

# Beitrag zur Berechnung des Kreisträgers mit offenem dünnwandigem Profil

Von der Technischen Hochschule Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Lothar Anheuser**

geboren zu Schifflingen (Luxemburg)

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. W. Pelikan  
Tag der Einreichung: 4. Juni 1964  
Tag der mündlichen Prüfung: 4. September 1964

1964



13.09.2006  
2

Herrn Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer, der mir die Anregung zur vorliegenden Untersuchung gab, danke ich herzlich für die gewährte Unterstützung und Ermunterung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Mein Dank gilt ebenso Herrn Professor Dr.-Ing. W. Pelikan für die Übernahme des Mitberichts.

In den Dank eingeschlossen sind alle, die durch Rat und Mithilfe zum Gelingen der Arbeit beitrugen.

Besonderer Dank gilt meiner Frau für manchen verständnisvollen Verzicht.

Lothar Anheuser



Inhaltsverzeichnis

|  | Seite |
|--|-------|
| Schrifttumsverzeichnis                                     | 5     |
| Abkürzungsverzeichnis                                      | 7     |
| 1. Einleitung  | 8     |
| 2. Ableitung der Differentialgleichungen                   | 10    |
| 3. Lösung der Differentialgleichungen (Variable $\alpha$ ) | 19    |
| 4. Lösung der Differentialgleichungen (Variable $z$ )      | 37    |
| 5. Diskussion der Lösungen                                 | 40    |
| 6. Schnittgrößen, Rand- und Übergangsbedingungen           | 42    |
| 7. Modelldaten   | 45    |
| 8. Rechenergebnisse  | 46    |
| 9. Diskussion der Rechenergebnisse                         | 64    |
| 10. Flußdiagramm   | 67    |
| Zusammenfassung  | 68    |
| Lebenslauf   | 69    |



Schrifttumsverzeichnis

- [1] Bornscheuer, F.W.  
Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges... Stahlbau 21. (1952) S. 1/9
- [2] Bornscheuer, F.W.  
Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe... Stahlbau 21.(1952) S. 225/232  
und Stahlbau 22.(1953) S. 32/44
- [3] Lindenberger, H.  
Vergleich und Analogiebetrachtung der Lösungen für biegebeanspruchte und verdrehungsbeanspruchte Stabwerke. Stahlbau 22. (1953) S. 14/19 und 64/67
- [4] Wlassow, W.S.  
Thin walled elastic beams 2. Aufl. Moskau 1959  
Englische Übersetzung von Y. Schechtman
- [5] Unold, G.  
Der Kreisträger. Forschungsarbeiten VDI Heft 255 (1922)
- [6] Hotchkiss, J.G.  
A practical consideration of curved beam design.  
Vervielfältigtes Manuskript Chicago Ill. 1950
- [7] Stüssi, F.  
Der Kreisträger mit I-Querschnitt. Schweiz. Bauzeitung Bd. 111 (1938) S. 166/168
- [8] Müller, K.A.  
Der I-Träger unter Belastung durch Drehmomente.  
Bautechnik-Archiv Heft 6 (1951) S. 3/24
- [9] Federhofer, K.  
Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Springer Verlag Wien 1950
- [10] Wansleben, F.  
Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken.  
Stahlbau 21. (1952) S. 53/56
- [11] Björklund, A.  
Beitrag zur Theorie der elastischen Ringe...  
Ingenieur Archiv 23.Bd. (1955) S. 421/435

- [12] Kreisel, M.  
Zur Berechnung drehfester, konstant gekrümmter Träger... Stahlbau 31. (1962) S. 153/155
- [13] Johnson, W.  
The effect of curvature on the centre of shear.  
Journ. roy. aeronaut. soc. vol. 59 (1955) S. 562/565
- [14] Sinjagovskij  
Berechnung von dünnwandigen gekrümmten Profilen  
Stroit. mech. Moskau 1963 H. 4 S. 21/27 (in russisch)
- [15] Esslinger, M.  
Flambage lateral des poutres en I courbe...  
Annales des ponts et chaussées (1954) Heft Mai/Juni
- [16] Klöppel, K./Möll, R.  
Das räumliche Stabilitätsproblem...  
Stahlbau 32. (1963) S. 289/296 und 336/342
- [17] Bornscheuer, F.W.  
Beitrag zur Berechnung ebener, gleichmäßig gedrückter  
Rechteckplatten... Dissertation Darmstadt 1943/46
- [18] Vogel, U.  
Herleitung der Differentialgleichungen... durch An-  
wendung der Variationsrechnung. Stahlbau 31. (1962)  
S. 118/122
- [19] Stepanow, W.W.  
Lehrbuch der Differentialgleichungen.  
Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1956
- [20] Duschek, A.  
Höhere Mathematik III.Bd. Springer Verlag Wien 1953
- [21] Stahl im Hochbau 12.Aufl. 2.ergänzter Nachdruck  
Verlag Stahleisen Düsseldorf 1959
- [22] Zurmühl, R.  
Matrizen 3.Aufl. Springer Verlag Berlin 1961
- [23] Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik  
und Physik I. 2.Aufl. Dover Publications N.Y.  
Herausgeber: P. Frank und R.v.Mises  
20.Kapitel Seiten 881/906

Abkürzungsverzeichnis

|                    |                                       |
|--------------------|---------------------------------------|
| E, G               | Elastizitätsmodul, Schubmodul         |
| F                  | Querschnittsfläche                    |
| $J_x$              | Biegeträgheitsmoment bez. der x-Achse |
| $J_\omega$         | Wölbträgheitsmoment                   |
| $J_T$              | Torsionsträgheitsmoment               |
| R                  | Biegeradius                           |
| $B$                | Profilbreite in der Biegeebene        |
| x, y, z            | Koordinaten                           |
| u, v, w            | Verschiebungen                        |
| $\varphi$          | Verdrehung                            |
| $\omega$           | Verwölbung                            |
| $\sigma, \tau$     | Spannungen                            |
| $\epsilon, \gamma$ | Dehnung, Schiebung                    |
| $M_x$              | Biegemoment um die x-Achse            |
| $Q_x$              | Querkraft in Richtung der y-Achse     |
| $M_\omega$         | Wölbmoment                            |
| $M_{TP}$           | primäres Torsionsmoment               |
| $M_{Ts}$           | sekundäres Torsionsmoment             |
| $M_T$              | Gesamt-torsionsmoment                 |
| p, q, m            | Streckenlasten                        |
| $\lambda, \kappa$  | Parameter                             |
| a, b, c, d, k      | Rechenabkürzungen                     |
| K                  | Integrationskonstante                 |
| $M_D$              | Lasttorsionsmoment                    |
| P                  | Einzellast                            |

Striche } bezeichnen Ableitungen nach  $\left\{ \begin{array}{l} z \\ \alpha \end{array} \right.$   
Punkte }

BEITRAG ZUR BERECHNUNG DES KREISTRÄGERS  
MIT OFFENEM DÜNNWANDIGEM PROFIL

1. Einleitung

Zur Berechnung der Wölbspannungen von geraden, dünnwandigen, offenen Profilen liegen mit den Arbeiten von Bornscheuer [1,2], Lindenberger [3], Wlassow [4], gebrauchsfertige Lösungen vor.

Frühere Arbeiten über die Wölbkrafttorsion von Stäben konstanter Krümmung setzen doppelsymmetrische I - Profile voraus { Unold [5], Hotchkiss [6]}. Der Wölbeinfluß wird dabei über die Flanschbiegung erfaßt. Stüssi [7] und Müller [8] arbeiten unter gleichen Voraussetzungen mit Differenzenansätzen. Federhofer [9] gewinnt die grundlegenden Differentialgleichungen des Schwingungsverhaltens von Kreisträgern in ähnlicher Weise wie in der vorliegenden Arbeit. Wansleben [10] verzichtet auf die Kopplung zwischen Verschiebung und Verdrehung im Ansatz: die Lösungen liefern nur bei kleinem Öffnungswinkel brauchbare Näherungen.

Geschlossene Lösungen des Problems finden sich für spezielle Fälle mittels Integralgleichungen bei Björklund [11], eine kurze Darstellung mittels Differentialgleichungen bei Kriessel [12]. Ebenso sind in [4], Kapitel XII die grundlegenden Differentialgleichungen, jedoch ohne Lösung, angegeben.

Johnson [13] und Sinjagovskij [14] bestimmen für gekrümmte Profile die Lage eines Schubmittelpunktes. Da am gekrümmten Träger Biegung und Verdrehung ineinander übergehen, verliert der Schubmittelpunkt seine Bedeutung als der Angriffspunkt der Last, für den eine Entkopplung durch geeignete Wahl der Querschnittsachsen erreicht werden kann.

Die Stabilitätsuntersuchung gekrümmter Stäbe berücksichtigt die Verwölbung mit ähnlichen Ansätzen wie in [9]. Hierüber berichten u.a. Esslinger [15] und Klöppel/Möll [16].

In [4] werden die Differentialgleichungen der Wölbkrafttorsion gekrümmter Stäbe, bezogen auf deren Hauptachsen,

durch Gleichgewichtsbetrachtungen gewonnen. Die vorliegende Arbeit leitet die charakteristischen Differentialgleichungen durch Variation der potentiellen Energie ab. Diese beschreiben die Verformungen des beliebig belasteten, gekrümmten Trägers für eine allgemeine Lage der Querschnittsachsen. Da Durchbiegung und Verdrehung immer gekoppelt auftreten, wird auf eine isolierte Behandlung der Wölbkrafttorsion verzichtet. Die allgemeine Lösung des Systems gekoppelter Differentialgleichungen ist für den Fall konstanter Krümmung und für Hauptachsen des Querschnitts angegeben. Man erhält sämtliche Verformungen und Schnittgrößen des senkrecht zu seiner Krümmungsebene belasteten Kreisrings.

Die folgenden Ableitungen setzen einen formtreuen Querschnitt voraus. Verformungen durch Wölbschubspannungen werden vernachlässigt. Der Krümmungsradius sei im Vergleich zu den Profilabmessungen so groß, daß die Querschnittskennwerte am geraden Stabelement ermittelt werden können.

## 2. Ableitung der Differentialgleichungen

### 2.1 Beziehungen zwischen Verschiebung und Verzerrung am Stabelement.

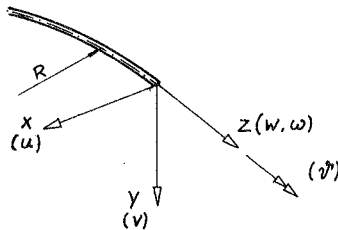
Für den geraden Stab mit dünnwandigem, offenem Profil lauten die Beziehungen nach [17] Gleichung (53):

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} - x \frac{d^2u}{dz^2} - y \frac{d^2v}{dz^2} + \omega \frac{d^2\vartheta''}{dz^2}$$

oder kürzer

$$\epsilon_z = w' - x \cdot u'' - y \cdot v'' + \omega \cdot \vartheta'' \quad (1)$$

$u''$ ,  $v''$ ,  $\vartheta''$  sind die auf einen Querschnitt bezogenen „Verdrehkrümmungen“ [4] des Stabelements.



Die Krümmung der Stabachse koppelt die Verschiebungen mit den Verdrehungen. Bei Vernachlässigung der Produkte kleiner Verformungen und ihrer Ableitungen erweitert sich (1) für den gekrümmten Stab (vgl. [4] Formeln (1.4) und (1.5) Kap. XII):

$$\epsilon_z = \left( w' - \frac{u}{R} \right) - x \left( u'' + \frac{u}{R^2} \right) - y \left( v'' - \frac{\vartheta''}{R} \right) + \omega \left( \vartheta'' + \frac{v''}{R} \right) \quad (2)$$

Aus (2) ergibt sich die Verdrehung ([17] Formel (32)):

$$\widehat{\vartheta}' = \vartheta' + \frac{v'}{R} \quad (3)$$

(2) und (3) sind die gesuchten Beziehungen.

## 2.2 Ermittlung der Differentialgleichungen durch Variation der potentiellen Energie

### 2.2.1 Energiepotential

Der allgemeine Ausdruck für das Energiepotential am Stabelement lautet [17] [18]:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a \quad (4)$$

$\Pi_i$  = Potential der inneren Kräfte =  $-A_i$  = -Formänderungsarbeit

$\Pi_a$  = Potential der äußeren Lasten =  $-2A_a$

$A_a$  = Arbeit der äußeren Lasten

Für die Formänderungsarbeit gilt am Stab:

$$A_i = -\frac{1}{2} \int_0^l \{ \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{zy} \cdot \gamma_{zy} \} dz \quad (5)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

Wird die Schubverformung vernachlässigt und das Hooke sche Werkstoffgesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (6)$$

in (5) eingesetzt, so erhält man für die Formänderungsenergie des Stabes mit dem Anteil aus St. Venant scher Torsion den Ausdruck

$$A_i = \frac{-E}{2} \int_0^l \left\{ \int_F \varepsilon_z^2 dF \right\} dz + \frac{GJ_T}{2} \int_0^l \widehat{\vartheta}'^2 dz \quad (7)$$

Für  $\varepsilon_z$  und  $\widehat{\vartheta}'$  werden die Werte nach (2) und (3) in (7) eingesetzt

$$A_i = \frac{-E}{2} \int_0^l \left\{ \left( w' - \frac{u}{R} \right)^2 \int dF + \left( u'' + \frac{u}{R^2} \right)^2 \int x^2 dF + \right. \\ \left. + \left( v'' - \frac{\widehat{\vartheta}'}{R} \right)^2 \int y^2 dF + \left( \widehat{\vartheta}'' + \frac{v''}{R} \right)^2 \int \omega^2 dF - \right. \\ \left. - 2 \left( w' - \frac{u}{R} \right) \left( u'' + \frac{u}{R^2} \right) \int x dF - 2 \left( w' - \frac{u}{R} \right) \left( v'' - \frac{\widehat{\vartheta}'}{R} \right) \int y dF + \right. \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\left(u'' + \frac{u}{R^2}\right)\left(v'' - \frac{v'}{R}\right) \int xy dF + 2\left(w' - \frac{u}{R}\right)\left(v'' + \frac{v''}{R}\right) \int \omega dF - \\
 & - 2\left(u'' + \frac{u}{R^2}\right)\left(v'' + \frac{v''}{R}\right) \int x\omega dF - 2\left(v'' - \frac{v'}{R}\right)\left(v'' + \frac{v''}{R}\right) \int y\omega dF \} dz \quad (8) \\
 & + \frac{GJ_T}{2} \int_0^l \left\{ v''^2 + \frac{2v'v''}{R} + \frac{v''^2}{R^2} \right\} dz
 \end{aligned}$$

Für die Flächenintegrale werden die Bezeichnungen nach [17] und [4] eingeführt.

$$\begin{aligned}
 \int dF &= F \quad [cm^2] && \text{Querschnittsfläche} \\
 \int x^2 dF &= J_y \quad [cm^4] \\
 \int y^2 dF &= J_x \quad [cm^4] && \left. \vphantom{\int x^2 dF} \right\} \text{Biegeträgheitsmomente} \\
 \int \omega^2 dF &= J_\omega \quad [cm^6] && \text{Wölbträgheitsmoment}
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \int x dF &= S_y \quad [cm^3] & \int xy dF &= J_{yx} \quad [cm^4] \\
 \int y dF &= S_x \quad [cm^3] & \int x\omega dF &= J_{\omega x} \quad [cm^5] \\
 \int \omega dF &= S_\omega \quad [cm^4] & \int y\omega dF &= J_{\omega y} \quad [cm^5]
 \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen (9) wird (8) zu:

$$\begin{aligned}
 A_i = \frac{-E}{2} \int_0^l \left\{ F\left(w'^2 - \frac{2w'u}{R} + \frac{u^2}{R^2}\right) + J_y\left(u''^2 + \frac{2uu''}{R^2} + \frac{u^2}{R^4}\right) + \right. \\
 \left. + J_x\left(v''^2 - \frac{2v''v'}{R} + \frac{v''^2}{R^2}\right) + J_\omega\left(v''^2 + \frac{2v''v''}{R} + \frac{v''^2}{R^2}\right) - \right. \\
 \left. - 2S_y\left(w'u'' + \frac{w'u}{R^2} - \frac{uu''}{R} - \frac{u^2}{R^3}\right) - \right. \quad (10)
 \end{aligned}$$

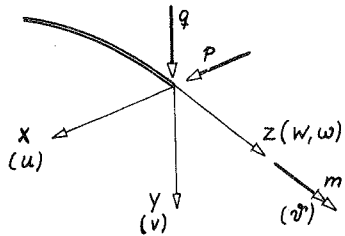


$$\begin{aligned}
 & - 2 S_x \left( w' v'' - \frac{w' v''}{R} - \frac{u v''}{R} + \frac{u v''}{R^2} \right) + \\
 & + 2 J_{yx} \left( u'' v'' - \frac{u'' v''}{R} + \frac{u v''}{R^2} - \frac{u v''}{R^3} \right) + \\
 & + 2 S_w \left( w' v'' + \frac{w' v''}{R} - \frac{u v''}{R} - \frac{u v''}{R^2} \right) - \\
 & - 2 J_{wx} \left( u'' v'' + \frac{u'' v''}{R} + \frac{u v''}{R^2} + \frac{u v''}{R^3} \right) - \\
 & - 2 J_{wy} \left( v'' v'' + \frac{v''^2}{R} - \frac{v'' v''}{R} - \frac{v'' v''}{R^2} \right) \} dz \\
 & + \frac{G J_T}{2} \int_0^l \left\{ v''^2 + \frac{2 v' v''}{R} + \frac{v''^2}{R^2} \right\} dz
 \end{aligned} \tag{10}$$

Das Potential der äußeren Lasten wird für Streckenlasten  $p$  und  $q$  und für ein verteiltes Drehmoment  $m$  aufgestellt.

$$2 A_a = + \int_0^l (p \cdot u + q \cdot v + m \cdot v') dz \tag{11}$$

Das Gesamtpotential setzt sich aus den Anteilen (10) und (11) zusammen.



### 2.2.2 Variation der potentiellen Energie

Die Variationsrechnung liefert über das Verschwinden der ersten Variation  $\delta \Pi$  des Gesamtpotentials die Differentialgleichungen des Problems [23].

$$\Pi = \int_z f(z; w'; u, u''; v, v', v''; v', v'', v''') dz \tag{12}$$

Das Potential ist eine Funktion  $f$  von 3 Verschiebungen und einer Verdrehung: die Rechnung führt damit auf 4 partielle Differentialgleichungen. Als Variation der Verschiebung  $w(z)$

wird die Funktion

$$\delta w = \varepsilon_1 \xi \quad (13)$$

eingeführt.

