

Anwendung der Redundanzmatrix bei der Bewertung adaptiver Strukturen

Florian Geiger, Jan Gade, Malte von Scheven, Manfred Bischoff

Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart

Zusammenfassung: Die Antwort einer Struktur auf Aktuierung wird maßgeblich vom Grad der statischen Unbestimmtheit und deren Verteilung in der Struktur beeinflusst. Die Redundanzmatrix enthält diese Informationen über das Tragwerk. Aus ihr können daher Rückschlüsse für die Aktorplatzierung und für die Bewertung der Aktuierbarkeit von Strukturen gezogen werden. Die Untersuchung eines Beispieltragwerks veranschaulicht einerseits die Einsatzmöglichkeiten der Redundanzmatrix und andererseits das Masseneinsparungspotential, das mithilfe des Einsatzes aktiver Elemente in passiven Strukturen erschlossen werden kann.

1 Einführung

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist eine entscheidende Größe beim Entwurf und bei der Analyse von Tragwerken. Die Reaktion einer Struktur auf äußere Einflüsse wie zum Beispiel Temperaturänderungen, Setzungen des Baugrundes oder auch auf gezielt eingeführte Stablängenänderungen durch Aktorik hängt maßgeblich von ihrer statischen Unbestimmtheit ab. Der Grad der statische Unbestimmtheit ist definiert als die Anzahl der fehlenden Gleichgewichtsbedingungen, um die Schnittgrößen in der gesamten Struktur berechnen zu können, und ist damit eine einzige, ganze Zahl. Wie sich die statische Unbestimmtheit auf Tragwerksteile oder einzelne Elemente aufteilt, wurde bisher kaum systematisch untersucht. Diese Verteilung im Tragwerk kann aber wichtige Informationen zum Beispiel für die Platzierung von Aktoren im Tragwerk liefern [8]. Aktoren, die große Verschiebungen mit wenig Energieeinsatz hervorrufen sollen, werden sinnvollerweise in statisch bestimmten Bereichen eingesetzt. Stattdessen kann eine Änderung des Kraftzustandes in der Struktur nur durch Aktivierung des Zwangs, also in statisch unbestimmten Tragwerksteilen erfolgen. Da sie die Information über die Verteilung des Grades der statischen Unbestimmtheit im Tragwerk enthält, ist eine tiefer gehende Betrachtung der Redundanzmatrix interessant. Sie kann als Werkzeug bei der Planung von adaptiven Strukturen verwendet werden.

Die Redundanzmatrix wurde bereits von Linkwitz [3] berechnet, jedoch wurden die relevanten Eigenschaften für die Strukturmechanik erst später erkannt. Die Einführung der Redundanzmatrix für Fachwerkstrukturen ist Bahndorf [1] durch eine vergleichende Betrachtung der Ausgleichsrechnung in der Geodäsie und der Berechnung von Verschiebungen bzw. Längenänderungen in statisch unbestimmten Fachwerkstrukturen gelungen. Weitergehend wurden Redundanzmatrizen für Balkentragwerke von Ströbel [5] beispielhaft angegeben, ohne jedoch explizit eine Methode zu deren Berechnung darzustellen. Ein Ansatz zur Formulierung einer kontinuierlichen Redundanzdichte-Funktion für einzelne Fachwerkstäbe sowie ein Überblick über Eigenschaften der Redundanzmatrix und deren bisherige Einsatzbereiche finden sich in von Scheven et al. [7].

In Kapitel 2 dieses Beitrags werden die theoretischen Grundlagen der Berechnung des Redundanzanteils für einen Stab vorgestellt. Daraufhin folgt die Verallgemeinerung in matrizieller Schreibweise für Fachwerkstrukturen, die zur Definition der Redundanzmatrix führt. In Kapitel 3 werden die mathematischen Eigenschaften der Matrix an einer Tragwerksstruktur veranschaulicht und die sich daraus ergebenden Einsatzmöglichkeiten der Redundanzmatrix beim Entwurf und der Bewertung adaptiver Strukturen abgeleitet. Im anschließenden Kapitel 4 werden anhand der Optimierung einer adaptiven Fachwerkstruktur die Möglichkeiten, die durch den gezielten Einsatz von Aktuierung entstehen, aufgezeigt und der Nutzen der Redundanzmatrix verdeutlicht.

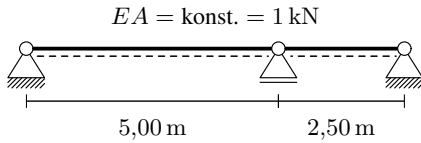
2 Definition der Redundanzmatrix

Für die folgende Herleitung werden kleine Deformationen und elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Trägheitseffekte werden nicht berücksichtigt. Für jedes Element i einer gegebenen Fachwerkstruktur werden ein Material mit konstantem E-Modul E_i und eine konstante Querschnittsfläche A_i angenommen. Längenänderungen Δl_i werden berechnet als Differenz von verformter Länge l_i und Ursprungslänge L_i . Somit ergibt sich $\Delta l_i = L_i - l_i$ als gesamte Längenänderung eines Stabs i .

Für die Erläuterung des theoretischen Konzepts wird zunächst ein einzelner Stab betrachtet. Der Redundanzanteil r des Stabs berechnet sich nach [7] aus der Differenz zwischen einer zunächst zwangsfrei aufgetragenen Längenänderung Δl_0 und einer sich, nach dem Einbau des Stabs in das System, wirklich einstellenden Längenänderung Δl bezogen auf die aufgetragene Längenänderung:

$$r = \frac{\Delta l_0 - \Delta l}{\Delta l_0} = 1 - \frac{\Delta l}{\Delta l_0} = \frac{-\Delta l_{el}}{\Delta l_0}. \quad (1)$$

Die ursprüngliche Längenänderung Δl_0 kann man sich als aus einer Temperaturänderung oder dem Einbau eines „zu langen“ Stabs resultierend vorstellen. Die Differenz aus aufgetragener und auftretender Stablängenänderung ist die negative elastische Stablängenänderung $-\Delta l_{el}$, die eine Normalkraft hervorruft. Die praktische Berechnung der auftretenden Längenänderung Δl kann mithilfe einer Ersatzlast erfolgen, die das betrachtete Element bei angenommener statisch bestimmter (zwangsfreier) Lagerung um Δl_0 verlängern würde.



$$\text{Spur}(\mathbf{R}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 = \text{Rang}(\mathbf{R}) = n_S$$

Eingangsgrößen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2,5} \end{bmatrix} \text{ in kN/m}$$

Ergebnisse:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Abbildung 1: Beispielstruktur zur Berechnung von \mathbf{R} und \mathbf{A}_0

Im Falle einer statisch bestimmten Lagerung wird sich folglich eine Längenänderung von $\Delta l = \Delta l_0$ einstellen und somit ergibt sich der Redundanzanteil zu $r = \frac{\Delta l_0 - \Delta l_0}{\Delta l_0} = 0$. Als anderen Extremfall kann man einen Stab zwischen zwei starren Lagern betrachten, bei dem sich durch die Randbedingungen keine Längenänderung ($\Delta l = 0$) einstellen kann. Deshalb erhält man für den Redundanzanteil $r = \frac{\Delta l_0 - 0}{\Delta l_0} = 1$.

Somit erhält jeder Fachwerkstab einer Struktur einen Redundanzanteil zwischen 0 und 1, der ein Maß dafür angibt, wie groß der Zwang ist, den die umgebende Struktur zusammen mit den Lagern auf das betrachtete Element ausübt. Die Summe der Redundanzanteile aller Elemente ergibt den Grad der statischen Unbestimmtheit n_S der gesamten Struktur.

In Matrix-Schreibweise lassen sich die Redundanzanteile aller Elemente einer Struktur als Redundanzmatrix \mathbf{R} direkt bestimmen. Eine ausführliche Herleitung der Berechnungsvorschrift findet sich in von Scheven et al. [7]. Die aus Gl. (1) bekannte Struktur kann in der Gleichung deutlich erkannt werden:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{1}}_{\substack{\text{aufgebrachte} \\ \text{Stablängenänderungen}}} - \underbrace{\mathbf{A} \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1}}_{\substack{\text{Flexibilitätsmatrix} \\ \text{Verschiebungen aus Ersatzlasten}}} \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{C})}_{\text{Ersatzlasten}}}_{\substack{= \mathbf{A}_0 \\ \text{gesamte Längenänderungen} \\ \text{im System aus Ersatzlasten}}} \quad (2)$$

