

# Spannungsoptische und theoretische Untersuchungen zur Kraftverteilung in Kehlnaht - Laschenverbindungen

Von der Technischen Hochschule Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung



vorgelegt von

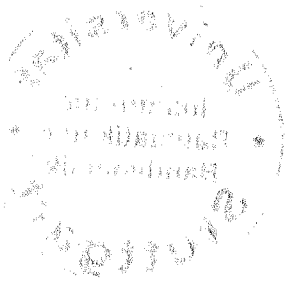
Diethelm Feder  
geboren zu Bunzlau in Schlesien

14.03.2008

Z

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. W. Pelikan
Tag der Einreichung:	8. Juli 1966
Tag der mündlichen Prüfung:	16. Dezember 1966

1967



Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Bornscheuer, der diese Arbeit anregte und stets gefördert hat, nicht zuletzt indem er mir Gelegenheit zur Mitarbeit an Forschungsaufgaben aus verwandten Gebieten der Schweißtechnik gab, die viele wertvolle Hinweise erbrachten.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Pelikan danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Mein Dank gebührt auch allen früheren und jetzigen Mitarbeitern des Instituts für Spannungsoptik und Modellmessungen der TH Stuttgart, die mit Rat oder Tat bei der Anfertigung der Modelle, der Versuchsdurchführung und der Drucklegung der Arbeit behilflich waren.

Den Mitarbeitern des Recheninstituts der TH Stuttgart danke ich für die freundliche Unterstützung beim Ausprüfen der Programme und das Entgegenkommen bei der Bereitstellung von Rechenzeit.

I n h a l t

	Seite
Schrifttum	6
Bezeichnungen	10
1. Einleitung und Definitionen	13
2. Die einfache Theorie für überlappte Verbindungen mit Kehlschweißnähten	
2.1 Frühere Darstellungen und Grundlagen	15
2.2 Dimensionsfreie Darstellung der Theorie für reine Flankennahtverbindungen	16
2.3 Erweiterung der Theorie auf Verbindungen mit Flanken- und Stirnkehlnähten	20
3. Grenzen der einfachen Theorie für Kehlnahtverbindungen	23
4. Spannungsoptische Versuche zur Ermittlung der Kraftaufteilung bei kombinierten Verbindungen	
4.1 Aufbau der 1. Versuchsreihe	29
4.2 Bemerkungen zum Meßverfahren, Genauigkeitsuntersuchungen	30
4.3 Ergebnisse der 1. Versuchsreihe	38
4.4 2. Reihe von spannungsoptischen Versuchen	46
5. Modellversuche zur Ermittlung des Verschiebungsmoduls der Schweißnähte	
5.1 Bisher benutzte Werte für den Verschiebungsmodul. Grenzbetrachtungen	53
5.2 Modelle und Meßverfahren für die Verschiebungsmessung	55
5.3 Gemessene Verschiebungsmoduln	55
5.4 Theoretische Abschätzung des Verschiebungsmoduls	57
5.5 Der "effektive" Verschiebungsmodul	60

6. Eine Berechnungsmethode für überlappte Kehl-nahtverbindungen bei Berücksichtigung der ungleichförmigen Spannungsverteilung	
6.1 Berechnung des Spannungszustandes in den Laschen bei gegebener Randspannungsverteilung	63
6.2 Ableitung der Dgl. 4. Ordnung für eine idealisierte Schweißnaht. Lösung für über die Querschnitte konstante Längsspannung	73
6.3 Grundgedanken des Näherungsverfahrens	80
6.4 Die elektronische Berechnung	86
7. Ergebnisse der genaueren Berechnung	
7.1 Vergleich mit spannungsoptischen Versuchen an reinen Flanken-nahtverbindungen	99
7.2 Der Einfluß der Schweißnahtdicke	105
7.3 Der Einfluß der Querdehnung	109
7.4 Der Einfluß der Breite des Bleches	111
7.5 Die Kraftverteilung bei kombin. Verbindungen	114
7.6 Vergleiche mit Messungen an Schweißverbindungen aus Stahl	118
8. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	128
9. Anhang	
9.1 Ableitung und Lösung der Dgl. für die Kraft im Blech einer zweischnittigen Flankenkehl-naht-Verbindung (zu Abschnitt 2.2)	130
9.2 Ableitung der Gleichung für die Kraftverteilung bei kombinierten Verbindungen (zu Abschnitt 2.3)	134
9.3 Berechnung der Querspannungen und ihre Berücksichtigung in der Dgl. (zu Abschnitt 3 und 6.1)	136
9.4 Beispiele von Ergebnisprotokollen der elektronischen Berechnung	140
9.5 Lösung der Dgl. 4. Ordnung für konstante Normalspannungsverteilung	142
9.6 Aufstellung der Formel für die Verschiebung bei der Dgl. 4. Ordnung	145
9.7 Berechnung von $P_1/P$ in der Lösung der Dgl. 4. O.	146
9.8 Berechnung der Verwölbung des Stirnendes der Lasche und Aufstellung der Randbed. für $F_1(\xi=1)$	147
9.9 Abdruck des Algol-Progr. zur iterativen Berechn.	149
Lebenslauf	155

S c h r i f t t u m

- [1] Girkmann, K.:  
Zur Theorie der Schweißverbindungen  
Stahlbau 13(1940), H.23/24, S.123/39
- [2] Fillunger, P.:  
Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen  
Österr. Wochenschr. f.d. Öff. Baudienst 1919, S.78/87
- [3] Hovgaard, W.:  
The Stress Distribution in Welded Overlapped Joints  
Proc. Nation. Ac.of Sc.-USA, Vol.16(1930)
- [4] Hovgaard, W. und Helly, E.:  
Die Spannungsverteilung in Schweißungen  
ZAMM 11(1931), S.341
- [5] Bleich, F.:  
Stahlhochbauten, Band I  
Springer Berlin 1932, S.467/9
- [6] Stüssi, F.:  
Entwurf und Berechnung von Stahlbauten  
Springer Berlin 1958, S.156/63
- [7] Kalina, R.:  
Über das Zusammenwirken von Stirn- und Flankennähten  
Stahlbau 7(1934), H.13, S.97/100
- [8] Smith, J.H.:  
Stress Strain Characteristics of Welded Joints  
J.Amer.Weld. Soc. Vol.8(1929), W.Res.Suppl. 9, p.79-s/95-s

- [9] Mac Kay, H.M. and Bain, A.M.:  
Distribution of Stress in Parallel Welding Fillets  
Canadian Journal of Research 3(1930), No.3
- [10] Müller, R.K.:  
Das Lateralextensometer und seine Anwendung  
in der ebenen Spannungsoptik  
Bautechnik 38(1961), H.11, S.364/8
- [11] Müller, R.K. und Weber, K.H.:  
Ein elektr. Lateralextensometer zur Messung der Haupt-  
spannungssumme beim ebenen spannungsopt. Modellversuch  
Bautechnik 42(1965), H.9, S.307/12
- [12] Solakian, A.G.:  
Photoelastic Analysis of Stress in the Lap Plates  
of Fillet-Welded Joints  
J.Amer.Weld.Soc. Vol.18(1939), W.Res.Suppl. 9, p.318-s/23-s
- [13] Knorr, E.:  
Spannungsoptische Untersuchung von Biegeplatten  
mit Hilfe von schiefer Durchstrahlung  
Bautechnik 41(1964), H.10, S.333
- [14] Kuske, A.:  
Einführung in die Spannungsoptik  
Wiss. Verlagsges. Stuttgart 1959, S.123
- [15] Feder, D.:  
Hauptspannungen und Trajektorien um eine Einzelkraft  
in der unendlichen Scheibe  
ZAMM 46(1966), H.6, S.402/4
- [16] Persson, H.Å.:  
Deformation Conditions of Fillet Welds  
IIW/IIS Doc. XV-A-1-63

- [17] Tatur, G.K. und Rykalin, I.I.:  
Metody Rasčeta Elektrosvarnych Soedinenij  
(Die Methoden zur Berechnung von Schweißverbindungen)  
Abh. des Inst. für Technik des fernöstl. Zweiges der  
Akad. der Wiss.-USSR, Moskau 1933
- [18] Bierett, G. und Grüning, G.:  
Spannungszustand und Festigkeit von  
Stirnkehlnahtverbindungen  
Stahlbau 6(1933), H.22, S.169/73
- [19] Steinhardt, O.:  
Über die konstruktiven Funktionen der Schweißnaht  
im Metallbau  
Schweißen und Schneiden 17(1965), H.1, S.2/9
- [20] Weiskopf, W.H. and Male, M.:  
Stress Distribution in Side-Welded Joints  
J.Amer.Weld.Soc. Vol.9(1930), No.9, p.23/48
- [21] Jäger, K.:  
Der Spannungszustand in einer Überlappungsschweißung  
mit Stirn- und Flankennähten.  
Sitz.-Ber.d.Wiener Akad.d.Wiss. Abt.IIIa,  
Bd.146(1937), S.543
- [22] Timoshenko, S. and Goodier, J.N.:  
Theory of Elasticity  
McGraw-Hill New York 1951
- [23] Domke, O.:  
Zur Theorie der Spannungsverteilung in  
Flankenschweißnähten  
Forschungsheft 6 aus dem Gebiete des Stahlbaus  
Springer Berlin 1943, S.31/6



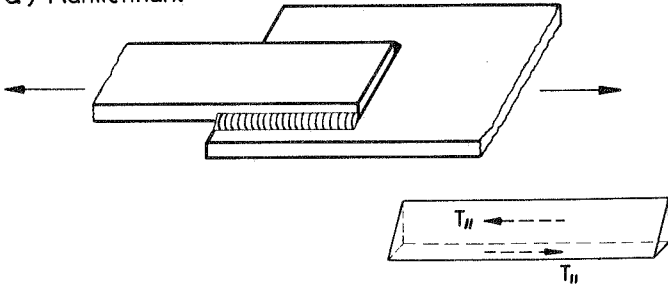
- [24] Melan, E.:  
Die Verteilung der Kraft in einem Streifen  
von endlicher Breite  
ZAMM 5(1925), S.314/8
- [25] Zurmühl, R.:  
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker  
2. Aufl., Springer Berlin 1957
- [26] Klöppel, K. und Petri, R.:  
Versuche zur Ermittlung der Tragfähigkeit  
von Kehlnähten  
Stahlbau 35(1966), H.1, S.9/25
- [27] Bornscheuer, F.W. und Feder, D.:  
Traglastversuche an Laschenverbindungen aus St 37  
mit Flanken- und Stirnkehlnähten  
Schweißen und Schneiden 18(1966), H.7, S.305/8

B e z e i c h n u n g e n

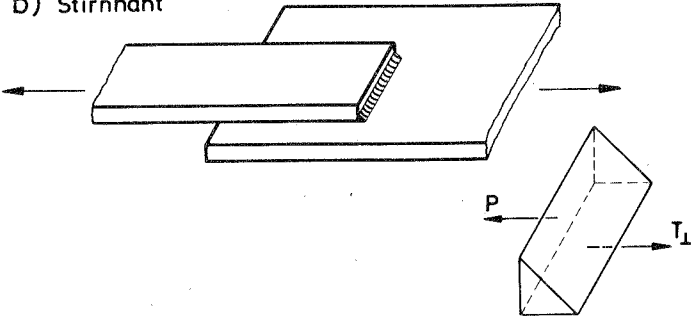
- a [cm] Schweißnahtdicke (Höhe des einbeschriebenen gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks)
- a' [cm] Kathetenhöhe des Schweißnahtdreiecks
- A<sub>1</sub> [cm<sup>2</sup>] Querschnittsfläche des Bleches
- A<sub>2</sub> [cm<sup>2</sup>] Querschnittsfläche einer Lasche
- A<sub>rn</sub> [kp/cm<sup>2</sup>] Koeffizient der Fourierreihe für die Randschubspannungen in der Lasche
- b<sub>1</sub> [cm] Breite des Bleches
- b<sub>2</sub> [cm] Breite der Laschen
- B<sub>n</sub> [kp/cm<sup>2</sup>] Koeffizient der Fourierreihe für die Querspannungen am Laschenrand (Gl.6.15, S.72)
- C [  $\frac{\text{Skt.}}{\text{kp/cm}^2}$  ] Querdehnungskonstante bei der spannungsoptischen Messung
- C<sub>1n</sub> [kp] Konstante in der Fourierreihenlösung der randbelasteten Lasche (Gl.6.11, S.71)
- C<sub>4n</sub> [kp/cm] " " (Gl.6.12, S.71)
- E [kp/cm<sup>2</sup>] Elastizitätsmodul
- F<sub>1</sub>(ξ) -- Verlauf der Kraft im Blech
- G [kp/cm<sup>2</sup>] Schubmodul
- k<sub>//</sub> [kp/cm<sup>2</sup>] Verschiebungsmodul der Flankennaht (s. S.17)
- k<sub>⊥</sub> [kp/cm<sup>2</sup>] Verschiebungsmodul der Stirnnaht (s.S.20)
- k<sub>//</sub>' -- bezogener Versch.modul der Fl.naht, k<sub>//</sub>' = k<sub>//</sub>/E
- k<sub>⊥</sub>' -- bezogener Versch.modul der St.naht, k<sub>⊥</sub>' = k<sub>⊥</sub>/E
- k<sub>//</sub><sup>\*</sup>, k<sub>⊥</sub><sup>\*</sup> -- effektive Verschiebungsmoduln (s. S.61, Gl.5.1)
- l<sub>//</sub> [cm] Länge der Flankennaht
- l<sub>⊥</sub> [cm] " " Stirnnaht
- n -- Isochromatenordnung, Index der Fourierglieder

- N -- Anzahl der Streifen bei der numerischen Bestimmung der Fourierkoeffizienten (s. S.89)
- $p_1$  [kp/cm] Belastung der Stirnnaht
- P [kp] Gesamtkraft der Verbindung
- $P_1(x)$  [kp] Kraft im Blech
- $P_2(x)$  [kp] Summe der Kräfte in den Laschen
- $P_{//}$  [kp] Kraftanteil der Flankennähte
- $P_{\perp}$  [kp] Kraftanteil der Stirnnähte
- S  $\left[ \frac{\text{Ord.}}{\text{kp/cm}^2} \right]$  Spannungsoptische Konstante
- t [Skt.] Anzeige der Meßbrücke bei der Messung der Dickenänderung
- $t_1$  [cm] Dicke des Bleches
- $t_2$  [cm] Dicke der Laschen
- $T(x)$  [kp/cm] Schubbelastung einer Flankennaht
- $T^*(\xi)$  -- Schubkraftverlauf in den Flankennähten ( $T^*(\xi) \equiv F_1'$ )
- u [cm] Verschiebung in x-Richtung
- $\Delta u$  [cm] relative Verschiebung von Lasche und Blech
- v [cm] relative Verschiebung der Nahtufer der Schweißnähte
- x [cm] Koordinate parallel zur Längsachse, der Verbindung
- y [cm] " senkrecht " " " " "
- (Bei den spannungsoptischen Versuchsergebnissen andere Orientierung, s. hierzu Bild 4.6, S.37)
- $\alpha$  -- Koeff. in den Dgln. (Gl.2.3, S.18)
- $\alpha_n$  [1/cm] Parameter in der Fourierreihenlösung (s.S.65)
- B -- Koeff. in den Dgln. (Gl.2.4, S.18)
- $\delta(\xi)$  -- Verlauf der Verschiebung in den Flankennähten
- $\lambda$  -- Parameter bei der numerischen Ermittlung der Fourierkoeffizienten (s. S. 89)
- $\mu$  -- Querdehnungskonstante ( $E = G \cdot 2(1+\mu)$ )
- $\xi$  -- Koordinate parallel zur Längsrichtung der Verbindung,  $\xi = x/l_{//}$  (s. Bild 2.1, S.16)
- $\varphi$  [°] Isoklinenwinkel

a) Flankennaht



b) Stirrannaht



c) Schrägnaht

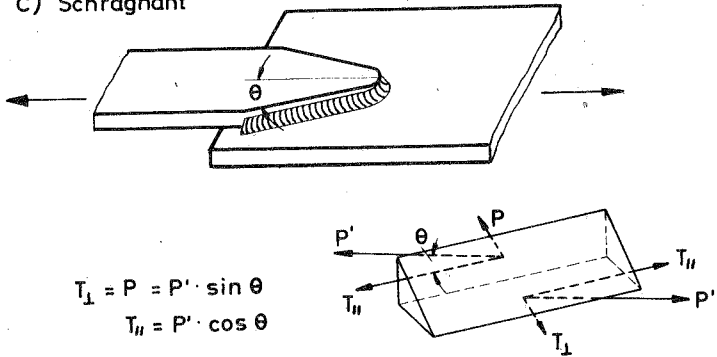


Bild 1.1: Kehlnahtbezeichnungen in Abhängigkeit von der Orientierung zur Krachrichtung

## 1. Einleitung und Definitionen

Soll im Stahlbau ein zug- oder druckbeanspruchtes stabförmiges Bauteil durch Schweißung an ein anderes angeschlossen werden, so wird häufig von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Teile zu überlappen und im Überlappungsbereich durch Kehlnähte zu verbinden. Eine solche Verbindung ist konstruktiv ungünstiger als eine Stumpfschweißung, da der Kraftfluß aus der Wirkungslinie der Anschlußkräfte herausgelenkt wird, jedoch hat die überlappte Verbindung vielfach den Vorzug einfacherer Fertigung.

Die Kehlnähte einer Überlappung sind je nach ihrer Lage zur Krafrichtung verschiedenen Beanspruchungsarten ausgesetzt. Bild 1.1 gibt hierzu eine schematische Darstellung. Die beiden extremen Lagen sind parallel zur Krafrichtung (Bild 1.1a) und senkrecht zur Krafrichtung (Bild 1.1b). Eine Kehlnaht parallel zur Krafrichtung wird allgemein als Flankennaht, eine solche senkrecht zur Krafrichtung als Stirnnaht bezeichnet. Denkt man sich die Kehlnaht idealisiert als Prisma mit dem Querschnitt eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, dann wird die Flankennaht durch Schubkräfte beansprucht, die in den Kathetenflächen in Längsrichtung angreifen, während die Stirnnaht senkrecht zu ihrer Längsrichtung in der einen Kathetenfläche durch eine Schubkraft, in der anderen durch eine Zug- oder Druckkraft beansprucht wird. Liegt die Naht schräg zur Krafrichtung (Bild 1.1c), dann ist sie einer zusammengesetzten Längs- und Querbeanspruchung ausgesetzt, die sich jedoch durch Zerlegung auf die beiden eben beschriebenen Fälle zurückführen läßt.

Die vereinfachende Darstellung in Bild 1.1 wird natürlich den tatsächlichen Spannungsverhältnissen in Kehlnähten nicht gerecht, wie schon daraus hervorgeht, daß die an den Schweißnaht-elementen angreifenden Kräfte jeweils ein Kräftepaar bilden, dem in der wirklichen Schweißnaht Zusatzspannungen das Gleichgewicht halten müssen. Außerdem kann nicht angenommen werden, daß die zu den eingezeichneten Kräften gehörenden Spannungen

gleichmäßig über die Höhe der Kathetenfläche verteilt sind. Diese Probleme der Spannungsverteilung in der Kehlnaht selbst werden hier nicht untersucht. Die Kehlnaht wird abstrahierend nur als kraftübertragendes elastisches Verbindungselement behandelt und als solches in die Berechnung der Kraftübertragung in der Verbindung eingesetzt. Der Grad der Beanspruchung der Kehlnaht als Verbindungsmittel ergibt sich aus der Größe der übertragenen Kräfte.

Es war Aufgabe dieser Arbeit zu untersuchen, wie die Kraftübertragung in der Verbindung durch Lage und Länge der Kehlnähte und durch die Form und die Abmessungen der verbundenen Teile beeinflußt wird. Aus der Notwendigkeit, für die theoretische und experimentelle Untersuchung übersichtliche und klar definierte Verhältnisse zu haben, wurden Laschenverbindungen behandelt, d.h., die durch Kehlnähte verbundenen Teile haben rechteckige Querschnitte. Die Ergebnisse der Untersuchung erlauben jedoch auch Rückschlüsse auf das Verhalten anderer Typen von Kehlnahtverbindungen.

Da die experimentellen Arbeiten im wesentlichen an spannungsoptischen Modellen durchgeführt wurden, sind die ermittelten Spannungsverteilungen rein elastisch. Die Kenntnis der elastischen Spannungsverteilung ist zwar für die Berechnung der Traglast geschweißter Verbindungen nicht nötig, sie dürfte aber bei der Beurteilung ihres Verhaltens unter Dauerbeanspruchung von Nutzen sein.

## 2. Die einfache Theorie für überlappte Verbindungen mit Kehlschweißnähten

### 2.1 Frühere Darstellungen und Grundlagen

Eine ausführliche Übersicht und Diskussion der bis zum Jahre 1940 erschienenen Arbeiten zur Theorie der Schweißverbindungen gibt Girkmann in [1]. Obwohl schon Fillunger [2] 1919 in seiner Arbeit "Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen" eine Lösung angab, die auch auf überlappte Verbindungen mit Flankenschweißnähten anwendbar ist, wurde diese Theorie erstmalig 1930 von Hovgaard [3; 4] unabhängig für geschweißte Verbindungen abgeleitet. Girkmann faßt die Ansätze von Fillunger und Hovgaard unter der Bezeichnung "eindimensionale Theorie der Haftverbindungen" zusammen. Diese Theorie wird auch häufig in Lehrbüchern bei der Behandlung der Niet- und Schweißverbindungen aufgeführt (s. z.B. [5] und [6]).

Folgende vereinfachende Annahmen liegen der eindimensionalen Theorie der Haftverbindungen zugrunde:

1. Die Spannungsverteilung über die Querschnitte ist gleichförmig.
2. Die Querdehnung wird vernachlässigt.
3. Das Verformungsgesetz der Schweißnaht nimmt direkte Proportionalität zwischen übertragener Kraft und Verschiebung an.

Mit diesen Annahmen wird das Problem eindimensional, und man erhält für den Verlauf der Stabkraft "S" im Bereich der Verbindung eine Differentialgleichung vom Typ  $S'' - \alpha S = \beta$ , die auf hyperbolische Funktionen führt.

Zur Untersuchung des Einflusses von charakteristischen Konstanten und für die graphische Darstellung ist es häufig vorteilhaft, die interessierenden Größen dimensionslos zu machen. Es

wird daher im folgenden Abschnitt eine Darstellung der einfachen Theorie der Haftverbindungen gegeben, in der alle Größen dimensionslos sind. Dies erhöht auch, wie sich zeigen wird, die Übersichtlichkeit einer späteren Näherungsberechnung.

## 2.2 Dimensionsfreie Darstellung der Theorie für reine Flankennahtverbindungen

Betrachtet wird eine zweischnittige reine Flankennahtverbindung nach Bild 2.1. Man kann dann den größeren Querschnitt als Blech, die beiden an ihn symmetrisch angeschlossenen Teile als Laschen bezeichnen. Üblicherweise wird die Theorie für eine einschnittige Verbindung abgeleitet. Da jedoch alle Versuchsstücke zur Ausschaltung des Biegeeinflusses symmetrisch ausgeführt sein müssen, wurde zur einfacheren Koordinierung von Versuch und Theorie eine zweischnittige Verbindung zugrunde gelegt. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

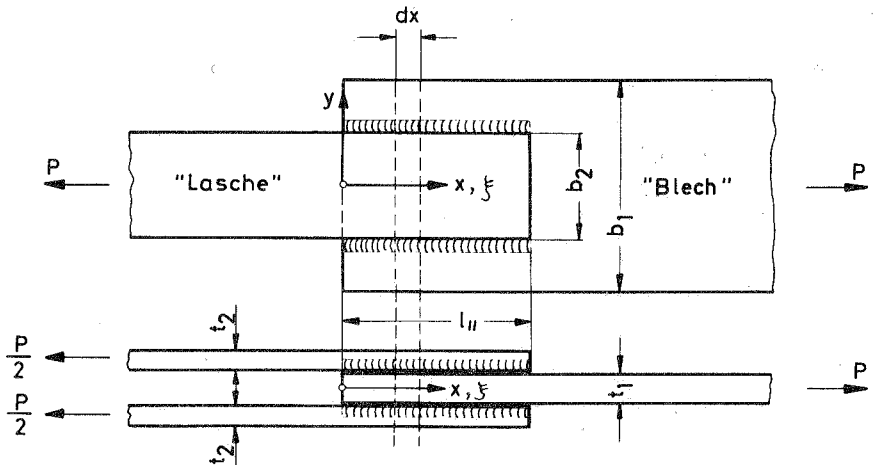


Bild 2.1 : Bezeichnungen bei einer reinen  
Flankennaht - Verbindung



$b_1$ [cm]	Breite des Bleches
$t_1$ [cm]	Dicke " "
$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	Querschnittsfläche des Bleches
$b_2$ [cm]	Breite der Laschen
$t_2$ [cm]	Dicke einer Lasche
$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	Querschnittsfläche <u>einer</u> Lasche
$l//$ [cm]	Länge der Flankennaht (= Länge der Überlappung)
$x$ [cm]	Längskoordinate, Nullpunkt am unbelasteten Ende des Bleches
$k//$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Verschiebungsmodul der Flankennaht in der Beziehung $T(x) = k// \cdot \Delta u(x)$ (s. auch Kap. 5)
$T(x)$ [kp/cm]	in <u>einer</u> Flankennaht an der Stelle $x$ übertragene Schubkraft pro cm
$\Delta u(x)$ [cm]	relative Verschiebung zwischen Blech und Lasche an der Stelle $x$
$P_1(x)$ [kp]	Kraft im Blech an der Stelle $x$
$P_2(x)$ [kp]	Summe der beiden Kräfte in den Laschen an der Stelle $x$
$P = P_1(x) + P_2(x)$ [kp]	Gesamtlast der Verbindung

Mit diesen Bezeichnungen wird die Differentialgleichung für die Kraft im Blech:

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} - P_1 \left( \frac{4 k//}{E A_1} + \frac{4 k//}{E 2 A_2} \right) = - \frac{P 4 k//}{E 2 A_2} \quad (2.1)$$

Die Herleitung dieser Gleichung aus den Formänderungs- und Gleichgewichtsbedingungen ist im Anhang auf S.130 wiedergegeben. Um (2.1) dimensionsfrei zu machen, werden folgende Beziehungen eingeführt:

$$x/l_{//} = \xi \quad k_{//}/E = k_{//}' \quad P_1/P = F_1$$

So ergibt sich

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - F_1 \cdot 4 k_{//}' l_{//}^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 A_2} \right) = -4 k_{//}' l_{//}^2 \frac{1}{2 A_2} \quad (2.2)$$

Mit den weiteren Abkürzungen

$$\alpha^2 = 4 k_{//}' l_{//}^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 A_2} \right) \quad (2.3)$$

$$B = 4 k_{//}' l_{//}^2 \frac{1}{2 A_2} \quad (2.4)$$

wird schließlich

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - \alpha^2 F_1 = -B \quad (2.5)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet mit Berücksichtigung der Randbedingungen

$$F_1(\xi=0) = 0, \quad F_1(\xi=1) = 1$$

(Einzelheiten s. Anhang S.132):

$$F_1 = \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) \operatorname{sh} \alpha \xi - \frac{B}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha (1-\xi) \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{B}{\alpha^2} \quad (2.6)$$

Den Verlauf der Schubkraft in den Flankennähten erhält man daraus durch Differentiation zu

$$T^*(\xi) = \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) \operatorname{ch} \alpha \xi + \frac{B}{\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha (1-\xi) \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (2.7)$$

Diese Funktionen sind in Bild 2.2 für ein Beispiel dargestellt.

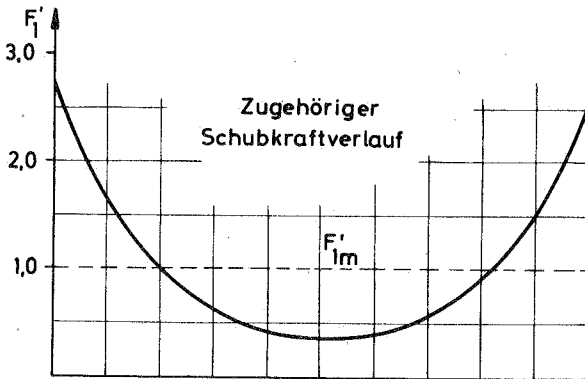
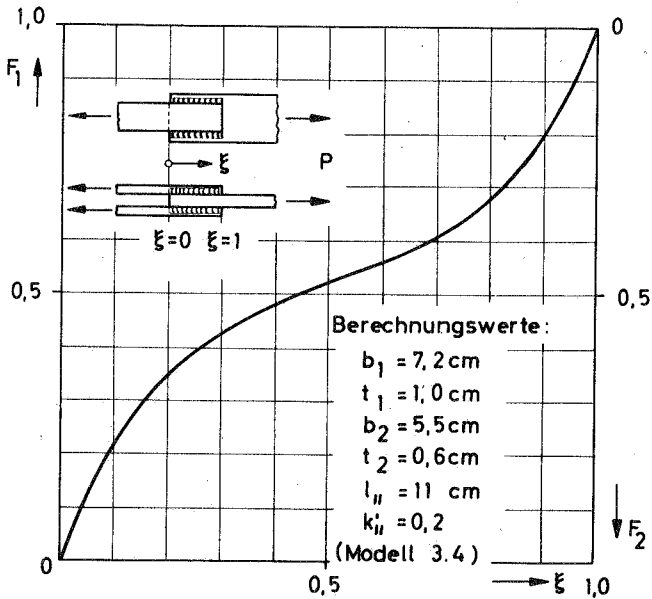


Bild 2.2: Beispiel für den rechnerischen Verlauf des Kraftanteils  $F_1(\xi)$  im Blech bei einer reinen Flanken-naht-Verbindung

### 2.3 Erweiterung der Theorie auf Verbindungen

mit Flanken- und Stirnkehlnähten

Eine Lösung für die Stabkräfte in Verbindungen, die sowohl Flankennähte als auch Stirnkehlnähte haben ("kombinierte Verbindungen"), wurde im deutschen Fachschrifttum zuerst von R. Kalina [7] 1934 angegeben. In englischen Veröffentlichungen haben Smith [8] 1929 und Mac Kay und Bain [9] 1930 Lösungsansätze beschrieben. Gemeinsam ist diesen Untersuchungen, daß ebenso wie für die Flankennähte für die Stirnnaht Proportionalität zwischen übertragener Kraft und Verschiebung angenommen und eine gleichförmige Spannungsverteilung über die Laschenbreite vorausgesetzt wird. Die Forderung nach Gleichheit der Verschiebungen für die Stirnnaht und das anschließende Ende der Flankennaht ergibt die zusätzliche Bedingung zur Ermittlung der von der Stirnnaht übertragenen Kraft, die fortan mit  $P_1$  bezeichnet werden soll. Die Gleichung für den Verlauf der Kraft in der Lasche ergibt sich dann durch Einführen der neuen Randbedingung, daß die Kraft am Laschenende gleich  $P_1$  sein muß. In der dimensionsfreien Darstellung erhält man so:

$$F_1(\xi) = \left(1 - \frac{P_1}{P}\right) - \frac{B}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha \xi - \frac{B}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha (1 - \xi) \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{B}{\alpha^2} \quad (2.8)$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Gleichung von (2.7) nur dadurch, daß der Ausdruck  $(1 - B/\alpha^2)$  durch  $(1 - P_1/P - B/\alpha^2)$  ersetzt ist. Der Wert von  $P_1/P$  ergibt sich zu

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{B}{\alpha^2} (1 - \operatorname{ch} \alpha) + \operatorname{ch} \alpha}{\frac{2k_{11}}{k_1 b_2} + \alpha \operatorname{cth} \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (2.9)$$

worin  $k_1$  [kp/cm<sup>2</sup>] der Verschiebungsmodul der Stirnnaht in der Beziehung  $p_1$  [kp/cm] =  $k_1 \cdot \Delta u_1$  ist (s. auch Kap. 5).

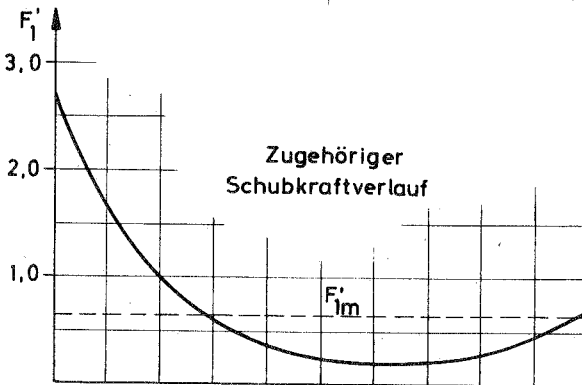
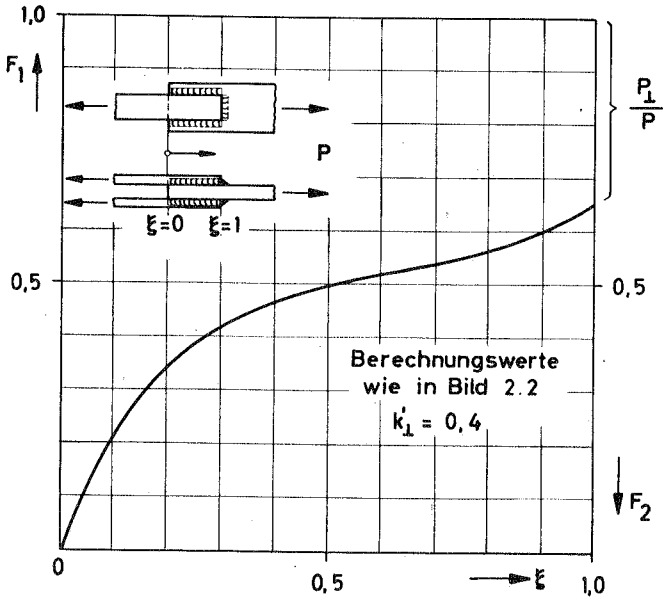


Bild 2.3: Beispiel für den rechnerischen Verlauf des Kraftanteils  $F_1(\xi)$  im Blech bei einer kombinierten Verbindung

Die Einzelheiten der Ableitung der Gleichungen (2.8) und (2.9) sind im Anhang auf S.134 wiedergegeben. In Bild 2.3 sind der Verlauf der Kraft im Blech und der Schubkraftverlauf in der Flankennaht für eine Verbindung dargestellt, die die gleichen Abmessungen wie das Beispiel in Bild 2.2, jedoch zusätzlich Stirnnahte hat. Bemerkenswert ist, daß die Schubkraftspitze bei  $\xi = 0$  sich nur um 1% gegenüber der Verbindung ohne Stirnnaht vermindert. Es läßt sich leicht zeigen, woher dies kommt, wenn man die Gleichung für  $T^*(\xi)$  einer kombinierten Verbindung an der Stelle  $\xi = 0$  aufschreibt. Sie ergibt sich zu

$$T^*(\xi = 0) = 1 + \frac{B}{\alpha^2} (\operatorname{ch} \alpha - 1) \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \frac{P_1}{P} \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}$$

Für eine reine Flankennahtverbindung wird aus (2.7)

$$T^*(\xi = 0) = 1 + \frac{B}{\alpha^2} (\operatorname{ch} \alpha - 1) \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}$$

Der Unterschied zwischen den Schubspannungsspitzen in der Flankennaht am freien Blechende ist also durch

$$\Delta T^* = - \frac{P_1}{P} \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}$$

gegeben. Da bei dem gewählten Beispiel  $\alpha = 5,3$  ist, wird  $\operatorname{sh} \alpha \gg \alpha$ , woraus sich der geringe Wert von  $\Delta T^*$  erklärt. Nur für sehr kleine Werte von  $1/\alpha^2 (\frac{1}{A_1} + \frac{1}{2A_2})$  kann  $\alpha$  so klein werden, daß sich ein merklicher Einfluß von  $\Delta T^*$  ergibt.

### 3. Grenzen der einfachen Theorie für Kehlnahtverbindungen

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie man die eindimensionale Theorie der Haftverbindungen auf Kehlnaht-Laschenverbindungen anwenden kann. Die Anwendung wird ermöglicht durch die folgenden drei Voraussetzungen:

- 1) Spannungsverteilung über die Querschnitte konstant
- 2) Keine Querdehnungen
- 3) Proportionalität zwischen Kraft und Verschiebung in der Schweißnaht.

Jede dieser Annahmen widerspricht den wirklichen Verhältnissen.

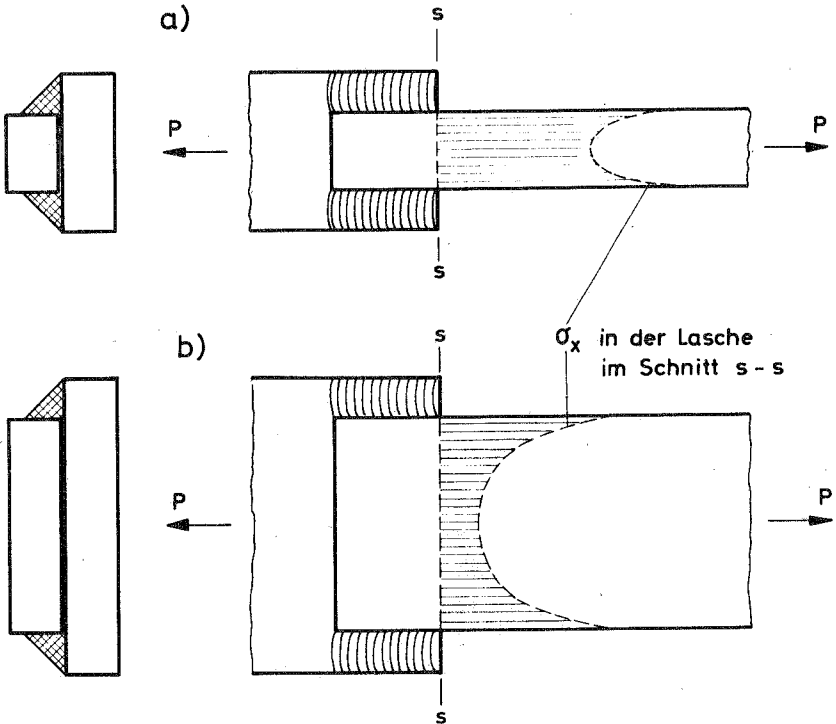


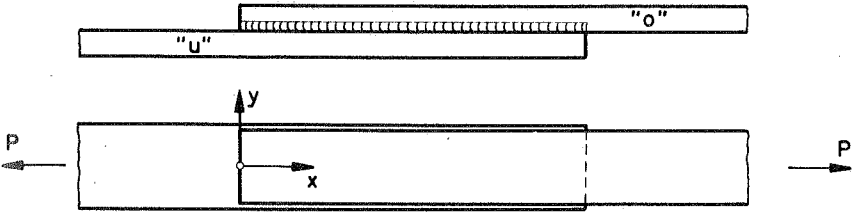
Bild 3.1: Einfluß der Laschenbreite auf die Spannungsverteilung

Zu 1): Die Spannungsverteilung kann nicht über den Querschnitt konstant sein, weil die Kräfte nicht gleichförmig über die Breite verteilt, sondern nur durch die Schweißnähte eingeleitet werden. In Bild 3.1 sind die Längsspannungen in der Lasche in dem Schnitt aufgetragen, der mit dem Ende des Bleches zusammenfällt. Sie wurden mit Hilfe einer scheinbentheoretischen Berechnung (s. Abschn.6.1) gewonnen. Bild 3.1a zeigt eine "schmale", Bild 3.1b eine "breite" Lasche. Bei der schmalen Lasche ist das Verhältnis  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} = 1,55$ , bei der breiten Lasche dagegen ist  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} = 3,95$ . Dieser Vergleich zeigt, daß die Spannungsverteilung in den Laschen um so ungleichförmiger ist, je größer das Verhältnis von Breite zu Anschlußlänge ist. Gleiches gilt natürlich für das Blech, wobei noch hinzukommt, daß die Kraft bei dem Blech nicht an den Rändern, sondern im Innern eingeleitet wird. Die Verteilung der Längsnormalspannungen im Blech wird also auch sehr vom Verhältnis der Blechbreite zur Laschenbreite abhängen. Daß eine derartige Ungleichförmigkeit der Längsspannungsverteilung nicht ohne Einfluß auf die Kraftübertragung bleiben kann, liegt auf der Hand, da die Belastung der Naht von der relativen Verschiebung der Nahtufer, d.h. also von den Dehnungen der angrenzenden Verbindungsteile, abhängt. Die in Bild 3.1b gezeigten Spannungsspitzen z.B. erhöhen die Dehnungen im Nahtbereich sehr stark und beeinflussen damit die Kraftverteilung. Eine wirklichkeitsgetreue Theorie der Kehlnaht-Laschenverbindungen darf daher nicht mit konstanter Spannungsverteilung in den Querschnitten rechnen, sondern muß die Erhöhung der Spannungen im Schweißnahtbereich berücksichtigen. Auf welche Weise dies möglich ist und welche Probleme dabei auftreten, wird in Kapitel 6 dargestellt.

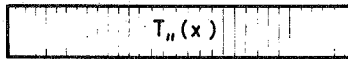
Zu 2): Da sich die miteinander verbundenen Teile gegenseitig in ihrer Querdehnung behindern, treten Querspannungen auf. In Bild 3.2 ist dies für eine idealisierte Laschenverbindung (nach [1], S.124) skizziert. Offensichtlich treten die maximalen Werte der Querspannungen am Anfang und Ende der Verbindung auf, da dort die Unterschiede zwischen den Querdehnungen der beiden Teile am größten sind. Da dies für jede Verbindung zutrifft (an der Stelle, wo der eine Teil kraftfrei wird, hat der andere die volle Kraft übernommen), hat diese Aussage allgemeine



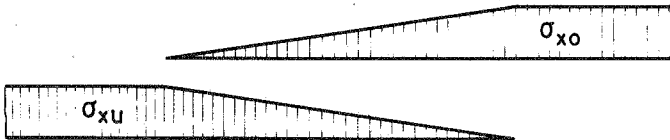
a) Verbindung unverformt



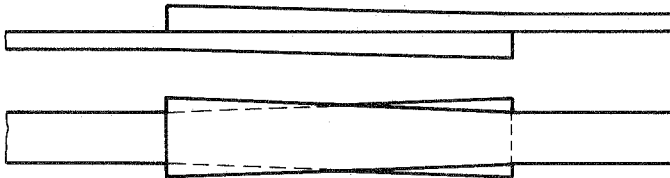
b) angenommene Schubkraftverteilung in den Nähten



c) zugehörige Längsspannungsverteilung in den Verbindungsteilen



d) Querverzerrungen (unbehindert)



e) Resultierende Querspannungen



$$\sigma_{y_u} = -\sigma_{y_o} = \frac{\mu}{2} \sigma_{x_u}$$

Bild 3.2: Querverzerrungen und Querspannungen bei einer idealisierten Laschenverbindung

Gültigkeit. Für den betrachteten Fall gleicher Laschenquerschnitte ist der maximale Wert der Querspannungen  $\sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_x$ . Im Anhang sind ab S.136 die Gleichungen für die Querspannungen bei beliebigen Querschnittsverhältnissen und Längsspannungen abgeleitet. Es zeigt sich, daß das Verhältnis der Querspannungen in Blech und Laschen nur von den Dicken abhängt, und zwar ist  $\sigma_{y1}/\sigma_{y2} = -2 t_2/t_1$ . Eine ebenfalls im Anhang (S.138) wiedergegebene Ableitung führt weiterhin zu dem Schluß, daß es ohne weiteres möglich ist, die aus der Querdehnungsbehinderung der verbundenen Teile resultierenden Querspannungen in der Differentialgleichung für die Kraftverteilung zu berücksichtigen. Es taucht nämlich nur  $(1-\mu^2)$  als zusätzlicher Faktor bei  $k_{//}$  auf. Die Wirkung der Querdehnungsbehinderung läßt sich also in der Differentialgleichung ganz einfach durch einen mit dem Faktor  $(1-\mu^2)$  modifizierten Verschiebungsmodul erfassen. Voraussetzung für diese einfache Lösung ist natürlich die Annahme konstanter  $\sigma_x$ -Spannungsverteilung über die Querschnitte

Zu 3): Die Annahme, daß Schubkraft und Verschiebung in der Schweißnaht einander proportional sind, scheint am besten der Wirklichkeit zu entsprechen. Jedoch sind auch hier bei genauere Betrachtung Einschränkungen notwendig: An den Nahtenden sind die relativen Verschiebungen am größten. Deshalb treten dort nach der einfachen Theorie hohe Schubkraftspitzen auf. Andererseits hat die Schweißnaht dort senkrecht zu ihrer Längsrichtung eine freie Oberfläche, auf der  $\tau = 0$  sein muß. Aus Gleichgewichtsgründen muß also die Schubkraft an den Nahtenden Null sein, wenn sie auch sehr schnell auf hohe Werte ansteigt. Dieser Widerspruch läßt sich nur beseitigen, wenn man die Forderung der Proportionalität zwischen Verschiebung und Schubkraft aufgibt. Welche Konsequenzen sich daraus für die theoretische Behandlung ergeben, wird in Abschnitt 6.2 erläutert.

Die hier angestellten Überlegungen zeigen, daß die in den Abschnitten 2.2 und 2.3 wiedergegebene einfache Theorie nur für Verbindungen mit sehr gedrungenen Querschnitten realistisch sein kann. Bei breiten und flachen Querschnitten muß man damit rechnen, daß die Schubkraftverteilung in den Flanken-

nähten und bei kombinierten Verbindungen die Aufteilung der Kraft zwischen Stirn- und Flankennähten von der einfachen Theorie nicht richtig wiedergegeben wird. Um die Größe dieser Fehler zu ermitteln, wurden Versuche an spannungsoptischen Modellen von Schweißverbindungen durchgeführt, die im folgenden Kapitel beschrieben sind.

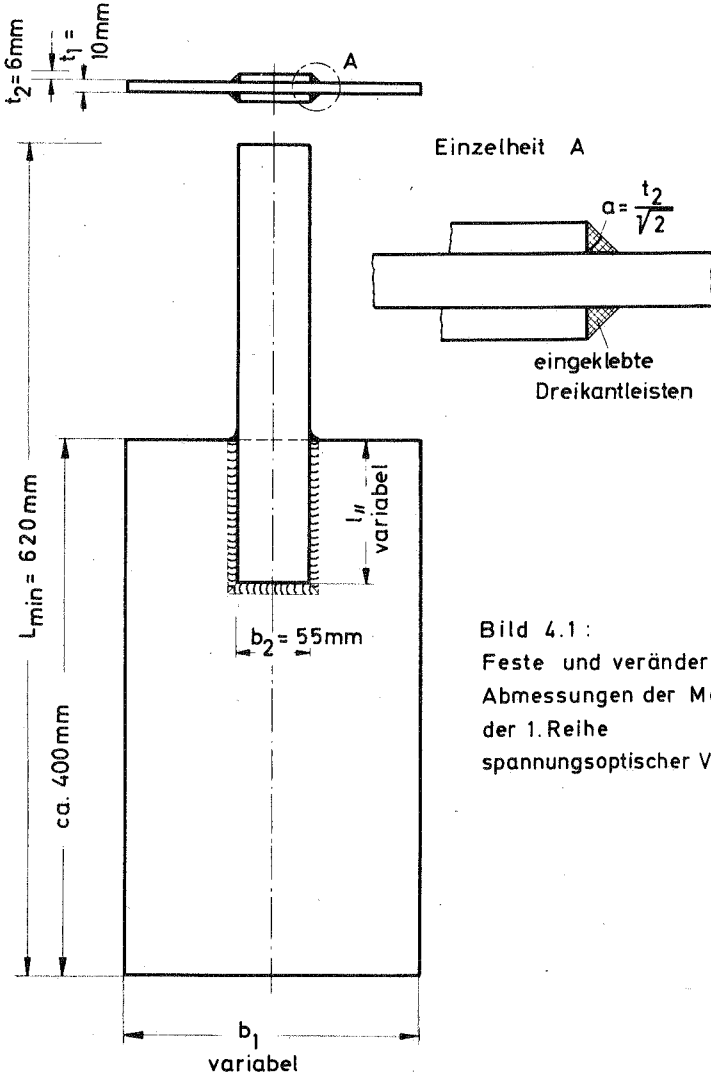


Bild 4.1:  
Feste und veränderliche  
Abmessungen der Modelle  
der 1. Reihe  
spannungsoptischer Versuche

Tafel 1 : Hauptabmessungen [cm] der spannungsoptischen Modelle von Schweißverbindungen

(Bedeutung der Abkürzungen siehe Bild 2.1 und 4.1)

Versuch Nr.	$b_1$	$t_1$	$b_2$	$t_2$	$l_{//}$	$a$	Typ				
<b>1. Versuchsserie</b>											
2.0	22,0	} 1,0	} 5,5	} 0,6	} 5,5	} 0,425	Kombinierte Verbindungen Laschen nicht verspiegelt				
2.1	16,0										
2.2	12,0										
2.3	7,4										
3.0	22,0										
3.1	16,0										
3.2	12,0										
3.3	9,0										
3.4	7,2										
4.0	22,0										
4.1	16,0										
4.2	12,0										
4.3	9,0										
4.4	7,2										
5.0	33,0	} 22,0	}	}	}	}	}				
5.1	22,0										
5.2	16,0										
5.3	12,0										
5.4	9,0										
5.5	7,2										
<b>2. Versuchsserie</b>											
31.0	22,0	} 1,0	} 5,5	} 0,6	} 11,0	} 0,425	Kombinierte Verbindungen Laschen verspiegelt				
31.1	16,0										
31.2	12,0										
31.3	9,0										
31.4	7,2										
32.0	22,0	} 0,3				}		}	}	} 0,425	}
32.1	16,0										
32.2	12,0										
32.3	9,0										
32.4	7,2										
33.0	22,0	} 1,0				}		}	}	} 0,212	}
33.2	12,0										

4. Spannungsoptische Versuche zur  
Ermittlung der Kraftaufteilung  
bei kombinierten Verbindungen

4.1 Aufbau der 1. Versuchsreihe

Wie in Kapitel 3 dargelegt wurde, ist die ungleichförmige Verteilung der Längsnormalspannungen in den Verbindungsteilen von der Anschlußlänge, d.h. also von der Länge der Flankennahte und von der Blechbreite abhängig. Flankennahtlänge ( $l_{//}$ ) und Blechbreite ( $b_1$ ) sind damit wichtige Parameter in der Kraftaufteilung zwischen Stirn- und Flankennahten bei kombinierten Verbindungen. Die 1. Versuchsserie umfaßte aus diesem Grunde vier Modellgruppen mit jeweils anderem Verhältnis von Flankennahtlänge zu Stirnnahtlänge, das kurz als  $l_{//}/l_1$  bezeichnet sei. Innerhalb jeder Gruppe wurde die Breite des Bleches variiert, was sich in den Versuchen durch stufenweises Absägen der Platten einfach verwirklichen ließ, so daß die Modelle mehrmals verwendet werden konnten. Bild 4.1 gibt wieder, welche Maße für alle Modelle der 1. Versuchsserie gleich gehalten und welche verändert wurden. In Tafel 1 sind die Abmessungen der einzelnen Versuchsstücke, einschließlich der Ergänzungsversuche, aufgeführt.

Fortsetzung Tafel 1

Versuch Nr.	$b_1$	$t_1$	$b_2$	$t_2$	$l_{//}$	$a$	Typ
Ergänzungsversuche							Reine Flankennaht- verbindungen Laschen verspiegelt
34. 0	22, 0	} 1,0	} 5,5	} 0,8	} 11,0	} 0,425	
34. 4	8, 65						
34. 41	8, 65						
7. 0	} 6,6	} 0,6	} 6,0	} 3,6	} 18,0	} 0,212	
7. 1							
7. 2							
7. 3							

Als Modellmaterial wurde Araldit B, ein heißhärtendes Epoxyharz, verwendet, das eine hohe Festigkeit (bis  $400 \text{ kp/cm}^2$ ), sehr gute Proportionalität und hohe spannungsoptische Aktivität (spannungsoptische Konstante  $S = 11 \frac{\text{kp/cm}^2}{\text{Ord.}} \cdot \text{cm}$ ) miteinander verbindet. Als "Schweißnähte" wurden Dreikantleisten aus Araldit B in die Kehle geklebt (Detail Bild 4.1). Das für die Klebung verwendete kalthärtende Kunstharz Araldit Bindemittel 106 hat zwar einen kleineren Elastizitätsmodul als Araldit B; dies bleibt aber wegen der geringen Dicke der Klebschicht ohne Einfluß auf das elastische Verhalten der "Schweißnaht".

Um eine exzentrische Belastung zu vermeiden, wurden die Modelle zweiseitig ausgebildet, wie aus Bild 4.1 hervorgeht. Bei Großversuchen wird häufig die Verbindung auch quer zur Längsrichtung symmetrisch hergestellt, d.h., es wird an jedem Ende der Laschen ein Blech angeschweißt, weil dann die Einspannung in die Prüfmaschine einfacher ist. Im Modellversuch, der mit viel kleineren Kräften auskommt, konnte die Krafteinleitung jedoch über zwei Stahlplatten bewerkstelligt werden, die durch Schrauben gegen die Laschen und ein Zwischenstück gepreßt wurden. Bild 4.2 gibt diese Klemmvorrichtung mit angeschlossener Zugstange wieder. Der Bolzen zur Befestigung der Zugstange befindet sich in einem Langloch und kann durch die seitlichen Justierschrauben so verschoben werden, daß eine völlig symmetrische Belastung der Modelle gesichert ist.

#### 4.2 Bemerkungen zum Meßverfahren, Genauigkeitsuntersuchungen

Zur vollständigen Bestimmung eines ebenen Spannungszustandes benötigt man bekanntlich drei Meßwerte. Die ebene Spannungsoptik gestattet jedoch nur zwei Meßwerte zu ermitteln, und zwar liefern die Isoklinen die Richtung der Hauptspannungen und die Isochromaten die Größe der Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Den noch fehlenden dritten Wert kann man auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen an herausgeschnittenen Elementen durch Integration von lastfreien Rändern oder Gebieten bekannten Spannungszustandes her bestimmen. Man kann jedoch auch experimentell eine dritte Größe bestimmen, und zwar die Dickenänderung,

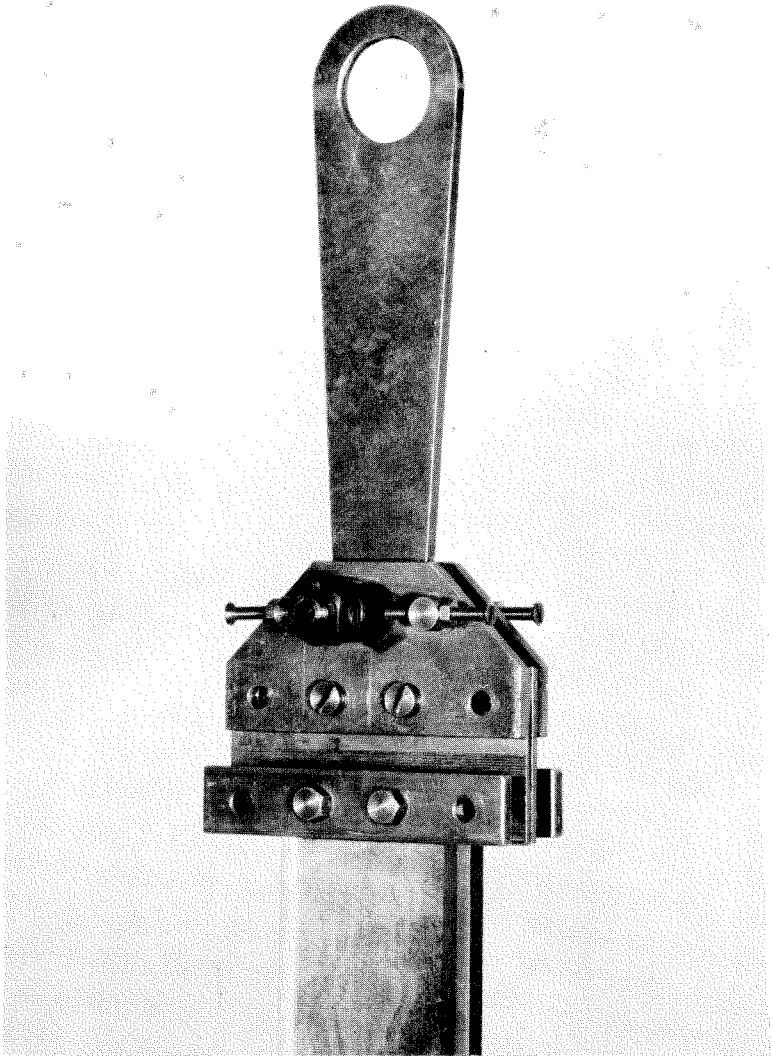


Bild 4. 2: Klemmvorrichtung mit Justierschrauben und Zugstange

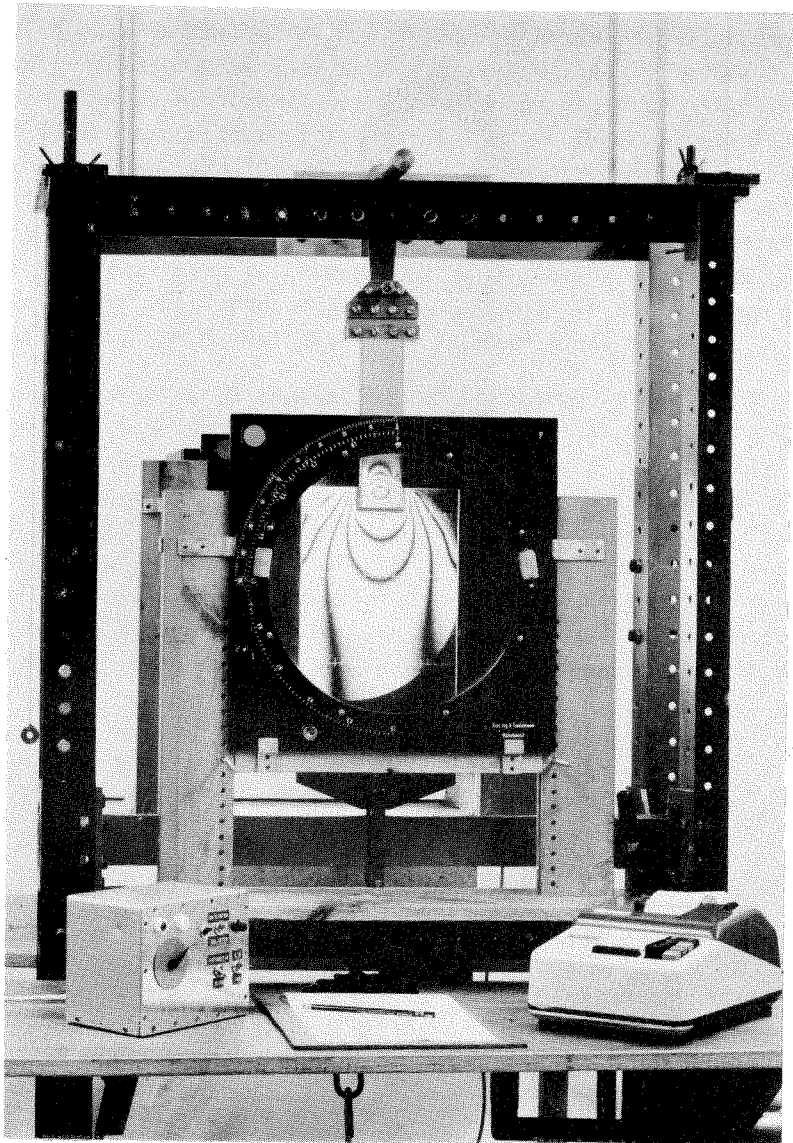


Bild 4. 3: Modell einer Kehlnaht-Laschenverbindung  
in der Belastungsvorrichtung mit Polarisationsfiltern



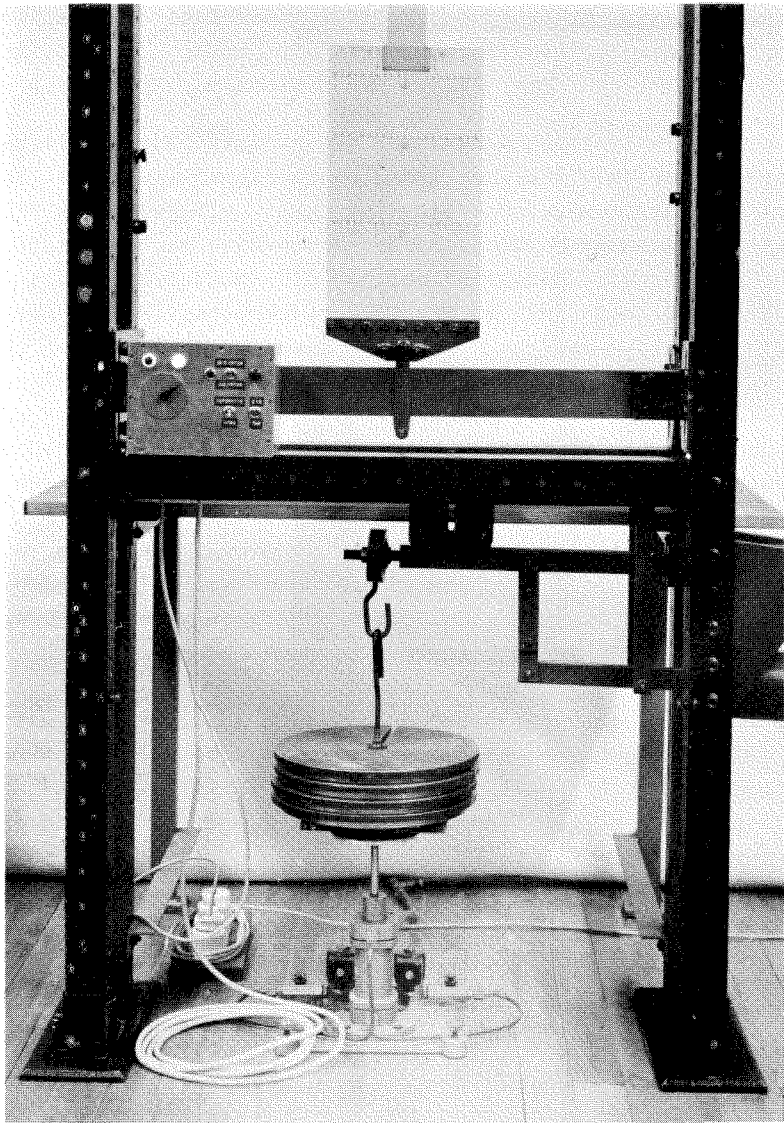


Bild 4.4: Belastungsautomatik zur periodischen Be- und Entlastung der spannungsoptischen Modelle

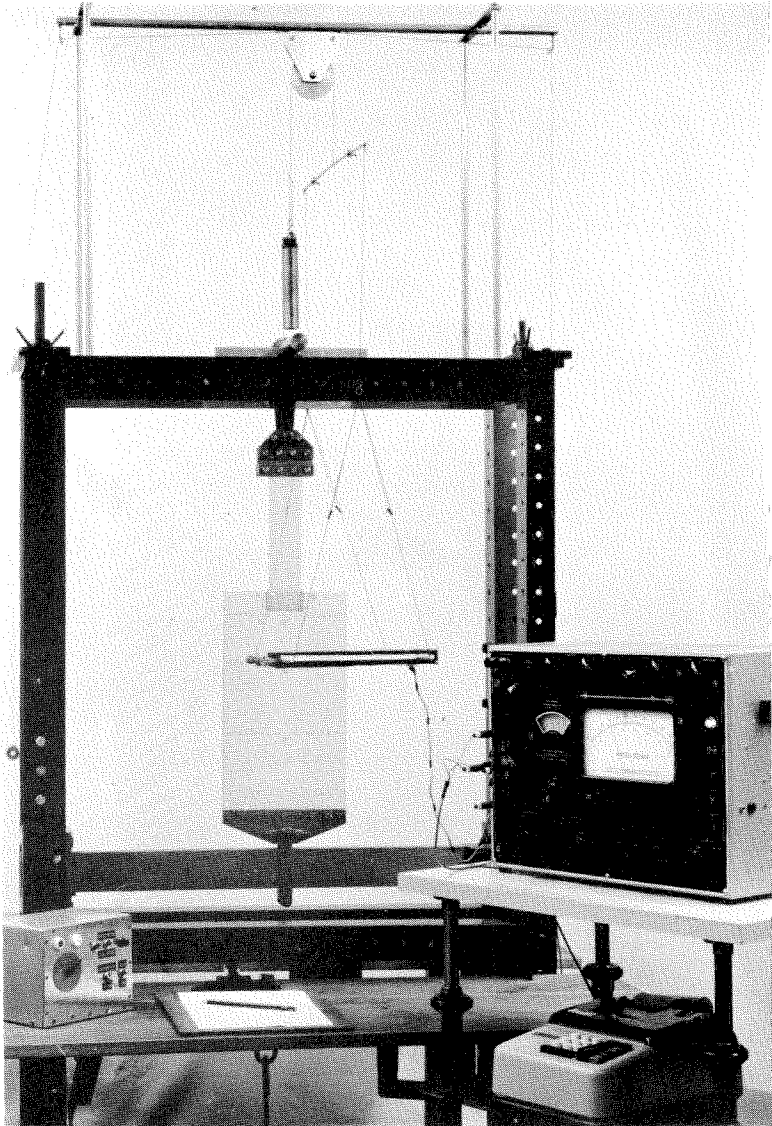


Bild 4.5: Instrumentierung für die Querdehnungsmessung

die beim ebenen Spannungszustand der Spannungssumme proportional ist. Die experimentelle Bestimmung der dritten Größe hat den Vorteil, daß man die Gleichgewichtsbedingungen zur Kontrolle der Spannungen heranziehen kann.

Man mißt die Dickenänderung zweckmäßig punktweise in vorher auf dem Modell angerissenen Schnitten. Bei punktwieser Messung läßt sich auch die Genauigkeit der spannungsoptischen Messung erhöhen, da man dann die Isochromatenordnungen durch Kompensation bestimmen kann. Die bei den Versuchen verwendeten Filter haben eine Ablesegenauigkeit von 0,01 Ordnungen. Natürlich ist die Meßgenauigkeit nicht so groß, da sie durch Schlieren im Kunststoff, Flächenhaftigkeit der Isochromaten, Randeffekt und die Verwendung von Großflächenfiltern (Bild 4.3) beeinträchtigt werden kann. In der Nähe der Schweißnähte ist der Spannungszustand nicht mehr streng zweiachsig, wodurch weitere kleine Fehler auftreten. Eine Abschätzung der Meßfehler war aber sehr gut über die Symmetrie der Modelle möglich. Alle Modelle wurden vor Beginn der Messungen an Hand des Isochromatenbildes justiert, das sich als sehr empfindlich gegen Exzentrizitäten der Krafteinleitung erwies. Symmetrische Meßwerte der Isochromaten hatten in der Regel Abweichungen von nur 1% vom gemeinsamen Mittelwert. Für die Isochromaten kann also 1% als echte Meßgenauigkeit angegeben werden, weil die Modelle periodisch be- und entlastet wurden, so daß das Kriechen des Kunststoffes die Messungen nicht beeinflussen konnte. Die Last wurde in einer Belastungsvorrichtung mit einer Hebelübersetzung von 1:10 durch Gewichte aufgebracht, die von einem Preßluftzylinder angehoben und gesenkt wurden. Diese Vorrichtung ist zusammen mit dem elektronischen Zeitsteuergerät für die Preßluftzylinder in Bild 4.4 wiedergegeben.

Die periodische Be- und Entlastung der Modelle war auch für die Querdehnungsmessung vorteilhaft. Eine ausführliche Darstellung der Anwendung der Querdehnungsmessung in der Spannungsoptik und der zugehörigen Auswertung findet sich in [10]. Im Gegensatz zu dem in [10] beschriebenen Lateralextensometer von Hiltcher wurde bei den vorliegenden Versuchen ein am Institut für Spannungsoptik und Modellmessungen der T.H. Stuttgart entwickelter

Querdehnungsmesser mit Dehnmeßstreifen [11] verwendet, der eine bequemere Ablesung der Meßwerte über eine Meßbrücke gestattet. Zur Vereinfachung der Mittelbildung aus den Meßwerten mehrerer Belastungszyklen wurden diese während der Messung in eine Addiermaschine gegeben. Diese Anordnung zur Querdehnungsmessung ist in Bild 4.5 zu sehen. Obwohl der Querdehnungsmesser schwebend aufgehängt war und auf einen stets gleichen Anpreßdruck der Meßspitzen geachtet wurde, konnte bei dieser Messung nicht dieselbe hohe Genauigkeit erzielt werden wie bei den Isochromaten. Dies liegt zunächst daran, daß die zu messenden Dickenänderungen sehr klein sind. Wegen der stets unvermeidlichen Spannungspitzen darf man im Mittel höchstens mit 4 bis 5 Ordnungen rechnen, was bei Araldit einer maximalen Dickenänderung von ca.  $5 \cdot 10^{-3}$  mm entspricht. Hinzu kommt, daß der verwendete Querdehnungsmesser erst das zweite Gerät dieser Art war, das gebaut wurde, weshalb er noch einige Mängel aufwies. Durch die Symmetrie der Modelle war jedoch eine sehr gute Kontrolle gegeben, so daß fehlerhafte Messungen durch Wiederholung beseitigt werden konnten. Außerdem wurden bei der Auswertung die Meßwerte aufgetragen und "Ausreißer" durch eine erneute Messung kontrolliert. Durch diese Maßnahmen wurde erreicht, daß die Fehler der Querdehnungsmessung höchstens 5% erreichten. Dies liegt etwas über der Fehlergrenze, die von den Isoklinen her ohnehin in die Auswertung gebracht wird (s. unten).

Die zur Spannungsberechnung benutzten Formeln sind:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (Ct \pm Sn)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \mp \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi$$

Darin ist

$$C \left[ \frac{\text{Skalenteile}}{\text{kp/cm}^2} \right] = \text{Querdehnungskonstante}$$

$$S \left[ \frac{\text{Ordnungen}}{\text{kp/cm}^2} \right] = \text{Spannungsoptische Konstante}$$

$$t \left[ \text{Skalenteile} \right] = \text{Meßbrückenanzeige bei der Messung der Dickenänderung}$$

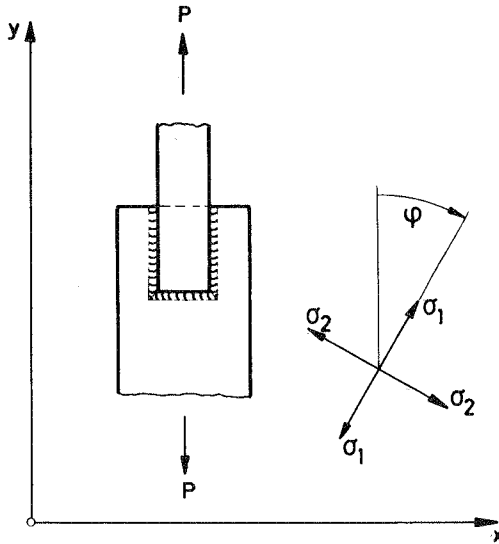


Bild 4.6: Lage des Koordinatenkreuzes bei der spannungsoptischen Messung und Auswertung

$$n \text{ [Ordnungen]} = \text{kompensierte Isochromaten-ordnung}$$

Das der Auswertung zugrunde liegende Koordinatensystem ist in Bild 4.6 skizziert.

Aus den obigen Formeln erkennt man, daß ein Fehler in der Winkelmessung die Koordinatenspannungen stark beeinflussen kann. Da sich die Isoklinen selbst bei sorgfältigster Messung allenfalls auf  $\pm 1^\circ$  genau bestimmen lassen, muß man im ungünstigsten Fall mit Fehlern von  $\pm 3\%$  in den Koordinatenspannungen rechnen, da für kleine Winkel  $\sin 2\varphi \approx 2\varphi \approx 0,035 \cdot \varphi^\circ$ , das gleiche bei  $\cos 2\varphi$  für Winkel in der Nähe von  $\pi/2$ . Weitere Fehlerquellen liegen in der Bestimmung der Konstanten  $S$  und  $C$ . Sie wurden jedoch dadurch weitgehend ausgeschaltet, daß die Konstanten jeweils am Modell selbst ermittelt wurden, wozu ein Schnitt benutzt wurde, in dem eine einigermaßen gleichförmige Spannungsverteilung vorausgesetzt werden konnte.

Die zahlenmäßige Bestimmung der Spannungen aus den Meßwerten erfolgte mit Hilfe eines elektronischen Rechenprogramms, das auch die Koordinatenspannungen über die Meßschnitte integrierte, so daß eine direkte Gleichgewichtskontrolle gegeben war. Ein Beispiel der in Tabellenform von der Maschine ausgegebenen Meßwerte und Spannungen befindet sich im Anhang auf S.140.

Nach der Erörterung der Größe der Meßfehler stellt sich die Frage nach der Gesamtgenauigkeit der ermittelten Spannungen. Ein besseres Maß dafür, als eine mathematische Untersuchung der Fehlerfortpflanzung, die ohnehin Einflüsse der Modellherstellung nicht erfassen kann, bietet die Kontrolle der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse durch getrennte Untersuchung zweier identischer Modelle. Das Ergebnis eines solchen Vergleiches zeigt Bild 4.7 in Gestalt der Längs- und Querspannungen in einem Schnitt vor der Stirnnaht bei zwei gleichen, jedoch völlig unabhängig gemessenen Modellen. Die größte Einzelabweichung bei den Längsspannungen (in der Symmetrieachse) liegt etwas über 10% und ist wohl auf Einflüsse aus der Klebung der "Schweißnaht" zurückzuführen. Die durchschnittlichen Abweichungen liegen jedoch wesentlich unter 10%. Bei den Querspannungen ergeben sich natürlich höhere Abweichungen wegen der geringen absoluten Größe dieser Spannungen. Bezogen auf das mittlere Spannungsniveau liegen jedoch auch diese Fehler weit unter 10%.

#### 4.3 Ergebnisse der 1. Versuchsreihe

Aufgabe der 1. Versuchsreihe war es, die Kraftaufteilung zwischen Stirn- und Flankennähten bei kombinierten Verbindungen zu bestimmen. Zu untersuchen war der Einfluß der Parameter  $l_{//}/l_1$  und  $b_1$  (Blechbreite). Das gewählte Meßverfahren der Spannungsoptik mit Querdehnungsmessung gestattete die schnelle und zuverlässige Bestimmung des Spannungszustandes in beliebigen Punkten des Bleches. Eine Messung der Spannungen in den Laschen und in den Schweißnähten war nach diesem Verfahren nicht möglich.

Es lag nahe, einen Meßschnitt im Blech unmittelbar vor der Stirnnaht und zwei andere neben den Flankennähten zu legen.

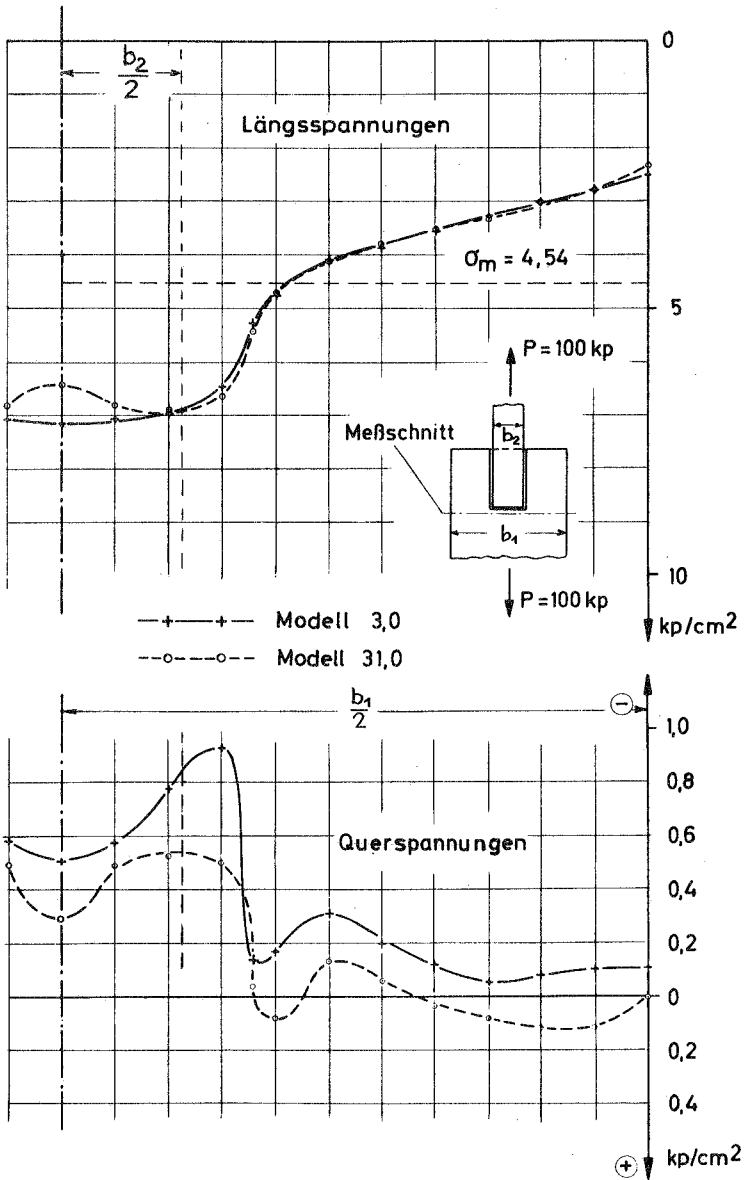


Bild 4.7: Vergleich der an zwei identischen Modellen gemessenen Längs- und Querspannungen

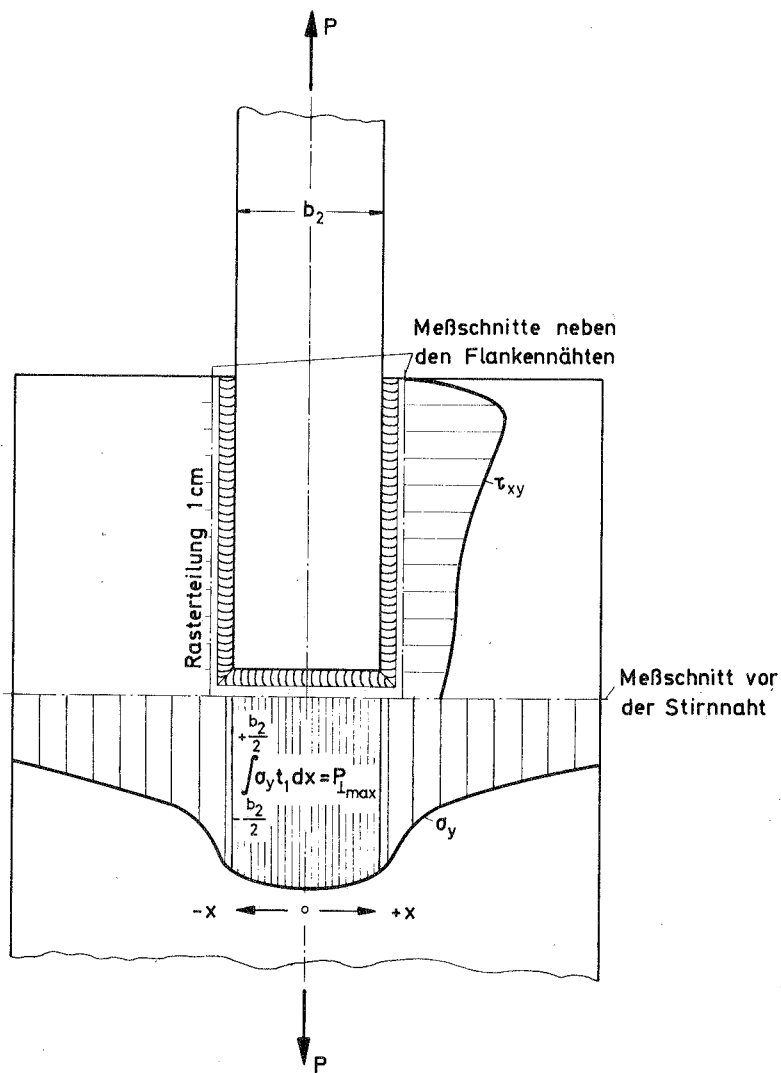


Bild 4.8: Lage der Meßschnitte bei der 1. Reihe spannungsoptischer Versuche

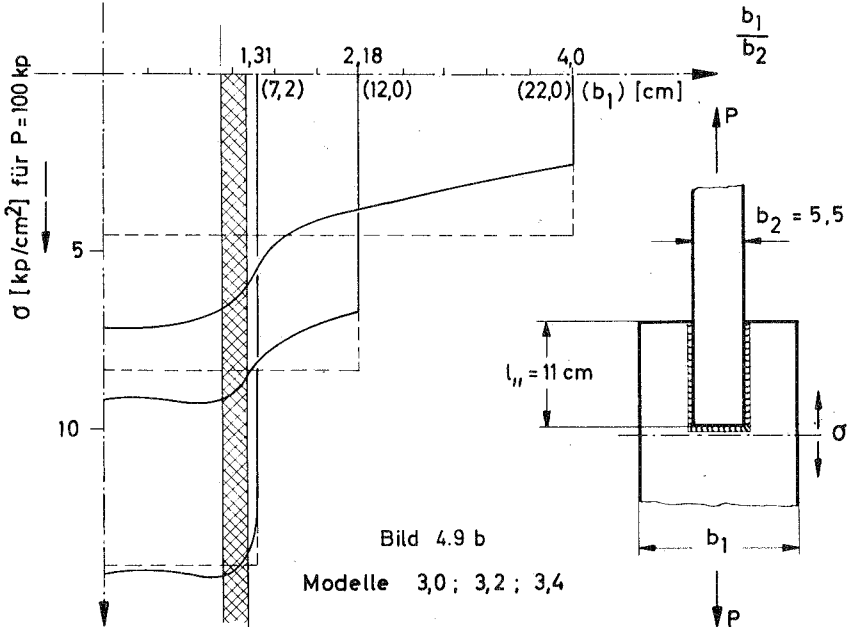
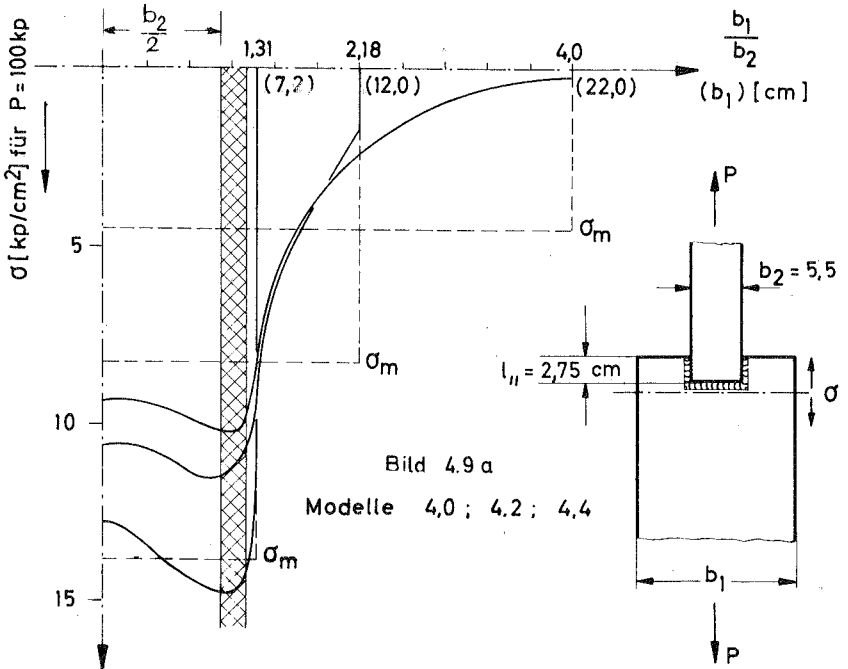


Die Rasterteilung betrug 1 cm. Der Schnitt vor der Stirnnaht vermittelt ein Bild von der Ungleichförmigkeit der Spannungsverteilung im Blech. Er wurde außerdem zur Bestimmung der oberen Grenze des von der Stirnnaht übertragenen Kraftanteils (kurz " $P_1$ ") benutzt, indem die Spannungen im Blech über die Breite des Laschenbereiches integriert wurden (in Bild 4.8 angedeutet). Diese Integration ergibt die obere Grenze für  $P_1$ , weil anzunehmen ist, daß nicht der gesamte vor der Stirnnaht vorhandene Kraftfluß durch die Stirnnaht in die Lasche geleitet wird, sondern daß ein Teil der Kraft in dem Blech bleibt und erst durch die Flankennähte übertragen wird. Aus den Schubspannungen im Schnitt parallel zur Flankennaht (Bild 4.8) konnte ein qualitativer Eindruck vom Verlauf der Schubspannungen in der Naht gewonnen werden.

In Bild 4.9 a bis c sind die Längsspannungsverteilungen vor der Stirnnaht für 3 Modellgruppen aufgetragen. Der Übersichtlichkeit halber wurden einige Modelle ausgelassen. Die Spannungsverläufe zeigen deutlich, daß die Spannungskonzentration im Anschlußbereich um so größer wird, je kleiner  $l_{//}/l_1$  und je breiter das Blech ist.

In Bild 4.10 (S.44) sind die Kurven des Kraftanteils der Stirnnaht bezogen auf die Gesamtlast der Verbindung, d.h. also  $P_1/P$ , über dem Breitenverhältnis  $b_2/b_1$  aufgetragen.  $b_2/b_1$  wurde gewählt, weil dann die Abszisse nur zwischen 0 und 1 liegen kann, da die Laschen ( $b_2$ ) höchstens so breit wie das Blech ( $b_1$ ) werden können. Kurvenparameter ist  $l_{//}/l_1$ . Infolge der Art der Bestimmung von  $P_1$  streben alle Kurven der Meßwerte auf die rechte obere Ecke des Diagramms zu ( $P_1/P = 1$  für  $b_2 = b_1$ ). Erfreulich gering ist die Streuung der Meßwerte, so daß sie sich ohne Schwierigkeiten zu einer kontinuierlichen Kurve verbinden lassen.

In Bild 4.10 sind gleichzeitig den aus der Messung ermittelten Kurven  $P_1/P$  die nach der einfachen Theorie berechneten gegenübergestellt (Formel 2.9 mit  $k_{//}/k_1 = 0,5$ ). Obwohl in diesem Diagramm alle möglichen Fälle von  $b_2/b_1$  und  $l_{//}/l_1$  zusammengedrängt sind, läßt sich beim besten Willen keine Korrelation zwischen den Versuchsergebnissen und der Theorie feststellen.



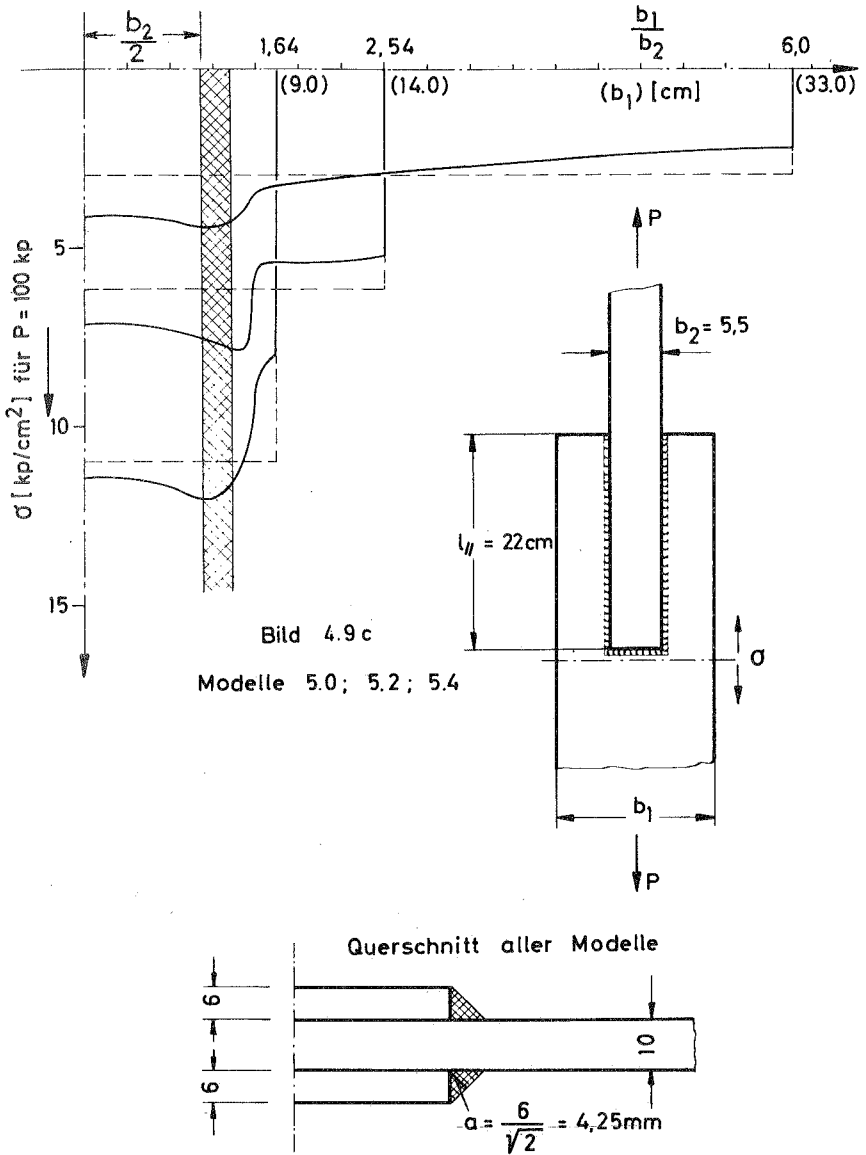


Bild 4.9 c  
Modelle 5.0; 5.2; 5.4

Bild 4.9 a bis c: Normalspannungsverteilungen im Schnitt vor der Stirnnaht bei 3 Modellgruppen.

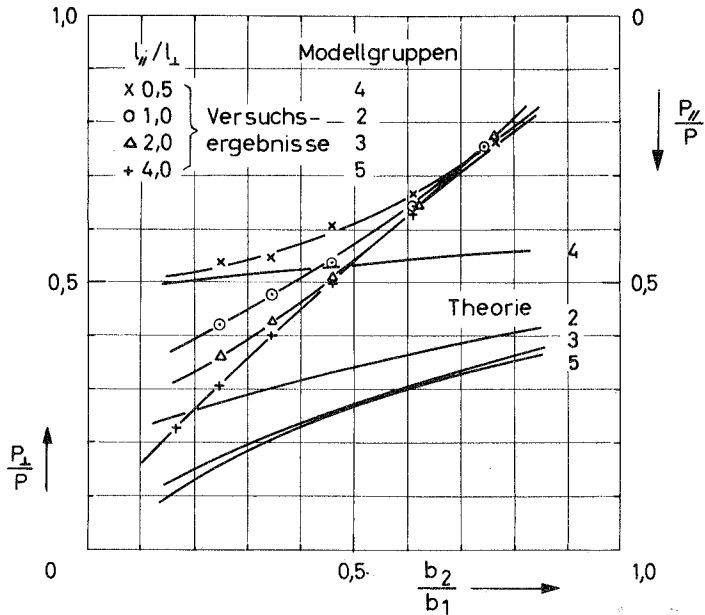


Bild 4.10: Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und einfacher Theorie für die Modelle der 1. Reihe spannungsoptischer Versuche

Besonders unbefriedigend ist es, daß bei Werten von  $b_2/b_1$  über 0,5, bei denen die Theorie eigentlich besser anwendbar sein sollte, die Divergenz zwischen den beiden Kurvenscharen besonders groß ist. Selbst wenn man berücksichtigt, daß die Versuchsergebnisse nur die obere Grenze von  $P_1/P$  liefern, läßt die entgegengesetzte Krümmung der beiden Kurvenscharen vermuten, daß die einfache Theorie nicht in der Lage ist, das Verhältnis von  $P_1$  und  $P_{//}$  richtig vorherzusagen. Um festzustellen, wo die Ursachen für die Abweichungen der Versuchsergebnisse von der Theorie liegen, war eine zweite Reihe von spannungsoptischen Versuchen notwendig.

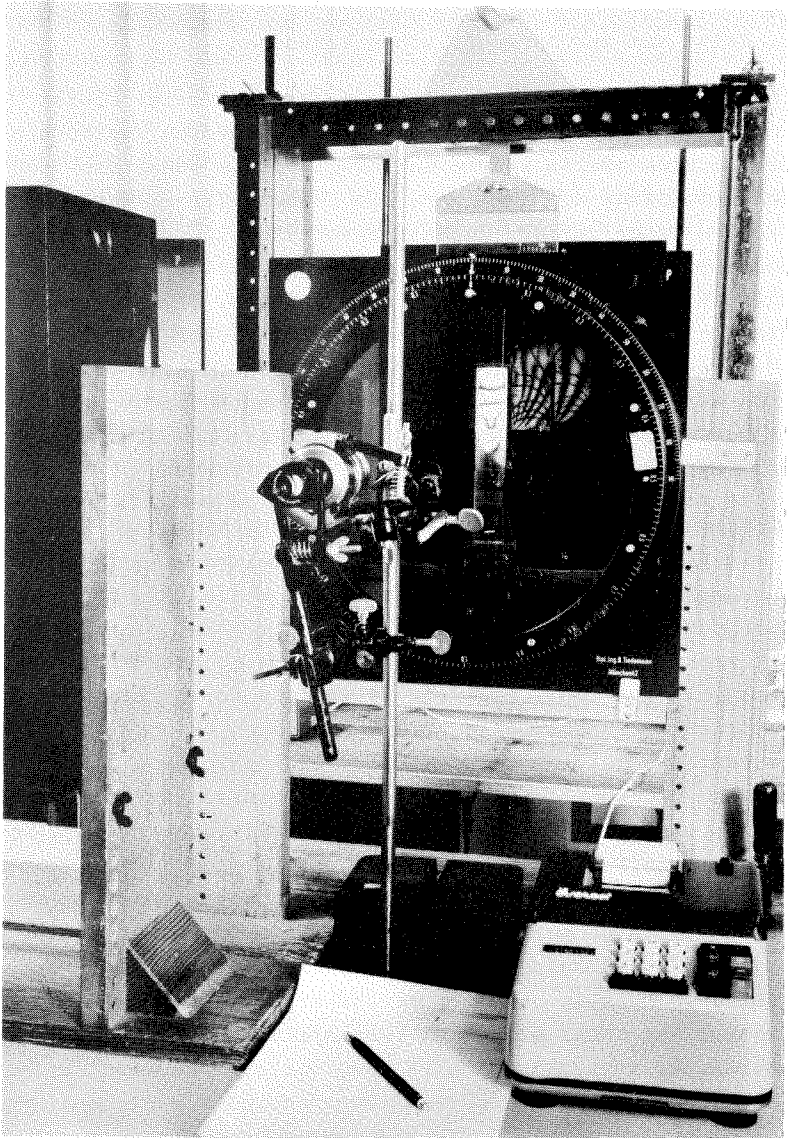


Bild 4.11: Versuchsanordnung zur spannungsoptischen Messung im Reflexionsverfahren

#### 4.4 2. Reihe von spannungsoptischen Versuchen

Als ein schwerwiegender Nachteil der 1. Versuchsreihe erwies sich, daß nur die Spannungen in der Platte gemessen werden konnten, so daß eine exakte Angabe der Kraftanteile von Stirn- und Flankennähten nicht möglich war. Die Laschen der 2. Versuchsreihe wurden daher auf der Rückseite verspiegelt<sup>\*)</sup>. Spannungsoptische Versuche mit verspiegelten Laschen wurden bereits 1939 von Solakian [12] in den USA durchgeführt. Er untersuchte vier Flankennahtverbindungen mit unterschiedlicher Anschlußlänge bei gleicher Laschenbreite und eine kombinierte Verbindung. Als wesentlichstes Ergebnis seiner Untersuchungen stellt er heraus, daß bei kurzen Flankennähten an den Laschenrändern sehr hohe Spitzen der Längsnormalspannung auftreten.

Bei verspiegelten Scheiben lassen sich Isochromaten und Isoklinen in gleicher Weise wie im Durchlicht bestimmen. Es ist nur darauf zu achten, daß der Reflexionswinkel klein ist, weil sonst Fehler infolge der Schrägdurchstrahlung auftreten. Eine Beobachtung mit senkrecht einfallendem Licht läßt sich mit Hilfe von Halbspiegeln bewerkstelligen. Die Verwendung von Halbspiegeln im polarisierten Strahlengang erfordert jedoch besondere Maßnahmen, weil die Halbspiegel den Polarisationszustand des Lichtes beeinflussen (Hinweise dazu in [13]). Die einfachste Methode der spannungsoptischen Untersuchung mit dem Reflexionsverfahren besteht deshalb darin, die Lichtkästen und Filter in genügender Entfernung vom Modell aufzustellen. Allerdings ist es dann erforderlich, zur genauen Messung ein Fernrohr zu benutzen. Bild 4.11 ist eine Fotografie der Versuchsanordnung zur spannungsoptischen Messung nach dem Reflexionsverfahren. Das Fernrohr bestand aus einem Kleinbild-Teleobjektiv in Verbindung mit einer Lupe.

---

<sup>\*)</sup> Die Verspiegelung wurde von der Firma Robert Bosch GmbH, Stuttgart, durch Aufdampfen von Aluminium im Vakuum vorgenommen.

Zur vollständigen Auswertung ließ sich in diesem Fall natürlich nicht die Dickenmessung heranziehen, weil die Laschen im Überlappungsbereich nicht zugänglich sind. Es mußte daher ein Integrationsverfahren, wie es in Abschnitt 4.2 bereits erwähnt wurde, verwendet werden. Die Spannungsverhältnisse in den Laschen waren dafür günstig. Sie zeigten alle in 5 bis 10 cm Entfernung vom Ende des Bleches einen praktisch gleichförmigen Spannungszustand. Von dort ausgehend konnten durch streifenweise Integration nach dem Schubspannungsdifferenzen-Verfahren die Längsnormalspannungen in der Lasche bestimmt werden. Die Belastung der Flankennaht konnte direkt aus der Schubspannungsverteilung am Laschenrand ermittelt werden. Die Auswertung erfolgte teils graphisch nach dem Schubspannungshügel-Verfahren [14]. Außerdem wurde das Schubspannungsdifferenzen-Verfahren für eine elektronische Rechenmaschine programmiert, wobei bei der Integration jeweils 3 Stützwerte benutzt wurden. Das Muster eines von der Maschine ausgegebenen Protokolls ist im Anhang auf S.141 abgedruckt. Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, daß die Spannungsermittlung für die Lasche mit größerer Unsicherheit behaftet ist als die für das Blech, besonders an den "geschweißten" Laschenrändern. Dort entsteht durch die Umleitung der Kräfte durch die Schweißnaht in das Blech zwangsläufig ein räumlicher Spannungszustand, der vor allem die Isoklinen stört. Teilweise war deshalb die graphische Auswertung zuverlässiger als die formelmäßige mit Hilfe der elektronischen Rechnung, da sich bei dem graphischen Schubspannungshügel-Verfahren Fehler in der Kontinuität des Isoklinenbildes erkennen und ausgleichen lassen.

Es wurden drei neue Modellgruppen mit den Grundabmessungen der Gruppe 3 ( $l_{II}/l_I = 2$ ) untersucht. Die erste neue Gruppe ("31") war in allen Einzelheiten mit der alten Serie 3 identisch, sie unterschied sich von dieser nur durch die Verspiegelung der Laschen. Dadurch konnten diese Versuche zunächst der Kontrolle der allgemeinen Versuchsgenauigkeit dienen, wie schon in Abschnitt 4.2 erörtert wurde (Bild 4.7, S.39).

Die Verspiegelung ermöglichte die Bestimmung der Spannungen in den Laschen, so daß durch Integration der Längsspannungen am Stirnende der Lasche  $P_I$  genau gefunden werden konnte.

Bild 4.12 zeigt die aus den Spannungen im Blech gewonnenen Kurven  $P_1/P$  der Modellgruppen 3 und 31 (Kurve 1), die durch Integration der Laschenspannungen ermittelte Kurve der Gruppe 31 (Kurve 2) und zum Vergleich auch die theoretische Kurve (3). Sehr befriedigend ist wiederum die Übereinstimmung der Messungen für die Modellgruppe 3 und 31. Wie zu erwarten war, weicht der aus den Spannungen im Blech errechnete Verlauf von  $P_1/P$  (1) besonders für schmale Bleche von Kurve 2 ab. Interessant ist, daß für  $b_2/b_1 < 0,25$  Kurve 2 oberhalb von (1) liegt. Man kann daraus schließen, daß bei sehr breiten Blechen sich hinter der Stirnnaht ein Druckbereich ausbildet, der sich aus der Gewölbewirkung des breiten Bleches ergibt. Man kann sich diese Wirkung verdeutlichen, wenn man sich den Einzelkraftangriff in der unendlichen Scheibe vorstellt, der ja auf der einen Seite Zug, auf der anderen Druck in unmittelbarer Nähe des Kraftangriffs

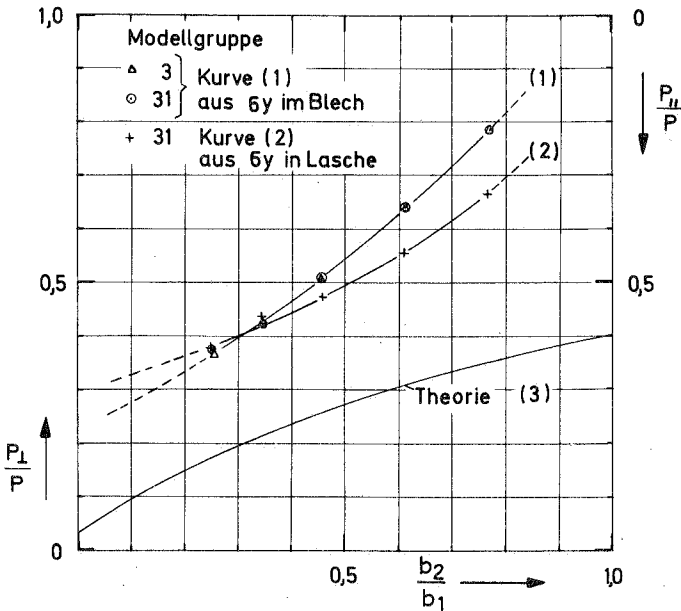


Bild 4.12: Einfluß der exakten Bestimmung von  $P_1/P$  bei Versuchsgruppe 31



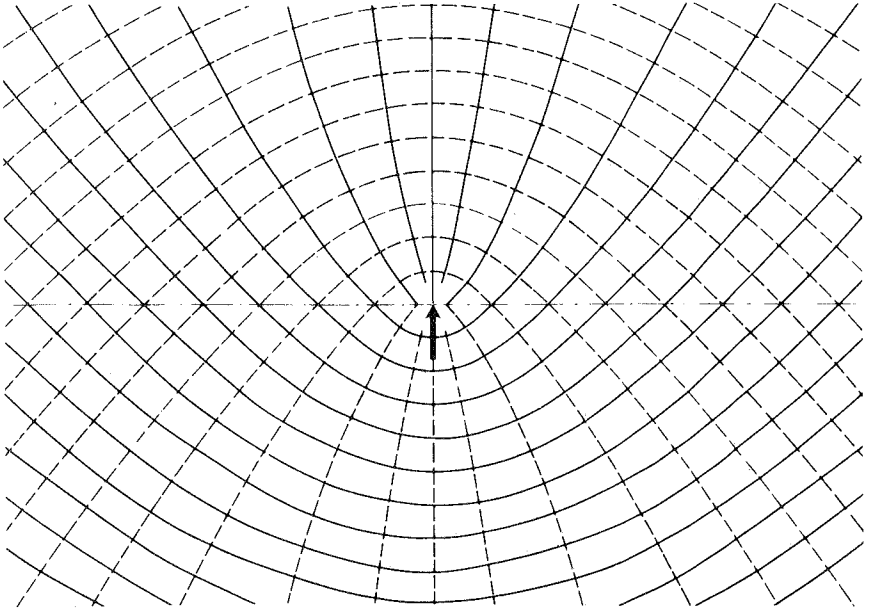


Bild 4.13: Trajektorienverlauf um eine Einzelkraft in der unendlichen Scheibe (Drucktrajektorien voll ausgezogen)

zur Folge hat. Die Hauptspannungslinien für diesen Spannungszustand sind in Bild 4.13 dargestellt [15].

Vergleicht man in Bild 4.12 den aus den Laschenspannungen ermittelten Verlauf von  $P_{\perp}/P$  (2) mit der Theorie (3), dann bleibt immer noch eine unbefriedigende Diskrepanz. Da die Möglichkeit bestand, daß die gewählten Modellabmessungen irgendwelche Auswirkungen hatten, die sich zuungunsten des Vergleichs mit der Theorie auswirkten, wurden zwei weitere Modellgruppen geprüft. Bei der einen ("32") wurde das Blech sehr dünn gemacht (3 mm statt bisher 10), bei der anderen ("33") wurde die Schweißnahtdicke halbiert (3 mm Kathetenlänge statt bisher 6). Daß diese Variationen auf die Spannungsverteilung im Blech praktisch keinen Einfluß hatten, geht aus Bild 4.14 hervor. Man kann auf Grund dieser Kurven aussagen, daß der Spannungsverlauf

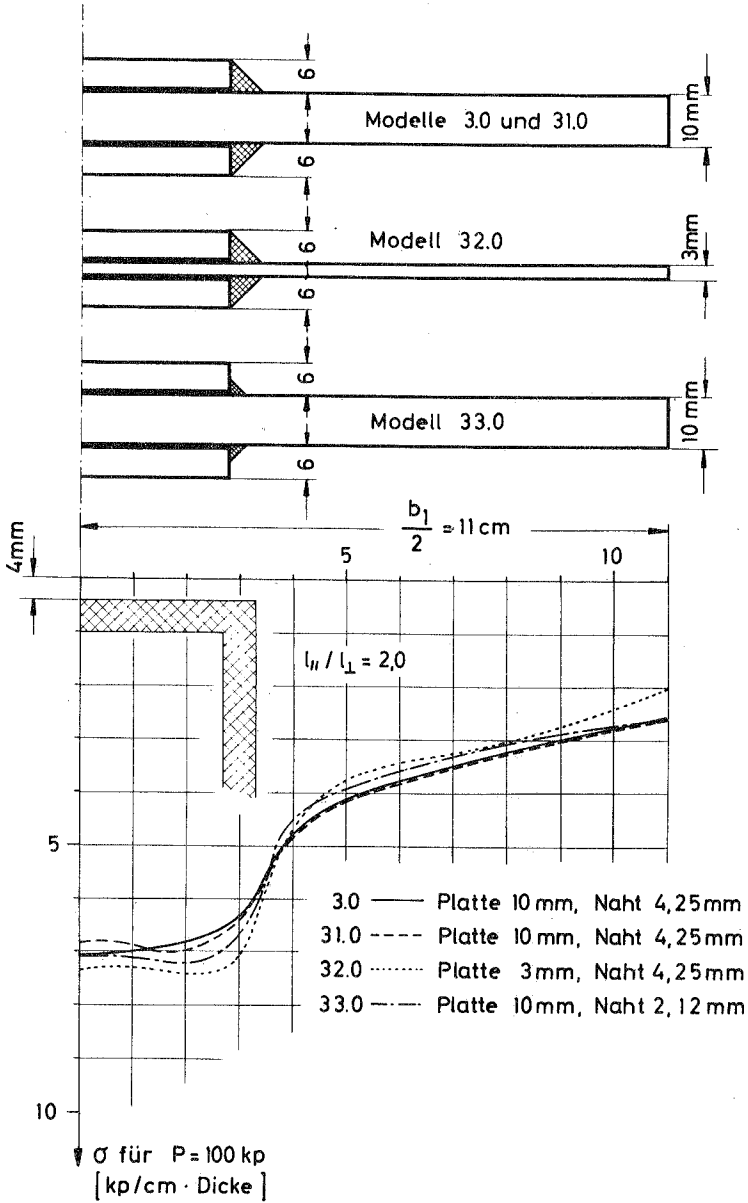


Bild 4.14: Änderung der Längsnormalspannungs-Verteilung im Blech bei Variation der Abmessungen  $t_1$  u.a.

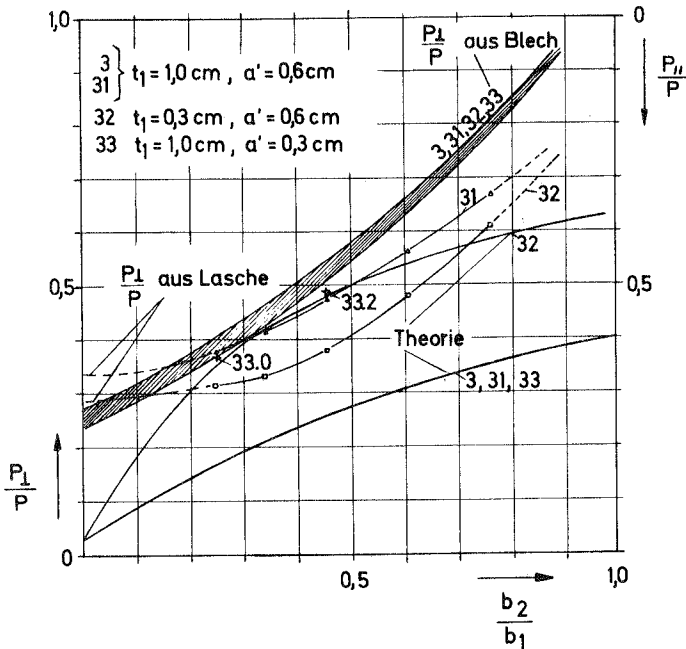


Bild 4.15: Einfluß der Blechdicke auf die Kraftverteilung

im Blech überwiegend von den beiden Parametern  $l_2/l_1$  und  $b_2/b_1$  bestimmt wird.

Bild 4.15 stellt eine Erweiterung von Bild 4.12 dar. Infolge der Ähnlichkeit der Spannungsverteilungen im Blech vor der Stirnnaht liegen die daraus ermittelten Kurven  $P_1/P$  der Modellgruppen 3, 31, 32 und 33 so eng beisammen, daß sie als Band eingetragen sind. Die aus den Laschenspannungen integrierten Kurven der Modellgruppen 31 bis 33 erlauben demgegenüber eine Differenzierung: Während die neue Schweißnahtdicke (33 verglichen mit 31) nur Änderungen bringt, die innerhalb der Meßgenauigkeit liegen, zeigt das Modell mit dem dünnen Blech durchweg kleinere Werte von  $P_1/P$ . Dies läßt sich aus der geringeren Steifigkeit des Bleches von Modellgruppe 32 erklären.

Der Vergleich mit der Theorie fällt für das dünnere Blech auf den ersten Blick günstiger aus. Betrachtet man jedoch die Änderungsrichtung beim Übergang von dem dickeren zum dünneren Blech, dann sieht man, daß die beiden Tendenzen entgegengesetzt sind: Im Versuch wird  $P_1/P$  kleiner, in der Theorie fast doppelt so groß. Die Hauptursache für diesen Unterschied dürfte darin liegen, daß in der Theorie die Spannungskonzentration zum Anschlußbereich hin unberücksichtigt bleibt.

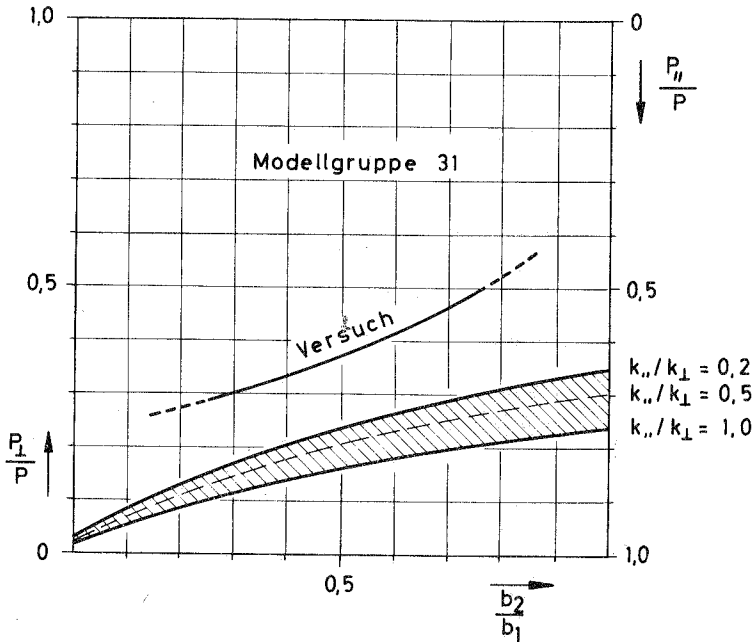


Bild 5.1: Einfluß der Variation von  $k_{II}/k_I$  auf  $P_1/P$  nach der einfachen Theorie

## 5. Modellversuche zur Ermittlung des Verschiebungsmoduls der Schweißnähte

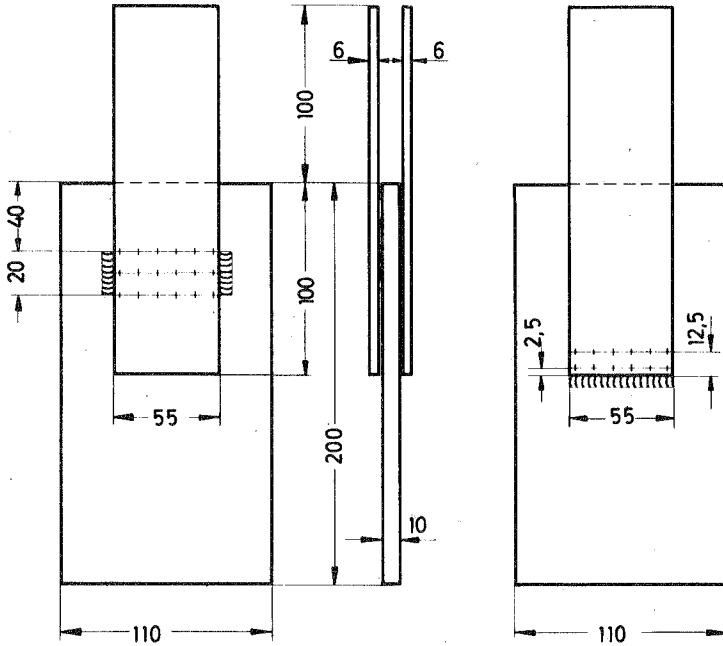
### 5.1 Bisher benutzte Werte für den Verschiebungsmodul. Grenzbetrachtungen

Unter dem bereits in Abschnitt 2.2 eingeführten Begriff "Verschiebungsmodul" wird hier die Proportionalitätskonstante zwischen Kraft pro Längeneinheit der Schweißnaht und Verschiebung verstanden. Bei Flankennähten gilt die Beziehung  $T = k_{//} \cdot v$ , bei Stirnnähten  $p = k_{\perp} \cdot v$ . Häufig findet man auch die Bezeichnung "Federzahl" oder "Federwert". Da die Proportionalitätskonstante jedoch die gleiche Dimension hat wie der Elastizitätsmodul, wurde dem Begriff Verschiebungsmodul der Vorzug gegeben. Außerdem ist dann eine Anwendung des Begriffes auch im teilplastischen Bereich möglich, was bei der Bezeichnung Federzahl auf semantische Schwierigkeiten stößt.

Eine Ursache, die für die Diskrepanz zwischen den theoretischen und versuchsmäßigen Kurven von  $P_1/P$  noch in Frage kam, waren falsche Werte für die Verschiebungsmoduln der Schweißnähte. Alle bisher angegebenen theoretischen Kurven wurden mit  $k_{//} = 0,2E$  und  $k_{\perp} = 0,4E$  berechnet. Diese Werte wurden aus [16] übernommen, wo sie aus überschlägigen Messungen an Versuchsstücken aus St 37 ermittelt wurden. Diese Messungen hatten auch keine Abhängigkeit des Verschiebungsmoduls von der Schweißnahtdicke gezeigt. In [7] wurden in Ermangelung von Angaben über die Verschiebungsmoduln von Stirn- und Flankennähten Grenzbetrachtungen für  $0 < k_{\perp} < \infty$  mit  $k_{//} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$  und  $1,05 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$  ( $\cong 1/3E$  und  $1/2E$  für Stahl) durchgeführt. In die Berechnung von  $P_1/P$  geht jedoch ohnehin nur das Verhältnis von  $k_{//}/k_{\perp}$  ein (siehe Formel 2.9).

Daß die Stirrnaht steifer ist als die Flankennaht, dürfte nicht zu bezweifeln sein. Als oberste Grenze des Verhältnisses  $k_{//}/k_{\perp}$  kommt somit nur 1,0 in Frage. Andererseits können sich die Verschiebungsmoduln nicht um eine ganze Größenordnung unterscheiden.

Die untere Grenze des Verhältnisses  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  könnte also allenfalls bei 0,2 liegen. Mit den eben diskutierten Grenzwerten 1,0 und 0,2 wurden die in Bild 5.1 wiedergegebenen Kurven  $P_{\perp}/P$  für die Modellgruppe 3 berechnet. In das Diagramm ist außerdem die Kurve für das bisher benutzte Verhältnis  $k_{\parallel}/k_{\perp} = 0,5$  eingetragen. Wie man sieht, wäre es nur durch eine nicht vertretbare Erhöhung von  $k_{\perp}$  möglich, die theoretischen Kurven den Versuchswerten wesentlich näher zu bringen.



+++++ = Anrißlinien Maße in mm

Reine Flankennaht-  
verbinding

Reine Stirrnaht-  
verbinding

Bild 5.2 : Modelle zur Verschiebungsmessung

## 5.2 Modelle und Meßverfahren für die Verschiebungsmessung

Die eben durchgeführten Grenzbetrachtungen genügen zwar um zu zeigen, daß die einfache Theorie die Kraftverteilung bei kombinierten Verbindungen nicht erfassen kann, für eine genauere Theorie müssen aber auch die Werte von  $k_{//}$  und  $k_{\perp}$  mit größerer Sicherheit bekannt sein. Es wurden daher einige Verschiebungsmessungen an Aralditmodellen von reinen Flankennahtverbindungen und reinen Stirrnahtverbindungen durchgeführt. Die Abmessungen der Modelle gehen aus Bild 5.2 hervor. Für die Verschiebungsmessung erwies sich die Durchsichtigkeit der Kunststoffmodelle als ideal. Vor dem Zusammenkleben wurden auf die aneinanderliegenden Flächen der Verbindungsteile im Schweißnahtbereich Querlinien eingeritzt, die durch senkrechte Striche in 1 cm Abstand unterteilt wurden. Die Linien auf den Laschen und dem Blech wurden verschieden eingefärbt. Mit Hilfe eines Meßmikroskops wurden dann die Verschiebungen zwischen den Linien bei wiederholter Be- und Entlastung und bei verschiedenen Laststufen gemessen. Eine Fotografie der gesamten Meßanordnung gibt Bild 5.3.

## 5.3 Gemessene Verschiebungsmoduln

Es wurden zwei Flanken- und zwei Stirrnahtmodelle mit jeweils 4,2 und 2,1 mm Nahtdicke (Kathetenlänge des Nahtdreiecks 6 und 3 mm) gemessen. Die Messungen der relativen Verschiebungen zwischen Blech und Lasche ergaben bei den Flankennahtverbindungen über die Laschenbreite eine parabelförmige Verteilung der Verschiebungen mit dem Maximum in der Mitte. Diese Erscheinung ist auf die Eigenverformung der Lasche unter den an den Rändern angreifenden Schubkräften zurückzuführen. Da in den Messungen der Verschiebungsmodul der Schweißnähte bestimmt werden sollte, wurden nur die relativen Verschiebungen der unmittelbar neben den Flankennähten gelegenen Meßpunkte ausgewertet.

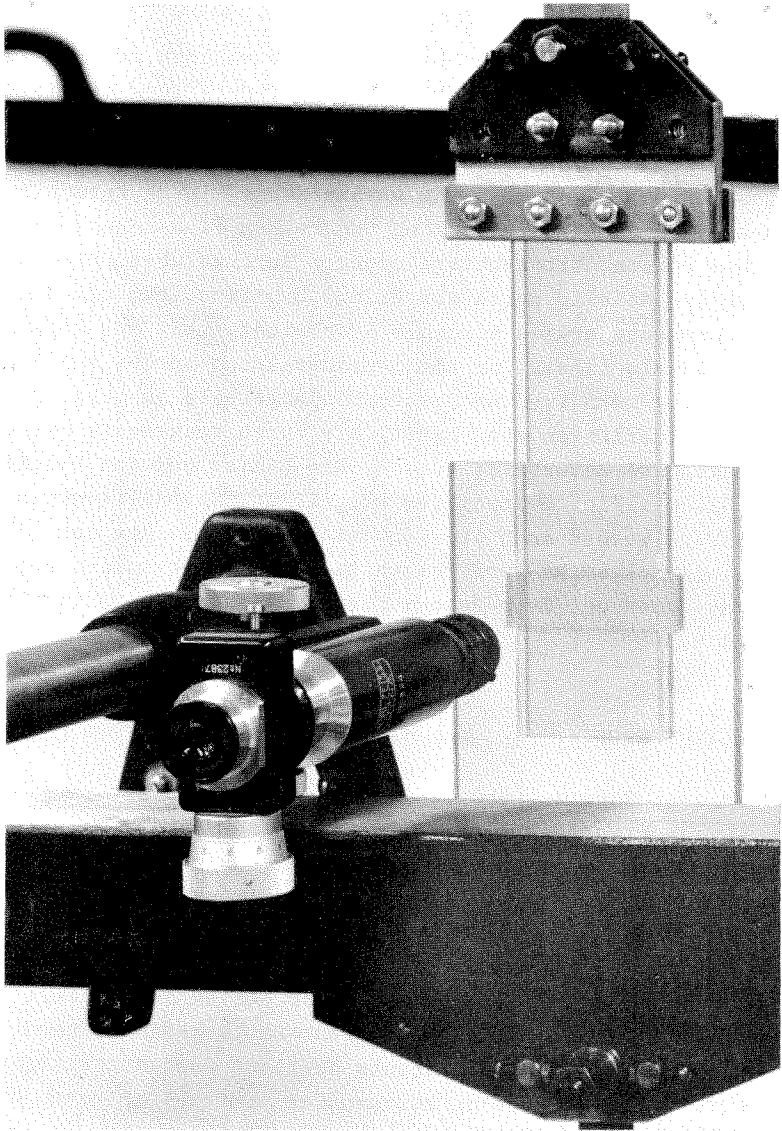


Bild 5.3: Versuchsanordnung für die Verschiebungsmessung



Im einzelnen wurden folgende, auf E bezogene Werte ermittelt:

	$k_{//}/E$	$k_{\perp}/E$	$k_{//}/k_{\perp}$
6 mm Naht (Kathetenlänge)	0,16	0,33	0,48
3 mm Naht (Kathetenlänge)	0,11	0,24	0,46
Mittelwerte	$\approx 0,14$	$\approx 0,28$	$\approx 0,5$

Das bisher benutzte Verhältnis von  $k_{//}/k_{\perp}$  wurde durch diese Messungen in erfreulicher Weise bestätigt. Die angenommenen absoluten Werte von 0,2 und 0,4 liegen etwas zu hoch, es scheint jedoch, daß hier auch das Verhältnis von Laschendicke zu Schweißnahtdicke eine Rolle spielt, wie im Anschluß an die theoretische Abschätzung der Verschiebungsmoduln in Abschnitt 5.5 gezeigt wird.

#### 5.4 Theoretische Abschätzung der Verschiebungsmoduln

Von mehreren Ansätzen zur theoretischen Bestimmung der Verschiebungsmoduln von Stirn- und Flankennähten werden im folgenden die beiden wiedergegeben, die die beste Übereinstimmung mit den Meßwerten ergaben. Das Erstaunliche ist dabei, daß die einfachsten Ansätze die besten Ergebnisse brachten, obwohl ihnen Annahmen über die Spannungsverteilung in der Schweißnaht zugrunde lagen, die zwar das Gleichgewicht erfüllen, jedoch nicht den wirklichen Verhältnissen entsprechen. Da die tatsächlichen Spannungsverteilungen in den Schweißnähten aber ohnehin zu kompliziert sind, um eine theoretisch saubere Bestimmung der Verschiebungsmoduln zu gestatten, dürfte es interessant sein, ihre Herleitung unter stark vereinfachenden Voraussetzungen hier wiederzugeben, zumal im Schrifttum nur eine Ableitung dieser Art gefunden wurde [17]. Ein Ergebnis dieser theoretischen Ableitungsversuche ist bemerkenswert: es zeigte sich, daß nur Ansätze, die eine gleichzeitige Verformung der an die Schweißnaht angrenzenden Laschenteile annehmen, zu vernünftigen Werten für die Verschiebungsmoduln führen.

Als erste sei die Flankennaht behandelt. In Bild 5.4 ist skizziert, wie man sich die Verformung der Naht vorstellen kann: Es ist angenommen, daß sich das Nahtdreieck infolge der Schubbeanspruchung um die dem Blech anliegende Kante neigt. Eine einigermaßen geometrisch verträgliche Verformung mit konstanter Schubverzerrung der Nahtoberfläche ergibt sich aber nur, wenn sich gleichzeitig innerhalb der Lasche längs der einpunktiierten Linie ein "Knick" ausbildet. Nimmt man eine konstante Schubspannungsverteilung  $\tau = T/a$  innerhalb des Gebietes zwischen den Knicken an, dann kann man entweder durch Bestimmung der inneren und äußeren Arbeit oder durch Integration der Verschiebung entlang der Hypotenuse des Nahtdreiecks finden, daß die maximale Verschiebung an der oberen Spitze des Nahtdreiecks, und damit die Verschiebung der Lasche  $v = 2T/G$  ist. Daraus folgt  $k_{//} = G/2$ : Mit  $\mu = 0,4$  für Kunststoffe erhält man damit  $k_{//} = 0,18 E$ , was in Anbetracht der vereinfachenden Annahmen fast zu gut mit den experimentell ermittelten Werten übereinstimmt. Tatur und Rykalin kommen in [17] auf etwas anderem Wege zum gleichen Ergebnis.

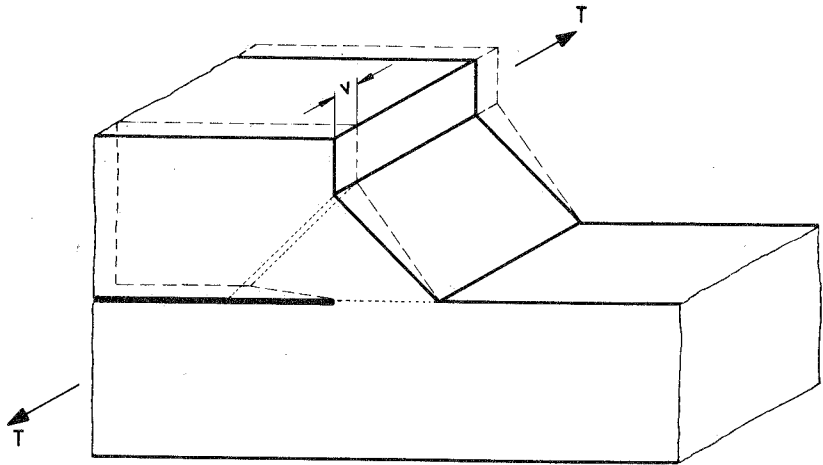


Bild 5.4: Verformung und Verschiebung bei der Flankennaht

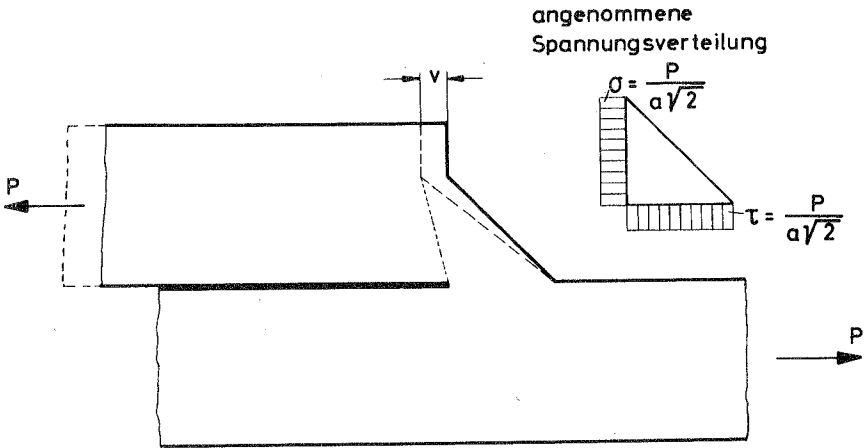


Bild 5.5: Verformung und Verschiebung bei der Stirnnaht

Eine denkbare Verformung der Stirnnaht unter gleichzeitiger Inanspruchnahme des angeschlossenen Laschenteiles ist in Bild 5.5 skizziert. Hier kann man nun als einfachsten Ansatz eine konstante Zugspannungsverteilung über die senkrechte Kathete annehmen (nach Modellversuchen von Bierett und Grüning [18] ist die Zugspannung parabelförmig mit dem Spitzenwert am Kehlgrund verteilt!). Die Schubspannung in jedem horizontalen Schnitt durch das Nahtdreieck ist dann gleich der Normalspannung. Die maximale Verschiebung an der Spitze des Nahtdreiecks ergibt sich aus den Schubverzerrungen zu  $v = \frac{1}{G} \cdot \frac{P}{a} \cdot a$ , woraus  $k_1 = G$ . Damit wird für Kunststoffe  $k_1 = 0,36 E$ , was auch noch recht gut mit den gemessenen Werten 0,24 und 0,36 E übereinstimmt. Tatur und Rykalin [17] nehmen dieselbe Verformung der Stirnnaht an und berechnen die Dehnung der Fasern parallel zur freien Nahtoberfläche. Es zeigt sich, daß die Dehnung für alle Fasern gleich und  $\epsilon = v / (2 a \sqrt{2})$  ist. Sie nehmen dann entsprechend den berechneten Dehnungen eine konstante Normalspannungsverteilung  $\sigma = \epsilon E$  über den Kehlschnitt an, die sie gleich der auf die Kathete wirkenden Normalspannung  $P / a \sqrt{2}$  setzen. Damit ergibt sich  $k_1 = 0,5 E$ . Dieser Wert ist jedoch falsch,

da die soeben beschriebenen Annahmen nicht ganz richtig sind. Man darf nicht einfach die Spannungen im Kehlschnitt gleich den Spannungen in der Kathetenfläche setzen, sondern man muß fordern, daß die zu P parallele Komponente der Spannungen im Kehlschnitt integriert P ergibt. Dann erhält man  $P = \frac{\epsilon E a}{\sqrt{2}} = \frac{v}{2 a \sqrt{2}} \cdot \frac{E a}{\sqrt{2}}$  und daraus  $k_{\perp} = 0,25 E$ . Dieser Wert ist gemessen an den Versuchsergebnissen zu niedrig, was sich daraus erklärt, daß in Wirklichkeit keine zu P senkrechte und gleich große Kraftkomponente vorhanden ist, die aber notwendig wäre, um den angenommenen Spannungszustand im Kehlschnitt zu erzeugen.

### 5.5 Der "effektive" Verschiebungsmodul

Im vorhergehenden Abschnitt wurden als theoretische Werte für die Verschiebungsmoduln  $k_{//} = G/2$  und  $k_{\perp} = G$  abgeleitet, womit sich für die bei den Messungen benutzten Kunststoffmodelle  $k_{//} = 0,18$  und  $k_{\perp}' = 0,36$  ergibt. Diese Werte stimmen mit den an den Nähten von 6mm Kathetenlänge ermittelten Zahlen  $k_{//}' = 0,16$  und  $k_{\perp}' = 0,33$  sehr gut überein. Gegenüber den für die Nähte mit 3mm Kathetenlänge experimentell bestimmten Werten  $k_{//}' = 0,11$  und  $k_{\perp}' = 0,24$  ergeben sich jedoch beträchtliche Abweichungen. Diese Abweichungen lassen sich erklären, wenn man das Verhältnis von Laschendicke zu Schweißnahtdicke als zusätzlichen Parameter des Verschiebungsmoduls einführt.

Bei der theoretischen Ableitung der Verschiebungsmoduln wurde bereits betont, daß sich vernünftige Werte nur ergeben, wenn man eine gleichzeitige Verformung der an die Schweißnaht grenzenden Laschenbereiche annimmt. In den Bildern 5.4 und 5.5 wurde der von der Verformung erfaßte Dreieckszipfel des Laschenquerschnittes in der gleichen Größe wie die Schweißnaht angenommen. Wie in Bild 5.6 gezeigt ist, kann man jedoch ebensogut ansetzen, daß sich der gesamte Zipfel des Laschenquerschnittes bis zur freien Ecke an der Verformung beteiligt. Die Verschiebung der Lasche ist dann gegeben durch

$$v^* = \frac{v}{2 a} \cdot \left( a + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

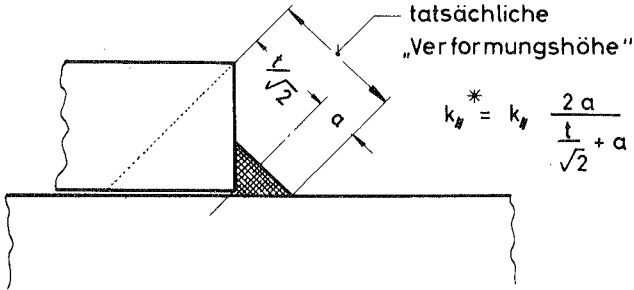


Bild 5.6: Erklärung für die Abhängigkeit des effektiven Verschiebungsmoduls vom Verhältnis  $t_2/a$

und wegen  $k_{//} = T/v$  folgt

$$k_{//}^* = k_{//} \frac{2a}{\frac{t}{\sqrt{2}} + a} = \frac{2}{1 + \frac{t}{a\sqrt{2}}} k_{//} \quad (5.1)$$

Die Anwendung dieser Formel auf die 3mm Naht ergibt nun eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen Werten:

$$k_{//}^* = 0,18 \frac{2}{1 + 6/3} = 0,12 \quad \text{gegenüber } 0,11 \text{ experi-mentell}$$

und

$$k_{\perp}^* = 0,36 \frac{2}{1 + 6/3} = 0,24 \quad \text{gegenüber } 0,24 \text{ experi-mentell.}$$

Ob diese gute Übereinstimmung zufällig ist, oder ob die oben abgeleitete Formel die tatsächlichen Verhältnisse so exakt beschreibt, müßte durch eine größere Versuchsreihe überprüft werden.

Ein Vergleich mit den von Smith [8] an Verbindungen aus Stahl bestimmten Werten zeigt, daß die Formel 5.1 zumindest die Tendenz der Veränderung von  $k_{//}$  in Abhängigkeit vom Verhältnis Nahtdicke zu Laschendicke richtig wiedergibt, wenn

auch die rechnerischen Werte generell etwas niedriger liegen:

Versuchsnr. von Smith	$t_2$ inch	$a\sqrt{2}$ inch	$k_{//}$ gemessen	$k_{//}^*$ gerechnet
A	0,375		0,23	0,18
B	0,500	0,312	0,22	0,15
C	0,750		0,18	0,11

Der Berechnung von  $k_{//}^*$  wurde ein  $k_{//} = \frac{1}{4(1+\mu)} = \frac{1}{4(1+0,3)}$  zugrunde gelegt.

Kürzlich hat Steinhardt [19] über Messungen des Verschiebungsmoduls an Stirn- und Flankennähten berichtet. Er fand für Stirnnähte Werte  $k_{\perp}$  von 396 bis 627 t/cm<sup>2</sup> und für Flankennähte  $k_{//}$  von 400 bis 570 t/cm<sup>2</sup>. Rechnerisch ergibt sich für Stahl  $k_{\perp} = G \approx 810$  t/cm<sup>2</sup> und  $k_{//} = G/2 \approx 405$  t/cm<sup>2</sup>. Die Werte von  $k_{\perp}$  wurden an Verbindungen mit  $a = 4$  mm und einer Laschendicke von 12 mm ermittelt. Für diese Verhältnisse ergibt sich rechnerisch:

$$k_{\perp}^* = 810 \cdot \frac{1}{1 + \frac{12}{4\sqrt{2}}} = 520 \text{ t/cm}^2$$

Dies liegt sehr nahe bei dem Mittelwert aus 396 und 627, der annähernd 510 t/cm<sup>2</sup> beträgt.

Die von Steinhardt gemessenen Größen von  $k_{//}$  sind dagegen im Vergleich mit der Rechnung etwa um den Faktor 2 zu groß. Es ist möglich, daß die ungleichförmige Beanspruchung der Flankennähte über ihre Länge die Messungen beeinflußt hat. Darauf deutet die Tatsache hin, daß die gemessenen Verschiebungsmoduln für Flankennähte etwa die gleiche Größe haben wie die an Stirnnähten bestimmten. Dies widerspricht jedoch bisherigen Beobachtungen und theoretischen Überlegungen.

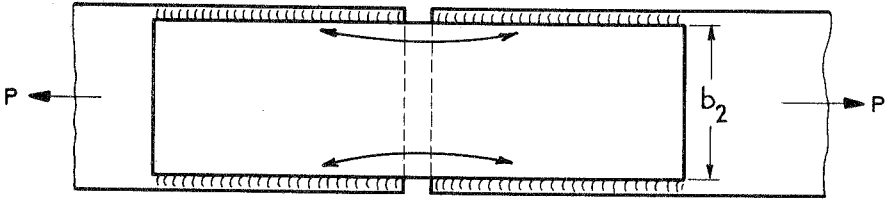
6. Eine Berechnungsmethode für  
überlappte Kehlnahtverbindungen  
bei Berücksichtigung der  
ungleichförmigen Spannungsverteilung

6.1 Berechnung des Spannungszustandes in den Laschen  
bei gegebener Randspannungsverteilung

Nachdem die spannungsoptischen Versuche gezeigt hatten, daß die einfache Theorie der Haftverbindungen die Kraftverteilung bei geschweißten Kehlnaht-Laschenverbindungen nur unzureichend beschreibt, war es notwendig, einen Ansatz zu entwickeln, der nicht den in Kapitel 3 diskutierten Einschränkungen unterworfen ist. Der erste Schritt hierzu besteht in der exakten Bestimmung des Spannungszustandes in den Laschen, der sich aus den von den Schweißnähten übertragenen Schubkräften und Querspannungen ergibt.

Es liegen im Schrifttum schon ähnliche Ansätze vor. Stüssi [6] hat über eine vereinfachte Verträglichkeitsbedingung, bei der die Querdehnungen und Querspannungen vernachlässigt werden, die Ungleichförmigkeit der Spannungsverteilung über die Breite der Lasche berücksichtigt. Allerdings wird dadurch in seinem Ansatz nur der Verschiebungsmodul der Flankennähte (in [6] "Schubverformungswiderstand") verändert, die für die Kraftverteilung entscheidende Differentialgleichung ist die der einfachen Theorie der Haftverbindungen.

Weiskopf und Male [20] haben, ausgehend von der gleichen vereinfachten Verträglichkeitsbedingung wie Stüssi, mit Hilfe eines Fourieransatzes symmetrische Laschenstöße (Bild 6.1) untersucht und die Abminderung der mitwirkenden Laschenbreite bei wachsendem Verhältnis  $b_2/l_{//}$  berechnet. Da die Längsspannungen in den Laschen bei dem von Weiskopf und Male gewählten Verbindungstyp keinen nahtfreien Bereich haben, in dem sie sich ausgleichen können, ergibt sich für große  $b_2/l_{//}$ -Werte eine starke



theoretisch dargestellt durch:

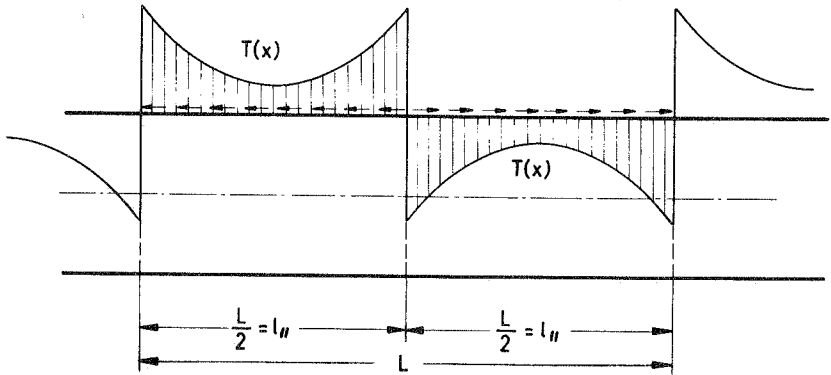


Bild 6.1: Von Weiskopf und Male untersuchter Laschenstoß

Reduktion der mitwirkenden Laschenbreite. (Der Kraftfluß geht direkt von Naht zu Naht, ohne den mittleren Teil der Laschen zu berühren.) Die Ergebnisse konnten daher nicht auf die hier diskutierten spannungsoptischen Versuche angewendet werden.

Zu erwähnen ist auch ein Lösungsversuch von Jäger [21], der für die Spannungen Näherungspolynome bis zum 3. Grade ansetzt und die Konstanten aus den Verträglichkeits- und Randbedingungen bestimmt. Wie Jäger selbst betont, handelt es sich um einen recht groben Näherungsansatz. Eine Erweiterung dieser Methode zur Interpretation der hier experimentell gewonnenen Ergebnisse schien daher nicht erfolgversprechend.



Alle eben erörterten Lösungsansätze enthalten Vereinfachungen, deren Auswirkungen auf die errechnete Kraftverteilung sich nicht übersehen lassen. Es wird deshalb ein Weg eingeschlagen, der umfassender und scheidentheoretisch exakt ist. Dieser Weg konnte jedoch nur beschränkt werden, weil heute in den elektronischen Rechenmaschinen eine großartige Rechenhilfe zur Verfügung steht, so daß man viel weniger als früher gezwungen ist, komplizierte Probleme gewaltsam zu vereinfachen, um sie überhaupt numerisch lösbar zu machen. Insofern ist der hier gewählte Ansatz nicht dem Wesen nach neu, sondern nur vollständiger als frühere.

Für die streifenförmige Scheibe (Längskoordinate  $x$ ) läßt sich die Airysche Spannungsfunktion durch den Fourieransatz

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n 2\pi x}{L} f(y)$$

befriedigen ([22], S.46). Der einfachen Schreibweise wegen wird zunächst nur ein Fourierglied betrachtet. Aus  $\Delta\Delta F = 0$  ergibt sich, daß  $f(y)$  der Differentialgleichung

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f''''(y) = 0$$

genügen muß, mit  $\alpha = n 2\pi/L$ . Somit wird

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y$$

Die Beziehungen für die Spannungen sind dann vom Typ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sin \alpha x \left[ C_1 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 \alpha (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) \right] \quad (6.1)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x \left[ C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y \right] \quad (6.2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x \left[ C_1 \alpha \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha y + C_3 (\operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_4 (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \right] \quad (6.3)$$

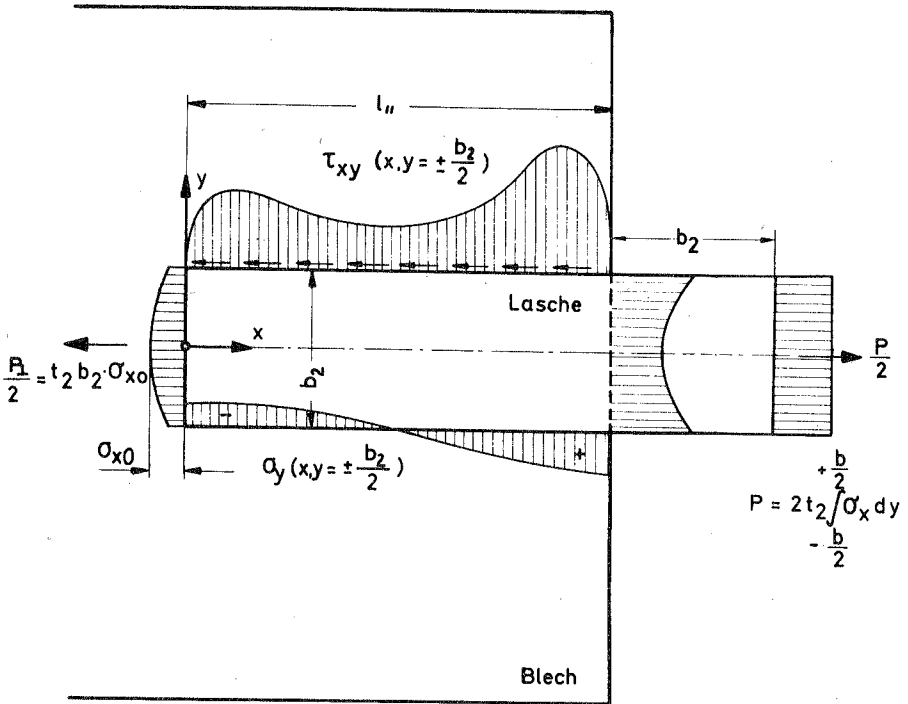


Bild 6.2: Spannungen an den Rändern der Lasche einer kombinierten Verbindung

Für eine allgemeine Belastung der Scheibenränder  $y = \pm b/2$  ist zunächst statt des Einzelgliedes wieder die Summe zu schreiben. Außerdem müssen im allgemeinen Fall sowohl Sinus- als auch Kosinus-Glieder berücksichtigt werden. Durch geschickte Wahl des periodischen Verlaufs kommt man jedoch mit einem Sinus-Ansatz aus.

Wir betrachten die Lasche einer kombinierten Verbindung (Bild 6.2). Sie ist an den Längsrändern im Bereich der Flankennähte durch Schubspannungen und  $\sigma_y$ -Spannungen beansprucht, letztere ergeben sich aus der Querdehnungsbehinderung durch das Blech der Verbindung. Aus der Stirnnaht hat die Lasche Längsspannungen  $\sigma_x$ , die sich in dem vorliegenden Ansatz aber nur unterbringen

lassen, wenn man sie über die Breite konstant annimmt, da keine Konstanten mehr frei sind, die zur Erfüllung einer ungleichförmigen Spannungsverteilung herangezogen werden könnten. In Bild 6.2 sind der Übersichtlichkeit halber die  $\tau$ - und  $\sigma_y$ -Spannungen jeweils nur an einem Rand gezeichnet.

Diese Belastung der Scheibe muß nun periodisch dargestellt werden. Es liegt nahe, die Periodenlänge als ein Vielfaches von  $l// + b_2$  zu wählen, wenn man entsprechend dem Prinzip von St. Venant davon ausgeht, daß in einer Entfernung  $b_2$  vom Ende des Bleches die  $\sigma_x$ -Verteilung sich über die Laschenbreite ausgeglichen hat. Im Laufe dieser Untersuchungen zeigte sich, daß sich die Kontinuität der Verformungen am einfachsten mit einer Periodenlänge von  $L = 4(l// + b_2)$  wahren läßt. So ergibt sich die in Bild 6.3 dargestellte periodische Randbelastung des unendlichen Scheibenstreifens. Nicht befriedigend ist dabei der Vorzeichensprung der  $\sigma_y$ -Spannungen und der konstanten  $\sigma_x$ -Spannungen an der Stirnnaht. Er ergibt sich zwangsläufig aus der gewählten Periodizität der Randschubspannungen. Der Sprung der Querspannungen ist jedoch insofern nicht unrealistisch, als durch ihn die Koppelung von Lasche und Blech über die Stirnnaht widerspiegelt wird. Der Sprung der Querspannungen bedeutet ja, daß an dieser Stelle keine Dehnung in Querrichtung auftreten kann. Die Verbindung von Lasche und Blech durch die Stirnnaht hat eine ähnliche Wirkung.

Bei näherer Betrachtung der Gesetzmäßigkeiten, die sich aus den in Bild 6.3 dargestellten Belastungen des Scheibenstreifens ergeben, lassen sich einige Vereinfachungen der allgemeinen Lösung ableiten:

- a) Es brauchen nur die  $\cos$ -Glieder der  $\tau_{xy}$ -Reihe berücksichtigt werden. Entsprechend entfallen die  $\cos$ -Glieder bei den  $\sigma_x$ - und  $\sigma_y$ -Reihen.
- b) Die Reihen haben nur ungerade Glieder.
- c) Zwar sind die Randschubbelastungen symmetrisch, in  $\tau_{xy}$  ausgedrückt bedeutet das aber Antimetrie in bezug auf  $y$ . Wegen dieser Forderung müssen in Formel (6.3) die geraden Funktionen entfallen, d.h.  $C_2 = C_3 = 0$ .

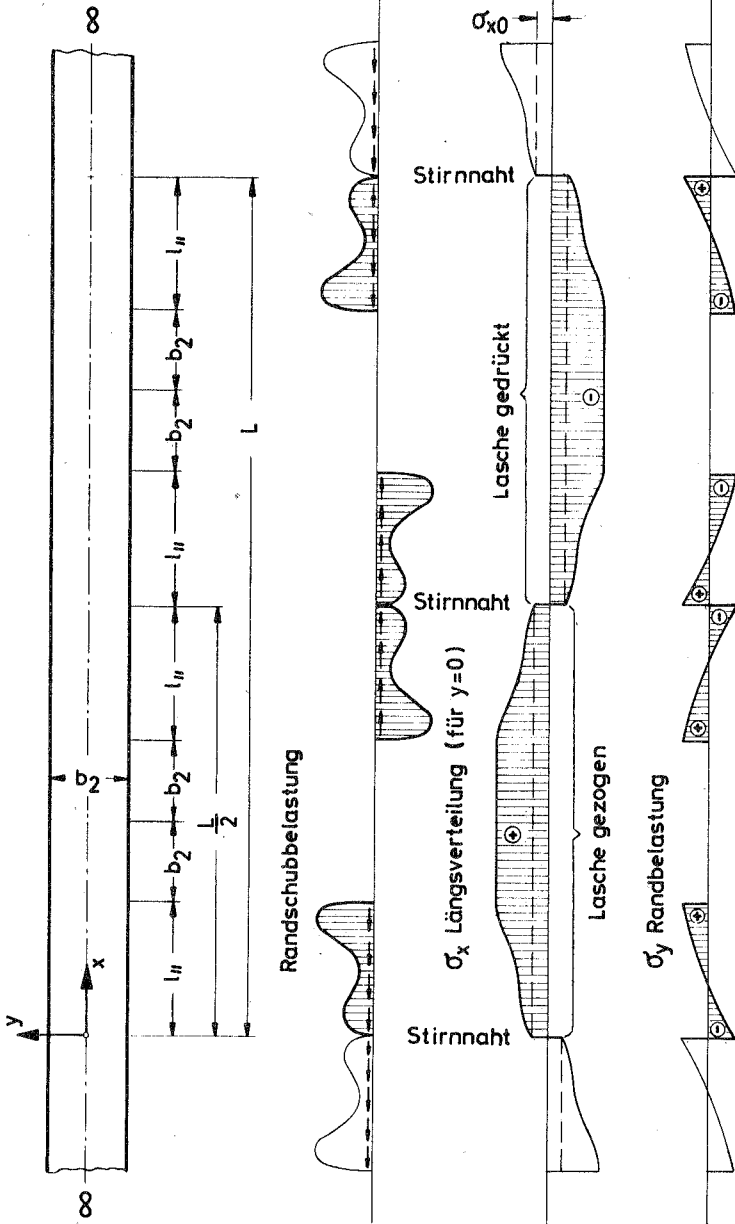


Bild 6.3: Periodische Belastung des unendlichen Scheibenstreifens zur Berechnung der Spannungen in der Lasche

Die vollständigen Ansätze für die Spannungen lauten also für die vorliegende Belastung der streifenförmigen Scheibe:

$$\sigma_x = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin \alpha_n x \left[ C_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{4n} \alpha_n (2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y) \right] \quad (6.4)$$

$$\sigma_y = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} -\alpha_n^2 \sin \alpha_n x \left[ C_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{4n} y \operatorname{sh} \alpha_n y \right] \quad (6.5)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} -\alpha_n \cos \alpha_n x \left[ C_{1n} \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_{4n} (\operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y) \right] \quad (6.6)$$

Während die Randbedingungen für  $\tau_{xy}$  sich aus der Schubbelastung der Flankennähte ergeben:

$$\tau_{xy}(x, y = \frac{b}{2}) = \frac{T(x)}{t_2} \quad (6.7)$$

werden die  $\sigma_y$ -Randspannungen durch die gegenseitige Behinderung von Lasche und Blech hervorgerufen. Die Randverschiebung ist allgemein

$$v_R = \int_0^{b/2} \epsilon_y dy = \int_0^{b/2} \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) dy \quad (6.8)$$

Die Kompatibilität der Randverschiebungen der verbundenen Teile muß jedoch nur im Bereich der Flankennähte erfüllt sein, im übrigen Bereich sind die Längsränder unbehindert. Wir haben also die Randbedingungen

$$(m \cdot L/2 - l//) < x < (m \cdot L/2 + l//) \quad v_R \text{ vorgeschrieben, } \sigma_y \text{ frei}$$

$$(m \cdot L/2 + l//) < x < (m \cdot L/2 - l//) \quad \sigma_y = 0, \quad v_R \text{ frei}$$

$m$  ganzzahlig  $-\infty$  bis  $+\infty$

Diese für zwei Randabschnitte grundsätzliche Verschiedenheit der Randbedingungen macht es selbst für den einfachsten Fall der symmetrischen Laschenverbindung ( $b_1 = b_2$ ,  $t_1 = 2t_2$ ) äußerst schwierig, eine geschlossene Lösung aufzustellen. Es wurde daher der nachstehend beschriebene Weg eingeschlagen, der sich in einen iterativen Aufbau der Gesamtberechnung der Kraftverteilung bei Kehlnahtverbindungen zwanglos einordnet.

Zunächst wird die maximale  $\sigma_y$ -Randspannung errechnet, die sich bei totaler Verschiebungsbehinderung des gesamten Randes in y-Richtung ergibt. Man hat also zu setzen

$$v_R = \int_0^{b/2} \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) dy = 0$$

Durch Auswerten der Integrale  $\int_0^{b/2} \sigma_x dy$  und  $\int_0^{b/2} \sigma_y dy$  mit Hilfe der Beziehung (6.4) und (6.5) ergibt sich

$$v_R = 0 = \frac{1}{E} \left\{ - \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin \alpha_n x \left[ C_{1n} \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} + C_{4n} \left( \alpha_n \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} \right) \right] - \mu \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin \alpha_n x \left[ C_{1n} \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} + C_{4n} \left( \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} + \alpha_n \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} \right) \right] \right\}$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn gliedweise

$$0 = C_{1n} \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} (1 + \mu) - C_{4n} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} (1 - \mu) + C_{4n} \alpha_n \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} (1 + \mu) \quad (6.9)$$

In (6.7) und (6.9) steht uns nunmehr das zur Bestimmung von  $C_{1n}$  und  $C_{4n}$  erforderliche Gleichungspaar zur Verfügung.

Es sei gegeben

$$\tau_{xy}(y=\frac{b}{2}) = \frac{T(x)}{t_2} = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{1n} \cos \alpha_n x$$

Daraus folgt mit (6.6) die gliedweise Beziehung

$$A_{rn} = -C_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{n^2} - C_{4n} \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{n^2} + \alpha_n \frac{b}{n^2} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{n^2}) \quad (6.10)$$

Aus (6.9) und (6.10) errechnen sich  $C_{1n} \alpha_n^2$  und  $C_{4n} \alpha_n$  zu

$$C_{1n} \alpha_n^2 = -\frac{A_{rn}}{2 \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{n^2}} \left[ (1-\mu) - (1+\mu) \alpha_n \frac{b}{n^2} \operatorname{cth} \alpha_n \frac{b}{n^2} \right] \quad (6.11)$$

$$C_{4n} \alpha_n = -\frac{A_{rn}}{2 \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{n^2}} (1+\mu) \quad (6.12)$$

Wir können damit die maximale  $\sigma_y$ -Randspannung direkt in Abhängigkeit von der aufgebrachten Randschubverteilung ausdrücken:

$$\sigma_{yRmax} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \alpha_n x A_{rn} \left[ \frac{1-\mu}{2} \operatorname{cth} \alpha_n \frac{b}{n^2} - \frac{(1+\mu) \alpha_n \frac{b}{n^2}}{2 \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{n^2}} \right] \quad (6.13)$$

Gl. 6.13 gibt entsprechend der Ausgangsbedingung  $v_R = 0$  diejenige Randspannung, die entsteht, wenn man sich den Scheibenstreifen entlang seines ganzen Randes in  $y$ -Richtung unverschieblich gehalten denkt. Tatsächlich ist er jedoch a) nur im Bereich der Flankennähte und b) nicht starr, sondern elastisch gehalten. Das nach (6.13) berechnete  $\sigma_{yRmax}$  ist daher zunächst mit einer Funktion zu multiplizieren, für die gilt:

a) im Bereich der Nähte:

$$f(x) = 1 \quad \text{für} \quad \left(m \cdot \frac{l}{2} - l_{//}\right) < x < \left(m \cdot \frac{l}{2} + l_{//}\right)$$

b) an den freien Laschenrändern:

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad \left(m \cdot \frac{l}{2} + l_{//}\right) < x < \left(m \cdot \frac{l}{2} - l_{//}\right)$$

Wir schreiben  $\sigma_{yRmax} \cdot f(x) = \sigma_{yRo}$ .

Für die Berücksichtigung der in Wirklichkeit vorhandenen elastischen Behinderung ist die durch  $\sigma_{yRo} \cdot 2t_2$  gegebene Kraft pro Längeneinheit auf Lasche (Index 2) und Blech (Index 1) gemeinsam

anzusetzen. Da das Blech ebenfalls Spannungen aus einer gedachten Unverschieblichkeit der Ränder hat, ergibt sich schließlich die wirkliche  $\sigma_y$ -Randspannung in der Lasche zu

$$\sigma_{yR2} = (\sigma_{yRo2} - \sigma_{yRo1}) \cdot \frac{t_1}{t_1 + 2t_2} \quad (6.14)$$

Diese Beziehung ist im Anhang Abschn. 9.3, S.136, im einzelnen abgeleitet.

Infolge der Modifikation mit  $f(x)$  läßt sich das  $\sigma_{yR2}$  der Gl. 6.14 nun nicht mehr explizit mit der Reihe für  $T(x)$  in Beziehung setzen. Es ist eine Fourieranalyse durchzuführen. Wir nehmen also an, daß gegeben sei

$$\sigma_{yR2} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \sin \alpha_n x \quad (6.15)$$

Gl. 6.15 liefert zusammen mit (6.7) ein System von Gleichungspaaren, aus denen  $C_{1n}$  und  $C_{4n}$  für die wirkliche  $\sigma_y$ -Randspannungsverteilung bei gegebener Randschubkraftverteilung bestimmt werden können. Die Gleichungspaare sind

$$A_{rn} = -C_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} - C_{4n} \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} + \alpha_n \frac{b}{h} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h}) \quad (6.10) \equiv (6.16)$$

$$B_n = -C_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h} - C_{4n} \alpha_n \frac{b}{h} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} \quad (6.17)$$

Gl. 6.17 entsteht durch Gleichsetzen von (6.15) und (6.5) an der Stelle  $y = b/2$ . Aus dem obigen Gleichungspaar errechnen sich die Konstanten zu

$$C_{1n} \alpha_n^2 = \frac{2}{\alpha_n b + \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h}} \left[ A_{rn} \alpha_n \frac{b}{h} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} - B_n (\operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} + \alpha_n \frac{b}{h} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h}) \right] \quad (6.18)$$

$$C_{4n} \alpha_n = \frac{2}{\alpha_n b + \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h}} \left[ -A_{rn} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h} + B_n \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h} \right] \quad (6.19)$$

Damit folgen aus (6.4) bis (6.6) die Spannungen in einer Lasche, die in den Flankennähten mit bekanntem  $T(x)$  und mit  $\sigma_y$  aus der gegenseitigen Behinderung von Lasche und Blech belastet ist.



## 6.2 Ableitung der Differentialgleichung 4. Ordnung für eine idealisierte Schweißnaht.

Lösung für über die Querschnitte konstante Längsspannung

Wie die Bilder 2.2 und 2.3 (S.19 und 21) deutlich machen, ergibt die einfache Theorie der Haftverbindungen hohe Schubspannungsspitzen an den Enden der Flankennähte. In Kapitel 3 wurde bereits erläutert, daß dieses Ergebnis der Bedingung widerspricht, derzufolge in den freien Stirnflächen der Nähte keine Schubspannungen vorhanden sein können. Diese Überlegung wurde durch die spannungsoptischen Messungen bestätigt, bei denen sich stets ein ausgerundeter Anstieg der Schubspannungen an den Nahtenden ergab (s. z.B. Bild 7.5, S.102). Eine Theorie der Kehlnahtverbindungen, die der Wirklichkeit möglichst nahe kommen soll, muß daher die Bedingung  $T=0$  an den Nahtenden erfüllen können. Da die einfache Theorie der Haftverbindungen auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung führt, lassen sich damit nur zwei Randbedingungen erfüllen, die in Abschnitt 2.2 mit  $F_1(\xi=0) = 0$  und  $F_1(\xi=1) = 1$  eingeführt wurden. Will man zusätzlich die Randbedingungen  $F_1'(\xi=0) = F_1'(\xi=1) = 0$  erfüllen, dann ist dazu eine Dgl. 4. Ordnung erforderlich.

Aus dieser Überlegung heraus hat Domke [23] die gegenseitige Verschiebung von Lasche und Blech in Form einer Integralgleichung angesetzt, die eine Einflußfunktion enthält, welche von sämtlichen Schubspannungen entlang der Schweißnaht abhängt. Mit einigen vereinfachenden Annahmen über die Gestalt der Kernfunktion ergibt sich dann die gewünschte Differentialgleichung 4. Ordnung für die Normalspannungen oder Kräfte in den verbundenen Teilen. Domke weist anhand des Spezialfalles der symmetrischen Laschenverbindung nach, daß der Verlauf der Verschiebung sich nur unwesentlich von dem nach der einfachen Theorie ermittelten unterscheidet, der ja den Schubspannungen direkt proportional ist. Dagegen verlaufen die Schubspannungen nach der erweiterten Theorie wesentlich ausgerundeter. Die erforderliche Dgl. 4. Ordnung läßt sich aber auch elementar und anschaulich ableiten, wie nachstehend gezeigt wird.

Wir denken uns eine idealisierte Schweißnaht als Scheibe von der Dicke "t" und der Höhe "a". Die Naht sei mit einem beliebigen Schubspannungsverlauf belastet, und in einem Bereich ansteigender Schubspannungen sei ein Element dx herausgeschnitten (Bild 6.4). Der entscheidende Schritt besteht nun darin, den Anteil konstanter Schubverformung abzuspalten und das Element unter der restlichen Belastung zu betrachten, wie es in Bild 6.4 skizziert ist, und zu fragen, welche Verformung zu dieser Restbelastung gehört. Es zeigt sich, daß man das Element als einen beiderseits gegen Verdrehung eingespannten, verschiebungsfreien Balken betrachten kann, der entlang einer Oberfläche (t·a) mit Schubkräften belastet ist. (Die dreieckigen Spannungskörper an den Stirnenden des Elementes dürfen nicht als Belastung eingesetzt werden, weil sie streng genommen erst durch die Verformung des Elementes entstehen.) Bild 6.5 zeigt, wie man diese Belastung auf einen Standardfall des Formänderungsgrößen-

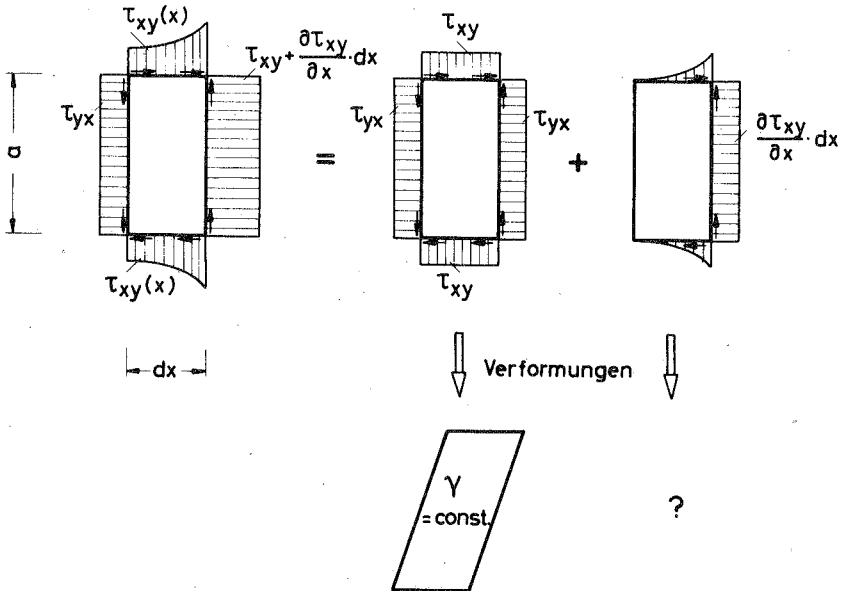


Bild 6.4: Aufspaltung der Belastungen eines idealisierten Schweißnahtelementes

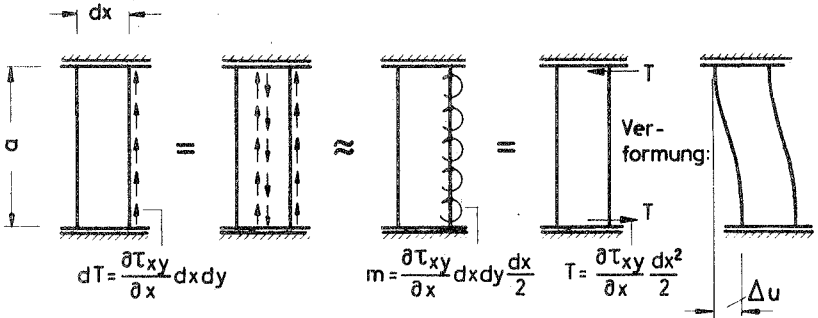


Bild 6.5: Verformung eines idealisierten Schweißnaht-  
elementes infolge des Schubspannungszuwachses

Verfahrens reduzieren kann. Für diesen Fall ergibt sich:

$$\Delta u^* = \frac{1^3}{12 EI} Q$$

Es entspricht  $l \cong a$   $I \cong \frac{t}{12} dx^3$   $Q \cong T \cdot t$

womit

$$\Delta u^* = \frac{a^3}{2E} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{1}{dx} \quad \text{wird.}$$

Hier stört noch, daß  $\Delta u^*$  von der Breite des betrachteten Elementes abhängt. Dies läßt sich vermeiden, wenn man in 1. Näherung annimmt

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \cdot dx$$

Außerdem ist das Vorzeichen der Verschiebung unter der Restbelastung im Vergleich zur Verschiebung infolge der konstanten Schubverformung zu berücksichtigen. So ergibt sich schließlich die gegenseitige Gesamtverschiebung der beiden Schnittufer der idealisierten Schweißnaht zu

$$\Delta u = \frac{a}{G} \tau_{xy} - \frac{a^3}{2E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \quad (6.21)$$

oder mit  $\tau_{xy} = T(x)/t$

$$\Delta u = \frac{1}{G} \cdot \frac{a}{t} \cdot T(x) - \frac{1}{2E} \cdot \frac{a^3}{t} \cdot \frac{d^2 T(x)}{dx^2}$$

Der Faktor  $a/Gt$  der idealisierten Schweißnaht entspricht dem Faktor  $1/k_{//}$  einer wirklichen Naht. Wir ersetzen daher  $a/Gt$  durch  $1/k_{//}$  und schreiben

$$\frac{a^3}{2Et} = \frac{a}{G \cdot t} \cdot \frac{a^2 G}{2E} = \frac{1}{k_{//}} a^2 \frac{G}{2E}$$

Mit  $G = E/2(1+\mu)$  wird daraus schließlich für eine wirkliche Schweißnaht

$$\Delta u = \frac{1}{k_{//}} T(x) - \frac{1}{k_{//}} \cdot \frac{a^2}{4(1+\mu)} \cdot \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \quad (6.22)$$

Unter der Voraussetzung konstanter Normalspannungsverteilung über die Querschnitte der Verbindung läßt sich nun analog der Ableitung in Abschnitt 2.2 die Differentialgleichung für den Kraftverlauf im Blech angeben:

$$\frac{d^4 F_1}{df^4} - \chi^2 \frac{d^2 F_1}{df^2} + \alpha^2 F_1 = \chi^2 B \quad (6.23)$$

Mit

$$\chi^2 = \left( \frac{2l_{//}}{a} \right)^2 \cdot (1+\mu)$$

$$\alpha^2 = 4k_{//}' l_{//}^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2A_2} \right)$$

$$B = 4k_{//}' l_{//}^2 \frac{1}{2A_2}$$

Erwähnt sei noch, daß für große Verhältnisse  $l_{//}/a$   $\chi^2$  sehr groß wird. Dividiert man Gl. 6.23 durch  $\chi^2$ , dann erkennt man, daß der Term der 4. Ordnung für  $\chi^2 \rightarrow \infty$  verschwindet, womit man die bereits in Abschnitt 2.2 abgeleitete Dgl. 2. Ordnung erhält

Interessant ist auch der Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$ . Man erhält als Differentialgleichung  $d^4 F_1 / d\xi^4 = 0$ . Die Integration ergibt für  $F_1(\xi)$  ein Polynom 3. Grades, für  $F_1'(\xi)$  also eine Parabel. Diese parabelförmige Verteilung der Schubspannungen erhält man in der elementaren Biegelehre auf ganz anderem Wege für die aus Querkraft resultierenden Schubspannungen beim Balken mit rechteckigem Querschnitt. In der Tat bedeutet ja der Übergang auf  $\alpha \rightarrow 0$ , daß  $a \gg 1/\alpha$  wird, d.h. daß die Schweißnaht zu einem Balken "degeneriert".

Die Lösung der Dgl. 6.23 ist im Anhang in Abschnitt 9.5, S.142, im einzelnen dargestellt. Man erhält Kombinationen von Hyperbelfunktionen mit  $\alpha$  und  $\alpha$  als Parametern. Die Lösung ist sehr unübersichtlich, wenn man sie explizit hinschreibt, sie läßt sich aber vereinfachen, wenn man nicht nur  $\xi$  sondern auch  $1-\xi$  als Veränderliche benutzt. So erhält man:

$$F_1 = \frac{B}{\alpha^2} + \frac{1}{N} \left[ \left(1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2}\right) \cdot f(\xi) - \frac{B}{\alpha^2} \cdot f(1-\xi) \right] \quad (6.24)$$

mit

$$N = 2(1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha \left( \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} \right) \quad (6.25)$$

und

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \operatorname{ch} \alpha (1-\xi) + \operatorname{ch} \alpha (1-\xi) - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha \xi \\ & - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha \xi + \frac{\alpha}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha \xi + \frac{\alpha}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha \xi \end{aligned} \quad (6.26)$$

Für  $f(1-\xi)$  ist  $\xi$  in  $f(\xi)$  einfach jeweils durch  $1-\xi$  zu ersetzen. Im Anhang sind auf S.144 auch noch die entsprechenden Ausdrücke für  $F_1'$  aufgeführt.

Durch Grenzübergang  $\alpha \rightarrow \infty$  läßt sich Gl. 6.24 auf (2.6), die Lösung der Dgl. 2. Ordnung reduzieren, wofür man zweckmäßig zuvor Zähler und Nenner durch  $\alpha \operatorname{sh} \alpha$  dividiert.

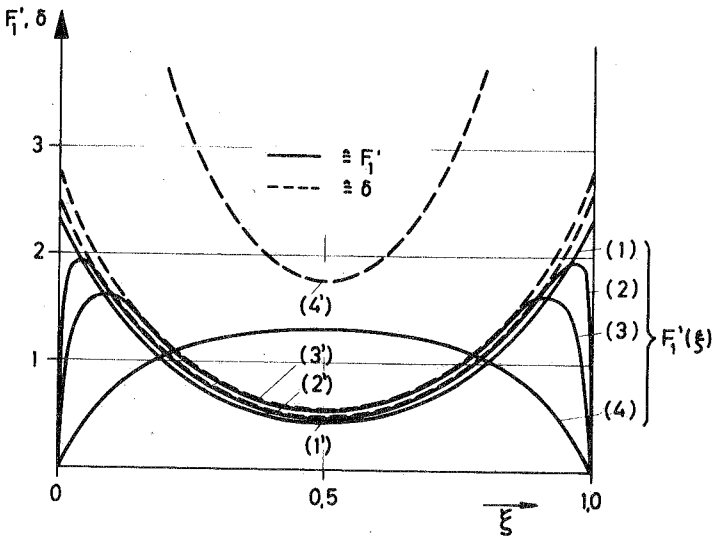
Da die Verschiebung nicht mehr direkt proportional der Schubkraft in der Naht ist, muß sie gesondert ausgerechnet werden. Zur Verdeutlichung des Einflusses von  $\alpha$  bezieht man sie am besten auf die Einheitsverschiebung  $\Delta \bar{u} = P/4 \llcorner \llcorner$  der einfachen

Theorie. Im Anhang ist auf S.145 gezeigt, wie sich

$$\sigma = \frac{\Delta u}{\Delta \bar{u}} = F_1' - \frac{1}{\kappa^2} F_1''' \quad (6.27)$$

ergibt. Wie man sieht, geht die Beziehung für wachsendes  $\kappa$  in die der einfachen Theorie über.

Um den Einfluß von  $\kappa$  zu veranschaulichen, ist in Bild 6.6 der Verlauf der Schubkraft und der Verschiebung für eine Flanken-nahtverbindung aufgetragen. Die Berechnungswerte sind die gleichen wie bei Bild 2.2 (S.19). Bei kleinen  $\kappa$ -Werten sind die Schubspannungsspitzen sehr ausgerundet, obwohl die Verschiebungen groß sind. Interessant ist der Verlauf von  $\tau$  bei  $a = 10$  cm,

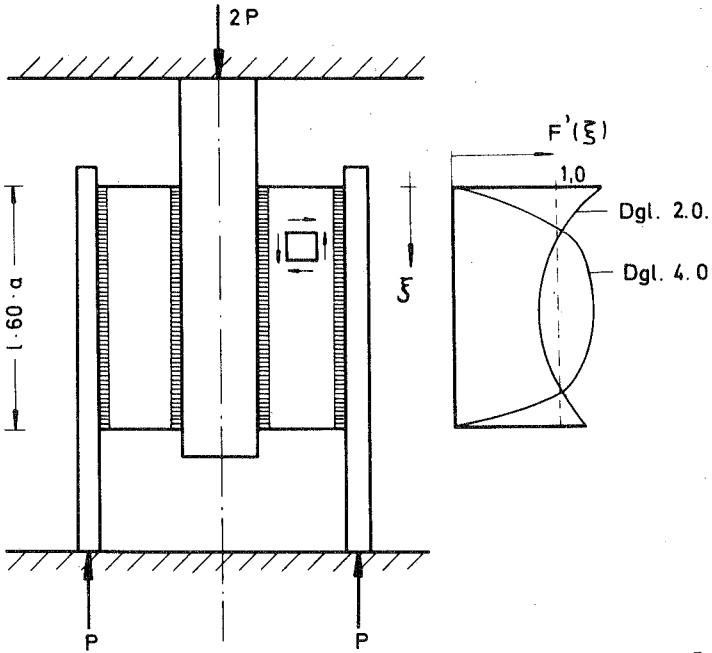


- (1):  $F_1'$ , Dgl. 2. O. ( $\approx \kappa \rightarrow \infty$ )
- (2):  $a = 0,425$  cm,  $\kappa = 61,249$
- (3):  $a = 1,00$  cm,  $\kappa = 26,031$
- (4):  $a = 10,00$  cm,  $\kappa = 2,603$

Berechnungswerte wie bei Bild 2.2 (S.19)

$b_1 = 7,2$  cm,  $t_1 = 1,0$  cm  
 $b_2 = 5,5$  cm,  $t_2 = 0,6$  cm  
 $t_{..} = 11$  cm,  $k_{..} = 0,2$

Bild 6.6: Einfluß der Schweißnahtdicke auf die Schubverteilung in den Flankenähten nach der Dgl. 4. Ordnung



Berechnungswerte [cm]:

$b_1 = 16$        $t_1 = 2,5$   
 $b_2 = 10$        $t_2 = 2,5$   
 $l_{II} = 24$        $k'_{II} = 0,033$   
 theor. Nahtdicke = 8

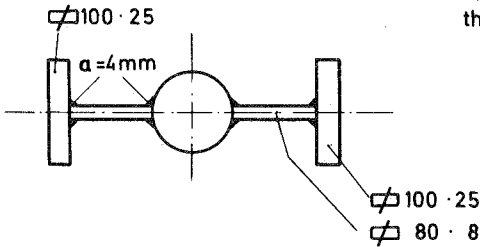


Bild 6.7 : Praktische Anwendung der Dgl. 4. Ordnung auf indirekten Anschluß mit Schott als extrem dicker „Schweißnaht“

der nur noch einen Extremwert in Nahtmitte hat und annähernd parabelförmig ist. Die zugehörigen Verschiebungen an den Nahtenden sind dagegen sehr groß.

Der Fall mit extrem großem  $a$  ist für die Wirklichkeit nicht so bedeutungslos, wie es auf den ersten Blick scheint. Steinhardt berichtet in [19] über eine Konstruktion, bei der zwei Teile nicht unmittelbar durch Flankennähte, sondern über ein Schott verbunden wurden. Er bezeichnet diese Konstruktion als "indirekten Anschluß" und gibt an, daß sowohl Messungen am ausgeführten Bauwerk als auch eine genauere Berechnungsweise eine erhebliche Abminderung der Spannungsspitzen im Vergleich zum direkten Anschluß zeigten. In Bild 6.7 ist die von Steinhardt beschriebene Konstruktion, der von ihm nach der Dgl. 2. Ordnung ermittelte Spannungsverlauf und der nach der Dgl. 4. Ordnung berechnete Spannungsverlauf wiedergegeben. Wie man sieht, ergeben sich nach der Dgl. 4. Ordnung überhaupt keine Spannungsspitzen an den Enden, der Schubspannungsverlauf ist vielmehr schon weitgehend an den eines durch Querkraft belasteten Balkens angeglichen.

### 6.3 Grundgedanken des Näherungsverfahrens

Die Lösung der Differentialgleichungen für die Kraftverteilung in Kehlnahtverbindungen (Dgl. 2. Ordnung s. Abschnitt 2.2, Dgl. 4. Ordnung s. Abschnitt 6.2) erfolgte unter der Annahme konstanter Spannungsverteilung über die Querschnitte. Es sei zunächst untersucht, welche Form die Differentialgleichungen erhalten, wenn man von dieser Annahme abgeht. Da, wie gezeigt wurde, durch den Grenzübergang  $\alpha \rightarrow \infty$  die Dgl. 4. Ordnung stets in die 2. Ordnung überführt werden kann, wird im folgenden nur noch die umfassendere Darstellung mit der Dgl. 4. Ordnung verwendet.

Im allgemeinen Fall ist die relative Verschiebung der verbundenen Teile von der Dehnungsverteilung an den Rändern abhängig. Man hat also



für den Rand des Bleches

für den Rand der Lasche

$$u_{R1} = \int_0^x \varepsilon_{xR1} dx$$

$$u_{R2} = \int_0^x \varepsilon_{xR2} dx + u_{R2} \Big|_{x=0} = 0$$

Mit

$$\varepsilon_{xR} = \frac{1}{E} (\sigma_{xR} - \mu \sigma_{yR})$$

wird dann

$$\Delta u = u_{R1} - u_{R2} = \frac{1}{E} \int_0^x [(\sigma_{xR1} - \sigma_{xR2}) - \mu(\sigma_{yR1} - \sigma_{yR2})] dx - u_{R2} \Big|_{x=0}$$

Durch Gleichsetzen mit (6.22), einmaliges Differenzieren und Einführen von  $T(x) = dP_1/4 dx$ , was wegen des Gleichgewichts immer noch gilt, erhält man

$$\frac{1}{4k_{//}} \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - \frac{1}{4k_{//}} \frac{a^2}{4(1+\mu)} \frac{d^4 P_1(x)}{dx^4} = \frac{1}{E} [(\sigma_{xR1} - \sigma_{xR2}) - \mu(\sigma_{yR1} - \sigma_{yR2})]$$

Weiterhin mit  $x = \xi l_{//}$ ,  $P_1/P = F_1$  und Ordnen nach  $F_1$

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^4 F_1}{d\xi^4} = 4k_{//} l_{//}^2 [(\sigma_{xR1} - \sigma_{xR2}) - \mu(\sigma_{yR1} - \sigma_{yR2})] \quad (6.28)$$

Es liegt also jetzt eine Differentialgleichung mit veränderlicher rechter Seite vor. Die rechte Seite ist aber nicht direkt funktional von  $x$  abhängig, sondern wird von der Lösung beeinflusst, da die Verteilung der  $\sigma_{xR}$  und  $\sigma_{yR}$  von der Randschubverteilung abhängt, die ihrerseits der 1. Ableitung der Lösung proportional ist. Die Abhängigkeit der Randspannungen von der Randschubverteilung läßt sich exakt nur über eine Lösung der Airyschen Spannungsfunktion angeben. Da diese Beziehungen naturgemäß sehr kompliziert sind, wie der Fourieransatz für die Lasche in Abschnitt 6.1 gezeigt hat, ist eine explizite Lösung der Dgl. 6.28 nicht möglich.

Für die numerische Lösung bietet sich ein iterativer Weg an, der aus folgenden Schritten besteht:

- 1.) Man nimmt eine Randschubkraft-Verteilung an, die die Gleichgewichtsbedingung  $4 \int_{\frac{1}{2}}^1 T(x) dx = P$  erfüllt.
- 2.) Man berechnet die Randspannungen in Lasche und Blech unter dieser Randschubkraft-Verteilung. Damit ist die rechte Seite der Dgl. 6.28 als Funktion von  $x$  bekannt.
- 3.) Man löst die Differentialgleichung, woraus sich eine neue Randschubkraft-Verteilung ergibt.
- 4.) Man prüft, wie weit die neue Randschubkraft-Verteilung von der alten abweicht und beginnt einen neuen Zyklus bei 2.). Stimmen die beiden Verteilungen innerhalb einer festzulegenden Fehlergrenze überein, dann ist die Iteration beendet.

So einfach diese Grundkonzeption ist, ihre rechnerische Durchführung erfordert einen beträchtlichen Aufwand an numerischer Mathematik, da sämtliche Funktionen nur diskret angegeben werden können und durchweg finite Lösungsmethoden verwendet werden müssen. In diesem Zusammenhang zeigt sich der große Vorteil der dimensionslosen Schreibweise der bisher abgeleiteten Gleichungen: Die Funktion für die Kraft im Blech " $F_1$ " z.B. darf nur Werte zwischen 0 und +1 annehmen. Die Veränderliche  $\xi$  liegt ebenfalls stets zwischen 0 und +1, andere Bereiche interessieren nicht. Die Werte der Funktionen  $F_1'$  und auch der Spannungen bewegen sich in von vorneherein überschaubaren Grenzen, so daß gröbere Fehler frühzeitig erkannt werden können.

Zwei Probleme, die bisher übergangen wurden, treten bei dem skizzierten Lösungsweg noch auf. Das eine betrifft die Spannungsberechnung im Blech, das andere die Übergangsbedingung in der Stirnnaht bei kombinierten Verbindungen.

Die in Abschnitt 6.1 behandelte Berechnung der Spannungen in der Lasche ist relativ einfach und übersichtlich, da die Kräfte an den Rändern angreifen. Beim Blech jedoch greifen die Kräfte im Inneren an. Bekanntlich bereitet die Lösung solcher scheibentheoretischer Aufgaben große Schwierigkeiten, im Schrifttum sind in der Regel nur Einzelkräfte behandelt, die auf einer Symmetrieachse angreifen (s. z.B. [24]). Am ehesten ließe sich das Problem vielleicht angehen, indem man das von Timoshenko ([22], S.91) vorgeschlagene Einflußlinienkonzept für den Einzel-

kraftangriff in der unendlichen Scheibe verwendet. Man müßte die von den Schweißnähten übertragene Schubkraftverteilung in eine Kette von Einzelkräften auflösen und die an den freien Rändern des Bleches auftretenden Restspannungen mit umgekehrtem Vorzeichen auf einen Scheibenstreifen ansetzen, wie er in Abschnitt 6.1 behandelt wurde. Obendrein müßten noch die am freien Blechende vorhandenen Restspannungen kompensiert werden. Wie man sieht, würde selbst bei einer elektronischen Berechnung schon das Programm einen sehr großen Aufwand erfordern. Um wenigstens annähernd die Ungleichförmigkeit der Längsspannungsverteilung auch im Blech erfassen zu können, wurde es ebenfalls als Scheibenstreifen unter Kraftangriff an den Rändern behandelt, jedoch wurden die resultierenden  $\sigma_x$ -Spannungen auf eine größere Breite reduziert. Das Gesetz der Veränderlichkeit der "mitwirkenden Blechbreite" ( $b_1'$ ) wurde in Anlehnung an die spannungsoptischen Versuche (Kapitel 4) entwickelt.

Die Auswertung der 1. Gruppe von Versuchen hatte ergeben, daß der Längsspannungszustand im Blech etwa in der Entfernung  $l// + (b_1 - b_2)$  vom freien Blechende gleichförmig ist, d.h. daß dort die volle Blechbreite als mitwirkend eingesetzt werden kann. Somit ist eine Bedingung für  $b_1'(x)$

$$b_1'(x = l// + b_1 - b_2) = b_1$$

Der Anfangswert von  $b_1'$  ist offensichtlich gleich der Laschenbreite zu setzen, also

$$b_1'(x = 0) = b_2$$

Mehrere Proberechnungen ergaben, daß eine Sättigungskurve am anpassungsfähigsten ist:

$$b_1' = a_0 + a_1(1 - e^{-82x}) \quad (6.29)$$

Diese Beziehung enthält noch einen dritten freien Parameter, so daß auch noch eine dritte Bedingung zur Festlegung der Kurvenform zur Verfügung stehen muß, wofür am besten die Anfangssteigung benutzt wird, die man in anschaulichen Zusammenhang mit dem

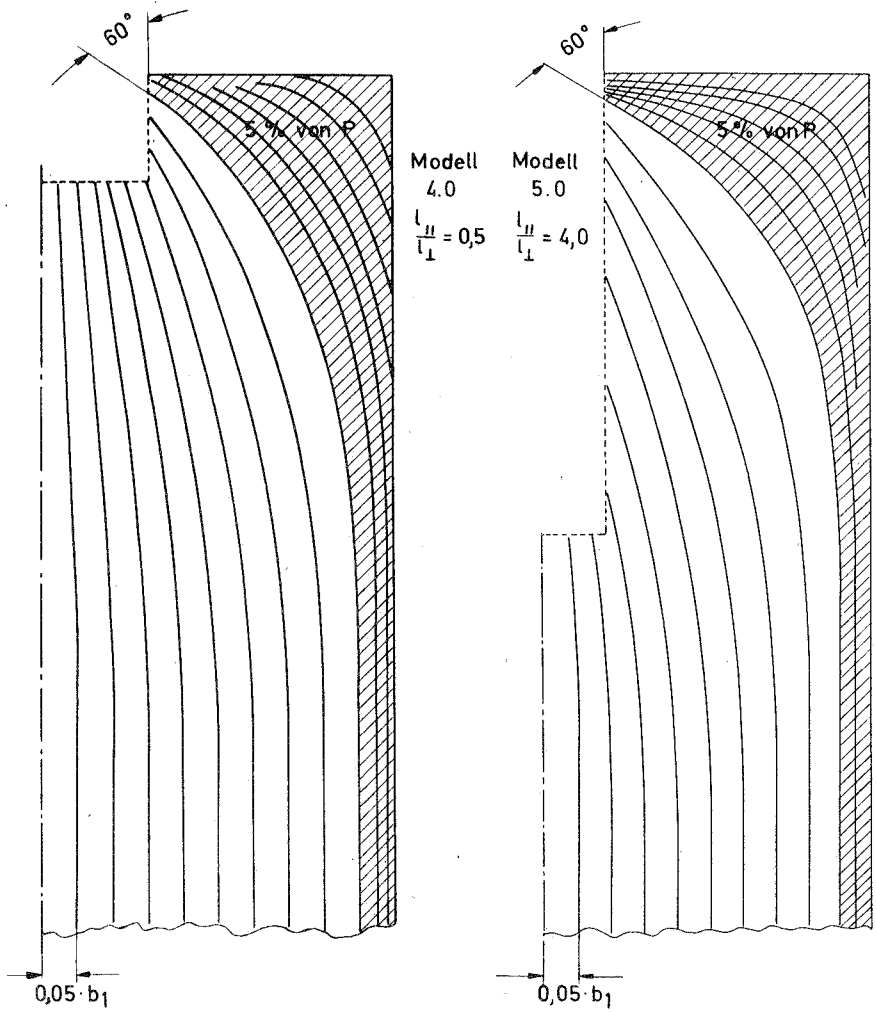


Bild 6.8 :

Trajektorienbilder zweier  
Verbindungen mit breiten Blechen

Trajektorienbild bringen kann (Bild 6.8). Man kann ja, wenn man die Trajektorien so zeichnet, daß sie in gleichen Abständen von einem Gebiet konstanter Spannungsverteilung ausgehen, die Fläche zwischen zwei Trajektorien als "Schlauch" konstanten Kraftflusses auffassen; denn ein Kraftübergang zwischen den Schläuchen ist nicht möglich, weil die Schubspannungen in Richtung der Trajektorien Null sind. Betrachtet man die Trajektorienbilder in Bild 6.8 unter diesem Gesichtspunkt, dann wird deutlich, daß die freie Ecke des Bleches vom Kraftfluß überhaupt nicht erfaßt wird. Das Trajektorienpaar, außerhalb dem weniger als 10% der Kraft liegen, läuft unter einem Winkel von ca.  $60^\circ$  auf das Schweißnahtende zu. Die Anfangssteigung der Funktion  $b_1'(x)$  wurde daher normalerweise zu  $2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \approx \pi$  gewählt. In Abschnitt 7.4 sind jedoch auch Beispiele mit unterschiedlichen Anfangssteigungen aufgeführt, wie sich zeigt, ist der Einfluß auf die endgültige Kraftverteilung gering.

Bei der Berechnung des Kraftanteils der Stirnnaht von kombinierten Verbindungen nach der einfachen Theorie wurde die Übergangsbedingung zwischen Flankennahtende und Stirnnaht direkt mit  $\Delta u_{//} = \Delta u_{\perp}$  angesetzt. Das war möglich, weil konstante Spannungsverteilung über die Querschnitte angenommen wurde, so daß die Endverschiebung über die Breite konstant war. Rechnet man jedoch mit einer ungleichförmigen Längsspannungsverteilung, dann erfährt das Laschenende eine Verwölbung, die eine unterschiedliche Beanspruchung der Stirnnaht bedingt. Man kann diese Verwölbung durch Integration der Dehnungen berechnen und erhält (s. Anhang S.147)

$$u_0(y) = \frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left[ c_{1n} \alpha_n^2 (\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h_2} - \operatorname{ch} \alpha_n y) \right. \\ \left. + c_{4n} \alpha_n (2 \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{h_2} - 2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n \frac{b}{h_2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{h_2} - \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y) \right] \quad (6.30)$$

Wenn die Stirnnaht unterschiedlich beansprucht wird, dann sind auch die  $\sigma_x$ -Spannungen aus der Stirnnaht ungleichförmig über die Laschenbreite verteilt. Da man damit rechnen kann, daß sich die Ungleichförmigkeit in einiger Entfernung von der Stirnnaht ausgeglichen hat, wurde in der Näherungsberechnung das  $\Delta u_0(y)$

durch ein über die Laschenbreite konstantes  $\Delta \bar{u}_0$  ersetzt (Einzelheiten s. Anhang S.148).

Für die Kontinuität beim Übergang von der Stirnnaht zum Laschenende sind also zwei Anteile der Laschenverschiebung zu berücksichtigen: a) das aus der Verformung der Flankennähte entstehende  $\Delta u_{//}$  und b) der Verwölbungsanteil  $\Delta \bar{u}_0$ . Somit lautet die Übergangsbedingung für die Stirnnaht

$$\Delta u_1 = \Delta u_{//} + \Delta \bar{u}_0$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Beziehungen läßt sich daraus der Kraftanteil der Stirnnaht berechnen (s. Anhang S.148). Man erhält

$$1 - F_1 \Big|_{\xi=1} = \Delta \bar{u}_0' 2 b_2 k_1' - \frac{b_2 k_1'}{2 l_{//} k_{//}'} \frac{1}{\alpha^2} F_1''' \Big|_{\xi=1} \quad (6.31)$$

Diese Bedingung, in die außer der Ableitung  $F_1'''$  am Flanken-nahtende über  $\Delta \bar{u}_0'$  auch die Spannungsverteilung entlang der ganzen Lasche eingeht, läßt sich wiederum nur iterativ erfüllen.

#### 6.4 Die elektronische Berechnung

Die Rechenprogramme wurden stufenweise mit dem Fortschreiten der spannungsoptischen Versuche und ihrer theoretischen Deutung entwickelt. So entstanden zunächst Programme zur Auswertung der formelmäßigen Lösung der Dgl. 2. Ordnung für reine Flankennaht- und für kombinierte Verbindungen, dann zur numerischen Lösung der Dgl. 2. Ordnung bei veränderlicher Blechbreite und zur Auswertung der formelmäßigen Lösung der Dgl. 4. Ordnung. Alle diese Probleme wurden im Maschinencode auf einer Zuse Z22 programmiert. Als die hier beschriebene theoretisch umfangreichere Lösung in Angriff genommen wurde, erwies sich jedoch die Z22 als zu langsam für die vielen Operationen im Zusammenhang mit den Fourieranalysen und Reihenberechnungen, die in jedem Iterationszyklus wiederholt werden müssen. Die in Abschnitt 6.3 skizzierte iterative Lösung wurde daher auf der sehr viel

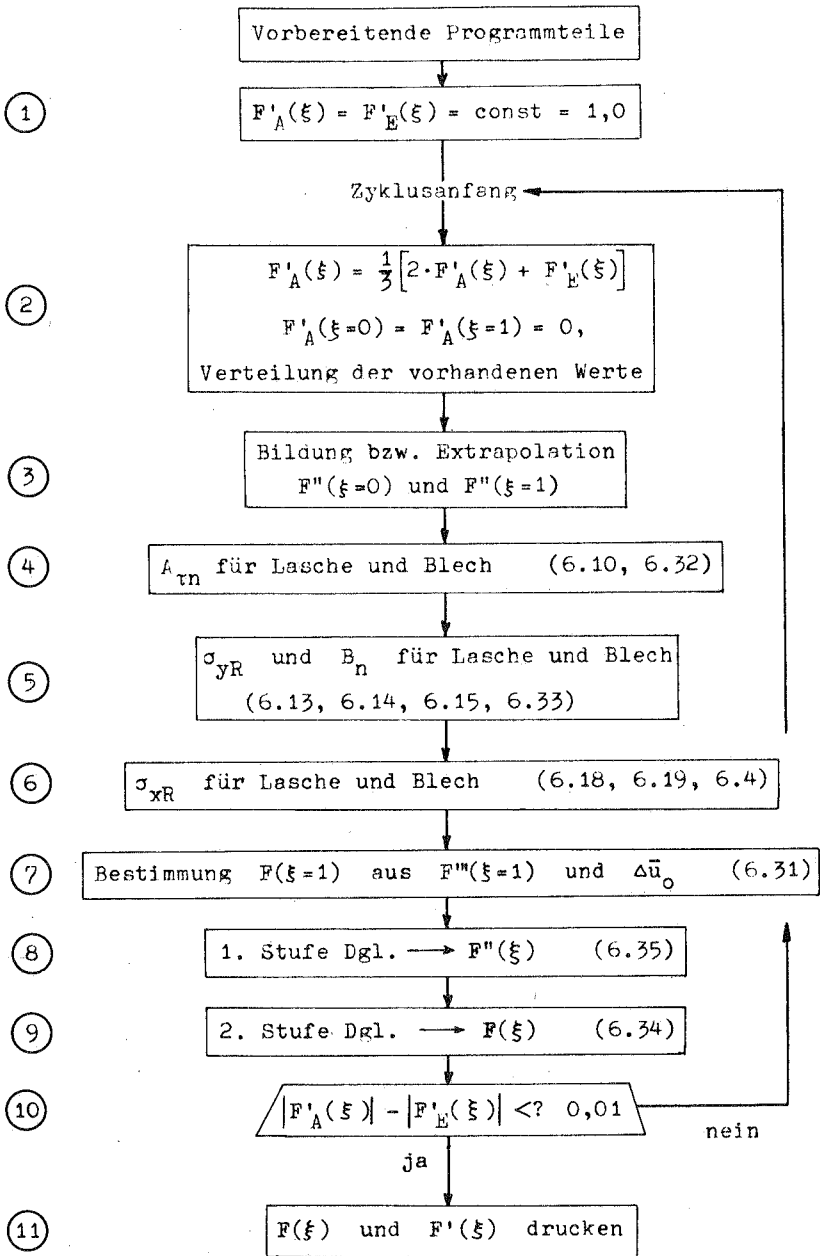


Bild: 6.9: Ablaufdiagramm der iterativen Lösung

schnelleren Telefunken Rechenmaschine TR 4 in Algol programmiert.

Es erübrigt sich, die Programme zur Auswertung der formelmäßigen Lösung im einzelnen zu besprechen. Bei der iterativen Näherungslösung treten jedoch einige Probleme auf, die einer Erläuterung bedürfen. Um eine Übersicht des Ablaufs der Näherungslösung zu geben, ist in Bild 6.9 ein vereinfachtes Flußdiagramm aufgezeichnet, wobei vorausgesetzt ist, daß die vorbereitenden Operationen, wie Daten-Einlesen und Berechnung der Konstanten, bereits erledigt sind. Einzelheiten der Organisation sind aus dem Abdruck des Algol-Programmes ersichtlich, das im Anhang ab S.149 wiedergegeben ist.

Im folgenden werden die im Programmablauf verwendeten finiten Verfahren aufgezählt und erläutert:

1.) Die Differentiation einer gegebenen Funktion.

Die finite Differentiation ist erforderlich, da bei der Lösung der Differentialgleichung 6.28  $F(\xi)$  anfällt, im nächsten Rechnungsgang jedoch  $F'(\xi) \sim T(\xi)$  gebraucht wird. Die Matrix der Stützwertfaktoren für  $F'(\xi)$  ist nachstehend aufgeführt, wobei die Stellen, für die  $F'$  berechnet wird, mit einem Stern versehen sind. Es wurden fünf Stützstellen benutzt.

$$F'(\pi) = \frac{1}{12 \Delta \xi} \cdot \underbrace{\begin{array}{ccccc} \star & & & & \\ -25 & +48 & -36 & +16 & -3 \\ & \star & & & \\ -3 & -10 & +18 & -6 & +1 \\ & & \star & & \\ +1 & -8 & --- & +8 & -1 \\ & & & \star & \\ -1 & +6 & -18 & +10 & +3 \\ & & & & \star \\ +3 & -16 & +36 & -48 & +25 \end{array}} \cdot F_1$$

Da die Fehlerabschätzung mit Hilfe des Taylor-Restgliedes zwar exakt aber wenig anschaulich ist, wurden diese Formeln mit  $\Delta \xi = 0,05$  anhand der sin- und cos-Funktionen überprüft. Es ergab sich eine Übereinstimmung auf mindestens fünf Stellen.



2.) Die Integration einer gegebenen Funktion, die zur Bildung von  $F(\xi)$  aus dem randkorrigierten  $F'(\xi)$  gebraucht wird, wurde nach der Simpson-Regel durchgeführt, wobei jedoch zusätzlich besondere Anfangs- und Endformeln benutzt wurden (Einzelheiten siehe 'PROCEDURE' INTEGRATION des Algol-Programms).

3.) Die numerische Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$A_{rn}$  und  $B_n$  erfolgte nach dem von Zurmühl [25], S.317 ff., angegebenen "Schemaverfahren", wobei jedoch im vorliegenden Fall wegen der Abhängigkeit der Periodenlänge  $L$  von  $l_{//}$  und  $b_2$  bei gleichzeitigem Bezug der gesamten Berechnung auf  $l_{//}$  als Einheitslänge die Anzahl der Streifen  $N$  nicht allein von  $\Delta\xi$  abhängt. Nach Abschnitt 6.3 ist  $L = 4(l_{//} + b_2)$ . Damit wird

$$N = \frac{L}{\Delta x} = \frac{L}{\Delta\xi l_{//}} = \frac{4(l_{//} + b_2)}{\Delta\xi l_{//}} = \frac{4}{\Delta\xi} \left(1 + \frac{b_2}{l_{//}}\right)$$

Wegen der Symmetrie und Antimetrie der gegebenen Funktionen ( $F_1'(\xi)$  und  $\sigma_{yR}$ , s. Bild 6.3, S.68) zu  $L/2$  und  $L/4$  bzw. umgekehrt, braucht man zur Berechnung der Fourierkoeffizienten nur den Bereich  $0 \leq x \leq L/4$  heranziehen. Da außerdem die Funktionen außerhalb der Flankennähte Null sind, wird schließlich

$$(4 t_2 l_{//}) A_{rn} = \frac{3}{N} \sum_{j=0}^{j_{1//}} F_1'(\xi_j) \cos n\lambda\xi_j$$

mit

$$\lambda = \frac{\pi/2}{1 + b_2/l_{//}}$$

$N$  eingesetzt ergibt

$$(4 t_2 l_{//}) A_{rn} = \frac{2\Delta\xi}{b_2} \sum_{j=0}^{j_{1//}} F_1'(\xi_j) \cos n\lambda\xi_j \quad (6.32)$$

Analog erhält man

$$B_n = \frac{2\Delta\xi}{b_2} \sum_{j=0}^{j_{1//}} \sigma_{yR}(\xi_j) \sin n\lambda\xi_j \quad (6.33)$$

Wegen der häufigen Durchführung des Schemaverfahrens und der Reihenbildung in der iterativen Berechnung wurden zur Einsparung von Rechenzeit die Werte  $\cos n\lambda\xi_j$  und  $\sin n\lambda\xi_j$  tabelliert (Programmteil "TABCOS UND TABSIN").

4.) Die Lösung der Dgl. 4. Ordnung (6.28) wurde in zwei Stufen nach dem Mehrstellenverfahren [25], S.442 ff., durchgeführt. In vereinfachter Form schreibt sich (6.28):

$$\frac{d^4 F}{d\xi^4} - \alpha^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} = r(\xi)$$

Mit der Substitution

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} = Z(\xi) \quad (6.34)$$

wird (6.28)

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} - \alpha^2 Z = r(\xi) \quad (6.35)$$

In den Gleichungen (6.34) und (6.35) stehen nunmehr zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Verfügung, die sich mit Hilfe des Mehrstellenverfahrens einfach lösen lassen. Der allgemeine Typ der Dgl. ist

$$y'' + p(\xi)y = r(\xi)$$

Bei Benutzung von drei Stützstellen ist die zugehörige Mehrstellenformel

$$(12 + h^2 p_1) y_1 + (-24 + 10 h^2 p_2) y_2 + (12 + h^2 p_3) y_3 = h^2 r_1 + 10 h^2 r_2 + h^2 r_3 \quad (6.36)$$

Dabei ist für die erste Stufe

$$p(\xi) = \text{const} = -\alpha^2 \quad \text{und} \quad r(\xi) = -\alpha^2 4 k // 1 //^2 (\alpha_{xR1} - \alpha_{xR2}) - u(\alpha_{yR1} - \alpha_{yR2})$$

Für die zweite Stufe ist  $p(\xi) = \text{const} = 0$  und  $r(\xi) = Z(\xi)$ .

Wie man sieht, ergibt die Mehrstellenformel (6.36) ein dreigliedriges Gleichungssystem, das sich bekanntlich besonders schnell lösen läßt.

Eine einstufige Lösung der Dgl. 6.28 würde auf ein mindestens 5-gliedriges Gleichungssystem führen und außerdem besondere Randformeln erfordern, was einen entsprechend größeren Programmier- und Rechenzeitaufwand zur Folge hätte. Deshalb wurde die zweistufige Lösung vorgezogen. Eine besondere Schwierigkeit bereitete dabei allerdings die Einarbeitung der Randbedingungen für  $F'(\xi)$ . Während die Bedingungen  $F(\xi=0) = 0$  und  $F(\xi=1) = 1 - P_1/P$  sich als Randwerte für  $F(\xi)$  in die zweite Lösungsstufe einfügen, fehlen für die erste Stufe die entsprechenden Bedingungen für  $Z(\xi)$ , weil die 3. und 4. Randbedingung mit  $F'(\xi=0) = F'(\xi=1) = 0$  gegeben sind. Da die gesamte Lösung aber ohnehin iterativ aufgebaut ist, wurde diese Schwierigkeit dadurch umgangen, daß die Werte für  $Z(\xi=0)$  und  $Z(\xi=1)$  zunächst angenommen und bei jedem Iterationszyklus auf  $F'(\xi=0) = F'(\xi=1) = 0$  hin linear extrapoliert wurden.

Weitere Schwierigkeiten verursachte es, die errechnete  $F'(\xi)$ -Verteilung (im folgenden  $F'_{En-1}$  genannt) so mit der im folgenden Zyklus anzunehmenden  $F'(\xi)$ -Verteilung ( $F'_{An}$ ) zu verknüpfen, daß eine möglichst schnelle und stabile Konvergenz des Iterationsprozesses erzielt wurde. Beim Experimentieren mit verschiedenen Beziehungen zwischen  $F'_{An}$  und  $F'_{En-1}$  zeigte sich, daß bei der normalerweise verwendeten Schrittweite  $\Delta\xi = h = 0,05$  die Iteration divergierte, sobald die  $\alpha$ -Werte der Gl. 6.28 die Größenordnung 50 überschritten. Das läßt sich daraus erklären, daß bei diesen  $\alpha$ -Werten die Glieder  $h^2 p_1$  und  $h^2 r_1$  der Mehrstellenformel (6.36) in die Größenordnung der Konstanten dieser Formel kommen. Bei konvergenter Iteration hängt die Anzahl der zur Konvergenz notwendigen Zyklen von der gewählten Genauigkeitsschranke ab. Sie wurde zu 0,01, d.h. also 1% des Mittelwertes der Funktion  $F'(\xi)$ , festgelegt. Alle im folgenden erwähnten Zyklenzahlen ergaben sich bei dieser Schranke von 0,01.

Als erste Beziehung zwischen  $F'_{An}$  und  $F'_{En-1}$  wurde die nahe-  
liegende direkte Übernahme der errechneten Werte nach der  
Formel  $F'_{An} = F'_{En-1}$  (a) erprobt. Sie führte zur Divergenz  
der Iteration sogar bei  $\alpha$ -Werten um 20. Eine Mittelung nach  
der Beziehung  $F'_{An} = \frac{1}{2}(F'_{An-1} + F'_{En-1})$  (b) brachte bei klei-  
nen  $\alpha$ -Werten nur sehr langsame Konvergenz (ca 30 Zyklen), bei  
großen  $\alpha$ -Werten divergierte die Iteration.

Als nächstes wurde eine systematische Extrapolation erprobt,  
welche anhand von Bild 6.10 erläutert sei: Setzt man einen ste-  
tigen Zusammenhang zwischen den jeweils angenommenen und den  
errechneten  $F'(\xi_1)$ -Werten an, dann ist der Schnittpunkt der  
Geraden  $F'_E = F'_A$  mit der Funktion  $F'_E = f(F'_A)$  der richtige  
Wert der Randschubkraft an der Stelle  $\xi_1$ . Die Funktion  
 $F'_E = f(F'_A)$  wird dabei aus den in den zwei vorhergehenden Zyklen  
benutzten und errechneten Werten linear extrapoliert nach der  
Formel

$$F'_{An} = \frac{F'_{An-1} - C \cdot F'_{En-1}}{1 - C} \quad (c) \quad \text{mit } C = \frac{F'_{An-1} - F'_{An-2}}{F'_{En-1} - F'_{En-2}}$$

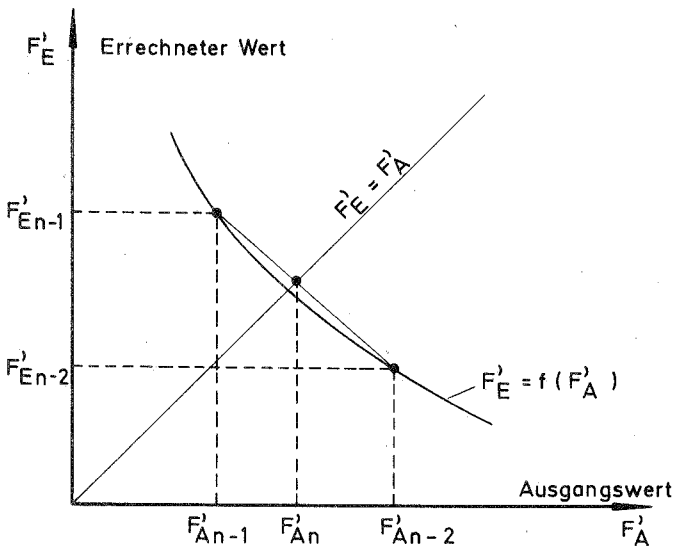


Bild 6.10: Lineare Extrapolation der Ausgangswerte  $F'_A(\xi_1)$

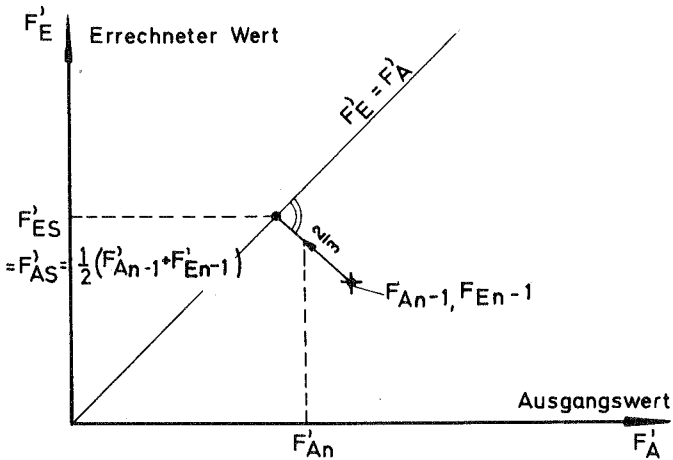


Bild 6.11: Gezielte Extrapolation der Ausgangswerte  $F'_A(\xi_i)$

Diese Methode erbrachte trotz der komplizierteren Formel langsamere Konvergenz als die einfache Mittelung nach (b). Die Untersuchung der Funktionswerte der einzelnen Zyklen zeigte die Ursache dieser langsamen Konvergenz: Infolge der durch die endliche Anzahl der Fourierreihen verursachten Welligkeit der Funktion  $F'(\xi)$  lieferte die Extrapolation immer wieder einzelne vom Zielwert stark abweichende Werte, die die  $F'(\xi)$ -Verteilung für mehrere Zyklen verzerrten. Um solche Zufälligkeiten auszuschalten, wurde eine Extrapolationsformel nach Bild 6.11 abgeleitet: Aus dem vorhergehenden Zyklus ist das Wertepaar  $F'_{An-1}, F'_{En-1}$  und somit ein Punkt im  $F'_A, F'_E$ -Koordinatensystem gegeben. Der Zielwert muß wiederum auf der 45°-Geraden liegen. Kürzester Weg zur Geraden  $F'_E = F'_A$  ist die Senkrechte, die Abszisse des Schnittpunktes der Senkrechten mit der Geraden ergibt sich zu  $F'_{AS} = (F'_{An-1} + F'_{En-1})/2$ . Diese Formel entspricht der einfachen Mittelung, die damit eine geometrische Deutung erhält. Ihre Mängel wurden bereits oben erwähnt. Als am brauchbarsten für einen Kompromiß zwischen Stabilität und Geschwindigkeit der Iteration erwies sich schließlich die Beziehung

$$F'_{An} = \frac{1}{3} (2F'_{An-1} + F'_{En-1}) \quad (d)$$

Zeile	Parameter		Anzahl der Iteration.	F <sub>i</sub> (ξ) - Werte an den Stellen ξ =							
	N	Δξ		Schranke	0	0,025	0,050	0,075	0,200	0,300	0,400
1	formelmäßige Lösung		—	0,0000	2,5151	2,5731	2,2377	0,9266	0,4697	0,2698	0,2177
2	b	und t vertauscht	22	0,0000	2,2184	2,5442	2,1994	0,9637	0,5157	0,3133	0,2598
	40	0,025	0,010								
3	20	0,050	0,010	0,0092	—	2,0984	—	0,9984	0,6935	0,5898	0,6191
4	20	0,050	0,001	61 (abgebr.)	-0,0028	—	2,0952	—	0,9948	0,6905	0,6190
5	20	0,025	0,010	52	0,0081	2,1228	2,2190	1,6995	0,9373	0,6835	0,5901
6	40	0,025	0,010	34	-0,0088	2,0648	2,1351	1,7052	0,9100	0,6996	0,6005
7	40	0,025	0,001	61 (abgebr.)	0,0022	2,0626	2,1298	1,7004	0,9059	0,6966	0,5669

Tafel 2: Genauigkeitskontrollen des iterativen Berechnungsverfahrens  
anhand der Daten von Modell 7.1

die sich ergibt, wenn man auf der Senkrechten vom Punkte  $F'_{An-1}$ ,  $F'_{En-1}$  nur  $2/3$  des Weges bis zum Schnittpunkt mit der Geraden  $F'_E = F'_A$  voranschreitet. Man erhält so eine Mittelbildung, bei der den Ausgangswerten doppeltes Gewicht zugewiesen wird, was sich stabilisierend auf den Iterationsprozeß auswirkt.

Für den Fall, daß bei großen  $\kappa$ -Werten die Iteration trotz Verwendung der Beziehung (d) divergierte, wurde statt des Punktes  $F'_{An-1}$ ,  $F'_{En-1}$  der Schwerpunkt der Werte aller vorherigen Zyklen, d.h. also  $\sum_{n=1}^Z F'_{An}/Z$ ,  $\sum_{n=1}^Z F'_{En}/Z$ , als Ausgangspunkt für die Senkrechte auf die Gerade  $F'_E = F'_A$  benutzt. Die Mittelbildung aus allen vorherigen Zyklen bewirkt eine sehr starke Dämpfung, so daß die Iteration zwar sehr langsam, aber auch noch für extrem große  $\kappa$ -Werte sicher konvergiert (z.B. bei Modell 7.0,  $\kappa = 100,22$ ; Anzahl der notwendigen Zyklen 68).

Die Richtigkeit der gesamten Näherungslösung wurde dadurch kontrolliert, daß eine Verbindung konstruiert wurde, in der die normalerweise durch die Näherungslösung erfaßten Einflüsse verschwanden, so daß die iterativ errechnete Lösung mit der formelmäßigen weitgehend übereinstimmen mußte. Diese Einflüsse sind die Veränderlichkeit der Blechbreite und die ungleichförmige Verteilung der Längsnormalspannungen über die Querschnittsbreite. Der erste Einfluß wird ausgeschaltet, wenn man  $b_1 = b_2$  wählt, d.h. daß Lasche und Blech gleich breit sind. Der zweite Einfluß läßt sich am einfachsten dadurch zum Verschwinden bringen, daß man  $b_1$  mit  $t_1$  und  $b_2$  mit  $t_2$  vertauscht. Man hat dann eine Verbindung mit sehr schmalen und dicken Teilen, bei denen sicherlich die Spannungen über die Breite konstant sind. Für diesen Vergleich wurde das auch spannungsoptisch untersuchte Modell 7.1 einer reinen Flankennaht-Verbindung (s. Abschnitt 7.1) herangezogen, da es sich bei der Erprobung der verschiedenen Extrapolationsbeziehungen für  $F'(\xi)$  als kritisch in bezug auf die Konvergenz erwiesen hatte. Das noch kritischere Modell 7.0 wurde für diese Vergleichsrechnungen wegen der großen bis zur Konvergenz notwendigen Zyklenzahlen nicht benutzt. Das Ergebnis des Vergleichs ist in Tafel 2, Zeile 1 und 2, anhand der  $F'(\xi)$ -Werte zu sehen. Größere Abweichungen ergeben sich nur in der Nähe der Enden der Flankennähte, wodurch auch im mittleren

Nahtbereich Differenzen von ca. 5% des Mittelwertes (1,0) auftreten. Die Hauptursache für die Abweichungen ist in der finiten Differentiation zu suchen, die den steilen Anstieg am Flankenende nicht so genau erfassen kann wie die formelmäßige Lösung. Durch Verkleinerung der Schrittweite ließe sich eine beliebig genaue Übereinstimmung der Lösungen erzielen, der dafür erforderliche Mehraufwand an Rechenzeit ist aber angesichts der gegenüber der Wirklichkeit vorhandenen Ungenauigkeiten (s. hierzu Abschnitt 7.1) nicht gerechtfertigt.

Die Genauigkeit der Näherungslösung an sich wurde durch Verkleinerung der Schrittweite  $\Delta\xi$ , Erhöhung der Anzahl der Reihenglieder und Verkleinerung der Konvergenzschranke überprüft. Das Ergebnis dieser Vergleichsrechnungen für Modell 7.1 ist in Tafel 2, Zeile 3 bis 7, wiedergegeben. Die größten Unterschiede treten wiederum an den Nahtenden auf. Die für die graphische Darstellung erforderliche Genauigkeit wird jedoch völlig ausreichend mit  $n = 20$ ,  $\Delta\xi = 0,05$  und der Konvergenzschranke 0,01 gewährleistet.

#### 5.) Die Erfüllung der Übergangsbedingung

$$F_1(\xi=1) = 1 + \frac{b_2 k_1}{2 l // k //} \frac{F_1'''(\xi=1)}{x^2} - \Delta \bar{u}_0 \cdot 2 b_2 k_1' \quad (6.31)$$

am Stirnnahtende der Lasche von kombinierten Verbindungen war in der iterativen Berechnung nur auf indirektem Wege möglich. Allgemeiner geschrieben lautet (6.31):

$$F_1(\xi=1) = 1 - \sigma(\xi=1) \frac{b_2 k_1}{2 l // k //} - \Delta \bar{u}_0 \cdot 2 b_2 k_1'$$

mit

$$\sigma = F_1' - \frac{1}{x^2} F_1'''$$

Wegen der Bedingung  $F_1'(\xi=1) = 0$  ergibt sich dann die zuerst angegebene Form. Da in der finiten Berechnung die Bedingung  $F_1'(\xi=1) = 0$  jedoch nur annähernd erfüllt ist, wird  $F_1''' = (F_1')''$  am Ende der Naht stark verzerrt, in besonders ungünstigen Fällen führt die finite Rechnung sogar auf ein falsches Vorzeichen



für  $F_1'''$ . Wie aus Bild 6.6 hervorgeht (s. S.78), verläuft die Funktion  $\delta(\xi)$  im Gegensatz zu  $F_1'(\xi)$  immer mit stetiger Steigung zum Nahtende hin. Zur Umgehung der oben aufgeführten Schwierigkeiten wurde deshalb bei der Berechnung kombinierter Verbindungen  $\delta$  über vier Stützstellen mit doppelter Schrittweite bis zur Stützstelle  $m-2$  vor  $\xi=1$  ( $\hat{=} m$ ) aus  $F_1'$  und  $F_1'''$  bestimmt und dann parabolisch auf den letzten Wert hin extrapoliert.

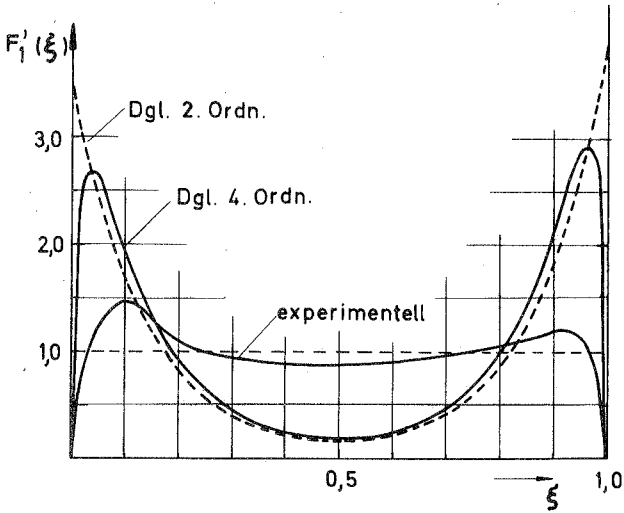


Bild 7.1: Formelmäßig und experimentell ermittelter Schubkraftverlauf bei Modell 7.1

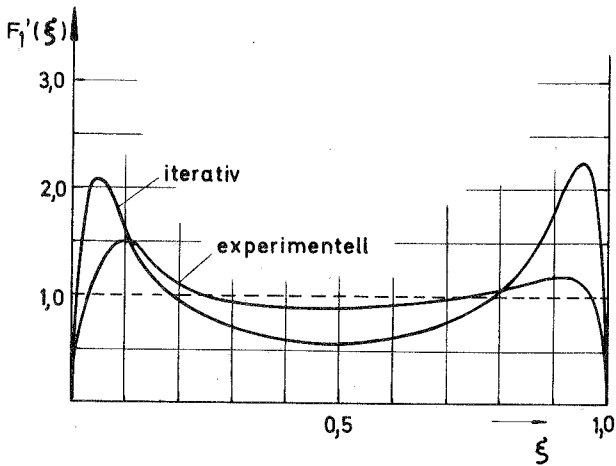


Bild 7.2: Nach iterativer Berechnungsmethode und experimentell ermittelter Schubkraftverlauf bei Modell 7.1

## 7. Ergebnisse der genaueren Berechnung

### 7.1 Vergleich mit spannungsoptischen Versuchen an reinen Flankennahtverbindungen

Nach der Entwicklung der in Kapitel 6 geschilderten genaueren Berechnungsmethode war es angebracht, sie anhand von Versuchen zu überprüfen. Vergleiche mit der 2. Versuchsreihe, bei der die Randschubverteilung in den verspiegelten Laschen ermittelt worden war, ergaben nur unbefriedigende Übereinstimmung: die experimentell ermittelten Randschubverteilungen verliefen wesentlich ausgeglichener als die errechneten. Da alle Modelle der 2. Versuchsserie kombinierte Verbindungen waren, bestand die Möglichkeit, daß die Wirkung der Stirnnaht in der Berechnung nicht korrekt berücksichtigt war. Um einen möglichst eindeutigen Vergleich zwischen Experiment und theoretischer Berechnung zu erreichen, wurden deshalb einige Ergänzungsversuche an reinen Flankennahtverbindungen durchgeführt. Vom Versuch her gesehen haben reine Flankennahtverbindungen den großen Vorteil, daß die Genauigkeit der an den Laschenrändern gemessenen Schubspannungen durch eine Gleichgewichtskontrolle überprüft werden kann, da das Integral der Längsnormalspannungen über den Laschenquerschnitt gleich dem Integral der Schubspannungen entlang der Flankennähte sein muß.

Die Abmessungen der als reine Flankennahtverbindungen untersuchten Modelle sind in Tafel 1, S.28/29 aufgeführt. Diese Ergänzungsversuche vermittelten eine wichtige Erkenntnis über die Kraftübertragung durch Flankennähte, die es ermöglichte, zu einer befriedigenden Korrelation zwischen den Versuchsergebnissen und der theoretischen Berechnung zu kommen.

In den Bildern 7.1 und 7.2 sind der im spannungsoptischen Versuch am Modell 7.1 ermittelten Randschubverteilung in den Laschen jeweils die nach verschiedenen Methoden errechneten Kurven gegenübergestellt. Die experimentelle Bestimmung der Randschubverteilung erfolgte, wie schon teilweise bei der 2. Versuchsserie, graphisch nach dem Schubspannungshügel-Verfahren [14].

Die Kontrolle der Randschubspannungen durch einen Vergleich mit der mittleren Normalspannung (Isochromatenordnung) in einem 8 cm vom Ende des Bleches entfernten Schnitt ergab bei Modell 7.1 einen Fehler von  $-3\%$ . In Bild 7.1 sind die nach der Dgl. 2. Ordnung und der Dgl. 4. Ordnung unter der Annahme einer über die Querschnitte konstanten Normalspannung berechneten Schubverteilungen  $F_1'(\xi)$  in der Flanken-naht eingetragen. Das in der Dgl. 4. Ordnung zur Berechnung von  $\alpha$  notwendige  $a$  wurde dabei gleich der vollen Hypotenusenlänge der tatsächlichen Naht, d.h. also gleich 0,425 cm gesetzt (s. hierzu auch Abschnitt 7.2). Wie man sieht, erbringen die formelmäßigen Lösungen viel zu große Unterschiede zwischen den Minimalwerten im mittleren Nahtbereich und den Spannungsspitzen an den Enden der Naht.

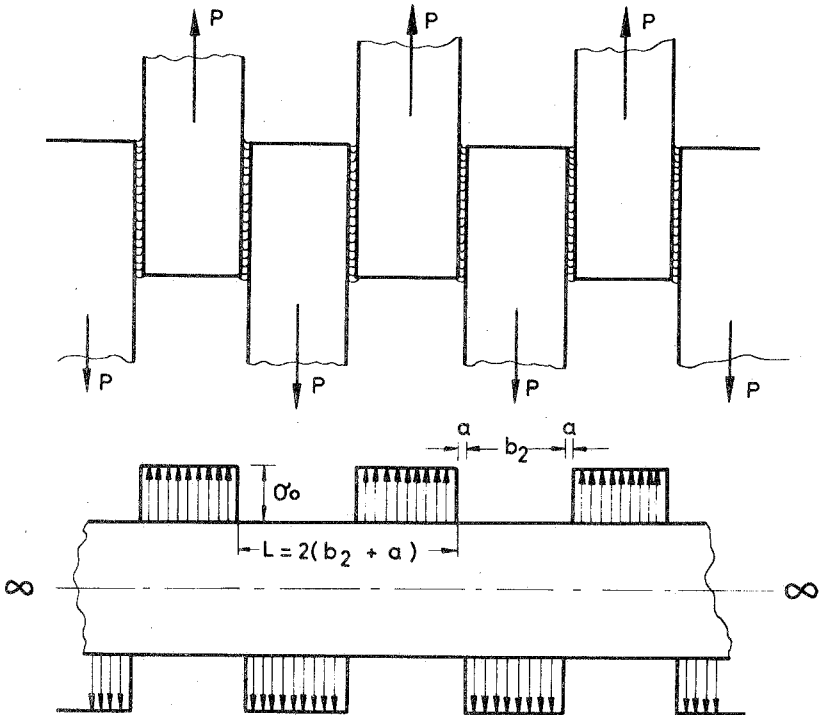
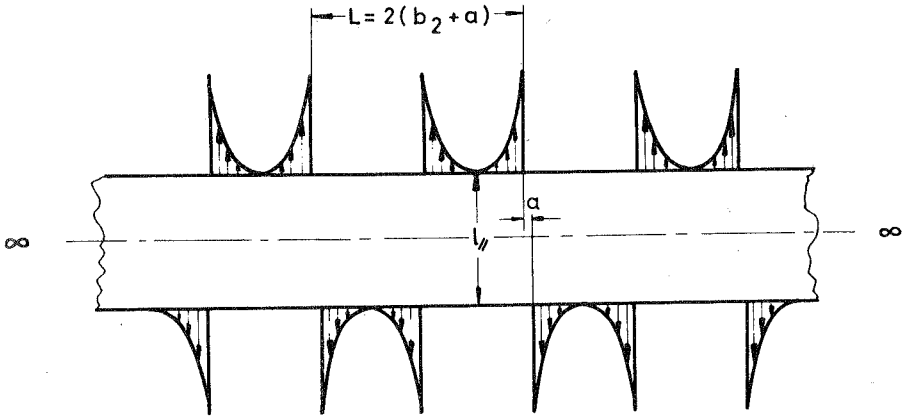


Bild 7.3: Berechnung einer symmetrischen Laschenverbindung als kontinuierliche Scheibe



**Bild 7.4: Berechnung einer symmetrischen Laschenverbindung als unendlicher Scheibenstreifen mit parabolischer Randbelastung**

In Bild 7.2 ist die mit Hilfe der iterativen Berechnungsmethode unter Berücksichtigung der ungleichförmigen Längsspannungsverteilung gewonnene Schubspannung in der Naht neben den experimentellen Ergebnissen aufgetragen. (Die Veränderlichkeit der Blechbreite fällt hier nicht ins Gewicht, da  $b_1 \approx b_2$  ist.) Obwohl die niedrigen Werte im mittleren Nahtbereich annähernd doppelt so hoch sind wie bei den formelmäßigen Lösungen, liegen sie noch um ca. 30% unter den gemessenen Schubspannungen. Diese Diskrepanz läßt sich nur mit einer bisher nicht berücksichtigten Wirkung der Schweißnaht bei der Kraftübertragung erklären. Zur Erläuterung und zum theoretischen Nachweis dieser Wirkung soll Bild 7.3 dienen. Dort ist eine einschnittige symmetrische Laschenverbindung zunächst aufgefalt und zur Erhaltung des Gleichgewichts beiderseits ins Unendliche fortgesetzt. Weiterhin ist gezeigt, wie man dieses System vereinfachend auf den unendlichen Scheibenstreifen mit periodischer Randbelastung zurückführen kann, um die Schubspannungen in den dem Laschenrand entsprechenden Schnitten zu berechnen. Um eine Abschätzung des Einflusses der in Wirklichkeit vorhandenen Ungleichförmigkeit der Längsspannungsverteilung zu erhalten, wurden auch die Schubspannungen in einem nach Bild 7.4 belasteten Scheibenstreifen

berechnet. Die Längsspannungen sind dort parabelförmig mit einem Nullwert in der Laschenachse angesetzt. Alle wirklichen Verteilungen werden irgendwie zwischen den beiden angenommenen Spannungsverteilungen liegen.

In Bild 7.5 sind vier Schubspannungsverteilungen eingezeichnet: (1) die iterative Lösung für Modell 7.1 mit leicht abgewandelten Maßen als symmetrische Laschenverbindung, (2) und (3) die nach Bild 7.3 und 7.4 berechneten Schubspannungsverteilungen, und (4) der experimentell ermittelte Verlauf. Die Kurve (2) hat geringere Spannungsspitzen an den Enden als (1) und liegt im mittleren Nahtbereich nur wenig unterhalb von den experimentell bestimmten Werten (4). Daraus läßt sich schließen, daß die Schweißnaht nicht nur als Schubkräfte übertragendes Element zwischen den Laschen wirkt, sondern diese gleichzeitig zu einer scheibenartigen Einheit verbindet. Es spricht nicht gegen diese Schlußfolgerung, daß im mittleren Nahtbereich die Kurve (3)

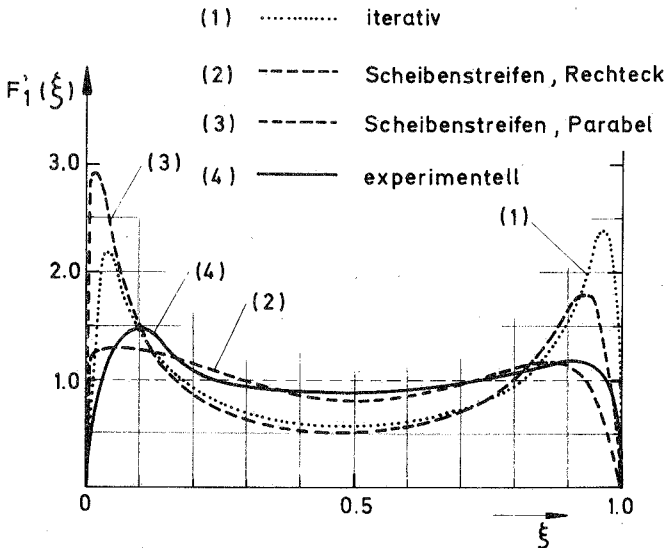
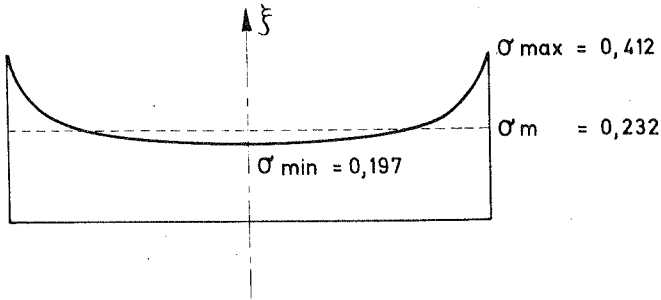


Bild 7.5 : Vergleich der nach verschiedenen Methoden bestimmten Randschubverteilungen der Lasche von Modell 7.1



**Bild 7.6: Berechnete Längsnormalspannungs -  
verteilung in der Lasche von Modell 7.1  
im Schnitt  $\xi = 0$**

unterhalb der aus der iterativen Berechnung gewonnenen Kurve (1) liegt, da der Längsnormalspannungsverlauf in dem Laschenschnitt, der mit dem Ende des Bleches zusammenfällt ( $\xi=0$ ), für Modell 7.1 einer Rechteckverteilung wesentlich näher kommt, als der als Extremfall angenommenen Parabelverteilung, wie Bild 7.6 beweist.

Wie stark die zusätzliche Koppelungswirkung der Schweißnaht ist, wird u.a. von dem Verhältnis Schweißnahtdicke/Laschendicke abhängen (s. hierzu Abschnitt 7.2). Der nach Bild 7.3 bzw. 7.4 berechnete Schubspannungsverlauf wird immer die obere Grenze, der nach der Dgl. 4. Ordnung berechnete die untere Grenze der Koppelungswirkung darstellen. Eine exakte Berechnung, die auch diese Wirkung der Schweißnaht erfaßt, müßte die Schweißverbindung als zusammenhängendes (räumliches) Scheibentragwerk behandeln, das entlang einzelner Streifen - den Schweißnähten - abweichende Steifigkeiten hat; es liegt auf der Hand, daß eine solche Berechnung sehr aufwendig wäre.

Die Auswirkung der zusätzlichen Koppelungswirkung der Schweißnaht auf die Schubkraftverteilung am Laschenrand läßt sich jedoch sehr gut abschätzen, wenn man mit Hilfe der iterativen Lösungsmethode die theoretische Schubkraftverteilung in der Flankennaht und daraus die Normalspannung in der Lasche im Schnitt  $\xi=0$  berechnet (s. z.B. Bild 7.6), diese dann als

Belastung eines Scheibenstreifens nach Bild 7.3 ansetzt, und die Schubspannungen in den dem Laschenrand entsprechenden Schnitt bestimmt. Für Modell 7.1, bei dem die Normalspannungen im Schnitt  $\xi = 0$  annähernd rechteckförmig verteilt sind (Bild 7.6), unterscheidet sich der so gewonnene Verlauf von  $\tau_{xy}$  praktisch nicht von der Kurve (2) in Bild 7.5. Etwas anders liegen die Verhältnisse bei Modell 7.3, das wegen  $b_2/l_{//} = 2$  eine ziemlich ungleichförmige Normalspannungsverteilung im Laschenschnitt  $\xi = 0$  hat. Dort erhält man sichtbare Unterschiede der Schubspannungsverteilungen, wie aus Bild 7.7 hervorgeht.

Generell muß also festgehalten werden, daß in einer wirklichen Schweißverbindung die Schubspannungen immer wesentlich ausgeglichener verlaufen, als es sich nach den theoretischen Ansätzen ergibt, die der Naht lediglich Schubkraft übertragende Wirkung zuweisen. Diese zunächst aus spannungsoptischen Versuchen gewonnene Erkenntnis konnte durch Dehnungsmessungen an Schweißverbindungen aus Stahl bestätigt werden (s. hierzu Abschn. 7.6).

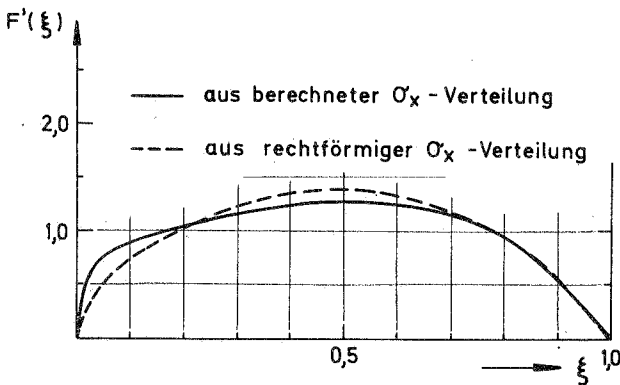


Bild 7.7: Schubspannungen im Laschenrand von Modell 7.3 bei Berechnung als Scheibenstreifen



## 7.2 Der Einfluß der Schweißnahtdicke

In die hier durchgeführten Berechnungen der Kraftverteilung bei Kehlnaht-Laschenverbindungen kann die Schweißnahtdicke direkt nur über den Parameter  $\alpha = (2l//a) \cdot \sqrt{1+\mu}$  und indirekt über den in Abschnitt 5.5 eingeführten effektiven Verschiebungsmodul eingehen, der durch das Verhältnis von Nahtdicke zu Laschendicke bestimmt wird. Wie schon mit Bild 6.6 (S.78) gezeigt wurde, bestimmt  $\alpha$  vor allem die Ausrundung der Spannungsspitzen an den Enden der Flankennaht. Wegen  $\alpha \sim l//a$  ist dabei nicht die absolute Schweißnahtdicke wichtig, sondern das Verhältnis von Nahtdicke zu Nahtlänge. Jede Vergrößerung der Dicke oder Verkleinerung der Länge führt zu einer Abminderung der Spannungsspitzen. Welchen Grad der Abminderung man durch eine Vergrößerung der Schweißnahtdicke erreicht, hängt jedoch davon ab, wie groß das vorhandene  $\alpha$  ist. Bei den für Bild 6.6 benutzten Beispielen wurde auch mit  $a = 0,01 \text{ cm}$  gerechnet. Die resultierende Kurve liegt so nahe bei der Kurve (2) mit  $a = 0,425$ , daß sie nicht eingezeichnet wurde. Eine Änderung der Schweißnahtdicke um eine Größenordnung nach oben auf  $a = 1,0$  erbringt die Kurve (3). Die Spannungsspitzen an den Enden werden dadurch von ca. 2 auf 1,6, d.h. nur um 20% vermindert, die Form der Kurve bleibt im wesentlichen erhalten. Erst durch die Vergrößerung der "Schweißnahtdicke" auf die unrealistische Größenordnung von 10 cm wird auch die Kurvenform völlig verändert.

Der in Wirklichkeit vorhandene Spielraum für die in der Formel für  $\alpha$  einzusetzende Schweißnahtdicke ist wesentlich geringer, als der in diesen Beispielen erfaßte Bereich. Als untere Grenze kommt offensichtlich nur die tatsächliche Nahtdicke  $a$  in Frage. Es würde der in Bild 6.4 (S.74) vorgenommenen Idealisierung einer Schweißnaht sogar besser entsprechen, die Länge der Hypothenuse des Nahtdreiecks, d.h. also  $2a$ , gleich der "Höhe" der idealisierten Schweißnaht zu setzen. Als obere Grenze läßt sich analog den Überlegungen in Abschnitt 5.5 die Größe  $t_2\sqrt{2}$  einführen. Bedenkt man, daß die gemessenen Verschiebungsmoduln für die 3 mm Naht sich nur unter Einbeziehung des gesamten

Laschenzipfels in die Verformung befriedigend erklären ließen, dann ist es realistischer, allgemein die Größe  $t_2\sqrt{2}$  für  $a$  in der Formel für  $\alpha$  zu benutzen. Danach würde die Theorie keine Abhängigkeit der Kraftverteilung von der eigentlichen Schweißnahtdicke erwarten lassen.

Die Ergebnisse der spannungsoptischen Versuche an Modellen, die sich nur durch die Dicke der Schweißnähte unterscheiden, bestätigen die eben gezogene Schlußfolgerung nur teilweise. Die mit dünnen Nähten ausgeführten Modelle der Hauptgruppe 3 (Modelle Nr. 33.0 und 33.2), erbrachten für den Anteil der von der Stirnnaht übertragenen Kraft  $P_1/P$  innerhalb der Meßgenauigkeit die gleichen Werte wie die entsprechenden Modelle der Gruppe 31,

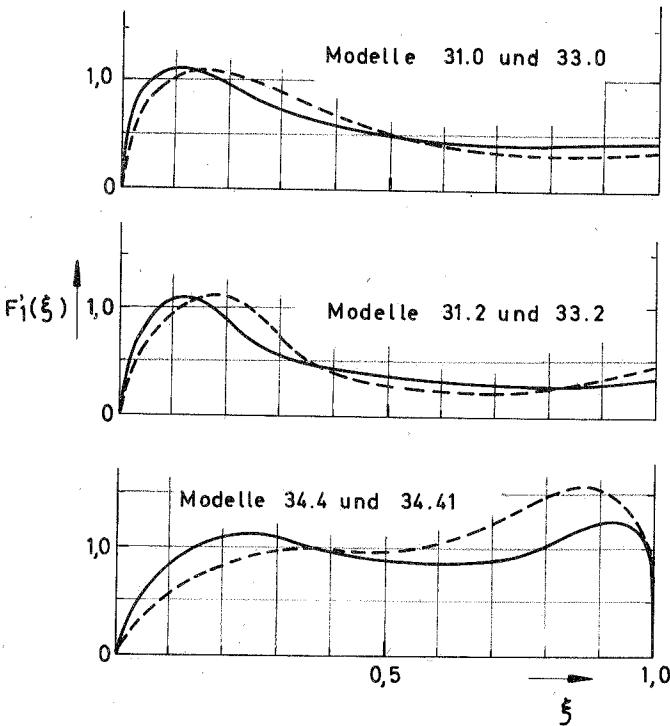


Bild 7.8: Einfluß der Schweißnahtdicke auf die Schubkraftverteilung in den Flankennähten (Kurven für dünnere Nähte gestrichelt)

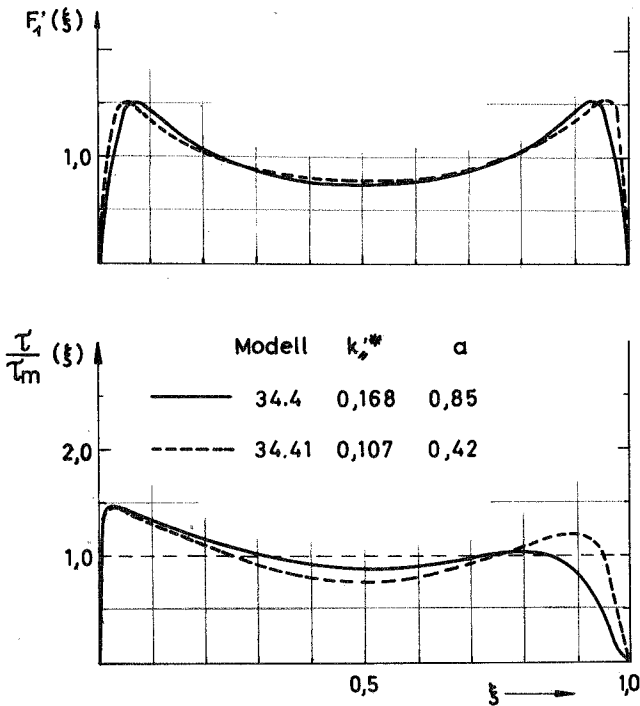


Bild 7.9 : Iterativ (oben) und für Scheibenstreifen (unten) berechnete Randschubverteilungen bei Modell 34.4 und 34.41

wie schon in Abschnitt 4.4, S.51, mitgeteilt wurde (s. auch Bild 4.15, S.51). Betrachtet man jedoch die Schubverteilung in der Flanken-naht (Bild 7.8 oben und Mitte), dann läßt sich eine leichte Verschiebung der Maxima vom freien Ende des Bleches weg feststellen. Bei den beiden Modellen von reinen Flanken-nahtverbindungen mit verschiedenen Nahtdicken (34.4 - 6 mm, 34.41 - 3 mm) ist diese Tendenz noch ausgeprägter (Bild 7.8 unten). Unter Berücksichtigung der verschiedenen Nahtdicken in den Parametern  $k_s^*$  und  $\alpha$  ergibt die Rechnung nur geringe Differenzen zwischen den Kurven  $F'(\xi)$ , wie aus Bild 7.9 oben hervorgeht. Die Verschiebung der Maxima ist sehr gering. Trägt man jedoch den Verlauf der Schubspannung im Scheibenstreifen auf,

der die in Abschnitt 7.1 besprochene zusätzliche Koppelungs-  
wirkung der Schweißnaht widerspiegelt, dann stellt man eine  
deutliche Verschiebung des Maximums am Laschenende fest (Bild  
7.9 unten). Daß die im Versuch ermittelten Kurven bei  $\xi = 0$   
wesentlich flacher verlaufen als die errechneten, ist auf die  
mangelhafte Erfassung der räumlichen Zusammenhänge durch die  
Rechnung zurückzuführen, die bei dem recht gedungenen Laschen-  
querschnitt der Modellgruppe 34 ( $b_2 = 5,5$ ,  $t_2 = 0,82$  cm, somit  
 $b_2/t_2 = 6,7$ ) stärkeren Einfluß haben, als bei den bisher zum  
Vergleich herangezogenen Modellen der Gruppe 7 ( $b_2 = 6,0$ ,  
 $t_2 = 0,36$ , somit  $b_2/t_2 = 16,7$ ).

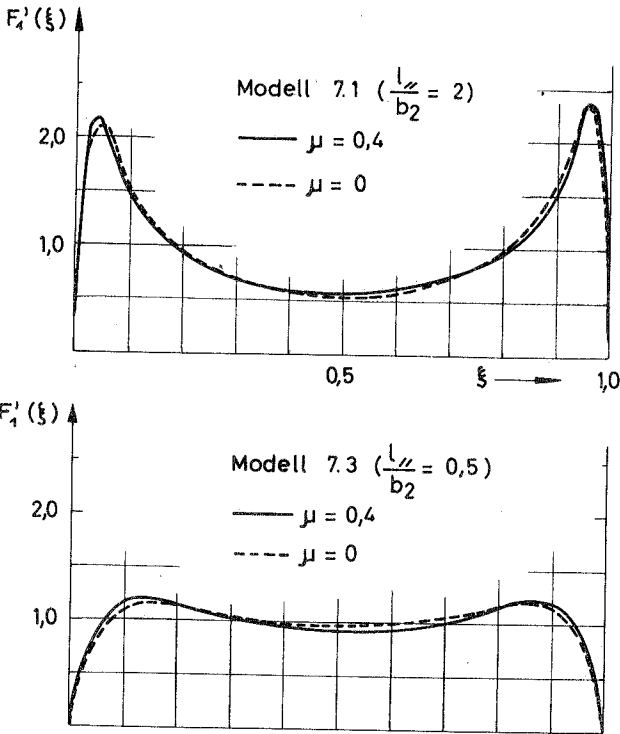


Bild 7.10: Der Einfluß der Querdehnung auf die  
theoretische Schubkraftverteilung

### 7.3 Der Einfluß der Querdehnung

Wie schon in Kapitel 3 bemerkt wurde, läßt sich in den formelmäßigen Lösungen, welche unter der Voraussetzung konstanter Längsspannungsverteilung über die Querschnitte abgeleitet wurden, die Querdehnung sehr einfach berücksichtigen, da sich zeigt (s. Anhang S.139), daß sie nur eine Veränderung des Parameters  $k_{//}$  um den Faktor  $1 - \mu^2$  bewirkt. Das bedeutet aber, daß  $k_{//}$  höchstens um 20% vermindert wird. Die Auswirkung einer solchen Änderung von  $k_{//}$  auf die berechnete Kraftverteilung in der Verbindung ist so gering, daß sie in der graphischen Darstellung der Kurven  $F_1'(\xi)$  bei dem hier verwendeten Format kaum zu erkennen ist.

Bei der iterativen Berechnung unter Berücksichtigung der ungleichförmigen Spannungsverteilung in den Querschnitten ist der Unterschied zwischen  $\mu = 0$  und  $\mu = 0,4$  in der Funktion  $F_1'(\xi)$  zwar sichtbar, jedoch im allgemeinen ebenfalls unerheblich (Bild 7.10). Der Einfluß der Querspannungen auf die Schubkraftverteilung in den Flankennähten kann also vernachlässigt werden, wenn sie auch selbst bis zu 20% der Längsspannungen betragen können und sehr stark vom Verhältnis  $l_{//}/b_2$  beeinflußt werden. Wenn  $l_{//} \ll b_2$  wird, verbiegen sich nämlich die Laschen, wobei die aus der gegenseitigen Behinderung resultierenden Spannungen jeweils anderes Vorzeichen haben, als die auf die Querkontraktion zurückgehenden. Dieser Sachverhalt wird durch Bild 7.11 verdeutlicht. In Wirklichkeit sind die Querspannungen natürlich nicht linear. Daß die finite Rechnung die Querspannungen richtig erfaßt, zeigen die für die Modelle 7.1 und 7.3 berechneten Randquerspannungs-Verteilungen, die in Bild 7.12 dargestellt sind. Während Modell 7.1 am freien Laschenende ( $\xi = 1$ ) Druckquerspannungen hat, ergeben sich für Modell 7.3 dort Zugspannungen, und umgekehrt bei  $\xi = 0$ . Der zweimalige Vorzeichenwechsel bei Modell 7.3 ist darauf zurückzuführen, daß im mittleren Bereich der Naht wieder die Spannungen aus Querdehnungsbehinderung ausschlaggebend sind.

Vorzeichen und Größenordnung der berechneten Querspannungen konnten durch die spannungsoptischen Versuche bestätigt werden, quantitative Vergleiche verliefen jedoch unbefriedigend, da die Querspannungen im Versuch sich nur indirekt durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen und Differenzenbildung berechnen lassen, was naturgemäß zu großen Streuungen führt. Die Messungen an Verbindungen aus Stahl haben jedoch auch quantitativ den errechneten Querspannungsverlauf gut bestätigt (s. Abschn. 7.6).

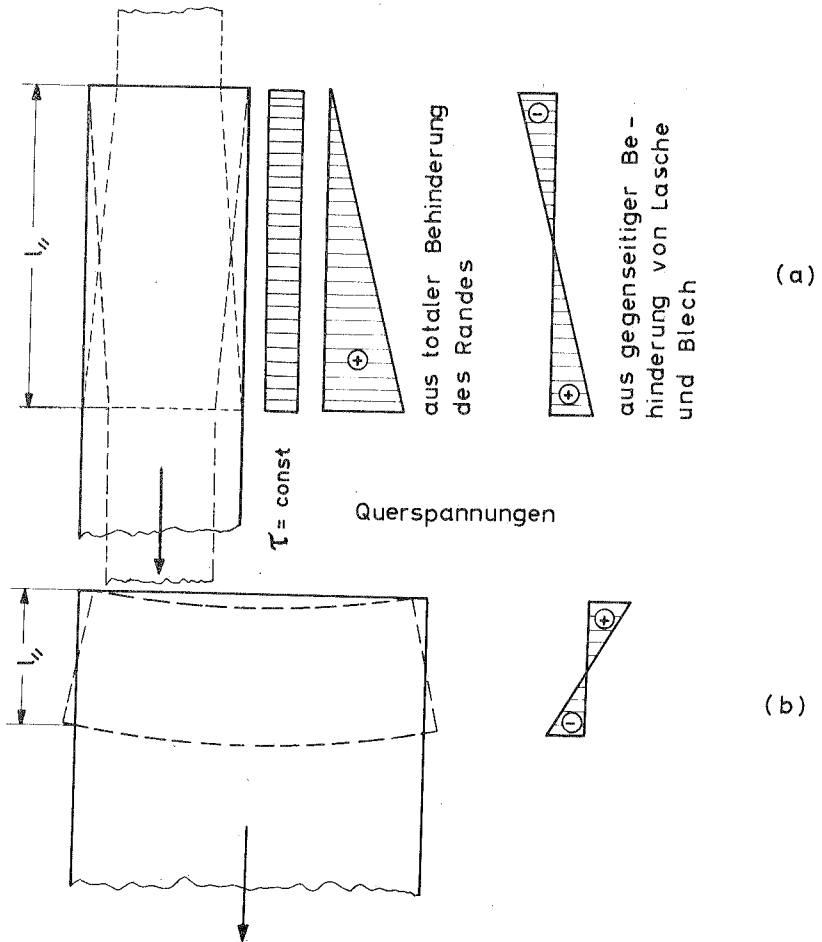


Bild 7.11: Spannungen aus Querdehnungsbehinderung (a) und Biegebehinderung (b)

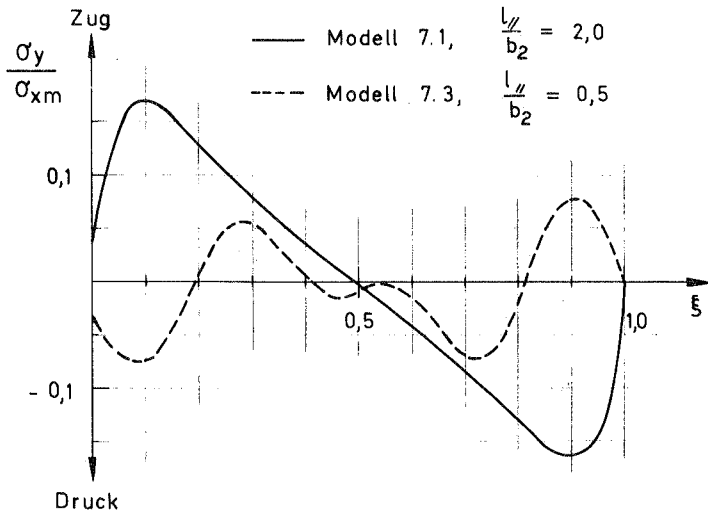


Bild 7.12: Rechnerische Abhängigkeit der Querspannungen vom Verhältnis  $l_{//} / b_2$

Die in Abschnitt 7.1 verwendete Vorstellung einer symmetrischen Laschenverbindung als unendlicher Scheibenstreifen mit periodischer Randbelastung durch Zugspannungen, die für den Nachweis der zusätzlichen Koppelungswirkung der Schweißnaht so nutzvoll war, ist zur Berechnung der Querspannungen übrigens nicht brauchbar. Durch das Auffalten der Verbindung wird nämlich die in Wirklichkeit entgegengesetzt gerichtete Verschiebung der Ränder aus Querdehnung oder Biegung gleichsinnig, wodurch die Zwängungsspannungen fast völlig verschwinden. Das ist eine große Schwäche der wiederholt im Schrifttum zur Berechnung von Laschenverbindungen benutzten ebenen Scheibenmodelle.

#### 7.4 Der Einfluß der Breite des Bleches

In den geschlossenen formelmäßigen Lösungen, die von einer gleichförmigen Verteilung der Längsnormalspannungen über die Breite der verbundenen Teile ausgehen, wird auch ein sehr breites Blech als über seine ganze Breite voll mitwirkend eingesetzt.

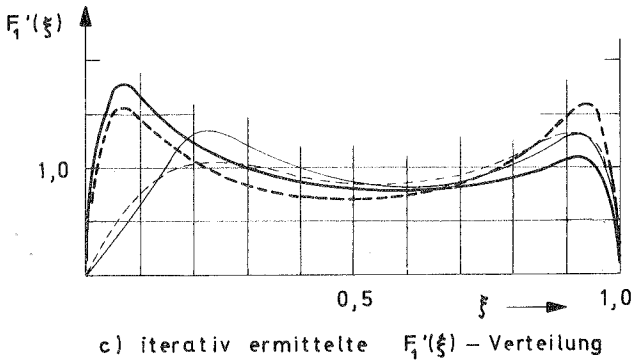
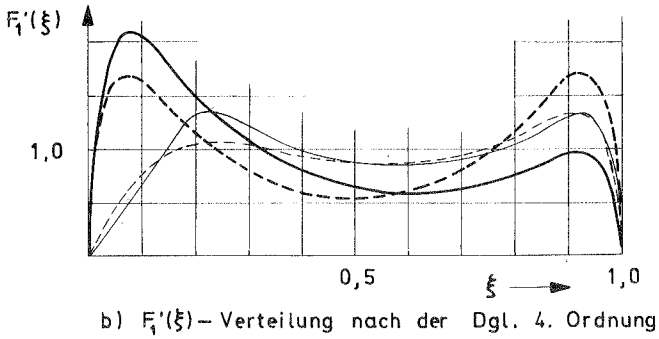
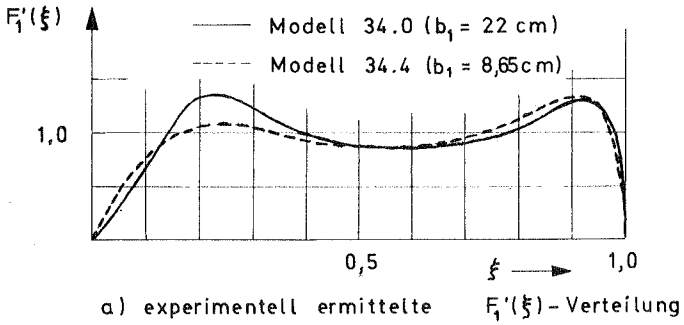


Bild 7.13: Einfluß der Blechbreite auf die Schubverteilung im Laschenrand



Es wurde bereits in Kapitel 3 darauf hingewiesen, daß diese Annahme nicht der Wirklichkeit entsprechen kann. In der iterativen Berechnung der Kraftverteilung wurde deshalb mit einer veränderlichen Blechbreite gearbeitet, wobei das Gesetz für die Veränderlichkeit der Blechbreite in Anlehnung an die Versuche festgelegt wurde, wie in Abschnitt 6.3 ausführlich dargestellt ist. Es soll nun untersucht werden, wieweit die mit diesen Annahmen errechneten Kraftverteilungen mit spannungsoptisch ermittelten übereinstimmen.

In Bild 7.13 sind unter a) zunächst die an zwei reinen Flanken-nahtverbindungen mit unterschiedlicher Blechbreite (Modell 34.0  $b_1 = 22$  cm; Modell 34.4,  $b_1 = 8,65$  cm) spannungsoptisch ermittelten Schubspannungen im Laschenrand aufgetragen. Im Hinblick darauf, daß sich die Blechbreiten fast um den Faktor 3 unterscheiden, sind die Unterschiede zwischen den beiden Kurven sehr gering. Wie stark sich demgegenüber die verschiedenen Blechbreiten in der formelmäßigen Lösung nach der Dgl. 4. Ordnung insbesondere in der Nähe des Laschenendes ( $\xi = 1$ ) auswirken, geht aus Bild 7.13 b) hervor. Unter c) sind die iterativ berechneten Kurven dargestellt. Sie liegen erstens näher an den experimentellen Kurven als die formelmäßigen und zweitens auch untereinander enger beisammen. Das deutet darauf hin, daß der im Versuch beobachtete relativ geringe Einfluß unterschiedlicher Breiten durch die in der iterativen Berechnung verwendete veränderliche Breite  $b_1(\xi)$  zumindest in der Tendenz richtig erfaßt wird. Die immer noch vorhandenen Unterschiede, insbesondere der viel flachere Anstieg der experimentellen Kurven von  $\xi = 0$  her, lassen sich aus räumlichen Wirkungen der Schweißnaht erklären, die in der Berechnung nicht erfaßt werden können.

Die Anfangssteigung der veränderlichen Breite  $b_1(\xi)$  wurde in Abschnitt 6.3 aus dem Trajektorienverlauf (Bild 6.8, S.84) als annähernd gleich  $\pi$  abgeleitet. Um zu untersuchen, wie sich der Schubkraftverlauf ändert, wenn man eine andere Anfangssteigung wählt, wurde Modell 34.0 auch mit den Anfangssteigungen  $2\pi$  und  $\pi/2$  durchgerechnet. Die Ergebnisse sind in Bild 7.14 dargestellt.

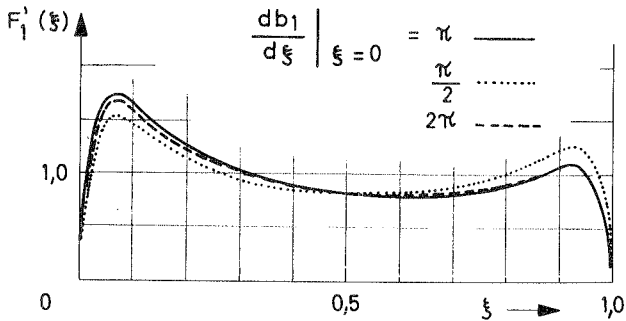


Bild 7.14: Einfluß verschiedener Anfangssteigungen der Funktion  $b_1(\xi)$  auf  $F_1'(\xi)$  in der iterativen Lösung

Offensichtlich bewirkt im Falle von Modell 34.0 eine Vergrößerung der Anfangssteigung nur unerhebliche Änderungen. Eine Verminderung der Anfangssteigung auf  $\pi/2$  ist dagegen im Verlauf von  $F_1'(\xi)$  deutlich sichtbar, ohne jedoch die wesentlichen Unterschiede gegenüber den experimentellen Kurven zu ändern, was beweist, daß diese andere Ursachen haben müssen.

Der Einfluß der Breite auf die Kraftverteilung bei einer Verbindung mit Flanken- und Stirnkehlnähten wird bei der Behandlung der kombinierten Verbindungen im nächsten Abschnitt erörtert.

### 7.5 Die Kraftverteilung bei kombinierten Verbindungen

Die Abweichungen, die sich beim Vergleich der aus der 1. Reihe spannungsoptischer Versuche gewonnenen Kurven  $P_1/P = f(b_2/b_1, l_1/l_1)$  mit der einfachen Theorie der Haftverbindungen zeigten (Bild 4.10, S.44), gaben den Anstoß für die in den Kapiteln 5 und 6 angestellten genaueren Betrachtungen. Eine Gegenüberstellung der mit Hilfe der iterativen Rechnung gewonnenen Kurven  $P_1/P = f(b_2/b_1)$  für die Modellgruppen 3 und 4 (Bild 7.15) läßt jedoch nur den negativen Schluß zu, daß die in der genaueren Berechnung berücksichtigten Faktoren, nämlich: die ungleich-

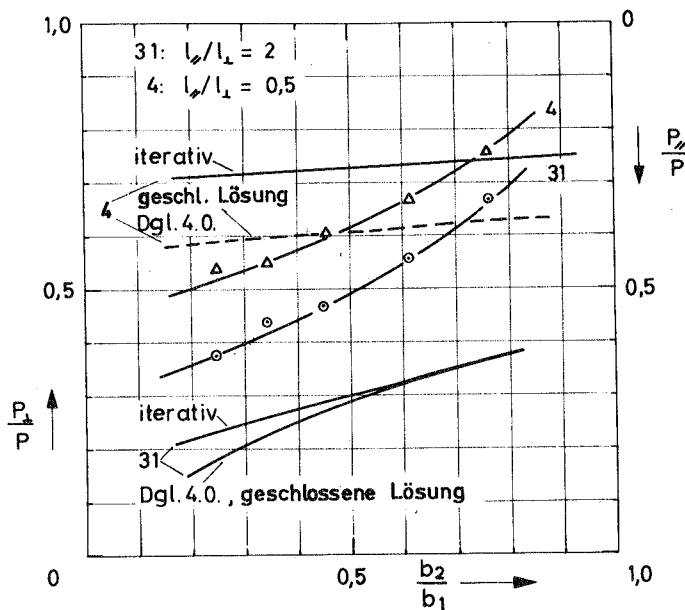


Bild 7.15: Gegenüberstellung von experimentell und rechnerisch ermittelten Kurven  $\frac{P_2}{P} = f\left(\frac{b_2}{b_1}\right)$  für die Modellgruppen 31 und 4

förmige Verteilung der Längsnormalspannungen über die Querschnitte, die gegenseitige Querdehnungsbehinderung der verbundenen Teile, die Veränderlichkeit der mitwirkenden Blechbreite und die Verwölbung des Stirnendes der Lasche — nicht für die beobachteten Abweichungen verantwortlich sind. Ähnlich, wie schon in Abschnitt 7.1 für die reinen Flankennahverbindungen festgestellt wurde, scheint die endliche Dicke der Schweißnähte die Kraftübertragung so stark zu beeinflussen, daß alle theoretischen Überlegungen, die die Schweißnaht idealisiert nur als Schub- oder Normalkraft übertragendes Element mit bestimmten elastischen Eigenschaften ( $k_{//}$ ,  $k_{\perp}$ ) ansetzen, die wirklichen Verhältnisse der Kraftübertragung nicht vollständig beschreiben.

Zunächst seien die für die Modellgruppe 3 bzw. 31 ermittelten Kurven betrachtet. Es fällt auf, daß die formelmäßige und die iterative Lösung, vor allem für  $b_2/b_1 > 0,5$ , sehr eng beieinander

liegen. Dies deutet darauf hin, daß für das Verhältnis  $l_{//}/l_{\perp} = 2$  die Verwölbung des Stirnendes der Lasche vernachlässigt werden kann. Wie läßt sich jedoch der große Unterschied gegenüber den experimentellen Werten erklären? Diese Frage wird zum Teil durch Bild 7.16 beantwortet, wo der Verlauf der Schubspannungen am Laschenrand für die Modelle 31.0 und 31.4 aufgetragen ist. Wie man sieht, liegen die Schubspannungsspitzen der experimentellen Kurven am Nahtende  $\xi = 0$  - ähnlich wie schon bei den reinen Flankennahtverbindungen - wesentlich niedriger als bei den rechnerischen Kurven. Dementsprechend erhöht sich der Anteil der Stirnnaht. Dann besteht aber, besonders bei Modell 31.4, der Widerspruch, daß eine große Kraft am Stirnende der Lasche ohne große Schubspannungsspitze in der Flankennaht auftritt, d.h. die Bedingung  $\Delta u_{\perp} = \Delta u_{//}$  könnte nach den theoretischen Überlegungen nicht erfüllt sein. In Wirklichkeit ist aber der Spannungszustand an der Stelle des Zusammenstoßens von Stirnnaht und Flankennaht so komplex, daß er nicht allein mit dieser Bedingung erfaßt werden kann. Es ist ja auch zu bedenken, daß im Modell die Nähte um die Ecke herumlaufen, während in der Theorie die Ecke frei bleibt (Bild 7.17). Bei den relativ gedrun- genen Abmessungen der Modelle kann dies nicht ohne Einfluß auf die Kraftübertragung bleiben.

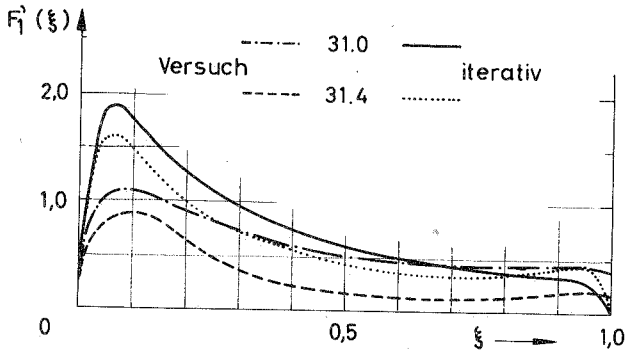


Bild 7.16: Experimentell und rechnerisch bestimmte Schubspannungen im Laschenrand bei den Modellen 31.0 und 31.4

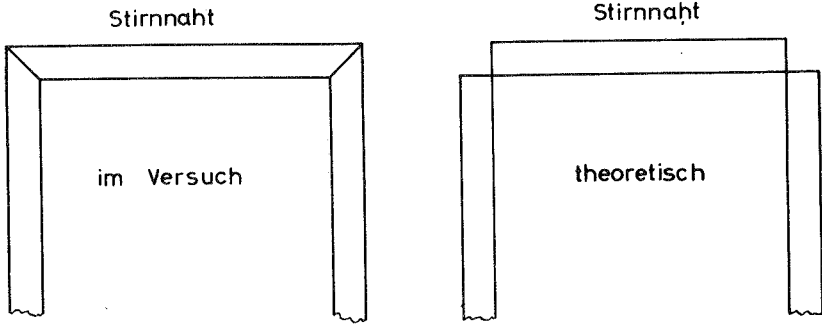


Bild 7.17: Unterschiedliche Nahtkonfigurationen in Theorie und Versuch

Anders liegen die Verhältnisse bei der Modellgruppe 4, die sich durch extrem kurze Flankennähte ( $l_2/l_1 = 0,5$ ) auszeichnet. Hier ist zunächst bemerkenswert (Bild 7.15, S.115), daß ein deutlicher Unterschied zwischen der iterativen und geschlossenen Lösung besteht, der offensichtlich auf die Verwölbung des Laschenrandes zurückzuführen ist. Weiterhin fällt der besonders flache Verlauf dieser Kurven auf. Er hängt damit zusammen, daß wegen der Kürze der Flankennähte sich überhaupt keine Spannungsspitzen an den Nahtenden bilden (Bild 7.18), so daß auch eine sehr geringe Abhängigkeit der theoretischen Schubspannungen von der Blechbreite besteht. Die in der theoretischen Lösung angenommene Veränderlichkeit der Breite gibt offenbar bei den extrem kurzen Flankennähten der Modellgruppe 4 den Einfluß der Breite völlig ungenügend wieder.

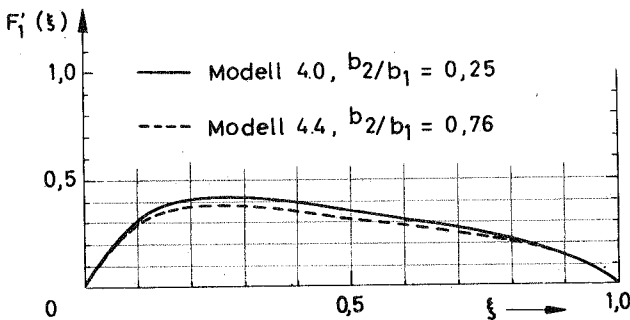


Bild 7.18: Rechnerische Schubspannungen im Laschenrand bei Modellgruppe 4 ( $l_2/l_1 = 0,5$ )

Würde man Modelle mit sehr dünnen Blechen und gleichzeitig im Verhältnis zu den Blechen dünnen und nicht um die Ecke herumgeführten Schweißnähten herstellen, dann würden die Messungen wahrscheinlich wesentlich besser mit den Berechnungen übereinstimmen. Da solche Schweißverbindungen aber wiederum unrealistisch wären, bleibt folgendes festzuhalten:

Die Kraftverteilung bei kombinierten Schweißverbindungen wird selbst durch verfeinerte scheintheoretische Ansätze nur ungenügend erfaßt. Bei Verbindungen mit einem Verhältnis von  $l_1/l_2 > 1$  liegt der von der Stirnnaht übernommene Kraftanteil fast doppelt so hoch wie der berechnete. Bei Verbindungen mit  $l_1/l_2 < 1$  ergibt die iterative Berechnung für Verbindungen, bei denen Blech und Lasche annähernd gleich breit sind, größenordnungsmäßig richtige Werte; ist das Blech wesentlich breiter als die Lasche, dann wird der Anteil der Stirnnaht durch die Rechnung überbewertet.

## 7.6 Vergleiche mit Messungen an Schweißverbindungen aus Stahl

Um die Allgemeingültigkeit der aus den spannungsoptischen Versuchen und den theoretischen Berechnungen gewonnenen Erkenntnisse zu prüfen, wurden Messungen an Schweißverbindungen aus Stahl aus dem Schrifttum [8; 26] und eigene Versuche zum Vergleich herangezogen. Wie ein solcher Vergleich ausfällt, hängt nicht nur von den Einschränkungen der theoretischen Lösung, sondern auch von der in den Großversuchen verwendeten Meßmethode ab. Bei den spannungsoptischen Versuchen konnte mit Hilfe der Verspiegelung der Laschen der Schubspannungsverlauf am Laschenrand direkt bestimmt werden. Bei Verbindungen aus Stahl muß man dagegen Verschiebungs- oder Dehnungsmessungen entlang der Schweißnaht vornehmen. Eine naheliegende und auch in [8] und [26] angewendete Methode besteht darin, die relativen Verschiebungen der Nahtufer zu bestimmen. Man erhält damit den Verlauf der Verschiebung entlang der Nähte. Setzt man den Mittelwert der Verschiebung proportional dem Mittelwert der Schubspannung, dann erhält man den Schubspannungsverlauf entlang der Naht. Wie jedoch in Abschnitt 6.2 gezeigt wurde, trifft die Annahme der

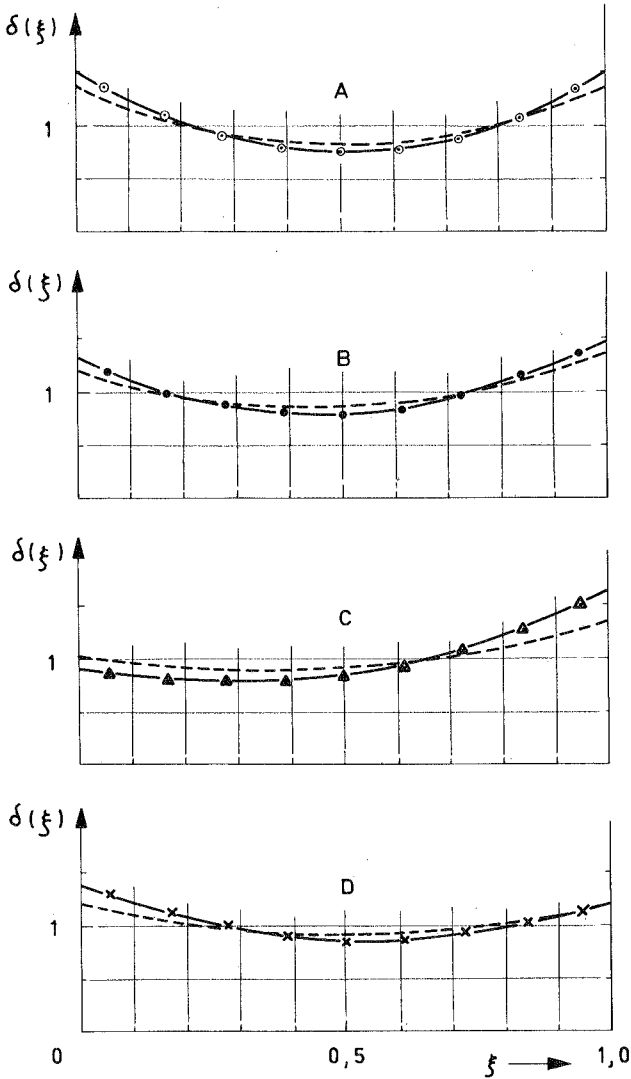


Bild 7.19: Vergleich der Verschiebungsmessungen von Smith [8] mit der theoretischen Lösung nach der Dgl. 2. Ordnung

Proportionalität zwischen Schubkraft und Verschiebung in der Nähe der Flankenahntenden nicht zu. Es sei hierzu nochmals auf Bild 6.6, S.78, verwiesen, wo die Kurven für die Verschiebung und die Schubspannung getrennt aufgetragen sind: während die Schubspannung zur Erfüllung der Randbedingungen  $\tau_{xy}(\xi=0) = \tau_{xy}(\xi=1) = 0$  am Nahtende auf Null abfällt, hat die Verschiebung am Nahtende einen Höchstwert. Bei der theoretischen Lösung mit der Dgl. 2. Ordnung erhält man diese Spitze auch für die Schubspannungen, da die Randbedingungen  $F_1'(\xi=0) = F_1'(\xi=1) = 0$  durch eine Dgl. 2. Ordnung nicht erfüllt werden können. Um festzustellen, wieweit die Forderung des Nullabfalls der Schubspannungen in der Schweißnaht einer Verbindung aus Stahl erfüllt ist, wurden bei den eigenen Messungen Dehnmessstreifen-Rosetten unmittelbar auf die Schweißnaht geklebt. Die Rosetten erlauben die vollständige Bestimmung eines ebenen Spannungszustandes und somit die direkte Messung der Schubspannungen in der Nahtoberfläche.

Die von Smith [8] untersuchten Schweißverbindungen waren doppeltsymmetrische Laschenverbindungen, die also dem hier spannungsoptisch untersuchten Verbindungstyp sehr nahe kommen. In der nachstehenden Tabelle sind die Abmessungen der Smithschen Proben in den hier benutzten Bezeichnungen aufgeführt (Maße in Zoll):

Probe	$b_1$	$t_1$	$b_2$	$t_2$	$l//$	$a$
A	3		2	0,375		
B	3	0,5	2	0,500	2,25	0,221
C	3		2	0,750		
D	6		4	0,375		

Wie man sieht, handelt es sich um Proben mit gedrungenen Querschnitten, daher fällt ein Vergleich mit der formelmäßigen Lösung der Dgl. 2. Ordnung sehr befriedigend aus, wie aus Bild 7.19 hervorgeht. Da von Smith nur die Verschiebungen gemessen wurden, läßt sich über den Verlauf der Schubspannungen im Bereich der Nahtenden nichts aussagen.



Klöppl und Petri haben kürzlich über Verschiebungsmessungen an zwei in Bild 7.20 wiedergegebenen Proben berichtet [26]. Probe 1 war ebenfalls eine doppeltsymmetrische Laschenverbindung, Probe 2 bestand aus einem aufgeschlitzten Winkel, der mit einem Blech verschweißt war. In Bild 7.21 ist die an Probe 1 gemessene Kurve für die Verschiebung (1) in der hier verwendeten dimensionslosen Darstellung mit zwei theoretischen Kurven verglichen. Minimal- und Maximalwerte stimmen recht gut mit der formelmäßigen Lösung der Dgl. 2. Ordnung (3) überein, die mit  $k// = 0,2$  berechnet wurde. Bestimmt man dagegen den

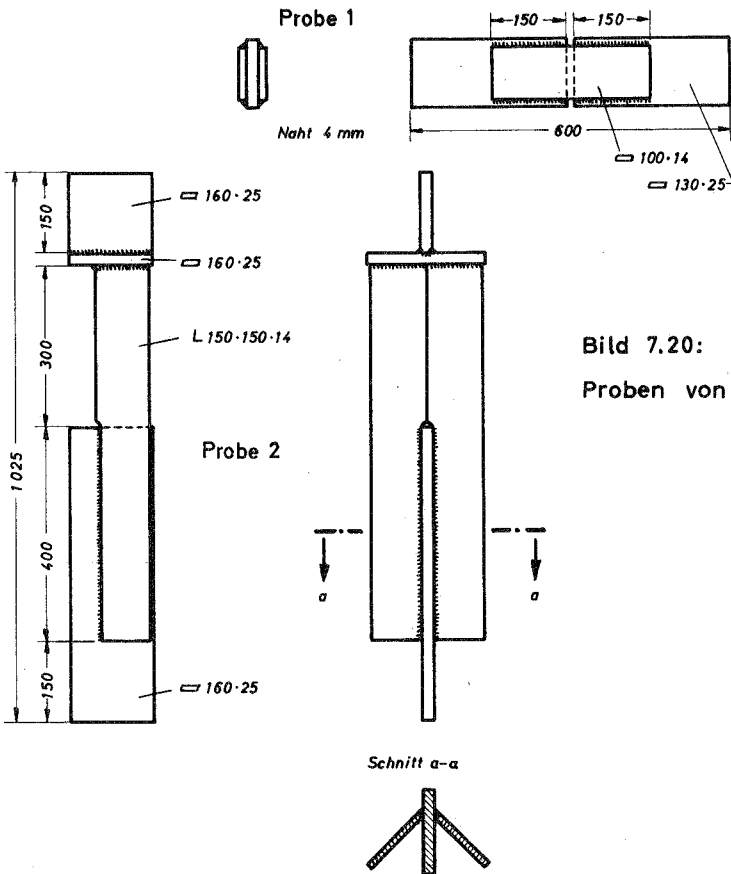


Bild 7.20:  
Proben von [26]

Schubspannungsverlauf nach der iterativen Methode mit einer zur Berechnung von  $\alpha$  angenommenen Nahtdicke  $a = 0,70$  cm (die wirkliche Nahtdicke betrug  $0,35$  cm) und einem nach Formel 5.1 reduzierten Verschiebungsmodul  $k_{//}^{\alpha}$ , dann erhält man einen wesentlich ausgeglicheneren Kurvenverlauf (2), als bei den experimentell ermittelten Verschiebungen. Diese Beobachtung widerspricht der bei den spannungsoptischen Versuchen gemachten Feststellung, daß die experimentellen Kurven stets ausgeglichener verlaufen als die gerechneten. Bei diesem Vergleich ist jedoch zu bedenken, daß bei Probe 1 die kraftfreien Blechenden sehr eng beieinander liegen, so daß kein Laschenbereich vorhanden ist, in dem sich eine gleichförmige Verteilung der Längsspannungen einstellen könnte. Ein solcher Bereich wurde bei der Festlegung der Periodizität der Randbelastung für die iterative Berechnung (siehe Bild 6.3, S.68) bewußt eingeführt, um den in den spannungsoptischen Modellversuchen vorliegenden Verhältnissen nahezukommen. Ebensogut ist es allerdings möglich, daß der Verschiebungsmodul in der iterativen Berechnung zu klein angesetzt wurde, denn schon für einen starken Einbrand würde die in Abschnitt 5.5 abgeleitete Reduktion nicht mehr zutreffen.

Die Berechnung von Probe 2 als Laschenverbindung erscheint auf den ersten Blick problematisch. Denkt man sich jedoch Probe 2 symmetrisch zu den beiden Schenkelkanten des Winkels fortgesetzt, dann kann man sie als Laschenverbindung auffassen, da dann der Symmetrieschnitt entlang der Längsachse ohnehin schubspannungsfrei ist. Außerdem ist  $\mu = 0$  zu setzen, um den Rand der Winkelschenkel auch frei von Querspannungen zu machen. In Bild 7.22 ist das Ergebnis der mit diesen Vereinfachungen durchgeführten Vergleichsrechnung wiedergegeben. Während die Kurve aus der Dgl. 2. Ordnung im mittleren Nahtbereich zu tief liegt, ist die Übereinstimmung mit der iterativen Berechnung recht befriedigend.

Die Abmessungen der Schweißverbindungen aus Stahl, an der die eigenen Messungen über die Spannungsverteilung in der Naht durchgeführt wurden, gehen aus Bild 7.23 hervor. Diese Schweißverbindung wurde im Rahmen einer Reihe von Traglastversuchen

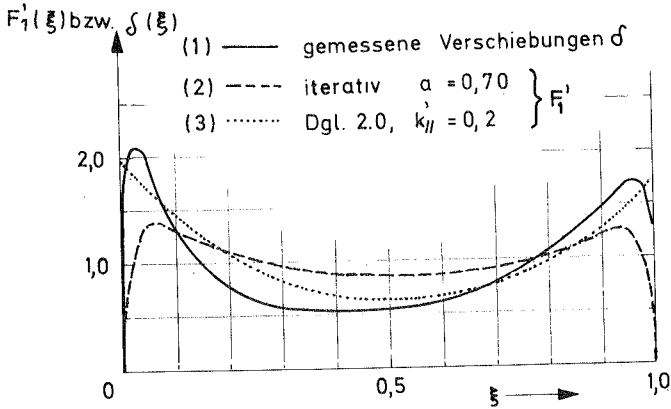


Bild 7.21: Vergleich der Verschiebungsmessungen an Probe 1 [25] mit rechnerischen Lösungen

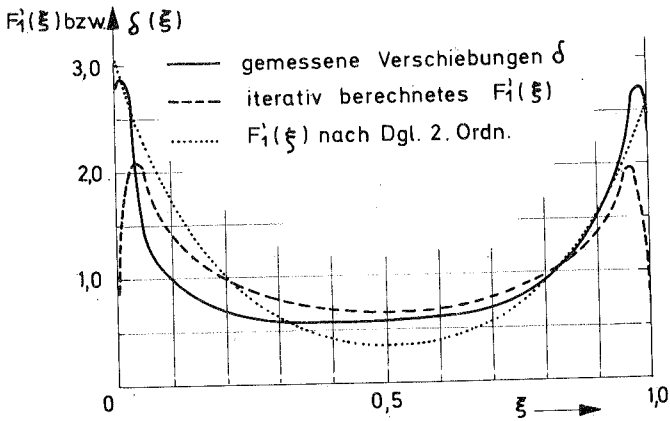


Bild 7.22: Probe 2 [25], Vergleich der gemessenen Verschiebungen mit berechneten  $F_1^1(\xi)$ -Verläufen

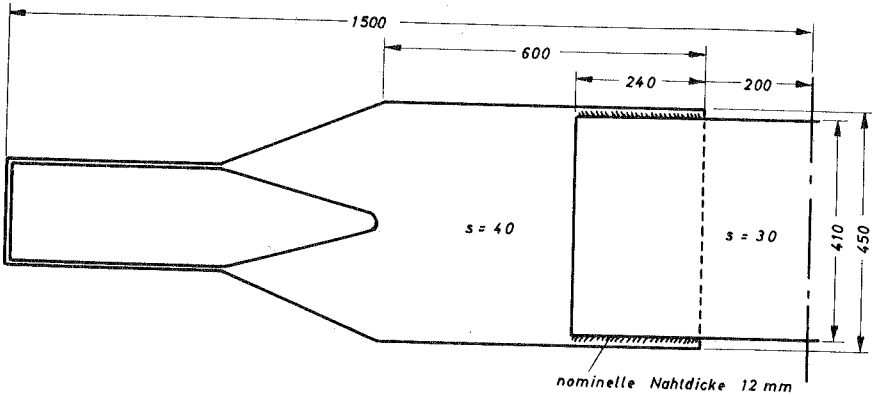


Bild 7.23: Abmessungen der mit Dehnmeßstreifen untersuchten Schweißverbindung

geprüft [27]. Wie eingangs dieses Abschnittes erwähnt, wurden die Messungen mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen-Rosetten durchgeführt, um die Schubspannungen in der Naht direkt bestimmen zu können. Die Anordnung der Meßstellen ist in Bild 7.24 skizziert. Die verwendeten Rosetten hatten eine Meßlänge von 5 mm und einen Gesamtdurchmesser von 12 mm, so daß sie auf der nominell 12, tatsächlich jedoch nur ca. 11 mm dicken Schweißnaht (Breite der Oberfläche also  $2 \cdot a = 22$  mm) ohne Schwierigkeiten unterzubringen waren.

Die Dehnungsmessungen an der Oberfläche der Schweißnaht dieses Versuchskörpers waren in vieler Hinsicht sehr aufschlußreich. Bei der stufenweisen Belastung des Versuchskörpers war zunächst

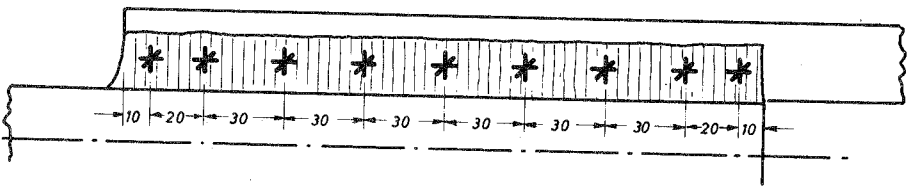


Bild 7.24: Anordnung der DMS - Rosetten auf der Schweißnaht des Versuchskörpers nach Bild 7.23

festzustellen, daß schon bei sehr niedrigen Lasten ein geringes Plastifizieren der Naht in der Nähe der Laschenenden auftrat, obwohl bei dieser Verbindung sogar nach der einfachen Theorie der Maximalwert der Schubspannungen für  $\xi = 1$  nur das 1,32-fache des Mittelwertes beträgt. Dieses frühe Plastifizieren ist auf die hohen Eigenspannungen zurückzuführen, unter denen jede nicht spannungsfrei geglühte Naht steht. Bei einer Last von ca. 220 Mp, entsprechend einer mittleren Schubspannung von etwa  $2100 \text{ kp/cm}^2$  in den Nähten, setzte, wieder vom freien Laschenende her, ein sehr starkes Plastifizieren ein, das sich bei einer Last von 280 Mp ( $\cong \tau_m = 2650 \text{ kp/cm}^2$ ) über die gesamte Nahtlänge ausgebreitet hatte. Setzt man die Fließgrenze des Schweißgutes mit  $\sigma_F \approx 5500/1,5 = 3760 \text{ kp/cm}^2$  an, dann stimmt der Wert  $2100 \text{ kp/cm}^2$  sehr gut mit der nach der Theorie der konstanten Gestaltänderungsarbeit berechneten Fließschubspannung  $\tau_F = (1/\sqrt{3}) \cdot \sigma_F = 2110 \text{ kp/cm}^2$  überein.

Nachdem das Fließen auf der Laststufe von 280 Mp zur Ruhe gekommen war, wurde auf 40 Mp entlastet. Die dabei gemessenen Dehnungen, die also rein elastische Dehnungen darstellen, sind dem Vergleich mit der Rechnung zugrunde gelegt. In Bild 7.25 sind die gemessenen Schubspannungen den iterativ errechneten gegenübergestellt, die man erhält, wenn man  $\tau_m = F_1'(\xi) \cdot P/(4l//a)$  bildet. Es zeigt sich, daß die rechnerischen Schubspannungen

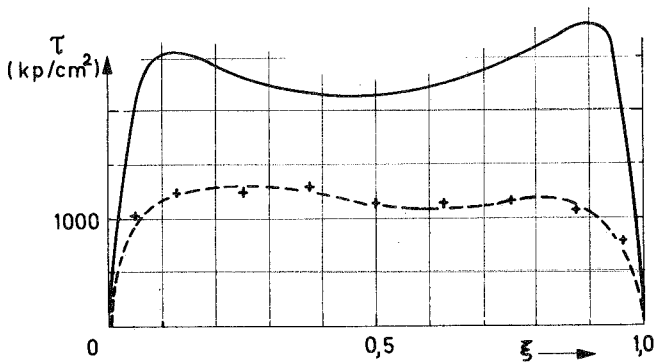


Bild 7.25: Direkter Vergleich der gemessenen und errechneten Schubspannungen beim Versuchskörper nach Bild 7.23

etwa doppelt so hoch wie die gemessenen sind. Da die Meßeinrichtung auf einen möglichen Fehler mit dem Faktor 2 überprüft wurde, muß man daraus schließen, daß die Schubspannungen ungleich über die Dicke der Schweißnaht verteilt sind, und zwar muß der Wert in der Nahtwurzel ca. 3-mal so hoch liegen (Trapez) wie der an der Oberfläche gemessene. Die ungleiche Verteilung der Schubspannungen über die Nahtdicke wurde auch in [26] festgestellt, wo es in Abschnitt 3.3 heißt: "Der Schubmodul  $G = 810\,000 \text{ kp/cm}^2$  würde eine zu kleine Schubspannung ergeben, was anscheinend an der über den Nahtquerschnitt ungleichmäßigen Schubspannungsverteilung liegt." In Bild 7.26 sind deshalb die gemessenen Schubspannungen auf den Mittelwert bezogen aufgetragen und nochmals mit den Funktionen  $F_1'(\xi)$  verglichen, die auf iterativem Wege und aus der Dgl. 2. Ordnung berechnet wurden. Die Übereinstimmung mit der Rechnung kann als durchaus befriedigend bezeichnet werden; vor allem zeigt die Messung deutlich, daß die Schubspannungen tatsächlich an den Nahtenden auf Null abfallen, eine Tatsache, die durch die üblichen Verschiebungsmessungen immer wieder verschleiert wird.

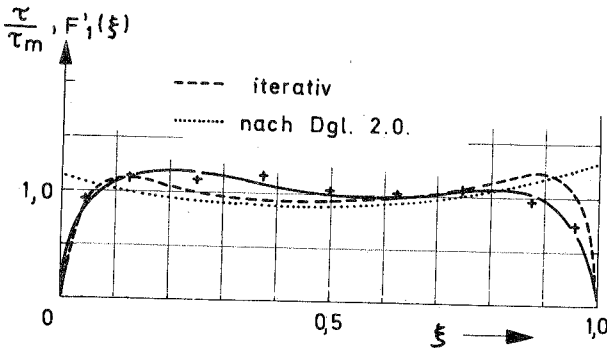
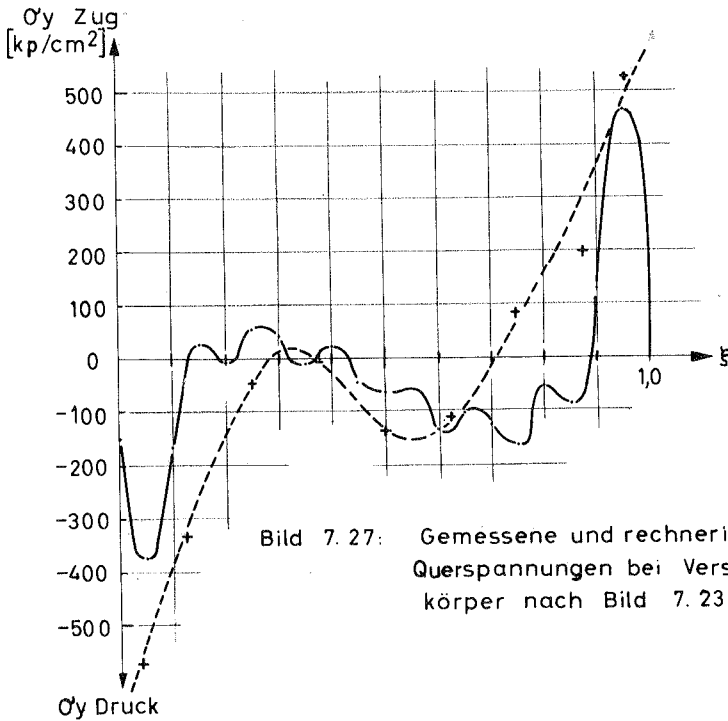


Bild 7.26: Vergleich der auf den Mittelwert bezogenen gemessenen Schubspannungen mit berechneten Funktionen  $F_1'(\xi)$  für den Versuchskörper nach Bild 7.23



Interessant ist es auch, die in der Schweißnaht gemessenen Querspannungen  $\sigma_y$  mit den rechnerischen zu vergleichen, was in Bild 7.27 geschieht. Es ist hervorzuheben, daß sowohl die Größenordnung als auch der Verlauf der errechneten Querspannungen gut mit den gemessenen Werten übereinstimmen, wenn man von der Welligkeit der rechnerischen Kurve absieht, die auf die endliche Anzahl der verwendeten Reihenglieder ( $n=40$ ) zurückzuführen ist.\*) Offenbar sind die Querspannungen wesentlich empfindlicher in bezug auf die Anzahl der Reihenglieder als die Längsspannungen, bei denen sich immer ein sehr glatter Verlauf ergab. Deutlich zeigt Bild 7.27 die Umkehrung des Vorzeichens der Querspannungen infolge des Biegeeinflusses bei dem hier vorliegenden Verhältnis  $l_{\parallel}/b_2 \approx 0,6$ , eine Erscheinung, die bereits in Abschnitt 7.3 diskutiert wurde (s. auch Bild 7.11 und 7.12, S.110/11).

\*) Der in Bild 7.27 dargestellte Bereich  $0 < \xi < 1$  entspricht bei den vorliegenden Probenabmessungen nur etwa  $L/11$ .

## 8. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Es wurde über spannungsoptische Modellversuche an überlappten Kehlnaht-Laschenverbindungen und verschiedene theoretische Ansätze zur Ermittlung der Kraftverteilung in den Schweißnähten berichtet.

Eine 1. Reihe von spannungsoptischen Versuchen (Abschnitte 4.1 bis 4.3) diente der überschlägigen Ermittlung der Kraftverteilung zwischen Stirn- und Flankennähten bei kombinierten Verbindungen mit verschiedenen Verhältnissen von Blechbreite zu Laschenbreite ( $b_1/b_2$ ) und Länge der Flankennähte zu Länge der Stirnnähte ( $l_{//}/l_1$ ). Nachdem die Ergebnisse dieser Versuchsreihe nur unzureichend mit Berechnungen nach der bereits in den 20 er Jahren aufgestellten einfachen Theorie der Haftverbindungen (Abschnitt 2.2) übereinstimmten, wurde eine 2. Reihe von spannungsoptischen Versuchen durchgeführt, bei der durch die Verspiegelung der Laschen eine exakte Bestimmung der Kraftanteile von Stirn- und Flankennähten möglich war. Die Ergebnisse dieser 2. Versuchsreihe bestätigten im wesentlichen die der 1. Zur genaueren Ermittlung der elastischen Eigenschaften der Schweißnähte, hier durch den Begriff "Verschiebungsmodul" ( $k_{//}$ ,  $k_1$ ) charakterisiert, wurden Verschiebungsmessungen an Kunststoffmodellen durchgeführt (Abschnitte 5.2 und 5.3). Gleichzeitig wurden theoretische Überlegungen hierzu angestellt, die eine erstaunlich gute Übereinstimmung der errechneten Werte mit den Meßwerten ergaben (Abschnitte 5.4 und 5.5).

Da die Anwendung der einfachen Theorie der Haftverbindungen an einige einschränkende Voraussetzungen gebunden ist, wurde ein iteratives Berechnungsverfahren auf scheidentheoretischer Grundlage entwickelt (Abschnitt 6.1), bei dem die ungleiche Verteilung der Längsnormalspannungen über die Querschnitte der verbundenen Teile und deren gegenseitige Querdehnungsbehinderung für die Lasche exakt und für das Blech näherungsweise berücksichtigt wird. Außerdem wurde eine Theorie entwickelt, die es ermöglicht, die Bedingung zu erfüllen, daß die Schubspannungen



am freien Nahtende auf Null abfallen müssen (Abschnitt 6.2).

Als wichtigste Ergebnisse (Kapitel 7) des Vergleichs zwischen den verschiedenen theoretischen Ansätzen und den spannungs-optischen Modellversuchen sowie einigen Messungen an Schweißverbindungen aus Stahl sind festzuhalten:

- 1.) Die einfache Theorie der Haftverbindungen ist ausreichend genau bei reinen Flankennaht-Verbindungen mit gedrungenen Querschnitten und im Verhältnis zur Blechdicke dünnen Schweißnähten. Die Höchstwerte der "Schubkraft" an den Nahtenden sind jedoch keine echten Schubspannungsspitzen, sondern sind Höchstwerte der Verschiebung. Bei kombinierten Verbindungen ergibt die einfache Theorie nur bei sehr dünnen Nähten, die aus praktischen Gründen nicht in Frage kommen, einigermaßen richtige Werte für die Kraftaufteilung zwischen Stirn- und Flankennähten.
- 2.) Das auf scheinbentheoretischer Grundlage entwickelte iterative Berechnungsverfahren (Abschnitt 6.3) ergibt für Verbindungen mit breiten dünnen Querschnitten und im Verhältnis zum Blech dünnen Schweißnähten sehr gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Mit einer kleinen Modifikation läßt sich auch der Einfluß dickerer Nähte abschätzen (Abschnitt 7.2). Die Querspannungen werden durch die scheinbentheoretische Berechnung gut wiedergegeben, der Einfluß der Querspannungen auf die Schubkraftverteilung in den Flankennähten ist jedoch so unbedeutend, daß er vernachlässigt werden kann.
- 3.) Bei kombinierten Verbindungen mit dicken Schweißnähten versagt auch die hier angewandte scheinbentheoretische Berechnung, da die endliche Breite der Nähte Umlenkungen des Kraftflusses, zum Teil räumlicher Art, verursacht, die zu großen Veränderungen der Kraftaufteilung zwischen Stirn- und Flankennähten gegenüber den rechnerischen Verhältnissen führen.
- 4.) Bessere Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ohne die eben diskutierten Einschränkungen ist nur von einem Verfahren zu erwarten, das a) die Spannungsverteilung auch in einem breiten Blech exakt erfaßt und b) Veränderungen des Kraftflusses durch die endliche Dicke der Naht berücksichtigt.

9. Anhang

9.1 Ableitung und Lösung der Differentialgleichung für die Kraft im Blech einer zweischnitttigen Flankenkehlnaht-Verbindung  
(zu Abschnitt 2.2)

Es sei angenommen, daß die in Abschnitt 2.1 genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

In Bild 9.1 ist ein verformtes Element der Verbindung mit den daran angreifenden Kräften dargestellt:

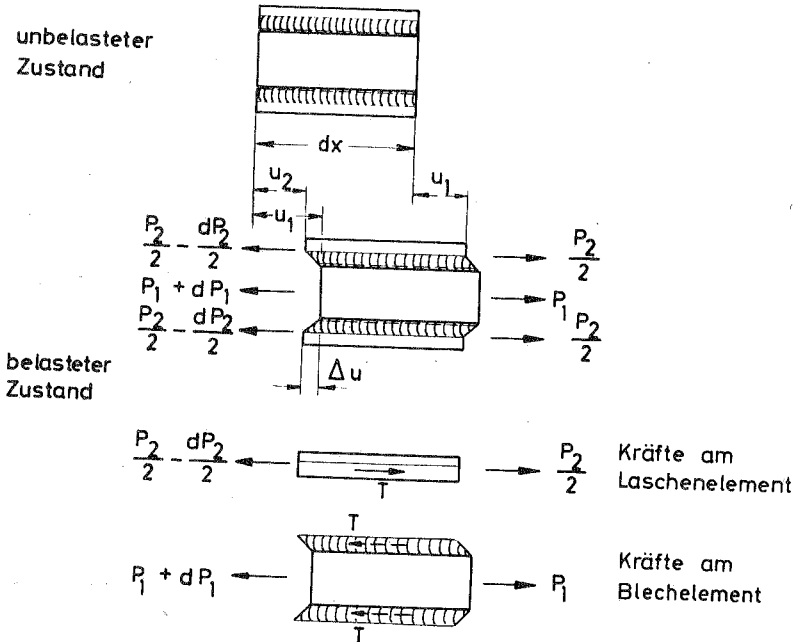


Bild 9.1: Element einer Flankenkehlnaht-Verbindung

Es läßt sich folgende Beziehung zwischen der Änderung der Kraft im Blech und der relativen Verschiebung zwischen Blech und Lasche ableiten:

Aus  $T = k_{//} \cdot \Delta u$  (a)

und  $4T = dP_1/dx$  (b)

folgt  $dP_1/dx = 4k_{//} \cdot \Delta u$  (c)

Die Verschiebungen ergeben sich zu

$$u_1 = \int_0^x \frac{P_1}{EA_1} dx \quad u_2 = u_2|_{x=0} + \int_0^x \frac{P_2}{E2A_2} dx$$

und daraus

$$\Delta u = u_1 - u_2 = \int_0^x \left( \frac{P_1}{EA_1} - \frac{P_2}{E2A_2} \right) dx - u_2|_{x=0} \quad (d)$$

Mit  $P_2 = P - P_1$  und Gleichsetzen von  $\Delta u$  in (c) und (d) erhält man

$$\frac{1}{4k_{//}} \cdot \frac{dP_1}{dx} = -u_2|_{x=0} + \int_0^x \left( \frac{P_1}{EA_1} - \frac{P - P_1}{E2A_2} \right) dx \quad (e)$$

Durch einmaliges Differenzieren

$$\frac{1}{4k_{//}} \cdot \frac{d^2P_1}{dx^2} = \frac{P_1}{EA_1} - \frac{P - P_1}{E2A_2} \quad (f)$$

und nach  $P_1$  geordnet

$$\frac{d^2P_1}{dx^2} - P_1 \left( \frac{4k_{//}}{EA_1} + \frac{4k_{//}}{E2A_2} \right) = -\frac{P4k_{//}}{E2A_2} \quad (g) \equiv (2.1)$$

Mit den dimensionslosen Größen

$$x/l_{//}} = \xi \quad k_{//}/E = k_{//}' \quad P_1/P = F_1$$

schreibt sich Gleichung (g)

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - F_1 4 k_{//}' l_{//}^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 A_2} \right) = -4 k_{//}' l_{//}^2 \frac{1}{2 A_2} \quad (\text{h}) \equiv (2.2)$$

und weiter mit den Abkürzungen

$$\alpha^2 = 4 k_{//}' l_{//}^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 A_2} \right)$$

$$B = 4 k_{//}' l_{//}^2 \frac{1}{2 A_2}$$

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - \alpha^2 F_1 = -B \quad (\text{j}) \equiv (2.5)$$

Die allgemeine Lösung dieser Dgl. ist bekanntlich

$$F_1 = C_1 e^{\alpha \xi} + C_2 e^{-\alpha \xi} + B/\alpha^2 \quad (\text{k})$$

wobei die Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

$$1.) \quad \xi = 0 \quad F_1 = P_1/P = 0$$

$$2.) \quad \xi = 1 \quad F_1 = P_1/P = 1 \quad \text{zu bestimmen sind.}$$

Zunächst ergibt sich

$$F_1 = \frac{1}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \left[ (1 - B/\alpha^2)(e^{\alpha \xi} - e^{-\alpha \xi}) + B/\alpha^2(e^{-\alpha} e^{\alpha \xi} - e^\alpha e^{-\alpha \xi}) \right],$$

was sich durch Einführung der Hyperbelfunktionen umformen läßt zu

$$F_1 = \left[ \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) \text{sh} \alpha \xi - \frac{B}{\alpha^2} \text{sh} \alpha (1 - \xi) \right] \frac{1}{\text{sh} \alpha} + \frac{B}{\alpha^2} \quad (1) \equiv (2.6)$$

Aus Gleichung (c) und (a) ergibt sich

$$T(x) = \frac{1}{4} \frac{dP_1}{dx}$$

Da  $\frac{dP_1}{dx} = \frac{dF_1 \cdot P}{d\xi \cdot l_{//}}$  ist, wird  $T(\xi) = \frac{dF_1}{d\xi} \cdot \frac{P}{4 l_{//}} \quad .$

Man erkennt, daß  $P/4 l_{//}$  die mittlere Schubkraft in den Flankennähten ist. Der Schubkraftverlauf ergibt sich also durch Differentiation von Gl. (k) zu

$$\begin{aligned} T^*(\xi) &= \frac{T(\xi)}{P/4 l_{//}} = F_1'(\xi) \\ &= \left[ \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) \operatorname{ch} \alpha \xi + \frac{B}{\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha (1 - \xi) \right] \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (m) \equiv (2.7) \end{aligned}$$

9.2 Ableitung der Gleichung für die Kraftverteilung bei kombinierten Verbindungen  
(zu Abschnitt 2.3)

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für eine Flankenkehlnaht-Verbindung war

$$F_1 = C_1 e^{\alpha \xi} + C_2 e^{-\alpha \xi} + \beta/\alpha^2 \quad (a)$$

Als Randbedingungen für die kombinierte Verbindung sind einzuführen

$$\begin{aligned} 1.) \quad \xi = 0 \quad F_1 &= 0 \\ 2.) \quad \xi = 1 \quad F_1 &= (P - P_{\perp})/P = 1 - \frac{P_{\perp}}{P} \end{aligned} \quad (b)$$

wobei  $P_{\perp}$  den von der Stirnnaht übertragenen Kraftanteil bezeichnet.

Die Bestimmung der Konstanten und Einsetzen in (a) ergibt mit Umformung der Exponentialfunktionen in Hyperbelfunktionen

$$F_1 = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{P_{\perp}}{P}\right) - \frac{\beta}{\alpha^2} \right] \operatorname{sh} \alpha \xi - \frac{\beta}{\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha(1 - \xi) \right\} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (c) \equiv (2.8)$$

Die Verschiebung der Flankennaht ist

$$\Delta u_{//} \Big|_{\xi=1} = \frac{1}{4 k_{//}} \cdot \frac{dP_1}{dx} \Big|_{x=1_{//}} = \frac{P}{4 k_{//} l_{//}} \cdot \frac{dF_1}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \quad (d)$$

Die Verschiebung der Stirnnaht ist

$$\Delta u_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{2 b_2 k_{\perp}} \cdot \frac{1}{k_{\perp}} \quad (e)$$

wobei angenommen ist, daß die Lasche über ihre gesamte Breite

mit einer Stirnnaht angeschlossen ist. Für die Kontinuität

ist  $\Delta u_{//\xi=1} = \Delta u_{\perp}$  zu fordern, also

$$\frac{P_{\perp}}{2 b_2 k_{\perp}} = \frac{P}{4 k_{//} l_{//}} \cdot \frac{dF_1}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \quad (f)$$

Aus (c) folgt zunächst

$$\frac{dF_1}{d\xi} = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{P_{\perp}}{P}\right) - \frac{\beta}{\alpha^2} \right] \operatorname{ch} \alpha \xi + \frac{\beta}{\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha (1 - \xi) \right\} \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (g)$$

und daraus

$$\frac{dF_1}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{P_{\perp}}{P}\right) - \frac{\beta}{\alpha^2} \right] \operatorname{ch} \alpha + \frac{\beta}{\alpha^2} \right\} \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (h)$$

Dies ergibt in Verbindung mit (f) nach Umstellung

$$\frac{P_{\perp}}{P} = \frac{\frac{\beta}{\alpha^2} (1 - \operatorname{ch} \alpha) + \operatorname{ch} \alpha}{\frac{2 k_{//} \cdot l_{//}}{k_{\perp} b_2} + \alpha \operatorname{cth} \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (j) \equiv (2.9)$$

Dieser Ausdruck ist dann je nach Bedarf in Gl. (c) oder (g) einzusetzen. Eine explizite Wiedergabe von  $F_1(\xi)$  für kombinierte Verbindungen ist nicht ratsam, da Gleichung (2.8) dann sehr unübersichtlich wird.

9.3 Berechnung der Querspannungen und ihre Berücksichtigung  
in der Differentialgleichung  
(zu Abschnitt 3 und 6.1)

Wir betrachten zunächst ein Gedankenmodell, das aus drei Scheiben mit den Querschnitten  $A_2$ ,  $A_1$  und  $A_2$  besteht, wobei die beiden Scheiben 2 an ihren Enden durch unendlich steife Joche verbunden sind, während die Scheibe 1 von den Jochen durch einen unendlich dünnen Spalt getrennt ist, so daß sie zwar Druckkräfte, aber keine Zugkräfte aufnehmen kann (Bild 9.2).

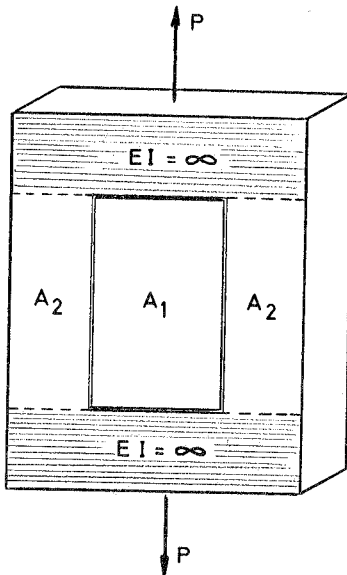


Bild 9.2:  
Gedankenmodell zur  
Berechnung der  
Querspannungen

An den Jochen greife beiderseits die Zugkraft  $P$  an, so daß für die Spannung in den Scheiben 2 gilt:

$$P = \sigma_{02} \cdot 2A_2$$

Wir denken uns nun die äußeren Kräfte aufgehoben, indem wir entgegengesetzt gerichtete gleich große Kräfte  $-P$  anbringen. Da Scheibe 1 Druckkräfte aufnehmen kann, ist  $-P$  auf den Gesamtquerschnitt anzusetzen, und es gilt:



$$\Delta \sigma = -P / (A_1 + 2A_2)$$

Damit werden die Spannungen in den Scheiben

$$\sigma_1 = \Delta \sigma = -\sigma_{02} \frac{2A_2}{A_1 + 2A_2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_{02} - \Delta \sigma \\ &= \sigma_{02} - \sigma_{02} \frac{2A_2}{A_1 + 2A_2} \\ &= \sigma_{02} \frac{A_1}{A_1 + 2A_2} \end{aligned}$$

Wir übertragen dieses Gedankenmodell nun auf eine Kehlnahtverbindung. Es sei angenommen, daß zunächst nur die Laschen unter den über die Breite konstanten Spannungen  $\sigma_{x2}$  stehen. Ihre Ränder seien schon vor dem Aufbringen der Belastung in Querrichtung unverschieblich gehalten, d.h. also

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 0, \quad \sigma_{y02} = \mu \sigma_{x2} \quad (\text{entspricht P})$$

Analog dem oben beschriebenen Gedankenmodell ergeben sich die Querspannungen in Blech und Laschen nach Aufhebung der äußeren Haltekraft zu

Lasche

$$\sigma_{y22} = \sigma_{y02} \frac{t_1}{t_1 + 2t_2}$$

Blech

$$\sigma_{y12} = -\sigma_{y02} \frac{2t_2}{t_1 + 2t_2}$$

Nehmen wir weiterhin an, daß das Blech ebenfalls unter Längsspannungen steht, dann folgt durch Vertauschung der Indizes:

Blech

$$\sigma_{y11} = \sigma_{y01} \frac{2t_2}{t_1 + 2t_2}$$

Lasche

$$\sigma_{y21} = -\sigma_{y01} \frac{t_1}{t_1 + 2t_2}$$

Insgesamt werden also die Querspannungen

im Blech

in der Lasche

$$\sigma_{y1} = (\sigma_{y01} - \sigma_{y02}) \frac{2t_2}{t_1 + 2t_2}$$

$$\sigma_{y2} = (\sigma_{y02} - \sigma_{y01}) \frac{t_1}{t_1 + 2t_2}$$

Nun war jedoch  $\sigma_{y02} = \mu \sigma_{x2}$

$\sigma_{y01} = \mu \sigma_{x1}$

Also erhält man

$$\sigma_{y1} = (\sigma_{x1} - \sigma_{x2}) \frac{\mu 2t_2}{t_1 + 2t_2}$$

$$\sigma_{y2} = (\sigma_{x2} - \sigma_{x1}) \frac{\mu t_1}{t_1 + 2t_2}$$

Das Verhältnis der Querspannungen wird

$$\sigma_{y1}/\sigma_{y2} = -2t_2/t_1,$$

die Querspannungen verhalten sich also umgekehrt wie die Dicken.

Der Beitrag der Querspannungen zur Dehnung  $\epsilon_x$  ist

$$\epsilon_{x1} = -\frac{1}{E} (\sigma_{x1} - \sigma_{x2}) \frac{\mu^2 2t_2}{t_1 + 2t_2}$$

$$\epsilon_{x2} = -\frac{1}{E} (\sigma_{x2} - \sigma_{x1}) \frac{\mu^2 t_1}{t_1 + 2t_2}$$

Unter Einführung von  $\sigma_{x1} = P_1/A_1$  und  $\sigma_{x2} = P_2/2A_2$  wird analog der Ableitung in Abschnitt 9.1, S.130 ff.

$$u_1 = \int_0^x \left[ \frac{P_1}{EA_1} - \frac{1}{E} \left( \frac{P_1}{A_1} - \frac{P_2}{2A_2} \right) \frac{\mu^2 2t_2}{t_1 + 2t_2} \right] dx$$

$$u_2 = u_2 \Big|_0 + \int_0^x \left[ \frac{P_2}{E2A_2} - \frac{1}{E} \left( \frac{P_2}{2A_2} - \frac{P_1}{A_1} \right) \frac{\mu^2 t_1}{t_1 + 2t_2} \right] dx$$

Durch Bildung von  $\Delta u$  analog Gl. (d) aus Abschnitt 9.1, S.131, und Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned} \frac{E}{4 k_{//}} \cdot \frac{d^2 P_1}{dx^2} &= \frac{P_1}{A_1} - \left( \frac{P_1}{A_1} - \frac{P_2}{2 A_2} \right) \frac{\mu^2 2 t_2}{t_1 + 2 t_2} \\ &\quad - \frac{P_2}{2 A_2} + \left( \frac{P_2}{2 A_2} - \frac{P_1}{A_1} \right) \frac{\mu^2 t_1}{t_1 + 2 t_2} \\ &= \left( \frac{P_1}{A_1} - \frac{P_2}{2 A_2} \right) \cdot (1 - \mu^2) \end{aligned}$$

oder 
$$\frac{E}{4 k_{//} (1 - \mu^2)} \cdot \frac{d^2 P_1}{dx^2} = \frac{P_1}{A_1} - \frac{P_2}{2 A_2}$$

Eine weitere Umwandlung dieser Gleichung erübrigt sich, denn man erkennt, daß die Berücksichtigung der Querdehnung in der Differentialgleichung nur eine Veränderung des Faktors bei

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} \quad \text{von} \quad \frac{E}{4 k_{//}} \quad \text{auf} \quad \frac{E}{4 k_{//} (1 - \mu^2)} \quad \text{bewirkt.}$$

Da die Größenordnung von  $\mu$  für die üblichen Materialien zwischen 0,3 und 0,4 liegt, wird die Wirkung der Querdehnung durch Multiplikation von  $k_{//}$  mit einem Faktor zwischen 0,91 und 0,84 erfaßt.

9.4 Beispiele von Ergebnisprotokollen  
der elektronischen Rechnung

27/8/63---12

INSTITUT FUER SPANNUNGSOPTIK UND MODELLMESSUNGEN DER T.H. STUTT GART

AUSWERTUNG SPANNUNGSOPTISCHER MESSUNGEN

KRAFTVERTEILUNG BEI KEHLNAHTVERBINDUNGEN  
PLATTE KV 31.1 P = 403.3 KP

SPANNUNGSOPTISCHE KONSTANTE (KG/CM<sup>2</sup> ORDN.) S = +11.6012  
 QUERDEHNUNGSKONSTANTE (KG/CM<sup>2</sup> SKT) C = +0.3490  
 LASTUMRECHNUNGSFAKTOR F = +0.2480  
 LAENGENMASSSTAB L = +1.0000  
 DICKE DER HAUPTAUSFUEHRUNG (CM) T = +1.0000

PKT		MESSWERTE				SPANNUNGEN ( KG/CM <sup>2</sup> )				GRAD
NR	N	QD	A	SX	SY	TXY	SI	Sz	PHI	
+2.00	+2.23	+73	+0.1	-0.03	+6.38	+0.00	+6.38	-0.03	+0	
+2.01	+2.28	+73	+0.1	-0.10	+6.46	+0.00	+6.46	-0.10	+0	
+2.02	+2.22	+73	+0.1	-0.03	+6.35	+0.00	+6.35	-0.03	+0	
+2.03	+2.20	+72	+0.1	-0.05	+6.29	+0.00	+6.29	-0.05	+0	
+2.04	+2.18	+72	+0.1	-0.01	+6.26	+0.00	+6.26	-0.01	+0	
+2.05	+2.15	+71	+0.1	-0.01	+6.19	+0.00	+6.19	-0.01	+0	
+2.06	+2.14	+72	+0.1	+0.06	+6.21	+0.00	+6.21	+0.06	+0	
+2.07	+2.13	+71	+0.1	+0.02	+6.14	+0.00	+6.14	+0.02	+0	
+2.08	+2.12	+70	+0.1	-0.01	+6.09	+0.00	+6.09	-0.01	+0	
NORMALKRAFT NX =				-0.15 KG						
NORMALKRAFT NY =				+50.15 KG						
QUERKRAFT QXY =				+0.00 KG						
+3.00	+2.59	+83	+0.1	-0.13	+7.31	+0.00	+7.31	-0.13	+0	
+3.01	+2.62	+81	+2.1	-0.23	+7.28	-0.25	+7.29	-0.24	+2	
+3.02	+2.66	+85	+4.1	-0.13	+7.46	-0.48	+7.49	-0.16	+4	
+3.03	+2.61	+76	+7.1	-0.37	+6.94	-0.84	+7.04	-0.46	+6	
+3.04	+2.04	+69	+7.1	+0.16	+5.86	-0.68	+5.94	+0.08	+7	
+3.05	+1.89	+63	+5.1	+0.06	+5.40	-0.51	+5.45	+0.02	+5	
+3.06	+1.78	+59	+4.1	+0.03	+5.12	-0.32	+5.14	+0.01	+4	
+3.07	+1.72	+58	+1.1	+0.04	+4.98	-0.10	+4.98	+0.04	+1	
+3.08	+1.66	+55	+0.1	-0.01	+4.77	+0.00	+4.77	-0.01	+0	
NORMALKRAFT NX =				-0.52 KG						
NORMALKRAFT NY =				+49.09 KG						
QUERKRAFT QXY =				-3.21 KG						

INSTITUT FUER SPANNUNGSOPTIK UND MODELLMESSUNGEN DER T.H. STUTTART

AUSWERTUNG SPANNUNGSOPTISCHER MESSUNGEN  
NACH DEM SCHUBSPANNUNGSDIFFERENZENVERFAHREN

KRAFTVERTEILUNG BEI KEHLNAHTVERBINDUNGEN  
VERSUCH KV 31.1 BERECHNUNG DER LASCHEN

SPANNUNGSOPTISCHE KONSTANTE (KP/CM <sup>2</sup> ORDN.)	S =	+5.5894
LASTFAKTOR	PV =	+0.2479
LAENGENFAKTOR	LV =	+1.0000
DICKENFAKTOR	TV =	+0.6000

PKT. NR.	SPANNUNGEN ( KP/CM <sup>2</sup> )					GRAD
	SX	SY	TXY	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	PHI

VORDERE LASCHE

SCHNITT +5 / +6

0	+0.00	+17.55	+0.00	+17.55	+0.00	+0.0
1	+0.33	+16.34	-0.68	+16.37	+0.30	+2.4
2	+0.88	+15.27	-0.70	+15.31	+0.85	+2.8
3	+1.24	+14.37	-0.67	+14.41	+1.21	+3.0
4	+1.49	+13.85	-0.65	+13.89	+1.45	+3.1
5	+1.49	+13.86	+0.65	+13.89	+1.46	+176.9
6	+1.24	+14.37	+0.67	+14.40	+1.20	+177.0
7	+0.86	+15.25	+0.70	+15.28	+0.83	+177.2
8	+0.35	+16.37	+0.68	+16.40	+0.32	+177.6
9	+0.00	+17.39	+0.00	+17.39	+0.00	+0.0

NORMALKRAFT	NX =	+3.34	KG
NORMALKRAFT	NY =	+49.25	KG
QUERKRAFT	QXY =	-0.00	KG

SCHNITT +2 / +3

0	+2.28	+14.11	-0.91	+14.18	+2.21	+4.4
1	+3.70	+13.59	-0.89	+13.67	+3.62	+5.1
2	+2.79	+12.52	-1.08	+12.64	+2.67	+6.2
3	+1.40	+10.92	-1.13	+11.05	+1.27	+6.7
4	+0.69	+9.31	-1.23	+9.48	+0.52	+8.0
5	+0.17	+7.14	-0.78	+7.23	+0.09	+6.3
6	-0.08	+5.72	-0.54	+5.77	-0.13	+5.2
7	+0.03	+4.86	-0.46	+4.91	-0.01	+5.4
8	-0.17	+4.30	-0.67	+4.40	-0.26	+8.4
9	-1.25	+3.12	-0.53	+3.19	-1.32	+7.0

NORMALKRAFT	NX =	+5.84	KG
NORMALKRAFT	NY =	+58.09	KG
QUERKRAFT	QXY =	-5.79	KG

9.5 Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung  
für konstante Normalspannungsverteilung

Die Differentialgleichung war:

$$\frac{d^4 F_1}{d\xi^4} - \alpha^2 \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} + F_1 \alpha^2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta \quad (a) = (6.23)$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit festen Koeffizienten, deren homogene Lösung sich bekanntlich aus dem Ansatz  $F_1 = e^{r\xi}$  ergibt. Man erhält für  $r$  die biquadratische Gleichung

$$r^4 - \alpha^2 r^2 + \alpha^2 \alpha^2 = 0$$

Damit wird

$$r_{1 \dots 4} = \pm \alpha \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{\alpha^2}}} \quad (b)$$

Es läßt sich nun zeigen, daß  $\alpha^2/\alpha^2$  normalerweise sehr klein ist, so daß sich Gl. (b) vereinfachen läßt:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{4 k' l^2 (1/A_1 + 1/2 A_2)}{4 l^2 (1 + \mu)} = \frac{k'}{1 + \mu} \left( \frac{a^2}{A_1} + \frac{a^2}{2A_2} \right)$$

Nun war  $k' \approx G/2E$ ,  $G/E = \frac{1}{2(1 + \mu)}$

also

$$\frac{k'}{1 + \mu} = \frac{1}{4(1 + \mu)^2}$$

Das kleinste in Frage kommende  $\mu$  ist mit 0,3 anzusetzen. Somit wird

$$\frac{4\alpha^2}{\alpha^2} < \frac{1}{1,69} \left( \frac{a^2}{A_1} + \frac{a^2}{2A_2} \right)$$

Da aber in der Regel  $a^2 \ll 2A_2 \approx A_1$  ist, können wir schreiben

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{\alpha^2}{\kappa^2}} \approx \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{\alpha^2}{\kappa^2}\right)$$

und damit

$$r_{1,2} = \pm \kappa \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{\kappa^2}} \approx \pm \kappa$$

$$r_{3,4} = \pm \kappa \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{\kappa^2}} = \pm \alpha$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$F_{1p} = B/\alpha^2 ,$$

also wird die vollständige Lösung:

$$F_1 = C_1' e^{\alpha \xi} + C_2' e^{-\alpha \xi} + C_3' e^{\kappa \xi} + C_4' e^{-\kappa \xi} + B/\alpha^2$$

Sie läßt sich übersichtlicher angeben, wenn man die Hyperbelfunktionen einführt:

$$F_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha \xi + C_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + C_3 \operatorname{sh} \kappa \xi + C_4 \operatorname{ch} \kappa \xi + B/\alpha^2 \quad (c)$$

Mit den Randbedingungen

$$\xi = 0: F_1 = 0 \qquad \xi = 1: F_1 = \left(1 - \frac{P_1}{P}\right)$$

$$F_1' = 0 \qquad F_1' = 0$$

erhält man folgende vier Bestimmungsgleichungen für die Konstanten:

$$-\frac{B}{\alpha^2} = C_2 + C_4$$

$$0 = C_1 \alpha + C_3 \quad (d)$$

$$1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} = C_1 \operatorname{sh} \alpha + C_2 \operatorname{ch} \alpha + C_3 \operatorname{sh} \kappa + C_4 \operatorname{ch} \kappa$$

$$0 = C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha + C_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha + C_3 \kappa \operatorname{ch} \kappa + C_4 \kappa \operatorname{sh} \kappa$$

Nach langwierigen Eliminationen erhält man

$$\begin{aligned}
 C_1 \cdot N &= - \left[ (\operatorname{sh} \alpha - \frac{\kappa}{\alpha} \operatorname{sh} \kappa) \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) + (\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \kappa - \frac{\kappa}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \kappa) \frac{B}{\alpha^2} \right] \\
 C_2 \cdot N &= - \left[ (\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \alpha) \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) + (1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \kappa + \frac{\kappa}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \kappa) \frac{B}{\alpha^2} \right] \\
 C_3 \cdot N &= \left( \frac{\alpha}{\kappa} \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} \kappa \right) \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) + \left( \frac{\alpha}{\kappa} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \kappa \right) \frac{B}{\alpha^2} \\
 C_4 \cdot N &= (\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \alpha) \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) - (1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \kappa + \frac{\alpha}{\kappa} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \kappa) \frac{B}{\alpha^2}
 \end{aligned} \tag{e}$$

worin

$$N = 2(1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \kappa) + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \kappa \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \frac{\kappa}{\alpha} \right) \equiv (6.25)$$

Die endgültige Lösung läßt sich übersichtlicher angeben, wenn man sie in der folgenden Form schreibt:

$$F_1 = \frac{B}{\alpha^2} + \frac{1}{N} \left[ \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) f(\xi) - \frac{B}{\alpha^2} f(1-\xi) \right] \tag{f} \equiv (6.24)$$

Mit

$$\begin{aligned}
 f(\xi) &= \operatorname{ch} \alpha (1-\xi) + \operatorname{ch} \kappa (1-\xi) - \operatorname{ch} \kappa \operatorname{ch} \alpha \xi - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \kappa \xi \\
 &\quad + \frac{\kappa}{\alpha} \operatorname{sh} \kappa \operatorname{sh} \alpha \xi + \frac{\alpha}{\kappa} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \kappa \xi
 \end{aligned} \tag{g} \equiv (6.26)$$

In gleicher Weise wird

$$F_1' = \frac{1}{N} \left[ \left( 1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2} \right) f'(\xi) + \frac{B}{\alpha^2} f'(1-\xi) \right] \tag{h}$$

mit

$$\begin{aligned}
 f'(\xi) &= \alpha \left[ \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \kappa \xi - \operatorname{ch} \kappa \operatorname{sh} \alpha \xi - \operatorname{sh} \alpha (1-\xi) \right] \\
 &\quad + \kappa \left[ \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \alpha \xi - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \kappa \xi - \operatorname{sh} \kappa (1-\xi) \right]
 \end{aligned} \tag{j}$$



9.6 Aufstellung der Formel für die Verschiebung bei der Dgl. 4. Ordnung

Es war

$$\Delta u = \frac{1}{k_{//}} T(x) - \frac{1}{k_{//}} \frac{a^2}{4(1+\mu)} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \quad (a) \equiv (6.22)$$

Wir machen die Beziehung dimensionslos, indem wir sie auf die konstante Verschiebung

$$\Delta \bar{u} = \frac{P}{4 l_{//} k_{//}} \quad (b)$$

beziehen, und schreiben

$$\frac{\Delta u}{\Delta \bar{u}} = \delta = \frac{T(x) 4 l_{//}}{P} - \frac{4 l_{//}}{P} \frac{a^2}{4(1+\mu)} \frac{d^2 T(x)}{dx^2}$$

woraus durch Einführung von  $\xi = x/l_{//}$

$$\text{und } F_1' = T(x) 4 l_{//}/P \quad (\text{s. S.133, Gl.m})$$

$$\delta = F_1' - \frac{1}{\alpha^2} F_1''' \quad (c) \equiv (6.27)$$

wird.

Dabei ist

$$F_1''' = \frac{1}{N} \left[ \left(1 - \frac{P_1}{P} - \frac{B}{\alpha^2}\right) f'''(\xi) + \frac{B}{\alpha^2} f'''(1-\xi) \right] \quad (d)$$

mit

$$f'''(\xi) = \alpha^3 \left[ \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2 \text{sh } \alpha \text{ch } \alpha \xi - \text{ch } \alpha \text{sh } \alpha \xi - \text{sh } \alpha (1-\xi) \right] + \alpha^3 \left[ \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2 \text{sh } \alpha \text{ch } \alpha \xi - \text{ch } \alpha \text{sh } \alpha \xi - \text{sh } \alpha (1-\xi) \right] \quad (e)$$

9.7 Berechnung von  $P_1/P$  in der Lösung der Dgl. 4. Ordnung

Für die Verschiebung der Stirnnaht wird analog Abschnitt 9.2, S. 134, Gl. (e)

$$\Delta u_1 = \frac{P_1}{2b_2} \cdot \frac{1}{k_1} \quad \text{gesetzt.} \quad (a)$$

Die Verschiebung des Flankennahtendes ist

$$\Delta u_{//} = \delta \Big|_{\xi=1} \cdot \Delta \bar{u} \quad (b)$$

$\delta \Big|_{\xi=1}$  wird nach Gl.(c) von Abschnitt 9.6

$$\delta \Big|_{\xi=1} = \underbrace{F_1' \Big|_{\xi=1} - \frac{1}{\alpha^2} F_1''' \Big|_{\xi=1}}_{= 0 \text{ entsprechend den Randbedingungen}}$$

Aus den Gl.(h) und (j) von Abschnitt 9.6 berechnet sich

$$-\frac{1}{\alpha^2} F_1''' \Big|_{\xi=1} \quad \text{und damit } \delta \Big|_{\xi=1} \quad \text{zu}$$

$$\begin{aligned} \delta \Big|_{\xi=1} &= \frac{1}{N} \frac{P_1}{P} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) (\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha) \quad (c) \\ &- \frac{1}{N} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left[ \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) (\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \frac{B}{\alpha^2} (\alpha \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha) \right] \end{aligned}$$

Zur Erfüllung der Verträglichkeit muß  $\Delta u_1 = \Delta u_{//}$  sein, also

$$\frac{P_1}{2b_2} \cdot \frac{1}{k_1} = \frac{P}{4l_{//}k_{//}} \cdot \delta \Big|_{\xi=1} \quad (d)$$

Nach Einsetzen von (c) in (d) und Elimination von  $\frac{P_1}{P}$  erhält man

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{1}{N} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left[ \left(1 - \frac{B}{\alpha^2}\right) (\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \frac{B}{\alpha^2} (\alpha \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha) \right]}{\frac{1}{N} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) (\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha) - \frac{2l_{//}k_{//}}{b_2 k_1}}$$

9.8 Berechnung der Verwölbung des Stirnendes der Lasche  
und Aufstellung der Randbedingungen für  $F_1(\xi=1)$

Aus Bild 6.3 (S.68) erkennt man, daß die Nullknoten der Längsverschiebung bei  $x = (2m + 1) \cdot L/4$  liegen. Die Längsverschiebung des Stirnendes der Lasche ergibt sich also durch Integration von  $L/4$  bis 0:

$$u(y) \Big|_{x=0} = u_0(y) = \int_{L/4}^0 \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) dx \approx \int_{L/4}^0 \frac{\sigma_x}{E} dx \quad (a)$$

$\sigma_y$  kann aus folgenden Gründen vernachlässigt werden:

- a) da die  $\sigma_y$  höchstens das  $\mu$ -fache der  $\sigma_x$  betragen und sich auf die Dehnungen  $\epsilon_x$  wiederum nur  $\mu$ -fach auswirken, beträgt ihr Einfluß höchstens 10%.
- b) da die  $\sigma_y$  in einem Teil der Überlappung positiv, im anderen negativ sind, wird sich ihre Wirkung auf die Längsdehnung teilweise aufheben.
- c) da die  $\sigma_y$  über die Querschnittsbreite annähernd konstant sind, können sie nur einen minimalen Beitrag zur Verwölbung des Querschnitts leisten.

Mit Gl. 6.4 (S.69) wird aus (a), unter Vorziehung der von  $x$  unabhängigen Glieder vor das Integral,

$$u_0(y) = \frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [C_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{4n} \alpha_n (2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y)] \int_{L/4}^0 \sin \alpha_n x dx \quad (b)$$

Mit 
$$\int_{L/4}^0 \sin \alpha_n x dx = -\frac{1}{\alpha_n} (\cos 0 - \cos n \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\alpha_n} \quad (c)$$

da  $n$  nur ungerade Werte annimmt.

Nun interessiert aber nicht die absolute Verschiebung des Laschenrandes, sondern die Verwölbung. Es ist also zu bilden:

$$\Delta u_0(y) = u_0\left(\frac{b}{2}\right) - u_0(y) = \frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[ C_{1n} \alpha_n^2 (\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \operatorname{ch} \alpha_n y) \right. \\ \left. + C_{4n} \alpha_n (2 \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - 2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n \frac{b}{2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} - \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y) \right]$$

(d)  $\equiv$  (6.30)

Zur Vereinfachung wird diese Funktion durch ihren Mittelwert ersetzt. Dazu sind folgende Integrale zu bilden:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} (\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \operatorname{ch} \alpha_n y) dy = \left[ y \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \frac{1}{\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n y \right]_{-b/2}^{+b/2} = b \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \frac{2}{\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2}$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{b}{2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} - y \operatorname{sh} \alpha_n y \right) dy = \left[ \frac{b}{2} y \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} - \frac{1}{\alpha_n} y \operatorname{ch} \alpha_n y + \frac{1}{\alpha_n^2} \operatorname{sh} \alpha_n y \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$= \frac{b^2}{2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2} - \frac{2}{\alpha_n} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} + \frac{2}{\alpha_n^2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2}$$

Der Mittelwert ergibt sich dann zu

$$\Delta \bar{u}_0 = \frac{1}{E} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[ (C_{1n} \alpha_n^2 + C_{4n} \alpha_n) (\operatorname{ch} \alpha_n \frac{b}{2} - \frac{1}{\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2}) \right. \\ \left. + C_{4n} \alpha_n (\alpha_n \frac{b}{2} \operatorname{sh} \alpha_n \frac{b}{2}) \right] \quad (e)$$

Um diesen Betrag ist also die relative Verschiebung zwischen Lasche und Blech am Stirnnahtende zu erhöhen. Für die Kontinuität im Bereich der Stirnnaht gilt damit

$$\Delta u_{\perp} = \Delta u_{//} + \Delta \bar{u}_0 \quad (f)$$

Nun ist  $\Delta u_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{2 b_2} \frac{1}{k_{\perp}}$ ,  $\Delta u_{//} = \delta \Delta \bar{u}$  (s. S.145), womit

$$\frac{F_{\perp}}{2 b_2} \frac{1}{k_{\perp}} = \frac{P}{4 l_{//} k_{//}} \left( -\frac{1}{x^2} F_1''' \Big|_{\xi=1} \right) + \Delta \bar{u}_0 \quad (g)$$

Dimensionsfrei gemacht, und mit  $\Delta \bar{u}_0 = \Delta \bar{u}_0' / E$  wird schließlich

$$F_1 \Big|_{\xi=1} = 1 + \frac{b_2 k_{\perp}}{2 l_{//} k_{//} x^2} F_1''' \Big|_{\xi=1} - \Delta \bar{u}_0' / 2 b_2 k_{\perp} \quad (h)$$

9.9 Abdruck des Algol-Programmes zur iterativen Berechnung

164 N410101 FEDER KV-ITERATION RZ STUTTGART 6.12.66/0.07

```
ALCOR TR4 (2) MV 8 , JULY 66 , MODE 6
'BEGIN' 'INTEGER' 'PROCEDURE' 'TIME'; 'CODE';
'REAL' 'PROCEDURE' 'SINH(X)'; 'VALUE' 'X'; 'REAL' 'X'; 'CODE';
'REAL' 'PROCEDURE' 'COSH(X)'; 'VALUE' 'X'; 'REAL' 'X'; 'CODE';
'INTEGER' N,Z,T,STIRN,SPANNUNGEN;

'REAL' B1,T1,B2,T2,LF,KF,KS,KFDG,MY,A,DELTA XI,SCHRANKE,MODELL;
'BOOLEAN' KONV,XIHA,ZTS,ZYS;
DATEN: READ(MODELL,B1,T1,B2,T2,LF,KF,KS,KFDG,MY,A,N,DELTA XI,SCHRANKE,
STIRN,SPANNUNGEN);
KONV:='TRUE';XIHA:=ZTS:=ZYS:='FALSE';

M1:
'BEGIN' 'INTEGER' M,S,MP; 'REAL' AP,DELTA Y;
M:=ENTIER(1/DELTA XI+1.01);MP:=ENTIER(0.5*B2/A+0.5);AP:=B2*0.5/MP;

M2:
'IF' MP'LESS'(M-1)/2'THEN' 'BEGIN' MP:=MP*2;'GOTO' M2'END'
'ELSE' DELTA Y:=B2*0.5/MP;MP:=MP+1;
'BEGIN' 'INTEGER' NI,MI; 'REAL' PERL4,LAMD2,B1S0,
XI,VORFA,KAPPA,KAPPAQ,KF4LF,FS01,FS02,FSL1,FSL2,F2S01,F2S02,F2S03,
F2SL1,F2SL2,F2SL3,F3SL,DU0,F1L,Y,CSXN,LAMP,FAKTP,PI;
'ARRAY' TABCOS,TABSIN[1:N,1:M],FXI,FSXIA,FSXIE,B1X1,PX1,RX1,
FSXIA1,FSXIE1,SYR1,SYR2,SXR1,SXR2,TXP2[1:M],F3SXI,DELTA[1:5],
AN,ALFN,CHN,SHN,FAKTN,CYR0,CU1,CU4,C1ALF1,C1ALF2,C4ALF1,C4ALF2,ASTR,
BSTR,ALFA[1:N],SXN[1:MP],TABSP,TABCP[1:N,1:MP];

'PROCEDURE' SCHEMAVERF(FCT,TAB,NY,FAKT) RESULT:(RES);
'VALUE' FCT,TAB,NY,FAKT;
'ARRAY' FCT,RES,TAB;'INTEGER' NY;'REAL' FAKT;
'BEGIN' 'INTEGER' NI,MI;'REAL' ABN;
'FOR' NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO' 'BEGIN' MI:=1;ABN:=0.5*FCT[M1]*
TAB[NI,MI];'FOR' MI:=2'STEP'1'UNTIL'(NY-1)'DO' ABN:=ABN+FCT[M1]*
TAB[NI,MI]; MI:=NY;ABN:=ABN+0.5*FCT[M1]*TAB[NI,MI];
RES[NI]:=ABN*FAKT 'END' 'END' SCHEMAVERF;

'PROCEDURE' REIHSUM(CONST,TAB) RESULT:(SIGMA); 'VALUE' CONST,TAB;'ARRAY'
CONST,SIGMA,TAB;'BEGIN' 'INTEGER' NI,MI;'REAL' S,MI:=0;'FOR' XI:=0'STEP'
DELTA XI'UNTIL'(1+0.5*DELTA XI)'DO' 'BEGIN' MI:=MI+1;S:=0;'FOR' NI:=1'STEP'
1'UNTIL'N'DO' S:=S+CONST[NI]*TAB[NI,MI];SIGMA[MI]:=S'END' 'END';

'PROCEDURE' DFXI(F) RESULT:(DF); 'VALUE' F;'ARRAY' F,DF;
'BEGIN' 'INTEGER' MI;'REAL' A;A:=1/(12*DELTA XI);
DF[1]:=(-25*F[1]+48*F[2]-36*F[3]+16*F[4]-3*F[5])*A;
DF[2]:=(-3*F[1]-10*F[2]+18*F[3]-6*F[4]+F[5])*A;
'FOR' MI:=3'STEP'1'UNTIL'M-2'DO'
DF[MI]:=(F[MI-2]-8*F[MI-1]+8*F[MI+1]-F[MI+2])*A;
DF[M-1]:=(-F[M-4]+6*F[M-3]-18*F[M-2]+10*F[M-1]+3*F[M])*A;
DF[M]:=(3*F[M-4]-16*F[M-3]+36*F[M-2]-48*F[M-1]+25*F[M])*A;
'END' DFXI;
```

```
'PROCEDURE' INTEGRATION(DF) RESULT:(F); 'VALUE' DF; 'ARRAY' DF,F;
'BEGIN' 'REAL' S,H6; H6:=DEL TAXI/6; F[1]:=0;
S:=1.25*DF[1]+2*DF[2]-0.25*DF[3]; F[2]:=2*H6*S;
'FOR' MI:=2 'STEP' 1 'UNTIL' M-1 'DO' 'BEGIN'
S:=S+DF[MI-1]+4*DF[MI]+DF[MI+1]; F[MI+1]:=H6*(S-
.25*DF[MI-1]+2*DF[MI]+1.25*DF[MI+1]) 'END'; 'END' INTEGRATION;
```

```
'PROCEDURE' GLSYST(GP,GR,AF,EF) RESULT:(F);
'VALUE' GP,GR,AF,EF; 'ARRAY' GP,GR,F; 'REAL' AF,EF;
'BEGIN' 'INTEGER' MI; 'ARRAY' A1,A2,A3,A0[1:M-2]; 'REAL' DELQ;
DELQ:=DEL TAXI*DEL TAXI; MI:=1; A1[MI]:=0;
A2[MI]:=-24+10*DELQ*GP[2]; A3[MI]:=12+DELQ*GP[3];
A0[MI]:=(12+DELQ*GP[1])*AF+DELQ*(GR[MI]+GR[MI+2])
+10*DELQ*GR[MI+1]; 'FOR' MI:=2 'STEP' 1 'UNTIL' M-3 'DO'
'BEGIN' A1[MI]:=12+DELQ*GP[MI]; A2[MI]:=-24+10*DELQ*GP[MI+1];
A3[MI]:=12+DELQ*GP[MI+2]; A0[MI]:=DELQ*(GR[MI]+GR[MI+2])
+10*DELQ*GR[MI+1] 'END'; MI:=M-2; A1[MI]:=12+DELQ*GP[MI];
A2[MI]:=-24+10*DELQ*GP[MI+1]; A3[MI]:=0; A0[MI]:=DELQ*(GR[MI]
+GR[MI+2])+10*DELQ*GR[MI+1]-(12+DELQ*GP[MI+2])*EF;
'FOR' MI:=2 'STEP' 1 'UNTIL' M-2 'DO'
'BEGIN' A2[MI]:=A2[MI]-A3[MI-1]*A1[MI]/A2[MI-1];
A0[MI]:=A0[MI]-A0[MI-1]*A1[MI]/A2[MI-1] 'END';
MI:=M-2; A1[MI]:=A0[MI]/A2[MI];
'FOR' MI:=M-3 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
A1[MI]:=(A0[MI]-A3[MI])*A1[MI+1]/A2[MI];
F[1]:=AF; F[MI]:=EF; 'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M-2 'DO'
F[MI+1]:=A1[MI]; 'END' GLSYST;
```

```
'COMMENT' KONSTANTENBERECHNUNG; 'BEGIN' 'INTEGER' NI;
PERL4:=(LF*B2)/LF*LAMD2:=1.57079633/PERL4; VORFA:=2*DEL TAXI/(1+B2/LF)
KAPPAQ:=-((2*LF/A)*(2*LF/A)*(1+MY))/KAPPA; KAPPA:=SQRT(-KAPPAQ);
KF4LF:=KAPPAQ*4*KF*LF*LF; ALFN[1]:=1.5707963268/(LF+B2);
'FOR' NI:=2 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' ALFN[NI]:=ALFN[NI-1]+2*ALFN[1];
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
CHN[NI]:=COSH(ALFN[NI])*0.5*B2);
SHN[NI]:=SINH(ALFN[NI])*0.5*B2);
CYRO[NI]:=(1-MY)*0.5*CHN[NI]/SHN[NI]
-(1+MY)*ALFN[NI]*B2*0.25/(SHN[NI]*SHN[NI]);
CU1[NI]:=(CHN[NI]-SHN[NI])/(ALFN[NI]*0.5*B2)/ALFN[NI];
CU4[NI]:=CU1[NI]+0.5*B2*SHN[NI];
FAKTN[NI]:=2/(ALFN[NI]*B2+2*SHN[NI]*CHN[NI]) 'END'; 'END' KSTBER;
```

```
'COMMENT' BERECHNUNG TABCOS UND TABSIN; 'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' MI:=0; 'FOR' XI:=0 'STEP' DEL TAXI 'UNTIL' (1+0.5*DEL TAXI) 'DO' 'BEGIN'
MI:=MI+1;
TABCOS[NI,MI]:=COS((-LAMD2+2*NI*LAMD2)*XI); TABSIN[NI,MI]:=SIN
((-LAMD2+2*NI*LAMD2)*XI) 'END' ZEILE 'END' BERECHNUNG TABCOS UND TABSIN;
PI:=3.1415926535; FAKTP:=2*DEL TAY/(B2+AP); LAMP:=PI/(B2+AP);
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' MI:=0;
'FOR' Y:=0 'STEP' DEL TAY 'UNTIL' (0.5*B2+0.5*DEL TAY) 'DO' 'BEGIN' MI:=MI+1;
TABCP[NI,MI]:=COS(LAMP*NI*Y);
TABSP[NI,MI]:=SIN(LAMP*NI*Y) 'END' 'END';
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' ALFA[NI]:=NI*PI/(B2+AP);
```

```
'COMMENT' BREITENBERECHN;'BEGIN''INTEGER'MI;'REAL'A1,A1N,A2,GAM;  
B1S0:=3.1415926535;  
GAM:=-B1S0*(LF+(B1-B2));A1N:=B1-B2;  
'IF'ABS(A1N)'LESS'10^-4'THEN'BEGIN' MI:=0;  
'FOR'XI:=0'STEP'DELTAXI'UNTIL'(1+0.5*DELTA XI)'DO'BEGIN'MI:=MI+1;  
B1XI[MI]:=B1'END';'GOTO'M3'END';  
NEWTON:A1:=A1N;A1N:=A1-(A1*(1-EXP(GAM/A1))-(B1-B2))  
/(1-(1-GAM/A1)*EXP(GAM/A1));  
'IF'ABS(A1N-A1)'GREATER'A1*10^-6'THEN'GOTO'NEWTON;  
A1:=A1N; A2:=- (B1S0*LF)/A1;MI:=0;  
'FOR'XI:=0'STEP'DELTAXI'UNTIL'(1+0.5*DELTA XI)'DO'BEGIN'MI:=MI+1;  
B1XI[MI]:=B2+A1*(1-EXP(A2*XI))'END'; 'END' BREITENBERECHN;
```

'COMMENT' ANFANG DER EIGENTLICHEN ITERATION;

```
M3:  
Z:=0;FS02:=FSL2:=F2S02:=F2SL2:=0;F1L:=1;  
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'BEGIN'  
FSXIA[MI]:=FSXIE[MI]:=1;FSXIA1[MI]:=FSXIE1[MI]:=0'END';  
'GOTO' M4;
```

```
ITERATION: Z:=Z+1;  
'IF'XIHA'THEN'BEGIN' 'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'BEGIN'  
FSXIA1[MI]:=FSXIA1[MI]+FSXIA[MI];  
FSXIE1[MI]:=FSXIE1[MI]+FSXIE[MI];  
FSXIA[MI]:=(2*FSXIA1[MI])/Z+FSXIE1[MI]/Z)/3'END';  
'END''ELSE''BEGIN' 'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'  
FSXIA[MI]:=(2*FSXIA[MI]+FSXIE[MI])/3;'END';
```

```
M4:  
'BEGIN''REAL'DELFS,DELFA;  
DELFS:=4*FSXIA[1]/((M-3)*(M-1));DELFA:=0;  
'FOR'MI:=(M-1)/2'STEP'-1'UNTIL'2'DO'BEGIN'DELFS:=DELFS+DELFS;  
FSXIA[MI]:=FSXIA[MI]+DELFS 'END';  
DELFS:=4*FSXIA[M]/((M-3)*(M-1)); DELFA:=0;  
'FOR'MI:=(M+3)/2'STEP'1'UNTIL'M-1'DO'BEGIN'DELFS:=DELFS+DELFS;  
FSXIA[MI]:=FSXIA[MI]+DELFA 'END';  
FSXIA[1]:=FSXIA[M]:=0 'END' FSKORREKTUR;  
'IF'Z'EQUAL'0'THEN'GOTO'ITERATION;
```

```
FS01:=FS02;FSL1:=FSL2;FS02:=FSXIE[1];FSL2:=FSXIE[M];  
'IF'Z'NOTGREATER'2'THEN'BEGIN'  
F2S03:=(-25*FSXIA[1]+48*FSXIA[2]-36*FSXIA[3]+16*FSXIA[4]  
-3*FSXIA[5])/(12*DELTA XI);  
F2SL3:=(3*FSXIA[M-4]-16*FSXIA[M-3]+36*FSXIA[M-2]-48*FSXIA[M-1]  
+25*FSXIA[M])/(12*DELTA XI); 'GOTO'UMSPEICHERUNG 'END';  
F2S03:=F2S02+FS02*(F2S01-F2S02)/(FS02-FS01);  
F2SL3:=F2SL2+FSL2*(F2SL1-F2SL2)/(FSL2-FSL1);  
UMSPEICHERUNG:F2S01:=F2S02;F2S02:=F2S03;F2SL1:=F2SL2;F2SL2:=F2SL3;  
INTEGRAL(FSXIA) RESULT:(FXI);  
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL' M'DO'  
FSXIA[MI]:=FSXIA[MI]*F1L/FXI[M];FXI[M]:=F1L;
```

```
'COMMENT' RANDSPANNUNGSBERECHNUNG; 'BEGIN' 'INTEGER' NI, MI;
'ARRAY' AN1, AN2, ATAU1, ATAU2, BN1, BN2, CXBH1, CXBH2(1:N),
FSXIAT, SYR01, SYR02(1:M);
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' FSXIAT(MI):=FSXIA(M+1-MI);
SCHEMAVERF(FSXIA, TABCOS, M, VORFA) RESULT: (AN1);
SCHEMAVERF(FSXIA, TABCOS, M, VORFA) RESULT: (AN2);
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' 'BEGIN' ATAU1(NI):=-AN1(NI)/(2*T1*LF);
ATAU2(NI):=-AN2(NI)/(4*T2*LF) 'END';
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' AN(NI):=ATAU1(NI)*CYR0(NI);
REIHSUM(AN, TABSIN) RESULT: (SYR01);
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' AN(NI):=ATAU2(NI)*CYR0(NI);
REIHSUM(AN, TABSIN) RESULT: (SYR02);
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' SYR01(MI):=SYR01(MI)*B2/B1XI(MI);
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' 'BEGIN'
SYR1(MI):=(SYR01(MI)-SYR02(M+1-MI))*2*T2/(T1+2*T2);
SYR2(MI):=(SYR02(MI)-SYR01(M+1-MI))*T1/(T1+2*T2) 'END';
SCHEMAVERF(SYR1, TABSIN, M, VORFA) RESULT: (BN1);
SCHEMAVERF(SYR2, TABSIN, M, VORFA) RESULT: (BN2);
'FOR' NI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' 'BEGIN'
C1ALF1(NI):=FAKTN(NI)*(ATAU1(NI)*ALFN(NI)*0.5*B2*SHN(NI)
-BN1(NI)*(SHN(NI)+ALFN(NI)*0.5*B2*CHN(NI));
C1ALF2(NI):=FAKTN(NI)*(ATAU2(NI)*ALFN(NI)*0.5*B2*SHN(NI)
-BN2(NI)*(SHN(NI)+ALFN(NI)*0.5*B2*CHN(NI));
C4ALF1(NI):=FAKTN(NI)*(-ATAU1(NI)*CHN(NI)+BN1(NI)*SHN(NI));
C4ALF2(NI):=FAKTN(NI)*(-ATAU2(NI)*CHN(NI)+BN2(NI)*SHN(NI));
CX3H1(NI):=C1ALF1(NI)*CHN(NI)+C4ALF1(NI)*
(2*CHN(NI)+ALFN(NI)*0.5*B2*SHN(NI)); CXRH2(NI):=C1ALF2(NI)
*CHN(NI)+C4ALF2(NI)*(2*CHN(NI)+ALFN(NI)*0.5*B2*SHN(NI)) 'END';
REIHSUM(CXBH1, TABSIN) RESULT: (SXR1);
REIHSUM(CXBH2, TABSIN) RESULT: (SXR2); DU0:=(1-FXI(M))/(2*T2*B2);
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' 'BEGIN'
SXR1(MI):=SXR1(MI)*B2/B1XI(MI);
SXR2(MI):=DU0+SXR2(MI) 'END'; 'END' RANDSPANNUNGSBERECHNUNG;
```

```
'COMMENT' LOESUNG DER DGL; 'IF' STIRN'EQUAL'0'THEN' 'BEGIN'
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' 'BEGIN' PXI(MI):=KAPPAQ; RXI(MI):=
KF4LF*(SXR1(MI)-SXR2(M+1-MI))-MY*(SYR1(MI)-SYR2(M+1-MI)) 'END';
GLSYST(PXI, RXI, F2S03, F2SL3) RESULT: (RXI);
'FOR' MI:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M'DO' PXI(MI):=0;
FXI(1):=0; FXI(M):=1;
GLSYST(PXI, RXI, FXI(1), FXI(M)) RESULT: (FXI);
DFXI(FXI) RESULT: (FSXIE) 'END'
```

```
'ELSE' 'BEGIN' 'REAL' DELSX;
DELSX:=12*DELTAXI*DELTAXI;
F3SXI(4):=(11*FSXIA(M-6)-56*FSXIA(M-5)+114*FSXIA(M-4)
-104*FSXIA(M-3)+35*FSXIA(M-2))/DELSX;
F3SXI(3):=(-FSXIA(M-6)+16*FSXIA(M-5)-30*FSXIA(M-4)
+16*FSXIA(M-3)-FSXIA(M-2))/DELSX;
F3SXI(2):=(-FSXIA(M-8)+16*FSXIA(M-7)-30*FSXIA(M-6)
+16*FSXIA(M-5)-FSXIA(M-4))/DELSX;
F3SXI(1):=(-FSXIA(M-10)+16*FSXIA(M-9)-30*FSXIA(M-8)
+16*FSXIA(M-7)-FSXIA(M-6))/DELSX;
DELTA(1):=FSXIA(M-8)+F3SXI(1)/KAPPAQ;
DELTA(2):=FSXIA(M-6)+F3SXI(2)/KAPPAQ;
DELTA(3):=FSXIA(M-4)+F3SXI(3)/KAPPAQ;
DELTA(4):=FSXIA(M-2)+F3SXI(4)/KAPPAQ;
```



```

'IF'Z'EQUAL'1'THEN'
DELTA[5]:=0,25*(3*DELTA[1]-5*DELTA[2]-3*DELTA[3]+9*DELTA[4])
'ELSE'DELTA[5]:=0,5*(DELTA[5]+0,25*
(3*DELTA[1]-5*DELTA[2]-3*DELTA[3]+9*DELTA[4]));
DELSX:=(B2*KS*DELTA[5])/(2*LF*KF);
DU0:=0; 'FOR'NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
DU0:=DU0+C1ALF2[NI]*CU1[NI]+C4ALF2[NI]*CU4[NI];
DU0:=DU0*2*B2*KS;F1L:=1-DELSX-DU0;
'IF'F1L'GREATER'1'THEN'F1L:=0,5'ELSE''IF'F1L'LESS'0'THEN'F1L:=0;
F1L:=(2*FXI[M]+F1L)/3; DU0:=F1L/FXI[M];
DELSX:=(FXI[M]-F1L)/(2*B2*T2);'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'
SXR1[MI]:=SXR1[MI]*DU0;
SXR2[MI]:=SXR2[MI]+DELSX*(M-MI)/(M-1)'END';
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'PXI[MI]:=KAPPA0;RXI[MI]:=
KF4LF*(SXR1[MI]-SXR2[M+1-MI]-MY*(SYR1[MI]-SYR2[M+1-MI]))'END';
GLSYST(PXI,RXI,F2S02,F2SL2) RESULT:(RXI);
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'PXI[MI]:=0;
FXI[1]:=0;FXI[M]:=F1L;
GLSYST(PXI,RXI,FXI[1],FXI[M]) RESULT:(FXI);
DFXI(FXI) RESULT:(FSXIE) 'END';

T:=TIME;'IF'T'GREATER'1700'THEN'
'BEGIN'ZTS:=TRUE;'GOTO'DRUCKEN'END';
'IF'Z'GREATER'9'THEN''BEGIN'
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO' 'IF'FXI[MI]'GREATER'1'THEN'
'GOTO' NOKONV'ELSE''IF'FXI[MI]'LESS'-0,1'THEN''GOTO'NOKONV'END';
'IF'Z'NOTGREATER'4'THEN''GOTO' ITERATION;
'IF'Z'GREATER'60'THEN'
'BEGIN'ZYS:=TRUE;'GOTO'DRUCKEN'END';
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'IF'ABS(FSXIA[MI]-FSXIE[MI])'GREATER'SCHRANKE'THEN''GOTO'ITERATION;
'GOTO' DRUCKEN;
NOKONV:'IF''NOT'XIHA'THEN''BEGIN'
'IF'DELTAXI'GREATER'0,026'THEN'DELTAXI:=DELTA XI*0,5;
XIHA:=TRUE;'GOTO' M1 'END' 'ELSE'KONV:='FALSE';
DRUCKEN:

```

Es folgen die Anweisungen für das Ausdrucken der eingegebenen Parameter der Verbindung und der Funktionen  $F(XI)$  und  $F'(XI)$  in Schritten von  $\Delta\xi = 0,05$ .

```
'COMMENT' TXY IM SCHEIBENSTREIFEN;
MI:=0;'FOR'Y:=0'STEP'DELTAY'UNTIL'B2*0.5+0.5*DELTAY'DO'
'BEGIN'MI:=MI+1;SXN(MI):=0;
'FOR'NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'
CSXN:=C1ALF2(NI)*COSH(ALFN(NI)*Y)+C4ALF2(NI)
*(2*COSH(ALFN(NI)*Y)+ALFN(NI)*Y*SINH(ALFN(NI)*Y));
SXN(MI):=SXN(MI)+CSXN*TABSIN(NI,M) 'END';'END';
SCHEMAVERF(SXN,TABCP,MP,FAKT)RESULT:(ASTR);
S:=1;'FOR'NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'
ASTR(NI):=ASTR(NI)*4*LF*T2;
S:=-1*S;BSTR(NI):=S*ASTR(NI) 'END';
'BEGIN'REAL'ALFY,CHC,SHC,CHY,SHY,DIFNEN,SUMNEN,CT,ALFL;
'FOR'MI:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'
Y:=-LF*0.5+(MI-1)*DELTAXI*LF;TXYP2(MI):=0;
'FOR'NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'
ALFY:=ALFA(NI)*Y;ALFL:=ALFA(NI)*0.5*LF;
'IF'ALFL'LESS'50'THEN''BEGIN'
DIFNEN:=SINH(2*ALFL)-2*ALFL;SUMNEN:=SINH(2*ALFL)+2*ALFL;
CHC:=COSH(ALFL);CHY:=COSH(ALFY);SHC:=SINH(ALFL);SHY:=SINH(ALFY);
CT:=- (ASTR(NI)+BSTR(NI))*(ALFL*CHC*SHY
-ALFY*CHY*SHC)/SUMNEN
+(ASTR(NI)-BSTR(NI))*(ALFL*SHC*CHY
-ALFY*SHY*CHC)/DIFNEN 'END''ELSE'
CT:=ASTR(NI)*(ALFL+ALFY)*EXP(-ALFL-ALFY)
-BSTR(NI)*(ALFL-ALFY)*EXP(-ALFL+ALFY);
TXYP2(MI):=TXYP2(MI)+CT*SIN(ALFA(NI)*B2*0.5)'END';'END';'END';
```

Es folgen die Ausgabeanweisungen für  $\tau_{xy}$  im Scheibenstreifen

```
'IF'SPANNUNGEN'EQUAL'1'THEN''BEGIN'
'COMMENT' SX,SY,TXY-BERECHNUNG; READ(S); 'BEGIN''INTEGER' SI;
'ARRAY'B[1:S],SIGMA[1:21],SX,SY,TXY[1:M],CXN,CYN,CXYN[1:N];
PAGE;
'FOR'SI:=1'STEP'1'UNTIL'S'DO''BEGIN' READ(B(SI));
'FOR'NI:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'
CYN(NI):=-C1ALF2(NI)*COSH(ALFN(NI)*B(SI))
-C4ALF2(NI)*ALFN(NI)*B(SI)*SINH(ALFN(NI)*B(SI));
CXN(NI):=-CYN(NI)+2*C4ALF2(NI)*COSH(ALFN(NI)*B(SI));
CXYN(NI):=- (C1ALF2(NI)+C4ALF2(NI))*SINH(ALFN(NI)*B(SI))
-C4ALF2(NI)*ALFN(NI)*B(SI)*COSH(ALFN(NI)*B(SI))'END';
REIHSUM(CXN,TABSIN) RESULT:(SX);
REIHSUM(CYN,TABSIN) RESULT:(SY);
REIHSUM(CXYN,TABCOS) RESULT:(TXY); NI:=0;
'FOR'MI:=1'STEP'ENTIER(0.051/DELTAXI)'UNTIL'M'DO''BEGIN'
```

Es folgen die Ausgabeanweisungen für Schnittkoordinaten und Spannungen

L e b e n s l a u f

- Geboren am 6. April 1934 in Bunzlau/Schlesien
- Abitur im März 1953 am Dilthey-Realgymnasium zu Wiesbaden
- Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Darmstadt von Herbst 1953 bis Sommer 1957 und an der Lehigh University, Bethlehem, Pa., USA mit Fulbright-Reisestipendium und Byllesby Research Fellowship von Herbst 1957 bis Frühjahr 1959
- Abschluß im Frühjahr 1959 mit dem Master of Science in Civil Engineering
- Forschungsassistent am Fritz Engineering Laboratory der Lehigh University von Frühjahr bis Herbst 1959
- Wiss. Mitarbeiter am Institut für Spannungsoptik und Modellmessungen der T.H. Stuttgart vom 1.1.1960 bis 31.12.1961
- Wiss. Assistent am gleichen Institut seit 1.1.1962