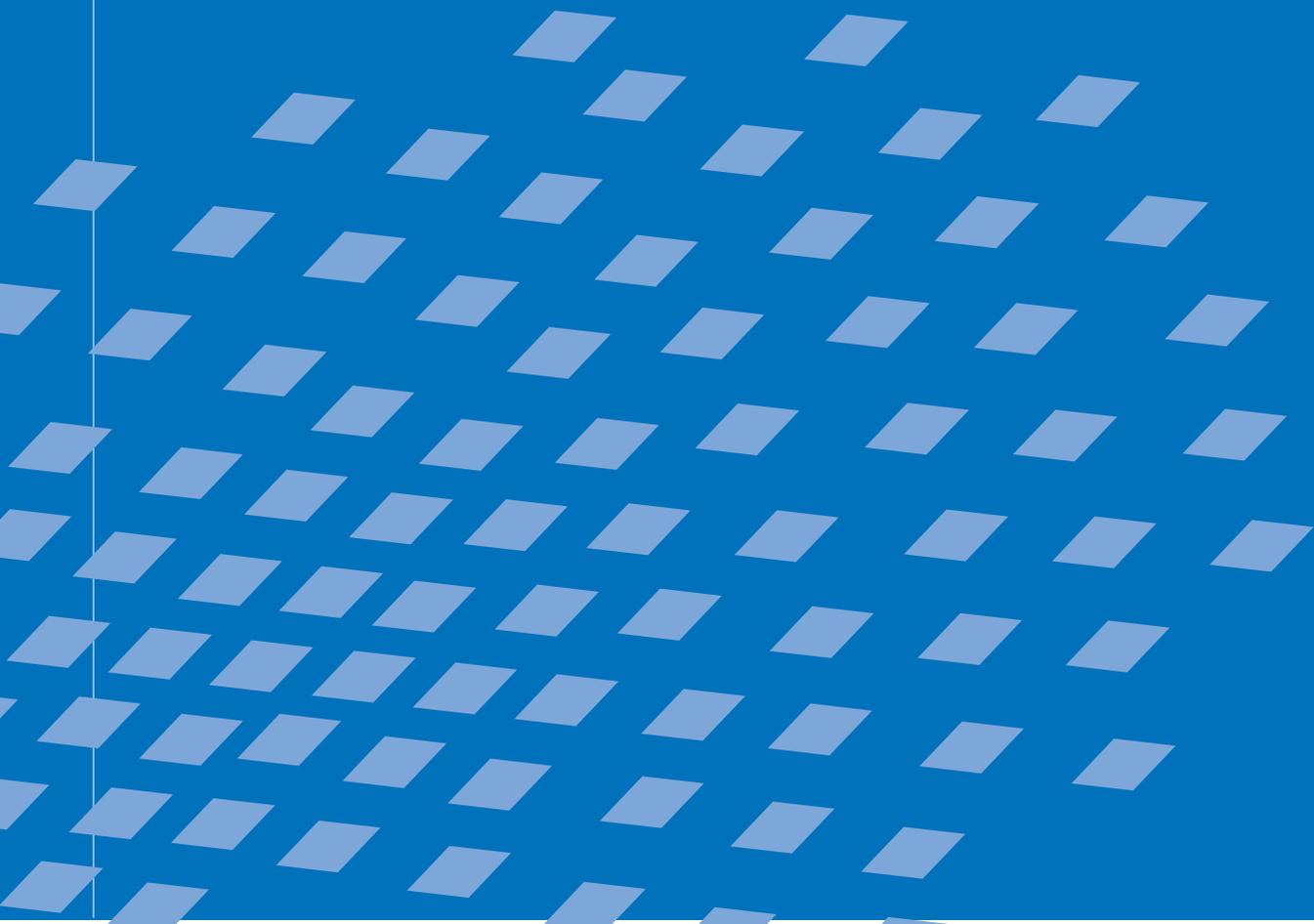




# **Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien**

Michael Leukart





**Kombinierte anisotrope  
Schädigung und Plastizität  
bei kohäsiven Reibungsmaterialien**

von

**Michael Leukart**

Bericht Nr. 45 (2005)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. E. Ramm  
Stuttgart 2005



© 2005 Michael Leukart

*Berichte können bezogen werden über:*

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: ++49(0)711/685 6123

Fax.: ++49(0)711/685 6130

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart

ISBN 3-00-015801-4

# **Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Michael Leukart**

aus Tübingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. dr.ir. René de Borst

Mitberichter: Dr.-Ing. habil. Josko Ožbolt

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 2005

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2005



# Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Modellierung des Versagens kohäsiver Reibungsmaterialien. Zu den natürlichen Vertretern dieser Materialklasse gehören Kalkstein, Marmor, Fels oder Lehm, während es sich bei Beton oder Keramik um industriell hergestellte Vertreter handelt. Das Materialverhalten und die Materialeigenschaften kohäsiver Reibungsmaterialien werden durch ein unterschiedliches Zug-Druckverhalten, durch eine versagensinduzierte Anisotropie, durch Effekte der Mikrorissbildung und durch ein komplexes Zusammenwirken einer anisotropen Degradation der Festigkeitseigenschaften mit richtungsabhängigen irreversiblen Dehnungen geprägt. Entsprechend induzieren die auftretenden stark lokalisierten Versagensformen eine hochgradig nichtlineare und anisotrope Materialantwort.

Das Verhalten kohäsiver Reibungsmaterialien wird im Rahmen der Kontinuumsmechanik durch eine Kombination von Schädigungsmechanik und Plastizitätstheorie abgebildet. Das Microplane Konzept, das bereits vielseitig zur Modellierung quasi-spröder Materialien verwendet wird, stellt den Rahmen dieser Arbeit dar. Dieses Konzept stellt dabei einen Kompromiss zwischen einer detaillierten mikromechanischen Abbildung und einer strukturorientierten makroskopischen Betrachtungsweise dar. Sein wesentliches Merkmal ist die Wiedergabe des Materialverhaltens durch einfache Konstitutivgesetze auf jeder einzelnen Mikroebene. Der anschließende Homogenisierungsprozess bewirkt ein komplexes Zusammenwirken aller Ebenen. Im Vordergrund dieser Arbeit steht hierbei weniger die experimentelle Validierung des Microplane Modells, die gebietsweise bereits als abgesichert angesehen werden kann. Vielmehr wird ein Abgleich der Microplane Stoffgesetze mit bekannten makroskopisch orientierten konstitutiven Gesetzen durchgeführt. Dadurch können aus den zusätzlichen Informationen des Microplane Modells weiterführende Aussagen über klassische Versagensphänomene, wie beispielsweise die versagensinduzierte Anisotropie, getroffen werden. Zunächst werden dazu Materialmodelle der reinen Microplane Schädigung sowie der reinen Microplane Plastizität formuliert und im Rahmen der Finiten Element Methode numerisch umgesetzt. Als letzte Stufe werden Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierungen miteinander kombiniert. Darauf aufbauend werden insbesondere die Beziehungen zwischen der Meso- und Makroebene analysiert, um formelmäßige Zusammenhänge zwischen anerkannten makroskopischen Formulierungen und den entsprechenden Microplane Modellen angeben zu können. Am Ende dieser Entwicklung steht ein mechanisch fundiertes Microplane Modell mit einem Satz anschaulich interpretierbaren Materialparametern.

Das Microplane Modell als Kontinuumsmodell benötigt eine Erweiterung für den postkritischen Zustand. Im Rahmen dieser Arbeit wird als Regularisierungsstrategie eine Gradientenerweiterung der Microplane Formulierung verwendet, da dies sowohl für Reibungsversagen als auch für spröde Materialeffekte, wie die Wechselwirkung der Mikrorissbildung, geeignet ist. Die Einführung einer so genannten charakteristischen Länge kontrolliert die Breite der numerisch auflösbaren Versagenszone und stellt einen Bezug zur Größe und zum Abstand der Materialinhomogenitäten her. Dies gewährleistet eindeutige und netzunabhängige Lösungen bei finiter Energiedissipation.

Die in dieser Arbeit entwickelten anisotropen Microplane Modelle sind in der Lage komplexe Versagensvorgänge heterogener Materialien, wie von Beton unterschiedlicher Festigkeitsklassen, abzubilden. Zudem liefern sie im Gegensatz zu klassischen makroskopischen Modellen zusätzliche Information über die auftretenden Versagensformen.

# Abstract

The present thesis is concerned with the modeling of different failure mechanisms of cohesive frictional materials. Naturally given examples are limestone, marble, rock or clay whereas concrete or ceramics belong to the class of industrial manufactured materials. The material behavior and the material properties of cohesive frictional materials are characterized by a different tensile and compressive strength, by a failure induced anisotropy, by microcrack closure effects and by a complex interaction between an anisotropic degradation of the material properties and anisotropic irreversible strains. The presence of localized failure mechanisms induces a highly nonlinear and anisotropic material response.

In the context of continuum mechanics the behavior of cohesive frictional materials is described by a combination of continuum damage mechanics and plasticity theory. The microplane concept, which became well-known for the modeling of quasi-brittle materials, marks the framework of the present work. This concept makes a compromise between a detailed micromechanical description and a structural-oriented macroscopic approach. The main characteristic of microplane modeling is the description of complex material behavior by simple constitutive laws on every microplane. The subsequent homogenization process causes a complex interaction of all microplanes. The main focus of this work is less the experimental validation of microplane models, which in the main can be considered as assured. In fact an adjustment of the microplane constitutive laws from well-known macroscopic models will be presented. Thereby, the additional information from the microplane formulations provide an advanced improvement of the classical failure mechanisms, e. g. failure induced anisotropy. Initially different simple microplane material models (pure damage as well as pure plasticity models) will be developed and implemented by means of the finite element method. In a final step a combination of microplane damage formulations with microplane plasticity models will be shown. Based on the progresses in microplane constitutive modeling the relations between the meso- and macroscale will be analyzed. Thus functional interrelations between well-known macroscopic formulations and the corresponding microplane models will be indicated. In the end this process results in mechanical sound microplane formulations based on a set of material parameters with a clear physical meaning.

The microplane model as a continuum formulation requires an enhancement for the post-critical regime. Within the scope of the present work a gradient enhancement of the microplane formulation is applied as localization limiter. This regularization strategy is suitable for both friction failure and brittle material effects such as microcrack interaction. The incorporation of a so-called characteristic length scale controls the width of numerical resolvable failure zones. This length scale establishes a relationship between the size and the distance of the material inhomogeneities. Furthermore this method ensures unique and mesh independent results with finite energy dissipation.

The derived anisotropic microplane models capture the complex failure characteristics of heterogeneous materials, like concrete with different material strength. In contrast to classical macroscopic formulations these models provide advanced information on the apparent failure mechanisms.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik im Rahmen des DFG Forschungsvorhabens Ra 218/18 „Mikro–Makro Übergänge für kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität“ in der Zeit vom Februar 2000 bis Januar 2005. In diesem Kontext sei der DFG für die finanzielle Unterstützung gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm gilt mein besonderer Dank für die Übernahme des Hauptberichts und für die Grundsteinlegung dieser Arbeit. Sein stetiges Interesse, sein Fachwissen und seine ermutigenden Ratschläge sowie das optimale wissenschaftliche Umfeld am Institut hatten einen wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Promotion. Dabei hat er mir den nötigen Freiraum zur Gestaltung meiner Forschungsarbeit und zur Entwicklung meiner Persönlichkeit eingeräumt. Schon seine Vorlesungen im Rahmen meines Studiums haben das für diese Arbeit nötige Interesse für den Bereich „Computational Mechanics“ in mir geweckt.

Zu großem Dank bin auch den Herren Prof. dr.ir. René de Borst und Dr.-Ing. habil. Josko Ožbolt für die Übernahme der Mitberichte und deren aufrichtiges Interesse an meiner Arbeit verpflichtet. Ihre bereitwillige und unkomplizierte Übernahme der Mitberichte und letztendlich die zügige Durchsicht meiner Arbeit haben zur Beschleunigung des Verfahrens beigetragen. Für die wissenschaftlichen Diskussionen und die zahlreichen Hinweise bin ich meinen beiden Mitberichtern sehr dankbar. Des Weiteren waren die wissenschaftlichen Diskussionen mit Herrn Prof. Dr.-Ing. Kaspar Willam während seines Forschungsaufenthalts am Institut für Baustatik äußerst lehrreich.

Bei meinen Kolleginnen und Kollegen darf ich mich für das kollegiale und angenehme Arbeitsklima am Institut bedanken. Deren Hilfsbereitschaft, Freundlichkeit, Anregungen und die damit verbundenen Arbeitsbedingungen werde ich sicherlich vermissen. Die zahlreichen fachlichen Diskussionen mit den Kollegen haben zudem meinen Wissenshorizont stetig erweitert. Die nicht immer ganz so wissenschaftlichen Gespräche, vor allem beim Mittagessen, haben letztendlich auch zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ein besonderer Dank gilt meinem langjährigen Zimmergenossen Gian Antonio D'Addetta, der mittlerweile zu einem echten Freund geworden ist, für die fachlichen und vor allem nicht fachlichen Gespräche. Darüber hinaus danke ich Gian Antonio D'Addetta, Ellen Kuhl und meiner Freundin Nicole für die sorgfältige Durchsicht meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt an dieser Stelle meiner Familie, allen voran meiner lieben Freundin Nicole, für die tatkräftige Unterstützung während meiner Promotionszeit. Deren liebevolles und motivierendes Verständnis boten mir nicht nur in schwierigen Zeiten meiner Promotion den bedingungslosen Rückhalt, der letztendlich zur erfolgreichen Vollendung dieser Arbeit geführt hat. Bedanken möchte ich mich auch bei meiner „Ahne“ für die zahlreichen Gespräche auf ihrer Bank im Garten über Gott und die Welt.

Stuttgart, im Februar 2005

Michael Leukart



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Problembeschreibung und Ziel der Arbeit . . . . .	3
1.3 Gliederung . . . . .	4
<b>2 Kontinuumsmechanik und Finite Element Methode</b>	<b>7</b>
2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	7
2.1.1 Allgemeines . . . . .	7
2.1.2 Bilanzsätze . . . . .	8
2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik . . . . .	9
2.2 Finite Element Methode . . . . .	9
2.2.1 Schwache Formulierung des Randwertproblems . . . . .	10
2.2.2 Diskretisierung . . . . .	10
2.2.3 Linearisierung . . . . .	11
<b>3 Klassische makroskopische Materialtheorien</b>	<b>13</b>
3.1 Allgemeines . . . . .	13
3.2 Elastizitätstheorie . . . . .	15
3.3 Kontinuumsschädigungsmechanik . . . . .	16
3.3.1 Isotrope Schädigung . . . . .	17
3.3.2 Anisotrope Schädigung . . . . .	20
3.4 Plastizitätstheorie . . . . .	21
3.5 Kopplung von Schädigung und Plastizität . . . . .	23
<b>4 Microplane Theorie</b>	<b>29</b>
4.1 Einführung . . . . .	29
4.2 Microplane Kinematik . . . . .	34

4.2.1	N–T Split . . . . .	34
4.2.2	V–D–T Split . . . . .	35
4.2.3	V–D Split . . . . .	36
4.2.4	Zusammenhänge zwischen den einzelnen Splits . . . . .	38
4.3	Thermodynamisch konsistentes Konzept für Microplane Modelle . . . . .	39
4.4	Diskretisierung der Raumrichtungen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Materialformulierungen im Rahmen der Microplane Theorie</b>	<b>45</b>
5.1	Microplane Elastizität . . . . .	45
5.1.1	Isotrope Elastizität . . . . .	45
5.1.2	Anisotrope Elastizität . . . . .	54
5.2	Microplane Schädigung . . . . .	55
5.2.1	Degradationsmodelle auf der Mikroebene . . . . .	56
5.2.2	2–Parameter Schädigungsmodell . . . . .	59
5.2.3	1–Parameter Schädigungsmodell . . . . .	65
5.2.4	Einfluss der Verzerrungskomponenten . . . . .	70
5.3	Microplane Plastizität . . . . .	72
5.4	Kopplung von Microplane Schädigung und Plastizität . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Regularisierungsstrategien im Rahmen der Microplane Theorie</b>	<b>85</b>
6.1	Lokalisierung . . . . .	85
6.2	Regularisierungsstrategien . . . . .	87
6.2.1	Ratenabhängige Microplane Theorie . . . . .	87
6.2.2	Mikropolare Microplane Theorie . . . . .	88
6.2.3	Nichtlokale Microplane Theorie . . . . .	89
6.3	Gradientenerweiterte Microplane Theorie . . . . .	90
6.3.1	Finite Element Formulierung . . . . .	91
6.3.2	Microplane Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität . . . . .	95
6.3.3	Numerische Beispiele . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Mikro–Makro Übergänge</b>	<b>103</b>
7.1	Elastizität . . . . .	104
7.1.1	Isotrope Elastizität . . . . .	104
7.1.2	Transversal–isotrope Elastizität . . . . .	104
7.2	Schädigung . . . . .	109
7.2.1	2–Parameter Schädigungsmodell . . . . .	109

---

7.2.2	1-Parameter Schädigungsmodell . . . . .	114
7.3	Plastizität . . . . .	119
7.3.1	Makroskopische Plastizität . . . . .	119
7.3.2	Microplane Plastizität . . . . .	120
7.3.3	Numerische Beispiele . . . . .	121
7.4	Kopplung von Schädigung und Plastizität . . . . .	124
7.4.1	Numerische Beispiele . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>129</b>
8.1	Gradientenerweiterte Microplane Schädigung . . . . .	129
8.1.1	Direkter Zugversuch . . . . .	130
8.1.2	Dreipunktbiegebalken . . . . .	133
8.1.3	L-förmige Scheibe . . . . .	136
8.1.4	Single-Edge-Notched Beam (SEN) . . . . .	141
8.2	Gradientenerweiterte Microplane Schädigung gekoppelt mit Plastizität . . .	147
8.2.1	Gekerbter Biegebalken . . . . .	148
8.2.2	Direkter Zugversuch . . . . .	153
8.3	Zusammenfassung der Beispiele . . . . .	155
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>157</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	157
9.2	Ausblick . . . . .	160
<b>A</b>	<b>Notation &amp; Tensorrechnung</b>	<b>161</b>
<b>B</b>	<b>Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsflächen</b>	<b>165</b>
<b>C</b>	<b>Diskretisierung der Raumwinkel und numerische Integration</b>	<b>169</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>173</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

---

*“Eine Theorie existiert nur in ihrer Vorstellung und besitzt keine andere Wirklichkeit (was auch immer das bedeuten mag). Gut ist eine Theorie, wenn sie zwei Voraussetzungen erfüllt: Sie muß eine große Klasse von Beobachtungen auf der Grundlage eines Modells beschreiben, das nur wenige beliebige Elemente enthält, und sie muß bestimmte Voraussagen über Ergebnisse künftiger Beobachtungen ermöglichen. [...] Jede physikalische Theorie ist insofern vorläufig, als sie nur eine Hypothese darstellt: Man kann sie nie beweisen. Wie häufig auch immer die Ergebnisse von Experimenten mit einer Theorie übereinstimmen, man kann sich nie sicher sein, daß das Ergebnis nicht beim nächstenmal der Theorie widersprechen wird. Dagegen ist eine Theorie widerlegt, wenn man nur eine einzige Beobachtung findet, die nicht mit den aus ihr abgeleiteten Voraussagen übereinstimmt.”*

Stephen Hawking [100]

---

### 1.1 Motivation

Die realitätsgetreue Abbildung naturwissenschaftlicher Phänomene im Rahmen der numerischen Mechanik stellt bis zum heutigen Tag eine Herausforderung für die Forschung dar. Der technische Entwurf und die Herstellung bzw. Produktion in allen Bereichen der Ingenieurwissenschaften erfordert neben den verschiedenen Anforderungen an Funktionalität, Effizienz oder Design vor allem die Einhaltung gewisser Sicherheitskriterien. Beispielsweise steht bei der Beurteilung der Sicherheit von Gebäuden die Vorhersage der Tragfähigkeit und darüber hinaus die Kenntnis der Gefahr eines plötzlichen Versagens einzelner Tragelemente bzw. der gesamten Struktur im Vordergrund. Traglastuntersuchungen an Strukturen mit Hilfe der Finite Element Methode sind heutzutage weit verbreitet und ermöglichen die numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens bis zum Eintritt des Versagens. Hierbei spielt die mathematische Formulierung des Materialverhaltens eine entscheidende Rolle. Um Vorhersagen über die Traglast und die Resttragfähigkeit im Nachbruchbereich treffen zu können, ist eine konsequente Verbindung von Materialwissenschaft und theoretischer Beschreibung im Rahmen der Kontinuumsmechanik sowie der numerischen Mechanik unumgänglich. Dieses interdisziplinäre Zusammenspiel führt einerseits zu einer besseren Ausnutzung der Tragfähigkeit des Materials bzw. der gesamten Struktur. Andererseits trägt es entscheidend zur Entwicklung neuer, leistungsfähiger

Materialien, wie beispielsweise Faserverbundwerkstoffe, bei. Eine Steigerung der Effizienz macht sich hauptsächlich in einer Materialersparnis und somit in einem schonenden Umgang mit den Ressourcen bemerkbar. Des Weiteren wird dadurch die Konzeption von neuen, innovativen und wirtschaftlichen Formgebungen ermöglicht.

Eine besondere Herausforderung für die Forschung stellt die Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien dar. Diese gehören zur Materialklasse der Geomaterialien und sind nicht nur in der Natur, sondern auch in vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften weit verbreitet. Während Kalkstein, Marmor, Fels oder Lehm als natürliche Vertreter zu nennen sind, handelt es sich bei Beton oder Keramik um industriell hergestellte kohäsive Reibungsmaterialien. Im Gegensatz zu Metallen wird das Materialverhalten kohäsiver Reibungsmaterialien entscheidend durch die unterschiedlichen Zug- und Druckfestigkeiten gekennzeichnet. Dieser Unterschied ist auf den mikrostrukturellen Aufbau kohäsiver Reibungsmaterialien zurückzuführen. Beispielsweise besteht Beton aus einem Konglomerat von Zementstein und Zuschlagstoffen. Da bei Normalbeton die Zuschläge im Allgemeinen eine höhere Festigkeit als die umgebende Zementmatrix aufweisen, beeinflusst vor allem der Aufbau des Zementsteins sowie die Kontaktzone zwischen Zementmatrix und Zuschlägen die Material- und Versagenscharakteristiken. Dadurch weisen kohäsive Reibungsmaterialien eine inhomogene Mikrostruktur auf, während sie mittels einer makroskopischen Betrachtungsweise als nahezu homogen angenommen werden können. Dementsprechend werden kohäsive Reibungsmaterialien auch als Mehrskalen-Materialien bezeichnet. Aufgrund der komplexen Mikrostruktur des Materials und der unterschiedlichen Materialcharakteristiken ist das komplexe Verhalten dieser Materialklasse bis zum heutigen Tag nicht in allen Einzelheiten erforscht. Es bleibt anzumerken, dass auch metallische Werkstoffe eine inhomogene Mikrostruktur aufweisen. Diese Heterogenität ist im Unterschied zu kohäsiven Reibungsmaterialien auf sehr viel feineren Längenskalen zu beobachten.

Die Vorhersage des Versagens infolge der Zerrüttung (Deterioration) der Materialien ist dabei sowohl für Materialwissenschaftler als auch für zahlreiche praktische Anwendungen im Bereich der Ingenieurwissenschaften von großem Interesse. Die Ursachen des Versagens sind auf der Mikro- bzw. Mesoskala zu suchen. Die Deterioration des Materials innerhalb der inhomogenen Mikrostruktur beginnt gewöhnlich auf der Mikroebene und spiegelt sich in der Entwicklung von Mikrodefekten, wie Mikrorissen oder Mikroporen, wieder. Bei weiterer Belastung kommt es in der Nähe von diesen Mikrodefekten bzw. der sich bildenden Grenzschichten zu Spannungskonzentrationen und als Folge davon zum Zusammenschluss dieser Mikrodefekte. Dies führt zu makroskopischen Versagenszonen in Form von Makrorissen oder Scherbändern, siehe Abbildung 1.1, während der Rest der Struktur sogar eine Entlastung erfahren kann. Im Speziellen bei kohäsiven Reibungsmaterialien induziert das für diese Materialklasse typische Versagensphänomen der Lokalisierung eine anisotrope Materialantwort. Da die Ausbildung lokalisierter Versagenszonen, die mit einer hohen Konzentration von Deformationen verbunden sind, als Vorstufe des Strukturversagens verstanden werden kann, ist eine möglichst realitätsgetreue Vorhersage dieser lokalisierter Zonen bei der Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien von großer Bedeutung.

Das mechanische Verhalten kohäsiver Reibungsmaterialien und deren Versagensmechanismen lassen sich auf verschiedenen Längenskalen beschreiben, die sich in Abhängigkeit des zu untersuchenden Problems über ein Spektrum von  $10^{-7}$  bis  $10^3$  m erstrecken. Für die Beschreibung der Materialantwort auf der Strukturebene haben sich in den vergangenen Jahrzehnten eine Reihe von Modellen bewährt, die auf der Makroskala formuliert

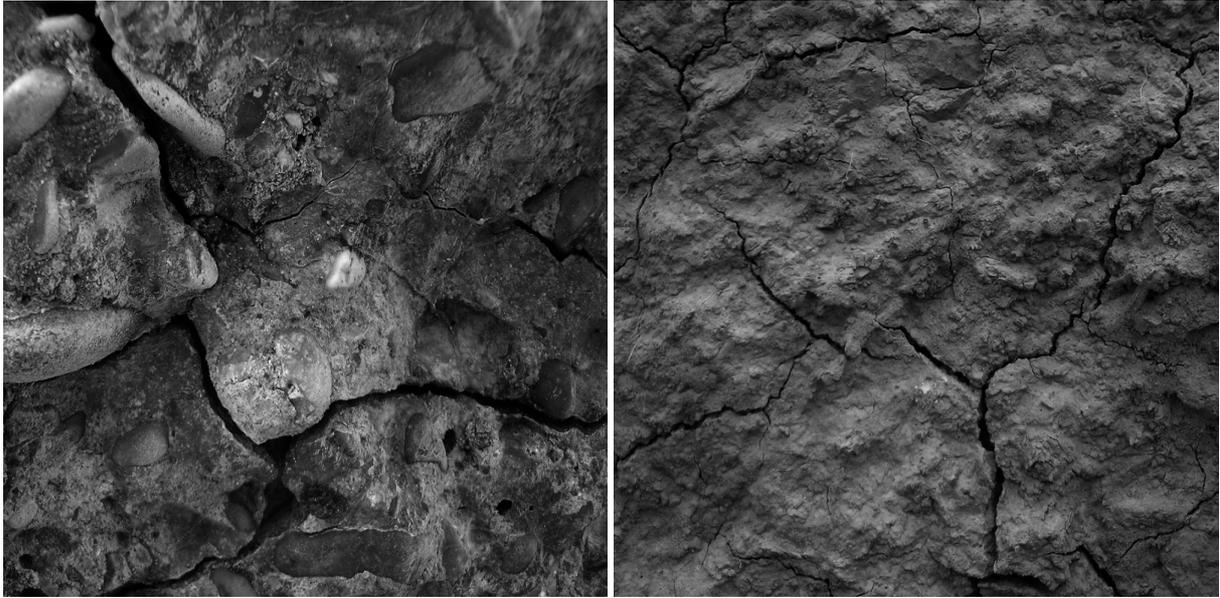


Abbildung 1.1: Rissbildung bei kohäsiven Reibungsmaterialien

wurden. Diese klassischen makroskopischen Kontinuumsformulierungen verschmieren die Eigenschaften der heterogenen Mikrostruktur, so dass von einem homogenen Aufbau der Materialstruktur auf der Makroskala ausgegangen werden kann. Dieses Vorgehen besitzt den Vorteil, dass die resultierenden Formulierungen anhand von Experimenten validiert und effizient zur Simulation von Ingenieurstrukturen eingesetzt werden können. Währenddessen ermöglicht der rasante Fortschritt in der Computertechnologie den Einsatz von mikromechanisch orientierten Formulierungen, wie beispielsweise Partikelmodelle, die auf der Methodik der Molekulardynamik basieren. Dadurch kann der diskontinuierliche Charakter des Versagens kohäsiver Reibungsmaterialien besser berücksichtigt werden. Diese Formulierungen sind zum jetzigen Zeitpunkt aufgrund des hohen numerischen Aufwandes für den breiten Einsatz bei Ingenieur Anwendungen nur bedingt geeignet. Heutzutage gibt es schon erste Ansätze zur Berücksichtigung mehrerer Skalen in der Materialbeschreibung. Diese werden in der Literatur unter dem Begriff Mehrskalen-Methoden zusammengefasst. Allerdings ist eine vollständige Beschreibung des Materialverhaltens auf den verschiedenen Skalen und deren Übergänge von der atomistischen Ebene bis zur Strukturebene bis heute noch nicht realisierbar. Des Weiteren sind diese Übergänge von einer Skala zur nächsten noch nicht völlig verstanden, auch wenn mit Hilfe von Homogenisierungsprinzipien Beziehungen zwischen den Skalen gewonnen werden können.

## 1.2 Problembeschreibung und Ziel der Arbeit

Im Bereich der Werkstoffmodellierung kann insbesondere die Entwicklung realitätsnaher Materialmodelle zur Simulation des komplexen Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien noch immer nicht als beendet angesehen werden. Das Materialverhalten dieser Werkstoffklasse ist durch ein komplexes Zusammenwirken einer anisotropen Degradation der elastischen Festigkeitseigenschaften mit richtungsabhängigen irreversiblen Dehnungen gekennzeichnet. Um größere Ingenieurstrukturen numerisch simulieren zu können, sollten die Materialmodelle aus Effizienzgründen auf der Meso- bzw. der Makroskala formuliert

und mit Hilfe der Finite Element Methode numerisch umgesetzt werden.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Entwicklung von Materialformulierungen, die den Werkstoffcharakteristiken kohäsiver Reibungsmaterialien genügen. Als ein Mittelweg zwischen einer detaillierten mikromechanischen Modellierung und einer strukturorientierten makroskopischen Abbildung wird das Microplane Modell eingesetzt. Die Microplane Theorie stellt ein universelles Konzept zur Entwicklung anisotroper Materialmodelle dar. Ein wesentliches Merkmal der Microplane Theorie ist die Wiedergabe des Materialverhaltens durch relativ einfache Konstitutivgesetze auf jeder einzelnen Mikroebene. Durch die anschließende Homogenisierung am Materialpunkt wird das komplexe Zusammenwirken aller Mikroebenen erreicht. Eine Kernfrage dabei ist: Wie müssen die vereinfachten Stoffgesetze auf der Mikroebene definiert werden, damit makroskopische Versagensphänomene mechanisch konsistent und realistisch abgebildet werden?

Dazu werden verschiedene inelastische Microplane Materialbeschreibungen, wie beispielsweise Microplane Schädigung, Microplane Plastizität und deren Kopplung, systematisch mit gängigen makroskopischen invarianten-basierten Materialmodellen verglichen. Durch eine sorgfältige Betrachtung der Mikro-Makro Übergänge soll die Eignung des Microplane Konzeptes festgestellt werden, richtungsorientiertes Versagen auf den Mikroebenen in ein realistisches makroskopisches Modell zu überführen. Um den Ruf eines heuristischen Verfahrens, der dem Microplane Konzept anhaftet, abzulegen, ist die physikalisch sinnvolle Interpretation der Microplane Stoffgesetze mittels anerkannter makroskopischer Materialmodelle ein zentraler Punkt dieser Arbeit. Anschließend sollen die erforderlichen Microplane Parameter durch den formelmäßigen Mikro-Makro Übergang in Abhängigkeit makroskopisch messbarer Materialkennwerte bestimmt und sinnvoll physikalisch interpretiert werden und nicht, wie häufig, heuristisch durch inverses Abgleichen ermittelt werden. Weiterhin benötigen die in dieser Arbeit vorgestellten Microplane Modelle eine Erweiterung für den postkritischen Zustand, um kontinuumsmechanische Untersuchungen im Rahmen der Finite Element Methode auch im Entfestigungsbereich zuverlässig durchführen zu können. Die Berücksichtigung höherwertiger Gradienten in den vorgestellten Formulierungen stellt eine Erfolg versprechende Regularisierungsstrategie dar, da es sowohl für Reibungsversagen als auch für spröde Materialeffekte, wie die Wechselwirkung der Mikrorissbildung, geeignet ist.

Letztendlich sollen die vorgestellten Materialformulierungen es ermöglichen, das komplexe Materialverhalten kohäsiver Reibungsmaterialien möglichst genau zu simulieren und dazu beitragen das Verhalten dieser Werkstoffe besser zu verstehen.

### 1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Schwerpunkte. Zunächst wird im ersten Teil dieser Arbeit das Microplane Konzept vorgestellt und mechanisch abgesichert. Der zweite Schwerpunkt liegt in einer möglichst realitätsgetreuen Simulation des Materialverhaltens und der in Experimenten beobachteten Versagensphänomene kohäsiver Reibungsmaterialien.

In *Kapitel 2* werden zunächst die für diese Arbeit erforderlichen kontinuumsmechanischen Grundlagen bereitgestellt. Dabei werden die Formulierung des quasi-statischen Randwertproblems der geometrisch linearen Theorie eines lokalen Kontinuumsmodells sowie die numerische Lösung dieses Randwertproblems mit Hilfe der Finite Element Methode kurz skizziert.

Das *Kapitel 3* gibt einen Überblick über klassische makroskopische Materialformulierungen. Neben der lokalen Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie und Schädigungsmechanik wird auf die Kopplung dieser klassischen Materialtheorien im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse eingegangen.

In *Kapitel 4* wird ein grundlegendes Konzept auf der Basis der Microplane Theorie zur Beschreibung von beliebig anisotropem Materialverhalten vorgestellt. Außerdem werden die jeweiligen geometrischen Beziehungen der verschiedenen Microplane Formulierungen aufgezeigt und ein universelles Konzept zur Herleitung thermodynamisch konsistenter Microplane Formulierungen bereitgestellt.

Das *Kapitel 5* befasst sich mit der Herleitung unterschiedlicher Materialmodelle im Rahmen der Microplane Theorie. Das in *Kapitel 4* vorgestellte universelle Konzepte zur thermodynamisch konsistenten Herleitung von Microplane Stoffgesetzen wird auf verschiedene rheologische Modelle der Elastizität, Plastizität, Schädigung und deren Kopplung angewendet.

In *Kapitel 6* wird auf das Versagensphänomen Lokalisierung und die Probleme von Kontinuumsmodellen bei der Modellierung lokalisierter Versagensphänomene eingegangen. Es werden verschiedene Regularisierungsstrategien für das Microplane Modell aufgezeigt, welche die Gutgestellttheit des zugrunde liegenden Randwertproblems gewährleisten. Die Berücksichtigung höherwertiger räumlicher Gradienten im Rahmen der Microplane Theorie stellt dabei eine besonders geeignete Regularisierungsstrategie dar. Deren numerische Umsetzung im Rahmen der Finite Element Methode für ein kombiniertes Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodell und deren regularisierende Wirkung werden anschließend näher erläutert.

Das *Kapitel 7* widmet sich dem Vergleich von makroskopischen, phänomenologischen Materialmodellen und Microplane Materialformulierungen. Dieser Vergleich dient der Identifikation von Microplane Stoffgesetzen mittels anerkannter makroskopischer Materialmodelle. Der daraus resultierende Mikro–Makro Abgleich der Stoffgesetze ist insbesondere zur Bestimmung der erforderlichen Microplane Materialparameter in Abhängigkeit makroskopisch messbarer Materialkennwerte erforderlich.

In *Kapitel 8* wird die Tauglichkeit der hergeleiteten gradientenerweiterten Microplane Schädigungsformulierung bzw. der kombinierten Schädigungs- und Plastizitätsformulierung zur Simulation des Tragverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien analysiert. Dazu werden diese Microplane Materialformulierungen anhand ausgewählter Strukturbeispiele unter monotoner als auch unter zyklischer Belastung getestet und mit den Ergebnissen der jeweiligen Experimente verglichen.

In *Kapitel 9* folgt eine zusammenfassende Bewertung dieser Arbeit und ein Ausblick über zukünftige Forschungsschwerpunkte auf dem Gebiet der Versagensmodellierung kohäsiver Reibungsmaterialien.



# Kapitel 2

## Kontinuumsmechanik und Finite Element Methode

---

*“Nach der Lektüre dieses Buches wird sich der Beitrag an geordneter Information in Ihrem Gehirn erhöht haben. Doch im gleichen Zeitraum wird die Wärme, die Ihr Körper inzwischen abgegeben hat, in weit höherem Maße zur Unordnung im restlichen Universum beigetragen haben. Ich schlage vor, daß Sie sofort mit dem Lesen aufhören.”*

Stephen Hawking [100]

---

### 2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In den folgenden Abschnitten werden kurz die grundlegenden Gleichungen der Kontinuumsmechanik vorgestellt. Dabei wird auf die Grundelemente der Kontinuumsmechanik, die Kinematik lokaler Deformationen und physikalische Bilanzaussagen und schließlich noch auf das Randwertproblem der klassischen Kontinuumsmechanik eingegangen. Für weiterführende Ausführungen sei auf die klassischen Werke von *Betten* [35], *Haupt* [99], *Malvern* [151], *Marsden & Hughes* [154], *Stein & Barthold* [209], *Truesdell & Noll* [220] sowie auch auf *Truesdell & Toupin* [221] verwiesen.

#### 2.1.1 Allgemeines

Die Bewegung eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  als Teilgebiet des Euklidischen Raumes  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  wird in einem klassischen Boltzmann Kontinuum durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  beschrieben. Weiterhin wird für die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen von der Annahme einer linearen Kinematik in Verbindung mit kleinen Verzerrungen ausgegangen. Dies liefert den klassischen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^{sym} \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Durch die Deformationen des Körpers kommt es zu Wechselwirkungen zwischen benachbarten Punkten im Innern des materiellen Körpers. Diese Wechselwirkungen verursachen lokale mechanische Beanspruchungen, die als Spannungen bezeichnet werden. Das Cauchy

Theorem führt auf folgende funktionelle Abhängigkeit des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  von der Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Dieser lineare Zusammenhang liefert die Definition des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ . Die Cauchy Spannungen beziehen die im Schnitt wirkenden Kräfte auf die deformierte Fläche und werden deshalb auch als wahre Spannungen bezeichnet.

### 2.1.2 Bilanzsätze

Bei den im Folgenden vorgestellten Bilanzsätzen der Kontinuumsmechanik handelt es sich um allgemeine Aussagen für ein Kontinuum, die nicht von den Materialeigenschaften abhängen. In der klassischen Mechanik wird die Erhaltung der Masse während eines Deformationsprozesses im Körper  $\mathcal{B}$  vorausgesetzt. Die Erhaltung des Impulses liefert den Zusammenhang zwischen der Bewegungsänderung eines Körpers und den auf ihn wirkenden Kräften. Unter Berücksichtigung, dass in dieser Arbeit ausschließlich quasi-statische Problemstellungen bearbeitet werden und somit die Trägheitsterme vernachlässigt werden, ergibt sich folgende lokale Impulsbilanz.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (2.3)$$

Darin symbolisieren  $\rho$  die Dichte und  $\mathbf{b}$  die Massenkräfte. Des Weiteren liefert die Drehimpulsbilanz mit der Beschränkung der Betrachtung eines Boltzmann Kontinuums die Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ . Eine weitere Erhaltungsgröße stellt die totale Energie dar. Dies führt auf die lokale Form des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik,

$$\dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + q_0 \quad (2.4)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  die Spannungsleistung  $\mathcal{P}$  des deformierbaren Körpers und  $q_0$  die Wärmezufuhr charakterisiert.

Während der 1. Hauptsatz der Thermodynamik die Energieumwandlung eines thermodynamischen Prozesses erfasst, gibt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik die Änderung der Entropie an. Die Einführung der physikalischen Zustandsgröße Entropie geht auf *Clausius* [52] zurück und gibt den Grad der Unordnung eines Systems an. Geht man beispielsweise von einem der wenigen geordneten Zustände eines Systems aus, wird dieses System im Laufe der Zeit den Naturgesetzen folgend seinen geordneten in einen ungeordneten Zustand verändern. Hieraus folgt die Clausius–Duhem Ungleichung, die für alle thermodynamischen Prozesse erfüllt sein muss,

$$\mathcal{D} = \dot{\eta}\Theta - q_0 - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla\Theta \geq 0 \quad (2.5)$$

wobei  $\mathcal{D}$  die Dissipation und  $\mathbf{q}$  den Wärmefluss bezeichnen. Diese Ungleichung legt die Richtung eines Prozesses und den Grad der Irreversibilität der Energieumwandlung fest. Die Definition der freien Helmholtz Energie  $\Psi$  erhält man als Differenz der inneren Energie  $u$  und der lokalen Entropie  $\eta$  multipliziert mit der Temperatur  $\Theta$ .

$$\Psi := u - \Theta\eta \quad (2.6)$$

Weiterhin wird in dieser Arbeit von isothermen Prozessen mit  $\dot{\Theta} = 0$  ausgegangen, so dass der Einfluss der Temperatur bei mechanischen Beanspruchungen vernachlässigbar ist und die Prozesstemperatur konstant bleibt. Dies führt letztendlich durch Ausnutzen des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik (2.4) und der Definition der freien Helmholtz Energie (2.6) auf die Clausius–Duhem Ungleichung isothermer Prozesse.

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\Psi} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.7)$$

Sie besagt, dass die Evolution der freien Energie immer größer oder gleich der Spannungsleistung sein muss und somit die mechanische Dissipation nie negativ sein darf. Die Clausius–Duhem Ungleichung ist dementsprechend gleich null bei reversiblen Prozessen und größer null bei irreversiblen Prozessen. Des Weiteren liefert sie eine Restriktion für die Wahl der konstitutiven Gleichungen, da sie die thermodynamische Zulässigkeit der jeweiligen Prozesse kontrolliert. Die Formulierung der freien Energie spielt dabei eine Schlüsselrolle. Darauf wird im nächsten Kapitel näher eingegangen, denn der thermodynamischen Betrachtung von Prozessen kommt bei der Formulierung von nichtlinearen Materialmodellen eine wichtige Bedeutung zu.

### 2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik

Die Impulsbilanz (2.3) bildet die lokale Gleichgewichtsgleichung eines materiellen Punktes. Das Gleichgewicht wird darin punktwise erfüllt, so dass Gleichung (2.3) auch als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet wird. Weiterhin wird der Rand des Körpers  $\mathcal{B}$  in einen Teil  $\Gamma_D$ , auf dem die Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$ , und einen Teil  $\Gamma_N$ , auf dem die Spannungen  $\bar{\mathbf{t}}$  vorgeschrieben sind, unterteilt. Die Dirichlet–Randbedingung  $\bar{\mathbf{u}}$  und die Neumann–Randbedingung  $\bar{\mathbf{t}}$  lauten:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (2.8)$$

Für die Lösung des Randwertproblems stehen die im vorigen Abschnitt beschriebenen Erhaltungssätze in Form von partiellen Differentialgleichungen mit den unbekannt Variablen  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $u$ , die den thermodynamischen Zustand des Körpers beschreiben, zur Verfügung. Die Bilanz zwischen den vorhandenen Gleichungen und den Unbekannten zeigt die Notwendigkeit weiterer Gleichungen. Diese fehlenden Gleichungen zur eindeutigen Lösung des Randwertproblems müssen durch die Formulierung des Konstitutivverhaltens des Körpers bereitgestellt werden. Das reale Materialverhalten von Werkstoffen ist sehr unterschiedlich. Dadurch ist es nicht möglich eine universelle mathematische Beschreibung des Materialverhaltens aufzustellen. Verschiedene Ansätze, die das individuelle Materialverhalten diverser Werkstoffe beschreiben, werden im nächsten Kapitel behandelt. Dabei besitzt die Materialtheorie die Aufgabe, die Einhaltung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem Ungleichung (2.7) zu gewährleisten und somit die thermodynamische Zulässigkeit der entwickelten Materialformulierungen zu kontrollieren.

## 2.2 Finite Element Methode

Die Lösung des im vorigen Abschnitt vorgestellten quasi–statischen Randwertproblems erfordert den Einsatz numerischer Verfahren. Denn das vorgestellte Randwertproblem setzt

sich aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen zusammen, die nur in sehr wenigen Ausnahmefällen geschlossen lösbar sind. Im Allgemeinen werden variationelle Formulierungen in Verbindung mit Diskretisierungsverfahren zur numerischen Lösung von komplexen Aufgabenstellungen eingesetzt. Das verbreitetste und flexibelste Diskretisierungsverfahren stellt die Finite Element Methode dar. Die Grundidee der Finite Element Methode beruht auf der Zerlegung des Körpers  $\mathcal{B}$  in endliche Teilgebiete  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}$  und der Diskretisierung räumlicher Funktionen, wie beispielsweise das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ , in diesen Teilgebieten  $\mathcal{B}^e$ . Die grundlegenden Ideen dieser Methode gehen auf die 1960er Jahre zurück und werden mit den Namen *Argyris* [6], *Clough* [53] und *Zienkiewicz* [232] in Verbindung gebracht. Die fortschreitenden Entwicklungen in der Computertechnologie haben im Wesentlichen zur Verbreitung der Finite Element Methode in der Forschung, aber auch in industriellen Zweigen, wie beispielsweise im Maschinenbau, in der Luft- und Raumfahrttechnik und im Bauwesen, beigetragen. Sie stellt heutzutage ein unverzichtbares Werkzeug zur numerischen Lösung von komplexen, ingenieurwissenschaftlichen Problemstellungen in der Strömungs- und Strukturmechanik sowie -dynamik dar. Im Folgenden soll kurz auf die Punkte der Finite Element Methode eingegangen werden, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sind. Für weiterführende Ausführungen zu dieser Methode sei auf die Lehrbücher von *Bathe* [12], *Belytschko, Liu & Moran* [34], *Braess* [38], *Hughes* [108], *Wriggers* [228] und *Zienkiewicz & Taylor* [234] verwiesen.

### 2.2.1 Schwache Formulierung des Randwertproblems

Zur numerischen Lösung des Randwertproblems wird die starke Form des Gleichgewichts (2.3) mit Hilfe der Galerkin-Methode in eine schwache Form überführt. Dabei wird die lokale Gleichgewichtsgleichung (2.3) und die zugehörige Neumann-Randbedingung (2.8)<sub>2</sub> mit einer Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  gewichtet und anschließend über das Gebiet des Körpers  $\mathcal{B}$  bzw. über den Gebietsrand  $\Gamma$  integriert, wobei die Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  der Dirichlet-Randbedingung (2.8)<sub>1</sub> genügen soll. Durch Anwendung der partiellen Integration und des Gaußschen Integralsatzes und unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehung (2.1) sowie der Randbedingungen lässt sich die schwache Form des Gleichgewichts als Galerkin Funktional angeben.

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV}_{\delta W_{int}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA}_{\delta W_{ext}} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.9)$$

Wird die Testfunktion physikalisch als virtuelle Verschiebung interpretiert, so spiegelt die Gleichung (2.9) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) wieder. Der erste Term gibt die innere virtuelle Arbeit  $\delta W_{int}$  wieder, während die beiden restlichen Terme die virtuelle äußere Arbeit  $\delta W_{ext}$  darstellen. Im Unterschied zur starken Form des Gleichgewichts wird bei der schwachen Form das Gleichgewicht als Integralaussage nur noch global im betrachteten Gebiet und nicht mehr in jedem Punkt erfüllt.

### 2.2.2 Diskretisierung

In den beiden folgenden Abschnitten wird von der ansonsten in dieser Arbeit verwendeten Tensorschreibweise auf die für Finite Element Formulierungen übliche Matrixschreibweise übergegangen. Der Körper  $\mathcal{B}$  wird dabei in  $n_{ele}$  Finite Elemente zerlegt, so dass

$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathcal{B}^e$  gilt. Der Verschiebungsverlauf  $\mathbf{u}$  wird approximativ über diskrete Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  der Finiten Elemente bestimmt. Der Verlauf innerhalb des Elementes wird über die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  approximiert. Mit Hilfe der kinematischen Beziehung (2.1) lassen sich auch die Verzerrungen approximativ über die Knotenverschiebungen bestimmen,

$$\mathbf{u}^h := \mathbf{N} \mathbf{d} \quad \boldsymbol{\epsilon}^h := \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \delta \mathbf{u}^h := \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \quad \delta \boldsymbol{\epsilon}^h := \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}^e \quad (2.10)$$

wobei der Operator  $\mathbf{B}$  die räumlichen Gradienten der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  definiert. Da in dieser Arbeit das Bubnov–Galerkin Verfahren angewendet wird, werden die Verschiebungen und die virtuellen Verschiebungen in gleicher Weise angesetzt. Durch Einsetzen der diskretisierten Verschiebungs- und Verzerrungsverläufe (2.10) in die schwache Form des Gleichgewichts (2.9) ergibt sich die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts.

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d}^T \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{f}_{int}^e} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA}_{-\mathbf{f}_{ext}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d} \quad (2.11)$$

Hierbei symbolisiert  $\bigcup_{e=1}^{n_{ele}}$  den Zusammenbau aller Finiten Elemente. Dieser Zusammenbau wird in der Literatur auch als Assemblierungsprozess bezeichnet. Des Weiteren definieren  $\mathbf{f}_{int}^e$  die inneren bzw.  $\mathbf{f}_{ext}^e$  die äußeren Knotenkräfte des Elementes  $e$ . Daraus lassen sich die globalen inneren bzw. äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{int}$  und  $\mathbf{F}_{ext}$  zusammenbauen. Der Assemblierungsprozess liefert außerdem den globalen Freiheitsgradvektor  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{F}_{int} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{int}^e \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{ext}^e \quad \delta \mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d} \quad (2.12)$$

Dadurch ergibt sich folgendes algebraisches Gleichungssystem.

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{D} [\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}] = 0 \quad (2.13)$$

Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung muss diese Gleichung für beliebige Variationen der Knotenverschiebungen  $\delta \mathbf{D}$  gelten. Dies führt letztendlich auf das globale Gleichungssystem des diskretisierten Körpers.

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (2.14)$$

Dieses Gleichungssystem besagt, dass die inneren mit den äußeren Knotenkräften im Gleichgewicht stehen.

### 2.2.3 Linearisierung

Betrachtet man das globale Gleichungssystem (2.14), so erhält man nur für lineare Probleme, wie bei linear elastischem Materialverhalten, ein einziges zu lösendes lineares Gleichungssystem. Aufgrund der in dieser Arbeit verwendeten nichtlinearen Materialgesetze ergibt sich ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem. Als Folge des nichtlinearen Materialverhaltens lässt sich folgender nichtlinearer Zusammenhang zwischen den inneren Knotenkräften  $\mathbf{F}_{int}$  und dem globalen Freiheitsgradvektor  $\mathbf{D}$  angeben.

$$\underbrace{\mathbf{F}_{int}}_{\text{nichtlinear in } \mathbf{D}} = \mathbf{F}_{ext} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_{int} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{int}^e = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{nichtlinear in } \boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (2.15)$$

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfordert den Einsatz eines iterativen Lösungsverfahrens. Hierfür wird im Allgemeinen das Newton–Raphson Verfahren herangezogen. Es basiert auf der Linearisierung der diskretisierten Gleichgewichtsbeziehung (2.14). Zur inkrementell iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird die Gleichgewichtsbeziehung (2.14) in folgendes Format gebracht,

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) := \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

wobei  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  das Residuum als Differenz zwischen den inneren und äußeren Kräften definiert. Das Residuum bezeichnet die Ungleichgewichtskräfte für Zustände, die noch nicht im Gleichgewicht sind. Werden diese während des iterativen Prozesses identisch null, so ist das gesuchte Gleichgewicht erreicht. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die äußeren Kräfte nicht von der Deformation abhängen. Im Folgenden wird ein inkrementeller Lastschritt betrachtet und das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$ , entsprechend Gleichung (2.16), wird zum Iterationsschritt  $i+1$  in eine Taylorreihe entwickelt. Außerdem werden beim Newton–Raphson Verfahren die Terme höherer Ordnung (HOT) vernachlässigt und es ergibt sich folgendes linearisiertes Residuum  $\text{Lin } \mathbf{R}(\mathbf{D})$  zum Iterationsschritt  $i+1$ .

$$\text{Lin } \mathbf{R}(\mathbf{D}_{i+1}) := \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} [\Delta \mathbf{D}_{i+1}] = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i \quad (2.17)$$

Dies führt auf ein linearisiertes globales Gleichungssystem,

$$\mathbf{K}_i \Delta \mathbf{D}_{i+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{D}_i) \quad (2.18)$$

dessen Lösung die inkrementelle Änderung des Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_{i+1}$  liefert, wodurch sich eine verbesserte Lösung für den Freiheitsgradvektor  $\mathbf{D}_{i+1}$  ergibt. Dabei wurden folgende Definitionen für die globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i$  und für das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_i)$  zum Iterationsschritt  $i$  verwendet.

$$\mathbf{K}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}_i) - \mathbf{F}_{ext} \quad (2.19)$$

Diese ergeben sich durch den Assemblierungsprozess aus den Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_i^e$  und aus den Elementresiduen  $\mathbf{r}_i^e$ . Der Zusammenbau liefert außerdem das Inkrement des globalen Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_{i+1}$  in Abhängigkeit der Änderung des Elementfreiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$ .

$$\mathbf{K}_i := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_i^e \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_i^e \quad \Delta \mathbf{D}_{i+1} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \quad (2.20)$$

Hierbei besitzen die Elementsteifigkeitsmatrizen und die Elementresiduen folgende Grundstruktur.

$$\mathbf{k}_i^e = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{tan,i} \mathbf{B} dV \quad \mathbf{r}_i^e = \mathbf{f}_{int,i}^e - \mathbf{f}_{ext}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV - \mathbf{f}_{ext}^e \quad (2.21)$$

Die Materialmatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}_{tan,i}$  ist durch die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen definiert  $\boldsymbol{\varepsilon}_{tan,i} := [\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}]_i$ . Es wird deutlich, dass die Spannungen nicht nur die inneren Kräfte  $\mathbf{f}_{int,i}^e$ , sondern auch die Elementsteifigkeitsmatrizen in Form der Materialmatrix steuern. Die erforderliche Materialbeschreibung, das bedeutet die Spezifizierung der Spannungen und somit auch der Materialmatrix, wird in den folgenden Kapiteln detailliert betrachtet.

# Kapitel 3

## Klassische makroskopische Materialtheorien

### 3.1 Allgemeines

Die lokale Materialantwort kohäsiver Reibungsmaterialien ist in der Regel hochgradig nichtlinear. Der Grund für diese Nichtlinearität ist die komplexe Mikrostruktur dieser Materialklasse. Das mechanische Verhalten dieser Materialien und deren Versagensmechanismen lassen sich dabei auf verschiedenen Längenskalen beschreiben, die sich in Abhängigkeit des zu untersuchenden Problems über ein Spektrum von  $10^{-7}$  bis  $10^3$  m erstrecken. Für die Beschreibung der Materialantwort auf Strukturebene haben sich in den letzten Jahrzehnten eine Reihe von Modellen bewährt, die auf der Makroskala formuliert sind. Diese klassischen makroskopischen Materialmodelle [99, 104, 112, 141, 203] verschmieren (homogenisieren) die Eigenschaften der heterogenen Mikrostruktur auf der Makroskala, so dass von einem homogenen Aufbau der Materialstruktur auf der Makroskala ausgegangen wird. Die phänomenologische Beschreibung des Materialverhaltens dieser Materialklasse im Rahmen klassischer makroskopischer Materialtheorien ist Gegenstand dieses Kapitels. Zur Beschreibung des konkreten Materialverhaltens müssen zusätzlich zu den im vorigen Kapitel hergeleiteten Bilanzen die Konstitutivgleichungen formuliert werden. Diese Materialgleichungen definieren die lokale Spannungsantwort in Abhängigkeit der Geschichte der lokalen Deformation, wobei die mechanische Materialantwort entweder elastisch oder inelastisch sein kann. Die erforderlichen Materialgleichungen besitzen dann folgende Grundstruktur.

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.1)$$

Im Fall einer inelastischen Materialantwort beschreibt der Vektor  $\boldsymbol{\alpha}$  einen Satz von internen Variablen, den es unter Einbeziehung der wirklichen Materialeigenschaften zu spezifizieren gilt. Des Weiteren weisen vom physikalischen Standpunkt aus gesehen alle realen Materialien ratenabhängige Merkmale auf, d. h. das Antwortverhalten dieser Materialien ist von der Belastungsgeschwindigkeit abhängig. Auf der anderen Seite ist diese Ratenabhängigkeit in vielen Experimenten mit kohäsiven Reibungsmaterialien nicht nachweisbar, da die Versuche mit niedriger Belastungsgeschwindigkeit durchgeführt werden. In dieser Arbeit wird von der vereinfachenden Annahme der Ratenunabhängigkeit ausgegangen, d. h. von einer quasi-statischen Betrachtungsweise.

Prinzipiell lassen sich vom phänomenologischen Standpunkt drei verschiedene Grundtypen des quasi-statischen Materialverhaltens unterscheiden, siehe Abbildung 3.1. Die Unterschiede in den resultierenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen dieser drei Grundtypen machen sich erst bei zyklischen Be- und Entlastungsvorgängen bemerkbar. Bei der Beschreibung des Materialverhaltens mit der Elastizitätstheorie sind Be- und Entlastungskurven identisch. Die Anwendung der Schädigungsmechanik spiegelt sich in der

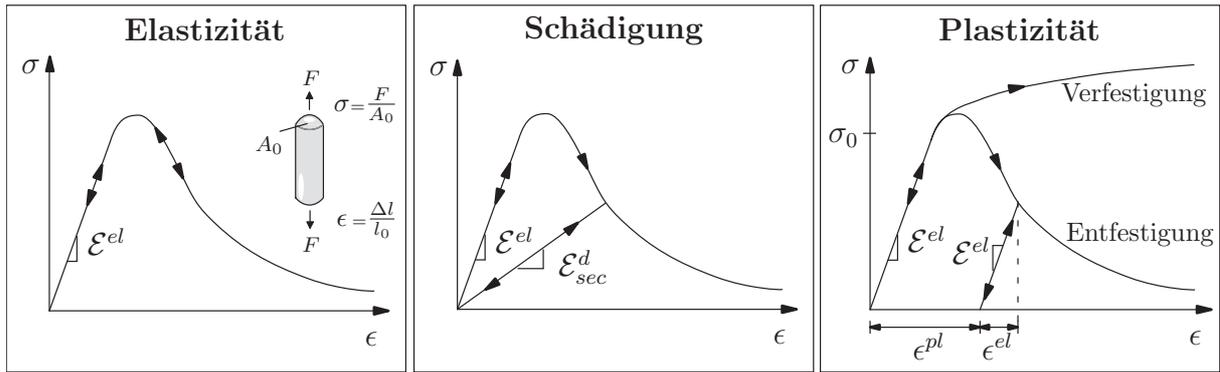


Abbildung 3.1: Schematische Darstellungen des nichtlinearen Materialverhaltens

Spannungs–Dehnungsbeziehung in einer Entlastungsgeraden mit Richtung zum Ursprung wieder, so dass bei vollständiger Entlastung keine bleibenden Verformungen vorhanden sind. Im Gegensatz dazu entstehen bei der Plastizitätstheorie irreversible Dehnungen. Die Entlastungskurve verläuft parallel zum elastischen Belastungspfad und dadurch verbleibt bei vollständiger Entlastung im Material ein plastischer Verzerrungsanteil  $\epsilon^{pl}$ . In den folgenden Abschnitten werden die drei Grundtypen einer quasi–statischen Materialbeschreibung näher untersucht und diskutiert. In Wirklichkeit weisen jedoch kohäsive Reibungsmaterialien oft eine Kombination aus Schädigung des Materials und plastischen Effekten auf. Dies erfordert die Kopplung der drei Grundtypen. Auf diese Kopplung wird detailliert in einem separaten Abschnitt eingegangen.

Die Herleitung von nichtlinearen Materialmodellen kann auf verschiedene methodische Ansätze gründen. Eine allgemeine Vorgehensweise zur Beschreibung dissipativer Vorgänge in Materialien, die den thermodynamischen Prinzipien des vorigen Kapitels genügt, basiert auf der Thermodynamik irreversibler Prozesse unter Berücksichtigung interner Variablen, vergleiche hierzu die klassischen Werke von *Coleman & Gurtin* [54], *Coleman & Noll* [55], *Truesdell & Noll* [220] und *Truesdell & Toupin* [221]. Dieser Ansatz geht von der Existenz thermodynamischer Potentiale aus. Die freie Helmholtz Energie ist ein thermodynamisches Potential, deren Einsatz vor allem bei der Ableitung von Stoffgesetzen sinnvoll erscheint. Denn für den betrachteten isothermen Fall stellt die freie Helmholtz Energie den Anteil der inneren Energie dar, der Arbeit leistet. Die Auswertung der Clausius–Duhem Ungleichung isothermer Prozesse (2.7) liefert die Definitionen der konjugierten Größen zu den Variablen dieser freien Energiefunktion. Die Clausius–Duhem Ungleichung stellt den Ausgangspunkt zur Herleitung der Evolutionsgleichungen der verwendeten internen Variablen dar. Durch dieses Vorgehen wird letztendlich die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für die gewonnenen Materialmodelle sichergestellt. Die beschriebene Methode zur Herleitung von Materialmodellen, basierend auf thermodynamischen Prinzipien, setzt eine gewisse Abstraktionsfähigkeit voraus. Da in dieser Arbeit keine neuen Materialtheorien entwickelt werden, sondern auf die allgemein akzeptierten Theorien der Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie und Kontinuumschädigungsmechanik zurückgegriffen wird, werden die Herleitungen der in dieser Arbeit diskutierten Materialmodelle im erwähnten thermodynamischen Rahmen erfolgen.

*Bemerkung:*

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden gewisse Variablen in den klassischen makrosko-

pischen Formulierungen mit dem Zusatz *mac* versehen, um eine eindeutige Unterscheidung zu den Variablen der im Kapitel 4 vorgestellten Microplane Theorie sicherzustellen. Größen die eindeutig der Makroebene zugeordnet werden können, wie beispielsweise der Spannungs- oder Verzerrungstensor, erhalten keinen Zusatz.

## 3.2 Elastizitätstheorie

Ein Werkstoff, der nach vollständiger Entlastung in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, wird als elastisch bezeichnet. Weiterhin sind die Spannungen nur vom aktuellen Verzerrungszustand abhängig. Für den Fall der linearen Elastizität lässt sich das verallgemeinerte Hookesche Gesetz aus der folgenden freien Energie ableiten.

$$\Psi^{mac} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2)$$

Diese lässt sich in Abhängigkeit der Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  und eines Materialtensors  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$  aufstellen und entspricht der Formänderungsenergie. Da es sich im Fall der linearen Elastizität um nicht-dissipatives Materialverhalten handelt, wird aus der Clausius–Duhem Ungleichung isothermer Prozesse (2.7) eine Gleichung. Deren Auswertung liefert die Definition des Spannungstensors.

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.3)$$

Die zweite Ableitung der freien Energie nach den Verzerrungen definiert den Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$  des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} := \frac{\partial^2 \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.4)$$

Der Materialtensor besitzt für eine allgemeine Materialanisotropie 81 Einträge. Je nach Ausbildung der Symmetrieebenen eines Materials lässt sich die Anzahl der Konstanten reduzieren und man spricht entweder von monoklinem, orthotropem, transversal-isotropem oder isotropem Materialverhalten. Eine ausführliche Diskussion der verschiedenen elastischen Werkstoffgesetze findet sich in *Altenbach, Altenbach & Rikards* [4].

Im Falle eines isotropen Materials mit unendlich vielen Symmetrieebenen reduziert sich die Anzahl der erforderlichen Materialparameter auf zwei. Der Elastizitätstensor des Hookeschen Gesetzes für dieses isotrope, linear elastische Material ergibt sich wie folgt,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = 3 K^{mac} \boldsymbol{\mathcal{I}}^{vol} + 2 G^{mac} \boldsymbol{\mathcal{I}}^{dev} \quad (3.5)$$

wobei  $K^{mac}$  den Kompressionsmodul und  $G^{mac}$  den Schubmodul wiedergibt.  $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{vol} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  und  $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{dev} = \boldsymbol{\mathcal{I}}^{sym} - \boldsymbol{\mathcal{I}}^{vol}$  bezeichnen den volumetrischen bzw. deviatorischen Anteil des vierstufigen Einheitstensors.

Die Elastizitätstheorie kann nicht nur zur Modellierung des betrachteten linearen Falles mit kleinen Verzerrungen, sondern auch zur Beschreibung von materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten herangezogen werden, vergleiche *Chen & Saleeb* [51] und *Ogden* [172]. Im Folgenden werden die materiellen Nichtlinearitäten allerdings mit Hilfe der Schädigungsmechanik und der Plastizitätstheorie beschrieben.

### 3.3 Kontinuumsschädigungsmechanik

Vom phänomenologischen Standpunkt aus gesehen, beschreibt die Kontinuumsschädigungsmechanik die Deterioration des Materials. Dies führt zur Degradation der mechanischen Eigenschaften und letztendlich zum Verlust der Materialintegrität. Die Ursache für die Deterioration des Materials kann auf eine Vielzahl physikalischer, thermischer und chemischer Prozesse zurückgeführt werden. Ein Versuch der Klassifizierung unterschiedlicher Schädigungsprozesse findet sich beispielsweise in *Lemaître* [139] oder *Tikhomirov* [216]. Die Kontinuumsschädigungsmechanik geht von einer idealisierten Betrachtung des Deteriorationsprozesses aus, so dass sich die Schädigung lediglich auf die elastischen Materialeigenschaften auswirkt, vergleiche Abbildung 3.1. Sie beschreibt im makroskopischen Sinne Versagensphänomene, deren Ursachen auf der Mikro- bzw. Mesoskala zu suchen sind. Da beispielsweise kohäsive Reibungsmaterialien wie Beton eine inhomogene Mikrostruktur aufweisen und schon im unbelasteten Zustand Mikrodefekte vorhanden sind, werden durch Spannungskonzentrationen in der Nähe dieser Defekte und der sich bildenden Grenzschichten Mikrorisse gebildet. Bei weiterer Belastung führt das zum Zusammenwachsen der Mikrorisse zu sichtbaren Rissen auf der Makroebene.

Die Anfänge der Kontinuumsschädigungsmechanik gehen auf *Kachanov* [116] zurück. Dieser führte eine skalare Größe ein, welche die Degradation des Materials beschreibt. Diese Größe wurde als Kontinuität des Materials  $\psi := (A_0 - A_d)/A_0$  bezeichnet.  $A_0$  kennzeichnet hierbei die ungeschädigte Fläche und  $A_d$  die geschädigte Fläche. In den 1970er Jahren wurde die Kontinuität durch die Schädigungsvariable  $d := A_d/A_0 = 1 - \psi$  mit  $0 \leq d \leq 1$  ersetzt. Darin beschreibt  $d = 0$  den ungeschädigten und  $d = 1$  den vollständig geschädigten Zustand des Materials. Dies bildet bis heute die Grundlage der isotropen Kontinuumsschädigungsmechanik. Für eine detaillierte Übersicht der geschichtlichen Entwicklungen sei in diesem Zusammenhang auf die Übersichtsbücher von *Kachanov* [117], *Krajcinovic* [120], *Krajcinovic & Lemaître* [121], *Lemaître* [139] sowie *Lemaître & Chaboche* [140] hingewiesen.

Im Gegensatz zur isotropen Kontinuumsschädigungsmechanik kann die Entwicklung der Beschreibung anisotroper Schädigung noch immer nicht als abgeschlossen bezeichnet werden. Es mangelt bis heute an einer einheitlichen Notation, vergleiche *Carol, Rizzi & Willam* [48]. Ein weiteres ungelöstes Problem stellt die physikalische Interpretierbarkeit der notwendigen Größen dar. Denn die Beschreibung anisotroper Schädigung innerhalb der Kontinuumsschädigungsmechanik erfordert die Einführung vektor- bzw. tensorwertiger Schädigungsvariablen, siehe beispielsweise *Betten* [36], *Carol, Rizzi & Willam* [48, 49, 50], *Cordebois & Sidoroff* [58], *Dragon, Halm & Desoyer* [79], *Jirásek* [111], *Murakami* [168], *Tikhomirov, Niekamp & Stein* [217], *Voyiadjis & Deliktas* [224] oder *Yazdani & Schreyer* [230]. Eine Zusammenstellung von Schädigungstensoren unterschiedlichster Ordnung findet man in *Skrzypek & Ganczarski* [207].

Zur Beschreibung der Degradation des Materials liegen in der Kontinuumsschädigungsmechanik unterschiedliche Ansätze vor. In der Literatur wird dabei zwischen dem Konzept der effektiven Spannungen, das von *Rabotnov* [194] eingeführt wurde, in Verbindung mit der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz nach *Lemaître* [137, 140], dem Konzept der effektiven Verzerrungen in Verbindung mit der Hypothese der Spannungsäquivalenz und dem Konzept der effektiven Verzerrungen bzw. Spannungen in Verbindung mit der Hypothese der Energieäquivalenz unterschieden, vergleiche hierzu *Cordebois & Sidoroff* [58] oder *Kuhl* [123]. Auf die unterschiedlichen Degradationsmodelle wird detailliert im Ab-

schnitt 5.2, zur Formulierung adäquater Degradationsmodelle für das Microplane Modell, eingegangen. Im Folgenden sollen verschiedene verzerrungsbasierte Schädigungsformulierungen, basierend auf dem Konzept der effektiven Spannungen in Kombination mit der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz, vorgestellt werden. Dieses Konzept beruht auf der Vorstellung, dass die Verzerrungen  $\epsilon$ , die im geschädigten Material mit  $\mathcal{E}^d$  unter den nominellen Spannungen  $\sigma$  auftreten, denen des ungeschädigten Materials mit  $\mathcal{E}^{el}$  unter den effektiven Spannungen  $\tilde{\sigma}$  entsprechen.

$$\epsilon = \mathcal{E}^{el-1} : \tilde{\sigma} = \mathcal{E}^{d-1} : \sigma \quad \text{mit} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{[1-d]} \quad (3.6)$$

Diese Vorgehensweise besitzt durch ihre einfache algorithmische Umsetzung und ihre Eignung zur Modellierung des Versagens kohäsiver Reibungsmaterialien gewisse Vorteile gegenüber den oben genannten Ansätzen.

### 3.3.1 Isotrope Schädigung

#### 2-Parameter Schädigungsmodell

Isotrope elastische Materialien werden durch zwei unabhängige elastische Konstanten beschrieben. Diese müssen unabhängig voneinander abgemindert werden, um eine allgemeine isotrope Schädigung wiedergeben zu können. Somit wird eine isotrope Schädigung durch zwei skalarwertige Schädigungsvariablen, im vorliegenden Fall die volumetrische und deviatorische Schädigungsvariable  $d_{vol}$  und  $d_{dev}$ , abgebildet. Diese beiden Schädigungsvariablen stellen die internen Variablen dar, so dass  $\alpha = \{d_{vol}, d_{dev}\}$  mit  $0 \leq d_{vol}, d_{dev} \leq 1$  gilt. Mit der Annahme kleiner Verzerrungen lässt sich der Verzerrungstensor in einen volumetrischen und deviatorischen Anteil zerlegen:

$$\epsilon = \epsilon_{vol} + \epsilon_{dev} \quad \text{mit} \quad \epsilon_{vol} = \frac{1}{3} [\epsilon : \mathbf{1}] \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \epsilon_{dev} = \epsilon - \frac{1}{3} [\epsilon : \mathbf{1}] \mathbf{1} \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{1}$  den zweistufigen Einheitstensor bezeichnet.

Darüber hinaus kann auch die freie Energie  $\Psi^{mac}$  additiv in einen volumetrisch bzw. deviatorisch geschädigten Anteil aufgespalten werden. Diese ergeben sich als die mit  $[1 - d_{vol}]$  bzw.  $[1 - d_{dev}]$  skalierten volumetrisch bzw. deviatorisch gespeicherten Energien des ungeschädigten Materials.

$$\Psi^{mac}(\epsilon_{vol}, \epsilon_{dev}, d_{vol}, d_{dev}) = \frac{3}{2} [1 - d_{vol}] K^{mac} \epsilon_{vol} : \epsilon_{vol} + [1 - d_{dev}] G^{mac} \epsilon_{dev} : \epsilon_{dev} \quad (3.8)$$

Damit lässt sich die Evolution der freien Energie angeben.

$$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{vol}} \dot{d}_{vol} + \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{dev}} \dot{d}_{dev} \quad (3.9)$$

Setzt man diese Evolution in die Clausius–Duhem Ungleichung (2.7) ein, so erhält man folgende Beziehung.

$$\mathcal{D}^{mac} = \left[ \sigma - \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \epsilon} \right] : \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{vol}} \dot{d}_{vol} - \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{dev}} \dot{d}_{dev} \geq 0 \quad (3.10)$$

Diese Ungleichung fordert, dass während eines Schädigungsprozesses die Dissipation nie negativ sein darf und liefert dementsprechend eine Restriktion für die Wahl der konstitutiven Gleichungen. Aufgrund von Argumenten der klassischen Thermodynamik, entsprechend *Coleman & Gurtin* [54] bzw. *Coleman & Noll* [55], wird der Klammerausdruck gleich null gesetzt. Dies liefert die Definition der Spannungen als thermodynamisch konjugierte Größe zu den Verzerrungen.

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \boldsymbol{\sigma}_{dev} = 3 [1 - d_{vol}] K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} + 2 [1 - d_{dev}] G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev} \quad (3.11)$$

Zusätzlich lassen sich die Energiefreisetzungsraten  $Y_V^{mac}$  und  $Y_D^{mac}$  als thermodynamisch konjugierte Größen zu den Schädigungsvariablen und somit als thermodynamische Kräfte ableiten.

$$Y_V^{mac} = -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{vol}} = \frac{3}{2} K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} : \boldsymbol{\epsilon}_{vol} \quad Y_D^{mac} = -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d_{dev}} = G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev} : \boldsymbol{\epsilon}_{dev} \quad (3.12)$$

Somit lautet die reduzierte Dissipationsungleichung wie folgt:

$$\mathcal{D}^{mac} = Y_V^{mac} \dot{d}_{vol} + Y_D^{mac} \dot{d}_{dev} \geq 0. \quad (3.13)$$

Der Schädigungszustand wird durch zwei unabhängige Schädigungsfunktionen  $\Phi_V^{mac}$  und  $\Phi_D^{mac}$  charakterisiert, die aus der Differenz einer Funktion der äquivalenten Verzerrung  $\eta_V^{mac}$  bzw.  $\eta_D^{mac}$  und den zugehörigen Schädigungsvariablen  $d_{vol}$  bzw.  $d_{dev}$  bestimmt werden.

$$\Phi_V^{mac} = \phi_V^{mac}(\eta_V^{mac}) - d_{vol} \leq 0 \quad \Phi_D^{mac} = \phi_D^{mac}(\eta_D^{mac}) - d_{dev} \leq 0 \quad (3.14)$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die äquivalenten Verzerrungen als Funktion der zugehörigen thermodynamischen Kraft, d. h. der jeweiligen Energiefreisetzungsrate, eingeführt werden. Somit stellen diese Energien eine Art lokal begrenzte Schranke dar, deren Überwindung zur Entstehung von Mikrorissen oder für das Zusammenwachsen von Mikrorissen zu Makrorissen nötig ist.

Die reduzierte Dissipationsungleichung (3.13) führt im Zusammenhang mit dem Postulat vom Maximum der Dissipation und den Schädigungsfunktionen  $\Phi_V^{mac}$  und  $\Phi_D^{mac}$  als Nebenbedingungen nach *Luenberger* [149] auf folgende Stationaritätsbedingung,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{mac} &= -\mathcal{D}^{mac} + \dot{\gamma}_V^{mac} \Phi_V^{mac} + \dot{\gamma}_D^{mac} \Phi_D^{mac} \\ &= -Y_V^{mac} \dot{d}_{vol} - Y_D^{mac} \dot{d}_{dev} + \dot{\gamma}_V^{mac} [\phi_V^{mac} - d_{vol}] + \dot{\gamma}_D^{mac} [\phi_D^{mac} - d_{dev}] \rightarrow \text{stat} \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei  $\dot{\gamma}_V^{mac}$  und  $\dot{\gamma}_D^{mac}$  die so genannten Lagrange-Parameter darstellen. Die Lösung dieses Optimierungsproblems führt auf die Evolutionsgleichungen der Schädigungsvariablen.

$$\dot{d}_{vol} = \dot{\gamma}_V^{mac} \frac{\partial \phi_V^{mac}}{\partial Y_V^{mac}} \quad \dot{d}_{dev} = \dot{\gamma}_D^{mac} \frac{\partial \phi_D^{mac}}{\partial Y_D^{mac}} \quad (3.16)$$

Zusätzlich lassen sich damit die Be- und Entlastungsvorschriften in Form der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingungen angeben.

$$\Phi_{V,D}^{mac} \leq 0 \quad \dot{\gamma}_{V,D}^{mac} \geq 0 \quad \Phi_{V,D}^{mac} \dot{\gamma}_{V,D}^{mac} = 0; \quad \dot{\Phi}_{V,D}^{mac} \dot{\gamma}_{V,D}^{mac} = 0 \quad (3.17)$$

Im Fall der Schädigungszunahme liefert die Auswertung der Konsistenzbedingungen nach *Simo & Ju* [204], unter Voraussetzung monoton steigender Funktionen  $\phi_{V,D}^{mac}$ , die Evolutionsgleichungen der Lagrange-Parameter.

$$\dot{\gamma}_V^{mac} = \dot{Y}_V^{mac} \geq 0 \quad \dot{\gamma}_D^{mac} = \dot{Y}_D^{mac} \geq 0 \quad (3.18)$$

Diese können im Sinne von *Simo & Ju* [204] als Geschichtsparameter identifiziert werden, wodurch sich die folgende explizite Darstellungsform der Schädigungsvariablen ergibt.

$$d_{vol} = \phi_V^{mac}(\gamma_V^{mac}) \quad d_{dev} = \phi_D^{mac}(\gamma_D^{mac}) \quad (3.19)$$

$$\text{mit} \quad \gamma_V^{mac} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_V^{mac}(t), \gamma_{0,V}^{mac}) \quad \gamma_D^{mac} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_D^{mac}(t), \gamma_{0,D}^{mac}) \quad (3.20)$$

Hierbei nehmen die Geschichtsparameter den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der jeweiligen äquivalenten Verzerrung (hier identisch den Energiefreisetzungsraten) an. Zusätzlich beschreiben die Variablen  $\gamma_{0,V}^{mac}$  und  $\gamma_{0,D}^{mac}$  so genannte Schädigungsschwellwerte.

Die Bestimmungsgleichung für die Spannungen (3.11) lässt sich unter Berücksichtigung des Sekantentensors  $\mathcal{E}_{sec}^d$  wie folgt umformulieren.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}_{sec}^d : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_{sec}^d = 3 [1 - d_{vol}] K^{mac} \mathcal{I}^{vol} + 2 [1 - d_{dev}] G^{mac} \mathcal{I}^{dev} \quad (3.21)$$

Darüber hinaus definiert die Ratenbeziehung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}_{tan}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  den vierstufigen Materialtensor  $\mathcal{E}_{tan}^d$  des 2-Parameter Schädigungsmodells.

$$\mathcal{E}_{tan}^d = \mathcal{E}_{sec}^d - \frac{\partial \phi_V^{mac}}{\partial \gamma_V^{mac}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{vol} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{vol}}{[1 - d_{vol}]^2} \frac{\partial \eta_V^{mac}}{\partial Y_V^{mac}} - \frac{\partial \phi_D^{mac}}{\partial \gamma_D^{mac}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{dev} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{dev}}{[1 - d_{dev}]^2} \frac{\partial \eta_D^{mac}}{\partial Y_D^{mac}} \quad (3.22)$$

Dieser nimmt aufgrund der Abhängigkeit der äquivalenten Verzerrungen von den Energiefreisetzungsraten eine symmetrische Struktur an. Im Sinne der Klassifizierung nach *Carol, Rizzi & Willam* [47] führt diese Herleitung auf assoziierte Schädigungsformulierungen.

### 1-Parameter Schädigungsmodell

Als Sonderfall des 2-Parameter Schädigungsmodells erhält man eine weitere Schädigungsformulierung. Das resultierende skalare 1-Parameter Schädigungsmodell basiert auf einer skalaren Schädigungsvariablen  $d^{mac}$  und stellt die gebräuchlichste Schädigungsformulierung dar. Für die spezielle Wahl von  $d_{vol} = d_{dev}$  im 2-Parameter Schädigungsmodell geht dieses direkt in das 1-Parameter Schädigungsmodell über. Die Formulierung mit einer skalaren Schädigungsvariablen wird in der Literatur oft fälschlicherweise als das isotrope Schädigungsmodell bezeichnet. Dieses Modell beschreibt jedoch nur eine spezielle Form der allgemeinen isotropen Schädigung, bei der impliziert wird, dass die Querdehnzahl von der Schädigung nicht betroffen sei, vergleiche *Ju* [115]. Die mathematische Beschreibung des 1-Parameter Schädigungsmodells kann mehr oder weniger als Standard bezeichnet werden. Deshalb wird an dieser Stelle nur eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen gegeben. Die freie Energiefunktion lässt sich dann folgendermaßen bestimmen.

$$\Psi^{mac}(\boldsymbol{\epsilon}, d^{mac}) = \frac{1}{2} [1 - d^{mac}] \boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.23)$$

Hieraus folgt die klassische Spannungs-Dehnungsbeziehung des 1-Parameter Schädigungsmodells.

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - d^{mac}] \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = [1 - d^{mac}] [3 K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} + 2 G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev}] \quad (3.24)$$

Weiterhin erfordert dieses Schädigungsmodell die Angabe einer Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mac}$ , die den Zustand der Schädigung angibt.

$$\Phi_d^{mac} = \phi^{mac}(\eta^{mac}) - d^{mac} \leq 0 \quad (3.25)$$

Die Schädigungsfunktion wird üblicherweise in Abhängigkeit einer äquivalenten Verzerrung  $\eta^{mac}$  formuliert. Eine Zusammenstellung diverser äquivalenter Verzerrungsmaße befindet sich in Anhang B. Das Wachstum der Schädigung wird somit über diese skalare äquivalente Verzerrungsgröße in Beziehung zur Deformation gesetzt. In Analogie zum 2-Parameter Schädigungsmodell ergibt sich folgendes Schädigungsgesetz,

$$d^{mac} = \phi^{mac}(\gamma^{mac}) \quad \text{mit} \quad \gamma^{mac} = \max_{-\infty < t < \tau} (\eta^{mac}(t), \gamma_0^{mac}) \quad (3.26)$$

wobei  $\gamma^{mac}$  die Geschichtsvariable bezeichnet. Diese entspricht dem Wert der in der Belastungsgeschichte maximal erreichten äquivalenten Verzerrung. Die Beziehung zwischen der Spannungsrate  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  und der Verzerrungsrate  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  definiert den Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d$  für das 1-Parameter Schädigungsmodell.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d - \frac{\partial \phi^{mac}}{\partial \gamma^{mac}} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{[1 - d^{mac}]} \otimes \frac{\partial \eta^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.27)$$

Hierin bezeichnet  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d$  den Sekantentensor mit  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d = [1 - d^{mac}] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$ .

### 3.3.2 Anisotrope Schädigung

Der bisher beschriebenen isotropen Schädigung liegt die Annahme einer richtungsunabhängigen Auswirkung von Mikrodefekten zugrunde. In spröden Materialien, wie beispielsweise Beton, treten jedoch vornehmlich Mikrorisse auf, die in der Regel unter Zugbeanspruchung nahezu orthogonal zur Richtung der maximalen Hauptspannungen angeordnet sind, so dass eine anisotrope Materialbeschreibung notwendig wird. Dies erfordert den Einsatz von tensorwertigen Schädigungsvariablen.

Im Rahmen der anisotropen Kontinuumsschädigungsmechanik kann entweder der Schädigungstensor  $\boldsymbol{\mathcal{D}}$  (*Cordebois & Sidoroff* [58], *Lemaître & Chaboche* [141]), der Tensor der konstitutiven Moduli  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}$  selbst (*Ju* [114], *Simo & Ju* [204]) oder der aufgrund der Schädigung modifizierte Nachgiebigkeitstensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed-1}$  (*Ortiz* [174]) als interne Variable zur Beschreibung des Schädigungszustandes eingeführt werden. Im Folgenden wird in Analogie zur isotropen Schädigung der Schädigungstensor  $\boldsymbol{\mathcal{D}}$  als interne Variable eingeführt. Die freie Energiefunktion lässt sich somit als Funktion der Verzerrungen und des Schädigungstensors darstellen.

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}(\boldsymbol{\mathcal{D}}) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.28)$$

Durch Auswertung der Clausius-Duhem Ungleichung erhält man unmittelbar die Definition des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}(\boldsymbol{\mathcal{D}}) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.29)$$

und die Definition der vierstufigen thermodynamischen Kraft  $\boldsymbol{Y}$ , die sich als konjugierte Größe zum Schädigungstensor ergibt

$$\boldsymbol{Y} := -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}} : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon} : \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}} \quad (3.30)$$

sowie die verbleibende Dissipationsungleichung.

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{mac} = \boldsymbol{Y} :: \boldsymbol{\mathcal{D}} \geq 0 \quad (3.31)$$

Über das Konzept der effektiven Spannungen und das Prinzip der Verzerrungsäquivalenz lassen sich die anisotropen Schädigungsformulierungen, basierend auf dem Schädigungstensor  $\mathcal{D}$  und dem Tensor der konstitutiven Moduli  $\mathcal{E}^{ed}$ , ineinander überführen, so dass  $\mathcal{E}^{ed} := [\mathcal{I} - \mathcal{D}] : \mathcal{E}^{el}$  gilt. Damit nimmt der Spannungstensor folgende Form an.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathcal{I} - \mathcal{D}] : \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.32)$$

Wird allerdings von sphärischen Defekten im Material, wie beispielsweise kugelförmigen Mikroporen, ausgegangen, rechtfertigt dies die Annahme einer isotropen Schädigung mit  $\mathcal{D} = d^{mac} \mathcal{I}^{sym}$ . Natürlich geht dann das vorgestellte anisotrope Schädigungsmodell in das skalare 1-Parameter Schädigungsmodell von Abschnitt 3.3.1 über, vergleiche *Ju* [115].

$$\mathcal{E}^{ed} = [1 - d^{mac}] \mathcal{E}^{el} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = [1 - d^{mac}] \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.33)$$

Selbstverständlich lässt sich damit auch ein Schädigungstensor für das 2-Parameter Schädigungsmodell ableiten. Der resultierende allgemeine isotrope Schädigungstensor lautet:

$$\mathcal{D} = d_{vol} \mathcal{I}^{vol} + d_{dev} \mathcal{I}^{dev}. \quad (3.34)$$

Für eine allgemeine anisotrope Darstellung hingegen erweist sich die Wahl geeigneter Evolutionsgleichungen für den Tensor der konstitutiven Moduli als schwierig. Die Interpretierbarkeit und die physikalische Bedeutung der einzelnen Tensorkomponenten stellt bis heute ein ungelöstes Problem dar. Eine elegante Motivation zur Herleitung anisotroper Stoffgesetze liefert dagegen das Microplane Konzept, welches das dreidimensionale Verhalten auf eine einfache Materialbeschreibung auf charakteristischen Ebenen reduziert. Das Microplane Konzept ist Gegenstand der nachfolgenden Kapitel.

## 3.4 Plastizitätstheorie

Einen alternativen Zugang zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens bietet die Plastizitätstheorie. Im Unterschied zur Kontinuumsschädigungsmechanik wird die nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehung der klassischen Plastizitätstheorie ausschließlich durch die Entstehung von irreversiblen Verformungen erzeugt. Dadurch bleiben die elastischen Materialeigenschaften unbeeinflusst und die Entlastung erfolgt linear elastisch, vergleiche hierzu Abbildung 3.1. Die Plastizitätstheorie stellt ein allgemein akzeptiertes Werkzeug zur Modellierung materieller Nichtlinearitäten dar, so dass auf eine ausführliche Darstellung der Theorie verzichtet wird. Detaillierte Abhandlungen dieser Theorie finden sich beispielsweise in den klassischen Werken von *Hill* [102] und *Nádai* [169] sowie in neueren Arbeiten von *Lemaître & Chaboche* [140], *Lubliner* [148], *Mandel* [152], *Miehe* [159] und *Simo & Hughes* [203].

In der Plastizitätstheorie muss zwischen der Deformationstheorie, die auf *Hencky* [101] zurückgeht, und der von *Prandtl & Reuss* [199] vorgestellten Fließtheorie unterschieden werden. In heutigen Plastizitätsformulierungen wird nahezu ausschließlich auf die Fließtheorie zurückgegriffen. Bei diesem Ansatz wird unter der postulierten Annahme kleiner Verzerrungen der Verzerrungstensor als auch dessen Ratenform additiv in einen elastischen (reversiblen) und plastischen (irreversiblen) Anteil zerlegt.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{el} + \boldsymbol{\epsilon}^{pl} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \quad (3.35)$$

Somit lässt sich nach *Lubliner* [148] die freie Energie  $\Psi^{mac}$  in einen elastischen  $\Psi_{el}^{mac}$  und einen plastischen Anteil  $\Psi_{pl}^{mac}$  aufspalten und in Abhängigkeit der Gesamtverzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  sowie der internen Variablen  $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}^{mac}\}$  angeben. Die internen Variablen werden durch die plastischen Verzerrungen und die Ver- bzw. Entfestigungsvariablen repräsentiert.

$$\Psi^{mac}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}^{mac}) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}] : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}] + \Psi_{pl}^{mac}(\boldsymbol{\kappa}^{mac}) \quad (3.36)$$

$\Psi_{pl}^{mac}$  charakterisiert ein noch nicht näher spezifiziertes Ver- bzw. Entfestigungsverhalten. Den Standardargumenten von *Coleman & Gurtin* [54] bzw. *Coleman & Noll* [55] folgend, liefert die Auswertung der Clausius–Duhem Ungleichung (2.7) folgende Definition der Spannungen als thermodynamisch konjugierte Größe zu den elastischen Verzerrungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{el}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}] \quad (3.37)$$

und eine reduzierte Dissipationsungleichung.

$$\mathcal{D}^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \mathbf{q}^{mac} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{mac} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}^{mac} = -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{mac}} \quad (3.38)$$

Hierbei bezeichnet die Variable  $\mathbf{q}^{mac}$  die thermodynamische Kraft zur konjugierten Verfestigungsvariablen  $\boldsymbol{\kappa}^{mac}$ .

Die Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mac}$ , die sich als Differenz der Vergleichsspannung  $\varphi_{pl}^{mac}$  und einer äquivalenten Fließspannung  $\sigma_Y^{mac}$  ergibt, und somit die zulässigen von den unzulässigen Zuständen abgrenzt, wird üblicherweise spannungsbasiert definiert.

$$\Phi_{pl}^{mac} = \varphi_{pl}^{mac}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}^{mac}) - \sigma_Y^{mac}(\mathbf{q}^{mac}) \leq 0 \quad (3.39)$$

Selbstverständlich sind auch im Verzerrungsraum definierte Plastizitätsformulierungen denkbar, siehe beispielsweise *Khan & Huang* [119] und *Naghdi & Trapp* [171]. Diese werden jedoch selten angewendet und sollen hier nicht weiter behandelt werden.

Die Dissipationsungleichung (3.38) kann nach *Luenberger* [149] unter Anwendung des Postulats vom Maximum der Dissipation in ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Fließbedingung (3.39) als Nebenbedingung, die über einen Lagrange–Parameter  $\dot{\lambda}^{mac}$  in die Formulierung einfließt, überführt werden. Wobei  $\dot{\lambda}^{mac}$  üblicherweise als plastischer Multiplikator bezeichnet wird. Dies führt auf folgende Stationaritätsbedingung.

$$\mathcal{L}^{mac} = -\mathcal{D}^{mac} + \dot{\lambda}^{mac} \Phi_{pl}^{mac} = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \mathbf{q}^{mac} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{mac} + \dot{\lambda}^{mac} [\varphi_{pl}^{mac} - \sigma_Y^{mac}] \rightarrow \text{stat} \quad (3.40)$$

Unter Berücksichtigung eines plastischen Potentials  $\Phi_{pl}^{mac*} = \Phi_{pl}^{mac}$  werden die Definitionen für die Evolutionsgleichungen der internen Variablen

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda}^{mac} \mathbf{m} \quad \text{mit} \quad \mathbf{m} := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{mac} = \dot{\lambda}^{mac} \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \mathbf{q}^{mac}} \quad (3.41)$$

sowie die Be- und Entlastungsvorschriften in Form der Karush–Kuhn–Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung aus obiger Stationaritätsbedingung gewonnen.

$$\Phi_{pl}^{mac} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{mac} \geq 0 \quad \Phi_{pl}^{mac} \dot{\lambda}^{mac} = 0; \quad \dot{\Phi}_{pl}^{mac} \dot{\lambda}^{mac} = 0 \quad (3.42)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingung liefert die Evolutionsgleichung des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}^{mac}$ ,

$$\dot{\lambda}^{mac} = \frac{\mathbf{n} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \mathbf{q}^{mac}} \cdot \mathbf{H}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \mathbf{q}^{mac}}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.43)$$

wobei der Tensor  $\mathbf{n}$  den Gradienten der Fließfläche bezeichnet.

Der Verfestigungsmodul  $\mathbf{H}^{mac}$  lässt sich aus der Ratenform der zur Verfestigungsvariablen  $\boldsymbol{\kappa}^{mac}$  konjugierten Variablen  $\mathbf{q}^{mac}$  bestimmen. Grundsätzlich wird zwischen einem isotropen und einem kinematischen Ver- bzw. Entfestigungsgesetz unterschieden.

$$\dot{\mathbf{q}}^{mac} = \mathbf{H}^{mac} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{mac} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{mac} = \frac{\partial \mathbf{q}^{mac}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{mac}} \quad (3.44)$$

Die Ratenbeziehung zwischen den Spannungen und Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{tan}^{pl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  liefert die Definition des vierstufigen plastischen Materialtensors  $\boldsymbol{\varepsilon}_{tan}^{pl}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tan}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}{\mathbf{n} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \mathbf{q}^{mac}} \cdot \mathbf{H}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \mathbf{q}^{mac}}} \quad (3.45)$$

Aufgrund der Herleitung über das Postulat vom Maximum der Dissipation entspricht die Richtung des plastischen Flusses  $\mathbf{m}$  dem Gradienten der Fließfläche  $\mathbf{n}$ , d. h.  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ , und es ergeben sich symmetrische plastische Materialtensoren. Dies führt auf eine assoziierte Fließregel und wird auch als Normalenregel bezeichnet. Weiterhin wird dadurch von der Forderung nach Konvexität der Fließfläche ausgegangen. Im allgemeinen Fall einer nicht-assozierten Fließregel wird jedoch das plastische Potential  $\Phi_{pl}^{mac*}$  unabhängig von der Fließfläche  $\Phi_{pl}^{mac}$  definiert.

Auf die Charakterisierung der unterschiedlichen Fließflächen und der plastischen Potentiale soll an dieser Stelle verzichtet werden. Es sollen in diesem Zusammenhang nur die klassischen Versagenskriterien von *Drucker–Prager* [80], *Mohr* [162], *Mohr–Coulomb* [162], *Tresca* [219] und *von Mises* [223] erwähnt werden. Eine Zusammenstellung weiterführender Versagenskriterien findet sich in *Chen & Saleeb* [51] und *Jirásek & Bažant* [112].

### 3.5 Kopplung von Schädigung und Plastizität

Während Schädigungsmodelle sich aus der Entstehung von Mikrorissen und deren Zusammenschluss zu Makrorissen motivieren, gründet sich die Plastizitätstheorie auf die durch einen Gleitvorgang entstehenden irreversiblen Verzerrungen. Die in dieser Arbeit untersuchte Materialklasse weist beide Phänomene auf, wodurch es zu einem komplexen Zusammenwirken einer Degradation der elastischen Festigkeitseigenschaften mit irreversiblen Verzerrungen kommt. Dadurch bewegen sich die Entlastungskurven zwischen denen der beiden Extremfälle (reine Schädigung und reine Plastizität) in Abbildung 3.1. Dieses Materialverhalten lässt sich insbesondere durch eine Kopplung der Kontinuumsschädigungsmechanik aus Abschnitt 3.3 mit der Plastizitätstheorie aus Abschnitt 3.4 modellieren. Der Klassifizierung von *Jirásek* [111, 112] folgend lassen sich zumindest zwei unterschiedliche Ansätze zur Modellierung der Kopplung von Schädigung und Plastizität in der Literatur unterscheiden. Der erste Ansatz geht auf die Arbeiten von *Simo & Ju* [204]

und *Ju* [114] zurück und basiert auf dem Konzept der effektiven Spannungen. Anstelle der Annahme eines rein elastischen Basismaterials, wie bei reinen Schädigungsmodellen, ist prinzipiell jedes andere Stoffgesetz für das Basismaterial denkbar, beispielsweise wie im vorliegenden Fall die Plastizität. Bei der zweiten Möglichkeit wird ein bestehendes Schädigungsmodell durch zusätzliche permanente Verzerrungen, die über ein Evolutionsgesetz ähnlich einer Fließregel bestimmt werden, ergänzt. Diese Beschreibungsweise wurde von *Ortiz* [174] vorgeschlagen und von *Yazdani* [229, 230] weiterentwickelt. Eine sehr gute zusammenfassende und allgemeine Beschreibung der Kopplung von Schädigung und Plastizität bietet die Übersichtsveröffentlichung von *Marotti de Sciarra* [153], aus der sich einige der gängigsten Formulierungen, wie die von *Borino, Fuschi & Polizzotto* [37], *Hansen & Schreyer* [96], *Ju* [114], *Mazars & Pijaudier-Cabot* [155] und *Zhu & Cescotto* [231], ableiten lassen.

Im Folgenden soll auf den Ansatz von *Ju* [114] zurückgegriffen werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Schädigungsbedingung im Verzerrungsraum definiert ist, da laut *Ju* [114] eine spannungsbasierte Schädigungsformulierung bei Berücksichtigung plastischer Effekte physikalisch nicht sinnvoll erscheint. Auf der anderen Seite findet plastisches Fließen im geschädigten Material merklich früher statt als im ungeschädigten Material. Aus diesem Grund wird die Plastizität im effektiven Spannungsraum formuliert.

Da es sich bei der folgenden Materialformulierung um eine Kombination eines Schädigungs- und Plastizitätsmodell handelt, gelten dieselben Annahmen wie für die beiden Einzelmodelle. Entsprechend Gleichung (3.35) werden die Verzerrungen in einen elastischen und plastischen Anteil zerlegt. Der Vektor der internen Variablen lässt sich durch die internen Variablen der Einzelmodelle beschreiben, so dass  $\alpha = \{\epsilon^{pl}, \kappa^{mac}, d^{mac}\}$  gilt. Ausgangspunkt für die Herleitung des gekoppelten Materialmodells stellt die freie Energie  $\Psi^{mac}$  dar. Um nun sowohl Schädigungs- als auch Fließmechanismen zu berücksichtigen, wird folgende freie Energie betrachtet,

$$\Psi^{mac}(\epsilon, \epsilon^{pl}, \kappa^{mac}, d^{mac}) = [1 - d^{mac}] \Psi^{*mac}(\epsilon, \epsilon^{pl}, \kappa^{mac}) \quad (3.46)$$

wobei  $\Psi^{*mac}(\epsilon, \epsilon^{pl}, \kappa^{mac}) = \Psi_{el}^{mac}(\epsilon, \epsilon^{pl}) + \Psi_{pl}^{mac}(\kappa^{mac})$  der freien Energie des reinen Plastizitätsmodells des vorigen Abschnitts entspricht und sich dementsprechend additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen lässt.

Die Definition der konstitutiven Spannungen ergeben sich, entsprechend den Argumenten der Thermodynamik nach *Coleman & Gurtin* [54] bzw. *Coleman & Noll* [55], wiederum aus der freien Energie als konjugierte Variable zu den elastischen Verzerrungen.

$$\sigma := \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \epsilon^{el}} = [1 - d^{mac}] \mathcal{E}^{el} : \epsilon^{el} \quad (3.47)$$

Weiterhin ergeben sich die thermodynamischen Kräfte der Schädigung und Plastizität als konjugierte Größen zu den internen Variablen,

$$Y^{mac} := -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial d^{mac}} = \Psi^{*mac}; \quad \sigma := -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \epsilon^{pl}} \quad \mathbf{q}^{mac} := -\frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \kappa^{mac}} \quad (3.48)$$

die im Falle der Schädigung als Energiefreisetzungsrate identifiziert wird. Damit lässt sich eine reduzierte Dissipationsungleichung als Produkt der thermodynamischen Kräfte mit der Rate der konjugierten internen Variablen angeben.

$$\mathcal{D}^{mac} = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl} + \mathbf{q}^{mac} \cdot \dot{\kappa}^{mac} + Y^{mac} \dot{d}^{mac} \geq 0 \quad (3.49)$$

In Analogie zu den beiden Einzelmodellen wird der Schädigungs- bzw. Plastizitätsprozess durch eine Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mac}$  bzw. Fließbedingung  $\Phi_{pl}^{mac}$  bestimmt.

$$\Phi_d^{mac} = \phi^{mac}(\eta^{mac}) - d^{mac} \leq 0 \quad \Phi_{pl}^{mac} = \varphi_{pl}^{mac}(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{q}}^{mac}) - \sigma_Y^{mac}(\tilde{\mathbf{q}}^{mac}) \leq 0 \quad (3.50)$$

Wie schon erwähnt, ist die Schädigungsfunktion im Verzerrungsraum definiert, wobei die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mac}$  durch die Energiefreisetzungsrate  $Y^{mac}$  charakterisiert wird. Des Weiteren ist die Fließbedingung im effektiven Spannungsraum formuliert. Zusätzlich zu den effektiven Spannungen, die als mit der geschädigten Fläche gewichteten nominellen Spannungen verstanden werden können, wird auch die zur Verfestigungsvariablen  $\kappa^{mac}$  konjugierte Variable  $\mathbf{q}^{mac}$  im effektiven Spannungsraum dargestellt.

$$\tilde{\sigma} := \frac{\sigma}{1 - d^{mac}} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{mac} := \frac{\mathbf{q}^{mac}}{1 - d^{mac}} \quad (3.51)$$

Wiederum lässt sich mit Hilfe der reduzierten Dissipationsungleichung (3.49) in Verbindung mit dem Postulat vom Maximum der Dissipation ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Schädigungsfunktion und der Fließbedingung (3.50) als Nebenbedingungen aufstellen. Daraus ergibt sich folgende Stationaritätsbedingung.

$$\mathcal{L}^{mac} = -\mathcal{D}^{mac} + \dot{\lambda}^{mac} \Phi_{pl}^{mac} + \dot{\gamma}^{mac} \Phi_d^{mac} \rightarrow \text{stat} \quad (3.52)$$

Die Lösung dieses Optimierungsproblems liefert die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen der Schädigung  $d^{mac}$  und der Plastizität  $\epsilon^{pl}$  und  $\kappa^{mac}$  unter Berücksichtigung eines plastischen Potentials  $\Phi_{pl}^{mac*} = \Phi_{pl}^{mac}$ .

$$\dot{d}^{mac} = \dot{\gamma}^{mac} \frac{\partial \phi^{mac}}{\partial Y^{mac}}; \quad \dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{mac} \tilde{\mathbf{m}} \quad \dot{\kappa}^{mac} = \dot{\lambda}^{mac} \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}} \quad (3.53)$$

Hierbei bezeichnet  $\dot{\lambda}^{mac}$  den effektiven plastischen Multiplikator,  $\tilde{\mathbf{m}}$  die Richtung des plastischen Flusses und  $\tilde{\mathbf{n}}$  den Gradienten der Fließfläche im effektiven Spannungsraum.

$$\dot{\lambda}^{mac} = \frac{\dot{\lambda}^{mac}}{1 - d^{mac}} \quad \tilde{\mathbf{m}} = \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\sigma}} \quad \tilde{\mathbf{n}} = \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (3.54)$$

Des Weiteren liefert die Lösung des Optimierungsproblems die Karush–Kuhn–Tucker Be- und Entlastungsbedingungen und die Konsistenzbedingungen des Schädigungs- bzw. Plastizitätsprozesses in gewohnter Form.

$$\begin{aligned} \Phi_d^{mac} \leq 0 & \quad \dot{\gamma}^{mac} \geq 0 & \quad \Phi_d^{mac} \dot{\gamma}^{mac} = 0; & \quad \dot{\Phi}_d^{mac} \dot{\gamma}^{mac} = 0 \\ \Phi_{pl}^{mac} \leq 0 & \quad \dot{\lambda}^{mac} \geq 0 & \quad \Phi_{pl}^{mac} \dot{\lambda}^{mac} = 0; & \quad \dot{\Phi}_{pl}^{mac} \dot{\lambda}^{mac} = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingungen liefert unmittelbar die Evolutionsgleichungen der Lagrange–Multiplikatoren der Schädigung  $\dot{\gamma}^{mac}$  und der Plastizität  $\dot{\lambda}^{mac}$ ,

$$\dot{\gamma}^{mac} = \dot{Y}^{mac} \quad \dot{\lambda}^{mac} = \frac{\tilde{\mathbf{n}} : \mathcal{E}^{el} : \dot{\epsilon}}{\tilde{\mathbf{n}} : \mathcal{E}^{el} : \tilde{\mathbf{m}} - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}} \cdot \mathbf{H}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}}} \quad (3.56)$$

wobei  $\mathbf{H}^{mac}$  den Verfestigungsmodul beschreibt. Dieser ergibt sich aus der Ratenform der zur Verfestigungsvariablen konjugierten effektiven Variablen  $\tilde{\mathbf{q}}^{mac}$ .

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{mac} = \mathbf{H}^{mac} \cdot \dot{\kappa}^{mac} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{mac} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}}{\partial \kappa^{mac}} \quad (3.57)$$

In Analogie zum reinen Schädigungsmodell erhält man nach *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] eine direkte Bestimmungsgleichung für die Schädigungsvariable,

$$d^{mac} = \phi^{mac}(\gamma^{mac}) \quad \text{mit} \quad \gamma^{mac} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y^{mac}(t), \gamma_0^{mac}) \quad (3.58)$$

so dass  $\gamma^{mac}$  als Geschichtsparameter identifiziert werden kann. Dieser ergibt sich wiederum als der in der Belastungsgeschichte maximal erreichte Wert der äquivalenten Verzerrung, die hier der Energiefreisetzungsrates entspricht.

Mit Hilfe der Gleichung (3.47) lässt sich die Rate der Spannungen wie folgt angeben.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [1 - d^{mac}] \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d}^{mac} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.59)$$

Diese Ratenbeziehung führt auf die Bestimmungsgleichung für den Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{dp} := d\boldsymbol{\sigma} / d\boldsymbol{\epsilon}$  der gekoppelten Schädigungs- und Plastizitätsformulierung.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{dp} = & [1 - d^{mac}] \left[ \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \tilde{\mathbf{m}} \otimes \tilde{\mathbf{n}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}}{\tilde{\mathbf{n}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \tilde{\mathbf{m}} - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}} \cdot \mathbf{H}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}}} \right] - \frac{\partial \phi^{mac}}{\partial \gamma^{mac}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ & + \frac{\partial \phi^{mac}}{\partial \gamma^{mac}} \left[ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{m}} - \tilde{\mathbf{q}}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}} \right] \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \tilde{\mathbf{n}}}{\tilde{\mathbf{n}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \tilde{\mathbf{m}} - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}} \cdot \mathbf{H}^{mac} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mac*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mac}}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die erste Zeile des Materialtensors des gekoppelten Modells setzt sich aus den Materialtensoren der Einzelmodelle (3.27) und (3.45) zusammen. Der große Klammerausdruck der ersten Zeile entspricht dem Materialtensor des reinen Plastizitätsmodells mit dem Unterschied, dass dieser Ausdruck beim gekoppelten Modell im effektiven Spannungsraum formuliert ist. Die zweite Zeile enthält sowohl Anteile der Schädigung als auch Anteile der Plastizität und spiegelt somit die Kopplung der beiden Einzelmodelle wieder.

### Modellproblem: Einaxialer Zug

Das Materialverhalten des kombinierten Schädigungs- und Plastizitätsmodells wird am Beispiel des einaxialen Zuges eines Einheitswürfels mit der Kantenlänge 1 mm im ebenen Verzerrungszustand verdeutlicht. Bei diesem Modellproblem werden die elastischen Parameter zu  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.2$  gewählt. Weiterhin wurde das klassische von Mises Kriterium als Fließfunktion angenommen, so dass  $\Phi_{pl}^{mac} = \sqrt{3} \tilde{J}_2 - \sigma_0^{mac} + \tilde{q}^{mac} \leq 0$ . Hierbei bezeichnet  $\tilde{J}_2$  die zweite Invariante der effektiven deviatorischen Spannungen. Es wird von einem linearen Verfestigungsverhalten mit  $\tilde{q}^{mac} = -H \kappa^{mac}$  ausgegangen. Der Anfangswert der Fließspannung wurde zu  $\sigma_0^{mac} = 1.2 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Des Weiteren wird eine Schädigungsentwicklung nach *Peerlings, de Borst, Brekelmans & de Vree* [184] mit  $d^{mac} = 1 - \gamma_0^{mac} / \gamma^{mac} [1 - \alpha^{mac} + \alpha^{mac} \exp[\beta^{mac} [\gamma_0^{mac} - \gamma^{mac}]]]$  angenommen. Die zugehörigen Parameter werden zu  $\beta^{mac} = 30$ ,  $\alpha^{mac} = 0.95$  und  $\gamma_0^{mac} = 0.0065$  gewählt, so dass plastisches Fließen und die Schädigung des Materials nahezu gleichzeitig einsetzen. Die äquivalente Verzerrung wird nach *Simo & Ju* [204] in Abhängigkeit der Verzerrungsenergie definiert. Dabei werden im Folgenden zwei Fälle unterschieden. Die äquivalente Verzerrung kann entweder als Funktion der elastischen Verzerrungen  $\eta^{mac}(\boldsymbol{\epsilon}^{el}) := \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^{el} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}^{el}}$  oder der totalen Verzerrungen  $\eta^{mac}(\boldsymbol{\epsilon}) := \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}}$  angegeben werden.

Abbildung 3.2, links, zeigt die resultierenden Materialantworten für reine Schädigung

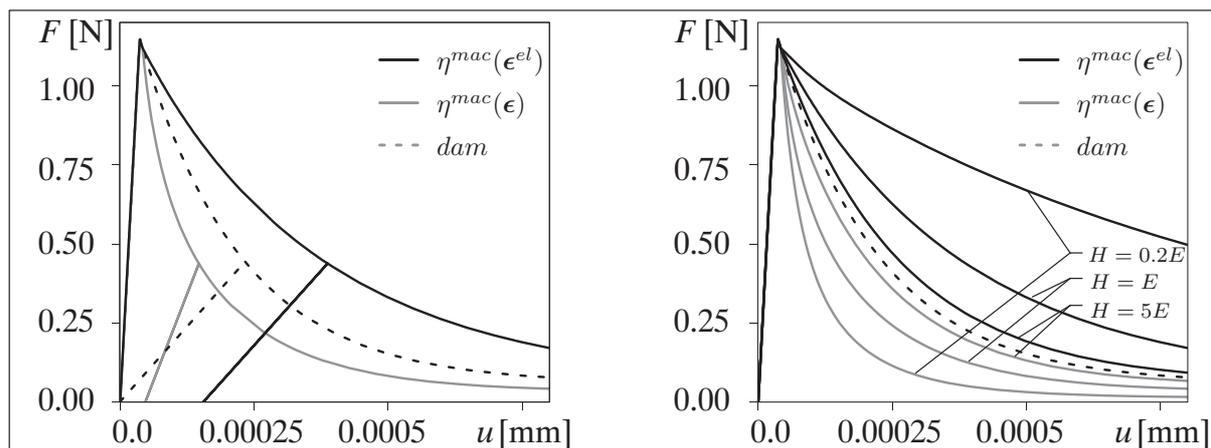


Abbildung 3.2: Last-Verschiebungsdiagramme für den einaxialen Zug

(*dam*), kombinierte Schädigung und Plastizität basierend auf den elastischen  $\eta^{mac}(\epsilon^{el})$  oder den totalen Verzerrungen  $\eta^{mac}(\epsilon)$  mit einem Verfestigungsmodul von  $H = E$ . Ein Vergleich zeigt, dass die Antwort für  $\eta^{mac}(\epsilon^{el})$  eine höhere Duktilität gegenüber den anderen Antworten aufweist. Dies ist auf das langsamere Anwachsen der elastischen Verzerrungen im Vergleich zu den totalen Verzerrungen zurückzuführen. Die Entlastungspfade der beiden gekoppelten Modelle weisen sowohl irreversible Dehnungen als auch eine Reduktion der Festigkeiten auf. Da für  $\eta^{mac}(\epsilon^{el})$  die Schädigung durch die effektiven Spannungen bestimmt wird, kommt es zur gleichen Steifigkeitsreduktion wie beim reinen Schädigungsmodell.

Das rechte Diagramm in Abbildung 3.2 zeigt zusätzlich die resultierenden Antworten mit einem Verfestigungsmodul von  $H = 0.2E$ ,  $H = E$  und  $H = 5E$ . Es ist deutlich die Tendenz erkennbar, dass sich die Antworten von  $\eta^{mac}(\epsilon^{el})$  und  $\eta^{mac}(\epsilon)$  mit steigendem Verfestigungsmodul der Lösung des reinen Schädigungsmodells (*dam*) nähern.

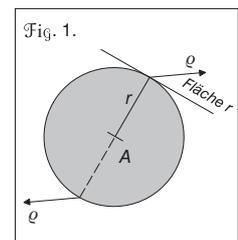


# Kapitel 4

## Microplane Theorie



“Wir bezeichnen mit  $A$  einen Punkt des Körpers, dessen Zustand inbetracht gezogen werden soll, und denken uns zu diesem Zweck eine unendlich kleine Kugel vom Mittelpunkte  $A$  aus dem Körper herausgeschnitten. Die Gesamtheit der Spannungen aller Oberflächenelemente dieser Kugel, die in unendlicher Vergrößerung in Fig. 1 abgebildet ist, bildet den Spannungszustand des Körperpunktes  $A$ .” [162]



Otto Mohr (1835-1918) [170]

### 4.1 Einführung

Wenn auch für eine breite Klasse von Materialien im elastischen Bereich die Annahme einer isotropen Materialantwort gerechtfertigt erscheint, so ist diese Materialeigenschaft, falls Materialien inelastisches Verhalten zeigen, nicht länger beobachtbar. Die Entwicklung von Mikrorissen und deren Zusammenschluss zu Makrorissen in quasi-spröden Materialien wie Beton sowie das plastische Fließen kristalliner Materialien ist ein richtungsabhängiger Prozess. Die realistische Wiedergabe dieser Anisotropien führt im Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie oder Schädigungsmechanik zu komplexen dreidimensionalen Materialmodellen, deren Materialparameter nur sehr schwer sinnvoll identifizierbar sind. Im Gegensatz dazu liefert die Microplane Theorie eine elegante Motivation zur Herleitung anisotroper Stoffgesetze mit einer natürlichen Interpretierbarkeit der zugehörigen Materialparameter bei einfachen konstitutiven Gesetzen auf den einzelnen Materialebenen. Allerdings konnte in den letzten Jahren festgestellt werden, dass die vereinfachte Annahme von einaxialen („entkoppelten“) Stoffgesetzen in Microplane Formulierungen nicht ausreichend ist, um das komplexe makroskopische Antwortverhalten von kohäsiven Reibungsmaterialien realistisch darzustellen. Dies äußert sich beispielsweise darin, dass diese Microplane Formulierungen nicht in der Lage sind, den so genannten Reynoldseffekt wiederzugeben, dessen natürliche Konsequenz die für Beton charakteristische Volumendilatation [136] ist. Die These, dass dies allein durch den Homogenisierungsprozess gewährleistet wird, kann damit nicht aufrechterhalten werden. Zur Beschreibung des Materialverhaltens von Beton ist es daher zwingend notwendig, analog zu makroskopischen Materialmodellen, die unterschiedlichen Stoffgesetze der einzelnen Komponenten zu verknüpfen. Dies wurde bisher

nur im schwachen Sinne einbezogen, siehe *Carol, Prat & Bažant* [46]. Allerdings reichen beim Microplane Modell, im Gegensatz zu makroskopischen Materialmodellen, einfache („isotrope“) Stoffgesetze auf den einzelnen Ebenen zur Beschreibung des makroskopisch anisotropen Materialverhaltens aus.

Im Folgenden wird kurz auf die wichtigsten Eckpunkte der Geschichte der Microplane Theorie eingegangen. Zusätzlich werden die neuesten Entwicklungen und Erkenntnisse der Microplane Theorie aufgezeigt. Ein detaillierter zeitlicher Überblick findet sich beispielsweise in *Bažant & Planas* [28] und *Kuhl* [123]. Der Begriff „*Microplane*“ wird heute unweigerlich mit den Namen *Bažant* in Verbindung gebracht, der diesen Begriff Mitte der 1980er Jahre einführte. Dabei ist die Idee der Charakterisierung des Materialverhaltens auf verschiedenen Materialebenen schon über hundert Jahre alt und geht auf obiges Zitat von *Mohr* [162] zurück. *Taylor* [215] wandte diese Idee auf das plastische Fließen kristalliner Materialien an. Dies führte später auf die Entwicklung der Gleitebenentheorie im Rahmen der Kristallplastizität, siehe *Batdorf & Budiansky* [11]. Allerdings wurde dieses Konzept erst gegen Ende der 1980er Jahre von *Bažant et al.* [21, 24, 30] im Rahmen der Schädigungsmechanik umgesetzt. Das daraus resultierende Microplane Modell von *Bažant & Prat* [30] bildete die Grundlage für zahlreiche weiterführende Arbeiten. Die Motivation, diese Idee auf die Modellierung quasi-spröder Materialien anzuwenden, basiert auf der Vorstellung, dass auch Beton zwischen den festen Zuschlägen und dem weichen Zementstein ausgezeichnete Ebenen in Form von Grenzschichten besitzt, vergleiche Abbildung 4.1. Während die Modelle der Gleitebenentheorie die statische Projektion (*Static Constraint*) verwenden, basiert das Microplane Konzept auf der kinematischen Projektion, den so genannten *Kinematic Constraint*. Dies ist auf die Schwierigkeiten der statischen Projektion bei der numerischen Umsetzung und der Modellierung der in kohäsiven Reibungsmaterialien auftretenden Versagensmechanismen zurückzuführen. Die kinematische Projektion liefert in diesem Zusammenhang die gewünschte erforderliche numerische Stabilität. Des Weiteren eignet sich das Microplane Modell, verglichen mit makroskopisch orientierten Stoffgesetzen, insbesondere für die Darstellung des Versagensverhaltens von Beton unter Druckbeanspruchung, siehe *Ožbolt, Meštrovic, Li & Eligehausen* [178]. In jüngster Zeit konnten die Effekte der Mikrorisschließung und die Hystereseffekte unter zyklischer Belastung erfolgreich simuliert werden, vergleiche *Ožbolt et al.* [175, 177]. *Carol & Bažant* [42] ist es gelungen die ursprünglichen Microplane Modelle, die auf die Modellierung von Schädigung beschränkt sind, im Rahmen einer anisotropen Plastizitätstheorie zu formulieren. Dieser Ansatz wurde von *Brocca & Bažant* [39] und *Kuhl, Ramm & Willam* [131] erfolgreich auf die Metallplastizität übertragen. Dabei konnten auch erste Erfolge zur Ermittlung der Materialcharakteristiken der Mikroebenen im Rahmen dieser Plasti-

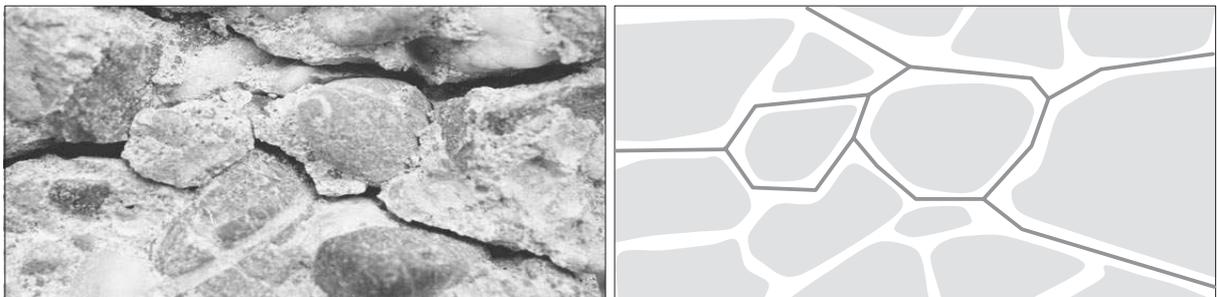


Abbildung 4.1: Motivation des Microplane Modells für kohäsive Reibungsmaterialien [123]

zitätsformulierungen aus makroskopischen Versagensphänomenen erzielt werden. Das von Jirásek [110, 111] vorgeschlagene Microplane-basierte Kontinuumsschädigungsmodell versucht eine Brücke zwischen Microplane und klassischen Schädigungsmodellen zu schlagen. Dieses Modell basiert im Unterschied zu den Microplane Schädigungsmodellen, die im Allgemeinen auf der Verzerrungsäquivalenz gründen, auf der Annahme der Energieäquivalenz und wird in zahlreichen weiterführenden Arbeiten von Jirásek [93, 181] verwendet.

Durch die Einführung des *Stress-Strain Boundary* Konzeptes von Bažant *et al.* [31] konnte ein Modellfehler des Basismodells, der von Jirásek [109] aufgezeigt wurde, behoben werden. Weitere Modifikationen führten auf das kürzlich präsentierte Microplane Modell M4, [19, 112]. Dieses Microplane Modell erzielt exzellente Ergebnisse bei der Modellierung versagensinduzierter Anisotropie in Beton und Fels, siehe [20, 32, 40, 41]. Weiterhin wurde dieses Modell zur Modellierung hochfesten Betons eingesetzt, [92].

Da die bisherigen Modelle dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht genügten, wurden in der jüngeren Vergangenheit intensive Bemühungen unternommen, eine fundierte mechanische Basis für dieses Modell zu finden. So konnte das Microplane Konzept in eine thermodynamisch konsistente Theorie eingebettet werden, [44, 123, 132]. Die bisherigen Microplane Modelle weisen, wie von Kuhl & Ramm [128] und Leukart & Ramm [143] gezeigt wurde, weitere mechanische Defizite auf. Deshalb wurde von Leukart & Ramm [143] an einer mechanisch sinnvolleren Basis für Microplane Modelle gearbeitet, die die bekannten Defizite der bisherigen Ansätze beheben. Zusätzlich spiegeln sich damit makroskopische Effekte direkt auf der Mikroebene wieder, [142].

Um kontinuumsmechanische Untersuchungen im Rahmen der Finite Element Methode auch im Entfestigungsbereich zuverlässig durchführen zu können, wurde das Microplane Konzept von Kuhl, Ramm & de Borst [126, 127, 129] um eine geeignete Regularisierungsstrategie im Sinne eines Gradientenkontinuums [1, 2] erweitert. Weiterhin wurde von Tikhomirov [216] gezeigt, dass sich die Ideen des Microplane Konzeptes auf natürliche Weise auf die Modellierung des Verbundverhaltens von Stahlbeton übertragen lassen. Mit Hilfe der Diskrete Element Methode konnten in den vergangenen Jahren zusätzlich wesentliche Erfahrungen bei der Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien gesammelt werden, siehe D'Addetta *et al.* [61, 62, 63]. So konnten über einen theoretischen Vergleich zwischen einem diskontinuierlichen Modell und dem Microplane Modell bemerkenswerte Ähnlichkeiten aufgezeigt werden, vergleiche Kuhl *et al.* [123, 124] und Ramm, D'Addetta & Leukart [195, 196].

In jüngster Zeit wurden erste Versuche unternommen, das Microplane Modell hinsichtlich finiter Deformationen zu erweitern, [17, 40]. Allerdings ist es bis heute noch nicht gelungen, eine einheitliche und allgemein akzeptierte Theorie zur Beschreibung finiter Deformationen mit dem Microplane Modell bereitzustellen. Ein vielversprechender Ansatz in dieser Richtung findet sich in der jüngsten Arbeit von Carol, Jirásek & Bažant [45].

In der Literatur finden sich weitere Materialformulierungen, die das Materialverhalten in verschiedene Richtungen charakterisieren. Zu erwähnen wären in diesem Zusammenhang die so genannten *Multilaminate Modelle* [191, 233], der *Critical Plane Approach* [164, 190] und der *N-Directional Approach* [5, 198]. Eine dem Microplane Modell verwandte Formulierung wurde kürzlich von Lulei [150] zur Modellierung gummiartiger Polymere, bei denen die Richtung der Ebenen durch die Ausrichtung der Polymerketten vorgegeben ist, vorgestellt. Ein weiteres Microplane-ähnliches Modell geht auf Fichant, la Borderie & Pijaudier-Cabot [85, 86] zurück.

Die Philosophie des Microplane Modells lässt sich sehr gut in die Philosophie der Fini-

te Element Methode integrieren, vergleiche Abbildung 4.2. Die Finite Element Methode stellt dabei eine Diskretisierung des Raumes dar, während das Microplane Modell zusätzlich am Materialpunkt eine Diskretisierung über alle Raumrichtungen wiedergibt. Diese Diskretisierungszusammenhänge sind zur Verdeutlichung in Abbildung 4.3 skizziert. Bei beiden werden Energieprinzipien genutzt um Gleichgewichtsbeziehungen und Steifigkeiten abzuleiten. Während bei der Finite Element Methode, basierend auf einem reinen Verschiebungsansatz, das PvV verwendet wird, werden beim Microplane Modell für den Homogenisierungsprozess Energieprinzipien herangezogen, auf die im Folgenden noch detaillierter eingegangen wird. Weiterhin lässt sich das Microplane Modell durch die Verwendung der kinematischen Projektion gut in das Finite Element Konzept integrieren. Denn bei der Finite Element Methode wird die Kinematik über die Ansatzfunktionen beschrieben, während beim Microplane Modell die Kinematik der Raumrichtungen über die kinematische Projektion bestimmt wird. Diese Zusammenhänge werden in Abbildung 4.2 verdeutlicht. Dort ist zusätzlich das typische Vorgehen bei klassischen makroskopischen Materialmodellen, wie die in Kapitel 3 hergeleiteten, gestrichelt angedeutet.

Die Microplane Theorie lässt sich in drei Schritte aufteilen, Abbildung 4.2. Der erste Schritt stellt die Projektion dar. Um die makroskopischen Verzerrungen mit deren Gegenstück auf der Mikroebene in Verbindung zu bringen, wird im Folgenden die kinematische Projektion benutzt. Die kinematische Projektion geht davon aus, dass die Microplane Verzerrungen dem projizierten makroskopischen Verzerrungstensor entsprechen. Somit erhält man die Verzerrungskomponenten der einzelnen Ebenen als Projektion des makroskopischen Verzerrungstensors. Im Gegensatz dazu werden bei der statischen Projektion die Spannungen projiziert. Auf diesen Schritt wird im folgenden Abschnitt noch verstärkt eingegangen. Der zweite Schritt umfasst die Definition von konstitutiven Gesetzen auf der Mikroebene. Der Hauptvorteil des Microplane Modells liegt in der Einfachheit

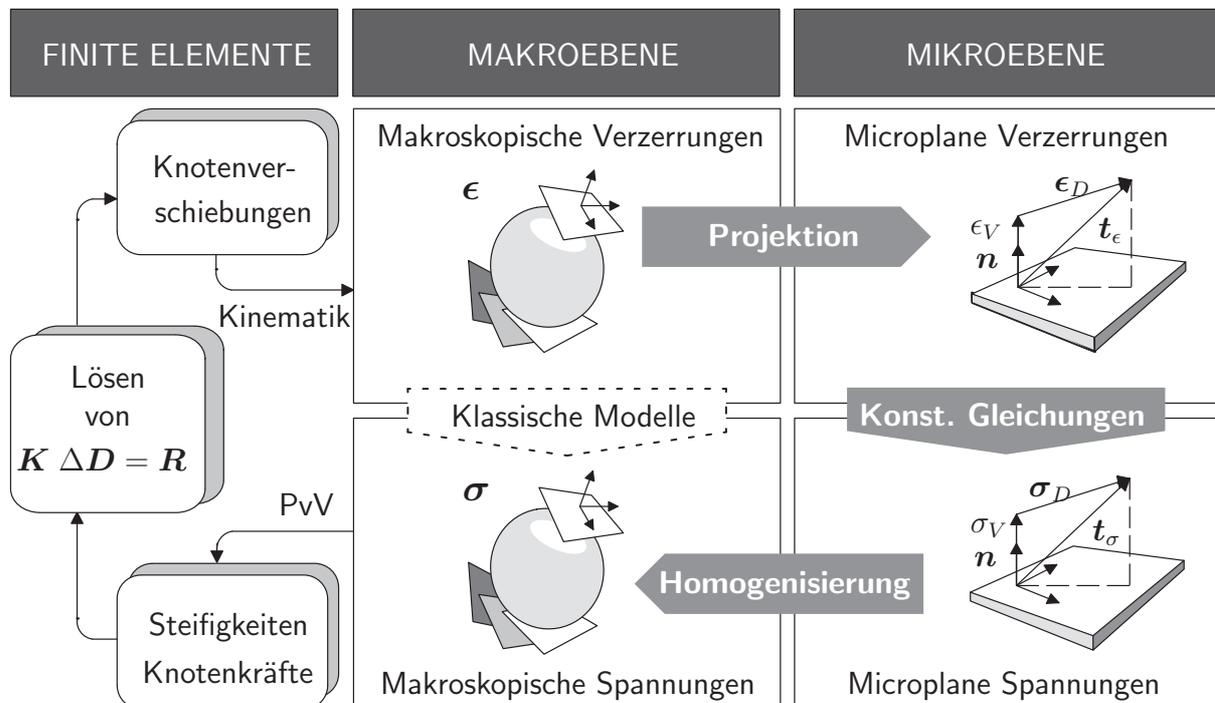


Abbildung 4.2: Microplane Theorie basierend auf der kinematischen Projektion

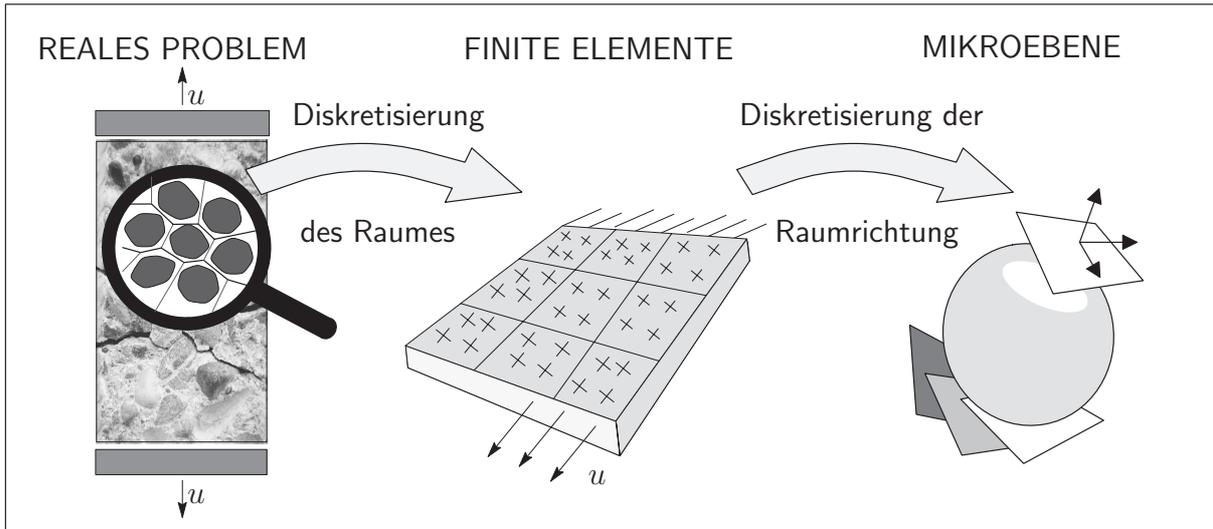


Abbildung 4.3: Diskretisierung des Raumes und der Raumrichtungen

dieser konstitutiven Gesetze, da im Gegensatz zu makroskopischen Modellen einfachere Beziehungen zwischen den einzelnen Microplane Verzerrungs- und Spannungskomponenten ausreichen. Bisher wurden in den meisten Microplane Versionen nur unidirektionale Stoffgesetze angenommen, vergleiche *Bažant & Prat* [30], *Carol, Prat & Bažant* [46] und *Kuhl* [123]. Im letzten Schritt, welcher einem Homogenisierungsprozess am Materialpunkt entspricht, wird aus den Spannungen auf der Mikroebene die makroskopische Spannungsantwort gewonnen. In früheren Microplane Formulierungen wurde die makroskopische Spannungsantwort durch einen Homogenisierungsprozess erhalten, der auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit (PvA) basierte, vergleiche *Bažant & Gambarova* [21], *Bažant & Prat* [30], *Carol & Bažant* [42], *Carol, Bažant & Prat* [43] und *Carol, Prat & Bažant* [46]. Es wurde postuliert, dass die makroskopische virtuelle Arbeit an einem Materialpunkt der virtuellen Arbeit aller Mikroebenen dieses Materialpunktes entspricht. Dies hatte zur Folge, dass einige Microplane Modelle die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik unter bestimmten Bedingungen nicht gewährleisten konnten. Zur Behebung dieses Problems wurde kürzlich von *Carol, Jirásek & Bažant* [44] ein neues Konzept zur Herleitung von Microplane Formulierungen vorgestellt. Dadurch konnte die thermodynamische Konsistenz der resultierenden Microplane Formulierungen sichergestellt werden. Dieses Konzept basiert auf der folgenden fundamentalen Annahme

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega \quad (4.1)$$

und erfordert die Existenz einer freien Energie  $\Psi^{mic}$  auf der Mikroebene. Das Integral von  $\Psi^{mic}$  über alle Mikroebenen eines Materialpunktes entspricht dann der makroskopischen freien Helmholtz Energie  $\Psi^{mac}$ .

*Bemerkung:*

Um eine mit der Literatur konsistente Notation zu erhalten, wurden die Begriffe „Mikroebene“ und „mikroskopisch“ verwendet, obwohl es sich beim Microplane Modell eher um eine mesoskopische als eine mikromechanische Beschreibung handelt. Des Weiteren werden makroskopische Größen durch den Index  $(\bullet)^{mac}$  und Größen auf der Mikroebene durch den Index  $(\bullet)^{mic}$  charakterisiert.

## 4.2 Microplane Kinematik

In den folgenden Abschnitten soll auf die geometrischen Beziehungen der Microplane Formulierung und die damit verbundenen unterschiedlichen Möglichkeiten der Charakterisierung von Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene eingegangen werden. Ausgangspunkt für alle Modelle bildet die kinematische Projektion. Dabei erhält man den Verzerrungsvektor  $\mathbf{t}_\epsilon$  auf der Mikroebene durch eine Normalprojektion des Verzerrungstensors  $\epsilon$ .

$$\mathbf{t}_\epsilon = \epsilon \cdot \mathbf{n} \quad (4.2)$$

Im Laufe dieser Arbeit wird sich herauskristallisieren, dass die Wahl der Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene einen entscheidenden Einfluss auf die Beschreibung unterschiedlicher Materialeigenschaften mit dem Microplane Modell besitzt. Dabei finden sich in der Literatur drei verschiedene Grundformen der Charakterisierung der Verzerrungskomponenten, vergleiche *Leukart & Ramm* [142, 143]. Zum einen die traditionellen Splits, der so genannte normal-tangentiale (N–T) [15, 21, 24] und volumetrisch-deviatorisch-tangentiale (V–D–T) Split [30] und zum anderen der hier bevorzugte volumetrisch-deviatorische (V–D) Split [142, 143]. Im Folgenden sollen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser drei Grundtypen und die Konsequenzen der jeweiligen Wahl der Komponenten für die Modellierung mit dem Microplane Modell näher beleuchtet werden.

### 4.2.1 N–T Split

Die natürlichste Art und Weise einen Vektor, im vorliegenden Fall den durch die Normalprojektion gewonnenen Microplane Verzerrungsvektor (4.2), zu zerlegen, ist die Aufspaltung in eine Normal- und Tangentialkomponente. Dies bildet die Grundlage des N–T Splits, welcher nur auf zwei Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene basiert, Abbildung 4.4. Der Verzerrungsvektor wird dementsprechend in einen skalaren Normal- und einen vektorwertigen Tangentialanteil zerlegt.

$$\mathbf{t}_\epsilon = \epsilon \cdot \mathbf{n} = \epsilon_N \mathbf{n} + \epsilon_T \quad (4.3)$$

Die Normal-  $\epsilon_N$  und die Tangentialkomponente  $\epsilon_T$  lassen sich aus einer Normal- und Tangentialprojektion des Verzerrungstensors mit folgenden Gleichungen gewinnen.

$$\epsilon_N = \mathbf{N} : \epsilon \quad \epsilon_T = \mathbf{T} : \epsilon \quad (4.4)$$

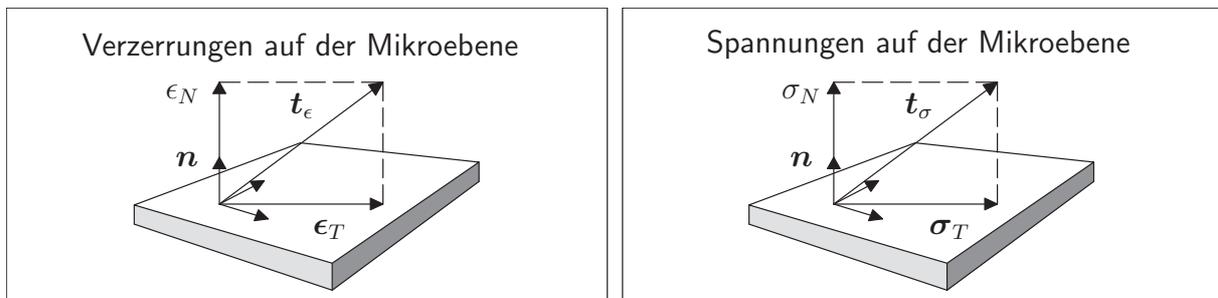


Abbildung 4.4: Modell mit Normal- und Tangentialkomponente

Dabei bezeichnen  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{T}$  zwei- bzw. dreistufige Projektionstensoren, die eindeutig durch die Normale der Mikroebene  $\mathbf{n}$  und durch den vierstufigen symmetrischen Einheitstensor  $\mathcal{I}^{sym}$  beschrieben werden.

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.5)$$

*Bemerkung:*

Ergänzend sei noch erwähnt, dass die ersten Microplane Formulierungen nur die Normalkomponente berücksichtigten und somit den Tangentialanteil vernachlässigten, vergleiche *Bažant & Oh* [24]. Auf den daraus resultierenden Normal (N) Split soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden, da er für die heutige Microplane Modellierung keine Rolle spielt.

### 4.2.2 V–D–T Split

Der im vorigen Abschnitt vorgestellte N–T Ansatz war nicht in der Lage, innere Reibung und somit das Verhalten von Beton im Druckbereich wiederzuspiegeln, obwohl er für den Zugbereich sehr gute Ergebnisse lieferte. Deswegen stellten *Bažant & Prat* [30] einen neuen Ansatz vor, der es nun ermöglichte, Beton unter Druckbeanspruchung erfolgreich zu simulieren. Dieser so genannte V–D–T Split stellt die Basis für zahlreiche weiterführende Microplane Formulierungen [19, 20, 31, 177] dar und ist heutzutage der gebräuchlichste Split in Microplane Modellen. Die Grundidee des V–D–T Splits basiert auf einer Zerlegung der Normalkomponente  $\epsilon_N$  in einen volumetrischen  $\epsilon_V$  und einen deviatorischen Anteil  $\epsilon_D$ .

$$\epsilon_N = \epsilon_V + \epsilon_D \quad (4.6)$$

Somit setzt sich der Verzerrungsvektor aus drei Teilen zusammen, Abbildung 4.5.

$$\mathbf{t}_\epsilon = [\epsilon_V + \epsilon_D] \mathbf{n} + \epsilon_T \quad (4.7)$$

Die drei Microplane Verzerrungskomponenten werden folgendermaßen ermittelt:

$$\epsilon_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \epsilon_D = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \epsilon_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\epsilon} . \quad (4.8)$$

Ergänzend sei noch erwähnt, dass sowohl die volumetrische als auch die deviatorische Komponente nur in Normalenrichtung wirkt. Die zugehörigen Projektionstensoren sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad \mathbf{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} . \quad (4.9)$$

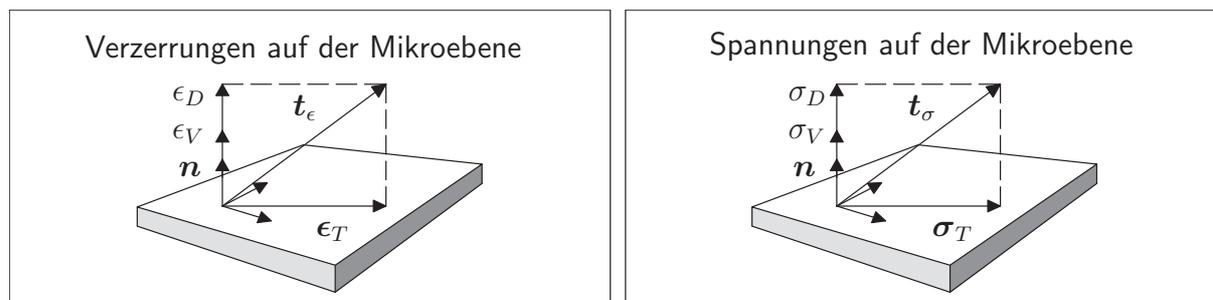


Abbildung 4.5: Modell mit volumetrischer, deviatorischer und tangentialer Komponente

Die vorgestellten Projektionstensoren besitzen gewisse Integrationseigenschaften, die für die Homogenisierung der mikroskopischen Antwort auf der Makroebene von Bedeutung sind. Wenn man deren vierstufiges Produkt entsprechend *Kanatani* [118] und *Lubarda & Krajcinovic* [147] über den Raumwinkel  $\Omega$  integriert, so erhält man diese Beziehungen.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \, d\Omega &= \mathcal{I}^{vol} \\
\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \, d\Omega &= \frac{2}{5} \mathcal{I}^{dev} \\
\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \, d\Omega &= \mathcal{I}^{vol} + \frac{2}{5} \mathcal{I}^{dev} \\
\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \, d\Omega &= \frac{3}{5} \mathcal{I}^{dev}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

### 4.2.3 V–D Split

Die bisher beschriebenen Microplane Splits weisen, wie von *Kuhl & Ramm* [128] gezeigt wurde, weitere mechanische Defizite auf. Eine detaillierte Abhandlung dieser Defizite und eine Zusammenfassung der Eigenschaften der unterschiedlichen Splits folgen in den kommenden Abschnitten. Hier sollen nur die wichtigsten Defizite und Eigenschaften als Motivation für die Einführung eines dritten Splits genannt werden. Während man mit dem N–T Split nicht in der Lage ist, das gesamte Spektrum der Querdehnzahl darzustellen, ist eine eindeutige Bestimmung der Microplane Elastizitätskonstanten mit dem V–D–T Split nicht möglich. Ein weiterer Nachteil des V–D–T Splits ist auf der Mehrdeutigkeit der deviatorisch-tangentialen Projektion begründet. Es konnte bei Untersuchungen des Schädigungsmodells mit drei unabhängig formulierten Schädigungsfunktionen von *Kuhl* [123] beobachtet werden, dass es zu mehrfachen Be- und Entlastungsvorgängen einzelner Komponenten kommt. Dies ermöglicht dem Modell zu viele Freiheiten und führte zu Problemen bei der numerischen Umsetzung. Um diese Freiheiten zu begrenzen, wird eine Zusammenführung dieser Komponenten vorgenommen. Diese Zusammenführung mündet in dem so genannten volumetrisch–deviatorischen (V–D) Split. Des Weiteren wurde der Mikro–Makro Übergang zwischen den Microplane Formulierungen und den makroskopischen Modellen nur durch weitere Annahmen ermöglicht, wie beispielsweise die Vernachlässigung der deviatorischen Komponenten beim Vergleich der Microplane Plastizität mit einer makroskopischen Plastizitätsformulierung, vergleiche *Kuhl, Ramm & Willam* [131]. Dieser Mikro–Makro Übergang stellt einen zentralen Punkt dieser Arbeit dar.

Als Folge der oben aufgeführten Erkenntnisse wurde an einer mechanisch sinnvolleren Basis für das Microplane Modell gearbeitet. Das Ergebnis stellt der V–D Split dar. Dieser Split ist in der Lage, die bekannten Defizite des N–T und V–D–T Splits zu beheben. Zusätzlich spiegeln sich bei diesem Ansatz makroskopische Effekte direkt auf der Mikroebene wieder. Zudem ist eine eindeutige Charakterisierung der volumetrischen und deviatorischen Eigenschaften auf der Mikroebene möglich. Eine ausführliche Beschreibung und Herleitung dieses Splits findet sich in *Leukart & Ramm* [142, 143].

Bei vielen Materialien ist das volumetrische und deviatorische Antwortverhalten, sowohl auf der Makro- als auch auf der Mikroebene, gänzlich verschieden. Dies motiviert eine unterschiedliche konstitutive Charakterisierung der volumetrischen und deviatorischen Spannungsantwort nicht nur auf der makroskopischen Ebene, sondern auch auf der Mikroebene. Ähnlich wie der Split des makroskopischen Spannungs- und Verzerrungstensors in der Kontinuumsmechanik bei Materialien mit ausgeprägt volumetrischem und deviatorischem Antwortverhalten, unterscheidet der V–D Split deshalb zwischen volumetrischen und deviatorischen Eigenschaften auf der Mikroebene. Die kinematische Basis bildet die

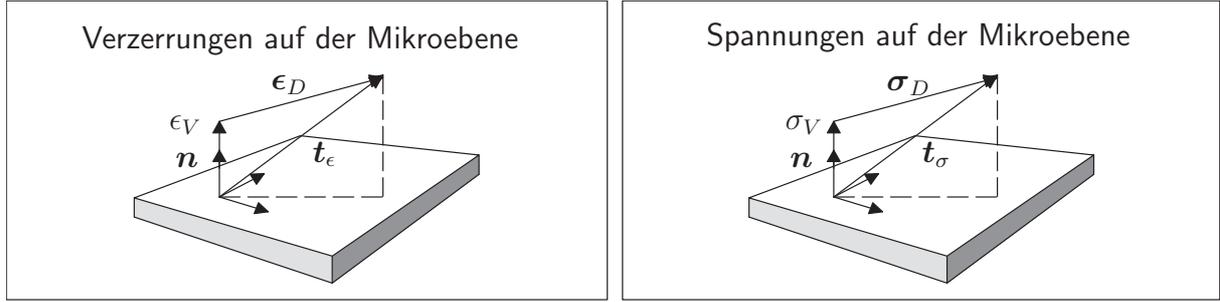


Abbildung 4.6: Modell mit volumetrischer und deviatorischer Komponente

additive Zerlegung des makroskopischen Verzerrungstensors in einen volumetrischen und deviatorischen Anteil entsprechend Gleichung (3.7). Im Gegensatz zu den Herleitungen des N–T und V–D–T Split und zum besseren Verständnis wird hier beim V–D Split nicht der gesamte Verzerrungstensor, sondern der volumetrische und deviatorische Anteil getrennt voneinander auf die Mikroebene projiziert. Um einer Verwechslung vorzubeugen, soll darauf hingewiesen werden, dass das D im V–D–T Split nur den deviatorischen Anteil in Normalenrichtung bezeichnet, während es im V–D Split den gesamten deviatorischen Teil ausmacht. Dies führt analog zur Makroebene zu einer eindeutigen Zerlegung des Verzerrungsvektors auf der Mikroebene in eine volumetrische  $\epsilon_V$  und deviatorische Komponente  $\epsilon_D$ , siehe Abbildung 4.6. Anschließend ist auch eine eindeutige Charakterisierung der volumetrischen  $\sigma_V$  und deviatorischen Spannungen  $\sigma_D$  auf der Mikroebene möglich. Es bleibt anzumerken, dass der umgekehrte Ablauf, d. h. wenn zuerst der ganze Verzerrungstensor auf die Mikroebene projiziert wird und im Anschluss daran die Zerlegung des Verzerrungsvektors auf der Mikroebene in einen volumetrischen und deviatorischen Anteil stattfindet, auf die gleichen Microplane Verzerrungskomponenten führt.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\epsilon &= \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n} = [\boldsymbol{\epsilon}_{vol} + \boldsymbol{\epsilon}_{dev}] \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3} [\mathbf{1} : \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_{dev} \cdot \mathbf{n} \\ &= [\mathbf{V} : \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_{dev} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_V \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_D \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die volumetrischen und deviatorischen Verzerrungsanteile auf der Mikroebene bestimmt man mit Hilfe der Projektionstensoren  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{Dev}$  aus folgenden Gleichungen.

$$\epsilon_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\epsilon}_D = \mathbf{t}_\epsilon - \epsilon_V \mathbf{n} = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.12)$$

Die Projektionstensoren lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad \mathbf{Dev} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{sym} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{dev}. \quad (4.13)$$

Der deviatorische Projektionstensor  $\mathbf{Dev}$  lässt sich in Abhängigkeit der Normalen der Mikroebene  $\mathbf{n}$  und des vierstufigen deviatorischen Einheitstensors  $\mathcal{I}^{dev}$  ausdrücken. Im Gegensatz zum tangentialen Projektionstensor  $\mathbf{T}$  des N–T und V–D–T Splits, der eher unhandlich wirkt, kann der deviatorische Projektionstensor  $\mathbf{Dev}$  somit sehr einfach berechnet werden. Außerdem ist die Transponierte des deviatorischen Projektionstensors wie folgt definiert.

$$\mathbf{Dev}^T := \mathcal{I}^{dev} \cdot \mathbf{n} \quad (4.14)$$

Es bleibt anzumerken, dass die volumetrische Verzerrungskomponente nur durch die Normale charakterisiert wird, während der deviatorische Verzerrungsvektor sich aus einer

Normal- und Tangentialkomponente zusammensetzt. Ähnlich wie für den N–T und den V–D–T Split lassen sich Integraleigenschaften für die Projektionstensoren des V–D Splits angeben, vergleiche wiederum *Kanatani* [118] und *Lubarda & Krajcinovic* [147].

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \, d\Omega &= \mathcal{I}^{vol} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} \, d\Omega &= \mathcal{I}^{dev} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Microplane Verzerrungen des V–D Splits erfüllen zusätzlich folgende Gleichung, ähnlich wie eine entsprechende Gleichung des N–T und V–D–T Splits in [42].

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \epsilon_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D \, d\Omega \quad (4.16)$$

Diese Gleichung kann leicht verifiziert werden, indem man die Gleichungen der kinematischen Projektion (4.12) und die Integraleigenschaften der Projektionstensoren (4.15) einsetzt.

Des Weiteren lassen sich, basierend auf der kinematischen Projektion, mit Gleichung (4.16) Invarianten der Verzerrungen, auf die viele makroskopische Materialmodelle aufbauen, eindeutig in Abhängigkeit der zugehörigen Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene angeben. Die ersten beiden Invarianten der makroskopischen Verzerrungen können eindeutig in Abhängigkeit der Microplane Verzerrungskomponenten bestimmt werden.

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon_V \, d\Omega = 3 \epsilon_V \quad I_2 = -3 \epsilon_V^2 + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D \, d\Omega \quad (4.17)$$

Zusätzlich lässt sich die zweite Invariante des deviatorischen Verzerrungstensors ermitteln. Diese hängt nur von den deviatorischen Microplane Verzerrungen ab.

$$2 J_2 = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D \, d\Omega \quad (4.18)$$

Die ermittelten Invarianten sind für eine rationale Definition der Microplane Stoffgesetze sehr nützlich. Allerdings gelten diese Gleichungen nur für den Fall, dass die kinematische Projektion zugrunde gelegt wurde.

#### 4.2.4 Zusammenhänge zwischen den einzelnen Splits

Bei den drei Grundformen der Charakterisierung von Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene handelt es sich um die geometrische Zerlegung des Verzerrungsvektors in verschiedene Komponenten. Alle drei Grundformen gehen dabei vom selben Verzerrungsvektor aus. Somit lassen sich alle Verzerrungskomponenten eines Splits in die Verzerrungskomponenten der anderen Splits durch geometrische Umformungen überführen. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Allerdings hat die Festlegung der Verzerrungskomponenten und somit des Splits weitreichende Konsequenzen bei der Modellierung bestimmter Stoffgesetze. Denn die Überführung von Stoffgesetzen, die auf einem bestimmten Split (z.B. dem V–D Split) basieren, in Stoffgesetze der anderen Splits ist nur bedingt und wenn, dann nur durch zusätzliche Annahmen, möglich.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass der N–T und V–D Split mit den zwei Komponenten als Untermenge im allgemeineren V–D–T Split mit seinen drei Komponenten enthalten sind.

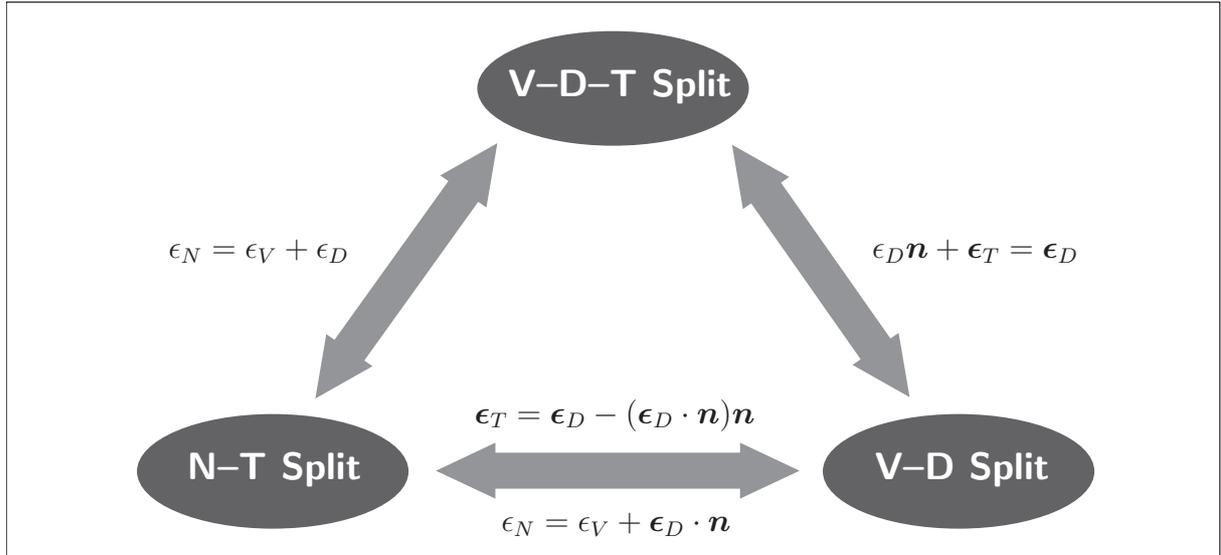


Abbildung 4.7: Übergänge zwischen den drei Grundformen

Die scheinbar größeren Freiheiten und Möglichkeiten des V–D–T Splits bei der Definition von Stoffgesetzen auf der Mikroebene bringen, wie schon erwähnt, einige Probleme mit sich und müssen gegebenenfalls beschränkt werden. Dies gilt vor allem bei Materialien mit unterschiedlichen volumetrischen und deviatorischen Eigenschaften. Somit lassen sich der deviatorische Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\epsilon}_D$  des V–D Splits und die normale Verzerrungskomponente  $\epsilon_N$  des N–T Splits in Abhängigkeit der volumetrischen  $\epsilon_V$ , deviatorischen  $\epsilon_D$  und tangentialen Komponenten  $\boldsymbol{\epsilon}_T$  des V–D–T Splits angeben.

$$\boldsymbol{\epsilon}_D = \epsilon_D \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_T \qquad \epsilon_N = \epsilon_V + \epsilon_D \qquad (4.19)$$

Zusätzlich können der deviatorische Projektionstensor  $\mathbf{Dev}$  des V–D Splits und der normale Projektionstensor  $\mathbf{N}$  des N–T Splits durch die Projektionstensoren des V–D–T Splits ausgedrückt werden.

$$\mathbf{Dev} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{T} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{V} + \mathbf{D} \qquad (4.20)$$

Abschließend wird kurz auf den Übergang zwischen dem V–D und dem N–T Split eingegangen. Auch hier lassen sich die Verzerrungskomponenten des N–T Splits, die normalen  $\epsilon_N$  und tangentialen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}_T$  in Abhängigkeit der volumetrischen  $\epsilon_V$  und deviatorischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}_D$  des V–D Splits ausdrücken.

$$\epsilon_N = \epsilon_V + \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \mathbf{n} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_T = \boldsymbol{\epsilon}_D - (\boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \qquad (4.21)$$

Für die Projektionstensoren ergibt sich folgender mathematischer Zusammenhang.

$$\mathbf{N} = \mathbf{V} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{Dev} \qquad \mathbf{T} = \mathbf{Dev} - \mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Dev}) \qquad (4.22)$$

### 4.3 Thermodynamisch konsistentes Konzept für Microplane Modelle

Wie schon erwähnt, basiert der Homogenisierungsprozess der früheren Microplane Modelle, die im Wesentlichen auf das Modell von *Bažant & Prat* [30] zurückzuführen sind, auf

dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Als Folge weisen diese Modelle zwei Nachteile auf. Zum einen ist die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik unter gewissen Bedingungen nicht notwendigerweise sichergestellt. Von *Carol, Jirásek & Bažant* [44] wurde gezeigt, dass bestimmte Lastzyklen bei diesen Modellen zu einer negativen Energiedissipation führen. In anderen Worten war es mit diesen Modellen möglich Energie zu gewinnen. Dies ist durch die phänomenologische Wahl der konstitutiven Gesetze auf der Mikroebene begründet und somit auf der Tatsache, dass diese Gesetze nicht auf den Potentialeigenschaften einer freien Energie basieren. Außerdem weisen diese Modelle eine unbegründete Unsymmetrie in der Materialtangente auf. Daraufhin wurden in den vergangenen Jahren intensive Bemühungen unternommen, das Microplane Modell in eine thermodynamisch konsistente Theorie einzubetten, vergleiche *Carol, Jirásek & Bažant* [44]. Das daraus resultierende universelle Konzept stellt eine thermodynamisch konsistente Methode bereit, um konjugierte Microplane Spannungen zu definieren und somit zutreffende integrale Gleichgewichtsbeziehungen zu entwickeln. Darüber hinaus wurde dieses Konzept von *Kuhl* [123], *Kuhl & Ramm* [128] und *Kuhl, Steinmann & Carol* [132] auf die thermodynamisch konsistente Herleitung von Microplane Konstitutivgleichungen erweitert. Die Hauptidee auf der dieses Konzept basiert, ist die Einführung einer freien Energiefunktion  $\Psi^{mic}$  auf jeder Mikroebene. Die bereits vorgestellte fundamentale Annahme (4.1) führt auf eine Mikro–Makro Beziehung zwischen der freien Energiefunktion  $\Psi^{mic}$  auf der Mikroebene und der makroskopischen freien Helmholtz Energie  $\Psi^{mac}$ . Da dieses Konzept in Abhängigkeit des zugrunde gelegten Splits (i. Allg. V–D–T Split) aufgestellt wurde, soll im Folgenden eine Verallgemeinerung dieses Konzepts auf alle Splits vorgestellt werden. Dabei werden die jeweils vom Split abhängigen Größen und Indizes durch Platzhalter ersetzt. Die Indizes V, D und N, welche die volumetrischen, deviatorischen und normalen Verzerrungs- bzw. Spannungskomponenten symbolisieren, werden durch den Platzhalter  $\square$  ersetzt. Für die Indizes D und T, welche die deviatorischen und tangentialen Verzerrungs- bzw. Spannungsvektoren charakterisieren, wird der Platzhalter  $\Delta$  verwendet. Des Weiteren stellt der Platzhalter  $\square$  die zweistufigen Projektionstensoren  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{N}$  und der Platzhalter  $\Delta$  die dreistufigen Projektionstensoren  $\mathbf{Dev}$  und  $\mathbf{T}$  dar.

Die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  hängt dann von den jeweiligen Microplane Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{\square}$  bzw. -vektoren  $\epsilon_{\Delta}$  und zusätzlich aufgrund einer vom Stoffgesetz unabhängigen Darstellung von einer Reihe nicht spezifizierter interner Variablen ab. Diese internen Variablen sind in dem Vektor  $\alpha$  zusammengefasst.

$$\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_{\square}, \epsilon_{\Delta}, \alpha) \quad (4.23)$$

Startpunkt für die Herleitung thermodynamisch konsistenter Materialformulierungen bildet die bereits in Abschnitt 2.1 eingeführte makroskopische Clausius–Duhem Ungleichung isothermer Prozesse.

$$\mathcal{D}^{mac} = \sigma : \dot{\epsilon} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0 \quad (4.24)$$

Unter Einbeziehung der entsprechenden kinematischen Beziehung (4.4), (4.8) oder (4.12) lautet die Evolutionsgleichung der mikroskopischen freien Energie wie folgt:

$$\dot{\Psi}^{mic} = [\square \sigma_{\square} + \Delta^T \cdot \sigma_{\Delta}] : \dot{\epsilon} - \mathcal{D}^{mic}. \quad (4.25)$$

$\mathcal{D}^{mic}$  ist als Gegenstück zur makroskopischen Dissipation  $\mathcal{D}^{mac}$  auf der Mikroebene zu sehen und definiert somit die mikroskopische Dissipation. Zusätzlich erhält man die Definition der Microplane Spannungen  $\sigma_{\square}$  und  $\sigma_{\Delta}$  als konjugierte Größen zu den zugehörigen

Microplane Verzerrungen durch eine zur Makroebene analoge Vorgehensweise nach *Coleman & Gurtin* [54] und *Coleman & Noll* [55].

$$\sigma_{\square} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{\square}} \quad \sigma_{\Delta} := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_{\Delta}} \quad (4.26)$$

Diese konstitutiven Spannungen stimmen nur in wenigen Ausnahmefällen mit den Spannungen der statischen Projektion überein.

Zusätzlich ergibt sich die mikroskopische Dissipation  $\mathcal{D}^{mic}$  als Produkt der thermodynamischen Kraft  $\beta^{mic}$  und des thermodynamischen Flusses  $\dot{\alpha}$  auf der Mikroebene.

$$\mathcal{D}^{mic} := \beta^{mic} \star \dot{\alpha} \quad (4.27)$$

Das Symbol  $\star$  charakterisiert ein Skalarprodukt der Ordnung  $\alpha$ . Die thermodynamische Kraft  $\beta^{mic}$  wird als thermodynamisch konjugierte Größe zu den internen Variablen  $\alpha$  definiert.

$$\beta^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha} \quad (4.28)$$

Das Einsetzen der Definition der thermodynamischen Kraft in die Gleichung (4.27) liefert folgende Beziehung.

$$\mathcal{D}^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha} \star \dot{\alpha} \quad (4.29)$$

Mit diesen Definitionen auf der Mikroebene lässt sich nun die Evolution der makroskopischen freien Energie  $\dot{\Psi}^{mac}$  unter Ausnutzung der fundamentalen Annahme (4.1) ausschließlich in Abhängigkeit von Größen der Mikroebene angeben.

$$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \square \sigma_{\square} + \Delta^T \cdot \sigma_{\Delta} d\Omega : \dot{\epsilon} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} d\Omega \quad (4.30)$$

Analog dem Standardvorgehen zur Auswertung der Clausius–Duhem Ungleichung (4.24) entsprechend Kapitel 3 erhält man die Definition der makroskopischen Spannungen. Das Einsetzen der Gleichung (4.1) und der Definition der Microplane Spannungen (4.26) und die Anwendung der Kettenregel liefert eine Mikro–Makro Beziehung zwischen den mikroskopischen und den makroskopischen Spannungen.

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon} d\Omega = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \square \sigma_{\square} + \Delta^T \cdot \sigma_{\Delta} d\Omega \quad (4.31)$$

Zusätzlich lässt sich die makroskopische Dissipation durch die Dissipation auf der Mikroebene ausdrücken.

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} d\Omega \geq 0 \quad (4.32)$$

Außerdem wurde von *Kuhl, Steinmann & Carol* [132] gefordert, dass nicht nur die integrale Beziehung (4.32), sondern auch die Dissipation auf jeder Ebene nicht negativ sein darf.

$$\mathcal{D}^{mic} \geq 0 \quad (4.33)$$

Dies stellt eine Einschränkung für die Wahl der konstitutiven Gleichungen auf der Mikroebene dar. Sie gewährleistet im Gegenzug in jedem Fall die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Durch ein Umformen der Gleichung (4.25) und unter

Berücksichtigung der Bedingung (4.33) ergibt sich folgende Ungleichung, die als mikroskopische Clausius–Duhem Ungleichung interpretiert werden kann.

$$\mathcal{D}^{mic} = \sigma_{\square} \dot{\epsilon}_{\square} + \sigma_{\Delta} \cdot \dot{\epsilon}_{\Delta} - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (4.34)$$

In der mikroskopischen Clausius–Duhem Ungleichung können die Produkte aus Microplane Spannungen und Microplane Verzerrungsraten als mikroskopische Spannungsleistung  $\mathcal{P}^{mic}$  aufgefasst werden.

$$\mathcal{P}^{mic} := \sigma_{\square} \dot{\epsilon}_{\square} + \sigma_{\Delta} \cdot \dot{\epsilon}_{\Delta} \quad (4.35)$$

Die makroskopische Spannungsleistung  $\mathcal{P}^{mac}$  lässt sich nun in Abhängigkeit der mikroskopischen Spannungsleistung  $\mathcal{P}^{mic}$  angeben.

$$\mathcal{P}^{mac} = \sigma : \dot{\epsilon} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{P}^{mic} d\Omega \quad (4.36)$$

Abschließend kann man eine Mikro–Makro Beziehung für den Tangententensor  $\mathcal{E}_{tan}$  bestimmen. Dieser ergibt sich aus der Ratenbeziehung zwischen den makroskopischen Spannungen und Verzerrungen. Die Berücksichtigung der Mikro–Makro Beziehung zwischen den Spannungen (4.31) liefert den Tangententensor als Funktion von Größen der Mikroebene. Beherzigt man bei der Entwicklung Microplane–basierter Stoffgesetze dieses Konzept, so erhält man automatisch eine symmetrische Materialtangente, vergleiche hierzu das folgende Kapitel und [123, 128, 132, 143, 144, 145].

$$\mathcal{E}_{tan} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \square \otimes \frac{d\sigma_{\square}}{d\epsilon} + \Delta^T \cdot \frac{d\sigma_{\Delta}}{d\epsilon} d\Omega \quad (4.37)$$

In dieser Arbeit wird ausschließlich die so genannte Kontinuumstangente (4.37) angegeben, wodurch bei den Herleitungen der Gleichungen von infinitesimalen Zeit- bzw. Lastinkrementen ausgegangen wird. Bei der numerischen Umsetzung im Rahmen der Finite Element Methode, d. h. in allen folgenden numerischen Beispielen, wird jedoch aus Effizienzgründen auf die so genannte algorithmische Tangente zurückgegriffen, die sich beim Übergang zu endlichen Zeit- bzw. Lastinkrementen ergibt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in dieser Arbeit auf die Herleitung dieser algorithmischen Tangente verzichtet. Durch das vorgestellte universelle Konzept zur Herleitung von thermodynamisch konsistenten anisotropen Materialformulierungen im Rahmen des Microplane Modells ist es gelungen, alle mechanisch relevanten makroskopischen Größen durch deren Gegenstücke auf der Mikroebene auszudrücken. Die aus der Homogenisierung gewonnenen Mikro–Makro Beziehungen sind als Bindeglied zwischen der Mikro- und Makroebene zu sehen.

Da in dieser Arbeit hauptsächlich der V–D Split angewendet wird, ist das beschriebene thermodynamisch konsistente Konzept für den V–D Split in Tabelle 4.1 näher spezifiziert. Darüber hinaus ist dieses Konzept auf beliebige Klassen von Microplane Materialformulierungen anwendbar. Alle Herleitungen der in dieser Arbeit abgeleiteten Microplane Modelle erfolgen im Rahmen dieses thermodynamisch konsistenten Konzeptes.

## 4.4 Diskretisierung der Raumrichtungen

Der im vorherigen Abschnitt beschriebene Homogenisierungsprozess zur Ermittlung der mechanisch relevanten makroskopischen Größen in Abhängigkeit der Variablen der Mikroebene erfordert die Lösung mehrerer Integralbeziehungen. Der Faktor  $\frac{3}{4\pi}$  vor den Mikro–Makro Beziehungen der kontinuierlichen Microplane Formulierung stammt aus der Integration über den Raumwinkel  $\Omega$  einer Einheitskugel mit der Oberfläche  $4\pi$  und dem

---

• Freie Energie	$\Psi^{mac} = \Psi^{mac}(\Psi^{mic}) = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega$
mikroskopisch	$\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \alpha)$
• Evolution freie Energie	$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \dot{\Psi}^{mic} d\Omega$
mikroskopisch	$\dot{\Psi}^{mic} = [\mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathcal{D}^{mic}$
• Spannungen	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\sigma_V, \boldsymbol{\sigma}_D) = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma_V \mathbf{V} + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \mathbf{Dev} d\Omega$
volumetrisch	$\sigma_V = \partial \Psi^{mic} / \partial \epsilon_V$
deviatorisch	$\boldsymbol{\sigma}_D = \partial \Psi^{mic} / \partial \epsilon_D$
• Dissipation	$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} d\Omega \geq 0$
mikroskopisch	$\mathcal{D}^{mic} = \sigma_V \dot{\epsilon}_V + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_D - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0$
• Spannungsleistung	$\mathcal{P}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{P}^{mic} d\Omega$
mikroskopisch	$\mathcal{P}^{mic} = \sigma_V \dot{\epsilon}_V + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_D$
• Tangentenmoduli	$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \frac{d\sigma_V}{d\epsilon} + \mathbf{Dev}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}_D}{d\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega$

---

Tabelle 4.1: Thermodynamisch konsistentes Konzept für den V–D Split

Volumen  $\frac{4\pi}{3}$ . Der Ablauf der Berechnung zwischen den Größen der Mikro- und Makroebene ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Die erwähnten Integralbeziehungen können nur in sehr wenigen Ausnahmefällen wie beispielsweise der linearen isotropen Elastizität, siehe Abschnitt 5.1, analytisch gelöst werden. Deshalb werden die Integrationen über den Raumwinkel im Rahmen einer Microplane Formulierung numerisch durchgeführt, wobei die Integralbeziehungen durch diskrete Summen ersetzt werden.

$$\int_{\Omega} (\bullet^{mic}) d\Omega \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} (\bullet^{mic})^I w^I \quad (4.38)$$

Die jeweiligen Integranden  $(\bullet^{mic})^I$  werden somit an diskreten Integrationspunkten  $I = 1, \dots, n_{mp}$  ausgewertet und mit den zugehörigen Wichtungskoeffizienten  $w^I$  gewichtet. Im Kontext des Microplane Modells entspricht jeder Integrationspunkt einer diskreten Mikroebene. Das bedeutet, dass das Integral über den Raumwinkel  $\Omega$  einer Integration über unendlich viele Mikroebenen entspricht, während die numerische Approximation eine Summe über eine gewählte endliche Anzahl diskreter Mikroebenen darstellt. Mit der Anzahl der Mikroebenen nimmt auch die Genauigkeit der approximativen Lösung des Integrals zu. Die numerische Integration wird in einem Finite Element Programm für jedes Element, an jedem Integrationspunkt des Elementes und für alle Lastschritte durchgeführt. Deshalb ist es leicht ersichtlich, dass ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Effizienz gefunden werden muss. In Untersuchungen zur Effizienz und Genauigkeit der numerischen Integration von Spannungszuständen im elastischen wie im nichtlinearen, entfestigenden Bereich

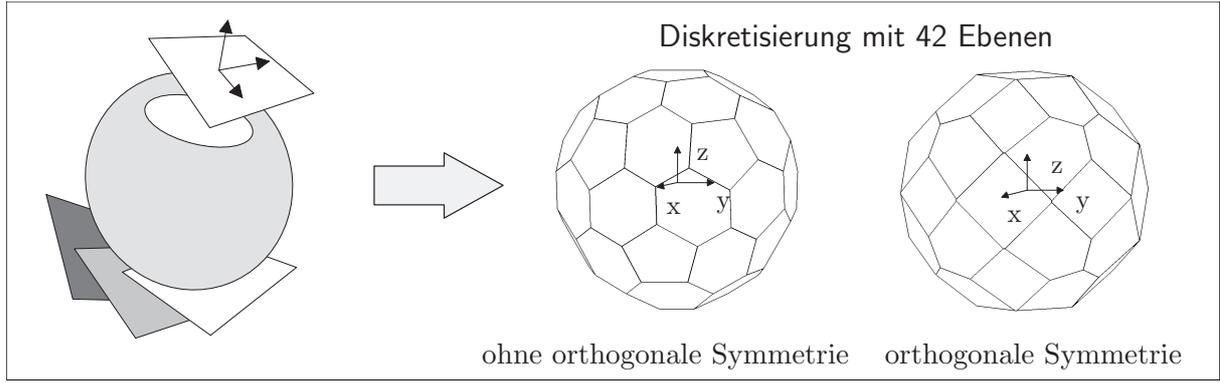


Abbildung 4.8: Diskretisierung der Einheitskugel mit 42 Mikroebenen

von Bažant & Oh [24, 25] konnte gezeigt werden, dass für eine ausreichend genaue numerische Integration mindestens  $n_{mp} = 42$  Mikroebenen nötig sind. Traditionell, wie auch in dieser Arbeit, wird in Microplane Formulierungen eine Integration mit 42 Mikroebenen ohne orthogonale Symmetrie verwendet. Nur bei der Modellierung von transversal-isotropen bzw. orthotropen Materialeigenschaften sollte dagegen auf eine Integrationsvorschrift mit orthogonaler Symmetrie zurückgegriffen werden, da diese die erforderlichen Materialsymmetrien am besten wiedergeben kann. Die resultierenden Polyeder der Tangentialebenen der beiden Integrationsvorschriften ohne und mit orthogonaler Symmetrie sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Diese werden in den folgenden Abschnitten zur Visualisierung der räumlichen Verteilung der Variablen der Mikroebene herangezogen.

Um den Integrationsaufwand zu minimieren, reicht aufgrund der Symmetrieeigenschaften eines allgemeinen Spannungs- bzw. Verzerrungszustandes eine Integration über eine Halbkugel mit dementsprechend 21 Mikroebenen aus. Bei der Beschreibung von Problemen des ebenen Spannungs-, Verzerrungszustandes oder des axialsymmetrischen Falls reduziert sich der numerische Aufwand auf lediglich 14 Mikroebenen. Für eine detaillierte Beschreibung der in dieser Arbeit verwendeten numerischen Integrationen und der dazugehörigen Normalenvektoren und Wichtungskoeffizienten sei auf den Anhang C verwiesen. Im Rahmen einer nichtlinearen Finite Element Berechnung entsprechend Abschnitt 2.2 werden die aus den Spannungen der einzelnen Mikroebenen homogenisierten makroskopischen Spannungen (4.31) und der homogenisierte makroskopische Tangentenmodul (4.37) benötigt. Der Spannungstensor lässt sich mit dem obigen Ansatz (4.38) folgendermaßen approximieren.

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} \left[ \square^I \frac{\partial \Psi^{mic,I}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\square}^I} + \boldsymbol{\Delta}^{T,I} \cdot \frac{\partial \Psi^{mic,I}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\Delta}^I} \right] w^I = \sum_{I=1}^{n_{mp}} \left[ \square^I \boldsymbol{\sigma}_{\square}^I + \boldsymbol{\Delta}^{T,I} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Delta}^I \right] w^I \quad (4.39)$$

Als weiterer typischer Vertreter dieser numerischen Integration wird das Vorgehen anhand des makroskopischen Tangentenmoduls (4.37) demonstriert.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} \left[ \square^I \otimes \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\square}^I}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\Delta}^{T,I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\Delta}^I}{d\boldsymbol{\epsilon}} \right] w^I \quad (4.40)$$

Des Weiteren erhält man die restlichen Integralausdrücke in analoger Weise.

# Kapitel 5

## Materialformulierungen im Rahmen der Microplane Theorie

Ziel dieses Kapitels ist die Bereitstellung unterschiedlicher Materialmodelle im Rahmen der Microplane Theorie. Das im vorherigen Kapitel vorgestellte universelle Konzept zur Herleitung thermodynamisch konsistenter Microplane Materialformulierungen soll nun auf verschiedene Klassen rheologischen Verhaltens angewendet werden.

### 5.1 Microplane Elastizität

Als einfachstes Materialverhalten ist die Elastizität zu erwähnen. Elastische Materialien verhalten sich nicht-dissipativ und die auftretenden Verformungen sind reversibel. Daher können alle internen Variablen  $\alpha$  vernachlässigt werden.

$$\alpha \equiv \emptyset \tag{5.1}$$

Die Clausius–Duhem Ungleichung (4.24) und darüber hinaus ihr Gegenstück auf der Mikroebene (4.34) vereinfachen sich zu einer Gleichung und die Dissipation muss unter allen Umständen null sein.

#### 5.1.1 Isotrope Elastizität

In diesem Abschnitt wird auf die Modellierung des einfachsten Konstitutivgesetzes im Rahmen der Microplane Theorie, nämlich lineare isotrope Elastizität, eingegangen. Lineare isotrope Elastizität reicht aus um die Eigenschaften der unterschiedlichen Splits zu zeigen und die Unterschiede zwischen dem V–D Split und den traditionellen Ansätzen, N–T und V–D–T Split, herauszuarbeiten. Weiterhin werden Beziehungen zwischen den erforderlichen Microplane und den makroskopischen Elastizitätskonstanten ermittelt. Die eindeutige Bestimmung der Microplane Elastizitätskoeffizienten ohne jegliche Einschränkung ist als minimale Anforderung an alle Microplane Modelle zu sehen.

#### Traditionelle Microplane Modelle

Im Folgenden werden die wichtigsten Gleichungen der Microplane Elastizität, basierend auf dem N–T und V–D–T Split, zusammengefasst. Mehr Details über die Herleitung der folgenden Gleichungen und eine ausführliche Diskussion der beiden Ansätze findet sich in *Bažant & Prat* [30] und *Kuhl & Ramm* [128].

• *N–T Modell:*

Für den N–T Split werden die zwei Microplane Verzerrungskomponenten  $\epsilon_N$  und  $\epsilon_T$  eingeführt. Die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  hängt nur von diesen beiden Komponenten ab. Mit den beiden Microplane Elastizitätskoeffizienten  $\mathcal{E}_N$  und  $\mathcal{E}_T$ , die in Beziehung zu den beiden zugehörigen Verzerrungskomponenten gesetzt werden, ergibt sich die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$ .

$$\Psi^{mic}(\epsilon_N, \epsilon_T) := \frac{1}{2} \epsilon_N \mathcal{E}_N \epsilon_N + \frac{1}{2} \epsilon_T \cdot \mathcal{E}_T \epsilon_T \quad (5.2)$$

Diese lässt sich additiv in einen normalen und tangentialen Energieanteil zerlegen, mit  $\Psi^{mic} = W_N(\epsilon_N) + W_T(\epsilon_T)$ . Es sei darauf hingewiesen, dass die Annahme der Parallelität der tangentialen Verzerrungen und Spannungen  $\epsilon_T \parallel \sigma_T$ , die ein isotropes Verhalten auf der Mikroebene impliziert, bereits in obige Gleichung eingearbeitet wurde. Dadurch vereinfacht sich die tensorwertige tangentiale Microplane Steifigkeit zu  $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_T \mathbf{1}$ . Die beiden Microplane Spannungen  $\sigma_N$  und  $\sigma_T$  wurden in Abschnitt 4.3 in Gleichung (4.26) als konjugierte Größen zu den zugehörigen Microplane Verzerrungen definiert. Bezieht man die Definition der freien Energie (5.2) mit ein, so lassen sich die Microplane Spannungen folgendermaßen spezifizieren.

$$\sigma_N := \mathcal{E}_N \epsilon_N \quad \sigma_T := \mathcal{E}_T \epsilon_T \quad (5.3)$$

Damit ergibt sich der lokale Spannungsvektor  $t_\sigma$  mit seiner normalen und tangentialen Spannungskomponente, vergleiche Abbildung 4.4.

$$t_\sigma = \sigma_N \mathbf{n} + \sigma_T \quad (5.4)$$

Die Auswertung der Clausius–Duhem Ungleichung liefert die Definition (4.31) der makroskopischen Spannungen in Abhängigkeit der Microplane Spannungen. Dieser Spannungstensor lässt sich für den betrachteten isotropen elastischen Fall wie folgt darstellen.

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathcal{E}_N \epsilon_N + \mathbf{T}^T \cdot \mathcal{E}_T \epsilon_T \, d\Omega \quad (5.5)$$

Zusätzlich lässt sich der elastische Materialtensor  $\mathcal{E}^{el}$  in Abhängigkeit der elastischen Steifigkeiten der Mikroebene angeben.

$$\mathcal{E}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_N \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathcal{E}_T \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \, d\Omega \quad (5.6)$$

Weiterhin wird aufgrund der Isotropie auf der Makroebene angenommen, dass die Microplane Steifigkeiten richtungsunabhängig sind. Dadurch und unter Verwendung der Integrationseigenschaften (4.10) ist es möglich die Integralbeziehung (5.6) analytisch zu lösen und eine vereinfachte Darstellung des elastischen Materialtensors anzugeben. Vergleicht man diesen mit dem Elastizitätstensor des Hookeschen Gesetzes (3.5), so können die Microplane Elastizitätskonstanten in Abhängigkeit des makroskopischen Kompressions-  $K^{mac}$  und Schubmoduls  $G^{mac}$  identifiziert werden.

$$\mathcal{E}_N = 3 K^{mac} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_T = \frac{10}{3} G^{mac} - 2 K^{mac} \quad (5.7)$$

Aus diesen Mikro–Makro Beziehungen zwischen den Elastizitätskonstanten wird ersichtlich, dass die Microplane Steifigkeiten  $\mathcal{E}_N$  und  $\mathcal{E}_T$  eindeutig aus den makroskopischen Parametern bestimmt werden. Die tangentielle Steifigkeit  $\mathcal{E}_T$  hängt nicht nur vom Schubmodul, sondern auch vom Kompressionsmodul ab. Diese Abhängigkeit führt zu einer künstlichen Kopplung des volumetrischen und deviatorischen Materialverhaltens. Der Grund für diese künstliche Kopplung ist, dass sich die normalen Verzerrungskomponenten  $\epsilon_N$  aus einem volumetrischen und deviatorischen Anteil zusammensetzen. Weiterhin ist dieser Ansatz nicht in der Lage die kinematische und statische Projektion gleichzeitig zu erfüllen.

Der größte Nachteil dieser Modelle besteht in der Begrenzung des Gültigkeitsbereiches der Querdehnzahl auf Werte zwischen  $-1 \leq \nu \leq 0.25$ . Diese Beschränkung scheint künstlich zu sein, denn der Gültigkeitsbereich der Querdehnzahl bei isotropen elastischen Materialien liegt zwischen  $\nu = -1$  und  $\nu = 0.5$ . Die Forderung nach positiven mikroskopischen Elastizitätskonstanten, so dass  $\mathcal{E}_N \geq 0$  und  $\mathcal{E}_T \geq 0$ , ist offensichtlich. Die Gleichung (5.7) liefert damit folgende Bedingung:  $G^{mac} \geq \frac{3}{5} K^{mac}$ . Die Einhaltung dieser Bedingung führt zu der erwähnten künstlichen Begrenzung des Gültigkeitsbereiches der Querdehnzahl.

Dieses Microplane Modell stellt, da es auf dem N–T Split basiert, die natürlichste Variante dar. Aufgrund dessen lässt sich eine enge Verwandtschaft zu diskreten Partikelmodellen erkennen, die bislang auch auf normale und tangentielle Komponenten zurückgreifen, vergleiche hierzu die Arbeiten von *Kuhl, D’Addetta, Herrmann & Ramm* [124] und *Kuhl, D’Addetta, Leukart & Ramm* [125]. Außerdem weist das Microplane Modell mit N–T Split etliche Gemeinsamkeiten mit diesen Partikelmodellen auf und zwar nicht nur für den beschriebenen Fall der Elastizität, sondern auch für die Plastizität.

- *V–D–T Modell:*

Für den V–D–T Ansatz wird zwischen den drei Microplane Verzerrungskomponenten  $\epsilon_V$ ,  $\epsilon_D$  und  $\epsilon_T$  unterschieden. Die auf diesem Ansatz basierenden Microplane Modelle stellen die verbreitetste Microplane Variante dar. Die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  verbindet die drei Microplane Verzerrungskomponenten des V–D–T Splits mit deren zugeordneten Microplane Elastizitätskoeffizienten  $\mathcal{E}_V$ ,  $\mathcal{E}_D$  und  $\mathcal{E}_T$ .

$$\Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T) := \frac{1}{2} \epsilon_V \mathcal{E}_V \epsilon_V + \frac{1}{2} \epsilon_D \mathcal{E}_D \epsilon_D + \frac{1}{2} \epsilon_T \cdot \mathcal{E}_T \epsilon_T \quad (5.8)$$

Sie lässt sich als Summe der volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Energien  $W_V$ ,  $W_D$  und  $W_T$  definieren, wobei die hier als deviatorisch bezeichnete Energie  $W_D$  nur einen Teil der gesamten deviatorischen Energie darstellt, denn die tangentielle Energie  $W_T$  besitzt auch einen rein deviatorischen Charakter. Dieser Zusammenhang wird an entsprechender Stelle im nächsten Abschnitt näher erläutert. Dort findet eine wirkliche Trennung der Energie in rein volumetrische und rein deviatorische Energieanteile statt. Die drei Microplane Spannungskomponenten  $\sigma_V$ ,  $\sigma_D$  und  $\sigma_T$  werden in Analogie zum N–T Modell definiert.

$$\sigma_V := \mathcal{E}_V \epsilon_V \quad \sigma_D := \mathcal{E}_D \epsilon_D \quad \sigma_T := \mathcal{E}_T \epsilon_T \quad (5.9)$$

Der lokale Spannungsvektor  $\mathbf{t}_\sigma$  aus Abbildung 4.5 ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung  $\sigma_N = \sigma_V + \sigma_D$  in Gleichung (5.4).

$$\mathbf{t}_\sigma = [\sigma_V + \sigma_D] \mathbf{n} + \sigma_T \quad (5.10)$$

Die folgende Gleichung definiert den makroskopischen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  für das V–D–T Modell in Abhängigkeit der Größen der Mikroebene.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \mathcal{E}_V \boldsymbol{\epsilon}_V + \mathbf{D} \mathcal{E}_D \boldsymbol{\epsilon}_D + \mathbf{T}^T \cdot \mathcal{E}_T \boldsymbol{\epsilon}_T d\Omega \quad (5.11)$$

Für den makroskopischen Elastizitätstensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$  des V–D–T Ansatzes, der die Spannungen mit den Verzerrungen in Beziehung setzt, erhält man folgenden Ausdruck.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_V \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathcal{E}_D \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathcal{E}_T \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (5.12)$$

Wiederum wurde in den hergeleiteten Gleichungen des V–D–T Modells von der Parallelität der tangentialen Verzerrungen und Spannungen  $\boldsymbol{\epsilon}_T \parallel \boldsymbol{\sigma}_T$  Gebrauch gemacht. Des Weiteren werden die Microplane Elastizitätskoeffizienten  $\mathcal{E}_V$ ,  $\mathcal{E}_D$  und  $\mathcal{E}_T$  als richtungsunabhängig angenommen. Die analytische Integration von Gleichung (5.12) mit Hilfe der Integrationseigenschaften (4.10) in Verbindung mit einem Koeffizientenvergleich mit dem Hookeschen Gesetz (3.5), liefert die Beziehungen zwischen den mikroskopischen und den makroskopischen Elastizitätskonstanten.

$$\mathcal{E}_V = 3 K^{mac} \quad \text{und} \quad 2 \mathcal{E}_D + 3 \mathcal{E}_T = 10 G^{mac} \quad (5.13)$$

Diese Beziehungen zwischen den Microplane und den makroskopischen Elastizitätskonstanten wurden zuerst von *Bažant & Prat* [30] angegeben. Als Konsequenz der Einführung von drei Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene werden drei entsprechende Elastizitätskoeffizienten benötigt. Dadurch ist eine eindeutige Bestimmung der Microplane Elastizitätskonstanten durch zwei makroskopische Elastizitätskonstanten nicht möglich. Als Folge davon muss in Gleichung (5.13) entweder die deviatorische Steifigkeit  $\mathcal{E}_D$  oder die tangentiale Steifigkeit  $\mathcal{E}_T$  frei gewählt werden. In der Regel besitzt dieser frei wählbare Parameter keine physikalische Bedeutung. Zudem ist diese freie Wählbarkeit, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, nur eine vermeintliche, zusätzliche Freiheit.

Gleichung (5.13) dokumentiert, dass die volumetrische Steifigkeit  $\mathcal{E}_V$  nur vom Kompressionsmodul  $K^{mac}$  und die beiden deviatorischen Steifigkeiten  $\mathcal{E}_D$  und  $\mathcal{E}_T$  nur vom Kompressionsmodul  $G^{mac}$  abhängig sind. Somit ist das volumetrische und deviatorische Antwortverhalten völlig voneinander entkoppelt.

Für die spezielle Wahl von  $\mathcal{E}_D \equiv \mathcal{E}_T$ , wie sie in den jüngeren V–D–T Formulierungen verwendet wird, erfüllt dieses Modell die kinematische und statische Projektion gleichzeitig. Außerdem ist es für den Fall  $\mathcal{E}_D \equiv 0$ , d. h. die Vernachlässigung des deviatorischen Anteils der Normalkomponente, möglich eine enge Beziehung zwischen einer Microplane Plastizitätsformulierung und einem invarianten-basierten makroskopischen Plastizitätsmodell aufzustellen, siehe *Kuhl, Ramm & Willam* [131].

Wie für das N–T Modell wird für das V–D–T Modell gefordert, dass alle Microplane Elastizitätskonstanten positiv sein müssen, d. h.:  $\mathcal{E}_V \geq 0$ ,  $\mathcal{E}_D \geq 0$  und  $\mathcal{E}_T \geq 0$ . Aber im Unterschied zum N–T Modell ist das V–D–T Modell in der Lage den kompletten Gültigkeitsbereich der Querdehnzahl von  $-1 \leq \nu \leq 0.5$  abzubilden, so dass keinerlei Einschränkung für die Querdehnzahl vorliegt.

### Volumetrisch–deviatorisches Modell

In diesem Abschnitt wird etwas detaillierter auf die Herleitung des V–D Modells eingegangen, da der V–D Ansatz in dieser Arbeit zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens verwendet wird. Der V–D Ansatz hat sich aufgrund der einfacheren Darstellung,

der besseren Verständlichkeit und der Interpretierbarkeit der einzelnen Parameter und somit des Materialverhaltens, speziell bei nichtlinearem Materialverhalten, als vorteilhaft gegenüber den traditionellen Ansätzen erwiesen. Für den linearen isotropen elastischen Fall ist es nahe liegend, die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  in Analogie zur makroskopischen Betrachtungsweise als quadratische Funktion der beiden Verzerrungskomponenten  $\epsilon_V$  und  $\epsilon_D$  zu definieren.

$$\Psi^{mic} := \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D) = \frac{1}{2} \epsilon_V \mathcal{E}_V \epsilon_V + \frac{1}{2} \epsilon_D \cdot \mathcal{E}_D \epsilon_D \quad (5.14)$$

Der erste Term in dieser Gleichung charakterisiert die volumetrisch gespeicherte Energie  $W_V$  und der zweite Term die deviatorisch gespeicherte Energie  $W_D$ . Im Gegensatz zum V–D–T Modell stellt der Ausdruck für die deviatorische Energie  $W_D$  in diesem Fall die komplette deviatorisch gespeicherte Energie der Mikroebene dar und darf somit nicht mit dem Ausdruck des V–D–T Modells aus dem vorherigen Abschnitt verwechselt werden.

$$W_V = \frac{1}{2} \epsilon_V \mathcal{E}_V \epsilon_V \quad W_D = \frac{1}{2} \epsilon_D \cdot \mathcal{E}_D \epsilon_D \quad (5.15)$$

Entsprechend Gleichung (4.26) werden die Microplane Spannungen  $\sigma_V$  und  $\sigma_D$  als Ableitungen der mikroskopischen freien Energie nach den entsprechenden Verzerrungskomponenten definiert.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V \epsilon_V \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D \epsilon_D \quad (5.16)$$

Der lokale Spannungsvektor  $\mathbf{t}_\sigma$  in Abbildung 4.6 setzt sich damit aus einem rein volumetrischen und rein deviatorischen Anteil zusammen.

$$\mathbf{t}_\sigma = \sigma_V \mathbf{n} + \sigma_D \quad (5.17)$$

Durch Einsetzen der Definitionen der Microplane Spannungen (5.16) in Gleichung (4.31) ergibt sich der makroskopische Spannungstensor.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \mathcal{E}_V \epsilon_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \mathcal{E}_D \epsilon_D d\Omega \quad (5.18)$$

Der makroskopische Tangententensor (4.37) lässt sich für das angenommene elastische Materialverhalten näher spezifizieren.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_V \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \mathcal{E}_D \mathbf{Dev} d\Omega \quad (5.19)$$

Genauso wie für die tangentialen Komponenten des N–T und V–D–T Modells wurde bei den hergeleiteten Gleichungen von der Parallelität des deviatorischen Verzerrungs- und Spannungsvektors ausgegangen,  $\epsilon_D \parallel \sigma_D$ . Dadurch lassen sich die deviatorischen Microplane Elastizitätskoeffizienten vereinfacht angeben,  $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_D \mathbf{1}$ . Zusätzlich wird wiederum eine isotrope Verteilung der Microplane Elastizitätskoeffizienten angenommen. Damit lässt sich durch die analytische Integration von Gleichung (5.19) unter Berücksichtigung der Projektionstensoren (4.10) eine vereinfachte Darstellung des Elastizitätstensors  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$  angeben.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = \mathcal{E}_V \mathcal{I}^{vol} + \mathcal{E}_D \mathcal{I}^{dev} \quad (5.20)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten dieser vereinfachten Darstellung mit denen des Hooke'schen Gesetzes (3.5) resultiert in den folgenden Mikro–Makro Beziehungen zwischen den Microplane und den makroskopischen Elastizitätskonstanten.

$$\mathcal{E}_V = K^{mic} = 3 K^{mac} \quad \mathcal{E}_D = 2 G^{mic} = 2 G^{mac} \quad (5.21)$$

Die Berechnung der Microplane Elastizitätskoeffizienten  $K^{mic}$  und  $G^{mic}$  in Abhängigkeit der beiden makroskopischen Elastizitätskonstanten ist eindeutig. Für die Neudefinition der Microplane Elastizitätskonstanten in Gleichung (5.21) gibt es zwei Gründe. Zum einen lassen sich die beiden Konstanten  $K^{mic}$  und  $G^{mic}$  als mikroskopische Gegenstücke des makroskopischen Kompressions- und Schubmoduls identifizieren. Zum anderen lassen sich damit alle Größen der Mikroebene in analoger Weise zu denen auf der Makroebene herleiten, wobei die mikroskopische elastische freie Energie folgendermaßen lautet.

$$\Psi^{mic} := \Psi_V^{mic}(\epsilon_V) + \Psi_D^{mic}(\epsilon_D) = \frac{1}{2} K^{mic} \epsilon_V^2 + G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D \quad (5.22)$$

Dadurch wird die eindeutige Trennung und Entkopplung des volumetrischen und deviatorischen Verhaltens auf der Mikroebene, genauso wie auf der Makroebene, erkennbar. Die makroskopische volumetrische Materialantwort wird nur durch das volumetrische Verhalten der Mikroebenen charakterisiert und die makroskopische deviatorische Materialantwort dementsprechend durch das deviatorische Verhalten der Mikroebenen.

Zusätzlich lassen sich der makroskopische Elastizitätsmodul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  durch den Microplane Kompressions- und Schubmodul ausdrücken.

$$E = \frac{3 K^{mic} G^{mic}}{K^{mic} + G^{mic}} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{K^{mic} - 2 G^{mic}}{2 K^{mic} + 2 G^{mic}} \quad (5.23)$$

Aufgrund der Tatsache, dass der V–D Split benutzt wurde und somit das volumetrische und deviatorische Verhalten völlig entkoppelt sind, weisen die V–D Modelle eine enge Verwandtschaft zu makroskopischen invarianten–basierten Modellen auf. Diese enge Beziehung bildet die Grundlage für den in Kapitel 7 durchgeführten Mikro–Makro Abgleich der konstitutiven Gleichungen. Es wurden in jüngster Vergangenheit erste Versuche unternommen Beziehungen zwischen auf dem V–D Split basierenden Microplane Formulierungen und diskreten Partikelmodellen aufzustellen, vergleiche *Ramm, D'Addetta & Leukart* [195, 196]. Dabei wurde für das Partikelmodell derselbe kinematische Ansatz verwendet, d. h. eine Trennung in volumetrische und deviatorische Komponenten.

Das V–D Modell ist offensichtlich nur gültig für positive Microplane Elastizitätskonstanten. Ohne zusätzliche Annahme ist es mit dem V–D Modell möglich den gesamten zulässigen Bereich der Querdehnzahl von  $-1 \leq \nu \leq 0.5$  wiederzugeben.

Ein weiterer interessanter Aspekt des V–D Modells ist die gleichzeitige Einhaltung der kinematischen und der statischen Projektion. Bei der statischen Projektion, die in der Kristallplastizität ihre Anwendung findet, ergeben sich die mikroskopischen volumetrischen  $\bar{\sigma}_V$  und deviatorischen Spannungen  $\bar{\sigma}_D$  aus der Projektion des makroskopischen Spannungstensors  $\sigma$  unter Verwendung derselben Projektionstensoren wie bei der kinematischen Projektion. Im Unterschied zu den konstitutiven Spannungen  $\sigma_V$  und  $\sigma_D$  der kinematischen Projektion, entsprechend Abschnitt 4.3, erhält man bei der statischen Projektion folgende Microplane Spannungen.

$$\bar{\sigma}_V = \mathbf{V} : \sigma \quad \bar{\sigma}_D = \mathbf{Dev} : \sigma \quad (5.24)$$

Der zugehörige lokale Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}_\sigma$  folgt als Resultat des Cauchy Theorems.

$$\bar{\mathbf{t}}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}_V \mathbf{n} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_D \quad (5.25)$$

Die Einarbeitung der Definition des Spannungstensors (5.18) in die statische Projektion (5.24) führt auf die projizierten Microplane Spannungen.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_V &= \mathbf{V} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_\Omega \mathbf{V} : \mathbf{V} \mathcal{E}_V \epsilon_V + \mathbf{V} : \mathbf{Dev}^T \cdot \mathcal{E}_D \epsilon_D d\Omega = \mathcal{E}_V \epsilon_V \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_D &= \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Dev} : \frac{3}{4\pi} \int_\Omega \mathbf{V} \mathcal{E}_V \epsilon_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \mathcal{E}_D \epsilon_D d\Omega = \mathcal{E}_D \epsilon_D \end{aligned} \quad (5.26)$$

Durch einen Vergleich dieser projizierten Microplane Spannungen mit den Definitionen der Microplane Spannungen der kinematischen Projektion (5.16) lassen sich die projizierten Microplane Spannungen ( $\bar{\sigma}_V, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_D$ ) als identische Gegenstücke zu den konstitutiven Microplane Spannungen ( $\sigma_V, \boldsymbol{\sigma}_D$ ) identifizieren.

$$\sigma_V \equiv \bar{\sigma}_V \quad \boldsymbol{\sigma}_D \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}}_D \quad (5.27)$$

Daraus folgt, dass die kinematische und die statische Projektion für das V–D Modell gleichzeitig erfüllt werden.

### Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung

Um das Materialverhalten des beschriebenen Microplane Elastizitätsmodells, basierend auf dem V–D Split, auf den einzelnen Mikroebenen zu verstehen und um die räumlich anisotrop verteilten, mikroskopisch gespeicherten Energie zu charakterisieren, werden zwei Modellprobleme, nämlich der einaxiale Zug und die einfache Scherung, analysiert. Zu diesem Zweck wird ein Würfel mit einer Kantenlänge von 1 mm untersucht. Die makroskopischen Elastizitätskoeffizienten nehmen die folgenden Werte an: E-Modul  $E = 30000$  N/mm<sup>2</sup> und Querdehnzahl  $\nu = 0.2$ . Mit Gleichung (5.21) können die zugehörigen Microplane Elastizitätsparameter eindeutig bestimmt werden, d. h.  $\mathcal{E}_V = 50000$  N/mm<sup>2</sup> und  $\mathcal{E}_D = 25000$  N/mm<sup>2</sup> oder alternativ der Microplane Kompressions-  $K^{mic} = 50000$  N/mm<sup>2</sup> und Schubmodul  $G^{mic} = 12500$  N/mm<sup>2</sup>.

Abbildung 5.1 zeigt die resultierende Verteilung der volumetrisch und deviatorisch gespeicherten Energien  $W_V$  und  $W_D$ , entsprechend Gleichung (5.15), für die beiden Modellprobleme bei einer Diskretisierung der Einheitskugel mit 42 Ebenen ohne orthogonale Symmetrie, vergleiche Abschnitt 4.4. Zur besseren Darstellung wurden die resultierenden Polyeder um ca. 80° gedreht, so dass die Lastrichtung beinahe senkrecht zur Betrachtungsebene ist. In den Simulationen wurde eine Deformation von  $u = 0.004$  mm aufgebracht. In beiden Beispielen weisen die deviatorisch gespeicherten Energien  $W_D$  eine anisotrope räumliche Verteilung auf, während die volumetrischen Energien  $W_V$  eine isotrope Verteilung annehmen.

Für den einaxialen Zug weisen die Mikroebenen mit Normalen parallel zur Lastrichtung die maximalen Werte für die deviatorische Energie auf. Die minimale deviatorische Energie ist auf den Mikroebenen mit Normalen senkrecht zur Lastrichtung zu finden, d. h. orthogonal zum Maximum. Weiterhin fällt auf, dass bei dieser Beanspruchung unter den angegebenen Materialkennwerten wesentlich mehr deviatorische als volumetrische Energie aktiviert wird. Zusätzlich sind noch die Richtungen des deviatorischen Spannungstensors  $\text{dir} \boldsymbol{\sigma}_D$  im unteren Teil der Abbildung 5.1 angegeben. Weiße Ebenen bedeuten dabei Zug,

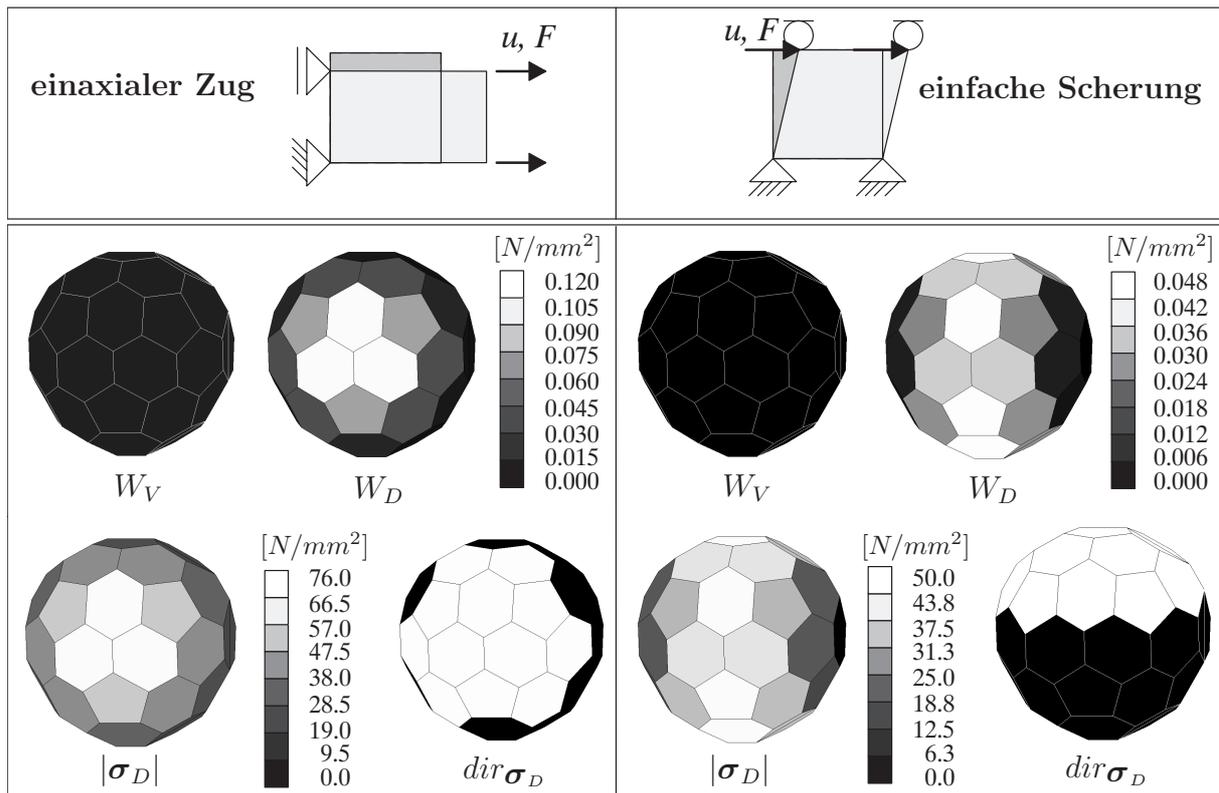


Abbildung 5.1: Gespeicherte Energien  $W_V$  und  $W_D$ , Spannungen  $\sigma_D$  und Richtungen der deviatorischen Spannungen auf der Mikroebene

d. h. der deviatorische Spannungsvektor zeigt nach außerhalb des Polyeders. Dementsprechend signalisieren schwarze Ebenen Druck. Das bedeutet, dass Mikroebenen mit Normalen, die beinahe parallel zur Lastichtung angeordnet sind, unter Zugbeanspruchung und die Ebenen mit Normalen annähernd senkrecht dazu unter Druckbeanspruchung stehen. Dieses Verhalten spiegelt den Querdehneffekt wieder.

Im Gegensatz dazu repräsentiert die einfache Scherung einen rein isochoren Zustand und deshalb ist die volumetrische Energie auf allen Ebenen null. Die maximale deviatorische Energie ist auf den Mikroebenen des Nullmeridians zu finden und die Größe der deviatorischen Energie nimmt senkrecht zur Nullmeridianebene ab. Die Verteilung der deviatorischen Energie weist zusätzlich einen zur Nullmeridianebene symmetrischen Verlauf auf. Die Richtung des deviatorischen Spannungsvektors  $dir \sigma_D$  weist darauf hin, dass die obere Hälfte des Polyeders auf Zug und die untere Hälfte auf Druck belastet ist.

Abschließend ist die Verteilung der Norm des deviatorischen Spannungsvektors  $|\sigma_D|$  für beide Simulationen angegeben. Diese ist der Verteilung der gespeicherten Energien sehr ähnlich.

Durch die gezeigten Beispiele wird deutlich, dass sich bei diesem Ansatz die makroskopische Antwort direkt auf den verschiedenen Mikroebenen widerspiegelt.

### Vergleich von traditionellem und „neuem“ Microplane Modell

Die wesentlichen Erkenntnisse und ein Vergleich der Microplane Elastizitätsformulierungen, basierend auf den verschiedenen Splits, sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Daraus

	V–D–T Modell	V–D Modell	N–T Modell
elastische Konstanten	drei elastische Konstanten → nicht eindeutig $\mathcal{E}_V = 3K$ $2\mathcal{E}_D + 3\mathcal{E}_T = 10G$	zwei elastische Konstanten → eindeutig $\mathcal{E}_V = 3K$ $\mathcal{E}_D = 2G$	zwei elastische Konstanten → eindeutig $\mathcal{E}_N = 3K$ $\mathcal{E}_T = 10/3G - 2K$
Kopplung	völlig entkoppelt $\mathcal{E}_V$ volumetrisch $\mathcal{E}_D, \mathcal{E}_T$ deviatorisch	völlig entkoppelt $\mathcal{E}_V$ volumetrisch $\mathcal{E}_D$ deviatorisch	künstlich gekoppelt $\mathcal{E}_N$ vol. & dev. $\mathcal{E}_T$ deviatorisch
Gültigkeitsbereich	Querdehnzahl unbegrenzt $-1 \leq \nu \leq 0.5$	Querdehnzahl unbegrenzt $-1 \leq \nu \leq 0.5$	Querdehnzahl begrenzt $-1 \leq \nu \leq 0.25$
Projektion	nur für $\mathcal{E}_D = \mathcal{E}_T$ kin. & statische Projektion	kin. & statische Projektion	nur kinematische Projektion
verwandt mit	makroskopischen Modellen	makroskopischen Modellen	diskreten Modellen

Tabelle 5.1: Vergleich der vorgestellten Microplane Modelle

wird ersichtlich, dass das V–D Modell die physikalischen Unregelmäßigkeiten in den Formulierungen mit dem N–T und V–D–T Split beseitigt. Das V–D Modell vereinigt somit die Vorteile der beiden traditionellen Microplane Ansätze.

Für die spezielle Wahl  $\mathcal{E}_V \equiv \mathcal{E}_D$  fällt das V–D–T Modell mit dem N–T Modell im betrachteten isotropen, linear elastischen Fall zusammen. Dagegen werden in den jüngeren Versionen des Microplane Modells [19, 28, 31, 32, 42], die auf dem V–D–T Split basieren, die deviatorischen und tangentialen Elastizitätskonstanten gleichgesetzt, d. h.  $\mathcal{E}_D \equiv \mathcal{E}_T$ . Diese Wahl scheint konzeptionelle Vorteile zu besitzen, da es dadurch möglich war Schädigung im Sinne der Kontinuumsschädigungsmechanik durch einen rein geometrischen Tensor vierter Stufe zu beschreiben, vergleiche *Carol, Bažant & Prat* [43]. Darüber hinaus fällt für diese Wahl das V–D–T Modell mit dem V–D Modell, welches zwischen rein volumetrischen und deviatorischen Anteilen auf der Mikro- und Makroebene unterscheidet, zusammen. Es lassen sich damit eindeutige Beziehungen zwischen der Mikro- und Makroebene aufstellen und der V–D Ansatz stellt die physikalische Motivation und Begründung für diese Wahl der deviatorischen und tangentialen Elastizitätskonstanten des V–D–T Modells her.

Somit ist leicht nachzuvollziehen, dass alle drei Splits für die betrachtete lineare isotrope Elastizität ineinander überführt werden können. Für komplexes Materialverhalten, welches in den folgenden Abschnitten diskutiert wird, ist dies dagegen keine triviale Angelegenheit. Bei nichtlinearem Materialverhalten folgt eine komplett unterschiedliche Materialantwort aus den verschiedenen Splits und die Überführung ineinander ist nur in sehr einfachen Ausnahmefällen möglich. Deshalb ist die Wahl des Splits von entscheidender Bedeutung für die Herleitung physikalisch abgesicherter Materialmodelle.

Ein Nachteil des V–D–T Modells, der vor allem im nichtlinearen Bereich zum Vorschein kommt, ist auf der Mehrdeutigkeit der deviatorisch–tangentialen Projektion begründet.

Bei Microplane Schädigungsmodellen mit drei unabhängigen Schädigungsvariablen [123] kam es zu mehrfachen Be- und Entlastungsvorgängen einzelner Komponenten und somit zu numerischen Problemen. Ein weiteres Defizit des Basismodells von *Bažant & Prat* [30] ist eine unbegründete seitliche Ausdehnung bei einaxialem Zug. Dieses Fehlverhalten wurde von *Jirásek* [109] aufgezeigt und ist auf eine Überschätzung des volumetrischen Schädigungsverhaltens zurückzuführen.

Ein Vergleich der drei unterschiedlichen Microplane Ansätze für den Fall der linearen isotropen Elastizität in Tabelle 5.1 zeigt, dass der V–D Ansatz ein sinnvolles mechanisches Fundament für weitere Arbeiten vor allem für den nichtlinearen Bereich darstellt. Darüber hinaus lässt sich der Mikro–Makro Übergang zwischen den konstitutiven Gleichungen mit diesem Ansatz einfacher durchführen, da sich die Invarianten, entsprechend den Gleichungen (4.17) und (4.18), eindeutig durch die jeweiligen, zugehörigen Komponenten wiedergeben lassen. Im Gegensatz dazu müssen bei den traditionellen Microplane Modellen zusätzliche Annahmen in die Formulierung einfließen, da sich die Invarianten als Kombination verschiedener Komponenten auf der Mikroebene ergeben, siehe *Kuhl, Ramm & Willam* [131]. Deshalb wird in dieser Arbeit das nichtlineare Materialverhalten im Rahmen des Microplane Modells ausschließlich mit dem V–D Split der Komponenten auf der Mikroebene modelliert.

### 5.1.2 Anisotrope Elastizität

Generell existieren zwei Arten von Anisotropie. Zum einen die so genannte „Anfangsanisotropie“, die eine von Natur aus vorherrschende Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften widerspiegelt und somit eine Folge des Aufbaus der Materialstruktur darstellt. Die Möglichkeiten der Modellierung dieser Art der Anisotropie im Rahmen der Microplane Theorie werden in diesem Abschnitt näher untersucht. Zum anderen die versagensinduzierte Anisotropie, wie sie beispielsweise bei Reibungsmaterialien wie Beton zu beobachten ist. Diese ist auf ein lokalisiertes Versagen in bestimmten Richtungen zurückzuführen und somit eine Konsequenz der Belastungsgeschichte. Diese Art der Anisotropie ist Gegenstand der nächsten Abschnitte zur materiell nichtlinearen Modellierung im Rahmen des Microplane Modells.

In der Literatur finden sich prinzipiell zwei verschiedene Methoden zur Darstellung des anisotropen elastischen Materialverhaltens im Rahmen der Microplane Theorie. Die erste, einfachere Methode geht auf die grundlegende Arbeit von *Bažant & Gambarova* [21] zurück. Dabei wird eine von der Normalenrichtung der einzelnen Mikroebenen abhängige Funktion  $f(\mathbf{n})$  in die Gleichungen des Microplane Modells eingeführt. Diese Methode wurde erstmals in einer Materialformulierung für Tone zur Beschreibung des richtungsabhängigen Gleitvorganges zwischen einzelnen Tonplättchen von *Bažant & Prat* [29] eingesetzt. Beispielhaft wird dieses Vorgehen für den Spannungstensor aus Abschnitt 4.3 ohne Spezifikation des verwendeten Splits gezeigt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [\square \sigma_{\square} + \boldsymbol{\Delta}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Delta}] f(\mathbf{n}) d\Omega \quad (5.28)$$

Die Funktion  $f(\mathbf{n})$  beschreibt im statistischen Sinne eine Verteilungsfunktion der relativen Häufigkeit der Richtungen  $\mathbf{n}$ . Somit ist diese Funktion als eine Art Wichtungsfunktion der Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  anzusehen, die im Allgemeinen eine im Material von Beginn an vorherrschende Anisotropie einführt. Die Schwierigkeit liegt zweifellos in der Definition dieser

Funktion  $f(\mathbf{n})$ . Deshalb wird diese Funktion üblicherweise aus Experimenten bestimmt. Ist diese Funktion bekannt, so wird automatisch eine Anisotropie in die Formulierung eingebracht und die Anisotropie wird über diese Funktion gesteuert. Dabei nimmt diese Funktion in Abhängigkeit der Richtung Werte zwischen  $f(\mathbf{n}) = 1$  und  $f(\mathbf{n}) = 0$  an. Für den im vorigen Abschnitt beschriebenen isotropen Fall wird eine isotrope Funktion  $f = 1$  angenommen.

Ein zweiter, allgemeinerer Ansatz nutzt den Vorteil der Charakterisierung der Microplane Stoffgesetze auf den einzelnen Mikroebenen und somit in unterschiedlichen Richtungen aus. Die Anisotropie folgt dann automatisch aus der richtungsabhängigen Definition der einzelnen Stoffgesetze. Dieser Ansatz ist auf die Arbeit von *Prat & Gens* [193] zurückzuführen. Für den hier betrachteten elastischen Fall ergeben sich die jeweiligen Elastizitätskoeffizienten in Abhängigkeit der Normalen der Mikroebenen, so dass  $\mathcal{E}_{\square}(\mathbf{n})$  und  $\mathcal{E}_{\Delta}(\mathbf{n})$ . Somit erhält man den Spannungstensor in folgender Form.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [\mathcal{E}_{\square}(\mathbf{n}) \square \otimes \square + \boldsymbol{\Delta}^T \cdot \mathcal{E}_{\Delta}(\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\Delta}] d\Omega : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.29)$$

Der Spannungstensor (5.29) ist wiederum in allgemeiner Form, ohne genaue Spezifikation des Splits, angegeben.

Mit diesen Ansätzen ist es mit dem Microplane Modell möglich, jegliche Art von Anisotropie auf relativ einfache, natürliche Art und Weise zu beschreiben. Die Methode nach *Prat & Gens* [193] wird in Abschnitt 7.1.2 zur Modellierung von transversal-isotropen elastischen Materialien mit dem Microplane Modell herangezogen. Die Erweiterung auf inelastische Vorgänge ist darüber hinaus sehr einfach möglich, indem beispielsweise für die zweite Methode anstatt der elastischen, inelastische Stoffgesetze verwendet werden. Das bedeutet, in Gleichung (5.29) müssen die Elastizitätskoeffizienten  $\mathcal{E}_{\square}(\mathbf{n})$  und  $\mathcal{E}_{\Delta}(\mathbf{n})$  durch die entsprechenden Tangentenmoduli  $\mathcal{E}_{\square,tan}(\mathbf{n})$  und  $\mathcal{E}_{\Delta,tan}(\mathbf{n})$  der Mikroebene ersetzt werden. Die mikroskopischen Tangentenmoduli ergeben sich aus den Ratenbeziehungen zwischen den Microplane Spannungen und den zugehörigen Microplane Verzerrungen.

## 5.2 Microplane Schädigung

Bisher wurden ausschließlich nicht-dissipative Microplane Stoffgesetze behandelt. Im folgenden Abschnitt ist eine Erweiterung dieser einfachen Microplane Formulierungen auf dissipative Mechanismen zur Modellierung des inelastischen Materialverhaltens geplant. Weiterhin stellt in diesem Abschnitt die Schädigung des Materials den wesentlichen Dissipationsmechanismus dar. Somit ist der Anwendungsbereich dieser Formulierungen auf Phänomene bei denen der Einfluss von irreversiblen Deformationen vernachlässigbar ist, wie beispielsweise quasi-sprödes Versagen von Beton, begrenzt.

In Analogie zu den klassischen makroskopischen Schädigungsformulierungen, entsprechend Abschnitt 3.3.1, existieren prinzipiell zwei Möglichkeiten Schädigungsprozesse in die Microplane Theorie einzubinden. Einerseits ist die Einführung von unterschiedlichen Schädigungsparametern, wie in den klassischen Microplane Modellen nach *Bazant & Prat* [30], denkbar. Diese Microplane Modelle basieren auf einer Schädigungsformulierung mit getrennter Berücksichtigung des volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Schädigungsanteils. In dieser Arbeit werden alle Microplane Schädigungsformulierungen im Rahmen des V–D Splits hergeleitet. Dadurch ist eine getrennte Beschreibung des rein volumetrischen und rein deviatorischen Schädigungsverhaltens auf der Mikroebene durch die

Einführung von zwei Schädigungsparametern pro Mikroebene möglich. Dies entspricht dem Vorgehen des generalisierten isotropen makroskopischen Schädigungsmodells in Abschnitt 3.3.1. Die zweite Möglichkeit basiert auf der Einführung einer einzigen Schädigungsvariablen pro Mikroebene, so dass die volumetrischen und deviatorischen elastischen Eigenschaften der Mikroebene gleichermaßen abgemindert werden. Dies führt auf anisotrope Microplane Schädigungsformulierungen, die zu den makroskopischen isotropen 1-Parameter Schädigungsmodellen aus Abschnitt 3.3.1 in enger Verwandtschaft stehen. Alle aus diesen beiden Möglichkeiten resultierenden Microplane Formulierungen besitzen gegenüber den makroskopischen Schädigungsmodellen den Vorteil, dass anisotropes Materialverhalten auf eine sehr einfache und natürliche Weise in die Formulierung eingebracht werden kann. Dabei reichen skalare Schädigungsvariablen bzw. isotrope Stoffgesetze auf der Mikroebene aus, um Anisotropie auf der Makroebene darzustellen. Im Gegensatz dazu sind bei makroskopischen Kontinuumsschädigungsmodellen vektor- oder sogar tensorwertige Schädigungsvariablen notwendig, deren physikalische Interpretation schwierig ist.

### 5.2.1 Degradationsmodelle auf der Mikroebene

Zunächst wird gefordert, dass das geschädigte sowie das ungeschädigte Material durch Zustandsvariablen auf der Mikroebene, beispielsweise Microplane Verzerrungen bzw. Spannungen, charakterisiert wird. Zusätzlich besteht ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Zuständen, deren Beschreibung die Definition unterschiedlicher Räume erfordert. Dies führt auf die Definitionen des physikalischen bzw. geschädigten Raumes und des effektiven bzw. ungeschädigten Raumes. Die Zustandsvariablen in diesen Räumen werden dementsprechend als nominale oder effektive Größen bezeichnet. Aus diesem Ansatz ergeben sich in Analogie zur Makroebene vier unterschiedliche Konzepte zur Beschreibung der Degradation des Materials auf der Mikroebene. Dabei wird angenommen, dass sich die Schädigung des Materials nur auf die elastischen Eigenschaften auswirkt, so dass eine Degradation der elastischen Materialeigenschaften stattfindet. Da alle in dieser Arbeit hergeleiteten Microplane Schädigungsmodelle auf dem V-D Split basieren, d. h. es findet eine Differenzierung zwischen volumetrischen und deviatorischen Komponenten statt, wird bei den folgenden Degradationsmodellen zwischen der volumetrischen und der deviatorischen Degradation unterschieden.

- „Effektive Spannungen“ – „Hypothese der Verzerrungsäquivalenz“

Die volumetrischen bzw. deviatorischen Microplane Verzerrungen  $(\epsilon_V, \epsilon_D)$ , die im volumetrisch bzw. deviatorisch geschädigten Material  $(\mathcal{E}_V^d, \mathcal{E}_D^d)$  unter den volumetrischen bzw. deviatorischen nominellen Microplane Spannungen  $(\sigma_V, \sigma_D)$  auftreten, entsprechen denen des ungeschädigten Materials  $(\mathcal{E}_V^{el}, \mathcal{E}_D^{el})$  unter den volumetrischen bzw. deviatorischen effektiven Microplane Spannungen  $(\tilde{\sigma}_V, \tilde{\sigma}_D)$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \mathcal{E}_V^{el-1} \tilde{\sigma}_V &= \mathcal{E}_V^d-1 \sigma_V & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\sigma}_V = \frac{\sigma_V}{[1 - d_V]} \\ \epsilon_D &= \mathcal{E}_D^{el-1} \cdot \tilde{\sigma}_D &= \mathcal{E}_D^d-1 \cdot \sigma_D & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\sigma}_D = \frac{\sigma_D}{[1 - d_D]} \end{aligned} \quad (5.30)$$

- „Effektive Verzerrungen“ – „Hypothese der Spannungsäquivalenz“

Die volumetrischen bzw. deviatorischen Microplane Spannungen  $(\sigma_V, \sigma_D)$ , die im volumetrisch bzw. deviatorisch geschädigten Material  $(\mathcal{E}_V^d, \mathcal{E}_D^d)$  unter den volumetrischen bzw. deviatorischen nominellen Microplane Verzerrungen  $(\epsilon_V, \epsilon_D)$  auftreten,

entsprechen denen des ungeschädigten Materials ( $\mathcal{E}_V^{el}, \mathcal{E}_D^{el}$ ) unter den volumetrischen bzw. deviatorischen effektiven Microplane Verzerrungen ( $\tilde{\epsilon}_V, \tilde{\epsilon}_D$ ).

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \mathcal{E}_V^{el} \tilde{\epsilon}_V &= \mathcal{E}_V^d \epsilon_V & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\epsilon}_V = [1 - d_V] \epsilon_V \\ \boldsymbol{\sigma}_D &= \mathcal{E}_D^{el} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D &= \mathcal{E}_D^d \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D = [1 - d_D] \boldsymbol{\epsilon}_D\end{aligned}\quad (5.31)$$

- „Effektive Verzerrungen“ – „Hypothese der Energieäquivalenz“

Die volumetrisch bzw. deviatorisch gespeicherten mikroskopischen freien Energien ( $\Psi_V^{mic}, \Psi_D^{mic}$ ) im volumetrisch bzw. deviatorisch geschädigten Material ( $\mathcal{E}_V^d, \mathcal{E}_D^d$ ) unter den volumetrischen bzw. deviatorischen nominellen Microplane Verzerrungen ( $\epsilon_V, \boldsymbol{\epsilon}_D$ ) entsprechen denen des ungeschädigten Materials ( $\mathcal{E}_V^{el}, \mathcal{E}_D^{el}$ ) unter den volumetrischen bzw. deviatorischen effektiven Microplane Verzerrungen ( $\tilde{\epsilon}_V, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D$ ).

$$\begin{aligned}\Psi_V^{mic} &= \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_V \mathcal{E}_V^{el} \tilde{\epsilon}_V &= \frac{1}{2} \epsilon_V \mathcal{E}_V^d \epsilon_V & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\epsilon}_V = \sqrt{1 - d_V} \epsilon_V \\ \Psi_D^{mic} &= \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D \cdot \mathcal{E}_D^{el} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \mathcal{E}_D^d \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_D = \sqrt{1 - d_D} \boldsymbol{\epsilon}_D\end{aligned}\quad (5.32)$$

- „Effektive Spannungen“ – „Hypothese der Äquivalenz der Komplementärenergie“

Die volumetrisch bzw. deviatorisch gespeicherten mikroskopischen Komplementärenergien ( $\tilde{\Pi}_V^{mic}, \tilde{\Pi}_D^{mic}$ ) im volumetrisch bzw. deviatorisch geschädigten Material ( $\mathcal{E}_V^d, \mathcal{E}_D^d$ ) unter den volumetrischen bzw. deviatorischen nominellen Microplane Spannungen ( $\sigma_V, \boldsymbol{\sigma}_D$ ) entsprechen denen des ungeschädigten Materials ( $\mathcal{E}_V^{el}, \mathcal{E}_D^{el}$ ) unter den volumetrischen bzw. deviatorischen effektiven Microplane Spannungen ( $\tilde{\sigma}_V, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D$ ).

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_V^{mic} &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_V \mathcal{E}_V^{el-1} \tilde{\sigma}_V &= \frac{1}{2} \sigma_V \mathcal{E}_V^{d-1} \sigma_V & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\sigma}_V = \frac{\sigma_V}{\sqrt{1 - d_V}} \\ \tilde{\Pi}_D^{mic} &= \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \mathcal{E}_D^{el-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \mathcal{E}_D^{d-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_D & \quad \text{mit} & \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D = \frac{\boldsymbol{\sigma}_D}{\sqrt{1 - d_D}}\end{aligned}\quad (5.33)$$

Das Konzept der effektiven Spannungen in Verbindung mit der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz hat sich für die Modellierung des Materialverhaltens von kohäsiven Reibungsmaterialien als besonders geeignet erwiesen. Deshalb wird im Folgenden dieses Konzept bei allen Microplane Schädigungsformulierungen angewendet.

### Konzept der effektiven Spannungen – Hypothese der Verzerrungsäquivalenz

Die Mikrorissentwicklung und -ausbreitung und die damit verbundene Degradation der Materialeigenschaften führen zu größeren Spannungen, die als effektive Spannungen bezeichnet werden. Dieses Konzept wurde in den 1960er Jahren von *Rabotnov* [194] formuliert. Es beruht auf der Annahme, dass sich die volumetrischen bzw. deviatorischen physikalischen Räume durch die Abbildungsvorschriften  $M_V^{-1}$  bzw.  $\mathbf{M}_D^{-1}$  in die entsprechenden effektiven Spannungsräume überführen lassen. Dies ist zur Verdeutlichung in Abbildung 5.2 dargestellt. Daraus ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den nominalen und effektiven Microplane Spannungen unter Annahme isotroper Stoffgesetze auf der Mikroebene.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_V &:= M_V^{-1} \sigma_V & \quad \text{mit} & \quad M_V &= [1 - d_V] \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D &:= \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_D & \quad \text{mit} & \quad \mathbf{M}_D &= [1 - d_D] \mathbf{1}\end{aligned}\quad (5.34)$$

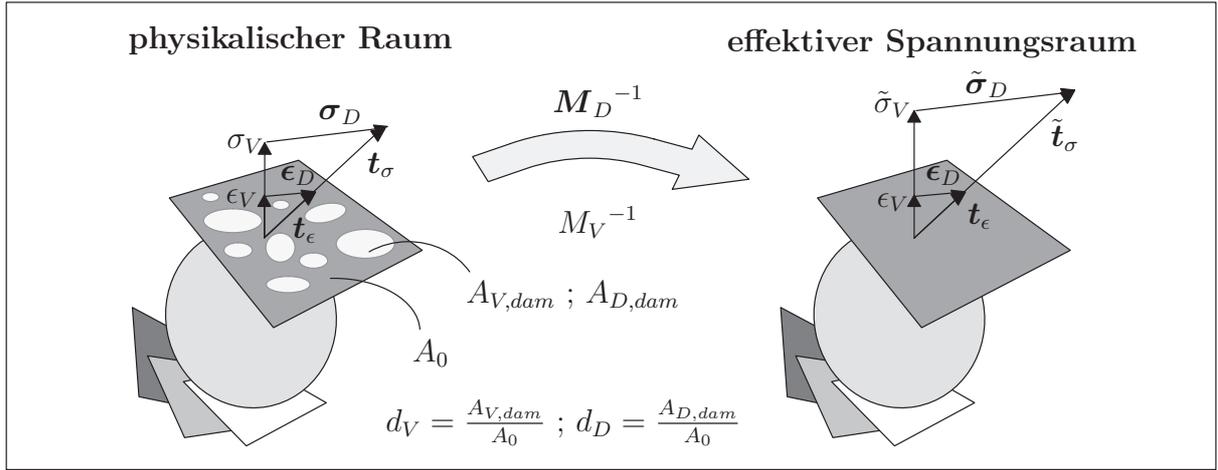


Abbildung 5.2: Effektives Spannungs-konzept – Hypothese der Verzerrungsäquivalenz

Die effektiven Microplane Spannungen  $\tilde{\sigma}_V$  und  $\tilde{\sigma}_D$  entsprechen den auf die infolge der Schädigung abgeminderten Querschnittsflächen bezogenen nominellen Microplane Spannungen  $\sigma_V$  und  $\sigma_D$ . Sie können somit als die innerhalb des geschädigten Materials auftretenden Spannungen interpretiert werden. Dies führt auf die Definition der volumetrischen und deviatorischen Schädigungsvariablen  $d_V$  und  $d_D$ , die ein Maß für die Schädigung des Materials auf der Mikroebene darstellen,

$$d_V := \frac{A_{V,dam}}{A_0} \quad d_D := \frac{A_{D,dam}}{A_0} \quad (5.35)$$

wobei  $A_{V,dam}$  und  $A_{D,dam}$  die volumetrisch und deviatorisch geschädigten Querschnittsflächen und  $A_0$  die ursprünglich ungeschädigte Querschnittsfläche bezeichnen. Die beiden Schädigungsvariablen nehmen je nach Ausmaß der Schädigung Werte zwischen  $0 \leq d_V, d_D \leq 1$  an. Dabei stellt  $d_V, d_D = 0$  den Ausgangszustand dar, d. h. intaktes ungeschädigtes Material. Dagegen spiegelt  $d_V, d_D = 1$  den kompletten Verlust der Materialfestigkeit auf der Mikroebene und somit in bestimmten Raumrichtungen wieder, d. h. vollständig geschädigtes Material. Dies steht im Einklang mit Lemaître's Definition [139] der Schädigungsvariablen als effektive Oberflächendichte der Mikrorisse bzw. -poren.

Infolge der von Lemaître [137, 140] postulierten Hypothese der Verzerrungsäquivalenz (5.30) in Verbindung mit den Definitionen der effektiven Spannungen (5.34) lassen sich die volumetrischen und deviatorischen Materialmoduli  $\mathcal{E}_V^d$  und  $\mathcal{E}_D^d$  der Microplane Schädigung näher spezifizieren.

$$\mathcal{E}_V^d = [1 - d_V] \mathcal{E}_V^{el} = [1 - d_V] K^{mic} \quad \mathcal{E}_D^d = [1 - d_D] \mathcal{E}_D^{el} = 2[1 - d_D] G^{mic} \mathbf{1} \quad (5.36)$$

In Analogie zu den Microplane Spannungen ergeben sich die mikroskopischen Materialmoduli  $\mathcal{E}_V^d$  und  $\mathcal{E}_D^d$  der Microplane Schädigung als Abbildung der elastischen Materialmoduli vom effektiven Spannungsraum in den physikalischen Raum.

Das beschriebene Konzept eignet sich besonders zur Formulierung verzerrungsbasierter Materialmodelle für die Beschreibung des Schädigungsverhaltens gesteinsartiger Materialien wie Beton. Zusätzlich besitzt es gegenüber den anderen Konzepten den Vorteil der einfacheren algorithmischen Umsetzung.

### 5.2.2 2-Parameter Schädigungsmodell

In diesem Abschnitt wird eine auf zwei Schädigungsvariablen basierende Microplane Schädigungsformulierung hergeleitet und diskutiert. Die Herleitung erfolgt im Rahmen des thermodynamisch konsistenten Konzeptes aus Abschnitt 4.3. Das daraus resultierende 2-Parameter Schädigungsmodell erlaubt eine unterschiedliche Betrachtung des volumetrischen und deviatorischen Schädigungsverhalten der Mikroebene. Die beiden Schädigungsparameter  $d_V$  und  $d_D$  charakterisieren das volumetrische und deviatorische Schädigungsverhalten auf der Mikroebene. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass sich die beiden Schädigungsanteile gegenseitig nicht beeinflussen. Die Folge ist ein volumetrisch und deviatorisch entkoppeltes Schädigungsmodell, welches nicht in der Lage ist das für kohäsive Reibungsmaterialien charakteristische dilatante Antwortverhalten wiederzugeben. Der resultierende Vektor der internen Variablen lautet:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{d_V, d_D\} \quad \text{mit} \quad 0 \leq d_V, d_D \leq 1. \quad (5.37)$$

Die mikroskopische freie Energie  $\Psi_{mic}$  ist nun in Abhängigkeit der beiden Verzerrungskomponenten  $(\boldsymbol{\epsilon}_V, \boldsymbol{\epsilon}_D)$  und der beiden Schädigungsvariablen  $(d_V, d_D)$  so zu formulieren, dass  $\Psi^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_V, \boldsymbol{\epsilon}_D, d_V, d_D)$ . Mit der Definition der mikroskopischen elastischen freien Energie (5.22) lautet die Definition der mikroskopischen freien Energie wie folgt:

$$\Psi^{mic} := [1 - d_V] \Psi_{V,el}^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_V) + [1 - d_D] \Psi_{D,el}^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_D). \quad (5.38)$$

Die mikroskopische freie Energie kann als Summe der mit  $[1 - d_V]$  und  $[1 - d_D]$  skalierten volumetrisch und deviatorisch gespeicherten elastischen Energien identifiziert werden. Da das volumetrische und deviatorische Schädigungsverhalten als entkoppelt angenommen wird, lässt sich die mikroskopische freie Energie additiv zerlegen,

$$\Psi^{mic} = \Psi_V^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_V, d_V) + \Psi_D^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_D, d_D) \quad (5.39)$$

wobei  $\Psi_V^{mic}$  die volumetrisch geschädigte freie Energie und  $\Psi_D^{mic}$  die deviatorisch geschädigte freie Energie darstellt.

$$\Psi_V^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_V, d_V) = \frac{1}{2} [1 - d_V] K^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_V^2 \quad \Psi_D^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_D, d_D) = [1 - d_D] G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D \quad (5.40)$$

Die Auswertung der mikroskopischen Clausius–Duhem Ungleichung (4.34) nach *Coleman & Gurtin* [54] und *Coleman & Noll* [55] liefert die Definitionen der konstitutiven Microplane Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_V$  und  $\boldsymbol{\sigma}_D$  als energetisch konjugierte Größen zu den jeweiligen Microplane Verzerrungen.

$$\boldsymbol{\sigma}_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_V} = [1 - d_V] K^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_V \quad \boldsymbol{\sigma}_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_D} = 2 [1 - d_D] G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D \quad (5.41)$$

Weiterhin lassen sich die thermodynamischen Kräfte  $\boldsymbol{\beta}^{mic}$  als energetisch konjugierte Größen zu den internen Variablen, den beiden Schädigungsvariablen  $d_V$  und  $d_D$ , aus der Definition der freien Energie (5.38) ableiten. Diese ergeben sich als die volumetrisch und deviatorisch elastisch gespeicherten mikroskopischen Energien  $\Psi_{V,el}^{mic}$  und  $\Psi_{D,el}^{mic}$ . Im Sinne der Kontinuumsschädigungsmechanik werden sie als die mikroskopischen Energiefreisetzungsraten  $Y_V^{mic}$  und  $Y_D^{mic}$  interpretiert.

$$Y_V^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} = \frac{1}{2} K^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_V^2 \quad Y_D^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} = G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D \quad (5.42)$$

Diese mikroskopischen Energiefreisetzungsraten kontrollieren die volumetrische und deviatorische Schädigungsentwicklung. Sie können als eine lokal begrenzte Energie verstanden werden, die erforderlich ist um einen Mikroriss auf der Mikroebene zu initiieren oder das Fortschreiten bzw. das Zusammenwachsen von Mikrorissen voranzutreiben. Die reduzierte mikroskopische Dissipationsungleichung nimmt mit diesen Definitionen folgende Form an.

$$\mathcal{D}^{mic} = Y_V^{mic} \dot{d}_V + Y_D^{mic} \dot{d}_D \geq 0 \quad (5.43)$$

Entsprechend *Kuhl, Steinmann & Carol* [132] wird gefordert, dass diese Ungleichung in allen Belastungsprozessen eingehalten wird.

Der Zustand der Schädigung wird dann durch zwei unabhängige Schädigungsfunktionen  $\Phi_V^{mic}$  und  $\Phi_D^{mic}$ , die im Allgemeinen verzerrungsbasiert definiert sind, charakterisiert. Diese Schädigungsfunktionen werden aus der Differenz der Funktionen  $\phi_V^{mic}$  und  $\phi_D^{mic}$ , die wiederum von den Vergleichsverzerrungen abhängig sind, und den zugehörigen Schädigungsparametern  $d_V$  und  $d_D$  bestimmt.

$$\Phi_V^{mic} = \phi_V^{mic}(\eta_V^{mic}) - d_V \leq 0 \quad \Phi_D^{mic} = \phi_D^{mic}(\eta_D^{mic}) - d_D \leq 0 \quad (5.44)$$

Die Vergleichsverzerrungen  $\eta_V^{mic}$  und  $\eta_D^{mic}$  werden in Abhängigkeit der jeweiligen Energiefreisetzungsraten aufgestellt.

Die Anwendung des Postulats vom Maximum der Dissipation auf die mikroskopische Dissipationsungleichung (5.43) liefert nach *Luenberger* [149] ein mathematisches Optimierungsproblem auf der Mikroebene mit den Schädigungsfunktionen (5.44) als Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen werden über zwei Lagrange-Multiplikatoren  $\dot{\gamma}_V^{mic}$  und  $\dot{\gamma}_D^{mic}$  in die Formulierung eingebracht. Dadurch ergibt sich folgende Stationaritätsbedingung.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{mic} &= -\mathcal{D}^{mic} + \dot{\gamma}_V^{mic} \Phi_V^{mic} + \dot{\gamma}_D^{mic} \Phi_D^{mic} \\ &= -Y_V^{mic} \dot{d}_V - Y_D^{mic} \dot{d}_D + \dot{\gamma}_V^{mic} [\phi_V^{mic} - d_V] + \dot{\gamma}_D^{mic} [\phi_D^{mic} - d_D] \rightarrow \text{stat} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Die Evolutionsgleichungen der Schädigungsvariablen  $d_V$  und  $d_D$  ergeben sich durch Lösen der Stationaritätsbedingung (5.45) als Funktion der beiden Lagrange-Multiplikatoren.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{mic}}{\partial Y_V^{mic}} &= -\dot{d}_V + \dot{\gamma}_V^{mic} \frac{\partial \phi_V^{mic}}{\partial Y_V^{mic}} = 0 & \rightarrow & \dot{d}_V = \dot{\gamma}_V^{mic} \frac{\partial \phi_V^{mic}}{\partial Y_V^{mic}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^{mic}}{\partial Y_D^{mic}} &= -\dot{d}_D + \dot{\gamma}_D^{mic} \frac{\partial \phi_D^{mic}}{\partial Y_D^{mic}} = 0 & \rightarrow & \dot{d}_D = \dot{\gamma}_D^{mic} \frac{\partial \phi_D^{mic}}{\partial Y_D^{mic}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Weiterhin erhält man die mikroskopischen volumetrischen und deviatorischen Karush-Kuhn-Tucker Be- und Entlastungsbedingungen sowie die Konsistenzbedingungen in gewohnter Form, vergleiche beispielsweise Gleichung (3.17).

$$\begin{aligned} \Phi_V^{mic} \leq 0 & \quad \dot{\gamma}_V^{mic} \geq 0 & \quad \Phi_V^{mic} \dot{\gamma}_V^{mic} = 0 ; & \quad \dot{\Phi}_V^{mic} \dot{\gamma}_V^{mic} = 0 \\ \Phi_D^{mic} \leq 0 & \quad \dot{\gamma}_D^{mic} \geq 0 & \quad \Phi_D^{mic} \dot{\gamma}_D^{mic} = 0 ; & \quad \dot{\Phi}_D^{mic} \dot{\gamma}_D^{mic} = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Für ein Fortschreiten der Schädigung ( $\dot{\gamma}_V^{mic} > 0$ ) bzw. ( $\dot{\gamma}_D^{mic} > 0$ ) folgen aus den Konsistenzbedingungen die Evolutionsgleichungen der Schädigungsfunktionen.

$$\dot{\Phi}_V^{mic} = \frac{\partial \Phi_V^{mic}}{\partial Y_V^{mic}} \dot{Y}_V^{mic} + \frac{\partial \Phi_V^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V = 0 \quad \dot{\Phi}_D^{mic} = \frac{\partial \Phi_D^{mic}}{\partial Y_D^{mic}} \dot{Y}_D^{mic} + \frac{\partial \Phi_D^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D = 0 \quad (5.48)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Evolutionsgleichungen der beiden Lagrange-Multiplikatoren  $\dot{\gamma}_V^{mic}$  und  $\dot{\gamma}_D^{mic}$ .

$$\dot{\gamma}_V^{mic} = \dot{Y}_V^{mic} \geq 0 \quad \dot{\gamma}_D^{mic} = \dot{Y}_D^{mic} \geq 0 \quad (5.49)$$

Diese können auch als Geschichtspareter interpretiert werden. Nach *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] lassen sich diese Geschichtspareter in Abhängigkeit der Schädigungsschwellwerte  $\gamma_{V0}^{mic}$  und  $\gamma_{D0}^{mic}$  und den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Werten der Energiefreisetzungsraten in expliziter Form angeben.

$$\gamma_V^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_V^{mic}(t), \gamma_{V0}^{mic}) \quad \gamma_D^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_D^{mic}(t), \gamma_{D0}^{mic}) \quad (5.50)$$

Mit diesen Beziehungen vereinfachen sich die Evolutionsgesetze (5.46) der Schädigungsvariablen zu einer direkten Bestimmungsgleichung in Abhängigkeit der Geschichtspareter.

$$d_V = \phi_V^{mic}(\gamma_V^{mic}) \quad d_D = \phi_D^{mic}(\gamma_D^{mic}) \quad (5.51)$$

Die Mikro-Makro Beziehung der Spannungen (4.31) liefert den makroskopischen Spannungstensor als Funktion der Microplane Spannungen für die beschriebene Microplane Schädigungsformulierung.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d_V] K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 [1 - d_D] G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} \, d\Omega : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.52)$$

Dieser Ausdruck für die makroskopischen Spannungen lässt sich im Sinne der Kontinuumschädigungsmechanik zu einer Sekantenbeziehung umformulieren,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.53)$$

wobei  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d$  den vierstufigen Sekantenmodul der Microplane Schädigungsformulierung definiert.

Die zeitliche Ableitung der makroskopischen Spannungen (5.52) liefert die Beziehung zwischen der makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsrate  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  und somit die Definition des vierstufigen Tangententensors der Microplane Schädigungsformulierung  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d$ . Diese Ableitung lautet:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \dot{d}_V K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 \dot{d}_D G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} \, d\Omega : \boldsymbol{\epsilon}. \quad (5.54)$$

Aus dieser Gleichung kann mit Hilfe der Evolutionsgleichungen der Schädigungsvariablen (5.46) und der Geschichtspareter (5.49) der makroskopische Materialtensor gewonnen werden.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_V^{mic}}{\partial \gamma_V^{mic}} \frac{\sigma_V^2}{[1 - d_V]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \frac{\partial \phi_D^{mic}}{\partial \gamma_D^{mic}} \mathbf{Dev}^T \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_D \otimes \boldsymbol{\sigma}_D}{[1 - d_D]^2} \cdot \mathbf{Dev} \, d\Omega \quad (5.55)$$

Aufgrund der Abhängigkeit der Schädigungsfunktionen von den Energiefreisetzungsraten führt diese Herleitung im Sinne von *Carol, Rizzi & Willam* [47] zu assoziierten Microplane Schädigungsformulierungen. Dadurch nimmt auch der hergeleitete makroskopische Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^d$  eine symmetrische Form an.

Natürlich ist es vorteilhaft, wenn Microplane Modelle, im Speziellen deren Stoffgesetze,

derart formuliert sind, dass die kinematische Projektion für die Verzerrungen und die statische Projektion für die effektiven Spannungen gleichzeitig eingehalten werden. Dies ist für die hergeleitete Microplane Schädigungsformulierung der Fall und soll im Folgenden kurz gezeigt werden. Die effektiven Microplane Spannungen  $\tilde{\sigma}_V$  und  $\tilde{\sigma}_D$  ergeben sich aus der Gleichung (5.34) und der Definition der konstitutiven Microplane Spannungen (5.41).

$$\tilde{\sigma}_V = \frac{\sigma_V}{[1 - d_V]} = K^{mic} \epsilon_V \quad \tilde{\sigma}_D = \frac{\sigma_D}{[1 - d_D]} = 2 G^{mic} \epsilon_D \quad (5.56)$$

Die makroskopischen effektiven Spannungen werden in Analogie zu den makroskopischen Spannungen (5.52) aus folgender Integralbeziehung bestimmt.

$$\tilde{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_V \mathbf{V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\sigma}_D d\Omega \quad (5.57)$$

Die projizierten effektiven Microplane Spannungen  $\tilde{\tilde{\sigma}}_V$  und  $\tilde{\tilde{\sigma}}_D$  erhält man folgerichtig aus der Projektion des effektiven Spannungstensors (5.57) mit den jeweiligen Projektionstensenoren.

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_V = \mathbf{V} : \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_V \quad \tilde{\tilde{\sigma}}_D = \mathbf{Dev} : \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_D \quad (5.58)$$

Daraus wird ersichtlich, dass die projizierten effektiven Microplane Spannungen  $\tilde{\tilde{\sigma}}_V$  und  $\tilde{\tilde{\sigma}}_D$  mit den konstitutiven effektiven Microplane Spannungen  $\tilde{\sigma}_V$  und  $\tilde{\sigma}_D$  identisch sind. Die Microplane Schädigungsformulierung erfüllt zusätzlich zur kinematischen Projektion auch die statische Projektion für die effektiven Spannungen.

Darauf aufbauend lassen sich die konstitutiven Gleichungen dieses Modells, in Analogie zum V–D–T Modell von *Carol, Bažant & Prat* [43], in ein Modell der Kontinuumschädigungsmechanik mit vierstufigem Schädigungstensor  $\mathcal{D}$  überführen. Ausgangspunkt ist folgende Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungen und Verzerrungen aus Abschnitt 3.3.2.

$$\sigma = [\mathcal{I} - \mathcal{D}] : \mathcal{E}^{el} : \epsilon \quad (5.59)$$

Der Schädigungstensor kann nach einigen Zwischenschritten mit Hilfe der Gleichungen (5.52) und (5.53) wie folgt angegeben werden.

$$\mathcal{D} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} d_V \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + d_D \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} d\Omega \quad (5.60)$$

Dieser ist nur noch abhängig von der Schädigung und der Richtung der Ebene und nicht von der Steifigkeit der einzelnen Ebenen. Die Einträge des anisotropen Schädigungstensors erhalten auf diese Weise eine eindeutige physikalische Bedeutung.

Vereinfachend wurde bei der Herleitung davon ausgegangen, dass sich die volumetrische und deviatorische Schädigung nicht beeinflussen und somit unabhängig voneinander modelliert werden können. Eine Erweiterung dieser Formulierung auf gekoppeltes volumetrisches und deviatorisches Schädigungsverhalten ist einfach durchführbar. Dazu müssen die volumetrischen und deviatorischen Schädigungsfunktionen (5.44) in Abhängigkeit beider Komponenten, d. h. sowohl volumetrischer als auch deviatorischer Anteile, formuliert werden. Die einfachste Möglichkeit dieser Kopplung basiert auf der Einführung einer einzelnen Schädigungsvariablen auf der Mikroebene. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnittes.

### Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung

Um die Wirkungsweise und die Ausbildung von Anisotropie in der vorgestellten Microplane Schädigungsformulierung zu veranschaulichen, sollen dieselben Modellprobleme wie in Abschnitt 5.1.1, nämlich der einaxiale Zug und die einfache Scherung, näher untersucht werden. Betrachtet wird ein  $1 \text{ mm}^3$  großer Würfel im ebenen Verzerrungszustand. Die Elastizitätskonstanten werden entsprechend Abschnitt 5.1.1 gewählt, so dass der mikroskopische Kompressions- und Schubmodul die Werte  $K^{mic} = 50000 \text{ N/mm}^2$  und  $G^{mic} = 12500$  annehmen. Zusätzlich muss die funktionelle Form der beiden Schädigungsvariablen  $d_V$  und  $d_D$  angegeben werden. Für eine kontinuierlich, exponentiell wachsende Schädigung wird folgende Funktion, entsprechend dem Basismodell von *Bazant & Prat* [30], für die Schädigungsentwicklung postuliert.

$$d_i(\gamma_i^{mic}) = 1 - \exp \left[ - \left[ \gamma_i^{mic} / a_i \right]^{p_i} \right] \quad \text{mit} \quad i = D, V \quad (5.61)$$

Dabei bezeichnet der Index  $i$  entweder die volumetrische oder die deviatorische Schädigung. Die beiden zusätzlichen Parameter  $a_i$  und  $p_i$  werden für die volumetrische und deviatorische Schädigung identisch gewählt,  $a_V = a_D = 0.02$  und  $p_V = p_D = 1.0$ . Für das vorgestellte Microplane Schädigungsmodell nehmen die Geschichtsparemeter  $\gamma_V^{mic}$  und  $\gamma_D^{mic}$  die in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Werte der Energiefreisetzungsraten an. Die Energiefreisetzungsraten entsprechen den elastisch gespeicherten Energien, deren räumliche Verteilungen in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Somit stellen diese Energien die treibenden Größen für den Schädigungsprozess auf der Mikroebene dar.

Abbildung 5.3 zeigt die resultierenden Last–Verschiebungsdiagramme und die räumliche Verteilung der beiden Schädigungsparameter an vier ausgewählten Lastzuständen für die untersuchten Modellprobleme. Die resultierenden Polyeder sind dabei wieder um  $80^\circ$  gedreht dargestellt, so dass die Lastrichtung beinahe senkrecht auf der Betrachtungsebene steht. Die beiden Last–Verschiebungsdiagramme weisen einen für entfestigende Materialien typischen Verlauf auf. Somit ist das vorgestellte Microplane Modell in der Lage Entfestigung auf der Makroebene zu beschreiben.

Die deviatorische Schädigung ist in beiden Modellproblemen ungleichförmig auf den einzelnen Mikroebenen verteilt und weist somit eine anisotrope Entwicklung auf. Im Gegensatz dazu ist die volumetrische Schädigung gleichförmig verteilt, wobei bei der einfachen Scherung natürlich keine volumetrische Schädigung auftritt. Für den einaxialen Zug beginnt die deviatorische Schädigung auf den Ebenen, deren Normalen parallel zur Lastrichtung sind und breitet sich mit zunehmender Belastung sukzessive auf die benachbarten Ebenen aus. Es lassen sich Lastumlagerungen von geschädigten auf ungeschädigte Ebenen feststellen. Vergleicht man in Abbildung 5.3 die Werte der volumetrischen und deviatorischen Schädigung zum gleichen Zeitpunkt, so ist festzuhalten, dass die deviatorische Schädigung die treibende Größe für den gesamten Schädigungsprozess darstellt. Die mikroskopische Schädigung und deren Entwicklung bei der einfachen Scherung ist dagegen andersartig räumlich verteilt. Bei der einfachen Scherung beginnt die Schädigung auf den Ebenen, die auf dem Nullmeridian liegen, und breitet sich dann senkrecht zur Nullmeridianebene aus. In beiden Modellproblemen nehmen die Schädigungsverteilungen in fortgeschrittenen Belastungszuständen eine eher gleichförmige Verteilung an. Die Ausnahme bilden die Ebenen mit Normalen senkrecht zur Lastrichtung. Aufgrund des angenommenen ebenen Verzerrungszustandes findet auf diesen Ebenen keine Schädigung statt.

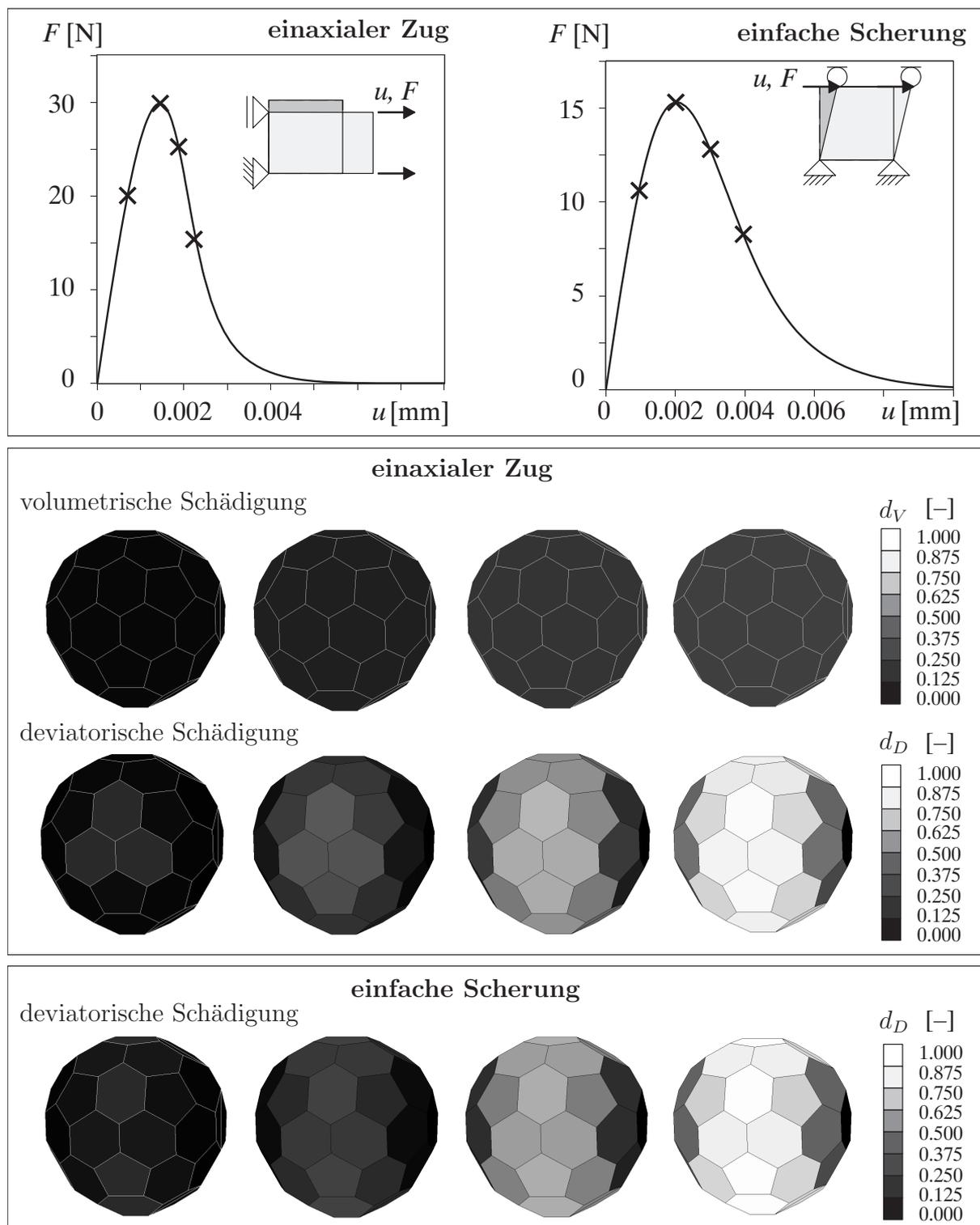
Abbildung 5.3: Schädigungsentwicklung  $d_V$  und  $d_D$  auf der Mikroebene

Abbildung 5.4 zeigt einen Vergleich der Last–Verschiebungskurven für drei unterschiedliche Microplane Schädigungsmodelle. Dabei bezeichnet  $d_V$ , dass nur volumetrische Schädigung auftreten kann,  $d_D$  kennzeichnet dementsprechend rein deviatorische Schädigung und  $d_{V,D}$  steht für volumetrische und deviatorische Schädigung. Vergleicht man die Trag-

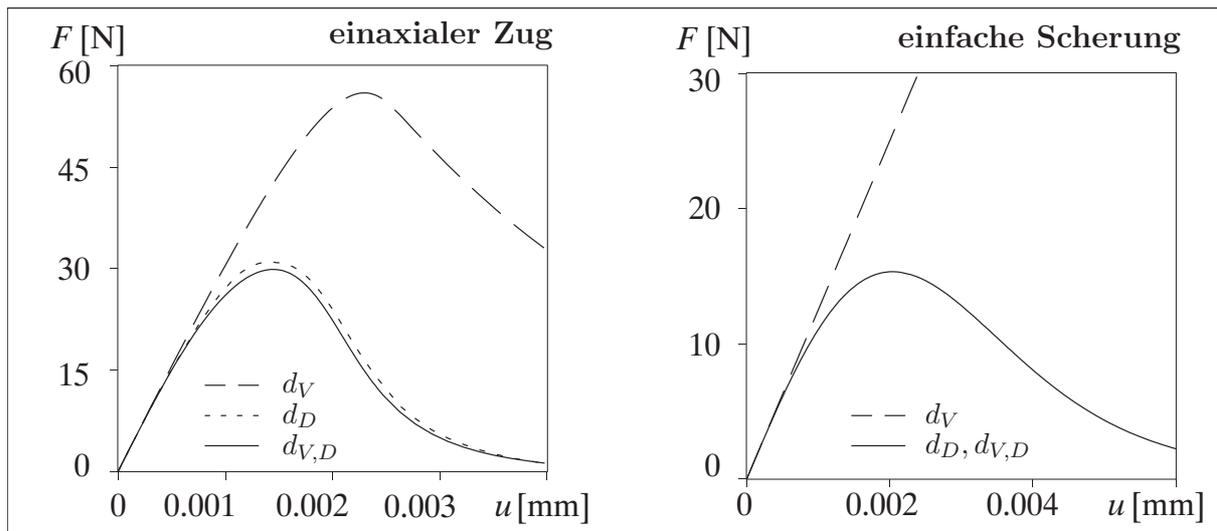


Abbildung 5.4: Last-Verschiebungskurven für rein volumetrische  $d_V$ , rein deviatorische  $d_D$  und volumetrische & deviatorische Schädigung  $d_{V,D}$

lasten für den einaxialen Zug, so stellt man fest, dass die Traglast bei rein volumetrischer Schädigung  $d_V$  viel höher liegt als bei den beiden anderen Fällen  $d_D$  und  $d_{V,D}$ . Die Last-Verschiebungskurven für  $d_D$  und  $d_{V,D}$  liegen nahezu aufeinander. Die Antwort für rein deviatorische Schädigung  $d_D$  ist etwas steifer. Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei der einfachen Scherung um einen isochoren Deformationszustand handelt, tritt selbstverständlich keine volumetrische Schädigung auf und der Fall der rein volumetrischen Schädigung  $d_V$  verhält sich linear elastisch. Dadurch sind die Last-Verschiebungskurven für  $d_D$  und  $d_{V,D}$  deckungsgleich. Ein Vergleich der Last-Verschiebungskurven lässt darauf schließen, dass die deviatorische Schädigung bei beiden Beispielen hauptverantwortlich für das Gesamttragverhalten ist. Der Einfluss der volumetrischen Schädigung ist dagegen eher gering. Die volumetrisch und deviatorisch gespeicherten elastischen Energien stellen dabei die treibenden Größen für den Schädigungsprozess dar.

Beide Beispiele haben gezeigt, dass das vorgestellte Microplane Modell durch Verwendung isotroper Stoffgesetze auf der Mikroebene in der Lage ist, anisotropes Materialverhalten auf der Makroebene auf eine einfache und natürliche Weise wiederzugeben. Dieses anisotrope Materialverhalten ist durch die Evolution der sich ausbildenden Texturen in Abbildung 5.3 erkennbar.

### 5.2.3 1-Parameter Schädigungsmodell

Die Berücksichtigung mehrerer Schädigungsvariablen besitzt gegenüber der Formulierung mit einer einzigen Variablen mehr Freiheiten. Allerdings eignet sich ein volumetrisch und deviatorisch entkoppeltes Schädigungsmodell mit mehreren Schädigungsvariablen, wie es in den meisten Microplane Modellen angesetzt wird, nur eingeschränkt zur Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien. Um der volumetrischen Abhängigkeit des Reibungseinflusses bei der Modellierung von Beton Rechnung zu tragen, wird im Folgenden eine Microplane Schädigungsformulierung mit einer einzigen Schädigungsvariablen  $d^{mic}$  auf der Mikroebene vorgestellt. Dadurch werden die volumetrischen und deviatorischen elastischen Microplane Eigenschaften gleichermaßen abgemindert. Für den Vektor der internen

Variablen folgt dementsprechend  $\alpha = \{d^{mic}\}$ . Die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  ergibt sich aus der mit  $[1 - d^{mic}]$  skalierten elastischen ungeschädigten freien Energie (5.22).

$$\Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, d^{mic}) := [1 - d^{mic}] \Psi_{el}^{mic} = [1 - d^{mic}] \left[ \frac{1}{2} K^{mic} \epsilon_V^2 + G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D \right] \quad (5.62)$$

Diese definiert die jeweiligen Microplane Spannungen  $\sigma_V$  und  $\sigma_D$  als thermodynamisch konjugierte Größen zu den Microplane Verzerrungen. Im Gegensatz zum 2-Parameter Schädigungsmodell ergeben sich alle konstitutiven Spannungskomponenten aus den im gleichen Maße abgeminderten effektiven Spannungen (5.34).

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = [1 - d^{mic}] K^{mic} \epsilon_V \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = 2 [1 - d^{mic}] G^{mic} \epsilon_D \quad (5.63)$$

Weiterhin liefert die mikroskopische freie Energie die Bestimmungsgleichungen der mikroskopischen Energiefreisetzungsrates  $Y^{mic}$ , die der mikroskopischen thermodynamischen Kraft  $\beta^{mic}$  entspricht. Im Falle der auf der Mikroebene angenommenen skalaren Schädigungsgesetze stellt die mikroskopische Energiefreisetzungsrates  $Y^{mic}$  die ungeschädigte mikroskopische freie Energie dar.

$$Y^{mic} := - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} = \Psi_{el}^{mic} = \frac{1}{2} K^{mic} \epsilon_V^2 + G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D \quad (5.64)$$

Der Ausdruck für die mikroskopische Dissipation (4.27) lässt sich damit präzisieren und es ergibt sich folgende reduzierte Dissipationsungleichung.

$$\mathcal{D}^{mic} = Y^{mic} \dot{d}^{mic} \geq 0 \quad (5.65)$$

Der Schädigungszustand des Materials wird mit Hilfe einer verzerrungsbasierten Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mic}$  charakterisiert, die den elastischen Bereich begrenzt.

$$\Phi_d^{mic} = \phi^{mic}(\eta^{mic}) - d^{mic} \leq 0 \quad (5.66)$$

Da nur eine Schädigungsfunktion eingeführt wird, die im betrachteten Fall von volumetrischen und deviatorischen Anteilen abhängt, findet automatisch eine volumetrische und deviatorische Kopplung statt. Des Weiteren wird in diesem Abschnitt die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}$  als Funktion der Energiefreisetzungsrates  $Y^{mic}$  definiert.

In Analogie zum 2-Parameter Microplane Schädigungsmodell liefert die Lösung des zugehörigen Optimierungsproblems, welches sich aus der Dissipationsungleichung in Verbindung mit dem Postulat vom Maximum der Dissipation mit der Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mic}$  als Nebenbedingung ergibt, die Evolutionsgleichungen des Schädigungsparameters  $d^{mic}$  in Abhängigkeit des Lagrange-Multiplikators  $\dot{\gamma}^{mic}$ ,

$$\dot{d}^{mic} = \dot{\gamma}^{mic} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial Y^{mic}} \quad (5.67)$$

die Karush-Kuhn-Tucker Be- und Entlastungsbedingungen und die Konsistenzbedingung.

$$\Phi_d^{mic} \leq 0 \quad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \quad \Phi_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0 \quad (5.68)$$

Entsprechend der Argumentation von *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] wird aus der Konsistenzbedingung die Gleichheit des Lagrange-Multiplikators und der Rate der Energiefreisetzungsrates  $\dot{\gamma}^{mic} = \dot{Y}^{mic}$  gewonnen. Unter Voraussetzung einer monoton steigenden

Funktion  $\phi^{mic}$  ergibt sich zusätzlich eine explizite Darstellungsform für die Schädigungsvariable.

$$d^{mic} = \phi^{mic}(\gamma^{mic}) \quad \text{mit} \quad \gamma^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y^{mic}(t), \gamma_0^{mic}) \quad (5.69)$$

Weiterhin kann der Lagrange–Multiplikator als Geschichtsparameter interpretiert werden, so dass der Geschichtsparameter  $\gamma^{mic}$  den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der äquivalenten Verzerrung  $\eta^{mic}$  und somit der Energiefreisetzungsrate  $Y^{mic}$  annimmt.

Die Standardauswertung der Clausius–Duhem Ungleichung (4.24) in Verbindung mit der fundamentalen Mikro–Makro Beziehung der freien Energien (4.1) führt auf die Bestimmungsgleichung des makroskopischen Spannungstensors, wobei  $\mathcal{E}_{sec}^d$  den Sekantentensor der Microplane Schädigung darstellt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}_{sec}^d : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] [K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.70)$$

Die Linearisierung der Mikro–Makro Beziehung der Spannungen (5.70) liefert den makroskopischen Materialtensor des 1–Parameter Microplane Schädigungsmodells  $\mathcal{E}_{tan}^d$  in allgemeiner Form.

$$\mathcal{E}_{tan}^d = \mathcal{E}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \left[ \frac{\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D}{[1 - d^{mic}]} \right] \otimes \left[ \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \epsilon_V} \mathbf{V} + \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \epsilon_D} \cdot \mathbf{Dev} \right] d\Omega \quad (5.71)$$

Die Struktur des Materialtensors zeigt an, dass eine Kopplung des volumetrischen und deviatorischen Schädigungsverhaltens auf der Mikro- und Makroebene stattfindet. Dies wird durch den zweiten Term in Gleichung (5.71) offenkundig. Da die äquivalente Verzerrung identisch der Energiefreisetzungsrate  $Y^{mic}$  (5.64) postuliert wurde, können deren Ableitungen nach den jeweiligen Microplane Verzerrungen bestimmt werden. Mit Hilfe der Definitionen der Microplane Spannungen (5.63) lassen sich diese Ableitungen als die effektiven Microplane Spannungen (5.34) identifizieren.

$$\frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \frac{\sigma_V}{[1 - d^{mic}]} = \tilde{\sigma}_V \quad \frac{\partial \eta^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_D}{[1 - d^{mic}]} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \quad (5.72)$$

Damit kann der Materialtensor (5.71) vereinfacht dargestellt werden und nimmt folgende symmetrische Form an.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tan}^d &= \mathcal{E}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \left[ \frac{\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D}{[1 - d^{mic}]} \right] \otimes \left[ \frac{\sigma_V \mathbf{V} + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \mathbf{Dev}}{[1 - d^{mic}]} \right] d\Omega \\ &= \mathcal{E}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} [\mathbf{V} \tilde{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] \otimes [\tilde{\sigma}_V \mathbf{V} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega \end{aligned} \quad (5.73)$$

In Analogie zum 2–Parameter Microplane Schädigungsmodell werden die makroskopischen effektiven Spannungen in Abhängigkeit der effektiven Microplane Spannungen (5.72) berechnet.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_V \mathbf{V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D d\Omega \quad (5.74)$$

Wird der makroskopische effektive Spannungstensor auf die einzelnen Mikroebenen projiziert, so ergibt sich die Gleichheit der projizierten effektiven Microplane Spannungen ( $\tilde{\tilde{\sigma}}_V$ ,  $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_D$ ) und der konstitutiven effektiven Microplane Spannungen ( $\tilde{\sigma}_V$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D$ ).

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_V = \mathbf{V} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\sigma}_V \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_D = \mathbf{Dev} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \quad (5.75)$$

Somit erfüllt auch das 1-Parameter Microplane Schädigungsmodell gleichzeitig die kinematische Projektion für die Verzerrungen und die statische Projektion für die effektiven Spannungen.

Weiterhin lässt sich auch für das 1-Parameter Microplane Schädigungsmodell ein Schädigungstensor  $\mathcal{D}$  herleiten. Die Herleitung dieses Schädigungstensors erfolgt in analoger Weise zum Schädigungstensor des 2-Parameter Microplane Schädigungsmodells des vorigen Abschnitts.

$$\mathcal{D} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} d^{mic} [\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega \quad (5.76)$$

Der resultierende Schädigungstensor wird ausschließlich durch die mikroskopische Schädigungsvariable und durch die Projektionstensoren, d. h. die Normalen der Mikroebenen, charakterisiert. Außerdem ist dieser Tensor von rein geometrischer Natur, da er nicht von den Steifigkeiten  $K^{mic}$  und  $G^{mic}$  der Mikroebene abhängt. Dadurch gewinnen dessen Einträge auch an physikalischer Aussagekraft.

### Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung

Zur Verdeutlichung des anisotropen Materialverhaltens der vorgestellten 1-Parameter Microplane Schädigungsformulierung wird auf die Modellprobleme einaxialer Zug und einfache Scherung zurückgegriffen. Wiederum wird das Materialverhalten eines Würfels mit 1 mm Kantenlänge im ebenen Verzerrungszustand und mit denselben elastischen Eigenschaften wie in Abschnitt 5.1.1 analysiert, so dass  $K^{mic} = 50000 \text{ N/mm}^2$  und  $G^{mic} = 12500 \text{ N/mm}^2$ . In beiden Modellproblemen wird von einer kontinuierlichen, exponentiellen Schädigungsentwicklung ausgegangen, die durch folgende Funktion beschrieben wird, vergleiche *Peerlings, de Borst, Brekelmans & de Vree* [184].

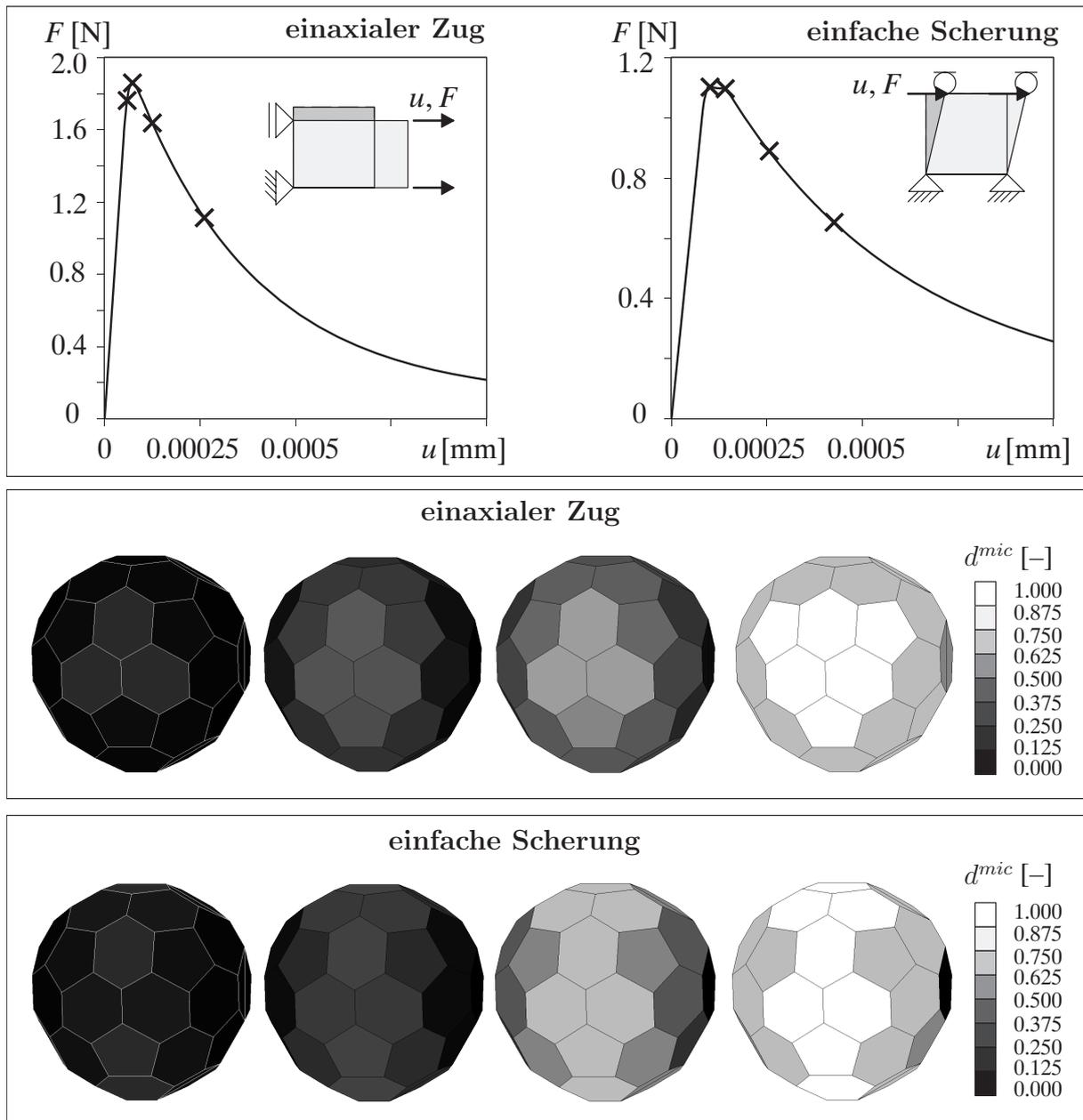
$$d^{mic} = 1 - \frac{\gamma_0^{mic}}{\gamma^{mic}} [1 - \alpha^{mic} + \alpha^{mic} \exp[\beta^{mic} [\gamma_0^{mic} - \gamma^{mic}]]] \quad (5.77)$$

Für die angenommene Schädigungsentwicklung müssen auf der Mikroebene die drei Materialparameter  $\beta^{mic} = 30$ ,  $\alpha^{mic} = 0.95$  und  $\gamma_0^{mic} = 0.0065$  vorgegeben werden. Der Parameter  $\beta^{mic}$  bestimmt die Form der Entfestigung, der Parameter  $\alpha^{mic}$  die maximal mögliche Degradation und der Parameter  $\gamma_0^{mic}$  den Schädigungsschwellwert. Der Geschichtsparameter  $\gamma^{mic}$  stellt wiederum den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der äquivalenten Verzerrung  $\eta^{mic}$  dar. In Anlehnung an der von *Simo & Ju* [204] auf der Makroebene angenommenen äquivalenten Verzerrung ergibt sich die mikroskopische äquivalente Verzerrung aus der Wurzel der zweifachen mikroskopischen Energiefreisetzungsrates  $Y^{mic}$ .

$$\eta^{mic} = \sqrt{2 Y^{mic}} \quad (5.78)$$

Somit ist die Energiefreisetzungsrates  $Y^{mic}$ , die der mikroskopisch elastisch gespeicherten Energie entspricht, die treibende Kraft für die Evolution des Schädigungsprozesses. Diese Definition der äquivalenten Verzerrung führt im Sinne von *Carol, Rizzi & Willam* [47] zu assoziierten Schädigungsformulierungen mit einem symmetrischen Tangententensor.

Abbildung 5.5 zeigt die resultierenden Last-Verschiebungsdiagramme, die typisch für entfestigende Materialien sind. Zusätzlich sind noch die Schädigungsverteilungen für vier ausgewählte Lastzustände dargestellt, die in den Last-Verschiebungsdiagramme durch Kreuze markiert sind. Die resultierenden Polyeder wurden wieder um etwa  $80^\circ$  gedreht, das

Abbildung 5.5: Schädigungsentwicklung  $d^{mic}$  auf der Mikroebene

bedeutet die Lastrichtung ist senkrecht zur Betrachtungsebene. In beiden Simulationen weist die mikroskopische Schädigung eine anisotrope Verteilung auf. Für den einaxialen Zug beginnt die Schädigung auf den Ebenen, deren Normalen parallel zur Lastrichtung sind und breitet sich dann auf den benachbarten Ebenen aus. Bei der einfachen Scherung beginnt die deviatorische Schädigung auf den Ebenen, die auf dem Nullmeridian liegen, und breitet sich dann senkrecht zur Nullmeridianebene aus. In beiden Modellproblemen sind Lastumlagerungen von geschädigten auf die angrenzenden ungeschädigten Ebenen erkennbar. Grundsätzlich lassen sich im Vergleich zur deviatorischen Schädigung des 2-Parameter Schädigungsmodells in Abbildung 5.3 ähnliche Schädigungsverteilungen beobachten. Bei beiden Modellen lassen sich zwei grundlegende Typen von Versagensmechanismen unterscheiden. Zum einen tritt ein eher lokalisiertes Zugversagen der in

Belastungsrichtung angeordneten Ebenen auf, beobachtbar in den Beispielen des einaxialen Zuges. Der zweite Mechanismus wird durch ein radiales Schubversagen der Ebenen des Nullmeridians charakterisiert, vergleiche hierzu die Beispiele zur einfachen Scherung. Beide Beispiele haben gezeigt, dass das vorgestellte 1-Parameter Schädigungsmodell genauso wie das 2-Parameter Schädigungsmodell aus dem vorigen Abschnitt durch die Einführung isotroper Microplane Stoffgesetze in der Lage ist, anisotropes Materialverhalten auf eine einfache und natürliche Weise wiederzugeben. Im Unterschied zum Microplane Schädigungsmodell des vorigen Abschnittes findet beim 1-Parameter Modell eine konstitutive Kopplung des volumetrischen und deviatorischen Verhaltens durch die Einführung einer einzigen Versagensfunktion auf der Mikroebene statt.

### 5.2.4 Einfluss der Verzerrungskomponenten

Um den Einfluss der einzelnen Microplane Verzerrungskomponenten auf die Schädigung und somit auf das globale Tragverhalten zu erfassen, wird eine Scheibe mit Loch unter Verwendung verschiedener Schädigungsfunktionen untersucht. Die Systemdaten und die elastischen Materialkennwerte der Scheibe sind in Abbildung 5.6 angegeben. Bei den Simulationen wird von einem ebenen Verzerrungszustand ausgegangen. Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel des Systems betrachtet und mit 288 achtknotigen Verschiebungselementen diskretisiert. Die lokale 1-Parameter Microplane Schädigungsformulierung des vorigen Abschnittes, d. h. ohne Regularisierung, bildet dabei die Grundlage für die Materialmodellierung. Weiterhin soll zwischen drei verschiedenen Definitionen der mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen  $\eta_{mic}$  unterschieden werden. Bei der ersten Definition  $\eta_1^{mic}$  wird nur die volumetrische Verzerrungskomponente  $\epsilon_V$  berücksichtigt.

$$\eta_1^{mic}(\epsilon_V) = 3 \epsilon_V \quad (5.79)$$

Dies entspricht einem makroskopischen Schädigungsmodell bei der die äquivalente Verzerrung nur von der ersten Invariante der Verzerrungen  $I_1$  abhängt. Die zweite Definition  $\eta_2^{mic}$  gibt die äquivalente Verzerrung als Funktion der deviatorischen Verzerrungen  $\epsilon_D$  an.

$$\eta_2^{mic}(\epsilon_D) = \sqrt{3/2 \epsilon_D \cdot \epsilon_D} \quad (5.80)$$

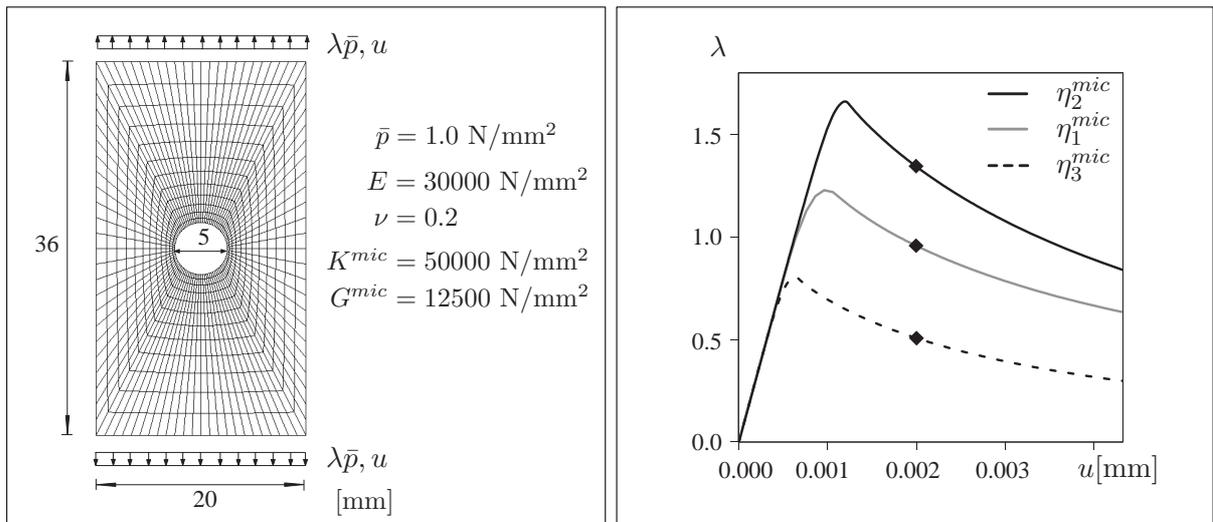


Abbildung 5.6: Systemdaten und Last-Verschiebungskurven

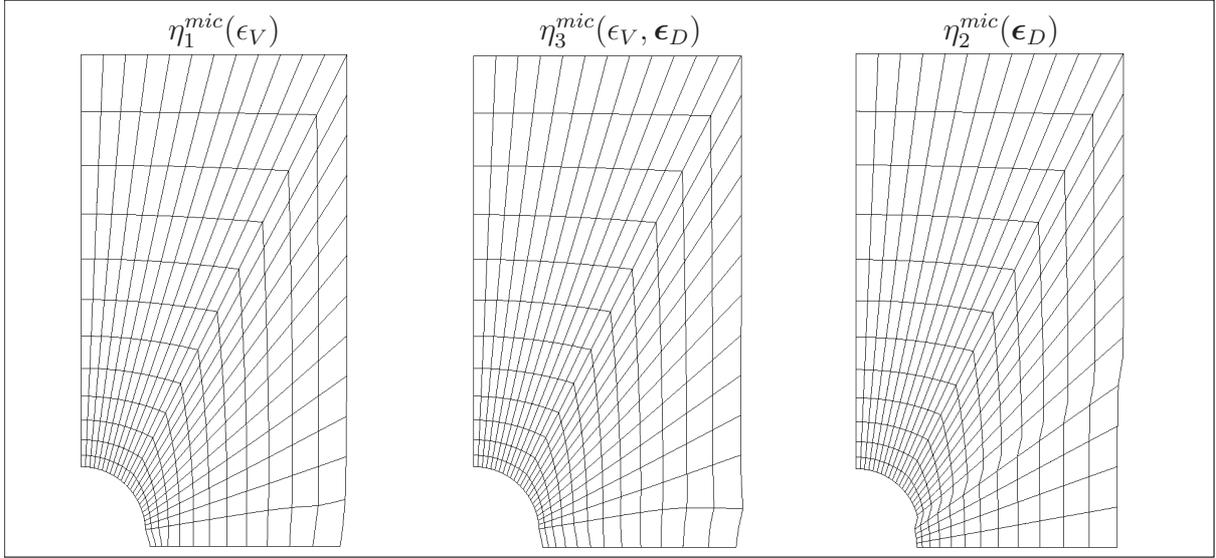


Abbildung 5.7: Deformierte Strukturen

Dies entspricht einer rein  $J_2$ -basierten äquivalenten Verzerrung beim makroskopischen Schädigungsmodell. Die dritte und letzte Definition  $\eta_3^{mic}$  ergibt sich in Analogie zur äquivalenten Verzerrung des modifizierten von Mises Typs auf der Makroebene, vergleiche Gleichung (B.6) in Anhang B. Dabei werden beide Verzerrungskomponenten bei der Ermittlung der äquivalenten Verzerrung berücksichtigt.

$$\eta_3^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D) = k_1 \epsilon_V + \sqrt{k_1^2 \epsilon_V^2 + k_2 \epsilon_D \cdot \epsilon_D} \quad (5.81)$$

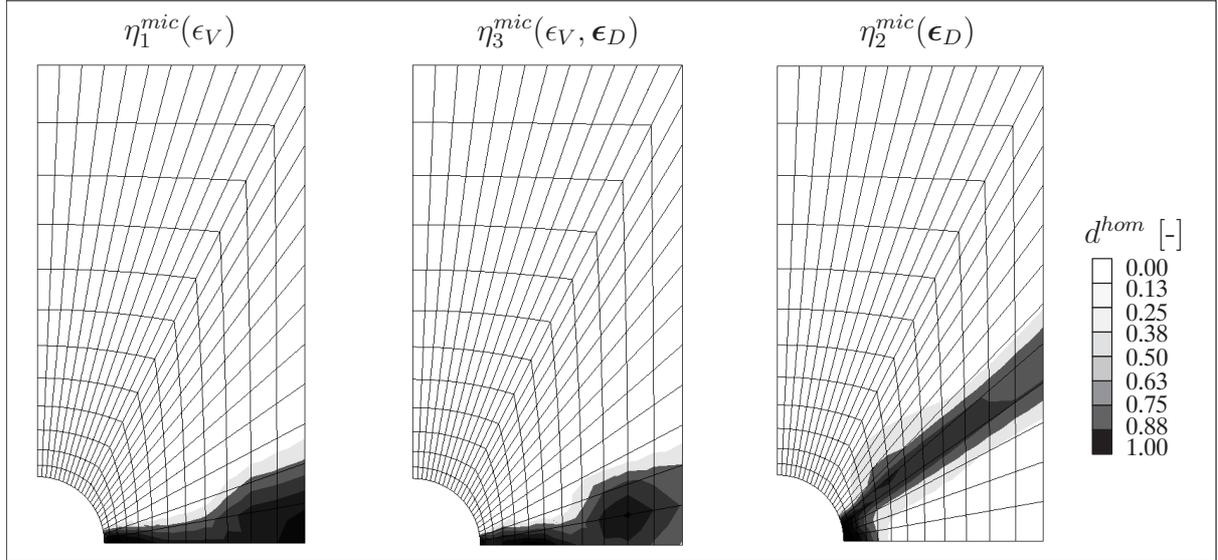
Die beiden Wichtungsparemeter  $k_1$  und  $k_2$  werden zu  $k_1 = 0.75$  und  $k_2 = 0.2083$  gewählt. Des Weiteren wird in allen drei Fällen von derselben exponentiellen Schädigung (5.77) wie im vorigen Abschnitt ausgegangen. Die Parameter dieser exponentiellen Funktion lauten  $\alpha^{mic} = 0.95$ ,  $\beta^{mic} = 100$  und  $\gamma_0^{mic} = 0.00005$ . Die resultierenden Last-Verschiebungsdiagramme der drei Schädigungsfunktionen sind in Abbildung 5.6 dargestellt.

Abbildung 5.7 zeigt die deformierten Strukturen bei einer vertikalen Verschiebung von  $u = 0.002$  mm. Dabei lassen sich prinzipiell zwei unterschiedliche Versagensarten erkennen. Zum einen lässt sich für den Fall  $\eta_2^{mic}$  die Bildung eines Scherbandes unter einem Winkel von  $45^\circ$  beobachten. Zum anderen ist in den Fällen  $\eta_1^{mic}$  und  $\eta_3^{mic}$  ein vom rechten Lochrand ausgehendes glattes, horizontales Zugversagen erkennbar.

Diese Beobachtungen werden durch die resultierenden Schädigungsverteilungen in Abbildung 5.8 unterstrichen. Um jedoch eine Aussage über die Schädigung des Materialpunktes für das Microplane Schädigungsmodell zu treffen, wird ein homogenisiertes Schädigungsmaß  $d^{hom}$  herangezogen, welches sich aus folgender Integralbeziehung ermitteln lässt.

$$d^{hom} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} d^{mic} d\Omega \quad (5.82)$$

In allen betrachteten Fällen beginnt die Schädigung am rechten Lochrand. Für die Fälle  $\eta_1^{mic}$  und  $\eta_3^{mic}$  breitet sich die Schädigung horizontal aus, was in einem Mode I Zugversagen mündet. Für den Fall  $\eta_2^{mic}$  entwickelt sich ein Schädigungsband unter einem Winkel von  $45^\circ$ . Dies entspricht einem Mode II Schubversagen, wie es für  $J_2$ -basierte Stoffgesetze typisch ist. Die Beispiele zeigen, dass sich die postulierten mikroskopischen Eigenschaften in den makroskopischen Materialantworten widerspiegeln.

Abbildung 5.8: Homogenisierte Schädigungsverteilung  $d^{hom}$ 

### 5.3 Microplane Plastizität

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt wird in diesem Abschnitt zur Microplane Plastizität davon ausgegangen, dass plastisches Fließen auf der Mikroebene den dominanten Dissipationsmechanismus darstellt. Ausgangspunkt für die Herleitung einer Microplane-basierten Plastizitätsformulierung ist die additive Zerlegung des makroskopischen Verzerrungstensors und dessen Ratenform entsprechend Gleichung (3.35) in einen reversiblen, elastischen und in einen irreversiblen, plastischen Anteil. Infolgedessen ergeben sich die elastischen und plastischen Microplane Verzerrungen ebenso als additive Zerlegung der jeweiligen Verzerrungskomponenten auf den Mikroebenen,

$$\epsilon_V = \mathbf{V} : \epsilon = \epsilon_V^{el} + \epsilon_V^{pl} \quad \epsilon_D = \mathbf{Dev} : \epsilon = \epsilon_D^{el} + \epsilon_D^{pl} \quad (5.83)$$

wobei diese aus der kinematischen Projektion mit Hilfe der Projektionstensoren bestimmt werden.

$$\epsilon_V^{el} = \mathbf{V} : \epsilon^{el} \quad \epsilon_V^{pl} = \mathbf{V} : \epsilon^{pl} \quad \epsilon_D^{el} = \mathbf{Dev} : \epsilon^{el} \quad \epsilon_D^{pl} = \mathbf{Dev} : \epsilon^{pl} \quad (5.84)$$

Die Herleitung eines Microplane-basierten Plastizitätsmodells im Rahmen des thermodynamisch konsistenten Konzeptes aus Abschnitt 4.3 erfordert zunächst einmal die Spezifizierung des Vektors der internen Variablen  $\alpha$ . Dieser besteht aus den beiden plastischen Microplane Verzerrungen  $\epsilon_V^{pl}$  und  $\epsilon_D^{pl}$  und zusätzlichen Variablen  $\kappa^{mic}$ , die das mikroskopische Ver- bzw. Entfestigungsverhalten beschreiben.

$$\alpha = \{\epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}\} \quad (5.85)$$

Unter der postulierten Annahme der additiven Zerlegung der Verzerrungen ist nach Lubliner [148] auch eine additive Zerlegung der freien mikroskopischen Energie  $\Psi^{mic}$  in einen elastischen  $\Psi_{el}^{mic}$  und plastischen Anteil  $\Psi_{pl}^{mic}$  zulässig.

$$\Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}) = \Psi_{el}^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}) + \Psi_{pl}^{mic}(\kappa^{mic}) \quad (5.86)$$

Der elastische Anteil der freien Energie  $\Psi_{el}^{mic}$  ergibt sich in Analogie zur Gleichung (5.22) aus folgender Beziehung.

$$\Psi_{el}^{mic} = \frac{1}{2} K^{mic} \left[ \epsilon_V - \epsilon_V^{pl} \right]^2 + \left[ \epsilon_D - \epsilon_D^{pl} \right] \cdot G^{mic} \left[ \epsilon_D - \epsilon_D^{pl} \right] \quad (5.87)$$

Mit den Definitionen (4.26) lassen sich die volumetrischen und deviatorischen Microplane Spannungen als energetisch konjugierte Größen zu den elastischen Microplane Verzerrungen angeben.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V^{el}} = K^{mic} \left[ \epsilon_V - \epsilon_V^{pl} \right] \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D^{el}} = 2 G^{mic} \left[ \epsilon_D - \epsilon_D^{pl} \right] \quad (5.88)$$

Die mikroskopische Dissipation (4.27) lässt sich damit näher spezifizieren,

$$\mathcal{D}^{mic} = \beta_V^{mic} \dot{\epsilon}_V^{pl} + \beta_D^{mic} \cdot \dot{\epsilon}_D^{pl} + \beta_\kappa^{mic} \cdot \dot{\kappa}^{mic} \quad (5.89)$$

wobei

$$\beta_V^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V^{pl}} = \sigma_V \quad \beta_D^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D^{pl}} = \sigma_D \quad \beta_\kappa^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \mathbf{q}^{mic} \quad (5.90)$$

die thermodynamischen Kräfte zu den konjugierten internen Variablen der Mikroebene definieren. Daraus wird ersichtlich, dass die zu den plastischen Verzerrungen der Mikroebene konjugierten thermodynamischen Kräfte  $\beta_V^{mic}$  und  $\beta_D^{mic}$  den konstitutiven Microplane Spannungen  $\sigma_V$  und  $\sigma_D$  entsprechen. Somit ergibt sich diese mikroskopische Dissipationsungleichung.

$$\mathcal{D}^{mic} = \sigma_V \dot{\epsilon}_V^{pl} + \sigma_D \cdot \dot{\epsilon}_D^{pl} + \mathbf{q}^{mic} \cdot \dot{\kappa}^{mic} \geq 0 \quad (5.91)$$

Die mikroskopische Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$ , die üblicherweise in Plastizitätsformulierungen spannungsbasiert definiert ist, erhält man aus der Differenz der mikroskopischen Vergleichsspannung  $\varphi_{pl}^{mic}$  und einer äquivalenten Fließspannung  $\sigma_Y^{mic}(\mathbf{q}^{mic})$ .

$$\Phi_{pl}^{mic} = \varphi_{pl}^{mic}(\sigma_V, \sigma_D, \mathbf{q}^{mic}) - \sigma_Y^{mic}(\mathbf{q}^{mic}) \leq 0 \quad (5.92)$$

Analog zur makroskopischen Fließfunktion grenzt die mikroskopische Fließfunktion die zulässigen von den unzulässigen Zuständen ab. Ebenso wie bei der Herleitung der makroskopischen Plastizitätsformulierung in Abschnitt 3.4 kann die mikroskopische Dissipationsungleichung (5.91) nach *Luenberger* [149] in ein mathematisches Optimierungsproblem unter Annahme des Postulats vom Maximum der Dissipation und mit der Fließbedingung (5.92) als Nebenbedingung überführt werden. Die Auswertung des Optimierungsproblems liefert die Evolutionsgleichungen für die plastischen Verzerrungen  $\epsilon_V^{pl}$  und  $\epsilon_D^{pl}$  und für die Verfestigungsvariable  $\kappa^{mic}$ ,

$$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} n_V \quad \dot{\epsilon}_D^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} \mathbf{n}_D \quad \dot{\kappa}^{mic} = \dot{\lambda}^{mic} \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \mathbf{q}^{mic}} \quad (5.93)$$

wobei die ersten beiden Beziehungen im Folgenden als mikroskopische Fließregeln bezeichnet werden. Der Betrag des plastischen Flusses wird durch den plastischen Multiplikator  $\dot{\lambda}^{mic}$  angegeben. Des Weiteren bezeichnen  $n_V$  und  $\mathbf{n}_D$  die volumetrische und deviatorische Normale auf die Fließfläche und können somit als Fließrichtungen verstanden werden.

$$n_V := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \sigma_V} \quad \mathbf{n}_D := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \sigma_D} \quad (5.94)$$

In den obigen Gleichungen wurde von einer so genannten assoziierten Fließregel ausgegangen. Wird dagegen in den Gleichungen (5.93) und (5.94) die Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$  durch ein plastisches Potential  $\Phi_{pl}^{mic*}$  ersetzt, so ist von einem nicht-assozierten Fließen die Rede. Damit ergeben sich folgende Evolutionsgleichungen für die internen Variablen,

$$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} m_V \quad \dot{\epsilon}_D^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} \mathbf{m}_D \quad \dot{\kappa}^{mic} = \dot{\lambda}^{mic} \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \mathbf{q}^{mic}} \quad (5.95)$$

wobei  $m_V$  die volumetrische Fließrichtung und  $\mathbf{m}_D$  die deviatorische Fließrichtung kennzeichnen.

$$m_V := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \sigma_V} \quad \mathbf{m}_D := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \quad (5.96)$$

Die Karush–Kuhn–Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung, die den Be- und Entlastungsprozess steuern, lassen sich wie folgt angeben.

$$\Phi_{pl}^{mic} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{mic} \geq 0 \quad \Phi_{pl}^{mic} \dot{\lambda}^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}_{pl}^{mic} \dot{\lambda}^{mic} = 0 \quad (5.97)$$

Im Fall des plastischen Fließens kann durch Auswertung der Konsistenzbedingung mit Hilfe der Ratenform der Microplane Spannungen und der Fließregel der plastische Multiplikator  $\dot{\lambda}^{mic}$  gewonnen werden.

$$\dot{\lambda}^{mic} = \frac{[n_V K^{mic} \mathbf{V} + \mathbf{n}_D \cdot 2 G^{mic} \mathbf{Dev}] : \dot{\epsilon}}{n_V K^{mic} m_V + \mathbf{n}_D \cdot 2 G^{mic} \mathbf{m}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \mathbf{q}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \mathbf{q}^{mic}}} \quad (5.98)$$

Die Ratenform der zur Verfestigungsvariablen konjugierten Variable  $\mathbf{q}^{mic}$ , die übrigens im Spannungsraum definiert ist, lautet:

$$\dot{\mathbf{q}}^{mic} = \mathbf{H}^{mic} \cdot \dot{\kappa}^{mic} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{mic} = \frac{\partial \mathbf{q}^{mic}}{\partial \kappa^{mic}}. \quad (5.99)$$

Dies stellt das Ver- bzw. Entfestigungsgesetz auf der Mikroebene dar, wobei  $\mathbf{H}^{mic}$  als Verfestigungsmodul der Mikroebene interpretiert werden kann. In Analogie zur makroskopischen Plastizität ist prinzipiell zwischen einer isotropen und einer kinematischen Verfestigung zu unterscheiden.

Der makroskopische Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{pl}$ , der sich aus der Ratenbeziehung zwischen den Spannungen und Verzerrungen entsprechend Gleichung (4.37) ergibt, lässt sich in der folgenden Form angeben,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{pl} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{V} K^{mic} m_V + \mathbf{Dev}^T \cdot 2G^{mic} \mathbf{m}_D] \otimes [n_V K^{mic} \mathbf{V} + \mathbf{n}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{n_V K^{mic} m_V + \mathbf{n}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{m}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \mathbf{q}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \mathbf{q}^{mic}}} d\Omega \quad (5.100)$$

wobei  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$  dem elastischen Materialtensor (5.19) entspricht. Im Fall der assoziierten Fließregel der Fließrichtungen  $m_V = n_V$  und  $\mathbf{m}_D = \mathbf{n}_D$  entspricht das plastische Potential  $\Phi_{pl}^{mic*}$  der Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$  und der Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{pl}$  ist symmetrisch.

In Analogie zur Microplane Schädigungsformulierung mit zwei Schädigungsvariablen, entsprechend Abschnitt 5.2.2, ist eine Verallgemeinerung des vorgestellten Microplane Plastizitätsmodells durch die Einführung zweier Fließfunktionen zur unterschiedlichen Charakterisierung des volumetrischen und deviatorischen Fließverhaltens denkbar. Dies soll in dieser Arbeit jedoch nicht näher untersucht werden.

### Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung

Wiederum werden am Beispiel des einaxialen Zuges und der einfachen Scherung das Materialverhalten der vorgestellten Microplane Plastizitätsformulierung und die Ausprägung von Anisotropie analysiert. Betrachtet wird dabei wieder ein Würfel mit 1 mm Kantenlänge im ebenen Verzerrungszustand und den identischen elastischen Parametern wie in Abschnitt 5.1.1. Die beiden Microplane Elastizitätskonstanten werden zu  $K^{mic} = 50000$  N/mm<sup>2</sup> und  $G^{mic} = 12500$  N/mm<sup>2</sup> angesetzt. Weiterhin muss das mikroskopische Plastizitätsverhalten näher charakterisiert werden. Es wird von einem linearen isotropen Ver- bzw. Entfestigungsgesetz auf der Mikroebene ausgegangen. Dadurch reduziert sich der Vektor  $\mathbf{q}^{mic}$  auf eine skalare Größe  $q^{mic}$ , welche die Größenänderung der Fließfläche im Spannungsraum angibt. Da die Verfestigungsvariable  $\kappa^{mic}$  zu dieser Variablen energetisch konjugiert ist, vereinfacht sich auch die Verfestigungsvariable zu einem Skalar  $\kappa^{mic}$ . Die mikroskopische äquivalente Fließspannung  $\sigma_Y^{mic}$  ergibt sich für die postulierte isotrope Verfestigung aus der Differenz der Anfangsfließspannung  $\sigma_0^{mic}$  und der thermodynamischen Kraft  $q^{mic}$ .

$$\sigma_Y^{mic} = \sigma_0^{mic} - q^{mic} \quad (5.101)$$

Für die mikroskopische Vergleichsspannung  $\varphi_{pl}^{mic}$  wird vereinfachend angenommen, dass sie ausschließlich von den deviatorischen Microplane Spannungen abhängt.

$$\varphi_{pl}^{mic} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D} \quad (5.102)$$

Dadurch wird in Analogie zur klassischen von Mises Plastizität auf der Makroebene von einer rein deviatorischen Fließbedingung auf der Mikroebene ausgegangen. Die mikroskopische Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$  (5.92) lässt sich damit wie folgt angeben.

$$\Phi_{pl}^{mic} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D} - \sigma_0^{mic} + q^{mic} \leq 0 \quad (5.103)$$

Aufgrund eines linearen, isotropen Ver- bzw. Entfestigungsgesetzes lässt sich mit Gleichung (5.90) folgender Zusammenhang angeben,

$$q^{mic} = -H \kappa^{mic} \quad (5.104)$$

wodurch die mikroskopische freie Energie  $\Psi^{mic}$  eine quadratische Struktur erhält.

$$\Psi^{mic} = \frac{1}{2} K^{mic} [\epsilon_V - \epsilon_V^{pl}]^2 + [\boldsymbol{\epsilon}_D - \boldsymbol{\epsilon}_D^{pl}] \cdot G^{mic} [\boldsymbol{\epsilon}_D - \boldsymbol{\epsilon}_D^{pl}] + \frac{1}{2} H \kappa^{mic2} \quad (5.105)$$

Weiterhin wird von einer assoziierten Fließregel und einem assoziierten Ver- bzw. Entfestigungsgesetz ausgegangen.

Für die beiden Modellprobleme wird die mikroskopische Fließspannung  $\sigma_0^{mic} = 60$  N/mm<sup>2</sup> gewählt. Abbildung 5.9 zeigt die resultierenden Last–Verschiebungskurven für drei unterschiedlich gewählte Verfestigungsmoduli  $H = 0$  N/mm<sup>2</sup>,  $H = E/10 = 3000$  N/mm<sup>2</sup>,  $H = -E/10 = -3000$  N/mm<sup>2</sup>, d. h. für den ideal–plastischen, einen verfestigenden und einen entfestigenden Fall. Auffallend bei allen Last–Verschiebungskurven ist der abgerundete Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich, obwohl auf der Mikroebene bilineare Stoffgesetze angenommen wurden. Diese Abrundung ist auf ein sukzessives Überschreiten der Fließgrenze auf diversen Ebenen zurückzuführen. Bei weiterer Belastung

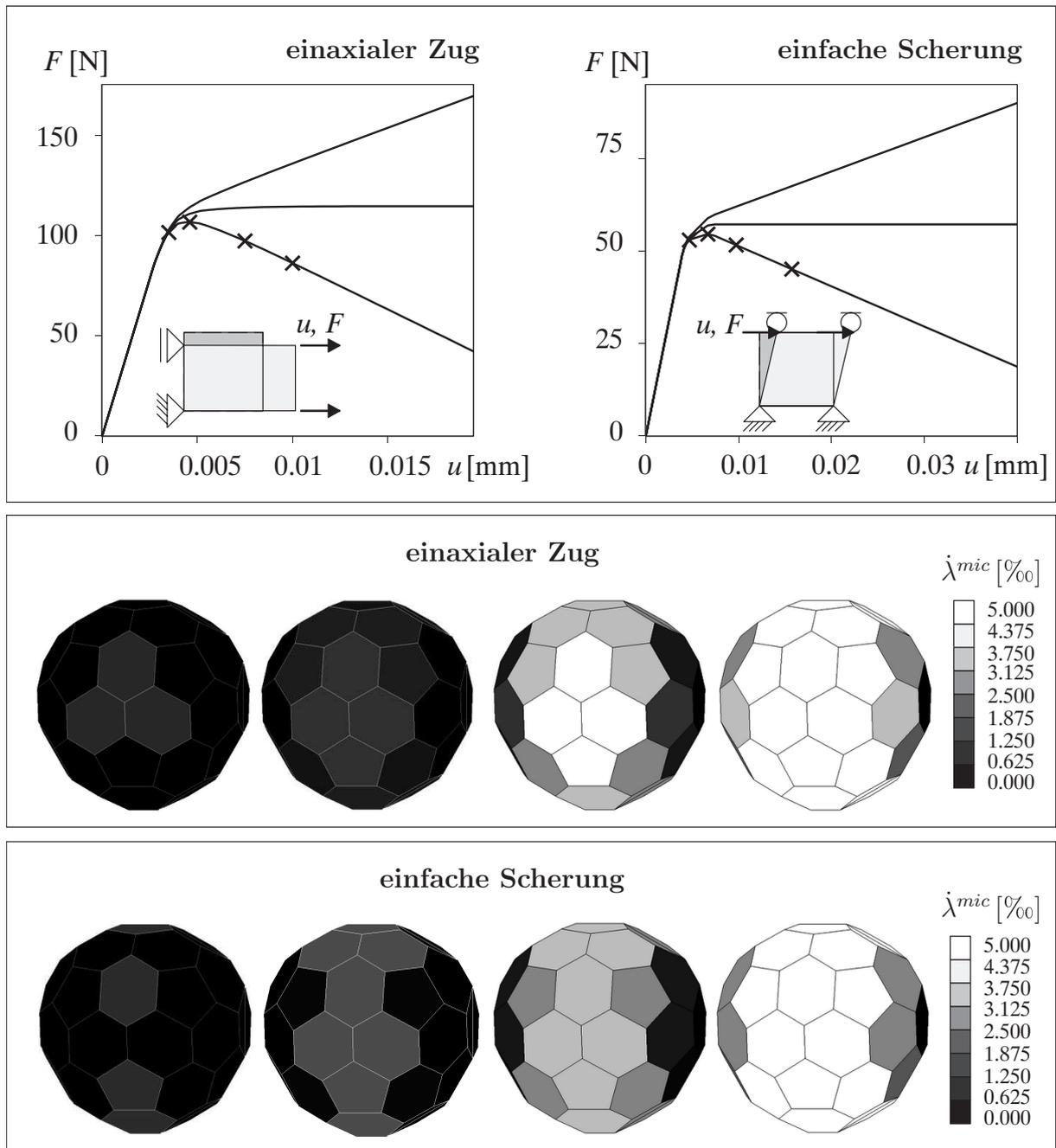


Abbildung 5.9: Entwicklung des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}^{mic}$  auf der Mikroebene

wird das angenommene lineare Ver- bzw. Entfestigungsverhalten auf der Mikroebene auch auf der Makroebene sichtbar, vergleiche den Verlauf der Last-Verschiebungskurven in Abbildung 5.9.

In Abbildung 5.9 ist zusätzlich die räumliche Verteilung des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}^{mic}$  auf den einzelnen Mikroebenen für den Fall des entfestigenden Materialverhaltens mit  $H = -E/10 = -3000 \text{ N/mm}^2$  dargestellt. Die Evolution des plastischen Multiplikators ist exemplarisch zu vier ausgesuchten Belastungszeitpunkten der beiden Modellprobleme gezeigt. Vergleicht man die Evolution des plastischen Multiplikators in Abbildung 5.9 mit der Evolution der Schädigungsvariablen  $d^{mic}$  in Abbildung 5.5, so lässt sich eine

ähnliche räumliche Verteilung erkennen. In Analogie zur Microplane Schädigung lässt sich beim einaxialen Zug ein lokales Zugversagen und bei der einfachen Scherung ein radiales Schubversagen beobachten. Das lokale Zugversagen ist durch ein Überschreiten der Fließgrenze auf den Ebenen, deren Normalen parallel zur Belastungsrichtung sind, und ein sukzessives Ausbreiten des plastischen Fließens auf die benachbarten Ebenen gekennzeichnet. Im Gegensatz dazu beginnt das plastische Fließen beim radialen Schubversagen auf den Ebenen des Nullmeridians und breitet sich dann senkrecht zur Nullmeridianebene aus. Wiederum ist eine starke Tendenz zur Texturbildung feststellbar.

## 5.4 Kopplung von Microplane Schädigung und Plastizität

Schädigungsmodelle motivieren sich aus der Entstehung von Mikrorissen und deren Zusammenschluss zu Makrorissen. Sie beschreiben die Degradation der elastischen Eigenschaften. Dagegen sind Plastizitätsmodelle durch einen Gleitvorgang entlang kristalliner Ebenen in Metallen motiviert. Diese erlauben die Beschreibung von permanenten plastischen Verformungen der Mikrostruktur, die durch diesen Gleitvorgang hervorgerufen werden. In Wirklichkeit weisen quasi-spröde Werkstoffe wie unbewehrter oder bewehrter Beton beide Phänomene auf. Ihr Verhalten ist durch ein komplexes Zusammenwirken einer anisotropen Degradation der Festigkeitseigenschaften mit richtungsabhängigen irreversiblen Dehnungen gekennzeichnet. Aus diesem Grund wird ein kombinierter Schädigungs- und Plastizitätsansatz in das allgemeine thermodynamische Konzept für Microplane Modelle eingebettet, vergleiche *Kuhl & Ramm* [128]. Die Voraussetzungen und Annahmen des kombinierten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodells entsprechen denen des reinen Schädigungs- und des reinen Plastizitätsmodells aus den vorigen Abschnitten. Zusätzlich wird die Notation des effektiven Spannungskonzeptes, welches aus der Schädigungsmechanik hinlänglich bekannt ist, genutzt. Es sei noch erwähnt, dass die Schädigung des Materials im kombinierten Microplane Modell nur durch eine Schädigungsvariable auf der Mikroebene, entsprechend dem 1-Parameter Schädigungsmodell aus Abschnitt 5.2.3, wiedergegeben wird. In Analogie zum reinen Plastizitätsmodell wird von einer additiven Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und plastischen Anteil sowohl auf der Mikro- (5.83) als auch auf der Makroebene (3.35) ausgegangen. Der Vektor der internen Variablen  $\alpha$  setzt sich aus den internen Variablen der Einzelmodelle zusammen.

$$\alpha = \{\epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}, d^{mic}\} \quad (5.106)$$

Auf jeder Mikroebene wird die Existenz einer freien Energie  $\Psi^{mic}$ , die von den totalen Microplane Verzerrungen und den internen Variablen abhängt, gefordert,

$$\Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}, d^{mic}) = [1 - d^{mic}] \Psi^{*mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}) \quad (5.107)$$

wobei  $\Psi^{*mic}$  der mikroskopischen freien Energie des reinen Microplane Plastizitätsmodells aus Abschnitt 5.3 entspricht

$$\Psi^{*mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \kappa^{mic}) = \Psi_{el}^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}) + \Psi_{pl}^{mic}(\kappa^{mic}) \quad (5.108)$$

und sich somit aus der ungeschädigten elastischen freien Energie  $\Psi_{el}^{mic}$  (5.87) und einem plastischen Anteil  $\Psi_{pl}^{mic}$  zusammensetzt. Die konstitutiven Microplane Spannungen ergeben sich, entsprechend den Standardargumenten der Thermodynamik, aus der freien

Energie als konjugierte Variablen zu den jeweiligen elastischen Verzerrungskomponenten.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V^{el}} = [1 - d^{mic}] K^{mic} \epsilon_V^{el} \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D^{el}} = 2 [1 - d^{mic}] G^{mic} \epsilon_D^{el} \quad (5.109)$$

Das Skalarprodukt der negativen partiellen Ableitungen der mikroskopischen freien Energie nach den internen Variablen, die als thermodynamische Kräfte  $\beta^{mic}$  eingeführt wurden, mit den Raten der entsprechenden internen Variablen führt auf die mikroskopische Dissipationsungleichung. Die plastischen thermodynamischen Kräfte entsprechen denen des reinen Plastizitätsmodells und werden durch die Gleichungen (5.90) wiedergegeben.

$$\mathcal{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha} \star \dot{\alpha} = \sigma_V \dot{\epsilon}_V^{pl} + \sigma_D \cdot \dot{\epsilon}_D^{pl} + \mathbf{q}^{mic} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{mic} + Y^{mic} \dot{d}^{mic} \geq 0 \quad (5.110)$$

Die zur Schädigungsvariablen konjugierte Größe  $Y^{mic}$ , die als Energiefreisetzungsrates bezeichnet wird, entspricht der ungeschädigten Energie  $\Psi^{*mic}$ .

$$Y^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} = \Psi^{*mic} \quad (5.111)$$

Der Prozess der Schädigungsentwicklung wird in Analogie zum reinen Schädigungsmodell durch die Einführung einer verzerrungsbasierten Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mic}$  bestimmt.

$$\Phi_d^{mic} = \phi^{mic}(\eta^{mic}) - d^{mic} \leq 0 \quad (5.112)$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass die Schädigungsfunktion im Verzerrungsraum definiert ist, da laut *Ju* [114] spannungsbasierte Schädigungsformulierungen bei Berücksichtigung plastischer Effekte physikalisch nicht sinnvoll erscheinen. Des Weiteren wird die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}$  als Funktion der Energiefreisetzungsrates bestimmt. Physikalisch charakterisiert diese Schädigungsformulierung die Entstehung und Bildung von Mikrorissen bzw. Mikroporen, so dass die effektiven Spannungen im restlichen Material höher sind als die nominellen Spannungen. Das bedeutet: Plastisches Fließen findet im geschädigten Material merklich früher statt als im ungeschädigten Material. Um diesen Effekt darstellen zu können, wird die Plastizität im effektiven Spannungsraum formuliert, wobei die effektiven Spannungen als die mit der geschädigten Fläche gewichteten nominellen Spannungen verstanden werden können, vergleiche hierzu *Ju* [114]. Da die zur internen Variablen  $\boldsymbol{\kappa}^{mic}$  konjugierte Variable  $\mathbf{q}^{mic}$  im Spannungsraum definiert ist, kann auch diese Größe im effektiven Spannungsraum dargestellt werden.

$$\tilde{\sigma}_V := \frac{\sigma_V}{1 - d^{mic}} \quad \tilde{\sigma}_D := \frac{\sigma_D}{1 - d^{mic}} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{mic} := \frac{\mathbf{q}^{mic}}{1 - d^{mic}} \quad (5.113)$$

Analog zum Abschnitt Microplane Plastizität erhält man eine Fließbedingung, die allerdings im Falle der Kopplung von Schädigung und Plastizität im effektiven Spannungsraum definiert ist.

$$\Phi_{pl}^{mic} = \varphi_{pl}^{mic}(\tilde{\sigma}_V, \tilde{\sigma}_D, \tilde{\mathbf{q}}^{mic}) - \sigma_Y^{mic}(\tilde{\mathbf{q}}^{mic}) \leq 0 \quad (5.114)$$

Wiederum lässt sich mit der mikroskopischen Dissipationsungleichung (5.110) in Verbindung mit dem Postulat vom Maximum der Dissipation ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Schädigungsfunktion (5.112) und der Fließbedingung (5.114) als Nebenbedingungen aufstellen. Daraus ergibt sich folgende Stationaritätsbedingung.

$$\mathcal{L}^{mic} = -\mathcal{D}^{mic} + \dot{\lambda}^{mic} \Phi_{pl}^{mic} + \dot{\gamma}^{mic} \Phi_d^{mic} \rightarrow \text{stat} \quad (5.115)$$

Die Lösung dieses Optimierungsproblems liefert die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen des Schädigungsmodells  $d^{mic}$

$$\dot{d}^{mic} = \dot{\gamma}^{mic} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial Y^{mic}} \quad (5.116)$$

und des Plastizitätsmodells  $\epsilon_V^{pl}$ ,  $\epsilon_D^{pl}$  und  $\kappa^{mic}$ .

$$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} \tilde{\mathbf{n}}_V \quad \dot{\epsilon}_D^{pl} = \dot{\lambda}^{mic} \tilde{\mathbf{n}}_D \quad \dot{\kappa}^{mic} = \dot{\lambda}^{mic} \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}} \quad (5.117)$$

Der Betrag des plastischen Flusses wird durch den effektiven plastischen Multiplikator  $\dot{\lambda}^{mic}$  angegeben, da die Plastizitätsformulierung im effektiven Spannungsraum definiert ist.

$$\dot{\lambda}^{mic} = \frac{\dot{\lambda}^{mic}}{1 - d^{mic}} \quad (5.118)$$

Weiterhin definieren  $\tilde{\mathbf{n}}_V$  und  $\tilde{\mathbf{n}}_D$  die Normalen auf die Fließfläche im effektiven Spannungsraum und können in einer assoziierten Plastizitätsformulierung als Richtungen des plastischen Flusses verstanden werden.

$$\tilde{\mathbf{n}}_V := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\sigma}_V} \quad \tilde{\mathbf{n}}_D := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\sigma}_D} \quad (5.119)$$

In einer allgemeinen nicht-assozierten Plastizitätsformulierung unterscheiden sich diese Normalen von den Richtungen des plastischen Flusses  $\tilde{\mathbf{m}}_V$  und  $\tilde{\mathbf{m}}_D$ , die nun als die Normalen auf ein plastisches Potential  $\Phi_{pl}^{mic*}$  interpretiert werden.

$$\tilde{\mathbf{m}}_V := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\sigma}_V} \quad \tilde{\mathbf{m}}_D := \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\sigma}_D} \quad (5.120)$$

Des Weiteren liefert die Lösung des Optimierungsproblems die Karush–Kuhn–Tucker Be- und Entlastungsbedingungen und die Konsistenzbedingung, die den Prozess des plastischen Fließens steuern.

$$\Phi_{pl}^{mic} \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{mic} \geq 0 \quad \Phi_{pl}^{mic} \dot{\lambda}^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}_{pl}^{mic} \dot{\lambda}^{mic} = 0 \quad (5.121)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingung führt unmittelbar auf die Evolutionsgleichung des effektiven plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}^{mic}$ ,

$$\dot{\lambda}^{mic} = \frac{[\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2 G^{mic} \mathbf{Dev}] : \dot{\epsilon}}{\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_V + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2 G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}} \quad (5.122)$$

wobei  $\mathbf{H}^{mic}$  den Verfestigungsmodul der Mikroebene beschreibt. Dieser lässt sich aus der Ratenform der zur Verfestigungsvariablen konjugierten effektiven Variablen  $\tilde{\mathbf{q}}^{mic}$  bestimmen.

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{mic} = \mathbf{H}^{mic} \cdot \dot{\kappa}^{mic} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^{mic} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} \quad (5.123)$$

Zusätzlich lassen sich die Karush–Kuhn–Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung des Schädigungsprozesses in gewohnter Form angeben.

$$\Phi_d^{mic} \leq 0 \quad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \quad \Phi_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0 \quad (5.124)$$

Entsprechend der Herleitung des 1–Parameter Schädigungsmodells in Abschnitt 5.2.3 gehen die Evolutionsgleichungen der Schädigungsvariablen (5.116), der Argumentation von *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] folgend, in eine direkte Bestimmungsgleichung über.

$$d^{mic} = \phi^{mic}(\gamma^{mic}) \quad \text{mit} \quad \gamma^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} (Y^{mic}(t), \gamma_0^{mic}) \quad (5.125)$$

Der Geschichtsparemeter  $\gamma^{mic}$  entspricht wiederum den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der äquivalenten Verzerrung  $\eta^{mic}$ , hier identisch der Energiefreisetzungsrage  $Y^{mic}$ .

Die makroskopische Materialantwort ergibt sich durch Auswertung der fundamentalen Mikro–Makro Beziehung (4.1) der freien Energiefunktionen  $\Psi^{mic}$  und  $\Psi^{mac}$ . Folgerichtig definiert die Standardauswertung der makroskopischen Clausius–Duhem Ungleichung (4.34) wiederum den makroskopischen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} := \partial \Psi^{mac} / \partial \boldsymbol{\epsilon}^{el}$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \left[ K^{mic} \mathbf{V} [\boldsymbol{\epsilon}_V - \boldsymbol{\epsilon}_V^{pl}] + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot [\boldsymbol{\epsilon}_D - \boldsymbol{\epsilon}_D^{pl}] \right] d\Omega \quad (5.126)$$

Daraus folgt für die Rate der makroskopischen Spannungen,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] [\mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_D] - \dot{d}^{mic} [\mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] d\Omega \quad (5.127)$$

die auf folgende Bestimmungsgleichung für den Materialtensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{dp} := d\boldsymbol{\sigma} / d\boldsymbol{\epsilon}$  der gekoppelten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierung führt,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{dp} = & \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \left\{ \left[ K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} \right] \right. \\ & \left. - \frac{[\mathbf{V} K^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D] \otimes [\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_V + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}} \right\} d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} [\mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] \otimes [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V \mathbf{V} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega \\ & + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \phi^{*pl} \frac{[\mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] \otimes [\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{\mathbf{n}}_V K^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_V + \tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}} d\Omega \end{aligned} \quad (5.128)$$

wobei  $\phi^{*pl} := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V \tilde{\mathbf{m}}_V + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \tilde{\mathbf{m}}_D - \tilde{\mathbf{q}}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}$ . Die erste Zeile des Materialtensors des gekoppelten Modells entspricht dem Sekantentensor (5.70) des 1–Parameter Schädigungsmodells aus Abschnitt 5.2.3. Die erste und zweite Zeile charakterisiert den mit  $1 - d^{mic}$  skalierten Tangententensor des reinen Microplane Plastizitätsmodells aus Abschnitt 5.3 im effektiven Spannungsraum. Die erste und dritte Zeile bilden den Tangententensor des 1–Parameter Schädigungsmodells (5.73). Die letzte Zeile enthält sowohl Anteile der Schädigung als auch Anteile der Plastizität und spiegelt die Kopplung der beiden Einzelmodelle wieder.

### Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung

Das anisotrope Materialverhalten und die damit verbundene Texturbildung des gekoppelten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodells wird am Beispiel des einaxialen Zuges und der einfachen Scherung des Einheitswürfel aus Abschnitt 5.1.1 im ebenen Verzerrungszustand gezeigt. Es werden bei beiden Modellproblemen dieselben elastischen Parameter wie in den vorigen Abschnitten vorausgesetzt, so dass  $K^{mic} = 50000 \text{ N/mm}^2$  und  $G^{mic} = 12500 \text{ N/mm}^2$ . Zusätzlich müssen die nichtlinearen Stoffgesetze auf der Mikroebene spezifiziert werden. Das plastische Verhalten soll in Anlehnung an das plastische Verhalten der beiden Modellprobleme des reinen Microplane Plastizitätsmodells aus Abschnitt 5.3 formuliert werden. Allerdings werden beim kombinierten Microplane Modell die plastischen Stoffgesetze im effektiven Spannungsraum definiert. Damit lässt sich eine rein deviatorische Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$  angeben, die dem klassischen von Mises Kriterium auf der Makroebene entspricht.

$$\Phi_{pl}^{mic} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D - \sigma_0^{mic} + \tilde{q}^{mic} \leq 0 \quad (5.129)$$

Es wird auf der Mikroebene ein linear verfestigendes Materialverhalten angenommen. Dies führt mit dem Verfestigungsmodul  $H$  auf einen linearen Zusammenhang zwischen den zueinander konjugierten Variablen  $\tilde{q}^{mic}$  und  $\kappa^{mic}$ .

$$\tilde{q}^{mic} = -H \kappa^{mic} \quad (5.130)$$

Der Anfangswert der Fließspannung wird zu  $\sigma_0^{mic} = 1.2 \text{ N/mm}^2$  und der Verfestigungsmodul zu  $H = E = 30000 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Weiterhin wird vereinfachend angenommen, dass die Schädigung nur die elastische freie Energie beeinflusst. Damit ergibt sich folgende freie Energiefunktion.

$$\Psi^{mic} = \underbrace{[1 - d^{mic}] \left[ \frac{1}{2} K^{mic} [\epsilon_V - \epsilon_V^{pl}]^2 + [\boldsymbol{\epsilon}_D - \boldsymbol{\epsilon}_D^{pl}] \cdot G^{mic} [\boldsymbol{\epsilon}_D - \boldsymbol{\epsilon}_D^{pl}] \right]}_{\Psi_d^{mic}} + \underbrace{\frac{1}{2} H \kappa^{mic^2}}_{\Psi_{pl}^{mic}} \quad (5.131)$$

Aus dieser freien Energie lässt sich die Energiefreisetzungsrate  $Y^{mic}$  ableiten.

$$Y^{mic} := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d^{mic}} = \Psi_{el}^{mic} = \frac{1}{2} K^{mic} \epsilon_V^{el^2} + G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D^{el} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D^{el} \quad (5.132)$$

Diese stellt die treibende Kraft für die Entwicklung des Schädigungsprozesses dar. In Analogie zum 1-Parameter Schädigungsmodell aus Abschnitt 5.2.3 wird die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}$  als die Wurzel der zweifachen Energiefreisetzungsrate  $Y^{mic}$  definiert. Damit hängt die äquivalente Verzerrung nur von den elastischen Microplane Verzerrungen  $\epsilon_V^{el}$  bzw.  $\boldsymbol{\epsilon}_D^{el}$  und den zugehörigen Microplane Elastizitätskonstanten  $K^{mic}$  bzw.  $G^{mic}$  ab.

$$\eta^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}^{el}) := \sqrt{2 Y^{mic}} = \sqrt{K^{mic} \epsilon_V^{el^2} + 2 G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D^{el} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D^{el}} \quad (5.133)$$

Im Folgenden wird das Schädigungsverhalten einer weiteren äquivalenten Verzerrung untersucht. Dabei werden die elastischen Microplane Verzerrungen in Gleichung (5.133) durch die totalen Microplane Verzerrungen ersetzt. Daraus ergibt sich folgende äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}(\boldsymbol{\epsilon})$ , die von den totalen Microplane Verzerrungen abhängt.

$$\eta^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}) := \sqrt{K^{mic} \epsilon_V^2 + 2 G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_D \cdot \boldsymbol{\epsilon}_D} \quad (5.134)$$

Des Weiteren wird eine exponentielle Schädigungsentwicklung nach Gleichung (5.77) angenommen. Der Parameter  $\beta^{mic}$ , die maximal mögliche Degradation  $\alpha^{mic}$  und der Schädigungsschwellwert  $\gamma_0^{mic}$  werden wie in Abschnitt 5.2.3 zu  $\beta^{mic} = 30$ ,  $\alpha^{mic} = 0.95$  und  $\gamma_0^{mic} = 0.0065$  gewählt. Die beiden Parameter  $\sigma_0^{mic}$  und  $\gamma_0^{mic}$  wurden so gewählt, dass das plastische Fließen und die Schädigung des Materials nahezu gleichzeitig einsetzen.

Mit den angegebenen Plastizitäts- und Schädigungsgesetzen lassen sich die Materialtensoren,  $\mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon^{el})$  für den Fall, dass die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}(\epsilon^{el})$  nur von den elastischen Microplane Verzerrungen abhängt,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon^{el}) = & \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \quad [K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \quad \frac{[\mathbf{Dev}^T \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D] \otimes [\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D + H} d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \quad \frac{[\mathbf{V} \tilde{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\sigma}_D] \otimes [\tilde{\sigma}_V \mathbf{V} + \tilde{\sigma}_D \cdot \mathbf{Dev}]}{\eta^{mic}(\epsilon^{el})} d\Omega \\ & + \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \quad \frac{\tilde{\sigma}_D \cdot \tilde{\mathbf{m}}_D}{\eta^{mic}(\epsilon^{el})} \frac{[\mathbf{V} \tilde{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\sigma}_D] \otimes [\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D + H} d\Omega \end{aligned} \quad (5.135)$$

und  $\mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon)$  für den Fall, dass sich die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mic}(\epsilon)$  als Funktion der totalen Microplane Verzerrungen ergibt, näher spezifizieren.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon) = & \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \quad [K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}] d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \quad \frac{[\mathbf{Dev}^T \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D] \otimes [\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{\mathbf{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\mathbf{m}}_D + H} d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \quad \frac{[\mathbf{V} \tilde{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\sigma}_D] \otimes [\tilde{\sigma}_V \mathbf{V} + \tilde{\sigma}_D \cdot \mathbf{Dev}]}{\eta^{mic}(\epsilon)} d\Omega \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} \quad \frac{[\mathbf{V} \tilde{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\sigma}_D] \otimes [\epsilon_D^{pl} \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\eta^{mic}(\epsilon)} d\Omega \end{aligned} \quad (5.136)$$

Vergleicht man die resultierenden Materialtensoren  $\mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon^{el})$  (5.135) und  $\mathcal{E}_{tan}^{dp}(\epsilon)$  (5.136) miteinander, so stellt man kaum Unterschiede fest. Die ersten drei Zeilen der Materialtensoren sind identisch. Dagegen unterscheidet sich die letzte Zeile der beiden Materialtensoren. Auffallend ist vor allem das unterschiedliche Vorzeichen in der letzten Zeile. Die unterschiedlichen Vorzeichen spiegeln sich in den Last–Verschiebungsdiagrammen in Abbildung 5.10 und somit in der Materialantwort wieder. Ein Vergleich der resultierenden Last–Verschiebungsdiagramme für die Fälle  $\eta^{mic}(\epsilon^{el})$  und  $\eta^{mic}(\epsilon)$  zeigt, dass die Traglast für  $\eta^{mic}(\epsilon^{el})$  deutlich höher ist. Weiterhin weist die Materialantwort des Modells mit  $\eta^{mic}(\epsilon^{el})$  gegenüber dem Modell mit  $\eta^{mic}(\epsilon)$  eine höhere Duktilität auf. Dies ist auf das langsamere Anwachsen der elastischen Verzerrungen im Vergleich zu den totalen Verzerrungen zurückzuführen. Die unterschiedlichen Vorzeichen in der letzten Zeile der beiden Materialtensoren unterstreichen diese Beobachtung. Die Entlastungspfade sind in Abbildung 5.10 gestrichelt dargestellt und bestätigen, dass sowohl eine Reduktion der Festigkeiten im Material stattfindet als auch permanente Dehnungen auftreten.

Zusätzlich ist in Abbildung 5.10 die räumliche Verteilung der Schädigung und des plastischen Multiplikators für die beiden Modellprobleme, basierend auf dem Modell mit  $\eta^{mic}(\epsilon)$ , dargestellt. Daraus lassen sich beim kombinierten Microplane Schädigungs- und

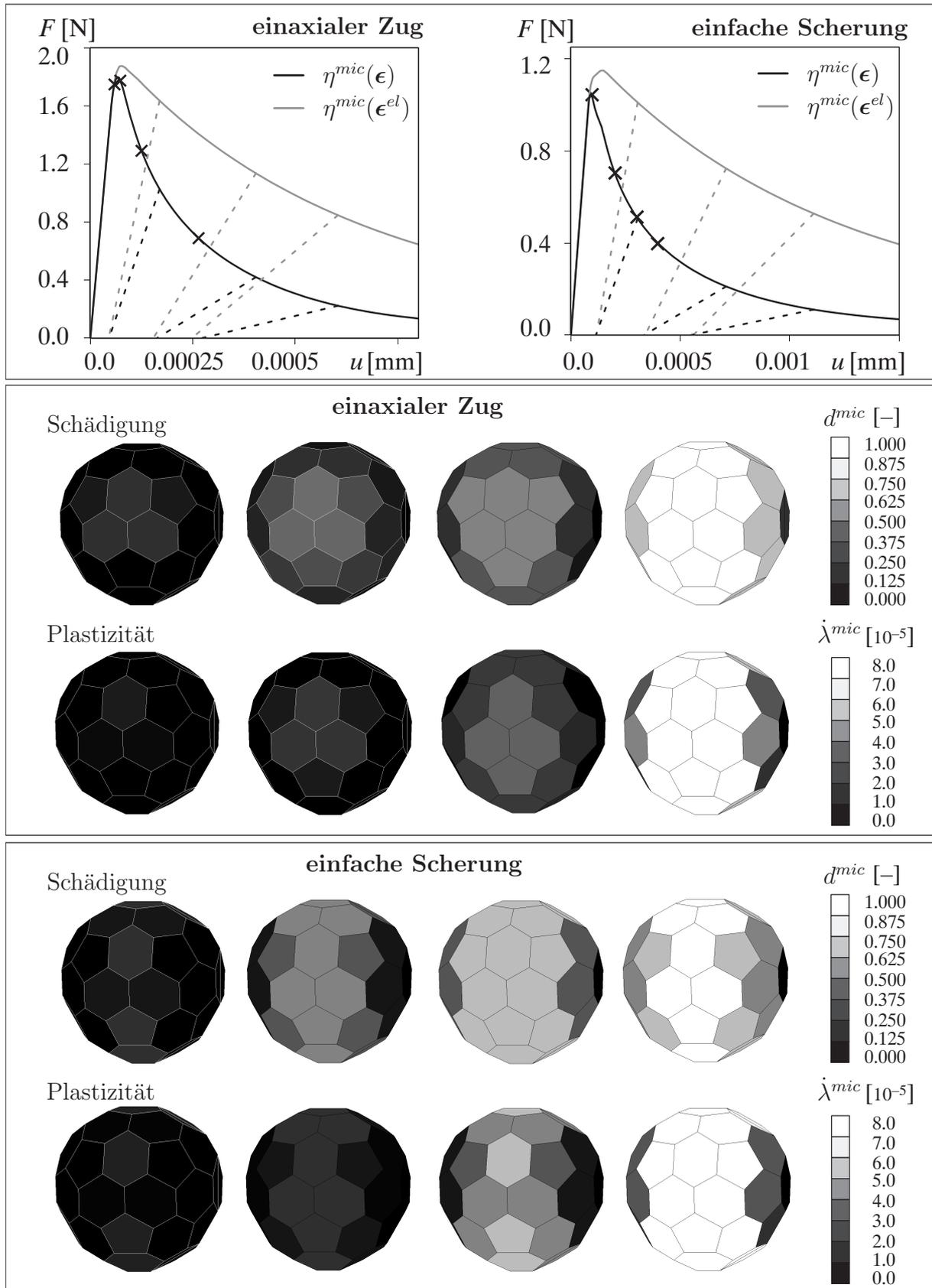


Abbildung 5.10: Entwicklung der Schädigung  $d^{mic}$  und des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}^{mic}$  auf der Mikroebene

Plastizitätsmodell ähnliche Versagensarten wie bei den beiden Einzelmodellen ableiten. Beim einaxialen Zug weisen sowohl die Schädigungsverteilungen als auch die Verteilungen des plastischen Multiplikators ein eher lokales Zugversagen der Ebenen mit Normalen parallel zur Belastungsrichtung auf. Im Unterschied dazu ist bei der einfachen Scherung ein radiales Schubversagen, beginnend auf den Ebenen des Nullmeridians, zu beobachten. Die Materialantwort des vorgestellten gekoppelten Microplane Modells setzt sich dementsprechend aus den Materialantworten der beiden Einzelmodelle zusammen, vergleiche hierzu die Modellprobleme in den Abschnitten 5.2.3 und 5.3.

Abschließend wird am Beispiel des einaxialen Zuges unter Verwendung der äquivalenten Verzerrung  $\eta^{mic}(\epsilon^{el})$  (5.133) das Materialverhalten auf der Mikroebene näher untersucht. Das linke Diagramm in Abbildung 5.11 stellt die makroskopischen Spannungen in Lastrichtung  $\sigma_x$  mit der Norm des Spannungsvektors zweier Ebenen  $|\mathbf{t}_{\sigma(9)}|$  und  $|\mathbf{t}_{\sigma(6)}|$  gegenüber. Dabei ist eine Ebene in Lastrichtung und die andere in Querrichtung dazu angeordnet. Die genaue Lage dieser Ebenen mit der Nummer 9 und 6 ist in Abbildung C.1, links, des Anhangs C zu finden. Auffällig ist, dass die maximal erreichten Spannungen verschieden hoch sind und dass diese zu unterschiedlichen Belastungszeitpunkten erreicht werden. Dies ist auf die anisotrope Entwicklung der Schädigung und Plastizität zurückzuführen.

Im rechten Diagramm von Abbildung 5.11 sind die Verläufe der mikroskopischen freien Energie  $\Psi^{mic}$ , der geschädigten elastischen Energie  $\Psi_d^{mic}$ , der plastischen Energie  $\Psi_{pl}^{mic}$  der Ebene mit der Nummer 9 und der Verlauf der makroskopischen freien Energie  $\Psi^{mac}$  dargestellt. Vergleicht man die Energien auf der Mikroebene, so stellt man fest, dass mit zunehmender Belastung der plastische Energieanteil, der sich als quadratische Funktion ergibt, den Hauptbeitrag zur mikroskopischen Energie leistet, während der Beitrag der geschädigten elastischen Energie mit zunehmender Belastung abnimmt. Dadurch wachsen die Energien  $\Psi^{mic}$  und  $\Psi^{mac}$  im Gegensatz zu den Spannungen stetig an. Sowohl bei den makroskopischen Spannungen als auch bei der makroskopischen Energie ist der Übergang in den nichtlinearen Materialbereich durch das kontinuierliche Einsetzen der Schädigung und des plastischen Fließens auf den Mikroebenen stärker ausgerundet als bei den Spannungen und Energien auf der Mikroebene.

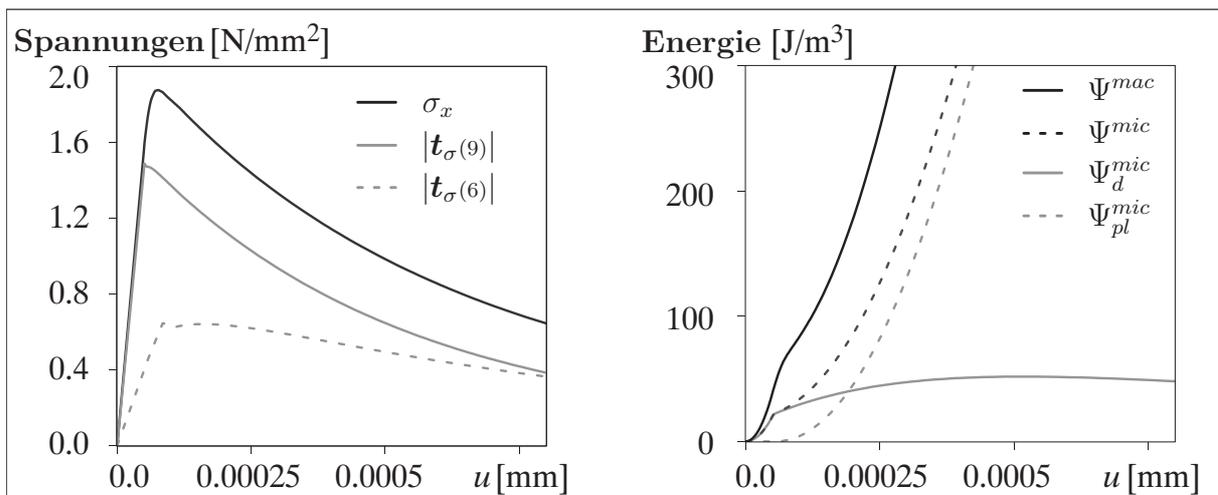


Abbildung 5.11: Spannungs- und Energieevolution auf der Mikro- und Makroebene für den einaxialen Zug

# Kapitel 6

## Regularisierungsstrategien im Rahmen der Microplane Theorie

In diesem Kapitel wird auf die Probleme von Kontinuumsmodellen bei der Modellierung von lokalisierten Versagensvorgängen eingegangen. Zur Vermeidung netzabhängiger Lösungen bei entfestigenden Materialgesetzen werden verschiedene Regularisierungsstrategien für das Microplane Modell aufgezeigt. Die in dieser Arbeit verwendete gradientenerweiterte Microplane Theorie wird dabei näher beleuchtet.

### 6.1 Lokalisierung

Die Materialklasse der kohäsiven Reibungsmaterialien besitzt ein großes Spektrum an unterschiedlichen Versagensarten. Beispielsweise lässt sich bei Beton unter Zugbeanspruchung ein für spröde Materialien typisches kohäsives, trennbruchartiges Materialversagen beobachten, während sich unter Druckbeanspruchung in Abhängigkeit des Seitendrucks verschiedene Versagensarten, vom spröden Druckversagen bis hin zum duktilen Schubversagen, einstellen können. Das duktile Schubversagen ist durch das Abgleiten entlang schmaler Scherzonen gekennzeichnet. Der Grenzzustand der Tragfähigkeit kohäsiver Reibungsmaterialien wird bei allen auftretenden Versagensarten durch die Konzentration von Verformungen in schmalen Zonen charakterisiert. Dieses Versagensphänomen der Lokalisierung wird durch geometrische oder materielle Instabilitäten verursacht und wurde in den letzten Jahren gründlich untersucht, siehe beispielsweise *de Borst & van der Giesen* [74]. Es beginnt mit der Entstehung von Mikrorissen oder Mikroporen, die sich mit zunehmender Belastung zusammenschließen und somit zur Bildung von Zonen mit stark lokalisierten Verzerrungen führen. Während sich in diesen Bereichen schmale Versagenszonen bilden, wird der Hauptteil der Struktur in der Regel zunehmend entlastet. Bei weiterer Belastungszunahme entstehen diskontinuierliche Versagemuster mit sichtbaren Makrorissen, wobei diese schmalen Zonen mit stark lokalisierten Verzerrungen den Ausgangspunkt für das diskrete Versagen der Struktur darstellen. Des Weiteren spiegelt sich das Phänomen der Lokalisierung in einem makroskopisch entfestigenden Antwortverhalten wieder.

Zur geometrischen Abbildung dieser Versagensarten stehen prinzipiell zwei Ansätze zur Verfügung. Der Hauptunterschied zwischen beiden Ansätzen besteht darin, dass beim kontinuumsmechanischen Ansatz die Risse nicht diskret, sondern über eine bestimmte Breite verschmiert abgebildet werden. Dementsprechend werden die Auswirkungen der Risse auf das Kontinuum und nicht die diskreten Risse selbst betrachtet. In dieser Arbeit wird nur der kontinuumsmechanische Ansatz verwendet, so dass auf eine Darstellung des bruchmechanischen Ansatzes [28, 94, 95] verzichtet wird. Außerdem konnte in Experimenten beobachtet werden, dass die Lokalisierungszone der betrachteten Werkstoffklasse tatsächlich

eine gewisse finite Breite besitzt. Beispielsweise wurden von *Bažant* [16], *Bažant & Oh* [23] bzw. *de Borst, Sluys, Mühlhaus & Pamin* [73] erste Versuche unternommen diese materialspezifische, charakteristische Breite in Beziehung zum mikrostrukturellen Aufbau des Materials zu setzen. Diese materialspezifische Größe wird zur Motivation erweiterter Kontinuumsmodelle herangezogen, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden. Die erweiterten Kontinuumsmodelle versuchen die Änderungen der heterogenen Mikrostruktur in die Formulierung einfließen zu lassen, vergleiche unter anderem *de Borst & van der Giesen* [74] oder *Mühlhaus* [165]. Dadurch ist es mit diesen Formulierungen möglich eine Lokalisierungszone endlicher Breite abzubilden. Allerdings ist es bis heute noch schwierig, diesen für die erweiterten Kontinuumsmodelle erforderlichen internen Längenparameter aus Experimenten zu bestimmen, siehe *de Borst, Sluys, Mühlhaus & Pamin* [73].

Die Modellierung des oben beschriebenen Materialverhaltens erfordert weiterhin ein Materialmodell, welches in der Lage sein muss, diese Entfestigung abzubilden. Beispielsweise besitzt Beton infolge der Degradation der Materialfestigkeiten, welche wiederum durch die Bildung von Mikrorissen verursacht wird, ein entfestigendes Materialverhalten. Allerdings ist hinlänglich bekannt, dass die Modellierung dieses entfestigenden Materialverhaltens im Rahmen einer klassischen Kontinuumstheorie, den Verlust einer finiten Anzahl von Lösungen zur Folge hat, siehe *Bažant* [13], *Crisfield* [60] oder *de Borst* [65]. Zur Verdeutlichung wird das Antwortverhalten des üblicherweise an dieser Stelle verwendeten Modellproblems der Lokalisierung eines Zugstabes herangezogen. Auf eine ausführliche Darstellung und Diskussion des Problems wird verzichtet und auf die Arbeiten von *de Borst* [65], *Jirásek* [111] oder *Kuhl* [123] verwiesen. Im Folgenden werden drei Schlussfolgerungen aufgelistet, die sich beim Übergang zu einer unendlich feinen Diskretisierung des Zugstabes ergeben: (i) Die dissipierte Energie strebt gegen null; (ii) Das Versagen findet in einer Zone mit der Breite null statt; (iii) Es wird ein *Snapback* Verhalten hervorgerufen. Das Antwortverhalten des Zugstabes ist nicht mit den physikalischen Beobachtungen in Einklang zu bringen und die erhaltenen Ergebnisse sind unbrauchbar. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen ist dieses Verhalten bei quasi-statischen Problemen auf den Verlust der Elliptizität der beschreibenden Differentialgleichungen zurückzuführen. Die Folge ist, dass ein Typwechsel der Differentialgleichungen von elliptisch auf hyperbolisch stattfindet und die Gutgestelltheit des Randwertproblems verloren geht. Aufgrund des Typwechsels sind die vorhandenen Randbedingungen unzureichend, so dass es keine eindeutige Lösung mehr gibt und dies letztendlich auf schlecht gestellte Probleme führt, siehe *Hill* [103] oder *Sluys* [208]. Vom numerischen Standpunkt aus gesehen manifestiert sich der Verlust der Gutgestelltheit des Problems in einer pathologischen Netzabhängigkeit der numerischen Lösung. Mit zunehmend feinerer Diskretisierung nimmt die Sprödhheit des Antwortverhaltens zu und die dissipierte Energie der Versagenszone wird in den meisten Fällen unterschätzt.

Die beschriebenen Defizite der Modellierung von entfestigendem Materialverhalten im Rahmen einer klassischen Kontinuumstheorie können beseitigt werden, indem entweder die kinematische oder die konstitutive Beschreibung erweitert wird. Derartige Erweiterungen werden als Regularisierungsstrategien bezeichnet, da diese Methoden die mathematischen Gleichungen regularisieren und somit die Gutgestelltheit des Problems sicherstellen. Alle in dieser Arbeit vorgestellten Methoden haben die Einführung eines zusätzlichen Materialparameters, der so genannten charakteristischen Länge, gemeinsam. Diese charakteristische Länge kontrolliert die Breite der numerisch auflösbaren Versagenszone und stellt einen Bezug zur Größe und zum Abstand der Materialinhomogenitäten her.

Für eine realistische Auflösung dieser lokalisierten Versagenszonen im Rahmen von Kon-

tinuumsformulierungen ist ein sehr feines Finite Element Netz unerlässlich. Da das Netz nur um die Versagenszone fein sein muss und diese im Allgemeinen nicht im voraus bekannt ist, bietet sich für eine effiziente Analyse die Anwendung adaptiver Methoden zur Netzverfeinerung an, vergleiche hierzu *Comi & Perego* [57], *Diez, Arroyo & Huerta* [77], *Patzák & Jirásek* [181] oder *Rodriguez-Ferran & Huerta* [200]. Ein alternativer Zugang zur Auflösung dieser Versagenszonen gründet auf der speziellen Erweiterung der kinematischen Beschreibung. Dabei lassen sich in der Literatur zwei Verfahren unterscheiden, die erweiterte Verschiebungs- bzw. Verzerrungsansätze in die Finite Element Formulierung einbringen. Zum einen ist das die so genannte *Extended Finite Element Method* (X-FEM), vergleiche unter anderem die Arbeiten von *Moës, Dolbow, & Belytschko* [161], *Sukumar, Moës, Moran & Belytschko* [212] oder *Wells, Sluys & de Borst* [225], welche auf der *Partition of Unity Method* (PUM), siehe *Melenk & Babuška* [156], basiert. Und zum anderen der so genannte *Strong Discontinuity Approach* (SDA), vergleiche beispielsweise *Belytschko, Fish & Engelmann* [33], *Larsson & Runesson* [134], *Mosler & Meschke* [163] und *Oliver* [173]. Ein Vergleich dieser beiden Verfahren findet sich in *Jirásek & Belytschko* [113]. Auf diese Ansätze soll im Folgenden nicht näher eingegangen werden.

## 6.2 Regularisierungsstrategien

Im folgenden Abschnitt werden einige unterschiedliche Regularisierungsstrategien aufgezeigt und deren Umsetzung im Rahmen der Microplane Theorie diskutiert. Dabei wird auf die Diskussion der weit verbreiteten Rissbandmethode, die auch unter dem Begriff des netzadaptierten Entfestigungsmoduls bekannt ist und auf die Aufsätze von *Pietruszczak & Mróz* [189], *Bažant & Oh* [23] sowie *Willam* [226] zurückgeht, verzichtet. Denn im Unterschied zu den in den nächsten Abschnitten vorgestellten Methoden, ist die Rissbandmethode nicht in der Lage Lokalisierungszone endlicher Breite, das bedeutet mit einer von der Diskretisierung unabhängigen Breite, abzubilden. Sie stellt nur eine finite Energie-dissipation und somit die Objektivität des Nachbruchverhaltens sicher. Allerdings besitzt diese Methode den Vorteil, dass sie numerisch relativ einfach umsetzbar ist.

### 6.2.1 Ratenabhängige Microplane Theorie

Die Berücksichtigung viskoser Terme in den konstitutiven Gleichungen, wie sie von *Perzyna* [187] oder *Duvaut & Lions* [81] vorgeschlagen wurde, führt eine echte Ratenabhängigkeit in die entsprechenden Materialformulierungen ein. In Experimenten mit kohäsiven Reibungsmaterialien konnte gezeigt werden, dass mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit der Schädigungsbeginn verzögert stattfindet und somit die Festigkeit ansteigt, siehe *van Mier* [222]. Im Folgenden wird ein einfacher Ansatz vom Perzyna Typ zur Berücksichtigung dieser viskosen Effekte im Rahmen der ratenunabhängigen Microplane Theorie kurz vorgestellt. Im Falle des Microplane Schädigungsmodells aus Abschnitt 5.2 werden die entsprechenden Evolutionsgleichungen für die Schädigungsmultiplikatoren der einzelnen Microplane Komponenten direkt vorgegeben und nicht mehr aus den Konsistenzbedingungen abgeleitet. Dies erlaubt die Existenz von Zuständen außerhalb der Schädigungsfläche. Die Gutgestelltheit des Problems wird durch die Einführung einer Zeitskala in Form eines Viskositätsparameters erreicht. In Analogie zu diesem Ansatz für die Schädigung lässt sich auch die klassische Perzyna Viskoplastizitätsformulierung auf das ratenunabhängige Microplane Plastizitätsmodell aus Abschnitt 5.3 übertragen.

Mesmar & Crouch [158] stellten kürzlich eine ratenabhängige Erweiterung des expliziten Microplane Modells von Carol, Prat & Bažant [46] vor. Dabei wurden die klassischen Ansätze der eindimensionalen, makroskopischen Duvaut–Lions Viskoplastizitätsformulierung auf die Mikroebene übertragen. Weitere Ansätze zur Beschreibung viskoser Effekte im Rahmen des Microplane Modells gehen auf Bažant *et al.* [18, 97, 175] zurück.

Allerdings sollte erwähnt werden, dass der hier beschriebene Ansatz nur bei ausgeprägt viskosen Effekten wirklich einen regularisierenden Einfluss aufweist, vergleiche Haufe [98]. Denn diese viskosen Effekte wirken sich hauptsächlich bei extrem hohen Belastungsgeschwindigkeiten aus. Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich quasi–statische Probleme untersucht werden, scheint eine viskose Erweiterung aus erwähnten Gründen physikalisch nicht sinnvoll und wird dementsprechend an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.

### 6.2.2 Mikropolare Microplane Theorie

Eine weitere Regularisierungsstrategie stellt die von den Gebrüdern Cosserat [59] vorgestellte mikropolare Kontinuumstheorie dar, bei der zusätzlich zu den Translationsfreiheitsgraden  $\mathbf{u}$  noch Rotationsfreiheitsgrade  $\mathbf{w}$  eingeführt werden. Physikalisch werden diese Rotationen als gemittelte Verdrehungen der einzelnen Elemente eines repräsentativen Volumens interpretiert. Neben dem nun unsymmetrischen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  tritt der mikropolare Krümmungstensor  $\boldsymbol{\kappa}$  als weitere kinematische Größe auf.

Die Übertragung dieser Gedanken auf die Microplane Theorie wurde kürzlich von Etse, Nieto & Steinmann [83] vorgeschlagen. Den Ausgangspunkt der mikropolaren Microplane Theorie stellt wiederum die kinematische Projektion, entsprechend Abschnitt 4.2, dar. Damit ergeben sich folgende kinematische Gegenstücke auf den Mikroebenen.

$$\boldsymbol{\epsilon}_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\epsilon}_D = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\kappa}_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\kappa} \quad \boldsymbol{\kappa}_D = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\kappa} \quad (6.1)$$

Die Definition einer freien Microplane Energie  $\Psi^{mic}(\boldsymbol{\epsilon}_V, \boldsymbol{\epsilon}_D, \boldsymbol{\kappa}_V, \boldsymbol{\kappa}_D, \boldsymbol{\alpha})$  liefert neben den bekannten Microplane Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_V$  und  $\boldsymbol{\sigma}_D$  zusätzlich die Microplane Momentenspannungen  $\boldsymbol{\mu}_V$  und  $\boldsymbol{\mu}_D$ .

$$\boldsymbol{\sigma}_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_V} \quad \boldsymbol{\sigma}_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_D} \quad \boldsymbol{\mu}_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_V} \quad \boldsymbol{\mu}_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_D} \quad (6.2)$$

Durch Ausnutzen der integralen Mikro–Makro Beziehung (4.1) zwischen den freien Energiefunktionen auf der Mikro- und Makroebene, lassen sich die makroskopischen unsymmetrischen Spannungen sowie die Momentenspannungen ableiten.

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D \, d\Omega \quad \boldsymbol{\mu}^T = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \boldsymbol{\mu}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \boldsymbol{\mu}_D \, d\Omega \quad (6.3)$$

Die gezeigte mikropolare Erweiterung der Microplane Theorie ist durch die Berücksichtigung einer internen Länge in der Lage eine Lokalisierungszone, die sich über mehrere Elemente erstreckt, darzustellen. Da die Rotationsfreiheitsgrade hauptsächlich bei schubdominanten Belastungen angeregt werden, ist die regularisierende Wirkung bei Mode II Versagenzuständen zufriedenstellend. Allerdings berichten de Borst [66] und Sluys [208], dass bei Mode I Versagensformen, wie sie bei kohäsiven Reibungsmaterialien unter Zugbeanspruchung auftreten, der regularisierende Effekt nicht immer ausreicht um die elliptischen Eigenschaften des Randwertproblems zu erhalten.

### 6.2.3 Nichtlokale Microplane Theorie

Im Rahmen der nichtlokalen Kontinua werden die Wechselwirkungen, die in einer Lokalisierungszone auftreten, durch eine Gewichtsfunktion, welche wiederum die Nachbarschaft miteinbezieht, berücksichtigt. Das nichtlokale Kontinuum basiert auf der Annahme, dass die Antwort eines Punktes nicht nur von diesem Punkt, sondern auch von den Antworten in einer bestimmten Nachbarschaft abhängt. Dieses Konzept wurde von *Kröner* [122] sowie *Eringen & Edelen* [82] im Rahmen eines elastischen Materialverhaltens vorgestellt. Die Übertragung auf entfestigendes Materialverhalten im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik fand in den 1980er Jahren statt, siehe *Bažant* [14] oder *Pijaudier-Cabot & Bažant* [192]. Zusätzlich wurden ab diesem Zeitpunkt nicht mehr alle Variablen der konstitutiven Gleichungen, sondern lediglich eine Größe, die für das entfestigende Materialverhalten charakteristisch ist, nichtlokal angesetzt. Ein Vergleich unterschiedlicher nichtlokaler Formulierungen findet sich in *Bažant & Jirásek* [22]. Weiterhin gelang es *Bažant* [16] sowie *Ožbolt & Bažant* [176] dieses nichtlokale Konzept mit Hilfe der Mikrorisswechselwirkung physikalisch zu motivieren.

Die Umsetzung des nichtlokalen Konzeptes im Rahmen des Microplane Modells geht auf *Bažant & Ožbolt* [26, 27] zurück. Im Folgenden wird das Vorgehen für die Microplane Schädigungstheorie vorgestellt. Bei den Variablen, die für den betrachteten Fall die Entfestigung steuern, handelt es sich um die jeweiligen Microplane Schädigungsvariablen  $d_i^{mic}$ . Diese werden durch die makroskopischen Verzerrungen  $\epsilon$  in Form der zugehörigen Microplane Verzerrungen getrieben. Die nichtlokale Erweiterung des Microplane Modells erfolgt durch Ersetzen der lokalen Schädigungsvariablen  $d_i^{mic}$  durch deren nichtlokale Gegenstücke  $\bar{d}_i^{mic}$ . Diese nichtlokalen Schädigungsvariablen  $\bar{d}_i^{mic}$  ergeben sich aus den nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  in Form der projizierten nichtlokalen Microplane Verzerrungen. Die restlichen Gleichungen des konstitutiven Gleichungssatzes des Microplane Schädigungsmodells bleiben unverändert. Die nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  lassen sich über eine gewichtete räumliche Mittelwertbildung aller lokalen Verzerrungen  $\epsilon$  im betrachteten Körper mit dem Volumen  $V$  definieren. Häufig werden als Wichtungsfunktionen eine Glockenkurve oder eine Gaußsche Normalverteilung herangezogen. Als zusätzlicher Parameter wird über die Gewichtsfunktion eine interne Länge  $l$  in die Formulierung eingebracht, wodurch das Problem gut gestellt bleibt. Diese interne Länge  $l$  gibt den Radius des Einflussgebietes der nichtlokalen Verzerrungen wieder.

Ein großer Nachteil dieser Methode ist deren relativ komplexe numerische Umsetzung im Rahmen der Finite Element Methode. Denn durch die räumliche Mittelwertbildung wird der lokale Charakter der Finite Element Methode verletzt.

### 6.3 Gradientenerweiterte Microplane Theorie

Einen alternativen Zugang zu den nichtlokalen Kontinuumstheorien bieten gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle. Im Unterschied zu den nichtlokalen Integralekontinua aus Abschnitt 6.2.3 werden zur Berücksichtigung räumlicher Wechselwirkungen bei diesem Ansatz höherwertige räumliche Gradienten in die Formulierung eingebracht. Die gradientenerweiterte Kontinuumstheorie wird als geeignetste Regularisierungsstrategie angesehen um die Gutgestelltheit des Problems im Rahmen der Microplane Theorie mit entfestigenden Stoffgesetzen zu gewährleisten. Zum einen, da diese Regularisierungsstrategie sowohl für Reibungsversagen als auch für spröde Materialeffekte, wie beispielsweise die Wechselwirkung der Mikrorissbildung, geeignet ist. Zum anderen entspricht dieser Ansatz dem lokalen Charakter der Finite Element Methode, da alle Feldgrößen lokal vorliegen.

Die grundlegenden Ideen zum Gradientenkontinuum gehen auf die Arbeiten von *Mindlin* [160] und *Toupin* [218] zurück. Dabei werden die lokalen Konstitutivgesetze um höherwertige Verzerrungsgradienten und um die zu diesen Verzerrungsgradienten konjugierten höherwertigen Spannungsmaße erweitert, wodurch Wechselwirkungen zwischen den Materialteilchen erfasst werden. Die heutzutage weit verbreiteten Gradientenmodelle berücksichtigen im Unterschied dazu höherwertige Gradienten einer ausgewählten, im Allgemeinen skalaren Größe, welche für die Materialentfestigung charakteristisch ist. Die Entwicklung von nichtlinearen Gradientenmodellen fand zuerst hauptsächlich im Rahmen der Plastizitätstheorie statt, vergleiche *Aifantis* [1, 2], *de Borst & Mühlhaus* [70], *de Borst & Pamin* [71], *Fleck & Hutchinson* [87], *Lasry & Belytschko* [135], *Mühlhaus & Aifantis* [166] sowie *Pamin* [179]. Die Übertragung auf nichtlokale Schädigungsformulierungen gelang erst kürzlich, indem der zweite Gradient der äquivalenten Verzerrung berücksichtigt wurde. Diese Formulierung basiert auf den Ideen von *Peerlings* [182], der auch eine numerisch elegante Umsetzung dieser Gradientenschädigung präsentierte, vergleiche *Peerlings, de Borst, Brekelmans & de Vree* [184]. Daraufhin stieg das Interesse an gradientenerweiterten Schädigungsformulierungen in den letzten Jahren stetig an und es kam zu zahlreichen Weiterentwicklungen, wie beispielsweise der Übertragung auf transiente Problemstellungen, der Erweiterung auf finite Deformationen oder der Berücksichtigung von Gradienten diverser Variablen, siehe *Comi* [56], *de Borst, Benallal & Heeres* [68], *Frémond & Nedjar* [88], *Geers, de Borst, Brekelmans & Peerlings* [91], *Liebe* [146], *Peerlings et al.* [183, 185] oder *Steinmann* [210]. In jüngster Zeit finden sich in der Literatur auch Kombinationen aus kontinuierlichen, gradientenerweiterten Schädigungsformulierungen und Ansätzen mit denen es möglich ist, diskrete Risse abzubilden, vergleiche hierzu *Peerlings, Geers, de Borst & Brekelmans* [186] oder *Simone, Wells & Sluys* [206]. Außerdem wurden kürzlich von *de Borst, Pamin & Geers* [72] bzw. *Pamin & de Borst* [180] und *Svedberg & Runesson* [213, 214] Kopplungen von gradientenerweiterten Schädigungs- und Plastizitätsformulierungen entwickelt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Kopplung der Gradientenschädigung mit einer lokalen Plastizitätsformulierung im Rahmen der Microplane Theorie basiert auf der isotropen Formulierung von *de Borst, Pamin & Geers* [72].

Im Folgenden soll das Vorgehen einer Gradientenerweiterung der Microplane Theorie am Beispiel der Microplane Schädigung vorgestellt werden. Dieses Vorgehen basiert auf den Arbeiten von *Kuhl, Ramm & de Borst* [127, 130] sowie *Kuhl* [123] und berücksichtigt den Einfluss der sich in der Nachbarschaft entwickelnden Heterogenitäten durch nachfolgenden Gradientenausdruck für die nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$ .

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \bar{\epsilon}(\mathbf{x}) = \epsilon(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad c = c(l^2) \quad (6.4)$$

Die Größe des Einflussbereichs wird durch den Gradientenparameter  $c$  vorgegeben, der eine interne Länge  $l$  in die Formulierung einbringt. Die nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  können nicht explizit in Abhängigkeit der lokalen Verzerrungen  $\epsilon$  berechnet werden. Sie ergeben sich als Lösung der partiellen Differentialgleichungen (6.4). *Peerlings* [182] bezeichnet diese Art eines gradientenerweiterten Kontinuumsmodells deshalb als implizite Gradientenformulierung. Im Gegensatz zur expliziten Gradientenformulierung wird die implizite Gradientenformulierung im Sinne von *Bažant & Jirásek* [22] und *Peerlings* [182] als wirklich nichtlokal bezeichnet. Dies geht auch aus einem Vergleich dieser beiden Ansätze von *Peerlings, Geers, de Borst & Brekelmans* [186] und *Askes & Sluys* [8] hervor. Dabei konnte auch gezeigt werden, dass nur die implizite Gradientenformulierung, aufgrund der wirklich auftretenden Nichtlokalität, in enger Verwandtschaft zu den nichtlokalen Integralkontinua steht und sich mittels einer Taylorreihenentwicklung auch aus diesen motivieren lässt.

In Analogie zum nichtlokalen Microplane Schädigungsmodell, basierend auf dem Integralkontinuum aus Abschnitt 6.2.3, bestimmen die nichtlokalen Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene  $\bar{\epsilon}_V$  und  $\bar{\epsilon}_D$  das Schädigungsverhalten. Diese ergeben sich mit Hilfe der kinematischen Projektion aus den nichtlokalen makroskopischen Verzerrungen.

$$\bar{\epsilon}_V = \mathbf{V} : \bar{\epsilon} \quad \bar{\epsilon}_D = \mathbf{Dev} : \bar{\epsilon} \quad (6.5)$$

Diese nichtlokalen Verzerrungskomponenten gehen in die konstitutiven Gleichungen ein. Für den betrachteten Fall der Schädigung werden nur die Schädigungsfunktionen  $\Phi_i^{mic}$  beeinflusst, die zu Funktionen der nichtlokalen Verzerrungen auf der Mikroebene werden.

$$\Phi_i^{mic} = \Phi_i^{mic}(\bar{\epsilon}_V, \bar{\epsilon}_D) \quad (6.6)$$

Da die restlichen Gleichungen des konstitutiven Gleichungssatzes unverändert bleiben, stellt dies eine einfache und elegante nichtlokale Erweiterung der Microplane Theorie dar.

### 6.3.1 Finite Element Formulierung

Für die gradientenerweiterte Kombination von Schädigung und Plastizität gibt es in der Literatur verschiedene Ansätze. Zum einen gibt es die Möglichkeit eine gradientenerweiterte Plastizitätsformulierung mit einem lokalen Schädigungsmodell zu koppeln, vergleiche *de Borst, Pamin & Geers* [72] und *Svedberg & Runesson* [213, 214]. Andererseits wurde von *de Borst, Pamin & Geers* [72] die Kopplung eines gradientenerweiterten Schädigungsmodells mit einer lokalen Plastizitätsformulierung vorgeschlagen. Ein Vergleich dieser beiden Ansätze von *de Borst, Pamin & Geers* [72] hat gezeigt, dass die Kopplung eines gradientenerweiterten Schädigungsmodells mit einer lokalen Plastizitätsformulierung als numerisch eleganter sowie physikalisch plausibler zu bewerten ist. Außerdem konnte gezeigt werden, dass die Gradientenerweiterung der Schädigung als genügend durchgreifend für die Regularisierung ist. Deshalb wird dieser Ansatz im Folgenden auf die Microplane Theorie übertragen, um auch mit dem gekoppelten Microplane Modell im postkritischen Bereich netzunabhängige Ergebnisse zu gewährleisten.

Die numerische Umsetzung der Gradientenerweiterung eines reinen Microplane Schädigungsmodells im Rahmen eines Finite Element Programmes ist in *Kuhl* [123] und *Kuhl, Ramm & de Borst* [130] näher beschrieben und basiert auf der Arbeit von *Peerlings* [182]. Allerdings erfordert das anisotrope Microplane Modell die Berücksichtigung der Gradienten des kompletten Verzerrungstensors, während für isotrope Formulierungen skalarwertige Größen, wie beispielsweise die äquivalente Verzerrung, nichtlokal angesetzt werden.

Die von *Kuhl* [123] vorgeschlagene Formulierung stellt die Basis für die Erweiterung auf ein Microplane Gradientenschädigungsmodell gekoppelt mit Plastizität dar. Dabei wird die Differentialgleichung für die nichtlokalen Verzerrungen (6.4) als zusätzliche Eulergleichung berücksichtigt, wodurch eine so genannte Zweifeld–Formulierung entsteht. Diese setzt sich aus dem klassischen quasi–statischen Randwertproblem, entsprechend Abschnitt 2.1.3, und dem nichtlokalen Verzerrungsproblem zusammen. Die Bilanzgleichung für die nichtlokalen Verzerrungen ergibt sich in starker Form in analoger Schreibweise zur starken Form des Gleichgewichts (2.3).

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (6.7)$$

Für das nichtlokale Verzerrungsproblem wird üblicherweise die Neumann–Randbedingung  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  vorgegeben. Diese Randbedingung gewährleistet, dass für homogene Deformationen die lokalen den nichtlokalen Verzerrungen entsprechen, vergleiche *Peerlings, Geers, de Borst & Brekelmans* [186]. Zusätzlich wurde ein dreistufiger Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  eingeführt, welcher in Analogie zum Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  über ein Konstitutivgesetz  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}})$  bestimmt wird. Zur numerischen Lösung der Zweifeld–Formulierung wird diese mittels der Galerkin–Methode in eine schwache Form gebracht. Die schwache Form des Gleichgewichts ergibt sich als Prinzip der virtuellen Verschiebungen entsprechend Gleichung (2.9). Die schwache Form des nichtlokalen Verzerrungsproblems lässt sich durch Anwendung der partiellen Integration und des Gaußschen Integralsatzes und durch Berücksichtigung der Neumann–Randbedingung wie folgt angeben.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\tau} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : [\bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon}] \, dV = 0 \quad \forall \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.8)$$

Dabei stellt  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  eine tensorwertige Testfunktion dar.

### Diskretisierung

Entsprechend Abschnitt 2.2.2 wird in den beiden folgenden Abschnitten die Matrixschreibweise verwendet. Die beiden schwachen Formen (2.9) und (6.8) stellen den Ausgangspunkt für die räumliche Diskretisierung im Rahmen der Finite Element Methode dar. Dabei müssen die nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  als zusätzliche Freiheitsgrade neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in die Finite Element Formulierung eingebracht werden. Der Körper  $\mathcal{B}$  wird wiederum in  $n_{ele}$  Finite Elemente zerlegt, so dass  $\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathcal{B}^e$  gilt. Neben dem Verschiebungsverlauf  $\mathbf{u}$  werden die Verläufe der nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  über diskrete Knotenwerte mittels Ansatzfunktionen approximativ bestimmt. Im Folgenden bezeichnen  $\mathbf{d}$  die diskreten Knotenverschiebungen und  $\mathbf{e}$  die diskreten nichtlokalen Knotenverzerrungen.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h &:= \mathbf{N} \mathbf{d} & \delta \mathbf{u}^h &:= \mathbf{N} \delta \mathbf{d} & \boldsymbol{\epsilon}^h &:= \mathbf{B} \mathbf{d} & \delta \boldsymbol{\epsilon}^h &:= \mathbf{B} \delta \mathbf{d} & \text{in } \mathcal{B}^e \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^h &:= \bar{\mathbf{N}} \mathbf{e} & \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^h &:= \bar{\mathbf{N}} \delta \mathbf{e} & \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^h &:= \bar{\mathbf{B}} \mathbf{e} & \delta \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^h &:= \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{e} & \text{in } \mathcal{B}^e \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die Verläufe innerhalb eines Elementes werden über die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  für die Verschiebungen und  $\bar{\mathbf{N}}$  für die nichtlokalen Verzerrungen approximiert. Des Weiteren stellen die Operatoren  $\mathbf{B}$  und  $\bar{\mathbf{B}}$  die räumlichen Gradienten der jeweiligen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  bzw.  $\bar{\mathbf{N}}$  dar. Zur Vermeidung von Spannungs–Oszillationen werden die Ansatzfunktionen der Verschiebungen  $\mathbf{N}$  eine Ordnung höher als die Ansatzfunktionen der nichtlokalen

Verzerrungen  $\bar{\mathbf{N}}$  gewählt, vergleiche hierzu *Kuhl* [123], *Peerlings* [182] oder eine jüngere Arbeit von *Simone, Askes, Peerlings & Sluys* [205] über die Anforderungen an die Ansatzfunktionen für implizite Gradientenmodelle. Daraus ergibt sich, dass die Ordnung der Ansatzfunktionen der lokalen und nichtlokalen Verzerrungen identisch ist. Da in dieser Arbeit das Bubnov–Galerkin Verfahren angewendet wird, werden die nichtlokalen Verzerrungen und die virtuellen nichtlokalen Verzerrungen in gleicher Weise angesetzt. Gleiches gilt dementsprechend für die Verschiebungen und die virtuellen Verschiebungen. Durch Einsetzen der diskretisierten Verschiebungs- und Verzerrungsverläufe (6.9) in die schwachen Formen des Gleichgewichts (2.9) und des nichtlokalen Verzerrungsproblems (6.8) ergeben sich die diskretisierten schwachen Formen.

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d}^T & \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{f}_{int,d}^e} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA}_{-\mathbf{f}_{ext,d}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d} \\ \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{e}^T & \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\tau} dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T [\bar{\mathbf{N}} \mathbf{e} - \mathbf{B} \mathbf{d}] dV}_{\mathbf{f}_{int,e}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{e} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Hierbei definieren  $\mathbf{f}_{int,d}^e$  die inneren bzw.  $\mathbf{f}_{ext,d}^e$  die äußeren Knotenkräfte eines Elementes  $e$  des zugehörigen Gleichgewichtsproblems und  $\mathbf{f}_{int,e}^e$  die inneren Knotengrößen eines Elementes  $e$  des nichtlokalen Verzerrungsproblems. Über den Assemblierungsprozess lässt sich aus den diskretisierten schwachen Formen (6.10) folgendes globales Gleichungssystem ableiten.

$$\delta \mathbf{D} [\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}] = 0 \quad (6.11)$$

Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung besagt dieses Gleichungssystem, dass die globalen inneren Kräfte  $\mathbf{F}_{int}$  den globalen äußeren Kräften  $\mathbf{F}_{ext}$  entsprechen. Die globalen Kräfte und den globalen Freiheitsgradvektor  $\delta \mathbf{D}$  liefert wiederum der Assemblierungsprozess.

$$\mathbf{F}_{int} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int,d}^e \\ \mathbf{f}_{int,e}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext,d}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d} \\ \delta \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

### Linearisierung

Im Folgenden soll dieses globale Gleichungssystem (6.11) für den Fall der Microplane Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität näher spezifiziert werden. Dieses Materialverhalten führt zu einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen. Des Weiteren sind die schwachen Formen des Gleichgewichts und des nichtlokalen Verzerrungsproblems (6.10) über die lokalen und nichtlokalen Verzerrungen miteinander gekoppelt. Als Resultat ergibt sich ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem (6.11). Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird in dieser Arbeit das inkrementell iterative Newton–Raphson Verfahren herangezogen. Dazu wird dieses Gleichungssystem in folgendes Format gebracht,

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) := \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (6.13)$$

wobei  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  wiederum das Residuum bezeichnet, welches im Laufe des iterativen Prozesses verschwinden muss. Während eines inkrementellen Lastschrittes im Rahmen des Newton–Raphson Verfahrens wird das Residuum zum Iterationsschritt  $i + 1$  mittels einer Taylorreihenentwicklung unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung linearisiert. Dieses Vorgehen wurde ausführlich in Abschnitt 2.2.3 behandelt und führt letztendlich auf ein linearisiertes globales Gleichungssystem,

$$\mathbf{K}_i \Delta \mathbf{D}_{i+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{D}_i) \quad (6.14)$$

dessen Lösung die inkrementelle Änderung des Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_{i+1}$  liefert. Somit erhält man eine verbesserte Lösung für den Freiheitsgradvektor  $\mathbf{D}_{i+1}$ , der sich aus der Summe des Freiheitsgradvektors  $\mathbf{D}_i$  zum Iterationsschritt  $i$  und der inkrementellen Änderung des Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_{i+1}$  bestimmt. Entsprechend Gleichung (2.19) stellen  $\mathbf{K}_i$  und  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_i)$  die globale Tangentensteifigkeitsmatrix und das Residuum zum Iterationsschritt  $i$  dar. Diese globalen Größen ergeben sich durch den Assemblierungsprozess aus den Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e$  und aus den Elementresiduen  $\mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e$ . Außerdem lässt sich durch den Zusammenbau das Inkrement des globalen Freiheitsgradvektors in Abhängigkeit der Änderung der Elementfreiheitsgradvektoren  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$  und  $\Delta \mathbf{e}_{i+1}$  angeben.

$$\mathbf{K}_i := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{D}_{i+1} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Damit ergibt sich letztendlich folgendes elementspezifisches Gleichungssystem,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

dessen Lösung die inkrementellen Änderungen der jeweiligen Elementfreiheitsgrade  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$  und  $\Delta \mathbf{e}_{i+1}$  liefert. Die erforderlichen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e$  und Elementresiduen  $\mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e$  werden aus folgenden Zusammenhängen bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dp} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{dp} \bar{\mathbf{N}} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{e}}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = - \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{F}}_i^{dp} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{e}}^e}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \bar{\mathbf{N}} dV \\ \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e &= \mathbf{f}_{int,\mathbf{d},i}^e - \mathbf{f}_{ext,\mathbf{d}}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV - \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e &= \mathbf{f}_{int,\mathbf{e},i}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\tau}_i dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i] dV \end{aligned} \quad (6.17)$$

Für die gradientenerweiterte Microplane Theorie nimmt das Gleichungssystem (6.16) eine unsymmetrische Struktur an, da für die beiden Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \neq \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e{}^T$

gilt. Diese Unsymmetrie spiegelt sich im globalen Gleichungssystem (6.14) wieder, dessen Lösung dementsprechend den Einsatz unsymmetrischer Gleichungslöser nach sich zieht. In den Bestimmungsgleichungen der jeweiligen Elementsteifigkeitsmatrizen wurden verschiedene Bezeichnungen eingeführt, die durch das Materialverhalten näher charakterisiert werden. Dabei bezeichnet  $\mathcal{E}_i^{dp}$  die Ableitung der Spannungen nach den lokalen Verzerrungen, welches im Sinne der lokalen Kontinuumstheorie dem Sekantentensor entspricht. Die Ableitung der Spannungen nach den nichtlokalen Verzerrungen bildet  $\bar{\mathcal{E}}_i^{dp}$ . Weiterhin stellt  $\mathcal{C}_i$  eine Beziehung zwischen der Spannungsgröße  $\boldsymbol{\tau}$  und den nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  dar.

$$\mathcal{E}_i^{dp} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right|_{\boldsymbol{\epsilon}_i} \quad \bar{\mathcal{E}}_i^{dp} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i} \quad \bar{\mathbf{F}}_i^{dp} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right|_{\boldsymbol{\epsilon}_i} = \mathcal{I} \quad \mathcal{C}_i := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \right|_{\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i} \quad (6.18)$$

Die Berechnung dieser Beziehungen erfordert die Festlegung des zu beschreibenden Materialverhaltens. Dazu müssen die erforderlichen Konstitutivgesetze für die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha})$  in Abhängigkeit der lokalen Verzerrungen und einem Satz interner Variablen sowie für die Spannungsgröße  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}})$  als Funktion der nichtlokalen Verzerrungen angegeben werden. Diese Konstitutivgesetze werden im nächsten Abschnitt für den Fall der Microplane Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität näher betrachtet.

### 6.3.2 Microplane Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität

Die Basis für die Kopplung von Schädigung und Plastizität stellt die lokale Microplane Formulierung aus Abschnitt 5.4 dar. Dazu müssen die jeweiligen Konstitutivgesetze der Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität definiert werden. Wie bereits erwähnt, bestimmen die nichtlokalen Verzerrungskomponenten der Mikroebene das Schädigungsverhalten der gradientenerweiterten Formulierung. In Analogie zu den lokalen Verzerrungskomponenten der Mikroebene ergeben sich diese nichtlokalen Verzerrungskomponenten aus deren Gegenstücke auf der Makroebene mit Hilfe der kinematischen Projektion.

$$\boldsymbol{\epsilon}_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\epsilon}_D = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V = \mathbf{V} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D = \mathbf{Dev} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.19)$$

Für die Gradientenschädigung gekoppelt mit Plastizität werden sowohl Konstitutivgesetze für die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  als auch für die Spannungsgröße  $\boldsymbol{\tau}$  benötigt. In Analogie zur lokalen Formulierung aus Abschnitt 5.4 wird die freie Energiefunktion  $\Psi^{mic}$  auf der Mikroebene entsprechend Gleichung (5.107) definiert. Diese freie Energiefunktion liefert die Definitionen der konstitutiven Microplane Spannungen (5.109) als thermodynamisch konjugierte Variablen zu den jeweiligen elastischen Verzerrungskomponenten. Mit Hilfe der fundamentalen Mikro–Makro Beziehung (4.1) erhält man letztendlich die Definition des makroskopischen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  (5.126).

Weiterhin wird zur Bestimmung des dreistufigen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  ein zweites Potential  $\Psi_\tau^{mac}$  eingeführt. Dieses Potential ist allerdings aufgrund der Abhängigkeit des dreistufigen Spannungstensors vom Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen direkt auf der Makroebene formuliert.

$$\Psi_\tau^{mac}(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) = \frac{1}{2} \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathcal{C} : \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.20)$$

Dies führt unmittelbar auf den dreistufigen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  als konjugierte Größe zum Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\tau}}^{mac}}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \boldsymbol{C} : \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = c \boldsymbol{I}^{(6)} \quad (6.21)$$

wobei der Einfluss der Gradientenerweiterung als isotrop angenommen wird und somit die Mikrostruktur durch den skalaren Gradientenparameter  $c$  bestimmt wird. Dadurch wird das anisotrope Materialverhalten alleinig durch das Microplane Modell charakterisiert. Das plastische Materialverhalten wird durch die lokale Plastizitätsformulierung des gekoppelten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodells, entsprechend Abschnitt 5.4, beschrieben, da in dieser Arbeit die Gradientenerweiterung nur für die Schädigung angesetzt wird. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf die Darstellung der entsprechenden Gleichungen des lokalen Plastizitätsmodells verzichtet und es sei auf Abschnitt 5.4 verwiesen.

Der Prozess der Schädigungsentwicklung wird durch die Einführung einer verzerrungs-basierten Schädigungsfunktion  $\Phi_d^{mic}$  gesteuert.

$$\Phi_d^{mic} = \phi^{mic}(\bar{\eta}^{mic}) - d^{mic} \leq 0 \quad \text{mit} \quad \bar{\eta}^{mic} = \bar{\eta}^{mic}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D) \quad (6.22)$$

Im Unterschied zum lokalen Modell aus Abschnitt 5.4 wird diese Schädigungsfunktion in Abhängigkeit einer nichtlokalen äquivalenten Verzerrung  $\bar{\eta}^{mic}$  aufgestellt. Diese ergibt sich als Funktion der nichtlokalen Microplane Verzerrungskomponenten  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V$  und  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D$ , die wiederum über die kinematische Projektion (6.19) aus den nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  hervorgehen. Zusätzlich lassen sich die Karush–Kuhn–Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung des Schädigungsprozesses in gewohnter Form angeben.

$$\Phi_d^{mic} \leq 0 \quad \dot{\gamma}^{mic} \geq 0 \quad \Phi_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0; \quad \dot{\Phi}_d^{mic} \dot{\gamma}^{mic} = 0 \quad (6.23)$$

Entsprechend der Herleitung der lokalen gekoppelten Formulierung in Abschnitt 5.4 lässt sich die Evolutionsgleichung der Schädigungsvariable nach *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] in eine direkte Bestimmungsgleichung überführen.

$$d^{mic} = \phi^{mic}(\gamma^{mic}) \quad \text{mit} \quad \gamma^{mic} = \max_{-\infty < t < \tau} (\bar{\eta}^{mic}(t), \gamma_0^{mic}) \quad (6.24)$$

Der Geschichtparameter  $\gamma^{mic}$  entspricht im Fall der gradientenerweiterten Formulierung dem in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Wert der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung  $\bar{\eta}^{mic}$ . Damit lassen sich die im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{dp}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{dp}$ ,  $\bar{\boldsymbol{F}}^{dp}$  und  $\boldsymbol{C}$ , die zur Linearisierung des Randwertproblems der gradientenerweiterten Microplane Theorie erforderlich sind, für den hier betrachteten Fall der Microplane Gradientenschädigung gekoppelt mit einer Microplane Plastizitätsformulierung näher spezifizieren. Der vierstufige Tensor  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{dp}$ , der durch die Ableitung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  nach dem lokalen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  definiert ist, nimmt folgende Form an.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{dp} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d^{mic}] \left\{ \left[ K^{mic} \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V} + 2 G^{mic} \boldsymbol{Dev}^T \cdot \boldsymbol{Dev} \right] \right. \\ \left. - \frac{[\boldsymbol{V} K^{mic} \tilde{\boldsymbol{m}}_V + \boldsymbol{Dev}^T \cdot 2G^{mic} \tilde{\boldsymbol{m}}_D] \otimes [\tilde{\boldsymbol{n}}_V K^{mic} \boldsymbol{V} + \tilde{\boldsymbol{n}}_D \cdot 2G^{mic} \boldsymbol{Dev}]}{\tilde{\boldsymbol{n}}_V K^{mic} \tilde{\boldsymbol{m}}_V + \tilde{\boldsymbol{n}}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{\boldsymbol{m}}_D - \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic}}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}^{mic}} \cdot \boldsymbol{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi_{pl}^{mic*}}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}^{mic}}} \right\} d\Omega \quad (6.25)$$

Des Weiteren ergibt sich der vierstufige Tensor  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{dp}$  als Ableitung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  nach dem nichtlokalen Verzerrungstensor  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ .

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{dp} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = -\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} [\mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] \otimes \left[ \frac{\bar{\eta}^{mic}}{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V} \mathbf{V} + \frac{\bar{\eta}^{mic}}{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D} \cdot \mathbf{Dev} \right] d\Omega \quad (6.26)$$

Abschließend lassen sich die beiden Tensoren  $\bar{\mathbf{F}}^{dp}$  und  $\mathbf{C}$  wie folgt charakterisieren.

$$\bar{\mathbf{F}}^{dp} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{I} \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = {}_c \mathbf{I}^{(6)} \quad (6.27)$$

Außerdem soll noch die Möglichkeit untersucht werden, dass die nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen  $\bar{\eta}^{mic} = \bar{\eta}^{mic}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V^{el}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D^{el})$  von den elastischen und nicht wie bisher von den totalen nichtlokalen Microplane Verzerrungskomponenten abhängen. Dadurch werden im Gradientenausdruck (6.4) nicht die totalen Verzerrungen, sondern lediglich der elastische Anteil als nichtlokal angesetzt. Die Bestimmungsgleichung (6.25) für den vierstufigen Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}^{dp}$  bleibt davon unberührt. Der vierstufige Tensor  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{dp}$ , der nun die Ableitung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  nach dem elastischen nichtlokalen Verzerrungstensor  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{el}$  bezeichnet, wird durch folgenden Ausdruck dargestellt.

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{dp} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{el}} = -\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^{mic}}{\partial \gamma^{mic}} [\mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_D] \otimes \left[ \frac{\bar{\eta}^{mic}}{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_V^{el}} \mathbf{V} + \frac{\bar{\eta}^{mic}}{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_D^{el}} \cdot \mathbf{Dev} \right] d\Omega \quad (6.28)$$

Der Hauptunterschied zwischen den beiden betrachteten Ansätzen liegt in der Definition des Tensors  $\bar{\mathbf{F}}^{dp}$ . Dieser formuliert im vorliegenden Fall den Zusammenhang zwischen den lokalen elastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^{el}$  und den totalen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

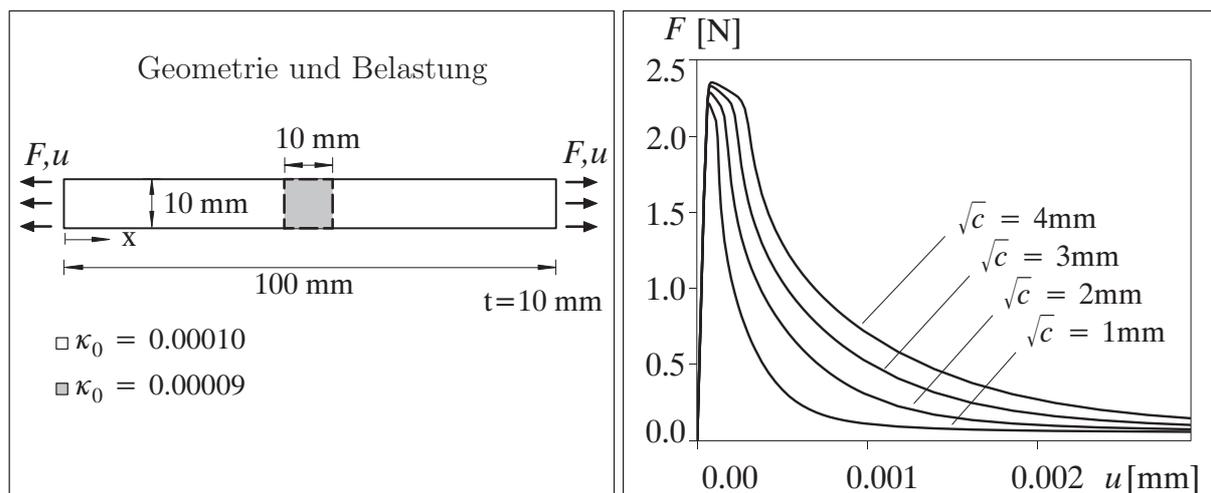
$$\bar{\mathbf{F}}^{dp} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{el}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{I} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{V} \tilde{m}_V + \mathbf{Dev}^T \cdot \tilde{m}_D] \otimes [\tilde{n}_V K^{mic} \mathbf{V} + \tilde{n}_D \cdot 2G^{mic} \mathbf{Dev}]}{\tilde{n}_V K^{mic} \tilde{m}_V + \tilde{n}_D \cdot 2G^{mic} \tilde{m}_D - \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}} \cdot \mathbf{H}^{mic} \cdot \frac{\partial \Phi^{mic*}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{mic}}} d\Omega \quad (6.29)$$

Obwohl das Modell basierend auf den totalen nichtlokalen Verzerrungskomponenten nach *Pamin & de Borst* [180] einen besseren physikalischen Hintergrund besitzen soll, gibt es keinen triftigen Grund, dass das Modell basierend auf den elastischen nichtlokalen Verzerrungskomponenten nicht weiter verfolgt und somit verworfen werden sollte. Deshalb werden im folgenden Abschnitt Untersuchungen zur Netzunabhängigkeit der Lösung für beide Modelle vorgestellt.

Abschließend sei noch bemerkt, dass aus der Annahme von  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{0}$  die Gleichheit der lokalen und nichtlokalen Verzerrungen folgt und die lokale Microplane Schädigungsformulierung gekoppelt mit Plastizität, entsprechend Abschnitt 5.4, als Sonderfall in den beiden vorgestellten gradientenerweiterten Formulierungen enthalten ist. Des Weiteren beinhaltet die hier beschriebene gradientenerweiterte Microplane Formulierung das von *Kuhl* [123] vorgestellte reine gradientenerweiterte Microplane Schädigungsmodell als Sonderfall.

### 6.3.3 Numerische Beispiele

Die Wirkungsweise und die Qualität der gewählten Regularisierungsstrategie für das Microplane Schädigungsmodell gekoppelt mit Plastizität, nämlich eine Gradientenerweiterung der Schädigungsformulierung, wird anhand von zwei numerischen Beispielen näher untersucht.

Abbildung 6.1: Modellproblem Zugstab und Einfluss der internen Länge  $c$ 

### Modellproblem: Zugstab

Zur Veranschaulichung der Netzunabhängigkeit des Nachbruchverhaltens wird an dieser Stelle das Modellproblem eines 100 mm langen Zugstabes mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$  vorgestellt. Die Geometrie des Zugstabes ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Zur Initiierung eines Lokalisierungsprozesses wird in der Mitte des Zugstabes auf einer Breite von 10 mm eine materielle Imperfektion eingeführt. In dieser Zone wurde der Schädigungsschwellwert  $\gamma_0^{mic}$  um 10 % reduziert. Das Konstitutivverhalten wird in Anlehnung an die lokale Microplane Materialformulierung der beiden Modellprobleme aus Abschnitt 5.4 formuliert. Die Fließfunktion und das Verfestigungsverhalten werden durch die Gleichungen (5.129) und (5.130) bestimmt. Die entsprechenden Materialparameter wurden zu  $\sigma_0^{mic} = 0.2 \text{ N/mm}^2$  und  $H = E = 20000 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Wie schon erwähnt, wird im Folgenden zwischen einer gradientenerweiterten Schädigungsformulierung, basierend auf den totalen nichtlokalen Microplane Verzerrungen, und einer Formulierung in Abhängigkeit der elastischen nichtlokalen Microplane Verzerrungen unterschieden. Die äquivalenten Verzerrungen werden in Analogie zur lokalen Formulierung durch die Gleichungen (5.133) und (5.134) wiedergegeben. Allerdings müssen in diesen Gleichungen die lokalen durch die nichtlokalen Microplane Verzerrungen ersetzt werden, wodurch sich die beiden nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V, \bar{\epsilon}_D)$  und  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$  bestimmen lassen. Außerdem wird eine exponentielle Schädigungsentwicklung nach Gleichung (5.77) mit den Parametern  $\beta^{mic} = 100$ ,  $\alpha^{mic} = 0.96$  und  $\gamma_0^{mic} = 0.0001$  gewählt. Die beiden Parameter  $\sigma_0^{mic}$  und  $\gamma_0^{mic}$  wurden so gewählt, dass plastisches Fließen kurz nach dem Beginn der Schädigung des Materials einsetzt.

Der Einfluss des Gradientenparameters  $c$  für eine Diskretisierung des Zugstabes mit 80 Elementen ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die ermittelten Last-Verschiebungsdiagramme verdeutlichen, dass mit zunehmendem Gradientenparameter die Traglast und die Duktilität der Materialantwort zunehmen. Die Schädigung erstreckt sich mit zunehmendem Gradientenparameter über eine größere Breite, was wiederum mit einer höheren Energie-dissipation verbunden ist.

In Abbildung 6.2 sind die Materialantworten der beiden Formulierung mit einem Gradientenparameter von  $\sqrt{c} = 2 \text{ mm}$  für unterschiedlich feine Diskretisierungen gegenübergestellt. Bei beiden Formulierung sind die ermittelten Last-Verschiebungskurven mit

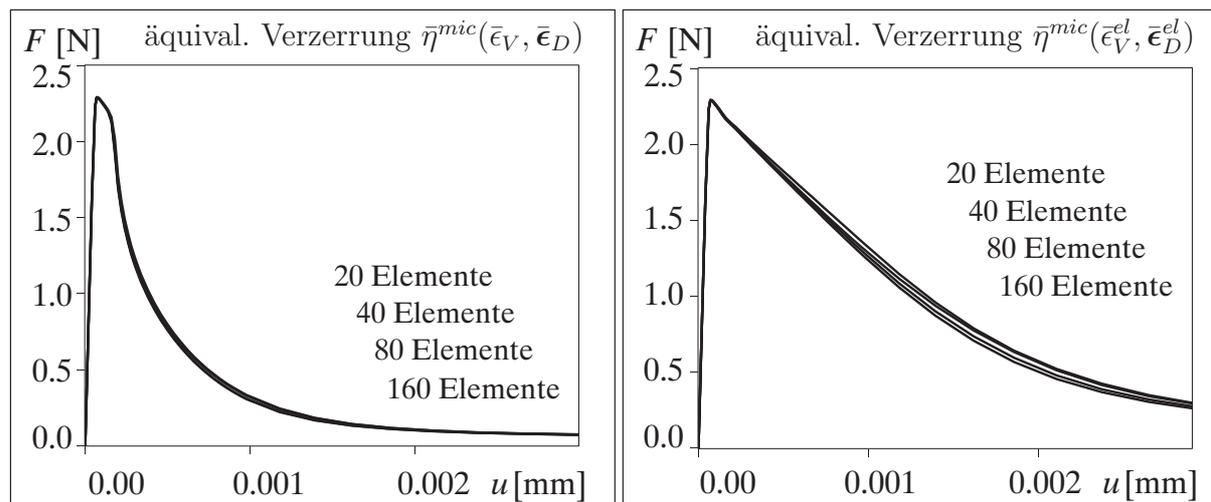


Abbildung 6.2: Netzunabhängigkeit der Lösungen für  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V, \bar{\epsilon}_D)$  und  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$

20, 40, 80 und 160 Elementen nahezu identisch. Die verwendeten Modelle liefern somit netzunabhängige Lösungen sowie eine von der Diskretisierung unabhängige konstante Energiedissipation. Dies ist auf die regularisierende Wirkung der Gradientenerweiterung zurückzuführen. Wie bei den lokalen Formulierungen zeichnet sich die Materialantwort basierend auf  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$  im Vergleich zu  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V, \bar{\epsilon}_D)$  durch eine höhere Duktilität aus, die aus dem langsameren Anwachsen der elastischen Verzerrungen und somit der Schädigung folgt. Der Vergleich der Schädigungsevolutionen der beiden Modelle bei einer Diskretisierung mit 80 Elementen in Abbildung 6.3 unterstreicht diese Beobachtung. Bis zum Einsetzen des plastischen Fließens sind die Schädigungsevolutionen identisch. Das erstmalige Überschreiten der Fließgrenze ist in Abbildung 6.3 durch die graue Kurve gekennzeichnet. Nach Einsetzen des plastischen Fließens entwickelt sich die Schädigung bei  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$  langsamer. Abbildung 6.3 zeigt weiterhin, dass sich die Schädigung über eine Zone mit endlicher Breite erstreckt. Diese Zone ist größer als die Elementbreite der gewählten Diskretisierung und größer als die Zone der materiellen Imperfektion. Die vorgestellten

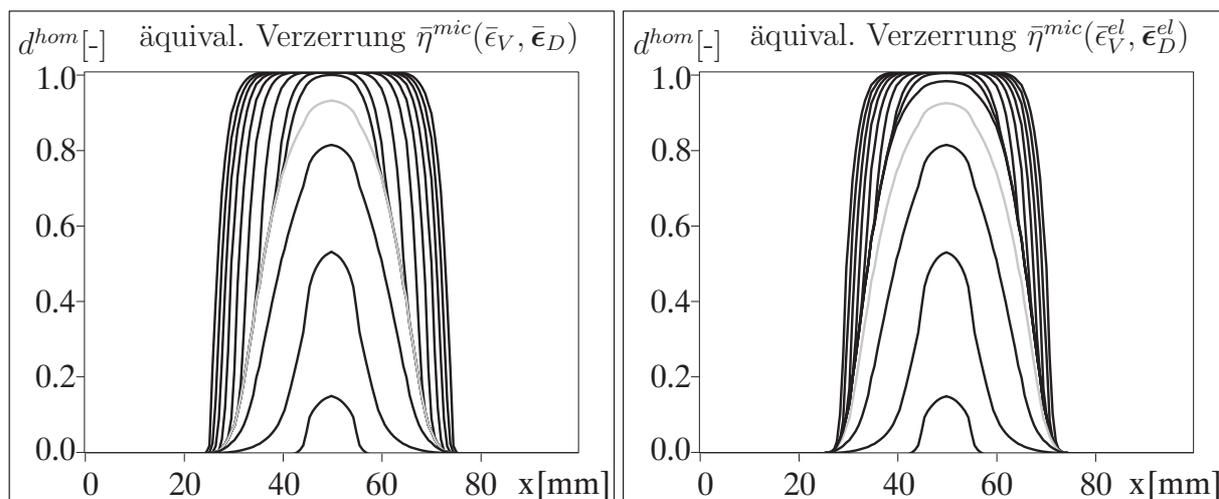


Abbildung 6.3: Evolution der Schädigungsvariablen für  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V, \bar{\epsilon}_D)$  und  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$

Modelle sind somit in der Lage eine Lokalisierungszone mit einer von der Diskretisierung unabhängigen, endlichen Breite darzustellen.

### Gekerbter Biegezugbalken

Als zweites numerisches Beispiel wird die Materialantwort eines Biegezugbalkens für verschiedene Diskretisierungen untersucht. Die Geometrie und die Materialdaten des Balkens können der Abbildung 6.4 entnommen werden. Vereinfachend sind die Lager bzw. die Last als Einzellager bzw. Knotenkraft dargestellt, obwohl es sich dabei um eine mathematisch unzulässige Modellierung handelt. Im Unterschied zur gradientenerweiterten Materialformulierung des Zugstabes wird für dieses Beispiel eine äquivalente Verzerrung des modifizierten von Mises Typs (5.81) verwendet. Diese äquivalente Verzerrung  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$  wird zudem in Abhängigkeit der elastischen nichtlokalen Microplane Verzerrungen formuliert. Die im Folgenden getroffenen Aussagen gelten dabei in gleicher Weise für eine Formulierung, die auf den totalen nichtlokalen Verzerrungen basiert.

Aufgrund der Symmetriebedingungen wurden die numerischen Berechnungen am halben System unter Verwendung von achtknotigen Elementen mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen und linearen Ansätzen für die nichtlokalen Verzerrungen durchgeführt. Das halbe System wird jeweils mit 139, 358 und 656 Elementen, d. h. mit 1576, 4052 bzw. 7284 Freiheitsgraden, diskretisiert. Um eine Lokalisierungszone auszulösen wird diesmal eine geometrische Imperfektion in Form einer Kerbe mit den Abmessungen  $2.5 \times 10 \text{ mm}^2$  eingeführt. Die resultierenden Last–Verschiebungskurven sind einander in Abbildung 6.4 gegenübergestellt. Während die grobe Diskretisierung geringe Abweichungen liefert, sind die Antworten der beiden feinen Diskretisierungen nahezu deckungsgleich. Dies wird durch die etwas größere Schädigungszone bei der groben Diskretisierung und der damit verbundenen höheren Energiedissipation bestätigt, vergleiche hierzu Abbildung 6.5. Bei allen Diskretisierungen nimmt die Schädigungszone eine Breite ein, die größer ist als die jeweilige Elementbreite. Die Darstellung der Plastizität in Abbildung 6.5 bei einer Vertikalverschiebung in Balkenmitte von  $u = 0.25 \text{ mm}$  erfolgt in Analogie zur Integralbeziehung (5.82) der Schädigung über einen homogenisierten plastischen Multiplikator  $\lambda^{hom}$ .

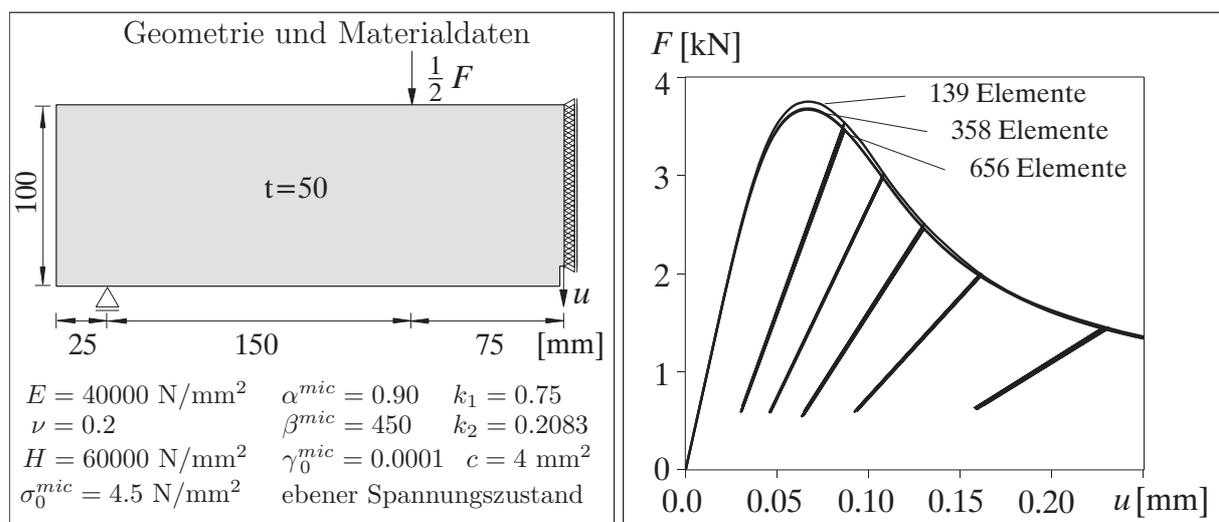


Abbildung 6.4: Gekerbter Biegezugbalken – Einfluss der Diskretisierung

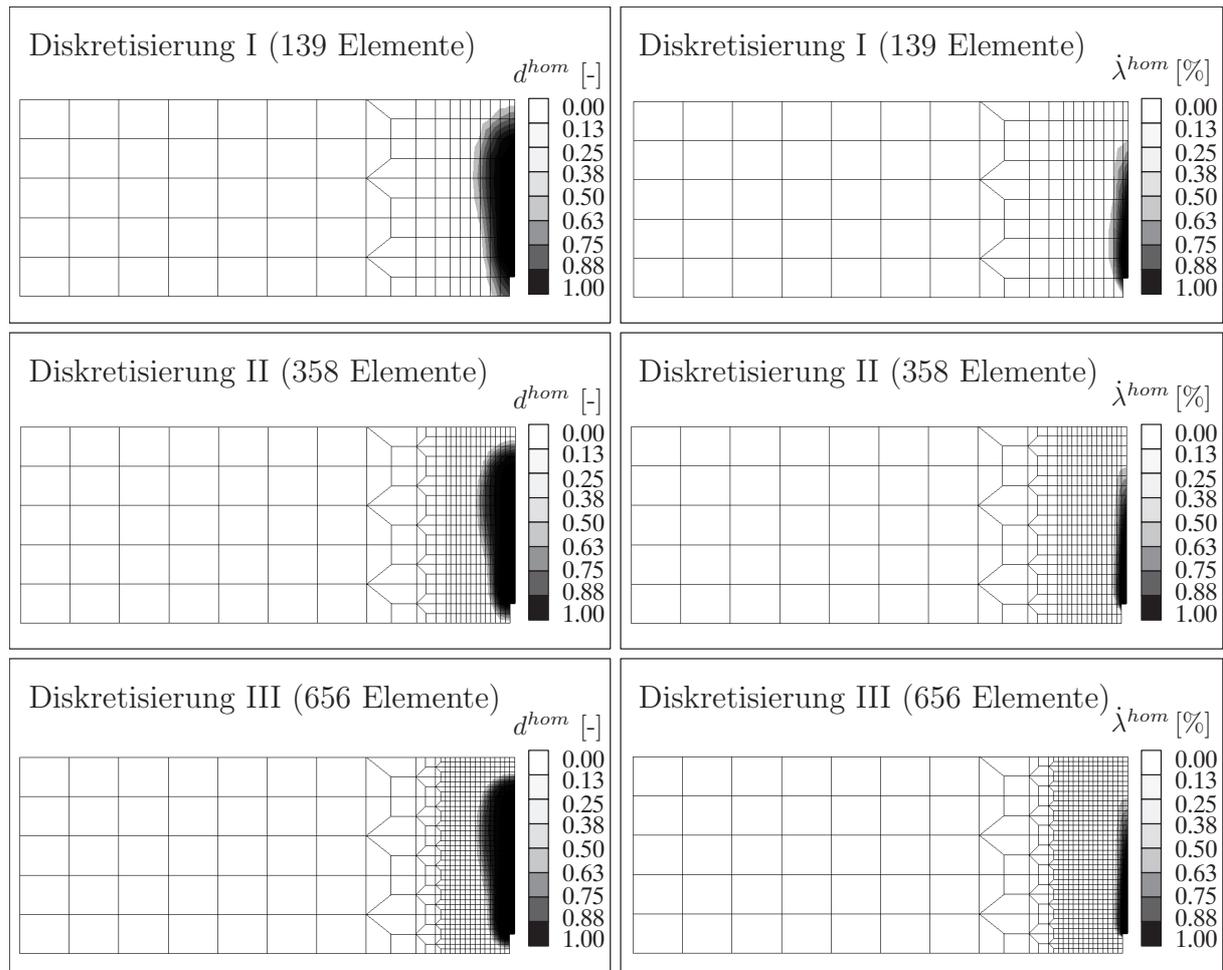


Abbildung 6.5: Verteilung der Schädigungsvariablen und des plastischen Multiplikators

Im Vergleich zur Schädigungsverteilung tritt das plastische Fließen in einem kleineren Bereich des Balkens auf.

Die beiden Beispiele haben gezeigt, dass die vorgestellten Modelle bei einer hinreichend feinen Diskretisierung netzunabhängige Lösungen liefern. Des Weiteren konvergieren die dissipierte Energie und die Breite der Lokalisierungszone bei Netzverfeinerung gegen einen von der Diskretisierung und somit von der Elementgröße unabhängigen konstanten Wert.



# Kapitel 7

## Mikro–Makro Übergänge

Die existierenden Microplane Modelle gründen auf der Formulierung phänomenologischer Materialgesetze (in der Regel basierend auf dem V–D–T Split), deren Parameter mittels inverser Überlegungen an Experimente angepasst werden. Dadurch haftet dem Microplane Konzept der Ruf eines heuristischen Verfahrens an. Das vorliegende Kapitel befasst sich damit, das Microplane Modell mechanisch weiter abzusichern und durch sorgfältige Betrachtung der Mikro–Makro Übergänge seine Eignung festzustellen, richtungsorientiertes Versagen auf den Mikroebenen in ein realistisches makroskopisches Modell zu überführen. Die Wahl der Konstitutivgesetze auf den Mikroebenen soll auf eine bessere rationale Basis gestellt werden. Dabei stehen die formelmäßigen Mikro–Makro Übergänge im Vordergrund. Mit anderen Worten: Diese inversen Fragestellungen sollen nicht nur dem reinen *Curve-Fitting* überlassen werden.

Die Microplane Theorie stellt grundsätzlich eine allgemeine Methode zur Beschreibung des anisotropen Materialverhaltens einer Vielzahl verschiedener Werkstoffe dar. Als Minimalanforderung sollte dieser allgemeingültige anisotrope Ansatz, wie übrigens jedes komplexe Materialmodell, wenigstens in der Lage sein, einfaches Materialverhalten wiederzugeben, welches beispielsweise mit hinreichend verifizierten makroskopischen Materialmodellen basierend auf der klassischen Kontinuumsschädigungsmechanik oder der Plastizitätstheorie modelliert werden kann. Ist dies gewährleistet, so ist eine mechanisch sinnvolle Verallgemeinerung des Microplane Konzeptes auf komplexeres Materialverhalten durchführbar. Erste Anstrengungen in diese Richtung wurden von *Kuhl, Ramm & Willam* [131] und *Brocca & Bazant* [39] im Kontext der Microplane Plastizität unternommen. Beispielsweise stellten *Kuhl, Ramm & Willam* [131] eine Methodik vor, die es ermöglichte eine spezifische Microplane Plastizitätsformulierung, basierend auf dem V–D–T Split, mit einer makroskopischen Zwei-Invarianten Plastizitätsformulierung nach *Drucker & Prager* [80] zu vergleichen. Somit konnten die erforderlichen Microplane Parameter anhand der Zug- und Druckfestigkeit des Materials bestimmt werden. Allerdings wurde dieser Mikro–Makro Übergang zwischen den Formulierungen nur durch weitere Annahmen, wie der Vernachlässigung der deviatorischen Komponente im V–D–T Modell, ermöglicht. Der V–D Split besitzt aufgrund der eindeutigen Charakterisierung der volumetrischen und deviatorischen Eigenschaften auf der Mikroebene beim Mikro–Makro Übergang gewisse Vorteile gegenüber dem V–D–T Split. Deshalb wird an dieser Stelle hauptsächlich auf Microplane Modelle zurückgegriffen, die auf dem V–D Split basieren.

Das Hauptziel dieses Kapitels ist dementsprechend eine physikalisch sinnvolle Interpretation der Microplane Stoffgesetze mittels anerkannter makroskopischer Materialmodelle und eine anschließende Identifikation der erforderlichen Microplane Materialparameter in Abhängigkeit makroskopisch messbarer Materialkennwerte. Im Folgenden werden für verschiedene inelastische Materialbeschreibungen, wie beispielsweise Microplane Schädigung, Microplane Plastizität und deren Kopplung, Konzepte vorgestellt, die einen systema-

tischen Vergleich mit gängigen, invarianten–basierten makroskopischen Materialmodellen ermöglichen. Aber zuvor wird noch einmal kurz auf die Beschreibung elastischen Materialverhaltens im Rahmen der Microplane Theorie eingegangen.

## 7.1 Elastizität

### 7.1.1 Isotrope Elastizität

Die Identifikation der erforderlichen Microplane Parameter kann für den hier betrachteten Fall der linearen isotropen Elastizität analytisch erfolgen. Dies wurde bereits in Abschnitt 5.1.1 für die verschiedenen Splits durchgeführt. Da in den folgenden Abschnitten die Identifikation der Microplane Parameter für inelastische Materialmodelle hauptsächlich auf dem V–D Split basieren, werden an dieser Stelle die Bestimmungsgleichungen der Microplane Elastizitätsparameter für den V–D Split noch einmal angegeben.

$$\mathcal{E}_V = K^{mic} = 3 K^{mac} \quad \mathcal{E}_D = 2 G^{mic} = 2 G^{mac} \quad (7.1)$$

### 7.1.2 Transversal–isotrope Elastizität

In diesem Abschnitt soll die Eignung des Microplane Konzeptes zur Modellierung des transversal–isotropen elastischen Materialverhaltens untersucht werden. Transversal–isotrope Materialien werden dadurch charakterisiert, dass die Materialeigenschaften eine ausgezeichnete Richtung  $\mathbf{a}$  besitzen und senkrecht dazu eine Isotropieebene aufspannen. Deshalb existieren bei diesen Materialien drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen. Diese Orthogonalität sollte sich dementsprechend auch auf der Mikroebene widerspiegeln, d. h. in der Wahl der jeweiligen Microplane Verzerrungs- und Spannungskomponenten. Da beim N–T Split die normalen und tangentialen Komponenten senkrecht aufeinander stehen, ist dieser Ansatz besonders dazu geeignet, transversal–isotropes elastisches Materialverhalten zu beschreiben. Deshalb wird im Folgenden auf den N–T Ansatz zurückgegriffen, vergleiche hierzu *Avci* [9] und *Müller* [167]. Auf die Beschreibung der makroskopischen, transversal–isotropen elastischen Materialformulierung soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden, vergleiche beispielsweise *Altenbach, Altenbach & Rikards* [4].

Grundlage zur Modellierung transversal–isotroper Elastizität mit dem Microplane Konzept bildet das in Abschnitt 5.1.2 beschriebene Vorgehen, welches auf den Ideen von *Prat & Gens* [193] basiert. Dabei werden die elastischen Microplane Stoffgesetze in Abhängigkeit der Richtung definiert. Die erforderlichen Microplane Elastizitätskoeffizienten werden als Funktion der Normalen der jeweiligen Mikroebene formuliert, so dass  $\mathcal{E}_N(\mathbf{n})$  und  $\mathcal{E}_T(\mathbf{n})$ . Dadurch ergibt sich folgende Mikro–Makro Beziehung für den Materialtensor.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}^{mic} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_N(\mathbf{n}) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathcal{E}_T(\mathbf{n}) \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (7.2)$$

Um einen Anhaltspunkt über die zur Beschreibung des transversal–isotropen elastischen Materialverhaltens erforderliche räumliche Verteilung der Microplane Elastizitätskoeffizienten zu erhalten, wird der transversal–isotrope Materialtensor der makroskopischen Formulierung  $\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}^{mac}$  mittels folgender Projektionsvorschrift auf die einzelnen Mikroebenen

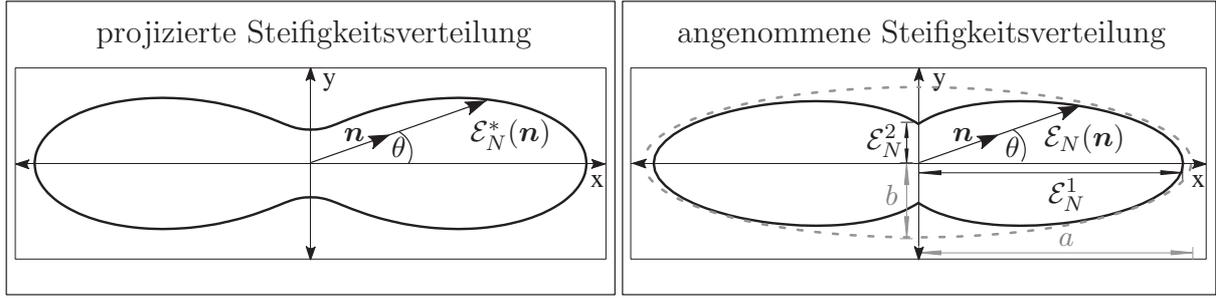


Abbildung 7.1: Steifigkeitsverteilungen

projiziert.

$$\mathcal{E}_N^*(\mathbf{n}) = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}^{mac} : \mathbf{N} \quad (7.3)$$

Charakteristisch für einen transversal-isotropen Werkstoff ist die Invarianz der Materialeigenschaften gegenüber einer Rotation um die ausgezeichnete Richtung  $\mathbf{a}$ . Diese Eigenschaft soll im Folgenden ausgenutzt und auf eine detaillierte Beschreibung der Isotropieebene verzichtet werden, so dass nur die ausgezeichnete Richtung und eine dazu senkrechte Richtung betrachtet werden. Damit ergibt sich aus der Projektionsvorschrift (7.3) die in Abbildung 7.1, links, dargestellte projizierte räumliche Steifigkeitsverteilung  $\mathcal{E}_N^*(\mathbf{n})$  eines transversal-isotropen Materials.

Diese projizierte Steifigkeitsverteilung lässt sich geometrisch mittels einer eingeschnürten Ellipse approximieren. Analytisch kann diese eingeschnürte Ellipse durch Subtraktion einer Kreisgleichung von einer Ellipsengleichung beschrieben werden. In Abbildung 7.1, rechts, ist die Ellipse mit den beiden Achsenabschnitten  $a$  und  $b$  grau gestrichelt dargestellt. Die aus der eingeschnürten Ellipse resultierende Steifigkeitsverteilung lässt sich mathematisch durch folgende Gleichung gewinnen.

$$\mathcal{E}_{N,T}(\mathbf{n}) = \frac{a_{N,T} \cdot b_{N,T}}{\sqrt{(b_{N,T}^2 - a_{N,T}^2) \cos^2 \theta + a_{N,T}^2}} - \frac{2}{5} b_{N,T} \quad (7.4)$$

Somit ergeben sich die Microplane Steifigkeiten  $\mathcal{E}_{N,T}(\mathbf{n})$  der jeweiligen Mikroebene, die über den Winkel  $\theta$  zwischen dem Normalenvektor und der ausgezeichneten Richtung charakterisiert wird, in Abhängigkeit der beiden Achsenabschnitte  $a_{N,T}$  und  $b_{N,T}$  der Ellipse. Weitere geometrische Beschreibungsmöglichkeiten einer eingeschnürten Ellipse finden sich in Avci [9].

Die Integration über den Raumwinkel im Rahmen einer Microplane Formulierung wird in der Regel numerisch durchgeführt. Die Integralbeziehung (7.2) wird dabei durch folgende diskrete Summe ersetzt.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}^{mic} \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} [\mathcal{E}_N^I(\mathbf{n}^I) \mathbf{N}^I \otimes \mathbf{N}^I + \mathcal{E}_T^I(\mathbf{n}^I) \mathbf{T}^{T,I} \cdot \mathbf{T}^I] w^I \quad (7.5)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.4 erwähnt, wird im Folgenden auf eine Integrationsvorschrift mit orthogonaler Symmetrie zurückgegriffen, da diese die bei transversal-isotropen Materialien auftretenden Materialsymmetrien am besten wiedergeben kann. Eine entsprechende Integrationsvorschrift mit  $n_{mp} = 42$  Mikroebenen ist in Anhang C, Tabelle C.2 zusammengestellt. Die genaue Lage der Mikroebenen ist auf der rechten Seite in Abbildung C.1 dargestellt. Da die ausgezeichnete Richtung des Materials bzw. die Richtung

senkrecht dazu mit der Richtung der diskreten Mikroebene mit der Nummer 1 bzw. mit der Nummer 2 übereinstimmt, lässt sich die Form der eingeschnürten Ellipse anstatt über die beiden Achsenabschnitte  $a_{N,T}$  und  $b_{N,T}$  der Ellipse direkt über die Steifigkeiten der Ebenen mit der Nummer 1 ( $\mathcal{E}_{N,T}^1$ ) und 2 ( $\mathcal{E}_{N,T}^2$ ) bestimmen. Das bedeutet: Die vorgestellte Microplane Formulierung besitzt anstatt zwei im linearen isotropen Fall nun vier Materialkennwerte, die letztendlich die Form der räumlichen Steifigkeitsverteilung und damit auch die Steifigkeiten auf den einzelnen Mikroebenen charakterisiert.

### Beispiel: Homogener Zugversuch

Am Beispiel des homogenen Zugversuches sollen die Materialantworten der vorgestellten transversal–isotropen elastischen Microplane Formulierung mit denen des entsprechenden makroskopischen Modells verglichen werden. Die Belastung, die Lagerung, die Geometrie und die verwendeten Materialparameter des untersuchten Würfels sind Abbildung 7.2 zu entnehmen. Der Winkel  $\varphi$  zwischen der ausgezeichneten Richtung  $\mathbf{a}$  und der globalen x-Achse, die der Belastungsrichtung entspricht, wird dabei in der x-y Ebene sukzessive von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  erhöht. Dies entspricht einer schrittweisen Rotation der Faserrichtung des Materials. Die resultierenden horizontalen Verschiebungen des Punktes 3 ( $\delta_{h3}$ ) und die vertikalen Verschiebungen der Punkte 3, 4 und 7 ( $\delta_{v3}$ ,  $\delta_{v4}$  und  $\delta_{v7}$ ) in Abhängigkeit des jeweiligen diskreten Winkels  $\varphi$  sind in Abbildung 7.3 zusammengestellt. Die Antworten des klassischen makroskopischen Modells und der Microplane Formulierung weisen eine bemerkenswerte Übereinstimmung auf. Beide Modelle liefern die für transversal–isotrope Materialien typischen Verschiebungsverläufe. Die Verschiebungsverläufe  $\delta_{h3}$  und  $\delta_{v4}$  sind symmetrisch, während sich für die Verschiebungen  $\delta_{v3}$  und  $\delta_{v7}$  antimetrische Verläufe ergeben. Die horizontalen Verschiebungen des Punktes 3 ( $\delta_{h3}$ ) werden erwartungsgemäß bei einem Winkel von  $\varphi = 90^\circ$  zwischen der ausgezeichneten Richtung und der Belastungsrichtung maximal. Dagegen erreichen die horizontalen Verschiebungen ( $\delta_{h3}$ ) ihr Minimum, sobald die ausgezeichnete Richtung mit der Belastungsrichtung übereinstimmt, das bedeutet für  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $\varphi = 180^\circ$ .

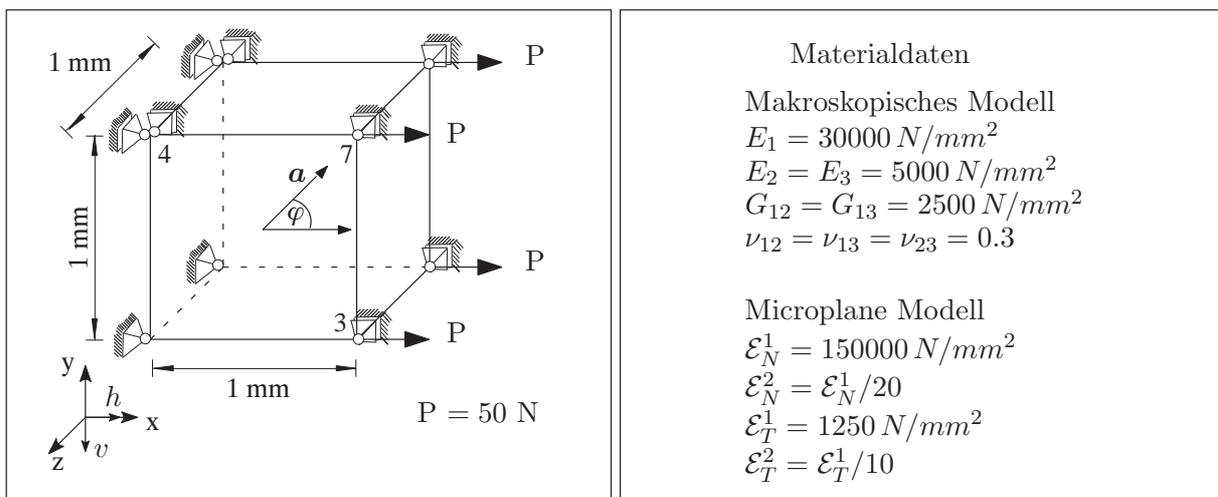


Abbildung 7.2: Homogener Zugversuch – System- und Materialdaten

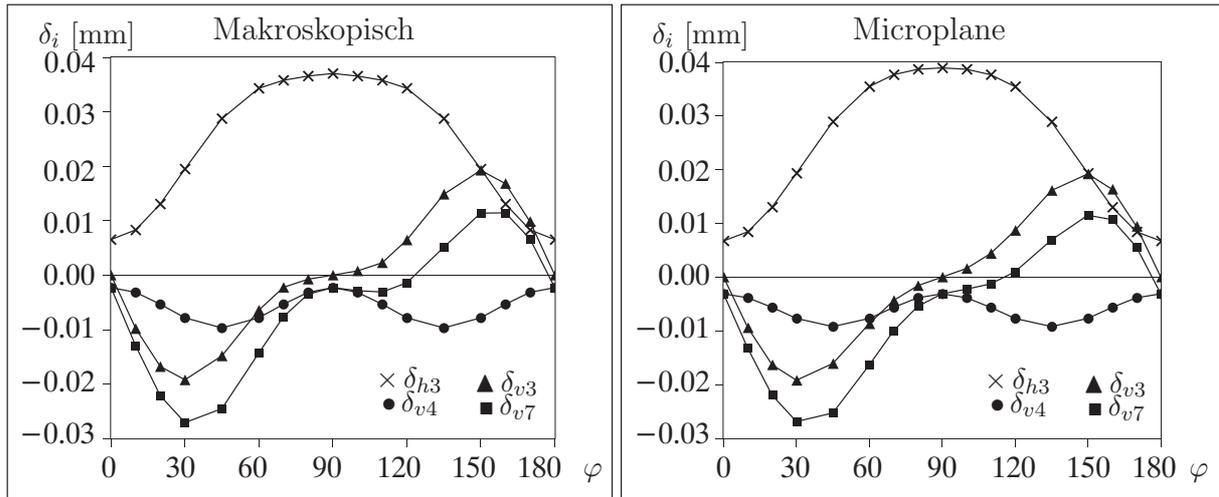


Abbildung 7.3: Verschiebungen bei Variation der Faserrichtung

### Beispiel: Zugprobe mit unsymmetrischem Schichtaufbau

Das Verhalten des transversal-isotropen makroskopischen Modells und der Microplane Formulierung sollen anhand eines Strukturbeispiels näher analysiert werden. Die in Abbildung 7.4 dargestellte zweilagige Flachzugprobe mit unsymmetrischem Schichtaufbau nach *Dorninger* [78] bzw. *Hörmann* [106] besteht aus zwei unidirektionalen Einzelschichten, die sich nur in der Orientierung der Faserrichtung unterscheiden. Da es im Folgenden um den Vergleich der beiden Materialmodelle und nicht um die Leistungsfähigkeit der Elementformulierung geht, werden zur Diskretisierung achtknotige Volumenelemente verwendet, die auf einem reinen Verschiebungsansatz basieren. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird von einer linearen Kinematik in Verbindung mit kleinen Verzerrungen ausgegangen. Somit werden Effekte vernachlässigt, die sich aus einer für dieses Beispiel üblichen geometrisch nichtlinearen Beschreibung ergeben, vergleiche hierzu *Dorninger* [78] und *Hörmann* [106]. Jede Schicht wird mit 1152 achtknotigen Volumenelementen diskretisiert. Die verwendeten Materialparameter entsprechen denen des homogenen Zugversuches, vergleiche

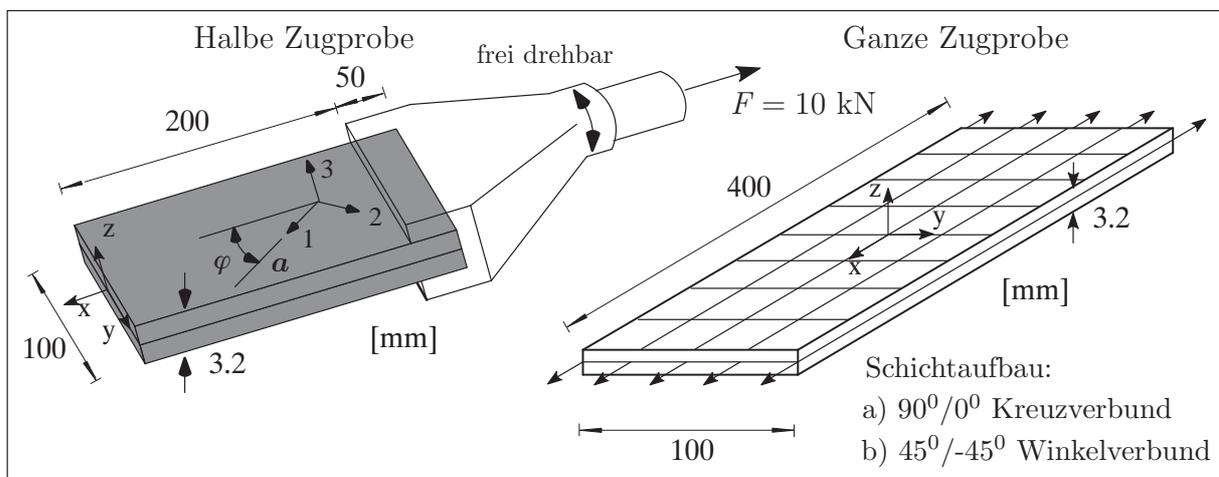


Abbildung 7.4: Zugprobe mit Einspannvorrichtung – Geometrie und Systemdaten

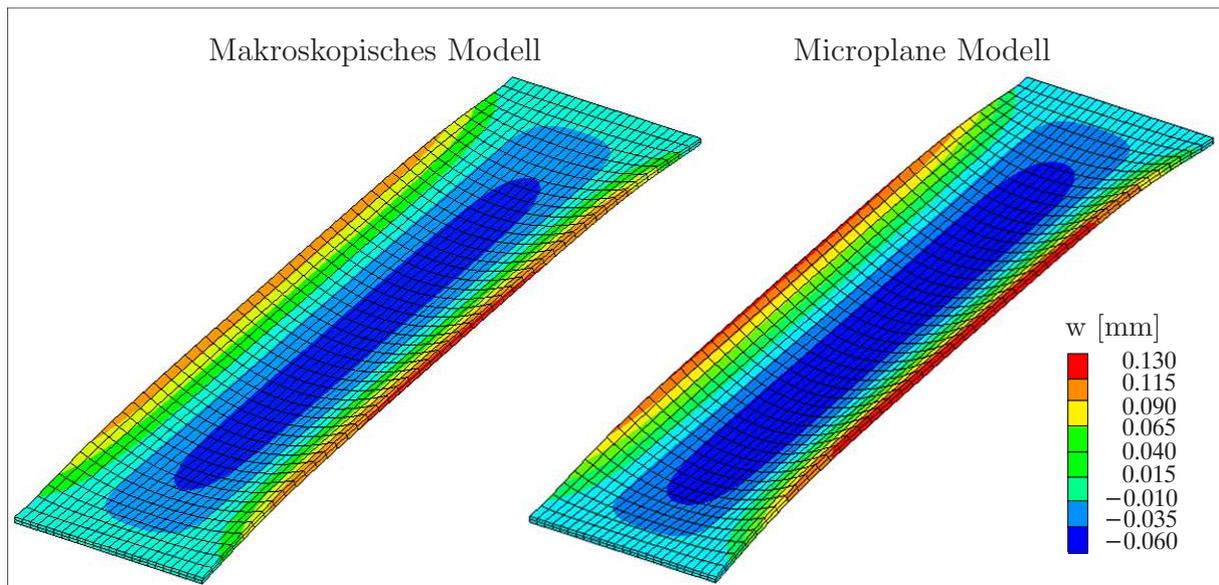


Abbildung 7.5: Deformierte Strukturen bei Kreuzverbund – Biege–Dehn–Kopplung

Abbildung 7.2. Im Folgenden soll zwischen dem Kreuzverbund ( $90^0/0^0$ ) und dem Winkelverbund ( $45^0/-45^0$ ) unterschieden werden.

Die Abbildungen 7.5 und 7.6 zeigen einen Vergleich der nahezu identisch deformierten Strukturen des makroskopischen Modells und der Microplane Formulierung. Deutlich sichtbar sind die infolge des unsymmetrischen Schichtaufbaus entstehenden Kopplungseffekte der unterschiedlichen Deformationsmoden. Trotz reiner Membranbeanspruchung treten sowohl beim makroskopischen Modell als auch bei der Microplane Formulierung Deformationen  $w$  in  $z$ -Richtung auf. Während beim Kreuzverbund der Membranzustand mit einer Biegedeformation gekoppelt ist, tritt beim Winkelverbund eine Kopplung des Membranzustandes mit einer Torsionsverformung auf. Die Auswirkungen des unsymme-

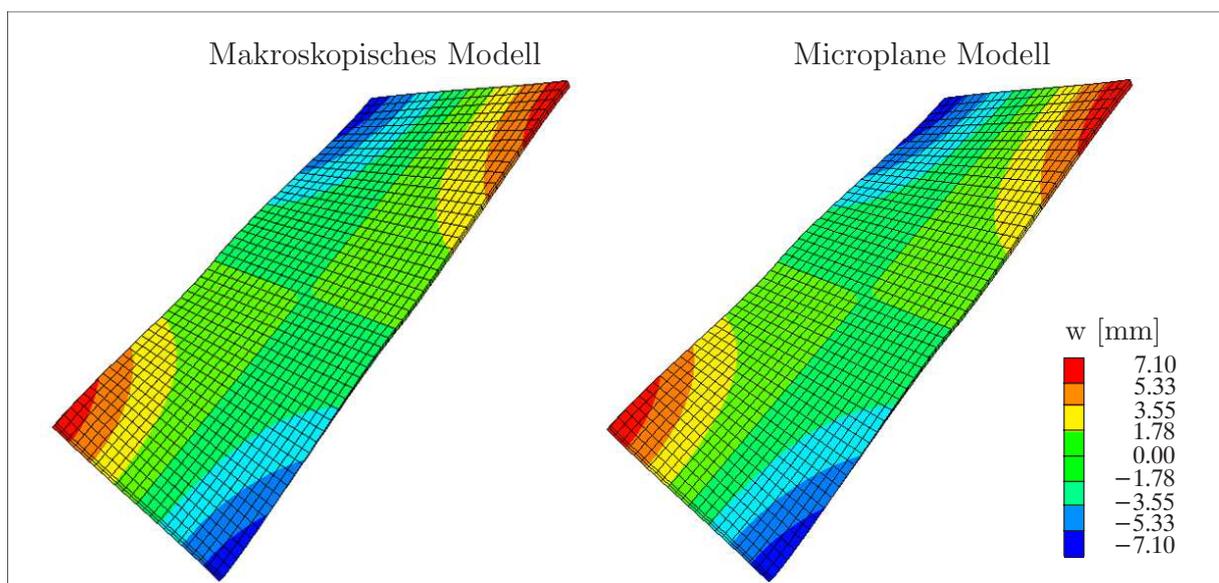


Abbildung 7.6: Deformierte Strukturen bei Winkelverbund – Torsion–Dehn–Kopplung

trischen Schichtaufbaus auf das Deformationsverhalten, die sich in einer Kopplung von Membran- mit Biegezuständen bzw. Torsionszuständen äußern, kann durch die Microplane Formulierung ausreichend genau wiedergegeben werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die beschriebene Microplane Formulierung prinzipiell in der Lage ist, transversal–isotropes elastisches Materialverhalten zu beschreiben. Allerdings sind noch weitere Arbeiten zur Bestimmung der jeweiligen Materialparameter nötig, vergleiche hierzu auch *Avci* [9].

## 7.2 Schädigung

Im folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften von makroskopischen Schädigungsformulierungen mit denen von Microplane Schädigungsmodellen verglichen. Um den Ruf eines heuristischen Verfahrens abzulegen, stellt die physikalisch begründete Wahl der erforderlichen Schädigungsfunktionen auf den einzelnen Mikroebenen, welche im Allgemeinen beliebig gewählt werden können, eine schwierige Aufgabe dar. In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, das es erlaubt, die Schädigungsfunktionen auf den einzelnen Mikroebenen über bekannte makroskopische Schädigungsmodelle abzuleiten, vergleiche hierzu auch *Leukart & Ramm* [144, 145]. Dadurch erhält man mit den gewonnenen Microplane Modellen ähnliche Antworten wie mit den makroskopischen Schädigungsmodellen. Das Microplane Materialverhalten dieser Formulierungen lässt sich dementsprechend besser verstehen und interpretieren.

### 7.2.1 2–Parameter Schädigungsmodell

#### Makroskopische Schädigung

Als Vergleichsmodell auf der Makroebene dient das makroskopische 2–Parameter Schädigungsmodell aus Abschnitt 3.3.1. Der Spannungstensor für dieses Schädigungsmodell lautet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 3 [1 - d_{vol}] K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} + 2 [1 - d_{dev}] G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev}. \quad (7.6)$$

Die Charakterisierung des Schädigungsmodells erfordert die Spezifizierung von zwei Schädigungsbedingungen

$$\Phi_V^{mac} = \phi_V^{mac}(\eta_V^{mac}) - d_{vol} \leq 0 \quad \Phi_D^{mac} = \phi_D^{mac}(\eta_D^{mac}) - d_{dev} \leq 0 \quad (7.7)$$

und somit der äquivalenten Verzerrungen  $\eta_V^{mac}$  und  $\eta_D^{mac}$ . In Anlehnung an *Simo & Ju* [204] erhält man die äquivalenten Verzerrungen aus den Wurzeln der zweifachen volumetrischen und deviatorischen Energiefreisetzungsrate (3.12).

$$\eta_V^{mac} = \sqrt{2Y_V^{mac}} = \sqrt{3 K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} : \boldsymbol{\epsilon}_{vol}} \quad \eta_D^{mac} = \sqrt{2Y_D^{mac}} = \sqrt{2 G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev} : \boldsymbol{\epsilon}_{dev}} \quad (7.8)$$

Die äquivalenten Verzerrungen lassen sich auch in Abhängigkeit der ersten Invariante des Verzerrungstensors und der zweiten Invariante des Verzerrungsdeviators darstellen.

$$\eta_V^{mac} = \sqrt{K^{mac} I_1} \quad \eta_D^{mac} = 2 \sqrt{G^{mac} J_2} \quad (7.9)$$

Unter Berücksichtigung der äquivalenten Verzerrungen (7.8) ergibt sich folgender vierstufige Materialtensor.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tan}^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{sec}^d - \frac{\partial \phi_V^{mac}}{\partial \gamma_V^{mac}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{vol} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{vol}}{\eta_V^{mac} [1 - d_{vol}]^2} - \frac{\partial \phi_D^{mac}}{\partial \gamma_D^{mac}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{dev} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{dev}}{\eta_D^{mac} [1 - d_{dev}]^2} \quad (7.10)$$

### Microplane Schädigung

Um das 2-Parameter Microplane Schädigungsmodell nach Abschnitt 5.2.2 mit obigem isotropen makroskopischen Schädigungsmodell vergleichen zu können, müssen in beiden Modellen die gleichen Annahmen zugrunde gelegt werden. Für diesen Vergleich ist es daher vereinfachend sinnvoll, wenn genauso wie beim makroskopischen Modell von einer isotropen Schädigungsentwicklung auch auf der Mikroebene ausgegangen wird. Das bedeutet: Der Wert der Schädigung auf allen Mikroebenen am betrachteten Materialpunkt ist gleich. Diese Annahme stellt natürlich eine erhebliche Einschränkung für die Allgemeingültigkeit des Microplane Konzepts dar. Allerdings ist diese Einschränkung nur von theoretischer Natur, denn die Annahme einer isotropen Schädigungsverteilung gilt nur für den in diesem Abschnitt durchgeführten Vergleich mit anschließender Identifikation der Microplane Stoffgesetze. Das Microplane Konzept im Allgemeinen bleibt davon unberührt und ist weiterhin eine effiziente Methode zur Beschreibung des anisotropen Materialverhaltens. Das Einsetzen dieser Annahme in Gleichung (5.52) für den Spannungstensor des Microplane Modells führt mit Hilfe der Integrationsvorschriften der Projektionstensoren (4.15) auf folgenden Spannungstensor.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left[ [1 - d_V] \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\Omega + [1 - d_D] \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} d\Omega \right] : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= [1 - d_V] K^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} + 2 [1 - d_D] G^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Wenn man nun unter Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den mikroskopischen und makroskopischen Elastizitätskonstanten (7.1) die Spannungsantworten, d. h. Gleichung (7.6) mit Gleichung (7.11), vergleicht, so müssen die mikroskopischen den makroskopischen Schädigungsvariablen entsprechen,  $d_V = d_{vol}$  und  $d_D = d_{dev}$ . Da die äquivalenten Verzerrungen die treibenden Größen für die Schädigung sind, müssen auch diese gleich sein. Setzt man die Mikro–Makro Invariantenbeziehungen (4.17) und (4.18) in die makroskopischen äquivalenten Verzerrungen (7.9) ein und integriert diese unter der vereinfachenden Annahme von Isotropie, so ergeben sich die folgenden mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen.

$$\begin{aligned} \eta_V^{mic} &= \sqrt{\frac{1}{3} K^{mic} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon_V} &= \sqrt{3 K^{mic} \epsilon_V} &= \sqrt{6 Y_V^{mic}} \\ \eta_D^{mic} &= \sqrt{2 G^{mic} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D d\Omega} &= \sqrt{6 G^{mic} \boldsymbol{\varepsilon}_D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_D} &= \sqrt{6 Y_D^{mic}} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Im Unterschied zum makroskopischen Schädigungsmodell, vergleiche Gleichung (7.8), lassen sich die mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen (7.12) als die Wurzel aus den sechsfachen mikroskopischen Energiefreisetzungsraten (5.42) identifizieren. Es bleibt nochmals anzumerken, dass die getroffene Annahme der Isotropie nur für den Abgleich und die Identifikation der mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen gilt und dementsprechend der Ablauf des Microplane Konzeptes nach Abbildung 4.2 dadurch nicht beeinflusst wird.

Somit ist die Materialantwort, die man mit den gewonnenen äquivalenten Verzerrungen erhält, weiterhin anisotrop. Mit den angepassten mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen ergeben sich annähernd dieselben Spannungsantworten. Der Unterschied zwischen der makroskopischen und der Microplane Formulierung ist auf die anisotrope Schädigungsentwicklung des Microplane Modells zurückzuführen. Diese Anisotropie stammt aus dem sukzessiven Einsetzen der Schädigung auf verschiedenen Mikroebenen. Das bedeutet, dass nur bei einer isotropen Schädigungsverteilung, wie beispielsweise kurz vor dem totalen Materialversagen, die Modelle sich entsprechen.

Letztendlich lässt sich der vierstufige Materialtensor mit den ermittelten mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen (7.12) wie folgt spezifizieren.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tan}^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{sec}^d - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_V^{mic}}{\partial \gamma_V^{mic}} \frac{3 \sigma_V^2}{\eta_V^{mic} [1 - d_V]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \frac{\partial \phi_D^{mic}}{\partial \gamma_D^{mic}} \mathbf{Dev}^T \cdot \frac{3 \boldsymbol{\sigma}_D \otimes \boldsymbol{\sigma}_D}{\eta_D^{mic} [1 - d_D]^2} \cdot \mathbf{Dev} d\Omega \quad (7.13)$$

Der gewonnene vierstufige Materialtensor (7.13) weist eine ähnliche Struktur wie der Materialtensor (7.10) des makroskopischen Schädigungsmodells auf.

### Numerische Beispiele

Abschließend wird die Übereinstimmung der Materialantworten des Microplane Schädigungsmodells basierend auf den angepassten äquivalenten Verzerrungen (7.12) mit dem zugrunde gelegten makroskopischen Schädigungsmodell ohne Verwendung einer Regularisierung anhand verschiedener Modellprobleme illustriert.

- *Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung:*

Zur Verdeutlichung der Qualität der Anpassung der konstitutiven Microplane Gesetze wird wiederum auf die Modellprobleme einaxialer Zug und einfache Scherung eines Einheitswürfels zurückgegriffen. Die Elastizitätskonstanten wurden zu  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.2$  gewählt, so dass sich die entsprechenden Microplane Parameter nach Gleichung (7.1) zu  $K^{mic} = 50000 \text{ N/mm}^2$  und  $G^{mic} = 12500 \text{ N/mm}^2$  ergeben. Zusätzlich erfordert dieses Modell die Angabe einer Bestimmungsgleichung für die volumetrischen und deviatorischen Schädigungsvariablen der Mikro- und Makroebene. Dabei wird von demselben exponentiellen Schädigungsverlauf nach Gleichung (5.77) auf der Mikro- und Makroebene für die volumetrische und deviatorische Schädigung ausgegangen. Der Parameter  $\beta$ , die maximal mögliche Degradation  $\alpha$  und der Schädigungsschwellwert  $\gamma_0$  werden zu  $\beta = 30$ ,  $\alpha = 0.85$  und  $\gamma_0 = 0.01$  gewählt. Da diese Parameter für die volumetrische und deviatorische Schädigung auf der Mikro- und Makroebene gelten, wird auf die entsprechende Indizierung der Parameter verzichtet. Die jeweiligen volumetrischen und deviatorischen Geschichtparameter  $\gamma_V$  und  $\gamma_D$  ergeben sich als die in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Werte der äquivalenten Verzerrungen des Microplane Modells nach Gleichung (7.12) und des makroskopischen Modells nach Gleichung (7.9). Diese äquivalenten Verzerrungen werden in Abhängigkeit der jeweiligen Energiefreisetzungsraten formuliert. Diese können als lokal begrenzte Energien interpretiert werden, die erforderlich sind, um Risse zu initiieren.

Abbildung 7.7 zeigt die resultierenden Last–Verschiebungskurven für die Modellprobleme einaxialer Zug und einfache Scherung. Die durchgezogenen Linien bezeichnen die Antworten des makroskopischen Schädigungsmodells und die gestrichelten Kurven die Antworten der Microplane Schädigungsformulierung. Um die Antworten des makroskopischen mit

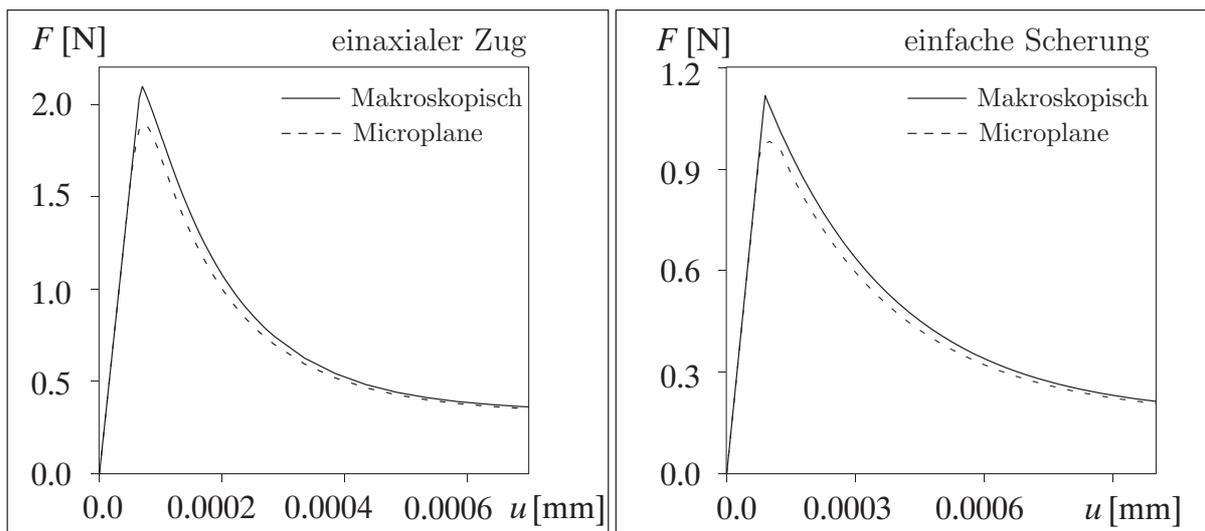


Abbildung 7.7: Vergleich der Last–Verschiebungskurven

denen des Microplane Modells vergleichen zu können, wurden die jeweiligen numerischen Berechnungen mit derselben Lastschrittweite und Anzahl der Lastschritte durchgeführt. Alle ermittelten Last–Verschiebungskurven weisen einen für Reibungsmaterialien typischen Verlauf, mit einem entfestigenden Ast nach Erreichen der Traglast, auf. Somit sind beide Modelle in der Lage Entfestigungseffekte auf der Makroebene wiederzugeben. Über einen Vergleich der Materialantworten des makroskopischen Schädigungsmodells mit denen des Microplane Modells lässt sich feststellen, dass die Kurven des makroskopischen Schädigungsmodells in beiden Modellproblemen durch eine ausgeprägte Traglast mit einem abrupten Übergang in den Entfestigungsbereich gekennzeichnet sind. Im Gegensatz dazu weisen die Antworten des Microplane Modells einen ausgerundeten und damit weichen Übergang in den Entfestigungsbereich auf. Dies ist auf das sukzessive Einsetzen der Schädigung auf den einzelnen Mikroebenen zurückzuführen. Aufgrund des etwas früheren Einsetzens der Schädigung auf diversen Ebenen des Microplane Modells im Vergleich zum makroskopischen Modell, ist die ermittelte Traglast der Microplane Formulierung leicht niedriger. Mit zunehmender Belastung und somit der Schädigung nähern sich die Materialantworten des makroskopischen Modells und der Microplane Formulierung an. Denn in späteren Belastungszuständen befinden sich alle betroffenen Mikroebenen im Schädigungszustand und das Microplane Modell nimmt letztendlich eine nahezu isotrope Schädigungsverteilung an. Trotz dieser geringfügigen Unterschiede verhalten sich beide Modelle sehr ähnlich.

- *Scheibe mit Loch:*

Abschließend wird das Antwortverhalten des makroskopischen Modells und der Microplane Formulierung anhand des Strukturbeispiels Scheibe mit Loch miteinander verglichen. Die Lochscheibe wird unter der Last  $\lambda \bar{p}$  mit  $\bar{p} = 0.1 \text{ N/mm}^2$  gleichförmig in vertikaler Richtung gezogen. Die Geometrie-, System- und Materialdaten sind in Abbildung 7.8 zusammengestellt. Aus Symmetriegründen wurde die Berechnung am Viertelsystem mit 288 achtknotigen Verschiebungselementen durchgeführt. Das Materialverhalten wird durch dieselbe makroskopische bzw. Microplane Schädigungsformulierung beschrieben, welche in den bereits diskutierten Modellproblemen verwendet wurde. Dementsprechend

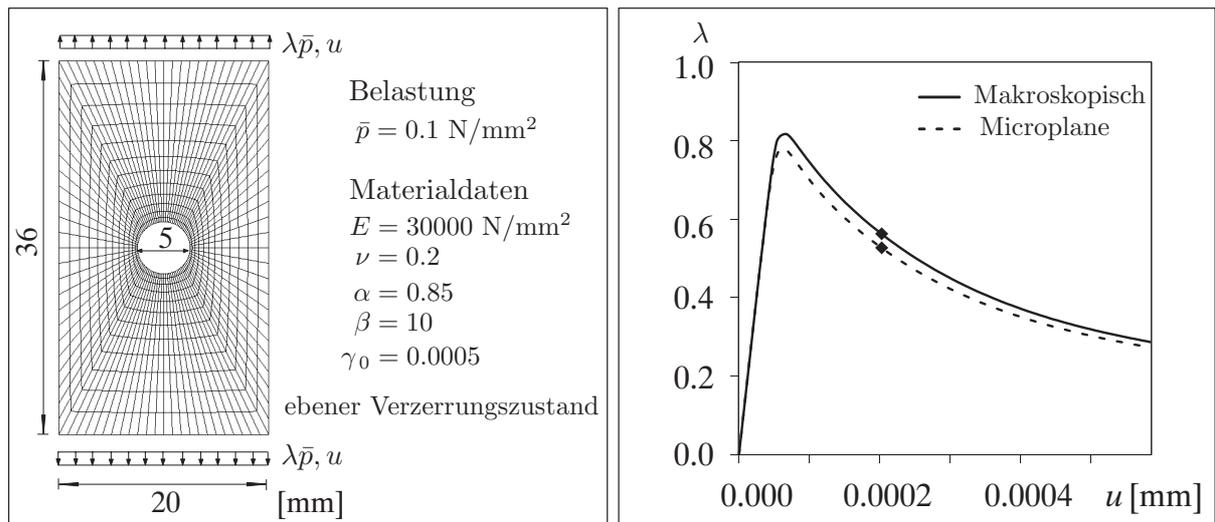


Abbildung 7.8: Systemdaten und Last-Verschiebungskurven

werden für die volumetrische und deviatorische Schädigung auf der Mikro- und Makroebene dieselben Gesetze postuliert. Bei den erforderlichen Materialparametern wurde deswegen wiederum auf die entsprechende Indizierung verzichtet.

Abbildung 7.8 zeigt die Entwicklung der Lastfaktoren, aufgetragen über den vertikalen Verschiebungen des oberen Randes. Wie bei den Modellproblemen repräsentiert die durchgezogene Linie die Antwort des makroskopischen Modells und die gestrichelte Linie die Antwort des Microplane Modells. Auffällig ist das etwas frühere Einsetzen der Schädigung in der Simulation mit dem Microplane Modell. Dies führt dazu, dass die ermittelte Traglast des Microplane Modells niedriger als die der makroskopischen Formulierung ist. Diese Abweichungen sind auf die anisotrope Schädigungsentwicklung und somit auf die frühe Überschreitung des Schädigungsschwellwertes  $\gamma_0$  in einzelnen kritischen Mikroebenen zurückzuführen. Mit zunehmender Schädigung nähern sich die beiden Kurven an, da

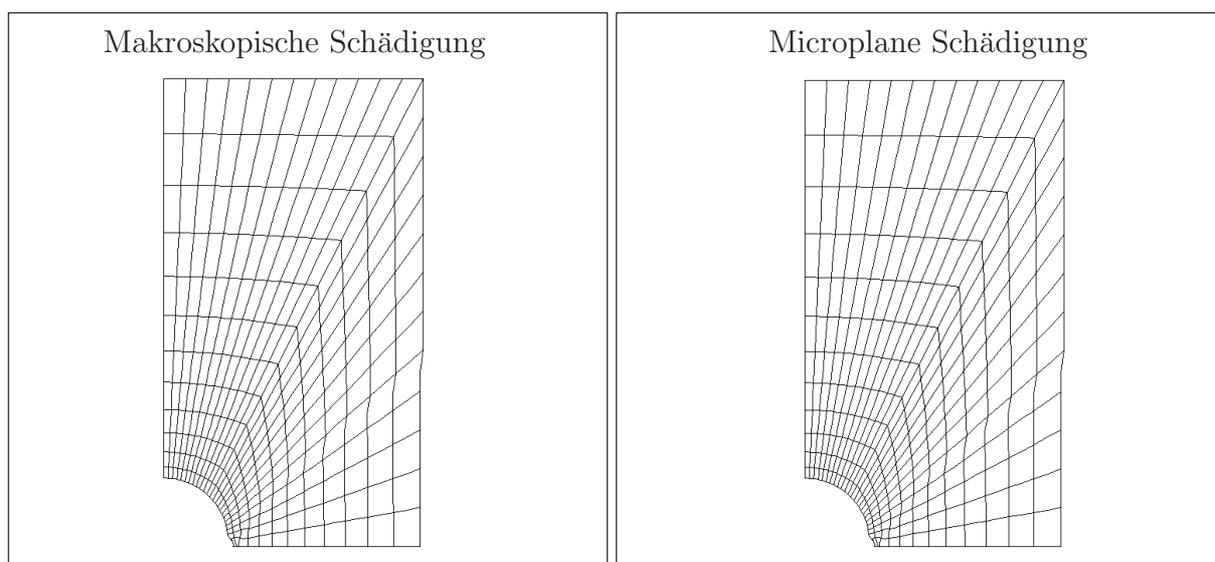


Abbildung 7.9: Defomierete Strukturen

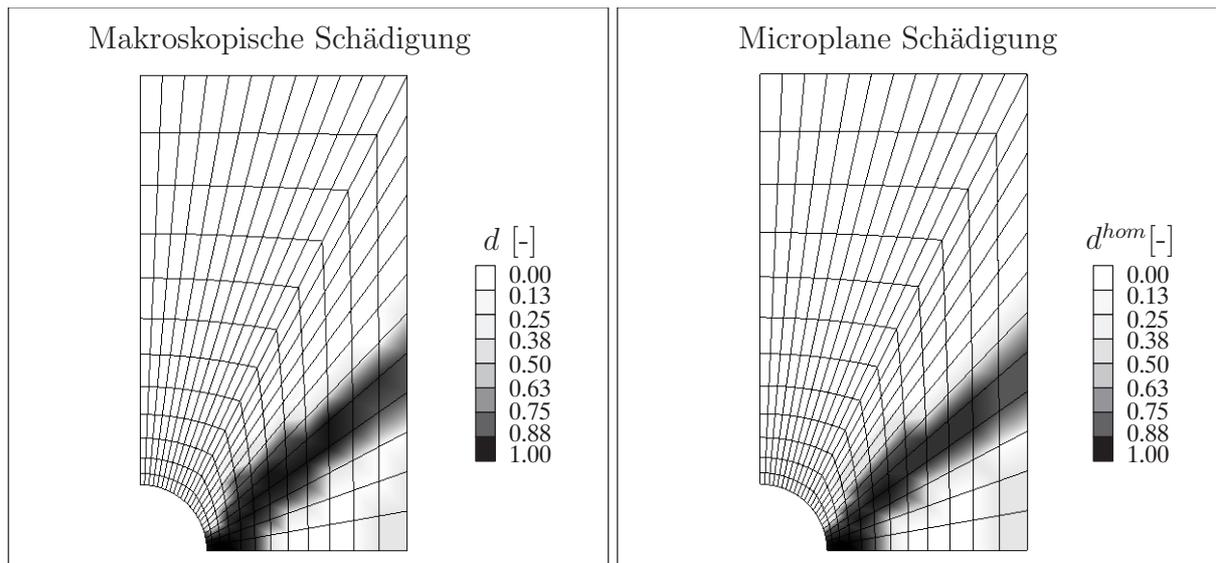


Abbildung 7.10: Makroskopische und Microplane Schädigungsverteilung

sich die Schädigung auf allen Ebenen ausbreitet und sich schließlich auch das Microplane Modell einer isotropen Schädigungsverteilung annähert. Insgesamt wird das Antwortverhalten des makroskopischen Materialmodells jedoch relativ gut durch das Microplane Modell approximiert.

Die nahezu identischen deformierten Strukturen beider Berechnungen bei einer Vertikalverschiebung von  $u = 0.0002$  mm sind in Abbildung 7.9 in 800-facher Überhöhung dargestellt. Abbildung 7.10 zeigt die Schädigungsverteilungen nach Erreichen der Traglast zum selben Belastungszustand, gekennzeichnet durch Markierungen in den Last-Verschiebungsdiagrammen. Es ist deutlich erkennbar, dass das Versagen vom rechten Lochrand ausgeht und sich lokalisierte Schädigungszonen unter einem Winkel von  $45^\circ$  bilden. Diese Scherbänder sind charakteristisch für das Schubversagen der verwendeten Modelle. Wie in Abschnitt 5.2.2 gezeigt wurde, stellt in den verwendeten Modellen die deviatorische Schädigungsentwicklung die treibende Größe für das Gesamttragverhalten dar, vergleiche auch Abbildung 5.4. Deshalb bilden sich die für  $J_2$ -basierte Materialmodelle typischen Scherbänder unter  $45^\circ$ . Die Schädigungsverteilungen der unterschiedlichen Materialformulierungen weisen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit auf.

Das Beispiel Scheibe mit Loch konnte die für die Modellprobleme getroffenen Schlußfolgerungen und somit die Qualität der Anpassung der Schädigungsfläche des Microplane Modells an ein makroskopisches Modell bestätigen. Darüber hinaus ist das Microplane Modell in der Lage, ein anisotropes Materialverhalten zu beschreiben. Das vorgestellte Konzept zum Abgleich der Microplane Schädigungsgesetze wird im folgenden Abschnitt auf komplexere Materialbeschreibungen, die auf dem 1-Parameter Schädigungsmodell basieren, übertragen.

### 7.2.2 1-Parameter Schädigungsmodell

Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Identifikation der gesuchten Microplane Stoffgesetze anhand bekannter makroskopischer 1-Parameter Schädigungsmodelle kurz zusammengefasst. Für eine ausführliche Betrachtung des erforderlichen Mikro–Makro Übergangs

sei auf die Arbeit von *Leukart & Ramm* [145] verwiesen.

### Makroskopische Schädigung

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Microplane Stoffgesetze dient das makroskopische 1-Parameter Schädigungsmodell aus Abschnitt 3.3.1 mit der klassischen Spannungs-Dehnungsbeziehung.

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - d^{mac}] [3 K^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} + 2 G^{mac} \boldsymbol{\epsilon}_{dev}] \quad (7.14)$$

Den Zustand der Schädigung im Material beschreibt die Schädigungsbedingung (3.25). Das Wachstum der Schädigung wird in der klassischen Kontinuumschädigungsmechanik über die äquivalente Verzerrung  $\eta^{mac}$  in Beziehung zur Deformation gesetzt. Nach *Simo & Ju* [204] ergibt sich der skalare Wert der äquivalenten Verzerrung als Wurzel der zweifachen elastisch gespeicherten Energie. Diese lässt sich wiederum in Abhängigkeit der Verzerrungsinvarianten formulieren.

$$\eta_{Simo}^{mac} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt{K^{mac} I_1^2 + 4 G^{mac} J_2} \quad (7.15)$$

Die Wahl nach *Simo & Ju* führt auf symmetrische Materialtensoren (3.27) und die daraus resultierenden Materialformulierungen werden als assoziierte Schädigungsmodelle bezeichnet. Des Weiteren ergeben sich damit symmetrische Schädigungsflächen. Das bedeutet: Ein unterschiedliches Zug-Druck Verhalten kann nicht berücksichtigt werden, vergleiche Anhang B. Dies erscheint für kohäsive Reibungsmaterialien nicht unbedingt realistisch. Denn beispielsweise bei Beton entstehen Risse hauptsächlich unter Zugspannungen. Eine elegante Möglichkeit um unterschiedliches Schädigungsverhalten unter Zug und Druck zu erfassen, stellt die Definition der äquivalenten Verzerrung nach *de Vree, Brekelmans & van Gils* [76], dem so genannten modifizierten von Mises Typ, dar.

$$\eta_{Vree}^{mac} = k_1 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad (7.16)$$

Dies führt auf elliptische Schädigungsflächen, die in den Druckbereich verschoben sind. Durch die Einführung eines Wichtungsparmeter  $k$ , der das Verhältnis von Druck- und Zugfestigkeit wiedergibt, wird die Sensitivität der Schädigung auf Druckbeanspruchungen im Vergleich zu Zugbeanspruchungen gesteuert, vergleiche hierzu Anhang B.

### Microplane Schädigung

Um das im vorigen Abschnitt vorgestellte Konzept zur Identifikation der mikroskopischen äquivalenten Verzerrungen auf das 1-Parameter Modell zu übertragen, werden dieselben Annahmen vorausgesetzt. Das bedeutet, dass der hier durchgeführte Vergleich auf der Annahme einer isotropen Schädigungsverteilung beim Microplane Modell basiert. Wie im vorigen Abschnitt gilt diese Annahme nur für den Identifikationsprozess der Microplane Stoffgesetze und nicht für den normalen Ablauf des Microplane Konzeptes nach Abbildung 4.2. Somit stellt diese Annahme keine Einschränkung für das Microplane Modell zur Simulation anisotroper Schädigung dar. Das Einsetzen dieser Annahme in die Mikro-Makro Beziehung der Spannungen 5.70 liefert folgenden Spannungstensor.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [1 - d^{mic}] \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} K^{mic} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2 G^{mic} \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} d\Omega : \boldsymbol{\epsilon} \\ &= [1 - d^{mic}] [K^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_{vol} + 2 G^{mic} \boldsymbol{\epsilon}_{dev}] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Aus einem Vergleich der resultierenden Spannungsantworten des makroskopischen Modells (7.14) und des isotrop angenommenen Microplane Modells (7.17) folgt dementsprechend die Gleichheit der makroskopischen und mikroskopischen Schädigungsvariablen  $d^{mic} = d^{mac}$ . Dies zieht wiederum die Gleichheit der äquivalenten Verzerrungen, als treibende Größen der Schädigungsvariablen, auf der Mikro- und Makroebene nach sich. Das Einsetzen der Mikro–Makro Invariantenbeziehungen (4.17) und (4.18) in die makroskopische äquivalente Verzerrung nach *Simo & Ju* (7.15) führt auf folgende äquivalente Verzerrung  $\eta_{Simo}^{mic}$  auf der Mikroebene.

$$\begin{aligned}\eta_{Simo}^{mic} &= \sqrt{\frac{1}{3} K^{mic} \left( \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon_V d\Omega \right)^2 + 2 G^{mic} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon_D \cdot \epsilon_D d\Omega} \\ &= \sqrt{3 K^{mic} \epsilon_V^2 + 6 G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D} = \sqrt{6 Y^{mic}}\end{aligned}\quad (7.18)$$

Dabei wurde die Integration über den Raumwinkel unter der Annahme von Isotropie durchgeführt. Die äquivalente Verzerrung des Microplane Modells, basierend auf dem Ansatz von *Simo & Ju* (7.18), ergibt sich als die Wurzel aus der sechsfachen mikroskopischen Energiefreisetzungsrate (5.64).

Wendet man das beschriebene Verfahren auf die Definition der äquivalenten Verzerrung des modifizierten von Mises Typs (7.16) an, so ergibt sich dessen Gegenstück auf der Mikroebene  $\eta_{Vree}^{mic}$ .

$$\eta_{Vree}^{mic} = 3 k_1 \epsilon_V + \sqrt{(3 k_1 \epsilon_V)^2 + \frac{3}{2} k_2 \epsilon_D \cdot \epsilon_D} \quad (7.19)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet zwischen Zug- und Druckkomponenten der Microplane Verzerrungen.

Mit den beiden aus den makroskopischen Ansätzen von *Simo & Ju* und *de Vree* abgeleiteten äquivalenten Verzerrungen auf der Mikroebene  $\eta_{Simo}^{mic}$  und  $\eta_{Vree}^{mic}$ , lassen sich annähernd dieselben Materialantworten wie mit den gängigen makroskopischen Schädigungsformulierungen gewinnen. Wie beim 2–Parameter Schädigungsmodell ergibt sich der Unterschied zwischen den makroskopischen und den Microplane Formulierungen aus der anisotropen Schädigungsentwicklung des Microplane Modells.

	MAKROEBENE $\eta^{mac}$	MIKROEBENE $\eta^{mic}$
Thermodynamik	$1/2 \epsilon : \mathcal{E} : \epsilon$	$3/2 K^{mic} \epsilon_V^2 + 3 G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D$
SIMO & JU [204]	$\sqrt{\epsilon : \mathcal{E} : \epsilon}$	$\sqrt{3 K^{mic} \epsilon_V^2 + 6 G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D}$
JU [114]	$\sqrt{1/2 \epsilon : \mathcal{E} : \epsilon}$	$\sqrt{3/2 K^{mic} \epsilon_V^2 + 3 G^{mic} \epsilon_D \cdot \epsilon_D}$
LEMAÎTRE [138]	$\sqrt{\epsilon : \epsilon}$	$\sqrt{27 \epsilon_V^2 + 6 \epsilon_D \cdot \epsilon_D}$
MAZARS [155]	$\sqrt{\epsilon^+ : \epsilon^+} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \epsilon_I \rangle^2}$	$\sqrt{27 \epsilon_V^{+2} + 6 \epsilon_D^+ \cdot \epsilon_D^+}$
DE VREE [76]	$k_1 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2}$	$3k_1 \epsilon_V + \sqrt{(3k_1 \epsilon_V)^2 + 3/2 k_2 \epsilon_D \cdot \epsilon_D}$

Tabelle 7.1: Identifikation assoziierter und nicht–assoziierter äquivalenter Verzerrungen

Der vorgestellte Abgleich der Microplane Stoffgesetze wurde für die äquivalenten Verzerrungen nach *Simo & Ju* und *de Vree* durchgeführt. Zusätzliche verzerrungsbasierte Definitionen aus der Literatur, sowohl assoziierte als auch nicht-assozierte Definitionen, sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Die rechte Spalte zeigt die zugehörigen äquivalenten Verzerrungen auf der Mikroebene. Dieses Konzept zur Identifikation der Microplane Stoffgesetze ist leicht auf spannungsbasierte Schädigungsmodelle übertragbar. Dies soll an dieser Stelle nicht näher dargestellt werden.

### Numerische Beispiele

Die Qualität der Anpassung der Microplane Stoffgesetze für den Ansatz nach *de Vree* (7.19) wird durch einen Vergleich der gradientenerweiterten makroskopischen und der gradientenerweiterten Microplane Schädigungsformulierung anhand von Simulationsergebnissen verschiedener Beispiele untersucht.

- *Modellprobleme: Einaxialer Zug und einfache Scherung:*

Als sehr einfache Beispiele werden wiederum die Modellprobleme einaxialer Zug und einfache Scherung eines Einheitswürfels mit den elastischen Parametern  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.15$  herangezogen. Der Parameter  $k$ , der die Form der äquivalenten Verzerrungen der Mikro- und Makroebene über die Parameter  $k_1$  und  $k_2$  (B.7) bestimmt und das Verhältnis von Druck- und Zugfestigkeit angibt, wurde zu  $k = 10$  gewählt. Die Parameter für die exponentielle Schädigungsentwicklung nach Gleichung (5.77) werden auf der Mikro- und Makroebene gleich angesetzt, so dass  $\beta = 300$ ,  $\alpha = 0.96$  und  $\gamma_0 = 0.0005$ .

In Abbildung 7.11 sind die resultierenden Last–Verschiebungskurven der jeweiligen Modellprobleme dargestellt. Die Materialantworten des makroskopischen Modells sind durchgezogen, während die des Microplane Modells gestrichelt sind. Wie beim 2-Parameter Modell in Abschnitt 7.2.1 weisen die Antworten des Microplane Modells im Gegensatz zur makroskopischen Formulierung keinen abrupten, sondern einen allmählichen ausgerundeten Übergang in den Entfestigungsbereich auf. Des Weiteren sind die mit dem Microplane Modell ermittelten Traglasten etwas niedriger. Beide Abweichungen sind auf das sukzessive und etwas frühere Einsetzen der Schädigung auf den unterschiedlichen Mikroebene-

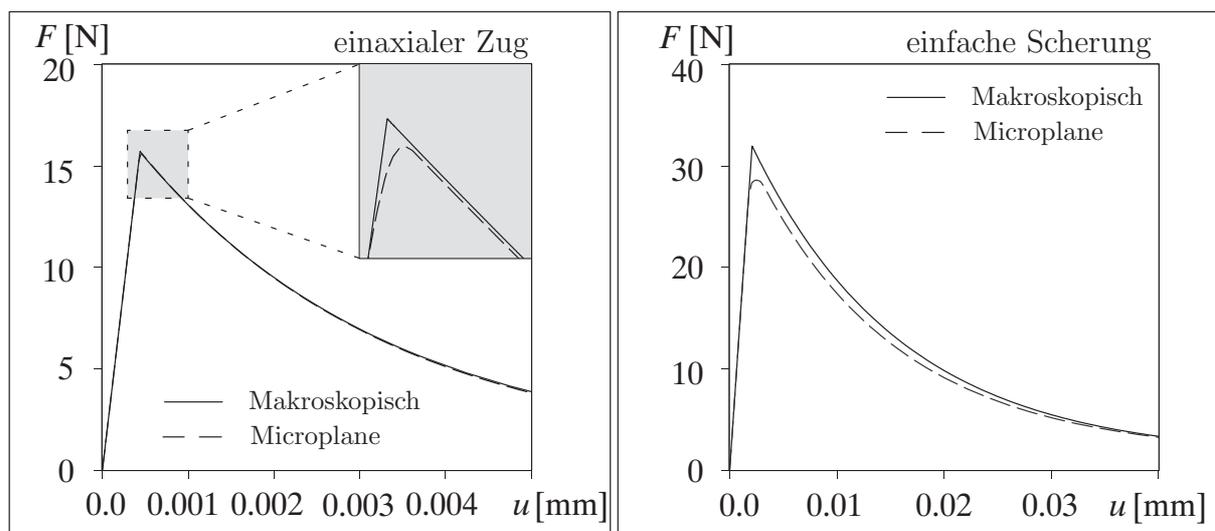


Abbildung 7.11: Vergleich der Last–Verschiebungskurven

nen zurückzuführen. Für das Modellproblem einfache Scherung sind diese Unterschiede deutlich erkennbar. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts im Falle des einaxialen Zuges wurde der Bereich um die Traglast in Abbildung 7.2.1 vergrößert dargestellt. Mit zunehmender Belastung gleichen sich die Antworten des makroskopischen und des Microplane Modells an, da auch das Microplane Modell aufgrund von Lastumlagerung von stark zu gering geschädigten Mikroebenen gegen eine isotrope Schädigungsverteilung strebt. Trotz dieser kleinen Abweichungen in den Materialantworten, unterstreichen diese Ergebnisse die Qualität der Anpassung der Stoffgesetze. Das Materialverhalten des makroskopischen und des Microplane Modells sind sehr ähnlich.

• *Direkter Zugversuch:*

Darüber hinaus sollen das makroskopische und das Microplane Schädigungsmodell anhand des Strukturbeispiels direkter Zugversuch gegenübergestellt werden. Die System- und Materialdaten sind in Abbildung 7.12 zusammengefasst. Da die Materialparameter sowohl für das makroskopische als auch für das Microplane Modell gelten, wird wiederum auf eine entsprechende Indizierung verzichtet. Um die Qualität der Anpassung der Stoffgesetze im Falle einer gradientenerweiterten Microplane Formulierung zu testen, wird im Unterschied zu den lokalen Materialformulierungen der gezeigten Modellprobleme ein gradientenerweitertes Schädigungsmodell auf der Mikro- und Makroebene für die Simulation des direkten Zugversuches verwendet.

Die entsprechenden Materialantworten sind in Abbildung 7.12 dargestellt. Die gemittelte Spannung  $\langle \sigma \rangle$  ergibt sich aus der angreifenden Kraft  $F$  geteilt durch die Querschnittsfläche an der Kerbe. Die Deformation  $\delta$  gibt die Differenzverschiebung zwischen zwei Punkten oberhalb und unterhalb der Kerbe an, die einen ursprünglichen Abstand von  $l_{\text{mess}} = 35$  mm aufweisen. Im Unterschied zur einfachen Scherung sind beim direkten Zugversuch genauso wie beim einaxialen Zug die resultierenden Antworten des makroskopischen und des Microplane Modells nahezu identisch. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Einfluss der deviatorischen Microplane Verzerrungen auf die Schädigung und somit auf das Versagen bei der auftretenden Mode I Versagensform eine untergeordnete Rolle spielt. Die bemerkenswerten Ähnlichkeiten der ermittelten Schädigungsverteilungen

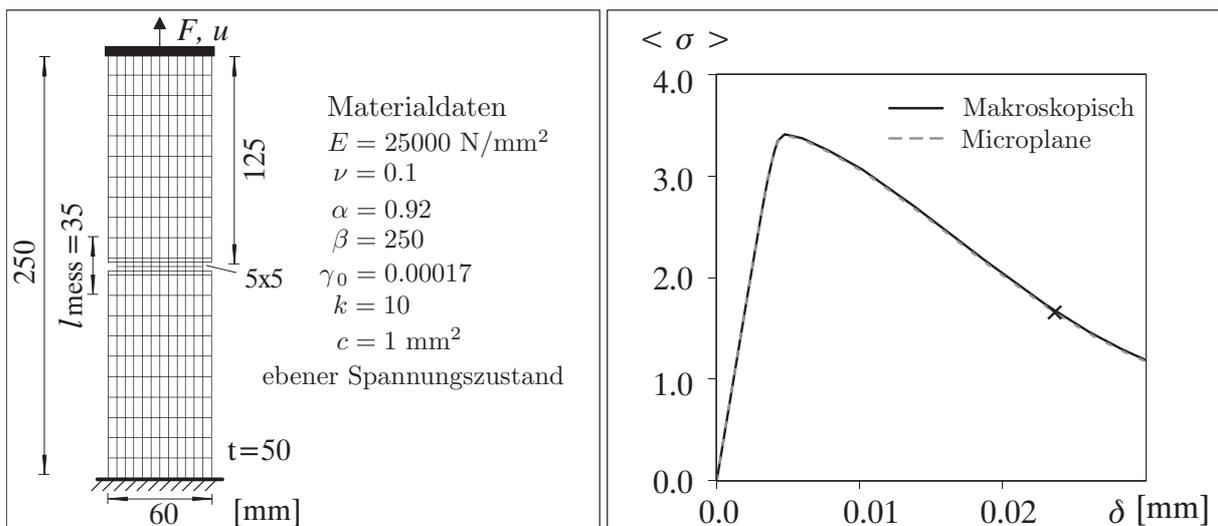


Abbildung 7.12: Systemdaten und Last–Verschiebungskurven

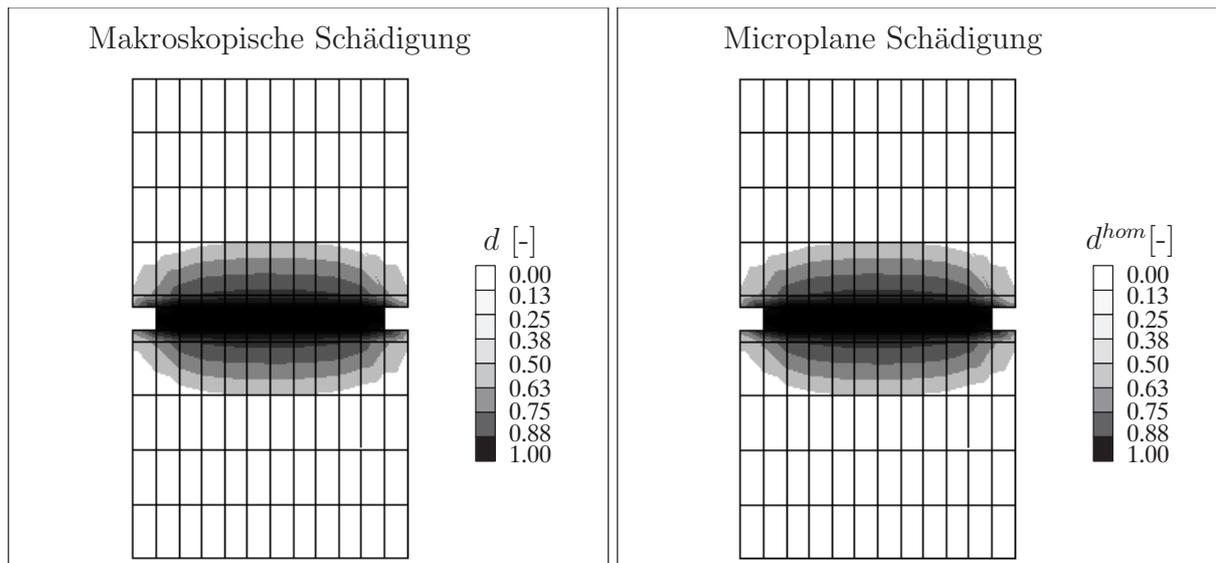


Abbildung 7.13: Makroskopische und Microplane Schädigungsverteilung

zum gekennzeichneten Belastungszustand bestätigen die Qualität der Anpassung, vergleiche den Ausschnitt der Zugprobe in Abbildung 7.13. Beide Materialformulierungen weisen eine für Mode I Versagen typische Schädigungsverteilung auf. Durch den Mikro–Makro Abgleich der Stoffgesetze zeigt das Microplane Modell dieselben Materialeigenschaften wie die makroskopische Formulierung.

## 7.3 Plastizität

Wie schon erwähnt gehen erste Ansätze zur Ermittlung der Materialcharakteristiken der Mikroebenen aus makroskopischen Versagensphänomenen im Rahmen einer Plastizitätsformulierung auf *Kuhl, Ramm & Willam* [131] zurück. Allerdings konnte der formelmäßige Abgleich der Stoffgesetze für eine Zwei–Invarianten Plastizitätsformulierung nach *Drucker–Prager* [80] nur durch zusätzliche Eingriffe in das Microplane Konzept, wie beispielsweise die Vernachlässigung der deviatorischen Komponente des V–D–T Splits, durchgeführt werden, vergleiche auch *Kuhl* [123]. Deshalb wird für den formelmäßigen Mikro–Makro Übergang im Folgenden ein etwas anderer Ansatz als in *Kuhl* [123] verfolgt. Das für die Schädigungsmechanik vorgestellte Konzept zur Identifikation der gesuchten Microplane Stoffgesetze entsprechend Abschnitt 7.2 soll an dieser Stelle auf die Plastizitätstheorie übertragen werden.

### 7.3.1 Makroskopische Plastizität

Die Grundlage für die makroskopische Plastizitätsformulierung bildet das in Abschnitt 3.4 vorgestellte Konzept. Dieses Konzept erfordert die Spezifizierung der Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mac}$  sowie des plastischen Potentials  $\Phi_{pl}^{mac*}$ . Im Rahmen der klassischen nicht–assozierten *Drucker–Prager* Plastizität [80] lassen sich diese exemplarisch als lineare Version wie folgt

angeben.

$$\begin{aligned}\Phi_{pl}^{mac} &= \Phi_{pl}^{mac}(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha_{pl}^{mac} I_1 - \sigma_Y^{mac} \\ \Phi_{pl}^{mac*} &= \Phi_{pl}^{mac*}(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha_{pl}^{mac*} I_1 - \sigma_Y^{mac*}\end{aligned}\quad (7.20)$$

Somit ist die makroskopische Fließfunktion von der ersten Spannungsinvariante  $I_1$  sowie der zweiten Invariante des Spannungsdeviators  $J_2$  abhängig. Die verbleibenden Parameter der Fließfunktion, der Reibungskoeffizient  $\alpha_{pl}^{mac}$  und die äquivalente Fließspannung  $\sigma_Y^{mac}$ , lassen sich als Funktionen der einaxialen Zugfestigkeit  $f_t$  und Druckfestigkeit  $f_c$  angeben. Diese Festigkeiten können mit Hilfe von einaxialen Versuchen experimentell ermittelt werden.

$$\alpha_{pl}^{mac} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \quad \text{und} \quad \sigma_Y^{mac} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t} \quad (7.21)$$

Die vorgestellte klassische nicht–assozierte Drucker–Prager Plastizität enthält als Sonderfall für die Wahl von  $f_c = f_t$  die klassische *von Mises* [223] Plastizität. Die von Mises Fließfunktion ergibt sich dementsprechend aus der Differenz der Vergleichsspannung und der äquivalenten Fließspannung in Abhängigkeit der zweiten Invariante des Spannungsdeviators.

$$\Phi_{pl}^{mac}(J_2) = \sqrt{3} J_2 - \sigma_Y^{mac} \quad (7.22)$$

Für den Fall der linearen isotropen Verfestigung wird die äquivalente Fließspannung  $\sigma_Y^{mac}$  durch den Ausdruck  $\sigma_Y^{mac} = \sigma_0^{mac} + H^{mac} \kappa^{mac}$  bestimmt. Hierin bezeichnen  $\sigma_0^{mac}$  den Anfangswert der Fließspannung,  $H^{mac}$  den Verfestigungsmodul und  $\kappa^{mac}$  die Verfestigungsvariable.

### 7.3.2 Microplane Plastizität

In Analogie zum Mikro–Makro Übergang bei der Schädigungsmechanik, entsprechend Abschnitt 7.2, erfolgt der Vergleich zwischen den makroskopischen und den Microplane Konstitutivgesetzen unter der Annahme einer isotropen Plastizitätsverteilung. Wie bereits erwähnt, gilt diese Annahme nur für den nun folgenden Identifikationsprozess der Microplane Plastizitätsgesetze. Das bedeutet, dass die abgeleiteten Microplane Modelle weiterhin in der Lage sind anisotropes Materialverhalten wiederzugeben. Entsprechend der Argumentation beim Schädigungsmodell, welche die Gleichheit der äquivalenten Verzerrungen zur Folge hatte, wird im Falle der Plastizitätstheorie die Gleichheit der Fließfunktionen gefordert. Denn diese stellen die treibenden Größen für das plastische Fließen dar. Da die Fließfunktionen in der Regel spannungsbasiert formuliert werden, d. h. in Abhängigkeit von Spannungsinvarianten, werden die Mikro–Makro Invariantenbeziehungen für die Spannungen benötigt. Mittels der Integralbeziehung zwischen den makroskopischen und den Microplane Spannungen (4.31) ergeben sich folgende makroskopische Spannungsinvarianten, die eindeutig in Abhängigkeit der jeweiligen Microplane Spannungskomponenten angegeben werden können.

$$I_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma_V d\Omega \quad 2 J_2 = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D d\Omega \quad (7.23)$$

Setzt man diese Invariantenbeziehungen in die makroskopische Fließfunktion nach Drucker–Prager (7.20) ein und führt die erforderlichen Integrale unter der Annahme von Isotropie

aus, so ergibt sich die entsprechende Fließfunktion der Microplane Formulierung  $\Phi_{pl}^{mic}$  als mikroskopische Version der makroskopischen Drucker–Prager Fließfunktion.

$$\begin{aligned}\Phi_{pl}^{mic}(\sigma_V, \boldsymbol{\sigma}_D) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D d\Omega} + \alpha_{pl}^{mac} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma_V d\Omega - \sigma_Y^{mac} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D} + 3 \alpha_{pl}^{mac} \sigma_V - \sigma_Y^{mac} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D} + \alpha_{pl}^{mic} \sigma_V - \sigma_Y^{mic}\end{aligned}\quad (7.24)$$

Hierbei beschreiben die beiden Parameter  $\alpha_{pl}^{mic}$  und  $\sigma_Y^{mic}$  den Reibungskoeffizienten und die äquivalente Fließspannung des Microplane Modells. Diese lassen sich in Abhängigkeit der makroskopischen Parameter und mit Hilfe der Gleichung (7.21) in Abhängigkeit der einaxialen Zugfestigkeit  $f_t$  und Druckfestigkeit  $f_c$  identifizieren.

$$\alpha_{pl}^{mic} = 3 \alpha_{pl}^{mac} = \sqrt{3} \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \quad \text{und} \quad \sigma_Y^{mic} = \sigma_Y^{mac} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t} \quad (7.25)$$

Des Weiteren erhält man die Microplane Version des von Mises Kriteriums.

$$\Phi_{pl}^{mic}(\boldsymbol{\sigma}_D) = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D d\Omega} - \sigma_Y^{mac} = \sqrt{\frac{9}{2} \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \boldsymbol{\sigma}_D} - \sigma_Y^{mic} \quad (7.26)$$

Betrachtet man den Fall der linearen isotropen Verfestigung, so wird die äquivalente Fließspannung des Microplane Modells durch folgenden Ausdruck bestimmt.

$$\sigma_Y^{mic} = \sigma_0^{mac} + H^{mac} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \kappa^{mic} d\Omega = \sigma_0^{mac} + 3H^{mac} \kappa^{mic} = \sigma_0^{mic} + H^{mic} \kappa^{mic} \quad (7.27)$$

Da es sich bei der Verfestigungsvariablen um eine Verzerrungsgröße handelt, lässt sich für diese in Analogie zu den Invarianten eine Integralbeziehung aufstellen. Diese Integralbeziehung wurde unter der Annahme von Isotropie zur Bestimmung der äquivalenten Fließspannung (7.27) ausgenutzt. Letztendlich werden die mikroskopische Fließspannung  $\sigma_0^{mic}$  und der Verfestigungsmodul  $H^{mic}$  als Funktion der makroskopischen Parameter gewonnen.

$$\sigma_0^{mic} = \sigma_0^{mac} \quad H^{mic} = 3H^{mac} \quad (7.28)$$

Somit lassen sich die erforderlichen Microplane Parameter in Abhängigkeit der makroskopischen Parameter angeben.

### 7.3.3 Numerische Beispiele

Die Qualität der Parameteranpassung des lokalen Microplane Plastizitätsmodells an ein lokales makroskopisches Modell wird anhand relativ einfacher Plastizitätsformulierungen basierend auf den von Mises Definitionen (7.22) und (7.26) untersucht. Dazu wird das jeweilige Materialverhalten bei der Simulation verschiedener Beispiele analysiert.

#### Modellproblem: Einaxialer Zug

Die Materialantworten des makroskopischen und des Microplane Modells sollen zunächst einmal anhand des Modellproblems einaxialer Zug eines Einheitswürfels verglichen werden. Die Elastizitätsparameter werden zu  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.3$  gewählt. Außerdem werden die Anfangswerte der Fließspannung wie folgt angesetzt:  $\sigma_0^{mic} = \sigma_0^{mac} =$

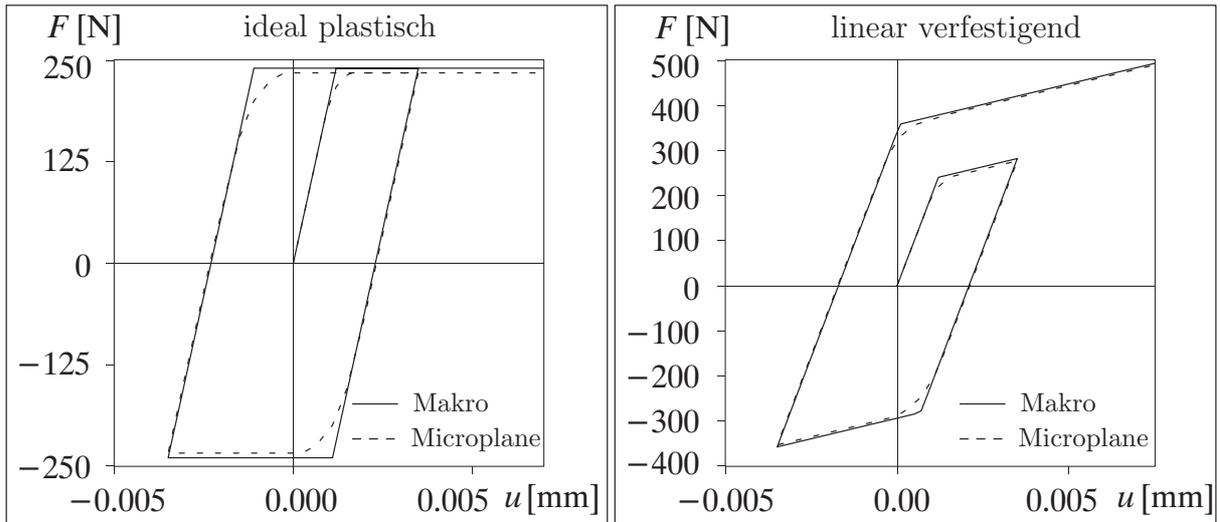


Abbildung 7.14: Vergleich der Last–Verschiebungskurven für den einaxialen Zug

240 N/mm<sup>2</sup>. Das linke Diagramm in Abbildung 7.14 zeigt einen Vergleich der resultierenden Last–Verschiebungskurven bei zyklischer Belastung für den Fall des ideal plastischen Materialverhaltens mit  $H^{mac} = H^{mic} = 0$ . Dagegen liegt den Last–Verschiebungskurven im rechten Diagramm in Abbildung 7.14 ein lineares Verfestigungsverhalten zugrunde. Der makroskopische Verfestigungsmodul wird zu  $H^{mac} = E/10$  angenommen und der Verfestigungsmodul des Microplane Modells ergibt sich dementsprechend mit Gleichung (7.28) zu  $H^{mic} = 3H^{mac} = 60000$  N/mm<sup>2</sup>. Während das makroskopische Modell bilineare Materialantworten im Übergangsbereich vom elastischen zum plastischen Materialverhalten liefert, sind die homogenisierten Antworten des Microplane Modells trotz des postulierten bilinearen Verhaltens auf der Mikroebene durch einen nichtlinearen Zwischenbereich gekennzeichnet. In diesem Zwischenbereich findet ein sukzessiver Übergang der einzelnen Ebenen in den plastischen Bereich statt. Die jeweiligen Materialantworten weisen eine bemerkenswerte Übereinstimmung auf. Wie aus dem Vergleich hervorgeht, ist das verwendete Microplane Modell mit den an makroskopischen Modellen geeichten Parametern sehr gut in der Lage, die Charakteristiken der klassischen von Mises Plastizität wiederzugeben.

### Scheibe mit Loch

Die Übereinstimmung des Microplane Plastizitätsmodells mit der makroskopischen Formulierung soll anhand des Benchmarkproblems der Scheibe mit Loch illustriert werden. Es handelt sich hierbei um eine 200 x 200 mm<sup>2</sup> große Aluminiumscheibe mit einer kreisrunden Aussparung vom Radius  $r = 10$  mm in der Scheibenmitte, deren Elastizitätsparameter die Werte  $E = 206899.9$  N/mm<sup>2</sup> und  $\nu = 0.29$  annehmen. Das Materialverhalten sei ideal plastisch, d. h.  $H^{mac} = H^{mic} = 0$  und die Fließspannung wird mit  $\sigma_0^{mac} = \sigma_0^{mic} = 450$  N/mm<sup>2</sup> angesetzt. Die Lochscheibe wird mit der Last  $\lambda \bar{p}$  gleichförmig in vertikaler Richtung gezogen, wobei  $\bar{p} = 100$  N/mm<sup>2</sup> ist.

Die Entwicklung der Lastfaktoren ist in Abbildung 7.15 zusammengestellt. Der zur Traglast des makroskopischen Modells gehörende kritische Lastfaktor beträgt wie im ursprünglichen Benchmarkproblem von *Barthold, Schmidt & Stein* [10]  $\lambda_{crit}^{mac} = 4.66$ , vergleiche Ab-

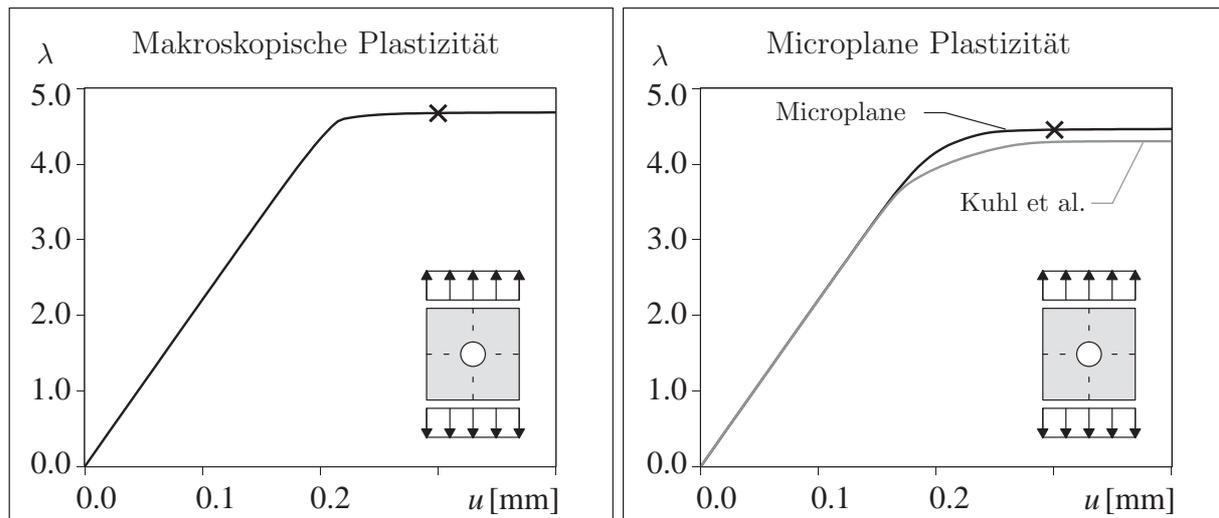


Abbildung 7.15: Last-Verschiebungskurven

Abbildung 7.15 links. Im rechten Diagramm sind zum Vergleich die Antworten der im vorigen Abschnitt 7.3.2 angepassten Microplane Plastizitätsformulierung und des Microplane-basierten Plastizitätsmodells entsprechend dem Mikro-Makro Abgleich der Stoffgesetze nach *Kuhl, Ramm & Willam* [131] gegenübergestellt. Der kritische Lastfaktor des angepassten Microplane Plastizitätsmodells liegt bei  $\lambda_{crit}^{mic} = 4.48$  und ist damit etwas niedriger als die Referenzlösung des makroskopischen Modells. Deutlich erkennbar ist wiederum der ausgerundete Übergang in den plastischen Bereich. Beide Abweichungen gegenüber der Referenzlösung sind auf der Tatsache begründet, dass beim Microplane Modell ein sukzessiver Übergang der einzelnen Mikroebenen in den plastischen Bereich stattfindet und das plastische Fließen auf den einzelnen Mikroebenen etwas früher einsetzt. Die Antwort des Microplane-basierten Plastizitätsmodells *Kuhl, Ramm & Willam* [131], das auf dem

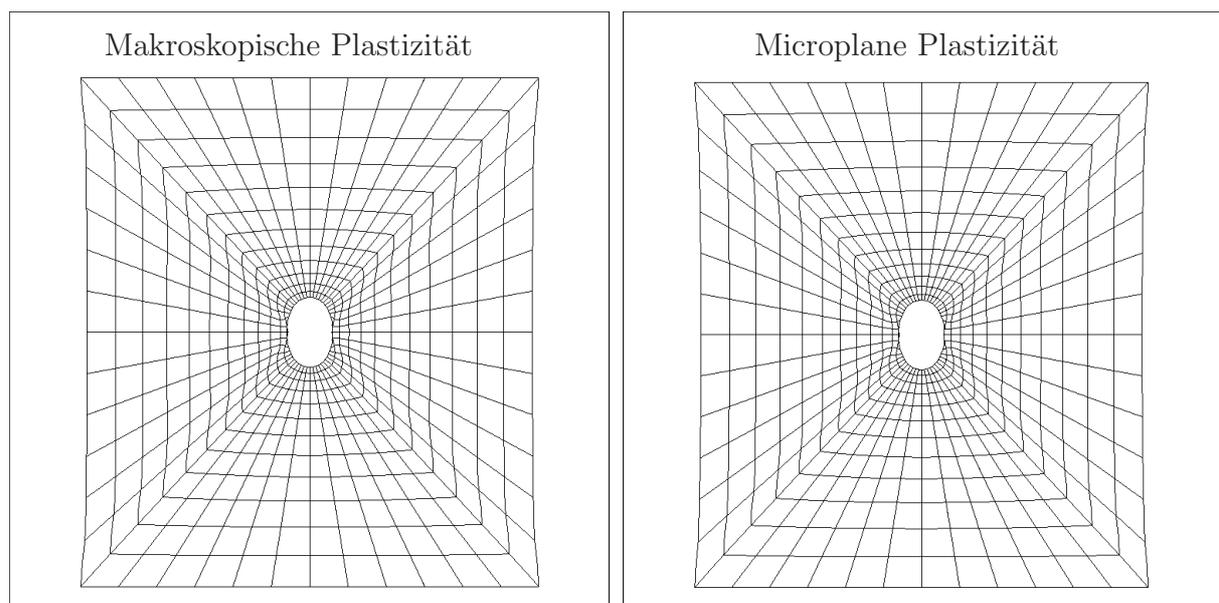


Abbildung 7.16: Deformierte Strukturen

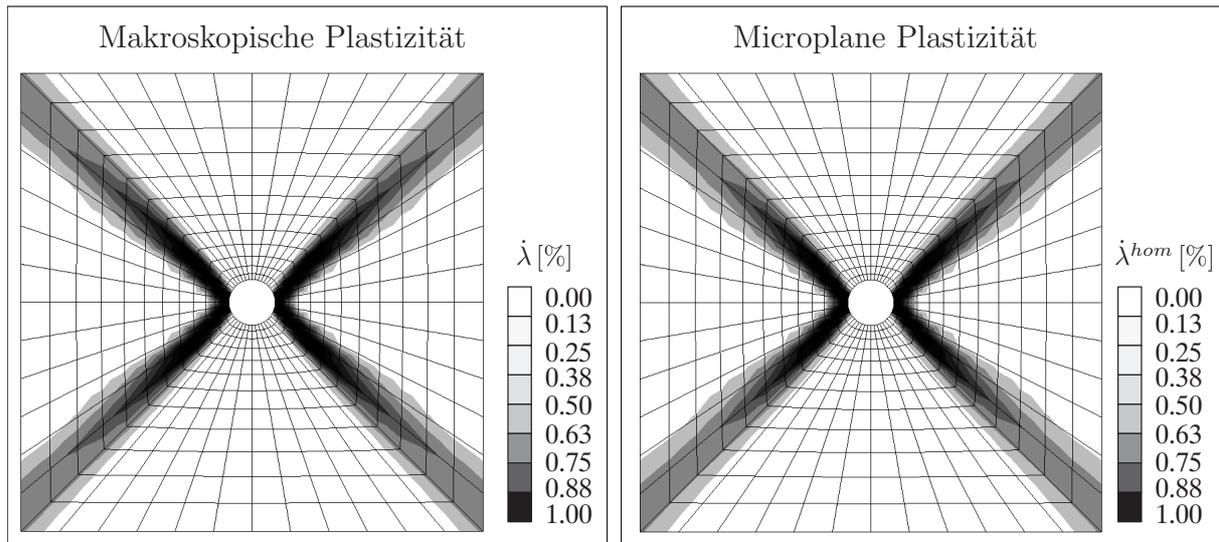


Abbildung 7.17: Verteilung des plastischen Multiplikators

V–D–T Split basiert, liegt unterhalb der Antwort des in dieser Arbeit vorgeschlagenen Microplane Modells. Dies ist auf die Vernachlässigung des deviatorischen Anteils in Normalenrichtung im Modell von *Kuhl, Ramm & Willam* [131] zurückzuführen.

Abbildung 7.16 zeigt die nahezu identisch deformierten Strukturen in 30-facher Überhöhung. Des Weiteren werden in Abbildung 7.17 die Verteilungen des plastischen Multiplikators bei einer Vertikalverschiebung des oberen Randes von  $u = 0.3$  mm verglichen. Bei beiden Modellen geht das Versagen vom linken und rechten Lochrand aus. Mit zunehmender Belastung stellen sich die für das Schubversagen metallischer Werkstoffe charakteristischen Scherbänder unter einem Winkel von  $45^\circ$  ein.

Die Materialantworten der unterschiedlichen Materialformulierungen weisen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit auf. Beide Modelle liefern nahezu identische Ergebnisse und unterstreichen somit die Qualität der Parameteranpassung.

## 7.4 Kopplung von Schädigung und Plastizität

In diesem Abschnitt werden die bisher gezeigten Ansätze zum Mikro–Makro Abgleich der Microplane Stoffgesetze auf die kombinierte Beschreibung von Schädigung und Plastizität ausgeweitet. Grundlage für die Identifikation entsprechender Microplane Stoffgesetze bilden die in Abschnitt 3.5 und 5.4 hergeleiteten makroskopischen und Microplane Formulierungen zur Modellierung des komplexen Versagens kohäsiver Reibungsmaterialien im Rahmen einer kombinierten Schädigungs- und Plastizitätstheorie. Dieses Versagen wird durch das Zusammenwirken einer anisotropen Degradation der Festigkeitseigenschaften mit richtungsabhängigen irreversiblen Dehnungen gekennzeichnet. Die betrachteten Materialformulierungen gehen auf den Ansatz von *Simo & Ju* [204] und *Ju* [114] zurück und basieren auf dem Konzept der effektiven Spannungen. Die Schädigung des Materials wird sowohl beim makroskopischen als auch beim Microplane Modell durch eine Schädigungsvariable beschrieben. Des Weiteren werden die entsprechenden Schädigungsbedingungen im Verzerrungsraum definiert. Da plastisches Fließen im geschädigten Material früher als im ungeschädigten stattfindet, wird die Plastizität im effektiven Spannungsraum formuliert.

Somit setzt sich die kombinierte Materialbeschreibung aus dem 1-Parameter Schädigungsansatz und der klassischen Plastizitätstheorie, die allerdings im effektiven Spannungsraum formuliert wird, zusammen. Entsprechend dem Vorgehen für reine Schädigung bzw. reine Plastizität, vergleiche hierzu die Abschnitte 7.2.2 und 7.3.2, ergeben sich geeignete Schädigungs- bzw. Plastizitätsgesetze auf der Mikroebene, welche wiederum aus gängigen makroskopischen Modellen abgeleitet sind. Um ein unterschiedliches Verhalten unter Zug- und Druckbeanspruchung erfassen zu können, wird die makroskopische äquivalente Verzerrung des modifizierten von Mises Typs nach *de Vree, Brekelmans & van Gils* [76] zugrunde gelegt. Entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 7.2.2 erhält man folgende makroskopische und mikroskopische Definition des modifizierten von Mises Typs.

$$\eta_{Vree}^{mac} = k_1 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad \eta_{Vree}^{mic} = 3 k_1 \epsilon_V + \sqrt{(3 k_1 \epsilon_V)^2 + \frac{3}{2} k_2 \epsilon_D \cdot \epsilon_D} \quad (7.29)$$

Für den Fall, dass die äquivalenten Verzerrungen in Abhängigkeit der elastischen Verzerrungen formuliert sind, müssen in Gleichung (7.29) die Ausdrücke der totalen Verzerrungen durch die elastischen ersetzt werden.

Im Unterschied zu Abschnitt 7.3 werden die makroskopische  $\Phi_{pl}^{mac}$  und die angepasste Microplane Fließfunktion  $\Phi_{pl}^{mic}$  im effektiven Spannungsraum definiert. Damit ergeben sich beispielsweise folgende makroskopische Version und entsprechend dem Vorgehen aus Abschnitt 7.3.2 folgende mikroskopische Version der Drucker-Prager Fließfunktion.

$$\Phi_{pl}^{mac}(\tilde{I}_1, \tilde{J}_2) = \sqrt{\tilde{J}_2} + \alpha_{pl}^{mac} \tilde{I}_1 - \sigma_Y^{mac} \quad \Phi_{pl}^{mic}(\tilde{\sigma}_V, \tilde{\sigma}_D) = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_D \cdot \tilde{\sigma}_D} + \alpha_{pl}^{mic} \tilde{\sigma}_V - \sigma_Y^{mic} \quad (7.30)$$

Die erforderlichen makroskopischen und Microplane Parameter werden mit Hilfe der Gleichungen (7.21) und (7.25) in Abhängigkeit der einaxialen Zug- und Druckfestigkeit angegeben.

Das klassische makroskopische von Mises Kriterium und dessen Gegenstück auf der Mikroebene lassen sich wie folgt bestimmen.

$$\Phi_{pl}^{mac}(\tilde{J}_2) = \sqrt{3 \tilde{J}_2} - \sigma_Y^{mac} \quad \Phi_{pl}^{mic}(\tilde{\sigma}_D) = \sqrt{\frac{9}{2} \tilde{\sigma}_D \cdot \tilde{\sigma}_D} - \sigma_Y^{mac} \quad (7.31)$$

Ein makroskopisch lineares, isotropes Verfestigungsverhalten wird auf der Mikroebene durch die Gleichung (7.27) wiedergegeben und die entsprechenden Microplane Parameter ergeben sich mit Hilfe der Gleichung (7.28).

### 7.4.1 Numerische Beispiele

Die Qualität der Parameteranpassung für das kombinierte Schädigungs- und Plastizitätsmodell soll anhand numerischer Beispiele bei zyklischer Belastung verifiziert werden. Dabei werden die Materialantworten eines makroskopischen Modells mit denen der angepassten Microplane Formulierung verglichen. Die kombinierten Materialformulierungen basieren auf dem von Mises Fließkriterium (7.31) mit linearer Verfestigung. Die Schädigung wird für das Modellproblem einaxialer Zug durch die äquivalenten Verzerrungen nach *Simo & Ju* (7.15) und (7.18) bzw. für das Beispiel des gekerbten Biegezugbalkens durch die äquivalente Verzerrungsdefinition des modifizierten von Mises Typs (7.29) bestimmt.

### Modellproblem: Einaxialer Zug

Das Materialverhalten des kombinierten Schädigungs- und Plastizitätsmodells wird am Beispiel des einaxialen Zuges eines Einheitswürfel im ebenen Verzerrungszustand verdeutlicht. Die elastischen Parameter werden zu  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.2$  gewählt. Des Weiteren wird dieselbe exponentielle Schädigungsentwicklung (5.77) auf der Mikro- und Makroebene angenommen. Die zugehörigen Parameter werden zu  $\beta = 30$ ,  $\alpha = 0.95$  und  $\gamma_0 = 0.0065$  gewählt, so dass plastisches Fließen und die Schädigung im Material nahezu gleichzeitig einsetzen. Damit ergeben sich die Anfangswerte der Fließspannungen des makroskopischen und des Microplane Modells zu  $\sigma_0^{mac} = \sigma_0^{mic} = 1.2 \text{ N/mm}^2$ . Das lineare Verfestigungsverhalten wird über die Verfestigungsmoduli der Mikro- und Makroebene mit  $H^{mic} = 3H^{mac} = 3E$  beschrieben.

Die äquivalenten Verzerrungen werden nach *Simo & Ju* [204] in Abhängigkeit der Verzerrungsenergien postuliert. Dabei werden im Folgenden zwei Fälle unterschieden. Die äquivalenten Verzerrungen können entweder als Funktionen der totalen  $\eta(\epsilon)$  oder der elastischen Verzerrungen  $\eta(\epsilon^{el})$  angegeben werden. Abbildung 3.2, links, zeigt einen Vergleich der resultierenden Materialantworten des makroskopischen und des Microplane Modells basierend auf den totalen Verzerrungen  $\eta(\epsilon)$ , während im rechten Diagramm die Antworten basierend auf den elastischen Verzerrungen  $\eta(\epsilon^{el})$  gegenübergestellt sind. Wie bei den Antworten des reinen Schädigungsmodells bzw. des reinen Plastizitätsmodells, vergleiche Abbildung 7.11 bzw. Abbildung 7.14, sind die mit dem kombinierten Microplane Modell ermittelten Traglasten etwas niedriger als die der makroskopischen Formulierung. Des Weiteren weisen die Last–Verschiebungskurven des Microplane Modells einen ausgerundeten Übergang in den Entfestigungsbereich auf. Diese Abweichungen stimmen prinzipiell mit den Abweichungen der Einzelmodelle, reine Schädigung bzw. reine Plastizität, überein und sind auf das sukzessive und etwas frühere Einsetzen der Schädigung bzw. der Plastizität auf den einzelnen Mikroebenen zurückzuführen. Bemerkenswert sind auch die guten Übereinstimmungen der Entlastungs- und Wiederbelastungspfade. Das bedeutet, die angepassten Microplane Formulierungen liefern, verglichen mit den makroskopischen Modellen, nicht nur bei monoton steigenden, sondern auch bei zyklischen Belastungen nahezu identische Materialantworten.

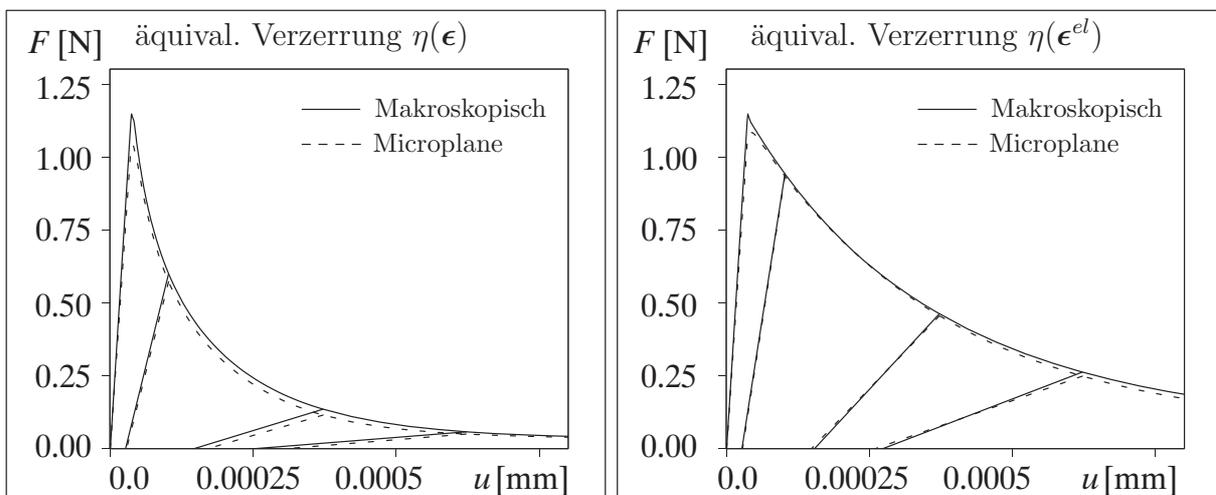


Abbildung 7.18: Vergleich der Last–Verschiebungskurven für den einaxialen Zug

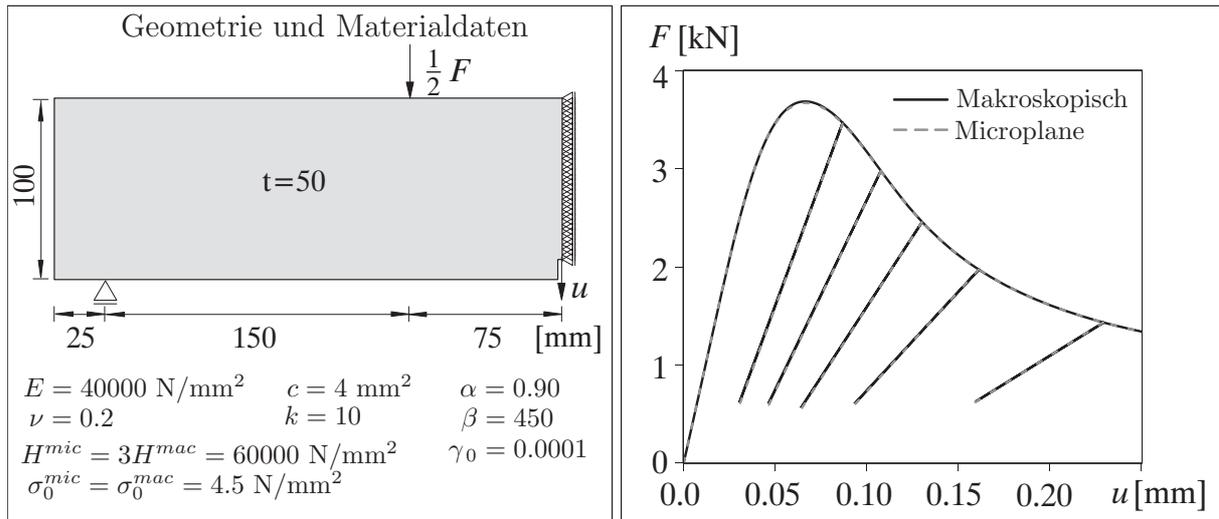


Abbildung 7.19: Systemdaten und Last-Verschiebungskurven

### Gekerbter Biegezugbalken

Abschließend soll die Übereinstimmung der makroskopischen und der angepassten Microplane Formulierung anhand des Strukturbeispiels gekerbter Biegezugbalken unter zyklischer Belastung aufgezeigt werden. Die System- und Materialdaten können der Abbildung 7.19 entnommen werden. Bei den Parametern, welche die Schädigung steuern, wurde auf die entsprechende Indizierung verzichtet, da diese Parameter sowohl für das makroskopische als auch für das Microplane Modell gelten. Im Unterschied zur lokalen Materialformulierung des Modellproblems einaxialer Zug, wird für dieses Strukturbeispiel eine gradientenerweiterte makroskopische und Microplane Formulierung entsprechend Abschnitt 6.3 verwendet. Die äquivalenten Verzerrungen des modifizierten von Mises Typs, entsprechend Gleichung (7.29), werden in Abhängigkeit der elastischen nichtlokalen makroskopischen Verzerrungen  $\bar{\eta}^{mac}(\bar{\epsilon}^{el})$  bzw. der elastischen nichtlokalen Microplane Verzerrungen  $\bar{\eta}^{mic}(\bar{\epsilon}_V^{el}, \bar{\epsilon}_D^{el})$  formuliert. Die im Folgenden getroffenen Aussagen gelten in gleicher Weise für eine Formulierung basierend auf den totalen nichtlokalen Verzerrungen.

Die numerischen Berechnungen erfolgen am halben System bei einer Diskretisierung mit 656 achtknotigen Elementen. Die ermittelten Last-Verschiebungskurven sind in Abbildung 7.19 gegenübergestellt. Sowohl die Belastungspfade als auch die Ent- und Wiederbelastungspfade des makroskopischen und des Microplane Modells liegen beinahe auf-

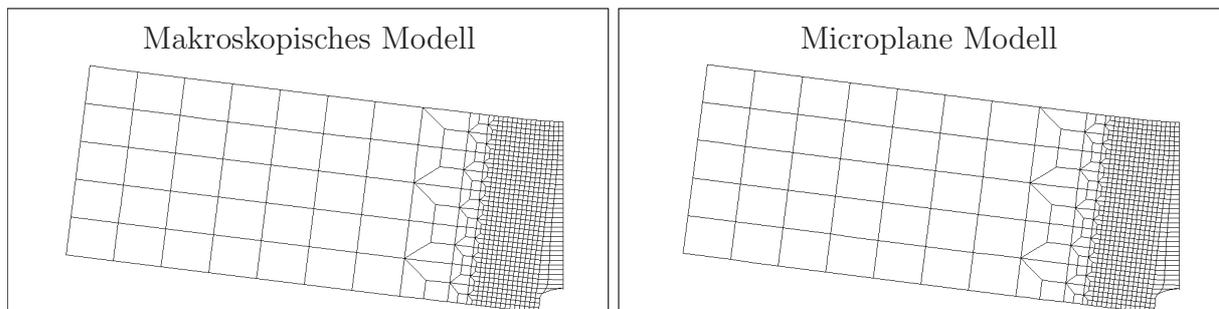


Abbildung 7.20: Deformierte Strukturen

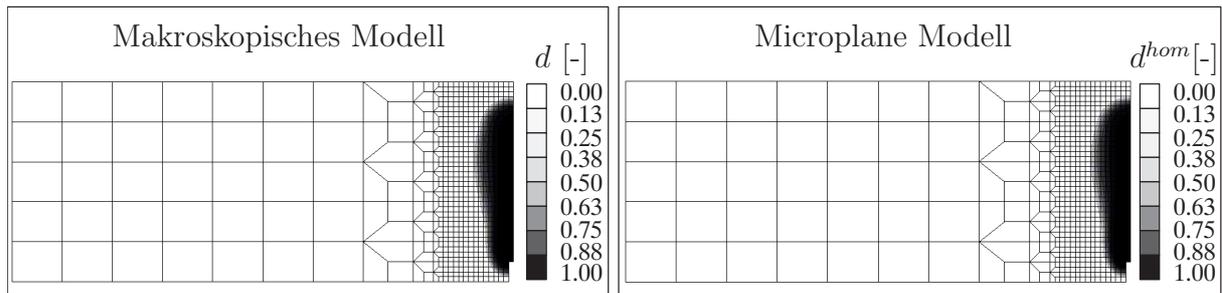


Abbildung 7.21: Schädigungsverteilungen

einander. Die nahezu identisch deformierten Strukturen sind in Abbildung 7.20 in 100-facher Überhöhung dargestellt. In beiden Berechnungen ist die Lokalisierungszone durch die nichtlokale Formulierung breiter als die Elementbreite. Dies wird durch die Schädigungsverteilungen in Abbildung 7.21 bei einer Vertikalverschiebung in Balkenmitte von  $u = 0.25$  mm unterstrichen. Die Ähnlichkeit dieser Schädigungsverteilungen bestätigen die Qualität der Parameteranpassung. Beide Formulierungen weisen die für Mode I Zugversagen typischen Deformationen und Schädigungsverteilungen auf. Auf eine Darstellung des Vergleiches der Verteilung des plastischen Multiplikators wird an dieser Stelle verzichtet. Genauso wie die Schädigungsverteilungen weisen auch die Verteilungen des plastischen Multiplikators eine bemerkenswerte Ähnlichkeit auf.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Materialparameter der Microplane Modelle, die bisher reine Eingangsgrößen waren, durch den vorgestellten Mikro–Makro Übergang an physikalischer Bedeutung gewinnen. Durch den systematischen Mikro–Makro Abgleich der Stoffgesetze ist es möglich die verwendeten Microplane Parameter aus makroskopisch messbaren Materialkennwerten zu bestimmen. Die derart angepassten Microplane Modelle liefern sowohl für reine Schädigungs- bzw. Plastizitätsmodelle als auch für deren Kombination makroskopische Materialantworten, die denen der zugrunde gelegten makroskopischen Modellen entsprechen. Darüber hinaus ist das hier gezeigte Verfahren auf beliebig komplexe Materialformulierungen erweiterbar, beispielsweise auf Formulierungen, welche den Einfluss der dritten Invariante berücksichtigen. Dazu ist es nötig die dritte Invariante in Analogie zur ersten und zweiten Invariante für die Verzerrungen oder Spannungen, entsprechend den Gleichungen (4.17) und (7.23), in Abhängigkeit der Microplane Größen zu bestimmen.

# Kapitel 8

## Numerische Beispiele

Im vorigen Kapitel sind verschiedene Microplane Materialformulierungen mit entsprechenden makroskopischen Materialmodellen verglichen worden. In den folgenden Abschnitten werden diese Microplane Materialformulierungen zur numerischen Simulation einiger experimentell untersuchter Strukturbeispiele herangezogen. Im Vordergrund steht eine Gegenüberstellung der numerisch ermittelten Antworten mit den experimentellen Ergebnissen. Dabei wird die Wirkungsweise dieser Materialformulierungen bei der Simulation von Strukturen mit unterschiedlichen Versagensformen aufgezeigt.

Es ist hinlänglich bekannt, dass bei der Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien mit entfestigenden Materialformulierungen die Sprödheit der Materialantwort mit Netzverfeinerung zunimmt. Zur Vermeidung netzabhängiger Lösungen wird die in Abschnitt 6.3 hergeleitete gradientenerweiterte Microplane Theorie, sowohl für das kombinierte Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodell als auch für das reine Schädigungsmodell, verwendet. Damit ist die Gutgestelltheit des zugrunde gelegten Randwertproblems sichergestellt.

Bei allen numerischen Beispielen dieses Kapitels handelt es sich um Scheibentragwerke, bei denen der ebene Spannungszustand zugrunde gelegt wird. Dieser ebene Spannungszustand wurde entsprechend *de Borst* [67] algorithmisch umgesetzt und auf die verwendete nichtlokale Microplane Formulierung übertragen.

Die zur Diskretisierung der numerischen Beispiele verwendeten Elemente basieren auf einem quadratischen Verschiebungsansatz in Kombination mit einer bilinearen nichtlokalen Verzerrungsinterpolation. Dadurch sind die Interpolationsordnungen des lokalen und des nichtlokalen Verzerrungsfeldes identisch und Oszillationen in den Spannungsverläufen werden vermieden, vergleiche hierzu *Kuhl* [123], *Peerlings* [182] oder *Simone, Askes, Peerlings & Sluys* [205]. Des Weiteren wird eine 2 x 2 Gauß-Punkt Integration verwendet.

In diesem Zusammenhang sei nochmals erwähnt, dass in den beschriebenen Microplane Formulierungen der Homogenisierungsprozess auf der Integration über den Raumwinkel basiert. Wie in Abschnitt 4.4 erläutert, wird diese Integration numerisch entsprechend Gleichung (4.38) durchgeführt. Traditionell, wie auch in den folgenden numerischen Beispielen, wird auf eine numerische Integration mit  $n_{mp} = 42$  Mikroebenen ohne orthogonale Symmetrie zurückgegriffen.

### 8.1 Gradientenerweiterte Microplane Schädigung

Zunächst wird die Tauglichkeit eines reinen gradientenerweiterten Microplane Schädigungsmodells zur Simulation des Tragverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien bei monoton steigender Belastung untersucht und mit den Ergebnissen der jeweiligen Experimente verglichen. Dabei werden verschiedene Benchmarkprobleme für Beton herangezogen, wobei die Komplexität des Versagens von Beispiel zu Beispiel gesteigert wird. Die auftretenden Versagensformen des verwendeten Werkstoffes Beton reichen in den Bench-

markproblemen von reinen Mode I Versagen unter Zugbeanspruchung bis hin zu komplexen, gemischten Mode I und Mode II Versagen unter Zug- und Schubbeanspruchung. Die verwendete Microplane Schädigungsformulierung basiert auf dem in Abschnitt 5.2.3 hergeleiteten 1-Parameter Schädigungsmodell. Zur Beschreibung des unterschiedlichen Zug- und Druckverhaltens von Beton wird die im vorigen Kapitel an die makroskopische Formulierung von *de Vree, Brekelmans & van Gils* [76] angepasste äquivalente Verzerrung des modifizierten von Mises Typs  $\eta_{Vree}^{mic}$  (7.29) auf der Mikroebene verwendet. In den betrachteten Beispielen wird eine exponentielle Schädigungsentwicklung nach Gleichung (5.77) angenommen, vergleiche hierzu *Peerlings, de Borst, Brekelmans & de Vree* [184].

In den folgenden Simulationen werden die in den Experimenten ermittelten elastischen Parameter verwendet. Die Parameter für die Schädigung werden soweit vorhanden entsprechend den in der Literatur angegebenen Werten angenommen. Beispielsweise wurden die Parameter für das Benchmarkproblem *Single-Edge-Notched Beam* in Anlehnung an die von *Peerlings, de Borst, Brekelmans & Geers* [183] verwendeten Parametern bestimmt. Der Parameter  $\alpha$ , der die Resttragfähigkeit des Materials steuert, bewegt sich in einem für Beton typischen Bereich von 0.92 – 0.96. Das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit nimmt in allen Simulationen einen für Normalbeton typischen Wert von  $k = 10$  an. Ansonsten wurde versucht die Parameter aus den experimentell ermittelten Parameter zu bestimmen. Beispielsweise ergibt sich aus dem Verhältnis von Zugfestigkeit und E-Modul ein erster Anhaltswert für den Schädigungsschwellwert  $\gamma_0$ .

### 8.1.1 Direkter Zugversuch

Als erstes numerisches Beispiel dient der bereits in Abschnitt 7.2.2 erwähnte direkte Zugversuch. Die Experimente zum direkten Zugversuch, die hier als Referenzlösung herangezogen werden, wurden von *Reinhardt* [197] an Probekörpern aus Normalbeton durchgeführt. In diesen Experimenten wurden beidseitig gekerbte Probekörper über aufgeklebte Lastplatten einer einaxialer Zugbelastung ausgesetzt. Wie bereits in Kapitel 6 angesprochen, ist für kohäsive Reibungsmaterialien im Allgemeinen mit einer Lokalisierung der Verzerrungen in schmalen Versagenszonen zu rechnen. Während des Zugversuches stellt sich im Probekörper ein hochgradig inhomogener Zustand ein und die Verzerrungen lokalisieren in einer schmalen Versagenszone. Deshalb wurden im Versuch fünf Messaufnehmer mit einer Messlänge von  $l_{mess} = 35$  mm auf der Probe positioniert, welche die Differenzverschiebung  $\delta$  als Kontrollparameter zwischen den Punkten oberhalb und unterhalb der Kerbe angeben, vergleiche Abbildung 8.1. Die genauen Systemdaten und Abmessungen der Probekörper sind in Abbildung 8.1 dargestellt. Nähere Informationen über die verwendeten Probekörper, die durchgeführten Messungen, die Datenaufbereitung und den genauen Ablauf der Versuche können der Arbeit von *Reinhardt* [197] entnommen werden.

Zur Simulation des Materialverhaltens von Beton im direkten Zugversuch wird das oben beschriebene gradientenerweiterte reine Microplane Schädigungsmodell herangezogen. Die verwendeten Materialdaten sind in Abbildung 8.1 angegeben. Dabei wurden die elastischen Parameter entsprechend der Arbeit von *Garikipati* [89] gewählt. Für die Simulation wird der Probekörper mit 284 achtknotigen Elementen diskretisiert, vergleiche Abbildung 8.2. Entsprechend den Randbedingungen des Versuchsapparates werden die Knoten am unteren Rand des Probekörpers vollständig und die des oberen Randes horizontal gehalten. Des Weiteren werden die vertikalen Knotenverschiebungen am oberen Rand aneinander gekoppelt, um den Einfluss der starren Lastplatte wiederzugeben. Im Verlauf der

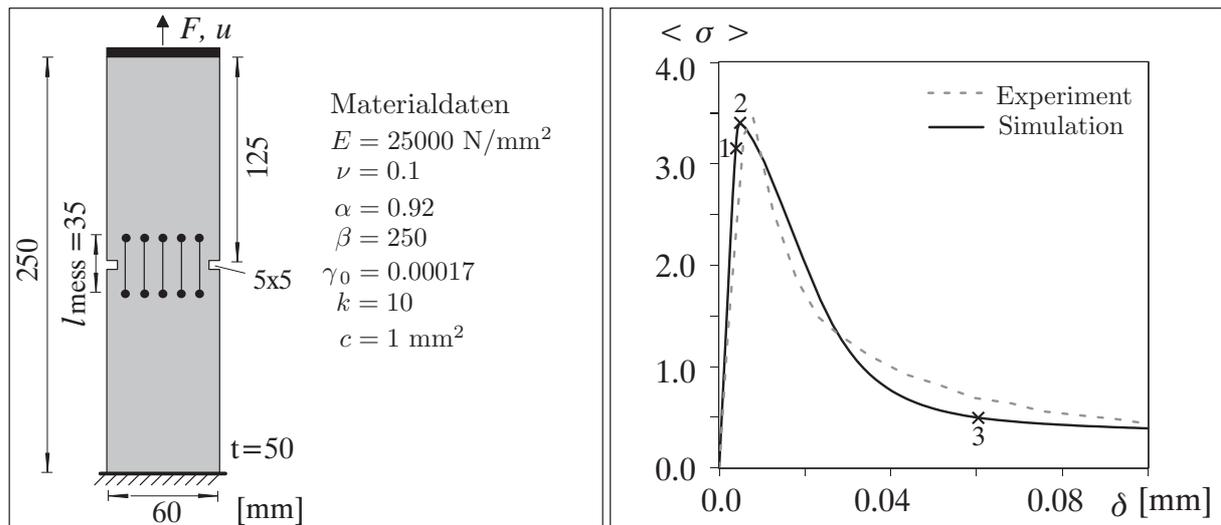


Abbildung 8.1: Systemdaten und Last-Verschiebungskurven

Belastungsgeschichte wird der obere Rand verformungsgesteuert nach oben bewegt. Abbildung 8.1 zeigt einen Vergleich der experimentell und numerisch ermittelten Materialantworten. Dabei ist die gemittelte Spannung  $\langle \sigma \rangle$  gegenüber der Deformation  $\delta$  aufgetragen. Die gemittelte Spannung  $\langle \sigma \rangle$  ergibt sich aus der angreifenden Kraft  $F$  bezogen auf die Querschnittsfläche an der Kerbe und die Deformation  $\delta$  gibt die gemittelte Differenzverschiebung zwischen Punkten oberhalb und unterhalb der Kerbe an, die ursprünglich einen Abstand von  $l_{\text{mess}} = 35 \text{ mm}$  aufweisen. Die experimentell ermittelte Traglast sowie das Nachbruchverhalten werden durch die numerische Simulation mit dem Microplane Modell relativ gut wiedergegeben. Das Microplane Modell ist demnach in der

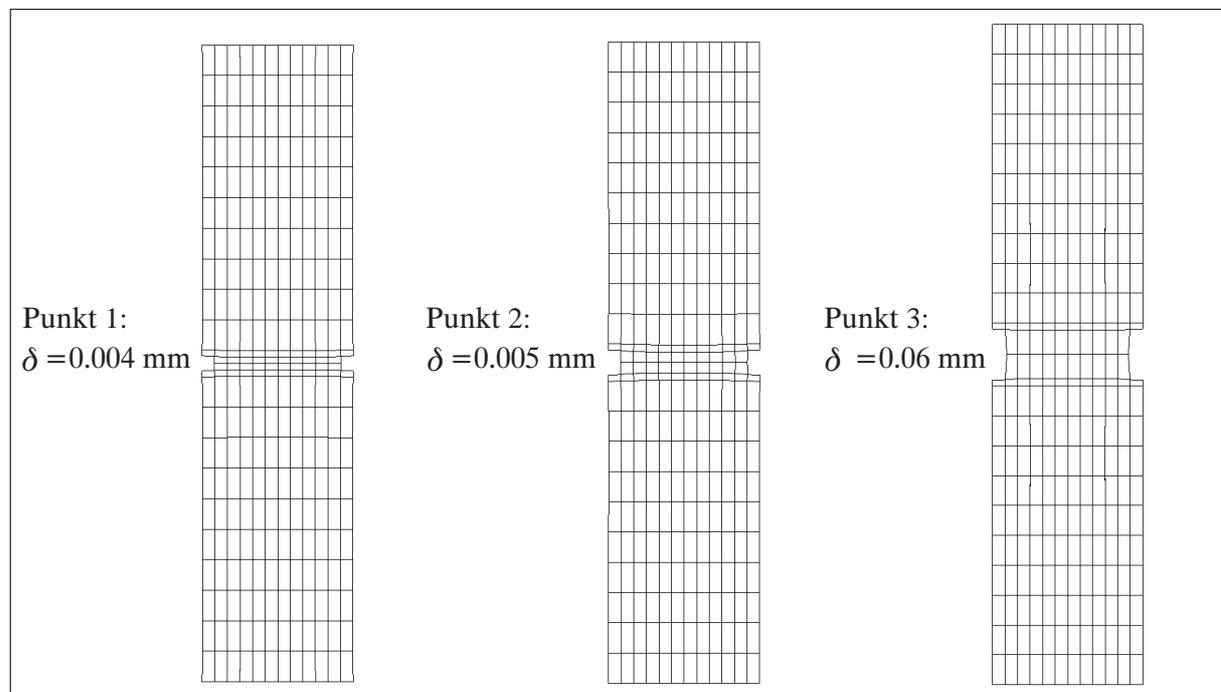


Abbildung 8.2: Deformierte Struktur

Lage, die Versuchsergebnisse ausreichend genau abzubilden.

Die deformierten Strukturen zu drei verschiedenen Belastungszeitpunkten sind in Abbildung 8.2 in 250-facher Überhöhung zusammengestellt. Dabei ist das horizontale Aufreißen des Probekörpers zwischen den Kerben erkennbar. In der Simulation wachsen die Risse an den Kerben von beiden Seiten aus symmetrisch zusammen, während in den Versuchen Risse durch materielle oder auch geometrische Inhomogenitäten von einer Kerbe aus fortschreiten. Diese Diskrepanz in den Materialantworten kann durch eine künstlich eingeführte materielle Imperfektion, wie beispielsweise das Herabsetzen des Schädigungsschwellwertes  $\gamma_0$  an einer Kerbe um 5 %, beseitigt werden, vergleiche hierzu *Peerlings* [182].

Weiterhin ist in Abbildung 8.3 die Evolution der Schädigungsvariablen dargestellt. Zusätzlich zur unterschiedlichen Farbgebung ist die Schädigungsvariable als Höhenplot in die  $z$ -Richtung aufgetragen. Die Schädigungszonen, die sich in der Verfestigungsphase um die beiden Kerben bilden, wachsen nach Erreichen der Traglast zusammen. Bei weiterer Last-

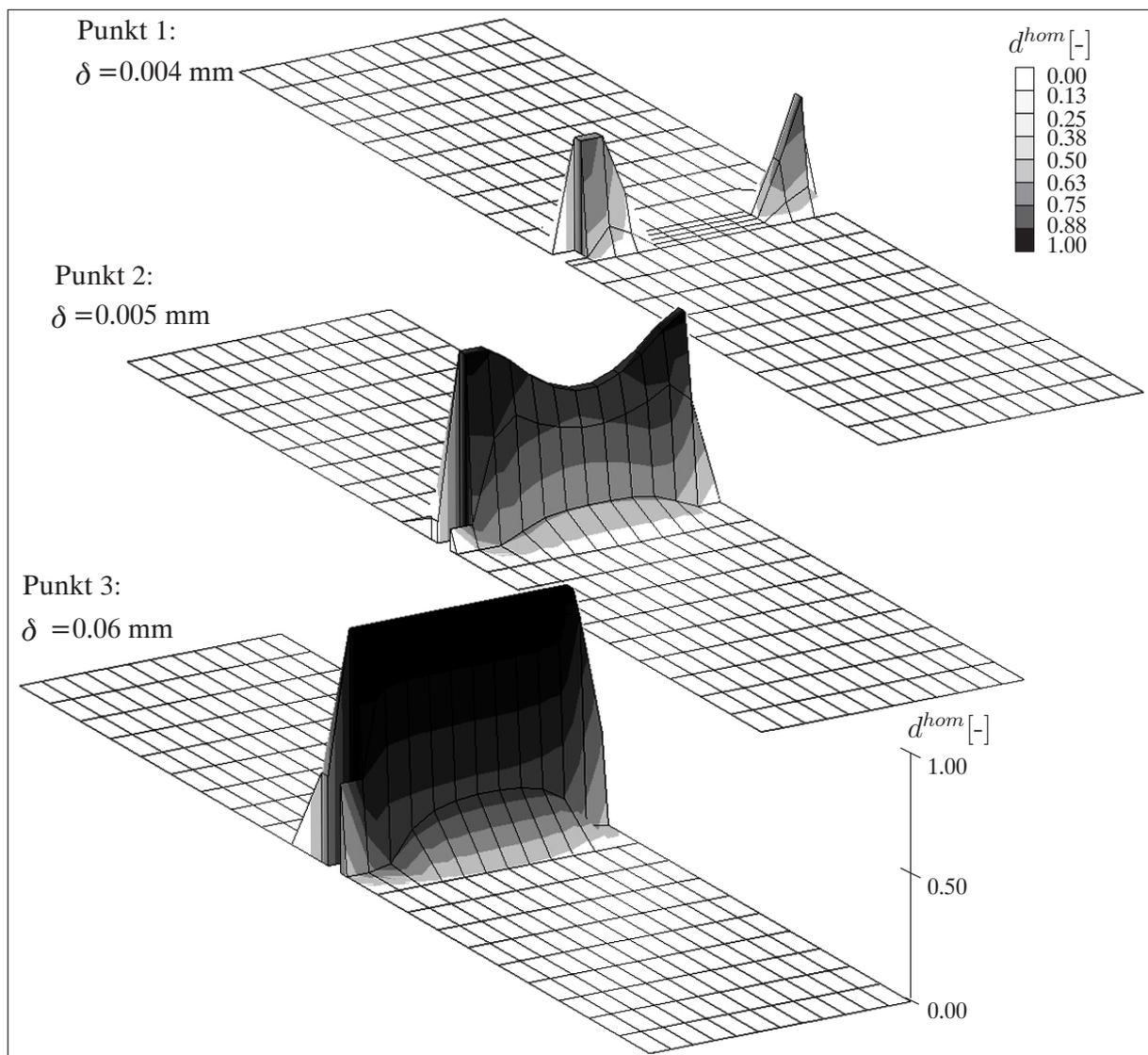


Abbildung 8.3: Schädigungsentwicklung

steigerung wächst die Schädigung zwischen den Kerben gleichmäßig an. Die Schädigung weist eine symmetrische Verteilung auf, wodurch es in der Simulation zu einer symmetrischen Versagensform kommt. Das in den Experimenten beobachtete Mode I Versagen wird durch die dargestellten Schädigungsverteilungen gut erfasst. Im Unterschied zu lokalen Formulierungen besitzt die Schädigungszone beim verwendeten nichtlokalen Modell eine endliche Breite, die sich über mehrere Elemente erstreckt.

### 8.1.2 Dreipunktbiegebalken

Aus einer Vielzahl von Experimenten mit Mode I Versagen bei kohäsiven Reibungsmaterialien wird als zweites Beispiel der klassische Dreipunktbiegebalken aus unbewehrtem Beton nach *Petersson* [188] ausgesucht. Die von *Petersson* [188] durchgeführten Experimente besitzen gegenüber anderen Experimenten zwei Vorteile. Zum einen wurden diese Experimente mehrfach wiederholt und zum anderen wurden die erforderlichen Materialparameter sorgfältig spezifiziert. Weiterhin hat *Petersson* [188] die bruchmechanischen Eigenschaften des lokalen Biegezugbruches zur Bestimmung der Bruchenergie von Beton genauer untersucht. Die Ergebnisse dieser Versuche stellen im Folgenden die Referenzlösung für das beobachtete, spröde Bruchverhalten von Beton dar. Der Dreipunktbiegebalken dient demnach als Verifikationsbeispiel der verwendeten gradientenerweiterten Microplane Schädigungsformulierung. Bei den untersuchten Probekörpern aus Beton handelt es sich um gekerbte Einfeldträger mit einer Länge von 2 m und einer  $2 \times 10 \text{ cm}^2$  großen Kerbe am unteren Rand des Balkens, vergleiche Abbildung 8.4. Die Experimente sowie auch die Simulationen mit dem Microplane Modell wurden verschiebungsgesteuert durchgeführt, indem die vertikale Verformung  $u$  in der Mitte des Balkens im Verlauf der Belastungsgeschichte inkrementell gesteigert wurde. Die genauen Abmessungen und Systemdaten der Probekörper sind in Abbildung 8.4 dargestellt.

Zur Verifikation des gewählten Microplane Materialmodells wird dessen Wirkungsweise anhand des Dreipunktbiegebalkens analysiert. Aus Symmetriegründen werden die numerischen Berechnungen am halben System durchgeführt. Das halbe System wird entsprechend Abbildung 8.5 mit 206 achtknotigen Elementen diskretisiert. Die elastischen Materialparameter werden in Analogie zu *Rots, Nauta, Kusters & Blaauwendraad* [201] wie folgt spezifiziert:  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.2$ . In Analogie zum direkten Zugversuch wurde das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit mit  $k = 10$  und der Gradientenparameter mit  $c = 1 \text{ mm}^2$  festgesetzt. Die Parameter, welche die Evolution der Schädigung steuern, nehmen im Unterschied zu den für den direkten Zugversuch an-

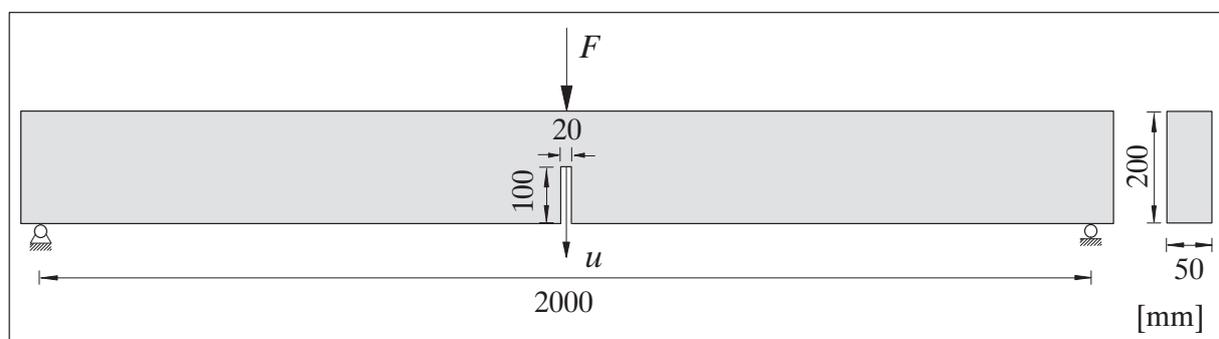


Abbildung 8.4: Abmessungen des Dreipunktbiegebalkens nach *Petersson* [188]

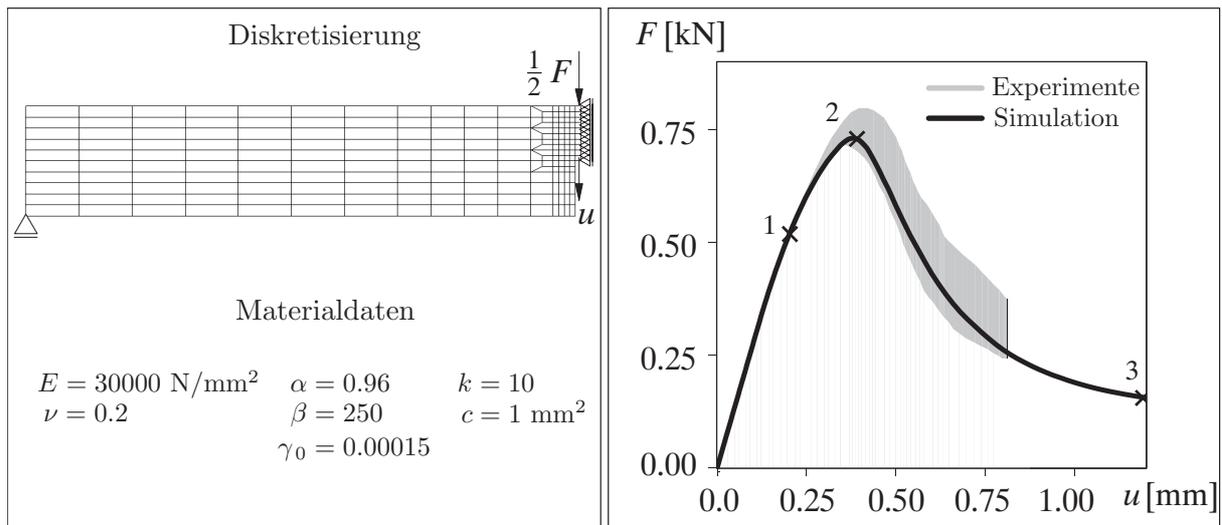


Abbildung 8.5: Systemdaten und Last-Verschiebungskurven

gegebenen Parametern aufgrund der unterschiedlichen Betoneigenschaften folgende Werte an,  $\beta = 250$ ,  $\alpha = 0.96$  und  $\gamma_0 = 0.00015$ .

In Abbildung 8.5 wird die mit dem Microplane Modell ermittelte Materialantwort mit denen der Experimente verglichen. Der graue Bereich symbolisiert den Streubereich der experimentellen Last-Verschiebungsdiagramme. Die Antwort des gradientenerweiterten Microplane Schädigungsmodells weist eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit dem Antwortspektrum der Experimente auf. Sowohl die Traglast als auch der Entfestigungsbereich wird durch das Microplane Modell sehr gut erfasst. Vor allem der sorgfältigen Wahl des Schädigungsschwellwertes  $\gamma_0$ , der den Beginn der Schädigung festlegt, kommt dabei eine entscheidende Rolle zu. Dieses Verzerrungsmaß bestimmt letztendlich die numerisch ermittelte Traglast. Dagegen steuert der Parameter  $\beta$  das Nachbruchverhalten und der Parameter  $\alpha$  die Resttragfähigkeit des Material.

Die in Abbildung 8.6 dargestellten Schädigungsverteilungen zu drei Belastungszeitpunkten (Punkt 1: Einsetzen der Schädigung, Punkt 2: Erreichen der Traglast und Punkt 3: Am Ende der Belastungsgeschichte) zeigen die Evolution der Schädigung in Balkenmitte. Zur besseren Visualisierung der auftretenden Schädigung werden Detailansichten der Schädigungsverteilungen im Bereich der Kerbe herangezogen. Die Schädigung setzt zuerst in den Elementen am oberen Rand der Kerbe ein. Infolge der Belastungszunahme schädigen dann die angrenzenden Elemente. Bei Erreichen der Traglast breitet sich die Schädigung aufgrund der Biegebeanspruchung hauptsächlich in vertikaler Richtung aus. Dabei wird ein Biegezugbruch in der Balkenmitte initiiert. Nach Erreichen der Traglast bis zum endgültigen Versagen des Balkens wächst die Schädigungszone kontinuierlich in Richtung Balkenoberseite an. Letztendlich weisen die ermittelten Schädigungen des Materials am Ende der Belastungsgeschichte eine für Mode I Versagen des Dreipunktbiegebalkens typische Verteilung auf. Auffällig ist bei der endgültigen Schädigungsverteilung in Abbildung 8.6, dass die Schädigung des Materials nicht nur auf die Elementreihe oberhalb der Kerbe beschränkt ist, sondern auch auf Elemente, die seitlich davon angeordnet sind, übergreift. Dies ist auf die Berücksichtigung von Verzerrungsgradienten im numerischen Modell zurückzuführen, welche wiederum die räumlichen Mikrorisswechselwirkungen erfassen.

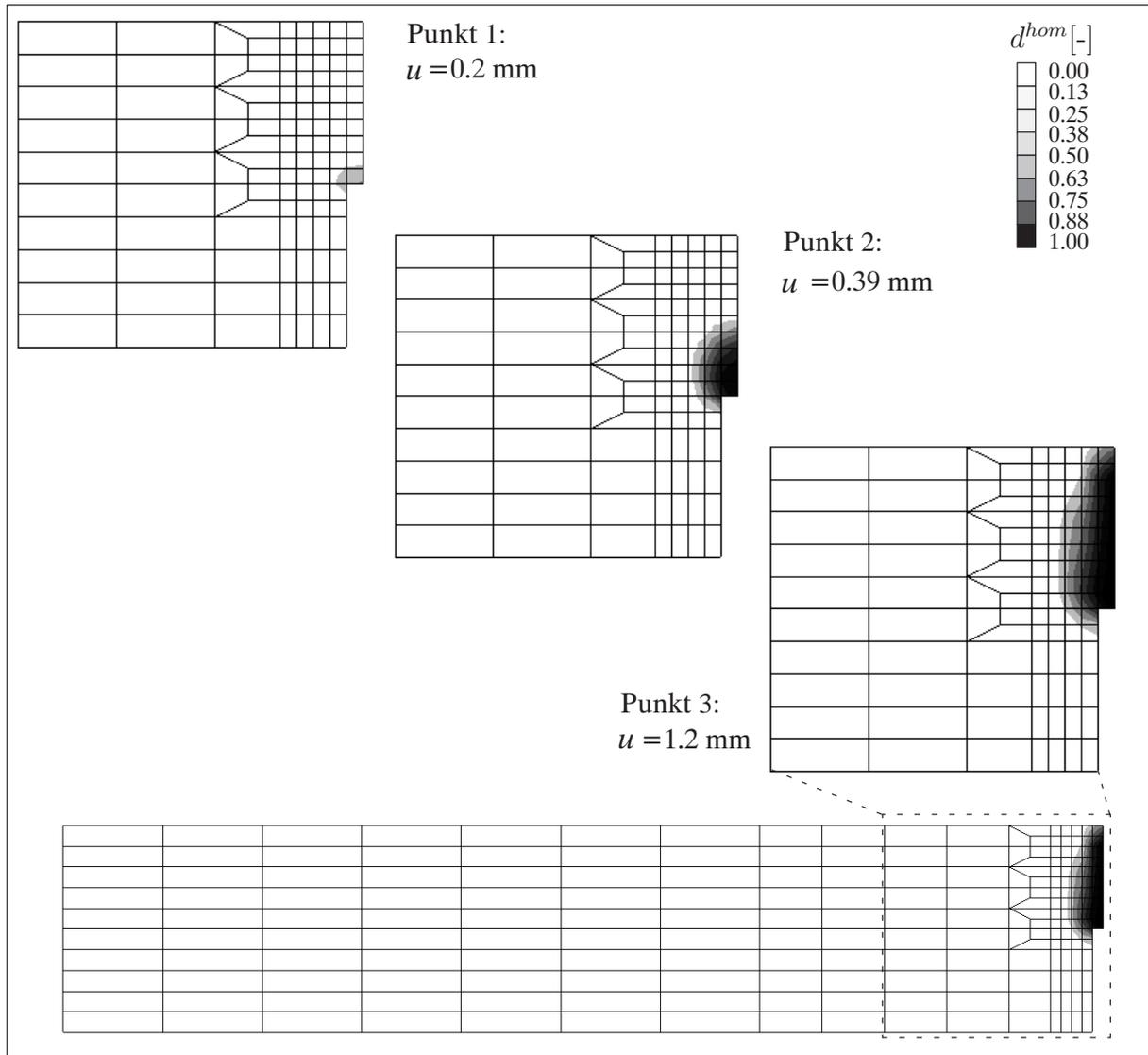


Abbildung 8.6: Schädigungsentwicklung

Abschließend sind in Abbildung 8.7 die unverformte und verformte Struktur gegenübergestellt. Die Deformationen bei einer Vertikalverschiebung von  $u = 1.2 \text{ mm}$  in Balkenmitte sind in 200-facher Überhöhung dargestellt. Die deformierte Struktur unterstreicht die anhand der Schädigungsentwicklung gemachten Beobachtungen über das Versagen des

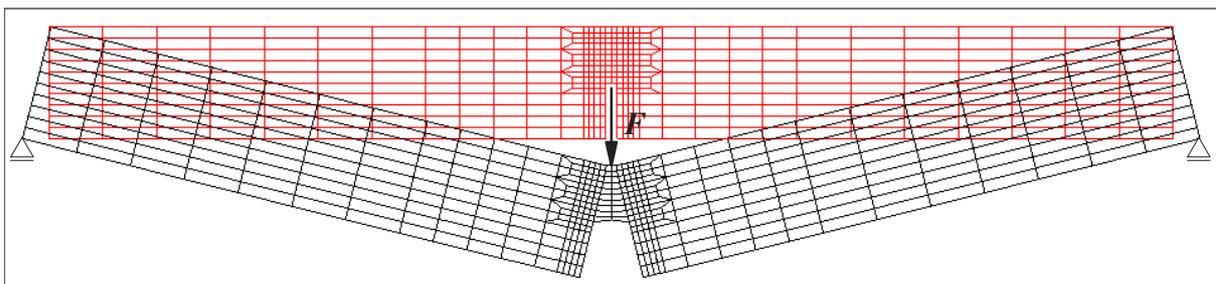


Abbildung 8.7: Deformierte Struktur

Dreipunktbiegebalkens.

### 8.1.3 L-förmige Scheibe

Die bisherigen Beispiele weisen die für kohäsive Reibungsmaterialien unter Zugbeanspruchung, in den beschriebenen Fällen Beton, typischen Mode I Versagensformen auf. Dagegen kommt es in den folgenden beiden Beispielen zu komplexen, gemischten Zug- und Schubversagensformen, so genanntes *Mixed-Mode Fracture*. Das bedeutet: Die komplexen Versagensformen dieser Strukturen sind durch eine Kombination von Mode I und Mode II Versagen gekennzeichnet. Als erstes Beispiel wird eine L-förmige Scheibe aus unbewehrtem Beton mit Hilfe des gradientenerweiterten Microplane Schädigungsmodells untersucht. Das Strukturbeispiel der L-förmigen Scheibe avancierte in jüngster Zeit zu einem populären Benchmarkproblem, siehe beispielsweise [107, 123, 133, 157, 227]. Das komplexe Nachbruchverhalten und die in diesem Benchmarkproblem beobachtbaren, vielschichtigen Versagensphänomene eignen sich insbesondere zur Verifikation des für die numerische Simulation von unbewehrtem Beton postulierten Materialmodells.

Die zugrunde gelegten Versuchsergebnisse stammen aus Experimenten an unbewehrten und bewehrten Betonwinkeln, die im Labor des Instituts für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre der Universität Innsbruck durchgeführt wurden, vergleiche *Winkler* [227]. Die Abmessungen der Versuchskörper wurden entsprechend dem von *Huemer* [107] und *Lackner* [133] numerisch untersuchten Beispiel festgelegt und sind in Abbildung 8.8 zusammengestellt. Der horizontale und der vertikale Schenkel besitzen beide eine Länge von 500 mm und eine Höhe von 250 mm. Die Dicke der Betonwinkel beträgt 100 mm. Die untersuchten Betonwinkel weisen am horizontalen Rand des vertikalen Schenkels eine unverschiebliche Lagerung auf. Am vertikalen Rand des horizontalen Schenkels wurde eine gleichförmige vertikale Verschiebung aufgebracht. Die Last wurde dabei über einen

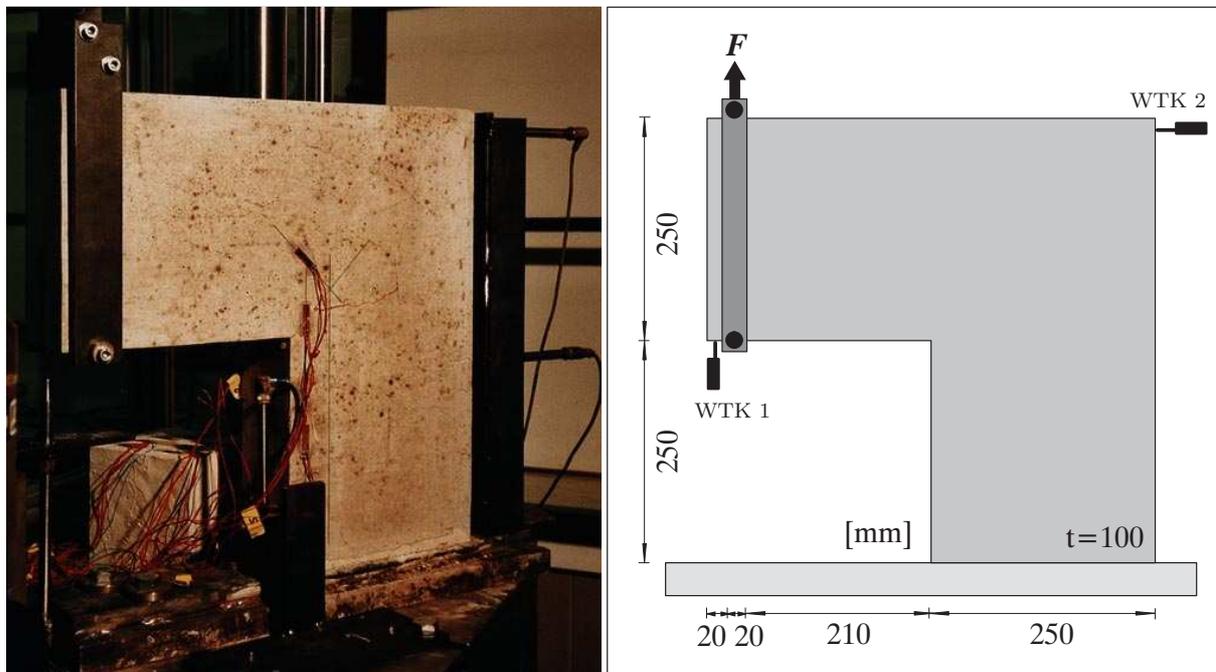


Abbildung 8.8: Versuchsaufbau (Quelle: *Winkler* [227])

Stahlstab mit einem Durchmesser von 20 mm, der in einer halbkreisförmigen Aussparung am unteren Rand des horizontalen Schenkels eingepasst wurde, eingeleitet. Die Versuche wurden weggesteuert durchgeführt. Das Versuchsprogramm umfasste Untersuchungen an unbewehrten und bewehrten Betonwinkeln. In dieser Arbeit sollen nur die Ergebnisse der unbewehrten Betonwinkeln herangezogen werden. Um die Aussagekraft der experimentellen Ergebnisse garantieren zu können, wurden jeweils drei identische Betonwinkel untersucht. Zur Messung der vertikalen Verschiebung  $u_y$  des Lasteinleitungspunktes und der horizontalen Verschiebung  $u_x$  des oberen Randes der rechten Seite wurden induktive Wegaufnehmer WTK 1 und WTK 2 angebracht. Ein besonderes Augenmerk wurde bei der Auswertung der experimentellen Ergebnisse auf die Bestimmung der Materialparameter gelegt, wie beispielsweise der Elastizitätsmodul, die Querdehnzahl oder die Zug- und Druckfestigkeit. Des Weiteren findet sich in *Winkler* [227] eine detaillierte Dokumentation der jeweiligen Rissbilder der Vorder- und Rückseite der untersuchten Betonwinkel. Zur Verdeutlichung des Versuchsaufbaus ist in Abbildung 8.8 ein in die Prüfmaschine eingebauter Betonwinkel dargestellt. Eine ausführliche Zusammenstellung und Dokumentation des Versuchsaufbaus, der Versuchsergebnisse und der Betonzusammensetzung sind in *Winkler* [227] bereitgestellt. Neben den Experimenten wurden von *Winkler* [227] auch numerische Untersuchungen basierend auf dem elasto-plastischen Werkstoffmodell von *Feenstra* [84] durchgeführt.

Für die numerische Simulation des Tragverhaltens der Betonwinkel auf der Grundlage der Finite Element Methode wird das gradientenerweiterte Microplane Schädigungsmodell herangezogen. In Abbildung 8.9 sind die erforderlichen Materialparameter angegeben. Die elastischen Materialparameter werden in Analogie zu den experimentellen Werten von *Winkler* [227] gewählt. Wiederum wurden das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit mit  $k = 10$  und der Gradientenparameter mit  $c = 1 \text{ mm}^2$  festgelegt. Um das komplexe Tragverhalten, insbesondere in der Nähe der Risswurzel, richtig abbilden zu können, ist in diesem Bereich eine sehr feine Diskretisierung erforderlich. Numerische Untersuchungen einer L-förmigen Scheibe mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen von *Kuhl* [123]

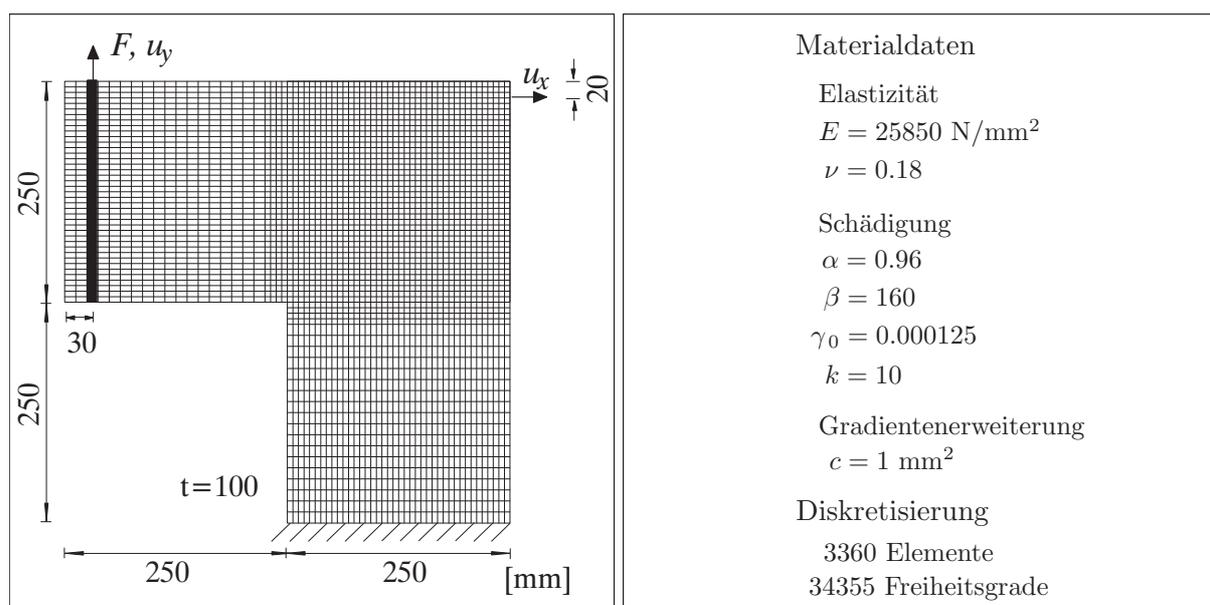


Abbildung 8.9: Diskretisierung und Systemdaten

auf der Basis eines gradientenerweiterten makroskopischen Schädigungsmodells haben gezeigt, dass sich mit einer entsprechend feinen Diskretisierung die in den Experimenten festgestellte Richtungsänderung des Risses abbilden lässt. In Analogie zur feinsten Diskretisierung in *Kuhl* [123] wird im Folgenden die L-förmige Scheibe mit 3360 achtknotigen Elementen mit insgesamt 34355 Freiheitsgraden diskretisiert, siehe Abbildung 8.9. Des Weiteren lieferten entsprechend feine Diskretisierungen netzunabhängiges Antwortverhalten, vergleiche hierzu auch *Kuhl* [123]. Somit ist die Objektivität des verwendeten gradientenerweiterten Microplane Schädigungsmodells bezüglich der gewählten Diskretisierung gewährleistet. Entsprechend den Versuchen handelt es sich bei den durchgeführten Simulationen durch Vorgabe der vertikalen Verschiebung des Lasteinleitungspunktes um verschiebungsgesteuerte Berechnungen.

In Abbildung 8.10 sind die numerisch und experimentell ermittelten Materialantworten der unbewehrten Betonwinkel gegenübergestellt. Das linke Schaubild zeigt die Last-Verschiebungsdiagramme für die vertikale Verschiebung  $u_y$  des Lasteinleitungspunktes und das rechte Schaubild die Last-Verschiebungsdiagramme für die horizontale Verschiebung  $u_x$  des oberen Randes der rechten Seite. Das Spektrum der vertikalen und horizontalen Materialantworten aus den Versuchen mit drei identischen Probekörpern ist in Abbildung 8.10 grau hinterlegt. Beide gemessenen Verschiebungen  $u_y$  als auch  $u_x$  können mit dem Microplane Modell ausreichend genau abgebildet werden. Insgesamt ist das verwendete Microplane Modell sehr gut in der Lage die gesamte Materialantwort der Experimente zu erfassen. Das bedeutet: Nicht nur die Traglast, sondern auch das Nachbruchverhalten und letztendlich die Resttragfähigkeit der Versuchsantworten werden durch die numerisch ermittelten Antworten ausreichend genau wiedergegeben.

Zur Darstellung des simulierten Bruchverhaltens sind in Abbildung 8.11 die deformierten Strukturen in 50-facher Überhöhung zu vier Belastungszeitpunkten (Punkt 1: Einsetzen der Schädigung, Punkt 2: Erreichen der Traglast, Punkt 3: Nachbruchbereich und Punkt 4: Am Ende der Belastungsgeschichte) abgebildet. Vor Erreichen der Traglast ist eine gleichmäßige vertikale Verformung des horizontalen Schenkels zu beobachten. Dagegen beginnen sich die Deformationen im Bereich der einspringenden Ecke nach Erreichen der Traglast zu lokalisieren. Mit zunehmender Belastung ändert die Lokalisierungszone ihre

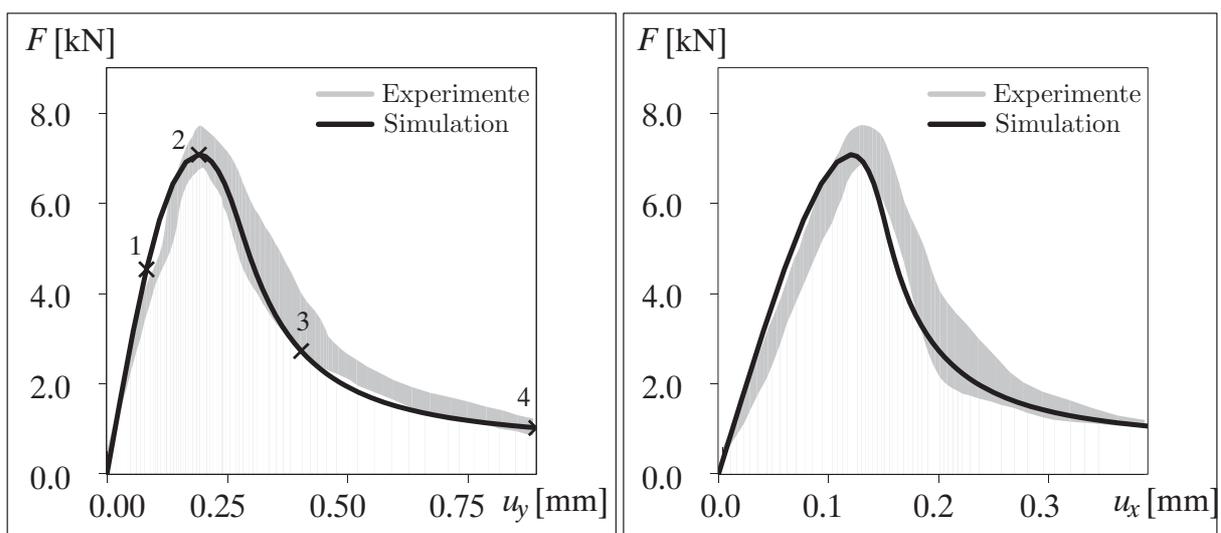


Abbildung 8.10: Last-Verschiebungskurven

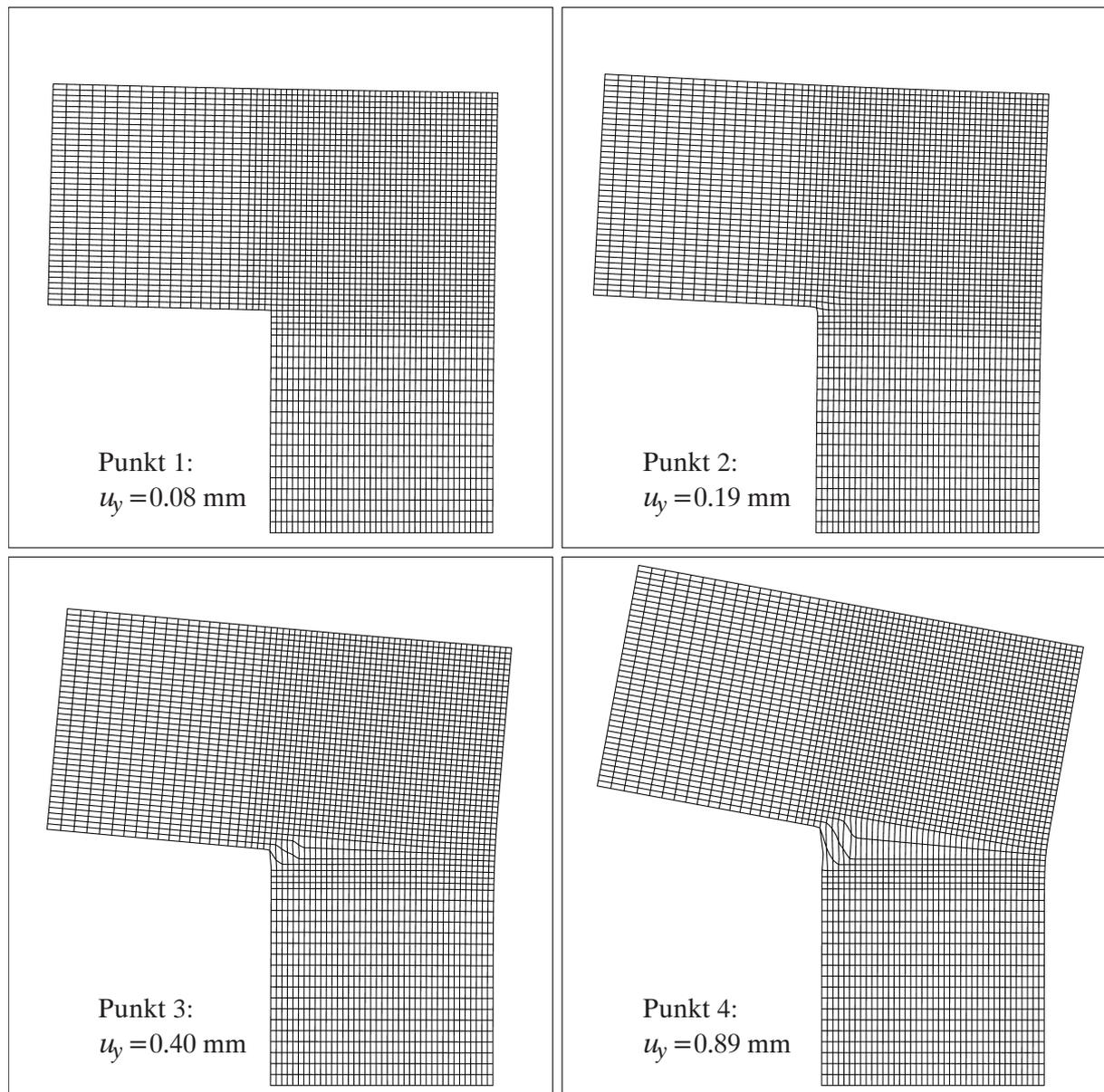


Abbildung 8.11: Deformationsentwicklung

Richtung und schreitet dann nahezu horizontal in Richtung des gegenüberliegenden Randes der L-förmigen Scheibe fort.

Zusätzlich zur Deformation wird das Rissverhalten mit Hilfe der auftretenden Schädigung beschrieben. In Abbildung 8.12 sind die Schädigungsverteilungen zu denselben vier Belastungszeitpunkten dargestellt. Die Schädigung beginnt in den Elementen an der einspringenden Ecke. Dabei wird ein Riss initiiert der gegen die Horizontale geneigt ist. Mit zunehmender Belastung wächst die Schädigungszone an der einspringenden Ecke stetig an und ändert in einiger Entfernung zur Risswurzel ihre Richtung. Danach breitet sich die Schädigungszone in horizontaler Richtung zum rechten Scheibenrand aus und mündet letztendlich in einem horizontalen Rissverlauf.

Zur Verifikation des numerisch ermittelten Tragverhaltens der L-förmigen Scheibe werden die experimentellen Rissverläufe mit der Verteilung der Materialschädigung am Ende der

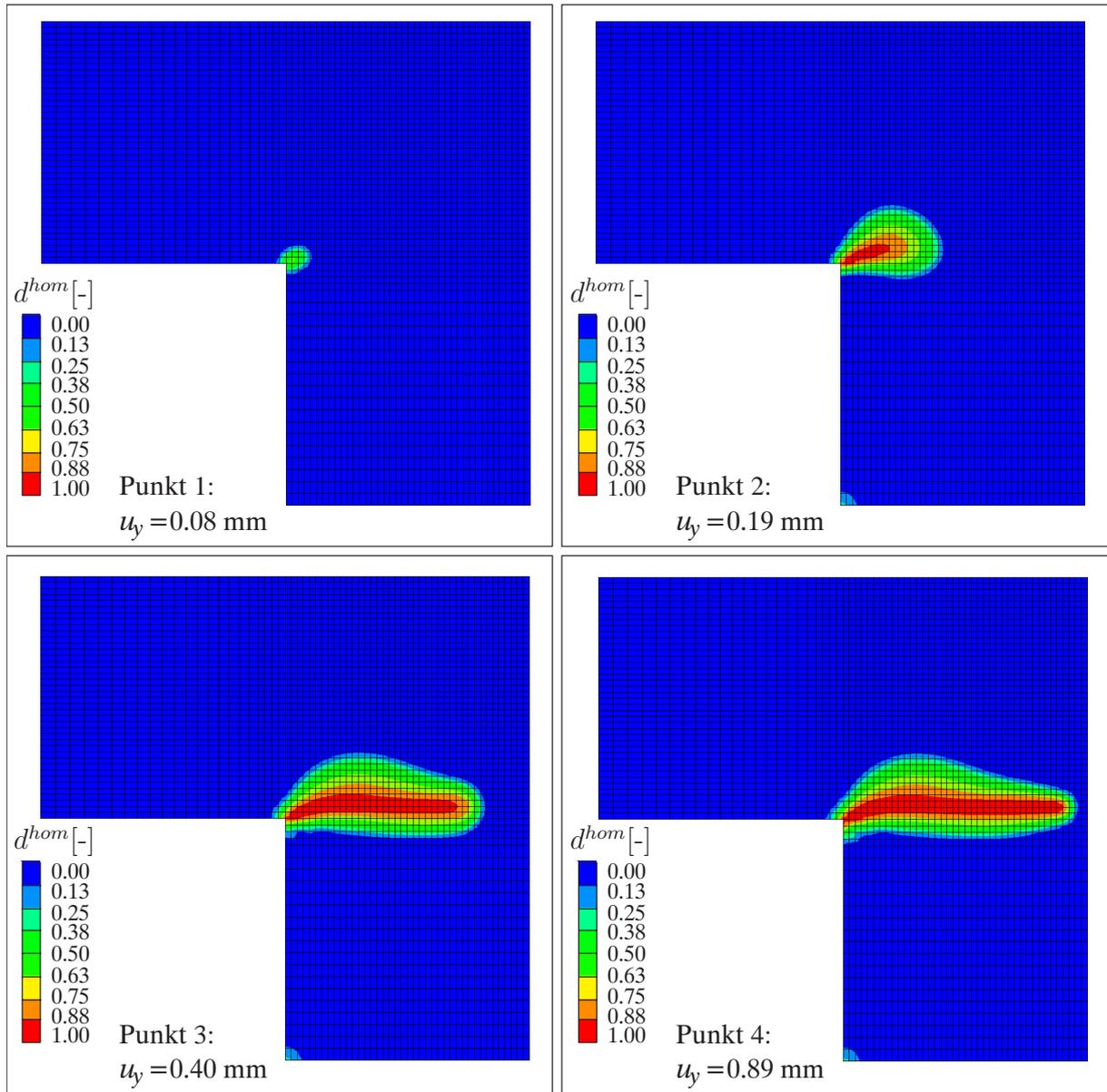


Abbildung 8.12: Schädigungsentwicklung

Belastungsgeschichte verglichen. Bei entsprechend feiner Diskretisierung wird die in den Experimenten beobachtete Richtungsänderung des Risses ausreichend genau erfasst. Die Detailansicht der ermittelten Schädigungsverteilung in Abbildung 8.13 dokumentiert diesen Sachverhalt. In Analogie zu den Versuchen liefert das Microplane Modell am Ende der Belastungsgeschichte eine im Vergleich zum unteren Rand des horizontalen Schenkels vertikal verschobene Versagenszone. Die gute Übereinstimmung zwischen der Schädigungszone der Simulation und dem experimentellen Rissmuster in Abbildung 8.13 unterstreicht nochmals, dass die verwendete gradientenerweiterte Microplane Schädigungsformulierung in der Lage ist, die experimentell beobachteten komplexen Versagensphänomene wiederzugeben.

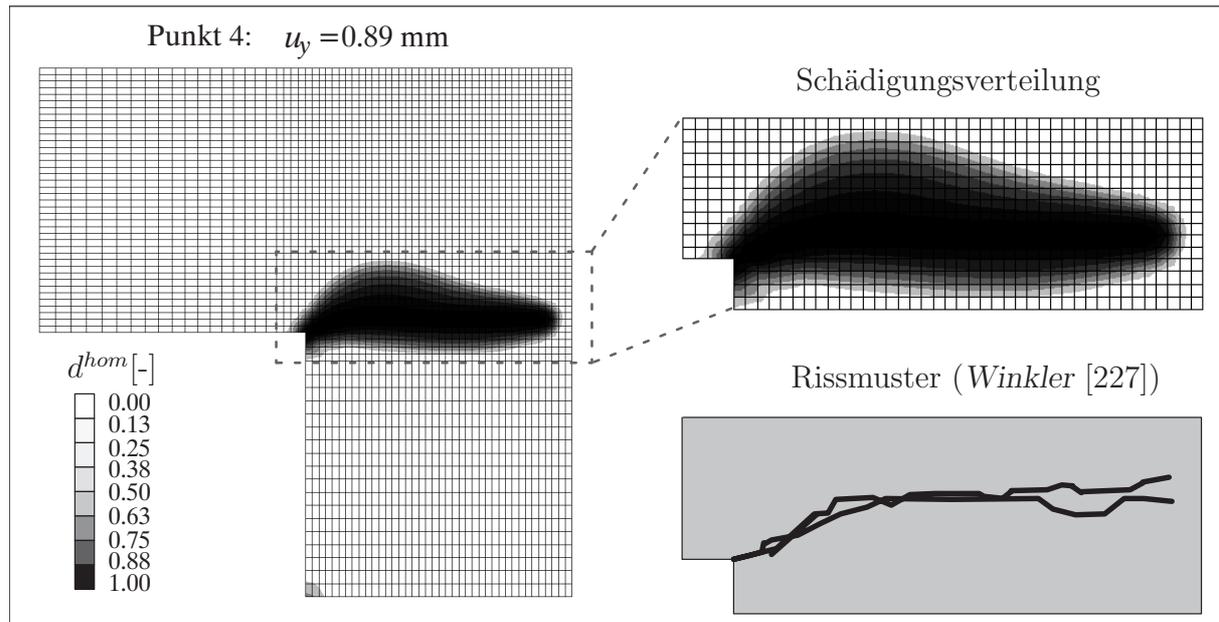


Abbildung 8.13: Schädigungsverteilung und experimentelle Rissmuster

#### 8.1.4 Single-Edge-Notched Beam (SEN)

Abschließend wird die Wirkungsweise der gradientenerweiterten Microplane Schädigungsformulierung anhand eines weiteren Benchmarkproblems für *Mixed-Mode Fracture* von Beton untersucht, nämlich dem *Single-Edge-Notched Beam* (SEN). Dieses Benchmarkproblem ist für metallische Werkstoffe auch unter dem Namen *Iosipescu Beam* bekannt. In den 1980er Jahren übertrugen *Arrea & Ingraffea* [7] dieses Beispiel auf den Werkstoff Beton.

Das Verhalten eines makroskopischen gradientenerweiterten Schädigungsmodells in diesem Benchmarkproblem wurde in den letzten Jahren intensiv von der Gruppe um *de Borst & Peerlings* [69, 90, 182, 183] diskutiert und untersucht. Dieses Modell bildete die Grundlage für den Abgleich der Microplane Stoffgesetze und stellt das makroskopische Gegenstück zum verwendeten Microplane Modell dar, vergleiche Abschnitt 7.2.2. Die in diesen Aufsätzen und in dieser Arbeit zugrunde gelegten experimentellen Ergebnisse gehen auf die von *Schlagen* [202] durchgeführten Versuche zurück. Dieser führte auch numerische Untersuchungen mit einem *Lattice Model* durch.

Der  $440 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$  große Balken mit einer Kerbe von  $5 \times 20 \text{ mm}^2$  unter antisymmetrischen Belastungsbedingungen, entsprechend den Experimenten von *Schlagen* [202], ist in Abbildung 8.14 dargestellt. Der Balken wurde mit 1326 achtknotigen Elementen diskretisiert, vergleiche Abbildung 8.16. Die Elemente um die Kerbe besitzen eine Elementbreite von 2.5 mm. Die beiden 20 mm großen Lastplatten in der Mitte des Balkens wurden als starre Körper modelliert, indem die Knotenverschiebungen aneinander gekoppelt wurden. Da die Lastplatten am linken und rechten Rand des Balkens keinen signifikanten Einfluss auf die Materialantwort besitzen, werden diese als Einzellager bzw. Knotenkraft modelliert. Die elastischen Materialeigenschaften werden entsprechend den Experimenten von *Schlagen* [202] durch folgende Werte charakterisiert:  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0.15$ . Das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit beträgt  $k = 10$  und die Parameter für die Evolution der Schädigung werden zu  $\beta = 80$ ,  $\alpha = 0.96$  und  $\gamma_0 = 0.00007$  angenommen.

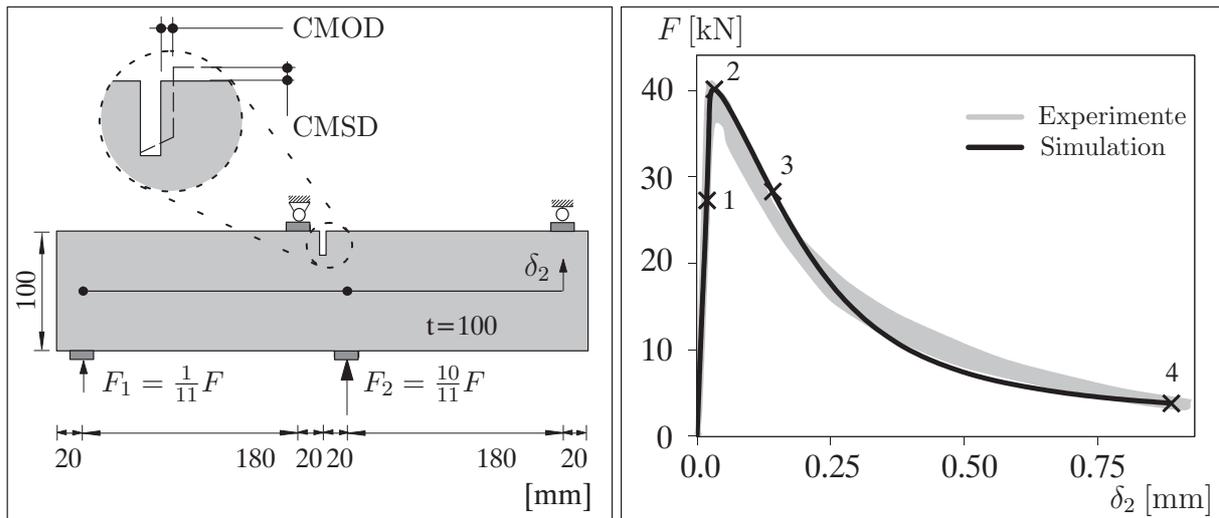


Abbildung 8.14: Geometrie und Last-Verschiebungskurven des SEN Balkens

Der Einflussbereich der Gradientenerweiterung wird durch den Gradientenparameter mit  $c = 1 \text{ mm}^2$  bestimmt.

In komplexen Versuchen wie dem betrachteten SEN Balken ist es nicht möglich das Materialverhalten durch eine einzige Last-Verschiebungskurve zu erfassen. Deshalb werden im Folgenden drei unterschiedliche Verformungsparameter betrachtet, die auch in den Experimenten von *Schlagen* [202] gemessen wurden. Die numerisch und experimentell ermittelten Materialantworten sind in den Abbildungen 8.14 und 8.15 gegenübergestellt. Die schwarzen Kurven repräsentieren die Simulationsergebnisse des Microplane Modells und die grau dargestellten Bereiche symbolisieren das Antwortverhalten in den von *Schlagen* [202] durchgeführten Experimenten. In Abbildung 8.14 ist die Last  $F$  gegenüber dem Verformungsparameter  $\delta_2$  aufgetragen. Dieser Verformungsparameter ergibt sich aus der vertikalen Verschiebung am rechten Auflager eines auf den Balken mittig oberhalb der unteren beiden Lasteinleitungspunkten angeklebten Stahlstabes. Des Weiteren sind in Abbildung 8.15 zwei weitere Verformungsparameter gegenüber der Last  $F$  aufgetragen. Zum einen ist dies das gegenseitige vertikale Verschieben der beiden oberen Eckpunkte der Kerbe, *Crack Mouth Sliding Displacements* (CMSD) genannt, und zum anderen das horizontale Auseinanderklaffen dieser beiden Eckpunkte, *Crack Mouth Opening Displacements* (CMOD) genannt, vergleiche Abbildung 8.14. Ein Vergleich der experimentell und numerisch ermittelten Last-Verschiebungskurven zeigt, dass nicht nur die Traglast relativ gut getroffen wird, sondern auch das Nachbruchverhalten durch das Microplane Modell im Großen und Ganzen gut erfasst wird. Alle numerisch ermittelten Last-Verschiebungskurven liegen innerhalb der in den Versuchen gemessenen Bereiche. Die Ausnahme bildet ein kleiner Bereich im Last-CMOD Diagramm kurz nach Überschreiten der Traglast. Insgesamt gibt das numerische Modell die gemessenen Last-Verformungscharakteristiken sehr gut wieder.

Die Entwicklung der Schädigung ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Dabei werden vier Schädigungsverteilungen zu unterschiedlichen Belastungszeitpunkten gezeigt, die im Last-Verschiebungsdiagramm in Abbildung 8.14 markiert sind (Punkte 1 bis 4). Demnach beginnt die Schädigung an der rechten unteren Ecke der Kerbe und gegenüber dem mittleren Lager. Während an der Kerbe ein Schubriss unter einem Winkel von etwa  $45^\circ$  initiiert

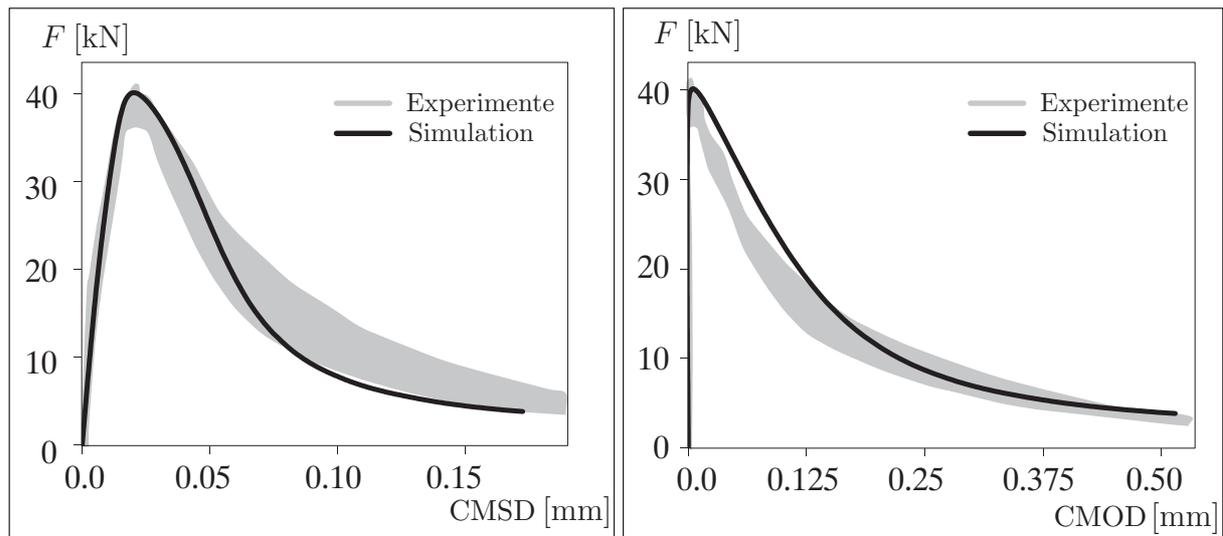


Abbildung 8.15: Last-CMSD und Last-CMOD Diagramme

wird, stagniert die Schädigung infolge Biegung gegenüber dem mittleren Lager mit zunehmender Belastung. Die in der numerischen Simulation auftretende Schädigung gegenüber dem mittleren Lager infolge der Biegebeanspruchung kann durch Beobachtungen in den Experimenten bestätigt werden. Wie in *de Borst, Geers & Peerlings* [69] berichtet wird, treten in den Versuchen tatsächlich einige Risse in diesem Bereich auf. Wird die Belastung weiter gesteigert, so wächst die Schädigungszone um die Kerbe stetig an und ändert mit Belastungszunahme ihre Richtung. Die Schädigungszone geht dann in einen gekrümmten Verlauf über und endet schließlich rechts von der unteren Lastplatte in einem vertikalen Biegeriss. Abbildung 8.17 zeigt eine vergrößerte Darstellung der Schädigungsverteilung in der Mitte des Balkens zum letzten Lastschritt und verdeutlicht den für diesen Benchmark typischen gekrümmten Rissverlauf, der auch in den Experimenten beobachtet wird. Zusätzlich ist in Abbildung 8.17 die Schädigungsverteilung des Microplane Modells dem Rissbild aus den Experimenten von *Schlangen* [202] gegenübergestellt. Man erkennt, dass die in den Experimenten beobachteten Risse innerhalb der numerisch ermittelten Schädigungszone liegen und somit eine ausreichend gute Übereinstimmung zwischen den Experimenten und der Simulation vorliegt. Zusammenfassend lässt sich das Versagen des Balkens folgendermaßen beschreiben. Das Versagen des Balkens wird in den Experimenten sowie auch in der Simulation durch ein Mode II Schubversagen an der Kerbe initiiert und geht mit zunehmender Belastung in ein Mode I Biegezugversagen über. Der Balken versagt dementsprechend mit einem kombinierten Schub-/Zugbruch.

Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die Wahl der äquivalenten Verzerrungen im Schädigungsmodell einen entscheidenden Einfluss auf den Schädigungsverlauf und somit auf den numerisch ermittelten Rissverlauf besitzt, vergleiche hierzu *Peerlings, de Borst, Brekelmans & Geers* [183]. Wenn beispielsweise der Einfluss der Druck- oder Schubverzerrungskomponenten in den äquivalenten Verzerrungen zu groß ist, wie in der normalisierten Definition von *Simo & Ju* (B.3) oder der Definition von *Mazars* (B.5), so wird der gekrümmte Rissverlauf nicht richtig wiedergegeben. Für den Fall der Definition von *Mazars* (B.5) entsteht ein geradliniger Riss, der an der Kerbe initiiert wird und links von der unteren Lastplatte endet, siehe *Peerlings, de Borst, Brekelmans & Geers* [183]. Abbildung 8.18 zeigt die deformierte Struktur zum letzten Lastschritt mit 60-facher Über-

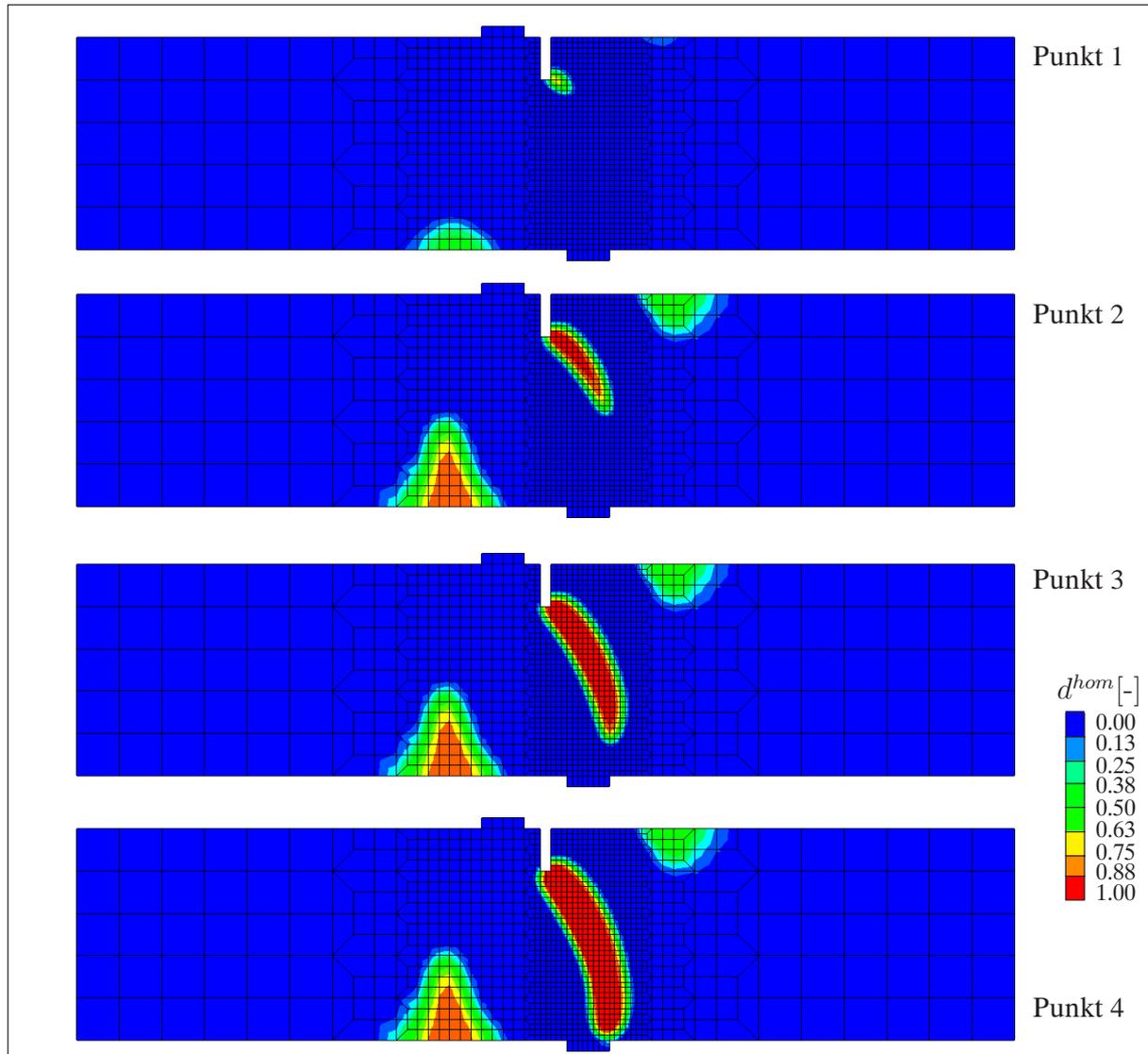


Abbildung 8.16: Schädigungsentwicklung des SEN Balkens

höhung. Die deformierte Struktur spiegelt den gekrümmten Rissverlauf sehr gut wieder. Die Verformungen sowie auch die Schädigung in Abbildung 8.17 lokalisieren in einem Band, das sich über mehrere Elemente erstreckt. Die Materialantwort ist durch die Gradientenerweiterung bei ausreichend feiner Diskretisierung unabhängig von der Elementgröße. Untersuchungen von *de Borst, Geers & Peerlings* [69] mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen für das makroskopische gradientenerweiterte Schädigungsmodell bestätigen diese Beobachtung. Weiterhin zeigt der gekrümmte Rissverlauf, dass die Schädigungsentwicklung und somit die Rissentwicklung unabhängig von der Orientierung der gewählten Diskretisierung ist.

Im Unterschied zu makroskopischen Materialformulierungen liefert das Microplane Modell zusätzliche Informationen über das Materialverhalten. Diese ergeben sich aus einer Betrachtung der Materialantworten auf den einzelnen Mikroebenen. Im Folgenden soll dies ausgenutzt werden, um tiefere Einblicke in das Materialverhalten zu gewährleisten und um die entstehende Anisotropie näher zu charakterisieren. Dazu wird die räumliche Verteilung der Schädigung auf den verschiedenen Mikroebenen an sechs verschiedenen

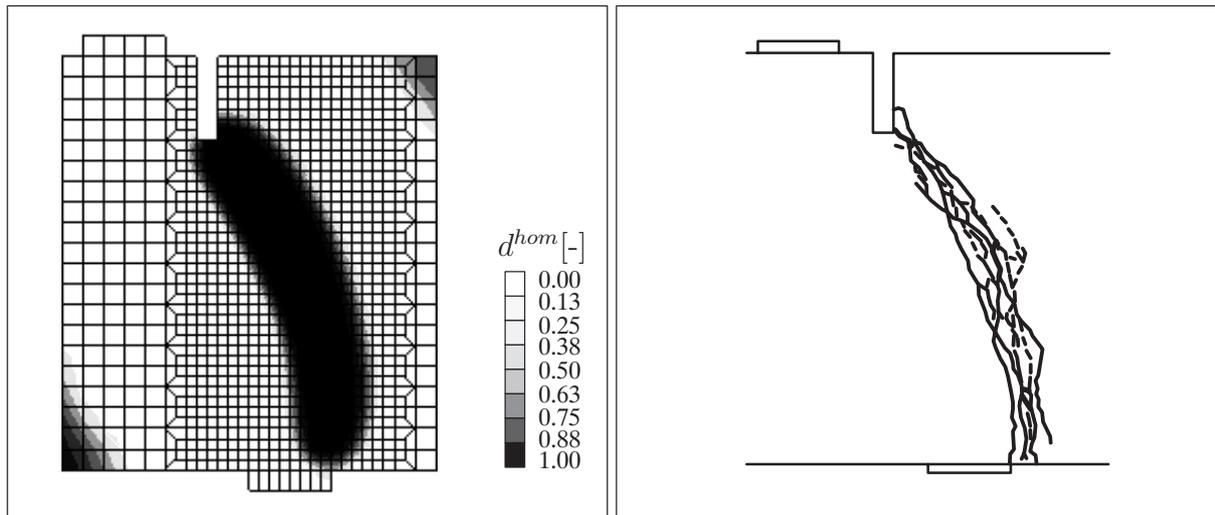


Abbildung 8.17: Schädigungsverteilung und experimentelle Rissmuster [202]

Materialpunkten innerhalb des Balkens betrachtet. Vier dieser Punkte liegen innerhalb der gekrümmten Schädigungszone und die beiden restlichen Punkte befinden sich in den Schädigungszone gegenüber den mittleren Lastplatten. Wie schon erwähnt stagniert ab einer bestimmten Belastung das Schädigungswachstum in den Bereichen gegenüber den mittleren Lastplatten. Dagegen wächst die gekrümmte Schädigungszone kontinuierlich an. Die räumliche Verteilung der Schädigungsvariablen für die gewählten Materialpunkte zu unterschiedlichen Belastungszeitpunkten sind in Abbildung 8.19 dargestellt. Zur besseren Darstellung wurden die resultierenden Polyeder wiederum um ca.  $80^\circ$  zur Betrachtungsebene gedreht. Jeder dargestellte Polyeder illustriert die Schädigungsverteilung kurz nach dem Einsetzen der Schädigung an dem jeweiligen betrachteten Materialpunkt. Dabei bezeichnet die Farbe schwarz den maximalen Wert der Schädigung zum jeweiligen Betrachtungszeitpunkt der sechs ausgesuchten Punkte. Zu bemerken ist, dass sich dadurch die Skala der Schädigung von den bisher verwendeten Skalen unterscheidet. Wie man in Abbildung 8.19 erkennen kann ist die Schädigungsvariable ungleichförmig auf den

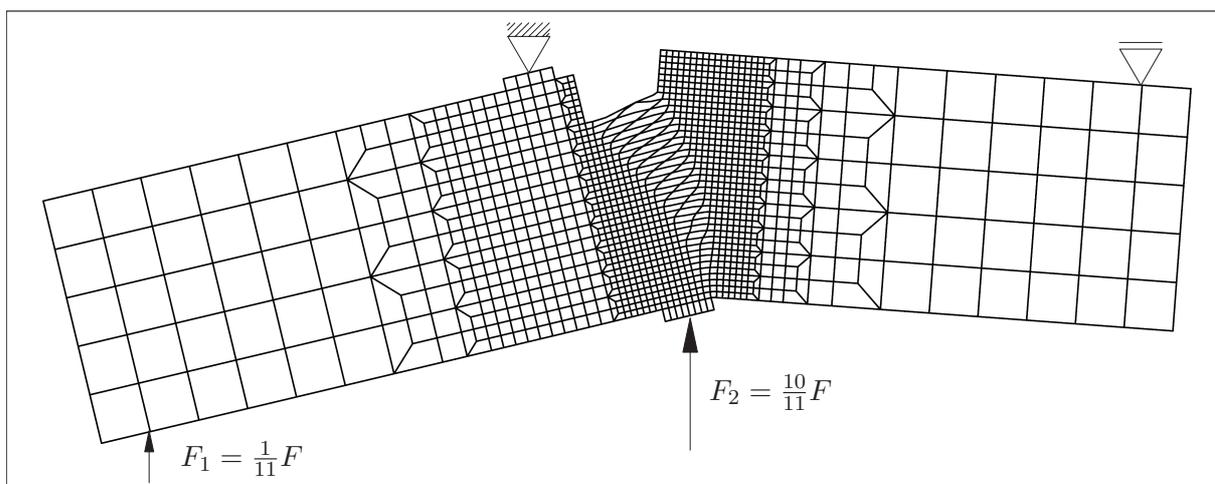


Abbildung 8.18: Deformierte Struktur

einzelnen Mikroebenen verteilt und weist somit eine anisotrope Entwicklung auf. Dabei können zwei unterschiedliche Versagensmechanismen auf der Mikroebene beobachtet werden: Zum einen Zugversagen und zum anderen Schubversagen. Diese Beobachtungen stimmen mit den Versagensmechanismen überein, die in den Modellproblemen einaxialer Zug und einfache Scherung des Microplane Schädigungsmodells in Abschnitt 5.2 festgestellt wurden. Der Versagensmechanismus Zugversagen ist durch ein eher lokalisiertes Versagen der in Belastungsrichtung angeordneten Mikroebenen charakterisiert. Im Unterschied dazu ist der Versagensmechanismus Schubversagen durch ein radiales Versagen der Ebenen des Nullmeridians bestimmt, vergleiche hierzu die Abbildungen 5.3 und 5.5. Die resultierenden Schädigungsverteilungen der beiden Punkte gegenüber den mittleren Lastplatten lassen sich demnach dem Versagensmechanismus Zugversagen zuordnen. Das erkennbare lokalisierte Versagen einzelner Ebenen ist auf die Biegebeanspruchung des Balkens und somit auf die daraus resultierenden Zugverzerrungen in diesen Bereichen zurückzuführen. Die Schädigungsverteilungen der Punkte innerhalb der gekrümmten Schädigungszone sehen dagegen anders aus. Der gekrümmte Riss wird wie schon erwähnt an der Kerbe unter einem Winkel von etwa  $45^\circ$  initiiert und als Folge davon setzt die Schädigung zuerst auf den Ebenen der resultierenden Polyeder ein, die in dieser Richtung angeordnet sind. Die beiden folgenden Punkte in der gekrümmten Schädigungszone weisen eine radiale

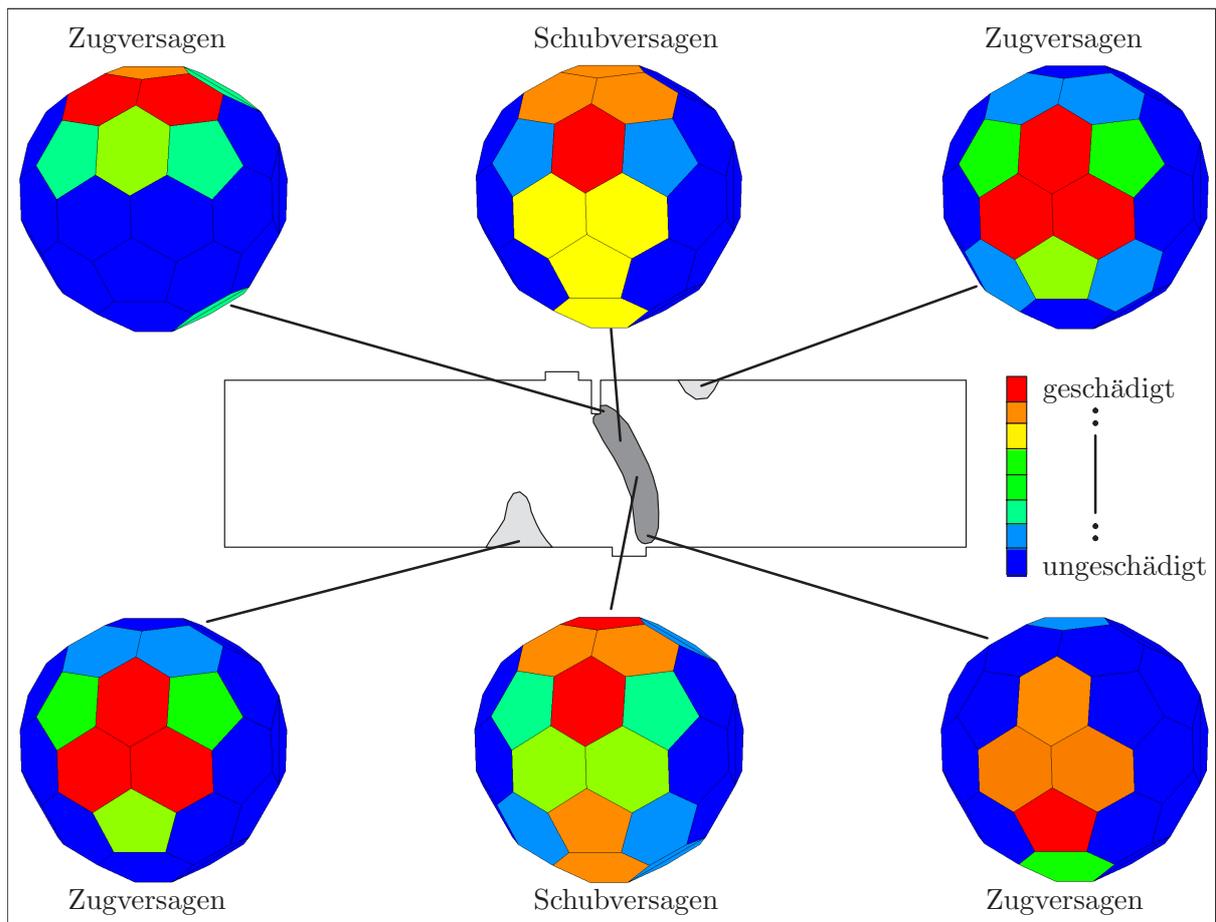


Abbildung 8.19: Schädigungsverteilung auf den einzelnen Mikroebenen an ausgesuchten Punkten kurz nach dem jeweiligen Einsetzen der dortigen Schädigung

Schädigungsverteilung auf und lassen sich dementsprechend dem Versagensmechanismus Schubversagen zuordnen. Am Ende der Belastungsgeschichte nimmt die Schädigung am noch nicht diskutierten sechsten Punkt wiederum eine eher lokalisierte Verteilung auf den Mikroebenen an. Entsprechend den an dieser Stelle in den Experimenten beobachteten vertikalen Biegezugrissen lässt sich auch in der Simulation anhand dieser lokalisierten Schädigungsverteilung ein Zugversagen am gewählten Punkt ablesen. Wie schon erwähnt wird das Versagen des Balkens durch ein Mode II Schubversagen an der Kerbe initiiert und geht mit zunehmender Belastung in ein Mode I Biegezugversagen über. Das beschriebene Versagensmuster spiegelt sich in den räumlichen Schädigungsverteilungen der ausgesuchten Punkte in Abbildung 8.19 wieder.

Die an den dargestellten Polyedern der unterschiedlichen Materialpunkten abzulesenden Versagensformen unterstreichen und bestätigen die experimentellen Beobachtungen über das Versagen des untersuchten Balkens. Damit bieten die gezeigten Microplane Simulationen die Möglichkeit komplexe Versagensformen zu visualisieren und zusätzlich die richtungsabhängige Degradation der mechanischen Materialeigenschaften Schritt für Schritt zu analysieren. Die richtungsabhängige Degradation anhand von Experimenten zu untersuchen ist dagegen nahezu unmöglich. Im Gegenteil zu makroskopischen Modellen gewährt das Microplane Modell tiefere Einblicke über die im Material auftretenden Versagensformen. Das verwendete Microplane Schädigungsmodell ist dementsprechend in der Lage, die in dem Benchmarkproblem beobachteten komplexen Versagensformen wiederzugeben. Es eignet sich zudem sehr gut zur Visualisierung der Evolution der auftretenden Anisotropien, die dem Beobachter in Experimenten versagt bleibt.

## 8.2 Gradientenerweiterte Microplane Schädigung gekoppelt mit Plastizität

Bisher wurde die Tauglichkeit der gradientenerweiterten Microplane Schädigungsformulierung zur Simulation des Tragverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien am Beispiel des Werkstoffes Beton bei monoton steigender Belastung untersucht. Im Folgenden soll das komplexe Tragverhalten kohäsiver Reibungsmaterialien unter zyklischer Belastung anhand der gradientenerweiterten kombinierten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierung entsprechend Abschnitt 5.4 analysiert werden. In dieser kombinierten Materialformulierung wird die Schädigung im Verzerrungsraum und die Plastizität im effektiven Spannungsraum definiert. Die Schädigung des Materials auf der Mikroebene wird durch die äquivalente Verzerrung des modifizierten von Mises Typs (7.29) getrieben. Die äquivalente Verzerrung wird dabei in Abhängigkeit der nichtlokalen elastischen Microplane Verzerrungen aufgestellt. Eine Formulierung basierend auf den nichtlokalen totalen Microplane Verzerrungen ist dabei in gleicher Weise denkbar. Dieser Ansatz liefert letztendlich vergleichbares Materialverhalten und soll an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden, vergleiche hierzu die Abschnitte 5.4, 6.3.2 und 7.4. Das plastische Verhalten auf der Mikroebene wird über das angepasste von Mises Fließkriterium  $\Phi_{pl}^{mic}$  (7.31) mit linearer Verfestigung (7.27) bestimmt. Des Weiteren wird von einer exponentiellen Schädigungsentwicklung nach Gleichung (5.77) ausgegangen.

### 8.2.1 Gekerbter Biegebalken

Zur Verifikation der gradientenerweiterten kombinierten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierung werden im Folgenden zyklische Biegeversuche an Balken aus Beton herangezogen. Dabei werden anstatt der klassischen Dreipunktbiegeversuche so genannte Vierpunktbiegeversuche als Vergleichslösung benutzt. Diese besitzen gegenüber den Dreipunktbiegeversuchen den Vorteil, dass Lastplatten bzw. Auflager außerhalb der Versagenszone angeordnet sind. Somit werden im Bereich der Versagenszone keine Druckspannungen durch die Lastplatten bzw. Auflager erzeugt und das Versagen des Balkens wird folglich nicht direkt von den Lagerbedingungen beeinflusst. Die Experimente an gekerbten Biegebalken aus Beton, die hier als Referenzlösung dienen, wurden von *Hordijk* [105] durchgeführt. Bei den untersuchten Probekörpern handelt es sich um mittig gekerbte Balken mit einer Länge von 500 mm, einer Höhe von 100 mm und einer Dicke von 50 mm. Der Abstand zwischen den Auflagern beträgt 450 mm, während der Abstand zwischen den Lasteinleitungspunkten mit 150 mm festgelegt wurde. *Hordijk* [105] führte Untersuchungen mit unterschiedlicher Kerbengeometrie durch. Zunächst sollen nur die Ergebnisse der Experimente an Balken mit einer Kerbengröße von  $5 \times 10 \text{ mm}^2$  betrachtet werden. Die genauen Abmessungen dieser Probekörper sind in Abbildung 8.20 dargestellt. In den Experimenten wurde die vertikale Verschiebung in Balkenmitte  $u$  sowie die horizontale Differenzverschiebung  $\delta$  zwischen vier Punkten links und rechts der Kerbe mittels Messaufnehmer gemessen, siehe Abbildung 8.20. Diese horizontalen Differenzverschiebungen sollen Aufschluss über die Deformationsverteilung im Bereich der Versagenszone geben. Die genaue Anordnung dieser vier Messaufnehmer mit einer Messlänge von  $l_{\text{mess}} = 35 \text{ mm}$  kann der Abbildung 8.20 entnommen werden.

Aus Symmetriegründen erfolgt die numerische Berechnung am halben System. Das halbe System wird mit 656 achtknotigen Elementen diskretisiert, siehe Abbildung 8.21. Die gradientenerweiterte Microplane Formulierung erfordert dafür 7284 Freiheitsgrade. Die Systemdaten sowie die Materialdaten des Balkens sind der Abbildung 8.21 zu entnehmen. Entsprechend den Experimenten ergeben sich der Elastizitätsmodul zu  $E = 40000 \text{ N/mm}^2$  und die Querdehnzahl zu  $\nu = 0.2$ . Das Verhältnis zwischen Druck- und Zugfestigkeit liegt wiederum bei  $k = 10$ . Der Gradientenparameter, der den Einflussbereich der nichtlokalen Formulierung festlegt, beträgt  $c = 4 \text{ mm}^2$ . Die Parameter, welche die Evolution der Schädigung charakterisieren, nehmen folgende Werte an:  $\beta = 450$ ,  $\alpha = 0.90$  und

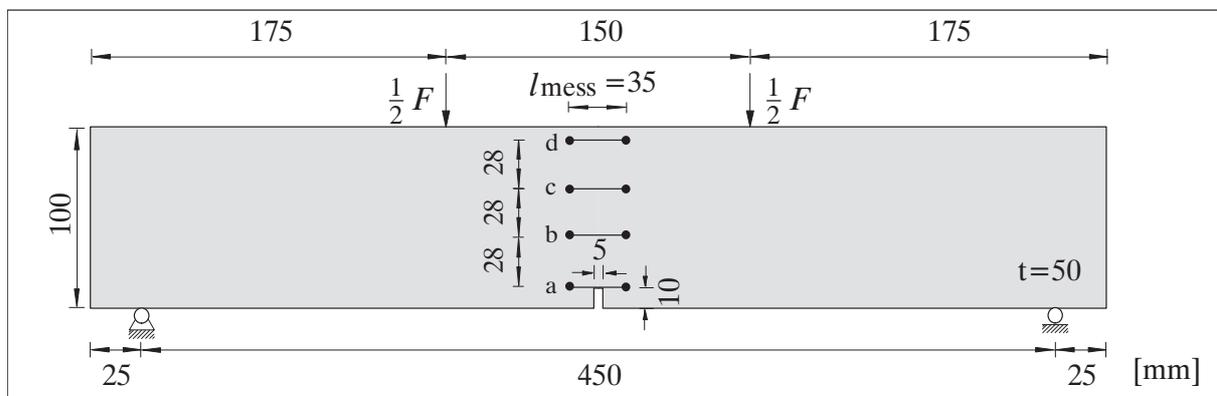


Abbildung 8.20: Abmessungen der Probekörper nach *Hordijk* [105]

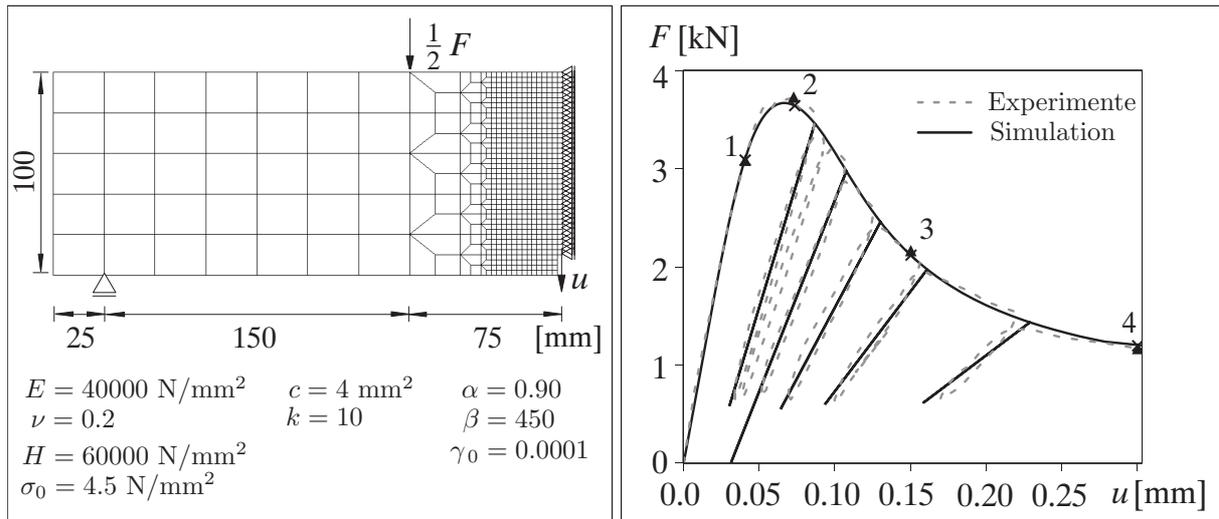


Abbildung 8.21: Systemdaten, Diskretisierung und Last-Verschiebungskurven

$\gamma_0 = 0.0001$ . Des Weiteren wird der Anfangswert der Fließspannung  $\sigma_0 = 4.5 \text{ N/mm}^2$  so gewählt, dass plastisches Fließen kurz nach Einsetzen der Schädigung beginnt. Der Verfestigungsmodul der Microplane Formulierung lautet  $H = \frac{3}{2}E = 60000 \text{ N/mm}^2$ . Abbildung 8.21 zeigt einen Vergleich der numerisch und experimentell ermittelten Last-Verschiebungsdiagramme unter zyklischer Belastung. Dabei ist erkennbar, dass die Antwort der numerischen Berechnung eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen aufweist. Sowohl die Traglast als auch das Nachbruchverhalten werden in der Simulation gut erfasst. Darüber hinaus wird auch das Ent- bzw. Wiederbelastungsverhalten der Balken durch die Kopplung von Schädigung und Plastizität im Materialmodell ausreichend genau wiedergegeben.

Die numerisch und experimentell ermittelten horizontalen Differenzverschiebungen  $\delta$  zwischen vier Punkten links und rechts der Kerbe (a bis d) sind in Abbildung 8.22 über die Balkenhöhe aufgetragen. Dabei werden die Deformationsverteilungen im Bereich der Versagenszone exemplarisch an vier Belastungszeitpunkten ausgewertet, die in den Last-Verschiebungsdiagrammen mit den Nummern 1 bis 4 markiert sind. Das linke Diagramm zeigt die Deformationsverteilungen bis zum Erreichen der Traglast für die Punkte 1 und

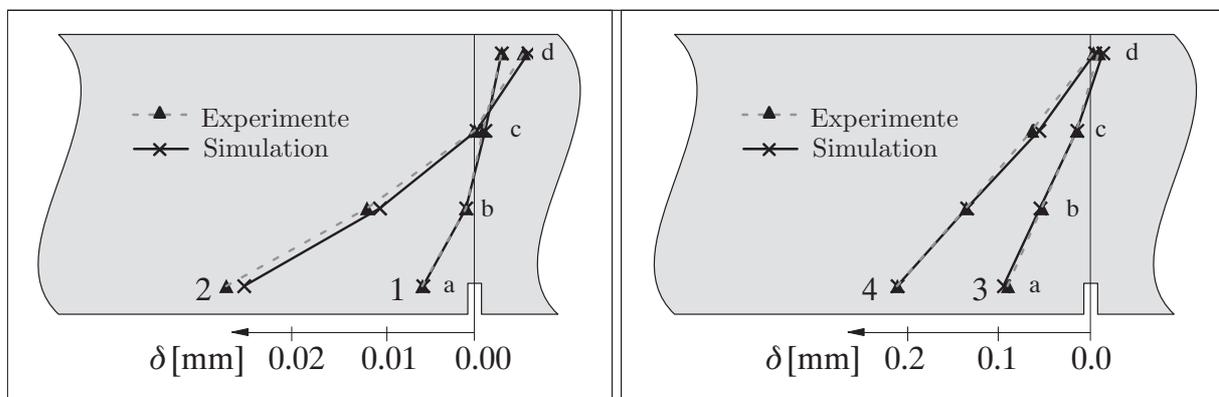


Abbildung 8.22: Deformationsverteilung

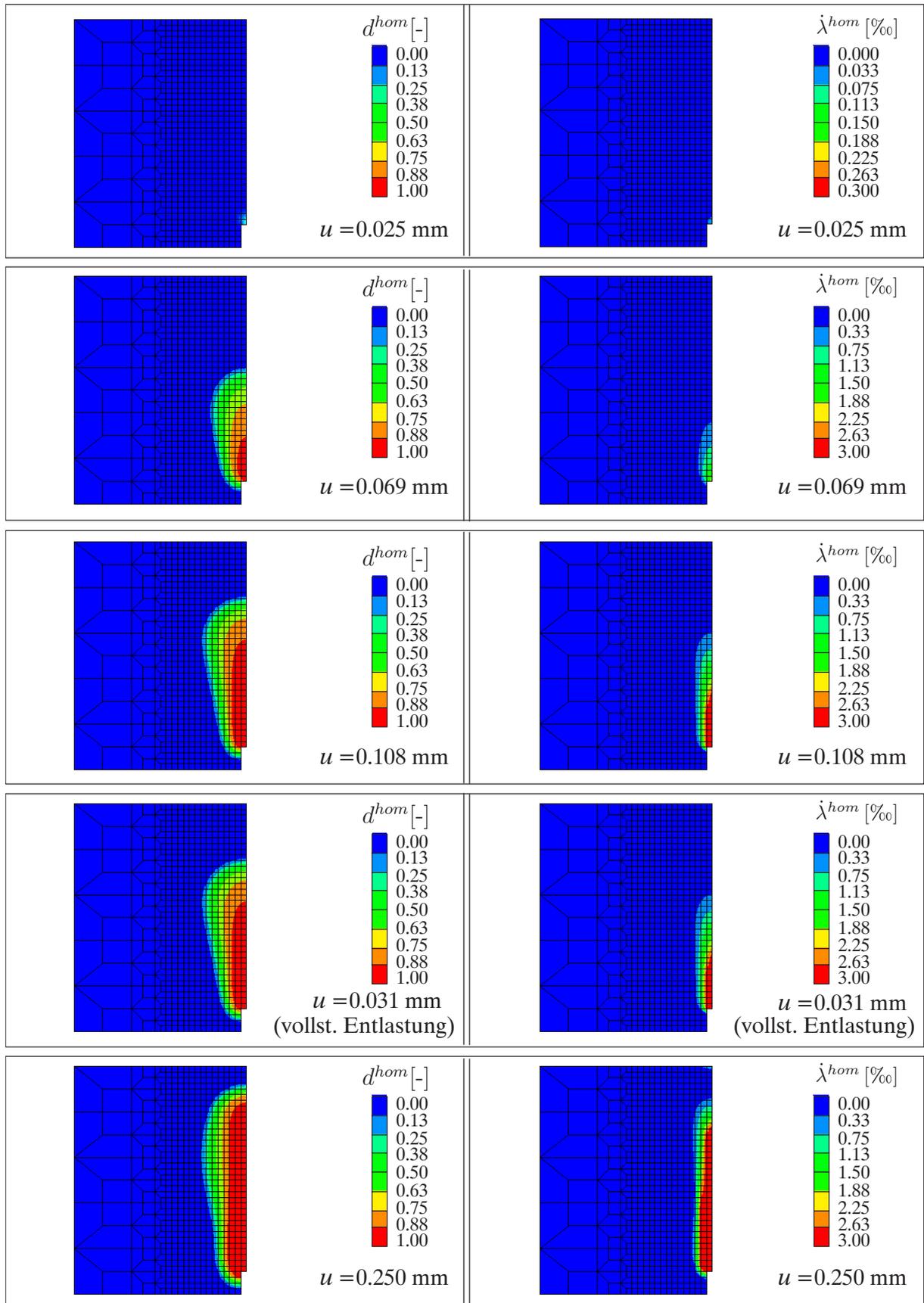


Abbildung 8.23: Entwicklung der Schädigung und des plastischen Multiplikators

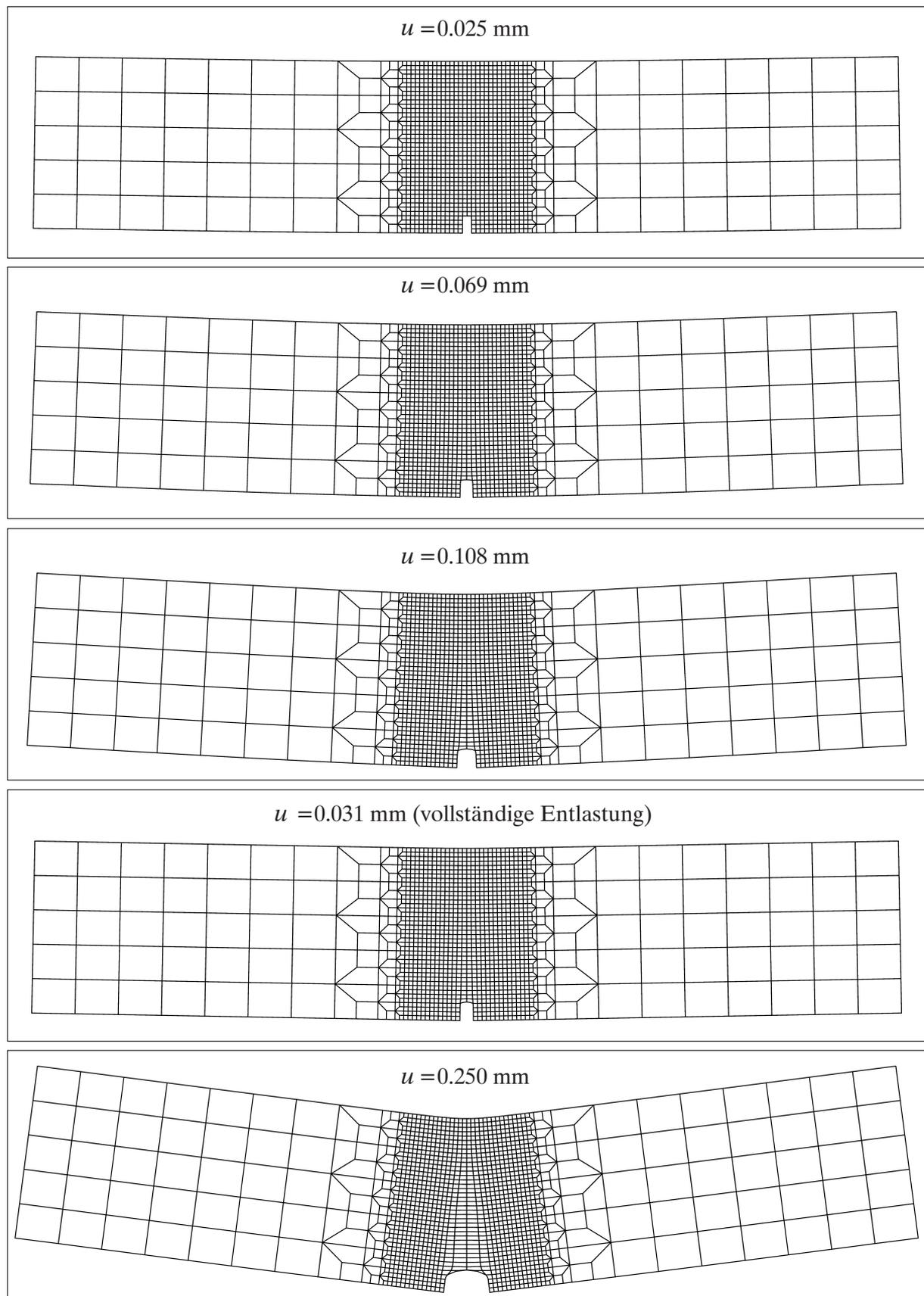


Abbildung 8.24: Deformationsentwicklung (100-fach überhöht)

2, während das rechte Diagramm die Deformationsverteilungen des Nachbruchverhaltens für die Punkte 3 und 4 darstellt. Aus Darstellungsgründen weisen die beiden Diagramme unterschiedliche Skalen auf. Auffällig ist sowohl bei den numerischen als auch bei den experimentellen Ergebnissen, dass die Deformationsverteilungen aufgrund der Scheibenwirkung bis zum Erreichen der Traglast einen nichtlinearen Verlauf annehmen, siehe Abbildung 8.22, links, während im Nachbruchbereich eine eher lineare Verteilung über die Balkenhöhe festzustellen ist, siehe Abbildung 8.22, rechts. Die Übereinstimmung der gemessenen und simulierten Deformationsverteilungen ist wiederum beachtlich.

Die Entwicklung der Schädigung  $d^{hom}$  und des plastischen Multiplikators  $\lambda^{hom}$  im Laufe des Belastungszykluses sind in Abbildung 8.23 dargestellt. Exemplarisch sind die zu fünf Belastungszeitpunkten berechneten Schädigungsverteilungen und die Verteilungen des plastischen Multiplikators abgebildet. Deutlich erkennbar ist der sich ergebende Biegezugsriss, der an der Kerbe initiiert wird und mit zunehmender Belastung in Richtung der Balkenoberseite anwächst. Letztendlich weisen sowohl die Schädigung als auch der plastische Multiplikator eine für Mode I Versagen typische Verteilung auf.

Zur Verdeutlichung dieses Bruchverhaltens zeigt Abbildung 8.24 die zugehörigen deformierten Strukturen des kompletten Balkens in 100-facher Überhöhung. Die deformierten Strukturen unterstreichen dabei, die anhand der Entwicklung der Schädigung und des plastischen Multiplikators gewonnenen Erkenntnisse über das Versagen des Vierpunktbiegebalkens. Darüber hinaus sind vor allem die bleibenden Verformungen bei vollständiger Entlastung ( $u = 0.031$  mm), welche aus der Plastizitätsformulierung stammen, deutlich erkennbar.

Wie zuvor erwähnt wurden von *Hordijk* [105] Versuche an Probekörpern mit unterschiedlicher Kerbengeometrie unternommen. Die Balken weisen eine Kerbentiefe von 10, 30 und 50 mm auf und sind in Abbildung 8.25 zusammengestellt. Abbildung 8.25 zeigt zusätzlich die experimentellen Materialantworten dieser Balken mit unterschiedlicher Kerbtiefe unter monoton steigender Belastung. Die experimentellen Antworten sind den numerisch ermittelten Materialantworten gegenübergestellt. Für alle drei Kerbtiefen wurden in der Simulation dieselben Materialparameter verwendet, siehe Abbildung 8.21. Im Großen und Ganzen ist die Übereinstimmung der numerisch und experimentell ermittel-

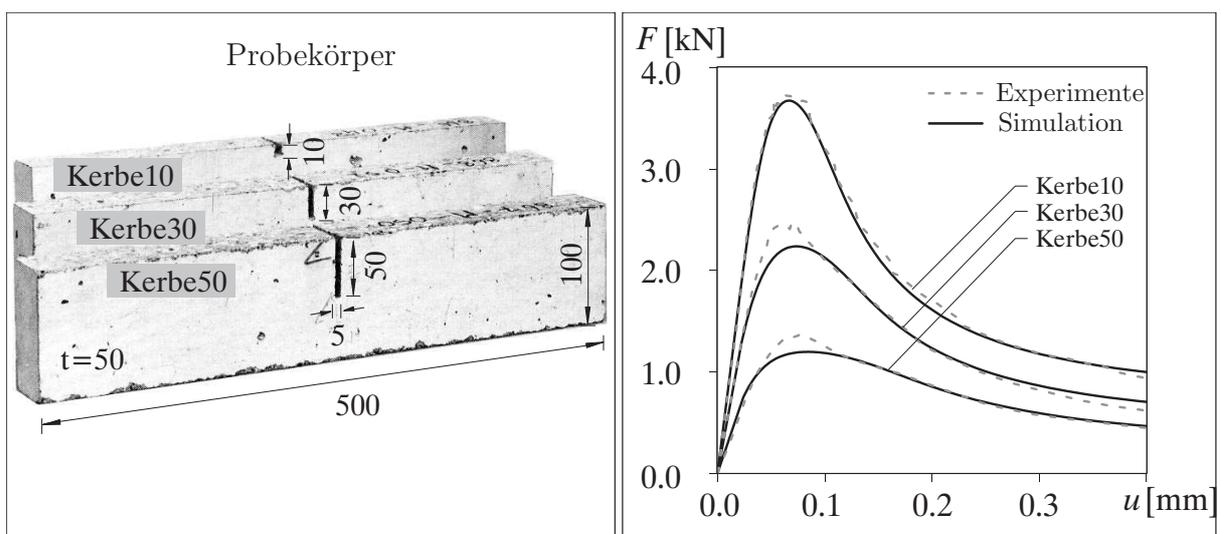


Abbildung 8.25: Probekörper mit unterschiedlichen Kerbengröße und Last-Verschiebungskurven (Quelle: *Hordijk* [105])

ten Last–Verschiebungskurven zufrieden stellend. Vor allem das Nachbruchverhalten wird ausreichend genau wiedergegeben, während die Traglasten bei einer Kerbhöhe von 30 und 50 mm leicht unterschätzt werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die vorgestellte gradientenerweiterte kombinierte Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierung in der Lage ist, die experimentell beobachteten Versagensphänomene von Beton, sowohl bei monoton steigender als auch bei zyklischer Belastung, qualitativ und quantitativ zu erfassen.

## 8.2.2 Direkter Zugversuch

Abschließend soll das Tragverhalten eines weiteren typischen Vertreters der Materialklasse kohäsiver Reibungsmaterialien, nämlich Kalkstein, anhand des gradientenerweiterten kombinierten Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodells analysiert werden. Das Materialverhalten von Kalkstein wird durch ein komplexes Zusammenwirken der Degradation der elastischen Festigkeitseigenschaften mit irreversiblen Verzerrungen charakterisiert. Ähnlich wie Beton weist auch Kalkstein eine heterogene Mikrostruktur auf, vergleiche Abbildung 8.26. Diese heterogene Mikrostruktur bestimmt das komplexe Materialverhalten und letztendlich die im Material beobachtbaren Versagensphänomene. Nachfolgend soll das gradientenerweiterte kombinierte Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodell zur Simulation beidseitig gekerbter Probekörper aus Kalkstein angewendet werden. Die entsprechenden Versuche wurden von *de Proft* [75] durchgeführt. Dabei wurden die beidseitig gekerbten Probekörper aus massiven Kalksteinblöcken gesägt. Die Probekörper weisen eine Höhe von 120 mm und eine Breite von 50 mm auf. Die Dicke beträgt 11 mm. Des Weiteren besitzen die Probekörper in der Mitte der beiden Seiten zwei Kerben mit den Abmessungen  $1 \times 7 \text{ mm}^2$ . Die gemittelte Differenzverschiebung  $\delta$  zwischen Punkten oberhalb und unterhalb der Kerben wurde in den Versuchen mit Hilfe von drei Messaufnehmern mit einer Messlänge von  $l_{\text{mess}} = 20 \text{ mm}$  gemessen. Die genauen Systemdaten und Abmessungen der Probekörper sind in Abbildung 8.26 zusammengestellt. Zusätzlich zu den Versuchen mit monoton steigender Belastung wurden von *de Proft* [75] zehn Pro-

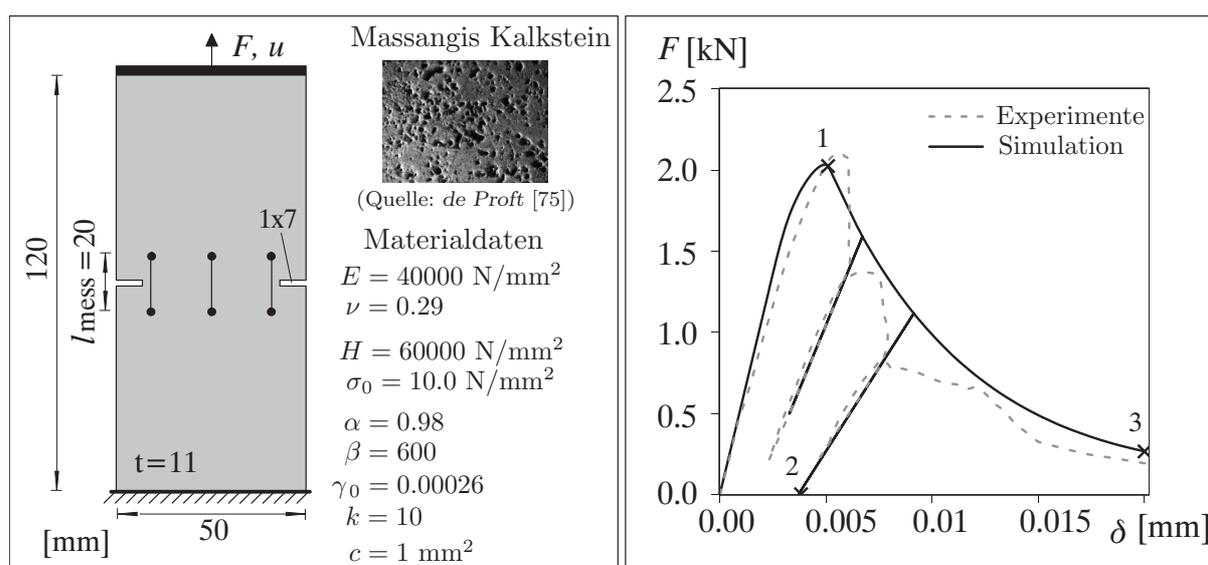


Abbildung 8.26: Systemdaten und Last–Verschiebungskurven



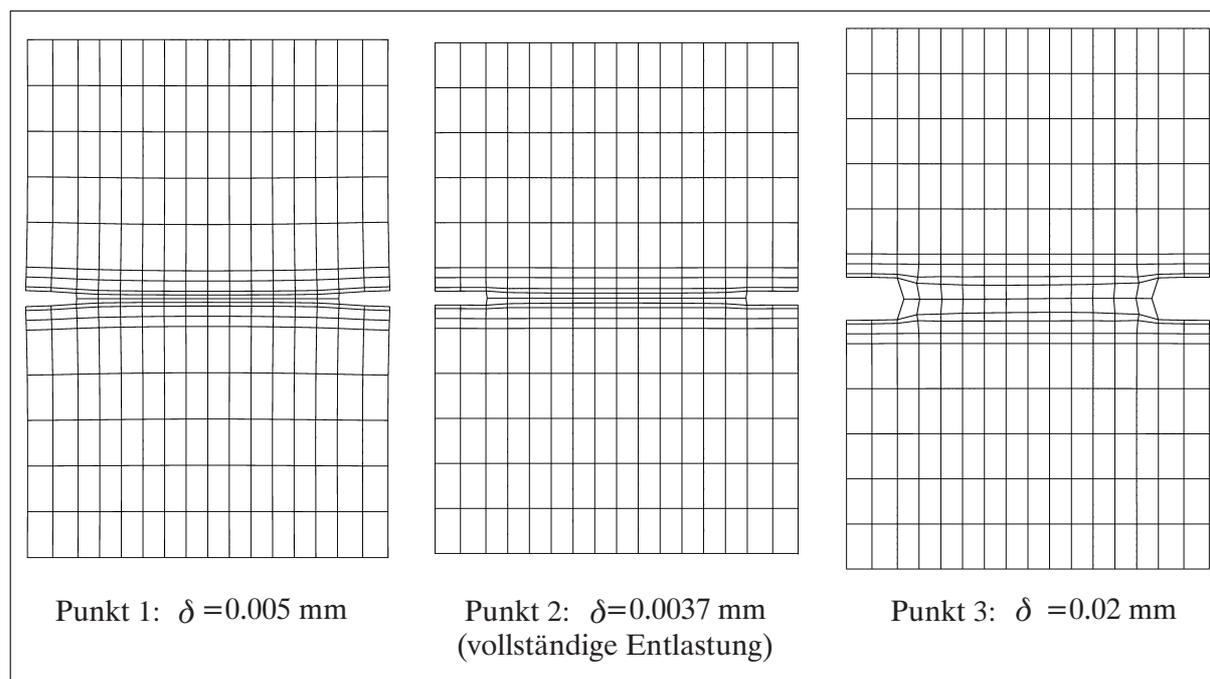


Abbildung 8.28: Deformationsentwicklung

unter der Traglast der Experimente liegt. Vor allem das Nachbruchverhalten sowie das in den Ent- und Wiederbelastungspfaden erkennbare Zusammenwirken von Degradation der elastischen Festigkeitseigenschaften mit irreversiblen Verzerrungen kann durch die Microplane Formulierung wiedergegeben werden.

Abbildung 8.27 zeigt die Evolution der Schädigung anhand von Schädigungsverteilungen zu drei verschiedenen Belastungszeitpunkten, die in der Last–Verschiebungskurve in Abbildung 8.26 markiert sind. Neben der unterschiedlichen Farbgebung ist die Schädigungsvariable als Höhenplot in  $z$ -Richtung dargestellt. Die Schädigungszonen, die sich an den Kerben bilden, wachsen mit zunehmender Belastung von beiden Seiten her zusammen. Das horizontale Aufreißen der Zugprobe zwischen den Kerben ist deutlich erkennbar. Diese Beobachtungen werden durch die zugehörigen Ausschnitte der 250-fach überhöht dargestellten deformierten Strukturen in Abbildung 8.28 unterstrichen. Darüber hinaus sind die bleibenden Deformationen bei vollständiger Entlastung ( $\delta = 0.0037 \text{ mm}$ ) deutlich sichtbar.

### 8.3 Zusammenfassung der Beispiele

Abschließend ist somit festzuhalten, dass die Ergebnisse aller hier vorgestellten numerischen Berechnungen eine ausreichend gute Übereinstimmung mit den jeweiligen Versuchsergebnissen aufweisen. Die in den verschiedenen Experimenten beobachteten komplexen Versagensvorgänge kohäsiver Reibungsmaterialien, die von trennbruchartigen Mode I, über schubdominante Mode II bis hin zu gemischten Mode I und Mode II Versagensphänomenen reichen, werden von der gradientenerweiterten Microplane Formulierung relativ gut erfasst. Als typische Vertreter der Materialklasse kohäsiver Reibungsmaterialien wurden als Referenzlösung Versuche an Probekörpern aus Beton und Kalkstein ausgewählt. Beachtlich ist, dass es mit dem Microplane Konzept möglich ist, das große Spektrum

an unterschiedlichen Versagensarten der untersuchten Materialklasse darzustellen. Des Weiteren kann der Entlastung- bzw. Wiederbelastungsvorgang durch die Kopplung von Schädigungsmechanik und Plastizitätstheorie im Rahmen der Microplane Theorie gut wiedergegeben werden.

# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Ein Ziel dieser Arbeit war die numerische Simulation des hochgradig nichtlinearen Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien. Dabei wurden in der vorliegenden Arbeit unterschiedliche Simulationsstrategien zur Erfassung des komplexen Tragverhaltens und der vielschichtigen Versagensmechanismen der betrachteten Materialklasse aufgezeigt. Aus Effizienzgründen beschränkte sich die erforderliche Materialmodellierung auf die Beschreibung des Materialverhaltens auf der Meso- bzw. Makroebene. Als Mittelweg zwischen einer detaillierten mikromechanisch motivierten Modellierung und einer strukturorientierten makroskopischen Betrachtungsweise wurde die Microplane Theorie verwendet. Diese Theorie stellt ein grundlegendes Konzept zur Modellierung beliebig anisotropen Materialverhaltens dar und liefert zudem eine elegante Motivation zur Herleitung der erforderlichen anisotropen Stoffgesetze.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden unterschiedliche Materialmodelle zur Beschreibung des Tragverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien in das Finite Element Programm CARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert. Zur Vorbereitung der eigentlichen Schwerpunkte dieser Arbeit wurden klassische makroskopische Materialformulierungen, basierend auf der Elastizitätstheorie, der Plastizitätstheorie sowie der Schädigungsmechanik, zusammengestellt. Auf die Kopplung dieser Materialtheorien im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse unter Berücksichtigung interner Variablen wurde detailliert eingegangen. Die Thermodynamik irreversibler Prozesse bildete darüber hinaus auch die Grundlage für die Herleitung anisotroper Materialmodelle im Rahmen des Microplane Konzeptes.

Die Formulierung von mechanisch abgesicherten Microplane Stoffgesetzen stellte einen wesentlichen Schwerpunkt dieser Arbeit dar. In einem ersten Schritt wurden die geometrischen Beziehungen des Microplane Konzeptes und die damit verbundenen Möglichkeiten der Charakterisierung von Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene näher untersucht. Wie sich herausstellte, besitzt die Wahl der Verzerrungskomponenten auf der Mikroebene einen entscheidenden Einfluss auf die Beschreibung unterschiedlicher Materialeigenschaften. Zur eindeutigen Charakterisierung der volumetrischen und deviatorischen Eigenschaften auf der Mikroebene konnte eine mechanisch sinnvolle Basis für das Microplane Modell gefunden werden. Es hat sich herausgestellt, dass dieser Ansatz vor allem beim Mikro–Makro Übergang Vorteile gegenüber den bisherigen Ansätzen besitzt. Darüber hinaus konnte mit diesem Ansatz im Vergleich zu den bisherigen Microplane Formulierungen, bei denen lokale Be- und Entlastungsvorgänge einzelner Komponenten festgestellt wurden, eine höhere numerische Stabilität erreicht werden. Darauf aufbauend wurde ein universelles Konzept für Microplane Modelle vorgestellt, mit dem es nun möglich ist, sowohl die Spannungen als auch die konstitutiven Gleichungen thermody-

namisch konsistent herzuleiten. Die gewonnenen Erkenntnisse und Weiterentwicklungen haben letztendlich dazu beigetragen, eine fundierte mechanische Basis für Microplane Modelle bereitzustellen.

Ausgehend von einfachen Stoffgesetzen auf Basis der Elastizitätstheorie, der Plastizitätstheorie sowie der Schädigungsmechanik wurde die Komplexität der entwickelten Microplane Stoffgesetze sukzessiv gesteigert. Als letzte Stufe wurden Microplane Schädigungs- und Plastizitätsformulierungen miteinander kombiniert. Das resultierende kombinierte Microplane Schädigungs- und Plastizitätsmodell wurde zudem um eine geeignete Regularisierungsstrategie (Gradientenmethode) erweitert. Für die Kopplung von Schädigung und Plastizität stellte sich heraus, dass die Gradientenerweiterung der Schädigung als genügend durchgreifend für die Regularisierung ist. Damit war es möglich, das komplexe Zusammenwirken einer anisotropen Degradation der elastischen Festigkeitseigenschaften mit richtungsabhängigen irreversiblen Dehnungen im vor- als auch im postkritischen Bereich eindeutig wiederzugeben. Auf die Wirkungsweise der unterschiedlichen Microplane Materialformulierungen wurde anhand von Studien der Texturentwicklung eingegangen. Der Kernfrage nach der Definition mechanisch konsistenter Stoffgesetze auf der Mikroebene konnte insofern nachgegangen werden, als sich im Laufe dieser Arbeit folgende Erkenntnisse über die Komplexität der zu entwickelnden Stoffgesetze herauskristallisierten:

- Es konnte festgestellt werden, dass die vereinfachte Annahme von einaxialen („entkoppelten“) Stoffgesetzen auf der Mikroebene und somit die entkoppelte Betrachtung der einzelnen Versagensformen in der Regel nicht ausreicht, um das komplexe makroskopische Antwortverhalten der untersuchten Materialklasse realistisch darzustellen. Deren charakteristische dilatante Materialantwort koppelt das volumetrische und deviatorische Verhalten. Die These, dass dies allein durch den Homogenisierungsprozess bei der Annahme von einaxialen Stoffgesetzen auf der Mikroebene gewährleistet wird, konnte damit nicht aufrechterhalten werden. Zur Beschreibung des Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien, insbesondere von Beton, ist es daher zwingend notwendig, analog zu makroskopischen Materialmodellen, die unterschiedlichen Stoffgesetze der einzelnen Komponenten auf der Mikroebene zu verknüpfen. Dies wurde bei der Formulierung der verwendeten Microplane Modelle durch Einführung einer einzigen Schädigungsvariable entsprechend berücksichtigt.
- Allerdings reichen im Gegensatz zu makroskopischen Materialmodellen einfache, auf der Mikroebene „isotrope“ Stoffgesetze beim Microplane Modell zur Beschreibung des makroskopisch anisotropen Materialverhaltens aus.

Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit war ein Vergleich der verschiedenen Microplane Materialformulierungen mit entsprechenden makroskopischen Materialmodellen. Das Ziel dieses Vergleichs war die physikalisch sinnvolle Interpretation der Microplane Stoffgesetze mittels anerkannter makroskopischer Materialmodelle. Um die erforderlichen Microplane Materialparameter sinnvoll physikalisch interpretieren zu können, wurden diese mit Hilfe eines formelmäßigen Mikro–Makro Überganges bestimmt und nicht, wie üblich, durch inverses Abgleichen ermittelt. Als natürliche Konsequenz dieser Vorgehensweise zur rationalen Parameteranpassung weisen die entwickelten Microplane Formulierungen im Vergleich zu den bisherigen Modellen einen reduzierten Parametersatz auf. Des Weiteren konnten die Parameter der jeweiligen Microplane Materialformulierung eindeutig in Abhängigkeit makroskopisch messbarer Materialkennwerte und somit aus Standardversuchen identifiziert werden. Allerdings bleibt anzumerken, dass im Allgemeinen, d. h. ohne

Kenntnis des makroskopischen Vergleichsmodells, in Analogie zum Vorgehen bei komplexen Materialformulierungen nur ein inverses Abgleichen der Microplane Stoffgesetze an Experimente übrig bleibt. Des Weiteren müssen in diesen Fällen gewisse Vorkenntnisse über das gewünschte Materialverhalten als zusätzliche Bedingungen in die Microplane Formulierung einfließen, vergleiche Abschnitt 7.1.2.

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Microplane Konzept stellt eine viel versprechende Basis zur numerischen Simulation des Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien dar. Dies konnte anhand von Vergleichen mit aus der Literatur bekannten experimentellen Ergebnissen unterschiedlicher Benchmarktests, wie beispielsweise die L-förmige Scheibe, der Single-Edge-Notched Beam oder der gekerbte Biegebalken unter zyklischer Belastung, verifiziert werden. Die entwickelten Microplane Formulierungen mit anschaulich interpretierbaren Materialparametern sind in der Lage, die in den Experimenten beobachteten komplexen Versagensformen wiederzugeben. Es gelang die Effekte der versageninduzierten Anisotropie, der Zug-Druck-Unsymmetrie sowie der Materialentfestigung als eine logische Konsequenz aus Steifigkeitsdegradation und irreversiblen Dehnungen abzubilden. Darüber hinaus lieferte das Microplane Konzept im Gegenteil zu makroskopischen Modellen tiefere Einblicke über die im Material auftretenden Versagensformen. Denn die gezeigten Microplane Simulationen bieten die Möglichkeit, komplexe Versagensformen zu visualisieren und zusätzlich die richtungsabhängige Degradation der mechanischen Materialeigenschaften Schritt für Schritt zu analysieren. Die richtungsabhängige Degradation anhand von Experimenten zu untersuchen ist dagegen nahezu unmöglich.

Die in der vorliegenden Arbeit erfolgten Bestrebungen einer möglichst realitätsgetreuen Simulation des Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien sind abschließend schematisch in Abbildung 9.1 zusammengefasst. Es wurden sowohl reine Schädigungs- und Plastizitätsmodelle als auch gekoppelte Formulierungen auf der Basis der Microplane Theorie entwickelt und implementiert. Diese Modelle sind im Bild 9.1 dunkel hinterlegt. Weiterhin wurden Konzepte zum Mikro-Makro Übergang erarbeitet, mit deren Hilfe Beziehungen zwischen der Mikro- und Makroebene angegeben wurden, die in Bild 9.1 durch die schwarzen Pfeile symbolisiert sind. Dabei charakterisieren die gestrichelten Pfeile Überlegungen für die bereits zu Beginn dieser Arbeit erste Ansätze existierten. Die grauen Pfeile dagegen symbolisieren Zusammenhänge, die bereits an anderer Stelle untersucht wurden und deshalb nicht Gegenstand dieser Arbeit waren.

	Schädigungsmechanik	Plastizitätstheorie	Schädigung & Plastizität
Microplane basierte Materialgesetze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>J_2</math> basiert [143, 144]</li> <li>• <math>I_1</math>-<math>J_2</math> basiert [19, 30, 145]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>J_2</math> basiert Kristallplastizität</li> <li>• <math>I_1</math>-<math>J_2</math> basiert [123, 131]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>J_2</math> basiert</li> <li>• <math>I_1</math>-<math>J_2</math> basiert [128]</li> </ul>
Makroskopisch orientierte Materialgesetze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>J_2</math> basiert [138, 139]</li> <li>• <math>I_1</math>-<math>J_2</math> basiert [76]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>J_2</math> basiert [223]</li> <li>• <math>I_1</math>-<math>J_2</math> basiert [80]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kopplung im Verzerrungsraum</li> <li>• Kopplung im Spannungsraum</li> </ul>
Experimentelle Validierung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Versagen spröder Werkstoffe</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Versagen duktiler Werkstoffe</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Versagen quasi-spröder Werkstoffe</li> </ul>

Abbildung 9.1: Übersicht Schädigungs- und Plastizitätsformulierungen

## 9.2 Ausblick

Die Microplane Theorie stellt einen allgemeinen Ansatz zur Beschreibung beliebig anisotroper Materialeigenschaften dar. Durch eine mechanisch sinnvolle Verallgemeinerung des Microplane Konzeptes ist es gelungen, die bekannten Verhaltensmuster der Schädigung und Plastizität auf makroskopischer Ebene abzubilden. Die Wiedergabe des Materialverhaltens von hinreichend verifizierten makroskopischen Materialmodellen stellte eine Minimalanforderung an das allgemeingültige Microplane Konzept dar und trug letztendlich dazu bei, mechanisch fundierte Microplane Formulierungen zu entwickeln. Nun ist der Weg offen für weitere Modifikationen und die Untersuchung weiterer Effekte, wie beispielsweise die Berücksichtigung des Einflusses der dritten Invariante. Wünschenswert wäre weiterhin die Erfassung der Effekte der Mikrorisssschließung durch eine separate Spezifizierung zweier unabhängiger Sätze von internen Variablen unter Zug- und Druckbeanspruchung, um die charakteristischen Eigenschaften kohäsiver Reibungsmaterialien unter zyklischer Belastung besser abbilden zu können. Ein weiterer Punkt ist die Abbildung der unter zyklischer Belastung beobachtbaren Hystereseeffekte. Dies könnte beispielsweise durch die Berücksichtigung eines kinematischen Verfestigungsgesetzes in der Plastizitätsformulierung wiedergegeben werden. Außerdem steht die Entwicklung einer allgemein akzeptierten Theorie zur Beschreibung finiter Deformationen mit dem Microplane Konzept noch aus, auch wenn erste Ansätze [45] in dieser Richtung viel versprechend sind. Letztendlich eröffnet sich für das vorgestellte Microplane Konzept ein breiter Anwendungsbereich.

Mögliche Anwendungsbereiche sind nicht nur die in dieser Arbeit beschriebene Materialklasse der kohäsiven Reibungsmaterialien, welche durch eine versagensinduzierte Anisotropie gekennzeichnet sind, sondern auch Materialien wie beispielsweise Kunststoffe, Mehrphasenmaterialien oder Faserverbundwerkstoffe, bei denen schon im Ausgangszustand eine gewisse Anisotropie der Materialeigenschaften vorherrscht. Denkbar ist der Einsatz des Microplane Konzeptes vor allem für die Modellierung des Tragverhaltens von Stahlbeton. Dabei eignet sich das Microplane Modell hauptsächlich zur Modellierung der Schädigung im Verbund, also an der Kontaktfläche zwischen Bewehrung und umgebendem Beton, da diese Grenzschicht geometrisch vorgegeben ist. Weiterhin könnte das Microplane Modell als fundierte Grundlage für strukturmechanische Anwendungen für Bauteile aus Stahlbeton dienen. Eine Erweiterung des zweidimensionalen Scheibenmodells auf den dreidimensionalen Fall ist wünschenswert; das Werkstoffmodell könnte dann auch direkt in die am Institut entwickelten „dreidimensionalisierten“ Flächentragwerksmodelle eingebracht werden.

Die Bestimmung der internen Länge stellt bis heute eine offene Frage bei der Simulation von entfestigenden Materialien dar. Vergleiche des Microplane Konzeptes mit dem mikro-mechanisch orientierten Partikelmodell [124, 196] zeigen einen viel versprechenden Weg den Mikro-Makro Übergang auch auf dieser Ebene zu vollziehen und der internen Länge eine aus dem Partikelmodell heraus quantifizierbare, physikalische Bedeutung zu geben. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es im Bereich der Werkstoffmodellierung kohäsiver Reibungsmaterialien noch genügend Herausforderungen für die Forschung gibt und die Entwicklung von realitätsgetreuen Simulationsmodellen noch immer nicht als beendet angesehen werden kann. Das in dieser Arbeit bereitgestellte Konzept, basierend auf der Microplane Theorie, stellt eine interessante Basis für weiterführende Arbeiten im Bereich der Werkstoffmodellierung dar und lässt sich letztendlich auch auf andere Werkstoffklassen übertragen.

# Anhang A

## Notation & Tensorrechnung

Im Folgenden wird auf die verwendete Notation im Rahmen der Darlegung von Grundlagen zur Tensorrechnung eingegangen. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser und weiterer Rechenregeln zur Tensorrechnung findet sich beispielsweise in *de Boer* [64]. Alle Darstellungen beziehen sich auf den eigentlich Euklidischen Vektorraum  $\mathcal{V}^3$  und den zugehörigen dyadischen Produktraum  $\mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3$  ( $n$ -mal) der Ordnung  $n$ .

### Notation

In dieser Arbeit wird ausschließlich die direkte Tensorschreibweise benutzt. Die Indexnotation wird nur zur Verdeutlichung in diesem Abschnitt herangezogen. Es gilt folgende Notation,

$$\begin{aligned} a &= a & \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a} &= a_i \mathbf{e}_i & \mathcal{A} &= A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wobei ein Skalar  $a$  mit Kleinbuchstaben, ein Vektor  $\mathbf{a}$  mit fetten Kleinbuchstaben, ein zweistufiger Tensor  $\mathbf{A}$  mit fetten Großbuchstaben und höherwertige Tensoren  $\mathcal{A}$  mit kaligrafischen Großbuchstaben bezeichnet werden. Im Folgenden wird auf eine Darstellung der zugehörigen Basen  $\mathbf{e}_{i,\dots,l}$  verzichtet.

### Skalare Produkte

Skalare Produkte von Tensoren werden durch die Operatoren  $\cdot, :, \dot{\cdot}$  und  $::$  gekennzeichnet. Die Anzahl der Punkte  $k$  bestimmt die Stufe der Verjüngung. Ein Skalarprodukt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  führt auf einen Tensor der Ordnung  $n+m-2k$ , vergleiche die folgenden Beispiele.

$$\begin{aligned} c &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ij} b_j \\ c &= \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ijk} B_{jk} \\ c &= \mathbf{A} \dot{\cdot} \mathbf{B} = A_{ijk} B_{ijk} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ijk} b_k \\ c &= \mathcal{A} :: \mathcal{B} = A_{ijkl} B_{ijkl} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathcal{A} : \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### Dyadische Produkte

Ein dyadisches Produkt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  wird durch das Symbol  $\otimes$  gekennzeichnet und erzeugt neue (höherwertige) Tensoren der Ordnung  $n+m$ .

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ijk} b_l \\ C_{ijk} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ijk} b_k & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### Fundamentaltensoren

Der zweistufige Einheitstensor  $\mathbf{1}$  und der vierstufige Einheitstensor  $\mathcal{I}$  lassen sich mit Hilfe des Kronecker Deltas  $\delta_{ij}$  folgendermaßen angeben,

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \qquad \mathcal{I} = \mathcal{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \qquad (\text{A.4})$$

wobei  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  gilt.

### Spezielle Tensoren

Die Transponierte eines Tensors lässt sich durch Vertauschen der Indizes bestimmen. In dieser Arbeit wird die Transponierte eines Tensors wie folgt eingeführt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{ji} \\ \mathbf{A} &= A_{ijk} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{kij} \\ \mathcal{A} &= A_{ijkl} \quad \rightarrow \quad \mathcal{A}^T = A_{iljk} \end{aligned} \qquad (\text{A.5})$$

In diesem Zusammenhang kann zwischen symmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^{sym} = \mathbf{A}^{sym,T}$  und schiefsymmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^{skw} = -\mathbf{A}^{skw,T}$  unterschieden werden.

$$\mathbf{A}^{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \qquad \mathbf{A}^{skw} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \qquad (\text{A.6})$$

Existiert die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  eines beliebigen Tensors  $\mathbf{A}$ , so ergibt deren skalares Produkt den zweistufigen Einheitstensor. Dies gilt in entsprechender Weise für die Inverse  $\mathcal{A}^{-1}$  eines vierstufigen Tensors  $\mathcal{A}$ .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \qquad \mathcal{A} : \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \qquad (\text{A.7})$$

Des Weiteren lässt sich jeder zweistufige Tensor  $\mathbf{A}$  eindeutig additiv in einen volumetrischen Anteil  $\mathbf{A}^{vol}$  und einen deviatorischen Anteil  $\mathbf{A}^{dev}$  zerlegen. Diese Zerlegung lässt sich auf den vierstufigen Tensor  $\mathcal{A}$  übertragen.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{vol} + \mathbf{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{vol} := \frac{1}{3} [\mathbf{A} : \mathbf{1}] \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{dev} := \mathbf{A} - \mathbf{A}^{vol} \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}^{vol} + \mathcal{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^{vol} := \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}^{dev} := \mathcal{A} - \mathcal{A}^{vol} \end{aligned} \qquad (\text{A.8})$$

Damit kann der deviatorische Anteil eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{A}^{dev}$  aus dem skalaren Produkt des jeweiligen Tensors  $\mathbf{A}$  mit dem vierstufigen deviatorischen Einheitstensor  $\mathcal{I}^{dev}$  gewonnen werden.

$$\mathbf{A}^{dev} = \mathcal{I}^{dev} : \mathbf{A} \qquad (\text{A.9})$$

### Norm eines Tensors

In dieser Arbeit wird ausschließlich die  $L_2$  Norm verwendet.

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \qquad \|\mathbf{A}\| := \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} \qquad (\text{A.10})$$

## Invarianten

Assoziiert mit einem zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  werden drei Hauptinvarianten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  definiert. Zusätzlich sind die Ableitungen dieser Hauptinvarianten nach dem Tensor  $\mathbf{A}$  angegeben.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \mathbf{A}:\mathbf{1} & \text{mit} & \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1} \\ I_2 &:= [[\mathbf{A}:\mathbf{1}]^2 - \mathbf{A}^2:\mathbf{1}] / 2 & \text{mit} & \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1 \mathbf{1} - \mathbf{A} \\ I_3 &:= \det \mathbf{A} & \text{mit} & \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = I_3 \mathbf{A}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Somit ergibt sich die erste Invariante  $I_1$  als Spur des Tensors  $\mathbf{A}$  und die dritte Invariante  $I_3$  als Determinante des Tensors  $\mathbf{A}$ . Des Weiteren ergibt sich die negative zweite Invariante des Deviators  $\mathbf{A}^{dev}$ , die mit  $J_2$  bezeichnet wird, aus folgender Beziehung.

$$J_2 := - [ [\mathbf{A}^{dev} : \mathbf{1}]^2 - \mathbf{A}^{dev2} : \mathbf{1} ] / 2 = 1 / 2 \mathbf{A}^{dev} : \mathbf{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^{dev} \quad (\text{A.12})$$

Die drei Hauptachsenrichtungen  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_{II}$  und  $\mathbf{n}_{III}$  und die drei Eigenwerte  $A_I$ ,  $A_{II}$  und  $A_{III}$  eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{A}$  erhält man aus einem Eigenwertproblem. Dies führt auf folgendes charakteristische Polynom dessen Nullstellen die Eigenwerte des Tensors  $\mathbf{A}$  darstellen.

$$\det(\mathbf{A} - A \mathbf{1}) = A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 = 0 \quad (\text{A.13})$$

Das folgende homogene Gleichungssystem liefert als Lösung die drei Hauptachsenrichtungen.

$$[\mathbf{A} - A_i \mathbf{1}] \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = I, II, III \quad (\text{A.14})$$

Das Cayley–Hamilton–Theorem besagt, dass jeder Tensor seiner charakteristischen Gleichung genügen muss.

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

Damit lässt sich die Inverse eines Tensors wie folgt angeben.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3} [\mathbf{A}^2 - I_1 \mathbf{A} + I_2 \mathbf{1}] \quad (\text{A.16})$$

## Tensoranalysis

Funktionen, die in Abhängigkeit des Ortsvektors aufgestellt werden, nennt man Feldfunktionen. Die Ableitung dieser Feldfunktionen nach dem Ortsvektor wird als Gradient bezeichnet. Dabei wird im Folgenden zwischen skalarwertigen  $f(\mathbf{x})$ , vektorwertigen  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  oder tensorwertigen  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  Funktionen unterschieden.

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \text{grad } f(\mathbf{x}) := \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_{,i} \\ \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_{i,j} \\ \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial F_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = F_{ij,k} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Der Gradient einer skalarwertigen Funktion liefert eine vektorwertige Feldfunktion, der Gradient einer vektorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld zweiter Stufe und der Gradient einer tensorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld dritter Stufe, d. h. die Gradientenbildung  $\nabla(\bullet) = \text{grad}(\bullet)$  hebt den Rang eines Tensors an. Im Kontext der Erhaltungssätze wird noch ein weiterer Differentialoperator benötigt. Dazu wird der Divergenzoperator  $\text{div}(\bullet)$  eingeführt. Die Divergenz eines Vektor- bzw. eines Tensorfeldes ergibt sich wie folgt.

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: f(\mathbf{x}) \qquad \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.18})$$

Im Gegensatz zur Gradientenbildung senkt die Divergenzbildung  $\text{div}(\bullet) = \nabla \cdot (\bullet)$  den Rang eines Tensors.

### Integralsätze

Mit Hilfe der Gaußschen Integralsätze lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Oberflächen- und Volumenintegrale angeben.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, da \\ \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

# Anhang B

## Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsflächen

In diesem Abschnitt wird verstärkt auf die Definition unterschiedlicher äquivalenter Verzerrungen  $\eta$  eingegangen. Die geeignete Wahl der äquivalenten Verzerrung in der Kontinuumschädigungsmechanik bestimmt entscheidend die Wirkungsweise des resultierenden Schädigungsmodells. In mancherlei Hinsicht spielt die Definition der äquivalenten Verzerrung eine vergleichbare Rolle wie die Definition der Fließfunktion in der Plastizität. Zum einen bestimmt die äquivalente Verzerrung die Form des elastischen Bereiches und zum anderen beeinflusst deren Wahl direkt die Assoziiertheit der Schädigungsformulierung und somit die Symmetrie des Materialtensors, vergleiche hierzu Abschnitt 3.3.1. Die äquivalente Verzerrung projiziert den mehraxialen Verzerrungszustand auf einen skalaren Wert, der wiederum über die Schädigungsfunktion, entsprechend Gleichung (3.25), die Schädigung des Materials bestimmt. Grundsätzlich gibt es verschiedene Möglichkeiten um tensorielle Größen in Form des Verzerrungstensors auf einen skalaren Wert abzubilden. Entsprechend der thermodynamisch konsistenten Herleitung in Abschnitt 3.3.1 ergibt sich folgende Definition der äquivalenten Verzerrung.

$$\eta = Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.1})$$

Dabei entspricht die äquivalente Verzerrung der Energiefreisetzungsrate. Im Sinne der Klassifizierung von *Carol, Rizzi & Willam* [47] führt diese äquivalente Verzerrung auf assoziierte Schädigungsformulierungen, da sich die äquivalente Verzerrung als Funktion der Energiefreisetzungsrate darstellen lässt. Weitere äquivalente Verzerrungen, die in Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate formuliert und dementsprechend als assoziierte Schädigungsformulierungen bezeichnet werden, sind die Definitionen in Form der Energienorm nach *Simo & Ju* [204] oder nach *Ju* [114].

$$\eta = \sqrt{2Y} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad \eta = \sqrt{Y} = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B.2})$$

Häufig findet man in der Literatur eine leicht abgewandelte Form der äquivalenten Verzerrungsdefinitionen von *Simo & Ju* und *Ju*. Die Normalisierung durch den E-Modul wurde eingeführt, um eine verzerrungsartige Größe als äquivalente Verzerrung zu erhalten.

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{E} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B.3})$$

Eine weitere einfache Wahl der äquivalenten Verzerrung stellt die Definition nach *Lemaître* [138] in Form der Norm des Verzerrungstensors dar.

$$\eta = \|\boldsymbol{\epsilon}\| = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{B.4})$$

Da diese äquivalente Verzerrung als reine Funktion des Verzerrungstensors definiert ist, handelt es sich hierbei um eine so genannte nicht-assozierte Schädigungsformulierung. Alle bisher gezeigten äquivalenten Verzerrungen weisen elliptische Schädigungsflächen auf, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind. In Abbildung B.1 auf der linken Seite sind die resultierenden Schädigungsflächen für den ebenen Spannungszustand und einer Querdehnzahl von  $\nu = 0.2$  im Hauptverzerrungsraum dargestellt. Daraus wird ersichtlich, dass mit diesen Definitionen kein unterschiedliches Zug-Druckverhalten simuliert werden kann. Für kohäsive Reibungsmaterialien ist es daher notwendig, die bisher vorgestellten Definitionen zu modifizieren. Bei der Definition nach *Mazars & Pijaudier-Cabot* [155] werden beispielsweise nur die positiven Hauptverzerrungen berücksichtigt, d. h. Schädigung tritt primär unter Zugbeanspruchung auf.

$$\eta = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \epsilon_I \rangle^2} \quad (\text{B.5})$$

Die resultierende Schädigungsfläche im Hauptverzerrungsraum ist in der Mitte der Abbildung B.1 dargestellt.

Eine sehr elegante und numerisch stabile Definition der äquivalenten Verzerrung, die unterschiedliches Zug-Druckverhalten berücksichtigt, stellt die von Mises basierte Formulierung von *de Vree, Brekelmans & van Gils* [76] dar. Dieser so genannte modifizierte von Mises Typ ist in Abhängigkeit der ersten Invariante des Verzerrungstensors  $I_1$  und der zweiten Invariante des Verzerrungsdeviators  $J_2$  formuliert.

$$\eta_{Vree}^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad (\text{B.6})$$

Die Parameter  $k_0$ ,  $k_1$  und  $k_2$ , welche die Form der Schädigungsfläche bestimmen, lassen sich wie folgt spezifizieren.

$$k_0 = k_1 = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} \quad k_2 = \frac{3}{k(1+\nu)^2} \quad (\text{B.7})$$

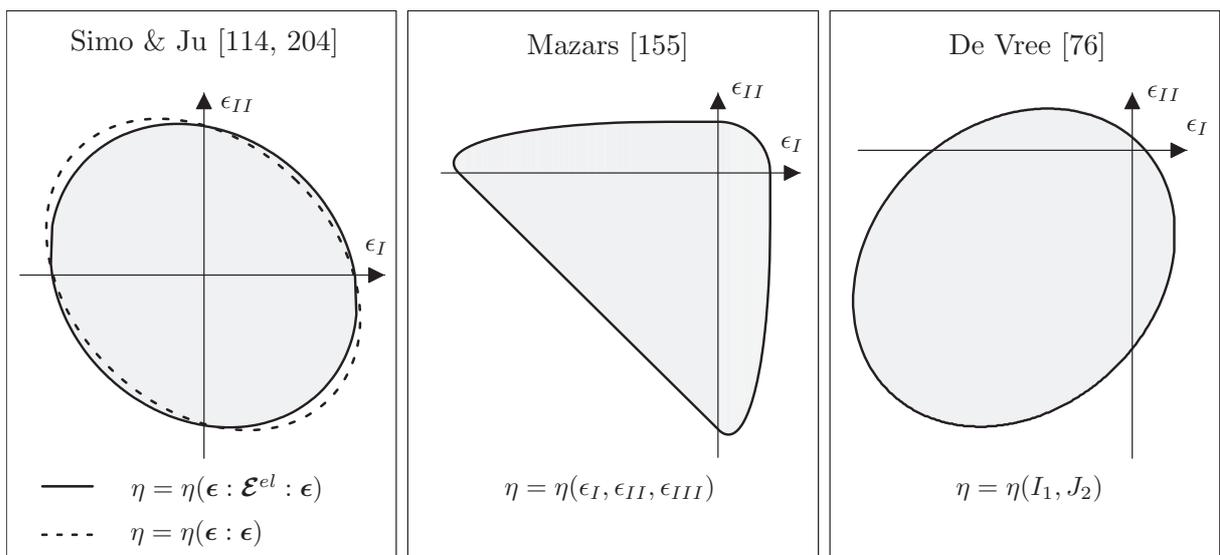


Abbildung B.1: Schädigungsflächen unterschiedlicher äquivalenter Verzerrungen

---

Hierbei bezeichnet der Parameter  $k$  das Verhältnis zwischen einaxialer Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit des Materials und bestimmt somit die Sensibilität der Schädigung auf Druckbeanspruchung relativ zur Zugbeanspruchung. Durch die Einführung dieses Wichtungsparmeters  $k$  ist die resultierende Schädigungsformulierung in der Lage, das unterschiedliche Zug–Druckverhalten kohäsiver Reibungsmaterialien sehr gut wiederzugeben. Diese Definition führt zu elliptischen Schädigungsflächen, die in den Druckbereich verschoben sind, vergleiche Abbildung B.1, rechts.

Die beiden zuletzt genannten Definitionen, die insbesondere zur Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien herangezogen werden, führen im Sinne von *Carol, Rizzi & Willam* [47] auf nicht–assozierte Schädigungsformulierungen.



# Anhang C

## Diskretisierung der Raumwinkel und numerische Integration

Zur Ermittlung makroskopischer Größen in Abhängigkeit der Variablen der Mikroebene ist in der Microplane Theorie ein Homogenisierungsprozess erforderlich. Dieser Homogenisierungsprozess basiert auf der Lösung mehrerer Integralbeziehungen, die nur in Ausnahmefällen analytisch gelöst werden können. Deshalb wird dazu übergegangen diese Integralbeziehungen mit Hilfe eines Quadraturverfahrens numerisch zu lösen. Das Integral einer beliebigen Größe  $(\bullet)$  über den Raumwinkel  $\Omega$  lässt sich damit durch eine diskrete Summe approximieren.

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} (\bullet) d\Omega = \sum_{I=1}^{n_{mp}} (\bullet)^I w^I \quad (\text{C.1})$$

Die numerische Integration basiert auf der Auswertung der jeweiligen Integranden  $(\bullet)^I$  an diskreten Integrationspunkten  $I = 1, \dots, n_{mp}$  und einer anschließenden Wichtung mit den zugehörigen Wichtungskoeffizienten  $w^I$ . Man erhält eine Näherungslösung des Integrals durch die Summation dieser gewichteten Auswertungen über eine bestimmte Anzahl von diskreten Integrationspunkten, die beim Microplane Modell der Anzahl der Mikroebenen entspricht. Die Anzahl dieser Integrationspunkte und somit der Mikroebenen bestimmt

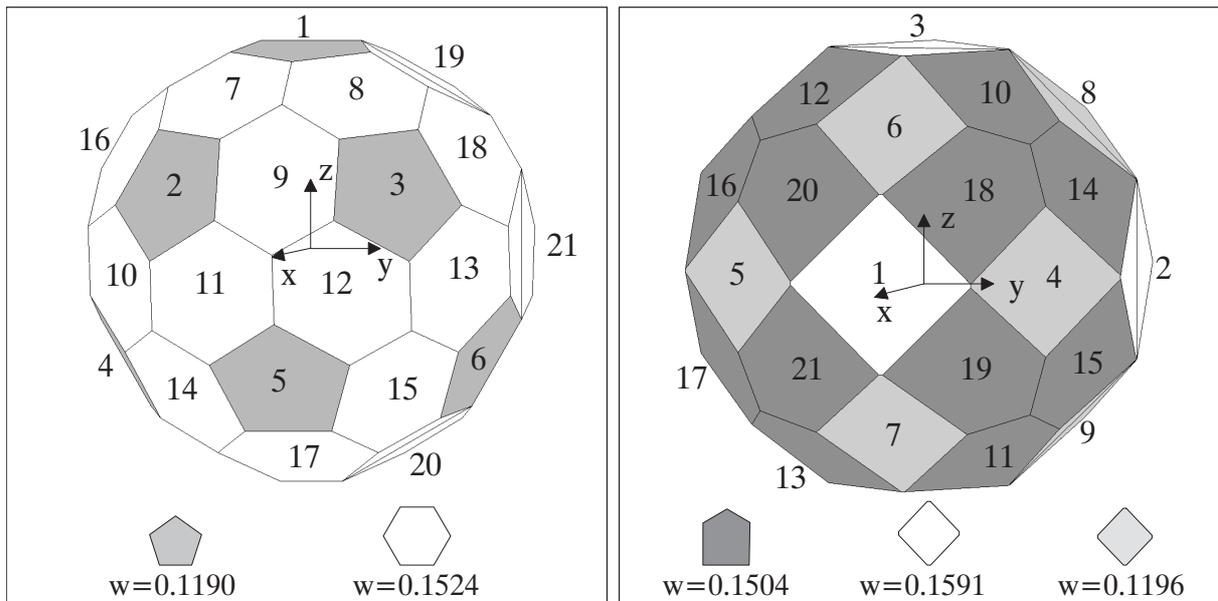


Abbildung C.1: Numerische Integration mit 42 Mikroebenen ohne und mit orthogonaler Symmetrie

die Genauigkeit der numerischen Integration. Die in dieser Arbeit verwendeten Integrationsvorschriften mit 42 Mikroebenen erlauben die exakte Integration eines Polynoms der Ordnung neun. Die Anzahl von 42 Mikroebenen liefert eine ausreichende Genauigkeit und besitzt zudem einen tolerierbaren, numerischen Aufwand bei den im Rahmen der Microplane Theorie erforderlichen numerischen Integrationen, vergleiche hierzu *Bažant & Oh* [24, 25]. In dieser Arbeit kommen zwei unterschiedliche Raumwinkelintegrationen mit 42 Mikroebenen zum Einsatz. Diese unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften, d. h. es werden zur numerischen Integration Integrationsvorschriften mit 42 Mikroebenen ohne und mit orthogonaler Symmetrie verwendet. Die resultierenden Polyeder der Tangentialebenen der beiden Integrationsvorschriften sind in Abbildung C.1 dargestellt und können als Approximation einer Einheitskugel aufgefasst werden. In beiden Fällen besitzen die Flächen der einzelnen Mikroebenen, aufgrund der Wahl von nicht-äquidistanten Integrationspunkten, keine einheitliche Größe. Dieser Zusammenhang wird durch die unterschiedliche Farbgebung der Mikroebenen unter Angabe der zugehörigen, unterschiedlich großen Wichtungskoeffizienten in Abbildung C.1 verdeutlicht.

Für die in dieser Arbeit verwendeten Integrationsvorschriften mit 42 Mikroebenen ohne

I	x-Koordinate	y-Koordinate	z-Koordinate	w Wichtung
1	0.187592474085	0.000000000000	0.982246946377	0.1190476190478
2	0.794654472292	-0.525731112119	0.303530999103	0.1190476190478
3	0.794654472292	0.525731112119	0.303530999103	0.1190476190478
4	0.187592474085	-0.850650808352	-0.491123473188	0.1190476190478
5	0.794654472292	0.000000000000	-0.607061998207	0.1190476190478
6	0.187592474085	0.850650808352	-0.491123473188	0.1190476190478
7	0.577350269190	-0.309016994375	0.755761314076	0.1523809523808
8	0.577350269190	0.309016994375	0.755761314076	0.1523809523808
9	0.934172358963	0.000000000000	0.356822089773	0.1523809523808
10	0.577350269190	-0.809016994375	-0.110264089708	0.1523809523808
11	0.934172358963	-0.309016994375	-0.178411044887	0.1523809523808
12	0.934172358963	0.309016994375	-0.178411044887	0.1523809523808
13	0.577350269190	0.809016994375	-0.110264089708	0.1523809523808
14	0.577350269190	-0.500000000000	-0.645497224368	0.1523809523808
15	0.577350269190	0.500000000000	-0.645497224368	0.1523809523808
16	0.356822089773	-0.809016994375	0.467086179481	0.1523809523808
17	0.356822089773	0.000000000000	-0.934172358963	0.1523809523808
18	0.356822089773	0.809016994375	0.467086179481	0.1523809523808
19	0.000000000000	-0.500000000000	0.866025403784	0.1523809523808
20	0.000000000000	-0.500000000000	-0.866025403784	0.1523809523808
21	0.000000000000	-1.000000000000	-0.000000000000	0.1523809523808

Tabelle C.1: Integration mit 21 Punkten ohne orthogonale Symmetrie - Koordinaten und Wichtungskoeffizienten

I	x-Koordinate	y-Koordinate	z-Koordinate	w Wichtung
1	1.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.159128546456
2	0.000000000000	1.000000000000	0.000000000000	0.159128546456
3	0.000000000000	0.000000000000	1.000000000000	0.159128546456
4	0.707106781187	0.707106781187	0.000000000000	0.119580885787
5	0.707106781187	-0.707106781187	0.000000000000	0.119580885787
6	0.707106781187	0.000000000000	0.707106781187	0.119580885787
7	0.707106781187	0.000000000000	-0.707106781187	0.119580885787
8	0.000000000000	0.707106781187	0.707106781187	0.119580885787
9	0.000000000000	0.707106781187	-0.707106781187	0.119580885787
10	0.387907304067	0.387907304067	0.836095596749	0.150427420492
11	0.387907304067	0.387907304067	-0.836095596749	0.150427420492
12	0.387907304067	-0.387907304067	0.836095596749	0.150427420492
13	0.387907304067	-0.387907304067	-0.836095596749	0.150427420492
14	0.387907304067	0.836095596749	0.387907304067	0.150427420492
15	0.387907304067	0.836095596749	-0.387907304067	0.150427420492
16	0.387907304067	-0.836095596749	0.387907304067	0.150427420492
17	0.387907304067	-0.836095596749	-0.387907304067	0.150427420492
18	0.836095596749	0.387907304067	0.387907304067	0.150427420492
19	0.836095596749	0.387907304067	-0.387907304067	0.150427420492
20	0.836095596749	-0.387907304067	0.387907304067	0.150427420492
21	0.836095596749	-0.387907304067	-0.387907304067	0.150427420492

Tabelle C.2: Integration mit 21 Punkten mit orthogonaler Symmetrie - Koordinaten und Wichtungskoeffizienten

und mit orthogonaler Symmetrie sind die Normalenvektoren in Form von  $(x,y,z)$  Koordinaten und die zugehörigen Wichtungskoeffizienten der Mikroebenen in Tabelle C.1 und Tabelle C.2 bereitgestellt, siehe auch *Bažant & Oh* [24, 25].

Es bleibt noch anzumerken, dass in den mathematischen Arbeiten von *Albrecht & Colatz* [3] und *Stroud* [211] alternative Integrationsvorschriften sowohl für regelmäßige als auch unregelmäßige Polyeder unter Verwendung von  $n_{mp} = 20$ ,  $n_{mp} = 32$ ,  $n_{mp} = 74$  oder  $n_{mp} = 122$  Mikroebenen angegeben werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] **Aifantis, E. C. (1984)**: ‘On the microstructural origin of certain inelastic models’, *J. Eng. Mat. Tech.*, Vol. 106, pp. 326–330.
- [2] **Aifantis, E. C. (1992)**: ‘On the role of gradients in the localization of deformation and fracture’, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 30, pp. 1279–1299.
- [3] **Albrecht, J., Collatz, L. (1958)**: ‘Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale’, *ZAMM*, Vol. 38, pp. 1–15.
- [4] **Altenbach, H., Altenbach, J., Rikards, R. (1996)**: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart.
- [5] **Anderheggen, E., Renau, J. (2002)**: ‘Large-strain material modelling by the n-directional approach’, in: **Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J.** (eds.), *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria*, <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- [6] **Argyris, J. H. (1960)**: *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth London.
- [7] **Arrea, M., Ingraffea, A. R. (1982)**: *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*, Department of Structural Engineering 81–83, Cornell University, Ithaca, NY.
- [8] **Askes, H., Sluys, L. (2002)**: ‘Explicit and implicit gradient series in damage mechanics’, *Eur. J. Mech. / A: Solids*, Vol. 21, pp. 379–390.
- [9] **Avci, O. (2004)**: *Simulation von anisotroper Elastizität im Rahmen des Microplane Modells*, Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [10] **Barthold, F. J., Schmidt, M., Stein, E. (1998)**: ‘Error indicators and mesh refinements for finite elements computations of elastoplastic deformations’, *Comp. Mech.*, Vol. 22, pp. 225–238.
- [11] **Batdorf, S. B., Budiansky, B. (1949)**: ‘A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip’, *Tech. Note 1871, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, D.C.*
- [12] **Bathe, K. J. (1995)**: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [13] **Bažant, Z. P. (1976)**: ‘Instability, ductility and size effect in strain softening concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 102, pp. 331–344.
- [14] **Bažant, Z. P. (1984)**: ‘Imbricate continuum and its variational derivation’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 110, pp. 1693–1712.
- [15] **Bažant, Z. P. (1984)**: ‘Microplane model for strain-controlled inelastic behaviour’, in: **Desai, C. S., Gallagher, R. H.** (eds.), *Mechanics of Engineering Materials*, John Wiley & Sons Ltd., pp. 45–59.
- [16] **Bažant, Z. P. (1991)**: ‘Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 117, pp. 1070–1087.
- [17] **Bažant, Z. P., Adley, M. D., Carol, I., Jirásek, M., Akers, S. A., Cargile, J. D., Rohani, B., Caner, F. C. (2000)**: ‘Large-strain generalization of microplane constitutive model for concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 126, pp. 971–980.
- [18] **Bažant, Z. P., Caner, F. C., Adley, M. D., Akers, S. A. (2000)**: ‘Incorporation of rate effects of fracturing and creep into microplane model for concrete dynamics’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 126, pp. 962–970.

- [19] Bažant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Akers, S. A., Adley, M. D. (2000): ‘Microplane model M4 for concrete. Part I – Formulation with work-conjugate deviatoric stress’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 126, pp. 944–953.
- [20] Bažant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Akers, S. A., Adley, M. D. (2000): ‘Microplane model M4 for concrete. Part II – Algorithm, calibration and application’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 126, pp. 954–961.
- [21] Bažant, Z. P., Gambarova, P. G. (1984): ‘Crack shear in concrete: Crack band microplane model’, *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 110, pp. 2015–2036.
- [22] Bažant, Z. P., Jirásek, M. (2002): ‘Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey and progress’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 128, pp. 1119–1149.
- [23] Bažant, Z. P., Oh, B. H. (1983): ‘Crack band theory for fracture of concrete’, *RILEM Materials & Structures*, Vol. 16, pp. 155–177.
- [24] Bažant, Z. P., Oh, B. H. (1985): ‘Microplane model for progressive fracture of concrete and rock’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 111, pp. 559–582.
- [25] Bažant, Z. P., Oh, B. H. (1986): ‘Efficient numerical integration on the surface of a sphere’, *ZAMM*, Vol. 66, pp. 37–49.
- [26] Bažant, Z. P., Ožbolt, J. (1990): ‘Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 116, pp. 2485–2505.
- [27] Bažant, Z. P., Ožbolt, J. (1992): ‘Compression failure of quasibrittle material: Nonlocal microplane model’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 118, pp. 540–556.
- [28] Bažant, Z. P., Planas, J. (1998): *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*, CRC Press.
- [29] Bažant, Z. P., Prat, P. (1987): ‘Creep of anisotropic clay: new microplane model’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 103, pp. 1050–1064.
- [30] Bažant, Z. P., Prat, P. (1988): ‘Microplane model for brittle plastic material: Part I – Theory, Part II – Verification’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 114, pp. 1672–1702.
- [31] Bažant, Z. P., Xiang, Y., Prat, P. (1996): ‘Microplane model for concrete. Part I – Stress-strain boundaries and finite strain’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 122, pp. 245–254.
- [32] Bažant, Z. P., Zi, G. (2003): ‘Microplane constitutive model for porous isotropic rocks’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 27, pp. 25–47.
- [33] Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B. E. (1988): ‘A finite element with embedded localization zones’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 70, pp. 59–89.
- [34] Belytschko, T., Liu, W., Moran, B. (2001): *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons.
- [35] Betten, J. (1993): *Kontinuumsmechanik, Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
- [36] Betten, J. (2001): ‘Creep damage and life analysis of anisotropic materials’, *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 71, pp. 78–88.
- [37] Borino, G., Fuschi, P., Polizotto, C. (1996): ‘Elastic-plastic-damage constitutive models with coupling internal variables’, *Mech. Res. Comm.*, Vol. 23, pp. 19–28.
- [38] Braess, D. (1997): *Finite Elemente*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 2. Auflage.
- [39] Brocca, M., Bažant, Z. P. (2000): ‘Microplane constitutive model and metal plasticity’, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 53, pp. 265–281.
- [40] Brocca, M., Bažant, Z. P. (2001): ‘Microplane finite element analysis of tube-squash test of concrete with shear angles up to 70°’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 52, pp. 1165–1188.
- [41] Caner, F. C., Bažant, Z. P., Červenka, J. (2002): ‘Vertex effect in strain-softening concrete at rotating principal axes’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 128, pp. 24–33.

- [42] **Carol, I., Bažant, Z. P. (1997)**: ‘Damage and plasticity in microplane theory’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 34, pp. 3807–3835.
- [43] **Carol, I., Bažant, Z. P., Prat, P. (1991)**: ‘Geometric damage tensor based on microplane model’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 117, pp. 2429–2448.
- [44] **Carol, I., Jirásek, M., Bažant, Z. (2001)**: ‘A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: Free energy and consistent microplane stresses’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 2921–2931.
- [45] **Carol, I., Jirásek, M., Bažant, Z. (2004)**: ‘A framework for microplane models at large strain with application to hyperelasticity’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 41, pp. 511–557.
- [46] **Carol, I., Prat, P., Bažant, Z. P. (1992)**: ‘New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 29, pp. 1173–1191.
- [47] **Carol, I., Rizzi, E., Willam, K. J. (1994)**: ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 31, pp. 2835–2865.
- [48] **Carol, I., Rizzi, E., Willam, K. J. (2001)**: ‘On the formulation of anisotropic degradation. Part I: Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 491–518.
- [49] **Carol, I., Rizzi, E., Willam, K. J. (2001)**: ‘On the formulation of anisotropic degradation. Part II: Generalized pseudo-rankine model for tensile damage’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 519–546.
- [50] **Carol, I., Rizzi, E., Willam, K. J. (2002)**: ‘An extended volumetric/deviatoric formulation of anisotropic damage based on a pseudo-log rate’, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 42, pp. 747–772.
- [51] **Chen, W.-F., Saleeb, A. F. (1982)**: *Constitutive equations for engineering materials*, John Wiley & Sons.
- [52] **Clausius, R. (1865)**: ‘Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie’, *Ann. d. Physik*, Vol. 125, pp. 353–400.
- [53] **Clough, R. W. (1965)**: ‘The finite element method in structural mechanics’, in: **Zienkiewicz, O. C., Holister, S.** (eds.), *Stress Analysis: Recent Developments in Numerical and Experimental Methods*, John Wiley & Sons.
- [54] **Coleman, B. D., Gurtin, M. E. (1967)**: ‘Thermodynamics with internal state variables’, *J. Chem. Phys.*, Vol. 47(2), pp. 597–613.
- [55] **Coleman, B. D., Noll, W. (1963)**: ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity’, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 13, pp. 167–178.
- [56] **Comi, C. (1999)**: ‘Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials’, *Mech. Coh. Frict. Mat.*, Vol. 4, pp. 17–36.
- [57] **Comi, C., Perego, U. (2004)**: ‘Criteria for mesh refinement in nonlocal damage finite element analyses’, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 23, pp. 615–632.
- [58] **Cordebois, J. P., Sidoroff, F. (1982)**: ‘Damage induced elastic anisotropy’, in: **Boehler, J.** (ed.), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. EUROMECH Colloque 115, June 1979*, Martinus Nijhoff, The Netherlands, pp. 761–774.
- [59] **Cosserat, E., Cosserat, F. (1909)**: *Théorie des Corps Déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris.
- [60] **Crisfield, M. A. (1979)**: ‘Local instabilities in the nonlinear analysis of reinforced concrete beams and slabs’, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, Vol. 73, pp. 55–62.
- [61] **D’Addetta, G. A. (2004)**: *Discrete Models for Cohesive Frictional Materials*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 42, Universität Stuttgart.

- [62] **D’Addetta, G. A., Kun, F., Herrmann, H. J., Ramm, E. (2001)**: ‘From solids to granulates - discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials’, in: **Vermeer, P. A. e. a.** (ed.), *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials, Lecture reads in Physics 586*, Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, pp. 231–258.
- [63] **D’Addetta, G. A., Kun, F., Ramm, E. (2002)**: ‘Application of a discrete model to the fracture process of cohesive frictional materials’, *Granular Matter*, Vol. 4, pp. 77–90.
- [64] **de Boer, R. (1982)**: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [65] **de Borst, R. (1986)**: *Non-linear analysis of frictional materials*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [66] **de Borst, R. (1991)**: ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’, *Eng. Comp.*, Vol. 8, pp. 317–332.
- [67] **de Borst, R. (1991)**: ‘The zero-normal stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity’, *Comm. Appl. Num. Meth.*, Vol. 7, pp. 29–33.
- [68] **de Borst, R., Benallal, A., Heeres, O. (1996)**: ‘A gradient enhanced damage approach to fracture’, *J. de Phys. IV*, Vol. 6, pp. C6–491–502.
- [69] **de Borst, R., Geers, M. G. D., Peerlings, R. H. J. (1999)**: ‘Computational damage mechanics’, in: **Carpinteri, A., Aliabadi, M. H.** (eds.), *Computational Fracture Mechanics in Concrete Technology*, WIT Press, Southampton, pp. 33–69.
- [70] **de Borst, R., Mühlhaus, H. B. (1992)**: ‘Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 521–539.
- [71] **de Borst, R., Pamin, J. (1996)**: ‘Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 2477–2505.
- [72] **de Borst, R., Pamin, J., Geers, M. G. D. (1999)**: ‘On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis’, *Eur. J. Mech. / A: Solids*, Vol. 18, pp. 939–962.
- [73] **de Borst, R., Sluys, L. J., Mühlhaus, H. B., Pamin, J. (1993)**: ‘Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation’, *Eng. Comp.*, Vol. 10, pp. 99–121.
- [74] **de Borst, R., van der Giessen, E. (1998)**: *Material Instabilities in Solids*, John Wiley & Sons, Ltd.
- [75] **de Proft, K. (2003)**: *Combined experimental-computational study to discrete fracture of brittle materials*, Ph.D. Thesis, Vrije Universiteit Brussel, Belgium.
- [76] **de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M., van Gils, M. A. J. (1995)**: ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’, *Computers & Structures*, Vol. 55, pp. 581–588.
- [77] **Diez, P., Arroyo, M., Huerta, A. (2000)**: ‘Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials’, *Mech. Coh. Frict. Mat.*, Vol. 5, pp. 87–112.
- [78] **Dorning, K. (1989)**: *Entwicklung von nichtlinearen FE-Algorithmen zur Berechnung von Schalenkonstruktionen aus Faserverbundstoffen*, Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 18, Nr. 65, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [79] **Dragon, A., Halm, D., Desoyer, T. (2000)**: ‘Anisotropic damage in quasi-brittle solids: Modeling, computational issues and applications’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 183, pp. 331–352.
- [80] **Drucker, D. C., Prager, W. (1952)**: ‘Soil mechanics and plastic analysis of limit design’, *Quarterly Appl. Math.*, Vol. 10, pp. 157–175.
- [81] **Duvaut, G., Lions, J. L. (1972)**: *Les Inequations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris.
- [82] **Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. (1972)**: ‘On nonlocal elasticity’, *Int. J. Eng. Science*, Vol. 10, pp. 233–248.

- [83] **Etse, G., Nieto, M., Steinmann, P. (2003)**: ‘A micropolar microplane theory’, *Int. J. Eng. Science*, Vol. 41, pp. 1631–1648.
- [84] **Feenstra, P. H. (1993)**: *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [85] **Fichant, S., La Borderie, C., Pijaudier-Cabot, G. (1998)**: ‘A comparative study of isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures’, in: **Voyiadjis, G., Ju, J., Chaboche, J.** (eds.), *Damage mechanics in engineering materials*, Elsevier, pp. 259–274.
- [86] **Fichant, S., La Borderie, C., Pijaudier-Cabot, G. (1999)**: ‘Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures’, *Mech. Coh. Frict. Mat.*, Vol. 4, pp. 339–359.
- [87] **Fleck, N. A., Hutchinson, J. W. (1997)**: ‘Strain gradient plasticity’, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 295–361.
- [88] **Frémond, M., Nedjar, B. (1996)**: ‘Damage, gradient of damage and principle of virtual power’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 33, pp. 1083–1103.
- [89] **Garikipati, K. (1996)**: *On strong discontinuities in inelastic solids and their numerical simulation*, Ph.D. Thesis, Stanford University, California, USA.
- [90] **Geers, M. G. D., de Borst, R., Peerlings, R. H. J. (2000)**: ‘Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams’, *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 65, pp. 247–261.
- [91] **Geers, M. G. D., de Borst, R., Peijs, T., Meuwissen, M. H. H. (1998)**: ‘Internal length scales for higher-order damage models in random fibre reinforced composites’, in: **Oñate, E., Idelsohn, S.** (eds.), *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina*, CIMNE, Barcelona, Spain.
- [92] **Ghazi, M., Attard, M. M., Foster, S. J. (2002)**: ‘Modelling triaxial compression using microplane formulation for low confinement’, *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 919–934.
- [93] **Grassl, P., Jirásek, M. (2004)**: ‘On mesh bias of local damage models for concrete’, in: **Li, V. C., Leung, C. K. Y., Willam, S. L., K. J. and Billington** (eds.), *Proceedings of FraMCoS-5, Vail, USA*, pp. 252–262.
- [94] **Griffith, A. A. (1921)**: ‘The phenomena in rupture and flow in solids’, *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, Vol. A221, pp. 163–198.
- [95] **Gross, D. (1996)**: *Bruchmechanik*, Springer Verlag.
- [96] **Hansen, N. R., Schreyer, H. L. (1994)**: ‘A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 31, pp. 359–389.
- [97] **Hasegawa, T., Bažant, Z. P. (1994)**: ‘Nonlocal microplane concrete model with rate effect and load cycles’, *J. Mat. Civ. Eng.*, Vol. 5, pp. 372–410.
- [98] **Haufe, A. (2001)**: *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 35, Universität Stuttgart.
- [99] **Haupt, P. (2000)**: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer Verlag.
- [100] **Hawking, S. W. (2000)**: *Die illustrierte kurze Geschichte der Zeit*, Rowohlt Verlag, Hamburg, 4. Auflage.
- [101] **Hencky, H. (1924)**: ‘Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen’, *ZAMM*, Vol. 4, pp. 323–334.
- [102] **Hill, R. (1950)**: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press.
- [103] **Hill, R. (1962)**: ‘Acceleration waves in solids’, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, pp. 1–16.
- [104] **Holzappel, G. (2000)**: *Nonlinear Solid Mechanics*, John Wiley & Sons.
- [105] **Hordijk, D. A. (1991)**: *Local approach to fatigue of concrete*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.

- [106] **Hörmann, M. (2002)**: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 39, Universität Stuttgart.
- [107] **Huemer, T. (1998)**: *Automatische Vernetzung und adaptive nichtlineare statische Berechnung von Flächentragwerken mittels vierknotiger finiter Elemente*, Ph.D. Thesis, Instituts für Festigkeitslehre Technische Universität Wien.
- [108] **Hughes, T. J. R. (2000)**: *The Finite Element Method*, Dover Publications, Inc.
- [109] **Jirásek, M. (1993)**: *Modeling of fracture and damage in quasibrittle materials*, Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois.
- [110] **Jirásek, M. (1999)**: ‘Comments on microplane theory’, in: **Pijaudier-Cabot, G., Bittnar, Z., Gérard, B.** (eds.), *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*, Hermes Science Publications, Paris, pp. 57–77.
- [111] **Jirásek, M. (2000)**: *Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*, Courses on Damage and Fracture Mechanics, München, Lectures reads.
- [112] **Jirásek, M., Bažant, Z. P. (2002)**: *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons.
- [113] **Jirásek, M., Belytschko, T. (2002)**: ‘Computational resolution of strong discontinuities’, in: **Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J.** (eds.), *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria*, <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- [114] **Ju, J. W. (1989)**: ‘On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 25, pp. 803–833.
- [115] **Ju, J. W. (1990)**: ‘Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 116, pp. 2764–2770.
- [116] **Kachanov, L. M. (1958)**: ‘On creep rupture time’, *Izv. Acad. Nauk SSR, Otd. Techn. Nauk*, Vol. 8, pp. 26–31.
- [117] **Kachanov, L. M. (1986)**: *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- [118] **Kanatani, K. I. (1984)**: ‘Distribution of directional data and fabric tensors’, *Int. J. Eng. Science*, Vol. 22, pp. 149–164.
- [119] **Khan, A. S., Huang, S. (1995)**: *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons.
- [120] **Krajcinovic, D. (1996)**: *Damage Mechanics*, North-Holland, Elsevier.
- [121] **Krajcinovic, D., Lemaître, J. (1987)**: *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*, CISM Courses and Lectures No. 295, Springer Verlag, Wien – New York.
- [122] **Kröner, E. (1967)**: ‘Elasticity theory of materials with long range cohesive forces’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 3, pp. 731–742.
- [123] **Kuhl, E. (2000)**: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 32, Universität Stuttgart.
- [124] **Kuhl, E., D’Addetta, G. A., Herrmann, H. J., Ramm, E. (2000)**: ‘A comparison of discrete granular material models with continuous microplane formulations’, *Granular Matter*, Vol. 2, pp. 113–121.
- [125] **Kuhl, E., D’Addetta, G. A., Leukart, M., Ramm, E. (2001)**: ‘Microplane modelling and particle modelling of cohesive frictional materials’, in: **Vermeer, P. A. e. a.** (ed.), *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials, Lecture reads in Physics 586*, Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, pp. 31–46.
- [126] **Kuhl, E., de Borst, R., Ramm, E. (1998)**: ‘A gradient enhancement with application to anisotropic continuum damage’, in: **Oñate, E., Idelsohn, S.** (eds.), *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina*, CIMNE, Barcelona, Spain.
- [127] **Kuhl, E., Ramm, E. (1999)**: ‘Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models’, *Comp. Mat. Sc.*, Vol. 16, pp. 176–185.

- [128] **Kuhl, E., Ramm, E. (2000)**: ‘Microplane modelling of cohesive frictional materials’, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 19, pp. S121–S143.
- [129] **Kuhl, E., Ramm, E., de Borst, R. (1998)**: ‘Anisotropic gradient damage with the microplane model’, in: **de Borst, R., Bićanić, N., Mang, H., Meschke, G.** (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema, Rotterdam, pp. 103–112.
- [130] **Kuhl, E., Ramm, E., de Borst, R. (2000)**: ‘An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 183, pp. 87–103.
- [131] **Kuhl, E., Ramm, E., Willam, K. (2000)**: ‘Failure analysis for elasto–plastic material models on different levels of observation’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 37, pp. 7259–7280.
- [132] **Kuhl, E., Steinmann, P., Carol, I. (2001)**: ‘A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modelling’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 2933–2952.
- [133] **Lackner, R. (1999)**: *Adaptive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells*, Ph.D. Thesis, Instituts für Festigkeitslehre Technische Universität Wien.
- [134] **Larsson, R., Runesson, K. (1996)**: ‘Element–embedded localization band based on regularized displacement discontinuity’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 122, pp. 402–411.
- [135] **Lasry, D., Belytschko, T. (1988)**: ‘Localization limiters in transient problems’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 24, pp. 581–597.
- [136] **Lee, Y. H., Willam, K. (1997)**: ‘Mechanical properties of concrete in uniaxial compression’, *Materials Journal, ACI*, Vol. 94, pp. 457–471.
- [137] **Lemaître, J. (1983)**: ‘A continuous damage mechanics model for ductile fracture’, *J. Eng. Mat. & Techn.*, Vol. 107, pp. 83–89.
- [138] **Lemaître, J. (1984)**: ‘How to use damage mechanics’, *Nuclear Engineering & Design*, Vol. 80, pp. 233–245.
- [139] **Lemaître, J. (1992)**: *A Course on Damage Mechanics*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [140] **Lemaître, J., Chaboche, J. L. (1985)**: *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod, Paris.
- [141] **Lemaître, J., Chaboche, J. L. (2000)**: *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press.
- [142] **Leukart, M., Ramm, E. (2002)**: ‘An alternative split within the microplane material model’, in: **Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J.** (eds.), *Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria*, <http://wccm.tuwien.ac.at/publications/Papers/fp81184.pdf>.
- [143] **Leukart, M., Ramm, E. (2002)**: ‘A microplane material model with volumetric & deviatoric split’, *Internal Report, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart*.
- [144] **Leukart, M., Ramm, E. (2003)**: ‘A comparison of damage models formulated on different material scales’, *Computational Materials Science*, Vol. 28, pp. 749–762.
- [145] **Leukart, M., Ramm, E. (2004)**: ‘Identification and interpretation of microplane material laws’, *submitted to J. Eng. Mech.*
- [146] **Liebe, T. (2003)**: *Theory and numerics of higher gradient inelastic material behavior*, Ph.D. Thesis, Bericht aus dem Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität Kaiserslautern.
- [147] **Lubarda, V. A., Krajcinovic, D. (1993)**: ‘Damage tensors and the crack density distribution’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 30, pp. 2859–2877.
- [148] **Lubliner, J. (1990)**: *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- [149] **Luenberger, D. G. (1973)**: *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley Publishing Company.

- [150] **Lulei, F. (2002)**: *Mikromechanisch motivierte Modelle zur Beschreibung finiter Deformationen gummiartiger Polymere: physikalische Modellbildung und numerische Simulation*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Nr. I-09, Universität Stuttgart.
- [151] **Malvern, L. E. (1969)**: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [152] **Mandel, J. (1972)**: *Plasticité Classique et Viscoplasticité*, CISM Courses and Lectures No. 97, Springer Verlag, Wien – New York.
- [153] **Marotti de Sciarra, F. (1997)**: ‘General theory of damage elastoplastic models’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 123, pp. 1003–1011.
- [154] **Marsden, J., Hughes, J. (1983)**: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [155] **Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. (1989)**: ‘Continuum damage theory – Application to concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, pp. 345–365.
- [156] **Melenk, J. M., Babuška, I. (1996)**: ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 39, pp. 289–314.
- [157] **Menrath, H. (1999)**: *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*, Ph.D. Thesis, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 29, Universität Stuttgart.
- [158] **Mesmar, S. T., Crouch, R. S. (2000)**: ‘Fractur regularization by extension of the explicit microplane model for concrete to include duvaut–lions visco–plasticity’, in: **Oñate, E.** (ed.), *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Spain*, CD-ROM.
- [159] **Miehe, C. (1993)**: *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität – Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*, Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 93/1.
- [160] **Mindlin, R. D. (1965)**: ‘Second gradient of strain and surface–tension in linear elasticity’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 1, pp. 417–438.
- [161] **Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999)**: ‘A finite element method for crack growth without remeshing’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 46, pp. 131–150.
- [162] **Mohr, O. (1900)**: ‘Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?’, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Vol. 46, pp. 1524–1530, 1572–1577.
- [163] **Mosler, J., Meschke, G. (2003)**: ‘3d modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 57, pp. 1553–1576.
- [164] **Mróz, Z., Maciejewski, J. (2002)**: ‘Failure criteria of anisotropically damaged materials based on the critical plane concept’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 25, pp. 407–431.
- [165] **Mühlhaus, H. B. (1995)**: *Continuum Models for Materials with Microstructure*, John Wiley & Sons.
- [166] **Mühlhaus, H. B., Aifantis, E. C. (1991)**: ‘A variational principle for gradient plasticity’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 28, pp. 845–857.
- [167] **Müller, S. (2000)**: *Simulation transversal isotroper Elastizität von Spanplatten im Rahmen des Microplane Modells*, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr–Universität Bochum.
- [168] **Murakami, S. (1988)**: ‘Mechanical modelling of material damage’, *J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 280–286.
- [169] **Nádai, A. (1931)**: *Plasticity*, Mc Graw–Hill, New York – London.
- [170] **Nadai, A. (1950)**: *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw–Hill, New York, NY, USA.
- [171] **Naghdi, P., Trapp, J. (1975)**: ‘The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space’, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 13, pp. 785–797.

- [172] **Ogden, R. W. (1985)**: *Non linear elastic deformations*, Dover Publications, Inc.
- [173] **Oliver, J. (1996)**: ‘Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals, Part II: Numerical simulation’, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 39, pp. 3575–3623.
- [174] **Ortiz, M. (1985)**: ‘A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete’, *Mechanics of Materials*, Vol. 4, pp. 67–93.
- [175] **Ožbolt, J., Bažant, Z. P. (1992)**: ‘Microplane model for cyclic triaxial behavior concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 118, pp. 1365–1386.
- [176] **Ožbolt, J., Bažant, Z. P. (1996)**: ‘Numerical smeared fracture analysis: Nonlocal microcrack interaction approach’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 635–661.
- [177] **Ožbolt, J., Li, Y., Kožar, I. (2001)**: ‘Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 2683–2711.
- [178] **Ožbolt, J., Meštrovic, D., Li, Y., Eligehausen, R. (2000)**: ‘Compression failure of beams made of different concrete types and sizes’, *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 126, pp. 200–209.
- [179] **Pamin, J. (1994)**: *Gradient-Dependent Plasticity in Numerical Simulation of Localization Phenomena*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [180] **Pamin, J., de Borst, R. (1999)**: ‘Stiffness degradation in gradient-dependent coupled damage-plasticity’, *Arch. Mech.*, Vol. 51, pp. 407–433.
- [181] **Patzák, B., Jirásek, M. (2003)**: ‘Adaptive resolution of localized damage in quasibrittle materials’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 130, pp. 720–732.
- [182] **Peerlings, R. H. J. (1999)**: *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- [183] **Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., Geers, M. G. D. (1998)**: ‘Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture’, *Mech. Coh. Fric. Mat.*, Vol. 3, pp. 323–343.
- [184] **Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., Vree, J. H. P. (1996)**: ‘Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3391–3403.
- [185] **Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., Vree, J. H. P., Spee, I. (1996)**: ‘Some observations on localisation in non-local and gradient damage models’, *Eur. J. Mech. / A: Solids*, Vol. 15, pp. 937–953.
- [186] **Peerlings, R. H. J., Geers, M. G. D., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M. (2001)**: ‘A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 7723–7746.
- [187] **Perzyna, P. (1966)**: ‘Fundamental problems in viscoplasticity’, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 9, pp. 243–377.
- [188] **Petersson, P. E. (1985)**: ‘Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials’, *Internal Report TVBM-1006, Division of Building Materials, University of Lund, Sweden*.
- [189] **Pietruszczak, S., Mróz, Z. (1981)**: ‘Finite element analysis of deformation of strain-softening materials’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 327–334.
- [190] **Pietruszczak, S., Mróz, Z. (2001)**: ‘On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 25, pp. 509–524.
- [191] **Pietruszczak, S., Pande, G. N. (2001)**: ‘Description of soil anisotropy based on multi-laminate framework’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 25, pp. 197–206.
- [192] **Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z. P. (1987)**: ‘Nonlocal damage theory’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 113, pp. 1512–1533.

- [193] **Prat, P. C., Gens, A. (1994)**: ‘Microplane formulation for quasibrittle materials with anisotropy and damage’, in: **Bažant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M., Mazars, J.** (eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, E & FN Spon, pp. 67–74.
- [194] **Rabotnov, I. N. (1963)**: ‘On the equations of state for creep’, in: *Progress in applied mechanics – The Prager anniversary volume*, Mac Millan, New York, pp. 307–315.
- [195] **Ramm, E., D’Addetta, G., Leukart, M. (2003)**: ‘Interrelations between continuum and discontinuum models for geomaterials’, in: **Oñate, E., Owen, D. R. J.** (eds.), *Proceedings of the 7th Conference on Computational Plasticity, Barcelona, Spain*, CD-ROM.
- [196] **Ramm, E., D’Addetta, G., Leukart, M. (2004)**: ‘From microscopic to macroscopic modeling of geomaterials’, in: **Neittaanmäki, P., Rossi, T., Korotov, S., Oñate, E., Knörzer, D.** (eds.), *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Jyväskylä, Finland*, CD-ROM.
- [197] **Reinhardt, H. W. (1984)**: ‘Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete’, *Heron*, Vol. 29, pp. 3–33.
- [198] **Renau, J. (2001)**: *The N-Directional Approach to Constitutive Laws*, Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Switzerland.
- [199] **Reuss, A. (1929)**: ‘Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie’, *ZAMM*, Vol. 10, pp. 266–274.
- [200] **Rodriguez-Ferran, A., Huerta, A. (2000)**: ‘Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 37, pp. 7501–7528.
- [201] **Rots, J., Nauta, P., Kusters, G. M. A., Blaauwendraad, J. (1985)**: ‘Smearred crack approach and fracture localization in concrete’, *Heron*, Vol. 30, pp. 3–45.
- [202] **Schlangen, E. (1993)**: *Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [203] **Simo, J. C., Hughes, T. J. R. (1998)**: *Computational Inelasticity*, Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg.
- [204] **Simo, J. C., Ju, J. W. (1987)**: ‘Strain- and stress based continuum damage models: Part I – Formulation, Part II – Computational aspects’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 23, pp. 821–869.
- [205] **Simone, A., Askes, H., Peerlings, R. H. J., Sluys, L. J. (2003)**: ‘Interpolation requirements for implicit gradient-enhanced continuum damage models’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 563–572.
- [206] **Simone, A., Wells, G. N., Sluys, L. J. (2003)**: ‘From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 192, pp. 4581–4607.
- [207] **Skrzypek, J., Ganczarski, A. (1999)**: *Modeling of Material Damage and Failure of Structures*, Springer-Verlag Berlin.
- [208] **Sluys, L. J. (1992)**: *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [209] **Stein, E., Barthold, F.-J. (1992)**: *Elastizitätstheorie*, Unterlagen zur Vorlesung ”Elastizitätstheorie”, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [210] **Steinmann, P. (1999)**: ‘Formulation and computation of geometrically non-linear gradient damage’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 46, pp. 757–779.
- [211] **Stroud, A. H. (1971)**: *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [212] **Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T. (2000)**: ‘Extended finite element method for three-dimensional crack modeling’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 48, pp. 1549–1570.
- [213] **Svedberg, T., Runesson, K. (1997)**: ‘A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage’, *Int. J. Plast.*, Vol. 13, pp. 669–696.

- [214] **Svedberg, T., Runesson, K. (1998)**: ‘An algorithm for gradient-regularized plasticity coupled to damage based on a dual mixed FE formulation’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 161, pp. 49–65.
- [215] **Taylor, G. I. (1938)**: ‘Plastic strain in metals’, *J. Inst. Metals*, Vol. 62, pp. 307–324.
- [216] **Tikhomirov, D. (2000)**: *Theorie und Finite-Element-Methode für die Schädigungsbeschreibung in Beton und Stahlbeton*, Ph.D. Thesis, Bericht aus dem Institut für Bruchmechanik und Numerische Mechanik Nr. F00-4, Universität Hannover.
- [217] **Tikhomirov, D., Niekamp, R., Stein, E. (2001)**: ‘On three-dimensional microcrack density distribution’, *ZAMM*, Vol. 81, pp. 3–16.
- [218] **Toupin, R. A. (1962)**: ‘Elastic materials with couple-stresses’, *Arch. Ration. Mech. Analysis*, Vol. 11, pp. 385–414.
- [219] **Tresca, M. H. (1867)**: ‘Sur l’écoulement des corps solides à de fortes pressions’, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie de Sciences*, Vol. 64, pp. 809–812.
- [220] **Truesdell, C., Noll, W. (1965)**: ‘The non-linear field theories of mechanics’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer Verlag, Berlin.
- [221] **Truesdell, C., Toupin, R. (1960)**: ‘The classical field theories’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Springer Verlag, Berlin.
- [222] **van Mier, J. G. M. (1997)**: *Fracture Processes of Concrete*, CRC Press.
- [223] **von Mises, R. (1913)**: ‘Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand’, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 582–592.
- [224] **Voyiadjis, G. Z., Deliktas, B. (2000)**: ‘A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials’, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 183, pp. 159–199.
- [225] **Wells, G. N., Sluys, L. J., de Borst, R. (2001)**: ‘Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 1235–1256.
- [226] **Willam, K. J. (1984)**: ‘Experimental and computational aspects of concrete fracture’, in: **Damjanović, F., Hinton, E., Owen, D. R. J., Bičanić, N., Simović, V.** (eds.), *Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, pp. 33–69.
- [227] **Winkler, B. J. (2001)**: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*, Ph.D. Thesis, Innsbruck University Press, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck.
- [228] **Wriggers, P. (2001)**: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag.
- [229] **Yazdani, S. (1993)**: ‘On a class of continuum damage mechanics theories’, *Int. J. Dam. Mech.*, Vol. 2, pp. 162–176.
- [230] **Yazdani, S., Schreyer, H. L. (1988)**: ‘An anisotropic damage model with dilatation for concrete’, *Mech. Mater.*, Vol. 7, pp. 231–244.
- [231] **Zhu, Y. Y., Cescotto, S. (1995)**: ‘A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 32, pp. 1607–1641.
- [232] **Zienkiewicz, O. C. (1971)**: *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill, London.
- [233] **Zienkiewicz, O. C., Pande, G. N. (1977)**: ‘Time-dependent multilaminar model of rocks – A numerical study of deformation and failure of rock masses’, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, Vol. 1, pp. 219–247.
- [234] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1989)**: *The Finite Element Method, Volume I & II*, Mc Graw-Hill, New York – London.



# Lebenslauf

Name:	Michael Leukart
Geburtstag:	23.10.1973
Geburtsort:	Tübingen
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Eltern:	Hans und Anne Leukart, geb. Ballestrin
Familienstand:	ledig
1980 – 1984	Grundschule Dußlingen
1984 – 1993	Quenstedt-Gymnasium, Mössingen Abschluß: Abitur
10/1994 – 12/1999	Studium Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
12/1999	Abschluß: Dipl.-Ing. (mit Auszeichnung)
02/2000	Arthur-Fischer-Preis der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart für hervorragende Studienleistungen bei kurzer Studiendauer
02/2000 – 01/2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart



## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1**      **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2**      **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3**      **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4**      **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1**      **G. Müller, R. M. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2**      **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3**      **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1**      **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2**      **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1**      **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falterwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1**      **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1**      **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2**      **H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79-3**      **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1**      **R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2**      **R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3**      **J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1**      **L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyinders.
- 82-2**      **K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3**      **H.-P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983)**    **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983)**    **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983)**    **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984)**    **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985)**    **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987)**    **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.

- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.

- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.





Universität Stuttgart

ISBN 3-00-015801-4