis heute zu den effizientesten, die für Scheibenberechnungen zur Verfügung stehen. Der Erfolg dieser Methode kann, im Hinblick auf die im vorigen Abschnitt diskutierten Sichtweisen von Locking, unterschiedlich begründet werden.

Eine anschauliche Erklärung liefert die Tatsache, daß durch eine geeignete Wahl der Spannungsansätze parasitäre Spannungen gar nicht auftreten können. Die entsprechenden Terme werden bei der Wahl der Ansatzfunktionen einfach weggelassen. Dadurch wird eine Balance zwischen Verzerrungs- und Spannungsverläufen hergestellt.

Das macht sich auch bei der Berechnung des Zwangsbedingungsfaktors direkt bemerkbar. In bezug auf Schublocking und volumetrisches Locking hat das „Pian-Sumihara-Element“ jeweils den optimalen Wert  $r_k$ .

Die mathematische Erklärung des Erfolgs dieser Methoden hängt damit zusammen, daß bei dem zugrundeliegenden Funktional von Hellinger-Reissner die kinematische Gleichung nur variationell erfüllt wird. Das ursprüngliche Minimalproblem wird in ein Sattelpunktproblem umgewan-

delt, das die Wahl alternativer Funktionenräume, beispielsweise für die Spannungen, ermöglicht. Dadurch werden die Zwänge, denen diese Größen bei einem Einfeldfunktional unterliegen und in der Regel durch die kinematische Gleichung verursacht werden, weggenommen.

Elemente, die mit verschiedenen Variablen arbeiten, also zum Beispiel Verschiebungen und Spannungen, werden gewöhnlich als *gemischte Elemente* bezeichnet. *Hybrid-gemischt* heißen sie, wenn eine dieser Gruppe von Unbekannten, beispielsweise die Spannungsparameter, auf Elementebene durch statische Kondensation eliminiert wird. Das Element von Pian und Sumihara gehört in die zweite Gruppe.

Eine andere Möglichkeit ist es, die Integrationsordnung zu verringern und somit bestimmte Polynome des Integranden zu ignorieren (Zienkiewicz et al. (1971)). Der Effekt dieser *reduzierten Integration* oder *Unterintegration* ist prinzipiell der gleiche wie bei hybrid-gemischten Methoden. Bei *selektiv reduziert integrierten* Elementen (Doherty et al. (1969)) werden nur Teile der Steifigkeitsmatrix unterintegriert. Die Methode der Unterintegration hat jedoch den Nachteil, daß unter Umständen innere Elementkinematiken auftreten. Eine allgemeine Anwendung der Elemente für bestimmte Randbedingungen, aber auch für Aufgaben wie Eigenwertanalysen und nichtlineare oder dynamische Berechnungen ist damit ausgeschlossen. Belytschko schlägt deshalb vor, bei unterintegrierten Elementen durch einen Stabilisierungsterm die unerwünschten Nulleigenwerte zu unterdrücken (Flanagan und Belytschko (1981), Belytschko (1983)).

Eine dritte wichtige Gruppe sind Elemente, die mit inkompatiblen Verschiebungen (Wilson et al. (1973), Taylor et al. (1976)) arbeiten. Die Basis sind meist reine Verschiebungselemente. Ihnen werden zusätzliche, inkompatible Verschiebungen überlagert, welche die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen nicht erfüllen. Die Idee ist dabei, das Element um „fehlende“ Deformationsformen zu bereichern. Beispielsweise eignen sich quadratische Verschiebungsteile bei linearen Viereckelementen dazu, das Verhalten dieser Elemente bei Biegung zu verbessern und damit Schublocking zu vermeiden. Die Methode der inkompatiblen Verschiebungen steht in engem Zusammenhang mit der EAS-Methode, die in Abschnitt 7.4 besprochen wird.

Schließlich sollen noch die *Kollokationsmethoden* erwähnt werden. Das herausragende Merkmal dieser Verfahren ist, daß bestimmte physikalische Felder weder direkt diskretisiert, noch über Nebenbedingungen aus anderen erhalten werden. Vielmehr wird einer Mischform dieser beiden Möglichkeiten gewählt, indem die Größen zunächst an diskreten Punkten — den *Kollokationspunkten* (engl. *sampling points*) — aus einer Nebenbedingung berechnet, und dann durch bestimmte Ansatzfunktionen im Element interpoliert werden. Die ANS-Methode (Abschnitt 7.2) ist eine Kollokationsmethode.

All diese Verfahren sind eng miteinander verwandt. Zum Beispiel kann die Methode der Unterintegration als gemischte Formulierung begründet werden (Malkus und Hughes (1978)). Erst in jüngster Zeit wurde ein Zusammenhang zwischen bestimmten hybrid-gemischten Methoden und der EAS-Methode entdeckt (Andelfinger und Ramm (1993)). Die EAS-Methode ist wiederum unter bestimmten Voraussetzungen mit der Methode der inkompatiblen Verschiebungen verwandt (Simo und Rifai (1990)). Für regelmäßige Elementgeometrien, wie Rechtecke oder Parallelogramme, führen die meisten dieser Methoden zu identischen Steifigkeitsmatrizen.

In den folgenden Abschnitten werden die im Rahmen dieser Arbeit verwandten Verfahren beschrieben. Dabei handelt es sich sowohl um aus der Literatur bekannte Methoden als auch um eigene Entwicklungen. Es hat sich in der Vergangenheit gezeigt, daß für verschiedene Locking-Probleme auch verschiedene Verfahren vorteilhaft sind. Deshalb werden die einzelnen Verfahren

in dem Kontext erläutert, in dem sie zur Verbesserung der Effizienz der Schalenelemente eingesetzt werden.

Locking wird bei finiten Elementen wohl nie völlig vermieden werden können. Für beliebige Netze und Belastungen kann nicht verhindert werden, daß parasitäre Spannungen auftreten. Der Begriff *lockingfrei* ist deshalb so zu verstehen, daß ein Element zumindest in bestimmten Konfigurationen kein Locking aufweist. In der Regel ist das der Fall, wenn strukturierte Netze verwendet werden. Außerdem sollte bei lockingfreien Elementen, unabhängig vom Netz, gleichmäßige Konvergenz bezüglich des Parameters zu beobachten sein, der für den Locking-Effekt verantwortlich ist (das ist die kritische Bedingung).

## 7.2 Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)

Der Ursprung der ANS-Methode liegt vermutlich in der Idee der Unterintegration, deren Nachteil, das Auftreten innerer Kinematiken, in den siebziger Jahren noch nicht überwunden war (entsprechende Stabilisierungsmethoden wurden erst viel später entwickelt, z.B. von Flanagan und Belytschko (1981), Belytschko (1983)). Als „Urvater“ der ANS-Methode kann das QUAD4-Element angesehen werden, das von MacNeal (1978) vorgestellt wurde. Es enthält bereits die grundlegenden Gedanken der ANS-Methode für Schalenelemente, wobei allerdings noch keine Kollokationsmethode, sondern lediglich eine modifizierte numerische Integration verwendet wird.

Das erste „echte“ ANS-Element schlagen Hughes und Tezduyar (1981) vor. In dieser Veröffentlichung wird auch deutlich bezug auf MacNeal (1978) genommen. Es ist eines der ersten lockingfreien und verhältnismäßig verzerrungsunempfindlichen schubweichen Plattenelemente ohne innere Kinematiken. Noch heute zählt es zu den effizientesten Plattenelementen überhaupt. Bathe und Dvorkin (1985) beschreiben eine Erweiterung dieses Elements auf Schalen. Dieser Artikel wird auch meistens im Zusammenhang mit der Methode zitiert („Bathe-Dvorkin-Element“).

Der Begriff *Assumed Natural Strain* taucht vermutlich zum ersten Mal bei Park und Stanley (1986) auf, die ein neunknotiges ANS-Element vorschlagen. Dieser Name hat sich — vor allem im deutschsprachigen Raum — für sämtliche verwandten Entwicklungen durchgesetzt, auch wenn die Verzerrungen nicht immer in natürlichen Koordinaten („natural strains“) ausgedrückt werden (siehe z.B. Huang und Hinton (1984)). Vor allem in der amerikanischen Literatur findet man oft den Begriff *Assumed Strain Hybrid Method* (MacNeal (1994)). Es besteht dabei allerdings die Gefahr der Verwechslung mit der EAS-Methode. Die Gruppe um K.-J. Bathe verwendet den Begriff MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*, Bathe und Dvorkin (1986)). Dieser Name ist jedoch eher zu einem Markenzeichen der Entwicklungen dieser Gruppe und des kommerziellen FE-Pakets ADINA<sup>®</sup> geworden, als zu einem allgemein verwendeten Begriff. In der vorliegenden Arbeit wird der Name „ANS-Element“ für jede Art von Elementen verwendet, bei denen Verzerrungen an Kollokationspunkten berechnet und unabhängig von den Verschiebungen interpoliert werden.

### 7.2.1 Grundgedanke

Die ANS-Methode ist eine Kollokationsmethode, die ursprünglich entwickelt wurde, um Querschublocking bei bilinearen Plattenelementen zu vermeiden (Hughes und Tezduyar (1981)). Der

prinzipielle Gedanke besteht darin, die Querschubverzerrungen nicht direkt aus den Ableitungen der Verschiebungen zu berechnen, da dadurch parasitäre Anteile entstehen. Vielmehr werden nur diskrete Verzerrungen an den sogenannten Kollokationspunkten aus den Verschiebungen ermittelt und danach mit speziell gewählten Ansatzfunktionen über das Element interpoliert.

Das Verfahren nutzt beispielsweise bei bilinearen Elementen die Tatsache aus, daß die parasitären Querschubverzerrungen linear im Element verlaufen und damit in der Mitte des Elementes einen Nulldurchgang haben. Die Kollokationspunkte werden folglich an den Kantenmitten gewählt. Die Anordnung auf den Kanten reduziert zusätzlich den Zwangsbedingungsfaktor, da eine der beiden Kirchhoff-Bedingungen damit über die Elementgrenzen hinweg linear abhängig wird. Das ist gleichzeitig ein entscheidender Unterschied zum QUAD4-Element von MacNeal (1978). Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht darin, daß die Querschubverzerrungen nicht auf ein kartesisches, sondern auf das schiefwinklige Elementkoordinatensystem („natürliche“ Koordinaten) bezogen werden, was die Elemente unempfindlicher gegen Netzverzerrungen macht.

Neben den linearen, vierknotigen ANS-Plattenelementen von Hughes und Tezduyar (1981), sowie den geometrisch nichtlinearen Schalenelementen von Bathe und Dvorkin (1985) (siehe auch Dvorkin und Bathe (1984), Bathe und Dvorkin (1986)) wurden auch neunknotige Elemente entwickelt. Huang und Hinton (1984) beschreiben ein vollintegriertes neunknotiges Plattenelement, bei dem die Querschubverzerrungen über jeweils sechs Kollokationspunkte im Element interpoliert werden. Zwei Jahre später präsentieren dieselben Autoren ein neunknotiges Schalenelement (Huang und Hinton (1986)). Um Membranlocking zu vermeiden werden dort auch die Membranverzerrungen mit der ANS-Methode modifiziert. Die Besonderheit bei diesen Elementen ist, daß nicht das natürliche Elementkoordinatensystem, sondern lokale, kartesische Koordinatensysteme zur Definition der Verzerrungen verwendet werden. Dadurch soll die Erfüllung des Patchtests für konstante Membranverzerrungen gewährleistet werden. Außerdem sehen Huang und Hinton (1986) darin die Voraussetzung, um Membran- und Biegeanteil entkoppeln zu können.

Weitere neunknotige ANS-Elemente wurden von Park und Stanley (1986), sowie Pinsky und Jang (1987) entwickelt. Beide Konzepte verwenden das krummlinige Elementkoordinatensystem für die Definition von Membran- und Querschubverzerrungen. Park und Stanley vernachlässigen allerdings die Veränderlichkeit der Metrik innerhalb des Elements bei den partiellen Verschiebungsableitungen. Der Membrananteil beider Elemente bestehen den Patchtest nicht. In der vorliegenden Arbeit wurde das Konzept von Pinsky und Jang (1987) deshalb nur für die Verbesserung der Querkräfte übernommen.

Drei- und viereckige MITC-Elemente für Scheiben, Platten und Schalen sind in Bathe (1996) ausführlich beschrieben. Die dreieckigen Elemente der MITC-Familie sind allerdings in der Effizienz den viereckigen unterlegen. MITC-Elemente für Scheiben haben den Nachteil, daß sie den Patchtest nicht bestehen. Deshalb schlägt Andelfinger (1993) vor, für den Membrananteil der Schalenelemente die EAS-Methode anzuwenden.

Um bei 7-Parameter-Schalenelementen Querschublocking zu vermeiden, werden nur die konstanten Anteile der Querschubverzerrungen  $\alpha_{\alpha 3}$  mit Hilfe der ANS-Methode modifiziert. Die linearen Anteile  $\beta_{\alpha 3}$  tragen nichts zum Problem des Querschublocking bei.

### 7.2.2 Variationelle Formulierung

Als Basis für die Herleitung von ANS-Elementen wurden zunächst gewöhnliche, isoparametrische Verschiebungselemente und damit das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.30) heran-

gezogen. Durch die Modifikation der Querschubverzerrungen wird jedoch die variationelle Basis insofern verlassen, als die kinematischen Feldgleichungen verletzt werden, die jedoch beim Prinzip der virtuellen Verschiebungen punktweise erfüllt sein müssen.

Simo und Hughes (1986) liefern die erste variationell korrekte Herleitung auf der Basis des Prinzips von Hu–Washizu (2.32). Bei der Diskretisierung des zugrundeliegenden Dreifeldfunktionals können unabhängige Ansätze für Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen gemacht werden. Simo und Hughes (1986) zeigen, wie mit Hilfe dieses Funktionals eine der ANS–Methode äquivalente FE–Formulierung hergeleitet werden kann. Dabei spielt die Diskretisierung der Spannungen, für die bei der Formulierung von ANS–Elementen keine eigenen Ansätze gemacht werden, eine wichtige Rolle. Sie werden mit Hilfe einer Orthogonalitätsbedingung, deren Erfüllung durch die Wahl geeigneter Spannungsansätze a priori gewährleistet werden kann, aus dem Funktional eliminiert. In Simo und Hughes (1986) wird gezeigt, wie sich diese Orthogonalitätsbeziehungen auf die variationell konsistente Spannungsrückrechnung auswirkt. Die Orthogonalitätsbedingung fordert, daß die Differenz zwischen den angenommenen Verzerrungen und den Verzerrungen, die direkt aus den Verschiebungsableitungen berechnet werden (also das Residuum der kinematischen Feldgleichung), multipliziert mit den Spannungen, im Integral elementweise verschwindet. Damit steht diese Beziehung in einem engen Zusammenhang mit der Orthogonalitätsbedingung (2.52), die für die Formulierung von EAS–Elementen erfüllt werden muß.

Für eine bessere Verständlichkeit wird das Verfahren in den folgenden Abschnitten in der Form dargestellt, wie es in der Arbeit von Bathe und Dvorkin (1985) hergeleitet wurde. Dieses Vorgehen eignet sich auch gut zu einer algorithmischen Umsetzung.

### 7.2.3 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix

Die Modifikationen, die sich aus der Anwendung der ANS–Methode ergeben, wirken sich auf die elastische und die geometrische Steifigkeitsmatrix aus. Um das Verfahren übersichtlich darstellen zu können, wird hier wieder ein lineares Materialgesetz unterstellt.

$$\mathbf{K}_{e+u} = \int_{V^e} \mathbf{E}_{h,d}^u \cdot \mathbf{S}_{h,d}^u dV = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV , \quad (7.1)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_{V^e} \mathbf{E}_{h,dd}^u \cdot \mathbf{S}_h^u dV = \int_{V^e} \mathbf{B}_{,d}^T \cdot \mathbf{S}_h^u dV . \quad (7.2)$$

Der *B–Operator*

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{h,d}^u \quad (7.3)$$

beschreibt dabei den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen

$$\mathbf{E}_h^u = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (7.4)$$

und ist für geometrisch nichtlineare Probleme von den Verschiebungen abhängig. Zunächst wird die *B–Operatormatrix* in zwei Anteile aufgespalten

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_q^\xi + \mathbf{B}_q^\eta + \mathbf{B}_x , \quad (7.5)$$

wobei  $\mathbf{B}_q^\xi$  und  $\mathbf{B}_q^\eta$  die zur Berechnung der Querschubverzerrungen notwendigen Ausdrücke enthalten.  $\mathbf{B}_x$  enthält die übrigen und wird im Folgenden wie bei reinen Verschiebungselementen behandelt.

Bei Platten sind Biege- und Schubanteile entkoppelt, weshalb es dort kein Problem darstellt, die  $\mathbf{B}$ -Operatormatrix entsprechend aufzuteilen. Bei Schalenelementen, die in krummlinigen Koordinaten formuliert sind, ist das ebenfalls ohne weiteres möglich. Die krummlinigen Koordinaten der Schale werden hier mit den natürlichen Elementkoordinaten identifiziert.

$\mathbf{B}_q^\xi$  und  $\mathbf{B}_q^\eta$  werden dazu verwendet, diskrete Querschubverzerrungen an den Kollokationspunkten (Koordinaten  $\xi_K, \eta_K$ ) zu berechnen,

$$\alpha_{13}^K = \mathbf{B}_q^\xi(\xi_K, \eta_K) \cdot \mathbf{d} , \quad \alpha_{23}^K = \mathbf{B}_q^\eta(\xi_K, \eta_K) \cdot \mathbf{d} . \quad (7.6)$$

Die Kollokationspunkte sind so gewählt, daß die parasitären Schubverzerrungen dort Null sind. Beim vierknotigen Element trifft das an den Seitenmitten zu (Gleichung (7.11)).

Diese diskreten Verzerrungswerte werden dann mit Hilfe speziell gewählter Ansatzfunktionen über das Element interpoliert.

$$\alpha_{13} = \sum_{K=1}^{n_K} \bar{N}_K^\xi \alpha_{13}^K , \quad \alpha_{23} = \sum_{K=1}^{n_K} \bar{N}_K^\eta \alpha_{23}^K . \quad (7.7)$$

Die Ansatzfunktionen  $\bar{N}_K^\xi$  und  $\bar{N}_K^\eta$  folgen dabei direkt aus der Anzahl  $n_K$  der Kollokationspunkte sowie deren Lage. Für die Querschubverzerrungen bei ANS-Elementen gilt damit

$$\alpha_{13} = \sum_{K=1}^{n_K} \left[ N_K^\xi \mathbf{B}_q^\xi(\xi_K, \eta_K) \right] \cdot \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_q^\xi \cdot \mathbf{d} , \quad (7.8)$$

$$\alpha_{23} = \sum_{K=1}^{n_K} \left[ N_K^\eta \mathbf{B}_q^\eta(\xi_K, \eta_K) \right] \cdot \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_q^\eta \cdot \mathbf{d} . \quad (7.9)$$

Das bedeutet, die ANS-Methode kann auch als „B-bar“-Methode (Hughes (1980)) bezeichnet werden, da die programmtechnische Umsetzung ausschließlich auf eine Modifikation der  $\mathbf{B}$ -Operatormatrix hinausläuft. Die Berechnung der modifizierten Operatoren

$$\bar{\mathbf{B}}_q^\xi = \sum_{K=1}^{n_K} N_K^\xi \mathbf{B}_q^\xi(\xi_K, \eta_K) , \quad \bar{\mathbf{B}}_q^\eta = \sum_{K=1}^{n_K} N_K^\eta \mathbf{B}_q^\eta(\xi_K, \eta_K) ; \quad (7.10)$$

kann analytisch erfolgen, so daß der numerische Aufwand gegenüber reinen Verschiebungselementen praktisch unverändert bleibt.

#### 7.2.4 Vier- und neunknotige ANS-Elemente

In dieser Arbeit wird die ANS-Methode verwendet, um Querschublocking bei vier- und neunknotigen Schalenelementen zu vermeiden. Außerdem wird ein auf der Basis der ANS-Methode beruhendes Verfahren beschrieben, um das in Abschnitt 6.4.10 beschriebene Dickenlocking zu beseitigen.

Wie bereits erwähnt, verlaufen die parasitären Querschubverzerrungen elementweise linear, wenn bilineare Verschiebungsansätze verwendet werden. Vierknotige Elemente können Biege-



zustände deshalb praktisch gar nicht abbilden (Abschnitt 6.4.7). Bei biquadratischen Ansätzen verlaufen die parasitären Spannungen quadratisch und treten im Zusammenhang mit einem linearen Momentenverlauf auf. Konstante Biegezustände können von diesen Elementen bereits exakt abgebildet werden. Trotzdem ist das Elementverhalten unbefriedigend, da für allgemeine Lastfälle deutliche Versteifungseffekte auftreten (das kann bereits bei einer rechteckigen Platte unter Gleichlast beobachtet werden). Außerdem machen Oszillationen innerhalb des Elementes, die Querkräfte praktisch unbrauchbar.

Aus dem Wissen über den Verlauf der parasitären Verzerrungen und Querkräfte kann die Lage der Kollokationspunkte abgeleitet werden. Beim vierknotigen ANS-Element (MITC-4) werden je zwei Kollokationspunkte auf den Seitenmitten,

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_{13} : (\xi_1, \eta_1) &= (0, -1) , & (\xi_2, \eta_2) &= (0, 1) , \\ \text{für } \alpha_{23} : (\xi_1, \eta_1) &= (-1, 0) , & (\xi_2, \eta_2) &= (1, 0) , \end{aligned} \tag{7.11}$$

beim neunknotigen Element je sechs Kollokationspunkte verwendet.

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_{13} : (\xi_1, \eta_1) &= (-1/\sqrt{3}, -1) , & (\xi_2, \eta_2) &= (1/\sqrt{3}, -1) , \\ & (\xi_3, \eta_3) = (-1/\sqrt{3}, 0) , & (\xi_4, \eta_4) &= (1/\sqrt{3}, 0) , \\ & (\xi_5, \eta_5) = (-1/\sqrt{3}, 1) , & (\xi_6, \eta_6) &= (1/\sqrt{3}, 1) , \\ \text{für } \alpha_{23} : (\xi_1, \eta_1) &= (-1, -1/\sqrt{3}) , & (\xi_2, \eta_2) &= (-1, 1/\sqrt{3}) , \\ & (\xi_3, \eta_3) = (0, -1/\sqrt{3}) , & (\xi_4, \eta_4) &= (0, 1/\sqrt{3}) , \\ & (\xi_5, \eta_5) = (1, -1/\sqrt{3}) , & (\xi_6, \eta_6) &= (1, 1/\sqrt{3}) . \end{aligned} \tag{7.12}$$

Sie sind jeweils so gewählt, daß sie an den Stellen der Nulldurchgänge der parasitären Querkräfte liegen.

Die Verzerrungen werden in krummlinigen Koordinaten ausgedrückt, um das Elementverhalten weniger empfindlich gegenüber Netzverzerrungen zu machen. Die Elemente bestehen so auch den Patchtest für reine Biegung. Trotzdem treten — insbesondere bei vierknotigen Elementen — bei bestimmten Elementformen nach wie vor deutliche Versteifungseffekte und Oszillationen der Querkräfte auf (Abschnitt 9.2). Dieses Problem der Verzerrungsempfindlichkeit kann jedoch mit Hilfe von Stabilisierungsmethoden elegant, mathematisch fundiert und praktisch ohne numerischen Mehraufwand gelöst werden (Lyly et al. (1993)). Das entsprechende Verfahren wird in Abschnitt 7.5 beschrieben.

Neben dem Problem des Querschublocking kann auch das in Abschnitt 6.4.10 beschriebene Dickenlocking bei gekrümmten Elementen mit Hilfe der ANS-Methode beseitigt werden. Diese Methode wurde unabhängig von Betsch et al. (1996) und Bischoff und Ramm (1997) entwickelt. Die Wahl der Kollokationspunkte erfolgt hier nach den gleichen Kriterien wie bei der Vermeidung von Querschublocking. Aus Abb. 6.6 wird deutlich, daß die parasitären Normalverzerrungen in Dickenrichtung an den Knotenpunkten Null sind, weshalb die Kollokationspunkte in diesem Fall mit den Knotenpunkten zusammenfallen. Für vierknotige Elemente folgt daraus eine bilineare Interpolation von  $\alpha_{33}$ ,



	$n_{FG}$ $n$ $k$	ANS-4 	ANS-9 
Querschub-Locking $\gamma_x = \gamma_y = 0$	3 2 1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$
Dicken-Locking $\epsilon_{33} = 0$	4 1 1	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{4 \cdot 4}{4} = 4$

Abb. 7.1: Zwangsbedingungsfaktoren von ANS-Elementen

$$\alpha_{33} = \sum_{K=1}^4 N_K \alpha_{33}^K, \quad (7.13)$$

bei neunknotigen Elementen wird eine biquadratische Interpolation gewählt,

$$\alpha_{33} = \sum_{K=1}^9 N_K \alpha_{33}^K. \quad (7.14)$$

Die zugehörigen Ansatzfunktionen  $N_K$  sind die gewöhnlichen Lagrange-Polynome, die auch zur Interpolation der Verschiebungen verwendet werden.

Die Zwangsbedingungsfaktoren von ANS-Elementen sind optimal. Das liegt mit daran, daß die Kollokationspunkte, die auf den Elementrändern liegen, die entsprechenden Zwangsbedingungen linear abhängig machen. Die Zwangsbedingungsfaktoren vier- und neunknotiger ANS-Elemente mit modifizierten Querschubverzerrungen und Normalverzerrungen in Dickenrichtung sind in Abb. 7.1 zusammengestellt.

Die ANS-Methode wurde von einigen Autoren auch zur Verbesserung des Membrananteils von Schalen, insbesondere zur Vermeidung von Membranlocking bei neunknotigen Elementen, eingesetzt (Park und Stanley (1986), Huang und Hinton (1986)). Pinsky und Jang (1987) beschreiben eine solche Methode, bei der die Verzerrungen sich auf das natürliche, krummlinige Elementkoordinatensystem beziehen. Die Normalverzerrungen  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{22}$  werden dabei an den gleichen Kollokationspunkten ausgewertet wie die Querschubverzerrungen  $\alpha_{13}$  und  $\alpha_{23}$  (Gleichung (7.12)). Der Schubanteil  $\alpha_{12}$  entsteht aus dem arithmetischen Mittel beider Interpolationsarten (linear-quadratisch und quadratisch-linear in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung). Der Nachteil des Verfahrens gegenüber der EAS-Methode ist der, daß diese Elemente den Patchtest für konstante Membranspannungen nicht bestehen, für 2D-Probleme und den Membrananteil von Schalen ist damit die Konvergenz zur wahren Lösung nicht gewährleistet.

### 7.3 Die Discrete-Shear-Gap-Methode (DSG)

Die DSG-Methode (Bletzinger et al. (1997)) zielt ebenfalls darauf ab, Querschublocking bei Platten- und Schalenelementen zu vermeiden. Da sie auf der gezielten Modifikation der Verläufe bestimmter Verzerrungsanteile beruht, ist sie verwandt zur ANS-Methode. Ein entscheidender Unterschied besteht darin, daß keine bestimmten Kollokationspunkte gewählt werden müssen.

Dieser Umstand macht das Verfahren unabhängig von der Elementform und vom Polynomgrad der Ansatzfunktionen. In Bletzinger et al. (1997) wird eine einzige Regel zur Berechnung des modifizierten B-Operators bereitgestellt, die sowohl auf Dreiecke als auch auf Vierecke beliebiger Polynomordnung anwendbar ist. Die ursprünglich für geometrisch lineare Probleme hergeleiteten Elemente werden in dieser Arbeit auf geometrische Nichtlinearität erweitert. Die Anwendung auf materiell nichtlineare Probleme ist damit ebenfalls ohne weiteres möglich.

Die Steifigkeitsmatrizen viereckiger DSG-Elemente sind identisch zu denen der entsprechenden ANS-Elemente. Bei dreieckigen Elementen sind dem Autor bis dato keine entsprechenden Formulierungen bekannt. Es wurde bereits erwähnt, daß dreieckige MITC-Elemente den viereckigen in bezug auf die Konvergenzrate deutlich unterlegen sind. Mit der DSG-Methode ist damit möglicherweise die fehlende Entsprechung zum erfolgreichen „Bathe-Dvorkin-Element“ bei den Dreiecken gefunden.

Der Zwangsbedingungsfaktor sämtlicher DSG-Plattenelemente hat den optimalen Wert von 1,5. Eine Anwendung der DSG-Methode zur Vermeidung von Membranlocking ist in Arbeit. Stabilisierte DSG-Elemente, die eine verminderte Verzerrungsempfindlichkeit aufweisen, werden in Abschnitt 7.5 beschrieben.

### 7.3.1 Grundgedanke

Ausgangspunkt der Entwicklung der DSG-Elemente waren Überlegungen zur Erfüllung der Bernoulli-Bedingung bei zweiknotigen, schubweichen Balkenelementen (Abb. 7.2 (a)), die bereits in der Arbeit von Hughes und Tezduyar (1981) entscheidende Impulse geliefert haben. Anstatt jedoch die parasitären Verzerrungen durch Unterintegration (was einer Mittelung oder Kollokation am Elementmittelpunkt entspricht) zu eliminieren, wird bei der DSG-Methode die Bernoulli-Bedingung diskret an den Knotenpunkten erfüllt. Die Herleitung eines DSG-Balkenelements in diesem Abschnitt erfolgt der Übersichtlichkeit halber für eine geometrisch lineare Theorie. Der Einfachheit halber wird in diesem Abschnitt die bei Balken übliche Notation für die Verschiebungen, Verzerrungen und Rotationen verwendet, also  $w$  anstelle von  $u_3$ ,  $\gamma$  anstelle von  $2\alpha_{13}$  und  $\beta$  für die Rotation des Direktors.

Der erste Schritt bei der DSG-Methode besteht darin, die Deformation eines Elementes nicht direkt über die Interpolation der Knotenverschiebungen zu beschreiben, sondern zunächst Biege- und Schubanteile zu entkoppeln. Das gelingt durch Integration der kinematischen Gleichung für die Querschubverzerrungen

$$\gamma = w_{,x} + \beta \tag{7.15}$$

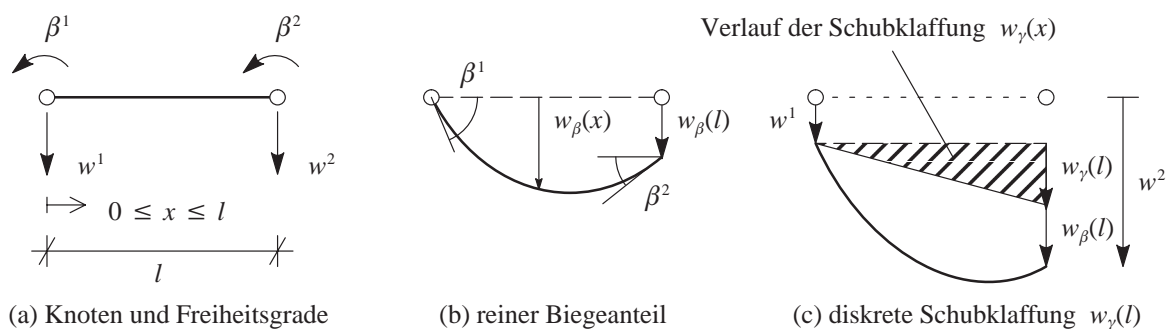


Abb. 7.2: Lineares Timoshenko-Balkenelement, Definition der diskreten Schubklaffung

bis zu einem beliebigen Punkt  $x$ ,

$$\int_0^x \gamma \, d\hat{x} = \int_0^x w_{,\hat{x}} \, d\hat{x} + \int_0^x \beta \, d\hat{x} + c . \quad (7.16)$$

Das Integral der Rotationswinkel  $\beta$  (Abb. 7.2 (b)) entspricht dabei dem Biegeanteil  $w_\beta$ , der die Bernoulli–Bedingung identisch erfüllt (das negative Vorzeichen rührt von der unterschiedlichen Definition von  $w_{,x}$  und  $\beta$  her),

$$w_\beta(x) = - \int_0^x \beta(\hat{x}) \, d\hat{x} . \quad (7.17)$$

Da Starrkörpertranslationen in vertikaler Richtung für die Verzerrungen keine Bedeutung haben, ist nur eine Relativverschiebung, beispielsweise in bezug auf Knoten 1

$$w(x) = \int_0^x w_{,\hat{x}} \, d\hat{x} \quad (7.18)$$

von Belang. Die Integrationskonstante  $c$  kann damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu Null gesetzt werden.

Der Anteil der Schubverzerrungen an der Gesamtverschiebung ist schließlich

$$w_\gamma(x) = \int_0^x \gamma \, d\hat{x} = w(x) - w_\beta(x) \quad (7.19)$$

und damit genau die Differenz der Gesamtverschiebungen und des Verschiebungsanteils aus den Rotationen. Der diskrete Verschiebungswert  $w_\gamma(x)$  kann als *Schubklaffung* (*shear gap*) an der Stelle  $x$  interpretiert werden, da er genau den Anteil der Deformation beschreibt, der die tatsächliche Verformung  $w$  von einer reinen Biegeverformung  $w_\beta$  unterscheidet. Für einen reinen Biegezustand sollte dieser Wert also für beliebige  $x$  Null sein. Aufgrund der zu niedrigen Ansätze der Verschiebungen im Vergleich zu den Rotationen ist das bei reinen Verschiebungselementen jedoch nur an den Knotenpunkten der Fall. Mit Hilfe von Abb 7.2 (c) ist dies leicht zu veranschaulichen, indem beispielsweise  $\beta_1 = -\beta_2$  und  $w_1 = w_2$  angenommen wird.

Die diskreten Schubklaffungen werden aus diesem Grund immer an den Knotenpunkten ausgerechnet und dann im Element interpoliert. Im Fall reiner Biegung wird damit der gesamte Schubverlauf Null, weil alle Knotenwerte Null sind. Bei allgemeinen Lastfällen sind die so berechneten Schubverzerrungen frei von parasitären Anteilen.

Für ein Element mit linearen Ansatzfunktionen für  $\beta$

$$\beta(x) = N_1 \beta^1 + N_2 \beta^2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \beta^1 + \frac{x}{l} \beta^2 \quad (7.20)$$

und für  $w$

$$w(x) = N_1 w^1 + N_2 w^2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) w^1 + \frac{x}{l} w^2 \quad (7.21)$$

gilt

$$w_\gamma^1 = w_\gamma(0) = 0 , \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} w_\gamma^2 = w_\gamma(l) &= \int_0^l \left[ (N_{1,x} w^1 + N_{2,x} w^2) + (N_1 \beta^1 + N_2 \beta^2) \right] dx \\ &= w^2 - w^1 + \frac{l}{2} (\beta^1 + \beta^2) . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Damit sind die diskreten Schubklaffungen an den Knoten in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade gegeben. Der Verlauf der Schubklaffung wird jetzt innerhalb des Elementes mit den üblichen Ansatzfunktionen interpoliert,

$$w_\gamma(x) = N_1 w_\gamma^1 + N_2 w_\gamma^2 = \frac{x}{l} \left[ w^2 - w^1 + \frac{l}{2} (\beta^1 + \beta^2) \right] \quad (7.24)$$

und nach  $x$  differenziert, um den Verlauf der Schubverzerrungen zu erhalten,

$$\gamma(x) = \frac{dw_\gamma(x)}{dx} = \frac{1}{l} (w^2 - w^1) + \frac{1}{2} (\beta^1 + \beta^2) . \quad (7.25)$$

Diese Querschubverzerrungen sind dann frei von parasitären Anteilen, da sie genau aus der Differenz zwischen dem Verschiebungsanteil  $w_\beta$ , der die Bernoulli-Bedingung erfüllt, und den Gesamtverschiebungen  $w$  berechnet werden (Abb. 7.2 (c)).

Im Vergleich zu den Querschubverzerrungen bei einem reinen Verschiebungselement

$$\gamma^u(x) = \frac{1}{l} (w^2 - w^1) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \beta^1 + \frac{x}{l} \beta^2 \quad (7.26)$$

entfallen also gerade die störenden linearen Anteile der Querschubverzerrungen, die aus den Rotationen herrühren. Der Anteil aus den Verschiebungen bleibt unberührt. Für gekrümmte Balkenelemente (bzw. Schalenelemente) ergeben sich auch Veränderungen bei den Verschiebungen.

Die Modifikation der Schubverzerrungen gemäß Gleichung (7.25) führt zu einem lockingfreien Balkenelement. Die Steifigkeitsmatrix ist identisch mit der des unterintegrierten, linearen Elements. Diese einfache Analogie besteht jedoch nur im eindimensionalen Fall.

### 7.3.2 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix

Zur Herleitung von geometrisch nichtlinearen DSG-Elementen für die 7-Parameter-Schalenelementformulierung sind prinzipiell genau die gleichen Schritte notwendig wie beim linearen Balkenelement. Es brauchen keine zusätzlichen Überlegungen angestellt zu werden. Insbesondere ist die Vorgehensweise unabhängig vom Polynomgrad und von der Form des Elements.

Zunächst werden die diskreten Schubklaffungen an den Knoten aus der Integration der Querschubverzerrungen über das Gebiet ermittelt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird Knoten 1 als „Referenzknoten“ festgelegt. Die Schubklaffung ist dort definitionsgemäß Null.

$$v_{\gamma\xi}^I = \int_{\xi_1}^{\xi_I} \alpha_{13}(\xi, \eta_I) d\xi , \quad v_{\gamma\eta}^I = \int_{\eta_1}^{\eta_I} \alpha_{23}(\xi_I, \eta) d\eta . \quad (7.27)$$

$v_{\gamma\xi}^I$  und  $v_{\gamma\eta}^I$  bezeichnen Verschiebungskomponenten in  $\theta^3$ -Richtung. Der Index  $\xi$  bzw.  $\eta$  weist auf die Richtung der entsprechenden Schubverzerrung hin ( $\alpha_{13}$  in  $\xi$ -Richtung und  $\alpha_{23}$  in  $\eta$ -Richtung). Der Kopfzeiger  $I$  repräsentiert die Knotennummer, an der die diskrete Schubklaffung ermittelt wird.

