

**BEITRAG ZUR SCHALENBERECHNUNG NACH
EINEM VERALLGEMEINERTEN VARIATIONS-
PRINZIP UND NACH DER ÜBERBESTIMMTEN
KOLLOKATION**

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
MARTIN BECKER
geboren zu Stuttgart



Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Bufler

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Stein

Tag der Einreichung: 10.12.1971

Tag der mündlichen Prüfung: 11.2.1972

14. 03. 2008

Z

Vorwort

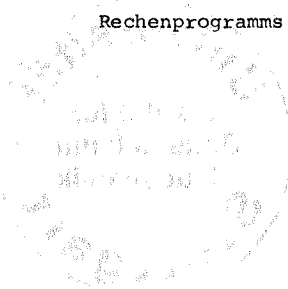
Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Baustatik an der Universität Stuttgart, Direktor Herr Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer danke ich besonders für die Förderung, die er meinen Studien und besonders dieser Arbeit stets angedeihen ließ.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Stein bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wesentliche Hinweise zu tiefem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Bufler gilt mein aufrichtiger Dank für die Übernahme des Referats.

Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Sc., D.E. J. Argyris für das Überlassen des an seinem Institut entwickelten Rechenprogramms zur Lösung großer Gleichungssysteme.



<u>Inhaltsverzeichnis:</u>	Seite
Literaturverzeichnis	5
Bezeichnungen	10
1. Einleitung: Übersicht über die Lösungsmethoden	12
2. Die Differentialgleichungen der linearen Biege- theorie dünner Schalen	20
2.1. Einleitung	20
2.2. Geometrische Größen der Schale	22
2.3. Verschiebungsansatz und Verzerrungen	26
2.4. Werkstoffgesetz	28
2.5. Belastungsannahmen	30
2.6. Potentiale der Schale. Definition der Schnitt- größen	31
2.7. Konstitutive Gleichungen	36
2.8. Berechnung des Elastizitätstensors δ^{ijkl} der Schale	40
2.9. Starrkörperverschiebungen	45
2.10. Gleichgewichts- und Randbedingungen	50
3. Verallgemeinerte Variationsfunktionale der Schale	56
3.1. Einleitung	56
3.2. Das mit Bezug auf die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen verallgemeinerte Funktional des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie	58
3.3. Das mit Bezug auf die geometrischen Übergangs- bedingungen verallgemeinerte Funktional von HELLINGER-REISSNER	66
3.4. Das mit Bezug auf die geometrischen Übergangs- bedingungen verallgemeinerte Funktional von HU-WASHIZU	69
3.5. Vernachlässigung der Schubverzerrungen - Kirchhoffsche Theorie	71

	Seite
4. Lösungen mit Hilfe eines Parameteransatzes	79
4.1. Übersicht	79
4.2. Positive Definitheit. Arten der Konvergenz	80
4.3. Ritz-Methode (Einsetzen ins Funktional)	83
4.4. Überbestimmte Kollokation	98
5. Beispiel	105
Anhang	114
Zusammenfassung	118

Literaturverzeichnis

AAS, A. jr.: Matrix Progression Method, eine Matrizenmethode zur Lösung komplizierter Aufgaben der Elastostatik. Bauing. 39 (1964), S. 306 - 311 und 417 - 421

ARGYRIS, J. H. und D. W. SCHARPF:The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society 72 (1968), S. 873 - 883.

BORNSCHEUER, F.W., G. RUOFF und E. STEIN: Die elektronische Berechnung flacher Schalen mit Hilfe kombinierter Methoden der direkten Variationsrechnung (Erweiterte Trefftzsche Methode und Methode der finiten Elemente) Zwischenbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Bo 184/10, 1970.

BUCK, K., D. SCHARPF, E. STEIN UND W. WUNDERLICH: Symposiumsbericht der DFG-Tagung über finite Elemente 1970 in Stuttgart. Erscheint demnächst bei Wilhelm Ernst und Sohn, München.

BUFLER, H. [1]: Vorlesung über "Energiemethoden der Mechanik" an der Universität Stuttgart 1970.

BUFLER, H. [2]: Die verallgemeinerten Variationsgleichungen der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Schnittkräfte und Verschiebungsgrößen. Ingenieur-Archiv 39 (1970), S. 330 - 340.

BUFLER, H. [3]: Erweiterung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und des Prinzips der virtuellen Kräfte. ZAMM 50 (1970), T 105 - T 108.

BUDIANSKY, B. and J. L. SANDERS: On the "Best" First-Order Linear Shell Theory. Progress in Applied Mechanics, Prager Anniversary Volume, Vol. 192, Macmillan, New York, 1963.

CHETTY, S.M.K.: An Investigation into Linear Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells. Diss. University of Southampton, Fac. of Engineering, 1961.

COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

CONNOR, J. J. und C. BREBBIA: Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Element. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 93, Oktober 1967, S. 43 - 65.

COURANT, R. und D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

DU PREEZ, R.: Die Berechnung allgemeiner Flächentragwerke mit Hilfe von finiten Streifenelementen. Diss. Universität Stuttgart, 1972.

FADDEJEW, D. K. und W. N. FADDEJEW: Numerische Methoden der linearen Algebra. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1964.

FALK, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ing.-Archiv 24 (1956), S. 216 - 232.

FISCHER, L. F.: Theorie und Praxis der Schalenkonstruktionen. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, München, 1967.

FRIEDRICHS, K.: Ein Verfahren der Variationsrechnung. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1929, S. 13 - 20.

FUNK, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

GREEN, A.E. und W. ZERNA: Theoretical Elasticity. 2nd Edition. Clarendon Press, Oxford, 1968.

GOLDENVEIZER, A.L.: Theory of Elastic Thin Shells. (Intern. Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics, Div. 1, Vol. 2), Pergamon Press, Oxford, 1961.

HELLINGER, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Aufsatz in: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften 4, Teil 4, (1914), S. 654.

HOLAND, I.: Design of Circular Cylindrical Shells. Oslo, 1957.

HOLAND, I. und K. BELL: Finite Element Methods in Stress Analysis. Tapir-Verlag, Trondheim, 1970.

HOPPE, H.: Über Erfahrungen mit Kollokationsverfahren bei zweidimensionalen Randwertaufgaben. ZAMM 47 (1967), S. T52 - T54.

HU, H. CM.: On Some Variational Principles in the Theory of Elasticity and the Theory of Plasticity. Scientia Sinica 4 (1955), S. 33 - 54.

KLINGBEIL, E.: [1] Tensorrechnung für Ingenieure. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966.

KLINGBEIL, E.: [2] Variationsprobleme der linearen Theorie elastischer Schalen. Diss. TH Darmstadt, 1963.

KOITER, W.T.: A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells. Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Elastic Shells, Delft, August 1959, North-Holland, Amsterdam, (1961), S. 12 - 33.

MARGUERRE, K. und R. UHRIG: Berechnung vielgliedriger Gelenkketten. ZAMM 44 (1964), S. 1 - 21.

MESCHKOWSKI, H.: Unendliche Reihen. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1961.

MICHLIN, S.G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin, 1962.

NAGHDI, P. M.: Foundations of Elastic Shell Theorie. (Progress in Solid Mechanics, Vol. 4), North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.

NOVOSHILOV, V. V.: The Theory of Thin Shells. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1959.

PRAGER, W.: Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements. Int. J. Solids Struct. 4 (1968), S. 837 - 844.

PRATO, C.: Shell Finite Element Method Via Reissner's Principle. International Journal of Solids and Structures 5 (1969), S. 1119 - 1133.

REISSNER, E.[1]: A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells. American J. Math. 63 (1941), S. 177 - 184.

REISSNER, E.[2]: On a Variational Theorem in Elasticity. J. Math. Phys. 29 (1950), S. 90 - 95 und 32 (1953), S. 129.

RÜDIGER, D.: Die Verfahren von Ritz und Trefftz in der Theorie der Schalen. ZAMM 40 (1960), S. 114 - 123.

SOARE, M.: Application des équations aux différences finies au calcul des coques. Edition Eyrolles, Paris, 1962.

STEIN, E.: Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke. Diss. TH Stuttgart, 1964.

STEIN, E., W. WUNDERLICH, D. SCHARPF und K. BUCK: Symposiumsbericht der DFG-Tagung über Finite Elemente 1970 in Stuttgart. Erscheint demnächst bei Wilhelm Ernst und Sohn, München.

SZMODITS, K.: Statik der Schalenkonstruktionen. B. G. Teubner, Leipzig, 1966.

TOTTENHAM, H.!: The Matrix Progression Method in Structural Analysis. Chapter 7 in: A Course on Structural Problems on Nuclear Reactor Engineering. Pergamon Press, Oxford, 1962.

TOTTENHAM, H. and C. BREBBIA: Finite Element Techniques in Structural Mechanics. Proceedings of a Seminar at the University of Southampton, April 1970.

UTKU, S.: Stiffness Matrices for Thin Triangular Elements of Nonzero Gaussian Curvature. AIAA 5 (1967), S. 745 - 750.

WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford, 1968.

WILKINSON, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem. Monographs on Numerical Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1965.

WUNDERLICH, W. [1]: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. TH Hannover, Lehrstuhl für Stahlbau, Schriftenreihe Heft 4, 1966.

WUNDERLICH, W. [2] et al.: Berechnung von Schalenträgwerken mit numerischen, den Rechenautomaten angepaßten Verfahren. DFG-Forschungsvorhaben DU 25-2, Zweiter Bericht.

WUNDERLICH, W. [3]: Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. Ingenieur-Archiv 39 (1970), S. 230 - 247.

ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Bezeichnungen

$\underline{g}_\alpha, \underline{g}_3$	Basisvektoren außerhalb der Mittelfläche
$\underline{a}_\alpha, \underline{a}_3$	Basisvektoren der Mittelfläche
$b_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor der Mittelfläche
μ_β^α	Schifftertensor
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{a}$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \sigma$
λ^α, n^α	Tangenten- und Normalenvektor der Randkurve der Mittelfläche
V_α, W, W_α	Komponenten der Verschiebungen der Mittelfläche
e_{ik}	Verzerrungstensor
$k_{\alpha\beta}, d_{2\alpha}, K_{\alpha\beta}$	Tensorkomponenten der Verzerrungen (Membranverzerrung, Schubverzerrung, Krümmung)
Z^{ik}	Spannungstensor
$n^{\alpha/\beta}, m^{\alpha/\beta}, q^\alpha$	Schnittgrößen
A^{ijkl}	Elastizitätstensor des ebenen Spannungszustandes
$n B^{\alpha i \beta j}$	Elastizitätstensor der Schale

$n^c_{\alpha i \beta j}$

Elastizitätstensor der Schale, invertierte Form

p^α, p

Belastungskomponenten

A, b

Matrix A, Vektor b

α, β, γ

1, 2 griechische Indices

i, k, l

1, 2, 3 lateinische Indices

Eigennamen in Großbuchstaben weisen auf Literaturangaben hin.

1. Einleitung: Übersicht über die Lösungsmethoden

Analytische Lösungen für Rotationsschalen und flache Schalen

Um analytische Lösungen zu erzielen, läßt sich die technische Biegetheorie der dünnen Schalen unter Berücksichtigung der Kirchhoffschen Annahmen auf drei verschiedene Arten darstellen:

Durch drei partielle Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung für die Verschiebungen u , v und w ;

durch zwei partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Spannungsfunktion F der Membrankräfte und die Verschiebung w .

durch eine partielle Differentialgleichung 8. Ordnung für die Verschiebung w

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichungen ist auf Fälle mit spezieller Geometrie beschränkt. Von praktischer Bedeutung sind zwei Gruppen, nämlich die Rotationsschalen und die flachen Schalen, deren Mittelfläche durch eine Funktion zweiter Ordnung beschrieben wird.

Bei Rotationsflächen bilden die Meridiane und die Breitenkreise Hauptkoordinaten; die Krümmung ist in Ringrichtung konstant. Bei Flächen zweiter Ordnung und geringer Neigung gegen die x - y -Ebene wird durch die kartesischen Grundrißkoordinaten ein näherungsweise orthogonales Netz auf der Mittelfläche definiert, für das auch die Krümmungen längs der Netzlinien näherungsweise konstant sind.

In diesen Fällen lassen sich die homogenen Differentialgleichungen durch Produktansätze nach M. Levy mit trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen in Richtung der konstanten Krümmung entkoppeln und auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen. Als Partikularlösung genügt bei niedrigen Reihengliedern oft die Membranlösung.

Die trigonometrischen oder hyperbolischen Ansatzfunktionen müssen die Differentialgleichungen in einer Richtung befriedigen. Wegen des Produktansatzes müssen die Ränder mit Koordinatenlinien zusammenfallen, außerdem sind die Randbedingungen in einer Richtung durch den Ansatz bestimmt. Dies kann dazu führen, daß analytisch nur Lösungen möglich sind, die sich in der Bauausführung gar nicht realisieren lassen oder keine sinnvolle Konstruktion ergeben, wie etwa beim HP mit geraden Rändern über rechteckigem Grundriß, bei dem das Verschwinden der bei der Membran die Last abtragenden Randschubkräfte verlangt wird.

In einigen Fällen sind auch Doppelreihenansätze möglich, wodurch dann alle Randbedingungen vorgeschrieben sind; die Konvergenz ist jedoch im allgemeinen sehr schlecht.

Besondere Erwähnung verdient die Arbeit von WUNDERLICH [1], der für Rotationsschalen ein System von acht partiellen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung für die Verschiebungen u , v , w und die sich bei der Kirchhoff'schen Theorie ergebenden Randschnittgrößen aufstellt, so daß man von einer gemischten Methode sprechen kann, bei der direkt die Verschiebungen und Schnittgrößen berechnet werden. Die Entkopplung durch einen Produktansatz mit trigonometrischen Funktionen liefert ein System von acht gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung und Binderrandbedingungen an den Meridianrändern.

Die Integration dieser Differentialgleichung erfolgt mit Hilfe des Übertragungsverfahrens, das zuerst von FALK auf den Balken und von HOLLAND und TOTTENHAM auf Schalen angewandt wurde. Dieses Verfahren ist für kleinere Elektronenrechner geeignet und läßt sich leicht programmieren, wenn die Übertragungsmatrix als Matrizenreihe errechnet wird. Numerische Schwierigkeiten bei großen Übertragungslängen lassen sich durch Einteilen in Unterabschnitte und Zwischenelemination der inneren Unbekannten nach MARGUERRE-UHRIG umgehen.

Numerische Lösungen

Differenzenverfahren

Die praktische Anwendung der Methode der finiten Differenzen ist im Schrifttum bisher auf Rotationsschalen und flache Translationsschalen beschränkt. Dabei werden von SOARE zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Verdrehungsgröße $\chi = \frac{r}{r_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \nu \right)$ und die Spannungsgröße $U = Q \varphi r_2$ oder eine Differentialgleichung 4. Ordnung für U zugrunde gelegt. SZMODITS geht von den von den analytischen Lösungsmethoden bekannten 2 Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Spannungsfunktion F und die Durchbiegung w aus, FISCHER von einer Differentialgleichung 4. Ordnung für die Durchbiegung w , er ist dabei jedoch auf Bänderandbedingungen festgelegt.

Bei SOARE und SZMODITS lassen sich solche Randbedingungen befriedigen, die sich durch die dem speziellen Differenzenverfahren unterworfenen Funktionen ausdrücken lassen. Die praktisch interessierenden Fälle sind dabei eingeschlossen.

Energiemethoden

Bei der Entkopplung der partiellen Differentialgleichungen durch Produktansätze mit trigonometrischen Funktionen sind die Randbedingungen in einer Richtung durch den Ansatz festgelegt, wie bei der Beschreibung der analytischen Lösungen schon erwähnt wurde. Ansatzfunktionen, die andere Randbedingungen ermöglichen, genügen meist nicht der partiellen Differentialgleichung. In solchen Fällen lassen sich mit Hilfe des Verfahrens von Kanterowitsch die Differentialgleichungen in Ansatzrichtung näherungsweise nach Galerkin erfüllen. Dies setzt voraus, daß die Ansatzfunktionen Vergleichsfunktionen sind, d.h. sie müssen den wesentlichen und den restlichen Randbedingungen genügen und $2m$ mal stetig differenzierbar sein ($2m$ ist die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung). Es ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen für die andere Koordinatenrichtung, durch Einführen der höheren Ableitungen als zusätzliche unabhängige Funktionen erhält man dann ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Übertragungsverfahrens.

Auf diese Weise wurden von AAS und CHETTY elliptische und hyperbolische Paraboloiden berechnet.

DU PREEZ geht einen Schritt weiter und macht in einer Richtung bereichsweise lineare Verschiebungsansätze. Er teilt dadurch das Schalengebiet in Streifen auf, deren lange Seite mit der Richtung zusammenfällt, für die sich gewöhnliche Differentialgleichungen ergeben.

Die schrittweise Diskretisierung in einer, zwei oder drei Richtungen, ausgehend vom dreidimensionalen Spannungszustand, wird von WUNDERLICH [2] am Funktional von Hellinger-Reissner gezeigt. Als Testbeispiele dienen ihm eine dünne und eine dicke Kreis-zylinderschale.

Funktionale für Schalen, die im Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie vorkommen, wurden von RÜDIGER aufgestellt. Von STEIN [1] stammen die Trefftzschen Gleichungen für Kreiszyylinder- und Translationsschalen, in der Arbeit BORNSCHEUER-RUOFF-STEIN wird gezeigt, wie sich mit Hilfe von Produktansätzen der Form

$$W = \sum_{s=1}^n C_s e^{\lambda_s \xi} \sin(\alpha_s \eta) + D_s e^{\beta_s \xi} \sin(\beta_s \xi) \quad \text{an allen Rändern beliebige Randbedingungen erfüllen lassen.}$$

Von BUFLER [3] wird darauf hingewiesen, daß die Trefftzschen Gleichungen als Spezialfälle aus den verallgemeinerten Variationsprinzipien hervorgehen.

Finite Elemente

Bei der Anwendung der Methode finiter Elemente auf Schalen wurden anfangs ebene Elemente benützt, was zu sehr ungenauen Schnittgrößen bei eingespannten Rändern führen kann. Die ersten gekrümmten Elemente bezogen sich auf Rotationsschalen, von UTKU und CONNOR-BREBBIA stammen Dreiecks- und Rechteckelemente für flache Schalen.

Die Berücksichtigung beliebiger Schalenkrümmungen wurde von ARGYRIS-SCHARPF anhand der Sheba-Elemente gezeigt. Dabei wird die wirkliche Mittelfläche der Schale so auf das Element abgebildet, daß im allgemeinen Fall an den Elementgrenzen keine Sprünge und Knicke entstehen, die zweiten Ableitungen jedoch mit Ausnahme der Eckpunkte diskontinuierlich sind.

Diese Elemente basieren auf reinen Verschiebungsansätzen und führen auf eine Steifigkeitsmatrix, die bekanntlich positiv definit ist. Der einfachste geometrisch und statisch voll verträgliche Ansatz beinhaltet 63 Parameter.

Mit gemischten Ansätzen für die Verschiebungen und die Schnittgrößen lassen sich geometrisch verträgliche Elemente mit nur 30 Parametern definieren; in diesem Fall ist die Elementmatrix nicht mehr positiv definit.

Ein Schalenelement mit gemischten Ansätzen wird von PRATO angegeben.

Eine Zusammenfassung des gegenwärtigen Stands der Elementmethoden findet man in den Symposiumsberichten, die von HOLLAND-BELL, TOTTENHAM-BREBBIA und BUCK-SCHARPF-STEIN-WUNDERLICH herausgegeben wurden.

Hierin wird auch der Zusammenhang zwischen Variationsverfahren und Elementmethoden dargelegt.

Ziel der vorliegenden Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung allgemeiner Schalen mit Hilfe eines Parameteransatzes; die Koeffizienten der Differentialgleichungen sind dabei meistens veränderlich. Zur Lösung werden zwei Verfahren angewandt, eine modifizierte Energiemethode und die verallgemeinerte Kollokation. Dazu werden das Potential und das Ergänzungspotential eines Schalentragerwerks bestimmt und daraus Variationsfunktionale nach HELLINGER-REISSNER und HU-WASHIZU hergeleitet.

Aus Gründen der numerischen Stabilität der angestrebten Rechenmethoden ist es notwendig, die Ansatzfunktionen so zu wählen, daß eine gewisse Orthogonalität bezüglich des Variationsoperators erreicht wird. Dies geschieht durch bereichsweise Definition der Ansatzfunktionen. Damit dies auch für die Verschiebungsfunktionen zulässig ist, müssen die Variationsfunktionale in Analogie zu BUFLER [2] bezüglich der wesentlichen - im vorliegenden Fall geometrischen - Rand- und Übergangsbedingungen verallgemeinert werden.

Solche verallgemeinerten Funktionale wurden erstmals von PRAGER für die Kirchhoff-Platte angegeben; dabei sind Diskontinuitäten an den Bereichsgrenzen bei jeweils einer der beiden Größen M und φ oder Q und w zugelassen. Von BUFLER [2] stammen Funktionale, die nur noch die Kontinuität der Durchbiegung in den Ecken der Bereichsgrenzen verlangen.

Als Euler-Gleichungen der verallgemeinerten Funktionale ergeben sich mit den Gleichgewichtsbedingungen, den Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen (konstitutive Gleichungen) den Verzerrungs- Verschiebungsbeziehungen (kinematische Gleichungen) und den statischen und geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen alle wesentlichen Gleichungen des Problems.

Bei der Lösung des Variationsproblems mit Hilfe eines Parameteransatzes entstehen für die Funktionale nach HELLINGER-REISSNER und HU-WASHIZU nicht positiv definite Gleichungs-

systeme, die auch keine Bandstruktur aufweisen. Für eine direkte Lösung beispielsweise nach Gauß-Jordan stand kein Programm für Matrizen dieser Größe zur Verfügung. Die vorhandene Gleichungsauflösung nach Cholesky konnte nur einen Spaltenvektor auf der rechten Seite berücksichtigen, so daß auch die Zwischenelimination der Schnittgrößen, wie sie in Kapitel 4 beschrieben ist, nicht möglich war. Der verbleibende Weg der Umformung des Systems $AX - b = 0$ auf die positiv definite Form $A^T Ax - A^T b = 0$ (Gauß-Transformation) bewirkt eine so schlechte Konditionszahl $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, daß nur eine geringe Anzahl von Parametern berücksichtigt werden kann. Obwohl die Genauigkeit der Ergebnisse in diesem Fall nicht ganz befriedigt, ist damit doch gezeigt, daß die Lösung über das Variationsproblem unter Zuhilfenahme eines zweckmäßigen Algorithmus brauchbare Ergebnisse erwarten läßt.

Der Unterschied zur Methode der finiten Elemente mit gemischten Ansätzen besteht darin, daß die geometrischen und statischen Übergangsbedingungen nicht schon durch den Zusammenbau soweit wie möglich exakt erfüllt werden, sondern im Rahmen der Variationsrechnung nur im Mittel erfüllt werden.

Bei der Methode der überbestimmten Kollokation werden für die Euler-Gleichungen des Funktional nach HELLINGER-REISSNER und für Differentialgleichungen, die aus den Euler-Gleichungen des Funktional nach HU-WASHIZU durch Elimination der Verzerrungen hervorgehen, an einer großen Zahl von Punkten Fehlergleichungen aufgestellt und das Minimum der Summe der Fehlerquadrate gefordert. Man kann deshalb auch von einer diskretisierten Form der Fehlerquadratmethode sprechen, worauf auch HOPPE in seiner Arbeit zur Plattenberechnung mit Hilfe der überbestimmten Kollokation hingewiesen hat.

Eine Besonderheit der Kollokation besteht darin, daß die Fehlergleichungen gewichtet werden müssen, um zu Fehleranteilen gleicher Dimensionen zu gelangen. Solche dimensionsgleichen Fehler erhält man durch Bilden von virtuellen Arbeitsausdrücken, wie man sie bei der Variation der verallgemeinerten Funktionale erhält.

2. Die Differentialgleichungen der linearen Biegetheorie dünner Schalen

2.1. Einleitung

In diesem Kapitel werden mit Hilfe eines Verformungsansatzes mit fünf unabhängigen Funktionen und der Annahme eines ebenen* Spannungszustands die Potentiale und Ergänzungspotentiale der Schale hergeleitet. Die Querkraftverformung ist dabei näherungsweise berücksichtigt. Die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen ergeben sich als Euler-Gleichungen aus dem Prinzip vom Minimum der Potentiellen Energie, die geometrischen Randbedingungen und die kinematischen Gleichungen aus dem Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie. Die konstitutiven Gleichungen stimmen für isotropen Werkstoff mit denen von NAGHDI im wesentlichen überein.

Die fünf Verschiebungsgrößen sind so gewählt, daß ein über die Dicke der Schale linearer Verschiebungszustand entsteht. Die Normalenhypothese von Kirchhoff bleibt zunächst unberücksichtigt; wird sie nachträglich eingeführt, so lassen sich zwei Verschiebungsgrößen eliminieren.

Die Schnittgrößen werden als Spannungsergebnisse eines Normalschnitts so definiert, daß das innere Potential als Bilinearform der Verzerrungskomponenten der Mittelfläche und der Schnittgrößen darstellbar ist; das bedeutet, daß die Schnittgrößen die Ableitungen des inneren Potentials nach den Verzerrungskomponenten sind.

Die konstitutiven Gleichungen unterscheiden sich bei den verschiedenen Theorien erheblich. Zu nennen sind besonders die "Love'sche erste Näherung" in der Fassung von REISSNER [1] sowie die Gleichungen von GREEN-ZERNA, GOLDENVEIZER, NOVOSHILOV, KOITER, BUDIANSKY-SANDERS und NAGHDI. In den Anwendungen der letzten Zeit dominieren die Gleichungen der drei letztgenannten Arbeiten.

* $\tau_{33} = 0$

Bei der vorliegenden Arbeit wurde den von Naghdi hergeleiteten Gleichungen aus zwei Gründen der Vorzug gegeben: Erstens lassen sich dabei die Querkraftverformungen berücksichtigen; damit treten nur erste kovariante Ableitungen auf, die in allgemeinen krummlinigen Koordinaten wesentlich leichter als zweite kovariante Ableitungen zu programmieren sind.

Zweitens geht bei den Koiter'schen Gleichungen der Vorteil der Entkoppelung von "Biege"- und "Membrananteil" bei der Darstellung der potentiellen Energie verloren, wenn man von den von Koiter eingeführten Verzerrungstensoren $\overset{\circ}{\rho}_{\alpha\beta}$ und $\overset{\circ}{\rho}_{\alpha\lambda}$ auf die in Kapitel 2 definierten Komponenten $\overset{\circ}{\rho}_{\alpha\lambda}$ und $\overset{\circ}{\rho}_{\alpha\lambda}$ übergeht. Bei dieser Formulierung wären dann auch die konstitutiven Gleichungen nicht mehr symmetrisch, so daß unter diesem Gesichtspunkt die Vernachlässigung einiger kleiner Energieterme un- zweckmäßig erscheint.

Die Gleichungen von Naghdi genügen den folgenden Forderungen:

- a) Invarianz bei Koordinatentransformationen
- b) Invarianz bei kleinen Starrkörperverschiebungen
- c) Erfüllen der Gleichgewichtsbedingungen
- d) Befriedigung der Energieprinzipien, d.h. Existenz eines Potentials bzw. Komplementärpotentials.

Der numerische Einfluß einiger Theorien wird von WUNDERLICH 3 an Rotationsschalen untersucht.

2.2. Geometrische Größen der Schale

Die Geometrie der Schale wird durch die Form der Mittelfläche M und die Schalendicke h beschrieben. Der Schale ist ein körper-eigenes Koordinatensystem zugeordnet, das von den Koordinaten θ^k auf der Mittelfläche und der Koordinate θ^3 senkrecht auf θ^k gebildet wird. $\theta^k = \theta^k(x, y, z)$.

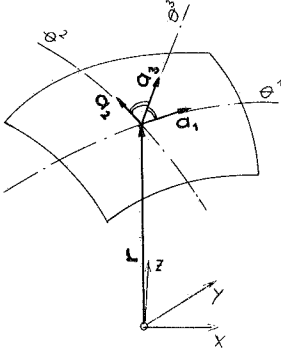


Bild 1: Koordinatensystem

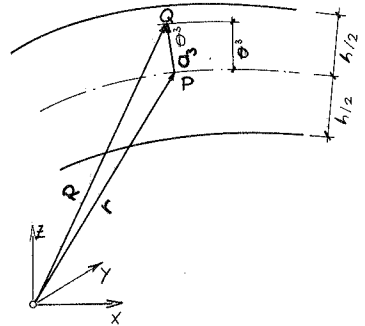


Bild 2: Ortsvektoren

Durch Ableiten des Ortsvektors \underline{r} eines Punktes der Mittelfläche erhält man die kovariante Basis der Mittelfläche:

$$\underline{a}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^\alpha} = \underline{r}_{,\alpha} \quad (2.2.1)$$

Der normierte Basisvektor \underline{a}_3 steht senkrecht auf \underline{a}_α , für ihn gilt:

$$\underline{a}_3 = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|} \quad (2.2.2)$$

Aus dem Ortsvektor $\underline{R} = \underline{r} + \theta^3 \underline{a}_3$ eines Punktes außerhalb der Mittelfläche erhält man die Basis \underline{g}_i einer Parallelfläche der Mittelfläche:

$$\underline{g}_\alpha = \underline{R}_{,\alpha} = \underline{a}_\alpha - \theta^3 b_\alpha^3 \underline{a}_3 = \mu_\alpha^p \underline{a}_p \quad (2.2.3)$$

$$\underline{q}_3 = \underline{a}_3 \quad (2.2.4)$$

mit $\underline{\mu}_\alpha^p = \underline{d}_\alpha^p - \theta^3 b_\alpha^p$ als Schifter (2.2.5)

und $\underline{Q}_{3,\alpha} = -b_\alpha^p \underline{a}_p$ (Ableitungsgleichung von Weingarten) (2.2.6)

Die kontravariante Basis \underline{a}^α steht normal zur kovarianten.

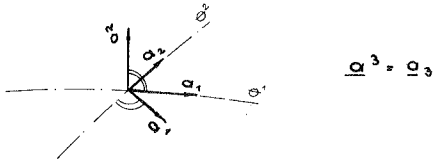


Bild 3: Kovariante und kontravariante Basis

Die erste Fundamentalform liefert ein Linienelement:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\underline{R}_{,i} d\theta^i) \cdot (\underline{R}_{,k} d\theta^k) = \underline{q}_{,i} \cdot \underline{q}_{,k} d\theta^i d\theta^k \\ &= q_{i,k} d\theta^i d\theta^k \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Entsprechend $q_{,i,k}$ ist $a_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta$ (2.2.8)

Für ein Flächenelement der Mittelfläche gilt:

$$\begin{aligned} dF &= |a_1 d\theta^1| \cdot |a_2 d\theta^2| \sin(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

und

für das Volumenelement

$$dV = \sqrt{\det q_{,k}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sqrt{q} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (2.2.10)$$

Der Krümmungsradius eines durch $d\theta^1$ und $d\theta^2$ definierten Schnitts in der Mittelfläche mit der Tangente \underline{t} ist:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\dot{t}}{ds} \cdot \underline{a}_3 = -\frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\underline{a}_3}{ds} = \frac{b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta}{a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta} \quad (2.2.11)$$

Der Krümmungstensor $b_{\alpha\beta}$ läßt sich aus der Basis errechnen:

$$b_{\alpha\beta} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}_3 = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_{3,\beta} = [\underline{a}_{\alpha,\beta}; \underline{a}_1; \underline{a}_2] / \sqrt{a} \quad (2.2.12)$$

$$\text{Für Hauptkrümmungslinien gilt } a_{12} = b_{12} = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\text{Die mittlere Krümmung ist } H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{\max}} + \frac{1}{R_{\min}} \right) = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{und die Gauß'sche Krümmung } K &= \frac{1}{R_{\max}} \cdot \frac{1}{R_{\min}} \\ &= \det(b_\alpha^\alpha) = \det(b_{\alpha\beta})/a \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Am Schalenrand wird ein aus dem Normalenvektor \underline{a}_3 der Mittelfläche, dem Tangentenvektor $\underline{\lambda}$ und dem Normalenvektor \underline{n} der Randkurve bestehendes orthonormiertes Basissystem mitgeführt.

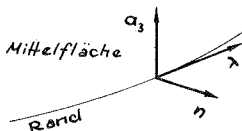


Bild 4: Basis der Randkurve

Für die Basis gilt:

$$\underline{n} = n^\alpha \underline{a}_\alpha = n_\alpha \underline{a}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \lambda_\beta \underline{a}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda^\beta \underline{a}^\alpha \quad (2.2.16)$$

$$\underline{\lambda} = \lambda^\alpha \underline{a}_\alpha = \lambda_\alpha \underline{a}^\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta} n_\beta \underline{a}_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta} n^\beta \underline{a}^\alpha \quad (2.2.17)$$

An dieser Stelle soll noch die "Shifter"-Operation für Tensor-
komponenten angeführt werden.

Bezieht man einen Tensor 1. Stufe T einmal auf die Basis g_α, g_3 ,
das andere Mal auf die Basis $\underline{g}_\alpha, \underline{g}_3$ einer Paralleelfläche
zur Mittelfläche, so gilt:

$$T = T^\alpha \underline{g}_\alpha + T^3 \underline{g}_3 = \bar{T}^\alpha \underline{g}_\alpha + \bar{T}^3 \underline{g}_3 = \bar{T}^\alpha \mu_\alpha^\rho g_\rho + \bar{T}^3 g_3 \quad (2.2.18)$$

Überstrichene Tensorkomponenten sollen sich immer auf die
Basis \underline{g}_i beziehen.

Die Transformation der Tensorkomponenten ist dann:

$$\begin{aligned} T^\alpha &= \bar{T}^\rho \mu_\rho^\alpha & T^3 &= \bar{T}^3 & T_\alpha &= \bar{T}_\rho (\mu^{-1})^\rho_\alpha & T_3 &= \bar{T}_3 \\ \bar{T}^\alpha &= T^\rho (\mu^{-1})^\alpha_\rho & \bar{T}_\alpha &= T_\rho \mu_\alpha^\rho & & & & \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Die Inverse $(\mu^{-1})^\alpha_\rho$ des Shifters wird im Abschnitt 2.8.
angegeben.

2.3. Verschiebungsansatz und Verzerrungen

Bei der Verformung der Schale geht ein Punkt Q außerhalb der Mittelfläche in den Punkt Q' über. Für den Verschiebungsvektor $\underline{v} = \overline{QQ'}$ wird der in der klassischen linearen Schalenstatik übliche Ansatz gemacht.

$$\underline{v} = (v^\alpha + \theta^3 w^\alpha) \underline{a}_\alpha + w \underline{a}_3 \quad (2.3.1)$$

Damit ist das Ebenbleiben der Querschnitte und das Verschwinden der Verzerrungen in Richtung der Schalennormale \underline{a}_3 vorausgesetzt.

Der Ortsvektor \underline{R}' des Punktes Q' hängt mit dem Ortsvektor \underline{R} für Q über die Verschiebung \underline{v} zusammen.

$$\underline{R}' = \underline{R} + \underline{v} \quad (2.3.2)$$

Für ein Linienelement der verformten Schale erhält man in der Darstellung nach Lagrange:

$$\begin{aligned} dS'^2 &= \left(\frac{\partial \underline{R}'}{\partial \theta^i} d\theta^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \underline{R}'}{\partial \theta^k} d\theta^k \right) = \left(\frac{\partial (\underline{R} + \underline{v})}{\partial \theta^i} d\theta^i \right) \cdot \left(\frac{\partial (\underline{R} + \underline{v})}{\partial \theta^k} d\theta^k \right) \\ &= (\underline{q}_i + \underline{v}_{,i}) \cdot (\underline{q}_k + \underline{v}_{,k}) d\theta^i d\theta^k \\ &= (q_{ik} + q_{,i} v_{,k} + q_{,k} v_{,i} + |v_{,i} v_{,k}|) d\theta^i d\theta^k \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

In der geometrisch linearen Elastizitätslehre werden die Produkte der Ableitungen des Verschiebungsvektors wie angedeutet vernachlässigt. Damit ist vorausgesetzt, daß die Verschiebungen klein sind. Der Lagrange'sche Verzerrungstensor φ_{ij} bezieht die Verzerrungen auf die Geometrie des unverformten Systems. Mit seiner Hilfe kann das innere Potential eines konservativen Systems als quadratische Form der Verzerrungen dargestellt werden. Er ist definiert durch

$$2\varphi_{ij} d\theta^i d\theta^j = dS'^2 - ds^2 \quad (2.3.4)$$

Mit (2.3.3.) lautet die linearisierte Form

$$e_{ii} = \frac{1}{2} (\underline{q}_i \underline{v}_{,i} + \underline{q}_i \underline{v}_{,i}) \quad (2.3.5)$$

Berücksichtigt man den Verformungsansatz (2.3.1.) und die Beziehung (2.2.4.), so erhält man für die Komponenten des Verzerrungstensors:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ \mu_\alpha^\rho \nu_{\rho\beta} + \mu_\beta^\rho \nu_{\rho\alpha} + \theta^3 \mu_\alpha^\rho \kappa_{\rho\beta} + \theta^3 \mu_\beta^\rho \kappa_{\rho\alpha} \right\} \\ e_{3\alpha} &= \frac{1}{2} (b_\alpha^\psi v_\psi + w_{,\alpha} + w_\alpha) \\ e_{\beta\alpha} &= e_{\alpha\beta} \quad ; \quad e_{\alpha 3} = e_{3\alpha} \quad ; \\ e_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.6.)$$

Die Komponenten $\nu_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ und $\nu_{3\alpha}$ sind von θ^3 unabhängig und folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha\beta} &= v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w + \nu_{\beta\alpha} \\ \nu_{3\alpha} &= b_\alpha^\psi v_\psi + w_{,\alpha} + w_\alpha = \nu_{\alpha 3} \\ \kappa_{\alpha\beta} &= w_{\alpha/\beta} = \kappa_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Die in der Kirchhoffschen Hypothese enthaltene Voraussetzung, daß die Schalennormale \underline{a}_3 nach der Verformung normal zur verformten Mittelfläche ist, bedeutet, daß die Verzerrungskomponenten $\nu_{3\alpha}$ verschwinden. Daraus folgt die sogenannte Verträglichkeitsbedingung für die Verschiebungsfunktionen:

$$w_\alpha = -w_{,\alpha} - b_\alpha^\psi v_\psi \quad (2.3.8)$$

2.4. Werkstoffgesetz

Der Spannungsvektor \underline{s} in einer durch den Normalenvektor $n = n^i q_i$ definierten Fläche ist beim dreidimensionalen Kontinuum:

$$\underline{s} = \bar{\tau}^{ik} n_i q_k \quad (2.4.1)$$

Das Werkstoffgesetz verknüpft die Spannungen mit den Verzerrungen. Aus der Forderung, daß die Spannungen aus dem inneren Potential durch Ableiten nach den Verzerrungen als totales Differential hervorgehen, erhält man bei linearer Abhängigkeit

$$\bar{\tau}^{ii} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \bar{E}^{ijrs} \epsilon_{rs} \quad (2.4.2)$$

(s. z.B. GREEN-ZERNA). Im allgemeinen anisotropen Fall eines räumlichen Kontinuums sind 21 Konstanten möglich.

Bei isotropem Werkstoff verbleiben noch zwei unabhängige Konstanten, der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν . Der Elastizitätstensor läßt sich dann mit Hilfe des Metriktensors darstellen:

$$\bar{E}^{ijrs} = \frac{E}{2(1+\nu)} [g^{ir}g^{js} + g^{is}g^{jr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij}g^{rs}] \quad (2.4.3)$$

Für den ebenen Spannungszustand werden die Spannungskomponenten $\bar{\tau}^{33}$ gleich null gesetzt und die Verzerrungskomponenten ϵ_{33} aus (2.4.2.) eliminiert; das Hooke'sche Gesetz lautet dann:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{\alpha\beta} &= \bar{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} + 2\bar{A}^{\alpha\beta 3\sigma} \chi_{3\sigma} \\ \bar{\tau}^{3\alpha} &= \bar{A}^{3\alpha\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} + 2\bar{A}^{3\alpha 3\sigma} \chi_{3\sigma} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Bei Isotropie gilt für den Elastizitätstensor \bar{A} :

$$\begin{aligned}\bar{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} [g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\lambda}g^{\lambda\nu}] \\ \bar{A}^{\beta\alpha\gamma\delta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} g^{\alpha\delta} \\ \bar{A}^{\beta\alpha\gamma\delta} &= \sigma\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

und den Symmetriebedingungen:

$$\bar{A}^{\beta\alpha\gamma\delta} = \bar{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{A}^{\beta\delta\alpha\gamma} = \bar{A}^{\gamma\delta\alpha\beta}\tag{2.4.6}$$

2.5. Belastungsannahmen

Es werden nur Flächenlasten und Randlasten berücksichtigt.

Die Flächenlasten sollen in der Mittelfläche wirken.

Der Lastvektor sei

$$\underline{P} = p^\alpha \underline{a}_\alpha + p \underline{a}_3 \quad (2.5.1)$$

An den Rändern lassen sich Randspannungen $n_\alpha \bar{t}^{\alpha\beta}$ und $n_\alpha \bar{t}^{\alpha 3}$ vorschreiben; aus ihnen werden Schnittgrößen gebildet, die in die statischen Randbedingungen eingehen, wie im Abschnitt 2.10 gezeigt wird.

2.6. Die Potentiale der Schale. Definition der Schnittgrößen

Beim dreidimensionalen elastischen Kontinuum mit reversiblen Werkstoffverhalten gelten die beiden Energieprinzipie vom Minimum der potentiellen Energie und vom Minimum des gesamten Komplementärpotentials, die sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten unter Hinzunahme der Potentialeigenschaft herleiten lassen; s. z.B. BUFLER [1].

Die Minimalprinzipie lauten bei Hooke'schem Werkstoffgesetz:

1) Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie:

$$\pi_{(i)} + \pi_{(a)} \Rightarrow \min \quad (2.6.1)$$

mit
$$\pi_{(i)} = \int_V W \, dV \quad (2.6.2)$$

$$W = \int_0^{e_{ij}} \bar{z}^{ij} d e_{ij} = \frac{1}{2} E^{ijrs} e_{ij} e_{rs} = \frac{1}{2} \bar{z}^{ij} e_{ij} \quad (2.6.3)$$

$$\pi_{(a)} = - \int_V k^i v_i \, dV - \int_{\sigma_p} \hat{p}^i v_i \, d\sigma \quad (2.6.4)$$

$\pi_{(i)}$ ist das innere Potential, physikalisch gesehen die Formänderungsenergie, W ist der auf ein Volumenelement entfallende Anteil, das spezifische innere Potential. $\pi_{(a)}$ ist das äußere Potential, k^i sind Volumenkräfte und \hat{p}^i eingeprägte äußere Oberflächenkräfte.

2) Prinzip vom Minimum des gesamten Komplementärpotentials:

$$\tilde{\pi}_{(i)} + \tilde{\pi}_{(a)} \Rightarrow \min \quad (2.6.5)$$

mit
$$\tilde{\pi}_{(i)} = \int_V \tilde{W} \, dV \quad (2.6.6)$$

$$\tilde{W} = \int_0^{z^{ij}} e_{ij} d \bar{z}^{ij} = \frac{1}{2} F_{ijrs} \bar{z}^{ij} \bar{z}^{rs} = \frac{1}{2} e_{ij} \bar{z}^{ij} \quad (2.6.7)$$

$$\tilde{\pi}_{(a)} = - \int_{\sigma_u} \hat{v}_i p^i \, d\sigma \quad (2.6.8)$$

$$p^i = \bar{z}^{ij} n_j \quad (2.6.9)$$

$\tilde{\pi}_{(i)}$ und \tilde{W} sind das innere Komplementärpotential und das spezifische innere Komplementärpotential, $\tilde{\pi}_{(a)}$ ist das äußere Komplementärpotential. \hat{v}_i sind vorgeschriebene Oberflächenverschiebungen, p^i sind die Randspannungen.

Allgemein gilt unter der Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_{ij} \partial a_{rs}} \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \bar{z}^{ij} \partial \bar{z}^{rs}} \neq 0 \quad (2.6.10)$$

für die inneren Potentiale die Legendre-Transformation:

$$\tilde{W} = \frac{\partial W}{\partial a_{ij}} a_{ij} - W = \bar{z}^{ij} a_{ij} - W \quad (2.6.11)$$

Bei Hooke'schem Werkstoffgesetz ist außerdem

$$\tilde{W} = W \quad (2.6.12)$$

Bei der Schalentheorie werden die spezifischen Potentiale auf die Mittelfläche bezogen; anstelle der Spannungen \bar{z}^{ij} werden Spannungsergebnierende oder Schnittgrößen verwendet.

Das Volumenelement läßt sich darstellen durch:

$$dV = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \frac{\sqrt{g}}{a} dF d\theta^3 \quad (2.6.13)$$

mit $dF = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$ als Flächenelement der Mittelfläche.

Setzt man (2.3.6.) in (2.6.3.) ein und berücksichtigt (2.6.13.), so erhält man für das innere Potential $\overline{\Pi}(i)$ der Schale:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(i) = & \frac{1}{2} \int_F \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \overline{z}^{\alpha/\beta} \frac{1}{2} \{ \mu_\alpha^p \nu_{p\beta} + \mu_\beta^p \nu_{p\alpha} + \theta^3 \mu_\alpha^p \kappa_{p\beta} + \theta^3 \mu_\beta^p \kappa_{p\alpha} \} d\theta^3 \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \overline{z}^{\alpha 3} \frac{1}{2} \nu_{\alpha 3} d\theta^3 dF = \int_F \overline{\Pi}(i)^* dF \quad (2.6.14) \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors ist

$$\overline{z}^{\alpha/\beta} \mu_\alpha^p \nu_{p\beta} = \overline{z}^{\alpha/\beta} \mu_\beta^p \nu_{p\alpha} \quad (2.6.15)$$

damit läßt sich (2.6.14.) vereinfachen:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(i)^* = & \frac{1}{2} \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_p^\nu \overline{z}^{p/\beta} d\theta^3 \nu_{\alpha p} + \frac{1}{2} \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_p^\nu \overline{z}^{p/\beta} \theta^3 d\theta^3 \kappa_{\alpha p} \\ & + \frac{1}{2} \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \overline{z}^{\alpha 3} d\theta^3 \nu_{\alpha 3} \quad (2.6.16) \end{aligned}$$

Die Integrale werden nun als Schnittgrößen definiert:

$$\begin{aligned} n^{\alpha/\beta} &= \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_p^\nu \overline{z}^{p/\beta} d\theta^3 \\ m^{\alpha/\beta} &= \int_{-4/2}^{+4/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_p^\nu \overline{z}^{p/\beta} \theta^3 d\theta^3 \quad (2.6.17.) \end{aligned}$$

$$q^\alpha = \int_{-1/2}^{+1/2} \sqrt{\frac{q}{a}} \bar{z}^{3\alpha} d\theta^3 \quad (2.6.17)$$

$m^{\alpha\beta}$ sind Membrankräfte, $m^{\alpha\beta}$ Momente und q^α Querkräfte. Gegenüber den Darstellungen bei GREEN-ZERNA und NAGHDI sind die Indices vertauscht. Die Schnittgrößen enthalten die Spannungen und die von θ^3 abhängigen Größen des Verzerrungstensors.

Mit den Schnittgrößen lautet dann die Bilinearform des spezifischen inneren Potentials:

$$\bar{\Pi}_{(ii)} = \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} + q^\alpha f_{3\alpha}) \quad (2.6.18)$$

Da bei Hooke'schem Werkstoffgesetz inneres Potential und inneres Komplementärpotential zahlenmäßig gleich sind, ist mit (2.6.18.) auch das spezifische innere Komplementärpotential in Bilinearform gegeben.

Die Volumenkräfte werden in der Mittelfläche konzentriert gedacht, deshalb treten bei der Bestimmung des äußeren Potentials nur Flächenlasten auf. Für das Potential der Flächenlasten erhält man mit (2.5.1.) und dem Verformungsansatz (2.3.1.) sofort:

$$\bar{\Pi}_{(a, F)} = - \int_F (\hat{\beta}^\alpha v_\alpha + \hat{\beta} w) dF \quad (2.6.19)$$

Die auf den Schalenrand wirkenden Kräfte lassen sich entsprechend (2.6.9.) durch die Komponenten des Spannungstensors ausdrücken:

$$\hat{p}^i = \hat{z}^i \bar{n}_j = \bar{n}_\alpha \hat{z}^i \bar{z}^\alpha \quad (2.6.20)$$

Die Randnormale steht voraussetzungsgemäß senkrecht auf a_3 , deshalb ist $\bar{n}_3 = \sigma$.

Mit (2.3.1.) und (2.6.20.) erhält man für den Anteil der Randlasten am äußeren Potential:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{(a,R)} &= - \int_{R_P} \int_{-h/2}^{+h/2} \hat{\bar{z}}^{\alpha\beta} \bar{n}_\beta (V_P + \theta^i W_P) \mu_\alpha^P d\theta^3 d\bar{s} \\ &\quad - \int_{R_P} \int_{-h/2}^{+h/2} \hat{\bar{z}}^{3\alpha} \bar{n}_\alpha w d\theta^3 d\bar{s} \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Man kann zeigen, daß für die Komponenten des Normalentensors und das Linienelement $d\bar{s}$ gilt:

$$\bar{n}_\alpha d\bar{s} = \sqrt{\frac{g}{a}} n_\alpha ds \quad (2.6.22)$$

Dazu vergleicht man die Linienelemente $d\bar{s}$ und ds sowie die Komponenten des Tangententensors $\hat{\bar{\lambda}}^\alpha$ und λ^α und erhält:

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\lambda^\alpha}{\hat{\bar{\lambda}}^\alpha} = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta} n_\beta}{\varepsilon^{\alpha\beta} \bar{n}_\beta} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{n_\alpha}{\bar{n}_\alpha} \quad (2.6.23)$$

Mit (2.6.22.) wird das äußere Potential der Randlasten auf vorgeschriebene Schnittgrößen gemäß (2.6.17.) zurückgeführt:

$$\bar{\Pi}_{(a,R)} = - \int_{R_P} \{ \hat{N}^\alpha V_\alpha + \hat{M}^\alpha W_\alpha + \hat{Q} w \} ds \quad (2.6.24)$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich aus (2.6.8.) das äußere Komplementärpotential der Randlasten:

$$\hat{\bar{\Pi}}_{(a,R)} = - \int_{R_u} \{ \hat{V}_\alpha n_\beta n^{\alpha\beta} + \hat{W}_\alpha n_\beta m^{\alpha\beta} + \hat{w} n_\alpha q^\alpha \} ds \quad (2.6.25)$$

2.7. Konstitutive Gleichungen ⁺

Ersetzt man in den Definitionsgleichungen (2.6.17.) der Schnittgrößen die Spannungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (2.4.4.) und den kinematischen Gleichungen (2.3.6.) durch die Verschiebungen, so gelangt man zu den konstitutiven Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebungen ausdrücken. Für $n^{\alpha\beta}$ ergibt sich beispielsweise:

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \bar{A}^{\rho\beta\gamma\delta} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \mu_{\rho}^{\gamma} v_{\rho\delta} + \mu_{\rho}^{\delta} v_{\rho\gamma} + \theta^3 \mu_{\rho}^{\gamma} \kappa_{\rho\delta} + \theta^3 \mu_{\rho}^{\delta} \kappa_{\rho\gamma} \right\} + \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \bar{A}^{\rho\beta 3\delta} v_{\rho\delta} \right] d\theta^3 \quad (2.7.1.)$$

Wegen der Symmetrie des Elastizitätstensors $\bar{A}^{\rho\beta\gamma\delta} = \bar{A}^{\rho\beta\delta\gamma}$ wird daraus:

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \mu_{\rho}^{\beta} \bar{A}^{\rho\beta\gamma\delta} d\theta^3 v_{\rho\delta} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \mu_{\rho}^{\beta} \bar{A}^{\rho\beta\gamma\delta} \theta^3 d\theta^3 \kappa_{\rho\delta} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \bar{A}^{\rho\beta 3\delta} d\theta^3 v_{\rho\delta}$$

Die Integrale werden als Elastizitätstensoren der Schale definiert:

$$n^{\beta\alpha\rho\delta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\rho}^{\alpha} \mu_{\rho}^{\beta} \bar{A}^{\rho\beta\gamma\delta} (\theta^3) n^{\gamma} d\theta^3$$

⁺ Als konstitutive Gleichungen bezeichnet NAGHDI die Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen. Bei anderen Autoren, z.B. Truesdell, werden hierunter die Spannungs- Verzerrungsbeziehungen verstanden.

$$\begin{aligned}
 {}_n B^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mu_{\beta}^{\alpha} \bar{A}^{\gamma\delta} (\theta^i)^n d\theta^3 \\
 {}_o B^{3\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{A}^{3\alpha\beta\gamma\delta} d\theta^3 \quad (2.7.2.)
 \end{aligned}$$

Die Symmetrieeigenschaften sind:

$$\begin{aligned}
 {}_n B^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}_n B^{\delta\gamma\alpha\beta} \neq {}_n B^{\delta\alpha\beta\gamma} \neq {}_n B^{\alpha\gamma\beta\delta} \\
 {}_n B^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}_n B^{\delta\gamma\alpha\beta} = {}_n B^{\delta\gamma\alpha\beta} \neq {}_n B^{\delta\beta\alpha\gamma} \\
 {}_o B^{3\alpha\beta\gamma\delta} &= {}_o B^{\alpha\beta\gamma\delta} = {}_o B^{\delta\gamma\alpha\beta} = {}_o B^{\delta\gamma\alpha\beta} \quad (2.7.3.)
 \end{aligned}$$

Bei isotropem Werkstoff ist ${}_n B^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sigma$ (2.7.4.)

Insgesamt lauten dann die konstitutiven Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 n^{\alpha\beta} &= {}_o B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta} + {}_o B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \\
 m^{\alpha\beta} &= {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} + {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta} + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \\
 q^{\alpha} &= {}_o B^{3\alpha\beta\gamma\delta} g_{\beta\gamma} + {}_1 B^{3\alpha\beta\gamma\delta} k_{\beta\gamma} + {}_o B^{3\alpha\beta\gamma\delta} g_{\beta\gamma} \quad (2.7.5.)
 \end{aligned}$$

Die konstitutiven Gleichungen (2.7.5.) lassen sich invertieren:

$$\begin{aligned}
 k_{\alpha\beta} &= {}_o C'_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} + {}_1 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta} + {}_o C'_{\alpha\beta\gamma\delta} q^{\delta} \\
 k_{\alpha\beta} &= {}_1 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} + {}_2 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta} + {}_1 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} q^{\delta} \\
 g_{3\alpha} &= {}_o C'_{3\alpha\beta\gamma\delta} n^{\beta\gamma} + {}_1 C'_{3\alpha\beta\gamma\delta} m^{\beta\gamma} + {}_o C'_{3\alpha\beta\gamma\delta} q^{\delta} \quad (2.7.6.)
 \end{aligned}$$

Für die invertierten Elastizitätstensoren $n^{\alpha\beta\gamma\delta}$ usw. gelten die Symmetriebedingungen (2.7.3.) entsprechend.

Bei Isotropie ist $n^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sigma$

Mit den konstitutiven Gleichungen (2.7.5.) und (2.7.6.) lassen sich das innere spezifische Potential und Komplementärpotential als quadratische Form der Verzerrungskomponenten und als quadratische Form der Schnittgrößen angeben.

$$\begin{aligned} \Pi_{(i)}^* [k_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \nu_{3\alpha}] &= \\ &= \frac{1}{2} {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \nu_{\alpha\beta} \nu_{\gamma\delta} + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \nu_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} \\ &+ \frac{1}{2} {}_0 B^{3\alpha 3\beta} \nu_{3\alpha} \nu_{3\beta} + [{}_0 B^{\alpha\beta 3\delta} \nu_{\alpha\beta} \nu_{3\delta} + {}_1 B^{\alpha\beta 3\delta} \kappa_{\alpha\beta} \nu_{3\delta}] \quad (2.7.7.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{(i)}^* [n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^\alpha] &= \\ &= \frac{1}{2} {}_0 C^{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} + {}_1 C^{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} {}_2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \\ &+ \frac{1}{2} {}_0 C_{3\alpha 3\beta} q^\alpha q^\beta + [{}_0 C^{\alpha\beta 3\delta} n^{\alpha\beta} q^\delta + {}_1 C^{\alpha\beta 3\delta} m^{\alpha\beta} q^\delta] \quad (2.7.8) \end{aligned}$$

Die Terme in eckigen Klammern entfallen bei Isotropie.

Man prüft leicht nach, daß gemäß den Sätzen von Castigliano bei der Schale gilt:

$$\frac{\partial \Pi_{(i)}^*}{\partial k_{\alpha\beta}} = n^{\alpha\beta} ; \quad \frac{\partial \Pi_{(i)}^*}{\partial \kappa_{\alpha\beta}} = m^{\alpha\beta} ; \quad \frac{\partial \Pi_{(i)}^*}{\partial \nu_{3\alpha}} = q^\alpha \quad (2.7.9.)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i)}^*}{\partial n^{\alpha\beta}} = \nu_{\alpha\beta} ; \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i)}^*}{\partial m^{\alpha\beta}} = \kappa_{\alpha\beta} ; \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i)}^*}{\partial q^\alpha} = \nu_{3\alpha} \quad (2.7.10.)$$

Damit läßt sich auch zeigen, daß das innere spezifische Ergänzungspotential aus dem inneren spezifischen Potential durch eine Legendre-Transformation hervorgeht.

$$\pi(i)^* = n^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} + q^{\alpha} p_{3\alpha} - \tilde{\pi}(i) \quad (2.7.11.)$$

2.8. Berechnung des Elastizitätstensors B^{ijkl} der Schale

In den Definitionsgleichungen (2.7.2.) tritt der Elastizitätstensor $\bar{A}^{i\beta l \nu}$ des ebenen Spannungszustands auf, der in (2.4.5.) angegeben ist, und zwar auf die Basis der Parallelfäche bezogen. Da sich diese über die Schalendicke ändert, wird $\bar{A}^{i\beta l \nu}$ auf die Basis der Mittelfläche transformiert; man erhält:

$${}_n B^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{q}{\alpha}} A^{\kappa\rho\varepsilon\omega} (\mu^{-1})_{\kappa}^{\nu} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} (\mu^{-1})_{\omega}^{\delta} \mu_{\nu}^{\alpha} \mu_{\rho}^{\delta} (\theta^3)^n d\theta^3$$

$$= \int \sqrt{\frac{q}{\alpha}} A^{\alpha\beta\gamma\delta} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} (\mu^{-1})_{\omega}^{\delta} (\theta^3)^n d\theta^3$$

$${}_n B^{3\alpha 3\delta} = \int \sqrt{\frac{q}{\alpha}} A^{3\rho 3\omega} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} (\mu^{-1})_{\omega}^{\delta} (\theta^3)^n d\theta^3$$

$${}_n B^{3\alpha 3\gamma} = \int \sqrt{\frac{q}{\alpha}} A^{3\rho 3\delta} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} (\mu^{-1})_{\omega}^{\delta} (\theta^3)^n d\theta^3 \quad (2.8.1.)$$

Den invertierten Schifter $(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha}$ erhält man, wenn man μ_{β}^{α} als Matrix schreibt und invertiert:

$$\mu_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 - \theta^3 b_1^1 & -\theta^3 b_2^1 \\ -\theta^3 b_1^2 & 1 - \theta^3 b_2^2 \end{pmatrix} \quad (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 - \theta^3 b_2^2 & +\theta^3 b_2^1 \\ +\theta^3 b_1^2 & 1 - \theta^3 b_1^1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \mu = \det[\mu_{\beta}^{\alpha}] = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} = 1 - 2H\theta^3 + (\theta^3)^2 K \quad (2.8.2.)$$

Beachtet man, daß $2H = b_1^1 + b_2^2$ ist, so lautet $(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha}$ in geschlossener Form:

$$(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} = \frac{\delta_{\beta}^{\alpha} + \theta^3 (b_{\beta}^{\alpha} - 2H \delta_{\beta}^{\alpha})}{\mu} \quad (2.8.3.)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} (\mu^{-1})_{\omega}^{\sigma} &= \rho_{\rho}^{\beta} \sigma_{\omega}^{\sigma} [1 - 2H\theta^3 + K(\theta^3)^2 + \frac{K^2}{\mu} (\theta^3)^4] \\ &+ (\rho_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} + b_{\rho}^{\beta} \sigma_{\omega}^{\sigma}) \cdot [\theta^3 - \frac{K}{\mu} (\theta^3)^3] \\ &+ b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} \cdot \frac{1}{\mu} (\theta^3)^2 \end{aligned} \quad (2.8.4.)$$

Man kann nun $\frac{1}{\mu}$ in eine Potenzreihe entwickeln. Dazu werden zur übersichtlicheren Darstellung die Hauptkrümmungen ρ_1 und ρ_2 eingeführt.

Dann gilt:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1 - (\rho_1 + \rho_2) \theta^3 + \rho_1 \rho_2 (\theta^3)^2} = C_0 + C_1 \theta^3 + C_2 (\theta^3)^2 + \dots \quad (2.8.5.)$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner kommt man zu dem Potenzreihenvergleich:

$$1 = C_0$$

$$0 = \theta^3 [-(\rho_1 + \rho_2) C_0 + C_1]$$

$$0 = (\theta^3)^2 [\rho_1 \rho_2 C_0 - (\rho_1 + \rho_2) C_1 + C_2]$$

$$0 = (\theta^3)^n [\rho_1 \rho_2 C_{n-2} - (\rho_1 + \rho_2) C_{n-1} + C_n] \quad (2.8.6.)$$

mit der Lösung:

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \rho_1 + \rho_2$$

$$C_2 = \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2$$

$$C_3 = \rho_1^3 + \rho_1^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_2^2 + \rho_2^3$$

$$\begin{aligned} C_n &= \rho_1^n + \rho_1^{n-1} \rho_2 + \rho_1^{n-2} \rho_2^2 + \dots + \rho_2^n \\ &= (\rho_1 + \rho_2) C_{n-1} - \rho_1 \rho_2 C_{n-2} = 2H C_{n-1} - K C_{n-2} \end{aligned} \quad (2.8.7.)$$

Der Konvergenzradius r ist nach MESCHKOWSKI:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n|} \quad (2.8.8.)$$

$$\text{Mit } |C_n| \leq n \cdot |\rho_{\max}|^n = n \cdot \frac{1}{|R_{\min}|^n}$$

ergibt sich

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|R_{\min}|^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|R_{\min}|^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}$$

$$r = \frac{|R_{\min}|}{1} = R_{\min} \quad (2.8.9.)$$

Auf die Schale angewandt bedeutet dies, daß die Reihenentwicklung (2.8.5.) konvergiert, solange die Dicke der Schale kleiner ist als der doppelte kleinste Krümmungsradius. Im Extremfall dürfte also der Krümmungsmittelpunkt auf der Schalenoberfläche liegen.

Für schichtweise homogenes Material erhält man bei l Schichten nach der Integration folgende Reihe für den Elastizitätstensor:

$$\begin{aligned}
 {}_n B^{i\beta k \sigma} &= \sum_l A^{i\beta k \omega} \cdot \\
 &\left\{ \int_{\theta^3} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} \left[\frac{(\theta^3)^{n+1}}{n+1} - 2H \frac{(\theta^3)^{n+2}}{n+2} - K \frac{(\theta^3)^{n+3}}{n+3} + K \frac{(\theta^3)^{n+5}}{n+5} + \dots \right] \right. \\
 &+ \left(\int_{\theta^3} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} + b_{\rho}^{\beta} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} \right) \left[\frac{(\theta^3)^{n+2}}{n+2} - K \frac{(\theta^3)^{n+4}}{n+4} - 2HK \frac{(\theta^3)^{n+5}}{n+5} + \dots \right] \\
 &\left. + b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} \left[\frac{(\theta^3)^{n+3}}{n+3} + 2H \frac{(\theta^3)^{n+4}}{n+4} + (4H^2 - K) \frac{(\theta^3)^{n+5}}{n+5} + \dots \right] \right\} \Bigg|_{\theta^3_{u_l}}^{\theta^3_{o_l}} \quad (2.8.10.)
 \end{aligned}$$

$\theta^3_{o_l}$ und $\theta^3_{u_l}$ sind dabei die Koordinaten der Schichtgrenzen.

Für homogenes Material über die ganze Dicke ergibt sich bei Berücksichtigung von Potenzen bis $(\theta^3)^5$:

$${}_0 B^{i\beta k \sigma} = A^{i\beta k \omega} \left\{ \left(H - K \frac{h^3}{12} + K^2 \frac{h^5}{80} \right) \int_{\theta^3} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} + \left(\frac{h^3}{12} + [4H^2 - K] \frac{h^5}{80} \right) b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1 B^{i\beta k \sigma} &= A^{i\beta k \omega} \left\{ -2H \frac{h^3}{12} \int_{\theta^3} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} + \left(\frac{h^3}{12} - K \frac{h^5}{80} \right) \left(\int_{\theta^3} \int_{\theta^4} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} + b_{\rho}^{\beta} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h^5}{80} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} \right\}
 \end{aligned}$$

$${}_2 B^{i\beta k \sigma} = A^{i\beta k \omega} \left\{ \left(\frac{h^3}{12} - K \frac{h^5}{80} \right) \int_{\theta^3} \int_{\theta^4} \int_{\theta^5} + \frac{h^5}{80} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\sigma} \right\} \quad (2.8.11.)$$

Der Formänderungsarbeit für die Schubspannungen liegt ein über die Dicke konstanter Verlauf der Schubverzerrungen (s. 2.3.6.) zugrunde.

Der Verlauf der Schubspannungen $\bar{T}^{3\alpha}$ über die Dicke folgt aus (2.4.4.) und (2.4.5.) mit $\bar{A}^{3\alpha 3\sigma} \equiv 0$:

$$\begin{aligned}\bar{T}^{3\alpha} &= \frac{2E}{2(1+\nu)} q^{\alpha\sigma} \cdot e_{3\sigma} \\ \bar{T}^{3\alpha} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \alpha^{\nu 4} \mu_{\psi}^{\alpha} \mu_{\psi}^{\sigma} \nu_{3\sigma} \quad (2.8.12.)\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Verlauf, bei dem ein konstanter überwiegender Term mit kleineren linearen und quadratischen Termen überlagert wird. Vergleicht man die Formänderungsarbeit F_p für parabolischen Schubspannungs- und Schubverzerrungsverlauf mit der aus dem konstanten Verlauf der Schubspannung und Schubverzerrung resultierenden Formänderungsarbeit F_k , so erhält man für $b_{\alpha\beta} = 0$:

$$F_p = \frac{6}{5} F_k$$

Die Querkräfte $\int_h T_p^{3\alpha} n_{\alpha} d\theta^3$ und $\int_h T_k^{3\alpha} n_{\alpha} d\theta^3$ müssen voraussetzungsgemäß gleich sein.

Es ist deshalb angebracht, die Komponenten $\circ B^{3\alpha 3\sigma}$ mit dem Faktor $\frac{5}{6}$ zu multiplizieren:

$$\circ \tilde{B}^{3\alpha 3\sigma} = \frac{5}{6} \circ B^{3\alpha 3\sigma} \quad (2.8.13.)$$

NAGHDI nimmt bei der Berechnung der Elastizitätstensoren parabolischen Verlauf für Schubspannung und Schubverzerrung an. Durch die "Shifter"-Operation für die Schubspannung ergibt sich bei $\circ \tilde{B}^{3\alpha 3\sigma}$ das Glied $h^3/28$ anstelle von $h^3/12$ in (2.8.11.). Im übrigen stimmt (2.8.11.) bis zu den Gliedern mit h^3 einschließlich mit den Formeln von Naghdi überein.

2.9. Starrkörperverschiebungen

Als Starrkörperverschiebung wird hier eine Verschiebung bezeichnet, die das ganze Tragwerk erfaßt. Sie läßt sich auf eine Translation \underline{u} und eine Verdrehung $\underline{\Omega}$ im Ursprung des Ortsvektors zurückführen, wenn $\underline{\Omega}$ infinitesimal klein vorausgesetzt wird. Die Verschiebung in irgend einem Schalenpunkt ist dann

$$\begin{aligned} {}_s \underline{V} &= \underline{u} + \underline{\Omega} \times \underline{r} \\ &= \underline{u} + \underline{\Omega} \times \underline{r} + \theta^3 \underline{\Omega} \times \underline{a}_3 \end{aligned} \quad (2.9.1.)$$

Da durch eine Starrkörperverschiebung die Geometrie des Tragwerks erhalten bleibt, müssen dabei die Verzerrungen $\bar{\epsilon}_{ii}$ und die Spannungen $\bar{\tau}^{ii}$ und damit auch die Schnittgrößen verschwinden. Um dies zu kontrollieren, wird ${}_s \underline{V}$ nach (2.9.1.) in die kinematischen Gleichungen (2.3.6.) eingesetzt. Beachtet man, daß die Ableitungen der Konstanten \underline{u} und $\underline{\Omega}$ null sein müssen:

$$\underline{u}_{,ii} = \underline{\Omega}_{,ii} = 0 \quad (2.9.2.)$$

so erhält man für die Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ({}_s \underline{V}_{,i\alpha} \underline{g}_\beta + {}_s \underline{V}_{,i\beta} \underline{g}_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} [(\underline{\Omega} \times \underline{r}_{,i\alpha}) \underline{g}_\beta + (\underline{\Omega} \times \underline{r}_{,i\beta}) \underline{g}_\alpha + \theta^3 (\underline{\Omega} \times \underline{a}_{3,i\alpha}) \underline{g}_\beta + \theta^3 (\underline{\Omega} \times \underline{a}_{3,i\beta}) \underline{g}_\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\alpha) \underline{g}_\beta + (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\beta) \underline{g}_\alpha - \theta^3 b_\alpha^\varphi (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \underline{g}_\beta - \theta^3 b_\beta^\varphi (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \underline{g}_\alpha] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mu_\beta^\rho [(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\alpha) \underline{a}_\rho - \theta^3 b_\alpha^\varphi (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \underline{a}_\rho] \right. \\ &\quad \left. + \mu_\alpha^\rho [(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\beta) \underline{a}_\rho - \theta^3 b_\beta^\varphi (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \underline{a}_\rho] \right\} \end{aligned} \quad (2.9.3.)$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (s \nu_{, \alpha} \cdot \underline{q}_3 + \nu_{, 3} \cdot \underline{q}_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} [(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\alpha) \cdot \underline{a}_3 - \theta^3 b_\alpha^\varphi (\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \cdot \underline{a}_3 + (\underline{\Omega} \times \underline{a}_3) \cdot \underline{a}_\varphi \mu_\alpha^\varphi] \\ &= \frac{1}{2} [(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\varphi) \cdot \underline{a}_3 - (\underline{a}_3 \times \underline{\Omega}) \cdot \underline{a}_\varphi] = \sigma\end{aligned}\quad (2.9.4.)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = s \nu_{, 3} \cdot \underline{a}_3 = (\underline{\Omega} \times \underline{a}_3) \cdot \underline{a}_3 = \sigma \quad (2.9.5.)$$

Um die vektoriellen Produkte bilden zu können, wird die Starrkörperverdrehung $\underline{\Omega}$ auf die Basis der Mittelfläche bezogen.

$$\underline{\Omega} = \Omega^\alpha \underline{a}_\alpha + \Omega^3 \underline{a}_3 = \Omega^i \underline{a}_i \quad (2.9.6.)$$

Dann gilt allgemein:

$$\left. \begin{aligned}\underline{\Omega} \times \underline{a}_i &= \sqrt{a} (\Omega^k \delta_i^k - \Omega^l \delta_i^l) \underline{a}^m \\ (\underline{\Omega} \times \underline{a}_i) \cdot \underline{a}_j &= \sqrt{a} (\Omega^k \delta_i^k - \Omega^l \delta_i^l) \delta_j^m\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k, l, m \text{ zyklisch} \\ (2.9.7.) \end{array}$$

und speziell

$$(\underline{\Omega} \times \underline{a}_\alpha) \cdot \underline{a}_\varphi = \varepsilon_{\alpha\varphi} \Omega^3 \quad (2.9.8.)$$

Damit erhält man für den Verzerrungstensor $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ \mu_\beta^\rho (\varepsilon_{\alpha\rho} \Omega^3 - \theta^3 b_\alpha^\varphi \varepsilon_{\varphi\rho} \Omega^3) \right. \\ &\quad \left. + \mu_\alpha^\rho (\varepsilon_{\beta\rho} \Omega^3 - \theta^3 b_\beta^\varphi \varepsilon_{\varphi\rho} \Omega^3) \right\}\end{aligned}\quad (2.9.9.)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \mu_\beta^\rho \mu_\alpha^\varphi \varepsilon_{\varphi\rho} + \mu_\alpha^\rho \mu_\beta^\varphi \varepsilon_{\varphi\rho} \right\} \Omega^3$$

$$= \frac{1}{2} \mu_{\beta}^{\rho} \mu_{\alpha}^{\varphi} (\varepsilon_{\varphi\rho} - \varepsilon_{\rho\varphi}) \Omega^3 = \sigma \quad (2.9.10.)$$

Der Verzerrungstensor ist also bei Starrkörperverschiebungen identisch null.

Durch Vergleich von (2.3.6.) mit (2.9.4.) und (2.9.10.) erhält man für die Verzerrungskomponenten bei Starrkörperverschiebungen, die im einzelnen nicht verschwinden:

$$\begin{aligned} s \nu_{\alpha\beta}^{\rho} &= - \varepsilon_{\beta\alpha} \Omega^3 \\ s \kappa_{\alpha\beta}^{\varphi} &= - b_{\beta}^{\varphi} \varepsilon_{\varphi\alpha} \Omega^3 \\ s \nu_{3\alpha}^{\rho} &= \sigma \end{aligned} \quad (2.9.11.)$$

Die konstitutiven Gleichungen liefern damit für die Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} s \pi^{\alpha\beta} &= {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\delta\gamma} \Omega^3 - {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\delta}^{\varphi} \varepsilon_{\varphi\gamma} \Omega^3 \\ &= \varepsilon_{\delta\gamma} ({}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} - {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\delta}^{\varphi}) \Omega^3 \\ s m^{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\delta\gamma} ({}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} - {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\delta}^{\varphi}) \Omega^3 \\ s q^{\alpha} &= \varepsilon_{\delta\gamma} ({}_0 B^{3\alpha\gamma\delta} - {}_1 B^{3\alpha\gamma\delta} b_{\delta}^{\varphi}) \Omega^3 \end{aligned} \quad (2.9.12.)$$

Die Schnittgrößen werden null, wenn die Klammerausdrücke verschwinden. Man prüft diese Bedingung, indem man den Elastizitätstensor durch die Gleichungen (2.8.1.) ausdrückt:

$$\begin{aligned} s \mathcal{M}^{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}} A^{\alpha\beta\gamma\omega} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} \underbrace{(\mu^{-1})_{\omega}^{\rho} [\mathcal{D}_{\gamma}^{\rho} - \theta^3 b_{\varphi}^{\rho}]}_{\mathcal{D}_{\omega}^{\rho}} d\theta^3 \\ &= \int \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} A^{\alpha\beta\gamma\omega} (\mu^{-1})_{\rho}^{\beta} d\theta^3 = \sigma \end{aligned} \quad (2.9.13.)$$

$\varepsilon_{\mathcal{D}\mu} A^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sigma$ wegen der Symmetrie des Elastizitätstensors:
 $A^{\alpha\beta\gamma\omega} = A^{\omega\beta\gamma\alpha}$.

Man sieht sofort, daß auch die Schnittgrößen $s \mathcal{M}^{\alpha\beta}$ und $s \mathcal{Q}^{\alpha}$ null werden.

Da der Elastizitätstensor ${}_n \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\omega}$ als Potenzreihe berechnet wurde, verschwinden die Schnittgrößen bei Starrkörperverschiebungen auch dann, wenn die Reihenentwicklung bei gleichen Potenzen abgebrochen wird.

Berücksichtigt man beispielsweise Glieder bis $\frac{h^3}{12}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} s \mathcal{N}^{\alpha\beta} &= \left\{ (h - K \frac{h^3}{12}) A^{\alpha\beta\gamma\omega} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} + \frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\rho} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_{\omega}^{\rho} b_{\varphi}^{\rho} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} - \frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_{\rho}^{\beta} b_{\omega}^{\rho} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} \right. \\ &\quad \left. + 2H \frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_{\omega}^{\rho} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} \right\} \Omega^3 \\ &= \left\{ -\frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_{\omega}^{\rho} b_{\varphi}^{\rho} + \frac{h^3}{12} A^{\alpha\beta\gamma\omega} (b_1^2 + b_2^2) b_{\omega}^{\rho} \right\} \varepsilon_{\mathcal{D}\mu} \Omega^3 \\ &= \sigma, \quad \text{wie man durch Ausschreiben zeigt.} \end{aligned}$$

$$s m^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^3}{12} \{ A^{\alpha\beta\gamma\delta} b_p^\beta \varepsilon_{\delta\gamma} + A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_\omega^\omega \varepsilon_{\delta\gamma} - A^{\alpha\beta\gamma\omega} b_\omega^\omega \varepsilon_{\delta\gamma} \} \Omega^3$$
$$= 0$$

2.10. Gleichgewichts- und Randbedingungen

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie läßt sich mit (2.6.18.), (2.6.19.), (2.6.24.) und (2.3.7.) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \pi[V_\alpha, w_\alpha, w] &= \frac{1}{2} \int_F \{ n^{\alpha\beta} (v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} w_{\alpha/\beta} \\ &\quad + q^\alpha (b_\alpha^\nu v_\nu + w_{1,\alpha} + w_\alpha) - 2p^\alpha v_\alpha - 2pw \} dF \\ &\quad - \int_{L_S} \{ \hat{N}^\alpha v_\alpha + \hat{M}^\alpha w_\alpha + \hat{Q} w \} ds \Rightarrow \text{Min (2.10.1.)} \end{aligned}$$

Die Schnittgrößen sind dabei Funktionen der Verschiebungskomponenten gemäß (2.7.5.).

Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist

$$\delta \pi = 0 \quad (2.10.2.)$$

Unter Berücksichtigung von (2.7.9.) erhält man beim Ableiten nach der Kettenregel:

$$\frac{\delta \pi(i)}{\delta v_{\alpha/\beta}} = \frac{\delta \pi(i)}{\delta v_{\nu\sigma}} \cdot \frac{\delta v_{\nu\sigma}}{\delta v_{\alpha/\beta}} = n^{\nu\sigma} \cdot \frac{\delta v_{\nu\sigma}}{\delta v_{\alpha/\beta}} = n^{\alpha\beta} \quad (2.10.3.)$$

Damit lautet das variierte Funktional (2.10.1.):

$$\begin{aligned} \delta \pi[V_\alpha, w, w_\alpha] &= \int_F n^{\alpha\beta} \delta (v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} \delta w_{\alpha/\beta} \\ &\quad + q^\alpha \delta (b_\alpha^\nu v_\nu + w_{1,\alpha} + w_\alpha) - p^\alpha \delta v_\alpha - p \delta w \} dF \\ &\quad - \int_{L_S} \{ \hat{N}^\alpha \delta v_\alpha + \hat{M}^\alpha \delta w_\alpha + \hat{Q} \delta w \} ds = 0 \quad (2.10.4.) \end{aligned}$$

(2.10.4.) stellt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen der Schale dar.

Ausdrücke mit kovarianten Ableitungen der Form $n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha/\beta}$ lassen sich mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes durch partielle Integration umformen:

$$\int_F n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha/\beta} dF = \int_F (n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha}) /_{\beta} dF - \int_F n^{\alpha\beta} /_{\beta} \delta v_{\alpha} dF$$

$$= \int_R n_{\beta} n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha} ds - \int_F n^{\alpha\beta} /_{\beta} \delta v_{\alpha} dF \quad (2.10.5.)$$

Dabei erstreckt sich das Linienintegral auf den gesamten Rand.

Mit Hilfe weiterer analoger Umformungen wird aus (2.10.4.):

$$\delta \pi = \int_F \{ [-n^{\alpha\beta} /_{\beta} + b_{\beta}^{\alpha} q^{\beta} - p^{\alpha}] \delta v_{\alpha}$$

$$+ [-q^{\alpha} /_{\alpha} - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - p] \delta w$$

$$+ [-m^{\alpha\beta} /_{\beta} + q^{\alpha}] \delta w_{\alpha} \} dF$$

$$+ \int_{R_S} \{ (n_{\beta} n^{\alpha\beta} - \hat{N}^{\alpha}) \delta v_{\alpha} + (n_{\beta} m^{\alpha\beta} - \hat{M}^{\alpha}) \delta w_{\alpha} + (n_{\beta} q^{\beta} - \hat{Q}) \delta w \} ds$$

$$+ \int_{R_G} n_{\beta} \{ n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha} + m^{\alpha\beta} \delta w_{\alpha} + q^{\beta} \delta w \} ds = 0 \quad (2.10.6.)$$

Die Variationen der Verschiebungsfunktionen sind im Bereich und auf dem Randteil R_S , auf dem Schnittgrößen vorgeschrieben sind, beliebig.

Auf dem Randteil R_G , auf dem Verschiebungen vorgeschrieben sind, müssen die entsprechenden Variationen δv_{α} bzw. δw , δw_{α} verschwinden.

Damit sind im Gebiet und auf R_S die Klammersausdrücke Euler-Lagrangesche Gleichungen des Variationsproblems. Man erhält die Gleichgewichtsbedingungen (2.10.7.) und die statischen Randbedingungen (2.10.8.):

$$\begin{aligned} -n^{\alpha\beta}/\beta + b_{\beta}^{\alpha} q^{\beta} - p^{\alpha} &= 0 \\ -q^{\alpha}/\alpha - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - p &= 0 \\ -m^{\alpha\beta}/\beta + q^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10.7.)$$

Bezeichnung der Randschnittgrößen:

$$n_{\beta} n^{\alpha\beta} = N^{\alpha} \quad ; \quad n_{\beta} m^{\alpha\beta} = M^{\alpha} \quad ;$$

$$n_{\beta} q^{\beta} = Q \quad \text{auf } R_S \quad (2.10.8.)$$

Das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie lautet mit (2.6.18.) und (2.6.25.):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} [n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^{\alpha}] &= \frac{1}{2} \int_F \{ n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + q^{\alpha} \gamma_{3\alpha} \} dF \\ &\quad - \int_{R_0} \{ \hat{V}_{\alpha} n^{\alpha\beta} + \hat{W}_{\alpha} m^{\alpha\beta} + \hat{W} q^{\alpha} \} ds \Rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.10.9.)$$

Dabei sind die Verzerrungskomponenten $\gamma_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{3\alpha}$ Funktionen der Schnittgrößen gemäß (2.7.6.)

Die Variation liefert unter Berücksichtigung von (2.7.10.):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} &= \int_F \{ \gamma_{\alpha\beta} \delta n^{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} \delta m^{\alpha\beta} + \gamma_{3\alpha} \delta q^{\alpha} \} dF \\ &\quad - \int_{R_0} \{ \hat{V}_{\alpha} \delta n^{\alpha\beta} + \hat{W}_{\alpha} \delta m^{\alpha\beta} + \hat{W} \delta q^{\alpha} \} ds = 0 \end{aligned} \quad (2.10.10.)$$

Dies ist das Prinzip der virtuellen Kräfte.

Fügt man zu (2.10.10.) die Gleichgewichtsbedingungen (2.10.7.), denen die Schnittgrößen genügen müssen, nach Lagrange hinzu und integriert partiell, so erhält man außer den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{\Pi}_e = & \int \left\{ (\delta v_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}^* / \rho + b_{\alpha\beta} w^*) \delta m^{\alpha\beta} \right. \\
 & + (K_{\alpha\beta} - W_{\alpha\beta}^* / \rho) \delta m^{\alpha\beta} \\
 & \left. + (\delta z_{3\alpha} - b_{\alpha\psi} v_{\psi}^* - W_{i\alpha}^* - W_{\alpha}^*) \delta q^{\alpha} \right\} dV \\
 & + \int_{R_S} \eta_{\alpha} \{ v_{\alpha}^* \delta n^{\alpha\beta} + W_{\alpha}^* \delta m^{\alpha\beta} + w^* \delta q^{\beta} \} ds \\
 & + \int_{R_G} \eta_{\alpha} \{ (v_{\alpha}^* - \hat{v}_{\alpha}) \delta n^{\alpha\beta} + (W_{\alpha}^* - \hat{w}_{\alpha}) \delta m^{\alpha\beta} + (w^* - \hat{w}) \delta q^{\beta} \} ds
 \end{aligned} \tag{2.10.11.}$$

Die Lagrange-Parameter $v_{\alpha}^*, w^*, w_{\alpha}^*$ ergeben sich aus dem Randintegral $\int_{R_G} ds$ als die Verschiebungsgrößen $v_{\alpha}, w, w_{\alpha}$. Damit (2.10.11.) null werden kann, müssen die Vergleichsfunktionen für die Schnittgrößen außer den Gleichgewichtsbedingungen noch die statischen Randbedingungen befriedigen ($\delta m^{\alpha\beta} = 0$ etc. auf R_S). Dann liefert (2.10.11.) neben den kinematischen Gleichungen (2.3.7.) noch die geometrischen Randbedingungen:

$$v_{\alpha} = \hat{v}_{\alpha} \quad ; \quad w_{\alpha} = \hat{w}_{\alpha} \quad ; \quad w = \hat{w} \quad \text{auf } R_G \tag{2.10.12.}$$

Neben der physikalischen Unterscheidung der Randbedingungen in geometrische und statische ist mathematisch allgemein die Aufteilung in wesentliche und restliche Randbedingungen üblich; so z.B. COLLATZ.

Werden aus allen Randbedingungen eines Problems die niedrigen Ableitungen, die darin auftreten, so weit wie möglich eliminiert, so sind wesentliche Randbedingungen solche, die Ableitungen bis zum Grade $\frac{n}{2} - 1$ enthalten, die übrigen sind restliche.

Beispiel: Bei der DGL $\gamma'' = \sigma$ ist die Randbedingung

$$\gamma(0) = \sigma \quad \text{wesentlich,}$$

$$\gamma''(0) = \sigma \quad \text{restlich.}$$

Aus der Symmetriebedingung für den Spannungstensor im Dreidimensionalen läßt sich eine weitere Bedingung für die Schnittgrößen herleiten. Statt $\bar{z}^{+2} = \bar{z}^{-2}$ läßt sich auch schreiben:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \bar{z}^{\alpha\beta} = \sigma \quad (2.10.13.)$$

Unterzieht man den ε -Tensor der "Shifter" - Operation und integriert dann über die Schalendicke, so wird daraus:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\varphi\psi} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \mu_{\alpha}^{\varphi} \mu_{\beta}^{\psi} \bar{z}^{\alpha\beta} d\theta^3 \\ &= \varepsilon_{\varphi\psi} \int \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \mu_{\alpha}^{\varphi} (\int_{\beta}^{\psi} - \theta^3 b_{\beta}^{\psi}) \bar{z}^{\alpha\beta} d\theta^3 = \sigma \end{aligned} \quad (2.10.14.)$$

Berücksichtigt man die Definitionsgleichungen der Schnittgrößen (2.6.17.), erhält man die sogenannte sechste Gleichgewichtsbedingung für das Momentengleichgewicht um die Schalennormale \underline{a}_3 :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} (\eta^{\alpha\beta} - b_{\beta}^{\alpha} m^{\alpha\beta}) = \sigma \quad (2.10.15.)$$

Setzt man für die Schnittgrößen mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen (2.7.5.) die Verzerrungskomponenten ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} ({}_0 B^{\alpha\beta\varphi\psi} - b_{\beta}^{\alpha} {}_1 B^{\alpha\beta\varphi\psi}) \gamma_{\varphi\psi} + \varepsilon_{\alpha\beta} ({}_1 B^{\alpha\beta\varphi\psi} - b_{\beta}^{\alpha} {}_2 B^{\alpha\beta\varphi\psi}) \kappa_{\varphi\psi} = \sigma \quad (2.10.16.)$$

Diese Gleichung entspricht den Gleichungen (2.9.12.) für die Starrkörperverschiebung und wird wie diese vom Elastizitätstensor $\beta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und seinen konsistenten Näherungen erfüllt.

3. Verallgemeinerte Variationsfunktionale der Schale

3.1. Einleitung

Im vorigen Kapitel wurden die Grundfunktionale der technischen Schalentheorie aufgestellt, nämlich das Funktional (2.10.1.) für das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie mit den Verschiebungsgrößen als unabhängigen Funktionen und das Funktional (2.10.9.) für das Prinzip vom Minimum des Komplementärpotentials mit den Schnittgrößen als unabhängigen Funktionen.

Diese Funktionale lassen sich in mehrfacher Weise verallgemeinern, indem Nebenbedingungen des ursprünglichen Funktionals nach der Methode von Lagrange, wie sie bei COURANT-HILBERT und FUNK und insbesondere bei WASHIZU beschrieben ist, in das Funktional aufgenommen werden. Es ergeben sich dabei unter anderem die Funktionale nach HELLINGER-REISSNER und HU-WASHIZU, bei denen neben den Verschiebungsgrößen auch die Schnittgrößen und bei Hu-Washizu auch noch die Verzerrungskomponenten als unabhängig zu variierende Funktionen auftreten.

Die Ansatzfunktionen (bei der approximativen Lösung) müssen den jeweiligen Rand- und Nebenbedingungen eines Variationsproblems genügen.

Werden z.B. die Ansatzfunktionen bereichsweise definiert, so treten an den Bereichsgrenzen Kontinuitätsforderungen als Übergangsbedingungen auf, um die sich die Funktionale erweitern lassen.

Dieser Gedanke stammt von PRAGER, der bei der Platte die Kontinuität nur für jeweils eine der beiden dualen Größen w , Q und w' , M verlangt. Von BUFLER [2] wurden dann auch diese Einschränkungen fallen gelassen und nur noch verlangt, daß die Durchbiegung w an den Knotenpunkten stetig ist.

Mit bereichswisen Ansätzen läßt sich auch der Zusammenhang zwischen den direkten Variationsverfahren und der Methode der finiten Elemente zeigen, bei denen häufig Hermitesche Interpolationspolynome als Ansatzfunktionen verwendet werden.

In diesem Kapitel werden nun die verallgemeinerten Variationsfunktionale für die Schale hergeleitet, die keine oder nur sehr eingeschränkte Stetigkeitsforderungen an die Ansatzfunktionen an den Bereichsgrenzen stellen.

Diese Funktionale können - wie von BUFLER [2] für die Platte gezeigt wurde - sowohl aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie wie auch aus dem Prinzip vom Minimum des Komplementärpotentials hergeleitet werden, aus Zweckmäßigkeitgründen dient jedoch nur das erste Prinzip als Ausgangspunkt. (Die Transformation von FRIEDRICHS bewirkt die gegenseitige Überführung der beiden Minimalprinzipie.)

Zuvor sollen noch einige geometrische Bezeichnungen erläutert werden:

Das Gebiet ist in i Einzelbereiche unterteilt; die Bereichsgrenzen $\rho_{(i)}$ sollen stückweise stetige Tangenten besitzen.

Der Normalenvektor an der Grenze $\rho_{(i)}$ des Bereichs i ist $n_{(i)}$. Er zeigt immer vom Gebiet weg. Der Tangentenvektor $t_{(i)}$ folgt aus $n_{(i)}$ durch Drehung gegen den Uhrzeigersinn und liegt in der Richtung der Randkoordinate.

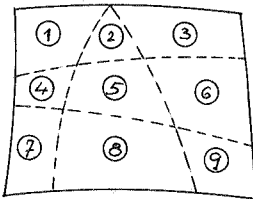


Bild 5: Einteilung des Gebiets in Bereiche

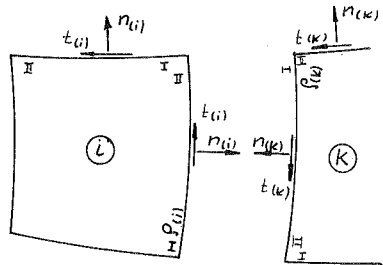


Bild 6: Vektoren an den Bereichsgrenzen

3.2. Das mit Bezug auf die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen verallgemeinerte Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Im Abschnitt 2.10. wurden aus dem Funktional des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen hergeleitet, wobei sich die Ansatzfunktionen für die Verschiebungsgrößen auf den gesamten Bereich erstreckten.

Die geometrischen Randbedingungen waren Nebenbedingungen des Funktionals (2.10.1.).

Diese Nebenbedingungen sollen nun mit Hilfe der Methode von Lagrange in das Funktional aufgenommen werden; außerdem sollen die Ansatzfunktionen bereichsweise definiert sein.

Das neue Funktional lautet dann:

$$\begin{aligned} \Pi_V [V_\alpha, W, W_\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha, \varphi] &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{F_i} \{ n^{\alpha\beta} (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} w_{\alpha|\beta} + g^\alpha (b_\alpha^\gamma v_\gamma + w_{,\alpha} + w_\alpha) - \rho^\alpha v_\alpha - p w \} dF \\ &\quad - \int_{R_S} \{ \hat{N}^\alpha v_\alpha + \hat{M}^\alpha w_\alpha + \hat{Q} w \} ds \\ &\quad + \int_{R_G} \{ (v_\alpha - \hat{v}_\alpha) \lambda^\alpha + (w_\alpha - \hat{w}_\alpha) \rho^\alpha + (w - \hat{w}) \varphi \} ds \Rightarrow \text{stat.} \quad (3.2.1.) \end{aligned}$$

$\lambda^\alpha, \rho^\alpha$ und φ sind Lagrange-Parameter der geometrischen Randbedingungen.

Die Summe geht über die Anzahl der Bereiche; es ist $\sum F_i = F$. Streng genommen müßten auch die Ansatzfunktionen indiziert sein, also z.B. $V_{\alpha(i)}$ für den Bereich i , doch kann dies unterlassen werden, da keine Verwechslungsgefahr besteht. Die Schnittgrößen sind Funktionen der Verschiebungsgrößen. Für (3.2.1.) kann nur noch ein stationärer Wert gefordert werden, da die Zusatzterme nicht positiv definit sind.

Um die Lagrange-Parameter zu bestimmen, wird (3.2.1.) variiert:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_V &= \sum_i \int_{F_i} \{ n^{\alpha\beta} \delta (v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} \delta w_{\alpha/\beta} + q^\alpha \delta (b_{\alpha\gamma} v_\gamma + w_{,\alpha} + w_\alpha) \\ &\quad - p^\alpha v_\alpha - p \delta w \} dF \\ &- \int_{R_S} \{ \hat{N}^\alpha \delta v_\alpha + \hat{M}^\alpha \delta w_\alpha + \hat{Q} \delta w \} ds \\ &+ \int_{R_G} \{ (v_\alpha - \hat{v}_\alpha) \delta \lambda^\alpha + (w_\alpha - \hat{w}_\alpha) \delta \beta^\alpha + (w - \hat{w}) \delta \gamma \} ds \\ &+ \int_{R_G} \{ \lambda^\alpha \delta v_\alpha + \beta^\alpha \delta w_\alpha + \gamma \delta w \} ds = \sigma \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

Bei der erforderlichen partiellen Integration erstrecken sich die Umfangsintegrale auf die Bereichsgrenzen $\mathcal{P}_{(i)}$, bei Randbereichen auch auf den Rand; es gilt also beispielsweise:

$$\int_{F_i} n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha/\beta} dF = - \int_{F_i} n^{\alpha\beta}/_\beta \delta v_\alpha dF + \int_{\mathcal{P}_{(i)}} n_\beta n^{\alpha\beta} \delta v_\alpha ds$$

Damit erhält man aus (3.2.2.):

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_V &= \sum_i \int_{\Gamma_i} \{ (-n^{\alpha\beta} / \rho + b_{\beta}^{\alpha} q^{\beta} - p^{\alpha}) \delta v_{\alpha} \\
 &\quad + (-m^{\alpha\beta} / \rho + q^{\alpha}) \delta w_{\alpha} \\
 &\quad + (-q^{\alpha} / \alpha - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - p) \delta w \} dF_i \\
 &+ \int_i \int_{\rho_i} n^{\alpha\beta} \delta v_{\alpha} + m^{\alpha\beta} \delta w_{\alpha} + q^{\beta} \delta w \} ds \\
 &+ \int_{R_s} \{ (\eta_{\beta} n^{\alpha\beta} - \hat{N}^{\alpha}) \delta v_{\alpha} + (\eta_{\beta} m^{\alpha\beta} - \hat{M}^{\alpha}) \delta w_{\alpha} + (\eta_{\beta} q^{\beta} - \hat{Q}) \delta w \} ds \\
 &+ \int_{R_G} \{ (v_{\alpha} - \hat{v}_{\alpha}) \delta \lambda^{\alpha} + (w_{\alpha} - \hat{w}_{\alpha}) \delta p^{\alpha} + (w - \hat{w}) \delta \varphi \} ds \\
 &+ \int_{R_{\sigma}} \{ (\eta_{\beta} n^{\alpha\beta} + \lambda^{\alpha}) \delta v_{\alpha} + (\eta_{\beta} m^{\alpha\beta} + p^{\alpha}) \delta w_{\alpha} + (\eta_{\beta} q^{\beta} + \varphi) \delta w \} ds = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.3.}$$

Aus der letzten Zeile von (3.2.3.) ergeben sich die Lagrange-Parameter als die negativen Randschnittgrößen.

$$\lambda^{\alpha} = -\eta_{\beta} n^{\alpha\beta} ; \quad p^{\alpha} = -\eta_{\beta} m^{\alpha\beta} ; \quad \varphi = -\eta_{\beta} q^{\beta} \tag{3.2.4.}$$

Die Innen-Bereichsgrenzen werden bei den Linienintegralen $\int_{\rho_i} ds$ in (3.2.3.) durch die Summierung über die Anzahl der Bereiche je zweimal durchlaufen.

Bezeichnet man mit $\int_{\rho} ds$ ein Integral, das die Bereichsgrenzen nur einmal durchläuft, so wird aus der Summe der Linienintegrale:

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \int_{\mathcal{P}_i} \eta_{\beta(i)} \{ n^{\alpha\beta} dV_\alpha + m^{\alpha\beta} dW_\alpha + q^\beta dW \} ds \\
 &= \int_{\mathcal{P}} \eta_\beta \{ (n^{\alpha\beta+} dV_\alpha^+ - n^{\alpha\beta-} dV_\alpha^-) + (m^{\alpha\beta+} dW_\alpha^+ - m^{\alpha\beta-} dW_\alpha^-) \\
 & \quad + (q^{\beta+} dW^+ - q^{\beta-} dW^-) \} ds \qquad (3.2.5.)
 \end{aligned}$$

Die Differenz folgt aus dem entgegengesetzten Vorzeichen der Normalenvektoren an den Bereichsgrenzen :

$$n_\beta^+ = -n_\beta^-$$

Durch das Variationsverfahren werden also bei bereichsweisen Ansätzen die virtuellen Arbeiten der Randschnittgrößen an den Bereichsgrenzen näherungsweise gleich gemacht.

Setzt man, wie bei den finiten Elementen mit reinen Verschiebungsansätzen üblich, die Stetigkeit der Ansatzfunktionen an den Bereichsgrenzen voraus, dann wird wegen $dV_\alpha^+ - dV_\alpha^- = 0$ aus (3.2.5.):

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \int_{\mathcal{P}_i} \eta_{\beta(i)} \{ n^{\alpha\beta} dV_\alpha + m^{\alpha\beta} dW_\alpha + q^\beta dW \} ds \\
 &= \int_{\mathcal{P}} \eta_\beta \{ (n^{\alpha\beta+} - n^{\alpha\beta-}) dV_\alpha + (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-}) dW_\alpha \\
 & \quad + (q^{\beta+} - q^{\beta-}) dW \} ds \qquad (3.2.6.)
 \end{aligned}$$

In diesem Fall werden die statischen Übergangsbedingungen durch das Funktional näherungsweise erfüllt.

Sind die Ansatzfunktionen diskontinuierlich, so lassen sich auch die geometrischen Übergangsbedingungen im Funktional aufnehmen. Dazu werden dem Funktional (3.2.1.) die folgenden Terme zugefügt:

$$\int_{\mathcal{P}} \{ (V_{\alpha}^{+} - V_{\alpha}^{-}) \varepsilon^{\alpha} + (W_{\alpha}^{+} - W_{\alpha}^{-}) \mu^{\alpha} + (w^{+} - w^{-}) \nu \} ds \quad (3.2.7.)$$

Bei der Variation ergibt sich dann zusätzlich zu (3.2.3.)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \{ (V_{\alpha}^{+} - V_{\alpha}^{-}) \delta \varepsilon^{\alpha} + (W_{\alpha}^{+} - W_{\alpha}^{-}) \delta \mu^{\alpha} + (w^{+} - w^{-}) \delta \nu \} ds \\ & + \int_{\mathcal{P}} \{ \varepsilon^{\alpha} \delta (V_{\alpha}^{+} - V_{\alpha}^{-}) + \mu^{\alpha} \delta (W_{\alpha}^{+} - W_{\alpha}^{-}) + \nu \delta (w^{+} - w^{-}) \} ds \quad (3.2.8.) \end{aligned}$$

Um die Lagrange-Parameter zu bestimmen, wird (3.2.5.) umgeformt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \{ \eta_{\beta} (n^{\alpha\beta+} \delta V_{\alpha}^{+} - n^{\alpha\beta-} \delta V_{\alpha}^{-}) + (m^{\alpha\beta+} \delta W_{\alpha}^{+} - m^{\alpha\beta-} \delta W_{\alpha}^{-}) \\ & \quad + (q^{\beta+} \delta w^{+} - q^{\beta-} \delta w^{-}) \} ds \\ & = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \eta_{\beta} \{ (n^{\alpha\beta+} - n^{\alpha\beta-}) \delta (V_{\alpha}^{+} + V_{\alpha}^{-}) + (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-}) \delta (W_{\alpha}^{+} - W_{\alpha}^{-}) \\ & \quad + (q^{\beta+} - q^{\beta-}) \delta (w^{+} - w^{-}) \} ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \eta_{\beta} \{ (n^{\alpha\beta+} + n^{\alpha\beta-}) \delta (V_{\alpha}^{+} - V_{\alpha}^{-}) + (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \delta (W_{\alpha}^{+} - W_{\alpha}^{-}) \} ds \end{aligned}$$

$$+ (q^{\beta+} + q^{\beta-}) d(w^+ - w^-) \} ds \quad (3.2.9.)$$

Als Lagrange-Parameter ergeben sich damit die negativen gemittelten Randschnittgrößen an den Bereichsgrenzen:

Das auf diskontinuierliche Ansatzfunktionen erweiterte Funktional lautet dann endgültig:

$$\begin{aligned} & \Pi_V [V_\alpha, W, w_\alpha] = \\ & = \int_i \int_{F_i} \left\{ \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} (v_\alpha|_\beta - b_{\alpha\beta} w) + \frac{1}{2} m^{\alpha\beta} w_\alpha|_\beta \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} q^\alpha (b_\alpha^\gamma v_\gamma + w_{,\alpha} + w_\alpha) - p^\alpha v_\alpha - p w \right\} dF \\ & - \int_p \eta_\beta \left\{ (v_\alpha^+ - v_\alpha^-) \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta-}) + (w_\alpha^+ - w_\alpha^-) \frac{1}{2} (m^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta-}) \right. \\ & \quad \left. + (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (q^{\beta+} + q^{\beta-}) \right\} ds \\ & - \int_{R_S} \left\{ \hat{N} v_\alpha + \hat{M}^\alpha w_\alpha + \hat{Q} w \right\} ds \\ & - \int_{R_G} \eta_\beta \left\{ (v_\alpha - \hat{v}_\alpha) n^{\alpha\beta} + (w_\alpha - \hat{w}_\alpha) m^{\alpha\beta} + (w - \hat{w}) q^\beta \right\} ds \Rightarrow \text{stat.} \\ & \quad (3.2.10.) \end{aligned}$$

Die Variation ergibt schließlich die Gleichgewichtsbedingungen und die geometrischen und statischen Rand- und Übergangsbedingungen; die Schnittgrößen sind Funktionen der Verschiebungsgrößen.

$$\begin{aligned}
 & \delta \Pi_V [V_\alpha, w, w_\alpha] = \\
 & = \int_{\mathbb{F}_i} \left\{ (-n^{\alpha\beta}/\rho + b_{\alpha\beta}^0 q^\beta - p^\alpha) \delta V_\alpha \right. \\
 & \quad + (-q^\alpha/\alpha - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - p) \delta w \\
 & \quad \left. + (-m^{\alpha\beta}/\rho + q^\alpha) \delta w_\alpha \right\} d\mathbb{F} \\
 & + \int_{\mathbb{P}} \eta_\beta \left\{ (n^{\alpha\beta+} - n^{\alpha\beta-}) \delta \frac{1}{2} (V_\alpha^+ + V_\alpha^-) + (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-}) \delta \frac{1}{2} (w_\alpha^+ + w_\alpha^-) \right. \\
 & \quad \left. + (q^{\beta+} - q^{\beta-}) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) \right\} ds \\
 & - \int_{\mathbb{S}} \eta_\beta \left\{ (V_\alpha^+ - V_\alpha^-) \delta \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta+} + n^{\alpha\beta-}) + (w_\alpha^+ - w_\alpha^-) \delta \frac{1}{2} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \right. \\
 & \quad \left. + (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (q^{\beta+} + q^{\beta-}) \right\} ds \\
 & + \int_{\mathbb{R}_S} \left\{ (\eta_\beta n^{\alpha\beta} - \hat{N}^\alpha) \delta V_\alpha + (\eta_\beta m^{\alpha\beta} - \hat{M}^\alpha) \delta w_\alpha + (\eta_\beta q^\beta - \hat{Q}) \delta w \right\} ds \\
 & - \int_{\mathbb{R}_G} \left\{ (V_\alpha - \hat{V}_\alpha) \delta n^{\alpha\beta} + (w_\alpha - \hat{w}_\alpha) \delta m^{\alpha\beta} + (w - \hat{w}) \delta q^\beta \right\} ds = \sigma
 \end{aligned}$$

(3.2.11.)

Der Vollständigkeit halber werden die Gleichgewichtsbedingungen noch mit Hilfe der Verschiebungsgrößen formuliert:

$$- [{}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (v_{\gamma|\nu} - b_{\beta\nu} w) + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} w_{\gamma|\nu}] / \beta + b_{\beta 0}^{\nu} B^{\alpha\beta\gamma\delta} (b_{\alpha\nu}^{\nu} v_{\beta} + w_{\beta\nu} + w_{\nu\beta}) - \rho^{\alpha} = \sigma$$

$$- [{}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (b_{\alpha\nu}^{\nu} v_{\beta} + w_{\beta\nu} + w_{\nu\beta})] / \alpha - b_{\alpha\beta} [{}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (v_{\gamma|\nu} - b_{\beta\nu} w) + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} w_{\gamma|\nu}] - \rho = \sigma$$

$$- [{}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (v_{\gamma|\nu} - b_{\beta\nu} w) + {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} w_{\gamma|\nu}] / \beta + {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (b_{\alpha\nu}^{\nu} v_{\beta} + w_{\beta\nu} + w_{\nu\beta}) = \sigma \quad (3.2.12.)$$

Hierbei wie auch bei allen folgenden Gleichungen wird Isotropie angenommen, so daß die Komponenten ${}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ und ${}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ des Elastizitätstensors verschwinden.

Um auch gemischte Randbedingungen formulieren zu können, werden die Randintegrale auf die Basis der Randkurve bezogen:

$$\begin{aligned} & \int_{R_{N_n}} (n_{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha\beta} - \hat{N}_n) d n^{\alpha} v_{\alpha} ds + \int_{R_{M_t}} (t_{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha\beta} - \hat{M}_t) d t^{\alpha} v_{\alpha} ds \\ & + \int_{R_{M_t}} (n_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta} - \hat{M}_t) d n^{\alpha} w_{\alpha} ds + \int_{R_{M_n}} (t_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta} - \hat{M}_n) d t^{\alpha} w_{\alpha} ds \\ & + \int_{R_Q} (n_{\alpha} q^{\alpha} - \hat{Q}) d w \} ds \\ & + \int_{R_{V_n}} (n^{\alpha} v_{\alpha} - \hat{V}_n) d n_{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha\beta} ds + \int_{R_{V_t}} (t^{\alpha} v_{\alpha} - \hat{V}_t) d t_{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha\beta} ds \\ & + \int_{R_{\varphi_t}} (n^{\alpha} w_{\alpha} - \hat{\varphi}_t) d n_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta} ds + \int_{R_{\varphi_n}} (t^{\alpha} w_{\alpha} - \hat{\varphi}_n) d t_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta} ds \\ & + \int_{R_w} (w - \hat{w}) d n_{\beta} q^{\beta} ds = \sigma \quad (3.2.13.) \end{aligned}$$

3.3. Das in Bezug auf die geometrischen Übergangsbedingungen
verallgemeinerte Funktional von HELLINGER-REISSNER

Im Funktional (3.2.10.) sind die Schnittgrößen Funktionen der Verschiebungsgrößen. Man kann nun das darin enthaltene innere Potential mit Hilfe der Legendre-Transformation (2.7.11.) umformen. Gegenüber dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie sind die geometrischen Gleichungen nicht mehr a priori erfüllt. Das Stoffgesetz ist jedoch als bekannt vorauszusetzen. Man erhält zunächst:

$$\tilde{\Pi}_{(i)}^* = n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta(G)}^* + m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta(G)} + q^\alpha \gamma_{3\alpha(G)}^* - \tilde{\Pi}_{(i)}^*(n^{\alpha\beta}, \dots) \quad (3.3.1.)$$

$\gamma_{\alpha\beta(G)}^*$ und $\kappa_{\alpha\beta(G)}$ sind die aus den geometrischen Gleichungen definierten Verzerrungen. Mit (2.3.7.) und (2.7.8.) wird daraus:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{(i)}^* &= n^{\alpha\beta} (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} w_{\alpha|\beta} + q^\beta (b_{\beta\gamma}^\nu v_\gamma + w_{,\beta} + w_\beta) \\ &\quad - \frac{1}{2} {}_0 C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} - {}_1 C_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} {}_2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} {}_0 C_{3\alpha 3\beta} q^\alpha q^\beta \quad (3.3.2.) \end{aligned}$$

Damit erhält man aus (3.2.10.):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V [v_\alpha, w, w_\alpha, n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^\alpha] &= \\ &= \sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \{ n^{\alpha\beta} (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w) + m^{\alpha\beta} w_{\alpha|\beta} + q^\beta (b_{\beta\gamma}^\nu v_\gamma + w_{,\beta} + w_\beta) \\ &\quad - \frac{1}{2} {}_0 C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha\beta} n^{\gamma\delta} - {}_1 C_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} {}_2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} {}_0 C_{3\alpha 3\beta} q^\alpha q^\beta - \hat{\rho}^\alpha v_\alpha - \hat{\rho} w \} dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathcal{P}} \{ (v_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{-}) \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta+} + n^{\alpha\beta-}) + (w_{\alpha}^{+} - w_{\alpha}^{-}) \frac{1}{2} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \\
 & \quad + (w^{+} - w^{-}) \frac{1}{2} (q^{\beta+} + q^{\beta-}) \} ds \\
 & - \int_{\mathcal{R}_s} \{ \hat{N}^{\alpha} v_{\alpha} + \hat{M}^{\alpha} w_{\alpha} + \hat{Q} w \} ds \\
 & - \int_{\mathcal{R}_G} \{ (v_{\alpha} - \hat{v}_{\alpha}) n^{\alpha\beta} + (w_{\alpha} - \hat{w}_{\alpha}) m^{\alpha\beta} + (w - \hat{w}) q^{\beta} \} ds \Rightarrow \text{stat} \\
 & \hspace{15em} (3.3.3.)
 \end{aligned}$$

Die Variation liefert zusätzlich zu (3.2.11.) noch die geometrischen Gleichungen, die in Verbindung mit dem Stoffgesetz die Schnittkraft-Verschiebungsgleichungen ergeben.

$$\begin{aligned}
 & \delta R_V [v_{\alpha}, w, w_{\alpha}, n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^{\alpha}] = \\
 & = \sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \{ (v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w - {}_0 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} - {}_1 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta}) \delta n^{\alpha\beta} \\
 & \quad + (w_{\alpha/\beta} - {}_1 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\gamma\delta} - {}_2 C'_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta}) \delta m^{\alpha\beta} \\
 & \quad + (b_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma} + w_{,\alpha} + w_{\alpha} - {}_0 C'_{3\alpha 3\delta} q^{\delta}) \delta q^{\alpha} \} dF_i \\
 & + \text{Zeilen 2-10 vom (3.2.11.)}
 \end{aligned}$$

(3.3.4.)

Dies sind die sogenannten kanonischen Gleichungen.

Eine formale Umformung in diesem Sinn gibt KLINGBEIL [2] für die Schalentheorie nach Green-Zerna.

Eine andere Methode, zum Funktional (3.3.3.) zu gelangen, besteht im Hinzufügen der konstitutiven Gleichungen (2.7.6.) zum Funktional (3.2.10.). Als Lagrange-Parameter ergeben sich die halben Schnittgrößen.

3.4. Das in Bezug auf die geometrischen Übergangsbedingungen
verallgemeinerte Funktional von HU-WASHIZU

Beim Funktional von Hu-Washizu treten neben den Verschiebungsfunktionen und den Schnittgrößen auch noch die Verzerrungskomponenten $f_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$ und $f_{3\alpha}$ als unabhängige Koordinatenfunktionen auf. Im Unterschied zum Funktional von Hellinger-Reissner tritt also auch das Stoffgesetz als Euler-Lagrangesche Gleichung des zugeordneten Variationsproblems auf. Man gelangt zum verallgemeinerten Funktional, wenn man in (3.2.10.) das innere Potential als quadratische Form der Verzerrungskomponenten schreibt und die kinematischen Gleichungen (2.3.7.) nach Lagrange hinzufügt. Als Lagrange-Parameter ergeben sich unter Berücksichtigung der konstitutiven Gleichungen (2.7.5.) die negativen Schnittgrößen.

Das verallgemeinerte Funktional lautet:

$$\begin{aligned}
 & H_V [v_\alpha, w, w_\alpha, f_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta}, f_{3\alpha}, m^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^\alpha] = \\
 & = \int_V \int_{F_i} \int_{L_2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha\beta} f_{\gamma\delta} + \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha\beta} k_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\alpha\beta} k_{\gamma\delta} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{3\alpha\beta\gamma} f_{3\alpha} f_{3\beta} - m^{\alpha\beta} (f_{\alpha\beta} - v_{\alpha/\beta} + b_{\alpha\beta} w) \\
 & \quad - m^{\alpha\beta} (k_{\alpha\beta} - w_{\alpha/\beta}) - q^\alpha (f_{3\alpha} - b_\alpha^4 v_4 - w_{1\alpha}) - w_\alpha \\
 & \quad - \hat{p}^\alpha v_\alpha - \hat{p} w \} dF \\
 & + \text{Zeilen 4-7 von (3.2.10)} \qquad \qquad \qquad (3.4.1.)
 \end{aligned}$$

Die Variation liefert:

$$\begin{aligned}
 dH_V = \int_{\mathcal{F}} \{ & (-n^{\alpha\beta}/\rho + b_{\beta}^{\gamma} q^{\beta} - \rho^{\alpha}) \delta v_{\alpha} \\
 & + (-q^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \rho) \delta w \\
 & + (-m^{\alpha\beta}/\rho + q^{\alpha}) \delta w_{\alpha} \\
 & - (f_{\alpha\beta} - v_{\alpha}/\rho + b_{\alpha\beta} w) \delta n^{\alpha\beta} \\
 & - (k_{\alpha\beta} - w_{\alpha}/\rho) \delta m^{\alpha\beta} \\
 & - (f_{3\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma} - w_{,\alpha} - w_{\alpha}) \delta q^{\alpha} \\
 & - (n^{\alpha\beta} - {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} - {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}) \delta f_{\alpha\beta} \\
 & - (m^{\alpha\beta} - {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} - {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}) \delta k_{\alpha\beta} \\
 & - (q^{\alpha} - {}_0 B^{3\alpha 3\delta} f_{3\delta}) \delta f_{3\alpha} \} dF
 \end{aligned}$$

+ Zeilen 5-10 von (3.2.11)

(3.4.2.)

Man erhält mit den Gleichgewichtsbedingungen, den kinematischen und konstitutiven Gleichungen im Gebiet und den statischen und geometrischen Übergangs- und Randbedingungen an den Bereichsgrenzen und Rändern alle Grundgleichungen der Schalentheorie. Die konstitutiven Gleichungen sind gegenüber dem Funktional von Hellinger-Reissner invertiert.

3.5 Vernachlässigung der Schubverzerrungen - Kirchhoffsche Theorie

Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, folgt aus der Normalenhypothese die Nebenbedingung (2.3.8.) für die Verschiebungsfunktionen.

$$W_{,\alpha} = -W_{,1\alpha} - b_{\alpha}^{\psi} v_{\psi} \quad (3.5.1.)$$

Damit ist $W_{,\alpha}$ keine unabhängige Funktion mehr und kann aus den Differentialgleichungen und Funktionalen eliminiert werden.

Im Gegensatz hierzu nimmt KLINGBEIL [2] die Nebenbedingung (3.5.1.) ins Funktional auf. Dieser Weg ist sinnvoll, wenn die Ordnung der Differentialgleichungen beibehalten werden soll. Im vorliegenden Fall scheint es zweckmäßiger, die Zahl der verschiedenartigen Ansatzfunktionen zu verringern, deshalb wird diese Methode nicht verfolgt.

Für die konstitutiven Gleichungen ergibt sich aus (2.7.5.) mit (3.5.1.):

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (V_{\gamma|\delta} - b_{\gamma\delta} W) + {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} [W|_{\gamma\delta} + (b_{\gamma}^{\psi} v_{\psi})|_{\delta}] \\ m^{\alpha\beta} &= {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} (V_{\gamma|\delta} - b_{\gamma\delta} W) + {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} [W|_{\gamma\delta} + (b_{\gamma}^{\psi} v_{\psi})|_{\delta}] \end{aligned} \quad (3.5.2.)$$

Eine konstitutive Gleichung für die Querkräfte läßt sich wegen der Vernachlässigung der Schubverzerrungen aus (2.7.5.) nicht herleiten. Die Querkräfte sind vielmehr durch die Gleichgewichtsbedingungen als kovariante Ableitungen des Momententensors gegeben:

$$q^{\alpha} = m^{\alpha\beta}|_{\beta} \quad (3.5.3.)$$

Bei der Umformung der Funktionale mit Hilfe von (3.5.1.) ist es zweckmäßig, gleichzeitig die Querkräfte nach (3.5.3.) zu eliminieren. Es läßt sich leicht zeigen, daß dies auch für die Lagrange-Parameter in (3.2.10.) zulässig ist; eliminiert man nämlich die Querkräfte schon im Funktional (2.10.1.) und fügt dann die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen hinzu, so ergeben sich anstelle der Querkräfte in (3.2.10.) die kovarianten Ableitungen der Momente nach (3.5.3.) als Lagrange-Parameter.

Damit ergibt sich aus (3.2.10.):

$$\begin{aligned}
 \Pi_{VK} [V_\alpha, W] &= \\
 &= \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} (V_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} W) - \frac{1}{2} m^{\alpha\beta} [W_{|\alpha\beta} + (b_{\alpha}^{\gamma} V_{\gamma})_{|\beta}] \\
 &\quad - p^\alpha V_\alpha - p W \} d\mathcal{F} \\
 &- \int_{\mathcal{P}} (V_\alpha^+ - V_\alpha^-) \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} [n^{\alpha\beta+} + n^{\alpha\beta-} - b_{\beta\gamma}^\alpha (m^{\gamma\delta+} + m^{\gamma\delta-})] \\
 &\quad - (W|_\alpha^+ - W|_\alpha^-) \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \\
 &\quad + (W^+ - W^-) \frac{1}{2} n_\alpha (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-})_{|\beta} \} ds \\
 &- \int_{\mathcal{R}_S} (\hat{N}^\alpha - b_{\beta\gamma}^\alpha \hat{M}^{\beta\gamma}) V_\alpha - \hat{M}^\alpha W|_\alpha + \hat{Q} W \} ds \\
 &- \int_{\mathcal{R}} \eta_{\beta\gamma} \{ (V_\alpha - \bar{V}_\alpha) (n^{\alpha\beta} - b_{\beta\gamma}^\alpha m^{\gamma\delta}) - (W|_\alpha - \bar{W}|_\alpha) m^{\alpha\beta} \\
 &\quad + (W - \bar{W}) m^{\alpha\beta} \}_{|\beta} \} ds \Rightarrow \text{stat.} \quad (3.5.4.)
 \end{aligned}$$

Die Ableitungen $w|_{\alpha}$ werden nun auf die orthogonale Basis der Randkurve bezogen:

$$\begin{aligned} w|_{\alpha}^+ &= t_{\alpha}^+ \frac{\partial w^+}{\partial s^+} + n_{\alpha}^+ \frac{\partial w^+}{\partial n^+} = t_{\alpha}^+ w|_s^+ + n_{\alpha}^+ w|_n^+ \\ w|_{\alpha}^- &= t_{\alpha}^- \frac{\partial w^-}{\partial s^-} + n_{\alpha}^- \frac{\partial w^-}{\partial n^-} = t_{\alpha}^- \frac{\partial w^-}{\partial s^-} + n_{\alpha}^- \frac{\partial w^-}{\partial n^-} \\ &= t_{\alpha}^+ w|_s^- + n_{\alpha}^+ w|_n^- \end{aligned} \quad (3.5.5.)$$

Damit lassen sich die entsprechenden Linienintegrale umformen. Es ergibt sich z.B. für das Linienintegral $\int_{\mathcal{F}_i} ds$ zwischen den Knoten I_i und II_i :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_i} \eta_{\beta} w|_{\alpha} m^{\alpha\beta} ds &= \int_{\mathcal{F}_i} \{ \eta_{\alpha} \eta_{\beta} w|_n m^{\alpha\beta} + t_{\alpha} \eta_{\beta} w|_s m^{\alpha\beta} \} ds \\ &= \int_{\mathcal{F}_i} \{ \eta_{\alpha} \eta_{\beta} w|_n m^{\alpha\beta} - w|_s (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta}) \} ds + [w|_s t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta}]_{I_i}^{II_i} \end{aligned} \quad (3.5.6.)$$

Das Funktional (3.5.4.) lautet dann:

$$\begin{aligned} \Pi_{VK} [V_{\alpha}, w] &= \\ &= \sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \left[\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w) - \frac{1}{2} m^{\alpha\beta} [w|_{\alpha\beta} + (b_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma})|_{\beta}] \right. \\ &\quad \left. - \hat{p}^{\alpha} v_{\alpha} - \hat{p} w \right] d\mathcal{F} \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left[(v_{\alpha}^+ - v_{\alpha}^-) \frac{1}{2} \eta_{\beta} [\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} - b_{\beta}^{\alpha} (m^{\gamma\beta} + m^{\gamma\beta})] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (w^+ - w^-) \frac{1}{2} \left[n_\alpha (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) / \beta + (t_\alpha \eta_\beta m^{\alpha\beta+}) / s + (t_\alpha \eta_\beta m^{\alpha\beta-}) / s \right] \\
 & - (w^+ |_n - w^- |_n) \frac{1}{2} n_\alpha \eta_\beta (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \} ds \\
 & + \sum_K (w^+ - w^-) \frac{1}{2} \alpha \eta_\beta (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \Big|_I^{\text{II}} \\
 & - \int_{R_S} \left\{ \overbrace{(\hat{N}^\alpha - b_p^\alpha \hat{M}^p)}^{\hat{p}^\alpha} v_\alpha + \overbrace{[\hat{Q} + (t_\alpha \hat{M}^\alpha) / s]}^{\hat{v}} \right\} w \\
 & \quad - n_\alpha \overbrace{\hat{M}^\alpha}^{\hat{p}^\alpha} w |_n \} ds \\
 & + \sum_{K_S} \sum_r \overbrace{[t_\alpha \hat{M}^{\alpha(r)}]}^{\hat{p}^\alpha} w \\
 & - \int_{R_\alpha} \left\{ (v_\alpha - \hat{v}_\alpha) \eta_\beta (n^{\alpha\beta} - b_p^\alpha m^{\beta p}) \right. \\
 & \quad \left. + (w - \hat{w}) [n_\alpha m^{\alpha\beta} / \beta + (t_\alpha \eta_\beta m^{\alpha\beta}) / s] \right. \\
 & \quad \left. - (w |_n - \hat{w} |_n) n_\alpha \eta_\beta m^{\alpha\beta} \right\} ds \\
 & + \sum_{K_S} \sum_r \left[(w - \hat{w}) \frac{1}{2} t_\alpha \eta_\beta (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \right] \Rightarrow \text{stat.} \quad (3.5.7.)
 \end{aligned}$$

r ist die Anzahl der in K einmündenden Bereichsgrenzen.

Die Variation liefert unter Beachtung von (3.5.2.) und bei entsprechender partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 & \delta \Pi_{V,K} [v_\alpha, w] = \\
 & = \sum_i \int_{F_i} \left\{ [-n^{\alpha\beta} / \beta - b_p^\alpha q^p - p^\alpha] \delta v_\alpha \right. \\
 & \quad \left. + [-m^{\alpha\beta} / \beta_\alpha - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - p] \delta w \right\} dF
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\mathbb{P}} \left\{ \eta_{\beta} [n^{\alpha\beta+} - n^{\alpha\beta-} - b_{\varphi}^{\alpha} (m^{\psi\beta+} - m^{\psi\beta-})] \delta^{\frac{1}{2}} (V_{\alpha}^{+} + V_{\alpha}^{-}) \right. \\
 & \quad + [n_{\alpha} (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-})]_{\beta} + (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta+})|_s - (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta-})|_s \Big\} * \\
 & \quad * \delta^{\frac{1}{2}} (W^{+} + W^{-}) \\
 & \quad - [n_{\alpha} \eta_{\beta} (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-})] \delta^{\frac{1}{2}} (W^{+} + W^{-})|_n \\
 & \quad - [V_{\alpha}^{+} - V_{\alpha}^{-}] \delta^{\frac{1}{2}} \eta_{\beta} [n^{\alpha\beta+} + n^{\alpha\beta-} - b_{\varphi}^{\alpha} (m^{\psi\beta+} + m^{\psi\beta-})] \\
 & \quad - [W^{+} - W^{-}] \delta^{\frac{1}{2}} [n_{\alpha} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-})]_{\beta} + (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta+})|_s \\
 & \quad \quad \quad + (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta-})|_s \Big] \\
 & \quad + [W^{+}|_n - W^{-}|_n] \delta^{\frac{1}{2}} n_{\alpha} \eta_{\beta} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) \Big\} ds \\
 & \quad - \sum_{\mu, \nu} [t_{\alpha} \eta_{\beta} (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-}) \delta^{\frac{1}{2}} (W^{+} + W^{-})] \\
 & \quad + \sum_{k, r} [(W^{+} - W^{-}) \delta^{\frac{1}{2}} t_{\alpha} \eta_{\beta} (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-})] \\
 & \quad + \int_{R_s} \left\{ [\eta_{\beta} (n^{\alpha\beta} - b_{\varphi}^{\alpha} m^{\psi\beta}) - \hat{p}^{\alpha}] \delta V_{\alpha} \right. \\
 & \quad \quad + [n_{\alpha} m^{\alpha\beta}|_{\beta} + (t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta})|_s - \hat{v}] \delta w \\
 & \quad \quad \left. - [n_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta} - \hat{M}] \delta w|_n \right\} ds \\
 & \quad - \int_{R_s} \left\{ [V_{\alpha} - \hat{v}_{\alpha}] \delta n_{\beta} (n^{\alpha\beta} - b_{\varphi}^{\alpha} m^{\psi\beta}) \right. \\
 & \quad \quad \left. + [W - \hat{w}] \delta (n_{\alpha} m^{\alpha\beta}|_{\beta} + [t_{\alpha} \eta_{\beta} m^{\alpha\beta}]|_s) \right\}
 \end{aligned}$$

$$- [w/n - \hat{w}/n] d^2 n_\alpha n_\beta m^{\alpha\beta} \} ds$$

$$- \sum_{k_s r} \sum [t_\alpha n_\beta (m^{\alpha\beta+} - m^{\alpha\beta-}) - \hat{p}_k^{(r)}] \int \frac{1}{2} (w^+ + w^-)$$

$$+ \sum_{k_s r} \sum [w - \hat{w}] \int \frac{1}{2} t_\alpha n_\beta (m^{\alpha\beta+} + m^{\alpha\beta-}) = \sigma \quad (3.5.8.)$$

Man erhält wieder die Gleichgewichtsbedingungen, die geometrischen und statischen Rand- und Übergangsbedingungen an den Bereichsgrenzen und zusätzlich die Rand- und Übergangsbedingungen für die Durchbiegung w und das Drillmoment $t_\alpha n_\beta m^{\alpha\beta}$ in den Knotenpunkten. Damit entfällt auch die einzige bei BUFLER [2] verbliebene Kontinuitätsbedingung für die Ansatzfunktionen.

Die Zahl der Randbedingungen ist von jeweils 5 auf 4 zurückgegangen, da durch den Verlauf der Durchbiegung w entlang des Randes gleichzeitig die Neigung w/s bestimmt ist und nicht mehr als unabhängige Größe auftreten kann.

Um aus (3.5.7.) das erweiterte Funktional nach Hellinger-Reissner herzuleiten, werden die invertierten konstitutiven Gleichungen (3.5.2.) nach Lagrange hinzugefügt.

Es ergibt sich dann das Funktional:

$$R_{VK} [v_\alpha, w, n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}] =$$

$$= \int_{F_i} \int [n^{\alpha\beta} (v_\alpha/s - b_{\alpha\beta} w) - m^{\alpha\beta} [w/s + (b_\alpha^\gamma v_\gamma)/s]]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \circ d_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - {}_1 d_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} \\
 & -\frac{1}{2} {}_2 d_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\alpha\beta} m^{\gamma\delta} - \rho^\alpha v_\alpha - \rho w \} dF \\
 & + \text{Zeilen 3-13 von (3.5.7)} \qquad (3.5.9)
 \end{aligned}$$

Die Variation liefert:

$$\begin{aligned}
 \delta R_{VK} [v_\alpha, w, \eta^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}] &= \\
 &= \int_{F_i} \{ [v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w - {}_0 d_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\gamma\delta} - {}_1 d_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta}] \delta \eta^{\alpha\beta} \\
 & \quad + [-w]_{\alpha/\beta} - (b_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} v_\gamma) / \beta - {}_1 d_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\gamma\delta} - {}_2 d_{\alpha\beta\gamma\delta} m^{\gamma\delta} \} \delta m^{\alpha\beta} \} dF \\
 & + \text{rechte Seite von (3.5.8)} \qquad (3.5.10.)
 \end{aligned}$$

Das erweiterte Funktional nach Hu-Washizu wird wie in Abschnitt 3.4 hergeleitet. Die kinematische Gleichung für die Schubverzerrung $\gamma_{\beta\alpha}$ entfällt.

Das Funktional lautet:

$$\begin{aligned}
 H_{VK} [v_\alpha, w, \gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \eta^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}] &= \\
 &= \int_{F_i} \{ \frac{1}{2} \circ B^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} \\
 & \quad - \eta^{\alpha\beta} (\gamma_{\alpha/\beta} - v_{\alpha/\beta} - b_{\alpha\beta} w) - m^{\alpha\beta} [\kappa_{\alpha\beta} + w]_{\alpha/\beta} + (b_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} v_\gamma) / \beta \} \\
 & \quad - \rho^\alpha v_\alpha - \rho w \} dF
 \end{aligned}$$

+ Zeilen 3-13 von (3.5.7)

(3.5.11.)

Die Variation ergibt zusätzlich zu (3.5.8.) noch die konstitutiven und kinematischen Gleichungen.

4. Lösungen mit Hilfe eines Parameteransatzes

4.1 Übersicht

Die wahren Lösungen der Variationsfunktionale sollen durch Parameteransätze angenähert werden. Diese Ansätze haben die Form:

$$\tilde{f}(\theta'_1, \theta'_2) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}_i(\theta'_1, \theta'_2) \quad (4.1.1.)$$

mit den Ansatzfunktionen $\bar{f}_i(\theta'_1, \theta'_2)$ und den zu bestimmenden Konstanten a_i . Beim Ritz'schen Verfahren müssen diese Ansätze die wesentlichen Rand- und Übergangsbedingungen des Variationsproblems erfüllen. Diese Voraussetzung entfällt bei verallgemeinerten Funktionalen.

Zur Bestimmung der Parameter a_i sind verschiedene Methoden möglich.

An erster Stelle ist das Einsetzen des Parameteransatzes in das Funktional F zu nennen. Die a_i werden wegen der Forderung eines stationären Werts des Funktionals durch das Gleichungssystem bestimmt, das sich durch Ableiten nach den Parametern ergibt:

$$F \Rightarrow \text{stat.} \quad \leadsto \quad \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (4.1.2.)$$

Diese Methode benützt das Funktional zur direkten Bestimmung der Parameter und wird als direktes Variationsverfahren bezeichnet.

Daneben gibt es noch einige Verfahren, die die Parameter über die Eulerschen Differentialgleichungen des Funktionals

bestimmen. Dies sind die Orthogonalitätsmethode mit der Methode von Galerkin als Sonderfall, die Methode des Fehlerquadratminimums unter Berücksichtigung von Gewichtsfunktionen, und die überbestimmte Kollokation, die auch als diskretisierte Form des Fehlerquadratminimums interpretiert werden kann.

In der vorliegenden Arbeit werden die Einsetzmethode und die überbestimmte Kollokation angewandt; eine Beschreibung der übrigen Verfahren findet man beispielsweise bei COLLATZ.

4.2 Positive Definitheit. Arten der Konvergenz

Im Folgenden wird mehrfach der Begriff der positiven Definitheit benützt.

Bei einem Funktional versteht man darunter, daß sein Wert bei beliebigem Verlauf der Koordinatenfunktionen größer oder gleich null ist, null jedoch nur dann, wenn alle Koordinatenfunktionen identisch verschwinden.

Positive Definitheit einer symmetrischen Matrix A liegt vor, wenn für den beliebigen Vektor x gilt:

$$\begin{aligned} x^T A x &> \sigma && \text{für } x \neq \sigma \\ &= \sigma && \text{für } x = \sigma \end{aligned} \quad (4.2.1.)$$

Die Eigenschaften positiv definiter Matrizen werden von WILKINSON und FADDEJEW-FADDEJEWJA ausführlich dargestellt; hier sollen nur einige Sätze kurz wiedergegeben werden.

1.) Eine positiv definite Matrix A läßt sich als Produkt einer Dreiecksmatrix R mit sich selbst darstellen:

$$A = R^T R \quad (4.2.2.)$$

Hierauf basiert die Gleichungsauflösung nach Cholesky, bei der keine Pivottisierung nötig ist.

2.) Bei einer positiv definiten Matrix sind die Determinante und alle Eigenwerte größer null.

3.) Die Kongruenztransformation einer positiv definiten Matrix A mit einer nichtsingulären Matrix C ergibt wieder eine positiv definite Matrix B:

$$B = C^T A C \quad \text{pos. def.} \quad (4.2.3.)$$

Dies gilt auch für spaltenreguläre Rechteckmatrizen C.

4.) Die Summe einer positiv definiten Matrix A und einer symmetrischen Matrix B ist dann positiv definit, wenn der größte Eigenwert $\max \lambda_B$ von B kleiner als der kleinste Eigenwert $\min \lambda_A$ von A ist.

Bei der Beurteilung der Konvergenz einer Funktionenreihe spielt neben der Geschwindigkeit der Konvergenz auch die Art der Konvergenz eine Rolle.

Man unterscheidet drei Arten (S. z. B. ZURMÜHL, MICHLIN):

1.) Die stetige Konvergenz liegt vor, wenn der Fehler σ zwischen der Näherungsfunktion \tilde{f} und der Funktion f an jeder Stelle θ_1, θ^2 gegen null strebt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int(\theta_1, \theta^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f} - f) = 0$$

2.) Von Konvergenz im Mittel wird gesprochen, wenn das Integral über das Fehlerquadrat für den ganzen Bereich gegen null strebt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(\tilde{\theta}', \theta') - f(\theta', \theta')]^2 d\Omega = 0$$

In diesem Fall ist über die Größe des Fehlers an einer bestimmten Stelle keine Aussage gemacht.

3.) Bei der Konvergenz bezüglich der Energie strebt der Funktionalwert für die Näherungsfunktion gegen den wahren Wert des homogenen Funktionals:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{F}_{hom}(f) - F_{hom}(f)] = 0$$

Ist der dem Variationsproblem zugeordnete Differenzialoperator linear und selbstadjungiert, läßt sich statt dessen auch schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_{hom}(\tilde{f} - f) = 0$$

Für ein positiv definites Funktional kann man nach MICHLIN aus der Konvergenz bezüglich der Energie auch die Konvergenz im Mittel herleiten. Da die Funktionale nach Hellinger-Reissner und Hu-Washizu nicht positiv definit sind, kann für sie dieser weitgehende Beweis nicht geführt werden. Für das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie ist er jedoch möglich.

4.3 Ritz-Methode (Einsetzen ins Funktional)

Die Parameteransätze haben die Form (4.1.1.), die beispielsweise für V_α lautet:

$$\tilde{V}_\alpha(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^n a_{i|V_\alpha} \bar{V}_{\alpha i}(\theta^1, \theta^2) \quad (4.3.1.)$$

Als Ansatzfunktionen eignen sich Polynome, solange hohe Potenzen vermieden werden.

Die einzelnen Glieder der Reihe müssen linear unabhängig sein. Die Stetigkeitsvoraussetzungen lassen sich aus den variierten erweiterten Funktionalen ablesen: Innerhalb eines Bereichs müssen die für die Bereichsgrenzen geltenden Kontinuitätsbedingungen exakt erfüllt sein.

Für die numerische Berechnung ist es günstig, wenn die Ansatzfunktionen ein hohes Maß von Orthogonalität bezüglich des Differentialoperators des Funktionals haben, so daß die Diagonalglieder betragsmäßig überwiegen. Dies läßt sich einerseits durch ein - in diesem Falle aufwendiges - Orthogonalisierungsverfahren erreichen, andererseits aber auch durch eine Unterteilung in kleine Bereiche, für die Ansätze mit geringerer Parameterzahl gewählt werden können.

Weiter ist es wünschenswert, die Ansatzfunktionen so zu normieren, daß die Größenordnungen der Diagonalglieder betragsmäßig etwa gleich werden.

Die Gleichungssysteme zur Berechnung der Parameter a_i ergeben sich aus den Funktionalen durch Ableiten nach den a_i . Die Gleichungen gehen aus den variierten Funktionalen hervor,

wenn die variierten Größen durch die Reihenglieder der Ansätze ersetzt werden, z.B.:

$$\delta V_{\alpha} \rightarrow \frac{\delta \tilde{V}_{\alpha}}{\delta \alpha_i} = \bar{V}_{\alpha_i} \quad (4.3.2.)$$

Die Gleichungssysteme für die Funktionale (3.3.1.) und (3.5.9.) nach Hellinger-Reissner sowie (3.4.1.) und (3.5.11.) nach Hu-Washizu haben die Galerkin'sche Form; dies gilt nicht für die Funktionale (3.2.10.) und (3.5.7.), bei denen die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen mit den Schnittgrößen multipliziert werden, die in diesen Fällen Funktionen der Verschiebungsgrößen sind und deren Ableitungen enthalten.

Bei der Variation der Funktionale wurde partielle Integration angewandt, um die Differentialgleichungen für das Gebiet von den Rand- und Übergangsbedingungen zu trennen. Diese Umformung ist zum Aufstellen des algebraischen Gleichungssystems für die Ansatzparameter nicht erforderlich, da sie hierauf ohne Einfluß ist.

Es ist dagegen zweckmäßig, die Integrale über die Bereichsgrenzen \mathcal{S} in Anteile aufzuspalten, die sich auf die einzelnen Bereiche beziehen. So erhält man beispielsweise für ein Integral über die Grenze zwischen den Bereichen i und k:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{S}(i,k)} n_{\beta(i)} (V_{\alpha(i)} - V_{\alpha(k)}) \frac{1}{2} (n^{\alpha\beta}_{(i)} + n^{\alpha\beta}_{(k)}) ds = \\ & = - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}(i,k)} n_{\beta(i)} V_{\alpha(i)} n^{\alpha\beta}_{(i)} ds - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}(k,i)} n_{\beta(k)} V_{\alpha(k)} n^{\alpha\beta}_{(k)} ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}(i,k)} n_{\beta(i)} V_{\alpha(i)} n^{\alpha\beta}_{(k)} ds - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}(k,i)} n_{\beta(k)} V_{\alpha(k)} n^{\alpha\beta}_{(i)} ds \quad (4.3.3.) \end{aligned}$$

Damit können die Gleichungssysteme zur Bestimmung der Ansatzparameter in Matrizenform geschrieben werden. Die Matrizen selbst sind am Ende dieses Abschnitts zusammengestellt.

a) Funktional (3.2.10.)

Die i-te Zeile lautet

$$(F_i + B_i) a_{vi} + \sum_l B_{il} a_{vl} + \tilde{\beta}_i = \sigma \quad (4.3.4.)$$

i durchläuft die Anzahl der Bereiche.

k nimmt die Größe der Indices der l Bereiche an, die mit dem Bereich i eine gemeinsame Grenze haben.

Die Matrix F_i ist positiv, aber nicht positiv definit. Ihre quadratische Form stellt das innere Potential dar, das bei Starrkörperverschiebungen null wird, ohne daß die Ansatzparameter der Verschiebungen alle verschwinden, wie aus Abschnitt 2.9 hervorgeht.

Im Gegensatz zum variierten Funktional (3.2.11.) kommen in F_i keine Ableitungen der Elastizitätstensoren vor.

Das vollständige Gleichungssystem hat Bandstruktur. Die Verknüpfung der Parameter der einzelnen Bereiche erfolgt durch die Matrizen B_{ik} . Da $B_{ik}^T \neq B_{ki}$, ist das System unsymmetrisch.

b) Funktional (3.3.1.)

Durch Ableiten nach a_{vi} und a_{si} ergeben sich die beiden Matrixgleichungen:

$$G_i^T a_{si} + \sum_k G_{ki}^T a_{sk} + p_i = \sigma$$

$$G_i a_{vi} + \sum_k G_{ik} a_{vk} + K_i a_{si} + V_i = \sigma \quad (4.3.5.)$$

Die Matrix $-K_i$ ist positiv definit, ihre quadratische Form stellt das negative innere Komplementärpotential dar. Das vollständige Gleichungssystem ist symmetrisch, aber nicht positiv definit. Es läßt sich durch Zwischenelementation der Parameter a_{si} , der Schnittgrößen auf ein positiv definites Gleichungssystem für die Parameter der Verschiebungsfunktionen reduzieren.

Um dies zu zeigen, werden jeweils die Vektoren a_{vi} , a_{si} , p_i und v_i zusammengefaßt:

$$a_v = [a_{v1}, a_{v2} \dots a_{vn}]^T ; \quad a_s = [a_{s1}, a_{s2} \dots a_{sn}]^T$$

$$p = [p_1, p_2 \dots p_n]^T ; \quad V = [V_1, V_2 \dots V_n]^T \quad (4.3.6.)$$

Damit kann das Gleichungssystem folgendermaßen geschrieben werden:

$$G^T a_s + p = \sigma \quad (4.3.7.)$$

$$G a_v + K a_s + V = \sigma \quad (4.3.8.)$$

Die Matrix G setzt sich aus den Matrizen G_i und G_{ik} zusammen, die quasi-diagonale Matrix K enthält die Matrizen K_i .

Die Gleichung (4.3.8.) läßt sich nach a_s auflösen:

$$a_s = -K^{-1}V - K^{-1}G a_v \quad (4.3.9.)$$

Durch Einsetzen von (4.3.9.) ergibt sich aus (4.3.7.):

$$G^T K^{-1} G a_v - p + G^T K^{-1} V = \sigma \quad (4.3.10.)$$

die Matrix $-K$ und damit auch $-K^{-1}$ sind positiv definit, G ist spaltenregulär, damit ist $-G^T K^{-1} G$ ebenfalls positiv definit. Die Inversion von K ist wegen der quasi-diagonalen Form nicht rechenintensiv. K^{-1} ist wieder quasi-diagonal.

Diese Zwischenelimination entspricht dem bei TOTTENHAM-BREBBIA für die Platte beschriebenen Vorgehen.

c) Funktional (3.4.1.)

Ableiten nach a_{vi} , a_{si} und a_{zi} ergibt die drei Matrizen-
gleichungen:

$$\begin{aligned} G_i^T a_{si} + \sum_L G_{ki}^T a_{sk} &+ p_i = \sigma \\ G_i a_{vi} + \sum_L G_{ik} a_{vk} &+ E_i^T a_{zi} + V_i = 0 \\ E_i a_{si} &+ D_i a_{zi} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.11.)$$

Die Matrix D_i ist wie F_i positiv, aber nicht positiv definit. Das vollständige Gleichungssystem ist symmetrisch und nicht positiv definit.

Eliminiert man entsprechend dem Vorgehen beim System (4.3.5.)

die Parameter a_{zi} und a_{si} , so erhält man:

$$a_z = -D^{-1}E a_s$$

$$a_s = (E^T D^{-1} E)^{-1} V + (E^T D^{-1} E)^{-1} G a_v$$

$$G^T (E^T D^{-1} E)^{-1} G a_v + p + G^T (E^T D^{-1} E)^{-1} V = \sigma \quad (4.3.12.)$$

Die Matrizen D und E und der Vektor a_z ergeben sich aus den entsprechenden Matrizen der Einzelbereiche. D ist wie K quasi-diagonal, ebenso E, so daß auch $(E^T D^{-1} E)^{-1}$ quasi-diagonal ist.

Nun soll noch am Beispiel des erweiterten Funktionals nach Hellinger-Reissner die Art der Konvergenz untersucht werden. Dazu wird das Funktional durch partielle Integration auf folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} R_v [\tilde{V}_\alpha, \tilde{W}_1, \tilde{W}_\alpha, \tilde{m}^{\alpha\beta}, \tilde{m}^{\alpha\beta}, \tilde{q}^{\alpha\beta}] = \\ = \int_{\mathbb{F}_i} \{ (-\tilde{m}^{\alpha\beta}/\rho + b_\beta^\alpha \tilde{q}^\beta) \tilde{V}_\alpha \\ + (-\tilde{q}^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \tilde{m}^{\alpha\beta}) \tilde{W} \\ + (-\tilde{m}^{\alpha\beta}/\rho + \tilde{q}^\alpha) \tilde{W}_\alpha \\ + (\tilde{V}_\alpha/\rho - b_{\alpha\beta} \tilde{W} - {}_0 c_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{m}^{\gamma\delta} - {}_1 c_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{m}^{\gamma\delta}) \tilde{m}^{\alpha\beta} \\ + (\tilde{W}_\alpha/\rho - {}_1 c_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{m}^{\gamma\delta} - {}_2 c_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{m}^{\gamma\delta}) \tilde{m}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (b_{\alpha}^{\beta} \tilde{V}_{\beta} + \tilde{W}_{\alpha} + \tilde{u}_{\alpha} - {}_0 C_{3\alpha 3\sigma} \tilde{q}^{\sigma}) \tilde{q}^{\alpha} \} dF \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \eta_{\beta} \{ (\tilde{n}^{\alpha\beta} + - \tilde{n}^{\alpha\beta-}) \frac{1}{2} (\tilde{V}_{\alpha}^{+} + \tilde{V}_{\alpha}^{-}) \\
 & \quad + (\tilde{q}^{\beta+} - \tilde{q}^{\beta-}) \frac{1}{2} (\tilde{W}^{+} + \tilde{W}^{-}) \\
 & \quad + (\tilde{m}^{\alpha\beta} + - \tilde{m}^{\alpha\beta-}) \frac{1}{2} (\tilde{W}_{\alpha}^{+} + \tilde{W}_{\alpha}^{-}) \\
 & \quad - (\tilde{V}_{\alpha}^{+} - \tilde{V}_{\alpha}^{-}) \frac{1}{2} (\tilde{n}^{\alpha\beta} + \tilde{n}^{\alpha\beta-}) \\
 & \quad - (\tilde{W}^{+} - \tilde{W}^{-}) \frac{1}{2} (\tilde{q}^{\beta+} + \tilde{q}^{\beta-}) \\
 & \quad - (\tilde{W}_{\alpha}^{+} - \tilde{W}_{\alpha}^{-}) \frac{1}{2} (\tilde{m}^{\alpha\beta} + \tilde{m}^{\alpha\beta-}) \} ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_S} \eta_{\beta} \{ \tilde{n}^{\alpha\beta} \tilde{V}_{\alpha} + \tilde{q}^{\beta} \tilde{W} + \tilde{m}^{\alpha\beta} \tilde{W}_{\alpha} \} ds \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_S} \eta_{\beta} \{ \tilde{V}_{\alpha} \tilde{n}^{\alpha\beta} + \tilde{W} \tilde{q}^{\beta} + \tilde{W}_{\alpha} \tilde{m}^{\alpha\beta} \} ds \\
 & + \int_{\mathcal{F}_i} \{ -p^{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} - p \tilde{W} \} dF \\
 & + \int_{\mathcal{R}_S} \{ -\tilde{n}^{\alpha\beta} \tilde{V}_{\alpha} - \tilde{m}^{\alpha\beta} \tilde{W}_{\alpha} - \tilde{q}^{\beta} \tilde{W} \} ds \\
 & - \int_{\mathcal{R}_G} \{ -\hat{V}_{\alpha} \tilde{n}^{\alpha\beta} - \hat{W}_{\alpha} \tilde{m}^{\alpha\beta} - \hat{W} \tilde{q}^{\beta} \} ds \Rightarrow \text{stat.} \quad (4.3.13.)
 \end{aligned}$$

(4.3.13) läßt sich in einen homogenen Teil und die äußeren Potentiale, die in den letzten drei Zeilen stehen, aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V[\tilde{V}_\alpha, \tilde{w}, \tilde{w}_\alpha, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{q}^{\beta\gamma}] &= \mathcal{R}_{\text{hom}}[\tilde{V}_\alpha, \tilde{w}, \tilde{w}_\alpha, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{q}^{\beta\gamma}] \\ + \pi_{\alpha,\tau}[\tilde{V}_\alpha, \tilde{w}, \tilde{w}_\alpha] + \pi_{\alpha,R}[\tilde{V}_\alpha, \tilde{w}, \tilde{w}_\alpha] - \tilde{\pi}_{\alpha,R}[\tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{q}^{\beta\gamma}] &\Rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (4.3.14.)$$

Jetzt werden die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen, die durch (3.3.4) gegeben sind, mit den Näherungsgrößen des Ansatzes als variierten Größen multipliziert und vom Funktional (4.3.13) subtrahiert. Dadurch entfallen die Terme mit den eingepägten Größen. Das so umgeformte Funktional läßt sich auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V[\tilde{V}_\alpha, \tilde{w}, \tilde{w}_\alpha, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{\pi}^{\alpha\beta}, \tilde{q}^{\beta\gamma}] &= \mathcal{R}_{V\text{hom}}[(\tilde{V}_\alpha - V_\alpha), (\tilde{w} - w), (\tilde{w}_\alpha - w_\alpha), \\ &(\tilde{\pi}^{\alpha\beta} - \pi^{\alpha\beta}), (\tilde{\pi}^{\alpha\beta} - \pi^{\alpha\beta}), (\tilde{q}^{\beta\gamma} - q^{\beta\gamma})] \\ - \mathcal{R}_{\text{hom}}[V_\alpha, w, w_\alpha, \pi^{\alpha\beta}, \pi^{\alpha\beta}, q^{\beta\gamma}] &\Rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (4.3.15.)$$

Der letzte Term ist eine von den Ansatzparametern unabhängige Konstante, deshalb gilt auch:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{V\text{hom}}[(\tilde{V}_\alpha - V_\alpha), (\tilde{w} - w), (\tilde{w}_\alpha - w_\alpha), (\tilde{\pi}^{\alpha\beta} - \pi^{\alpha\beta}), (\tilde{\pi}^{\alpha\beta} - \pi^{\alpha\beta}), \\ (\tilde{q}^{\beta\gamma} - q^{\beta\gamma})] &\Rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (4.3.16.)$$

Die linke Seite in (4.3.16) ist aus der Bedingung für die Konvergenz bezüglich der Energie bekannt. Da das Funktional (4.3.13) nicht positiv definit ist, kann nicht auf Anheb festgestellt werden, ob der stationäre Wert null ist. Eine Untersuchung dieser Frage geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. Das gleiche gilt für die Funktionale (3.2.10) und (3.4.1).

Darstellung der Matrizen der Gleichungen (4.3.4), (4.3.5) und (4.3.11).

Matrix F_i

$\iint_{F_i} B_{\alpha/s\beta\gamma} \tilde{v}_{\alpha/s} \tilde{v}_{\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{v}_{\alpha} \tilde{v}_{\beta} \tilde{v}_{\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$	$\iint_{F_i} \{- B_{\alpha/s\beta\gamma} b_{\alpha/s} \tilde{w}_{\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{\alpha} b_{\beta\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$	$\iint_{F_i} \{ B_{\alpha/s\beta\gamma} \tilde{w}_{\alpha/s} \tilde{v}_{\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{\alpha} b_{\beta\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$
	$\iint_{F_i} \{ B_{\alpha/s\beta\gamma} b_{\alpha/s} \tilde{w}_{\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} \tilde{v}_{\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$	$\iint_{F_i} \{- B_{\alpha/s\beta\gamma} \tilde{w}_{\alpha/s} b_{\beta\gamma} \tilde{w} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} \tilde{v}_{\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$
<p>Symmetrisch</p>		$\iint_{F_i} \{ B_{\alpha/s\beta\gamma} \tilde{w}_{\alpha/s} \tilde{w}_{\beta\gamma} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{\alpha} \tilde{w}_{\beta} \tilde{v}_{\gamma} \tilde{v}_{\delta} \} dF$

Die Bereichsindices und die Indices der Ansatzfunktionen sind weggelassen.