$\xi$  ist eine im Integrationsbereich mit ihren Ableitungen bis zur 2. Ordnung stetige, sonst beliebige Funktion, die für  $z = 0$  und für  $z = l$  verschwindet.  $\varepsilon_1$  ist ein Parameter.

Damit lautet die variierte Funktion:

$$W = w + \delta w = w + \varepsilon_1 \xi \quad (14)$$

Das Integral  $\Pi(W) = \Pi(w + \delta w) = \Phi(\varepsilon_1)$  besitzt dann ein Extremum für  $\varepsilon_1 = 0$

$$\Phi(\varepsilon_1)' \Big|_{\varepsilon_1=0} = 0 \quad (15)$$

Für die 3 übrigen Verformungen lassen sich entsprechende Ansätze angeben. Nach kurzer Zwischenrechnung, die in [17] ausführlich angegeben ist, erhält man als erste Variation der potentiellen Energie

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \left\{ - \int_z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial w'} \right) \delta w \right] dz + \right. \\ & + \int_z \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right] dz + \int_z \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right) \delta u \right] dz + \\ & + \int_z \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \delta v \right] dz - \int_z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial v'} \right) \delta v \right] dz + \int_z \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial v''} \right) \delta v \right] dz + \\ & \left. + \int_z \left[ \frac{\partial f}{\partial v'} \delta v' \right] dz - \int_z \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial v''} \right) \delta v'' \right] dz + \int_z \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial v'''} \right) \delta v'' \right] dz \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Anwendung der partiellen, totalen Differentiation in (16) auf die Arbeitspotentiale (10) und (11) ergibt:

$$d\pi = + \left[ E \int_0^l \left\{ -F \left( w'' - \frac{u'}{R} \right) + S_y \left( u''' + \frac{u'}{R^2} \right) + S_x \left( v''' - \frac{v'}{R} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - S_\omega \left( v''' + \frac{v'''}{R} \right) \right\} dw dz \right.$$

$$+ E \int_0^l \left\{ F \left( -\frac{w'}{R} + \frac{u}{R^2} \right) + J_y \left( \frac{u''}{R^2} + \frac{u}{R^4} \right) - S_y \left( \frac{w'}{R^2} - \frac{u''}{R} - \frac{2u}{R^3} \right) - \right. \\ \left. - S_x \left( -\frac{v''}{R} + \frac{v''}{R^2} \right) + J_{yx} \left( \frac{v''}{R^2} - \frac{v''}{R^3} \right) + S_\omega \left( -\frac{v''}{R} - \frac{v''}{R^2} \right) - \right. \\ \left. - J_{\omega x} \left( \frac{v''}{R^2} + \frac{v''}{R^3} \right) - \frac{p}{E} \right\} du dz$$

$$+ E \int_0^l \left\{ J_y \left( u^{iv} + \frac{u''}{R^2} \right) - S_y \left( w''' - \frac{u''}{R} \right) + J_{yx} \left( v^{iv} - \frac{v''}{R} \right) - \right. \\ \left. - J_{\omega x} \left( v^{iv} + \frac{v^{iv}}{R} \right) \right\} du dz$$

(17)

$$+ \int_0^l \{ -q \} dv dz - G J_T \int_0^l \left\{ \frac{v''}{R} + \frac{v''}{R^2} \right\} dv dz +$$

$$+ E \int_0^l \left\{ J_x \left( v^{iv} - \frac{v''}{R} \right) + J_\omega \left( \frac{v^{iv}}{R} + \frac{v^{iv}}{R^2} \right) - S_x \left( w''' - \frac{u''}{R} \right) + J_{yx} \left( u^{iv} + \frac{u''}{R^2} \right) + \right.$$

$$\left. + S_\omega \left( \frac{w'''}{R} - \frac{u''}{R^2} \right) - J_{\omega x} \left( \frac{u^{iv}}{R} + \frac{u''}{R^3} \right) - J_{\omega y} \left( v^{iv} + \frac{2v^{iv}}{R} - \frac{v''}{R^2} \right) \right\} dv dz$$

$$+ E \int_0^l \left\{ J_x \left( -\frac{v''}{R} + \frac{v''}{R^2} \right) - S_x \left( -\frac{w'}{R} + \frac{u}{R^2} \right) + J_{yx} \left( -\frac{u''}{R} - \frac{u}{R^3} \right) - \right. \\ \left. - J_{\omega y} \left( -\frac{v''}{R} - \frac{v''}{R^2} \right) - \frac{m}{E} \right\} d^2 v^2 dz -$$

$$- G J_T \int_0^l \left\{ v^{iv} + \frac{v''}{R} \right\} d^2 v^2 dz + E \int_0^l \left\{ J_\omega \left( v^{iv} + \frac{v^{iv}}{R} \right) + \right.$$

$$\left. + S_\omega \left( w''' - \frac{u''}{R} \right) - J_{\omega x} \left( u^{iv} + \frac{u''}{R^2} \right) - J_{\omega y} \left( v^{iv} - \frac{v''}{R} \right) \right\} d^2 v^2 dz \Big]$$

Die gesuchten Differentialgleichungen - für eine beliebige Lage des Koordinatensystems - liefert die Forderung, daß  $\delta \Pi$  für alle zulässigen virtuellen Verformungen  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  und  $\delta \vartheta$  gleich Null sein soll: in (17) müssen die {Klammerwerte} verschwinden.

$$EF\left(w'' - \frac{u'}{R}\right) - ES_y\left(u''' + \frac{u'}{R^2}\right) - ES_x\left(v'' - \frac{\vartheta'}{R}\right) + ES_w\left(\vartheta'' + \frac{v'''}{R}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} & EF\left(-\frac{w'}{R} + \frac{u}{R^2}\right) + EJ_y\left(\frac{u}{R^4} + \frac{2u''}{R^2} + u''''\right) - ES_y\left(\frac{w'}{R^2} + w''' - \frac{2u}{R^3} - \frac{2u''}{R}\right) - \\ & - ES_x\left(-\frac{v''}{R} + \frac{\vartheta''}{R^2}\right) + EJ_{yx}\left(\frac{v''}{R^2} + v'''' - \frac{\vartheta''}{R^3} - \frac{\vartheta''''}{R}\right) + ES_w\left(-\frac{v''}{R^2} - \frac{\vartheta''''}{R}\right) - \\ & - EJ_{wx}\left(\frac{v''}{R^3} + \frac{v''''}{R} + \frac{\vartheta''''}{R^2} + \vartheta''''''\right) - p \end{aligned} = 0$$

$$\begin{aligned} & EJ_x\left(v'''' - \frac{\vartheta''''}{R}\right) + EJ_w\left(\frac{v''''}{R^2} + \frac{\vartheta''''''}{R}\right) - ES_x\left(w''' - \frac{u''}{R}\right) + EJ_{yx}\left(\frac{u''}{R^2} + u''''\right) + \\ & + ES_w\left(\frac{w''''}{R} - \frac{u''}{R^2}\right) - EJ_{wx}\left(\frac{u''}{R^3} + \frac{u''''}{R}\right) - EJ_{wy}\left(\frac{2v''''}{R} - \frac{\vartheta''''''}{R^2} + \vartheta''''''''\right) - \\ & - GJ_T\left(\frac{v''}{R^2} + \frac{\vartheta''''}{R}\right) - q \end{aligned} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & EJ_x\left(-\frac{v''}{R} + \frac{\vartheta''}{R^2}\right) - ES_x\left(-\frac{w'}{R} + \frac{u}{R^2}\right) + EJ_{yx}\left(-\frac{u}{R^3} - \frac{u''}{R}\right) - \\ & - EJ_{wy}\left(-\frac{v''}{R^2} + v'''' - \frac{2\vartheta''''}{R}\right) + EJ_w\left(\vartheta'''' + \frac{v''''}{R}\right) + ES_w\left(w''' - \frac{u''}{R}\right) - \\ & - EJ_{wx}\left(\frac{u''}{R^2} + u''''\right) - GJ_T\left(\frac{v''}{R} + \vartheta''''\right) - m \end{aligned} = 0$$

Werden alle Verschiebungsaussagen auf Hauptachsen des Querschnitts bezogen, so verschwinden die gemischten Querschnittskennwerte der Biegung.

$$S_y = S_x = J_{yx} = 0 \tag{19}$$

Mit (19) vereinfachen sich die Gleichungen (18)

$$EF \left( W'' - \frac{U'}{R} \right) + ES_{\omega} \left( \vartheta'''' + \frac{V''''}{R} \right) = 0$$

$$EF \left( -\frac{W'}{R} + \frac{U}{R^2} \right) + EJ_y \left( \frac{U}{R^4} + \frac{2U''}{R^2} + U'''' \right) + ES_{\omega} \left( -\frac{\vartheta''''}{R} - \frac{V''''}{R^2} \right) -$$

$$-EJ_{\omega x} \left( \frac{V''''}{R^3} + \frac{V''''}{R} + \frac{\vartheta''''}{R^2} + \vartheta'''' \right) - p = 0$$

(20)

$$EJ_x \left( V'''' - \frac{\vartheta''''}{R} \right) + EJ_{\omega} \left( \frac{V''''}{R^2} + \frac{\vartheta''''}{R} \right) + ES_{\omega} \left( \frac{W''''}{R} - \frac{U''''}{R^2} \right) -$$

$$-EJ_{\omega x} \left( \frac{U''''}{R^3} + \frac{U''''}{R} \right) - EJ_{\omega y} \left( \frac{2V''''}{R} - \frac{\vartheta''''}{R^2} + \vartheta'''' \right) -$$

$$-GJ_T \left( \frac{V''''}{R^2} + \frac{\vartheta''''}{R} \right) - q = 0$$

$$EJ_x \left( -\frac{V''''}{R} + \frac{\vartheta''''}{R^2} \right) - EJ_{\omega y} \left( -\frac{V''''}{R^2} + V'''' - \frac{2\vartheta''''}{R} \right) +$$

$$+EJ_{\omega} \left( \frac{V''''}{R} + \vartheta'''' \right) + ES_{\omega} \left( W'''' - \frac{U''''}{R} \right) - EJ_{\omega x} \left( \frac{U''''}{R^2} + U'''' \right) -$$

$$-GJ_T \left( \frac{V''''}{R} + \vartheta'''' \right) - m = 0$$

Die gemischten Querschnittskennwerte der Verwölbung verschwinden, wenn Verdrehaussagen auf den am geraden Trägerelement ermittelten Schubmittelpunkt bezogen werden. In der weiteren Ableitung wird der gegenüber dem Biegeradius kleine Abstand zwischen Schwerpunkt und Schubmittelpunkt nach [4] S. 449/450 vernachlässigt.

$$S_{\omega} = J_{\omega y} = J_{\omega x} = 0 \quad (21)$$

Mit (21) vereinfachen sich die Gleichungen (20) weiter

$$EF \left( w'' - \frac{u}{R} \right) = 0$$

$$EF \left( \frac{w'}{R} + \frac{u}{R^2} \right) + EJ_y \left( \frac{u}{R^4} + \frac{2u''}{R^2} + u^{IV} \right) - p = 0 \quad (22)$$

$$EJ_x \left( v^{IV} - \frac{v''}{R} \right) + EJ_\omega \left( \frac{v^{IV}}{R^2} + \frac{v''}{R} \right) - GJ_T \left( \frac{v''}{R^2} + \frac{v''}{R} \right) - q = 0$$

$$EJ_x \left( -\frac{v''}{R} + \frac{v''}{R^2} \right) + EJ_\omega \left( \frac{v^{IV}}{R} + v''^{IV} \right) - GJ_T \left( \frac{v''}{R} + v'' \right) - m = 0$$

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung des quer zu seiner Biegeebene belasteten Trägers, d.h. auf die beiden letzten, miteinander gekoppelten Differentialgleichungen in (22). Sie stimmen mit den in [4] über Gleichgewichtsbetrachtungen hergeleiteten Formeln XII (1.10) überein. Für  $R = \infty$  ergeben sich aus (22) die bekannten Differentialbeziehungen des geraden Stabes.

$$EF w'' = 0$$

$$EJ_y u^{IV} - p = 0$$

$$EJ_x v^{IV} - q = 0$$

$$EJ_\omega v''^{IV} - GJ_T v'' - m = 0$$

(23)

### 3. Lösung der Differentialgleichungen (Variable $\alpha$ )

#### 3.1 Querschnittsparameter und kanonisches System

Die beiden letzten Gleichungen in (22) bilden ein System gekoppelter Differentialgleichungen, deren Koeffizienten im allgemeinen Fall nicht konstant sind. Bei unveränderlichen Querschnittskennwerten und kreisförmiger Krümmung sind die Koeffizienten konstant und es existiert eine geschlossene Lösung.

In [4] wird aus (22) durch Elimination von  $v$  eine Differentialgleichung 6. Ordnung von  $\mathcal{V}^n$  entwickelt (Formel XII 1.11). Weiterhin sind Differentialbeziehungen zwischen Verformungen und Schnittgrößen angegeben. Diese Gleichungen sind nur bei passenden Randbedingungen unmittelbar zu lösen.

Hier wird die Lösung durch Integration der Verformungsfunktionen  $v$  und  $\mathcal{V}^n$  gewonnen. Die Einführung eines Systems von 8 Differentialgleichungen 1. Ordnung an Stelle von zwei gekoppelten Differentialgleichungen 4. Ordnung führt zu einem schematischen, übersichtlichen Lösungsverfahren.

Die Trennung nach Funktionen liefert aus (22)

$$\left(EJ_x + \frac{EJ_w}{R^2}\right) v'''' - \frac{GJ_T}{R^2} v'' + \frac{EJ_w}{R} \mathcal{V}^{n''''} - \frac{EJ_x + GJ_T}{R} \mathcal{V}^{n''} - q = 0 \quad (24)$$

$$\frac{EJ_w}{R} v'''' - \frac{EJ_x + GJ_T}{R} v'' + EJ_w \mathcal{V}^{n''''} - GJ_T \mathcal{V}^{n''} + \frac{EJ_x}{R^2} \mathcal{V}^n - m = 0$$

Auf die Symmetrieeigenschaften der Differentialoperatoren wird in [4] (Seite 452) hingewiesen.

Als neue unabhängig Veränderliche wird der Öffnungswinkel

$\alpha = \frac{z}{R}$  eingeführt. Mit

$$z = R \cdot \alpha$$

$$f' = \frac{df}{dz} = \frac{df}{R d\alpha} = \frac{1}{R} f' \quad (25)$$

$$f'' = \frac{d^2f}{dz^2} = \frac{d^2f}{R^2 (d\alpha)^2} = \frac{1}{R^2} f''$$

usw

und 
$$q(z) = \frac{1}{R} q(\alpha) \quad (26)$$

wird (24) zu

$$\begin{aligned} \frac{R^2 E J_x + E J_\omega}{R^6} v^{(4)} - \frac{G J_T}{R^4} v'' + \frac{E J_\omega}{R^5} v^{(4)} - \frac{E J_x + G J_T}{R^3} v'' - \frac{q}{R} = 0 \\ \frac{E J_\omega}{R^5} v^{(4)} - \frac{E J_x + G J_T}{R^3} v'' + \frac{E J_\omega}{R^4} v^{(4)} - \frac{G J_T}{R^2} v'' + \frac{E J_x}{R^2} v'' - \frac{m}{R} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

(27) wird hinsichtlich  $v^{(4)}$  und  $v''$  normiert

$$\begin{aligned} \left( \frac{R E J_x}{E J_\omega} + \frac{1}{R} \right) v^{(4)} - \frac{R G J_T}{E J_\omega} v'' + v^{(4)} - \left( \frac{R^2 E J_x}{E J_\omega} + \frac{R^2 G J_T}{E J_\omega} \right) v'' = \frac{R^4 q}{E J_\omega} \\ v^{(4)} - \left( \frac{R^2 E J_x}{E J_\omega} + \frac{R^2 G J_T}{E J_\omega} \right) v'' + R v^{(4)} - \frac{R^3 G J_T}{E J_\omega} v'' + \frac{R^3 E J_x}{E J_\omega} v'' = \frac{R^4 m}{E J_\omega} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Gleichungen (28) lassen sich durch Zusammenfassung einfacher ausdrücken. Als dimensionslose Kennwerte werden eingeführt:

$$\boxed{\frac{E J_x}{E J_\omega} \beta^2 = \kappa^2} \quad \boxed{\frac{G J_T}{E J_\omega} \beta^2 = \lambda^2} \quad (29)$$

$\beta$  ist die Breite des Profils in der Trägerebene. Die Kennwerte (29) enthalten nur reine Querschnittsgrößen und sind für ein Profil konstant. Da der Biegeradius nicht mit eingeht, können sie in Profiltabellen angegeben werden.

Bei der getroffenen Einschränkung auf Kreisträger ( $R = \text{konstant}$ ) läßt sich substituieren

$$\bar{v} = R \cdot v'' \quad (30)$$

und ferner, da in (28)  $v$  nur in der 2. und 4. Ableitung auftritt

$$\bar{v} = v'' \quad (31)$$

(29), (30) und (31) in (28) eingesetzt



$$\left(\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 + 1\right) \bar{v}'' - \frac{R^2}{\beta^2} \lambda^2 \bar{v} + \bar{v}'''' - \frac{R^2}{\beta^2} (\kappa^2 + \lambda^2) \bar{v}'' = \frac{R^5}{EJ_\omega} q \quad (32)$$

$$\bar{v}'' - \frac{R^2}{\beta^2} (\kappa^2 + \lambda^2) \bar{v} + \bar{v}'''' - \frac{R^2}{\beta^2} \lambda^2 \bar{v}'' + \frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 \bar{v}'' = \frac{R^4}{EJ_\omega} m$$

Der Verlauf der Kennwerte  $\lambda$  und  $\kappa$  ist für deutsche Walzprofile in Tafel 1 angegeben. Beide Kennwerte ändern sich innerhalb einer Profilreihe nur wenig.

Im System der gekoppelten Gleichungen (32) werden beide Ausdrücke nach den höchsten Ableitungen der Funktionen  $v$  und  $v''$  aufgelöst. Dieses kanonische System zweier Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung kann durch ein gleichwertiges System von 6 Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt werden. Es wird hier die Lösung nach [19] S.262 ff gewählt.

Im Fall konstanter Koeffizienten des Ausgangssystems läßt sich ein Lösungsansatz mit Exponentialfunktionen für die homogenen Differentialgleichungen einführen. Die vollständige Lösung setzt sich aus dieser homogenen Lösung und Partikularlösungen für die gewünschten Lastfunktionen zusammen. Die Subtraktion der Gleichungen (32) liefert

$$\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 \bar{v}'' + \frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 \bar{v} - \frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 \bar{v}'' - \frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 \bar{v}'' = + \frac{R^5}{EJ_\omega} \left(q - \frac{m}{R}\right) \quad (33)$$

und nach der Division durch den gemeinsamen Faktor

$$\bar{v}'' + \bar{v} - \bar{v}'' - \bar{v}'' = + \frac{R^3}{EJ_x} \left(q - \frac{m}{R}\right) \quad (34)$$

(34) ist die erste der gesuchten Gleichungen.

Durch Erweiterung von (32.2) mit dem Faktor  $\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 + 1$  und anschließende Subtraktion von (32.1) ergibt sich die zweite Gleichung nach der Division durch  $\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2$

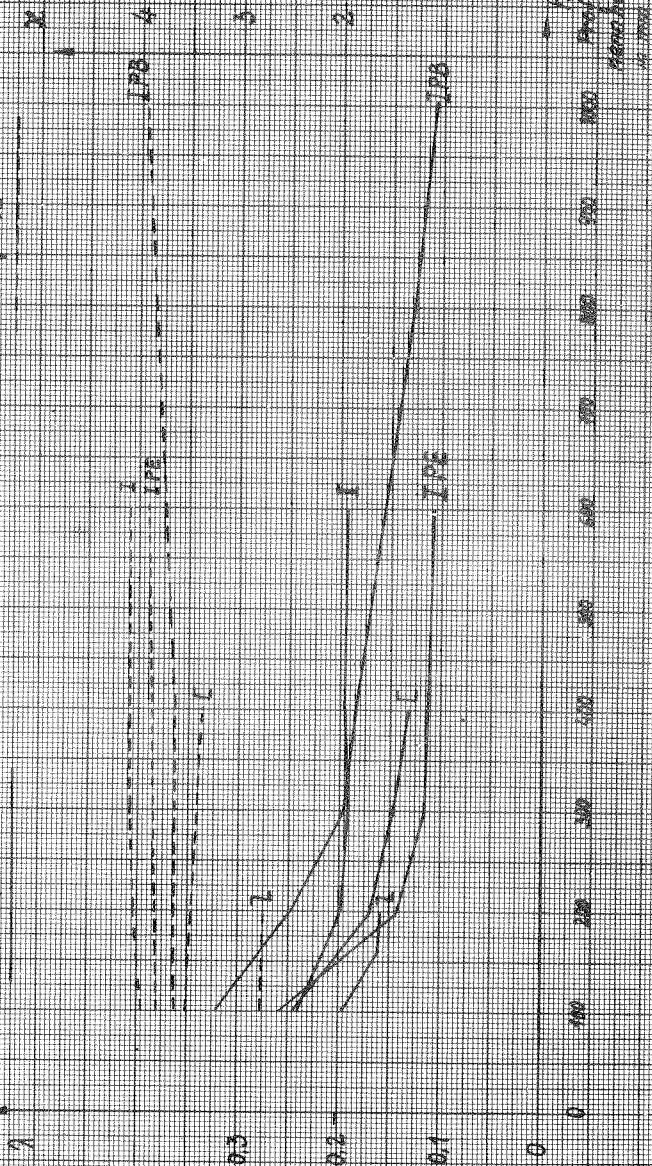
$$\left[\frac{R^2}{\beta^2} (\kappa^2 + \lambda^2) + 1\right] \bar{v} - \bar{v}'''' + \left(\frac{R^2}{\beta^2} \lambda^2 - 1\right) \bar{v}'' - \left(\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 + 1\right) \bar{v}'' = \quad (35)$$

$$= + \frac{R^3}{EJ_x} \left[ q - \left(\frac{R^2}{\beta^2} \kappa^2 + 1\right) \frac{m}{R} \right]$$

# Übersicht der Kennwerte $\lambda$ und $\alpha$ für Walzprofile

$$\lambda = \sqrt{\frac{S_{30} \cdot \delta^2}{E_{30} \cdot I^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{E_{30} \cdot I^2}{S_{30} \cdot \delta^2}}$$



Prof. Dr.  
Hans-Joachim  
H. H. H.

Als Abkürzungen werden eingeführt

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{b^2}(\mu^2 + \lambda^2) + 1 &= a \\ \frac{R^2}{b^2} \lambda^2 - 1 &= b \\ \frac{R^2}{b^2} \mu^2 + 1 &= c \end{aligned} \quad (36)$$

$$a - b - c = 1 \quad (37)$$

Mit den Bezeichnungen (36) und nach Umstellung von (35) lautet das kanonische System der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{v}'' + \bar{v} - \bar{v}'' - \bar{v}'' &= \frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{m}{R} \right) \\ \bar{v}'' - a\bar{v} - b\bar{v}'' + c\bar{v}'' &= -\frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{cm}{R} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

### 3.2 Lösung des homogenen Systems

Aus (38) wird das homogene System übernommen

$$\begin{aligned} \bar{v}'' &= -\bar{v} + \bar{v}'' + \bar{v}'' \\ \bar{v}'' &= a\bar{v} + b\bar{v}'' - c\bar{v}'' \end{aligned} \quad (39)$$

Als neue Funktionen werden eingeführt:

$$\begin{aligned} v_0 &= \bar{v} & v_0 &= \bar{v}'' \\ v_1 &= \bar{v}' & v_1 &= \bar{v}'' \\ \frac{dv_1}{d\alpha} &= \bar{v}'' & v_2 &= \bar{v}'' \\ & & v_3 &= \bar{v}'' \\ & & \frac{dv_3}{d\alpha} &= \bar{v}'' \end{aligned} \quad (40) \quad (41)$$

(40) und (41) in (39) eingesetzt und die fehlenden Gleichungen zum 6 x 6 System ergänzt

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_0}{d\alpha} &= && + v_1 \\
 \frac{dv_1}{d\alpha} &= -v_0 && + v_0' && + v_2' \\
 \frac{dv_0'}{d\alpha} &= && + v_1' \\
 \frac{dv_1'}{d\alpha} &= && + v_2' \\
 \frac{dv_2'}{d\alpha} &= && + v_3' \\
 \frac{dv_3'}{d\alpha} &= +av_0 && -cv_0' && +bv_2'
 \end{aligned} \tag{42}$$

oder (42) in Matrixschreibweise

$$v' = -A v \tag{43}$$

In (43) bedeutet

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -a & 0 & +c & 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \tag{44} \quad v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} \tag{45}$$

Zur Lösung des Systems (43) werden Exponentialfunktionen angesetzt

$$\begin{aligned}
 v_0 &= A_1 e^{\beta\alpha} & v_0' &= A_3 e^{\beta\alpha} \\
 v_1 &= A_2 e^{\beta\alpha} & v_1' &= A_4 e^{\beta\alpha} \\
 & & v_2' &= A_5 e^{\beta\alpha} \\
 & & v_3' &= A_6 e^{\beta\alpha}
 \end{aligned} \tag{46}$$

Die Größen  $A_i$  und  $\beta$  sind Konstanten, deren Werte so zu bestimmen sind, daß die Ansätze (46) das homogene System (43) erfüllen. Die Existenz nichttrivialer Lösungen fordert das Verschwinden der Determinante

$$\det |C_{ii} + \beta \mathcal{E}| = 0 \quad (47)$$

Die Determinante wird nach der letzten Zeile entwickelt. Man erhält

$$\mathcal{D} = \det \begin{vmatrix} +\beta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +\beta & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +\beta & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\beta & -1 \\ -a & 0 & +c & 0 & -b & +\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

$$\mathcal{D} = (\beta^2 + 1) \{-a + c + \beta^2(\beta^2 - b)\} = 0 \quad (49)$$

(49) ist die charakteristische Gleichung des Problems, deren Wurzeln die Lösungen der Differentialgleichungen bilden.

Man erhält nach kurzer Rechnung bei Beachtung von (37)

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{b+1} = \pm R \sqrt{\frac{GJ_T}{EJ_\omega}} \quad (50) \quad (51)$$

$$\beta_{3,5} = +i \quad (52)$$

$$\beta_{4,6} = -i \quad (53)$$

Die Biegesteifigkeit  $EJ_x$  geht nicht in die Wurzeln ein.

Die Ausdrücke (50) bis (53) erfüllen die Bedingung (47). Beim Einsetzen in die Ausgangsgleichungen erhält man für jede Wurzel eine Gruppe von Beziehungen, in denen bei Einfachwurzeln eine einfache, bei Doppelwurzeln höchstens eine zweifache lineare Abhängigkeit besteht. Über eine bzw zwei Konstanten kann also jeweils frei verfügt werden.

Im vorliegenden Fall tritt auch bei den Doppelwurzeln nur ein einfacher Rangabfall auf. Der Lösungsansatz muß daher erweitert werden.

Durch Einsetzen von (46) in (43) erhält man das lineare, homogene Gleichungssystem, aus dem die Vektoren der Teillösungen ermittelt werden.

$$\alpha a_i + \beta_k \cdot \mathcal{L} = 0 \quad (54)$$

oder ausgeschrieben

| $A_1$      | $A_2$      | $A_3$      | $A_4$      | $A_5$      | $A_6$      | $=$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----|
| $+\beta_k$ | $-1$       | $0$        | $0$        | $0$        | $0$        | $0$ |
| $+1$       | $+\beta_k$ | $-1$       | $0$        | $-1$       | $0$        | $0$ |
| $0$        | $0$        | $+\beta_k$ | $-1$       | $0$        | $0$        | $0$ |
| $0$        | $0$        | $0$        | $+\beta_k$ | $-1$       | $0$        | $0$ |
| $0$        | $0$        | $0$        | $0$        | $+\beta_k$ | $-1$       | $0$ |
| $-a$       | $0$        | $+c$       | $0$        | $-b$       | $+\beta_k$ | $0$ |

(55)

Die Wurzeln (50) bis (53) werden nacheinander in (55) eingesetzt.

a)  $\beta_1 = +R \sqrt{\frac{GJ_I}{EJ_{\omega}}} = +d$

Mit der Wahl  $A_3 = 1 \cdot C_I$  (56)

liefert eine einfache Zwischenrechnung den Vektor der ersten Teillösung.

$$\bar{v}_I = C_I \cdot a_I \cdot e^{+d\alpha} \quad (57)$$

mit  $a_I = \begin{bmatrix} +1 \\ +d \\ +1 \\ +d \\ +d^2 \\ +d^3 \end{bmatrix}$  (58)

b)  $\beta_2 = -d$

Entsprechend der ersten Teillösung liefert die Wahl

$$A_3 = 1 \cdot C_{II} \quad (59)$$

die zweite Teillösung

$$\overline{\varphi}_{II} = C_{II} \cdot \alpha_{II} \cdot e^{-d\alpha} \quad (60)$$

mit

$$\alpha_{II} = \begin{bmatrix} +1 \\ -d \\ +1 \\ -d \\ +d^2 \\ -d^3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

In die Teillösungen (57) und (60) werden die hyperbolischen Winkelfunktionen eingeführt

$$\begin{aligned} e^{+x} &= \cosh x + \sinh x \\ e^{-x} &= \cosh x - \sinh x \end{aligned} \quad (62)$$

Die umgeformten Lösungen lauten

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_0^* \\ v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = (C_I + C_{II}) \cdot \begin{bmatrix} + \cosh(d\alpha) \\ +d \sinh(d\alpha) \\ + \cosh(d\alpha) \\ +d \sinh(d\alpha) \\ +d^2 \cosh(d\alpha) \\ +d^3 \sinh(d\alpha) \end{bmatrix} + (C_I - C_{II}) \cdot \begin{bmatrix} + \sinh(d\alpha) \\ +d \cosh(d\alpha) \\ + \sinh(d\alpha) \\ +d \cosh(d\alpha) \\ +d^2 \sinh(d\alpha) \\ +d^3 \cosh(d\alpha) \end{bmatrix} \quad (63)$$

Die Konstanten  $C_I \pm C_{II}$  werden später zu neuen Konstanten  $K_I$  und  $K_{II}$  zusammengefaßt.

Die den Doppelwurzeln

$$\beta_3 = \beta_5 = +i \quad \text{und} \quad \beta_4 = \beta_6 = -i$$

zugeordneten Teillösungen werden nach [20] S.103 ff ermittelt. Da für die zweifache Wurzel die Gleichungen (55) jeweils nur eine einzige linear unabhängige Eigenlösung liefern, wird der Lösungsansatz erweitert.

$$\overline{\varphi}_k = C_k (A_k \cdot \alpha + a_k) e^{i\alpha} \quad (64)$$

Die Vorzahlen  $A_k$  und  $a_k$ , von denen jeweils wieder eine frei wählbar ist, werden durch Einsetzen von (64) in (55) und (42) gewonnen.

c)  $\beta_3 = \beta_5 = +i$

Erster Ansatz:

$$\bar{\psi}_{\bar{u}} = C_{\bar{u}} \cdot A_{\bar{u}} \cdot e^{i\alpha} \quad (65)$$

Gewählt

$$A_3 = 1 \cdot C_{\bar{u}}$$

Die Zwischenrechnung liefert den Vektor der Vorzahlen  $A_k$

$$A_{\bar{u}} = \begin{bmatrix} +1 \\ +i \\ +1 \\ +i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (66)$$

der 3. Teillösung.

Zweiter Ansatz:

$$\bar{\psi}_{\bar{v}} = C_{\bar{v}} (A_{\bar{v}} \cdot a + a_{\bar{v}}) e^{i\alpha} \quad (67)$$

Setzt man die Ausdrücke (66) und (67) in (42) ein und dividiert durch  $e^{i\alpha}$ , so erhält man für die Ermittlung der Werte  $a_{\bar{v}}$  das Gleichungssystem

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6 =$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|----|
| +i    | -1    | o     | o     | o     | o       | -1 |
| +1    | +i    | -1    | o     | -1    | o       | -i |
| o     | o     | +i    | -1    | o     | o       | -1 |
| o     | o     | o     | +i    | -1    | o       | -i |
| o     | o     | o     | o     | +i    | -1      | +1 |
| -a    | o     | +c    | o     | -b    | +i      | +i |

(68)

Mit der Wahl  $a_3 = +i$  ergibt sich der Vektor der Zahlen  $a_{\bar{v}}$

$$a_{\bar{v}} = \begin{bmatrix} + \frac{c-b-3}{a} i \\ +1 - \frac{c-b-3}{a} \\ +i \\ 0 \\ +i \\ -2 \end{bmatrix} \quad (69)$$



Die Werte  $A_{\bar{v}}$  sind den Zahlen  $A_{\bar{m}}$  gleich. Mit (66) und (69) heißt die 5. Teillösung

$$\mathcal{U}_{\bar{v}} = C_{\bar{v}} \cdot \begin{bmatrix} +\alpha + ki \\ +\alpha i + l - k \\ +\alpha + i \\ +\alpha i \\ -\alpha + i \\ -\alpha i - 2 \end{bmatrix} \cdot e^{i\alpha} \quad (70)$$

wenn der Ausdruck

$$\frac{c - b - 3}{a} = k \quad (71)$$

gesetzt wird.

Die Lösungen (63) (65) und (70) bilden zusammen ein Fundamentalsystem [20]. In (65) und (70) sind sowohl Real- als auch Imaginärteil Lösungen des Problems. Der Imaginärteil liefert die noch fehlenden 4. und 6. Teillösungen, die auch durch Einsetzen der 2. Doppelwurzel  $\beta_4 = \beta_6 = -i$  gewonnen werden können.

(65) und (70) werden mit der Euler schen Formel ausgedrückt.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (72)$$

Aus (65) ergeben sich mit den neuen Konstanten  $K_i$  die 3. und 4. Teillösung

$$\mathcal{U}_{\bar{m}} = K_{\bar{m}} \begin{bmatrix} + \cos \alpha \\ - \sin \alpha \\ + \cos \alpha \\ - \sin \alpha \\ - \cos \alpha \\ + \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (73)$$

und

$$\mathcal{U}_{i\bar{v}} = K_{i\bar{v}} \begin{bmatrix} + \sin \alpha \\ + \cos \alpha \\ + \sin \alpha \\ + \cos \alpha \\ - \sin \alpha \\ - \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (74)$$

Entsprechend liefert (70) mit (72) die zwei letzten Lösungen.

$$\mathcal{L}_{\vec{v}} = K_{\vec{v}} \cdot \begin{bmatrix} + \alpha \cos \alpha & - & k \sin \alpha \\ - \alpha \sin \alpha & + & (1-k) \cos \alpha \\ + \alpha \cos \alpha & - & \sin \alpha \\ - \alpha \sin \alpha & & \\ - \alpha \cos \alpha & - & \sin \alpha \\ + \alpha \sin \alpha & - & 2 \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (75)$$

und

$$\mathcal{L}_{\vec{w}} = K_{\vec{w}} \cdot \begin{bmatrix} + \alpha \sin \alpha & + & k \cos \alpha \\ + \alpha \cos \alpha & + & (1-k) \sin \alpha \\ + \alpha \sin \alpha & + & \cos \alpha \\ + \alpha \cos \alpha & & \\ - \alpha \sin \alpha & + & \cos \alpha \\ - \alpha \cos \alpha & - & 2 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (76)$$

Die vollständige Lösung des homogenen Systems setzt sich aus den 6 Teillösungen (63), (73) (74), (75) und (76) zusammen. Durch Integration wird die Substitution (31) aufgehoben. Dabei treten 2 weitere Integrationskonstanten auf. Weiterhin wird die Operation (30) rückgängig gemacht. Durch Multiplikation des ganzen Systems mit R werden die neuen Konstanten  $K_1$  bis  $K_6$  dimensionslos.

In Tafel 2 (Seite 35) ist die vollständige Lösung des homogenen Systems dargestellt. Durch Ableitung wurden die 4. Ableitungen der Funktionen ermittelt, um die Lösung durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen (27) überprüfen zu können.

### 3.3 Lösung des inhomogenen Systems.

Die vollständige Lösung der allgemeinen Differentialgleichungen wird aus der Lösung der homogenen Gleichung (77) und Partikularlösungen für spezielle Streckenlasten zusammengesetzt.

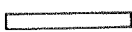
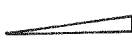
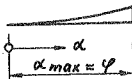
Das kanonische System der vollständigen Differentialgleichungen lautet nach (38)

$$\begin{aligned} \bar{v}'' + \bar{v} - \bar{v}'' - \bar{v} &= + \frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{m}{R} \right) \\ \bar{v}'' - a\bar{v} - b\bar{v}'' + c\bar{v} &= - \frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{c}{R}m \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Es werden einige praktisch wichtige Lastfunktionen durch den Potenzansatz

$$w^*(\alpha) = w_0^* \cdot \alpha^n \quad (n = 0, 1, 2) \quad (78)$$

dargestellt. Der Ansatz beschreibt folgende Lastbilder (jeweils für q und m getrennt):

| n | Lastfunktion                       | Lastbild   |
|---|------------------------------------|--|
| 0 | $w^*(\alpha) = w_0$                | Gleichstreckenlast  $q_0; m_0$                              |
| 1 | $w^*(\alpha) = w_0 \cdot \alpha$   | Dreieckslast  $\frac{q_0}{\varphi}; \frac{m_0}{\varphi}$    |
| 2 | $w^*(\alpha) = w_0 \cdot \alpha^2$ | Parabellast  $\frac{q_0}{\varphi^2}; \frac{m_0}{\varphi^2}$ |

Aus diesen Teillasten können die meisten praktisch vorkommenden Lastfälle aufgebaut werden. Der Lastvektor  $w_0^*$  enthält die beiden rechten Seiten aus (38)

$$w_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ + \frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{m}{R} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \frac{R^3}{EJ_x} \left( q - \frac{c}{R}m \right) \end{bmatrix} \quad (79)$$

Die Sonderlösungen werden durch einen Potenzansatz

$$\varphi_i = \alpha_0 + \alpha_1 \alpha + \dots + \alpha_n \alpha^n \quad (80)$$

mit hinreichend hohem Exponenten durch Koeffizientenvergleich in der Form nach [22] S. 446 ff ermittelt. Voraussetzung der Lösbarkeit ist, daß die Determinante der Matrix  $\mathcal{A}$  (44) nicht verschwindet. Die Ausrechnung liefert den Wert:

$$\det |\mathcal{A}| = \frac{R^2 G J_T}{E J_w} \neq 0 \quad (81)$$

a) Gleichlast

Ansatz der Lastfunktion  $q(\alpha) = q_0; m(\alpha) = m_0 \quad (82)$

Ansatz der Lösungsfunktion  $\varphi_1 = \alpha_0 \quad (83)$

Bestimmungsgleichung  $\mathcal{A} \cdot \alpha_0 = -w_0 \quad (84)$

Die Auflösung von (84) ergibt die Sonderlösung für konstante Streckenlasten.

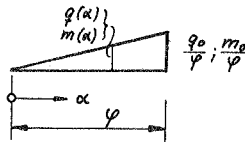
$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = -\frac{R^3}{G J_T} \begin{bmatrix} + q_0 \\ 0 \\ \left\{ \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) q_0 - \frac{\lambda^2}{x^2} \frac{m_0}{R} \right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Aus rechtechnischen Gründen wird der Faktor  $\frac{R^3}{G J_T}$  herausgezogen ( $\lambda^2 \ll x^2$ ).

b) Dreieckslast

Lastansatz  $q(\alpha) = \frac{q_0}{\varphi} \alpha$

$m(\alpha) = \frac{m_0}{\varphi} \alpha$



Lösungsansatz  $\varphi_2(\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \alpha \quad (86)$

Bestimmungsgleichungen

$$A \alpha_0 = \alpha_1 \quad (87)$$

$$A \alpha_1 = -\vec{t}_0 \quad (88)$$

Unter Verwendung der Ergebnisse (85) heißt der Vektor der Sonderlösung für Dreieckslasten

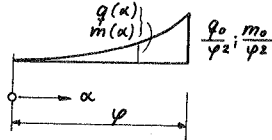
$$\varphi_2 = -\frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{q_0}{\varphi} \\ 0 \\ +\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{q_0}{\varphi} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \cdot \varphi}\right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} +\frac{q_0}{\varphi} \\ 0 \\ +\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{q_0}{\varphi} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \cdot \varphi}\right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \alpha \quad (89)$$

c) Parabellast

Lastansatz

$$q(\alpha) = \frac{q_0}{\varphi^2} \alpha^2$$

$$m(\alpha) = \frac{m_0}{\varphi^2} \alpha^2$$



Lösungsansatz

$$\varphi_3 = \alpha_0 + \alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha^2 \quad (90)$$

Bestimmungsgleichungen

$$A \cdot \alpha_0 = \alpha_1 \quad (91)$$

$$A \cdot \alpha_1 = 2\alpha_2 \quad (92)$$

$$A \alpha_2 = -\vec{t}_0 \quad (93)$$

Aus den vorhergehenden Lösungen können die Vektoren  $\alpha_2$  und  $\alpha_1$  sofort angegeben werden. Die Auflösung der Gleichungen (91) liefert die vollständige Sonderlösung.

$$\psi_3 = \frac{2R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} + \left\{ \left( 2 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{q_0}{\varphi^2} - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \\ + \left\{ \left( 2 + \frac{2\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{q_0}{\varphi^2} - \left( 1 + \frac{2\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \\ - \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{q_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \end{bmatrix} - \quad (94)$$

$$- \frac{2R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} 0 \\ + \frac{q_0}{\varphi^2} \\ 0 \\ + \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{q_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha - \frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} + \frac{q_0}{\varphi^2} \\ 0 \\ + \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{q_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^2$$

Auf Tafel 3 (Seite 36) sind die Sonderlösungen für die drei ausgewählten Lastfunktionen zusammengestellt. Die Operationen (30) und (31) wurden rückgängig gemacht.

Vollständige Lösung des homogenen Systems

$$d = R \sqrt{\frac{GJ_T}{EJ_\omega}} \quad [-]$$

$$k = \frac{EJ_x - GJ_T - EJ_\omega R^{-2}}{EJ_x + GJ_T + EJ_\omega R^{-2}} \quad [-]$$

(77)

(Variable  $\alpha$ )

| Fkt.  | $K_1$            | $K_2$            | $K_3$            | $K_4$            | $K_5$   | $K_6$   | $K_7$      | $K_8$ | Dim. |
|---|------------------|------------------|------------------|------------------|---|---|------------|-------|------|
| $v = v'''' = \frac{R}{d^2} \cosh(d\alpha) + \frac{R}{d} \sinh(d\alpha)$ | $-R \cos \alpha$ | $-R \sin \alpha$ | $-R \cos \alpha$ | $-R \sin \alpha$ | $+R[-\alpha \cos \alpha + (2+k) \sin \alpha]$ | $+R[-\alpha \sin \alpha - (2+k) \cos \alpha]$ | $+R\alpha$ | $+R$  | [cm] |
| $v' = v'''' = \frac{R}{d} \cosh(d\alpha) + R \sinh(d\alpha)$            | $+R \sin \alpha$ | $+R \cos \alpha$ | $+R \sin \alpha$ | $+R \cos \alpha$ | $+R[\alpha \sin \alpha + (1+k) \cos \alpha]$  | $+R[-\alpha \cos \alpha + (1+k) \sin \alpha]$ | $+R$       |       | [cm] |
| $v_0 = v'''' = R \cosh(d\alpha) + R \sinh(d\alpha)$                     | $+R \cos \alpha$ | $+R \sin \alpha$ | $+R \cos \alpha$ | $+R \sin \alpha$ | $+R[\alpha \cos \alpha - k \sin \alpha]$      | $+R[\alpha \sin \alpha + k \cos \alpha]$      |            |       | [cm] |
| $v_1 = v'''' = R d \sinh(d\alpha) + R d^2 \cosh(d\alpha)$               | $-R \sin \alpha$ | $-R \cos \alpha$ | $-R \sin \alpha$ | $-R \cos \alpha$ | $+R[-\alpha \sin \alpha + (1-k) \cos \alpha]$ | $+R[\alpha \cos \alpha + (1-k) \sin \alpha]$  |            |       | [cm] |
| $v_2 = v'''' = R d^2 \cosh(d\alpha) + R d^2 \sinh(d\alpha)$             | $-R \cos \alpha$ | $-R \sin \alpha$ | $-R \cos \alpha$ | $-R \sin \alpha$ | $+R[-\alpha \cos \alpha - (2-k) \sin \alpha]$ | $+R[-\alpha \sin \alpha + (2-k) \cos \alpha]$ |            |       | [cm] |
| $\frac{v_0^2 - v_1^2}{R} = v_1'' = \cosh(d\alpha) + d \sinh(d\alpha)$   | $+ \cos \alpha$  | $+ \sin \alpha$  | $+ \cos \alpha$  | $+ \sin \alpha$  | $+ \alpha \cos \alpha - \sin \alpha$          | $+ \alpha \sin \alpha + \cos \alpha$          |            |       | [-]  |
| $v_1'' = \sinh(d\alpha) + d \cosh(d\alpha)$                             | $- \sin \alpha$  | $- \cos \alpha$  | $- \sin \alpha$  | $- \cos \alpha$  | $- \alpha \sin \alpha$                        | $+ \alpha \cos \alpha$                        |            |       | [-]  |
| $v_1''' = d^2 \sinh(d\alpha) + d^2 \cosh(d\alpha)$                      | $- \cos \alpha$  | $- \sin \alpha$  | $- \cos \alpha$  | $- \sin \alpha$  | $- \alpha \cos \alpha - \sin \alpha$          | $- \alpha \sin \alpha + \cos \alpha$          |            |       | [-]  |
| $v_1^{(4)} = d^3 \sinh(d\alpha) + d^3 \cosh(d\alpha)$                   | $+ \sin \alpha$  | $+ \cos \alpha$  | $+ \sin \alpha$  | $+ \cos \alpha$  | $+ \alpha \sin \alpha - 2 \cos \alpha$        | $- \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha$        |            |       | [-]  |
| $v_1^{(5)} = d^4 \cosh(d\alpha) + d^4 \sinh(d\alpha)$                   | $+ \cos \alpha$  | $+ \sin \alpha$  | $+ \cos \alpha$  | $+ \sin \alpha$  | $+ \alpha \cos \alpha + 3 \sin \alpha$        | $+ \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha$        |            |       | [-]  |

$$\mathcal{U}_1 = -\frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} + \frac{1}{2} g_0 \alpha^2 & [\text{cm}] \\ + g_0 \alpha & [\text{cm}] \\ + g_0 & [\text{cm}] \\ 0 & \\ + \frac{1}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) g_0 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R} \right\} & [-] \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Sonder-  
lösungen  $\varphi_i$   
(Variable  $\alpha$ )

(95)

$$\mathcal{U}_2 = -\frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} + \frac{1}{6} \frac{g_0}{\varphi} \alpha^3 & [\text{cm}] \\ + \frac{1}{2} \frac{g_0}{\varphi} \alpha^2 & [\text{cm}] \\ + \frac{g_0}{\varphi} \alpha & [\text{cm}] \\ + \frac{g_0}{\varphi} & [\text{cm}] \\ + \frac{1}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi} \right\} \alpha & [-] \\ + \frac{1}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi} \right\} & [-] \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

(96)

(97)

$$\mathcal{U}_3 = -\frac{R^3}{GJ_T} \begin{bmatrix} - \left\{ \left( 2 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \alpha^2 + \frac{1}{12} \frac{g_0}{\varphi^2} \alpha^4 \\ - \left\{ \left( 2 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} 2\alpha + \frac{1}{3} \frac{g_0}{\varphi^2} \alpha^3 \\ - \left\{ \left( 2 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} 2 + \frac{g_0}{\varphi^2} \alpha^2 \\ + 2 \frac{g_0}{\varphi^2} \alpha \\ - \frac{2}{R} \left\{ \left( 2 + 2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \left( 1 + 2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} + \frac{1}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \alpha^2 \\ + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \alpha \\ + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) \frac{g_0}{\varphi^2} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \frac{m_0}{R \varphi^2} \right\} \\ 0 \end{bmatrix}$$



#### 4. Lösung der Differentialgleichungen (Variable z)

Mit den Umrechnungsformeln (25) und (26) lassen sich die für die Variable  $\alpha$  erhaltenen Lösungsformeln für die neue Variable  $z$  angeben.

Zur Kontrolle der erhaltenen Lösung wurde unabhängig vom Kapitel 3 die Lösung ohne Substitution neu entwickelt. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems und die 3 Sonderlösungen für Streckenlasten sind in den Tafeln 4 und 5 angegeben.

$l$  bezeichnet die Länge der Streckenlast.

Vollständige Lösung des homogenen Systems

(Variable z)

(98)

$$d = R \sqrt{\frac{GJ_T}{EJ_w}} \quad [1]$$

$$k = \frac{EJ_x - GJ_T - EJ_w R^{-2}}{EJ_x + GJ_T + EJ_w R^{-2}} \quad [1]$$

| Fkt.     | $K_1$                                 | $K_2$                                 | $K_3$                            | $K_4$                            | $K_5$  | $K_6$   | $K_7$ | $K_8$ | Dim.             |
|----------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|---|-------|-------|------------------|
| $V =$    | $\frac{R}{d^2} \cosh(d\frac{z}{R})$   | $\frac{R}{d^2} \sinh(d\frac{z}{R})$   | $-R \cos\frac{z}{R}$             | $-R \sin\frac{z}{R}$             | $-Z \cos\frac{z}{R} R(2+k) \sin\frac{z}{R}$                            | $-Z \sin\frac{z}{R} R(2+k) \cos\frac{z}{R}$                           | $+Z$  | $+R$  | [cm]             |
| $V' =$   | $\frac{1}{d} \sinh(d\frac{z}{R})$     | $\frac{1}{d} \cosh(d\frac{z}{R})$     | $\sin\frac{z}{R}$                | $-\cos\frac{z}{R}$               | $\frac{z}{R} \sin\frac{z}{R} + (1+k) \cos\frac{z}{R}$                  | $-\frac{z}{R} \cos\frac{z}{R} + (1+k) \sin\frac{z}{R}$                | $+1$  |       | -                |
| $V'' =$  | $\frac{1}{R} \cosh(d\frac{z}{R})$     | $\frac{1}{R} \sinh(d\frac{z}{R})$     | $\frac{1}{R} \cos\frac{z}{R}$    | $\frac{1}{R} \sin\frac{z}{R}$    | $\frac{z}{R^2} \cos\frac{z}{R} - \frac{k}{R} \sin\frac{z}{R}$          | $\frac{z}{R^2} \sin\frac{z}{R} + \frac{k}{R} \cos\frac{z}{R}$         |       |       | $\frac{1}{cm}$   |
| $V''' =$ | $\frac{d}{R^2} \sinh(d\frac{z}{R})$   | $\frac{d}{R^2} \cosh(d\frac{z}{R})$   | $-\frac{1}{R^2} \sin\frac{z}{R}$ | $\frac{1}{R^2} \cos\frac{z}{R}$  | $-\frac{z}{R^3} \sin\frac{z}{R} + \frac{1}{R^2} (1-k) \cos\frac{z}{R}$ | $\frac{z}{R^3} \cos\frac{z}{R} + \frac{1}{R^2} (1-k) \sin\frac{z}{R}$ |       |       | $\frac{1}{cm^2}$ |
| $v =$    | $\cosh(d\frac{z}{R})$                 | $\sinh(d\frac{z}{R})$                 | $\cos\frac{z}{R}$                | $\sin\frac{z}{R}$                | $\frac{z}{R} \cos\frac{z}{R} - \sin\frac{z}{R}$                        | $\frac{z}{R} \sin\frac{z}{R} + \cos\frac{z}{R}$                       |       |       | -                |
| $v' =$   | $\frac{d}{R} \sinh(d\frac{z}{R})$     | $\frac{d}{R} \cosh(d\frac{z}{R})$     | $-\frac{1}{R} \sin\frac{z}{R}$   | $\frac{1}{R} \cos\frac{z}{R}$    | $-\frac{z}{R^2} \sin\frac{z}{R}$                                       | $\frac{z}{R^2} \cos\frac{z}{R}$                                       |       |       | $\frac{1}{cm}$   |
| $v'' =$  | $\frac{d^2}{R^2} \cosh(d\frac{z}{R})$ | $\frac{d^2}{R^2} \sinh(d\frac{z}{R})$ | $-\frac{1}{R^2} \cos\frac{z}{R}$ | $\frac{1}{R^2} \sin\frac{z}{R}$  | $-\frac{z}{R^3} \cos\frac{z}{R} + \frac{1}{R^2} \sin\frac{z}{R}$       | $-\frac{z}{R^3} \sin\frac{z}{R} + \frac{1}{R^2} \cos\frac{z}{R}$      |       |       | $\frac{1}{cm^2}$ |
| $v''' =$ | $\frac{d^3}{R^3} \sinh(d\frac{z}{R})$ | $\frac{d^3}{R^3} \cosh(d\frac{z}{R})$ | $\frac{1}{R^3} \sin\frac{z}{R}$  | $-\frac{1}{R^3} \cos\frac{z}{R}$ | $\frac{z}{R^4} \sin\frac{z}{R} - \frac{2}{R^3} \cos\frac{z}{R}$        | $-\frac{z}{R^4} \cos\frac{z}{R} - \frac{2}{R^3} \sin\frac{z}{R}$      |       |       | $\frac{1}{cm^3}$ |

Sonder-  
lösungen  $\varphi_i$   
(Variable z)

$$\varphi_1 = -\frac{R^2}{GJ_T} \left[ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} g_0 z^2 \\ + g_0 z \\ + g_0 \\ 0 \\ + \left\{ \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) R g_0 - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} m_0 \right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} [cm] \\ [-] \\ [1/cm] \\ [-] \end{array}$$

(99)

$$\varphi_2 = -\frac{R^2}{GJ_T} \left[ \begin{array}{l} + \frac{1}{6} \frac{g_0}{l} z^3 \\ + \frac{1}{2} \frac{g_0}{l} z^2 \\ + \frac{g_0}{l} z \\ + \frac{g_0}{l} \\ + \left\{ R \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{g_0}{l} - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \frac{m_0}{l} \right\} z \\ + \left\{ R \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{g_0}{l} - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \frac{m_0}{l} \right\} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} [cm] \\ [-] \\ [1/cm] \\ [1/cm^2] \\ [-] \\ [1/cm] \end{array}$$

(100)

$$\varphi_3 = -\frac{R^2}{GJ_T} \left[ \begin{array}{l} - R \left\{ R \left(2 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} - \frac{1}{d^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{m_0}{l^2} \right\} z^2 + \frac{1}{12} \frac{g_0}{l^2} z^4 \\ - 2R \left\{ R \left(2 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} - \frac{1}{d^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{m_0}{l^2} \right\} z + \frac{1}{3} \frac{g_0}{l^2} z^3 \\ - 2R \left\{ R \left(2 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} - \frac{1}{d^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{m_0}{l^2} \right\} + \frac{g_0}{l^2} z^2 \\ + \frac{2}{l^2} \frac{g_0}{l} z \\ - 2R^2 \left\{ R \left(2 + 2 \frac{\lambda^2}{\kappa^2} - \frac{1}{d^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \left(1 + 2 \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{m_0}{l^2} \right\} + \left\{ R \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \frac{m_0}{l^2} \right\} z^2 \\ + 2 \left\{ R \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \frac{m_0}{l^2} \right\} z \\ + 2 \left\{ R \left(1 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2}\right) \frac{g_0}{l^2} - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \frac{m_0}{l^2} \right\} \\ 0 \end{array} \right]$$

(101)

## 5. Diskussion der Lösungen

Die Lösungen für beide Variable stimmen unter Beachtung der Dimensionen überein. Da für den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  der Öffnungswinkel  $\alpha$  gegen Null geht, werden die Lösungen (98) bis (101) für die Variable  $z$  diskutiert.

### a) Homogene Lösung

An jedem Rand lassen sich 4 Aussagen über Verformungen und Schnittgrößen treffen (siehe Kapitel 6). Diese 8 geometrischen und statischen Bedingungen reichen gerade aus, um die 8 Integrationskonstanten zu bestimmen.

Die zwei ersten, von der Biegesteifigkeit unabhängigen Spalten geben den Einfluß der Verwölbung auf die Durchbiegung und Verdrehung an. Entsprechend einer Bezeichnung in [2] kann hier der Wert  $d$  als Abklingbeiwert gedeutet werden. Mit wachsendem  $d$  steigen die Funktionswerte dieser Spalten, die für das Abklingverhalten maßgebend sind, schnell an.

Für wölbfreie Profile ( $J_w = 0$ ) wird  $d = \infty$ . Alle Funktionswerte der beiden ersten Spalten werden unendlich groß und liefern keine Aussage mehr über den Verlauf der Verformungen und Schnittgrößen. An den Rändern entfallen die Bedingungen, die Aussagen über die Querschnittsverwölbung oder das Wölbmoment enthalten.

Das verbleibende Lösungssystem mit 6 Konstanten entspricht den bekannten Lösungen des Kreisringträgers ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Faktor  $k$  enthält das Verhältnis der 3 Steifigkeiten

$$k = \frac{c - b - 3}{a} = \frac{EJ_x - GJ_T - EJ_w R^{-2}}{EJ_x + GJ_T + EJ_w R^{-2}} \quad (102)$$

Grenzwerte von  $k$  sind

$$\begin{aligned} k &= +1 && \text{für } GJ_T = EJ_w = 0 \\ k &= -1 && \text{für } EJ_x = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

Da der Träger in beiden Fällen unbrauchbar wird, sind die Grenzwerte ohne praktische Bedeutung.

Der Übergang zum geraden Stab vollzieht sich mit dem Anwachsen von  $R \rightarrow \infty$ .

Setzt man 
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{G J_T}{E J_\omega}} \quad (104)$$

und läßt den Radius  $R$  in den Lösungen (98) unendlich groß werden, so erhält man (105)

| Fkt         | $K_1$                                   | $K_2$                                   | $K_3$     | $K_4$             | $K_5$                 | $K_6$         | $K_7$ | $K_8$    |
|-------------|---|---|-----------|-------------------|-----------------------|---------------|-------|----------|
| $v =$       | 0                                       | 0                                       | $-\infty$ | $-\infty \cdot 0$ | $-z + \infty \cdot 0$ | $-0 - \infty$ | $z$   | $\infty$ |
| $v' =$      | 0                                       | 0                                       | 0         | -1                | $0 + (1+k)$           | $-0 + 0$      | 1     |          |
| $v'' =$     | 0                                       | 0                                       | 0         | 0                 | 0                     | 0             |       |          |
| $v''' =$    | 0                                       | 0                                       | 0         | 0                 | 0                     | 0             |       |          |
| $\psi =$    | $\cosh(\bar{\lambda}z)$                 | $\sinh(\bar{\lambda}z)$                 | +1        | 0                 | 0                     | +0+1          |       |          |
| $\psi' =$   | $\bar{\lambda} \sinh(\bar{\lambda}z)$   | $\bar{\lambda} \cosh(\bar{\lambda}z)$   | 0         | 0                 | 0                     | 0             |       |          |
| $\psi'' =$  | $\bar{\lambda}^2 \cosh(\bar{\lambda}z)$ | $\bar{\lambda}^2 \sinh(\bar{\lambda}z)$ | 0         | 0                 | 0                     | 0             |       |          |
| $\psi''' =$ | $\bar{\lambda}^3 \sinh(\bar{\lambda}z)$ | $\bar{\lambda}^3 \cosh(\bar{\lambda}z)$ | 0         | 0                 | 0                     | 0             |       |          |

Die Durchbiegung zeigt außer einem konstanten Wert eine lineare Zunahme mit  $z$ . Entsprechend liefert  $v'$  eine Konstante.

Für die Verdrehung ergeben sich die Lösungen des geraden Trägers in der Form nach [21] S.880 Formel (4).

b) Die Sonderlösungen

stellen die "Membran"lösungen des geschlossenen Kreisringes dar. Der Übergang zum geraden Träger erfordert die Berücksichtigung von Gliedern höherer Genauigkeit bei der Ableitung der Ausgangsgleichungen.

## 6. Schnittgrößen, Rand- und Übergangsbedingungen


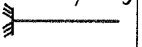

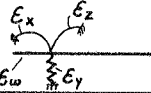



### 6.1 Schnittgrößen

Aus (2) und (3) leiten sich mit dem Werkstoffgesetz und der Integration über den Querschnitt die Schnittgrößen ab. Sie stimmen - unter Beachtung des geänderten Koordinatensystems - mit den in [4] XII (1.7) und (1.8) angegebenen Formeln überein.

|              | Variable $\alpha$  | Variable $z$   | Dim.                |
|--------------|--|--|---------------------|
| $N =$        | $+\frac{EF}{R}(w-u)$   | $+EF(w'-\frac{u}{R})$  | $[kp]$              |
| $M_y =$      | $-\frac{EJ_y}{R^2}(u''+u)$   | $-EJ_y(u''+\frac{u}{R^2})$   | $[kp\,cm]$          |
| $M_T =$      | $-\frac{GJ_T}{R}(\dot{v}'+\frac{v'}{R}) + \frac{EJ_\omega}{R^3}(\dot{v}''+\frac{v''}{R})$<br>$M_{Tp} + M_{Ts}$ | $-GJ_T(\dot{v}'+\frac{v'}{R}) + EJ_\omega(\dot{v}''' + \frac{v'''}{R})$<br>$M_{Tp} + M_{Ts}$ | $[kp\,cm]$<br>(106) |
| $M_x =$      | $-\frac{EJ_x}{R^2}(v''-R\dot{v}')$   | $-EJ_x(v''-\frac{\dot{v}'}{R})$  | $[kp\,cm]$          |
| $M_\omega =$ | $-\frac{EJ_\omega}{R^2}(\dot{v}''+\frac{v''}{R})$  | $-EJ_\omega(\dot{v}''+\frac{v''}{R})$  | $[kp\,cm^2]$        |
| $Q_x =$      | $-\frac{EJ_x}{R^3}(v'''-R\dot{v}'') + \frac{M_T}{R}$   | $-EJ_x(v'''-\frac{\dot{v}''}{R}) + \frac{M_T}{R}$  | $[kp]$              |

### 6.2 Randbedingungen

Jede statisch sinnvolle Kombination von 2·4 Randbedingungen erlaubt die Bestimmung der entsprechenden Integrationskonstanten aus (77) oder (98). Im Folgenden sind einige häufig vorkommende Ausführungen angegeben.


| Symbol      | Volleinspannung<br> | nicht wölbehindernde<br>Einspannung<br> | Hülse<br>       |   |
|-------------|--|--|--|--|
| Bedingungen | $v = 0$<br>$\frac{v'}{R} = v' = 0$<br>$v'' = 0$<br>$\frac{v'''}{R} = v''' = 0$                       | $v = 0$<br>$\frac{v'}{R} = v' = 0$<br>$v'' = 0$<br>$M_\omega = 0$  | $v = 0$<br>$\frac{v'}{R} = v' = 0$<br>$M_\omega = 0$<br>$M_T = 0$                                | $v = \epsilon_y Q_x$<br>$\frac{v'}{R} = v' = \epsilon_x M_x$<br>$v'' = \epsilon_z M_T$<br>$\frac{v'''}{R} = v''' = \epsilon_\omega M_\omega$ |
| Symbol      | Kugelgelenk<br>     | Gabel<br>                               | Freies Ende<br> |  |
| Bedingungen | $v = 0$<br>$M_x = 0$<br>$M_\omega = 0$<br>$M_T = 0$  | $v = 0$<br>$v'' = 0$<br>$M_x = 0$<br>$M_\omega = 0$  | $M_x = 0$<br>$Q_x = 0$<br>$M_\omega = 0$<br>$M_T = 0$  |  |

### 6.3 Übergangsbedingungen

Die folgenden Übergangsbedingungen erlauben die Berechnung von jeweils 8 Integrationskonstanten bei 2 und mehr Integrationsbereichen. Die Übergangsbedingungen drücken Gleichgewicht und Kontinuität an der Bereichsgrenze aus und bilden jeweils eine Gruppe von 8 Randbedingungen. Für jeden weiteren Bereich erhöht sich die Zahl der Unbekannten um 8. Damit ist für die praktische Rechnung die obere Grenze durch die Kapazität des verwendeten Rechners Z 22 mit 4 Bereichen gegeben.

Für viele Bereichsunterteilungen, wie die Annäherung beliebiger Kurven durch Kreisbögen, erscheint die Anwendung eines Übertragungsverfahrens vorteilhafter.

a) im Feld

| $R_I, R_{II}$  | Scharnier  | $\downarrow P$   | $\downarrow M_D$   |  $q, m$   |
|--|--|--|--|--|
| $V = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$<br>$M_T = M_T$<br>$Q_x = Q_x$ | $V = V$<br><br>$\vartheta = \vartheta$<br><br>$M_x = 0 = M_x$<br>$M_\omega = 0 = M_\omega$<br>$M_T = M_T$<br>$Q_x = Q_x$ | $V = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$<br>$M_T = M_T$<br><br>$Q_x = Q_x - P$ | $V = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$<br>$Q_x = Q_x$<br><br>$M_T = M_T - M_D$ | $V = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$<br>$M_T = M_T$<br>$Q_x = Q_x$ |

b) am Lager

| $\Delta$  | $\Psi$   |
|---|--|
| $V = 0 = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$<br>$M_T = M_T$ | $V = 0 = V$<br>$V' = V'$<br>$\vartheta = 0 = \vartheta$<br>$\vartheta' = \vartheta'$<br><br>$M_x = M_x$<br>$M_\omega = M_\omega$ |

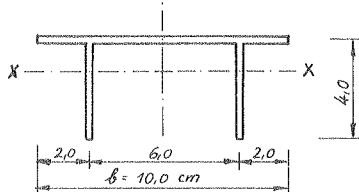


### 7. Modelldaten

Die Prüfung der errechneten Spannungen konnte an einem Plexiglasmodell an ausgewählten Punkten für verschiedene Lastfälle vorgenommen werden. Die mittels Dehnungsmeßstreifen aufgenommenen Werte stimmen gut mit den Rechenwerten überein.

Modellquerschnitt

$$t = 0,3 \text{ cm}$$



Werkstoffkennwerte  $E = 41\ 000$   $\text{kp/cm}^2$

$$\mu = 0,364$$

Querschnittskennwerte  $J_x = 8,46$   $\text{cm}^4$

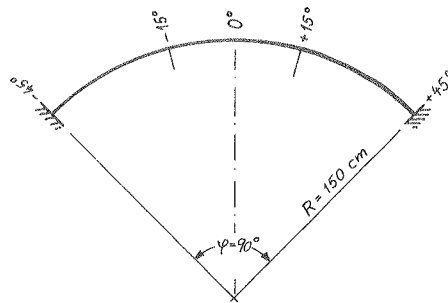
$$J_\omega = 75,17$$
  $\text{cm}^6$

$$J_T = 0,173$$
  $\text{cm}^4$

$$\lambda = 0,0843$$

$$\kappa = 11,16$$

Statisches System



Der Querschnitt ist an den Stellen  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$  und  $0^\circ$  durch Querschotte zwischen den Stegen ausgesteift. Die Wölbbehinderung der Enden wird durch einen aufgeklebten Stahlklotz erreicht.

### 8. Rechenergebnisse

Die vorliegende Lösung des Kreissträgerproblems unter Einschluß der Wölbkrafttorsion wurde für die Rechenanlage Zuse Z 22 programmiert. Alle folgenden Rechenergebnisse wurden mit diesem Programm erhalten.

Dimensionsgebundene Größen sind in den Einheiten cm und kp angegeben.

Die Zahlenwerte der Vergleichsrechnungen zum Modell gelten für Plexiglas mit den Werkstoffkonstanten

$$\begin{aligned} E &= 41\ 000 \text{ kp/cm}^2 & \frac{E}{G} &= 2,73 \\ G &= 15\ 030 \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

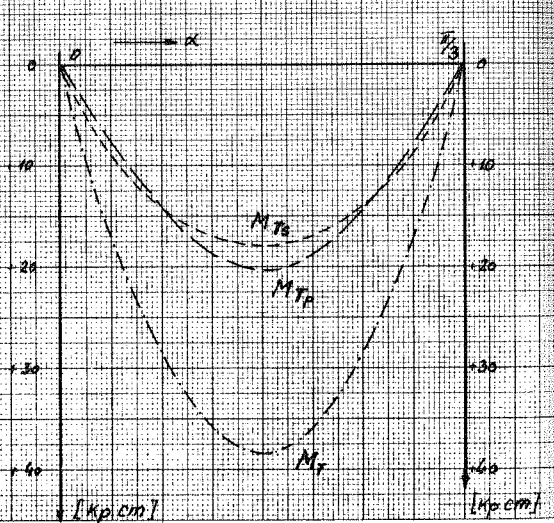
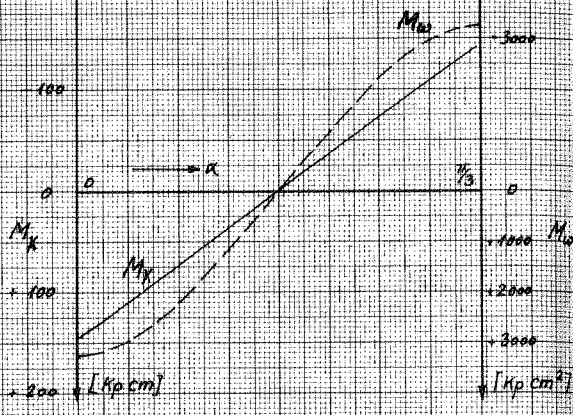
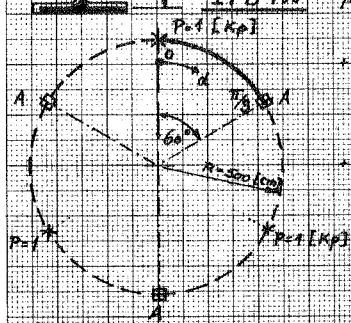
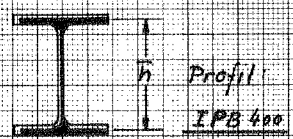
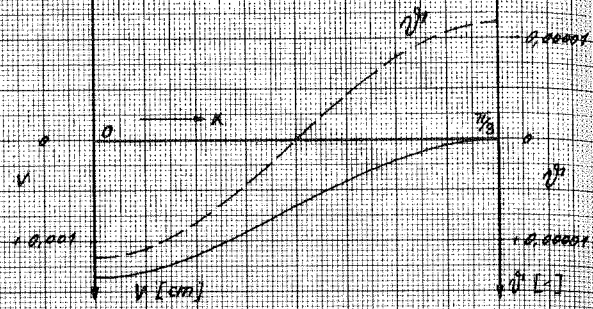
Alle übrigen Zahlenwerte gelten für Baustahl mit

$$\begin{aligned} E &= 2\ 100\ 000 \text{ kp/cm}^2 & \frac{E}{G} &= 2,6 \\ G &= 807\ 692 \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

# 8.1 Frei aufliegender Kreisringträger

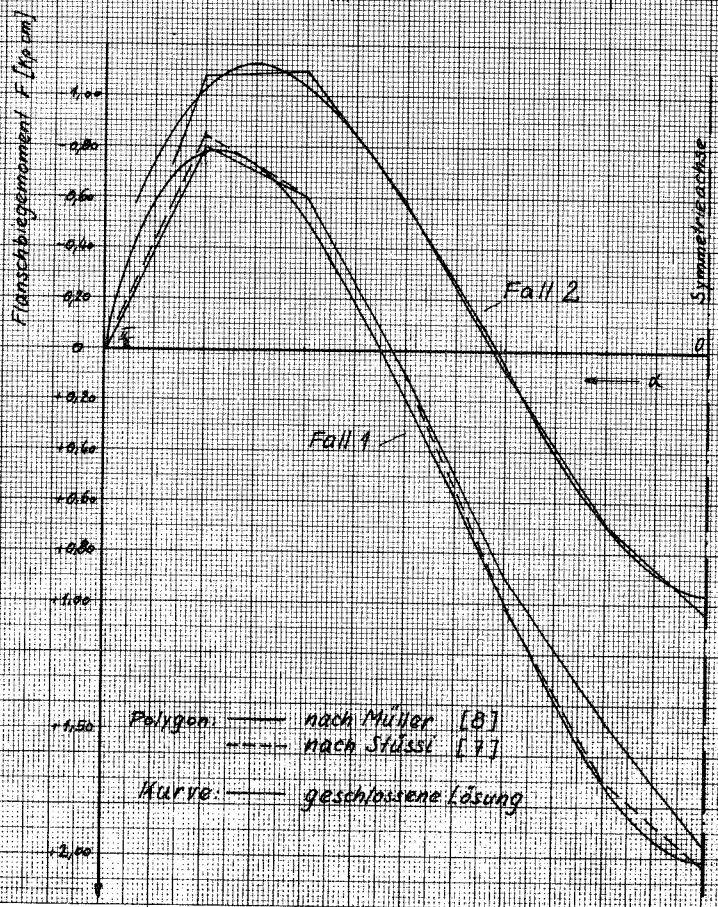
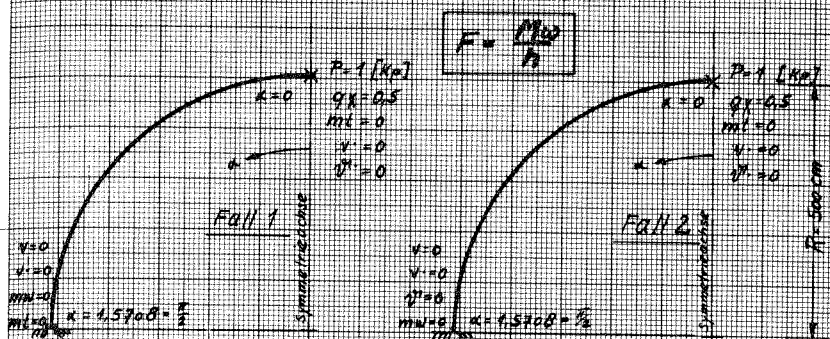
Vergleich der  
Schnittgrößen

$M_x, M_{\theta}, M_{T\theta}$   
mit den Lösungen  
nach [6] und [5]



|                      |               | $\kappa = 0$ | $\kappa = \frac{\pi}{6}$ | $\kappa = \frac{\pi}{3}$ |
|----------------------|---------------|--------------|--------------------------|--------------------------|
| n. [6]<br>Wahlstrich | $M_x$         | +144         | 0                        | -144                     |
|                      | $M_{\theta}$  | +3270        | 0                        | -3270                    |
|                      | $M_{T\theta}$ | 0            | +20,87                   | 0                        |
| n. [5]<br>Linioid    | $M$           | +144         | 0                        | -144                     |
|                      | $M_{\theta}$  | +3285        | 0                        | -3285                    |
|                      | $T$           | 0            | +21,92                   | 0                        |
| vorlieg.<br>Lösung   | $M_x$         | +144         | 0                        | -144                     |
|                      | $M_{\theta}$  | +3269        | 0                        | -3269                    |
|                      | $M_{T\theta}$ | 0            | +20,87                   | 0                        |

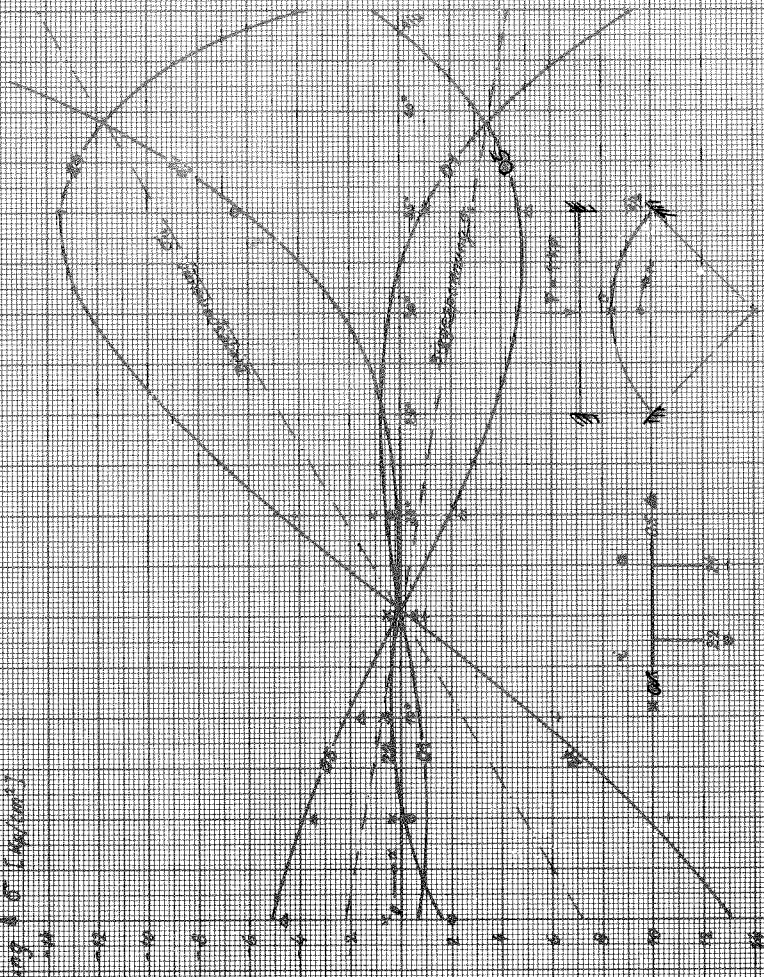
# 8.1 Vergleich der Wälbmomente und Flanschbiegemomente nach geschlossener Lösung und Differenzenrechnung.



Längsspannung  $\sigma$  [N/mm<sup>2</sup>]

### 8.2 Modell

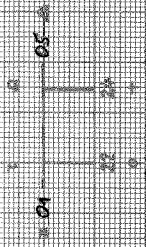
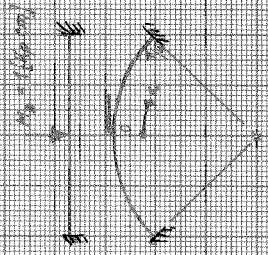
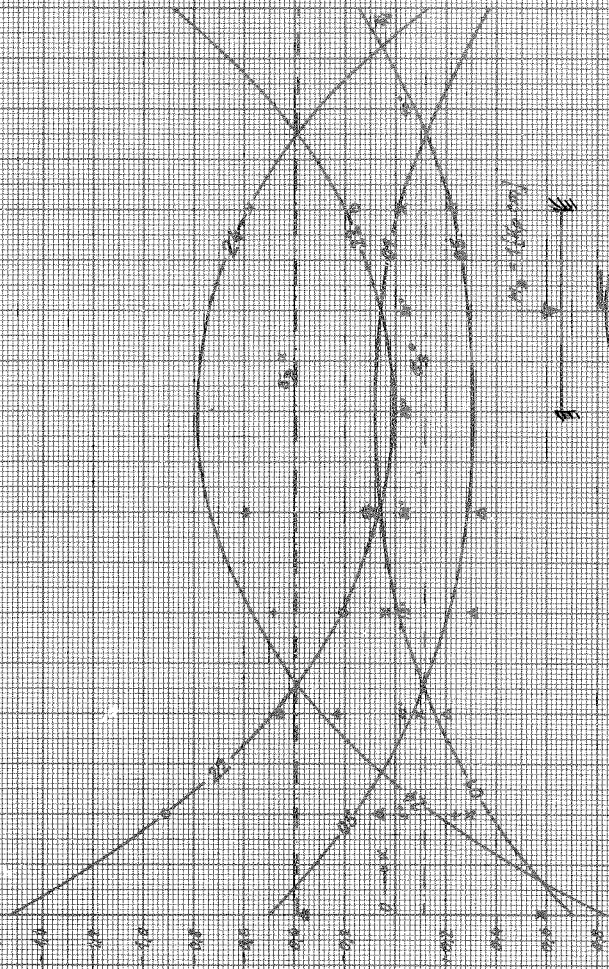
Vergleich  
errechneter  
Spannungen  
mit  
Mefwerten



Längsspannung  $\sigma_{\parallel}$  [N/cm<sup>2</sup>]

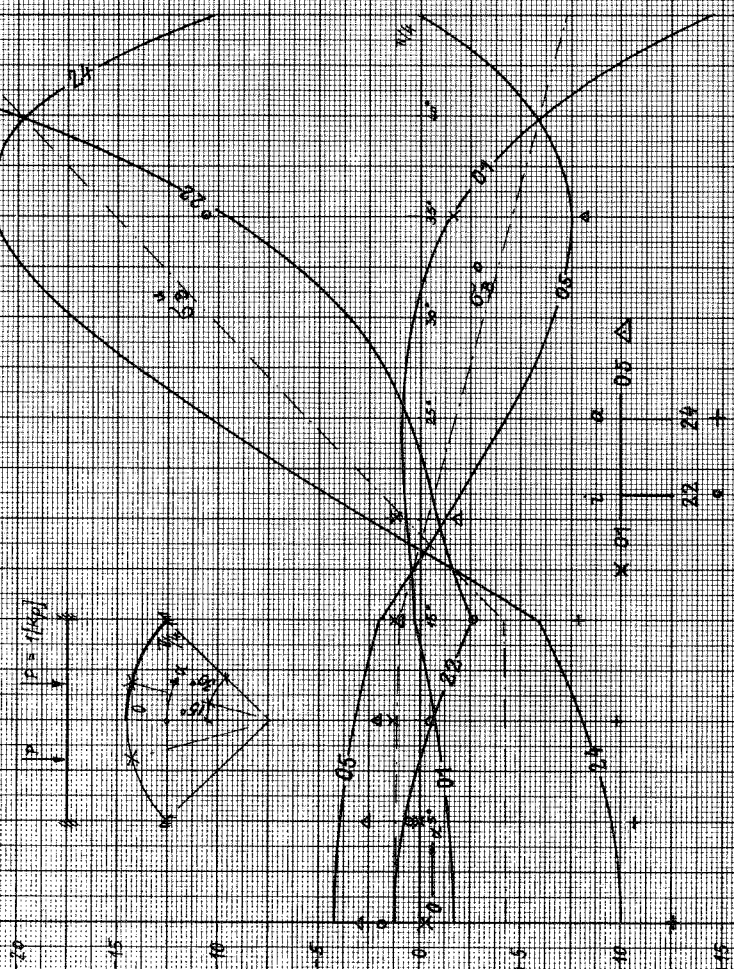
## 82 Modell

Vergleich  
errechneter  
Spannungen  
mit  
Messwerten





Längsspannung  $\sigma$  [Np/(mm<sup>2</sup>)]



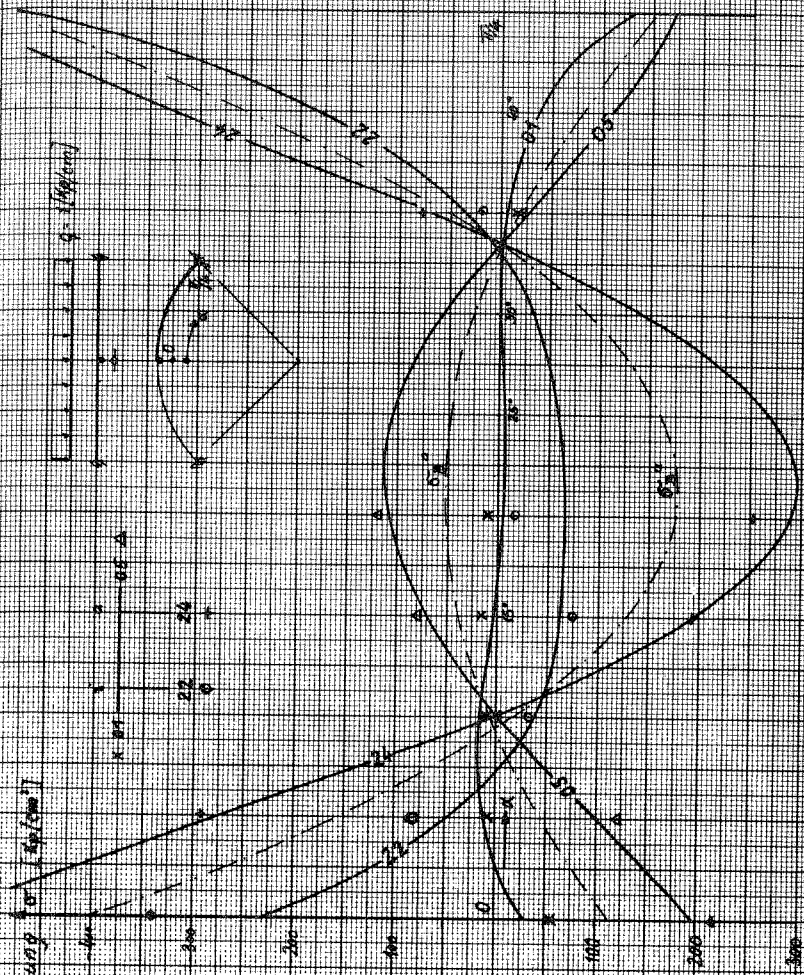
## 8.2 Modell

Vergleich  
errechneter  
Spannungen  
mit  
Meßwerten

Längsspannung  $\sigma_{xx}$  [dyn/cm<sup>2</sup>]

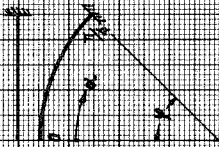
### 8.2 Modell

Vergleich  
errechneter  
Spannungen  
mit  
Messwerten



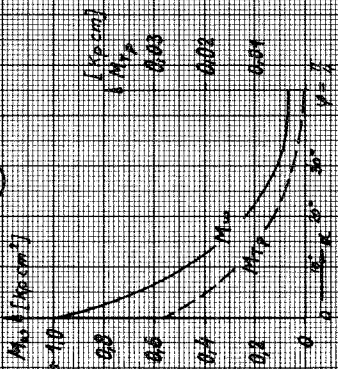


# 8.3 Modell Zustandsflächen $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ , $M_T$ infolge Einheitslasten

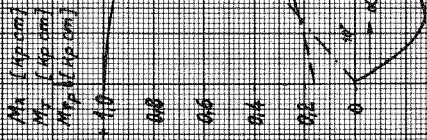


- ①  $M_w = 1$
  - ②  $M_x = 1$
  - ③  $P = 1$
- }  $\sin \alpha = 0$

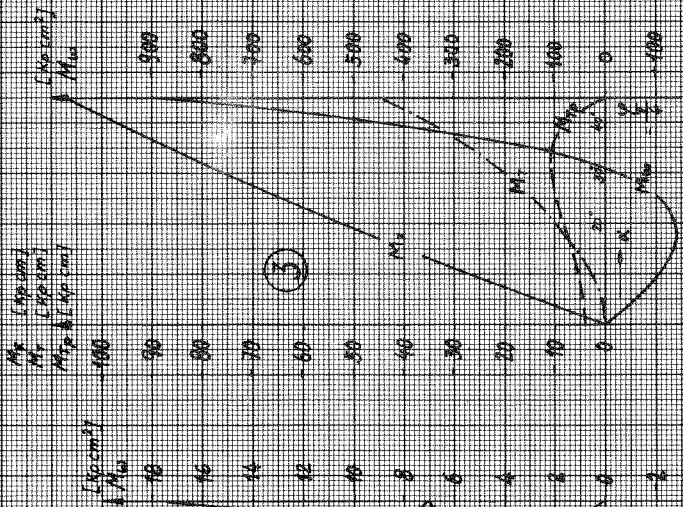
①



②



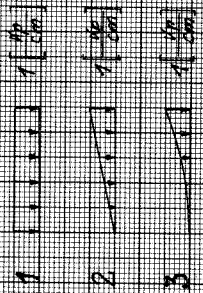
③



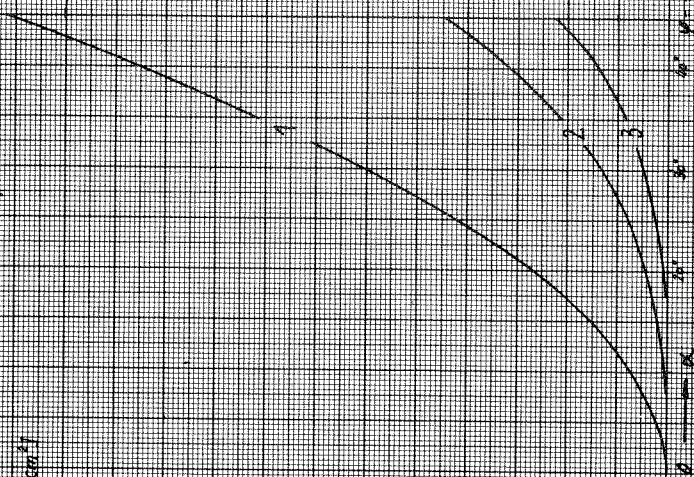
# 84 Modell

Zustandsflächen  $M_w$ ,  $M_b$  infolge Streckenlasten  $q$

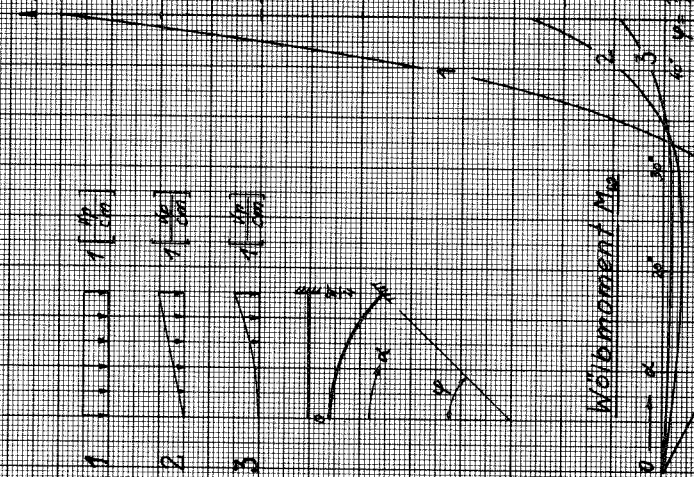
$M_w$  [kNm<sup>2</sup>]



$M_b$  [kNm]



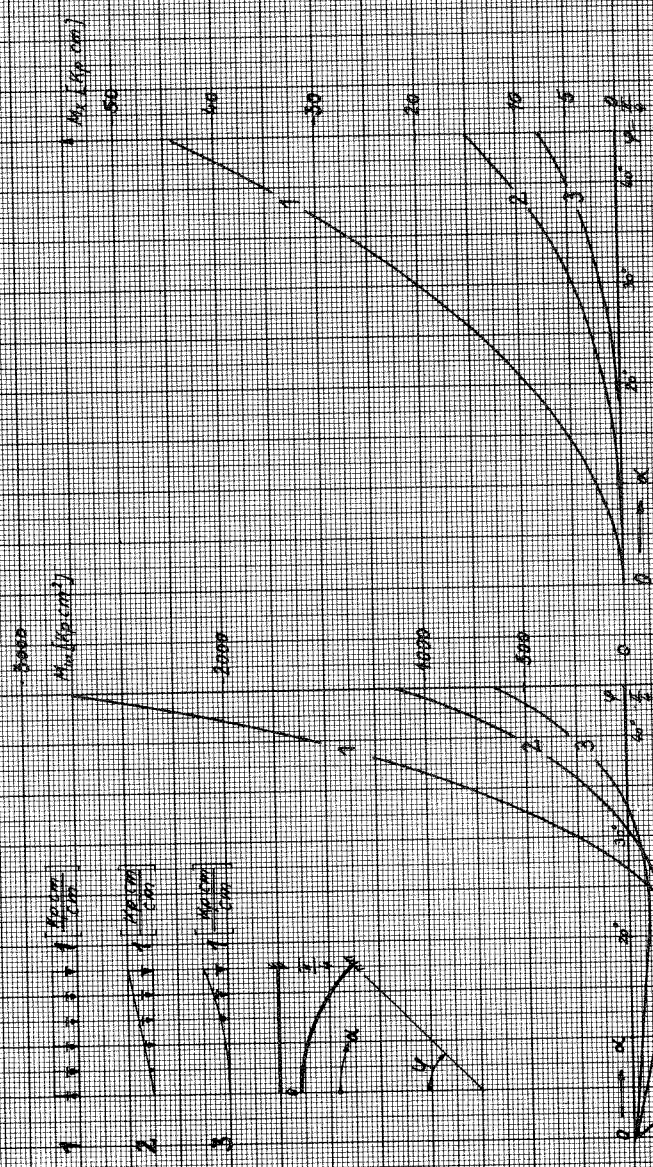
$M_w$  [kNm<sup>2</sup>]



Biegemoment  $M_b$

Wölbmoment  $M_w$

# 84 Modell Zustandsflächen $M_w$ , $M_x$ infolge Streckenlasten $m$



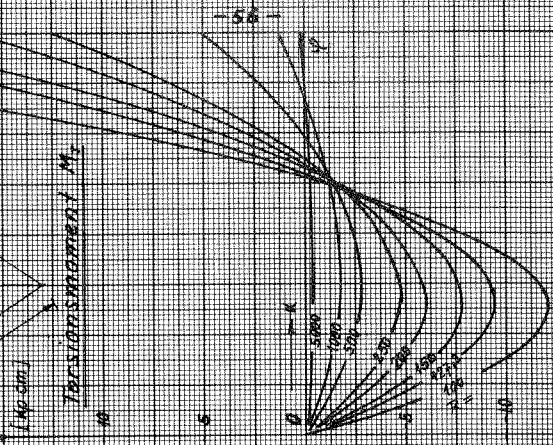
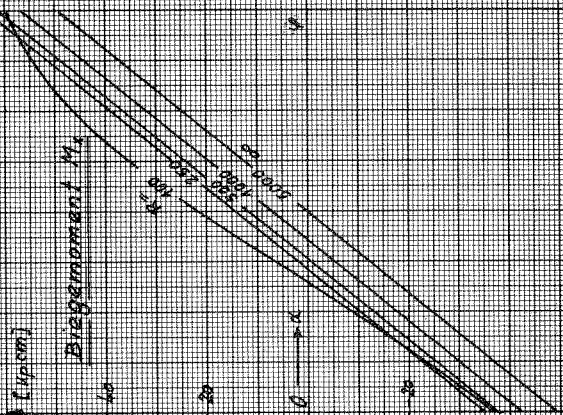
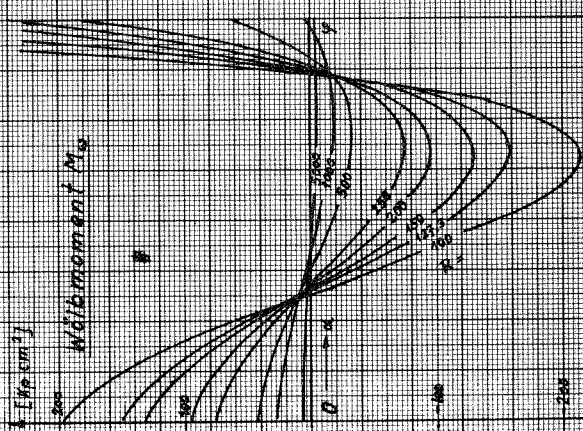
Biegemomente  $M_x$

Nähermomente  $M_w$

# 8.5 Zustandsflächen $M_0, M_1, M_2$ ( $L = \text{konstant}$ )

|       |       |       |       |      |      |      |      |      |      |
|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| $R =$ | 100   | 125   | 150   | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  | 5000 |
| $Y =$ | 2,00  | 1,571 | 1,333 | 1,00 | 0,8  | 0,6  | 0,4  | 0,2  | 0,04 |
| $Z =$ | 114,6 | 90    | 76,4  | 57,3 | 45,8 | 33,9 | 22,4 | 12,4 | 2,3  |

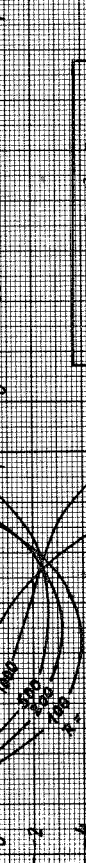
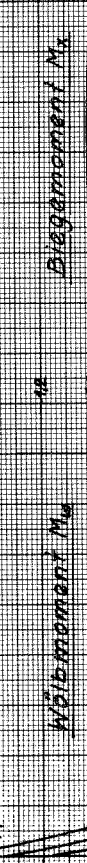
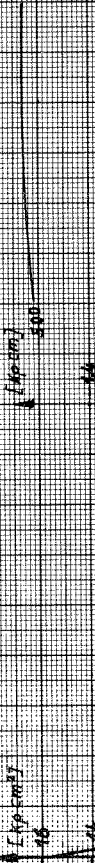
|            |                          |                  |
|------------|--------------------------|------------------|
| $J_x =$    | 1000 [cm <sup>4</sup> ]  | $\lambda^2 = 10$ |
| $J_{0x} =$ | 10000 [cm <sup>4</sup> ] |                  |
| $Z_0 =$    | 28 [cm]                  | $\lambda = 0,1$  |





# 8.5 Zustandsflächen $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ ( $L$ - konstant)

| $R$            | 100  | 120  | 150  | 200  | 250  | 300  | 500  | 1000 | 5000 | 10000 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $\gamma = 2.0$ | 1.27 | 1.33 | 1.40 | 1.46 | 1.52 | 1.58 | 1.64 | 1.70 | 1.76 | 1.82  |
| $\gamma = 1.0$ | 1.14 | 1.18 | 1.23 | 1.27 | 1.31 | 1.35 | 1.39 | 1.43 | 1.47 | 1.51  |



$$J_x = 1000 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 10000 \text{ cm}^4$$

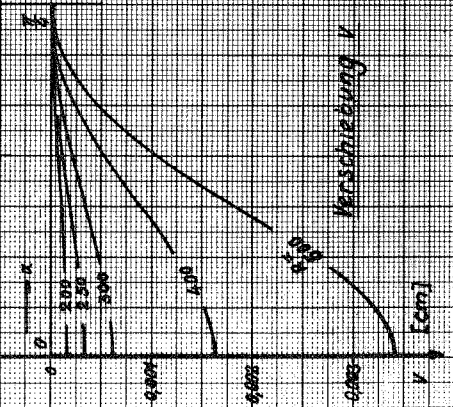
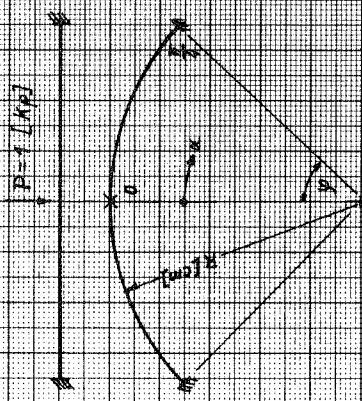
$$J_z = 26 \text{ cm}^4$$



# 8.6. Verformungen $v$ , $v'$ und Moment $M_x$ infolge $P$

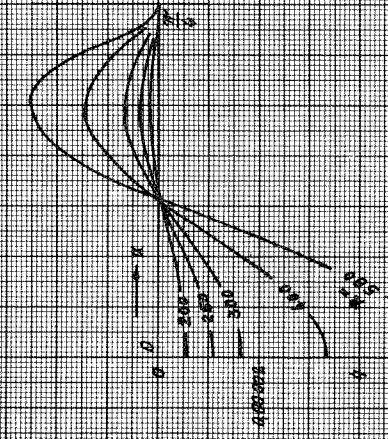
$v' = \text{constant} = \frac{P}{4}$

|                                     |                   |
|-------------------------------------|-------------------|
| $J_x = 1000 \text{ [cm}^4\text{]}$  | $E = 10$          |
| $J_y = 10000 \text{ [cm}^4\text{]}$ | $\lambda^2 = 0.1$ |
| $J_z = 25 \text{ [cm}^4\text{]}$    |                   |



Verschiebung  $v$

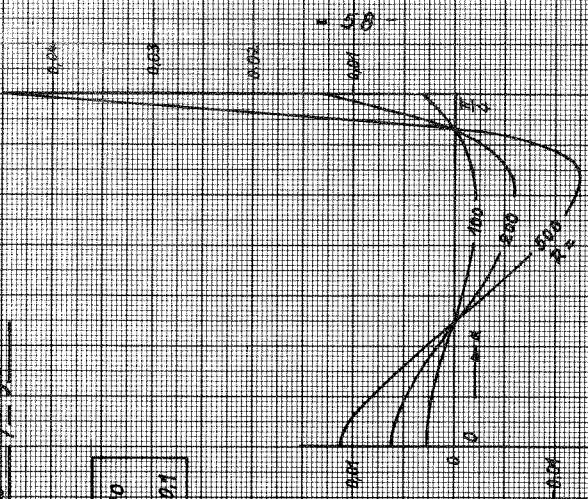
$v' = \text{const}$



Verdrehung  $\phi'$

$M_x \text{ [kp.cm}^2\text{]}$

Moment  $M_x$



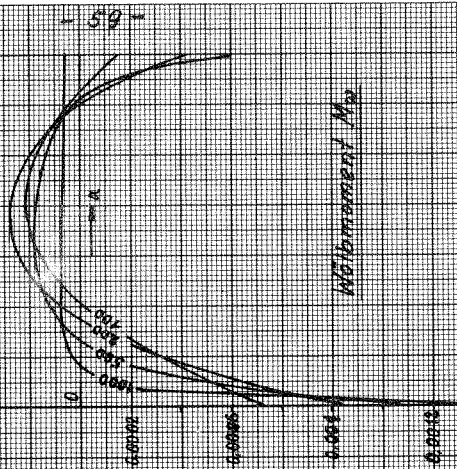
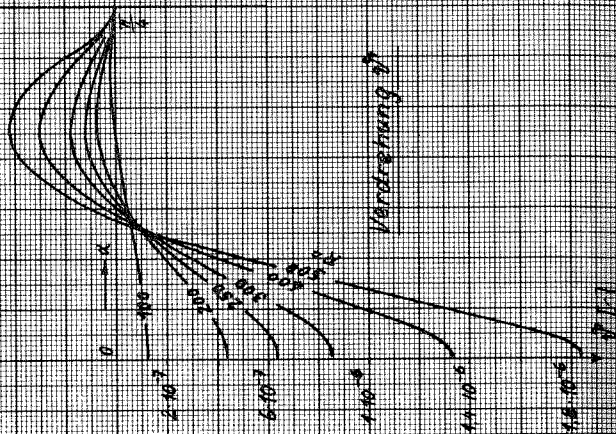
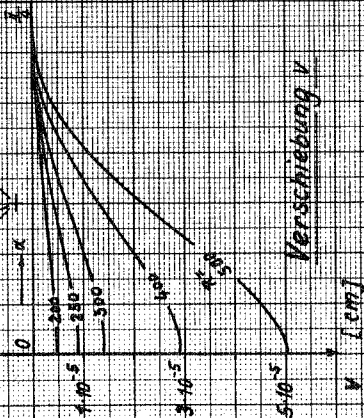
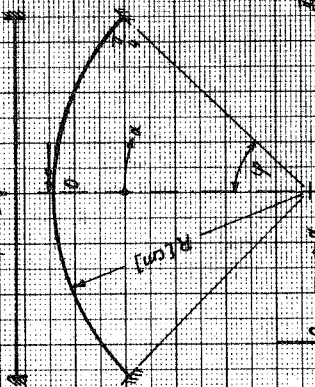
# Verformungen $v$ , $v'$ und Wölbmoment $M_w$ infolge $M_x$

$\varphi = \text{constant} = \frac{\pi}{6}$

|            |       |                 |               |     |
|------------|-------|-----------------|---------------|-----|
| $J_x =$    | 1000  | cm <sup>4</sup> | $\lambda^2 =$ | 10  |
| $J_{tw} =$ | 10000 | cm <sup>4</sup> | $\lambda^2 =$ | 0,1 |
| $J_y =$    | 26    | cm <sup>4</sup> |               |     |

8.6

$M_x = 1$   
[kg cm]



$M_w$  [kg cm]  
26

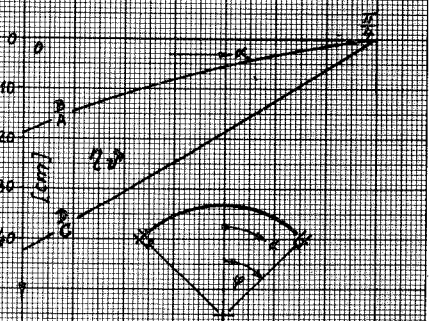
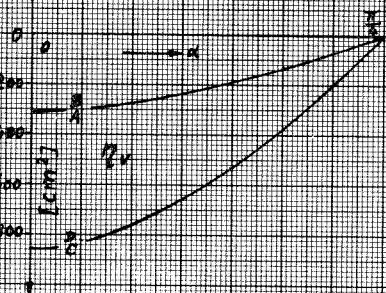
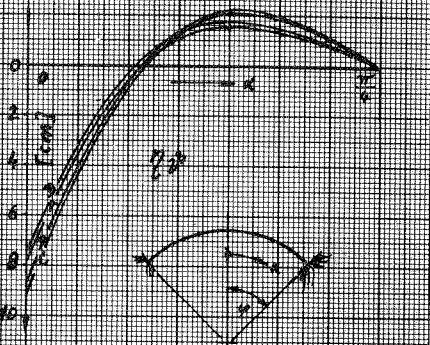
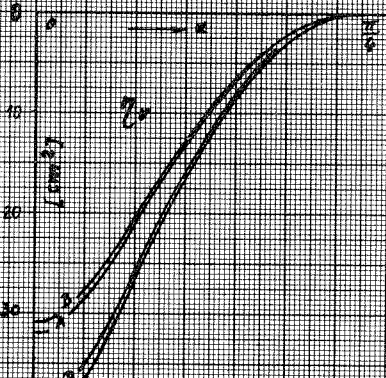
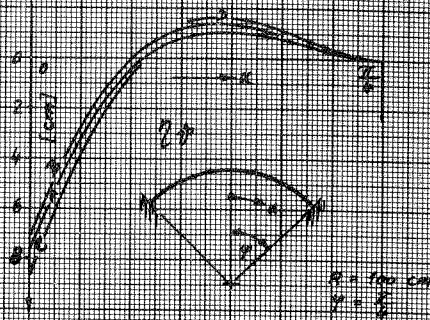
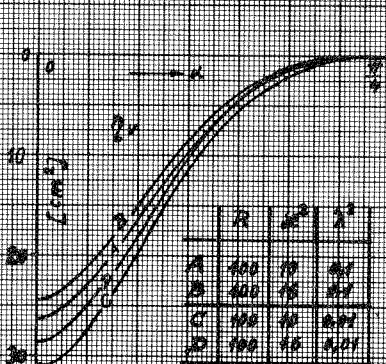
- 59 -

# 87. Einflußlinien für $M_x$ in Feldmitte

$$M_x = \sum P \cdot \eta_v + \sum M_0 \cdot \eta_0$$

Einflußordinaten  
für Querlasten  $P$

für Drehmomente  $M_0$



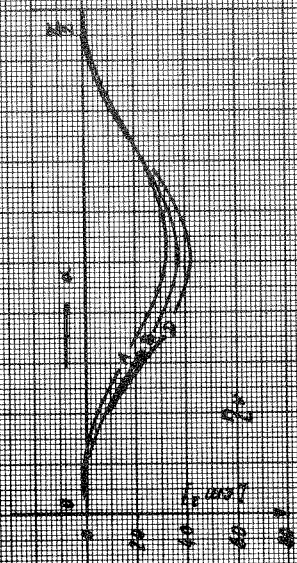


# 8.1 Einflusslinien für $M_0$ am linken Band

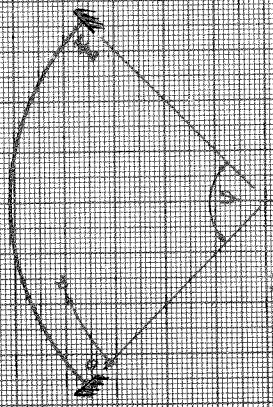
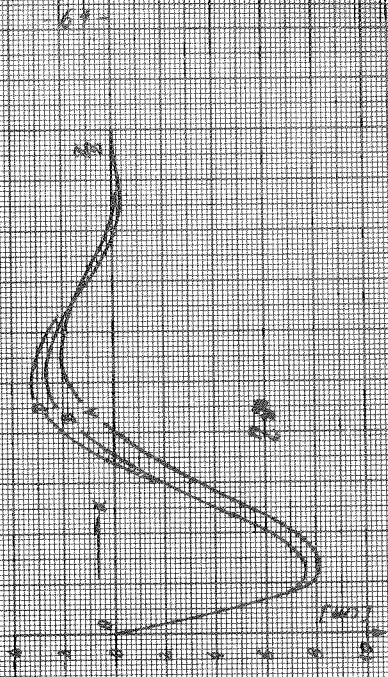
$$M_0 = \sum P_i p_i = \sum M_0 p_i$$

|   | P   | $p^2$ | $p^2$ |
|---|-----|-------|-------|
| 1 | 100 | 0     | 0     |
| 2 | 400 | 0.5   | 0.4   |
| 3 | 200 | 1.0   | 0.8   |
| 4 | 100 | 1.5   | 0.225 |

Einflussordinaten für Querlasten P



Einflussordinaten für Drehmomente  $M_0$

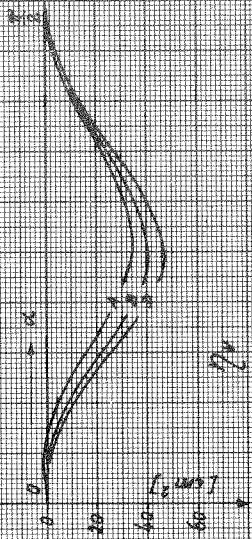


# 0.7 Einflusslinien für $M_0$ an linken Rand

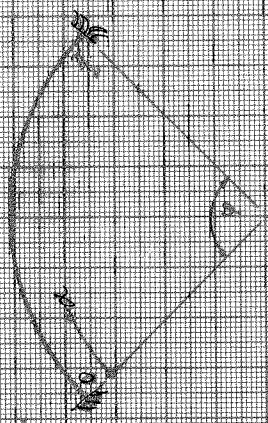
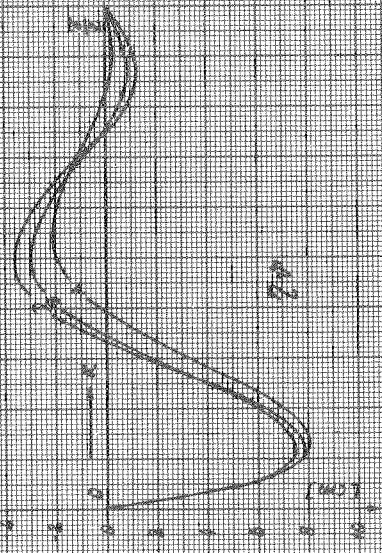
$$M_0 = \sum P_i p_i + \sum M_0 p_0$$

|   | R   | d  | r   |
|---|-----|----|-----|
| A | 100 | 10 | 0,1 |
| B | 100 | 20 | 0,2 |
| C | 100 | 30 | 0,3 |
| D | 100 | 40 | 0,4 |

Einflussordinaten für Querlasten P



Einflussmomente  $M_0$



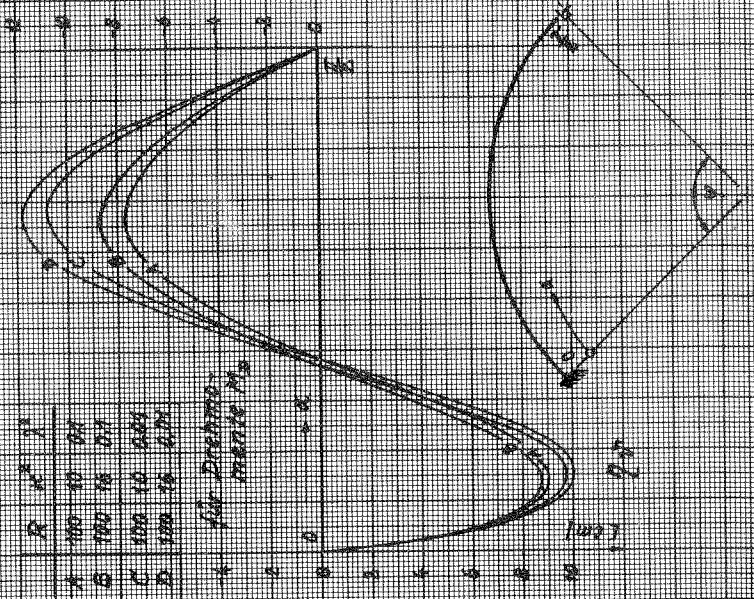
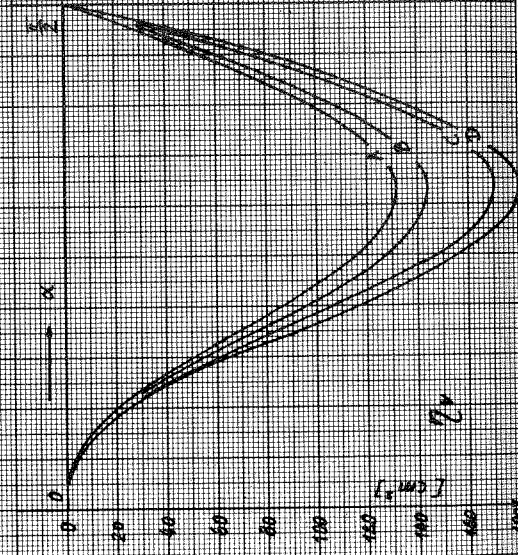
8.7. Einflußlinien für  $M_0$  am linken Rand

$$M_0 = \sum P \cdot q_i + \sum M_0 \cdot p_i$$

|   | R   | $\lambda^2$ | $\lambda^3$ |
|---|-----|-------------|-------------|
| A | 100 | 10          | 0,1         |
| B | 120 | 16          | 0,17        |
| C | 150 | 25          | 0,25        |
| D | 180 | 36          | 0,36        |

für Drehmo-  
mente  $M_0$

Einflußordinaten  
für Querkraft  $P$



## 9. Diskussion der Rechenergebnisse

### Zu 8.2 Vergleich errechneter Spannungen mit Meßwerten.

Es ist jeweils der Spannungsverlauf in der rechten Modellhälfte dargestellt. Die 4 angegebenen Meßpunkte liegen an den Stellen, in denen die Verwölbung des Querschnitts Größtwerte aufweist.

Beim Vergleich der 4 Diagramme sind gewisse systematische Abweichungen zwischen Rechen- und Meßwerten zu erkennen.

- a) Unsymmetrische Lage der Meßwerte zu den strichpunktiert eingetragenen Biegespannungslinien, hauptsächlich im Bereich  $0^\circ < \alpha < 15^\circ$ .
- b) Der Wölbspannungsanteil im Symmetriepunkt  $\alpha = 0^\circ$  zeigt in der Messung für die oberen Punkte 01 und 05 kleinere, für die unteren Punkte 22 und 24 größere Werte an als die Rechnung. Diese Abweichung klingt bis etwa  $\alpha = 15^\circ$  ab.
- c) Die Meßwerte im Schnitt  $\alpha = 20^\circ$  zeigen für die Punkte 22 und 24 eine Spannungsminderung an.

Zu a)

Die Beträge der Biege- und Wölbmomente sind vom Verhältnis der Steifigkeiten abhängig. Die geringe Wandstärke des Modells von 0,3 cm bewirkt ein kleines Torsionsträgheitsmoment, in das die Wandstärke in der 3. Potenz eingeht. Mit fallendem Wert  $J_T$  tritt eine Umlagerung der Lastabtragung zugunsten der Biegemomente ein. Nachmessungen zeigten, daß die Wandstärke nicht ganz gleichmäßig ist und an vielen Stellen geringfügig unter der Sollstärke bleibt. Nachrechnungen bestätigen eine Änderung der Biegemomente im gewünschten Sinne. Gleichzeitig wächst auch das Wölbmoment an.

Zu b)

Zur Erklärung der Spannungsabminderung in den abstehenden, unversteiften Punkten 01 und 05 kann die Profilverformung herangezogen werden. Der Effekt

tritt besonders im Lastfall  $M_D = 1$  hervor, bei dem die Last durch ein Kräftepaar in das Querschott eingeleitet wurde. Eine Verbiegung der oberen Deckplatte quer zur Stablängsachse konnte in diesem Fall nachgewiesen werden. In welchem Grade die größeren Meßwerte an den unteren Stegrändern 22 und 24 den mit abnehmendem  $J_T$  höheren Wölbmomenten oder Zwängungseinflüssen des Querschotts zugeschrieben werden können, ist nicht bekannt.

Zu c)

Die Spannungsminderung deutet auf eine Querschnittsverformung hin. Der Bereich  $15^\circ < \alpha < 45^\circ$  ist nicht ausgesteift, sodaß sich die abstehenden Stege der Spannung durch Ausweichen entziehen können. Überraschend ist die sehr gute Übereinstimmung von Rechnung und Messung für alle Lastfälle im Schnitt  $35^\circ$ . Zwischen  $20^\circ$  und  $35^\circ$  und über  $35^\circ$  hinaus liegen keine Meßstellen.

Zu 8.3 Zustandsflächen infolge Einheitslasten.

Die dargestellten Lastfälle sind Einheitszustände an einem möglichen statisch bestimmten Grundsystem des Modellträgers. Die Berücksichtigung des Wölbanteils ändert die Verformungen  $\delta_{i\kappa}$ , die nur aus Biege- und Torsionsanteilen ermittelt werden, für den Lastfall  $P = 1$  in  $\alpha = 0^\circ$ , bis zu etwa 15 %. Der Einfluß auf die Schnittgrößen ist geringer.

Die Einheitsbelastung  $M_\omega = 1$  stellt ein Beispiel zum Abklingverhalten einer örtlich eingeleiteten Gleichgewichtsgruppe dar. Die Beeinflussung reicht weit über ein Gebiet von etwa der größten Profildbreite hinaus und wird wesentlich vom Abklingbeiwert  $d$  beeinflusst. Da keine Schnittresultierenden auftreten, wächst das Wölbmoment an der Einspannstelle auch nicht mehr an. Primäres und sekundäres Torsionsmoment sind entgegengesetzt gleich. Die Erscheinung, daß die Werte an der Lasteinleitungsstelle nicht

verschwinden, ist vom geraden Träger her bekannt. Die Differentialgleichungen liefern durch die Vernachlässigung der Wölbschubverformung eine Integrationskonstante weniger, als Randbedingungen zur vollständigen Beschreibung des Wölbkraftproblems angegeben werden können.

Zu 8.4 Zustandsflächen infolge Streckenlasten.

Das Wölbmoment zeigt einen zunächst nicht erwarteten Verlauf mit wechselndem Vorzeichen. Die - hier nicht angegebenen - Linien der Verdrehung  $\psi$  entsprechender Lastfälle  $q$  und  $m$  sind nicht ähnlich, d.h. die Verdrehung kann nicht durch Verschieben der Last in einen Schubmittelpunkt, wie am geraden Träger, zu Null gemacht werden.

Zu 8.5 Zustandsflächen ( $L = \text{konstant}$ ).

Sämtliche Schnittgrößen streben mit wachsendem Radius den Lösungen des geraden Trägers zu. Mit wachsender primärer Torsionssteifigkeit  $GJ_T$  werden die Grenzwerte schon bei kleineren Radien erreicht. Beim Lastfall  $M_D$  zeigt das Biegemoment  $M_x$  ein vom Verhältnis der Steifigkeiten  $GJ_T$  zu  $EJ_x$  abhängiges Maximum. Höhere Biegesteifigkeiten verschieben das Maximum zu größeren Radien hin.

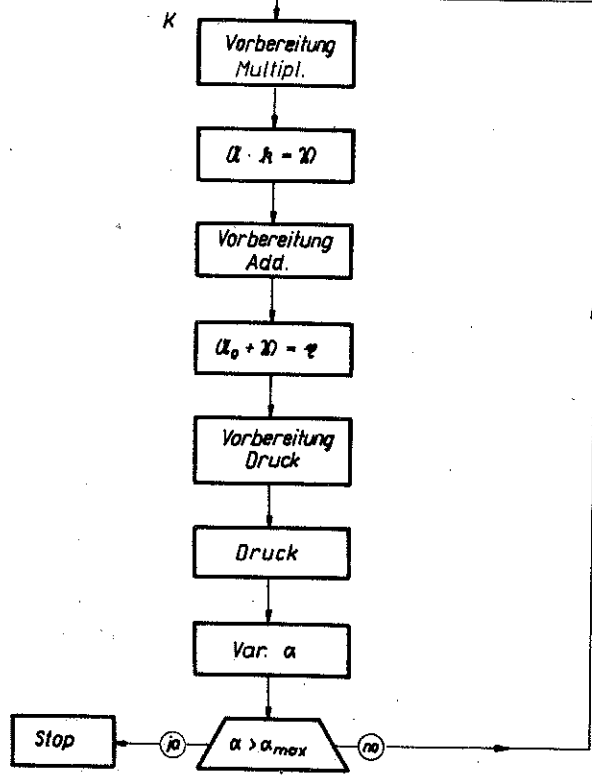
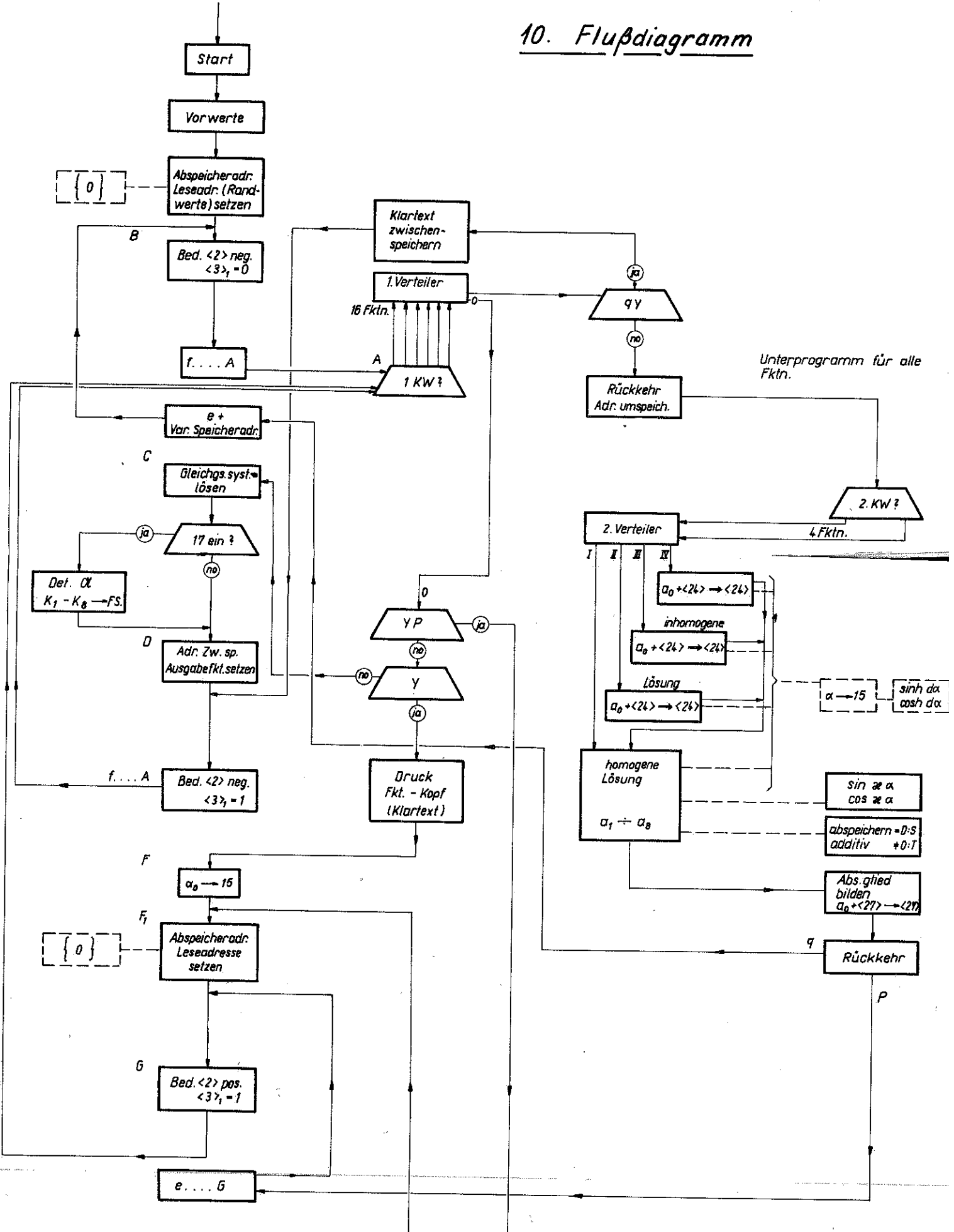
Zu 8.6 Zustandsflächen ( $\alpha_{\max} = \text{konstant}$ ).

Mit wachsendem  $R$  werden die Verformungen stetig größer. Das Wölbmoment  $M_\omega$ , das hier auf den Wert  $J_\omega = 10\ 000$  bezogen ist, strebt für  $R \rightarrow \infty$  bei dem Lastfall  $M_D = 1$  einem Grenzwert zu.

Zu 8.7 Einflußlinien.

Die Einflußlinien wurden als Biegelinien unter der Wirkung einer Querschnittsverwölbung berechnet. Der angegebene Bereich der Kennwerte  $\kappa^2$  und  $\lambda^2$  deckt etwa den Bereich dieser Werte für Walzprofile. Mit zunehmender Nachgiebigkeit der Lagerung werden Änderungen der Steifigkeiten stärker spürbar.

# 10. Flußdiagramm



Adressenzählregister.  
Zählshablone für einfache Funktionen

| Ssp.<br>Progr. teil      | 27 |   | 28 |   | 29   |      | 30  |     |
|--------------------------|----|---|----|---|------|------|-----|-----|
|                          | q  | p | q  | p | q    | p    | q   | p   |
| Vorbereitung             | 0  | 0 | 0  | 0 | 0    | 0    | 0   | 0   |
| 1. Verteiler             |    |   |    |   |      |      | 1   | 1   |
| 1. Fkt.<br>e + var. Adr. | 1  | 1 | 1  |   | 0+64 | 0+8  | 0+3 | 0+2 |
| 1. Verteiler             |    |   |    |   |      |      | 1+1 | 1+1 |
| 2. Fkt.<br>e + var. Adr. | 2  | 2 | 2  |   | 1+64 | 0+16 | 1+3 | 1+2 |
| 1. Verteiler             |    |   |    |   |      |      | 1+4 |     |
| 3. Fkt.                  | 3  | 3 |    |   | 2+64 | 0+24 | 2+3 | 2+2 |
| 1. Verteiler             |    |   |    |   |      |      | 2+1 | 2+1 |
| 2. Fkt.<br>e + var. Adr. | 8  | 8 | 8  |   | 7+64 | 0+64 | 7+3 | 7+2 |
| 1. Verteiler             |    |   |    |   |      |      | 7+4 |     |
| (e) Ausprung             | 8  | 8 | 8  |   | 8+0  | 0+64 | 8+1 | 8+1 |

-67-

### Zusammenfassung

Durch Variation der potentiellen Energie werden Differentialgleichungen abgeleitet, die den Verformungszustand des ebenen, beliebig gekrümmten Trägers beschreiben. Bei kreisförmiger Krümmung und gleichbleibenden Profilkennwerten besitzt das System gekoppelter Differentialgleichungen 4.Ordnung konstante Koeffizienten. Der Rechenaufwand der Lösung durch ein System von Differentialgleichungen 1.Ordnung wird durch passende Substitution merkbar verringert.

Die Lösung wurde für die elektronische Rechenanlage Z 22 programmiert. Die Ergebnisse zeigen, daß Wölbnormalspannungen bei aufgelösten, dünnwandigen Stahlbauprofilen nicht mehr den Charakter von Nebenspannungen besitzen. Da mit abnehmender Wandstärke und mit der Anordnung des Materials vom Schwerpunkt weg der Abklingbeiwert  $d$  kleiner wird, erstrecken sich die Wölbnormalspannungen über weite Bereiche des Stabes. Eingeleitete Wölbmomente klingen am gekrümmten Stab zunächst rascher ab als am geraden Träger mit gleichem Profil. Daneben bauen sich an anderen Stellen durch die Kopplung der Verformungen neue Wölbmomente auf.

Modellmessungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den errechneten Spannungen.



Lebenslauf

23. 5. 1931 geboren als Sohn des Ingenieurs Peter Anheuser und seiner Frau Martha in Schifflingen/Luxemburg.
- 1937 Besuch der Volksschule in Schifflingen
- 1942 Besuch des Gymnasiums in Esch/Alzette
- 1944 Als Aushilfe in verschiedenen Berufen tätig
- 1946 Besuch des Gymnasiums in Trier
- 1949/50 Austauschschüler am französischen Collège
- 1953 Reifeprüfung in Trier  
Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart mit dazwischenliegender praktischer Tätigkeit
- 1958 Abschluß des Studiums mit der Hauptdiplomprüfung  
Kurze Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Stahlbau und Holzbau der Technischen Hochschule Stuttgart bei Herrn Professor Dr.-Ing. W. Pelikan
- seit Juli 1958 Stellenverwalter und später wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baustatik und Elastizitätslehre bei Herrn Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer.