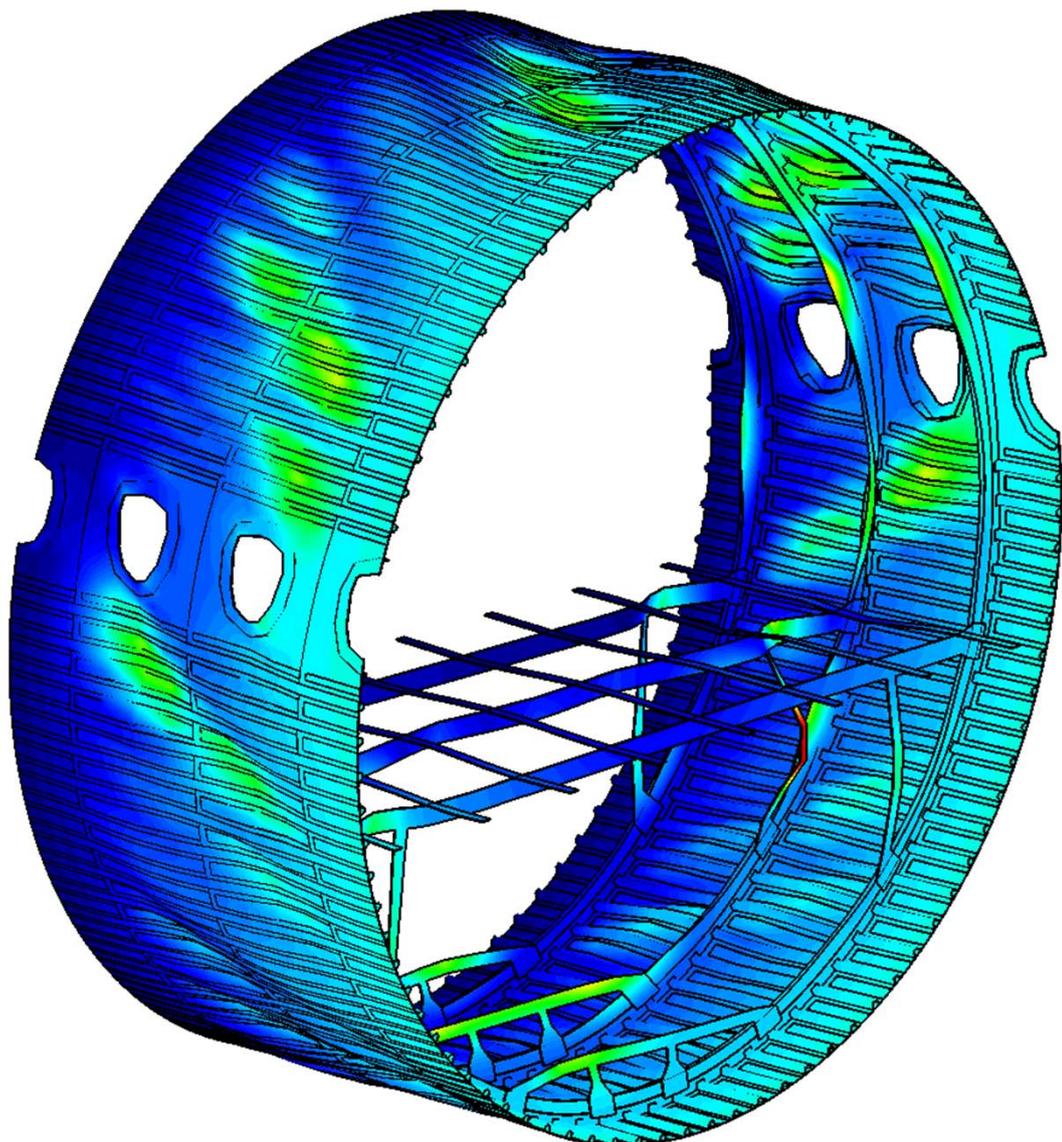


Universität Stuttgart

Baustatik und Baudynamik

# Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente

Johannes Irslinger





# Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente

von

**Johannes Irslinger**

Bericht Nr. 61

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2013



© Johannes Irslinger

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123

Fax: 0711 - 685 66130

E-Mail: [sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de)

<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-044707-5

# Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Johannes Irslinger**

aus Villingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Carlo Sansour, Nottingham

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm, Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 2013

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2013



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden einige für die Simulation von Schalenstrukturen wesentliche Aspekte behandelt. Zunächst erfolgt eine Diskussion der mechanischen Grundlagen von Schalentheorien mit der primären Zielsetzung, eine Verbindung zwischen den Annahmen bei der Formulierung dreidimensionaler finiter Schalenelemente und den ihnen zugrundeliegenden Schalentheorien herzustellen. Darauf aufbauend wird die Formulierung eines robusten, dreidimensionalen Volumen-Schalenelements vorgestellt und untersucht, inwieweit verschiedene, auf Ersatzproblemen basierende Ansätze zum Aufstellen von Vorkonditionierern geeignet sind, um die Lösung der schlecht konditionierten Gleichungssysteme von Schalensimulationen mit iterativen Verfahren effizient zu gestalten.

Die Diskussion von Modellannahmen bei klassischen Schalentheorien stellt den ersten wichtigen Bestandteil dieser Arbeit dar. Hierfür werden zunächst die konsistenten kinematischen und konstitutiven Gleichungen einer schubweichen Schalenformulierung (Reissner-Mindlin-Kinematik) sowie einer schubstarreren Schalenformulierung (Kirchhoff-Love-Kinematik) aus dem Kontinuum hergeleitet. Im Detail wird auf die Annahmen in der Kinematik und auf die für die asymptotische Korrektheit zwingend notwendige Modifikation des Stoffgesetzes eingegangen. Die aus heutiger Sicht als historisch einstufigen Schalentheorien nach Love und Koiter wie auch die Theorie flacher Schalen werden anhand der kinematischen und konstitutiven Gleichungen vorgestellt und verglichen. Dies beinhaltet zudem eine Untersuchung der Eigenschaften dieser Formulierungen mittels numerischer Experimente auf Basis der Method of Manufactured Solutions (siehe beispielsweise ROACHE (2002)). Dabei zeigt sich, dass die Schalentheorie nach Love und die Theorie flacher Schalen nicht asymptotisch korrekt sind. Dies ist für die Formulierung von Koiter zwar der Fall, sogenannte „bestmögliche Formulierungen“, wie beispielsweise diejenige von NAGHDI (1963b), weisen jedoch oftmals eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit auf und sind daher als asymptotisch besser zu bewerten.

Dreidimensionale Schalentheorien sind im Vergleich zu klassischen Schalentheorien in der Lage, vollständige dreidimensionale Verzerrungs- und Spannungszustände abzubilden, wodurch eine Modifikation der Stoffgesetze entfällt. Finite Schalenelemente, die entsprechende Theorien diskretisieren, werden heutzutage häufig auf der Basis des Degenerationskonzepts hergeleitet oder es erfolgt alternativ eine Optimierung gewöhnlicher Kontinuumselemente für die Schalensimulation durch zusätzliche Elementtechnologie. Viele der für Elementformulierungen getroffenen Annahmen lassen daher eine Verbindung zu Schalentheorien vermissen. Ein wesentliches weiteres Ziel dieser Arbeit besteht deshalb darin, entsprechende Beziehungen herzustellen, die Auswirkungen verschiedener Annahmen aufzuzeigen und hieraus Erkenntnisse für den Entwurf von dreidimensionalen Schalenelementformulierungen zu gewinnen. In numerischen Experimenten kann für eine 7-Parameter-Kinematik gezeigt werden, dass, falls die Genauigkeit von klassischen Scha-

lenformulierungen über die Berücksichtigung der Dickenänderung hinaus gesteigert werden soll, zunächst die quadratischen Verzerrungsanteile mitzuführen sind. Erst danach haben Krümmungsbeiträge in den Materialgleichungen und im Shifter genauigkeitssteigernde Wirkung. Damit diese zusätzlichen Informationen in eine Schalenformulierung einfließen, müssen sie bei der numerischen Dickenintegration, welche in dieser Arbeit als Bestandteil der Schalentheorie und nicht einer Elementformulierung gesehen wird, entsprechend erfasst werden. Es stellt sich heraus, dass bei einer für die asymptotische Korrektheit ausreichenden 2-Punkt-Gauß-Integration der Beitrag dieser Anteile im Wesentlichen verloren geht, und dass erst ab drei und mehr Gauß-Punkten über die Dicke asymptotisch bessere Schalentheorien entstehen.

Ein besonderes Augenmerk in dieser Arbeit liegt auf der Entwicklung und implementierungsnahen Dokumentation eines robusten, dreidimensionalen Volumen-Schalenelements, dessen Elementtopologie derjenigen eines trilinearen achtknotigen Kontinuumselements entspricht. Einen maßgeblichen Beitrag zur Robustheit dieser Elementformulierung liefert die Vollintegration, welche numerische Instabilitäten (Hourglassing) ausschließt. Mit Hilfe von Assumed-Natural-Strain-Ansätzen (HUGHES UND TEZDUYAR (1981), BATHE UND DVORKIN (1986), BETSCH UND STEIN (1995)) und der Enhanced-Assumed-Strain-Methode (SIMO UND RIFAI 1990) werden die wesentlichen vorhandenen Lockingeffekte eliminiert. Die Elementformulierung erfolgt nicht im natürlichen Elementkoordinatensystem, sondern vergleichbar mit SZE UND YAO (2000) in einem alternativen konvektiven System, was zu einer deutlichen Verbesserung des Verhaltens in Konfigurationen führt, bei denen die Elementkanten in Dickenrichtung nicht orthogonal zur fiktiven Mittelfläche sind. Darüber hinaus kommt die von LYL Y U. A. (1993) erstmals vorgestellte Querschubstabilisierung zur Anwendung, um die Eigenschaften von in der Schalenebene verzerrten Elemente zu optimieren. Zur Bestimmung des Stabilisierungsparameters wird dafür ein adaptiver Ansatz eingeführt, welcher die Größe des Parameters für jedes Element aus dessen Geometrie bestimmt. Anhand geometrisch linearer und nichtlinearer Benchmarkbeispiele aus der Literatur sowie praxisrelevanter Problemstellungen aus dem Flugzeugbau wird die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Elementformulierung untersucht, wobei Vergleiche mit bereits existierenden Elementen gleicher Topologie erfolgen. Die neue Elementformulierung erweist sich im Hinblick auf die Verschiebungs- und Spannungsqualität in vielen Fällen als überlegen und ist in der Lage bereits mit relativ groben FE-Netzen zuverlässige Ergebnisse zu liefern. Dabei kann besonders durch die Querschubstabilisierung bei in der Schalenebene verzerrten Elementen eine Qualitätssteigerung in den Querschubverzerrungen bzw. -spannungen erreicht werden.

Die iterative Lösung der bei der Simulation von Schalenstrukturen mit finiten Elementen auftretenden Gleichungssysteme stellt aufgrund deren schlechter Konditionierung eine besondere Herausforderung dar. Abgesehen von aufwendigen Multigrid-Verfahren sind bis heute keine Vorkonditionierer bekannt, die für beliebige Konfigurationen eine effiziente iterative Lösung entsprechender Systeme erlauben. Es wird untersucht, inwieweit

sich die in SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) und AVRON U. A. (2009) vorgeschlagenen Ansätze zum Aufstellen von Vorkonditionierern auf die Finite-Elemente-Simulationen von Schalenstrukturen übertragen lassen. Dabei werden Ersatzprobleme aufgestellt, welche für die Vorkonditionierung vollständig zu faktorisieren sind. Diese Vorgehensweise steht im Gegensatz zu einer unvollständigen Faktorisierung des Ausgangsproblems, auf der viele bekannte Vorkonditionierer basieren. Beim ersten vorgestellten Ansatz wird das Ersatzproblem dadurch erzeugt, dass aus der Ausgangsdiskretisierung gezielt finite Elemente entnommen werden, wobei darauf zu achten ist, dass keine singulären Systeme auftreten. Beim zweiten Ansatz erfolgt zunächst die Approximation der Steifigkeitsmatrix durch eine symmetrische diagonaldominante Matrix, welche dann mit Hilfe kombinatorischer Verfahren dahingehend vereinfacht wird, dass eine ähnliche, jedoch deutlich billiger zu faktorisierende Matrix entsteht. Die für beide Ansätze notwendigen Algorithmen werden auf der Basis des in dieser Arbeit beschriebenen achtknotigen Volumen-Schalenelements entwickelt und die daraus entstehenden Vorkonditionierer in numerischen Experimenten für Problemstellungen unterschiedlicher Komplexität untersucht. Mit den Vorkonditionierern basierend auf der Modifikation der Ausgangsdiskretisierung kann zwar das Konvergenzverhalten des iterativen Lösungsprozesses im Hinblick auf die Monotonie günstig beeinflusst werden. Der Rechenaufwand mit allen vorgestellten Vorkonditionierern ist jedoch meist erheblich größer als mit gängigen Vertretern aus der Literatur. Diese Methode erlaubt daher keine wesentliche Effizienzsteigerung bei der iterativen Lösung von Gleichungssystemen aus der Simulation von Schalenstrukturen.

## Abstract

The present thesis covers several significant aspects of the simulation of shell structures. First, the mechanical fundamentals of shell theories are discussed with the primary objective to establish a link between the assumptions of three-dimensional finite shell element formulations and the shell theories they are based on. Subsequently, the formulation of a robust three-dimensional solid-like shell element is presented. Finally, it is analysed, to which extent several approaches for the setup of preconditioners based on substitute problems are suitable for an efficient iterative solution of ill-conditioned equation systems arising from shell simulations.

The discussion of model assumptions of classical shell theories is the first important topic of this work. Therefore, the consistent kinematic and constitutive equations of a shear-deformable shell formulation (Reissner-Mindlin kinematics) and a shear-rigid shell formulation (Kirchhoff-Love kinematics) are derived from the continuum in a first step. Kinematic assumptions and modification of the material law, which is mandatory for the asymptotic correctness of those theories, are discussed in detail. The shell theories of Love and Koiter as well as the theory of shallow shells, which can be considered historic from today's perspective, are presented and compared with regard to the kinematic and constitutive equations. Additionally, numerical analyses of the properties of these formulations based on the Method of Manufactured Solutions are performed (see for instance ROACHE (2002)). It turns out, that the shell theory of Love and the theory of shallow shells are not asymptotically correct. Although this is true for the formulation of Koiter, so-called „best formulations“, as for example the one of NAGHDI (1963b), often show a faster convergence and are therefore asymptotically better.

In contrast to classical shell theories, three-dimensional shell theories are able to represent complete three-dimensional strain and stress states, and thus modifications of the material law can be omitted. Shell finite elements discretising these kinds of theories are nowadays usually derived on the basis of the concept of degeneration. Alternatively, standard continuum elements are optimised for shell simulations by additional element technology. Therefore, many of the assumptions made in element formulations lack the link to shell theories. Hence, a further essential objective of this work is to identify these relations in order to figure out the influence of those assumptions and thus to gain knowledge for the design of three-dimensional shell element formulations. For a 7-parameter shell kinematics it can be shown in numerical experiments, that if the accuracy of classical shell formulations shall be increased beyond the inclusion of thickness change, accounting for the quadratic strain components is crucial. Only in this case the incorporation of curvature in the material equations and in the shifter has a positive effect on the accuracy. To ensure that this additional information enters the shell formulation, it must be detected by the numerical thickness integration, which in this thesis is considered as part of the shell theory and not of an element formulation. It becomes

apparent, that although a 2-point Gauss quadrature is sufficient for asymptotic correctness, this additional information is mainly lost. Only with three or more Gauss points across the thickness asymptotically better shell theories are obtained.

Special focus of this work is on the development and implementation-related documentation of a robust three-dimensional solid-like shell element, whose topology is identical to a trilinear 8-node continuum element. Rank-sufficient integration substantially contributes to the robustness of the element formulation and precludes numerical instabilities (hourglassing). The major locking effects are eliminated by assumed natural strain approaches (HUGHES UND TEZDUYAR (1981), BATHE UND DVORKIN (1986), BETSCH UND STEIN (1995)) and the enhanced assumed strain method (SIMO UND RIFAI 1990). The element is not formulated in its natural coordinate system, but in accordance with SZE UND YAO (2000) in an alternative convective system. This considerably improves the performance in configurations, where the element edges in thickness direction are not orthogonal to the fictitious mid-surface. Furthermore, a method to stabilise the transverse shear first proposed by LYL Y U. A. (1993) is used to optimise the performance of elements which are distorted in-plane. An adaptive approach is introduced, that determines the size of the stabilisation parameter for each element depending on its geometry. In geometrically linear and nonlinear benchmark problems from literature as well as practical problems from aircraft industry the performance of the presented element formulation is analysed and compared with existing elements of the same topology. With respect to the quality of both displacements and stresses, the new element formulation is superior in many cases and is able to provide reliable results already with relatively coarse finite element meshes. Especially the stabilisation of the transverse shear for in-plane distorted elements improves the quality of the transverse shear strains and stresses.

The iterative solution of the ill-conditioned equation systems arising from the finite element simulation of shell structures represents a particular challenge. Besides elaborate multigrid methods, up to now no preconditioners are known, which enable an efficient iterative solution of such systems for arbitrary configurations. It is analysed to which extend approaches for setting up preconditioners according to SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) and AVRON U. A. (2009) can be adapted to finite element simulations of shell structures. Therein, substitute problems are created, which have to be fully factorised for preconditioning. This approach is in contrast to an incomplete factorisation of the initial problem, which many popular preconditioners are based on. In the first approach presented herein, the substitute problem is created by specific elimination of finite elements from the initial discretisation, taking into account that no singular systems arise. In the second approach, the stiffness matrix is first approximated by a symmetric diagonally dominant matrix, which is simplified by means of combinatorial procedures such that a similar matrix evolves, for which factorisation is cheaper. The algorithms necessary for both approaches are developed on the basis of the 8-node solid-like shell element presented in this thesis and the resulting preconditioners are analysed for pro-

blems of varying complexity. It turns out that the preconditioners based on modification of the initial discretisation have a positive impact on the convergence characteristics of the iterative solution process with respect to monotony. However, the computational effort with all presented preconditioners was in most cases significantly larger than with well-established preconditioners from literature. This approach therefore leads to no substantial increase of efficiency for the iterative solution of equation systems arising from the simulation of shell structures.

## Vorwort

Die Arbeit entstand zwischen 2008 und 2013 am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Als wissenschaftlicher Mitarbeiter war ich in dieser Zeit vier Jahre mit der Bearbeitung zweier Teilprojekte aus dem europäischen Forschungsprojekt MAAXIMUS (More Affordable Aircraft through eXtended, Integrated and Mature nUmerical Sizing) unter der Federführung der Firma Airbus betraut. MAAXIMUS bot mir die Möglichkeit neben der wissenschaftlichen Tätigkeit vor allem auch Erfahrungen in der Projektarbeit zu sammeln. Die interdisziplinäre Ausrichtung des Projekts weckte bei mir zudem das Interesse für viele fachfremde Bereiche. Hierfür wie auch für die finanzielle Förderung möchte ich mich bei der Europäischen Union bedanken.

Herrn Professor Manfred Bischoff, dem Leiter des Instituts für Baustatik und Baudynamik, danke ich für die Übernahme des Hauptberichts und für das zügig angefertigte Gutachten. Sein Interesse an der Thematik, die Möglichkeit trotz eines vollen Terminkalenders fachliche Probleme mit ihm jederzeit diskutieren zu können sowie das positive Arbeitsklima an seinem Institut hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor Carlo Sansour und Herrn Professor Ekkehard Ramm für die Übernahme der Mitberichte und das zeitnahe Erstellen der Gutachten. Herrn Professor Ekkehard Ramm danke ich insbesondere auch für die vielen fachlichen Diskussionen während meiner gesamten Zeit am Institut.

Ein großes Dankeschön geht an Ralph Echter für das fachliche Korrekturlesen großer Teile der Arbeit. Für die Durchsicht einzelner Abschnitte danke ich Veronika Effinger, Bastian Oesterle, Anton Tkatschuk und Christoph Wilking, für das sorgfältige und schnelle Gegenlesen Jörg Lemberg.

Bei allen meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Baudynamik möchte ich mich für die freundschaftliche Zusammenarbeit, die tolle Arbeitsatmosphäre, aber auch für die vielen angenehmen Stunden fernab der Wissenschaft bedanken.

Meinen Eltern danke ich für die mir in all den Jahren entgegengebrachte bedingungslose Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir immer gewährt haben.

Stuttgart, im Dezember 2013

Johannes Irslinger



Part of the research leading to these results has received funding from the European Community's Seventh Framework Programme FP7/2007-2013 under grant agreement n°213371.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xvii</b>
<b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>xix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Zielsetzung . . . . .	1
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Koordinatensysteme und Differentialgeometrie . . . . .	7
2.2 Kinematik . . . . .	9
2.3 Konstitutivgesetz . . . . .	11
2.4 Gleichgewicht und Spannungsmaße . . . . .	12
2.5 Randbedingungen . . . . .	13
2.6 Schwache Form des Randwertproblems . . . . .	14
<b>3 Mittelflächenparametrisierung und Dimensionsreduktion</b>	<b>15</b>
3.1 Mittelflächenparametrisierung . . . . .	16
3.2 Dimensionsreduktion . . . . .	20
3.3 Schnittgrößen . . . . .	23
3.4 Abschließende Diskussion des Herleitungsweges . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Modellannahmen bei klassischen Schalentheorien</b>	<b>29</b>
4.1	Kriterien für eine optimale Approximation . . . . .	30
4.2	Herleitung konsistenter Schalengleichungen . . . . .	31
4.2.1	Approximation der Kinematik . . . . .	31
4.2.2	Modifikationen und Annahmen im Stoffgesetz . . . . .	34
4.2.3	Weiterführende Annahmen und Vereinfachungen . . . . .	38
4.3	Diskussion bekannter Schalengleichungen . . . . .	40
4.3.1	Zwei „bestmögliche“ Formulierungsvarianten . . . . .	41
4.3.2	Historische Formulierungsvarianten . . . . .	43
4.4	Numerische Untersuchungen . . . . .	45
4.4.1	Radiale Aufweitung des Zylinders . . . . .	47
4.4.2	Zweiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders . . . . .	48
4.4.3	Dreiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders . . . . .	50
4.4.4	Gleichzeitiges Wirken von Membran- und Biegedeformationen . . . . .	52
4.5	Zusammenfassung . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Modellannahmen bei dreidimensionalen Schalentheorien</b>	<b>55</b>
5.1	Kinematische Gleichungen unterschiedlicher Ordnung . . . . .	56
5.1.1	6-Parameter-Kinematik . . . . .	58
5.1.2	Kinematiken höherer Ordnung . . . . .	59
5.1.3	7-Parameter-Kinematik . . . . .	61
5.2	Integration in Dickenrichtung . . . . .	64
5.2.1	Innere Größen einer Schalenformulierung . . . . .	65
5.2.2	Numerische Integration als Teil der Schalentheorie . . . . .	67
5.3	Numerische Untersuchungen . . . . .	70
5.3.1	Einfluss der numerischen Integration . . . . .	71
5.3.2	Einfluss quadratischer Verzerrungsterme sowie der Krümmungsanteile im Material und Shifter . . . . .	75
5.3.3	Kombination aller Annahmen . . . . .	76
5.4	Dreidimensionale finite Schalenelemente . . . . .	78
5.5	Zusammenfassung . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Ein robustes, spannungsbasiertes 3D-Volumen-Schalenelement</b>	<b>83</b>
6.1	Grundlegendes . . . . .	84
6.2	Elementkoordinatensysteme und Diskretisierung . . . . .	86
6.3	Variationelle Basis und Linearisierung . . . . .	91
6.4	Verschiebungsformulierung von SHELL10 . . . . .	96
6.4.1	Herleitung des B-Operators . . . . .	96
6.4.2	Herleitung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_g$ . . . . .	98

6.5	Identifizieren und Beseitigen von Versteifungseffekten . . . . .	100
6.5.1	Querschublocking . . . . .	101
6.5.2	Trapezlocking . . . . .	104
6.5.3	Volumetrisches Locking und Schublocking in der Schalenebene . .	109
6.6	Querschubstabilisierung . . . . .	113
6.6.1	Wahl des Parameters $\lambda$ . . . . .	115
6.6.2	Abschließende Bemerkungen zur Querschubstabilisierung . . . . .	117
6.7	Zusammenfassung . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Gleichungslösung und Vorkonditionierung für Schalen</b>	<b>119</b>
7.1	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme . . . . .	120
7.1.1	Direkte Lösungsverfahren . . . . .	120
7.1.2	Iterative Lösungsverfahren . . . . .	121
7.2	CG-Verfahren mit faktorisierten Vorkonditionierern . . . . .	122
7.2.1	Unvollständige Faktorisierung des Ausgangsproblems . . . . .	124
7.2.2	Vollständige Faktorisierung eines Ersatzproblems . . . . .	125
7.3	Ersatzproblem durch Topologieänderung des FE-Netzes . . . . .	125
7.3.1	Der Rigidity-Graph . . . . .	127
7.3.2	Test des Rigidity-Graphen auf Zusammenhang . . . . .	129
7.3.3	Auswahl der zu eliminierenden Elemente . . . . .	131
7.4	Ersatzproblem durch algebraische Vereinfachungen . . . . .	135
7.4.1	Diagonaldominante Approximation von Steifigkeitsmatrizen . . .	136
7.5	Zusammenfassung . . . . .	138
<b>8</b>	<b>Numerische Experimente</b>	<b>141</b>
8.1	Geometrisch lineare Elementbenchmarks . . . . .	142
8.1.1	Patchtest . . . . .	142
8.1.2	Biegebeanspruchter Kragarm . . . . .	145
8.1.3	Vorverdrillter Kragarm . . . . .	148
8.1.4	Eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast . . . . .	151
8.2	Geometrisch nichtlineare Elementbenchmarks . . . . .	154
8.2.1	Eingespannter Halbzylinder . . . . .	154
8.2.2	Eingespanntes U-Profil . . . . .	156
8.2.3	Axial gedrücktes Paneel aus dem Flugzeugbau . . . . .	160
8.2.4	Flugzeugrumpf unter Torsionsbelastung . . . . .	164
8.3	Vorkonditionierung und iterative Lösung von Gleichungssystemen aus Schalenstrukturen . . . . .	168
8.3.1	Einachsige gespannte Platte . . . . .	170
8.3.2	Axial gedrücktes Paneel aus dem Flugzeugbau . . . . .	173
8.3.3	Flugzeugrumpf unter Torsionsbelastung . . . . .	175

<b>9 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>177</b>
9.1 Zusammenfassung . . . . .	177
9.2 Ausblick . . . . .	180
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>183</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schalenstrukturen im Flugzeugbau: Airbus A380 (AIRBUS (2013a), AIRBUS (2013b)). . . . .	1
2.1	Geometriebeschreibung und Kinematik eines festen Körpers im dreidimensionalen Raum. . . . .	8
3.1	Größen im Schalenraum in der Referenzkonfiguration. . . . .	16
3.2	Darstellung des Basisvektors $\mathbf{G}_3$ durch eine unendliche Reihe von Vektoren $\mathbf{R}^N$ . . . . .	19
3.3	Spannungsvektoren auf Schnittflächen im Schalenraum. . . . .	23
4.1	Kinematische und konstitutive Gleichungen nach NAGHDI (1963b). . . . .	42
4.2	Kinematische und konstitutive Gleichungen der Variante C (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985). . . . .	42
4.3	Kinematische und konstitutive Gleichungen nach Love in der Fassung von REISSNER (1942). . . . .	43
4.4	Kinematische und konstitutive Gleichungen der Theorie flacher Schalen. . . . .	44
4.5	Kinematische und konstitutive Gleichungen nach Koiter. . . . .	44
4.6	Abmessungen, Material und Geometriebeschreibung des Zylinders. . . . .	46
4.7	Radiale Aufweitung des Zylinders. . . . .	47
4.8	Energiefehler bei radialer Aufweitung des Zylinders. . . . .	48
4.9	Zweiwellige dehnungslose Verformung des Zylinder. . . . .	49
4.10	Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders. . . . .	49
4.11	Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders (lineare Achsenskalierung). . . . .	50

4.12	Dreiwellige dehnungslose Verformung des Zylinder. . . . .	51
4.13	Energiefehler bei dreiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders. . .	51
4.14	Gleichzeitige Membran- und Biegedeformation des Zylinders. . . . .	52
4.15	Energiefehler bei gleichzeitigem Wirken von Membran- und Biegedefor- mationen am Zylinder. . . . .	52
5.1	Dehnung der Zylinderwand. . . . .	71
5.2	Energiefehler bei radialer Aufweitung des Zylinders für unterschiedliche numerische Integrationsverfahren. . . . .	72
5.3	Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschied- liche numerische Integrationsverfahren. . . . .	73
5.4	Energiefehler bei der Dehnung der Zylinderwand für unterschiedliche nu- merische Integrationsverfahren. . . . .	74
5.5	Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschied- liche Kombinationen von C/C0, Z/Z0 und OQ/MQ. . . . .	76
5.6	Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschied- liche Kombinationen von C/C0, Z/Z0 und OQ/MQ in Verbindung mit der Gauß-Integration. . . . .	77
5.7	Schematische Darstellung des Energiefehlers schnittgrößen- und span- nungsbasierter dreidimensionaler Schalenelemente (logarithmische Ach- senskalierung). . . . .	79
5.8	Parametrisierungsvarianten dreidimensionaler Schalenelemente (Knoten- zahl in der Schalenebene willkürlich gewählt!). . . . .	80
6.1	Topologie des Schalenelements SHELL10. . . . .	85
6.2	Wesentliche Geometriekonfigurationen von SHELL10. . . . .	86
6.3	Lokale Koordinatensysteme von SHELL10. . . . .	87
6.4	Zusammensetzung des Integranden der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_g$ aus den Anteilen $\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l)$ . . . . .	100
6.5	Parasitäre Querschubverzerrungen unter Biegebeanspruchung. . . . .	101
6.6	Kollokationspunkte für $\text{ANS}_Q$ bei SHELL10. . . . .	102
6.7	Trapezförmiges SHELL10-Element unter Biegebeanspruchung: Deformati- on und Koordinatensysteme. . . . .	105
6.8	Parasitärer Quernormalverzerrungsverlauf gemessen in den Koordinaten- systemen $\bar{\theta}^i$ bzw. $\theta^i$ für die Biegebeanspruchung aus Abbildung 6.7(a). . .	105
6.9	Kollokationspunkte für $\text{ANS}_T$ bei SHELL10. . . . .	106
6.10	Varianten der Skalierung von $\mathbf{G}_3$ für die Ermittlung von $\bar{E}_{33}$ im Rahmen von $\text{ANS}_T$ . . . . .	107
6.11	Parasitäre Verzerrungs- und Spannungsverläufe in Deformationsmoden von SHELL10, die mit der EAS-Methode eliminiert werden. . . . .	110

6.12	Verzerrungsmoden in der Schalenebene, die Querschuboszillationen verursachen. . . . .	116
7.1	Struktogramm des vorkonditionierten CG-Verfahrens (BARRETT U. A. 1994). . . . .	123
7.2	Exemplarische Darstellung eines Ersatzproblems sowie der Auswirkungen auf die Besetzungsstruktur von $\mathbf{M}$ . . . . .	126
7.3	Charakterisierung von Elementverbindungen. . . . .	127
7.4	Der Rigidity-Graph für die Problemstellung aus Abbildung 7.2. . . . .	128
7.5	Verbindungen zwischen Nachelementen im Rigidity-Graphen. . . . .	130
7.6	Veranschaulichung der Breitensuche im Rigidity-Graphen. . . . .	130
7.7	Elimination von Elementen auf der Basis von Graphenzerlegung mit anschließendem Wiederverbinden. . . . .	133
7.8	Stabelement: Topologie, Steifigkeitsmatrix und blockdiagonale Form. . .	136
7.9	Approximation von SHELL10 durch Stabelemente. . . . .	137
8.1	Patchtest: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	143
8.2	Patchtest: Spannung $\sigma_{xx}$ [N/mm <sup>2</sup> ]. . . . .	143
8.3	Patchtest: Verschiebung $u_x$ [mm]. . . . .	144
8.4	Patchtest: Verschiebung $u_z$ [mm]. . . . .	144
8.5	Biegebeanspruchter Kragarm: Problemstellung und Diskretisierung. . . .	145
8.6	Biegebeanspruchter Kragarm: Biegenormalspannungsverlauf $\sigma_{xx}$ entlang des Pfades A–B für das Netz C. . . . .	147
8.7	Vorverdrillter Kragarm: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	148
8.8	Vorverdrillter Kragarm: Von-Mises-Vergleichsspannung entlang des Pfades A–B. . . . .	150
8.9	Quadratplatte unter Gleichlast: Problemstellung und Diskretisierung. . .	151
8.10	Quadratplatte unter Gleichlast: Netze für ein Viertel des Systems. . . . .	152
8.11	Quadratplatte unter Gleichlast: Querschubspannungsverlauf $\sigma_{yz}$ entlang des Pfades A–B für das trapezdominierte Netz $e = 0,3$ m. . . . .	153
8.12	Eingespannter Halbzylinder: Problemstellung, Diskretisierung und defor- mierte Struktur . . . . .	155
8.13	Eingespannter Halbzylinder: Last-Verschiebungs-Kurven. . . . .	156
8.14	Eingespanntes U-Profil: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	157
8.15	Querschnitt des U-Profiles: Varianten der Vernetzung. . . . .	157
8.16	Eingespanntes U-Profil: Last-Verschiebungs-Kurven. . . . .	159
8.17	Axial gedrücktes Paneel: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	161
8.18	Axial gedrücktes Paneel: Last-Verschiebungs-Kurven für die Netze A und B. . . . .	162

8.19 Axial gedrücktes Paneel: Beulmuster für die Netze A, B und C (jeweils SHELL10), Konturplot der Verschiebung $u_y$ [mm]. . . . .	163
8.20 Flugzeugrumpf: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	164
8.21 Flugzeugrumpf: Momenten-Verdrehungs-Kurven. . . . .	166
8.22 Flugzeugrumpf: Beulmuster für die Netze A und B bei $\alpha = 0,665^\circ$ , Konturplot der Verschiebung $u_y$ [mm] bezogen auf das globale Koordinatensystem in Abbildung 8.20. . . . .	167
8.23 Einachsig gespannte Platte: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	170
8.24 Einachsig gespannte Platte: Ersatzprobleme unterschiedlicher Suchtiefe $\mathcal{S}$ . . . . .	171
8.25 Einachsig gespannte Platte: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionie- rern Block-Jacobi, IC(1), $\mathcal{S}$ -4, $\mathcal{S}$ -8 und ST/BD. . . . .	172
8.26 Einachsig gespannte Platte: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionie- rern $\mathcal{S}$ -max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n. . . . .	172
8.27 Axial gedrücktes Paneel: Ausgangsproblem sowie Ersatzprobleme unter- schiedlicher Suchtiefe $\mathcal{S}$ . . . . .	173
8.28 Axial gedrücktes Paneel: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern Block-Jacobi, IC(1), $\mathcal{S}$ -4, $\mathcal{S}$ -6 und ST/BD. . . . .	174
8.29 Axial gedrücktes Paneel: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern $\mathcal{S}$ -10, $\mathcal{S}$ -max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n. . . . .	174
8.30 Flugzeugrumpf: Ausgangsproblem sowie Ersatzprobleme unterschiedlicher Suchtiefe $\mathcal{S}$ . . . . .	175
8.31 Flugzeugrumpf: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern Block-Jacobi, $\mathcal{S}$ -4, $\mathcal{S}$ -6 und ST/BD. . . . .	176
8.32 Flugzeugrumpf: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern $\mathcal{S}$ -10, $\mathcal{S}$ -max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n. . . . .	176

---

# Tabellenverzeichnis

7.1	Gewählte Werte $A$ und $L$ für die Stabsteifigkeiten $EA/L$ der numerischen Experimente aus Abschnitt 8.3. . . . .	138
8.1	Biegebeanspruchter Kragarm: normierte Verschiebungen $w$ . . . . .	146
8.2	Vorverdrillter Kragarm: normierte Verschiebungen $w$ . . . . .	149
8.3	Quadratplatte unter Gleichlast: normierte Durchbiegungen $w$ in Plattenmitte. . . . .	152
8.4	Eingespanntes U-Profil: normierte Beullasten $P$ . . . . .	158
8.5	Axial gedrücktes Paneel: normierte Beullast $P$ . . . . .	160
8.6	Einachsige gespannte Platte: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer. .	171
8.7	Axial gedrücktes Paneel: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer. .	173
8.8	Flugzeugrumpf: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer. . . . .	175



---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

Im Folgenden werden zunächst wichtige Konventionen der in dieser Arbeit verwendeten Nomenklatur eingeführt sowie häufig vorkommende Abkürzungen und Bezeichnungen aufgelistet. Für die Bezeichnungen werden, wenn möglich, deutsche Begriffe gewählt und nur, falls kein geläufiges deutsches Äquivalent existiert, wird auf englischsprachige Ausdrücke zurückgegriffen.

Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, nehmen bei Indexschreibweise kleine, lateinische Indizes (z.B.  $i, j, k$ ) Werte von 1 bis 3, kleine, griechische Indizes (z.B.  $\alpha, \beta, \gamma$ ) die Werte 1 und 2 an. Dabei gilt stets die Einstein'sche Summenkonvention.

Vektoren sowie Tensoren zweiter und höherer Stufe werden mit fettgedruckten Buchstaben bezeichnet. Eine Verwechslung mit Matrizen, die im selben Stil gesetzt sind, ist durch den jeweiligen Kontext ausgeschlossen. Die Darstellung von Skalaren erfolgt mit Buchstaben in Standardschrift.

## Abkürzungen

ANS	Assumed-Natural-Strain
ANS <sub>Q</sub>	ANS-Ansatz zur Vermeidung von Querschublocking
ANS <sub>T</sub>	ANS-Ansatz zur Vermeidung von Trapezlocking
CAE	Computer-Aided-Engineering
EAS	Enhanced-Assumed-Strain
FE	Finite Elemente
FHG	Freiheitsgrade
flops	Gleitkommaoperationen (floating-point operations)

INT	Integrand
LIN	Linearisierung

### Bezeichnungen

$\mathbf{a}$	Metriktensor der Schalenmittelfläche in der Momentankonfiguration
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Momentankonfiguration
$\mathbf{A}$	Metriktensor der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$a_{ij}, a^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten von $\mathbf{a}$
$A$	von einer Fläche im dreidimensionalen Raum eingenommenes Gebiet
$dA$	differentielles Flächenelement
$A_{ij}, A^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten von $\mathbf{A}$
$\mathbf{b}$	Volumenkraftvektor je Masseneinheit
$\hat{\mathbf{b}}$	verallgemeinerter Volumenkraftvektor, $\hat{\mathbf{b}} = \rho \mathbf{b}$
$\mathbf{B}$	diskretisierter Differentialoperator (B-Operator)
$B$	Biegesteifigkeit, $B = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)}$
$B_{\alpha\beta}, B^\alpha_\beta$	ko- und gemischtvariante Komponenten des Krümmungstensors
$B^\alpha_\beta _\gamma$	kovariante Ableitung von $B^\alpha_\beta$
$\mathbf{C}$	Materialtensor, $\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l$
$\mathbf{C}$	Materialmatrix
$\hat{\mathbf{C}}$	Ersatz-Materialtensor, $\hat{\mathbf{C}} = C^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l$
$\bar{\mathbf{C}}$	durch die Bedingung $S_{33} = 0$ modifizierter Materialtensor
$C^{ijkl}$	Komponenten von $\mathbf{C}$ und $\hat{\mathbf{C}}$
$\bar{C}^{ijkl}$	Komponenten von $\bar{\mathbf{C}}$
$\bar{\bar{C}}^{ijkl}$	Näherung von $\bar{C}^{ijkl}$ durch Annahme einer konstanten Metrik über die Schalen­dicke ( $G^{ij} \approx A^{ij}$ )
$\text{CG}_{flops}$	Anzahl der Gleitkommaoperationen beim CG-Verfahren
$\mathbf{d}$	Elementverschiebungsvektor
$\mathbf{d}$	Systemvektor der Knotenverschiebungen
$\mathbf{d}^k$	Verschiebungsvektor des Knotens $k$
$\tilde{\mathbf{D}}$	Verzerrungsmatrix (EAS-Methode)
$D$	Dehnsteifigkeit, $D = \frac{ET}{1-\nu^2}$
$D_{flops}$	Anzahl der Gleitkommaoperationen mit einem direkten Lösungsverfahren
$D_N^{ijkl}$	über $\theta^3$ vorabintegrierte Komponenten $C^{ijkl}$ ( $N$ -ter Ordnung in $\theta^3$ )

$\bar{D}_N^{ijkl}$	über $\theta^3$ vorabintegrierte Komponenten $\bar{C}^{ijkl}$ ( $N$ -ter Ordnung in $\theta^3$ )
$\bar{\bar{D}}_N^{ijkl}$	über $\theta^3$ vorabintegrierte Komponenten $\bar{\bar{C}}^{ijkl}$ unter der Annahme von $Z \approx 1$ ( $N$ -ter Ordnung in $\theta^3$ )
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i$	ko- und kontravariante global kartesische Basisvektoren, es gilt $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$
$\mathbf{E}$	Green-Lagrange-Verzerrungstensor, $\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$
$\hat{\mathbf{E}}$	Ersatz-Verzerrungstensor, $\hat{\mathbf{E}} = E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j$
$\tilde{\mathbf{E}}$	Tensor der zusätzlichen Verzerrungen (EAS-Methode)
$\mathbf{E}^u$	verschiebungsabhängiger Green-Lagrange-Verzerrungstensor
$e$	relativer Energiefehler
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{ij}$	Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\hat{\mathbf{E}}$
$E_{ij}^N$	Koeffizienten der Terme $N$ -ter Ordnung in $\theta^3$ von $E_{ij}$
$\bar{E}_{ij}$	Komponenten von $\mathbf{E}$ bezüglich der Basis $\bar{\mathbf{G}}^i$
$\mathbf{f}$	Systemvektor der konsistenten Knotenkräfte
$\mathbf{F}$	materieller Deformationsgradient
$\mathbf{F}_{int}$	Vektor der inneren Kräfte
$\mathbf{F}_{ext}$	Vektor der externen Kräfte
$\mathbf{F}^{el}$	Elementlastvektor
$\tilde{\mathbf{F}}_{int}$	Vektor der zusätzlichen inneren Kräfte (EAS-Methode)
$f_s$	Faktor zur Stabilisierung des Querschubs
$F_i$	Schnitt durch den Schalenraum mit der Normalen $\mathbf{G}^i$
$\mathbf{g}$	Metriktensor des Schalenraums in der Momentankonfiguration
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren des Schalenraums in der Momentankonfiguration
$\mathbf{G}$	Metriktensor des Schalenraums in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren des Schalenraums in der Referenzkonfiguration
$\bar{\mathbf{G}}_i, \bar{\mathbf{g}}_i$	kovariante Basisvektoren eines zusätzlichen Koordinatensystems in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration für die Elementformulierung
$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{i0}, \bar{\bar{\mathbf{g}}}_{i0}$	Basisvektoren $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_i$ bzw. $\bar{\bar{\mathbf{g}}}_i$ im Elementmittelpunkt
$g_{ij}, g^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten von $\mathbf{g}$
$G_{ij}, G^{ij}$	ko- und kontravariante Komponenten von $\mathbf{G}$
$GT$	Schubsteifigkeit, $GT = \frac{ET}{2(1+\nu)}$
$H^{ijkl}$	Komponenten des Materialtensors klassischer Schalentheorien, $H^{ijkl} = \frac{1-\nu^2}{E} \bar{\bar{C}}^{ijkl}$
$\mathbf{J}, \bar{\mathbf{J}}$	Jacobi-Matrix bezüglich der Basen $\mathbf{G}_i$ bzw. $\bar{\mathbf{G}}_i$

$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}^{el}$	Elementsteifigkeitsmatrizen
$\mathbf{K}_{e+u}$	elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_g$	geometrische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{IK}_g$	Integrand bei der Berechnung von $\mathbf{K}_g$
$\mathbf{K}_{eug}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix, $\mathbf{K}_{eug} = \mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g$
$\mathbf{L}$	Kopplungsmatrix (EAS-Methode)
$\mathbf{L}$	untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung
$\mathbf{M}$	Matrix der EAS-Ansatzfunktionen (Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ zur Basis $\overline{\mathbf{G}}_i$ )
$\mathbf{M}$	Vorkonditionierungsmatrix
$\overline{\mathbf{M}}$	Matrix der EAS-Ansatzfunktionen (Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ zur Basis $\overline{\mathbf{G}}_{i0}$ )
$\hat{m}^{\alpha\beta}$	Biegemomente (entspricht $\hat{n}_1^{\alpha\beta}$ )
$\mathbf{n}_N$	PK2-Schnittgrößentensor $N$ -ter Ordnung, $\mathbf{n}_N = n_N^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j$
$\hat{\mathbf{n}}_N$	effektiver PK2-Schnittgrößentensor $N$ -ter Ordnung, $\hat{\mathbf{n}}_N = \hat{n}_N^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j$
$\check{\mathbf{n}}_N$	Cauchy-Schnittgrößentensor $N$ -ter Ordnung
$\mathbf{N}$	Matrix der Ansatzfunktionen
$\mathbf{N}_N^i$	Schnittkraftvektor $N$ -ter Ordnung im Schnitt $F_i$
$n^{\alpha\beta}$	Membrankräfte (entspricht $n_0^{\alpha\beta}$ )
$\hat{n}^{\alpha\beta}$	effektive Membrankräfte (entspricht $\hat{n}_0^{\alpha\beta}$ )
$n_N^{ij}$	Komponenten von $\mathbf{n}_N$
$\hat{n}_N^{ij}$	Komponenten von $\hat{\mathbf{n}}_N$
$N_k$	Ansatzfunktion von Elementknoten $k$
$N_i^Q$	Interpolationsfunktion für ANS <sub>Q</sub> von Kollokationspunkt $i$
$N_i^T$	Interpolationsfunktion für ANS <sub>T</sub> von Kollokationspunkt $i$
$N_K$	Anzahl der Nicht-Null-Einträge in $\mathbf{K}$
$N_{LM}$	Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ der Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{M}$
$N_{iter}$	Anzahl der Iterationen
$\mathbf{P}$	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (PK1-Spannungstensor)
$q^\alpha$	Querkräfte (entspricht $\hat{n}_0^{\alpha 3}$ )
$\mathbf{R}, \mathbf{r}$	Ortsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration (entspricht $\mathbf{R}^0$ bzw. $\mathbf{r}^0$ )
$\mathbf{R}^N, \mathbf{r}^N$	Direktor $N$ -ter Ordnung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbb{R}_0^+$	Menge aller reellen Zahlen größer oder gleich Null
$r, s, t, \bar{t}$	lokale Elementkoordinaten (entspricht $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \bar{\theta}^3$ )

<b>S</b>	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (PK2-Spannungstensor), $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$
$\hat{\mathbf{S}}$	Ersatz-Spannungstensor, $\hat{\mathbf{S}} = S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j$
$\mathbf{S}^i$	Spannungsvektor im Schnitt $F_i$
$S^{ij}$	Komponenten von $\mathbf{S}$ und $\hat{\mathbf{S}}$
<b>S</b>	maximale Suchtiefe beim Test des Rigidity-Graphen auf Zusammenhang
<b>t</b>	Spannungsvektor
$\hat{\mathbf{t}}$	vorgegebener Spannungsvektor auf einem Neumann-Rand $\Gamma_\sigma$
$T, t$	Schalendicke in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$T_0$	Schalendicke in Elementmitte (Referenzkonfiguration)
<b>u</b>	Verschiebungsvektor eines Punktes
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgegebener Verschiebungsvektor auf einem Dirichlet-Rand $\Gamma_u$
<b>v</b>	Verschiebungsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche (entspricht $\mathbf{v}^0$ )
$\mathbf{v}^N$	Differenzvektor $N$ -ter Ordnung
$v_\alpha _\beta$	einfach kovariante Ableitung von $v_\alpha$ zur Basis $\mathbf{A}^\alpha$
$v_3 _{\alpha\beta}$	zweifach kovariante Ableitung von $v_3$ zur Basis $\mathbf{A}^3$
$V$	von einem Volumenkörper im dreidimensionalen Raum eingenommenes Gebiet
$dV$	differentielles Volumenelement
$W^{int}$	Verzerrungsenergiedichte
<b>X, x</b>	Ortsvektor eines Punktes in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{X}^k$	Koordinaten des Knotens $k$ in der Referenzkonfiguration
$x^i$	global kartesische Koordinaten
<b>Z, z</b>	Shiftertensor für die Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$Z, z$	Determinante von $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{z}$
$\alpha_{\alpha\beta}$	Membranverzerrungen (entspricht $E_{\alpha\beta}^0$ bzw. $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ )
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor der EAS-Parameter
$\beta_{\alpha\beta}$	Krümmungen (entspricht $E_{\alpha\beta}^1$ bzw. $\varepsilon_{\alpha\beta}^1$ )
$\gamma_\alpha$	Schubwinkel (entspricht $2 E_{\alpha 3}^0$ bzw. $2 \varepsilon_{\alpha 3}^0$ )
$\Gamma$	Rand eines Körpers
$d\Gamma$	differentielles Randelement
$\Gamma_u$	Rand eines Körpers mit vorgegebener Verschiebung (Dirichlet-Rand)
$\Gamma_\sigma$	Rand eines Körpers mit vorgegebener Kraft (Neumann-Rand)
$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$	Christoffelsymbol

$\boldsymbol{\varepsilon}$	linearisierter Green-Lagrange-Verzerrungstensor, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	linearisierter Ersatz-Verzerrungstensor, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j$
$\varepsilon_{ij}$	Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$
$\varepsilon_{ij}^N$	Koeffizienten der Terme $N$ -ter Ordnung in $\theta^3$ von $\varepsilon_{ij}$
$\theta^i$	krummlinige konvektive Koordinaten zur Basis $\mathbf{G}_i$ bzw. $\mathbf{g}_i$
$\bar{\theta}^i$	krummlinige konvektive Koordinaten zur Basis $\bar{\mathbf{g}}_i$ bzw. $\bar{\mathbf{G}}_i$
$\lambda, \mu$	Lamé-Konstanten
$\lambda, \lambda^e$	Parameter zur Stabilisierung des Querschubs (global bzw. elementweise)
$\nu$	Querdehnzahl (Poissonzahl)
$\Pi^{int}$	Verzerrungsenergie
$\Pi_{3D}^{int}$	Verzerrungsenergie des dreidimensionalen Kontinuums
$\delta \Pi^{int}$	interne virtuelle Arbeit
$\delta \Pi^{ext}$	externe virtuelle Arbeit
$\delta \Pi_{PvV}$	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
$\delta \Pi_{HW}^{mod}$	modifiziertes Prinzip von Hu-Washizu (EAS-Methode)
$\rho$	Massendichte
$\rho_{\alpha\beta}$	alternatives Krümmungsmaß
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
$\Psi_{kl}$	Diagonaleinträge der $3 \times 3$ -Untermatrix von $\mathbf{IK}_g$ korrespondierend zu den Knoten $k$ und $l$
$\Omega$	Gebiet eines Körpers
$d\Omega$	differentielles Gebietselement
$\Omega^0$	Mittelfläche der Schale
$d\Omega^0$	differentielles Mittelflächenelement

### Mathematische Notationen

$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse von $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Transponierte von $\mathbf{A}$
$\delta \mathbf{A}$	Variation von $\mathbf{A}$
$\text{Det } \mathbf{A}$	Determinante von $\mathbf{A}$
$\text{Div } \mathbf{A}$	Divergenz von $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ $	Euklidische Norm von $\mathbf{A}$

$\text{sym}(\mathbf{A})$	symmetrischer Anteil von $\mathbf{A}$ , $\text{sym}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$
$\{A^{ij}\}$	Koeffizientenmatrix der Komponenten $A^{ij}$
$\frac{\partial A}{\partial B} = A_{,B}$	partielle Ableitung von $A$ nach $B$
$\frac{\partial A}{\partial \theta^i} = A_{,i}$	partielle Ableitung von $A$ nach $\theta^i$
$\frac{\partial A}{\partial \bar{\theta}^i} = A_{,\bar{i}}$	partielle Ableitung von $A$ nach $\bar{\theta}^i$
$\delta_j^i$	Kronecker-Delta: $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$
$\otimes$	dyadisches Produkt
$\infty$	Unendlich



# 1

---

## Einleitung

### 1.1 Motivation und Zielsetzung

In fast allen Bereichen unserer Umwelt sind dünnwandige Strukturen anzutreffen. Sowohl die Natur als auch der Mensch nutzen dieses Konstruktionselement, um ein Optimum zwischen Materialeinsatz und Steifigkeit zu erreichen. So sind Zellmembranen, Arterienwände, Blätter oder Eierschalen Beispiele für Schalenstrukturen in der Natur. Im Bauwesen treten Schalentragwerke unter anderem bei weitgespannten Überdachungen von Hallen, Stadien und Kirchen auf und finden in den Kuppeln des Pantheons in Rom und der Kathedrale von Florenz imposante Vertreter. Im Bereich des Maschinen-, Schiffs- und Anlagenbaus sind Silos, Tanks, Autokarosserien, Schiffsrümpfe oder Rotorblätter von Windkraftanlagen einige weitere Beispiele für Schalentragwerke des In-



**Abbildung 1.1:** Schalenstrukturen im Flugzeugbau: Airbus A380 (AIRBUS (2013a), AIRBUS (2013b)).

genieurwesens. Eine besondere Bedeutung haben dünnwandige Strukturen in der Luft- und Raumfahrtindustrie, wo beim Entwurf von Tragstrukturen neben dem Material- auch der Strukturleichtbau höchste Priorität besitzt. So stellen bei einem Flugzeug beispielsweise der Rumpf, die Tragflächen und Leitwerke, aber auch deren Komponenten, wie Steifen oder Spanten, Schalenstrukturen dar (siehe Abbildung 1.1).

Die Eigenschaft von Schalenstrukturen, mit einem Minimum an Materialeinsatz ein Maximum an Steifigkeit zu liefern, ist gleichzeitig mit einer ausgeprägten Empfindlichkeit gegenüber Imperfektionen verbunden. Geringe Fehler beim Entwurf und der Dimensionierung von Schalen sowie kleinste Abweichungen bei der ausgeführten Geometrie, den Randbedingungen oder der auftretenden Belastung von der Planung haben unter Umständen gravierende Auswirkungen. Aus diesem Grund ist man noch heute bestrebt, die Berechnungsverfahren für solche Strukturen weiter zu optimieren und effizienter zu gestalten um alle Phänomene möglichst genau abzubilden. Dennoch ist es nicht möglich die Empfindlichkeit zu beseitigen.

Die ersten Versuche, beim Entwurf von Schalenkonstruktionen analytische Verfahren einzusetzen und nicht mehr ausschließlich auf praktische Erfahrung von Baumeistern zurückzugreifen, fanden im Bauwesen vor mehreren hundert Jahren statt (siehe z.B. BENVENUTO (1991)). Auch in anderen Disziplinen wurden bereits früh mathematische Modelle entwickelt, wie beispielsweise von Leonhard Euler 1764 zur Berechnung der Stimmung von Glocken (SZABÓ 1979). Die erste aus heutiger Sicht völlig korrekte Theorie für Flächentragwerke wurde für den Sonderfall ebener Schalen (Platten) von KIRCHHOFF (1850) hergeleitet. Von LOVE (1888) stammt wohl die erste Schalenformulierung für beliebige Geometrien mit der bereits für viele Anwendungen brauchbare Ergebnisse erzielt werden konnten. In den darauf folgenden Jahrzehnten entstanden unzählige weitere Schalentheorien, die jedoch meist nicht für allgemeine, sondern für bestimmte Geometrien hergeleitet wurden, wie beispielsweise die Kreiszyinderschalentheorie von FLÜGGE (1934). Die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen unterlagen aus heutiger Sicht kaum einer Systematik und die Frage ihrer Zulässigkeit war Ausgangspunkt vieler akademischer Kontroversen. Erst in den 1960er Jahren wurden unter anderem mit den Arbeiten von W. Koiter und P. Naghdi (für eine Übersicht siehe z.B. NAGHDI (1972)) eine systematische Herleitung von Schalengleichungen eingeführt und die ersten vollständig korrekten Formulierungen aufgestellt (NAGHDI 1963b). Ziel einer jeden Schalenformulierung war, das komplexe mechanische Verhalten von dünnwandigen gekrümmten Flächentragwerken auf das Wesentliche zu reduzieren, um die entstehenden Gleichungssätze mit den verfügbaren analytischen Verfahren lösen zu können. Die Diskussion der bei klassischen Schalentheorien einfließenden Näherungen und Annahmen sowie die Untersuchung der daraus entstehenden Auswirkungen auf die Ergebnisqualität stellt ein erstes Ziel dieser Arbeit dar.

Die Entwicklung der Methode der finiten Elemente eröffnete auch bei der Berechnung von Schalenstrukturen neue Möglichkeiten. Erste finite Schalenelemente wurden in den 1960er Jahren entwickelt. Bekannte Vertreter aus dieser Zeit sind beispielsweise die SHEBA-Elemente von ARGYRIS UND SCHARPF (1968). Für die Herleitung von Schalenelementformulierungen etablierten sich bald zwei unterschiedliche Herangehensweisen. Bei der ersten wurden ausgehend von einer Schalentheorie durch Diskretisierung entsprechender Größen Schalenelemente gewonnen. Die zweite Möglichkeit stellte das sogenannte Degenerationskonzept dar, welches auf AHMAD U. A. (1968) zurückgeht. Hierbei erfolgte in einem ersten Schritt die Diskretisierung des dreidimensionalen Schalenkontinuums und erst im Anschluss daran wurden schalentypische Annahmen eingeführt. Dass beide Herangehensweisen unter den selben Annahmen zum gleichen Ergebnis führen, war lange Zeit umstritten und wurde erst durch BÜCHTER (1992) bewiesen. Der Einsatz der Finite-Elemente-Methode ermöglichte außerdem, einige der bei klassischen Schalentheorien einfließenden strengen Annahmen aufzugeben. Dreidimensionale Schalentheorien lassen im Gegensatz zu den klassischen Theorien eine Änderung der Schalendicke zu und sind somit in der Lage, den vollständigen dreidimensionalen Verzerrungs- und Spannungszustand wiederzugeben. Dies wirkt sich zum einen genauigkeitssteigernd aus, zum anderen können unmodifizierte dreidimensionale Stoffgesetze verwendet werden. Beispiele für entsprechende Formulierungen sind z.B. in BÜCHTER UND RAMM (1992), SANSOUR (1995), PARISCH (1995) und HAUPTMANN UND SCHWEIZERHOF (1998) zu finden. Die Herleitung dreidimensionaler Schalenelemente erfolgt heutzutage häufig auf der Basis des Degenerationskonzepts. Eng damit verwandt stellen gewöhnliche Kontinuumsselemente, die durch zusätzliche Elementtechnologie für den Einsatz bei dünnwandigen Strukturen optimiert werden, den Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Schalenelemente dar. Der Bezug zwischen einem Schalenelement und der ihm stets zugrundeliegenden Schalentheorie geht bei dieser Herangehensweise jedoch verloren. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit besteht darin, zu untersuchen, welche Modellannahmen dreidimensionaler Schalentheorien in die Herleitung dreidimensionaler finiter Schalenelemente einfließen. In diesem Zusammenhang soll auch geklärt werden, inwieweit die in der Regel numerisch erfolgende Dickenintegration diese Annahmen beeinflusst.

In heutigen CAE-gestützten Entwurfsprozessen liegen selbst dünnwandige Strukturen oft als Volumengeometrien vor. Die Anwendung dreidimensionaler Schalenelemente, deren Elementtopologie jener von gewöhnlichen Kontinuumsselementen entspricht, ist daher in vielen Fällen vorteilhaft, da eine Vernetzung der Volumengeometrien mit diesen Elementen direkt, d.h. ohne zusätzliches Einführen einer Mittelfläche, erfolgen kann. Durch die explizite Abbildung der Ober- bzw. Unterseite der Schale ist zudem die Verbindung von Schalenbauteilen, wie z.B. der Anschluss von Steifen, leicht realisierbar sowie die Beschreibung einer Kontaktkinematik einfacher zu bewerkstelligen. Die topologische Verwandtschaft zu Kontinuumsselementen erlaubt es zudem, entsprechende

Elementtypen miteinander zu koppeln. Eng damit verbunden ist die Möglichkeit, entsprechende Schalenelemente über die Dicke der Schale zu „stapeln“. In Bereichen mit erhöhten Genauigkeitsanforderungen lässt sich dadurch mit dem selben Element eine Mehrschicht-Kinematik realisieren, die von manchen Autoren (z.B. BRAUN (1995)) im Rahmen eigenständiger Elementformulierungen umgesetzt wird. Ausgehend von bestehenden Arbeiten auf diesem Gebiet, wie beispielsweise SZE UND YAO (2000), KLINKEL (2000) und HARTMANN (2007), stellt die Entwicklung einer solchen Elementformulierung einen dritten Schwerpunkt dieser Arbeit dar, wobei die Minimierung der Netzverzerrungsempfindlichkeit von zentraler Bedeutung ist.

Die Ansprüche an Simulationsergebnisse wachsen stetig, was dazu führt, dass die numerischen Modelle immer komplexer und im Hinblick auf die Anzahl der Freiheitsgrade signifikant größer werden. Dem Einsatz effizienter Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme bei Finite-Elemente-Berechnungen kommt daher eine stetig wachsende Bedeutung zu. Die bei der Simulation von schlanken Schalenstrukturen auftretenden Gleichungssysteme weisen, bedingt durch die physikalischen Eigenschaften dieser Problemstellungen, eine extrem schlechte Konditionierung auf, weshalb in der Regel diesbezüglich unempfindliche direkte Lösungsverfahren eingesetzt werden. Nachteilig dabei ist jedoch der hohe Ressourcenverbrauch in Form von Speicherbedarf und Rechenoperationen sowie eine gegenüber iterativen Verfahren geringere Lösungsbeschleunigung durch Parallelisierung. Die Suche nach einem Vorkonditionierer, welcher iterative Lösungsverfahren für diese Art von Problemstellungen gegenüber direkten Verfahren in jeder Hinsicht konkurrenzfähig macht, muss bis heute als ergebnislos betrachtet werden. Lediglich in Verbindung mit aufwendigen Multigrid-Verfahren, wie z.B. in GEE (2004), GEE U. A. (2005) und KLÖPPEL U. A. (2011) beschrieben, erscheint eine iterative Lösung entsprechender Systeme realistisch. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Suche nach einem effizienten Vorkonditionierer fortgeführt werden. Hierfür wird untersucht, inwieweit sich Ansätze aus SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) und AVRON U. A. (2009) auf Schalensimulationen mit finiten Elementen übertragen lassen. Die Grundidee besteht dabei darin, den Vorkonditionierer auf Basis eines Ersatzproblems aufzustellen. Im Gegensatz zu Vorkonditionierern, die auf der unvollständigen Faktorisierung des Ausgangsproblems beruhen, erfolgt hier eine vollständige Faktorisierung des Ersatzproblems. Um Ersatzprobleme aufzustellen, wird in dieser Arbeit sowohl ein topologischer als auch ein algebraischer Ansatz vorgestellt.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 sind die mechanischen Grundlagen und Definitionen gegeben, die für das Verständnis dieser Arbeit erforderlich sind. Dabei werden die kinematischen Gleichungen

sowie die Material- und Gleichgewichtsgleichungen vorgestellt, welche zusammen mit den Randbedingungen die starke Form des Randwertproblems der Elastostatik definieren. Das Kapitel schließt mit einem kurzen Überblick über Energiefunktionale, welche die Basis der für Finite-Elemente-Formulierungen notwendigen schwachen Form darstellen.

In Kapitel 3 wird eine Mittelflächenparametrisierung des dreidimensionalen Schalenkontinuums eingeführt und die Dimension des Problems durch Vorabintegration in Dickenrichtung von drei auf zwei Parameter reduziert. Da hierbei noch keinerlei Näherungen einfließen, entsteht eine der kontinuumsmechanischen Beschreibung exakt äquivalente Form, jedoch auf der Basis von Schnittgrößen. Nach der Diskussion unterschiedlicher Arten von Schnittgrößen wird abschließend die Notwendigkeit der Einführung von Näherungen begründet sowie auf einen alternativen Ansatz zur Herleitung von Schalengleichungen hingewiesen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit Modellannahmen bei klassischen Schalentheorien. Nach der Beschreibung von Kriterien, die bei der Approximation des Kontinuums durch Schalentheorien einzuhalten sind, werden konsistente Schalengleichungen hergeleitet und mehrere, teilweise als historisch einzustufende Schalentheorien vorgestellt. Numerische Vergleiche der Formulierungen schließen dieses Kapitel ab.

Kapitel 5 befasst sich mit Modellannahmen dreidimensionaler Schalentheorien. Obwohl diese fast ausschließlich im Zusammenhang mit finiten Schalenelementen auftreten, werden die Untersuchungen völlig losgelöst von der Methode der finiten Elemente bzw. elementtechnologischer Überlegungen durchgeführt. Der Fokus der Untersuchungen liegt dabei auf den kinematischen Gleichungen, den inneren Größen sowie auf der numerischen Dickenintegration, welche in dieser Arbeit der Schalentheorie und nicht der Elementtechnologie zugerechnet wird. Nach einer auf numerischen Beispielen beruhenden Untersuchung der Einflüsse verschiedener Annahmen auf die Genauigkeit von dreidimensionalen Schalenformulierungen wird eine Verbindung zwischen den Schalentheorien und dreidimensionalen finiten Schalenelementen hergestellt.

In Kapitel 6 wird die Formulierung eines robusten dreidimensionalen Volumen-Schalenelements vorgestellt, dessen Topologie einem gewöhnlichen achtknotigen Kontinuums-element entspricht. Hierfür werden zunächst die dafür benötigten Elementkoordinatensysteme, grundlegende Größen in diskretisierter Form sowie die variationelle Basis des Elements angegeben. Im Anschluss daran erfolgt die Herleitung der rein verschiebungsbasierten Formulierung. Die dadurch entstehenden Lockingphänomene werden getrennt identifiziert und sukzessive durch geeignete Maßnahmen beseitigt. Abschließend wird ein Verfahren zur Dämpfung von Querschuboszillationen eingeführt. Besonderen Wert wird in diesem Kapitel drauf gelegt, die Elementformulierung implementierungsnah darzustellen, um eine schnelle Integration des Schalenelements in beliebige Finite-Elemente-Programme zu ermöglichen.

Kapitel 7 befasst sich mit der Entwicklung von effizienten Vorkonditionierern für die iterative Lösung linearer Gleichungssysteme, die bei der Simulation von Schalenstrukturen mit finiten Elementen auftreten. Nach einer kurzen Einführung in direkte und iterative Lösungsverfahren sowie in die Funktionsweise der Vorkonditionierung werden verschiedene Ansätze vorgestellt, die geeignet erscheinen, um Vorkonditionierer auf der Basis von Ersatzproblemen aufzustellen.

In Kapitel 8 wird zunächst die Leistungsfähigkeit des in Kapitel 6 beschriebenen dreidimensionalen Volumen-Schalenelements anhand geometrisch linearer und nichtlinearer Benchmarkbeispiele aus der Literatur sowie praxisrelevanter Problemstellungen aus dem Flugzeugbau demonstriert. Dabei werden die Ergebnisse unter anderem mit denjenigen des im kommerziellen Finite-Elemente-Programm ABAQUS enthaltenen Volumen-Schalenelements SC8R verglichen. Des Weiteren werden die Eigenschaften und die Effizienz der Vorkonditionierer aus Kapitel 7 für geometrisch lineare Anwendungen untersucht und mit bekannten Vorkonditionierern aus der Literatur verglichen.

Kapitel 9 fasst die wesentlichen Erkenntnisse und Entwicklungen dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weiterführende Forschungsthemen.

---

# Grundlagen

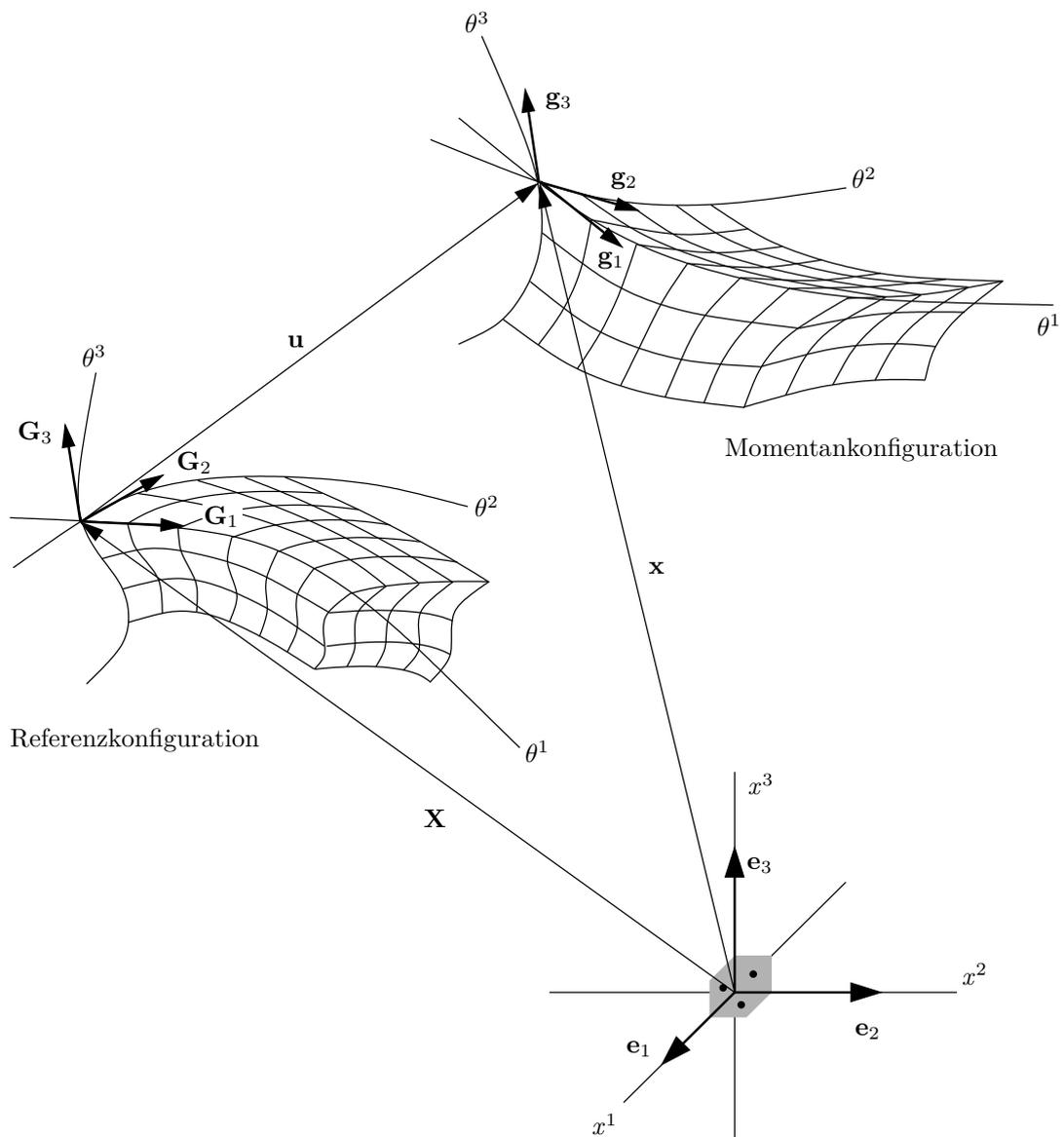
In diesem Kapitel werden für das Verständnis dieser Arbeit wesentliche Begriffe und Definitionen sowie mechanische Größen und deren Notation eingeführt. Hierbei wird besonderer Wert darauf gelegt, in kompakter Form in die Grundlagen, auf denen diese Arbeit aufbaut, einzuführen. Für ein intensiveres Studium der Materie werden unter anderem die Werke von GREEN UND ZERNA (1968), MALVERN (1969), MARSDEN UND HUGHES (1983) und HOLZAPFEL (2000) empfohlen.

## 2.1 Koordinatensysteme und Differentialgeometrie

Für die Darstellung von Deformationsvorgängen fester Körper im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum ist die Lagrange-Beschreibung, auch materielle Beschreibung genannt, geeignet.

Hierfür ist zum einen ein ortsfestes kartesisches Koordinatensystem  $x^i$  mit den Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  definiert, welches als globaler Bezugspunkt für den zu beschreibenden Körper dient. Zum anderen wird ein konvektives krummliniges Koordinatensystem  $\theta^i$  eingeführt, welches fest mit dem materiellen Körper verbunden ist, dessen Koordinatenlinien also auf dem Körper eingepägt sind (Abbildung 2.1).

Der Ort jedes Materialpunktes des Körpers wird in der Referenzkonfiguration durch ein Feld von Ortsvektoren  $\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  in Abhängigkeit der drei konvektiven Koordinaten  $\theta^1$ ,  $\theta^2$  und  $\theta^3$  eindeutig bestimmt. Das Vektorfeld  $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t)$  legt den Ort aller Materialpunkte des Körpers in der Momentankonfiguration, auch aktuelle Konfiguration genannt, fest.



**Abbildung 2.1:** Geometriebeschreibung und Kinematik eines festen Körpers im dreidimensionalen Raum.

Die kovarianten Basisvektoren für jeden Materialpunkt sind als partielle Ableitungen des zugehörigen Ortsvektors nach der entsprechenden Koordinate  $\theta^i$  definiert. Sie lauten

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \mathbf{X}_{,i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{x}_{,i} \quad (2.1)$$

in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration. Geometrisch können die kovarianten Basisvektoren als Tangenten an die Koordinatenlinien  $\theta^i$  interpretiert werden (siehe Abbildung 2.1).

Die Definition der kontravarianten Basisvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration  $\mathbf{G}^i$  und  $\mathbf{g}^i$  ist in Gleichung (2.2) gegeben.

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \qquad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \qquad (2.2)$$

Der Metriktensor (Einheitstensor) in ko- und kontravarianter Darstellung für die Referenzkonfiguration lautet

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \qquad (2.3)$$

Die Tensorkomponenten  $G_{ij}$  bzw.  $G^{ij}$  sind dabei jeweils als Skalarprodukt der zugehörigen Basisvektoren definiert.

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \qquad G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \qquad (2.4)$$

Die Berechnung der kontravarianten Basisvektoren erfolgt nach Gleichung (2.5). Hierbei wird ausgenutzt, dass die Inverse der kovarianten Komponentenmatrix  $G_{ij}$  der kontravarianten Komponentenmatrix  $G^{ij}$  entspricht.

$$\mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j = \{G_{ij}\}^{-1} \mathbf{G}_j \qquad (2.5)$$

Mit den in diesem Abschnitt angegebenen Größen ist eine eindeutige Beschreibung der Geometrie eines Körpers in seiner Referenz- und Momentankonfiguration möglich. Im Folgenden werden Zusammenhänge zwischen den Größen beider Konfigurationen hergestellt.

## 2.2 Kinematik

Gleichungen, welche Zusammenhänge zwischen geometrischen Größen in der Referenz- und Momentankonfiguration herstellen, werden kinematische Gleichungen genannt. Das Feld der Ortsvektoren beider Konfigurationen ist dabei über das Feld der Verschiebungsvektoren  $\mathbf{u}$  gekoppelt (siehe Gleichung (2.6)).

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \qquad (2.6)$$

Der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \qquad (2.7)$$

stellt eine Abbildungsvorschrift dar, welche Linienelemente beider Konfigurationen miteinander in Verbindung setzt. Mit seiner Hilfe können die ko- und kontravarianten Basisvektoren einer Konfiguration in die jeweils andere Konfiguration überführt werden. Die Transformation von der Referenz- in die Momentankonfiguration

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i \quad (2.8)$$

wird dabei als Vorwärtstransformation oder push forward, die Transformation in umgekehrter Richtung

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i \quad (2.9)$$

entsprechend als Rückwärtstransformation oder pull back bezeichnet. Für die Herleitung dieser sowie weiterer Beziehungen sei auf BISCHOFF U. A. (2004) verwiesen.

Um die Rückwärtstransformation in Gleichung (2.9) zu gewährleisten, muss die Inverse des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{-1}$  existieren. Vom rein mathematischen Standpunkt gesehen ist dies erfüllt, wenn die Determinante von  $\mathbf{F}$  ( $\text{Det } \mathbf{F}$ ) ungleich Null ist. Aus mechanischer Sicht jedoch muss

$$\text{Det } \mathbf{F} > 0 \quad (2.10)$$

gelten, um eine Selbstdurchdringung des Materials auszuschließen.

Ein für große Verschiebungen und Rotationen geeignetes Dehnungsmaß ist der Green-Lagrange-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , welcher in unterschiedlichen Darstellungen in folgender Gleichung angegeben ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vernachlässigt man die nichtlinearen Terme in Gleichung (2.11), so erhält man dessen linearisierte Form, welche im Folgenden als  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bezeichnet wird. Die linearisierte Green-Lagrange-Verzerrung ist auch als Ingenieursverzerrung bekannt.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{G}_i) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{G}_i - 2G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (2.12)$$

Im Kontext einer Lagrange-Beschreibung von Randwertproblemen der Strukturmechanik entspricht die Definition eines Verzerrungsmaßes der kinematischen Feldgleichung, welche eine der drei Gebietsgleichungen darstellt.

## 2.3 Konstitutivgesetz

Die konstitutive Gleichung stellt die Beziehung zwischen den kinematischen und den statischen Größen her. Die zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  energetisch konjugierte statische Größe ist der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, kurz PK2-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.13)$$

Die Verbindung zwischen beiden Größen wird über

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.14)$$

mit Hilfe des Materialtensors  $\mathbf{C}$ , auch Material-, Konstitutiv- oder Stoffgesetz genannt, durch eine doppelte Verjüngung ( $:$ ) hergestellt. Es handelt sich dabei um einen Tensor vierter Stufe, der, sofern ein Potential existiert, mit Hilfe der Verzerrungsenergiedichte  $W^{int}(\mathbf{E})$  als

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l = \frac{\partial^2 W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.15)$$

dargestellt werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit kommt ausschließlich das linear elastische Saint-Venant-Kirchhoff-Material zum Einsatz. Wird isotropes Materialverhalten vorausgesetzt, so sind der E-Modul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  ausreichend, um das Material vollständig zu beschreiben. Die Komponenten  $C^{ijkl}$  des Materialtensors werden in der Regel mit Hilfe der Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.16)$$

ausgedrückt. Sie sind

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu [G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}]. \quad (2.17)$$

Mit Gleichung (2.14) ist die zweite Feldgleichung gegeben, die für die Beschreibung des Randwertproblems notwendig ist.

## 2.4 Gleichgewicht und Spannungsmaße

Die an einem Körper angreifenden inneren und äußeren Kräfte müssen im Gleichgewicht stehen. Die Gleichgewichtsgleichung lässt sich aus der Impulsbilanz ableiten und lautet in lokaler Form

$$\text{Div } \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.18)$$

Gleichung (2.18) stellt die dynamische Gleichgewichtsbedingung dar, wie an dem Trägheitsterm  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  zu erkennen ist. Der Skalar  $\rho$  repräsentiert hierbei die Massendichte des Körpers in der Referenzkonfiguration. In Kombination mit dem Volumenkraftvektor je Masseneinheit  $\mathbf{b}$  entstehen masseninduzierte, externe Volumenkräfte. Die inneren Kräfte fließen durch die Divergenz des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors, kurz PK1-Spannungstensor  $\mathbf{P}$ , in die Gleichgewichtsgleichung ein. Wird der Trägheitsterm vernachlässigt, so ergibt sich mit

$$\text{Div } \mathbf{P} + \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

die dritte noch fehlende Feldgleichung der Elastostatik. Darin wird mit  $\hat{\mathbf{b}} = \rho \mathbf{b}$  der Volumenkraftvektor definiert.

Die Tensorbasis des PK1-Spannungstensors beinhaltet, wie aus Gleichung (2.20) hervorgeht, sowohl Anteile der Referenz- als auch der Momentankonfiguration.

$$\mathbf{P} = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.20)$$

Er bezieht die tatsächlich wirkende Kraft in der Momentankonfiguration auf die zugehörige Fläche in der Referenzkonfiguration, was eine physikalische Interpretation erschwert. Trotzdem wird dieses Spannungsmaß im Ingenieurwesen, z.B. bei der Angabe von Werkstofffestigkeiten, verwendet.

Auch der in Abschnitt 2.3 bereits definierte Zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  lässt eine physikalische Interpretation nicht direkt zu, da er sich vollständig auf die Referenzkonfiguration bezieht. Beide Größen können falls erforderlich in den Cauchy-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.21)$$

überführt werden. Dieses Spannungsmaß bezieht die tatsächlich wirkende Kraft in der Momentankonfiguration auf die aktuelle Fläche und wird daher auch als wahre oder physikalische Spannung bezeichnet.

In Gleichung (2.22) sind einige Umformungen gegeben, mit deren Hilfe die drei Spannungsmaße ineinander umgerechnet werden können.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\text{Det } \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \\ \mathbf{P} &= \text{Det } \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Weitere Transformationsvorschriften und Spannungsmaße sind in BELYTSCHKO U. A. (2000) zu finden.

## 2.5 Randbedingungen

Zur vollständigen Definition des Randwertproblems der Elastostatik sind neben den drei Feldgleichungen, die in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben wurden, noch Randbedingungen zu definieren. Dabei ist zwischen Verschiebungs- und Krafrandbedingungen zu unterscheiden.

Bei Verschiebungsrandbedingungen, auch als Dirichlet-Randbedingungen bekannt, sind im Gebiet  $\Gamma_u$  die Werte der Verschiebung  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$  vorgeschrieben.  $\Gamma_u$  wird daher auch als Verschiebungsrand bezeichnet.

Im Falle von Krafrandbedingungen bzw. Neumann-Randbedingungen sind im Gebiet  $\Gamma_\sigma$  äußere Randlasten  $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}$  vorgegeben, wobei  $\Gamma_\sigma$  den sogenannten Krafrand einer Problemstellung darstellt.

Die Gebiete  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_\sigma$  dürfen sich dabei nicht überlappen, d.h. in einem Punkt des Gebietsrandes  $\Gamma$  darf in der selben Richtung entweder eine Verschiebungsrandbedingung oder eine Krafrandbedingung gegeben sein.

Der Spannungsvektor  $\hat{\mathbf{t}}$  kann nach Gleichung (2.23) über das Theorem von Cauchy mit dem Spannungstensor  $\mathbf{P}$  in Verbindung gesetzt werden.

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}\tag{2.23}$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{n}}$  repräsentiert dabei die Normale in jedem Punkt des Krafrandes  $\Gamma_\sigma$  der Referenzkonfiguration.

## 2.6 Schwache Form des Randwertproblems

Mit den Gebietsgleichungen (2.11), (2.14) und (2.19) (Kinematik, Stoffgesetz und Gleichgewicht) sowie den Randbedingungen aus Abschnitt 2.5 ist die starke Form des Randwertproblems der Elastostatik gegeben.

Um dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der finiten Elemente numerisch lösen zu können, ist es in eine sogenannte schwache Form zu überführen. Die Gebietsgleichungen müssen dabei nicht mehr punktweise exakt, d.h. stark, sondern nur noch in einem integralen Mittel, also schwach, erfüllt werden. Grundlage hierfür bilden in der Regel Funktionale (siehe z.B. ODEN UND REDDY (1976)).

Das wohl bekannteste Funktional stellt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) in Gleichung (2.24) dar.

$$\delta\Pi_{PvV}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\text{Div } \mathbf{P} + \hat{\mathbf{b}}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \quad (2.24)$$

Wird Gleichung (2.24) mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes sowie der Transformationsvorschriften aus Gleichung (2.22) umgeformt, so ergibt sich in Gleichung (2.25) die schwache Form, in der die Anteile der virtuellen inneren und äußeren Energie  $\delta\Pi^{int}$  bzw.  $\delta\Pi^{ext}$  sichtbar werden.

$$\delta\Pi_{PvV}(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, d\Omega}_{\delta\Pi^{int}} - \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \right]}_{\delta\Pi^{ext}} = 0 \quad (2.25)$$

Es handelt sich beim Prinzip der virtuellen Verschiebungen um ein sogenanntes Einfeldfunktional, da lediglich die Variable  $\mathbf{u}$  als freie Variable auftritt.

Das Prinzip von Hellinger-Reissner (HELLINGER (1914), REISSNER (1950)) verwendet neben den Verschiebungen auch die Spannungen als unabhängige Variable. Bei diesem Zweifeldfunktional werden das Gleichgewicht und die Kinematik sowie die Verschiebungs- und Krastrandbedingungen schwach erfüllt. Beim Prinzip vom Hu-Washizu (HU (1955), WASHIZU (1955)) sind alle Gebietsgleichungen sowie Randbedingungen schwach erfüllt. Da hier die Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen als freie Variable verwendet werden, liegt ein Dreifeldfunktional vor. Eine von SIMO UND RIFAI (1990) modifizierte Form dieses Prinzips wird in Kapitel 6 eingeführt und zur Herleitung eines effizienten Schalenelements herangezogen.

---

## Mittelflächenparametrisierung und Dimensionsreduktion

Der in Abbildung 2.1 dargestellte Ausschnitt eines Kontinuums wird von einem Koordinatennetz mit den Parametern  $\theta^1$ ,  $\theta^2$  und  $\theta^3$  überzogen. Das zu beschreibende Gebiet stellt einen Körper im dreidimensionalen Euklidischen Raum dar. Alle Größen des Körpers können darin als Funktionen dieser drei Parameter ausgedrückt werden.

Durch Elimination von einem bzw. zwei der Parameter kann versucht werden, die mechanische Beschreibung eines Problems geschickt so zu verändern, dass im Vergleich zur ursprünglichen Parametrisierung eine einfachere Lösbarkeit der entstehenden Gleichungen gegeben ist. Diese Vorgehensweise wird als Dimensionsreduktion bezeichnet. Ob eine Dimensionsreduktion sinnvoll ist, hängt stark von den äußeren Abmessungen des betrachteten Körpers ab. Weist dieser einen flächenhaften Charakter auf, d.h. sind zwei der Abmessungen im Vergleich zur dritten Abmessung groß, so liegt eine Beschreibung mit nur zwei Parametern z.B.  $\theta^1$  und  $\theta^2$  nahe. Sind zwei Abmessungen derselben Größenordnung deutlich kleiner als die dritte, so kann der Charakter dieses Kontinuum als linienhaft bezeichnet werden, das sich folglich effizient durch einen Bahnparameter, z.B.  $\theta^1$  beschreiben lässt.

Da im Rahmen dieser Arbeit lediglich mechanische Formulierungen für Schalenstrukturen, also flächenhaften Kontinua, behandelt werden, wird im Folgenden nur die Dimensionsreduktion von drei auf zwei Parameter diskutiert. In einem ersten Schritt erfolgt zunächst eine Umparametrisierung bezüglich der später verwendeten Bezugsfläche (Mittelfläche) und im Anschluss daran die eigentliche Dimensionsreduktion.

### 3.1 Mittelflächenparametrisierung

In Abbildung 3.1 ist ein Ausschnitt einer Schale in der Referenzkonfiguration dargestellt. Die beiden Laibungsflächen begrenzen den Körper hierbei nach oben und unten und schließen den Schalenraum ein, der durch die krummlinigen Koordinaten  $\theta^i$  parametrisiert ist. Es wird festgelegt, dass  $\theta^1$  und  $\theta^2$  in der Schalenebene (in-plane) verlaufen und  $\theta^3$  stets die Dickenrichtung bestimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zudem angenommen, dass  $\theta^3$  orthogonal zu  $\theta^1$  und  $\theta^2$  orientiert ist. Der zur Koordinate  $\theta^3$  gehörende kovariante Basisvektor  $\mathbf{G}_3$  ist dabei normiert ( $\|\mathbf{G}_3\| = 1$ ).

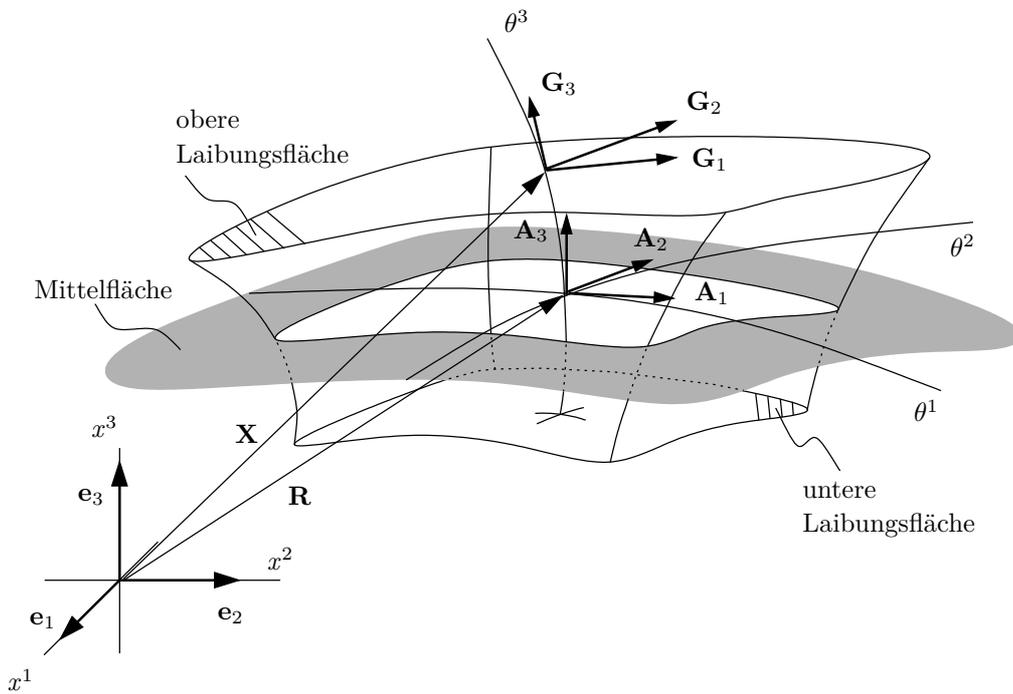


Abbildung 3.1: Größen im Schalenraum in der Referenzkonfiguration.

Der Abstand zwischen der oberen und unteren Laibungsfläche in der Referenzkonfiguration wird als Schalendicke  $T(\theta^1, \theta^2)$  definiert. Die Menge aller Punkte, die mittig zwischen den beiden Laibungsfläche liegen, bilden die Mittelfläche. Im zuvor eingeführten krummlinigen Koordinatensystem  $\theta^i$  werden diese Punkte durch  $\theta^3 = 0$  charakterisiert. Für alle Punkte des Schalenraums gilt

$$\theta^3 \in \left[ -\frac{T(\theta^1, \theta^2)}{2}, +\frac{T(\theta^1, \theta^2)}{2} \right]. \quad (3.1)$$

Die Intervallgrenzen in Gleichung (3.1) beschreiben die Punkte der unteren bzw. oberen Laibungsfläche.

Für Größen der Mittelfläche werden eigene Bezeichnungen eingeführt. Die ko- und kontravarianten Basisvektoren der Mittelfläche sind

$$\mathbf{A}_i(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{G}_i(\theta^1, \theta^2, 0) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}^i(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{G}^i(\theta^1, \theta^2, 0). \quad (3.2)$$

Der Metriktensor der Mittelfläche wird durch

$$\mathbf{A}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{G}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (3.3)$$

beschrieben. Aufgrund der Einheitslänge des Basisvektors  $\mathbf{A}_3$  sowie dessen Orthogonalität zu den Basisvektoren  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  ergeben sich die Komponentenmatrizen des Metriktensors in ko- bzw. kontravarianter Darstellung zu

$$\{A_{ij}\} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \{A^{ij}\} = \begin{Bmatrix} A^{11} & A^{12} & 0 \\ A^{21} & A^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

Die selbe Struktur gilt auch für die Metrikkomponenten  $G_{ij}$  bzw.  $G^{ij}$  im Schalenraum, da die gleichen Voraussetzungen auch für die Basisvektoren  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$  und  $\mathbf{G}_3$  zutreffen.

$$\{G_{ij}\} = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \{G^{ij}\} = \begin{Bmatrix} G^{11} & G^{12} & 0 \\ G^{21} & G^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Um Größen der Mittelfläche in Größen des Schalenraums und umgekehrt überführen zu können, wird der Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{Z}$  eingeführt.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i & \mathbf{Z}^{-1} &= \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i \\ \mathbf{Z}^T &= \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i & \mathbf{Z}^{-T} &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

Er wird gewöhnlich als Shifftertensor oder auch als Schalenshifter bezeichnet. Mit seiner Hilfe können z.B. die Basisvektoren wie folgt ineinander überführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_i & \mathbf{A}_i &= \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{G}_i \\ \mathbf{G}^i &= \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{A}^i & \mathbf{A}^i &= \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{G}^i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Determinante  $Z$  des Shifftertensors  $\mathbf{Z}$  gibt das Verhältnis eines Volumenelements im Schalenraum zu einem Flächenelement der Mittelfläche an.  $Z$  kann somit als

$$Z = \text{Det}(\mathbf{Z}) = \frac{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \quad (3.8)$$

ausgedrückt werden.

Um das Ziel dieses Abschnitts, den Schalenraum mit Hilfe der Mittelfläche zu parametrisieren, zu erreichen, wird der Ortsvektor  $\mathbf{X}$  zu jedem Punkt im Schalenraum als unendliche Summe von Größen der Mittelfläche ausgedrückt.

$$\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \sum_{N=0}^{\infty} (\theta^3)^N \mathbf{R}^N(\theta^1, \theta^2) \quad (3.9)$$

Der  $N$ -te Summand besteht dabei aus dem Produkt des Monoms  $(\theta^3)^N$  und einem Vektor  $\mathbf{R}^N$ , der nur eine Funktion der beiden in-plane Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  ist. Die Vektoren  $\mathbf{R}^N$  werden als Direktoren bezeichnet. Diese Art der Darstellung wird z.B. von NAGHDI (1972) eingeführt, um Schalentheorien beliebiger Ordnung herzuleiten. Es sei angemerkt, dass nicht nur die in Gleichung (3.9) verwendeten Monome, sondern auch andere Polynome, wie z.B. Legendre-Polynome, trigonometrische Funktionen oder abschnittsweise definierte Funktionen, eingesetzt werden können. Letztere sind besonders dann geeignet, wenn eine Beschreibung von Diskontinuitäten in den Verschiebungsableitungen im Schalenraum, wie beispielsweise bei geschichteten Schalenstrukturen, notwendig ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf diese Fälle jedoch nicht weiter eingegangen. Für eine Übersicht sowie weiterführende Literatur wird auf BISCHOFF (1999) verwiesen.

Der Ortsvektor der Mittelflächenpunkte ergibt sich nach der Reparametrisierung zu

$$\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, 0) = \mathbf{R}^0(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

Die kovarianten Basisvektoren des Schalenraums können ebenfalls durch die in Gleichung (3.9) eingeführte Reihendarstellung ausgedrückt werden (siehe Gleichung (3.11)), wobei  $\mathbf{G}_3$  dort nicht normiert und nicht orthogonal zu  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  ist.

$$\mathbf{G}_\alpha = \sum_{N=0}^{\infty} (\theta^3)^N \mathbf{R}_{,\alpha}^N \quad \mathbf{G}_3 = \sum_{N=0}^{\infty} N (\theta^3)^{N-1} \mathbf{R}^N \quad (3.11)$$

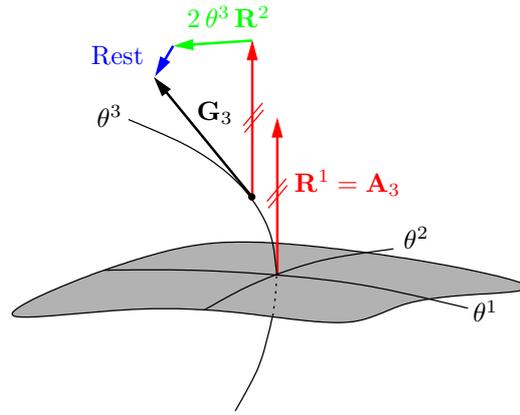
In Abbildung 3.2 ist die Reihendarstellung des Basisvektors  $\mathbf{G}_3$  grafisch dargestellt. Die einzelnen Anteile sind entsprechend der in Gleichung (3.12) verwendeten Farben hervorgehoben.

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{R}^1 + 2\theta^3 \mathbf{R}^2 + 3(\theta^3)^2 \mathbf{R}^3 + 4(\theta^3)^3 \mathbf{R}^4 + \dots \quad (3.12)$$

Ebenso wie der Ortsvektor  $\mathbf{X}$  wird auch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  über

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \sum_{N=0}^{\infty} (\theta^3)^N \mathbf{v}^N(\theta^1, \theta^2) \quad (3.13)$$

durch Größen der Mittelfläche definiert. Die Vektoren  $\mathbf{v}^N(\theta^1, \theta^2)$  werden als Differenzvektoren bezeichnet.



**Abbildung 3.2:** Darstellung des Basisvektors  $\mathbf{G}_3$  durch eine unendliche Reihe von Vektoren  $\mathbf{R}^N$ .

Größen der aktuellen Konfiguration werden in gleicher Weise ausgedrückt. Als einziger Unterschied kommen hier Kleinbuchstaben zum Einsatz, weshalb auf eine explizite Darstellung dieser Gleichungen verzichtet wird.

In einem letzten Schritt sollen nun die Komponenten  $E_{ij}$  des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  zur Basis  $\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$  ebenfalls in einer entsprechenden Reihendarstellung ausgedrückt werden. Hierzu wird die Berechnung der Verzerrungskomponenten aus Gleichung (2.11) wiederholt.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \quad (3.14)$$

Die höchste auftretende Potenz in  $\theta^3$  der kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  bzw.  $\mathbf{g}_i$  ist nach Gleichung (3.11) unendlich. Die in Gleichung (3.14) vorkommenden Skalarprodukte dieser Basisvektoren bewirken eine Verdoppelung der maximalen Potenz, d.h.  $2\infty$ . Obwohl die Multiplikation von Unendlich mit einer positiven reellen Zahl wiederum Unendlich ergibt, wird die Schreibweise  $2\infty$  aus Konsistenzgründen in den Summendarstellungen beibehalten. Ein Abbrechen der Reihenentwicklung von Gleichung (3.15) nach endlich vielen Gliedern erfordert folglich eine Summation bis zum doppelten Wert. Die Komponenten des Verzerrungstensors lauten damit

$$E_{ij}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \sum_{N=0}^{2\infty} (\theta^3)^N E_{ij}^N(\theta^1, \theta^2). \quad (3.15)$$

Die Umparametrisierung des Kontinuums bezüglich der Mittelfläche ist somit abgeschlossen. Im nächsten Abschnitt kann nun der Parameter  $\theta^3$  aus den mechanischen Größen eliminiert werden, d.h. die Dimensionsreduktion kann erfolgen.

## 3.2 Dimensionsreduktion

Die Elimination des Parameters  $\theta^3$  erfolgt durch eine Vorabintegration der Größen in  $\theta^3$ -Richtung (Dickenrichtung) bzw. durch Sortieren der Anteile nach Potenzen von  $\theta^3$ . Ausgangspunkt hierfür stellt die Gleichung der internen virtuellen Energie

$$\delta\Pi^{int} = \int_{\Omega} \delta\mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} \delta\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} Z \, d\theta^3 \, d\Omega^0 \quad (3.16)$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, & \mathbf{C} &= C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad \text{und} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{C} : \mathbf{E} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \end{aligned} \quad (3.17)$$

dar. Das Integral über das Volumen  $\Omega$  wird in ein Integral über die Mittelfläche  $\Omega^0$  und ein Integral in Dickenrichtung  $\theta^3$  aufgeteilt. Die Determinante  $Z$  des Shiftertensors ist hierbei zu berücksichtigen.

Bei den in Gleichung (3.17) dargestellten Tensoren sind sowohl deren Komponenten als auch die Basisvektoren von  $\theta^3$  abhängig. Das Integral in Dickenrichtung erstreckt sich damit auf beide Bestandteile. Eine Transformation der Größen in das Koordinatensystem der Mittelfläche, wie beispielhaft für

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = E_{ij} (\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{A}_k)(\mathbf{G}^j \cdot \mathbf{A}_l) \mathbf{A}^k \otimes \mathbf{A}^l \quad (3.18)$$

gezeigt, soll vermieden werden, weil hierdurch für allgemeine Schalengeometrien durch die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}^i$  gebrochene rationale Anteile in  $\theta^3$  im Integranden von Gleichung (3.16) entstehen. Dies macht ein Sortieren nach den entsprechenden Potenzen von  $\theta^3$  unmöglich.

Zur Lösung dieses Problems werden die symmetrischen Ersatzgrößen  $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  und  $\hat{\mathbf{S}}$  eingeführt. Als Basen dieser Tensoren dienen die Vektoren der Mittelfläche  $\mathbf{A}_i$  bzw.  $\mathbf{A}^i$ . Die Komponenten dagegen werden direkt von den ursprünglichen Größen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S}$  aus Gleichung (3.17) übernommen.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j \\ \hat{\mathbf{C}} &= C^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l \\ \hat{\mathbf{S}} &= S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

Mit Hilfe der in Gleichung (3.6) gegebenen Beziehungen kann über den Shiftertensor der Zusammenhang zwischen Ersatzgrößen und ursprünglichen Größen hergestellt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{Z}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \iff \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Z}^T \\
 \mathbf{C} &= \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \iff \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \\
 \mathbf{S} &= \mathbf{Z} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Z}^T \iff \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}^{-T}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Durch die Symmetrie der Tensoren  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S}$  sowie die Struktur der Transformation ist automatisch auch die Symmetrie der Ersatzgrößen gegeben. Mit Hilfe der Beziehungen aus Gleichung (3.20) lässt sich zeigen, dass

$$\mathbf{S} : \mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{Z}^T : \mathbf{Z}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{Z}^{-T} = \hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{E}} \tag{3.21}$$

gilt. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Ersatzverzerrungen  $\hat{\mathbf{E}}$  energetisch konjugiert zu den Ersatzspannungen  $\hat{\mathbf{S}}$  sind. Die Beziehung

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{E}} \tag{3.22}$$

kann ebenfalls über die Vorschriften aus Gleichung (3.20) hergeleitet werden. Setzt man die Ergebnisse aus den Gleichungen (3.19), (3.21) und (3.22) in Gleichung (3.16) ein, so erhält man

$$\delta \Pi^{int} = \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} \delta \hat{\mathbf{E}} : \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{E}} Z \, d\theta^3 \, d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} \delta E_{ij} C^{ijkl} E_{kl} Z \, d\theta^3 \, d\Omega^0. \tag{3.23}$$

Führt man nun die Reihendarstellung der Verzerrungskomponenten aus Gleichung (3.15) in Gleichung (3.23) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi^{int} &= \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} \sum_{M=0}^{2\infty} (\theta^3)^M \delta E_{ij}^M C^{ijkl} \sum_{N=0}^{2\infty} (\theta^3)^N E_{kl}^N Z \, d\theta^3 \, d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \sum_{M=0}^{2\infty} \delta E_{ij}^M \sum_{N=0}^{2\infty} \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} (\theta^3)^N Z \, d\theta^3 E_{kl}^N \, d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \sum_{M=0}^{2\infty} \delta E_{ij}^M \underbrace{\sum_{N=0}^{2\infty} D_{M+N}^{ijkl} E_{kl}^N}_{\hat{n}_M^{ij}} \, d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \sum_{M=0}^{2\infty} \delta E_{ij}^M \hat{n}_M^{ij} \, d\Omega^0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mit

$$D_{M+N}^{ijkl} = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^{M+N} C^{ijkl} Z d\theta^3 \quad (3.25)$$

wurde bereits das vorab integrierte und somit nur noch von den beiden in-plane Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  abhängige Materialgesetz einer Schalenformulierung in Gleichung (3.24) eingeführt ( $C^{ijkl}$  siehe Gleichung (2.17)).  $\hat{n}_M^{ij}$  entsprechen den zu  $E_{ij}^M$  energetisch konjugierten Größen und stellen die Komponenten des zweistufigen Tensors

$$\hat{\mathbf{n}}_M = \hat{n}_M^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad (3.26)$$

dar. Die Größen  $\hat{n}_M^{ij}$  sind in der Literatur als Ersatzschnittgrößen oder auch als symmetrische Schnittgrößen bekannt. In der englischsprachigen Literatur, z.B. bei SIMO UND FOX (1989), wird auch die Bezeichnung effektive Schnittgrößen (effective stress resultants) verwendet. Die effektiven Schnittgrößen sind als reine Rechengrößen zu betrachten. Ihr Unterschied zu den Schnittgrößen  $n_M^{ij}$  wird in Abschnitt 3.3 diskutiert.

Die Komponenten  $\hat{n}_M^{ij}$  können alternativ auch durch Integration der Komponenten von  $\hat{\mathbf{S}}$  in Dickenrichtung hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} \hat{n}_M^{ij} &= \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M S^{ij} Z d\theta^3 = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} E_{kl} Z d\theta^3 \\ &= \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} \sum_{N=0}^{2\infty} (\theta^3)^N E_{kl}^N Z d\theta^3 \\ &= \sum_{N=0}^{2\infty} \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^{M+N} C^{ijkl} Z d\theta^3 E_{kl}^N = \sum_{N=0}^{2\infty} D_{M+N}^{ijkl} E_{kl}^N \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Kopplung der effektiven Schnittgrößen  $\hat{n}_M^{ij}$  mit den Verzerrungen  $E_{kl}^N$  über das Materialgesetzes  $D_{M+N}^{ijkl}$  wird in folgender Gleichung in Matrixschreibweise dargestellt:

$$\begin{bmatrix} \hat{n}_0^{ij} \\ \hat{n}_1^{ij} \\ \hat{n}_2^{ij} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & \dots \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & \dots \\ D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & D_4^{ijkl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{kl}^0 \\ E_{kl}^1 \\ E_{kl}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Durch die Vorabintegration in Dickenrichtung wurden die statischen Variablen  $\hat{n}_M^{ij}$  sowie das modifizierte Materialgesetz  $D_{M+N}^{ijkl}$  auf der zuvor definierten Mittelfläche eingeführt, für die keine Abhängigkeiten mehr vom Parameter  $\theta^3$  bestehen. Als kinematische Variablen wurden die Anteile  $E_{kl}^N$  identifiziert, welche ebenfalls ausschließlich von Größen der Mittelfläche abhängen. Für die kinematischen, statischen und konstitutiven Gleichungen ist damit die Dimensionsreduktion von drei ( $\theta^i$ ) auf zwei Parameter ( $\theta^\alpha$ ) abgeschlossen.

### 3.3 Schnittgrößen

In diesem Abschnitt werden zum einen die Schnittgrößen  $n_M^{ij}$  (Schnittgrößentensor  $\mathbf{n}_M$ ) eingeführt und zum anderen deren Unterschied zu den bereits im Abschnitt 3.2 definierten effektiven Schnittgrößen  $\hat{n}_M^{ij}$  (effektiver Schnittgrößentensor  $\hat{\mathbf{n}}_M$ ) dargestellt. Als Einstieg hierfür wird nochmals die Berechnung der effektiven Schnittgrößen aus den Spannungen herangezogen, im Gegensatz zu Gleichung (3.27) jedoch unter Verwendung von Tensornotation.

$$\hat{\mathbf{n}}_M = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \hat{\mathbf{S}} Z \, d\theta^3 = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} Z \, d\theta^3 \quad (3.29)$$

Mit Gleichung (3.29) ist aufgrund der Symmetrie der jeweiligen Integranden automatisch auch die Symmetrie des effektiven Schnittgrößentensors  $\hat{\mathbf{n}}_M$  gezeigt. Da später weitere Spannungsmaße zur Herleitung von Schnittgrößen herangezogen werden, wird die Bezeichnung von  $\hat{\mathbf{n}}_M$  in effektiver PK2-Schnittgrößentensor präzisiert.

Bei der Herleitung der PK2-Schnittgrößen  $n_M^{ij}$  bildet nicht der Spannungstensor, sondern es bilden die jeweiligen Spannungsvektoren  $\mathbf{S}^i$  den Ausgangspunkt der Herleitung. In Abbildung 3.3 sind die drei Schnittflächen  $F_i$  des Schalenraums in der Referenzkonfiguration dargestellt. Dabei wird  $F_1$  durch die Koordinatenlinien  $\theta^2$  und  $\theta^3$ ,  $F_2$  durch  $\theta^1$  und  $\theta^3$  sowie  $F_3$  durch  $\theta^1$  und  $\theta^2$  aufgespannt. Die Normale in jedem Punkt einer

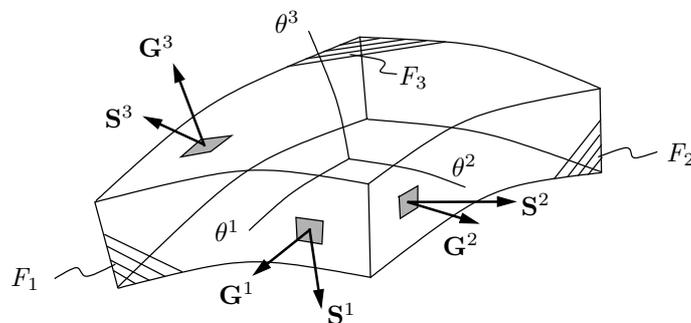


Abbildung 3.3: Spannungsvektoren auf Schnittflächen im Schalenraum.

Schnittfläche  $F_i$  wird vom zugehörigen kontravarianten Basisvektor  $\mathbf{G}^i$  gebildet. Die entsprechenden Spannungsvektoren werden mit  $\mathbf{S}^i$  bezeichnet. Durch Verwendung des Theorems von Cauchy können diese aus dem Spannungstensor  $\mathbf{S}$  unter Zuhilfenahme der jeweiligen Flächennormale als

$$\mathbf{S}^i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{G}^i \quad (3.30)$$

berechnet werden. Die Integration der jeweiligen Spannungsvektoren  $\mathbf{S}^i$  über die Schalendicke ergibt dann die zugehörigen Schnittkraftvektoren  $\mathbf{N}_M^i$ .

$$\mathbf{N}_M^i = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{S}^i Z \, d\theta^3 = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{S} \cdot \mathbf{G}^i Z \, d\theta^3 \quad (3.31)$$

Eine Sonderstellung nimmt der Schnittkraftvektor  $\mathbf{N}_M^3$  ein. Die zugeordnete Schnittfläche  $F_3$  liegt senkrecht zur Integrationsrichtung und somit parallel zur Schalenebene. Die dabei entstehenden Größen sind im Rahmen einer auf eine Fläche reduzierten Theorie keine Schnittgrößen im eigentlichen Sinne, da eine derartige Schnittführung dort gar nicht vorgesehen ist. Im Rahmen von dreidimensionalen Schalentheorien (siehe Kapitel 5) kommt ihnen dennoch eine mechanische Bedeutung zu, wie z.B. in BISCHOFF (1999) gezeigt wird.

Drückt man die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}^i$  in Gleichung (3.31) mit Hilfe der in Gleichung (3.7) angegebenen Beziehungen durch den Shiftertensor und die kontravarianten Basisvektoren der Mittelfläche  $\mathbf{A}^i$  aus, so ergibt sich

$$\mathbf{N}_M^i = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}^{-T} \cdot \mathbf{A}^i Z \, d\theta^3 = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}^{-T} Z \, d\theta^3 \cdot \mathbf{A}^i. \quad (3.32)$$

Die Vektoren  $\mathbf{A}^i$  hängen als Mittelflächengrößen nicht vom Parameter  $\theta^3$  ab und können somit aus dem Integranden herausgezogen werden. Mit Hilfe des Theorems von Cauchy lässt sich das verbleibende Integral als Tensor

$$\mathbf{n}_M = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^M \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}^{-T} Z \, d\theta^3 \quad (3.33)$$

identifizieren. Es handelt sich um den PK2-Schnittgrößentensor  $\mathbf{n}_M$ . Im Unterschied zum effektiven PK2-Schnittgrößentensor  $\hat{\mathbf{n}}_M$  ist dieser im Allgemeinen unsymmetrisch und für die Schnittgrößen  $n_M^{ij}$  ist im Gegensatz zu den effektiven Schnittgrößen  $\hat{n}_M^{ij}$  (siehe Abschnitt 3.2) kein Stoffgesetz definiert.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass für ebene Flächentragwerke, wie z.B. Platten, die Metrik der Mittelfläche der Metrik des Schalenraums entspricht ( $\mathbf{A}_i = \mathbf{G}_i$  bzw.  $\mathbf{A}^i = \mathbf{G}^i$ ). In diesem Fall handelt es sich beim Shiftertensor um den Einheitstensor, wodurch der effektive PK2-Schnittgrößentensor  $\hat{\mathbf{n}}_M$  mit dem PK2-Schnittgrößentensor  $\mathbf{n}_M$

zusammenfällt. Gleichzeitig verschwindet auch der Unterschied zwischen den Ersatzgrößen  $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  bzw.  $\hat{\mathbf{C}}$  und den Größen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}$  bzw.  $\mathbf{C}$ .

Bisher wurden lediglich die PK2-Spannungen herangezogen, um Schnittgrößen herzuleiten. Prinzipiell können jedoch auf der Basis aller Spannungsmaße Schnittgrößen gebildet werden. Der Vollständigkeit halber werden noch die zu den (wahren) Cauchy-Spannungen gehörenden Schnittgrößen angegeben. Die Herleitung erfolgt in exakt der selben Weise wie für die PK2-Schnittgrößen. Es müssen lediglich die Größen der Referenzkonfiguration durch Größen der Momentankonfiguration ersetzt werden. Der Cauchy-Schnittgrößentensor ergibt sich somit zu

$$\check{\mathbf{n}}_M = \int_{-(t/2)}^{t/2} (\theta^3)^M \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{z}^{-T} \mathbf{z} \, d\theta^3. \quad (3.34)$$

Auch beim Cauchy-Schnittgrößentensor  $\check{\mathbf{n}}_M$  handelt es sich um einen im Allgemeinen unsymmetrischen Tensor. Prinzipiell wären auch effektive und damit symmetrische Cauchy-Schnittgrößen denkbar. Diese werden im Zusammenhang mit dimensionsreduzierten Theorien in der Regel aber nicht verwendet und daher nicht explizit angegeben. Als weiterführende Literatur seien HELNWEIN (1996) und BÜCHTER (1992) empfohlen.

### 3.4 Abschließende Diskussion des Herleitungsweges

In diesem Kapitel ist es gelungen, eine Beschreibung des Schalenkontinuums durch Größen der Mittelfläche zu finden, die exakt gleichwertig zur ursprünglichen kontinuumsmechanischen Beschreibung ist. Dem formulierten Ziel, die zu lösenden Gleichungen dadurch zu vereinfachen, ist man jedoch bislang noch nicht nähergekommen. Zwar ist es gelungen, den Parameter  $\theta^3$  aus den involvierten Größen zu eliminieren, im Gegenzug sind aufgrund unendlich vieler Reihenglieder laut Gleichung (3.9) auch unendlich viele statische und kinematische Variablen ( $\hat{n}_M^{ij}$ ,  $E_{kl}^M$ ) und zugehörige Materialgrößen ( $D_M^{ijkl}$ ) entstanden.

Eine Beschränkung auf endlich viele Terme ist somit aus praktischen Gründen unumgänglich. Das Vernachlässigen von Anteilen scheint im ersten Moment ein trivial wirkender Schritt zu sein, dem jedoch weitreichende Bedeutung zukommt. Das kontinuumsmechanische Problem wird im Allgemeinen folglich nicht mehr exakt, sondern in Form einer Näherung beschrieben. Die Qualität dieser Näherung hängt entscheidend davon ab, inwieweit es gelingt diejenigen Terme zu identifizieren, die für das mechanische Verhalten von Schalen maßgeblich sind. Es muss also gewährleistet sein, dass eine „Reduktion auf das Wesentliche“ im mechanischen Sinn stattfindet. Der gerade beschriebene Herleitungsgang für Schalengleichungen wird in der Literatur auch als „Herleitung aus dem Kontinuum“ bezeichnet. Er ist dadurch charakterisiert, dass durch sukzessi-

ves Entfernen von Termen aus der Parametrisierung des dreidimensionalen Kontinuums zwar immer einfacher zu handhabende Gleichungen entstehen, die Näherungen dadurch in der Regel aber auch ungenauer werden. Der Grenzfall ist erreicht, wenn nur noch ein in Dickenrichtung konstanter Anteil verbleibt. Die damit verbundene Theorie ist als Membrantheorie bekannt.

Alternativ können dimensionsreduzierte Gleichungen für eine Schalenformulierung auch ohne den Umweg über das dreidimensionale Kontinuum hergeleitet werden. In diesem Fall bildet ein sogenanntes orientiertes zweidimensionales Kontinuum den Ausgangspunkt der Herleitung. Dieses Kontinuum ist dabei als Fläche im Raum zu sehen, deren Materialpunkte nicht nur mit Translations-, sondern auch mit Rotationsfreiheitsgraden ausgestattet sind. Es wird postuliert, dass aufgebrachte Lasten durch Schnittgrößen (Kräfte und Momente) abgetragen werden. Den Schnittgrößen sind energetisch konjugiert Verzerrungen und Krümmungen zugeordnet, die ebenfalls postuliert werden.

Die Idee Materialpunkte mit zusätzlich Freiheitsgraden zu versehen, geht auf DUHEM (1893) sowie COSSERAT UND COSSERAT (1909) (Cosserat-Kontinuum) zurück. Jedoch erst mit der Veröffentlichung von ERICKSEN UND TRUESDELL (1957), in der auch zum ersten Mal der Begriff „Direktor“ verwendet wird, wurde dieser Ansatz zur Herleitung von Schalentheorien weiterverfolgt. NAGHDI (1972) bezeichnet diese Art der Herleitung von Schalengleichungen auch als „direkte Methode“ (direct approach).

War der Herleitungsgang aus dem dreidimensionalen Kontinuum stark von den zwingend notwendigen Näherungen geprägt, so kommt die direkte Methode zunächst völlig ohne Approximationen aus. Die postulierten Größen sind als exakt zu betrachten. Schalentheorien auf Grundlage der direkten Methode werden oft als geometrisch exakte Schalentheorien bezeichnet, z.B. bei SIMO UND FOX (1989).

Der Begriff „exakt“ suggeriert im ersten Moment, dass eine solche Schalentheorie womöglich exakte Ergebnisse liefert, was aber aus folgendem Grund nicht der Fall ist: Bisher wurde diese Theorie ohne jeglichen Bezug zur physikalischen Realität, also dem dreidimensionalen Kontinuum, postuliert. Nur über ein entsprechend definiertes Stoffgesetz kann die fehlende Verbindung zwischen Realität und Theorie hergestellt werden. Die Materialgleichungen werden jedoch ebenfalls postuliert und müssen so angepasst werden, dass die Theorie das reale Verhalten möglichst gut abbildet. An dieser Stelle fließen daher Näherungen in das bisher exakte Modell ein. Somit ist der approximative Charakter, der bei der Herleitung aus dem dreidimensionalen Kontinuum allgegenwärtig ist, bei der direkten Methode auf das Stoffgesetz konzentriert. Es sei angemerkt, dass bei entsprechender Wahl des Stoffgesetzes beide Herleitungswege zu identischen Schalentheorien führen.

War die Herleitung aus dem Kontinuum dadurch geprägt, dass durch das Herausstreichen immer weiterer Terme die Kinematik des Schalenkörpers vereinfacht wurde, so erfolgt bei der direkten Methode das Vorgehen in umgekehrter Richtung. Eine Betrachtung

tung des gerichteten zweidimensionalen Kontinuums ohne die Rotationen führt zunächst auf die Membrantheorie. Durch anschließendes Hinzufügen der Rotationen für jeden Materialpunkt entstehen Schalentheorien. Wird das klassische Cosserat-Kontinuum auf ein sogenanntes Multidirektor-Cosserat-Kontinuum erweitert, bekommt also jeder Materialpunkt weitere unabhängige Freiheitsgrade, so können Schalentheorien höherer Ordnung hergeleitet werden. Bei unendlich vielen zusätzlichen Freiheitsgraden kann eine der Kontinuumsmechanik äquivalente Beschreibung gefunden werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird stets die Herleitung aus dem dreidimensionalen Kontinuum verwendet. Approximationsstufen unterschiedlichen Grades werden in den folgenden beiden Kapiteln eingeführt und beurteilt.



# 4

---

## Modellannahmen bei klassischen Schalentheorien

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass mit Hilfe der Dimensionsreduktion zwar der Parameter  $\theta^3$  eliminiert werden kann, dies jedoch nicht automatisch zu einfacheren Gleichungen führt. Die Notwendigkeit, bei der Beschreibung des Schalenkontinuums Näherungen beispielsweise bei der Kinematik in Kauf nehmen zu müssen, wurde dabei deutlich.

Die klassischen Schalentheorien wurden in Zeiten entwickelt (LOVE (1888) bis ca. NAGHDI (1972)), in denen effektive numerische Lösungsverfahren, wie z.B. die Methode der finiten Elemente, noch nicht existierten oder sich noch im Entwicklungsstadium befanden. Man war darauf angewiesen, auftretende Gleichungen mit analytischen Verfahren oder numerischen Verfahren (z.B. Ritz'sches Verfahren) auf Schalen mit spezieller Geometrie zu lösen. Dieser Umstand führte dazu, dass viele Annahmen in klassischen Schalentheorien nicht ausschließlich mechanisch motiviert, sondern oft der Lösbarkeit geschuldet waren. Grundsätzlich galt, dass die Lösungen genäherter Gleichungen für die praktische Anwendung von größerem Nutzen waren als exakte Gleichungen, für die eine Lösung mit den damals verfügbaren Hilfsmitteln nicht ermittelt werden konnte. Die getroffenen Annahmen und Näherungen unterlagen aus heutiger Sicht kaum einer Systematik und waren daher Ausgangspunkt unzähliger akademischer Dispute. Erst in den 1960er Jahren wurden unter anderem mit Arbeiten von Koiter und Naghdi (für eine Übersicht siehe z.B. NAGHDI (1972)) die Grundlagen für eine systematische Herleitung von Schalentheorien gelegt.

Im Rahmen dieses Kapitels werden zunächst Kriterien angegeben, die im Rahmen einer Approximation des Kontinuums durch eine Schalentheorie erfüllt werden sollten. Daran

anschließend werden auf der Basis von Kapitel 3 konsistente Schalengleichungen hergeleitet. Es folgt die Vorstellung und Diskussion unterschiedlicher, teilweise als historisch einzustufender Schalentheorien, deren Qualität anhand numerischer Beispiele verglichen wird. Vor dem Hintergrund der Methode der finiten Elemente beschränken sich die Darstellungen und Untersuchungen auf die kinematischen und konstitutiven Gleichungen. Gleichgewichtsgleichungen werden nicht näher betrachtet.

### 4.1 Kriterien für eine optimale Approximation

Erste Kriterien, anhand derer Schalentheorien beurteilt werden können bzw. die bei der Entwicklung neuer Theorien unbedingt zu beachten sind, wurden von NAGHDI (1963a) aufgestellt. Sie waren zum einen dadurch motiviert, dass die Ergebnisse verschiedener Theorien für ein und dieselbe Problemstellung teilweise stark voneinander abwichen und zum anderen stets die Frage im Raum stand, ob eine „beste“ Schalentheorie existiert. Die von NAGHDI (1963a) gestellte Forderung nach Invarianz unter Koordinatentransformationen und Starrkörperverschiebungen war stets unumstritten. Weitere in NAGHDI (1963a) angeführte Kriterien, wie z.B. das Erfüllen aller Gleichgewichtsbedingungen oder von Energieprinzipien, stellen laut KRÄTZIG (1973) eine willkürliche Auswahl von Forderungen dar, die auch in der Kontinuumsmechanik so formuliert werden. Laut HARNACH (1974) wurde bereits von DUDDECK (1967) darauf hingewiesen, dass die Kriterien in NAGHDI (1963a) nicht ausreichend sind, um eine eindeutige Schalenformulierung aufzustellen. Sie wurden daher von KRÄTZIG (1973) wie folgt präzisiert und erweitert:

- 1) Invarianz unter Koordinatentransformationen
- 2) Invarianz gegenüber (Dynamik: unbeschleunigte) Starrkörpertranslationen und -rotationen
- 3) Gleichmäßige Approximation aller Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, d.h. der
  - a) Erhaltung der Energie
  - b) Erhaltung der Masse
  - c) Entropieproduktion
  - d) Bewegungsgleichungen
  - e) Symmetriebedingungen (Boltzmann'sches Axiom).

Die ersten beiden Forderungen wurden in präzisierter Form aus NAGHDI (1963a) übernommen. Die restlichen Forderungen sind in einem zusätzlichen dritten Punkt zusammengefasst, der die gleichmäßige Approximation aller Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik fordert.

Eine gleichmäßige Approximation aller Grundgleichungen muss im Hinblick auf die Approximationsgüte einer Schalenformulierung als besonders vorteilhaft erachtet werden,

da diejenige Grundgleichung mit dem größten Fehler (oft auch als Unschärfe bezeichnet) die Approximationsgüte der gesamten Formulierung bestimmt (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985). Grundgleichungen, die einen geringeren Fehler aufweisen, tragen somit im Allgemeinen nicht zur Steigerung der Genauigkeit bei. Falls es die Forderungen 1) und 2) zulassen, wäre eine gröbere Approximation dieser einen Gleichung, beispielsweise durch Streichung weiterer Terme, zulässig. Wenn umgekehrt die Approximationsgüte einer Schalenformulierung durch den Fehler einer einzigen Grundgleichung dominiert wird, kann durch eine genauere Näherung dieser Gleichung die Qualität der Formulierung als Ganzes gesteigert werden. Schalentheorien, deren Grundgleichungen dieselbe obere Fehlerschranke aufweisen, müssen mechanisch als gleichwertig betrachtet werden (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985). Formulierungen, welche die Kriterien von KRÄTZIG (1973) erfüllen, erreichen somit eine optimale Balance zwischen Genauigkeit und Aufwand und werden deshalb auch als „bestmögliche“ Schalentheorien bezeichnet. Die Bezeichnung „bestmöglich“ (englisch: „best“) geht auf BUDIANSKY UND SANDERS (1963) zurück, sie wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch im Sinne von KRÄTZIG (1973) verwendet. Der Fehler bzw. der Grad der Unschärfe, der durch entsprechende Annahmen und Vereinfachungen im Vergleich zur dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Lösung entsteht, wird unter anderem über den Schalenparameter  $\lambda_S$  abgeschätzt (siehe beispielsweise Gleichung (4.10)). Bei  $\lambda_S$  handelt es sich um einen Geometrieparameter, der über

$$\lambda_S = \frac{T}{L} \ll 1 \quad \text{mit} \quad L = \min \{R_{\min}, L_{\min}\} \quad (4.1)$$

definiert ist. Die Größen  $R_{\min}$  und  $L_{\min}$  stellen den kleinsten Hauptkrümmungsradius bzw. die kleinste typische Mittelflächenabmessung dar (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985). Bei dünnen bzw. flachen Tragwerksgeometrien mit sehr kleinem  $\lambda_S$  können besonders gute Näherungen durch eine Schalenformulierung erwartet werden. Bei dicken bzw. stark gekrümmten Schalenstrukturen treten hingegen größere Unschärfen auf. Schalentheorien, welche mit gegen Null strebender Schalendicke ( $T \rightarrow 0$ ) exakt zur dreidimensionalen Kontinuumslösung konvergieren, werden als asymptotisch korrekt bezeichnet (CIARLET 2000).

## 4.2 Herleitung konsistenter Schalengleichungen

### 4.2.1 Approximation der Kinematik

In den klassischen Schalentheorien wird ein über die Dicke linear veränderliches Verschiebungsfeld als ausreichend genau angesehen. Diese im ersten Moment sehr hart wirkende Annahme ist jedoch ein guter Kompromiss zwischen Vereinfachung und Genauigkeit.

Mechanisch bedeutet dies, dass die in Kapitel 3 eingeführte Reihendarstellung des Ortsvektors sowohl in der Referenz- als auch der Momentankonfiguration nach dem linear in  $\theta^3$  verlaufenden Glied abgebrochen wird.

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^0 + \theta^3 \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} + \theta^3 \mathbf{A}_3 \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}^0 + \theta^3 \mathbf{r}^1 = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad (4.2)$$

Das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 + \theta^3 \mathbf{v}^1 = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{v}^1 \quad (4.3)$$

ist damit ebenfalls als linear über die Dicke verlaufend festgelegt. Die Basisvektoren des Schalenraums in beiden Konfigurationen ergeben sich folglich zu

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 \quad (4.4)$$

und

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3. \quad (4.5)$$

Wie in den Gleichungen (3.14) und (3.15) bereits dargestellt, ist die in den Verzerrungen auftretende höchste Potenz von  $\theta^3$  doppelt so groß wie diejenige der Ortsvektoren bzw. des Verschiebungsfeldes. Somit können in den einzelnen Verzerrungskomponenten konstante, lineare und quadratische Anteile auftreten. In Gleichung (4.6) sind die Verzerrungsanteile in der Schalenebene darstellt.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta]}_{E_{\alpha\beta}^0} \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}]}_{E_{\alpha\beta}^1} \theta^3 \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta}]}_{E_{\alpha\beta}^2} (\theta^3)^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Verzerrungsanteile senkrecht zur Schalenebene sind in den Gleichungen (4.7) und (4.8) angegeben.

$$E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_3]}_{E_{\alpha 3}^0} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3]}_{E_{\alpha 3}^1} \theta^3 \quad (4.7)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3]}_{E_{33}^0} \quad (4.8)$$

Bei der Herleitung von klassischen Schalentheorien, aber auch bei einigen dreidimensionalen Schalentheorien, wie z.B. der in BISCHOFF (1999) beschriebenen 7-Parameter-Theorie, werden die quadratischen Anteile  $E_{kl}^2$  der Verzerrungen und die dazu konjugierten Schnittgrößen  $\hat{n}_2^{ij}$  im Vergleich zu den konstanten und linearen Anteilen als klein betrachtet und daher vernachlässigt. Aus Gründen der Konsistenz entfallen auch die entsprechenden Anteile im Konstitutivgesetz. Gleichung (3.28) vereinfacht sich somit zu

$$\begin{bmatrix} \hat{n}_0^{ij} \\ \hat{n}_1^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{kl}^0 \\ E_{kl}^1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Laut BÜCHTER (1992) liegt der durch diese Vereinfachung in den Green-Lagrange-Verzerrungen begangene relative Fehler in der Größenordnung

$$\max \left\{ \frac{T}{2R_{\min}}, \frac{(1 + 2\eta_E)}{2} \left[ \frac{t}{r_{\min}} + \left( \frac{t}{r_{\min}} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.10)$$

unter der Voraussetzung, dass die Gradienten der Querschubverzerrungen  $E_{\alpha 3}$  und der Dickenänderung klein sind. Bei  $R_{\min}$  bzw.  $r_{\min}$  handelt es sich um den kleineren der beiden Hauptkrümmungsradien der Referenz- bzw. Momentankonfiguration. Die Größe  $\eta_E$  stellt die Spektralnorm des Green-Lagrange-Verzerrungstensors dar und  $T$  bzw.  $t$  bezeichnen die Schalendicke in Referenz- bzw. Momentankonfiguration.

Bei sehr dünnen Schalen ist abgesehen von Randbereichen und Stellen konzentrierter Lasteinleitung davon auszugehen, dass Effekte aus Dickenänderung von untergeordneter Bedeutung sind und vernachlässigt werden dürfen. Änderungen der Schalendicke werden in den kinematischen Gleichungen dadurch unterdrückt, dass der Direktor  $\mathbf{A}_3$  als nicht dehnbar angenommen wird. Somit gilt

$$\|\mathbf{A}_3\| = \|\mathbf{a}_3\| = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1. \quad (4.11)$$

Die Normalverzerrung in Dickenrichtung  $E_{33}$  ergibt sich nach Gleichung (4.8) damit automatisch zu Null. Da aus Gleichung (4.11) zusätzlich

$$\mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad (4.12)$$

folgt, verschwinden in Gleichung (4.7) auch die linearen Anteile  $E_{\alpha 3}^1$  der Verzerrungen  $E_{\alpha 3}$ . Die vereinfachten kinematischen Gleichungen sind im Folgenden angegeben.

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta]}_{E_{\alpha\beta}^0} \\
 &+ \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}]}_{E_{\alpha\beta}^1} \theta^3
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3]}_{E_{\alpha 3}^0} \tag{4.14}$$

$$E_{33} = 0 \tag{4.15}$$

Die Gleichungen (4.13) bis (4.15) stellen die kinematischen Gleichungen einer „bestmöglichen“ schubweichen Schalentheorie erster Ordnung dar. Schubweiche Schalentheorien sind oft auch unter dem Namen Reissner-Mindlin- oder 5-Parameter-Schalentheorien bekannt. Die Bezeichnung 5-Parameter Theorie resultiert aus der Annahme eines undehnbaren Direktors, wodurch die ursprünglich vorhandenen sechs Parameter (Freiheitsgrade) pro Materialpunkt der Mittelfläche auf fünf reduziert werden.

### 4.2.2 Modifikationen und Annahmen im Stoffgesetz

Durch die Modifikation der Kinematik wurde im vorangegangenen Abschnitt die Dickenänderung und damit automatisch auch die Normalverzerrung  $E_{33}$  unterdrückt. Aufgrund von Kopplungstermen im Stoffgesetz bedeutet dies jedoch nicht, dass zugleich auch die Normalspannungen in Dickenrichtung  $S_{33}$  verschwinden. Ein solcher Verzerrungs- bzw. Spannungszustand wird sich in einem realen Schalentragswerk und damit auch in der exakten kontinuumsmechanischen Lösung jedoch nicht einstellen, da die obere und untere Schalenlaibungen unbehinderte Ränder darstellen. Die kinematischen Gleichungen (4.13) bis (4.15) würden in Kombination mit dem Stoffgesetz aus Gleichung (4.9) somit zu einer Schalenformulierung führen, deren Ergebnisse auch für den Grenzwert  $T \rightarrow 0$  von der exakten Lösung abweichen würden. Die entstehende Formulierung wäre somit nicht asymptotisch korrekt.

Um die Annahme  $S_{33} = 0$  korrekt abbilden zu können und damit gleichzeitig auch die asymptotische Korrektheit zu gewährleisten, muss das Stoffgesetz aus Gleichung (4.9) modifiziert werden.

Den Ausgangspunkt hierfür stellt die Verzerrungsenergiedichte  $W^{int}$  des dreidimensionalen Kontinuums dar.

$$2 W^{int} = \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} = C^{ijkl} E_{ij} E_{kl} \tag{4.16}$$

Spaltet man die Komponenten aus Gleichung (4.16) in Anteile der Schalenebene und senkrecht dazu auf, so ergibt sich unter Berücksichtigung von  $C^{\alpha 333} = 0$  sowie der Symmetrien im Materialtensor

$$2 W^{int} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + 2 C^{\alpha\beta 33} E_{\alpha\beta} E_{33} + C^{3333} E_{33} E_{33} + 4 C^{\alpha 3\gamma 3} E_{\alpha 3} E_{\gamma 3}. \quad (4.17)$$

Da die Komponente  $G^{33}$  des Metriktensors grundsätzlich den Wert Eins annimmt (siehe Gleichung (3.5)), können folgende Komponenten des Materialtensors direkt angegeben werden:

$$C^{33\gamma\delta} = \lambda G^{\gamma\delta} \quad C^{3333} = \lambda + 2\mu \quad C^{\alpha 3\gamma 3} = \mu G^{\alpha\gamma}. \quad (4.18)$$

Aus der Bedingung  $S^{33} = 0$  folgt für  $E_{33}$  unter Beachtung obiger Gleichungen

$$S^{33} = C^{33kl} E_{kl} = C^{33\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + C^{3333} E_{33} = 0 \implies E_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} G^{\gamma\delta} E_{\gamma\delta}. \quad (4.19)$$

Setzt man die Erkenntnisse aus den Gleichungen (4.18) und (4.19) in Gleichung (4.17) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$2 W^{int} = \left[ \bar{\lambda} G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} + \mu (G^{\alpha\gamma} G^{\beta\delta} + G^{\alpha\delta} G^{\beta\gamma}) \right] E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + 4 \mu G^{\alpha\gamma} E_{\alpha 3} E_{\gamma 3} \quad (4.20)$$

mit  $\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}$ .

Werden die Indexkombinationen  $i=j=3$  bzw.  $k=l=3$  ausgeschlossen, so lässt sich Gleichung (4.20) in

$$2 W^{int} = \underbrace{\left[ \bar{\lambda} G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}) \right]}_{\bar{C}^{ijkl}} E_{ij} E_{kl} \quad (4.21)$$

umschreiben. Mit  $\bar{C}^{ijkl}$  sind somit die Komponenten des modifizierte Materialtensors

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \bar{C}^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \\ &= \left[ \bar{\lambda} G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}) \right] \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \end{aligned} \quad (4.22)$$

gegeben.

Im nächsten Schritt wird die Vorabintegration des Stoffgesetzes aus Gleichung (3.25) näher betrachtet. Hierfür werden zunächst in Gleichung (3.25) die Komponenten  $C^{ijkl}$  des Materialtensors  $\mathbf{C}$  durch die Komponenten  $\bar{C}^{ijkl}$  des modifizierte Materialtensors  $\bar{\mathbf{C}}$  aus Gleichung (4.22) ersetzt.

$$\bar{D}_K^{ijkl} = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^K \bar{C}^{ijkl} Z \, d\theta^3 \quad (4.23)$$

Die Integration selbst kann formal entsprechend Gleichung (4.23) angegeben werden, eine analytische Berechnung des Integrals ist jedoch für den allgemeinen Fall nicht möglich. Der Grund hierfür liegt in den von  $\theta^3$  abhängigen Größen  $\bar{C}^{ijkl}$  und  $Z$  im Integranden von Gleichung (4.23). Die Komponenten  $\bar{C}^{ijkl}$  setzen sich laut Gleichung (4.22) aus den für allgemeine Geometrien in  $\theta^3$  gebrochen rationalen kontravarianten Metrikkomponenten  $G^{ij}$  und den Materialparametern  $\bar{\lambda}$  und  $\mu$  zusammen. Bei der Determinante  $Z$  des Shiftertensors (siehe Gleichung (3.8)) handelt es sich um eine in  $\theta^3$  maximal quadratische Funktion.

Der gebrochen rationale Charakter des Integranden aus Gleichung (4.23) macht die Bestimmung einer allgemeinen Stammfunktion praktisch unmöglich. Um die Integration trotzdem analytisch durchführen zu können, werden für das Materialgesetz die Näherungen

$$G^{ij} \approx A^{ij} \quad \text{und} \quad Z \approx 1 \quad (4.24)$$

eingeführt, welche jeweils dem ersten, also konstanten Glied einer Reihendarstellung von  $G^{ij}$  und  $Z$  in Monomen von  $\theta^3$  entsprechen. Diese Näherung geht auf KOITER (1960) und NAGHDI (1964) zurück und ist unter dem Namen „erste Approximation der Schalentheorie“ bekannt. Die Bezeichnung „erste Approximation“ findet sich allerdings schon bei LOVE (1888).

Die dadurch entstehenden Komponenten des Materialtensors

$$\bar{\bar{C}}^{ijkl} = \bar{\lambda} A^{ij} A^{kl} + \mu [A^{ik} A^{jl} + A^{il} A^{kj}] \approx \bar{C}^{ijkl} \quad (4.25)$$

sind somit unabhängig von  $\theta^3$  und können aus dem Integral herausgezogen werden,

$$\bar{\bar{D}}_K^{ijkl} = \int_{-(T/2)}^{T/2} (\theta^3)^K \, d\theta^3 \, \bar{\bar{C}}^{ijkl} \quad (4.26)$$

wodurch die Anteile des vorab integrierte Materialgesetzes  $\bar{\bar{D}}^{ijkl}$  wie folgt lauten:

$$\bar{\bar{D}}_0^{ijkl} = T \bar{\bar{C}}^{ijkl}, \quad \bar{\bar{D}}_1^{ijkl} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\bar{D}}_2^{ijkl} = \frac{T^3}{12} \bar{\bar{C}}^{ijkl}. \quad (4.27)$$

Die in Gleichung (4.9) gegebenen konstitutiven Gleichungen vereinfachen sich hierdurch erheblich. Aufgrund von  $\bar{\bar{D}}_1^{ijkl} = 0$  sind die konstanten und linearen Anteile  $\hat{n}_0^{ij}$  und  $\hat{n}_1^{ij}$  der statischen Variablen nun voneinander entkoppelt. Mit  $E_{\beta 3}^1 = 0$  (siehe Abschnitt 4.2.1) folgt außerdem

$$\hat{n}_1^{\alpha 3} = \bar{\bar{D}}_2^{\alpha 3 kl} E_{kl}^1 = \bar{\bar{D}}_2^{\alpha 3 \beta 3} E_{\beta 3}^1 + \bar{\bar{D}}_2^{\alpha 33 \beta} E_{3 \beta}^1 = 2 \bar{\bar{D}}_2^{\alpha 3 \beta 3} E_{\beta 3}^1 = 0. \quad (4.28)$$

Berücksichtigt man in Gleichung (4.9) die Modifikation des Stoffgesetzes sowie alle weiteren Annahmen und Vereinfachungen dieses Abschnitts, so erhält man mit Gleichung (4.29) die folgenden in Voigt-Notation dargestellten Materialgleichungen einer 5-Parameter-Schalentheorie.

$$\begin{bmatrix} \hat{n}_0^{11} \\ \hat{n}_0^{12} \\ \hat{n}_0^{22} \\ \hat{n}_0^{13} \\ \hat{n}_0^{23} \\ \hat{n}_1^{11} \\ \hat{n}_1^{12} \\ \hat{n}_1^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{D}}_0^{1111} & \bar{\bar{D}}_0^{1112} & \bar{\bar{D}}_0^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\bar{D}}_0^{1211} & \bar{\bar{D}}_0^{1212} & \bar{\bar{D}}_0^{1222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\bar{D}}_0^{2211} & \bar{\bar{D}}_0^{2212} & \bar{\bar{D}}_0^{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_0^{1313} & \bar{\bar{D}}_0^{1323} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_0^{2313} & \bar{\bar{D}}_0^{2323} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2^{1111} & \bar{\bar{D}}_2^{1112} & \bar{\bar{D}}_2^{1122} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2^{1211} & \bar{\bar{D}}_2^{1212} & \bar{\bar{D}}_2^{1222} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2^{2211} & \bar{\bar{D}}_2^{2212} & \bar{\bar{D}}_2^{2222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11}^0 \\ 2 E_{12}^0 \\ E_{22}^0 \\ 2 E_{13}^0 \\ 2 E_{23}^0 \\ E_{11}^1 \\ 2 E_{12}^1 \\ E_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Im Folgenden werden die in Gleichung (4.29) verwendeten Bezeichnungen umbenannt bzw. im Stoffgesetz einige Terme so umgeformt, dass eine für klassische Schalentheorien geläufigere Form entsteht.

Hierfür werden die Membrankräfte  $\hat{n}_0^{\alpha\beta}$  mit  $\hat{n}^{\alpha\beta}$ , die Querkräfte  $\hat{n}_0^{\alpha 3}$  mit  $q^\alpha$  und die Biegemomente  $\hat{n}_1^{\alpha\beta}$  mit  $\hat{m}^{\alpha\beta}$  bezeichnet. Bei den Verzerrungsgrößen werden für die Membranverzerrungen  $E_{\alpha\beta}^0$  die Bezeichnung  $\alpha_{\alpha\beta}$  und für die Krümmungen  $E_{\alpha\beta}^1$  die Bezeichnung  $\beta_{\alpha\beta}$  eingeführt. Anstatt der Querschubverzerrungen  $E_{\alpha 3}^0$  wird der Schubwinkel  $\gamma_\alpha = 2 E_{\alpha 3}^0$  verwendet.

Werden im Stoffgesetz (siehe Gleichung (4.25)) die Materialkonstanten  $\bar{\lambda}$  und  $\mu$  durch die Parameter  $E$  und  $\nu$  ausgedrückt, so ergibt sich nach Umformung

$$\bar{\bar{C}}^{ijkl} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \nu A^{ij} A^{kl} + \frac{1}{2} (1 - \nu) (A^{ik} A^{jl} + A^{il} A^{kj}) \right] = \frac{E}{1 - \nu^2} H^{ijkl}. \quad (4.30)$$

Berücksichtigt man die Ergebnisse aus Gleichung (4.27), kann mit

$$D = \frac{ET}{1 - \nu^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{ET^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.31)$$

die Membran- bzw. Biegesteifigkeit eingeführt werden. Der Ausdruck

$$GT = \frac{ET}{2(1 + \nu)} \quad (4.32)$$

definiert zusätzlich die Schubsteifigkeit, wodurch schließlich die konstitutiven Gleichungen einer „bestmöglichen“ schubweichen Schalentheorie in der Form

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta}, \quad (4.33)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad \text{und} \quad (4.34)$$

$$q^\alpha = GT A^{\alpha\beta} \gamma_\beta \quad (4.35)$$

dargestellt werden können. Mit Blick auf die Schubsteifigkeit  $GT$  sei abschließend noch angemerkt, dass diese in der Regel mit dem Schubkorrekturfaktor  $5/6$  abgemindert wird. Hierdurch kann das zu steife Verhalten des Schalenmodells, welches auf den unrealistischen Verlauf der Querschubspannungen über die Schalendicke (konstant anstatt quadratisch) zurückzuführen ist, kompensiert werden.

### 4.2.3 Weiterführende Annahmen und Vereinfachungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden ausgehend vom dreidimensionalen Kontinuum die kinematischen und konstitutiven Gleichungen einer „bestmöglichen“ schubweichen Schalentheorie hergeleitet. Die Form der beiden Gleichungssätze erlaubt es nun ohne größeren Aufwand zusätzliche Modellannahmen einzuführen.

#### 3-Parameter Schalentheorie

Bei der 3-Parameter-Schalentheorie, auch schubstarre Schalentheorie oder Schalentheorie vom Kirchhoff-Love-Typ genannt, wird im Vergleich zur 5-Parameter-Theorie zusätzlich davon ausgegangen, dass der Direktor auch in der Momentankonfiguration senkrecht auf der Mittelfläche steht. Hieraus folgt unmittelbar

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0. \quad (4.36)$$

Die kinematischen Gleichungen (4.13) bis (4.15) vereinfachen sich dadurch zu

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta]}_{\alpha_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}]}_{\beta_{\alpha\beta}} \theta^3 \quad (4.37)$$

$$E_{\alpha 3} = 0 \quad (4.38)$$

$$E_{33} = 0. \quad (4.39)$$

Durch diese Zwangsbedingung verschwinden die Querschubverzerrungen  $E_{\alpha 3}$  und somit auch die Schubwinkel  $\gamma_\alpha$ . Aufgrund der vollständigen Entkopplung des Querschubs von den Verzerrungen  $\alpha_{\alpha\beta}$  und den Krümmungen  $\beta_{\alpha\beta}$  in Gleichung 4.35 lauten die konstitutiven Gleichungen einer 3-Parameter-Schalenformulierung

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad \text{und} \quad (4.40)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta}. \quad (4.41)$$

Die Gleichungen (4.37) bis (4.41) stellen die kinematischen und konstitutiven Gleichungen einer bestmöglichen schubstarrten Schalentheorie dar. Wird Gleichung (4.37) noch linearisiert, so entsteht der in NAGHDI (1963b) gegebene Gleichungssatz. Die dort beschriebene Schalentheorie gilt als erste korrekt formulierte Schalentheorie des Kirchhoff-Love-Typs (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985).

## Membrantheorie

Als weitreichendste Approximation eines flächenhaften dreidimensionalen Kontinuums kann die Membrantheorie gesehen werden. Wie der Name impliziert, werden lediglich die Membrananteile berücksichtigt und die Biegeanteile dagegen vollständig vernachlässigt. Die kinematischen Gleichungen lauten somit

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta]}_{\alpha_{\alpha\beta}} \quad (4.42)$$

$$E_{\alpha 3} = 0 \quad (4.43)$$

$$E_{33} = 0. \quad (4.44)$$

Die selben Gleichungen wären auch entstanden, wenn von Beginn an eine über die Dicke des dreidimensionalen Kontinuums konstante Kinematik gewählt, d.h. die Reihendarstellung aus Gleichung (3.9) bereits nach dem konstanten Glied abgebrochen worden wäre. Da zwischen den Membran- und Biegeanteilen im Materialgesetz keine Kopplungen bestehen (siehe Gleichungen (4.40) und (4.41)), lautet die zugehörige konstitutive Gleichung

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta}. \quad (4.45)$$

### 4.3 Diskussion bekannter Schalengleichungen

Studiert man allgemeine Schalentheorien in der Literatur, so fällt auf, dass es sich bis in die 1960er Jahre dabei fast ausschließlich um lineare Theorien des Kirchhoff-Love-Typs handelt. Vergleicht man deren Gleichungen, so zeigt sich, dass die Unterschiede nicht nur anhand einzelner Terme festzumachen sind, sondern oft völlig unterschiedliche Sätze von statischen und kinematischen Variablen verwendet werden.

Mit Blick auf die Frage nach der „besten“ Schalentheorie war diese Tatsache damals Ausgangspunkt vieler Diskussionen und Dispute. Heute ist jedoch klar, dass bei geometrisch linearen Theorien jede Linearkombination der statischen bzw. geometrischen Variablen als neuer Satz innerer Größen aufgefasst werden kann, solange sich der Wert der virtuellen inneren Arbeit dadurch nicht ändert (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985). Bereits von NAGHDI (1972) wurde die mechanische Äquivalenz unterschiedlicher Formulierungen erkannt. Vor diesem Hintergrund stuft er die Bezeichnung „the best first order linear shell theory“, die BUDIANSKY UND SANDERS (1963) für ihre aus heutiger Sicht ebenfalls „bestmögliche“ Schalenformulierung gewählt haben, zurecht als irreführend ein.

Die „bestmögliche“ Theorie lässt sich für eine geometrisch lineare Kinematik folglich in unendlich vielen Formulierungsvarianten realisieren. Welche dieser Varianten der Anwender als für ihn am vorteilhaftesten betrachtet, hängt, wie schon von NAGHDI (1972) treffend bemerkt, von der Gewohnheit des Anwenders und der Problemstellung ab.

Im Folgenden werden zunächst die kinematischen und konstitutiven Gleichungen von zwei Varianten der „bestmöglichen“ schubstarren Schalentheorie (geometrisch linearer Fall) vorgestellt. Bei der ersten Variante handelt es sich um die von NAGHDI (1963b) eingeführte Formulierung. Die zweite Variante ist aus BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) entnommen. Ihre Struktur geht laut BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) auf SANDERS (1959) zurück, wurde jedoch erstmals in HARNACH (1974) vollständig richtig formuliert.

Diese beiden Formulierungsvarianten wurden gewählt, da sie den selben Satz innerer Größen wie die Theorie flacher Schalen, die Schalentheorie nach Love sowie Koiter verwenden, welche im Anschluss diskutiert und anhand numerischer Beispiele verglichen

werden. Die jeweiligen Gleichungen werden entsprechend der im Rahmen klassischer Schalentheorien üblichen Schreibweise dargestellt. Dabei verwendete Größen und Definitionen sind nachfolgend kurz angegeben. Für eine detaillierte Herleitung sei auf BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) verwiesen.

Die kinematischen Gleichungen werden in Abhängigkeit von der Mittelflächenverschiebung

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{A}^\alpha + v_3 \mathbf{A}^3 \quad (4.46)$$

und der lokalen konvektiven Basis  $\mathbf{A}^i$  ausgedrückt. Die kovarianten bzw. gemischtvarianten Komponenten des Krümmungstensors sind über

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}) \quad \text{bzw.} \quad B^\alpha_\beta = B_{\beta\gamma} A^{\gamma\alpha} \quad (4.47)$$

gegeben.  $A^{\gamma\alpha}$  stellt darin die kontravarianten Metrikkomponenten nach Gleichung (3.4) dar. Das Christoffelsymbol  $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$  ist über

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}^\lambda \quad (4.48)$$

definiert und wird in Gleichung (4.49) für die einfache kovariante Ableitung von  $v_\alpha$  bzw. die zweifache kovariante Ableitung von  $v_3$  verwendet.

$$v_\alpha|_\beta = v_{\alpha,\beta} - v_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \quad \text{bzw.} \quad v_3|_{\alpha\beta} = v_{3,\alpha\beta} - v_{3,\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \quad (4.49)$$

Die kovariante Ableitung der gemischtvarianten Komponenten des Krümmungstensors ist mit

$$B^\alpha_{\beta\gamma}|_\lambda = B^\alpha_{\beta,\gamma} - B^\lambda_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} - B^\alpha_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \quad (4.50)$$

gegeben.

### 4.3.1 Zwei „bestmögliche“ Formulierungsvarianten

Wird die in Gleichung (4.37) gegebene Kinematik linearisiert und mit Hilfe der in den Gleichungen (4.46) bis (4.50) definierten Größen umgeformt, ergeben sich die in Abbildung 4.1 dargestellten Gleichungen (4.51) und (4.52). Sie wurden zusammen mit den konstitutiven Gleichungen (4.53) und (4.54) erstmals in NAGHDI (1963b) angegeben und sind Bestandteil der ersten korrekten Formulierung einer „bestmöglichen“ schubstarrten Schalentheorie.

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2B_{\alpha\beta} v_3) \quad (4.51)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -v_3|_{\alpha\beta} - B^\gamma_\alpha|_\beta v_\gamma - B^\gamma_\alpha v_\gamma|_\beta - B^\gamma_\beta v_\gamma|_\alpha + B^\gamma_\alpha B_{\gamma\beta} v_3 \quad (4.52)$$

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad (4.53)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad (4.54)$$

**Abbildung 4.1:** Kinematische und konstitutive Gleichungen nach NAGHDI (1963b).

In Abbildung 4.2 ist ein alternativer Satz von konstitutiven und kinematischen Gleichungen nach BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) angegeben und wird wie dort im Folgenden als Variante C bezeichnet. Die Umformungen, mit welchen die Gleichungen von Abbildung 4.1 in jene von Abbildung 4.2 überführt werden können, sind im Detail in BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) zu finden und werden an dieser Stelle nicht wiederholt.

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2B_{\alpha\beta} v_3) \quad (4.55)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ -2v_3|_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B^\gamma_\alpha (v_\beta|_\gamma - 3v_\gamma|_\beta) + \frac{1}{2} B^\gamma_\beta (v_\alpha|_\gamma - 3v_\gamma|_\alpha) - 2B^\gamma_\alpha|_\beta v_\gamma \right] \quad (4.56)$$

$$\text{sym}(n^{\alpha\beta}) = \left[ D H^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{B}{2} (H^{\alpha\epsilon\rho\delta} B^\beta_\epsilon B^\gamma_\rho + H^{\epsilon\beta\rho\delta} B^\alpha_\epsilon B^\gamma_\rho) \right] \alpha_{\gamma\delta} - \frac{B}{2} (H^{\alpha\epsilon\gamma\delta} B^\beta_\epsilon + H^{\epsilon\beta\gamma\delta} B^\alpha_\epsilon) \rho_{\gamma\delta} \quad (4.57)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\rho_{\gamma\delta} - B^\epsilon_\gamma \alpha_{\gamma\epsilon}) \quad (4.58)$$

**Abbildung 4.2:** Kinematische und konstitutive Gleichungen der Variante C (BAŞAR UND KRÄTZIG 1985).

Die Membranverzerrungen von Variante C sind identisch mit denjenigen aus Abbildung 4.1 ( $\alpha_{\alpha\beta}$ ). Anstatt der Krümmung  $\beta_{\alpha\beta}$  kommt jedoch ein alternatives Krümmungsmaß  $\rho_{\alpha\beta}$  zum Einsatz (siehe Gleichung (4.56)).

Auf der Seite der statischen Variablen wird in Formulierungsvariante C der symmetrische Anteil  $\text{sym}(n^{\alpha\beta}) = 1/2 (n^{\alpha\beta} + n^{\beta\alpha})$  der im Allgemeinen unsymmetrischen Schnittkräfte  $n^{\alpha\beta}$  verwendet. Die Biegemomente  $\hat{m}^{\alpha\beta}$  dagegen entsprechen wiederum der Variante nach NAGHDI (1963b).

In BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) wird der in Gleichung (4.57) grau hinterlegte Anteil mit der Begründung vernachlässigt, dass dieser deutlich kleiner ist als der verbleibende Anteil in der eckigen Klammer. Wie das Beispiel aus Abschnitt 4.4.1 zeigt, beeinflusst dieser Term für  $T \rightarrow 0$  das Konvergenzverhalten gegen die dreidimensionale Lösung jedoch erheblich. Es ist daher zu bezweifeln, dass das Vernachlässigen dieses Anteils tatsächlich zulässig ist.

### 4.3.2 Historische Formulierungsvarianten

Als eine der ersten brauchbaren allgemeinen Schalenformulierungen gilt die erste Näherung nach Love (LOVE 1888). Laut NAGHDI (1972) gibt es mehrere Formulierungen, die diese Bezeichnung für sich beanspruchen. Im Rahmen dieser Arbeit wird die erste Näherung nach Love in der Fassung von Reissner (REISSNER 1942) vorgestellt, deren kinematische und konstitutive Gleichungen in Abbildung 4.3 gegeben sind.

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2B_{\alpha\beta} v_3) \quad (4.59)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-2v_3|_{\alpha\beta} - B^\gamma_\beta v_\gamma|_\alpha - B^\gamma_\alpha v_\gamma|_\beta) \quad (4.60)$$

$$\text{sym}(n^{\alpha\beta}) = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad (4.61)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \rho_{\gamma\delta}. \quad (4.62)$$

**Abbildung 4.3:** Kinematische und konstitutive Gleichungen nach Love in der Fassung von REISSNER (1942).

Es handelt sich dabei um eine sowohl in den Krümmungen  $\rho_{\alpha\beta}$  als auch in den konstitutiven Gleichungen vereinfachte Version der Formulierungsvariante C.

Das Vernachlässigen von Termen bei der Definition der Krümmung führt zwar zu einer deutlich einfacheren Gleichung für  $\rho_{\alpha\beta}$ , jedoch geht dadurch die in Abschnitt 4.1 für Schalentheorien geforderte Invarianz unter Starrkörperbewegungen verloren (WUNDERLICH 1973). Hieraus folgt unmittelbar, dass es sich bei der Formulierung nach Love in der Fassung von REISSNER (1942), im Folgenden mit Love bezeichnet, weder um eine „bestmögliche“ noch um eine asymptotisch korrekte Schalentheorie handelt.

Die Theorie flacher Schalen (TfS) ist unter anderem auf Arbeiten von DONNELL (1933), MARGUERRE (1938), REISSNER (1947) und WLASSOW (1951) zurückzuführen. Sie ist deshalb auch unter den Namen Donnell-Marguerre- bzw. Donnell-Wlassow-Schalentheorie bekannt. Die einfache Handhabbarkeit der Gleichungen haben ihr zusätzlich auch den Namen technische Schalentheorie eingebracht (WUNDERLICH 1973).

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2B_{\alpha\beta} v_3) \quad (4.63)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -v_3|_{\alpha\beta} \quad (4.64)$$

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad (4.65)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad (4.66)$$

**Abbildung 4.4:** Kinematische und konstitutive Gleichungen der Theorie flacher Schalen.

Dieser Ansatz verwendet dieselben kinematischen und statischen Variablen sowie das selbe Konstitutivgesetz wie die Formulierung von NAGHDI (1963b), vernachlässigt jedoch bei der Berechnung der Krümmung  $\beta_{\alpha\beta}$  die mit den Komponenten des Krümmungstensors behafteten Terme (siehe Gleichung (4.64) und (4.52)).

Dies mag bei flachen bzw. schwach gekrümmten Schalen gerechtfertigt erscheinen, führt jedoch wie bei der Näherung nach Love dazu, dass auch diese Theorie nicht mehr invariant gegenüber Starrkörpertranslationen bzw. -rotationen ist (WUNDERLICH 1973). Die Theorie flacher Schalen ist somit ebenfalls keine „bestmögliche“ bzw. asymptotisch korrekte Schalentheorie.

Als dritte historische Formulierungsvariante wird die Schalentheorie nach Koiter (KOITER 1960) vorgestellt, welche nicht nur im Ingenieurwesen, sondern auch in mathematischen Kreisen bekannt ist.

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2B_{\alpha\beta} v_3) \quad (4.67)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ -2v_3|_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B^\gamma_{\alpha} (v_{\beta|\gamma} - 3v_{\gamma|\beta}) + \frac{1}{2} B^\gamma_{\beta} (v_{\alpha|\gamma} - 3v_{\gamma|\alpha}) - 2B^\gamma_{\alpha|\beta} v_{\gamma} \right] \quad (4.68)$$

$$\text{sym}(n^{\alpha\beta}) = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad (4.69)$$

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \rho_{\gamma\delta} \quad (4.70)$$

**Abbildung 4.5:** Kinematische und konstitutive Gleichungen nach Koiter.

Koiter gelang es bereits, die kinematischen Gleichungen einer „bestmöglichen“ Approximation anzugeben, was aus dem Vergleich der entsprechenden Abschnitte in Abbildung 4.5 mit denjenigen in Abbildung 4.2 hervorgeht. Es werden jedoch dieselben verein-

fachten konstitutiven Gleichungen der Näherung nach Love in der Fassung von Reissner herangezogen (vergleiche Abbildung 4.5 mit Abbildung 4.3).

Nach WUNDERLICH (1973) ist die Invarianz gegenüber Starrkörperverschiebungen und -rotationen für die Schalentheorie nach Koiter gegeben. Zudem lässt sich ihre asymptotische Korrektheit beweisen (siehe z.B. CIARLET (2000)).

Laut BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) liegt jedoch, bedingt durch die schärfere Approximation der konstitutiven Gleichungen, die obere Fehlerschranke höher als bei der vergleichbaren Variante C. Die Näherung nach Koiter kann somit nicht mit dem Attribut „bestmöglich“ versehen werden. Der Sichtweise von CIARLET (2000), dass es sich bei der Koiterschen Schalentheorie um das beste zweidimensionale Modell für linear elastische Schalen handelt, muss daher widersprochen werden.

## 4.4 Numerische Untersuchungen

Die numerischen Untersuchungen in diesem Abschnitt erfolgen auf der Basis der Method of Manufactured Solutions (siehe beispielsweise ROACHE (2002)). Diese Methode wird vor allem zur Validierung und Verifikation von numerischen Lösungsverfahren aus dem Bereich der Fluidodynamik und der Strukturmechanik genutzt. In einem ersten Schritt wird dabei für ein entsprechendes Differentialgleichungssystem eine beliebige analytische Lösung angenommen und daran anschließend in einem zweiten Schritt die zugehörige Problemstellung (Lasten, Randbedingungen, ...) generiert, wobei meist Computeralgebrasysteme zum Einsatz kommen. Die erzeugte Problemstellung wird dann mit dem zu testenden Verfahren numerisch gelöst und kann zur Validierung mit der bekannten exakten Lösung verglichen werden, wodurch Rückschlüsse auf die Qualität des Lösungsverfahrens und auf die gewählte Diskretisierung möglich sind.

In diesem Abschnitt wird die Method of Manufactured Solutions jedoch nicht verwendet, um numerische Lösungsverfahren zu testen, sondern um diese bewusst zu vermeiden. Die Lösung der bei Schalenstrukturen auftretenden Differentialgleichungssysteme ist bei allgemeinen Belastungszuständen in der Regel nur noch numerisch, d.h. näherungsweise zu bewerkstelligen. Um Einflüsse numerischer Lösungsverfahren beim Vergleich der Schalenformulierungen aus Abschnitt 4.3 auszuschließen, werden für die folgenden Beispiele gezielt Verschiebungsfelder vorgegeben.

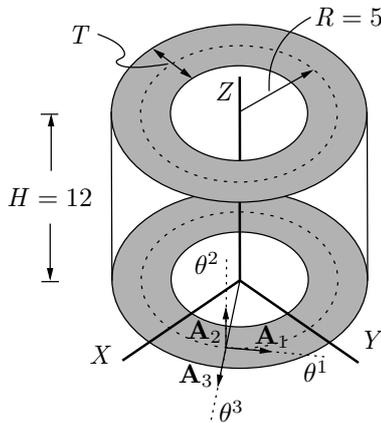
Die einzelnen Schalenformulierungen werden auf der Basis des relativen Fehlers der gesamten Verzerrungsenergie  $\Pi^{int}$  einer Struktur verglichen, wobei als Referenzwert die Lösung der Energie des dreidimensionalen Kontinuums  $\Pi_{3D}^{int}$  für den angenommenen Verformungszustand dient.

Der relative Fehler ist als

$$e = \frac{\Pi^{int} - \Pi_{3D}^{int}}{\Pi_{3D}^{int}} \quad (4.71)$$

definiert, wobei für einen positiven Wert von  $e$  die Verzerrungsenergie überschätzt, für einen negativen Wert dagegen die Verzerrungsenergie unterschätzt wird.

Als Schallengeometrie für alle nachfolgenden Untersuchungen dient der in Abbildung 4.6 dargestellte Kreiszyylinder. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass eine analytische Geometriebeschreibung existiert, trotzdem aber eine gewisse Allgemeinheit gegeben ist. So treten, im Unterschied zur Kugelschale, aufgrund der ungleichen Hauptkrümmungsradien unsymmetrische Schnittgrößen  $n^{\alpha\beta}$  auf. Zudem können für den Kreiszyylinder rein dehnungslose Verformungszustände (siehe unten) angegeben werden.



Geometrie:

$$\begin{aligned} X &= (R + \theta^3) \cos(\theta^1) & \theta^1 &\in [0, 2\pi] \\ Y &= (R + \theta^3) \sin(\theta^1) & \theta^2 &\in [0, H] \\ Z &= \theta^2 & \theta^3 &\in [-T/2, T/2] \end{aligned}$$

Material:

$$E = 1,0 \quad \text{und} \quad \nu = 0,0$$

**Abbildung 4.6:** Abmessungen, Material und Geometriebeschreibung des Zylinders.

Als Koordinatensysteme werden das global kartesische System (Koordinaten  $X, Y, Z$ ) sowie das System der Schalenmittelfläche zur Basis  $\mathbf{A}^i$  (Koordinaten  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ) verwendet. Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  des Schalenraums sowie  $\mathbf{v}$  der Schalenmittelfläche werden bezüglich des Koordinatensystems der Schalenmittelfläche ausgedrückt.

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{A}^i \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}(\theta^3 = 0) = v_i \mathbf{A}^i \quad (4.72)$$

Prinzipiell können völlig beliebige Verschiebungsfelder verwendet werden, somit auch solche, die eine Dickenänderung und Querschubdeformationen einschließen. Da die Schalentheorien dieses Kapitels jedoch per se nicht in der Lage sind, Dickenänderungen bzw. Querschubverzerrungen abzubilden, könnte ihre Leistungsfähigkeit mit einem entsprechenden Verschiebungsfeld beliebig schlecht dargestellt werden.

Um einen „fairen“ Vergleich zu ermöglichen, werden deshalb im Folgenden ausschließlich

Verschiebungsfelder verwendet, die maximal linear über die Dicke des Zylinders verlaufen und keine Dickenänderungen bzw. Querschubverzerrungen beinhalten. Der geometrischen Linearität der zu untersuchenden Schalentheorien wird bei der Wahl der Felder ebenfalls Rechnung getragen.

Für alle untersuchten Konfigurationen wird der Energiefehler der einzelnen Formulierungen als Funktion der Schalendicke  $T$  bestimmt und in Diagrammform dargestellt. Dabei werden die Bezeichnungen „Love“ bzw. „Koiter“ sowie die Abkürzung „TfS“ (Theorie flacher Schalen) verwendet. Der äquivalente Fehlerverlauf der Formulierung nach Naghdi bzw. der Variante C wird mit „Bestmöglich“ bezeichnet.

#### 4.4.1 Radiale Aufweitung des Zylinders

Die Referenz- und Momentankonfiguration sowie das vorgegebene Verschiebungsfeld sind für diesen Deformationszustand in Abbildung 4.7 gegeben. Der Energiefehler der untersuchten Schalenformulierungen ist in doppelt logarithmischer Skalierung in Abbildung 4.8 dargestellt.

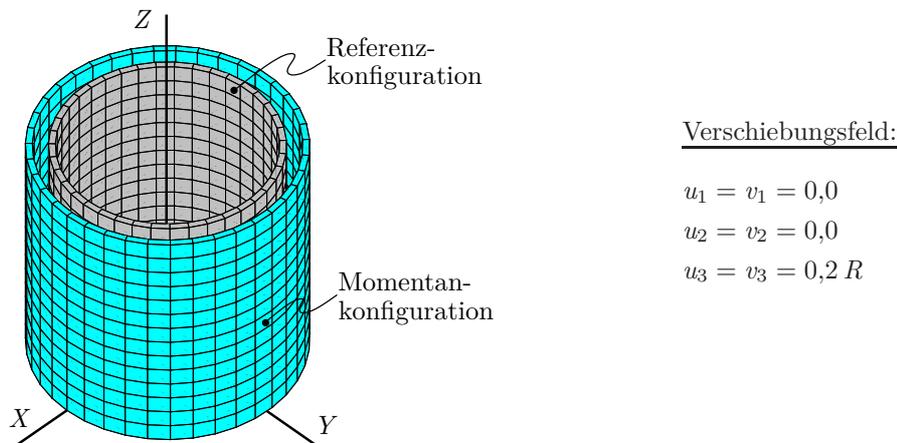


Abbildung 4.7: Radiale Aufweitung des Zylinders.

Obwohl es sich bei der radialen Aufweitung um einen relativ trivialen Verformungszustand handelt, können bereits hierfür Unterschiede in den einzelnen Theorien beobachtet werden. Wie aus Gleichung (4.52) hervorgeht, entsteht bei der Formulierung nach Naghdi ein Krümmungsanteil  $\beta_{\alpha\beta}$  und damit ein Biegemoment  $\hat{m}^{\alpha\beta}$ . Bei der Theorie flacher Schalen (TfS) dagegen, die den selben Variablensatz verwendet, ist die Krümmung  $\beta_{\alpha\beta}$  aufgrund fehlender Terme in Gleichung (4.64) null, wodurch im Vergleich zu Naghdi Energieanteile verloren gehen. Der Energiefehler sinkt, wie Abbildung 4.8 zeigt, bei abnehmender Schalendicke langsamer als bei einer bestmöglichen Formulierung.

Theorien mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit werden in der Literatur auch als „asymptotisch besser“, jene mit einer langsameren Konvergenzgeschwindigkeit als „asymptotisch schlechter“ bezeichnet.

Für Variante C (siehe Abbildung 4.2) ist der Krümmungsterm  $\rho_{\alpha\beta}$  Null. Dies wird zwar von den Formulierungen sowohl nach Love (Abbildung 4.3) als auch nach Koiter (Abbildung 4.5) korrekt wiedergegeben, im Unterschied zur Variante C fehlen bei diesen Formulierungen jedoch Terme in den konstitutiven Gleichungen, was zu einem größeren Fehler in der Gesamtenergie führt. Aufgrund von  $\rho_{\alpha\beta} = 0$  ist dieser Unterschied ausschließlich auf die in Gleichung (4.57) grau hinterlegten Anteile zurückzuführen. Würden diese wie in BAŞAR UND KRÄTZIG (1985) vorgeschlagen vernachlässigt, so entstünde für Variante C derselbe Fehlerverlauf wie für die Formulierungen nach Love und Koiter, welche eine deutlich geringere Konvergenzgeschwindigkeit aufweisen und damit asymptotisch schlechter sind. Vor diesem Hintergrund ist zu bezweifeln, ob das Streichen entsprechender Anteile in Variante C tatsächlich gerechtfertigt ist.

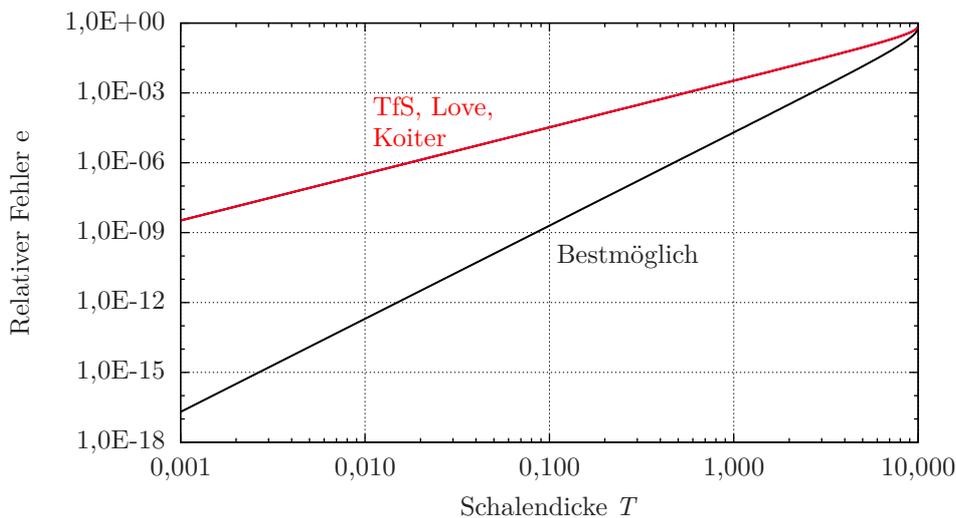
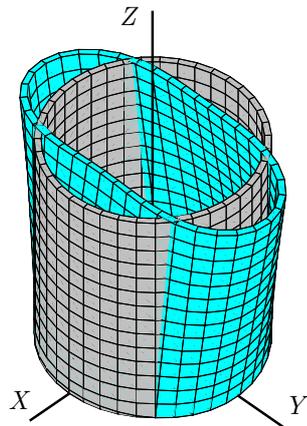


Abbildung 4.8: Energiefehler bei radialer Aufweitung des Zylinders.

Abschließend sei angemerkt, dass alle Formulierungen die Verzerrungsenergie für dieses Verschiebungsfeld unterschätzen.

#### 4.4.2 Zweiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders

Bei diesem Verschiebungsfeld handelt es sich um eine Verformung, bei der im oberen Bereich des Zylinders zwei Wellen in Umfangsrichtung auftreten, was einem Zusammendrücken des Zylinders am oberen Ende entspricht (siehe Abbildung 4.9). Da keine Membrandehnungen  $\alpha_{\alpha\beta}$  entstehen, liegt eine sogenannte dehnungslose Verformung vor,



Verschiebungsfeld:

$$u_1 = 0,08 \theta^2 \sin(2\theta^1) (R - 3\theta^3)$$

$$u_2 = 0,04 \cos(2\theta^1) (R + 4\theta^3)$$

$$u_3 = -0,16 \theta^2 \cos(2\theta^1)$$

$$v_1 = 0,08 R \theta^2 \sin(2\theta^1)$$

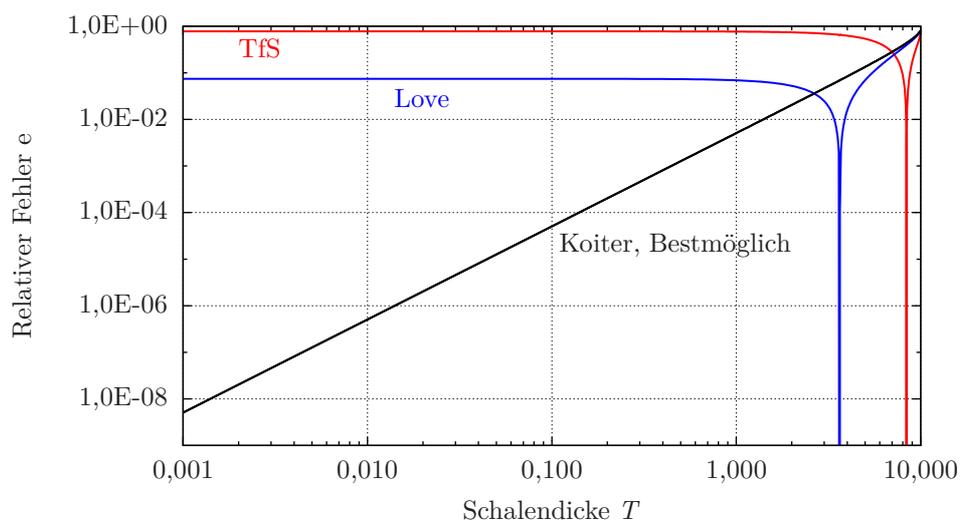
$$v_2 = 0,04 R \cos(2\theta^1)$$

$$v_3 = -0,16 \theta^2 \cos(2\theta^1)$$

**Abbildung 4.9:** Zweiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders.

bei der sich aus  $\text{sym}(n^{\alpha\beta})$  bzw.  $\hat{n}^{\alpha\beta}$  somit keine Energiebeiträge ergeben. Die Vereinfachungen in den konstitutiven Gleichungen der Formulierungen nach Love und Koiter haben im Vergleich zur Variante C keinen Einfluss, weshalb die Unterschiede im Energiefehlerverlauf der Formulierungen ausschließlich auf Näherungen in den Krümmungen  $\beta_{\alpha\beta}$  bzw.  $\rho_{\alpha\beta}$  zurückzuführen sind. Da bei Koiter die Krümmung  $\rho_{\alpha\beta}$  derjenigen von Variante C (Bestmöglich) entspricht, müssen die Energiefehlerverläufe somit übereinstimmen (siehe Abbildung 4.10).

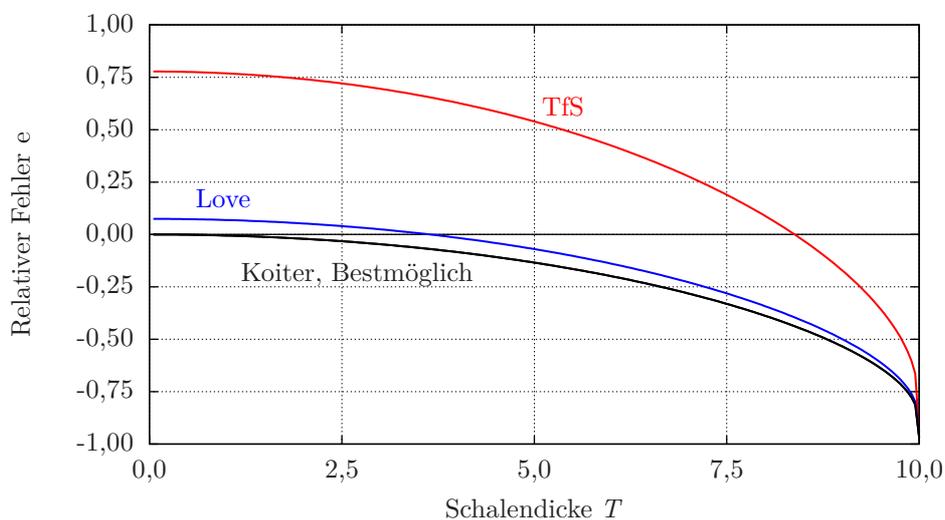
Im Gegensatz zu Koiter bzw. einer bestmöglichen Formulierung bleibt der Energiefehler bei Love sowie bei der Theorie flacher Schalen bei gegen Null strebender Schalendicke endlich (siehe Abbildung 4.10). Dies zeigt, dass es sich bei Love bzw. der TfS um nicht



**Abbildung 4.10:** Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders.

asymptotisch korrekte Formulierungen handelt. Das schlechtere Ergebnis der Theorie flacher Schalen im Gegensatz zu Love ist auf die gröbere Näherung in den Krümmungen  $\rho_{\alpha\beta}$  zurückzuführen.

Der trichterförmige Verlauf der Fehlerkurven nach Love und der TfS in Abbildung 4.10 ist mit einem Vorzeichenwechsel des Energiefehlers zu erklären. Zur Veranschaulichung sind die Fehlerverläufe aus Abbildung 4.10 erneut in Abbildung 4.11, dieses Mal jedoch mit linearer Achsenskalierung, dargestellt. Aus der Abbildung geht hervor, dass Love- bzw. die TfS die Verzerrungsenergie für kleine Schalendicken zunächst überschätzen, mit zunehmendem  $T$  dann jedoch unterschätzen. Der damit verbundene Nulldurchgang erzeugt in einem doppelt logarithmischen Diagramm einen trichterförmigen Verlauf. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine Schalenformulierung am Nulldurchgang des Energiefehlers nicht zwangsläufig punktweise exakte Werte liefert.

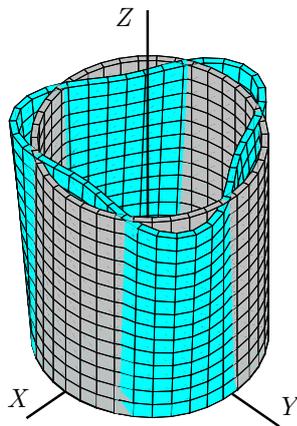


**Abbildung 4.11:** Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders (lineare Achsenskalierung).

### 4.4.3 Dreiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders

Dieser Verformungszustand des Kreiszylinders weist dieselben mechanischen Charakteristiken auf wie die zweiwellige dehnungslose Verformung aus Abschnitt 4.4.2. Der einzige Unterschied besteht in der Anzahl der Wellen in Umfangsrichtung (siehe Abbildung 4.12). Der Energiefehler der einzelnen Formulierungen ist in Abbildung 4.13 dargestellt.

Vergleicht man diese Fehlerverläufe mit denjenigen der zweiwelligen dehnungslosen Verformung aus Abbildung 4.10, so fällt auf, dass die Entwicklung des Fehlers der For-



Verschiebungsfeld:

$$u_1 = 0,03 \theta^2 \sin(3\theta^1) (R - 8\theta^3)$$

$$u_2 = 0,01 \cos(3\theta^1) (R + 9\theta^3)$$

$$u_3 = -0,09 \theta^2 \cos(3\theta^1)$$

$$v_1 = 0,03 R \theta^2 \sin(3\theta^1)$$

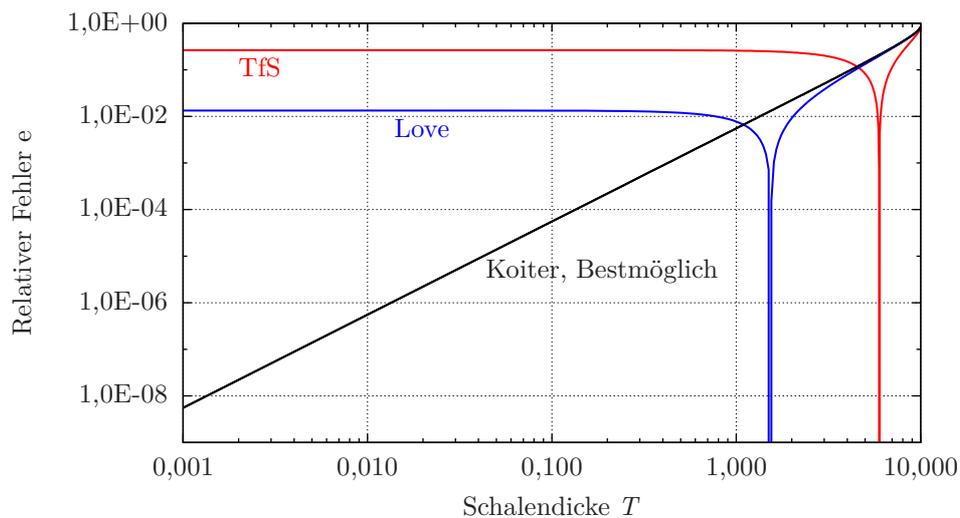
$$v_2 = 0,01 R \cos(3\theta^1)$$

$$v_3 = -0,09 \theta^2 \cos(3\theta^1)$$

**Abbildung 4.12:** Dreiwellige dehnungslose Verformung des Zylinders.

mulierung von Koiter bzw. einer bestmöglichen Formulierung durch den Wechsel des Verformungsmusters nicht beeinflusst wird. Der Fehler nach Love bzw. der TfS zeigt zwar eine ähnliche Charakteristik, fällt bei gegen null strebender Schalendicke jedoch für beide Formulierungen deutlich geringer aus als zuvor.

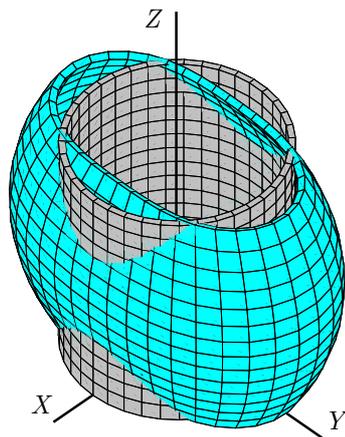
Dieser Effekt wurde bereits von HOFF (1955) für die Donnell'sche Kreiszyylindertheorie (DONNELL 1933) beschrieben. Verformungsmuster mit wenigen Wellen in Umfangsrichtung führen darin zu großen, jene mit vielen Wellen dagegen zu deutlich geringeren Fehlern. Die Ergebnisse aus den Abbildungen 4.10 und 4.13 lassen vermuten, dass dies für die TfS bzw. die Schalentheorie nach Love ebenfalls gilt.



**Abbildung 4.13:** Energiefehler bei dreiwelliger dehnungsloser Verformung des Zylinders.

### 4.4.4 Gleichzeitiges Wirken von Membran- und Biegedeformationen

Bei diesem beliebig gewählten Verformungszustand treten planmäßig Membranverzerungen  $\alpha_{\alpha\beta}$  und Krümmungen  $\beta_{\alpha\beta}$  bzw.  $\rho_{\alpha\beta}$  auf. Das zugehörige Verschiebungsfeld sowie die Referenz- bzw. Momentankonfiguration sind in Abbildung 4.14 dargestellt.



Verschiebungsfeld:

$$u_1 = 0,15 R \sin(2\theta^1) (R - 3\theta^3)$$

$$u_2 = -0,25 \theta^3 R^{-1} (-2\theta^2 + H)$$

$$u_3 = 0,05 R^{-1} (-6 R^2 \cos(2\theta^1) - 5(\theta^2)^2 + 5 H \theta^2)$$

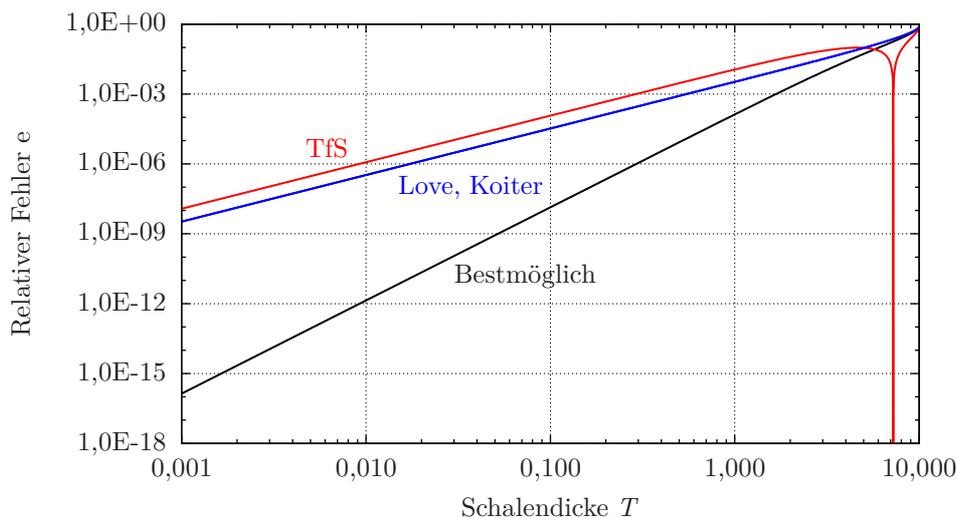
$$v_1 = 0,15 R^2 \sin(2\theta^1)$$

$$v_2 = 0,0$$

$$v_3 = 0,05 R^{-1} (-6 R^2 \cos(2\theta^1) - 5(\theta^2)^2 + 5 H \theta^2)$$

**Abbildung 4.14:** Gleichzeitige Membran- und Biegedeformation des Zylinders.

Aus den Verläufen von Abbildung 4.15 geht hervor, dass der Energiefehler der bestmöglichen Formulierung bei allen untersuchten Schalentheorien mit gegen null strebender Schalendicke am schnellsten abnimmt, es sich also um die asymptotisch beste Formulierung handelt.



**Abbildung 4.15:** Energiefehler bei gleichzeitigem Wirken von Membran- und Biegedeformationen am Zylinder.

Die Fehlerkurve der Theorie flacher Schalen zeigt einen trichterförmigen Verlauf, der einen Vorzeichenwechsel des Energiefehlers anzeigt (bei abnehmender Schalendicke wird die Verzerrungsenergie zuerst unterschätzt, danach überschätzt). Sie weist den größten Energiefehler aller untersuchten Gleichungssätze auf.

Die Näherungen nach Love und Koiter liefern für dieses Verschiebungsfeld jeweils den selben Energiefehler, welcher für realistische Schalendicken stets geringer ausfällt als für die Theorie flacher Schalen. Dieser Unterschied ist im Wesentlichen auf die genauere Approximation der Krümmung bei Love bzw. Koiter zurückzuführen. Die Konvergenzgeschwindigkeit der TFS bzw. der Formulierungen nach Love und Koiter ist jedoch identisch.

## 4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Modellannahmen klassischer Schalentheorien auf der Basis der kinematischen und konstitutiven Gleichungen diskutiert. Ausgehend von den Ergebnissen aus Kapitel 3 konnten die Gleichungen einer bestmöglichen Approximation der 3-Parameter- bzw. 5-Parameter-Schalentheorie hergeleitet werden. Für den geometrisch linearen Fall wurden die Gleichungen einiger historischer Schalenformulierungen vom Kirchhoff-Love-Typ mit denjenigen einer bestmöglichen Approximation verglichen. Anhand numerischer Beispiele auf der Basis der Method of Manufactured Solutions konnten die teilweise erheblichen Mängel von historischen Formulierungen aufgezeigt werden.

Wie das Attribut „bestmöglich“ bei den 3- bzw. 5-Parameter-Theorien impliziert, ist für diese Formulierungen das Limit in der Approximationsqualität des dreidimensionalen Kontinuums erreicht. Eine genauere Approximation kann nur durch zusätzliche innere Freiheitsgrade (Parameter) erfolgen. Diese Vorgehensweise führt auf so genannte dreidimensionale Schalentheorien, die im nächsten Kapitel behandelt werden.



# 5

---

## Modellannahmen bei dreidimensionalen Schalentheorien

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Modellannahmen klassischer Schalentheorien diskutiert. Dabei wurde festgestellt, dass für 5- bzw. 3-Parameter-Formulierungen die Approximationsgüte nicht weiter gesteigert werden kann. Eine Steigerung ist für den allgemeinen Fall nur durch zusätzliche innere Freiheitsgrade, d.h. weitere Parameter, zu erreichen. Es müssen daher vor allem die strengen Annahmen in der Schalenkinematik des vorangegangenen Kapitels gelockert werden. Allen voran ist das Unterdrücken der Dickenänderung in der Schalenformulierung aufzugeben, da diese Annahme zum einen die Ermittlung der tatsächlich vorherrschenden Normalspannung in Dickenrichtung verhindert. Zum anderen ist damit zwangsläufig eine Modifikation des Stoffgesetzes verbunden, die im Hinblick auf beliebige dreidimensionale Stoffgesetze als hinderlich betrachtet werden muss. Direkt damit verbunden ist das Kriterium, welches dreidimensionale von klassischen Schalentheorien abgrenzt. Falls in einer Schalenformulierung unmodifizierte dreidimensionale Stoffgesetze verwendet werden können, wird diese als dreidimensional bezeichnet.

Waren viele der Annahmen in klassischen Schalentheorien von der Notwendigkeit einfach lösbarer Gleichungen getrieben, so führt deren Wegfall nun zu Gleichungssätzen, die ausschließlich mit numerischen Verfahren gelöst werden können. Dreidimensionale Schalentheorien sind somit stets eng mit dem verwendeten Lösungsverfahren, im Rahmen dieser Arbeit der Methode der finiten Elemente, verzahnt. Finite Schalenelemente können dabei auf unterschiedliche Wege hergeleitet werden, die, falls gleichwertige Annahmen getroffen werden, zu mechanisch äquivalenten Elementformulierungen führen. Die erste Möglichkeit, Elementformulierungen herzuleiten, besteht darin, zunächst die zugrundeliegende Schalentheorie aufzustellen, aus der nach entsprechender Diskretisie-

rung Schalenelemente gewonnen werden. Den zweiten Herleitungsweg stellt das Degenerationskonzept dar (AHMAD U. A. (1968), AHMAD U. A. (1970), RAMM (1976) und (BÜCHTER 1992)). Hier werden finite Schalenelemente direkt aus der Diskretisierung des dreidimensionalen Kontinuums hergeleitet, ohne die zugrundeliegende Schalentheorie aufzustellen. Ein dritter, dem Degenerationskonzept verwandter Ansatz besteht darin, keine Schalenelemente im eigentlichen Sinn, sondern speziell für dünnwandige Strukturen optimierte Kontinuumsselemente zu entwickeln. Entsprechende Elemente werden in der Regel auch als Schalenelemente bezeichnet.

Die Herleitung dreidimensionaler Schalenelemente erfolgt heute fast ausschließlich auf der Basis der beiden letztgenannten Ansätze, die sich dadurch auszeichnen, dass schalentheoretische Modellannahmen dabei in der Regel nicht bewusst eingebracht werden, sondern sich indirekt aus der Diskretisierung ergeben.

Im Rahmen dieses Kapitels werden daher zunächst völlig losgelöst von der Methode der finiten Elemente mögliche Modellannahmen dreidimensionaler Schalentheorien diskutiert. Hierzu gehören die kinematischen Gleichungen sowie die inneren Größen, in denen eine Formulierung erfolgen kann. Besonderer Wert wird auf die numerische Integration gelegt, welche als Bestandteil einer Schalenformulierung betrachtet werden muss. Im Anschluss an numerische Beispiele, in denen die Auswirkungen einzelner Annahmen auf die Ergebnisqualität untersucht werden, wird eine Verbindung zwischen den Modellannahmen der Schalentheorie und dreidimensionalen Schalenelementformulierungen hergestellt.

### 5.1 Kinematische Gleichungen unterschiedlicher Ordnung

Für die kinematischen Gleichungen wird auf die Herleitungen aus Abschnitt 3.1 zurückgegriffen. Dabei wird unabhängig von der Ordnung der Kinematik die Referenzkonfiguration der Schale mit einem in Dickenrichtung linearen Ansatz beschrieben, was die auftretenden Gleichungen erheblich vereinfacht und zu einer besseren Übersicht beiträgt. Die Beschreibung des Schalenanschnitts (Stirnfläche der Schale) ist dadurch zwar auf in Dickenrichtung gerade Materialfasern beschränkt, die mechanischen Eigenschaften werden in ihrer Allgemeinheit jedoch nicht beeinflusst. Bei finiten Elementen entspricht diese Herangehensweise einer subparametrischen Elementformulierung (ZIENKIEWICZ U. A. 2005).

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^0 + \theta^3 \mathbf{R}^1 \tag{5.1}$$

Die Geometriebeschreibung in der Momentankonfiguration kann mit Hilfe von Gleichung (3.13) als

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{X} + \sum_{N=0}^{N_{max}} (\theta^3)^N \mathbf{v}^N \quad (5.2)$$

angegeben werden, wobei der Parameter  $N_{max}$  in den folgenden Abschnitten die Ordnung der Kinematik bestimmt. Die Verwendung endlich vieler Reihenglieder zur Beschreibung der Kinematik über die Schalendicke kann formal als Diskretisierung aufgefasst werden. Da diese Diskretisierung lediglich in Dickenrichtung erfolgt, wird in BISCHOFF (1999) hierfür konsequenter Weise der Begriff Semidiskretisierung eingeführt.

Werden über die Schalendicke  $C^\infty$ -kontinuierlich Ansätze verwendet, so entstehen sogenannte Multidirektor-Kinematiken. Für den Sonderfall eines lediglich linearen Ansatzes in Dickenrichtung erhält man die geläufige Singledirektor-Kinematik. Neben den Multidirektor-Kinematiken existieren auch sogenannte Mehrschicht-Kinematiken. Sie können als sequentiell über die Schalendicke gestapelte Multidirektor-Kinematiken angesehen werden, die an ihren Übergängen lediglich  $C^0$ -Kontinuität in den Verschiebungen erfüllen (BISCHOFF U. A. 2004). Mehrschicht-Kinematiken werden im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet. Hierfür sei auf die Literatur verwiesen (BRAUN U. A. (1994), BRAUN (1995), GRUTTMANN (1996) KRÄTZIG UND JUN (2002), KRÄTZIG (2003), KRÄTZIG UND JUN (2003)).

Die für die Auswertung der Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  bezüglich der Tensorbasis  $\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$  notwendigen Basisvektoren  $\mathbf{G}_\alpha$  und  $\mathbf{G}_3$  bzw.  $\mathbf{g}_\alpha$  und  $\mathbf{g}_3$  sind in folgender Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \theta^3 \mathbf{R}_{,\alpha}^1 & \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{G}_\alpha + \sum_{N=0}^{N_{max}} (\theta^3)^N \mathbf{v}_{,\alpha}^N \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{R}^1 & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{G}_3 + \sum_{N=0}^{N_{max}} N (\theta^3)^{N-1} \mathbf{v}^N. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  nach Potenzen von  $\theta^3$  sortiert ( $E_{ij}^N$ ). Diese sind wiederum nach Membran-, Querschub- und transversalen Normalverzerrungen aufgeteilt angegeben ( $E_{\alpha\beta}^N$ ,  $E_{\alpha 3}^N$ ,  $E_{33}^N$ ). Hierbei werden geometrisch nichtlineare Anteile mit **farbiger Schrift** gekennzeichnet. Durch Streichung dieser Anteile erhält man die zugehörigen linearisierten Verzerrungskomponenten ( $\varepsilon_{\alpha\beta}^N$ ,  $\varepsilon_{\alpha 3}^N$ ,  $\varepsilon_{33}^N$ ) und somit die jeweilige linearisierte Kinematik. Terme, die durch Erhöhung der Ordnung von sechs auf neun bzw. von sechs auf sieben Parameter in den jeweiligen Gleichungssätzen hinzukommen, sind **grau hinterlegt**.

### 5.1.1 6-Parameter-Kinematik

In der Kinematik einer Schalentheorie müssen über die Schalendicke zumindest konstante und lineare Verzerrungsanteile enthalten sein, da nur so gewährleistet ist, dass Membran- und Biegezustände abgebildet werden können.

Die Kinematik niedrigster Ordnung, die diese Forderung erfüllt und gleichzeitig die Verwendung von unmodifizierten dreidimensionalen Stoffgesetzen zu erlauben scheint, ist die 6-Parameter-Kinematik ( $N_{max}=1$  in Gleichung (5.2)). Der zugehörige Gleichungssatz ist in Gleichung (5.4) gegeben.

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^0) \\
E_{\alpha 3}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}^1) \\
E_{33}^0 &= \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1 \\
E_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1) \\
E_{\alpha 3}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}^1) \\
E_{33}^1 &= 0 \\
E_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1) \\
E_{\alpha 3}^2 &= 0 \\
E_{33}^2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben treten in Gleichung (5.4) nicht nur konstante und lineare, sondern auch quadratische Verzerrungsanteile  $E_{\alpha\beta}^2$  auf. Die in  $E_{\alpha\beta}^2$  enthaltenen Terme sind bereits Anteile aus einer Kinematik höherer Ordnung (siehe z.B. Gleichung (5.5)). Sie sind für die asymptotisch korrekte Darstellung von Membran- und Biegezuständen zwar nicht notwendig, können jedoch bei gekrümmten Strukturen genauigkeitssteigernd sein. Die Größenordnung des Fehlers, der durch Vernachlässigen der quadratischen Anteile entsteht, wurde bereits in Gleichung (4.10) angegeben.

Auffällig in Gleichung (5.4) ist das vollständige Fehlen des linearen Anteils der transversalen Normalverzerrungen  $E_{33}^1$ . Dies führt bereits bei isotropem elastischen Materialverhalten mit  $\nu \neq 0$  dazu, dass unter reiner Biegung linear über die Dicke verlaufende Spannungsanteile  $S_1^{33}$  auftreten, welche in der dreidimensionalen Lösung nicht vorhanden sind und daher als parasitär eingestuft werden müssen (für eine detaillierte Beschreibung siehe z.B. BRAUN (1995)). Der hieraus resultierende Zwang liefert auch im Limit der Schalendicke  $T$  gegen null eine stets steifere Systemantwort als die vollständig dreidimensionale Lösung. Hieraus folgt, dass eine Schalenformulierung, basierend auf einer

6-Parameter-Kinematik mit dreidimensionalen Stoffgesetzen, für Biegezustände nicht asymptotisch korrekt ist.

Das Problem parasitärer transversaler Normalspannungen wurde bei den 5-Parameter- bzw. 3-Parameter-Schalentheorien durch die Modifikation des Stoffgesetzes umgangen (siehe Abschnitt 4.2.2). Da eine solche Modifikation bei dreidimensionalen Schalentheorien vermieden werden sollte, verbleiben nur zwei gangbare Wege, um asymptotisch korrekte dreidimensionale Schalentheorien bzw. Schalenelemente herzuleiten: Die Erhöhung der Ordnung der Kinematik oder die „Reparatur“ des Defektes der soeben beschriebenen 6-Parameter-Kinematik. Beide Möglichkeiten werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

### 5.1.2 Kinematiken höherer Ordnung

Wird die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene 6-Parameter-Kinematik um den quadratischen Verschiebungsanteil  $\mathbf{v}^2$  ergänzt, so ergibt sich eine 9-Parameter-Kinematik ( $N_{max}=2$  in Gleichung (5.2)), deren Gleichungssatz in Gleichung (5.5) angegeben ist. Im Vergleich zur 6-Parameter-Theorie sind nun alle konstanten und linearen Verzerrungsanteile  $E_{ij}^0$  und  $E_{ij}^1$  ungleich Null. Somit wird gewährleistet, dass dem linearen Anteil der transversalen Normalspannung  $S_1^{33}$  ein linearer Verzerrungsverlauf  $E_{33}^1$  zugeordnet ist, wodurch keine parasitären Spannungen mehr auftreten. Numerische Versuche zeigen, dass im Limit  $T \rightarrow 0$  eine dreidimensionale Schalentheorie mit einer 9-Parameter-Kinematik für Biegung dasselbe Ergebnis liefert, wie die vollständig dreidimensionale Lösung. Obwohl kein mathematischer Beweis existiert, ist daher anzunehmen, dass eine 9-Parameter-Schalentheorie asymptotisch korrekt ist.

An dieser Stelle sei noch Folgendes angemerkt: Der bei der 6-Parameter-Kinematik fehlende Verzerrungsanteil  $E_{33}^1$  ist bei der 9-Parameter-Kinematik mit dem quadratischen Anteil  $E_{33}^2$  vergleichbar. Dieser ist zwar nach Gleichung (5.5) ungleich null, es handelt sich dabei jedoch lediglich um einen nichtlinearen Anteil. Für Biegung zweiter Ordnung (quadratische Spannungsverläufe  $S_2^{\alpha\beta}$  über die Dicke) ist eine 9-Parameter-Schalentheorie somit nicht asymptotisch korrekt. In BISCHOFF UND BLETZINGER (2005) wird gezeigt, dass bei Schalentheorien mit einer Kinematik der Ordnung  $N$  jeweils der Verzerrungsanteil  $E_{33}^N$  fehlt und ein entsprechendes Schalenmodell ohne Modifikationen nur für Biegung bis zur Ordnung  $N-1$  asymptotisch korrekt ist.

Im Vergleich zur 6-Parameter-Kinematik führt die 9-Parameter-Kinematik nicht nur zu einer asymptotisch korrekten Schalentheorie. Auch wird durch die höherwertigen Verzerrungsanteile der Schalenraum „dreidimensionaler“ aufgelöst, was eine Genauigkeitssteigerung bedeutet. Besonders sei auf die quadratisch über die Schalendicke verlaufenden Querschubverzerrungen  $E_{\alpha 3}^2$  hingewiesen. Ein Schubkorrekturfaktor der Größe  $5/6$ ,

wie er bei schubweichen Schalentheorien mit linear über die Schalendicke verlaufenden Verschiebungsansätzen zur Korrektur der Querschubverzerrungsenergie verwendet wird (siehe Abschnitt 4.2.2), ist nicht nötig, da sich die quadratische Verteilung der Querschubverzerrungen über die Dicke automatisch einstellen kann.

Kubische und quartische Verzerrungsanteile ( $E_{ij}^3$  und  $E_{ij}^4$ ) dürfen, vergleichbar den quadratischen Anteilen einer 6-Parameter-Kinematik, vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^0) \\
 E_{\alpha 3}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}^1) \\
 E_{33}^0 &= \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1 \\
 \\ 
 E_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1) \\
 E_{\alpha 3}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}^2) \\
 E_{33}^1 &= 2 (\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^2) \\
 \\ 
 E_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 \\
 &\quad + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^2 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^2) \\
 E_{\alpha 3}^2 &= \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,\alpha}^2 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^2 \\
 E_{33}^2 &= 2 \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}^2 \\
 \\ 
 E_{\alpha\beta}^3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^2 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^2 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^2) \\
 E_{\alpha 3}^3 &= \mathbf{v}_{,\alpha}^2 \cdot \mathbf{v}^2 \\
 E_{33}^3 &= 0 \\
 \\ 
 E_{\alpha\beta}^4 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,\alpha}^2 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^2 \\
 E_{\alpha 3}^4 &= 0 \\
 E_{33}^4 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Wie ein Vergleich der Gleichungen (5.4) und (5.5) zeigt, führt die Steigerung der Ordnung der Kinematik nicht nur zu asymptotisch korrekten und genaueren Schalentheorien. Auch die Anzahl der involvierten Terme sowie die Zahl der Freiheitsgrade nimmt zu, wodurch der Aufwand darauf basierender Schalenformulierungen ansteigt. Dies schlägt sich bei der Methode der finiten Elemente in Form von höheren numerischen Kosten im Lösungsprozess nieder.

Man ist daher in der Regel an derjenigen Kinematik interessiert, die mit der geringsten Anzahl an kinematischen Parametern in Kombination mit dreidimensionalen Stoffgesetzen auf eine asymptotisch korrekte Schalentheorie führt.

### 5.1.3 7-Parameter-Kinematik

In PAUMIER UND RAOULT (1997) und RÖSSLE U. A. (1999) werden für Plattentheorien Beweise geführt, dass bereits eine sogenannte (1,1,2)-Kinematik in Verbindung mit unmodifizierten Stoffgesetzen zu einer asymptotisch korrekten Theorie führt.

Bei der (1,1,2)-Kinematik wird für die Verschiebungen senkrecht zur Schalenebene ein in  $\theta^3$  quadratischer Verschiebungsansatz verwendet. Die Ansätze für die Verschiebungen in Richtung der Schalenebene bleiben entsprechend der 6-Parameter-Kinematik linear, woraus die Bezeichnung (1,1,2)-Kinematik (linear, linear, quadratisch) resultiert.

Wurden bei der 9-Parameter-Kinematik im Vergleich zur 6-Parameter-Kinematik jeweils alle drei Verschiebungskomponenten mit einem weiteren Parameter angereichert, so unterscheidet sich eine (1,1,2)-Kinematik hiervon lediglich um einen einzigen zusätzlichen Freiheitsgrad, weshalb eine solche Kinematik meist als 7-Parameter-Kinematik bezeichnet wird. Obwohl oben genannte Beweise lediglich für Plattentheorien gelten, lassen die Ergebnisse numerischer Untersuchungen vermuten, dass Schalentheorien basierend auf einer 7-Parameter-Kinematik ebenfalls asymptotisch korrekt sind.

Wird der siebte Parameter mit  $\Upsilon$  bezeichnet, kann das Verschiebungsfeld einer 7-Parameter-Kinematik als

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^0 + \theta^3 \mathbf{v}^1 + \Upsilon \mathbf{r}^1 (\theta^3)^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \quad (5.6)$$

angegeben werden. Die Kopplung des siebten Parameters an den Direktor  $\mathbf{r}^1$  der aktuellen Konfiguration gewährleistet, dass tatsächlich nur die Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale modifiziert werden. Die kovarianten Basisvektoren in der Momentankonfiguration lauten somit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} = \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 + \theta^3 \mathbf{v}_{,\alpha}^1 + (\Upsilon_{,\alpha} \mathbf{r}^1 + \Upsilon \mathbf{r}_{,\alpha}^1) (\theta^3)^2 \quad \text{und} \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{G}_3 + \mathbf{u}_{,3} = \mathbf{v}^1 + 2 \Upsilon \theta^3 \mathbf{r}^1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, dass der siebte Parameter  $\Upsilon$  vom Ort in der Schalenebene abhängt. Die Abhängigkeit von den beiden Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  muss bei der Ableitung  $\Upsilon_{,\alpha}$  berücksichtigt werden.

Eine auf dieser Kinematik basierende Schalentheorie sowie finite Schalenelementformulierungen sind beispielsweise in SANSOUR (1995) zu finden.

In Gleichung (5.8) sind die Verzerrungsanteile der oben beschriebenen 7-Parameter-Kinematik angegeben.

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^0) \\
 E_{\alpha 3}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}^1) \\
 E_{33}^0 &= \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1 \\
 E_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1) \\
 E_{\alpha 3}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}^1) + (\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^0) \Upsilon \\
 E_{33}^1 &= (2 \mathbf{R}^1 \cdot \mathbf{r}^1 + 2 \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{r}^1) \Upsilon \\
 E_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 \Upsilon + \mathbf{r}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 \Upsilon \\
 &\quad + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 \Upsilon_{,\alpha} + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{r}_{,\beta}^1 \Upsilon + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\alpha} \\
 &\quad + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \Upsilon) \\
 E_{\alpha 3}^2 &= \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 \Upsilon + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}^1 \Upsilon + \frac{1}{2} \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}^1 \Upsilon_{,\alpha} + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \Upsilon \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\alpha} \\
 E_{33}^2 &= 2 \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon^2 \\
 E_{\alpha\beta}^3 &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 \Upsilon_{,\alpha} + \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 \Upsilon + \mathbf{r}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 \Upsilon \\
 &\quad + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\beta}^1 \Upsilon + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\alpha} + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \Upsilon) \\
 E_{\alpha 3}^3 &= \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\alpha} \Upsilon + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \Upsilon^2 \\
 E_{33}^3 &= 0 \\
 E_{\alpha\beta}^4 &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}^1 \Upsilon_{,\alpha} \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \Upsilon \Upsilon_{,\beta} + \mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\beta}^1 \Upsilon \Upsilon_{,\alpha} + \mathbf{r}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{r}_{,\beta}^1 \Upsilon^2) \\
 E_{\alpha 3}^4 &= 0 \\
 E_{33}^4 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Darin sind dieselben Verzerrungsanteile ungleich null wie bei der 9-Parameter-Kinematik aus Gleichung (5.5), d.h. es entstehen ebenfalls kubische und quartische Anteile. Die im Vergleich zur 6-Parameter-Kinematik (siehe Gleichung (5.4)) hinzukommenden Terme sind dabei alle vom siebten Parameter  $\Upsilon$  bzw. dessen Ableitungen abhängig. Im Unterschied hierzu werden die entsprechenden Anteile bei der 9-Parameter-Kinematik vom Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}^2$ , den quadratisch in  $\theta^3$  verlaufenden Verschiebungsanteilen, bestimmt. Im Gegensatz zum Parameter  $\Upsilon$  handelt es sich beim Verschiebungsvektor

$\mathbf{v}^2$  jedoch um drei voneinander unabhängige skalare Parameter, was den höheren numerischen Aufwand der 9-Parameter-Kinematik im Vergleich zur 7-Parameter-Kinematik unterstreicht.

Der entscheidende Vorteil des siebten Parameters liegt jedoch in der Modifikation des linearen Anteils der transversalen Normalverzerrungen  $E_{33}^1$ . Im Vergleich zur 6-Parameter-Kinematik aus Gleichung (5.4) sind nun alle konstanten und linearen Einträge vollständig besetzt, d.h. der zum transversalen Normalspannungsanteil  $S_1^{33}$  energetisch konjugierte Anteil  $E_{33}^1$  ist somit vorhanden. Die bei der 6-Parameter-Kinematik in Abschnitt 5.1.1 unter reiner Biegung auftretenden parasitären Spannungen verschwinden und es entsteht ein asymptotisch korrektes Modell. Mit der 7-Parameter-Kinematik ist gleichzeitig diejenige Kinematik gefunden, die mit der geringsten Anzahl an Parametern zu einer asymptotisch korrekten dreidimensionalen Schalentheorie führt.

Wie in den vorangegangenen Abschnitten bereits erwähnt wurde, sind für die asymptotische Korrektheit lediglich die konstanten und linearen Verzerrungsanteile notwendig. Anteile höherer Ordnung dürfen zum Preis einer etwas „weniger dreidimensionalen“ Lösung vernachlässigt werden. Falls bei der in Gleichung (5.8) beschriebenen 7-Parameter-Kinematik die quadratischen Anteile beibehalten werden, ist wie bei der 9-Parameter-Kinematik kein Schubkorrekturfaktor nötig, da mit  $E_{\alpha 3}^2$  der quadratische Querschubverzerrungsverlauf bereits enthalten ist.

BÜCHTER UND RAMM (1992) schlagen eine alternative Vorgehensweise vor, um den Defekt der 6-Parameter-Kinematik zu beheben. Wurde bei der Anreicherung des Verschiebungsfeldes um einen siebten Parameter (siehe oben) indirekt erreicht, dass der lineare Verzerrungsanteil  $E_{33}^1$  verfügbar ist, so werden hier direkt die Verzerrungen modifiziert. Mit Hilfe der EAS-Methode (SIMO UND RIFAI 1990) wird basierend auf dem modifizierten Prinzip von Hu-Washizu (siehe Abschnitt 6.3) direkt der Verzerrungsanteil  $E_{33}^1$  um einen siebten Freiheitsgrad  $\tilde{E}_{33}^1$  erweitert (siehe Gleichung (5.9)).

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^0) \\
 E_{\alpha 3}^0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}^1) \\
 E_{33}^0 &= \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1 \\
 E_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^0 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^0 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^1) \\
 E_{\alpha 3}^1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}^1 + \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}^1) \\
 E_{33}^1 &= \tilde{E}_{33}^1 \\
 E_{\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\beta}^1 + \mathbf{v}_{,\beta}^1 \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^1 + \mathbf{v}_{,\alpha}^1 \cdot \mathbf{v}_{,\beta}^1) \\
 E_{\alpha 3}^2 &= 0 \\
 E_{33}^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Im Rahmen der Formulierung finiter Elemente kann das zu steife Verhalten der 6-Parameter-Kinematik auch als Poisson-Dickenlocking identifiziert werden. Da die Ursprünge der EAS-Methode in der Formulierung effizienter finiter Elemente liegen, wird das Einbringen des linearen Verzerrungsanteils  $\tilde{E}_{33}^1$  von vielen Autoren daher dem Gebiet der Elementtechnologie zugeschrieben, beispielsweise bei EBERLEIN UND WRIGGERS (1997). Im Gegensatz dazu erfolgt bei BISCHOFF (1999) die Modifikation bereits auf der Ebene der Schalentheorie. Unabhängig davon, ob der siebte Parameter der Elementtechnologie oder der Schalentheorie zugerechnet wird, entstehen bei sonst äquivalenten mechanischen Annahmen gleichwertige dreidimensionale Schalenelemente.

Die in den Gleichungen (5.8) und (5.9) gegebenen 7-Parameter-Formulierungen sind nicht völlig identisch. In Gleichung (5.8) entstehen deutlich mehr zusätzliche Terme bzw. Verzerrungsanteile als in Gleichung (5.9), wo lediglich die Komponente  $E_{33}^1$  modifiziert wird. Die EAS-Methode erlaubt es, gezielt einzelne Komponenten des zum Verschiebungsfeld kompatiblen Verzerrungsfeldes anzureichern. Im Gegensatz dazu muss sich in Gleichung (5.8) zu dem durch einen quadratischen Anteil angereicherten Verschiebungsfeld ein kompatibles Verzerrungsfeld einstellen, was sich in Form zusätzlicher Terme bemerkbar macht. So entstehen in Gleichung (5.8) im Gegensatz zu Gleichung (5.9) kubische und quartische Anteile und bei den quadratischen Verzerrungskomponenten ist neben  $E_{33}^2$  auch der Anteil  $E_{\alpha 3}^2$  vorhanden. Letzteres bedeutet, dass bei der 7-Parameter-Kinematik nach Gleichung (5.8) bereits quadratische Querschubverzerrungen enthalten sind und eine Korrektur der Querschubverzerrungsenergie nicht erforderlich ist.

Erfolgt im Gleichungssatz (5.9) eine Modifikation der Querschubverzerrung mit Hilfe der EAS-Methode (QUY UND MATZENMILLER 2008) bzw. wird der Schubkorrekturfaktor  $5/6$  verwendet, so zeigen numerische Untersuchungen, dass beide kinematischen Gleichungssätze zu Schalenformulierungen vergleichbarer Genauigkeit führen. Im Hinblick auf die numerische Effizienz von Elementformulierungen ist eine Gleichwertigkeit jedoch nur dann gegeben, falls der quadratische Verschiebungsverlauf aus Gleichung (5.8) als inkompatibel zwischen den Elementen angenommen wird, was ein Herauskondensieren des siebten Parameters  $\Upsilon$  auf Elementebene vergleichbar dem EAS-Ansatz erlaubt (SANSOUR (1995), PARISCH (1995)).

## 5.2 Integration in Dickenrichtung

Dreidimensionale Schalentheorien werden praktisch ausschließlich in Verbindung mit einem numerischen Lösungsverfahren, z.B. der Methode der finiten Elemente, verwendet. Darin sind numerische Integrationsverfahren ein fester Bestandteil und können somit auch für die Integration in Dickenrichtung herangezogen werden. Vereinfachende Annah-

men in den zu integrierenden Größen, wie sie z.B. in Gleichung (4.24) getroffen wurden, um eine analytische Vorabintegration zu ermöglichen, müssen nicht mehr explizit eingeführt werden. Da es sich bei der numerischen Integration um ein Näherungsverfahren handelt, fließen trotzdem implizit Näherungen ein, welche oft dem numerischen Lösungsverfahren und somit der Diskretisierung zugerechnet werden. Die Diskretisierung über die Schalendicke wird im Gegensatz zur Diskretisierung in der Schalenebene jedoch ausschließlich von der Ansatzordnung der Kinematik der verwendeten Schalenformulierung bestimmt (Semidiskretisierung in Dickenrichtung siehe Abschnitt 5.1). Näherungen, welche durch die numerische Integration in Dickenrichtung auftreten, sind daher nicht der finiten Elemente Diskretisierung zuzuschreiben, sondern müssen als Annahmen der zugrundeliegenden Schalentheorie betrachtet werden.

Numerische Integrationsverfahren stellen darüber hinaus die Vorabintegration, auch „explizite Dickenintegration“ genannt (ZIENKIEWICZ u. A. (1971), BÜCHTER (1992)), als solches in Frage. Die Vorabintegration ist wesentlicher Bestandteil der Dimensionsreduktion (siehe Abschnitt 3.2), mit deren Hilfe der Parameter  $\theta^3$  zur Vereinfachung der Gleichungssätze eliminiert wird. Eine solche Vereinfachung ist bei der Verwendung der Methode der finiten Elemente jedoch nicht zwingend notwendig, d.h. es kann auf die Vorabintegration in Dickenrichtung verzichtet werden. Diese Herangehensweise wird in BÜCHTER (1992) als „implizite Dickenintegration“ bezeichnet.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst aufgezeigt, welchen Einfluss die Integrationsart in Dickenrichtung (explizit oder implizit) auf die Formulierung einer Schalentheorie hat. Im Anschluss daran werden verschiedene numerische Integrationsverfahren kurz vorgestellt sowie ihre Genauigkeit bei der Dickenintegration von Schalenformulierungen abgeschätzt.

### 5.2.1 Innere Größen einer Schalenformulierung

Die Wahl der Integrationsart in Dickenrichtung bestimmt, in welchen inneren Größen die Formulierung einer Schalentheorie erfolgt, und ist daher maßgeblich für die Form der kinematischen und konstitutiven Gleichungen verantwortlich. Um die Unterschiede aufzuzeigen, wird die Gleichung zur Berechnung der internen Verzerrungsenergie im Schalenraum  $\Pi^{int}$  herangezogen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hierfür auf eine Kinematik mit linearem Verschiebungsansatz über die Schalendicke, d.h. eine 6- bzw. 7-Parameter Kinematik, zurückgegriffen.

In Gleichung (5.10) sind die Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  angegeben, welche bei einer linearen Kinematik konstante, lineare und quadratische Anteile in  $\theta^3$  beinhalten.

$$E_{ij} = E_{ij}^0 + E_{ij}^1 \theta^3 + E_{ij}^2 (\theta^3)^2 \quad (5.10)$$

Erfolgt, wie in Gleichung (3.25) dargestellt, eine Vorabintegration über die Schalendicke, so stellen die Anteile  $E_{ij}^0$ ,  $E_{ij}^1$  bzw.  $E_{ij}^2$  die kinematischen Variablen dar. Mit den Komponenten des vorabintegrierten Stoffgesetzes  $D_N^{ijkl}$  ergibt sich die Verzerrungsenergie im Schalenraum zu

$$\begin{aligned}
 2\Pi^{int} &= \int_{\Omega^0} \begin{bmatrix} E_{ij}^0 \\ E_{ij}^1 \\ E_{ij}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} \\ D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & D_4^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{kl}^0 \\ E_{kl}^1 \\ E_{kl}^2 \end{bmatrix} d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} E_{ij}^0 \hat{n}_0^{ij} + E_{ij}^1 \hat{n}_1^{ij} + E_{ij}^2 \hat{n}_2^{ij} d\Omega^0 .
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die zugeordneten statischen Variablen sind somit die Schnittgrößen  $\hat{n}_0^{ij}$ ,  $\hat{n}_1^{ij}$  und  $\hat{n}_2^{ij}$ , d.h. im Falle der expliziten Integration entsteht eine schnittgrößenbasierte Schalenformulierung. Da die Integration über  $\theta^3$  vorab ausgeführt wird, ist in Gleichung (5.11) lediglich noch über die Mittelfläche  $\Omega^0$  der Schale zu integrieren.

Bei einer impliziten Dickenintegration werden direkt die Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  als kinematische Variable verwendet. Die Verzerrungsenergie im Schalenraum berechnet sich nach Gleichung (5.12) zu

$$\begin{aligned}
 2\Pi^{int} &= \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} E_{ij} C^{ijkl} E_{kl} Z d\theta^3 d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} \int_{-(T/2)}^{T/2} E_{ij} S^{ij} Z d\theta^3 d\Omega^0 .
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

In diesem Fall stellen die Spannungskomponenten  $S^{ij}$  die statischen Variablen dar, wodurch sich eine spannungsbasierte Formulierung ergibt. Die Integration über  $\theta^3$ , welche bei der expliziten Dickenintegration vorab erfolgt, muss nun im Rahmen der Berechnung der Verzerrungsenergie ausgeführt werden.

Sowohl die explizite als auch die implizite Dickenintegration liefert für die Verzerrungsenergie  $\Pi^{int}$  dasselbe Ergebnis. Beide Integrationsarten sind daher aus mechanischer Sicht gleichwertig. Welcher Ansatz letztendlich in einer Schalenelementformulierung zum Einsatz kommt, wird daher durch den Implementierungsaufwand, vor allem aber durch die numerische Effizienz der entstehenden Formulierung, bestimmt.

Die Struktur der Gleichungen (5.11) und (5.12) entspricht bereits der Gleichungsstruktur  $\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega$  für das Aufstellen von Elementsteifigkeitsmatrizen (siehe z.B. Kapitel 6). Vergleicht man die Integranden beider Gleichungen, so fällt auf, dass in Glei-

chung (5.11) ohne Berücksichtigung von Symmetrien ein Produkt der Form  $X_{ij} Y^{ijkl} X_{kl}$  insgesamt neunmal, in Gleichung (5.12) dagegen nur einmal ausgeführt werden muss. Vernachlässigt man die quadratischen Anteile  $E_{ij}^2$ , so reduziert sich der Aufwand bei einer schnittgrößenbasierten Formulierung erheblich. Die zu  $E_{ij}^2$  gehörigen Zeilen und Spalten im Integranden von Gleichung (5.11) verschwinden und das Produkt der Form  $X_{ij} Y^{ijkl} X_{kl}$  muss nur noch viermal ausgeführt werden. Das Vernachlässigen der quadratischen Anteile bei einer spannungsbasierten Formulierung ist prinzipiell möglich, führt jedoch nicht zu einer Reduktion der Rechenoperationen.

Zwar müssen bei der impliziten Integration in Gleichung (5.12) weniger Multiplikationen im Integranden ausgeführt werden, im Vergleich zur expliziten Integration muss jedoch zusätzlich das Integral über  $\theta^3$  ausgeführt werden. Ob dabei eine spannungs- oder schnittgrößenbasierte Elementformulierung wirtschaftlicher ist, hängt im Wesentlichen von der Anzahl der Integrationspunkte (Stützstellen) in Dickenrichtung des verwendeten numerischen Integrationsverfahrens ab (siehe Abschnitt 5.2.2). Bei  $n$  Integrationspunkten in Dickenrichtung muss bei der expliziten Dickenintegration der Integrand in Gleichung (5.11) lediglich einmal sowie der Integrand bei der Vorabintegration des Stoffgesetzes in Gleichung (3.25)  $n$ -mal ausgewertet werden. Bei der impliziten Integration dagegen ist der Integrand stets  $n$ -mal zu berechnen. Geht man davon aus, dass die Vorabintegration weniger aufwendig ist als das  $n$ -malige Auswerten des Integranden in Gleichung (3.25), so ist eine schnittgrößenbasierte Formulierung bei großem  $n$  mit Blick auf die Rechenzeit sicherlich effizienter. Ob ein Wirtschaftlichkeitswechsel erfolgt, und bei welcher Zahl an Integrationspunkten er dann erfolgen würde, ist von der jeweiligen Implementierung abhängig. Messungen der Rechenzeit in BISCHOFF (1999) ergaben, dass für zwei Integrationspunkte eine spannungsbasierte Formulierung effizienter ist. Bereits ab drei Integrationspunkten weist eine schnittgrößenbasierte Formulierung (quadratische Anteile vernachlässigt) Vorteile bei der Recheneffizienz auf.

### 5.2.2 Numerische Integration als Teil der Schalentheorie

Prinzipiell kann für die Dickenintegration jedes stabile Integrationsverfahren eingesetzt werden. Einen guten Überblick zu unterschiedlichen Verfahren sowie deren Eigenschaften gibt z.B. SCHWARZ (2009).

Bei der Methode der finiten Elemente kommt im Allgemeinen die Gauß-Integration zum Einsatz, da sie eine sehr hohe Genauigkeit bei gleichzeitig geringem numerischem Aufwand aufweist. Bei Schalenelementen werden aber auch geschlossene Newton-Cotes-Integrationsformeln, wie z.B. die Simpson-Integration, verwendet, die im Gegensatz zur Gauß-Integration auch Stützstellen an den Intervallrändern besitzen (SCHWARZ 2009). Somit sind direkt an der Schalenober- bzw. -unterseite Auswertepunkte vorhanden, die beispielsweise bei der Spannungsberechnung genutzt werden können.

Sowohl die Gauß-Integration als auch die Newton-Cotes-Integrationsformeln liefern bei der Integration von Polynomen teilweise exakte Ergebnisse. Bei der Gauß-Integration lässt sich mit  $n$  Integrationspunkten ein Polynom der Ordnung  $m = 2n - 1$  exakt integrieren. Unter den Newton-Cotes-Integrationsformeln liefert die Trapezregel für Polynome bis zum Grad eins, die Simpson-Integration für Polynome bis zum Grad drei exakte Ergebnisse. Für höhere Polynomgrade bzw. andere Funktionsklassen liefern diese numerischen Integrationsverfahren lediglich Näherungswerte der Integrale.

Für die 7-Parameter-Kinematik aus Gleichung (5.9) wird im Folgenden für den bei der Berechnung der Verzerrungsenergie  $\Pi^{int}$  auftretenden Integranden untersucht, welche Abhängigkeit von der Integrationsvariable  $\theta^3$  besteht. Da bei der Dickenintegration beide Integrationsarten (explizit und implizit) auf dasselbe Ergebnis führen, ist die Untersuchung nur einer der beiden Varianten notwendig. Es wird die implizite Darstellung aus Gleichung (5.12) verwendet, deren Integrand  $(E_{ij} C^{ijkl} E_{kl} Z)$  der Übersicht halber mit  $\text{INT}^{7p}$  abgekürzt ist. Aufgrund der bereits erwähnten Verwandtschaft zwischen den Gleichungen zur Berechnung der Verzerrungsenergie und von Elementsteifigkeitsmatrizen sind Rückschlüsse auf finite Schalenelementformulierungen möglich.

Die Komponenten des Materialtensors  $C^{ijkl}$  sowie die Determinante des Shifters  $Z$  werden durch Größen der Referenzkonfiguration bestimmt und hängen damit lediglich von der Ausgangsgeometrie der Schale ab. Mit der über die Schalendicke linearen Geometriebeschreibung nach Gleichung (5.1) und den daraus resultierenden Basisvektoren  $\mathbf{G}_\alpha$  und  $\mathbf{G}_3$  nach Gleichung (5.3) folgt aus Gleichung (3.8), dass es sich bei  $Z$  maximal um ein in  $\theta^3$  quadratisches Polynom handelt.

$$Z = \mathcal{O}([\theta^3]^2) = \mathcal{O}(2) \quad (5.13)$$

Bei den Anteilen des Stoffgesetzes fließt ein Produkt aus kontravarianten Metrikkomponenten  $G^{ij}$  in die einzelnen Terme  $C^{ijkl}$  ein. Da sich die kontravarianten Metrikkomponenten aus der Inversen der Komponentenmatrix der kovarianten Metrik ergeben, handelt es sich bei  $G^{ij}$  im allgemeinsten Fall um gebrochen rationale Funktionen, für die in Gleichung (5.14) die maximale Polynomordnung des Zählers und Nenners angegeben ist.

$$\{G^{ij}\} = \frac{1}{\mathcal{O}(4)} \begin{Bmatrix} \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(3) \\ \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(3) \\ \mathcal{O}(3) & \mathcal{O}(3) & \mathcal{O}(4) \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Gleichung (5.15) zeigt in gleicher Weise die Abhängigkeit von  $\theta^3$  für die Komponenten des Stoffgesetzes. Hierfür wird Voigt-Notation verwendet, wobei die Einträge in Gleichung (5.15) entsprechend der Reihenfolge  $[E_{11}, 2E_{12}, 2E_{13}, E_{22}, 2E_{23}, E_{33}]$  der Verzerrungskomponenten sortiert sind.

$$\{C^{ij}\} = \frac{1}{\mathcal{O}(8)} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) \\ \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) \\ \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(7) \\ \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(4) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) \\ \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(5) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(7) \\ \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(7) & \mathcal{O}(6) & \mathcal{O}(7) & \mathcal{O}(8) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Die Abhängigkeit der Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  von  $\theta^3$  wird maßgeblich durch die gewählte Ordnung des Verschiebungsfeldes, im Falle der 7-Parameter-Kinematik einem linearen Ansatz, bestimmt. Ob in Gleichung (5.9) allerdings quadratische Verzerrungskomponenten  $E_{\alpha\beta}^2$  auftreten, hängt von der Ausgangsgeometrie der Struktur ab. Ist diese gekrümmt, so sind entsprechende Terme vorhanden, handelt es sich dagegen um eine ebene Struktur, so entfallen diese.

Wertet man den Integranden  $\text{INT}^{7p}$  für eine allgemeine Schalengeometrie aus und nimmt dabei an, dass alle Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  ungleich null sind, so ergibt sich

$$\text{INT}^{7p} = \frac{\mathcal{O}(12)}{\mathcal{O}(8)}. \quad (5.16)$$

Die maximale Polynomordnung Acht des Nenners wird dabei ausschließlich vom Stoffgesetz bestimmt. Die Ordnung Zwölf des Zählers von  $\text{INT}^{7p}$  setzt sich aus dem linearen Verzerrungsanteil  $E_{33}^1$ , dem Anteil achter Ordnung im Zähler von  $C^{3333}$  und dem quadratischen Term von  $Z$  zusammen. Es sei abschließend angemerkt, dass sich bei einer 6-Parameter-Kinematik aufgrund des fehlenden Verzerrungsanteils  $E_{33}^1$  die Ordnung des Integranden der Verzerrungsenergie zu  $\text{INT}^{6p} = \mathcal{O}(10)/\mathcal{O}(8)$  ergeben würde.

Wie viele Integrationspunkte sind nun bei der Verwendung eines numerischen Integrationsverfahrens für die Dickenintegration notwendig, um den gebrochen rationalen Integranden aus Gleichung (5.16) mit ausreichender Genauigkeit zu integrieren?

Sowohl für die Gauß-Integration als auch für die Newton-Cotes-Integrationsformeln sind in der Literatur Fehlerterme bekannt, die prinzipiell die Angabe einer oberen Fehler-schranke zulassen (WIKIPEDIA (2012), SCHWARZ (2009)). Für eine allgemeine Schalen-geometrie gestaltet sich das Auswerten entsprechender Fehlerterme jedoch als schwierig und der Erkenntnisgewinn für die Praxis, z.B. der Entwicklung von finiten Schalenele-menten, ist als eher gering einzuschätzen.

Die Beantwortung obiger Frage erfolgt in zwei Stufen, wobei als Erstes untersucht wird, wie viele Integrationspunkte mindestens notwendig sind, damit die asymptotische Korrektheit einer auf der 7-Parameter-Kinematik basierenden Schalenformulierung gewähr-leistet ist. Der Integrand  $\text{INT}^{7p}$  ist hierfür zunächst auf das Wesentliche zu reduzieren. Wie die Erfahrung aus den klassischen Schalentheorien (siehe Kapitel 4) zeigt, müssen für eine asymptotisch korrekte Schalenformulierung weder die quadratischen Verzer-

rungsanteile  $E_{\alpha\beta}^2$  noch die aus der Krümmung der Struktur im Schalenshifter und im Stoffgesetz entstehenden Anteile berücksichtigt werden. Die Determinante des Schalenshifters  $Z$  nimmt dadurch den Wert Eins an und die Komponenten  $C^{ijkl}$  des Stoffgesetzes verlieren ihre Abhängigkeit von  $\theta^3$ , wodurch aus dem Integranden  $\text{INT}^{7p}$  ein Polynom zweiter Ordnung in  $\theta^3$  wird. Dieses muss, um die asymptotische Korrektheit sicherzustellen, exakt integriert werden.

Bei der Gauß-Integration sind hierfür zwei oder mehr Integrationspunkte notwendig, bei den Newton-Cotes-Integrationsformeln muss mindestens die Simpson-Integration verwendet werden. Zwar lässt sich bei Verwendung der Trapezregel die Genauigkeit durch Unterteilen des Integrationsgebietes in Teilintervalle beliebig steigern, der Wert des Integrals eines quadratischen Polynoms wird jedoch nie exakt getroffen. Wie die Ergebnisse aus Abschnitt 5.3 zeigen, entsteht bei der Verwendung der Trapezregel keine asymptotisch korrekte 7-Parameter-Formulierung.

Der zweite Teil der oben aufgeworfenen Frage, nämlich inwieweit diese Mindestanzahl an Integrationspunkten auch die Energiebeiträge der quadratischen Verzerrungsanteile bzw. der aus der Krümmung resultierenden Anteile in Material und Shifter erfassen kann, wird im folgenden Abschnitt anhand numerischer Beispiele beantwortet. In diesem Zusammenhang muss untersucht werden, ob die Genauigkeitssteigerung, welche durch entsprechende Terme zu erwarten ist, eventuell aufgrund einer zu geringen Anzahl an Integrationspunkten zunichte gemacht wird.

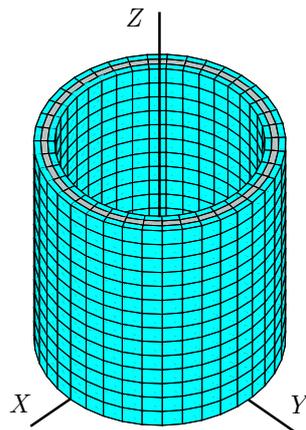
### 5.3 Numerische Untersuchungen

Mit Hilfe der Method of Manufactured Solutions (siehe Abschnitt 4.4) und der Zylinderschale aus Abbildung 4.6 werden die Auswirkungen unterschiedlicher Annahmen auf die Ergebnisqualität dreidimensionaler Schalentheorien untersucht. Hierzu zählen die numerische Integration, das Berücksichtigen oder Vernachlässigen von Terme höherer Ordnung in der Kinematik bzw. von Krümmungsbeiträgen sowie Kombinationen hieraus. Die unterschiedlichen Konfigurationen werden anhand des relativen Fehlers der internen Verzerrungsenergie nach Gleichung (4.71) verglichen.

Die jeweilige Referenzlösung  $\Pi_{3D}^{int}$  wird dabei immer durch analytische Integration in alle drei Raumrichtungen ( $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ) generiert. Unabhängig davon, welches Integrationsverfahren (analytisch oder numerisch) in Dickenrichtung ( $\theta^3$ ) zum Einsatz kommt, erfolgt die Integration auf der Mittelfläche ( $\theta^1, \theta^2$ ) stets analytisch. Somit ist gewährleistet, dass ausschließlich Einflüsse, die aus der Schalentheorie resultieren, eine Rolle spielen und Überlegungen zu etwaigen Diskretisierungsfehlern in der Schalenebene hinfällig sind.

Im diesem Abschnitt kommen drei verschiedene Verschiebungsfelder zum Einsatz. Es handelt sich dabei um die radiale Aufweitung des Zylinders aus Abbildung 4.7 sowie

die zweiwellige dehnungslose Verformung aus Abbildung 4.9. Beide Verschiebungsfelder wurden zur Untersuchung von klassischen Schalentheorien herangezogen und beinhalten daher keine Änderung der Schalendicke. Aus diesem Grund wird mit dem Verschiebungsfeld Dehnung der Zylinderwand aus Abbildung 5.1 ein drittes Verschiebungsfeld verwendet, bei dem die Dickenänderung der Schale die Verzerrungsenergie dominiert.



Verschiebungsfeld:

$$u_1 = 0,0$$

$$u_2 = 0,0$$

$$u_3 = 0,2 \theta^3$$

$$v_1 = 0,0$$

$$v_2 = 0,0$$

$$v_3 = 0,0$$

**Abbildung 5.1:** Dehnung der Zylinderwand.

Für die Verschiebungsfelder der radialen Aufweitung und der zweiwelligen dehnungslosen Verformung des Zylinders wird jeweils der Fehlerverlauf einer bestmöglichen Formulierung nach Kapitel 4 zum Vergleich mit angegeben. Da das Attribut „bestmöglich“ jedoch nur in Verbindung mit klassischen Schalentheorien zulässig ist (mit dreidimensionalen Schalenformulierungen können genauere und damit bessere Lösungen erzielt werden!), wird in den folgenden Diagrammen der Name des Autors der ersten bestmöglichen Schalenformulierung (Naghdi) zur Bezeichnung entsprechender Fehlerkurven verwendet. Für das Verschiebungsfeld Dehnung der Zylinderwand kann aufgrund der enthaltenen Dickenänderung kein entsprechender Vergleich erfolgen.

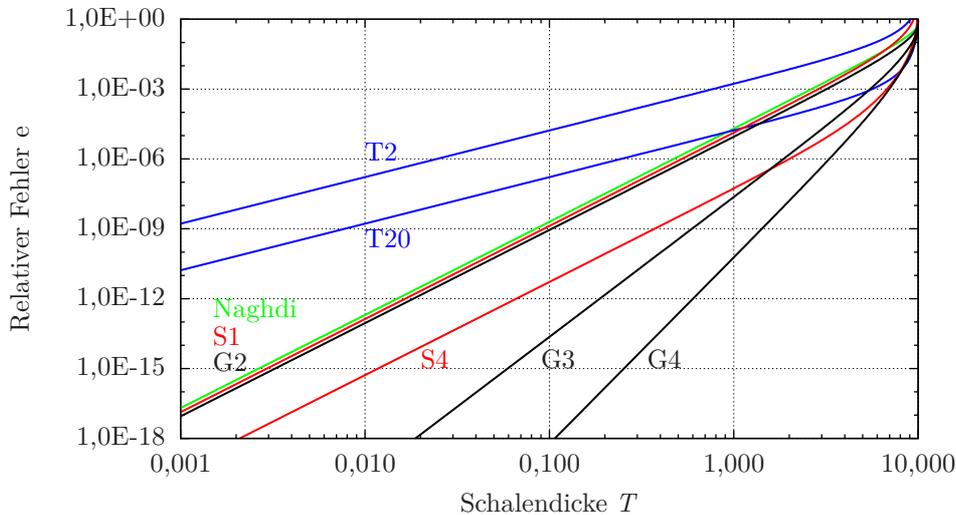
### 5.3.1 Einfluss der numerischen Integration

In diesem Abschnitt werden alle aus der Krümmung der Struktur resultierenden Terme sowie die quadratischen Verzerrungskomponenten bei der Berechnung der Verzerrungsenergie mit einbezogen. Im Gegensatz zur Referenzlösung kommen für die Dickenintegration unterschiedliche numerische Integrationsverfahren (Gauß-Integration, Trapezregel und Simpson-Integration) zum Einsatz. Da alle Verschiebungsfelder maximal linear in  $\theta^3$  verlaufen, muss mit einer 2-Punkt-Gauß-Integration bzw. einer Simpson-Integration auf einem Intervall für alle Beispiele ein asymptotisch korrektes Ergebnis erzielt werden (siehe Abschnitt 5.2.2).

In den Abbildungen 5.2, 5.3 und 5.4 sind für alle drei Verschiebungsfelder die Verläufe der Energiefehler für die verschiedenen Integrationsverfahren angegeben. Hierfür wurde die Trapezregel mit zwei bzw. 20 Integrationsintervallen (T2, T20), die Simpson-Integration mit einem bzw. vier Intervallen (S1, S4) sowie die Gauß-Integration mit zwei, drei und vier Integrationspunkten (G2, G3, G4) über die Dicke verwendet.

Der numerische Aufwand eines Integrationsverfahrens ist dabei proportional zur Anzahl der Stützstellen, an denen der Integrand ausgewertet werden muss. Bei der Trapezregel mit zwei Intervallen sind dies drei Stützstellen, bei 20 Intervallen muss bereits an 21 Stellen ausgewertet werden. Die Simpson-Integration auf einem Intervall benötigt drei Punkte, für vier Intervalle sind bereits neun Auswertepunkte erforderlich. Bei der Gauß-Integration ist die Anzahl der Stützstellen direkt über die Anzahl der Integrationspunkte (Gauß-Punkte) gegeben.

Abbildung 5.2 zeigt die Ergebnisse für das Verschiebungsfeld radiale Aufweitung des Zylinders. Es handelt sich dabei um einen membrandominierten Verzerrungszustand, bei dem lediglich die in  $\theta^3$  konstanten Verzerrungsanteile führend sind. Die daraus hervorgehenden Anteile im Integranden der Verzerrungsenergie weisen somit ebenfalls keine Abhängigkeit mehr von  $\theta^3$  auf. Da alle verwendeten Integrationsverfahren Polynome bis zum Grad Eins exakt integrieren können, verschwindet in Abbildung 5.2 der Energiefehler im Limit der Schalendicke  $T \rightarrow 0$  für alle Konfigurationen.



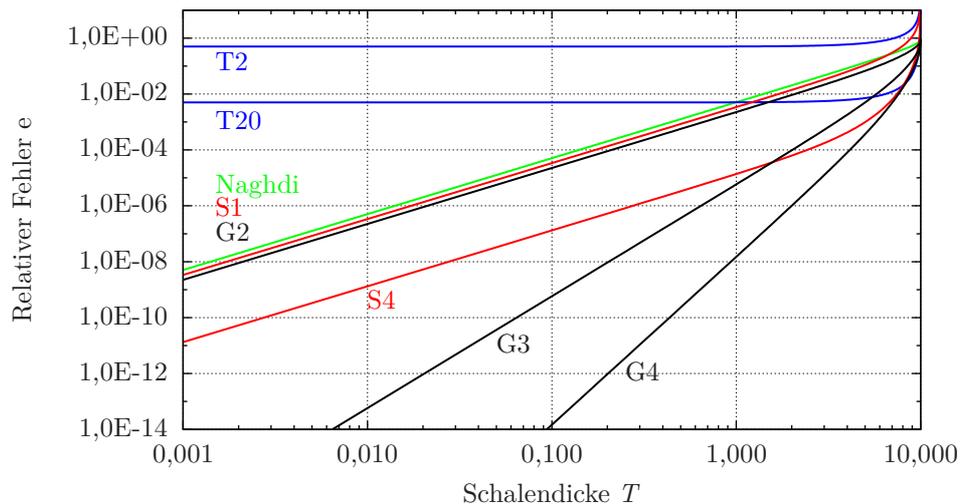
**Abbildung 5.2:** Energiefehler bei radialer Aufweitung des Zylinders für unterschiedliche numerische Integrationsverfahren.

Die Raten (Steigungen der Kurven), mit denen der Fehler abnimmt, sind jedoch stark vom verwendeten Integrationsverfahren abhängig. Die Trapezregel mit zwei Integrationsintervallen (T2) liefert das schlechteste Ergebnis. Werden anstatt zweier Teilintervalle zwanzig verwendet (T20), so wird der Fehler zwar kleiner, die Konvergenzge-

schwindigkeit bleibt jedoch gleich. Ein vergleichbares Verhalten ist auch für die Simpson-Integration zu beobachten. Erfolgt die Integration anstatt auf einem Intervall (S1) auf vier Teilintervallen (S4), so erfolgt auch hier lediglich eine Parallelverschiebung der Fehlerkurve nach unten. Es zeigt sich, dass die Simpson-Integration auf einem Intervall (S1) sowie die 2-Punkt-Gauß-Integration (G2) ein ähnliches Ergebnis liefern wie Naghdi, wo quadratische Verzerrungsterme sowie Krümmungsbeiträge im Material und Shifter von vornherein vernachlässigt werden. Erst bei drei bzw. vier Gauß-Punkten wird die Konvergenzgeschwindigkeit deutlich größer.

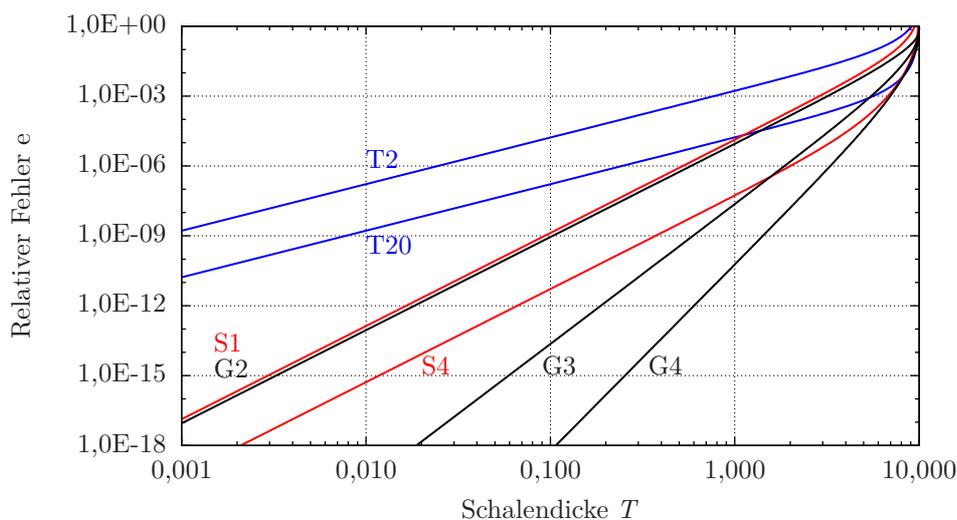
Im Falle der zweiwelligen dehnungslosen Verformung gehören die linear in  $\theta^3$  verlaufenden Verzerrungsanteile zu den führenden Termen. Die dadurch im Integrand von  $\Pi^{int}$  entstehenden quadratischen Anteile müssen von einem numerischen Integrationsverfahren exakt erfasst werden, damit asymptotisch korrekte Ergebnisse entstehen.

Bei der Integration mit Hilfe der Trapezregel ist dies, wie Abbildung 5.3 zeigt, nicht gegeben. Im Limit der Schalendicke  $T \rightarrow 0$  verbleibt ein endlicher Fehler. Dieser Fehler wird durch Verwendung zusätzlicher Teilintervalle im Integrationsgebiet (T20) zwar kleiner, bleibt jedoch trotzdem endlich. Auch in diesem Beispiel zeigt sich, dass eine 2-Punkt-Gauß-Integration (G2) bzw. die Simpson-Integration (S1) der exakten Gleichung für  $\Pi^{int}$  keine wesentlich bessere Lösung liefert als die Energiegleichung nach Naghdi. Der Fehler der Simpson-Integration lässt sich zwar durch Aufteilen des Integrationsgebietes in mehrere Teilintervalle reduzieren (S4), die Konvergenzgeschwindigkeit bleibt dabei jedoch dieselbe. Wie Abbildung 5.3 zeigt, kann lediglich bei der Gauß-Integration durch zusätzliche Integrationspunkte sowohl der Fehler verkleinert als auch die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht werden.



**Abbildung 5.3:** Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschiedliche numerische Integrationsverfahren.

Die Ergebnisse für das Verschiebungsfeld Dehnung der Zylinderwand aus Abbildung 5.4 sind mit den Ergebnissen der radialen Aufweitung des Zylinders aus Abbildung 5.2 vergleichbar. Auch hier ist für asymptotisch korrekte Ergebnisse lediglich die exakte Integration von in  $\theta^3$  konstanten Anteilen im Integranden von  $\Pi^{int}$  notwendig. Ein Vergleich mit der Lösung nach Naghdi kann für dieses Beispiel, wie oben bereits erwähnt, nicht erfolgen, da dort keine Dickenänderung vorgesehen ist.



**Abbildung 5.4:** Energiefehler bei der Dehnung der Zylinderwand für unterschiedliche numerische Integrationsverfahren.

Aus den Ergebnissen dieses Abschnitts können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden: Die Trapezregel ist für die Dickenintegration allgemeiner Schalenformulierungen ungeeignet, da hiermit keine asymptotisch korrekten Theorien entstehen. Werden bei linearen Verschiebungsansätzen (6- bzw. 7-Parameter-Kinematik) alle auftretenden Terme berücksichtigt, so liefert die Simpson-Integration mit einem Integrationsintervall (S1) bzw. die Gauß-Integration mit zwei Integrationspunkten (G2) ein mit der Lösung nach Naghdi vergleichbares Ergebnis. Hieraus folgt, dass das Mitführen von quadratischen Termen der Kinematik bzw. von Krümmungsbeiträgen im Material und Shifter nur in Verbindung mit einem entsprechend genauen numerischen Integrationsverfahren sinnvoll ist. Mit Blick auf die numerische Effizienz kommt hierfür lediglich die Gauß-Integration mit mindestens drei Integrationspunkten in Frage.

Die Forderung, dass alle Grundgleichungen einer Schalentheorie gleichmäßig approximiert werden sollten (KRÄTZIG (1973), siehe Abschnitt 4.1), ist daher im übertragenen Sinne auch an das numerische Integrationsverfahren zu stellen. Es sei abschließend angemerkt, dass für praktische Anwendungen mit zwei Integrationspunkten (G2) in den meisten Fällen eine ausreichende Genauigkeit erzielt werden kann.

### 5.3.2 Einfluss quadratischer Verzerrungsterme sowie der Krümmungsanteile im Material und Shifter

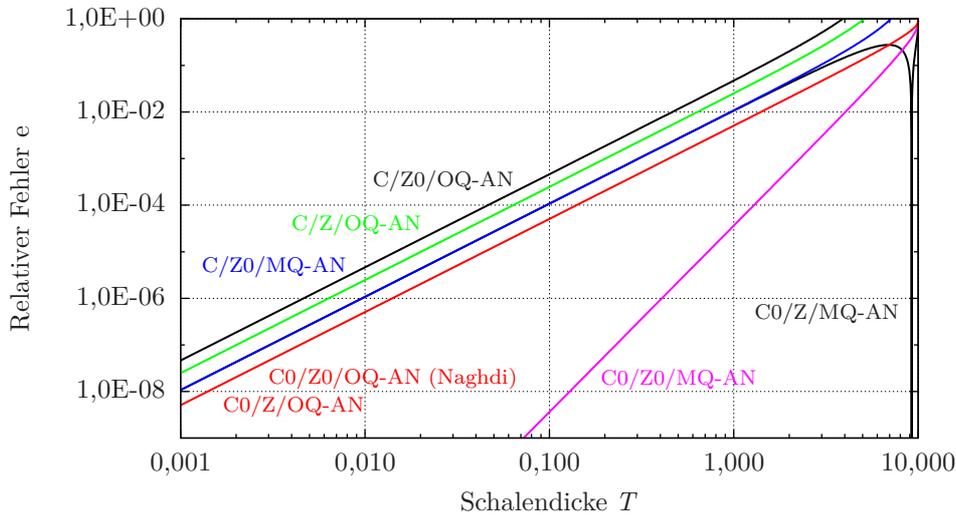
Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Einfluss der numerischen Integration untersucht, wobei für die Berechnung der Verzerrungsenergie alle in den kinematischen Gleichungen auftretenden bzw. aus der Krümmung der Struktur resultierenden Terme herangezogen worden sind. Der Einfluss dieser Terme soll nun gezielt untersucht werden. Dabei erfolgt die Dickenintegration wieder analytisch, um Einflüsse der numerischen Integration auszuschließen. Das Beispiel der radialen Aufweitung des Zylinders ist für die Untersuchungen in diesem Abschnitt ungeeignet, da von vornherein keine quadratischen Verzerrungsanteile auftreten. Es werden lediglich die Fehlerverläufe der zweiwelligen dehnungslosen Verformung dargestellt, da die Fehlerentwicklung beim Verschiebungsfeld Dehnung der Zylinderwand qualitativ vergleichbar ist.

Werden im Folgenden die Komponenten des Stoffgesetzes  $C^{ijkl}$  sowie die Determinante des Shifters  $Z$  exakt ausgewertet, d.h. fließen Krümmungsanteile in die jeweiligen Größen ein, so erfolgt die Bezeichnung durch  $C$  bzw.  $Z$ . Wird das Material dagegen wie in Gleichung (4.24) ausgewertet ( $G^{ij} \approx A^{ij}$ ) bzw. die Determinante des Shifters zu eins angenommen ( $Z \approx 1$ ), so werden hierfür die Bezeichnungen  $C0$  bzw.  $Z0$  verwendet. Bei den kinematischen Gleichungen ist über die Kürzel  $OQ$  (ohne quadratisch) bzw.  $MQ$  (mit quadratisch) angegeben, ob quadratische Verzerrungsanteile vernachlässigt oder berücksichtigt werden.

Obwohl in diesem Abschnitt die Dickenintegration bei allen untersuchten Konfigurationen stets analytisch erfolgt, wird im Hinblick auf Abschnitt 5.3.3 bereits der Zusatz  $AN$  (analytische Integration) bei den einzelnen Bezeichnungen eingeführt. Es ergeben sich insgesamt acht mögliche Kombinationen aus  $C/C0$ ,  $Z/Z0$  und  $MQ/OQ$ , die im Folgenden zu untersuchen sind, wobei  $C/Z/MQ-AN$  die dreidimensionale Referenzlösung bzw.  $C0/Z0/OQ-AN$  die Lösung nach Naghdi darstellt.

Trifft man die bei Naghdi im Material und Shifter enthaltenen Annahmen ( $C0/Z0$ ) nur teilweise oder überhaupt nicht, so könnte erwartet werden, dass der auftretende Fehler in der Verzerrungsenergie aufgrund der „exakteren“ Gleichungen abnimmt. Aus Abbildung 5.5 geht jedoch hervor, dass bei Berücksichtigung entsprechender Krümmungsanteile der Energiefehler entweder gleich ( $C0/Z/OQ-AN$ ) oder sogar größer ausfällt ( $C/Z0/OQ-AN$ ,  $C/Z/OQ-AN$ ). Auch das Mitführen quadratischer Verzerrungsanteile bei unvollständiger Berücksichtigung der Krümmung entweder im Material oder im Shifter ( $C/Z0/MQ-AN$ ,  $C0/Z/MQ-AN$ ) führt nicht zu einer Verbesserung der Genauigkeit. Die Konvergenzgeschwindigkeit der soeben genannten Konfigurationen im Limit  $T \rightarrow 0$  ist aber jeweils identisch.

Lediglich die Kombination C0/Z0/MQ-AN führt zu einer höheren Konvergenzgeschwindigkeit und somit zu einem deutlich geringeren Energiefehler. Diese Variante entspricht den Gleichungen nach Naghdi (C0/Z0/OQ-AN). In ihr werden aber zusätzlich die quadratischen Verzerrungsanteile in der Kinematik mitgeführt.



**Abbildung 5.5:** Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschiedliche Kombinationen von C/C0, Z/Z0 und OQ/MQ.

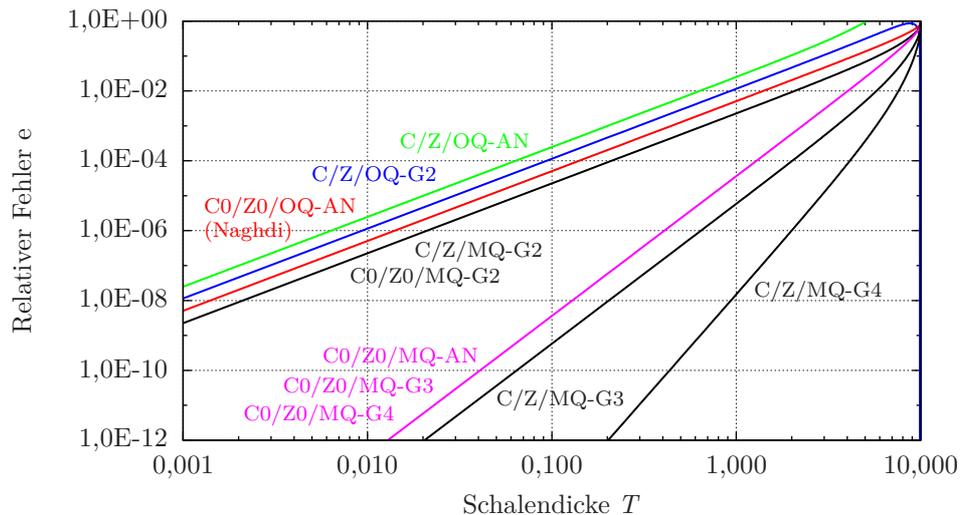
Aus dem Vergleich der Kurven C0/Z0/OQ-AN (Naghdi), C/Z/OQ-AN und C0/Z0/MQ-AN geht hervor, dass die quadratischen Verzerrungsanteile (MQ) für Schalenformulierungen einen höheren Stellenwert besitzen als die Krümmungsanteile im Material und Shifter (C/Z). Quadratische Verzerrungsanteile haben aber immer nur dann einen positiven Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung, wenn die Krümmung in C und Z entweder überhaupt nicht (C0/Z0) oder vollständig (C/Z) einfließt. Gemischte Varianten bei der Berücksichtigung der Krümmung (C0/Z oder C/Z0) beeinflussen den Fehlerverlauf – wenn überhaupt – negativ.

Für den Entwurf von dreidimensionalen Schalenformulierungen bzw. finiten Schalenelementen kann hieraus gefolgert werden, dass, um eine Genauigkeitssteigerung im Vergleich zu Naghdi zu erreichen, zunächst die quadratischen Anteile in der Kinematik zu berücksichtigen sind und sich erst danach Krümmungsbeiträge in Material und Shifter positiv auswirken (Mechanik vor Krümmung!).

### 5.3.3 Kombination aller Annahmen

In den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 wurde der Einfluss der numerischen Integration bzw. der Einfluss der quadratischen Verzerrungsanteile sowie der Krümmungsbeiträge im Material und Shifter getrennt voneinander betrachtet.

In diesem Abschnitt werden am Beispiel der zweiwelligen dehnungslosen Verformung entsprechende Annahmen in Kombination untersucht. Aufgrund der Erkenntnisse aus Abschnitt 5.3.1 wird für die numerische Dickenintegration lediglich die Gauß-Integration mit zwei, drei bzw. vier Integrationspunkten (G2, G3, G4) herangezogen. Die Varianten C0/Z0/OQ-AN (Naghdi), C0/Z0/MQ-AN und C/Z/OQ-AN aus Abbildung 5.5 sind in Abbildung 5.6 zur Orientierung mit angegeben.



**Abbildung 5.6:** Energiefehler bei zweiwelliger dehnungsloser Verformung für unterschiedliche Kombinationen von C/C0, Z/Z0 und OQ/MQ in Verbindung mit der Gauß-Integration.

Eine Gauß-Integration der Gleichungen nach Naghdi mit mindestens zwei Gaußpunkten führt auf exakt dasselbe Ergebnis wie die analytische Dickenintegration (C0/Z0/OQ-AN), da es sich beim Integranden der Verzerrungsenergie um ein maximal quadratisches Polynom in  $\theta^3$  handelt. Nimmt man in diesen Gleichungen Krümmungsinformationen hinzu (C/Z), so ergibt sich bei analytischer Integration über die Dicke (C/Z/OQ-AN) ein Fehlerverlauf mit derselben Konvergenzgeschwindigkeit, jedoch minimal größerem Fehler. Eine Gauß-Integration dieser Variante mit zwei Integrationspunkten (C/Z/OQ-G2) führt, wie Abbildung 5.6 zeigt, zu einer Fehlerkurve, welche zwischen Naghdi und C/Z/OQ-AN liegt. Die im Vergleich zu C0/Z0/OQ-AN enthaltenen Krümmungsanteile im Material und Shifter werden von den zwei Gauß-Punkten nur unvollständig erfasst. Wird die Zahl der Gauß-Punkte gesteigert (Fehlerkurven nicht dargestellt), so nähern sich die zugehörigen Verläufe des Energiefehlers der Kurve von C/Z/OQ-AN an. Führt man bei den Gleichungen nach Naghdi anstatt der Krümmungsanteile zunächst die quadratischen Verzerrungsanteile ein (C0/Z0/MQ-AN), so ergibt sich bei einer genaueren Dickenintegration eine deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit. Aus Abbildung 5.6 geht hervor, dass eine 2-Punkt-Gauß-Integration (C0/Z0/MQ-G2) diesen

Genauigkeitszuwachs zunichte macht, weil die aus den quadratischen Verzerrungstermen im Integranden von  $\Pi^{int}$  resultierenden Anteile vierter Ordnung nicht korrekt erfasst werden. Da bei der Variante C0/Z0/MQ im Integranden der Verzerrungsenergie eine rationale Funktion maximal vierter Ordnung in  $\theta^3$  entsteht, ergibt sich für drei und mehr Gauß-Punkte (C0/Z0/MQ-G3, C0/Z0/MQ-G4) derselbe Fehlerverlauf wie für C0/Z0/MQ-AN.

Werden sowohl die Krümmung als auch die quadratischen Verzerrungsanteile berücksichtigt (C/Z/MQ), so führt, wie in Abbildung 5.6 ersichtlich ist, jeder zusätzliche Integrationspunkt zu einer Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit und somit zu einem Genauigkeitszuwachs in der Lösung. Für zwei Gauß-Punkte (C/Z/MQ-G2) ergibt sich eine praktisch identische Fehlerentwicklung wie für C0/Z0/MQ-G2, bei drei Gauß-Punkten (C/Z/MQ-G3) entsteht eine Fehlerkurve, die dieselbe Konvergenzgeschwindigkeit wie C0/Z0/MQ-G3 besitzt, jedoch einen etwas kleineren Fehler aufweist, was auf die vorhandenen Krümmungsbeiträge in C bzw. Z zurückzuführen ist. Mit jedem weiteren Gauß-Punkt (siehe C/Z/MQ-G4 in Abbildung 5.6) steigt die Konvergenzgeschwindigkeit, da der gebrochen rationale Integrand der Verzerrungsenergie immer genauer erfasst wird. Im Limit unendlich vieler Integrationspunkte entsteht wieder die Referenzlösung C/Z/MQ-AN.

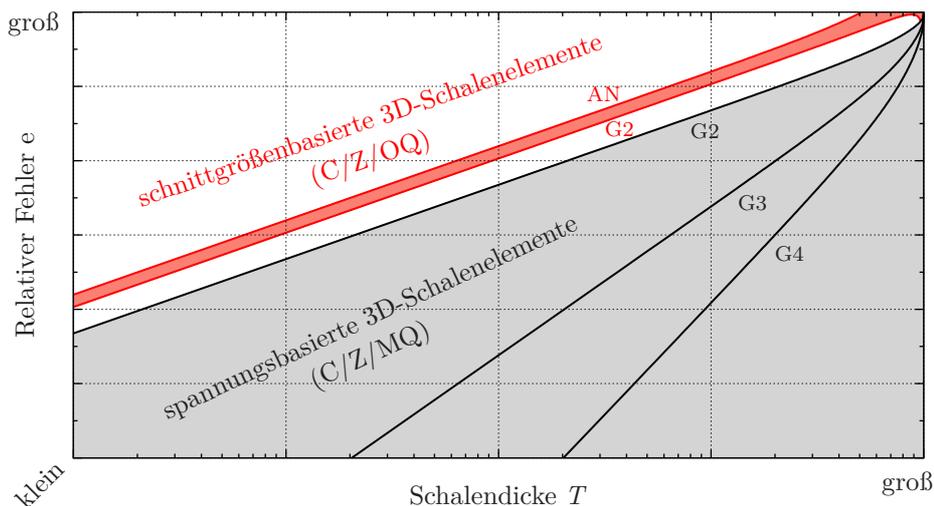
Zusammenfassend ist Folgendes festzuhalten: Werden lediglich zwei Gaußpunkte bei der Dickenintegration verwendet, so entstehen durch das Mitführen der quadratischen Verzerrungsterme bzw. der Krümmung in C und Z im Vergleich zu Naghdi keine bzw. eine nur geringe Genauigkeitssteigerung. Werden quadratische Verzerrungsanteile von vorn herein vernachlässigt, so sind bereits zwei Gauß-Punkte ausreichend, um die enthaltenen schalentheoretischen Informationen ausreichend genau zu erfassen. Die Energiebeiträge, welche aus den quadratischen Verzerrungsanteilen und den Krümmungsanteilen in Material und Shifter resultieren, werden erst bei drei bzw. mehr Gauß-Punkten derart erfasst, dass sie zur Steigerung der Genauigkeit einer Schalenformulierung beitragen können.

### 5.4 Dreidimensionale finite Schalenelemente

In den Abschnitten 5.1 bis 5.3 wurden mögliche Modellannahmen dreidimensionaler Schalenformulierungen vorgestellt sowie deren Einfluss auf die Ergebnisqualität anhand numerischer Beispiele untersucht. Diese Modellannahmen stellen den schalentheoretischen Fundus dar, auf den bei der Entwicklung dreidimensionaler finiter Schalenelemente zurückgegriffen wird. Welche dieser Modellannahmen in ein spezielles dreidimensionales Schalenelement einfließen, lässt sich nicht allgemein beantworten. Es sind jedoch klare Tendenzen festzustellen, die im Folgenden diskutiert werden.

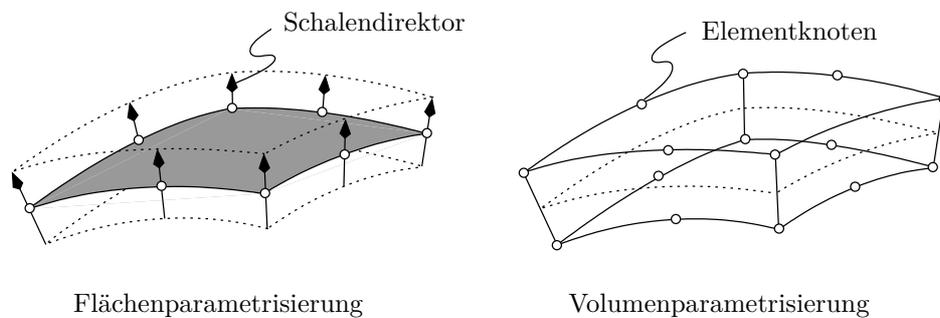
In der Regel kommt bei dreidimensionalen Schalelementen eine 7-Parameter-Kinematik zum Einsatz. Im Hinblick auf die inneren Größen sind dabei sowohl schnittgrößenbasierte als auch spannungsbasierte Elementformulierungen anzutreffen. Erfolgt die Formulierung auf der Basis von Schnittgrößen, so werden gewöhnlich die quadratischen Verzerrungsanteile der 7-Parameter-Kinematik vernachlässigt (OQ), da sich hierdurch die Gesamtzahl der inneren Größen reduzieren lässt und der numerische Aufwand stark sinkt (siehe Abschnitt 5.2.1). Bei einer spannungsbasierten Formulierung dagegen werden diese Anteile gewöhnlich nicht aussortiert (MQ), da im Hinblick auf die Effizienz hieraus keine Vorteile entstehen. Unabhängig von der Art der inneren Größen erfolgt die Dickenintegration im Allgemeinen mit der Gauß-Integration, weshalb Krümmungsanteile im Material und Shifter gewöhnlich nicht herausgefiltert werden (C/Z anstatt C0/Z0).

Es ist somit festzuhalten, dass schnittgrößenbasierte dreidimensionale Schalelemente in der Regel in die Kategorie C/Z/OQ, spannungsbasierte Schalelemente dagegen in die Kategorie C/Z/MQ fallen. In Abbildung 5.7 sind schematisch Teile des Diagramms aus Abbildung 5.6 wiederholt. Aus dem schmalen Fehlerkorridor für C/Z/OQ geht hervor, dass der Verlauf des Energiefehlers schnittgrößenbasierter Elementformulierungen fast unabhängig von der verwendeten Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung ist (G2 bis AN in Abbildung 5.7). Im Vergleich hierzu weisen spannungsbasierte Elementformulierungen aufgrund der enthaltenen quadratischen Verzerrungsanteile einen geringeren Energiefehler auf, wobei die Anzahl der Gauß-Punkte maßgeblichen Einfluss darauf hat, wie schnell dieser Fehler bei abnehmender Schalendicke sinkt.



**Abbildung 5.7:** Schematische Darstellung des Energiefehlers schnittgrößen- und spannungsbasierter dreidimensionaler Schalelemente (logarithmische Achsenskalierung).

Neben den schalenmechanischen Eigenschaften spielt bei dreidimensionalen Schalenelementen vor allem deren Parametrisierung eine entscheidende Rolle. Unabhängig davon, ob es sich um eine auf Schnittgrößen oder Spannungen basierende Formulierung handelt, kann eine Flächen- oder Volumenparametrisierung erfolgen (siehe Abbildung 5.8).



**Abbildung 5.8:** Parametrisierungsvarianten dreidimensionaler Schalenelemente (Knotenzahl in der Schalenebene willkürlich gewählt!).

Die Parametrisierung bestimmt maßgeblich die Zahl und Art der Freiheitsgrade pro Elementknoten. Bei flächenparametrisierten Elementen weisen diese jeweils Verschiebungs- und Rotations- bzw. Differenzvektorfreiheitsgrade auf. Elemente, die auf einer Volumenparametrisierung basieren, besitzen dagegen ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgrade und sind äußerlich mit Kontinuumelementen vergleichbar, was eine einfache Kopplung entsprechender Elementtypen zulässt.

Sollen zur Diskretisierung einer Schalenstruktur flächenartige Schalenelemente verwendet werden, muss im zugehörigen Geometriemodell für eine Vernetzung die Mittelfläche explizit vorhanden sein. Liegt die Schalenstruktur im Geometriemodell bereits als Volumen vor, so kann durch den Einsatz volumenartiger Schalenelemente auf das nachträgliche Einführen einer Mittelfläche verzichtet und direkt die Volumengeometrie vernetzt werden. Ein weiterer mit volumenartigen Schalenelementen verbundener Vorteil ist die explizite Abbildung der Schalenober- bzw. -unterseite, was z.B. Kontaktsimulationen von Schalenstrukturen ohne weitere numerische Kunstgriffe zulässt. Darüber hinaus ist es möglich, diese Elemente über die Schalendicke zu „stapeln“, wodurch in Bereichen mit erhöhten Genauigkeitsanforderungen das Schalenkontinuum „dreidimensionaler“ aufgelöst werden kann. Mechanisch entspricht dies einer Mehrschicht-Kinematik, die von manchen Autoren (z.B. BRAUN (1995)) auch innerhalb einer eigenständigen Elementformulierung umgesetzt wird.

Die Variantenvielfalt (Schalentheorie und Parametrisierung) dreidimensionaler Schalenelemente zeigt, dass der Begriff „dreidimensionales Schalenelement“ keine Elementbezeichnung an sich darstellt, sondern eine ganze Elementklasse beschreibt, zu der alle finiten Elemente gehören, die für die Analyse dünnwandiger Strukturen unter Verwendung vollständiger dreidimensionaler Stoffgesetze geeignet sind.

Bezeichnungen für finite Elemente dieser Klasse existieren in der Literatur bzw. in den Elementbibliotheken kommerzieller Softwarepakete viele. Von SCHOOP (1986) wurde beispielsweise die Bezeichnung „oberflächenorientiertes Schalenelement“ eingeführt. In KLINKEL (2000), HARNAU (2004), HARTMANN (2007) und FIOLKA (2008) wird der Terminus „Volumen-Schalenelement“ bzw. „volumetrisches Schalenelement“ verwendet. In ABAQUS (2011) wird ein solches Element als „continuum shell element“, also „Kontinuumsschalenelement“, in ANSYS (2007) dagegen als „solid shell element“ geführt. Die Bezeichnung „solid shell element“ sowie die Variante „solid-like shell element“ werden auch in HAUPTMANN UND SCHWEIZERHOF (1998), VU-QUOC UND TAN (2003) sowie SCHWARZE UND REESE (2011) verwendet.

Alle soeben erwähnten Bezeichnungen betonen mehr oder weniger deutlich die Volumenparametrisierung der jeweiligen Elemente. Rückschlüsse auf schalentheoretische Annahmen, die in diese Elementformulierungen einfließen, können daraus jedoch nicht gezogen werden.

Es wird daher abschließend eine Nomenklatur dreidimensionaler Schalenelemente vorgeschlagen, welche Rückschlüsse auf die Elementparametrisierung und auf die bei der Formulierung verwendeten statischen bzw. kinematischen Variablen ermöglicht.

Hierfür erscheinen Elementbezeichnungen, wie z.B. „schnittgrößenbasiertes 3D-Flächen-Schalenelement“, „schnittgrößenbasiertes 3D-Volumen-Schalenelement“, „spannungsbasiertes 3D-Flächen-Schalenelement“ und „spannungsbasiertes 3D-Volumen-Schalenelement“, geeignet.

## 5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Modellannahmen dreidimensionaler Schalentheorien vorgestellt und anhand numerischer Beispiele untersucht. Hierfür sind zunächst kinematische Gleichungen unterschiedlicher Ordnung sowie darin zulässige Vereinfachungen diskutiert worden. Besonderen Stellenwert erhielt dabei die 7-Parameter-Kinematik, welche die Grundlage vieler dreidimensionaler Schalenformulierungen bildet. Neben den kinematischen Gleichungen wurde vor allem die Dickenintegration näher untersucht. Zum einen legt die Integrationsart (explizite oder implizite Dickenintegration) fest, in welchen statischen und kinematischen Variablen eine Schalentheorie formuliert ist, d.h. ob eine schnittgrößen- oder spannungsbasierte Formulierung vorliegt. Zum anderen erfolgt die Dickenintegration meist numerisch, wodurch indirekt Näherungen in die entsprechenden Gleichungen einfließen.

In numerischen Beispielen wurde auf Basis einer 7-Parameter-Kinematik der Einfluss der quadratischen Verzerrungsterme bzw. der Krümmungsbeiträge in Material und Shif-

ter untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass die quadratischen Verzerrungsterme im Vergleich zu den oben erwähnten Krümmungsbeiträgen einen höheren Stellenwert besitzen. Soll die Genauigkeit einer klassischen Schalenformulierung aus Kapitel 4 abgesehen von der Berücksichtigung der Dickenänderung gesteigert werden, so sind zuerst die quadratischen Verzerrungsanteile mitzuführen. Erst danach wirkt sich der Krümmungsbeitrag in Material und Shifter genauigkeitssteigernd auf eine Formulierung aus.

Für die numerische Integration geht aus den verschiedenen Beispielen hervor, dass diese einen wesentlichen Bestandteil einer Schalentheorie darstellt. So ist die asymptotische Korrektheit einer Schalenformulierung direkt mit der Genauigkeit des verwendeten Integrationsverfahrens verbunden. Bei einer 7-Parameter-Kinematik sind dazu mindestens Verfahren erforderlich, die quadratische Polynome exakt integrieren können (2-Punkt-Gauß-Integration oder Simpson-Integration). Die bei manchen dreidimensionalen Schalenformulierungen vorhandenen quadratischen Verzerrungsanteile bzw. Beiträge aus der Krümmung im Stoffgesetz und Shifter werden in diesem Fall jedoch noch nicht erfasst. Erst bei genaueren numerischen Integrationsverfahren (Gauß-Integration mit drei und mehr Integrationspunkten) fließen diese Informationen tatsächlich in eine Schalenformulierung ein und steigern deren Genauigkeit.

Abschließend wurde eine Verbindung zwischen den vorgestellten Schalentheorien und dreidimensionalen Schalenelementformulierungen hergestellt, wobei eine Elementnomenklatur eingeführt wurde, welche eindeutige Rückschlüsse auf die Parametrisierung und die inneren Größen einer Elementformulierung zulässt. Die Formulierung eines spannungsbasierten 3D-Volumen-Schalenelements wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

---

## Ein robustes, spannungsbasiertes 3D-Volumen-Schalenelement

In diesem Abschnitt wird die Elementformulierung eines spannungsbasierten Volumen-Schalenelements vorgestellt. Den Ausgangspunkt hierfür stellen die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels dar. Lag der Fokus dort im Wesentlichen auf den Modellannahmen dreidimensionaler Schalentheorien, so werden in diesem Kapitel gezielt Fragestellungen der Finite-Elemente-Technologie und ihrer numerischen Umsetzung für ein spezielles Schalenelement diskutiert. In diesem Zusammenhang kommt der Robustheit eines solchen Elements eine maßgebliche Bedeutung zu. Mit dem Begriff der Robustheit wird in der Regel die Eigenschaft eines Elements beschrieben, in jedem Anwendungsfall physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu liefern. Die Elementformulierung muss also derart gestaltet sein, dass keine künstlichen Versteifungseffekte (Locking) auftreten, gleichzeitig aber numerische Instabilitäten, wie z.B. Hourglassing, ausgeschlossen sind. Darüber hinaus dürfen sich die Eigenschaften des Elements bei verzerrten Elementgeometrien – wenn überhaupt – nur unwesentlich verschlechtern (geringe Verzerrungsempfindlichkeit). Eng damit verbunden ist auch der Wunsch, dass bereits grobe Diskretisierungen belastbare Verschiebungs- und Spannungswerte liefern.

Abschnitt 6.1 befasst sich mit den grundlegenden Eigenschaften des Elements, wie beispielsweise der Elementparametrisierung, der Dickenintegration und der durch diese Elementformulierung diskretisierten Schalentheorie. Im folgenden Abschnitt werden die verwendeten Elementkoordinatensysteme eingeführt sowie wichtige Größen in diskretisierter Form angegeben. Die Vorstellung der variationellen Basis des Elements erfolgt in Abschnitt 6.3. In Abschnitt 6.4 wird dann zunächst eine rein verschiebungsbasierte Formulierung dieses Elements hergeleitet. Die darin enthaltenen Versteifungseffekte werden in Abschnitt 6.5 identifiziert sowie die zu deren Beseitigung verwendeten Methoden

vorgestellt. Abschließend wird in Abschnitt 6.6 eine Methode präsentiert, mit der sich die Verzerrungsempfindlichkeit des Elements durch Stabilisierung des Querschubs weiter reduzieren lässt.

Bei der Herleitung der für das Schalenelement erforderlichen Größen wird im Hinblick auf die Implementierung anstatt auf die bisher in dieser Arbeit verwendeten Tensorschreibweise auf Matrixschreibweise oder, falls erforderlich, auf Indexnotation zurückgegriffen. Dies soll eine schnelle Implementierung des Elements in beliebige Finite-Elemente-Programme erleichtern.

### 6.1 Grundlegendes

Das spannungsbasierte 3D-Volumen-Schalenelement, welches in diesem Kapitel vorgestellt wird, wurde im Programmsystem CCARAT des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart implementiert. Die in CCARAT eingeführte Elementbezeichnung SHELL10 wird auch im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

Bei der Parametrisierung und der Diskretisierung gleicht das SHELL10-Element einem trilinearen achtknotigen Kontinuumsselement (siehe Abbildung 6.1). Jeder Elementknoten  $k$  weist drei global kartesische Verschiebungsfreiheitsgrade  $d_x^k$ ,  $d_y^k$  und  $d_z^k$  auf. Das Schalenelement besitzt somit 24 Freiheitsgrade. Durch Einführen einer fiktiven Mittelfläche, wie in Abbildung 6.1 dargestellt, erhält das Element eine spezifische Orientierung. Die Knoten eins bis vier liegen dabei stets auf der Schalenunterseite, die Knoten fünf bis acht definieren die Schalenoberseite. Die somit bezüglich des physikalischen Schalenraums stets einheitliche Orientierung von SHELL10 erlaubt es, mit Blick auf die Elementtechnologie die für die jeweilige Richtung am besten geeignete Methode zur Optimierung des Elementverhaltens einzusetzen. Darin unterscheidet sich das SHELL10-Element maßgeblich von einem gewöhnlichen Kontinuumsselement, bei dem in der Regel alle Richtungen gleich modifiziert werden. Aufgrund des richtungsabhängigen Einsatzes unterschiedlichster Elementtechnologie kann SHELL10 auch als „anisotropes Kontinuumsselement“ bezeichnet werden.

Bei SHELL10 werden wie bei Kontinuumsselementen Verzerrungen und Spannungen als innere Größen zur Formulierung herangezogen. Im Unterschied zu Kontinuumsselementen beziehen sich diese bei SHELL10 nicht auf die global kartesischen Koordinaten, sondern auf ein spezielles, konvektives Elementkoordinatensystem (siehe Abschnitt 6.2). Dies gewährleistet, dass die mechanischen Größen wie bei einer schnittgrößenbasierten Formulierung in Membran-, Biege- und Querschubanteile sowie Anteile aus Dickenänderung aufgespalten werden können. Erst durch den Bezug der inneren Größen auf dieses Elementkoordinatensystem können die in den Abschnitten 6.5 und 6.6 näher spezifizierten Methoden zur Optimierung des Elements bestmöglich eingesetzt werden.

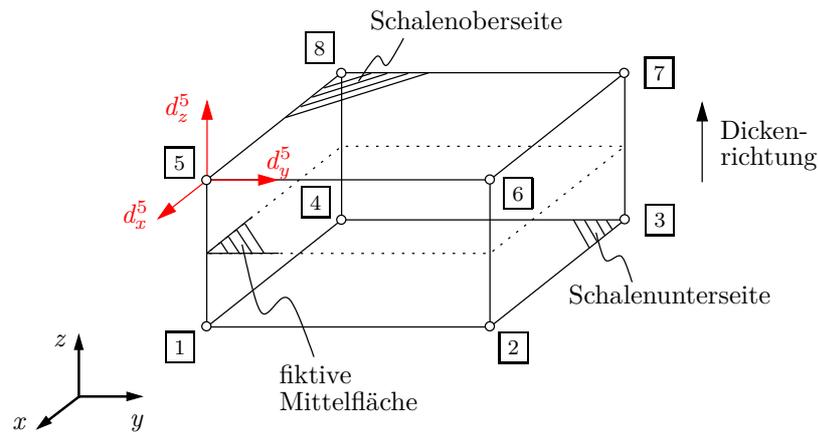


Abbildung 6.1: Topologie des Schalenelements SHELL10.

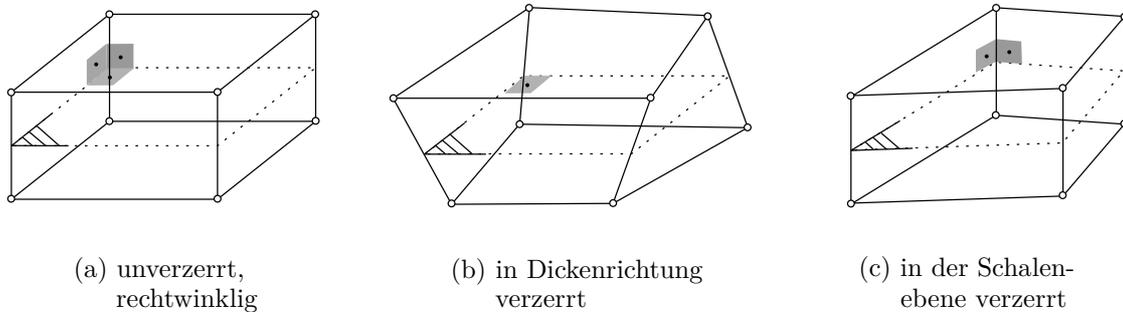
Für das Element werden trilineare Ansatzfunktionen verwendet, welche einen linearen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung der Schale zur Folge haben. Die Anreicherung der Kinematik mit Hilfe der EAS-Methode (siehe Abschnitte 5.1.3 und 6.3) führt zu einer Elementformulierung, welche eine 7-Parameter-Schalentheorie diskretisiert. In den kinematischen Gleichungen von SHELL10 werden die quadratischen Anteile bewusst beibehalten. Die Ergebnisse aus Kapitel 5 zeigen jedoch, dass die Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung darüber entscheidet, inwieweit diese Terme das Elementverhalten letztendlich beeinflussen.

Aus Gründen der Robustheit handelt es sich bei SHELL10 um ein vollintegriertes Element, bei dem die durch die niedrige Polynomordnung der Verschiebungsansätze auftretenden Versteifungseffekte durch eine Kombination aus verschiedenen Kollokationsverfahren und der EAS-Methode beseitigt werden. Vollintegration bedeutet dabei, dass für eine Gauß-Integration im Element mindestens  $2 \times 2 \times 2$  Integrationspunkte verwendet werden müssen. Eine Steigerung der Integrationsordnung über die Schalendicke ( $2 \times 2 \times n$  Integrationspunkte,  $n > 2$ ) ist bei Bedarf ohne weiteres möglich.

Neben der Elimination von Versteifungseffekten ist beim SHELL10-Element die Reduktion der Verzerrungsempfindlichkeit von zentraler Bedeutung. Um in den folgenden Abschnitten die Diskussion diesbezüglich zu erleichtern, werden an dieser Stelle relevante Bezeichnungen eingeführt.

Die in Abbildung 6.2 dargestellten Elementgeometrien stellen die für SHELL10 wesentlichen Geometrieconfigurationen dar. Abbildung 6.2(a) zeigt eine vollständig rechtwinklige Geometrie. Elemente dieser Art werden als unverzerrt bezeichnet und weisen in der Regel die besten mechanischen Eigenschaften auf. Abbildung 6.2(b) zeigt ein Element, welches in der Schalenmittelebene zwar rechtwinklig ist, dessen Elementkanten in Dickenrichtung jedoch beliebig orientiert sind. Dieses Verzerrungsmuster wird als in Dickenrichtung bzw. out-of-plane verzerrt bezeichnet. Die Elementgeometrie aus Abbil-

dung 6.2(c) zeichnet sich dadurch aus, dass die fiktive Mittelfläche eine beliebige Form besitzt, die Elementkanten in Dickenrichtung jedoch orthogonal zur Mittelfläche ausgerichtet sind. Ein solches Element ist in der Schalenebene bzw. in-plane verzerrt.



**Abbildung 6.2:** Wesentliche Geometrie Konfigurationen von SHELL10.

Für die Elementgeometrien aus Abbildung 6.2(b) und 6.2(c) werden bei SHELL10 unterschiedliche Techniken verwendet, um die daraus resultierende Verzerrungsempfindlichkeit zu reduzieren bzw. zu beseitigen.

## 6.2 Elementkoordinatensysteme und Diskretisierung

In Abbildung 6.3 sind die beiden für SHELL10 verwendeten konvektiven Elementkoordinatensysteme dargestellt. Das Koordinatensystem, welches durch die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$  und  $\mathbf{G}_3$  repräsentiert wird, stellt das natürliche Elementkoordinatensystem dar. Viele in der Literatur angegebenen Elementformulierungen, z.B. HARTMANN (2007) oder KLINKEL (2000), beziehen ihre statischen und kinematischen Variablen direkt auf dieses System. Im Fall von SHELL10 werden diese Größen jedoch auf das Koordinatensystem  $\bar{\theta}^i$  bezogen. Die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{G}}_1$  und  $\bar{\mathbf{G}}_2$  der Schalenebene entsprechen dabei denjenigen des natürlichen Elementkoordinatensystems ( $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$ ). Der Basisvektor  $\bar{\mathbf{G}}_3$  wird im Gegensatz zu  $\mathbf{G}_3$  jedoch als stets senkrecht zu den beiden Basisvektoren der Schalenebene ( $\bar{\mathbf{G}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{G}}_2$  bzw.  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$ ) definiert. In der Literatur ist ein vergleichbares Vorgehen z.B. bei SZE UND YAO (2000) zu finden.

Es sei angemerkt, dass die Darstellung der inneren Größen in einem alternativen Koordinatensystem einer reinen Koordinatentransformation entspricht. Solange die in den Abschnitten 6.5.1 und 6.5.2 beschriebenen kollokationsbasierten Methoden  $\text{ANS}_Q$  und  $\text{ANS}_T$  in der Elementformulierung nicht zum Einsatz kommen, erhält man für beliebige Elementgeometrien unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem ein identisches Elementverhalten.

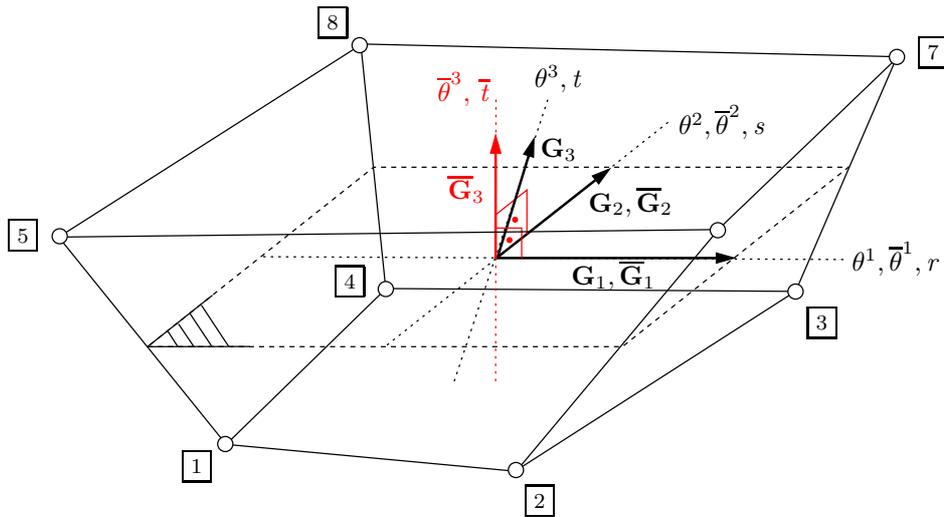


Abbildung 6.3: Lokale Koordinatensysteme von SHELL10.

Für Elementgeometrien, die lediglich in der Schalenebene verzerrt sind, ist die Orientierung der Basisvektoren  $\mathbf{G}_3$  und  $\bar{\mathbf{G}}_3$  identisch. Unabhängig von der eingesetzten Elementtechnologie entstehen somit Elemente mit exakt gleichem Verhalten. Bei out-of-plane-verzerrten Elementen dagegen liefert ein im  $\bar{\mathbf{G}}_i$ -System formuliertes Element deutlich bessere Ergebnisse (siehe numerische Beispiele der Abschnitte 8.1.1 und 8.1.2). Das  $\bar{\mathbf{G}}_i$ -System stellt einen maßgeblichen Beitrag zur Robustheit des SHELL10 Elements dar.

Der Vektor  $\bar{\mathbf{G}}_3$  kann im gesamten Elementgebiet direkt aus dem Kreuzprodukt der beiden Basisvektoren der Schalenebene gewonnen werden. Die Länge dieses Vektors ist damit an die Länge der beiden Vektoren  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  gekoppelt. Numerische Experimente haben jedoch gezeigt, dass eine einheitliche Länge im gesamten Elementgebiet in der Regel die besten Ergebnisse liefert. Prinzipiell kann die Länge beliebig gewählt werden, beispielsweise zu eins. Unterscheidet sich die wahre Schalendicke hiervon jedoch um Größenordnungen, so können Rundungsfehler entstehen, die die Ergebnisse massiv verfälschen. In der Formulierung von SHELL10 wird der Vektor  $\bar{\mathbf{G}}_3$  aus diesem Grund stets auf die Schalendicke in Elementmitte  $T_0$  normiert (siehe Gleichung (6.1)).

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{T_0}{\|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\|} (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \quad (6.1)$$

In der aktuellen Konfiguration kann der Vektor  $\bar{\mathbf{g}}_3$  nicht mit Hilfe des normierten Kreuzprodukts der Vektoren  $\mathbf{g}_1$  und  $\mathbf{g}_2$  generiert werden, da dies den Verzerrungszustand im Element künstlich verändern würde. Eine Normierung von  $\bar{\mathbf{g}}_3$  beeinflusst die Normalverzerrung in Dickenrichtung und das Erzwingen der Orthogonalität unterdrückt zusätzlich Querschubverzerrungen.

Um  $\bar{\mathbf{g}}_3$  zu erhalten, muss nach Gleichung (2.7) zunächst der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (6.2)$$

über die Basisvektoren des natürlichen Elementkoordinatensystems berechnet werden. Daraus ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (2.8)

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{G}}_3. \quad (6.3)$$

Die bisher angegebenen Größen sind allgemeingültig und stehen noch nicht mit einer Elementformulierung in Verbindung. Um diesen Bezug herzustellen, werden diese, sowie weitere für die Formulierung von SHELL10 notwendige Größen im Folgenden in diskretisierter Form angegeben. Eine explizite Kennzeichnung diskreter Größen, beispielsweise durch einen Index, erfolgt dabei nicht.

Bei SHELL10 handelt es sich um ein isoparametrisches Element, was bedeutet, dass die Elementgeometrie und das Verschiebungsfeld mit denselben Ansatzfunktionen interpoliert werden, welche in folgender Gleichung angegeben sind.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit  $r, s, t \in [-1, 1]$

Zugunsten der Lesbarkeit bzw. der Implementierung wurden die Koordinaten  $\theta^1, \theta^2$  und  $\theta^3$  durch  $r, s$  und  $t$  ersetzt (siehe auch Abbildung 6.3).

Die diskretisierte Form des Ortsvektors in der Referenzkonfiguration ist mit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^8 N_k \mathbf{X}^k = \sum_{k=1}^8 N_k \begin{bmatrix} X^k \\ Y^k \\ Z^k \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

gegeben. Der Vektor  $\mathbf{X}^k$  enthält die Koordinaten des Knotens  $k$  in der Referenzkonfiguration, wobei sich sowohl die Komponenten von  $\mathbf{X}^k$  als auch von  $\mathbf{X}$  auf das global kartesische Koordinatensystem beziehen.

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  im Elementgebiet wird ebenfalls durch Interpolation diskreter Knotenwerte, in diesem Fall der Knotenverschiebungen, gewonnen.

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^8 N_k \mathbf{d}^k \quad (6.6)$$

Der Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{d}^k$  enthält die auf das global kartesische System bezogenen Verschiebungen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung.

$$\mathbf{d}^k = \begin{bmatrix} d_x^k \\ d_y^k \\ d_z^k \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Für die Struktur des B-Operators  $\mathbf{B}(\mathbf{d})$  in Abschnitt 6.4.1, welcher die Verzerrungen mit den Knotenverschiebungen in Verbindung setzt, ist der Aufbau des Elementverschiebungsvektors  $\mathbf{d}$  essentiell. Gleichung (6.8) definiert, wie die einzelnen Knotenverschiebungen in den Vektor  $\mathbf{d}$  einzusortieren sind.

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} d_x^1 & d_y^1 & d_z^1 & d_x^2 & d_y^2 & d_z^2 & d_x^3 & d_y^3 & d_z^3 & d_x^4 & d_y^4 & d_z^4 \\ d_x^5 & d_y^5 & d_z^5 & d_x^6 & d_y^6 & d_z^6 & d_x^7 & d_y^7 & d_z^7 & d_x^8 & d_y^8 & d_z^8 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Bei der Herleitung der Elementformulierung sind die partiellen Ableitungen einiger diskreter Größen nach den Koordinaten  $\theta^i$  ( $r, s, t$ ) bzw. nach  $\bar{\theta}^i$  ( $r, s, \bar{t}$ ) erforderlich. Hierzu werden die Abkürzungen

$$(\bullet)_{,i} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial\theta^i} \quad \text{bzw.} \quad (\bullet)_{,\bar{i}} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial\bar{\theta}^i} \quad (6.9)$$

eingeführt. Da sich die Koordinaten  $\theta^1$  und  $\bar{\theta}^1$  sowie  $\theta^2$  und  $\bar{\theta}^2$  entsprechen, können deren Ableitungen beliebig vertauscht werden. Zu beachten ist der Unterschied lediglich für  $\theta^3$  und  $\bar{\theta}^3$ . In Gleichung (6.10) wird beispielhaft für die kovarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration von dieser Schreibweise Gebrauch gemacht.

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\theta}^i} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \bar{\theta}^i} = \bar{\mathbf{G}}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{\theta}^i} = \sum_{k=1}^8 N_{k,\bar{i}} \begin{bmatrix} X^k \\ Y^k \\ Z^k \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^8 N_{k,\bar{i}} \begin{bmatrix} d_x^k \\ d_y^k \\ d_z^k \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Da nur die Ansatzfunktionen  $N_k$  von den Koordinaten  $\bar{\theta}^i$  abhängen, beschränken sich die partiellen Ableitungen darauf.

Die Ableitung nach  $\bar{\theta}^3$  bzw.  $\bar{t}$  kann formal wie oben dargestellt angegeben werden. Für die tatsächliche Berechnung im Rahmen einer Implementierung sind jedoch weitere Überlegungen notwendig. Die Ansatzfunktionen  $N_k$  aus Gleichung (6.4) sind implizit von  $\bar{\theta}^i$  bzw.  $\bar{t}$  abhängig. Die Ableitung  $\partial N_k / \partial \bar{t}$  ist nicht direkt ermittelbar, sondern muss über

$$\begin{aligned}
 N_{k,\bar{3}} = N_{k,\bar{t}} &= \frac{\partial N_k}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{t}} \\
 &= \frac{\partial N_k}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial N_k}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{t}} \\
 &= \left[ N_{k,r} \frac{\partial r}{\partial X} + N_{k,s} \frac{\partial s}{\partial X} + N_{k,t} \frac{\partial t}{\partial X} \right] \frac{\partial X}{\partial \bar{t}} + \\
 &\quad \left[ N_{k,r} \frac{\partial r}{\partial Y} + N_{k,s} \frac{\partial s}{\partial Y} + N_{k,t} \frac{\partial t}{\partial Y} \right] \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}} + \\
 &\quad \left[ N_{k,r} \frac{\partial r}{\partial Z} + N_{k,s} \frac{\partial s}{\partial Z} + N_{k,t} \frac{\partial t}{\partial Z} \right] \frac{\partial Z}{\partial \bar{t}}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

ausgedrückt werden. Die in Gleichung (6.11) notwendigen partiellen Ableitungen lassen sich mit Hilfe der im Folgenden hergeleiteten Größen ermitteln. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  setzt sich aus den kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  nach Gleichung (6.12) zusammen. Ihre Inverse  $\mathbf{J}^{-1}$  liefert bereits einen Teil der benötigten Ableitungen.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Z}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Z}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial X} & \frac{\partial s}{\partial X} & \frac{\partial t}{\partial X} \\ \frac{\partial r}{\partial Y} & \frac{\partial s}{\partial Y} & \frac{\partial t}{\partial Y} \\ \frac{\partial r}{\partial Z} & \frac{\partial s}{\partial Z} & \frac{\partial t}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Die Jacobi-Matrix des durch die Vektoren  $\bar{\mathbf{G}}_i$  definierten Koordinatensystems ergibt die restlichen in Gleichung (6.11) notwendigen Größen.

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Z}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Z}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \\ \bar{\mathbf{G}}_3^T \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

Gleichung (6.13) verdeutlicht, dass  $\bar{\mathbf{J}}$  nicht explizit aufgestellt werden muss. Es sind lediglich die Einträge des Vektors  $\bar{\mathbf{G}}_3$  erforderlich. Mit Hilfe der Größen aus den Gleichungen (6.12) und (6.13) kann Gleichung (6.11) schließlich in

$$\begin{aligned}
 N_{k,\bar{3}} &= \left[ N_{k,r} J_{11}^{-1} + N_{k,s} J_{12}^{-1} + N_{k,t} J_{13}^{-1} \right] \bar{\mathbf{J}}_{31} + \\
 &\quad \left[ N_{k,r} J_{21}^{-1} + N_{k,s} J_{22}^{-1} + N_{k,t} J_{23}^{-1} \right] \bar{\mathbf{J}}_{32} + \\
 &\quad \left[ N_{k,r} J_{31}^{-1} + N_{k,s} J_{32}^{-1} + N_{k,t} J_{33}^{-1} \right] \bar{\mathbf{J}}_{33}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

umgeschrieben werden.

## 6.3 Variationelle Basis und Linearisierung

Als variationelle Basis für das SHELL10 Element dient eine von SIMO UND RIFAI (1990) eingeführte modifizierte Version des Prinzips von Hu-Washizu (HU (1955), WASHIZU (1955)). In der ursprünglichen Form handelt es sich hierbei um ein Dreifeldfunktional, bei dem das Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsfeld ( $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}$ ) als freie Variablen verwendet werden. Die von SIMO UND RIFAI (1990) eingeführten Modifikationen betreffen das Verzerrungsfeld sowie die Behandlung der Spannungen.

Anstatt das gesamte Verzerrungsfeld als freie Variable zu verwenden, schlagen SIMO UND RIFAI (1990) eine Reparametrisierung dahingehend vor,  $\mathbf{E}$  additiv aus einem dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  kompatiblen Anteil  $\mathbf{E}^u$  und einem zusätzlichen freien Anteil  $\tilde{\mathbf{E}}$  zusammenzusetzen.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} \quad (6.15)$$

Der Anteil  $\tilde{\mathbf{E}}$  kann dabei als Anreicherung verstanden werden, worin auch der von SIMO UND RIFAI (1990) gewählte Name „Enhanced-Assumed-Strain“-Methode (EAS) begründet liegt. Bei der EAS-Methode steht die Entwicklung effizienter Elementformulierungen im Vordergrund. Um den Diskretisierungsaufwand zu verringern, wird das Spannungsfeld  $\mathbf{S}$  durch Einführung einer Orthogonalitätsbedingung aus dem Funktional eliminiert. Das ursprüngliche Dreifeldfunktional von Hu-Washizu wird dadurch auf ein Zweifeldfunktional reduziert.

Auf eine Diskussion der Orthogonalitätsbedingung bzw. eine Herleitung des modifizierten Prinzips von Hu-Washizu wird an dieser Stelle verzichtet. Der für die Formulierung von SHELL10 notwendige Herleitungsgang beginnt somit direkt mit dem in Gleichung (6.16) gegebenen modifizierten Prinzip von Hu-Washizu. Für weitere Details sei auf SIMO UND RIFAI (1990) und im Besonderen auf BISCHOFF UND RAMM (1997) bzw. BISCHOFF (1999) verwiesen.

Neben der hier verwendeten Anreicherung des Verzerrungsfeldes ist grundsätzlich auch die Anreicherung des Verschiebungsgradienten möglich, was auf eine multiplikative Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten führt (SIMO UND ARMERO 1992).

Gleichung (6.16) stellt das Prinzip von Hu-Washizu in der nach Gleichung (6.15) modifizierten Form dar.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{mod}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = & \int_V \left[ [\delta \tilde{\mathbf{E}}]^T \cdot \mathbf{S} + [\delta \mathbf{E}^u]^T \cdot \mathbf{S} \right] dV - \\ & \int_V [\delta \mathbf{u}]^T \cdot \hat{\mathbf{b}} dV - \int_A [\delta \mathbf{u}]^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Um diese Gleichung im Hinblick auf die Elementformulierung weiter umformen zu können, werden die involvierten Größen sowie deren Variationen in diskretisierter Form benötigt.

Das diskretisierte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und die zugehörige Variation  $\delta\mathbf{u}$  sind in folgender Gleichung dargestellt.

$$\mathbf{u}(\mathbf{d}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad \delta\mathbf{u}(\mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} \cdot \delta\mathbf{d} \quad \mathbf{u}(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} = \mathbf{N} \quad (6.17)$$

Die Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  ist in Gleichung (6.18) gegeben. Sie setzt sich gemäß der Sortierung des Knotenverschiebungsvektors (Gleichung (6.9)) aus den Ansatzfunktionen von Gleichung (6.4) wie folgt zusammen:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Das zum Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  kompatible Verzerrungsfeld  $\mathbf{E}^u$  ist in seiner diskretisierten Form damit ebenfalls eine Funktion des Knotenverschiebungsvektors  $\mathbf{d}$ .

$$\delta\mathbf{E}^u(\mathbf{d}) = \mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} \cdot \delta\mathbf{d} \quad \mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} = \mathbf{B}(\mathbf{d}) \quad (6.19)$$

Die zusätzlichen freien Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  sind in diskreter Form eine Funktion der sogenannten EAS-Parameter  $\boldsymbol{\alpha}$ . Sie sind per Definition von den Knotenverschiebungen unabhängige Größen.

$$\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \delta\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\boldsymbol{\alpha}} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha} \quad \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{M} \quad (6.20)$$

Die von  $\mathbf{d}$  und  $\boldsymbol{\alpha}$  unabhängige Matrix  $\mathbf{M}$  beinhaltet die Ansatzfunktionen der erweiterten Verzerrungen und wird im Detail in Abschnitt 6.5.3 diskutiert. Da die diskreten zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  somit lediglich linear von den Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  abhängen, ergibt sich für die folgenden zweifachen partiellen Ableitungen die Vereinfachung

$$\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

Die Spannungen  $\mathbf{S}$  werden über das Stoffgesetz mit Hilfe der Gesamtverzerrungen  $\mathbf{E}$  berechnet. Da sich die diskretisierte Gesamtverzerrung  $\mathbf{E}$  additiv aus  $\mathbf{E}^u(\mathbf{d})$  und  $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})$  zusammensetzt, muss  $\mathbf{E}$  und damit automatisch auch  $\mathbf{S}$  eine von  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\mathbf{d}$  abhängige Größe sein.

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{E}^u(\mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})] \quad (6.22)$$

Geht man von linearem Materialverhalten aus, d.h. in der Materialmatrix bestehen keine Abhängigkeiten von  $\mathbf{d}$  und  $\boldsymbol{\alpha}$ , so vereinfachen sich unter Zuhilfenahme der Gleichungen (6.19) und (6.20) die partiellen Ableitungen der Spannungen zu

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d})_{,\alpha} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d})_{,\mathbf{d}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{d}). \quad (6.23)$$

Bringt man die bezüglich der Variationen gewonnenen Erkenntnisse in Gleichung (6.16) ein und führt einige Umformungen durch, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{mod}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) = & \delta \boldsymbol{\alpha}^T \left[ \int_V [\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\alpha}]^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \, dV \right] + \\ & \delta \mathbf{d}^T \left[ \int_V [\mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}}]^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \, dV - \right. \\ & \left. \int_V \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} \, dV - \int_A \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dA \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Da das Funktional aus Gleichung (6.24) für beliebige  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  bzw.  $\delta \mathbf{d}$  erfüllt sein muss, kann es als nichtlineares Gleichungssystem

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \int_V [\mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}}]^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \, dV - \int_V \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} \, dV - \int_A \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dA \\ \int_V [\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha})_{,\alpha}]^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \, dV \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

in den Größen  $\mathbf{d}$  und  $\boldsymbol{\alpha}$  geschrieben werden. Die Bezeichnung  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d})$  wird bewusst gewählt, da Gleichung (6.25) in einem iterativen Lösungsprozess das Residuum darstellt.

Nichtlineare Gleichungssysteme werden im Rahmen der Methode der finiten Elemente in der Regel mit iterativen Prädiktor-Korrektor-Verfahren, wie z.B. dem Newton-Raphson-Verfahren, behandelt. Die hierfür notwendige Linearisierung lautet für Gleichung (6.25) im Iterationsschritt  $i$

$$\text{LIN } \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) + \frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i)}{\partial \mathbf{d}^i} \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i)}{\partial \boldsymbol{\alpha}^i} \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \mathbf{0}. \quad (6.26)$$

Die Größen

$$\Delta \mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{d}^{i+1} - \mathbf{d}^i \quad \text{und} \quad \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}^{i+1} - \boldsymbol{\alpha}^i \quad (6.27)$$

geben die inkrementelle Änderung der Knotenverschiebungen bzw. der EAS-Parameter zwischen dem Iterationsschritt  $i$  und dem Iterationsschritt  $i + 1$  an.

Für die Linearisierung von Gleichung (6.25) wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die äußeren Lasten  $\hat{\mathbf{b}}$  und  $\hat{\mathbf{t}}$  unabhängig von den Verschiebungen  $\mathbf{d}$  und den EAS-Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  sind. Für verschiebungsabhängige Lasten sei beispielsweise auf ARGYRIS UND SYMEONIDIS (1981), SCHWEIZERHOF UND RAMM (1984) oder MOK U. A. (1999) verwiesen.

Die linearisierte Form von Gleichung (6.25) ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned}
 \text{LIN R}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) = & \\
 & \left[ \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV - \int_V \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} dV - \int_A \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA \right] + \\
 & \left[ \int_V \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV \right] + \\
 & \left[ \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T_{, \mathbf{d}} |^{\mathbf{d}^i} \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV + \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{d}^i) dV \right] \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \\
 & \left[ \int_V \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{d}^i) dV \right] \Delta \mathbf{d}^{i+1} + \\
 & \left[ \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} dV \right] \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \mathbf{0}. \\
 & \left[ \int_V \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} dV \right] \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{e+u}^i &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{d}^i) dV & \mathbf{K}_g^i &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T_{, \mathbf{d}} |^{\mathbf{d}^i} \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV \\
 \mathbf{F}_{int}^i &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV & \tilde{\mathbf{F}}_{int}^i &= \int_V \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}^i, \mathbf{d}^i) dV \\
 \tilde{\mathbf{D}} &= \int_V \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} dV & \mathbf{L}^i &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{d}^i)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} dV \\
 \mathbf{F}_{ext} &= \int_V \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} dV + \int_A \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{t}} dA
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

sowie

$$\mathbf{K}_{eug}^i = \mathbf{K}_{e+u}^i + \mathbf{K}_g^i \tag{6.30}$$

lässt sich Gleichung (6.28) kompakt als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eug}^i & \mathbf{L}^{iT} \\ \mathbf{L}_i & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^{i+1} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{int}^i \\ \tilde{\mathbf{F}}_{int}^i \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

darstellen. In der Regel werden die EAS-Parameter  $\Delta \boldsymbol{\alpha}^{i+1}$  über statische Kondensation bereits auf Elementebene eliminiert, um die Anzahl der globalen Freiheitsgrade nicht zu erhöhen. Das daraus resultierende Gleichungssystem für ein Element lautet

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{eug}^i - \mathbf{L}^{iT} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{L}_i)}_{\mathbf{K}^{el}} \cdot \Delta \mathbf{d}^{i+1} = \underbrace{\mathbf{F}_{ext} - (\mathbf{F}_{int}^i - \mathbf{L}^{iT} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{int}^i)}_{\mathbf{F}^{el}}. \quad (6.32)$$

Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^{el}$  und Elementlastvektoren  $\mathbf{F}^{el}$  werden in das globale Gleichungssystem assembliert.

Der Parametervektor  $\boldsymbol{\alpha}$  stellt eine Art „Geschichtsvariable“ für jedes Element dar. Seine Inkrementierung im Iterationsschritt  $i$

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \boldsymbol{\alpha}^{i-1} + \Delta \boldsymbol{\alpha}^i \quad (6.33)$$

erfolgt aufgrund der vorgenommenen Kondensation auf Elementebene. Die inkrementelle Änderung  $\Delta \boldsymbol{\alpha}^i$  muss aus

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}^i = -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} [\mathbf{L}^{i-1} \cdot \Delta \mathbf{d}^i + \tilde{\mathbf{F}}_{int}^{i-1}] \quad (6.34)$$

berechnet werden.

Bei einer Implementierung ergeben sich für die Größen  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ ,  $\mathbf{L}^{i-1}$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_{int}^{i-1}$ , welche sich auf den vorangegangenen Iterationsschritt beziehen, zwei unterschiedliche Möglichkeiten: Entweder werden sie ebenfalls als Geschichtsvariablen für jedes Element abgespeichert oder sie werden je Iteration neu berechnet.

Messungen der Rechenzeit pro Element ergaben für SHELL10 auf unterschiedlichen Hardwareplattformen eine Zunahme der Rechenzeit von 40 bis 50 Prozent bei einer Neuberechnung im Vergleich zur Behandlung als Geschichtsvariablen. Umgekehrt können durch eine Neuberechnung je Element ca. 75 Prozent des Speicherplatzes eingespart werden. Aus mechanischer Sicht sind beide Herangehensweisen völlig gleichwertig. Die Wahl der optimalen Implementierungsvariante ist daher sowohl hardware- als auch problemabhängig.

## 6.4 Verschiebungsformulierung von SHELL10

Im vorangegangenen Abschnitt wurden in Gleichung (6.29) alle für SHELL10 notwendigen Matrizen angegeben, um die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{el}$  sowie den Elementlastvektor  $\mathbf{F}^{el}$  (siehe Gleichung (6.32)) aufstellen zu können.

In diesem Abschnitt sollen nun die Bestandteile des B-Operators  $\mathbf{B}(\mathbf{d})$  und die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$  im Detail hergeleitet werden. Sie stellen die wesentlichen Bestandteile der Größen  $\mathbf{K}_{eug}$  und  $\mathbf{F}_{int}$  dar, die für eine reine Verschiebungsformulierung von SHELL10 erforderlich sind. Die konsistenten Knotenlasten  $\mathbf{F}_{ext}$  sind keine für SHELL10 spezifischen Größen und werden daher nicht weiter betrachtet.

### 6.4.1 Herleitung des B-Operators

Den Ausgangspunkt für die Herleitung des B-Operators stellen die Komponenten des Green-Lagrange-Verzerrungstensors  $\bar{E}_{ij}$  bezüglich des Koordinatensystems  $\bar{\mathbf{G}}_i$  dar (siehe Abschnitt 6.2). Diese lauten in Matrixnotation bzw. Indexschreibweise

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}_i^T \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \bar{\mathbf{G}}_i^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_j) = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - \bar{G}_{ij}) \quad (6.35)$$

mit

$$\bar{\mathbf{G}}_i = \begin{bmatrix} \bar{G}_{ix} \\ \bar{G}_{iy} \\ \bar{G}_{iz} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \begin{bmatrix} \bar{g}_{ix} \\ \bar{g}_{iy} \\ \bar{g}_{iz} \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Die Komponenten der kovarianten Vektoren  $\bar{\mathbf{G}}_i$  und  $\bar{\mathbf{g}}_i$  beziehen sich dabei auf das global kartesische Koordinatensystem.

Der B-Operator kann formal als partielle Ableitung der Verzerrungen nach den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  betrachtet werden ( $\mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} = \mathbf{B}(\mathbf{d})$ , siehe Gleichung (6.19)). Die zur Verzerrungskomponente  $\bar{E}_{ij}$  gehörende Zeile des B-Operators kann als

$$\frac{\partial \bar{E}_{ij}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{g}}_i^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_j}{\partial \mathbf{d}} + \bar{\mathbf{g}}_j^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{d}} \right) \quad (6.37)$$

angegeben werden. Infolge der Anwendung der Voigt-Notation müssen die Einträge aller Schubverzerrungen im B-Operator mit dem Faktor Zwei multipliziert werden (siehe Gleichung (6.38)). Die für SHELL10 gewählte Sortierung der Zeilen ist ebenfalls in Gleichung (6.38) angegeben.

chung (6.38) dargestellt.

$$\mathbf{B}(\mathbf{d})^T = \left[ \frac{\partial \bar{E}_{11}}{\partial \mathbf{d}} \quad 2 \frac{\partial \bar{E}_{12}}{\partial \mathbf{d}} \quad 2 \frac{\partial \bar{E}_{13}}{\partial \mathbf{d}} \quad \frac{\partial \bar{E}_{22}}{\partial \mathbf{d}} \quad 2 \frac{\partial \bar{E}_{23}}{\partial \mathbf{d}} \quad \frac{\partial \bar{E}_{33}}{\partial \mathbf{d}} \right] \quad (6.38)$$

Die Dimensionen der Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{d})$  ergeben sich damit zu sechs Zeilen sowie 24 Spalten korrespondierend zur Anzahl der Knotenfreiheitsgrade.

