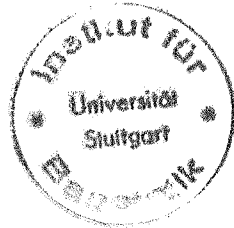


# Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie

von

**Thomas Jul Hofmann**



Z

19.7.91

Bericht Nr. 15 (1992)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1992

---

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,  
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

# **Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie**

von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Thomas Jul Hofmann

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr. techn. H. Bednarczyk

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1992

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1992

## Zusammenfassung

Vorgestellt wird eine gegenüber der elementaren Theorie verfeinerte und konsistentere Balkentheorie.

Die Verfeinerung erfolgt über die Korrektur des Widerspruchs zwischen den Schubspannungen und den Schubverzerrungen, wie er bei der Timoshenko-Balkentheorie vorliegt. Diese Inkonsistenz wird durch eine genauere Erfassung der Schubverzerrungen beseitigt, wodurch im wesentlichen eine genauere Längsspannungsberechnung ermöglicht wird. In Analogie zur bekannten Wölbkrafttorsion werden Wölbfunktionen in die Biegetheorie eingeführt.

Zu der in diesem Sinne erweiterten Balkentheorie wird die Herleitung angegeben. Ihre Genauigkeit wird abgeschätzt, und sie wird auf ihren möglichen Anwendungsbereich hin untersucht.

Das Ergebnis ist eine geometrisch lineare Theorie für linear elastischen homogenen isotropen Werkstoff mit Erweiterung auf die linearisierte Theorie II. Ordnung und die Dynamik.

Es wird festgestellt, daß die entwickelte Balkentheorie u.a. dazu geeignet ist, bei gegliederten dünnwandigen Querschnitten und für gewöhnliche Balkenabmessungen den "Shear-Lag-Effekt" bzw. das Problem der "mittragenden Breite" wirklichkeitsnah und auf einfache Weise zu beschreiben.

## Abstract

An extended and more consistent beam theory is introduced and compared to the elementary theory.

The contradiction between shear stresses and shear strains, existing in the beam theory of Timoshenko, is removed by the present extension. The inconsistency is eliminated by a more exact representation of the shear strains, leading to a more accurate calculation of the longitudinal stresses.

Essentially warping functions are introduced into the bending theory in analogy to the well known warping torsion.

The derivation of the extended beam theory for plane and spatial beams is given. Its accuracy is estimated, and the method is investigated with regard to its range of application. It turns out that the new theory is almost as simple as the traditional beam theories.

The result is a geometrically linear theory for linear elastic homogeneous isotropic material with an extension to the linearized second order theory and to dynamics.

It is shown that the developed beam theory is suitable to describe the "shear lag effect" and the problem of "effective flange width" of beams having usual dimensions and arbitrary thin-walled cross sections.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm für die Anregungen und die Unterstützung in allen Phasen dieser Arbeit sowie für die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr. techn. H. Bednarczyk danke ich für die wertvollen Hinweise und für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Bei allen meinen Kollegen am Institut für Baustatik bedanke ich mich für ihre Diskussionsbereitschaft und die gute Zusammenarbeit.

Thomas Hofmann

<b>0 Motivation</b>	<b>11</b>
<b>1 Einleitung und Übersicht</b>	<b>17</b>
<b>2 Balkentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung (Bernoulli–Theorie)</b>	<b>24</b>
2.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	24
2.2 Übergang zur Stabtheorie der reinen Biegung	26
2.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	26
2.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Biege–Problems und ihre Lösung	27
<b>3 Balkentheorie unter Annahme einer linearen Querschnittsverwölbung (Timoshenko–Theorie)</b>	<b>29</b>
3.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	29
3.2 Übergang zur Stabtheorie mit konstanter Schubverzerrung	34
3.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	34
3.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Schub–Problems und ihre Lösung	35
<b>4 Balkentheorie unter Annahme einer kubischen Querschnittsverwölbung (Erweiterte Theorie)</b>	<b>36</b>
4.1 Herleitung der erweiterten Biege–Schub–Theorie	36
4.1.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	37
4.1.2 Übergang zur Stabtheorie mit quadratischer Schubverzerrung	41
4.1.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	41
4.1.2.2 Die Differentialgleichungen des Biege–Schub–Problems	49
4.1.2.3 Vergleich mit bekannten Differentialgleichungen	50
4.1.2.4 Lösung der Schub–Differentialgleichung der erweiterten Theorie	52
4.1.2.5 Steifigkeitsmatrizen	55
4.1.2.6 Integralformulierung	60
4.2 Wölbwiderstand $I_{\omega}$	68
4.3 Abschließende Bemerkung	70
<b>5 Verallgemeinerte Formulierung für Längskraft, Zweiachsige Biegung und Torsion</b>	<b>73</b>
5.1 Voraussetzungen	73

5.2 Virtuelle innere Arbeit	79
5.3 Virtuelle äußere Arbeit	84
5.4 Zusammenfassung der virtuellen Arbeiten	84

## **6 Vergleich der erweiterten Balkentheorie mit der Scheibentheorie und Fehlerabschätzung an einem Beispiel** **86**

6.1 Scheibentheorie	86
6.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie mit Fourier-Reihen	88
6.1.1.1 Allgemeiner Belastungsfall	88
6.1.1.2 Sonderfall I	91
6.1.1.3 Sonderfall II	93
6.2 Erweiterte Balkentheorie	95
6.2.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	95
6.3 Vergleich und Fehlerabschätzung der Formeln für die Randlängsspannung und die Mittenschubspannung der erweiterten Balkentheorie und der Scheibentheorie	98
6.3.1 Vergleich	98
6.3.2 Fehlerabschätzung	99
6.3.3 Zahlenbeispiel: Rechteckscheibe unter sinusförmiger Belastung	103
6.3.4 Abschließende Bemerkung	107
6.4 Lösung einiger Scheibenprobleme mit Polynom-Spannungsansatz	107
6.4.1 Beidseitig gelagerte Scheibe (1. Art)	107
6.4.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie	107
6.4.1.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	109
6.4.2 Beidseitig gelagerte Scheibe (2. Art)	111
6.4.2.1 Lösung nach der Scheibentheorie	111
6.4.2.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	113
6.4.3 Kragträger unter Gleichlast	115
6.4.3.1 Lösung nach der Scheibentheorie	115
6.4.3.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	116
6.4.3.3 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebungen	118
6.4.4 Kragträger unter Einzellast	119
6.4.4.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	119
6.4.4.2 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebung	121



6.4.5 Abschließende Bemerkung		124
<b>7 Beschreibung des "Shear-Lag-Effektes" durch die erweiterte Balkentheorie und Klassifizierung an einem Beispiel</b>		<b>127</b>
7.1 Lösung des Faltwerkproblems nach verschiedenen Theorien		132
7.1.1 Elementare Balkentheorie (TB)		132
7.1.2 Klassische Theorie (KT)		135
7.1.3 Strenge Theorie (ST)		139
7.1.4 Erweiterte Balkentheorie (EB)		145
7.2 Zahlenbeispiel: T-Profil unter sinusförmiger Belastung		146
7.2.1 Vergleich der Ergebnisse		146
7.2.2 Mittragende Breite		151
7.3 Abschließende Bemerkung		153
<b>8 Erweiterung auf die linearisierte Theorie II. Ordnung</b>		<b>155</b>
8.1 Herleitung		155
8.2 Integralformulierung		158
8.3 Geometrische Steifigkeitsmatrix		160
8.4 Beispiel: Eulerfall 1	$b/h/l = 0.1/1/5$ [m]	163
8.5 Abschließende Bemerkung		164
<b>9 Erweiterung auf die Dynamik</b>		<b>165</b>
9.1 Herleitung		165
9.2 Integralformulierung		168
9.3 Konsistente Massenmatrix		169
9.4 Beispiel: Balken auf zwei Stützen	$b/h/l = 0.1/1/5$ [m]	172
9.5 Beispiel: Kragträger	$b/h/l = 0.1/1/2.5$ [m]	178
9.6 Abschließende Bemerkung		183
<b>10 Zusammenfassung und Schlußfolgerung</b>		<b>185</b>
<b>Schrifttum</b>		<b>186</b>
<b>A Anhang</b>		<b>191</b>
A1 Primäre Schubspannungsverteilungen und Schubkorrekturfaktoren		192
A1.1 Rechteck-Querschnitt		193
A1.2 T-Profil		194

A1.3 I-Profil	195
A1.4 Hohlkasten-Querschnitt	196
A1.5 Kreisring-Querschnitt	197
A2 Wölbfunktionen und Wölbwiderstände	198
A2.1 Rechteck-Querschnitt	198
A2.2 T-Profil	200
A2.3 I-Profil	203
A2.4 Hohlkasten-Querschnitt	206
A2.5 Kreisring-Querschnitt	209
A3 Schublösungen einiger Grundlastfälle	211
A3.1 Kragträger	211
A3.1.1 Kragträger unter Einzellast, Volleinspannung	211
A3.1.2 Kragträger unter Einzellast, "wölbfreie" Einspannung	213
A3.1.3 Kragträger unter Gleichlast, Volleinspannung	215
A3.2 Biegeträger	217
A3.2.1 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert	217
A3.2.2 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert	219
A3.2.3 Biegeträger unter sinuslinienförmiger Belastung, beidseitig gelenkig gelagert	221
A3.2.4 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)	223
A3.2.5 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)	226
A4 Steifigkeitsmatrizen	228
A4.1 Lineare Steifigkeitsmatrix	228
A4.2 Geometrische Steifigkeitsmatrix	229
A4.3 Konsistente Massenmatrix	232
A5 Analogie: Torsions-Schub <--> Querkraft-Schub (2D)	235
A5.1 Reine Torsion (St. Venant) ; Reine Querkraft (Timoshenko)	235
A5.2 Wölbbehinderte Torsion ; Wölbbehinderte Biegung	239

## 0 Motivation

Alle (Balken-) Theorien, nach denen Systemberechnungen durchgeführt werden, beruhen i.a. auf Verschiebungs- und/oder Spannungsannahmen.

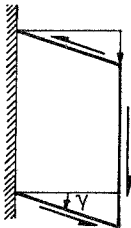
Die Genauigkeit der Ergebnisse kann wesentlich von der Güte dieser Annahmen abhängen, z.B. wenn bei gedungenen Trägern die Schubverzerrungen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

In diesen Fällen trifft man der Einfachheit halber gewöhnlich Verschiebungsannahmen, wie sie von der Bernoulli-Balkentheorie mit Schubverweiterung bzw. von der Timoshenko-Balkentheorie her bekannt sind und setzt dabei aber gleichzeitig voraus, daß sich die Querschnitte unter Schubspannungen frei verwölben können.

Wegen dieses Widerspruchs geht man von einer über den Querschnitt gleichmäßigen Schubspannungsverteilung aus, was wegen des Hooke'schen Gesetzes für Schub

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

auch zu einer über den Querschnitt gleichmäßig verteilten Winkelverzerrung  $\gamma$  führt (Bild 1).



Damit wird die Bernoulli-Annahme der eben bleibenden Querschnitte und die i.a. konträre Annahme der freien Verwölbung infolge Schubspannungen gleichzeitig erfüllt.

Die Schubverzerrung  $\gamma$  wird also hier als gemittelte Größe betrachtet, die bei linearem Stoffgesetz proportional der im Querschnitt übertragenen Querkraft  $Q$  ist.

Bild 1 konstante Schubverzerrung  $\gamma$

$$\gamma = \frac{Q}{GA_s}$$

(Die Schubfläche  $A_s = \alpha_s A$  bzw. der Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$  kann über Energiebetrachtungen ermittelt werden).

Jedoch ist i.a. die Schubspannungsverteilung nicht gleichmäßig, sondern parabolisch über die Querschnittshöhe verteilt. Dies führt wegen

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

zu gekrümmten statt ebenen Querschnittsflächen (Bild 2).

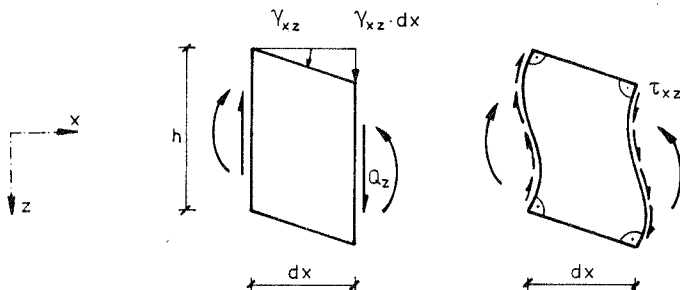
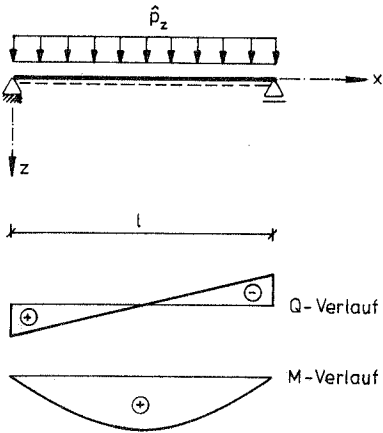


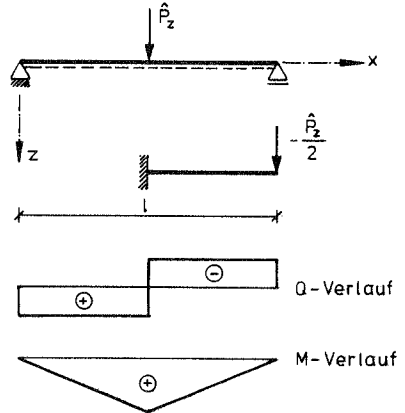
Bild 2 Timoshenko-Annahme der eben bleibenden bzw. sich frei verwölbenden Querschnittsflächen

Die Bernoulli-Annahme der eben bleibenden Querschnitte trifft in Wirklichkeit also nicht zu, und die zusätzliche Annahme der freien Verwölbungsfähigkeit infolge Schubspannungen wird nur in Ausnahmefällen erfüllt. Ein Beispiel für das näherungsweise Zutreffen dieser Annahme stellt der Balken auf zwei Stützen unter Gleichlast dar (Bild 3a).



An der Stelle  $x = l/2$  ist wegen  $Q = 0$  und damit  $\tau = 0$  keine Verwölbung möglich; außerdem ist bei  $x = l/2$  auch aus Symmetriegründen keine Verwölbung möglich  
 → ohne Widerspruch.  
 (Ein gleichmäßiges Anwachsen der Verwölbung zu den Rändern ist näherungsweise möglich)

a)



Im Bereich  $0 \leq x \leq l$  ist wegen  $Q = \text{konstant}$  und damit  $\tau = \text{konstant}$  die Verwölbung konstant; aber bei  $x = l/2$  ist gleichzeitig aus Symmetriegründen keine Verwölbung möglich  
 → Widerspruch!  
 (Einstellen zwangsfreier Verwölbung erst in gewissem Abstand von der Lasteinleitung möglich)

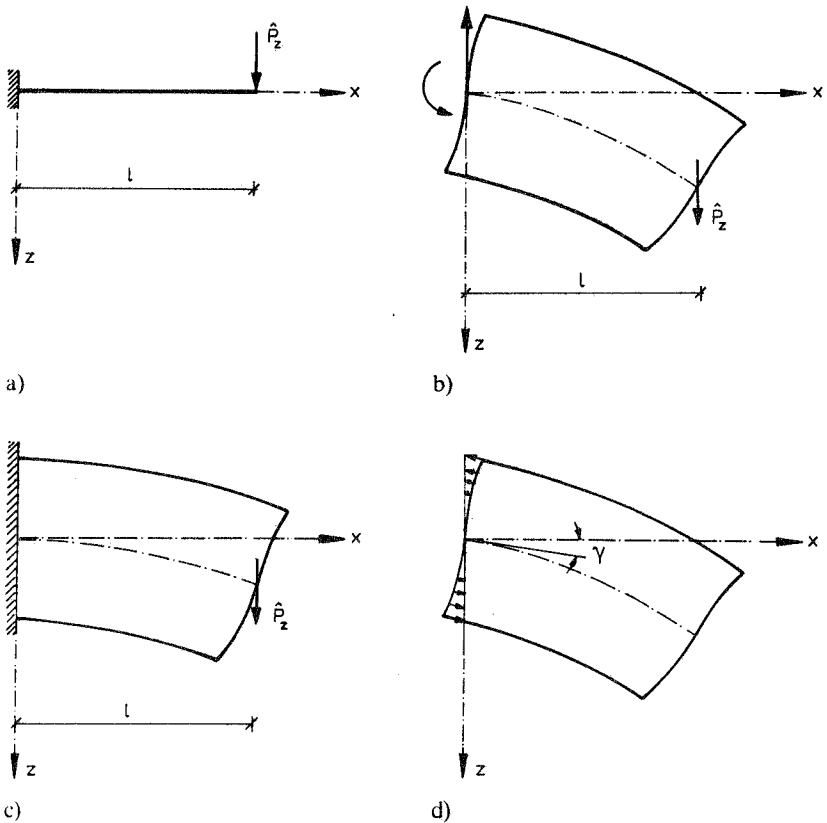
b)

**Bild 3** Zutreffen der Timoshenko–Annahme an zwei Beispielen

Das Ergebnis der Verschiebungsberechnung nach der Bernoulli–Balkentheorie mit Schubweiterung wird also für den in Bild 3a dargestellten Fall sehr gut mit der in Wirklichkeit zu erwartenden Verschiebung übereinstimmen. (Zwar wird der Querschnitt nicht eben bleiben, aber die Verwölbung kann sich näherungsweise zwangsfrei einstellen).

Anders sieht es für den in Bild 3b dargestellten Fall aus, der aus Symmetriegründen auch an einem entsprechend belasteten Kragarm erläutert werden kann (Bild 4a).

Aufgrund des konstanten Querkraftverlaufs und des daraus resultierenden in Balkenlängsrichtung konstanten Schubspannungsverlaufs, müßte sich den Voraussetzungen entsprechend eine Querschnittsverwölbung zwangsfrei einstellen können (Bild 4b), die in jedem Querschnitt die gleiche Form hat. Wegen der Symmetriebedingung in Balkenmitte bzw. an der Einspannstelle des Kragarms ist dies jedoch nicht überall möglich (Bild 4c).



**Bild 4** Plausibilität einer nichtlinearen Längsspannungsverteilung an einer Einspannstelle

Die Verwölbung wird teilweise behindert. Das bedeutet, daß im Lasteinleitungsbereich bzw. in der Umgebung der Einspannstelle eine andere Spannungsverteilung vorliegt,

als nach der elementaren Balkentheorie vorhergesagt wird (Bild 4d). Außerdem muß die wirkliche Schubverschiebung wegen der Wölbbehinderung geringer als die nach der elementaren Theorie errechnete sein.

Um auch hier ein Ergebnis der Verschiebungs- und Spannungsberechnung zu erhalten, das mit den tatsächlich zu erwartenden Verschiebungen und Spannungen besser übereinstimmt als das Ergebnis nach der elementaren Balkentheorie, müssen bei energetischer Betrachtung die Arbeitsanteile infolge der auf den eingespannten bzw. wölbbehinderten Querschnitt wirkenden Schubspannungen berücksichtigt werden, die aus der beschriebenen behinderten Querschnittsverwölbung resultieren.

Auf diesen Sachverhalt machte vermutlich als erster Filon in [22] schon 1903 aufmerksam, als er die sich ändernde Schubspannungsverteilung über die Querschnittshöhe eines Balkens im Schnitt I-I in Abhängigkeit veränderter Laststellungen untersuchte (Bild 5).

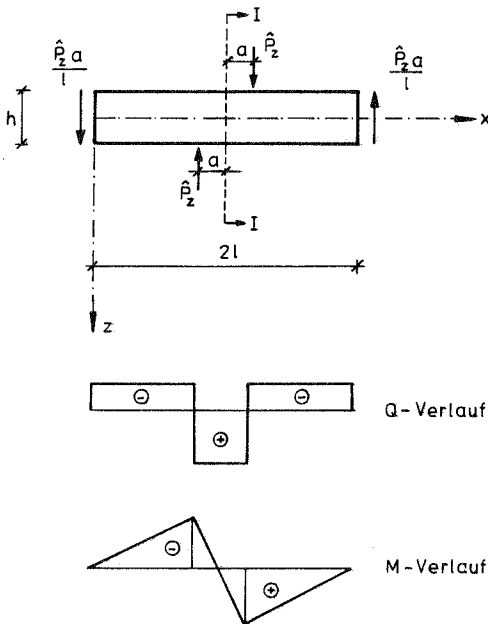
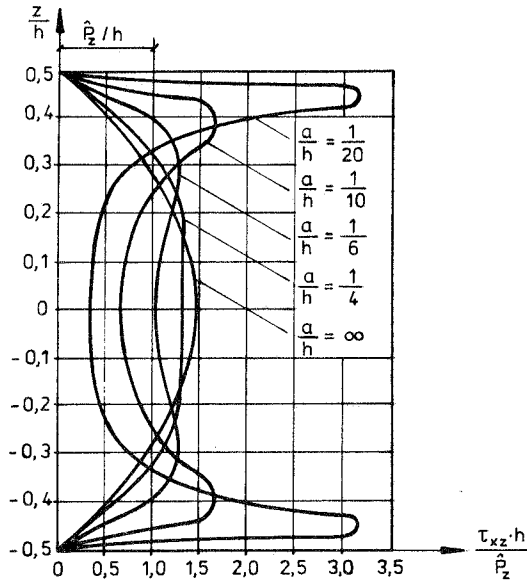


Bild 5 Bestimmungsort der Schubspannungsverläufe (Schnitt I-I) bei veränderlicher Lasteinleitungsentfernung  $a$  (Filon [22])

Er zeigte (Bild 6), daß sich im Schnitt I-I für kleine Verhältnisse  $a/h$  nicht mehr die nach der elementaren Balkentheorie vorhergesagte parabolische Schubspannungsverteilung einstellt, sondern sich im Extremfall am oberen und unteren Querschnittsrand eine Schubspannungsspitze ausbildet, während der Mittenbereich nahezu schubspannungsfrei bleibt.



**Bild 6** Schubspannungsverläufe am Krümmungs-Nullpunkt in Abhängigkeit der Lasteinleitungsentfernung  $a$

Dieses Ergebnis wurde durch weitere Arbeiten belegt, u.a. 1905 von Timpe in [77] und 1935 von Mesmer in [47].

Die elementare Balkentheorie ist also demnach für allgemeine Belastungsfälle inkonsistent, d.h. es herrscht in ihr ein Widerspruch zwischen den Schubspannungen und den Schubverzerrungen. Mit ihr kann der veränderte Schubspannungsverlauf in der Nähe einer Einspannstelle bzw. einer Lasteinleitung oder in Bereichen eines raschen Krümmungswechsels nicht beschrieben werden. Dies hat zur Folge, daß auch der Längsspannungsverlauf in diesen Bereichen selbst mit der Timoshenko-Balkentheorie nicht besser, d.h. wirklichkeitsnäher als mit der Bernoulli-Balkentheorie bestimmt werden kann.



# 1 Einleitung und Übersicht

Die oben geschilderte Unzulänglichkeit der elementaren Balkentheorie kann sich in der Berechnung von Stabtragwerken bei bestimmten Verhältnissen der Geometrie und/oder des Werkstoffes bemerkbar machen. Darauf weisen u.a. Timoshenko in [73] sowie Donnel in [21] hin und geben experimentell bzw. theoretisch begründete Näherungsformeln an, um diesen lokalen Effekt, der durch die von der elementaren Theorie abweichenden Spannungsverteilung verursacht wird, nachträglich zu berücksichtigen.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, eine erweiterte Balkentheorie in konsistenter Weise herzuleiten, die es durch genauere Verschiebungsannahmen ( als sie der elementaren Balkentheorie zugrunde liegen ) gestattet, das Ergebnis der Verschiebungen und der Spannungen zu verbessern. Sie soll es möglich machen, auch kurze wandartige Träger genauer zu berechnen und den Längsspannungsverlauf von Stäben mit gegliedertem Querschnitt bei vergleichsweise geringem Rechenaufwand realitätsnah anzugeben.

Da auf dem Gebiet der Balken- und Plattentheorien schon sehr früh und seit Bernoulli noch bis heute relativ intensiv gearbeitet wird, wäre es mühsam alle bisher auf diesem Gebiet erschienenen Arbeiten hier aufzulisten. Um dennoch einen allgemeinen Überblick zu ermöglichen, wird daher an dieser Stelle nur auf einzelne bereits erschienene Abhandlungen verwiesen, wie z.B. die Bücher von Timoshenko [75] und Szabó [67] sowie auch auf das Buch von Schardt [60] oder die Dissertation von Gebbeken [25], in denen von verschiedenen Standpunkten aus die geschichtliche Entwicklung beschrieben und dazu auch jeweils ein umfangreiches Literaturverzeichnis angegeben wird.

Diejenigen Veröffentlichungen, die in direktem Bezug zu der hier vorgestellten verfeinerten Balkentheorie stehen, werden im folgenden kurz aufgeführt.

Aufbauend auf grundlegenden Arbeiten im wesentlichen von Johann Bernoulli (1667–1748), Leonhard Euler (1707–1783), Charles A. Coulomb (1736–1806) und Thomas Young (1773–1829) gelang es vermutlich als erstem Louis M. H. Navier (1785–1836) im Jahre 1826 "die Differentialgleichung der elastischen Linie" aufzustellen. Damit war eine Biegetheorie für schlanke Stäbe geschaffen, die heute unter dem Namen (Euler-) Bernoulli-Balkentheorie bekannt ist. Die wesentlichste ihr zugrundeliegende Annahme ist das Eben- und zur Stabachse Senkrechtbleiben der Querschnitte.

Die Berechnung nicht nur schlanker sondern auch gedrungener Stäbe erforderte eine Theorie, die die Schubverformungen mitberücksichtigt. Eine in den Grundzügen insofern erweiterte Balkentheorie stellte im Jahre 1859 erstmals Jacques A. C. Bresse

(1822–1883) in [10] vor.

Auf dem Gebiet der Dynamik erweiterte 1921 Stephen P. Timoshenko (geb. 1878) in [71] den Gültigkeitsbereich der Balkentheorie auch auf kurze Stäbe durch Einarbeitung der Querschub- und Rotationsträgheitseffekte in die Differentialgleichung der Balkenbiegung. Er dehnte diese erweiterte Theorie 1936 in [72] auf die Stabilitätsberechnung von Stäben sowie 1940 in [73] bzw. 1949 in [74] auch auf die Berechnung statischer Probleme aus.

Bei dieser sogenannten (Bresse–) Timoshenko–Balkentheorie wird von über die Querschnittshöhe konstanten effektiven Schubverzerrungen ausgegangen. Es wird angenommen, daß diese effektiven Verzerrungen gleich sind dem Quotienten aus der Durchschnitts-Schubspannung eines Querschnittes und dem Produkt aus Schubmodul  $G$  und Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$ . Der Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$  ist hierbei eine dimensionslose Größe, die von der Querschnittsform abhängig ist und eingeführt wird, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Schubspannungen und –dehnungen nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind.

Timoshenko definierte in [71] den Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$  zunächst als Verhältnis von durchschnittlicher Schubverzerrung eines Querschnittes zum Schubverzerrungswert auf der Schwerachse. Diese Definition ergibt beispielsweise für den Rechteck-Querschnitt einen Schubkorrekturfaktor von  $\alpha_s = 0.667$ .

Für den gleichen Querschnittstyp gab er in [72] ohne weitere Erklärung den Wert  $\alpha_s = 0.833$  an.

Seither wurde in vielen Arbeiten durch Verbesserung des Schubkorrekturfaktors versucht, zum einen den Fehler auszugleichen, der der so erweiterten Balkentheorie infolge der konstant über die Querschnittshöhe angenommenen Schubverzerrungen anhaftet, und zum anderen eine Ausweitung des Anwendungsbereichs dieser Theorie auf beliebige Querschnittsformen und/oder beliebige Materialien zu erzielen.

So wurde u.a. von Mindlin und Deresiewicz 1954 in [50] darauf hingewiesen, daß die gewöhnliche Definition des Schubkorrekturfaktors entsprechend [73] bzw. [71] zu unbefriedigenden Ergebnissen führt, wenn die Timoshenko–Gleichungen benutzt werden, um höhere Frequenzen schwingender Balken zu berechnen. Jedoch stellten sie dabei nicht die Grunddefinition des Schubkorrekturfaktors  $\alpha_s$  in Frage, sondern legten dar, daß die Verteilung der Schubverzerrungen über den Querschnitt von der Eigenform der Balkenschwingung abhängt und  $\alpha_s$  sich daher mit der Frequenz ändert. Die unbefriedigenden Ergebnisse in der Frequenzberechnung rührten somit von der Benutzung statischer Schubverzerrungsverteilungen zur Bestimmung des Schubkorrekturfaktors  $\alpha_s$  anstatt der Benutzung einer Verzerrungsverteilung wie sie bei einer hochfrequenten Bewegung auftritt. Mindlin und Deresiewicz schlugen vor, den Schubkorrekturfaktor

ggfs. willkürlich anzupassen und gaben z.B. für einen Rechteck-Querschnitt den Wert  $\alpha_s = 0.822$  an.

Cowper leitete 1966 in [15] die Gleichungen der Timoshenko-Balkentheorie durch Integration der Gleichungen der drei-dimensionalen Elastizitätstheorie her. Aus dieser Herleitung resultiert eine gegenüber [73] neue Formel zur Ermittlung des Schubkorrekturfaktors für isotropes Material, die von einer Materialkonstante, der Querdehnzahl  $\nu$ , abhängig ist. Er gibt u.a. zur Bestimmung des Schubkorrekturfaktors eines Rechteck-Querschnittes die folgende Formel an:

$$\alpha_s = \frac{10 \cdot (1 + \nu)}{12 + 11 \cdot \nu}$$

Diese liefert für eine Querdehnzahl  $\nu$  zwischen 0.0 und 0.3 einen Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$  zwischen 0.833 und 0.850 .

U.a. in den Arbeiten [7] und [8] von Bert 1973 und Bert und Gordaninejad 1983, [18] von Dharmarajan und McCutchen 1973, [68] von Teh und Huang und [66] von Stephen und Levinson 1979 sowie [5] von Bank 1987 wurde versucht, Formeln zu entwickeln, die die Bestimmung des Schubkorrekturfaktors der Timoshenko-Balkentheorie für beliebige Querschnittsformen und/oder beliebige Materialeigenschaften ermöglichen, was in diesen Arbeiten auch für bestimmte Sonderfälle realisiert wurde.

Die Timoshenko-Balkentheorie der Dynamik (und Statik) für isotropes Material wurde in der Folgezeit seit ihres Bekanntwerdens 1921 mit [71] unter Zugrundelegung eines Schubkorrekturfaktors  $\alpha_s$  zwischen 0.667 und 0.850 für Rechteck-Querschnitte sowohl analytisch als auch numerisch auf verschiedene Weise gelöst.

Hier sei zum einen auf die Arbeiten von

Davidson und Meier 1946 in [16], Kruszewski 1949 in [37], Anderson und Miklowitz 1953 in [2] bzw. [49], Huang 1961 in [29], Krishna Murty 1970 in [35] und [36], sowie Clough und Penzien 1975 in [14] und zum anderen auf die Arbeiten von Archer 1965 in [4], Kapur 1966 in [32], Severn 1970 in [64], Nickel und Secor 1972 in [51], Thomas, Wilson und Wilson 1973 in [70], Tessler und Dong 1981 in [69], Kanok-Nukulchai und Shik Shin 1984 in [31], Yokoyama 1988 in [82], Kant und Gupta 1988 in [30] und Gordaninejad und Ghazavi 1989 in [27] verwiesen.

Erstere Lösungsverfahren unterscheiden sich u.a. darin, daß die Differentialgleichungen zum Teil in anderen als den üblichen Freiheitsgraden formuliert werden.

Bei letzteren Lösungsverfahren werden ausgehend von der potentiellen und ggfs. kinetischen Energie die Elementmatrizen ebenfalls teilweise in anderen Freiheitsgraden (auch mehr als zwei je Knoten) und zwei (oder mehr) Knoten je Element definiert, wobei die unterschiedlichsten Kombinationen von Verschiebungsansätzen gemacht werden. Ein Überblick über ähnliche Arbeiten auch anderer Autoren findet sich darüber hinaus

in [70], [69] sowie [31].

Die exakten Timoshenko–Matrizen für die linearisierte Theorie II. Ordnung und die Dynamik gibt u.a. Cheng 1970 in [11] bzw. Cheng und Pantelides 1988 in [12] an.

In jüngster Zeit wurden in Hinblick sowohl auf eine analytische als auch auf eine numerische Lösung verfeinerte Balkentheorien entwickelt, deren vorrangiges Ziel es u.a. war, ohne Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$  auszukommen. Dies wurde häufig ausgehend von einer Energieformulierung direkt durch einen Verschiebungsansatz höherer Ordnung erzielt. Allerdings wurden diese Theorien fast immer nur für bestimmte Querschnittstypen (meistens Rechteck oder Kreis) aufbereitet.

Zu erwähnen sind hierbei u.a. die Arbeiten von Uhrig 1979 in [78], Levinson 1981 in [42] und [43], Bickford 1982 in [9] und Levinson 1985 in [44].

Während Levinson in [42] und [43] gewissermaßen "nur" die Timoshenko–Differentialgleichungen für den Rechteck–Querschnitt ohne die Benutzung eines Schubkorrekturfaktors  $\alpha_s$  (bzw. für  $\alpha_s = 0.833$ ) formulierte, was er durch einen kubischen Verschiebungsansatz in Längsrichtung erreichte, ist u.a. mit den Formulierungen von Uhrig in [78], Bickford in [9], Kant und Gupta in [30] und Gordaninejad und Ghazavi in [27] auch eine genauere Längsspannungsberechnung im angegebenen Querschnittstyp (Rechteck bzw. Kreis) möglich.

Im Zusammenhang einer genaueren Spannungsermittlung wurde insbesondere versucht, im gegliederten Querschnitt den Shear–Lag–Effekt bzw. das Problem der mitragenden Breite zu beschreiben.

Vermutlich beginnend mit von Kármán 1924 in [79] wurde hierfür in vielen Arbeiten – u.a. von Metzger 1929 in [50], Chwalla 1936 in [13], Girkmann 1946 in [26], Dischinger 1955 in [19], Schlee 1974 in [61] und 1978 in [62] – nach Art der klassischen Faltenwerktheorie das Kraftgrößenverfahren auf verschiedene Querschnittstypen und Belastungsfälle angewandt.

Hierbei wird der gegliederte Querschnitt in seine Teilquerschnitte zerlegt. Die zwischen den Teilquerschnitten übertragenen Schubspannungen stellen die statisch Unbestimmten dar. Die horizontalen Querschnittsteile (Flansche) werden nach der Scheibentheorie, die vertikalen Querschnittsteile (Stege) nach der Bernoulli–Balkentheorie berechnet. Lediglich in [61] und [62] werden sowohl die Flansche als auch die Stege nach der Scheibentheorie berechnet.

1966 stellte Schardt in [59] ein Verfahren zur Berechnung allgemeiner prismatischer Faltenwerke vor, deren Querschnitte nicht mehr als unverformbar angesehen werden können. Diesem Verfahren liegen u.a. die Annahmen zugrunde, daß die Längsspannungen  $\alpha_x$  in den einzelnen Scheiben linear über die Höhe verteilt sind und in den Mittelebenen der Scheiben keine Schubverzerrungen auftreten.

Es resultiert in einem System von Differentialgleichungen, die in Analogie zu der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion für den Stab mit kontinuierlicher elastischer Drehbettung steht (mit entsprechenden Wölbsteifigkeiten infolge linearer Verwölbung der Teilquerschnitte, Torsions- und Querbiegesteifigkeiten der einzelnen Scheiben je Verformungszustand der Berührungspunkte der Teilquerschnitte).

Kollbrunner und Hajdin gaben 1972 und 1975 in [33] und [34] verschiedene Näherungsstufen zur Berechnung dünnwandiger Stäbe u.a. unter Berücksichtigung der Profilverformung an.

Roik und Sedlacek veröffentlichten 1970 in [57] und 1982 in [63] ein Verfahren zur Berechnung von Stäben mit gegliedertem Querschnitt und mit elastischen Längsfugen, über die Schubverformungen zwischen den Teilquerschnitten ermöglicht werden. Die Herleitung erfolgt über das Prinzip der virtuellen Arbeit, wobei zu den Elementarverwölbungen des Querschnittes mit unendlich großer Fugensteifigkeit (= konstanten und linearen Verschiebungsansätzen für Längskraft, Biegung und Torsion) zusätzliche konstante Grundverwölbungen festgelegt werden, die die möglichen Verformungen der Schubfugen berücksichtigen.

Die Teilquerschnitte genügen dabei der Bernoulli-Hypothese.

Als Ergebnis erhält man die Differentialgleichung des Fugenschubs (ebenfalls in vektorieller Form), die wiederum in Analogie zur Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion steht. Roik und Sedlacek geben an, daß durch einen Übergang von diskreten schubelastischen Fugen auf einen kontinuierlich zusammenhängenden Querschnitt, der Schubverformungen zuläßt, das Problem der mittragenden Breite beschrieben werden könne. Der Verlauf der Zusatzverformungen über den Querschnitt müsse hierfür allerdings nach "vernünftigen" Gesichtspunkten geschätzt werden.

Von Sedlacek und Bild wurde u.a. dieses Verfahren 1990 in [64] an einem zweistegigen Plattenbalken vorgeführt, wobei die vier Grundverwölbungen noch durch zusätzliche parabelförmige Elementarverwölbungen der Flansche zur Erfassung der Schubweichheit ergänzt wurden. Jede dieser Zusatzverwölbungen liefert eine Differentialgleichung vom gleichen Typ der der Wölbkrafttorsion.

Ähnlich, auf der Grundlage der verallgemeinerten Balkentheorie für dünnwandige gegliederte Querschnitte (Bernoulli-Biegetheorie und Theorie der Wölbkrafttorsion) und durch den Ansatz spezieller Formfunktionen in den einzelnen Flanschabschnitten entwickelten Razaqpur und Li 1991 in [53] über das Prinzip der virtuellen Arbeit ein finites Kasten-Balkenelement zur Berechnung ein- und mehrzelliger Kastenträger. Das resultierende Differentialgleichungssystem besteht wie in [64] u.a. aus je einer Differentialgleichung für jede Basiswölbfunktion der Flansche, die in Analogie zu der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion steht.

Einen ganz anderen Weg ging Reissner 1946 in [55], als er über das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie Gleichungen herleitete, die den Kastenträger mit Flanschverwölbungen beschreiben. Bei dieser Formulierung führte er in Ergänzung zu den bis dahin üblichen ebenen Querschnittsverschiebungen eine quadratische Funktion für die axialen Faserverschiebungen in den Flanschen des Kastenträgers ein.

Verbunden mit dieser Funktion ist eine verallgemeinerte kinematische Variable, die die Größe des Beitrages der parabolischen Verschiebung angibt.

Diese, die Intensität des Shear-Lag im Kastenträger beschreibende Funktion, untersuchten Foutch und Chang 1982 in [24] für verschiedene Belastungsfälle.

Die Formulierung von Reissner [55] wurde von Kuzmanović und Graham 1981 in [38] auf Kastenträger mit seitlichen Auskragungen der oberen Flansche erweitert.

Dezi und Mentrasti ließen 1985 in [17] darüber hinaus auch geneigte Stege und über die Querschnittshöhe konstante Schubverzerrungen zu.

Die der vorliegenden Arbeit im Ergebnis am nächsten kommenden Veröffentlichungen sind jene von Hjelmstad 1987 in [28] sowie von Laudiero und Savoia 1990 in [39] bzw. 1991 in [40], neben der bereits erwähnten Arbeit von Bickford 1982 in [9] bzw. 1985 in [44] unter der gemachten Einschränkung.

Sowohl Hjelmstad als auch Laudiero und Savoia leiteten über das Prinzip der virtuellen Arbeit Balkentheorien für beliebige dünnwandige Querschnitte her, die u.a. der Querschnittsverwölbung infolge Querschub Rechnung tragen. Der wesentlichste Unterschied in diesen beiden Herleitungen besteht im Ansatz für die Längsverschiebungen.

Da in der vorliegenden Arbeit eine Balkentheorie angestrebt wird, die als Sonderfälle die elementaren Balkentheorien von Bernoulli und Timoshenko direkt beinhaltet, werden diese in den Abschnitten 2 und 3 zunächst mit ihren wesentlichen Voraussetzungen und Annahmen kurz aufgeführt. Dies erscheint sinnvoll, um die Erweiterung gegenüber den elementaren Theorien deutlich zu machen. Außerdem sind auch deren Voraussetzungen und Annahmen, sofern nichts anderes gesagt wird, Grundlage dieser erweiterten Balkentheorie. Ausführlichere Darstellungen zu den elementaren Theorien und teilweise auch darüber hinaus finden sich u.a. bei Antman in [3], Dökmeci in [20], Wlassow in [80] und [81], Kollbrunner und Hajdin in [33] und [34], Bednarczyk in [6] sowie bei Ramm und Hofmann in [52].

In Abschnitt 4 wird anschließend eine erweiterte Schubtheorie hergeleitet. Dabei werden auf entsprechende Weise zunächst die Grundgleichungen des Stabkontinuums bereitgestellt, die anschließend durch Integration in die Grundgleichungen der Stabtheorie übergehen.

Nach Aufstellen der Differentialgleichung samt ihrer Lösung wird die zugehörige Elementsteifigkeitsmatrix erstellt und die Integralformulierung für das Biege-Schub-Problem angegeben.

Für die wichtigsten Belastungsfälle werden die Schub-Formeln bestimmt.

In Abschnitt 5 wird die bis dahin nur in einer Ebene hergeleitete erweiterte Balkentheorie für ein Stabelement unter zunächst beliebiger räumlicher Belastung (Normalkraft, Zweiachsige Biegung, Torsion) verallgemeinert und die Analogie zwischen Querkraft-Schub und Torsions-Schub aufgezeigt.

Um eine Aussage über die Genauigkeit der vorgestellten erweiterten Balkentheorie machen zu können, werden im Abschnitt 6 an einem Beispiel die nach dieser Theorie erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen nach der Scheibentheorie verglichen.

Die soweit gemachten Ausführungen beschränken sich im wesentlichen nur auf einen rechteckigen Stabquerschnitt. In Abschnitt 7 wird deshalb die erweiterte Balkentheorie auf einen dünnwandigen gegliederten Querschnittstyp angewandt und gezeigt, daß sich mit dieser Theorie das Problem der mitwirkenden Breite (Shear-Lag-Effekt) beschreiben läßt. Die so gewonnenen Ergebnisse werden mit jenen verglichen, die man nach der einfachen Faltwerkstheorie erhält.

Die in den Schubverzerrungen verfeinerte lineare Balkentheorie wird in den Abschnitten 8 und 9 auf die linearisierte Theorie II. Ordnung und die Dynamik erweitert, und es werden ihre dortigen Auswirkungen untersucht. Dies geschieht, indem die numerischen Ergebnisse nach der vorgestellten Theorie mit den Ergebnissen nach der elementaren Balkentheorie und nach der Scheibentheorie verglichen werden.

## 2 Balkentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung (Bernoulli-Theorie)

Voraussetzungen:

- die Trägerachse ist im unbelasteten Zustand gerade
- kleine Deformationen
- die Lastebene ist die  $x$ - $z$ -Ebene
- die Deformationsebene soll zur Lastebene parallel sein (gerade Biegung)
- keine Längsbelastung, d.h.  $N = 0$

### 2.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums

Geometrie: Für die Verschiebungen gilt

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Annahme I:  $w(x,z)=w(x)$  (d.h., alle Punkte eines Querschnitts erfahren dieselbe Querverschiebung)

Annahme II:  $u(x,z)=a(x)+\beta(x)z$  ( $\hat{=}$  Bernoulli-Annahme: die Querschnitte verdrehen sich zwar, bleiben aber eben.)

bzw. wegen  $N = 0 \quad \rightarrow \quad u(x, z) = \beta(x)z \quad (2.1)$

Damit lauten die Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen:

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\partial a(x)}{\partial x} + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} z$$

bzw. wegen  $N = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon_x(x, z) = \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} z \quad (2.2)$

und  $\gamma_{xz}(x) = \beta(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (2.3)$

wobei  $w(x) = w_b(x) + w_s(x) \quad (2.4)$

( Der untere Index "b" bzw. "s" steht für "infolge Biegung" bzw. "infolge Schub" )

Annahme III:  $\gamma_{xz} = 0$  (d.h., die Schubverzerrungen in der Deformationsebene dürfen vernachlässigt werden.)



Damit folgt aus Gleichung (2.3) und (2.4):

$$\begin{aligned}\beta(x) &= -w'_b(x) - w'_s(x) \\ &= \phi_b(x) + \phi_s(x)\end{aligned}$$

(  $\beta$  ... Normalendrehwinkel ;  $\phi$  ... Achsendrehwinkel )

Aus Annahme III folgt gleichzeitig:

$$\phi_s(x) = 0$$

damit bleibt:

$$\beta(x) = \phi_b(x) \quad (2.5)$$

$$-\phi_b(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (2.6)$$

wobei:

$$w(x) = w_b(x) \quad (2.7)$$

Der Normalendrehwinkel  $\beta$  entspricht bei der Bernoulli-Balkentheorie also genau dem Achsendrehwinkel  $\phi_b$  (Bild 2.1).

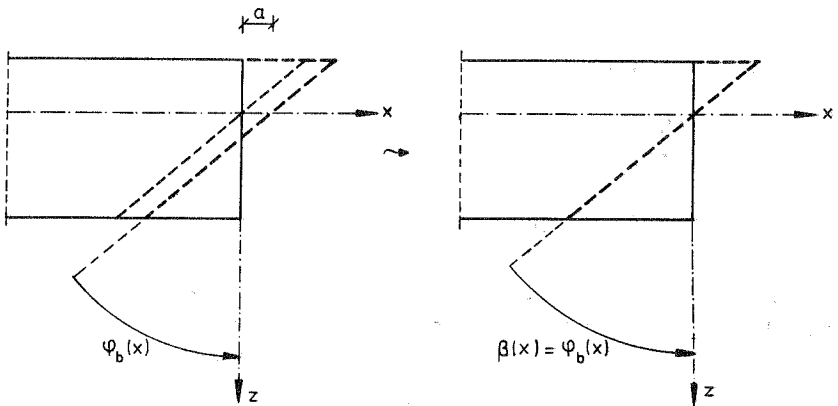


Bild 2.1 Normalendrehwinkel  $\beta$  nach Bernoulli ( $\beta = \phi_b$ )

Werkstoff: Das Hookesche Gesetz lautet:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

Annahme IV:  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  (d.h., für die Biegung in der x-z-Ebene ist  $\sigma_x$  die maßgebende Längsspannung)

damit bleibt:

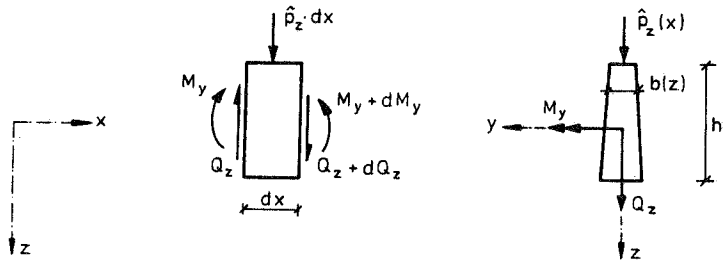
$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\sigma_x(x, z)}{E} \quad (2.8)$$

## 2.2 Übergang zur Stabtheorie der reinen Biegung

### 2.2.1 Grundgleichungen und Spannungen

Geometrie:  $w_b(x) = -\phi_b(x)$  (2.9)

Statik:



Die Gleichgewichtsbedingungen am Trägerelement der Länge  $dx$  lauten:

$$\frac{dQ_z(x)}{dx} = -\hat{p}_z(x) \quad (2.10)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x) \quad (2.11)$$

Aus den Gleichungen (2.2), (2.5) und (2.8) erhält man das sogenannte Naviersche Geradliniengesetz für die Längsspannung  $\sigma_x$  infolge reiner Biegung:

$$\sigma_x(x, z) = E \frac{d\phi_b(x)}{dx} z \quad (2.12)$$

Damit kann das Biegemoment  $M_y$  bestimmt werden:

$$M_y(x) = \int_{\Lambda} z \sigma_x \, dA \quad (2.13)$$

$$M_y(x) = E \frac{d\phi_b(x)}{dx} \underbrace{\int_{\Lambda} z^2 \, dA}_{I_y} = EI_y \frac{d\phi_b(x)}{dx}$$

und man erhält das Elastizitätsgesetz des Balkens:

$$\frac{d\phi_b(x)}{dx} = \frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (2.14)$$

Die Gleichungen (2.12) und (2.14) liefern die Längsspannungsverteilung über die Querschnittshöhe

$$\sigma_x^{(P)}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (2.15)$$

(Der obere Index "P" steht ggfs. für "primäre" Spannung; siehe hierzu Abschnitt 4)

### 2.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Biege-Problems und ihre Lösung

Aus den Gleichungen (2.9), (2.10), (2.11) und (2.14) erhält man:

$$\left( EI_y w_b''(x) \right)'' = \hat{p}_z(x) \quad (2.16)$$

mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} w_b \\ \phi_b \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int \int \frac{1}{EI_y} \left[ \int \int \hat{p}_z \, dx dx \right] dx dx \\ \int \frac{1}{EI_y} \left[ \int \int \hat{p}_z \, dx dx \right] dx \\ \int \int \hat{p}_z \, dx dx \\ \int \hat{p}_z \, dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \int \int \frac{x}{EI_y} dx dx & - \int \int \frac{1}{EI_y} dx dx & x & 1 \\ \int \frac{x}{EI_y} dx & \int \frac{1}{EI_y} dx & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Für den Sonderfall  $EI_y = \text{konstant}$  und  $\hat{p}_z = \text{konstant}$  erhält man:

$$\begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_b \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{x^4}{24EI_y} \\ \frac{x^3}{6EI_y} \\ \frac{x^2}{2} \\ x \end{bmatrix} \hat{p}_z + \begin{bmatrix} -\frac{x^3}{6EI_y} & -\frac{x^2}{2EI_y} & -x & 1 \\ \frac{x^2}{2EI_y} & \frac{x}{EI_y} & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

(2.18)

### 3 Balkentheorie unter Annahme einer linearen Querschnittsverwölbung (Timoshenko-Theorie)

Die Timoshenko-Balkentheorie bzw. Bernoulli-Theorie mit Schubweiterung setzt einen infolge Querkraft-Schub wölbfreien (nicht existent) oder nicht wölbbehinderten Querschnitt voraus. Damit müssen sich benachbarte Querschnitte bei einem nicht wölbfreien Querschnitt gleichartig, d.h. in Stablängsrichtung ungehindert, verformen können. Daraus folgt, daß bei nicht wölbfreien (also bei allen) Querschnitten

$$\begin{aligned} \text{die Querkraft} & \quad Q_z = \text{konstant} \quad \text{und} \\ \text{die verteilte Querbelastung} & \quad \hat{p}_z = 0 \quad \text{sein muß.} \end{aligned}$$

Eine Belastung senkrecht zur Stabachse darf also strenggenommen nur am Stabende eingeleitet werden.

Im übrigen gelten die Voraussetzungen und die Annahmen I, II und IV der Bernoulli-Balkentheorie.

#### 3.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums

Geometrie: (modifizierte Annahme III der Bernoulli-Theorie)

Im allgemeinen Fall (Bild 3.1) setzt sich bei der Timoshenko-Balkentheorie die Querverschiebung  $w$  aus einem Biegeanteil  $w_b$  und einem Schubanteil  $w_s$  zusammen:

$$w(x) = w_b(x) + w_s(x) \quad (3.1)$$

Entsprechendes gilt für den Achsendrehwinkel  $\phi$ :

$$\phi(x) = \phi_b(x) + \phi_s(x) = -w'_b(x) - w'_s(x) \quad (3.2)$$

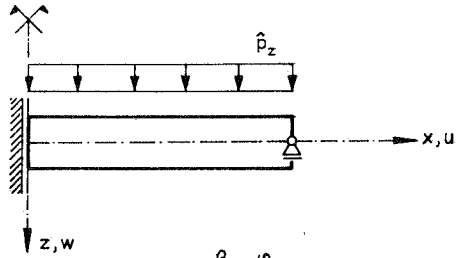
Der Normalendrehwinkel  $\beta$  besteht hierbei aus dem Biegewinkel  $\phi_b$ , dem Schubwinkel  $\phi_s$  und der Schubverzerrung  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \underbrace{\phi_b(x) + \phi_s(x)} + \gamma(x) \\ &= -w'(x) + \gamma(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

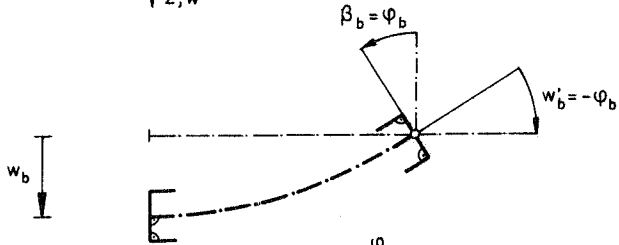
Für den Sonderfall einer reinen Schubbeanspruchung gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} \beta_s(x) &= \phi_s(x) + \gamma(x) \\ &= -w'_s(x) + \gamma(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

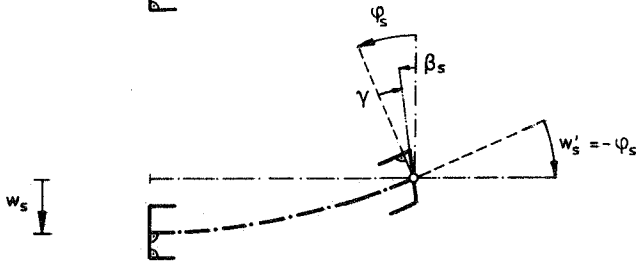
Ausgangslage:



Biegung:



Schub:



Biegung + Schub:

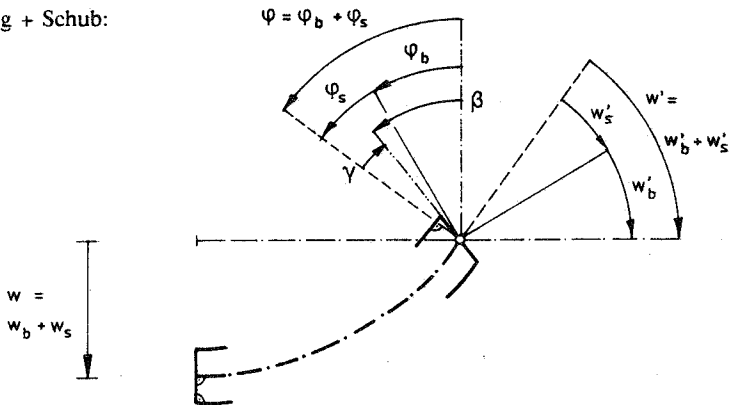


Bild 3.1 Darstellung der Verschiebungsgrößen am allgemeinen Beispiel  
(  $Q(x) \neq \text{konstant}$  )

Die Querschnittsverzerrung, d.h. das Herausreten der Fasern aus dem Querschnitt bezogen auf die Ausgangslage des Querschnitts (Verwölbung) wird hierbei linear verteilt angenommen.

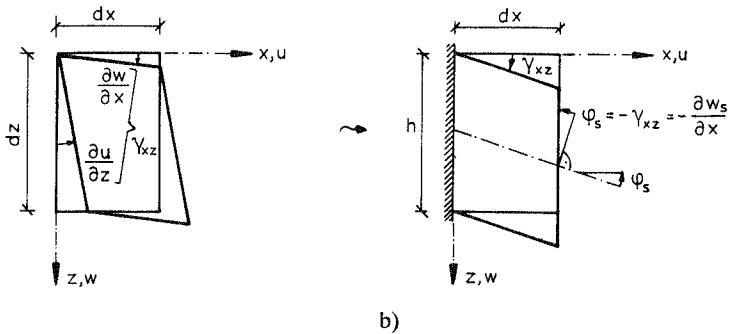


Bild 3.2 Querschnittsverzerrung bezogen auf die Normale der Stabachse in der Ausgangslage (Sonderfall: Einspannung mit  $\beta = 0$ )

Daraus folgt für die Längsverschiebungen zunächst eine gegenüber Bernoulli modifizierte bzw. erweiterte Annahme II'.

$$\text{Annahme II': } u(x, z) = \beta_b(x)z + \beta_s(x)z$$

$$\text{bzw. } u(x, z) = \phi_b(x)z + \beta_s(x)z \quad (3.5)$$

Ein konstanter Querkraftverlauf stellt, wie bereits oben erwähnt, eine wesentliche Voraussetzung der Timoshenko-Balkentheorie dar. Daraus folgt, daß auch der Normalendrehwinkel  $\beta_s$  zunächst konstant (bzw. sogar identisch null) angenommen werden muß. Man erhält die Annahme II der Timoshenko-Balkentheorie.

$$\text{Annahme II: } u(x, z) = \phi_b(x)z + \beta_s z \quad (3.6)$$

Auch die Annahme III der Bernoulli-Theorie wird modifiziert:

$$\text{Annahme III: } \gamma_{xz}(x) \neq 0$$

Für die Verschiebungen gilt wie oben:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Damit lauten die Verzerrungs–Verschiebungsgleichungen:

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} z \quad (3.7)$$

und 
$$\gamma_{xz}(x) = \phi_b(x) + \beta_s + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (3.8)$$

wobei 
$$w(x) = w_b(x) + w_s(x) \quad (3.9)$$

$$\underbrace{w_s(x) = w_l(x)}$$

Schubverschiebung infolge linearer Querschnittsverwölbung

Aus Gleichung (3.8) und (3.9) folgt mit  $\beta_s = 0$  (s.o.) :

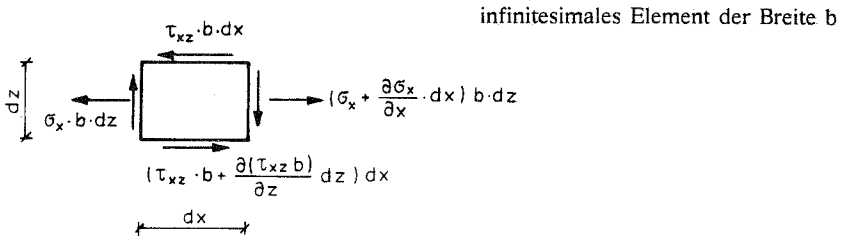
$$\gamma_{xz}(x) = -\phi_s(x) \quad (3.10)$$

**Bemerkung:**

Abweichend von der Voraussetzung, die bei der Herleitung und strenggenommen auch für die Anwendung der Timoshenko–Balkentheorie gilt, wird diese gewöhnlich auf allgemeine Belastungsfälle (mit  $Q(x) \neq \text{konstant}$ ) angewandt. In diesen Fällen gilt anstelle der Gleichungen (3.8) bzw. (3.10) die allgemeine Beziehung (3.3).

**Statik:**

Die Existenz der im Querschnitt  $x = \text{konstant}$  übertragenen Querkraft  $Q$  zieht zwangsläufig die Existenz entsprechender Schubspannungen nach sich.