Die Querschubverzerrungen nach Gleichung (4.23) können mit Hilfe der Gleichungen (4.3), (4.7) und (4.8) in Abhängigkeit der Ausgangsgeometrie und der Verschiebungen geschrieben werden.

$$\alpha_{a3} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{a}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,a} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_{,a} \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{v}_{,a} \cdot \mathbf{w}) . \quad (7.28)$$

Die Schubklaffungen folgen aus den Gleichungen (7.27) und (7.28) zusammen mit der Diskretisierung der Orts- und Verschiebungsvektoren (Gleichungen (C.36) – (C.39) im Anhang).

$$v_{\gamma\xi}^I = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_I} \left[ \mathbf{r}^K N_{K,\xi}(\xi, \eta_I) N_M(\xi, \eta_I) \mathbf{w}^M + \mathbf{v}^K N_{K,\xi}(\xi, \eta_I) N_M(\xi, \eta_I) \bar{\mathbf{a}}_3^M + \mathbf{v}^K N_{K,\xi}(\xi, \eta_I) N_M(\xi, \eta_I) \mathbf{w}^M \right] d\xi , \quad (7.29)$$

$$v_{\gamma\eta}^I = \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_I} \left[ \mathbf{r}^K N_{K,\eta}(\xi_I, \eta) N_M(\xi_I, \eta) \mathbf{w}^M + \mathbf{v}^K N_{K,\eta}(\xi_I, \eta) N_M(\xi_I, \eta) \bar{\mathbf{a}}_3^M + \mathbf{v}^K N_{K,\eta}(\xi_I, \eta) N_M(\xi_I, \eta) \mathbf{w}^M \right] d\eta . \quad (7.30)$$

Analog zur Herleitung des Balkenelements im vorigen Abschnitt ist der nächste Schritt die Interpolation der diskreten Schubklaffungen im Element,

$$v_{\gamma\xi}^I(\xi, \eta) = N_K v_{\gamma\xi}^K , \quad v_{\gamma\eta}^I(\xi, \eta) = N_K v_{\gamma\eta}^K . \quad (7.31)$$

Die modifizierten Schubverzerrungen werden schließlich durch partielle Differentiation der Schubklaffungen berechnet,

$$\alpha_{13} = N_{K,\xi} v_{\gamma\xi}^K , \quad \alpha_{23} = N_{K,\eta} v_{\gamma\eta}^K . \quad (7.32)$$

Variation:

$$\delta\alpha_{13} = N_{K,\xi} \delta v_{\gamma\xi}^K =: \alpha'_{13} \delta\mathbf{d} , \quad (7.33)$$

$$\delta\alpha_{23} = N_{K,\eta} \delta v_{\gamma\eta}^K =: \alpha'_{23} \delta\mathbf{d} , \quad (7.34)$$

mit

$$\delta\alpha_{a3} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{r}}_{,a} \cdot \delta\mathbf{w} + \delta\mathbf{v}_{,a} \cdot \bar{\mathbf{a}}_3) . \quad (7.35)$$

Linearisierung:

$$D\delta\alpha_{13} = N_{K,\xi} D\delta v_{\gamma\xi}^K =: \Delta\mathbf{d} \alpha'_{13} \delta\mathbf{d} , \quad (7.36)$$

$$D\delta\alpha_{23} = N_{K,\eta} D\delta v_{\gamma\eta}^K =: \Delta \mathbf{d} \alpha'_{23} \delta \mathbf{d} , \quad (7.37)$$

mit

$$D\delta\alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(D\mathbf{v}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{v}_{,\alpha} \cdot D\mathbf{w}) . \quad (7.38)$$

Diese Formeln ersetzen die entsprechenden Ausdrücke (Gleichung (C.75)) bei der Herleitung der elastischen und der Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{e+u}$  (Gleichung (6.31)). Der Vektor  $\mathbf{d}$  enthält dabei alle Freiheitsgrade eines Elements (Gleichung (C.42)).

Für die Berechnung der geometrischen Steifigkeit werden die linearisierten Variationen der Verzerrungen benötigt (Gleichung (C.83))

Diese Formeln ersetzen die entsprechenden Ausdrücke (Gleichung (C.89)) bei der Herleitung der geometrischen Steifigkeitsmatrix.

Zum Einbau von DSG–Elementen in ein bestehendes FE–Programm genügt also die Modifikation von  $\alpha'_{\alpha 3}$  und  $\alpha''_{\alpha 3}$  (Gleichungen (7.33), (7.34), (7.36) und (7.37)). Die Formeln gelten unabhängig vom Polynomgrad der Ansatzfunktionen  $N^K$  und der gewählten Elementform (Dreieck oder Rechteck). Alle dazu notwendigen Größen können analytisch vorab berechnet werden.

Für die Spannungsrückrechnung bei linearen Elementen sowie für die geometrische Steifigkeit bei nichtlinearen Elementen werden schließlich noch die Verzerrungen benötigt.

Im Gegensatz zum DSG–Balkenelement gehen die Schalenelemente von nicht konformen Verschiebungen aus und verstoßen damit gegen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Eine variationell saubere Herleitung der DSG–Elemente steht noch aus. Für bilineare Elemente entsteht eine den ANS–Elementen äquivalente Formulierung, für die eine variationelle Basis existiert (Simo und Hughes (1986), Brezzi et al. (1991)). Diese Tatsache gibt Anlaß zur Vermutung, daß das auch für die Elemente der DSG–Familie möglich ist.

### 7.3.3 Dreiknotiges DSG–Schalenelement

Das dreiknotige DSG–Element ist aufgrund der einfachen Ansatzfunktionen (Gleichungen (C.1))

$$N_1 = 1 - \xi - \eta , \quad N_{1,\xi} = -1 , \quad N_{1,\eta} = -1 , \quad (7.39)$$

$$N_2 = \xi , \quad N_{2,\xi} = 1 , \quad N_{2,\eta} = 0 , \quad (7.40)$$

$$N_3 = \eta , \quad N_{3,\xi} = 0 , \quad N_{3,\eta} = 1 , \quad (7.41)$$

noch gut von Hand herzuleiten. Die diskreten Schubklaffungen (Gleichungen (7.29), (7.30)) sind für jede Richtung nur an jeweils einem Knoten ungleich Null. Das wirkt sich positiv auf die Effizienz aus, weil nur wenige Rechenoperationen zur Bestimmung des B–Operators beziehungsweise der geometrischen Steifigkeitsmatrix durchgeführt werden müssen.

$$v_{\gamma\xi}^1 = v_{\gamma\xi}^3 = 0 , \quad (7.42)$$

$$v_{\gamma\xi}^2 = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ \left( -\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^2 \right) (1 - \xi) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) + \left( -\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 \right) (1 - \xi) (\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_3^2) \right. \\ \left. + \left( -\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 \right) (1 - \xi) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) \right] d\xi , \quad (7.43)$$

$$v_{\gamma\eta}^1 = v_{\gamma\eta}^2 = 0 , \quad (7.44)$$

$$v_{\gamma\eta}^3 = \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_3} \left[ \left( -\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^3 \right) (1 - \eta) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^3) + \left( -\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^3 \right) (1 - \eta) (\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_3^3) \right. \\ \left. + \left( -\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^3 \right) (1 - \eta) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^3) \right] d\eta . \quad (7.45)$$

Die Interpolation der Schubklaffungen im Element (Gleichung (7.31)) und deren partielle Differentiation (Gleichung (7.32)) führen auf die folgenden Formeln für  $\alpha_{\alpha 3}$ :

$$\alpha_{13} = \frac{1}{4} \left[ \left( \mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^1 \right) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) + \left( \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1 \right) (\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_3^2) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1 \right) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) \right] , \quad (7.46)$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{4} \left[ \left( \mathbf{r}^3 - \mathbf{r}^1 \right) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^3) + \left( \mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^1 \right) (\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_3^3) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^1 \right) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^3) \right] . \quad (7.47)$$

Die Querschubverzerrungen  $\alpha_{\alpha 3}$  des dreiknotigen DSG-Elementes sind damit elementweise konstant bezüglich  $\xi$  und  $\eta$ .

Aus den Gleichungen (7.46) und (7.47) können unter Beachtung von

$$\bar{\mathbf{r}}^K = \mathbf{r}^K + \mathbf{v}^K \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{a}}_3^K = \mathbf{a}_3^K + \mathbf{w}^K \quad (7.48)$$

durch einmalige Variation direkt die zugehörigen Anteile des B-Operators berechnet werden.

$$\delta\alpha_{13} = \frac{1}{4} \left[ \left( \delta\mathbf{v}^2 - \delta\mathbf{v}^1 \right) (\bar{\mathbf{a}}_3^1 + \bar{\mathbf{a}}_3^2) + \left( \delta\mathbf{w}^1 + \delta\mathbf{w}^2 \right) (\bar{\mathbf{r}}^2 - \bar{\mathbf{r}}^1) \right] =: \alpha'_{13} \delta\mathbf{d} , \quad (7.49)$$

$$\delta\alpha_{23} = \frac{1}{4} \left[ \left( \delta\mathbf{v}^3 - \delta\mathbf{v}^1 \right) (\bar{\mathbf{a}}_3^1 + \bar{\mathbf{a}}_3^3) + \left( \delta\mathbf{w}^1 + \delta\mathbf{w}^3 \right) (\bar{\mathbf{r}}^3 - \bar{\mathbf{r}}^1) \right] =: \alpha'_{23} \delta\mathbf{d} . \quad (7.50)$$

Für die geometrische Steifigkeitsmatrix werden schließlich noch die linearisierten Variationen der Schubklaffungen benötigt,

$$D\delta\alpha_{13} = \frac{1}{4} \left[ \left( \delta\mathbf{v}^2 - \delta\mathbf{v}^1 \right) (D\mathbf{w}^1 + D\mathbf{w}^2) + \left( \delta\mathbf{w}^1 + \delta\mathbf{w}^2 \right) (D\mathbf{v}^2 - D\mathbf{v}^1) \right] \\ =: \Delta\mathbf{d} \alpha''_{13} \delta\mathbf{d} , \quad (7.51)$$



$$\begin{aligned}
D\delta\alpha_{23} &= \frac{1}{4} \left[ (\delta v^3 - \delta v^1)(Dw^1 + Dw^3) + (\delta w^1 + \delta w^3)(Dv^3 - Dv^1) \right] \\
&=: \Delta d \alpha'_{23} \delta d .
\end{aligned}
\tag{7.52}$$

### 7.3.4 Vierknotiges DSG–Schalenelement

Für das vierknotige Element sind die Resultate der Herleitung in Teil C des Anhangs gegeben. An diesen Formeln ist die Verwandtschaft zur ANS–Methode noch einmal deutlich abzulesen. Insbesondere ist der linear–konstante Verlauf der Querschubverzerrungen im Element zu erkennen. Außerdem wird offensichtlich, daß in diesem Fall eine Mittelung der Schubverzerrungen entlang der Kanten stattfindet.

### 7.3.5 DSG–Elemente höherer Ordnung

In der Praxis werden Elemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung gewöhnlich bevorzugt. Trotzdem sprechen einige Gründe für den Einsatz von Elementen höherer Ordnung. Für eine feste Anzahl von Freiheitsgraden sind die Resultate dieser Elemente meistens deutlich besser. Außerdem reagieren Elemente höherer Ordnung nicht so empfindlich auf verzerrte Netze.

Neben seiner Effizienz ist ein herausragendes Merkmal insbesondere des neunknotigen DSG–Elements seine verhältnismäßig geringe Empfindlichkeit gegen Netzverzerrungen. Auch quadratische Netzverzerrungen beeinflussen das Konvergenzverhalten nur leicht. Auf die explizite Darstellung der Schubklaffungen und Verzerrungen für die quadratischen Elemente wird hier verzichtet.

### 7.3.6 Zusammenhang mit ANS– und anderen Elementen

Offensichtlich besteht zwischen der DSG– und der ANS–Methode ein enger Zusammenhang. Für lineare Viereckelemente sind die Steifigkeitsmatrizen gleich. Das kann damit erklärt werden, daß die Integration der Schubverzerrungen bei der DSG–Methode genau der von Hughes und Tezduyar (1981) vorgeschlagenen Mittelung, bzw. Kollokation an den Kantenmitten, entspricht. Beide Methoden können als Kollokationsmethoden interpretiert werden, da bestimmte Größen an speziell gewählten Punkten ausgewertet und dann interpoliert werden. Der prinzipielle Unterschied besteht darin, daß bei der ANS–Methode die Schubverzerrungen  $\alpha_{\alpha 3}$  an den Kollokationspunkten berechnet werden, bei der DSG–Methode aber die zugehörigen Verschiebungen  $v_{\gamma\xi}$  und  $v_{\gamma\eta}$ . Das hat zur Folge, daß bei der ANS–Methode die Kollokationspunkte für jeden Elementtyp neu bestimmt werden müssen, während es bei der DSG–Methode immer die Knotenpunkte des Elements sind.

Das neunknotige DSG–Element weist ebenfalls eine Verwandtschaft zu entsprechenden ANS–Elementen auf. Für rechteckige Elemente ist der Biegeanteil der Elementsteifigkeitsmatrix identisch zu dem der ANS–Elemente. Bei beliebigen Elementformen treten kleine Unterschiede auf.

Dreieckige DSG–Elemente haben eine gewisse Ähnlichkeit mit dem von Hughes und Taylor (1981) vorgeschlagenen *Kirchhoff–Mode* (KM–) Konzept. Es ist die direkte Übertragung der von Hughes und Tezduyar (1981) entwickelten Idee der Mittelung der Querschubverzerrungen entlang der Elementkanten auf Dreiecke. Bei vierknotigen Elementen kann die DSG–Methode

ebenfalls als eine solche Mittelung interpretiert werden. Zutreffender ist jedoch die Sichtweise, sie als Mittelung entlang der natürlichen Koordinatenlinien zu interpretieren. Das bedeutet bei viereckigen Elementen keinen Unterschied, hat aber bei Dreiecken eine entscheidende Bedeutung. Während Hughes und Taylor (1981) entlang aller *drei* Kanten des linearen Dreieckelementes den Mittelwert der Querschubverzerrungen berechnen, geschieht dasselbe bei der DSG-Methode nur entlang der beiden lokalen Koordinatenrichtungen. Mithin muß hier eine Bedingung weniger erfüllt werden, der Zwangsbedingungsfaktor ist höher und das Element damit weicher. In der Tat erwies sich das KM-Element von Hughes und Taylor (1981) als stark locking-behaftet.

Da bei dreieckigen DSG-Elementen die dritte Kante des Elements quasi „ignoriert“ wird, sind die Elemente nicht objektiv. Die Steifigkeitsmatrix hängt von der Knotennumerierung ab. Ob das wirklich ein Nachteil ist, kann bis jetzt noch nicht endgültig gesagt werden. Es ist aber bei numerischen Experimenten zu beobachten, daß die Qualität der Ergebnisse von der Wahl des Netzes und der Knotennumerierung abhängen (Abschnitt 9.3.2).

Dadurch, daß die Kirchhoff-Bedingung direkt an den Knoten erfüllt wird, sind die Zwangsbedingungsfaktoren von DSG-Elementen in jedem Fall optimal. An jedem Knoten kommen (für Platten) drei Freiheitsgrade und zwei Zwangsbedingungen hinzu. Es ergibt sich also automatisch das optimale Verhältnis  $r_k = 1,5$ , das auch im Kontinuum herrscht. Nach Haußer (1996) (siehe auch Haußer und Ramm (1996)) war es bislang noch nicht gelungen, schubweiche dreieckige Plattenelemente mit dieser wünschenswerten Eigenschaft zu finden.

## 7.4 Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS)

### 7.4.1 Grundgedanke

Die EAS-Methode wurde von Simo und Rifai (1991) ursprünglich vorgeschlagen, um Locking-Effekte bei Scheibenelementen zu vermeiden. Sie steht in engem Zusammenhang mit der Methode der inkompatiblen Verschiebungen (Taylor und Wilson (1976)). Die grundsätzliche Idee beider Methoden besteht darin, zusätzliche Freiheitsgrade nicht global, sondern lediglich auf Elementebene zu ergänzen. Sie werden beim Zusammenbau der Systemsteifigkeitsmatrix nicht berücksichtigt (inkompatible Verschiebungen) und können deshalb bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix durch statische Kondensation eliminiert werden. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems gegenüber einem reinen Verschiebungselement nicht erhöht wird.

Diese Vorgehensweise war bei Taylor und Wilson (1976) noch umstritten, da es keine rigorose mathematische Herleitung, bzw. variationelle Grundlage gab („*Two wrongs make a right in California*“, G. Strang (1973)). Die Leistung von Simo und Rifai (1991) bestand vor allem darin, diese variationelle Basis mit Hilfe des Prinzips von Hu-Washizu zu schaffen („*Two rights do make a right, even in California*“, R.L. Taylor (1989)).

### 7.4.2 Variationelle Formulierung

Die variationelle Grundlage der EAS-Methode wurde bereits in Kapitel 2, Gleichung (2.57) bereitgestellt. Es handelt sich dabei um das modifizierte Funktional von Hu-Washizu

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW^e} = & \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \delta \mathbf{E}^u - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV \\ & - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA = 0 . \end{aligned} \quad (7.53)$$

Die Diskretisierung und Linearisierung dieses Funktionals wurde in Kapitel 6 beschrieben. Streng genommen kann also die dort beschriebene Methode nicht als reine Verschiebungsmethode bezeichnet werden. Es handelt sich bereits um ein EAS-Element. Allerdings weist dieses Element noch alle bekannten Locking-Probleme reiner Verschiebungselemente auf. Die EAS-Methode dient dort nur zur Vermeidung von Poisson-Dickenlocking bei der Erweiterung in die dritte Dimension und sollte deshalb aus der Sicht des Autors nicht zum Themenbereich „Elementtechnologie“ gezählt werden.

Die Bedeutung der EAS-Methode bei der Vermeidung von Locking wird in den folgenden Abschnitten diskutiert.

#### 7.4.3 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix

Eine wichtige Eigenschaft der EAS-Methode ist die, daß die zusätzlichen Freiheitsgrade aufgrund der gewählten variationellen Form an den Elementgrenzen nicht kompatibel sein müssen. Das ermöglicht die statische Kondensation dieser Freiheitsgrade auf Elementebene. Mit der Steifigkeitsmatrix

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{L} , \quad (7.54)$$

die dadurch erhalten wird (vgl. Gleichungen (6.38), (7.54)), erfolgt der Zusammenbau genau wie bei reinen Verschiebungselementen. Auch die Anwendung verzerrungsbasierter, nichtlinearer Materialgesetze bereitet so keinerlei Probleme.

Gleichung (7.54) zeigt anschaulich die Bedeutung der erweiterten Verzerrungen im Vergleich zu reinen Verschiebungselementen. Von der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  der reinen Verschiebungsmethode wird ein Anteil subtrahiert, es wird gezielt an bestimmten Stellen Steifigkeit herausgenommen. Für bilineare Scheibenelemente weist Andelfinger (1991) darauf hin, daß diese zusätzlichen Anteile bei rechteckigen Elementen lediglich 8 der 64 Steifigkeitsterme beeinflußt, namentlich diejenigen, die für die Steifigkeit der beiden ‘Biegeverformungen’ zuständig sind.

Der numerische Aufwand bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix ist höher als bei reinen Verschiebungselementen, da bei der Integration über das Gebiet eines Elementes zusätzlich zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , die Kopplungsmatrix  $\mathbf{L}$  und die Verzerrungsmatrix  $\mathbf{D}$  aufgestellt werden müssen. Außerdem muß letztere noch invertiert werden.

Bei dem von Bischoff und Ramm (1997) vorgeschlagenen neunknotigen EAS-Element ist  $\mathbf{D}$  eine  $11 \times 11$ -Matrix und die dadurch notwendige numerische Inversion verhältnismäßig aufwendig. Untersuchungen von Hahn (1998) zeigen jedoch, daß dieser zusätzliche Aufwand im Vergleich zu den Kosten für die Aufstellung von  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{D}$  fast vernachlässigbar ist. Da aufgrund der schwachen Besetzung von  $\mathbf{M}$  (Gleichung (6.7)) dabei etliche Null-Operationen auftreten, existiert hier auf der programmtechnischen Seite noch ein gewisses Potential zur Steigerung der Ef-

fizienz. Durch eine geeignete Speichertechnik und die Verwendung effizienter Multiplikationsroutinen könnten die Null-Operationen vermieden werden.

#### 7.4.4 Bedeutung der Orthogonalitätsbedingung, Zusammenhang mit hybriden Elementen

Bei der Herleitung des erweiterten Prinzips von Hu–Washizu in Kapitel 2 wurden die Spannungen  $S$  mit Hilfe einer Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{V_e} S_h : \tilde{E}_h dV = 0 \quad \forall S_h \in \mathcal{V}_S, \tilde{E}_h \in \mathcal{V}_{\tilde{E}} \quad (2.52)$$

aus der variationellen Formulierung eliminiert. Die von der Lösung unabhängige Erfüllung dieser Bedingung hängt von den Räumen  $\mathcal{V}_S$  und  $\mathcal{V}_{\tilde{E}}$  und damit von einer geeigneten Wahl der Ansatzfunktionen ab. Werden Ansätze für Spannungen  $S$  und erweiterten Verzerrungen  $\tilde{E}$  in der Form

$$S = P \cdot \beta, \quad \tilde{E} = M \cdot a \quad (7.55)$$

gewählt, ist die Orthogonalitätsbedingung gleichbedeutend mit

$$\int_{A_e} P^T \cdot M dA = \mathbf{0}. \quad (7.56)$$

Um die Erfüllung des Patchtests zu gewährleisten, fordern Simo und Rifai (1990), daß (7.56) zumindest für elementweise konstante Spannungsansätze gültig sein muß. Da diese Ansätze sich auf die natürlichen Elementkoordinaten und damit auf eine veränderliche Metrik beziehen, können konstante Spannungsansätze nur realisiert werden, indem die Metrik innerhalb des Elements ebenfalls als konstant angesetzt wird. Pian und Chen (1982) (siehe auch Pian und Sumihara (1984)) wählen bei der Herleitung hybrider Spannungselemente die kovarianten Basisvektoren am Elementmittelpunkt als Basis für die Spannungsansätze. Aus dem gleichen Grund werden die Ansätze  $M$  für die erweiterten Verzerrungen auf den Elementmittelpunkt bezogen.

Für die von Simo und Rifai (1990) vorgeschlagenen linearen Ansatzfunktionen für die erweiterten Verzerrungen ist damit die Bedingung (7.56), wie gefordert, für konstante Spannungen erfüllt. Tatsächlich können in  $P$  auch noch weitere lineare Terme vorkommen, ohne die Orthogonalität zu verletzen. Für das bilineare Element ist beispielsweise

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

möglich.

Andelfinger und Ramm (1993) weisen als erste auf die Äquivalenz von EAS-Elementen und hybriden Spannungselementen hin. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß die Steifigkeitsmatrizen identisch sind, wenn  $P$  und  $M$  zueinander zeilenweise komplementär sind. Das bedeutet, daß Ansatzfunktionen, die in  $P$  enthalten sind, nicht in  $M$  vorkommen (und umgekehrt). Beide ergänzen sich zu komplett bilinearen (biquadratischen, usw.) Funktionen (Gleichung (7.57)). Inzwi-

schen ist diese Beobachtung mathematisch bewiesen (Yeo und Lee (1997)). Es ist außerdem möglich, eine ganze Familie von finiten Elementen anzugeben, die auf der EAS-Methode bzw. der hybriden Spannungsmethode basieren und zueinander äquivalent sind (Bischoff et al. (1999)). Dabei werden  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$  immer zueinander komplementär gewählt. Mit Legendre-Polynomen als Ansatzfunktionen ist dann die Orthogonalitätsbedingung automatisch erfüllt.

#### 7.4.5 Vier- und neunknotige EAS-Elemente

Obwohl die EAS-Methode prinzipiell dazu geeignet ist, jede Art von Locking zu vermeiden, hat sie sich bislang nur im Bereich der Scheiben und für den Membrananteil von Schalen durchgesetzt. Die Anwendung der EAS-Methode in der Version von Simo und Rifai (1990) auf Platten- und Schalenelemente zur Vermeidung von Querschublocking funktioniert nur für rechteckige Elemente befriedigend, bereits bei kleinen Abweichungen von der Rechteckform tritt starkes Locking auf.

Für Scheibenelemente (ebener Spannungs- oder Verzerrungszustand) und damit auch für den Membrananteil von Schalenelementen bestehen die Probleme des Schublocking und des volumetrischen Locking. Beide äußern sich in einer künstlichen Versteifung bei „Biegeverformungen“ (Abschnitt 6.4.6). Die EAS-Methode verschafft Abhilfe, indem die Polynomanteile der Verzerrungen, die aus den Verschiebungsableitungen zur Verfügung stehen, um die fehlenden ergänzt werden. Für eine Betrachtung der Zusammenhänge eignen sich die von Andelfinger (1991) vorgeschlagenen Diagramme, in denen, abhängig von den Verschiebungsansätzen, die Polynomgrade der resultierenden Verzerrungen dargestellt werden. Der Einfachheit halber beziehen sich diese Diagramme auf den geometrisch linearen Fall.

Beispielsweise zeigt Abb. 7.3, daß der Verlauf von  $E_{11}$  in einem bilinearen Element linear in  $\eta$  ist, während  $\epsilon_\eta$  linear in  $\xi$  verläuft.

$$E_{11}^u \in \text{span} \{ 1, \eta \}, \quad E_{22}^u \in \text{span} \{ 1, \xi \}. \quad (7.58)$$

Volumetrisches Locking entsteht durch die Kopplung dieser beiden Verzerrungsverläufe über das Stoffgesetz. Der Grund für die parasitären Spannungen  $\sigma_\xi$  und  $\sigma_\eta$  ist die fehlende „Balance“ zwi-

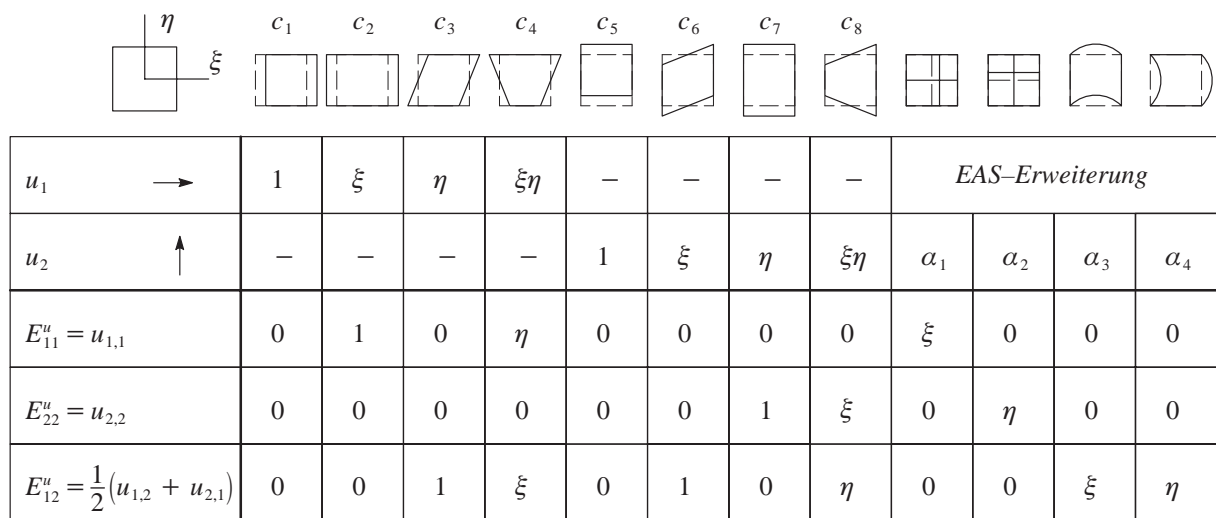


Abb. 7.3: Verzerrungsverläufe bei einem vierknotigen EAS-Element (Q1E4)

schen den Verzerrungsverläufen. Mit Hilfe der EAS–Methode können die fehlenden Anteile ergänzt werden, wodurch die fehlende Balance zwischen  $\epsilon_\xi$  und  $\epsilon_\eta$  hergestellt wird.

$$\begin{aligned} E_{11} &= E_{11}^u + \tilde{E}_{11} \in \text{span} \{ 1, \xi, \eta \}, \\ E_{22} &= E_{22}^u + \tilde{E}_{22} \in \text{span} \{ 1, \xi, \eta \}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Prinzipiell ist es ausreichend, die beiden fehlenden linearen Anteile bei  $E_{11}$  und  $E_{22}$  zu ergänzen um volumetrisches Locking zu vermeiden. Ein zusätzlicher, bilinearer Ansatz verbessert allerdings das Verhalten des Elementes bei verzerrten Netzen. Zur Vermeidung von *Schublocking* ist die Tatsache entscheidend, daß durch die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{E}_{12}$  die in  $\xi$  und  $\eta$  linearen Verläufe von denen der Normalverzerrungen entkoppelt sind. Auch hier gilt, daß die Ergänzung der linearen Anteile prinzipiell ausreicht, ein bilinearer Anteil jedoch das Elementverhalten bei verzerrten Netzen noch verbessert.

Diese EAS–Erweiterungen erweisen sich auch als geeignet, den Effekt des *Membranlocking* abzuschwächen. Die parasitären Membranspannungen werden durch die zusätzlichen EAS–Anteile zwar nicht ganz eliminiert, durch die Bereicherung des Raumes der Verzerrungsansätze werden jedoch diejenigen Spannungen merklich reduziert, die keinen energetisch konjugierten „Arbeitspartner“ finden. Hauptmann (1997) kommt zu dem Schluß, daß eine Modifikation des Membrananteils bei vierknotigen Schalenelementen nur unwesentliche Verbesserungen gegenüber einer reinen Verschiebungsformulierung bringt. Der Grund für diese Fehleinschätzung liegt darin, daß sie sich auf die Analyse von Tragwerken stützt, deren Diskretisierung jeweils zu ebenen Elementen führt (Zylinder, Halbkugel mit Loch). Tatsächlich tritt bei der Berechnung von Schalen mit gekrümmten, bilinearen Elementen (beispielsweise Hypar–Schalen, Verwendung unregelmäßiger Netze bei Zylindern und Kugeln) starkes Membran–Locking auf.

Im Gegensatz zu allen anderen Locking–Effekten wird Membran–Locking auch bei rechtwinkligen, strukturierten Netzen nie ganz vermieden. Es bleibt immer ein Rest parasitärer Spannungen übrig.

Bei der Wahl der Ansatzfunktionen für die erweiterten Verzerrungen wird angestrebt, daß die Verläufe von  $E_{11}$  und  $E_{22}$  ausbalanciert und von  $E_{12}$  entkoppelt sind. Die — abgesehen von der Effizienz — bestmögliche Wahl besteht darin, sämtliche Polynomanteile zu ergänzen, die zu einem vollständig bilinearen (biquadratischen, usw.) Verlauf fehlen. Für die Ansatzfunktionen der erweiterten Verzerrungen eignen sich, aufgrund ihrer Orthogonalitätseigenschaften, Legendre–Polynome. In Simo und Rifai (1990) wird darauf nicht explizit hingewiesen. Da dort jedoch lediglich lineare Elemente in Betracht gezogen werden, ist die Wahl der entsprechenden Legendre–Polynome auch trivial.

$$\begin{aligned} P_0^\xi(\xi) &= 1, & P_0^\eta(\eta) &= 1, \\ P_1^\xi(\xi) &= \xi, & P_1^\eta(\eta) &= \eta, \\ P_2^\xi(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), & P_2^\eta(\eta) &= \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1), \\ &\vdots & &\vdots \\ P_n^\xi(\xi) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n, & P_n^\eta(\eta) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\eta^n} (\eta^2 - 1)^n. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Erst bei der Formulierung von Elementen mit höheren Ansatzfunktionen wird diese Überlegung entscheidend. Für ein neunknotiges EAS–Elemente schlagen Bischoff und Ramm (1997) folgende Ansatzfunktionen vor, die die Orthogonalitätsbedingung erfüllen:

$$\tilde{E}_{11} \in \text{span} \{ (3\xi^2 - 1), \eta(3\xi^2 - 1), \eta^2(3\xi^2 - 1) \}, \quad (7.61)$$

$$\tilde{E}_{22} \in \text{span} \{ (3\eta^2 - 1), \xi(3\eta^2 - 1), \xi^2(3\eta^2 - 1) \}, \quad (7.62)$$

$$\tilde{E}_{12} \in \text{span} \{ (3\xi^2 - 1), (3\eta^2 - 1), \eta(3\xi^2 - 1), \xi(3\eta^2 - 1), \xi^2(3\eta^2 - 1), 1 - 3(\xi^2 + \eta^2) + 9\xi^2\eta^2 \}. \quad (7.63)$$

Ein Ansatz der Form

$$\tilde{E}_{11} \in \text{span} \{ \xi^2, \eta\xi^2, \eta^2\xi^2 \} \quad (7.64)$$

der dieselben Polynome enthält wie (7.61), verletzt die Orthogonalitätsbedingung und führt zu unbrauchbaren Elementen. Bischoff et al. (1999) geben eine allgemeine Formel für EAS–Ansätze beliebiger Polynomordnung an.

Ebenso wie bei der ANS– bzw. DSG–Methode führt die Anwendung der EAS–Methode auf optimale Zwangsbedingungsfaktoren. Um sie zu berechnen, müssen die einzelnen Effekte — Schublocking, volumetrisches Locking und Membranlocking — getrennt voneinander betrachtet werden.

Bei Schublocking ist die skalare Bedingung  $\alpha_{12} = 0$  zu erfüllen. Bei zwei Scheibeneinfreiheitsgraden führt das auf einen optimalen Wert von  $r_k = 2$ , Abschnitt 6.4.6. Die EAS–Ansätze für die Schubverzerrungsanteile  $\tilde{\alpha}_{12}$  tragen dazu bei, diese Bedingung zu erfüllen. Aus dem Diagramm in Abb. 7.3 ist ersichtlich, daß die in  $\xi$  und  $\eta$  linearen Anteile von  $\alpha_{12}''$  durch die entsprechenden Ansätze für  $\tilde{\alpha}_{12}$  „ausbalanciert“ werden können. Die verschiebungsabhängigen Verzerrungen müssen die Bedingung  $\alpha_{12}'' = 0$  lediglich für den konstanten Anteil erfüllen können. Da dieser mit einem Gauß–Punkt exakt integriert ist, gilt

$$r_{Q1E4} = \frac{2}{1} = 2 = r_k. \quad (7.65)$$

Beim neunknotigen Element gilt sinngemäß das gleiche, dort bleiben nach Abzug der von den EAS–Ansätzen erfüllten Bedingungen noch die bilinearen Anteile übrig, die mit  $2 \times 2$  Gauß–Punkten exakt integriert werden können,

$$r_{Q2E11} = \frac{8}{4} = 2 = r_k. \quad (7.66)$$

Beim volumetrischen und beim Membran–Locking bietet sich genau dasselbe Bild: Wieder werden die linearen bzw. quadratischen Anteile der „störenden“ Spannungen vom EAS–Ansatz „neutralisiert“. Die Integrationsordnung für die exakte Integration der verbleibenden Anteile reduziert sich um eins. Damit entsprechen die Zwangsbedingungsfaktoren denen unterintegrierter Elemente (Abb. 6.7), das heißt sie sind optimal.

Ein Beweis, daß EAS–Elemente die Babuska–Brezzi–Bedingung, erfüllen existiert bisher nicht. Braess (1998) gelingt jedoch ein Konvergenzbeweis für ebene Probleme, in dem die Inf–Sup–Bedingung auf eine alternative Forderung zurückführt. Für nahezu inkompressible Materialien und Dirichlet–Randbedingungen kann in bestimmten Fällen gezeigt werden, daß die Babuska–Brezzi–Bedingung verletzt wird.

## 7.5 Stabilisierungsverfahren

### 7.5.1 Grundgedanke

Stabilisierte Finite-Elemente-Verfahren wurden vor allem in der numerischen Strömungsmechanik (*Computational Fluid Dynamics – CFD*) entwickelt, um Instabilitäten, die sich als Druck- oder Geschwindigkeitsoszillationen bemerkbar machen, zu vermeiden. Einige der ersten Stabilisierungsverfahren werden von Brooks und Hughes (1982) sowie Johnson et al. (1984) für die Stabilisierung des Konvektionsanteils von Strömungen vorgeschlagen. In Hughes et al. (1986) wird ein mathematisch konsistentes Stabilisierungsverfahren vorgestellt, das als Vorbild für viele der nachfolgend entwickelten Verfahren betrachtet werden kann. Bei Stabilisierungsverfahren dieses Typs werden zum Standard-Galerkin-Verfahren Terme addiert, die Funktionen der Euler-Lagrangeschen Gleichungen darstellen. Die Konsistenz ist gewährleistet, da diese Terme am Lösungspunkt verschwinden. Gewichtet werden sie mit *Stabilisierungsparametern*, deren Ermittlung oder willkürliche Festlegung ein zentrales Thema bei der Entwicklung stabili-sierter finiter Elemente ist.

Auch in der Strukturmechanik sind stabilisierte finite Elemente seit etwa Mitte der achtziger Jahre bekannt. Der Anwendungsbereich umfaßt inkompressible Elastizität sowie schubweiche Balken- und Plattenformulierungen (siehe z.B. Franca und Hughes (1988), Gosh und Pinsky, (1996)). Flanagan und Belytschko (1981) sowie Belytschko (1983) beschreiben Verfahren zur Vermeidung innerer Kinematiken bei unterintegrierten Elementen. Mit einem Gleichgewichts-Strafterm (*penalty-equilibrating approach*) gelingt es Wu und Cheung (1995), die Verzerrungsempfindlichkeit von bilinearen, gemischten Scheibenelementen merklich zu reduzieren.

Bei stabilisierten finiten Elementen ist die Konvergenz zur korrekten Lösung gewährleistet, wenn die Formulierung mathematisch konsistent ist, der Stabilisierungsterm also am Lösungspunkt verschwindet. Bei nicht konsistenten Verfahren muß der Stabilisierungsterm mit zunehmender Netzverfeinerung gegen Null streben.

In Lyly et al. (1993) wird ein Stabilisierungsverfahren beschrieben, das Oszillationen der Querkräfte bei Platten- und Schalenelementen vermeidet und deren Verzerrungsempfindlichkeit reduziert. Dazu wird der Einfluß der Querschubenergie auf die Steifigkeit in Abhängigkeit von der Schlankheit abgeschwächt, um deren versteifenden Einfluß auf die Biegeantwort zu vermindern. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 7.5.2 auf DSG-Elemente übertragen.

Bei dem in Abschnitt 7.5.3 kurz besprochenen Verfahren wird das Residuum der geometrischen Gleichung zur Vermeidung künstlicher Instabilitäten als Strafterm direkt in die variationelle Formulierung aufgenommen. Eine Besonderheit dieses Verfahrens besteht darin, daß der Stabilisierungsparameter von den Verformungen abhängt.

### 7.5.2 Stabilisierte ANS- und DSG-Elemente

Das diesen Elementen zugrundeliegende Stabilisierungsverfahren geht auf Veröffentlichungen von Pitkäranta (1988), Brezzi et al. (1991) sowie Lyly et al. (1993) zurück. Ausgehend von einer mathematischen Fehleranalyse für schubweiche Plattenelemente schlägt Pitkäranta (1988) eine netzabhängige Modifikation der Schubenergie vor, ohne jedoch dieses Vorgehen explizit als Stabilisierung zu bezeichnen. Brezzi et al. (1991) zeigen, daß mit Hilfe dieses Verfahrens, das auf Elemente mit mindestens quadratischen Ansatzfunktionen beschränkt ist, auch lineare Elemente hergeleitet werden können, wenn diese mit der ANS-Methode modifiziert werden. Ein stabili-



siertes MITC-4 Element — also ein bilineares ANS-Element — und numerische Beispiele werden von Lyly et al. (1993) beschrieben. Die Ausführungen in diesem Abschnitt stützen sich im wesentlichen auf diese Arbeit.

Der positive Effekt der Stabilisierung der ANS-Elemente besteht im wesentlichen in der Vermeidung von Oszillationen der Querschubverzerrungen bei verzerrten Netzen. Damit wird nicht nur die Qualität der Querkräfte verbessert, sondern auch die Netzabhängigkeit der Momente und Verschiebungen verringert. Eine Erweiterung der Methode auf Schalenbiegung wurde von Chapelle und Stenberg (1996) beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird die in Lyly et al. (1993) für Platten vorgeschlagene Methode direkt auf Schalenelemente angewandt.

Die grundsätzliche Idee ist es, die Schubenergie in Abhängigkeit der Schlankheit der Elemente zu modifizieren, um den Einfluß von Querschublocking zu verringern. Das Verfahren ist mathematisch nicht konsistent, weil der zusätzliche Term für die exakte Lösung nicht verschwindet. Konvergenz gegen die korrekte Lösung ist jedoch trotzdem gewährleistet, da der Stabilisierungsparameter mit gegen Null gehender Elementgröße ebenfalls gegen Null strebt.

Der Anteil der Querschubverzerrungen an der inneren Energie eines Elementes für isotropes Material ist

$$\Pi_\gamma = \int_{A_e} Gh_q(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2) dA . \quad (7.67)$$

Die von Lyly et al. (1993) beschriebene Modifikation der mathematischen Formulierung des Plattenproblems kann nun als Addition eines zusätzlichen Stabilisierungsterms

$$\Pi_\gamma^{stab} = \int_{A_e} \left[ Gh_q(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2) - \tau Gh_q(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2) \right] dA \quad (7.68)$$

interpretiert werden. Gleichung (7.68) zeigt besonders anschaulich, daß die Konsistenz verletzt wird. Setzt man für  $\alpha_{13}$  und  $\alpha_{23}$  die exakte Lösung ein, so wird der Anteil der Verzerrungsenergie aus Querschub um den Faktor  $1 - \tau$  unterschätzt. Das kann bei groben Netzen zu einer Verschlechterung gegenüber der nicht stabilisierten Methode führen. Numerische Experimente belegen jedoch, daß dieser Nachteil von den positiven Effekten deutlich überwogen wird.

Das negative Vorzeichen vor dem Stabilisierungsterm weist darauf hin, daß der Einfluß der Schubenergie vermindert wird. Die entscheidende Rolle spielt dabei der Stabilisierungsparameter

$$\tau = 1 - \frac{h_q^2}{h_q^2 + \alpha^2 \lambda_s \ell^2} , \quad (7.69)$$

der von den Elementabmessungen abhängig ist.  $\alpha$  ist der Schubkorrekturfaktor,  $\lambda_s$  eine noch festzulegende Konstante und  $\ell$  eine „typische Elementabmessung“, wie beispielsweise die Wurzel der Fläche oder die Länge der längsten Elementkante.  $h_q$  ist die mit dem Schubkorrekturfaktor  $\alpha$  gewichtete Dicke des Elements (der Schubkorrekturfaktor kürzt sich damit in Gleichung (7.69) heraus).

Das Format dieses Parameters scheint zunächst willkürlich. Er hat jedoch in dieser Form zwei entscheidende Eigenschaften:

- $\lim_{h_q \rightarrow 0} \tau = 1$ , d.h. für gegen Null gehende Dicke und fester Elementgröße (also bei unendlicher Schlankheit des Elements) verschwindet die Schubenergie ganz aus dem Funktional, was der Kirchhoff-Lösung entspricht, und
- $\lim_{\ell \rightarrow 0} \tau = 0$ , d.h. für gegen Null gehende Elementgröße bei fester Dicke (also bei „null“ Schlankheit) verschwindet der Einfluß des Stabilisierungsparameters.

Die erste Eigenschaft ist notwendig, um Locking zu vermeiden, die zweite gewährleistet die Konvergenz gegen die wahre Lösung.

Offensichtlich ist die Idee, die Querschubsteifigkeit in Abhängigkeit der Schlankheit zu modifizieren um Locking zu vermeiden, naheliegend. Lyly et al. (1993) leiten die oben beschriebene Form des Stabilisierungsparameters jedoch nicht mit anschaulichen Argumenten sondern anhand einer mathematischen Analyse der ANS-Elemente her. Die spezielle Form des Stabilisierungsparameters folgt direkt aus einer Fehlerabschätzung für die Querkräfte. Es kann außerdem gezeigt werden, daß bei stabilisierten ANS-Elementen die Querkräfte, unabhängig von der Schlankheit, beschränkt bleiben. Das ist bei nicht stabilisierten ANS-Elementen nicht der Fall.

Die Wahl von  $\lambda_s$  und die Art der Ermittlung von  $\ell$  entscheiden über die Qualität der Ergebnisse im Bereich zwischen  $h \rightarrow 0$  und  $\ell \rightarrow 0$ . In Lyly et al. (1993) wird ein Wert von  $\lambda_s = 0,1$  für das vierknotige Element vorgeschlagen. Der Einfluß dieses Parameters wird zusätzlich anhand eines numerischen Beispiels untersucht. Demnach ist die optimale Wahl von  $\lambda_s$  abhängig von den Randbedingungen. Für eine allgemeingültige Methode muß also ein Kompromiß gemacht werden. Der Einfluß des Parameters auf die Verschiebungen ist verhältnismäßig groß, die Momente sind hingegen praktisch unabhängig von  $\lambda_s$ . Für die Qualität der Querkräfte ergibt sich in dem von Lyly et al. (1993) gewählten Beispiel eine stetige Verkleinerung des Fehlers bis zu einem Wert von  $\lambda_s = 0,6$ . Ergebnisse für  $\lambda_s > 0,6$  sind nicht dokumentiert.

Aus den Gleichungen (7.68) und (7.69) kann man ablesen, daß der Beitrag der Querschubverzerrungen zur inneren Energie mit wachsendem  $\lambda_s$  immer mehr abnimmt. Für dünne Platten und Schalen kann so die Kirchhoff-Bedingung besser repräsentiert werden, bei gedrunenen Strukturen kann sich das jedoch nachteilig auswirken, weil die Querschubsteifigkeit unterschätzt wird. Numerische Experimente zur Untersuchung Wirkung der Stabilisierung und zur Wahl des Parameters  $\lambda_s$  sind in Abschnitt 9.2 dokumentiert.

Die algorithmische Umsetzung des Verfahrens ist denkbar einfach. Es braucht nur die Querschubsteifigkeit im Materialgesetz der Platte oder Schale ersetzt zu werden,

$$Gh_q \rightarrow \frac{Gh_q^3}{h_q^2 + \alpha^2 \lambda_s \ell^2} \quad (7.70)$$

Obwohl dieses Stabilisierungsverfahren in der Literatur bislang nur für geometrisch lineare Probleme angewandt wird, steht einer Erweiterung auf geometrische Nichtlinearität nichts entgegen. Sämtliche in diesem Abschnitt benötigten Rechenschritte und mathematischen Argumente sind unabhängig davon, ob die Querschubverzerrungen linear oder nichtlinear von den Verschiebungen abhängen. Die in dieser Arbeit beschriebenen stabilisierten ANS-Elemente werden deshalb in Kapitel 9 auch für geometrisch nichtlineare Problemstellungen eingesetzt. Ob das Verfahren auch auf materiell nichtlineare Probleme anwendbar ist, ist bislang noch eine offene Frage. Eine Modifikation der Querschubsteifigkeiten könnte in diesem Fall die Ergebnisse möglicherweise verfälschen.

Aufgrund der engen Verwandtschaft zwischen der ANS- und der DSG-Methode empfiehlt es sich von selbst, dieses Stabilisierungsverfahren auch für letztere einzusetzen. Zusätzliche Überlegungen müssen hier angestellt werden, um geeignete Werte für den Parameter  $\lambda_s$  zu finden. In Abschnitt 9.2 wird die Wahl von  $\lambda_s$  für dreieckige und viereckige, lineare und quadratische DSG-Elemente diskutiert.

### 7.5.3 Stabilisierte EAS-Elemente

Die Anwendung der EAS-Methode (Abschnitt 7.4) von Simo und Rifai (1990) ist eine der beliebtesten Möglichkeiten zur Verbesserung des Verhaltens von Scheibenelementen. Sie beseitigt Schublocking und volumetrisches Locking, bei Schalen auch Membranlocking. Trotzdem bleiben die grundlegenden Eigenschaften einer Verschiebungsmethode erhalten. Genau dieser Umstand macht die Methode besonders attraktiv im Zusammenhang mit verzerrungsbasierten nicht-linearen Materialgesetzen.

Leider sind EAS-Elemente im Bereich großer Deformationen nicht absolut stabil. Neto et al. (1995) sowie Wriggers und Reese (1996) berichten als erste über unphysikalische Instabilitätsphänomene, die bei einem numerischen Experiment mit einem hyperelastischen Materialgesetz ('Neo-Hooke') auftreten. Sie äußern sich in einem 'Sanduhr'-Muster in den Deformationen (*hourglass mode*), wie es von unterintegrierten Elementen auch für geometrisch lineare Probleme beobachtet werden kann. Eine höhere Integrationsordnung hilft im Fall der EAS-Instabilität jedoch nicht weiter. Tatsächlich kann dieses Phänomen sogar für eine exakte, analytische Integration nachgewiesen werden.

In Wall et al. (1998) (siehe auch Wall et al. (1999)) wird eine mechanisch motivierte Erklärung des Instabilitätsphänomens vorgestellt. Danach liegt die Ursache im Residuum der kinematischen Gleichung. Da diese gemäß dem zugrundeliegenden Funktional nur schwach erfüllt ist, sollte das Residuum dieser Gleichung mit Netzverfeinerung gegen Null gehen. In bestimmten Fällen kann dieser Fehler jedoch auch für ein unendlich feines Netz eine endliche Größe behalten.

Ein möglicher Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht demnach in der zusätzlichen Gewichtung der kinematischen Gleichung mit Hilfe eines Stabilisierungsterms. Eine Besonderheit dieses, in Wall et al. (1998) vorgeschlagenen Konzepts besteht darin, daß der Stabilisierungsterm direkt auf variationeller Ebene eingeführt wird. Durch den formalen Vorgang von Variation und Linearisierung bleibt damit die Symmetrie der tangentiellen Steifigkeit erhalten. Die mathematische Konsistenz des Verfahrens ist dadurch gewährleistet, daß der zusätzliche Term, nämlich das Residuum der kinematischen Gleichung, multipliziert mit einem Stabilisierungsparameter, am Lösungspunkt verschwindet.

Der Stabilisierungsparameter ist elementweise von den Verzerrungen abhängig, um auf diese Weise der deformationsabhängigen Tendenz zur Ausbildung künstlicher Instabilitäten Rechnung zu tragen. Mit einer geeigneten Wahl dieser Abhängigkeit kann erreicht werden, daß zusätzliche Steifigkeit nur in solchen Fällen addiert wird, in denen sie zur Vermeidung von Instabilitäten notwendig ist. Das Verfahren vermeidet damit, daß künstliche Versteifungseffekte gleichsam durch die Hintertür wieder eingeführt werden. In Wall et al. (1998, 1999) werden erste Vorschläge für die Wahl eines solchen Stabilisierungsterms gemacht und durch numerische Experimente sowie Eigenwertanalysen überprüft. Für den Fall rechteckiger Elemente konnten die gewünschten Ergebnisse erzielt werden. Das vorgeschlagene Element zeigt selbst bei beliebig großen Deformationen keine Instabilitätseffekte und bleibt in biegedominanten Lastfällen lockingfrei. Ein Kon-

zept zur Stabilisierung von beliebig geformten Elementen steht jedoch noch aus und ist Gegenstand aktueller Forschung.

Alternative Ansätze zur Vermeidung der Instabilität bei EAS-Elementen, die jedoch auf anderen Verfahren beruhen, findet man bei Glaser und Armero (1997), Korelc und Wriggers (1996), Reese et al. (1998) sowie Armero (1999).

## 7.6 Zusammenfassung

Die Suche nach dem ‘optimalen’ finiten Schalelement ist mit Sicherheit noch nicht beendet. Auch für ausgefeilte und etablierte Methoden können zuweilen noch Verbesserungen erzielt werden, wofür die stabilisierten ANS-Elemente als Beispiel dienen mögen. Ebenso kommt es vor, daß scheinbar konkurrenzlose Methoden einen lange Zeit unentdeckten Defekt aufweisen, wie die Instabilität der EAS-Elemente.

Dennoch führt die in diesem Kapitel beschriebene Kombination verschiedener Verfahren zu einem leistungsfähigen ‘Paket’, das viele der grundsätzlichen Forderungen, die an finite Elemente gestellt werden, erfüllt. Auf der Basis einer 7-Parameter-Formulierung mit 6 Verschiebungsfreiheitsgraden und einem zusätzlichen Verzerrungsfreiwert werden folgende Modifikationen vorgeschlagen:

- Die Membranverzerrungen werden mit der EAS-Methode erweitert. Das vermeidet Schublocking, Membranlocking und volumetrisches Locking.
- Der konstante Anteil der Querschubverzerrungen wird mit der DSG-Methode modifiziert um Querschublocking zu vermeiden. Eine zusätzlichen Stabilisierung reduziert die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente weiter und verbessert die Qualität der Querkräfte.
- Der konstante Anteil der Normalverzerrungen in Dickenrichtung wird mit der ANS-Methode verändert, um Dickenlocking bei gekrümmten Strukturen zu verhindern.

Alle diese Methoden sind frei von inneren Kinematiken (abgesehen von dem im vorigen Abschnitt angesprochenen Problem der EAS-Elemente), vermeiden Locking und reduzieren die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Gesamtkonzept für lineare und quadratische, drei- und viereckige Elemente verwirklicht. In Abschnitt 9 werden diese Elemente in einigen ausgewählten numerischen Experimenten, sowie für anwendungsnahe Problemstellungen getestet.

## 8 Diskussion von Vor- und Nachteilen der 7-Parameter-Formulierung

Schalentheorien haben in den Ingenieurwissenschaften eine lange Tradition. Ihr Anwendungsreich, die dünnwandigen Flächentragwerke, ist scheinbar klar umrissen. Lösungen nach der Loveschen Schalentheorie wurden und werden für etliche Sonderfälle, wie rotationssymmetrische Schalen, hergeleitet. Mit Schalenelementen nach dieser Theorie oder mit schubweichen Schalenelementen auf der Basis einer 5-Parameter-Formulierung können auch Schalen beliebiger Form berechnet werden.

Zur Berechnung von Strukturen, die die Dünnehypothese nicht rechtfertigen, können heute dreidimensionale finite Elemente verwendet werden. Damit können theoretisch beliebige Tragwerke beliebig genau berechnet werden, also auch dünnwandige. Das erfordert jedoch einen höheren numerischen Aufwand, als Berechnungen mit Schalenelementen. Es stellt sich die Frage, welche Lücke eine Schalentheorie mit Dickenänderung, wie die 7-Parameter-Formulierung, eigentlich füllen soll. Der Hinweis auf den Bereich der 'sehr dicken' Schalen reicht dabei nicht aus.

In diesem Kapitel wird diskutiert, welche Vor- und Nachteile eine 7-Parameter-Schalentheorie im Vergleich zu einer 5-Parameter-Theorie und im Vergleich zur vollständig dreidimensionalen Berechnung eines Tragwerkes hat. Es liegt in der Natur dieser Formulierungen, daß dabei deren numerische Umsetzung eine entscheidende Rolle spielt. Ausgangspunkt der Betrachtungen seien Formulierungen mit finiten Elementen, die in bezug auf die Elementtechnologie 'vergleichbar' sind.

### 8.1 Verwendung vollständig dreidimensionaler Stoffgesetze

Bei der Entwicklung dreidimensionaler Schalentheorien war die grundlegende Motivation, unveränderte dreidimensionale Stoffgesetze verwenden zu können. Bei konventionellen Schalenformulierungen ist das nicht möglich, da solche Theorien nicht den gesamten, dreidimensionalen Satz von Verzerrungen und Spannungen enthalten. Das Stoffgesetz muß deshalb für solche Schalentheorien aufbereitet werden. Das geschieht beispielsweise bei der Mindlinschen Theorie durch eine statische Kondensation der Normalverzerrungen in Dickenrichtung mit Hilfe der Annahme verschwindender transversaler Normalspannungen. Solche Manipulationen des Stoffgesetzes sind jedoch in Sonderfällen analytisch nicht mehr möglich und müssen deshalb numerisch ausgeführt werden. Das bedeutet nicht nur einen zusätzlichen theoretischen Aufwand, sondern kann auch die Rechenzeiten in die Höhe treiben, wenn die Kondensation der Normalspannungen in Dickenrichtung iterativ durchgeführt werden muß.

Im Gegensatz dazu ist die 7-Parameter-Formulierung dazu geeignet, beliebige dreidimensionale Stoffgesetze ohne eine Veränderung anzuwenden. Es bestehen also keine Beschränkungen auf bestimmte Materialgesetze. Diese Eigenschaft ist wahrscheinlich der bedeutendste Vorteil dieses Konzepts gegenüber konventionellen Schalenformulierungen. Er wirkt sich nicht nur bei dicken, sondern bei allen Schalen aus. Paradoxerweise ist dieser Vorteil also gerade bei sehr dünnen Schalen entscheidend, da hier eine Anwendung dreidimensionaler finiter Elemente aus numerischen Gründen extrem unwirtschaftlich wird.

### 8.2 Große Verzerrungen

Die Beschreibung von Problemen mit großen Verzerrungen hat im Bauingenieurwesen nicht die Bedeutung wie im Maschinenbau oder in der Luft- und Raumfahrttechnik. Sie treten bei Schalen

jedoch nicht nur in der Umformtechnik oder bei Crash-Simulationen auf, sondern können auch bei der Erdbebensicherheit von Behältern und anderen Bauwerken eine Rolle spielen. Große Verzerrungen können auch bei der Ermittlung von Traglasten von Bedeutung sein, zum Beispiel bei der numerischen Bestimmung der Rotationsfähigkeit einer Rahmenecke im Stahlbau. Aufgrund der kinematischen Annahmen sind 5-Parameter-Schalenformulierungen nur beschränkt in der Lage, Phänomene mit großen Verzerrungen zu beschreiben. Hier wirkt sich der fehlende Verzerrungsanteil in Dickenrichtung aus, der bei solchen Problemstellungen bedeutsam wird.

Die 7-Parameter-Formulierung vermag große Verzerrungen bei dünnwandigen Strukturen zu beschreiben, da der vollständig dreidimensionale Verzerrungszustand auf der Basis des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors repräsentiert wird. Treten große Verzerrungen im Zusammenhang mit Biegung auf, dann ist es von Vorteil, darüberhinaus die in Dickenrichtung quadratisch verlaufenden Verzerrungsanteile  $\gamma_{ij}$  (Abschnitt 4.3.2) zu berücksichtigen. In den vorangegangenen Herleitungen wurden diese Anteile vernachlässigt. Dazu werden keine zusätzlichen Freiheitsgrade benötigt, der numerische Aufwand steigt jedoch trotzdem, da die Vektoren der Spannungen und Verzerrungen größer werden. Der damit in Zusammenhang stehende Fehler wurde von Büchter et al. (1994) untersucht.

### 8.3 Lasteinleitung und kinematische Randbedingungen

Bei 3- und 5-Parameter-Schalenformulierungen ist die Definition von kinematischen und statischen Randbedingungen auf die Schalenmittelfläche beschränkt. Es kann nicht unterschieden werden, ob eine Last auf der Schalenoberseite angreift (Schnee) oder an deren Unterseite wirkt (abgehängte Decke, Innendruck). Die Exzentrizität von Lagerungen kann ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Eine frei auf Mauerwerk aufliegende Stahlbetonplatte wird so modelliert, als berührte ihre Mittelfläche die Oberseite des Mauerwerks. Bei eingespannten Rändern ist außerdem die Dickenänderung nicht behindert.

Das 7-Parameter-Modell kann solche Details näherungsweise berücksichtigen. Lasten können auf der Ober- oder Unterseite der Schale aufgebracht werden. Dasselbe gilt für kinematische Randbedingungen. Insbesondere ist es möglich, die Dickenänderung bei Einspannungen zu behindern. Alle diese Effekte nehmen mit der Schalendicke ab, ein merklicher Einfluß ist deshalb nur für verhältnismäßig dicke Schalen zu erwarten.

### 8.4 Schalen mit Knicken

Im Zusammenhang mit der Berechnung von Schalen mit Knicken wird oft auf das Phänomen hingewiesen, daß an jedem Punkt entlang einer Kante zwei unterschiedliche Normalen und damit auch zwei Direktoren existieren. Für 3- und 5-Parameter-Formulierungen, die die Bewegungen des Direktors mit Hilfe von Rotationsfreiheitsgraden beschreiben, verursachen inkompatible Freiheitsgrade Probleme. Jeweils eine der beiden Rotationen findet keinen „Partner“. Die einfachste Möglichkeit zur Kopplung von Freiheitsgraden an solchen Kanten, besteht darin, die kantenparallelen Rotationen aneinander zu koppeln und die dazu senkrechten frei zu lassen. Das Modell wird dadurch etwas zu weich. Dieser Effekt verschwindet jedoch mit der Verfeinerung des Netzes.

Schließlich kann eine Drillrotation als sechster Freiheitsgrad eingeführt werden. Sie beschreibt die Drehung des Direktors um seine Längsachse und ist damit physikalisch nicht als unabhängige

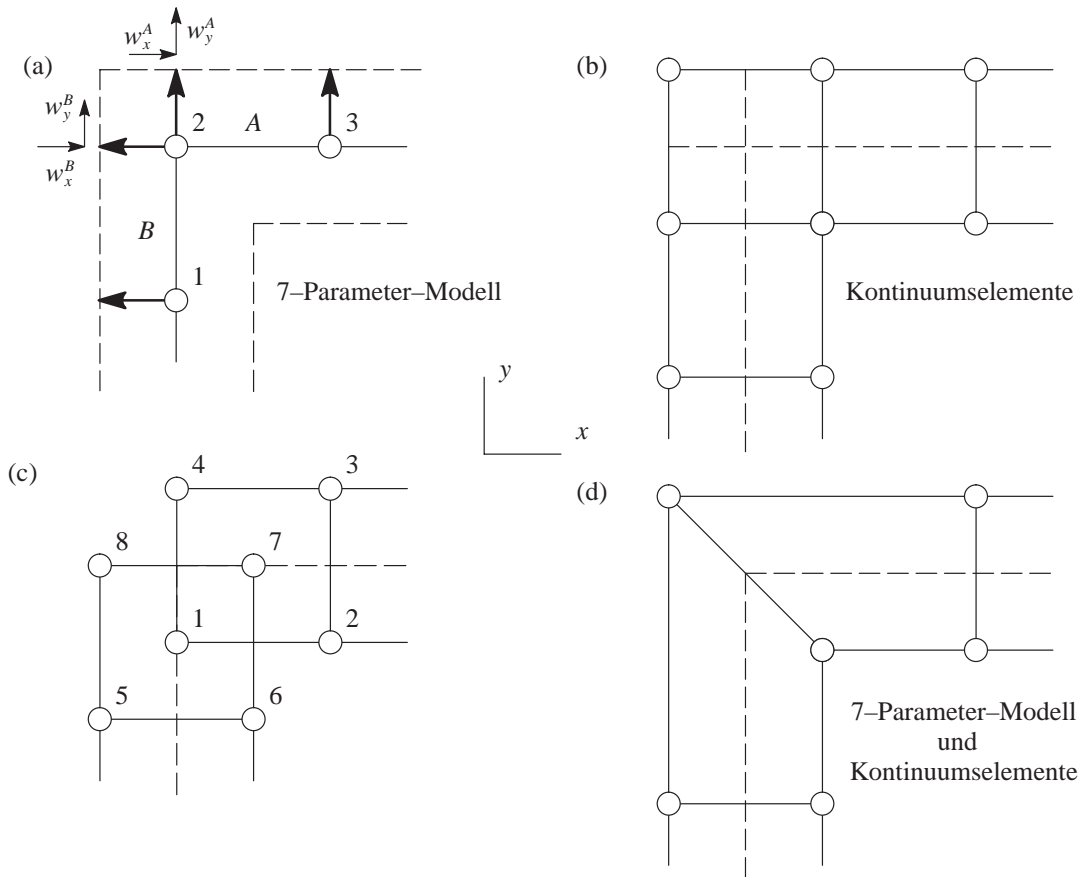


Abb. 8.1: Kantenproblematik beim 7-Parameter-Modell

ger Freiheitsgrad zu begründen. Aus mechanischer wie mathematischer Sicht hängt diese Rotation nämlich eindeutig vom Verschiebungsfeld in der Schalenmittelfläche ab. Das führt dazu, daß ihm keine eindeutige Steifigkeit zugewiesen werden kann. Eine Möglichkeit, trotzdem konvergente Verfahren zu bekommen, ist die Berücksichtigung einer Ersatzsteifigkeit mit der Hilfe von Straftermen in der variationellen Formulierung. Schalentheorien mit Drillrotationen findet man unter anderem bei Gruttmann et al. (1992), Fox und Simo (1992), sowie Ibrahimbegovic (1994).

Bei einer Schalenformulierung, die mit Differenzverschiebungen anstatt Rotationen arbeitet, besteht diese „Kantenproblematik“ ebenfalls. Sie hat jedoch eine etwas andere Ausprägung. Abb. 8.1 illustriert diesen Sachverhalt am Beispiel einer rechtwinkligen Kante durch den Vergleich mit Diskretisierungen mit Kontinuums-elementen (vereinfacht auf zwei Dimensionen). Die eigentlich naheliegende 3D-Diskretisierung (b), ist mit dem 7-Parameter-Modell (a) offensichtlich nicht zu verwirklichen, da sich oberhalb und unterhalb der Schnittpunkte der Systemlinie keine Knoten befinden. Das Element „in“ der Kante kann nicht durch ein „Schalenelement“ ersetzt werden. Eine der Diskretisierung mit Schalenelementen entsprechende 3D-Diskretisierung ist unter (c) dargestellt. Hier besteht jedoch das Problem, daß die Knoten „in der Luft“ hängen. Es ist zunächst nicht klar, wie die Freiheitsgrade aneinander gekoppelt werden sollten, um ein mechanisch sinnvolles Modell zu erhalten.

Genau dieses Problem spiegelt sich bei der Diskretisierung mit 7-Parameter-Schalenelementen wider. Offensichtlich ist es nicht sinnvoll, einfach die Differenzvektorkomponente  $w_x^A$  des Elementes A an die Komponente  $w_x^B$  des Elementes B zu koppeln, da  $w_x^A$  in Element A eine Drehung

des Direktors bewirkt, während in Element  $B$  der Direktor dadurch gestaucht wird (Abb. 8.1). Für den hier dargestellten Sonderfall wäre es denkbar  $w_x^A = w_y^B$  zu setzen. Bei unterschiedlichen Elementdicken, oder anderen Winkeln ist diese Bedingung jedoch physikalisch falsch. Außerdem hängt selbst bei diesem einfachen Fall die Streckung des Direktors (z.B.  $w_y^A$ ) physikalisch mit den Verschiebungen  $v_y^B$  der Knoten 1 und 2 zusammen. Dieser Zusammenhang ist zudem abhängig von der Elementlänge. Offenbar bereitet eine sinnvolle Kopplung der Freiheitsgrade bei einer Formulierung mit Differenzvektoren an solchen Stellen Schwierigkeiten. Denkbar wären Kopplungsbedingungen, die die Lage der Knoten 1, 4, 7 und 8 im Fall (c) im Verhältnis zueinander gleich lassen. Für den allgemeinen Fall von 3 oder 4 in beliebigen Winkeln aneinandergrenzenden Elementen unterschiedlicher Dicke ist die Formulierung solcher Bedingungen jedoch einigermaßen komplex.

Eine viel einfachere Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht in der Mittelung des Direktors entlang der Kante. Diese Vorgehensweise folgt auf natürliche Weise aus dem De generationskonzept: Da die Struktur zunächst als mit dreidimensionalen Elementen diskretisiert gedacht wird, ergeben sich ‘automatisch’ gemeinsame Direktoren an den Elementübergängen (Diskretisierung (d) in Abb. 8.1). Ein Nachteil dieser Methode ist, daß die Genauigkeit der Rechenergebnisse aus numerischen Gründen unter der möglicherweise starken Abweichung des Direktors von der Normalenrichtung leidet. Denkt man sich solche Elemente als aus dreidimensionalen finiten Elementen abgeleitet, so sind letztere verzerrt und zeigen deshalb kein optimales numerisches Verhalten.

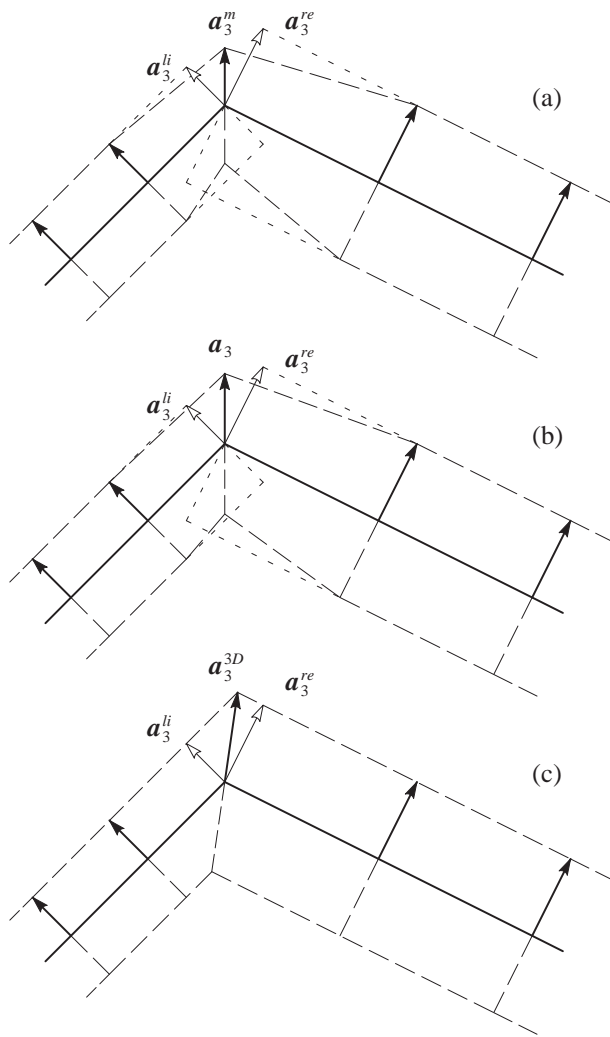
Die einfachste Möglichkeit, aus mehreren Direktoren einen gemeinsamen zu erhalten, ist, das arithmetischen Mittel aus den einzelnen Direktoren nach Gleichung (4.4) zu bilden (Abb. 8.2, (a)). Das führt jedoch zu einem Einschnürungseffekt an der Kante, der mit dem Winkel zwischen den einzelnen Direktoren größer wird und das Modell zu weich macht. Besser ist es, den Direktor anschließend auf die mittlere Länge der einzelnen Direktoren zu normieren ((Abb. 8.2, (b)). Der Einschnürungseffekt wird jedoch auch dadurch nicht ganz vermieden.

Es wird deshalb vorgeschlagen, den gemeinsamen Direktor so zu bestimmen, wie man ihn bei einer Diskretisierung der Struktur mit dreidimensionalen Elementen intuitiv festlegen würde, nämlich so, daß er genau zum Schnittpunkt der Schalenlaibungen der aneinander grenzenden Schalenteile zeigt (Abb. 8.2, (c)).

Diese Schnittpunkte sind allerdings nur in zwei Dimensionen immer eindeutig definiert. Bei dreidimensionalen Strukturen ist nicht in jedem Fall gewährleistet, daß sich die Laibungen der aneinandergrenzenden Schalenabschnitte in einem Punkt schneiden. Man kann sich in diesem Fall damit behelfen, daß man die Direktoren nacheinander zusammenfaßt. Grenzen an einen Knoten also beispielsweise vier Elemente, so werden zunächst zwei beliebige Direktoren zu einem gemeinsamen zusammengefaßt. Der entstandene Direktor wird dann mit einem dritten, und das Ergebnis wiederum mit dem vierten Direktor verknüpft. Das Ergebnis dieser Prozedur ist prinzipiell abhängig von der Reihenfolge in der die einzelnen Direktoren abgearbeitet werden. Das ist jedoch kein Nachteil, da diese Abhängigkeit sich nur in solchen Fällen auswirkt, an denen die tatsächliche dreidimensionale Struktur ohnehin nicht eindeutig definiert ist. Das ist dann der Fall, wenn Schalenabschnitte unterschiedlicher Dicken aufeinandertreffen und die Laibungsflächen sich nicht in genau einem Punkt schneiden.

Die Methode, einen gemeinsamen Direktor entlang von Kanten zu definieren, kann auch bei 5-Parameter-Schalenelementen angewandt werden. Sie hat jedoch einen Nachteil, der sich bei feinen Netzen und dicken Strukturen auswirkt. Unterschreitet die Elementlänge senkrecht zur





$$\mathbf{a}_3^m = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_3^{li} + \mathbf{a}_3^{re})$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_3^m}{|\mathbf{a}_3^m|} \frac{1}{2}(|\mathbf{a}_3^{li}| + |\mathbf{a}_3^{re}|)$$

$\mathbf{a}_3^{3D}$  aus Schnittpunkt der Schalenlaibungen

Abb. 8.2: Möglichkeiten zur Mittelung des Direktors an Knicken

Kante eine bestimmte Grenze, überschneiden sich die durch die Direktoren definierten „Normalenrichtungen“ innerhalb eines Elements, was dazu führt, daß differentielle Volumenelemente mit negativem Rauminhalt entstehen. Anschaulich entspricht dieses Phänomen einer geometrischen Verzerrung der Elemente, die direkt an der Kante liegen (Abb. 8.3, links). Diese Verzerrung führt mit fortschreitender Netzverfeinerung zu pathologischen Fällen (Abb. 8.3, rechts). Streng genommen kann deshalb keine Konvergenz erwartet werden. Offensichtlich ist dieser Effekt abhängig von der Schlankheit des einzelnen Elements. Der Grenzfall ist gerade dann erreicht, wenn die Elementlänge gleich der halben Schalendicke ist.

An einem numerischen Beispiel soll die Bedeutung dieses Effektes sowie der Einfluß der in Abb. 8.2 beschriebenen Direktorvarianten (b) und (c) auf die numerischen Ergebnisse untersucht werden. Ein einseitig eingespannter Stahlträger sei durch sein Eigengewicht belastet (Abb. 8.4). Es wird eine lineare Analyse mit Q1E4-DSG-Elementen durchgeführt (zu den Bezeichnungen der Elemente siehe Kapitel 9). Entlang der Trägerachse werden 10 Elemente verwendet. Die Anzahl der Elemente entlang der Kanten mit den Längen  $b$  und  $h$  ist  $n$  bzw.  $3n$ . Bei der Berechnung mit 5-Parameter-Schalenelementen werden die Rotationen um die kantenparallele Achse gekoppelt. Die Rotationen senkrecht dazu bleiben frei. Bei den 7-Parameter-Schalenelementen

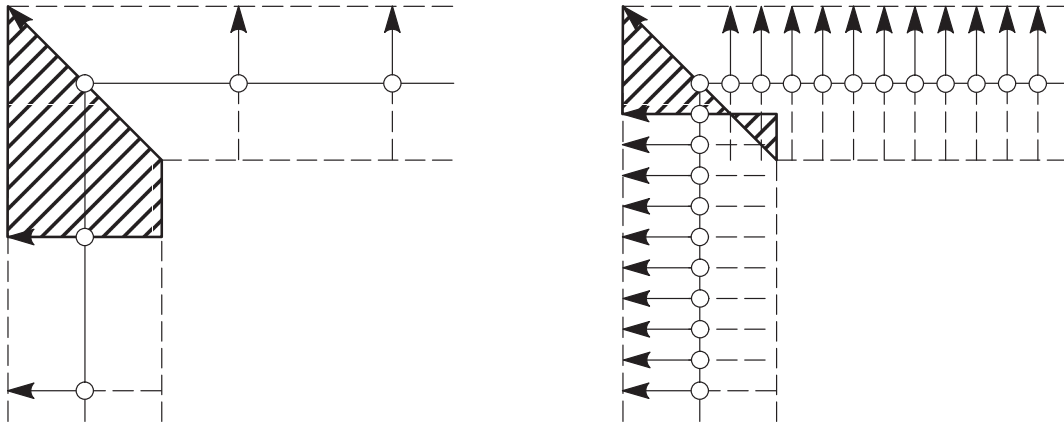


Abb. 8.3: „Elementverzerrung“ in der Nachbarschaft von Kanten

wird ein gemeinsamer Direktor nach Variante (b) bzw. (c) (Abb. 8.2) gebildet. Die Abmessungen des Trägers sowie die Materialdaten sind in Abb. 8.4 gegeben. Die Blechdicke sei einmal  $t = 5 \text{ mm}$  und einmal  $t = 5 \text{ cm}$ . Im ersten Fall kann damit aufgrund der verhältnismäßig großen Schlankheit die Lösung, die die 5-Parameter-Theorie liefert, als Referenzlösung betrachtet werden. Im zweiten Fall ist zu erwarten, daß das oben angesprochene Problem der überlappenden Normalenrichtungen auftaucht. Für  $t = 5 \text{ mm}$  tritt bei  $n_{krit} = 40$  die kritische Elementlänge von  $2,5 \text{ mm}$  auf. Für  $t = 5 \text{ cm}$  ist sie bereits für  $n_{krit} = 4$  erreicht.

Die Ergebnisse von Berechnungen mit Diskretisierungen im Bereich  $1 \leq n \leq 40$  für die Vertikalverschiebung  $w$  am Punkt A sind in Abb. 8.5 dargestellt. Das linke Diagramm zeigt, daß der Einschnüreffekt aufgrund der Mittelung des Direktors nach Variante (b) das Modell deutlich zu weich macht. Die Verschiebung konvergiert verhältnismäßig langsam zur Referenzlösung. Wird der gemeinsame Direktor nach Variante (c) verwendet, ist der Abstand zur Referenzlösung von Anfang an deutlich geringer. Derselbe Trend ist im rechten Diagramm für den Fall der größeren Blechdicke zu beobachten. Außerdem erkennt man hier ab einer Netzfeinheit von ungefähr  $n = 15$  bei beiden Varianten Unregelmäßigkeiten in der Lösung. Bei Variante (c) sind die Oszillationen in der Lösung zwar etwas schwächer als bei (b), ganz vermieden werden sie jedoch nicht.

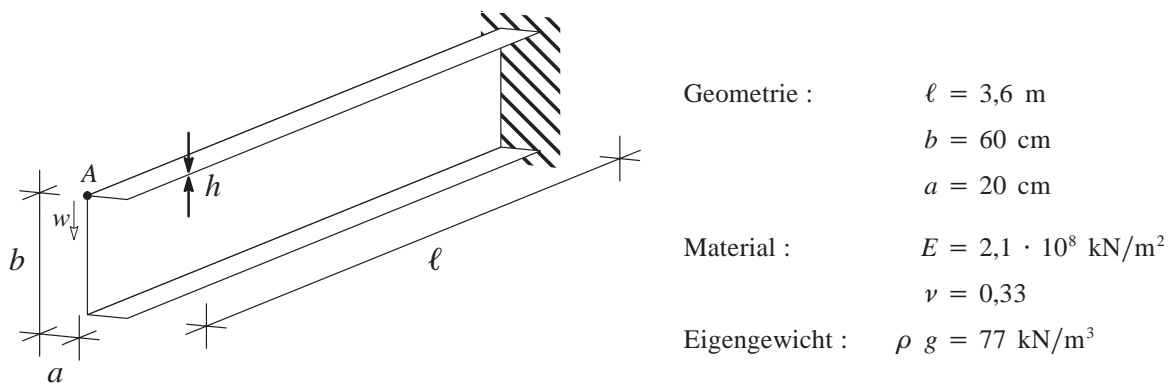


Abb. 8.4: Stahlträger unter Eigengewicht – statisches System und Belastung

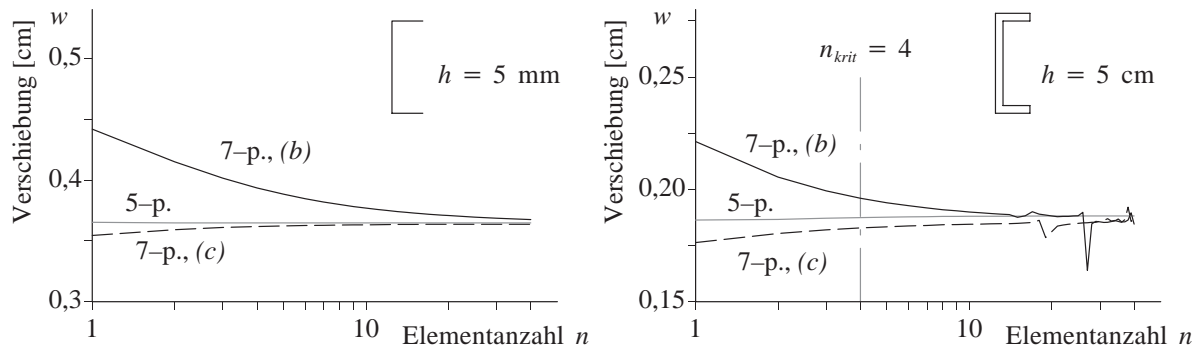


Abb. 8.5: *Einfluß der Definition des Direktors an Kanten*

Obwohl dieser Effekt prinzipiell unerfreulich ist, zeigt das Experiment doch zweierlei: Erstens treten numerische Probleme tatsächlich erst deutlich jenseits der theoretisch kritischen Elementanzahl ( $n_{krit} = 4$ ) auf und zweitens befindet sich bei dieser Diskretisierung die Lösung bereits in einem Genauigkeitsbereich, der als „konvergiert“ betrachtet werden kann. Jedenfalls ist zu erwarten, daß der Modellfehler — also die Abweichung zur 3D-Lösung — an dieser Stelle bereits mindestens die Größenordnung des numerischen Fehlers hat. Die relative Abweichung der von oben bzw. unten konvergierenden Varianten (b) und (c) des 7-Parameter-Modells beträgt dort nur noch 2%. Eine weitere Netzverfeinerung ist deshalb ohnehin kaum noch sinnvoll.

Dennoch wäre es wünschenswert, ein Verfahren zu Behandlung von Schalen mit Knicken zur Verfügung zu haben, das einen solchen Effekt nicht aufweist. Abhilfe könnte eine Kombination mit 3D-Elementen schaffen, dagegen spricht jedoch der Wunsch, das 7-Parameter-Modell als reines Schalenmodell zu verwenden. Die Entscheidung, an bestimmten Stellen Kontinuumsselemente zu verwenden, erschwert die Anwendung und die Interpretation der Ergebnisse. Ausgehend von den weiter oben angestellten Überlegungen zu Kopplungsbedingungen, die das tatsächliche, dreidimensionale Verhalten der Kante näherungsweise berücksichtigen, sind hier möglicherweise noch Verbesserungen zu erzielen.

Betsch et al. (1996) schlagen vor, die 7-Parameter-Formulierung um einen Drillrotationsfreiheitsgrad zu erweitern. Die oben beschriebenen Probleme werden dadurch vermieden. Es stellt sich jedoch wie bei Schalentheorien ohne Dickenänderung die Frage nach der Drillsteifigkeit. Ein numerisches Experiment in Abschnitt 9.4.3 zeigt, daß dieses Vorgehen zu etwas zu steifen Lösungen führen kann.

## 8.5 Dreidimensionale Effekte im Membrananteil

Durch den Poisson-Effekt sind die Normalspannungen in der Schalenfläche im allgemeinen mit den Normalspannungen in Dickenrichtung gekoppelt. Bei 5-Parameter-Schalenmodellen wird dieser Effekt vernachlässigt und der entsprechende Anteil des Stoffgesetzes durch statische Kondensation der Normalverzerrungen in Dickenrichtung eliminiert. Für den Sonderfall der Scheibe bedeutet das, daß Berechnungen mit 5-Parameter-Schalenelementen genau dasselbe Ergebnis liefern wie zweidimensionale Elemente mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten. Berechnungen von Scheiben im ebenen Verzerrungszustand erfordern dabei eine andere Behandlung des Stoffgesetzes als im Fall eines ebenen Spannungszustandes, nämlich eine Kondensation von  $S^{33}$  anstatt  $E_{33}$ .

Beim 7-Parameter-Modell wird die Kopplung aller drei Normalspannungsanteile berücksichtigt. Durch eine geeignete Wahl von Randbedingungen können sowohl Probleme mit ebenem Spannungszustand als auch mit ebenem Verzerrungszustand berechnet werden. Es sind auch Kombinationen beider Zustände möglich (Abschnitt 5.3.2). Im Fall des ebenen Verzerrungszustandes werden dabei genau dieselben Resultate erzielt wie mit reinen Scheibenelementen. Beim ebenen Spannungszustand treten Abweichungen auf, da die Bedingung  $S^{33} = 0$  nur näherungsweise erfüllt wird.

Im Zusammenhang mit innerhalb der Schalenfläche veränderlichen, transversalen Normalspannungen treten linear über die Dicke verlaufende Schubspannungen auf. Das zugehörige Querschubmoment kann bei dicken Schalen oder Scheiben eine gewisse Bedeutung bekommen. Ähnlich wie bei der Querkraft ist es möglich, die Genauigkeit in bezug auf die dreidimensionale Lösung mit Hilfe eines Schubkorrekturfaktors etwas zu verbessern. In Abschnitt 5.5.1 ist ein solcher Schubkorrekturfaktor höherer Ordnung hergeleitet.

Ein einfaches numerisches Beispiel soll die Bedeutung von dreidimensionalen Effekten beim Membrananteil der Schale demonstrieren. Dazu wird eine einseitig eingespannte, quadratische Scheibe unter Eigengewicht (Wichte  $\rho g = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N/cm}^3$ ) linear elastisch berechnet (Abb. 8.6). Es werden Ergebnisse von 5- und 7-Parameter-Schalenelementen sowie Kontinuumselementen verglichen. Um Einflüsse aus der Elementformulierung möglichst ausschließen zu können, erfolgt die Diskretisierung mit vergleichbaren Elementen: achtknotige Elemente mit  $2 \times 2$  Integrationspunkten bei den Schalenmodellen und 20-knotige Elemente mit  $2 \times 2 \times 2$  Integrationspunkten bei der dreidimensionalen Berechnung. Die Scheibenebene wird in  $16 \times 16$  Elemente aufgeteilt. Bei der dreidimensionalen Berechnung werden 10 Elemente in Dickenrichtung verwendet.

Die Berechnung mit 5-Parameter-Schalenelementen, unter der Bedingung eines ebenen Spannungszustandes, liefert für die Vertikalverschiebung von Punkt A von der Dicke unabhängige Werte. Die zunehmend dreidimensionale Tragwirkung der dicken Scheibe kann nicht berücksich-

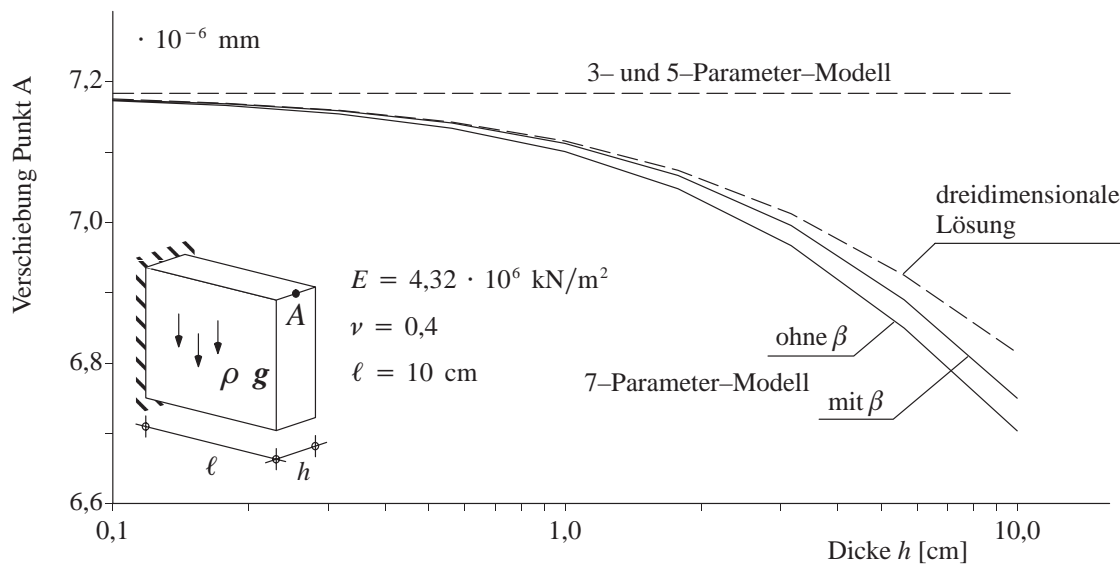


Abb. 8.6: 3D-Effekte im Membrananteil, Bedeutung des Schubkorrekturfaktors  $\beta$

sichtigt werden. Insbesondere die Dickeneinspannung und das Querschubmoment bleiben unberücksichtigt.

Die Abweichung zwischen dem 7-Parameter-Modell und der dreidimensionalen Lösung bleibt auch bei extrem dicken Scheiben verhältnismäßig klein. Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Schubkorrekturfaktor  $\beta = 7/10$  für die Querschubkrümmung reduziert diesen verbleibenden Fehler noch etwas.

## 8.6 Vergleich mit 3D-Elementen

7-Parameter-Schalenelemente können, im Sinne des Degenerationskonzeptes, unmittelbar aus dreidimensionalen Elementen mit einem linearen Ansatz in 'Dickenrichtung' hergeleitet werden. Im Gegensatz zu 5-Parameter-Modellen werden kaum weitere Annahmen zur Vereinfachung der Gleichungen mehr getroffen. Insbesondere wird auf die Annahme verschwindender Normalspannungen in Dickenrichtung verzichtet. Es stellt sich also die Frage, worin der verbleibende Unterschied zwischen dreidimensionalen Schalenelementen und „echten“ 3D-Elementen besteht. In mechanischer Hinsicht ist in beiden Fällen die gleiche Approximationsstufe erreicht. Dennoch gibt es einige Unterschiede.

Der erste ist die Vorabintegration des Stoffgesetzes über die Dicke, die die numerische Effizienz steigern kann. Der Integrand zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix ( $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ ) muß bei Kontinuums-elementen  $n_D$ -mal häufiger gebildet werden als bei Schalenelementen, wenn  $n_D$  die Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung ist. Da der Rang der Werkstoffmatrix mit 12 beim 7-Parameter-Modell gerade doppelt so groß ist wie bei dreidimensionalen Elementen, ist bei zwei Gaußpunkten in Dickenrichtung noch kein Vorteil erreicht. Bei Berechnungen mit plastischen Stoffgesetzen werden jedoch mehr Integrationspunkte in Dickenrichtung benötigt, um den Spannungsverlauf besser abbilden zu können. In diesem Fall sind dreidimensionale Schalenelemente den dreidimensionalen Kontinuums-elementen, vom Standpunkt der Effizienz aus gesehen, überlegen.

Um die Steigerung der Effizienz quantifizieren zu können werden die Rechenzeiten zur Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrix experimentell ermittelt. Die Berechnungen erfolgen mit ei-

### trilineare dreidimensionale Kontinuums-elemente

an jedem Integrationspunkt über die Dicke:

$\mathbf{C}$  aufstellen

$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$  berechnen

### bilineare 7-Parameter-Schalenelemente

an jedem Integrationspunkt über die Dicke:

$\mathbf{C}$  aufstellen

$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  (Dickenintegration)

einmalig:

$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$  berechnen

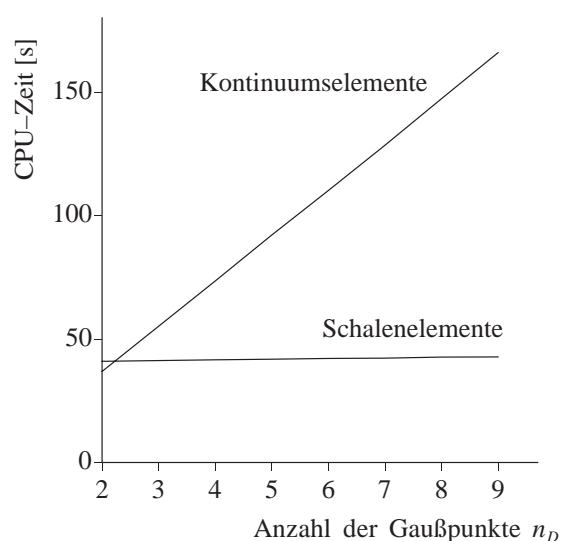


Abb. 8.7: Vorabintegration und ihre Effizienz

nem separaten Programm, um Einflüsse aus der Programmtechnologie zu vermeiden und nur den Einfluß der Vorabintegration zu erfassen. In diesem Programm werden den Komponenten von  $C$  und  $B$  willkürlich Zahlen zugeordnet und daraus dann die Steifigkeitsmatrix nach beiden Varianten 5000mal berechnet (die wiederholte Berechnung verringert den Fehler bei der Zeitmessung). Die CPU-Zeiten, die dazu auf einer HP-apollo-Workstation der 9000er Serie (Modell 715/75) benötigt werden, sind in Abb. 8.7 zusammengestellt. Bei beiden Varianten steigt der Aufwand linear mit der Anzahl  $n_D$  der Integrationspunkte über die Dicke. Bei den Schalenelementen ist die Steigung jedoch fast Null, der Aufwand also nahezu unabhängig von  $n_D$ .

Bei zwei Integrationspunkten über die Dicke sind die Schalenelemente etwas teurer (ca. 11%). Für  $n_D > 2$  sind die Schalenelemente den Kontinuumselementen jedoch überlegen. Berechnungen mit nichtlinearen, zum Beispiel elasto-plastischen Stoffgesetzen, bei denen oft fünf und mehr Integrationspunkte über die Dicke benötigt werden, um den Verlauf der Spannungen genügend genau darstellen zu können, sind deshalb mit Schalenelementen wesentlich effizienter.

Bei elasto-plastischen Berechnungen von dünnwandigen Strukturen ist es zwar wichtig, den Verlauf der Spannungen über die Dicke möglichst gut zu approximieren, der Verschiebungsverlauf bleibt jedoch relativ geradlinig. Dreidimensionale Schalenelemente sind in der Lage diesen Spagat unterschiedlicher Approximationsstufen wesentlich effizienter durchzuführen als Kontinuumselemente.

Weiterhin ist für Kontinuumselemente eine dreidimensionale Vernetzung des Tragwerks erforderlich, die numerisch aufwendiger ist, als eine Vernetzung mit Flächenelementen. Bei der Berechnung von Flächentragwerken mit Kontinuumselementen ist deshalb der Aufwand zur Aufbereitung der Geometriedaten wesentlich größer als bei einem Schalenmodell. Oft stehen diese Daten zunächst nur als CAD-Flächenmodell zur Verfügung und müssen daraus generiert werden. Für einen speziell auf Schalenberechnungen zugeschnittenen 3D-Vernetzer könnte das zwar im Sinne einer  $2\frac{1}{2}$ D-Formulierung verhältnismäßig einfach durchgeführt werden. Trotzdem ist eine zweidimensionale Vernetzung grundsätzlich effizienter. Dasselbe gilt sinngemäß für die Darstellung der Rechenergebnisse.

Bei Schalenmodellen wird die dreidimensionale Struktur über deren geometrische Mittelfläche und eine skalare Funktion, die die Schalendicke beschreibt, definiert. Diese relative Beschreibung der Geometrie erleichtert nicht nur die Vernetzung, sondern auch die Behandlung von Problemen der Form- und Topologieoptimierung. Soll zum Beispiel für eine gegebene Schalendicke eine optimale Form gefunden werden, sind die Optimierungsvariablen einfach die Ortsvektoren der Schalenmittelfläche. Solche Aufgaben sind mit Kontinuumselementen nur mit Hilfe komplexer Nebenbedingungen zu lösen, die eine konstante Schalendicke gewährleisten.

Eine vollständig dreidimensionale Modellierung und Vernetzung kann jedoch von Vorteil sein, wenn sie den Übergang zu Bereichen erleichtert, die ohnehin mit dreidimensionalen Elementen gerechnet werden sollen. Absolute anstatt relativer Freiheitsgrade zur Beschreibung der Verschiebungen erleichtern ebenfalls die Verbindung zu rein dreidimensionalen Elementen sowie die Formulierung von Reibungs- und Kontaktbedingungen an den Schalenlaibungen.

Schließlich soll noch ein praktischer Aspekt nicht unerwähnt bleiben, der wiederum für das in dieser Arbeit beschriebene Konzept spricht: Für Bauingenieure sind Begriffe wie „Membranzustand“, „dehnungslose Verformung“ oder „Biegemoment“ wichtige Hilfsmittel bei der Beurteilung der Lastabtragung von Schalen und der Interpretation von Rechenergebnissen. Bei einer rein dreidimensionalen Betrachtung der Schalenstruktur geht diese Begriffswelt verloren und der

Mangel an Anschaulichkeit vergrößert die Wahrscheinlichkeit von Fehlinterpretationen und Irrtümern.

## 8.7 Zusammenfassung

Das wichtigste Fazit dieses Kapitels ist die Erkenntnis, daß 7-Parameter-Schalenelemente in der *Genauigkeit der Ergebnisse* den echten Kontinuumselementen näher stehen, während sie in bezug auf die *Handhabung und Effizienz* eher mit konventionellen Schalenelementen vergleichbar sind.

Die Vorteile dreidimensionaler Schalenformulierungen gegenüber konventionellen schubweichen Schalentheorien bestehen darin, daß einerseits deren gesamter Anwendungsbereich abgedeckt ist, andererseits jedoch einige zusätzliche Möglichkeiten bestehen:

- Beliebige Stoffgesetze können ohne Modifikation eingesetzt werden,
- der Anwendungsbereich wird auf Probleme mit großen Verzerrungen erweitert und
- dreidimensionale Effekte, wie der Einfluß der Lasteinleitung, können näherungsweise erfaßt werden.

Bei der Behandlung von Schalen mit Knicken kann die Methode des gemittelten Direktors zu pathologischen Fällen führen. Allerdings treten diese Fälle nur bei einer übermäßigen Verfeinerung des Netzes im Bereich der Kante auf, die vom Standpunkt der Modellbildung aus gesehen ohnehin nicht mehr sinnvoll ist. In solchen Fällen muß im Bereich der Kante ein Übergang auf Kontinuumselemente stattfinden (Stein et al. (1992)).

Ein Nachteil der 7-Parameter-Schalenelemente gegenüber 5-Parameter-Modellen ist die ungünstigere Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix. Das kann sich nachteilig auf die Konvergenz von iterativen Gleichungslösern sowie die kritische Zeitschrittlänge bei expliziten Zeitintegrationsverfahren in der Dynamik auswirken.

Der tatsächliche 'Konkurrent' der 7-Parameter-Formulierung ist nicht das klassische Schalenelement, sondern das Kontinuumselement. Selbstverständlich haben diese Elemente den breiteren Anwendungsbereich. Mit 3D-Elementen kann man theoretisch „alles“ rechnen. Ein Vergleich zu Schalenelementen sollte hier nur im Kontext von Flächentragwerken stattfinden. Für eine Verwendung von 7-Parameter-Schalenelementen anstelle von Kontinuumselementen sprechen dabei folgende Argumente:

- Die Darstellung der Geometrie ist bei weitem einfacher, der theoretische und numerische Aufwand zur geometrischen Modellbildung, Vernetzung und Darstellung der Ergebnisse ist geringer.
- Bei mehr als zwei Integrationspunkten in Dickenrichtung steigert die Vorabintegration die numerische Effizienz
- Durch die Verwendung von Differenzverschiebungen sind die Elementsteifigkeitsmatrizen besser konditioniert. Im Gegensatz zu dreidimensionalen Elementen treten deshalb auch bei sehr dünnen Schalen keine numerischen Probleme bei der Gleichungslösung auf.

Demgegenüber stehen einige Nachteile, die sich vor allem bei der Analyse komplexer Tragwerke auswirken, die aus einer Kombination von dünnwandigen und massiven Bauteilen bestehen.

- Die Kopplung dünnwandiger an massive Tragwerksteile ist einfacher, wenn absolute anstelle von relativen Freiheitsgraden verwendet werden.
- Dimensionsadaptive Verfahren (Stein et al. (1992), Stein und Ohnimus (1996)) sind leichter zu handhaben, wenn in der gesamten Struktur derselbe Elementtyp — also 3D-Elemente — verwendet wird.

Trotz dieser Gegenüberstellung kann gesagt werden, daß die Grenzen zwischen beiden Elementtypen nicht scharf sind und sich zu einem großen Teil in numerischen und programmtechnischen Details erschöpfen.



## 9 Numerische Experimente

Im vorangegangenen Kapitel wurde diskutiert, inwieweit eine dreidimensionale Schalenformulierung mit finiten Elementen Vor- oder Nachteile gegenüber konventionellen Schalenmodellen, beziehungsweise dreidimensionalen Kontinuums-elementen bringt. In diesem Kapitel steht die Finite-Elemente-Formulierung im Vordergrund. Es wird untersucht, ob die in Kapitel 7 beschriebenen Methoden geeignet sind, Locking zu vermeiden. Die Effizienz und Verzerrungsempfindlichkeit der vorgeschlagenen Elemente wird außerdem mit der anderer Elemente aus der Literatur verglichen. Die Bezeichnungen der Elementformulierungen richten sich dabei möglichst nach international üblichen Abkürzungen. Viereckelemente werden mit einem Q (Quadrilateral), Dreiecke mit einem T (Triangle) bezeichnet. Elemente der Serendipity-Klasse, also solche ohne Mittelknoten, werden mit S bezeichnet. Die nachfolgende Zahl gibt die Polynomordnung an (z.B. Q1 = bilineares Viereckelement, S2 = achtknotiges Viereckelement). Mit Ausnahme der beiden Plattenelemente DST und MITC-7 werden ausschließlich 7-Parameter-Schalelemente verwendet.

Handelt es sich nicht um reine Verschiebungselemente, so folgt diesen Bezeichnungen eine Auflistung der Veränderungen, die im Vergleich zu einer reinen Verschiebungsformulierung vorgenommen wurden. *Direkt* an die Bezeichnung von Elementtyp und Polynomordnung (ohne Bindestrich) wird die Formulierung des Membrananteils angehängt (z.B. Q1E4 für das bilineare EAS-Element mit 4 Parametern oder Q2ANS für ein neunknotiges Element dessen Membrananteil mit der ANS-Methode verändert ist). Durch einen Bindestrich getrennt folgt gegebenenfalls ein Hinweis auf die Formulierung des Querschubanteils (z.B. Q1-ANS für das vierknotige ANS-Element bzw. Q1E4-ANS wenn der Membrananteil mit der EAS-Methode verändert wurde). Schließlich weist der Buchstabe T („thickness“) nach einem weiteren Bindestrich auf die Anwendung der ANS-Methode auf den konstanten Anteil  $\alpha_{33}$  der Normalverzerrungen in Dickenrichtung hin (z.B. T1-DSG-T für das dreiknotige DSG-Element mit ANS-Interpolation von  $\alpha_{33}$ ). Alle Bezeichnungen sind in Abb. 9.1 zusammengefaßt.

Bei der Verbesserung des Querschubanteils der viereckigen Elemente wird meist die DSG-Methode gewählt. Bei den vierknotigen Elementen sind die Ergebnisse dabei die gleichen, die auch mit der ANS-Methode erhalten werden, bei neunknotigen nur im Fall einer konstanten Jacobi-Matrix. Die Unterschiede zwischen Q2-ANS und Q2-DSG sind jedoch gering.

### 9.1 Patchtest

Die Bedeutung des Patchtests wurde bereits in Abschnitt 6.4.4 besprochen. An dieser Stelle soll nur kurz erwähnt werden, wie sich die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Elemente in bezug auf den Patchtest verhalten.

Alle Elemente, außer Q2ANS, bestehen den *Patchtest für konstante Membranspannungen* (Normal- und Schubspannungen). Obwohl also die Modifikation des Membrananteils mit der ANS-Methode Membranlocking zu vermeiden in der Lage ist, was mit der EAS-Methode nur beschränkt gelingt (Abschnitt 9.3.1), ist die Anwendung nicht empfehlenswert. Im allgemeinen konvergieren die Elemente im Membrananteil nicht zur wahren Lösung.

Reine Verschiebungselemente bestehen den *Patchtest für Biegung bei Platten* nur für quadratische und höhere Ansatzfunktionen. Bei den Elementen Q1 und T1 treten bereits bei rechtwink-

	<b>Methode:</b>	<b>vermeidet ...</b>	<b>beschrieben in ...</b>
<b>Basiselement</b>			
T1	lineares Dreieck (3 Knoten)	—	...Anhang C
T2	quadratisches Dreieck (6 Knoten)	—	...Anhang C
Q1	lineares Viereck (4 Knoten)	—	...Anhang C
Q2	quadratisches Viereck (9 Knoten)	—	...Anhang C
S2	quadratisches Serendipity- Element (8 Knoten)	—	...Anhang C
...RI...	reduziert integriert	... sämtliche Locking-Effekte	...Anhang C
<b>Membrananteil</b>			
..E4, ..E7, ..E9, ..E11	EAS-Methode (4, 7, 9 oder 11 Parameter)	... Schublocking, volumetrisches Locking und Membranlocking	...Abschnitt 7.4
...ANS	ANS-Methode		...Abschnitt 7.2
<b>Querschubanteil</b>			
...-DSG	DSG-Methode	... Querschublocking	...Abschnitt 7.3
...-SDSG	stabilisierte DSG-Methode		...Abschnitt 7.5
...-ANS	ANS-Methode		...Abschnitt 7.2
<b>Normalverzerrungen in Dickenrichtung</b>			
...-...-T	ANS-Methode	... Dickenlocking bei gekrümmten Elementen	...Abschnitt 7.2
<b>zum Vergleich: 5-Parameter-Plattenelemente aus der Literatur</b>			
MITC-7	Sechsknotiges Dreieckelement ANS-Methode für Querschub- anteil + „Bubble“-Funktion	... Querschublocking	...Bathe et al. (1989)
DST	„Discrete Shear Triangle“ dreiknotiges Element + inkompatible Verschiebungen	... Querschublocking	...Batoz und Katili (1992)

Abb. 9.1: Bezeichnungen der finiten Elemente

ligen Elementen parasitäre Querkräfte auf. Alle Serendipity-Elemente bestehen — unabhängig von der Integrationsordnung — diesen Test nur für rechtwinklige Elemente, nicht für verzerrte. Da die Schlankheit der Elemente sich mit Netzverfeinerung verringert, nimmt auch der Anteil der Querschubverzerrungen ab. Die Konvergenz zur richtigen Lösung ist damit gewährleistet. Alle Elemente, bei denen der Querschubanteil mit der DSG-Methode modifiziert wird, bestehen diesen Test. Dasselbe gilt für die viereckigen ANS-Elemente.

Der *Patchtest für Biegung bei Schalen* kann nur für solche Schalen durchgeführt werden, bei denen dehnungslose Verformungen möglich sind. Keines der hier beschriebenen Elemente besteht diesen Test. Es gibt jedoch deutliche Unterschiede bei der Größe der parasitären Spannungen (Abschnitt 9.3.1). Nach Kenntnisstand des Autors wurde in der Literatur noch kein schubweiches Schalenelement beschrieben, daß dehnungslose Verformungen für verzerrte Netze exakt darstellen kann.

Stabilisierte DSG- und ANS-Elemente verhalten sich in bezug auf den Patchtest prinzipiell so, wie nicht stabilisierte. Es gibt jedoch eine Ausnahme: Konstante Querkräftezustände werden nicht exakt dargestellt. Patchtests für konstante Querkräfte werden in der Regel nicht durchgeführt, weil ihre praktische Bedeutung nicht sehr groß ist. Ein konstanter Querkräftezustand, der nicht mit linearen Momentenverläufen gekoppelt ist, kann nur auftreten, wenn sämtliche Rotationsfreiheitsgrade (beziehungsweise die entsprechenden Komponenten des Differenzvektors) festgehalten werden. Ein solcher Zustand ist aber nicht realistisch. Da die stabilisierten Elemente konsistent formuliert sind, und der Einfluß der Stabilisierung mit der Netzverfeinerung verschwindet, ist die Konvergenz gegen die exakte Lösung gewährleistet.

## 9.2 Verzerrungsempfindlichkeit

Elemente, die bei rechtwinkligen, strukturierten Netzen frei von Locking sind, können versteifen, wenn die Elemente von dieser Form abweichen. Das kommt vor, wenn das Tragwerk eine komplizierte Geometrie hat oder wenn Freivernetzer eingesetzt werden. Der Grund für das schlechtere Verhalten ist die Tatsache, daß bei verzerrten Elementen Spannungs- und Verzerrungsanteile gekoppelt sind, die bei rechtwinkligen Netzen entkoppelt sind. Außerdem nimmt die Approximationsgüte der numerischen Integration ab.

Bei der Verbesserung des Membrananteils mit der EAS-Methode wirkt es sich deshalb günstig aus, daß die Verzerrungsverläufe „angereichert“ werden. Bei der ANS-Methode werden bestimmte Verzerrungsanteile eliminiert, die entsprechenden Elemente sind damit anfälliger gegen Netzverzerrungen. Dasselbe gilt für reduziert integrierte Elemente.

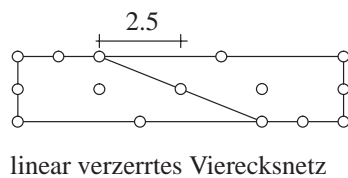
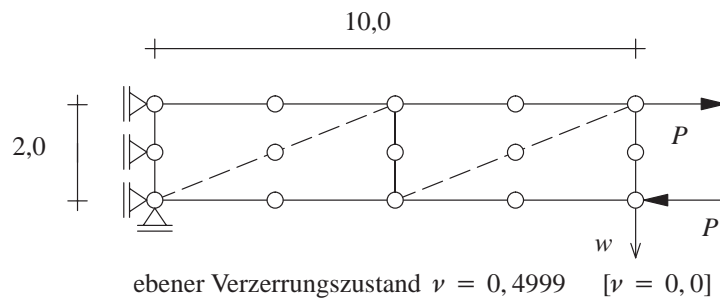
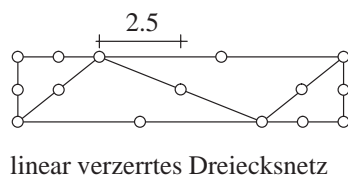
Das bekannteste Testproblem zur Untersuchung der Verzerrungsempfindlichkeit von Scheibenelementen ist der einseitig eingespannte Kragarm mit Endmoment. Er wird hier mit linearen und quadratischen Elementen untersucht. Für den Fall des ebenen Verzerrungszustands bei fast inkompressiblem Material treten Schublocking und volumetrisches Locking auf und die Verzerrungsempfindlichkeit ist besonders ausgeprägt. Die Ergebnisse für  $\nu = 0,0$ , die in Abb. 9.2 in eckigen Klammern angegeben sind, erlauben eine genaue Trennung der beiden Locking-Effekte.

Die numerischen Ergebnisse für die Verschiebung  $w$  am Balkenende werden mit der Lösung nach der schubweichen Balkentheorie (Timoshenko) verglichen. Wenn in Dickenrichtung des Balkens das Netz nicht verfeinert wird, kann diese Lösung als „exakte“ Lösung betrachtet werden. Bis auf die linearen Verschiebungselemente T1 und Q1 vermögen alle Elemente im unverzerrten Zu-

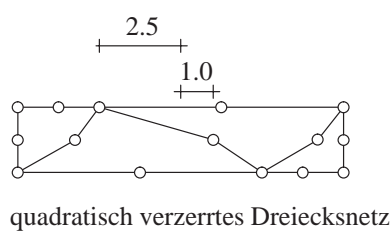
stand diese Lösung exakt darzustellen. Sämtliche linearen Elemente weisen jedoch bei einem verzerrten Netz Abweichungen zur exakten Lösung auf. Bei den EAS-Elementen ist es in diesem Beispiel offensichtlich nicht so entscheidend, wieviele zusätzliche Verzerrungsanteile verwendet werden.

Alle quadratischen Elemente — außer dem ANS-Element — sind unempfindlich gegen lineare Netzverzerrungen. Bei quadratischen Netzverzerrungen liefert nur noch das EAS-Element fast die exakte Lösung. Hier wird die Bedeutung der EAS-Methode zur Verringerung der Verzerrungsempfindlichkeit besonders deutlich. Erstaunlich gut schneidet bei diesem Test das reduziert integrierte achtknotige Element S2RI ab. Das liegt vermutlich daran, daß bei den neunknotigen Elementen die Verschiebung des Mittelknotens einen Teil des Fehlers verursacht, was bei dem Serendipity-Element ohne Mittelknoten entfällt.

Die Verzerrungsempfindlichkeit von Schalenelementen in bezug auf den Biegeanteil kann anhand einer Plattenberechnung getestet werden. Dabei muß gleichzeitig der Einfluß der Schlankheit berücksichtigt werden. Um für Schalen relevante Daten zu bekommen ist es sinnvoll, auch Schlankheiten zu untersuchen, für die lineare Plattentheorien eigentlich nicht mehr gültig sind.



Verzerrung	T1	Q1	Q1E4	Q1E7
keine	11,6% [8,4%]	0,0% [24,2%]	100% [100%]	100% [100%]
linear	17,0% [8,7%]	3,7% [7,7%]	67,2% [62,9%]	68,2% [64,0%]



Verzerrung	T2	Q2	S2RI	Q2E11	Q2ANS
keine	100% [100%]	100% [100%]	100% [100%]	100% [100%]	100% [100%]
linear	100% [100%]	100% [100%]	100% [100%]	100% [100%]	34,4% [67,9%]
quadratisch	36,1% [43,0%]	16,7% [35,4%]	96,2% [92,9%]	102,9% [102,9%]	63,0% [60,8%]

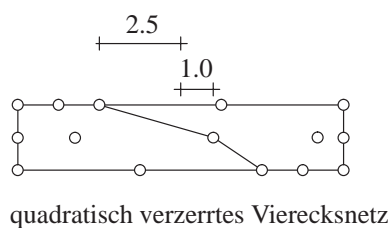


Tabelle:  $w$  im Vergleich zur Balkentheorie ( $w_{Balken}=100\%$ )

Abb. 9.2: Kragarm mit Endmoment – Einfluß der Netzverzerrung

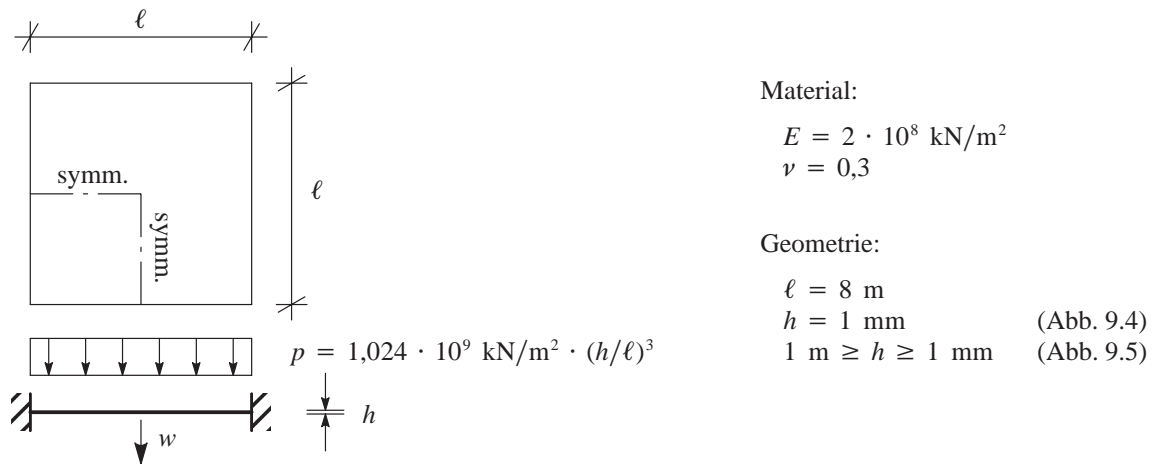


Abb. 9.3: Quadratische Platte unter Gleichlast

Abb. 9.4 zeigt die Ergebnisse von Berechnungen der Durchbiegung  $w$  am Mittelpunkt einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte unter Gleichlast (Abb. 9.3). Aufgrund der Doppelsymmetrie der Struktur genügt es, das Viertelsystem zu betrachten. Bei dieser extrem schlanken Platte handelt es sich nicht um ein realistisches Tragwerk. Anhand dieses Beispiels kann jedoch die Verzerrungsempfindlichkeit der Elemente und die Wahl des Parameters  $\lambda_s$  für die stabilisierten DSG-Elemente (SDSG) diskutiert werden. Dazu wird die Platte mit einem unverzerrten, einem leicht verzerrten und einem stark verzerrten Netz für verschiedene Werte von  $\lambda_s$  berechnet. Die verwendeten, noch groben, Netze, sowie die Resultate sind in Abb. 9.4 dargestellt. Die analytische Lösung nach der Kirchhoff-Theorie für die Verschiebung in Plattenmitte ist  $w_K = 0,623$  m.

Zunächst fällt auf, daß der Einfluß der Stabilisierung bei den linearen Elementen größer ist, als bei den quadratischen. In allen Fällen werden die Elemente weicher, wenn  $\lambda_s$  erhöht wird. Das bedeutet, daß dieser Parameter nicht zu groß gewählt werden darf. Numerische Erfahrungen zeigen, daß ein zu großes  $\lambda_s$  dazu führt, daß die Verschiebungen zu groß werden und damit schlechter konvergieren, als bei nicht stabilisierten Elementen. Ist  $\lambda_s$  dagegen zu klein, treten bei verzerrten Netzen möglicherweise Locking und Oszillationen der Querkräfte auf. Die Wahl von  $\lambda_s$  sollte also nach dem Grundsatz „so groß wie nötig aber so klein wie möglich“ erfolgen. Die numerischen Untersuchungen, die in Abb. 9.4 dokumentiert sind, geben einen Anhaltspunkt für eine geeignete Wahl von  $\lambda_s$ . Offensichtlich ist es sinnvoll,  $\lambda_s$  mindestens so groß zu wählen, daß die Abweichung der Ergebnisse, die mit verzerrten Netzen erhalten werden, zu denen der unverzerrten Netze bei einer weiteren Steigerung von  $\lambda_s$  nicht mehr deutlich kleiner wird.

Bezugnehmend auf — hier nicht dargestellte — weitere numerische Tests und Hinweise aus der Literatur (Abschnitt 7.5), werden die folgenden Werte vorgeschlagen:

- $\lambda_s = 0,12$  für die linearen Elemente T1-SDSG und Q1-SDSG, sowie
- $\lambda_s = 0,01$  für die quadratischen Elemente T2-SDSG und Q2-SDSG.

In allen folgenden Beispielen werden für die mit SDSG bezeichneten Elemente diese Faktoren verwendet. Die Stabilisierung der quadratischen Elemente ist zur Vermeidung von Locking bei Verschiebungsberechnungen zwar praktisch überflüssig, besonders beim dreieckigen Element T2-SDSG werden dadurch jedoch die Querkräfte verbessert (Abb. 9.10).

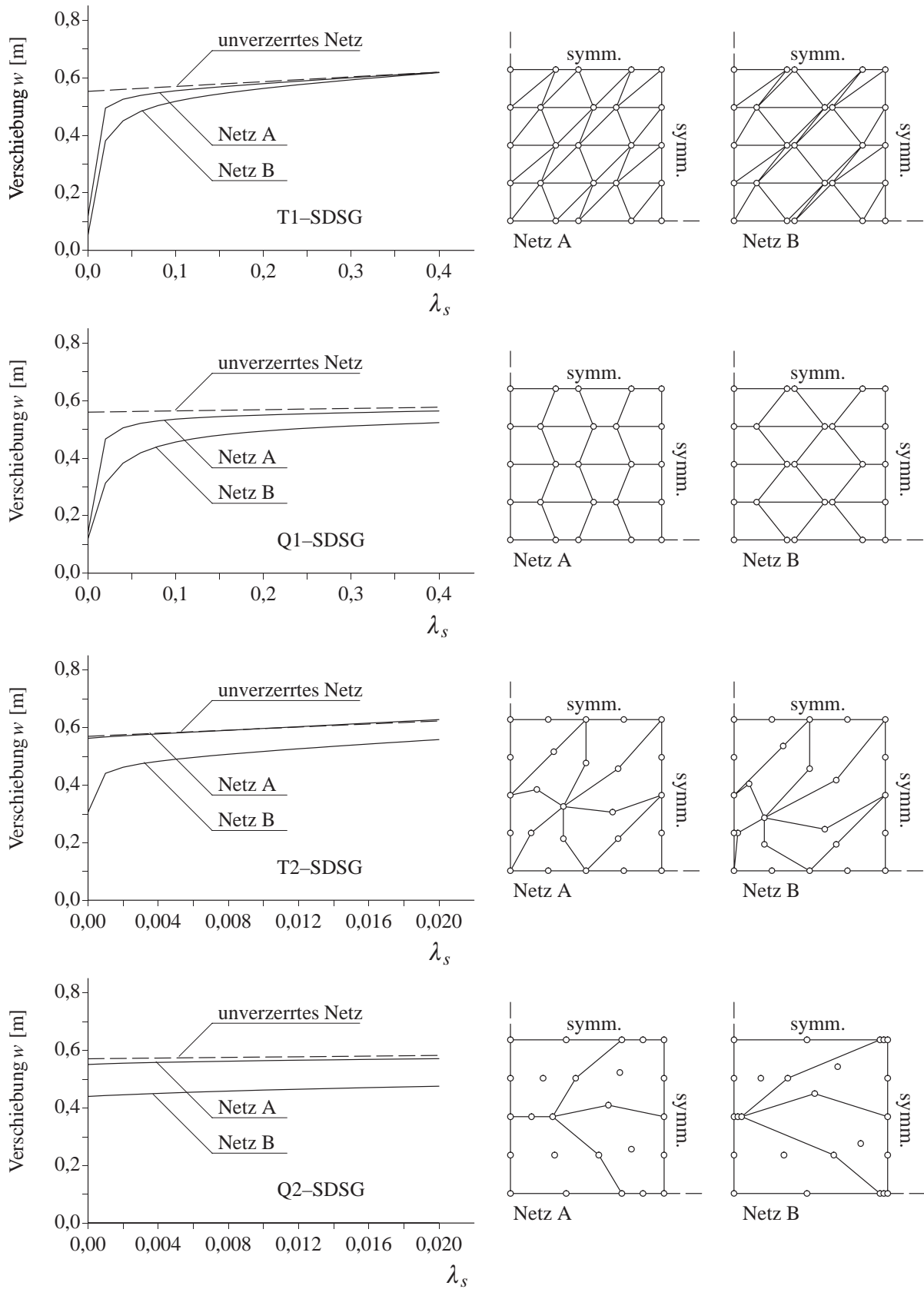


Abb. 9.4: Einfluß der Wahl des Parameters  $\lambda_s$  bei stabilisierten Elementen

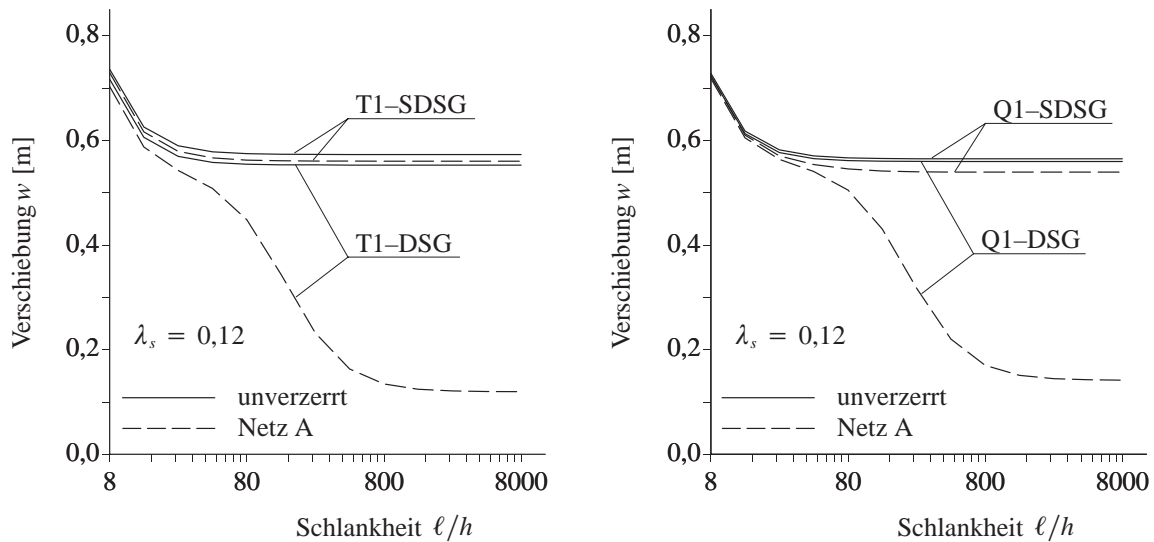


Abb. 9.5: Verzerrungsempfindlichkeit des Biegeanteils in Abhängigkeit der Schlankheit

Abb. 9.5 demonstriert, daß die so stabilisierten, linearen Elemente gegenüber den nicht stabilisierten deutliche Vorteile bei der Berechnung schlanker Platten (und Schalen) mit verzerrten Netzen aufweisen. Die dargestellten Verschiebungen in Abhängigkeit der Schlankheit wurden mit den „leicht verzerrten“ Netzen ermittelt. Die abfallenden Kurven der nicht stabilisierten Elemente sind ein Hinweis darauf, daß für sie bereits bei diesen verhältnismäßig geringen Elementverzerrungen keine gleichmäßige Konvergenz bezüglich des Dickenparameters  $h$  zu erwarten ist. Diese Elemente sind also streng genommen nicht lockingfrei.

### 9.3 Konvergenzraten bei linearen Problemen

#### 9.3.1 Gekrümmter Balken, Membran- und Dickenlocking

Ein einfacher Test für Membranlocking ist der Fall reiner Biegung eines kurzen Zylinderausschnitts, der, wenn die Querdehnzahl Null ist, auch als gekrümmter Balken berechnet werden kann (Abb. 9.6). Dieser einfache Fall kann auch als Biege-Patchtest für Schalenelemente betrachtet werden und verursacht gewöhnliche größere Probleme, als jeder andere Patchtest. Au-

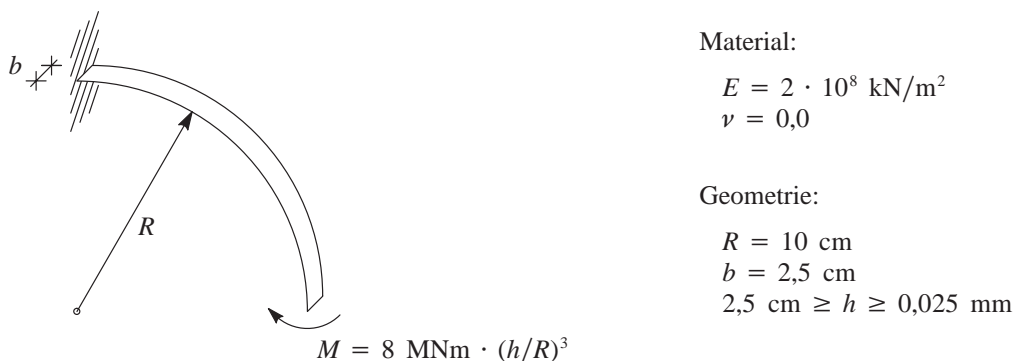


Abb. 9.6: Eingespannter Kreiszyylinderstreifen unter Einzelmoment

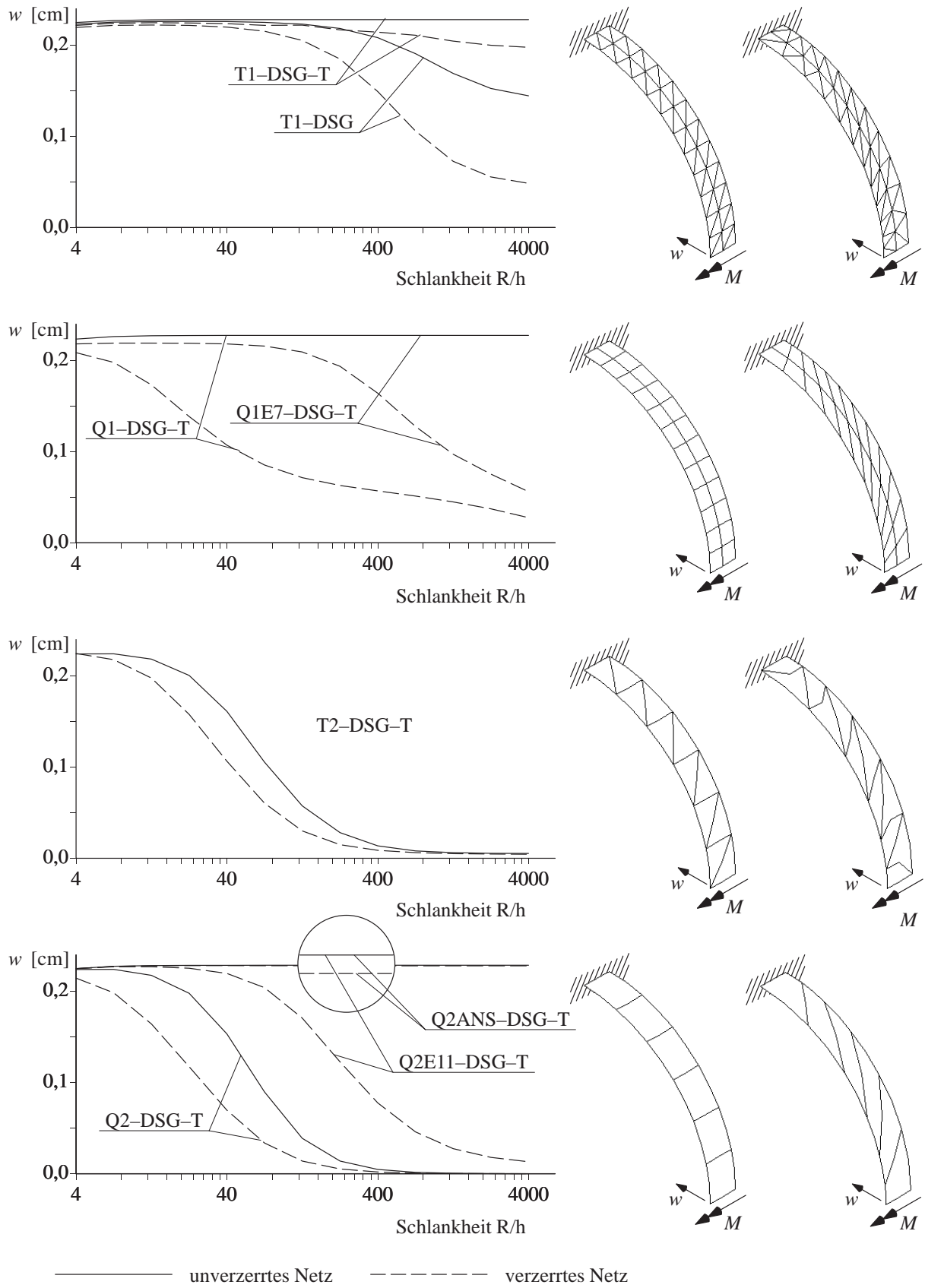


Abb. 9.7: Gekrümmter Balken unter reiner Biegung — Membran- und Dickenlocking



Berdem kann an diesem Beispiel die Bedeutung der ANS–Interpolation der Normalverzerrungen in Dickenrichtung zur Vermeidung von Dickenlocking studiert werden.

In Abb. 9.7 sind die Ergebnisse für die Horizontalverschiebung  $w$  am Ende des Kragarms in Abhängigkeit der Schlankheit für verschiedene Elemente dargestellt. Die Skalierung der Last mit  $(h/R)^3$  sorgt dafür, daß die Ergebnisse unabhängig von der Schlankheit sind.

Die linearen und bilinearen Elemente sind für regelmäßige Netze frei von Membranlocking. Das lineare Dreieckelement T1–DSG–T zeigt auch beim verzerrten Netz noch ein gutes Verhalten. Die Ergebnisse hängen nur leicht von der Schlankheit ab. Da durch die Mittelung des Direktors auch in den eigentlich ebenen dreiknotigen Elementen eine Krümmung entsteht, sind diese nicht ganz frei von Membranlocking. Am Beispiel der dreiknotigen Elemente wird auch deutlich, daß die ANS–Modifikation des konstanten Anteils der Normalverzerrungen in Dickenrichtung bedeutsam ist. Das Element T1–DSG versteift bereits beim unverzerrten Netz.

Das vierknotige Element Q1E7–DSG–T, bei dem der Membrananteil mit Hilfe der EAS–Methode erweitert ist, zeigt für den Fall des verzerrten Netzes ein deutlich besseres Verhalten, als Q1–DSG–T. Ganz vermieden wird Membranlocking damit jedoch nicht. Für unverzerrte Netze sind vierknotige Elemente eben und damit frei von Membranlocking.

Das sechsknotige Dreieckelement T2–DSG–T ist bereits beim unverzerrten Netz gekrümmt und weist deshalb Membranlocking auf. Der Effekt wird noch etwas ausgeprägter wenn das Netz verzerrt ist. Sollen diese Elemente für die Berechnung dünner Schalen eingesetzt werden, so ist eine Verbesserung des Membrananteils unbedingt notwendig. Eine Erweiterung der Membranverzerrungen mit der EAS–Methode ist allerdings nicht möglich. Alternative Verfahren wurden vom Autor bis jetzt noch nicht untersucht.

Bei den quadratischen Viereckelementen bietet sich prinzipiell dasselbe Bild wie bei den linearen. Das mit der EAS–Methode erweiterte Element Q2E11–DSG–T ist für das unverzerrte Netz frei von Membranlocking. Im Gegensatz zum entsprechenden linearen Element entstehen beim quadratischen Element Q2–DSG–T allerdings bereits hier parasitäre Membranspannungen. Für das verzerrte Netz ist Q2E11–DSG–T zwar nicht ganz frei von Locking, aber wieder deutlich besser als Q2–DSG–T, bei dem der Membrananteil rein verschiebungsformuliert ist.

Ein quadratisches Schalenelement, das völlig frei von Membranlocking ist, ist Q2ANS–DSG–T, bei dem der Membrananteil mit der ANS Methode erweitert wurde. Die Formulierung und das numerische Verhalten des Elements entspricht praktisch dem des 5–Parameter–Schalenelements von Pinsky und Jang (1987). Leider besteht dieses Element jedoch nicht den Patchtest für konstante Membranspannungen, weshalb im allgemeinen keine Konvergenz zur wahren Lösung erwartet werden kann. Es ist deshalb nicht empfehlenswert dieses Element zu verwenden, obwohl es nach Maßgabe dieses Beispiels sehr attraktiv erscheint. Möglicherweise ist eine stabilisierte Version des Elements die optimale Lösung zur Vermeidung von Membranlocking. Mit Hilfe eines geeigneten Stabilisierungsterms könnte erreicht werden, daß das Element zur wahren Lösung konvergiert, ohne den Patchtest zu bestehen.

Abschließend soll festgestellt werden, daß keines der untersuchten Elemente den Biegepatchtest für Schalen besteht. Am besten schneidet hier noch das dreiknotige Element ab. Die EAS–Methode ist zwar geeignet, um die Effizienz viereckiger Elemente bei der Berechnung von dünnen Schalen bei biegedominierten Verformungen zu erhöhen, gleichmäßige Konvergenz bezüglich des Dickenparameters  $h$  kann jedoch im allgemeinen nicht garantiert werden.

### 9.3.2 Kreisplatte

Am Beispiel einer eingespannten Kreisplatte unter Gleichlast (Abb. 9.8) werden die Konvergenzgeschwindigkeit der Verschiebungen und die Qualität der Querkräfte bei Biegeproblemen untersucht. Abb. 9.9 zeigt die Ergebnisse für die Durchbiegung in Plattenmitte in Abhängigkeit der Knotenanzahl. Die analytische Lösung nach der Kirchhoff–Theorie

$$w_K = \frac{pr^4}{64 \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}} \approx 0,1073 \text{ cm} \quad (9.1)$$

(z.B. Szilard (1974)) ist in den Abbildungen mit (K) bezeichnet.

Das dreiknotige DSG–Element schneidet in diesem Beispiel im Vergleich zum dreiknotigen DST–Element verhältnismäßig schlecht ab. Die Ergebnisse stehen damit in scheinbarem Widerspruch zu denen, die von Bletzinger et al. (1998) veröffentlicht wurden, bei denen das Element T1–DSG praktisch dieselbe Konvergenzrate aufweist, wie das DST–Element.

Der Grund für diesen Unterschied ist die Tatsache, daß für die hier dokumentierten Ergebnisse ein Netz verwendet wurde, wie es in Abb. 9.8 auf der linken Seite dargestellt ist. In Bletzinger et al. (1998) wurden die Dreiecksnetze dagegen durch Halbierung der Elemente eines Vierecksnetzes generiert (Abb. 9.8 rechts). Offensichtlich kommt ein solches Netz den DSG–Elementen eher entgegen. Die Netzabhängigkeit der dreieckigen DSG–Elemente wird sich später, beim Betrachten der Querkräfte, noch deutlicher zeigen. Beim Vergleich von DSG– und DST–Elementen muß jedoch auch gesagt werden, daß die DST–Elemente, aufgrund der zusätzlichen Freiheitsgrade und der höheren Anzahl von Integrationspunkten, bei gleicher Knotenanzahl numerisch aufwendiger sind.

Das sechsknotige DSG–Element T2–DSG weist in diesem Beispiel von allen Elementen die höchste Konvergenzrate in den Verschiebungen auf. Es erreicht bereits bei einem Netz mit 120 Knoten eine auf 4 signifikanten Stellen konvergierte Lösung. Das sechsknotige MITC–7–Element, das außerdem noch zusätzliche Freiheitsgrade im Elementinnern besitzt, verhält sich bei diesem Beispiel etwas schlechter als das entsprechende DSG–Element. Die Stabilisierung des sechsknotigen Elements verschlechtert etwas die Konvergenz der Verschiebungen, da diese von oben konvergieren (T2–SDSG).

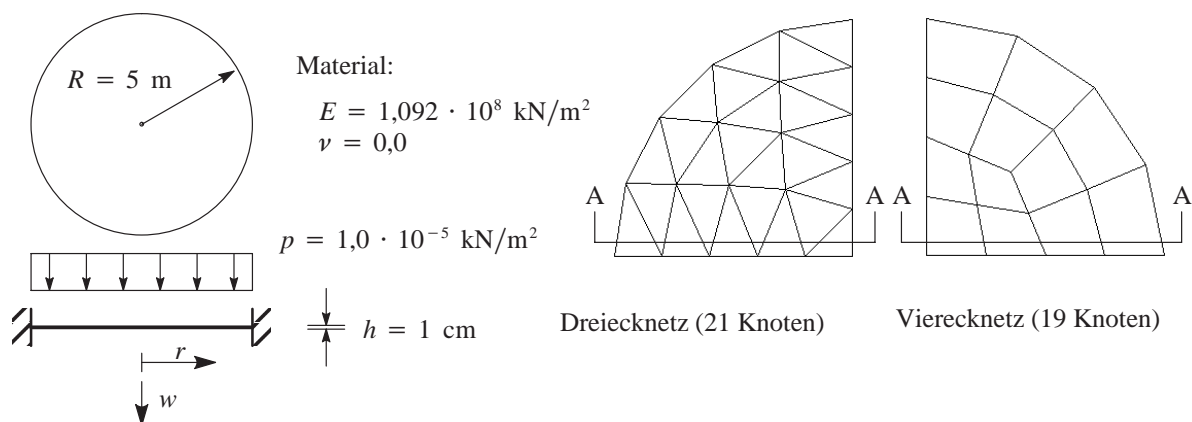


Abb. 9.8: Kreisplatte unter Gleichlast — statisches System und Diskretisierung

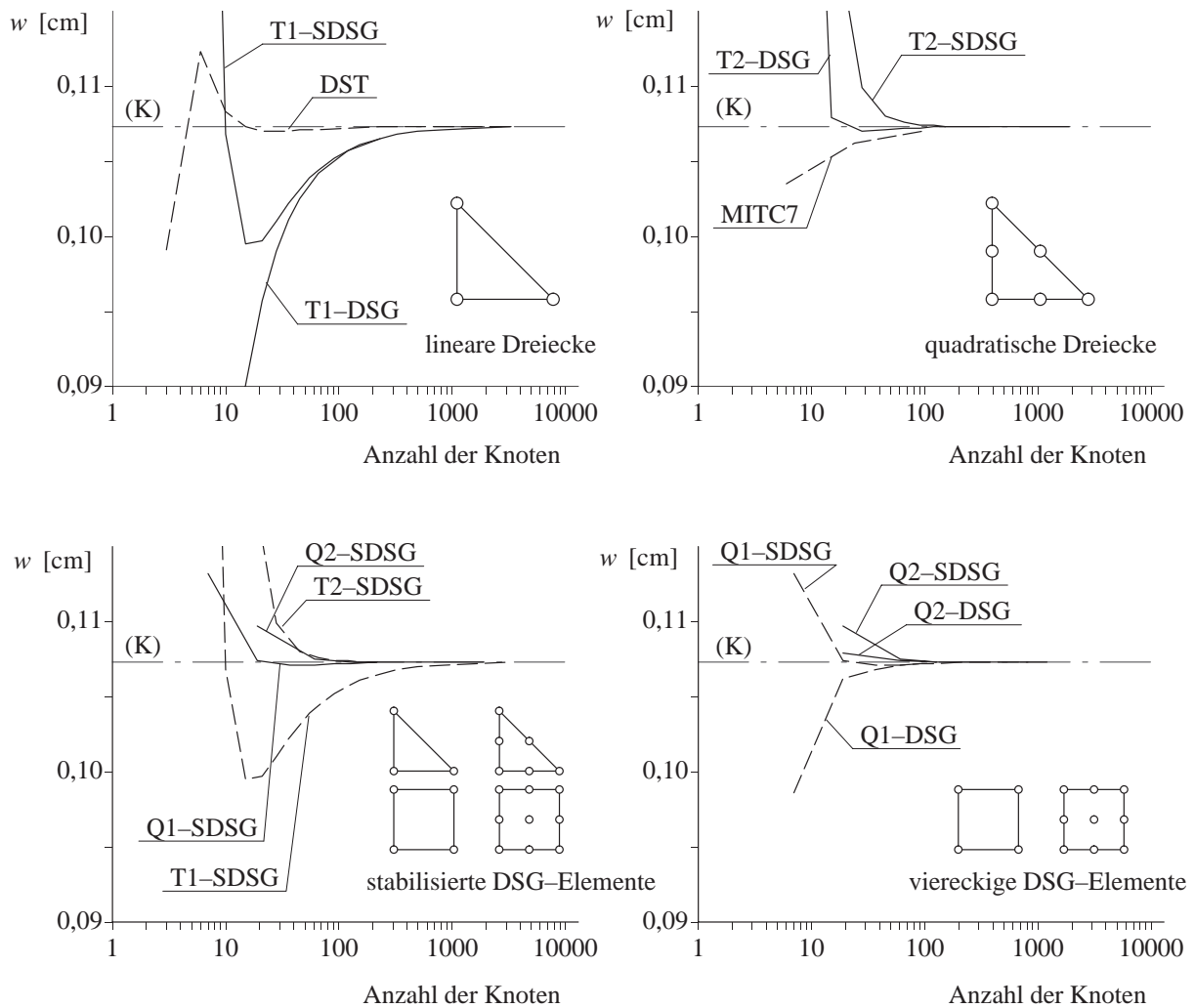


Abb. 9.9: Kreisplatte unter Gleichlast – Konvergenz der Verschiebungen

Eine Gegenüberstellung sämtlicher stabilisierter DSG-Elemente (Abb. 9.9 links unten) zeigt, daß bei den linearen Elementen das viereckige deutlich schneller konvergiert, als das dreieckige. Die beiden quadratischen Elemente sind hier praktisch gleichwertig.

Schließlich kann festgestellt werden, daß sämtliche viereckigen Elemente verhältnismäßig schnell gegen die Solllösung konvergieren (Abb. 9.9 rechts unten). Beim linearen Element Q1-SDSG beschleunigt die Tatsache, daß die Stabilisierung das Element weicher macht, die Konvergenz, da die Verschiebungen beim nicht stabilisierten Element Q1-DSG von unten konvergieren.

Die Betrachtung der Querkraftverläufe in radialer Richtung (Schnitt A-A in Abb. 9.8) offenbart ein Problem der dreieckigen DSG-Elemente. Die Querkräfte sind zwar im Mittel nahe an der analytischen Lösung, neigen jedoch zu Oszillationen. Darüberhinaus sind diese Oszillationen stark von der Wahl des Netzes abhängig. Es wurde bereits in Kapitel 7.3 erwähnt, daß die Elementsteifigkeitsmatrizen der dreieckigen DSG-Elemente von der Knotennumerierung abhängig sind. Die Elemente sind also nicht objektiv. Der Unterschied zwischen Netz A und Netz B in Abb. 9.10 besteht nur in der Knotennumerierung, die in Netz B bezüglich Netz A zyklisch vertauscht ist.

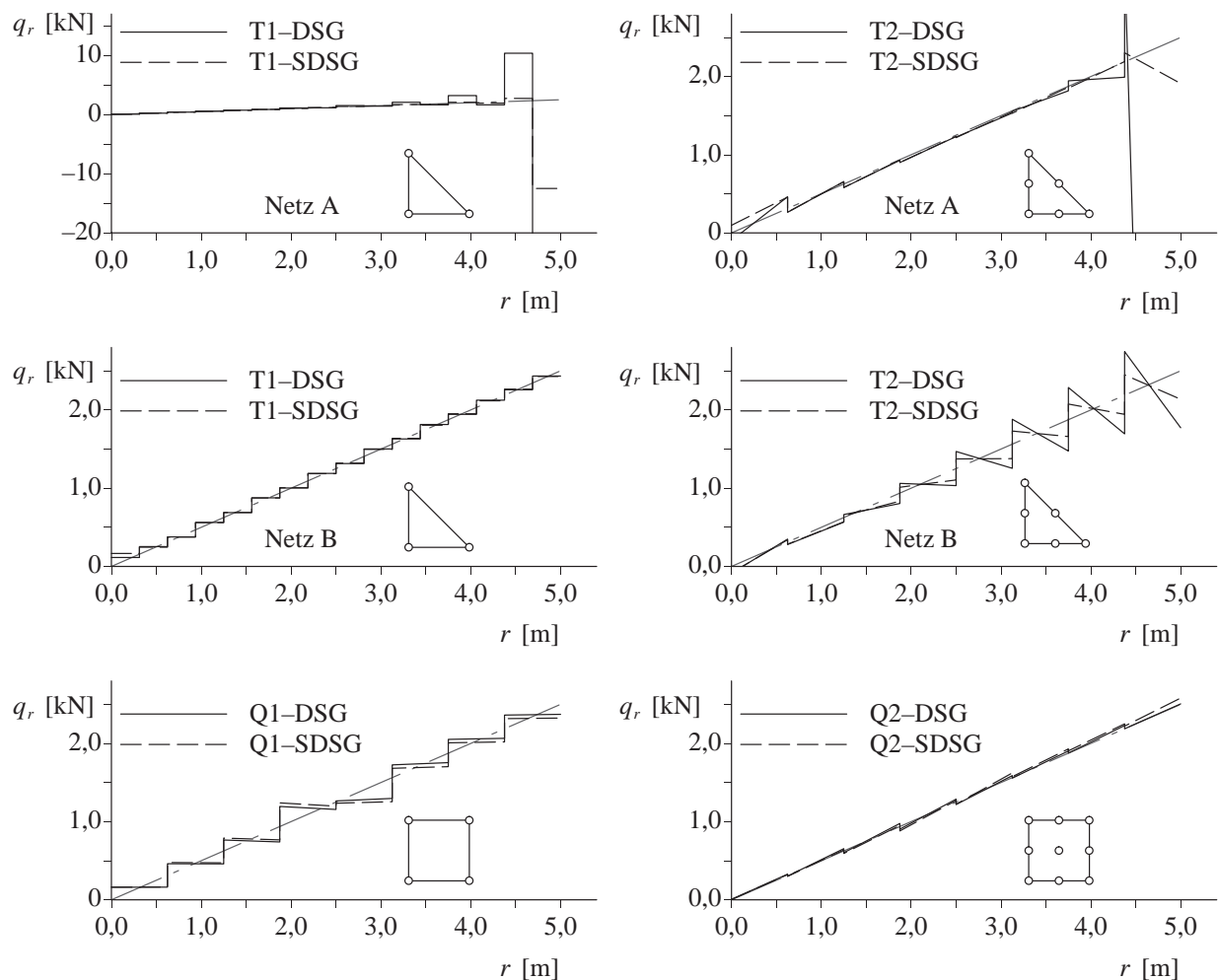


Abb. 9.10: Kreisplatte unter Gleichlast – Querkraftverläufe

Die Querkraftverläufe in den beiden Netzen haben eine deutlich unterschiedliche Charakteristik. Bei Netz A sind die Ergebnisse im Gebiet verhältnismäßig glatt. Am eingespannten Rand treten jedoch sehr große Abweichungen zur exakten Lösung auf. Beim linearen Element sind selbst die Ergebnisse des stabilisierten Elements am Rand unbrauchbar. Bei Netz B verhält sich das lineare Element „optimal“. Die Oszillationen der Querkräfte beim quadratischen Dreieckelement können durch Stabilisierung unterdrückt werden.

Wird der Stabilisierungsparameter  $\lambda_s$  immer weiter gesteigert, werden die Oszillationen der Querkräfte immer kleiner. Für  $\lambda_s = 0,1$  (nicht dargestellt) entspricht der Querkraftverlauf bei T2-SDSG praktisch dem des neunknotigen. Allerdings werden dann die Verschiebungen etwas überschätzt. Diese Resultate bestätigen im übrigen die Erfahrungen, die in Lyly et al. (1993) dokumentiert sind. Im Hinblick darauf, daß in praktischen Berechnungen die Kraftgrößen meist wichtiger sind, als die Verschiebungen ist also eine Stabilisierung mit hohen Werten für  $\lambda_s$  durchaus empfehlenswert.

Bei den viereckigen DSG-Elementen sind die Ergebnisse unabhängig von der Knotennumerierung. Beide Elemente, Q1-DSG und Q2-DSG zeigen praktisch dieselbe Genauigkeit in den Querkräften wie die stabilisierten Versionen Q1-SDSG und Q2-SDSG. Mit dem neunknotigen Element erhält man praktisch keine Abweichung mehr zur analytischen Lösung.

### 9.3.3 Biege- und membrandominierte Verformungen einer Halbkugel

Als letzter Test für geometrisch lineare Probleme wird eine Halbkugelschale betrachtet. Bei der Verformung dieser dünnen, doppelt gekrümmten Schale treten sämtliche Locking-Probleme, die in den vorangegangenen Abschnitten absichtlich separat betrachtet wurden, gleichzeitig auf. Um aus diesem Testbeispiel möglichst allgemeingültige Aussagen ableiten zu können, werden zwei unterschiedliche Randbedingungen betrachtet.

In Fall (a) ist der Rand der Schale frei. Es treten also vor allem Biegedeformationen auf. Es ist zu erwarten, daß in diesem Fall Membranlocking und Querschublocking, sowie Dickenlocking auftreten. In Fall (b), bei dem der Rand eingespannt ist, kann die Schale die Lasten mit Membrankräften abtragen. Hier ist die Biegesteifigkeit der Elemente weniger entscheidend als die Formulierung des Membrananteils. Für die Konvergenz in der Nähe der Lösung könnte jedoch eine Rolle spielen, inwieweit die Elemente in der Lage sind die Rand-Biegestörungen abzubilden. Da die Schale in diesem Fall wesentlich steifer ist, ist die Last im Vergleich zu (a) erhöht.

Bei Ausnutzung der Doppelsymmetrie genügt die Berechnung des Viertelsystems (Abb. 9.11). In Abb. 9.12 sind die Ergebnisse für die Verschiebung  $w$  des Punktes A, in  $x$ -Richtung für beide Fälle dargestellt. A liegt genau im Schwerpunkt des sphärischen Dreiecks, das die diskretisierte Achtelkugel berandet.

Auf der linken Seite sind die Ergebnisse für das biegedominierte Problem abgebildet. Die beiden viereckigen Elemente zeigen hier ein fast identisches Verhalten und sind den dreieckigen Elementen überlegen. Beim sechsknotigen Dreieck T2-SDSG tritt so starkes Membranlocking auf, daß die Konvergenzkurve noch außerhalb des dargestellten Bereichs liegt. Das dreiknotige T1-DSG-Element ist frei von Membranlocking und weist eine gute Konvergenzrate auf.

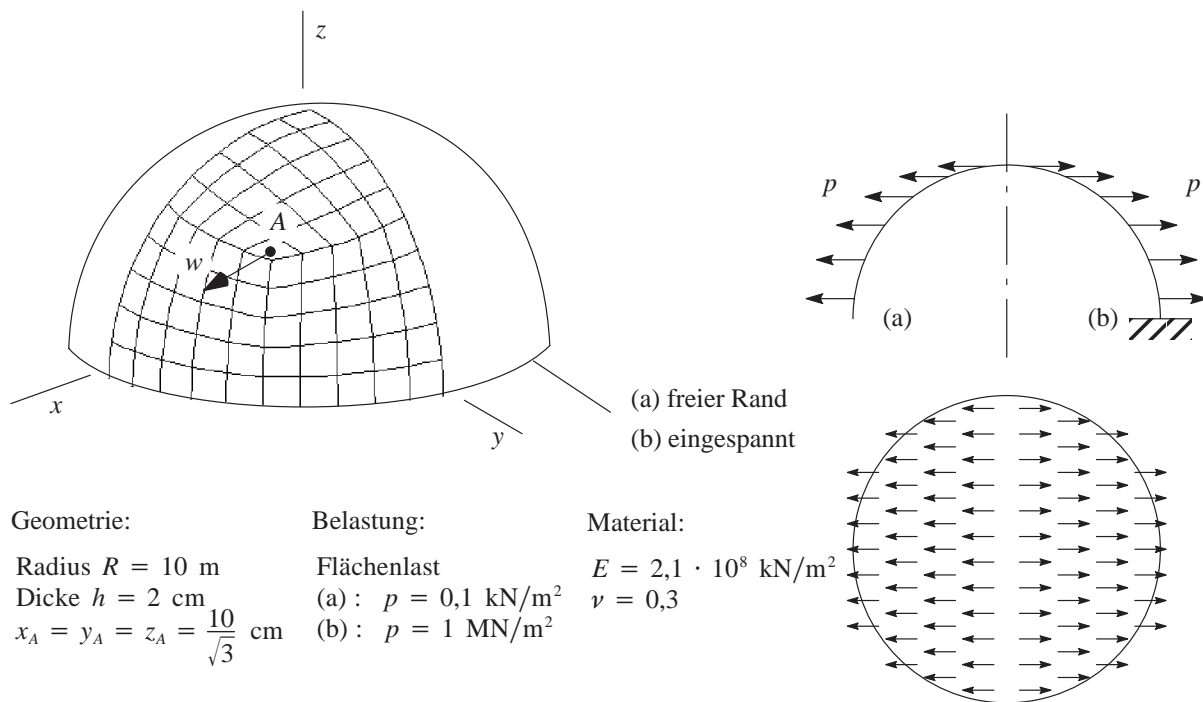


Abb. 9.11: Biege- und membrandominierte Verformungen einer Halbkugel

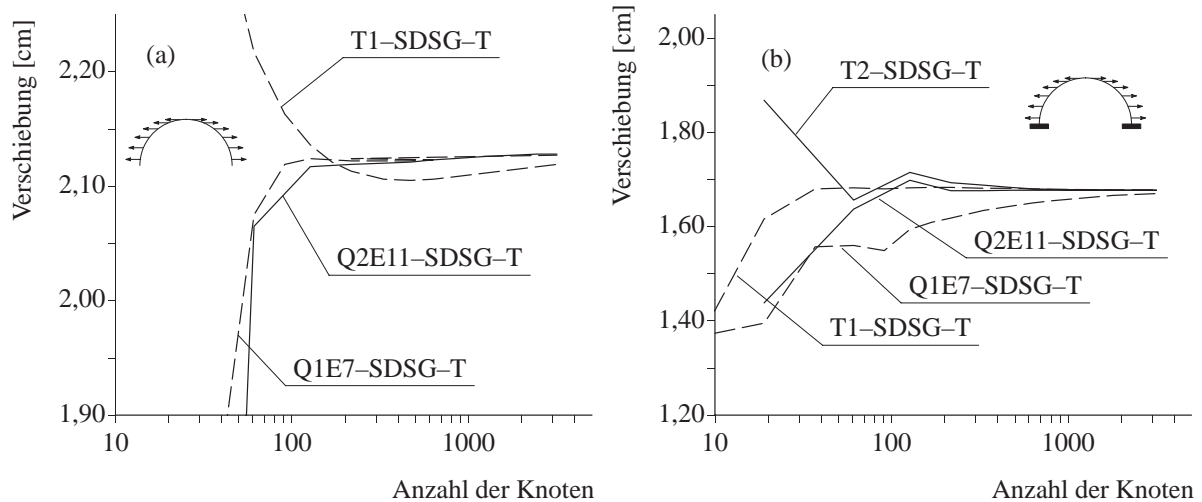


Abb. 9.12: Konvergenz der Verschiebungen für biege- und membrandominierte Probleme

Der membrandominierte Fall liefert etwas überraschende Ergebnisse. Das einfachste Element, T1-SDSG-T, ist hier bei weitem das beste. Es übertrifft sogar das neunknotige Q2E11-SDSG-T, das meistens die besten Konvergenzraten aufweist.

Das wichtigste Fazit diese Untersuchung ist, daß das dreiknotige Element für Schalenberechnungen geeignet ist, obwohl der Membrananteil rein verschiebungsformuliert ist. Für das sechsknotige Element trifft das nicht zu. Starkes Membranlocking macht die Anwendung auf allgemeine Schalentragwerke unmöglich. Die viereckigen Elemente erweisen sich hier einmal mehr als effizient.

## 9.4 Geometrisch und materiell nichtlineare Probleme

### 9.4.1 Zylinderschale nach Scordelis und Lo

Scordelis und Lo (1969) schlagen als Testbeispiel für Schalenelemente die lineare Berechnung einer gelenkig gelagerten Zylinderschale unter Eigengewicht vor (Abb. 9.13). Das Beispiel hat im Vergleich zu vielen anderen „Benchmarks“ den Vorteil, frei von Singularitäten zu sein.

Bei der geometrisch und materiell nichtlinearen Berechnungen dieser Schale tritt ein interessantes Phänomen auf. Roehl und Ramm (1996) beobachten, daß bei der Anwendung einer 5-Parameter-Schalenformulierung, in Abhängigkeit der Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung der Schale, unterschiedliche Deformationsformen entstehen. Die plastischen Verzerrungen konzentrieren sich dabei in Knicken an unterschiedlichen Stellen.

Für Berechnungen mit dem 7-Parameter-Modell konnte eine solche Abhängigkeit nicht beobachtet werden. Das soll hier verifiziert werden. Außerdem soll das Beispiel Aufschluß darüber geben, wie sich die vorgeschlagenen Elemente bei geometrisch und materiell nichtlinearen Problemen verhalten.

Für die elasto-plastische Berechnung wird dasselbe Materialmodell verwendet, wie von Roehl und Ramm (1996). Es handelt sich um eine Formulierung, die für große elasto-plastische Verzerrungen gültig ist und beruht auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Für Details wird auf die Literatur verwiesen (Simo et al. (1985), Roehl (1994)).

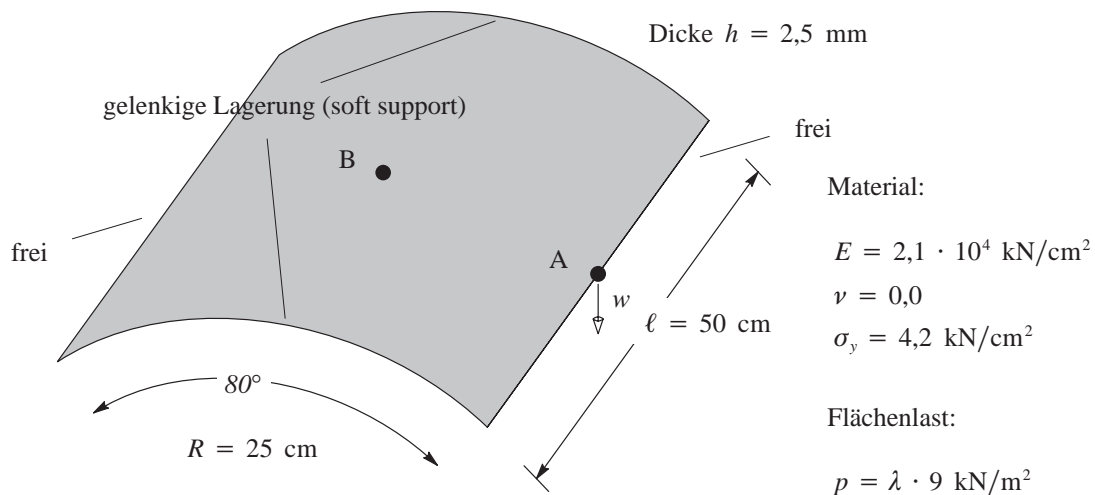


Abb. 9.13: Zylinderschale nach Scordelis und Lo

Abb. 9.14 zeigt Last-Verformungs-Beziehungen, die mit viereckigen Elementen berechnet wurden. In Abb. 9.15 ist die verformte Konfiguration der Schale an ausgewählten Punkten dargestellt. Nach Erreichen einer ersten kritischen Last bei einer Verschiebung von  $w \approx 2,2 \text{ cm}$  beginnt im Bereich des Giebels die Plastizierung zu lokalisieren. Es bildet sich eine ausgeprägte Falte die vom Rand des Firstes diagonal in Richtung Punkt A läuft. Bei der Berechnung mit gleichmäßigen Netzen ist deshalb zu erwarten, daß sehr viele Elemente notwendig sind um das nachkritische Verhalten gut abbilden zu können.

Auf der linken Seite in Abb. 9.14 werden die Last-Verformungskurven verglichen, die sich bei einem Netz von  $12 \times 12$  vierknotigen Elementen für das Viertelsystem ergeben. Die Anzahl der Gauß-Punkte in Dickenrichtung spielt dabei nur in dem Bereich der Verformungsgeschichte eine Rolle, in dem die kritische Last erreicht wird. Das Modell mit drei Gauß-Punkten ist zu weich und die kritische Last wird etwas unterschätzt. An dieser Stelle sieht die Last-Verformungskurve

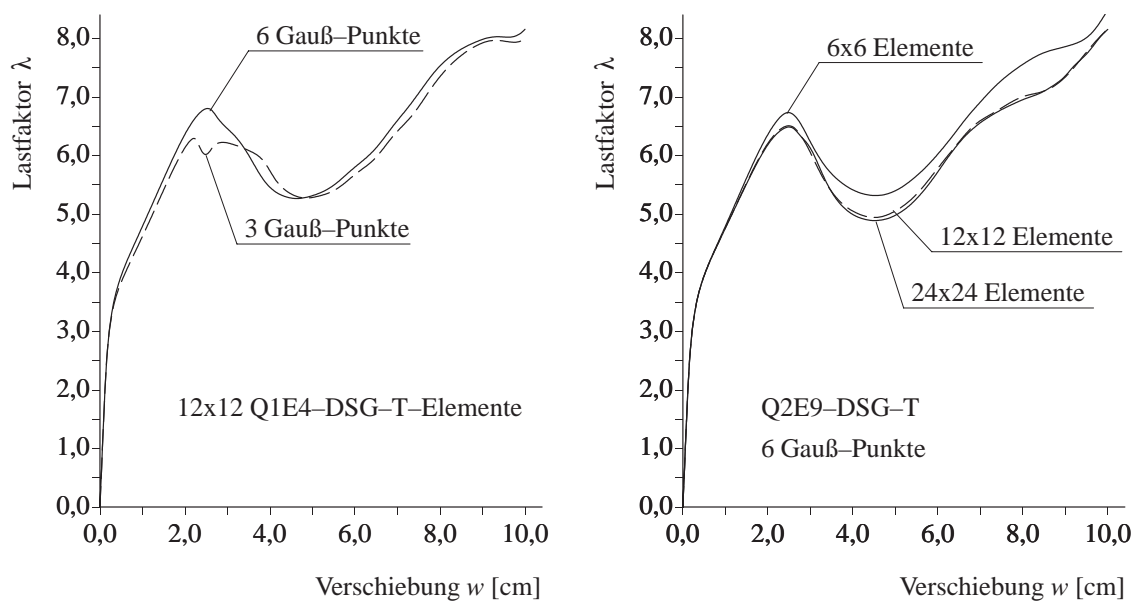


Abb. 9.14: Einfluß der Diskretisierung und der Anzahl der Gaußpunkte

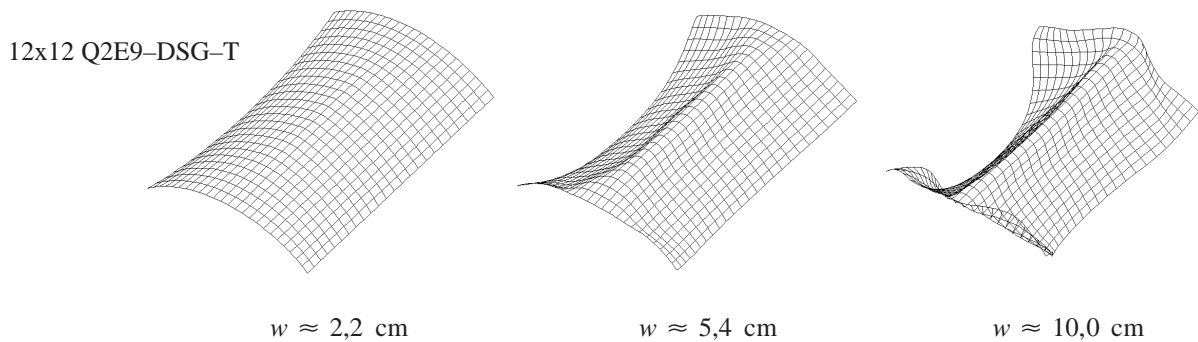


Abb. 9.15: Elasto-plastische Berechnung einer Zylinderschale — Deformationsverlauf

so aus, als ob ein Teil der Schale lokal durchschlägt. Auf die Deformationsform, die sich schließlich einstellt (Abb. 9.15 rechts) hat das jedoch keinen Einfluß.

Die Last-Verformungskurven auf der rechten Seite in Abb. 9.14 demonstrieren, daß die Ergebnisse der neunknotigen Elemente Q2E9-DSG-T bereits bei einem Netz von  $12 \times 12$  Elementen auskonvergiert sind. Eine Berechnung mit der vierfachen Anzahl an Freiheitsgraden liefert praktisch identische Ergebnisse. Für eine materiell nichtlineare Analyse mit lokal hohen Gradienten der Verschiebungen und Spannungen ist das ein verhältnismäßig gutes Ergebnis.

Neben den hier dokumentierten Berechnungen wurden etliche weitere mit anderen Elementen und anderen Netzen durchgeführt. Alle bestätigen sowohl die hier gemachten Aussagen, sowie die Beobachtungen von Roehl und Ramm (1996). Ein wichtiges Fazit dieser Untersuchung ist, daß das 7-Parameter-Modell in diesem Fall nicht so parameterempfindlich ist wie eine 5-Parameter-Formulierung. Selbst für eine geringe Anzahl an Integrationspunkten in Dickenrichtung liefern die Schalen-Berechnungen dasselbe Verformungsverhalten wie die dreidimensionale Analyse, die von Roehl und Ramm (1996) durchgeführt wurde.

#### 9.4.2 Beschreibung großer Rotationen

Die folgenden beiden numerischen Experimente sollen die Frage beantworten, ob die 7-Parameter-Formulierung dazu geeignet ist, Probleme mit großen Rotationen zu beschreiben. Dazu wird zunächst das Durchschlagen eines gekrümmten Bogenstücks mit 7-Parameter-Schalenelementen berechnet. Bei diesem Problem treten Rotationen von über  $180^\circ$  auf.

Das statische System ist in Abb. 9.16 dargestellt. Der Lastfaktor  $\lambda$  wird so lange gesteigert, bis sich der Lastangriffspunkt rechts von dem festen Lager befindet und der Balken ganz gestreckt

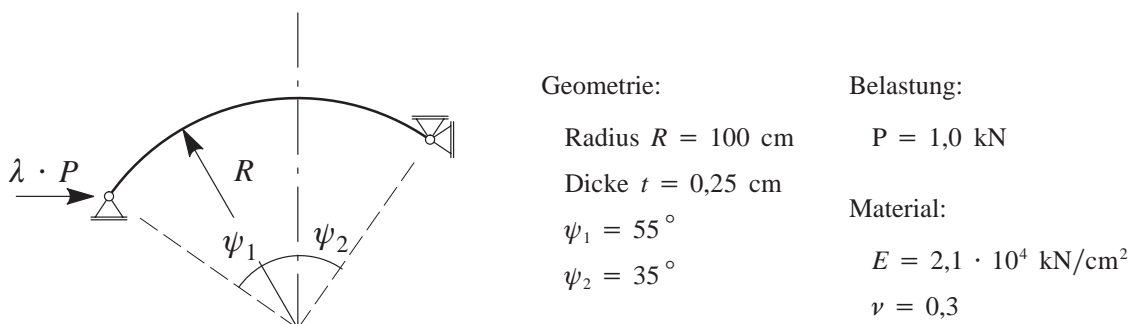


Abb. 9.16: Durchschlagen eines Bogenstücks — Problemstellung



ist (Abb. 9.17). Die Last–Verschiebungs–Kurve für die Verschiebung  $w$  am Lastangriffspunkt zeigt die typische Charakteristik eines Durchschlagsproblems. Für die vorliegende Analyse wurden 10 Q2E4–DSG–T–Elemente verwendet. Die gesamte Last–Verformungskurve kann mit einem Bogenlängenverfahren in 230 Inkrementen berechnet werden. Bei einer relativen Fehler-schranke für die Verschiebungen von 0,0001 (Verhältnis des Verschiebungsfehlers zur inkrementellen Verschiebung) werden dazu im Schnitt drei Iterationen pro Inkrement benötigt. Das Beispiel demonstriert, daß das 7–Parameter–Modell in der Lage ist, Deformationen von Schalen mit großen Rotationen effizient zu beschreiben.

Große Rotationen um zwei Achsen treten beim folgenden Beispiel auf. Die Idee zu diesem numerischen Experiment stammt aus der Beobachtung des Verhaltens eines geknickten Pappstreifens, der zwischen den Fingern zusammengedrückt wird (Abb. 9.18 links). Nach einer ersten, leichten Auslenkung nach unten führt das abgelenkte, kürzere Stück zunächst eine langsame Bewegung nach oben durch, um dann plötzlich (Punkt (b) in Abb. 9.20) in die vertikale Lage durchzuschlagen. Bei diesem Deformationsvorgang treten große Rotationen auf. Außerdem stellt die bei einer statischen Analyse entstehende, äußerst komplexe Last–Verformungsbeziehung hohe Anforderungen an die Pfadverfolgungsmethode.

Ein Problem bei der Modellierung dieses Experiments stellt die geknickte Kante dar. Wird bei einem Stück Karton oder Pappe die Knickstelle mehrmals hin– und herbewegt, dann entsteht durch lokales Knicken und Reißen der äußeren Papierfasern ein reibungsbehaftetes Gelenk, das nicht einfach zu modellieren ist. Außerdem kann beobachtet werden, daß während der Deformation in der Nähe des Knicks plastische Verformungen auftreten. Es entstehen Falten, die auch nach der Entlastung noch zu sehen sind.

Wird für den Versuch anstatt Papier ein Kunststoff verwendet (z.B. jene Art von Karten aus denen elektronisch lesbare Parkscheine oder Skipässe hergestellt werden), dann sind die Verhältnisse deutlich einfacher. Erstens behält das Material im Bereich des Knicks seine Steifigkeit, dieser kann also biegesteif modelliert werden. Zweitens kann man beobachten, daß die Verformung fast vollständig elastisch ist.

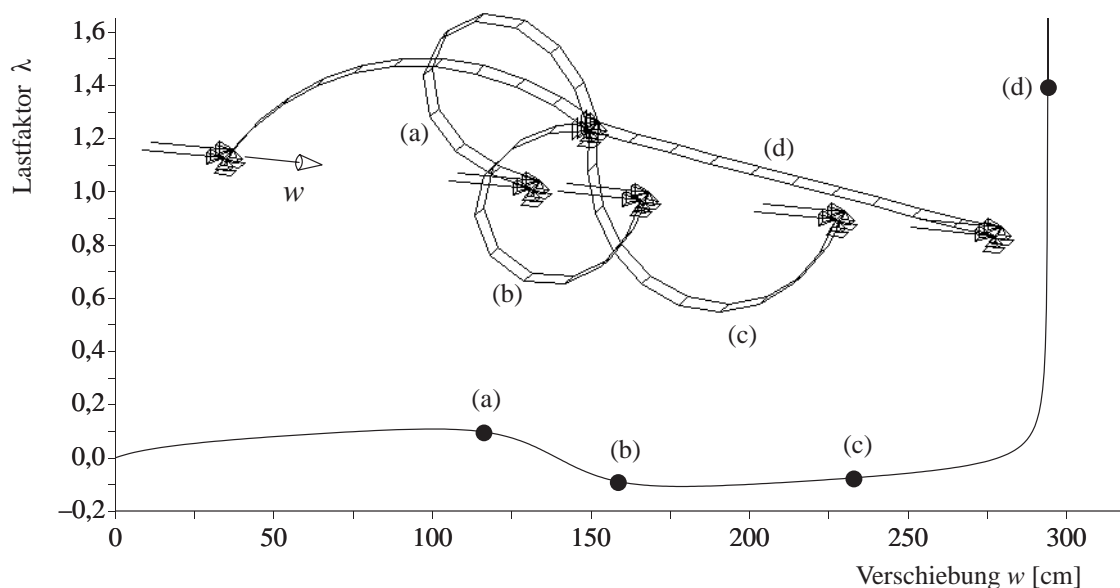


Abb. 9.17: Durchschlagen eines Bogenstücks — Last–Verformungs–Beziehung

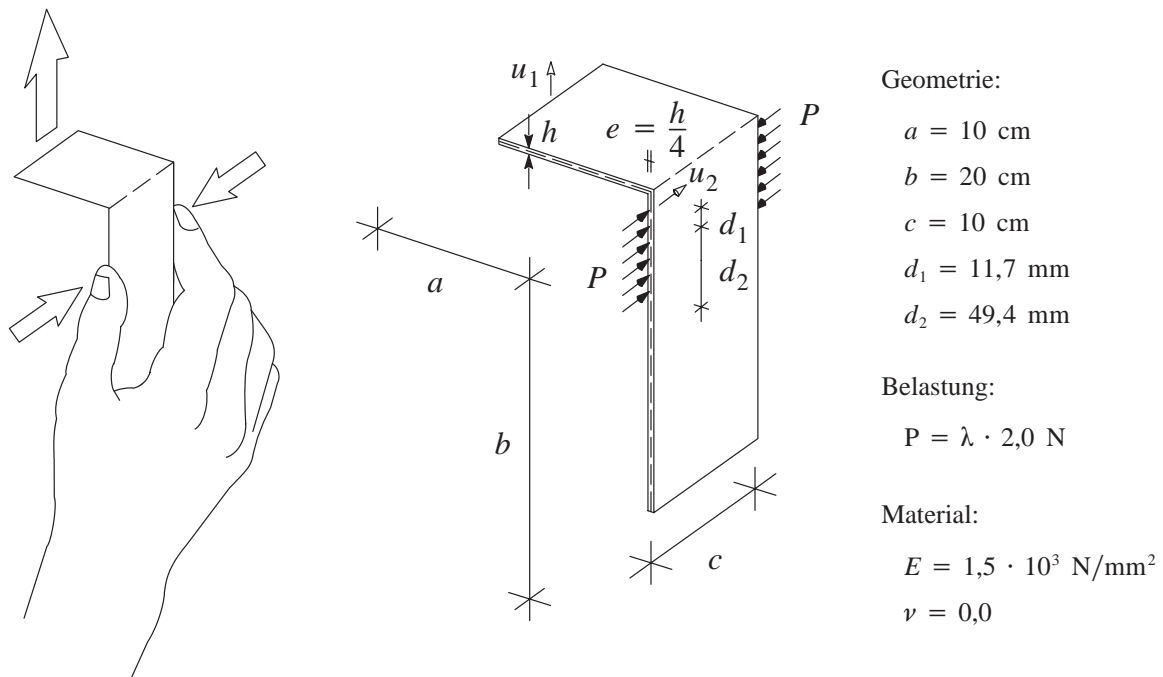


Abb. 9.18: Durchschlagen eines geknickten Papp- oder Kunststoffstreifens

In Abb. 9.18 ist das für die vorliegende Berechnung gewählte statische System dargestellt. Die seitlich angreifende Last wirkt leicht exzentrisch, um durch das dadurch eingeprägte Moment die gewünschte Verformung zu initiieren. Die genauen Abmessungen, Lasten und Materialdaten sind in diesem Beispiel nicht so entscheidend. Wichtig ist die Abbildung des im Experiment zu beobachtenden Verformungsablaufs.

Abb. 9.19 zeigt eine Sequenz von Verformungsbildern. Beim Durchführen des Experiments wird man feststellen, daß nur die Verformungszustände (b) und (e) beobachtet werden können. Die

Diskretisierung:  $24 \times 8$  Q1E4-DSG-T-Elemente

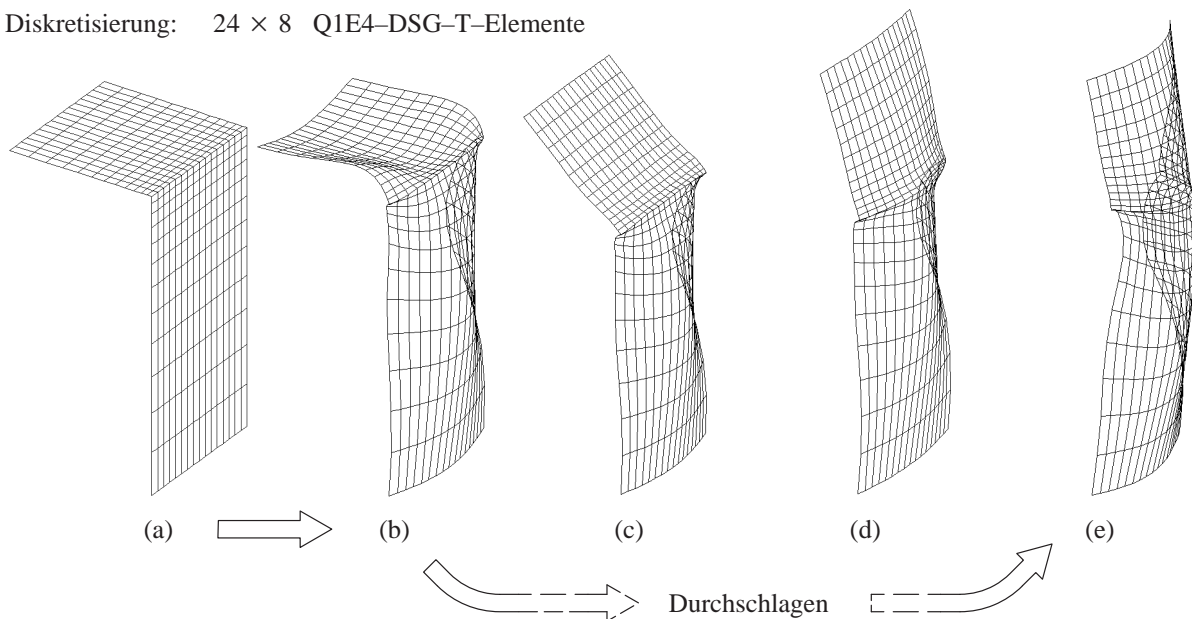


Abb. 9.19: Durchschlagen eines geknickten Pappstreifens — Verformungsablauf

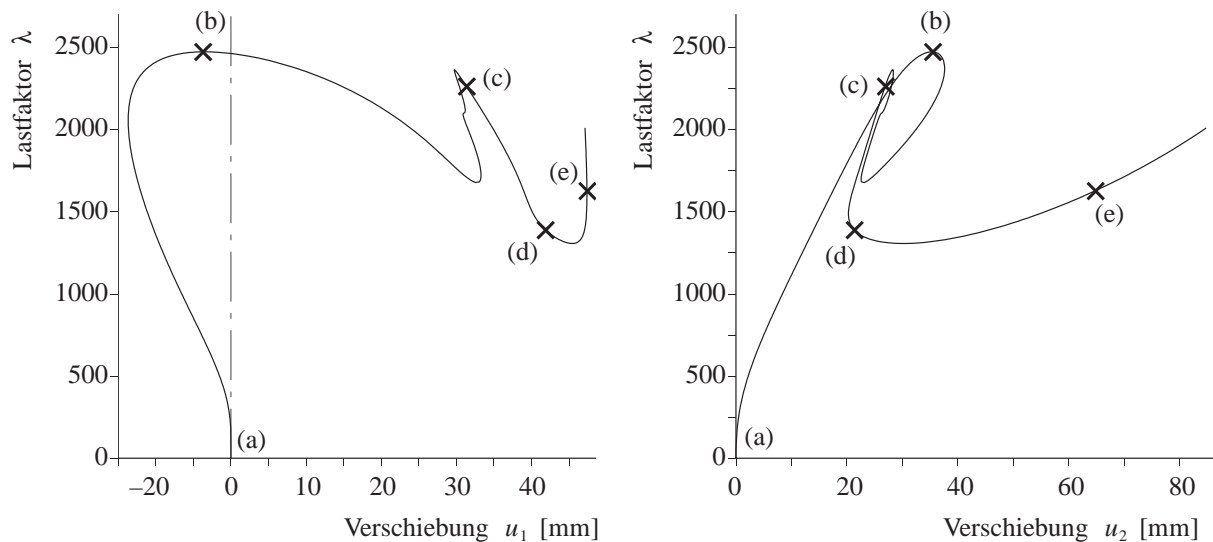


Abb. 9.20: Durchschlagen eines geknickten Pappstreifens — Last–Verformungs–Beziehung

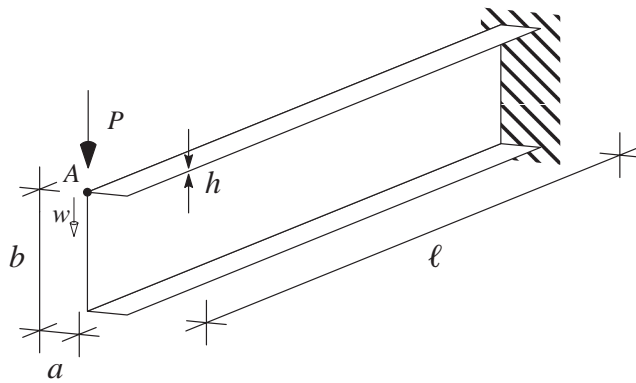
Übereinstimmung mit dem Versuch ist dort sehr gut. Die Zwischenzustände werden im Experiment so schnell durchlaufen, daß sie sich der Beobachtung entziehen. In Wirklichkeit handelt es sich offensichtlich um einen dynamischen Vorgang. Ob die Verformungszustände (c) und (d) dabei tatsächlich erreicht werden ist fraglich. Es ist auch möglich, daß die Zwischenzustände in Wirklichkeit, bzw. bei einer dynamischen Analyse, etwas anders aussehen.

Die Last–Verformungs–Kurven in Abb. 9.20 wurden mit einem verschiebungsgesteuerten Pfadverfolgungsverfahren berechnet. Während der Berechnung mußten Ort und Richtung des gesteuerten Freiheitsgrades jedoch mehrmals verändert werden, um schließlich einen durchgehenden Gleichgewichtspfad zu erhalten. Die Kurven veranschaulichen, daß ein statischer Ablauf dieser Deformation physikalisch vermutlich nicht zu realisieren ist. Beide dargestellten Kurven besitzen sowohl Stellen, an denen sich das Vorzeichen des Lastinkrementes ändert, als auch Stellen mit einem Vorzeichenwechsel beim Verschiebungsinkrement. Dennoch kann eine statische Berechnung in diesem Fall Aufschlüsse über das prinzipielle Verformungsverhalten der Struktur geben.

### 9.4.3 Verformungs– und Tragfähigkeitsberechnungen eines Stahlträgers

Im letzten Beispiel wird noch einmal das Verhalten der 7–Parameter–Elemente bei Schalen mit Knicken untersucht. Dazu wird der von Chrosielewski et al. (1992) beschriebene, eingespannte Stahlträger geometrisch nichtlinear berechnet. Unterschiedliche Möglichkeiten zur Diskretisierung entlang von Knicken (Kapitel 8) werden außerdem anhand einer linearen Rechnung verglichen. Die Geometrie– und Materialdaten sind in Abb. 9.21 gegeben. In Anlehnung an den Originalaufsatz werden die Einheiten „pound force“ [lbf] ( $1 \text{ lbf} \approx 4,45 \text{ N}$ ) und „inch“ [in.] ( $1 \text{ in.} \approx 2,54 \text{ cm}$ ) verwendet. Der Träger wird nun jedoch nicht durch sein Eigengewicht, sondern durch eine vertikale Einzellast  $P = \lambda \cdot 1,0 \text{ lbf}$  in Punkt A belastet.

Für die gegebene Schlankheit der Struktur kann bei der linearen Rechnung die Lösung mit 5–Parameter–Schalenelementen als Referenzlösung dienen. Die Ergebnisse sowohl der linearen als auch der geometrisch nichtlinearen Berechnung (Abb. 9.22 und 9.23) zeigen, daß ein gemittelter Direktor nach Variante (b) (Abb. 8.2) die Struktur zu „weich“ macht. Die Verschiebungen wer-



Geometrie :  $\ell = 36$  in.  
 $b = 6$  in.  
 $a = 2$  in.

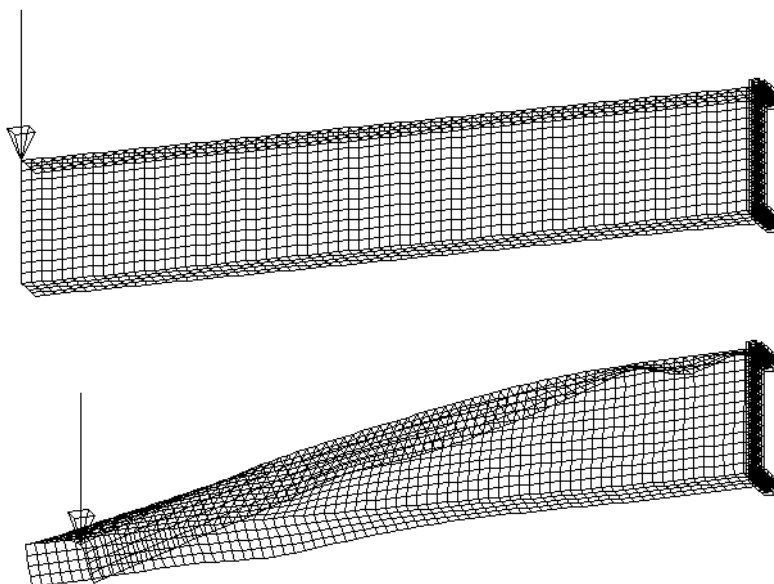
Material :  $E = 1,0 \cdot 10^7$  lbf/in<sup>2</sup>  
 $\nu = 0,33$

Abb. 9.21: Stahlträger unter Eigengewicht – statisches System und Belastung

den über-, die ertragbaren Lasten unterschätzt. Die neue Variante (c) liefert hier bessere Ergebnisse. Die Abweichung zur Referenzlösung bei der linearen Rechnung ist auch kleiner als bei der von Betsch et al. (1996) vorgeschlagenen Version eines 7-Parameter-Modells mit Drillrotationen.

Für das geometrisch nichtlineare Problem dient eine Berechnung mit  $71 \times 14$  20-knotigen Kontinuumelementen mit  $2 \times 2 \times 2$  Integrationspunkten als Referenzlösung. Sie stimmt gut mit den Ergebnissen von Betsch et al. (1996) und denen der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Elemente überein, die jeweils mit einem Netz von  $72 \times 12$  vierknotigen Schalenelementen erhalten wurden.

An den Last-Verformungs-Kurven ist zu sehen, daß die Berücksichtigung dreidimensionaler Effekte im geometrisch nichtlinearen Fall eine gewisse Bedeutung hat. Die 5-Parameter-Lösung weicht deutlich von der 3D-Lösung und den Berechnungen mit 7-Parameter-Schalenelementen ab. Ein Grund dafür könnte die Einspannung in Dickenrichtung sein. Da die Schale gerade an



$\lambda = 0,0$   
 $w = 0,0$  in.

$\lambda = 122,5$   
 $w = 4,0$  in.

Abb. 9.22: Stahlträger unter Einzellast – Diskretisierung und verformtes System

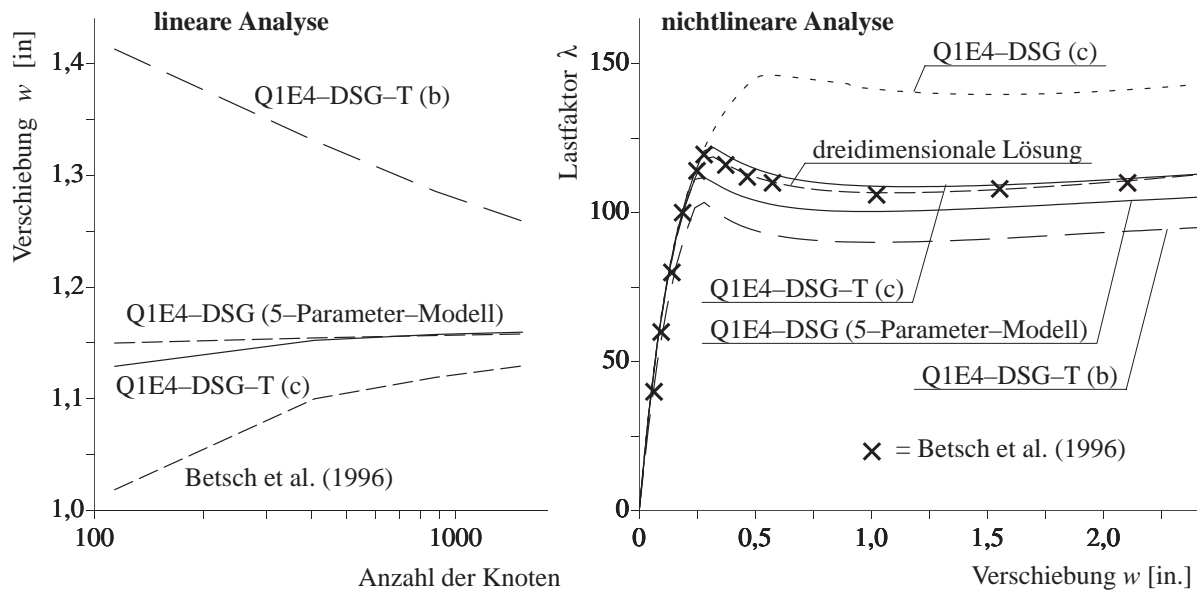


Abb. 9.23: Stahlträger unter Einzellast — Einfluß der Diskretisierung an der Kante

der Einspannstelle beult, könnten die Randbedingungen dort, trotz der geringen Dicke, einen Einfluß haben.

Schließlich zeigt die Last-Verschiebungs-Kurve des Elements Q1E4-DSG, daß der Effekt des Dickenlocking auch bei Faltenwerken auftritt. Das ist allerdings nur der Fall, wenn ein gemittelter Direktor verwendet wird. Er verursacht im Bereich der Kante eine künstliche „Krümmung“. Ohne die entsprechende Modifikation der transversalen Normalverzerrungen (Q1E4-DSG-T) sind die Ergebnisse bei der geometrisch nichtlinearen Berechnung unbrauchbar.

## 10 Schlußbetrachtungen und Ausblick

Das 7-Parameter-Schalenmodell von Büchter und Ramm (1992a) kann als eigenständige Theorie betrachtet werden, die unabhängig von einer Formulierung mit finiten Elementen ist. Es ist möglich, ein System von Differentialgleichungen aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik herzuleiten. Approximationen in bezug auf die vollständig dreidimensionale Theorie werden im Rahmen einer Semidiskretisierung des Schalenkontinuums in Dickenrichtung gemacht. Im Gegensatz zu den meisten konventionellen Schalenmodellen basiert diese Herleitung auf einem Mehrfeldfunktional. Im Hinblick auf die Anzahl der verwendeten Verzerrungs- und Spannungskomponenten ist das 7-Parameter-Modell optimal. Es werden genau diejenigen Terme berücksichtigt, die notwendig sind, um vollständig dreidimensionale Stoffgesetze verwenden zu können.

Das 7-Parameter-Modell beinhaltet kinematische und statische Variablen, die bei den klassischen Schubweichen Schalentheorien nicht auftauchen. Ihre physikalische Interpretation gibt einen Einblick in das mechanische Verhalten des Modells. Dabei stellt sich heraus, daß keine dieser kinematischen und statischen Variablen „höherer Ordnung“ einen Beitrag zum globalen Gleichgewicht leistet. Dennoch sorgen diese Größen dafür, daß eine höhere Modellgenauigkeit erreicht wird. Für eine korrekte Anwendung von 7-Parameter-Schalenelementen ist die Kenntnis der zugrundeliegenden Effekte wichtig. Das gilt sowohl für die Modellbildung als auch für die Interpretation der Ergebnisse.

Der Fehler bezüglich der 3D-Lösung kann weiter vermindert werden, wenn ein in dieser Arbeit vorgeschlagener Schubkorrekturfaktor höherer Ordnung angewandt wird. Er bezieht sich auf den linearen Verlauf der Querschubverzerrungen und wirkt sich bei membrandominierten Verformungen dicker Schalen aus.

Bei der Formulierung mit finiten Elementen treten dieselben Locking-Probleme auf wie bei 5-Parameter-Schalenelementen. Zusätzlich entsteht ein Versteifungseffekt bei gekrümmten Strukturen, der mit der Dickenänderung der Schale zusammenhängt. Sämtliche Locking-Effekte können mit Hilfe bekannter Methoden und eigener Entwicklungen vermieden oder zumindest vermindert werden. Dabei ist es möglich, ein einheitliches Konzept für Schalenelemente beliebiger Ordnung und Gestalt zu formulieren. Es wird in dieser Arbeit für lineare und quadratische Dreieck- und Viereckelemente verwirklicht.

Für die Berechnung von Schalen mit Knicken wird ein neues Konzept vorgestellt, das die Genauigkeit der Lösung verbessert. Die Idee besteht darin, Fehler bei der Approximation der Geometrie entlang der Kante zu vermeiden.

In numerischen Experimenten zeigen die viereckigen Elementen meistens ein besseres Verhalten als die dreieckigen. Auch die Dreieckelemente liefern jedoch keine wirklich „schlechten“ Ergebnisse. Das lineare Element ist nicht besonders gut geeignet, um wandartige Träger zu berechnen, da „Biegedeformationen“ in der Schalenebene („in-plane bending“) schlecht approximiert werden. Beim sechsknotigen Dreieckelement tritt starkes Membranlocking auf, was die Anwendung auf allgemeine Schalentragwerke problematisch macht. Eine praktische Anforderung an dreieckige Elemente ist die, daß sie verwendet werden können, um automatisch generierte Vierecknetze an Stellen mit komplizierter Geometrie zu ergänzen. Die Genauigkeit der hier beschriebenen Elemente kann als ausreichend betrachtet werden, um zumindest diese Anforderung zu erfüllen.

Das Fazit dieser Arbeit kann in zwei Punkten zusammengefaßt werden.

- Das 7-Parameter-Schalenmodell ist eine sinnvolle Alternative zu 5-Parameter-Modellen. Der Gewinn an Genauigkeit und der breitere Anwendungsbereich rechtfertigen den verhältnismäßig geringen numerischen Mehraufwand. Im Vergleich zu Kontinuums-elementen ist vor allem bei materiell nichtlinearen Berechnungen die höhere Effizienz der dreidimensionalen Schalenelemente von Vorteil.
- Die in dieser Arbeit beschriebene Formulierung mit finiten Elementen erlaubt die Berechnung allgemeiner Schalentragwerke „beliebiger“ Schlankheit. Im Vergleich zu Büchter und Ramm (1992a) konnte die Effizienz der Elemente verbessert werden.

Weitere Versuche zur Steigerung der Effizienz der in dieser Arbeit vorgestellten Elemente sollten vor allem das Problem des Membranlocking, insbesondere beim sechsknotigen Dreieckelement betreffen. Weiterhin könnte der Membrananteil des dreiknotigen Elements modifiziert werden um Schublocking zu vermeiden.

Das Problem der, im Vergleich zu 5-Parameter-Modellen, schlechten Konditionierung kann möglicherweise durch Methoden der Vorkonditionierung gelöst werden. Der Einfluß der hochfrequenten Schwingungsmoden, die aus der hohen transversalen Dehnsteifigkeit herrühren und die kritische Zeitschrittlänge verkleinern, kann durch Zeitintegrationsverfahren mit numerischer Dissipation vermindert werden.

## Literatur

- Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1968):** „Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axi–Symmetric Problems“, in: (L. Berke et al. eds.) *Proceedings of the 2nd. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*.
- Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1970):** „Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements“, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **2**, 419–451.
- Andelfinger, U. (1991):** „*Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid–gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*“, Dissertationsschrift, Bericht Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Andelfinger, E., Ramm, E. (1993):** „EAS–Elements for Two–Dimensional, Three–Dimensional Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR–Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**, 1311–1337.
- Antman, S.S. (1995):** „*Nonlinear Problems of Elasticity*“, Springer.
- Argyris, J.H. (1965):** „Continua and Discontinua“, *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* Air Force Institute of Technology, Wright–Patterson, Ohio.
- Argyris, J.H., Symeonidis, S. (1981):** „Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Systems under Nonconservative Loading — Natural Formulation. Part I. Quasistatic Problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **26**, 75–123.
- Argyris, J.H., Tenek, L., Olofsson, L. (1997):** „TRIC: a Simple but Sophisticated 3–Node Triangular Element Based on 6 Rigid–Body and 12 Straining Modes for Fast Computational Simulations of Arbitrary Isotropic and Laminated Composite Shells“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **145**, 11–85.
- Armero, F. (1999):** „On the Locking and Stability of Finite Elements in Finite Deformation Plane Strain Problems“, zur Veröffentlichung angenommen von *Computers and Structures*.
- Arnold, D.N. (1981):** „Discretization by Finite Elements of a Model Parameter Dependent Problem“, *Numerische Mathematik* **37**, 405–421.
- Arnold, D., Falk, R.S. (1996):** „Asymptotic Analysis of the Boundary Layer for the Reissner–Mindlin Plate Model“, *SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Journal of Mathematical Analysis* **27**, 486–514.
- Babuska, I., Azis, A.K. (1972):** „Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method“, in: (A.K. Azis, ed.) *The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, 3–363.
- Babuska, I., Li, L. (1991):** „Hierarchic Modeling of Plates and Shells“, *Computers & Structures* **40**, 419–430.
- Babuska, I., Li, L. (1992):** „The Problem of Plate Modeling: Theoretical and Computational Results“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **100**, 249–273.
- Babuska, I., Suri, M. (1992):** „On Locking and Robustness in the Finite Element Method“, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **29**, 1261–1299.
- Basar, Y., Ding, Y. (1996):** „Shear Deformation Models for Large Strain Shell Analysis“, *International Journal of Solids and Structures* **34**, 1687–1708.
- Bathe, K.–J. (1996):** „*Finite Element Procedures*“, Prentice–Hall, New Jersey.
- Bathe, K.–J., Brezzi, F., Cho, S.W. (1989):** „The MITC7 and MITC9 Plate Elements“, *Computers and Structures* **32**, 797–814.
- Bathe, K.–J., Brezzi, F., Fortin, M. (1989):** „Mixed–Interpolated Elements for Reissner–Mindlin Plates“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **28**, 1787–1801.
- Bathe, K.–J., Dvorkin, E.N. (1985):** „A Four–Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **21**, 367–383.



- Bathe, K.-J., Dvorkin, E.N. (1986):** „A Formulation of General Shell Elements – The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **22**, 697–722.
- Batoz, J.L., Bathe, K.-J., Ho, L.W. (1980):** „A study of Three–Node Triangular Plate Bending Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **15**, 1771–1812.
- Batoz, J.L., Katili, I. (1992):** „On a Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **35**, 1603–1632.
- Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1965):** „Triangular Elements in Bending — Conforming and Non–Conforming Solutions“, in: *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright–Patterson, Ohio.
- Belytschko, T. (1983):** „A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One–Point Quadrature“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 405–419.
- Benvenuto, E. (1991):** „An Introduction to the History of Structural Mechanics, Part II: Vaulted Structures and Elastic Systems“, Springer.
- Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E. (1996):** „A 4–Node Finite Shell Element for the Implementation of General Hyperelastic 3D–Elasticity at Finite Strains“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **130**, 57–79.
- Bischoff, M. (1993):** „Untersuchung einer Finite–Elemente–Formulierung einer Schalentheorie endlicher Verformungen mit Berücksichtigung der Dickenänderung“, *Diplomarbeit* (Betreuer: C. Sansour), Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Bischoff, M., Ramm, E. (1997):** „Shear Deformable Shell Elements for Large Strains and Rotations“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 4427–4449.
- Bischoff, M., Ramm, E. (1999):** „On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in a Three–Dimensional Shell Formulation“, zur Veröffentlichung angenommen von: *International Journal of Solids and Structures*.
- Bischoff, M., Ramm, E., Braess, D. (1999):** „A Class of Equivalent Enhanced Assumed Strain and Hybrid Stress Finite Elements“, *Computational Mechanics* **22**, 443–449.
- Bletzinger, K.–U., Bischoff, M., Ramm, E. (1998):** „A Unified Approach for Shear–Locking–Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements“, in: (S. Idelsohn et al., eds.) *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics WCCM IV Buenos Aires, CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos in Ingeniería), Barcelona.
- Bollé, L. (1947):** „Contribution au problème linéaire de flexion d’une plaque elastique“, *Bulletin Technique de la Suisse Romande* **73**, 281–285, 293–298.
- Braess, D. (1997):** „Finite Elemente“, 2. Auflage, Springer.
- Braess, D. (1998):** „Enhanced Assumed Strain Elements and Locking in Membrane Problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **165**, 155–174.
- Braun, M. (1995):** „Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken“, Dissertationsschrift, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E. (1994):** „Nonlinear Shell Formulations for Complete Three–Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates“, *Computational Mechanics* **15**, 1–18.
- Brezzi, F. (1974):** „On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers“, *RAIRO Analysis Numérique* **8**, 129–151.
- Brezzi, F., Fortin, M., Stenberg, R. (1991):** „Error Analysis of Mixed–Interpolated Elements for Reissner–Mindlin Plates“, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **1**, 125–151.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. (1982):** „Streamline Upwind / Petrov–Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier–Stokes Equations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **32**, 199–259.

- Bucalem, E.N., Bathe, K.-J. (1993):** „Higher-Order MITC General Shell Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**, 3729–3754.
- Büchter, N. (1992):** „Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen“ Dissertationsschrift, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992a):** „3d-Extension of Nonlinear Shell Equations Based on the Enhanced Assumed Strain Concept“, in: (C. Hirsch, ed.) *Computational Methods in Applied Sciences*, Elsevier, 39–59.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992b):** „Shell Theory versus Degeneration — a Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**, 55–62.
- Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D. (1994):** „Three-Dimensional Extension of Nonlinear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**, 2551–2568.
- Bufler, H. (1983):** „On the Work Theorems for Finite and Incremental Elastic Deformations with Discontinuous Fields: a Unified Treatment of Different Versions“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **36**, 95–124.
- Bufler, H. (1990):** „Energimethoden“, Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Calladine, C.R. (1988):** „The Theory of Thin Shell Structures 1888–1988“, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. **202** (Nr. A3), 141–150.
- Chapelle, D., Bathe, K.-J. (1993):** „The Inf-Sup-Test“, *Computers and Structures* **47**, 537–545.
- Chapelle, D., Stenberg, R. (1996):** „Stabilized Finite Element Formulations for Shells in a Bending Dominated State“, *INRIA Research Report 2941*, Le Chesnay Cedex, Frankreich.
- Chroscielowski, J., Makowski, J., Stumpf, H. (1992):** „Genuinely Resultant Shell Finite Elements Accounting for Geometric and Material Non-Linearity“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **35**, 63–94.
- Ciarlet, P.G. (1990):** „Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures“, Springer.
- Ciarlet, P.G., Destuynder, P. (1979):** „A Justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model“, *Journal de Mécanique* **18**, 315–344.
- Cohen, H., de Silva, C.N. (1966):** „Nonlinear Theory of Elastic Directed Surfaces“, *Journal of Mathematics and Physics* **7**, 960–966.
- Cosserat, E., Cosserat, F. (1909):** „Théorie des Corps Déformables“, in: *Chwolson's Traité de Physique*, 2. Auflage, Paris.
- Crisfield, M.A. (1981):** „A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap Through“, *Computers and Structures* **13**, 55–62.
- Dauge, M., Gruais, I. (1996):** „Asymptotics of Arbitrary Order for a Thin Elastic Clamped Plate, I. Optimal Error Estimates“, *Asymptotic Analysis* **13**, 167–197.
- Doherty, W.P., Wilson, E.L., Taylor, R.L. (1969):** „Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher Order Quadrilateral Finite Elements“, *Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California*.
- Duhem, P. (1893):** „Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique“, *Ann. Ecole Norm.* **10**, 187–230.
- Dvorkin, E.N., Bathe, K.-J. (1984):** „A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis“, *Engineering Computations* **1**, 77–88.
- Eberlein, R., Wriggers, P. (1997):** „Finite Element Formulations of Five and Six Parameter Shell Theories Accounting for Finite Plastic Strains“, in: (D.R.J. Owen et al., eds.) *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1898–1903.
- Eckstein, A. (1999):** „Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen“ Dissertationsschrift, Mitteilung Nr. 99–3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- Epstein, M., Huttelmaier, H.P. (1983):** „A Finite Element Formulation for Multilayered and Thick Plates“, *Computers & Structures* **5**, 645–650.
- Ericksen, J.L., Truesdell, C. (1958):** „Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells“, *Arch. Rational Mech. Anal.* **1**, 295–323.
- Felippa, C.A. (1989):** „Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: Part I+II“, *Communications in Applied Numerical Methods* **5**, 79–98.
- Felippa, C.A. (1994):** „A Survey of Parametrized Variational Principles and Applications to Computational Mechanics“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **113**, 109–139.
- Flanagan, D.P., Belytschko, T. (1981):** „A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **17**, 679–706.
- Fox, D.D., Nagtegaal, J.C. (1997):** „A Unified Transverse Shear Treatment for 3–Node and 4–Node Stress Resultant Shell Elements“, *Lecture at USNCCM (US National Congress on Computational Mechanics) 1997, San Francisco*, siehe auch: *Finite Strain Shell Element Formulation*, ABAQUS Theory Manual, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. (1995).
- Fox, D.D., Simo, J.C. (1992):** „Drill Rotation Formulation for Geometrically Exact Shells“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **98**, 329–342.
- Fraeijs de Veubeke, B. (1965):** „Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method“, in: (O.C. Zienkiewicz, G.C. Holister, ed.) *Stress Analysis*, Wiley, London.
- Franca, L., Hughes, T.J.R. (1988):** „Two Classes of Mixed Finite Element Methods“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **69**, 89–129.
- Gallagher, R.H. (1973):** „Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems“, in: *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proc. Tokyo Seminar on Finite Element Analysis*, University of Tokyo.
- Glaser, S., Armero, F. (1997):** „On the Formulation of Enhanced Strain Finite Elements in Finite Deformations“, *Engineering Computations* **14**, 759–791.
- Goodier, J.N. (1938):** „On the Problems of the Beam and the Plate in the Theory of Elasticity“, *Transactions of the Royal Society Can.*, Ser. III **32**, 65–88.
- Green, A.E., Laws, N., Naghdi, P.M. (1968):** „Rods, Plates and Shells“, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **64**, 895–913.
- Green, A.E., Naghdi, P.M. (1970):** „Non–Isothermal Theory of Rods, Plates and Shells“, *International Journal of Solids and Structures* **6**, p.209.
- Green, A.E., Naghdi, P.M., Wainwright, W.L. (1965):** „A General Theory of a Cosserat Surface“, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **20**, p. 287.
- Grosh, K., Pinsky, P.M. (1996):** „Design of Galerkin Generalized Least Squares Methods for Timoshenko Beams“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **132**, 1–16.
- Gruttmann, F. (1996):** „*Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*“, Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Gruttmann, F., Stein, E., Wriggers, P. (1989):** „Theory and Numerics of Thin Elastic Shells with Finite Rotations“, *Ingenieur–Archiv* **59**, 54–67.
- Gruttmann, F., Wagner, W. (1994):** „On the Numerical Analysis of Local Effects in Composite Structures“, *Composite Structures* **29**, 1–12.
- Gruttmann, F., Wagner, W., Wriggers, P. (1992):** „Nonlinear Quadrilateral Shells with Drilling Degrees of Freedom“, *Archive of Applied Mechanics* **62**, 1–13.
- Günther, W. (1962):** „Schalenstatik im räumlichen Cosserat’schen Kontinuum“, *Miszelaneen der angewandten Mechanik*, Berlin.
- Gupta, K.K., Meek, J.L. (1996):** „A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**, 3761–3774.

- Hahn, M. (1998):** „Verhalten von EAS-Elementen bei materiell nichtlinearen Finite-Elemente-Berechnungen“, Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Hauptmann, R. (1997):** „Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke“, Dissertationsschrift, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe.
- Haußer, C. (1996):** „Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke“, Dissertationsschrift, Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Haußer, C., Ramm, E. (1996):** „Efficient Shear Deformable 3-Node Plate/Shell Elements – an almost Hopeless Undertaking“, in: (B.H.V. Topping, ed.) *Advances in Finite Element Technology*, Budapest, 203–215.
- Hellinger, E. (1914):** „Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua“, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* 4/4, 601–694.
- Hencky, H. (1947):** „Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten“, *Ingenieurarchiv* 16, 72–76.
- Herrmann, L.R. (1965):** „Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem“, *AIAA (American Institute for Aeronautics and Astronautics) Journal* 3, 1896–1900.
- Hildebrand, F.B., Reissner, E., Thomas, G.B. (1949):** „Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells“, NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) Technical Note No. 1833.
- Hibbitt, H.D. (1979):** „Some Follower Forces and Load Stiffness“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14, 937–941.
- Hu, H.-C. (1955):** „On some Variational Principles in the Theory of Elasticity and Plasticity“, *Scientia Sinica* 4, 33–54.
- Huang, H.C., Hinton, E. (1984):** „A Nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation“, *Engineering Computations* 1, 369–379.
- Hughes, T.J.R. (1987):** „The Finite Element Method“, Prentice-Hall.
- Hughes, T.J.R. (1980):** „Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15, 1413–1418.
- Hughes, T.J.R., Franca, L. and Balestra, M. (1986):** „A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of the Stokes Problem Accommodating Equal-Order Interpolation“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 59, 85–99.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K. (1981):** „Nonlinear Finite Element Analysis of Shells, Part I: Three-Dimensional Shells“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 26, 331–361.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. (1981):** „The Linear Triangular Bending Element“, in: (J.R. Whiteman, ed.) *The Mathematics of Finite Elements and Applications Vol. IV*, Academic Press, London, 127–142.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Kanoknukulchai, W. (1977):** „A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11, 1529–1543.
- Hughes, T.J.R., Tezduyar, T. (1981):** „Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Isoparametric Element“, *Journal of Applied Mechanics* 48, 587–596.
- Ibrahimbegovic, A. (1994):** „Stress Resultant Geometrically Nonlinear Shell Theory with Drilling Rotations – Part I: A Consistent Formulation“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 118, 265–284.
- John, F. (1965):** „Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations“, *Communications in Pure Applied Mathematics* 18, 235–267.
- Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta, J. (1984):** „Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 45, 285–312.
- Johnson, M.W., Reissner, E. (1959):** „On the Foundation of the Theory of Thin Elastic Shells“, *Journal of Mathematics and Physics* 37, 371–392.

- Kirchhoff, G. (1850):** „Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe“, *Journal für reine angewandte Mathematik* **40**, 51–58.
- Koiter, W.T. (1960):** „A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells“, in (W.T. Koiter, ed.) „*The Theory of Thin Elastic Shells*“, North-Holland, Amsterdam, 12–33.
- Korelc, J, Wriggers, P. (1996):** „Consistent Gradient Formulation for a Stable Enhanced Strain Method for Large Deformations“, *Engineering Computations* **13**, 103–123.
- Krätzig, W.B. (1971):** „Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen“, *Ingenieur-Archiv* **40**, 311–326.
- Krätzig, W.B. (1993):** „‘Best’ Transverse Shearing and Stretching Shell Theory for Nonlinear Finite Element Simulations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **103**, 135–160.
- Kühhorn, A, Schoop, H. (1992):** „A Nonlinear Theory for Sandwich Shells Including the Wrinkling Phenomenon“, *Archive of Applied Mechanics* **62**, 413–427.
- Larsen, P.K., Popov, E.P. (1974):** „Large Displacement Analysis of Viscoelastic Shells of Revolution“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **3**, 237–253.
- Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. (1977):** „A Higher Order Theory of Plate Deformation“, *Journal of Applied Mechanics* **44**, 663–676.
- Love, A.E.H. (1888):** „On the Small Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells“, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **179**, 491ff.
- Lyly, M., Stenberg, R., Vihinen, T (1993):** „A Stable Bilinear Element for the Reissner–Mindlin Plate Model“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **110**, 343–357.
- MacNeal, R. (1978):** „A Simple Quadrilateral Shell Element“, *Computers & Structures* **8**, 175–183.
- MacNeal, R.H. (1994):** „Finite Elements: Their Design and Performance“, Dekker.
- Malkus, D.S., Hughes, T.J.R. (1978):** „Mixed Finite Element Methods – Reduced and Selective Integration Techniques: a Unification of Concepts“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **15**, 63–81.
- Malvern, L.E. (1969):** „*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*“, Prentice–Hall.
- Marsden, J.E., Hughes, T.J.R. (1983):** „*Mathematical Foundations of Elasticity*“, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs.
- Miehe, C. (1998):** „A Theoretical and Computational Model for Isotropic Elastoplastic Stress Analysis in Shells at Large Strains“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **155**, 193–233.
- Mielke, A. (1995):** „On the Justification of Plate Theories in Linear Elasticity Theory Using Exponential Decay Estimates“, *Journal of Elasticity* **38**, 165–208.
- Mindlin, R.D. (1951):** „Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates“, *Journal of Applied Mechanics* **18**, 31–38.
- Mok, D.P., Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999):** „Algorithmic Aspects of Deformation Dependent Loads in Nonlinear Static Finite Element Analysis“, zur Veröffentlichung angenommen von *Engineering Computations*.
- Morgenstern, D. (1959):** „Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie“, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* **4**, 145–152.
- Morley, L.S.D. (1991):** „Geometrically Non-Linear Constant Moment Triangle which Passes the von Kármán Patchtest“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **31**, 241–263.
- Naghdi, P.M. (1972):** „The Theory of Shells“, in: (S. Flügge, Hrsg.) *Handbuch der Physik, Vol. VI/2*, Springer, Berlin.
- Neto de Souza, E.A., Peric, D, Huang, G.C., Owen, D.R.J. (1995):** „Remarks on the Stability of Enhanced Strain Elements in Finite Elasticity and Elastoplasticity“, *Communications in Numerical Methods in Engineering* **11**, 951–961.

- Neuber, H. (1949):** „Allgemeine Schalentheorie I und II“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **29**, 97ff. und 142ff..
- Oden, J.T., Reddy, J.N. (1976):** „*Variational Methods in Theoretical Mechanics*“, Springer.
- Parisch, H. (1979):** „A Critical Survey of the Nine Node Degenerated Shell Element with Special Emphasis on Thin Shell Applications and Reduced Integration“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **20**, 323–350.
- Parisch, H. (1995):** „A Continuum Based Shell Theory for Nonlinear Applications“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 1855–1883.
- Park, K.C., Stanley, G.M. (1986):** „A Curved  $C^0$ -Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains“, *Journal of Applied Mechanics* **53**, 278–290.
- Paumier, J.C., Raoult, A. (1997):** „Asymptotic Consistency of the Polynomial Approximation in the Linearized Plate Theory, Application to the Reissner–Mindlin Model“, in: (J. Blum et al., eds.) *Elasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal*, ESAIM (European Series in Applied and Industrial Mathematics) Proceedings, Vol. 2, Lyon, 203–213.
- Pawsey, S.F., Clough, R.W. (1971):** „Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **3**, 575–586.
- Pian, T.H.H. (1964):** „Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions“, *AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics) Journal* **2**, 1333–1376.
- Pian, T.H.H. (1982):** „On the Equivalence Between Incompatible Displacement Element and Hybrid Stress Element“, *Applied Mathematics and Mechanics* **3**, 773–776.
- Pian, T.H.H., Chen, D.P. (1982):** „Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **18**, 1679–1684.
- Pian, T.H.H., Sumihara, K. (1984):** „Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**, 1685–1695.
- Pinsky, P.M., Jang, J. (1987):** „A  $C^0$ -Elastoplastic Shell Element Based on Assumed Covariant Strain Interpolations“, in: (Pande, G.N., Middleton, J., eds.) „*Proceedings of the International Conference NUMETA 1987, Vol. 1*“, Swansea.
- Pitkäranta, J. (1988):** „Analysis of Some Low-Order Finite Element Schemes for Mindlin–Reissner and Kirchhoff Plates“, *Numerische Mathematik* **53**, 237–254.
- Pitkäranta, J. (1991):** „The Problem of Membrane Locking in Finite Element Analysis of Cylindrical Shells“, *Report*, Helsinki University of Technology, Otakaari, Finland.
- Ramm, E. (1976):** „*Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*“, Habilitationsschrift, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Ramm, E. (1977):** „A Plate/Shell Element for Large Deflections and Rotations“, in: (K.-J. Bathe et al., eds.) *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, MIT Press, Cambridge MA.
- Ramm, E. (1981):** „Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points“, in: (W. Wunderlich et al., eds.) *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer, 63–89.
- Ramm, E. (1986):** „Form und Tragverhalten“, in: (E. Ramm, E. Schunck, Hrsg.) *Heinz Isler Schalen (Katalog zur Ausstellung)*, Krämer, Stuttgart, 29–34.
- Ramm, E., Bischoff, M., Braun, M. (1994):** „Higher Order Nonlinear Shell Formulation – a Step Back into Three Dimensions“, in: (K. Bell, ed.) *From Finite Elements to the Troll Platform, Ivar Holand 70th Anniversary*, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, 65–88.
- Ramm, E., Braun, M., Bischoff, M. (1995):** „Higher Order Nonlinear Shell Formulations: Theory and Application“, *Bulletin of the IASS* **36**, 145–152.
- Ramm, E., Sättele, J.M. (1981):** „Elasto-Plastic Large Deformation Shell Analysis Using Degenerated Elements“, in: (T.J.R. Hughes et al., eds.) „*Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*“ ASME (American Society of Mechanical Engineers) Applied Mechanics Division **48**, Wright-Patterson, Ohio, 265–282.

- Reddy, J.N. (1987):** „A Generalization of Two–Dimensional Theories of Laminated Composite Plates“, *Communications in Applied Numerical Methods* **3**, 173–180.
- Reese, S., Wriggers, P., Reddy, B.D. (1998):** „A New Locking–Free Brick Element Formulation for Continuous Large Deformation Problems“, in: (S. Idelsohn et al., eds.), *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics WCCM IV Buenos Aires, CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos in Ingeniería), Barcelona.
- Reissner, E. (1944):** „On the Theory of Bending of Elastic Plates“, *Journal of Mathematics and Physics* **23**, 184–191.
- Reissner, E. (1945):** „The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates“, *Journal of Applied Mechanics* **12**, 69–76.
- Reissner, E. (1950):** „On a Variational Theorem in Elasticity“, *Journal of Mathematics and Physics* **29**, 90–95.
- Reissner, E. (1964):** „On the Foundations of the Linear Theory of Elastic Shells“, in: *Proceedings of the Eleventh International Congress on Applied Mechanics (München)*, Springer, 20ff.
- Reissner, E. (1985):** „Reflections on the Theory of Thin Elastic Plates“, *Applied Mechanics Reviews* **11**, 1453–1464.
- Reitinger, R. (1994):** „Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke“, Dissertationsschrift, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Riks, E. (1972):** „The Application of Newtons Method to the Problem of Elastic Stability“, *Journal of Applied Mechanics* **39**, 1060–1066.
- Roehl, D. (1994):** „Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua“, Dissertationsschrift, Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Roehl, D., Ramm, E. (1996):** „Large Elasto–Plastic Finite Element Analysis of Solids and Shells with the Enhanced Assumed Strain Concept“, *International Journal of Solids and Structures* **33**, 3215–3237.
- Rössle, A., Bischoff, M., Wendlend, W., Ramm, E. (1998):** „On the Mathematical Foundation of the 1–1–2 Plate Model“, *International Journal of Solids and Structures* **36**, 2143–2168.
- Sanchez–Palencia, E. (1990):** „Passage à la limite de l'élastique tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces“, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* **311**, 909–916.
- Sansour, C. (1995):** „A Theory and Finite Element Formulation of Shells at Finite Deformations Including Thickness Change: Circumventing the Use of a Rotation Tensor“, *Archive of Applied Mechanics* **10**, 194–216.
- Sansour, C., Bufler, H. (1992):** „An Exact Finite Rotation Shell Theory, its Mixed Variational Formulation and its Finite Element Implementation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **34**, 73–115.
- Schoop, H. (1986):** „Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen“, *Ingenieur–Archiv* **56**, 427–437.
- Schwab, C. (1996):** „A–Posteriori Modeling Error Estimation for Hierarchical Plate Models“, *Numerische Mathematik* **74**, 221–259.
- Schweizerhof, K., Ramm, E. (1984):** „Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analyses“, *Computers and Structures* **18**, 1099–1114.
- Scordelis, A.C., Lo, K.S. (1969):** „Computer Analysis of Cylindrical Shells“, *Journal of the American Concrete Institute* **61**, 539–561.
- Seifert, B. (1996):** „Zur Theorie und Numerik finiter elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen“, *Dissertationsschrift*, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Simo, J.C., Armero, F. (1992):** „Geometrically Non–Linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**, 1413–1449.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1986):** „On Variational Foundations of Assumed Strain Methods“, *Journal of Applied Mechanics* **53**, 51–54.

- Simo, J.C., Fox, D.D. (1989):** „On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **72**, 267–304.
- Simo, J.C., Rifai, S. (1990):** „A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **29**, 1595–1638.
- Simo, J.C., Rifai, S., Fox, D.D. (1990):** „On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with through-the-thickness stretching“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **81**, 91–126.
- Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S. (1985):** „Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Elastoplasticity“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **51**, 177–208.
- Stein, E. (1964):** „Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke“, Dissertationsschrift, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Stein, E., Barthold, F.-J. (1996):** „Elastizitätstheorie“, in: (G. Mehlhorn, Hrsg.) *Der Ingenieurbau – Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, 165–434.
- Stein, E., Ohnimus, S. (1996):** „Dimensional Adaptivity in Linear Elasticity with Hierarchical Test Spaces for h- and p-Refinement Processes“, *Engineering with Computers* **12**, 107–119.
- Stein, E., Rolfes, R. (1990):** „Mechanical Conditions for Stability and Optimal Convergence of Mixed Finite Elements for Linear Plane Elasticity“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **84**, 77–95.
- Stein, E., Rust, W., Ohnimus, S. (1992):** „h- and d-Adaptive Finite Element Methods for Two-Dimensional Structural Problems Including Post-Buckling of Shells“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **101**, 315–354.
- Stenberg, R. (1993):** „A New Finite Element Formulation for the Plate Bending Problem“, in: (P.G. Ciarlet et al., eds.) *Proceedings of the International Conference on Asymptotic Methods for Elastic Structures*, Lisbon.
- Strang, G., Fix, G. (1973):** „An Analysis of the Finite Element Method“, Prentice-Hall.
- Szilar, R. (1974):** „Theory and Analysis of Plates“, Prentice-Hall.
- Taylor, R.L. (1989):** „Persönlicher Gedankenaustausch mit J.C. Simo“, zitiert in Simo und Rifai (1990).
- Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L. (1976):** „A Non-Conforming Element for Stress Analysis“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **10**, 1211–1220.
- Taylor, R.L., Hughes, T.J.R. (19):** „Titel“, *Zeitschrift* **11**, 1529–1543.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J. (1956):** „Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures“, *Journal of the Aeronautical Sciences* **23**, 805–823.
- Verhoeven, H. (1993):** „Geometrisch und physikalisch nichtlineare Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung“, Dissertationsschrift, Shaker.
- Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1998):** „Stabilization Techniques for Fluid and Structural Finite Elements“, in: (S. Idelsohn et al., eds.) *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics WCCM IV Buenos Aires, CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos in Ingeniería), Barcelona.
- Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999):** „A Deformation Dependent Stabilization Technique, Exemplified by EAS-Elements at Large Strains“, zur Veröffentlichung angenommen von *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Washizu, K. (1955):** „On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity“, Technical Report 25–18, Massachusetts Institute of Technology.
- Washizu, K. (1968):** „Variational Methods in Elasticity and Plasticity“, Pergamon.
- Wempner, G.A. (1971):** „Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids“, *International Journal of Solids and Structures* **7**, 1581–1599.



- Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J. (1973):** „Incompatible Displacement Models“, in: (S.J. Fenves et al., eds.) *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, New York, p. 34.
- Wriggers, P. (1988):** „Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode“, Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Wriggers, P., Eberlein, R., Reese, S. (1996):** „A Comparison of 3-Dimensional Continuum and Shell Elements for Finite Plasticity“, *International Journal of Solids and Structures* **33**, 3309–3326.
- Wriggers, P., Reese, S. (1996):** „A Note on Enhanced Strain Methods for Large Deformations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **135**, 201–209.
- Wu, C.-C., Cheung, Y.K. (1995):** „On Optimization Approaches of Hybrid Stress Elements“, *Finite Elements in Analysis and Design* **21**, 111–128.
- Yeo, S.T., Lee, B.C. (1996):** „Equivalence between Enhanced Assumed Strain Method and Assumed Stress Hybrid Method Based on the Hellinger–Reissner Principle“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**, 3083–3099.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Too, J.M. (1971):** „Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **3**, 275–290.

## Anhang

### A Tensorrechnung

- Vektor in ko- bzw. kontravarianter Darstellung

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i = a^i \mathbf{g}_i \quad (\text{A.1})$$

- Dyadisches Produkt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{A} \quad , \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{A.2})$$

- Tensor zweiter Stufe in ko-, kontra- und gemischtvarianter Darstellung

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = A_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \quad (\text{A.3})$$

- Tensor vierter Stufe in kontravarianter Darstellung

$$\mathbf{A} = A^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (\text{A.4})$$

- Skalarprodukt zweier Vektoren (einfache Verjüngung)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i \quad (\text{A.5})$$

- Skalarprodukt zweier Tensoren (doppelte Verjüngung)

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij} \quad (\text{A.6})$$

- Einfache Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe durch einen Vektor

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A^{ij} b_j \mathbf{g}_i \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{A} = b_i A^{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{A.8})$$

- Produktregel

$$\text{div} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{S}^T : \text{grad} \mathbf{u} + (\text{div} \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

- Gaußscher Integralsatz (Divergenztheorem)

$$\int_V \text{div} \mathbf{S} \, dV = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{A.10})$$

$$\int_V \text{div} \mathbf{u} \, dV = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{A.11})$$

Aus der Produktregel und dem Gaußschen Integralsatz folgt die Formel für

- partielle Integration

$$\int_V \text{grad} \mathbf{u} : \mathbf{P} \, dV = \int_A \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int_V \mathbf{u} \cdot \text{div} \mathbf{P} \, dV \quad (\text{A.12})$$

- Formeln zur Berechnung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i ; \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^i \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{g}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}_i ; \quad \mathbf{F}^{-T} = \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (\text{A.14})$$

- für beliebige Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  gilt

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} : \mathbf{C} \quad (\text{A.15})$$

## B Mechanik

- Gleichgewichtsbeziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

- Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (\text{B.3})$$

- kinematische Gleichung (Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}$  und Green–Lagrangescher Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ )

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \quad (\text{B.5})$$

- Stoffgesetz (St.–Venant–Kirchhoff)

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (\text{B.6})$$

- statische Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \quad \text{auf } A_S \quad (\text{B.7})$$

- Stoffgesetz

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{auf } A_u \quad (\text{B.8})$$

- erster Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor  $\mathbf{P}$  (PK1) und zweiter Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor  $\mathbf{S}$  (PK2)

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{B.9})$$

- Cauchy–Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{|\mathbf{F}|} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{B.10})$$

- Spannungsvektor (Oberflächenspannungen)

$$\mathbf{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.11})$$

## C Finite Elemente

Die in dieser Arbeit beschriebenen Elemente beruhen alle auf den bekannten drei- und viereckigen Grundtypen der Lagrange- und Serendipity Klasse. Ihre Geometrie, die Knotennummerierung, Lage der Gaußpunkte und die Definition des Elementkoordinatensystems sind in Abb. C.1 dargestellt.

Formfunktionen der dreieckigen Elemente (vollständige Polynome):

- dreiknotiges Dreieckelement

$$N_1 = 1 - \xi - \eta ; \quad N_2 = \xi ; \quad N_3 = \eta \quad (C.1)$$

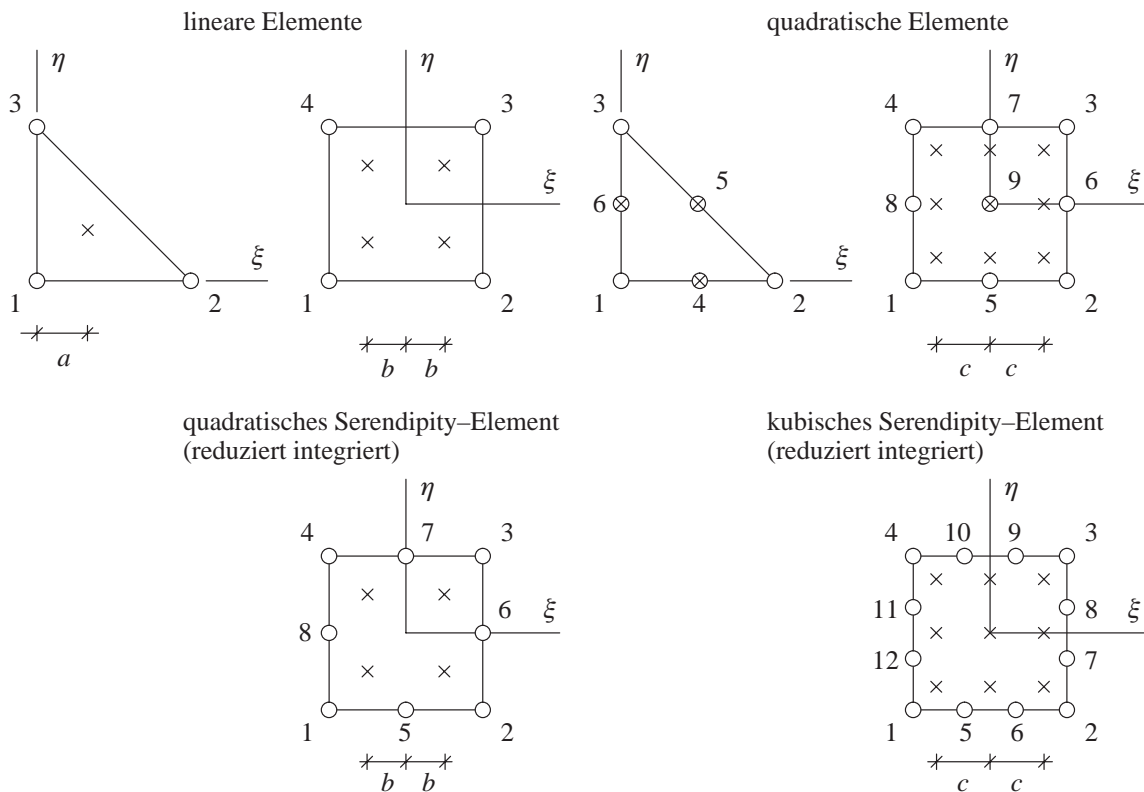
- sechsknotiges Dreieckelement

$$N_1 = (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) ; \quad N_2 = 2\xi^2 - \xi \quad (C.2)$$

$$N_3 = 2\eta^2 - \eta ; \quad N_4 = 4(\xi - \xi^2 - \xi\eta) \quad (C.3)$$

$$N_5 = 4\xi\eta ; \quad N_6 = 4(\eta - \eta^2 - \xi\eta) \quad (C.4)$$

Formfunktionen der viereckigen Elemente (Lagrange-Polynome):



○ Knoten      × Integrationspunkt

Dreieckelemente:  $0 \leq \xi \leq 1 - \eta$       Viereckelemente:  $-1 \leq \xi \leq 1$   
 $0 \leq \eta \leq 1 - \xi$        $-1 \leq \eta \leq 1$

Dickenrichtung:  $-1 \leq \zeta \leq 1$

Abb. C.1: Integrationspunkte für vier- und dreieckige Elemente

- vierknotiges Viereckelement

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) ; \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (\text{C.5})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) ; \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (\text{C.6})$$

- neunknotiges Viereckelement

$$N_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta) ; \quad N_2 = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (\text{C.7})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta) ; \quad N_4 = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (\text{C.8})$$

$$N_5 = -\frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(1 - \eta) ; \quad N_6 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{C.9})$$

$$N_7 = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(1 + \eta) ; \quad N_8 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{C.10})$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (\text{C.11})$$

Formfunktionen der Serendipity-Elemente:

- achtknotiges Viereckelement

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(\xi + \eta + 1) \quad (\text{C.12})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (\text{C.13})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (\text{C.14})$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta + 1) \quad (\text{C.15})$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (\text{C.16})$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \quad (\text{C.17})$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (\text{C.18})$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \quad (\text{C.19})$$

- zwölfknotiges Viereckelement

$$N_1 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (\text{C.20})$$

$$N_2 = \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (\text{C.21})$$

$$N_3 = \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (\text{C.22})$$

$$N_4 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10] \quad (\text{C.23})$$

$$N_5 = \frac{9}{32}(1 - \eta)(1 - \xi^2)(1 - 3\xi) \quad (\text{C.24})$$

$$N_6 = \frac{9}{32}(1 - \eta)(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) \quad (\text{C.25})$$

$$N_7 = \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta) \quad (\text{C.26})$$

$$N_8 = \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta) \quad (\text{C.27})$$

$$N_9 = \frac{9}{32}(1 + \eta)(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) \quad (\text{C.28})$$

$$N_{10} = \frac{9}{32}(1 + \eta)(1 - \xi^2)(1 - 3\xi) \quad (\text{C.29})$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta) \quad (\text{C.30})$$

$$N_{12} = \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta) \quad (\text{C.31})$$

- Koordinaten der Integrationspunkte

lineare Dreieckelemente (reduziert integriert):

$$a = \frac{1}{3} = 0, \bar{3} \quad (\text{C.32})$$

lineare Dreieckelemente (voll integriert) und  
quadratische Dreieckelemente (reduziert integriert):

Integrationspunkte in den Seitenmitten

quadratische Dreieckelemente (Integrationsformel nach Gauß–Radau, in Abb. C.1  
nicht dargestellt):

$$\begin{aligned} x_{GP}(1) &\approx 0,0915762135098 ; & y_{GP}(1) &\approx 0,0915762135098 \\ x_{GP}(2) &\approx 0,8168475729805 ; & y_{GP}(2) &\approx 0,0915762135098 \\ x_{GP}(3) &\approx 0,0915762135098 ; & y_{GP}(3) &\approx 0,8168475729805 \\ x_{GP}(4) &\approx 0,4459484909160 ; & y_{GP}(4) &\approx 0,1081030181681 \\ x_{GP}(5) &\approx 0,4459484909160 ; & y_{GP}(5) &\approx 0,4459484909160 \\ x_{GP}(6) &\approx 0,1081030181681 ; & y_{GP}(6) &\approx 0,4459484909160 \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

lineare Viereckelemente:

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,5773502691896 \quad (\text{C.34})$$

quadratische Viereckelemente:

$$c = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,7745966692415 \quad (\text{C.35})$$

- reduzierte Integration

bei reduziert integrierten Elementen wird in jeder Richtung ein Integrationspunkt weniger verwendet, als zur vollen Integration notwendig wäre, also

- 1 Integrationspunkt für T1RI
- 3 Integrationspunkte für T2RI
- 1 Integrationspunkt für Q1RI
- 4 Integrationspunkte für S2RI und Q2RI sowie
- 9 Integrationspunkte für S3RI

- Diskretisierung

$$\mathbf{r} = N_K \mathbf{r}^K \quad (\text{C.36})$$

$$\mathbf{a}_3 = N_K \mathbf{a}_3^K \quad (\text{C.37})$$

$$\mathbf{v} = N_K \mathbf{v}^K \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{w} = N_K \mathbf{w}^K \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} v_{x_h} \\ v_{y_h} \\ v_{z_h} \end{bmatrix} + \theta^3 \begin{bmatrix} w_{x_h} \\ w_{y_h} \\ w_{z_h} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (\text{C.40})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \zeta N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 & \zeta N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \zeta N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 & 0 & \zeta N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \zeta N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n & 0 & 0 & \zeta N_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{d} = \left[ v_x^1 \ v_y^1 \ v_z^1 \ w_x^1 \ w_y^1 \ w_z^1 \ \dots \ v_x^n \ v_y^n \ v_z^n \ w_x^n \ w_y^n \ w_z^n \right]^T \quad (\text{C.42})$$

$N$  = Anzahl der Knoten pro Element

- Ansätze für zusätzliche Verzerrungen (nur der Anteil in Dickenrichtung, der für eine asymptotisch korrekte Formulierung notwendig ist)

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{\boldsymbol{\beta}} \right]^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{C.43})$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{,\alpha} \right]^T \quad (\text{C.44})$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha\alpha} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (\text{C.45})$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1^{(12)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^{(12)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{n_\alpha}^{(12)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.46})$$



$$\mathbf{a} = \left[ \alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^{n_a} \right]^T \quad (\text{C.47})$$

$n_a$  = Anzahl der internen Parameter pro Element

$$M_1^{(12)} = 1 ; \quad M_2^{(12)} = \xi ; \quad M_3^{(12)} = \eta ; \quad M_4^{(12)} = \xi\eta ; \quad \dots \quad (\text{C.48})$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_h = M_{n_a}^{(12)} \alpha^{n_a} \quad (\text{C.49})$$

$$\mathbf{E}_h^u = \left[ \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{22} \alpha_{23} \alpha_{33} \beta_{11} \beta_{12} \beta_{13} \beta_{22} \beta_{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.50})$$

$$\mathbf{E}_{h,d}^u = \left[ \alpha'_{11} \alpha'_{12} \alpha'_{13} \alpha'_{22} \alpha'_{23} \alpha'_{33} \beta'_{11} \beta'_{12} \beta'_{13} \beta'_{22} \beta'_{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.51})$$

$$\mathbf{E}_{h,dd}^u = \left[ \alpha''_{11} \alpha''_{12} \alpha''_{13} \alpha''_{22} \alpha''_{23} \alpha''_{33} \beta''_{11} \beta''_{12} \beta''_{13} \beta''_{22} \beta''_{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.52})$$

$$\mathbf{S}_h^u = \left[ n^{11} n^{12} n^{13} n^{22} n^{23} n^{33} m^{11} m^{12} m^{13} m^{22} m^{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.53})$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_h = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ m^{33} \right]^T \quad (\text{C.54})$$

$$\mathbf{S}_{h,d}^u = \left[ n_{,d}^{11} n_{,d}^{12} n_{,d}^{13} n_{,d}^{22} n_{,d}^{23} n_{,d}^{33} m_{,d}^{11} m_{,d}^{12} m_{,d}^{13} m_{,d}^{22} m_{,d}^{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.55})$$

$$\mathbf{S}_{h,\alpha}^u = \left[ n_{,\alpha}^{11} n_{,\alpha}^{12} n_{,\alpha}^{13} n_{,\alpha}^{22} n_{,\alpha}^{23} n_{,\alpha}^{33} m_{,\alpha}^{11} m_{,\alpha}^{12} m_{,\alpha}^{13} m_{,\alpha}^{22} m_{,\alpha}^{23} 0 \right]^T \quad (\text{C.56})$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{h,d} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ m_{,d}^{33} \right]^T \quad (\text{C.57})$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{h,\alpha} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ m_{,\alpha}^{33} \right]^T \quad (\text{C.58})$$

wobei die statischen Variablen  $n^{ij}$  und  $m^{ij}$  über das Stoffgesetz aus den kinematischen Variablen  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  und  $\tilde{\beta}_{33}$  gewonnen werden. Der Index  $h$  zur Kennzeichnung approximierter Größen wird hier weggelassen.

- kovariante Basisvektoren beider Konfigurationen und deren Variationen

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} ; \quad \delta \mathbf{a}_\alpha = 0 \quad (\text{C.59})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \mathbf{v}_{,\alpha} ; \quad \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \delta \mathbf{v}_{,\alpha} ; \quad (\text{C.60})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{w} ; \quad \delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \delta \mathbf{w} \quad (\text{C.61})$$

- Variation des Verzerrungstensors

$$\delta \alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_\beta \right) \quad (\text{C.62})$$

$$\delta \beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \left( \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} + \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \right) \quad (\text{C.63})$$

$$\delta \alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{a}}_3 \right) \quad (\text{C.64})$$

$$\delta\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{h}(\delta\bar{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_{3,\alpha} \cdot \delta\bar{a}_3) \quad (\text{C.65})$$

$$\delta\alpha_{33} = \delta\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 \quad (\text{C.66})$$

$$\delta\beta_{33} = \frac{2}{h} \delta\tilde{\beta} \quad (\text{C.67})$$

- Variation des diskretisierten Verzerrungstensors

Für die Berechnung des Verzerrungstensors und dessen Variation werden die diskreten Basisvektoren benötigt. Nach Gleichung (4.3) sind das die Ableitungen der Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  zur Schalenmittelfläche nach den krummlinigen Koordinaten  $\theta^\alpha$ . Bei der Finite-Elemente-Formulierung wird dafür das lokale Elementkoordinatensystem verwendet, also  $\theta^1 = \xi$  und  $\theta^2 = \eta$ . Mit der Abkürzung

$$N_{K,\alpha} = \frac{\partial N_K}{\partial \theta^\alpha} \quad \Rightarrow \quad N_{K,1} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi} ; \quad N_{K,2} = \frac{\partial N_K}{\partial \eta} \quad (\text{C.68})$$

$$\mathbf{a}_\alpha = N_{K,\alpha} \mathbf{r}^K ; \quad \delta\mathbf{a}_\alpha = N_{K,\alpha} \delta\mathbf{r}^K = 0 = \delta\mathbf{a}_3 \quad (\text{C.69})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = N_{K,\alpha} \mathbf{r}^K + N_{K,\alpha} \mathbf{v}^K ; \quad \delta\bar{\mathbf{a}}_\alpha = N_{K,\alpha} \delta\mathbf{v}^K ; \quad (\text{C.70})$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = N_K \mathbf{a}_3^K + N_K \mathbf{w}^K ; \quad \delta\bar{\mathbf{a}}_3 = N_K \delta\mathbf{w}^K ; \quad (\text{C.71})$$

$$\delta\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = N_{K,\alpha} \delta\mathbf{w}^K \quad (\text{C.72})$$

$$\delta\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{a}}_\beta N_{K,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha N_{K,\beta} \right] \delta\mathbf{v}^K = \alpha'_{\alpha\beta} \delta\mathbf{d} \quad (\text{C.73})$$

$$\delta\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \left[ \left( \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} N_{K,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} N_{K,\alpha} \right) \delta\mathbf{v}^K + \left( \bar{\mathbf{a}}_\alpha N_{K,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta N_{K,\alpha} \right) \delta\mathbf{w}^K \right] = \beta'_{\alpha\beta} \delta\mathbf{d} \quad (\text{C.74})$$

$$\delta\alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{a}}_3 N_{K,\alpha} \delta\mathbf{v}^K + \bar{\mathbf{a}}_\alpha N_K \delta\mathbf{w}^K \right] = \alpha'_{\alpha 3} \delta\mathbf{d} \quad (\text{C.75})$$

$$\delta\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{h} \left[ \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} N_K + \bar{\mathbf{a}}_3 N_{K,\alpha} \right] \delta\mathbf{w}^K = \beta'_{\alpha 3} \delta\mathbf{d} \quad (\text{C.76})$$

$$\delta\alpha_{33} = \bar{\mathbf{a}}_3 N_K \delta\mathbf{w}^K = \alpha'_{33} \delta\mathbf{d} \quad (\text{C.77})$$

$$\delta\beta_{33} = \frac{2}{h} \delta\tilde{\beta} \quad (\text{C.78})$$

$$n_{,d}^{kl} = \int_{-1}^1 \left( \alpha'_{ij} + \frac{h}{2} \theta^3 \beta'_{ij} + \frac{h^2}{4} (\theta^3)^2 \gamma'_{ij} \right) C^{ijkl} \hat{\mu} d\theta^3 \quad (\text{C.79})$$

$$m_{,d}^{kl} = \int_{-1}^1 \theta^3 \left( \alpha'_{ij} + \frac{h}{2} \theta^3 \beta'_{ij} + \frac{h^2}{4} (\theta^3)^2 \gamma'_{ij} \right) C^{ijkl} \frac{h}{2} \hat{\mu} d\theta^3 \quad (\text{C.80})$$

- zweite Gâteaux-Ableitung der Verzerrungen

$$D\delta\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \delta\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot D\bar{\mathbf{a}}_\beta + D\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta\bar{\mathbf{a}}_\beta \right) \quad (\text{C.81})$$

$$D\delta\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \left( \delta\bar{a}_\alpha \cdot D\bar{a}_{3,\beta} + D\bar{a}_\beta \cdot \delta\bar{a}_{3,\alpha} + \delta\bar{a}_\alpha \cdot D\bar{a}_{3,\beta} + D\bar{a}_\beta \cdot \delta\bar{a}_{3,\alpha} \right) \quad (\text{C.82})$$

$$D\delta\alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\delta\bar{a}_\alpha \cdot D\bar{a}_3 + D\bar{a}_\alpha \cdot \delta\bar{a}_3) \quad (\text{C.83})$$

$$D\delta\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{h} (\delta\bar{a}_{3,\alpha} \cdot D\bar{a}_3 + D\bar{a}_{3,\alpha} \delta\bar{a}_3) \quad (\text{C.84})$$

$$D\delta\alpha_{33} = \delta\bar{a}_3 \cdot D\bar{a}_3 \quad (\text{C.85})$$

$$D\delta\beta_{33} = 0 \quad (\text{C.86})$$

- zweite Gâteaux–Ableitung der diskretisierten Verzerrungen

$$D\delta\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}^M \left[ N_{M,\beta} N_{K,\alpha} + N_{M,\alpha} N_{K,\beta} \right] \delta \mathbf{v}^K = \Delta \mathbf{d} \alpha'_{\alpha\beta} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.87})$$

$$D\delta\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \left[ \Delta \mathbf{w}^M \left( N_{M,\alpha} N_{K,\beta} + N_{M,\beta} N_{K,\alpha} \right) \delta \mathbf{v}^K \right. \\ \left. + \Delta \mathbf{v}^M \left( N_{M,\alpha} N_{K,\beta} + N_{M,\beta} N_{K,\alpha} \right) \delta \mathbf{w}^K \right] = \Delta \mathbf{d} \beta'_{\alpha\beta} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.88})$$

$$D\delta\alpha_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[ \Delta \mathbf{w}^M N_{M,\alpha} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{v}^K + D\mathbf{v}^M N_{M,\alpha} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{w}^K \right] = \Delta \mathbf{d} \alpha'_{\alpha 3} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.89})$$

$$D\delta\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{h} \Delta \mathbf{w}^M \left[ N_{M,\alpha} N_{K,\alpha} + N_{M,\alpha} N_{K,\alpha} \right] \delta \mathbf{w}^K = \Delta \mathbf{d} \beta'_{\alpha 3} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.90})$$

$$D\delta\alpha_{33} = \Delta \mathbf{w}^M N_{M,\alpha} N_{K,\alpha} \delta \mathbf{w}^K = \Delta \mathbf{d} \alpha'_{33} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.91})$$

$$D\delta\beta_{33} = 0 \quad (\text{C.92})$$

- vierknotiges DSG–Schalenelement

$$\delta\alpha_{13} = \frac{1}{16} (1 - \eta) \left[ (\delta \mathbf{v}^2 - \delta \mathbf{v}^1) (\bar{\mathbf{a}}_3^1 + \bar{\mathbf{a}}_3^2) + (\delta \mathbf{w}^1 + \delta \mathbf{w}^2) (\bar{\mathbf{r}}^2 - \bar{\mathbf{r}}^1) \right] \\ + \frac{1}{16} (1 + \eta) \left[ (\delta \mathbf{v}^3 - \delta \mathbf{v}^4) (\bar{\mathbf{a}}_3^3 + \bar{\mathbf{a}}_3^4) + (\delta \mathbf{w}^3 + \delta \mathbf{w}^4) (\bar{\mathbf{r}}^3 - \bar{\mathbf{r}}^4) \right] \\ =: \alpha'_{13} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.93})$$

$$\delta\alpha_{23} = \frac{1}{16} (1 - \xi) \left[ (\delta \mathbf{v}^4 - \delta \mathbf{v}^1) (\bar{\mathbf{a}}_3^1 + \bar{\mathbf{a}}_3^4) + (\delta \mathbf{w}^1 + \delta \mathbf{w}^4) (\bar{\mathbf{r}}^4 - \bar{\mathbf{r}}^1) \right] \\ + \frac{1}{16} (1 + \xi) \left[ (\delta \mathbf{v}^3 - \delta \mathbf{v}^2) (\bar{\mathbf{a}}_3^2 + \bar{\mathbf{a}}_3^3) + (\delta \mathbf{w}^2 + \delta \mathbf{w}^3) (\bar{\mathbf{r}}^3 - \bar{\mathbf{r}}^2) \right] \\ =: \alpha'_{23} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.94})$$

$$D\delta\alpha_{13} = \frac{1}{16} (1 - \eta) \left[ (\delta \mathbf{v}^2 - \delta \mathbf{v}^1) (D\mathbf{w}^1 + D\mathbf{w}^2) + (\delta \mathbf{w}^1 + \delta \mathbf{w}^2) (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1) \right] \\ + \frac{1}{16} (1 + \eta) \left[ (\delta \mathbf{v}^3 - \delta \mathbf{v}^4) (D\mathbf{w}^3 + D\mathbf{w}^4) + (\delta \mathbf{w}^3 + \delta \mathbf{w}^4) (\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^4) \right] \\ =: \Delta \mathbf{d} \alpha'_{13} \delta \mathbf{d} \quad (\text{C.95})$$

$$\begin{aligned}
D\delta\alpha_{23} &= \frac{1}{16}(1 - \xi)\left[(\delta\mathbf{v}^4 - \delta\mathbf{v}^1)(D\mathbf{w}^1 + D\mathbf{w}^4) + (\delta\mathbf{w}^1 + \delta\mathbf{w}^4)(\mathbf{v}^4 - \mathbf{v}^1)\right] \\
&\quad + \frac{1}{16}(1 + \xi)\left[(\delta\mathbf{v}^3 - \delta\mathbf{v}^2)(D\mathbf{w}^2 + D\mathbf{w}^3) + (\delta\mathbf{w}^2 + \delta\mathbf{w}^3)(\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^2)\right] \quad (\text{C.96})
\end{aligned}$$

$$=: \Delta\mathbf{d} \alpha'_{23} \delta\mathbf{d}$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{16}(1 - \eta)v_{\gamma\xi}^2 + \frac{1}{16}(1 + \eta)v_{\gamma\xi}^3 \quad (\text{C.97})$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{16}(1 - \xi)v_{\gamma\eta}^4 + \frac{1}{16}(1 + \xi)v_{\gamma\eta}^3 \quad (\text{C.98})$$

mit

$$v_{\gamma\xi}^2 = (\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^1)(\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) + (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1)(\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2) + (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1)(\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) \quad (\text{C.99})$$

$$v_{\gamma\xi}^3 = (\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^1)(\mathbf{w}^3 + \mathbf{w}^4) + (\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^4)(\mathbf{d}^3 + \mathbf{d}^4) + (\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^4)(\mathbf{w}^3 + \mathbf{w}^4) \quad (\text{C.100})$$

$$v_{\gamma\eta}^4 = (\mathbf{r}^4 - \mathbf{r}^1)(\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^4) + (\mathbf{v}^4 - \mathbf{v}^1)(\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^4) + (\mathbf{v}^4 - \mathbf{v}^1)(\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^4) \quad (\text{C.101})$$

$$v_{\gamma\eta}^3 = (\mathbf{r}^3 - \mathbf{r}^2)(\mathbf{w}^2 + \mathbf{w}^3) + (\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{d}^2 + \mathbf{d}^3) + (\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{w}^2 + \mathbf{w}^3) \quad (\text{C.102})$$

## D Energiemethoden und Variationsrechnung

Energiemethoden haben in der Mechanik durch ihre Nützlichkeit bei der Herleitung alternativer Finiter Elemente in den letzten dreißig Jahren stark an Bedeutung gewonnen. In diesem Teil des Anhangs sind deshalb die, im Zusammenhang mit finiten Elementen, wichtigsten Begriffe und Funktionale zusammengestellt. Insbesondere bei der Herleitung der Mehrfeldfunktionale wird dabei besonderer Augenmerk auf die Bedeutung der Lagrangeschen Multiplikatoren gerichtet.

### *Potentiale und Komplementärpotentiale*

Zunächst wird die Existenz einer Formänderungsenergiedichte  $W^{int}$  und einer Komplementärenergiedichte  $\tilde{W}^{int}$  mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S} ; \quad \frac{\partial \tilde{W}^{int}(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{E} \quad (\text{D.1})$$

postuliert. Daraus kann die Legendre–Transformation

$$W^{int}(\mathbf{E}) + \tilde{W}^{int}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \mathbf{E} \quad (\text{D.2})$$

hergeleitet werden. Für linear–elastisches Material gilt außerdem

$$W^{int}(\mathbf{E}) = \tilde{W}^{int}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{E} \quad (\text{D.3})$$

Für das Potential und das Komplementärpotential der Volumenlasten gilt

$$W_V^{ext}(\mathbf{u}) + \tilde{W}_V^{ext}(\mathbf{b}) = -\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{D.4})$$

Für den Sonderfall verformungsunabhängiger Lasten lassen sich Potential und Komplementärpotential der Volumenlasten einzeln angeben.

$$W_V^{ext}(\mathbf{u}) = -\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} ; \quad \tilde{W}_V^{ext}(\mathbf{b}) = 0 \quad (\text{D.5})$$

Das Potential und das Komplementärpotential der Oberflächenlasten sind

$$W_A^{ext}(\mathbf{u}) = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \text{ auf } A_S ; \quad \tilde{W}_A^{ext}(\mathbf{t}) = -\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \text{ auf } A_u \quad (\text{D.6})$$

### *Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie*

Die innere und die äußere Arbeit erhält man aus dem Integral der entsprechenden Potentiale.

$$\Pi^{int} = \int_V W^{int} dV ; \quad \Pi_V^{ext} = \int_V W_V^{ext} dV ; \quad \Pi_A^{ext} = \int_{A_S} W_A^{ext} dA \quad (\text{D.7})$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie lautet damit

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = \Pi^{int} + \Pi_V^{ext} + \Pi_A^{ext} = \min. \quad (\text{D.8})$$

$$\Rightarrow \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = \int_V W^{int}(\mathbf{E}) dV - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA = \min. \quad (\text{D.9})$$

(Gleichung (D.9)) gilt nur unter der Voraussetzung verschiebungsunabhängiger Lasten). Es ist den statischen Gleichungen (Gleichgewicht) äquivalent. Es enthält Verzerrungen und Verschiebungen als Unbekannte, die geometrischen Gleichungen sind noch nicht berücksichtigt. Das Werkstoffgesetz ist implizit in der Definition der Verzerrungsenergie dichte enthalten (vgl. Gleichung (D.1)).

### Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie

Die innere und die äußere Ergänzungsarbeit wird analog zur Herleitung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie berechnet.

$$\tilde{\Pi}^{int} = \int_V \tilde{W}^{int} dV ; \quad \tilde{\Pi}_V^{ext} = \int_V \tilde{W}_V^{ext} dV ; \quad \tilde{\Pi}_A^{ext} = \int_{A_S} \tilde{W}_A^{ext} dA \quad (D.10)$$

Damit läßt sich das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie formulieren.

$$\tilde{\Pi}(S) = \tilde{\Pi}^{int} + \tilde{\Pi}_V^{ext} + \tilde{\Pi}_A^{ext} = \min. \quad (D.11)$$

$$\tilde{\Pi}(S) = \int_V \tilde{W}^{int}(S) dV - \int_{A_u} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} dA = \min. \quad (D.12)$$

(Gleichung (D.12)) gilt unter der Voraussetzung verschiebungsunabhängiger Lasten). Es ist den geometrischen Gleichungen äquivalent. Das Stoffgesetz ist, wie beim Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, implizit enthalten, die statischen Gleichungen sind noch nicht berücksichtigt.

### Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen entsteht durch Einsetzen der geometrischen Gleichungen in das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie und anschließende Variation. Der Kopfzeiger  $u$  weist auf die explizite Abhängigkeit des Verzerrungstensors von den Verschiebungen hin, d. h.  $\mathbf{E}^u$  kann als Abkürzung für  $\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g})$  verstanden werden (Felippa (1989)).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \mathbf{E}^u \quad (D.13)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } A_u \quad (D.14)$$

$$\Rightarrow \Pi(\mathbf{u}) = \int_V [W^{int}(\mathbf{E}^u) - \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA = \min. \quad (D.15)$$

Die erste Variation von (D.15) führt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \delta \mathbf{E}^u - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad (D.16)$$

mit

$$\delta \mathbf{E}^u = \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} \quad (\text{D.17})$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist den statischen Gleichungen äquivalent, siehe Eulergleichungen (D.22) und (D.23).

Zur Herleitung der Eulerschen Differentialgleichungen wird der erste Term in (D.16) etwas umgeformt.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} : \text{grad } \delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u : \text{grad } \delta \mathbf{u} \quad (\text{D.18})$$

$$\Rightarrow \delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u : \text{grad } \delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}] dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad (\text{D.19})$$

Mit Hilfe der Produktregel (A.9) und des Gaußschen Integralsatzes (A.11) erhält man

$$\int_V \text{grad } \delta \mathbf{u} : \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u dV = \int_{A_S} \mathbf{t}^u \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) dV \quad (\text{D.20})$$

mit dem Oberflächenspannungsvektor  $\mathbf{t}^u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u \cdot \mathbf{n}$

$$\Rightarrow \delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (-\text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) - \rho \mathbf{b}) dV - \int_{A_S} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u) dA = 0 \quad (\text{D.21})$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgen die Eulerschen Differentialgleichungen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } V ; \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (\text{D.22})$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^u \quad \text{auf } A_S ; \quad (\text{statische Randbedingungen}) \quad (\text{D.23})$$

Sie sind explizit nur noch von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  abhängig.

### *Prinzip von Hu–Washizu*

Die Grundlage für das Prinzip von Hu–Washizu ist wieder das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie. Im Gegensatz zur Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen werden die geometrischen Gleichungen hier jedoch nicht direkt eingesetzt (Eliminationsmethode) sondern mit Hilfe von Lagrange–Multiplikatoren in das Funktional eingebracht (Multiplikatorenmethode).

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) &= \int_V \left[ W^{int}(\mathbf{E}) + \lambda : \left( \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right] dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

In der Literatur findet man meistens die Lagrange-Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  bereits mit den physikalischen Größen  $S$  und  $t$  identifiziert, was jedoch nach Ansicht des Autors formal falsch ist. Die Spannungen sind über die Definition der Verzerrungsenergiedichte (D.1) bereits definiert. Es ist von vornherein nicht sicher, daß die neue Unbekannte, der Lagrange-Multiplikator  $\lambda$ , genau diesen Spannungen entspricht. Bei der Herleitung der Eulergleichungen wird gezeigt, welche Konsequenz das hat.

Durch die Anwendung der Multiplikatorenmethode ist aus dem Minimalproblem ein Stationärproblem geworden, was die Konvergenzeigenschaften der daraus abgeleiteten finiten Elemente beeinflusst (keine garantierte Konvergenz der Energie „von unten“ wie bei Verschiebungselementen).

Die erste Variation von (D.24) ist

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} = & \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \delta \lambda : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) + \lambda : \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} - \lambda : \delta \mathbf{E} \right] dV \\ & - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \delta \mu \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Analog zu (D.20) bekommt man mit Hilfe der Produktregel und des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned} \int_V \text{grad } \delta \mathbf{u} : \mathbf{F} \cdot \lambda dV &= \int_{A_S} \mathbf{F} \cdot \lambda \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} (\mathbf{F} \cdot \lambda) dV \quad (\text{D.26}) \\ \Rightarrow \delta\Pi_{HW} &= \int_V \left[ \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} + \delta \lambda \cdot (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} (\mathbf{F} \cdot \lambda) - \lambda : \delta \mathbf{E} \right] dV \\ & - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{F} \cdot \lambda \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \delta \mu \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert die Eulergleichungen des Prinzips von Hu-Washizu im Gebiet

$$\text{div} (\mathbf{F} \cdot \lambda) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{D.28})$$

$$\mathbf{E}^u - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{D.29})$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} - \lambda = \mathbf{0} \quad (\text{D.30})$$

und am Rand

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{F} \cdot \lambda \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S \quad (\text{D.31})$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u \quad (\text{D.32})$$

Es fällt auf, daß das Prinzip von Hu-Washizu zu insgesamt fünf Eulergleichungen führt. Es liegt nahe, diese mit den aus der Mechanik bekannten Gleichungen zu identifizieren, womit alle Glei-



chungen „schwach“ erfüllt wären. Insbesondere erinnert Gleichung (D.30) an das Stoffgesetz, das jedoch ursprünglich im Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie als Nebenbedingung (Gleichung (D.1), also im „starken“ Sinn, enthalten war.

Dieser scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man (D.1) in (D.30) einsetzt.

$$\mathbf{S} = \lambda \quad (\text{D.33})$$

Gleichung (D.33) ist eine Eulergleichung, die besagt, daß der Lagrange-Parameter  $\lambda$  im schwachen Sinne den Spannungen  $\mathbf{S}$  gleich ist. Im Gegensatz zu  $\mathbf{S}$  erfüllt  $\lambda$  also das Stoffgesetz nur im schwachen Sinne, nicht punktweise. Der zweite Lagrange-Parameter  $\boldsymbol{\mu}$  taucht in den Eulergleichungen (D.28) – (D.32) nicht auf, er dient lediglich als Testfunktion für die kinematische Randbedingung. Seine Einheit entspricht der des Spannungsvektors  $\mathbf{t}^S$ . Da er nur als Testfunktion dient kann er ohne weiteres durch diesen ersetzt werden.

Vertauscht man in Gleichung (D.24)  $\lambda$  mit  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  mit  $\mathbf{t}^S$ , so erhält man das Prinzip von Hu–Washizu, wie es in der Literatur zu finden ist.

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_V \left[ W^{int}(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right] dV \\ & - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  ist durch diesen Austausch neu definiert worden und erfüllt Gleichung (D.1) nun nicht mehr als Nebenbedingung, sondern nur noch variationell. Tatsächlich sind also im Prinzip von Hu–Washizu nur dann alle Gleichungen schwach erfüllt, wenn die ursprüngliche Definition der Spannungen  $\mathbf{S} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}}$  durch  $\mathbf{S} = \lambda$  ersetzt wird und damit die starke Erfüllung des Stoffgesetzes in eine schwache übergeht. Die Eulergleichungen entsprechen dann genau den mechanischen Feldgleichungen

$$\text{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (\text{D.35})$$

$$\mathbf{E}^u - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{Geometrie}) \quad (\text{D.36})$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (\text{Werkstoff}) \quad (\text{D.37})$$

sowie den statischen und geometrischen Randbedingungen.

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S \quad (\text{statische Randbedingungen}) \quad (\text{D.38})$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u \quad (\text{geometrische Randbedingungen}) \quad (\text{D.39})$$

### Prinzip von Hellinger–Reissner

Das Prinzip von Hellinger–Reissner (Hellinger (1914), Reissner (1950)) kann aus dem Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie hergeleitet werden. Dazu wird die Gleichgewichtsbedingung mit Hilfe der Multiplikatorenmethode in (D.12) eingesetzt. Das Stoffgesetz ist durch

die Definition der Komplementärenergiedichte bereits als Nebenbedingung enthalten. Allerdings wird hier nicht direkt die Definition aus Gleichung (D.1) verwendet, sondern die Komplementärenergiedichte wird in Abhängigkeit des ersten Piola–Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{P}$  ausgedrückt.

$$\frac{\partial \tilde{W}^{int}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{F} \quad (\text{D.40})$$

Das ist notwendig, um die Gleichgewichtsbedingung ohne Zuhilfenahme des Deformationsgradienten ausdrücken zu können. Das Prinzip von Hellinger–Reissner lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{HR}(\mathbf{P}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) = & \int_V \left[ \tilde{W}^{int}(\mathbf{P}) + \lambda \cdot (\text{div } \mathbf{P} + \rho \mathbf{b}) \right] dV \\ & - \int_{A_u} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dA + \int_{A_S} \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \, dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Auch hier dürfen die Lagrange–Multiplikatoren nicht direkt mit den Verschiebungen identifiziert werden, werden also zunächst als Unbekannte mitgenommen und bei der Variation berücksichtigt. Bevor die erste Variation durchgeführt wird ist es zweckmäßig, den zweiten Term in (D.41) mit Hilfe der Produktregel (A.9) und des Gaußschen Integralsatzes (A.11) umzuformen.

$$\int_V \lambda \cdot \text{div } \mathbf{P} \, dV = \int_A \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \lambda \, dA - \int_V \text{grad } \lambda : \mathbf{P} \, dV \quad (\text{D.42})$$

Im Integral über die Oberfläche kann hier auch  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^P$  geschrieben werden. Für dessen Variation gilt damit

$$\int_V \delta [\lambda \cdot \text{div } \mathbf{P}] \, dV = \int_V [\delta \lambda \cdot \text{div } \mathbf{P} - \text{grad } \lambda : \delta \mathbf{P}] \, dV + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^P \cdot \lambda \, dA \quad (\text{D.43})$$

Die erste Variation des Prinzips von Hellinger–Reissner ist dann

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}_{HR} = & \int_V \left[ \frac{\partial \tilde{W}^{int}}{\partial \mathbf{P}} : \delta \mathbf{P} + \delta \lambda \cdot \text{div } \mathbf{P} - \text{grad } \lambda : \delta \mathbf{P} + \rho \delta \lambda \cdot \mathbf{b} \right] dV \\ & - \int_{A_u} \delta \mathbf{t} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \lambda) \, dA + \int_{A_S} \delta \boldsymbol{\mu} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgen die Eulerschen Differentialgleichungen im Gebiet

$$\frac{\partial \tilde{W}^{int}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \text{grad } \lambda \quad (\text{D.45})$$

$$\text{div } \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{D.46})$$

und auf dem Rand

$$\hat{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u \quad (\text{D.47})$$

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^P = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S \quad (\text{D.48})$$

Besonders Gleichung (D.47) legt die Identifikation des Lagrange-Parameters  $\boldsymbol{\lambda}$  mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nahe. Wird  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$  als Nebenbedingung in die Eulergleichungen eingebracht, erhält man die Geometriegleichung und die Gleichgewichtsbedingung im Gebiet, sowie die geometrischen und statischen Randbedingungen. Da über diese Verschiebungen bis zu dieser Substitution noch nichts ausgesagt wurde, hat sie — im Gegensatz zur Herleitung des Prinzips von Hu–Washizu — keine Auswirkung auf die starke oder schwache Erfüllung bestimmter Gleichungen.

Eine Alternative zu dieser Herleitung besteht in der Herleitung aus dem Prinzip von Hu–Washizu. Dazu wird in das Funktional von Hu–Washizu (D.34) das Stoffgesetz in der Form

$$\mathbf{W}^{int}(\mathbf{E}) = \mathbf{S} : \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{W}}^{int}(\mathbf{S}) ; \quad \mathbf{E} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}^{int}}{\partial \mathbf{S}} \quad (\text{D.49})$$

als Nebenbedingung eingesetzt.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) &= \int_V \left[ -\tilde{\mathbf{W}}^{int}(\mathbf{S}) + \mathbf{S} : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \right] dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = \text{stat.} \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

Die erste Variation von (D.50) ist

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR} &= \int_V \left[ -\frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}^{int}}{\partial \mathbf{S}} : \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{S} : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) + \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} \right] dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Partielle Integration liefert schließlich

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR} &= \int_V \left[ -\frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}^{int}}{\partial \mathbf{S}} : \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{S} : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \right] dV \\ &\quad - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_S} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) dA + \int_{A_u} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

Daraus folgen die Eulerschen Differentialgleichungen des Prinzips von Hellinger–Reissner.

$$\text{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (\text{D.53})$$

$$\frac{\partial \tilde{W}^{int}}{\partial \mathcal{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \quad (\text{Geometrie}) \quad (\text{D.54})$$

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_S \quad (\text{statische Randbedingungen}) \quad (\text{D.55})$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } A_u \quad (\text{geometrische Randbedingungen}) \quad (\text{D.56})$$

Einzigste Nebenbedingung, und damit die einzige Gleichung, die stark erfüllt wird, ist das Stoffgesetz.

## Lebenslauf

Name:	Manfred Robert Bischoff
Geburtsdatum:	25. April 1968
Geburtsort:	Freudenstadt
Eltern:	Helmut und Gisela Bischoff, geb. Pickhardt
Familienstand:	ledig, keine Kinder
1974 – 1978	Besuch der Hartranft–Grundschule in Freudenstadt
1978 – 1987	Besuch des Kepler–Gymnasiums in Freudenstadt
14. 5. 1987	Abitur
1. 10. 1987 – 31. 12. 1988	Grundwehrdienst in der Panzerbrigade 14 in Neustadt und Stadtallendorf
1. 10. 1988 – 22. 3. 1993	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart
22. 3. 1993	Diplom
seit 1. 6. 1993	angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Prof. Dr.–Ing. E. Ramm



## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1**      **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2**      **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des  
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3**      **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4**      **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei  
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1**      **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2**      **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie  
nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3**      **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger  
unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1**      **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,  
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2**      **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1**      **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke  
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1**      **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung  
von Stahlbetonplatten.
- 79-1**      **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79–2 H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79–3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragsystemen (in englischer Sprache).
- 80–1 R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80–2 R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragsysteme unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80–3 J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82–1 L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82–2 K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragsystemen unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82–3 H.–P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.



- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.

- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.



Universität Stuttgart