Die in Gleichung (6.37) benötigten partiellen Ableitungen der Basisvektoren  $\bar{\mathbf{g}}_i$  nach dem Elementverschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  ergeben die Matrix

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}_{ix}}{\partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial \bar{g}_{iy}}{\partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial \bar{g}_{iz}}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial d_x^1 & \partial d_y^1 & \partial d_z^1 & \partial d_x^2 & \partial d_y^2 & \partial d_z^2 & \cdots & \partial d_x^8 & \partial d_y^8 & \partial d_z^8 \\ N_{1,\bar{i}} & 0 & 0 & N_{2,\bar{i}} & 0 & 0 & \cdots & N_{8,\bar{i}} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\bar{i}} & 0 & 0 & N_{2,\bar{i}} & 0 & \cdots & 0 & N_{8,\bar{i}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\bar{i}} & 0 & 0 & N_{2,\bar{i}} & \cdots & 0 & 0 & N_{8,\bar{i}} \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

In Gleichung (6.39) ist zu erkennen, dass sich knotenweise dasselbe Muster in der Matrix der Ableitungen einstellt. Anstatt nun die Ableitungen für den gesamten Elementverschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  darzustellen, kann eine kompaktere Darstellung dadurch erreicht werden, dass diese lediglich für den Knoten  $k$  angegeben werden.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{d}^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}_{ix}}{\partial \mathbf{d}^k} \\ \frac{\partial \bar{g}_{iy}}{\partial \mathbf{d}^k} \\ \frac{\partial \bar{g}_{iz}}{\partial \mathbf{d}^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial d_x^k & \partial d_y^k & \partial d_z^k \\ N_{k,\bar{i}} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,\bar{i}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,\bar{i}} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Diese Schreibweise erlaubt nicht nur eine übersichtliche Dokumentation der Elementformulierung von SHELL10, sie kann auch direkt als Struktur für die Implementierung (Einsatz von Schleifen) in Finite-Elemente-Programme herangezogen werden. Der zum Knoten  $k$  gehörende Anteil des B-Operators  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)$  ist in folgender Gleichung gegeben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}^k) = \begin{bmatrix} d_x^k & d_y^k & d_z^k \\ N_{k,1}\bar{g}_{1x} & N_{k,1}\bar{g}_{1y} & N_{k,1}\bar{g}_{1z} \\ N_{k,1}\bar{g}_{2x} + N_{k,2}\bar{g}_{1x} & N_{k,1}\bar{g}_{2y} + N_{k,2}\bar{g}_{1y} & N_{k,1}\bar{g}_{2z} + N_{k,2}\bar{g}_{1z} \\ N_{k,1}\bar{g}_{3x} + N_{k,3}\bar{g}_{1x} & N_{k,1}\bar{g}_{3y} + N_{k,3}\bar{g}_{1y} & N_{k,1}\bar{g}_{3z} + N_{k,3}\bar{g}_{1z} \\ N_{k,2}\bar{g}_{2x} & N_{k,2}\bar{g}_{2y} & N_{k,2}\bar{g}_{2z} \\ N_{k,2}\bar{g}_{3x} + N_{k,3}\bar{g}_{2x} & N_{k,2}\bar{g}_{3y} + N_{k,3}\bar{g}_{2y} & N_{k,2}\bar{g}_{3z} + N_{k,3}\bar{g}_{2z} \\ N_{k,3}\bar{g}_{3x} & N_{k,3}\bar{g}_{3y} & N_{k,3}\bar{g}_{3z} \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Gleichung (6.42) gibt beispielhaft die Berechnung des Eintrags  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{32}$  an. Dieser ist der Verzerrungskomponente  $\bar{E}_{13}$  und der Knotenverschiebung  $d_y^k$  zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{32} &= 2 \cdot \frac{\partial \bar{E}_{13}}{\partial d_y^k} = \bar{\mathbf{g}}_1^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial d_y^k} + \bar{\mathbf{g}}_3^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial d_y^k} \\
 &= [\bar{g}_{1x} \ \bar{g}_{1y} \ \bar{g}_{1z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_{k,3} \\ 0 \end{bmatrix} + [\bar{g}_{3x} \ \bar{g}_{3y} \ \bar{g}_{3z}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_{k,1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= N_{k,3} \bar{g}_{1y} + N_{k,1} \bar{g}_{3y}
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Da sich die Ableitungen nach  $i$  und  $\bar{i}$  für die Eins- bzw. Zwei-Richtung entsprechen, wurde für diese in den Gleichungen (6.41) und (6.42) aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Querstrich verzichtet. Lediglich für die Drei-Richtung ist ein Querstrich zwingend erforderlich ( $N_{k,\bar{3}}$ ).

Der B-Operator  $\mathbf{B}(\mathbf{d})$  setzt sich schließlich aus den knotenweisen Anteilen  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)$  zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}) = [\mathbf{B}(\mathbf{d}^1) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^2) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^3) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^4) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^5) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^6) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^7) \mid \mathbf{B}(\mathbf{d}^8)] \tag{6.43}$$

zusammen.

### 6.4.2 Herleitung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_g$

Die geometrische Steifigkeitsmatrix ergibt sich nach Gleichung (6.29) zu

$$\mathbf{K}_g = \int_V \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d})}_{\mathbf{IK}_g} dV. \tag{6.44}$$

Da die Integration bei SHELL10 numerisch erfolgt, wird im Folgenden lediglich der Integrand  $\mathbf{IK}_g$  der geometrischen Steifigkeitsmatrix betrachtet. Die Ableitung des B-Operators nach den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  kann als zweite Ableitung der Verzerrungen dargestellt werden.

$$\mathbf{B}(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}} = \mathbf{E}^u(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}\mathbf{d}} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}^u(\mathbf{d})}{\partial^2 \mathbf{d}} \tag{6.45}$$

Die Größe  $\mathbf{B}(\mathbf{d})_{,\mathbf{d}}$  wird an dieser Stelle nicht explizit dargestellt, da es sich nicht um eine Matrix, sondern um ein dreidimensionales Feld handelt. Stattdessen wird von der Indexnotation Gebrauch gemacht und direkt der Integrand angegeben. Dabei kann eine knotenweise auftretende Struktur ausgenutzt werden. Mit  $\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l)$  ist in Glei-

chung (6.46) somit der zu den Knotenverschiebungsvektoren  $\mathbf{d}^k$  und  $\mathbf{d}^l$  gehörende Matrixblock des gesamten Integranden  $\mathbf{IK}_g$  gegeben. Gleichung (6.46) nutzt des Weiteren die Symmetrie der Verzerrungs- und Spannungskomponenten  $\bar{E}_{ij}$  bzw.  $\bar{S}_{ij}$  aus.

$$\begin{aligned} \mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l) &= \frac{\partial^2 \bar{E}_{ij}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{ij} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{E}_{11}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{11} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}_{12}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{12} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}_{13}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{13} + \\ &\quad \frac{\partial^2 \bar{E}_{22}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{22} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}_{23}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{23} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{33}}{\partial \mathbf{d}^k \partial \mathbf{d}^l} \cdot \bar{S}_{33} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die zweiten Ableitungen der Verzerrungskomponenten nach den Komponenten der Knotenverschiebungsvektoren  $d_{xyz}^k$  bzw.  $d_{xyz}^l$  ergeben sich zu

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{ij}}{\partial d_{xyz}^k \partial d_{xyz}^l} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial d_{xyz}^k} \right]^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_j}{\partial d_{xyz}^l} + \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_j}{\partial d_{xyz}^k} \right]^T \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_i}{\partial d_{xyz}^l} \right). \quad (6.47)$$

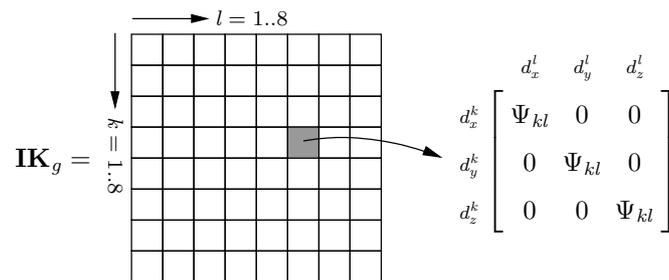
Berücksichtigt man in Gleichung (6.46) die Ergebnisse aus Gleichung (6.39), so kann der Matrixblock  $\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l)$  als

$$\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l) = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_x^l & d_y^l & d_z^l \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_x^k \\ d_y^k \\ d_z^k \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Psi_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{kl} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.48)$$

dargestellt werden. Alle Nebendiagonaleinträge verschwinden, da die gemischten Ableitungen, z.B.  $\partial d_x^k \partial d_y^l$  oder  $\partial d_x^k \partial d_z^l$ , stets null ergeben. Die zu den Ableitungen  $\partial d_x^k \partial d_x^l$ ,  $\partial d_y^k \partial d_y^l$  bzw.  $\partial d_z^k \partial d_z^l$  korrespondierenden Hauptdiagonaleinträge nehmen alle denselben Wert  $\Psi_{kl}$  an, welcher

$$\begin{aligned} \Psi_{kl} &= (N_{k,1} N_{l,1}) \cdot S_{11} + (N_{k,1} N_{l,2} + N_{k,2} N_{l,1}) \cdot S_{12} + \\ &\quad (N_{k,1} N_{l,3} + N_{k,3} N_{l,1}) \cdot S_{13} + (N_{k,2} N_{l,2}) \cdot S_{22} + \\ &\quad (N_{k,2} N_{l,3} + N_{k,3} N_{l,2}) \cdot S_{23} + (N_{k,3} N_{l,3}) \cdot S_{33} \end{aligned} \quad (6.49)$$

entspricht. Der gesamte Integrand der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{IK}_g$  wird schließlich aus den Blöcken  $\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l)$ , wie in Abbildung 6.4 angegeben, zusammengesetzt.



**Abbildung 6.4:** Zusammensetzung des Integranden der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$  aus den Anteilen  $\mathbf{IK}_g(\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^l)$ .

## 6.5 Identifizieren und Beseitigen von Versteifungseffekten

Mit der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Verschiebungsformulierung von SHELL10 ist eine konsistente Elementformulierung gegeben. Aufgrund des durch lineare Ansatzfunktionen limitierten Ansatzraums sind diverse Versteifungseffekte (Locking) jedoch derart ausgeprägt, dass nur mit extrem feiner Vernetzung brauchbare Ergebnisse erzielt werden können. Dies widerspricht klar der Forderung nach numerischer Effizienz des Elements.

In diesem Abschnitt werden zunächst die für SHELL10 wesentlichen Lockingphänomene identifiziert. Hierzu zählen das Querschub- und Trapezlocking, das volumetrische Locking sowie das Schublocking in der Schalenebene (in-plane Schublocking). Membranlocking (siehe z.B. STOLARSKI UND BELYTSCHKO (1982), STOLARSKI UND BELYTSCHKO (1983)), welches sich bei reiner Biegung nicht-ebener Elemente in Form parasitärer Membranspannungen äußert, wird nicht weiter betrachtet, da die Auswirkungen bei Elementen mit linearen Ansatzfunktionen als gering einzustufen sind (siehe KOSCHNICK (2004) bzw. das numerische Beispiel in Abschnitt 8.1.3). Es werden darüber hinaus die zur Vermeidung von Locking eingesetzten Techniken vorgestellt, wobei auch hier besonders auf eine implementierungsnahe Darstellung Wert gelegt wird.

Die Reduktion bzw. Vermeidung der Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen spielt dabei eine wesentliche Rolle. Der Effekt, dass durch verzerrte Elementgeometrien das Konvergenzverhalten ebenfalls negativ beeinflusst werden kann, wird gelegentlich auch mit den Begriffen Distortionlocking oder Shapelocking umschrieben (KOSCHNICK 2004). Im Rahmen der Vermeidung der verschiedenen Lockingphänomene wird daher gleichzeitig versucht, wenn möglich auch die Netzverzerrungsempfindlichkeit zu minimieren. Der Ansatz zur Vermeidung von Trapezlocking wird hierfür so modifiziert, dass sowohl bei regulären Netzen gekrümmter Strukturen als auch bei beliebigen Netzverzerrungen optimale Ergebnisse erzielt werden können.

Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich nach MACNEAL (1994) (siehe auch MACNEAL (1992) und MACNEAL (1987)) die Forderungen an ein lockingfreies fini-

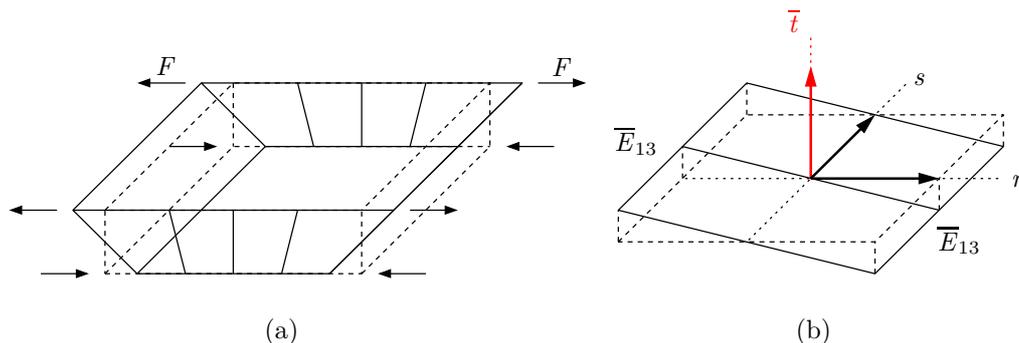
tes Element, sowohl verzerrungsunempfindlich zu sein als auch gleichzeitig den Patchtest (IRONS 1966) zu bestehen, gegenseitig ausschließen.

Es ist zwar grundsätzlich wünschenswert, dass der Patchtest bestanden wird, da dieser gewährleistet, dass konstant verlaufende Größen im Patch (z.B. Verzerrungen) korrekt abgebildet werden können. Die in den Anfängen der Finite-Elemente-Methode vorherrschende Meinung, dass ein Bestehen des Patchtests für die Konvergenz einer Elementformulierung zwingend notwendig sei, ist jedoch mittlerweile überholt (KOSCHNICK 2004). Bei der Entwicklung eines finiten Elements muss daher abgewogen werden, welche der beiden Forderungen als wichtiger erachtet wird. Aufgrund der geforderten Robustheit hat bei SHELL10 eine geringe Verzerrungsunempfindlichkeit höchste Priorität. Der Patchtest in allgemeiner Form (siehe Abschnitt 8.1.1) wird somit nicht mehr bestanden.

### 6.5.1 Querschublocking

Bei Querschublocking handelt es sich um eines der ausgeprägtesten Lockingphänomene schubweicher Schalenelemente. Der Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit ist derart gravierend, dass mit realistischem numerischen Aufwand keine brauchbaren Ergebnisse erzielt werden können. Querschublocking macht sich unter anderem durch Oszillationen in den Querschubverzerrungen und -spannungen bemerkbar.

Abbildung 6.5(a) zeigt SHELL10 unter einer reinen Biegebeanspruchung. In der reinen Verschiebungsformulierung treten neben den Biegenormalverzerrungen auch nicht-physikalische Querschubverzerrungen auf. Diese sind in Abbildung 6.5(b) auf Höhe der fiktiven Elementmittelfläche ( $t = 0$ ) dargestellt. Für eine reine Biegedeformation sind diese Verzerrungen als parasitär einzustufen.

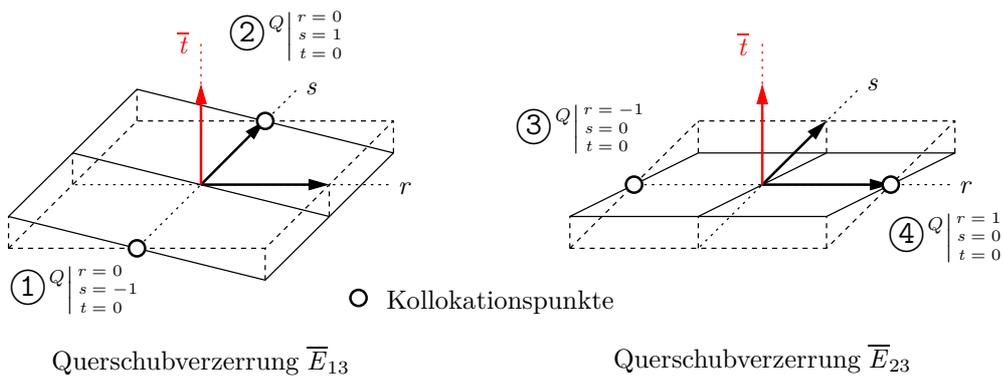


**Abbildung 6.5:** Parasitäre Querschubverzerrungen unter Biegebeanspruchung.

Aufgrund des Verlaufs der parasitären Verzerrungen ist die Anwendung einer Kollokationsmethode zur Beseitigung dieses Lockingphänomens besonders geeignet. Bei SHELL10

kommt dabei die ANS-Methode (Assumed-Natural-Strain) zum Einsatz, deren Grundgedanken bereits im QUAD4-Element von MACNEAL (1978) zu finden sind. In HUGHES UND TEZDUYAR (1981) wird ein Plattenelement vorgestellt, welches aus heutiger Sicht der Methode als erstes echtes ANS-Element betrachtet werden kann. BATHE UND DVORKIN (1986) setzen die ANS-Methode erstmals bei der Formulierung von Schalenelementen ein. Da im Rahmen dieser Arbeit die ANS-Methode nicht nur zur Beseitigung des Querschublockings, sondern auch des Trapezlockings eingesetzt wird, erfolgt eine Kennzeichnung durch Indizes ( $\text{ANS}_Q$  bzw.  $\text{ANS}_T$ ).

Bei  $\text{ANS}_Q$  werden die Querschubverzerrungsfelder  $\bar{E}_{13}$  und  $\bar{E}_{23}$  nicht direkt aus den zugehörigen Verschiebungsableitungen gewonnen, sondern diskrete Werte mit Hilfe spezieller Funktionen  $N_i^Q$  (siehe Gleichung (6.50)) im Elementgebiet interpoliert. Abbildung 6.6 zeigt die parasitären Querschubverzerrungsverläufe unter Biegebeanspruchung sowie die direkt daraus ableitbare Lage der Kollokationspunkte  $\textcircled{1}^Q$  bis  $\textcircled{4}^Q$ , an denen die zur Interpolation benötigten diskreten Werte gewonnen werden.



**Abbildung 6.6:** Kollokationspunkte für  $\text{ANS}_Q$  bei SHELL10.

Es mag zunächst willkürlich erscheinen, dass die Kollokation des Querschubs auf der fiktiven Mittelfläche ( $t = 0$ ) erfolgt, nicht aber in den Ebenen der Integrationspunkte in Dickenrichtung (beispielsweise an den Stellen  $t = \pm 1/\sqrt{3}$  bei zwei Gaußpunkten über die Dicke). Durch dieses Vorgehen ( $t = 0$ ) geht der lineare Anteil der Querschubverzerrungen  $\bar{E}_{\alpha 3}^1$  (siehe Gleichung (5.9)) verloren. Dieser Ansatz für die Kollokation bei  $\text{ANS}_Q$  wird bereits in KLINKEL (2000) mit dem Hinweis vorgeschlagen, dass das Vernachlässigen dieser Anteile bei dünnen Strukturen nur einen unmerklichen Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse hat. Diese Einschätzung wird an dieser Stelle geteilt. Im Rahmen der Entwicklung von SHELL10 wurde zusätzlich festgestellt, dass dieses Vorgehen in Verbindung mit der Formulierung des Elements im Koordinatensystem  $\bar{\theta}^i$  die Netzverzerrungsempfindlichkeit drastisch reduziert. Dieser Vorteil überwiegt bei weitem die Auswirkungen, die durch das Vernachlässigen der linear über die Dicke verlaufenden Querschubverzerrungen entstehen können.

Die Funktionen zur Interpolation der diskreten Werte an den Kollokationspunkten im Elementgebiet sind in Gleichung (6.50) gegeben. Sie sind so gewählt, dass die Oszillationen der Querschubverzerrungen unterdrückt werden können.

$$\begin{aligned} N_1^Q &= \frac{1}{2}(1 - s) & N_2^Q &= \frac{1}{2}(1 + s) \\ N_3^Q &= \frac{1}{2}(1 - r) & N_4^Q &= \frac{1}{2}(1 + r) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Im Hinblick auf die Implementierung lässt sich die ANS<sub>Q</sub>-Methode leicht in die Verschiebungsformulierung nach Abschnitt 6.4 integrieren. Es sind dabei lediglich geringfügige Modifikationen bei der Berechnung der Verzerrungen im B-Operator und in der geometrischen Steifigkeitsmatrix vorzunehmen. Diese werden im Folgenden beschrieben.

Bei der Berechnung der Verzerrungen (siehe Gleichung (6.35)) müssen die zu den Querschubverzerrungen korrespondierenden Einträge  $\overline{E}_{\alpha 3} = \overline{E}_{3\alpha}$  angepasst werden. Sie lauten in modifizierter Form

$$\begin{aligned} \overline{E}_{13} &= \frac{1}{2} \left( N_1^Q \cdot \overline{g}_{13} \Big|_{\textcircled{1}^Q} + N_2^Q \cdot \overline{g}_{13} \Big|_{\textcircled{2}^Q} \right) \quad \text{und} \\ \overline{E}_{23} &= \frac{1}{2} \left( N_3^Q \cdot \overline{g}_{23} \Big|_{\textcircled{3}^Q} + N_4^Q \cdot \overline{g}_{23} \Big|_{\textcircled{4}^Q} \right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Darin bedeutet  $(\bullet) \Big|_{\textcircled{i}^Q}$ , dass die zugeordnete Größe an der Stelle des Kollokationspunktes  $\textcircled{i}^Q$  ausgewertet wird. In Gleichung (6.51) wurden bereits die Anteile  $\overline{G}_{\alpha 3}$  der Referenzmetrik gestrichen, da sich diese stets zu null ergeben.

Im B-Operator müssen Zeile drei ( $\overline{E}_{13}$ ) sowie Zeile fünf ( $\overline{E}_{23}$ ) modifiziert werden (siehe Gleichung (6.52)).

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}^k) = \begin{bmatrix} N_{k,1} \overline{g}_{1x} & N_{k,1} \overline{g}_{1y} & N_{k,1} \overline{g}_{1z} \\ N_{k,1} \overline{g}_{2x} + N_{k,2} \overline{g}_{1x} & N_{k,1} \overline{g}_{2y} + N_{k,2} \overline{g}_{1y} & N_{k,1} \overline{g}_{2z} + N_{k,2} \overline{g}_{1z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{31}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{32}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{33}^Q \\ N_{k,2} \overline{g}_{2x} & N_{k,2} \overline{g}_{2y} & N_{k,2} \overline{g}_{2z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{51}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{52}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{53}^Q \\ N_{k,3} \overline{g}_{3x} & N_{k,3} \overline{g}_{3y} & N_{k,3} \overline{g}_{3z} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Die modifizierten Einträge erhält man, indem die diskreten Werte der jeweiligen Einträge des rein verschiebungsformulierten B-Operators (Gleichung (6.41)) an den Kollokationspunkten von ANS<sub>Q</sub> mit Hilfe der Funktionen aus Gleichung (6.50) interpoliert werden.

In Gleichung (6.53) ist die Berechnung beispielhaft für die Einträge  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{31}^Q$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{51}^Q$  angegeben.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{31}^Q &= N_1^Q \cdot (N_{k,1}\bar{g}_{3x} + N_{k,\bar{3}}\bar{g}_{1x}) \Big|_{\textcircled{1}Q} + N_2^Q \cdot (N_{k,1}\bar{g}_{3x} + N_{k,\bar{3}}\bar{g}_{1x}) \Big|_{\textcircled{2}Q} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{51}^Q &= N_3^Q \cdot (N_{k,2}\bar{g}_{3x} + N_{k,\bar{3}}\bar{g}_{2x}) \Big|_{\textcircled{3}Q} + N_4^Q \cdot (N_{k,2}\bar{g}_{3x} + N_{k,\bar{3}}\bar{g}_{2x}) \Big|_{\textcircled{4}Q}\end{aligned}\quad (6.53)$$

Um eine konsistente Linearisierung zu gewährleisten, müssen in der geometrischen Steifigkeitsmatrix ebenfalls Modifikationen vorgenommen werden. Die Modifikationen betreffen dabei lediglich die Größe  $\Psi_{kl}$  aus Gleichung (6.49). Die Besetzungsstruktur des Integranden  $\mathbf{IK}_g$  nach Abbildung 6.4 wird hierdurch nicht verändert.

$$\begin{aligned}\Psi_{kl} &= (N_{k,1}N_{l,1}) \cdot S_{11} + (N_{k,1}N_{l,2} + N_{k,2}N_{l,1}) \cdot S_{12} + \Psi_{13,kl}^Q \cdot S_{13} + \\ &\quad (N_{k,2}N_{l,2}) \cdot S_{22} + \Psi_{23,kl}^Q \cdot S_{23} + (N_{k,\bar{3}}N_{l,\bar{3}}) \cdot S_{33}\end{aligned}\quad (6.54)$$

Die Größen  $\Psi_{13,kl}^Q$  und  $\Psi_{23,kl}^Q$  erhält man in analoger Weise wie die modifizierten Einträge des B-Operators (siehe Gleichung (6.53)). Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\Psi_{13,kl}^Q &= N_1^Q \cdot (N_{k,1}N_{l,\bar{3}} + N_{k,\bar{3}}N_{l,1}) \Big|_{\textcircled{1}Q} + N_2^Q \cdot (N_{k,1}N_{l,\bar{3}} + N_{k,\bar{3}}N_{l,1}) \Big|_{\textcircled{2}Q} \\ \Psi_{23,kl}^Q &= N_3^Q \cdot (N_{k,2}N_{l,\bar{3}} + N_{k,\bar{3}}N_{l,2}) \Big|_{\textcircled{3}Q} + N_4^Q \cdot (N_{k,2}N_{l,\bar{3}} + N_{k,\bar{3}}N_{l,2}) \Big|_{\textcircled{4}Q}.\end{aligned}\quad (6.55)$$

## 6.5.2 Trapezlocking

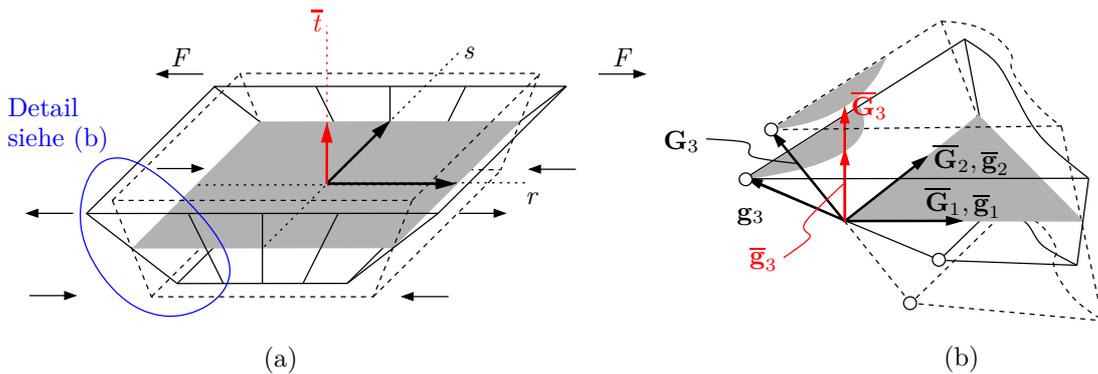
Dieser Lockingeffekt, der auch unter dem Namen Krümmungsdickenlocking bekannt ist, kann sowohl bei gewöhnlichen Kontinuums-elementen (MACNEAL 1992) als auch bei Schalenelementen mit Dickenänderung und direkter Interpolation des Direktorfelds im Elementgebiet auftreten (RAMM u. A. 1994). Er entsteht aber nur bei in Dickenrichtung verzerrten Elementen (siehe Abbildung 6.2).

Trapezlocking wird in der Literatur meist anhand von Elementgeometrien motiviert, die bei der Vernetzung gekrümmter Strukturen, z.B. dem Kreiszyylinder, entstehen, da hier das reguläre Finite-Elemente-Netz aus in Dickenrichtung verzerrten Elementen besteht. Derartige Elementgeometrien treten in der Praxis zwangsläufig auch bei nicht rechtwinkligen Verschneidungen von Schalenstrukturen oder infolge einer schlechten Vernetzungsqualität auf. Trapezlocking und Verzerrungsempfindlichkeit sind daher eng miteinander verbunden.

Abbildung 6.7(a) zeigt ein in Dickenrichtung trapezförmiges SHELL10 Element unter Biegebeanspruchung. Die linke bzw. rechte Stirnfläche ( $r = \pm 1$ ) wird dabei einer reinen Drehung unterworfen. Ihre Abmessungen verändern sich daher nicht. Aufgrund der

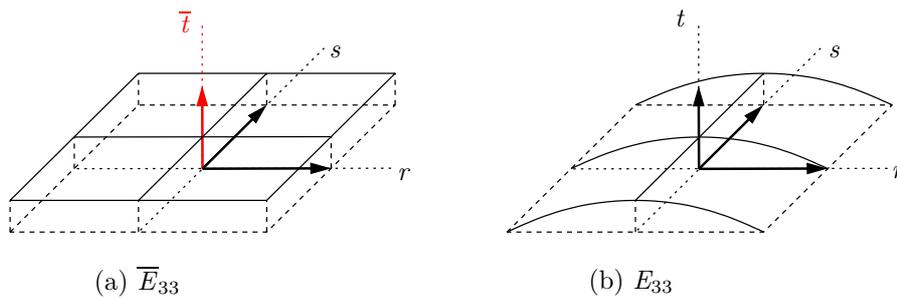
linearen Interpolation im Elementgebiet erfährt jede andere Schnittfläche, welche die fiktive Mittelfläche schneidet, eine Stauchung. Die daraus resultierende Verzerrung ist für den Fall der reinen Biegung als parasitär einzustufen.

Die in SHELL10 zur Verfügung stehenden Koordinatensysteme in der Referenz- und Momentankonfiguration sind für diesen Fall schematisch in Abbildung 6.7(b) als Detailausschnitt dargestellt.



**Abbildung 6.7:** Trapezförmiges SHELL10-Element unter Biegebeanspruchung: Deformation und Koordinatensysteme.

Zur Behebung des Trapezlockings kommt bei SHELL10 die von BETSCH UND STEIN (1995) vorgeschlagene ANS-Methode ( $ANS_T$ ) zum Einsatz. Deren Kollokationspunkte liegen in den Eckpunkten der fiktiven Mittelfläche (siehe Abbildung 6.9), da an diesen Stellen, wie bereits zuvor beschrieben, die zugehörigen Kanten einer reinen Drehung unterworfen sind und damit keine parasitäre Dehnung auftritt.



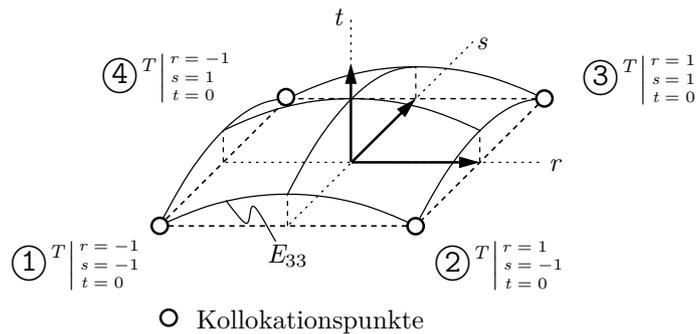
**Abbildung 6.8:** Parasitärer Quernormalverzerrungsverlauf gemessen in den Koordinatensystemen  $\bar{\theta}^i$  bzw.  $\theta^i$  für die Biegebeanspruchung aus Abbildung 6.7(a).

Aufgrund der Formulierung von SHELL10 im Koordinatensystem  $\bar{\theta}^i$  ist man automatisch dazu geneigt, die Verzerrungskomponente  $\bar{E}_{33}$  zur Interpolation heranzuziehen. Betrachtet man jedoch in Abbildung 6.8(a) den zugehörigen Verlauf, so stellt sich heraus, dass dieser im gesamten Elementgebiet konstant ist. Es existieren daher keine Orte

im Element, an denen Verzerrungswerte  $\bar{E}_{33}$  gewonnen werden können, die frei von parasitären Anteilen sind. Betrachtet man dagegen in Abbildung 6.8(b) den Verlauf der Verzerrungskomponente  $E_{33}$  bezüglich der natürlichen Basis  $\mathbf{G}_i$  so ergibt sich der aus BETSCH UND STEIN (1995) bekannte Verlauf.

Der Unterschied zwischen  $\bar{E}_{33}$  und  $E_{33}$  lässt sich anschaulich erklären: Mit  $\bar{E}_{33}$  „misst“ man aufgrund der Orthogonalität des Basisvektors  $\bar{\mathbf{G}}_3$  zur fiktiven Mittelfläche stets die Dickenänderung des Elements. Aus Abbildung 6.7(a) ist klar ersichtlich, dass die Elementdicke im gesamten Elementgebiet um den selben Wert abnimmt. Mit der Komponente  $E_{33}$  dagegen erfasst man nicht die Dickenänderung des Elements, sondern die Stauchung bzw. Längung der Parameterlinien  $t$ , welche in den Ecken der Mittelfläche mit den Elementkanten zusammenfallen.

Bei der Verwendung von  $\text{ANS}_T$  muss daher unabhängig vom Koordinatensystem, in dem die Elementformulierung erfolgt, stets die Komponente  $E_{33}$  bezüglich des natürlichen Elementkoordinatensystems  $\theta^i$  zur Interpolation herangezogen werden. Die Kollokationspunkte für  $\text{ANS}_T$  sind in Abbildung 6.9 zusammen mit einem beliebigen Verlauf der parasitären Verzerrungen  $E_{33}$  angegeben.



**Abbildung 6.9:** Kollokationspunkte für  $\text{ANS}_T$  bei SHELL10.

Die zur Interpolation der diskreten Werte benötigten Funktionen sind für jeden Kollokationspunkt in folgender Gleichung aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 N_1^T &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & N_2^T &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
 N_3^T &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & N_4^T &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s).
 \end{aligned}
 \tag{6.56}$$

Wie auch schon bei  $\text{ANS}_Q$ , liegen diese Punkte auf der fiktiven Mittelfläche des Elements. Im Gegensatz zu  $\text{ANS}_Q$  geht bei  $\text{ANS}_T$  durch die gewählte Vorgehensweise kein über die Dicke linear verlaufender Anteil verloren. Dieser zum siebten Parameter korrespondierende Verzerrungsanteil wird erst in Abschnitt 6.5.3 durch die EAS-Methode in die Elementformulierung eingebracht.

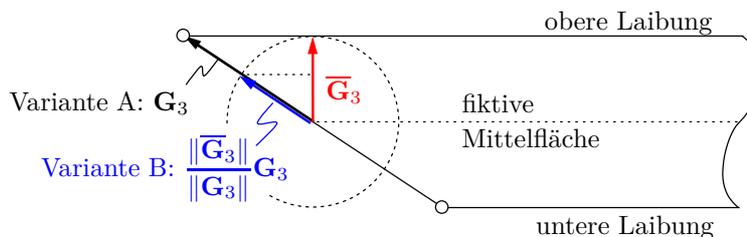
Die Tatsache, dass im Rahmen von ANS<sub>T</sub> der Verzerrungsanteil  $E_{33}$  im natürlichen Elementkoordinatensystem  $\theta^i$  verwendet werden muss, SHELL10 aber bezüglich der Basis  $\overline{\mathbf{G}}_i$  formuliert ist, wirft die Frage auf, wie Konsistenz innerhalb der Elementformulierung hergestellt werden kann.

Als naheliegendste Lösung hierfür erscheint eine konsistente Tensortransformation der Verzerrungskomponenten vom  $\mathbf{G}_i$ -System in das  $\overline{\mathbf{G}}_i$ -System. Dies führt indirekt jedoch wieder dazu, dass erneut der Verlauf von  $\overline{E}_{33}$  anstatt von  $E_{33}$  interpoliert wird.

Stattdessen muss bei der Beseitigung des Trapezlockings gezielt eine gewisse Inkonsistenz in den Verzerrungen in Kauf genommen werden, um optimales Elementverhalten bei verzerrten Elementgeometrien unter Biegebeanspruchung zu ermöglichen. Die Inkonsistenz besteht darin, dass die benötigte Verzerrungskomponente  $\overline{E}_{33}$  ohne echte Tensortransformation direkt aus  $E_{33}$  gewonnen wird. Dies ist letztendlich dafür verantwortlich, dass der Patchtest für in Dickenrichtung verzerrte Elementgeometrien nicht bestanden wird (siehe Beispiel in Abschnitt 8.1.1). Da sich laut MACNEAL (1994) (siehe auch MACNEAL (1992) und MACNEAL (1987)) das Bestehen des Patchtests und optimales Elementverhalten bei verzerrter Elementgeometrie gegenseitig ausschließen, kann das Ziel nur darin bestehen, die Auswirkungen der Inkonsistenz so gering wie möglich zu halten.

Als einzige Stellschraube verbleibt somit die Norm des Basisvektors  $\mathbf{G}_3$ , der den Metrikeintrag  $G_{33}$  und damit den Absolutwert von  $E_{33}$  bzw.  $\overline{E}_{33}$  steuert. Diese darf nicht beliebig gewählt werden. Es muss sichergestellt sein, dass bei SHELL10-Elementen, die nicht in Dickenrichtung verzerrt sind, ANS<sub>T</sub> keinen Einfluss auf das Elementverhalten hat. In diesem Fall muss die gewählte Norm von  $\mathbf{G}_3$  immer der Norm von  $\overline{\mathbf{G}}_3$  entsprechen. Dadurch ist gewährleistet, dass der Patchtest für nicht in Dickenrichtung verzerrte Elemente stets bestanden wird und für alle anderen Netzkonfigurationen durch entsprechende Netzverfeinerung im Limit unendlich vieler Elemente trotzdem die exakte Lösung erzielt werden kann (schwache Konsistenz).

In Abbildung 6.10 sind graphisch zwei Varianten der Skalierung von  $\mathbf{G}_3$  dargestellt, die bei der Entwicklung von SHELL10 untersucht wurden.



**Abbildung 6.10:** Varianten der Skalierung von  $\mathbf{G}_3$  für die Ermittlung von  $\overline{E}_{33}$  im Rahmen von ANS<sub>T</sub>.

In Variante A wird  $\mathbf{G}_3$  ohne Skalierung direkt verwendet, in Variante B dagegen erfolgt eine Skalierung bezüglich der Norm von  $\overline{\mathbf{G}}_3$ . Bei beiden Ansätzen ist sichergestellt, dass für in Dickenrichtung rechtwinklige Elemente  $\text{ANS}_T$  keinen Einfluss auf das Elementverhalten hat. Obwohl bei Variante B der Metrikeintrag  $G_{33}$  durch die Skalierung dem Eintrag  $\overline{G}_{33}$  entspricht und man daher geneigt ist, bessere Ergebnisse zu erwarten, zeigen numerische Experimente, dass Variante A zu einem etwas robusteren Element führt. Da diese Variante darüber hinaus mit geringerem numerischen Aufwand verbunden ist, kommt sie im Folgenden bei SHELL10 zu Einsatz.

Aufgrund der Modifikationen durch  $\text{ANS}_T$  muss bei der Berechnung der Verzerrungen (siehe Gleichung (6.35)) der zur transversalen Normaldehnung korrespondierende Eintrag  $\overline{E}_{33}$  angepasst werden. Er lautet in modifizierter Form

$$\overline{E}_{33} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 N_i^T \cdot (g_{33} - G_{33}) \Big|_{\textcircled{i}T} \cdot \quad (6.57)$$

Im B-Operator (Gleichung (6.52)) muss hierfür die sechste Zeile geändert werden. Hierbei ist zu beachten, dass bei der Kollokation der Einträge des verschiebungsformulierten B-Operators nun die Ableitung  $N_{k,3}$  (anstatt  $N_{k,\overline{3}}$ ) sowie die Komponenten von  $\mathbf{g}_3$  (anstatt  $\overline{\mathbf{g}}_3$ ) verwendet werden müssen.

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}^k) = \begin{bmatrix} N_{k,1}\overline{g}_{1x} & N_{k,1}\overline{g}_{1y} & N_{k,1}\overline{g}_{1z} \\ N_{k,1}\overline{g}_{2x} + N_{k,2}\overline{g}_{1x} & N_{k,1}\overline{g}_{2y} + N_{k,2}\overline{g}_{1y} & N_{k,1}\overline{g}_{2z} + N_{k,2}\overline{g}_{1z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{31}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{32}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{33}^Q \\ N_{k,2}\overline{g}_{2x} & N_{k,2}\overline{g}_{2y} & N_{k,2}\overline{g}_{2z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{51}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{52}^Q & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{53}^Q \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{61}^T & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{62}^T & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{63}^T \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

In Gleichung (6.59) ist die Berechnung beispielhaft für den Eintrag  $\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{61}^T$  angegeben.

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{61}^T = \sum_{i=1}^4 N_i^T \cdot (N_{k,3} g_{3x}) \Big|_{\textcircled{i}T} \quad (6.59)$$

Wie bereits bei  $\text{ANS}_Q$ , müssen bei  $\text{ANS}_T$  Modifikationen in der geometrischen Steifigkeitsmatrix vorgenommen werden. Diese betreffen wiederum nur die Größe  $\Psi_{kl}$  aus Gleichung (6.49). Die Besetzungsstruktur der geometrischen Steifigkeitsmatrix wird dadurch nicht beeinträchtigt.

$$\begin{aligned} \Psi_{kl} = & (N_{k,1}N_{l,1}) \cdot S_{11} + (N_{k,1}N_{l,2} + N_{k,2}N_{l,1}) \cdot S_{12} + \Psi_{13_{kl}}^Q \cdot S_{13} + \\ & (N_{k,2}N_{l,2}) \cdot S_{22} + \Psi_{23_{kl}}^Q \cdot S_{23} + \Psi_{33_{kl}}^T \cdot S_{33} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Die Größe  $\Psi_{33kl}^T$  ergibt sich ebenfalls aus der Kollokation des zugeordneten Eintrags der reinen Verschiebungsformulierung. Sie lautet

$$\Psi_{33kl}^T = \sum_{i=1}^4 N_i^T \cdot (N_{k,3} N_{l,3}) \Big|_{\textcircled{i}}^T. \quad (6.61)$$

Es sei abschließend angemerkt, dass ein vermutlich ähnliches Vorgehen bei der Vermeidung von Trapezlocking mit ANS<sub>T</sub> bereits in SZE UND YAO (2000) zu finden ist. Anhand der vorliegenden Unterlagen konnte jedoch nicht geklärt werden, inwieweit beide Herangehensweisen miteinander übereinstimmen.

### 6.5.3 Volumetrisches Locking und Schublocking in der Schalenebene

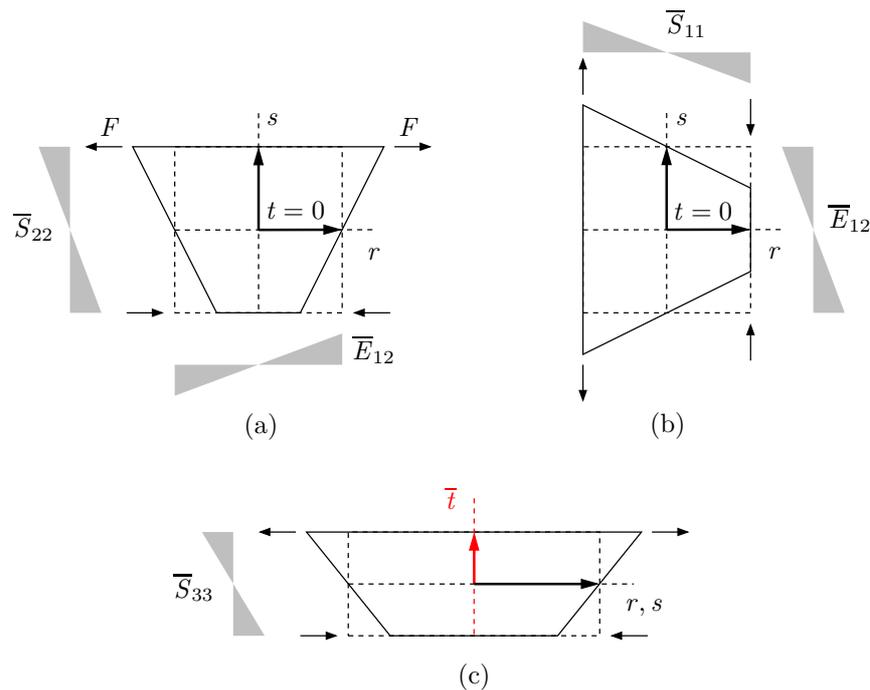
Obwohl die Ursachen für volumetrisches Locking sowie Schublocking grundsätzlich verschieden sind, werden beide Effekte in diesem Abschnitt gleichzeitig behandelt (weitere Details siehe beispielsweise KOSCHNICK (2004)). Der Grund hierfür ist, dass bei SHELL10 die Beseitigung beider Lockingeffekte mit der EAS-Methode erfolgt.

In den Abbildungen 6.11(a) bis 6.11(c) sind Schnitte durch Deformationsmoden von SHELL10 dargestellt, die noch parasitäre Verzerrungs- bzw. Spannungsverläufe aufweisen. Die Schnittführung ist anhand der eingezeichneten Koordinaten eindeutig festgelegt (vergleiche Abbildung 6.3). Die Abbildungen 6.11(a) und 6.11(b) stellen Biegedeformationen des Elements in der Schalenebene, Abbildung 6.11(c) die Biegung der Schalenebene selbst dar.

Im Deformationsmode von Abbildung 6.11(a) tritt ein in  $r$  linearer Schubverzerrungsverlauf  $\overline{E}_{12}$  auf. Da dieser Mode eine reine Biegung in der Schalenebene repräsentiert, ist dieser Verzerrungsanteil als parasitär einzustufen und kann als Ursache von Schublocking in der Schalenebene (in-plane Schublocking) identifiziert werden. Für allgemeine Materialgesetze, z.B.  $\nu \neq 0$ , tritt aufgrund des fehlenden linear in  $s$  verlaufenden Verzerrungsanteils  $\overline{E}_{22}$  zusätzlich eine linear in  $s$  verlaufende Spannungsverteilung  $\overline{S}_{22}$  auf. Diese muss bei Biegung ebenfalls als parasitär eingestuft werden und ist Ursache für volumetrisches Locking in der Schalenebene (in-plane volumetrisches Locking).

Abbildung 6.11(b) stellt den selben Mode dar wie Abbildung 6.11(a), jedoch um 90 Grad gedreht. Es treten ebenfalls parasitäre Schubverzerrungen  $\overline{E}_{12}$  auf, welche nun linear in  $s$  verlaufen. Außerdem liegen linear in  $r$  verlaufende parasitäre Normalspannungen  $\overline{S}_{11}$  vor, da ein in  $r$  linearer Verzerrungsanteil  $\overline{E}_{11}$  fehlt.

Der Deformationsmode aus Abbildung 6.11(c) ist eng mit den beiden bereits beschriebenen Moden verwandt. Parasitäre Schubverzerrungen (Querschub) treten darin allerdings nicht mehr auf, da diese bereits durch ANS<sub>Q</sub> (Abschnitt 6.5.1) eliminiert wurden. Der in



**Abbildung 6.11:** Parasitäre Verzerrungs- und Spannungsverläufe in Deformationsmoden von SHELL10, die mit der EAS-Methode eliminiert werden.

der Verzerrungskomponente  $\bar{E}_{33}$  fehlende lineare Anteil über die Schalendicke verursacht bei  $\nu \neq 0$  eine linear verlaufende Zwangsspannung  $\bar{S}_{33}$ , die volumetrisches Locking in Dickenrichtung der Schale verursacht (Poisson-Dickenlocking). So lange dieser Lockingeffekt nicht beseitigt wird, diskretisiert SHELL10 eine 6-Parameter-Schalentheorie (siehe Gleichung (5.4)). Erst durch Einbringen des siebten Parameters mit Hilfe der EAS-Methode (siehe Abschnitt 5.1.3) entsteht ein Schalenelement, welches eine asymptotisch korrekte 7-Parameter-Schalentheorie abbildet. Ob der siebte Parameter der Schalentheorie oder aber der Elementtechnologie zugeordnet wird, ist Ansichtssache und sei dem Ermessen des Lesers überlassen.

Die für die EAS-Methode notwendigen Ansatzfunktionen der erweiterten Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  sind in der Matrix  $\mathbf{M}$  enthalten (Gleichung (6.20)), welche im Folgenden hergeleitet wird. Die Herleitung erfolgt dabei über eine Matrix  $\bar{\mathbf{M}}$ , die anschließend mit Hilfe einer Transformationsvorschrift in  $\mathbf{M}$  überführt werden kann.

Entsprechend der Anzahl an kinematischen Variablen in SHELL10 (sechs Verzerrungskomponenten) besteht  $\bar{\mathbf{M}}$  aus sechs Zeilen. Die Zuordnung der Zeilen zu den einzelnen Verzerrungskomponenten entspricht derjenigen des B-Operators (siehe Gleichung (6.62)). Die Anzahl der Spalten wird durch die Zahl der benötigten voneinander linear unabhängigen Ansatzfunktionen (EAS-Parameter) der zusätzlichen Verzerrungen bestimmt. Aus den oben beschriebenen und in Abbildung 6.11 dargestellten parasitären Verzerrungs-

und Spannungsverläufen lassen sich direkt fünf Ansatzfunktionen der zusätzlichen Verzerrungen motivieren. Die ersten beiden Spalten der Matrix  $\overline{\mathbf{M}}$  in Gleichung (6.62) eliminieren die linear in  $r$  und  $s$  verlaufenden parasitären in-plane Schubverzerrungen. Die Ansätze der Spalten drei und vier erweitern die Verläufe von  $\overline{E}_{11}$  und  $\overline{E}_{22}$ , um die Zwangsnormalspannungen in der Schalebene zu vermeiden, welche in-plane volumetrisches Locking verursachen. Die fünfte Spalte stellt den siebten Parameter dar und macht SHELL10 zu einem 7-Parameter-Schalenelement.

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Vermeiden von} \\ \text{Schublocking} \\ \text{(in-plane)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Vermeiden von volu-} \\ \text{metrischem Locking} \\ \text{(out-of-plane)} \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \hline 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & r \cdot t & s \cdot t \\ \hline \end{array} \right] \\ \begin{array}{c} \text{Vermeiden von volumetrischem} \\ \text{Locking (in-plane)} \end{array} \end{array} \quad (6.62)$$

Die fünf bis hierher eingeführten zusätzlichen Verzerrungsverläufe (EAS-Parameter) führen zu einer vollständig lockingfreien Version von SHELL10 im Falle unverzerrter Elementgeometrien (alle Elementkanten sind rechtwinklig zueinander). Für beliebig verzerrte Geometrien sind die parasitären Verläufe in der Regel gebrochen rational und werden von den bisher angegebenen Ansätzen nicht vollständig eliminiert. Die vollständige Beseitigung ist für den allgemeinsten Fall praktisch unmöglich. Trotzdem können bereits bi- bzw. trilineare Ansätze ( $r \cdot s$ ,  $r \cdot t$ ,  $s \cdot t$ ,  $r \cdot s \cdot t$ ) zu einer Verbesserung führen. Der Nutzen zusätzlicher EAS-Parameter muss jedoch gegen die damit verbundenen numerischen Kosten für jedes Element abgewogen werden. Numerische Experimente ergaben für SHELL10, dass lediglich die bilinearen Erweiterungen  $r \cdot t$  und  $s \cdot t$  der transversalen Normalverzerrungen  $\overline{E}_{33}$  vor diesem Hintergrund zu rechtfertigen sind. Somit kommen in SHELL10 schließlich sieben EAS-Parameter zum Einsatz.

Bei Elementen mit konstanter Metrik im Elementgebiet, d.h. prismatischer Elementgeometrie in der Referenzkonfiguration, kann  $\overline{\mathbf{M}}$  gleich  $\mathbf{M}$  gesetzt werden. Bei beliebiger Geometrie würde dies jedoch dazu führen, dass SHELL10 auch den Patchtest für lediglich in der Ebene verzerrte Elemente nicht mehr besteht (Das Bestehen des Patchtests für in Dickenrichtung verzerrte Elemente wurde bereits im Rahmen von ANS<sub>T</sub> (siehe Abschnitt 6.5.2) zugunsten einer geringeren Verzerrungsempfindlichkeit aufgegeben.). Der Grund hierfür ist, dass die Orthogonalitätsbedingung bei variabler Metrik

im Element nicht mehr erfüllt werden kann. Um das Bestehen des Patchtests trotzdem zu erzwingen, wird bereits von SIMO UND RIFAI (1990) vorgeschlagen, die Metrik des Elementmittelpunkts ( $r = s = t = 0$ ) im gesamten Elementgebiet zu verwenden. Dies bedeutet, dass die Verzerrungsanteile von  $\bar{\mathbf{M}}$  im Koordinatensystem des Elementmittelpunkts (Basisvektoren  $\bar{\mathbf{G}}_{i0}$ ) formuliert betrachtet werden. Für alle Orte im Elementgebiet muss daher eine Transformation in das Koordinatensystem  $\bar{\theta}^i$  erfolgen. Die Transformationsvorschrift ergibt sich für die Verzerrungskomponenten allgemein zu

$$\bar{E}_{ij} = ([\bar{\mathbf{G}}_0^k]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_i)([\bar{\mathbf{G}}_0^l]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_j) \bar{E}_{kl0}. \quad (6.63)$$

Im Hinblick auf die Implementierung ist eine Darstellung der Transformationsvorschrift in Matrixschreibweise (Voigt-Notation) allerdings geeigneter (siehe z.B. QUY UND MATZENMILLER (2008)). Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_0$ , die Verzerrungen vom  $\bar{\mathbf{G}}_{i0}$ -System in das  $\bar{\mathbf{G}}_i$ -System transformiert, ist in folgender Gleichung dargestellt:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} T_1^1 T_1^1 & T_1^1 T_1^2 & T_1^1 T_1^3 & T_1^2 T_1^2 & T_1^2 T_1^3 & T_1^3 T_1^3 \\ 2T_1^1 T_2^1 & T_1^1 T_2^2 + T_1^2 T_2^1 & T_1^1 T_2^3 + T_1^3 T_2^1 & 2T_1^2 T_2^2 & T_1^2 T_2^3 + T_1^3 T_2^2 & 2T_1^3 T_2^3 \\ 2T_1^1 T_3^1 & T_1^1 T_3^2 + T_1^2 T_3^1 & T_1^1 T_3^3 + T_1^3 T_3^1 & 2T_1^2 T_3^2 & T_1^2 T_3^3 + T_1^3 T_3^2 & 2T_1^3 T_3^3 \\ T_2^1 T_2^1 & T_2^1 T_2^2 & T_2^1 T_2^3 & T_2^2 T_2^2 & T_2^2 T_2^3 & T_2^3 T_2^3 \\ 2T_2^1 T_3^1 & T_2^1 T_3^2 + T_2^2 T_3^1 & T_2^1 T_3^3 + T_2^3 T_3^1 & 2T_2^2 T_3^2 & T_2^2 T_3^3 + T_2^3 T_3^2 & 2T_2^3 T_3^3 \\ T_3^1 T_3^1 & T_3^1 T_3^2 & T_3^1 T_3^3 & T_3^2 T_3^2 & T_3^2 T_3^3 & T_3^3 T_3^3 \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Die Einträge  $T_i^k$  lauten

$$T_i^k = [\bar{\mathbf{G}}_0^k]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_i = [\bar{\mathbf{G}}_i]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_0^k. \quad (6.65)$$

Eine vollständige Transformation der Matrix  $\bar{\mathbf{M}}$  in die Matrix  $\mathbf{M}$  ist durch

$$\mathbf{M} = \frac{\text{Det } \mathbf{J}_0}{\text{Det } \mathbf{J}} \cdot \mathbf{T}_0 \cdot \bar{\mathbf{M}} \quad (6.66)$$

definiert. Der zusätzliche Faktor  $\text{Det } \mathbf{J}_0 / \text{Det } \mathbf{J}$  ist zwingend notwendig, da  $\mathbf{M}$  bei der Berechnung der Größen  $\tilde{\mathbf{F}}_{int}^i$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  sowie  $\mathbf{L}^i$  in den jeweiligen Integranden einfließt (siehe Gleichung (6.29)). Dadurch wird die bei der Integration vorhandene und im Elementgebiet variable Determinante der Jacobi-Matrix  $\text{Det } \mathbf{J}$  eliminiert, die ebenfalls das Einhalten der Orthogonalitätsbedingung verhindert. Die zusätzlichen Verzerrungen  $\tilde{\mathbf{E}}$  berechnen sich nach Gleichung (6.20) zu

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{Det } \mathbf{J}_0}{\text{Det } \mathbf{J}} \cdot \mathbf{T}_0 \cdot \bar{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (6.67)$$

## 6.6 Querschubstabilisierung

Stabilisierungsverfahren kommen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode oft zum Einsatz, wobei damit zwei grundlegend verschiedene Ziele verfolgt werden können.

Bei reduziert integrierten Elementen werden sie dazu eingesetzt, zusätzliche Steifigkeit in die Elementsteifigkeitsmatrix einzubringen, um innere Kinematiken zu vermeiden (Hourglass-Stabilisierung). Verursachen dagegen Oszillationen physikalischer Größen, wie z.B. Spannungen, ein zu steifes Verhalten, so können Stabilisierungsverfahren dazu herangezogen werden, diese zu dämpfen oder sogar vollständig zu eliminieren. In diesem Fall bewirkt die Stabilisierung eine Abminderung der Steifigkeit.

Bei SHELL10 wird ein Stabilisierungsverfahren im zuletzt genannten Sinn eingesetzt. Zur Reduktion von Oszillationen in den Querschubverzerrungen  $\bar{E}_{13}$  bzw.  $\bar{E}_{23}$ , die bei in der Schalenebene verzerrten, sehr schlanken Elementen auftreten, wird eine von LYLY U. A. (1993) vorgeschlagene Methode verwendet. Konnte durch ANS<sub>T</sub> und die Wahl geeigneter Koordinatensysteme die Verzerrungsempfindlichkeit bei in Dickenrichtung verzerrten Elementen günstig beeinflusst werden, so verbessert die Stabilisierung das Verhalten von in der Schalenebene verzerrten Elementen. Die Methode von LYLY U. A. (1993) wurde ursprünglich für schubweiche Plattenelemente entwickelt und bereits bei CHAPELLE UND STENBERG (1996) auf schubweiche Schalenelemente angewandt. Als einer der Ersten setzt BISCHOFF (1999) das Verfahren erfolgreich für flächenparametrisierte 7-Parameter-Schalenelemente ein. In BISCHOFF UND BLETZINGER (2001) sowie BISCHOFF UND BLETZINGER (2004) wird diese Methode auf weitere Elementtypen übertragen sowie auf deren Verwandtschaft zu anderen Stabilisierungsverfahren hingewiesen.

Die Dämpfung der Oszillationen in den Querschubverzerrungen wird in LYLY U. A. (1993) durch eine gezielte Abminderung der Querschubsteifigkeit über einen Faktor  $f_s$  ( $0 < f_s \leq 1$ ) erzielt. Die Größe von  $f_s$  darf dabei nicht beliebig gewählt werden, sondern ist so an die Elementabmessungen zu koppeln, dass die Konvergenz zur korrekten Lösung nicht beeinflusst wird. LYLY U. A. (1993) geben  $f_s$  mit

$$f_s = \frac{T_0^2}{T_0^2 + \lambda \cdot l^2} \quad (6.68)$$

an. Für SHELL10 stellt  $T_0$  die Schalendicke in der Referenzkonfiguration gemessen im Elementmittelpunkt dar. Der Parameter  $l$  ist eine Größe, welche die fiktive Elementmittelfläche charakterisiert, z.B. die Länge ihrer längsten Kante bzw. die Wurzel ihres Flächeninhalts. In der Formulierung von SHELL10 wird für  $l$  die Wurzel des Flächeninhalts verwendet. Bei  $\lambda$  handelt es sich um einen aus dem Raum  $\mathbb{R}_0^+$  frei wählbaren Parameter, dessen Größe die Qualität der Ergebnisse entscheidend bestimmt (siehe Abschnitt 6.6.1).

Die spezielle Wahl von  $f_s$  laut Gleichung (6.68) gewährleistet, dass bei Netzverfeinerung ( $l \rightarrow 0$ ) und konstanter Dicke der Einfluss der Stabilisierung verschwindet ( $f_s \rightarrow 1$ ). Bei konstant gehaltener Elementgröße und abnehmender Dicke ( $T_0 \rightarrow 0$ ) geht der Stabilisierungsfaktor gegen null ( $f_s \rightarrow 0$ ). Eventuell vorhandene Querschubverzerrungen werden dadurch vollständig eliminiert, was der Kirchhoff-Lösung entspricht. Das Stabilisierungsverfahren nach LYL Y U. A. (1993) beeinträchtigt die Konsistenz von SHELL10 somit nicht.

Die Implementierung dieses Stabilisierungsverfahrens in die Elementformulierung von SHELL10 lässt sich mit wenigen Modifikationen realisieren. Dabei bieten sich zwei Varianten an, den Stabilisierungsfaktor einzubringen. Wie beispielsweise in BISCHOFF (1999) erfolgt, kann der Faktor  $f_s$  direkt im Materialgesetz zur Abminderung der Querschubsteifigkeit eingesetzt werden. Der Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass alle in einem Finite-Elemente-Programm vorhandenen Materialgesetze angepasst werden müssten. Die Modifikationen blieben damit nicht auf eine einzelne Elementformulierung beschränkt. Im Rahmen von SHELL10 wird ein alternativer Weg beschränkt. Anstatt der Querschubsteifigkeit (Materialgesetz) werden die Querschubverzerrungen modifiziert. Die bereits in Gleichung (6.51) durch ANS<sub>Q</sub> veränderten Komponenten  $\bar{E}_{13}$  und  $\bar{E}_{23}$  müssen lediglich mit  $f_s$  multipliziert werden und lauten in modifizierter Form

$$\bar{E}_{13} = \frac{1}{2} \left( N_1^Q \cdot \bar{g}_{13} \Big|_{\textcircled{1}Q} + N_2^Q \cdot \bar{g}_{13} \Big|_{\textcircled{2}Q} \right) f_s \quad \text{bzw.} \quad (6.69)$$

$$\bar{E}_{23} = \frac{1}{2} \left( N_3^Q \cdot \bar{g}_{23} \Big|_{\textcircled{3}Q} + N_4^Q \cdot \bar{g}_{23} \Big|_{\textcircled{4}Q} \right) f_s.$$

Beim Einbringen des Stabilisierungsfaktors in den B-Operator ist folgende Besonderheit zu beachten. Da im Integranden der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{e+u}$  (siehe Gleichung (6.29)) der B-Operator „zweimal“ auftritt ( $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ ), muss dort als Faktor die Quadratwurzel von  $f_s$  verwendet werden. Durch diese Vorgehensweise wird  $f_s$  quasi anteilig in  $\mathbf{B}^T$  und  $\mathbf{B}$  eingebracht (siehe Gleichung (6.70)).

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}^k) = \begin{bmatrix} N_{k,1} \bar{g}_{1x} & N_{k,1} \bar{g}_{1y} & N_{k,1} \bar{g}_{1z} \\ N_{k,1} \bar{g}_{2x} + N_{k,2} \bar{g}_{1x} & N_{k,1} \bar{g}_{2y} + N_{k,2} \bar{g}_{1y} & N_{k,1} \bar{g}_{2z} + N_{k,2} \bar{g}_{1z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{31}^Q \cdot \sqrt{f_s} & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{32}^Q \cdot \sqrt{f_s} & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{33}^Q \cdot \sqrt{f_s} \\ N_{k,2} \bar{g}_{2x} & N_{k,2} \bar{g}_{2y} & N_{k,2} \bar{g}_{2z} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{51}^Q \cdot \sqrt{f_s} & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{52}^Q \cdot \sqrt{f_s} & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{53}^Q \cdot \sqrt{f_s} \\ \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{61}^T & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{62}^T & \mathbf{B}(\mathbf{d}^k)_{63}^T \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

Eine explizite Modifikation der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$  ist nicht notwendig. Sie erfolgt implizit über die Spannungskomponenten  $\bar{S}_{ij}$ , die sich aus dem Material und den modifizierten Verzerrungen ergeben.

### 6.6.1 Wahl des Parameters $\lambda$

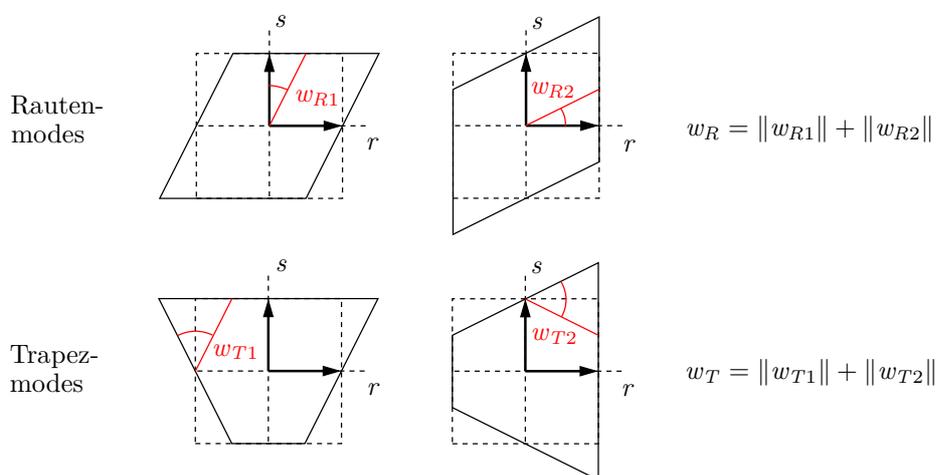
Die Wahl des Parameters  $\lambda$  hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Qualität der Verschiebungs- und Spannungswerte. In der Veröffentlichung von LYL Y U. A. (1993) sind Auswertungen für eine flächig in Querrichtung belastete Quadratplatte dokumentiert. Bereits für dieses einfache Beispiel wird deutlich, dass der optimale Wert von  $\lambda$  stark von den Randbedingungen (Einspannung oder gelenkige Lagerung) sowie von der Art der Netzverzerrung abhängt. Für eine Studie des Einflusses der Stabilisierung bei unterschiedlich verzerrten Netzen wird in oben genannter Publikation, vermutlich als Kompromiss, der Wert  $\lambda = 0,1$  verwendet.

WILKING (2011) zeigt, dass dieser Wert im Rahmen von SHELL10 für verschiedene Beispiele gute Ergebnisse liefert. Der von BISCHOFF (1999) für ein vierknotiges Schalenelement vorgeschlagene Wert  $\lambda = 0,12$  kann aufgrund der zuvor beschriebenen Problemabhängigkeit des Optimalwerts von  $\lambda$  als qualitativ gleichwertig eingestuft werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in den Elementformulierungen, die in LYL Y U. A. (1993) bzw. BISCHOFF (1999) zum Einsatz kommen, die Querschubsteifigkeit mit dem Schubkorrekturfaktor  $\kappa = 5/6$  abgemindert wird. Dies lässt sich in der Formulierung von SHELL10 leicht durch die Multiplikation von  $f_s$  mit  $\kappa$  realisieren. Bereits in LYL Y U. A. (1993) wird aber darauf hingewiesen, dass im Rahmen der Stabilisierung der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  keine große Relevanz besitzt, da der Faktor  $f_s$  bereits bei einer moderaten Elementschlankheit deutlich kleiner als  $\kappa$  selbst ist.

Der Parameter  $\lambda$  wird in LYL Y U. A. (1993) und darauf aufbauenden Arbeiten unabhängig von der Art der Netzverzerrung für das gesamte Problem als konstante Größe angenommen. In der Schalenebene unverzerrte Elemente, die nicht zu Querschuboszillationen neigen, sind somit mit demselben Faktor  $f_s$  stabilisiert wie Elemente, die eine verzerrte Elementgeometrie aufweisen. Liegen im Hinblick auf die Elementverzerrung stark inhomogene Netze vor, ist es faktisch unmöglich, einen einzigen skalaren Wert  $\lambda$  zu bestimmen, der im Bereich stark verzerrter Elemente die notwendige Dämpfung der Querschuboszillationen erreicht, gleichzeitig aber für unverzerrte Elemente keine zu weichen Lösungen verursacht. Aus diesem Grund wurde für SHELL10 eine adaptive Stabilisierung entwickelt, die für jedes Element den Betrag von  $\lambda$  mit der Elementverzerrung in der Referenzkonfiguration korreliert. Der Parameter  $\lambda$  wird somit von einer globalen zu einer elementbezogenen Größe ( $\lambda^e$ ).

In Abbildung 6.12 sind diejenigen Verzerrungsmodes der fiktiven Mittelfläche dargestellt, die Querschuboszillationen verursachen. Es handelt sich dabei um zwei rautenfö-

mige sowie zwei trapezförmige Geometrien der Mittelfläche. Als Maß für die Stärke der Elementverzerrung (Abweichung von der rechtwinkligen Geometrie) werden die angegebenen Winkel  $w_R$  bzw.  $w_T$  im Bogenmaß herangezogen.



**Abbildung 6.12:** Verzerrungsmodes in der Schalenebene, die Querschuboszillationen verursachen.

Zur Bestimmung von  $\lambda^e$  muss eine Korrelationsfunktion in Abhängigkeit dieser Größen gefunden werden. Eine allgemeingültige Funktion, die für jede erdenkliche Problemstellung stets die optimalen Werte  $\lambda^e$  liefert, existiert jedoch nicht, da eine zu starke Abhängigkeit von weiteren Größen, wie z.B. den Randbedingungen oder der Belastung, besteht. Entsprechende Korrelationsfunktionen müssen somit auf empirischem Wege gefunden und gegebenenfalls an eine neue Problemstellung angepasst werden.

Aus Sicht des Autors erscheinen dabei solche Funktionen als geeignet, die im Bereich moderater Winkel  $w_R$  bzw.  $w_T$  große Steigungen, im Bereich sehr großer Winkel dagegen nur noch eine geringe Steigung aufweisen. Unphysikalische Ergebnisse, die durch zu starke Stabilisierung auftreten, können hierdurch vermieden werden. Die Funktion

$$\lambda^e = \frac{2}{5} \ln(w_R + w_T + 1) \quad (6.71)$$

wurde über zahlreiche numerische Experimente ermittelt und erfüllt diese beiden Forderungen. Zudem ergibt sich für rechtwinklige Geometrien der Wert  $\lambda^e = 0$ , was die Stabilisierung deaktiviert.

In WILKING (2011) sind weitere Funktionen für  $\lambda^e$  angegeben, die auch mit teilweise anderen Charakteristiken für spezielle Problemstellungen brauchbare Ergebnisse liefern. Dies unterstreicht nochmals die starke Problemabhängigkeit der Korrelationsfunktion.

Eine anisotrope Stabilisierung (siehe z.B. BISCHOFF UND BLETZINGER (2001)), bei der jeweils unterschiedlich große Stabilisierungsfaktoren  $f_s$  für die Verzerrungskomponenten

$\bar{E}_{13}$  bzw.  $\bar{E}_{23}$  zum Einsatz kommen, wurde im Rahmen der Entwicklung von SHELL10 untersucht. Aufgrund der schlechten Qualität der Ergebnisse (siehe WILKING (2011)) ist dieser Ansatz für SHELL10 jedoch verworfen worden.

### 6.6.2 Abschließende Bemerkungen zur Querschubstabilisierung

Die Stabilisierungsmethode nach LYL Y U. A. (1993) stellt ein einfaches, mit geringen Kosten verbundenes Verfahren dar. Die bei in der Schalenebene verzerrten Elementgeometrien auftretenden Querschuboszillationen können effizient gedämpft werden, was SHELL10 deutlich robuster gegenüber Netzverzerrungen macht. Die Wahl des Parameters  $\lambda$  ist entscheidend für die Qualität der Ergebnisse. Sein optimaler Wert kann im Prinzip nur bei Kenntnis der Lösung bestimmt werden. Schlecht gewählte Werte für  $\lambda$  bergen die Gefahr zu weichen, anstatt zu steifer Ergebnisse ohne Stabilisierung. Inwieweit sich die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene adaptive Bestimmung von  $\lambda$  in der Praxis durchsetzen wird, bleibt abzuwarten.

Das Verfahren kommt im Rahmen dieser Arbeit vermutlich zum ersten Mal überhaupt bei einem Volumen-Schalenelement zum Einsatz. Durch Stapeln dieser Elemente bietet sich die Möglichkeit die Dickenrichtung der Schale genauer zu diskretisieren. Für diesen Fall und besonders bei Auftreten von Tangentiallasten an der Schalenober- bzw. Unterseite wird die Anwendung der Querschubstabilisierung nicht empfohlen.

Die Stabilisierung stellt keine Alternative zu qualitativ hochwertigen Finite-Elemente-Netzen dar. Sie sollte aus Sicht des Autors immer nur dann eingesetzt werden, wenn sich keine andere Möglichkeit bietet. Die Ergebnisse sind in diesen Fällen besonders kritisch zu prüfen.

## 6.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Elementformulierung eines auf der 7-Parameter-Schalentheorie beruhenden spannungsbasierten 3D-Volumen-Schalenelements vorgestellt. Es handelt sich dabei um ein vollintegriertes, achtknotiges Element mit trilinearen Ansatzfunktionen, bei dem die in der reinen Verschiebungsformulierung vorhandenen Lockingphänomene durch eine Kombination von ANS- und EAS-Methoden beseitigt werden. Im Rahmen der EAS-Methode kommen insgesamt sieben EAS-Parameter zum Einsatz, deren Anzahl einen guten Kompromiss zwischen Aufwand und Nutzen darstellt. Um die Verzerrungsempfindlichkeit des Elements zu minimieren, erfolgt die Formulierung nicht im natürlichen Elementkoordinatensystem, sondern in einem alternativen Koordinatensystem. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass der Basisvektor in Dickenrichtung der Schale stets orthogonal zur fiktiven Mittelfläche ist. Die Stabilisierung des Querschubs

nach LYL<sup>Y</sup> U. A. (1993) führt zu einer weiteren Reduktion der Verzerrungsempfindlichkeit, wobei der Grad der Stabilisierung direkt aus der Elementgeometrie bestimmt werden kann (adaptive Stabilisierung).

Die Leistungsfähigkeit des in diesem Kapitel beschriebenen Schalenelements wird in Kapitel 8 anhand numerischer Beispiele untersucht. Es erfolgt zum einen der Vergleich mit einem Element, das im natürlichen Elementkoordinatensystem formuliert, ansonsten jedoch identisch ist. Zum anderen kommt in den Benchmarks das in der kommerziellen Finite-Elemente-Software ABAQUS zur Verfügung stehende Kontinuumsschalenelement SC8R (ABAQUS 2011) zum Einsatz. Neben der Genauigkeit von Verschiebungswerten wird dabei vor allem die Qualität von Spannungsverläufen beurteilt.

---

## Gleichungslösung und Vorkonditionierung für Schalen

Bei der numerischen Simulationen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente müssen bei der impliziten Behandlung der Gleichgewichtsgleichungen lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Im statischen Fall lässt sich ein solches Gleichungssystem verallgemeinert durch

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{7.1}$$

ausdrücken. Darin repräsentiert die Matrix  $\mathbf{K}$  eine Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{f}$  den Vektor konsistenter Knotenkräfte sowie  $\mathbf{d}$  den Vektor der Knotenverschiebungen, die die Unbekannten darstellen, nach denen gelöst werden muss.

Bei linearen Problemstellungen ist ein Gleichungssystem dieser Art direkt zugänglich. Bei nichtlinearen Problemstellungen dagegen werden die dort auftretenden nichtlinearen Gleichungssysteme in der Regel durch iterative Prädiktor-Korrektor-Verfahren, wie z.B. dem Newton-Raphson-Verfahren, gelöst. Dabei wird ihre Lösung auf eine Sequenz linearer Gleichungssysteme der in Gleichung (7.1) gegebenen Form zurückgeführt.

Vor dem Hintergrund stetig wachsender Ansprüche an Simulationsergebnisse und den dadurch immer größer und komplexer werdenden Modellen kommt den Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme eine stetig wachsende Bedeutung zu. Dabei spielt nicht alleine die Zahl der Unbekannten eines Gleichungssystems eine wichtige Rolle, sondern auch dessen numerische Eigenschaften haben einen wesentlichen Einfluss.

So führt bei der Simulation von Schalenstrukturen der große Unterschied zwischen Biege- und MembranstEIFigkeit zu einer extrem schlechten Konditionierung, was sich in Form von hohen Konditionszahlen bzw. breiten Eigenwertspektren bemerkbar macht. Werden Schalenelemente eingesetzt, die keine Rotationsfreiheitsgrade, sondern lediglich Verschie-

bungsfreiheitsgrade besitzen, wie z.B. Volumen-Schalenelemente, so wird die Kondition noch deutlich schlechter (GEE 2004). Gleichungssysteme, die diese Eigenschaften besitzen, bereiten vor allem iterativen Lösungsverfahren große Schwierigkeiten.

Im Rahmen dieses Kapitels werden zunächst verschiedene Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme vorgestellt. Es folgt eine kurze Beschreibung des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung, wobei besonders auf unterschiedliche Strategien zum Aufstellen faktorisierungsbasierter Vorkonditionierer eingegangen wird. Im Anschluss daran werden zwei Methoden beschrieben, mit deren Hilfe auf einem Ersatzproblem basierende Vorkonditionierungsmatrizen aufgestellt werden können. Das Ersatzproblem wird dabei über einen topologischen sowie einen algebraischen Ansatz ermittelt.

### 7.1 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme können in zwei grundsätzliche Kategorien unterteilt werden: direkte und iterative Verfahren. In den folgenden zwei Abschnitten werden ihre Funktionsweise sowie wesentliche Vor- bzw. Nachteile kurz erläutert. Für Details sei auf die Literatur verwiesen, z.B. auf MEISTER (2008), GEORGE UND LIU (1981), VAN DER VORST (2003), SAAD (2000), GOLUB UND VAN LOAN (1996) oder auf BARRETT U. A. (1994). Auf Multigrid-Verfahren, die in Verbindung mit iterativen Verfahren teilweise erfolgreich zur Konvergenzbeschleunigung eingesetzt werden, wird nicht näher eingegangen. Hierfür sei beispielsweise auf HACKBUSCH (1985) und für die spezielle Anwendung bei Schalenproblemen vor allem auf GEE (2004) verwiesen.

#### 7.1.1 Direkte Lösungsverfahren

Als direkte Lösungsverfahren gelten Rechenvorschriften, die unter Annahme einer exakten Arithmetik nach einer vorherbestimmbaren Anzahl von Rechenoperationen die exakte Lösung liefern. Direkte Gleichungslöser, die bei Finite-Elemente-Simulationen zum Einsatz kommen, beruhen meist auf der Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{K}$ . Ist  $\mathbf{K}$  symmetrisch und positiv definit, so erfolgt in der Regel eine Cholesky-Faktorisierung der Form  $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$  oder  $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T$ . Die Lösung ergibt sich durch anschließendes Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen in  $\mathbf{L}$  bzw.  $\mathbf{L}^T$ .

Handelt es sich bei  $\mathbf{K}$  um eine dünnbesetzte Matrix (sparse matrix), so weist deren Faktorisierung in der Regel mehr Nicht-Null-Einträge auf als die Matrix  $\mathbf{K}$  selbst (fill-in). Die Anzahl der zusätzlichen Einträge ist dabei stark von der Sortierung der Zeilen bzw. Spalten in  $\mathbf{K}$  abhängig. Um den mit zusätzlichen Einträgen verbundenen Rechen-

und Speicheraufwand so gering wie möglich zu halten, erfolgt bei direkten Lösern vorab zunächst eine Umsortierung von  $\mathbf{K}$  sowie gleichzeitig die Bestimmung einer optimalen Folge für die Pivotisierung. Diese Aufbereitung des Gleichungssystems wird oft auch als symbolische Faktorisierung bezeichnet. Erst im Anschluss daran erfolgt die numerische Faktorisierung, d.h. die eigentliche Berechnung der Einträge von  $\mathbf{L}$  sowie die Lösung des Gleichungssystems durch Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen (GOULD U. A. 2007).

Aufgrund der Unempfindlichkeit gegenüber numerischen Eigenschaften der Matrix  $\mathbf{K}$ , wie z.B. der Konditionierung, gelten direkte Löser als die robustesten und zuverlässigsten überhaupt. Der Robustheit bzw. Zuverlässigkeit stehen jedoch eine hohe Anzahl an Rechenoperationen sowie der extensive Speicherbedarf gegenüber, welcher bei entsprechenden Problemgrößen selbst heutige Computerhardware an ihre Grenzen bringen kann (BENZI 2002). Die Entwicklung effizienterer Implementierungen, vor allem mit Blick auf die Lösungsbeschleunigung durch Parallelisierung, ist daher immer noch Gegenstand der aktuellen Forschung. Eine Übersicht sowie der Vergleich diverser Löserbibliotheken ist in GOULD U. A. (2007) zu finden.

### 7.1.2 Iterative Lösungsverfahren

Iterative Lösungsverfahren sind Verfahren, bei denen die Lösung durch schrittweises Verbessern einer anfänglichen Schätzung ermittelt wird. Grundsätzlich können sie in stationäre und nichtstationäre Verfahren unterteilt werden. Der Unterschied besteht darin, dass die Iterationsvorschrift im ersten Fall unverändert (stationär) bleibt, im zweiten Fall dagegen im Laufe des Iterationsprozesses angepasst wird (nichtstationär).

Die ersten stationären Iterationsverfahren wurden im 19. Jahrhundert entwickelt. Hierzu zählt unter anderem das Jacobi- oder das Gauß-Seidel-Verfahren. Zur Lösung linearer Gleichungssysteme werden sie heute aufgrund der im Vergleich zu den nichtstationären Verfahren geringen Effizienz nicht mehr eingesetzt. Zur Vorkonditionierung nichtstationärer Verfahren bzw. als Glätter bei Multigrid-Verfahren sind sie dagegen noch weit verbreitet (BARRETT U. A. 1994).

Nichtstationäre Iterationsverfahren wurden erst in den letzten 60 Jahren motiviert durch die aufkommenden numerischen Simulationsmethoden und den dadurch steigenden Bedarf an billigen und robusten Lösungsverfahren entwickelt. Als Urvater der meisten dieser Verfahren gilt das Verfahren der konjugierten Gradienten, kurz CG-Verfahren (englisch: Conjugate Gradients), von HESTENES UND STIEFEL (1952), welches auf die Lösung symmetrischer, positiv definiten Systeme beschränkt ist. Eine bekannte Erweiterung für unsymmetrische Systeme stellt beispielsweise das GMRES-Verfahren (Generalized Minimal RESidual) von SAAD UND SCHULTZ (1986) dar.

Im Vergleich zu den direkten zeichnen sich die iterativen Lösungsverfahren durch einen deutlich geringeren Speicherbedarf sowie eine effizientere Parallelisierbarkeit aus.

Das Konvergenzverhalten iterativer Lösungsverfahren ist jedoch stark problemabhängig. Dies kann bei schlecht konditionierten Gleichungssystemen dazu führen, dass bis zur Konvergenz unverhältnismäßig viele Iterationsschritte (hohe Rechenzeiten) nötig sind oder dass aufgrund der Stagnation der Konvergenz die Lösung überhaupt nicht erreicht werden kann. Abhilfe schafft in solchen Fällen oft eine sogenannte Vorkonditionierung der Problemstellung. Dabei wird über eine Transformation mittels eines Vorkonditionierers  $\mathbf{M}$  versucht, die Kondition der ursprünglichen Problemstellung (Gleichung (7.1)) derart zu beeinflussen, dass zwar dieselbe Lösung erreicht wird, jedoch ein deutlich besseres Konvergenzverhalten vorliegt (Gleichung (7.2)).

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (7.2)$$

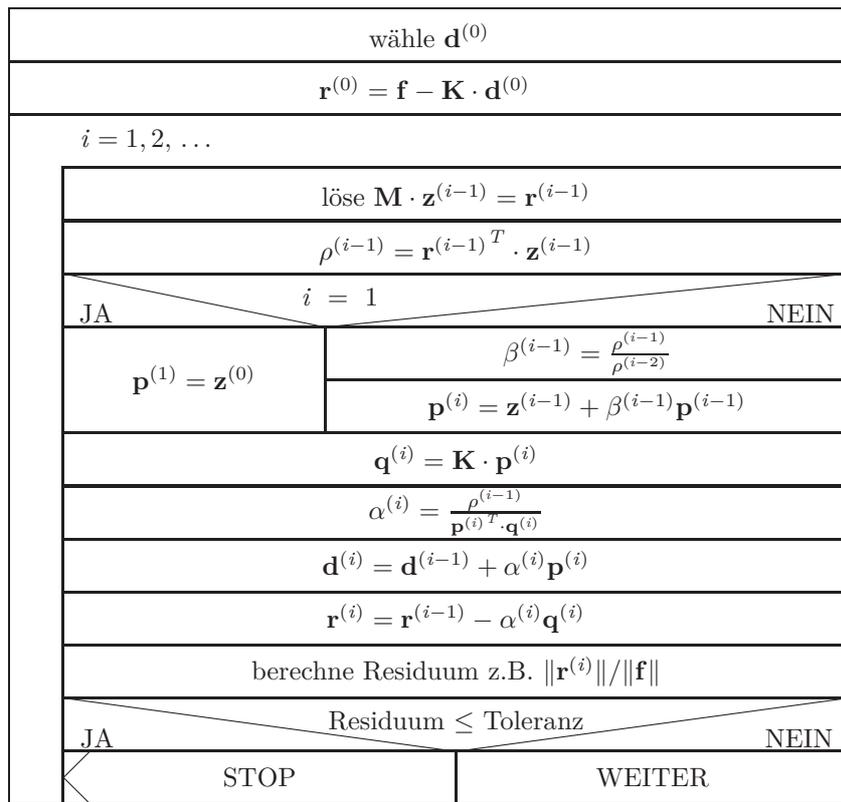
Die Verbesserung des Konvergenzverhaltens muss stets mit den damit verbundenen zusätzlichen numerischen Kosten (Rechenoperationen und Speicherbedarf) in Relation gesetzt werden.

Bei der Simulation von Schalenstrukturen wurden in den letzten Jahren im Hinblick auf die Konditionsverbesserung der entstehenden Gleichungssysteme Fortschritte erzielt. So konnte in GEE U. A. (2005) bzw. KLÖPPEL U. A. (2011) die zusätzliche Konditionsverschlechterung, welche durch die Verwendung von Verschiebungs- bzw. Differenzverschiebungsfreiheitsgraden in Elementformulierungen entsteht, behoben werden. Die daraus resultierenden Gleichungssysteme weisen jedoch immer noch eine derart schlechte Konditionierung auf, dass in GEE U. A. (2005) sowie KLÖPPEL U. A. (2011) Multigrid-Verfahren zu ihrer Lösung herangezogen werden.

Die Suche nach einem Vorkonditionierer, der eine effiziente Lösung dieser Gleichungssysteme mit rein iterativen Verfahren ermöglicht, kann nicht als abgeschlossen betrachtet werden und wird im Rahmen dieses Kapitels fortgesetzt.

## 7.2 CG-Verfahren mit faktorisierungsbasierten Vorkonditionierern

Der Ablauf des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung ist in dem Struktogramm der Abbildung 7.1 dargestellt. Sieht man zunächst von der Vorkonditionierung ab (Zeile 4) so ist klar zu erkennen, dass pro Iteration zum einen nur sehr wenige Vektoren von Systemgröße im Speicher gehalten werden müssen, sich zum anderen die wesentlichen Rechenoperationen pro Iteration auf ein Matrix-Vektor-Produkt,



**Abbildung 7.1:** Struktogramm des vorkonditionierten CG-Verfahrens (BARRETT U. A. 1994).

zwei Vektor-Vektor-Produkte (Skalarprodukt) sowie auf die Aktualisierung dreier Vektoren beschränken.

Die mit der Vorkonditionierung verbundenen zusätzlichen numerischen Kosten setzen sich aus zwei Anteilen zusammen: Einmalige Kosten, welche beim Aufstellen des Vorkonditionierers anfallen, sowie zusätzliche Kosten, die in jedem einzelnen Iterationsschritt auftreten. Letztere fallen im Wesentlichen beim Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}^{(i-1)} = \mathbf{r}^{(i-1)} \tag{7.3}$$

aus Zeile vier des Struktogramms (Abbildung 7.1) an. Bei sogenannten expliziten Vorkonditionierern, bei denen direkt  $\mathbf{M}^{-1}$  zur Verfügung steht, lässt sich die Gleichungslösung als Matrix-Vektor-Produkt realisieren. Die Mehrzahl der Vorkonditionierer gehört jedoch zur Klasse der impliziten Vorkonditionierer, bei denen  $\mathbf{M}$  vorliegt. In diesem Fall erfolgt die Lösung von Gleichung (7.3) durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen in die faktorisierte Form von  $\mathbf{M}$ , was einer direkten Lösung nach Abschnitt 7.1.1 entspricht.

Ein Vorkonditionierer kann nur dann als effizient betrachtet werden, wenn zum einen die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in  $\mathbf{M}^{-1}$  (explizit) bzw. der Faktorisierung von  $\mathbf{M}$

(implizit) im Vergleich zu  $\mathbf{K}^{-1}$  bzw. zur Faktorisierung von  $\mathbf{K}$  möglichst gering ausfällt. Dies beeinflusst den Gesamtspeicherbedarf des CG-Verfahrens sowie die zusätzlichen Rechenoperationen pro Iteration. Zum anderen muss gleichzeitig  $\mathbf{M}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{M}$  eine gute Approximation von  $\mathbf{K}^{-1}$  bzw.  $\mathbf{K}$  sein, sodass die insgesamt notwendigen Iterationsschritte bis zur Konvergenz signifikant abnehmen. Es ist offensichtlich, dass die beiden genannten Anforderungen an Vorkonditionierer miteinander in Konflikt stehen (BENZI 2002).

Speziell für Gleichungssysteme, welche aus der Simulation von Schalenstrukturen resultieren, ist eine optimale Balance zwischen beiden Forderungen aus heutiger Sicht noch nicht gefunden. Numerische Untersuchungen zeigen zwar, dass Vorkonditionierer basierend auf einer unvollständigen Faktorisierung die robustesten für diesen Anwendungsfall zu sein scheinen (BENZI U. A. (1998), BENZI UND TUMA (2003)), jedoch macht die trotz dieser sehr aufwendigen und damit teuren Vorkonditionierung hohe Anzahl an Iterationen eine rein iterative Lösung meist unwirtschaftlich (BENZI UND TUMA 2003).

Ob das Potential, Vorkonditionierer auf der Basis unvollständiger Faktorisierung aufzustellen, für Schalenprobleme bereits vollständig ausgeschöpft ist, stellt eine ungelöste Frage dar. Vor diesem Hintergrund werden zunächst zwei sich grundsätzlich unterscheidende Herangehensweisen zum Erstellen unvollständiger Faktorisierungen vorgestellt.

### 7.2.1 Unvollständige Faktorisierung des Ausgangsproblems

Bei der unvollständigen Faktorisierung des Ausgangsproblems  $\mathbf{K}$  wird die Unvollständigkeit, d.h. die Approximation, dadurch erreicht, dass während des Faktorisierungsprozesses bestimmte Einträge zu null angenommen und somit nicht berücksichtigt werden. Bei dieser Vorgehensweise entsteht direkt die faktorisierte Form der Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$ .  $\mathbf{M}$  selbst wird bei diesem Vorgehen nicht explizit aufgestellt.

Bekannte Vertreter, die diesen Ansatz verfolgen, sind beispielsweise die unvollständige LU-Zerlegung (ILU), die unvollständige Cholesky-Zerlegung (IC) sowie die hiervon abgeleiteten Varianten. Welche Einträge im Rahmen des Faktorisierungsprozesses vernachlässigt werden, kann dabei von deren absoluter Größe oder deren Position in der Matrix abhängig gemacht werden (drop tolerance-based oder level-based) (SAAD 2000). Eine wesentliche Schwierigkeit bei dieser Herangehensweise besteht jedoch darin, dass selbst für symmetrische, positiv definite Matrizen die Existenz einer unvollständigen Faktorisierung nicht immer gewährleistet ist. Durch Stabilisierungsverfahren, wie beispielsweise der Modifikation von Diagonalelementen, kann in vielen Fällen trotzdem eine für die Vorkonditionierung brauchbare Lösung erzielt werden (MANTEUFFEL (1980), BENZI UND TUMA (2003)).

## 7.2.2 Vollständige Faktorisierung eines Ersatzproblems

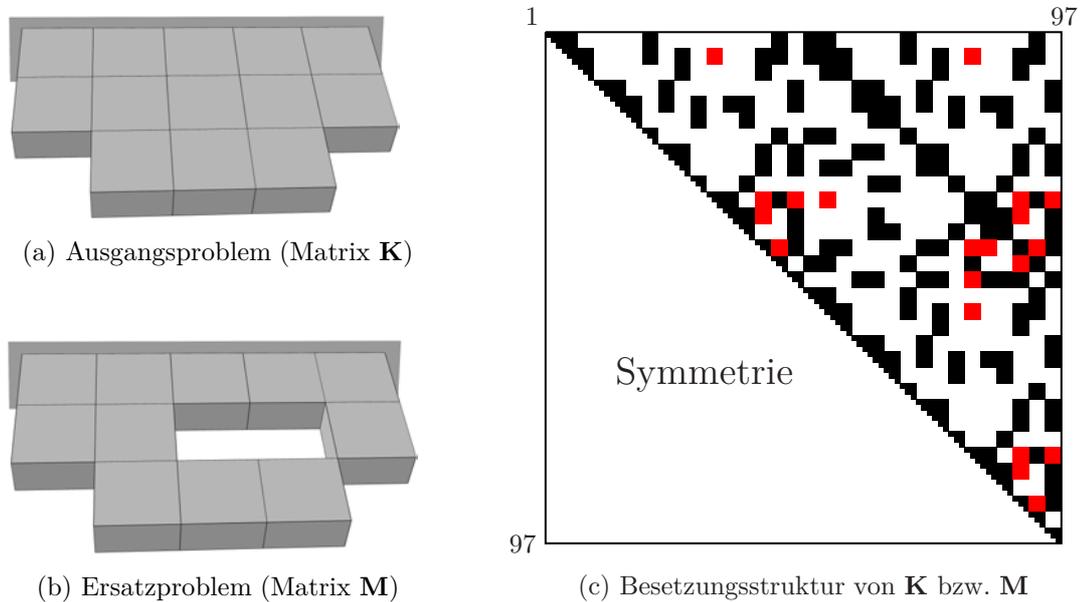
Der Begriff der vollständigen Faktorisierung eines Ersatzproblems (englisch: full factorization of an incomplete problem) wurde laut CHEN UND TOLEDO (2003) von John Gilbert geprägt. Im Gegensatz zum vorangegangenen Abschnitt, wo die Unvollständigkeit bzw. die Approximation während des Faktorisierungsprozesses erreicht wird, wird in diesem Fall ein Ersatzproblem aufgestellt, d.h. die Matrix  $\mathbf{K}$  wird explizit durch eine Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$  approximiert. Erst in einem zweiten Schritt erfolgt die Faktorisierung, wobei es sich im Gegensatz zu Abschnitt 7.2.1 um eine vollständige Faktorisierung handelt. Da  $\mathbf{M}$  als Vorkonditionierer im CG-Verfahren grundsätzlich symmetrisch und positiv definit sein muss, ist die Existenz der Cholesky-Faktorisierung automatisch gesichert. Die Forderung nach numerischer Stabilität dieser Herangehensweise ist nicht wie in Abschnitt 7.2.1 an den Faktorisierungsprozess, sondern an den Approximationsprozess  $\mathbf{M} \approx \mathbf{K}$  zu stellen.

Der Erfolg dieses Ansatzes zur Herleitung von Vorkonditionierern ist damit ausschließlich mit dem Auffinden eines passenden Ersatzproblems, d.h. einer guten Approximation von  $\mathbf{K}$ , verknüpft. In den folgenden beiden Abschnitten werden zwei unterschiedliche Ansätze vorgestellt, mit denen eine solche Approximation möglich erscheint.

## 7.3 Ersatzproblem durch Topologieänderung des FE-Netzes

Bei Matrixeinträgen kann allgemein zwischen Haupt- und Nebendiagonaleinträgen unterschieden werden. Bei einer Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , welche aus einer mit finiten Elementen diskretisierten Struktur resultiert, sind alle Einträge der Hauptdiagonale grundsätzlich ungleich null. Nebendiagonaleinträge, die die Kopplungen zwischen unterschiedlichen Freiheitsgraden darstellen, sind aufgrund der Struktur einer FE-Diskretisierung dagegen schwach besetzt und können in zwei Kategorien unterteilt werden. Die erste Kategorie beinhaltet diejenigen Einträge, welche Freiheitsgrade desselben FE-Knotens miteinander in Verbindung setzen. In die zweite Kategorie fallen all diejenigen Nebendiagonaleinträge, die Freiheitsgrade unterschiedlicher Knoten miteinander koppeln. Die Kopplungen der zweiten Kategorie werden physikalisch durch einzelne finite Elemente repräsentiert. Werden Elemente aus einer Diskretisierung herausgenommen, so verschwinden die damit verbundenen Koppelinträge aus der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und es ist ein Ersatzproblem mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{M}$  gefunden. Das Aufstellen eines Ersatzproblems durch Entfernen von Elementen aus einer Diskretisierung geht auf SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) zurück.

In Abbildung 7.2 ist diese Herangehensweise exemplarisch anhand einer mit 13 achtkno-  
tigen Volumenelementen diskretisierten Struktur dargestellt.



**Abbildung 7.2:** Exemplarische Darstellung eines Ersatzproblems sowie der Auswirkungen auf die Besetzungsstruktur von  $\mathbf{M}$ .

Abbildung 7.2(a) zeigt das Ausgangsproblem, welches zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  führt. Durch Herausnehmen zweier Elemente entsteht in Abbildung 7.2(b) ein Ersatzproblem, das durch die Matrix  $\mathbf{M}$  charakterisiert wird. Die Besetzungsstrukturen beider Matrizen sind in Abbildung 7.2(c) dargestellt. Darin sind die rot markierten Einträge diejenigen, welche bei  $\mathbf{M}$  im Vergleich zu  $\mathbf{K}$  fehlen. Graphisch nicht dargestellt sind die betragsmäßigen Modifikationen verbleibender Einträge in  $\mathbf{M}$ , die sich durch das Entfernen von Elementen in einzelnen Einträgen der Steifigkeitsmatrix ergeben.

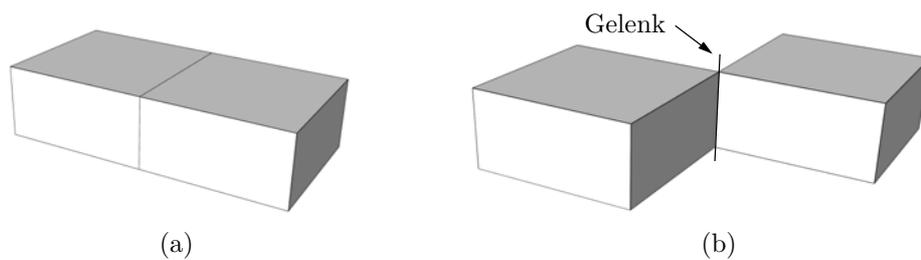
Grundsätzlich dürfen Elemente nicht völlig beliebig aus der Ausgangsdiskretisierung entfernt werden. Damit  $\mathbf{M}$  überhaupt als Vorkonditionierungsmatrix verwendet werden kann, müssen zwei grundsätzliche Forderungen erfüllt sein.

Zum einen darf sich die Dimension von  $\mathbf{M}$  im Vergleich zu  $\mathbf{K}$  nicht verändern, was bedeutet, dass durch Löschen einzelner Elemente keine Freiheitsgrade verloren gehen dürfen. Zum anderen muss gewährleistet sein, dass trotz des Entfernen von Elementen kein kinematisches Ersatzsystem entsteht. Nur so ist die positive Definitheit der Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$  garantiert. Ist die erste Forderung relativ einfach dadurch zu erfüllen, dass alle Finite-Elemente-Knoten des Ausgangssystems beibehalten werden, so bedarf die zweite Forderung weiterführender Überlegungen. Hierfür wird im folgenden Abschnitt ein Ansatz aus SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) vorgestellt.

### 7.3.1 Der Rigidity-Graph

Der Ansatz von SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) beruht auf rein graphentheoretischen Überlegungen. Hierfür wird ein sogenannter Rigidity-Graph eingeführt. Dieser ungerichtete Graph charakterisiert die Verbindungen zwischen Elementen einer Diskretisierung derart, dass hieraus Rückschlüsse gezogen werden können, ob das Entfernen eines Elements zu inneren Kinematiken in der betrachteten Diskretisierung führt oder nicht.

Jeder Knoten des Rigidity-Graphen repräsentiert ein finites Element der betrachteten Diskretisierung. Anhand der Beispiele aus Abbildung 7.3(a) und 7.3(b) wird veranschaulicht, welche Bedingungen zwischen einzelnen finiten Elementen erfüllt sein müssen, damit die zugehörigen Knoten im Rigidity-Graphen eine Verbindung aufweisen. In Abbildung 7.3 sind jeweils zwei finite Volumenelemente dargestellt, die über gemeinsame Netzknoten miteinander verbunden sind. Die Verbindungen unterscheiden sich vom mechanischen Gesichtspunkt aus jedoch grundlegend.



**Abbildung 7.3:** Charakterisierung von Elementverbindungen.

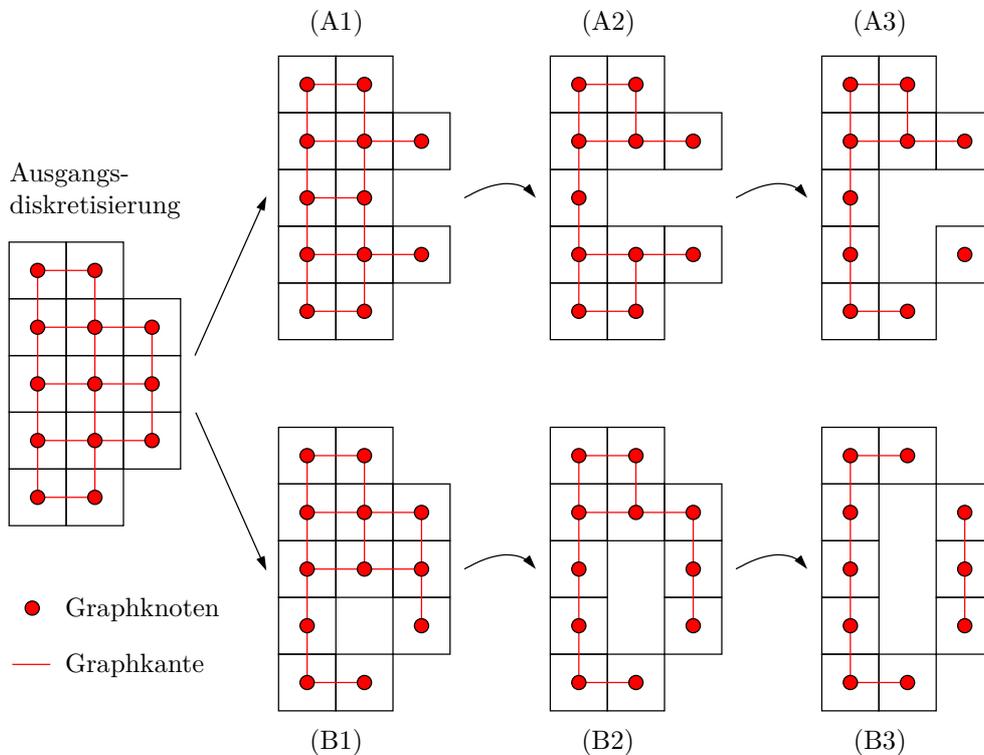
In Abbildung 7.3(a) sind beide Elemente über alle Netzknoten einer gemeinsamen Fläche miteinander verbunden, d.h. es ist keine Bewegung der Elemente gegeneinander möglich, ohne dass diese deformiert werden. Eine solche Verbindung wird in SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) als fest bzw. starr (englisch „rigid“) bezeichnet. Die diesen finiten Elementen zugeordneten Knoten des Rigidity-Graphen wären daher über eine Kante im Graphen miteinander verbunden.

Anders verhält es sich bei der Struktur aus Abbildung 7.3(b). Die zwei Elemente sind lediglich über die Netzknoten einer gemeinsamen Kante miteinander gekoppelt, was bei Volumenelementen ein Gelenk darstellt. Da die beiden Elemente ohne den Einsatz von Energie gegeneinander bewegt werden können, handelt es sich um eine kinematische Verbindung. In einem Rigidity-Graphen wären die Graphknoten, die diese beiden Elemente repräsentieren, daher nicht miteinander verbunden.

Die Kriterien dafür, wann eine Verbindung zweier benachbarter Elemente als starr betrachtet werden kann, hängen vom jeweiligen Elementtyp bzw. dessen Parametrisierung ab. Ein hinreichendes Kriterium bei Volumenelementen ist die Verbindung über eine

gemeinsame Elementfläche, bei flächenparametrisierten Schalenelementen über eine gemeinsame Kante oder bei Balkenelementen über einen gemeinsamen Knoten. Für Stabelemente (Fachwerkelemente), die ausschließlich über Gelenke miteinander verbunden sind, würden in einem Rigidity-Graphen keine Verbindungen existieren (SHKLARSKI UND TOLEDO 2008). Die Kinematik, die sich zwischen zwei Stabelementen immer einstellt, kann nur durch zusätzliche Elemente unterdrückt werden.

In Abbildung 7.4 ist der Rigidity-Graph für die Diskretisierung aus Abbildung 7.2 dargestellt. Zur Orientierung sind die Umrisse der finiten Elemente ebenfalls abgebildet. In zwei unterschiedlichen Reihenfolgen (A und B) werden nacheinander Elemente aus der Diskretisierung herausgenommen und dabei der Einfluss auf die Struktur sowie auf den Rigidity-Graphen beobachtet.



**Abbildung 7.4:** Der Rigidity-Graph für die Problemstellung aus Abbildung 7.2.

Im Falle der Reihenfolge A verursacht das Herausnehmen des ersten und zweiten Elements (A1 und A2) keine inneren Kinematiken in der Struktur. Wird jedoch das dritte Element gelöscht (A3), so ist eines der Elemente ähnlich Abbildung 7.3(b) gelenkig an den restlichen Teil der Diskretisierung angeschlossen. Die zugehörige Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{M}$  wäre singulär und als Vorkonditionierer unbrauchbar.

Betrachtet man die zugehörigen Rigidity-Graphen, so fällt auf, dass es sich bei A1 und A2 wie auch bei der Ausgangsdiskretisierung um zusammenhängende Graphen handelt.

Erst bei A3 zerfällt der Graph in zwei Teilgraphen. Im Falle von B werden in einer unterschiedlichen Reihenfolge ebenfalls solange Elemente aus der Diskretisierung herausgenommen, bis der Rigidity-Graph aus mehreren nicht zusammenhängenden Teilen besteht (B3). Im Vergleich zu A3 weist diese Diskretisierung jedoch keine innere Kinematik auf und wäre somit zum Erstellen eines Vorkonditionierers geeignet.

Auf der Basis der aus Abbildung 7.4 gewonnenen Erkenntnisse lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen: Solange durch Herausnehmen von Elementen aus einer Diskretisierung der Rigidity-Graph intakt, d.h. zusammenhängend bleibt, ist gewährleistet, dass das Ersatzproblem keine inneren Kinematiken besitzt (siehe A1, A2, B1, B2 in Abbildung 7.4). Umgekehrt kann jedoch nicht gefolgert werden, dass eine Diskretisierung, deren Graph durch Herausnehmen von Elementen in mehrere Teilgraphen zerfällt, zwangsläufig Kinematiken aufweist (siehe B3 in Abbildung 7.4). Ein intakter Graph ist für die Brauchbarkeit eines Ersatzsystems somit hinreichend, jedoch nicht notwendig (SHKLARSKI UND TOLEDO 2008).

Grundsätzlich können zusätzliche auf Geometrie und Randbedingungen basierende Kriterien formuliert werden, bei denen nicht nur wie im Falle des Rigidity-Graphen lokale Informationen ausgewertet werden, sondern in die auch globale Informationen einfließen. Solche Kriterien sind relativ komplex und bereits für zweidimensionale Diskretisierungen mit hohem numerischen Aufwand verbunden (JACOBS UND HENDRICKSON 1997). Für das Erstellen von Vorkonditionierern erscheint ein solcher Aufwand nicht gerechtfertigt, weshalb entsprechende Kriterien nicht eingeführt werden. Dagegen gestaltet sich das Aufstellen des Rigidity-Graphen aufgrund der im Rahmen von Finite-Elemente-Simulationen ohnehin notwendigen Datenstrukturen als relativ einfach. Die Informationen zu Element- und Knotenkonnectivitäten können direkt in einen solchen Graphen übersetzt werden. Ob es sich nach der Elimination eines Elements noch um einen zusammenhängenden Graphen handelt, lässt sich mittels einer Breitensuche (KRUMKE 2012) überprüfen. Ein entsprechender Algorithmus wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

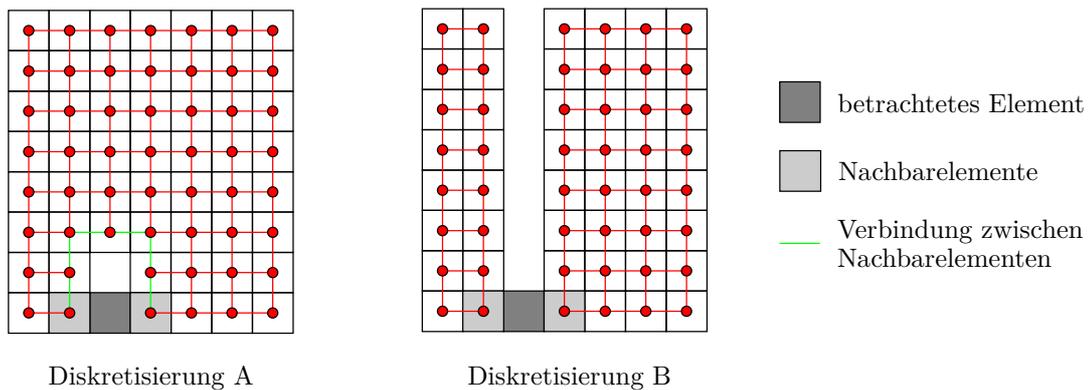
Abschließend sei angemerkt, dass unter Umständen bereits der Rigidity-Graph der Ausgangsdiskretisierung aus mehreren nicht zusammenhängenden Teilgraphen besteht, die dann jeweils für sich untersucht werden müssen. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein solcher Fall ausgeschlossen.

### 7.3.2 Test des Rigidity-Graphen auf Zusammenhang

Um zu untersuchen, ob die Elimination eines Graphknotens (finites Element der Diskretisierung) den Zusammenhang des Rigidity-Graphen aufhebt, lässt sich ein Kriterium formulieren, welches in vielen Fällen nur das Prüfen weniger lokaler Knotenbeziehungen im Graphen erfordert und lediglich im ungünstigsten Fall große Teile bzw. den gesamten

Graphen einbezieht. Der ursprünglich zusammenhängende Rigidity-Graph bleibt demnach auch nach der Elimination eines einzigen Graphknotens zusammenhängend, wenn zwischen all dessen Nachbarknoten eine Verbindung bestehen bleibt.

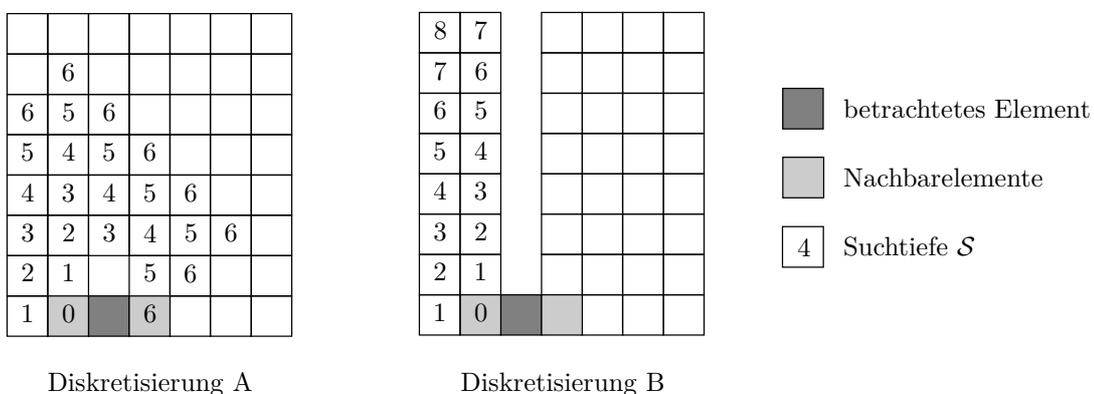
Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 7.5 zwei Diskretisierungen dargestellt, für die untersucht werden soll, ob ein bestimmtes Element herausgenommen werden darf.



**Abbildung 7.5:** Verbindungen zwischen Nachbarelementen im Rigidity-Graphen.

Die im Rigidity-Graphen enthaltenen Verbindungen von diesen betrachteten Elementen zu ihren Nachbarelementen werden hierfür ausgeblendet. Existiert wie im Fall der Diskretisierung A trotzdem eine Verbindung zwischen allen Nachbarelementen, so muss es sich beim verbleibenden Graphen um einen zusammenhängenden handeln. Bei der Diskretisierung B dagegen existiert keine Verbindung zwischen den beiden Nachbarelementen mehr. Der Graph würde beim Eliminieren dieses Elements in zwei Teilgraphen zerbrechen.

Ob zwischen allen Nachbarelementen eine Verbindung bestehen bleibt, lässt sich algorithmisch mit einer Breitensuche überprüfen.



**Abbildung 7.6:** Veranschaulichung der Breitensuche im Rigidity-Graphen.

Hierfür wird, wie in Abbildung 7.6 dargestellt, ausgehend von einem beliebigen Nachbarlement (0) eine Suche im Rigidity-Graphen gestartet. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass ausgehend von den zuletzt gefundenen Elementen im nächsten Suchschritt jeweils alle Elemente, die direkt von diesen aus erreichbar sind, überprüft werden (Breitensuche). Wie in Abbildung 7.6 ersichtlich, breitet sich eine Suchfront im Graphen bzw. der Diskretisierung aus. Die Suche endet, wenn entweder alle Nachbarlemente gefunden sind (Diskretisierung A), oder wenn bei der Suche keine weiteren Elemente mehr erreicht werden können (Diskretisierung B). Im ersten Fall darf das betrachtete Element gelöscht, im zweiten Fall muss es beibehalten werden.

Die Suchtiefe  $\mathcal{S}$ , d.h. die Anzahl der Suchschritte, die hierfür notwendig ist, hängt stark von der Beschaffenheit der Diskretisierung ab. Ist noch ein dichtes Netz von Verbindungen im Rigidity-Graphen vorhanden, so erfordert eine Suche meist nur wenige Schritte. Je mehr Elemente bereits aus einer Diskretisierung gelöscht worden sind, desto weniger Verbindungen sind in deren Rigidity-Graphen vorhanden. Die Suchwege werden daher in der Regel immer länger, was mit steigenden numerischen Kosten bei der Suche einhergeht. Wird eine maximale Suchtiefe  $\mathcal{S}$  vorgegeben, so werden einzelne Elemente gegebenenfalls nicht eliminiert. Der mit der Suche verbundene Aufwand lässt sich damit jedoch gezielt beschränken. Die Größe  $\mathcal{S}$  wird später verwendet, um den Grad der Ausdünnung in einer Diskretisierung zu kontrollieren.

### 7.3.3 Auswahl der zu eliminierenden Elemente

Auf Basis des Rigidity-Graphen lässt sich mit vertretbarem numerischen Aufwand entscheiden, ob ein Element aus einer gegebenen Diskretisierung entfernt werden darf, damit  $\mathbf{M}$  prinzipiell als Vorkonditionierer eingesetzt werden kann. Welche Elemente zu entfernen sind, damit auch ein effizienter Vorkonditionierer entsteht, kann auf diese Weise jedoch nicht bestimmt werden.

Die Ähnlichkeit der Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$  zur Matrix  $\mathbf{K}$  entscheidet über die Qualität des Vorkonditionierers. Mit jedem Element, welches aus der ursprünglichen Diskretisierung gelöscht wird, nimmt diese Ähnlichkeit ab. Der entstehende Vorkonditionierer wird dadurch schlechter, was zu einer Zunahme der Iterationen im CG-Verfahren führt. Das Ziel kann also nicht darin bestehen, so viele Elemente wie möglich aus einer Diskretisierung zu eliminieren.

Im Idealfall können diejenigen Elemente identifiziert werden, welche zu Nebendiagonaleinträgen in  $\mathbf{K}$  bzw.  $\mathbf{M}$  führen, die bei der Faktorisierung maßgeblich Nicht-Null-Einträge verursachen. Eine solche Identifikation stellt eine Optimierung der Ausgangsmatrix  $\mathbf{K}$  im Hinblick auf ihre Faktorisierung dar. Theoretisch kann ein solcher Optimierungsprozess durchgeführt werden. Für praktische Problemstellungen entsprechender

Größe ist ein solcher Prozess jedoch mit unvertretbarem numerischen Aufwand verbunden. Bereits das Auffinden einer Zeilen- und Spaltenpermutation einer gegebenen Matrix der Dimension  $n$ , welche zu minimalem Fill-In bei ihrer Faktorisierung führt, gehört zur Klasse der NP-vollständigen Probleme (YANNAKAKIS 1981). Diese zeichnen sich dadurch aus, dass der mit ihrer Lösung verbundene Aufwand bei steigender Problemgröße exponentiell zunimmt ( $\mathcal{O}(c^n)$  mit  $c > 1.0$ ) (WIKIPEDIA 2013). Das Aufstellen der Matrix  $\mathbf{M}$  gestaltet sich jedoch noch deutlich komplexer. Es muss nicht nur eine optimale Zeilen- und Spaltenpermutation gefunden werden.  $\mathbf{M}$  selbst muss unter Beachtung der oben diskutierten Nebenbedingungen derart generiert werden, dass ihre optimale Permutation im Vergleich zur optimalen Permutation von  $\mathbf{K}$  deutlich weniger Fill-In im Rahmen der Faktorisierung verursacht.

Die Aufwandsabschätzung lässt folgende Schlussfolgerung zu: Der mit der Optimierung des Fill-Ins der faktorisierten Form des Vorkonditionierers  $\mathbf{M}$  verbundene numerische Aufwand macht eine iterative Gleichungslösung, unabhängig von der Qualität des Vorkonditionierers, aus heutiger Sicht völlig unwirtschaftlich. Nur falls in Zukunft effiziente Heuristiken gefunden werden, die zwar nicht zwangsläufig zu einem Optimum im oben beschriebenen Sinne führen, jedoch mit vertretbaren Kosten verbunden sind, erscheint dieser Weg gangbar. Die Auswahl der zu löschenden Elemente erfolgt aus diesem Grund bei den drei im Folgenden beschriebenen Ansätzen ohne expliziten Bezug zur Faktorisierung.

### Zufallsprinzip

Die einfachste und billigste Methode, Elemente zu bestimmen, welche aus einer Diskretisierung entfernt werden sollen, stellt deren zufällige Auswahl dar. Hierfür muss lediglich eine Sequenz von Elementen bestimmt werden, welche mindestens ein Element, höchstens aber alle Elemente einer Diskretisierung beinhaltet. Für die Elemente dieser Sequenz wird nacheinander auf Basis des Rigidity-Graphen geprüft, ob eine Elimination zulässig ist. Falls ja, wird das entsprechende Element gelöscht, falls nein, wird es in der Diskretisierung beibehalten. Da eine Diskretisierung und damit der zugehörige Rigidity-Graph durch das Löschen von Elementen immer weiter ausgedünnt wird, werden Elemente, welche am Anfang einer Sequenz stehen, mit höherer Wahrscheinlichkeit eliminiert als Elemente, die am Ende einer Sequenz überprüft werden. Die Anzahl der Elemente in einer solchen Sequenz stellt einen Parameter dar, mit dessen Hilfe der Grad der Ausdünnung bestimmt werden kann.

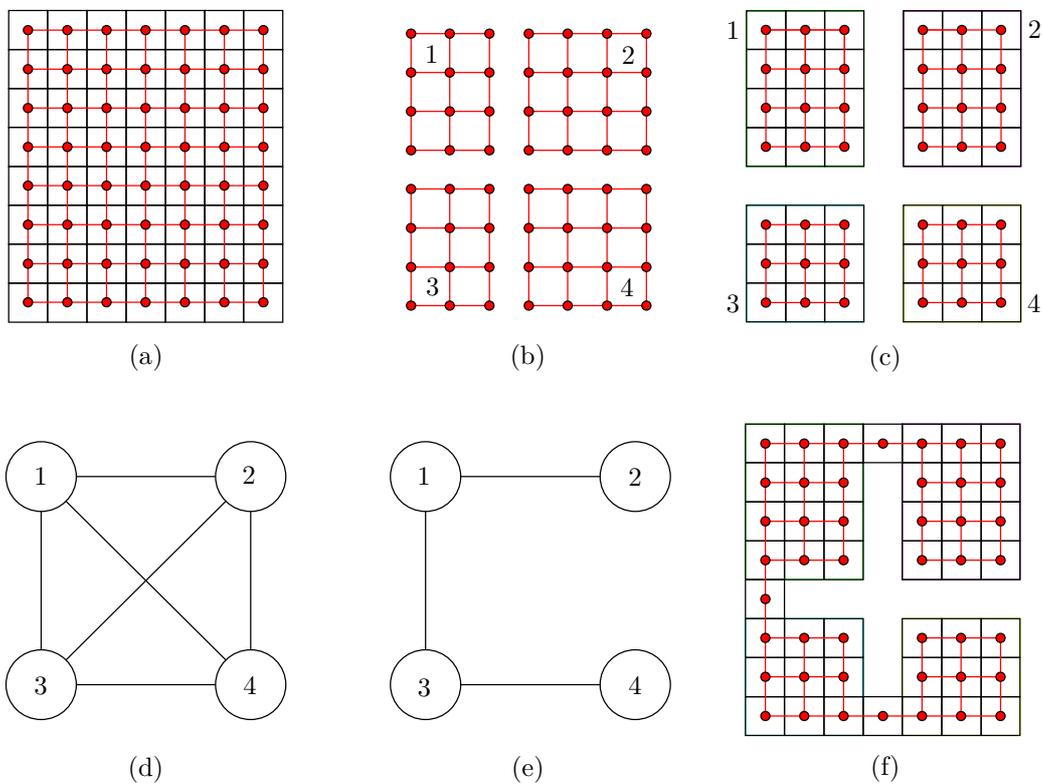
Dieser Ansatz könnte prinzipiell direkt in einen Algorithmus übersetzt werden. Im Rahmen numerischer Untersuchungen hat sich jedoch gezeigt, dass eine modifizierte Vorgehensweise zu einer gleichmäßigeren Elimination von Elementen und damit zu qualitativ besseren Vorkonditionierern führt. Dabei wird stets für alle Elemente einer Diskreti-

sierung in zufälliger Reihenfolge überprüft, ob eine Elimination möglich ist. Durch das Festlegen einer maximalen Suchtiefe  $\mathcal{S}$  (siehe Abschnitt 7.3.2) wird die Zahl der gelöschten Elemente, d.h. der Grad der Ausdünnung, gesteuert.

Die Eigenschaften der auf diese Weise generierten Vorkonditionierer werden in Abschnitt 8.3 anhand numerischer Beispiele untersucht.

### Zerlegen und Wiederverbinden

Dieser Ansatz ist durch die Verfügbarkeit effizienter Algorithmen zur Graphenzerlegung motiviert. In Abbildung 7.7 ist eine mögliche Vorgehensweise dargestellt.



**Abbildung 7.7:** Elimination von Elementen auf der Basis von Graphenzerlegung mit anschließendem Wiederverbinden.

Der Graph der Ausgangsdiskretisierung aus Abbildung 7.7(a) wird zunächst in eine vorgegebene Anzahl an Gebieten zerlegt (Abbildung 7.7(b)). Auf Basis der geschnittenen Graphkanten müssen in einem nächsten Schritt Elemente in der Diskretisierung identifiziert und eliminiert werden, sodass sich möglichst voneinander unabhängige Diskretisierungsgebiete ergeben (Abbildung 7.7(c)).

In der zugehörigen Steifigkeitsmatrix würden derart voneinander getrennte Teilsysteme zu einer Entkopplung der zugehörigen Gleichungen führen. Eine Entkopplung wirkt sich

im Allgemeinen günstig auf den Faktorisierungsprozess aus, da die entstehenden Untermatrizen unabhängig voneinander behandelt werden können. Da die positive Definitheit der Matrix  $\mathbf{M}$  des Ersatzsystems ausschließlich auf der Basis des Rigidity-Graphen gewährleistet werden soll (siehe Abschnitt 7.3.1), ist eine völlige Entkopplung von Teilgebieten nicht möglich. Diese müssen daher nachträglich derart verbunden werden, dass wieder ein zusammenhängender Graph entsteht. Im Hinblick auf den Fill-In bei der Faktorisierung ist zu vermuten, dass dabei so wenig wie möglich Kopplungen, d.h. finite Elemente, in die Diskretisierung eingeführt werden sollten. In Abbildung 7.7(d) sind hierfür in Form eines Graphen schematisch alle möglichen Verbindungen der Teilgebiete dargestellt, welche in Abbildung 7.7(e) auf ein Minimum reduziert werden. Die Wiederverbindung der einzelnen Teilgebiete nach Abbildung 7.7(f) erfolgt jeweils mit einem Element an zufälliger Stelle.

Im Vergleich zu einer gleichmäßigen Ausdünnung einer Diskretisierung, beispielsweise bei der Elementauswahl nach dem Zufallsprinzip, wurde in numerischen Untersuchungen ein nur unwesentlich geringerer Fill-In beobachtet. Die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz war jedoch meist signifikant größer. Punktuell verbundene Teilgebiete scheinen daher im Allgemeinen sehr schlechte Approximationen ursprünglich zusammenhängender Diskretisierungen darzustellen. Der Ansatz wurde daher nicht weiterverfolgt.

### Effektive Steifigkeiten

Dieser Ansatz wird in AVRON UND TOLEDO (2011) vorgestellt. Darin wird mittels algebraischer Vergleiche versucht, die Auswirkung des Herausnehmens einzelner Elemente auf die Ähnlichkeit von Ausgangsproblem  $\mathbf{K}$  zu Ersatzproblem  $\mathbf{M}$  abzuschätzen.

Hierfür werden sogenannte effektive Steifigkeitsmatrizen aufgestellt. Diese sollen nicht wie die Elementsteifigkeitsmatrizen das lokale Elementverhalten unter Belastung charakterisieren, sondern eine Aussage bezüglich der Systemantwort der gesamten Diskretisierung zulassen. Laut AVRON UND TOLEDO (2011) muss ein Element einer Diskretisierung beibehalten werden, wenn sich die Normen seiner Elementsteifigkeitsmatrix und seiner effektiven Steifigkeitsmatrix ungefähr entsprechen. Liegen die Normen weit auseinander, so ist der Steifigkeitsbeitrag des betrachteten Elements zur gesamten Diskretisierung gering. Aus diesen Informationen werden für jedes Element Einflussfaktoren (engl. leverages) berechnet, die die Wichtigkeit eines jeden Elements widerspiegeln.

Gegenüber einer zufälligen Elementauswahl konnten in ersten numerischen Untersuchungen keinerlei Vorteile dieser Herangehensweise festgestellt werden, weshalb der Ansatz im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls nicht weiterverfolgt wurde.

## 7.4 Ersatzproblem durch algebraische Vereinfachungen

Die Motivation dieses Ansatzes beruht auf den Fortschritten, die in den letzten Jahren bei der iterativen Lösung von symmetrischen, diagonaldominanten Gleichungssystemen erzielt wurden. Für lineare Gleichungssysteme dieses Typs existieren mittlerweile Algorithmen, die eine Lösung solcher Systeme in fast linearer Zeit erlauben. Lineare Zeit bedeutet dabei, dass der Aufwand, der zur Lösung notwendig ist, mit wachsender Problemgröße etwa linear zunimmt, d.h. von der Ordnung  $\mathcal{O}(n)$  ist (KOUTIS U. A. 2010, 2012).

Den zentralen Bestandteil solcher Löser bilden sogenannte kombinatorische Vorkonditionierer (combinatorial preconditioners), welche auf der Basis des Graphen, den die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$  eines Gleichungssystems darstellt, hergeleitet werden. Anhand kombinatorischer Überlegungen wird dieser Graph des Ausgangsproblems geschickt so verändert, dass der entstehende modifizierte Graph eine Matrix  $\mathbf{M}$  repräsentiert, deren Eigenwertspektrum demjenigen von  $\mathbf{K}$  sehr ähnlich ist. Die Besetzungsstruktur von  $\mathbf{M}$  ist im Vergleich zu  $\mathbf{K}$  jedoch ausgedünnt (sparsified), was eine effiziente Faktorisierung gewährleistet. Beide Eigenschaften machen  $\mathbf{M}$  automatisch zu einem effizienten Vorkonditionierer. Die numerischen Kosten zur Erstellung solcher Vorkonditionierer sowie das Konvergenzverhalten hängen für diagonaldominante Systeme überwiegend von der Besetzungsstruktur der zugehörigen Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$ , weniger jedoch von der Größe deren Zahlenwerte ab (CHEN UND TOLEDO 2003).

Im Rahmen dieser Arbeit wird nicht weiter auf die theoretischen Grundlagen bzw. die algorithmische Umsetzung dieser Vorkonditionierer eingegangen. Hierfür sei auf die Literatur verwiesen, beispielsweise AVRON UND TOLEDO (2010), BOMAN U. A. (2004), CHEN UND TOLEDO (2003) oder GREMBAN (1996). Die im Rahmen von CHEN UND TOLEDO (2003) entstandenen Algorithmen stehen in der Bibliothek TAUCS (TOLEDO 2003) zur Verfügung.

Gleichungssysteme, die bei Finite-Elemente-Berechnungen auftreten, sind zwar oft symmetrisch, jedoch in der Regel nicht diagonaldominant. Die oben beschriebenen kombinatorischen Vorkonditionierer für symmetrische, diagonaldominante Gleichungssysteme können somit nicht direkt eingesetzt werden. In AVRON U. A. (2009) wird aufbauend auf BOMAN U. A. (2008) ein Ansatz vorgestellt, wie für beliebige skalarwertige, elliptische Finite-Elemente-Probleme trotzdem effiziente kombinatorische Vorkonditionierer aufgestellt werden können. Die Grundzüge dieser Herangehensweise werden im Folgenden kurz zusammengefasst.

Der Aufbau des Vorkonditionierers  $\mathbf{M}$  erfolgt bei AVRON U. A. (2009) in zwei Stufen. In einem ersten Schritt wird zunächst eine diagonaldominante Approximation  $\mathbf{M}_{dd}$  von  $\mathbf{K}$  gewonnen. In einem zweiten Schritt wird dann mittels der oben beschriebenen kom-

binatorischen Überlegungen aus  $\mathbf{M}_{dd}$  der eigentliche Vorkonditionierer  $\mathbf{M}$  erzeugt. Die Qualität von  $\mathbf{M}$  als Vorkonditionierer hängt im Wesentlichen davon ab, wie gut  $\mathbf{M}_{dd}$  die Matrix  $\mathbf{K}$  approximiert, d.h. wie ähnlich deren Eigenwertspektren sind.

Im Rahmen von Finite-Elemente-Simulationen setzt sich die Matrix  $\mathbf{K}$  additiv aus den Elementmatrizen  $\mathbf{K}^{el}$  zusammen. Für die Approximation von  $\mathbf{K}$  kann dies dahingehend ausgenutzt werden, dass eine Approximation der einzelnen Elementmatrizen  $\mathbf{K}^{el}$  durch diagonaldominante Elementmatrizen  $\mathbf{M}_{dd}^{el}$  direkt zu einer diagonaldominanten Matrix  $\mathbf{M}_{dd}$  führt. Ein algebraischer Ansatz, wie optimale Matrizen  $\mathbf{M}_{dd}^{el}$  für jede Elementmatrix  $\mathbf{K}^{el}$  generiert werden können, ist für skalarwertige elliptische Finite-Elemente-Probleme in AVRON U. A. (2009) zu finden.

Inwieweit sich dieser algebraische Ansatz jedoch auch auf vektorwertige, elliptische Finite-Elemente-Probleme, wie beispielsweise auf die Simulation von Schalenstrukturen, übertragen lässt, bleibt in AVRON U. A. (2009) unklar. Auf mögliche Schwierigkeiten, die hierbei auftreten können, wird allerdings bereits in BOMAN U. A. (2008) hingewiesen.

Im folgenden Abschnitt wird ein sowohl auf mechanischen als auch auf algebraischen Überlegungen basierender Ansatz vorgestellt, mit dessen Hilfe eine diagonaldominante Approximation für Elementsteifigkeitsmatrizen von Strukturelementen, also vektorwertigen Problemstellungen, erreicht werden kann. Dieser Ansatz ist zunächst auf Volumenelemente beschränkt und wird anhand der Topologie von SHELL10 (achtknotiges Volumenelement) aufgezeigt.

### 7.4.1 Diagonaldominante Approximation von Steifigkeitsmatrizen

Den Ausgangspunkt dieses Ansatzes bildet das zweiknotige Stabelement (Fachwerkelement) im dreidimensionalen Raum aus Abbildung 7.8(a).

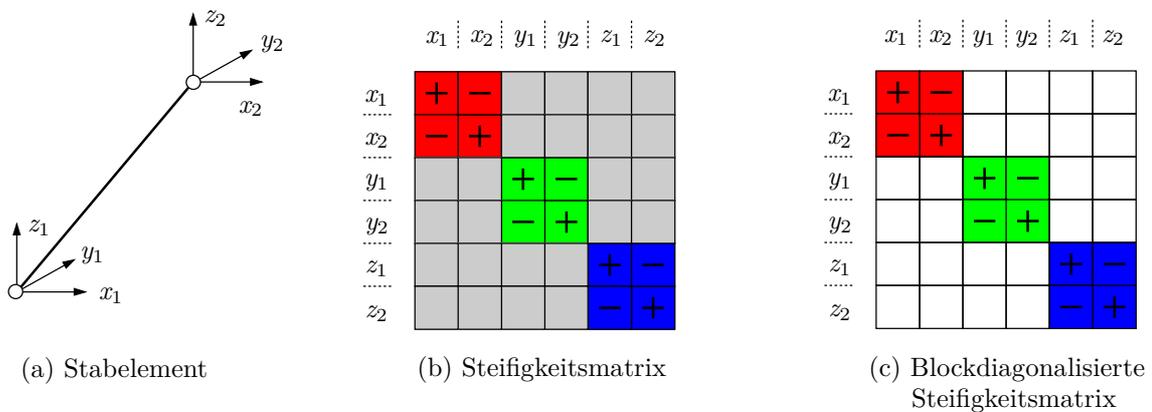


Abbildung 7.8: Stabelement: Topologie, Steifigkeitsmatrix und blockdiagonale Form.

Es besitzt pro Knoten drei translatorische Freiheitsgrade, was zu einer Steifigkeitsmatrix der Dimension  $6 \times 6$  führt (Abbildung 7.8(b)). Es handelt sich dabei in der Regel um eine vollbesetzte Matrix, deren Einträge von der Dehnsteifigkeit ( $EA/L$ ) bzw. der Lage des Elements im Raum abhängen. Die Größenverhältnisse einiger spezieller Einträge sind hiervon jedoch völlig unabhängig. Es handelt sich jeweils um diejenigen Einträge, die derselben Richtung im Raum zugeordnet sind (farbliche Kennzeichnung in Abbildung 7.8(b)). Diese Einträge sind für jede Raumrichtung betragsmäßig gleich groß, wobei die Hauptdiagonaleinträge positiv, die Nebendiagonalterme negativ sind. Vernachlässigt man in der Elementsteifigkeitsmatrix, wie in Abbildung 7.8(c) dargestellt, alle Anteile, über deren Größenverhältnisse ohne Geometrieinformationen keine Aussagen gemacht werden können, so entsteht eine symmetrische Blockdiagonalmatrix. Da der einzig verbliebene Nebendiagonaleintrag pro Zeile betragsmäßig exakt dem jeweiligen Hauptdiagonaleintrag entspricht, handelt es sich um eine diagonaldominante (präziser: schwach diagonaldominante) Matrix (SCHWARZ 2009). Für Diskretisierungen, welche ausschließlich aus Stabelementen bestehen, kann somit durch Blockdiagonalisieren nach Abbildung 7.8 immer eine symmetrische diagonaldominante Approximation  $\mathbf{M}_{dd}$  erzeugt werden.

Um diesen Ansatz in Zusammenhang mit Volumenelementen nutzen zu können, ist eine Approximation der einzelnen Steifigkeitsmatrizen der Volumenelemente durch Steifigkeitsmatrizen von Fachwerkelementen notwendig.

In Abbildung 7.9 ist für ein achtknotiges Volumenelement wie beispielsweise SHELL10 eine solche Stabapproximation dargestellt. Die Stäbe sind dabei nach Elementkanten ( $S_1 \dots S_{12}$ ), Oberflächendiagonalen ( $S_{13} \dots S_{24}$ ) sowie nach Raumdiagonalen ( $S_{25} \dots S_{28}$ ) sortiert.

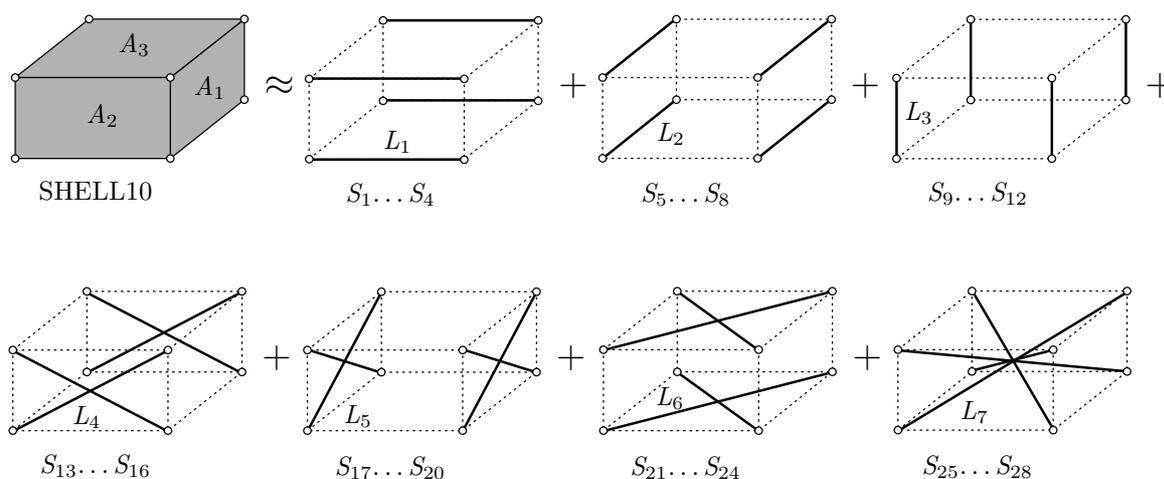


Abbildung 7.9: Approximation von SHELL10 durch Stabelemente.

Wie Abbildung 7.9 zeigt, können die acht Knoten von SHELL10 durch maximal 28 Stäbe miteinander verbunden werden. Mit 28 Stäben entsteht ein Raumfachwerk, welches zehnfach innerlich statisch unbestimmt ist, d.h. bereits 18 Stäbe sind für eine Approximation ohne innere Kinematiken ausreichend. Eine brauchbare Konfiguration mit 18 Stäben kann beispielsweise dadurch erreicht werden, dass in jeder Oberfläche jeweils nur ein Diagonalstab verwendet wird und die Raumdiagonalen völlig vernachlässigt werden.

Die Stabsteifigkeiten sowie die Anzahl der Stäbe (18 bis 28) müssen für jedes einzelne Volumenelement bestimmt werden. Das Ziel muss darin bestehen, diese Parameter derart zu wählen, dass die entstehende diagonaldominante Approximation  $\mathbf{M}_{dd}$  der Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nach einem Ausdünnen auf der Basis kombinatorischer Überlegungen (siehe oben) eine effiziente Vorkonditionierungsmatrix  $\mathbf{M}$  liefert.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten jedoch keine Kriterien gefunden werden, die eine solche Korrelation zwischen den wählbaren Parametern pro Element und der Qualität des Vorkonditionierers zulassen. Ob solche Kriterien existieren, mit welchem numerischen Aufwand diese verbunden sind bzw. wie gut ein solcher Vorkonditionierer dann sein wird, bleibt offen. Inwieweit dabei Erkenntnisse aus DAITCH UND SPIELMAN (2007) genutzt werden können, muss in zukünftigen Forschungsarbeiten geklärt werden.

In Ermangelung entsprechender Kriterien wurde für die numerischen Beispiele aus Abschnitt 8.3 eine ingenieurmäßige Wahl getroffen. Es werden stets alle 28 Stäbe pro Volumenelement mit den Querschnittsflächen  $A$  und Stablängen  $L$  aus Tabelle 7.1 für die einzelnen Stabsteifigkeiten  $EA/L$  verwendet. Bei nicht rechtwinkligen Elementen handelt es sich in Tabelle 7.1 um gemittelte Werte.

	$S_1 \dots S_4$	$S_5 \dots S_8$	$S_9 \dots S_{12}$	$S_{13} \dots S_{16}$	$S_{17} \dots S_{20}$	$S_{21} \dots S_{24}$	$S_{25} \dots S_{28}$
$A$	$\frac{1}{4}A_1$	$\frac{1}{4}A_2$	$\frac{1}{4}A_3$	$\frac{1}{4}A_2$	$\frac{1}{4}A_1$	$\frac{1}{4}A_3$	$\frac{1}{4 \cdot 3}(A_1 + A_2 + A_3)$
$L$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$

**Tabelle 7.1:** Gewählte Werte  $A$  und  $L$  für die Stabsteifigkeiten  $EA/L$  der numerischen Experimente aus Abschnitt 8.3.

## 7.5 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Vorkonditionierer wurden in unterschiedlichen Konfigurationen auf verschiedene Problemstellungen aus dem Bereich der Simulation von Schalenstrukturen angewendet (siehe Abschnitt 8.3). Auf der Basis der Ergebnisse dieser Experimente können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

Weder der topologische Ansatz nach Abschnitt 7.3 noch der algebraischer Ansatz nach Abschnitt 7.4 liefert Vorkonditionierer, die das CG-Verfahren bei Schalenproblemen mit einem direkten Lösungsverfahren konkurrenzfähig machen. Auch im Vergleich mit bekannten Vorkonditionierern aus der Literatur führen die in diesem Kapitel vorgestellten Vorkonditionierer zu einem teilweise deutlich höheren Rechenaufwand im Lösungsprozess.

Dies ist hauptsächlich damit zu erklären, dass die Zahl der Nicht-Null-Einträge in der Faktorisierung der Vorkonditionierer und/oder die Zahl der notwendigen Iterationen sehr hoch ausfällt. Aus Letzterem kann direkt auf eine schlechte Approximationsqualität der Ersatzprobleme geschlossen werden. Nur wenn es in Zukunft gelingt, die Approximationsqualität deutlich zu verbessern sowie gleichzeitig die Zahl der Nicht-Null-Einträge in der Faktorisierung weiter zu reduzieren, kann diese Klasse von Vorkonditionierern konkurrenzfähig werden. Entsprechende Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten auf diesem Gebiet wurden in den jeweiligen Abschnitten gegeben.

Als Motivation für weitere Forschungsanstrengungen muss das besondere Konvergenzverhalten der auf Topologieänderung des FE-Netzes basierenden Vorkonditionierern gesehen werden, welches bereits in CHEN UND TOLEDO (2003), SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) und AVRON U. A. (2009) für andere Problemstellungen beobachtet wurde. Wie die Konvergenzverläufe aus Abschnitt 8.3 zeigen, stellt sich nach einigen Iterationen zu Beginn des Lösungsprozesses ein fast linearer Verlauf ein (von hochfrequenten Oszillationen abgesehen). Diese Eigenschaft kann dahingehend ausgenutzt werden, dass nach einer gewissen Anzahl von Iterationen eine zuverlässige Schätzung für die insgesamt notwendige Iterationszahl bis zur Konvergenz abgegeben werden kann.



---

## Numerische Experimente

Anhand verschiedener numerischer Beispiele werden in diesem Kapitel die Leistungsfähigkeit des im Rahmen der Arbeit entwickelten spannungsbasierten 3D-Volumen-Schalenelements SHELL10 aus Kapitel 6 demonstriert sowie die Eigenschaften der Vorkonditionierer aus Kapitel 7 vorgestellt.

Abschnitt 8.1 untersucht die Eigenschaften von SHELL10 zunächst anhand geläufiger Benchmarkbeispiele aus der Literatur für den geometrisch linearen Fall. In Abschnitt 8.2 folgen geometrisch nichtlineare Experimente, wobei neben klassischen Benchmarks zudem praxisrelevante Problemstellungen aus dem Flugzeugbau herangezogen werden. Alle Experimente dieses Kapitels setzen isotropes linear-elastisches Materialverhalten voraus (Saint-Venant-Kirchhoff-Material).

Für SHELL10 kommen, falls nicht anders angegeben, die in Kapitel 6 beschriebenen Einstellungen (sieben EAS-Parameter nach Gleichung (6.62), adaptive Stabilisierung nach Gleichung (6.71)) zur Anwendung. Die Integration erfolgt mit  $2 \times 2 \times 2$  Gaußpunkten.

In einigen Experimenten werden zusätzlich die Ergebnisse der Elementformulierung SHELL-NAT angegeben, welche im Gegensatz zu SHELL10 im natürlichen Elementkoordinatensystem  $\theta^i$  formuliert, ansonsten jedoch identisch ist (siehe Kapitel 6).

Zum Vergleich wird das im kommerziellen Softwarepaket ABAQUS (Version 6.11) zur Verfügung stehende Volumen-Schalenelement SC8R herangezogen (ABAQUS 2011).

Es handelt sich dabei um ein reduziert integriertes Element mit den Stabilisierungsoptionen „STIFFNESS“ und „ENHANCED“. Für alle Beispiele werden beide Optionen untersucht, wobei die Ergebnisse mit Hilfe der Bezeichnungen SC8R(ST) sowie SC8R(EN) unterschieden werden. Beim SC8R-Element kann, unabhängig vom gewählten Materialgesetz, in Dickenrichtung der Schale eine abweichende Querdehnzahl verwendet werden. Für alle Beispiele der Abschnitte 8.1 und 8.2 wird hierfür jedoch stets die tatsächliche Querdehnzahl des verwendeten Materials herangezogen. Weitere benut-

zerdefinierte Einstellungen auf Elementebene werden nicht vorgenommen und somit die in ABAQUS/CAE (Version 6.11) eingestellten Defaultwerte verwendet.

Die Lösung der bei den Experimenten aus Abschnitt 8.1 und 8.2 auftretenden Gleichungssysteme erfolgt mit direkten Lösungsverfahren. In Abschnitt 8.3 dagegen kommen iterative Löser zum Einsatz. Für Schalenstrukturen, welche mit SHELL10 diskretisiert sind, werden entsprechend den in Kapitel 7 vorgestellten Methoden Vorkonditionierer aufgestellt und die zugehörigen Gleichungssysteme mit dem vorkonditionierten CG-Verfahren gelöst. Dabei wird die Konvergenzcharakteristik, die zur Lösung insgesamt notwendige Zahl an Rechenoperationen sowie die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der faktorisierten Form der Vorkonditionierer untersucht. Für jedes Beispiel erfolgt ein Vergleich mit bekannten Vorkonditionierern aus der Literatur.

### 8.1 Geometrisch lineare Elementbenchmarks

Die Beispiele dieses Abschnitts sind besonders zur Untersuchung der Qualität von Verschiebungs- und Spannungswerten geeignet. Sie sind so gewählt, dass spezielle Effekte möglichst unabhängig voneinander untersucht werden können. Die Auswertung von Verschiebungen erfolgt an diskreten Punkten, wohingegen Spannungen stets entlang definierter Pfade ausgewertet und verglichen werden, da punktuelle Spannungswerte wenig aussagekräftig sind.

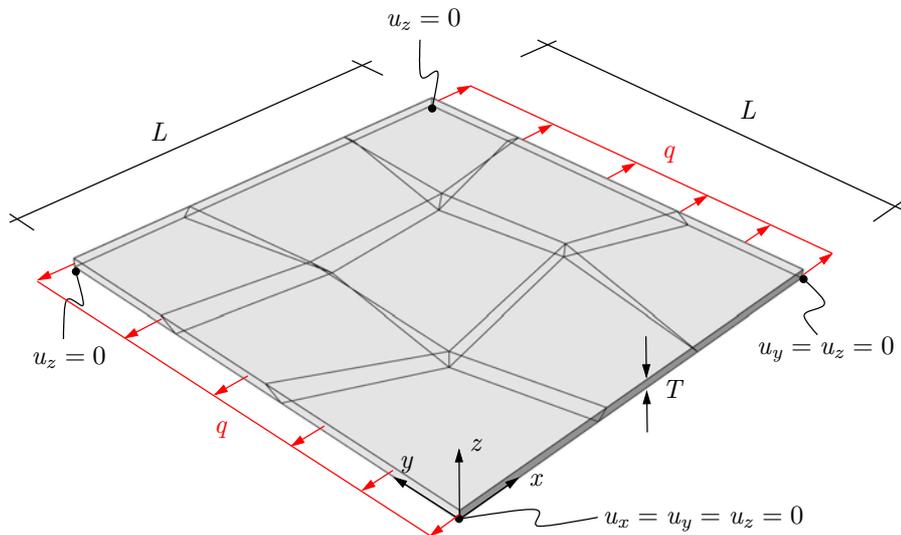
#### 8.1.1 Patchtest

Mit Hilfe des Patchtests (IRONS 1966) wird in diesem Abschnitt überprüft, wie sich bei SHELL10 die durch  $ANS_T$  zwangsläufig auftretende Inkonsistenz (siehe Abschnitt 6.5.2) auf analytisch konstante Membranspannungszustände auswirkt.

Hierfür wird die in Abbildung 8.1 dargestellte ebene Geometrie mit  $3 \times 3$  Elementen vernetzt, welche sowohl in der Schalenebene, als auch in Dickenrichtung verzerrt sind. Die Lagerung des Problems erfolgt statisch bestimmt, um Zwängungen auszuschließen. Als analytische Lösung ergibt sich für diese Problemstellung eine im gesamten Gebiet konstante Spannung  $\sigma_{xx} = 1000 \text{ N/mm}^2$  sowie ein linearer Verschiebungsverlauf mit  $u_x(L) = 10 \text{ mm}$ . Alle übrigen Komponenten der Verschiebungen und Spannungen sind in der analytischen Lösung gleich null.

In den Abbildungen 8.2, 8.3 und 8.4 werden die Verläufe der Spannung  $\sigma_{xx}$  und der Verschiebungen  $u_x$  sowie  $u_z$  dargestellt, die sich bei den Elementformulierungen SHELL10, SHELL-NAT, SC8R(ST) und SC8R(EN) einstellen. Es handelt sich dabei um die Ver-

läufe auf der Oberseite ( $z = 2\text{ mm}$ ) der Struktur. Die in den zugehörigen Legenden angegebenen Minimal- bzw. Maximalwerte gelten für das gesamte Problemgebiet.



Geometrie:	Material:	Belastung:
$L = 100,0\text{ mm}$	$E = 10000\text{ N/mm}^2$	$q = 1000\text{ N/mm}^2$
$T = 2,0\text{ mm}$	$\nu = 0,0$	

Abbildung 8.1: Patchtest: Problemstellung und Diskretisierung.

Bei den Spannungen  $\sigma_{xx}$  aus Abbildung 8.2 handelt es sich um nicht geglättete Verläufe. SHELL10 trifft die analytische Spannungslösung trotz des stark verzerrten Netzes exakt. Die Elementformulierung SHELL-NAT, welche sich lediglich durch das Koordinatensystem, in dem die Formulierung erfolgt, unterscheidet, zeigt signifikante Abweichungen sowie starke Oszillationen. Das SC8R-Element von ABAQUS weicht unabhängig von der Art der Stabilisierung ebenfalls von der analytischen Lösung ab. Mit ca. 5% ist der Fehler jedoch in einem akzeptablen Rahmen. Die elementweise konstanten Spannungen

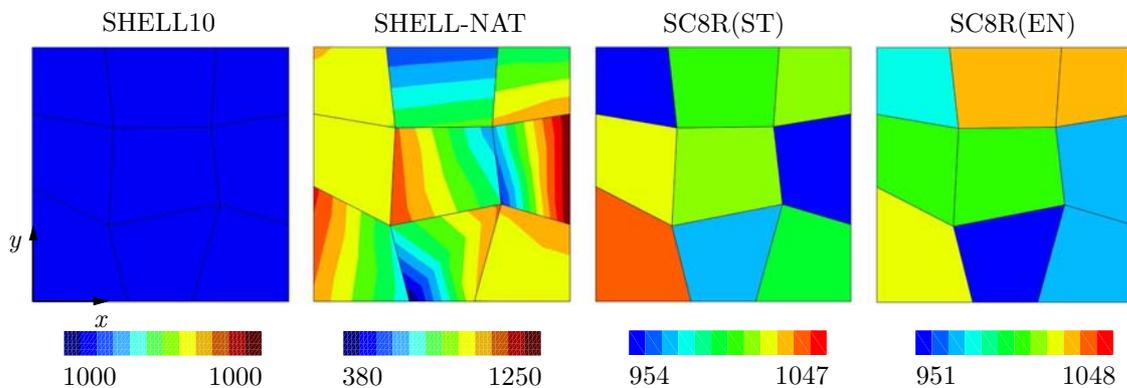


Abbildung 8.2: Patchtest: Spannung  $\sigma_{xx}$  [N/mm<sup>2</sup>].

beim SC8R sind auf die Einpunktintegration in der Schalenebene zurückzuführen. Bei den Verschiebungen  $u_x$  (siehe Abbildung 8.3) stimmt die Lösung von SHELL10 erneut mit der analytischen Lösung überein. Die Ergebnisse von SHELL-NAT zeigen hier von minimale Abweichungen. Die Elementformulierungen SC8R(ST) sowie SC8R(EN) weisen dagegen deutlich größere Unterschiede auf (negative Verschiebungswerte  $u_x$ !).

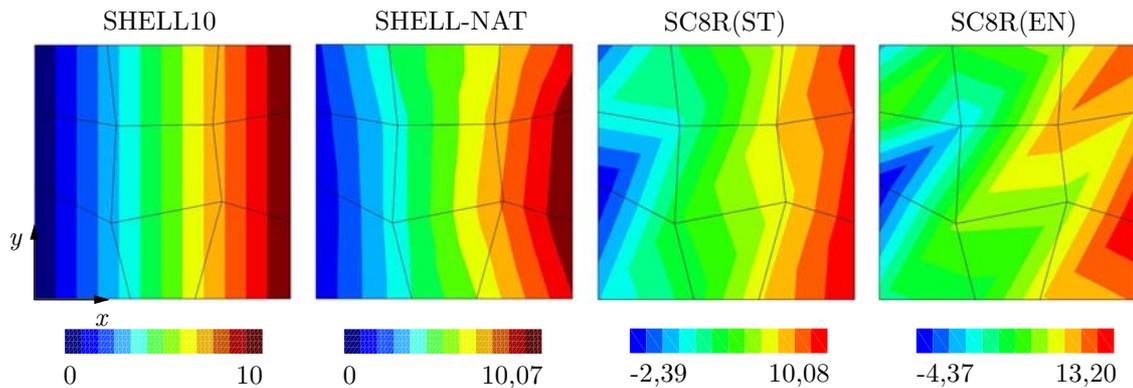


Abbildung 8.3: Patchtest: Verschiebung  $u_x$  [mm].

Im Gegensatz zur analytischen Lösung liefern alle Elementformulierungen unphysikalische Verschiebungswerte  $u_z$  senkrecht zur Belastungsrichtung (siehe Abbildung 8.4), wobei die Diskretisierung mit SHELL10-Elementen die mit Abstand geringsten Werte aufweist. Hieraus lässt sich schließen, dass keine der untersuchten Formulierungen den Patchtest für das Finite-Elemente-Netz aus Abbildung 8.1 besteht, was die Aussage von MACNEAL (1994) bestätigt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass für lediglich in der Schalenebene verzerrte Netze alle Elementformulierungen den Patchtest bestehen (Ergebnisse nicht dargestellt).

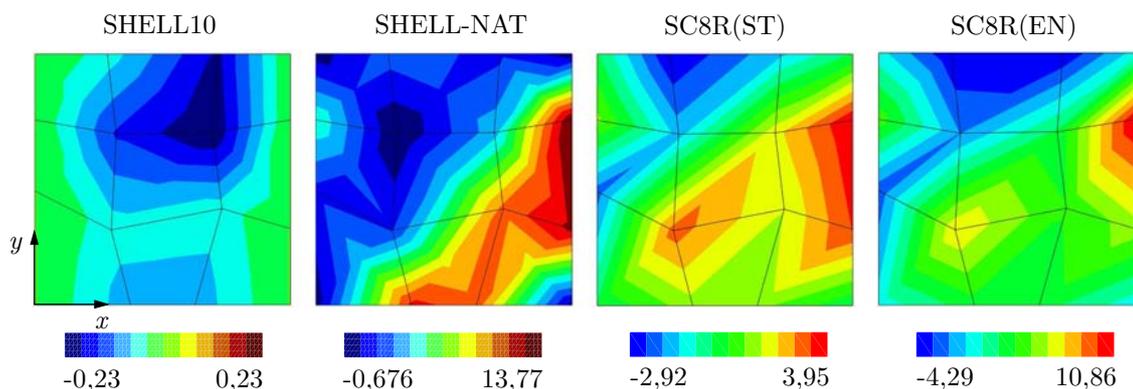


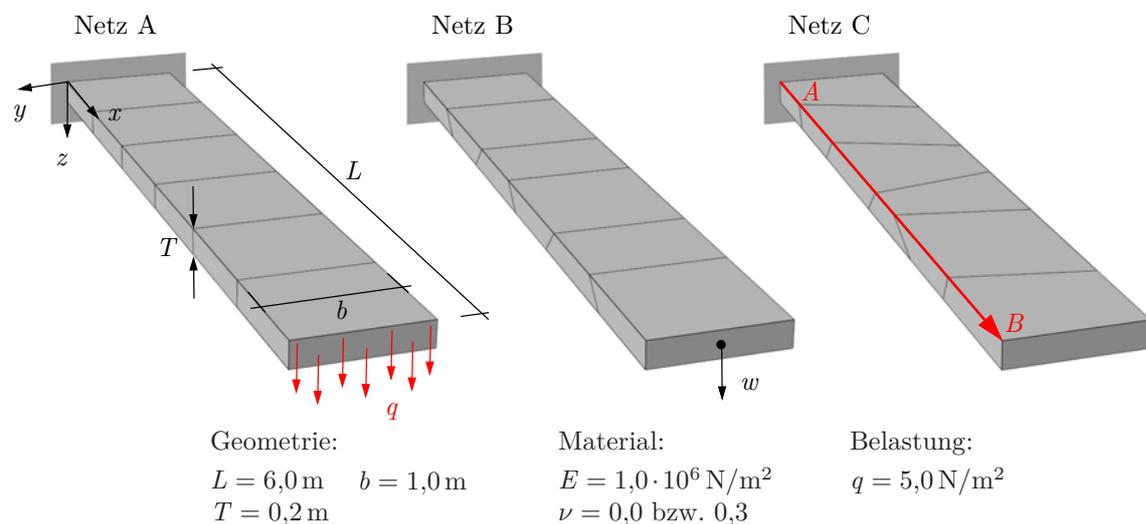
Abbildung 8.4: Patchtest: Verschiebung  $u_z$  [mm].

Bis auf die Verschiebung  $u_z$  gibt SHELL10 als einziges Element alle anderen Verschiebungs- und Spannungsverläufe der analytischen Lösung exakt wieder. Mit Blick auf das

gleichzeitig hervorragende Verhalten dieses Elements bei Biegebeanspruchung (siehe folgende Abschnitte) ist daher festzuhalten, dass SHELL10 diejenige Elementformulierung zu sein scheint, bei der die Konsistenz am wenigsten beeinträchtigt wird.

### 8.1.2 Biegebeanspruchter Kragarm

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der verschiedenen Elementformulierungen unter Biegebeanspruchung untersucht werden, wofür der in Abbildung 8.5 dargestellte Kragarm herangezogen wird (MACNEAL UND HARDER 1985). Der Kragarm ist an seinem freien Ende durch eine Querlast beansprucht, wobei die Lasteinleitung über eine zur Stirnseite tangentielle Flächenlast  $q$  erfolgt.



**Abbildung 8.5:** Biegebeanspruchter Kragarm: Problemstellung und Diskretisierung.

Es werden drei Diskretisierungen der Struktur untersucht: Bei Netz A handelt es sich um ein aus sechs rechtwinkligen (unverzerrten) Elementen bestehendes reguläres Netz für diese Geometrie. Im Gegensatz hierzu sind in Netz B die ursprünglich parallel zur Einspannung verlaufenden Elementflanken abwechselnd um 45 Grad gedreht, wodurch alle Elemente in Dickenrichtung verzerrt sind. Diese beiden Diskretisierungen werden bereits von MACNEAL UND HARDER (1985) für die Untersuchung von Elementformulierungen vorgeschlagen. Im Rahmen dieses Abschnitts wird mit Netz C eine weitere Vernetzung eingeführt. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass die Elemente sowohl in Dickenrichtung als auch in der Schalenebene beliebig verzerrt sind. Zudem ist kein sich wiederholendes Muster vorhanden, wie dies z.B. bei Netz B der Fall ist.

Um eventuell vorhandenes volumetrisches Locking aufdecken zu können, werden alle Varianten mit den Querdehnzahlen  $\nu = 0,0$  und  $\nu = 0,3$  untersucht.

In Tabelle 8.1 sind für die verschiedenen Diskretisierungen und Querdehnraten die normierten Verschiebungswerte  $w$  aller Elementformulierungen angegeben. Als Bezugsgröße (Referenzlösung) wird für den Fall  $\nu = 0,0$  die Verschiebung  $w = 0,10807$  m sowie für  $\nu = 0,3$  die Verschiebung  $w = 0,10792$  m herangezogen. Beide Werte wurden mit einer Diskretisierung von 600 SHELL10-Elementen in Längsrichtung sowie 10 SHELL10-Elementen über die Dicke des Kragträgers gewonnen und stimmen sehr gut mit der in MACNEAL UND HARDER (1985) gegebenen Lösung  $w = 0,1081$  m überein.

	Netz A		Netz B		Netz C	
	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,3$
SHELL10	0,9930	0,9796	0,9928	0,9787	0,9943	0,9809
SHELL-NAT	0,9930	0,9796	0,5958	0,6498	0,6470	0,6808
SC8R(ST)	0,9931	0,9906	0,9931	0,9906	0,9946	0,9925
SC8R(EN)	0,9931	0,9544	0,9931	0,9544	0,9897	0,9540

**Tabelle 8.1:** Biegebeanspruchter Kragarm: normierte Verschiebungen  $w$ .

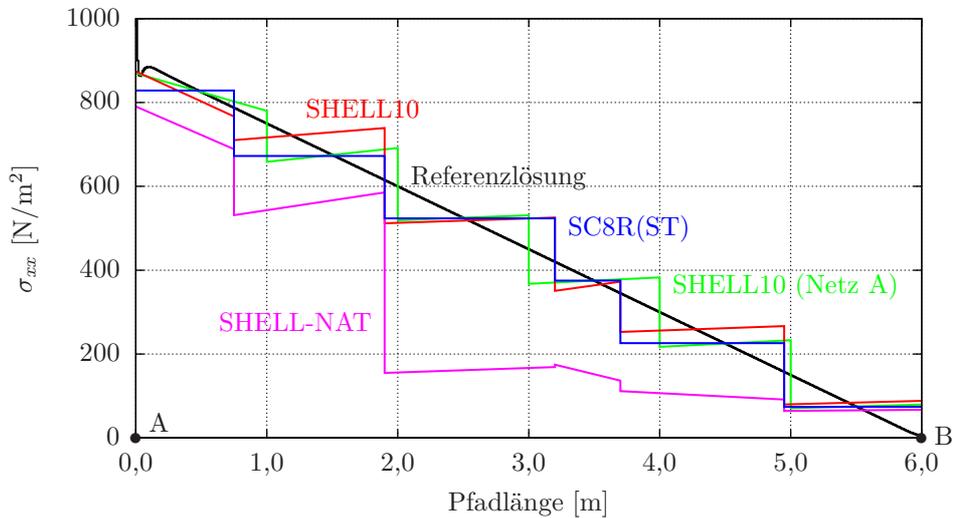
Für das reguläre Netz mit  $\nu = 0,0$  unterscheiden sich die Ergebnisse der vier Elementtypen praktisch nicht. Bei  $\nu = 0,3$  streuen die Ergebnisse bereits deutlich stärker. Die Formulierung SC8R(EN) zeigt die größte Abweichung von der Referenzlösung, wohingegen SC8R(ST) die genauesten Ergebnisse liefert. SHELL10 und SHELL-NAT besitzen jeweils identische Ergebnisse, was darauf zurückzuführen ist, dass sich die Formulierungen für unverzerrte Elementgeometrien exakt entsprechen.

Das Element aus ABAQUS weist für Netz B dieselben Verschiebungswerte auf wie für Netz A. SHELL10 führt zu einer minimal steiferen Systemantwort. Die Abweichung zum regulären Netz liegt jedoch unter einem Promille. SHELL-NAT liefert mit 40 bzw. 35 Prozent Abweichung ein völlig inakzeptables Ergebnis.

Im Fall von Netz C zeigen alle Elemente Abweichungen von der Lösung mit Netz A. Die Elemente SHELL10, SC8R(ST) und SC8R(EN) liefern brauchbare Ergebnisse (Unterschied zur Referenzlösung kleiner als fünf Prozent). Die Verschiebungswerte, die mit SHELL-NAT erzielt werden, weisen, wie auch schon für Netz B, die größten Abweichungen auf (größer 36 Prozent).

Die Qualität der Spannungen ist bei den Elementen SHELL10, SC8R(ST) und SC8R(EN) für die Netze A und B vergleichbar gut. Lediglich SHELL10-NAT weist für Netz B deutliche Abweichungen auf (Ergebnisse nicht dargestellt). Für Netz C und  $\nu = 0,3$  ist der Verlauf der Biegenormalspannung  $\sigma_{xx}$  entlang des Pfades A–B dargestellt (Abbildung 8.6). Neben der Referenzlösung (SHELL10, Diskretisierung siehe oben), welche im Bereich der Einspannung bereits die dort vorhandene Singularität auflöst, ist der Spannungsverlauf für das Netz A von SHELL10 zum Vergleich mit angegeben.

Da die Verläufe beider Varianten des SC8R-Elements fast identisch sind, wird lediglich derjenige von SC8R(ST) dargestellt.



**Abbildung 8.6:** Biegebeanspruchter Kragarm: Biegenormalspannungsverlauf  $\sigma_{xx}$  entlang des Pfades A–B für das Netz C.

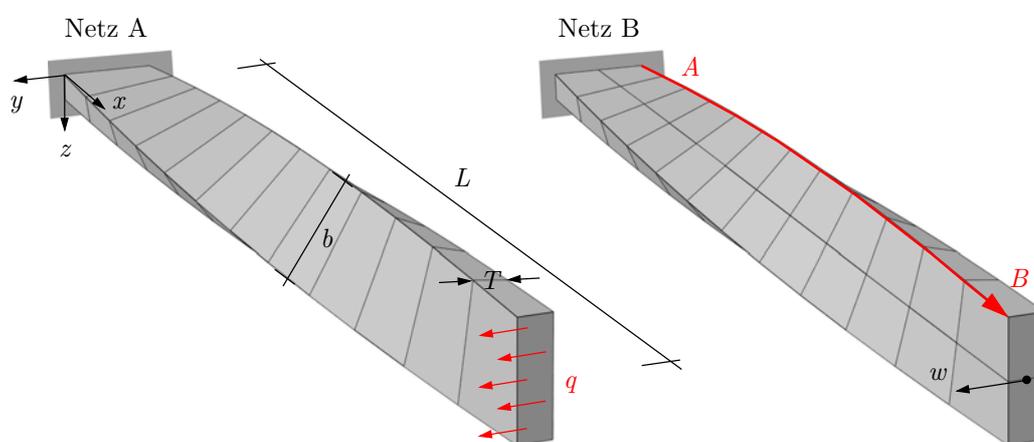
Zwar weisen die Spannungen von SHELL10 und SC8R aufgrund der groben Diskretisierung deutliche Sprünge auf, im Mittel wird die Referenzlösung jedoch sehr gut getroffen. Ein Glätten der Verläufe an den Knoten liefert für die praktische Anwendung bereits brauchbare Ergebnisse. SHELL-NAT zeigt dagegen deutliche Abweichungen von der Referenzlösung. Der durch Mittelung der Knotenwerte entstehende Spannungsverlauf unterschätzt die tatsächlichen Werte gravierend und ist daher als völlig unbrauchbar einzustufen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass für den biegebeanspruchten Kragarm SHELL10 sowie beide Varianten des SC8R-Elements brauchbare Ergebnisse liefern, wobei SC8R(EN) für Querdehnzahlen ungleich null die schlechtesten Ergebnisse zeigt. Das völlig inakzeptable Verhalten von SHELL-NAT unterstreicht die Notwendigkeit der Elementformulierung in einem alternativen Koordinatensystemen (siehe Kapitel 6). Das Beispiel aus Abbildung 8.5 wurde in dieser Arbeit bewusst dem Beispiel des gedrückten Rings (pinched ring) zum Testen von Elementformulierungen vorgezogen, da für den gedrückten Ring alle hier untersuchten Schalenelemente vergleichbar gute Verschiebungs- und Spannungswerte aufweisen (Ergebnisse nicht dargestellt). Dies lässt darauf schließen, dass die verzerrten Netze aus Abbildung 8.5 schärfere Anforderungen an Elementformulierungen stellen als das lediglich in Dickenrichtung verzerrte, jedoch reguläre Netz beim gedrückten Ring.

### 8.1.3 Vorverdrillter Kragarm

Das Beispiel des vorverdrillten Kragarms (siehe Abbildung 8.7) wird ebenfalls in MACNEAL UND HARDER (1985) vorgeschlagen, um den Einfluss bereits in der Ausgangskonfiguration nicht-ebener Elementgeometrien auf das Verhalten finiter Elemente zu untersuchen. Bei der in MACNEAL UND HARDER (1985) vorgeschlagenen Geometrie handelt es sich um eine relativ gedrungene Struktur, womit zwar grundsätzliche Defekte einer Elementformulierung aufgespürt werden können, bei der jedoch eventuell vorhandenes Membranlocking aufgrund der geringen Elementschlankheit nicht deutlich genug ausgeprägt ist. Aus diesem Grund schlagen BELYTSCHKO U. A. (1989) vor, die Dicke des Kragarms um den Faktor 100 zu reduzieren.

Darüber hinaus ist diese Problemstellung auch geeignet, um die Qualität der Hourglass-Stabilisierungen von in der Schalenebene einpunktintegrierten Elementen zu testen. Im Bereich der Lasteinleitung erfolgt wie beim Kragarm aus Abschnitt 8.1.2 zunächst eine „Biegung der Schalenebene“, welche im Beispiel dieses Abschnitts dann zur Einspannung hin in eine „Biegung in der Schalenebene“ übergeht. Zur Untersuchung wird neben der in MACNEAL UND HARDER (1985) vorgeschlagenen Diskretisierung von  $2 \times 12$  Elementen (Netz B) auch eine Diskretisierung mit  $1 \times 12$  Elementen (Netz A) herangezogen. Die Lasteinleitung erfolgt wiederum mittels einer tangentialen Flächenlast  $q$  an der Stirnseite des Kragarms.



Geometrie:

$$L = 12,0 \text{ m} \quad b = 1,1 \text{ m} \\ T = 0,32 \text{ m bzw. } 0,0032 \text{ m}$$

Material:

$$E = 2,9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 \\ \nu = 0,22$$

Belastung:

$$q = 2,8409 \text{ N/m}^2 \text{ bzw. } \\ 2,8409 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$$

**Abbildung 8.7:** Vorverdrillter Kragarm: Problemstellung und Diskretisierung.

In Tabelle 8.1 sind für die verschiedenen Konfigurationen die normierten Verschiebungswerte  $w$  der Elemente SHELL10, SC8R(ST) sowie SC8R(EN) angegeben. Als Referenz-

lösung wird für die Dicke  $h = 0,32$  m der Wert  $w = 1,7532 \cdot 10^{-3}$  m sowie für  $h = 0,0032$  m der Wert  $w = 1,3016 \cdot 10^{-3}$  m verwendet. Beide Größen wurden mit einer Diskretisierung von  $188 \times 17 \times 5$  SHELL10-Elementen ( $L \times b \times h$ ) gewonnen und stimmen gut mit den in MACNEAL UND HARDER (1985) ( $w = 1,754 \cdot 10^{-3}$  m) bzw. BELYTSCHKO U. A. (1989) ( $w = 1,294 \cdot 10^{-3}$  m) gegebenen Lösungen überein.

	$h = 0,32$ m		$h = 0,0032$ m	
	Netz A	Netz B	Netz A	Netz B
SHELL10	0,9879	0,9869	0,9854	0,9733
SC8R(ST)	91,4995	1,0736	1,0002	0,9910
SC8R(EN)	0,9915	0,9853	0,9902	0,9787

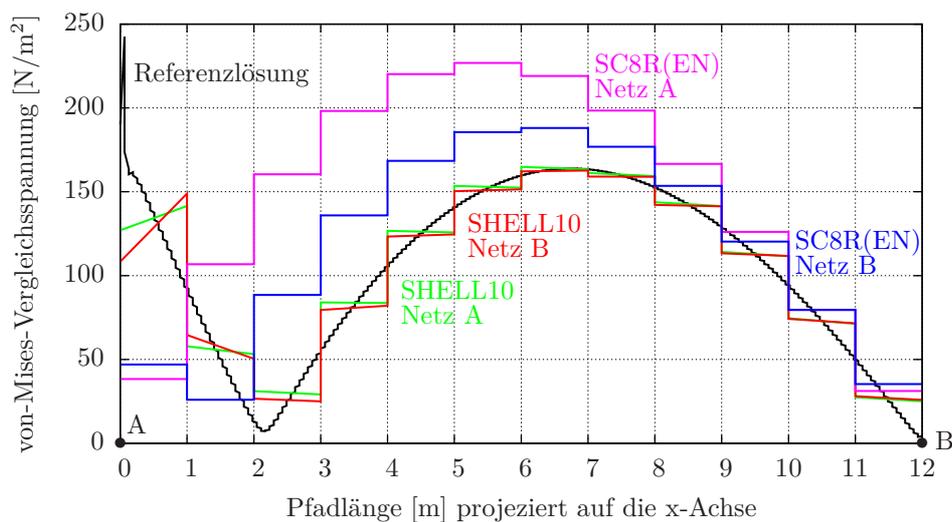
**Tabelle 8.2:** Vorverdrillter Kragarm: normierte Verschiebungen  $w$ .

Für die Dicke  $h = 0,32$  m liefern die Elementformulierungen SHELL10 sowie SC8R(EN) Verschiebungswerte, die von der Referenzlösung um weniger als 1,5 Prozent abweichen. SC8R(ST) dagegen besitzt bei Netz A einen Verschiebungswert, der den Referenzwert um den Faktor 91 überschätzt. Es ist zu vermuten, dass für diese Konfiguration die Hourglass-Stabilisierung (ST) des SC8R einen deutlich zu kleinen Wert für die Biegesteifigkeit in der Schalenebene ansetzt. Für Netz B, bei dem die Biegesteifigkeit der Struktur im Bereich der Einspannstelle nicht mehr ausschließlich von der Hourglass-Stabilisierung abhängt, wird die Verschiebung zwar immer noch überschätzt, mit etwa sieben Prozent Abweichung liegt der Verschiebungswert jedoch deutlich näher an der Referenzlösung.

Bei der von BELYTSCHKO U. A. (1989) vorgeschlagenen Variante mit einer Dicke von  $h = 0,0032$  m zeigen alle drei Elementformulierungen ähnlich gute Ergebnisse. Im Vergleich zur Dicke  $h = 0,32$  m sind die Abweichungen für SHELL10 und SC8R(EN) minimal größer (steiferes Verhalten), was zumindest bei SHELL10 auf Membranlocking zurückzuführen ist. Die Größenordnung des Effekts ist jedoch so gering, dass die Entscheidung aus Abschnitt 6.5, Membranlocking in der Formulierung von SHELL10 nicht gezielt zu behandeln, gerechtfertigt erscheint. Lieferte SC8R(ST) für den gedrungenen Kragarm die mit Abstand schlechtesten Ergebnisse, so sind diese für die schlanke Struktur nun am genauesten: Netz A trifft die Referenzlösung fast exakt, bei Netz B liegt eine Abweichung von unter einem Prozent vor. Warum für diesen Fall die Hourglass-Stabilisierung exzellente Ergebnisse liefert, bei  $h = 0,32$  m dagegen nicht, kann nicht abschließend geklärt werden, da kein Einblick in die Formulierung des kommerziellen Schalenelements SC8R möglich ist.

Zur Untersuchung der Spannungsqualität wird für die Variante  $h = 0,32$  m der Verlauf der von-Mises-Vergleichsspannung entlang des Pfades A–B beider Diskretisierungen (Netz A und B) herangezogen. In Anbetracht der schlechten Verschiebungswerte von

SC8R(ST) werden lediglich die zu den Elementformulierungen SC8R(EN) und SHELL10 gehörenden Verläufe zusammen mit der Referenzlösung in Abbildung 8.8 angegeben. Im Bereich der Einspannung (Punkt A) liegt eine Spannungssingularität vor, die in der Referenzlösung aufgrund des feinen Netzes bereits aufgelöst wird.



**Abbildung 8.8:** Vorverdrillter Kragarm: Von-Mises-Vergleichsspannung entlang des Pfades A–B.

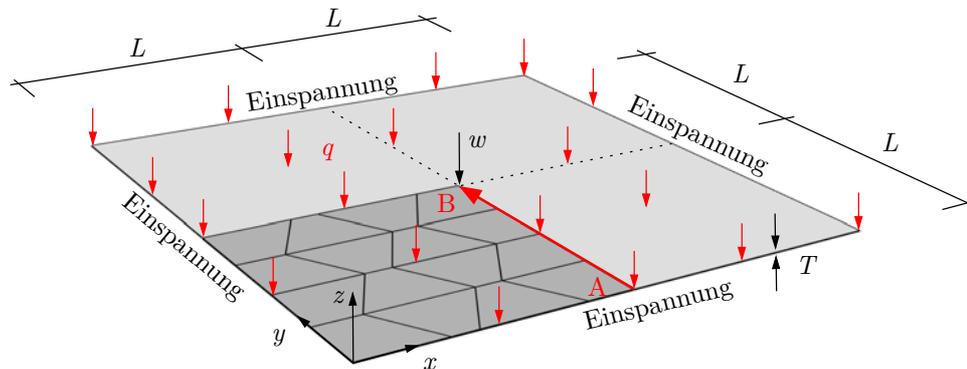
SHELL10 weist sowohl für das grobe Netz A als auch für Netz B bereits sehr gute Spannungswerte auf. Eine Mittelung der Verläufe an den Elementübergängen nähert die Referenzlösung in weiten Teilen des Pfades A–B sehr gut an. Im Bereich des freien Endes des Kragarms (Punkt B) liefert das SC8R(EN)-Element für beide Diskretisierungen akzeptable Ergebnisse, die in Richtung der Einspannung jedoch immer stärker von der Referenzlösung abweichen. Die Unterschiede sind für Netz A dabei deutlich ausgeprägter als für Netz B. Im Hinblick auf die Verwendung der Spannungswerte, beispielsweise im Rahmen einer Bemessung, sind jedoch beide Verläufe als völlig inakzeptabel einzustufen. Die Ursache für die schlechte Qualität der Spannungen von SC8R(EN) ist vermutlich auf die Einpunktintegration in der Schalenebene und auf die damit verbundenen Schwierigkeiten in der Rückrechnung akkurater Spannungswerte zurückzuführen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass nur die Elemente SHELL10 und SC8R(EN) unabhängig von der Geometrie des Problems zuverlässige Verschiebungswerte liefern. Bei der Spannungsqualität dagegen weist lediglich SHELL10 brauchbare Ergebnisse auf und muss somit als das robusteste Element für die Problemstellung dieses Abschnitts betrachtet werden.

### 8.1.4 Eingespannte Quadratplatte unter Gleichlast

In diesem Abschnitt sollen die Auswirkungen von in der Schalenebene verzerrten Elementgeometrien auf die Ergebnisqualität der unterschiedlichen Elementformulierungen untersucht werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf überwiegend biegebeanspruchten Strukturen. Bereits in Abschnitt 8.1.2 wurde mit Netz C eine solche Konfiguration betrachtet, deren Elemente sowohl in der Schalenebene als auch in Dickenrichtung verzerrt sind. Mit der Problemstellung in Abbildung 8.9, welche WILKING (2011) bzw. BISCHOFF (1999) entnommen ist, soll nun ausschließlich der Einfluss der Elementverzerrung in der Schalenebene untersucht werden.

Es handelt sich dabei um eine allseits eingespannte Quadratplatte, die durch eine konstante Flächenlast  $q$  in Querrichtung beansprucht wird. Aufgrund der Doppelsymmetrie der Problemstellung wird lediglich ein Viertel der Struktur diskretisiert und untersucht.



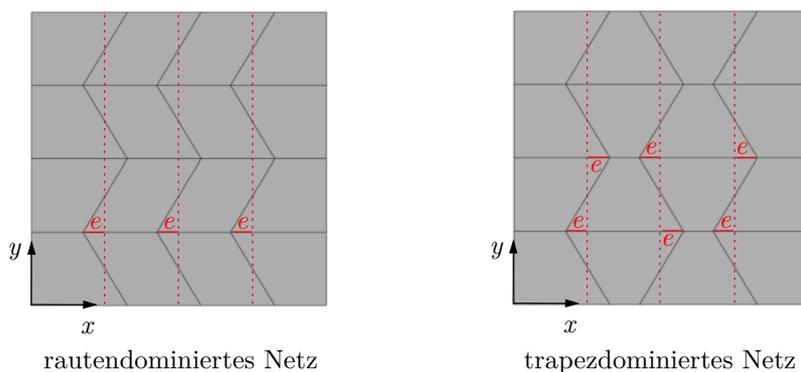
Geometrie:	Material:	Belastung:
$L = 4,0 \text{ m}$	$E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	$q = 2,0 \text{ N/m}^2$
$T = 0,01 \text{ m}$	$\nu = 0,0$	

**Abbildung 8.9:** Quadratplatte unter Gleichlast: Problemstellung und Diskretisierung.

Die Diskretisierung des Viertelsystems erfolgt immer mit  $4 \times 4$  Elementen in der Ebene und einem Element über die Dicke. Dabei werden zwei grundsätzlich verschiedene Muster der Netzverzerrung in der Schalenebene untersucht: ein rauten- sowie ein trapezdominiertes Netz (siehe Abbildung 8.10). Die Verzerrungsmuster orientieren sich an den bereits in Abbildung 6.12 dargestellten Moden, mit Hilfe derer sich beliebige in der Schalenebene verzerrte Elementgeometrien zusammensetzen lassen.

Über den Parameter  $e$  (Abstand in [m]) wird die Abweichung der Elementkanten vom rechtwinkligen und damit regulären Netz eingestellt.

Tabelle 8.3 gibt die normierten Werte der Durchbiegung in Plattenmitte (Punkt B) für unterschiedliche Netzkonfigurationen und Elementformulierungen an. Die Bezugsgröße



**Abbildung 8.10:** Quadratplatte unter Gleichlast: Netze für ein Viertel des Systems.

für die Normierung entspricht dem Wert  $w = 0,62193$  m, der mit einer Diskretisierung von  $120 \times 120$  SHELL10-Elementen in der Schalenebene und einem Element in Dickenrichtung gewonnen wurde. Dieser numerisch ermittelte Wert ist der analytischen Lösung einer schubstarrn Plattentheorie vorgezogen worden, um selbst die für diese Schlankheit aus praktischer Sicht als vernachlässigbar einzustufenden Effekte aus Querschubverzerrungen und der Dickenänderung zu erfassen.

Beide Netze aus Abbildung 8.10 werden für vier verschiedene Werte  $e$  untersucht. Für  $e = 0,0$  m erhält man in beiden Fällen das rechtwinklige Netz, weshalb die zugehörigen Durchbiegungen identisch sind. Für jede Netzkonfiguration werden darüber hinaus jeweils vier verschiedene Elementformulierungen getestet: das SC8R-Element von ABAQUS in den Konfigurationen SC8R(ST) und SC8R(EN) sowie SHELL10 mit zwei Varianten der Querschubstabilisierung. In der Grundeinstellung (SHELL10) erfolgt die Bestimmung des Stabilisierungsparameters  $\lambda$  abhängig von der Elementgeometrie adaptiv nach Gleichung (6.71). Bei SHELL10( $\lambda = 0,1$ ) dagegen nimmt der Parameter  $\lambda$  unabhängig von der Elementgeometrie stets den Wert 0,1 an.

	rautendominiertes Netz				trapezdominiertes Netz			
	$e = 0,0$	$e = 0,1$	$e = 0,2$	$e = 0,3$	$e = 0,0$	$e = 0,1$	$e = 0,2$	$e = 0,3$
SHELL10	0,9866	0,9952	0,9963	0,9905	0,9866	0,9998	0,9990	0,9858
SHELL10( $\lambda = 0,1$ )	1,0043	0,9969	0,9849	0,9683	1,0043	0,9967	0,9736	0,9350
SC8R(ST)	1,0034	0,9879	0,9783	0,9667	1,0034	0,7688	0,5388	0,4340
SC8R(EN)	0,8371	0,8209	0,8021	0,7695	0,8371	0,6592	0,4445	0,3119

**Tabelle 8.3:** Quadratplatte unter Gleichlast: normierte Durchbiegungen  $w$  in Plattenmitte.

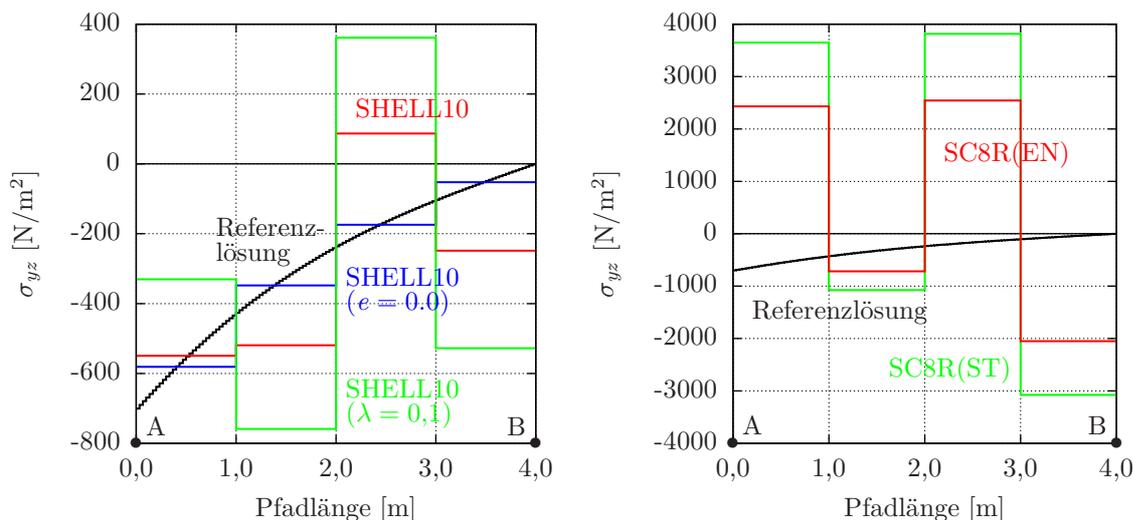
Für das rechtwinklige Netz liefern bis auf das SC8R(EN) alle Elementformulierungen Verschiebungswerte  $w$ , die mit der Referenzdurchbiegung sehr gut übereinstimmen. Die

Abweichung vom Referenzwert bei SC8R(EN) beträgt für das reguläre  $4 \times 4$ -Netz bereits mehr als 16 Prozent. Es sei angemerkt, dass für SC8R(EN) der Fehler zur Referenzlösung selbst für die feine Referenzdiskretisierung in derselben Größenordnung bleibt. Alle anderen getesteten Elemente treffen die Referenzlösung für ein solch feines Netz dagegen praktisch exakt. Die in beiden Varianten von SHELL10 bereits für das rechteckige Netz auftretenden Abweichungen in der Durchbiegung  $w$  sind darauf zurückzuführen, dass sich bei SHELL10 die Stabilisierung aufgrund der Elementgeometrie automatisch abschaltet. Bei SHELL10( $\lambda = 0,1$ ) wird dagegen die Querschubsteifigkeit unabhängig von der Geometrie stets abgemindert.

Mit zunehmender Elementverzerrung werden die Verschiebungswerte der Elementformulierungen abgesehen von SHELL10 deutlich schlechter. Liegen die Abweichungen von der Referenzlösung für das rautendominierte Netz bei SHELL10( $\lambda = 0,1$ ) und SC8R(ST) noch in einem akzeptablen Rahmen, so tritt für das trapezdominierte Netz mit  $e = 0,3$  m für SHELL10( $\lambda = 0,1$ ) eine Abweichung von fast sieben Prozent, für SC8R(ST) sogar von mehr als 56 Prozent auf. Mit fast 70 Prozent Differenz liefert das SC8R(EN)-Element das mit Abstand schlechteste Ergebnis.

Im Hinblick auf die Elementgeometrie kann hieraus gefolgert werden, dass in der Schablenebene trapezförmige Elemente die Ergebnisqualität deutlich stärker beeinflussen als rautenförmige Geometrien.

Abschließend wird die Qualität der Querschubspannungen  $\sigma_{yz}$  entlang des Pfades A–B für das trapezdominierte Netz mit  $e = 0,3$  m untersucht. Die Spannungsverläufe sind in Abbildung 8.11 getrennt für die Formulierungsvarianten von SHELL10 und SC8R dar-



**Abbildung 8.11:** Quadratplatte unter Gleichlast: Querschubspannungsverlauf  $\sigma_{yz}$  entlang des Pfades A–B für das trapezdominierte Netz  $e = 0,3$  m.

gestellt, da sich die Oszillationen in den Spannungen bei SC8R um eine Größenordnung von SHELL10 unterscheiden. Neben der Referenzlösung ist bei SHELL10 zu Vergleichszwecken zusätzlich der Spannungsverlauf für das unverzerrte Netz angegeben.

Alle Spannungsverläufe in Abbildung 8.11 oszillieren für das trapezdominierte Netz mehr oder weniger stark um die Referenzlösung. Trotzdem ist ein deutlicher Qualitätsunterschied auszumachen: Die Oszillationen für das SHELL10-Element sind um den Faktor 10 geringer als bei SC8R. Wie schon bei den Verschiebungen liefert bei SHELL10 die adaptive gegenüber der konstanten Stabilisierung auch in den Spannungen bessere Ergebnisse. Ein Glätten dieser Verläufe weist zwar längst nicht dieselbe Qualität wie beim regulären Netz auf, jedoch würde ein solches Vorgehen zumindest grob den Verlauf der Referenzlösung widerspiegeln. Für beide Varianten des SC8R führt ein knotenweises Mitteln der Kurven hingegen zu keinem brauchbaren Ergebnis.

Die geringe Empfindlichkeit von SHELL10 gegenüber Netzverzerrungen in der Schalebene ist ausschließlich auf die Querschubstabilisierung nach LYL<sub>Y</sub> U. A. (1993) (Abschnitt 6.6) zurückzuführen. Die Methode besticht sowohl durch die Qualität der Ergebnisse als auch durch ihre konzeptionelle Einfachheit. Inwieweit sich der mit der adaptiven Stabilisierung verbundene Mehraufwand in Relation zur Steigerung der Ergebnisqualität bei anderen Problemstellungen auszahlt, kann infolge der starken Abhängigkeit von den Randbedingungen, der Belastung und der Diskretisierung nicht abschließend beantwortet werden.

## 8.2 Geometrisch nichtlineare Elementbenchmarks

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Qualität der verschiedenen Elementformulierungen auf der Basis von Verschiebungs- und Spannungswerten für geometrisch lineare Problemstellungen analysiert und beurteilt.

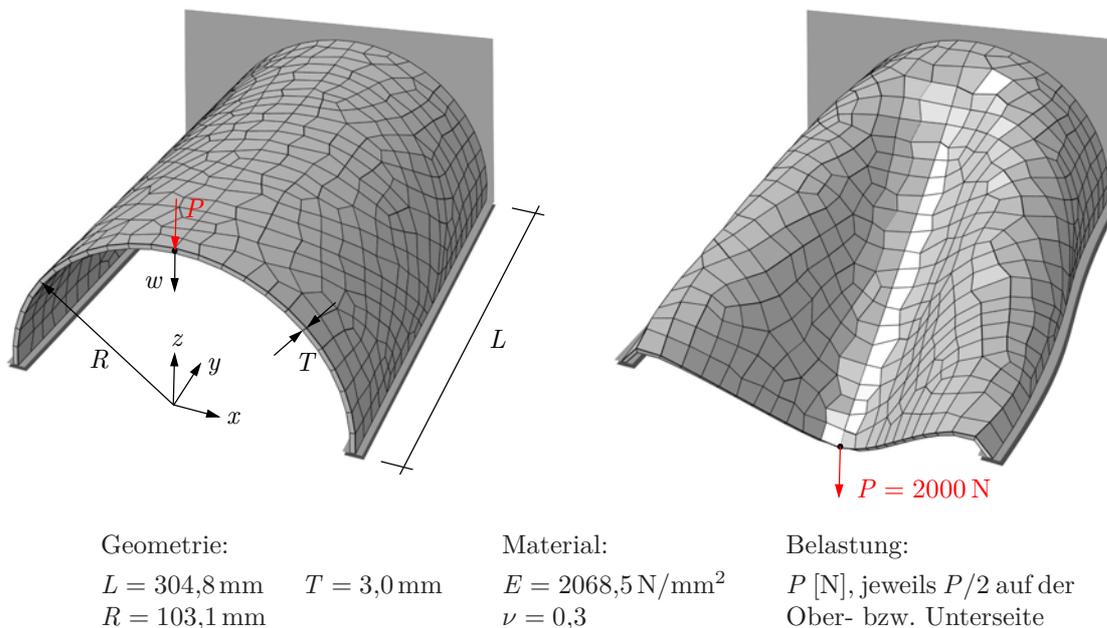
Im Rahmen dieses Abschnitts wird das Verhalten der Elemente SHELL10, SC8R(ST) und SC8R(EN) bei geometrisch nichtlinearen Problemstellungen getestet. Hierbei handelt es sich sowohl um bekannte Beispiele aus der Literatur als auch um Strukturen aus dem Flugzeugbau. Der Vergleich der Elementformulierungen erfolgt dabei anhand von Last-Verschiebungs-Kurven, Beullasten und Beulmustern.

### 8.2.1 Eingespannter Halbzylinder

Das in Abbildung 8.12 dargestellte Beispiel des eingespannten Halbzylinders wird in der Literatur häufig zum Testen von Schalenelementformulierungen verwendet (SZE U. A. (2004), PARISCH (1991), STANDER U. A. (1989)). Als Vergleichsgröße dient der Verschiebungsverlauf  $w$  unter der Last  $P$ , wobei es sich um einen Kraftlastfall handelt, der

bei SHELL10 verschiebungs- und bei SC8R bogenlängenkontrolliert ist. Entsprechend SZE u. A. (2004) wird als Referenzlösung eine Diskretisierung des halben Systems mit  $40 \times 40$  S4R-Elementen aus ABAQUS (Version 6.11) in den Defaulteinstellungen verwendet (ABAQUS 2011).

Eine reguläre Diskretisierung mit  $16 \times 16$  SHELL10-, SC8R(ST)- bzw. SC8R(EN)-Elementen trifft die Last-Verschiebungs-Kurve der Referenzlösung fast exakt. Die Ergebnisse sind daher nicht dargestellt. Statt dessen wird das Verhalten der verschiedenen Elementformulierungen anhand des in Abbildung 8.12 gezeigten beliebig verzerrten Netzes untersucht. Da die Symmetrie der Problemstellung nicht auf das Finite-Elemente-Netz zutrifft, erfolgt die Berechnung am gesamten System. Im Hinblick auf die Anzahl der Freiheitsgrade ist diese Diskretisierung in etwa mit der regulären  $16 \times 16$  Element-Diskretisierung des halben Systems vergleichbar.



**Abbildung 8.12:** Eingespannter Halbzylinder: Problemstellung, Diskretisierung und deformierte Struktur

Aus Abbildung 8.13 geht deutlich hervor, dass die mit SHELL10 ermittelte Last-Verschiebungs-Kurve für das verzerrte Netz aus Abbildung 8.12 der Referenzlösung in weiten Teilen exakt folgt. Im Bereich  $w = 100 \text{ mm}$  bzw.  $w = 125 \text{ mm}$  treten leichte Unregelmäßigkeiten auf, die darauf zurückzuführen sind, dass aufgrund des verzerrten Netzes einzelne Elemente „sich verkanten“ bzw. „klemmen“, d.h. der Deformation widersetzen. Ab einem gewissen Lastniveau löst sich eine solche Blockade dann schlagartig und ist mit lokalen Beuleffekten vergleichbar (KLINKEL 2000). Im weiteren Verschiebungsverlauf weist SHELL10 im Vergleich zur Referenzlösung ein minimal zu weiches Verhalten auf.

Die Last-Verschiebungs-Kurven der beiden Varianten des SC8R-Elements sind sich sehr ähnlich, stimmen mit der Referenzlösung jedoch nur bis ca.  $w = 10$  mm gut überein. Im weiteren Verlauf zeigt das ABAQUS Element ein deutlich zu weiches Verhalten, nähert sich der Referenzlösung im Verschiebungsbereich 120 mm bis 140 mm jedoch wieder an. Für  $w > 140$  mm ist das Verhalten erneut zu weich, was vermutlich auf die Funktionsweise der Hourglass-Stabilisierung des reduziert integrierten SC8R-Elements zurückzuführen ist. Im Vergleich zum SHELL10-Element ist der Effekt des „Klemmens“ einzelner Elemente während des Deformationsprozesses deutlich ausgeprägter (z.B. bei  $w \approx 165$  mm).

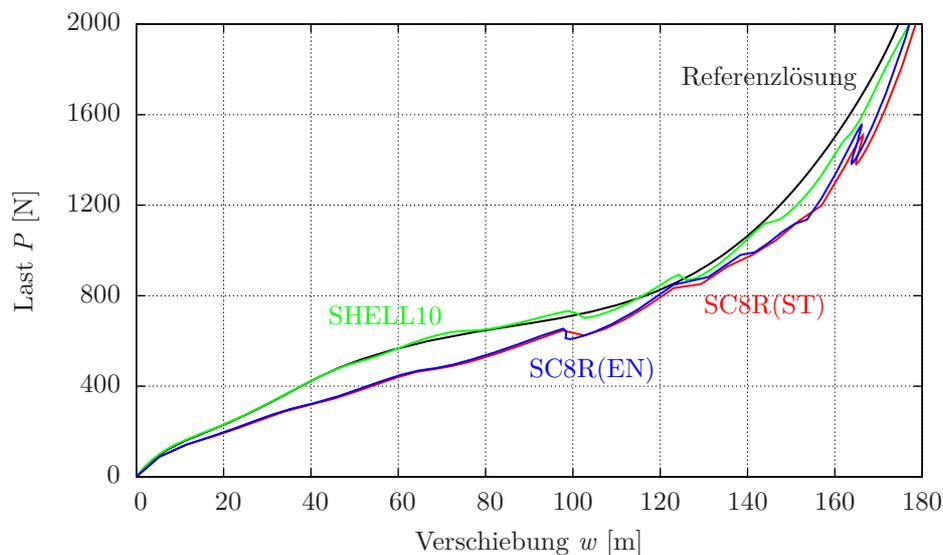
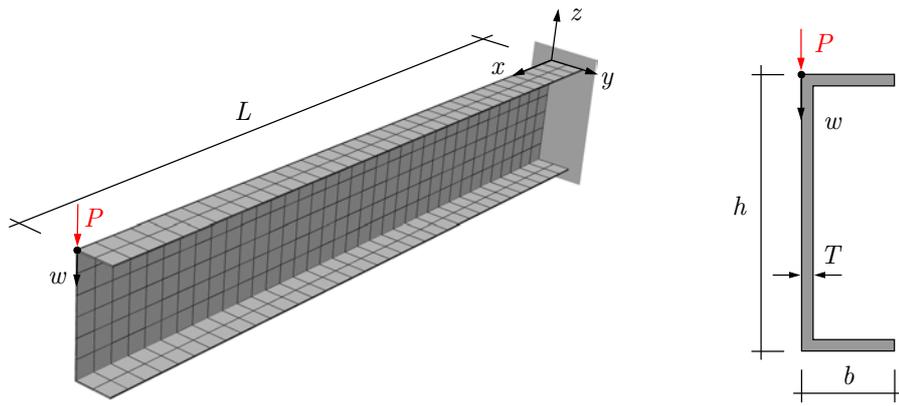


Abbildung 8.13: Eingespannter Halbzylinder: Last-Verschiebungs-Kurven.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass für diese geometrisch nichtlineare Problemstellung SHELL10 die Referenzlösung sehr gut abbilden kann und von den drei getesteten Elementformulierungen das robusteste Verhalten gegenüber Netzverzerrungen aufweist.

## 8.2.2 Eingespanntes U-Profil

Das Beispiel dieses Abschnitts geht vermutlich auf CHRÓSCIELEWSKI U. A. (1992) zurück und wurde von zahlreichen Autoren zum Testen von Elementformulierungen herangezogen (BETSCH U. A. (1996), BISCHOFF (1999), KLINKEL (2000)). Es handelt sich um ein eingespanntes, schlankes U-Profil, welches an seiner Spitze durch eine Einzelast beansprucht wird (siehe Abbildung 8.14). In Hinblick auf die Veröffentlichung von CHRÓSCIELEWSKI U. A. (1992) werden die angelsächsischen Einheiten „pound force“ [lbf] für die Kraft  $P$  bzw. „Zoll“ [in] für die Längenmaße verwendet.

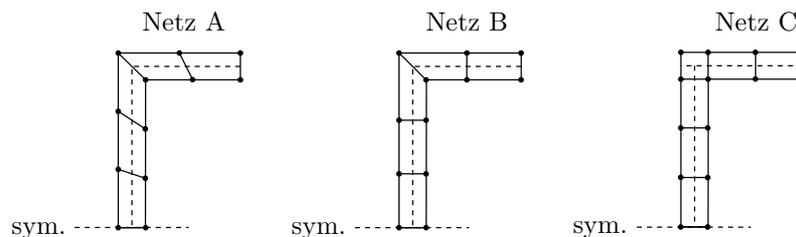


Geometrie:	Material:	Belastung:
$L = 36,0 \text{ in}$	$E = 1,0 \cdot 10^7 \text{ lbf/in}^2$	$P \text{ in lbf}$
$b = 2,0 \text{ in}$	$\nu = 0,333$	
$T = 0,05 \text{ in}$		
$h = 6,0 \text{ in}$		

**Abbildung 8.14:** Eingespanntes U-Profil: Problemstellung und Diskretisierung.

Das Benchmarkbeispiel des eingespannten U-Profils erfreut sich aus zweierlei Gründen einer hohen Popularität. Zum einen handelt es sich um eine Problemstellung, bei der Beulen auftritt und somit sowohl Traglastuntersuchungen erfolgen können als auch das Verhalten im Nachbeulbereich analysiert werden kann. Zum anderen lässt sich die Frage untersuchen, wie Knicke in Schalengeometrien behandelt werden können bzw. müssen. Bei Flächen-Schalenelementen ist die Problematik der Behandlung von Knickstellen eng mit der Elementformulierung verbunden. So hat z.B. bei Verwendung von Differenzvektoren die Art und Weise der Mittelung der Direktoren an den Elementübergängen einen maßgeblichen Einfluss auf das Verhalten im Bereich der Knicke. Bei Volumenschalenelementen ist die Behandlung von Knickstellen in erster Linie eine Frage der Diskretisierung. Die Elementformulierung ist hiervon lediglich indirekt betroffen, beispielsweise im Hinblick auf die Netzverzerrungsempfindlichkeit.

In Abbildung 8.15 sind drei mögliche Diskretisierungsvarianten des U-Profils mit Volumen-Schalenelementen im Schnitt dargestellt. Bei Netz A und B wird der Knick durch in Dickenrichtung verzerrte Elemente (Gehrung) abgebildet. Netz A entspricht dem



**Abbildung 8.15:** Querschnitt des U-Profils: Varianten der Vernetzung.

Ergebnis des automatischen Vernetzers von ABAQUS/CAE (Version 6.11) mit einer ausgehend von der Knickstelle kontinuierlich abnehmenden Elementverzerrung. Netz B dagegen weist lediglich direkt am Knick verzerrte Elemente auf. Im Fall von Netz C sind alle Elemente unverzerrt. Um dies zu erreichen, muss entlang der Knicke allerdings eine zusätzliche Reihe von Elementen eingeführt werden, welche die Verbindung von Flansch und Steg übernimmt.

Zum Vergleich der Elementformulierungen SHELL10, SC8R(ST) und SC8R(EN) sowie zur Untersuchung des Einflusses der drei Diskretisierungsvarianten nach Abbildung 8.15 werden die Beullasten (maximal ertragbare Last) in Tabelle 8.4 und die jeweiligen Last-Verschiebungs-Kurven in Abbildung 8.16 herangezogen, wobei die Problemstellung als Verschiebungslastfall mit Verschiebungskontrolle behandelt wurde.

Es wird stets eine Diskretisierung mit 36 Elementen in Längsrichtung  $L$ , zwei Elementen über die Breite des Flansches  $b$  sowie sechs Elementen über die Höhe des Stegs  $h$  verwendet (zusätzliche Elemente bei Netz C erforderlich!). Die selbe Diskretisierung kommt auch bei der Lösung nach Betsch (BETSCH U. A. 1996) in Abbildung 8.16 zur Anwendung, wobei dort Flächen-Schalenelemente eingesetzt werden. Es sei angemerkt, dass das Aufbringen der Last  $P$  auf den Außenknoten der Volumen-Schalenelement-Diskretisierungen (siehe Abbildung 8.14) im Vergleich zu Betsch (Lasteinleitung im Bereich der Mittelfläche des Stegs) eine minimale Exzentrizität verursacht. Eigene numerische Untersuchungen sowie Auswertungen von KLINKEL (2000) ergaben jedoch, dass der Effekt hieraus vernachlässigbar ist.

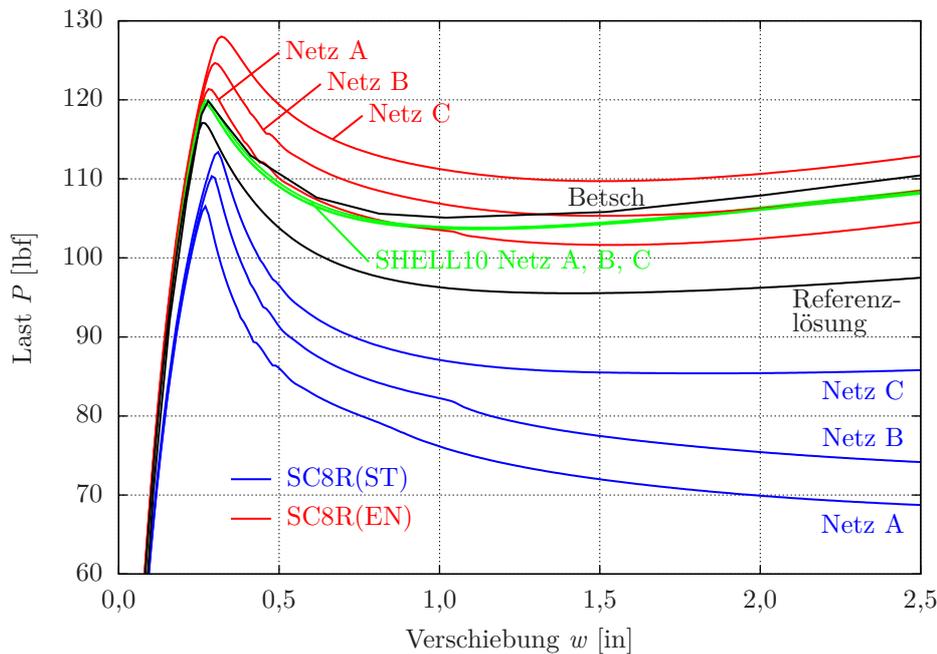
Die Referenzlösung wird aus einer Diskretisierung mit  $40 \times 144$  SHELL10-Elementen (144 Elemente in Längsrichtung  $L$ , acht über die Breite des Flansches  $b$  sowie 24 über die Höhe des Stegs  $h$ ) gewonnen. Die hierfür ermittelte Beullast, welche als Bezugswert für Tabelle 8.4 dient, beträgt  $P = 117.090$  lbf.

	Netz A	Netz B	Netz C
SHELL10	1,0203	1,0205	1,0244
SC8R(ST)	0,9097	0,9423	0,9684
SC8R(EN)	1,0365	1,0647	1,0933

**Tabelle 8.4:** Eingespanntes U-Profil: normierte Beullasten  $P$ .

Abbildung 8.16 zeigt eindrucksvoll die breite Streuung der Ergebnisse für die verschiedenen Elementformulierungen und die unterschiedlichen Netzvarianten.

SC8R(ST) ist die einzige untersuchte Formulierung, deren Last-Verschiebungs-Kurven alle bereits deutlich vor dem Erreichen der Beullast von der Referenzlösung abweichen. Sie weist eine generell zu weiche Systemantwort auf, d.h. die Beullast (siehe Tabelle 8.4) sowie das Lastniveau im Nachbeulbereich werden für alle drei Netze unterschätzt, wobei Netz C das beste, Netz A das mit Abstand schlechteste Ergebnis liefert.



**Abbildung 8.16:** Eingespanntes U-Profil: Last-Verschiebungs-Kurven.

Die Ergebnisse von SC8R(EN) zeigen für alle drei Varianten der Knickdiskretisierung eine ähnliche Streuung wie jene von SC8R(ST), wobei die Systemantwort jedoch stets zu steif ausfällt. Der Verschiebungsverlauf von Netz A kommt der Referenzlösung am nächsten, während Netz C die größten Abweichungen aufweist. Obwohl sich die Last-Verschiebungs-Kurven im Nachbeulbereich teilweise stark von der Referenzlösung unterscheiden, kommt deren Charakteristik der Referenzlösung jedoch deutlich näher als die des SC8R(ST)-Elements, festzustellen an einem erneuten Anstieg der Last mit zunehmender Verschiebung ab ca.  $w = 1,5$  in.

SHELL10 ist die einzige hier untersuchte Elementformulierung, deren Ergebnisse von den drei untersuchten Diskretisierungsvarianten des Knicks praktisch nicht beeinflusst werden. Die zugehörigen Last-Verschiebungs-Kurven in Abbildung 8.16 sind annähernd deckungsgleich und die Abweichungen von der Beullast der Referenzlösung liegen bei unter 2,5 Prozent (siehe Tabelle 8.4).

Die Lösung nach BETSCH U. A. (1996) ist mit den Ergebnissen von SHELL10 vergleichbar und weist lediglich im Nachbeulbereich ein minimal steiferes Verhalten auf. Der Unterschied zur Referenzlösung im Nachbeulbereich ist bei SHELL10 sowie Betsch auf die grobe Diskretisierung zurückzuführen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der starke Einfluss der Diskretisierung der Knicke des U-Profiles, verallgemeinert ausgedrückt die Empfindlichkeit gegenüber in Dickenrichtung verzerrten Elementgeometrien, wie sie beispielsweise auch in KLINKEL (2000) beobachtet wird, bei SHELL10 durch die Formulierung des Elements im Koor-

dinatensystem  $\bar{\theta}^i$  (siehe Abschnitt 6.2) fast vollständig eliminiert ist. SHELL10 weist für diese Problemstellung das robusteste Verhalten auf. Die Elementformulierung von BETSCH U. A. (1996) sowie SC8R(EN) mit Netz A und B liefern akzeptable Ergebnisse. Lediglich das SC8R(ST)-Element entspricht nicht der Erwartung, dass die hier verwendeten groben Diskretisierungen ein im Vergleich zur Referenzlösung zu steifes Systemverhalten bewirken. Die Ursache hierfür kann nicht abschließend geklärt werden. Vermutlich ist sie aber im Bereich der Hourglass-Stabilisierung zu finden.

### 8.2.3 Axial gedrücktes Paneel aus dem Flugzeugbau

In diesem Abschnitt wird eine komplexere Struktur aus dem Flugzeugbau zum Testen und Vergleichen der Elementformulierungen herangezogen. Es handelt sich dabei um ein gekrümmtes Paneel, welches in Längsrichtung durch Steifen verstärkt ist. Aus Gründen der Geheimhaltung projektrelevanter Daten geben die Geometrie- bzw. Materialangaben in Abbildung 8.17 lediglich die ungefähren Größenordnungen der tatsächlich verwendeten Werte wieder. Die Belastung der Struktur erfolgt durch eine vorgegebene Verschiebung an der Oberseite des Paneels mit dem Maximalwert  $w_{max} = 12$  mm (Verschiebungslastfall mit Verschiebungskontrolle).

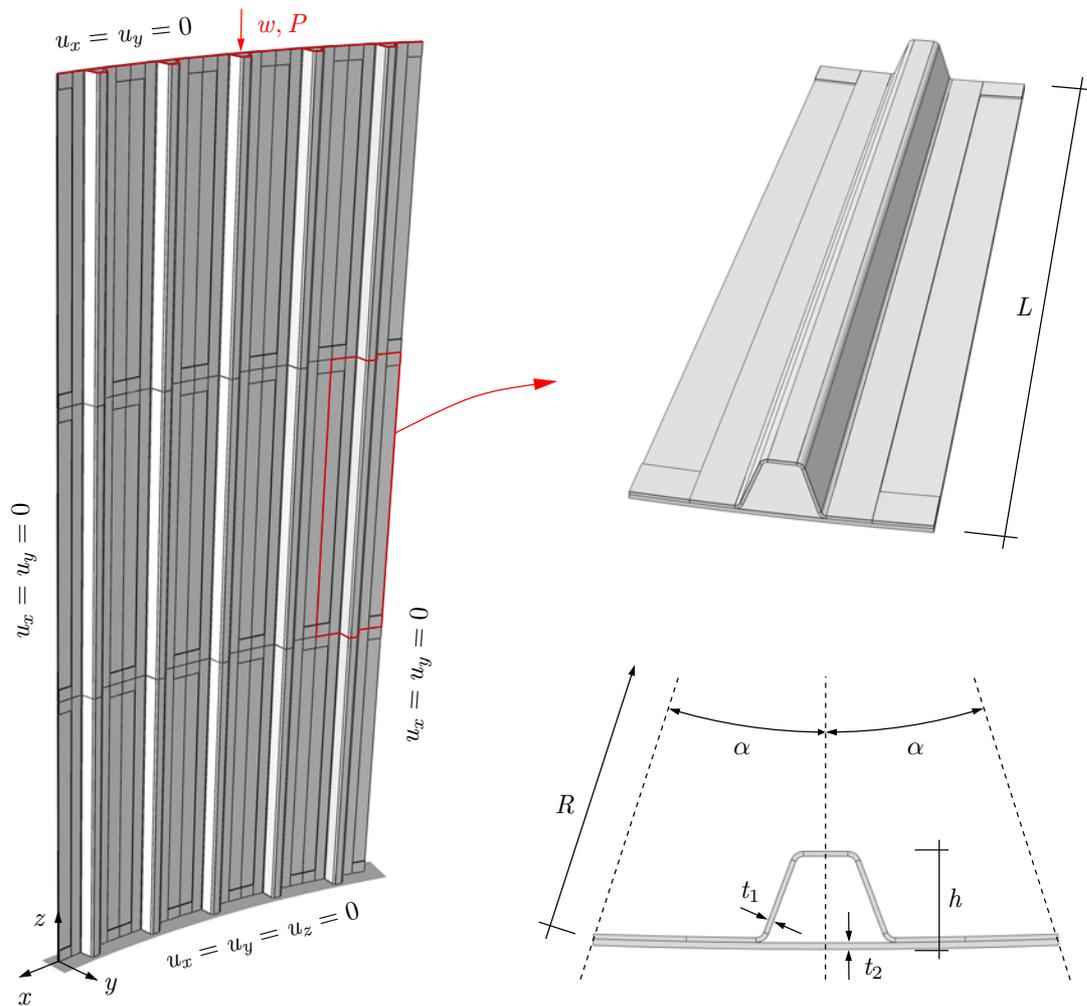
Die unterschiedlichen Elementformulierungen sowie der Einfluss der Diskretisierung werden anhand der maximal ertragbaren Last (Beullast) aus Tabelle 8.5, den Last-Verschiebungskurven aus Abbildung 8.18 und der Beulmuster aus Abbildung 8.19 untersucht und miteinander verglichen. Als Referenzlösung dienen die Ergebnisse von SHELL10 mit der feinsten Diskretisierungsvariante Netz C (siehe Abbildung 8.17). Die dabei ermittelte Beullast beträgt  $P = 7,76 \cdot 10^5$  N und stellt die Bezugsgröße für die Werte aus Tabelle 8.5 dar.

Aus Tabelle 8.5 geht hervor, dass bereits für das grobe Netz A alle Elementformulierungen akzeptable Werte für die Beullast  $P$  liefern (maximale Abweichung von ca. vier Prozent). SC8R(EN) verhält sich etwas weicher, SC8R(EN) dagegen etwas steifer als der Referenzwert, was die Ergebnisse aus Abschnitt 8.2.2 bestätigt. SHELL10 überschätzt die Beullast im Fall von Netz A und liefert für Netz B einen minimal zu weichen Wert.

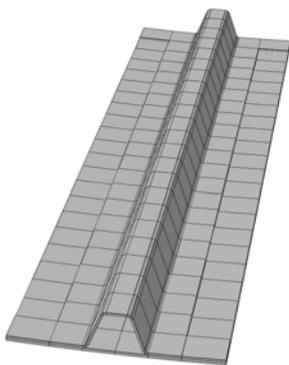
	Netz A	Netz B
SHELL10	1,0116	0,9886
SC8R(ST)	0,9773	0,9913
SC8R(EN)	1,0407	1,0214

**Tabelle 8.5:** Axial gedrücktes Paneel: normierte Beullast  $P$ .

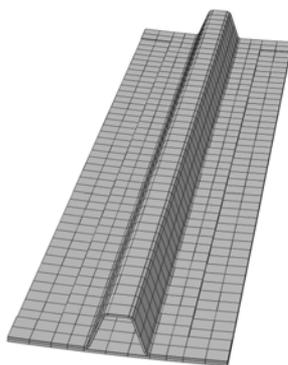
Die beschriebenen Abweichungen vom Referenzwert sind nicht nur in der maximalen Last, sondern auch in den Verläufen der Last-Verschiebungskurven von Abbildung 8.18 zu erkennen.



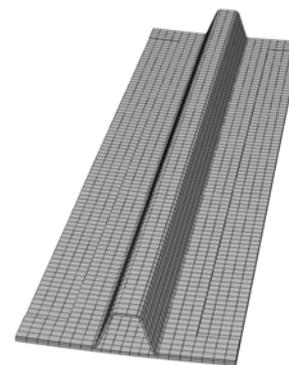
Netz A ( $\text{Ø}=26\text{ mm}$ )



Netz B ( $\text{Ø}=13\text{ mm}$ )



Netz C ( $\text{Ø}=7\text{ mm}$ )



Geometrie:

$L \approx 600\text{ mm}$     $t_1 \approx t_2 \approx 2\text{ mm}$     $\alpha \approx 2^\circ$   
 $R \approx 2000\text{ mm}$     $h \approx 30\text{ mm}$

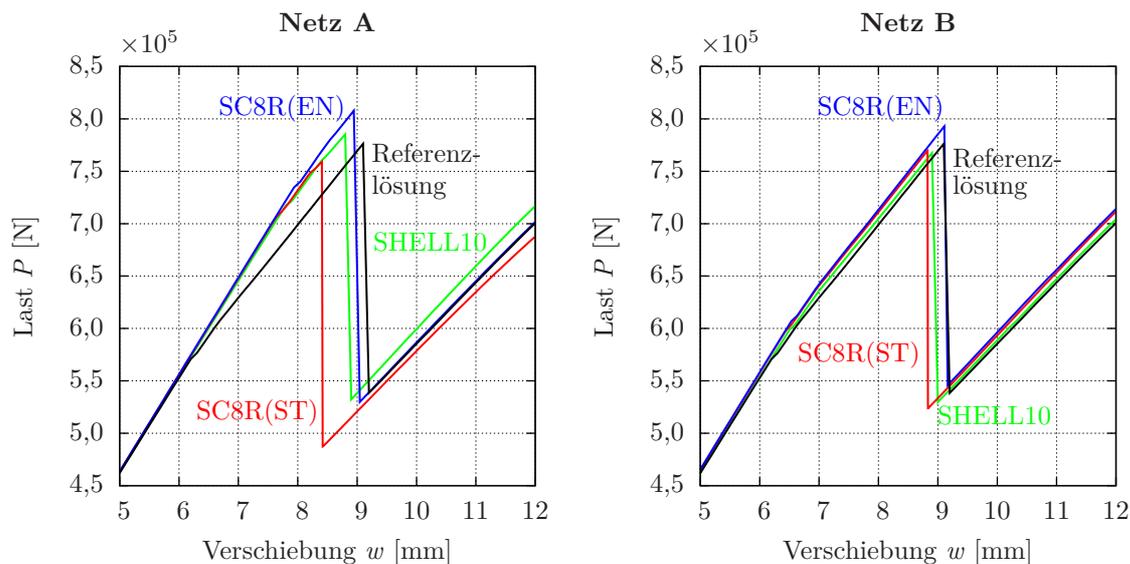
Material:

$E \approx 70000\text{ N/mm}^2$   
 $\nu \approx 0,2$

Belastung:

$w$  in mm  
 $0 \leq w \leq 12$

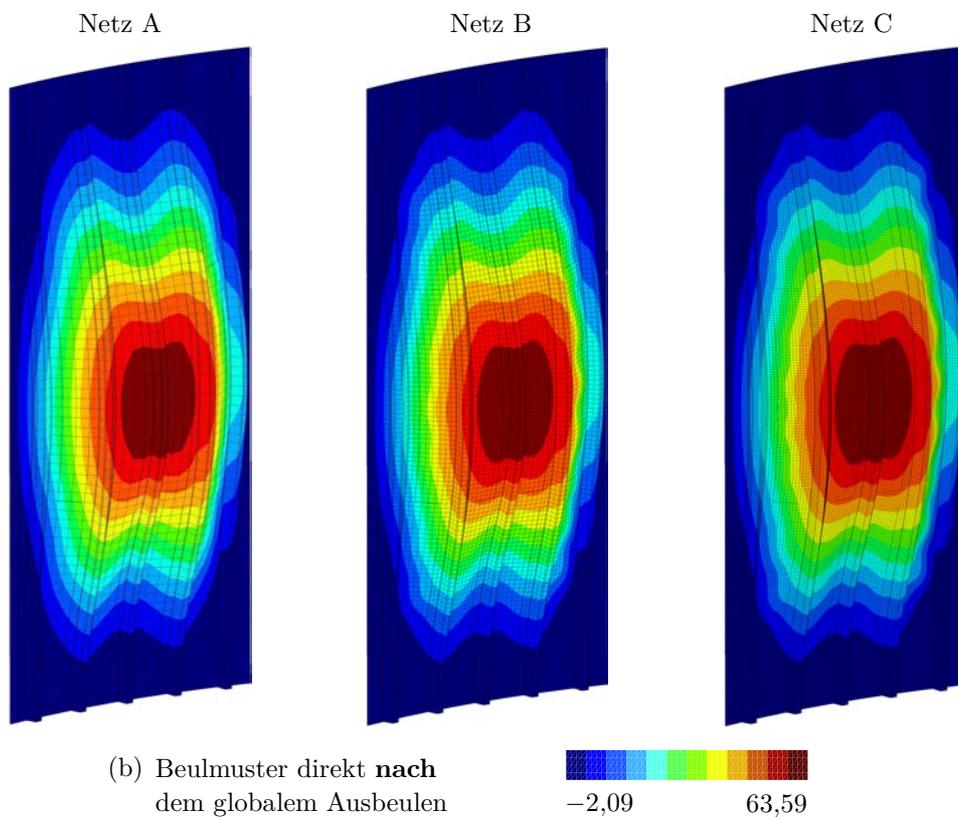
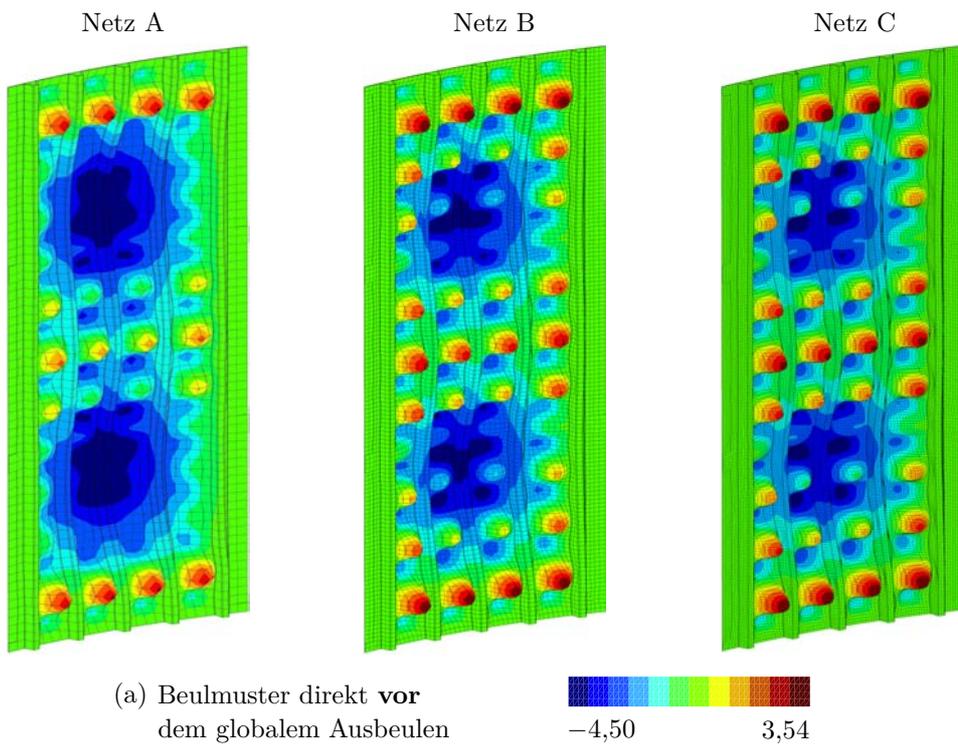
Abbildung 8.17: Axial gedrücktes Paneel: Problemstellung und Diskretisierung.



**Abbildung 8.18:** Axial gedrücktes Paneel: Last-Verschiebungs-Kurven für die Netze A und B.

Für das grobe Netz A sind die Kurven bis zu einer Vertikalverschiebung von etwa 6 mm identisch. Über diesen Punkt hinaus verlaufen alle Kurven oberhalb der Referenzlösung, was eine zu steife Systemantwort impliziert. Der Last-Verschiebungs-Verlauf von SC8R(EN) weist vor dem globalen Ausbeulen ( $w \approx 9$  mm) die größte Steigung auf und liefert damit die steifste Systemantwort. Im Vergleich hierzu liegen beim feineren Netz B nicht nur die maximalen Beullasten näher an der Referenzlösung, es stimmen auch die Verläufe der Last-Verschiebungs-Kurven aller getesteten Elementformulierungen sehr gut mit der Referenzlösung überein. Die Ursache hierfür ist in den Beulmustern zu finden, die sich für die unterschiedlichen Diskretisierungen einstellen und für die Netze A bis C direkt vor bzw. direkt nach dem globalen Ausbeulen in Abbildung 8.19(a) bzw. (b) dargestellt sind. Es handelt sich dabei um die Ergebnisse von SHELL10. Beulfiguren für die beiden Varianten von SC8R werden nicht gezeigt, da die Muster praktisch identisch sind und lediglich geringe Unterschiede in den Absolutwerten (Tiefe) der einzelnen Beulen festzustellen sind. Aus Abbildung 8.19(a) geht hervor, dass das Beulmuster von Netz B jenem von Netz C bis auf die Größe der Verschiebungswerte einzelner Beulen weitestgehend entspricht. Bei Netz A dagegen stellen sich einige der in Netz B und C vorhandenen lokalen Beulen nicht ein. Die Diskretisierung ist noch zu grob, um diese auflösen zu können, woraus das etwas steifere Verhalten in den entsprechenden Last-Verschiebungs-Kurven resultiert. Die Beulformen direkt nach dem globalen Ausbeulen des Paneels (Abbildung 8.19(b)) sind jedoch für alle Diskretisierungen praktisch identisch.

Aus den gewonnenen Erkenntnissen lässt sich schlussfolgern, dass für dieses praxisrelevante Beispiel mit allen untersuchten Netzen und Elementformulierungen das globale Tragverhalten bereits ausreichend genau erfasst werden kann.



**Abbildung 8.19:** Axial gedrücktes Paneel: Beulmuster für die Netze A, B und C (jeweils SHELL10), Konturplot der Verschiebung  $u_y$  [mm].

Es sei darauf hingewiesen, dass sich die physikalische Sensitivität von Beulproblemen bei ihrer Untersuchung mit der Methode der finiten Elemente auch in numerischen Sensitivitäten niederschlägt. Es ist somit davon auszugehen, dass die Unterschiede in den einzelnen Elementformulierungen zwar eine wichtige, jedoch nicht die einzige Ursache für voneinander abweichende Ergebnisse darstellen.

### 8.2.4 Flugzeugrumpf unter Torsionsbelastung

Abschließend wird mit den drei Volumen-Schalenelement-Formulierungen SHELL10, SC8R(ST) und SC8R(EN) ein Flugzeugrumpf unter Torsionsbelastung untersucht, dessen Geometrie in Abbildung 8.20 dargestellt ist.

Die Rumpfstruktur setzt sich dabei aus drei identischen Abschnitten in x-Richtung zusammen, welche jeweils am umlaufenden Spant zu erkennen sind. Die Außenhaut des Rumpfes wird durch Längssteifen verstärkt. Sie entsprechen denjenigen des Panels aus Abbildung 8.17.

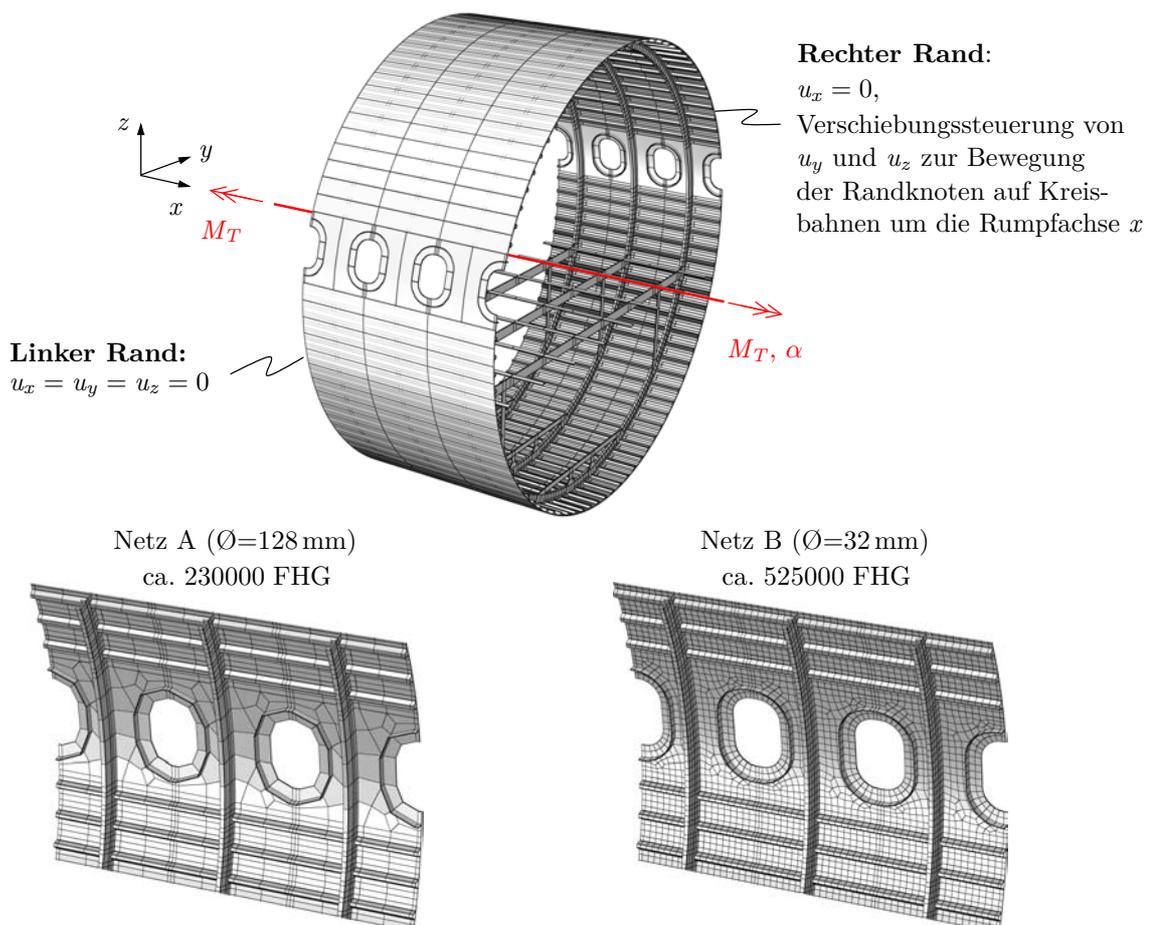


Abbildung 8.20: Flugzeugrumpf: Problemstellung und Diskretisierung.

Weitere Angaben zu Geometrie und Material können aus Gründen der Geheimhaltung von Projektdaten ebenfalls nicht gemacht werden.

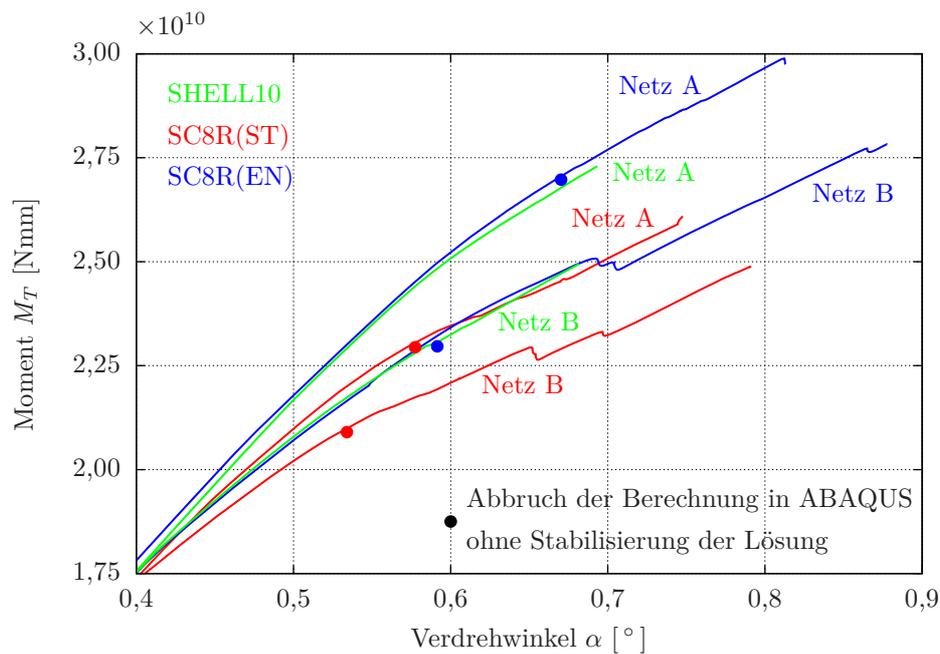
Bei dem untersuchten Lastfall handelt es sich um eine Torsionsbelastung um die Längsachse des Rumpfes, der in der Finite-Elemente-Berechnung als Verschiebungslastfall mit Verschiebungskontrolle behandelt wird. Alle Knoten des linken Randes sind festgehalten (Einspannung), wohingegen die Knoten des rechten Randes auf Kreisbahnen um die Längsachse bewegt werden. Als Ergebnisgrößen werden der Winkel  $\alpha$  sowie das Torsionsmoment  $M_T$  aufgenommen.

Zur Untersuchung der Elementformulierungen kommen jeweils zwei unterschiedliche Diskretisierungen zur Anwendung: Netz A mit einer mittleren Elementkantenlänge von 128 mm, was einer extrem groben Vernetzung des Problems entspricht, sowie Netz B mit durchschnittlich 32 mm Kantenlänge (siehe Abbildung 8.20).

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt 8.2.3 erwähnt, weisen beulgefährdete Problemstellungen bereits aus physikalischer Sicht eine hohe Sensitivität gegenüber äußeren Einflüssen auf, was sich auch bei ihrer numerischen Analyse bemerkbar macht. Wie weit eine Berechnung in den Nachbeulbereich hineingeführt werden kann, hängt von vielen Faktoren, wie beispielsweise der Stabilität der Elementformulierung oder algorithmischen Details bei der Pfadverfolgung, ab. Die in Abbildung 8.21 dargestellten Momenten-Verdrehungs-Kurven spiegeln genau dies wider: Abhängig von der Elementformulierung, der Netzfeinheit bzw. den eingesetzten Lösungsalgorithmen werden unterschiedliche maximale Verdrehwinkel  $\alpha$  erreicht.

Der „Abbruch“ einer Kurve in Abbildung 8.21 bedeutet entweder die Divergenz der Lösung oder ein Unterschreiten des vorgegebenen minimalen Winkel-Inkrementes von  $10^{-5}$  Grad [°]. Im Fall von SC8R musste in ABAQUS auf eine automatische Stabilisierung basierend auf künstlichen viskosen Kräften (ABAQUS 2011) zurückgegriffen werden, um die mit SHELL10 ohne eine derartige Lösungsstabilisierung gewonnenen maximalen Verdrehwinkel  $\alpha$  zu erreichen bzw. zu übertreffen. Die letzten ohne viskose Lösungsstabilisierung erreichten Gleichgewichtspunkte sind in Abbildung 8.21 jeweils durch Kreise markiert. Diese Gleichgewichtspunkte bzw. die zugehörigen Momenten-Verdrehungs-Kurven (nicht dargestellt) liegen minimal unterhalb denjenigen mit viskoser Stabilisierung, was den künstlichen Eintrag von Steifigkeit in das System zeigt. Für den Bereich, in dem Vergleichswerte vorliegen, ist dieser Effekt jedoch vernachlässigbar.

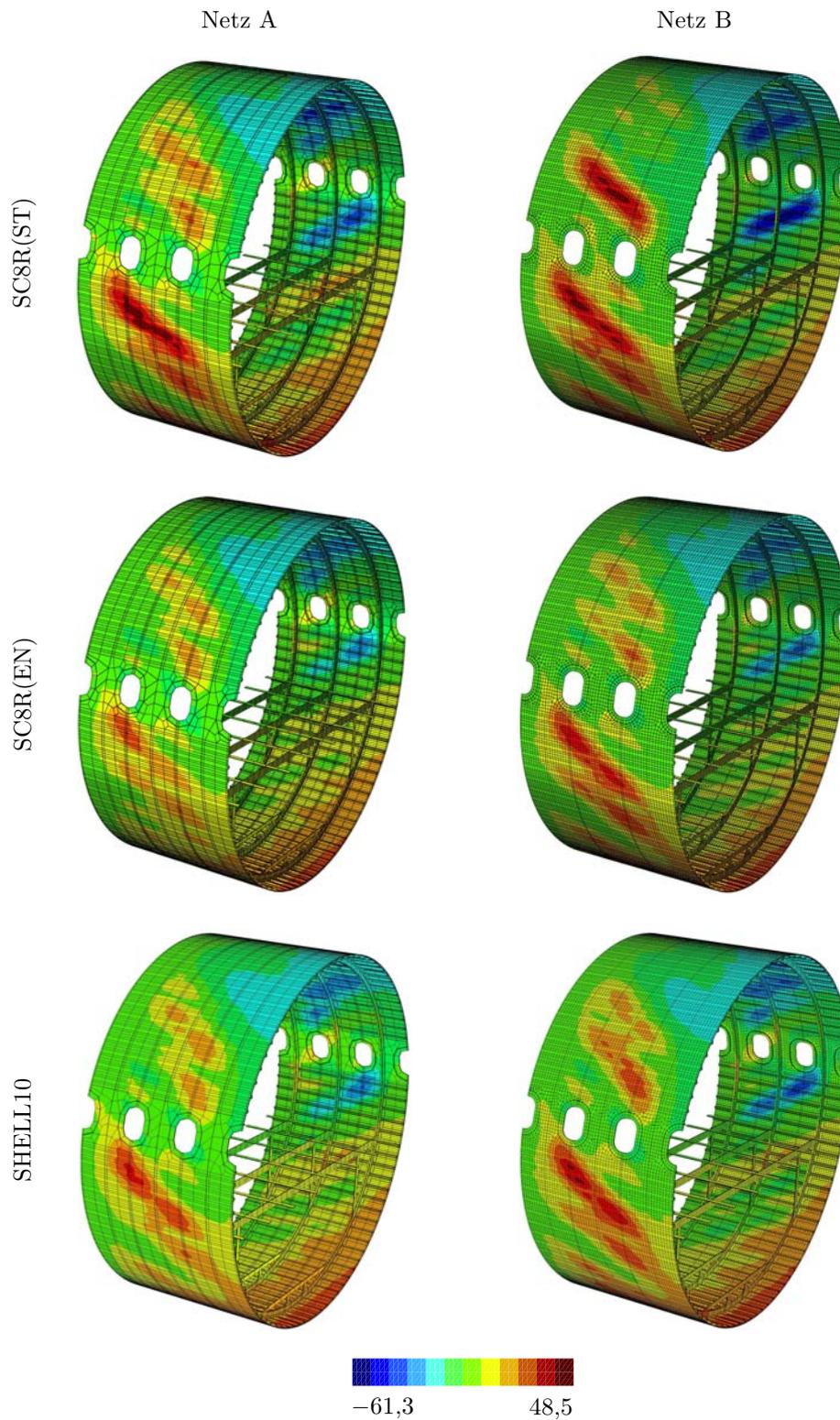
Bis zu einem Winkel von  $\alpha \approx 0,4^\circ$  stimmen die Ergebnisse aller Varianten sehr gut überein (Dieser Bereich ist in Abbildung 8.21 nicht dargestellt.). Für die beiden Formulierungen SHELL10 und SC8R(EN) sind zudem die Momenten-Verdrehungs-Kurven beider Netze vergleichbar. Deren Beulfiguren (siehe Abbildung 8.22) weisen in den Mustern sowie in den Verschiebungswerten (Tiefe der einzelnen Beulen) ebenfalls gute Übereinstimmungen auf.



**Abbildung 8.21:** Flugzeugrumpf: Momenten-Verdrehungs-Kurven.

Im Vergleich hierzu zeigen die Momenten-Verdrehungs-Kurven für SC8R(ST) ein deutlich weiches Verhalten. Für Netz A besitzt SC8R(ST) eine ähnliche Momenten-Verdrehungs-Charakteristik wie SHELL10 bzw. SC8R(EN) für das feinere Netz B. Da die Beulfigur von SC8R(ST) beim groben Netz A ebenfalls vergleichbar mit derjenigen von SHELL10 bzw. SC8R(EN) bei Netz B ist, liegt die Vermutung nahe, dass das in Abschnitt 8.2.2 berichtete zu weiche Verhalten von SC8R(ST) im Fall des Flugzeugrumpfes die Effekte aus dem groben Netz A sehr gut kompensiert. Die sehr weiche Systemantwort sowie die tiefen Beulen ober- bzw. unterhalb des Fensterbandes beim SC8R(ST) mit Netz B bei  $\alpha = 0,665^\circ$  (siehe Abbildung 8.22) sind strukturmechanisch auf das Kippen der Spanten im Bereich der Fenster (nicht dargestellt) zurückzuführen. Ob eine Verfeinerung der Netze dieses Verhalten auch für SHELL10 bzw. SC8R(EN) bestätigt, oder ob dies auf die Formulierung von SC8R(ST) zurückzuführen ist, wurde nicht untersucht. Grundsätzlich ist für ein derart komplexes Beispiel ein Abgleich mit Versuchsergebnissen zu empfehlen.

Zusammenfassend soll folgendes festgehalten werden: Alle drei Elementformulierungen zeigen in diesem Beispiel ihre Praxistauglichkeit, auch mit groben Netzen das globale Strukturverhalten im Vorbeulbereich abbilden zu können. Erst ab dem Punkt, wo Beulen eintritt und somit lokale Effekte eine maßgebliche Rolle spielen, streuen die Ergebnisse für die verschiedenen Formulierungen merklich. Aufgrund der in den vorangegangenen Beispielen dieses Kapitels beobachteten Robustheit scheint SHELL10 auch für die Untersuchung des Flugzeugrumpfes eine gute Wahl zu sein.



**Abbildung 8.22:** Flugzeugrumpf: Beulmuster für die Netze A und B bei  $\alpha = 0,665^\circ$ , Konturplot der Verschiebung  $u_y$  [mm] bezogen auf das globale Koordinatensystem in Abbildung 8.20.

### 8.3 Vorkonditionierung und iterative Lösung von Gleichungssystemen aus Schalenstrukturen

In diesem Abschnitt werden mittels der in Kapitel 7 vorgestellten Verfahren Vorkonditionierer aufgestellt und ihr Einfluss auf das Konvergenzverhalten des CG-Verfahrens anhand numerischer Beispiele unterschiedlicher Komplexität untersucht. Es handelt sich dabei um eine einachsig gespannte Platte sowie um die bekannten Strukturen aus dem Flugzeugbau (vgl. Abschnitte 8.2.3 und 8.2.4), wobei die zugehörigen Gleichungssysteme jeweils für den geometrisch linearen Fall gelöst werden.

Die Implementierung der Vorkonditionierer aus Kapitel 7 sowie das Lösen mittels des CG-Verfahrens erfolgen in MATLAB (2012). Die faktorisierte Form  $\mathbf{L}$  der Vorkonditionierer  $\mathbf{M}$  wird über die Matlab-Funktion `chol` berechnet. Um den Fill-In bei der Faktorisierung zu minimieren, wird mit Hilfe der Funktion `nesdis` (DAVIS 2013), welche ihrerseits auf METIS (Version 4.0) (KARYPIS UND KUMAR 1998a, b) zurückgreift, vorab eine optimierte Zeilen- und Spaltenpermutation ermittelt. Die Funktion `nesdis` wird dabei mit den Defaulteinstellungen der Matlab-Schnittstelle verwendet.

Zur Untersuchung der Vorkonditionierer, die nach Abschnitt 7.3 auf der Topologieänderung des FE-Netzes basieren, werden jeweils unterschiedlich stark ausgedünnte Ersatzprobleme aufgestellt. Die Ausdünnung wird über die Suchtiefe  $\mathcal{S}$  gesteuert (siehe Abschnitt 7.3.2 und 7.3.3), welche sich in der Bezeichnung der einzelnen Vorkonditionierer, beispielsweise  $\mathcal{S}$ -4 für einen Vorkonditionierer mit der Suchtiefe vier, niederschlägt. Wird für  $\mathcal{S}$  die Elementanzahl einer Diskretisierung herangezogen, so ergibt sich für die gewählte Reihenfolge, in der die einzelnen Elemente geprüft werden, die maximale Ausdünnung der Diskretisierung ( $\mathcal{S}$ -max).

Die Vorkonditionierer nach Abschnitt 7.4 (algebraische Vereinfachung) werden in unterschiedlichen Approximationsstufen untersucht. Für jedes Beispiel wird zunächst die blockdiagonalisierte Stabapproximation  $\mathbf{M}_{dd}$  nach Abschnitt 7.4.1 direkt als Vorkonditionierer verwendet (Bezeichnung ST/BD). Ausgehend hiervon werden durch kombinatorisches Ausdünnen der Matrix  $\mathbf{M}_{dd}$  zwei weitere Vorkonditionierer erstellt.

Hierzu wird die Routine `taucs_amwb_preconditioner_create`( $\mathbf{M}_{dd}$ ,P1,P2,P3) aus der Bibliothek TAUCS (TOLEDO 2003) eingesetzt. Beim Parameter P1 handelt es sich um einen zufälligen, ganzzahligen Wert, der für alle Beispiele 45782 beträgt. Mit P2 lässt sich der Grad der kombinatorischen Ausdünnung steuern. Hierfür wird der Wert Eins (Vorkonditionierer ST/BD/CS-1) sowie die Dimension  $n$  des jeweiligen Gleichungssystems (Vorkonditionierer ST/BD/CS- $n$ ) gewählt. Der im Handbuch nicht dokumentierte Übergabeparameter P3 wird stets mit dem Wert Null belegt.

Es sei angemerkt, dass laut TOLEDO (2003) für P2 gleich  $n$  keine Modifikation von  $\mathbf{M}_{dd}$

erfolgt. Warum dies bei den untersuchten Beispielen trotzdem der Fall ist, konnte nicht abschließend geklärt werden.

Neben den in dieser Arbeit entwickelten Vorkonditionierern werden zum Vergleich drei weitere aus der Literatur herangezogen.

Es handelt sich zum einen um den Jacobi-Vorkonditionierer, welcher aus den Diagonalelementen der Matrix  $\mathbf{K}$  besteht. Des Weiteren wird ein Block-Jacobi-Vorkonditionierer verwendet, bei dem diejenigen Einträge der Matrix  $\mathbf{K}$  vernachlässigt werden, die unterschiedliche Richtungen  $(x, y, z)$  im global kartesischen Raum miteinander koppeln (BARRETT U. A. 1994). Als dritter Vorkonditionierer kommt eine unvollständige Cholesky-Faktorisierung mit einem Level Fill-In IC(1) zum Einsatz (MEIJERINK UND VAN DER VORST 1977). Im Gegensatz zu allen anderen Vorkonditionierern erfolgt das Aufstellen von IC(1) und das Lösen mittels CG-Verfahren nicht in einer Matlab-Implementierung, sondern in der sequentiellen Version der Löserbibliothek Aztec 2.1 (TUMINARO U. A. 1999), wobei die Gleichungsnummerierung aus der Diskretisierung beibehalten wird.

Für alle Beispiele und Konfigurationen dieses Abschnitts wird mit dem CG-Verfahren solange iteriert, bis das mit der Norm der rechten Seite  $\mathbf{f}$  skalierte Residuum  $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{f}\|$  (siehe Abbildung 7.1) den Wert  $1,0\text{E-}06$  unterschreitet.

Der Vergleich der Vorkonditionierer erfolgt sowohl anhand der Charakteristik der Konvergenzverläufe, z.B. ihrer Monotonie, als auch auf der Basis des zur Lösung erforderlichen numerischen Aufwands. Dieser wird mit der Anzahl der benötigten Gleitkommaoperationen (engl.: floating-point operations, kurz: flops) quantifiziert. Dabei wird jede Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division als eine Gleitkommaoperation betrachtet (QUARTERONI U. A. 2000).

Die Zahl der Rechenoperationen pro Iteration im vorkonditionierten CG-Verfahren nach Abbildung 7.1 wird von einem Matrix-Vektor-Produkt sowie dem im Rahmen der Vorkonditionierung notwendigen Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen in die faktorisierte Form  $\mathbf{L}$  von  $\mathbf{M}$  dominiert. Die Anzahl der bei  $N_{iter}$  Iterationen im CG-Verfahren anfallenden Gleitkommaoperationen kann somit näherungsweise durch

$$CG_{flops} = (2 N_K + 4 N_{LM}) N_{iter} \quad (8.1)$$

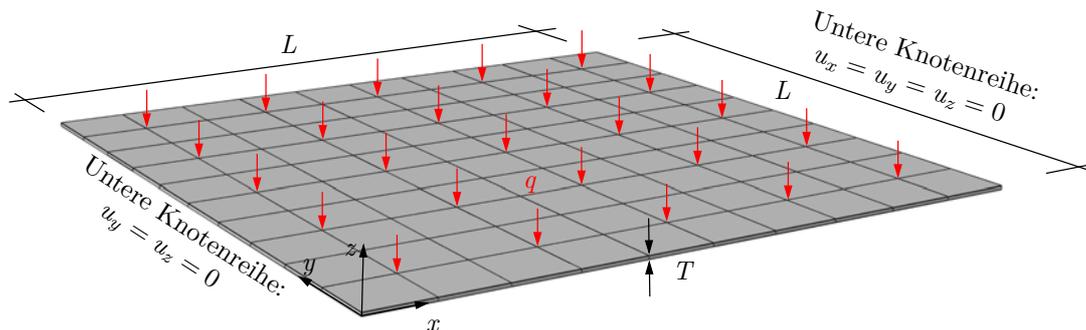
angegeben werden. Darin gibt  $N_K$  die Anzahl der Nicht-Null-Einträge der Matrix  $\mathbf{K}$  sowie  $N_{LM}$  die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der faktorisierten Form  $\mathbf{L}$  des verwendeten Vorkonditionierers  $\mathbf{M}$  an. Rechenoperationen, welche beim Erstellen und Faktorisieren der Vorkonditionierer anfallen, werden in  $CG_{flops}$  nicht berücksichtigt.

Um eine Aussage bezüglich der Konkurrenzfähigkeit des vorkonditionierten CG-Verfahrens im Vergleich zu direkten Lösern zu ermöglichen, erfolgt für alle Beispiele zusätzlich eine Lösung mit `cholmod2` (DAVIS 2013), wobei die Zeilen- und Spaltenpermutation wie oben beschrieben wiederum mit Hilfe von `nesdis` ermittelt wird.

Der Aufwand bei einem direkten Lösungsverfahren wird in der Regel von der numerischen Faktorisierung dominiert. Die Anzahl der hierfür benötigten Gleitkommaoperationen wird von `cholmod2` direkt ausgegeben. Die benötigte Zahl an Operationen für das Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen kann darüber hinaus mit  $4 N_{LK}$  abgeschätzt werden, wobei  $N_{LK}$  die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der faktorisierten Form  $\mathbf{L}$  von  $\mathbf{K}$  angibt (GEORGE UND LIU 1981). Die Summe beider Werte wird im Folgenden mit  $D_{flops}$  bezeichnet.

### 8.3.1 Einachsig gespannte Platte

Dieses Beispiel ist GEE (2004) entnommen, wo es zur Untersuchung von Eigenwertspektren unterschiedlicher Elementformulierungen herangezogen wurde. Es handelt sich um eine einachsig gespannte, gelenkig gelagerte Platte, die durch eine Flächenlast  $q$  belastet wird (Abbildung 8.23). Die gelenkige Lagerung wird bei den zur Diskretisierung verwendeten SHELL10-Elementen dadurch realisiert, dass lediglich die untere Knotenreihe der entsprechenden Stirnseiten gelagert wird.

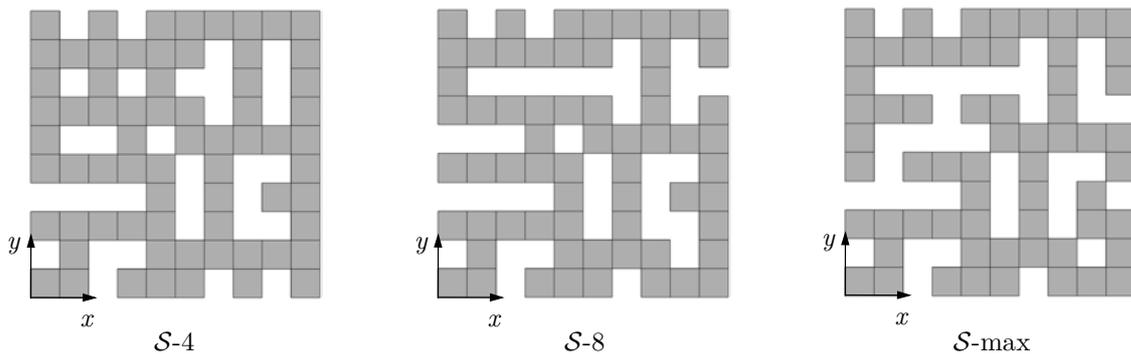


Geometrie:	Material:	Belastung:	Netz:
$L = 20,0 \text{ m}$	$E = 5,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$	$q = 1,0 \text{ N/m}^2$	$10 \times 10$ SHELL10-Elemente
$T = 0,1 \text{ m}$	$\nu = 0,0$		

**Abbildung 8.23:** Einachsig gespannte Platte: Problemstellung und Diskretisierung.

In Abbildung 8.24 sind diejenigen Ersatzprobleme des Ausgangsproblems aus Abbildung 8.23 dargestellt, deren Steifigkeitsmatrizen die Vorkonditionierer  $\mathcal{S}$ -4,  $\mathcal{S}$ -8 und  $\mathcal{S}$ -max ergeben. Darin ist deutlich zu erkennen, dass mit Zunahme der Suchtiefe  $\mathcal{S}$  die Zahl der Elemente in den Diskretisierungen immer weiter ab- und der Grad der Ausdünnung zunimmt.

Aus Tabelle 8.6 geht klar hervor, dass das CG-Verfahren mit keinem der eingesetzten Vorkonditionierer für dieses Beispiel mit einem effizienten direkten Löser konkurrenzfähig ist. In Verbindung mit dem Block-Jacobi-Vorkonditionierer sind fast doppelt so viele Rechenoperationen, bei ST/BD/CS-1 gar 161-mal mehr Operationen notwendig.



**Abbildung 8.24:** Einachsige gespannte Platte: Ersatzprobleme unterschiedlicher Suchtiefe  $\mathcal{S}$ .

Mit der oft nur geringfügigen Reduktion der Anzahl der Nicht-Null-Einträge  $N_{LM}$  im Vergleich zu  $N_{LK}$ , die direkt mit der Reduktion des Speicherbedarfs einhergeht, kann diese extreme Zunahme der Rechenoperationen nicht gerechtfertigt werden.

Für die auf der Topologieänderung des FE-Netzes basierenden Vorkonditionierer kann eine direkte Korrelation zwischen der Suchtiefe  $\mathcal{S}$  und der Anzahl der Nicht-Null-Einträge  $N_{LM}$  festgestellt werden. Wie Tabelle 8.6 zeigt, führt das Erhöhen von  $\mathcal{S}$  automatisch zu einer Reduktion von  $N_{LM}$ . Gleichzeitig steigt jedoch die Anzahl der Iterationen derart an, dass die Zahl der insgesamt notwendigen Rechenoperationen mit steigender Suchtiefe zunimmt. Die Qualität des Vorkonditionierers  $\mathcal{S}$ -8 liegt in diesem Beispiel etwa in der Größenordnung von IC(1),  $\mathcal{S}$ -4 schneidet im Vergleich hierzu besser,  $\mathcal{S}$ -max dagegen etwas schlechter ab.

	$N_{LM}$	$N_{LM}/N_{LK}$	$N_{iter}$	$CG_{flops}$	$CG_{flops}/D_{flops}$
Block-Jacobi	12401	0,348	41	4,532E+06	1,98
IC(1)	23013	0,646	425	6,501E+07	28,35
Jacobi	671	0,019	3443	2,190E+08	95,50
$\mathcal{S}$ -4	19866	0,558	295	4,141E+07	18,06
$\mathcal{S}$ -8	17374	0,488	448	5,843E+07	25,48
$\mathcal{S}$ -max	14011	0,393	637	7,451E+07	32,49
ST/BD	9382	0,263	334	3,288E+07	14,34
ST/BD/CS-n	3594	0,101	3944	2,970E+08	129,51
ST/BD/CS-1	1339	0,038	5599	3,711E+08	161,83

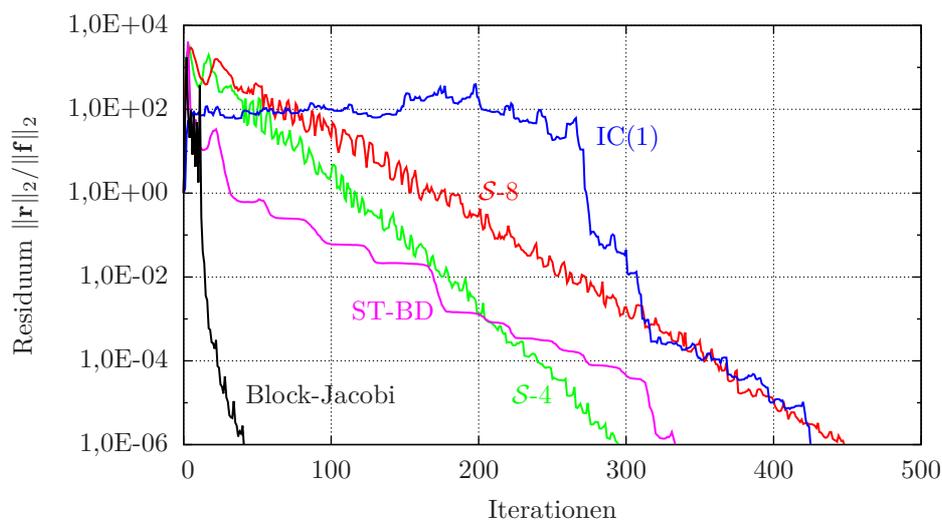
mit  $N_K = 30462$ ,  $N_{LK} = 35614$  sowie  $D_{flops} = 2,293E+06$

**Tabelle 8.6:** Einachsige gespannte Platte: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer.

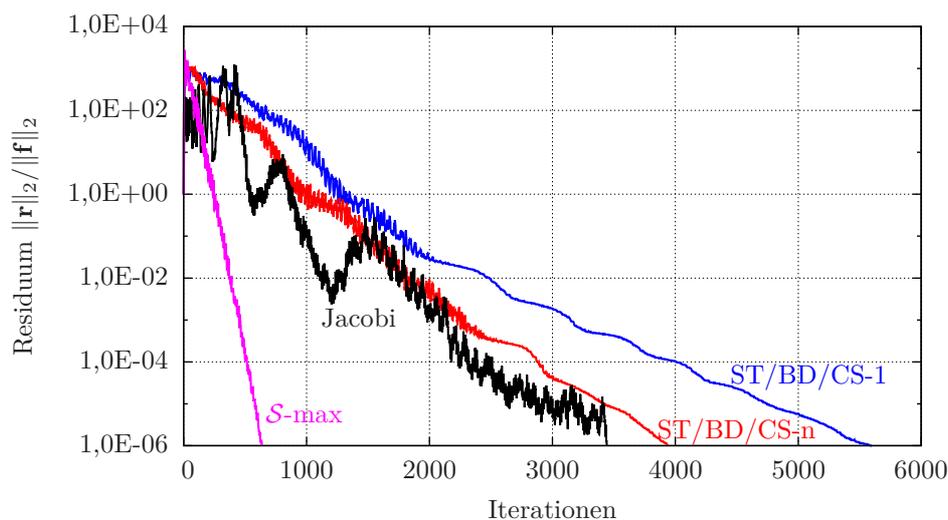
Der Unterschied in den Rechenoperationen von Block-Jacobi zu ST/BD kann als Kriterium für die Qualität der Stabapproximation nach Abschnitt 7.4.1 herangezogen werden. Die Zunahme um den Faktor Sieben verdeutlicht die Notwendigkeit, die Qualität der Stabapproximation zu verbessern. Es ist vor diesem Hintergrund nicht weiter verwunder-

lich, dass die Zahl der Gleitkommaoperationen bei der Verwendung der Vorkonditionierer ST/BD/CS-n und ST/BD/CS-1, die auf ST/BD basieren, rasant zunimmt.

In den Abbildungen 8.25 und 8.26 ist die Entwicklung der Residuen bei zunehmender Iterationszahl dargestellt. Hierbei stechen vor allem die auf der Topologieänderung des FE-Netzes basierenden Vorkonditionierer hervor. Sieht man von den hochfrequenten Oszillationen ab, so ergeben sich nach einigen Iterationen fast lineare Verläufe. Im Gegensatz hierzu weist z.B IC(1) einen völlig unregelmäßigen Konvergenzverlauf auf.



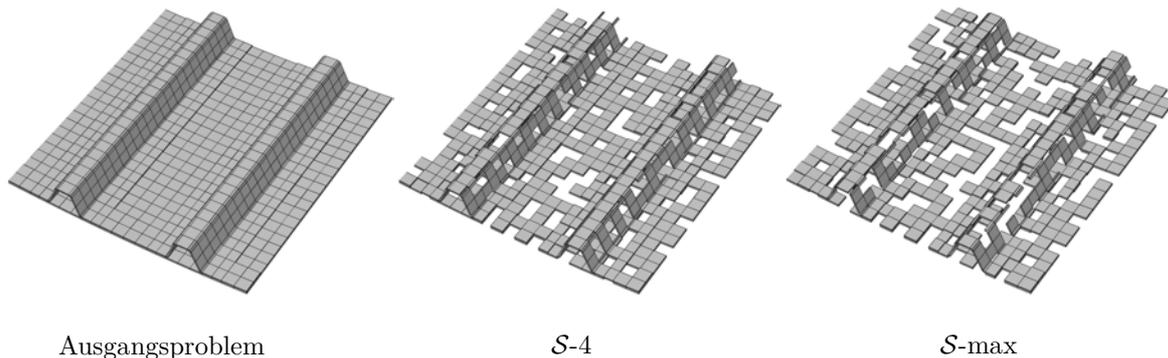
**Abbildung 8.25:** Einachsige gespannte Platte: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern Block-Jacobi, IC(1), S-4, S-8 und ST/BD.



**Abbildung 8.26:** Einachsige gespannte Platte: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern S-max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n.

### 8.3.2 Axial gedrücktes Paneel aus dem Flugzeugbau

In diesem Abschnitt werden die Vorkonditionierer anhand des axial gedrückte Paneels aus Abbildung 8.17 in der Diskretisierung Netz B untersucht. Abbildung 8.27 zeigt einen Ausschnitt aus der Ausgangsdiskretisierung sowie aus den Ersatzproblemen, auf denen die Vorkonditionierer  $\mathcal{S}$ -4 und  $\mathcal{S}$ -max basieren.



**Abbildung 8.27:** Axial gedrücktes Paneel: Ausgangsproblem sowie Ersatzprobleme unterschiedlicher Suchtiefe  $\mathcal{S}$ .

Im Vergleich zum Beispiel des Abschnitts 8.3.1 fällt das Verhältnis  $CG_{flops}/D_{flops}$  beim axial gedrückten Paneel für das CG-Verfahren deutlich günstiger aus. Eine Lösung mit dem Block-Jacobi-Vorkonditionierer wie auch dem IC(1)-Vorkonditionierer scheint für diesen Fall ähnlich aufwendig zu sein wie eine Lösung über das direkte Verfahren. Die Ursache hierfür ist eine deutlich bessere Konditionierung des Gleichungssystems, welche vermutlich auf die Längssteifen sowie die Lagerung aller Ränder des Paneels zurückzuführen ist.

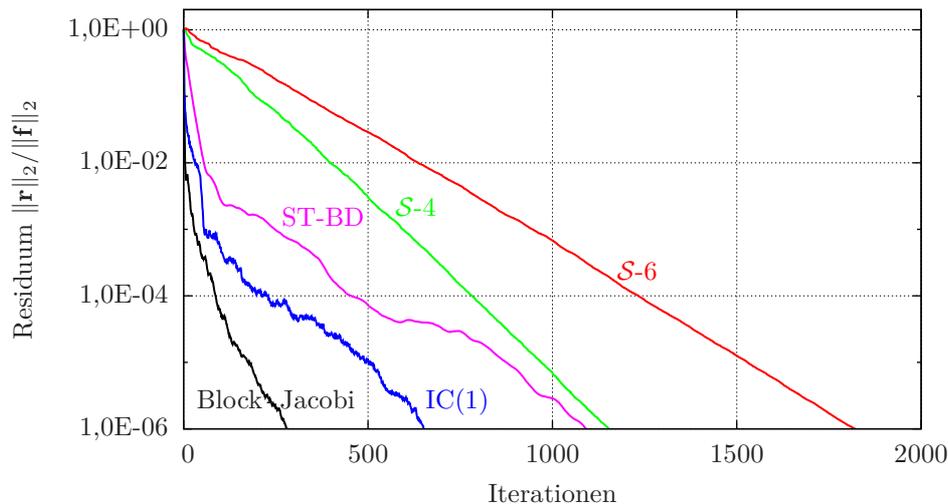
	$N_{LM}$	$N_{LM}/N_{LK}$	$N_{iter}$	$CG_{flops}$	$CG_{flops}/D_{flops}$
Block-Jacobi	8,36E+06	0,341	281	1,269E+10	0,99
IC(1)	5,15E+06	0,210	651	2,106E+10	1,64
Jacobi	1,05E+05	0,004	16850	2,047E+11	15,90
$\mathcal{S}$ -4	1,29E+07	0,524	1154	7,290E+10	5,66
$\mathcal{S}$ -6	9,80E+06	0,399	1821	9,273E+10	7,20
$\mathcal{S}$ -10	7,66E+06	0,312	2707	1,147E+11	8,91
$\mathcal{S}$ -max	4,66E+06	0,190	8729	2,650E+11	20,59
ST/BD	8,29E+06	0,338	1091	4,896E+10	3,80
ST/BD/CS-n	2,65E+06	0,108	21172	4,732E+11	36,76
ST/BD/CS-1	2,28E+05	0,009	50037	6,326E+11	49,15

mit  $N_K = 5,865E+06$ ,  $N_{LK} = 2,453E+07$  sowie  $D_{flops} = 1,287E+10$

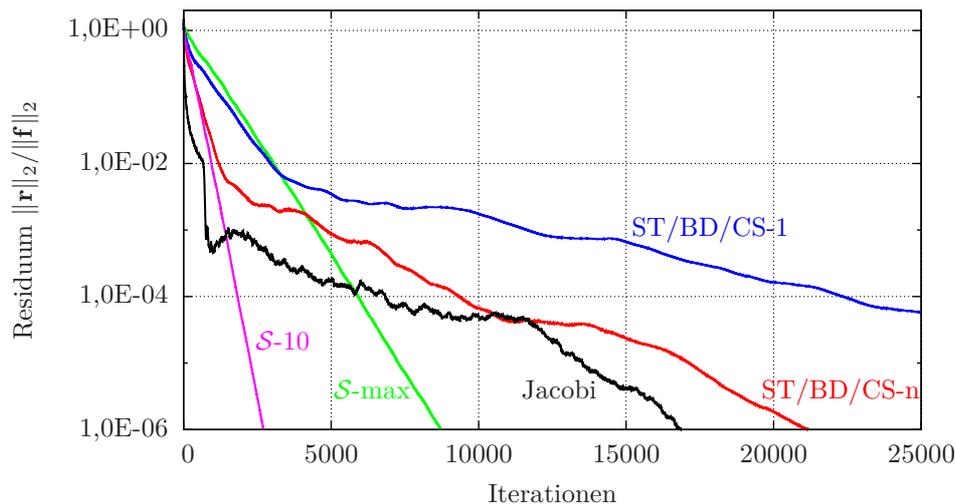
**Tabelle 8.7:** Axial gedrücktes Paneel: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer.

In den Abbildungen 8.28 und 8.29 sind die Konvergenzverläufe des CG-Verfahrens mit allen bei diesem Beispiel eingesetzten Vorkonditionierern abgebildet.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Vorkonditionierer Block-Jacobi, IC(1), Jacobi sowie ST/BD, ST/BD/CS-n und ST/BD/CS-1 variiert dabei teilweise sehr stark. Dagegen weisen die Vorkonditionierer  $\mathcal{S}$ -4,  $\mathcal{S}$ -6,  $\mathcal{S}$ -10 und  $\mathcal{S}$ -max nach einigen Iterationen zu Beginn des Lösungsprozesses eine fast konstante Konvergenzgeschwindigkeit auf.



**Abbildung 8.28:** Axial gedrücktes Panel: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern Block-Jacobi, IC(1),  $\mathcal{S}$ -4,  $\mathcal{S}$ -6 und ST/BD.

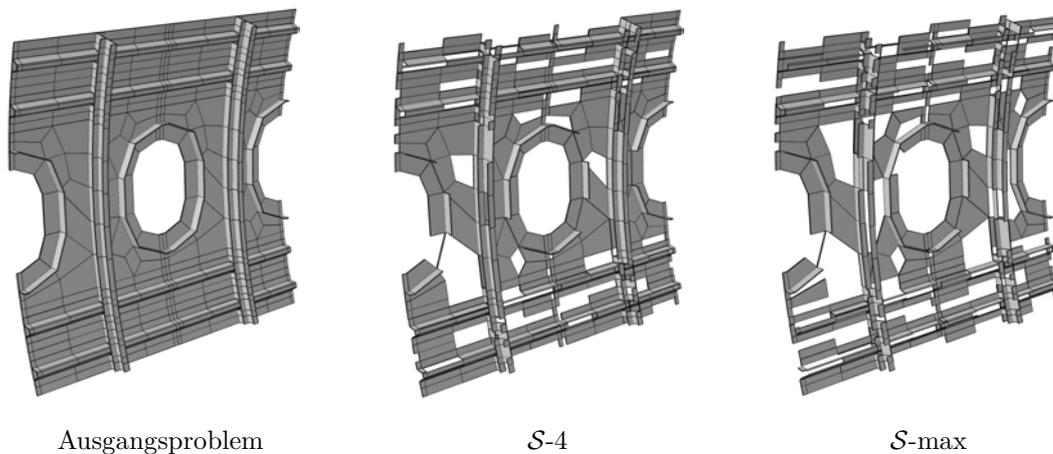


**Abbildung 8.29:** Axial gedrücktes Panel: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern  $\mathcal{S}$ -10,  $\mathcal{S}$ -max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n.

### 8.3.3 Flugzeugrumpf unter Torsionsbelastung

Abschließend werden die verschiedenen Vorkonditionierer zur Lösung des Gleichungssystems, welches bei der Berechnung der Struktur aus Abschnitt 8.20 auftritt, angewendet. Hierfür wird das Netz A herangezogen. Aufgrund technischer Probleme konnte der Vorkonditionierer IC(1) für diese Konfiguration nicht aufgestellt werden.

In Abbildung 8.30 sind zur Veranschaulichung Ausschnitte aus dem Netz der Ausgangsdiskretisierung sowie der Ersatzdiskretisierungen der Vorkonditionierer  $\mathcal{S}$ -4 und  $\mathcal{S}$ -max dargestellt.



**Abbildung 8.30:** Flugzeugrumpf: Ausgangsproblem sowie Ersatzprobleme unterschiedlicher Suchtiefe  $\mathcal{S}$ .

Aus Tabelle 8.8 geht klar hervor, dass auch für diesen Anwendungsfall ein direktes Lösungsverfahren dem vorkonditionierten CG-Verfahren deutlich überlegen ist.

Vergleicht man die Vorkonditionierer untereinander, so fällt auf, dass  $\mathcal{S}$ -4 bis  $\mathcal{S}$ -max im Gegensatz zu den Beispielen der Abschnitte 8.3.1 und 8.3.2 vergleichsweise schlecht

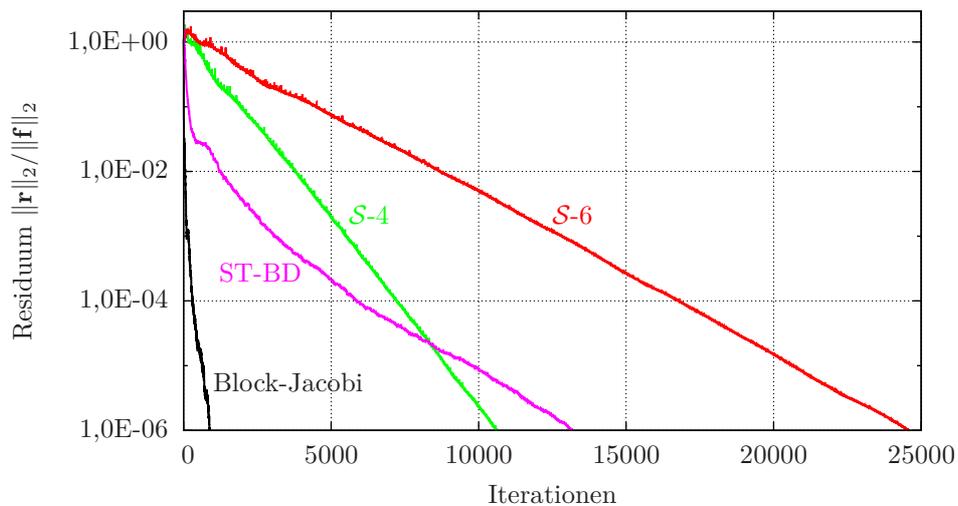
	$N_{LM}$	$N_{LM}/N_{LK}$	$N_{iter}$	$CG_{flops}$	$CG_{flops}/D_{flops}$
Block-Jacobi	1,52E+07	0,332	881	7,439E+10	3,39
Jacobi	2,15E+05	0,005	49531	1,218E+12	55,58
$\mathcal{S}$ -4	2,44E+07	0,534	10608	1,288E+12	58,78
$\mathcal{S}$ -6	1,93E+07	0,421	24585	2,478E+12	113,09
$\mathcal{S}$ -10	1,55E+07	0,338	45570	3,899E+12	177,91
$\mathcal{S}$ -max	1,01E+07	0,222	111437	7,161E+12	326,77
ST/BD	1,42E+07	0,311	13184	1,063E+12	48,51
ST/BD/CS-n	2,53E+06	0,055	107016	3,624E+12	165,36
ST/BD/CS-1	4,61E+05	0,010	108575	2,776E+12	126,69

mit  $N_K = 1,186E+07$ ,  $N_{LK} = 4,574E+07$  sowie  $D_{flops} = 2,191E+10$

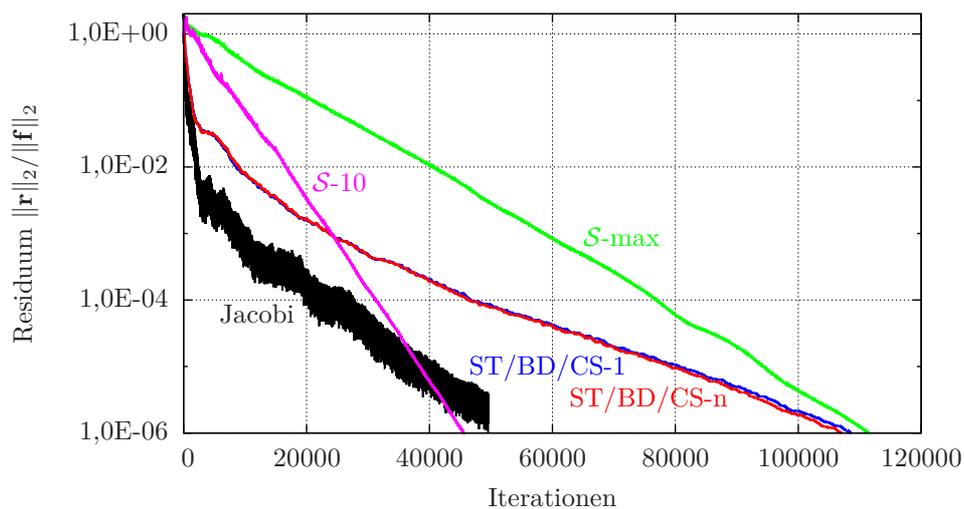
**Tabelle 8.8:** Flugzeugrumpf: tabellarischer Vergleich der Vorkonditionierer.

abschneiden. So benötigt beispielsweise die Lösung mit  $\mathcal{S}$ -4 bereits mehr Operationen als mit dem sehr einfachen Jacobi-Vorkonditionierer.

Die Konvergenzcharakteristiken (siehe Abbildungen 8.31 und 8.32) weisen ähnliche Eigenschaften wie bei den Beispielen zuvor auf. Die auf der Topologieänderung des FE-Netzes basierenden Vorkonditionierer zeigen erneut einen fast linearen Konvergenzverlauf. Analog zu den Verläufen bei der einachsigen gespannten Platte (Abschnitt 8.3.1) sind jedoch wieder hochfrequente Oszillationen zu beobachten.



**Abbildung 8.31:** Flugzeuggruppe: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern Block-Jacobi,  $\mathcal{S}$ -4,  $\mathcal{S}$ -6 und ST/BD.



**Abbildung 8.32:** Flugzeuggruppe: Konvergenzverlauf mit den Vorkonditionierern  $\mathcal{S}$ -10,  $\mathcal{S}$ -max, Jacobi, ST/BD/CS-1 und ST/BD/CS-n.

---

## Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde auf wesentliche Aspekte der Simulation von Schalenstrukturen eingegangen. Ein erster Schwerpunkt befasste sich mit der Diskussion von Modellannahmen bei klassischen und dreidimensionalen Schalentheorien. Darauf aufbauend wurden die mechanischen Grundlagen dreidimensionaler Schalenelemente im Detail herausgearbeitet. Einen zentralen Bestandteil der Arbeit bildete zudem die Entwicklung und implementierungsnahe Herleitung eines robusten, spannungsbasierten 3D-Volumen-Schalenelements. Neben schalentheoretischen und elementtechnologischen Gesichtspunkten wurde als dritter Themenschwerpunkt dieser Arbeit die bei Finite-Elemente-Berechnungen essentielle Lösung linearer Gleichungssysteme dahingehend untersucht, inwieweit sich Vorkonditionierer auf der Basis von Ersatzproblemen eignen, um die Lösung der bei Schalenproblemen besonders schlecht konditionierten Gleichungssysteme mit iterativen Verfahren wirtschaftlich zu gestalten.

Ausgehend von der Mittelflächenparametrisierung des Schalenkontinuums wurde in der Arbeit durch Vorabintegration in Dickenrichtung zunächst die Dimension des Problems von drei auf zwei Parameter reduziert sowie die Beschränkung der Kinematik auf das wesentliche Tragverhalten motiviert. Dieser Ansatz war besonders für klassische Schalentheorien wichtig, welche in Zeiten entstanden, in denen noch keine numerischen Rechenverfahren existierten und man auf die analytische Lösbarkeit der Gleichungen angewiesen war. Nach der Diskussion von Kriterien, die von Schalentheorien zu erfüllen sind, wurden anschließend ausgehend vom dreidimensionalen Kontinuum konsistente kinematische und konstitutive Gleichungen einer Reissner-Mindlin- und Kirchhoff-Love-Schalentheorie mit detaillierter Erläuterung der einzelnen Modellannahmen hergeleitet.

Diese konsistenten Gleichungen wurden mit denjenigen der mittlerweile als historisch einzustufenden Schalentheorien von Love und Koiter sowie mit der Theorie flacher Schalen verglichen. Anhand numerischer Beispiele konnten die teilweise erheblichen Mängel dieser historischen Formulierungen vor allem bei der Abbildung reiner Biegung herausgestellt werden.

Durch zusätzliche innere Freiheitsgrade ermöglichen dreidimensionale Schalentheorien im Vergleich zu klassischen Theorien eine genauere Approximation des dreidimensionalen Kontinuums. Aufgrund deren Komplexität ist eine analytische Lösung praktisch ausgeschlossen, weshalb sie fast ausschließlich in Form dreidimensionaler finiter Schalenelemente auftreten. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte zunächst eine Diskussion von kinematischen Gleichungen unterschiedlicher Ordnung, wobei die vielen dreidimensionalen Schalenformulierungen zugrunde liegende 7-Parameter-Kinematik eine zentrale Rolle spielte. Außerdem wurde die Art der Dickenintegration (explizite oder implizite Dickenintegration) näher untersucht, die darüber bestimmt, in welchen statischen und kinematischen Variablen eine Schalentheorie formuliert ist (spannungs- oder schnittgrößenbasiert). Da die Integration bei dreidimensionalen finiten Schalenelementen in der Regel nicht analytisch, sondern numerisch erfolgt, wurde darüber hinaus analysiert, inwiefern die daraus resultierenden Näherungen eine Schalenformulierung beeinflussen und als Modellannahmen der Schalentheorie zu betrachten sind.

Für eine 7-Parameter-Kinematik konnten in numerischen Experimenten folgende Einflüsse der quadratischen Verzerrungsanteile, der Krümmungsbeiträge im Stoffgesetz und Shifter sowie der numerischen Integration beobachtet werden: Soll die Genauigkeit von klassischen Schalenformulierungen über die Berücksichtigung der Dickenänderung hinaus gesteigert werden, so sind primär die quadratischen Verzerrungsanteile mitzuführen. Erst danach haben Krümmungsbeiträge in den Materialgleichungen und im Shifter genauigkeitssteigernde Wirkung. Damit diese zusätzlichen Informationen in eine Schalenformulierung einfließen, müssen sie bei der numerischen Dickenintegration erfasst werden. Es zeigte sich, dass bei einer für die asymptotische Korrektheit ausreichenden 2-Punkt-Gauß-Integration der Beitrag dieser Anteile im Wesentlichen verloren geht, und dass erst ab drei und mehr Gauß-Punkten über die Dicke asymptotisch bessere Schalentheorien entstehen.

Es wurde des Weiteren ein robustes, spannungsbasiertes 3D-Volumen-Schalenelement entwickelt, implementiert und getestet, welches eine 7-Parameter-Schalentheorie diskretisiert. Die Elementtopologie entspricht dabei derjenigen eines trilinearen achtknotigen Kontinuumselements. Die Robustheit dieses Schalenelements konnte durch folgende Eigenschaften und Maßnahmen erreicht werden: Durch Vollintegration wird gewährleistet, dass numerische Instabilitäten (Hourglassing) nicht auftreten. Die in der rein verschiebungsbasierten Version des Elements enthaltenen Lockingphänomene wurden durch eine Kombination von Assumed-Natural-Strain-Ansätzen (HUGHES UND TEZ-

DUYAR (1981), BATHE UND DVORKIN (1986), BETSCH UND STEIN (1995)) und der Enhanced-Assumed-Strain-Methode (SIMO UND RIFAI (1990)) beseitigt. Die Formulierung des Elements erfolgte nicht im natürlichen Elementkoordinatensystem, sondern vergleichbar mit SZE UND YAO (2000) in einem alternativen konvektiven Koordinatensystem, dessen dritter Basisvektor stets orthogonal zu den Basisvektoren der Schalenebene ist, was den negativen Einfluss in Dickenrichtung verzerrter Elementgeometrien auf die Ergebnisqualität deutlich reduziert. Das Elementverhalten bei in der Schalenebene verzerrten Elementen konnte durch eine Stabilisierung des Querschubs nach LYL Y U. A. (1993) erheblich verbessert werden, wobei eine Erweiterung dahingehend erfolgte, dass der Stabilisierungsparameter für jedes Element adaptiv aus der jeweiligen Elementgeometrie bestimmbar ist.

Das Verhalten des entwickelten Schalenelements wurde anhand von Benchmarkbeispielen aus der Literatur sowie praxisrelevanter Problemstellungen aus dem Flugzeugbau sowohl für geometrisch lineare als auch nichtlineare Fälle untersucht und mit dem im kommerziellen Finite-Elemente-Programm ABAQUS enthaltenen Volumen-Schalenelement SC8R verglichen. Dabei konnte die Leistungsfähigkeit dieser neuen Elementformulierung unter Beweis gestellt werden.

Bis heute existieren abgesehen von aufwendigen Multigrid-Verfahren keine Vorkonditionierer zur effizienten iterativen Lösung von Gleichungssystemen, die bei der Simulation von Schalenstrukturen mit finiten Elementen auftreten. Es wurde daher untersucht, inwieweit sich zwei in SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) und AVRON U. A. (2009) vorgestellte Ansätze, deren Grundidee darin besteht, Vorkonditionierer auf der Basis von Ersatzproblemen aufzustellen, auf diesen Anwendungsfall übertragen lassen.

Beim ersten diskutierten Ansatz wird ein Ersatzproblem mittels Elimination von Elementen aus der Ausgangsdiskretisierung erzeugt. Dabei ist unter anderem sicherzustellen, dass keine kinematischen und somit singulären Systeme entstehen. Der in SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) zu diesem Zweck eingeführte Rigidity-Graph, welcher die Verbindungen im FE-Netz benachbarter Elemente charakterisiert, wurde bezogen auf die Topologie eines achtknotigen Volumenelements erläutert. Es folgten zudem Beschreibungen von Algorithmen, mit denen sich der Zusammenhang des Graphen bei der Elimination eines Elementes überprüfen lässt, sowie von Strategien zur Elementauswahl. Der zweite untersuchte Ansatz hat zum Ziel, die Steifigkeitsmatrix einer Problemstellung durch eine symmetrische, diagonaldominante Matrix zu approximieren, da für diesen Matrixtyp kombinatorische Verfahren existieren, mit denen sich ähnliche, aber deutlich billiger zu faktorisierende Matrizen erzeugen lassen. Die Approximation muss dabei nicht am Gesamtsystem erfolgen, sondern kann an den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen durchgeführt werden. Für die Steifigkeitsmatrizen des zuvor entwickelten 3D-Volumen-Schalenelements war es möglich, die Diagonaldominanz dadurch zu erreichen, dass jedes Element durch eine Summe von Stabelementen ersetzt wurde, deren Steifigkeitsmatrizen

in blockdiagonalisierter Form stets diagonaldominant sind.

Die daraus hervorgehenden Vorkonditionierer wurden in numerischen Experimenten anhand von Problemstellungen unterschiedlicher Komplexität untersucht. Mit den Vorkonditionierern basierend auf einer Modifikation der Ausgangsdiskretisierung konnte zwar das Konvergenzverhalten des iterativen Lösungsprozesses im Hinblick auf die Monotonie günstig beeinflusst werden. Der Rechenaufwand mit allen vorgestellten Vorkonditionierern war jedoch meist erheblich größer als mit gängigen Vertretern aus der Literatur. Eine merkliche Effizienzsteigerung wurde mit den untersuchten Ansätzen daher nicht erreicht.

### 9.2 Ausblick

Die Leistungsfähigkeit des in dieser Arbeit entwickelten spannungsbasierten 3D-Volumen-Schalenelements wurde bisher ausschließlich anhand statischer Problemstellungen mit linearem Materialverhalten untersucht. Die Berücksichtigung materieller Nichtlinearitäten ist ohne weiteres möglich, da in die Elementformulierung unmodifizierte dreidimensionale Stoffgesetze einfließen. Zu klären ist jedoch, ob sich dabei die Stabilisierung der Querschuboszillationen nach LYL Y U. A. (1993), bei der gezielt die Querschubverzerrungen modifiziert werden, negativ auswirkt. Eine weitere Zielsetzung beinhaltet die Untersuchung des Elementverhaltens für dynamische Anwendungen, wobei zu prüfen ist, ob die für den statischen Fall beobachtete Robustheit auch hierfür zutrifft.

Vor dem Hintergrund der Entwicklung isogeometrischer Elemente (HUGHES U. A. 2005) sollte zudem untersucht werden, inwieweit dieses Konzept auch zur Formulierung effizienter 3D-Volumen-Schalenelemente geeignet ist. Als Basis für den Entwurf solcher Elemente erscheint die in ECHTER U. A. (2013) vorgeschlagene hierarchische Schalenelementfamilie als besonders geeignet, bei der bereits rein verschiebungsbasierte Formulierungen abgesehen von Membranlocking keine weiteren Versteifungseffekte aufweisen.

Ob eine effiziente iterative Lösung der aus Schalensimulationen resultierenden linearen Gleichungssysteme mit Vorkonditionierern basierend auf Ersatzproblemen realisierbar ist, bleibt eine Fragestellung, die nur durch weitere Forschung auf diesem Gebiet geklärt werden kann. Dabei besteht aus Sicht des Autors bei beiden vorgestellten Ansätzen ein Potential für Effizienzsteigerung.

Einen Ansatzpunkt hierfür stellt die Entwicklung einer Heuristik dar, mit der sich ohne größeren numerischen Aufwand eine Verbindung zwischen den einzelnen finiten Elementen einer Diskretisierung und dem Fill-In bei der Faktorisierung der zugehörigen Steifigkeitsmatrix herstellen lässt. Auf Grundlage dieser Informationen ist es gegebenenfalls möglich, mit der Elimination sehr weniger Elemente die Zahl der Nicht-Null-Einträge in der faktorisierten Form des Ersatzproblems signifikant zu reduzieren. Wenige eliminier-

te Elemente bedeuten dabei eine hohe Ähnlichkeit mit dem Ausgangsproblem, wodurch effiziente Vorkonditionierer zu erwarten sind.

Bei der diagonaldominanten Approximation von Elementsteifigkeitsmatrizen muss der Fokus der Weiterentwicklung vor allem auf der Steigerung der Approximationsgüte liegen, um die Iterationszahl im Lösungsprozess zu reduzieren. Es ist zu untersuchen, ob das in dieser Arbeit für achtknotige Volumenelemente beschriebene Konzept dahingehend optimierbar ist und wie es gegebenenfalls auf andere Elementtypen übertragen werden kann. Auch die Entwicklung von auf rein mathematischen Überlegungen basierenden Approximationsvorschriften, die mit dem in AVRON U. A. (2009) beschriebenen Ansatz für skalarwertige elliptische Probleme vergleichbar sind, erscheint erstrebenswert.

Grundsätzlich wird für alle weiteren Forschungstätigkeiten auf diesem Gebiet eine enge Kooperation zwischen Mathematikern und Ingenieuren empfohlen, um die in beiden Disziplinen hierzu vorhandene Erkenntnisse optimal zusammenführen zu können.



---

# Literaturverzeichnis

## ABAQUS 2011

ABAQUS: *Abaqus 6.11 documentation*. Dassault Systèmes Simulia Corp., 2011

## AHMAD U. A. 1968

Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems. In: *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson A.F.B., Ohio*, 1968

## AHMAD U. A. 1970

Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), S. 419–451

## AIRBUS 2013A

AIRBUS: 2013. – URL <http://www.airbus.com/galleries/photo-gallery/dg/idp/22897-a380-800-ea-airbus-v10-300dpi/?share=1>. – [Online; Stand 27. August 2013]

## AIRBUS 2013B

AIRBUS: 2013. – URL <http://www.airbus.com/galleries/photo-gallery/dg/idp/21126-a380-fuselage/?share=1>. – [Online; Stand 27. August 2013]

## ANSYS 2007

ANSYS: *Release 11.0 Documentation for ANSYS*. ANSYS Inc., 2007

## ARGYRIS UND SCHARPF 1968

Argyris, J.; Scharpf, D.: The SHEBA family of shell elements for the matrix displa-

cement method. In: *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* 71 (1968), S. 873–883

ARGYRIS UND SYMEONIDIS 1981

Argyris, J.H.; Symeonidis, S.: Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading – Natural formulation. Part I. Quasistatic problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 26 (1981), S. 75–123

AVRON U. A. 2009

Avron, H.; Chen, D.; Shklarski, G.; Toledo, S.: Combinatorial preconditioners for scalar elliptic finite-element problems. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 31 (2009), S. 694–720

AVRON UND TOLEDO 2010

Avron, H.; Toledo, S.: Combinatorial preconditioners. In: Naumann, U.; Schenk, O. (Hrsg.): *Combinatorial Scientific Computing*. Chapman & Hall/CRC Press, 2010

AVRON UND TOLEDO 2011

Avron, H.; Toledo, S.: Effective stiffness: Generalizing effective resistance sampling to finite element matrices. In: *Computing Research Repository* (2011)

BAŞAR UND KRÄTZIG 1985

Başar, Y.; Krätzig, W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Deutschland, 1985

BARRETT U. A. 1994

Barrett, R.; Berry, M.; Chan, T.F.; Demmel, J.; Donato, J.; Dongarra, J.; Eijkhout, V.; Pozo, R.; Romine, C.; van der Vorst, H.A.: *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, 1994. – erhältlich unter [http://www.netlib.org/linalg/html\\_templates/Templates.html](http://www.netlib.org/linalg/html_templates/Templates.html)

BATHE UND DVORKIN 1986

Bathe, K.J.; Dvorkin, E.N.: A formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (1986), S. 697–722

BELYTSCHKO U. A. 2000

Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran, B.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000

BELYTSCHKO U. A. 1989

Belytschko, T.; Wong, B.L.; Stolarski, H.: Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28 (1989), S. 385–414

## BENVENUTO 1991

Benvenuto, E.: *An introduction to the history of structural mechanics, Part II: Vaulted structures and elastic systems*. Springer, New York, 1991

## BENZI 2002

Benzi, M.: Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. In: *Journal of Computational Physics* 182 (2002), S. 418–477

## BENZI U. A. 1998

Benzi, M.; Kouhia, R.; Tuma, M.: An Assessment of some preconditioning techniques in shell problems. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 14 (1998), S. 897–906

## BENZI UND TUMA 2003

Benzi, M.; Tuma, M.: A robust incomplete factorization preconditioner for positive definite matrices. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 10 (2003), S. 385–400

## BETSCH U. A. 1996

Betsch, P.; Gruttmann, F.; Stein, E.: A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 130 (1996), S. 57–79

## BETSCH UND STEIN 1995

Betsch, P.; Stein, E.: An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 11 (1995), S. 899–909

## BISCHOFF 1999

Bischoff, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1999

## BISCHOFF UND BLETZINGER 2001

Bischoff, M.; Bletzinger, K.-U.: Stabilized DSG plate and shell elements. In: Wall, W.A.; Bletzinger, K.-U.; Schweizerhof, K. (Hrsg.): *Trends in computational structural mechanics*, CIMNE, Barcelona, 2001, S. 253–263

## BISCHOFF UND BLETZINGER 2004

Bischoff, M.; Bletzinger, K.-U.: Improving stability and accuracy of Reissner-Mindlin plate finite elements via algebraic subgrid scale stabilization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 1517–1528

## BISCHOFF UND BLETZINGER 2005

Bischoff, M.; Bletzinger, K.-U.: A hierarchical family of shell theories based on mul-

tifield semi-discretization in thickness direction. In: Ramm, E.; Wall, W.A.; Bletzinger, K.-U.; Bischoff, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures*. Salzburg, Austria, 2005

BISCHOFF U. A. 2004

Bischoff, M.; Bletzinger, K.-U.; Wall, W.A.; Ramm, E.: *Chapter 3: Models and finite elements for thin-walled structures*. In: Stein, E.; de Borst, R.; Hughes, T.J.R. (Hrsg.): *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd., 2004

BISCHOFF UND RAMM 1997

Bischoff, M.; Ramm, E.: Shear deformable shell elements for large strains and rotations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), S. 4427–4449

BOMAN U. A. 2004

Boman, E.G.; Chen, D.; Hendrickson, B.; Toledo, S.: Maximum-weight-basis preconditioners. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 11 (2004), S. 695–721

BOMAN U. A. 2008

Boman, E.G.; Hendrickson, B.; Vavasis, S.: Solving elliptic finite element systems in near-linear time with support preconditioners. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (2008), S. 3264–3284

BRAUN 1995

Braun, M.: *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1995

BRAUN U. A. 1994

Braun, M.; Bischoff, M.; Ramm, E.: Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates. In: *Computational Mechanics* 15 (1994), S. 1–18

BUDIANSKY UND SANDERS 1963

Budiansky, B.; Sanders, J.L.: *On the „best“ first-order linear shell theory*. In: *Progress in Applied Mechanics, the Prager Anniversary Volume*, Macmillan, New York, 1963

BÜCHTER 1992

Büchter, N.: *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1992

## BÜCHTER UND RAMM 1992

Büchter, N.; Ramm, E.: 3D-extension on nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept. In: Hirsch, C. (Hrsg.): *Computational Mechanics in Applied Sciences*. Elsevier, 1992, S. 55–66

## CHAPELLE UND STENBERG 1996

Chapelle, D.; Stenberg, R.: Stabilized finite element formulations for shells in a bending dominated state / INRIA. 1996 (RR-2941). – Forschungsbericht

## CHEN UND TOLEDO 2003

Chen, D.; Toledo, S.: Vaidya's preconditioners: Implementation and experimental study. In: *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 16 (2003), S. 30–49

## CHRÓSCIELEWSKI U. A. 1992

Chróscielewski, J.; Makowski, J.; Stumpf, H.: Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), S. 63–94

## CIARLET 2000

Ciarlet, P.G.: *Theory of shells*. Elsevier Science, 2000 (Studies in mathematics and its applications)

## COSSERAT UND COSSERAT 1909

Cosserat, E.; Cosserat, F.: *Théorie des corps déformables*. Hermann & Cie, Paris, 1909

## DAITCH UND SPIELMAN 2007

Daitch, S.I.; Spielman, D.A.: Support-graph preconditioners for 2-dimensional trusses. In: *Computing Research Repository* (2007)

## DAVIS 2013

Davis, T.A.: *User guide for CHOLMOD: A sparse Cholesky factorization and modification package, Version 2.1.2*, 2013. – erhältlich unter <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/cholmod/CHOLMOD/Doc/UserGuide.pdf>

## DONNELL 1933

Donnell, L.H.: Stability of thin walled tubes under torsion / NACA. 1933 (Report No. 479). – Forschungsbericht

## DUDDECK 1967

Duddeck, H.: Was leistet zur Zeit die Schalentheorie. In: *Helmut-Pfannmüller-Festschrift, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau der TU Hannover, Heft 6*, 1967, S. 19–35

DUHEM 1893

Duhem, P.: Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 10 (1893), S. 183–230

EBERLEIN UND WRIGGERS 1997

Eberlein, R.; Wriggers, P.: Finite element formulations of five and six parameter shell theories accounting for finite plastic strains. In: Owen, D.R.J.; Oñate, E.; Hinton, E. (Hrsg.): *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1997, S. 1898–1903

ECHTER U. A. 2013

Echter, R.; Oesterle, B.; Bischoff, M.: A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254 (2013), S. 170–180

ERICKSEN UND TRUESDELL 1957

Ericksen, J.L.; Truesdell, C.: Exact theory of stress and strain in rods and shells. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1 (1957), S. 295–323

FIOLKA 2008

Fiolka, M.: *Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente zur Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminate*, Bericht 2/2008, Institut für Mechanik, Universität Kassel, Dissertation, 2008

FLÜGGE 1934

Flügge, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer, Berlin, 1934

GEE 2004

Gee, M.: *Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik*, Bericht Nr. 43, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2004

GEE U. A. 2005

Gee, M.; Ramm, E.; Wall, W.A.: Parallel multilevel solution of nonlinear shell structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 2513–2533

GEORGE UND LIU 1981

George, A.; Liu, J.W.: *Computer solution of large sparse positive definite systems*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1981

GOLUB UND VAN LOAN 1996

Golub, G.H.; Van Loan, C.F.: *Matrix computations*. 3. ed. Johns Hopkins University Press, 1996

GOULD U. A. 2007

Gould, N.I.M.; Scott, J.A.; Hu, Y.: A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse symmetric linear systems of equations. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 33 (2007), Nr. 2, Article 10

GREEN UND ZERNA 1968

Green, A.E.; Zerna, W.: *Theoretical elasticity*. Oxford University Press, 1968

GREMBAN 1996

Gremban, K.: *Combinatorial preconditioners for sparse, symmetric, diagonally dominant linear systems*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Dissertation, 1996

GRUTTMANN 1996

Gruttmann, F.: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*, Institut für Baustatik und numerische Mechanik, Universität Hannover, Habilitation, 1996

HACKBUSCH 1985

Hackbusch, W.: *Multi-grid methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1985

HARNACH 1974

Harnach, R.: *Systematische Darstellung der Energie- und Variationsprinzipie und Anwendung auf die Schalentheorie*. In: *Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum*, Mitteilung Nr. 74-3, April 1974

HARNAU 2004

Harnau, M.: *Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt*, Institut für Mechanik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH), Dissertation, 2004

HARTMANN 2007

Hartmann, S.: *Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen*, Bericht Nr. 49, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2007

HAUPTMANN UND SCHWEIZERHOF 1998

Hauptmann, R.; Schweizerhof, K.: A systematic development of “solid-shell“ element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), S. 49–69

HELLINGER 1914

Hellinger, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. In: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* 4/4 (1914), S. 601–694

HELNWEIN 1996

Helnwein, P.: *Zur initialen Abschätzbarkeit von Stabilitätsgrenzen auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden elastischer Strukturen mittels der Methode der Finiten Elemente*, Fakultät für Bauingenieurwesen, Technische Universität Wien, Dissertation, 1996

HESTENES UND STIEFEL 1952

Hestenes, M.R.; Stiefel, E.: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49 (1952), S. 409–436

HOFF 1955

Hoff, N.J.: The accuracy of Donnell's equations. In: *Journal of Applied Mechanics* 22 (1955), S. 329–334

HOLZAPFEL 2000

Holzapfel, G.A.: *Nonlinear solid mechanics – A continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000

HU 1955

Hu, H.-C.: On some variational principles in the theory of elasticity and plasticity. In: *Scientia Sinica* 4 (1955), S. 33–54

HUGHES U. A. 2005

Hughes, T.J.R.; Cottrell, J.A.; Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 4135–4195

HUGHES UND TEZDUYAR 1981

Hughes, T.J.R.; Tezduyar, T.E.: Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. In: *Journal of Applied Mechanics and Engineering* 48 (1981), S. 587–596

IRONS 1966

Irons, B.M.: Numerical integration applied to finite element methods. In: *Conference on Use of Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle*, 1966

JACOBS UND HENDRICKSON 1997

Jacobs, D.; Hendrickson, B.: An algorithm for two dimensional rigidity percolation: The pebble game. In: *Journal of Computational Physics* 137 (1997), S. 346–365

KARYPIS UND KUMAR 1998A

Karypis, G.; Kumar, V.: Multilevel k-way partitioning scheme for irregular graphs. In: *Journal of Parallel and Distributed Computing* 48 (1998), S. 96–129

## KARYPIS UND KUMAR 1998B

Karypis, G.; Kumar, V.: A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering. In: *Journal of Parallel and Distributed Computing* 48 (1998), S. 71–95

## KIRCHHOFF 1850

Kirchhoff, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für reine angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51–58

## KLINKEL 2000

Klinkel, S.: *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*, Bericht 7/2000, Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH), Dissertation, 2000

## KLÖPPEL U. A. 2011

Klöppel, T.; Gee, M.W.; Wall, W.A.: A scaled thickness conditioning for solid- and solid-shell discretizations of thin-walled structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 1301–1310

## KOITER 1960

Koiter, W.T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. In: Koiter, W.T. (Hrsg.): *The theory of thin elastic shells*, North-Holland, Amsterdam, 1960, S. 12–33

## KOSCHNICK 2004

Koschnick, F.: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, Dissertation, 2004

## KOUTIS U. A. 2010

Koutis, I.; Miller, G.L.; Peng, R.: Approaching optimality for solving SDD systems. In: *Computing Research Repository* (2010)

## KOUTIS U. A. 2012

Koutis, I.; Miller, G.L.; Peng, R.: A fast solver for a class of linear systems. In: *Communications of the ACM* 55 (2012), S. 99–107

## KRUMKE 2012

Krumke, S.O.; Noltemeier, H. (Hrsg.): *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*. 3. Auflage. 2012. Vieweg+Teubner Verlag, 2012

## KRÄTZIG 1973

Krätzig, W.B.: *Eine bestmögliche erste Approximation in der linearen Theorie elastischer Schalen*. In: *Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für kon-*

*struktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum*, Mitteilung Nr. 73-1, März 1973

KRÄTZIG 2003

Krätzig, W.B.: On classical shell theories, degenerated and solid shell concepts and layered models: Comparison and overview. In: Bathe, K.J. (Hrsg.): *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*. Elsevier Science Ltd., 2003, S. 407–410

KRÄTZIG UND JUN 2002

Krätzig, W.B.; Jun, D.: Multi-layer multi-director concepts for D-adaptivity in shell theory. In: *Computers & Structures* 80 (2002), S. 719–734

KRÄTZIG UND JUN 2003

Krätzig, W.B.; Jun, D.: On “best“ shell models – From classical shells, degenerated and multi-layered concepts to 3D. In: *Archive of Applied Mechanics* 73 (2003), S. 1–25

LOVE 1888

Love, A.E.H.: On the small vibrations and deformations of thin elastic shells. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* 179 (1888), S. 491 ff.

LYLY U. A. 1993

Lyly, M.; Stenberg, R.; Vihinen, T.: A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110 (1993), S. 343–357

MACNEAL 1978

Macneal, R.H.: A simple quadrilateral shell element. In: *Computers & Structures* 8 (1978), S. 175–183

MACNEAL 1987

Macneal, R.H.: A theorem regarding the locking of tapered four-noded membrane elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), S. 1793–1799

MACNEAL 1992

Macneal, R.H.: On the limits of finite element perfectability. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), S. 1589–1601

MACNEAL 1994

Macneal, R.H.: *Finite elements: Their design and performance*. Dekker, New York, 1994

## MACNEAL UND HARDER 1985

Macneal, R.H.; Harder, R.L.: A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 1 (1985), S. 3–20

## MALVERN 1969

Malvern, L.E.: *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969

## MANTEUFFEL 1980

Manteuffel, T.A.: An incomplete factorization technique for positive definite linear systems. In: *Mathematics of Computation* 34 (1980), S. 473–497

## MARGUERRE 1938

Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderungen. In: *Proc. 5. International Congress of Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938*, S. 93–101

## MARSDEN UND HUGHES 1983

Marsden, J.E.; Hughes, T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983

## MATLAB 2012

MATLAB: *Version 7.14.0 (R2012a)*. The MathWorks Inc., 2012

## MEIJERINK UND VAN DER VORST 1977

Meijerink, J.A.; van der Vorst, H.A.: An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric  $M$ -matrix. In: *Mathematics of Computation* 31 (1977), S. 148–162

## MEISTER 2008

Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. 3. überarb. Aufl. Vieweg, 2008

## MOK U. A. 1999

Mok, D.P.; Wall, W.A.; Bischoff, M.; Ramm, E.: Algorithmic aspects of deformation dependent loads in non-linear static finite element analysis. In: *Engineering Computations* 16 (1999), S. 601–618

## NAGHDI 1963A

Naghdi, P.M.: *Foundations of elastic shell theory*. In: *Progress in Solid Mechanics, Volume 4*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963

## NAGHDI 1963B

Naghdi, P.M.: A new derivation of the general equations of elastic shells. In: *International Journal of Engineering Science* 1 (1963), S. 509–522

NAGHDI 1964

Naghdi, P.M.: Further results in the derivation of the general equations of elastic shells. In: *International Journal of Engineering Science* 2 (1964), S. 269–273

NAGHDI 1972

Naghdi, P.M.: *The theory of shells and plates*. In: Flügge, S. (Hrsg.): *Handbuch der Physik, Band VI, A2*, Springer-Verlag, 1972

ODEN UND REDDY 1976

Oden, J.T.; Reddy, J.N.: *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer, Berlin, 1976

PARISCH 1991

Parisch, H.: An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991), S. 127–150

PARISCH 1995

Parisch, H.: A continuum-based shell theory for non-linear applications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), S. 1855–1883

PAUMIER UND RAOULT 1997

Paumier, J.C.; Raoult, A.: Asymptotic consistency of the polynomial approximation in the linearized plate theory. In: *ESAIM: Proc.* 2 (1997), S. 203–213

QUARTERONI U. A. 2000

Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F.: *Numerical mathematics*. Springer, New York, 2000

QUY UND MATZENMILLER 2008

Quy, N.D.; Matzenmiller, A.: A solid-shell element with enhanced assumed strains for higher order shear deformations in laminates. In: *Technische Mechanik* 28 (2008), S. 334–355

RAMM 1976

Ramm, E.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*, Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Habilitationsschrift, 1976

RAMM U. A. 1994

Ramm, E.; Braun, M.; Bischoff, M.: *Higher order nonlinear shell formulation – A step back into three dimensions*. S. 65–88. In: Bell, K. (Hrsg.): *From finite elements to the troll platform: Ivar Holand 70th anniversary*, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, 1994

## REISSNER 1942

Reissner, E.: Note on the expressions for the strains in a bent, thin shell. In: *American Journal of Mathematics* 64 (1942), S. 768–772

## REISSNER 1947

Reissner, E.: Stresses and small displacements of shallow spherical shells, I and II. In: *Journal of Mathematics and Physics* 25 (1947), S. 80–85 bzw. 279–300

## REISSNER 1950

Reissner, E.: On a variational theorem in elasticity. In: *Journal of Mathematics and Physics* 29 (1950), S. 90–96

## ROACHE 2002

Roache, P.J.: Code verification by the Method of Manufactured Solutions. In: *Journal of Fluids Engineering* 124 (2002), S. 4–10

## RÖSSLE U. A. 1999

Rössle, A.; Bischoff, M.; Wendland, W.; Ramm, E.: On the mathematical foundation of the (1,1,2)-plate model. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), S. 2143–2168

## SAAD 2000

Saad, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*. 2. ed. 2000

## SAAD UND SCHULTZ 1986

Saad, Y.; Schultz, M.H.: GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 7 (1986), S. 856–869

## SANDERS 1959

Sanders, J.L.: An improved first approximation theory for thin shells / National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC. 1959 (Report No. 24). – Forschungsbericht

## SANSOUR 1995

Sansour, C.: A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of a rotation tensor. In: *Archive of Applied Mechanics* 65 (1995), S. 194–216

## SCHOOP 1986

Schoop, H.: Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. In: *Ingenieur-Archiv* 56 (1986), S. 427–437

SCHWARZ 2009

Schwarz, H.R.; Köckler, N. (Hrsg.): *Numerische Mathematik*. 7. überarbeitete Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009

SCHWARZE UND REESE 2011

Schwarze, M.; Reese, S.: A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept – Large deformation problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 85 (2011), S. 289–329

SCHWEIZERHOF UND RAMM 1984

Schweizerhof, K.; Ramm, E.: Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. In: *Computers & Structures* 18 (1984), S. 1099–1114

SHKLARSKI UND TOLEDO 2008

Shklarski, G.; Toledo, S.: Rigidity in finite-element matrices: Sufficient conditions for the rigidity of structures and substructures. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 30 (2008), S. 7–40

SIMO UND ARMERO 1992

Simo, J.C.; Armero, F.: Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), S. 1413–1449

SIMO UND FOX 1989

Simo, J.C.; Fox, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 72 (1989), S. 267–304

SIMO UND RIFAI 1990

Simo, J.C.; Rifai, M.S.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (1990), S. 1595–1638

STANDER U. A. 1989

Stander, N.; Matzenmiller, A.; Ramm, E.: An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. In: *Engineering Computations* 6 (1989), S. 58–66

STOLARSKI UND BELYTSCHKO 1982

Stolarski, H.; Belytschko, T.: Membrane locking and reduced integration for curved elements. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), S. 172–176

STOLARSKI UND BELYTSCHKO 1983

Stolarski, H.; Belytschko, T.: Shear and membrane locking in curved  $C^0$  elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 41 (1983), S. 279–296

## SZABÓ 1979

Szabó, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Birkhäuser, 1979

## SZE U. A. 2004

Sze, K.Y.; Liu, X.H.; Lo, S.H.: Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004), S. 1551–1569

## SZE UND YAO 2000

Sze, K.Y.; Yao, L.Q.: A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I – Solid-shell element formulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 545–564

## TOLEDO 2003

Toledo, S.: *TAUCS: A library of sparse linear solvers, Version 2.2*. School of Computer Science, Tel-Aviv University, 2003. – erhältlich unter <http://www.tau.ac.il/~stoledo/taucs>

## TUMINARO U. A. 1999

Tuminaro, R.S.; Heroux, M.; Hutchinson, S.A.; Shadid, J.N.: *Official Aztec User's Guide, Version 2.1*. Sandia National Laboratories, Albuquerque, USA, 1999

## VAN DER VORST 2003

van der Vorst, H.A.: *Iterative Krylov methods for large linear systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003

## VU-QUOC UND TAN 2003

Vu-Quoc, L.; Tan, X.G.: Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 975–1016

## WASHIZU 1955

Washizu, K.: On the variational principles of elasticity and plasticity / Massachusetts Institute of Technology. 1955 (Technical Report 25–18). – Forschungsbericht

## WIKIPEDIA 2012

Wikipedia: *Gaussian quadrature* – *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2012. – URL [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian\\_quadrature&oldid=524657162](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_quadrature&oldid=524657162). – [Online; Stand 25. Januar 2013]

## WIKIPEDIA 2013

Wikipedia: *NP (Komplexitätsklasse)* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*.

2013. – URL [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=NP\\_\(Komplexit%C3%A4tsklasse\)&oldid=118562811](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=NP_(Komplexit%C3%A4tsklasse)&oldid=118562811). – [Online; Stand 31. Mai 2013]

WILKING 2011

Wilking, C.M.: *Benchmark von Finiten Elementen für die Berechnung von dünnwandigen Strukturen*, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2011

WLASSOW 1951

Wlassow, W.S.: Basic differential equations in the general theory of elastic shells / NACA. 1951 (TM 1241). – Forschungsbericht. Übersetzung des russ. Originalbeitrags aus *Prikladnaia Matematika I Mekhanika* 8 1944

WUNDERLICH 1973

Wunderlich, W.: *Vergleich verschiedener Approximationen der Theorie dünner Schalen*. In: *Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum*, Mitteilung Nr. 73-1, März 1973

YANNAKAKIS 1981

Yannakakis, M.: Computing the minimum fill-in is NP-complete. In: *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 2 (1981), S. 77–79

ZIENKIEWICZ U. A. 1971

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3 (1971), S. 275–290

ZIENKIEWICZ U. A. 2005

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.: *The finite element method: Its basis and fundamentals*. 6. ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Johannes Konrad Irslinger  
Geburtsdatum: 30. Juli 1983  
Geburtsort: Villingen  
Eltern: Günter und Helma Irslinger, geb. Hogg  
Familienstand: Ledig

### Schulische Ausbildung

1989 - 1993 Besuch der Südstadt-Grundschule, Villingen  
1993 - 2002 Besuch des Gymnasiums am Romäusring, Villingen  
Juni 2002 Abitur

### Zivildienst

2002 - 2003 Katholische Pfarrgemeinde St. Fidelis, Villingen

### Universitäre Ausbildung

2003 - 2008 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart  
2006 - 2007 Stipendiat im Rahmen des integrierten Auslandsstudiums des DAAD an der University of Calgary, Kanada  
Juli 2008 Diplomprüfung  
2008 - 2013 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart



---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K.M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R.L.M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haüßer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) **W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) **A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik.
- 34 (2001) **S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) **A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) **D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) **H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) **K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) **M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) **V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) **R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.

- 42 (2004) **G.A. D’Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

- 53 (2010) J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.
- 54 (2010) C.F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B.J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**  
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**  
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**  
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.





**Johannes Irslinger**

In der vorliegenden Arbeit erfolgt zunächst eine Diskussion der mechanischen Grundlagen von Schalentheorien mit der primären Zielsetzung, eine Verbindung zwischen den Annahmen bei der Formulierung dreidimensionaler finiter Schalenelemente und den ihnen zugrunde liegenden Schalentheorien herzustellen. Die Einflüsse unterschiedlicher Annahmen auf die Ergebnisqualität werden dabei mit Hilfe der Method of Manufactured Solutions (siehe beispielsweise ROACHE (2002)) untersucht.

Einen zentralen Punkt dieser Arbeit stellt die Entwicklung und implementierungsnahe Dokumentation eines robusten, dreidimensionalen Volumen-Schalenelements dar. Die Robustheit des Elements wird durch Vollintegration in Kombination mit ANS-Ansätzen (BATHE UND DVORKIN (1986), BETSCH UND STEIN (1995)) und der EAS-Methode (SIMO UND RIFAI 1990), durch Formulierung in einem alternativen konvektiven Koordinatensystem vergleichbar mit SZE UND YAO (2000) sowie durch eine adaptive Querschubstabilisierung basierend auf LYL U.A. (1993) erreicht.

Die Lösung der schlecht konditionierten Gleichungssysteme von Schalensimulationen mit iterativen Verfahren stellt einen weiteren Schwerpunkt dar. Es wird untersucht, inwieweit sich die in SHKLARSKI UND TOLEDO (2008) und AVRON U.A. (2009) vorgeschlagenen Ansätze zum Aufstellen von Vorkonditionierern auf die Finite-Elemente-Simulationen von Schalenstrukturen übertragen lassen. Dabei werden Ersatzprobleme aufgestellt, welche für die Vorkonditionierung vollständig zu faktorisieren sind. Diese Vorgehensweise steht im Gegensatz zu einer unvollständigen Faktorisierung des Ausgangsproblems, auf der viele bekannte Vorkonditionierer basieren.