Die Schubspannung  $\tau_{xz}$  sei wie die Biegespannung  $\sigma_x$  konstant über die Querschnittsbreite  $b$  verteilt.



$$\sum X = 0 : \quad \frac{\partial \sigma_x b}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} b)}{\partial z} = 0$$

Die Integration über  $z$  liefert die Schubspannung

$$\tau_{xz} b \Big|_z = \tau_{xz} b \Big|_{z'=z_0} - \int_{z'=z_0}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b(z') dz'$$

hierbei muß die Schubspannung am oberen und unteren Querschnittsrand verschwinden:

$$\tau_{xz} b \Big|_{z'=z_0} = \tau_{xz} b \Big|_{z'=z_u} = 0$$

Damit folgt:

$$\tau_{xz} b = - \int_{z'=z_0}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} b(z') dz' \quad (3.11)$$

Werkstoff: Das Hookesche Gesetz für Schub lautet:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad , \quad \text{mit} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Da die Schubspannung  $\tau_{xz}$  schon allein wegen der Bedingung der Schubspannungsfreiheit am oberen und unteren Querschnittsrand i.a. nicht gleichmäßig über die Querschnittshöhe verteilt ist, muß  $\gamma_{xz}$  als gemittelter Wert betrachtet werden, der bei linearem Stoffgesetz proportional der im Querschnitt übertragenen Querkraft  $Q$  ist. Man setzt daher mit  $A_s$  als zunächst noch unbekannter Schubfläche an:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{Q_z(x)}{GA_s} \quad (3.12)$$

Die Bestimmung der vom Querschnitt abhängigen Schubfläche  $A_s = \alpha_s A$  bzw. des Schubkorrekturbeiwertes  $\alpha_s$  ist hierbei von zentraler Bedeutung (siehe Anhang A1).

## 3.2 Übergang zur Stabtheorie mit konstanter Schubverzerrung

### 3.2.1 Grundgleichungen und Spannungen

Geometrie:  $w'_s(x) = \gamma_{xz}(x)$

bzw.  $w'_s(x) = -\phi_s(x)$  (3.13)

Statik:

Die Längsspannungen können als bekannt vorausgesetzt werden (Gl. 2.15)

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (3.14)$$

Gleiches gilt für die Beziehungen (2.10) und (2.11)

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x) \quad (3.15)$$

$$\frac{dQ_z(x)}{dx} = -\hat{p}_z(x) \quad (3.16)$$

Die Gleichung (3.11) liefert zusammen mit den Gleichungen (3.14) und (3.15) den Schubspannungsverlauf über die Querschnittshöhe:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, z) &= -\frac{1}{b} \int_{z'=z_0}^z \frac{\partial \sigma_x(x, z)}{\partial x} b(z^*) dz^* \\ \tau_{xz}^{(P)}(x, z) &= -\frac{Q_z^{(P)}(x)}{I_y} \frac{1}{b} \underbrace{\int_{z'=z_0}^z z^* b(z^*) dz^*}_{S_y(z)} = -\frac{Q_z^{(P)}(x)}{I_y} \frac{S_y(z)}{b(z)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die gleichen Beziehungen ergeben sich aus dem Gleichgewicht auch bei fehlenden Schubverzerrungen.

(Der obere Index "P" steht ggfs. für "primäre" Spannung; siehe hierzu Abschnitt 4)

### 3.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Schub-Problems und ihre Lösung

Aus den Gleichungen (3.12), (3.13) und (3.16) erhält man

$$[GA_s w_s'(x)]' = -\hat{p}_z(x) \quad (3.18)$$

mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} w_s \\ Q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_x \frac{1}{GA_s} \left[ \int_x \hat{p}_z dx \right] dx \\ \int_x \hat{p}_z dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_x \frac{1}{GA_s} dx & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Für den Sonderfall  $GA_s = \text{konstant}$  und  $\hat{p}_z = \text{konstant}$  erhält man:

$$\begin{bmatrix} w_s \\ Q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2GA_s} \\ x \end{bmatrix} \hat{p}_z + \begin{bmatrix} \frac{x}{GA_s} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

## 4 Balkentheorie unter Annahme einer kubischen Querschnittsverwölbung (Erweiterte Theorie)

### 4.1 Herleitung der erweiterten Biege-Schub-Theorie

Hier soll der Tatsache Rechnung getragen werden, daß die Schubspannungen i.a. nicht gleichmäßig über die Querschnittshöhe verteilt sind und wegen des Hookeschen Gesetzes für Schub

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

dasselbe auch für die Schubverzerrungen  $\gamma$  gilt (Bild 4.1).

Ansonsten sollen in gleicher Weise die Voraussetzungen und die Annahmen I und IV der Bernoulli-Balkentheorie gelten.

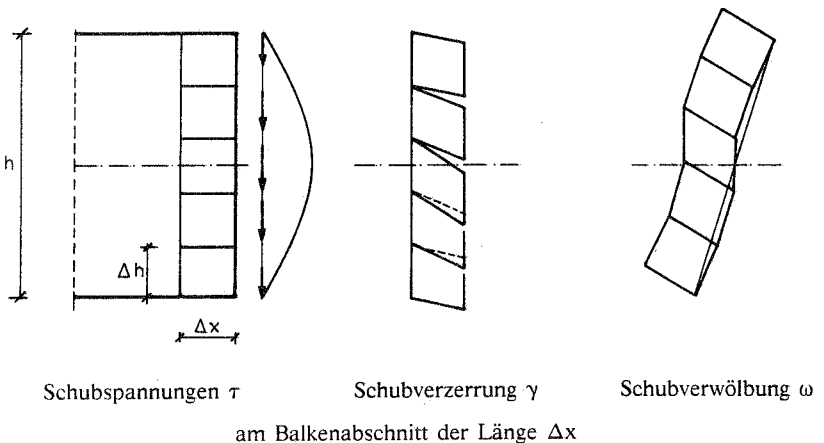


Bild 4.1 Schubbeanspruchung eines Balkenabschnitts

#### 4.1.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums

Geometrie: (modifizierte Annahme III der Timoshenko-Theorie)

Die Querschnittsverwölbung infolge Schub bezogen auf die Stabachsennormale läßt sich näherungsweise aus zwei Anteilen zusammengesetzt darstellen (Bild 4.2):

- einer linear über die Querschnittshöhe verteilten "Verwölbung" und
- einer in Form einer kubischen Parabel über die Querschnittshöhe verteilten "echten" Verwölbung.

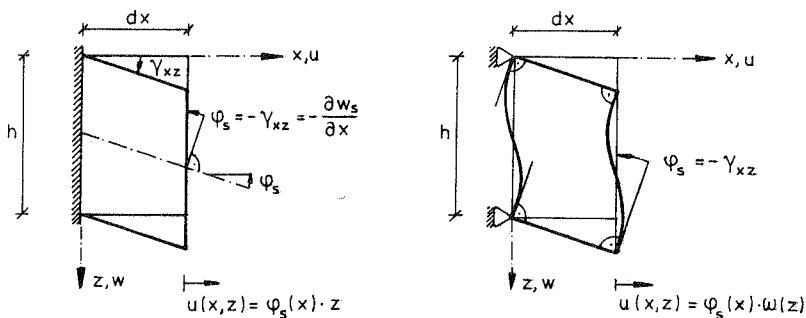


Bild 4.2 Linearer und kubischer Anteil der Querschnittsverwölbung infolge Schub

Der lineare Anteil beschreibt die von der Biegetheorie mit Schubverlängerung her bekannte Querschnittsverdrehung.

Der kubische Anteil wird in der Balkentheorie (Timoshenko) gewöhnlich vernachlässigt, da er insbesondere bei schlanken Stäben von untergeordneter Bedeutung ist.

Eine der Wirklichkeit besser entsprechende Verschiebungs- und Spannungsermittlung in wandartigen Trägern läßt sich aber nur unter Berücksichtigung auch dieses Einflusses durchführen.

Mit der gegenüber der Bernoulli- und Timoshenko-Balkentheorie modifizierten Annahme II läßt sich hier die gesamte Querschnittsverwölbung in Längsrichtung zunächst wie folgt angeben:

$$\text{Annahme II': } u(x, z) = \phi_b(x)z + \beta_s(x)z + \phi_s(x)\omega(z)$$

Die Wölbfunktion  $\omega(z)$  muß hierfür noch bestimmt werden (siehe Abschnitt 4.2 Bestimmung des Wölbwiderstandes).

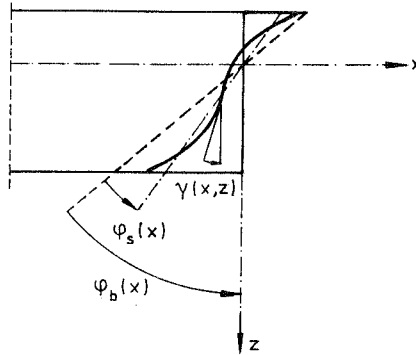


Bild 4.3 Bezeichnung der wichtigsten Winkel infolge Biegung und Schub

Der zweite Term in diesem Ansatz für die Längsverschiebungen ist für die "lineare Querschnittsverwölbung" verantwortlich und stellt den eigentlichen Anteil der Timoshenko-Theorie dar. Er setzt sich u.a. aus dem Normalendrehwinkel  $\beta_s(x)$  bzw. aus dem Schubwinkel  $\phi_s(x)$  und der konstanten Schubverzerrung  $\gamma(x)$  zusammen. Wie bereits in Abschnitt 3 festgestellt werden konnte, dürfen aus Gründen des Gleichgewichts die von einer Schubbeanspruchung herrührenden und in  $x$  veränderlichen Querschnittsverdrehungen ( $\beta_s, \phi_s, \gamma$ ) keine Längsspannungen hervorrufen, die etwas anderes als einen Eigenspannungszustand im Querschnitt darstellen.

Entsprechend der Timoshenko-Theorie wird deshalb auch hier zunächst von einem konstanten Querkraftverlauf ausgegangen, der einen ebenfalls konstanten Normalendrehwinkel  $\beta_s$  (insbesondere:  $\beta_s = 0$ ) zur Folge hat.

Der letzte Term ist allein für den kubischen Anteil der Querschnittsverwölbung verantwortlich und damit unabhängig vom jeweiligen Normalendrehwinkel  $\beta_s(x)$ . Für diesen Term muß daher keine weitere Einschränkung gemacht werden. Daraus folgt

$$\text{Annahme II: } u(x, z) = \phi_b(x)z + \beta_s z + \phi_s(x)\omega(z) \quad (4.1)$$

Zusammen mit

$$\text{Annahme III: } \gamma_{xz}(x, z) \neq 0$$

erhält man die Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen.

(Der Index "xz" zur Kennzeichnung der Wirkungsebene wird bei Eindeutigkeit im weiteren meistens weggelassen)

Für die Verschiebungen gilt wieder wie oben:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

und man erhält die Dehnung in Längsrichtung zu:

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} z + \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial x} \omega(z) \quad (4.2)$$

sowie die Schubverzerrung zu:

$$\gamma_{xz}(x, z) = \phi_b(x) + \beta_s + \phi_s(x) \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \quad (4.3)$$

wobei:  $w(x) = w_b(x) + w_s(x) \quad (4.4)$

$$w_s(x) = \underbrace{w_l(x) + w_k(x)}$$

Schubverschiebung infolge linearer und kubischer Querschnittsverwölbung

Aus Gleichung (4.3) und (4.4) folgt mit  $\beta_s = 0$  (entsprechend Abschnitt 3)

zunächst  $\gamma(x) = -\phi_s(x)$  und

schließlich 
$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x, z) &= -\phi_s(x) + \phi_s(x) \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} \\ &= \gamma(x) - \underbrace{\gamma(x) \cdot \tilde{\gamma}(z)}_{\gamma_w(x, z)} \end{aligned}$$

bzw.  $\gamma_{xz}(x, z) = \gamma(x, z) = \gamma(x) [1 - \tilde{\gamma}(z)]$

Die in Abschnitt 3 an dieser Stelle gemachte Bemerkung gilt hier entsprechend.

In den Gleichungen (4.1) bis (4.4) sind wieder die Anteile der elementaren Balkentheorien enthalten. Zusammen mit dem Werkstoffgesetz für die Dehnung (Gl. 2.8) und die Verzerrung (Gl. 3.12) sowie den Gleichgewichtsgleichungen (2.13) bzw. (3.11, 3.14 und 3.15) erhält man die bekannten zugehörigen Längs- und Schubspannungen. Sie werden im folgenden als "primäre" Spannungen  $\sigma_x^P$  und  $\tau_{xz}^P$  bezeichnet.

Biegelängsspannungen (primäre Längsspannungen)

(vgl. Abschnitt 2)

$$\sigma_x^P(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

### Schubspannungen (primäre)

(vgl. Abschnitt 3)

$$\tau_{xz}^{P(+S)}(x, z) = - \frac{Q_z^{P(+S)}(x) S_y(z)}{I_y b(z)}$$

Die übrigen Terme in den Gleichungen (4.1) bis (4.4) stellen die Anteile infolge Querschnittsverwölbung dar. Die aus der behinderten Verwölbung resultierenden Längs- und Schubspannungen werden im folgenden als "sekundäre" Spannungen bezeichnet.

### Wölblängsspannungen (sekundäre Längsspannungen)

Die Wölblängsspannungen oder sekundären Längsspannungen  $\sigma_x^S$  resultieren aus der Behinderung der Querschnittsverwölbung, die sich aufgrund der primären Schubspannungsverteilung einstellen möchte.

Die gesamte Querschnittsverschiebung in Längsrichtung, die Längsspannungen infolge Schub hervorruft, läßt sich gemäß Gleichung (4.1) wie folgt darstellen:

$$u(x, z) = \phi_s(x)\omega(z) \quad (4.5)$$

Die Dehnung in Längsrichtung infolge Schub lautet entsprechend Gleichung (4.2):

$$\epsilon_x(x, z) = \phi_s'(x)\omega(z) \quad (4.6)$$

Zusammen mit dem Hookeschen Werkstoffgesetz für die Dehnung

$$\sigma_x(x, z) = E\epsilon_x(x, z) \quad (4.7)$$

lassen sich die Wölblängsspannungen oder sekundären Längsspannungen angeben

$$\sigma_x^S(x, z) = E\phi_s'(x)\omega(z) \quad (4.8)$$

Sie stellen einen Eigenspannungszustand über den Querschnitt dar.

### Wölbschubspannungen (sekundäre Schubspannungen)

Die Wölbschubspannungen oder sekundären Schubspannungen  $\tau_{xz}^S$  lassen sich aus den sekundären Längsspannungen analog dem Vorgehen bei den primären Spannungen (vgl. Abschnitt 3.1) über das Gleichgewicht am infinitesimalen Element der Breite  $b$  bestimmen. Entsprechend der Gleichung (3.11) erhält man

$$\tau_{xz}^S b = - \int_{z^*=z_0}^z \frac{\partial \sigma_x^S}{\partial x} b(z^*) dz^* \quad (4.9)$$



## 4.1.2 Übergang zur Stabtheorie mit quadratischer Schubverzerrung

### 4.1.2.1 Grundgleichungen und Spannungen

Geometrie:  $w'_s(x) = -\phi_s(x)$  (4.10)

Statik:

Setzt man in die statische Gleichung (4.9) die Werkstoffgleichung (4.8) und die Geometriegleichung (4.10) ein, dann läßt sich der sekundäre Schubspannungsverlauf über die Querschnittshöhe wie folgt angeben:

$$\tau_{xz}^S(x, z) = \frac{E w_s''''(x)}{b(z)} \int_{z'=z_0}^z \omega(z') b(z') dz' \quad (4.11)$$

Die Integration der sekundären Schubspannungskomponenten in Stablängsrichtung  $\tau_{Hz}^S$  ergibt die sekundäre Querkraft

$$Q_z^S(x) = \int_{z_0}^{z_u} \tau_{Hz}^S(x, z) b(z) dz$$

bzw. 
$$Q_z^S(x) = \int_{z_0}^{z_u} \tau^S(x, z) \bar{\gamma}(z) b(z) dz \quad (4.12)$$

Hierzu folgende Erläuterung:

Entsprechend der Aufteilung der Gesamtverwölbung in einen linearen und einen kubischen Anteil (Abschnitt 4.1.1), lassen sich die Schubspannungen in gleicher Weise additiv, i.a. aus einem primären und einem sekundären Anteil zusammensetzen.

Während bei den primären Schubspannungen der Verwölbungswinkel konstant, nämlich  $\bar{\gamma}(z) = 0$  ist (Bild 4.4) und deshalb die Beziehung gilt

$$\tau_v^P(x, z) = \tau^P(x, z) \cos 0^\circ$$

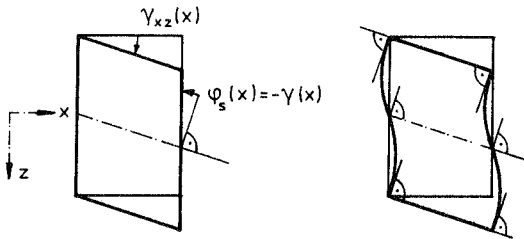
also 
$$\tau_v^P(x, z) = \tau^P(x, z) \quad (4.13)$$

ist die Neigung der sekundären Schubspannungen über die Querschnittshöhe veränderlich.

## Querschnittsverformungen

linear

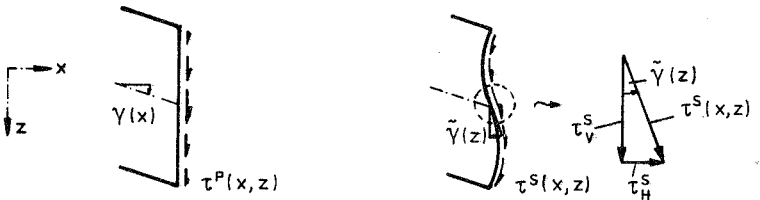
kubisch



## Schubspannungen

primär

sekundär



## Querkraft

primär

sekundär

$$Q_z^P(x) = \int_{z_o}^{z_u} \tau^P(x, z) b(z) dz$$

$$Q_z^S(x) = \int_{z_o}^{z_u} \tau^S(x, z) b(z) \tilde{\gamma}(z) dz$$

Bild 4.4 Primäre und sekundäre Querkraft

Mit  $\sin \bar{\gamma} \approx \bar{\gamma}$

folgt  $\tau_H^S(x, z) = \tau^S(x, z)\bar{\gamma}(z)$  (4.14)

Der Verlauf der Neigung  $\bar{\gamma}(z)$  läßt sich u.a. aus der Wölbfunktion  $\omega(z)$  durch einmaliges Differenzieren berechnen (zu ihrer Bestimmung siehe Abschnitt 4.2):

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial z} = \bar{\gamma}(z) \tag{4.15}$$

Damit läßt sich die sekundäre Querkraft wie folgt darstellen:

$$Q_z^S(x) = \int_{z_0}^{z_u} \tau^S(x, z)b(z)\bar{\gamma}(z)dz$$

partielle Integration:

$$= \underbrace{\tau^S(x, z)b(z)}_{\text{(Randschubkräfte!)}} \int_{z_0}^{z_u} \bar{\gamma}(z)dz \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} - \int_{z_0}^{z_u} \underbrace{\frac{\partial(\tau^S(x, z)b(z))}{\partial z}}_{-\frac{\partial \sigma_x^S}{\partial x} b} \underbrace{\left[ \int_{z_0}^z \bar{\gamma}(z^*)dz^* \right]}_{\omega(z) - \omega_0} dz$$

(vgl. Abschnitt 4.2, Gl. 4.97)

$$Q_z^S(x) = \int_{z_0}^{z_u} \frac{\partial \sigma_x^S}{\partial x} b[\omega(z) - \omega_0] dz$$

mit Gleichung (4.8) und (4.10):  $\sigma_x^S(x, z) = -Ew_s''(x)\omega(z)$

$$Q_z^S(x) = -Ew_s''''(x) \int_{z_0}^{z_u} \omega(z)b[\omega(z) - \omega_0] dz$$

$$= -Ew_s''''(x) \left\{ \int_{z_0}^{z_u} \omega^2(z)bdz - \omega_0 \int_{z_0}^{z_u} \omega(z)bdz \right\}$$

$$= \tau^S b \Big|_{z=z_0} = \tau^S b \Big|_{z=z_u} = 0$$

$$Q_z^S(x) = -Ew_s'''(x) \underbrace{\int_{z_o}^{z_u} \omega^2(z)b(z)dz}_{I_\omega \dots \text{Wölbwiderstand}}$$

Die Stabbeziehung für das Werkstoffverhalten lautet somit:

$$Q_z^S(x) = -EI_\omega w_s'''(x) \quad (4.16)$$

Hierin ist 
$$I_\omega = \int_{z_o}^{z_u} \omega^2(z)b(z)dz \quad (4.17)$$

der von der Querschnittsform abhängige Wölbwiderstand. (Zu seiner Bestimmung siehe Abschnitt 4.2)

Analog zu den Biegemomenten 
$$M_y(x) = \int_A \sigma_{x,b}^p z dA$$

und 
$$M_z(x) = - \int_A \sigma_{x,b}^p y dA$$
 sowie dem

Wölbmoment der Wölbkrafttorsion 
$$M_{\omega_x}(x) = \int_A \sigma_{x,t}^S \omega_x dA$$
 kann auch bei der

„Wölbquerkraft“ ein Wölbmoment aus den Wölblängsspannungen  $\sigma_x^S$  definiert werden (anschauliche Darstellung siehe Bild 4.5):

$$M_{\omega_y}(x) = \int_A \sigma_{x,t}^S \omega_y dA \quad (4.18)$$

bzw. mit Gleichung (4.8) und (4.10): 
$$M_{\omega_y}(x) = -Ew_s''(x) \underbrace{\int_A \omega_y^2 dA}_{I_{\omega_y}}$$

Der Index „x“, „y“ oder „z“ bezeichnet hier die Achse der zugehörigen Momentenwirkung: er wird i.a. sofern keine Verwechslung möglich ist, weggelassen.

Im weiteren wird das Wölbmoment entsprechend der Definition des Biegemoments dann positiv angenommen, wenn die gestrichelte Faser, also gewöhnlich die untere Randfaser, gezogen wird (Bild 4.5).

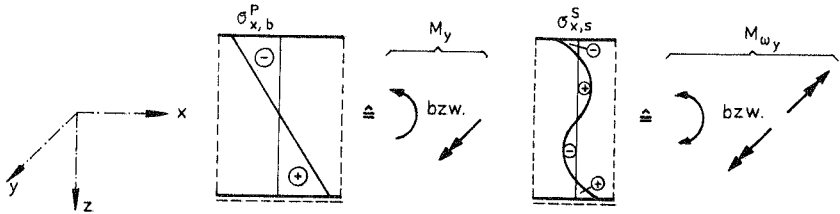


Bild 4.5 Vorzeichendefinition des Wölbmoments

Damit erhält man die folgenden Beziehungen

Wölbmoment:  $M_{\omega}(x) = -EI_{\omega}w_s''(x)$  (4.19)

Sekundäre Querkraft:  $Q_z^S(x) = M_{\omega}'(x)$  (4.20)

Primäre Querkraft: es gilt das Werkstoffgesetz (Gl. 3.12 gemäß Timoshenko)

$$Q_z^P(x) = GA_s w_s'(x) \quad (4.21)$$

Gesamte Querkraft: hier muß die Gleichgewichtsbeziehung herangezogen werden, die aus den Gleichungen (2.9), (2.11) und (2.14) resultiert.

$$Q_z(x) = -EI_y w_b'''(x) \quad (4.22)$$

Die Gleichungen (2.2), (2.5), (2.8) und (2.9) nacheinander in Gleichung (3.11) eingesetzt liefert:

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{E w_b'''(x)}{b} \int_{z^*=z_0}^z z^* b(z^*) dz^* \quad (4.23)$$

Mit Gleichung (4.22) und Gleichung (4.23) folgt der bekannte Ausdruck (Gl. 3.17) für den Schubspannungsverlauf, der aus dem vertikalen Gleichgewicht herrührenden Querkraft.

$$\tau_{xz}(x, z) = -\frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{1}{b(z)} \int_{z^*=z_0}^z z^* b(z^*) dz^* = -\frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_y b(z)} \quad (4.24)$$

Analog erhält man mit den Gleichungen (4.16) und (4.11) einen entsprechenden Ausdruck für den zusätzlichen sekundären Schubspannungsverlauf aus dem Verwölbungsanteil.

$$\bar{\tau}_{xz}^S(x, z) = -\frac{Q_z^S(x)}{I_\omega} \frac{1}{b(z)} \int_{z'=z_0}^z \omega(z^*) b(z^*) dz^* = -\frac{Q_z^S(x) S_\omega(z)}{I_\omega b(z)} \quad (4.25)$$

Senkrecht zur Stabachse gelten die bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$Q_z'(x) = -\hat{p}_z(x) \quad (4.26)$$

sowie 
$$M_y'(x) - Q_z(x) = -\hat{m}_y(x) \quad (4.27)$$

Allerdings setzt sich jetzt die Querkraft  $Q_z$  aus einem primären und einem sekundären Anteil zusammen

$$Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x) \quad (4.28)$$

Gleichung (4.28) eingesetzt in (4.24) liefert zusammen mit (4.25) die konsequent nach primären und sekundären Anteilen getrennten Schubspannungen.

Primäre Schubspannungen:

$$\bar{\tau}_{xz}^P(x, z) = -\frac{Q_z^P(x)}{I_y} \frac{1}{b(z)} \int_{z'=z_0}^z z^* b(z^*) dz^* = -\frac{Q_z^P(x) S_y(z)}{I_y b(z)} \quad (4.29)$$

Sekundäre Schubspannungen:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xz}^S(x, z) &= -\frac{Q_z^S(x)}{I_y} \frac{1}{b(z)} \int_{z'=z_0}^z z^* b(z^*) dz^* - \frac{Q_z^S(x)}{I_\omega} \frac{1}{b(z)} \int_{z'=z_0}^z \omega(z^*) b(z^*) dz^* \\ &= -\frac{Q_z^S(x) S_y(z)}{I_y b(z)} - \frac{Q_z^S(x) S_\omega(z)}{I_\omega b(z)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es ist hier festzuhalten, daß in Gleichung (4.30) nur der zweite Anteil einen Eigen­spannungszustand über den Querschnitt beschreibt, während der erste Anteil zusammen mit (4.29) für das Gleichgewicht mit den eingepprägten Kräften notwendig ist.

Dies stellt gegenüber Gleichung (3.17) aus Abschnitt 3 jedoch keinen Widerspruch dar: zwar läßt sich die (primäre) Querkraft jeweils durch die Werkstoffgleichung ausdrücken (Gl. 3.12 und 4.21)

$$Q_z^{(P)}(x) = G A_s w_s'(x)$$

Da aber die Schubverschiebung  $w_s(x)$  in Gleichung (4.4) gegenüber Gleichung (3.9)

erweitert wird, gilt dies auch für die Schubspannungen.

So wie die primären und sekundären Schubspannungen aus den Querkräften zurückgerechnet werden können, lassen sich die primären und sekundären Längsspannungen aus dem Biegemoment und dem Wölbmoment bestimmen. Dies kann zum einen mit den Gleichungen (2.9), (2.12) und (2.14) und zum anderen mit den Gleichungen (4.8), (4.10) und (4.19) geschehen. Man erhält:

Primäre Längsspannungen:

$$\sigma_x^P(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (4.31)$$

Sekundäre Längsspannungen:

$$\sigma_x^S(x, z) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega(z) \quad (4.32)$$

### Zusammenfassung der Grundgleichungen

Statik:  $Q_z' + \hat{p}_z = 0 \quad (4.26)$

$$Q_z = Q_z^P + Q_z^S \quad (4.28)$$

$$Q_z^S = M_\omega' \quad (4.20)$$

$$M_y' - Q_z + \hat{m}_y = 0 \quad (4.27)$$

Werkstoff:  $Q_z^P = GA_s \gamma \quad (4.33)$

$$M_\omega = EI_\omega \kappa_\omega \quad (4.34)$$

$$M_y = EI_y \kappa_y \quad (4.35)$$

Geometrie:  $\gamma = -\phi_s = w_s' \quad (4.36)$

$$\kappa_\omega = -w_\omega'' \quad (4.37)$$

$$\phi_b = -w_b' \quad (4.38)$$

$$\kappa_y = -w_b'' \quad (4.39)$$

$$w' = w_b' + w_s' = -\phi_b - \phi_s \quad (4.40)$$

$$w = w_b + w_s \quad (4.41)$$

Die Gleichungen (4.26), (4.27), (4.33), (4.35), (4.36) und (4.38) bis (4.41) sind von der Timoshenko-Balkentheorie her bekannt.

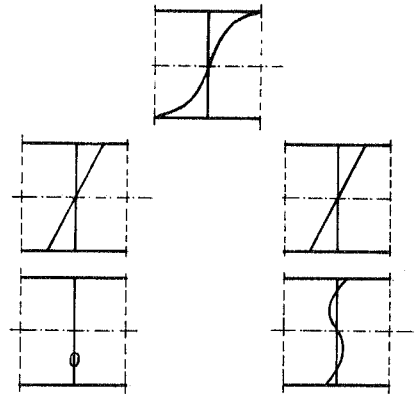
## Zusammenstellung der Spannungen

Längsspannungen:

$$\sigma_x(x, z) = \sigma_x^P(x, z) + \sigma_x^S(x, z) \quad (4.42)$$

$$\sigma_x^P(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (4.31)$$

$$\sigma_x^S(x, z) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega(z) \quad (4.32)$$



nicht wölbbehindert  $\longleftrightarrow$  wölbbehindert

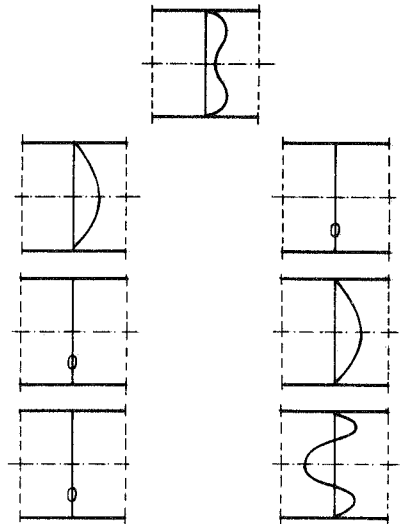
Schubspannungen:

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{xz}^P(x, z) + \tau_{xz}^S(x, z) \quad (4.43)$$

$$\tau_{xz}^P(x, z) = -\frac{Q_z^P(x) S_y(z)}{I_y b} \quad (4.29)$$

$$\tau_{xz}^S(x, z) = -\frac{Q_z^S(x) S_y(z)}{I_y b}$$

$$-\frac{Q_z^S(x) S_\omega(z)}{I_\omega b} \quad (4.30)$$



nicht wölbbehindert  $\longleftrightarrow$  wölbbehindert



#### 4.1.2.2 Die Differentialgleichungen des Biege-Schub-Problems

Die Geometriegleichungen (4.36) und (4.37) liefern mit den Werkstoffgleichungen (4.33) und (4.34) eingesetzt in die statischen Gleichungen (4.20) und (4.28)

$$GA_s w_s' - (EI_\omega w_s'')' = Q_z \quad (4.44)$$

und zusammen mit (4.26) die Differentialgleichung für die "Wölbquerkraft":

$$(GA_s w_s')' - (EI_\omega w_s'')'' = -\hat{p}_z \quad (4.45)$$

Die Gleichungen (4.27), (4.35) und (4.39) ergeben die zur Beschreibung des gesamten Biege-Schub-Problems noch fehlende Differentialgleichung

$$(EI_y w_b'')' + \left[ GA_s w_s' - (EI_\omega w_s'')' \right] = \hat{m}_y \quad (4.46)$$

Die Differentialgleichung der Wölbquerkraft (4.45) kann unabhängig von (4.46) gelöst werden.

Für den Sonderfall  $GA_s = \text{konstant}$  und  $EI_\omega = \text{konstant}$  erhält man:

$$GA_s w_s'' - EI_\omega w_s^{IV} = -\hat{p}_z \quad (4.47)$$

bzw. mit der Abklingzahl:

$$\alpha = \lambda l = l \sqrt{\frac{GA_s}{EI_\omega}} \quad (4.48)$$

$$w_s^{IV} - \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 w_s'' = \frac{\hat{p}_z}{EI_\omega} \quad (4.49)$$

Diese Differentialgleichung steht in formaler Analogie zu der Differentialgleichung des – Bernoulli-Balkens nach der linearisierten Theorie II. Ordnung mit  $S$  als Zugkraft sowie in vollständiger (d.h. in formaler und logischer) Analogie zu der der – Wölbkrafttorsion (vgl. Anhang A5).

### 4.1.2.3 Vergleich mit bekannten Differentialgleichungen

Die beiden Differentialgleichungen (4.45) und (4.46) beschreiben das gesamte Biege-Schub-Problem unter Berücksichtigung einer quadratischen Schubverzerrung. Sie lassen sich sowohl in die bekannte, nur das Biege-Problem beschreibende Differentialgleichung von Bernoulli als auch in die von Timoshenko angegebenen Gleichungen überführen, die das Biege-Schub-Problem unter Berücksichtigung einer konstanten Schubverzerrung beschreiben.

$$\left(GA_s w_s'\right)' - \left(EI_\omega w_s''\right)'' = -\hat{p}_z \quad (4.45)$$

$$\left(EI_y w_b''\right)' + \left[G A_s w_s' - \left(EI_\omega w_s''\right)'\right] = \hat{m}_y \quad (4.46)$$

#### Überführung in die Bernoulli-Balkengleichung

Ein weiteres Differenzieren der Gleichung (4.46) liefert

$$\left(EI_y w_b''\right)'' + \underbrace{\left[G A_s w_s' - \left(EI_\omega w_s''\right)'\right]'}_{-\hat{p}_z} = \hat{m}_y' \quad (4.50)$$

Setzt man Gleichung (4.45) in (4.50) ein, erhält man die Differentialgleichung der reinen Biegung:

$$\left(EI_y w_b''\right)'' = \hat{p}_z + \hat{m}_y' \quad (4.51)$$

Wie es die Herleitung der erweiterten Schubtheorie nicht anders erwarten läßt, zeigt sich hierin wieder, daß das Schub-Problem unabhängig vom Biege-Problem gelöst werden kann.

#### Überführung in die Timoshenko-Balkengleichungen

In der vorgestellten Biege-Schub-Theorie wird der Einfluß der Querschnittsverwölbung in Form einer Wölbsteifigkeit  $EI_\omega$  bzw. eines Wölbwiderstandes

$$I_\omega = \int_{z_1}^{z_2} \omega^2(z) b(z) dz$$

berücksichtigt. In dieser Formel zur Bestimmung des Wölbwiderstandes stellt  $\omega(z)$

die theoretische "Maximal"-Verwölbung gegenüber dem nicht verwölbten Querschnitt dar. Damit ist auch  $I_\omega$  ein maximaler Wölbwiderstand. Dem abklingenden Effekt einer Wölbbehinderung wird durch die hyperbolischen Funktionen in der Lösung für  $w_s(x)$  (vgl. Anhang A3) Rechnung getragen.

Für einen nicht wölbbehinderten Querschnitt, der in der Timoshenko-Theorie zugrunde gelegt wird, ist die Relativ-Verwölbung  $\omega(x,z)$  und damit auch der Wölbwiderstand  $I_\omega$  identisch null.

Damit vereinfachen sich die Gleichungen (4.45) und (4.46) zu

$$\left(GA_s w_s'\right)' = -\hat{p}_z \quad (4.52)$$

$$\left(EI_y w_b''\right)' + GA_s w_s' = \hat{m}_y \quad (4.53)$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen die Ableitung der Schubverschiebung durch die Differenz der Ableitungen der Gesamt- und Biegeverschiebungen

$$w_s' = w' - w_b' \quad (4.40)$$

erhält man mit

$$w_b' = -\phi_b \quad (4.38)$$

die erste der beiden gesuchten Gleichungen.

Die zweite Timoshenko-Gleichung erhält man aus Gleichung (4.53) durch Einsetzen der weiteren Beziehung

$$w_b'' = -\phi_b' \quad (4.38')$$

Hiermit ergeben sich die beiden in  $w$  und  $\phi_b$  gekoppelten Differentialgleichungen der Biegung mit konstanter Schubdeformation:

$$\left(GA_s \left[w' + \phi_b'\right]\right)' = -\hat{p}_z \quad (4.54)$$

$$\left(EI_y \phi_b'\right)' - GA_s \left[w' + \phi_b'\right] = -\hat{m}_y \quad (4.55)$$

Die Timoshenko-Gleichungen (4.54) und (4.55) stellen demzufolge und der Erwartung gemäß einen Sonderfall der Gleichungen (4.45) und (4.46) der erweiterten Schub-Theorie dar.

#### 4.1.2.4 Lösung der Schub-Differentialgleichung der erweiterten Theorie

Die in Abschnitt 4.1.2.2 hergeleitete, das Schub-Problem beschreibende Differentialgleichung

$$w_s^{iv} - \left(\frac{a}{l}\right)^2 w_s'' = \frac{\hat{p}_z}{EI_\omega} \quad (4.49)$$

mit:

$$a = \lambda l = l \sqrt{\frac{GA_s}{EI_\omega}} \quad (4.48)$$

ist vom Euler-Typ und setzt sich aus einem homogenen Anteil  $w_{s, \text{hom}}$  und einem Partikularanteil  $w_{s, \text{part}}$  zusammen.

Die homogene Differentialgleichung wird mit einem  $e^{ax}$ -Ansatz erfüllt. Dieser liefert

die charakteristische Gleichung

$$a^2 \left[ a^2 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right] = 0 \quad (4.56)$$

mit ihren Lösungen  $a_{1,2} = 0$

sowie  $a_{3,4} = \pm \frac{a}{l}$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß eine Doppelwurzel vorliegt ( $a_{1,2} = 0$ ), erhält man als Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$w_{s, \text{hom}}(x) = C_1 + C_2 \frac{a}{l} x + \bar{C}_3 e^{a_3 x} + \bar{C}_4 e^{a_4 x} \quad (4.57)$$

Diese wird mit

$$e^{\pm \frac{a}{l} x} = \cosh\left(\frac{a}{l} x\right) \pm \sinh\left(\frac{a}{l} x\right)$$

$$\bar{C}_3 + \bar{C}_4 = C_3$$

$$\bar{C}_3 - \bar{C}_4 = C_4$$

umgeformt zu:

$$w_{s, \text{hom}}(x) = C_1 + C_2 \frac{a}{l} x + C_3 \cosh\left(\frac{a}{l} x\right) + C_4 \sinh\left(\frac{a}{l} x\right) \quad (4.58)$$

Die Partikularlösung hängt vom  $\hat{p}_z(x)$ -Verlauf ab.

Für  $\hat{p}_z(x) = \text{konstant}$  erhält man (mit einem quadratischen Ansatz) z.B.:

$$w_{s,\text{part}}(x) = -\frac{\hat{p}_z}{EI_\omega} \left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{x^2}{2} = -\frac{\hat{p}_z}{2GA_s} x^2 \quad (4.59)$$

Die Gesamtlösung setzt sich aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen.

$$w_s(x) = w_{s,\text{hom}}(x) + w_{s,\text{part}}(x) \quad (4.60)$$

Sie muß die Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Dies führt zu den Bestimmungsgleichungen für die vier Integrationskonstanten je Bereich.

Lösung für den Sonderfall:  $GA_s = \text{konstant}$ ,  $EI_\omega = \text{konstant}$  und  $\hat{p}_z = \text{konstant}$

mit:  $c_x = \cosh(\lambda x)$   $c = \cosh(\lambda l)$

$s_x = \sinh(\lambda x)$   $s = \sinh(\lambda l)$

Bestimmungsgleichungen für die vier Integrationskonstanten je Bereich:

$$\begin{aligned} w_s &= [C_1 + C_2 \lambda x + C_3 c_x + C_4 s_x] - \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \frac{x^2}{2} \\ -\phi_s = w'_s &= \lambda [C_2 + C_3 s_x + C_4 c_x] - \frac{\hat{p}_z}{GA_s} x \\ -\frac{M_\omega}{EI_\omega} = w''_s &= \lambda^2 [C_3 c_x + C_4 s_x] - \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \cdot 1 \\ -\frac{Q_z^S}{EI_\omega} = w'''_s &= \lambda^3 [C_3 s_x + C_4 c_x] - 0 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  interessieren die Stabendwerte an den Stellen  $x = 0$  und  $x = l$  :

$x = 0$ :

$$\begin{bmatrix} w_s \\ w_s' \\ w_s'' \\ w_s''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} - \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$x = l$ :

$$\begin{bmatrix} w_s \\ w_s' \\ w_s'' \\ w_s''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda l & c & s \\ 0 & \lambda & \lambda s & \lambda c \\ 0 & 0 & \lambda^2 c & \lambda^2 s \\ 0 & 0 & \lambda^3 s & \lambda^3 c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} - \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

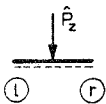
Die wichtigsten Rand- und Übergangsbedingungen:

freies Ende:  $\sigma_x^S(x, z) = 0 \rightarrow M_\omega = 0 \rightarrow w_s'' = 0$   
 $-EI_\omega w_s'''' + GA_s w_s' = Q_z \dots$  Querkraft gleich einem vorgegebenen Wert  $Q_z$ , z.B.  $Q_z = 0$

Einspannung:  $w_s = 0$   
 $u(x, z) = 0 \rightarrow \phi_s(x) = 0 \rightarrow w_s' = 0$

Übergangsbedingung:  $w_{s,l} = w_{s,r}$   
 $w_{s,l}' = w_{s,r}' \rightarrow Q_{z,l}^P = Q_{z,r}^P$   
 $M_{\omega,l} = M_{\omega,r}$   
 $Q_{z,l} = Q_{z,r} + \hat{P}_z$

}  $Q_{z,l}^S = Q_{z,r}^S + \hat{P}_z$



## Schublösungen:

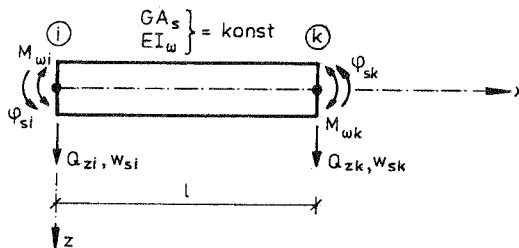
Im Anhang A3 wird eine Zusammenstellung der Schublösungen einiger Grundlastfälle gegeben, auf die zum Teil in den Abschnitten 6 und 7 (Vergleich und Fehlerabschätzung) zurückgegriffen wird. In allen Schublösungen der dort angegebenen Grundlastfälle ist die Lösung nach der Timoshenko-Balkentheorie enthalten. Die zusätzlichen Lösungsanteile beschreiben den rasch abklingenden Effekt infolge der Wölbbehinderung.

In den graphischen Verläufen der Schublösungen wurden die sekundären Effekte zur Verdeutlichung übertrieben dargestellt.

### 4.1.2.5 Steifigkeitsmatrizen

Aus der exakten Lösung der homogenen Differentialgleichung für  $w_s(x)$  (Gl. 4.58) läßt sich die exakte Steifigkeitsmatrix für den Schub herleiten (siehe Anhang A4). Man erhält:

– reiner Schub  $\mathbf{k}_s$  :



a. exakt

$$\mathbf{k}_s = \frac{GA_s}{k_0} \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 & k_2 & k_4 \\ -k_1 & k_2 & k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_4 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

wobei:

$$k_0 = 2(1 - c) + \lambda ls \quad \text{und} \quad \lambda = \sqrt{\frac{GA_s}{EI_\omega}}$$

$$k_1 = \lambda s$$

$$k_2 = c - 1$$

$$k_3 = cl - \frac{1}{\lambda} s$$

$$k_4 = \frac{1}{\lambda} s - 1$$

$$c = \cosh(\lambda l)$$

$$s = \sinh(\lambda l)$$

mit zugehörigem Schnittkraftvektor

und

Verschiebungsvektor

$$s_s = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{\omega i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega k} \end{bmatrix} \quad (4.64) \quad ; \quad u_s = \begin{bmatrix} w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Die Einflüsse aus primärer und sekundärer Querkraft sind in der Steifigkeitsmatrix über die Hyperbel-Funktionen miteinander gekoppelt. Eine zahlenmäßige Trennung kann über eine Näherungslösung vorgenommen werden.

Diese kann entweder über einen Näherungsansatz aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen entwickelt werden (siehe Abschnitt 4.1.2.6) oder über eine Reihenentwicklung der Lösung der Differentialgleichung (4.58) bzw. der Steifigkeitsterme (4.63) gewonnen werden.

Bei Abbruch der Reihenglieder nach dem 2. Glied erhält man die folgenden genäher-ten Steifigkeitsmatrizen für den Schub.

b. genähert:

$$k_s = k_s^P + k_s^S \quad (4.66)$$

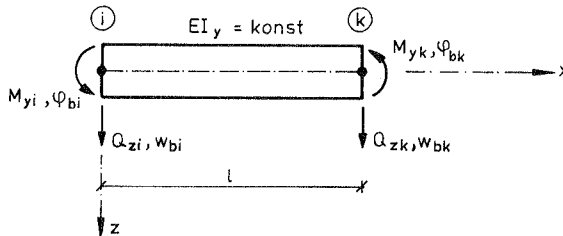
$$k_s^P = GA_s \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10l} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10l} \\ & \frac{10}{2l} & & \\ & & \frac{10}{6l} & -\frac{30}{l} \\ \text{symm.} & & & \frac{10}{2l} \\ & & & & \frac{15}{15} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$k_s^S = EI_\omega \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & & \\ & & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \text{symm.} & & & \frac{4}{l} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$



Zur Beschreibung des gesamten Biege-Schub-Problems muß die Steifigkeitsmatrix der reinen Biegung addiert werden.

– reine Biegung  $\mathbf{k}_b$  :



$$\mathbf{k}_b = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ & & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \text{symm.} & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

mit zugehörigem Schnittkraftvektor

$$\mathbf{s}_b = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zk} \\ M_{yk} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

und

Verschiebungsvektor

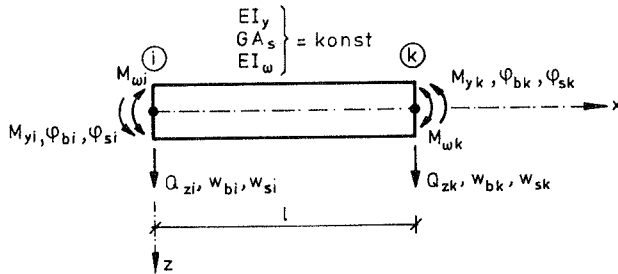
$$\mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} w_{bi} \\ \phi_{bi} \\ w_{bk} \\ \phi_{bk} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Anmerkung:

Die Biegung und der Schub werden vollständig entkoppelt behandelt (Steifigkeitsmatrizen 4.63 bzw. 4.66 und 4.69). Aus diesem Grund tritt in den Schnittkraftvektoren (4.64) und (4.70) jeweils die gleiche Schnittkraft  $Q_z$  auf, die die gesamte Querkraft bezeichnet, während in den Verschiebungsvektoren (4.65) und (4.71) nur die Ver-

schiebungsgrößen der jeweiligen Beanspruchung stehen. Dies gilt entsprechend für die folgenden Matrizen und Vektoren der zusammengesetzten Beanspruchung (Gl. 4.73 bis 4.75).

- Biegung + Schub:  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s$  (4.72)



a. exakt

$\mathbf{k} =$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{12}{l^3} EI_y & -\frac{6}{l^2} EI_y & -\frac{12}{l^3} EI_y & -\frac{6}{l^2} EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{4}{l} EI_y & \frac{6}{l^2} EI_y & \frac{2}{l} EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{12}{l^3} EI_y & \frac{6}{l^2} EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4}{l} EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{k_1}{k_0} GA_s & -\frac{k_2}{k_0} GA_s & -\frac{k_1}{k_0} GA_s & -\frac{k_2}{k_0} GA_s \\
 & & & & & \frac{k_3}{k_0} GA_s & \frac{k_2}{k_0} GA_s & \frac{k_1}{k_0} GA_s \\
 & & & & & & \frac{k_1}{k_0} GA_s & \frac{k_2}{k_0} GA_s \\
 & & & & & & & \frac{k_3}{k_0} GA_s
 \end{bmatrix}$$

symm.

(4.73)

b. genähert

$\mathbf{k} =$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc}
 \frac{12}{l^3}EI_y & -\frac{6}{l^2}EI_y & -\frac{12}{l^3}EI_y & -\frac{6}{l^2}EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{4}{l}EI_y & \frac{6}{l^2}EI_y & \frac{2}{l}EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{12}{l^3}EI_y & \frac{6}{l^2}EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4}{l}EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \left(\frac{6}{51}GA_s + \frac{12}{l^3}EI_\omega\right) & \left(-\frac{1}{10}GA_s - \frac{6}{l^2}EI_\omega\right) & \left(-\frac{6}{51}GA_s - \frac{12}{l^3}EI_\omega\right) & \left(-\frac{1}{10}GA_s - \frac{6}{l^2}EI_\omega\right) \\
 & & & & & \left(\frac{2l}{15}GA_s + \frac{4}{l}EI_\omega\right) & \left(\frac{1}{10}GA_s + \frac{6}{l^2}EI_\omega\right) & \left(-\frac{1}{30}GA_s + \frac{2}{l}EI_\omega\right) \\
 & & & & & & \left(\frac{6}{51}GA_s + \frac{12}{l^3}EI_\omega\right) & \left(\frac{1}{10}GA_s + \frac{6}{l^2}EI_\omega\right) \\
 \text{symm.} & & & & & & & \left(\frac{2l}{15}GA_s + \frac{4}{l}EI_\omega\right)
 \end{array} \right] \quad (4.74)$$

mit entsprechendem Schnittkraftvektor

und

Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zk} \\ M_{yk} \\ Q_{zi} \\ M_{\omega i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega k} \end{bmatrix} \quad (4.75) \quad ; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_{bi} \\ \phi_{bi} \\ w_{bk} \\ \phi_{bk} \\ w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

#### 4.1.2.6 Integralformulierung

Im folgenden werden ausgehend von einem Energieprinzip (P.v.V.) für das Biege-Schub-Problem die Euler-Gleichungen hergeleitet. Dafür wird zunächst die potentielle Energie angeschrieben. Anschließend wird gezeigt, wie die in Abschnitt 4.1.2.5 angegebenen genäherten Steifigkeitsmatrizen auch über einen Verschiebungsansatz erhalten werden können.

- potentielle Energie

Formänderungsenergie (FÄE): 
$$\Pi^{\text{FÄE}} = \int_V \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + 2(1 + \nu)\tau_{xz}^2] dV \quad (4.77)$$

mit der Beziehung: 
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.78)$$

und dem Hookeschen Gesetz: 
$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\epsilon_x \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (4.79)$$

folgt nacheinander: 
$$\begin{aligned} \Pi^{\text{FÄE}} &= \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV + \int_V \frac{\tau_{xz}^2}{2G} dV \\ \Pi^{\text{FÄE}} &= \frac{1}{2} \int_V E\epsilon_x^2 dV + \frac{1}{2} \int_V G\gamma_{xz}^2 dV \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\Pi^{\text{FÄE}} = \Pi_b^{\text{FÄE}} + \Pi_s^{\text{FÄE}} \quad (4.81)$$

mit

$$u(x, z) = \phi_b(x)z + \phi_s(x)\omega(z) \quad (\beta_s = 0, \text{ vgl. Abschn. 4.1.1}) \quad (4.1)$$

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} z + \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial x} \omega(z) \quad (4.2)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \underbrace{\phi_b(x)}_{\dot{\gamma}(z)} + \underbrace{\phi_s(x) \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} + \frac{\partial(\omega_b + \omega_1 + \omega_k)(x)}{\partial x}}_{\frac{\partial \omega(x)}{\partial x}} \quad (4.3)$$

und  $b = b(z)$  konstant in  $x$  folgt:

$$\Pi_b^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \text{Eb}z^2 dz \left( \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} \right)^2}_{\text{EI}_y} + \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \text{Eb}\omega^2(z) dz \left( \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial x} \right)^2}_{\text{EI}_\omega} \right\} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \text{Eb}2z\omega(z) dz \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial x} dx$$

mit Gleichung (A2.6) für den Rechteck-Querschnitt

$$\underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \text{Eb}2z \left( \frac{5z^3}{3h^2} - \frac{1}{4}z \right) dz}_{= 0}$$

$$\Pi_b^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\text{EI}_y \left( \frac{\partial \phi_b(x)}{\partial x} \right)^2}_{\kappa_b^2 = (-w_b'')^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\text{EI}_\omega \left( \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial x} \right)^2}_{\kappa_\omega^2 = (-w_s'')^2} dx \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_s^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G b dz}_{\text{GA}} \underbrace{\left[ \phi_b(x)^2 + 2\phi_b(x) \frac{\partial w(x)}{\partial x} + \left( \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)^2 \right]}_{(\phi_b + w')^2 = \gamma^2(x)} dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G b 2\gamma(z) dz}_{\substack{\text{mit Gleichung (A2.5) f\"ur den Rechteck-Querschnitt} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G b 2 \left[ \frac{5}{h^2} z^2 - \frac{1}{4} \right] dz}} \underbrace{\phi_s(x) \left( \phi_b(x) + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)}_{\gamma(x) = -\phi_s(x)} + \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G b \gamma^2(z) dz}_{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} G b \left[ \frac{5}{h^2} z^2 - \frac{1}{4} \right]^2 dz} \phi_s(x)^2 \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\text{GA}}_{\frac{2}{6} \text{GA}} \gamma^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{6} \text{GA} \phi_s^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{6} \text{GA} \phi_s^2(x) dx
\end{aligned}$$

mit der Schubflache des Rechteck-Querschnitts (Gl. A1.3):

$$A_s = a_s A = \frac{5}{6} A$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\Pi_s^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\text{GA}_s}_{\substack{\text{mit Gleichung (A1.3)} \\ \text{mit } A_s = \frac{5}{6} A}} \gamma^2(x) dx \quad (4.83) \\
&\quad (\phi_b + w')^2 = (-\phi_s)^2 = (w_s')^2
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesamte potentielle Energie:

$$\begin{aligned} \Pi(w_b, w_s) = & \frac{1}{2} \int_0^l EI_y (-w_b'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_\omega (-w_s'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GA_s (w_s')^2 dx \\ & - \int_0^l \hat{p}_z w_b dx - \int_0^l \hat{p}_z w_s dx - \left[ \hat{Q}_z w_b + \hat{Q}_z w_s + \hat{M}_y (-w_b') + \hat{M}_\omega (-w_s') \right]_0^l \end{aligned} \quad (4.84)$$

- Prinzip der virtuellen Arbeit (Verschiebungen)

$$\begin{aligned} & \int_0^l \underbrace{\delta(-w_b'')}_{\delta\kappa_b} EI_y \underbrace{(-w_b'')}_{M_y} dx + \int_0^l \delta w_s' GA_s \underbrace{w_s'}_{Q_z^P} dx + \int_0^l \delta(-w_s'') EI_\omega \underbrace{(-w_s'')}_{M_\omega} dx \\ = & \int_0^l \hat{p}_z \delta w_b dx + \int_0^l \hat{p}_z \delta w_s dx + \left[ \hat{Q}_z \delta w_b + \hat{Q}_z \delta w_s + \hat{M}_y \delta(-w_b') + \hat{M}_\omega \delta(-w_s') \right]_0^l \end{aligned} \quad (4.85)$$

- Herleitung der Eulergleichungen

partielle Integration des 1. und 3. Terms der Gleichung (4.85) liefert:

$$\begin{aligned} - \int_0^l \delta w_b'' M_y dx &= - \left\{ \left[ \delta w_b' M_y \right]_0^l - \int_0^l \delta w_b' \underbrace{M_y'}_{Q_z} dx \right\} \\ - \int_0^l \delta w_s'' M_\omega dx &= - \left\{ \left[ \delta w_s' M_\omega \right]_0^l - \int_0^l \delta w_s' \underbrace{M_\omega'}_{Q_z^S} dx \right\} \end{aligned}$$

damit folgt:





Umordnen ergibt:

$$\begin{aligned} & \delta w_b \left[ Q_z - \hat{Q}_z \right]_0^1 + \delta w_s \left[ \underbrace{\left( Q_z^p + Q_z^s \right) - \hat{Q}_z}_{Q_z} \right]_0^1 + \delta \phi_b \left[ M_y - \hat{M}_y \right]_0^1 + \delta \phi_s \left[ M_\omega - \hat{M}_\omega \right]_0^1 \\ & = \int_0^1 \delta w_b \left[ M_y'' + \hat{p}_z \right] dx + \int_0^1 \delta w_s \left[ M_\omega'' + \underbrace{\left( Q_z^p \right)' + \hat{p}_z}_{\left( Q_z^s \right)' } \right] dx \end{aligned} \quad (4.88)$$

In Gleichung (4.88) erkennt man die statischen Randbedingungen sowie die Gleichgewichtsbedingungen der erweiterten Theorie .

Als Sonderfälle sind die Bernoulli-Theorie ( \_\_\_\_\_ ) und für  $Q_z = Q_z^p$  bzw.  $M_\omega = 0$  die Timoshenko-Theorie ( \_ \_ \_ \_ ) enthalten.

- Genäherte Steifigkeitsmatrizen durch Näherungsansatz aus dem P.v.V.

Die genaue Lösung setzt sich additiv aus dem Biege- und Schubanteil zusammen:

$$w = w_b + w_s$$

1. Für den Biegeanteil kann als Ansatz das kubische Polynom gewählt werden, das der exakten Lösung der homogenen Differentialgleichung  $w_b^{VI} = 0$  entspricht:

$$w_b(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \xi^2 + C_4 \xi^3 \quad \text{mit:} \quad \xi = \frac{x}{l}$$

Nach Elimination und Ersetzen der allgemeinen Koeffizienten  $C_i$  durch die Knotenverschiebungsgrößen infolge Biegung  $\mathbf{u}_b$  erhält man:

$$w_b(\xi) = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3]w_{bi} + l\xi[-1 + 2\xi - \xi^2]\phi_{bi} + \xi^2[3 - 2\xi]w_{bk} + l\xi^2[1 - \xi]\phi_{bk} \quad (4.89)$$

bzw.

$$w_b(\xi) = \mathbf{N}_b(\xi) \mathbf{u}_b \quad (4.90)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nur für den Biegeanteil (vgl. Gl. 4.85) unter Benutzung von Gleichung (4.90) liefert:

$$-\delta A_{i,b} = \delta A_{a,b} \quad (4.91)$$

$$\int_0^l \delta w_b'' EI_y w_b'' dx = \delta \mathbf{u}_b^T \mathbf{s}_b$$

|  
Knotenschnittgrößen infolge Biegung

bzw.

$$\delta \mathbf{u}_b^T \underbrace{\left\{ \int_0^l (\mathbf{N}_b'')^T EI_y (\mathbf{N}_b'') dx \right\}}_{\mathbf{k}_b} \mathbf{u}_b = \delta \mathbf{u}_b^T \mathbf{s}_b \quad (4.92)$$

die exakte Steifigkeitsmatrix des linear elastischen Balkens infolge Biegung (vgl. Gl. 4.69 von Abschnitt 4.1.2.5)

2. Für den Schubanteil werden zunächst die Hyperbelfunktionen der genauen Lösung (Gl. 4.58 von Abschnitt 4.1.2.4) in Taylor-Reihen entwickelt.

Bricht man die Reihen z.B. nach dem 2. Glied ab, so entsteht entsprechend dem Biegeanteil (Gl. 4.89) ein kubischer Polynomansatz für die Schubverformung in Abhängigkeit der Stabendverschiebungsgrößen  $\mathbf{u}_s$  :

$$w_s(\xi) = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3]w_{si} + l\xi[-1 + 2\xi - \xi^2]\phi_{si} + \xi^2[3 - 2\xi]w_{sk} + l\xi^2[1 - \xi]\phi_{sk} \quad (4.93)$$

bzw.

$$w_s(\xi) = \mathbf{N}_s(\xi) \mathbf{u}_s \quad (4.94)$$

Der Polynomansatz erfüllt die Differentialgleichung nicht mehr exakt. Es wird deshalb über das P.v.V. eine Lösung im energetischen Sinn angestrebt.

Das P.v.V. nur für den Schubanteil (vgl. Gl. 4.85) unter Benutzung von Gleichung (4.94) liefert entsprechend:

$$-\delta A_{i,s} = \delta A_{a,s} \quad (4.95)$$

$$\int_0^l \delta w'_s GA_s w'_s dx + \int_0^l \delta w''_s EI_\omega w''_s dx = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{s}_s$$

Knotenschnittgrößen infolge Schub

bzw.

$$\delta \mathbf{u}_s^T \left\{ \underbrace{\int_0^l (\mathbf{N}'_s)^T GA_s (\mathbf{N}'_s) dx}_{\mathbf{k}_s^P} + \underbrace{\int_0^l (\mathbf{N}''_s)^T EI_\omega (\mathbf{N}''_s) dx}_{\mathbf{k}_s^S} \right\} \mathbf{u}_s = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{s}_s \quad (4.96)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{k}_s}$

die genäherten Steifigkeitsmatrizen infolge Schub (vgl. Gl. 4.67 und 4.68 von Abschnitt 4.1.2.5).

## 4.2 Wölbwiderstand $I_\omega$

Zur Bestimmung des Wölbwiderstandes

$$I_\omega = \int_{z_0}^{z_0} \omega^2(z) b(z) dz \quad (4.17)$$

muß die Wölbfunktion  $\omega(z)$  bekannt sein.

Die Verwölbung  $\omega(z)$  der Querschnittspunkte an einer Stelle  $x$  infolge der dort nur noch von  $z$  abhängigen Schubverzerrung  $\tilde{\gamma}(z)$  läßt sich in Umkehrung von Gleichung (4.15) aus Abschnitt 4.1.2.1 wie folgt angeben:

$$d\omega(z) = \tilde{\gamma}(z) dz$$

Integriert über die Querschnittsdicke ergibt sich die Wölbfunktion zu

$$\omega(z) = \int_{z=z_0}^z \tilde{\gamma}(z) dz + \omega_0 \quad (4.97)$$

$\omega_0$  ist eine Integrationskonstante. Sie ergibt sich hier aus der Bedingung auf der Querschnittsnulllinie  $\omega(z=0) = 0$  zu null.

Die die gesamte Querschnittsverwölbung verursachende Schubverzerrung  $\gamma(x,z)$  ist i.a. von  $x$  und  $z$  abhängig und läßt sich, wie im folgenden dargestellt, im wesentlichen als Produkt der jeweils nur von einer Variablen abhängigen Einzelverzerrungen  $\gamma(x)$  und  $\tilde{\gamma}(z)$  ausdrücken.

Zunächst gilt:

$$\gamma(x,z) = \gamma(x) [1 - \tilde{\gamma}(z)] \quad (\text{vgl. Abschnitt 4.1.1, Bild 4.3})$$

Die in  $z$  konstante Querschnittsverdrehung nach Timoshenko liefert keinen Beitrag zum Wölbmoment  $I_\omega$ . Aus diesem Grund wird im weiteren nur die Schubverzerrung  $\gamma_\omega(x,z)$  betrachtet, die die reine Querschnittsverwölbung verursacht.

$$\begin{aligned} \gamma_\omega(x,z) &= -\gamma(x) \tilde{\gamma}(z) \\ &= \phi_s(x) \tilde{\gamma}(z) \end{aligned}$$

Wenn die Schubspannung  $\tau_{xz}(x,z)$  wie z.B. im Fall des Rechteck-Querschnitts parabelförmig über die Querschnittshöhe verteilt ist, muß wegen des Hookeschen

Gesetzes für Schub  $\gamma = \frac{\tau}{G}$  auch der Verlauf der Schubverzerrung  $\gamma_{xz}(x,z)$

bzw.  $\gamma_\omega(x,z)$  die Form einer quadratischen Parabel besitzen. Die dazu gehörende Verwölbung ist demzufolge, nach Gleichung (4.97) kubisch.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Wölbfunktionen ist im Prinzip für jeden Querschnittstyp gleich: (vgl. Anhang A1 und A2)

- Zunächst wird der allein für die Verwölbung verantwortliche Schubspannungsanteil  $\tau_\omega(x,z)$  bestimmt. Hierzu wird beim Rechteck-Querschnitt von einer parabelförmigen Schubspannungsverteilung  $\tau_{xz}(x,z)$  ausgegangen. Von dieser wird eine energetisch gleichwertige Schubspannungsverteilung  $\tau_k(x)$ , die einer konstanten Querschnittsverzerrung entspricht, abgezogen (siehe hierzu die Bilder 4.4 und 4.7).
- Bei gegliederten dünnwandigen Querschnitten muß dieser allein für die Verwölbung verantwortliche Anteil abschnittsweise bestimmt werden. Während in den Flanschen bei zur z-Achse (= Belastungsrichtung) symmetrischen Querschnitten die gesamte dort herrschende Schubspannung (da für sich im Gleichgewicht) für die Verwölbung maßgebend ist  $\tau_{\omega i} = \tau_i$ , muß dieser Anteil in den Stegen noch bestimmt werden.

Dazu wird von der in den Stegen herrschenden primären Schubspannungsverteilung  $\tau_i(x,s_i)$  eine konstant über den Querschnitt verlaufende Schubspannungsverteilung  $\tau_{ki}(x)$  derart abgezogen, daß sowohl den Gleichgewichtsbedingungen (für die Eigenspannungen:  $\sum N = 0$ ,  $\sum M = 0$ ), als auch den Kontinuitätsbedingungen zwischen Stegen und Flanschen genügt werden kann.

Für verschiedene Querschnittsformen werden

- im Anhang A1 die Schubkorrekturfaktoren  $\alpha_s$  angegeben und
- im Anhang A2 die Wölbfunktionen  $\omega(s)$  und die Wölbwiderstände  $I_\omega$  hergeleitet.

### 4.3 Abschließende Bemerkung

1. In der vorliegenden Theorie wird zunächst entsprechend der Bernoulli-Theorie von einer über die Querschnittshöhe linearen Längsspannungsverteilung ausgegangen. Die durch diese verursachte Querschnittsverdrehung kann als primäre Verwölbung aufgefaßt werden (Bild 4.7). Die primären Längsspannungen haben aus Gleichgewichtsgründen in nicht wölbbehinderten Querschnitten die in Form einer quadratischen Parabel vorliegende Schubspannungsverteilung zur Folge. Die so erhaltenen "primären" Schubspannungen (vgl. hierzu Abschnitt 4.1.2.1, Gl. 4.24, 4.25 sowie 4.29 und 4.30) verursachen in nicht wölbbehinderten Querschnitten eine sekundäre Querschnittsverwölbung und in wölbbehinderten Querschnitten die sogenannten sekundären Wöblängsspannungen. Diese rufen wiederum Schubspannungen, die sekundären Schubspannungen, hervor. Durch sie wird die ursprüngliche Form der Schubspannungsverteilung (quadratische Parabel,  $\tau_{(x,z)}^{(P)}$ ) an wölbbehinderten Stellen verändert.

2. Diese neu erhaltene Schubspannungsverteilung infolge Biege- und Wöblängsspannungen (Parabel 4. Ordnung  $\tau_{(x,z)}^S$ ) hätte ( $\tau^S$  existiert nur an wölbbehinderten Stellen) an nicht wölbbehinderten Stellen auch eine andere Querschnittsverwölbung als die zunächst angenommene zur Folge (nämlich:  $\omega^T$ , tertiär, Parabel 5. Ordnung anstatt:  $\omega^S$ , sekundär, Parabel 3. Ordnung). An wölbbehinderten Stellen ließen sich aus dieser gedanklichen neuen Verwölbung wieder Wöblängsspannungen ( $\sigma_\omega^T$ , tertiär) berechnen, die mit tertiären Schubspannungen im Gleichgewicht stehen müssen, usw.

3. Die unter 2. genannten Einflüsse sind von Kleinheit höherer Ordnung und werden deshalb hier vernachlässigt. Sie sind eine Begründung dafür, daß der in Abschnitt 4.2 unter Annahme einer kubischen Wölbfunktion berechnete Wölbwiderstand  $I_\omega$  nur eine Näherung und die darauf aufbauende erweiterte Balkentheorie daher auch nur eine weitere Näherungsstufe gegenüber der Bernoulli- und der Timoshenko-Theorie darstellt.

4. Die beschriebene Balkentheorie weist keine Inkonsistenz zwischen Schubspannungen und Schubverzerrungen auf. Sie berücksichtigt im Gegensatz zur Timoshenko-Theorie die Schuberweiterung nicht nur in den Verschiebungen sondern auch in den Spannungen. Mit ihr können Randstoffeffekte, wie sie z.B. an Lasteinleitungsstellen auftreten, in einem bestimmten Rahmen beschrieben werden.

5. Die Wölbfunktionen die man entsprechend dem hier beschriebenen Vorgehen (Bild 4.7) für einen Rechteck-Querschnitt erhält (Gl. A2.7), kann man auch direkt über die Herleitung aus dem Kontinuum gewinnen (vgl. u.a. Love [45]).

6. Die Bestimmungsgleichungen der vorliegenden Theorie sind im Sonderfall des Rechteck-Querschnitts und der Annahme eines Schubkorrekturfaktors von  $\alpha_s = 0.833$  identisch mit den Gleichungen, die Bickford 1982 in [9] bzw. 1985 in [44] angab (vgl. Abschnitt 1).

Nur geringfügig unterscheiden sich diese Gleichungen sowohl von denen, die Hjelmstad 1987 in [28] veröffentlicht hat, als auch von den Gleichungen, die von Laudiero und Savoia 1990 in [39] bzw. 1991 in [40] hergeleitet wurden.

Die nur geringen Unterschiede sind darauf zurückzuführen, daß (im Gegensatz zu anderen Arbeiten) zum einen jeweils für den Gesamtquerschnitt nur eine zusätzliche Längs- oder Wölbsteifigkeit definiert wird, und daß zum anderen Hjelmstad eine Variable sowie Laudiero und Savoia einen ganzen Ausdruck in ihren Lösungsgleichungen schließlich als Schubkorrekturfaktor identifizieren können.

Dadurch setzen sich die Lösungsgleichungen nach diesen Theorien jeweils aus einem Biegeanteil nach Bernoulli, einem Schubanteil nach Timoshenko und einem Wölbanteil zusammen, wobei letzterer nach den einzelnen Theorien von unterschiedlicher Größe ist (Unterschiedliche Wölbfunktionen  $\rightarrow$  Wölbsteifigkeiten  $\rightarrow$  Stabkennzahlen  $\rightarrow$  Wölbanteile). Diese Wölbanteile sind für gewöhnliche Geometrie- und Materialeigenschaften nach allen genannten Theorien in der gleichen Größenordnung und liefern qualitativ die gleichen und quantitativ geringfügig voneinander abweichende Ergebnisse.

Durch welchen Korrekturterm (bzw. nach welcher Theorie) das wahre Strukturverhalten am besten wiedergegeben wird, konnte allerdings im Rahmen dieser Arbeit nur teilweise geklärt werden.

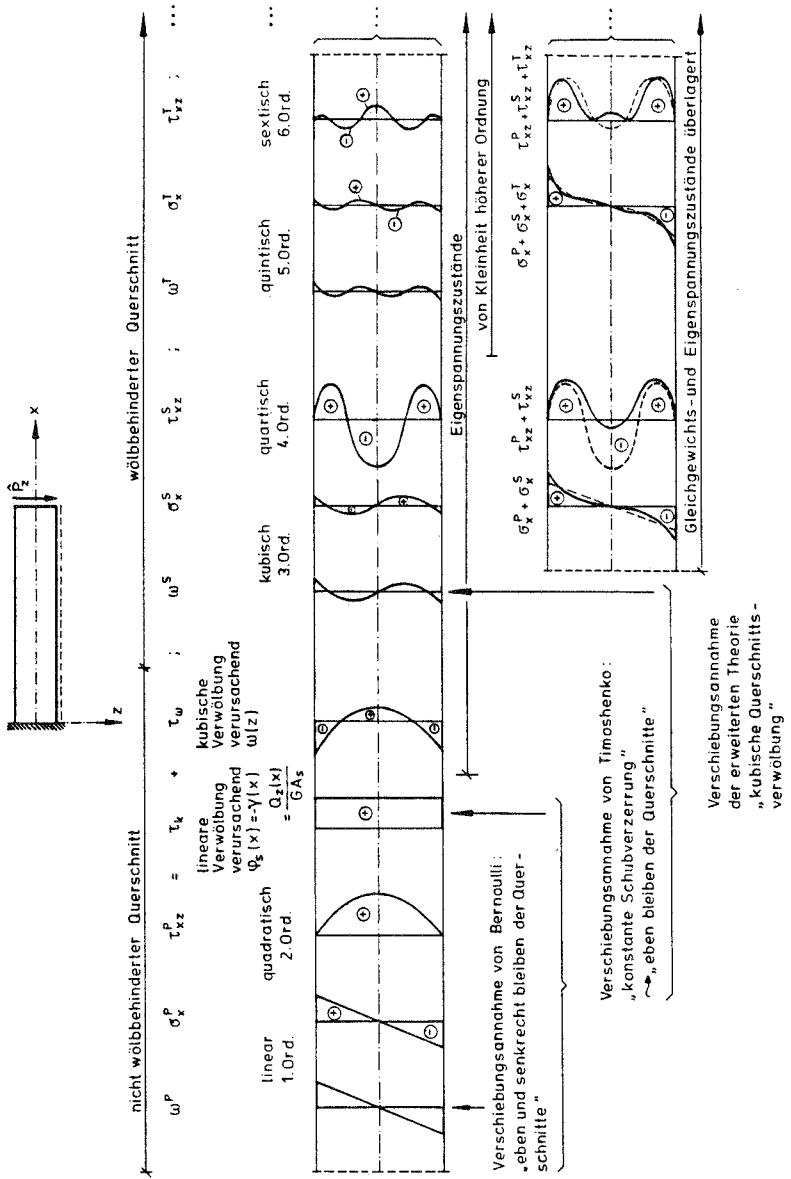


Bild 4.7 Elementare und erweiterte Balkentheorie



## 5 Verallgemeinerte Formulierung für Längskraft, Zweiachsige Biegung und Torsion

Im folgenden wird die erweiterte Balkentheorie allgemeiner, d.h. für ein Stabelement unter zunächst beliebiger räumlicher Belastung, ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit formuliert. Es werden die das räumliche Problem beschreibenden Differentialgleichungen angegeben und die dazu gehörenden Spannungsergebnenden und Querschnittswerte definiert.

Im Anhang A5 wird an einem Beispiel gezeigt, daß eine vollständige (d.h. eine formale und logische) Analogie zwischen dem Querkraft-Schub und dem Torsions-Schub besteht.

Zusätzliche Terme werden im weiteren wie folgt gekennzeichnet:

- a) nach der Timoshenko-Balkentheorie     - - - - -  
 b) nach der erweiterten Balkentheorie     \_\_\_\_\_

### 5.1 Voraussetzungen

#### Werkstoffgesetz

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\epsilon_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned} \tag{5.1}$$

#### Virtuelle Arbeit

Stabkontinuum (3-D):

$$\begin{aligned} -\delta A &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \underbrace{\sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}}_{\text{vernachlässigt } (\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0)} \right] dV \\ &\quad - \int_0^1 \left[ \delta u_x \bar{p}_x + \delta u_y \bar{p}_y + \delta u_z \bar{p}_z \right] dO = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Verschiebungsgrößen

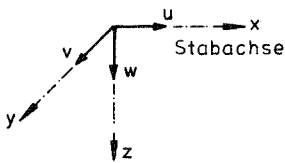
Stabkontinuum (3-D) →

Stabachse (1-D)

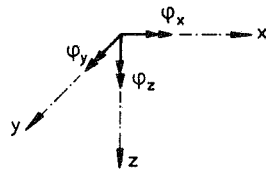
$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi_{b_y} &= -w'_b \\ \phi_{b_z} &= v'_b \\ \rightarrow \\ -\gamma_x^p &= \Gamma_x = -\phi'_x \\ -\gamma_y^p &= \phi_{s_y} = -w'_s \\ \gamma_z^p &= \phi_{s_z} = v'_s \end{aligned}$$

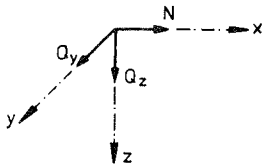
$u_d$	Längsverschiebung	aus Dehnung
$v_b$	Querverschiebungen	aus Biegung
$w_b$		
$\phi_{b_y}$	Verdrehungen	}
$\phi_{b_z}$		
$\phi_x$	Verdrehung (Torsion)	}
$v_s$	Querverschiebungen	
$w_s$		
$\Gamma_x$	Verwindung (Torsion)	}
$\phi_{s_y}$	Verdrehungen	
$\phi_{s_z}$		



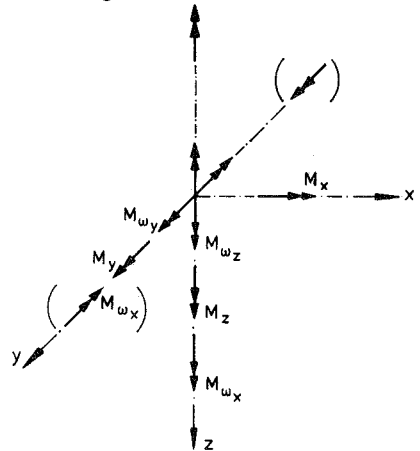
Verschiebungen



Verdrehungen



Stabkräfte



Stabmomente

Bild 5.1 Definition der Zustandsgrößen

## Kinematik

- Verschiebungskomponenten

$$u(x, y, z) = u_d(x) - \phi_{b_z}(x)y + \phi_{b_y}(x)z - \beta_{s_z}(x)y + \beta_{s_y}(x)z - \phi_{s_z}(x)\omega_z(y) + \phi_{s_y}(x)\omega_y(z) + \Gamma_x(x)\omega_x(y, z) \quad (5.3)$$

bzw. mit  $\beta_{s_z} = \beta_{s_y} = 0$  (entsprechend Abschnitt 3 bzw. 4):

$$u(x, y, z) = u_d(x) - \phi_{b_z}(x)y + \phi_{b_y}(x)z - \phi_{s_z}(x)\omega_z(y) + \phi_{s_y}(x)\omega_y(z) + \Gamma_x(x)\omega_x(y, z) \\ = \underbrace{u_d(x)}_{\substack{\text{Verschiebung} \\ \text{aus} \\ \text{Dehnung}}} - \underbrace{v'_b(x)y - w'_b(x)z}_{\substack{\text{Verdrehungen} \\ \text{aus} \\ \text{Biegung}}} - \underbrace{v'_s(x)\omega_z(y) - w'_s(x)\omega_y(z) - \phi'_x(x)\omega_x(y, z)}_{\substack{\text{Verwölbungen} \\ \text{aus} \\ \text{Schub}}} \quad (5.4)$$

$$v(x, y, z) = v_b(x) + \underline{v_s(x)} - z\phi_x(x) \quad (5.5)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x) + \underline{w_s(x)} + y\phi_x(x) \quad (5.6)$$

- Annahmen
  - Erhaltenbleiben der Querschnittsform
  - zunächst Ebenbleiben der Querschnitte infolge Biegung (Bernoulli-Hypothese) und Torsion (St.-Venant)
  - Vernachlässigung sekundärer Schubverzerrungen ("erweiterte Wagner-Hypothese")

- kinematische Beziehungen (um die sekundären Anteile erweitert)

$$\begin{aligned} v'_b(x) &= \phi_{b_z}(x) & v'_s(x) &= \gamma_z^P(x) & \phi_{s_z}(x) &= -\gamma_z^S(x) + v'_s(x) \\ w'_b(x) &= -\phi_{b_y}(x) & w'_s(x) &= \gamma_y^P(x) & \phi_{s_y}(x) &= \gamma_y^S(x) - w'_s(x) \\ & & \phi'_x(x) &= \gamma_x^P(x) & \Gamma_x(x) &= \gamma_x^S(x) - \phi'_x(x) \end{aligned}$$

(5.7)

Dehnung	$\epsilon_d = u'_d$	Torsions-Schub	$\kappa_{\omega_x} = -\phi''_x$
Biegung	$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{b_z} = v''_b \\ \kappa_{b_y} = -w''_b \end{array} \right.$	Querkraft-Schub	$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\omega_z} = v''_s \\ \kappa_{\omega_y} = -w''_s \end{array} \right.$

- Verzerrungskomponenten

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y, z) &= u'_d(x) - \phi'_{b_x}(x)y + \phi'_{b_y}(x)z - \underline{\phi'_{s_z}(x)\omega_z(y)} + \underline{\phi'_{s_y}(x)\omega_y(z)} + \Gamma'_x(x)\omega_x(y, z) \\ &= u'_d(x) - v''_b(x)y - w''_b(x)z - \underline{v''_s(x)\omega_z(y)} - \underline{w''_s(x)\omega_y(z)} - \phi''_x(x)\omega_x(y, z) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (5.10)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = v'_b(x) + v'_s(x) - z\phi'_x(x) - \phi_{b_x}(x) - \phi_{s_x}(x) \frac{d\omega_z(y)}{dy} + \Gamma_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \quad (5.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (5.12)$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = w'_b(x) + w'_s(x) + y\phi'_x(x) + \phi_{b_x}(x) + \phi_{s_x}(x) \frac{d\omega_y(z)}{dz} + \Gamma_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \quad (5.13)$$

mit den kinematischen Beziehungen (5.7) folgt :

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = v'_s(x) \left[ 1 - \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right] + \underbrace{\gamma^S_z(x) \frac{d\omega_z(y)}{dy}}_{\text{primärer}} - \phi'_x(x) \left[ z + \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right] + \gamma^S_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = w'_s(x) \left[ 1 - \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right] + \underbrace{\gamma^S_y(x) \frac{d\omega_y(z)}{dz}}_{\text{primärer}} + \phi'_x(x) \left[ y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right] + \gamma^S_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z}$$

bzw.:

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \gamma^P_y(x) \left[ 1 - \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right] + \underbrace{\gamma^S_z(x) \frac{d\omega_z(y)}{dy}}_{\text{primärer}} - \gamma^P_x(x) \left[ z + \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right] + \gamma^S_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \quad (5.14)$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \gamma^P_y(x) \left[ 1 - \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right] + \underbrace{\gamma^S_y(x) \frac{d\omega_y(z)}{dz}}_{\text{primärer}} + \gamma^P_x(x) \left[ y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right] + \gamma^S_x(x) \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \quad (5.15)$$

Schubverzerrungen

aus

primärer
sekundärer  
Querkraft

primärer
sekundärer  
Torsion

Die von den allgemeineren Beziehungen (5.7) abweichenden kinematischen Hypothesen der vorliegenden Stabtheorie (entsprechend Abschnitt 4) lauten:

$$\begin{aligned}\gamma_z^S &= v_s' - \phi_{s_z} = 0 \\ \gamma_y^S &= w_s' + \phi_{s_y} = 0 \\ \gamma_x^S &= \phi_x' + \Gamma_x = 0\end{aligned}\tag{5.16}$$

In den durch die Profilmittellinie gebildeten Mittelflächen treten infolge der aus der Änderung der sekundären Längsspannungen resultierenden Schubspannungen keine Schubverzerrungen auf. Dies entspricht einer auf den Querkraft-Schub erweiterten Wagner-Hypothese (vgl. Tabelle 5.1).

	primäre					sekundäre			
	Längs- verschiebung	Längs- spannung	Schub- spannung	Schub- verzerrung	Längs- verschiebung (Verwölbung)	Längs- spannung	Schub- spannung	Schub- verzerrung	
Dehnung	konstant	konstant	—	—	—	—	—	—	
Biegung	linear	linear	quadratisch	quadratisch konstant (Timoshenko)	—	—	—	—	
Torsion	—	—	konstant (Querrichtung: linear)	konstant	linear	linear	quadratisch	(quadratisch) Wagner	
Querkraft	—	—	quadratisch	quadratisch	kubisch	kubisch	quartisch	(quartisch)	

Tabelle 5.1 Verlauf der Verschiebungen und Spannungen im Querschnitt

## 5.2 Virtuelle innere Arbeit

$$-\delta A_i = \int_V \left[ \sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \quad (5.17)$$

- Spannungsergebnierende

Einsetzen der kinematischen Gleichungen (5.9), (5.11) und (5.13) ergibt:

$$-\delta A_i = \int_x \int_A \left\{ \sigma_x \left[ \delta u'_d - \delta \phi'_{b,y} + \delta \phi'_{b,z} - \underline{\delta \phi'_{s_z} \omega_z(y)} + \underline{\delta \phi'_{s_y} \omega_y(z)} + \delta \Gamma'_x(x) \omega_x(y, z) \right] \right. \\ \left. + \tau_{xy} \left[ \delta \phi_{s_z} - \delta \left( \phi_{s_z} \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right) + \delta \Gamma_{xz} + \delta \left( \Gamma_x \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right) \right] \right. \\ \left. + \tau_{xz} \left[ -\delta \phi_{s_y} + \delta \left( \phi_{s_y} \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right) - \delta \Gamma_{xy} + \delta \left( \Gamma_x \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right) \right] \right\} dA dx$$

$$-\delta A_i = \int_x \left\{ \underbrace{\left[ \int_A \sigma_x dA \right]}_N \underbrace{\delta u'_d}_{\delta \epsilon_x} + \underbrace{\left[ - \int_A \sigma_{xy} dA \right]}_{M_z} \underbrace{\delta \phi'_{b_z}}_{\delta \kappa_{b_z}} + \underbrace{\left[ \int_A \sigma_{xz} dA \right]}_{M_y} \underbrace{\delta \phi'_{b_y}}_{\delta \kappa_{b_y}} \right. \\ \left. + \underbrace{\left[ - \int_A \sigma_x \omega_z(y) dA \right]}_{M_{\omega_z}} \underbrace{\delta \phi'_{s_z}}_{\delta \kappa_{\omega_z}} + \underbrace{\left[ \int_A \sigma_x \omega_y(z) dA \right]}_{M_{\omega_y}} \underbrace{\delta \phi'_{s_y}}_{\delta \kappa_{\omega_y}} + \underbrace{\left[ \int_A \sigma_x \omega_x(y, z) dA \right]}_{M_{\omega_x}} \underbrace{\delta \Gamma'_x}_{\delta \kappa_{\omega_x}} \right. \\ \left. + \underbrace{\left[ \int_A \tau_{xy} dA \right]}_{Q_y^P} \underbrace{\delta \phi_{s_z}}_{\delta \gamma_z^P} + \underbrace{\left[ - \int_A \tau_{xz} dA \right]}_{Q_z^P} \underbrace{\delta \phi_{s_y}}_{\delta \gamma_y^P} \right\}$$

Normalkraft Biegemomente  
 Wölbmomente infolge primärer Schubverzerrungen  
 primäre Querkräfte infolge primärer Schubverzerrungen

primäres Torsionsmoment infolge primärer Schubverzerrungen

$$+ \underbrace{\left[ \int_{\Delta} \tau_{xy} \left( z + \frac{\partial \omega_x(x, z)}{\partial y} \right) - \tau_{xz} \left( y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right) dA \right]}_{M_x^P} \delta \Gamma_x \quad \delta \gamma_x^P$$

sekundäre Querkräfte infolge sekundärer Schubverzerrungen

$$+ \underbrace{\left[ - \int_A \tau_{xy} \frac{d\omega_z(y)}{dy} dA \right]}_{Q_y^S} \underbrace{\delta(v'_s - \phi_{s_z})}_{\delta \gamma_z^S} + \underbrace{\left[ \int_A \tau_{xz} \frac{d\omega_y(z)}{dz} dA \right]}_{Q_z^S} \underbrace{\delta(w'_s + \phi_{s_y})}_{\delta \gamma_y^S}$$

sekundäres Torsionsmoment infolge sekundärer Schubverzerrungen

$$+ \underbrace{\left[ \int_{\Delta} \left( \tau_{xy} \frac{d\omega_x(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right) dA \right]}_{M_x^S} \underbrace{\delta(\phi'_x + \Gamma_x)}_{\delta \gamma_x^S} \quad (5.18)$$

Mit obigen Definitionen für die Spannungsresultierenden (Gl. 5.18) erhält man:

$$\begin{aligned} -\delta A_i = & \int_x (N \delta \epsilon + M_z \delta \kappa_{b_z} + M_y \delta \kappa_{b_y} \\ & + \underline{Q_y^P} \delta \gamma_z^P + \underline{Q_z^P} \delta \gamma_y^P + M_x^P \delta \gamma_x^P \\ & + \underline{M_{\omega_z}} \delta \kappa_{\omega_z} + \underline{M_{\omega_y}} \delta \kappa_{\omega_y} + M_{\omega_x} \delta \kappa_{\omega_x} \\ & + \underline{Q_y^S} \delta \gamma_z^S + \underline{Q_z^S} \delta \gamma_y^S + M_x^S \delta \gamma_x^S) dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

bzw. in Abhängigkeit von den Verschiebungen  $u, v, w$  und  $\phi_x$  :

$$\begin{aligned} -\delta A_i = & \int_x (N \delta u'_d + M_z \delta v''_b - M_y \delta w''_b \\ & + \underline{Q_y^P} \delta v'_s + \underline{Q_z^P} \delta w'_s + M_x^P \delta \phi'_x \\ & + \underline{M_{\omega_z}} \delta v''_s - \underline{M_{\omega_y}} \delta w''_s - M_{\omega_x} \delta \phi''_x \\ & + \underline{Q_y^S} \delta v'_s + \underline{Q_z^S} \delta w'_s + M_x^S \delta \phi'_x) dx \end{aligned} \quad (5.20)$$



- Querschnittswerte

Nach Einsetzen des Werkstoffgesetzes (5.1) in den Arbeitsausdruck (5.17) und bei Vernachlässigung der sekundären Schubverzerrungen ( $\gamma_x^S$ ,  $\gamma_y^S$ ,  $\gamma_z^S$ ) folgt mit den Dehnungskomponenten (5.9), (5.11) und (5.13) nacheinander:

$$\begin{aligned}
 -\delta A_i &= \int_V \left[ E \epsilon_x \delta \epsilon_x + G \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\
 &= \int_x \left\{ \int_A E \left[ \epsilon_x - \kappa_{b,y} y + \kappa_{b,z} z - \underbrace{\kappa_{\omega_z} \omega_z(y)} + \underbrace{\kappa_{\omega_y} \omega_y(z)} + \kappa_{\omega_x} \omega_x(y, z) \right] \right. \\
 &\quad \cdot \delta \left[ \epsilon_x - \kappa_{b,y} y + \kappa_{b,z} z - \underbrace{\kappa_{\omega_z} \omega_z(y)} + \underbrace{\kappa_{\omega_y} \omega_y(z)} + \kappa_{\omega_x} \omega_x(y, z) \right] \\
 &\quad + G \left[ \gamma_z \left( 1 - \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right) + \gamma_x \left( z + \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right) \right] \\
 &\quad \cdot \delta \left[ \gamma_z \left( 1 - \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right) + \gamma_x \left( z + \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right) \right] \\
 &\quad + G \left[ \gamma_y \left( 1 - \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right) - \gamma_x \left( y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right) \right] \\
 &\quad \cdot \delta \left[ \gamma_y \left( 1 - \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right) - \gamma_x \left( y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right) \right] dA \left. \right\} dx \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Multipliziert man Gleichung (5.21) aus, so erhält man einen umfangreichen Ausdruck bestehend aus verschiedenen Flächenintegralen. Dieser bezieht sich auf ein beliebiges Schwerachsensystem  $y$ - $z$ .

Bei Zugrundelegung spezieller Bezugsachsen,

- der Hauptträgheitsachsen  $(N, M_y, M_z, \omega_y, \omega_z)$
- der Hauptdreh- bzw. Schubmittelpunktsachse  $(Q_y, Q_z, M_x, M_{\omega_x}, u, v, w, \omega_x)$

vereinfacht sich dieser Ausdruck durch das Verschwinden einiger Flächenintegrale erheblich, und man erhält entkoppelte Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 -\delta A_i &= \int_x \left[ E \left\{ \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} dA \right]}_A \epsilon_x \delta \epsilon_x + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} y^2 dA \right]}_{I_z} \kappa_{b_z} \delta \kappa_{b_z} + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} z^2 dA \right]}_{I_y} \kappa_{b_y} \delta \kappa_{b_y} \right. \\
 &\quad + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \omega_z^2(y) dA \right]}_{I_{\omega_z}} \kappa_{\omega_z} \delta \kappa_{\omega_z} + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \omega_y^2(z) dA \right]}_{I_{\omega_y}} \kappa_{\omega_y} \delta \kappa_{\omega_y} + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \omega_x^2(y, z) dA \right]}_{I_{\omega_x}} \kappa_{\omega_x} \delta \kappa_{\omega_x} \left. \right\} \\
 &\quad + G \left\{ \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \left( 1 - \frac{d\omega_z(y)}{dy} \right)^2 dA \right]}_{A_{s_z}} \gamma_z \delta \gamma_z + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \left( 1 - \frac{d\omega_y(z)}{dz} \right)^2 dA \right]}_{A_{s_y}} \gamma_y \delta \gamma_y \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left[ \int_{\Lambda} \left( z + \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial y} \right)^2 + \left( y - \frac{\partial \omega_x(y, z)}{\partial z} \right)^2 dA \right]}_{I_x} \gamma_x \delta \gamma_x \right\} dx
 \end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned}
 & \text{Längskraft} && \text{Biegung} \\
 & && \text{um die} \\
 & && \text{z-Achse} \quad \text{y-Achse} \\
 -\delta A_i = & \int_x \left[ \underbrace{EA\epsilon_x \delta\epsilon_x}_N + \underbrace{EI_z \kappa_{b_z} \delta\kappa_{b_z}}_{M_z} + \underbrace{EI_y \kappa_{b_y} \delta\kappa_{b_y}}_{M_y} \right. \\
 & \text{Wölbkraftanteile} \\
 & \text{aus} \\
 & \text{Querkraft-Schub} && \text{Torsions-Schub} \\
 & \text{in} && \text{bzgl. der} \\
 & \text{y-Richtung} && \text{z-Richtung} \quad \text{x-Achse} \\
 & + \underbrace{EI_{\omega_z} \kappa_{\omega_z} \delta\kappa_{\omega_z}}_{M_{\omega_z}} + \underbrace{EI_{\omega_y} \kappa_{\omega_y} \delta\kappa_{\omega_y}}_{M_{\omega_y}} + \underbrace{EI_{\omega_x} \kappa_{\omega_x} \delta\kappa_{\omega_x}}_{M_{\omega_x}} \\
 & \text{primärer Schub} \\
 & \text{infolge} \\
 & \text{Querkraft} && \text{Torsion} \\
 & \text{in} && \text{bzgl. der} \\
 & \text{y-Richtung} && \text{z-Richtung} \quad \text{x-Achse} \\
 & + \underbrace{GA_{s_z} \gamma_z \delta\gamma_z}_{Q_y^P} + \underbrace{GA_{s_y} \gamma_y \delta\gamma_y}_{Q_z^P} + \underbrace{GI_x \gamma_x \delta\gamma_x}_{M_x^P} \Big] dx \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

mit:  $A_{s_y} = a_{s_y} A$

$A_{s_z} = a_{s_z} A$

(vgl. Abschnitt 4.1.2.6)

### 5.3 Virtuelle äußere Arbeit

Da sich jede beliebige Belastung auf die entsprechenden Bezugsachsen umrechnen läßt, wird die virtuelle äußere Arbeit direkt mit den auf diese Bezugsachsen umgerechneten Größen angegeben.

$$\begin{aligned} \delta A_a = & \int_x \left[ \hat{p}_x \delta u_d + \hat{p}_y \delta v_b + \hat{p}_y \delta v_s + \hat{p}_z \delta w_b + \hat{p}_z \delta w_s + \hat{m}_z \delta \phi_z + \hat{m}_y \delta \phi_y + \hat{m}_x \delta \phi_x \right] dx \\ & + \left[ \hat{N} \delta u_d + \hat{Q}_y \delta v_b + \hat{M}_z \delta v_b' + \hat{Q}_z \delta w_b + \hat{M}_y \delta (-w_b') \right. \\ & \left. + \hat{Q}_y \delta v_s + \hat{M}_{\omega_z} \delta v_s' + \hat{Q}_z \delta w_s + \hat{M}_{\omega_x} \delta (-w_s') + \hat{M}_x \delta \phi_x + \hat{M}_{\omega_x} \delta (-\phi_x') \right]_0^1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

### 5.4 Zusammenfassung der virtuellen Arbeiten

$$-\delta A = -\delta(A_i + A_a) = 0 \quad (5.24)$$

Gleichung (5.24) liefert nach Umformung mit dem Gaußschen Integralsatz die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen.

- Differentialgleichungen (Gleichgewichtsbedingungen)

$-(EAu_d')' - \hat{p}_x = 0$	Dehnung in x-Richtung	
$(EI_{\omega_z} v_s'')' - (GA_{s_z} v_s')' - \hat{p}_y = 0$	Schub in y-Richtung	
$-(EI_z v_b'')' + [(EI_{\omega_z} v_s'')' - (GA_{s_z} v_s')'] - \hat{m}_z = 0$	Biegung + Schub gekoppelt	
$(EI_{\omega_x} w_s'')' - (GA_{s_y} w_s')' - \hat{p}_z = 0$	Schub in z-Richtung	
$(EI_y w_b'')' - [(EI_{\omega_x} w_s'')' - (GA_{s_y} w_s')'] - \hat{m}_y = 0$	Biegung + Schub gekoppelt	
$(EI_{\omega_x} \phi_x'')' - (GI_x \phi_x')' - \hat{m}_x = 0$	Torsion um die x-Achse	(5.25)

- Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 & \left[ -EI_z v_b'' + \hat{M}_z \right]_0^1 \delta v_b' = 0 \\
 & \left[ EI_y w_b'' + \hat{M}_y \right]_0^1 \delta w_b' = 0 \\
 & \left[ -EI_{\omega_z} v_s'' + \hat{M}_{\omega_z} \right]_0^1 \delta v_s' = 0 \\
 & \left[ EI_{\omega_y} w_s'' + \hat{M}_{\omega_y} \right]_0^1 \delta w_s' = 0 \\
 & \left[ EI_{\omega_x} \phi_x'' + \hat{M}_{\omega_x} \right]_0^1 \delta \phi_x' = 0
 \end{aligned}$$

$$\left[ EA u_d' - \hat{N} \right]_0^1 \delta u_d = 0 \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ (EI_z v_b'')' + \hat{Q}_y \right]_0^1 \delta v_b = 0 \\
 & \left[ (EI_y w_b'')' + \hat{Q}_z \right]_0^1 \delta w_b = 0
 \end{aligned}$$

$$\left[ (EI_{\omega_z} v_s'')' - GA_{s_z} v_s' + \hat{Q}_y \right]_0^1 \delta v_s = 0$$

$$\left[ (EI_{\omega_y} w_s'')' - GA_{s_y} w_s' + \hat{Q}_z \right]_0^1 \delta w_s = 0$$

$$\left[ (EI_{\omega_x} \phi_x'')' - GI_x \phi_x' + \hat{M}_x \right]_0^1 \delta \phi_x = 0$$

## 6 Vergleich der erweiterten Balkentheorie mit der Scheibentheorie und Fehlerabschätzung an einem Beispiel

Nach einer kurzen Herleitung der Scheibengleichung wird an einem ersten Beispiel eine Aussage über die Genauigkeit der erweiterten Balkentheorie gemacht.

Es werden die Formeln zur Spannungsermittlung an ausgezeichneten Stellen verglichen. Hierzu werden die Lösungen sowohl der Scheibentheorie als auch der erweiterten Balkentheorie in Taylorsche Reihen entwickelt.

Gegenübergestellt werden die Ergebnisse:

- einer nur am oberen Rand belasteten Scheibe
- einer am oberen und unteren Rand belasteten Scheibe
- einer auf der Mittellinie belasteten Scheibe (= Balkentheorie)

Anschließend werden noch die Ergebnisse nach der Scheibentheorie und der erweiterten Balkentheorie einiger weiterer, häufig in der Literatur angegebener Beispiele miteinander verglichen, bei denen für die Randbedingungen ein Polynom-Spannungsansatz gemacht wird.

### 6.1 Scheibentheorie

Zur Lösung zweidimensionaler Probleme (ebener Spannungszustand), d.h. zur Bestimmung der inneren Kräfte und der Formänderungen, stehen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

die geometrischen Bedingungen

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & ; & \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.2)$$

und die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen oder elastostatischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_z) & ; & \quad \epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_x) & ; & \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (6.3)$$

zur Verfügung.

Sieht man von den Volumenkräften  $(X,Z)$  ab, werden die Gleichgewichtsbedingungen (6.1) erfüllt, wenn man die Spannungskomponenten durch eine Funktion  $F(x,z)$  ausdrückt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad ; \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \quad (6.4)$$

Damit auch den geometrischen Bedingungen (6.2) und den elastostatischen Beziehungen (6.3) entsprochen wird, muß die Funktion  $F(x,z)$  einer Differentialgleichung genügen, die noch bestimmt werden muß:

Die Verzerrungskomponenten (6.2) werden miteinander verknüpft, indem man bildet

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} \quad (6.6)$$

Gleichsetzen der Beziehungen (6.5) und (6.6) liefert die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \quad (6.7)$$

Durch Einsetzen der elastostatischen Gleichungen (6.3) und der Beziehungen (6.4) nacheinander in die Verträglichkeitsbedingung (6.7) erhält man die Scheibengleichung als eine lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung [1]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0 \quad (6.8a)$$

bzw. mit dem Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (6.8b)$$

Die Lösung zweidimensionaler Probleme reduziert sich also auf die Integration der Scheibendifferentialgleichung (6.8).

Obwohl es ausgearbeitete Lösungsmethoden für die Bipotentialgleichung [26] gibt, kann man für bestimmte einfache Fälle die Spannungsfunktion  $F(x,z)$  in Form eines Polynoms ansetzen. Allgemeinere Fälle können behandelt werden, wenn man für die Funktion  $F$  einen Fourier-Reihen-Ansatz macht. Mit diesem läßt sich der Spannungszustand in einer Scheibe für jede beliebige Belastung an einer oder an zwei sich gegenüberliegenden Scheibenrändern bestimmen.

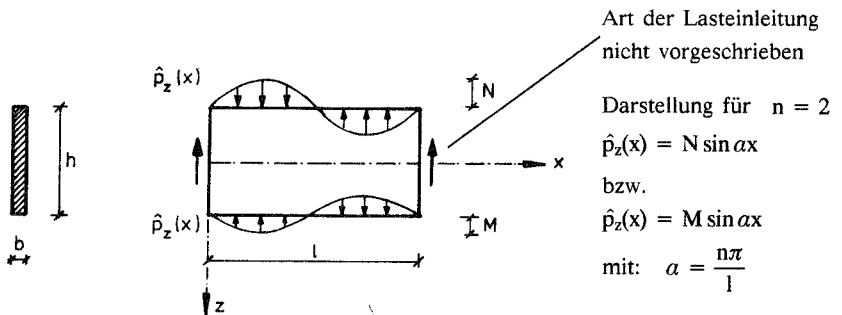
Für gegebene Bedingungen an allen vier Seiten einer Rechteckscheibe ist der Ansatz jedoch nicht ausreichend.

Der Randstößeffekt infolge der Lagerbedingungen müßte ebenfalls durch den Ansatz einer Spannungsfunktion berücksichtigt werden. Werden die Lagerbedingungen ebenfalls durch Fourier-Reihe ausgedrückt, spricht man von der "Methode der kreuzweisen Überlagerung" einzelner Reihen, wie sie von Mathieu in [46] entwickelt wurde. Da aber der exakte Spannungsverlauf direkt an der Lagerung a priori nicht bekannt ist, wird hier zunächst eine von den Randbedingungen unabhängige Lösung angestrebt. Hierfür wird im folgenden ein Balken mit Rechteck-Querschnitt unter sinusförmiger Belastung betrachtet.

### 6.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie mit Fourier-Reihen

#### 6.1.1.1 Allgemeiner Belastungsfall

##### System und Belastung



##### Spannungsfunktion

$$F(x, z) = \{A \cosh(az) + Bz \sinh(az) + C \sinh(az) + Dz \cosh(az)\} \sin(ax) \quad (6.9)$$

##### Spannungskomponenten in allgemeiner Form

$$\sigma_x(x, z) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \left\{ Aa^2 \cosh(az) + Ba[2 \cosh(az) + az \sinh(az)] + Ca^2 \sinh(az) + Da[2 \sinh(az) + az \cosh(az)] \right\} \sin(ax) \quad (6.10)$$



$$\sigma_x(x, z) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\{A \cosh(az) + Bz \sinh(az) + C \sinh(az) + Dz \cosh(az)\} a^2 \sin(ax) \quad (6.11)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -\{Aa^2 \sinh(az) + Ba[2 \sinh(az) + az \cosh(az)] + Ca^2 \cosh(az) + Da[2 \cosh(az) + az \sinh(az)]\} \cos(ax) \quad (6.12)$$

### Randbedingungen

$$\sigma_x(x=0) = \sigma_x(x=l) = 0 \quad (\text{durch Ansatz erfüllt})$$

$$\tau_{xz}(z = \pm \frac{h}{2}) = 0 \quad (6.13)$$

$$\sigma_z(z = +\frac{h}{2}) = -M \sin(ax) \quad (6.14)$$

$$\sigma_z(z = -\frac{h}{2}) = -N \sin(ax)$$

Mit den Randbedingungen (6.13) und (6.14) lassen sich die Integrationskonstanten A bis D bestimmen.

$$\begin{aligned} A &= \frac{N + M}{a^2} \frac{\sinh(a \frac{h}{2}) + a \frac{h}{2} \cosh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) + ah} \\ B &= -\frac{N + M}{a^2} \frac{a \sinh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) + ah} \\ C &= -\frac{N - M}{a^2} \frac{\cosh(a \frac{h}{2}) + a \frac{h}{2} \sinh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) - ah} \\ D &= \frac{N - M}{a^2} \frac{a \cosh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) - ah} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Gleichungen (6.10), (6.11) und (6.12) beschreiben zusammen mit (6.15) den Scheibenspannungszustand für den oben dargestellten allgemeinen Belastungsfall ( $N \neq M$ ).

## Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}\alpha_x(x, z) = & (N + M) \frac{\left[ a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \cosh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) + ah} \sin(ax) \\ & - (N - M) \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \sin(ax)\end{aligned}\quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z(x, z) = & - (N + M) \frac{\left[ a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) + \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \cosh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) + ah} \sin(ax) \\ & + (N - M) \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) + \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \sin(ax)\end{aligned}\quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(x, z) = & - (N + M) \frac{a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \sinh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) + ah} \cos(ax) \\ & + (N - M) \frac{a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \cosh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) - ah} \cos(ax)\end{aligned}\quad (6.18)$$

Bemerkung: Der erste Term jeder Gleichung bezeichnet einen Eigenspannungszustand (Spannungen, für die die Schnittgrößen gleich null sind), der zweite Term erfüllt das äußere Gleichgewicht.

Betrachtet werden im weiteren nur die beiden Sonderfälle

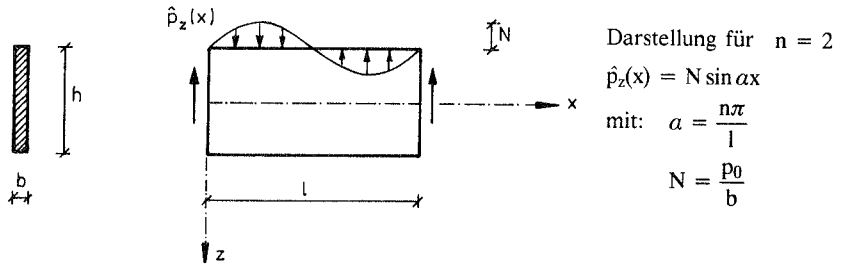
I : einer nur am oberen Rand belasteten Scheibe ( $M = 0$ )

II: einer gleichmäßig am oberen und unteren Rand belasteten Scheibe ( $N = -M$ )

### 6.1.1.2 Sonderfall I

Nur am oberen Rand belastete Scheibe ( $M = 0$ )

#### System und Belastung



#### Spannungskomponenten

$$\sigma_x(x, z) = \frac{p_0}{b} \left\{ \frac{\left[ a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \cosh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) + ah} - \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \right\} \sin(ax) \quad (6.19)$$

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{p_0}{b} \left\{ \frac{\left[ a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) + \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \cosh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) + ah} - \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) + \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \right\} \sin(ax) \quad (6.20)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = -\frac{p_0}{b} \left\{ \frac{a \frac{h}{2} \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \sinh(az) - \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) + ah} - \frac{a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \cosh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) - ah} \right\} \cos(ax) \quad (6.21)$$

Bemerkung: Der erste Term jeder Gleichung bezeichnet den Eigenspannungszustand infolge der Lasteinleitung am oberen Rand, der zweite Term erfüllt das äußere Gleichgewicht.

### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \frac{p_0}{b} \left\{ \frac{a \frac{h}{2} - \sinh(a \frac{h}{2}) \cosh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) + ah} \pm \frac{a \frac{h}{2} + \sinh(a \frac{h}{2}) \cosh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) - ah} \right\} \sin(ax) \quad (6.22)$$

$$\sigma_x(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \frac{a \frac{h}{2} \cosh(a \frac{h}{2}) - \sinh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) + ah} \sin(ax) \quad (6.23)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \frac{a \frac{h}{2} \sinh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) - ah} \cos(ax) \quad (6.24)$$

$$\sigma_z(x, z = + \frac{h}{2}) = 0 \quad (6.25)$$

$$\sigma_z(x, z = - \frac{h}{2}) = - \frac{p_0}{b} \sin(ax) \quad (6.26)$$

$$\sigma_z(x, z = 0) = - \frac{p_0}{b} \frac{a \frac{h}{2} \cosh(a \frac{h}{2}) + \sinh(a \frac{h}{2})}{\sinh(ah) + ah} \sin(ax) \quad (6.27)$$

### Reihenentwicklung der wesentlichen Spannungsausdrücke

$$\sigma_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \frac{p_0}{b} \left\{ \pm \left[ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} + \frac{11}{1400} a^2 h^2 - \frac{17}{126000} a^4 h^4 + \frac{563}{388080000} a^6 h^6 - \dots \right] + \left[ \frac{1}{24} a^2 h^2 - \frac{1}{720} a^4 h^4 + \frac{1}{120960} a^6 h^6 - \dots \right] \right\} \sin(ax) \quad (6.28)$$

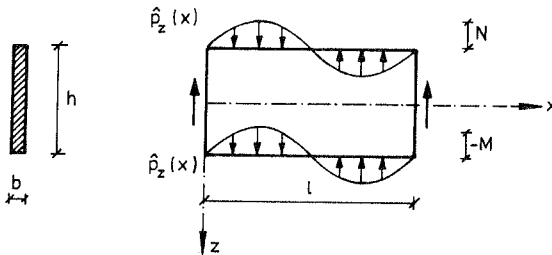
$$\sigma_x(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \left[ \frac{1}{48} a^2 h^2 - \frac{11}{11520} a^4 h^4 - \frac{1}{967680} a^6 h^6 - \dots \right] \sin(ax) \quad (6.29)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{ah} - \frac{1}{80} ah - \frac{17}{44800} a^3 h^3 + \frac{221}{16128000} a^5 h^5 + \dots \right] \cos(ax) \quad (6.30)$$

### 6.1.1.3 Sonderfall II

Gleichmäßig am oberen und unteren Rand belastete Scheibe ( $N = -M$ )

#### System und Belastung



Darstellung für  $n = 2$

$$\hat{p}_z(x) = N \sin(ax)$$

$$\text{mit: } \alpha = \frac{n\pi}{l}$$

$$N = \frac{p_0}{2b}$$

#### Spannungskomponenten

$$\sigma_x(x, z) = -\frac{p_0}{b} \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \sin(ax) \quad (6.31)$$

$$\sigma_z(x, z) = \frac{p_0}{b} \frac{\left[ a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) + \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) \right] \sinh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \cosh(az)}{\sinh(ah) - ah} \sin(ax) \quad (6.32)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{p_0}{b} \frac{a \frac{h}{2} \sinh\left(a \frac{h}{2}\right) \cosh(az) - \cosh\left(a \frac{h}{2}\right) az \sinh(az)}{\sinh(ah) - ah} \cos(ax) \quad (6.33)$$

Bemerkung: Die Gleichungen erfüllen das Gleichgewicht

### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} \frac{\alpha \frac{h}{2} + \sinh(\alpha \frac{h}{2}) \cosh(\alpha \frac{h}{2})}{\sinh(\alpha h) - \alpha h} \sin(\alpha x) \quad (6.34)$$

$$\sigma_x(x, z = 0) = 0 \quad (6.35)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \frac{\alpha \frac{h}{2} \sinh(\alpha \frac{h}{2})}{\sinh(\alpha h) - \alpha h} \cos(\alpha x) \quad (6.36)$$

$$\sigma_z(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{2b} \sin(\alpha x) \quad (6.37)$$

$$\sigma_z(x, z = 0) = 0 \quad (6.38)$$

### Reihenentwicklung der wesentlichen Spannungsausdrücke

$$\sigma_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} \left[ 6 \frac{1}{\alpha^2 h^2} + \frac{1}{5} + \frac{11}{1400} \alpha^2 h^2 - \frac{17}{126000} \alpha^4 h^4 + \frac{563}{388080000} \alpha^6 h^6 - \dots \right] \sin(\alpha x) \quad (6.39)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha h} - \frac{1}{80} \alpha h - \frac{17}{44800} \alpha^3 h^3 + \frac{221}{16128000} \alpha^5 h^5 + \dots \right] \cos(\alpha x) \quad (6.40)$$

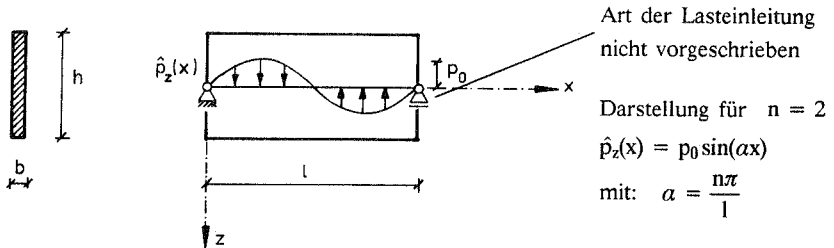
## 6.2 Erweiterte Balkentheorie

In Abschnitt 4 wurde die erweiterte Balkentheorie ausführlich hergeleitet; und im Anhang A3 wurde die ihr zugrunde liegende Differentialgleichung für einige wichtige Grundlastfälle gelöst.

Im folgenden wird auf die dort angegebenen Bestimmungsgleichungen zurückgegriffen.

### 6.2.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie

#### System und Belastung



#### Spannungskomponenten

(siehe u.a. die Gl. 4.42 und 4.43 sowie die Gl. 4.29 bis 4.32 in Abschnitt 4.1.2.1, des weiteren den Anhang A1.1, A2.1 und A3.2.3)

Die Scheibengleichung (6.8) ergibt sich unabhängig von der Querdehnzahl  $\nu$  (sie gilt für jeden homogenen und isotropen Werkstoff, der dem Hookeschen Gesetz gehorcht). Für die Balkenlösung wird im folgenden  $\nu = 0$  zugrunde gelegt. Für den Rechteck-Querschnitt ergibt sich damit:

$$\lambda^2 = \frac{GA_s}{EI_\omega} = \frac{420}{(1 + \nu)h^2} \quad (6.41)$$

$$\text{bzw. } \lambda^2 = \frac{420}{h^2} \quad (6.42)$$

- Längsspannungen

$$\sigma_x(x, z) = \sigma_x^P(x, z) + \sigma_x^S(x, z) \quad (6.43)$$

$$\sigma_x^P(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (6.44)$$

$$\sigma_x^S(x, z) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega(z) \quad (6.45)$$

mit:  $M_y(x) = \frac{P_0}{a^2} \sin(ax)$  (6.46)

$$M_\omega(x) = \frac{P_0}{\lambda^2 + a^2} \sin(ax) \quad (6.47)$$

$$\omega(z) = \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^2} - \frac{1}{4} z \quad (6.48)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (6.49)$$

$$I_\omega = \frac{bh^3}{1008} \quad (6.50)$$

• Schubspannungen

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{xz}^P(x, z) + \tau_{xz}^S(x, z) \quad (6.51)$$

$$\tau_{xz}^P(x, z) = - \frac{Q_z^P(x) S_y(z)}{I_y b} \quad (6.52)$$

$$\tau_{xz}^S(x, z) = - \frac{Q_z^S(x) S_y(z)}{I_y b} - \frac{Q_z^S(x) S_\omega(z)}{I_\omega b} \quad (6.53)$$

mit:  $Q_z^P(x) = \frac{P_0}{a} \frac{\lambda^2}{a^2 + \lambda^2} \cos(ax)$  (6.54)

$$Q_z^S(x) = \frac{P_0}{a} \frac{\lambda^2}{a^2 + \lambda^2} \cos(ax) \quad (6.55)$$

$$S_y(z) = b \left[ \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{8} h^2 \right] \quad (6.56)$$

$$S_\omega(z) = b \left[ \frac{5}{12} \frac{z^4}{h^2} - \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{192} h^2 \right] \quad (6.57)$$



Das nacheinander Einsetzen der Gleichungen (6.42) und (6.44) bis (6.50) in Gleichung (6.43) sowie der Gleichungen (6.42) und (6.52) bis (6.57) in Gleichung (6.51) ergibt die folgenden Spannungskomponenten:

$$\alpha_x(x, z) = \frac{p_0}{b} \left\{ 12 \frac{1}{a^2 h^2} \frac{z}{h} + \frac{420}{a^2 h^2 + 420} \left[ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{5h} \right] \right\} \sin(ax) \quad (6.58)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{p_0}{b} \left\{ \frac{1}{ah} \left[ \frac{3}{2} - 6 \frac{z^2}{h^2} \right] - ah \frac{420}{a^2 h^2 + 420} \left[ \frac{z^4}{h^4} - \frac{3}{10} \frac{z^2}{h^2} + \frac{1}{80} \right] \right\} \cos(ax) \quad (6.59)$$

#### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\alpha_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} \left\{ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} \frac{420}{a^2 h^2 + 420} \right\} \sin(ax) \quad (6.60)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{ah} - \frac{1}{80} ah \frac{420}{a^2 h^2 + 420} \right\} \cos(ax) \quad (6.61)$$

#### Reihenentwicklung der Spannungsausdrücke

In den Gleichungen (6.60) und (6.61) tritt jeweils der gleiche Faktor auf, der sich in gleicher Weise wie die Ausdrücke nach der Scheibentheorie in eine Taylorsche Reihe entwickeln läßt.

$$f(ah) = \frac{420}{a^2 h^2 + 420} = 1 - \frac{1}{420} a^2 h^2 + \frac{1}{420^2} a^4 h^4 - \dots \quad (6.62)$$

Mit Gleichung (6.62) folgt für die Spannungskomponenten

$$\alpha_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} \left\{ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{420} a^2 h^2 + \frac{1}{420^2} a^4 h^4 - \frac{1}{420^3} a^6 h^6 + \dots \right] \right\} \sin(ax) \quad (6.63)$$

$$\tau_{xz}(x, z = 0) = \frac{p_0}{b} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{ah} - \frac{1}{80} ah \left[ 1 - \frac{1}{420} a^2 h^2 + \frac{1}{420^2} a^4 h^4 - \frac{1}{420^3} a^6 h^6 + \dots \right] \right\} \cos(ax) \quad (6.64)$$

### 6.3 Vergleich und Fehlerabschätzung der Formeln für die Randlängsspannung und die Mittenschubspannung der erweiterten Balkentheorie und der Scheibentheorie

#### 6.3.1 Vergleich

Gegenübergestellt werden die folgenden Reihenlösungen

I : einer nur am oberen Rand belasteten Scheibe (Abschnitt 6.1.1.2)

II : einer am oberen und unteren Rand belasteten Scheibe (Abschnitt 6.1.1.3)

III: einer auf der Mittellinie belasteten Scheibe ( $\hat{=}$  Balken) (Abschnitt 6.2.1)

#### • Randlängsspannungen

$$\begin{aligned}
 \text{I : } \alpha_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} & \left\{ \left[ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{11}{280} a^2 h^2 - \frac{17}{25200} a^4 h^4 + \dots \right) \right] \right. \\
 & \left. \pm \left[ \frac{1}{24} a^2 h^2 - \frac{1}{720} a^4 h^4 + \dots \right] \right\} \sin(ax) \quad (6.65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II : } \alpha_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} & \left[ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{11}{280} a^2 h^2 - \frac{17}{25200} a^4 h^4 + \dots \right) \right] \sin(ax) \\
 & (6.66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III: } \alpha_x(x, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{b} & \left[ 6 \frac{1}{a^2 h^2} + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{1}{420} a^2 h^2 + \frac{1}{420^2} a^4 h^4 + \dots \right) \right] \sin(ax) \\
 & (6.67)
 \end{aligned}$$

#### • Mittenschubspannungen

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{I :} \\ \text{II :} \end{array} \right\} \tau_{xz}(x, z = 0) & = \frac{p_0}{b} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{ah} - \frac{1}{80} ah \left( 1 + \frac{17}{560} a^2 h^2 - \frac{221}{201600} a^4 h^4 - \dots \right) \right] \cos(ax) \\
 & (6.68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III: } \tau_{xz}(x, z = 0) & = \frac{p_0}{b} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{ah} - \frac{1}{80} ah \left( 1 - \frac{1}{420} a^2 h^2 + \frac{1}{420^2} a^4 h^4 - \dots \right) \right] \cos(ax) \\
 & (6.69)
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

In den drei zu vergleichenden Reihenlösungen für die beiden Spannungen entspricht jeweils der 1. Term dem Ergebnis der elementaren Bernoulli- bzw. Timoshenko-Theorie. Die weiteren Terme geben den Unterschied zur Scheibentheorie bzw. zu der erweiterten Balkentheorie an.

Man sieht, daß auch jeweils die 2. Terme beider in Reihe entwickelten Spannungsausdrücke genau übereinstimmen.

Dieser 2. Term kann in der Balkentheorie als derjenige Spannungsanteil gedeutet werden, der durch die Berücksichtigung des tatsächlichen Verlaufes der primären Schubverzerrungen entsteht. Er kann demzufolge als Längsspannungsanteil infolge des primären Schub bezeichnet werden. In der Timoshenko-Balkentheorie geht dieser Anteil durch die dort gemachte vereinfachende Annahme eines konstanten Schubverzerrungsverlaufs verloren.

Die erweiterte Balkentheorie unterscheidet sich von der Scheibentheorie erst im 3. Term, bei dem das Höhen-Längen-Verhältnis  $h/l$  für die Längsspannungen quadratisch und für die Schubspannungen kubisch eingeht.

Ab diesem Term unterscheiden sich auch die beiden Scheibenlösungen. In der Lösung nach I existiert ein zusätzlicher Term infolge Eigenspannungen (Spannungen, für die die Schnittgrößen gleich null sind), der aus der ungleichmäßigen Lasteinleitung resultiert.

### 6.3.2 Fehlerabschätzung

Im folgenden wird der Fehler abgeschätzt, der bei der Berechnung der Randlängsspannung und Mittenschubspannung nach der erweiterten Balkentheorie (III) gegenüber der Berechnung nach der Scheibentheorie (I und II) gemacht wird.

Hierzu werden jeweils die Restglieder  $R_n$  der Taylorschen Reihen bestimmt, die man erhält, wenn man die Reihen für die Spannungsausdrücke (erweiterte Balkentheorie, Scheibentheorie) nach dem  $n$ -ten Glied abbricht.

Für die Taylorsche Reihe mit Entwicklung der Funktion  $f(x)$  nach Potenzen von  $x$  um die Stelle  $a = 0$  (Mac Laurinsche Reihe)

$$f(x + a) = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (6.70)$$

erhält man das Restglied:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x) \quad \text{für:} \quad 0 < \Theta < 1 \quad (6.71)$$

Abbruch der Spannungsausdrücke nach dem 2. Term:

### 1. Rändlängsspannung

$$\text{II: } R_{\sigma}^{\text{Scheibe}} = \frac{11}{280} \Theta^2 a^2 h^2 \frac{p_0}{b} \sin(ax) \quad \rightarrow \quad \Theta_{\max} \approx 1 \quad \rightarrow$$

$$R_{\sigma}^{\text{Scheibe}} \leq \frac{11}{280} a^2 h^2 \frac{p_0}{b} \sin(ax) \quad (6.72)$$

$$\text{III: } R_{\sigma}^{\text{Balken}} = -\frac{1}{420} \Theta^2 a^2 h^2 \frac{p_0}{b} \sin(ax) \quad \rightarrow \quad \Theta_{\max} \approx 1 \quad \rightarrow$$

$$R_{\sigma}^{\text{Balken}} \leq \frac{1}{420} a^2 h^2 \frac{p_0}{b} \sin(ax) \quad (6.73)$$

das bedeutet:

- der Fehler der in Reihe entwickelten und nach dem 2. Term abgebrochenen Lösung nach der Scheibentheorie (II) beträgt gegenüber der exakten, nicht in Reihe entwickelten Lösung nach der Scheibentheorie

$$\text{höchstens: } R_{\sigma}^{\text{Scheibe}} = \frac{1}{5} \frac{11}{280} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.74)$$

- der Fehler der in Reihe entwickelten und nach dem 1. Glied ( $\hat{=}$  2. Term) abgebrochenen Lösung nach der erweiterten Balkentheorie (III) beträgt gegenüber der exakten, nicht in Reihe entwickelten Lösung nach der erweiterten Balkentheorie

$$\text{höchstens: } R_{\sigma}^{\text{Balken}} = \frac{1}{5} \frac{1}{420} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.75)$$

Da die Potenzreihen der Scheibentheorie und der erweiterten Balkentheorie beim 2. Reihenglied (3. Spannungsterm) mit unterschiedlichen Vorzeichen beginnen, läßt sich der maximale Gesamtfehler

- der in Reihe entwickelten und nach dem 2. Glied abgebrochenen Lösung nach der erweiterten Balkentheorie gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie mit

$$R_{\sigma}^{\text{abgebr.}} \leq \frac{1}{5} \frac{11}{280} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \frac{1}{1400} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.76)$$

- der exakten Lösung nach der erweiterten Balkentheorie gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie mit

$$R_{\sigma}^{\text{exakt}} \leq \frac{1}{5} \left[ \frac{11}{280} + \frac{1}{420} \right] n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \frac{1}{120} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.77)$$

angeben.

## 2. Mittenschubspannung

$$\text{II: } R_r^{\text{Scheibe}} = \frac{17}{560} \Theta^2 \alpha^2 h^2 \frac{p_0}{b} \cos(ax) \quad \rightarrow \quad \Theta_{\max} \approx 1 \quad \rightarrow$$

$$R_r^{\text{Scheibe}} \leq \frac{17}{560} \alpha^2 h^2 \frac{p_0}{b} \cos(ax) \quad (6.78)$$

$$\text{III: } R_r^{\text{Balken}} = -\frac{1}{420} \Theta^2 \alpha^2 h^2 \frac{p_0}{b} \cos(ax) \quad \rightarrow \quad \Theta_{\max} \approx 1 \quad \rightarrow$$

$$R_r^{\text{Balken}} \leq \frac{1}{420} \alpha^2 h^2 \frac{p_0}{b} \cos(ax) \quad (6.79)$$

Die bei der Randlängsspannung gemachten Feststellungen gelten für die Mittenschubspannung entsprechend. Somit läßt sich der maximale Gesamtfehler auch hier wie folgt angeben:

- der Fehler der in Reihe entwickelten und nach dem 2. Glied (3. Spannungsterm) abgebrochenen Lösung nach der erweiterten Balkentheorie gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie mit

$$R_r^{\text{abgebr.}} \leq \frac{1}{80} n\pi \frac{h}{l} \frac{17}{560} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \frac{17}{44800} n^3 \pi^3 \frac{h^3}{l^3} \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.80)$$

- der Fehler der exakten Lösung nach der erweiterten Balkentheorie gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie mit

$$\begin{aligned} R_{\tau}^{\text{exakt}} &\leq \frac{1}{80} n\pi \frac{h}{l} \left[ \frac{17}{560} + \frac{1}{420} \right] n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \\ &= \frac{11}{26880} n^3 \pi^3 \frac{h^3}{l^3} \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Im Vergleich hierzu ist der maximale absolute Fehler bei Anwendung der Technischen Biegelehre (Bernoulli- bzw. Timoshenko-Theorie) gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie (II) für die Randlängsspannung:

$$R_{\sigma}^{\text{TB}} \leq \left( \frac{1}{5} + \frac{11}{1400} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.82)$$

und für die Mittenschubspannung:

$$R_{\tau}^{\text{TB}} \leq \left( \frac{1}{80} + \frac{17}{44800} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \right) n\pi \frac{h}{l} \frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.83)$$

Der Fehler ist, wie man den Gleichungen (6.65) bis (6.69) entnehmen kann, jeweils abhängig vom Höhen-Längen-Verhältnis.

Zieht man die unterschiedlichen Annahmen für die Lasteinleitung mit in Betracht (Balken: auf der Stabachse; Scheibe: am oberen Scheibenrand), dann erhöht sich z.B. für die Randlängsspannungen (vgl. Gl. 6.65) der maximale Fehler, den man bei Anwendung einer Balkentheorie gegenüber der exakten Lösung nach der Scheibentheorie macht, noch um den Anteil

$$\Delta R_{\sigma}^{\text{TB}} \leq \frac{1}{24} n^2 \pi^2 \frac{h^2}{l^2} \frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (6.84)$$

### 6.3.3 Zahlenbeispiel: Rechteckscheibe unter sinusförmiger Belastung ( $n = 1$ )

In dem folgenden, durch das Bild 6.1 sowie die Tabellen 6.1 und 6.2 dokumentierten Zahlenbeispiel werden Rechteckscheiben mit unterschiedlichen Höhen-Längen-Verhältnissen  $h/l$  unter sinusförmiger Belastung untersucht.

Verglichen werden die Ergebnisse der Längs- und Schubspannungsberechnung nach

- der elementaren Balkentheorie (TB),
- der erweiterten Balkentheorie (EB),
- der Scheibentheorie ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung (SOL) und nach
- der Scheibentheorie mit Berücksichtigung der Lasteinleitung am oberen Scheibenrand (SML).

Es wird festgestellt:

- Mit zunehmendem Höhen-Längen-Verhältnis vergrößert sich der Fehler in den Ergebnissen sowohl nach der elementaren und erweiterten Balkentheorie als auch nach der Scheibentheorie ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung (jeweils Spalten a, d und e in Tabelle 6.1) gegenüber den Ergebnissen nach der Scheibentheorie mit Berücksichtigung der Lasteinleitung (Spalte a).

Bis zum Höhen-Längen-Verhältnis  $h/l = 1/2$  ist der prozentuale Fehler nach der erweiterten Balkentheorie EB und nach der Scheibentheorie SOL nahezu gleich (bis max. 4,2 bzw. 3,7%) und deutlich geringer als der Fehler nach der elementaren Balkentheorie TB (max. 11,4%).

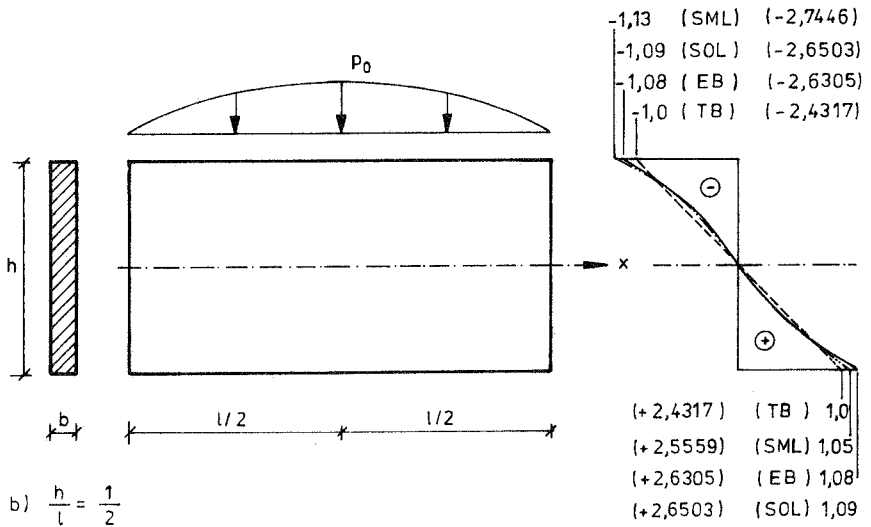
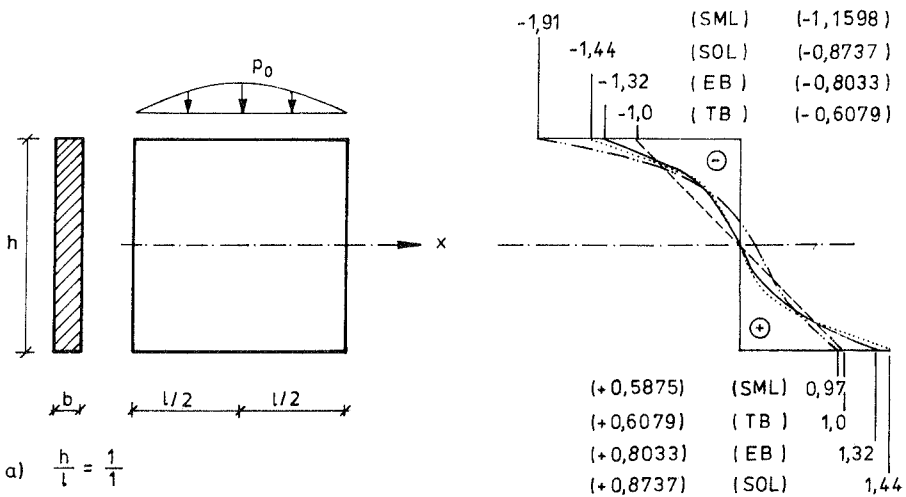
Beim Höhen-Längen-Verhältnis  $h/l = 1/1$  wird der Einfluß der Lasteinleitung dominant; und die Ergebnisse sowohl nach den Balkentheorien TB und EB als auch nach der Scheibentheorie SOL sind im vorliegenden Fall nicht zutreffend.

- Den Genauigkeitsbereich der erweiterten Balkentheorie erkennt man ebenfalls beim Vergleich ihrer Ergebnisse (Spalten a, b und c in Tabelle 6.1) mit den nach der Scheibentheorie ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung erzielten (Spalte a).

Bis zum Höhen-Längen-Verhältnis  $h/l = 1/2$  sind die Abweichungen der Ergebnisse nach der erweiterten Balkentheorie EB von den nach der Scheibentheorie SOL erhaltenen geringer als 1%, während die Ergebnisse nach der elementaren Balkentheorie TB hier bereits schon Abweichungen bis über 8% aufweisen.

- In Tabelle 6.2 sind darüber hinaus für verschiedenen Höhen-Längen-Verhältnisse  $h/l$  die theoretisch maximalen Fehler angegeben, die man bei der Berechnung nach den Balkentheorien TB und EB gegenüber einer Berechnung nach der Scheibentheorie SOL macht. Hierbei wurden die Gleichungen (6.82) und (6.83) sowie die Gleichungen (6.77) und (6.81) ausgewertet.

Die Ergebnisse liegen erwartungsgemäß geringfügig über den in den entsprechenden Spalten "b" der Tabelle 6.1 angegebenen Werten.



Spannungswerte ...  $\cdot \left[ \frac{p_0}{b} \sigma_{x,R}^{TB} \right]$  ; (Spannungswerte) ...  $\cdot \left[ \frac{p_0}{b} \right]$

Bild 6.1 Längsspannungsverläufe  $\sigma_x(x=l/2)$  für  $n=1$  nach

- Scheibentheorie mit Lasteinleitung [SML] - - - - -
- Scheibentheorie ohne Lasteinleitung [SOL] ..... -
- erweiterte Balkentheorie [EB] - - - - -
- elementare Balkentheorie [TB] - - - - -



$\frac{h}{l}$	Balkentheorien										Scheibentheorie						
	elementare					erweiterte					ohne Lasteinleitung					mit	
	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	
1	$\mp 0.6079$	$\mp 0.2658$	30.4%	- 0.5519	47.6%	$\mp 0.8033$	$\mp 0.0704$	8.1%	- 0.3565	30.7%	$\mp 0.8737$	$\mp 0.2861$	24.7%	- 1.1598	24.7%	$\mp 0.8737$	- 1.1598
$\frac{1}{1}$	0.4775	- 0.0475	11.0%	- 0.0204	3.5%	0.4391	- 0.0091	2.1%	- 0.2158	36.7%	0.4300	0.1289	48.7%	+ 0.5875	48.7%	0.4300	+ 0.5875
1	$\mp 2.4317$	$\mp 0.2186$	8.2%	- 0.0814	14.6%	$\mp 2.6305$	$\mp 0.0198$	0.7%	- 0.1198	21.4%	$\mp 2.6503$	$\mp 0.0943$	3.4%	- 2.7446	3.4%	$\mp 2.6503$	- 2.7446
$\frac{1}{2}$	0.9549	- 0.0210	2.2%	+ 0.1242	4.9%	0.9354	- 0.0015	0.2%	- 0.0746	2.9%	0.9339	0.0137	3.7%	+ 2.5559	3.7%	0.9339	+ 2.5559
1	$\mp 5.4713$	$\mp 0.2085$	3.7%	- 0.0073	0.8%	$\mp 5.6708$	$\mp 0.0090$	0.2%	- 0.0530	0.9%	$\mp 5.6798$	$\mp 0.0440$	0.8%	+ 5.6358	0.8%	$\mp 5.6798$	+ 5.6358
$\frac{1}{3}$	1.4324	0.0135	1.0%	+ 0.1645	2.9%	1.4193	0.0004	$\approx 0\%$	- 0.0350	0.6%	1.4189	0.0044	0.3%	+ 5.6358	0.3%	1.4189	+ 5.6358
1	$\mp 9.7268$	$\mp 0.2048$	2.1%	- 0.0091	0.6%	$\mp 9.9265$	$\mp 0.0051$	0.1%	- 0.0200	0.2%	$\mp 9.9316$	$\mp 0.0252$	0.3%	+ 9.9065	0.3%	$\mp 9.9316$	+ 9.9065
$\frac{1}{4}$	1.9099	0.0100	0.5%	+ 0.1797	1.8%	1.9001	0.0002	$\approx 0\%$	- 0.0303	0.3%	1.8999	0.0019	0.1%	+ 9.9065	0.1%	1.8999	+ 9.9065
1	$\mp 15.198$	$\mp 0.2030$	1.3%	- 0.2300	2.3%	$\mp 15.398$	$\mp 0.0030$	$\approx 0\%$	- 0.0190	0.1%	$\mp 15.401$	$\mp 0.0162$	0.1%	- 15.417	0.1%	$\mp 15.401$	- 15.417
$\frac{1}{5}$	2.3873	0.0079	0.3%	+ 0.1870	1.2%	2.3795	0.0001	$\approx 0\%$	- 0.0130	0.1%	2.3794	0.0010	$\approx 0\%$	+ 15.385	$\approx 0\%$	2.3794	+ 15.385
1	$\mp 60.793$	$\mp 0.2000$	0.3%	- 0.0669	0.3%	$\mp 60.993$	$\approx 0$	$\approx 0\%$	- 0.0009	$\approx 0\%$	$\mp 60.993$	$\mp 0.0041$	$\approx 0\%$	- 60.998	$\approx 0\%$	$\mp 60.993$	- 60.998
$\frac{1}{10}$	4.7746	0.0039	0.1%	+ 0.0039	0.3%	4.7707	$\approx 0$	$\approx 0\%$	- 0.0040	$\approx 0\%$	4.7707	0.0001	$\approx 0\%$	+ 60.989	$\approx 0\%$	4.7707	+ 60.989

a ... exakte Lösung im Sinne der jeweiligen Theorie

b ... absoluter Fehler bzgl. Scheibentheorie ohne Lasteinleitung

c ... relativer Fehler bzgl. Scheibentheorie ohne Lasteinleitung

d ... absoluter Fehler bzgl. Scheibentheorie mit Lasteinleitung

e ... relativer Fehler bzgl. Scheibentheorie mit Lasteinleitung

Die Randlängsspannungen  $\sigma_x$  sind mit dem Faktor  $\frac{p_0}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$   
 die Mittenschubspannungen bzw. max. Schubspannungen  $\tau_{xz}$  sind mit dem Faktor  $\frac{p_0}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$   
 zu multiplizieren

Tabelle 6.1 Spannungsvergleich am Rechteck-Querschnitt unter sinusförmiger Belastung

Balkentheorie			
elementar		erweitert	
$\frac{h}{1}$	$R_v \leq \left( \frac{1}{5} + \frac{11}{1400} a^2 h^2 \right) \frac{P_0}{b} \sin(ax)$	$R_r \leq \frac{1}{80} a h \left( 1 + \frac{17}{560} a^2 h^2 \right) \frac{P_0 \cos(ax)}{b}$	$R_v \leq \frac{11}{26880} a^2 h^3 \frac{P_0 \cos(ax)}{b}$
$\frac{1}{1}$	0,2775	0,0510	0,0822
$\frac{1}{2}$	0,2194	0,0211	0,0206
$\frac{1}{3}$	0,2086	0,0135	0,0091
$\frac{1}{4}$	0,2048	0,0100	0,0051
$\frac{1}{5}$	0,2031	0,0079	0,0033
$\frac{1}{10}$	0,2008	0,0039	0,0008

Die angegebenen Werte gelten für die Stellen  $x = l/2n$  bzw.  $x = l/n$

Tabelle 6.2 Theoretisch maximaler (Absolut-) Fehler nach der Balkentheorie gegenüber der Scheibentheorie ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung (vgl. "b" in Tabelle 6.1). Rechteck-Querschnitt unter sinusförmiger Belastung.

#### 6.3.4 Abschließende Bemerkung

Man erkennt an den Formeln für die in der Reihe entwickelten Spannungen (Gl. 6.67 bis 6.71 in Abschnitt 6.3.1), daß mit zunehmender Welligkeit der sinusförmigen Belastung, die zusätzlichen Spannungsanteile der erweiterten Balkentheorie und der Scheibentheorie gegenüber den Spannungen der elementaren Balkentheorie zunehmen.

Dies führt zu dem Schluß, daß bei dynamischen Berechnungen nach der elementaren Balkentheorie die sich ergebenden höheren Eigenfrequenzen von jenen abweichen, die sich bei einer Berechnung nach der Scheibentheorie ergeben würden; vermutlich auch dann, wenn sie nach der gegenüber der Bernoulli-Balkentheorie wesentlich verbesserten Timoshenko-Balkentheorie ermittelt wurden (siehe hierzu auch Abschnitt 9 Dynamik). An und für sich ist dies eine bekannte Tatsache.

Außerdem sieht man oben erwähnten Gleichungen für die Spannungen auch den seit langem bekannten Sachverhalt an, daß der Einfluß der höheren Effekte (also die Scheibenwirkung) mit kleiner werdendem Höhen-Längen-Verhältnis  $h/l$  abnimmt.

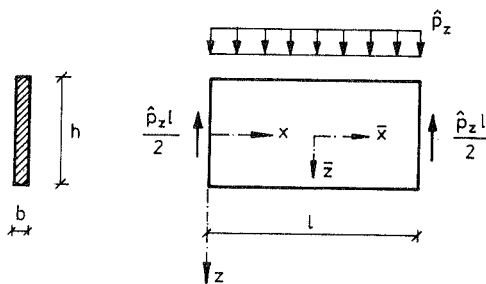
#### 6.4 Lösung einiger Scheibenprobleme mit Polynom-Spannungsansatz

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse nach der Scheibentheorie einiger häufig in der Literatur angegebener Beispiele den Ergebnissen nach der erweiterten Balkentheorie gegenübergestellt und abschließend in Abschnitt 6.4.5 bewertet.

##### 6.4.1 Beidseitig gelagerte Scheibe (1. Art)

##### 6.4.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie

##### System und Belastung



Spannungsansatz nach [41]

$$F(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{1}{4} \bar{x}^2 + \frac{3}{4} \frac{\bar{z}}{h} \bar{x}^2 + \left[ \frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{10} h^2 \right] \frac{\bar{z}^3}{h^3} + \left[ \frac{1}{5} \frac{\bar{z}^5}{h^3} - \frac{\bar{z}^3}{h^3} \bar{x}^2 \right] \right\} \quad (6.85)$$

Spannungskomponenten

$$\sigma_x(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3}{2} \frac{l^2 \bar{z}}{h^3} - 6 \frac{\bar{x}^2 \bar{z}}{h^3} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{\bar{z}^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{\bar{z}}{h} \right\} \quad (6.86)$$

$$\sigma_z(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2} = 0 + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{z}}{h} - 2 \frac{\bar{z}^3}{h^3} \right\} \quad (6.87)$$

$$\tau_{xz}(\bar{x}, \bar{z}) = -\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}} = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 6 \frac{\bar{x} \bar{z}^2}{h^3} - \frac{3}{2} \frac{\bar{x}}{h} \right\} \quad (6.88)$$

Gleichgewicht
Eigenspannungszustand  
(konstant in x)

Wie man den Spannungsausdrücken ansieht, wird durch die Wahl der Spannungsfunktion F die Art der Lasteinleitung an den Lagern und die Lagerung selbst vorgeschrieben.

Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß die vertikalen Lagerkräfte parabelförmig in die Scheibenquerschnitte eingeleitet werden, und diese sich frei verdrehen und frei verwölben können.

Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(\bar{x} = 0, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3}{2} \frac{l^2 \bar{z}}{h^3} + 4 \frac{\bar{z}^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{\bar{z}}{h} \right\} \quad (\text{kubisch}) \quad (6.89)$$

$$\tau_{xz}(\bar{x} = -\frac{1}{2}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3}{4} \frac{l}{h} - 3 \frac{l \bar{z}^2}{h^3} \right\} \quad (\text{quadratisch}) \quad (6.90)$$

• Randlängsspannung

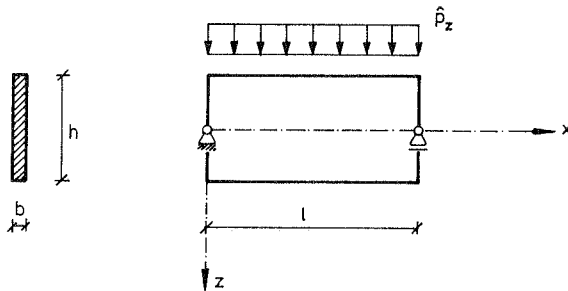
$$\sigma_x(x = \frac{1}{2}, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{\hat{p}_z l}{bh} \left\{ \frac{3}{4} \frac{l}{h} + \frac{1}{5} \frac{h}{l} \right\} \quad (6.91)$$

- Mittenschubspannung

$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{bh} \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad (6.92)$$

#### 6.4.1.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie

##### System und Belastung



##### Spannungskomponenten

Das Vorgehen zur Ermittlung der Spannungskomponenten entspricht dem in Abschnitt 6.2.1 angegebenen. Es müssen lediglich die Gleichungen für die Schnittgrößen (6.46), (6.47) und (6.54), (6.55) durch die hier gültigen Gleichungen ersetzt werden (siehe u.a. Anhang A.3.2.2).

$$\text{Momente:} \quad M_y(x) = \frac{\hat{p}_z l}{2} x - \frac{\hat{p}_z}{2} x^2 \quad (6.93)$$

$$M_\omega(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad (6.94)$$

$$\text{Querkräfte:} \quad Q_z^P(x) = \hat{p}_z \left[ \frac{1}{2} - x + \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad (6.95)$$

$$Q_z^S(x) = -\hat{p}_z \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \quad (6.96)$$

Damit erhält man die folgenden Spannungskomponenten:

$$\sigma_x(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 6 \frac{l x z}{h^3} - 6 \frac{x^2 z}{h^3} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \left\{ 1 - \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right\} \quad (6.97)$$

Gleichgewicht

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -3 \frac{l z^2}{h^3} + \frac{3 l}{4 h} + 6 \frac{x z^2}{h^3} - \frac{3 x}{2 h} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \frac{1008}{\sqrt{420}} \left\{ \frac{5 z^4}{12 h^4} - \frac{1 z^2}{8 h^2} + \frac{1}{192} \right\} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \quad (6.98)$$

Eigenspannungszustand  
(veränderlich in x)

#### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x = \frac{l}{2}, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3 l^2 z}{2 h^3} + 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \quad (6.99)$$

$$\tau_{xz}(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3 l}{4 h} - 3 \frac{l z^2}{h^3} - \left[ \frac{z^4}{h^4} - \frac{3 z^2}{10 h^2} + \frac{1}{80} \right] \sqrt{420} \right\} \quad (6.100)$$

- Randlängsspannung

$$\sigma_x(x = \frac{l}{2}, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ \frac{3 l}{4 h} + \frac{1 h}{5 l} \right\} \quad (6.101)$$

- Mittenschubspannung

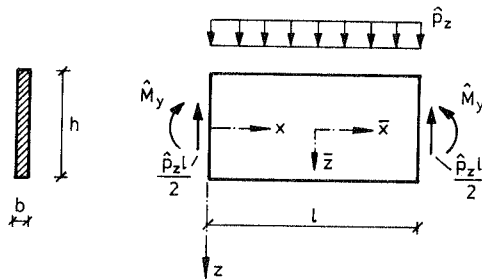
$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{20}} \frac{h}{l} \right\} \quad (6.102)$$

(vgl. mit den Gleichungen 6.86 bis 6.92 in Abschnitt 6.4.1.1)

## 6.4.2 Beidseitig gelagerte Scheibe (2. Art)

### 6.4.2.1 Lösung nach der Scheibentheorie

#### System und Belastung



In [23] wird eine gegenüber dem vorhergehenden Beispiel erweiterte Spannungsfunktion hergeleitet, die es gestattet allgemeinere Lagerbedingungen zu berücksichtigen.

#### Der Lösungsansatz

$$F(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{A}{6} \bar{z}^3 + \frac{B}{6} \bar{x}^2 \bar{z}^3 - \frac{C}{2} \bar{x}^2 \bar{z} + \hat{p}_z(\bar{x}) + \frac{D}{24} \bar{x}^4 \bar{z} - \frac{4B + D}{120} \bar{z}^5 \quad (6.103)$$

führt nach Einarbeiten der Randbedingungen auf die folgenden

#### Spannungskomponenten

$$\sigma_x(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 12 \frac{\hat{M}_y}{\hat{p}_z} \frac{z}{h^3} + \frac{3 l^2 \bar{z}}{2 h^3} - 6 \frac{\bar{x}^2 \bar{z}}{h^3} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{\bar{z}^3}{h^3} - \frac{3 \bar{z}}{5 h} \right\} \quad (6.104)$$

$$\sigma_z(\bar{x}, \bar{z}) = 0 + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3 \bar{z}}{2 h} - 2 \frac{\bar{z}^3}{h^3} \right\} \quad (6.105)$$

$$\tau_{xz}(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 6 \frac{\bar{x} \bar{z}^2}{h^3} - \frac{3 \bar{x}}{2 h} \right\} \quad (6.106)$$

Gleichgewicht

Eigenstresszustand  
(konstant in x)

Für  $\hat{M}_y = 0$  entsprechen die Ausdrücke genau jenen des vorhergehenden Beispiels (gelenkige und nicht wölbbehinderte Lagerung)

Für  $\hat{M}_y = -\frac{\hat{p}_z l^2}{12}$  liegt eine Volleinspannung vor. Für diesen Fall werden im weiteren die Randlängsspannungen und die Mittenschubspannung mit jenen der erweiterten Balkentheorie verglichen.

#### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\alpha_x(\bar{x} = -\frac{1}{2}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{l^2 \bar{z}}{h^3} + 4 \frac{\bar{z}^3}{h^3} - \frac{3 \bar{z}}{5 h} \right\} \quad (6.107)$$

$$\alpha_x(\bar{x} = 0, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ +\frac{1}{2} \frac{l^2 \bar{z}}{h^3} + 4 \frac{\bar{z}^3}{h^3} - \frac{3 \bar{z}}{5 h} \right\} \quad (6.108)$$

$$\tau_{xz}(\bar{x} = -\frac{1}{2}, \bar{z}) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3}{4} \frac{l}{h} - 3 \frac{l \bar{z}^2}{h^3} \right\} \quad (6.109)$$

#### • Randlängsspannung

$$\alpha_x(x = 0, z = \pm \frac{h}{2}) = \mp \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{h} - \frac{1}{5} \frac{h}{l} \right\} \quad (6.110)$$

$$\alpha_x(x = \frac{l}{2}, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ \frac{1}{4} \frac{l}{h} + \frac{1}{5} \frac{h}{l} \right\} \quad (6.111)$$

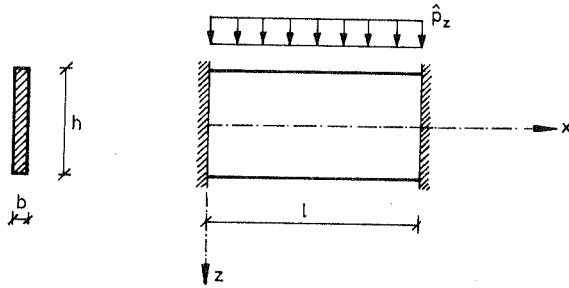
#### • Mittenschubspannung

$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad (6.112)$$



### 6.4.2.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie

#### System und Belastung



#### Spannungskomponenten

Das Vorgehen zur Ermittlung der Spannungskomponenten entspricht wieder dem in Abschnitt 6.2.1 angegebenen, nur daß die Gleichungen für die Schnittgrößen (6.46), (6.47) und (6.54), (6.55) wieder durch die hier gültigen ersetzt werden (siehe u.a. Anhang A.3.2.5).

$$\text{Momente:} \quad M_y(x) = -\frac{\hat{p}_z l^2}{12} + \frac{\hat{p}_z l}{2} x - \frac{\hat{p}_z}{2} x^2 \quad (6.113)$$

$$M_\omega(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{\lambda \frac{1}{2}}{\tanh(\lambda \frac{1}{2})} \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad (6.114)$$

$$\text{Querkräfte:} \quad Q_z^P(x) = \hat{p}_z \left[ \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2 \tanh(\lambda \frac{1}{2})} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad (6.115)$$

$$Q_z^S(x) = -\hat{p}_z \left[ \frac{1}{2 \tanh(\lambda \frac{1}{2})} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad (6.116)$$

Damit erhält man die folgenden Spannungskomponenten:

$$\sigma_x(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{l^2 z}{h^3} + 6 \frac{l x z}{h^3} - 6 \frac{x^2 z}{h^3} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \left[ 1 - \frac{\lambda \frac{1}{2}}{\tanh(\lambda \frac{1}{2})} \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right] \quad \text{Gleichgewicht} \quad (6.117)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -3 \frac{l z^2}{h^3} + \frac{3 l}{4 h} + 6 \frac{x z^2}{h^3} - \frac{3 x}{2 h} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} 504 \left\{ \frac{5 l z^4}{12 h^5} - \frac{1 l z^2}{8 h^3} + \frac{1 l}{192 h} \right\} \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda l - \lambda x)}{\tanh(\lambda \frac{1}{2}) \sinh(\lambda l)} \quad \text{Eigenspannungszustand (veränderlich in x)} \quad (6.118)$$

### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{l^2 z}{h^3} + \left[ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right] \left[ 1 - \frac{\sqrt{420}}{2} \frac{l}{h} \right] \right\} \quad (6.119)$$

$$\sigma_x(x = \frac{l}{2}, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ +\frac{1 l^2 z}{2 h^3} + 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \quad (6.120)$$

$$\tau_{xz}(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{15 l}{8 h} + 60 \frac{l z^2}{h^3} - 210 \frac{l z^4}{h^5} \right\} \quad (6.121)$$

- Randlängsspannung

$$\sigma_x(x = 0, z = \pm \frac{h}{2}) = \mp \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{1 l}{2 h} - \frac{1 h}{5 l} + 2 \sqrt{\frac{21}{20}} \right] \quad (6.122)$$

$$\sigma_x(x = \frac{l}{2}, z = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{1 l}{4 h} + \frac{1 h}{5 l} \right] \quad (6.123)$$

- Mittenschubspannung

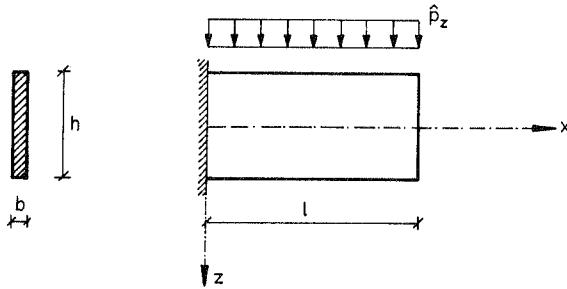
$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{3}{4} - \frac{21}{8} \right] = -\frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{15}{8} \right] \quad (6.124)$$

(vgl. mit den Gleichungen 6.104 bis 6.112 in Abschnitt 6.4.2.1)

### 6.4.3 Kragträger unter Gleichlast

#### 6.4.3.1 Lösung nach der Scheibentheorie

##### System und Belastung



In [41] wird die Spannungsverteilung eines unter Gleichlast belasteten Kragträgers angegeben, die man erhält, wenn man als Spannungsfunktion einen Polynom-Ansatz 5. Ordnung wählt. Man erhält die folgenden

##### Spannungskomponenten

$$\sigma_x(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l^2 z}{h^3} + 12 \frac{l x z}{h^3} - 6 \frac{x^2 z}{h^3} \right\} + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \quad (6.125)$$

$$\sigma_z(x, z) = 0 + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{3 z}{2 h} - 2 \frac{z^3}{h^3} \right\} \quad (6.126)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l z^2}{h^3} + \frac{3 l}{2 h} + 6 \frac{x z^2}{h^3} - \frac{3 x}{2 h} \right\} \quad (6.127)$$

Gleichgewicht

Eigenspannungszustand  
(konstant in x)

##### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l^2 z}{h^3} + 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \quad (6.128)$$

$$\tau_{xz}(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ \frac{3}{2} \frac{l}{h} - 6 \frac{lz^2}{h^3} \right\} \quad (6.129)$$

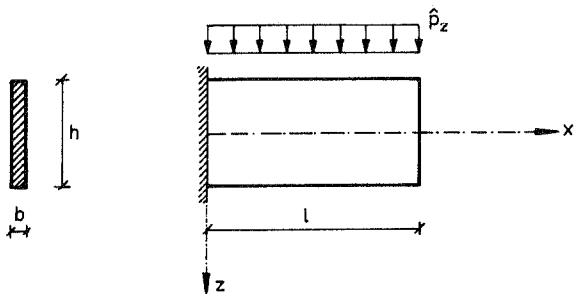
- Randlängsspannung

$$\alpha_x(x = 0, z = \pm \frac{h}{2}) = \mp \frac{\hat{p}_z l}{bh} \left\{ 3 \frac{l}{h} - \frac{1}{5} \frac{h}{l} \right\} \quad (6.130)$$

- Mittenschubspannung

$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{bh} \left\{ \frac{3}{2} \right\} \quad (6.131)$$

#### 6.4.3.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie



#### Spannungskomponenten

Bei entsprechendem Vorgehen wie im Abschnitt 6.2.1 bzw. wie in den vorhergehenden Abschnitten 6.4.1.2 und 6.4.2.2 mit den hier gültigen Gleichungen für die Schnittgrößen (siehe u.a. Anhang A.3.1.3)

$$\text{Momente:} \quad M_y(x) = -\frac{\hat{p}_z l^2}{2} + \hat{p}_z l x - \frac{\hat{p}_z}{2} x^2 \quad (6.132)$$

$$M_w(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 + \lambda l \sinh \lambda x - \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] \cosh(\lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right] \quad (6.133)$$

$$\text{Querkräfte: } Q_z^P(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda} \left[ \lambda x' - \lambda l \cosh(\lambda x) + \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] \sinh(\lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right] \quad (6.134)$$

$$Q_z^S(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda} \left[ \lambda l \cosh(\lambda x) - \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] \sinh(\lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right] \quad (6.135)$$

erhält man die folgenden Spannungskomponenten:

$$\begin{aligned} \alpha_x(x, z) = & \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l^2 z}{h^3} + 12 \frac{l x z}{h^3} - 6 \frac{x^2 z}{h^3} \right\} \\ & + \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right\} \left\{ 1 + \lambda l \sinh(\lambda x) - \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] \cosh(\lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Gleichgewicht} \\ (6.136) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, z) = & \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l z^2}{h^3} + \frac{3 l}{2 h} + 6 \frac{x z^2}{h^3} - \frac{3 x}{2 h} \right\} \\ & + \frac{\hat{p}_z}{b} \frac{1008}{\sqrt{420}} \left\{ \frac{5 z^4}{12 h^4} - \frac{1 z^2}{8 h^2} + \frac{1}{192} \right\} \left\{ -\lambda l \cosh(\lambda x) + \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] \sinh(\lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right\} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Eigenspannungszustand} \\ \text{(veränderlich in } x) \\ (6.137) \end{array}$$

#### Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\alpha_x(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -6 \frac{l^2 z}{h^3} + \left[ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3 z}{5 h} \right] \left[ 1 - \sqrt{420} \frac{l}{h} \right] \right\} \quad (6.138)$$

$$\tau_{xz}(x = 0, z) = \frac{\hat{p}_z}{b} \left\{ -\frac{15 l}{4 h} + 120 \frac{l z^2}{h^3} - 420 \frac{l z^4}{h^5} \right\} \quad (6.139)$$

- Randlängsspannung

$$\alpha_x(x = 0, z = \pm \frac{h}{2}) = \mp \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left\{ 3 \frac{1}{h} - \frac{1 h}{5 l} + 4 \sqrt{\frac{21}{20}} \right\} \quad (6.140)$$

- Mittenschubspannung

$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{3}{2} - \frac{21}{4} \right] = -\frac{\hat{p}_z l}{b h} \left[ \frac{15}{4} \right] \quad (6.141)$$

(vgl. mit den Gleichungen 6.125 bis 6.131 in Abschnitt 6.4.3.1)

### 6.4.3.3 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebungen

- Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz (ST)

$$w(x) = \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{EI_y} \left[ \frac{1}{4} l^2 x^2 - \frac{1}{6} l x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right]}_{w_b} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \frac{x^2}{2}}_{w_s^{ST}} \quad (6.142)$$

$$w(x = l) = \frac{\hat{p}_z l^4}{8EI_y} + \frac{\hat{p}_z l^2}{2GA_s}$$

- Timoshenko-Balkentheorie (TB)

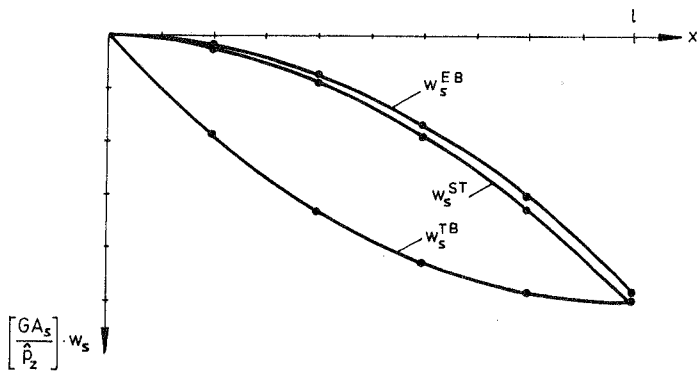
$$w(x) = \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{EI_y} \left[ \frac{1}{4} l^2 x^2 - \frac{1}{6} l x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right]}_{w_b} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ l x - \frac{x^2}{2} \right]}_{w_s^{TB}} \quad (6.143)$$

$$w(x = l) = \frac{\hat{p}_z l^4}{8EI_y} + \frac{\hat{p}_z l^2}{2GA_s}$$

- Erweiterte Balkentheorie (EB)

$$w(x) = \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{EI_y} \left[ \frac{1}{4} l^2 x^2 - \frac{1}{6} l x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right]}_{w_b} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ l x - \frac{x^2}{2} \right]}_{w_s^{TB}} - \underbrace{\frac{1}{\lambda^2} \left( \lambda l \sinh(\lambda x) - \frac{[1 + \lambda l \sinh(\lambda l)] [\cosh(\lambda x) - 1]}{\cosh(\lambda l)} \right)}_{w_s^{EB}} \quad (6.144)$$

$$w(x = l) = \frac{\hat{p}_z l^4}{8EI_y} + \frac{\hat{p}_z l^2}{2GA_s} \left[ 1 - \left[ \frac{1}{\sqrt{105}} \frac{h}{l} - \frac{1}{210} \frac{h^2}{l^2} \right] \right]$$

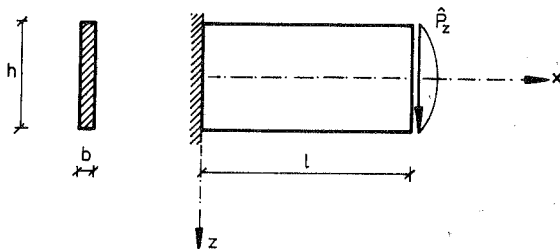


**Bild 6.2** Qualitativer Verlauf der Vertikalverschiebungen infolge Schub  
 ST ... Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz  
 TB ... Timoshenko-Balkentheorie  
 EB ... erweiterte Balkentheorie

#### 6.4.4 Kragträger unter Einzellast

##### 6.4.4.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie

###### System und Belastung



Spannungskomponenten (vgl. Abschnitt 6.4.3.2)

Mit den hier gültigen Schnittgrößen (siehe u.a. Anhang A.3.1.1) für

$$\text{Momente:} \quad M_y(x) = \hat{P}_z(x-l) \quad (6.145)$$

$$M_\omega(x) = -\frac{\hat{P}_z \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\lambda \cosh(\lambda l)} \quad (6.146)$$

$$\text{Querkräfte:} \quad Q_z^P(x) = \hat{P}_z \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda l - \lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right) \quad (6.147)$$

$$Q_z^S(x) = \hat{P}_z \frac{\cosh(\lambda l - \lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \quad (6.148)$$

erhält man die folgenden Spannungskomponenten:

$$\sigma_x(x, z) = \frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ -12 \frac{lz}{h^2} + 12 \frac{xz}{h^2} \right\} + \frac{\hat{P}_z}{bh} \frac{1008}{\sqrt{420}} \left\{ \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^3} - \frac{1}{4} \frac{z}{h} \right\} \frac{\sinh(\lambda x - \lambda l)}{\cosh(\lambda l)} \quad (6.149)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \underbrace{\frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ -6 \frac{z^2}{h^2} + \frac{3}{2} \right\}}_{\text{Gleichgewicht}} + \underbrace{\frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ 420 \frac{z^4}{h^4} - 126 \frac{z^2}{h^2} + \frac{21}{4} \right\}}_{\text{Eigenspannungszustand}} \left\{ -\frac{\cosh(\lambda l - \lambda x)}{\cosh(\lambda l)} \right\} \quad (6.150)$$

(konstant in x)

Spannungswerte an ausgezeichneten Stellen

$$\sigma_x(x = 0, z) = \frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ -12 \frac{lz}{h^2} - \left[ 4 \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{z}{h} \right] \sqrt{420} \right\} \quad (6.151)$$

$$\tau_{xz}(x = 0, z) = \frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ -420 \frac{z^4}{h^4} + 120 \frac{z^2}{h^2} - \frac{15}{4} \right\} \quad (6.152)$$

• Randlängsspannung

$$\sigma_x(x = 0, z = \pm \frac{h}{2}) = \mp \frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ 6 \frac{1}{h} + 4 \sqrt{\frac{21}{20}} \right\} \quad (6.153)$$

• Mittenschubspannung

$$\tau_{xz}(x = 0, z = 0) = \frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{21}{4} \right\} = -\frac{\hat{P}_z}{bh} \left\{ \frac{15}{4} \right\} \quad (6.154)$$



### 6.4.4.2 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebung

Häufig wird im Schrifttum zum Zweck des Vergleichs der Verschiebungen die "Scheibenlösung des Kragträgers unter Einzellast" zitiert. Unter dieser werden i.a. jedoch drei verschiedene Lösungen verstanden, wobei allen die gleichen Spannungsannahmen zugrunde liegen:

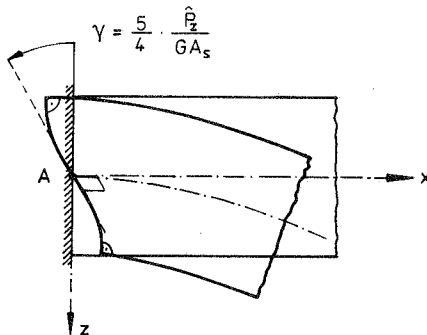
- lineare Längsspannungsverteilung
- quadratische Schubspannungsverteilung

Sie unterscheiden sich lediglich in der geometrischen Berücksichtigung der Einspannung selbst (geometrische oder Verschiebungs-Randbedingung). Es handelt sich dabei um die folgenden Interpretationen:

- Scheibenlösung I (siehe u.a. in [23] und [76])

$$\left. \begin{aligned} \text{Verschiebungsrandbedingungen: } u(x=0, z=0) &= 0 \\ w(x=0, z=0) &= 0 \\ \frac{\partial w(x=0, z=0)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (Pkt. A)}$$

d.h., die Tangente an die Stabachse soll an der Einspannstelle horizontal bleiben.



Damit erhält man die folgenden Gleichungen für die Vertikalverschiebung der Stabachse:

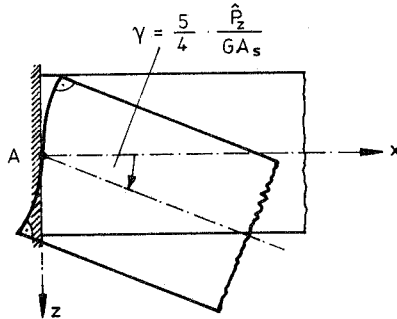
$$w(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_y} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] \quad (6.155)$$

$$w(x=l) = \frac{\hat{P}_z l^3}{3EI_y} \quad \text{Dies entspricht der Lösung nach der Bernoulli-Balkentheorie.}$$

- Scheibenlösung II (siehe u.a. in [23] und [76])

$$\left. \begin{aligned} \text{Verschiebungsrandbedingungen: } u(x=0, z=0) &= 0 \\ w(x=0, z=0) &= 0 \\ \frac{\partial u(x=0, z=0)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(Pkt. A)}$$

d.h., an der Einspannstelle hat der Querschnittspunkt auf der Stabachse eine vertikale Tangente.



Man erhält die folgende Gleichung für die Vertikalverschiebung:

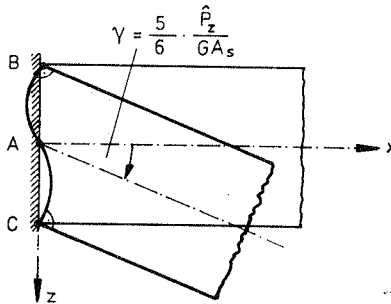
$$w(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_y} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \frac{5}{4} x \quad (6.156)$$

$$w(x=l) = \underbrace{\frac{\hat{P}_z l^3}{3EI_y}}_{\text{Bernoulli-}} + \underbrace{\frac{5}{4} \frac{\hat{P}_z l}{GA_s}}_{\text{Timoshenko-Balkenlösung}}$$

"Timoshenko"-Scheibenlösung (u.a. in [42])

- Scheibenlösung III (siehe u.a. in [26])

$$\left. \begin{aligned} \text{Verschiebungsrandbedingungen: } u(x=0, z=0) &= 0 \\ w(x=0, z=0) &= 0 \\ u(x=0, z=\pm \frac{h}{2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(Pkt. A)} \\ \text{(Pkt. B u. C)} \end{array}$$



Man erhält folgende Gleichung für die Vertikalverschiebung:

$$w(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_y} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \frac{5}{6} x \quad (6.157)$$

$$w(x=l) = \underbrace{\frac{\hat{P}_z l^3}{3EI_y}}_{\text{Bernoulli-}} + \underbrace{\frac{5}{6} \frac{\hat{P}_z l}{GA_s}}_{\text{Timoshenko-Balkenlösung}}$$

Timoshenko-Balkenlösung ohne Zusatzbetrachtung  $\alpha_s$

Dieses Ergebnis entspricht genau dem Ergebnis der Timoshenko-Balkentheorie ohne den über eine Zusatzbetrachtung (Energievergleich) ermittelten Schubkorrekturfaktor  $\alpha_s$ .

• Erweiterte Balkentheorie

Für das gleiche Beispiel erhält man nach der erweiterten Balkentheorie (Berücksichtigung der Wölbbehinderung) das folgende Ergebnis für die Vertikalverschiebung (vgl. Anhang A.3.1.1):

$$w(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_y} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + \frac{\hat{P}_z}{GA_s} x - \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \frac{1}{\lambda} \frac{\sinh(\lambda l) - \sinh(\lambda l - \lambda x)}{\cosh \lambda l} \quad (6.158)$$

$$w(x=1) = \underbrace{\frac{\hat{P}_z l^3}{3EI_y}}_{\text{Bernoulli-}} + \underbrace{\frac{\hat{P}_z l}{GA_s}}_{\text{Timoshenko-}} - \underbrace{\frac{\hat{P}_z}{GA_s} \frac{1}{\lambda} \tanh(\lambda l)}_{\text{erweiterte}}$$

elementare
Balkentheorie

**6.4.5 Abschließende Bemerkung**

Vergleicht man in den vorangegangenen Beispielen die Spannungsausdrücke nach der Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz mit denen nach der erweiterten Balkentheorie, so stellt man folgendes fest:

- Der erste Term in allen Spannungsausdrücken stellt jeweils den Spannungsanteil nach der elementaren Balkentheorie dar.
- Der zweite Term in den Ausdrücken für die Randlängsspannungen nach der erweiterten Balkentheorie unter Berücksichtigung der quadratisch verlaufenden primären Schubverzerrungen und der Scheibentheorie mit kubischem Längsspannungsansatz entsprechen sich in den Beispielen mit Gleichstreckenbelastung genau. Er hat den Faktor "1/5".
- Die Ausdrücke für die Randlängsspannungen nach der erweiterten Balkentheorie weisen gegenüber denjenigen nach der Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz an den Einspannstellen (Beispiele nach Abschnitt 6.4.2 und Abschnitt 6.4.3) jeweils noch einen dritten Term auf.

Dieser Term bedingt die höhere Randlängsspannung nach der erweiterten Balkentheorie (Gl. 6.122 und 6.140). Die Randlängsspannung nach der Scheibentheorie (Gl. 6.110) ist hier sogar kleiner als nach der elementaren Balkentheorie. Dies ist i.w. auf die Berücksichtigung der Lasteinleitung am oberen bzw. unteren Scheibenrand bei der Berechnung nach der Scheibentheorie zurückzuführen.

- Der Vergleich der Ausdrücke für die Randlängsspannungen des unter einer Einzellast stehenden mit dem unter einer Gleichstreckenlast stehenden Kragträgers (Gl. 6.140 in Abschnitt 6.4.3.2 und Gl. 6.153 in Abschnitt 6.4.4.1) zeigt nur das Fehlen des von Systemen unter Gleichstreckenbelastung her bekannten zweiten Terms mit dem Faktor "1/5".
- Die Ausdrücke für die Schubspannungen nach der Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz entsprechen jeweils den von der elementaren Balkentheorie her bekannten Verläufen. Dagegen weisen die Ausdrücke nach der erweiterten Balkentheorie jeweils noch einen weiteren Term auf.  
Dieses unterschiedliche Ergebnis in den Schubspannungen ist auf die unterschiedliche Annahme der Lasteinleitung zurückzuführen. Während bei der elementaren Balkentheorie aus Gleichgewichtsgründen und bei der Scheibentheorie durch die Wahl der Spannungsfunktion die Art der Lasteinleitung, in diesem Fall in Form einer quadratischen Parabel, vorgeschrieben wird, wird bei der erweiterten Balkentheorie ein quartischer Schubspannungsverlauf angenommen, der durch die zusätzliche Berücksichtigung eines Eigenspannungszustandes infolge Wölbbehinderung entsteht. Weder die eine noch die andere Annahme kann die Verhältnisse im Auflagerbereich wirklichkeitstreu beschreiben.  
Allerdings scheint der Schubspannungswert nach der elementaren Balkentheorie bzw. nach der Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz an einem Gelenk (Gl. 6.92) auf Grund der theoretisch konzentrierten Lasteinleitung in Balkenmitte zutreffender zu sein als der dort abgeminderte Schubspannungswert nach der erweiterten Balkentheorie (Gl. 6.102). Diese Aussage gilt tendentiell umgekehrt für den Schubspannungswert auf der Balkenachse an einer Einspannstelle (Gl. 6.112 und 6.124 sowie Gl. 6.131 und 6.141). Allerdings ließe sich hier das Ergebnis nach der erweiterten Balkentheorie durch Hinzunahme weiterer "Reihenglieder" entsprechend Bild 4.7 in Abschnitt 4.3 noch wesentlich verbessern.
- Führt man im Beispiel nach Abschnitt 6.4.2 für die Hyperbelfunktionen in den Ausdrücken für die primäre und sekundäre Querkraft sowie das Wölbmoment der erweiterten Balkentheorie eine Reihenentwicklung durch, so lassen sich durch entsprechenden Reihenabbruch die Spannungsergebnisse direkt an der Einspannstelle in jene nach der Scheibentheorie mit Polynom-Ansatz 5.Ordnung für die Spannungsfunktion überführen. Man erhält z.B. bei Abbruch nach dem ersten Glied für
  - die Randlängsspannung das gleiche Ergebnis wie nach der Scheibentheorie und für
  - die Mittenschubspannung das gleiche, auch hier plausible Ergebnis wie im Beispiel von Abschnitt 6.4.1 nach der Scheibentheorie (Gl. 6.92).
- In Bild 6.2 von Abschnitt 6.4.3.3 ist das Ergebnis verschiedener Verschiebungsberechnungen für den unter Gleichstreckenlast stehenden Kragträger dargestellt. Man erkennt, daß die vertikalen Endverschiebungen nach der Scheibentheorie mit Polynom-Spannungsansatz [41] und nach der Timoshenko-Balkentheorie identisch sind. die Verschiebungsverläufe beider Theorien dagegen stark voneinander abweichen. Während die Balkenachse direkt an der Einspannstelle nach der Scheiben-

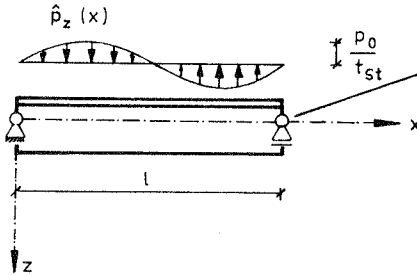
theorie mit diesem Polynom–Spannungsansatz horizontal beginnt, hat diese dort nach der Timoshenko–Balkentheorie bekanntlich einen Knick. Dieser Knick wird in der erweiterten Balkentheorie durch zusätzliche Terme infolge Wölbbehinderung korrigiert. Der Verschiebungsverlauf nach der erweiterten Balkentheorie entspricht qualitativ dem der Scheibentheorie bei geringfügig kleineren Werten.

- Eine Spannungs– oder Verschiebungsberechnung für das Beispiel eines Kragträgers unter Einzellast (Abschnitt 6.4.4) explizit nach der Scheibentheorie mit Polynom–Ansatz höherer (größer 3.) Ordnung für die Spannungsfunktion wurde im Schrifttum nicht gefunden, daher wurden die Spannungen nach der erweiterten Balkentheorie durch den Vergleich mit den Spannungen plausibel gemacht (s.o.), die für das Beispiel eines Kragträgers unter Gleichlast (Abschnitt 6.4.3) erzielt werden. Ebenso dient der Vergleich mit den häufig in der Literatur zitierten Verschiebungslösungen nur der Plausibilität des Ergebnisses nach der erweiterten Balkentheorie.

## 7 Beschreibung des "Shear-Lag-Effektes" durch die erweiterte Balkentheorie und Klassifizierung an einem Beispiel

Am Beispiel eines Plattenbalkens unter sinusförmiger Belastung (vgl. Abschnitt 6.1) wird die Güte der erweiterten Balkentheorie zur Beschreibung des "Shear-Lag-Effektes" durch den Vergleich mit anderen Theorien abgeschätzt.

### System und Belastung



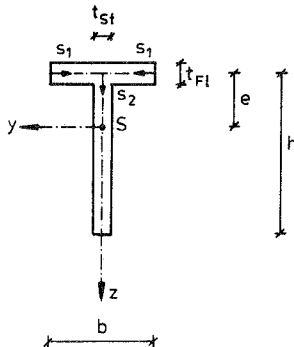
Art der Lasteinleitung  
nicht vorgeschrieben

Darstellung für  $n = 2$

$$\hat{p}_z(x) = \frac{p_0}{t_{st}} \sin(ax)$$

$$\text{mit: } a = \frac{n\pi}{l}$$

### Querschnitt



(siehe u.a. Anhang A1.2, A2.2 und A3.2.3)

Unter Shear-Lag versteht man in diesem Zusammenhang "die Abnahme der Längsspannungen in dünnwandigen Querschnittsteilen mit zunehmender Entfernung von der Hauptbiegeebene, die auf eine entsprechende Schubspannungsverteilung nach den elementaren (Balken-, Scheiben-) Theorien zurückzuführen ist" .

Miteinander verglichen werden die Ergebnisse der Längsspannungen im gegliederten Querschnitt nach verschiedenen, aus dem Schrifttum bekannten Varianten der elementaren Faltwerkstheorie (siehe u.a. in [79], [48], [13], [19], [26] und [61]) sowie der elementaren und erweiterten Balkentheorie.

Allen diesen Varianten der elementaren Faltwerkstheorie liegen die folgenden Annahmen zugrunde:

- Die Lasteinleitung erfolgt in den parallel zur Hauptbiegeebene liegenden Querschnittsteilen, bzw. in Querschnittsteilen, die schief zur Hauptbiegeebene liegen, durch entsprechende Komponentenzerlegung
- die einzelnen Teile des gegliederten Querschnitts sind miteinander scharnierartig verbunden, d.h., es werden
  - in Querrichtung generell keine Biegemomente und
  - in Längsrichtung entlang der Scharniergelenke nur Schubkräfte übertragen
- in senkrecht zur Hauptbiegeebene liegenden Querschnittsteilen herrscht ein reiner Schubspannungszustand; die Biege-Tragwirkung wird dort also vernachlässigt.
- die Dehnungen in den Mittelebenen der Querschnittsteilflächen werden als über die Querschnittsdicken gemittelte Werte betrachtet.

Diese Annahmen sind gerechtfertigt, wenn – wie im folgenden vorausgesetzt wird – gilt:

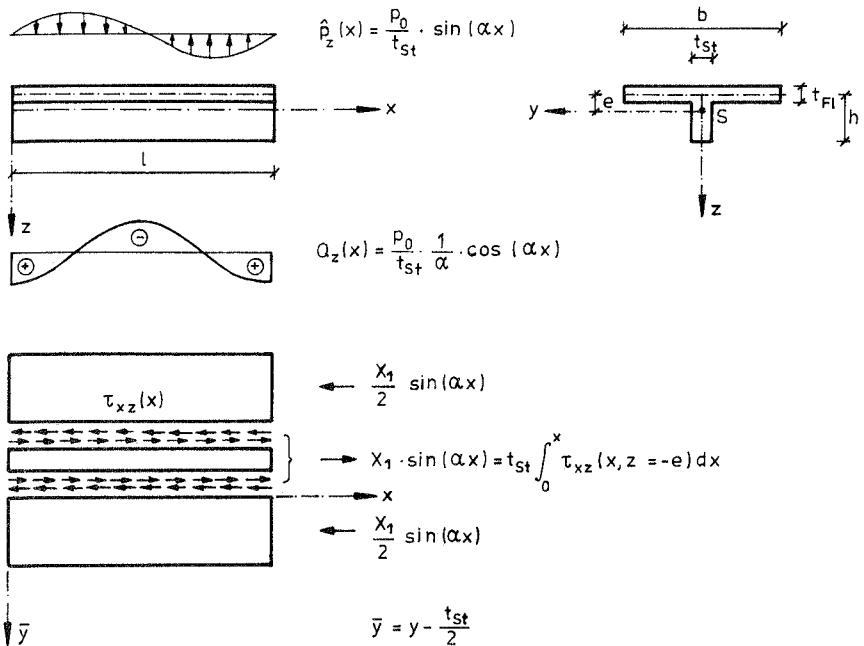
- die Dicken der Querschnittsteilflächen sind klein in Bezug auf deren Breite.

Die einzelnen Varianten der elementaren Faltwerkstheorie unterscheiden sich nun durch weitere spezielle Annahmen, die in der unten angegebenen Zusammenstellung der verglichenen Theorien mit aufgeführt werden.

Eine Berechnung des Faltwerks kann dann z.B. nach dem Kraftgrößenverfahren erfolgen, wobei die von der Ordinate ( $x$ ) in Stablängsrichtung abhängigen Schubspannungen entlang der Scharniergelenke die statisch Unbestimmten darstellen.

Auf gleiche Weise, über eine statisch unbestimmte Rechnung, läßt sich die Spannungsermittlung nach der elementaren Balkentheorie durchführen (Bild 7.1). Bei einem Vorgehen entsprechend der elementaren Faltwerkstheorie muß hierbei die Biege-Tragwirkung senkrecht zur Hauptbiegeebene liegender Querschnittsteile ebenfalls vernachlässigt werden.





**Bild 7.1** Statisch Unbestimmte bei der Berechnung nach der Faltwerkstheorie

Zum Vergleich der Längsspannungs-Ergebnisse im Plattenbalken-Querschnitt werden die folgenden Theorien herangezogen:

1. Die elementare Balkentheorie (technische Biegelehre)

Die Berechnung der Verformungen sowohl des Steges als auch der Flansche erfolgt nach der elementaren (Bernoulli-) Balkentheorie (Ebenbleiben aller Querschnittsteile).

Es werden zwei Fälle unterschieden:

- a. Berechnung unter Berücksichtigung der Biege-Tragwirkung der Flansche in Längsrichtung (TBa)
- b. Berechnung entsprechend der elementaren Faltwerkstheorie, ohne Berücksichtigung der Biege-Tragwirkung der Flansche in Längsrichtung (TBb)

## 2. Die klassische Faltwerkstheorie

Die Berechnung der Verformungen des Steges erfolgt nach der elementaren Balkentheorie, die Berechnung der Verformungen der Flansche nach der Scheibentheorie. (Ebenbleiben nur des Steg-Querschnittes).

Hierfür gibt es im wesentlichen zwei Varianten:

- a. Berechnung mit vereinfachender Annahme unendlich breiter Flansche (KTa)
- b. Berechnung ohne einschränkende Annahme, d.h. Beachtung der endlichen Flanschbreiten (KTb)

## 3. Die strenge Faltwerkstheorie

Die Berechnung der Verformungen sowohl des Steges als auch der Flansche erfolgt nach der Scheibentheorie.

Auch hier werden zwei Varianten betrachtet:

- a. Die Berechnung erfolgt ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung, d.h., die Stegscheibe wird gleichmäßig am oberen und unteren Rand belastet (STa)
- b. Die Berechnung erfolgt mit Berücksichtigung der Lasteinleitung, die Belastung der Stegscheibe erfolgt nur an ihrem oberen Rand (STb).

Im weiteren wird noch die mitttragende Breite nach der erweiterten Balkentheorie ermittelt und denjenigen, die nach den anderen Theorien erhalten werden, gegenübergestellt.

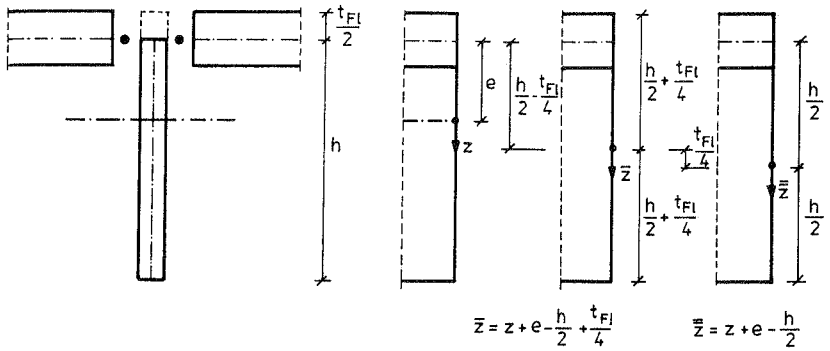
Ergänzende Bemerkung:

Das Ergebnis der Längsspannungen nach den Faltwerkberechnungen wird entsprechend dem Vorgehen bei den Balkentheorien aus Vergleichsgründen über den Mittellinien der Querschnittsteilflächen unter Vernachlässigung der Querschnittsdicken aufgetragen.

Ebenfalls aus dem Grund, gleiche Voraussetzungen für einen sinnvollen Vergleich zu schaffen, wird bei der strengen Faltwerkstheorie der Spannungs- und Dehnungszustand des Steges in einem Scheibenquerschnitt mit Systemlinienhöhe entsprechend dem Vorgehen bei der Balkentheorie ermittelt (Bild 7.2).

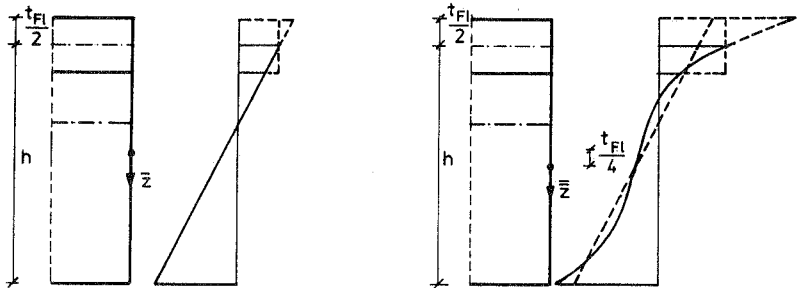
Querschnitt

Seitenansichten



a. Definition der Querschnittskordinaten  $z$ ,  $\bar{z}$  und  $\bar{\bar{z}}$

Längsdehnungen



b. elementare Balkentheorie (TB)  
klassische Faltwerkstheorie (KT)

c. erweiterte Balkentheorie (EB)  
strenge Faltwerkstheorie (ST) \*

Bild 7.2 Dehnungsannahmen der verglichenen Theorien

(\* ... Unterschied für gewöhnliche Balkenabmessungen nicht darstellbar)

## 7.1 Lösung des Falwerkproblems nach verschiedenen Theorien

### 7.1.1 Elementare Balkentheorie (TB)

Die Berechnung der Längsspannungen in einem gegliederten Querschnitt, insbesondere im T-Profil, kann hier entweder analog der Berechnung der Längsspannungen in einem Rechteck-Querschnitt erfolgen, nach der bekannten Formel

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (7.1)$$

mit:  $z = 0$  ... Schwerachse des Gesamtquerschnitts  
oder, wie oben bereits erwähnt, analog dem Vorgehen bei der Berechnung nach der elementaren Falwerktheorie über eine statisch unbestimmte Rechnung.

Um nach beiden Vorgehensweisen die gleichen Ergebnisse zu erzielen, muß u.a. beachtet werden, daß in Gleichung (7.1) das Trägheitsmoment  $I_y$  jeweils auf die Schwerachse des Gesamtquerschnitts ( $z = 0$ ) bezogen wird, während in den Null- und Einheitszuständen der Falwerksberechnung (s.u.) die Bezugsachse gleich der Schwerachse des Steges ( $\bar{z} = 0$ ) ist. Außerdem sind in das Trägheitsmoment der Gleichung (7.1) alle Anteile der Flansche bzw. nur die Flanschanteile nach Steiner-Huygens einzurechnen, je nachdem ob die Biege-Tragwirkung der Flansche berücksichtigt werden soll oder nicht. Beim Vorgehen nach der Falwerktheorie setzt sich das Trägheitsmoment jeweils nur aus den Trägheitsmomenten der Einzelquerschnitte (hier nur des Steges) zusammen (also ohne Anteile nach Steiner-Huygens).

Im folgenden werden die wesentlichen Rechenschritte zur Spannungsermittlung für das Vorgehen entsprechend der Falwerktheorie für beide Varianten

- TBa (unter Berücksichtigung der Biege-Tragwirkung der Flansche) und
  - TBb (ohne Berücksichtigung der Biege-Tragwirkung der Flansche)
- angegeben:

- Nullzustand

– Steg: Einachsige Spannungs–Dehnungs–Beziehung

$$E\epsilon_{xSt}^0(x, \bar{z}) = \sigma_{xSt}^0(x, \bar{z}) = \frac{M_y^0(x)}{I_{ySt(+F)}} \bar{z}$$

mit: 
$$I_{ySt(+F)} = \frac{t_{St} \left( h + \frac{t_{Fl}}{2} \right)^3}{12} + \frac{(b - t_{St}) t_{Fl}^3}{12} \quad \text{bei TBa}$$

bzw.: 
$$I_{ySt} = \frac{t_{St} \left( h + \frac{t_{Fl}}{2} \right)^3}{12} \quad \text{bei TBb}$$

$$E\epsilon_{xSt}^0(x, \bar{z} = -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4}) = \frac{\left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right) p_0 l^2}{I_{ySt(+F)} n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.2)$$

- Einheitszustand

– Steg: Einachsige Spannungs–Dehnungs–Beziehung

$$E\epsilon_{xSt}^1(x, \bar{z}) = \sigma_{xSt}^1(x, \bar{z}) = \frac{M_y^1(x)}{I_{ySt(+F)}} \bar{z} + \frac{N_x^1(x)}{A_{St}}$$

mit: 
$$A_{St} = t_{St} \left( h + \frac{t_{Fl}}{2} \right)$$

$$N_x^1(x) = X_1 \sin(ax) = 1 \sin(ax)$$

$$M_y^1(x) = \bar{z}_{Fl} X_1 \sin(ax) = \left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right) \sin(ax)$$

$$E\epsilon_{xSt}^1(x, \bar{z} = -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4}) = \left[ \frac{\left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right)^2}{I_{ySt(+F)}} + \frac{1}{A_{St}} \right] \sin(ax) \quad (7.3)$$

- Flansch: Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E\epsilon_{x_{FI}}^1(x, \bar{y}) = \sigma_{x_{FI}}^1(x, \bar{y}) = \frac{N_x^1(x)}{A_{FI}}$$

mit:  $A_{FI} = (b - t_{St})t_{FI}$

$$E\epsilon_{x_{FI}}^1(x, \bar{y}) = \frac{1}{A_{FI}} \sin(ax) \quad (7.4)$$

• Kontinuitätsbedingung

$$X_1 = \bar{X}_1 \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} = - \frac{\epsilon_{x_{St}}^0}{\epsilon_{x_{St}}^1 + \epsilon_{x_{FI}}^1} \quad (7.5)$$

• Längsspannungen

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + X_1 \sigma_x^1 \quad (7.5)$$

- Steg:

$$\sigma_{x_{St}}(x, \bar{z}) = \left\{ \frac{\bar{z}}{I_{y_{St(+FI)}}} + \bar{X}_1 \left[ \frac{\left(-\frac{h}{2} + \frac{t_{FI}}{4}\right)}{I_{y_{St(+FI)}}} \bar{z} + \frac{1}{A_{St}} \right] \right\} \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.6)$$

- Flansch:

$$\sigma_{x_{FI}}(x, \bar{y}) = -\bar{X}_1 \left[ \frac{1}{A_{FI}} \right] \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.7)$$

### 7.1.2 Klassische Theorie (KT)

Die wesentlichen Rechenschritte zur Ermittlung der Längsspannungen nach der klassischen Falwerkstheorie für die beiden Varianten

- KTa (Annahme unendlich breiter Flansche) und
  - Ktb (Beachtung der endlichen Flanschbreiten)
- sind wie folgt:

- Nullzustand

- Steg: Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E\epsilon_{xst}^0(x, \bar{z}) = \sigma_{xst}^0(x, \bar{z}) = \frac{M_y^0(x)}{I_{yst}} \bar{z}$$

mit: 
$$I_{yst} = \frac{t_{St} \left( h + \frac{t_{Fl}}{2} \right)^3}{12} \quad (\text{vgl. Abschnitt 7.1.1})$$

$$E\epsilon_{xst}^0(x, \bar{z} = -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4}) = \frac{\left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right) p_0 l^2}{I_{yst} n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.8)$$

- Einheitszustand

- Steg: Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E\epsilon_{xst}^1(x, \bar{z}) = \sigma_{xst}^1(x, \bar{z}) = \frac{M_y^1(x)}{I_{yst}} \bar{z} + \frac{N_x^1(x)}{A_{St}}$$

mit: 
$$A_{St} = t_{St} \left( h + \frac{t_{Fl}}{2} \right)$$

$$N_x^1(x) = X_1 \sin(ax) = 1 \sin(ax)$$

$$M_y^1(x) = \bar{z}_{Fl} X_1 \sin(ax) = \left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right) \sin(ax)$$

$$E\epsilon_{xst}^1(x, \bar{z} = -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4}) = \left[ \frac{\left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} \right)^2}{I_{yst}} + \frac{1}{A_{St}} \right] \sin(ax) \quad (7.9)$$

- Flansch: Airysche Spannungsfunktion

$$F(x, \bar{y}) = \frac{1}{a^2} \left[ \left( A_{Fl}^1 + a\bar{y}B_{Fl}^1 \right) e^{-a\bar{y}} + \left( C_{Fl}^1 + a\bar{y}D_{Fl}^1 \right) e^{a\bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.10)$$

### Spannungskomponenten

$$\sigma_x(x, \bar{y}) = \left[ (A_{F1}^1 - 2B_{F1}^1 + \alpha \bar{y} B_{F1}^1) e^{-\alpha \bar{y}} + (C_{F1}^1 + 2D_{F1}^1 + \alpha \bar{y} D_{F1}^1) e^{\alpha \bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.11)$$

$$\sigma_y(x, \bar{y}) = - \left[ (A_{F1}^1 + \alpha \bar{y} B_{F1}^1) e^{-\alpha \bar{y}} + (C_{F1}^1 + \alpha \bar{y} D_{F1}^1) e^{\alpha \bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.12)$$

$$\tau_{xy}(x, \bar{y}) = \left[ (A_{F1}^1 - B_{F1}^1 + \alpha \bar{y} B_{F1}^1) e^{-\alpha \bar{y}} - (C_{F1}^1 + D_{F1}^1 + \alpha \bar{y} D_{F1}^1) e^{\alpha \bar{y}} \right] \cos(ax) \quad (7.13)$$

### Statisch Unbestimmte

$$X_1 \sin(ax) = 2t_{F1} \int_0^x \tau_{xy}(x, \bar{y} = 0) dx$$

$$X_1 \sin(ax) = 2t_{F1} \underbrace{\left[ A_{F1}^1 - B_{F1}^1 - C_{F1}^1 - D_{F1}^1 \right]}_{1} \frac{1}{\alpha} \sin(ax)$$

$$X_1 \sin(ax) = 1 \sin(ax)$$

### Randbedingungen

$$\sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y} = \frac{b}{2} - \frac{t_{St}}{2}) = 0$$

$$\tau_{xy_{F1}}(x, \bar{y} = \frac{b}{2} - \frac{t_{St}}{2}) = 0$$

$$v_{F1}(x, \bar{y} = 0) = 0 \quad \text{wegen Symmetrie}$$

### Integrationskonstanten

$$N_{F1}^1 = + \left\{ \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \left( e^{\alpha(b-t_{St})} - 1 \right) + \alpha(b-t_{St}) \left[ \alpha \frac{b-t_{St}}{2} + \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1} = \left( \frac{1+\nu}{8t_{F1}} \right) \alpha \frac{1}{\sinh[\alpha(b-t_{St})] + \alpha(b-t_{St})}$$

$$B_{F1}^1 = - \left\{ e^{\alpha(b-t_{St})} + 1 + 2 \left[ \alpha \frac{b-t_{St}}{2} + \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$



$$C_{F1}^1 = + \left\{ \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \left( e^{\alpha(b-t_{St})} - 1 \right) + \alpha(b-t_{St}) \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} - \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$

$$D_{F1}^1 = + \left\{ e^{-\alpha(b-t_{St})} + 1 - 2 \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} - \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$

Für die Variante KTa reicht der Spannungsansatz

$$F(x, \bar{y}) = \frac{1}{a^2} (A_{F1}^1 + \alpha \bar{y} B_{F1}^1) e^{-\alpha \bar{y}}$$

da die Spannungs-Randbedingungen mit  $b = \infty$  wegen des positiven Exponenten der betreffenden e-Funktion nur erfüllbar sind, wenn gilt:  $C_{F1}^1 = D_{F1}^1 = 0$

#### Zweiachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E \epsilon_{x_{F1}}^1(x, \bar{y} = 0) = \sigma_{x_{F1}}(x, \bar{y} = 0) - \nu \sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y} = 0)$$

$$\sigma_{x_{F1}}(x, \bar{y} = 0) = \left[ A_{F1}^1 - 2B_{F1}^1 + C_{F1}^1 + 2D_{F1}^1 \right] \sin(ax)$$

$$\sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y} = 0) = - \left[ A_{F1}^1 + C_{F1}^1 \right] \sin(ax)$$

$$E \epsilon_{x_{F1}}^1(x, \bar{y} = 0) = \left[ \left( A_{F1}^1 - 2B_{F1}^1 + C_{F1}^1 + 2D_{F1}^1 \right) + \nu \left( A_{F1}^1 + C_{F1}^1 \right) \right] \sin(ax) \quad (7.15)$$

- Kontinuitätsbedingung

$$X_1 = \bar{X}_1 \frac{\rho_0 l^2}{n^2 \pi^2} = - \frac{\epsilon_{x_{St}}^0}{\epsilon_{x_{St}}^1 + \epsilon_{x_{F1}}^1} \quad (7.16)$$

- Längsspannungen

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + X_1 \sigma_x^1$$

- Steg:

$$\sigma_{x_{St}}(x, \bar{z}) = \left\{ \frac{\bar{z}}{I_{y_{St}}} + \bar{X}_1 \left[ \frac{\left( -\frac{h}{2} + \frac{t_{F1}}{4} \right)}{I_{y_{St}}} \bar{z} + \frac{1}{A_{St}} \right] \right\} \frac{\rho_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.17)$$

- Flansch:

$$\sigma_{x_{Fl}}(x, \bar{y}) = -\bar{X}_1 \left[ \left( A_{Fl}^1 - 2B_{Fl}^1 + \alpha \bar{y} B_{Fl}^1 \right) e^{-\alpha \bar{y}} + \left( C_{Fl}^1 + 2D_{Fl}^1 + \alpha \bar{y} D_{Fl}^1 \right) e^{\alpha \bar{y}} \right] \cdot \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(\alpha x) \quad (7.18)$$

Die Gleichungen für die Längsspannungen der Variante KTa erhält man für:  $C_{Fl}^1 = D_{Fl}^1 = 0$  und durch Ersetzen der statisch Unbestimmten  $\bar{X}_1$  durch  $\bar{X}_1$ .

Die statisch Unbestimmte  $\bar{X}_1$  erhält man hierbei entsprechend aus Gleichung (7.16) und (7.15).

• Bemerkung

Die Anwendung der Variante KTa setzt wegen

$$\sigma_{y_{Fl}}(x, \bar{y} = \bar{y}_0) = -\bar{X}_1 \left[ \left( A_{Fl}^1 + \alpha \bar{y}_0 B_{Fl}^1 \right) e^{-\alpha \bar{y}_0} \right] \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(\alpha x) \stackrel{!}{=} 0$$

mit  $\bar{y}_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{l}{n\pi}$

strenggenommen eine Flanschbreite

$$b \geq 2\bar{y}_0 + t_{St} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{2l}{n\pi} + t_{St} \quad (7.19)$$

voraus.

### 7.1.3 Strenge Theorie (ST)

Die Herleitung der beiden Varianten der strengen Theorie

- STa (mit Lasteinleitung zu gleichen Teilen am oberen und unteren Stegrand)  
und

- STb (Lasteinleitung nur am oberen Rand)

unterscheidet sich nur im Nullzustand infolge der unterschiedlichen Randbedingungen. Auch hierfür werden die notwendigen Rechenschritte für eine Spannungsermittlung kurz angegeben. Allein aus rechentechnischen Gründen wird für den Steg und den Flansch eine unterschiedliche Schreibweise der Airyschen Spannungsfunktion gewählt:

- Steg: Airysche Spannungsfunktion

$$F(x, \bar{z}) = \frac{1}{a^2} \left[ A_{St} \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z} B_{St} \sinh(a\bar{z}) + C_{St} \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z} D_{St} \cosh(a\bar{z}) \right] \sin(ax) \quad (7.20)$$

Spannungskomponenten

$$\alpha_x(x, \bar{z}) = \left[ (A_{St} + 2B_{St}) \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z} B_{St} \sinh(a\bar{z}) + (C_{St} + 2D_{St}) \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z} D_{St} \cosh(a\bar{z}) \right] \sin(ax) \quad (7.21)$$

$$\alpha_z(x, \bar{z}) = - \left[ A_{St} \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z} B_{St} \sinh(a\bar{z}) + C_{St} \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z} D_{St} \cosh(a\bar{z}) \right] \sin(ax) \quad (7.22)$$

$$\tau_{xz}(x, \bar{z}) = - \left[ (A_{St} + B_{St}) \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z} B_{St} \cosh(a\bar{z}) + (C_{St} + D_{St}) \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z} D_{St} \sinh(a\bar{z}) \right] \cos(ax) \quad (7.23)$$

- Flansch: Airysche Spannungsfunktion

$$F(x, \bar{y}) = \frac{1}{a^2} \left[ (A_{Fl} + a\bar{y} B_{Fl}) e^{-a\bar{y}} + (C_{Fl} + a\bar{y} D_{Fl}) e^{a\bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.24)$$

## Spannungskomponenten

$$\sigma_x(x, \bar{y}) = \left[ (A_{F1} - 2B_{F1} + a\bar{y}B_{F1})e^{-a\bar{y}} + (C_{F1} + 2D_{F1} + a\bar{y}D_{F1})e^{a\bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.25)$$

$$\sigma_y(x, \bar{y}) = - \left[ (A_{F1} + a\bar{y}B_{F1})e^{-a\bar{y}} + (C_{F1} + a\bar{y}D_{F1})e^{a\bar{y}} \right] \sin(ax) \quad (7.26)$$

$$\tau_{xy}(x, \bar{y}) = - \left[ (A_{F1} - B_{F1} + a\bar{y}B_{F1})e^{-a\bar{y}} - (C_{F1} + D_{F1} + a\bar{y}D_{F1})e^{a\bar{y}} \right] \cos(ax) \quad (7.27)$$

- Nullzustand

- Steg: Randbedingungen bei STA

$$\tau_{xz_{St}}(x, \bar{z} = \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\sigma_{z_{St}}(x, \bar{z} = \pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{p_0}{2t_{St}} \sin(ax)$$

### Integrationskonstanten bei STA

$$A_{St}^0 = 0$$

$$B_{St}^0 = 0$$

$$C_{St}^0 = - \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\cosh(a\frac{h}{2}) + (a\frac{h}{2}) \sinh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) - (ah)}$$

$$D_{St}^0 = + \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\cosh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) - (ah)}$$

### Randbedingungen bei STb

$$\tau_{xz_{St}}(x, \bar{z} = \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\sigma_{z_{St}}(x, \bar{z} = - \frac{h}{2}) = - \frac{p_0}{t_{St}} \sin(ax)$$

$$\sigma_{z_{St}}(x, \bar{z} = + \frac{h}{2}) = 0$$

### Integrationskonstanten bei STb

$$A_{St}^0 = \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\sinh(a\frac{h}{2}) + (a\frac{h}{2}) \cosh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) + (ah)}$$

$$B_{St}^0 = - \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\sinh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) + (ah)}$$

$$C_{St}^0 = - \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\cosh(a\frac{h}{2}) + (a\frac{h}{2}) \sinh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) - (ah)}$$

$$D_{St}^0 = + \frac{p_0}{t_{St}} \frac{\cosh(a\frac{h}{2})}{\sinh(ah) - (ah)}$$

## Zweiachsiges Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E \epsilon_{xs}^0(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = \sigma_{xs}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) - \nu \sigma_{zs}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) \quad (7.28)$$

$$\text{mit: } \sigma_{xs}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = \left[ (A_{St}^0 + 2B_{St}^0) \cosh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) B_{St}^0 \sinh(a \frac{h}{2}) - (C_{St}^0 + 2D_{St}^0) \sinh(a \frac{h}{2}) - (a \frac{h}{2}) D_{St}^0 \cosh(a \frac{h}{2}) \right] \sin(ax)$$

$$\sigma_{zs}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = - \left[ A_{St}^0 \cosh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) B_{St}^0 \sinh(a \frac{h}{2}) - C_{St}^0 \sinh(a \frac{h}{2}) - (a \frac{h}{2}) D_{St}^0 \cosh(a \frac{h}{2}) \right] \sin(ax)$$

- Einheitszustand

- Steg: Statisch Unbestimmte

$$X_1 \sin(ax) = t_{St} \int_0^x \tau_{xz}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) dx$$

$$X_1 \sin(ax) = t_{St} \left[ (A_{St}^1 + B_{St}^1) \sinh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) B_{St}^1 \cosh(a \frac{h}{2}) - (C_{St}^1 + D_{St}^1) \cosh(a \frac{h}{2}) - (a \frac{h}{2}) D_{St}^1 \sinh(a \frac{h}{2}) \right] \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$X_1 \sin(ax) = \underbrace{\hspace{15em}}_1 \sin(ax)$$

### Randbedingungen

$$\sigma_{zs}(x, \bar{z} = \pm \frac{h}{2}) = 0$$

$$\tau_{xz}(x, \bar{z} = +\frac{h}{2}) = 0$$

Integrationskonstanten

$$B_{St}^1 = - \frac{\cosh(a \frac{h}{2})}{(a \frac{h}{2}) \sinh(a \frac{h}{2})} A_{St}^1$$

$$C_{St}^1 = - \frac{\sinh(a \frac{h}{2}) - \frac{\cosh(a \frac{h}{2}) \sinh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) \cosh^2(a \frac{h}{2})}{(a \frac{h}{2}) \sinh(a \frac{h}{2})}}{\cosh(a \frac{h}{2}) - \frac{\cosh(a \frac{h}{2}) \sinh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) \sinh^2(a \frac{h}{2})}{(a \frac{h}{2}) \cosh(a \frac{h}{2})}} A_{St}^1$$

$$D_{St}^1 = - \frac{\sinh(a \frac{h}{2})}{(a \frac{h}{2}) \cosh(a \frac{h}{2})} C_{St}^1$$

$$A_{St}^1 = \frac{\frac{a}{t_{St}}}{\left[ 1 + \frac{B_{St}^1}{A_{St}^1} \right] \sinh(a \frac{h}{2}) + \frac{B_{St}^1}{A_{St}^1} (a \frac{h}{2}) \cosh(a \frac{h}{2}) - \left[ \frac{C_{St}^1}{A_{St}^1} + \frac{D_{St}^1}{A_{St}^1} \right] \cosh(a \frac{h}{2}) - \frac{D_{St}^1}{A_{St}^1} (a \frac{h}{2}) \sinh(a \frac{h}{2})}$$

Zweiachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E \epsilon_{x_{St}}^1(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = \sigma_{x_{St}}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) - \nu \sigma_{z_{St}}(x, \bar{z} = -\frac{h}{2})$$

mit:  $\sigma_{z_{St}}^1(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = 0$  (keine Vertikalverschiebung)

$$E \epsilon_{x_{St}}^1(x, \bar{z} = -\frac{h}{2}) = \left[ (A_{St}^1 + 2B_{St}^1) \cosh(a \frac{h}{2}) + (a \frac{h}{2}) B_{St}^1 \sinh(a \frac{h}{2}) - (C_{St}^1 + 2D_{St}^1) \sinh(a \frac{h}{2}) - (a \frac{h}{2}) D_{St}^1 \cosh(a \frac{h}{2}) \right] \sin(ax) \quad (7.29)$$

- Flansch: Statisch Unbestimmte

$$X_1 \sin(ax) = 2t_{Fl} \int_0^x \tau_{xy}(x, \bar{y} = 0) dx$$

$$= 2t_{Fl} \underbrace{\left[ A_{Fl}^1 - B_{Fl}^1 - C_{Fl}^1 - D_{Fl}^1 \right] \frac{1}{a}}_{1} \sin(ax)$$

$$X_1 \sin(ax) = 1 \sin(ax)$$

### Randbedingungen

$$\sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y}) = \frac{b}{2} - \frac{t_{St}}{2} = 0$$

$$\tau_{xy_{F1}}(x, \bar{y}) = \frac{b}{2} - \frac{t_{St}}{2} = 0$$

$$v_{F1}(x, \bar{y} = 0) = 0 \quad \text{wegen Symmetrie}$$

### Integrationskonstanten

$$N_{F1}^1 = + \left\{ \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) (e^{-\alpha(b-t_{St})} - 1) + \alpha(b-t_{St}) \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} + \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1} = \left( \frac{1+\nu}{8t_{F1}} \right) \alpha \frac{1}{\sinh[\alpha(b-t_{St})] + \alpha(b-t_{St})}$$

$$B_{F1}^1 = - \left\{ e^{\alpha(b-t_{St})} + 1 + 2 \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} + \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$

$$C_{F1}^1 = + \left\{ \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) (e^{-\alpha(b-t_{St})} - 1) + \alpha(b-t_{St}) \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} - \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$

$$D_{F1}^1 = + \left\{ e^{-\alpha(b-t_{St})} + 1 - 2 \left[ a \frac{b-t_{St}}{2} - \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right\} \frac{A_{F1}^1}{N_{F1}^1}$$

### Zweiachsigige Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$E \epsilon_{x_{F1}}^1(x, \bar{y} = 0) = \sigma_{x_{F1}}(x, \bar{y} = 0) - \nu \sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y} = 0)$$

$$\text{mit:} \quad \sigma_{x_{F1}}(x, \bar{y} = 0) = \left[ A_{F1}^1 - 2B_{F1}^1 + C_{F1}^1 + 2D_{F1}^1 \right] \sin(\alpha x)$$

$$\sigma_{y_{F1}}(x, \bar{y} = 0) = - \left[ A_{F1}^1 + C_{F1}^1 \right] \sin(\alpha x)$$

$$E \epsilon_{x_{F1}}^1(x, \bar{y} = 0) = \left[ (A_{F1}^1 - 2B_{F1}^1 + C_{F1}^1 + 2D_{F1}^1) + \nu(A_{F1}^1 + C_{F1}^1) \right] \sin(\alpha x) \quad (7.30)$$

- Kontinuitätsbedingung

$$X_1 = \bar{X}_1 \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} = - \frac{\epsilon_{x_{St}}^0}{\epsilon_{x_{St}}^1 + \epsilon_{x_{Fl}}^1} \quad (7.31)$$

- Längsspannungen

$$\sigma_x = \alpha_x^0 + X_1 \alpha_x^1$$

- Steg:

$$\sigma_{x_{St}}(x, \bar{z}) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ (A_{St}^0 + 2B_{St}^0) \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z}B_{St}^0 \sinh(a\bar{z}) \right. \\ & \quad \left. + (C_{St}^0 + 2D_{St}^0) \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z}D_{St}^0 \cosh(a\bar{z}) \right] \\ & + \bar{X}_1 \left[ (A_{St}^1 + 2B_{St}^1) \cosh(a\bar{z}) + a\bar{z}B_{St}^1 \sinh(a\bar{z}) \right. \\ & \quad \left. + (C_{St}^1 + 2D_{St}^1) \sinh(a\bar{z}) + a\bar{z}D_{St}^1 \cosh(a\bar{z}) \right] \end{aligned} \right\} \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.32)$$

- Flansch:

$$\sigma_{x_{Fl}}(x, \bar{y}) = -\bar{X}_1 \left[ (A_{Fl}^1 - 2B_{Fl}^1 + a\bar{y}B_{Fl}^1) e^{-a\bar{y}} + (C_{Fl}^1 + 2D_{Fl}^1 + a\bar{y}D_{Fl}^1) e^{a\bar{y}} \right] \cdot \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.33)$$

Die Gleichungen für die Längsspannungen der Variante STa erhält man für:  $A_{St}^0 = B_{St}^0 = 0$  und durch Ersetzen der statisch Unbestimmten  $\bar{X}_1$  durch  $\bar{X}_1$ .

Die statisch Unbestimmte  $\bar{X}_1$  erhält man hierbei entsprechend aus Gleichung (7.31) und (7.28).



#### 7.1.4 Erweiterte Balkentheorie (EB)

Eine ausführliche Herleitung der erweiterten Balkentheorie wurde in Abschnitt 4 gegeben. In Abschnitt 6.2.1 wurde der hier an einem T-Profil zu untersuchende Belastungsfall bereits an einem Rechteck-Querschnitt behandelt. Das Vorgehen für ein T-Profil ist nahezu identisch. Es treten lediglich anstelle der Gesamtquerschnittsordinate  $z$  die Teilquerschnittsordinaten  $s_i$  und anstelle der Wölbfunktion  $\omega(z)$  für den Gesamtquerschnitt die Wölbfunktionen  $\omega_i(s_i)$  der Teilquerschnitte. Aus diesem Grund werden im folgenden die Gleichungen entsprechend dieser Herleitung direkt angegeben. Die ursprünglich mit "EB" bezeichnete erweiterte Balkentheorie wird in Anlehnung an die bisher in diesem Abschnitt benutzte Bezeichnungweise im folgenden immer dann mit "EBa" abgekürzt, wenn sie von einer möglichen Variante der erweiterten Balkentheorie ("EBb" s.u.) unterschieden werden soll.

Die erforderlichen Querschnittswerte, Wölbfunktionen und Abkürzungen finden sich im Anhang A1.2 und A2.2.

- Längsspannungen

$$\begin{aligned}\alpha_x(x, s) &= \alpha_x^P(x, s) + \alpha_x^S(x, s) \\ \alpha_x^P(x, s) &= \frac{M_y(x)}{I_y} s \\ \alpha_x^S(x, s) &= \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega(s)\end{aligned}$$

- Steg:

$$\alpha_{x_{st}}(x, s_2) = \left\{ \frac{s_2 - e}{I_y} + \frac{n^2 \pi^2}{\lambda^2 I^2 + n^2 \pi^2} \frac{1}{I_\omega} \left[ ds_2^3 - as_2^2 + fs_2 + g \right] \right\} \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.34)$$

- Flansch:

$$\alpha_{x_{fl}}(x, s_1) = \left\{ -\frac{e}{I_y} + \frac{n^2 \pi^2}{\lambda^2 I^2 + n^2 \pi^2} \frac{1}{I_\omega} \left[ -as_1^2 + c \right] \right\} \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin(ax) \quad (7.35)$$

In Abschnitt 7.2.1 sind außerdem die Ergebnisse dargestellt, die man erhält, wenn man bei der erweiterten Balkentheorie für die Schubspannungsverteilung im Flansch (wie von der Scheibentheorie her bekannt) a priori von einer  $e$ -Funktion ausgeht, welche an der Schubspannungsverteilung nach der elementaren Balkentheorie kalibriert wird

(EBB). D.h., für die Schubspannungsverteilung im Flansch wird nicht von einer linearen Verteilung ausgegangen, wie sie von der elementaren Balkentheorie her bekannt ist

$$\tau_1(x, s_1) = \frac{Q_z(x)}{I_y} e s_1 \quad ,$$

sondern es wird der Ansatz gemacht

$$\tau_1(x, s_1) = \frac{Q_z(x)}{I_y} e [Ae^{as_1} - B] \quad ,$$

wobei die Konstanten A und B über die folgenden Randbedingungen bestimmt werden:

$$\tau_1(x, s_1 = 0) = 0$$

$$\tau_1(x, s_1 = \frac{b}{2}) = \frac{Q_z(x)}{I_y} e \frac{b}{2} \quad .$$

## 7.2 Zahlenbeispiel: T-Profil unter sinusförmiger Belastung (n = 1)

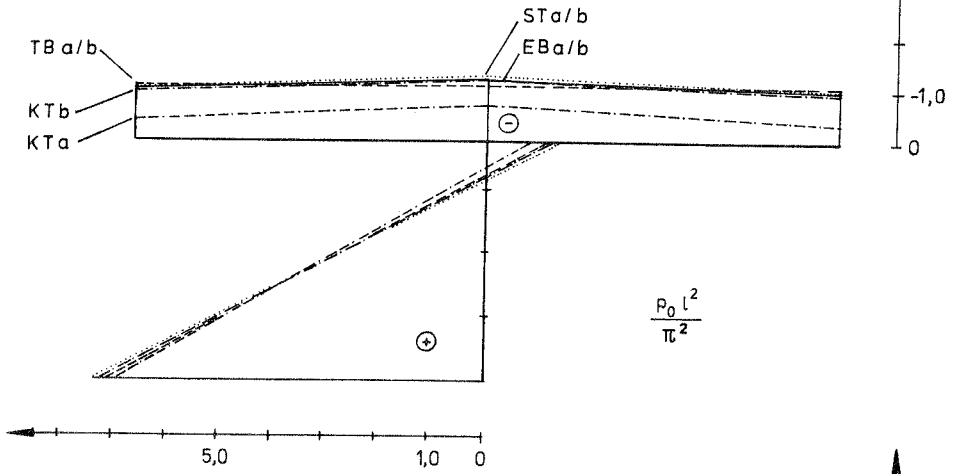
Da man unter Berücksichtigung verschiedener Querschnittsdicken  $t_i$  und / oder für unterschiedliche Querdehnzahlen  $\nu$  nach allen Theorien jeweils qualitativ das gleiche Ergebnis erhält, werden im folgenden nur die Ergebnisse eines Querschnittstyps konstanter Dicke ( $t = t_{S1} = t_{F1} = 0,2m$ ) mit einer Querdehnzahl  $\nu = 0,0$  angegeben.

### 7.2.1 Vergleich der Ergebnisse

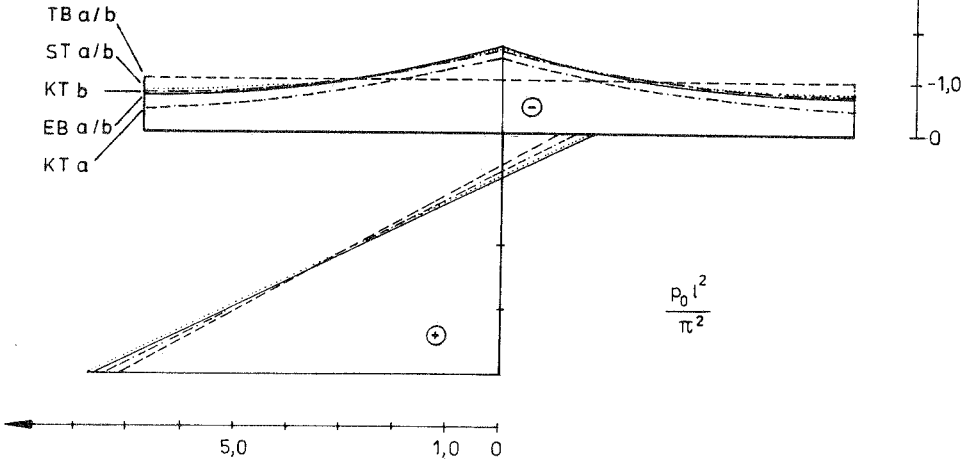
In Bild 7.3 sind die Ergebnisse der Längsspannungsverteilung in einem Plattenbalken-Querschnitt für  $n=1$  an der Stelle  $x = l/2n$  nach den verschiedenen Theorien und der oben beschriebenen Belastung (Abschnitt 7.1) für verschiedene Höhen-Breiten-Längen-Verhältnisse graphisch dargestellt.

Um die Güte der erweiterten Balkentheorie zur Beschreibung des Shear-Lag-Effektes zu zeigen, wird dabei (zunächst) von einem extremen Höhen-Breiten-Verhältnis:  $h/b = 1/3 = \text{konstant}$  ausgegangen und nur die Länge  $l$  variiert.

Es sei darauf hingewiesen, daß in den Bildern 7.3.d und e die Höhen-Breiten-Längen-Verhältnisse extrem gewählt wurden und daher alle dort angegebenen Spannungsverläufe nur unter dem Aspekt des gegenseitigen Vergleichs gesehen werden können. Spätestens in Bild 7.3.e sind erhebliche Abweichungen gegenüber eines sich tatsächlich einstellenden Spannungsverlaufs zu erwarten, da das wirkliche Tragverhalten ohne Berücksichtigung der Lasteinleitung, insbesondere der Lagerung, hier weder mit einer Balkentheorie noch einer Faltwerkstheorie auf die dargestellte Weise bestimmt werden kann.

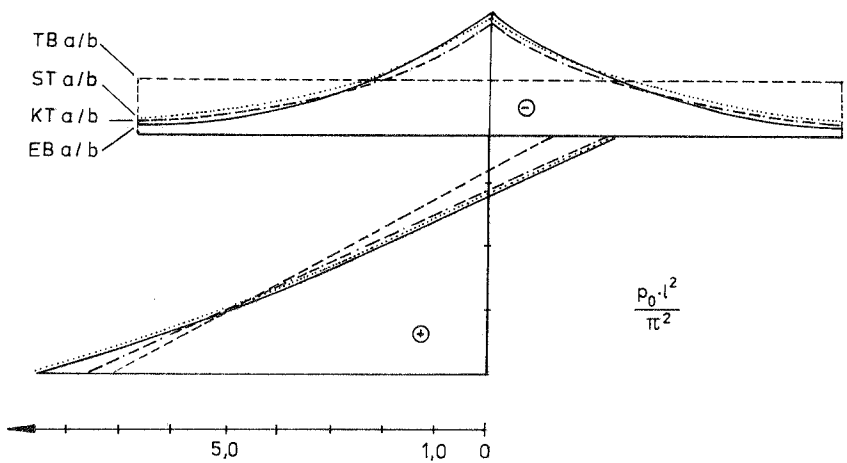


a.  $h/b/l = 1/3/10$

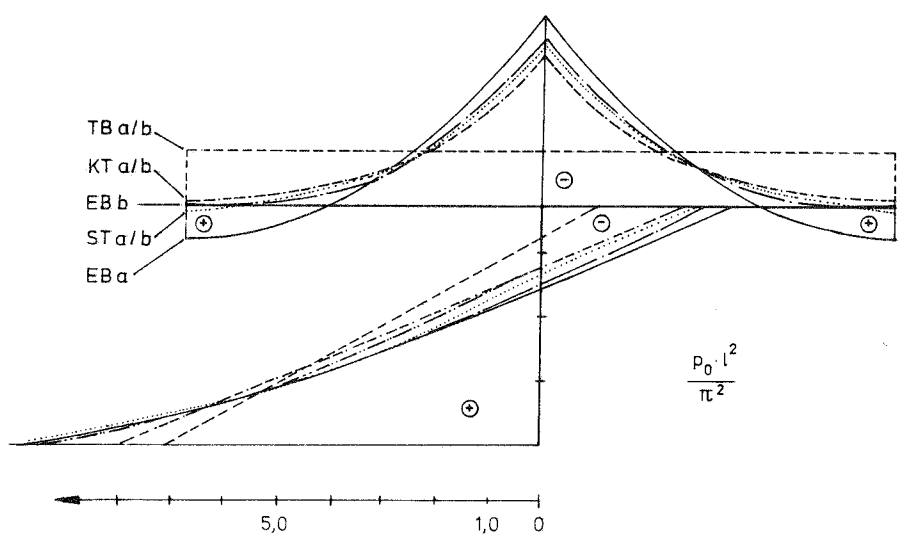


b.  $h/b/l = 1/3/5$

Bild 7.3

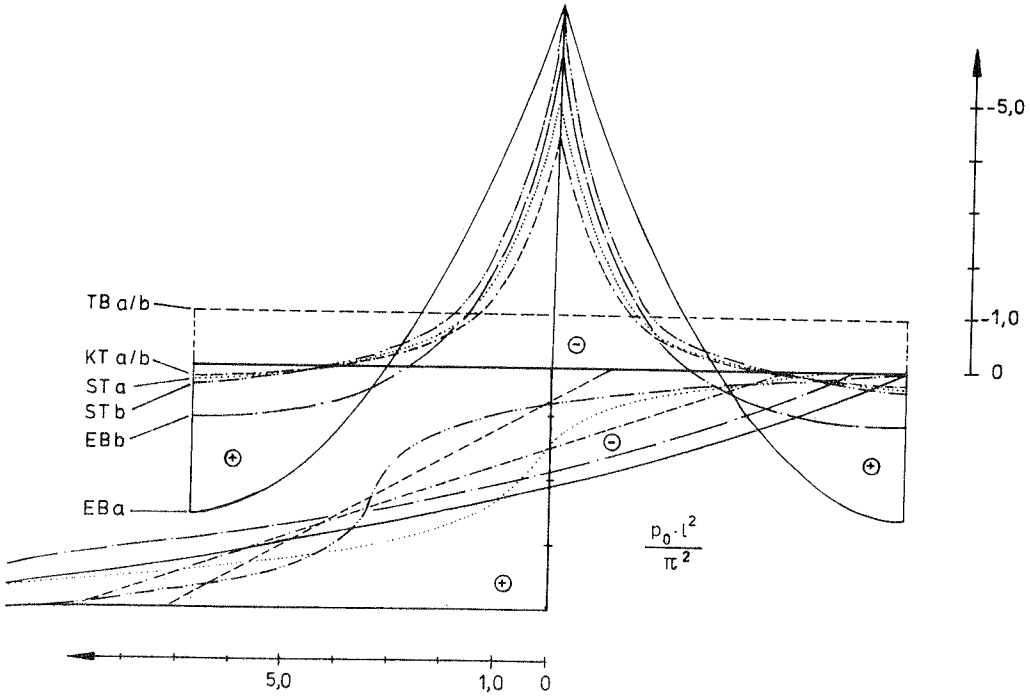


c.  $h/b/l = 1/3/3$



d.  $h/b/l = 1/3/2$

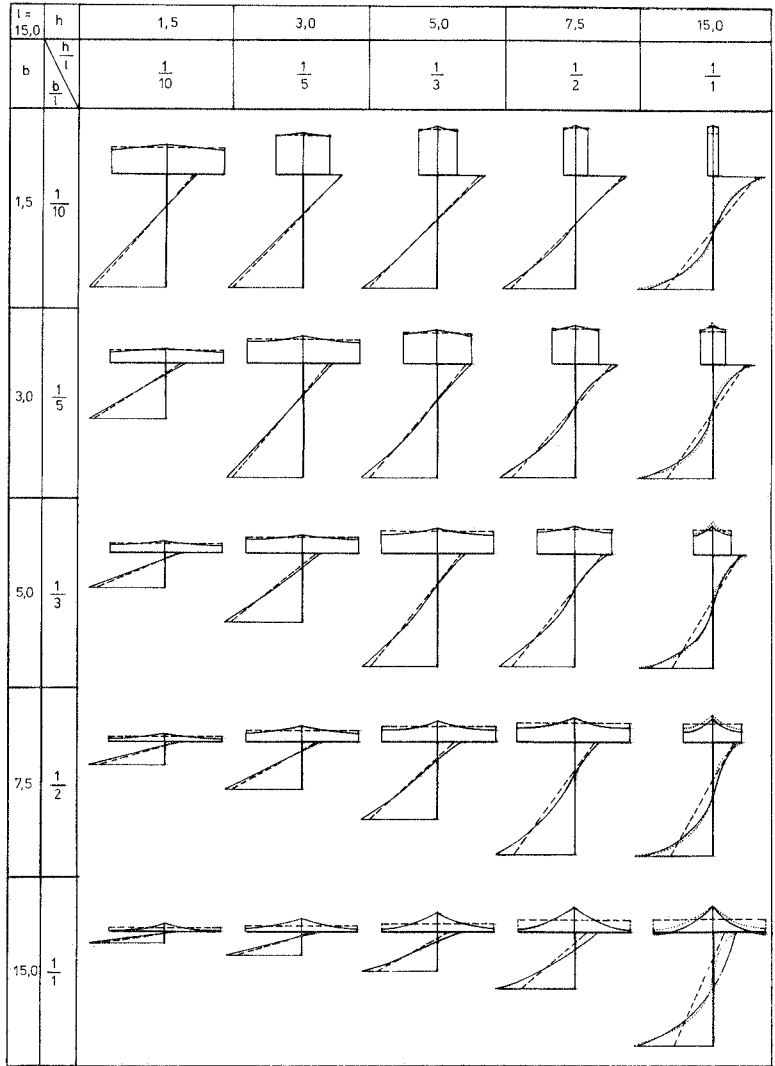
Bild 7.3



e.  $h/b/l = 1/3/1$

- $TBa / b$
- . - . - .  $KTa ( / b , \text{ falls keine gesonderte Linie f\u00fcr } KTb)$
- .....  $KTb$
- . . . . .  $STa ( / b , \text{ falls keine gesonderte Linie f\u00fcr } STb)$
- $STb$
- $EBa ( / b , \text{ falls keine gesonderte Linie f\u00fcr } EBb)$
- $EBb$

Bild 7.3 L\u00e4ngsspannungsverl\u00e4ufe im T-Profil unter sinusf\u00f6rmiger Belastung



$$t = t_{FI} = t_{St} = 0.2 \quad [m] \quad ; \quad \nu = 0.0$$

Bild 7.4 Qualitative Längsspannungsverläufe im Vergleich

- EB (erweiterte Balkentheorie)
- ..... STa (strenge Faltwerkstheorie, falls Unterschied darstellbar)
- - - - - TB (elementare Balkentheorie, falls Unterschied darstellbar)

## 7.2.2 Mittragende Breite

Die numerische Berechnung der mittragenden Breite erfolgt durch eine Auswertung der Spannungen im Flansch.

Hierbei ist im folgenden:

$\alpha_x(s)$  die über die Querschnittskontur veränderliche Längsspannung und  
 $\max \alpha_{x_{FI}}(s)$  der Betrag dieser Spannungen am Schnittpunkt der Querschnittsmittellinien von Steg und Flansch.

$\beta$  bezeichnet das Verhältnis zwischen der mittragenden und der tatsächlichen Flanschbreite.

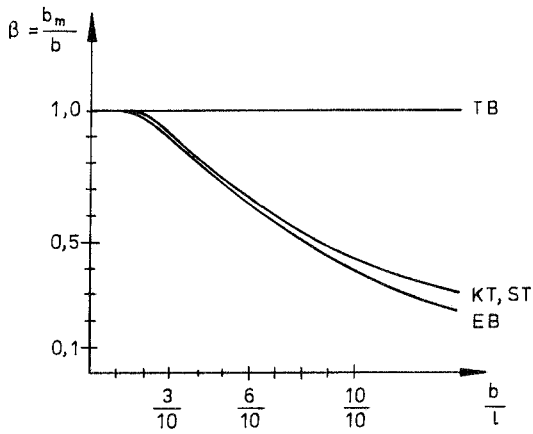
$$b_m = \beta b = \frac{\int \alpha_x(s) ds}{\max \alpha_{x_{FI}}(s)} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \frac{b_m}{b} = \frac{\int \alpha_x(s) ds}{b \max \alpha_{x_{FI}}(s)} \quad (7.36)$$

$\delta$  ist der Verhältnswert zwischen der "mittragenden" und der tatsächlichen Flanschbreite bei Bezug des Integrals der Längsspannungen auf die nach der elementaren Balkentheorie berechneten Flanschspannung.

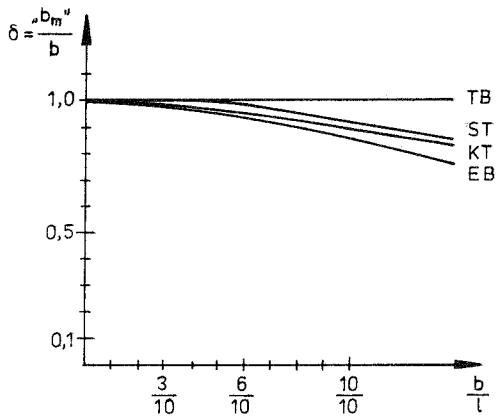
$$b_m'' = \delta b = \frac{\int \alpha_x(s) ds}{\alpha_{x_{FI}}^{TB}} \quad \text{bzw.} \quad \delta = \frac{b_m''}{b} = \frac{\int \alpha_x(s) ds}{b \alpha_{x_{FI}}^{TB}} \quad (7.37)$$

Verglichen werden im folgenden die Verhältnswerte der mittragenden Breite  $\beta$  und  $\delta$  des oben beschriebenen Beispiels mit dem Höhen-Breiten-Verhältnis  $h/b = 1/3$  für verschiedene Breiten-Längen-Verhältnisse  $b/l$  jeweils an der Stelle  $x = l/2n$ . Einander gegenübergestellt werden die Lösungen nach:

- der elementaren Balkentheorie (TB) ( $\beta = 1.0$ )
- der klassischen Faltwerkstheorie (KT)
- der strengen Faltwerkstheorie (ST)
- der erweiterten Balkentheorie (EB)



a. Verhältniswert  $\beta$



b. Verhältniswert  $\delta$

Bild 7.5 Mittragende Plattenbreite beim T-Profil  
in Abhängigkeit des Breiten-Längen-Verhältnisses  $\frac{b}{l}$



### 7.3 Abschließende Bemerkung

- Die Ergebnisse der Längsspannungsberechnungen weichen nach allen verglichenen Theorien mit Ausnahme der elementaren Balkentheorie auch für unterschiedliche Querdehnzahlen  $\nu$  nur geringfügig von einander ab.
- Einzige Ausnahme sind die Längsspannungsergebnisse nach der klassischen Faltwerkstheorie mit der vereinfachenden Annahme unendlich breiter Flansche (KTA). Wie zu erwarten ist, unterscheiden sich z.B. beim Plattenbalken-Querschnitt die nach dieser Theorie berechneten Längsspannungen schon ab einem Breiten-Längen-Verhältnis von  $b/l \leq 1/2$  (Bild 7.3 a und b) erheblich von den genauer ermittelten.
- Bei Berechnungen nach der klassischen und strengen Faltwerkstheorie ergibt sich mit  $\nu \neq 0$  i.a. zwischen dem Steg- und den Flanschquerschnitten ein kleiner Sprung in der Längsspannungsverteilung, der mit einer Balkentheorie aufgrund der normalerweise unberücksichtigten Querspannungen ( $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ ) nicht erhalten werden kann.
- Die Genauigkeit der Längsspannungsergebnisse nach der erweiterten Balkentheorie liegt für gewöhnliche Balkenabmessungen im Bereich der elementaren Faltwerkstheorien. Selbst für sehr kurze "Balken" mit Plattenbalken-Querschnitten bis zu einem Höhen-Breiten-Längen-Verhältnis  $h/b/l \leq 1/1/1$  stimmen die Längsspannungen mit den nach der strengen Faltwerkstheorie berechneten noch sehr gut überein.  
Hier muß allerdings die Einschränkung gemacht werden, daß in den Spannungsberechnungen nach allen aufgeführten Theorien der Einfluß der Lasteinleitung, d.h. hier insbesondere die Art der Lagerung, unberücksichtigt blieb. Diese ist jedoch bei den vorliegenden extremen Abmessungen für das sich einstellende Tragverhalten überwiegend verantwortlich.
- Mit zunehmendem Breiten-Längen-Verhältnis ( $b/l \geq 2/1$ ) zeigt sich allerdings (Bild 7.3 d und e), daß sich die nach den Rändern hin nach Art einer e-Funktion abklingende Längsspannungsverteilung nur noch schlecht durch eine quadratische Parabel abbilden läßt. Wie bereits in Abschnitt 7.1.4 erwähnt und in den Bildern 7.3 d und e dargestellt, läßt sich dieser Mangel zumindest teilweise beheben, in dem bereits für die Schubspannungsverteilung in einem breiten Flansch von einer e-Funktion ausgegangen wird. Hierbei gilt allerdings die gleiche Einschränkung wie oben.
- Die Verhältnismerte  $\beta$  und  $\delta$  zur Beschreibung der mitwirkenden Plattenbreite sind für alle Breiten-Längen-Verhältnisse nach der erweiterten Balkentheorie kleiner

als nach der klassischen und strengen Theorie (Bild 7.5). Dies liegt an der kleineren Spannungsergebnisse im Flansch, die die Folge des durch eine quadratische Parabel beschriebenen Längsspannungsverlaufes ist. Die Verhältniswerte  $\beta$  und  $\delta$  lassen sich durch das Einbringen einer verbesserten Schubspannungsannahme (s.o.) ebenfalls verbessern.

## 8 Erweiterung auf die linearisierte Theorie II. Ordnung

In diesem Abschnitt wird die verfeinerte Balkentheorie auf die linearisierte Theorie II. Ordnung erweitert. Es werden die dabei zusätzlich gemachten Annahmen, die u.a. daraus resultierenden Grundgleichungen und die Differentialgleichungen der linearisierten Theorie II. Ordnung angegeben. Über die Integralformulierung, insbesondere das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, wird die geometrische Steifigkeitsmatrix der verfeinerten Balkentheorie mit Verschiebungsansätzen erstellt, die den Lösungen der Differentialgleichungen der Theorie I. Ordnung für das reine Biege- und das reine Schub-Problem entsprechen. Zusätzlich wird noch eine genäherte geometrische Steifigkeitsmatrix angegeben, die mit einem kubischen Verschiebungsansatz auch für den Schub bestimmt wurde.

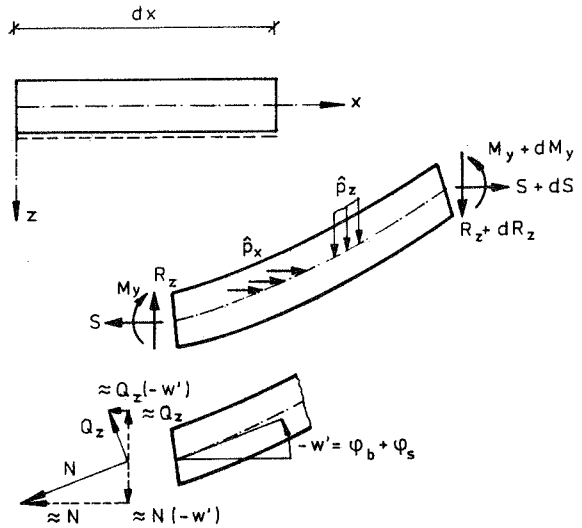
Der Einfluß der genaueren Berücksichtigung des Schubs in der linearisierten Theorie II. Ordnung wird am Beispiel eines Eulerstabes untersucht.

### 8.1 Herleitung

- Zusätzliche Annahmen:
  - kleine, aber endliche Verschiebungen
  - Krümmung:  $\kappa_y = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -w''$
  - große Längskräfte:  $\frac{Nl^2}{EI_y} \geq 10$
  - Längskraft  $S$  sei verschiebungsunabhängig

$$\text{Längskraft:} \quad S = N - \underbrace{Q_z w'}_{\ll N} \approx N \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Transversalkraft:} \quad R_z &= Q_z + Nw' \approx Q_z + Sw' \\ &\approx Q_z + S(w'_b + w'_s) \end{aligned} \quad (8.2)$$



- Grundgleichungen (vgl. Abschnitt 4.1.2.1)

$$\text{Statik: } S' + \hat{p}_x = 0 \quad \text{bzw.: } N' + \hat{p}_x = 0 \quad (8.3)$$

$$R_z' + \hat{p}_z = 0 \quad \left[ Q_z + N(w_b' + w_s') \right] + \hat{p}_z = 0 \quad (8.4)$$

$$M_y' - R_z + S(w_b' + w_s') + \hat{m}_y = 0; \quad M_y' - Q_z + \hat{m}_y = 0 \quad (8.5)$$

$$Q_z = Q_z^P + Q_z^S \quad (8.6)$$

$$Q_z^S = M_\omega' \quad (8.7)$$

$$\text{Werkstoff: } N = EA\epsilon_x \quad (8.8)$$

$$Q_z^P = GA_s\gamma \quad (8.9)$$

$$M_\omega = EI_\omega\kappa_\omega \quad (8.10)$$

$$M_y = EI_y\kappa_y \quad (8.11)$$

$$\text{Geometrie: } \epsilon_x = u' + \frac{1}{2}(w')^2 = u' + \frac{1}{2}(w_b' + w_s')^2 \quad (8.12)$$

$$\gamma = -\phi_s' = w_s' \quad (8.13)$$

$$\kappa_\omega = -w_s'' \quad (8.14)$$

$$\phi_b = -w_b' \quad (8.15)$$

$$\kappa_y = -w_b'' \quad (8.16)$$

$$w' = w_b' + w_s' = -\phi_b' - \phi_s' \quad (8.17)$$

$$w = w_b + w_s \quad (8.18)$$

- Differentialgleichungen

Aus den Gleichungen (8.3), (8.8) und (8.12) folgt:

$$\left\{ EA \left[ u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] \right\}' = -\hat{p}_x$$

bzw.:

$$\rightarrow \left\{ EA \left[ u' + \frac{1}{2} (w'_b + w'_s)^2 \right] \right\}' = -\hat{p}_x \quad (8.19)$$

Die Gleichungen (8.6), (8.7), (8.9), (8.10), (8.13) und (8.14) liefern:

$$GA_s w'_s - (EI_\omega w''_s)' = Q_z \quad (8.20)$$

Zusammen mit den Gleichungen (8.4), (8.8) und (8.12) erhält man:

$$\rightarrow \left\{ GA_s w'_s - (EI_\omega w''_s)' + EA \left[ u' + \frac{1}{2} (w'_b + w'_s)^2 \right] (w'_b + w'_s) \right\}' = -\hat{p}_z \quad (8.21)$$

Aus den Gleichungen (8.5), (8.11), (8.16) und (8.20) folgt:

$$\rightarrow (EI_y w''_b)' + [GA_s w'_s - (EI_\omega w''_s)'] = \hat{m}_y \quad (8.22)$$

Im Sonderfall  $EA = \text{konstant}$ ,  $GA_s = \text{konstant}$ ,

$EI_y = \text{konstant}$ ,  $\hat{m}_y = 0$  sowie

$\pm S$  bekannt ( $\hat{=}$  linearisierte Theorie II.Ordnung)

vereinfachen sich die Gleichungen (8.21) und (8.22) zu:

$$GA_s w'_s - EI_\omega w''_s + S(w'_b + w'_s) = -\hat{p}_z \quad (8.23)$$

$$EI_y w''_b + [GA_s w'_s - EI_\omega w''_s] = 0 \quad (8.24)$$

## 8.2 Integralformulierung (Energie)

- potentielle Energie:

$$\text{Formänderungsenergie (FÄE): } \Pi^{\text{FÄE}} = \int_V \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + 2(1 + \nu)\tau_{xz}^2] dV \quad (8.25)$$

$$\text{mit der Beziehung : } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \text{und dem Hookeschen Gesetz: } \sigma_x &= E\epsilon_x & (8.27) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folgt nacheinander: } \Pi^{\text{FÄE}} &= \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV + \int_V \frac{\tau_{xz}^2}{2G} dV \\ \Pi^{\text{FÄE}} &= \frac{1}{2} \int_V E\epsilon_x^2 dV + \frac{1}{2} \int_V G\gamma_{xz}^2 dV \end{aligned} \quad (8.28)$$

Der Verschiebungsansatz

$$u(x, z) = u(x) + \phi_b(x)z + \beta_s(x)z + \phi_s(x)\omega(z)$$

bzw. entsprechend Abschnitt 4.1.1

$$u(x, z) = u(x) + \phi_b(x)z + \phi_s(x)\omega(z) \quad (8.29)$$

und

$$w(x, z) = w(x) \quad (8.30)$$

liefert die Dehnung

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, z) &= u'(x, z) + \frac{1}{2}[w'(x)]^2 \\ &= u'(x) + \phi_b'(x)z + \phi_s'(x)\omega(z) + \frac{1}{2}[w'(x)]^2 \end{aligned} \quad (8.31)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^2(x, z) &= [u'(x)]^2 + [\phi_b'(x)z]^2 + [\phi_s'(x)\omega(z)]^2 + \frac{1}{4}[w'(x)]^4 \\ &\quad + 2u'(x)\phi_b'(x)z + 2u'(x)\phi_s'(x)\omega(z) + 2\phi_b'(x)\phi_s'(x)z\omega(z) \\ &\quad + u'(x)[w'(x)]^2 + \phi_b'(x)z[w'(x)]^2 + \phi_s'(x)\omega(z)[w'(x)]^2 \end{aligned} \quad (8.32)$$

sowie die Verzerrungen

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}(x, z) &= \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \\ &= \phi_b(x) + \phi_s(x) \underbrace{\frac{\partial \omega(z)}{\partial z}}_{\tilde{\gamma}(z)} + \frac{\partial w(x)}{\partial x}\end{aligned}\quad (8.33)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^2(x, z) &= \phi_b^2(x) + 2\phi_b(x)\phi_s(x)\tilde{\gamma}(z) + 2\phi_b(x)\frac{\partial w(x)}{\partial x} + \left[\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right]^2 \\ &\quad + 2\phi_s(x)\tilde{\gamma}(z)\frac{\partial w(x)}{\partial x} + [\phi_s(x)\tilde{\gamma}(z)]^2\end{aligned}\quad (8.34)$$

Die Formänderungsenergie eines Rechteck-Querschnittes ergibt sich

$$\text{mit } \omega(z) = \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^2} - \frac{1}{4} z \quad \text{und} \quad \phi_s(x) = -\gamma(x) \quad (\text{vgl. Anhang A2.1})$$

wie folgt:

$$\Pi^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} = \Pi_b^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} + \Pi_s^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} + \Pi_l^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} \quad (8.35)$$

$$\Pi_s^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} \quad \text{siehe Abschnitt 4.1.2.6}$$

$$\begin{aligned}\Pi_b^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} + \Pi_l^{\text{F}\ddot{\text{A}}\text{E}} &= \frac{1}{2} \int \int \int \text{E} \epsilon^2 \, dydzdx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \text{EA} [u'(x)]^2 + \text{EI}_y [\phi_b'(x)]^2 + \text{EA} u'(x) [w'(x)]^2 + \text{EA} \frac{1}{4} [w'(x)]^4 + \text{EI}_\omega [\phi_s'(x)]^2 \, dx\end{aligned}\quad (8.36)$$

Die gesamte potentielle Energie lautet dann:

$$\begin{aligned}\Pi(u, w_b, w_s) &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \text{EA}(u')^2 + \text{EA}u'(w_b' + w_s')^2 + \text{EA} \frac{1}{4} (w_b' + w_s')^4 \right. \\ &\quad \left. + \text{EI}_y (-w_b'')^2 + \text{EI}_\omega (-w_s'')^2 + \text{GA}_s (w_s')^2 \right] dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nichtlineare} \\ \text{Anteile} \end{array} \right. \\ &\quad - \int_0^l \hat{p}_z w_b \, dx - \int_0^l \hat{p}_z w_s \, dx - \left[ \hat{Q}_z w_b + \hat{Q}_z w_s + \hat{M}_y (-w_b') + \hat{M}_\omega (-w_s') \right]_0^l\end{aligned}\quad (8.37)$$

- Prinzip der virtuellen Arbeit (Verschiebungen):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left\{ \underbrace{\delta u' EAu'}_N + \delta(-w_b'') \underbrace{EI_y(-w_b'')}_{M_y} + \delta w_s' \underbrace{GA_s w_s'}_{Q_z^p} + \delta(-w_s'') \underbrace{EI_\omega(-w_s'')}_{M_\omega} \right. \\
 & + \underbrace{\delta w_b' EAu w_b'}_N + \underbrace{\delta w_b' EAu w_s'}_N + \underbrace{\delta w_s' EAu w_b'}_N + \underbrace{\delta w_s' EAu w_s'}_N \\
 & \left. + \delta u \frac{1}{2} EA(w_b' + w_s')^2 + \delta w_b \frac{1}{2} EA(w_b' + w_s')^3 + \delta w_s \frac{1}{2} EA(w_b' + w_s')^3 \right\} dx \\
 & = \int_0^l \delta w_b \hat{p}_z dx + \int_0^l \delta w_s \hat{p}_z dx + \left[ \delta w_b \hat{Q}_z + \delta w_s \hat{Q}_z + \delta(-w_b') \hat{M}_y + \delta(-w_s') \hat{M}_\omega \right]_0^l
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

Bei Vernachlässigung der nichtlinearen Terme im Arbeitsausdruck erhält man die linearisierte Theorie II. Ordnung der erweiterten Balkentheorie.

### 8.3 Geometrische Steifigkeitsmatrix

Entsprechend dem in den Abschnitten 4.1.2.5 und 4.1.2.6 beschriebenen Vorgehen läßt sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (Gl. 8.38) die geometrische Matrix für  $\pm S = \text{konstant}$  bestimmen.

Die Arbeitsanteile

$$\pm S \left\{ \int_0^l \delta w_b w_b' dx + \int_0^l \delta w_b w_s' dx + \int_0^l \delta w_s w_b' dx + \int_0^l \delta w_s w_s' dx \right\}$$

liefern mit dem Ansatz für die Querverschiebung infolge Biegung

$$w_b(\xi) = \left[ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \right] w_{bi} + l\xi \left[ -1 + 2\xi - \xi^2 \right] \phi_{bi} + \xi^2 \left[ 3 - 2\xi \right] w_{bk} + l\xi^2 \left[ 1 - \xi \right] \phi_{bk}$$

bzw.

$$w_b(\xi) = \mathbf{N}_b(\xi) \mathbf{u}_b \tag{8.39}$$

und dem Ansatz für die Querverschiebung infolge Schub



$$w_s(\xi) =$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{2(1-c) + \lambda l s} \left\{ \left[ \lambda(1-c + \lambda l s) - \lambda^2 l s \xi + \lambda(1-c) \cosh(\lambda l \xi) + \lambda s \sinh(\lambda l \xi) \right] w_{si} \right. \\ \left. + [s - \lambda l c - (1-c)\lambda l \xi + (\lambda l c - s) \cosh(\lambda l \xi) - (1-c + \lambda l s) \sinh(\lambda l \xi)] \phi_{si} \right. \\ \left. + [\lambda(1-c) + \lambda^2 l s \xi - \lambda(1-c) \cosh(\lambda l \xi) - \lambda s \sinh(\lambda l \xi)] w_{sk} \right. \\ \left. + [\lambda l - s - (1-c)\lambda l \xi - (\lambda l - s) \cosh(\lambda l \xi) + (1-c) \sinh(\lambda l \xi)] \phi_{sk} \right\}$$

bzw.

$$w_s(\xi) = N_s(\xi) \mathbf{u}_s \quad (8.40)$$

sowie mit  $dx = l d\xi$  einen Ausdruck, aus dem man die Untermatrizen der geometrischen Steifigkeitsmatrix direkt erhält:

$$\pm \text{Sl} \left\{ \underbrace{\delta \mathbf{u}_b^T \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T (\mathbf{N}'_b) d\xi}_{\text{---}} \mathbf{u}_b + \delta \mathbf{u}_b^T \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T (\mathbf{N}'_s) d\xi}_{\text{---}} \mathbf{u}_s \right. \\ \left. + \delta \mathbf{u}_s^T \int_0^1 (\mathbf{N}'_s)^T (\mathbf{N}'_b) d\xi \mathbf{u}_b + \delta \mathbf{u}_s^T \int_0^1 (\mathbf{N}'_s)^T (\mathbf{N}'_s) d\xi \mathbf{u}_s \right\} \quad (\text{---}) \dots \mathbf{k}_g$$

damit:

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{g11} & \mathbf{k}_{g12} \\ \mathbf{k}_{g21} & \mathbf{k}_{g22} \end{bmatrix}_{8.8} \quad (8.41)$$

wobei

$$\mathbf{k}_{g11} = \pm \text{Sl} \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T (\mathbf{N}'_b) d\xi \quad (8.42)$$

$$\mathbf{k}_{g12} = \mathbf{k}_{g21}^T = \pm \text{Sl} \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T (\mathbf{N}'_s) d\xi \quad (8.43)$$

$$\mathbf{k}_{g22} = \pm \text{Sl} \int_0^1 (\mathbf{N}'_s)^T (\mathbf{N}'_s) d\xi \quad (8.44)$$

Die Zusammenstellung der Terme der geometrischen Steifigkeitsmatrix befindet sich im Anhang A4.

Eine "genäherte" Steifigkeitsmatrix ergibt sich bei einem kubischen Verschiebungsansatz für die Verschiebungen  $w_b$  und  $w_s$  (entsprechend Abschnitt 4.1.2.6) wie folgt:

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{S} \cdot \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ & & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & & & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \\ & & & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ & & & & & & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & & & & & & & \frac{2l}{15} \\ \text{symm.} & & & & & & & \frac{1}{10} \\ & & & & & & & \frac{2l}{15} \end{array} \right] \end{array} \quad (8.45)$$

mit zugehörigem Schnittgrößen-

und

Verschiebungsvektor

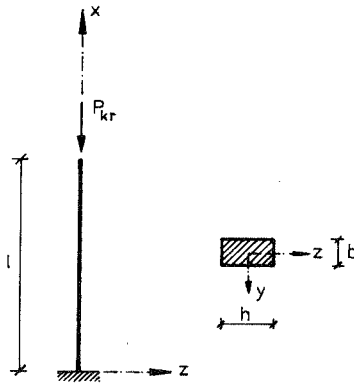
$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zk} \\ M_{yk} \\ Q_{zi} \\ M_{\omega i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega k} \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_{bi} \\ \phi_{bi} \\ w_{bk} \\ \phi_{bk} \\ w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

8.4 Beispiel: Eulerfall 1

$$b/h/l = 0.1/1/5 \quad [\text{m}]$$



$$E = 210000.0 \quad \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0.0$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\alpha_s = 0.8\bar{3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = 0.008\bar{3} \quad \text{m}^4$$

$$I_\omega = \frac{bh^3}{1008} = 9.9206 \cdot 10^{-5} \quad \text{m}^4$$

Annahme: Ein Ausweichen senkrecht zur Versagensebene (x-z-Ebene) sei ausgeschlossen

Eulerlast:

$$P_{\text{krit}} = EI_y \frac{\pi^2}{s_k^2} \quad ; \quad s_k = 2l$$

$$= EI_y \frac{\pi^2}{4l^2}$$

$$P_{\text{krit}} = 2.1 \cdot 10^8 \frac{1}{120} \frac{\pi^2}{4 \cdot 5^2} = \underline{\underline{172718.1 \text{ kN}}}$$

bzw.

kritischer Lastfaktor  $\nu_{\text{kr}}$  bei einer Referenzlast von  $P_{\text{ref}} = 1000 \text{ kN}$

$$\nu_{\text{krit}} = \frac{P_{\text{krit}}}{P_{\text{ref}}} = \underline{\underline{172.718}}$$

In der Eulerschen Knickformel wird nur die Biegesteifigkeit des Stabes berücksichtigt. Gleichungen, in denen daneben auch der Schub und die Stabverkürzung berücksichtigt werden, wurden u.a. von Reissner in [56] und Ziegler in [83] untersucht.

		angewandte Theorie	1. Eigenwert $\nu_{kr}$ (= kritische Last)	
<b>Balkentheorie</b>	[w, $\phi_s$ ]	Euler/Bernoulli	172.718	
		Yokoyama* [82]	169.375	
	[w <sub>b</sub> , w <sub>s</sub> ]	exakt **		169.376
		kub. Ansatz für $w_s$ , $I_\omega \neq 0$ , $\phi_s(0) = 0$		169.376
		kub. Ansatz für $w_s$ , $I_\omega = 0$ , $\phi_s(0) = 0$		169.375
		kub. Ansatz für $w_s$ , $I_\omega = 0$ , $\phi_s(0) \neq 0$		169.375

\* ... Lösung nach der Timoshenko-Theorie

\*\* ... exakt im Sinne einer konvergierten Lösung der erweiterten Theorie

Tabelle 8.1 Zusammenstellung der Ergebnisse

### 8.5 Abschließende Bemerkung

- Der Unterschied in den Ergebnissen für die kritische Last nach der Euler/ Bernoulli-Theorie und der im Sinne von Timoshenko erweiterten Theorie (Yokoyama in [82]) ist auch noch bei diesem gedrungenen Beispiel ( $h/l = 1/5$ ) gering (ca. 2 %). Erst die höheren Eigenwerte, die in der Regel hier von untergeordneter Bedeutung sind, zeigen deutlichere Unterschiede (vgl. hierzu Abschnitt 9 Dynamik). Aus diesem Grund verwundert es nicht, daß das Ergebnis nach der hier vorgestellten erweiterten Balkentheorie sich fast nicht vom Ergebnis nach der Timoshenko-Theorie unterscheidet.
- Auch eine Berechnung mit einer Querdehnzahl  $\nu \neq 0$  liefert keine wesentlichen Abweichungen von obigen Ergebnissen und zeigt das gleiche relative Verhalten der einzelnen Theorien.

## 9 Erweiterung auf die Dynamik

Im folgenden werden die Differentialgleichungen der Dynamik für die erweiterte Balkentheorie hergeleitet und die genäherte dynamische Steifigkeitsmatrix mit konsistenter Massenmatrix aufgestellt. Entsprechend der genäherten geometrischen Steifigkeitsmatrix in Abschnitt 8 wird auch hier eine genäherte "konsistente" Massenmatrix über einen kubischen Näherungsansatz für die Verschiebungen infolge Schub angegeben. An verschiedenen Beispielen werden die Ergebnisse für die Eigenfrequenzen und Eigenformen der verfeinerten Biege-Schub-Theorie mit analytischen und numerischen Ergebnissen der elementaren Balkentheorie und der Scheibentheorie verglichen.

### 9.1 Herleitung

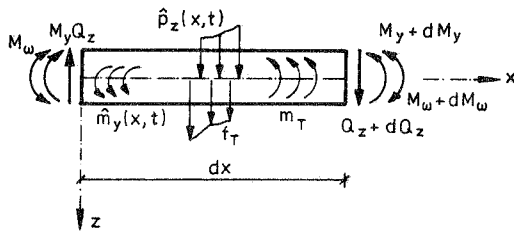
- Zusätzliche Annahmen:

- Berücksichtigung der Trägheitskräfte aus Translation und Rotation

- ungedämpftes System

- verteilte Masse  $m = \rho A \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} = \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^2} \right]$  ;  $\rho \dots$  Dichte  $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^4} \right]$

- harmonische Erregung



Impuls:

$$I = \int_V \rho \dot{w}(x, t) dV$$

Drall:

$$D = \int_V \rho z \dot{u}(x, z, t) dV$$

Impulsänderung: ( für  $\rho = \text{konst.}$ ,  $b = \text{konst.}$  )

$$\dot{i} = \int_V \rho \ddot{w}(x, t) dV = \rho \int_0^l \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{w}(x, t) dz dy dx = \rho l b h \ddot{w}(x, t) \quad [\text{N}]$$

bzw.

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}}{l} = \rho A \ddot{w}(x, t) = \rho A \ddot{w}_b(x, t) + \rho A \ddot{w}_s(x, t) \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Dralländerung: ( für  $\rho = \text{konst.}$ ,  $b = \text{konst.}$  )

$$\dot{D} = \int_V \rho z \ddot{u}(x, z, t) dV = \rho \int_0^l \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \ddot{u}(x, z, t) dz dy dx = \rho l b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \ddot{u}(x, z, t) dz \quad [\text{Nm}]$$

bzw.

$$\dot{d} = \frac{\dot{D}}{l} = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \ddot{u}(x, z, t) dz$$

mit:

$$u(x, z, t) = \phi_b(x, t)z + \beta_s(x, t)z + \phi_s(x, t)\omega(z)$$

bzw. entsprechend Abschnitt 4.1.1 :

$$u(x, z, t) = \phi_b(x, t)z + \phi_s(x, t)\omega(z)$$

folgt:

$$\dot{d} = \rho b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\ddot{\phi}_b(x, t)z + \ddot{\phi}_s(x, t)\omega(z)] dz$$

$$\dot{d} = \rho b \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz}_{\rho I_y \ddot{\phi}_b(x, t)} \ddot{\phi}_b(x, t) + \rho b \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \omega(z) dz}_{0} \ddot{\phi}_s(x, t) \quad \left[ \frac{\text{Nm}}{\text{m}} \right]$$

$$\rho I_y \ddot{\phi}_b(x, t)$$

$$0$$

Kräfteesatz:

$$\dot{i} = \hat{P}_z \quad \text{bzw.} \quad \dot{i} = \hat{p}_z$$

Momentensatz:

$$\dot{D} = \hat{M}_y \quad \text{bzw.} \quad \dot{d} = \hat{m}_y$$

d'Alembertsche Trägheitskräfte:

$$f_{T_b} = -m\ddot{w}_b(x, t) = -\rho A \ddot{w}_b(x, t)$$

$$f_{T_s} = -m\ddot{w}_s(x, t) = -\rho A \ddot{w}_s(x, t)$$

$$m_{T_b} = -m \frac{I_y}{A} \ddot{\phi}_b(x, t) = -\rho I_y \ddot{\phi}_b(x, t)$$

- Grundgleichungen

Die statischen Grundgleichungen von Abschnitt 4.1.2.1 müssen wie folgt um die Trägheitskräfte erweitert werden:

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + \hat{p}_z + f_{T_b} + f_{T_s} = 0 \quad (9.1)$$

und

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + \hat{m}_y + m_{T_b} = 0 \quad (9.2)$$

bzw.

$$Q_z' + \hat{p}_z - \rho A (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) = 0 \quad (9.3)$$

$$Q_z = Q_z^P + Q_z^S \quad (9.4)$$

$$Q_z^S = M_y' \quad (9.5)$$

$$M_y' - Q_z + \hat{m}_y - \rho I_y \ddot{\phi}_b = 0 \quad (9.6)$$

- Differentialgleichungen

Zusammen mit den bekannten Werkstoff- und Geometriegleichungen lassen sich die Differentialgleichungen der Dynamik für die erweiterte Balkentheorie entsprechend Abschnitt 4.1.2.1 angeben:

$$(GA_s w_s')' - (EI_\omega w_s'')' - \rho A (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) = -\hat{p}_z(x, t) \quad (9.7)$$

$$(EI_y w_b'')' + [GA_s w_s' - (EI_\omega w_s'')'] + \rho I_y \ddot{\phi}_b = \hat{m}_y(x, t) \quad (9.8)$$

Für den Sonderfall  $GA_s = \text{konstant}$ ,  $EI_y = \text{konstant}$ ,  
 $EI_\omega = \text{konstant}$  und  $\hat{m}_y = 0$  erhält man:

$$GA_s w_s'' - EI_\omega w_s^{IV} - \rho A (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) = -\hat{p}_z(x, t) \quad (9.9)$$

$$EI_y w_b''' + [GA_s w_s' - EI_\omega w_s'''] + \rho I_y \ddot{\phi}_b = 0 \quad (9.10)$$

## 9.2 Integralformulierung (Energie)

- Prinzip von Hamilton

Für das gekoppelte Differentialgleichungssystem werden im folgenden die Steifigkeitsmatrix und die konsistente Massenmatrix über das d'Alembertsche Prinzip (Integraldarstellung) hergeleitet.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) \, dt = 0 \quad (9.11)$$

mit der

- Lagrange Funktion

$$L = T - \Pi \quad (9.12)$$

der

- potentiellen Energie

$$\begin{aligned} \Pi(w_b, w_s) &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_y (-w_b'')^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^l GA_s (w_s')^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_\omega (-w_s'')^2 \, dx \\ &\quad - \int_0^l \hat{p}_z w_b \, dx - \int_0^l \hat{p}_z w_s \, dx \\ &\quad - \left[ \hat{Q}_z w_b + \hat{Q}_z w_s + \hat{M}_y (-w_b') + \hat{M}_\omega (-w_s') \right]_0^l \end{aligned} \quad (9.13)$$

und der



- kinetischen Energie

$$T(w_b, \phi_b, w_s) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_y (\dot{\phi}_b)^2 dx \quad (9.14)$$

- D'Alembertsches Prinzip

$$\begin{aligned} & \int_0^l \delta(-w_b'') EI_y (-w_b'') dx + \int_0^l \delta w_s' GA_s w_s' dx + \int_0^l \delta(-w_s'') EI_\omega (-w_s'') dx \\ & + \int_0^l \delta \phi_b \rho I_y \ddot{\phi}_b dx + \int_0^l \delta w_b \rho A \ddot{w}_b dx + \int_0^l \delta w_b \rho A \ddot{w}_s dx \\ & \quad + \int_0^l \delta w_s \rho A \ddot{w}_b dx + \int_0^l \delta w_s \rho A \ddot{w}_s dx \\ & = \int_0^l \delta w_b \hat{p}_z dx + \int_0^l \delta w_s \hat{p}_z dx + \left[ \delta w_b \hat{Q}_z + \delta w_s \hat{Q}_z + \delta(-w_b') \hat{M}_y + \delta(-w_s') \hat{M}_\omega \right]_0^l \end{aligned} \quad (9.15)$$

### 9.3 Konsistente Massenmatrix

Die Herleitung der genäherten dynamischen Steifigkeitsmatrix mit konsistenter Massenmatrix erfolgt aus dem d'Alembertschen Prinzip durch zur statischen Lösung konsistente Verschiebungsansätze (Herleitung siehe Anhang A4).

Die Arbeitsanteile

$$\rho \left\{ \int_0^l \delta \phi_b I_y \ddot{\phi}_b dx + \int_0^l \delta w_b \rho A \ddot{w}_b dx + \int_0^l \delta w_b \rho A \ddot{w}_s dx + \int_0^l \delta w_s \rho A \ddot{w}_b dx + \int_0^l \delta w_s \rho A \ddot{w}_s dx \right\}$$

liefern u.a. mit

$$\begin{array}{l|l}
 w_b(x, t) = \mathbf{N}_b(x) \mathbf{u}_b \sin(\omega t) & \delta w_b = \mathbf{N}_b \delta \mathbf{u}_b \\
 \phi_b(x, t) = \mathbf{N}'_b(x) \mathbf{u}_b \sin(\omega t) & \delta \phi_b = \mathbf{N}'_b \delta \mathbf{u}_b \\
 w_s(x, t) = \mathbf{N}_s(x) \mathbf{u}_s \sin(\omega t) & \delta w_s = \mathbf{N}_s \delta \mathbf{u}_s
 \end{array}$$

und  $dx = l d\xi$

den Ausdruck zur direkten Bestimmung der Untermatrizen der konsistenten Massenmatrix:

$$\begin{aligned}
 & \varrho l \left\{ \underbrace{\delta \mathbf{u}_b^T \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T \mathbf{I}_y (\mathbf{N}'_b) d\xi \mathbf{u}_b}_{\text{---}} + \underbrace{\delta \mathbf{u}_b \int_0^1 (\mathbf{N}_b)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_b) d\xi \mathbf{u}_b}_{\text{---}} + \underbrace{\delta \mathbf{u}_b^T \int_0^1 (\mathbf{N}_b)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_s) d\xi \mathbf{u}_s}_{\text{---}} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\delta \mathbf{u}_s^T \int_0^1 (\mathbf{N}_b)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_s) d\xi \mathbf{u}_b}_{\text{---}} + \underbrace{\delta \mathbf{u}_s \int_0^1 (\mathbf{N}_s)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_s) d\xi \mathbf{u}_s}_{\text{---}} \right\} \sin(\omega t) \quad (\text{---}) \dots \mathbf{m}
 \end{aligned}$$

damit:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix}_{8,8} \quad (9.16)$$

wobei

$$\mathbf{m}_{11} = \varrho l \int_0^1 (\mathbf{N}_b)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_b) d\xi + \varrho l \int_0^1 (\mathbf{N}'_b)^T \mathbf{I}_y (\mathbf{N}'_b) d\xi \quad (9.17)$$

$$\mathbf{m}_{12} = \mathbf{m}_{21}^T = \varrho l \int_0^1 (\mathbf{N}_b)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_s) d\xi \quad (9.18)$$

$$\mathbf{m}_{22} = \varrho l \int_0^1 (\mathbf{N}_s)^T \mathbf{A} (\mathbf{N}_s) d\xi \quad (9.19)$$

Die Zusammenstellung der Terme der konsistenten Massenmatrix befindet sich im Anhang A4.

Über einen kubischen Näherungsansatz für die Verschiebungen infolge Schub erhält man aus dem d'Alembertschen Prinzip folgende genäherte konsistente Massenmatrix:

$$\mathbf{m} = \rho \cdot$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \left( \frac{13}{35} l_A + \frac{6}{5} l_y \right) \left( -\frac{11}{210} l^2_A - \frac{1}{10} l_y \right) & \left( \frac{9}{70} l_A - \frac{6}{5} l_y \right) & \left( \frac{13}{420} l^2_A - \frac{1}{10} l_y \right) & \frac{13}{35} l_A & -\frac{11}{210} l^2_A & \frac{9}{70} l_A & \frac{13}{420} l^2_A & \\ & \left( \frac{1}{105} l^3_A + \frac{2}{15} l_y \right) \left( -\frac{13}{420} l^2_A + \frac{1}{10} l_y \right) & \left( -\frac{1}{140} l^3_A - \frac{1}{30} l_y \right) & -\frac{11}{210} l^2_A & \frac{1}{105} l^3_A & -\frac{13}{420} l^2_A & -\frac{1}{140} l^3_A & \\ & \left( \frac{13}{35} l_A + \frac{6}{5} l_y \right) & \left( \frac{11}{210} l^2_A + \frac{1}{10} l_y \right) & \frac{9}{70} l_A & -\frac{13}{420} l^2_A & \frac{13}{35} l_A & \frac{11}{210} l^2_A & \\ & & \left( \frac{1}{105} l^3_A + \frac{2}{15} l_y \right) & \frac{13}{420} l^2_A & -\frac{1}{140} l^3_A & \frac{11}{210} l^2_A & \frac{1}{105} l^3_A & \\ & & & \frac{13}{35} l_A & -\frac{11}{210} l^2_A & \frac{9}{70} l_A & \frac{13}{420} l^2_A & \\ & & & & \frac{1}{105} l^3_A & -\frac{13}{420} l^2_A & -\frac{1}{140} l^3_A & \\ & & & & & \frac{13}{35} l_A & \frac{11}{210} l^2_A & \\ & & & & & & \frac{1}{105} l^3_A & \end{array} \right]$$

symm.

(9.20)

mit zugehörigem Schnittgrößen-

und

Verschiebungsvektor

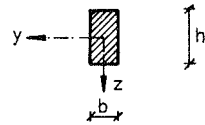
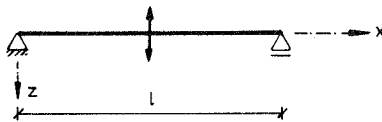
$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zk} \\ M_{yk} \\ Q_{zi} \\ M_{\omega i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega k} \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_{bi} \\ \phi_{bi} \\ w_{bk} \\ \phi_{bk} \\ w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

9.4 Beispiel: Balken auf zwei Stützen

$$b/h/l = 0.1/1/5 \text{ [m]}$$



$$E = 210000.0 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0.0$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\varrho = 7.85 \frac{\text{kNs}^2}{\text{m}^4}$$

$$\alpha_s = 0.8\bar{3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = 0.008\bar{3} \text{ m}^4$$

$$I_\omega = \frac{bh^3}{1008} = 9.9206 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen  $\omega$  sind folgende analytische Lösungsansätze bekannt:

1. Bernoulli  $[w_b, \phi_b]: \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI_y}{\varrho A}$  bzw.  $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sqrt{\frac{EI_y}{\varrho A}}$

2. Clough/Penzien  $[w, \phi_b]: \omega_n^2 = \underbrace{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI_y}{\varrho A}}_{\text{Bernoulli}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left( \frac{I_y}{A} + \frac{EI_y}{GA_s} \right) \right]^2$   
| |  
Rotationsträgheit Schubverformung

3. Anderson  $[w_b, w_s]: \frac{1}{2}\omega_n^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left( \frac{E}{\varrho} + \frac{GA_s}{\varrho A} \right) + \frac{GA_s}{\varrho I_y} \right] \mp$   

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left[ \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left( \frac{E}{\varrho} + \frac{GA_s}{\varrho A} \right) + \frac{GA_s}{\varrho I_y} \right]^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{E}{\varrho} \frac{GA_s}{\varrho A}}$$

4. Huang                     $[w, \phi_b]$  : Nur Angabe der Eigenwertgleichung
5. Kruszewski             $[w, w_b]$  : Angabe der Eigenwertgleichung mit numerischer Auswertung ("trial and error") und graphischer Darstellung der Ergebnisse für verschiedene Höhen-Längen-Verhältnisse.

Die Lösungsansätze 2. bis 5. beruhen auf den Differentialgleichungen der Timoshenko-Theorie.

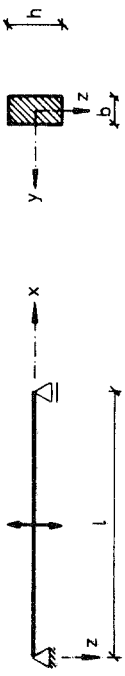
Während Huang in [29] direkt von diesen Gleichungen ausgeht, haben Anderson in [2] und Kruszewski in [37] diese in anderen Variablen geschrieben; daher kann insbesondere Anderson ggfs. die Schubrandbedingungen anders berücksichtigen als es nach der Timoshenko-Theorie üblich ist (z.B. an einer Einspannung mit dem Schubwinkel  $\phi_s = 0$ ). Die Eigenwertgleichung von Huang liefert die gleiche Frequenzgleichung, wie sie von Anderson angegeben wird. Die von Clough und Penzien in [14] angegebene Gleichung stellt eine Näherungslösung dar, die i.a. nur für die ersten Eigenfrequenzen brauchbare Lösungen liefert und, wie die folgende Auswertung zeigt, für manche Höhen-Längen-Verhältnisse ungeeignet ist.

Zur numerischen Bestimmung der Eigenfrequenzen  $\omega$  geben u.a.

6. Archer und Yokoyama    $[w, \phi_b]$    sowie
7. Kapur             $[w_b, w_s]$

Massenmatrizen an, die ebenfalls auf der Timoshenko-Theorie beruhen. Die konsistente Massenmatrix der hier vorgestellten erweiterten Balkentheorie läßt sich durch Reihenentwicklung und Abbruch nach dem 2. Glied in eine genäherte Massenmatrix (Abschnitt 9.3) überführen, die derjenigen entspricht, die Kapur in [32] direkt über einen kubischen Verschiebungsansatz sowohl für die Variable  $w_b$  als auch für die Variable  $w_s$  erhalten hat.

Die von Archer in [4] und Yokoyama in [82] angegebenen konsistenten Massenmatrizen beruhen direkt auf den Timoshenko-Differentialgleichungen.



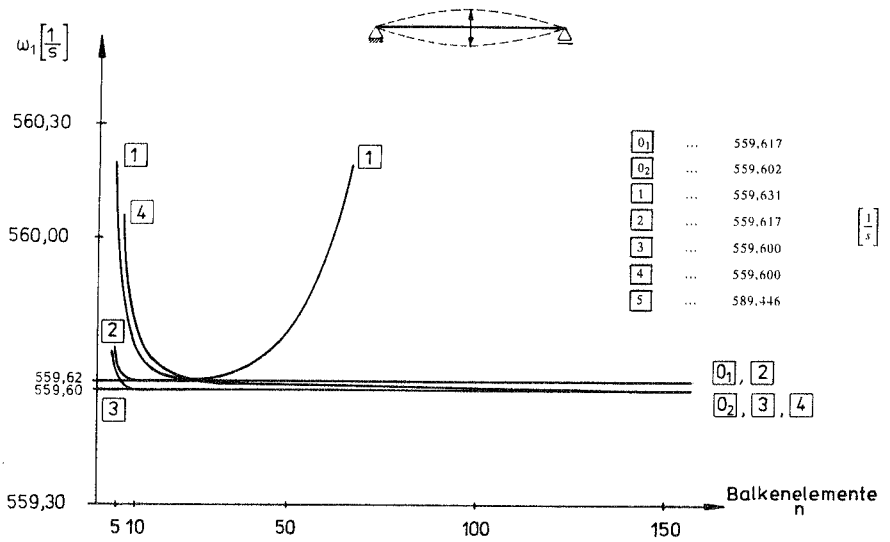
		Balkentheorie					
		elementar			erweitert		
Eigenfrequenzen	Bernoulli, Euler	Clough, Penzien*	Huang/Anderson*	Archer, Yokoyama*	exakt**	kub. Ansatz für $w_s$	
	$[w_b, \phi_b]$	$[w, \phi_b]$	$[w, \phi_b]/[w_b, w_s]$	$[w, \phi_b]$	$[w_b, w_s]$	$I_{\omega} \neq 0$	$I_{\omega} = 0$
$\omega_1$	589.446	556.479	559.600	559.600	559.631	559.617	559.600
$\omega_2$	2357.78	1830.32	1979.92	1979.93	1981.70	1980.62	1979.92
$\omega_3$	5305.01	2634.74	3853.01	3853.07	3868.01	3857.61	3853.01
$\omega_4$	9431.13	991.739	5933.43	5933.63	5993.04	5948.88	5933.43
$\omega_5$	14736.1	(negativ!)	8105.60	8106.12	8266.25	8142.73	8105.60

\* ... Lösung nach der Timoshenko-Theorie

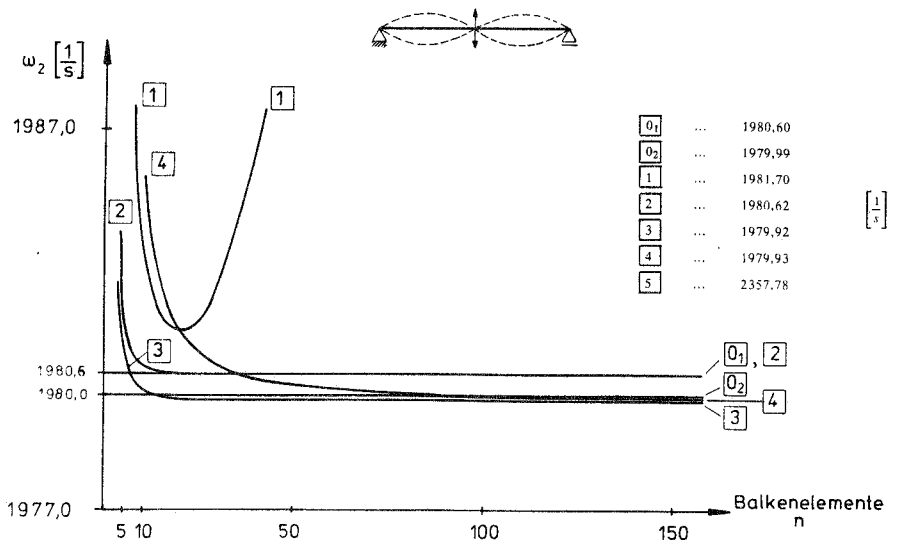
\*\* ... exakt im Sinne einer konvergierten Lösung der erweiterten Theorie

\*\*\* ... entspricht Kapur in [32]

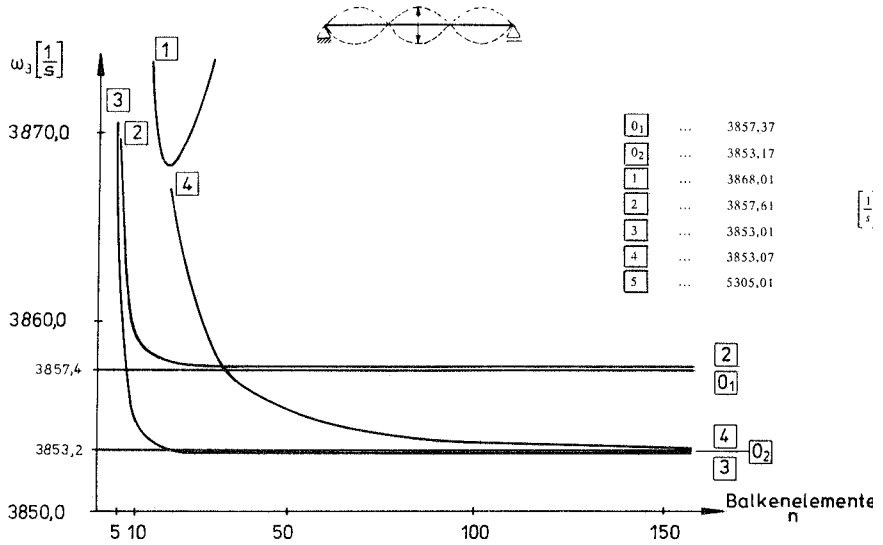
Tabelle 9.1 Zusammenstellung der Ergebnisse des Balkens auf zwei Stützen ( $\nu = 0.0$ ) mit den Abmessungen  $h/b/l = 0.1/1/5$  [m]



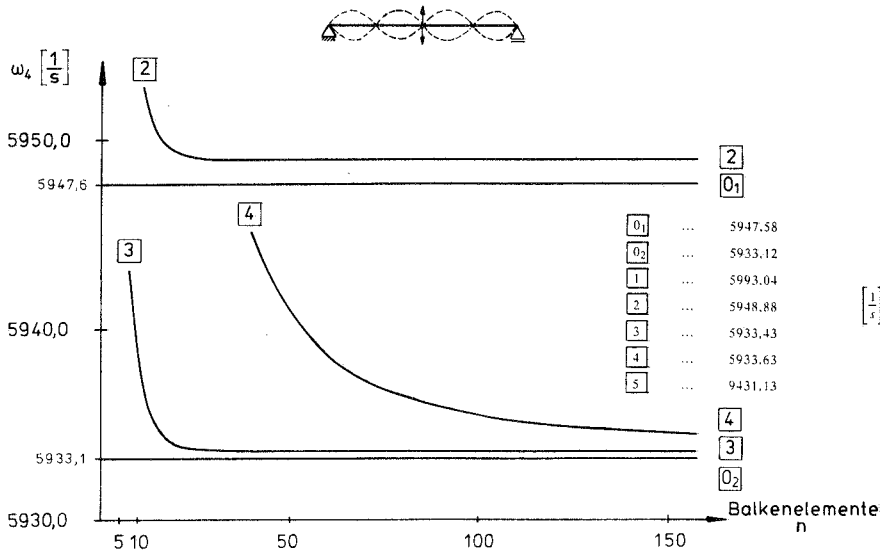
a. Eigenfrequenzen  $\omega_1$



b. Eigenfrequenzen  $\omega_2$

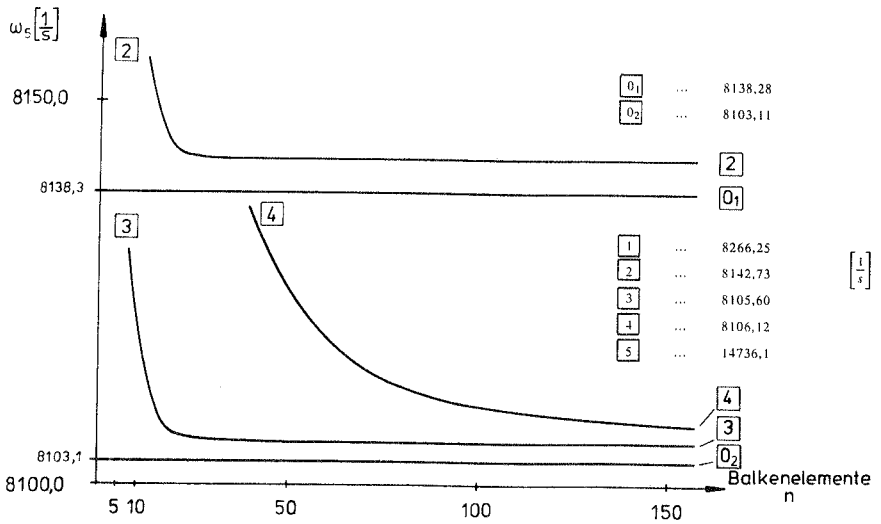


c. Eigenfrequenzen  $\omega_3$



d. Eigenfrequenzen  $\omega_4$





e. Eigenfrequenzen  $\omega_5$

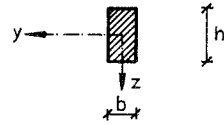
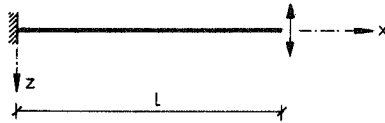
0 <sub>1</sub>	...	Vergleichslösung :	$\epsilon_z \approx 0$	}	Scheibentheorie
0 <sub>2</sub>	...	Vergleichslösung :	$\epsilon_z \neq 0$		
1	...	"exakt"		}	erweiterte Theorie
2	...	Näherung : kub. Ansatz			
3	...	{	Näherung : kub. Ansatz, $I_\omega = 0$	}	Timoshenko-Theorie
	...		Kapur		
4	...	Archer, Yokoyama		}	Bernoulli-Theorie
5	...	nur "m <sub>T</sub> "			

Bild 9.1 Eigenfrequenzen des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens ( $\nu = 0,0$ ) mit den Abmessungen  $b/h/l = 0,1/1/5$  [m]

9.5

Beispiel:

Kragträger

 $b/h/l = 0.1/1/2.5$  [m]

$$E = 210000.0 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0.0$$

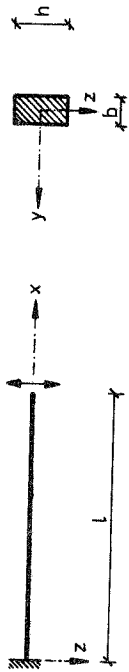
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\varrho = 7.85 \frac{\text{kNs}^2}{\text{m}^4}$$

$$\alpha_s = 0.8\bar{3}$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = 0.008\bar{3} \text{ m}^4$$

$$I_\omega = \frac{bh^3}{1008} = 9.9206 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$



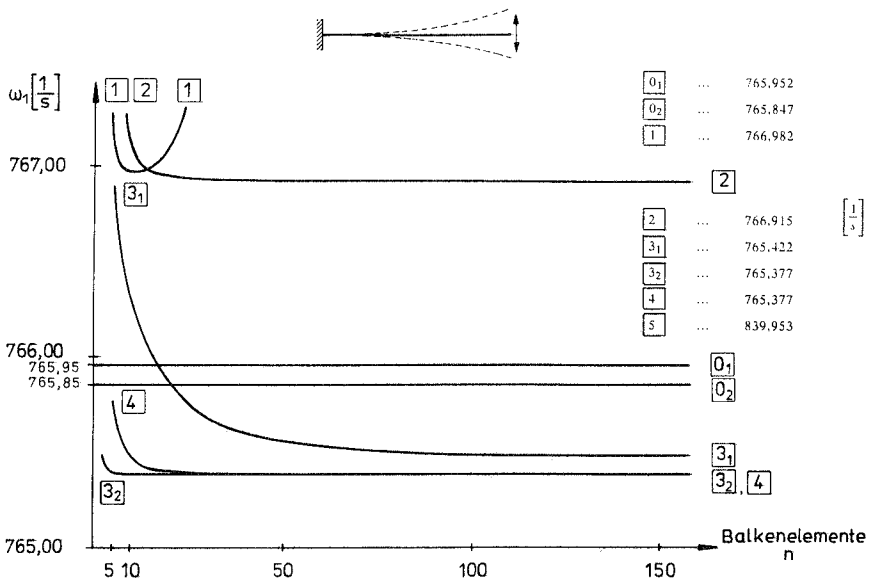
		Balkentheorie					
		elementar			erweitert		
Eigen- frequenzen	Bernoulli, Euler	Kruszewski*	Archer, Yokoyama*	exakt**	kub. Ansatz für $w_s$		
	$ w_0, \phi_0 $	$ w_0, w_0 $	$ w_0, \phi_0 $	$ w_0, w_0 $	$I_w \neq 0,$ $\phi_3(0) = 0$	$I_w = 0,$ $\phi_3(0) = 0$	$I_w = 0, *$ $\phi_3(0) \neq 0$ ***
					$ w_0, w_0 $	$ w_0, w_0 $	$ w_0, w_0 $
$\omega_1$	839.860	781.070	765.377	766.982	766.915	765.422	765.377
$\omega_2$	5263.69	3368.80	3359.43	3415.85	3408.36	3360.82	3359.41
$\omega_3$	14740.0	6633.00	7271.58	7519.99	7435.61	7275.71	7271.38
$\omega_4$	28727.7	—	10805.9	11320.4	11031.6	10811.1	10805.3
$\omega_5$	47545.6	—	13671.2	14345.9	13795.0	13673.7	13670.2
$\omega_6$	71079.0	—	14882.2	15718.5	15119.2	14886.0	14880.9

\* ... Lösung nach der Timoshenko-Theorie

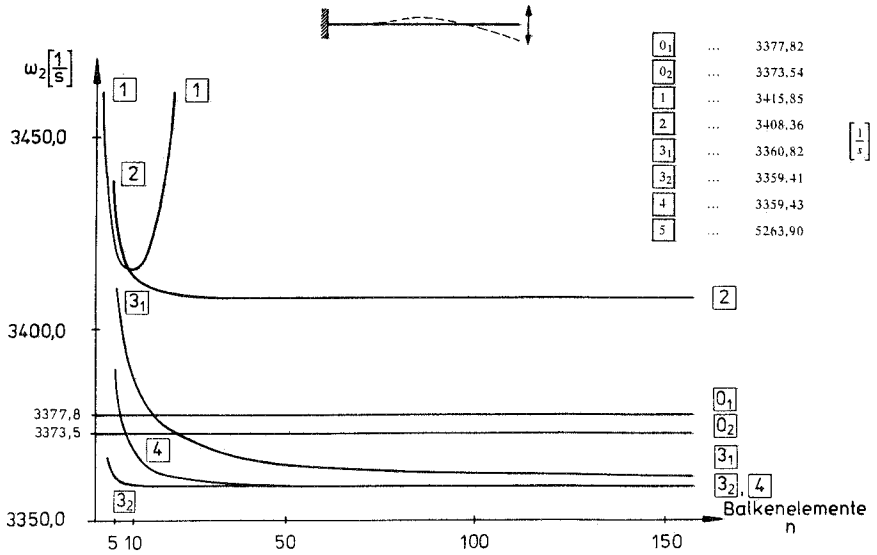
\*\* ... exakt im Sinne einer konvergierten Lösung der erweiterten Theorie

\*\*\* ... entspricht Kapur in [32]

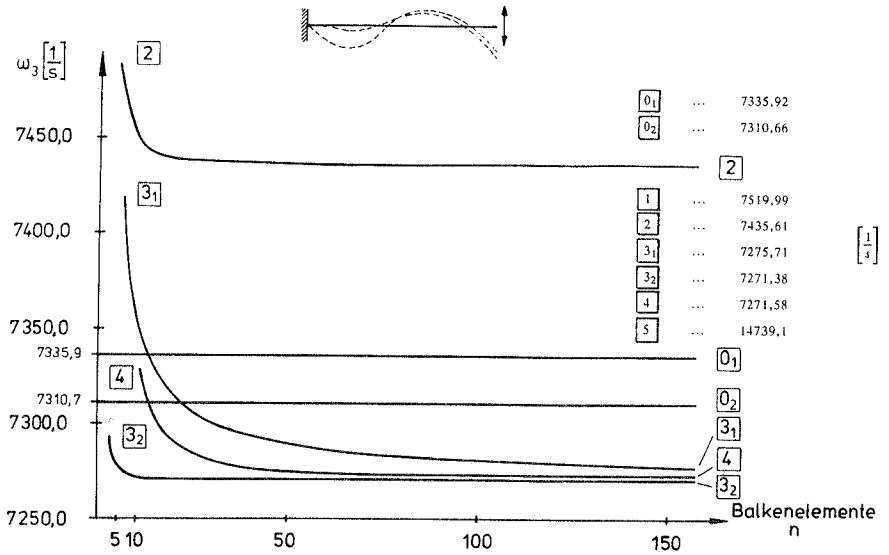
Tabelle 9.2 Zusammenstellung der Ergebnisse des Krügers ( $\nu = 0.0$ ) mit den Abmessungen  $b/h/l = 0.1/1/2.5$  [m]



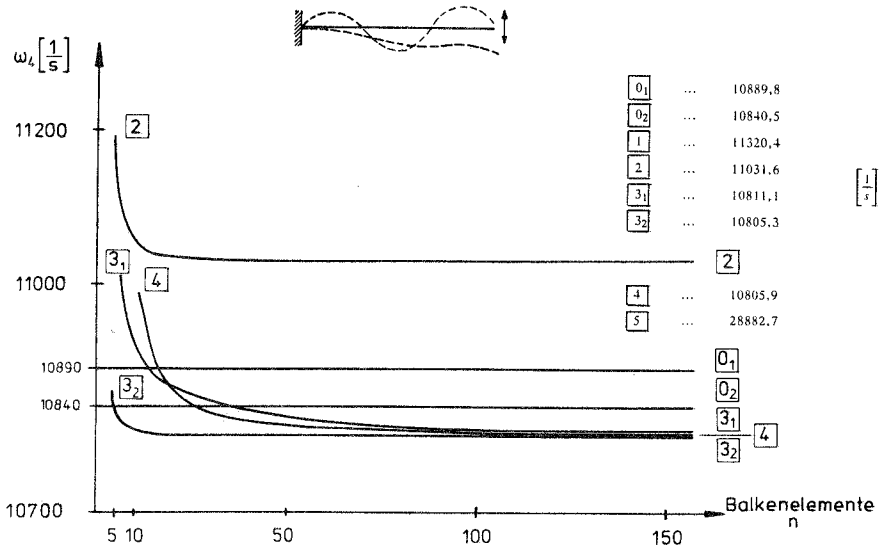
a. Eigenfrequenzen  $\omega_1$



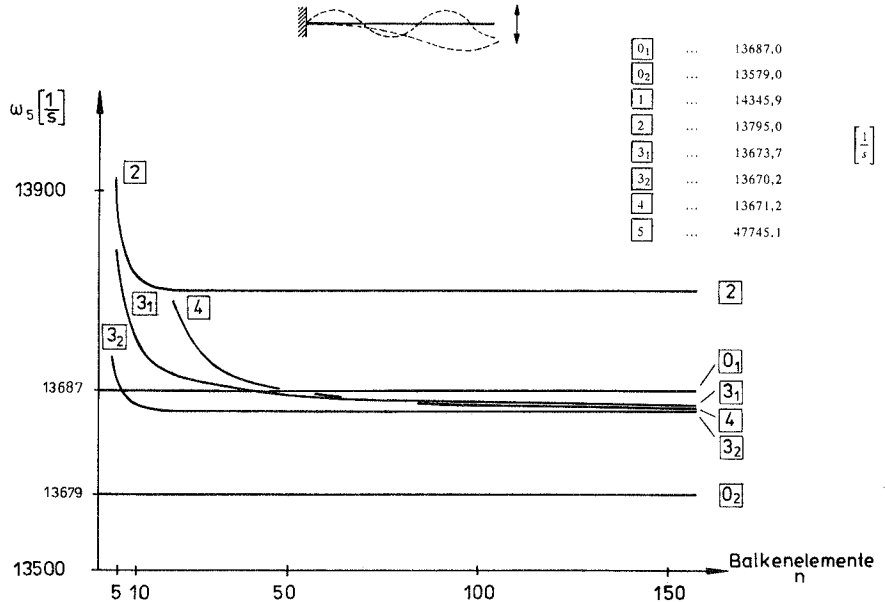
b. Eigenfrequenzen  $\omega_2$



c. Eigenfrequenzen  $\omega_3$



d. Eigenfrequenzen  $\omega_4$



e. Eigenfrequenzen  $\omega_5$

0 <sub>1</sub>	...	Vergleichslösung :	$\epsilon_z \approx 0$	}	Scheibentheorie
0 <sub>2</sub>	...	Vergleichslösung :	$\epsilon_z \neq 0$		
1	...	"exakt"		}	erweiterte Theorie
2	...	Näherung : kub. Ansatz			
3 <sub>1</sub>	...	Näherung : kub. Ansatz, $I_\omega = 0$		}	Timoshenko-Theorie
3 <sub>2</sub>	...	Kapur			
4	...	Archer, Yokoyama		}	Bernoulli-Theorie
5	...	nur "m <sub>T</sub> "			

Bild 9.2 Eigenfrequenzen des Kragträgers ( $\nu = 0.0$ ) mit den Abmessungen  $b/h/l = 0.1/1/2.5$  [m]

## 9.6 Abschließende Bemerkung

- Ein Vergleich der nach den angeführten Theorien bzw. Lösungsansätzen erhaltenen Eigenfrequenzen mit numerisch, unter Benutzung von 9-knotigen Scheibenelementen, erhaltenen (konvergierten) Lösungen zeigt, daß die ersten Eigenfrequenzen nach allen Theorien, die in irgendeiner Form den Schub berücksichtigen, sehr nahe beieinander liegen und die ersten beiden Eigenfrequenzen fast genau übereinstimmen.
- Die erweiterte Balkentheorie unter Benutzung der exakten Matrizen zeigt bei den höheren Eigenfrequenzen eine versteifende Wirkung.
- Führt man die Berechnung mit den genäherten Matrizen der erweiterten Balkentheorie durch, bei denen die Matrizerterme in Reihe entwickelt und nach dem zweiten Glied abgebrochen wurden, so stellt man fest, daß
  - im Beispiel "Balken auf zwei Stützen" (Bild 9.1) alle auf diese Weise erhaltenen Eigenfrequenzen und die Eigenfrequenzen einer numerischen Scheibenberechnung nahezu identisch sind, sofern man bei dieser entsprechend der in der Balkentheorie üblichen Annahme  $\sigma_z = 0$  und damit  $\epsilon_z = 0$  die Querdehnung durch das Ansetzen einer relativ zur Längsrichtung hohen Steifigkeit in Dickenrichtung ( $E_q = 100 - 10000 E_l$ ) näherungsweise ausgeschaltet hat:  $\epsilon_z = \sigma_z/E_q \approx 0$  (Kurve  $\boxed{0_1}$  im Bild 9.1)
  - im Beispiel "Kragträger" (für die gewählten Verhältnisse  $h/l$  eines sehr kurzen Balkens) liefert dagegen auch die erweiterte Balkentheorie mit genäherten Matrizen (Kurve  $\boxed{2}$  in Bild 9.2) gegenüber einer numerischen Berechnung nach der Scheibentheorie ein steiferes Ergebnis. Erst für ein kleineres Höhen-Längen-Verhältnis erhält man tendenziell das gleiche Resultat wie im vorhergehenden Beispiel.
- Setzt man in den genäherten Matrizen der erweiterten Balkentheorie die Wölbsteifigkeit gleich null, dann entsprechen die so erhaltenen Ergebnisse denjenigen der Timoshenko-Theorie (Kurven  $\boxed{3}$  und  $\boxed{4}$  in Bild 9.1 bzw. Kurven  $\boxed{3_1}$  und  $\boxed{4}$  in Bild 9.2)
- Der Unterschied zwischen den Kurven  $\boxed{3_1}$  und  $\boxed{3_2}$  in Bild 9.2 rührt aus der unterschiedlichen Berücksichtigung der Einspannung und ist vernachlässigbar klein.
- Die niederen Eigenfrequenzen der Timoshenko-Balkentheorie liegen geringfügig unterhalb den nach der Scheibentheorie (ohne weitere Annahmen Kurve  $\boxed{0_2}$  in den Bildern 9.1 und 9.2) berechneten. Dies liegt an der fehlenden Wölbsteifigkeit in der Timoshenko-Theorie.

- Die höheren Eigenfrequenzen liegen oberhalb derjenigen nach der Scheibentheorie, was auf den zunehmenden Einfluß der Steifigkeit (Weichheit) in Dickenrichtung zurückzuführen ist; dieser Einfluß wird in der Scheibentheorie berücksichtigt.
- Der Einfluß der Wölbsteifigkeit in einer Balkentheorie auf die Ergebnisse einer Eigenfrequenzberechnung liegt für den untersuchten Frequenzbereich ( $\omega_1$  bis  $\omega_5$ ) und gewöhnliche Balkenverhältnisse ( $h/l \geq 1/5$ ) in der gleichen Größenordnung wie der Einfluß der Querdehnung bzw. Querspannung in der Scheibentheorie.



## 10 Zusammenfassung und Schlußfolgerung

In der vorliegenden Arbeit wurde eine erweiterte Balkentheorie auf anschaulichem Weg – d.h. als lokale Formulierung durch eine erweiterte kinematische Annahme – hergeleitet.

Das Ergebnis ist eine Balkentheorie, die im Genauigkeitsbereich der Scheibentheorie mit Ansatz einer Spannungsfunktion 5. Ordnung liegt. Sie enthält als Sonderfälle sowohl die Bernoulli- als auch die Timoshenko-Theorie.

Die Erweiterung in der vorgestellten Balkentheorie gegenüber den elementaren Theorien stellt im Prinzip die Korrektur der Inkonsistenz der Timoshenko-Theorie dar. Diese Korrektur ermöglicht neben der von der Timoshenko-Theorie bereits bekannten und im wesentlichen dort schon verbesserten Verschiebungsberechnung auch eine verbesserte Spannungsberechnung.

Die Verbesserung in den Verschiebungen und insbesondere in den Spannungen wird durch eine genauere Erfassung der Schubverzerrungen erzielt. Diese von Anfang an genauere Berücksichtigung der Schubverzerrungen liefert eine konsistente Balkentheorie, die es ohne später noch zu treffende weitere Annahmen gestattet, sowohl in kurzen wandartigen Trägern die Spannungen genauer zu ermitteln als auch in gegliederten Querschnitten den "Shear-Lag-Effekt" bzw. das Problem der mittragenden Breite auf einfache Weise bei zufriedenstellender Genauigkeit zu beschreiben.

Die Genauigkeit hierbei liegt im Bereich der elementaren Faltwerkstheorien.

Die Einfachheit der erweiterten Balkentheorie generell basiert auf der formalen Analogie der ihr zugrundeliegenden Differentialgleichung zu der Differentialgleichung der linearisierten Theorie II. Ordnung und der der Wölbkrafttorsion sowie auf der damit verbundenen einfachen Übertragbarkeit der aus diesen Problemkreisen bekannten Lösungen gewöhnlicher Belastungsfälle.

Die Auswirkungen der genaueren Berücksichtigung der Schubverzerrungen auf die linearisierte Theorie II. Ordnung und die Dynamik stellten sich bei den untersuchten Beispielen als vernachlässigbar gering heraus. Lediglich die höheren Eigenwerte sowohl bei den Stabilitäts- als auch bei den Eigenfrequenzberechnungen zeigten eine deutliche Versteifung gegenüber den entsprechenden Werten nach der Timoshenko-Theorie.

Ob diese bei der Stabilitätsanalyse gemachte Feststellung von Allgemeingültigkeit ist oder nur für das untersuchte Beispiel zutrifft, müssen weitere Untersuchungen klären.

Die Untersuchung der Auswirkungen der verfeinerten Balkentheorie auf Composites und Laminates könnte im Hinblick auf die Spannungsberechnung eine denkbare Erweiterung darstellen; zumal für die unterschiedlichsten Querschnittsformen und Materialien im Schrifttum allgemeine Formeln zur Berechnung der hierfür benötigten Schubkorrekturfaktoren zu finden sind.

## Schrifttum

- [1] Airy, G.: On the Strains in the Interior of Beams.  
Philos. Trans. Roy. Soc., 153 (1863)
- [2] Anderson, R.: Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory.  
ASME Appl. Mech. Division, 504–510 (1953)
- [3] Antman, S.: The Theory of Rods. In: Handbuch der Physik. Band VIa/2. Festkörpermechanik II. Hrsg.: Flügge, S.  
Berlin u.a. : Springer (1972)
- [4] Archer, J.: Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques.  
AIAA Journal, 3, 1910–1918 (1965)
- [5] Bank, L.: Shear Coefficients for Thin-Walled Composite Beams.  
Composite Structures, 8, 47–61 (1987)
- [6] Bednarczyk, H.: Vorlesungen über Technische Mechanik, Teil 2, Elastostatik und Festigkeitslehre,  
Inst. f. Mechanik Lehrstuhl I der Universität Stuttgart (1989)
- [7] Bert, C.: Simplified Analysis of Static Shear Factors for Beams of NonHomogeneous Cross Section.  
J. of Composite Materials, 7, 525–529 (1973)
- [8] Bert, C.; Gordaninejad, F.: Transverse Shear Effects in Bimodular Composite Laminates.  
J. of Composite Materials, 17, 282–298 (1983)
- [9] Bickford, W.: A Consistent Higher Order Beam Theory.  
Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 11, 137 (1982)
- [10] Bresse, J.: Cours de Méchanique Appliquée.  
Paris : Mallet-Bachelier (1859)
- [11] Cheng, F.: Vibrations of Timoshenko Beams and Frameworks.  
J. of the Structural Division, 96, 551–571 (1970)
- [12] Cheng, F.; Pantelides, Ch.: Static Timoshenko-Beam-Columns on Elastic Media.  
J. of Structural Engineering, 114, 1152–1172 (1988)
- [13] Chwalla, E.: Die Formeln zur Berechnung der "voll mittragenden Breite" dünner Gurt- und Rippenplatten.  
Der Stahlbau, 9, 73–78 (1936)
- [14] Clough, R.; Penzien, J.: Dynamics of Structures.  
New York u.a. : McGraw-Hill (1975)
- [15] Cowper, G.: The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory.  
J. of Appl. Mech., 335–340 (1966)
- [16] Davidson, T.; Meier, J.: Impact of Prismatical Bars.  
Proceedings of the SESA, 4, 106 (1946)

- [17] Dezi, L.; Mentrasti, L.: Nonuniform Bending–Stress Distribution (Shear Lag).  
J. of Structural Engineering, 111, 2675–2690 (1985)
- [18] Dharmarajan, S.; McCutchen, H., Jr. : Shear Coefficients for Orthotropic Beams.  
J. of Composite Materials, 7, 530–535 (1973)
- [19] Dischinger, F.: Massivbau. In: Schleicher, Taschenbuch für Bauingenieure,  
– 2. Aufl., Band 1, 843–847.  
Berlin : Springer (1955)
- [20] Dökmeci, M.: A General Theory of Elastic Beams.  
Int. J. of Solids Structures, 8, 1205–1222 (1972)
- [21] Donnell, L.: Beams, Plates and Shells.  
New York u.a. : McGraw–Hill (1976)
- [22] Filon, L.: On an Approximate Solution of the Bending of a Beam of  
Rectangular Cross Section.  
Philos. Trans. Roy. Soc. London, A 201, 63 (1903)
- [23] Filonenko–Boroditsch, M.: Elastizitätstheorie.  
Leipzig : Fachbuchverlag (1967)
- [24] Foutch, D.; Chang, P.: A Shear Lag Anomaly.  
J. of the Structural Division, 108, 1653–1658 (1982)
- [25] Gebbeken, N.: Eine Fließgelenktheorie höherer Ordnung für räumliche  
Stabtragwerke (zugleich ein Beitrag zur historischen  
Entwicklung), Mitteilung Nr. 32 des Inst. f. Statik der Universität  
Hannover (1988)
- [26] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben,  
Platten, Schalen u. Falwerke. – 6. Aufl.  
Wien u.a. : Springer (1963)
- [27] Gordaninejad, F.; Ghazavi, A.: Effect of Shear Deformation on Bending of  
Laminated Composite Beams.  
J. of Pressure Vessel Technology, 111, 159–164, (1989)
- [28] Hjelmstad, K.: Warping Effects in Transverse Bending of Thin–Walled Beams.  
J. of Engineering Mechanics, 113, 907–924 (1987)
- [29] Huang, T.: The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the  
Frequency and Normal Mode Equations of Uniform  
Beams with Simple End Conditions.  
J. of Appl. Mech., 579–584 (1961)
- [30] Kant, T.; Gupta, A.: A Finite Element Model for a Higher–Order Shear–  
Deformable Beam Theory.  
J. of Sound and Vibration, 125, 193–202 (1988)
- [31] Kanok–Nukulchai, W.; Shik Shin, Y.: Versatile and Improved Higher–Order  
Beam Element.  
J. of Structural Engineering, 110, 2234–2249 (1984)
- [32] Kapur, K.: Vibrations of a Timoshenko Beam, Using Finite–Element  
Approach.  
The J. of the Acoustical Society of America, 40, 1058–1063  
(1966)

- [33] Kollbrunner, C.; Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe. Band I. Stäbe mit undeformierbaren Querschnitten. Berlin u.a. : Springer (1972)
- [34] Kollbrunner, C.; Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe. Band II. Stäbe mit deformierbaren Querschnitten. Berlin u.a. : Springer (1975)
- [35] Krishna Murty, A.: Vibrations of Short Beams. J. of American Institute of Aeronautics and Astronautics, 8, 34–38 (1970)
- [36] Krishna Murty, A.: Analysis of Short Beams. J. of American Institute of Aeronautics and Astronautics, 8, 2098–2100 (1970)
- [37] Kruszewski, E.: Effect of Transverse Shear and Rotary Inertia on the Natural Frequency of a Uniform Beam. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 1909 (1949)
- [38] Kuzmanović, B.; Graham, J.: Shear Lag in Box Girders. J. of the Structural Division, 107, 1701–1712 (1981)
- [39] Laudiero, F.; Savoia, M.: Shear Strain Effects in Flexure and Torsion of Thin-Walled Beams with Open or Closed Cross-Section. Thin-Walled Structures, 10, 87–119 (1990)
- [40] Laudiero, F.; Savoia, M.: The Shear Strain Influence on the Dynamics of Thin-Walled Beams. Thin-Walled Structures, 11, 375–407 (1991)
- [41] Lekhnitskii, S.: Anisotropic Plates. New York : Gordon and Breach (1968)
- [42] Levinson, M.: A New Rectangular Beam Theory. J. of Sound and Vibration, 74, 81–87 (1981)
- [43] Levinson, M.: Further Results of a New Beam Theory. J. of Sound and Vibration, 77, 440–444 (1981)
- [44] Levinson, M.: On Bickford's Consistent Higher Order Beam Theory. Mechanics Research Communications, 12, 1–9 (1985)
- [45] Love, A.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. – 4th Edition. Cambridge: University Press (1952)
- [46] Mathieu, E.: Théorie de l'Elasticité des Corps Solides. Seconde Partie, 10, 140–178. Paris : Gauthier-Villars (1890)
- [47] Mesmer, G.: Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen ... Diss. Göttingen (1929)
- [48] Metzger, W.: Die mittragende Breite. Luftfahrtforschung, 4, 1–20 (1929)
- [49] Miklowitz, J.: Flexural Wave Solutions of Coupled Equations Representing the More Exact Theory of Bending. J. of Applied Mechanics, 20, 511–514 (1953)

- [50] Mindlin, R.; Deresiewicz, H.: Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibration of Beams. Proceedings of the Second U. S. National Congress of Applied Mechanics, 175-178 (1954)
- [51] Nickel, R.; Secor, G.: Convergence of Consistently Derived Timoshenko Beam Finite Elements. International J. for Numerical Methods in Engineering, 5, 243-253 (1972)
- [52] Ramm, E.; Hofmann, Th.: Stabtragwerke. In: Handbuch für Bauingenieure. Band 1. Hrsg.: Mehlhorn, G. Berlin : Ernst & Sohn (1992) (n. n. veröff.)
- [53] Razaqpur, A.; Li, H.: A Finite Element with Exact Shape Functions for Shear Lag Analysis in Multi-Cell Box Girders. Computers & Structures, 39, 155-163 (1991)
- [54] Reissner, E.: Least Work Solutions of Shear Lag Problems. J. of the Aeronautical Sciences, 8, 284-291 (1941)
- [55] Reissner, E.: Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy. Quarterly of Appl. Math., 4, 8-278 (1946)
- [56] Reissner, E.: Some Remarks on the Problem of Euler Buckling. Ing. Archiv, 52, 115-119 (1982)
- [57] Roik, K.; Sedlacek, G.: Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung der Schubverformungen. Die Bautechnik, 47, 20-32 (1970)
- [58] Rychter, Z.: On the Accuracy of a Beam Theory. Mechanics Research Communications, 14, 99-105 (1987)
- [59] Schardt, R.: Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Falwerke. Der Stahlbau, 6, 161-171 (1966)
- [60] Schardt, R.: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Lineare Probleme. Berlin u.a. : Springer (1989)
- [61] Schlee, W.: Technische Biegelehre oder Scheibentheorie beim Plattenbalken. Beton- und Stahlbetonbau, 6, 134-142 (1974)
- [62] Schlee, W.: Plattenbalken und andere mehrteilige Querschnitte. Beton- und Stahlbetonbau, 12, 299-306 (1978)
- [63] Sedlacek, G.: Zweiachsige Biegung und Torsion. In: Stahlbau Handbuch, Band 1, 241-290. Hrsg.: Deutscher Stahlbauverband. Köln : Stahlbau (1982)
- [64] Sedlacek, G.; Bild, S.: Vorgehensweise bei der Ermittlung der mitragenden Breite. Der Bauingenieur, 65, 551-562 (1990)
- [65] Severn, R.: Inclusion of Shear Deflection in the Stiffness Matrix for a Beam Element. J. of Strain Analysis, 5, 239-241 (1970)

- [66] Stephen, N.; Levinson, M.: A Second Order Beam Theory.  
J. of Sound and Vibration, 67, 293-305 (1979)
- [67] Szabó, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihre wichtigsten Anwendungen. – 2., neubearb. u. erw. Aufl.  
Basel : Birkhäuser (1979)
- [68] Teh, K.; Huang, C.: Shear Deformation Coefficient for Generally Orthotropic Beam.  
Fibre Science and Technology, 12, 73-80 (1979)
- [69] Tessler, A.; Dong, S.: On a Hierarchy of Conforming Timoshenko Beam Elements.  
Computer & Structures, 14 335-344 (1981)
- [70] Thomas, D.; Wilson, J.; Wilson, R.: Timoshenko Beam Finite Elements.  
J. of Sound and Vibration, 31, 315-330 (1973)
- [71] Timoshenko, S.: On the Correction of Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars.  
The Philosophical Magazine, 4, 744-746 (1921)
- [72] Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability.  
New York : McGraw-Hill (1936)
- [73] Timoshenko, S.: Strength of Materials, Part 1, Elementary Theory and Problems. – 2nd Edition.  
New York : D. Van Nostrand Company, Inc. (1940)
- [74] Timoshenko, S.; MacCullough, G.: Elements of Strength of Materials.  
Princeton : Van Nostrand (1949)
- [75] Timoshenko, S.: History of Strength of Materials.  
New York u.a. : McGraw-Hill (1953)
- [76] Timoshenko, S.; Goodier, J.: Theory of Elasticity. – 3rd Edition.  
New York u.a. : McGraw-Hill (1970)
- [77] Timpe, A.: Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.  
Diss. Göttingen (1905)
- [78] Uhrig, R.: Der Übertragungsfaktor bei Stabtragwerken aus kurzen Bauteilen mit Kreisrohr- und Rechteckquerschnitt.  
Czerwenka-Festschrift, 183-198 (1979)
- [79] v. Kármán, Th.: Die mittragende Breite. August-Föppl-Festschrift, 114-127.  
Berlin : Springer (1924)
- [80] Wlassow, W.: Dünnwandige elastische Stäbe. Band I.  
Berlin : Verlag für Bauwesen (1964)
- [81] Wlassow, W.: Dünnwandige elastische Stäbe. Band II.  
Berlin : Verlag für Bauwesen (1965)
- [82] Yokoyama, T.: Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation.  
Computers & Structures, 28, 207-216 (1988)
- [83] Ziegler, H.: Arguments For and Against Engesser's Buckling Formulas.  
Ing. Archiv, 52, 105-113, (1982)

# A Anhang

## A1 Primäre Schubspannungsverteilungen und Schubkorrekturfaktoren

Fordert man, daß die von der Querkraft  $Q_z$  an einem Balkenelement der Länge  $dx$  längs des Weges  $\gamma_{xz} dx$  verrichtete Arbeit gleich ist der Formänderungsenergie dieses Elements infolge der gegebenen Schubspannungsverteilung  $\tau_{xz}$  (vgl. Bild 2 in Abschnitt 0, Motivation), so erhält man:

$$\frac{1}{2} Q_z \gamma_{xz} dx = dx \int_A \frac{\tau_{xz}^2}{2G} dA$$

Mit: 
$$\gamma_{xz} = \frac{Q_z}{GA_s}$$

folgt: 
$$\frac{1}{A_s} = \int_A \left( \frac{\tau_{xz}}{Q_z} \right)^2 dA \quad (\text{A1.1})$$

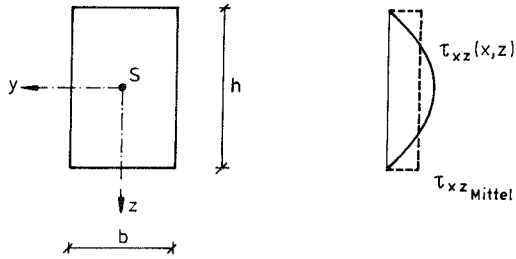
Hierin ist die Schubspannungsverteilung  $\tau_{xz}$  bekannt:

$$\tau_{xz}(x, z) = - \frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_y b} \quad (\text{A1.2})$$

Im folgenden werden für einige Querschnittsformen u.a. die Schubkorrekturfaktoren  $\alpha_s = \frac{A_s}{A}$  angegeben.



## A1.1 Rechteck-Querschnitt



$$S_y(z) = b \int_{-\frac{h}{2}}^z z^* dz^* = \frac{b}{2} \left[ z^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\rightarrow \tau_{xz}(x) = Q_z(x) \frac{6}{bh^3} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]$$

$$\tau_{xz_{\max}}(x) = \frac{3 Q_z(x)}{2 bh} = \frac{3}{2} \tau_{xz_{\text{Mittel}}}$$

Hieraus ergibt sich mit den Gleichungen (A1.1) und (A1.2)

$$\frac{1}{A_s} = \left( \frac{6}{bh^3} \right)^2 \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]^2 bdz = \frac{6}{5} \frac{1}{bh}$$

und damit:

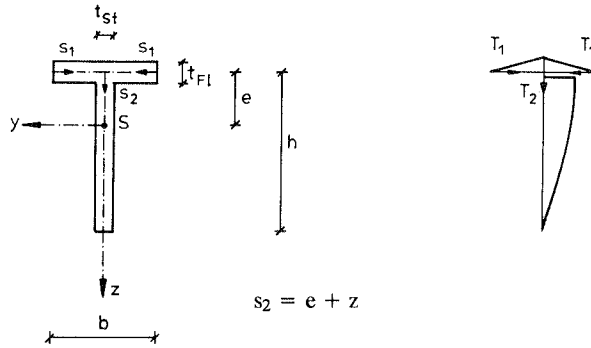
$$\alpha_s = \frac{A_s}{A} = \frac{5}{6} \quad (\text{A1.3})$$

bzw.

Schubkorrekturfaktor nach Cowper [15]:

$$\alpha_s = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (\text{A1.4})$$

## A1.2 T-Profil



$$e = \frac{1}{2} \frac{\left(h + \frac{t_{Fl}}{2}\right)\left(h - \frac{t_{Fl}}{2}\right)t_{St}}{bt_{Fl} + \left(h - \frac{t_{Fl}}{2}\right)t_{St}} \quad (\text{A1.5})$$

Wandkoordinaten :  $s_i$

Schubflüsse :  $T_i$

Schubspannungen :  $\tau_i = \frac{T_i}{t_i}$

$$T_1 = \frac{Q_z}{I_y} et_{Fl}s_1$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{t_{Fl}} = \frac{Q_z}{I_y} e s_1 \quad (\text{A1.6})$$

$$T_2 = \frac{Q_z}{I_y} \frac{t_{St}}{2} \left[ e^2 + 2eb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} - z^2 \right]$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{t_{St}} = \frac{Q_z}{I_y} \frac{1}{2} \left[ e^2 + 2eb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} - z^2 \right] \quad (\text{A1.7})$$

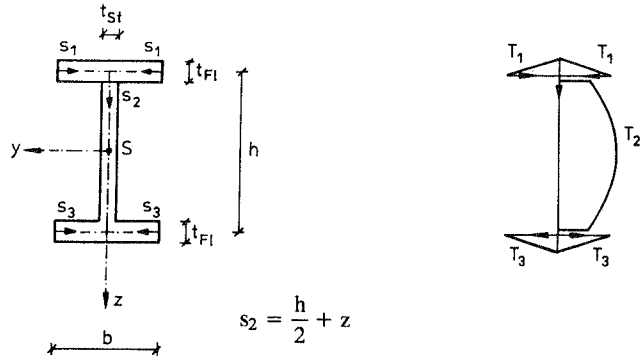
$$I_y = \frac{t_{St}\left(h - \frac{t_{Fl}}{2}\right)^3}{12} + \frac{bt_{Fl}^3}{12} + e^2[bt_{Fl}] + \left(\frac{h}{2} + \frac{t_{Fl}}{4} - e\right)^2 \left[ \left(h - \frac{t_{Fl}}{2}\right)t_{St} \right] \quad (\text{A1.8})$$

Schubkorrekturfaktor nach Cowper [15]:

$$\alpha_s = \frac{10(1 + 4m)^2(1 + \nu)}{(12 + 96m + 276m^2 + 192m^3) + 30n^2(m + m^2) + \nu(11 + 88m + 248m^2 + 216m^3) + 10\nu n^2(4m + 5m^2 + m^3)} \quad (\text{A1.9})$$

$$\text{mit: } \begin{cases} m = \frac{bt_{Fl}}{ht_{St}} \\ n = \frac{b}{h} \end{cases}$$

### A1.3 I-Profil



Wandkoordinaten:  $s_i$

Schubflüsse:  $T_i$

Schubspannungen:  $\tau_i = \frac{T_i}{t_i}$

$$T_1 = \frac{Q_z}{I_y} \frac{h}{2} t_{Fl} s_1$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{t_{Fl}} = \frac{Q_z}{I_y} \frac{h}{2} s_1 \quad (\text{A1.10})$$

$$T_2 = \frac{Q_z}{2} \frac{t_{St}}{I_y} \left[ \left( \frac{h^2}{4} + hb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} \right) - z^2 \right]$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{t_{St}} = \frac{Q_z}{I_y} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h^2}{4} + hb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} \right) - z^2 \right] \quad (\text{A1.11})$$

$$T_3 = -\frac{Q_z}{I_y} \frac{h}{2} t_{Fl} s_3$$

$$\tau_3 = \frac{T_3}{t_{Fl}} = -\frac{Q_z}{I_y} \frac{h}{2} s_3 \quad (\text{A1.12})$$

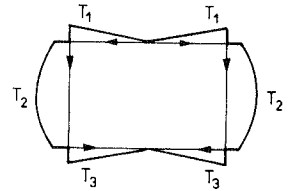
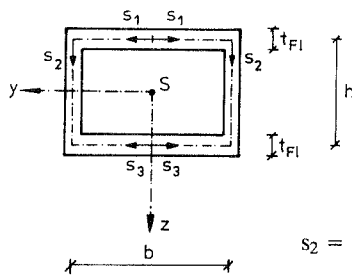
$$I_y = \frac{t_{St}(h - t_{Fl})^3}{12} + 2 \left[ \frac{bt_{Fl}^3}{12} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 bt_{Fl} \right] \quad (\text{A1.13})$$

Schubkorrekturfaktor nach Cowper [15]:

$$\alpha = \frac{10(1 + 3m)^2(1 + \nu)}{(12 + 72m + 150m^2 + 90m^3) + 30n^2(m + m^2) + \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3) + 5\nu n^2(8m + 9m^2)} \quad (\text{A1.14})$$

$$\text{mit: } \begin{cases} m = \frac{2bt_{Fl}}{ht_{St}} \\ n = \frac{b}{h} \end{cases}$$

### A1.4 Hohlkasten-Querschnitt



$$s_2 = \frac{h}{2} + z$$

Wandkoordinaten:  $s_i$

Schubflüsse:  $T_i$

Schubspannungen:  $\tau_i = \frac{T_i}{t_i}$

$$T_1 = \frac{Q_z h}{I_y} \frac{1}{4} t_{FI} s_1$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{t_{FI}} = \frac{Q_z h}{I_y} \frac{1}{4} s_1 \quad (\text{A1.15})$$

$$T_2 = \frac{Q_z t_{St}}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h^2}{4} + \frac{hb t_{FI}}{2 t_{St}} \right) - z^2 \right]$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{t_{St}} = \frac{Q_z}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h^2}{4} + \frac{hb t_{FI}}{2 t_{St}} \right) - z^2 \right] \quad (\text{A1.16})$$

$$T_3 = -\frac{Q_z h}{I_y} \frac{1}{4} t_{FI} s_3$$

$$\tau_3 = \frac{T_3}{t_{FI}} = -\frac{Q_z h}{I_y} \frac{1}{4} s_3 \quad (\text{A1.17})$$

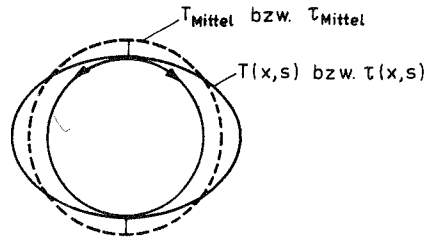
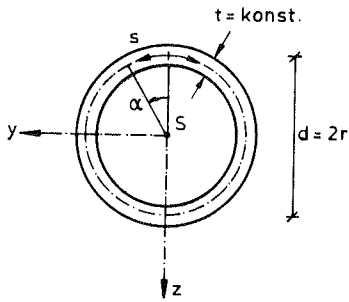
$$I_y = \frac{(b + t_{St})(h + t_{FI})^3}{12} - \frac{(b - t_{St})(h - t_{FI})^3}{12} \quad (\text{A1.18})$$

Schubkorrekturfaktor nach Cowper [15]:

$$\alpha_s = \frac{10(1 + 3m)^2(1 + \nu)}{(12 + 72m + 150m^2 + 90m^3) + 10n^2(3 + \nu)m + 3m^2) + \nu(11 + 66m + 135m^2 + 90m^3)} \quad (\text{A1.19})$$

$$\text{mit: } \begin{cases} m = \frac{(b - t_{St})t_{FI}}{(h + t_{FI})t_{St}} \\ n = \frac{b - t_{St}}{h + t_{FI}} \end{cases}$$

## A1.5 Kreisring-Querschnitt



$$z = -r \cos \alpha \quad ds = r d\alpha$$

Schubfluß:

$$T(x, s) = -\frac{Q_z(x)}{I_y} \int_{s^*=0}^s z(s^*) t(s^*) ds^* + t_0$$

$$T(x, s) = -\frac{Q_z(x)}{I_y} r^2 t \int_{\alpha^*=0}^{\alpha} (-\cos \alpha^*) d\alpha^* = \frac{Q_z(x)}{\pi r} \sin \alpha$$

Schubspannungen:

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{T(x, s)}{t} = \frac{Q_z(x)}{\pi t r} \sin \alpha \quad (\text{A1.20})$$

$$\tau_{xS_{\max}}(x) = \frac{Q_z(x)}{\pi t r} = 2 \frac{Q_z(x)}{(2\pi r) t} = 2\tau_{xS_{\text{Mittel}}}$$

$$I_y = \int_{\Lambda} z^2 dA = \int_{\alpha} z^2 t r d\alpha = \int_{\alpha=0}^{2\pi} t r^3 \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$I_y = \pi t r^3 = \frac{\pi}{8} t d^3 \quad (\text{A1.21})$$

Schubkorrekturfaktor nach Cowper [15]:

$$\alpha_s = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu} \quad (\text{A1.22})$$

In diesem Abschnitt werden für einige Querschnittstypen die Wölbfunktionen und Wölbwiderstände entsprechend dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehen ermittelt.

**A2.1 Rechteck-Querschnitt**

Schubspannungen  $\tau_\omega$ :

$$\tau_\omega(x, z) = \tau_{xz}(x, z) - \tau_k(x) \tag{A2.1}$$

$$\tau_{xz}(x, z) = Q_z(x) \frac{6}{bh^3} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] - \frac{Q_z(x)}{A_s}$$

$$\tau_\omega(x, z) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ a_s \frac{3}{2} - a_s \frac{6}{h^2} z^2 - 1 \right\} \tag{A2.2}$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{5}{6}$  (Gl. A1.3)

$$\tau_\omega(x, z) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{1}{4} - 5 \frac{z^2}{h^2} \right\} \tag{A2.3}$$

Schubverzerrungen  $\gamma_\omega$ :

Durch Anwendung des Hookeschen Gesetzes für Schub erhält man die die Verwölbung verursachende Verzerrung.

$$\gamma_\omega(x, z) = \frac{\tau_\omega(x, z)}{G}$$

$$\gamma_\omega(x, z) = - \frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ a_s \frac{6}{h^2} z^2 + 1 - a_s \frac{3}{2} \right\} \tag{A2.4}$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{5}{6}$

$$\gamma_\omega(x, z) = - \frac{Q_z(x)}{GA_s} \cdot \left\{ - \frac{1}{4} + 5 \frac{z^2}{h^2} \right\} \tag{A2.5}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\quad}_{= - \gamma(x)} \cdot \underbrace{\quad}_{\tilde{\gamma}(z)} \\ & = + \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}(z) \end{aligned}$$

### Wölbfunktion $\omega$ :

Die Wölbfunktion  $\omega(z)$  kann man nun mit den Gleichungen (4.97) und (A2.4) angeben.

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \int_z \tilde{\gamma}(z) dz \\ &= \int_z \left\{ a_s \frac{6}{h^2} z^2 + 1 - a_s \frac{3}{2} \right\} dz \\ \omega(z) &= 2a_s \frac{z^3}{h^2} + \left( 1 - \frac{3}{2} a_s \right) z\end{aligned}\quad (\text{A2.6})$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{5}{6}$

$$\omega(z) = \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^2} - \frac{1}{4} z \quad (\text{A2.7})$$

### Wölbwiderstand $I_\omega$ (Rechteck-Querschnitt):

Mit Kenntnis der Wölbfunktion  $\omega(z)$  (Gl. A2.6) läßt sich jetzt mit Gleichung (4.17) der Wölbwiderstand bestimmen.

Man erhält:

$$I_\omega = bh^3 \left[ \frac{1}{12} + \frac{17}{140} a_s^2 - \frac{1}{5} a_s \right] \quad (\text{A2.8})$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{5}{6}$

$$I_\omega = \frac{bh^3}{1008} \quad (\text{A2.9})$$

## A2.2 T-Profil

Schubspannungen  $\tau_{\omega_i}$ :

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_1}(x, s_1) &= \tau_{xy}(x, s_1) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} e s_1\end{aligned}\quad (\text{A2.10})$$

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_2}(x, s_2) &= \tau_{xz}(x, s_2) - \tau_k(x) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{1}{2} \left[ 2eb \frac{t_{F1}}{t_{St}} + 2es_2 - s_2^2 \right] - 2\omega_0 \frac{Q_z(x)}{A_s}\end{aligned}\quad (\text{A2.11})$$

bzw.

$$\tau_{\omega_1}(x, s_1) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \frac{A_s}{I_y} e s_1 \quad (\text{A2.12})$$

$$\tau_{\omega_2}(x, s_2) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \left[ eb \frac{t_{F1}}{t_{St}} + es_2 - \frac{1}{2} s_2^2 \right] - 2\omega_0 \right\} \quad (\text{A2.13})$$

Schubverzerrungen  $\gamma_{\omega_i}$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_1}(x, s_1) &= \frac{\tau_{\omega_1}(x, s_1)}{G} \\ \gamma_{\omega_1}(x, s_1) &= \underbrace{-\frac{Q_z(x)}{GA_s}} \cdot \underbrace{\left\{ -\frac{A_s}{I_y} e s_1 \right\}} \\ &= -\gamma(x) \cdot \tilde{\gamma}_1(s_1)\end{aligned}\quad (\text{A2.14})$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_2}(x, s_2) &= \underbrace{-\frac{Q_z(x)}{GA_s}} \cdot \underbrace{\left\{ 2\omega_0 - \frac{A_s}{I_y} \left[ eb \frac{t_{F1}}{t_{St}} + es_2 - \frac{1}{2} s_2^2 \right] \right\}} \\ &= \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}_2(s_2)\end{aligned}\quad (\text{A2.15})$$



### Verwölbungen:

$$\omega_1(s_1) = \int_{s_1} \bar{\gamma}_1(s_1) ds_1 + {}^1\omega_0$$

$$\begin{aligned}\omega_1(s_1) &= \int_{s_1^*=0}^{s_1} \left\{ -\frac{A_s}{I_y} es_1^* \right\} ds_1^* + {}^1\omega_0 \\ &= -\frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} es_1^2 + {}^1\omega_0\end{aligned}\quad (\text{A2.16})$$

$$\begin{aligned}\omega_2(s_2) &= \int_{s_2^*=0}^{s_2} \left\{ 2\omega_0 - \frac{A_s}{I_y} \left[ eb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} + es_2^* - \frac{1}{2} (s_2^*)^2 \right] \right\} ds_2^* + {}^3\omega_0 \\ &= \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{6} s_2^3 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} es_2^2 - \frac{A_s}{I_y} eb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} s_2 + 2\omega_0 s_2 + {}^3\omega_0\end{aligned}\quad (\text{A2.17})$$

### Bestimmung der Konstanten ${}^1\omega_0$ :

Die drei Integrationskonstanten erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen (für die Eigenspannung)  $\sum N = 0$  und  $\sum M = 0$  sowie der Kontinuitätsbedingung, daß in den Berührungspunkten des Steges mit dem Flansch die Verwölbung den gleichen Wert haben muß.

$$2 \int_0^{\frac{b}{2}} \omega_1(s_1) t_{Fl} ds_1 + \int_0^h \omega_2(s_2) t_{St} ds_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A2.18})$$

$$2 \int_0^{\frac{b}{2}} h \omega_1(s_1) t_{Fl} ds_1 + \int_0^h (h - s_2) \omega_2(s_2) t_{St} ds_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A2.19})$$

$$\omega_1\left(s_1 = \frac{b}{2}\right) \stackrel{!}{=} \omega_2(s_2 = 0) \quad (\text{A2.20})$$

### Wölbfunktionen $\omega_i$ :

Mit den Gleichungen (A2.16) bis (A2.20) lassen sich die Wölbfunktionen bestimmen.

$$\omega_1(s_1) = -\frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} e s_1^2 + \frac{A_s}{I_y} \frac{\frac{1}{60} h^4 t_{St} - \frac{1}{24} e h^3 t_{St} + \frac{1}{12} e b^3 t_{F1} + \frac{1}{16} e b^2 h t_{St}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} \quad (A2.21)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(s_2) = & \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{6} s_2^3 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} e s_2^2 + \frac{A_s}{I_y} \frac{-\frac{3}{40} h^3 t_{St} - \frac{1}{5} b h^2 t_{F1} + \frac{1}{4} e h^2 t_{St} + \frac{3}{4} e b h t_{F1} + \frac{1}{4} e \frac{b^3}{h} t_{F1}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} s_2 \\ & + \frac{A_s}{I_y} \frac{\frac{1}{60} h^4 t_{St} - \frac{1}{24} e h^3 t_{St} - \frac{1}{6} e b^3 t_{F1}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} \end{aligned} \quad (A2.22)$$

Sie sind erwartungsgemäß im Flansch quadratisch und im Steg kubisch (Bild 7.3 bzw. 7.4)

Wölbwiderstand  $I_\omega$  (T-Profil):

Der Wölbwiderstand setzt sich beim T-Profil additiv aus den Einzelwiderständen zusammen.

$$\begin{aligned} I_\omega &= I_{\omega_{F1}} + I_{\omega_{St}} \\ &= 2 \int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} \omega_1^2(s_1) t_{F1}(s_1) ds_1 + \int_{s_2=0}^h \omega_2^2(s_2) t_{St}(s_2) ds_2 \end{aligned} \quad (A2.23)$$

wobei:

$$\begin{aligned} I_{\omega_{F1}} &= 2 t_{F1} \left[ \frac{b^5}{160} a^2 - \frac{b^3}{12} a c + \frac{b}{2} c^2 \right] \\ I_{\omega_{St}} &= t_{St} \left[ \frac{h^7}{7} d^2 - \frac{h^6}{3} a d + \frac{h^5}{5} (a^2 + 2 d f) + \frac{h^4}{2} (d g - a f) + \frac{h^3}{3} (f^2 - 2 a g) + h^2 f g + h g^2 \right] \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A_s}{I_y} \frac{e}{2} \quad ; \quad c = \frac{A_s}{I_y} \frac{\frac{1}{60} h^4 t_{St} - \frac{1}{24} e h^3 t_{St} + \frac{1}{12} e b^3 t_{F1} + \frac{1}{16} e b^2 h t_{St}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} \\ d &= \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{6} \quad ; \quad f = \frac{A_s}{I_y} \frac{-\frac{3}{40} h^3 t_{St} - \frac{1}{5} b h^2 t_{F1} + \frac{1}{4} e h^2 t_{St} + \frac{3}{4} e b h t_{F1} + \frac{1}{4} e \frac{b^3}{h} t_{F1}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} \\ g &= \frac{A_s}{I_y} \frac{\frac{1}{60} h^4 t_{St} - \frac{1}{24} e h^3 t_{St} - \frac{1}{6} e b^3 t_{F1}}{2 b t_{F1} + \frac{1}{2} h t_{St}} \end{aligned}$$

Schubspannungen  $\tau_{\omega_i}$ :

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_1}(x, s_1) &= \tau_1(x, s_1) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{h}{2} s_1\end{aligned}\quad (\text{A2.24})$$

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_2}(x, s_2) &= \tau_2(x, s_2) - \tau_k(x) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{1}{2} \left[ hb \frac{t_{F1}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right] - {}^1\omega_0 \frac{Q_z(x)}{A_s}\end{aligned}\quad (\text{A2.25})$$

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_3}(x, s_3) &= \tau_3(x, s_3) \\ &= -\frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{h}{2} s_3\end{aligned}\quad (\text{A2.26})$$

bzw.

$$\tau_{\omega_1}(x, s_1) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_1 \right\}\quad (\text{A2.27})$$

$$\tau_{\omega_2}(x, s_2) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ hb \frac{t_{F1}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right] - {}^1\omega_0 \right\}\quad (\text{A2.28})$$

$$\tau_{\omega_3}(x, s_3) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ -\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_3 \right\}\quad (\text{A2.29})$$

Schubverzerrungen  $\gamma_i$ :

$$\gamma_{\omega_i}(x, s_i) = \frac{\tau_{\omega_i}(x, s_i)}{G}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_1}(x, s_1) &= -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ -\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_1 \right\} \\ &= \underbrace{-\gamma(x)} \cdot \underbrace{\tilde{\gamma}_1(s_1)} \\ &= \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}_1(s_1)\end{aligned}\quad (\text{A2.30})$$

$$\gamma_{\omega_2}(x, s_2) = -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ \underbrace{1\omega_0}_{\phi_s(x)} - \underbrace{\frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ hb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right]}_{\tilde{\gamma}_2(s_2)} \right\} \quad (\text{A2.31})$$

$$\gamma_{\omega_3}(x, s_3) = -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ \underbrace{\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_3}_{\phi_s(x)} \right\} \cdot \underbrace{1}_{\tilde{\gamma}_3(s_3)} \quad (\text{A2.32})$$

Verwölbungen:

$$\omega_i(s_i) = \int_s^i \tilde{\gamma}_i(s_i) ds_i + {}^i\omega_0$$

$$\begin{aligned} \omega_1(s_1) &= \int_{s_1^*=0}^{s_1} \left\{ -\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_1^* \right\} ds_1^* + {}^2\omega_0 \\ &= -\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{4} s_1^2 + {}^2\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{A2.33})$$

$$\begin{aligned} \omega_2(s_2) &= \int_{s_2^*=0}^{s_2} \left\{ 1\omega_0 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ hb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} + hs_2^* - (s_2^*)^2 \right] \right\} ds_2^* + {}^3\omega_0 \\ &= {}^1\omega_0 s_2 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ hb \frac{t_{Fl}}{t_{St}} s_2 + \frac{h}{2} s_2^2 - \frac{1}{3} s_2^3 \right] + {}^3\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{A2.34})$$

$$\begin{aligned} \omega_3(s_3) &= \int_{s_3^*=0}^{s_3} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{h}{2} s_3^* \right\} ds_3^* + {}^4\omega_0 \\ &= \frac{A_s}{I_y} \frac{h}{4} s_3^2 + {}^4\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{A2.35})$$

Wölbfunktionen  $\omega_i$ :

Die Konstanten  ${}^i\omega_0$  lassen sich über die Gleichgewichtsbedingungen für die Eigenspannungen  $\sum N = 0$  und  $\sum M = 0$  sowie über die Kontinuitätsbedingung, daß in den

Berührungspunkten des Steges mit den Flanschen die Verwölbung den gleichen Wert haben muß, bestimmen. Man erhält:

$${}^1\omega_0 = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{2}{5} h^5 t_{St}^3 + \frac{29}{5} h^4 b t_{F1} t_{St}^2 + 32 h^3 b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 2 h^2 b^3 t_{F1}^3 t_{St}}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} + \right. \\ \left. \frac{74 h^2 b^3 t_{F1}^3 + 9 h b^4 t_{F1}^2 t_{St} + 60 h b^4 t_{F1}^4 / t_{St} + 10 b^5 t_{F1}^3}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} \right] \quad (A2.36)$$

$${}^2\omega_0 = - {}^4\omega_0 \\ = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ \frac{-\frac{1}{30} h^6 t_{St}^3 - \frac{3}{20} h^5 b t_{F1} t_{St}^2 + \frac{1}{4} h^4 b^2 t_{St}^3 - \frac{1}{6} h^4 b^2 t_{F1}^2 t_{St}}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} + \right. \\ \left. \frac{\frac{13}{8} h^3 b^3 t_{F1}^2 t_{St} + \frac{7}{2} h^2 b^4 t_{F1}^2 t_{St} + \frac{5}{2} h b^5 t_{F1}^3}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} \right] \quad (A2.37)$$

$${}^3\omega_0 = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{2} \left[ \frac{-\frac{1}{30} h^6 t_{St}^3 - \frac{3}{20} h^5 b t_{F1} t_{St}^2 - \frac{1}{6} h^4 b^2 t_{F1}^2 t_{St}}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} + \right. \\ \left. \frac{-h^3 b^3 t_{F1} t_{St}^2 - \frac{9}{2} h^2 b^4 t_{F1}^2 t_{St} - 5 h b^5 t_{F1}^3}{2 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{F1} t_{St}^2 + 64 h b^2 t_{F1}^2 t_{St} + 60 b^3 t_{F1}^3} \right] \quad (A2.38)$$

Damit sind die Wölbfunktionen  $\omega_i$  bekannt.

### Wölbwiderstand $I_\omega$ (I-Profil):

Der Wölbwiderstand setzt sich beim I-Profil additiv aus den Einzelwiderständen der Teilquerschnitte zusammen.

$$I_\omega = I_{\omega_{F1}} + I_{\omega_{St}} \\ = 4 \int_{s_1=0}^{\frac{h}{2}} \omega_1^2(s_1) t_{F1}(s_1) ds_1 + \int_{s_2=0}^h \omega_2^2(s_2) t_{St}(s_2) ds_2 \quad (A2.39)$$

## A2.4 Hohlkasten-Querschnitt

Schubspannungen  $\tau_{\omega_i}$ :

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_1}(x, s_1) &= \tau_1(x, s_1) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{h}{4} s_1\end{aligned}\quad (\text{A2.40})$$

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_2}(x, s_2) &= \tau_2(x, s_2) - \tau_k(x) \\ &= \frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{hb}{2} \frac{t_{Fl}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right] - {}^1\omega_0 \frac{Q_z(x)}{A_s}\end{aligned}\quad (\text{A2.41})$$

$$\begin{aligned}\tau_{\omega_3}(x, s_3) &= \tau_3(x, s_3) \\ &= -\frac{Q_z(x)}{I_y} \frac{h}{4} s_3\end{aligned}\quad (\text{A2.42})$$

bzw.

$$\tau_{\omega_1}(x, s_1) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{h}{4} s_1 \right\}\quad (\text{A2.43})$$

$$\tau_{\omega_2}(x, s_2) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{hb}{2} \frac{t_{Fl}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right] - {}^1\omega_0 \right\}\quad (\text{A2.44})$$

$$\tau_{\omega_3}(x, s_3) = \frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ -\frac{A_s}{I_y} \frac{h}{4} s_3 \right\}\quad (\text{A2.45})$$

Schubverzerrungen  $\gamma_i$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_1}(x, s_1) &= \frac{\tau_{\omega_1}(x, s_1)}{G} \\ \gamma_{\omega_1}(x, s_1) &= \underbrace{-\frac{Q_z(x)}{GA_s}}_{-\gamma(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{A_s}{I_y} \frac{h}{4} s_1 \right\}}_{\dot{\gamma}_1(s_1)} \\ &= -\gamma(x) \cdot \dot{\gamma}_1(s_1) \\ &= \phi_s(x) \cdot \dot{\gamma}_1(s_1)\end{aligned}\quad (\text{A2.46})$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_2}(x, s_2) &= -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ \underbrace{{}^1\omega_0 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{hb}{2} \frac{t_{F1}}{t_{St}} + hs_2 - s_2^2 \right]}_{\phi_s(x)} \right\} \quad (A2.47) \\ &= \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}_2(s_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\omega_3}(x, s_3) &= -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ \underbrace{\frac{A_s h}{I_y} \frac{1}{4} s_3}_{\phi_s(x)} \right\} \quad (A2.48) \\ &= \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}_3(s_3)\end{aligned}$$

### Verwölbungen:

$$\begin{aligned}\omega_1(s_1) &= \int_{s_1} \tilde{\gamma}_1(s_i) ds_i + {}^1\omega_0 \\ \omega_1(s_1) &= \int_{s_1^*=0}^{s_1} \left\{ -\frac{A_s h}{I_y} \frac{1}{4} s_1^* \right\} ds_1^* + {}^2\omega_0 \\ &= -\frac{A_s h}{I_y} \frac{1}{8} s_1^2 + {}^2\omega_0 \quad (A2.49)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(s_2) &= \int_{s_2^*=0}^{s_2} \left\{ {}^1\omega_0 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{hb}{2} \frac{t_{F1}}{t_{St}} + hs_2^* - (s_2^*)^2 \right] \right\} ds_2^* + {}^3\omega_0 \\ &= {}^1\omega_0 s_2 - \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{hb}{2} \frac{t_{F1}}{t_{St}} s_2 + \frac{h}{2} s_2^2 - \frac{1}{3} s_2^3 \right] + {}^3\omega_0 \quad (A2.50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_3(s_3) &= \int_{s_3^*=0}^{s_3} \left\{ \frac{A_s h}{I_y} \frac{1}{4} s_3^* \right\} ds_3^* + {}^4\omega_0 \\ &= \frac{A_s h}{I_y} \frac{1}{8} s_3^2 + {}^4\omega_0 \quad (A2.51)\end{aligned}$$

### Wölbfunktionen $\omega_i$ :

Die Konstanten  ${}^i\omega_0$  lassen sich über die Gleichgewichtsbedingungen für die Eigenspannungen  $\sum N = 0$  und  $\sum M = 0$  sowie über die Kontinuitätsbedingung, daß in den

Berührungspunkten der Stege mit den Flanschen die Verwölbung den gleichen Wert haben muß, bestimmen. Man erhält:

$${}^1\omega_0 = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{\frac{4}{5} h^5 t_{St}^3 + \frac{29}{5} h^4 b t_{Fl} t_{St}^2 + 16 h^3 b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 2 h^2 b^3 t_{Fl}^3}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} + \frac{\frac{37}{2} h^2 b^3 t_{Fl}^3 + \frac{9}{2} h b^4 t_{Fl}^2 t_{St} + \frac{15}{2} h b^4 t_{Fl}^4 / t_{St} + \frac{5}{2} b^5 t_{Fl}^3}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} \right] \quad (A2.52)$$

$${}^2\omega_0 = - {}^4\omega_0 = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{-\frac{1}{15} h^6 t_{St}^3 - \frac{3}{20} h^5 b t_{Fl} t_{St}^2 - \frac{1}{12} h^4 b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + \frac{1}{2} h^4 b^2 t_{St}^3}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} + \frac{\frac{13}{8} h^3 b^3 t_{Fl}^2 t_{St} + \frac{7}{4} h^2 b^4 t_{Fl}^2 t_{St} + \frac{5}{8} h b^5 t_{Fl}^3}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} \right] \quad (A2.53)$$

$${}^3\omega_0 = \frac{A_s}{I_y} \frac{1}{4} \left[ \frac{-\frac{1}{15} h^6 t_{St}^3 - \frac{3}{20} h^5 b t_{Fl} t_{St}^2 - \frac{1}{12} h^4 b^2 t_{Fl}^2 t_{St}}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} + \frac{-h^3 b^3 t_{Fl} t_{St}^2 - \frac{9}{4} h^2 b^4 t_{Fl}^2 t_{St} - \frac{5}{4} h b^5 t_{Fl}^3}{4 h^3 t_{St}^3 + 21 h^2 b t_{Fl} t_{St}^2 + 32 h b^2 t_{Fl}^2 t_{St} + 15 b^3 t_{Fl}^3} \right] \quad (A2.54)$$

Damit sind die Wölbfunktionen  $\omega_i$  bekannt.

Wölbwiderstand  $I_{\omega}$  (Hohlkasten-Querschnitt):

Der Wölbwiderstand setzt sich beim Hohlkasten-Querschnitt additiv aus den Einzelwiderständen der Teilquerschnitte zusammen.

$$I_{\omega} = I_{\omega_{Fl}} + I_{\omega_{St}}$$

$$= 4 \int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} \omega_1^2(s_1) t_{Fl}(s_1) ds_1 + 2 \int_{s_2=0}^h \omega_2^2(s_2) t_{St}(s_2) ds_2 \quad (A2.55)$$



## A2.5 Kreisring-Querschnitt

Schubspannungen  $\tau_\omega$ :

$$\begin{aligned}
 \tau_\omega(x, s) &= \tau_2(x, s) - \tau_k(x) \\
 &= \frac{Q_z(x)}{\pi r} \sin \alpha - {}^1\omega_0 \frac{Q_z(x)}{A_s} \\
 &= -\frac{Q_z(x)}{A_s} \left\{ {}^1\omega_0 - 2a_s \sin \alpha \right\}
 \end{aligned} \tag{A2.56}$$

Schubverzerrungen  $\gamma_\omega$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_\omega(x, s) &= \frac{\tau_\omega(x, s)}{G} \\
 &= -\frac{Q_z(x)}{GA_s} \left\{ {}^1\omega_0 - 2a_s \sin \alpha \right\} \\
 &= \underbrace{-\gamma(x)} \cdot \underbrace{\tilde{\gamma}(a)} \\
 &= \phi_s(x) \cdot \tilde{\gamma}(a)
 \end{aligned} \tag{A2.57}$$

Wölbfunktion  $\omega$ :

$$\omega(s) = \int_s \tilde{\gamma}(s) ds$$

bzw. mit :  $ds = r da$

$$\begin{aligned}
 \omega(a) &= \int_a \tilde{\gamma}(a) r da \\
 &= \left[ {}^1\omega_0 a + 2a_s \cos \alpha - 2a_s \right] r + {}^2\omega_0
 \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten  ${}^1\omega_0$  über die Gleichgewichtsbedingungen für die Eigenspannungen  $\sum N = 0$  und  $\sum M = 0$  liefert:

$$\omega(a) = \left[ a_s \frac{\pi}{2} \left( a - \frac{\pi}{2} \right) + 2a_s \cos \alpha \right] r \tag{A2.58}$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{1}{2}$  (Gl. A1.22)

$$\omega(a) = \left[ \frac{\pi}{4} \left( a - \frac{\pi}{2} \right) + \cos a \right] r \quad (\text{A2.59})$$

Wölbwiderstand  $I_\omega$  (Kreisring-Querschnitt):

$$I_\omega = 2 \int_{s_0}^{s_1} \omega^2(s) t(s) ds$$

bzw. mit :  $ds = r da$

$$I_\omega = 2 \int_0^\pi \omega^2(a) t(a) r da$$

$$\begin{aligned} I_\omega &= tr^3 a_s^2 \left[ \frac{\pi^5}{24} + 4\pi - 8 \right] \\ &= td^3 a_s^2 \left[ \frac{\pi^5}{192} + \frac{\pi}{2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.60})$$

bzw. mit dem Schubkorrekturfaktor  $a_s = \frac{1}{2}$

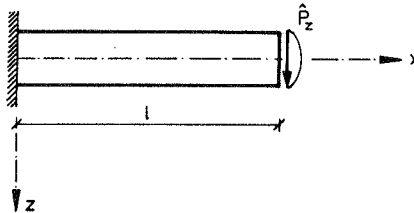
$$\begin{aligned} I_\omega &= tr^3 \left[ \frac{\pi^5}{96} + \pi - 2 \right] \\ &= td^3 \left[ \frac{\pi^5}{768} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.61})$$

### A3 Schublösungen einiger Grundlastfälle

Entsprechend dem in Abschnitt 4.1.2.4 beschriebenen Vorgehen lassen sich Schublösungen beliebiger Grundlastfälle ermitteln. Im folgenden wird eine Zusammenstellung solcher Schublösungen für die wichtigsten Grundlastfälle gegeben.

#### A3.1 Kragträger

##### A3.1.1 Kragträger unter Einzellast, Volleinspannung



Mit den Randbedingungen:

$$w_s(0) = 0$$

$$w_s'(0) = 0$$

$$M_\omega(l) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_\omega(l) = 0 \quad \rightarrow \quad w_s''(l) = 0$$

$$-EI_\omega w_s'''(l) + GA_s w_s'(l) = \hat{P}_z$$

ergibt sich ein Gleichungssystem für die Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$ .

Man erhält die folgende Schublösung:

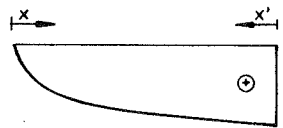
- Verschiebung  $w_s(x)$ :

$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z x}{GA_s} \left( 1 - \frac{1}{\lambda x} \frac{\sinh(\lambda l) - \sinh(\lambda x')}{\cosh(\lambda l)} \right)$$



- Neigung  $w_s'(x)$ :

$$w_s'(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda x')}{\cosh(\lambda l)} \right)$$



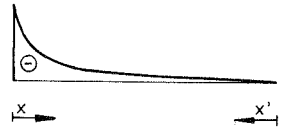
- Krümmung  $w_s''(x)$  :

$$w_s''(x) = \frac{\hat{P}_z \sinh(\lambda x')}{EI_\omega \lambda \cosh(\lambda l)}$$



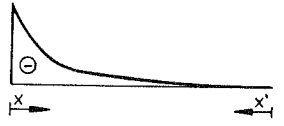
- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$  :

$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{P}_z \cosh(\lambda x')}{EI_\omega \lambda \cosh(\lambda l)}$$

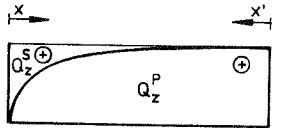


- Wölbmoment  $M_\omega(x)$  :

$$M_\omega(x) = EI_\omega \kappa_\omega(x) = -EI_\omega w_s''(x) = -\frac{\hat{P}_z \sinh(\lambda x')}{\lambda \cosh(\lambda l)}$$



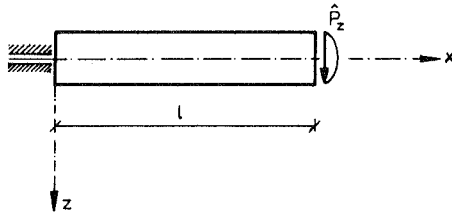
- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$  :



$$Q_z^P(x) = GA_s \gamma(x) = GA_s w_s'(x) = \hat{P}_z \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda x')}{\cosh(\lambda l)} \right)$$

$$Q_z^S(x) = M_\omega'(x) = -EI_\omega w_s'''(x) = \hat{P}_z \cdot \frac{\cosh(\lambda x')}{\cosh(\lambda l)}$$

### A3.1.2 Kragträger unter Einzellast, "wölbfreie" Einspannung



Mit den Randbedingungen:  $w_s(0) = 0$   
 $M_\omega(0) = 0 \rightarrow w_s''(0) = 0$   
 $M_\omega(l) = 0 \rightarrow w_s''(l) = 0$   
 $-EI_\omega w_s'''(l) + GA_S w_s'(l) = \hat{P}_z$

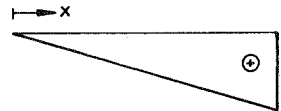
ergibt sich ein Gleichungssystem für die Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  mit

$$C_1 = C_3 = C_4 = 0 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{\hat{P}_z}{GA_S \lambda}$$

Man erhält die folgende Schublösung:

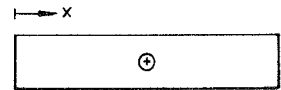
- Verschiebung  $w_s(x)$ :

$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_S} x$$



- Neigung  $w_s'(x)$ :

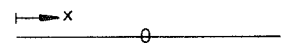
$$w_s'(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_S} = \gamma$$



- Krümmung  $w_s''(x)$ :

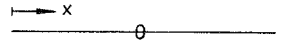
- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \equiv 0$$



damit auch:

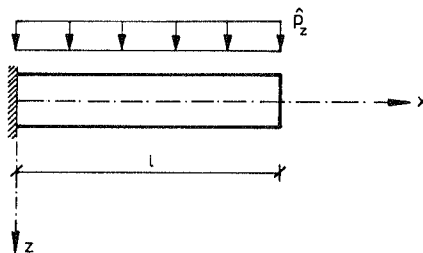
$$\left. \begin{array}{l} - \text{ Wölbmoment } M_{\omega}(x) : \\ - \text{ sekundäre Querkraft } Q_z^S(x) : \end{array} \right\} \equiv 0$$



Die gesamte Querkraft wird entsprechend der Timoshenko-Theorie abgetragen. Der Wölbanteil ist identisch null, weil die Verwölbung an keiner Stelle behindert wird. Dies entspricht genau der Timoshenko-Annahme.

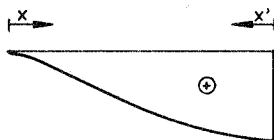
Dieses Ergebnis kann aus Beispiel A.3.1.1 auch durch einen Grenzübergang mit  $\omega \rightarrow 0$  d.h.  $EI_{\omega} \rightarrow 0$  bzw.  $\lambda \rightarrow \infty$  erhalten werden.

### A3.1.3 Kragträger unter Gleichlast, Volleinspannung



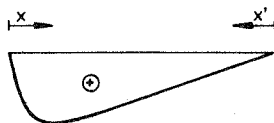
Man erhält die folgende Schublösung:

- Verschiebung  $w_s(x)$ :



$$w_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \left( \lambda l \sinh \lambda x - \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l)(\cosh \lambda x - 1)}{\cosh \lambda l} \right) \right]$$

- Neigung  $w'_s(x)$ :



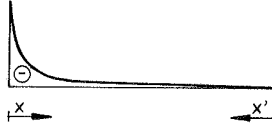
$$w'_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ x' + \frac{1}{\lambda} \left( \lambda l \cosh \lambda x + \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \sinh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right) \right]$$

- Krümmung  $w_s''(x)$ :



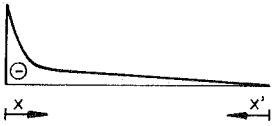
$$w_s''(x) = -\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ 1 + \lambda l \sinh \lambda x - \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \cosh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right]$$

- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$ :



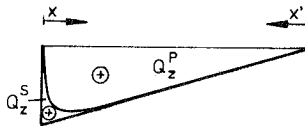
$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{p}_z}{EI_\omega \lambda} \left[ \lambda l \cosh \lambda x - \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \sinh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right]$$

- Wölbmoment  $M_\omega(x)$ :



$$M_\omega(x) = EI_\omega \kappa_\omega(x) = -EI_\omega w_s'''(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 + \lambda l \sinh \lambda x - \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \cosh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right]$$

- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$ :



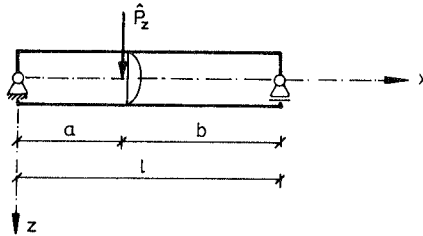
$$Q_z^P(x) = GA_s \gamma(x) = GA_s w_s'(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda} \left[ \lambda x' - \lambda l \cosh \lambda x + \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \sinh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right]$$

$$Q_z^S(x) = M_\omega'(x) = -EI_\omega w_s''''(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda} \left[ \lambda l \cosh \lambda x - \frac{(1 + \lambda l \sinh \lambda l) \sinh \lambda x}{\cosh \lambda l} \right]$$



### A3.2 Biegeträger

#### A3.2.1 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert

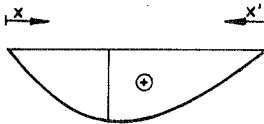


Man erhält die folgende Schublösung:

Bereich  $0 \leq x \leq a$

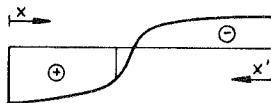
Bereich  $0 \leq x' \leq b$

- Verschiebung  $w_s(x)$ :



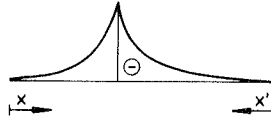
$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z x}{GA_s} \left( \frac{b}{l} - \frac{1}{\lambda x} \frac{\sinh \lambda b \sinh \lambda x}{\sinh \lambda l} \right) \quad w_s(x) = \frac{\hat{P}_z x'}{GA_s} \left( \frac{a}{l} - \frac{1}{\lambda x'} \frac{\sinh \lambda a \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$

- Neigung  $w'_s(x)$ :



$$w'_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left( \frac{b}{l} - \frac{\sinh \lambda b \cosh \lambda x}{\sinh \lambda l} \right) \quad w'_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left( -\frac{a}{l} + \frac{\sinh \lambda a \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$

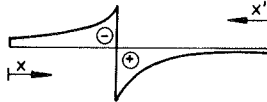
- Krümmung  $w_s''(x)$  :



$$w_s''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega \lambda} \frac{\sinh \lambda b \sinh \lambda x}{\sinh \lambda l}$$

$$w_s''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega \lambda} \frac{\sinh \lambda a \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

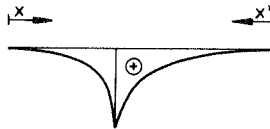
- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$  :



$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega} \frac{\sinh \lambda b \cosh \lambda x}{\sinh \lambda l}$$

$$w_s'''(x) = +\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega} \frac{\sinh \lambda a \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

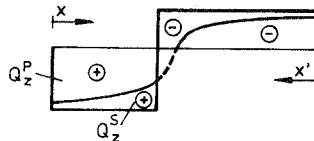
- Wölbmoment  $M_\omega(x)$  :



$$M_\omega(x) = \frac{\hat{P}_z}{\lambda} \frac{\sinh \lambda b \sinh \lambda x}{\sinh \lambda l}$$

$$M_\omega(x) = \frac{\hat{P}_z}{\lambda} \frac{\sinh \lambda a \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$  :



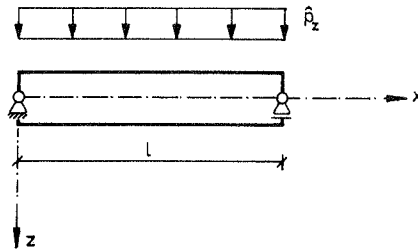
$$Q_z^P(x) = \hat{P}_z \left( \frac{b}{l} - \frac{\sinh \lambda b \cosh \lambda x}{\sinh \lambda l} \right)$$

$$Q_z^P(x) = \hat{P}_z \left( -\frac{a}{l} + \frac{\sinh \lambda a \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$

$$Q_z^S(x) = \hat{P}_z \frac{\sinh \lambda b \cosh \lambda x}{\sinh \lambda l}$$

$$Q_z^S(x) = -\hat{P}_z \frac{\sinh \lambda a \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

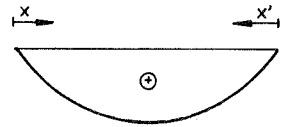
A3.2.2 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert



Man erhält die folgende Schublösung:

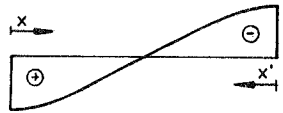
- Verschiebung  $w_s(x)$ :

$$w_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left( \frac{xx'}{2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$



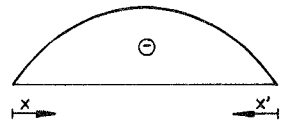
- Neigung  $w'_s(x)$ :

$$w'_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left( \frac{1}{2} - x + \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$



- Krümmung  $w''_s(x)$ :

$$w''_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left( \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} - 1 \right)$$



- Krümmungsableitung  $w'''_s(x)$ :

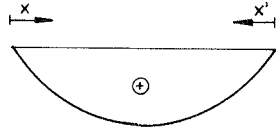
$$w'''_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{EI_o \lambda} \left( \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$



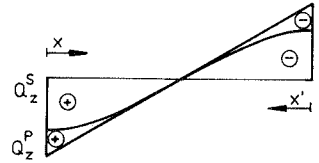
- Wölbmoment  $M_\omega(x)$  :

$$M_\omega(x) = EI_\omega \kappa_\omega(x) = -EI_\omega w_s''(x)$$

$$= \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$



- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$  :



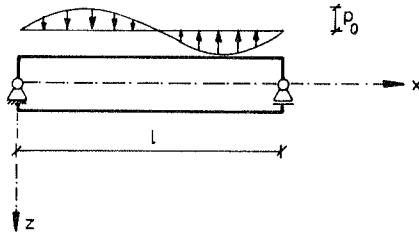
$$Q_z^P(x) = GA_s \gamma(x) = GA_s w_s'(x) = \hat{p}_z \left( \frac{1}{2} - x + \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$$

$$Q_z^S(x) = M_\omega'(x) = -EI_\omega w_s'''(x) = -\hat{p}_z \frac{1}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

### A3.2.3 Biegeträger unter sinusförmiger Belastung, beidseitig gelenkig gelagert

hier:  $n = 2$

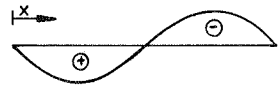
$$\hat{p}_z(x) = p_0 \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$



Man erhält die folgende Schublösung:

- Verschiebung  $w_s(x)$ :

$$w_s(x) = \frac{p_0}{EI_\omega} \frac{l^4}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + \lambda^2 l^2)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$



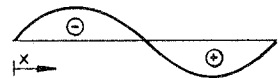
- Neigung  $w'_s(x)$ :

$$w'_s(x) = \frac{p_0}{EI_\omega} \frac{l^3}{n\pi(n^2\pi^2 + \lambda^2 l^2)} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$



- Krümmung  $w''_s(x)$ :

$$w''_s(x) = -\frac{p_0}{EI_\omega} \frac{l^2}{(n^2\pi^2 + \lambda^2 l^2)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$



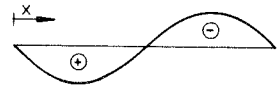
- Krümmungsableitung  $w'''_s(x)$ :

$$w'''_s(x) = -\frac{p_0}{EI_\omega} \frac{n\pi l}{(n^2\pi^2 + \lambda^2 l^2)} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

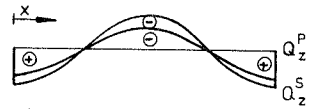


- Wölbmoment  $M_{\omega}(x)$  :

$$M_{\omega}(x) = -EI_{\omega}w_s(x)'' = \frac{p_0 l^2}{\lambda^2 l^2 + n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$



- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$  :



$$Q_z^P(x) = GA_s \gamma(x) = GA_s w_s'(x) = \frac{p_0 l}{n\pi} \frac{\lambda^2 l^2}{n^2 \pi^2 + \lambda^2 l^2} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$Q_z^S(x) = M_{\omega}'(x) = -EI_{\omega} w_s'''(x) = \frac{p_0 l}{n\pi} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \lambda^2 l^2} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Da auf diesen Belastungsfall in den Abschnitten 6 und 7 mehrfach zurückgegriffen wird, werden für ihn auch die Lösungsgleichungen nach der elementaren Balkentheorie angegeben.

#### Lösung nach der elementaren Balkentheorie:

- Verschiebung  $w(x) = w_b(x) + w_s(x)$  :

$$w_b(x) = \frac{p_0}{EI_y} \frac{l^4}{n^4 \pi^4} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w_s(x) = \frac{p_0}{GA_s} \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

- Neigung  $w'(x) = w_b'(x) + w_s'(x)$  :

$$w_b'(x) = \frac{p_0}{EI_y} \frac{l^3}{n^3 \pi^3} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w_s'(x) = \frac{p_0}{GA_s} \frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

- Krümmung  $w''(x) = w_b''(x) + w_s''(x)$  :

$$w_b''(x) = -\frac{p_0}{EI_y} \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w_s''(x) = -\frac{p_0}{GA_s} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

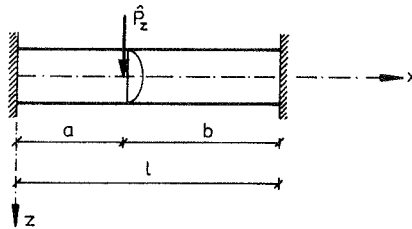
- Biegemoment  $M_y(x)$  :

$$M_y(x) = -EI_y w_b''(x) = \frac{p_0 l^2}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

- Querkraft  $Q_z(x)$  :

$$Q_z(x) = GA_s w_s'(x) = \frac{p_0 l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

### A3.2.4 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)

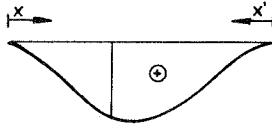


Man erhält die folgende Schublösung:

Bereich  $0 \leq x \leq a$

Bereich  $0 \leq x' \leq b$

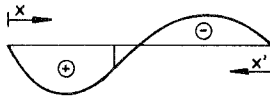
- Verschiebung  $w_s(x)$ :



$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left[ \frac{(\lambda b + C_2)x + C_1 x'}{\lambda l} - \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \sinh \lambda x + C_1 \sinh \lambda x'}{\lambda \sinh \lambda l} \right]$$

$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left[ \frac{C_2 x + (\lambda a + C_1) x'}{\lambda l} - \frac{C_2 \sinh \lambda x + (\sinh \lambda a + C_1) \sinh \lambda x'}{\lambda \sinh \lambda l} \right]$$

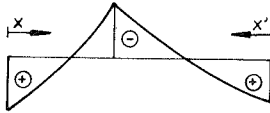
- Neigung  $w'_s(x)$ :



$$w'_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left[ \frac{\lambda b + C_2 - C_1}{\lambda l} - \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \cosh \lambda x - C_1 \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

$$w'_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} \left[ \frac{C_2 - \lambda a - C_1}{\lambda l} - \frac{C_2 \cosh \lambda x - (\sinh \lambda a + C_1) \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

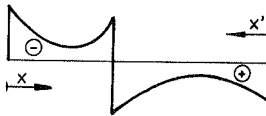
- Krümmung  $w_s''(x)$ :



$$w_s''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega \lambda} \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \sinh \lambda x + C_1 \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

$$w_s''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega \lambda} \frac{C_2 \sinh \lambda x + (\sinh \lambda a + C_1) \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

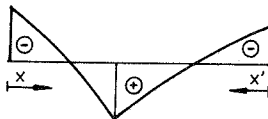
- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$ :



$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega} \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \cosh \lambda x - C_1 \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_\omega} \frac{C_2 \cosh \lambda x - (\sinh \lambda a + C_1) \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

- Wölbmoment  $M_\omega(x)$ :

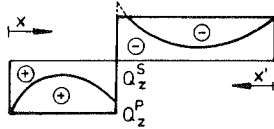


$$M_\omega(x) = \frac{\hat{P}_z}{\lambda} \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \sinh \lambda x + C_1 \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

$$M_\omega(x) = \frac{\hat{P}_z}{\lambda} \frac{C_2 \sinh \lambda x + (\sinh \lambda a + C_1) \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$



- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$  :



$$Q_z^P(x) = \hat{p}_z \left[ \frac{\lambda b + C_2 - C_1}{\lambda l} - \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \cosh \lambda x - C_1 \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

$$Q_z^S(x) = \hat{p}_z \left[ \frac{C_2 - \lambda a - C_1}{\lambda l} - \frac{C_2 \cosh \lambda x - (\sinh \lambda a + C_1) \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

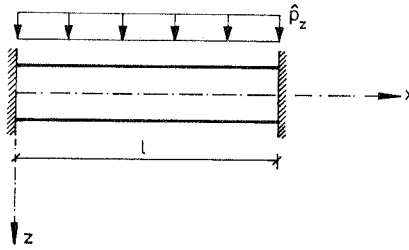
$$Q_z^S(x) = \hat{p}_z \frac{(\sinh \lambda b + C_2) \cosh \lambda x - C_1 \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

$$Q_z^S(x) = \hat{p}_z \frac{C_2 \cosh \lambda x - (\sinh \lambda a + C_1) \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$$

mit den Konstanten:

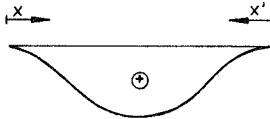
$$C_{1/2} = \frac{\frac{\sinh \lambda a + \sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} - 1}{2 \tanh \lambda \frac{1}{2}} \pm \frac{\left( \frac{a-b}{l} - \frac{\sinh \lambda a - \sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \right) \frac{1}{2} \tanh \lambda \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{\lambda} \tanh \lambda \frac{1}{2}}$$

A3.2.5 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)



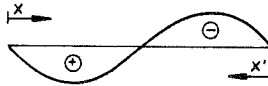
Man erhält die folgende Schublösung:

- Verschiebung  $w_s(x)$ :



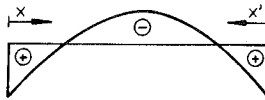
$$w_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{C}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1-C}{\lambda^2} \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

- Neigung  $w'_s(x)$ :



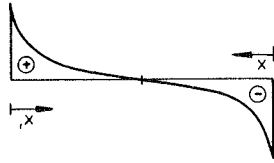
$$w'_s(x) = \frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ \frac{1}{2} - x + \frac{1-C}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

- Krümmung  $w''_s(x)$ :



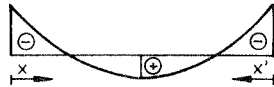
$$w''_s(x) = -\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \left[ 1 - (1-C) \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

- Krümmungsableitung  $w_s'''(x)$ :



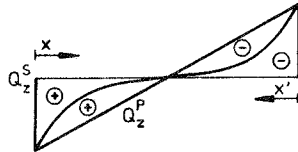
$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{p}_z}{EI_\omega \lambda} \left[ -(1-C) \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

- Wölbmoment  $M_\omega(x)$ :



$$M_\omega(x) = EI_\omega \kappa_\omega(x) = -EI_\omega w_s''(x) = \frac{\hat{p}_z}{\lambda^2} \left[ 1 - (1-C) \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

- Querkraft  $Q_z(x) = Q_z^P(x) + Q_z^S(x)$ :



$$Q_z^P(x) = GA_s \gamma(x) = GA_s w_s'(x) = \hat{p}_z \left[ \frac{1}{2} - x + \frac{1-C}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

$$Q_z^S(x) = M_\omega'(x) = -EI_\omega w_s'''(x) = -\hat{p}_z \left[ \frac{1-C}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$$

mit der Konstanten:

$$C = 1 - \frac{\lambda \frac{1}{2}}{\tanh \lambda \frac{1}{2}}$$

## A4 Steifigkeitsmatrizen

In diesem Abschnitt werden die Herleitung der Steifigkeitsmatrizen und deren resultierenden Terme angegeben, soweit dies nicht bereits in den vorangegangenen Abschnitten 4, 8 und 9 erfolgte.

### A4.1 Lineare Steifigkeitsmatrix

Aus der exakten Lösung der homogenen Differentialgleichung für die Schubverschiebungen  $w_s$

$$w_s = C_1 + C_2 \frac{a}{l} x + C_3 \cosh\left(\frac{a}{l} x\right) + C_4 \sinh\left(\frac{a}{l} x\right)$$

bzw.

$$w_s = C_1 + C_2 \lambda x + C_3 c_x + C_4 s_x \quad (\text{A4.1})$$

folgt für die Stabendverschiebungsgrößen

$$\begin{bmatrix} w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \\ 1 & \lambda l & c & s \\ 0 & -\lambda & -\lambda s & -\lambda c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.2})$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{A} \mathbf{C}$$

Die Inversion ergibt:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2(1-c) + \lambda l s} \begin{bmatrix} \lambda(1-c + \lambda l s) & s - \lambda l c & \lambda(1-c) & \lambda l - s \\ -\lambda s & -(1-c) & \lambda s & -(1-c) \\ \lambda(1-c) & \lambda l c - s & -\lambda(1-c) & -(\lambda l - s) \\ \lambda s & -(1-c) - \lambda l s & -\lambda s & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{si} \\ \phi_{si} \\ w_{sk} \\ \phi_{sk} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_s$$

Mit den Konstanten  $C_i$  können die Randschnittgrößen bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{\omega i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{\omega} w_{si}''' - GA_s w_{si}' \\ EI_{\omega} w_{si}'' \\ -EI_{\omega} w_{sk}''' + GA_s w_{sk}' \\ -EI_{\omega} w_{sk}'' \end{bmatrix} = GA_s \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.3})$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{B} \underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_s}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{k}_s \mathbf{u}_s$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$$

Damit ergibt sich die exakte Steifigkeitsmatrix für den Schub (siehe Abschnitt 4.1.2.5).

#### A4.2 Geometrische Steifigkeitsmatrix

Die Lösung setzt sich auch hier additiv aus dem Biege- und Schubenteil zusammen  $w = w_b + w_s$ . Das Vorgehen entspricht dem linearen Fall (Abschnitt A4.1).

Man erhält die folgenden Terme der geometrischen Steifigkeitsmatrix (siehe Gl. 8.41 bis 8.44):

$\mathbf{k}_{G11}$ :

$$k_{G11} = \pm S \frac{6}{51}$$

$$k_{G23} = k_{G32} = \pm S \frac{1}{10}$$

$$k_{G12} = k_{G21} = \mp S \frac{1}{10}$$

$$k_{G24} = k_{G42} = \mp S \frac{1}{30}$$

$$k_{G13} = k_{G31} = \mp S \frac{6}{51}$$

$$k_{G33} = \pm S \frac{6}{51}$$

$$k_{G14} = k_{G41} = \mp S \frac{1}{10}$$

$$k_{G34} = k_{G43} = \pm S \frac{1}{10}$$

$$k_{G22} = \pm S \frac{21}{15}$$

$$k_{G44} = \pm S \frac{21}{15}$$

$k_{g_{12}}$  :

$$k_{g_{11}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \lambda \left\{ s - 24(1-c) \frac{1}{\lambda^3 l^3} - 12s \frac{1}{\lambda^2 l^2} \right\}$$

$$k_{g_{12}} = k_{g_{21}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \left\{ (1-c) + 12(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 6s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$$k_{g_{13}} = k_{g_{31}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \lambda \left\{ -s + 24(1-c) \frac{1}{\lambda^3 l^3} + 12s \frac{1}{\lambda^2 l^2} \right\}$$

$$k_{g_{14}} = k_{g_{41}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \left\{ (1-c) + 12(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 6s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$$k_{g_{22}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} l \left\{ c - 8(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 5s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$$k_{g_{23}} = k_{g_{32}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \left\{ -(1-c) - 12(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 6s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$$k_{g_{24}} = k_{g_{42}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} l \left\{ -1 - s \frac{1}{\lambda l} - 4(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} \right\}$$

$$k_{g_{33}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \lambda \left\{ s - 24(1-c) \frac{1}{\lambda^3 l^3} - 12s \frac{1}{\lambda^2 l^2} \right\}$$

$$k_{g_{34}} = k_{g_{43}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} \left\{ -(1-c) - 12(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 6s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$$k_{g_{44}} = \frac{S}{2(1-c) + \lambda ls} l \left\{ c - 8(1-c) \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 5s \frac{1}{\lambda l} \right\}$$

$\mathbf{k}_{g_{22}}$  :

$$k_{g_{11}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \lambda \left\{ \lambda(s^2 + c - 1) + 3s(1-c) \right\}$$

$$k_{g_{12}} = k_{g_{21}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ 2(1-c)^2 + \frac{1}{2} \lambda(1-c)(s + \lambda) \right\}$$

$$k_{g_{13}} = k_{g_{31}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \lambda \left\{ -\lambda(s^2 + c - 1) - 3s(1-c) \right\}$$

$$k_{g_{14}} = k_{g_{41}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ 2(1-c)^2 + \frac{1}{2} \lambda(1-c)(s + \lambda) \right\}$$

$$k_{g_{22}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ (1 + c - 2c^2) - \frac{1}{\lambda} s(1-c) + \frac{1}{2} \lambda(sc + 2s - \lambda) \right\}$$

$$k_{g_{23}} = k_{g_{32}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ -2(1-c)^2 - \frac{1}{2} \lambda(1-c)(s + \lambda) \right\}$$

$$k_{g_{24}} = k_{g_{42}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ -3(1-c) + \frac{1}{\lambda} s(1-c) + \frac{1}{2} \lambda(\lambda c - 3s) \right\}$$

$$k_{g_{33}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \lambda \left\{ \lambda(s^2 + c - 1) + 3s(1-c) \right\}$$

$$k_{g_{34}} = k_{g_{43}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ -2(1-c)^2 - \frac{1}{2} \lambda(1-c)(s + \lambda) \right\}$$

$$k_{g_{44}} = \frac{S}{[2(1-c) + \lambda ls]^2} \left\{ (1 + c - 2c^2) - \frac{1}{\lambda} s(1-c) + \frac{1}{2} \lambda(sc + 2s - \lambda) \right\}$$

### A4.3 Konsistente Massenmatrix

Die Lösung setzt sich wieder additiv aus dem Biege- und Schubanteil zusammen  $w = w_b + w_s$ . Das Vorgehen entspricht dem linearen Fall (Abschnitt A4.1).

Man erhält die folgenden Terme der konsistenten Massenmatrix (siehe Gl. 9.16 bis 9.19):

$m_{11}$  :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \frac{\rho}{420} (156Al + 504 \frac{I_y}{l}) & m_{23} = m_{32} &= \frac{\rho}{420} (-13Al^2 + 42I_y) \\
 m_{12} = m_{21} &= \frac{\rho}{420} (-22Al^2 - 42I_y) & m_{24} = m_{42} &= \frac{\rho}{420} (-3Al^3 - 14I_y l) \\
 m_{13} = m_{31} &= \frac{\rho}{420} (54Al - 504 \frac{I_y}{l}) & m_{33} &= \frac{\rho}{420} (156Al + 504 \frac{I_y}{l}) \\
 m_{14} = m_{41} &= \frac{\rho}{420} (13Al^2 - 42I_y) & m_{34} = m_{43} &= \frac{\rho}{420} (22Al^2 + 42I_y) \\
 m_{22} &= \frac{\rho}{420} (4Al^3 + 56I_y l) & m_{44} &= \frac{\rho}{420} (4Al^3 + 56I_y l)
 \end{aligned}$$

$m_{12}$  :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \frac{\rho A}{2(1-c) + \lambda l s} l \left\{ -s \frac{1}{\lambda l} + 12s \frac{1}{\lambda^3 l^3} + 24 \frac{1}{\lambda^4 l^4} (1-c) + \frac{1}{2} (1-c + \frac{7}{10} \lambda l s) \right\} \\
 m_{12} &= \frac{\rho A}{2(1-c) + \lambda l s} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} (1-c) - 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{2} (3s - \frac{3}{10} \lambda l - \frac{7}{10} \lambda l c) \right\} \\
 m_{13} &= \frac{\rho A}{2(1-c) + \lambda l s} l \left\{ s \frac{1}{\lambda l} - 12s \frac{1}{\lambda^3 l^3} - 24 \frac{1}{\lambda^4 l^4} (1-c) + \frac{1}{2} (1-c + \frac{3}{10} \lambda l s) \right\} \\
 m_{14} &= \frac{\rho A}{2(1-c) + \lambda l s} \frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda l} (1-c) - 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{2} (s - \frac{7}{10} \lambda l - \frac{3}{10} \lambda l c) \right\}
 \end{aligned}$$



$$m_{21} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda l} (1-c) - 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{12} \lambda l (1-c + \frac{3}{5} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{22} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{l^2}{\lambda} \left\{ -c \frac{1}{\lambda l} + 5s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 8 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{12} (s - \frac{2}{5} \lambda l - \frac{3}{5} \lambda lc) \right\}$$

$$m_{23} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} (1-c) + 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{12} \lambda l (1-c + \frac{2}{5} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{24} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{l^2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} + s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 4 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{12} (s - \frac{3}{5} \lambda l - \frac{2}{5} \lambda lc) \right\}$$

$$m_{31} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} l \left\{ s \frac{1}{\lambda l} - 12s \frac{1}{\lambda^3 l^3} - 24 \frac{1}{\lambda^4 l^4} (1-c) + \frac{1}{2} (1-c + \frac{3}{10} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{32} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} (1-c) + 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{2} (s - \frac{7}{10} \lambda l - \frac{3}{10} \lambda lc) \right\}$$

$$m_{33} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} l \left\{ -s \frac{1}{\lambda l} + 12s \frac{1}{\lambda^3 l^3} + 24 \frac{1}{\lambda^4 l^4} (1-c) + \frac{1}{2} (1-c + \frac{7}{10} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{34} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda l} (1-c) + 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{2} (3s - \frac{3}{10} \lambda l - \frac{7}{10} \lambda lc) \right\}$$

$$m_{41} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda l} (1-c) - 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} - 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{12} \lambda l (1-c + \frac{2}{5} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{42} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{l^2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} + s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 4 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{12} (s - \frac{3}{5} \lambda l - \frac{2}{5} \lambda lc) \right\}$$

$$m_{43} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda l} (1-c) + 6s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 12 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) + \frac{1}{12} \lambda l (1-c + \frac{3}{5} \lambda ls) \right\}$$

$$m_{44} = \frac{\varrho A}{2(1-c) + \lambda ls} \frac{l^2}{\lambda} \left\{ -c \frac{1}{\lambda l} + 5s \frac{1}{\lambda^2 l^2} + 8 \frac{1}{\lambda^3 l^3} (1-c) - \frac{1}{12} (s - \frac{2}{5} \lambda l - \frac{3}{5} \lambda lc) \right\}$$

m<sub>22</sub> :

$$m_{11} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \cdot 1 \left\{ (1-c)(3 + \lambda s - 5s \frac{1}{\lambda}) + s^2(\frac{1}{3} \lambda^2 l^2 - 1) \right\}$$

$$m_{12} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \lambda l(1-c)(7s - \lambda) + 2\lambda^2 l^2 s^2 - \frac{1}{3} \lambda^3 l^3 s(\frac{1}{2} + c) \right\}$$

$$m_{13} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \cdot 1 \left\{ (1-c)(1 + \lambda s + 5s \frac{1}{\lambda}) + s^2(\frac{1}{6} \lambda^2 l^2 + 3) \right\}$$

$$m_{14} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\frac{5}{2} \lambda s(1-c) - 4(1-c)^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 l^2(1+c-2c^2) + \frac{1}{3} \lambda^3 l^3 s(1 + \frac{c}{2}) \right\}$$

$$m_{22} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 3s(1-c) \frac{1}{\lambda} - 3(1+c)^2 + \frac{5}{6} \lambda l(\lambda - 3cs) - 2\lambda s \right\}$$

$$m_{23} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{5}{2} \lambda s(1-c) + 4(1-c)^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 l^2(1+c-2c^2) - \frac{1}{3} \lambda^3 l^3 s(1 + \frac{c}{2}) \right\}$$

$$m_{24} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1-c)(5 - 3s \frac{1}{\lambda}) + \frac{1}{2} \lambda s(2c + 7) - \frac{1}{6} \lambda^2 l^2(1 + 7c + c^2) - 2s^2 \right\}$$

$$m_{33} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \cdot 1 \left\{ (1-c)(3 + \lambda s - 5s \frac{1}{\lambda}) + s^2(\frac{1}{3} \lambda^2 l^2 - 1) \right\}$$

$$m_{34} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\frac{1}{2} \lambda l(1-c)(7s - \lambda) - 2s^2 \lambda^2 l^2 + \frac{1}{3} \lambda^3 l^3 s(\frac{1}{2} + c) \right\}$$

$$m_{44} = \frac{\rho A}{[2(1-c) + \lambda s]^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 3s \frac{1}{\lambda} (1-c) - 3(1+c)^2 + \frac{5}{6} \lambda l(\lambda - 3cs) - 2\lambda s \right\}$$

$$m_{21} = m_{12}$$

$$m_{31} = m_{13}$$

$$m_{41} = m_{14}$$

$$m_{32} = m_{23}$$

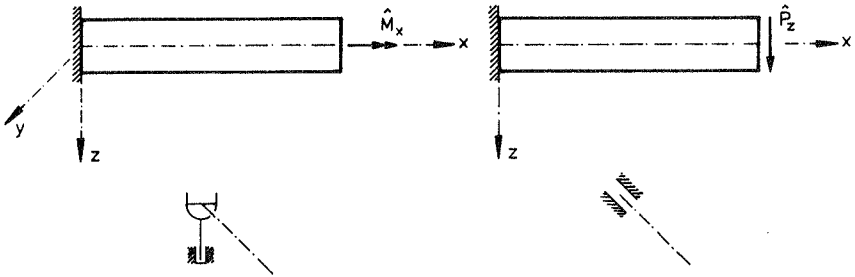
$$m_{42} = m_{24}$$

$$m_{43} = m_{34}$$

A5 Analogie: Torsions-Schub <--> Querkraft-Schub (2D)

A5.1 Reine Torsion (St. Venant)

Reine Querkraft (Timoshenko)



wölbfreie Verdrehung

wölbfreie Verbiegung

keine Wöblängsspannungen

$$M'_x + \hat{m}_x = 0$$

STATIK

$$Q'_z + \hat{p}_z = 0$$

$$M_x = -GI_x \Gamma'_x$$

$$\left[ \begin{array}{l} = GI_x \gamma_x \\ \gamma_x = \phi'_x \end{array} \right]$$

WERKSTOFF

$$Q_z = GA_s \gamma_y$$

$$\Gamma_x = -\phi'_x$$

GEOMETRIE

$$\gamma_y = w'_s$$

DGL.

$$(GI_x \phi'_x)' = -\hat{m}_x$$

$$(GA_s w'_s)' = -\hat{p}_z$$

für:  $GI_x = \text{konst.}$

für:  $GA_s = \text{konst.}$

$$\phi''_x = -\frac{\hat{m}_x}{GI_x}$$

wölbfreier Querschnitt

$$w''_s = -\frac{\hat{p}_z}{GA_s}$$

$$\phi'_x = \frac{\hat{M}_x}{GI_x}$$

nicht wölbfreier Querschnitt

$$w'_s = \frac{\hat{Q}_z}{GA_s}$$

$\phi_x$  ... Verdrehung

$w_s$  ... Querverschiebung

$\phi'_x$  ... Verwindung =  $\frac{\text{Verdrehung}}{\text{Längeneinheit}}$

$w'_s$  ... Neigung =  $\frac{\text{Querverschiebung}}{\text{Längeneinheit}}$

$\phi''_x$  ... Torsions - "Krümmung"

$w''_s$  ... Querkraft - Krümmung

## Lösung

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_x \frac{1}{GI_x} \left[ \int_x \hat{m}_x dx \right] dx \\ -\int_x \hat{m}_x dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{dx}{GI_x} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} w_s \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_x \frac{1}{GA_s} \left[ \int_x \hat{p}_z dx \right] dx \\ -\int_x \hat{p}_z dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{dx}{GA_s} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

für:  $GI_x = \text{konst.}$

für:  $GA_s = \text{konst.}$

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ M_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2GI_x} \\ x \end{bmatrix} \hat{m}_x + \begin{bmatrix} \frac{x}{GI_x} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} w_s \\ Q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2GA_s} \\ x \end{bmatrix} \hat{p}_z + \begin{bmatrix} \frac{x}{GA_s} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

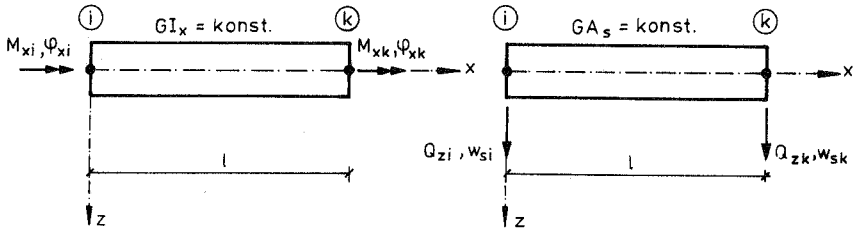
potentielle Energie

$$\Pi(\phi_x) = \frac{1}{2} \int_0^l GI_x (-\phi_x')^2 dx - \int_0^l \hat{m}_x \phi_x dx - [\hat{M}_x \phi_x]_0^l \quad \left| \quad \Pi(w_s) = \frac{1}{2} \int_0^l GA_s (-w_s')^2 dx - \int_0^l \hat{p}_z w_s dx - [\hat{Q}_z w_s]_0^l$$

Prinzip der virtuellen Arbeit (Verschiebungen)

$$\int_0^l (-\delta\phi_x') GI_x (-\phi_x') dx = \int_0^l \delta\phi_x \hat{m}_x dx + [\delta\phi_x \hat{M}_x]_0^l \quad \left| \quad \int_0^l (-\delta w_s') GA_s (-w_s') dx = \int_0^l \delta w_s \hat{p}_z dx + [\delta w_s \hat{Q}_z]_0^l$$

Matrizen und Vektoren



### Schnittgrößen - und Verschiebungsvektor

$$s = \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xk} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \phi_{xi} \\ \phi_{xk} \end{bmatrix}$$

$$s = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ Q_{zk} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} w_{si} \\ w_{sk} \end{bmatrix}$$

### Flexibilitätsmatrix

$$f = \left[ \int_{L_0}^l \frac{dx}{GI_x} \right]$$

$GI_x = \text{konst.}$

$$\left[ \frac{l}{GI_x} \right]$$

$$f = \left[ \int_0^l \frac{dx}{GA_s} \right]$$

$GA_s = \text{konst.}$

$$\left[ \frac{l}{GA_s} \right]$$

### Steifigkeitsmatrix

$$k = \frac{GI_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{GA_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

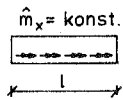
### Lastvektoren



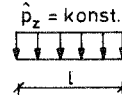
$GI_x = \text{konst.}$



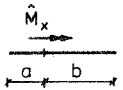
$GA_s = \text{konst.}$



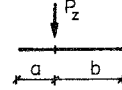
$$s^0 = -\frac{\hat{m}_x l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$s^0 = -\frac{\hat{p}_z l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



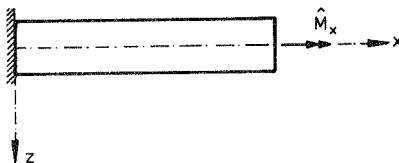
$$s^0 = -\frac{\hat{M}_x}{l} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$



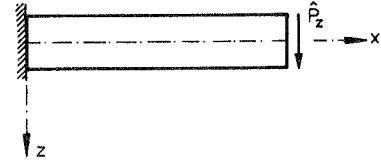
$$s^0 = -\frac{\hat{P}_z}{l} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

### Schnittkraft - und Verschiebungsverläufe

wölbefreie  
Einspannung

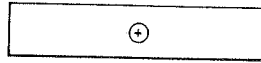


wölbefreie  
Einspannung



$M_x$  - Verlauf :

$$M_x(x) = \hat{M}_x$$



$Q_z$  - Verlauf :

$$Q_z(x) = \hat{P}_z$$

Verdrehung :

$$\phi_x(x) = \frac{\hat{M}_x}{GI_x} x$$

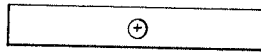


Verschiebung :

$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} x$$

Verwindung :

$$\phi_x'(x) = \frac{\hat{M}_x}{GI_x} = -\Gamma$$



Neigung :

$$w_s'(x) = \frac{\hat{P}_z}{GA_s} = \gamma_{xz}$$

Verwölbung

$$u(x, y, z) = -\phi_x'(x)\omega(y, z)$$

$$u(x, y, z) = -w_s'(x)\omega(z)$$

Einheitsverwölbung

Schubspannungen in dünnwandigen (geschlossenen) Querschnitten

$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{M_x(x)S_x(s)}{I_x t}$$

$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{Q_z(x)S_y(s)}{I_y b}$$

$$\text{mit: } S_x(s) = \frac{2A_m}{\int_s \frac{1}{t} ds}$$

$$\text{mit: } S_y(s) = \int_A s dA$$

$$I_x = \frac{4A_m^2}{\int_s \frac{1}{t} ds} + \frac{1}{3} \int_s t^3 ds$$

$$I_y = \int_A s^2 dA$$

$$M_x' + \hat{m}_x = 0$$

$$M_x = M_x^P + M_x^S$$

$$M_x^S = M_{\omega_x}'$$

$$M_x^P = GI_x \gamma_x$$

$$M_{\omega_x} = EI_{\omega_x} \kappa_{\omega_x}$$

$$\kappa_{\omega_x} = -\phi_x''$$

$$\gamma_x = \phi_x'$$

STATIK

WERKSTOFF

GEOMETRIE

$$Q_z' + \hat{p}_z = 0$$

$$Q_z = Q_z^P + Q_z^S$$

$$Q_z^S = M_{\omega_y}'$$

$$Q_z^P = GA_s \gamma_y$$

$$M_{\omega_y} = EI_{\omega_y} \kappa_{\omega_y}$$

$$\kappa_{\omega_y} = -w_s''$$

$$\gamma_y = w_s'$$

DGL.

$$(EI_{\omega_x} \phi_x''')' - (GI_x \phi_x')' = \hat{m}_x$$

für:  $EI_{\omega_x} = \text{konst.}$

$GI_x = \text{konst.}$

$$\phi_x^{IV} - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \phi_x'' = \frac{\hat{m}_x}{EI_{\omega_x}}$$

mit:  $a = \lambda l = l \sqrt{\frac{GI_x}{EI_{\omega_x}}}$

$$(EI_{\omega_y} w_s''')' - (GA_s w_s')' = \hat{p}_z$$

für:  $EI_{\omega_y} = \text{konst.}$

$GA_s = \text{konst.}$

$$w_s^{IV} - \left(\frac{a}{l}\right)^2 w_s'' = \frac{\hat{p}_z}{EI_{\omega_y}}$$

mit:  $a = \lambda l = l \sqrt{\frac{GA_s}{EI_{\omega_y}}}$

$\phi_x$  ... Verdrehung

$\phi_x'$  ... Verdrehung =  $\frac{\text{Verdrehung}}{\text{Längeneinheit}}$

$\phi_x''$  ... Torsions - "Krümmung"

$w_s$  ... Querverschiebung

$w_s'$  ... Neigung =  $\frac{\text{Querverschiebung}}{\text{Längeneinheit}}$

$w_s''$  ... Querkraft - Krümmung

## Lösung

für zusätzlich:  $\hat{m}_x = \text{konst.}$

für zusätzlich:  $\hat{p}_z = \text{konst.}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \phi_x \\ \gamma_x \\ -\frac{M_{\omega_x}}{EI_{\omega_x}} \\ -\frac{M_x^S}{EI_{\omega_x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_x' \\ \phi_x'' \\ \phi_x''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & c_x & s_x \\ 0 & 1 & \lambda s_x & \lambda c_x \\ 0 & 0 & \lambda^2 c_x & \lambda^2 s_x \\ 0 & 0 & \lambda^3 s_x & \lambda^3 c_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} c_x \dots \cosh \lambda x \\ s_x \dots \sinh \lambda x \end{array} \\
 \\
 -\frac{\hat{m}_x}{GI_x} \quad \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} w_s \\ \gamma_y \\ -\frac{M_{\omega_y}}{EI_{\omega_y}} \\ -\frac{Q_z^S}{EI_{\omega_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_s \\ w_s' \\ w_s'' \\ w_s''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & c_x & s_x \\ 0 & 1 & \lambda s_x & \lambda c_x \\ 0 & 0 & \lambda^2 c_x & \lambda^2 s_x \\ 0 & 0 & \lambda^3 s_x & \lambda^3 c_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \hat{p}_z \\ GA_s \end{array} \\
 \\
 -\frac{\hat{p}_z}{GA_s} \quad \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

### potentielle Energie

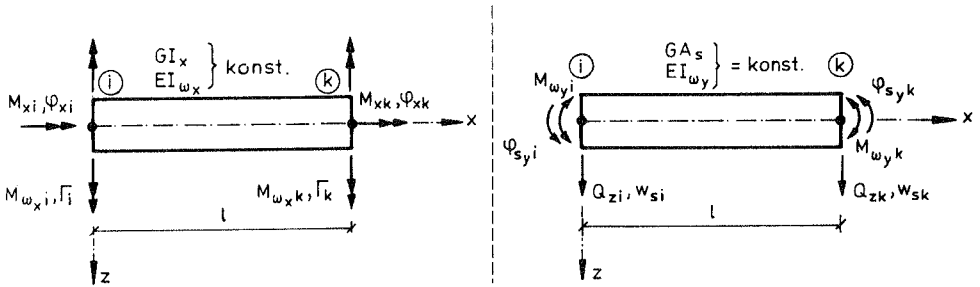
$$\begin{array}{c}
 \Pi(\phi_x, \gamma_x) = \frac{1}{2} \int_0^1 GI_x (-\phi_x')^2 dx \\
 + \frac{1}{2} \int_0^1 EI_{\omega_x} (-\phi_x'')^2 dx \\
 - \int_0^1 \hat{m}_x \phi_x dx - [\hat{M}_x \phi_x - \hat{M}_{\omega_x} \phi_x']_0^1 \\
 \\
 \Pi(w_s, \gamma_y) = \frac{1}{2} \int_0^1 GA_s (-w_s')^2 dx \\
 + \frac{1}{2} \int_0^1 EI_{\omega_y} (-w_s'')^2 dx \\
 - \int_0^1 \hat{p}_z w_s dx - [\hat{Q}_z w_s - \hat{M}_{\omega_y} w_s']_0^1
 \end{array}$$

### Prinzip der virtuellen Arbeit (Verschiebungen)

$$\begin{array}{c}
 \int_0^1 (-\delta \phi_x') GI_x (-\phi_x') dx + \int_0^1 (-\delta \phi_x'') EI_{\omega_x} (-\phi_x'') dx \Big| \int_0^1 (-\delta w_s') GA_s (-w_s') dx + \int_0^1 (-\delta w_s'') EI_{\omega_y} (-w_s'') dx \\
 = \int_0^1 \delta \phi_x \hat{m}_x dx + [\delta \phi_x \hat{M}_x - \delta \phi_x' \hat{M}_{\omega_x}]_0^1 \quad \Bigg| \quad \int_0^1 \delta w_s \hat{p}_z dx + [\delta w_s \hat{Q}_z - \delta w_s' \hat{M}_{\omega_y}]_0^1
 \end{array}$$



## Matrizen und Vektoren



### Schnittgrößen - und Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{\omega_x i} \\ M_{xk} \\ M_{\omega_x k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varphi_{xi} \\ \Gamma_i \\ \varphi_{xk} \\ \Gamma_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} Q_{zi} \\ M_{\omega_y i} \\ Q_{zk} \\ M_{\omega_y k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_{si} \\ \varphi_{si} \\ w_{sk} \\ \varphi_{sk} \end{bmatrix}$$

### Steifigkeitsmatrix

-exakt:

$$\mathbf{k} = \frac{*}{k_0} \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 & k_2 & k_4 \\ -k_1 & k_2 & k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_4 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

\* ...  $GI_x$

\* ...  $GA_s$

mit:  $k_0 = 2(1 - c) + \lambda l s$

$$k_1 = \lambda s$$

$$k_2 = c - 1$$

$$k_3 = cl - \frac{1}{\lambda} s$$

$$k_4 = \frac{1}{\lambda} s - 1$$

wobei:

$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_x}{EI_{\omega_x}}}$$

c ...  $\cosh \lambda l$

s ...  $\sinh \lambda l$

$$\lambda = \sqrt{\frac{GA_s}{EI_{\omega_y}}}$$

-genähert:  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^P + \mathbf{k}^S$

$$\begin{array}{ccc}
 * \dots GI_x & \mathbf{k}^P = \frac{*}{I} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ & \frac{2l^2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \text{symm.} & & & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix} & * \dots GA_s
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ** \dots EI_{\omega_x} & \mathbf{k}^S = \frac{**}{I^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ & & 12 & 6l \\ \text{symm.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} & *** \dots EI_{\omega_y}
 \end{array}$$

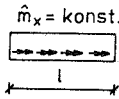
|  
|  
|



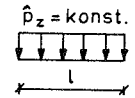
Lastvektoren



-exakt:



$$\mathbf{s}^0 = *** \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda l}{2} \coth \frac{\lambda l}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda l}{2} \coth \frac{\lambda l}{2}\right) \end{bmatrix}$$



$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_x}{EI_{\omega_x}}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{GA_s}{EI_{\omega_y}}}$$

-genähert:

\*\*\* ...  $\hat{m}_x$

$$\mathbf{s}^0 = \frac{(***)l}{12} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\*\*\* ...  $\hat{p}_z$

Spannungen in dünnwandigen (geschlossenen) Querschnitten

primäre Längsspannungen

$$\sigma_x^P(x, s) = \frac{M_y(x)}{I_y} s$$

sekundäre Längsspannungen

$$\sigma_x^S(x, s) = \frac{M_{\omega_x}(x)}{I_{\omega_x}} \omega_x(s)$$

$$\sigma_x^S(x, s) = \frac{M_{\omega_y}(x)}{I_{\omega_y}} \omega_y(s)$$

$$\text{mit: } I_{\omega_x} = \int_A \omega_x^2(s) \, dA$$

$$\text{mit: } I_{\omega_y} = \int_A \omega_y^2(s) \, dA$$

primäre Schubspannungen

$$\tau_{xs}^P(x, s) = -\frac{M_x^P(x) S_x(s)}{I_x t}$$

$$\tau_{xs}^P(x, s) = -\frac{Q_z^P(x) S_y(s)}{I_y b}$$

$$\text{mit: } S_x(s) = \frac{2A_m}{\int_s^{\frac{1}{t}} ds}$$

$$\text{mit: } S_y(s) = \int_s dA$$

$$I_x = \frac{4A_m^2}{\int_s^{\frac{1}{t}} ds} + \frac{1}{3} \int_s t^3 ds$$

$$I_y = \int_A s^2 dA$$

sekundäre Schubspannungen

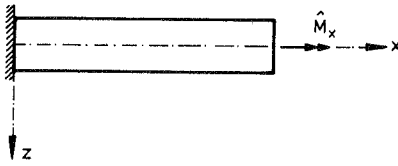
$$\tau_{xs}^S(x, s) = -\frac{M_x^P(x) S_x(s)}{I_x t} - \frac{M_x^S(x) S_{\omega_x}(s)}{I_{\omega_x} t}$$

$$\tau_{xs}^S(x, s) = -\frac{Q_z^P(x) S_y(s)}{I_y b} - \frac{Q_z^S(x) S_{\omega_y}(s)}{I_{\omega_y} b}$$

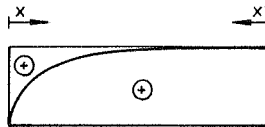
$$\text{mit: } S_{\omega_x}(s) = \int_A \omega_x(s) \, dA$$

$$\text{mit: } S_{\omega_y}(s) = \int_A \omega_y(s) \, dA$$

# Schnittkraft - und Verschiebungsverläufe



$M_x$  - Verlauf:



$$M_x = M_x^P + M_x^S = \hat{M}_x$$

Verdrehung:

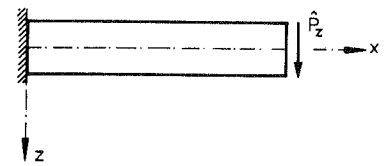


$$\phi_x(x) = \frac{\hat{M}_x}{EI_{\omega_x} \lambda^3} \left( \lambda x - \frac{\sinh \lambda l - \sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$$

Verwindung:



$$\phi_x'(x) = \frac{\hat{M}_x}{EI_{\omega_x} \lambda^2} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$$



$Q_z$  - Verlauf:

$$Q_z = Q_z^P + Q_z^S = \hat{P}_z$$

Verschiebung:

$$w_s(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_{\omega_y} \lambda^3} \left( \lambda x - \frac{\sinh \lambda l - \sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$$

Neigung:

$$w_s'(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_{\omega_y} \lambda^2} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$$

### Krümmung (Wölbmoment)



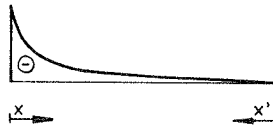
$$\phi_x''(x) = \frac{\hat{M}_x}{EI_{\omega_x} \lambda} \frac{\sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$$

$$w_s''(x) = \frac{\hat{P}_z}{EI_{\omega_y} \lambda} \frac{\sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$$

### Krümmungsableitung

(sekundäres Torsionsmoment)

(sekundäre Querkraft)



$$\phi_x'''(x) = -\frac{\hat{M}_x}{EI_{\omega_x}} \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$$

$$w_s'''(x) = -\frac{\hat{P}_z}{EI_{\omega_y}} \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$$

## Lebenslauf von Thomas Hofmann

08. Mai 1957 geboren in Stuttgart  
Sohn des Architekten Hans Hofmann  
und dessen Ehefrau Hildegard, geb. Weidmann
- 1964 – 1965 Adalbert-Stifter-Schule in Ulm
- 1966 – 1968 Bischof-Ulrich-Schule in Illertissen
- 1968 – 1977 Humboldt-Gymnasium in Ulm
18. Mai 1977 Abitur
- 1977 – 1979 2 Jahre Dienstzeit bei der Bundeswehr in Ingolstadt
- 1979 – 1985 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität  
Stuttgart
18. Febr. 1985 Diplom
- 1985 – 1987 2 Jahre Mitarbeiter im Ingenieurbüro Bung in  
Heidelberg und Memmingen
- seit März 1987 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für  
Baustatik der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-  
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei  
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Platten-  
theorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Be-  
rücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller,  
J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-  
zelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahl-  
betonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-  
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Borscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalenträgwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattenträgwerke unter Berücksich-  
tigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten  
Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. André:  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammier:  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.



- 13 (1991) U. Andelfinger:  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid - gemischter finiter Elemente für  
Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei end-  
lichen Rotationen.