Matrix B_i

$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{V}_{\beta\gamma} \tilde{V}_{\delta} + \tilde{V}_{\alpha} \tilde{V}_{\gamma}) ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{V}_{\beta\gamma} \tilde{V}_{\delta} + \tilde{V}_{\alpha} \tilde{V}_{\gamma} ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\beta\gamma} \tilde{V}_{\delta} ds$ $+ \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} \tilde{W} b_{\beta\gamma} \tilde{V}_{\delta} ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\beta\gamma} \tilde{W} \tilde{V}_{\delta} ds$ $+ \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} \tilde{W} b_{\beta\gamma} \tilde{V}_{\delta} ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{V}_{\alpha} \tilde{V}_{\gamma} ds$ $+ \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\alpha} \tilde{V}_{\beta\gamma} ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{V}_{\alpha} \tilde{V}_{\gamma} ds$ $+ \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\alpha} \tilde{V}_{\beta\gamma} ds$
	$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} (\tilde{W} \tilde{W}_{\beta\gamma} + \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}) ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} (\tilde{W} \tilde{W}_{\beta\gamma} + \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}) ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{W} \tilde{W}$ $- \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\alpha} b_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\beta\gamma\delta\alpha} \tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{W} \tilde{W}$ $- \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{W}_{\alpha} b_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} ds$
<p>Symmetrisch</p>		$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{W}_{\alpha} \tilde{W}_{\beta\gamma}) ds$ $-\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{W}_{\beta\gamma} \tilde{W}_{\delta} + \tilde{W}_{\alpha} \tilde{W}_{\beta\gamma}) ds$

Matrix B_{ik}

$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{v}_{\varphi\psi}(k) \, ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \beta_{\lambda\sigma\varphi\psi} b_{\varphi\psi} \bar{v}_{\varphi\psi}(k) \, ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{v}_{\varphi\psi}(k) \, ds$
$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} b_{\varphi\psi} \bar{w}_{\sigma}(k) \, ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \beta_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{w}_{\sigma}(k) \, ds$	$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} b_{\varphi\psi} \bar{w}_{\sigma}(k) \, ds$
$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{w}_{\varphi\psi}(k) \, ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \beta_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{w}_{\varphi\psi}(k) \, ds$	$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}(i,k)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \tilde{w}_{\alpha(i)} \cdot \int_{\mathcal{P}(i,k)} \alpha_{\lambda\sigma\varphi\psi} \bar{w}_{\varphi\psi}(k) \, ds$

Vektor a_i	Vektor \vec{P}_i	Vektor p_i
a_{1v_1} a_{2v_1} \vdots a_{nv_2}	$-\int_{\vec{r}_i} p^\alpha \vec{v}_\alpha dF - \int_{\vec{r}_S(i)} \vec{\Gamma} \alpha \beta \vec{v}_\alpha ds$ $+ \int_{\vec{r}_S(i)} \left[\vec{v}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{v}_\gamma + \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \beta \gamma \delta \epsilon \vec{v}_\delta + \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{v}_\gamma \right] ds$	$-\int_{\vec{r}_i} p^\alpha \vec{v}_\alpha dF$ $-\int_{\vec{r}_S(i)} \vec{N}^\alpha \vec{v}_\alpha ds$
a_{1w} a_{2w} \vdots a_{nw}	$-\int_{\vec{r}_i} p \vec{w} dF - \int_{\vec{r}_S(i)} \vec{\Gamma} \beta \vec{w} ds$ $+ \int_{\vec{r}_S(i)} \left[-\vec{v}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{w}_\beta + \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \beta \gamma \delta \epsilon \vec{w}_\delta - \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{w}_\beta \right] ds$	$-\int_{\vec{r}_i} p \vec{w} dF$ $-\int_{\vec{r}_S(i)} \vec{Q} \vec{w} ds$
a_{1w_1} a_{2w_1} \vdots a_{nw_2}	$-\int_{\vec{r}_S(i)} \vec{\Gamma} \alpha \beta \vec{w}_\alpha ds$ $+ \int_{\vec{r}_S(i)} \left[\vec{v}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{w}_\beta + \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \beta \gamma \delta \epsilon \vec{w}_\delta + \vec{w}_\alpha \cdot \mathcal{B} \alpha \beta \gamma \delta \vec{w}_\beta \right] ds$	$-\int_{\vec{r}_S(i)} \vec{M}^\alpha \vec{w}_\alpha ds$

Matrix G_i^T

$\int_{F_i} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{v}_{\alpha/\beta(i)} dF$ $-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{v}_{\alpha(i)} ds$ $-\int_{R_{G(i)}} \eta_{\beta} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{v}_{\alpha(i)} ds$	$\int_{F_i} \tilde{q}^{\alpha} b_{\alpha}^{\rho} \bar{v}_{\rho} dF$	
$-\int_{F_i} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} b_{\alpha\rho} \bar{w} dF$	$\int_{F_i} \tilde{q}^{\alpha}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} dF$ $-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta} \tilde{q}^{\alpha}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} ds$ $-\int_{R_{G(i)}} \eta_{\beta} \tilde{q}^{\alpha}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} ds$	
	$\int_{F_i} \tilde{q}^{\alpha}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} dF$	$\int_{F_i} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{w}_{\alpha/\beta(i)} dF$ $-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} ds$ $-\int_{R_{G(i)}} \eta_{\beta} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(i)} \bar{w}_{\alpha(i)} ds$

Matrix G_{ki}^T

$-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta(i)} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(k)} \bar{v}_{\alpha(i)} ds$		
	$-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta(i)} \tilde{q}^{\beta}_{(k)} \bar{w}_{(i)} ds$	
		$-\frac{1}{2} \int_{\rho_i} \eta_{\beta(i)} \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(k)} \bar{w}_{\alpha(i)} ds$

Matrix K_i

$-\int_{\Gamma_i} c_{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{n}^{\alpha\beta} \bar{n}^{\psi\psi} dF$		$-\int_{\Gamma_i} c_{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{m}^{\alpha\beta} \bar{m}^{\psi\psi} dF$
	$-\int_{\Gamma_i} c_{3\alpha 3\beta} \tilde{q}^{\alpha} \bar{q}^{\beta} dF$	
$-\int_{\Gamma_i} c_{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{n}^{\alpha\beta} \bar{m}^{\psi\psi} dF$		$-\int_{\Gamma_i} c_{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{m}^{\alpha\beta} \bar{m}^{\psi\psi} dF$

Matrix D_i

$\int_{\Gamma_i} \beta^{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{y}_{\alpha\beta} \bar{y}_{\psi\psi} dF$		$\int_{\Gamma_i} \beta^{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{k}_{\alpha\beta} \bar{k}_{\psi\psi} dF$
	$\int_{\Gamma_i} \beta^{3\alpha 3\beta} \tilde{y}_{3\alpha}^{\sim} \bar{y}_{3\beta}^{\sim} dF$	
$\int_{\Gamma_i} \beta^{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{y}_{\alpha\beta} \bar{k}_{\psi\psi} dF$		$\int_{\Gamma_i} \beta^{\alpha\beta\psi\psi} \tilde{k}_{\alpha\beta} \bar{k}_{\psi\psi} dF$

Matrix E_i^T

$-\int_{\Gamma_i} \tilde{y}_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta} dF$		
	$-\int_{\Gamma_i} \tilde{y}_{3\alpha} \bar{q}^{\alpha} dF$	
		$-\int_{\Gamma_i} \tilde{k}_{\alpha\beta} \bar{m}^{\alpha\beta} dF$

Vektor a_{si}

a_{1n}^{11} ⋮ a_{nn}^{22}
a_{1q}^1 ⋮ a_{nq}^2
a_{1m}^{11} ⋮ a_{nm}^{22}

Vektor a_{zi}

a_{1r}^{11} ⋮ a_{nr}^{22}
a_{1r}^{31} ⋮ a_{nr}^{32}
a_{1k}^{11} ⋮ a_{nk}^{22}

Vektor v_i

$\int_{R_{(i)}} n_{\alpha} \hat{v}_{\alpha} \bar{n}^{\alpha} ds$
$\int_{R_{(i)}} n_{\alpha} \hat{w}_{\alpha} \bar{q}^{\alpha} ds$
$\int_{R_{(i)}} n_{\alpha} \hat{w}_{\alpha} \bar{m}^{\alpha} ds$

4.4 Überbestimmte Kollokation

Bei der gewöhnlichen Kollokationsmethode wird ein n-parametrischer Näherungsansatz in die Differentialgleichungen eingesetzt.

Dabei ergibt sich für jede Gleichung ein Fehler, der von den Ansatzparametern abhängt. Nun wird gefordert, daß diese Fehler an geeigneten Punkten verschwinden; dadurch erhält man bei linearen Differentialgleichungen ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Ansatzparameter. Wie COLLATZ bei einem Plattenproblem zeigt, ist das Ergebnis von der Wahl der Kollokationspunkte abhängig. Auch können bei höheren Ansätzen die Lösungen zwischen den Kollokationspunkten unter Umständen stark oszillieren; weiter ist ein numerischer Rangabfall möglich.

Diese Nachteile lassen sich vermeiden, wenn die Zahl der Gleichungen die Zahl der Unbekannten wesentlich übersteigt und dann für die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum gefordert wird. Diese Methode wird als überbestimmte Kollokation bezeichnet.

Die Bestimmungsgleichungen für die Ansatzparameter erhält man durch eine Gauß-Transformation des überbestimmten Gleichungssystems: Aus

$$(Ax - b)^2 \Rightarrow \text{Min} \quad (4.4.1.)$$

mit der Systemmatrix $A(m,n), m \gg n$; m = Anzahl der Gleichungen
 n = Anzahl der Parameter

dem Vektor der unbekanntenen Parameter $x_{(m)}$
und dem Lastvektor $b_{(m)}$

erhält man das positiv definite System:

$$A^T A x - A^T b = 0 \quad (4.4.2.)$$

Die Gauß-Transformation läßt sich durch Ableiten von (4.4.1) nach dem Vektor x leicht herleiten. Bei der Matrizenmultiplikation $A^T A$ werden die einzelnen Spalten der Matrix skalar miteinander multipliziert.

Die überbestimmte Kollokation stellt eine diskretisierte Form der "Methode der kleinsten Fehlerquadrate" dar, wenn die Fehlerquadrate für die einzelnen Kollokationspunkte mit Gewichten multipliziert werden, die aus der Gauß'schen Transformation eine numerische Integration machen.

Nun soll die überbestimmte Kollokation auf die Euler-Lagrange'schen Gleichungen (3.3.4.) des erweiterten Funktionals nach Hellinger-Reissner angewandt werden. Trennt man in Gleichungen für das Gebiet, Übergangsbedingungen und Randbedingungen, so kann man in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} D_i \\ \ddot{u}_j \\ R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{vi} \\ a_{si} \end{bmatrix} - \int_I \begin{bmatrix} \sigma \\ \ddot{u}_k \\ \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{vk} \\ a_{sk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_i \\ \sigma \\ r_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.3.)$$

Die Matrizen A_i ; U_i ; R_i ; G_i und r_i sind am Ende dieses Abschnitts zusammengestellt.

In A_i werden die Ansatzfunktionen für die Schnittgrößen bei den konstitutiven Gleichungen mit dem Elastizitätstensor $n C_{\alpha i j k}$ multipliziert. Dadurch werden diese Terme wesentlich kleiner als die Terme für die Schnittgrößen in den Gleichgewichtsbedingungen, wo die ersten Ableitungen vorkommen, und kleiner als die Terme in den Rand- und Übergangsbedingungen. Man erkennt, daß die betragsmäßig kleinen Ausdrücke der konstitutiven Gleichungen

auf die Diagonalelemente der Matrix $A^T A$ numerisch praktisch keinen Einfluß haben. Um dem zu begegnen, werden die konstitutiven Gleichungen mit Gewichten $1/c_{1111}$ usw. multipliziert. Damit dann bei den Verschiebungsfunktionen wieder gleiche Größenordnungen geschaffen werden, müssen auch die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen mit diesen Faktoren multipliziert werden.

Für diese notwendige Gewichtung gibt es eine einfache physikalische Erklärung. Die Euler-Lagrange'schen Gleichungen liefern Fehler verschiedener Dimensionen, durch die Multiplikation mit der zugehörigen variierten Größe werden dann Arbeitsausdrücke gebildet. Die Gewichtsfunktionen können als Beschreibung eines virtuellen Zustands aufgefaßt werden, bei dem die Größenordnungen der Schnittkräfte über die konstitutiven Gleichungen aus der Größenordnung der Verschiebungen hervorgeht. Um dies deutlich zu machen, sind bei der Darstellung der Matrizen für die Kollokation in der Spalte "Gewichte" die variierten Größen angegeben. Die virtuelle Arbeit wird an vielen Punkten für diesen einen virtuellen Zustand ermittelt und die Fehlerquadratsumme zum Minimum gemacht.

Vergleicht man das Ritzverfahren mit der Kollokation unter dem Gesichtspunkt, daß die Gewichtsfunktionen als virtueller Zustand betrachtet werden, so kann man sagen: Beim Ritzverfahren treten statt einem einzigen ebensoviele virtuelle Zustände wie Ansatzparameter auf, nämlich die n Ansatzfunktionen selbst. Die Gleichungen des Ritzverfahrens stellen dann die Forderung nach Erfüllen der n Arbeitsgleichungen dar.

Aus der Bedingung des Fehlerquadratminimums für die Euler-Lagrange'schen Gleichungen folgt für das Konvergenzverhalten unmittelbar, daß die Näherungslösungen so konvergieren, daß sie die Differentialgleichungen erfüllen. Das kann zur Folge haben, daß bei beschränkter Parameterzahl die Ableitungen im Gebiet besser angenähert werden als die Funktionen selbst. Collatz gibt hierfür ein einfaches Beispiel an (S. 206).

Beim erweiterten Funktional nach Hellinger-Reissner sind die konstitutiven Gleichungen nach den Verzerrungen aufgelöst. Bei der Kollokationsmethode ist es möglich, diese Gleichungen durch die nach den Schnittgrößen aufgelöste Form zu ersetzen. Es ergibt sich dann ein System, das auch durch Eliminations der Verzerrungskomponenten aus dem variierten erweiterten Funktional nach Hu-Washizu (3.4.2) hergeleitet werden kann. In dem Schema (4.4.3) wird dann die Matrix A_i durch die ebenfalls im Anschluß angegebene Matrix A_i^* ersetzt. Die Gewichte für die konstitutiven Gleichungen sind die Verzerrungskomponenten, ausgedrückt durch die Verschiebungsgrößen.

Matrizen fuer die überbestimmte Kollokation

Matrix A_1

\tilde{v}_α / ρ	$-b_{\alpha\beta}$	\tilde{w}_α	$-\tilde{n}_{\alpha\beta} / \rho$	$b_{\alpha\beta} \tilde{q}^{\beta\gamma}$				ρ^α
$b_{\alpha\beta} \tilde{v}_\gamma$	$\tilde{w}_{\gamma\alpha}$	\tilde{w}_α	$-b_{\alpha\beta} \tilde{n}_{\gamma\beta}$	$-\tilde{q}^{\alpha\beta} / \alpha$				ρ
				\tilde{q}^α				σ
\tilde{v}_α / ρ	$-b_{\alpha\beta}$	\tilde{w}_α	$\tilde{n}_{\alpha\beta}$	$\tilde{q}^{\alpha\beta}$				σ
$b_{\alpha\beta} \tilde{v}_\gamma$	$\tilde{w}_{\gamma\alpha}$	\tilde{w}_α	$-b_{\alpha\beta} \tilde{n}_{\gamma\beta}$	$-\tilde{q}^{\alpha\beta} / \alpha$				σ
				\tilde{q}^α				σ
								σ

Die Bereichsindices sind weggelassen.

Vektor v_i

\hat{V}_α
\hat{W}
\hat{W}_α
\hat{N}^α
\hat{Q}
\hat{M}^α

Gewichte

$\eta_s \eta^{\alpha s}$
$\eta_s \xi^\beta$
$\eta_s \eta^{\alpha s}$
v_α
w
w_α

Matrizen \tilde{U}_i und R_i

$\tilde{V}_\alpha(i)$						
	$\tilde{W}(i)$					
		$\tilde{W}_\alpha(i)$				
			$\tilde{\eta}_s \eta^{\alpha s}(i)$			
				$\eta_s \xi^\beta$		
						$\tilde{\eta}_s \eta^{\alpha s}(i)$

Matrix A_i^*

$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$				$-\tilde{\eta} \alpha/s$	$\beta_{\alpha} \tilde{g}_s$		V_{α}	\hat{p}_{α}
$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$	$-\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$			$-\beta_{\alpha/s} \tilde{\eta} \alpha/s$	$-\tilde{g}_s \alpha/s$		w	\hat{p}
$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$					$\tilde{g}_s \alpha$	$-\tilde{\eta} \alpha/s$	w_{α}	σ
$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$	$-\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$		$-\tilde{\eta} \alpha/s$			$\beta_{\alpha/s}$	σ
$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$		$-\tilde{g}_s$		$\beta_{\alpha/s}$	σ
$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{V}_{q/4}$	$-\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$	$\beta_{\alpha/s} \varphi_4 \tilde{w}_1$			$-\tilde{\eta} \alpha/s$	$w_{\alpha/s}$	σ

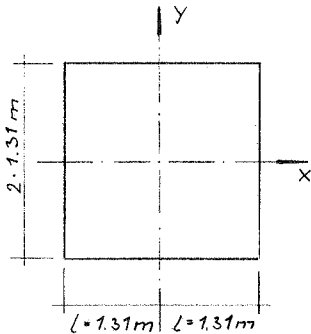
Gewichte

Vektor g_i

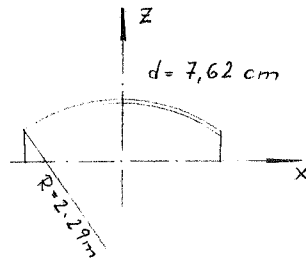
5. Beispiel

Als Beispiel wird eine relativ dicke Kugelschale über quadratischem Grundriß mit eingespannten Rändern berechnet, wie sie von RAMM⁺ und CONWAY-LEISSA⁺⁺ untersucht wurde. Die Belastung $p = 0,703 \text{ Mp/m}^2$ ist konstant und wirkt normal zur Oberfläche. Die Poisson'sche Zahl ist $\nu = 1/6$.

Geometrie:



Grundriß



Schnitt $y=0$

Koordinatenlinien: Die senkrechte Projektion der Flächenkoordinaten θ^1, θ^2 ist das kartesische x-y-System.

Für dieses System lauten die geometrischen Größen:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$a_{11} = \frac{R^2 - y^2}{z^2} \quad ; \quad a_{12} = \frac{xy}{z^2} \quad ; \quad a_{22} = \frac{R^2 - x^2}{z^2}$$

⁺ RAMM, E.: Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie. Diss. Universität Stuttgart

⁺⁺ CONWAY, H. D. und A. W. LEISSA: Application of the Point-matching Method to Shallow Spherical Shell Theory. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 29 (1962) Nr. 4, S. 745 - 747.

$$b_{11} = -\frac{R^2 - y^2}{R^2 z^2} ; b_{12} = -\frac{x y}{R^2 z^2} ; b_{22} = -\frac{R^2 - x^2}{R^2 z^2}$$

$$T_{11}^1 = \frac{x(R^2 - y^2)}{R^2 z^2} ; T_{12}^1 = \frac{x^2 y}{R^2 z^2} ; T_{22}^1 = \frac{x(R^2 - x^2)}{R^2 z^2}$$

$$T_{11}^2 = \frac{y(R^2 - y^2)}{R^2 z^2} ; T_{12}^2 = \frac{x y^2}{R^2 z^2} ; T_{22}^2 = \frac{y(R^2 - x^2)}{R^2 z^2}$$

Bei der Berechnung nach der Überbestimmten Kollokation wird je Schalenviertel ein Raster mit 17 Punkten pro Seite für den Bereich und 50 äquidistanten Punkten für den Rand gewählt. Das Raster für den Bereich ist:

$$(0.0 ; 0.176 ; 0.330 ; 0.463 ; 0.578 ; 0.675 ; 0.756 ; 0.822 ;$$

$$0.875 ; 0.916 ; 0.947 ; 0.969 ; 0.984 ; 0.993 ; 0.9980 ;$$

$$0.99975 ; 1.00000) x/L$$

Es ist gegen den Rand sehr stark verdichtet.

Das Raster für den Rand ist: $(0.0 ; 0.02 ; 0.04 ; \dots 0.98 ; 1.00) x/L$

Die Berechnung erfolgt für ein Schalenviertel. Die Ansatzfunktionen gelten für den gesamten Bereich, sie erfüllen die Symmetriebedingungen für die x- und y-Achse. Sie werden mit Hilfe folgender Potenzen gebildet:

$$\varphi^m = \sqrt{2m+1} x^m ; \quad \psi^n = \sqrt{2n+1} y^n$$

Für die doppelsymmetrischen Größen $w, n^{11}, n^{22}, m^{11}, m^{22}$ lauten sie:

$$w(x, y) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^2 & \varphi^2 & \\ \varphi^4 & \varphi^2 \varphi^2 & \varphi^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi^{10} & \varphi^8 \varphi^2 & \varphi^6 \varphi^4 & \varphi^4 \varphi^6 & \varphi^2 \varphi^8 & \varphi^{10} & \end{array}$$

für die zur x-Achse antimetrischen und zur y-Achse symmetrischen Größen v_1, w_1, q^1 :

$$v_1(x, y) = \varphi$$

$$\varphi^3 \quad \varphi\varphi^2$$

$$\dots$$

$$\varphi^{11} \quad \varphi^9\varphi^2 \quad \varphi^7\varphi^4 \quad \varphi^5\varphi^6 \quad \varphi^3\varphi^8 \quad \varphi\varphi^{10}$$

für die zur x-Achse symmetrischen und zur y-Achse antimetrischen Größen v_2, w_2, q^2 :

$$v_2(x, y) = \psi$$

$$\psi^{10}\psi \quad \psi^8\psi^3 \quad \psi^6\psi^5 \quad \psi^4\psi^7 \quad \psi^2\psi^9 \quad \psi^{11}$$

und für die antimetrischen Größen $n^{12}, n^{21}, m^{12}, m^{21}$:

$$n^{12}(x, y) = \varphi\psi$$

$$\dots$$

$$\varphi^{11}\psi \quad \varphi^9\psi^3 \quad \varphi^7\psi^5 \quad \varphi^5\psi^7 \quad \varphi^3\psi^9 \quad \varphi\psi^{11}$$

Die Ansatzfunktionen befriedigen nicht die Randbedingungen.

Die Lösung erfolgt sowohl mit Hilfe der überbestimmten Kollokation wie auch nach einem verallgemeinerten Ritzverfahren.

a) Kollokation, 1. Lösung

Die Kollokation wird auf die Variationsgleichungen (3.3.4) des verallgemeinerten Funktionals nach Hellinger-Reissner angewandt. Dabei wird wie auch bei den übrigen Lösungen folgende Näherung getroffen:

$${}_1 C_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}_1 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sigma, \quad \text{bei der Berechnung}$$

$$\text{von } {}_0 C_{\alpha\beta\gamma\delta}, {}_2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}, {}_0 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{und } {}_2 B^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

wird nur das erste Reihenglied berücksichtigt.

Als virtuelle Größen werden angesetzt:

$$\delta v_\alpha = \delta w = \delta w_\alpha = 1$$

$$\delta n^{\alpha\beta} = \delta q^\alpha = \frac{h}{1-\nu^2} = D; \quad \delta m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad \left. \vphantom{\delta n^{\alpha\beta}} \right\} \text{ im Gebiet}$$

$$\delta n^{\alpha\beta} = 5D; \quad \delta q^\alpha = 2,5D; \quad \delta m^{\alpha\beta} = 0,25D \quad \text{ auf dem Rand}$$

b) Kollokation, 2. Lösung

Bei dieser Lösung sind die konstitutiven Gleichungen gegenüber a) invertiert.

Man gelangt hierzu, indem man in den Variationsgleichungen (3.4.2) des verallgemeinerten Funktionals nach Hu-Washizu die kinematischen Gleichungen als erfüllt voraussetzt und damit die Verzerrungen eliminiert.

Die virtuellen Größen der Lösung sind:

$$\delta v_\alpha = \delta w = \delta w_\alpha = 1$$

$$\delta k_{\alpha\beta} = \delta f_{\alpha\beta} = \delta k_{\alpha\beta} = 1 \quad \left. \vphantom{\delta k_{\alpha\beta}} \right\} \text{ im Gebiet}$$

$$\delta m^{\alpha\beta} = \frac{5}{300} D; \quad \delta q^\alpha = \frac{2,5}{300} D; \quad \delta m^{\alpha\beta} = \frac{0,25}{300} D \quad \text{ auf dem Rand}$$

c) Ritzmethode

Die Methode nach Ritz wird auf das verallgemeinerte Funktional nach Hellinger-Reissner (3.3.3) angewandt. Die Elastizitätstensoren $\sigma_{\alpha\beta}$ werden wie bei a) bestimmt.

Das zunächst entstehende nicht positiv definite Gleichungssystem $Ax - b = 0$ wird durch eine Gauß'sche Transformation auf die positiv definite Form $A^T Ax - A^T b = 0$ gebracht.

Da sich hierbei die Konditionierung wesentlich verschlechtert, müssen die Reihenansätze gegenüber der Kollokation 4 Potenzen niedriger abgebrochen werden. Zum Vergleich ist die Kollokation nach a) mit der selben Ansatzstufe gerechnet worden.