Darin beschreibt $\mathbf{1}$ eine Einheitsmatrix und die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{A} beinhaltet alle Informationen zu Topologie und Geometrie der Struktur. Mithilfe von \mathbf{A} werden die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen allen Stabnormalkräften, gesammelt im Vektor \mathbf{N} , und den äußeren Lasten \mathbf{F}_{ext} als $\mathbf{A}^T \mathbf{N} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ formuliert. Zudem kann die Beschreibung des Zusammenhangs von allen gesamten Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}$ zu den Knotenverschiebungen \mathbf{d} der Struktur (Kinematik-Gleichung) als $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{d}$ angegeben werden. Die Diagonalmatrix \mathbf{C} enthält alle Informationen zu Materialien und Querschnitten, wobei ein Eintrag C_{ii} die Dehnsteifigkeit $\frac{E_i A_i}{L_i}$ von Element i beschreibt. Mit ihr kann der Zusammenhang von Normalkräften und Stablängenänderungen $\mathbf{N} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{l}_{\text{el}} = \mathbf{C} (\Delta \mathbf{l} - \Delta \mathbf{l}_0)$ (Werkstoff-Gleichung) angegeben werden. Die aufgebrachten Längenänderungen werden für die Interpretation der Matrixformulierung zu Eins gesetzt, was jedoch aufgrund der Annahmen einer linearen Theorie die Gültigkeit nicht einschränkt.

Die Eingangsgrößen und die Ergebnisse der Berechnung sind beispielhaft für eine Struktur aus zwei Fachwerkelementen in Abb. 1 dargestellt. Für die einfach statisch unbestimmte

Struktur verteilt sich der Grad der statischen Unbestimmtheit zu $\frac{2}{3}$ auf das linke und zu $\frac{1}{3}$ auf das rechte Element. Das somit ist das rechte, steifere Element weniger redundant, also leistet es für das Tragverhalten der Struktur einen größeren Beitrag.

3 Eigenschaften der Redundanzmatrix und Anwendung bei adaptiven Strukturen

Die Redundanzmatrix \mathbf{R} kann sowohl spalten- als auch zeilenweise gelesen werden. Die Einträge der Spalte j der Redundanzmatrix entsprechen der Verteilung der negativen elastischen Stablängenänderungen infolge der aufgebrachten Verlängerung des Stabs j . Sie beschreiben somit qualitativ den durch eine Aktuierung des Stabs j entstehenden Kraftzustand. Eine Zeile i der Matrix beschreibt eine Normalkraftverteilung in der Struktur, die ohne äußere Lasten im Gleichgewicht steht. Dabei ist die Anzahl der linear unabhängigen Normalkraft-Verteilungen gleich dem Grad der statischen Unbestimmtheit der Struktur ($\text{Rang}(\mathbf{R}) = \text{Rang}(\mathbf{R}^T) = n_S$).

Die Matrix \mathbf{A}_0 enthält in einer Spalte j die gesamten Stablängenänderungen der Stäbe in der Struktur infolge der vorgegebenen Längenänderung eines Stabs j um 1. Diese Verteilung beschreibt auch einen Zustand kompatibler Stablängenänderungen in der Struktur, bei deren gleichzeitiger Aufbringung für alle Stäbe in keinem Stab Zwang entstehen würde.

Die Einträge der Hauptdiagonalen der Redundanzmatrix entsprechen den Redundanzanteilen der einzelnen Elemente. Da die Summe aller Redundanzanteile den Grad der statischen Unbestimmtheit ergibt, ist die Spur der Redundanzmatrix gleich dem Grad der statischen Unbestimmtheit. Die bekannte Abzählformel nach Maxwell [4] zur Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit kann auch in der Struktur der Redundanzmatrix gefunden werden. Für die Berechnung des Grades der statischen Unbestimmtheit n_S ergibt sich

$$n_S = \text{Spur}(\mathbf{R}) = \text{Spur}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_0) = \text{Spur}(\mathbf{1}) - \text{Spur}(\mathbf{A}_0) = n_{\text{Ele}} - n_{\text{Fhg}}. \quad (3)$$

Dabei ergibt sich, dass die Spur der Matrix \mathbf{A}_0 gleich der Anzahl der nicht durch Verschiebungsrandbedingungen gehaltenen Freiheitsgrade n_{Fhg} ist.

Die Matrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{R} sind idempotent, d. h. durch Potenzieren der Matrizen ändern sich deren Einträge nicht:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R} = \dots \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0 = \dots$$

Da das Potenzieren von Matrizen gleichbedeutend ist mit dem Potenzieren der Eigenwerte der Matrizen, treten ausschließlich idempotente Eigenwerte auf. Die Idempotenz gilt im reellen Zahlenraum nur für die Zahlen 0 und 1. Da die Spur einer Matrix der Summe ihrer Eigenwerte entspricht, ergeben sich für die Redundanzmatrix n_S -mal der Eigenwert Eins und $n_S - n_{\text{Ele}} = n_{\text{Fhg}}$ Null-Eigenwerte. Für \mathbf{A}_0 ergibt sich aus dem Zusammenhang mit \mathbf{R} über die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ das vertauschte Bild: n_S Null-Eigenwerte und n_{Fhg} Eins-Eigenwerte.

Der Raum, der durch eine Linearkombination von Eigenvektoren aufgespannt wird, die zu Null-Eigenwerten gehören, wird als Nullraum oder Kern der Matrix bezeichnet. Eigenvektoren der Nicht-Null-Eigenwerte spannen das sogenannte Bild der Matrix auf. Auch bei der

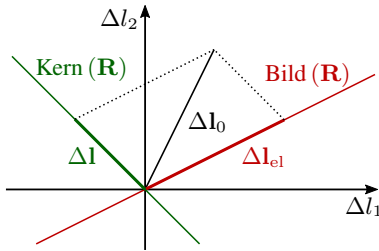


Abbildung 2: Darstellung der Matrix-Unterräume für die Beispielstruktur aus Abb. 1

Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{R} :

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{mit} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Betrachtung der Räume ergibt sich durch den Zusammenhang von \mathbf{A}_0 und \mathbf{R} die Eigenschaft, dass der Nullraum (Kern) von \mathbf{R} gleich dem Bild der Matrix \mathbf{A}_0 ist und umgekehrt. Eine Darstellung der Räume für das Beispiel aus Abb. 1 findet sich in Abb. 2. Mithilfe der Abbildung können für beliebige Verteilungen der vorgegebenen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_0$ (z. B. aus Aktuierung) die resultierenden gesamten Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}$ und die elastischen Stablängenänderungen $\Delta \mathbf{l}_{el}$ visualisiert werden. Das Bild der Matrix \mathbf{R} enthält dabei alle auftretenden elastischen Stablängenänderungen, die wiederum exklusiv zu Normalkräften in der Struktur führen und damit alle aktuierbaren Kraftzustände. Die Zustände im Bild (\mathbf{R}) sind reine Zwangszustände, d. h. es treten nur Normalkräfte und keine Knotenverschiebungen auf, wohingegen der Kern (\mathbf{R}) kompatible Verschiebungszustände beschreibt, in denen keine Normalkräfte auftreten.

Auf dieser Erkenntnis aufbauend liegt es nahe, Aktoren zur Kraftmanipulation so zu platzieren, dass die durch Aktorik erzeugbaren Normalkraftverteilungen den Kern (\mathbf{R}) möglichst vollständig aufspannen. Mehr Aktoren einzubauen, als unterschiedliche Kraftverteilungen möglich sind, liefert nur einen bereits erzeugbaren (linear abhängigen) Kraftzustand. Somit ergibt sich die Anzahl der nötigen Aktoren zur Kraftmanipulation zu n_S . Weitere Anmerkungen und ein Beispiel finden sich in Wagner et al. [8]. Ein ähnliches Vorgehen unter Verwendung von Sensitivitätsmatrizen wurde von Teuffel [6] vorgeschlagen.

Eine Strategie zur Platzierung von Aktoren für die Manipulation von Verschiebungen kann durch ähnliche Überlegungen gewonnen werden, indem nämlich die möglichen gesamten Stablängenänderungen, die spaltenweise für jeden Stab in der Matrix \mathbf{A}_0 zu finden sind, mithilfe der Kinematik-Gleichung in Knotenverschiebungen umgerechnet werden. Die resultierende Matrix enthält spaltenweise für jeden Stab die Knotenverschiebungen, die sich bei einer Längenänderung des jeweiligen Stabs ändern. Damit können nun die Stäbe gewählt werden, deren Aktuierung zu Knotenverschiebungen führt, die in einem festzulegenden Maß am besten zu den zu kompensierenden Verschiebungen, die aus den äußeren Lasten resultieren, passen. Nach Teuffel [6] muss für jeden Freiheitsgrad, an dem eine Verschiebung eingestellt werden soll, im Allgemeinen ein zusätzlicher Aktor vorgesehen werden.

Da reale Tragwerke meist statisch unbestimmt sind, werden bei der Manipulation der Verschiebungszustände durch Längenänderung von Aktoren auch Normalkräfte in der Struktur erzeugt. Durch die Kombination von Verschiebungs- und Kraftmanipulation mit vollständiger Abdeckung des Bildes von \mathbf{R} kann das Auftreten der zusätzlichen Normalkräfte verhindert werden.

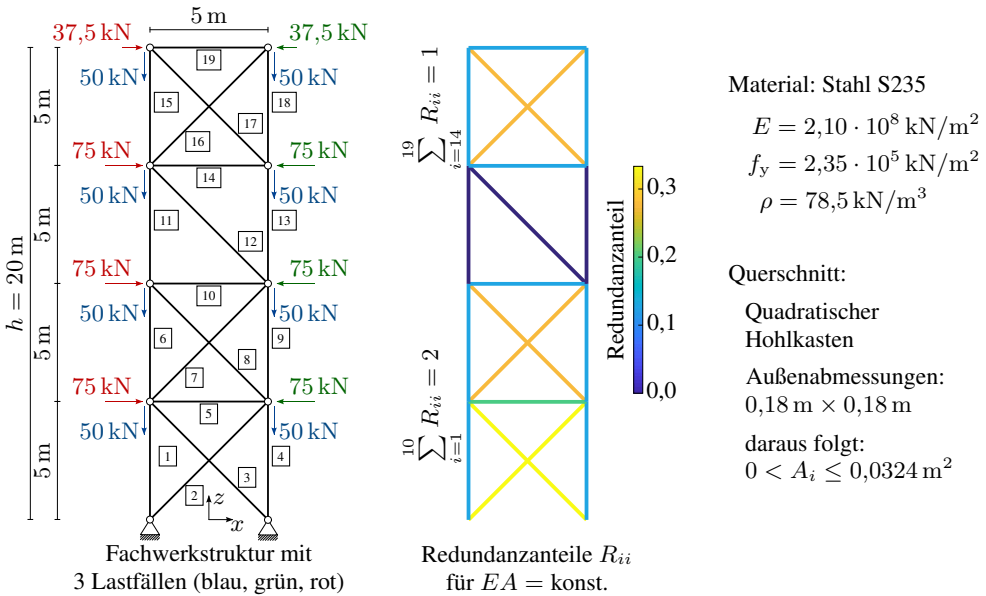


Abbildung 3: Adaptive Beispielstruktur

4 Entwurf adaptiver Strukturen

Der Einbau von aktiven Elementen versetzt ein Tragwerk in die Lage, auf veränderliche Umgebungseinflüsse zu reagieren. Dabei können durch Manipulation des Kraft- und Verschiebungszustandes Nebenbedingungen berücksichtigt werden, deren Einhaltung in passiven Strukturen einen signifikant größeren Materialeinsatz erfordern würde. Das Potential, das darin liegt, wird im Folgenden anhand eines Fallbeispiels aufgezeigt. Die untersuchte Struktur ist in Abb. 3 (links) dargestellt. Das ebene Fachwerk besteht aus 19 Stäben und ist dreifach statisch unbestimmt. Die Verteilung des Grades der statischen Unbestimmtheit ist in Abb. 3 (Mitte) dargestellt. Der untere Teil des Tragwerks, bestehend aus den Stäben 1–10, ist zweifach statisch unbestimmt und der obere Teil aus den Stäben 15–19 nur einfach unbestimmt. Die verbindenden Elemente 11–13 sind statisch bestimmt.

Auch diesem Beispiel liegt eine lineare, statische Berechnung zugrunde. Ziel ist es, die Gesamtmasse, mit den Querschnittsflächen A_i als Entwurfsvariablen (gesammelt im Vektor \mathbf{a}), zu minimieren. Die Materialeigenschaften sind in Abb. 3 (rechts) gezeigt. Sowohl für die Verschiebungen als auch für die Spannungen werden Nebenbedingungen berücksichtigt. Wie im Hochhausbau üblich wird die maximale Horizontalverschiebung $\|\mathbf{d}_H\|_\infty$ auf $h/500 = 0,04 \text{ m}$ beschränkt. Weitere Nebenbedingungen, wie zum Beispiel an die Differenzverschiebung innerhalb eines Stockwerks, werden nicht berücksichtigt. Die Spannungsnebenbedingung berücksichtigt für Zugstäbe nur die Festigkeit des Materials, für Druckstäbe zusätzlich die aus der Knicklast nach Euler berechnete Knickspannung σ_b . Die in den Elementen vorhandenen Spannungen werden für drei Lastfälle (dargestellt in Abb. 3 (links)): Wind von links in rot, Wind von rechts in grün und Verkehrslast in blau) getrennt berechnet und nicht überlagert. Das Eigengewicht der Elemente wird dabei nicht berücksichtigt.

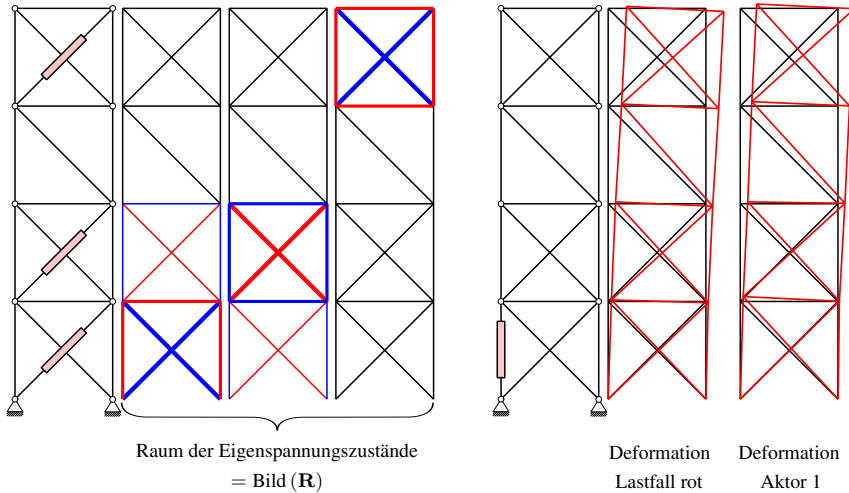


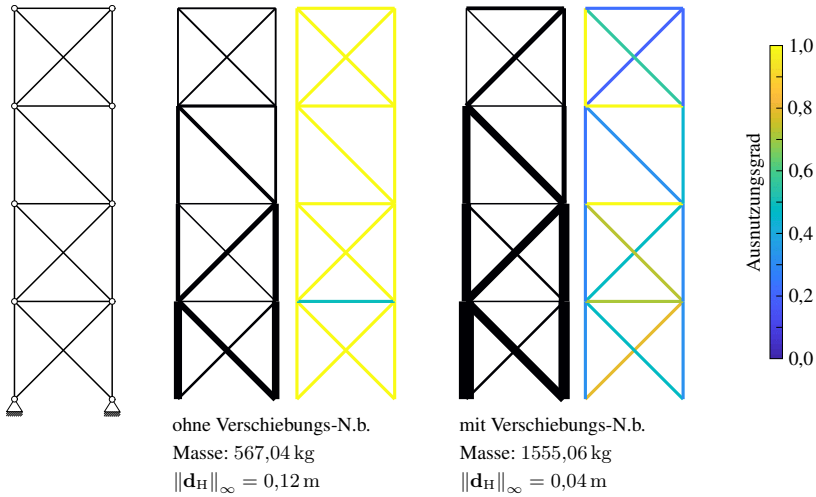
Abbildung 4: Aktoren zur Manipulation von Kräften (links) und Verschiebungen (rechts)

Die Auswirkung der Aktorik auf die Struktur wird durch die Vorgabe von Längenänderungen Δl_0 in den aktuierten Stäben berücksichtigt. Die vorzugebenden Aktorwege für die gewählten Aktoren werden im Vektor \mathbf{u} gesammelt. Bei der Rückrechnung der Normalkräfte muss dann zunächst die elastische Längenänderung der Stäbe berechnet werden. Eine weitergehende Möglichkeit zur Simulation der Aktuierung mithilfe eines finiten Aktorelements findet sich in [2].

In der Struktur werden 4 Aktoren in den Elementen 1, 2, 7 und 16 vorgesehen. Die Aktorplatzierung zur Kraftmanipulation wird mithilfe des in Abb. 4 (links) dargestellten Bild (\mathbf{R}) durchgeführt. Die $n_S = 3$ Eigenvektoren werden als Verteilung der elastischen Längenänderungen auf der Struktur dargestellt: Verlängerung in blau, Verkürzung in rot. Die Strichstärke gibt ein Maß für den Betrag der Längenänderung an. Der Aktuierungs-Unterraum soll möglichst vollständig aufgespannt werden. Deshalb werden die Elemente 2, 7 und 16 zur Kraftmanipulation ausgewählt. Auffällig ist, dass keiner der Stäbe 11, 12 und 13 einen Anteil in diesem Raum besitzt. Dies kann bereits in der Darstellung der Redundanzverteilung (Abb. 3 (Mitte)) erkannt werden, da diese Elemente in der Struktur Null-Redundanzanteile besitzen und somit statisch bestimmt – also zwangsfrei – sind.

Die Manipulierbarkeit der Verschiebungen kann durch eine einfache Aktorplatzierung, wie in Abb. 4 (rechts) dargestellt, gewährleistet werden. Beispielhaft ist die Verformung infolge eines Windlastfalles dargestellt. Ein Aktor in Element 1 kann optimal entgegenwirken. Damit ergibt sich $\mathbf{u} = [\Delta l_{0,1} \ \Delta l_{0,2} \ \Delta l_{0,7} \ \Delta l_{0,16}]^T$.

Um die Vorteile adaptiver Strukturen zu illustrieren, werden nun die Massenminima für die passive und die aktive Struktur berechnet und verglichen. Das Optimierungsproblem für die


Abbildung 5: Massenminimum der passiven Struktur

passive Struktur lautet:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & m(\mathbf{a}) = \sum_{e=1}^{19} L_e A_e \rho_e \\ \text{s.t.} \quad & \text{Verschiebungs-N.b.: } \|\mathbf{d}_H(\mathbf{a})\|_\infty \leq h/500 \\ & \text{Spannungs-N.b.: } -\min\{f_y, \sigma_{b,e}\} \leq \sigma_e(\mathbf{a}) \leq f_y \quad \forall e = 1..19. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Optimierungen der passiven Struktur einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der Verschiebungsnebenbedingung sind in Abb. 5 dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass bei Berücksichtigung der Verschiebungsnebenbedingung die optimierte Masse der Struktur signifikant größer ist. In der Darstellung der Ausnutzungsgrade kann erkannt werden, dass die größeren Querschnitte nötig sind, um die maximalen Verschiebungen nicht zu überschreiten: das Problem ist steifigkeitsdominiert. Im Gegensatz dazu ist das Problem ohne Verschiebungsnebenbedingungen festigkeitsdominiert, da die Spannungsrestriktionen aktiv werden. Fast alle Stäbe sind in mindestens einem Lastfall zu 100% ausgenutzt.

Für die Optimierung der adaptiven Struktur wird das folgende Minimierungsproblem formuliert:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}, \mathbf{u}} \quad & m(\mathbf{a}) = \sum_{e=1}^{19} L_e A_e \rho_e \\ \text{s.t.} \quad & \text{Verschiebungs-N.b.: } \|\mathbf{d}_H(\mathbf{a}, \mathbf{u})\|_\infty \leq h/500 \\ & \text{Spannungs-N.b.: } -\min\{f_y, \sigma_{b,e}\} \leq \sigma_e(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \leq f_y \quad \forall e = 1..19. \end{aligned}$$

Dabei sind die erforderlichen Längenänderungen in den vier Aktoren zusätzliche Entwurfsvariable. Abb. 6 stellt die Ergebnisse für die aktive Struktur einmal mit nur einem Aktor in Stab 1 und einmal mit allen vier platzierten Aktoren dar. Die Verschiebungsnebenbedingung kann durch die zusätzliche Möglichkeit der Aktuierung eingehalten werden und dadurch sind

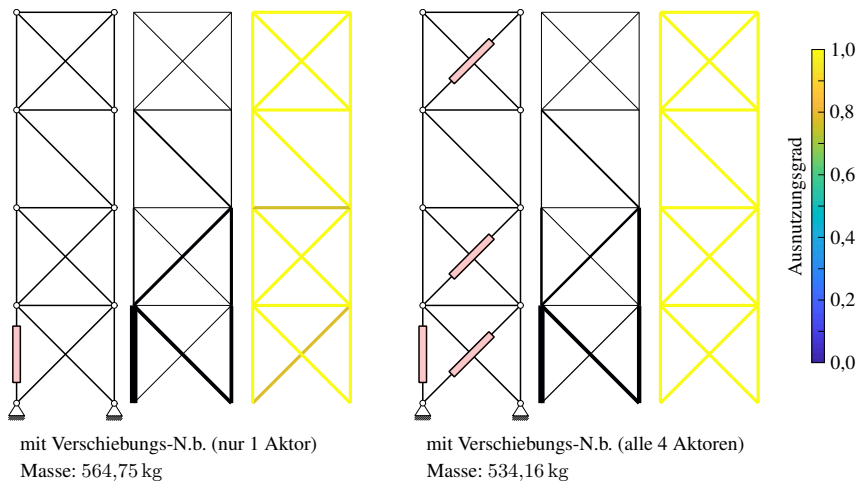


Abbildung 6: Massenminimum der aktiven Struktur

die nötigen Querschnitte signifikant kleiner. Wenn nur ein Aktor eingebaut wird, kann der zusätzliche Zwang, der durch die Verschiebungsaktuierung entsteht, nicht kompensiert werden. Dies führt zu einer höheren Masse im Vergleich zu der Struktur mit vier Aktoren.

Die vergleichende Betrachtung der Ausnutzungsgrade in Abb. 5 und 6 zeigt, dass durch geschickten Einbau von Aktoren steifigkeitsdominierte Probleme in festigkeitsdominierte umgewandelt werden können. Dadurch kann der nötige Materialeinsatz um ca. 65% reduziert werden. Das resultierende Tragwerk erfordert durch die Möglichkeit, das Material besser ausnutzen zu können, einen deutlich geringeren Materialeinsatz gegenüber herkömmlichen, passiven Strukturen.

Auch die Möglichkeit eines Aktorik-Ausfalls muss beim Entwurf adaptiver Strukturen berücksichtigt werden. Der notwendige Materialeinsatz für das passive Design ohne Verschiebungsnebenbedingungen und für das aktive Design unterscheiden sich nur wenig. Deshalb können Strukturen entworfen werden, die bei einem Aktorik-Ausfall durch ein automatisches Versteifen der Aktoren weiterhin Standsicherheit gewährleisten und nur die Gebrauchstauglichkeit verletzen. Weitere Untersuchungen zu diesem Thema sind Gegenstand aktueller Forschung.

5 Zusammenfassung

Die Antwort einer Struktur auf Aktuierung wird maßgeblich vom Grad der statischen Unbestimmtheit und deren Verteilung in der Struktur beeinflusst. Die Redundanzmatrix enthält diese Informationen über das Tragwerk. Aus ihr können daher Rückschlüsse für die Aktorplatzierung und für die Bewertung der Aktuierbarkeit von Strukturen gezogen werden.

Die theoretischen Grundlagen und der Ablauf der Berechnung der Redundanzmatrix wurden kurz vorgestellt. Dabei werden die mathematischen Eigenschaften der Matrix mit den

anschaulichen Einsichten in baustatisches Verhalten des Tragwerks verknüpft. Die Anwendung der Redundanzmatrix beim Entwurf und der Charakterisierung adaptiver Tragwerke wird an einer beispielhaften Fachwerkstruktur verdeutlicht. Dabei wird auch das große Masseinsparungspotential aufgezeigt, das sich durch den Einsatz von Adaptivität erschließen lässt. Durch die Umwandlung von steifigkeits- in festigkeitsdominierte Probleme können die Querschnitte der Fachwerkstruktur besser ausgenutzt werden und somit deutlich leichtere Strukturen verwirklicht werden.

Danksagung

Die präsentierten Forschungsergebnisse entstanden teilweise im Rahmen der Tätigkeiten in den Teilprojekten A04 – “Formfindung, Strukturoptimierung und Systemoptimierung” und B01 – “Charakterisierung, Modellierung und Reduktion der Modellordnung” des Sonderforschungsbereichs 1244 “Adaptive Hüllen und Strukturen für die gebaute Umwelt von morgen”, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unter der Projektnummer 279064222. Die Autoren bedanken sich für die gewährte Unterstützung.

Literatur

- [1] BAHNDORF, J. : *Zur Systematisierung der Seilnetzberechnung und zur Optimierung von Seilnetzen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1991
- [2] GEIGER, F. ; GADE, J. ; VON SCHEVEN, M. ; BISCHOFF, M. : Design and Optimization of Adaptive Civil Structures. In: *IFAC-PapersOnLine* (eingereicht)
- [3] LINKWITZ, K. : *Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme*. München, Verl. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Dissertation, 1961
- [4] MAXWELL, J. C.: On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27 (1864), Nr. 182, S. 294–299. – ISSN 1941–5982
- [5] STRÖBEL, D. : *Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf elastomechanische Systeme*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 1995
- [6] TEUFFEL, P. : *Entwerfen Adaptiver Strukturen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Dissertation, 2004
- [7] VON SCHEVEN, M. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Quantification of the Redundancy Distribution in Truss and Beam Structures. In: *International Journal of Solids and Structures* (eingereicht)
- [8] WAGNER, J. L. ; GADE, J. ; HEIDINGSFELD, M. ; GEIGER, F. ; VON SCHEVEN, M. ; BÖHM, M. ; BISCHOFF, M. ; SAWODNY, O. : On Steady-State Disturbance Compensability for Actuator Placement in Adaptive Structures. In: *at - Automatisierungstechnik* 66 (2018), Nr. 8, S. 591–603. – ISSN 0178–2312