Vergleich der Lösungen

Verglichen werden die physikalischen Schnittgrößen

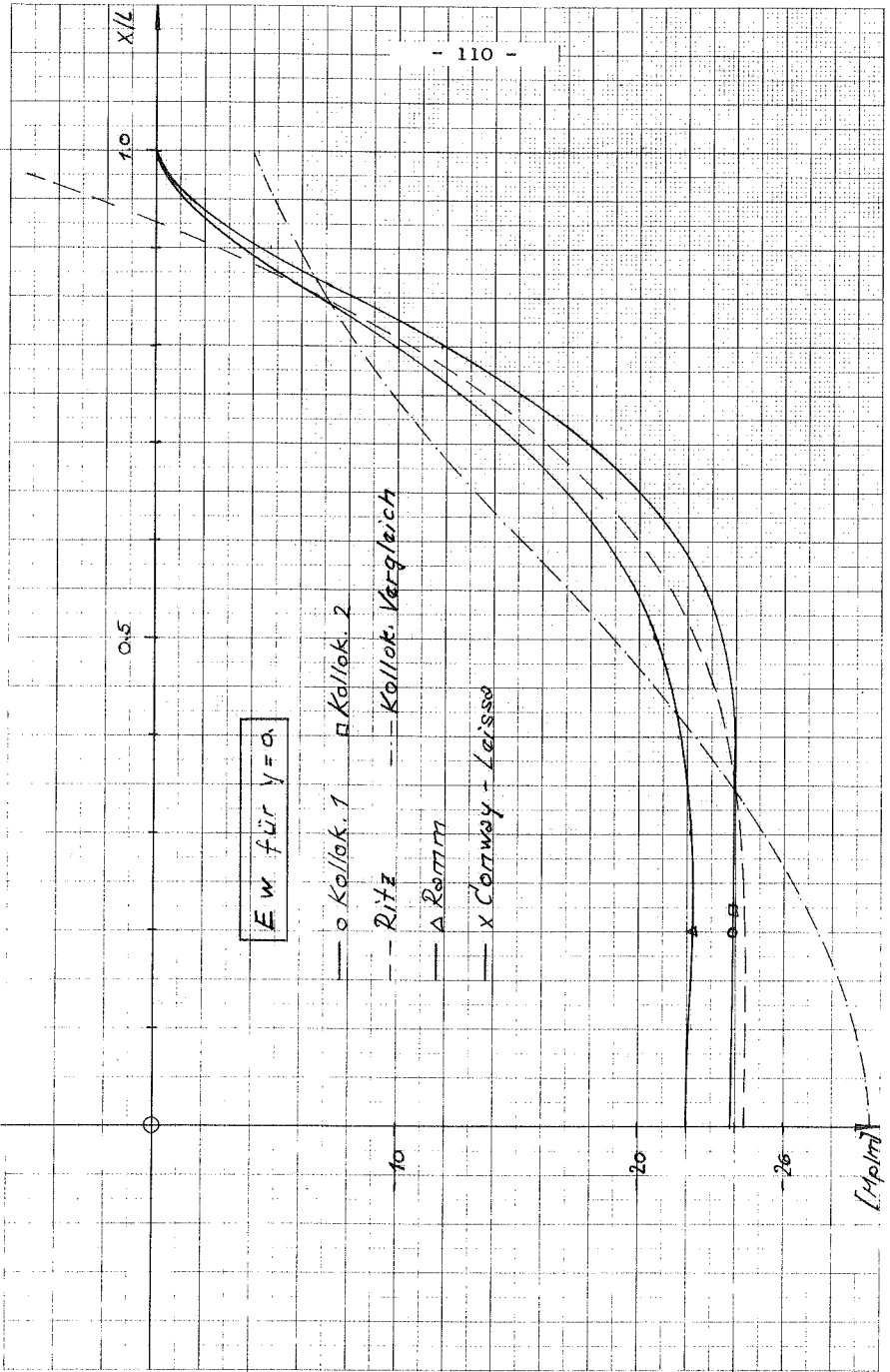
$$N^{(11)} = r^{11} \sqrt{\frac{a_{11}}{a^{11}}} ; \quad N^{(22)} = r^{22} \sqrt{\frac{a_{22}}{a^{22}}} ;$$

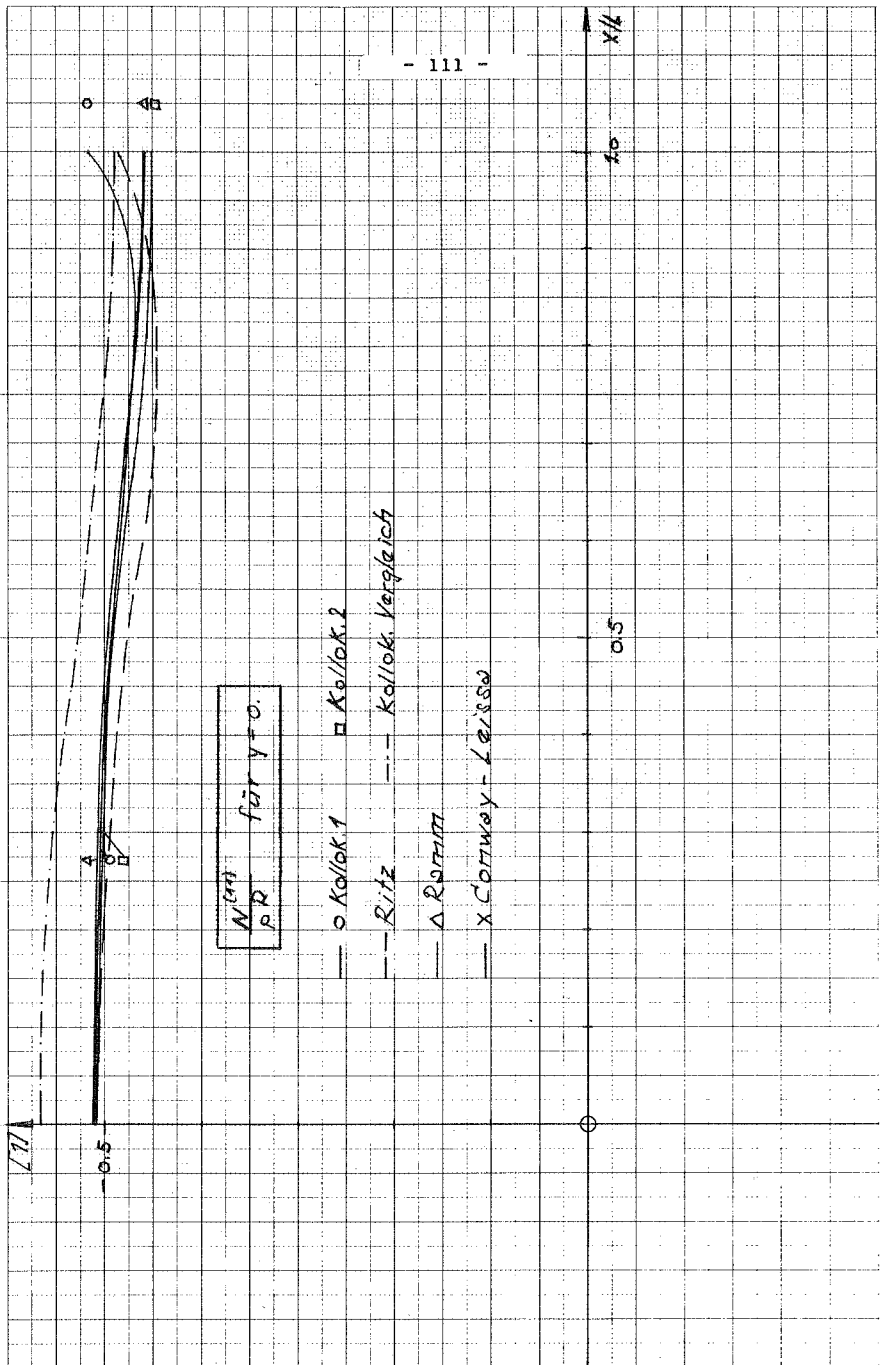
$$M^{(11)} = r^{11} \sqrt{\frac{a_{11}}{a^{11}}}$$

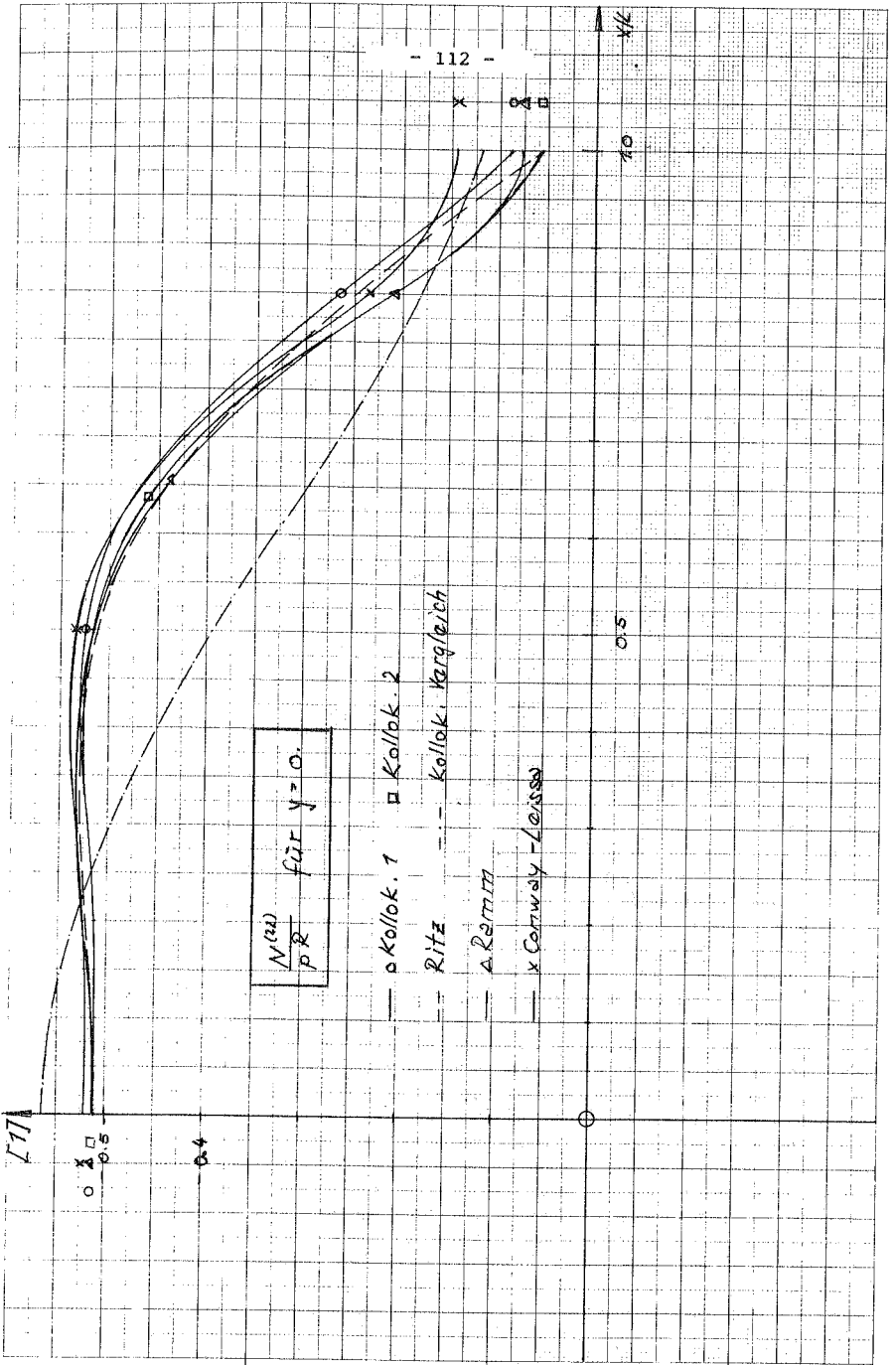
und die Durchbiegung w , jeweils im Schnitt $y = 0$.

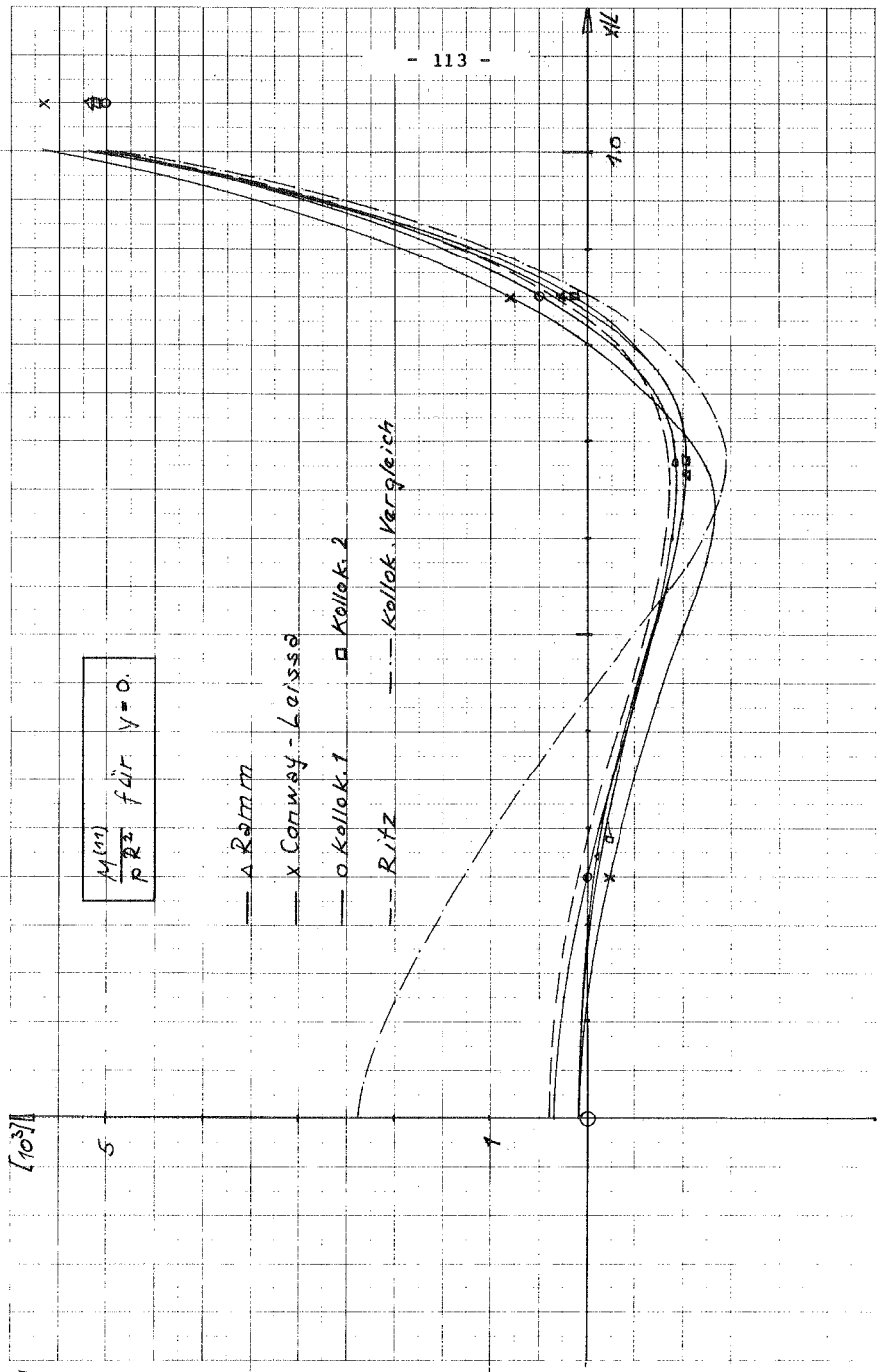
Die Übereinstimmung der Schnittgrößen mit der Lösung von Ramm ist sowohl bei der Kollokation a) und b) wie auch bei dem Ritzverfahren c) mit wesentlich weniger Ansatzparametern gut; die Vergleichslösung der Kollokation mit dem Ansatz entsprechend c) weicht hingegen erheblich ab.

Die Normalverschiebung w ist etwa 10 % größer als bei Ramm; dieser Unterschied wird auf die Berücksichtigung der Querkraftverformung zurückgeführt.









Anhang

Im Folgenden werden die Rand- und Eck-Terme für die Normalverformung w , die effektive Querkraft V und das Torsionsmoment T der Gleichung (3.5.8) an Hand zweier Beispiele interpretiert.

Die effektive Querkraft ist

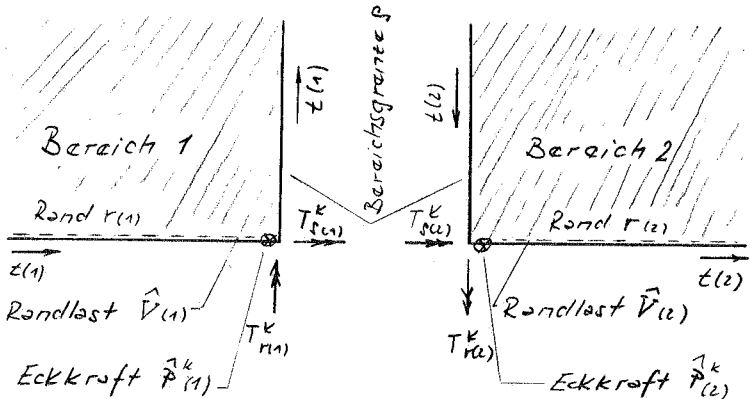
$$V = n_{\alpha} m^{\alpha\beta} / \beta + (t_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta}) / S \quad (A1)$$

und das Torsionsmoment

$$T = t_{\alpha} n_{\beta} m^{\alpha\beta} \quad (A2)$$

\hat{V} ist die äußere Querbewehrung des Randes, \hat{P} die äußere Last in Richtung a_3 in der Ecke.

Das erste Beispiel gilt für einen Randknoten k , an dem zwei Bereiche zusammenstoßen:



Die Indices in Klammern bezeichnen den Bereich. Die Randbedingungen seien statisch.

Dann erhält man aus (3.5.8) die geometrischen Übergangsbedingungen an der Bereichsgrenze β :

$$-\int_{\beta} [W_{(1)} - W_{(2)}] \int \frac{1}{2} (V_{(1)} - V_{(2)}) ds = \sigma \quad A(3)$$

und im Knoten k:

$$[W_{(1)}^k - W_{(2)}^k] \int \frac{1}{2} (T_{\beta(1)}^k + T_{\beta(2)}^k) = \sigma \quad A(4)$$

die statischen Übergangsbedingungen an der Bereichsgrenze β :

$$\int_{\beta} [V_{(1)} - V_{(2)}] \int \frac{1}{2} (w_{(1)} + w_{(2)}) ds = \sigma \quad A(5)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen am Rand r

$$\int_{r(1)} [V_{(1)} - \hat{V}_{(1)}] \int w_{(1)} ds = \sigma \quad A(6)$$

$$\int_{r(2)} [V_{(2)} - \hat{V}_{(2)}] \int w_{(2)} ds = \sigma \quad A(7)$$

und im Knoten

$$-\left[\frac{1}{2} T_{\beta(1)}^k + \frac{1}{2} T_{\beta(2)}^k + T_{r(1)}^k + \hat{P}_{(1)}^k \right] \int w_{(1)}^k = \sigma \quad A(8)$$

$$-\left[\frac{1}{2} T_{\beta(1)}^k + \frac{1}{2} T_{\beta(2)}^k + T_{r(2)}^k + \hat{P}_{(2)}^k \right] \int w_{(2)}^k = \sigma \quad A(9)$$

Die Gleichungen (A3), (A5), (A6) und (A7) stimmen mit den entsprechenden Gleichungen bei BUFLER [2] überein (z.B. in der Variationsgleichung (27)).

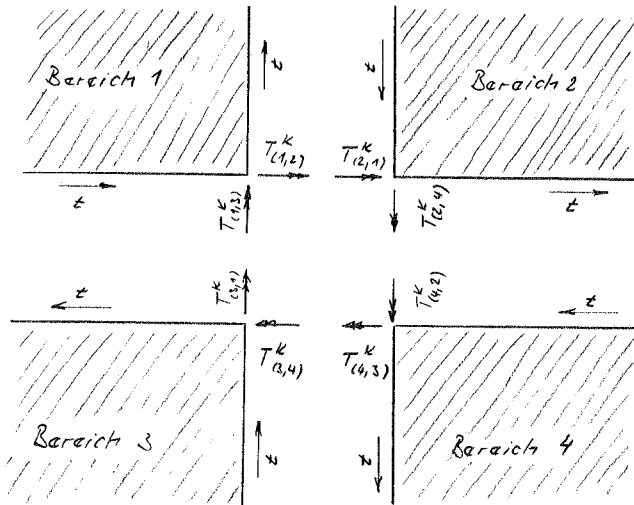
Für geometrische Kontinuität am Knoten, also $W_{(1)}^k = W_{(2)}^k$ gehen die Gleichgewichtsbedingungen (A8) und (A9) am Knoten über in eine einzige Gleichung

$$-\left[T_{\beta(1)}^k + T_{\beta(2)}^k + T_{r(1)}^k + T_{r(2)}^k + \hat{P}_{(1)}^k + \hat{P}_{(2)}^k \right] dW^k = 0 \quad (A10)$$

wie sie auch bei BUFLER vorkommt.

In den Gleichungen (A8) und (A9) wird unterschieden, auf welchem Bereich die Einzellasten $\hat{P}_{(i)}^k$ wirken, während in (A10) der Lastangriffsort keine Rolle spielt.

Im zweiten Beispiel werden die Übergangs- und Gleichgewichtsbedingungen an einem unbelasteten Innenknoten betrachtet.



Man erhält:

$$[W_{(1)}^k - W_{(2)}^k] \mathcal{D} \frac{1}{2} (T_{(1,2)}^k + T_{(2,1)}^k) = \sigma$$

$$[W_{(1)}^k - W_{(3)}^k] \mathcal{D} \frac{1}{2} (T_{(1,3)}^k + T_{(3,1)}^k) = \sigma$$

$$[W_{(2)}^k - W_{(4)}^k] \mathcal{D} \frac{1}{2} (T_{(2,4)}^k + T_{(4,2)}^k) = \sigma$$

$$[W_{(3)}^k - W_{(4)}^k] \mathcal{D} \frac{1}{2} (T_{(3,4)}^k + T_{(4,3)}^k) = \sigma$$

$$-\frac{1}{2} [T_{(1,2)}^k + T_{(2,1)}^k + T_{(1,3)}^k + T_{(3,1)}^k] \mathcal{D} W_{(1)}^k = \sigma$$

$$-\frac{1}{2} [T_{(2,1)}^k + T_{(1,2)}^k + T_{(2,4)}^k + T_{(4,2)}^k] \mathcal{D} W_{(2)}^k = \sigma$$

$$-\frac{1}{2} [T_{(3,1)}^k + T_{(1,3)}^k + T_{(3,4)}^k + T_{(4,3)}^k] \mathcal{D} W_{(3)}^k = \sigma$$

$$-\frac{1}{2} [T_{(4,2)}^k + T_{(2,4)}^k + T_{(4,3)}^k + T_{(3,4)}^k] \mathcal{D} W_{(4)}^k = \sigma \quad (A11 - A12)$$

Auch hier gehen für in der Ecke kontinuierliches w die Gleichgewichtsbedingungen in die entsprechende Gleichung bei BUFLER über:

$$-\left[T_{(1,2)}^k + T_{(2,1)}^k + T_{(2,4)}^k + T_{(4,2)}^k + T_{(4,3)}^k + T_{(3,4)}^k + T_{(3,1)}^k + T_{(1,3)}^k \right] \mathcal{D} w = \sigma \quad (A19)$$

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die geometrisch und physikalisch lineare Schalentheorie unter Berücksichtigung der Querkraftverformung auf der Basis eines über die Schalendicke linearen fünfgliedrigen Verschiebungsansatzes als Ausgangsgleichungen hergeleitet. Im Werkstoffgesetz sind Anisotropie und Inhomogenität zugelassen.

Die Berechnung des Elastizitätstensors der Schale erfolgt mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung, die es gestattet, die Invarianz bei kleinen Starrkörperverschiebungen auch beim Abbrechen der Reihe bei den Gliedern mit h^3 zu gewährleisten.

Aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie werden die bezüglich der geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erweiterten Funktionale von Hellinger-Reissner und Hu-Washizu hergeleitet. Die Theorie von Kirchhoff ergibt sich durch Elimination von zwei Verschiebungsgrößen.

Die Lösungen für einen Parameteransatz werden einmal durch das verallgemeinerte Ritz-Verfahren als direktem Variationsverfahren und zum anderen mit Hilfe der überbestimmten Kollokation für die Euler-Lagrang'schen Gleichungen der Funktionale gewonnen. Die Lösungswege sind in Matrizenform dargestellt.

Als Beispiel wird eine relativ dicke Kugelschale über quadratischem Grundriß mit eingespannten Rändern untersucht. Die Ansatzfunktionen befriedigen weder statische noch geometrische Randbedingungen. Aus programmtechnischen Gründen konnten bei der Kollokation mehr Reihenglieder berücksichtigt werden als beim Ritz-Verfahren. Die Übereinstimmung mit Vergleichsergebnissen ist bei größerer Parameterzahl gut. Bei der Berücksichtigung einer nur geringen Zahl von Parametern zeigt sich das Ritz-Verfahren überlegen. Bei der Kollokation müssen Gewichtsfunktionen eingeführt werden.

Offen ist noch die Erprobung der beiden Verfahren mit bereichsweisen Ansätzen und eine Fehlereingrenzung durch obere und untere Schranken.

Lebenslauf

- 7.4.1940 geboren in Stuttgart
Eltern: Dipl.-Ing. Georg Becker und
Liselotte Becker geb. Maile
- 1946 - 1950 Volksschule in Fellbach bei Stuttgart
- 1950 - 1959 Gymnasium in Fellbach, Abschluß Abitur
- 1959 Halbjähriges Baupraktikum
- 1959 - 1965 Studium an der TH Stuttgart, Fakultät
für Bauwesen. Abschluß Diplom
- 1965 - 1966 Angestellt beim RIB Stuttgart, Rechen-
institut des Bauwesens
- 1966 - 1969 Angestellt bei der Bauunternehmung
Karl Kübler AG, Stuttgart, als Statiker
im Konstruktionsbüro
- 1969 - 1971 Doktorand an der Universität Stuttgart
am Institut für Baustatik, Direktor
Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer.