

**Zur Berechnung von großen elastoplastischen
Deformationen bei Flächentragwerken
und Kontinua**

von

Deane de Mesquita Roehl

Bericht Nr. 16 (1994)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1994



z

13.3.95

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua

von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
Deane de Mesquita Roehl
geboren in Rio de Janeiro

Hauptberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Ramm
Mitberichter: Prof. Dr.–Ing. B. Kröplin
Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 1994

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
1994

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Analyse von 3D- und Flächentragwerken mit großen elastoplastischen Deformationen nach der Methode der finiten Elemente. Hierbei basiert das elastoplastische Materialmodell auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Das elastische Teilstoffgesetz beruht auf einem hyperelastischen Ansatz und die Evolutionsgleichungen der plastischen Variablen werden aus dem Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation hergeleitet.

Zur Lösung der nichtlinearen mechanischen Gleichungen wird auf das Newton-Verfahren zurückgegriffen. In Verbindung mit dem lokalen Zeitintegrationsalgorithmus – hier das implizite Euler-Verfahren – wird die konsistente Materialtangente bestimmt.

Als Alternative zur Verschiebungsformulierung, die sich für die Berechnung großer elastoplastischer Deformationen als ungeeignet erweist, wird das *Enhanced Assumed Strain*-Konzept gewählt. Anhand einiger Beispiele werden die dargestellte Theorie und die entwickelte numerische Methode illustriert. Insbesondere werden Probleme mit großen lokalen Verzerrungen untersucht.

Abstract

The present work deals with the analysis of three dimensional and shell structures undergoing large elastoplastic deformations with aid of the finite element method. Herefore is the material model based on the multiplicative split of the deformation gradient. The elastic behavior follows a hyperelastic description and the evolution laws for the internal variables are derived from the principle of maximum plastic dissipation.

The solution of the nonlinear mechanical equations is achieved through a Newton iteration procedure for which the material tangent consistent with the time integration algorithm employed – here the implicit Euler method – is determined.

As an alternative to the displacement finite element model, which proves to be inadequate for the analysis of large elastoplastic deformations, the *Enhanced Assumed Strain* Method was chosen. Some numerical examples validate the theory and the developed numerical procedure whereby special attention is given to problems with large local deformations.

Persönliches Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der wissenschaftlichen Forschung am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Herrn Professor Dr.–Ing. E. Ramm möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie sein stets förderndes Interesse meinen herzlichsten Dank ausdrücken.

Bei Herrn Professor Dr.–Ing. B. Kröplin bedanke ich mich für sein Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

An dieser Stelle möchte ich Frau U. Bletzinger für die sorgfältige Korrektur und die Verbesserungsvorschläge bei der deutschen Fassung herzlich danken.

Die finanzielle Unterstützung durch den Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) und die "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico" (CNPq) sei hier dankbar erwähnt.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinem Mann Rodolfo für die Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit.

Deane de Mesquita Roehl

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	11
1.1 Fragestellung	11
1.2 Ziele der vorliegenden Arbeit	14
1.3 Umfang	14
2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	17
2.1 Bewegung und Deformation	17
2.1.1 Die Begriffe "materielle Zeitableitung" und "Lie-Ableitung"	19
2.1.2 Der Deformationsgradient	21
2.2 Deformations- und Verzerrungstensoren	22
2.3 Elasto-plastische Deformationen	23
2.4 Volumetrische und isochore Deformationen	24
2.5 Spannungstensoren	25
2.6 Die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik	27
2.6.1 Massenbilanz	27
2.6.2 Impuls- und Drallbilanz	27
3 Arbeits- und Energieprinzipien	30
3.1 Schwache Form der Gleichgewichtsbedingung	30
3.2 Gemischtes Variationsprinzip	31
4 Konstitutive Gleichungen	33
4.1 Grundlegende konstitutive Annahme	33
4.2 Das elastische Teilstoffgesetz	34
4.3 Das plastische Teilstoffgesetz	37
4.3.1 Innere Variablen	37
4.3.2 Konstitutive Gleichungen	38
4.3.3 Anwendung auf die J_2 -Elastoplastizität	39
4.4 Lokale Integration der Fließregel	41
4.4.1 Übertragung des "Radial-Return"-Algorithmus auf die J_2 -Fließtheorie bei endlichen Verzerrungen	41
5 Das inkrementelle Problem	44
5.1 Verschiebungsformulierung und Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	45

5.2 Gemischtes Funktional als Vorbereitung für die EAS-Formulierung	46
5.2.1 Variationelle Basis	46
5.2.2 Linearisierung des gemischten Funktionals	48
5.3 Linearisierung des Stoffgesetzes	51
6 Finite-Element-Formulierung	53
6.1 Verschiebungsformulierung	53
6.1.1 Das isoparametrische 3D-Finite Element	55
6.2 Gemischte Formulierung	55
6.2.1 Die EAS-Formulierung für große Dehnungen	56
6.2.2 Einbau des EAS-Konzeptes in das nichtlineare Lösungsverfahren	62
6.2.3 Bemerkung zum Einbau des EAS-Konzeptes in den Return-Algorithmus der Plastizität	64
6.2.4 Bestimmung des erweiterten Ansatzes für den Verschiebungsgradienten	64
6.3 Anwendung des EAS-Konzeptes am Beispiel des trilinearen 3D-Elementes	65
6.3.1 Erweiterter Ansatz für das HEXA8 Element	65
6.3.2 Bemerkung zur numerischen Integration bei den 3D-EAS Elementen	66
6.3.3 Eigenwertanalyse der linearen Matrix	67
6.3.4 Bemerkung zur Spannungsrückrechnung bei den EAS-Elementen	68
6.4 Numerische Untersuchungen	71
6.4.1 Patch-Test	71
6.4.2 Kragbalken	71
6.4.3 Elementverzerrungstest	72
6.4.4 Quadratplatte unter Eigengewicht	75
6.4.5 Scordelis-Lo-Schale	76
7 Beispiele	78
7.1 Beispiel 1: Dickwandiger Zylinder mit Innendruck	78
7.2 Beispiel 2: Stauchversuch an Vollzylinder	81
7.3 Beispiel 3: Zugversuch – Einschnürung	83
7.4 Beispiel 4: Stauchung von Hohlzylindern	86
7.5 Beispiel 5: Lochscheibe	92
7.6 Schlußfolgerungen	94
8 Zur Erfassung lokaliserten Versagens	95
8.1 Verzweigungskriterien bei elastoplastischen Materialien ..	96

8.2 Beispiele für Lokalisierung in der J_2 -Plastizität	98
8.2.1 Schubtest	99
8.2.2 Zugversuch an einem rechteckigen Stab	101
8.3 Objektivität der Ergebnisse	105
8.3.1 Stauchungsversuch für ebenen Dehnungszustand. .	105
8.3.2 Die Methode des netzabhängigen Entfestigungsmoduls	107
8.3.3 Anwendung der Methode des netzabhängigen Entfestigungsmoduls	110
9 Anwendung von 3-D Stoffgesetzen auf dünnwandige Tragwerke	112
9.1 Anwendung der 7-Parameter-Formulierung bei Elastoplastizität	113
9.2 Numerische Beispiele	114
9.2.1 Quadratplatte unter Gleichlast	114
9.2.2 Halbkugelschale mit punktwiser Belastung	116
9.2.3 Kreiszyylinder unter Linienlast	118
9.2.4 Versagensanalyse einer flachen zylindrischen Schale ("Scordelis-Lo Roof")	120
9.2.5 Zusammenfassung	125
10 Zusammenfassung und Ausblick	126
Literatur	128
Anhang A – Konsistente Linearisierung des Stoffgesetzes ..	135
Anhang B – Schalenformullerung mit extensiblen Direktor .	139
B.1 Die 6-Parameter-Schalentheorie	139
B.1.1 Geometrie und Kinematik der Schale	139
B.1.2 Green-Lagrange-Verzerrungen	140
B.1.3 Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 2. Art	141
B.1.4 Prinzip der virtuellen Arbeit für Schalen	142
B.2 Die 7-Parameter-Schalentheorie	143
B.2.1 Einführung eines linear veränderlichen Verzerrungsfeldes β_{33} durch die EAS-Methode	143
B.2.2 Finite-Element-Diskretisierung	144

Abbildungsverzeichnis

Bild 1.1:	Lokales plastisches Versagen	13
Bild 2.1:	Zur Kinematik der Deformation	19
Bild 2.2:	Konfigurationen für die Definition der Lie–Ableitung	20
Bild 2.3:	Bezugs– und Momentankonfiguration eines Körpers und die lokale plastische Zwischenkonfiguration. 23	
Bild 6.1:	Achtknotiges 3D–Element – HEXA8	55
Bild 6.2:	Geometrie des Patch–Test	71
Bild 6.3:	Kragarm mit verzerrtem Elementnetz	73
Bild 6.4:	Einfluß der Netzverzerrung	75
Bild 6.5:	Durchbiegung w_A des Kragarms bei reiner Biegung ..	75
Bild 6.6:	Naviergelagerte Quadratplatte unter Gleichlast. ..	76
Bild 6.7:	Scordelis–Lo Schale	77
Bild 7.1:	Dickwandiger Zylinder: Beispielbeschreibung	79
Bild 7.2:	Radialspannungen am Innenrand, aufgetragen über Radiuszuwachs	80
Bild 7.3:	Radialspannungen am Innenrand, aufgetragen über Radiuszuwachs	80
Bild 7.4:	Stauchversuch: Probengeometrie und FE–Modellierung	81
Bild 7.5:	Stauchversuch: Endverformungszustand a) mit HEXA8; b) mit HEXA8–E3 Elementen	82
Bild 7.6:	Stauchversuch: Last – vertikale Verschiebungskurven ..	82
Bild 7.7:	Zugversuch: Probengeometrie und Diskretisierung	84
Bild 7.8:	Zugversuch: Versagensformen	85
Bild 7.9:	Zugversuch: Kraft – Verschiebungs – Verlauf	85
Bild 7.10:	Stauchversuch : Probengeometrie	86
Bild 7.11:	Gleitlinien beim Stauchversuch [46]	87
Bild 7.12:	Stauchung am dicken Zylinder (40 %) – a) HEXA8 b) HEXA8–E3	88
Bild 7.13:	Stauchung am schlanken Zylinder (53%) – a) HEXA8 b) HEXA8–E3	88
Bild 7.14:	Stauchung an Hohlzylindern	89
Bild 7.15:	Stauchung an Hohlzylindern. Vergleich der Ergebnisse nach der Formulierung mit großen und mit kleinen Verzerrungen.	90
Bild 7.16:	Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).	91

Bild 7.17: Lochscheibe – Geometrie und Materialeigenschaften ...	92
Bild 7.18: Verformter Zustand bei einer Verlängerung von 33% nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).	93
Bild 7.19: Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung bei einer Verlängerung von 33% nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).	93
Bild 7.20: Lochscheibe: Last – Verschiebungskurve	94
Bild 8.1: Lokalisierungstest: Schubversuch an einem einzelnen Element ($u=10,0$ mm)	100
Bild 8.2: Schubversuch, Last–Verschiebungskurve	101
Bild 8.3: Lokalisierungstest: Zugversuch im ebenen Dehnungszustand	102
Bild 8.4: Verformungszustände mit HEXA8–E3 (Gauß–Int. $2 \times 2 \times 2$)	103
Bild 8.5: Versagenszustand mit HEXA8–E3 (15–Punkt–Int.) $u=5,0$ mm	103
Bild 8.6: Versagenszustand mit HEXA8–E6 (Gauß–Int. $2 \times 2 \times 2$)	104
Bild 8.7: Zugversuch: Last–Verschiebungskurven	104
Bild 8.8: 2D–Stauchversuch	105
Bild 8.9: Darstellung der Netzabhängigkeit im Entfestigungsbereich	106
Bild 8.10: Aufteilung der elastischen und plastischen Dehnungen	107
Bild 8.11: Darstellung der Objektivität bei netzabhängigem Entfestigungsmodul	110
Bild 8.12: 2D–Stauchung: Scherfugen	111
Bild 9.1: Quadratplatte: Geometrie und Materialdaten	115
Bild 9.2: Last–Verschiebungsdiagramm	115
Bild 9.3: Halbkugel: Geometrie und Materialdaten	116
Bild 9.4: Halbkugel: Verformungsfigur	117
Bild 9.5: Last–Verschiebungskurven an den Punkten A und B ...	117
Bild 9.6: Kreiszyylinder: Geometrie und Materialdaten	118
Bild 9.7: Kreiszyylinder: Verformungsfigur	119
Bild 9.8: Kreiszyylinder: Last–Verschiebungsdiagramm	119
Bild 9.9: Scordelis–Lo Schale	121
Bild 9.10: Scordelis–Lo Schale : Firstscharnier	122

Bild 9.11: Scordelis–Lo Schale: Last–Verschiebungsdiagramm mit 7–Parameter–Schalenelementen und 3D–Elementen	123
Bild 9.12: Scordelis–Lo Schale: Last–Verschiebungsdiagramm mit 5–Parameter–Schalenelementen	123
Bild 9.13: Scordelis–Lo Schale: Versagensformen	124
Bild B.1: Schalengeometrie und –kinematik	140

1 Einleitung

1.1 Fragestellung

Aufgrund der höheren Ausnutzung der Tragwerke und durch die Verwendung neuartiger Materialien treten nichtlineare Aufgabestellungen bei Problemen der Ingenieurpraxis immer häufiger auf. Weiterhin steigen die Anforderungen an sichere und wirtschaftliche Berechnungsmethoden zur Ausnutzung von System- und Materialreserven. Für viele Anwendungsfälle werden bei den Bemessungsverfahren zur Ausnutzung dieser Reserven genäherte Traglastberechnungen durchgeführt, wie z.B. im Stahlbau bei der Idealisierung von Fließgelenken bei Durchlaufpfetten. Zur Abbildung komplizierter Versagensprozesse mit plastischen Deformationen, Spannungsumlagerungen und teilweisem oder gesamtem Systemversagen sind jedoch stark vereinfachte Modelle meist nicht ausreichend.

In der letzten Zeit gewann die Anwendung der Finite Element Methode zur Simulation eines realistischen Tragverhaltens – im Zusammenhang mit der immer größeren Leistungsfähigkeit der Rechner – zunehmende Verbreitung. Der Einsatzbereich dieser Methode erstreckt sich heute auch auf die Beschreibung komplizierter Vorgänge, wie sie z.B. bei nichtlinearem Tragverhalten von Konstruktionen des Bauwesens, des Maschinenbaus, des Flugzeugbaus und der Biomechanik auftreten. Im Vordergrund der nichtlinearen Strukturanalyse im Bauwesen steht die Abschätzung der Sicherheit gegenüber Versagen oder Funktionsunfähigkeiten sowohl im Betrieb als auch im Störfall. Im Bereich der Umformtechnik sind Planung und Optimierung von Fertigungsverfahren sowie die Untersuchung der Eigenschaften des Endproduktes Ziele einer solchen Simulation.

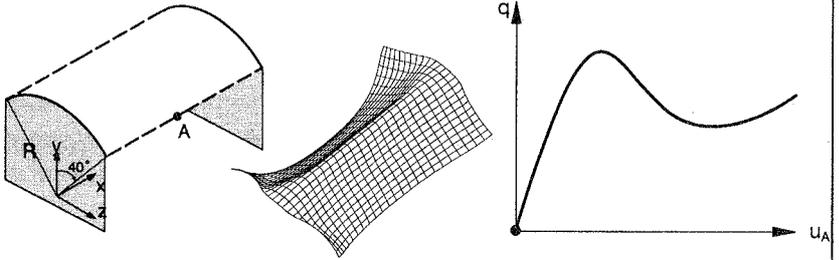
Die Formulierung eines rechnerunterstützten Lösungskonzepts zur wirklichkeitstreueren Erfassung des materiell und geometrisch nichtlinearen Verhaltens von metallischen dreidimensionalen Strukturen und Flächentragwerken mit großen plastischen Verzerrungen ist Gegenstand dieser Arbeit. Im Fall kleiner Deformationen ist die Berechnung metallischer Strukturen mit inelastischem Materialverhalten weitgehend Stand der Technik. Das Thema "große plastische Verzerrungen" wurde bereits in einigen Arbeiten abgehandelt (z.B. Nagtegaal, de Jong [47]; Müller–Hoeppel [45]; Glaser [26]; Peric, Owen, Honnor [57]), jedoch bleiben bei der Untersuchung von Problemen mit einem komplexen Materialverhalten und bei Problemen, bei denen auch die Formulierung der nichtlinearen Geometrie von großer Bedeutung ist, weitgehend ungeklärte Formulierungsfragen und numerische Schwierigkeiten. Tragwerke, deren Tragverhalten sehr empfindlich gegenüber endlichen Verformungen und plastischem Materialverhalten ist, stellen Schalenkonstruktionen dar (siehe Bild 1.1, Beispiel 1). Oft bilden sich bei der pla-

stischen Deformation duktiler Materialien als Vorstufe des Versagens eines Tragwerkes lokale Zonen aus, in denen eine Konzentration plastischer Formänderungen bzw. Formänderungsraten beobachtet wird. Drei Beispiele von Tragwerken, bei denen das Versagen auf örtliche Effekte zurückzuführen ist, werden in Bild 1.1 (Beispiele 2–4) gezeigt. Ein weiteres Beispiel, bei dem große inelastische Deformationen eine wichtige Rolle spielen, stellt das Auftreten von stark beanspruchten Zonen bei dünnwandigen Tragwerken dar, z.B. bei lokalen Versagensformen in Fließgelenkbereichen mit Überschreitung der Rotationskapazität der Strukturknoten.

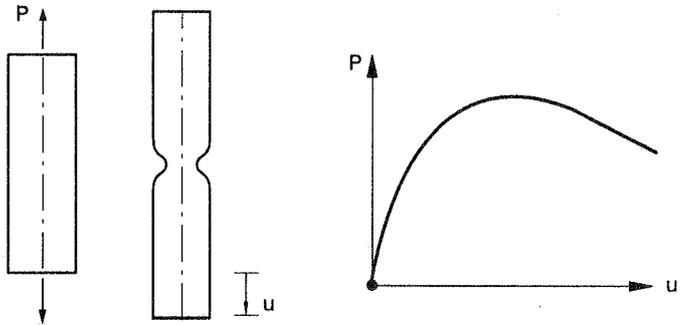
Eine allgemeine Formulierung für die Beschreibung inelastischer Vorgänge bei großen Deformationen wird von Simo [75], [76] eingeführt, die auf frühere Arbeiten, z.B. von Lee [36] zurückgreift. Diese Formulierung beruht auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil und wird in Verbindung mit einem hyperelastischen Stoffgesetz durchgeführt. Analog zu dem geometrisch linearen Fall wird bei dieser allgemeinen Formulierung das Fließgesetz aus dem *Prinzip vom Minimum der plastischen Dissipationsarbeit* abgeleitet. Die numerische Realisierung dieser Formulierung zeigt als wesentlichen Unterschied zu dem infinitesimalen Fall, daß mit großen Verzerrungskinematiken gearbeitet wird. Dabei bleiben die Integrationsalgorithmen der Stoffgesetze unmodifiziert. In Verbindung mit einem stabilen impliziten Integrationsverfahren des Werkstoffmodells wird im Hinblick auf die numerische Effektivität des Newton–Verfahrens die *konsistente* Materialtangente [79] bestimmt. Im Gegensatz zu Formulierungen, die auf einer additiven Zerlegung der Deformation und einer hypoelastischen Materialbeschreibung basieren, werden objektive Integrationsalgorithmen nicht benötigt. In jüngster Zeit ist eine Präferenz für die Formulierung mit dem multiplikativen Ansatz für den Deformationsgradienten festzustellen.

Die numerische Berechnung von Problemstellungen mit großen plastischen Deformationen durch die Finite Element Methode bleibt, trotz der umfangreichen Entwicklungsarbeit auf diesem Gebiet, ein offenes Thema. Dabei spielt die Wahl einer geeigneten FE–Formulierung eine wichtige Rolle. Es ist weitgehend bekannt, daß C^0 –Elemente eine unerwünschte Versteifung der Struktur, bekannt als Locking, aufweisen. Bei hoch verzerrten Elementen erweist sich dieser Effekt als besonders kritisch. Werden plastische Vorgänge modelliert, ist volumetrisches Locking, welches in der Verschiebungsmethode bei nahezu inkompressiblem Verhalten auftritt, für die zu steifen Ergebnisse verantwortlich. Um dieses Phänomen zu vermeiden, wurden einige spezielle Methoden entwickelt. Dazu zählen die Methoden der reduzierten Integration [98] und der gemischten Formulierungen, wie z.B. *assumed strain*– [32], \bar{B} – [80], [33] und *enhanced assumed strain*–Methoden [72].

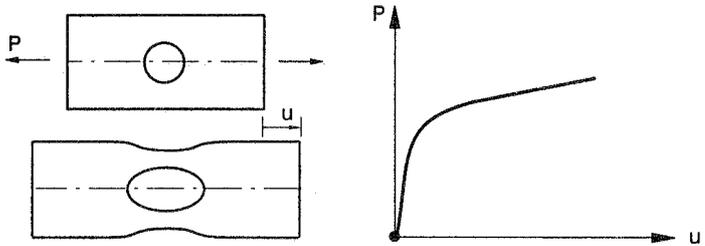
Beispiel 1 – Zylinderschale : Versagensanalyse



Beispiel 2 – Zugprobe: Einschnürung



Beispiel 3 – Lochscheibe: Spannungskonzentration



Beispiel 4 – Stauchversuch mit Scherfugen (Materialentfestigung)

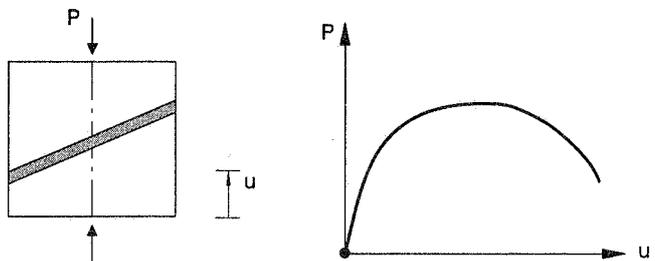


Bild 1.1: Lokales plastisches Versagen

1.2 Ziele der vorliegenden Arbeit

Gegenstand dieser Arbeit ist die Formulierung eines effizienten rechnerunterstützten Lösungskonzeptes zur wirklichkeitsnahen Beschreibung plastischer Vorgänge bei großen Deformationen. Der folgende Überblick zeigt die damit verbundenen Aufgaben.

- Aufarbeitung der mit dem von Mises Modell verbundenen konstitutiven Gleichungen für große plastische Deformationen. Angabe der gewählten Integration für das Stoffgesetz. Bereitstellung der konsistenten Materialtangente.
- Formulierung von dreidimensionalen finiten Elementen in der Momentankonfiguration (Verschiebungsformulierung) und Einbau in das Programmsystem CARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart.
- Erweiterung der 3D-Elemente durch das EAS-Konzept mit Berücksichtigung großer Deformationen.
- Programmtechnische Realisierung der mit den plastischen Werkstoffeigenschaften verknüpften Algorithmen.
- Beispielrechnungen, insbesondere Untersuchung von großen lokalen Verzerrungen. Vergleich von Ergebnissen der Formulierungen für kleine und große Verzerrungen.
- Untersuchung der Anwendbarkeit der EAS-Elemente bei Problemen mit Lokalisierung.
- Einbau des elasto-plastischen Materialmodells in eine 6- bzw. 7-Parameter Schalenformulierung. Untersuchung des elasto-plastischen Tragverhaltens von dünnwandigen Strukturen. Vergleich mit 3D-Modellen.

1.3 Umfang

Die wesentlichen Aspekte, die in dieser Arbeit ausführlich diskutiert werden, sollen nun kurz erläutert werden.

Zunächst sind die theoretischen Grundlagen zu nennen, die im Hinblick auf eine computergerechte Formulierung entwickelt werden müssen. Ein Überblick hierzu findet sich in Kapitel 2, das eine Zusammenfassung der kontinuumsmechanischen Grundlagen liefert, die für die Beschreibung von finiten Deformationen benötigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, daß sich der Deformationsgradient für inelastische Prozesse multiplikativ in elastische und inelastische Anteile zerlegen läßt.

Für die numerische Lösung des Anfangs-Randwertproblems wird eine räumliche Finite Element Formulierung verwendet, wobei die Lösung des diskreten Gleichungssy-

stems im Rechenprozeß auf das Newton–Verfahren zurückgreift. In Kapitel 3 werden die den Variationsverfahren zugrundeliegenden Arbeits– und Energieprinzipien kurz beschrieben. Speziell wird ein 3–Feld–Hu–Washizu Funktional eingeführt, welches als Basis für die im Kapitel 6 dargestellte gemischt–hybride FE–Formulierung dient.

In Kapitel 4 wird das verwendete konstitutive Modell behandelt. Dabei werden geschwindigkeitsunabhängige, inelastische Prozesse für isotherme Zustände beschrieben. Es werden Materialgesetze für große elasto–plastische Verzerrungen einbezogen. Für das elastische Teilstoffgesetz wird ein isotroper, hyperelastischer Materialansatz gewählt. Das inelastische Teilstoffgesetz wird aus dem *Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit* abgeleitet. Bei der Formulierung der inelastischen konstitutiven Gleichungen werden Evolutionsgleichungen für den inelastischen Anteil der Verzerrungen und für die inneren Variablen benötigt (Fließgesetz und Verfestigungsgesetz). Bei der Formulierung inelastischer konstitutiver Gleichungen wird von einer Zwischenkonfiguration ausgegangen, da auf dieser Konfiguration die elastischen und inelastischen Verzerrungsanteile entkoppelt sind. Im weiteren wird eine spezielle Form des Fließgesetzes mit isotroper Verfestigungsregel angegeben. Außerdem wird angenommen, daß es sich um eine J_2 –Theorie handelt, bei welcher die Fließfunktion nur von den zweiten Invarianten des Spannungsdeviators abhängt. Für die numerische Zeitintegration des Werkstoffmodells wird das elastische Prädiktor–plastische Korrekterverfahren als implizite Methode angewendet, das im Fall der J_2 –Fließtheorie mit isotroper Verfestigung die "radiale Rückkehrmethode" (*Radial–Return Method*) von Wilkins [92] und Krieg/Krieg [35] ergibt.

Zur Lösung der entstehenden nichtlinearen Gleichungen wurde hier das Newton–Verfahren gewählt. Dieses Verfahren besitzt den Vorteil der quadratischen Konvergenz in der Nähe der Lösung. Dazu wird die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit und des 3–Feld–Funktional benötigt, die in Kapitel 5 angegeben werden. Aufgrund der Kopplung mit den Stoffgleichungen muß für die quadratische Konvergenz des Newton–Verfahrens bei der Linearisierung das tatsächlich verwendete numerische Verfahren für die Ermittlung der Spannungen beachtet werden. Der konsistente Materialsteifigkeitstensor für elastoplastisches Verhalten bei großen Verzerrungen und die implizite Integration der Evolutionsgleichung wird im Anhang A beschrieben.

Kapitel 6 beschäftigt sich dann mit der Finiten Element Formulierung. Hier wird aufgrund der Versteifung, welche in der reinen Verschiebungsmethode bei nahezu inkompressiblem Verhalten auftritt, eine auf dem *Enhanced Assumed Strain* (EAS)–Konzept basierende gemischt–hybride Elementformulierung angewandt. Ausgangspunkt dieser Formulierung ist ein Hu–Washizu–Funktional, wobei die Verzerrungen durch zusätzliche Verzerrungsfelder angereichert werden. Durch eine Orthogonalitätsbedingung zwischen Spannungs– und Verzerrungsfeldern verbleibt ein

2–Feld–Variationsproblem, wobei die zusätzlichen Freiheitsgrade auf Elementebene eliminiert werden, so daß die einfache Struktur einer Verschiebungsformulierung erhalten bleibt. Dieses Konzept wird hier für Probleme mit großen inelastischen Verzerrungen erweitert und am Beispiel des Kontinuumelementes angewandt.

In Kapitel 7 wird anhand einiger Beispiele die Leistungsfähigkeit der beschriebenen Algorithmen und die Güte der entwickelten finiten Elemente überprüft. Besonderer Wert wird auf die Berechnung von Spezialfällen gelegt, bei denen die finiten Elemente eine hoch verformte Gestalt annehmen und große lokale plastische Verformungen auftreten.

In Kapitel 8 wird untersucht, ob die 3D–EAS–Elemente Lokalisierungszustände wiedergeben können. Die Objektivität der Ergebnisse in bezug auf das Netz wird durch Entfestigungsparameter erreicht, die von der Elementgröße abhängen.

Das für das Kontinuum entwickelte Materialmodell für Elastoplastizität wird in Kapitel 9 auf Flächentragwerke angewandt. Dabei wird von einer Schalenformulierung mit extensiblen Schalendirektor Gebrauch gemacht, so daß das 3D–Materialmodell ohne Kondensation eingesetzt werden kann. Hierin wird zur Beseitigung von Versteifungseffekten die Verzerrung in Dickenrichtung durch das EAS–Konzept mit einem linearen Term erweitert. Diese gemischt–hybride Schalenformulierung wird bei Problemen der Elastoplastizität eingesetzt. Abschließend folgt die Darstellung einiger numerischer Beispiele.

Hinweise auf das Schrifttum finden sich in den einzelnen Kapiteln.

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Seit seiner Einführung [36] wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten von vielen Autoren angewandt. Diese Zerlegung wird als Basis für die Beschreibung des kinematischen Verhaltens mit elasto–plastischen Deformationen verwendet. Andere häufig angewandte Zerlegungen, wie z.B. die additive Zerlegung des Lagrange'schen Verzerrungstensors und der Verzerrungsrate, sind, wie es von Simo und Ortiz [78] gezeigt wurde, der multiplikativen Zerlegung äquivalent. Hier wird die multiplikative Zerlegung als Basis für die in den folgenden Abschnitten benutzte Plastizitätstheorie großer Verzerrungen zugrunde gelegt. Innerhalb dieses Abschnittes werden die dafür notwendigen Größen definiert.

2.1 Bewegung und Deformation

Ein Körper \mathfrak{B} wird durch die zusammenhängende Menge seiner materiellen Partikel P definiert. Zur Beschreibung seiner Bewegung wird seine bijektive Abbildung in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 , auch Konfiguration genannt, benötigt. Jedem Punkt x in E^3 wird einen Ortsvektor \mathbf{x} zugeordnet, der seine Lage in einem festen, aber beliebigen Koordinatensystem angibt.

$X : \mathfrak{B} \rightarrow B \subset E^3$ B ist der von \mathfrak{B} besetzte Teilbereich von E^3 .

$$P \mapsto \mathbf{x} = X(P)$$

Zur Beschreibung von Deformationsvorgängen wird von einer Referenzkonfiguration X_0 als Bezugskonfiguration Gebrauch gemacht. Diese Konfiguration ist fest gewählt, d.h. sie ist von der Zeit unabhängig, aber ansonsten beliebig. Die materiellen Punkte P sind durch ihre Ortsvektoren \mathbf{X} in B_0 gekennzeichnet, was die Unterscheidung zwischen P und \mathbf{X} für die verwendete Theorie erübrigt.

$X_0 : \mathfrak{B} \rightarrow B_0 \subset E^3$

$$P \mapsto \mathbf{X} = X_0(P)$$

Aufgrund der Bijektivität von X gilt:

$$P = X_0^{-1}(\mathbf{X})$$

Eine Konfiguration $X_t = X(P,t)$ wird Momentankonfiguration genannt. Die kontinuierliche Folge von Konfigurationen X_t wird Bewegung bezeichnet. Sie stellt eine Kurve in der Menge aller Konfigurationen dar, ist stetig differenzierbar, bijektiv und hat eine von Null verschiedene Funktionaldeterminante. Durch den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist die Zeit gekennzeichnet. Die Folge der Abbildungen X_0^{-1} und X liefert die Abbildung Φ zwischen der Referenzkonfiguration und einer weiteren Konfiguration des Körpers, auch Deformation genannt.

$$\Phi := X \circ X_0^{-1} : E^3_{X_0} \rightarrow E^3$$

Der Pfad, der von einem Partikel X durchlaufen wird, ist dann

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Wie es in der Literatur üblich ist, werden hier große bzw. kleine Buchstaben zur Kennzeichnung von materiellen bzw. räumlichen Größen benutzt. Um Tensoren in Komponentenschreibweise auszudrücken, ist ein spezielles Bezugssystem notwendig. In einem kartesischen Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i bzw. \mathbf{e}_i ($i, l = 1, 2, 3$) der Referenz- und der Momentankonfiguration kann die Lage eines materiellen Punktes P in B_0 und in B durch

$$\mathbf{X} = X^l \mathbf{e}_l ; \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i , \quad (2.3)$$

angegeben werden. Die Koordinaten X^l heißen materielle oder Lagrangesche Koordinaten und die aktuellen Koordinaten x^i werden räumliche oder Eulersche Koordinaten genannt. Bei der Verwendung allgemeiner konvektiver krummliniger Koordinaten θ^i ($i = 1, 2, 3$) lautet die Beschreibung der Referenz- und der Momentankonfiguration

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^i, t) ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i, t) \quad (2.4)$$

Die entsprechenden kovarianten Basisvektoren ergeben sich zu:

$$\mathbf{G}_I = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^I} ; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad (2.5)$$

Die Forderung nach einer dualen Basis führt auf die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^I und \mathbf{g}^i , die mit Hilfe der Gleichungen

$$\mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}^J = \delta_I^J \quad (2.6)$$

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (2.7)$$

gewonnen werden. Die Metriktensoren stellen in bezug auf ihre jeweilige Konfiguration Einheitstensoren dar. Die ko- und kontravarianten Metriktensoren (Einheitstensoren) der Referenzkonfiguration B_0 werden definiert:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}_J) \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J = G_{IJ} \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J \quad (2.8)$$

$$\mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^I \cdot \mathbf{G}^J) \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J = G^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J$$

Analog zu Gln. (2.8) ergeben sich in B die Metriktensoren zu:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.9)$$

$$\mathbf{g}^{-1} = (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

In Gln. (2.8) und (2.9) sind die Metrikkoeffizienten G_{IJ} , G^{IJ} , g_{ij} und g^{ij} symmetrisch. Einheitstensoren mit gemischten Komponenten erhält man durch:

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.10)$$

$$\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i$$

Anmerkung 2.1: Für die Einheitstensoren 2. Stufe in B_0 bzw. in B , Gl. (2.8)–(2.10), wird hier die allgemeine Bezeichnung \mathbf{I} bzw. \mathbf{i} eingeführt. Ob es sich um den ko-, kontravarianten oder gemischten Einheitstensor handelt, wird aus dem jeweiligen Zusammenhang entnommen. In einem raumfesten kartesischen Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) folgt der Einheitstensor einfach zu:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.11)$$

□

Die zur Beschreibung der Deformation notwendigen Begriffe sind in Bild 2.1 dargestellt.

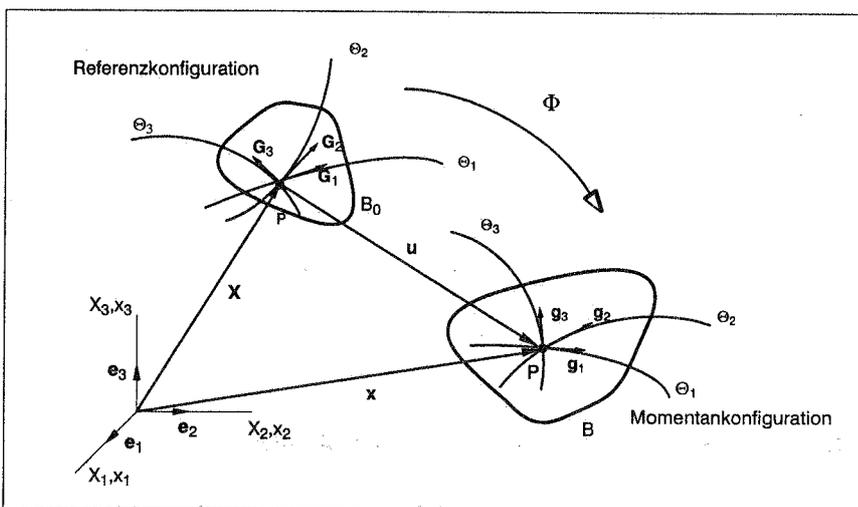


Bild 2.1: Zur Kinematik der Deformation

2.1.1 Die Begriffe "materielle Zeitableitung" und "Lie-Ableitung"

Unter der materiellen Zeitableitung versteht man die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe an einem materiellen Punkt X . Die materielle Geschwindigkeit \mathbf{V} einer Deformation erhält man beispielsweise durch die zeitliche Ableitung von Gl. (2.2)

$$\mathbf{V} := \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.12)$$

und ihre materielle Beschleunigung \mathbf{A} durch weitere Differentiation nach der Zeit.

$$\mathbf{A} := \frac{d}{dt} \mathbf{V} = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.13)$$

Der Punkt stellt ein Symbol für die materielle Zeitableitung dar, definiert als:

$$(\dot{\cdot}) := \frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\Big|_{\mathbf{x}} + \text{grad}(\cdot) \cdot \mathbf{v} \quad (2.14)$$

Es ist aus Gl.(2.14) zu erkennen, daß bei einer Beschreibung der Bewegung mit materiellen Koordinaten $\Phi(\mathbf{X},t)$ die materielle Zeitableitung eine partielle Ableitung darstellt.

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{X},t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}(\mathbf{X},t) \quad (2.15)$$

Wird aber eine räumliche Beschreibung $\Phi(\mathbf{x},t)$ benutzt, setzt sich die materielle Zeitableitung aus lokaler Ableitung und konvektiver Ableitung zusammen.

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \circ \Phi^{-1}(\mathbf{x},t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \Phi^{-1}(\mathbf{x},t) \quad (2.16)$$

Für das räumliche Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} einer Bewegung $\Phi(\mathbf{x},t)$ und zweier Deformationen $\Phi_t = \Phi(\mathbf{x},t)$ und $\Phi_s = \Phi(\mathbf{x},s)$ definiert man den Fluß $\Phi_{t,s}$ von \mathbf{v} durch:

$$\Phi_{t,s} = \Phi_t \circ \Phi_s^{-1} : \Phi_s(B) \rightarrow \Phi_t(B) \quad (2.17)$$

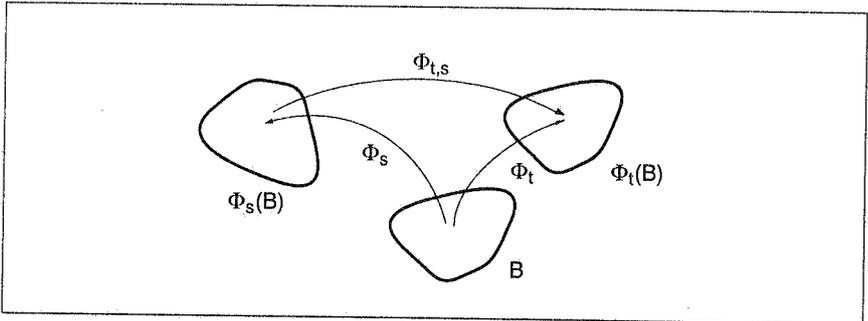


Bild 2.2: Konfigurationen für die Definition der Lie-Ableitung

Über den "pull-back" Operator $\Phi^*(\cdot)$ und den "push-forward" Operator $\Phi_*(\cdot)$ werden Größen, die in der Momentankonfiguration definiert sind, auf die Referenzkonfiguration abgebildet, bzw. umgekehrt. Eine umfassende Darstellung der verschiedenen Operatoren für Skalare, Vektoren und zweistufige Tensoren ist bei Marsden und Hughes [41] zu finden.

Die Lie-Ableitung eines zeitabhängigen Tensorfeldes \mathbf{t} in $\Phi_t(B)$ bezogen auf das Vektorfeld \mathbf{v} ist dann durch

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) := \left[\frac{d}{dt} \Phi_{t,s}^*(\mathbf{t}_t) \right] \Big|_{t=s} \quad (2.18)$$

definiert (siehe z.B. [41], S.95), wobei der Operator $\Phi_{t,s}^*$ eine Größe von $\Phi_t(B)$ auf $\Phi_s(B)$ transformiert (pull-back Operation). Man erkennt, daß in Gl.(2.18) die Zeitableitung bei festgehaltener Konfiguration $\Phi_s(B)$ durchgeführt wird.

Eine für die Anwendung günstigere Darstellung der Lie–Ableitung ist in [96] angegeben. Sie lautet:

$$L_v(\mathbf{t}) := \Phi_{t*} \left(\frac{d}{dt} (\Phi_t^*(\mathbf{t})) \right) \quad (2.19)$$

Die Lie–Ableitung des Tensors \mathbf{t} setzt sich aus der materiellen Zeitableitung des durch die Abbildung Φ_t^* auf die Referenzkonfiguration B_0 zurückgezogenen Tensors (pull–back–Operation) und der anschließenden Bezugnahme auf die Momentankonfiguration B durch die Abbildung Φ_{t*} (push–forward–Operation) zusammen. Wegen der Art der in (2.19) durchgeführten Operationen ist die Lie–Ableitung einer objektiven Größe selbst wiederum objektiv. Dies ist bei der materiellen Zeitableitung nicht der Fall.

2.1.2 Der Deformationsgradient

Die Deformation eines Körpers wird durch die bei einer Konfigurationsänderung Φ auftretende kinematische Veränderung beschrieben. Die zentrale Größe zur Beschreibung dieser Deformation ist der Deformationsgradient \mathbf{F} . Dieser beschreibt den Gradienten des Vektorfeldes der Ortsvektoren, das die Lage der Materialpunkte in der Momentankonfiguration definiert, bezogen auf die Referenzkoordinaten.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Grad} \Phi = \mathbf{Grad} \mathbf{x} \quad (2.20)$$

Die Bezeichnung $\mathbf{Grad}(\cdot)$ weist auf Differentiation nach den Bezugskoordinaten \mathbf{X} und $\mathbf{grad}(\cdot)$ nach den Momentankoordinaten \mathbf{x} hin.

Weiterhin liefert \mathbf{F} die Verknüpfung zwischen den Basisvektoren beider Konfigurationen.

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i \quad (2.21)$$

Andere Darstellungen von \mathbf{F} in konvektiven Koordinaten folgen.

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i = g_{ij} (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}^j) = G^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (2.25)$$

Die Deformation eines Körpers wird oft durch die Verschiebungen zwischen den betrachteten Konfigurationen beschrieben. Mit der Definition des Verschiebungsvektors

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.26)$$

ergeben sich die folgenden Darstellungen des Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}^I + \text{Grad } \mathbf{u} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}$$

und

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i - \text{grad } \mathbf{u} = \mathbf{i} - \text{grad } \mathbf{u} \quad (2.27)$$

Der Deformationsgradient überführt nicht nur die Basisvektoren von B_0 in B , Gl.(2.21), sondern stellt auch die Beziehung zwischen Größen der Momentankonfiguration B und der Referenzkonfiguration B_0 her. Für $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{A}$, dV bzw. $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{a}$, dv als materiellem Linienelement, Flächenelement und Volumenelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F} d\mathbf{X} \\ d\mathbf{a} &= \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}, \quad d\mathbf{a} = n da \quad \text{und} \quad d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA \\ dv &= J dV, \quad J = \det \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Vektoren \mathbf{n} und \mathbf{N} sind die nach außen zeigenden Normaleneinheitsvektoren auf der Oberfläche der Momentankonfiguration ∂B bzw. der Referenzkonfiguration ∂B_0 .

2.2 Deformations- und Verzerrungstensoren

Da \mathbf{F} selbst noch Anteile aus der Starrkörperbewegung enthält, ist Gleichung (2.20) nicht als Maß für die Deformationen in einem Körper verwendbar. Um ein Maß für die Verzerrung des Kontinuums zu erhalten, führt man in der Kontinuumsmechanik verschiedene Verzerrungstensoren ein, siehe z.B. Ogden [51], Truesdell und Noll [91]. Üblich sind z.B. der rechte Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} und der linke Cauchy-Green-Tensor \mathbf{b} .

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T \quad (2.30)$$

Die Gesamtverzerrung des Kontinuums kann materiell durch den Greenschen Verzerrungstensor \mathbf{E} beschrieben werden.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.31)$$

Mit \mathbf{F} nach (2.22) und unter Verwendung des Einheitstensors in B_0 in seiner kovarianten Form Gl.(2.8) ergibt sich der bekannte Ausdruck für den Greenschen Verzerrungstensor in Indexschreibweise

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{G}_{IJ}) \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J \quad (2.32)$$

Das räumliche Gegenstück zum Greenschen Verzerrungstensor ist der Almansische Verzerrungstensor \mathbf{e} .

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.33)$$

oder analog zu (2.32) in Komponentenweise

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{G}_{ij})\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.34)$$

Der rechte Cauchy–Green–Tensor (2.29) und der Greensche Verzerrungstensor (2.31) sind materielle Größen, der linke Cauchy–Green–Tensor und der Almansi'sche Verzerrungstensor (2.30), (2.33) beziehen sich auf die Momentankonfiguration.

Die Operatoren $\Phi^*(\cdot)$ und $\Phi_*(\cdot)$ ergeben am Beispiel der in diesem Abschnitt definierten zweistufigen Tensoren die Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \Phi^*(\mathbf{g}) & \mathbf{g} &= \Phi_*(\mathbf{C}) \\ \mathbf{b}^{-1} &= \Phi_*(\mathbf{G}) & \text{bzw.} & \mathbf{G} = \Phi^*(\mathbf{b}^{-1}) \\ \mathbf{E} &= \Phi^*(\mathbf{e}) & \mathbf{e} &= \Phi_*(\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aus den Definitionen (2.31) und (2.33) und den Transformationen (2.35) kann man erkennen, daß die Differenz zwischen dem Metriktensor einer Konfiguration und dem auf diese Konfiguration abgebildeten Metriktensor einer anderen Konfiguration ein Maß für die Verzerrung zwischen diesen Konfigurationen darstellt.

2.3 Elasto–plastische Deformationen

Als Basis für die Beschreibung der Kinematik des elasto–plastischen Verhaltens wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} verwendet [36] [75]. Mathematisch wird die Deformation als die Folge zweier Abbildungen angesehen (siehe Bild 2.3),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (2.36)$$

wobei \mathbf{F}_e und \mathbf{F}_p den elastischen bzw. plastischen Anteil der Deformation beschreibt.

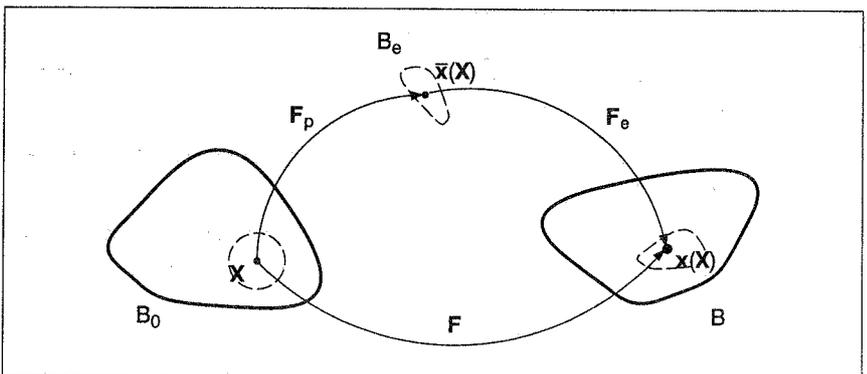


Bild 2.3: Bezugs– und Momentankonfiguration eines Körpers und die lokale elastische Zwischenkonfiguration.

Durch diese Zerlegung wird die Zwischenkonfiguration B_e festgelegt, die durch eine fiktive lokale elastische Entlastung entsteht. Hierbei werden die inelastischen Verzerrungen festgehalten. Die Zwischenkonfiguration ist im allgemeinen inkompatibel, so daß die Kompatibilität der materiellen Teilchen erst wieder über die elastischen Deformationsanteile hergestellt wird. Aus diesem Grund stellen F_e und F_p keine Gradienten globaler Vektorfelder dar.

Da die hier vorgestellte Materialtheorie auf der Annahme basiert, daß die Deformationen außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung des betrachteten materiellen Punktes keinen Einfluß auf den Prozeß in diesem Punkt haben (Prinzip der lokalen Wirkung), ist die aufgrund des Zerschneidens entstandene Inkompatibilität bedeutungslos. Die lokale Zwischenkonfiguration ist damit bis auf Starrkörperrotationen eindeutig beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit findet in Übereinstimmung mit [75],[78],[16],[28] und im Gegensatz zu anderen Autoren das *Prinzip der beliebigen Drehlage der Zwischenkonfiguration* Anwendung (siehe [18] für eine Übersicht zu diesem Thema).

Durch Gleichung (2.36) werden die folgenden Tensoren definiert:

$$C_e = F_e^T F_e \quad \text{bzw.} \quad C_p = F_p^T F_p \quad (2.37)$$

$$b_e = F_e F_e^T \quad \text{bzw.} \quad b_p = F_p F_p^T \quad (2.38)$$

Auch können die "push-forward" und "pull-back" Operatoren $\Phi_{*e}(\cdot)$ und $\Phi_e^*(\cdot)$ zwischen Momentan- und Zwischenkonfiguration sowie die entsprechenden Operatoren $\Phi_{*p}(\cdot)$ und $\Phi_p^*(\cdot)$ zwischen Referenz- und Zwischenkonfiguration eingeführt werden. Analog zu den Gleichungen (2.35) lassen sich die folgenden Cauchy-Green-Verzerrungstensoren durch "push-forward" oder "pull-back" aus den Metrikensoren der entsprechenden Konfigurationen errechnen.

$$\begin{aligned} C_e &= \Phi_e^*(g) & g &= \Phi_{*e}(C_e) \\ b_p^{-1} &= \Phi_{*p}(G) & \text{bzw.} & G = \Phi_p^* \left(b_p^{-1} \right) \\ b_e^{-1} &= \Phi_e^*(C_p) & C_p &= \Phi_p^* \left(b_e^{-1} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Hierbei ist C_p eine materielle Größe, C_e und b_p Größen der Zwischenkonfiguration und b_e eine räumliche Größe.

Es ist anzumerken, daß die Zwischenkonfiguration die einzige Konfiguration ist, auf welcher elastische und plastische Anteile der Deformation vollkommen entkoppelt sind.

2.4 Volumetrische und isochore Deformationen

Viele Materialien weisen auf ganz unterschiedliches volumetrisches und isochores Verhalten hin. Es ist deshalb manchmal von Vorteil, die konstitutive Beschreibung in ihre

volumetrischen und deviatorischen Beiträge zu entkoppeln. Die geometrische Basis für diese Entkopplung ist die multiplikative Aufspaltung der Deformation. Die Volumenänderung wird durch die Determinante J des Deformationsgradienten beschrieben, so daß die Zerlegung

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \det \bar{\mathbf{F}} = 1 \quad (2.40)$$

den volumenändernden Anteil J und den volumenerhaltenden Anteil $\bar{\mathbf{F}}$ voneinander trennt. Diese Zerlegung geht auf Flory [24] zurück.

Bei Problemstellungen, bei denen die Deformationen durch Zwangsbedingungen auf den volumetrischen Anteil der Deformation eingeschränkt sind, zeigt sich die Aufspaltung (2.40) als vorteilhaft. Das ist der Fall der Inkompressibilität, die in der Plastizitätstheorie und bei gummiartigen Materialien vorausgesetzt wird. Da immer $\det \bar{\mathbf{F}} \equiv 1$ gilt, wird die Zwangsbedingung *a priori* erfüllt. Diese Vorgehensweise wurde von Simo und Mitarbeitern [75], [73] für die Beschreibung isochoren plastischen Verhaltens gewählt. Dabei wird die Bedingung für inelastische Inkompressibilität $J^p = \det \mathbf{F}_p = 1$ und konsequenterweise $J^e = \det \mathbf{F}_e = J$ erzwungen, so daß J^p aus der Formulierung eliminiert werden kann.

2.5 Spannungstensoren

Der Cauchy–Spannungstensor ist das fundamentale Spannungsmaß. Er steht in direkter Beziehung zu dem im Punkt x auf der Fläche ∂B der Momentankonfiguration wirkenden Spannungsvektor \mathbf{t} .

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.41)$$

Diese Beziehung wird auch Cauchy–Theorem genannt.

Der Vektor \mathbf{n} ist der Normaleneinheitsvektor in $x \in \partial B$. Da $\boldsymbol{\sigma}$ die in der Momentankonfiguration wirkenden Spannungen auf das Flächenelement derselben Konfiguration bezieht, wird er auch als "wahrer" Spannungstensor bezeichnet.

Durch Wichten des Cauchy–Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ mit der Jacobideterminante J erhält man den Kirchhoff–Spannungstensor.

$$\boldsymbol{\tau} := J\boldsymbol{\sigma} \quad (2.42)$$

Der Cauchy– und der Kirchhoff–Spannungstensor sind räumliche symmetrische Tensoren.

Da die Schnittkräfte $\mathbf{t} da$ am infinitesimalen Flächenelement unabhängig von der Bezugskonfiguration sein müssen, ergibt sich bei Bezug der Spannungen auf das Flächenelement dA auf ∂B_0

$$t_{da} = T_{dA} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_d A = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.43)$$

Gleichung (2.43) führt zur Definition des 1. Piola–Kirchhoff–Spannungstensors \mathbf{P} , auch nominaler Spannungstensor genannt. Dabei handelt es sich um einen unsymmetrischen Zweifeld– oder Zweipunktstensor, dessen erste Basisvektoren in der Momentankonfiguration, und dessen zweite Basisvektoren in der Referenzkonfiguration definiert sind. \mathbf{P} steht mit $\boldsymbol{\sigma}$ in folgendem Zusammenhang:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.44)$$

Durch Zurückziehen des zweiten Index von \mathbf{P} auf ∂B_0 , erhält man den symmetrischen 2. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \Phi^*(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.45)$$

Werden die Spannungstensoren in Indexnotation dargestellt

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.46)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P} = P^{iJ} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_J \quad (2.48)$$

$$\mathbf{S} = S^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J \quad (2.49)$$

kann man die Gleichheit der Komponenten von $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{P} und \mathbf{S} ersehen, was auf die Verknüpfung der Basis der Referenz– und Momentankonfiguration durch den Deformationsgradienten nach Gln.(2.21) zurückzuführen ist.

$$\tau^{ij} = J\sigma^{ij} = P^{iJ} = S^{IJ} \quad (2.50)$$

Aus (2.50) ist zu erkennen, daß, obwohl der 1. Piola–Kirchhoff Spannungstensor unsymmetrisch ist, seine auf das konvektive System bezogenen Komponenten doch symmetrisch sind.

2.6 Die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik

Im folgenden Abschnitt werden die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik zusammengestellt. Sie beschreiben die Wechselwirkung zwischen einem materiellen Körper und seiner Umgebung. Da diese Gleichungen für jedes Teilvolumen gelten müssen, kann man sie auch für jeden materiellen Punkt X lokal formulieren [41].

2.6.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz besagt, daß die Masse m eines Körpers sich während des Deformationsprozesses nicht ändert. Wird die Massendichte des Körpers in B_0 mit ϱ_0 und in B mit ϱ bezeichnet, läßt sich das Postulat von der Erhaltung der Masse durch die Gleichung

$$m = \int_{B_0} \varrho_0 dV = \int_B \varrho dv \quad (2.51)$$

ausdrücken. Mit Gleichung (2.28c) folgt die lokale Form:

$$\varrho \det \mathbf{F} = \varrho_0 \quad (2.52)$$

2.6.2 Impuls- und Drallbilanz

Der Impulserhaltungssatz, auch kinetisches Kräftegleichgewicht genannt, lautet: die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte. Der Impuls i wird als

$$i = \int_B \varrho \mathbf{v} dv \quad (2.53)$$

definiert. Auf den deformierten Körper wirken die Volumenkräfte

$$\mathbf{f}_b = \int_B \varrho \mathbf{b} dv \quad (2.54)$$

und die Oberflächenkräfte

$$\mathbf{f}_s = \int_{\partial B} \mathbf{t} da, \quad (2.55)$$

so daß der Erhaltungssatz lautet:

$$\frac{d}{dt} i = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_s \quad (2.56)$$

Mit dem Cauchy–Theorem Gl. (2.41) und dem Gausschen Integralsatz folgt die räumliche Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d}{dt} \int_B \varrho \mathbf{v} dv = \int_B \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \varrho \mathbf{b} dv \quad (2.57)$$

Die lokale Darstellung, auch 1. Cauchy'sche Bewegungsgleichung genannt, verbleibt:

$$\varrho \mathbf{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b} \quad (2.58)$$

Nach Transformation mit Gln. (2.28) und (2.44) läßt sich Gl. (2.57) in der materiellen Darstellung schreiben.

$$\frac{d}{dt} \int_{B_0} \varrho_0 \mathbf{V} dV = \int_{B_0} \operatorname{Div} \mathbf{P} dV + \int_{B_0} \varrho_0 \mathbf{b} dV \quad (2.59)$$

mit der lokalen Form

$$\varrho_0 \mathbf{A} = \operatorname{Div} \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b} \quad (2.60)$$

In Gln. (2.58) und (2.60) stellen \mathbf{a} und \mathbf{A} die in Gl. (2.16) bzw. (2.15) definierte räumliche bzw. materielle Beschleunigung dar.

Anmerkung 2.2: Der Divergenzoperator $\operatorname{Div}(\cdot)$ auf B_0 bzw. $\operatorname{div}(\cdot)$ auf B wird durch

$$\operatorname{Div}(\cdot) := \operatorname{Grad}(\cdot) : \mathbf{I}$$

$$\operatorname{div}(\cdot) := \operatorname{grad}(\cdot) : \mathbf{i}$$

definiert. Mit \mathbf{I} und \mathbf{i} werden die zweistufigen Einheitstensoren auf B_0 und B gekennzeichnet (siehe Anmerkung 2.1).

□

Anmerkung 2.3: Der Gauss'sche Integralsatz ermöglicht es, Flächenintegrale in Volumenintegrale umzuwandeln. Es gilt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} da = \int_B \operatorname{div} \mathbf{t} dv \quad (2.61)$$

□

Analog zum Impulserhaltungssatz besagt der Drallerhaltungssatz, daß die Änderung des Drallvektors des Körpers bezüglich eines raumfesten Punktes P_m mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}(P_m)$ gleich dem resultierenden Moment der auf diesen Körper einwirkenden Kräfte ist. Der Drall \mathbf{d}_m bezüglich des Punktes P_m ist

$$\mathbf{d}_m = \int_B \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v} dv, \quad (2.62)$$

wobei \mathbf{r} der Differenzvektor der Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{x}_m ist.

Die Momentengleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{d}_m = \mathbf{m}_b + \mathbf{m}_s \quad (2.63)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \int_B \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_B \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da \quad (2.64)$$

Nach einigen Umrechnungen (siehe Marsden und Hughes [41]) erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_B \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_B \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} \, dv + \int_B \text{grad} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{r} \times \text{div} \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad (2.65)$$

mit der lokalen Form:

$$\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \varrho \mathbf{b} + \mathbf{r} \times \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \text{grad} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (2.66)$$

Die einer materiellen Formulierung entsprechenden Gleichungen folgen daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_0} \mathbf{r} \times \varrho_0 \mathbf{V} \, dV = \int_{B_0} \mathbf{r} \times \varrho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{B_0} \text{Grad} \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \text{Div} \mathbf{P} \, dV \quad (2.67)$$

$$\mathbf{r} \times \varrho_0 \mathbf{A} = \mathbf{r} \times \varrho_0 \mathbf{b} + \mathbf{r} \times \text{Div} \mathbf{P} + \text{Grad} \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (2.68)$$

Anmerkung 2.4: Mit der Gleichung

$$\text{grad} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} = \text{grad}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \times \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (2.69)$$

und unter Berücksichtigung der Kräftegleichgewichtsbedingung gemäß Gl. (2.58) verbleibt für die lokale Form der Drallerhaltungssatz, gegeben durch Gl. (2.66):

$$\mathbf{i} \times \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

Daraus folgt nach einigen Umrechnungen (siehe Marsden und Hughes [41]) die Symmetrie des Cauchy–Spannungstensors und des 2. P.–K.–Spannungstensors und die Unsymmetrie des 1. P.–K.–Spannungstensors.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.71)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.72)$$

$$\mathbf{FP}^T = \mathbf{PF}^T \quad (2.73)$$

□

3 Arbeits- und Energieprinzipien

3.1 Schwache Form der Gleichgewichtsbedingung

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist eine den Impuls- und Drallbilanzgleichungen (2.57) und (2.65) äquivalente Formulierung, siehe z.B. [41], und stellt eine schwache Form des Gleichgewichts dar. Es wird durch Gewichten von Gl. (2.57) mit dem Vektor der Testfunktionen und anschließende partielle Integration über das Volumen gewonnen. Die Testfunktion kann hier als infinitesimales Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ (virtuelle Verschiebung) interpretiert werden. Dieses Feld ist beliebig, muß jedoch den geometrischen Randbedingungen genügen und stetig differenzierbar sein. In das Prinzip geht keine weitere Annahme ein, wie z.B. die Existenz eines Potentials, es ist deshalb allgemein anwendbar.

Prinzip der virtuellen Arbeit in der Ausgangskonfiguration (Vgl. Gln. (2.59) und (2.60)):

$$G = \int_{B_0} \text{Div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{B_0} \varrho_0 (\mathbf{A} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \quad (3.1)$$

mit den Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} &= \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t) & \forall \mathbf{X} \in \partial B_{0\sigma} \\ \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) & \forall \mathbf{X} \in \partial B_{0u} \end{aligned} \quad (3.2)$$

und $\partial B_0 = \partial B_{0\sigma} \cup \partial B_{0u}$

Durch Einbeziehung von (3.2) in (3.1) und Anwendung des Divergenztheorems folgt:

$$G = \int_{B_0} \mathbf{P} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{B_0} \varrho_0 (\mathbf{A} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (3.3)$$

Entsprechend kann man das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Momentankonfiguration aus Gl. (2.57) formulieren:

$$g = \int_B \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_B \varrho (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \quad (3.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial B_\sigma \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial B_u \end{aligned} \quad (3.5)$$

und $\partial B = \partial B_\sigma \cup \partial B_u$

oder

$$g = \int_B \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv + \int_B \varrho (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da \quad (3.6)$$

Für den Fall, daß sich die Spannungen durch Ableitungen aus einem Potential berechnen lassen, ist die Konstruktion eines Funktionals möglich. Unter Berücksichtigung des im Abschnitt (4.2) vorgestellten hyperelastischen Materials, bei dem sich die Spannungen aus der freien Helmholtzschen Energie berechnen lassen, kann aus der schwachen Formulierung ein Funktional Π hergeleitet werden, siehe z.B. Bufler [15]. Dieses Funktional lautet für quasistationäre Probleme und für eine Beschreibung in der Momentan-konfiguration Φ wie folgt:

$$\Pi(\Phi) = \Pi^i(\Phi) + \Pi^a(\Phi) \quad (3.7)$$

mit der inneren Energie

$$\Pi^i(\Phi) = \int_{B_0} W(\Phi) \, dV \quad (3.8)$$

und der potentiellen Energie der äußeren Belastung in Konfiguration Φ

$$\Pi^a(\Phi) = - \int_{B_0} \varrho_0 \mathbf{b} \cdot \Phi \, dV - \int_{\delta B_{0o}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \Phi \, dA \quad (3.9)$$

$W(\Phi) \equiv W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ ist eine Potentialfunktion der Formänderungsenergie, gegeben z.B. durch Gl.(4.14). Gleichung (3.6) ist gleichbedeutend mit dem Stationaritätsprinzip für das Gesamtpotential Π (3.7) und den Nebenbedingungen:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial B_u \quad (3.10)$$

$$\mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \forall \mathbf{x} \in B$$

wobei $\mathbf{1}$ den Einheitstensor 2. Stufe darstellt.

Die Bedingung der räumlichen Kovarianz fordert die Existenz einer Funktion der Formänderungsenergie $\hat{W}(\mathbf{X}, \cdot)$, für welche gilt:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \quad (3.11)$$

Somit lautet das Stationaritätsprinzip von Π :

$$\Pi(\Phi) = \int_{B_0} \hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \, dV + \Pi^a(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \rightarrow \text{stat} \quad (3.12)$$

3.2 Gemischtes Variationsprinzip

Mit der Hinzunahme von den durch kinematische Nebenbedingungen begründeten zusätzlichen Termen und von einem Stoffgesetz wird das gebundene Variationsproblem Gl. (3.12) durch die Multiplikatorenmethode in ein 3–Feld–Funktional transformiert. Hier wird im Blick auf die in Kapitel 6 vorgestellten gemischten finiten Elemente eine zusätzliche Feldvariable \mathbf{Z} mit der Nebenbedingung

$$\text{Gradu} - \mathbf{Z} = 0 \quad (3.13)$$

eingearbeitet. Das Energiefunktional geht damit in das Lagrangefunktional über

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{Z}, \mathbf{P}) = \int_{B_0} \hat{W}(\mathbf{X}, [\mathbf{1} + \mathbf{Z}]^T [\mathbf{1} + \mathbf{Z}]) + \mathbf{P} \cdot (\text{Gradu} - \mathbf{Z}) \, dV + \Pi^a(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \rightarrow \text{stat} \quad (3.14)$$

was einen Spezialfall eines Hu–Washizu–Dreifeldfunktionals darstellt. Der Lagrangeparameter \mathbf{P} ist der nominale Spannungstensor, Gl. (2.44).

Die 1. Variation des Energiefunktionals Gl. (3.14) in $(\mathbf{u}, \mathbf{Z}, \mathbf{P})$ in Richtung $(\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{Z}, \delta\mathbf{P})$ wird durch die Gateaux–Ableitung gewonnen. Mit der Definition:

$$\delta\Pi = D\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{Z}, \mathbf{P}) \cdot (\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{Z}, \delta\mathbf{P}) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Pi(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{Z}_\varepsilon, \mathbf{P}_\varepsilon) \quad (3.15)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \int_{B_0} [\mathbf{P} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{u}) + \delta\mathbf{P}(\text{Gradu} - \mathbf{Z}) + \delta\mathbf{Z}(-\mathbf{P} + 2[\mathbf{1} + \mathbf{Z}] \partial_{\mathbf{C}} \hat{W})] \, dV \\ + \delta\Pi^{(a)}(\delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit dem rechten Cauchy–Green–Tensor

$$\mathbf{C} := [\mathbf{1} + \mathbf{Z}]^T [\mathbf{1} + \mathbf{Z}] \quad (3.17)$$

Die zu Gl. (3.14) gehörende starke Form des lokalen Randwertproblems für nichtlineare Elastostatik einschließlich der natürlichen Randbedingungen (Euler Gleichungen) lautet:

$$\left. \begin{aligned} \text{Div}\mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \text{Gradu} - \mathbf{Z} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{P} + 2[\mathbf{1} + \mathbf{Z}] \partial_{\mathbf{C}} \hat{W} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \text{in } B_0 \quad \begin{array}{l} \text{Gleichgewichtsbed.} \\ \text{kinematische Zusatzbedingung} \\ \text{Stoffgesetz} \end{array} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf } \partial B_0 \quad \text{natürliche Randbedingung}$$

mit der nach außen zeigenden Einheitsnormalen \mathbf{N} zu ∂B_0 .

4 Konstitutive Gleichungen

4.1 Grundlegende konstitutive Annahme

Im Rahmen dieser Arbeit werden geschwindigkeitsunabhängige Prozesse mit einem Satz konstitutiver Gleichungen beschrieben. Diese Gleichungen basieren auf einigen grundsätzlichen Annahmen, die hier kurz genannt werden.

Eine solche Annahme stellt das *Prinzip der materiellen Objektivität* dar. Dieses Prinzip besagt, daß die konstitutiven Gleichungen unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters sein müssen. Objektive Materialgesetze sind invariant bezüglich Isometrien, d.h. gegenüber Abbildungen, bei denen aufgrund überlagerter Starrkörperbewegungen Länge und Winkel erhalten bleiben. Ein noch schärferes Prinzip ist das *Prinzip der räumlichen Kovarianz*, welches verlangt, daß die Materialgesetze auch bezüglich beliebiger, der Momentankonfiguration überlagerter Deformationen, in der mathematischen Literatur als Diffeomorphismen bezeichnet, objektiv sind [41]. Entsprechend der räumlichen Kovarianz ist die materielle Kovarianz jedoch bezüglich einer der Referenzkonfiguration überlagerten Diffeomorphismus betrachtet. Nach Marsden und Hughes [41] ist ein Körper nur dann materiell kovariant, wenn er isotrop ist. Diese Prinzipien werden hier verwendet. Für eine exakte mathematische Definition dieser Begriffe ist auf [41] verwiesen.

Eine grundlegende Annahme für das hier vorgestellte Materialmodell ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten. Diese Zerlegung wurde bereits in Abschnitt 2.3 eingeführt und beruht auf zwei anderen Prinzipien. Durch lokale Entlastung bei festgehaltenen inelastischen Verzerrungen entsteht die inkompatible Zwischenkonfiguration (siehe Bild 2.2). Die dabei eventuell zurückbleibenden, durch Eigenspannungen hervorgerufenen elastischen Verzerrungen können durch Zerschneiden des Körpers in hinreichend kleine Teilkörper abgebaut werden. Da die hier vorgestellte Materialtheorie auf der Annahme basiert, daß die Deformationen außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung des betrachteten materiellen Punktes keinen Einfluß auf den Prozeß in diesem Punkt haben – *Prinzip der lokalen Wirkung* –, ist die aufgrund des Zerschneidens entstandene Inkompatibilität bedeutungslos. Die Zwischenkonfiguration ist damit bis auf Starrkörperrotationen eindeutig beschrieben. In der Literatur besteht Uneinigkeit darüber, ob die Zwischenkonfiguration eindeutig festgelegt werden kann. Für eine Übersicht zu diesem Thema siehe [18]. In dieser Arbeit wird in Übereinstimmung mit [75],[78],[16],[28] das *Prinzip der beliebigen Drehlage der Zwischenkonfiguration* übernommen.

Eine zusätzliche Annahme ist die der *inelastischen Inkompressibilität*. Die Plastizitätstheorie wurde in erster Linie zur Modellierung der plastischen Verformungen von

Metallen entwickelt. Für diese Materialien wird häufig vorausgesetzt, daß mit dem plastischen Fließen keine Volumenänderung entsteht, d.h. die plastische Verformung ist isochor. Diese Voraussetzung liegt der in Abschnitt 2.4 eingeführten Zerlegung des Deformationsgradienten in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil zugrunde.

Das im folgenden vorgestellte Stoffmodell beschränkt sich auf geschwindigkeitsunabhängige und isotherme Prozesse. Erweiterungen dieses Modells für viskoplastisches Verhalten wurden z.B. von Müller–Hoeppel [45] durchgeführt. Das temperaturabhängige Verhalten wird z.B. in den Arbeiten von Glaser [26] und Simo/Miehe [68] beschrieben.

4.2 Das elastische Teilstoffgesetz

Im Rahmen dieser Arbeit wird für das elastische Teilstoffgesetz ein homogenes, isotropes, hyperelastisches Verhalten angenommen. Für homogene elastische Materialien im isothermen Fall lassen sich die Spannungen allein aus dem Deformationszustand errechnen und hängen nicht von der Verformungsgeschichte ab. Diese Materialien werden in der Literatur häufig als Cauchy'sche Materialien bezeichnet (siehe z.B. Stein/Barthold [83] S. 192).

Die hyperelastischen Materialien besitzen die Eigenschaft, daß die von einer Spannung geleistete Arbeit wegunabhängig ist. Diese Eigenschaft fordert die Existenz eines hyperelastischen Potentials Ψ , auch freie Helmholtzenergie genannt. Wegen der Existenz des Potentials Ψ wird auf beliebigen geschlossenen Deformationspfaden keine Energie dissipiert.

Mit dem auf die Referenzkonfiguration bezogenen Potential Ψ_0 kann die Materialgleichung

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.1)$$

gewonnen werden (siehe Truesdell, Noll [91] S. 190 für die Herleitung). Mit Hilfe der Doyle–Ericksen Formeln – zuerst in [22] angegeben – lassen sich für die im Abschnitt 2.5 eingeführten Spannungstensoren elastische Materialgesetze in materiellen und räumlichen Koordinaten herleiten.

Für den 2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} und dessen Spannungsrate $\dot{\mathbf{S}}$ gelten:

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{E}} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.2)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{C} = 4\rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.3)$$

In der Momentankonfiguration läßt sich ein Potential Ψ konstruieren. Mit der Ableitung von Ψ nach dem kovarianten Metriktenor \mathbf{g} ergeben sich der Cauchy–Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und die Truesdellsche Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ zu :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}} = 2\rho \mathbf{b} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \quad (4.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \frac{\dot{\mathbf{g}}}{2}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{c} = 4\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = 4\rho \mathbf{b} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}} \mathbf{b}^T \quad (4.5)$$

Der Kirchhoff–Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und sein entsprechender Zuwachs, die Oldroyd–sche Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\tau}}$, sind dann:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}} \quad (4.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = J \mathbf{c} : \frac{\dot{\mathbf{g}}}{2} = J \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{wobei} \quad J \mathbf{c} = 4\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} \quad (4.7)$$

Anmerkung: Die Herleitung von Gl.(4.4) erfolgt durch das Einsetzen der Lie–Ableitung der freien Energie Ψ in den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (*Clausius–Duhem–Ungleichung*), siehe z.B Wriggers [96] S. 39.

$$\rho \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \quad (4.8)$$

$$\text{mit } \mathbf{d} = \frac{1}{2} L_V(\mathbf{g})$$

Daraus wird die Objektivität der sich aus den Doyle–Ericksen Formeln ergebenden räumlichen Tensoren gewährleistet.

Die vierstufigen Tensoren \mathbb{C} bzw. \mathbf{c} sind die Materialtensoren der Referenzkonfiguration bzw. der Momentankonfiguration. Diese besitzen bezüglich der kovarianten Basis die Darstellungen :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (4.9)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (4.10)$$

Durch die Anwendung von Gl.(4.5) wird der Materialtensor \mathbf{c} direkt in der Momentankonfiguration erzeugt, so daß die aufwendige Transformation des Tensors 4. Stufe \mathbb{C} durch "push–forward"–Operationen seiner Komponenten vermieden wird.

Im speziellen Fall der Isotropie wird z.B. in [41] gezeigt, daß eine allgemeingültige Darstellung der Formänderungsenergie für ein homogenes hyperelastisches Material, das dem Prinzip der materiellen Objektivität genügt, nur durch die drei Invarianten $J_i(\mathbf{b})$ bzw. $J_i(\mathbf{C})$, $i=1,2,3$ gegeben ist.

$$W(\mathbf{F}) = \rho \Psi = \tilde{W}(J_1(\mathbf{b}), J_2(\mathbf{b}), J_3(\mathbf{b})) = \tilde{W}(J_1(\mathbf{C}), J_2(\mathbf{C}), J_3(\mathbf{C})) \quad (4.11)$$

Da die Invarianten des rechten Cauchy–Green–Tensors \mathbf{C} und des linken Cauchy–Green–Tensors \mathbf{b} übereinstimmen, d.h. $J_i(\mathbf{b})=J_i(\mathbf{C})$, sind die Darstellungen der Formänderungsenergie in der Referenz– und in der Momentankonfiguration gleich. Beispiele von möglichen Ansätzen für hyperelastische Stoffgesetze sind z.B. bei Wriggers [96] angegeben. Für das hier angewandte Materialmodell wird eine von Simo, Taylor und Pister [79] beschriebene spezielle Form des Neo–Hooke Materialgesetzes für kompressiblen Werkstoff angenommen.

Eine Zerlegung der Formänderungsenergie, in welcher die volumetrischen und deviatorischen Anteile der Deformation entkoppelt sind, läßt sich mit Hilfe der Funktionen $f(J)$ und $g(\bar{\mathbf{F}}_e)$ durchführen.

$$W = \frac{1}{2}\kappa f(J) + \frac{1}{2}\mu g(\bar{\mathbf{F}}_e) \quad (4.12)$$

Hierbei sind κ und μ das Kompressions– bzw. Schubmodul und $\bar{\mathbf{F}}_e$ der Deviatoranteil des elastischen Deformationsgradienten.

$$\bar{\mathbf{F}}_e = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_e \quad (4.13)$$

Für das Materialmodell, beschrieben in [79], drückt sich die Formänderungsenergie in entkoppelter Form wie folgt aus:

$$W = \frac{1}{2}\kappa(\ln J)^2 + \frac{1}{2}\mu(\bar{\mathbf{b}}_e : \mathbf{g} - 3) \quad (4.14)$$

wobei $\bar{\mathbf{b}}_e$ den modifizierten elastischen linken Cauchy–Green–Tensor darstellt.

$$\bar{\mathbf{b}}_e := \bar{\mathbf{F}}_e \bar{\mathbf{F}}_e^T = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b}_e \quad (4.15)$$

Die konstitutive Beziehung für den Kirchhoff–Spannungstensor, zerlegt in seinen Kugelanteil \mathbf{k} und Deviatoranteil \mathbf{s} , erhält man durch Ableiten von Gl.(4.12) nach dem Metriktensor \mathbf{g} gemäß Gl.(4.6).

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k} + \mathbf{s}$$

wobei

$$\mathbf{k} = J\kappa \partial_{\mathbf{g}} f(J) = Jp\mathbf{g}^{-1} \quad \text{mit } p = \partial_J W = \partial_J f(J) \quad \text{und} \quad \partial_{\mathbf{g}} J = \mathbf{g}^{-1} \quad (4.16)$$

und

$$\mathbf{s} = J\mu \partial_{\mathbf{g}} g(\bar{\mathbf{F}}_e)$$

Für den speziellen Fall der Formänderungsenergie nach (4.14) lautet der Ausdruck für den Kirchhoff–Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\tau} = \kappa \ln J \mathbf{g}^{-1} + \mu \text{dev} \bar{\mathbf{b}}_e \quad \text{wobei} \quad p = \frac{\kappa}{J} \ln J \quad (4.17)$$

Anmerkung: Mit der Annahme der Materialsymmetrie und des Potentialcharakters der Materialgesetze wird die Anzahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten von 81 auf 21 reduziert. Mit der Einschränkung auf Isotropie verbleiben nur noch 2 Konstanten (Lamé Konstanten).

4.3 Das plastische Teilstoffgesetz

Die hier beschriebene Formulierung kennzeichnet sich durch:

- eine geometrische Beschreibung bezüglich der Zwischenkonfiguration (s. Bild 2.3)
- hyperelastische konstitutive Beziehungen
- Fließgesetz nach dem *Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit*

Es wird hier noch die zusätzliche Annahme getroffen, daß die elastischen Verzerrungen im Vergleich zu den Gesamtverzerrungen klein sind. Diese Annahme ist für Metalle nicht unrealistisch, siehe z.B. [4], und ermöglicht Approximationen in den konstitutiven Gleichungen, die bei der numerischen Zeitintegration zu einer effektiveren Prozedur führen.

4.3.1 Innere Variablen

Auf Grund der starken Wegabhängigkeit ist das Verformungsverhalten nicht nur eine Funktion der äußeren Zustandsgrößen wie Spannungen und Verzerrungen, sondern ein Funktional jener Prozeßvariablen, die die Veränderungen der Materialstruktur beschreiben.

Für Metalle ist das plastische Verhalten auf Änderungen der Kristallstruktur, wie z.B. ein Gleiten (engl. "Slip") der Atomgitter als Versetzung, zurückzuführen, siehe z.B. [38] S. 84. Bei plastischer Verformung weisen die Materialien auf starke Inhomogenitäten in der Materialverteilung und Verformung auf der Mikroebene hin. Um die strukturelle Umordnung der Mikroebene in einer makroskopischen konstitutiven Theorie zu erfassen, werden bei der Definition eines plastischen Zustandes die Spannungs- und Verzerrungstensoren durch einen Satz innerer Variablen ergänzt. Diese Variablen beschreiben die Geschichtsabhängigkeit bei inelastischen Vorgängen. Zur Definition von inneren Variablen sei auf Lubliner [37] verwiesen.

Die inneren Variablen werden hier in dem Matrizenvektor \mathbf{q} zusammengestellt, wobei jede Komponente q_i ein objektiver Tensor oder ein Skalar sein kann, der eine innere Variable beschreibt. Vektoren werden von der Darstellung innerer Variablen ausgeschlossen, da es bekannt ist (siehe [27]), daß diese zur Verletzung des Prinzips der materiellen Objektivität führen. Ein Beispiel einer tensoriellen inneren Zustandsgröße stellt der Rückspannungstensor (engl. *back stress*) bei der Beschreibung von kinematischer Verfestigung dar. Zur Beschreibung der Formänderung der Fließfläche werden Tensoren höherer Stufe gebraucht. Bei der numerischen Anwendung wird im Rahmen dieser Arbeit isotrope Verfestigung angenommen, so daß der Satz \mathbf{q} sich auf eine skalare Variable q reduziert.

4.3.2 Konstitutive Gleichungen

Wegen der besonderen Art der inelastischen Deformationen ist es nicht möglich, den inelastischen Anteil des Deformationsgradienten direkt als Funktion der Zustandsgrößen anzugeben. Der inelastische Anteil des Deformationsgradienten hängt von der Prozeßgeschichte ab und nicht nur von dem Zustand des Körpers zu dem betrachteten Zeitpunkt, so daß hierfür eine Evolutionsgleichung vorgegeben werden muß.

Mit den zuvor gegebenen Annahmen läßt sich das elastoplastische Verhalten bei großen Dehnungen für eine Darstellung in der Momentankonfiguration durch den folgenden Satz der konstitutiven Gleichungen vollständig beschreiben.

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Psi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) && \text{freie Helmholtzenergie} \\
 \boldsymbol{\tau} &= 2\varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}} = 2\varrho \mathbf{b}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}_e} && \text{hyperelastische konstitutive Gleichungen} \\
 \mathfrak{D}^P(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}; L_\nu \mathbf{b}_e^{-1}, L_\nu \mathbf{q}) &\geq 0 && \text{positive plastische Dissipation} \\
 \phi &= \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) \leq 0 && \text{Fließkriterium im Dehnungsraum} \quad (4.18) \\
 L_\nu \boldsymbol{\tau}_p &= 2\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) && \text{assoziertes Fließgesetz} \\
 \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} && \text{Evolutionsgleichung der inneren Variablen} \\
 \dot{\lambda} &\geq 0 ; \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) \leq 0 ; \dot{\lambda} \phi = 0 && \text{Be(Ent)lastungsbedingung}
 \end{aligned}$$

Dieser Satz wird grundsätzlich von zwei konstitutiven Funktionen bestimmt: einer polykonvexen Funktion $\Psi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ für die freie Energie und einer konvexen Funktion $\phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ für das Fließkriterium. Mit der Einbettung des Anteils der plastischen inneren Variablen und mit der Voraussetzung einer entkoppelten freien Energie resultiert für Ψ eine Funktion der Art:

$$\Psi = \Psi^e(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}) + \Psi^p(\mathbf{q}) \quad (4.19)$$

In (4.19) ist Ψ^e die materiell kovariante elastische freie Energie, und \mathbf{q} beschreibt entweder einen Vektor von Tensoren 2. Stufe oder Skalarfelder, so daß Ψ insgesamt die Bedingung der Materialkovarianz erfüllt. Mit der entkoppelten Gleichung (4.19) wird die plastische Dissipationsarbeit definiert:

$$\mathfrak{D}^P = -\mathbf{b}_e^{-1} \partial_{\mathbf{b}_e^{-1}} \Psi^e : L_\nu \mathbf{b}_e^{-1} - \partial_{\mathbf{q}} \Psi^p \cdot L_\nu \mathbf{q} = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_p + \mathbf{Y} \cdot L_\nu \mathbf{q} \quad (4.20)$$

wobei

$$\mathbf{Y} = -\partial_{\mathbf{q}} \Psi^p(\mathbf{q}) \quad (4.21)$$

und \mathbf{d}_p die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit ist.

$$\mathbf{d}_p := \frac{1}{2} L_v \mathbf{b}_e^{-1} \quad (4.22)$$

Nach dem *Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit* ist die von den wirklich auftretenden Spannungen an einer vorgegebenen plastischen Verzerrung geleistete Arbeit größer als die Arbeit, die durch irgendeinen beliebigen zulässigen Spannungszustand an derselben Verzerrung geleistet wird. Dieser Sachverhalt wird auch in der folgenden Variationsungleichung mit Nebenbedingung ausgedrückt, wobei die plastischen Variablen festgehalten werden.

$$\mathbf{C} := \{ \mathbf{g}' \in \mathbb{R}^6 \mid \phi(\mathbf{g}', \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) \leq 0 \} \quad (4.23)$$

$$\mathfrak{D}^P(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}; L_v \mathbf{b}_e^{-1}, L_v \mathbf{q}) - \mathfrak{D}^P(\mathbf{g}', \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}; L_v \mathbf{b}_e^{-1}, L_v \mathbf{q}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{g}' \in \mathbf{C}$$

Die in Gl.(4.23) beschriebene Maximierungsaufgabe mit Nebenbedingung läßt sich in die Form einer Lagrangeerweiterung der plastischen Dissipationsarbeit \mathfrak{D}^P überführen. Zur mathematischen Grundlage sei z. B. auf Luenberger [39] verwiesen.

$$\mathcal{L}^P(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}; L_v \mathbf{b}_e^{-1}, L_v \mathbf{q}) := - \mathfrak{D}^P(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}; L_v \mathbf{b}_e^{-1}, L_v \mathbf{q}) + \dot{\lambda}' \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) \quad (4.24)$$

Die Kuhn–Tucker–Optimalitätsbedingungen liefern dann:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}'} \mathcal{L}^P \Big|_{\substack{\mathbf{g}' = \mathbf{g} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda}}} &= - L_v \boldsymbol{\tau}_p + 2 \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{g}} \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} && \text{Fließregel} \\ \partial_{\mathbf{q}'} \mathcal{L}^P \Big|_{\substack{\mathbf{g}' = \mathbf{g} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda}}} &= - \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} && \text{Ent/Verfestigungsgesetz} \\ \partial_{\dot{\lambda}'} \mathcal{L}^P \Big|_{\substack{\mathbf{g}' = \mathbf{g} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda}}} &= \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) = 0 && \text{Fließfläche} \\ \dot{\lambda} &\geq 0 && \text{Ent/Belastungsbedingungen} \\ \dot{\lambda} \phi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, \mathbf{q}) &= 0 && \end{aligned} \quad (4.25)$$

Eine ausführliche Darstellung dieser Vorgehensweise zur Bestimmung der Evolutionsgleichungen für endliche Verzerrungen ist in [75] bezüglich der materiellen Koordinaten und in [45] bezüglich der räumlichen Koordinaten gezeigt. Für kleine Verzerrungen wird dieses Vorgehen z.B. in [85] geschildert.

4.3.3 Anwendung auf die J_2 –Elastoplastizität

Als einfaches Beispiel wird das konstitutive Modell nach Gln.(4.18) für die assoziative J_2 –Fließtheorie mit der in Gl.(4.14) angegebenen Formänderungsenergie und dem von Mises Fließkriterium eingesetzt. Dabei wird von der multiplikativen Zerlegung der Verzerrung nach Gl. (2.40) in ihre volumetrischen und isochoren Anteile Gebrauch ge-

macht. Der Satz der konstitutiven Gleichungen bekommt damit die folgende spezielle Form.

$$W = \varrho \Psi = \left\{ \frac{1}{2} \kappa (\ln J)^2 + \frac{1}{2} \mu (\mathbf{g} : \bar{\mathbf{b}}_e - 3) \right\} + \varrho \Psi^P(\bar{\varepsilon}_p) \quad (\text{siehe Gl. (4.19)})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \kappa \ln J \mathbf{g}^{-1} + \mu \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}}_e$$

$$\mathbb{D}^P = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_p + \mathbf{Y} \cdot L_v \bar{\varepsilon}_p$$

$$\phi = \phi(\mathbf{g}, \mathbf{s}, \bar{\varepsilon}_p) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F(\bar{\varepsilon}_p) \quad (4.26)$$

$$L_v \boldsymbol{\tau}_p = \lambda \partial_{\mathbf{g}} \phi = 2 \bar{\mu} \lambda \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \lambda \sqrt{\frac{2}{3}}$$

wobei

$$\bar{\mu} = \frac{1}{3} \mu J^{-\frac{2}{3}} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{b}}_e \quad (4.27)$$

und $\bar{\mathbf{b}}_e$ der Deviatoranteil von \mathbf{b}_e (4.15) ist. Die plastische Vergleichsdehnung $\bar{\varepsilon}_p$ ist eine skalare innere Variable.

In (4.26) wurde anstelle des Tensors \mathbf{b}_e^{-1} der Deviator \mathbf{s} der Kirchhoff Spannung $\boldsymbol{\tau}$ eingeführt, der den isochoren elastischen Anteil der Deformation beschreibt. Der Zusammenhang zwischen \mathbf{b}_e und \mathbf{s} lautet:

$$\mathbf{s} = \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} = \mu (\bar{\mathbf{b}}_e - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{b}}_e : \mathbf{g}) \mathbf{g}^{-1}) \quad (4.28)$$

Zur Berechnung der Gl. (3.26)₅ wird die Ableitung

$$\partial_{\mathbf{g}} \phi(\mathbf{g}, \mathbf{s}, \bar{\varepsilon}_p) = \partial_{\mathbf{s}} \phi \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{s} + \partial_{\mathbf{g}} \phi \quad (4.29)$$

benötigt. Nach Berechnung der einzelnen Terme folgt daraus das Fließgesetz.

$$L_v \boldsymbol{\tau}_p = 2 \bar{\mu} \lambda \left(\mathbf{n} + \frac{\|\mathbf{s}\|}{\bar{\mu}} \operatorname{dev} \mathbf{n}^2 \right) \quad \text{wobei} \quad \mathbf{n} = \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}}{\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}\|} \quad (4.30)$$

Aufgrund der Annahme mäßiger elastischer Deformationen gilt $\|\mathbf{s}\| \ll \mu$, so daß das Fließgesetz durch

$$L_v \boldsymbol{\tau}_p \approx 2 \bar{\mu} \lambda \mathbf{n} \quad (4.31)$$

approximiert werden kann.

4.4 Lokale Integration der Fließregel

Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Fließregel und Evolutionsgleichung der inneren Variablen stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit dar, die im Hinblick auf die lokale Auswertung (an dem Quadraturpunkt) der Zustandsgrößen integriert werden müssen.

Zahlreiche numerische Integrationsverfahren für inelastische Materialgesetze werden in der Literatur angegeben [53] [42] [54] [92]. Bei der Wahl eines Verfahrens sind im Hinblick auf die Verbindung mit der Methode der finiten Elemente Kriterien wie Stabilitätseigenschaften, Genauigkeit und numerische Effizienz der verschiedenen Integrationsalgorithmen entscheidend. Explizite Verfahren sind z.B. nur bedingt stabil und fordern deshalb kleine Zeitschritte [19]. In der Regel werden implizite Verfahren gegenüber den expliziten Verfahren bevorzugt, da sie bessere Stabilitätseigenschaften aufweisen und daher größere Schrittweiten zulassen.

Ein verbreitetes und numerisch effektives Einschritt-Verfahren stellt das implizite Euler-Verfahren dar. Die Genauigkeit und die Stabilität dieses Verfahrens für kleine Verzerrungen werden z.B. in Ortiz und Popov [54] und Simo und Govindjee [70] untersucht. In [70] wurde gezeigt, daß das implizite Euler-Verfahren auch im nichtlinearen Fall unbedingt stabil ist. Dies wird durch das "B-Stabilität" Kriterium [70] nachgewiesen.

Für die Elastoplastizität werden die Spannungen in einem plastischen Schritt von dem elastischen Prädiktor auf die Fließfläche zurückprojiziert. Man spricht von *Return-Algorithm*en. Das implizite Euler-Verfahren gehört in diesem Fall zu der Familie der *Closest-Point-Projektion-Algorithm*en, welche im Sonderfall der von Mises Fließregel *Radial-Return* [92] genannt wird.

4.4.1 Übertragung des "Radial-Return"-Algorithmus auf die J_2 -Fließtheorie bei endlichen Verzerrungen

Das im Rahmen einer Theorie kleiner Verzerrungen oft benutzte klassische "*Radial-Return*" Verfahren von Wilkins [92] läßt sich, wie es bereits in Simo [76] gezeigt wurde, auf die Theorie endlicher Verzerrungen in einfacher Weise übertragen. Der sich ergebende Algorithmus kann in geschlossener Form linearisiert werden, so daß die Erstellung der konsistenten Materialtangente möglich ist. Bei der Anwendung hyperelastischer konstitutiver Beziehungen wird der elastische Prädiktor, im Gegensatz zur Anwendung hypoelastischer Beziehungen, direkt durch Funktionsauswertung gewonnen.

Es wird angenommen, daß die Lösung zum Zeitpunkt t_n bekannt ist. Da der Prozess deformationsgesteuert abläuft, ist die Gesamtdeformation im neuen Zeitschritt $n+1$ ge-

geben, d.h. Φ_{n+1} ist bekannt. Damit läßt sich der Deformationsgradient im Zustand $n+1$ errechnen. Ein elastischer Prädiktorschritt bedeutet im Rahmen der multiplikativen Zerlegung Gl.(2.36), daß die Verzerrungen bei festgehaltener Zwischenkonfiguration aufgebracht werden. Somit wird der Prädiktor $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}}$ durch *push-forward* des Tensors $\bar{\mathbf{b}}_n^{\text{e}}$ von Φ_n auf Φ_{n+1} gewonnen. Hier steht das hochgestellte tr für den englischen Ausdruck "trial".

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}} = \phi_{*n+1}(\phi_n^*(\bar{\mathbf{b}}_n^{\text{e}})) \quad (4.32)$$

Im Fall eines elastischen Inkrementes gilt:

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e}} = \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}}, \quad (4.33)$$

d.h., die Lösung ist exakt. Der Projektionsalgorithmus ist in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Für eine detaillierte Darstellung wird auf Simo [76] verwiesen.

Anmerkung: Im allgemeinen ist Gleichung (3.42) nichtlinear in $\Delta\lambda$ und läßt sich nicht nach $\Delta\lambda$ auflösen. Die Bestimmung von $\Delta\lambda$ erfolgt dann iterativ, z.B. mit dem Newton-Verfahren:

$$\Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k - \left[\frac{\phi}{\frac{d\phi}{d\Delta\lambda}} \right]_k \quad (4.34)$$

Mit ϕ aus Gl. (3.41) folgt:

$$\Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k - \left[\frac{\| \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} \| - 2\bar{\mu} \Delta\lambda - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F(\bar{\mathbf{e}}^P(\Delta\lambda))}{2\bar{\mu} + \frac{2}{3} H(\bar{\mathbf{e}}^P(\Delta\lambda))} \right]_k \quad (4.35)$$

wobei $H = \frac{d\sigma_F}{d\bar{\mathbf{e}}^P}$ das Ver-/Entfestigungsmodul definiert.

- **Mit der aktualisierten Geometrie** $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}$

Bereitstellung des Deformationsgradienten (am Integrationspunkt) (4.36)

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}}$$

Aufspaltung in volumetrische und isochore Anteile

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = J_{n+1}^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_{n+1} ; \quad J_{n+1} := \det [\mathbf{F}_{n+1}] \quad (4.37)$$

- **Elastischer Prädiktorschritt**

modifizierte Schätzung des elastischen linken Cauchy–Green Tensors

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \mathbf{C}_n^{\text{p}-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{T}} \quad (4.38)$$

Prädiktor des Spannungsdeviators

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}}] \quad (4.39)$$

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}}\|} \quad (4.40)$$

- **Überprüfung des Fließkriteriums**

$$\phi_{n+1}^{\text{tr}} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\text{F}}(\bar{\epsilon}^{\text{p}}) \quad (4.41)$$

für $\phi_{n+1}^{\text{tr}} \leq 0 \Rightarrow$ elastischer Schritt $\Rightarrow (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{tr}} \Rightarrow$ exakte Lösung

für $\phi_{n+1}^{\text{tr}} > 0 \Rightarrow$ plastischer Schritt \Rightarrow Fortfahren mit Korrektorschritt

- **Plastischer Korrektorschritt**

Lösung für $\Delta\lambda$

$$\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}}\| - \Delta s^{\text{p}}(\Delta\lambda) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\text{F}}(\bar{\epsilon}^{\text{p}}(\Delta\lambda)) = 0 \quad (4.42)$$

$$\text{mit } \Delta s^{\text{p}} = 2\bar{\mu}_{n+1} \Delta\lambda \quad \text{und} \quad \bar{\mu}_{n+1} = \frac{1}{3} \mu \text{tr} \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}} \quad (4.43)$$

Projektion auf die Fließfläche

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} - 2\bar{\mu} \Delta\lambda \mathbf{n}_{n+1} \quad (4.44)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \bar{\epsilon}_n^{\text{p}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda \quad (4.45)$$

- **Update der Zwischenkonfiguration**

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e}} = \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{\text{e tr}} - \frac{2\bar{\mu} \Delta\lambda}{\mu} \mathbf{n}_{n+1} \quad (4.46)$$

Tabelle 4.1: Projektionsverfahren für J_2 -Fließtheorie mit isotroper Verfestigung

5 Das inkrementelle Problem

Das Anfangs–Randwertproblem wird durch partielle Differentialgleichungen bezüglich der Zeit und der Koordinaten definiert. Als numerisches Lösungsverfahren für das geometrisch und physikalisch nichtlineare Anfangs–Randwertproblem wird die Methode der Finiten Elemente herangezogen. Die Lösung des Satzes der nichtlinearen algebraischen Gleichungen des globalen Systems mit den Verschiebungen als Unbekannte wird mit einem Newton–Verfahren durchgeführt. Danach folgt die lokale Integration der Evolutionsgleichungen und Auswertung des Stoffgesetzes an den Quadraturpunkten. Diese beiden Lösungsschritte sind durch die Verschiebungen und Spannungen miteinander verknüpft. Für das Newton–Verfahren müssen die Gleichungen des globalen Systems bezüglich der Verschiebungen linearisiert werden. Aufgrund der Kopplung mit den lokalen Gleichungen ist damit auch die Linearisierung des Stoffgesetzes verbunden.

Bei dem Newton–Verfahren wird die Lösung der nichtlinearen Gleichungen durch eine Taylor–Reihenentwicklung angenähert, die man nach dem linearen Term abbricht.

Die Linearisierung einer skalarwertigen, vektorwertigen oder tensorwertigen Funktion $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ an der Stelle $\bar{\mathbf{w}}$ ergibt sich aus der Summe eines festgehaltenen Funktionswertes und dem linearen Zuwachs. Dies drückt sich in der folgenden Gleichung aus

$$L\mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}}, \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}}) + D\mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{0} , \quad (5.1)$$

welche im Sinne des Newton–Verfahrens zu Null zu setzen ist.

Der lineare Zuwachs von $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ an der Stelle $\bar{\mathbf{w}}$ wird durch die Bildung der Richtungsableitung (Gateaux–Ableitung) an dieser Stelle gewonnen.

Definition 5.1: Für $\mathbf{G}(\mathbf{w}) : S \subset A \rightarrow B$, falls $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ stetig auf S ist und Gateaux differenzierbar ist, wird $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ Frechet differenzierbar bezeichnet; näheres dazu siehe [52]. Das Frechet–Differential wird durch die Formel der Gateaux–Ableitung Gl. (4.15) gewonnen.

$$\begin{aligned} D\mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}}) \cdot \Delta\mathbf{u} &= \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}} + \varepsilon\Delta\mathbf{u})]_{\varepsilon=0} & (5.2) \\ &= [\partial_{\mathbf{w}}\mathbf{G} \cdot \partial_{\varepsilon}(\bar{\mathbf{w}} + \varepsilon\Delta\mathbf{u})]_{\varepsilon=0} \\ &= \partial_{\mathbf{w}}\mathbf{G} \cdot \Delta\mathbf{u} \end{aligned}$$

□

5.1 Verschiebungsformulierung und Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Durch Betrachtung von großen Deformationen und nichtlinearem Materialverhalten hängt das Prinzip der virtuellen Arbeit gemäß Gl. (4.3) oder Gl. (4.6) in nichtlinearer Weise von den Verschiebungen ab. Als Grundlage des Newton–Verfahrens wird im folgenden die Linearisierung dieses Prinzips angegeben. Dabei wird $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ durch die skalarwertige Funktion g ersetzt und \mathbf{w} stellt die Bewegung $\Phi_t = \Phi(\mathbf{X}, t)$ dar. Das Vektorfeld $\Delta \mathbf{u}$ wird als eine infinitesimale Deformation aufgefaßt, die der endlichen Deformation $\bar{\Phi}$ überlagert ist. Die Ableitungen werden hier so durchgeführt, daß sich die Integrationsgrenzen auf die Referenzkonfiguration beziehen, weil diese sonst nicht konstant sind und mit abgeleitet werden müssen. Nach der Ableitung können die Integrationsgrenzen wieder auf die Momentankonfiguration bezogen werden.

Zunächst wird die Linearisierung der kinematischen Größen angegeben, die bei der Linearisierung der Arbeitsprinzipien verwendet werden.

Mit der Definition des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.3)$$

läßt sich die Linearisierung von \mathbf{F} herleiten.

$$\mathcal{L}\mathbf{F}(\bar{\Phi}, \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\bar{\Phi}) + \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial (\bar{\Phi} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\varepsilon=0} = \mathbf{F}(\bar{\Phi}) + \text{Grad} \Delta \mathbf{u} \quad (5.4)$$

Analog errechnet man die Linearisierung des inversen Deformationsgradienten (siehe z. B. Wriggers [96] für die Herleitung):

$$\mathcal{L}\mathbf{F}^{-1}(\bar{\Phi}, \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}^{-1}(\bar{\Phi}) - \mathbf{F}^{-1} \text{grad} \Delta \mathbf{u} \quad (5.5)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit Gl. (4.6) kann nach Einsetzen der Relation (2.42) für die Kirchhoffspannungen wie folgt ausgedrückt werden:

$$g = \int_{B_0} \boldsymbol{\tau} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{B_0} \rho_0 (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (5.6)$$

Mit der Definition (5.1) wird hier die Linearisierung des Arbeitsprinzips durchgeführt.

$$\mathcal{L}g(\bar{\Phi}, \mathbf{u}) = g(\bar{\Phi}) + D_{\Phi} g(\bar{\Phi}) \cdot \overset{\text{Gln. (5.1)}}{\Delta \mathbf{u}} = 0 \quad (5.7)$$

Unter der Voraussetzung verschiebungsunabhängiger Belastung und quasistatischer Probleme beschränkt sich die Berechnung der Richtungsableitung auf den ersten Term in (5.6), d.h. die Berechnung von :

$$D_{\Phi}(\boldsymbol{\tau} : \text{grad} \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (5.8)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$\text{grad } \delta \mathbf{u} = \text{Grad } \delta \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} \quad (5.9)$$

läßt sich (5.8) durch die Anwendung der Kettenregel errechnen

$$D_{\Phi}(\boldsymbol{\tau}(\Phi, \mathbf{C}) : \text{grad} \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{C}} [D_{\Phi} \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{u}] : \text{grad} \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} : \text{Grad} \delta \mathbf{u} (D_{\Phi} \mathbf{F}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{u}) \quad (5.10)$$

Unter Beachtung von (5.4) und (5.9) ist die Richtungsableitung des rechten Cauchy–Green–Tensors:

$$D_{\Phi} \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}^T \text{Grad} \Delta \mathbf{u} + \text{Grad}^T \Delta \mathbf{u} \mathbf{F} = 2 \text{grad}^s \Delta \mathbf{u} \quad (5.11)$$

Das Einsetzen von (5.11) und (5.5) in (5.10) vervollständigt die Linearisierung von (5.6), die sich nach Transformation in die räumliche Darstellung ausdrücken läßt.

$$D_{\Phi} g(\bar{\Phi}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_B \text{grad}^s \Delta \mathbf{u} : \mathbf{c} : \text{grad} \delta \mathbf{u} + \text{grad} \Delta \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = -g(\bar{\Phi}) \quad (5.12)$$

Dabei zeigt der erste Term den Beitrag des Materials zur Steifigkeit und der zweite liefert die geometrische Steifigkeitsmatrix.

5.2 Gemischtes Funktional als Vorbereitung für die EAS–Formulierung

5.2.1 Variationelle Basis

Das Hu–Washizu Dreifeldfunktional Gl.(4.14) und die entsprechenden lokalen Euler–Gleichungen (4.18) sind Basis der erweiterten Dehnungsformulierung – "Enhanced–Assumed–Strain"(EAS)–Formulierung. Die zulässigen Verschiebungsgradienten $\tilde{\mathbf{Z}}$ werden aus dem kompatiblen Verschiebungsgradienten $\text{Grad} \mathbf{u}$ und einem weiteren Verschiebungsgradienten $\tilde{\mathbf{H}}$ zusammengesetzt.

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \text{Grad} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{H}} \quad (5.13)$$

Im Sinne einer FE–Diskretisierung kann $\tilde{\mathbf{H}}$ als Verschiebungsgradient eines inkompatiblen Verschiebungsfeldes $\tilde{\mathbf{u}}$ interpretiert werden. Der Deformationsgradient ist dann als Funktion von \mathbf{u} und $\tilde{\mathbf{H}}$ neu definiert.

$$\tilde{\mathbf{F}} := \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{1} + \text{Grad} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{F}_{\Phi} + \tilde{\mathbf{H}} \quad (5.14)$$

wobei \mathbf{F}_{Φ} den kompatiblen Anteil des Deformationsgradienten Gl.(5.3) darstellt.

Die variationelle Formulierung des erweiterten Ansatzes folgt durch eine neue Parametrisierung der Gl. (3.14) mit Gl.(5.13)

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{P}) = \int_{B_0} \left\{ \hat{W}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}}) - \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{H}} \right\} dV + \Pi^a(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (5.15)$$

Die 1. Variation des Funktionals (5.15) in $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{P})$ in Richtung $(\delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\mathbf{H}}, \delta \mathbf{P})$ kann, analog zu Gl.(3.16), wie folgt geschrieben werden:

$$\delta \tilde{\Pi} := \int_{B_0} \left[\text{Grad}(\delta \mathbf{u}) \cdot (2\tilde{\mathbf{F}} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W}) \right] - \delta \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{H}} + \delta \tilde{\mathbf{H}} \cdot \left[-\mathbf{P} + (2\tilde{\mathbf{F}} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W}) \right] dV + \delta \Pi^a(\mathbf{u}) \quad (5.16)$$

Die entsprechenden lokalen Euler–Gleichungen sind (vgl. Gl.(3.18)):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Div} \left[2\tilde{\mathbf{F}} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W} \right] + \varrho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{P} + 2\tilde{\mathbf{F}} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{in } B_0 \quad \begin{array}{l} \text{Gleichgewichtsbedingung} \\ \text{kinematische Randbedingung} \\ \text{Stoffgesetz} \end{array} \quad (5.17)$$

mit $\tilde{\mathbf{F}}$ nach (5.14) und mit der natürlichen Randbedingung

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \partial B_{0\sigma} \quad (5.18)$$

Durch Nachmultiplikation von Gl.(5.17c) mit $\tilde{\mathbf{F}}^T$ erhält man

$$\text{sym}[\mathbf{P}\tilde{\mathbf{F}}^T] + 2\mathbf{F} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W} \tilde{\mathbf{F}}^T = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

Es ist anzumerken, daß der Term $\text{sym}[\mathbf{P}\tilde{\mathbf{F}}^T]$ für $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ der Definition des Kirchhoff–Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ Gl. (2.42) und Gl. (2.44) entspricht.

Eine äquivalente Form der Gleichungen (5.17) in der räumliche Darstellung folgt durch die Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\tau} &:= \delta \mathbf{P}\tilde{\mathbf{F}}^T \\ \tilde{\mathbf{h}} &:= \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{h}}) &= 2\tilde{\mathbf{F}} \partial_{\mathbf{c}} \hat{W}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\mathbf{F}}^T \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mit den obigen Größen und der Definition

$$\tilde{\text{grad}} \delta \mathbf{u} = \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) := \text{Grad}(\delta \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (5.21)$$

erhält man die äquivalente variationelle Gleichung der Momentankonfiguration.

$$\delta \tilde{\Pi} := \int_{B_0} \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{h}}) - \delta \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{h}} + \delta \tilde{\mathbf{h}} \cdot \left[-\boldsymbol{\tau} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{h}}) \right] dV + \delta \Pi^a(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad (5.22)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\boldsymbol{\tau}$ und $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= \int_{B_0} \tilde{\nabla}^s(\delta \mathbf{u}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{h}}) \, dV + \Pi^a(\delta \mathbf{u}) = 0 \\
\tilde{g}_2 &= \int_{B_0} \delta \tilde{\mathbf{h}}^s \cdot [-\boldsymbol{\tau} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{h}})] \, dV = 0 \\
\tilde{g}_3 &= \int_{B_0} \delta \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{h}} \, dV = 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

5.2.2 Linearisierung des gemischten Funktionals

Zusätzlich zu den Verschiebungen \mathbf{u} treten in (5.23) die Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ und die Erweiterung $\tilde{\mathbf{H}}$ des Verschiebungsgradienten als Freiheitsgrade auf. Die Linearisierung von (5.23) wird dann durch die Ableitung an der Stelle $(\bar{\Phi}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\boldsymbol{\tau}})$ in Richtung von $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{H}}, \Delta \boldsymbol{\tau})$ gewonnen. Die unterschiedlichen Richtungsableitungen werden durch einen zusätzlichen Index gekennzeichnet, so daß für die Ableitungen die Bezeichnung $D_\Phi(\cdot) \cdot \Delta \mathbf{u}$, $D_{\tilde{\mathbf{H}}}(\cdot) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}}$, $D_{\boldsymbol{\tau}}(\cdot) \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}$ verwendet wird.

Die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens gemäß Gl. (5.1) kann für den gemischten variationellen Gleichungssatz (5.23) im folgenden Matrixsystem angeordnet werden.

$$\begin{bmatrix} D_\Phi \tilde{g}_1 & D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{g}_1 & D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{g}_1 \\ D_\Phi \tilde{g}_2 & D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{g}_2 & D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{g}_2 \\ D_\Phi \tilde{g}_3 & D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{g}_3 & D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{g}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \tilde{\mathbf{H}} \\ \Delta \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\bar{\Phi}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) \\ \tilde{g}_2(\bar{\Phi}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) \\ \tilde{g}_3(\bar{\Phi}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Die Berechnung der einzelnen Richtungsableitungen in (5.24) wird hier unter den bereits genannten Einschränkungen durchgeführt. Mit Hilfe der Linearisierungen von \mathbf{F} und \mathbf{F}^{-1} , Gl. (5.4) bzw. Gl. (5.5), lassen sich die linearisierten Formen für $\tilde{\mathbf{F}}$ und $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ herleiten.

Die Richtungsableitungen von $\tilde{\mathbf{F}}$ sind

$$D_\Phi \tilde{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{u} = \text{Grad} \Delta \mathbf{u} = \tilde{\nabla}(\Delta \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{F}} \tag{5.25}$$

$$D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} = \Delta \tilde{\mathbf{H}} = \Delta \tilde{\mathbf{h}} \tilde{\mathbf{F}} \tag{5.26}$$

Die Richtungsableitungen der Inversen $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ erhält man analog zu Gl. (5.5) unter Verwendung von Gl. (5.25) und Gl. (5.26) unter Anwendung der Produktregel aus der Grundbeziehung

$$\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad D_\Phi(\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) = D_{\tilde{\mathbf{H}}}(\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \stackrel{!}{=} 0$$

\mathbf{I} ist der Einheitstensor 2. Stufe. Damit gilt für die Richtungsableitung $D_{\Phi} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{u}$ entsprechend zu Gl. (5.5)

$$D_{\Phi} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{u} = - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\nabla}(\Delta \mathbf{u}) \quad (5.27)$$

Der Term $D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}}$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\mathbf{H}}}(\tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} &= (D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}(D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} &= - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Es folgen die Richtungsableitungen von $\tilde{\mathbf{g}}_1$ an der Stelle $(\bar{\Phi}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\boldsymbol{\tau}})$ in Richtung von $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{H}}, \Delta \boldsymbol{\tau})$. Die dafür notwendige Ableitung von $\boldsymbol{\tau}$ in Richtung $\Delta \mathbf{u}$ (und analogerweise in Richtung $\Delta \tilde{\mathbf{H}}$) erfolgt nach den Gln. (5.10) und (5.11).

Da die Richtungsableitungen $D_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{u}$ und $D_{\Phi} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{u}$, Gl. (5.4) bzw. Gl. (5.25) übereinstimmen, folgt die Linearisierung $D_{\Phi} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u}$ analog zu Gl. (5.8), wobei $\text{grad} \delta \mathbf{u}$ durch $\tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u})$ ersetzt wird (zu $\tilde{\nabla}$ siehe Gl. (5.21)):

$$D_{\Phi} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{B_0} \tilde{\nabla}^s(\Delta \mathbf{u}) : \mathcal{J} \mathcal{C} : \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) + \tilde{\nabla}(\Delta \mathbf{u}) \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) \, dV \quad (\text{vgl. Gl. (5.12)}) \quad (5.29)$$

Mit der Definition

$$\tilde{\mathbf{H}} = \text{Grad}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{h}} = \text{Grad}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (5.30)$$

erkennt man, daß die Ableitung von $\tilde{\mathbf{g}}_1$ nach $\tilde{\mathbf{H}}$ analog zu Gl.(5.29) gefunden werden kann:

$$D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} = \int_{B_0} [\Delta \tilde{\mathbf{h}}]^s : \mathcal{J} \mathcal{C} : \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) + \Delta \tilde{\mathbf{h}} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}) \, dV \quad (5.31)$$

$$\text{wobei} \quad [\Delta \tilde{\mathbf{h}}]^s = \frac{1}{2} [\Delta \tilde{\mathbf{h}} + \Delta \tilde{\mathbf{h}}^T]$$

Da $\tilde{\mathbf{g}}_1$ unabhängig von $\boldsymbol{\tau}$ ist, verschwindet die Ableitung $D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}$.

Die Ableitungen von $\tilde{\mathbf{g}}_2$ sind:

$$D_{\Phi} \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{B_0} [\delta \tilde{\mathbf{h}}^s] \cdot [\tilde{\nabla}(\Delta \mathbf{u}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\nabla}^T(\Delta \mathbf{u}) + \mathcal{J} \mathcal{C} : \tilde{\nabla}^s(\Delta \mathbf{u})] \, dV \quad (5.32)$$

$$D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} = \int_{B_0} [\delta \tilde{\mathbf{h}}^s] \cdot [\Delta \tilde{\mathbf{h}} \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \Delta \tilde{\mathbf{h}}^T + \mathcal{J} \mathcal{C} : \Delta \tilde{\mathbf{h}}^s] \, dV \quad (5.33)$$

$$D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{\tau} = \int_{B_0} [\delta \tilde{\mathbf{h}}^s] \cdot \Delta \boldsymbol{\tau} \, dV \quad (5.34)$$

Die Richtungsableitungen von $\tilde{\mathbf{g}}_3$ sind

$$D_{\phi} \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.35)$$

$$D_{\tilde{\mathbf{H}}} \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \Delta \tilde{\mathbf{H}} = \int_{B_0} \delta \boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{h}} \, dV \quad (5.36)$$

$$D_{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (5.37)$$

Damit ist die Berechnung der Tangentenmatrix in (5.24) vollständig.

Anmerkung 5.1: Es sei darauf hingewiesen, daß die Linearisierung des kontinuierlichen Problems nicht in allen Fällen mit der Linearisierung des diskreten Problems übereinstimmt. Bei Problemen mit Zwangsbedingungen, wie z.B. bei Kontaktformulierungen [96] und bei der Berücksichtigung der Inkompressibilität [45], kann die Linearisierung mit der Diskretisierung gekoppelt sein. Aus diesem Grund ist in solchen Fällen eine Linearisierung nur für das diskretisierte Problem sinnvoll.

□

5.3 Linearisierung des Stoffgesetzes

Im Hinblick auf die Konvergenzeigenschaften des Newton–Verfahrens ist bei der Linearisierung der mechanischen Gleichungen die verwendete numerische Zeitintegration für die Ermittlung der Spannungen zu beachten, d.h. es müssen die projizierten Spannungen nach den Verzerrungen abgeleitet werden.

Die zu dem hier eingesetzten impliziten Euler–Verfahren (Abschnitt 3.4) konsistente Materialtangente wird hier am Beispiel der in Kapitel 4 angegebenen konstitutiven Beziehung Gl.(4.16) für den Kirchhoff–Spannungstensor präsentiert.

Der Materialtensor \mathbf{c} für die linearisierten Gleichungen (5.12) und (5.24) wird durch die Doyle–Ericksen Formeln Gln.(4.5) und (4.6) bereitgestellt:

$$J\mathbf{c} := 2 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} \quad (5.38)$$

Nach Gl. (4.16) wird der Kirchhoff–Spannungstensor in seinen Kugelanteil \mathbf{k} und seinen isochoren Anteil \mathbf{s} aufgespalten

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k} + \mathbf{s} , \quad (5.39)$$

wobei \mathbf{s} nach dem gewählten Integrationsverfahren aus Gl. (4.44) zu errechnen ist.

$$\mathbf{s} = \text{dev } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{s}^{\text{tr}} - 2\bar{\mu}\Delta\lambda\mathbf{n} \quad (5.40)$$

Die Materialtangente setzt sich dann aus

$$J\mathbf{c} = J\mathbf{c}_{\text{vol}} + J\mathbf{c}_{\text{dev}} = 2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{g}} + 2 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{g}} \quad (5.41)$$

zusammen. Nach der Annahme plastischer Inkompressibilität ist der 1. Term elastisch und wird direkt aus (4.16) gewonnen.

$$J\mathbf{c}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{g}} = (J^2 p' + Jp) \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} - 2Jp \mathbf{I}_4 \quad (5.42)$$

mit dem Einheitstensor 4. Stufe \mathbf{I}_4

$$\mathbf{I}_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{g}^{\text{lk}} \mathbf{g}^{\text{jl}} + \mathbf{g}^{\text{ll}} \mathbf{g}^{\text{jk}}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (5.43)$$

und $p' = \partial_j p$, mit p definiert in Gl.(4.16).

Für die hier gewählte Formänderungsenergie nach (4.14) ist

$$p = \frac{\kappa}{J} \ln J \quad \text{und} \quad p' = \frac{\kappa}{J^2} (1 - \ln J) \quad (5.44)$$

so daß die volumetrische Materialtangente lautet:

$$J\mathbf{c}_{\text{vol}} = \kappa \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} - 2\kappa \ln J \mathbf{I}_4 \quad (5.45)$$

Die Berechnung des 2. Terms erfolgt mit Hilfe von Gl. (5.40) und der Kettenregel zu

$$J_{C_{\text{dev}}} = 2 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{g}} = 2 \frac{\partial \mathbf{s}^{\text{tr}}}{\partial \mathbf{g}} - 4\Delta\lambda \mathbf{n} \otimes \partial_{\mathbf{g}} \bar{\mu} - 4\bar{\mu} \mathbf{n} \otimes \partial_{\mathbf{g}} \Delta\lambda - 4\bar{\mu} \Delta\lambda \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{n} \quad (5.46)$$

Hierin stellt der Term $2 \frac{\partial \mathbf{s}^{\text{tr}}}{\partial \mathbf{g}}$ wiederum eine elastische Teilmatrix dar, welche aus der Ableitung des elastischen Prädiktors Gl. (4.39) entsteht.

$$J_{C_{\text{dev}}}^{\text{tr}} = 2 \frac{\partial \mathbf{s}^{\text{tr}}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{3} \mu [(\bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} : \mathbf{g}) \mathbf{I}_{\text{dev}} - (\text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}})] \quad (5.47)$$

$$\text{wobei } \mathbf{I}_{\text{dev}} := \mathbf{I}_4 - \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \quad (5.48)$$

Erfolgt ein Lastschritt im elastischen Bereich, wird die Tangente aus den Teilen (5.42) und (5.47) zusammengesetzt.

Die vollständige, konsistente elastoplastische Materialtangente ergibt sich nach der Berechnung der einzelnen Terme in (5.46) zu:

$$J_{C} = J_{C_{\text{vol}}} + (1 - \delta_1) J_{C_{\text{dev}}}^{\text{tr}} + \delta_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \delta_3 [\mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2]]^{\text{s}} \quad (5.49)$$

Die Koeffizienten lauten hierbei:

$$\delta_0 = \frac{1}{1 + \frac{h'}{3\bar{\mu}}} \quad (5.50)$$

$$\delta_1 = \frac{2\bar{\mu}\Delta\lambda}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|}$$

$$\delta_2 = 2\bar{\mu} \left[\delta_0 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \Delta\lambda}{\bar{\mu}} \right] - \delta_1 \right]$$

$$\delta_3 = 4\bar{\mu}\Delta\lambda + 2\delta_0 \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|$$

Die zur Herleitung des Tensors (5.49) notwendigen Schritte sind im Anhang A beschrieben (vgl. auch Simo [76]).

Anmerkung 5.2: Der konsistente Tangententensor (5.49) ist nur durch die Vorfaktoren δ_1 , δ_2 und δ_3 von der Kontinuumstangente zu unterscheiden. Der zusätzliche Rechenaufwand zur Bereitstellung dieses Tensors ist deshalb sehr gering. Jedoch wird eine erhebliche Verbesserung der Konvergenz bei den Beispielrechnungen erzielt.

6 Finite–Element–Formulierung

Im allgemeinen steht für das hier betrachtete, geometrisch und physikalisch nichtlineare Anfangs–Randwertproblem keine geschlossene Lösung zur Verfügung. Als numerisches Lösungsverfahren dient hier daher die Finite–Element–Methode. Ihre Grundlagen sind in vielen Büchern und Veröffentlichungen behandelt, siehe z.B. [5][97], so daß hier nur auf einige spezielle Aspekte eingegangen wird.

In kommerziellen finiten Elementprogrammen werden viele Elementtypen angeboten, wie z. B. Scheiben–, Platten–, Schalen–, 3D–Elemente. Im Prinzip könnten alle Tragwerke, auch die dünnen Systeme, allein mit 3D–Elementen berechnet werden. Die anderen Elementtypen werden nicht nur wegen der kinematischen Vereinfachungen eingesetzt, welche die Anzahl der kinematischen Variablen bei der Problemdiskretisierung reduzieren, sondern auch deshalb, weil die meisten der 3D–Elemente Mängel zeigen. Das häufigste Problem ist ein in der Formulierung begründetes künstliches Versteifen, im Englischen als "locking" bezeichnet. Insbesondere für "dünne" Tragwerke ist das "locking"–Phänomen auf zwei Gründe zurückzuführen. Einerseits auf das "shear–locking", andererseits auf die Versteifung durch die transversalen Normalspannungen bzw. –dehnungen. Wegen der Voraussetzung "ebener Spannungszustand" ist die zweite Form bei den herkömmlichen Platten– und Schalenelementen nicht vorhanden. Hat man sich zum Ziel gesetzt, überall 3D–Elemente einzusetzen, werden dann robuste Elemente mit einer Genauigkeit und mit Konvergenzeigenschaften angestrebt, die mit denen der Platten– und Schalenmodelle vergleichbar sind. Unter einem robusten Element ist zu verstehen, daß der "patch–test" für alle Elementgeometrien erfüllt wird und daß es keine inneren Kinematiken, sogenannte "zero–energy–modes", beinhaltet.

In der vorliegenden Arbeit werden spezielle 3D–Elemente nach ihren Fähigkeiten zur Behandlung von elasto–plastischen und geometrisch nichtlinearen Problemen mit Berücksichtigung der Zwangsbedingung der Inkompressibilität eingebracht und untersucht. Im besonderen liegt der Schwerpunkt auf der Behandlung großer elasto–plastischer Deformationen.

6.1 Verschiebungsformulierung

Bei der Verschiebungsmethode werden die Verschiebungen an den Elementknoten als Unbekannte eingeführt und der Verschiebungszustand des Elementes über den Verschiebungsansatz angenähert. Die numerische Darstellung durch die konventionelle Galerkin Finite–Element–Methode des Anfangsrandwertproblems in einer räumlichen Formulierung ist bekannt, siehe z.B. [33], und wird hier nur zusammengefaßt.

In der üblichen Art und Weise wird das Gebiet B räumlich in Teilgebiete B_e diskretisiert, so daß

$$B = \bigcup_{l=1}^{n_e} B_l^e \quad ; \quad B_l^e \cap B_m^e = \emptyset$$

Als Ausgangspunkt für die FE–Formulierung wird das in Gleichung (3.6) angegebene Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Momentankonfiguration verwendet. Da in Gl.(3.6) die approximierten Feldvariablen \mathbf{u} mit ersten Ableitung auftreten, sind zur Herleitung von konformen Finiten Elementen C^0 –kontinuierliche Ansätze für \mathbf{u} erforderlich.

In der vorliegenden Arbeit werden isoparametrische Elemente verwendet. Diese Elemente sind besonders vorteilhaft für die räumliche Problemformulierung, weil die Interpolation der Geometrie mit den gleichen Ansatzfunktionen wie die Interpolation der Verschiebungen erfolgt. Damit wird die Geometrie der Ausgangs– und Momentankonfiguration in gleicher Weise interpoliert. Für ein typisches isoparametrisches Element B_e lauten diese Ansätze:

$$\mathbf{X}^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{X}_k^e \quad ; \quad \mathbf{x}^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{x}_k^e \quad ; \quad \mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{d}_k^e \quad (6.1)$$

Dabei ist NK die Anzahl der Knoten von Element B_e , \mathbf{X}_k , \mathbf{x}_k , $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^3$ ($k = 1, 2, \dots, NK$) sind die Vektoren der Knoten in der Referenz– bzw. Momentankonfiguration und der Knotenverschiebungen. $N^k: \square \rightarrow \mathbb{R}$ sind die auf dem Einheitswürfel, hier durch das Symbol \square dargestellt, definierten isoparametrischen Formfunktionen, ausgedrückt in den natürlichen Koordinaten ξ . Das hochgestellte h deutet an, daß es sich um eine FE–Approximation handelt.

Mit den in (6.1) angegebenen Approximationen für die Orts– und Verschiebungsvektoren folgt der diskrete kompatible Deformationsgradient in einer Matrixdarstellung:

$$\mathbf{F}_{\phi}^h(\xi, t) = \sum_{k=1}^{NK} \mathbf{x}_k^e(t) \cdot \text{Grad}[N^k]$$

mit $\mathbf{x}_k^e(t) = [x_k^1, x_k^2, x_k^3]^T = \mathbf{X}_k^e + \mathbf{d}_k^e(t)$ (6.2)

und $\text{Grad}[N^k] = [N_{,1}^k, N_{,2}^k, N_{,3}^k]$

Hierin meint der Ausdruck $\text{Grad}(\cdot)$ den Gradienten bezogen auf die Koordinaten \mathbf{X} .

Die Matrix $\text{Grad}[N^k]$ wird mit Hilfe der Kettenregel errechnet:

$$\text{Grad}[N^k] = \mathbf{J}(\xi)^{-T} \text{Grad}_{\xi}[N^k] \quad (6.3)$$

wobei $\mathbf{J}(\xi)$ die Jacobi–Matrix darstellt.

$$\mathbf{J}(\xi) = \frac{\partial \mathbf{X}_e^h(\xi)}{\partial \xi} \quad (6.4)$$

6.1.1 Das isoparametrische 3D–Finite Element

Als Beispiel für die 3D–Analyse wird hier das trilineare Hexaeder–Element ausgewählt (Bild 6.1).

Die Formfunktionen für das isoparametrische 8–knotige 3D–Element lauten:

$$\mathbf{N}(\xi)^T := [N^1, N^2, \dots, N^8]^T \quad \text{mit} \quad N^I := \frac{1}{8} (1 + \xi \xi^I) (1 + \eta \eta^I) (1 + \zeta \zeta^I) \quad (6.5)$$

wobei (ξ^I, η^I, ζ^I) die Koordinaten der Eckpunkte des Einheitswürfels im isoparametrischen Raum sind.

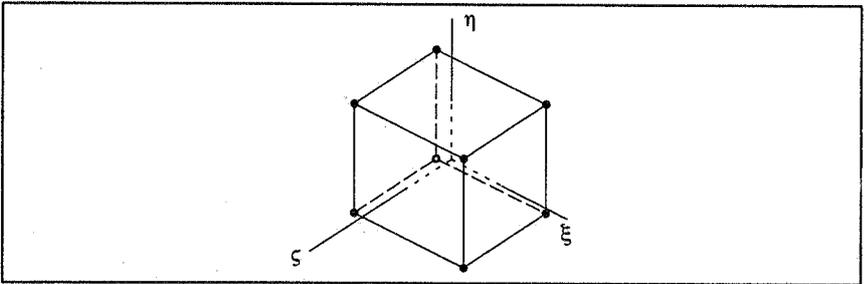


Bild 6.1: Achtknotiges 3D–Element – HEXA8

6.2 Gemischte Formulierung

In der Strukturmechanik sind die C^0 –kontinuierlichen Verschiebungsmodelle wegen ihrer einfachen Formulierung sehr beliebt. Diese Elemente enthalten jedoch Versteifungseffekte, die die Konvergenz drastisch verschlechtern und zu total irrürmlichen Ergebnissen führen können. Eine Untersuchung dieser unerwünschten Effekte bei Scheiben– und Schalenelementen ist in [1] zu finden.

In jüngster Zeit haben sich viele Veröffentlichungen mit der Entwicklung von effizienten "low order" Elementen befaßt, die auch bei groben Netzen eine höhere Genauigkeit erzielen. Eine Möglichkeit zur Verbesserung von Verschiebungselementen stellen die gemischten Formulierungen dar. Bevorzugt werden die hybrid–gemischten Elemente, bei denen im Gegensatz zu einer echt–gemischten Formulierung die inneren Freiwerte auf Elementebene kondensiert werden können. Dadurch bleibt die einfache Struktur des Verschiebungsmodells erhalten.

Zwei alternative Formulierungen dieser Kategorie sind die sogenannten "assumed strain"– und die "assumed stress"–Methoden. Beispiele für die erste Gruppe sind die "B–bar"–Methoden [32],[80] und die Hu–Washizu–Methoden [10]. Diese "assumed strain"–Elemente haben als variationelle Basis ein 3–Feld Variationsprinzip. Im Gegen-

satz dazu basieren die "assumed stress"–Methoden auf einem 2–Feld Variationsprinzip, in dem die Spannungen und Verschiebungen unabhängig voneinander interpoliert werden. Zu diesen Elementen gehören z.B. das Scheibenelement von Pian und Sumihara [61] und das Schalenelement von Simo u.a. [74]. Für eine Übersicht zu der Vielzahl von Formulierungsvarianten sei auf [1] verwiesen.

Um bei der 3D–Finite–Element–Analyse im plastischen Bereich eine bessere Genauigkeit bei groben Netzen zu erreichen und die Sensibilität der Ergebnisse zu Netzverzerrungen abzumindern, wurde hier das in Simo und Rifai [72] entwickelte hybrid–gemischte "enhanced–assumed–strain" (EAS)–Konzept angewandt. Ausgangspunkt dieser Methode ist das im Abschnitt 5.2 angegebene gemischte Funktional. Bei dem EAS–Konzept werden die sich aus den Verschiebungsableitungen ergebenden Verzerrungsfelder um höherwertige Anteile erweitert. In [72] ist dieses Konzept für die Theorie kleiner Verschiebungen vorgestellt. Die Erweiterung dieses Konzeptes für geometrisch nichtlineare Probleme wurde in [69] und unabhängig davon im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt. In Zusammenhang mit der numerischen Behandlung plastischer Deformationen ist dieses Konzept besonders vorteilhaft, weil die übliche dehnungsgezielte Projektionsmethode für Plastizität ohne Änderungen auch für diese gemischte Methode verwendet werden kann. Das Konzept wird als nächstes erläutert und am Beispiel des Kontinuumelementes eingesetzt.

6.2.1 Die EAS–Formulierung für große Dehnungen

Die variationelle Basis der EAS–Formulierung ist das Hu–Washizu Dreifeldfunktional Gl.(3.14), die entsprechenden lokalen Euler–Gleichungen sind in Gl. (3.18) zusammengestellt. Die im Hinblick auf eine Lösungsstrategie nach dem Newton–Verfahren konsistent linearisierte Variationsgleichung stellt Gl. (5.24) dar.

Zusätzlich zu den üblichen Approximationen für die Verschiebungen

$$\mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^{NK} \mathbf{N}^k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{d}_k^e \quad (6.6)$$

werden für das gemischte finite Element die in (5.24) erscheinenden weiteren Feldvariablen approximiert. Zunächst wird die Interpolation des erweiterten Verschiebungsgradienten $\tilde{\mathbf{H}}$ in der Referenzkonfiguration definiert. Das räumliche Gegenstück $\tilde{\mathbf{h}}$ wird durch die Transformation (5.20) gewonnen.

Entsprechend zu Gl.(5.14) kann die diskrete Form der erweiterten Approximation für $\tilde{\mathbf{F}}$ wie folgt beschrieben werden:

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \mathbf{F}_{\phi}^h + \tilde{\mathbf{H}}^h \quad (6.7)$$

wobei \mathbf{F}_Φ^h die Approximation für den kompatiblen Deformationsgradienten darstellt

$$\mathbf{F}_\Phi^h = \mathbf{1} + \text{Grad}\mathbf{u}^h \quad (6.8)$$

$\tilde{\mathbf{H}}^h$ ist ein zusätzliches Feld, welches an den Elementrändern diskontinuierlich sein kann. Analog zum Ausdruck für den kompatiblen Anteil des Verschiebungsgradienten,

Gl.(6.2), läßt sich für das zusätzliche Feld $\tilde{\mathbf{H}}_e^h$ schreiben:

$$\tilde{\mathbf{H}}_e^h(\xi, t) = \sum_{I=1}^{N\alpha} \alpha_I^e(t) \cdot \mathbf{G}_e^I$$

wobei $\alpha_I = [\alpha_I^1, \alpha_I^2, \alpha_I^3]^T$ (6.9)

und $\mathbf{G}^I = [\mathbf{G}_1^I, \mathbf{G}_2^I, \mathbf{G}_3^I]$

Die Vektoren α_I ($I = 1, 2, \dots, N\alpha$) enthalten 3 lokale Parameter und $\mathbf{G}_e^I : \square \mapsto \mathbf{B}_0$ sind die $N\alpha$ Vektoren der zusätzlichen Interpolationsfunktionen.

Anmerkung 6.1: Die Funktionen \mathbf{G}^I können in Analogie mit Gl.(6.2) als die Ableitungen der Ansatzfunktionen eines inkompatiblen Verschiebungsfeldes $\tilde{\mathbf{u}}^h$ nach den Referenzkoordinaten interpretiert werden (siehe auch Gl.(5.30), d.h.

$$\tilde{\mathbf{u}}^h = \sum_{I=1}^{N\alpha} \tilde{\mathbf{N}}^I(\xi) \alpha_I^e$$

und (6.10)

$$\text{Grad}\tilde{\mathbf{u}}_e^h(\xi, t) = \sum_{I=1}^{N\alpha} \alpha_I^e(t) \cdot \mathbf{G}_e^I = \sum_{I=1}^{N\alpha} \alpha_I^e(t) \cdot \text{Grad}[\tilde{\mathbf{N}}^I]$$

mit $\text{Grad}[\tilde{\mathbf{N}}^I] = [\tilde{\mathbf{N}}_{,1}^I, \tilde{\mathbf{N}}_{,2}^I, \tilde{\mathbf{N}}_{,3}^I]$

Diese Analogie stellt eine enge Beziehung zwischen der EAS–Methode und der Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes [94][88] her. Sie ist aber nur gedanklich möglich, da die Bereitstellung von den zu \mathbf{G}^I entsprechenden Funktionen $\tilde{\mathbf{N}}^I$ nur für spezielle Ansätze \mathbf{G}^I möglich ist. Solche Fälle zeigen, daß die Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes [94] ein Sonderfall der EAS–Methode ist.

Bei der Wahl der Funktionen \mathbf{G}^I sind, wegen Stabilitäts– und Konsistenzbedingungen, einige Einschränkungen zu beachten. Aus Stabilitätsgründen dürfen die erweiterten Ansätze nicht bereits in den Ansätzen für \mathbf{F}_Φ^h enthalten sein. Dies bedeutet, daß für die Menge E^h der kompatiblen Ansätze \mathbf{F}_Φ^h und die Menge \tilde{E}^h der erweiterten, diskontinuierlichen Ansätze $\tilde{\mathbf{H}}^h$ gilt:

- Bedingung 1:

$$E^h \cap \tilde{E}^h = \emptyset \quad (6.11)$$

Diese Bedingung gewährleistet die Stabilität der Methode für das linearisierte Problem und schließt bestimmte Interpolationsfunktionen für das erweiterte Feld aus, die ansonsten zu einem Rangabfall führen [65] [72].

In Bezug auf die variationelle Gleichung (5.23c) und die Transformationen (5.20) wird für die Ansätze für $\tilde{\mathbf{H}}$ bzw. für $\tilde{\mathbf{h}}$ gefordert, daß der Raum \tilde{E}^h L_2 -orthogonal zu dem Raum T^h der zulässigen Spannungen \mathbf{P} bzw. $\boldsymbol{\tau}$ sei. Die Spannungsfelder können ebenfalls diskontinuierlich über die Elementränder angenommen werden. Die L_2 -Orthogonalitätsbedingung für $\delta\tilde{\mathbf{h}}^h$ und $\boldsymbol{\tau}^h$ lautet:

- Bedingung 2:

$$\langle \boldsymbol{\tau}^h, \delta\tilde{\mathbf{h}}^h \rangle_{L_2(B)} = \int_{B_0} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \delta\tilde{\mathbf{h}}^h dV = 0 \quad \text{für jedes } \delta\tilde{\mathbf{h}}^h \in \tilde{E}^h \quad (6.12)$$

Dazu muß die Menge T^h der zulässigen Spannungsfelder mindestens stückweise konstante Funktionen $\boldsymbol{\tau}_0$ einschließen; diese Forderung steht in enger Beziehung zu der Erfüllung des klassischen "patch-test" [87]. Die Orthogonalitätsbedingung (6.12) läßt sich im Hinblick auf diese Bemerkung umformulieren:

$$\langle \boldsymbol{\tau}_0, \delta\tilde{\mathbf{h}}^h \rangle = 0 \quad (6.13)$$

Hierin ist $\boldsymbol{\tau}_0$ der konstante Anteil des Kirchhoffschen Spannungstensors.

Die Bedingungen (6.11) und (6.13) gewährleisten die Stabilität und Konvergenz der Methode für lineare statische Probleme. Im nichtlinearen Fall bedeuten diese Bedingungen, daß die Methode bei Verformungen mit konstantem Deformationsgradienten zur exakten Lösung führt, was einer nichtlinearen Version des klassischen *patch-test* entspricht.

Dazu müssen die erweiterte Approximationen für $\tilde{\mathbf{H}}$ materiell kovariant sein, so daß der Deformationsgradient $\tilde{\mathbf{F}}^h$ für eine beliebige Starrkörperdrehung \mathbf{Q} nach $\tilde{\mathbf{F}}^{h*} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}^h$ transformiert wird. Diese zusätzliche Einschränkung hat zur Folge, daß der Deformationsgradient (6.7) die Objektivitätsanforderung der konstitutiven Gleichungen erfüllt.

Wird die Orthogonalitätsbedingung Gl. (6.12) in die Variationsgleichung Gl. (5.22) eingesetzt, ergibt sich eine von $\boldsymbol{\tau}^h$ unabhängige Gleichung, d.h. es entsteht eine gemischte Zweifeldmethode. Somit lautet die diskrete Form von (5.22):

$$\delta \tilde{\Pi} := \int_{B_0} \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}^h) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h) + \delta \tilde{\mathbf{h}}^h \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h) \, dV + \Pi^a(\delta \mathbf{u}^h) = 0 \quad (6.14)$$

oder

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_1^h &= \int_{B_0} \tilde{\nabla}(\delta \mathbf{u}^h) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h) \, dV + \Pi^a(\delta \mathbf{u}^h) = 0 \\ \text{und} & \\ \tilde{\mathbf{g}}_2^h &= \int_{B_0} \delta \tilde{\mathbf{h}}^h \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h) \, dV = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

mit $\tilde{\nabla}(\cdot)$ definiert in (5.21). Im Hinblick auf (6.14) erübrigt sich die explizite Kenntnis der Interpolation des Kirchhoff–Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}^h$ und dessen Variationen für die Implementierung der Methode. Die Bestimmung von $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h)$ erfolgt mittels der zur Gl.(5.20c) äquivalenten diskreten Gleichung:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{h}}^h) := [2\tilde{\mathbf{F}}^h \, \partial_{\mathbf{C}} \hat{W}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}}^h \tilde{\mathbf{F}}^h)] \quad (6.16)$$

Die Linearisierung von Gleichung (6.14) liefert die diskrete Tangentenmatrix. Diese Matrix setzt sich nur noch aus der diskreten Form der 1. und 2. Zeilen bzw. Spalten der Matrix Gl. (5.24) zusammen. Die Ausdrücke

$$\int_{B_0} \delta \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{h}} \, dV \quad \text{und} \quad \int_{B_0} \delta \tilde{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV,$$

die ursprünglich noch in dem variierten Funktional Gl.(5.23) enthalten waren, tragen dabei wegen der Orthogonalitätsbedingung Gl.(6.12) mit keinen zusätzlichen Kräften bzw. Steifigkeiten bei.

In gewohnter Weise werden im Hinblick auf eine matrizielle Formulierung die Komponenten des symmetrischen räumlichen Verschiebungsgradienten als Spaltenvektor angeordnet. Es gilt:

$$\tilde{\nabla}^s \mathbf{u}^h =: \mathbf{B}^h \mathbf{d}^h \quad \text{und für das virtuelle Verschiebungsfeld} \quad (6.17)$$

$$\delta(\tilde{\nabla}^s \mathbf{u}^h) =: \mathbf{B}^h \delta \mathbf{d}^h$$

wobei die Matrix \mathbf{B} die Ableitungen der Ansatzfunktionen N^k nach den räumlichen Koordinaten x_J ($J = 1, 2, 3$) enthält, d.h. \mathbf{B} stellt einen Gradientenoperator in der Momentan-konfiguration dar. Dementsprechend wird hier ein Gradientenoperator $\tilde{\mathbf{B}}$ definiert, welcher dieselbe Struktur wie der Operator \mathbf{B} hat und die Funktionen \mathbf{G}^I enthält. Analog zu Gl.(6.10) folgt:

$$\tilde{\nabla}^s \tilde{\mathbf{u}}^h =: \tilde{\mathbf{B}}^h \boldsymbol{\alpha}^h$$

und

(6.18)

$$\delta \tilde{\nabla}^s \tilde{\mathbf{u}}^h =: \tilde{\mathbf{B}}^h \delta \boldsymbol{\alpha}^h$$

Nach der üblichen Vereinbarung der FE–Methode folgt die Darstellung der Komponenten von \mathbf{B} bzw. $\tilde{\mathbf{B}}$.

$$\mathbf{B}(N^K) = \begin{bmatrix} N_{,1}^K & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2}^K & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3}^K \\ N_{,2}^K & N_{,1}^K & 0 \\ 0 & N_{,3}^K & N_{,2}^K \\ N_{,3}^K & 0 & N_{,1}^K \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{B}}(G^I) = \begin{bmatrix} G_1^I & 0 & 0 \\ 0 & G_2^I & 0 \\ 0 & 0 & G_3^I \\ G_2^I & G_1^I & 0 \\ 0 & G_3^I & G_2^I \\ G_3^I & 0 & G_1^I \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

mit $K=1, \dots, NK$ und $I=1, \dots, N\alpha$.

Die linearisierte Form der variationellen Gleichungen läßt sich nach Einsatz der gemischten Ansätze (6.17) und (6.18) in der nachstehenden Matrizenform schreiben, siehe auch Gl.(5.24) mit den einzelnen Beiträgen aus (5.29)–(5.33).

$$\begin{aligned} & [\delta \mathbf{d}^h]^T \left\{ \int_{B_{0e}} \mathbf{B}^T \mathcal{J} \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV + \int_{B_{0e}} \mathbf{B}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}_G \, dV \right\} [\mathbf{d}^h] + [\delta \mathbf{d}^h]^T \left\{ \int_{B_{0e}} \mathbf{B}^T \mathcal{J} \tilde{\mathbf{C}} \, dV + \int_{B_{0e}} \mathbf{B}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{B}}_G \, dV \right\} [\boldsymbol{\alpha}^h] + \\ & [\delta \boldsymbol{\alpha}^h]^T \left\{ \int_{B_{0e}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathcal{J} \tilde{\mathbf{C}} \, dV + \int_{B_{0e}} \tilde{\mathbf{B}}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{B}}_G \, dV \right\} [\boldsymbol{\alpha}^h] + [\delta \boldsymbol{\alpha}^h]^T \left\{ \int_{B_{0e}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathcal{J} \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV + \int_{B_{0e}} \tilde{\mathbf{B}}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}_G \, dV \right\} [\mathbf{d}^h] \end{aligned} \quad (6.20)$$

In (6.20) sind \mathbf{B}_G bzw. $\tilde{\mathbf{B}}_G$ wiederum Matrizen, die die Ableitungen der Ansatzfunktionen bzw. die erweiterten Ansätze enthalten. Für die Darstellung der Komponenten dieser Matrizen wird z.B. auf [5] verwiesen. Hierin stellen die Ausdrücke in geschweiften Klammern die Teilmatrizen der tangentialen Steifigkeit \mathbf{k}^e dar.

Der Ausdruck für die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e lautet :

$$\mathbf{k}^e(\mathbf{d}^e, \boldsymbol{\alpha}^e) = \mathbf{k}_M^e(\mathbf{d}^e, \boldsymbol{\alpha}^e) + \mathbf{k}_G^e(\mathbf{d}^e, \boldsymbol{\alpha}^e), \quad (6.21)$$

wobei die Tangentensteifigkeit in ihren materiellen und geometrischen Anteil zerlegt wurde. Die Berechnung der einzelnen Terme in (6.21) erfolgt aus (6.20) durch:

$$\mathbf{k}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{M11} & \mathbf{k}_{M12} \\ \mathbf{k}_{M21} & \mathbf{k}_{M22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{G11} & \mathbf{k}_{G12} \\ \mathbf{k}_{G21} & \mathbf{k}_{G22} \end{bmatrix}$$

mit (6.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{M11} &= \int_{B_{0_e}} \mathbf{B}^T \mathbf{J} \mathbf{c} \mathbf{B} \, dV & \mathbf{k}_{G11} &= \int_{B_{0_e}} \mathbf{B}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}_G \, dV \\ \mathbf{k}_{M22} &= \int_{B_{0_e}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{J} \mathbf{c} \tilde{\mathbf{B}} \, dV & \mathbf{k}_{G22} &= \int_{B_{0_e}} \tilde{\mathbf{B}}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{B}}_G \, dV \\ \mathbf{k}_{M12} &= \mathbf{k}_{M21}^T = \int_{B_{0_e}} \mathbf{B}^T \mathbf{J} \mathbf{c} \tilde{\mathbf{B}} \, dV & \mathbf{k}_{G12} &= \mathbf{k}_{G21}^T = \int_{B_{0_e}} \mathbf{B}_G^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{B}}_G \, dV \end{aligned}$$

Hierbei bezieht sich der Index 1 auf die Knotenfreiheitsgrade \mathbf{d}^e und der Index 2 auf die internen Parameter $\boldsymbol{\alpha}^e$. Der Vektor der inneren Kräfte wird entsprechend zerlegt:

$$\mathbf{f} = \int_{B_{0_e}} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \, dV \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \int_{B_{0_e}} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \, dV \quad (6.23)$$

In den obigen Gleichungen ist \mathbf{c} die räumliche konstitutive Matrix für das Kontinuum und $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ der Kirchhoff–Spannungsvektor. Die bemerkenswert einfache Struktur der Teilmatrizen in (6.22) und (6.23) ist auf die Analogie in (6.10) zurückzuführen.

6.2.2 Einbau des EAS–Konzeptes in das nichtlineare Lösungsverfahren

Die linearisierte Form von Gleichung (6.15) läßt sich im Hinblick auf ein iteratives Lösungsverfahren für die k -te Iteration durch folgendes diskretes Gesamtsystem darstellen.

$$[\tilde{\mathbf{K}}^{(k)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}^e)] \cdot [\Delta \mathbf{u}] = [\tilde{\mathbf{R}}^{(k)}] \quad (6.24)$$

Aufgrund der diskontinuierlichen Ansätze für den Verschiebungsgradienten wurden die Parameter $\boldsymbol{\alpha}^e$ auf Elementebene bereits eliminiert, so daß in (6.24) nur noch der Vektor $\Delta \mathbf{u}$ mit den Knotenverschiebungen als Gesamtfreiwert erscheint.

Die globale tangentielle Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}$ und der Lastvektor $\tilde{\mathbf{R}}$ setzen sich in der üblichen Weise aus den einzelnen Elementmatrizen zusammen

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{k}}^e \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\mathbf{r}}^e, \quad (6.25)$$

wobei in $\tilde{\mathbf{k}}^e$ bzw. in $\tilde{\mathbf{r}}^e$ die inneren Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}^e$ aus \mathbf{k}^e (6.21) und \mathbf{f} (6.23) herauskondensiert wurden, d.h.

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = [\mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{21}^T \mathbf{k}_{22}^{-1} \mathbf{k}_{12}] \quad (6.26)$$

und

$$\tilde{\mathbf{r}}^e = [\mathbf{f}^a - \mathbf{f} + \mathbf{k}_{12}^T \mathbf{k}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}]$$

mit $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{Mij} + \mathbf{k}_{Gij}$, $i, j = 1, 2$

Hierbei ist \mathbf{A} der Zusammenbau–Operator ("assembly").

Die Lösungsstrategie für das Gleichungssystem (6.24) nach einem Newton–Verfahren läßt sich nach der folgenden iterativen Prozedur zusammenfassen (Tabelle 6.1).

Anmerkung 6.2: Die Update–Prozedur für die inneren Variablen nach (6.28) und (6.29) verlangt die Speicherung der Variablen $\boldsymbol{\alpha}^{e(k)}$ und des Residuumvektors $\tilde{\mathbf{f}}^{(k)}$ sowie der Teilmatrizen $\mathbf{k}_{22}^{(k)}$ und $\mathbf{k}_{21}^{(k)}$ für jedes finite Element.

a) **Auf Elementebene**

a1) Aktualisierung der Knotenverschiebungen

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \Delta \mathbf{d}^{(k)} \quad (6.27)$$

a2) Bestimmung der inneren Variablen

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}^e{}^{(k)} = - [\mathbf{k}_{22}^{-1} (\mathbf{f} + \mathbf{k}_{21} \Delta \mathbf{d}^e)]^{(k)} \quad (6.28)$$

und \mathbf{k}_{22}^{-1} müssen gespeichert werden

$$\boldsymbol{\alpha}^e{}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}^e{}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\alpha}^e \quad (6.29)$$

b) **Am Integrationspunkt**

b1) Berechnung des erweiterten Deformationsgradienten

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \mathbf{F}^h + \tilde{\mathbf{H}}^h = \sum_{K=1}^{NK} \mathbf{x}_K^e(t) \cdot \text{Grad}[\mathbf{N}^K] + \sum_{I=1}^{Nq} \boldsymbol{\alpha}_I^e \cdot \mathbf{G}_e^I \quad (6.30)$$

b2) Berechnung der Verzerrungen
und des Spannungsprädiktors

z.B. nach der
Prozedur in Kap.4

b3) Durchführung des Projektionsalgorithmus (siehe 6.2.4)

b4) Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen nach (6.22)
und des Elementresiduums nach (6.23)

a3) Kondensation der inneren Variablen $\boldsymbol{\alpha}^e$

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = [\mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{21}^T \mathbf{k}_{22}^{-1} \mathbf{k}_{12}] \quad (6.31)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^e = [\mathbf{f}^a - \mathbf{f}_1 + \mathbf{k}_{12}^T \mathbf{k}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2]$$

c) **Auf Systemebene**

c1) Erstellung der globalen Systemmatrizen

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^{ne} \tilde{\mathbf{k}}^e \quad (6.32)$$

und

$$\tilde{\mathbf{R}} = \sum_{e=1}^{ne} \tilde{\mathbf{r}}^e$$

c2) Lösung für ein neues globales Verschiebungsinkrement

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = [\tilde{\mathbf{K}}^{(k+1)}]^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^{(k+1)} \quad (6.33)$$

c3) Konvergenzabfrage $\left\{ \begin{array}{l} \text{ja} \Rightarrow \text{nächster Lastschritt} \\ \text{nein} \Rightarrow \text{Setzen } k \leftarrow k+1 \\ \text{Zurück nach a)} \end{array} \right.$

Tabelle 6.2: Iterationsverfahren mit den EAS-Variablen

6.2.3 Bemerkung zum Einbau des EAS–Konzeptes in den Return–Algorithmus der Plastizität

Ein großer Vorteil der EAS–Formulierung gegenüber spannungsbasierten gemischten Formulierungen für Plastizität ist, daß die Projektionsalgorithmen ohne Änderungen auf das gemischte Modell übertragen werden können. Dies soll hier anhand der J_2 –Fließtheorie und des "Radial–Return"–Algorithmus erläutert werden. Das in der Tabelle 3.1 beschriebene Projektionsverfahren kann für die EAS–Formulierung ohne Änderung eingesetzt werden, wenn der herkömmliche Deformationsgradient

\mathbf{F}^h durch den Deformationsgradient für den erweiterten Ansatz $\tilde{\mathbf{F}}^h$ ersetzt wird. Dieser wird aus Gl.(6.30) berechnet.

$$\tilde{\mathbf{F}}^h = \mathbf{F}^h + \tilde{\mathbf{H}}^h = \sum_{K=1}^{NK} \mathbf{x}_K^e(t) \cdot \text{Grad}[\mathbf{N}^K] + \sum_{I=1}^{NI} \alpha_I^e \cdot \mathbf{G}_I^I$$

6.2.4 Bestimmung des erweiterten Ansatzes für den Verschiebungsgradienten

Die Bestimmung der Interpolation für $\tilde{\mathbf{H}}$ läßt sich am besten mit Hilfe der im isoparametrischen Raum definierten Funktionen $\mathbf{M}(\xi)$ durchführen. Bei der Wahl dieser Funktionen sind die im Abschnitt 6.2.1 dargestellten Bedingungen zu beachten.

Man geht von einer Abbildung $\mathbf{M}(\xi): \square \rightarrow \square$ aus, für welche gilt:

$$\int_{\square} \mathbf{M}(\xi) d\square = 0 \quad (6.34)$$

Die Funktionen in $\mathbf{M}(\xi)$ treten bei $\text{Grad}_{\xi}[\mathbf{u}^h]$ nicht auf, d.h. Bedingung (6.11) wird im parametrischen Raum zwangsläufig erfüllt. $\mathbf{M}(\xi): \square \rightarrow \square$ wird dann in $\mathbf{G}_e(\xi): B_0 \rightarrow B_0$ transformiert.

$$\mathbf{G}_e(\xi) = \frac{j_0}{j(\xi)} \mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{M}(\xi) \quad (6.35)$$

Hierin ist \mathbf{J}_0 die Jacobi–Matrix zwischen den lokalen Elementkoordinaten ξ und den Koordinaten der Referenzkonfiguration \mathbf{X} an der Stelle $\xi = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(\mathbf{0}) ; j_0 = \det \mathbf{J}_0 \quad (6.36)$$

Die Anwendung von \mathbf{J}_0 statt \mathbf{J} bei der Transformation Gl. (6.35) wurde von Taylor [88] eingeführt, um bei den inkompatiblen Elementen den "patch–test" zu erfüllen.

Die gesuchte Zweipunkt–Abbildung $\tilde{\mathbf{H}}^h(\xi): B_0 \rightarrow \Phi^h(B_0)$ von Vektoren in B_0 auf Vektoren in $\Phi^h(B_0)$ folgt dann mit (6.9) und (6.35):

$$\tilde{\mathbf{H}}^h = \sum_{I=1}^{NI} \alpha_I^e \cdot \mathbf{G}_I^I = \sum_{I=1}^{NI} \alpha_I^e \cdot \left[\frac{j_0}{j(\xi)} \mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{M}(\xi) \right] \quad (6.37)$$

6.3 Anwendung des EAS–Konzeptes am Beispiel des trilinearen 3D–Elementes

Es ist bekannt, daß das trilineare Hexaederelement – HEXA8 – ein schlechtes Verhalten bei vollständig oder fast inkompressiblen Zuständen und bei Problemen mit überwiegender Biegebeanspruchung zeigt. Für kleine Dehnungen wurde erstmals von Simo und Rifai [72] eine Verbesserung für dieses Element durch eine EAS–Erweiterung vorgeschlagen. Weitere Untersuchungen zum Einsatz des EAS–Konzeptes sind in [2] für die lineare Analyse, in [3] für Plastizität und in [69] für die vollständig nichtlineare Analyse beschrieben. Mit der im Abschnitt 6.2 und 6.3 beschriebenen Methode wird in dieser Arbeit eine Verbesserung des Elementes HEXA8 bei der Analyse elasto–plastischer Probleme mit großen Verzerrungen erzielt.

6.3.1 Erweiterter Ansatz für das HEXA8 Element

Die Wahl der erweiterten Terme $\mathbf{M}(\xi)$ wird durch Betrachtung der Interpolation des Verschiebungsgradienten im isoparametrischen Raum, $\text{Grad}_\xi[\mathbf{u}^h]$, getroffen. Hierbei muß Bedingung 1 erfüllt und die "locking"–Effekte abgemindert werden. Für die Formfunktionen des 8–knotigen 3D–Elementes, siehe Gl. (6.5), zeigt Tabelle 6.2 die in $\text{Grad}_\xi[\mathbf{u}^h]$ bereits vorhandenen Terme; weiterhin werden die zur Vollständigkeit eines tri–linearen Polynoms fehlenden Termen aufgeführt.

$$\Phi^h \quad 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \xi\zeta \quad \eta\zeta \quad \xi\eta\zeta \quad (6.38)$$

	vorhandene Terme								fehlende Terme								
Φ_{ξ}^h	0	1	0	0	η	ζ	0	$\eta\zeta$	ξ	0	0	$\xi\eta$	0	0	$\xi\zeta$	0	0
Φ_{η}^h	0	0	1	0	ξ	0	ζ	$\xi\zeta$	0	η	0	0	$\eta\zeta$	0	0	$\eta\xi$	0
Φ_{ζ}^h	0	0	0	1	0	ξ	η	$\xi\eta$	0	0	ζ	0	0	$\zeta\xi$	0	0	$\zeta\eta$

Der Deformationsgradient \mathbf{F}^h kann z.B. durch die folgende Ergänzung $\tilde{\mathbf{H}}^h$ erweitert werden, die einen kompletten tri–linearen Ansatz darstellt.

$$\tilde{\mathbf{H}}^h = [\alpha_1 \xi \quad \alpha_2 \eta \quad \alpha_3 \zeta \quad \alpha_4 \xi\eta \quad \alpha_5 \eta\xi \quad \alpha_6 \xi\zeta \quad \alpha_7 \xi\eta\zeta] \quad (6.39)$$

α_I ($I = 1, 2, \dots, 7$) sind die jeweils 3x1 Vektoren der lokalen Elementparameter.

Wählt man für $\tilde{\mathbf{H}}^h$ einen Ansatz nur mit den ersten 3 Termen ($N\alpha=3$)

$$\tilde{\mathbf{H}}^h = [\alpha_1 \xi \quad \alpha_2 \eta \quad \alpha_3 \zeta] \quad (6.40)$$

entsteht ein komplettes lineares Polynom. Dieses Element wird hier mit HEXA8–E3 bezeichnet. Dieser Ansatz wurde auch in [69] gewählt. Wie aber in der folgenden Eigenwertanalyse eines Einheitselementes gezeigt, werden mit diesem Ansatz nicht alle unerwünschten Versteifungseffekte beseitigt. Dies stimmt mit den Ergebnissen der entsprechenden linearen Version des EAS 3D–Elementes in [3] überein.

In Rahmen dieser Arbeit wird deshalb auch eine alternative Wahl für \tilde{H}^h getroffen, aus der ein "locking"–freies Element entsteht. Hierfür werden die ersten sechs Vektoren der lokalen Elementparameter ($N\alpha=6$) ausgewählt. Das "locking"–freie Verhalten dieses Elementes (HEXA8–E6) wird durch die folgende Eigenwertanalyse bewiesen.

6.3.2 Bemerkung zur numerischen Integration bei den 3D–EAS Elementen

Es ist zu bemerken, daß bei den 8–knotigen 3D–EAS–Elementen die 2x2x2 Gauß–Integration, hier kurz 8G genannt, wegen des erweiterten Ansatzes nicht ausreichend ist, um die Elementstabilität zu gewährleisten. Bei dieser Integrationsordnung können bei Problemen mit großen Verformungen, insbesondere im hydrostatischen Zustand, unerwünschte Modes auftreten. Dieser Effekt wurde im Kapitel 7 bei den Beispielen 1, 2 und 4 beobachtet.

Um die aufwendige 3x3x3 Gauß–Integration (27G) zu vermeiden, wurde hier von einer Familie von Integrationsregeln Gebrauch gemacht, die erstmal von Irons [34] vorgestellt wurde. Diese Regeln haben sich bei der Anwendung mit 20–knotigen Hexaederelementen wegen ihrer Genauigkeit und Effizienz als vorteilhaft erwiesen [29][56]. Kürzlich wurde von Simo, Armero und Taylor eine 9–Punkt–Regel [67] vorgeschlagen, um diese Effekte zu vermeiden. Alle diese Regeln werden im folgenden zusammengestellt.

$$\int_{\square} f(\xi) d\square = A_1 f(0, 0, 0) + B_6 [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + \dots \text{ (6 Terme) }] + C_8 [f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + \dots \text{ (8 Terme) }] \quad (6.41)$$

Regel	A ₁	B ₆	C ₈	b	c
9	3.555556	0.000000	0.555556	0.000000	0.745356
14	0.000000	0.886427	0.335180	0.795822	0.758787
15a	1.564444	0.355556	0.537778	1.000000	0.674100
15b	0.712137	0.686227	0.396312	0.848418	0.727662

Bei den numerischen Beispielen der nachfolgenden Kapitel wird die Güte dieser Regeln in Zusammenhang mit den EAS–Elementen untersucht.

6.3.3 Eigenwertanalyse der linearen Matrix

Durch eine Spektralanalyse der elastischen Matrix von einem Einheitswürfel wird das Verhalten der HEXA-8 Elemente und der EAS-Elemente in der Nähe des inkompressiblen Bereichs untersucht. Dafür wird für die Querdehnzahl der Wert 0.49999 eingesetzt. Die Versteifung an der inkompressiblen Grenze ist durch die Anzahl der Eigenwerte gekennzeichnet, die bei $\nu/\mu \rightarrow \infty$ bzw. $\nu \rightarrow 0.5$ gegen Unendlich streben. Für die genannten Materialparameter darf ein versteifungsfreies Element nur einen einzigen gegen Unendlich strebenden Eigenwert zeigen. Dieser Eigenwert entspricht dem reinen Dilationsmode.

Die berechneten Eigenwerte sind in Tabelle 6.3 zusammengestellt. Dabei wurden die sechs Null Eigenwerte, die den Starrkörperbewegungen entsprechen, nicht aufgenommen. Bei den EAS-Elementen wurden die verschiedenen Integrationsmöglichkeiten gegenübergestellt. Die verschiedenen Integrationsregeln liefern für das unverzerrte Einheitsselement dieselben Eigenwerte.

Aus Tabelle 6.3 ist zu entnehmen, daß bei dem reinen Verschiebungsmodell 7 sehr hohe Eigenwerte auftreten, was in Übereinstimmung mit dem bekannten erheblichen Versteifungseffekt dieses Elements steht. Die EAS-Erweiterung mit $n\alpha=3$ hat diese Effekte abgemindert, zeigt aber immer noch 4 Eigenwerte, die zu Unendlich tendieren. Bei dem Element mit $n\alpha=6$ ist dann nur noch ein hoher Eigenwert erkennbar, welcher dem reinen volumetrischen Verformungsmode entspricht.

	HEXA8	HEXA8-H3	HEXA8-H6
1	0.0555	0.0555	0.0555
2	0.0555	0.0555	0.0555
3	0.1666	0.1111	0.0926
4	0.1666	0.1111	0.0926
5	0.1666	0.1111	0.0926
6	0.2222	0.2222	0.1111
7	0.3333	0.3333	0.1111
8	0.3333	0.3333	0.1111
9	0.3333	0.3333	0.2222
10	0.3333	0.3333	0.3333
11	0.3333	0.3333	0.3333
12	∞	0.3333	0.3333
13	∞	0.3333	0.3333
14	∞	0.3333	0.3333
15	∞	∞	0.3333
16	∞	∞	0.3333
17	∞	∞	0.3333
18	∞	∞	∞

Tabelle 6.3: Eigenwerte für ein unverzerrtes Element bei inkompressiblem Material $\nu = 0,4999$ (die 6 Null Eigenwerte sind nicht dargestellt)

6.3.4 Bemerkung zur Spannungsrückrechnung bei den EAS-Elementen

Wird die Orthogonalitätsbedingung, Gl. (6.12), in die variationelle Gleichung (5.16) bzw. (5.22) eingesetzt, entsteht eine von \mathbf{P}^h bzw. $\boldsymbol{\tau}^h$ unabhängige Gleichung, vgl. Gl. (6.14). Dies bedeutet, daß bei der Berechnung der Verschiebungen und der inneren Variablen $\boldsymbol{\alpha}$ das Spannungsfeld $\boldsymbol{\tau}^h$ nicht explizit auftritt. Die Spannungen müssen punktweise als Funktion der Knotenverschiebungen \mathbf{d}^h und der Elementparameter $\boldsymbol{\alpha}_0^h$ mittels der konstitutiven Beziehung (6.16) bestimmt werden. Diese Vorgehensweise ist einfach und effizient, aber nicht variationell konsistent. Im Allgemeinen genügen die so gerechneten Spannungen der Orthogonalitätsbedingung nicht.

Eine variationell konsistente Spannungsrückrechnung ist dem Vorgehen einer *assumed stress* Formulierung ähnlich. Dabei werden die optimalen Ansätze für die Spannungen in dem parametrischen Raum festgelegt und durch die entsprechenden Transformationen im globalen Raum abgebildet. Nach dieser Prozedur lauten die Spannungen:

$$\boldsymbol{\tau}^h = \mathbf{P}_\tau \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}_\tau \mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\beta} \quad (6.42)$$

Die Matrix \mathbf{P}_τ enthält die Formfunktionen, die durch Transformation mit \mathbf{T}_τ aus der Matrix der Formfunktionen im parametrischen Raum $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi})$ gewonnen werden. $\boldsymbol{\beta}$ ist der Vektor der unbekanntenen Koeffizienten von \mathbf{P}_τ .

Für die Anwendung bei den EAS-Elementen muß bei der Wahl der Funktionen in \mathbf{P}_τ die Orthogonalitätsbedingung (6.12) beachtet werden.

$$\int_{B_0} [\tilde{\boldsymbol{\tau}}^h]^T \cdot \delta \tilde{\mathbf{F}}^h dV = \int_{\square} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{M}_\tau^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{T}_\tau^T \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \delta \mathbf{F}_0^h \mathbf{J}_0 \mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_0^{-1} j(\boldsymbol{\xi}) d\alpha = 0 \quad (6.43)$$

Da abgesehen vom $\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ und $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi})$ alle anderen Terme in (6.43) konstant sind, ist die Orthogonalitätsbedingung äquivalent zu:

$$\int_{\square} \mathbf{M}_\tau^T \mathbf{M}_\alpha d\alpha = 0, \quad (6.44)$$

d.h. die Funktionen in $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi})$ müssen von denen in $\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ ausgeschlossen sein. Die Spannungsrückrechnung nach dieser Prozedur ist variationell konsistent, aber wegen der Vielzahl der Matrixoperationen in (6.43) rechnerisch aufwendig.

Für das HEXA-8 Element ist die optimale Anzahl der Spannungsmodes gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Verschiebungsmodes und der Starrkörpermodes [59], d.h. $3 \times 8 - 6 = 18$. Die entsprechende $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi})$ Matrix ist dann:

$$\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \xi & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \zeta & \xi & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Da die Funktionen in $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{\xi})$, Gl.(6.45), mit denen des kompatiblen Verschiebungsgradienten Gl. (6.38) übereinstimmen, befriedigt dieser Ansatz die Bedingung Gl. (6.44) für jeden zulässigen Ansatz in $\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$.

Die Brauchbarkeit der aus der konstitutiven Beziehung (6.16) errechneten Spannungen bei einer EAS-Formulierung wurde anhand von numerischen Beispielen gezeigt. Hierzu wurden lineare Analysen mit HEXA8-E3 Elementen durchgeführt. Die Ergebnisse nach (6.16) und die nach der variationell konsistenten Prozedur über Spannungsfunktionen Gl.(6.45) wurden verglichen.

Daraus ergibt sich, daß die Spannungen an den Integrationspunkten mit denen aus der Berechnung nach (6.42) und mit theoretischen Ergebnissen gut übereinstimmen. Diese

Schlußfolgerung ist im Hinblick auf die Anwendung des EAS-Elementes für plastische Analysen sehr bedeutend. Für die Spannungen an anderen Punkten sind die Ergebnisse unbrauchbar. Dies wird im folgenden Beispiel geschildert.

Beispiel 6.1: Anhand des in Bild 6.3 dargestellten Kragarms sollen die hier diskutierten Verfahren zur Spannungsrückrechnung verglichen werden. Dabei wird die Netzaufteilung (A7) benutzt. Die Spannungen werden an den Gauß-Integrationspunkten (8G Integration) und am Punkt B berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.4 zusammengefaßt. Die exakte Lösung für die Durchbiegung vom Punkt A ist 102.6 mm. Die FE-Lösung mit dem HEXA8-E3 Element, bezogen auf die Solllösung, ist 0.9466.

	X	Y	Z	σ_{exact}	σ nach (6.16)	σ nach (6.42)
GP1	0.378	0.423	1.577	-2450	-2373(0.97)	-2373(0.97)
GP2	0.255	0.423	0.423	2532	2445 (0.97)	2445 (0.97)
B	1.0	1.0	2.0	4050	3376 (0.83)	4139 (1.02)

Tabelle 6.4: Spannungsrückrechnung für EAS-Elemente
(Abweichung in %)

6.4 Numerische Untersuchungen

Anhand von numerischen Beispielen soll die Leistung der in diesem Kapitel eingeführten 3D-EAS-Elemente im linearen Bereich untersucht werden. Dafür werden einige oft benutzte "benchmarks" der Literatur berechnet. Hierbei wird, falls nicht anders angedeutet, die 8-G-Integration benutzt.

6.4.1 Patch-Test

Mit diesem Test wird überprüft, ob die finiten Elemente in der Lage sind, bei beliebig verzerrter Geometrie konstante Spannungen und Verzerrungen darzustellen. Für die 3D-Elemente wurden die im Bild 6KEIN MERKER dargestellten Geometrien gewählt. Die EAS-Elemente bestehen diesen Test.

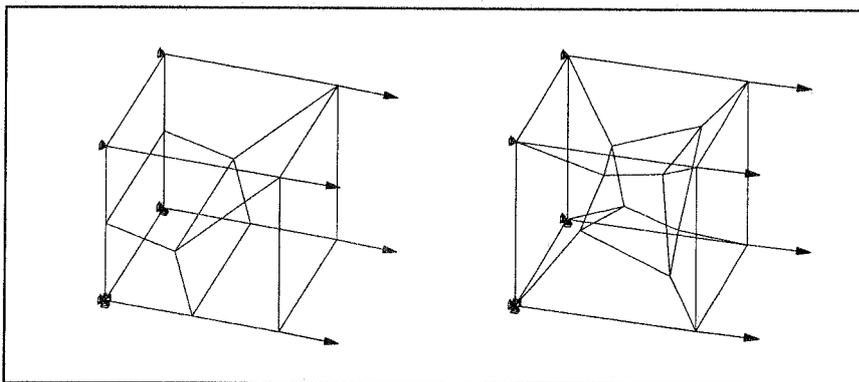


Bild 6.2: Geometrie des Patch-Test

6.4.2 Kragbalken

Der Kragbalken in Bild 6.3 wird zur Untersuchung des Effekts der Elementverzerrung mit sieben verschiedenen Elementnetzen idealisiert. Der Balken wird für zwei Lastfälle untersucht, reine Biegung und Endquerbelastung. Diese sind zusammen mit den Materialparametern in Bild 6.3 wiedergegeben. In den Tabellen 6.5 und 6.6 ist die Durchbiegung am Punkt A, normiert zur exakten Lösung, angegeben.

Die erste Spalte enthält die Ergebnisse des Verschiebungselementes, wobei das zu steife Verhalten zu erkennen ist. Bei zunehmender Netzverzerrung wird dieser Effekt noch gravierender. In der zweiten und dritten Spalte sind die Ergebnisse des EAS-Elementes mit $\alpha=3$ bzw. $\alpha=6$ eingetragen. Aus dem Vergleich der Verschiebungen in diesen Spalten mit denen des Verschiebungsmodells ist die Verbesserung abzulesen.

Vergleicht man die Ergebnisse der EAS–Elemente mit Ergebnissen von anderen hybriden Formulierungen, siehe z.B. [21] für eine Zusammenstellung von Ergebnissen, stellt man fest, daß die Ergebnisse des HEXA8–E6–Elements in Übereinstimmung mit denen des hybriden Elements von Pian und Tong [59] stehen. Dieses bestätigt die Äquivalenz zwischen HR–Elementen und EAS–Elementen, wie sie in [2] festgestellt wurde.

6.4.3 Elementverzerrungstest

Derselbe Balken aus Beispiel 6.4.2 wird jetzt mit zwei verzerrten Elementen diskretisiert, wobei der Netzverzerrungsgrad durch den Parameter e gesteuert wird (Bild 6.4). Diese Untersuchung erfolgt für den Lastfall 1. Die Querverschiebung am Punkt A, normiert zur exakten Lösung, ist über dem Verzerrungsgrad e in Bild 6.5 aufgetragen. Für das HEXA8–E6–Element wird bereits bei $e=2$ das Minimum an Genauigkeit erreicht; dieses entspricht einem Fehler von ca. 50%. Das HEXA8–E3–Element ist etwas steifer; das Verschiebungselement erweist sich als viel zu steif und ungeeignet.

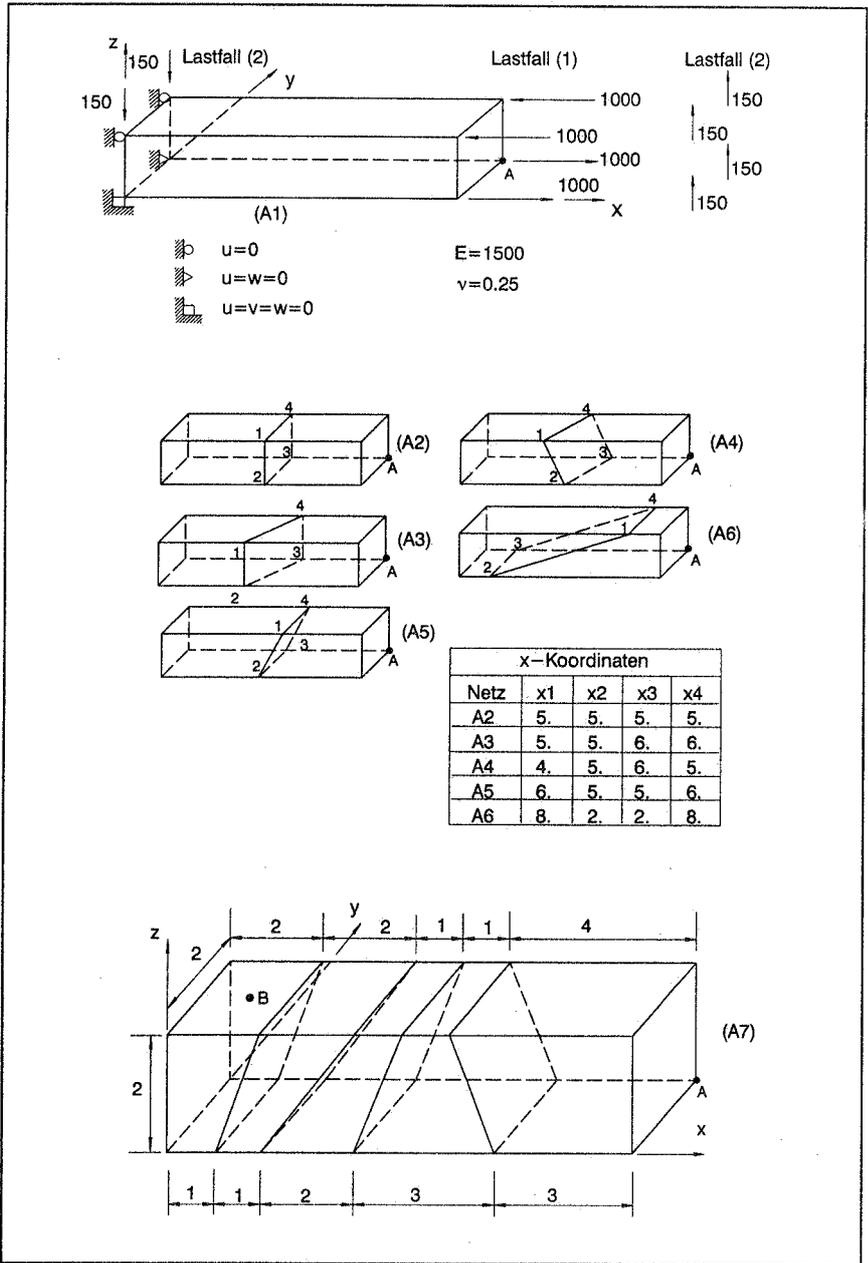


Bild 6.3: Kragarm mit verzerrtem Elementnetz

	HEXA8	HEXA8-H3	HEXA8-H6
A1	0,090	1,000	1,000
A2	0,278	1,000	1,000
A3	0,235	0,894	0,923
A4	0,203	0,791	0,813
A5	0,188	0,772	0,772
A6	0,082	0,407	0,414
A7	0,444	0,957	0,959

Tabelle 6.5: Normierte vertikale Verschiebungen w_A für Lastfall (1).
($w_{A,exakt} = 100$)

	HEXA8	HEXA8-H3	HEXA8-H6
A1	0,090	0,755	0,755
A2	0,249	0,934	0,935
A3	0,235	0,844	0,876
A4	0,222	0,769	0,796
A5	0,202	0,765	0,766
A6	0,121	0,478	0,485
A7	0,481	0,953	0,954

Tabelle 6.6: Normierte vertikale Verschiebungen w_A für Lastfall (2).
($w_{A,exakt} = 102,6$)

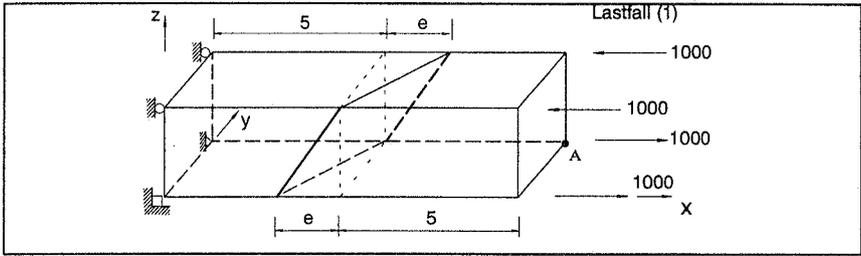


Bild 6.4: Einfluß der Netzverzerrung

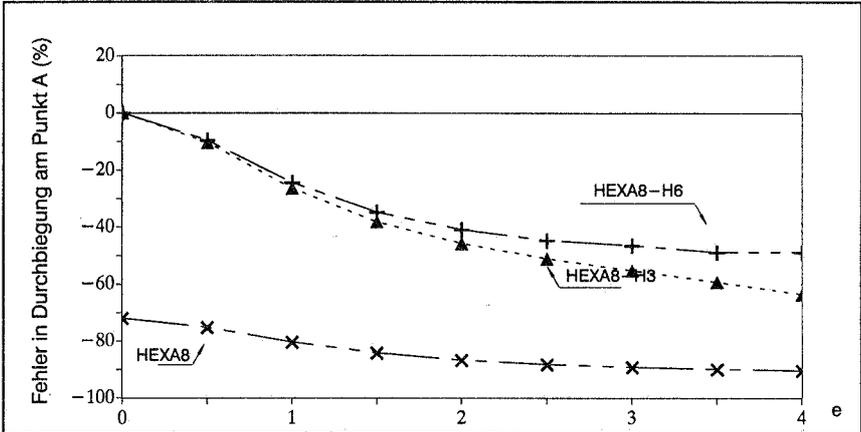


Bild 6.5: Durchbiegung w_A des Kragarms bei reiner Biegung

6.4.4 Quadratplatte unter Eigengewicht

Eine naviergelagerte Quadratplatte mit einer Seitenlänge $L=100$ cm (Bild 6.6) wird unter Eigengewicht für verschiedene Plattendicken h berechnet. Für h wurden die Werte 1,0 , 0,1 und 0,01 cm angenommen. Die Materialeigenschaften sind die von Aluminium: $E=1,0 \cdot 10^7$ N/cm² und $\nu=0,3$. Aufgrund der Symmetrie wurde ein Viertel der Struktur idealisiert. Es wurden homogene Netze mit 2x2, 3x3 und 4x4 Elementen benutzt. Die Mittendurchbiegung für verschieden feine Elementnetze wurden mit der Kirchhoff-Lösung w_{ex} für dünne Platten verglichen, siehe z.B. Timoshenko [90]. In Tabelle 6.7 sind die zu w_{ex} normierten Ergebnisse für die drei betrachteten Elemente eingetragen.

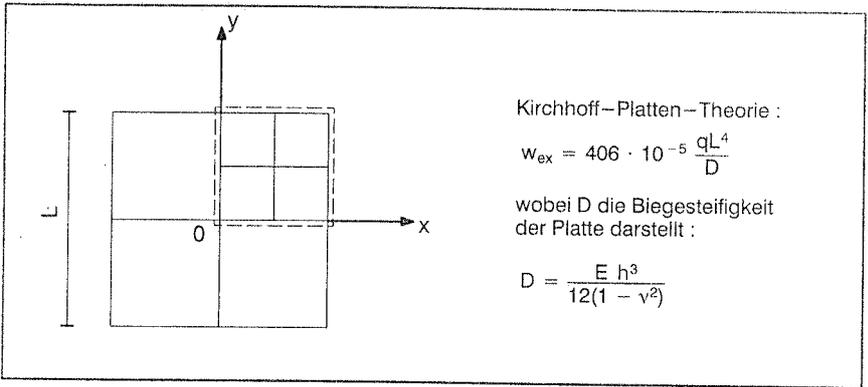


Bild 6.6: Naviergelagerte Quadratplatte unter Gleichlast.

	L/h = 10 ²			L/h = 10 ³			L/h = 10 ⁴		
	2x2	3x3	4x4	2x2	3x3	4x4	2x2	3x3	4x4
HEXA8	0,009	0,020	0,035	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
HEXA8-H3	0,142	0,466	0,737	0,002	0,009	0,027	0,000	0,000	0,000
HEXA8-H6	0,990	0,997	0,999	0,990	0,996	0,998	1,000	1,015	1,098

Tabelle 6.7: Normierte Durchbiegung w/w_{ex} für die naviergelagerte Platte

Die Ergebnisse zeigen, daß das HEXA8-E3-Element keinesfalls "locking"-frei ist. Auch bei den dicken Platten zeigt dieses Element ein zu steifes Verhalten. Durch den erweiterten Ansatz mit $n\alpha=6$ wurde das 3-D-Element vom "shear-locking" befreit. Auch bei der dünnen Platte zeigt sich das exzellente Verhalten des HEXA8-E6-Elements.

6.4.5 Scordelis-Lo-Schale

Die in Bild 6.7 dargestellte Zylinderschale unter Eigengewicht dient oft als Testbeispiel zur Untersuchung von Schalen-Elementen. Die Schale ist an den Endscheiben gelenkig gelagert. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der Struktur modelliert. Die Durchbiegung des Mittelpunktes der freien Kante w_b wird für verschieden feine Elementnetze verglichen.

In Tabelle 6.8 sind diese Werte eingetragen; sie sind bezogen auf den Vergleichswert aus [86]. Dabei zeigt das HEXA8-E6-Element bereits bei grobem Netz gute Übereinstimmung mit dem Vergleichswert. Das HEXA8-E3-Element zeigt für feinere Netze eine Tendenz zur richtigen Lösung. Zum weiteren Vergleich wurde das Beispiel auch mit 4-knotigen und 8-knotigen Schalen-Elementen berechnet, wobei in beiden Fällen eine 2×2 Gauß-Integration benutzt wurde.

Bei der Betrachtung der Werte in den Tabellen 6.7 und 6.8 fallen die hervorragenden Ergebnisse des HEXA8–E6–Elementes auf. Dies weist darauf hin, daß bei der Berechnung von dünnwandigen Strukturen die bilinearen Terme in (6.39) bei der Erweiterung des Deformationsgradienten auf jeden Fall mit eingeschlossen werden sollten.

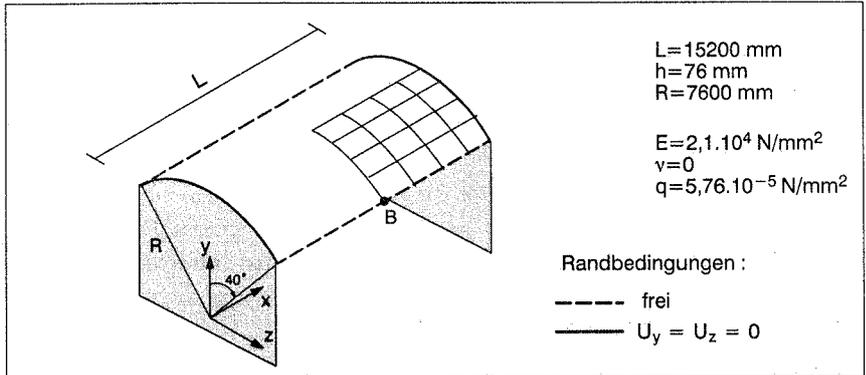


Bild 6.7: Scordelis–Lo Schale

	Netzaufteilung			
	2x2	4x4	8x8	12x12
HEXA8	0,024	0,061	0,121	0,185
HEXA8–H3	0,136	0,535	0,937	0,976
HEXA8–H6	1,307	1,016	0,992	0,987
SH4	0,024	0,067	0,132	0,203
SH8 (8G)	0,966	0,983	0,979	0,978

Tabelle 6.8: Normierte Durchbiegung w/w_{ref} für die Scordelis–Lo Schale
 ($w_{ref}=93,814$)

7 Beispiele

Ziel dieser Untersuchung ist es, neben der Überprüfung der Formulierung das Elementverhalten des herkömmlichen Verschiebungselementes und des gemischt–hybriden Elementes für große Verzerrungen und inkompressibles plastisches Verhalten zu testen. In den folgenden Beispielen wird das in Tabelle 3.1 zusammengefaßte konstitutive Modell angenommen. Dabei handelt es sich um ein hyperelastisches Stoffgesetz, das durch eine logarithmische freie Energiefunktion beschrieben wird, und um eine assoziierte Fließregel und ein Fließkriterium nach von Mises. Bei den hier betrachteten Fällen werden isotherme Prozesse vorausgesetzt.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programmbausteine der 3D–Elementformulierungen und des Materialmodelles wurden in das nichtlineare FE–Programm CARAT [82] des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert.

7.1 Beispiel 1: Dickwandiger Zylinder mit Innendruck

Mit diesem Beispiel wird der Projektionsalgorithmus für den Sonderfall der idealen Plastizität sowie die finiten Elementformulierungen auf die richtige Wiedergabe der Inkompressibilität hin überprüft.

Von dem langen, dickwandigen Kreiszyylinder (Bild 7.1) wird der mittlere Bereich untersucht, für den ein ebener Verzerrungszustand angenommen werden kann. Der Zylinder wird unter Innendruck soweit verformt, bis eine Aufweitung des Innenradius von 10 mm auf 85 mm entsteht. Die Materialdaten sind [76] entnommen worden und in Abbildung 7.1 angegeben. Diese Daten nähern ein starrplastisches Verhalten an, für welches eine analytische Lösung in [78] angegeben ist. Aus der Bedingung der Volumenkonstanz entsteht für jede verformte Konfiguration t eine konstante Beziehung zwischen dem Radius und der Rohrdicke. Für den ebenen Dehnungszustand folgt dann:

$$A_t = \pi(R_t^2 - r_t^2) = A_0$$

Für die Berechnung wurde aus dem Kreisquerschnitt ein 5° Segment herausgeschnitten und den Symmetriebedingungen entsprechend gelagert. Das Segment des Ringes wird mit 5, 10 und 20 HEXA8 Elementen diskretisiert. Das grobe Netz wurde auch mit dem HEXA8–E3 Element berechnet. Die Belastung erfolgte verschiebungskontrolliert in 15 Inkrementen durch die Vorgabe der inneren Radiusaufweitung. Dabei nimmt die Wanddicke von ursprünglich 10 mm auf 1.75 mm ab.

Aus Bild 7.2 ist das extrem steife Verhalten des Verschiebungselementes zu erkennen. Auch bei dem feinen Netz sind die Ergebnisse unbrauchbar. Das EAS–Element gibt bereits bei einem groben Netz die Solllösung wieder. Die ausgezeichnete Übereinstimmung mit der analytischen Lösung für starrplastisches Verhalten ist in Bild 7.3 nochmals ersichtlich.

Bei der Berechnung mit den gemischten Elementen HEXA8–E3 wurden die Gauß–Integration (8G), 9–Punkt und die 15–Punkt–Integration eingesetzt. Die Gauß–Integration führte bereits nach dem 4. Verschiebungssinkrement zu Elementpathologien, die durch eine singuläre Element–Jacobimatrix aufgezeigt wurden. Auch die Reduktion der Verschiebungsschritte brachte die Rechnung nicht weiter. Die "zero–energy–modes" wurden mit der 9P– und 15a–Integration beseitigt. Die Ergebnisse von beiden Integrationstypen stimmen überein, so daß die kleinen Abweichungen nicht in Bild 7.2 dargestellt werden konnten.

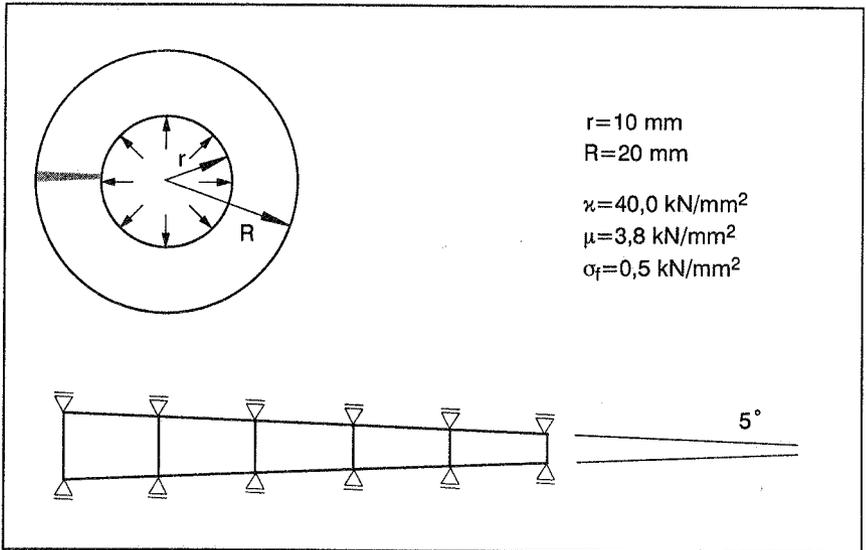


Bild 7.1: Dickwandiger Zylinder: Beispielbeschreibung

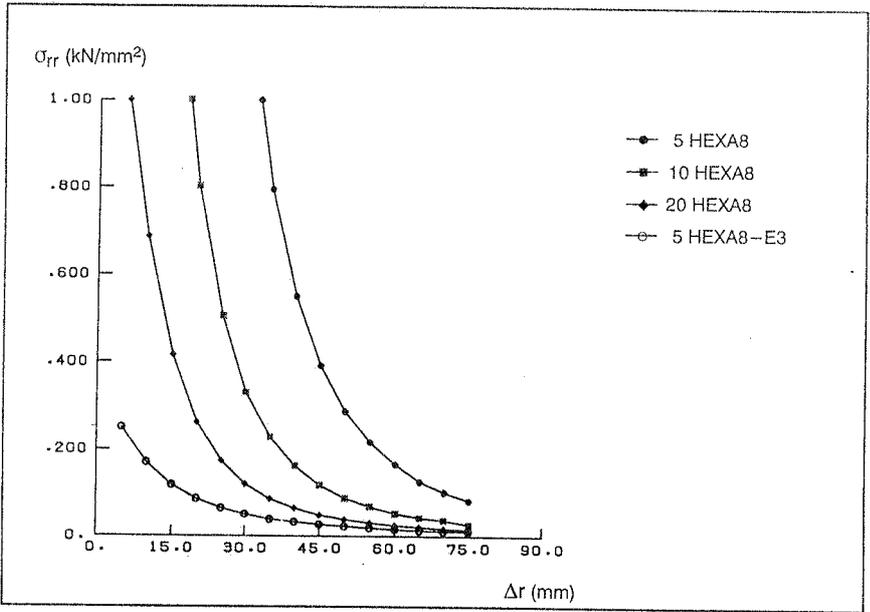


Bild 7.2: Radialspannungen am Innenrand, aufgetragen über Radiuszuwachs

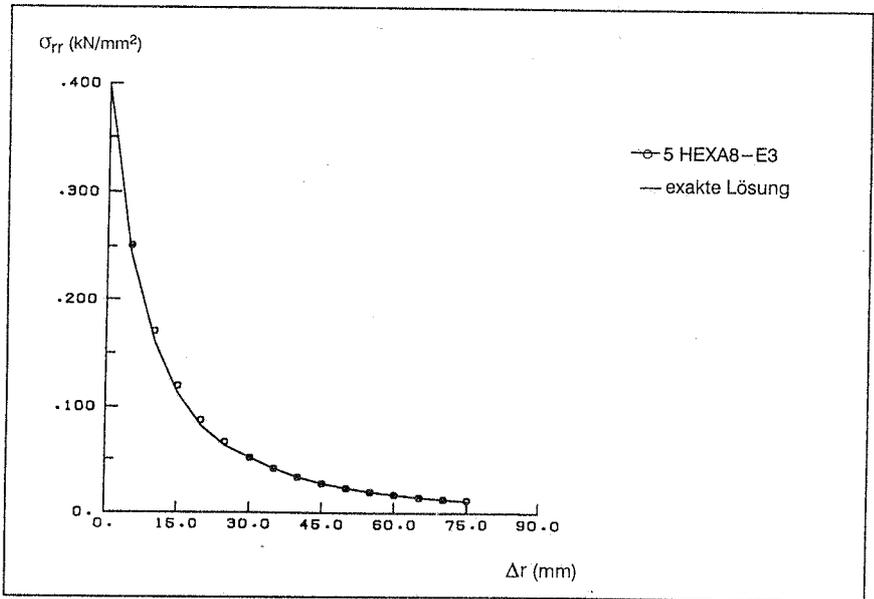


Bild 7.3: Radialspannungen am Innenrand, aufgetragen über Radiuszuwachs

7.2 Beispiel 2: Stauchversuch an Vollzylinder

Als zweites Beispiel dient das Stauchen eines Vollzylinders. Dieses Beispiel wurde bereits vielfach zur Untersuchung der Elementformulierung für das inkompressible plastische Verhalten herangezogen, z.B. Nagtegaal und de Jong [47] und Simo [76].

Bild 7.4 zeigt Geometrie und Materialparameter des zu stauchenden Vollzylinders. Das Material wird linear verfestigend mit einem Verfestigungsmodul H angenommen. Das axialsymmetrische Problem wird durch die im Bild 7.4 dargestellte Teilstruktur mit 3-D Elementen diskretisiert. Es wird ein 5×20 Elementnetz verwendet. Im Versuch wird der Zylinder zwischen zwei ebene Werkzeuge gepreßt. Für den Kontakt der Oberseite des Zylinders mit dem Werkzeug wird ideale Haftung angenommen. Die Belastung erfolgte in 40 Inkrementen bis zu einer Stauchung von 20%.

In Bild 7.5 werden die Endverformungszustände für die Modellierung mit Verschiebungselementen und mit den EAS-Elementen verglichen. Bei der Berechnung mit den HEXA8-E3 Elementen wurde die 15a-Integrationsregel benutzt. Bei der Anwendung der 8G-Integration wurden bereits am Anfang des numerischen Versuchs Konvergenzschwierigkeiten festgestellt; das Elementversagen begann bereits bei einer Stauchung von 7%.

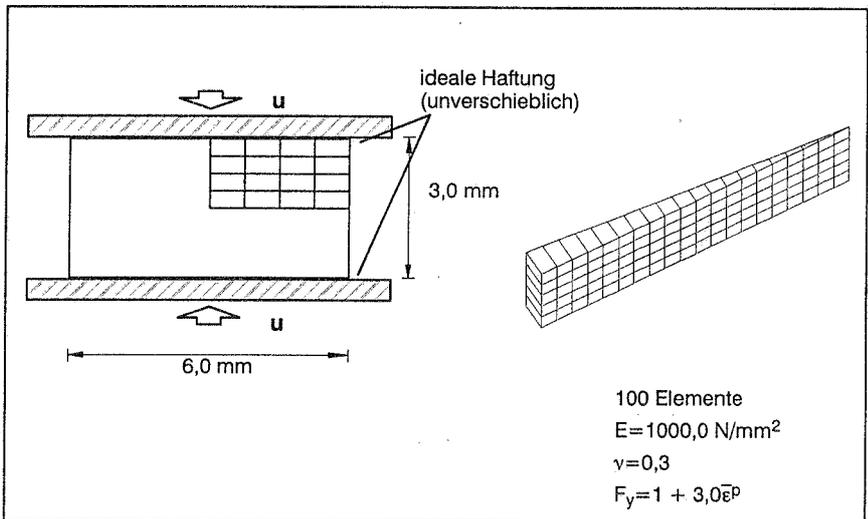


Bild 7.4: Stauchversuch: Probengeometrie und FE-Modellierung

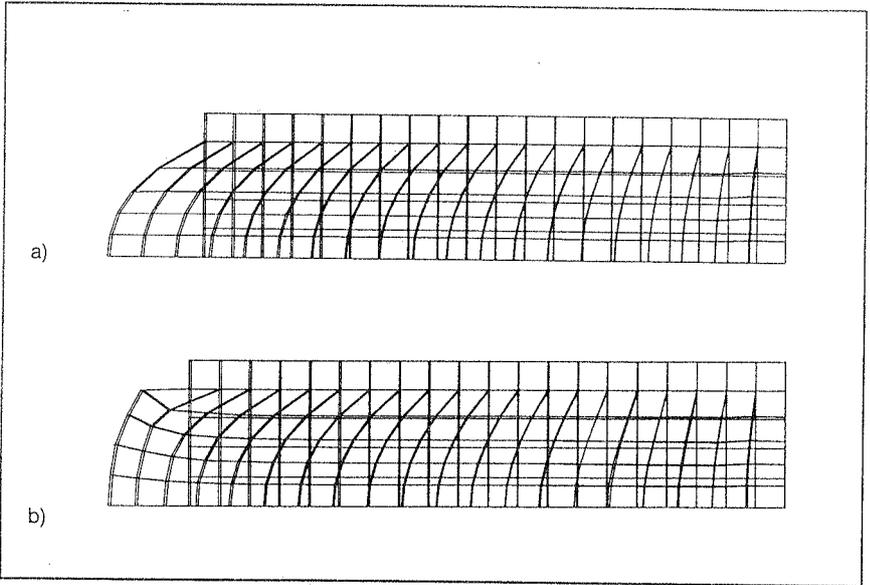


Bild 7.5: Stauchversuch: Endverformungszustand a) mit HEXA8 ;
b) mit HEXA8-E3 Elementen

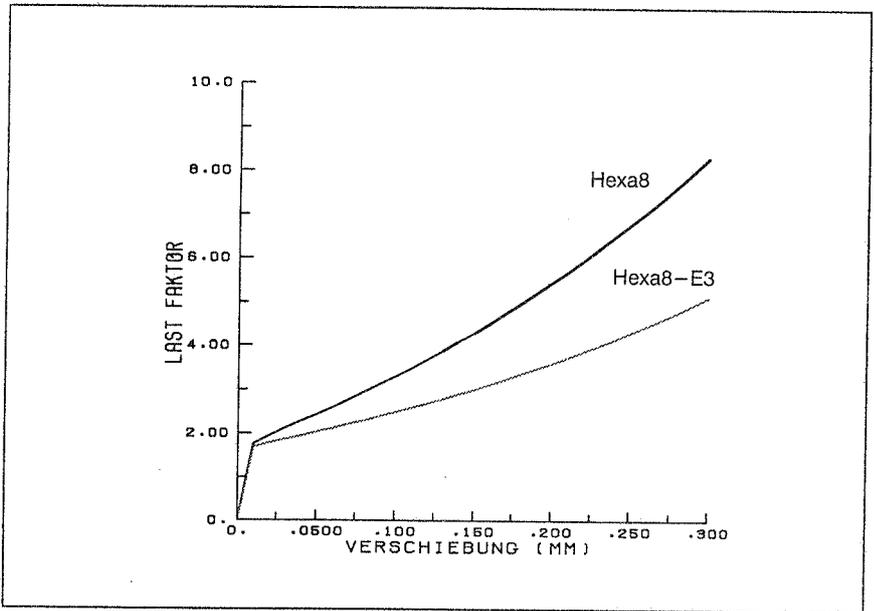


Bild 7.6: Stauchversuch: Last – vertikale Verschiebungskurven

7.3 Beispiel 3: Zugversuch – Einschnürung

Als weiteres Beispiel wird das Einschnüren eines zylindrischen Stabes beim axialen Zugversuch betrachtet. Die Geometrie und Diskretisierung des Stabes sind in Bild 7.7 dargestellt. Unter der Ausnutzung der Symmetrie in Längs- und Querrichtung wird nur ein Achtel der Versuchsprobe diskretisiert. Dafür werden insgesamt 120 HEXA8 Elemente gebraucht. Die isotrope Verfestigungsfunktion nach Simo [76] lautet:

$$\sigma_F = H_0 + H_L \bar{\epsilon}^P + (H_\infty - H_0)(1 - e^{-\omega \bar{\epsilon}^P})$$

mit den Materialparametern:

$$H_0 = 0,45 \text{ kN/mm}^2$$

$$H_L = 0,12924 \text{ kN/mm}^2$$

$$H_\infty = 0,715 \text{ kN/mm}^2$$

$$\omega = 16,93$$

Zur Belastung wird eine gleichmäßige Verschiebung auf die Stirnfläche aufgebracht. Die Probe wird in 14 Inkrementen um 30 % verlängert.

Zunächst wird ein homogener Stab berechnet, dessen Kraft–Verschiebungsverlauf den Primärpfad darstellt. Auf dieser Kurve tritt keine Einschnürung auf. Dieser Pfad zeigt einen Durchschlagspunkt A ($u=3.526$, $P=13.69$) und zwei Verzweigungspunkte B ($u=3.855$, $P=13.68$) und C ($u=6.860$, $P=13.06$). Die Festlegung dieser Punkte erfolgte durch die Methode zur direkten Berechnung von Stabilitätspunkten, beschrieben von Wriggers und Simo in [95].

Wegen der Wegabhängigkeit plastischer Prozesse besteht aber dabei die Schwierigkeit, daß bei der direkten Berechnung des Verzweigungspunktes Entlastung entsteht. Wegen des homogenen Spannungs–Dehnungszustandes in der Probe kann die Einschnürung des Zugstabes aus einer reinen mechanischen Analyse nur als Verzweigungslösung aus dem homogenen Zustand berechnet werden. Dabei spielt die im Rahmen dieser Arbeit angewandte Formulierung für Elastoplastizität, für die die Herstellung des exakten Tangentenoperators möglich ist, eine wichtige Rolle. Durch Pfadwechseln am Punkt B mit dem errechneten Eigenvektor des Null Eigenwertes entsteht der Sekundärpfad, auf dem die Versagensform durch Einschnürung des Querschnittes gekennzeichnet ist. In Bild 7.8 sieht man die Versagensformen der homogenen und der verzweigten Lösung. Diese Analyse wurde mit HEXA8–E3 durchgeführt.

Weiterhin wurde für die Simulation des Einschnürens eine geometrische Imperfektion von 0.982% nach Art der 1. Eigenform des Stabes aufgebracht. Hierzu wurde der Stabradius von den Lasteinleitungsflächen linear zur Stabmitte hin auf den Wert von 99,18% des ursprünglichen Wertes reduziert. Für diese Simulation wurden HEXA8–E3 und HEXA8–E6 Elemente eingesetzt. Die Analyse mit dem reinen Verschiebungsmodell

zeigt keine Einschnürung. Für alle 3 Modellierungen wurde die Gauß-Integration $2 \times 2 \times 2$ benutzt.

In Bild 7.9 ist die Kraft über der Verlängerung für die verschiedenen Rechnungen aufgetragen. Dabei stellt die Verzweigungslösung eine obere Schranke für die durch Imperfektionen erzeugte Einschnürung dar. Die Berechnung mit der hier vorgeschlagenen Erweiterung mit $\alpha=6$ führt im Vergleich zu der Berechnung mit $\alpha=3$ zu einer etwas weicheren Lösung. HEXA8 allein erweist sich bei der Verweigung als zu steif.

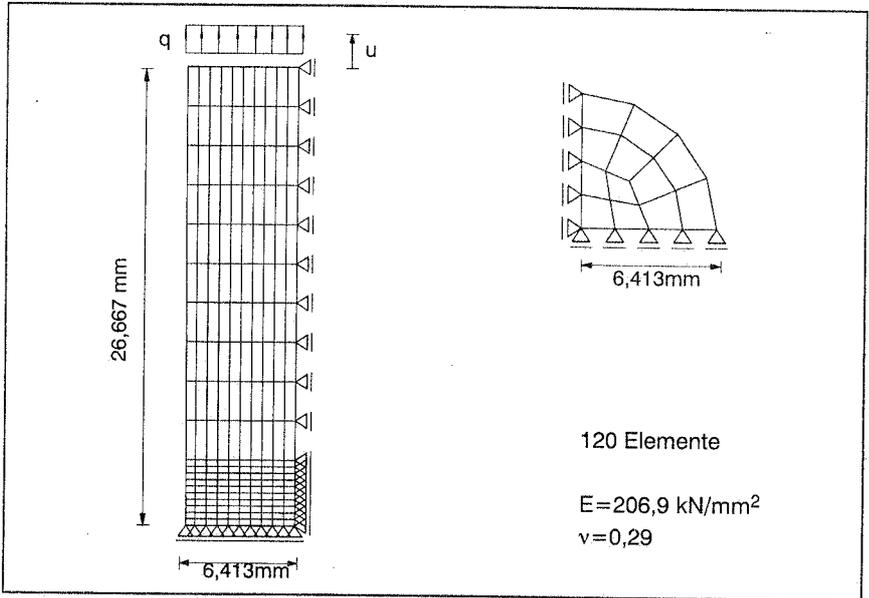


Bild 7.7: Zugversuch: Probengeometrie und Diskretisierung

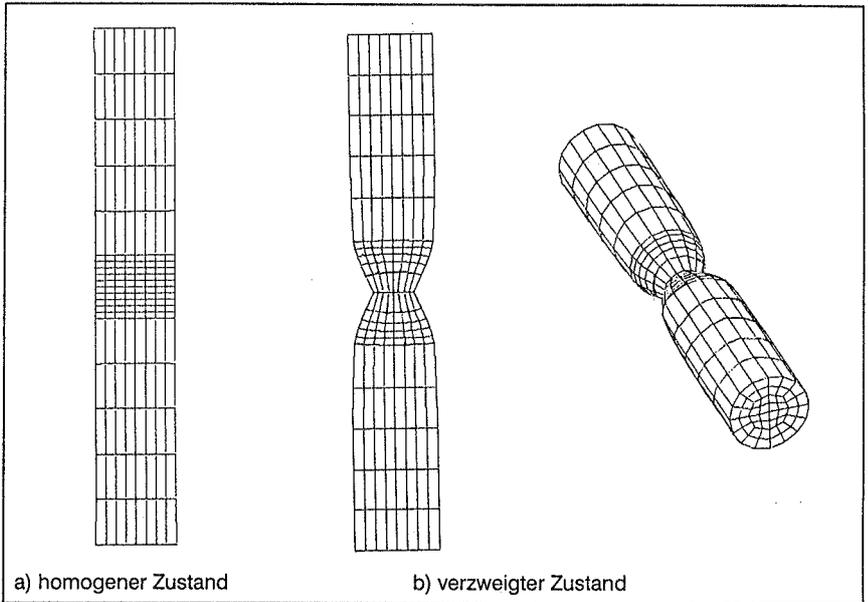


Bild 7.8: Zugversuch: Versagensformen

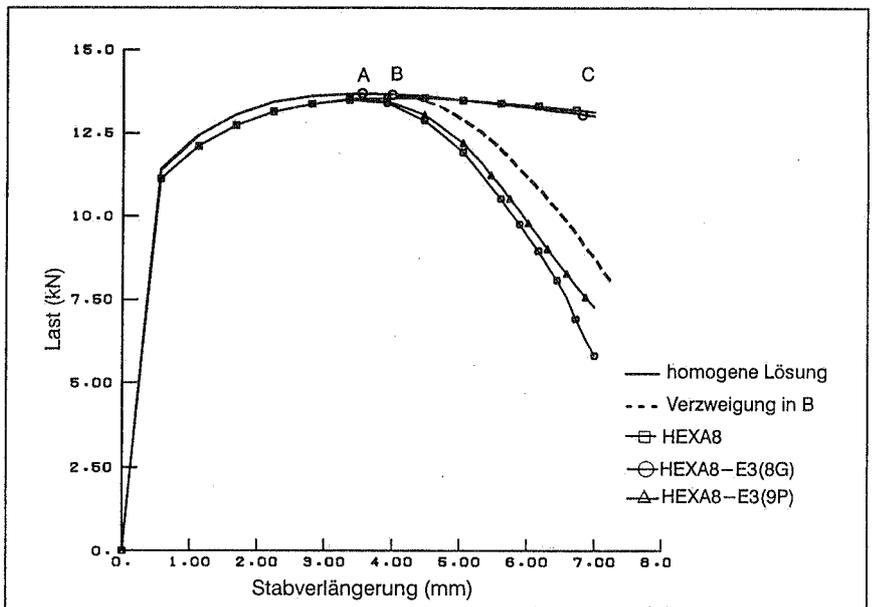


Bild 7.9: Zugversuch: Kraft-Verschiebungs-Verlauf

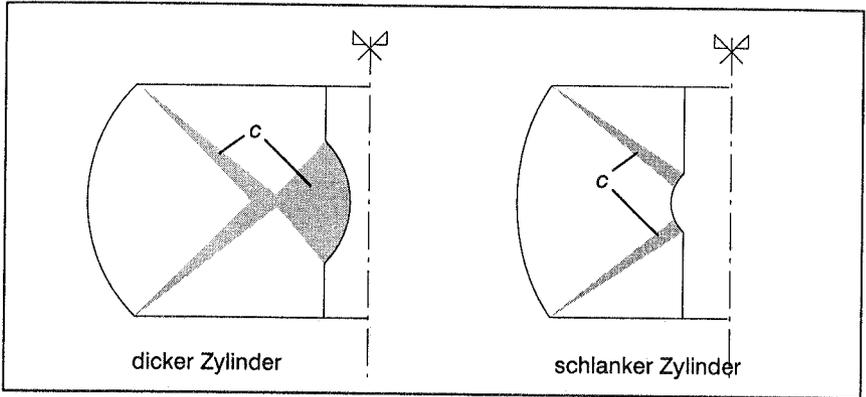


Bild 7.11: Gleitlinien beim Stauchversuch [46]

In Bild 7.12 werden die verformten Zustände gezeigt, errechnet mit der Formulierung mit großen Verzerrungen. Die Modellierung mit dem reinen Verschiebungselement war nicht in der Lage, die Entstehung der Schwellung im Hohlraum nachzubilden. Bei dieser Modellierung nimmt die Probe einen faßartigen Verformungszustand an, ohne daß sich Fließfugen bilden.

Beim schlanken Hohlzylinder, Bild 7.13, wird die Fließfuge ebenfalls nur durch das Modell mit den EAS-Erweiterungen wiedergegeben. Bild 7.14 zeigt die zugehörigen Lastverschiebungs-Diagramme für beide Zylinder.

Aus der Darstellung der verformten Netze mit den EAS-Erweiterungen sprechen die hoch verzerrten Elemente und die hoch gedehnten Elemente im Hohlraum – z.T. Dehnungen der Größenordnung von 100% – für die Güte dieser Elemente bei der Wiedergabe großer plastischer Deformationen.

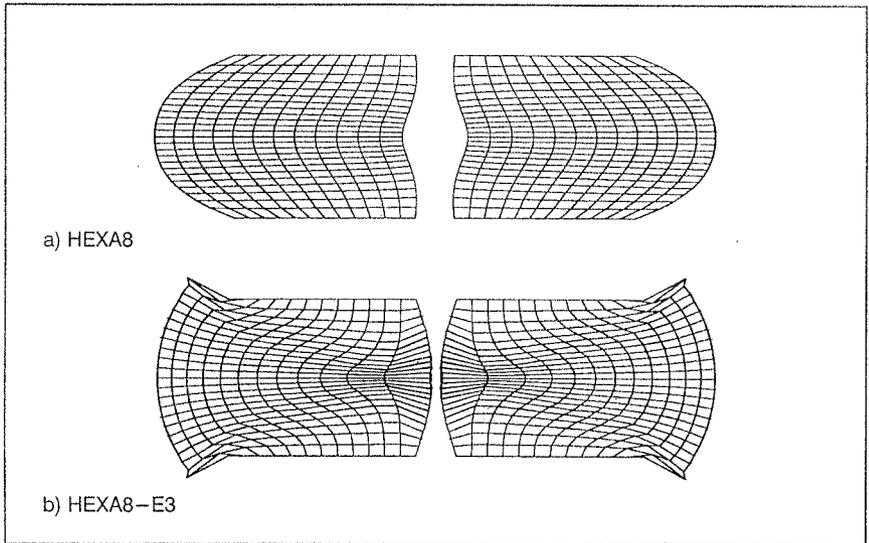


Bild 7.12: Stauchung am dicken Zylinder (40 %) – a) HEXA8 b) HEXA8-E3

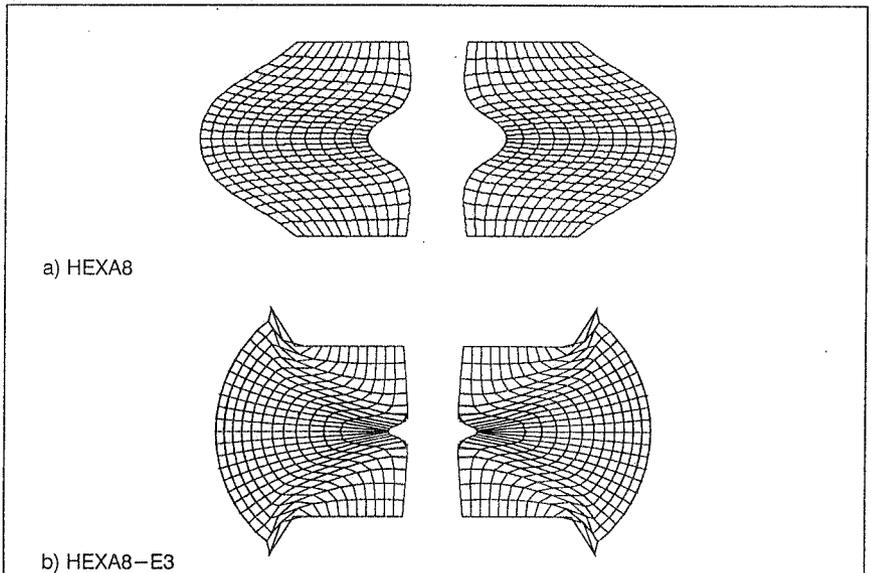


Bild 7.13: Stauchung am schlanken Zylinder (53%) – a) HEXA8 b) HEXA8-E3

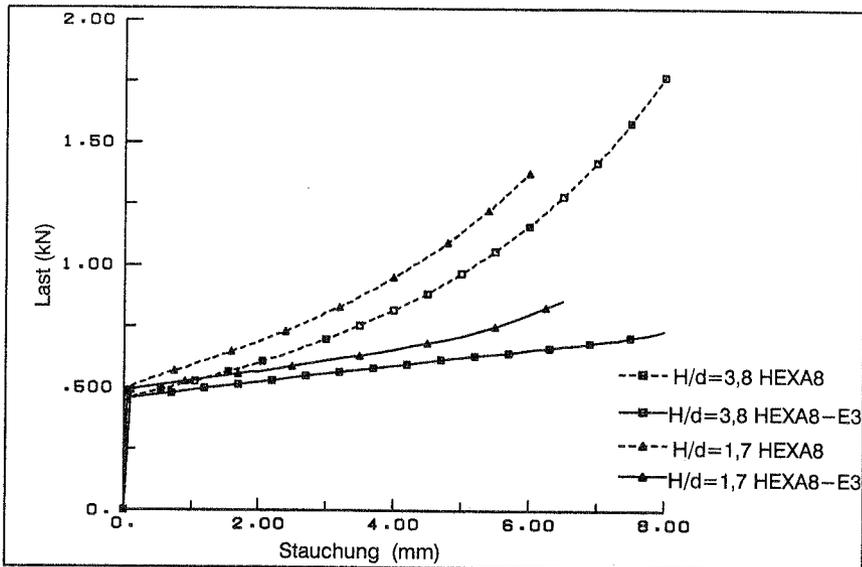


Bild 7.14: Stauchung an Hohlzylindern

Wegen der lokal großen Verzerrungen erfordert dieses Beispiel eine geeignete Charakterisierung des Materialverhaltens. Wird die oft einfachheitshalber eingesetzte Formulierung der kleinen Dehnungen gewählt, stellt sich bereits bei kleinen Verformungen ein ganz anderes Tragverhalten entsprechend den Diagrammen in Bild 7.15 ein. Dieses unterschiedliche Tragverhalten ist mit der in Bild 7.16 dargestellten Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung für den schlanken Zylinder zu erklären.

Bei der Berechnung mit der Formulierung mit kleinen Verzerrungen breitet sich der plastische Bereich von der Mitte der Probe bevorzugt in radialer Richtung aus. Die Evolution der plastischen Verzerrungen im oberen Teil des Zylinders ist sehr gering. Die hochkonzentrierten plastischen Verzerrungen im mittleren Bereich des Zylinders sind Ursache für die Entlastung, die bei einer Stauchung von ca. 0,5% in Bild 7.15 zu erkennen ist.

Aus der Verteilung der plastischen Vergleichsdehnungen für die Formulierung mit großen Verzerrungen stellt sich neben der Plastizierung in der Mitte der Probe eine plastische Fuge und ein zusätzlicher plastischer Bereich mit hohen plastischen Verformungen im oberen Teil des Zylinders ein. Durch die Ausbreitung der plastischen Verzerrungen über einen größeren Bereich erreichen diese Verzerrungen im Vergleich zur Formulierung mit kleinen Verzerrungen viel niedrigere, zum Teil nur halb so große Werte.

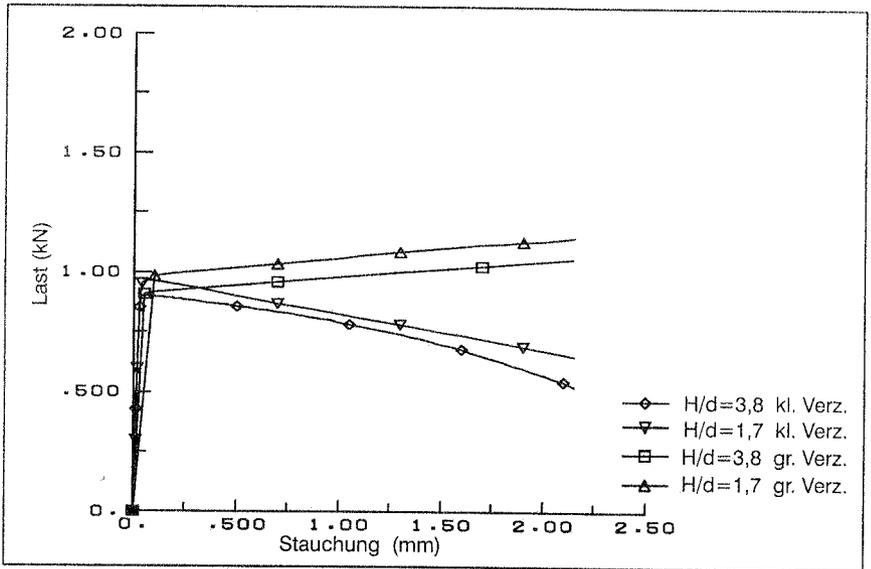


Bild 7.15: Stauchung an Hohlzylindern. Vergleich der Ergebnisse nach der Formulierung mit großen und mit kleinen Verzerrungen.

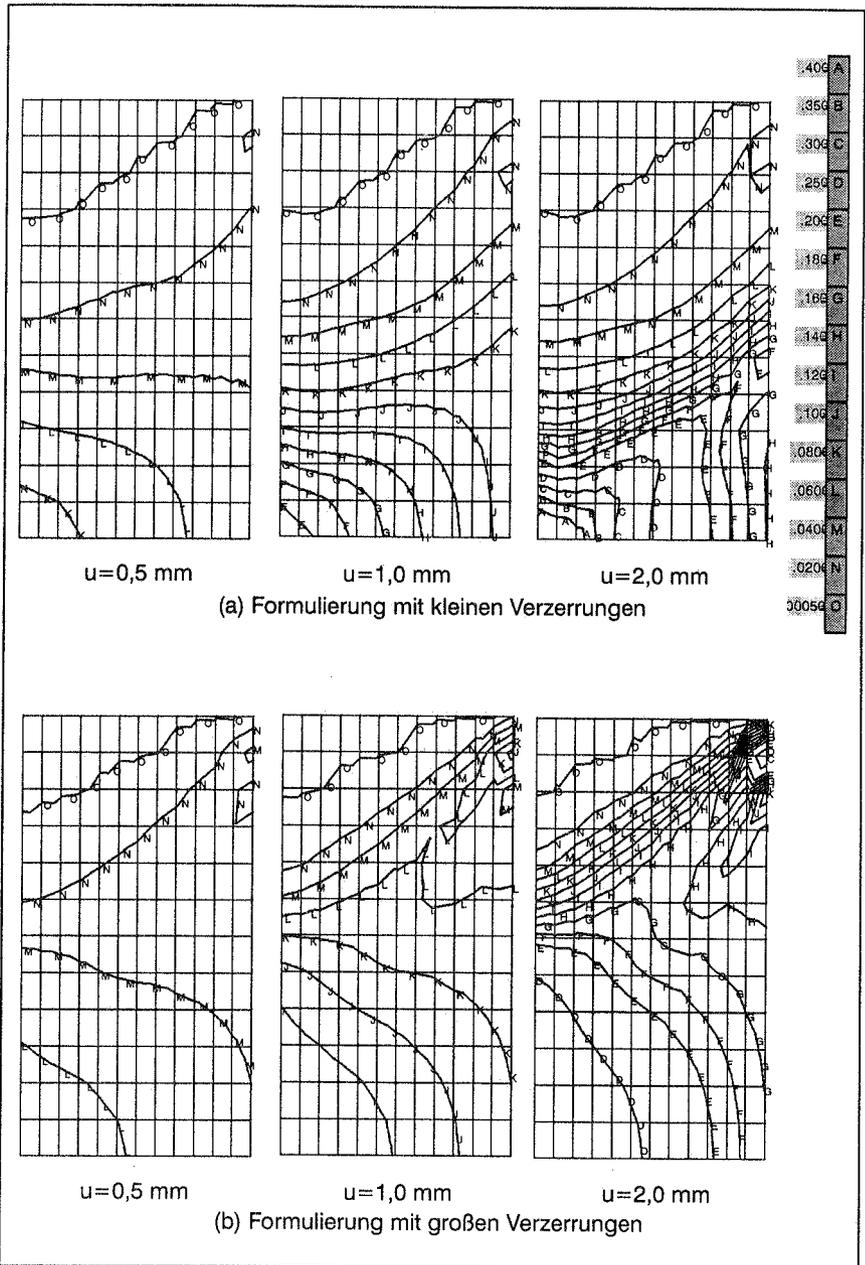


Bild 7.16: Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).

7.5 Beispiel 5: Lochscheibe

Am Beispiel einer Lochscheibe wird der Vergleich zwischen den Ergebnissen der Formulierungen mit kleinen und mit großen Verzerrungen durchgeführt. Es wird angenommen, daß ein ebener Verzerrungszustand vorliegt. Die Geometrie und die Materialeigenschaften können aus Bild 7.17 ersehen werden. Sie wurden aus [25] entnommen, wobei eine Analyse für den Fall eines ebenen Spannungszustandes vorliegt. Ein Viertel der Scheibe wird mit 72 HEXA8–E3 Elementen diskretisiert, wobei wegen der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes die Dicke der Scheibe beliebig ist. Das Werkstoffverhalten soll dem von Mises Gesetz mit linearer isotroper Verfestigung folgen.

Die Belastung erfolgt verschiebungsgesteuert. Die Scheibe wird um 33% verlängert. Aus Bild 7.18 kann man die deformierten Zustände bei dieser Verlängerung ersehen. Bild 7.19 zeigt die Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung. Daraus erkennt man, daß die Rechnung mit der Formulierung für große Verzerrungen zu einem kleinen Bereich mit hoch konzentrierten plastischen Verzerrungen geführt hat. Die Verlängerung der Probe wird praktisch durch die Dehnungen an einer Reihe von Elementen erreicht. Außerhalb dieser Reihe bleiben die Verzerrungen klein und fast überall elastisch. Bei der Analyse mit der Formulierung für kleine Verzerrungen sind die plastischen Verzerrungen über einen breiteren Bereich verteilt, so daß die Einengung des Querschnitts nicht so lokal erfolgt. Die Last–Verschiebungs–Diagramme für beide Rechnungen sind in Bild 7.20 dargestellt. Dabei beziehen sich die Kraft–Werte auf eine Scheibendicke von 1 mm. Im Gegensatz zum Beispiel 7.4 ist bei der Analyse mit großen Verzerrungen eine Entlastung festzustellen. Diese Entlastung tritt bereits bei einer Verlängerung des Stabes von ca. 0,1 mm (0,5% Dehnung) auf.

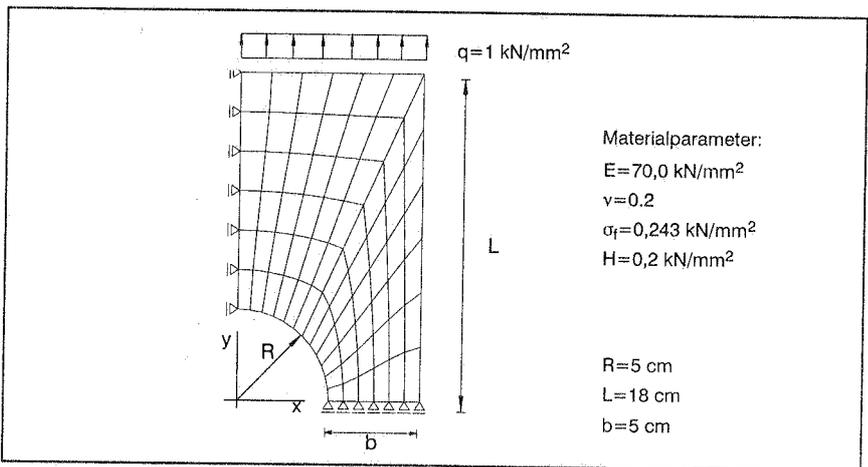


Bild 7.17: Lochscheibe – Geometrie und Materialeigenschaften

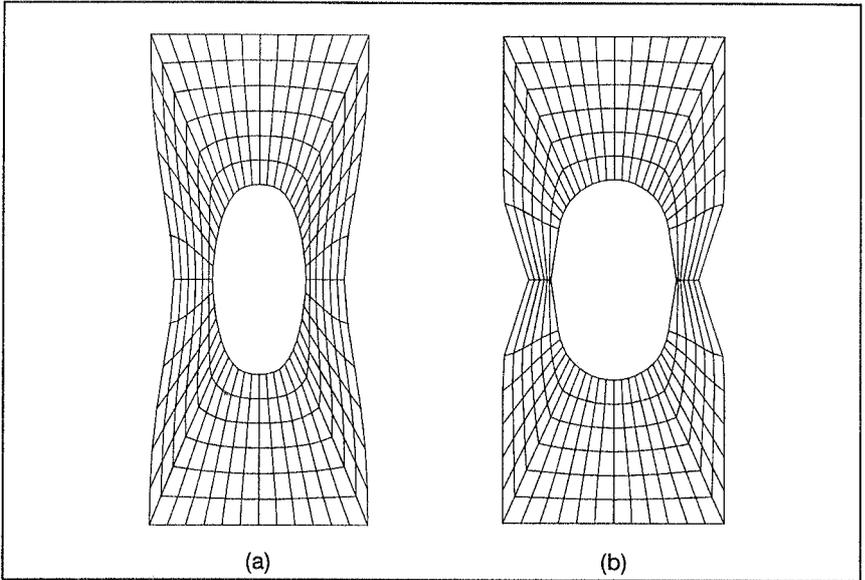


Bild 7.18: Verformter Zustand bei einer Verlängerung von 33% nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).

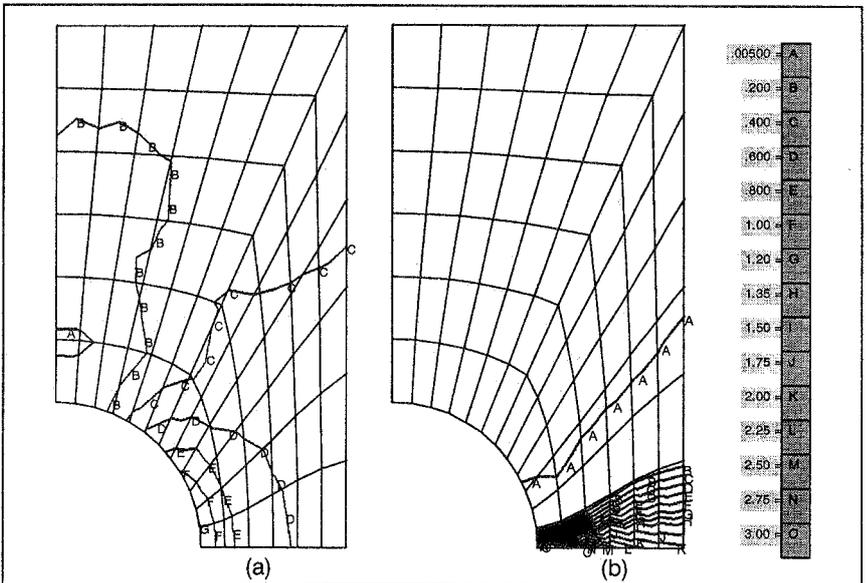


Bild 7.19: Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung bei einer Verlängerung von 33% nach der Formulierung mit kleinen Verzerrungen (a) und mit großen Verzerrungen (b).

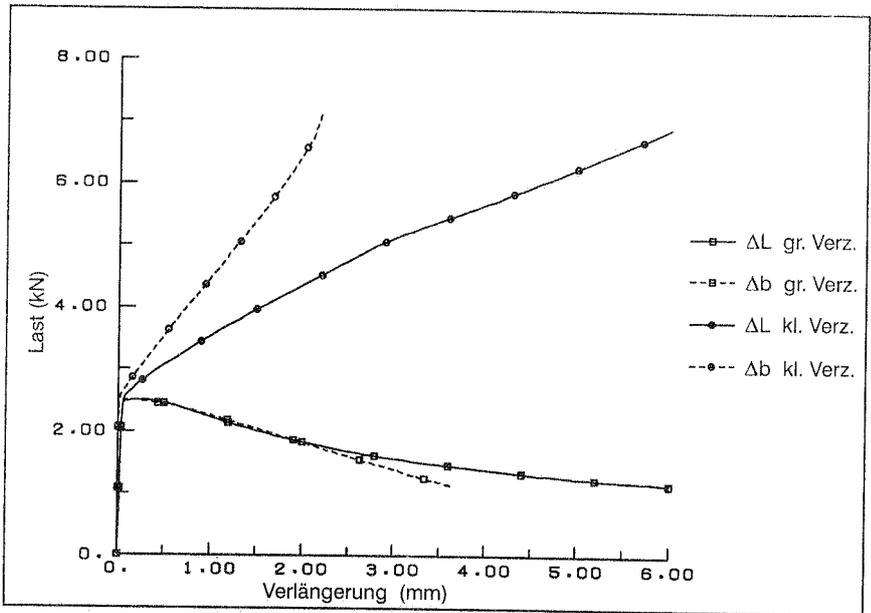


Bild 7.20: Lochscheibe: Last–Verschiebungskurve

7.6 Schlußfolgerungen

Anhand der numerischen Beispiele wurde das Materialmodell und die FE–Formulierung überprüft. Diese Beispiele verdeutlichen die Unbrauchbarkeit des linearen Verschiebungselementes bzw. die Eignung der EAS–Elemente zur Berechnung von Problemen mit großen plastischen Deformationen.

Ferner ergibt der Vergleich zwischen der Formulierung mit großen Verzerrungen und der mit kleinen Verzerrungen, daß bereits bei "relativ kleinen Deformationen" unterschiedliches Tragverhalten von den beiden Modellen wiedergegeben wird (siehe Beispiele 7.4 und 7.5). Eine verallgemeinernde Aussage, welche der beiden Formulierungen eher dazu neigt, eine höhere Traglast zu liefern, kann jedoch nicht getroffen werden.

8 Zur Erfassung lokalisierter Versagens

Ein Phänomen, das häufig inelastische Deformationen begleitet, ist die Entwicklung von lokalisierten Bändern, in denen sich große Dehnungen einstellen. Die Mechanismen, welche für die Entstehung dieser Bänder verantwortlich sind, hängen von dem Materialverhalten ab. Häufig sind sie durch entfestigendes Materialverhalten begründet. Bei nicht assoziierten Fließgesetzen kann die Lokalisierung sogar innerhalb des verfestigenden Bereiches stattfinden. Allen lokalisierten Versagensvorgängen ist gemein, daß sie aus einer Instabilität im inelastischen Verhalten entstehen. Das volle Verständnis des nachkritischen Verhaltens im inelastischen Bereich bleibt aber weiterhin eine offene Frage.

Für die Wiedergabe der Versagensmechanismen müssen die finiten Elemente auch nach ihrer Fähigkeit, lokalisierte Versagensformen bei materialfesten Netzen zu erfassen, untersucht werden. Wegen Degradation der Materialeigenschaften fängt das Versagen punktuell an und breitet sich räumlich während des Versagensfortschritts aus. Die räumliche Ausbreitung des Materialversagens in dem Tragwerk wird durch die Finite Element Diskretisierung durchgeführt, so daß zuverlässige finite Elemente notwendig sind. Wie schon in der Literatur beschrieben, sind die konventionellen Verschiebungselemente nicht in der Lage, Probleme mit Dehnungslokalisierung zu behandeln (siehe [84] [54]). Die Verschiebungselemente führen in manchen Fällen zu einer verspäteten Bildung des Bandes und in anderen Fällen zu einer totalen Verhinderung der Lokalisierung. Für 2D-Probleme werden häufig viereckige Elemente angewandt, die aus 4 gekreuzten Dreiecken aufgebaut sind. Diese Anordnung kann Bänder in 4 Richtungen nachbilden, nämlich parallel zu Elementkanten und zu Elementdiagonalen, während bei isoparametrischen Vierecken nur Bänder parallel zu Elementkanten dargestellt werden können. Diese Vorgehensweise läßt sich aber nicht auf die 3D-Analyse übertragen.

In Bezug auf das *Locking*-Phänomen wurden bereits einige Elementverbesserungen durchgeführt, wie z.B. die in Abschnitt 6.2 beschriebene EAS-Methode. Die zufriedenstellende Simulation von "diffusem" Versagen in der J_2 -Plastizität gewährleistet aber noch nicht, daß auch das lokalisierte Versagen durch die Elemente wiedergegeben werden kann. In der Arbeit von Steinmann und Willam [84] wird die Eignung verschiedener Finiter Elementformulierungen zur Erfassung des lokalisierten Versagens geprüft. Diese Untersuchung erfolgte für vierknotige 2D-Elemente anhand der infinitesimalen Theorie. Es zeigt sich, daß die Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes von Wilson und Taylor [94] für die Wiedergabe von lokalisierten Verformungszuständen sehr geeignet ist. Da die EAS-Elemente eine Erweiterung des in [94] entwickelten Konzepts darstellt, ist es naheliegend, auch diese Elemente für die Berechnung von lokalisiertem Versagen einzusetzen.

Anhand von einigen numerischen Beispielen werden Verschiebungselemente und gemischt–hybride EAS–Elemente auf ihre Eignung hin untersucht, lokalisiertes Versagen wiederzugeben. Diese Untersuchung erfolgt hier am Beispiel der von Mises–Plastizität und bei vorgegebenen, materialfesten Netzverteilungen.

8.1 Verzweigungskriterien bei elastoplastischen Materialien

Die allgemein notwendige Bedingung für Materialinstabilität, Mehrdeutigkeit oder Verzweigung der Lösung in irgendeiner Weise geht auf Drucker (1950) [23] und Hill (1958) [31] zurück. Dieses allgemeine lokale Verzweigungskriterium basiert auf dem Verlust der positiv definiten Eigenschaft des symmetrischen Anteils des konstitutiven Tensors

$$\dot{\epsilon} : C^S : \dot{\epsilon} = 0 \quad , \quad (8.1)$$

wobei $\dot{\epsilon}$ die Dehnungsrate und C^S der symmetrische Anteil des tangentialen Materialtensors in irgendeinem Materialpunkt sind. Diese Kriterium wird erst dann erfüllt, wenn $\det [C^S] = 0$.

Ein alternativer Indikator für die Materialinstabilität ist mit dem kritischen Punkt verbunden, bei dem der tangentielle Tensor einen Null Eigenwert vorzeigt.

$$C : \dot{\epsilon} = 0 \quad \text{oder} \quad \det [C] = 0 \quad (8.2)$$

Bei Materialien mit assoziiertem Fließen ist der Materialtensor symmetrisch, so daß (8.1) und (8.2) den kritischen Punkt als ersten möglichen allgemeinen Verzweigungspunkt liefern. Für nicht symmetrische Materialtensoren kann die Erfüllung des allgemeinen Verzweigungskriteriums vor dem kritischen Punkt geschehen, d.h. $\det [C^S] = 0$, obwohl das Material selbst noch verfestigend ist.

Der zu einer allgemeinen Verzweigung gehörende Eigentensor kann sowohl eine kompatible als auch eine inkompatible Form annehmen, wobei die inkompatible Form sich auf einen Materialpunkt oder eine Fläche beschränken muß. Diese Formen führen zu kleinen Imperfektionen im Verformungsfeld, so daß sich eine Störung des homogenen Verformungszustandes ergibt. Ein Beispiel für einen solchen Zustand ist das bekannte *Necking*–Phänomen. Dieses Phänomen ist im Beispiel 7.3 veranschaulicht.

Lokalisierung ist mit einer Unstetigkeit der Dehnungsrate verbunden, aber führt nicht zu einer kinematischen Inkompatibilität. Der entsprechende Verzweigungszustand wird auch "diskontinuierliche Verzweigung" genannt. Diskontinuierliche Versagensformen durch Zugbruch und Scherfugen sind Beispiele eines solchen Zustandes.

Aufgrund des klassischen Kriteriums nach Hill (1962)[30], Mandel (1966)[40], Rudnicki und Rice (1975)[66] wird eine diskontinuierliche Verzweigung durch den akustischen

Tensor gekennzeichnet, d.h. durch das Erscheinen eines Null Eigenwertes dieses Tensors.

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \det [\mathbf{Q}] = 0 \quad (8.3)$$

wobei der Eigenvektor \mathbf{m} die Richtung der relativen Geschwindigkeit des Materials an gegenüberliegenden Seiten des Bandes beschreibt. Der akustische Tensor \mathbf{Q} wird durch Kontraktion des Materialtensors mit dem Normalenvektor \mathbf{N} der Diskontinuitätsfläche definiert.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \quad (8.4)$$

Entsprechend zu der notwendigen Bedingung für eine allgemeine Verzweigung, Gl. (8.1), stellt das starke Elliptizitätskriterium ein allgemeines Kriterium für eine diskontinuierliche Verzweigung dar [11]. Das Kriterium für Verzweigung mit einer kompatiblen Form wird erfüllt, wenn der symmetrische Anteil des akustischen Tensors nicht mehr positiv definit ist. Dieses Kriterium wird durch die folgende Gleichung ausgedrückt.

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}^s \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (8.5)$$

Gleichung (8.5) identifiziert die erste mögliche Verzweigung mit einer kompatiblen Form und erfordert $\det[\mathbf{Q}^s]=0$. Für symmetrische konstitutive Tensoren liefern beide Lokalisierungskriterien, Gl. (8.3) und Gl. (8.5), denselben Verzweigungspunkt. Für nicht symmetrische konstitutive Tensoren kann eine Lokalisierung nach Gl. (8.5) vor dem Erreichen des Verzweigungspunktes, identifiziert durch Gl. (8.3), stattfinden, d.h. die Lokalisierung ist in dem Fall im verfestigenden Bereich möglich.

Die genannten Verzweigungskriterien sind in Tabelle 8.1 zusammengestellt. Eine ausführliche Diskussion zur Verzweigung bei assoziierten und nicht assoziierten elasto-plastischen Materialien wird in Bigoni/Hueckel [11] und Neilsen/Schreyer [50] geführt.

	Kriterium	Gleichung	Versagensart
1	allgemeine Verzweigung	$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C}^s : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$	verteilt/lokalisiert
2	kritischer Punkt	$\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}$	verteilt/lokalisiert
3	Verlust der starken Elliptizität	$\mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}^s \cdot \mathbf{m} = 0$	lokalisiert
4	klassische diskont. Verzweigung	$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$	lokalisiert

Tabelle 8.1: Verzweigungskriterien für Lokalisierung

8.2 Beispiele für Lokalisierung in der J_2 -Plastizität

Das zur Beschreibung von elasto-plastischen Verformungen von Metallen in der Regel angewandte von Mises-Plastizitätsmodell mit assoziiertem Fließen stimmt bei Lokalisierungsproblemen gut mit experimentellen Ergebnissen überein. In [50] werden einige experimentelle Untersuchungen mit der Vorhersage von Verzweigungen nach dem von Mises-Modell verglichen. Dabei ist das Modell in der Lage, sowohl die Einschnürung (*engl: Necking*) als auch die Lokalisierung wiederzugeben. Da das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Materialmodell auf der Basis der assoziierten Plastizität entwickelt wurde, ist der Materialtensor symmetrisch. Dies bedeutet, daß eine Lokalisierung nach dem Kriterium (8.5) nicht vor dem allgemeinen Verzweigungspunkt gemäß Gl. (8.1) auftreten kann. Eine Lokalisierung im verfestigenden Bereich ist in diesem Fall nicht möglich.

Bei der Eigensystemanalyse der plastischen Materialtangente dieses Modells wurde in [50] gezeigt, daß nur der fundamentale Eigenwert von dem Verfestigungsmodul H abhängt und daß der fundamentale Eigentensor eine Funktion des momentanen Spannungszustandes ist. In anderen Worten, wieviel Entfestigung für eine Lokalisierung notwendig ist, hängt auch von dem erreichten Spannungszustand ab. Bei reinem Schub kann z.B. eine Lokalisierung ohne Entfestigung, d.h. für $H = 0$, auftreten. Andererseits tritt bei einaxialem Zug eine Lokalisierungsform erst dann auf, wenn der Entfestigungsmodul groß ist. Für einen ebenen Dehnungszustand unter einaxialem Zug wird z.B. der erste Lokalisierungszustand bei einem Entfestigungsmodul von $-E/12$ aktiviert. Bis zu diesem Wert ist die Verformung gleichmäßig.

An den folgenden numerischen Beispielen wird untersucht, ob die EAS-Elemente in der Lage sind, diskontinuierliche Verzweigungen und die räumliche Entwicklung der Scherfuge der J_2 -Plastizität zu beschreiben. Der Einfluß der Integrationsordnung auf die Ergebnisse wird dabei mit betrachtet. Da es hier um die Eignung der Finiten Elemente geht, wird die Frage der Objektivität der Ergebnisse in bezug auf das FE-Netz dem Abschnitt 8.3 überlassen.

In den folgenden Beispielen wird das bereits in Beispiel 7.3 vorgestellte [69] Ver-/Entfestigungsgesetz verwendet. Bei diesem Gesetz können sich große Dehnungen bereits vor der Entstehung der Scherfuge bilden, so daß die Element- und Materialformulierung zusammen mit dem Lokalisierungsphänomen überprüft werden können. Die Materialparameter sind mit denen aus Beispiel 7.3 identisch, abgesehen von dem Verfestigungsmodul, der hier den negativen Wert $H = -0.012924$ bekommt.

8.2.1 Schubtest

Dieser numerische Test erfolgt an einem rechteckigen Element mit der Diagonallänge $d=5,0$, welches wie in Bild 8.1 gelagert ist. Es wird der ebene Dehnungszustand vorausgesetzt. Die Belastung entspricht einem reinen Schubversuch und erfolgt verschiebungsgesteuert. Bild 8.1 zeigt auch den verformten Endzustand, erhalten durch eine Diskretisierung mit dem herkömmlichen linearen Verschiebungselement (a) und mit dem erweiterten Dehnungsansatz HEXA8-E3 mit einer Gauß-Integration $2 \times 2 \times 2$ (b) bzw. mit der 9- oder 15-Punkt-Integration (c). Die entsprechenden Last-Verschiebungskurven sind in Bild 8.2 dargestellt. Dabei sind die Ergebnisse für die verschiedenen Integrationsregeln wiedergegeben.

Aus Bild 8.2 ist die erwartete ungenaue Lösung des Verschiebungsmodells zu erkennen: es zeigt keinen abfallenden Ast. Die EAS-Elemente HEXA8-E3 und HEXA8-E6 mit der 2-Punkt-Gauß-Integration haben den lokalisierten Zustand gut erfaßt. Die Anwendung der 3-Punkt-Gauß-Integration, der 14- 15-Punkt- [34] oder der 9-Punkt-Integration [67] zeigt dagegen einen unerwünschten Versteifungseffekt.

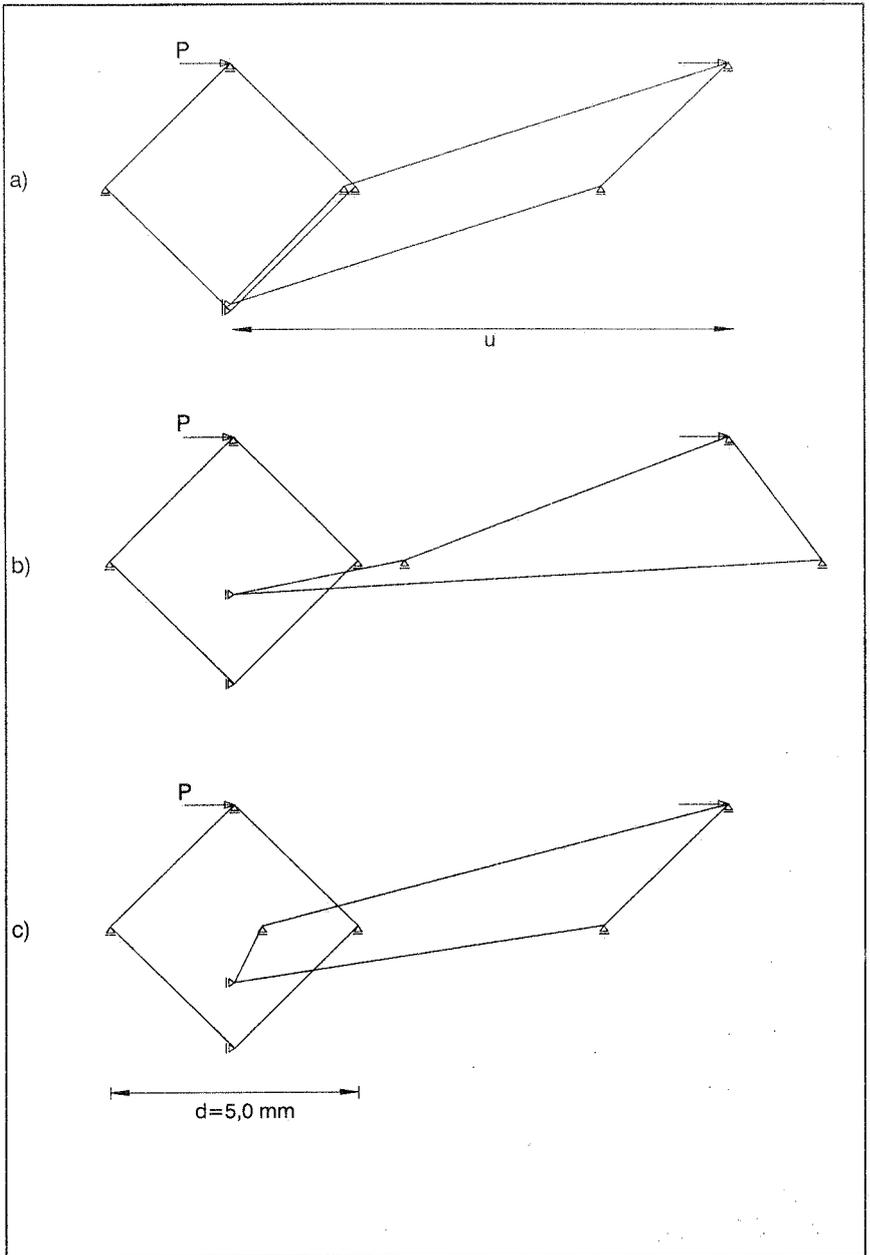


Bild 8.1: Lokalisierungstest: Schubversuch an einem einzelnen Element ($u=10,0 \text{ mm}$)

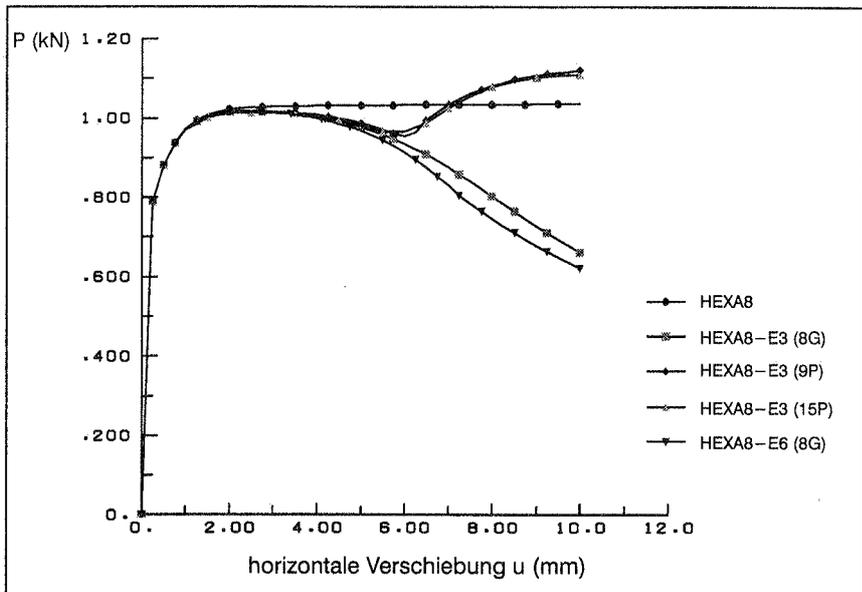


Bild 8.2: Schubversuch. Last–Verschiebungskurve

8.2.2 Zugversuch an einem rechteckigen Stab

Die Materialparameter und Abmessungen wurden aus [69] entnommen und sind in Bild 8.3 zusammengestellt. Auf Grund der Symmetrie wird nur ein Viertel des Systems mit 200 finiten Elementen diskretisiert. Um der Entstehung der Scherfuge nachzugehen, wird ein Entfestigungsgesetz zusammen mit einer kleinen Imperfektion eingeführt; hierzu wird die Stabbreite im mittleren Querschnitt um 0.982% abgemindert. Bei der Analyse werden die herrkömmlichen 3D–Verschiebungselemente und die EAS–Elemente mit $n\alpha=3$ und $n\alpha=6$ eingesetzt. Der Einfluß der verschiedenen Integrationsregeln wird ebenfalls wieder betrachtet.

Nach den im Abschnitt 8.1 vorgestellten Kriterien findet *Necking* statt, wenn der erste allgemeine Verzweigungspunkt erreicht wird. Wie bereits erwähnt, treten Lokalisierungszustände für J_2 –Plastizität bei einaxialem Zug im ebenen Dehnungszustand erst bei größerer Entfestigung auf.

Am Anfang des numerischen Verformungsprozesses zeigt der Versuchskörper einen homogenen Verformungszustand. Durch weitere Belastung nach dem kritischen Punkt entwickelt sich zunächst eine gleichmäßig verteilte Einschnürung, bis sich eine Scherfuge unter einem Winkel von 45° zur Belastungsrichtung bildet. Bild 8.4 zeigt den Versagenszustand sowie die Zwischenzustände für die Modellierung mit HEXA8–E3 Ele-

menten und einer 2×2 Gauß-Integration. Die Analyse mit den alternativen Integrationsregeln haben ein leicht steiferes Verhalten zur Folge. Bild 8.5 zeigt die Versagensform für die Analyse mit der 15-Punkt-Regel. Vergleicht man die Verformung der mittleren Elemente in Bild 8.4 und Bild 8.5, stellt man fest, daß die 15-Punkt-Regel zu einer besseren Konditionierung des Elementes geführt hat. Die Last-Verschiebungskurven sind in Bild 8.7 dargestellt. Die Ergebnisse der verschiedenen Integrationsregeln stimmen gut überein, so daß in Bild 8.7 die z.T. geringfügigen Abweichungen nicht wahrnehmbar sind.

Die Ergebnisse für eine Modellierung mit HEXA8-E6 Elementen (Gauß Integration $2 \times 2 \times 2$) führen im Vergleich zu denen der HEXA-E3 Elemente zu einem steileren abfallenden Ast, was eine kleinere dissipierte Energie und konsequenterweise eine schmalere Scherfuge zur Folge hat. Dieses ist auch in Bild 8.6 veranschaulicht. Auch bei diesem Element verursacht die 15-Punkt-Regel ein steiferes Verhalten; die Last-Verschiebungskurve fällt mit denen der HEXA8-E3 Analyse bei anderen Integrationsregeln zusammen.

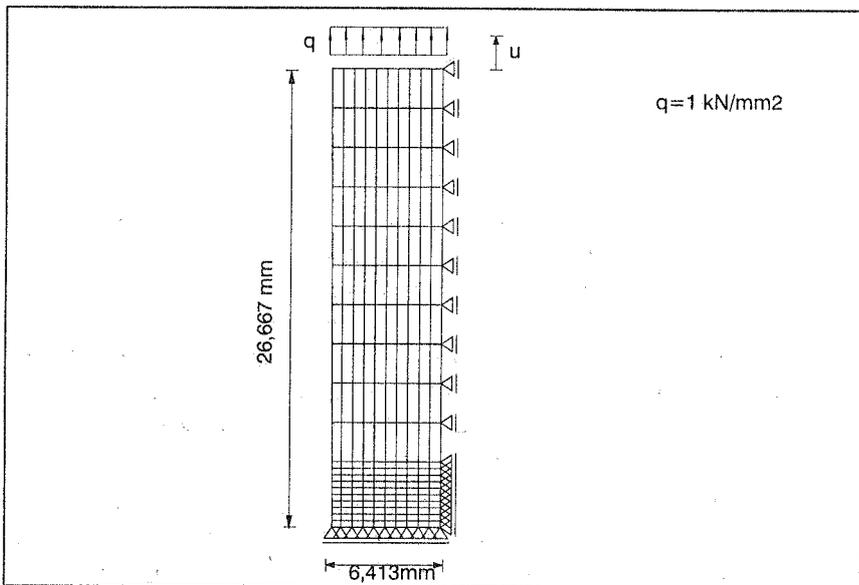


Bild 8.3: Lokalisierungstest: Zugversuch im ebenen Dehnungszustand

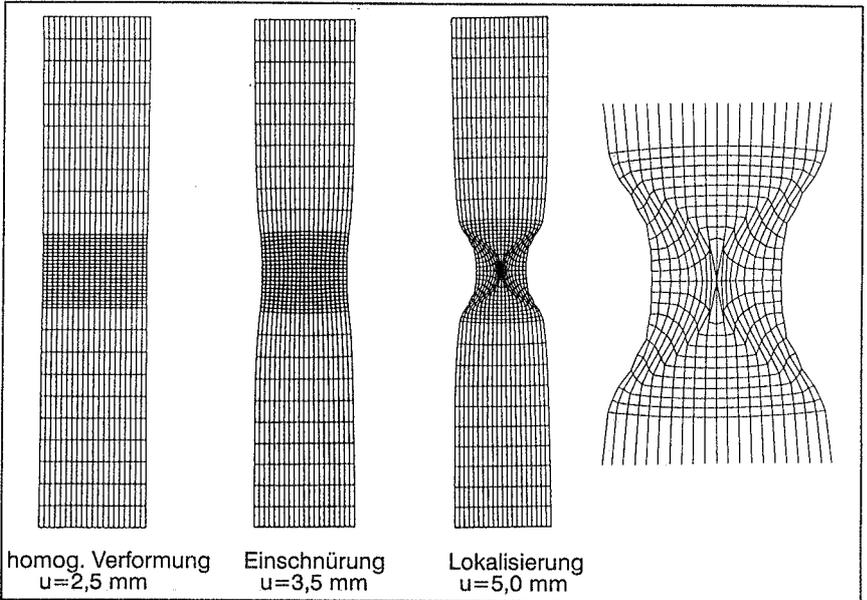


Bild 8.4: Verformungszustände mit HEXA8-E3 (Gauß-Int. 2x2x2)

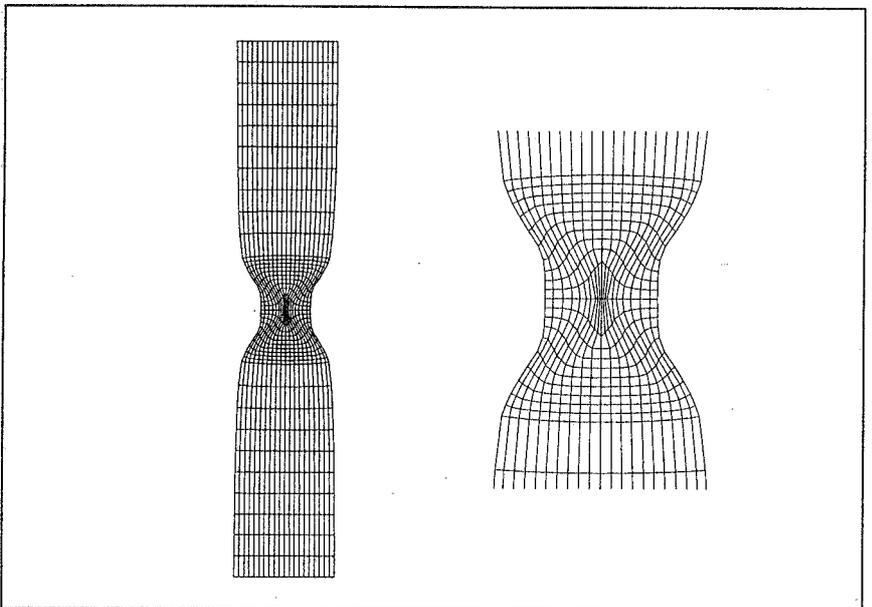


Bild 8.5: Versagenszustand mit HEXA8-E3 (15-Punkt-Int.) u=5,0 mm

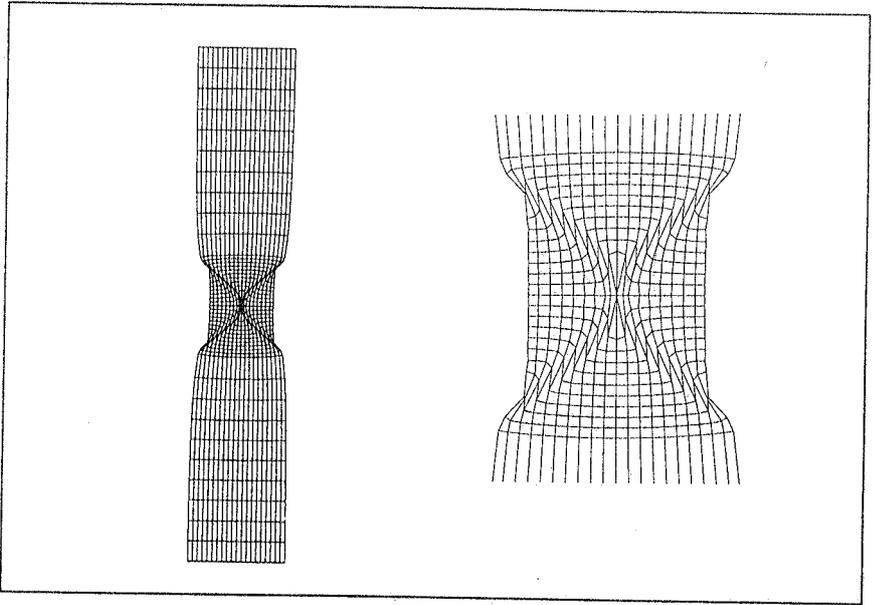


Bild 8.6: Versagenszustand mit HEXA8-E6 (Gauß-Int. 2x2x2)

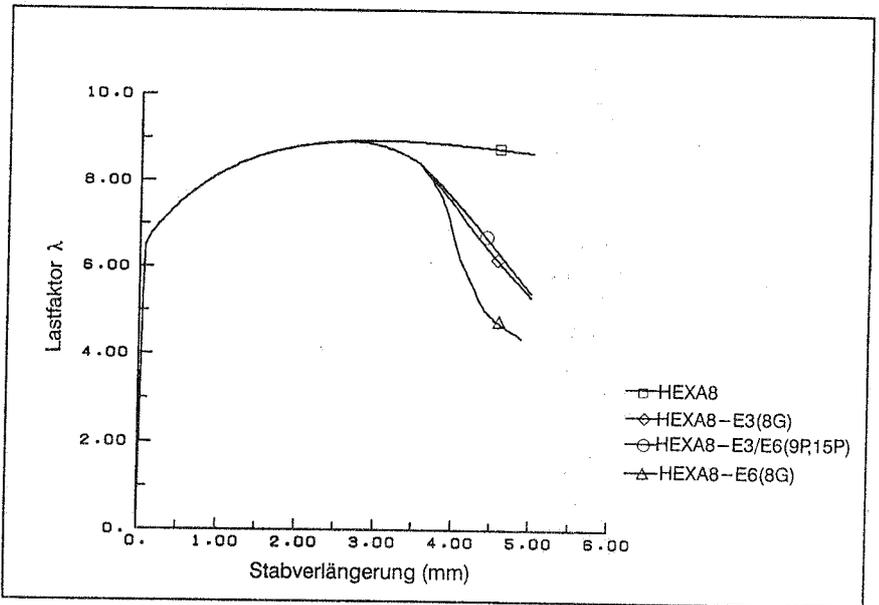


Bild 8.7: Zugversuch: Last-Verschiebungskurven

8.3 Objektivität der Ergebnisse

Die klassischen Kontinuumsmodelle, die auf einer lokalen Beschreibung des Kontinuums basieren, leiden an einer unerwünschten Netzabhängigkeit der Ergebnisse, wenn Entfestigungsmodelle angewandt werden. Die Tatsache, daß die Breite des Lokalisierungsbereiches durch die Netzaufteilung bestimmt wird, ist das Resultat der Verschmierung. Man spricht vom Verlust der "Objektivität", die sich bei entfestigenden Werkstoffen besonders stark auswirkt. Das folgende Beispiel verdeutlicht die starke Netzabhängigkeit für den Fall der assoziierten J_2 -Plastizität mit Entfestigung.

8.3.1 Stauchungsversuch für ebenen Dehnungszustand.

Dieses Beispiel wurde aus [93] entnommen. Die Geometrie des 2D-Problems und die Materialparameter sind in Bild 8.8 gezeigt. Ein einfaches lineares Entfestigungsgesetz wurde gewählt.

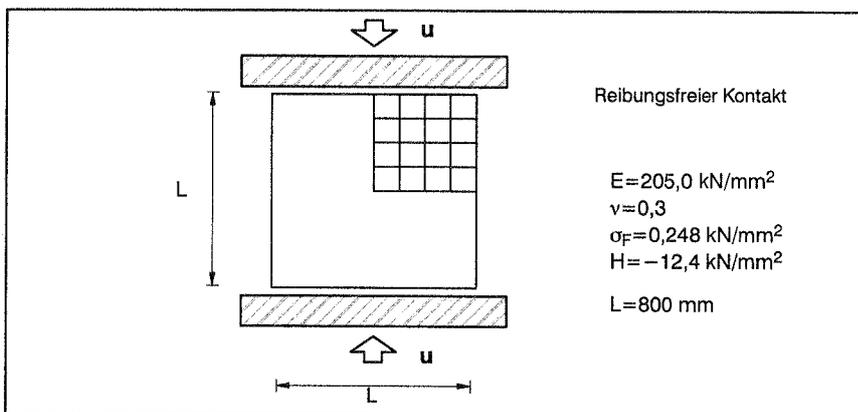


Bild 8.8: 2D–Stauchversuch

Die Last wird verschiebungskontrolliert aufgebracht, d.h. die vertikalen Verschiebungen an der oberen Fläche sind gleich. Es werden ein ebener Dehnungszustand und reibungsfreier Kontakt zwischen Werkzeug und Probe vorausgesetzt. Da keine nichtlokalen Bestandteile in der Theorie enthalten sind, ist zu erwarten, daß die Lösung im nachkritischen Bereich netzabhängig wird.

Bei diesem einfachen Beispiel eines ebenen Verzerrungszustandes und der J_2 -Plastizität ist die Lokalisierungsrichtung entlang der Diagonalen unter $\pm 45^\circ$. Für die finite Elementmodellierung werden HEXA8–E3 Elemente gleichmäßig angeordnet. Anfangsimperfektionen werden durch eine Änderung der Materialeigenschaften auf

$\sigma_F=0,234 \text{ kN/mm}^2$ und $H=11,0 \text{ kN/mm}^2$ im mittleren Bereich der Probe eingeführt. Es werden Netze mit 2×2 , 4×4 und 8×8 Elementen untersucht. Dabei wird die 15-Punkt-Integration benutzt.

Die Kontrolle der Belastung erfolgt mit einem Bogenlängenverfahren. Da bei vielen Problemen, die Entfestigung und Lokalisierung aufweisen, diese Algorithmen im nachkritischen Bereich versagen, wird eine alternative Nebenbedingung eingeführt. Dazu wird statt einer Kombination der Last- und Verschiebungsparameter eine Kombination der Dehnungskomponenten an einem kritischen Punkt des Körpers eingeführt (dazu siehe [17]). Als kritischer Punkt wird derjenige definiert, an dem die plastische Vergleichsdehnung $\bar{\epsilon}^P$ maximal ist. Dadurch versucht man, bei nichtlinearen Materialien auch für den nachkritischen Bereich, in dem herkömmliche Verfahren versagen, eine robuste Lösungsstrategie zu erlangen.

Bild 8.9 zeigt die Last-Verschiebungskurven für die drei Netzaufteilungen. Daraus erkennt man die Netzabhängigkeit der Ergebnisse von der Netzverfeinerung, also ein nicht objektives Verhalten.

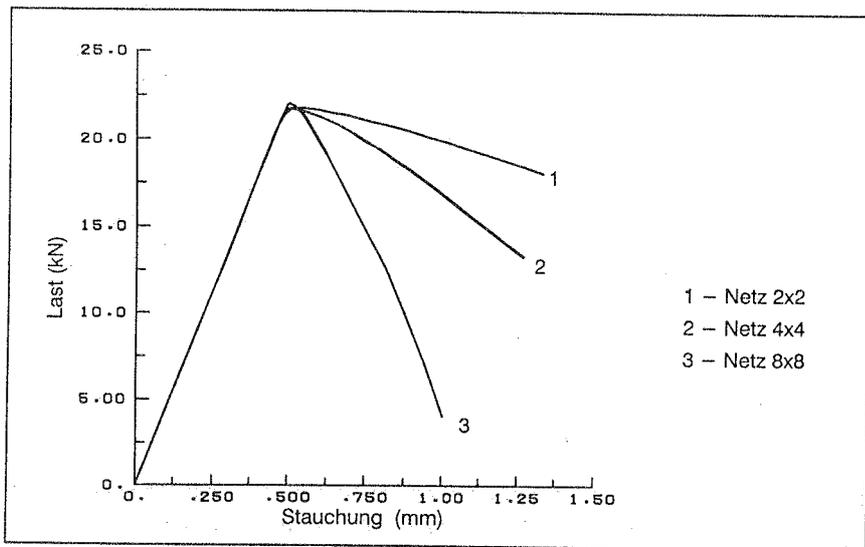


Bild 8.9: Darstellung der Netzabhängigkeit im Entfestigungsbereich

Das Thema der Erweiterung der Kontinuumstheorie auf einer nicht-lokalen Beschreibung ist in jüngster Vergangenheit von vielen Autoren erörtert worden. Im Gegensatz zu den lokalen Deskriptoren berücksichtigen die nicht-lokalen Werkstoffgesetze direkt den Einfluß der Nachbarschaft. Um die Kontinuumsbeschreibung zu bereichern, so daß bei Lokalisierungsvorgängen die Elliptizität der Feldgleichungen des zugeordneten

Randwertproblems erhalten wird, wurden einige Verfahren vorgeschlagen. Als Beispiele dazu lassen sich zitieren: netzabhängige Entfestigungsmodule [62] [93], nicht-lokale Entfestigungsmodule [7] [9], viskoplastische Regularisierung [49], Gradientenplastizität [43] und Cosserat-Theorie [44] [20]. Da es sich bei der vorliegenden Untersuchung um das Elementverhalten bei Lokalisierungsvorgängen handelt, werden die verschiedenen Methoden für objektive finite Elementlösungen nicht näher betrachtet, für eine ausführliche Diskussion zu diesem Thema siehe die Arbeit von Sluys [81].

Um die einigermaßen objektive Degradierung der Steifigkeit und Zähigkeit in einer einfachen Weise durch äquivalente Kontinuumskonzepte zu beschreiben, wird im Rahmen dieser Arbeit einfachheitshalber das Verfahren von netzabhängigen Entfestigungsmodulen bevorzugt. Diese Prozedur wurde von Pietruszczak und Mroz [62] vorgeschlagen und von anderen Autoren angewandt, siehe z.B. [93]. Die grundlegenden Gedanken dieses Verfahrens werden hier am Beispiel der J_2 -Plastizität zusammengefaßt.

8.3.2 Die Methode des netzabhängigen Entfestigungsmoduls

In der Arbeit von Pietruszczak und Mroz [62] wird ein Plastizitätsmodell für Schubversagen bei entfestigenden Materialien für das Mohr-Coulomb Reibungsgesetz präsentiert. Die Grundidee dieses Verfahrens ist das Beschränken des plastischen Fließens auf eine lokalisierte Scherfuge, wobei angenommen wird, daß diese innerhalb des finiten Elementes eingebettet ist. Dafür wird ein geometrischer Parameter eingeführt, der die Rolle einer charakteristischen Länge spielt. Dieser geometrische Parameter entspricht dem Volumenanteil des Elementes, in dem sich die plastischen Verformungen konzentrieren. Gedanklich wird das Element aus zwei Teilelementen zusammengesetzt, siehe Bild 8.10. In dem Teilelement (a) wird die plastische Verzerrung in einer Scherfuge mit der Breite d_s und dem Winkel α mit der x -Achse konzentriert. Außerhalb diesem Bereich wird das Element als starr betrachtet. Das Teilelement (b) zeigt ein rein elastisches Verhalten.

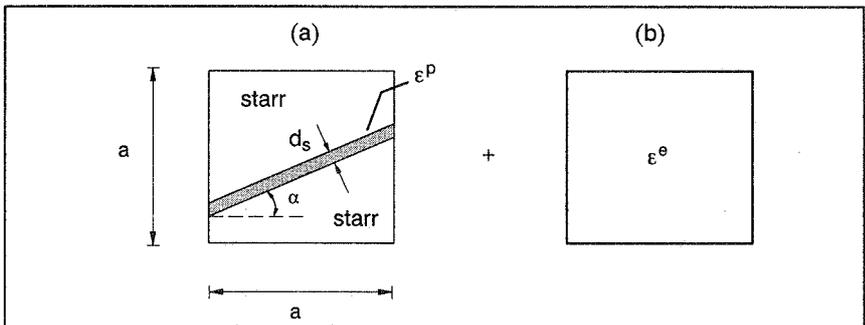


Bild 8.10: Aufteilung der elastischen und plastischen Dehnungen

Der geometrische Parameter wird durch die Relation des Volumens der Scherfuge und des Volumens des gesamten Elementes definiert.

$$\eta = \frac{V_s}{V_e} = \frac{A_s d_s}{V_e} \quad (8.6)$$

Das in [62] entwickelte Konzept für das Mohr–Coulomb Kriterium wird hier für die verschiebungsgesteuerte J_2 –Plastizität mit großen Dehnungen formuliert.

Nach der Annahme der Beschränkung des plastischen Fließens auf den Bereich V_s gilt die Fließregel Gl. (4.31) auch nur für diesen Bereich. Durch Homogenisierung des lokalisierten Versagens entsteht eine gemittelte Fließregel, die wie folgt definiert wird.

$$L_v \tau_p^m = L_v \mathbf{s}_p^m = 2\bar{\mu} \eta \lambda \mathbf{n} \quad (8.7)$$

Hierin kennzeichnet das hoch gestellte m eine gemittelte Größe. Das in Gleichung (8.7) eingeführte gemittelte Fließgesetz muß bei dem Projektionsalgorithmus beachtet werden. Die dadurch notwendigen Änderungen des plastischen Korrekturschrittes werden als nächstes beschrieben:

Die Gl. (8.7) entsprechenden plastischen Korrektorspannungen lauten:

$$\Delta \mathbf{s}_p^m = 2\bar{\mu}_{n+1} \eta \Delta \lambda \mathbf{n}_{n+1} \quad (8.8)$$

Die auf die Fließfläche projizierten Spannungen \mathbf{s}_{n+1}^m genügen der Fließfläche

$$\phi_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^m\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (8.9)$$

Damit folgt

$$\mathbf{s}_{n+1}^m = \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - 2\bar{\mu} \eta \Delta \lambda \mathbf{n}_{n+1} \quad (8.10)$$

oder

$$\|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\| = \|\mathbf{s}_{n+1}^m\| \left[1 + 2\bar{\mu} \eta \frac{\Delta \lambda^m}{\|\mathbf{s}_{n+1}^m\|} \right] \quad (8.11)$$

Die Bestimmungsgleichung für den plastischen Konsistenzparameter $\Delta \lambda^m$ gewinnt man aus (8.11) mit $\|\mathbf{s}_{n+1}^m\|$ aus (8.9).

$$g = \|\mathbf{s}_{n+1}^{tr}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) - 2\bar{\mu} \eta \Delta \lambda^m = 0 \quad (8.12)$$

Für $\bar{\epsilon}^p$ ist die diskrete Form der Evolutionsgleichung Gl. (4.45) zu verwenden.

Die obige nichtlineare Gleichung läßt sich numerisch mit dem Newton–Verfahren für $\Delta \lambda^m$ lösen, siehe auch Gl. (4.34) und Gl.(4.35).

$$\Delta\lambda_{k+1}^m = \Delta\lambda_k^m - \frac{1}{\eta} \left[\frac{\| \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} \| - 2\bar{\mu}\eta\Delta\lambda^m - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_F(\bar{\epsilon}^P(\Delta\lambda^m))}{2\bar{\mu} + \frac{2}{3}\frac{1}{\eta}H(\bar{\epsilon}^P(\Delta\lambda^m))} \right]_k \quad (8.13)$$

Der homogenisierte deviatorische Spannungstensor \mathbf{s}_{n+1}^m ist dann

$$\mathbf{s}_{n+1}^m = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} - 2\bar{\mu} \eta \Delta\lambda^m \mathbf{n}_{n+1} \quad (8.14)$$

Im Hinblick auf die quadratische Konvergenz des Newton–Verfahrens in der Nähe der Lösung ist bei der Linearisierung des tangentialen Stofftensors das durch die Homogenisierung modifizierte Integrationsverfahren zu berücksichtigen. Dies erfolgt analog zu der Herleitung im Anhang A, wobei die Bestimmungsgleichung für \mathbf{s} durch die für \mathbf{s}^m , Gl. (8.14), zu ersetzen ist. Somit lautet der Ausdruck für die konsistente Tangente

$$\mathbf{J}\mathbf{c} = \mathbf{J}\mathbf{c}_{\text{vol}} + (1 - \delta_1^m)\mathbf{J}\mathbf{c}_{\text{dev}}^{\text{tr}} + \delta_2^m \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \delta_3^m [\mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2]]^s \quad (8.15)$$

Die durch η modifizierten Koeffizienten sind nunmehr:

$$\begin{aligned} \delta_0^m &= \frac{1}{\eta + \frac{h}{3\bar{\mu}}} \\ \delta_1^m &= \frac{2\bar{\mu}\Delta\lambda^m}{\| \mathbf{s}^{\text{tr}} \|} \\ \delta_2^m &= 2\bar{\mu}\eta \left[\delta_0^m \left[1 - \frac{\frac{2}{3} \| \mathbf{s}^{\text{tr}} \| \Delta\lambda^m}{\bar{\mu}} \right] - \delta_1^m \right] \\ \delta_3^m &= 4\bar{\mu}\Delta\lambda^m\eta + 2\delta_0^m \| \mathbf{s}^{\text{tr}} \| \end{aligned} \quad (8.16)$$

Anmerkung: Vergleicht man (8.13) mit dem Ergebnis aus (3.35) stellt man fest, daß für lineare Entfestigungsregeln die Einführung des geometrischen Parameters η letztlich zu einer neuen Definition des Entfestigungsmoduls H führt.

$$H^m = \frac{H}{\eta} = \frac{V^e}{A_{\text{scd}}^s} H \quad (8.17)$$

Eine Variante zu dem oben beschriebenen Verfahren stellt das in [93] von Willam und Montgomery vorgeschlagene Verfahren dar, welches auf der Bruchenergie basiert. Dabei wird der Teilbereich des Materials, in dem ein lokalisierter Bruch stattfindet, durch die Einbettung von bruchmechanischen Kennwerten in den Rahmen der lokalen Werkstoffgesetze des Kontinuums abgegrenzt. Die Bruchzähigkeit im abfallenden Ast der Spannungs–Dehnungsbeziehung wird über eine charakteristische Länge umgesetzt, die die Bruchenergiefreisetzungsrates pro Flächeneinheit durch eine äquivalente Energiedichte pro Volumeneinheit ausdrückt. Dieses Konzept führt, analog zu dem Verfahren von Pietruszczak und Mroz, zu einer neuen Definition des Entfestigungsmoduls in den Bruchvariablen. Die direkte Zuordnung zwischen dem bruchenergiebasierten Verfahren und dem in [62] wird in [93] erläutert.

8.3.3 Anwendung der Methode des netzabhängigen Entfestigungsmoduls

Das Beispiel des Stauchversuchs im ebenen Dehnungszustand wird jetzt mit der beschriebenen Methode zur Beseitigung der Netzabhängigkeit gerechnet. Dafür ist eine zusätzliche Information notwendig. Für das Entfestigungsmodell von Pietruszczak und Mroz stellt diese Information einen geometrischen Parameter dar, nämlich die Scherfugenbreite h_s . Hier wird nach [93] $h_s = 125$ mm angenommen. Dies führt für die verschiedenen Netze 2x2, 4x4 und 8x8 nach Gl. (8.6) zu folgenden Werten für η : 0,625, 1,25 und 2,5. Die Ergebnisse der Berechnung mit den modifizierten Entfestigungsmodulen sind in Bild 8.11 dargestellt. Im Gegensatz zu Bild 8.10 ist die Objektivität der finiten Elementlösung nunmehr ersichtlich. In Bild 8.12 sind die errechneten Scherfugen abgebildet.

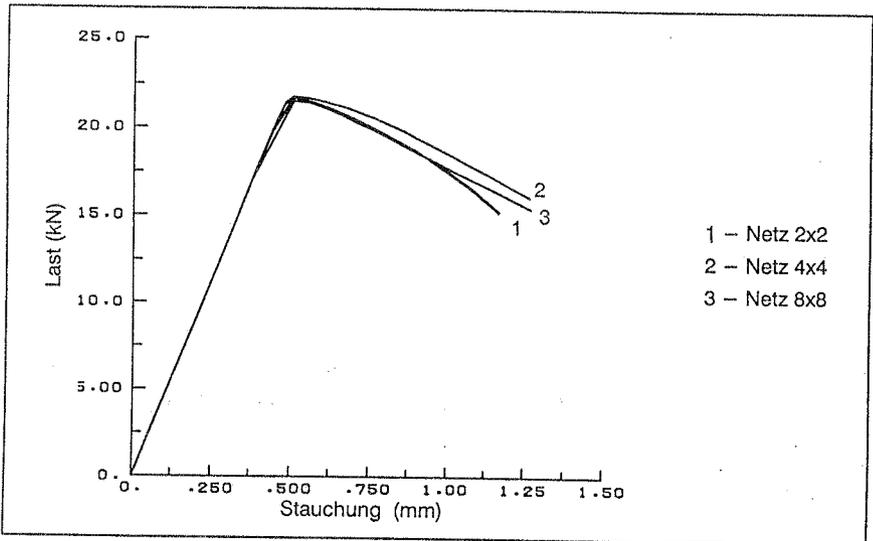


Bild 8.11: Darstellung der Objektivität bei netzabhängigem Entfestigungsmodul

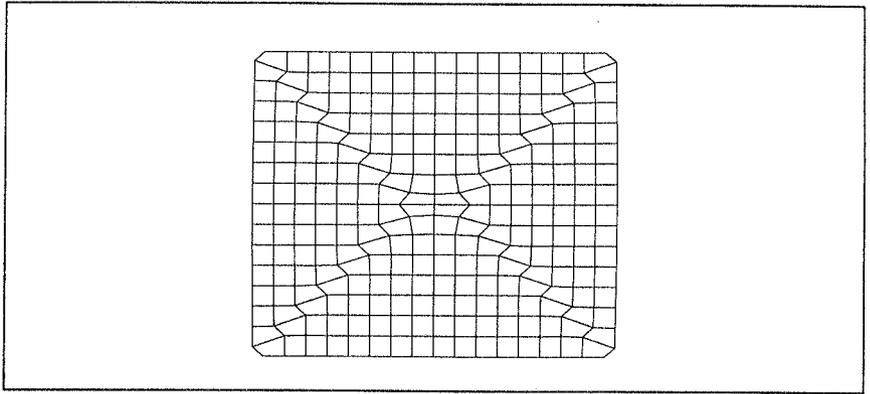


Bild 8.12: 2D–Stauchung: Scherfugen

9 Anwendung von 3–D Stoffgesetzen auf dünnwandige Tragwerke

Grundsätzlich können Schalentragswerke durch 3D–Kontinuumselemente untersucht werden. Es ist aber bekannt, daß diese Elemente bei dünnwandigen Strukturen ein zu steifes Verhalten aufweisen. Bei den Schalenelementen wird dieser unerwünschte Effekt vermieden, indem die Deformation der Struktur in Dickenrichtung nicht als eigenständige Unbekannte in der Elementformulierung auftritt. Bei einer solchen Formulierung behält der Schalendirektor während des Deformationsprozesses seine Länge bei. Die Spannungen in Dickenrichtung werden zu null gesetzt und das Werkstoffgesetz entsprechend reduziert. Beispiele sind die Kirchhoff–Love– und die Reissner–Mindlin–Formulierungen. Man spricht von einer 3–Parameter– bzw. 5–Parameter–Schalentheorie. Für die Plastizität bei kleinen Dehnungen wird diese Vorgehensweise z.B. in [64] gewählt.

Für Flächentragswerke, bei denen die Spannungen und Dehnungen in Dickenrichtung von Bedeutung sind, oder für nichtlineare Materialgesetze, für die eine explizite Kondensation nicht durchführbar ist oder aufwendige Gleichungen liefert, muß die Schalentheorie erweitert werden. Dreidimensionale Spannungszustände treten bei Schalen z.B. auf für Kontaktprobleme oder bei der Delamination von Schalen mit geschichtetem Aufbau. Große elastische Deformationen bei gummiartigen Materialien und große plastische Deformationen bei Umformvorgängen stellen Schalenberechnungen dar, bei denen "große" Dickenänderungen vorkommen.

Eine Erweiterung der Schalentheorie zur Berücksichtigung der Spannungen in Dickenrichtung wird durch die Anwendung einer 6–Parameter–Theorie mit dehnbarem Schalendirektor erreicht. Dabei wird die Dickenverzerrung ϵ_{33} als unabhängige Variable eingeführt. Für eine ausführliche Darstellung dieser Theorie sei auf [71] und [12] verwiesen. Mit der Annahme eines linearen über die Schalendicke veränderlichen Verschiebungsfeldes folgt daraus eine konstante Dickenverzerrung ϵ_{33} . Hierzu ist es notwendig, daß auch die Normalspannung in Dickenrichtung σ_{33} konstant über die Dicke (oder null) ist. Wie in [13] gezeigt wird, kann die Nichterfüllung dieser Bedingung bereits bei einer geometrisch und materiell linearen Analyse einen relativen Fehler in der Größenordnung von v^2 oder größer verursachen. Dies ist z.B. der Fall bei Schalen, die hauptsächlich durch Biegung beansprucht werden. Diese Formulierung ermöglicht allerdings die direkte Anwendung von vorhandenen dreidimensionalen Werkstoffgesetzen.

Eine Erweiterung der 6–Parameter–Schalentheorie wird von Büchter und Ramm [13] vorgeschlagen, so daß die Unstimmigkeit der Spannungen und Dehnungen über die Schalendicke beseitigt wird. Die Erweiterung, dargestellt in [13], basiert auf dem in Ka-

pitel 6 dargestellten EAS–Konzept und besteht in der Einführung eines zusätzlichen Dehnungsparameters, d.h. die 6–Parameter–Schalenformulierung wird auf eine 7–Parameter–Formulierung erweitert. Im Anhang B wird diese Formulierung kurz beschrieben. Die Bezeichnungsweise folgt [14].

Eine Alternative zur Lösung der Unstimmigkeiten zwischen Dehnung und Spannung in Dickenrichtung ist die Verwendung eines Kontinuumselementes. Ein Vorteil dieses Vorgehens ist, daß nur Verschiebungen (keine Rotationen) als Freiwerte auftreten. Für herkömmliche Verschiebungselemente müssen dabei mindestens drei Knoten über die Schalendicke (quadratischer Ansatz für die Verschiebungen) angesetzt werden. Dafür bietet sich das 20–knotige Hexaeder–Element (HEXA20) an, welches lineare Dehnungen enthält und mit reduzierter Integration (2x2x2) ein hinsichtlich der Biegung gutes Verhalten zeigt. Nachteile dieses Elementes sind der große rechnerische Aufwand und die 6 durch die reduzierte Integration eingeführten zusätzlichen Null–Eigenwerte ("zero–energy–modes").

Anstelle reiner 3D–Verschiebungselemente können auch EAS–Erweiterungen des 8–knotigen Kontinuumselementes eingesetzt werden. Durch die Erweiterung der Verzerrungsfelder sind auch sie in der Lage, lineare Dehnungen nachzubilden. Diese Elemente werden ebenfalls hier für das elastoplastische Materialverhalten bei Flächentragwerken eingesetzt.

9.1 Anwendung der 7–Parameter–Formulierung bei Elastoplastizität

Die Anwendung der 7–Parameter–Formulierung zusammen mit einem vollständigen 3D–Werkstoffgesetz ohne Kondensation wird anhand des im Kapitel 4 beschriebenen Materialmodells für Elastoplastizität bei großen Verzerrungen gezeigt. Infolge der dehnungskontrollierten Natur der EAS–Formulierung ist die Implementierung von elastoplastischen Modellen im Vergleich zu einer echten gemischten Formulierung stark vereinfacht. Der Projektionsalgorithmus für das Kontinuum nach Tabelle 4.1 kann deshalb ohne Änderung für die 7–P–Formulierung eingesetzt werden.

Anmerkung: Für den Deformationsgradienten \mathbf{F} und den Tangentenmodul \mathbf{C} , z.B nach Gl. (5.49), ist bei der 7–P–Formulierung die modifizierte Metrik der verformten Konfiguration \mathbf{g}^* bereitzustellen:

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{G} + 2(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}) \quad (9.1)$$

9.2 Numerische Beispiele

Die 6-Parameter- und 7-Parameter-Schalen-Formulierungen für die J_2 -Plastizität mit dem hyperelastischen Teilstoffgesetz werden an einigen Beispielen überprüft. Parallel dazu wird auch die Güte der 3D-EAS-Kontinuumselemente zur Berechnung von inelastischen dünnwandigen Tragwerken mit nichtlinearer Kinematik getestet. Für die lineare Analyse hat sich bereits ihre Anwendbarkeit durch die Beispiele aus Kapitel 6.4 bestätigt.

Bei den folgenden numerischen Untersuchungen werden 8-knotige Schalenelemente eingesetzt. Die numerische Integration über die Schalenfläche erfolgt mit der Gauß-Integration zweiter Ordnung. Über die Schalendicke wurde die Integration für die 6-P- und 7-P-Modelle mit 6 Gauß-Punkten durchgeführt.

Das bereits im Programm CARAT [82] vorhandene 5-P-Modell wird zum Vergleich herangezogen. Für dieses Element ist das J_2 -Plastizitätsmodell (mit Kondensation) für kleine Dehnungen vorhanden. Die Integration über die Querschnittshöhe wird für dieses Modell nach der Simpson-Integrationsregel durchgeführt. Hier werden sieben Punkte über die Querschnittshöhe benutzt.

9.2.1 Quadratplatte unter Gleichlast

Bei diesem Beispiel wird das Tragverhalten der Quadratplatte unter gleichförmig verteilter Querlast untersucht. Um die Membranwirkung abzumindern und die Biegetragfähigkeit der Platte stärker zu betonen, wird die Lagerung allein durch Behinderung der Querverschiebung u_z idealisiert ("soft-support"). Wegen Symmetriebedingungen wurde ein Viertel der Struktur mit einem Netz von 5×5 Schalenelementen nach den 5-, 6- und 7-Parameter-Theorien diskretisiert. Unmodifizierte 3D-konstitutive Gleichungen für ideale Elastoplastizität wurden für die 6- und 7-Parameter-Formulierungen benutzt, um den Einfluß der Variablen β_{33} zu verdeutlichen.

Eine vollkommen nichtlineare Strukturanalyse wurde durchgeführt. Im Last-Verschiebungsdiagramm (Bild 9.3) ist der Lastfaktor λ über der Mittenverschiebung aufgetragen. Für diese dünne Platte stimmen die Ergebnisse der 5- und 7-P-Theorien beinahe überein, während die 6-P-Theorie zu einer numerischen Versteifung führt. Dieser Versteifungseffekt kann dann nur durch die Kondensation des Materialgesetzes beseitigt werden.

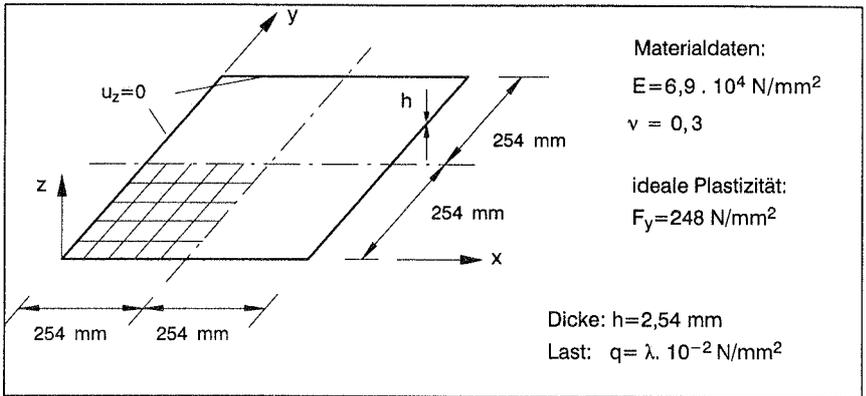


Bild 9.1: Quadratplatte: Geometrie und Materialdaten

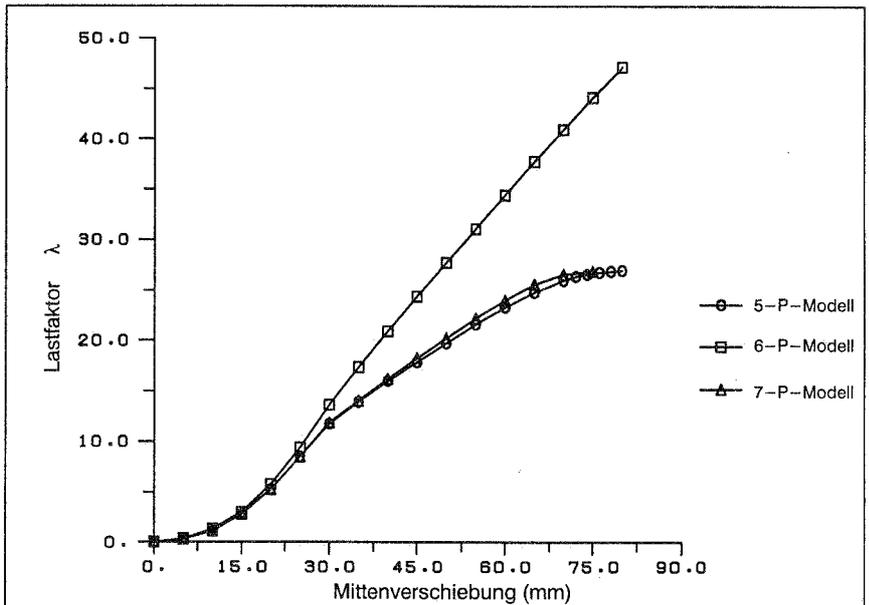


Bild 9.2: Last-Verschiebungsdiagramm

9.2.2 Halbkugelschale mit punktwiser Belastung

Bild 9.3 zeigt den Viertelausschnitt einer am Rand verschieblichen Halbkugel, die mit zwei nach außen und zwei nach innen zeigenden Kräften belastet wird. Das Viertelsystem wurde mit 192 biquadratischen Schafenelementen diskretisiert. Die Ergebnisse der 6- und 7-P-Theorien werden mit denen aus einer Analyse mit 3D-EAS-Elementen verglichen. Für beide Modelle wurde dasselbe FE-Netz benutzt. Die Berechnung erfolgt mit finiter Verzerrungskinetik.

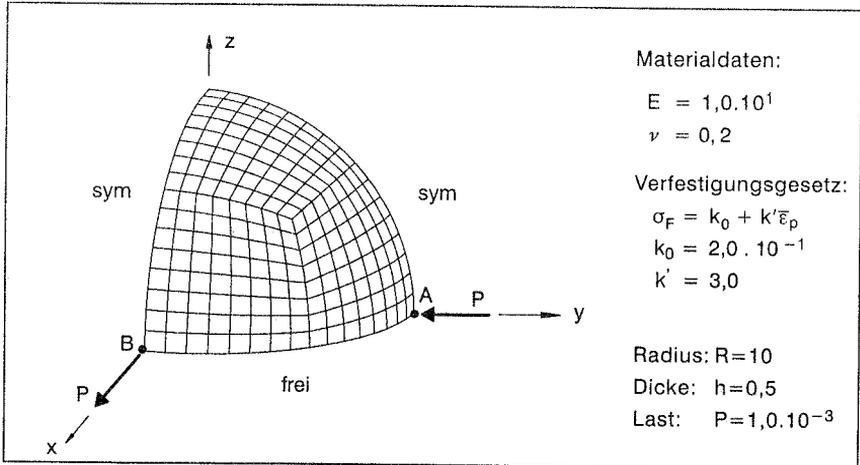


Bild 9.3: Halbkugel: Geometrie und Materialdaten

Im Bild 9.5 sind die Last-Verschiebungskurven für die Verschiebungen in Lastrichtung an den Punkten A und B dargestellt. Die Ergebnisse sind denen aus Simo et al. [71] gegenüber gestellt worden. Für die nach außen gerichtete Verschiebung (Punkt B) liegen die Ergebnisse der drei Analysen beieinander. Für die nach innen gerichtete Verschiebung (Punkt A) unterscheiden sich jedoch die Ergebnisse der 6-P-Theorie von den fast auf einander liegenden Ergebnissen der 7-P-Theorie und der Kontinuums-elemente. Die Abweichungen der Ergebnisse von der Berechnung in [71] kann an dem dort angewandten Fließkriterium liegen, welches in Schalenschnittgrößen formuliert ist. Eine vollständige Identifizierung der Materialparameter (Verfestigungsparameter) war deshalb nicht möglich.

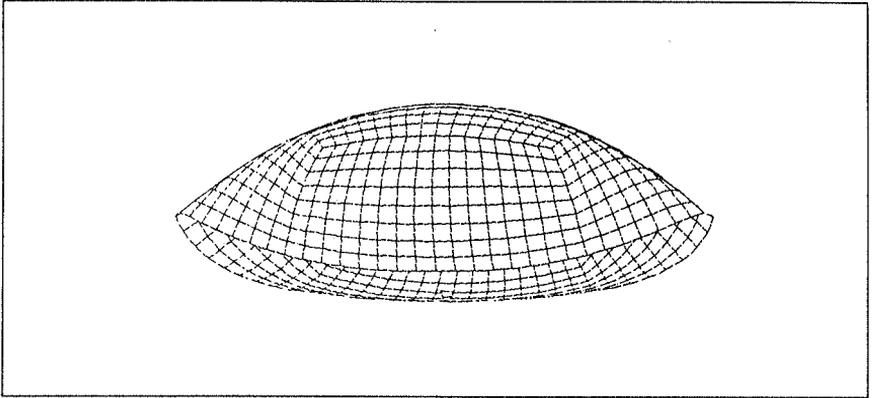


Bild 9.4: Halbkugel: Verformungsfigur

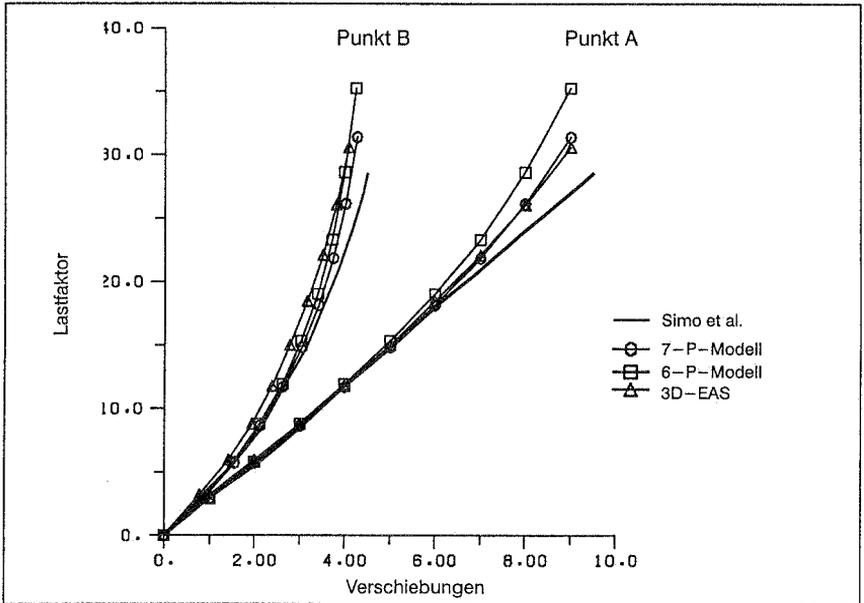


Bild 9.5: Last-Verschiebungskurven an den Punkten A und B

9.2.3 Kreiszyylinder unter Linienlast

Betrachtet wird ein dicker Zylinder mittlerer Länge mit einem R/h -Verhältnis von etwa 5 unter einer Linienlast in Längsrichtung ($p=1,0 \cdot 10^{-2}$ kN/cm). Die Geometrie und die Materialdaten für dieses Beispiel sind im Bild 9.6 dargestellt. Es wird ein Viertel des Zylinders mit Symmetrierandbedingungen und einem 12×12 Elementnetz berechnet. An dem Zylinder sind sowohl rein geometrisch nichtlineare als auch geometrisch und materiell nichtlineare Rechnungen durchgeführt worden, siehe Last-Verschiebungskurven für die vertikale Verschiebung in der Mitte des Zylinders (Punkt A) im Bild 9.8. Daraus ist festzustellen, daß das 6-P-Modell viel zu steif ist, besonders im plastischen Bereich. Das 7-P-Modell, das im elastischen Bereich mit dem 3D-Modell übereinstimmt, zeigt für große plastische Verzerrungen eine Abweichung von den Ergebnissen der 3D-Analyse. Für den dicken Zylinder ist diese Abweichung auf die unterschiedlichen FE-Formulierungen zurückzuführen, d.h. einerseits auf die Schalenformulierung mit einer Erweiterung über die EAS-Methode, andererseits auf das 3D-EAS-Element

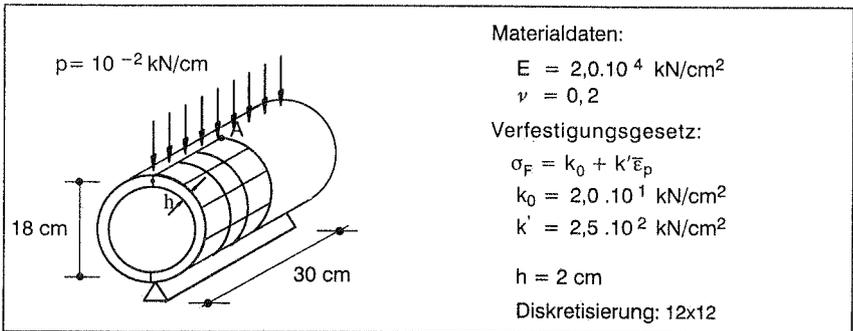


Bild 9.6: Kreiszyylinder: Geometrie und Materialdaten

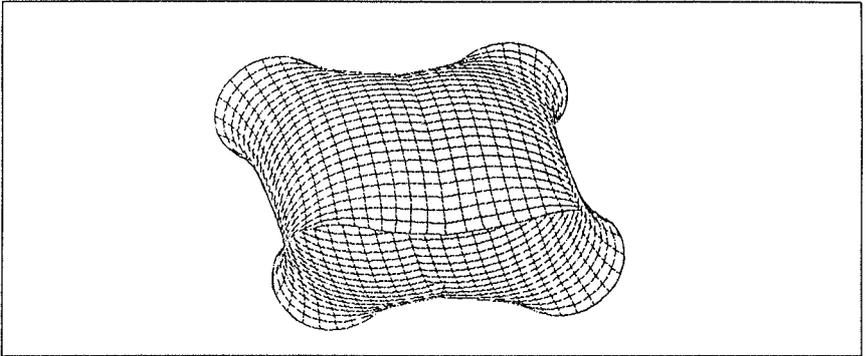


Bild 9.7: Kreiszyylinder: Verformungsfigur

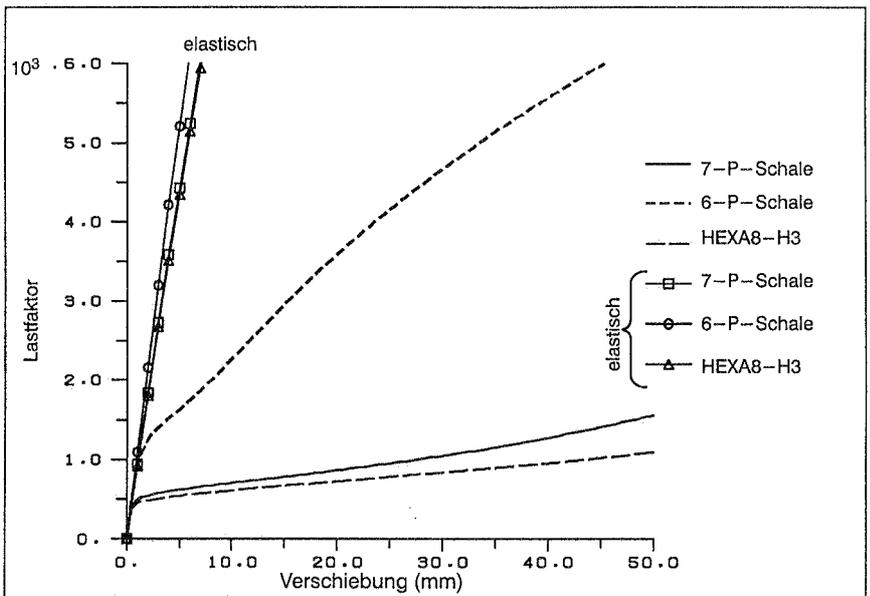


Bild 9.8: Kreiszyylinder: Last-Verschiebungsdiagramm

9.2.4 Versagensanalyse einer flachen zylindrischen Schale ("Scordelis-Lo Roof")

Dieses Beispiel wurde bereits mehrfach zur Überprüfung von Element- und Materialformulierungen verwendet, wobei die Analysen meistens auf den vorkritischen Bereich eingeschränkt wurden. Eine Ausnahme dazu stellt [58] dar, wo eine Versagensanalyse durchgeführt wurde.

Das Beispiel wird hier anhand von 5-, 6- und 7-Parameter-Schalenelementen untersucht. Für die 6- und 7-Parameter-Modelle wird das elastoplastische Materialmodell des Kontinuums für große Verzerrungen eingesetzt. Für das 5-Parameter-Modell wird eine Formulierung für Elastoplastizität bei kleinen Verzerrungen auf das degenerierte Kontinuum angewandt (also mit Kondensation).

In [58] wurde das Morley-Dreieckselement für dünne Schalen verallgemeinert und in Verbindung mit einem Materialmodell für die J_2 -Plastizität bei großen Verzerrungen unter der Bedingung eines ebenen Spannungszustandes eingesetzt. Die Ergebnisse aus [58] werden hier gegenübergestellt.

Die Geometrie und die Materialeigenschaften zu diesem Beispiel werden im Bild 9.9 wiedergegeben. Wegen Symmetrieüberlegungen wird die Analyse an einem Viertel des Tragwerkes mit einem FE-Netz von 12×12 Schalenelementen durchgeführt.

Eine zweite Modellierung der Schale mit 3D-Elementen wird hier ebenfalls untersucht. Dabei werden das EAS-Element HEXA8-H6 und das 20-knotige quadratische Element HEXA20 benutzt. Bei dem Modell mit HEXA20-Elementen erfolgt die Diskretisierung mit einem Netz von $12 \times 12 \times 2$ Elementen. Wegen des mangelhaften Verhaltens des HEXA8-H3-Elementes bei dünnwandigen Flächentragwerken, festgestellt bei den linearen Berechnungen im Kapitel 6, wird dieses Element bei der Idealisierung dieses Beispiels nicht angewandt.

Bei den Analysen wird auch der Einfluß der numerischen Integration untersucht. In der Schalendicke wurde für alle Modelle die 2×2 Gauß-Integration benutzt. Die Integration in der Schalendicke erfolgte für die 5-P-Formulierung mit einer Simpson-Integrationsregel, wobei Analysen mit 3, 5 und 7 Integrationspunkten durchgeführt worden sind. Bei den Schalenmodellen mit dehnbarem Direktor und bei den 3D-Modellen wurden Analysen mit 3- und 6-Gauß-Punkten über die Schalendicke betrachtet. Als Vergleichsmodell wurde die Schale mit einem Netz von $12 \times 12 \times 2$ HEXA-20-Elementen und Gauß-Integration $2 \times 2 \times 6$ idealisiert. Die Berechnung erfolgt mit dem Bogenlängen-Verfahren [63].

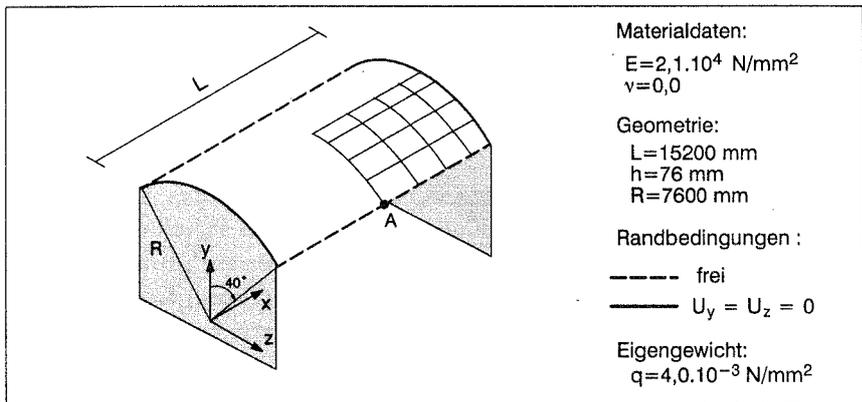


Bild 9.9: Scordelis–Lo Schale

Die Last und die vertikale Verschiebung am Punkt A sind in Bild 9.11 und 9.12 für die verschiedenen Modellierungen aufgezeichnet. Aus Bild 9.11 erkennt man, daß alle FE-Modelle bis zu dem Punkt B auf dem Diagramm dieselben Ergebnisse liefern. Weder der finite Elementtyp noch die Integration üben Einfluß auf das Strukturverhalten in diesem Bereich aus. Ab Punkt B unterscheiden sich die Ergebnisse der verschiedenen Formulierungen, wobei die 6- und 7-Parameter-Schalenmodelle und die 3D-Modelle eine höhere kritische Last als das 5-Parameter-Schalenmodell aufweisen. Trotzdem ist das globale Strukturverhalten für alle Modelle gleich, d.h. es bildet sich ein plastisches Firstscharnier um die Längsachse, was den akuten Abfall der Last-Verschiebungskurve verursacht. Dieser Mode, siehe Bild 9.10 wird von allen Schalenmodellen und von dem 3D-Modell erfaßt. Die Ergebnisse des 6-Parameter-Modells zeigen ein zu steifes Verhalten. Dies bestätigt die wichtige Rolle der Dehnungen in Dickenrichtung, falls ein vollständiges 3D-Werkstoffgesetz ohne Kondensation in der Schalenberechnung eingesetzt wird.

Durch weitere Belastung über den kritischen Punkt hinaus wird eine zweite Versagenskonfiguration erreicht. Diese Versagenskonfiguration hat sich als sehr empfindlich gegenüber der gewählten numerischen Integration gezeigt. Es wurden je nach Integrationstyp und -ordnung drei mögliche Versagensformen festgestellt. Sie sind in Bild 9.13 dargestellt.

Alle Berechnungen mit den 3D-Modellen lieferten dasselbe allgemeine Verhalten, wobei die Versagensform dem Mode 1 entspricht. Die Ergebnisse mit dem 7-P-Schalenelement entsprechen den der 3D-Analysen und stellen auch Mode 1 dar. Die Berechnung mit dem 6-P-Schalenelement führte bereits bei kleinen Verschiebungen zu unbrauchbaren Ergebnissen. Der Endzustand entspricht aber auch Mode 1. Die hier

genannten Ergebnisse entstanden aus Analysen mit großer Verzerrungskinetik und entsprechen den Last–Verschiebungsdiagramm in Bild 9.11.

Bei den Analysen mit dem 5–P–Schalenmodell (mit Kondensation des Materialgesetzes) wurde, je nach Anzahl der Simpson–Integrationspunkte, ein unterschiedliches Verhalten festgestellt. Mit drei über die Dicke verteilten Integrationspunkten entstand das weichere Modell, welches den Mode 3 nachbildet. Die Berechnung mit fünf Punkten ergab eine Lösung, die dem 3D–Modell und dem 7–P–Modell ähnlich ist. Dabei wird Mode 1 als Versagensform angenommen. Die Berechnung mit sieben Punkten zeigt ein durchschnittliches Verhalten zwischen den beiden anderen Regeln. Daraus entsteht eine Verformungsfigur nach Mode 2. Diese Ergebnisse sind in dem Last–Verschiebungsdiagramm im Bild 9.12 eingetragen.

Als numerische Vergleichslösung ist im Bild 9.12 die Last–Verschiebungskurve aus [58] dargestellt. Die Versagensform aus [58] stimmt mit Mode 3 überein. Die Anzahl der Schichten zur Diskretisierung der Dicke wird dort nicht angegeben.

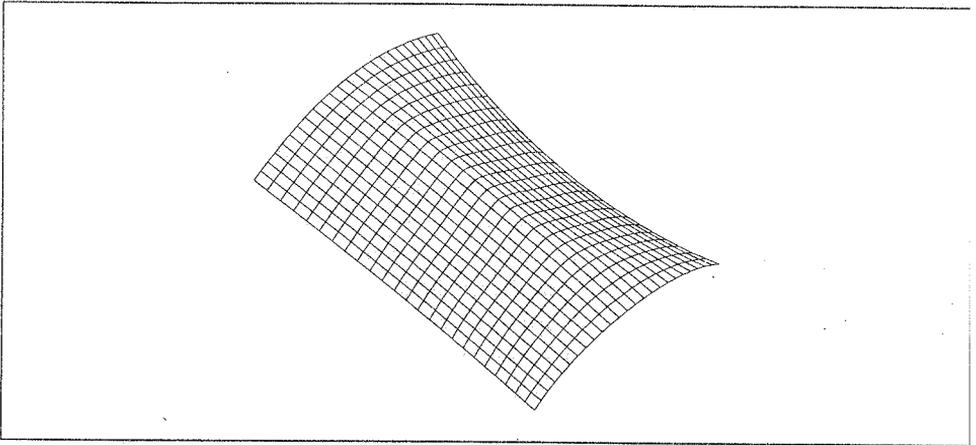


Bild 9.10: *Scordelis–Lo Schale : Firstscharnier*

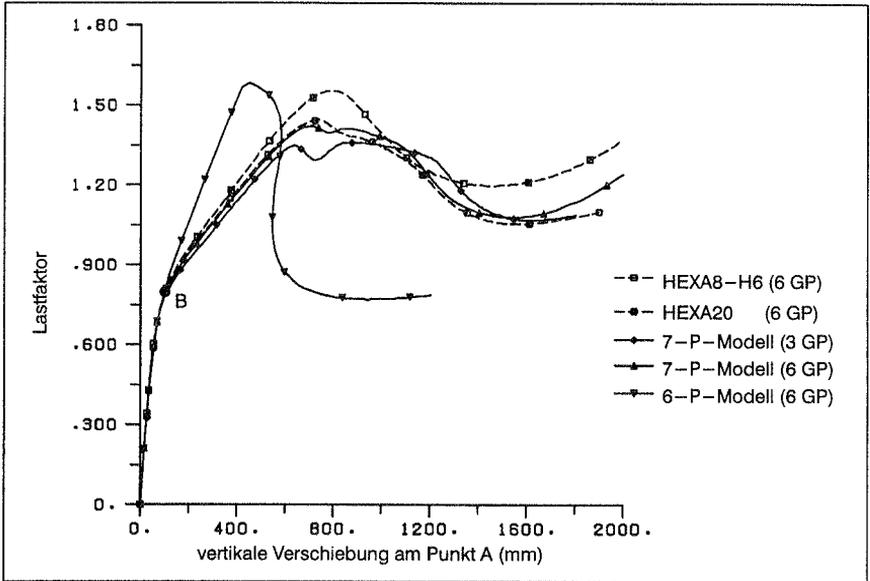


Bild 9.11: Scordelis-Lo Schale: Last-Verschiebungsdiagramm mit 7-Parameter-Schalenelementen und 3D-Elementen

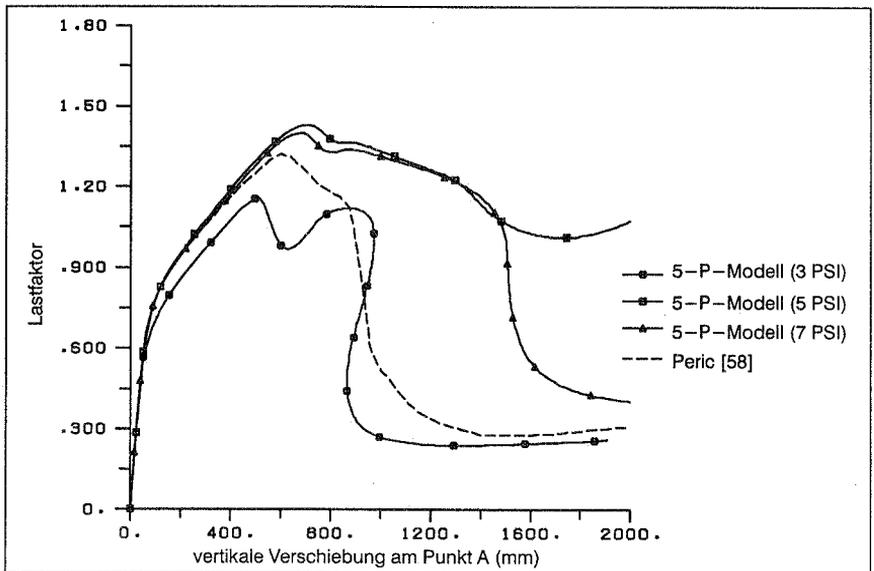


Bild 9.12: Scordelis-Lo Schale: Last-Verschiebungsdiagramm mit 5-Parameter-Schalenelementen

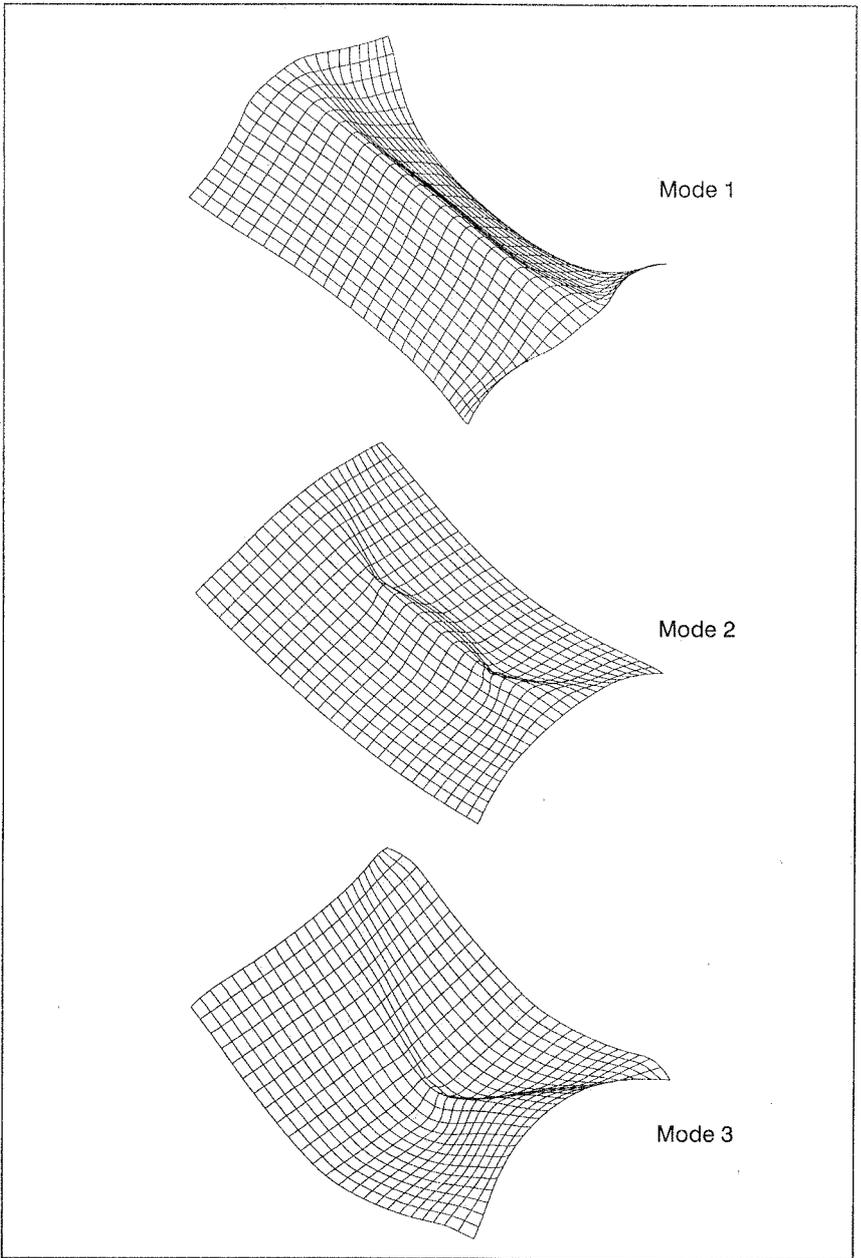


Bild 9.13: Scordelis–Lo Schale: Versagensformen

9.2.5 Zusammenfassung

Die numerischen Beispiele zeigen, daß für den Einsatz von unmodifizierten 3D-Materialgesetzen die Dehnungen in Dickenrichtung ϵ_{33} auch bei relativ dünnen Schalen relevant sein können. Jedoch entstehen dann fehlerhafte Ergebnisse, wenn die Dehnung ϵ_{33} konstant über die Dicke angenommen wird (6-P-Theorie). Durch die Einführung einer zusätzlichen Variablen β_{33} nach einem EAS-Konzept entsteht eine 7-Parameter-Formulierung, wobei β_{33} auf Elementebene eliminiert werden kann. Bei den numerischen Berechnungen hat sich die Brauchbarkeit dieser Formulierung zur Behandlung von plastischen Deformationen bei dicken und dünnen Schalen bestätigt. Wegen der expliziten Dickenintegration bleibt die typische numerische Effizienz der Schalenmodelle erhalten.

Die 3D-EAS-Formulierung wiederum gibt das Strukturverhalten der untersuchten Flächentragwerke wieder.

10 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die numerische Analyse von 3D- und Flächentragwerken mit großen elastoplastischen Deformationen. Besonderer Wert wird auf die Analyse von Spezialfällen gelegt, bei denen eine Konzentration plastischer Formänderungen bzw. Formänderungsgeschwindigkeiten beobachtet wird.

In dieser Studie wird ein Konzept für die Beschreibung plastischer Vorgänge bei großen Verzerrungen untersucht, das als wesentliche konstitutive Annahme die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten zugrunde legt. Stoffgesetze werden hierbei zunächst auf der Zwischenkonfiguration formuliert und dann auf die Momentankonfiguration übertragen. Für das elastische Teilstoffgesetz wird ein hyperelastisches Stoffgesetz verwendet, so daß die Spannungen direkt aus den elastischen Verzerrungen errechnet werden. Die Frage der inkrementellen Objektivität tritt bei solchen Gesetzen nicht auf. Die Ableitung des im plastischen Bereich gültigen Fließgesetzes erfolgt aus dem *Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit*. Speziell wird hier die Formulierung auf die J_2 -Fließtheorie mit isotroper Verfestigung angewandt.

Zur Berechnung der statischen Randwertprobleme der Kontinuumsmechanik wird das gekoppelte System von partiellen Differentialgleichungen, bestehend aus den kinematischen Beziehungen, dem lokalen Gleichgewicht, dem Materialgesetz und den Randbedingungen, mittels der Finite Element Methode näherungsweise gelöst. Die Finite Element Modellierung erfährt hierbei im Hinblick auf die plastische InkompRESSibilität und die großen Verzerrungen, die zu hoch verzerrten Elementnetzen führen können, besondere Beachtung.

Als Alternative zur Verschiebungsformulierung, die sich zur Modellierung solcher Problemstellungen als ungeeignet zeigt, wird das *Enhanced Assumed Strain (EAS)*-Konzept gewählt. Dabei werden die Verzerrungen durch zusätzliche Verzerrungsfelder angereichert. Basis dieses Konzepts ist ein Hu-Washizu 3-Feld-Funktional, das sich durch den Zwang einer Orthogonalitätsbedingung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsfeldern auf ein 2-Feld-Prinzip reduziert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die EAS-Formulierung auf die Beschreibung großer Deformationen erweitert und am Beispiel des Kontinuumelements eingesetzt. Hierfür wurde das Energiefunktional in den Größen der Momentankonfiguration formuliert.

Zur Lösung der nichtlinearen mechanischen Gleichungen wird auf das Newton-Verfahren zurückgegriffen. Die lokale numerische Zeitintegration des Werkstoffmodells erfolgt implizit mit dem Euler-Korrektor-Verfahren. Unter Berücksichtigung des gewählten Integrationsverfahrens wird der konsistente tangentielle Stofftensor gebildet. Der wesentliche Vorteil der konsistenten Linearisierung liegt in der quadratischen Konvergenz

des Newton–Verfahrens in der Nähe des Lösungspunktes, was anhand der numerischen Beispiele in den Kapiteln 7, 8 und 9 belegt werden konnte.

Die Güte der Elementformulierung und die Charakterisierung des Materialverhaltens im großen Verzerrungsbereich wird anhand von Beispielrechnungen getestet. Daraus ist die Eignung der EAS–Formulierung für die Wiedergabe der plastischen InkompRESSibilität und die Darstellung hoch verzerrter Geometrien zu ersehen. Auch die Analyse plastischer Lokalisierungen bestätigt diese günstige Wirkung.

Bei der Berechnung von Flächentragwerken wird das 3D–Materialmodell für die J_2 –Fließtheorie in Verbindung mit einer Schalentheorie mit dehnbarem Direktor angewandt. Bei dieser Schalenformulierung wird die Dickenverzerrung als unabhängige Variable eingeführt. Dies ermöglicht die direkte Anwendung von vorhandenen dreidimensionalen Werkstoffgesetzen (ohne Kondensation). Das "locking" in Dickenrichtung wird hier mit einer EAS–Erweiterung der Dickenverzerrung vermieden.

Es sei jedoch besonders hervorgehoben, daß das hier dargestellte Werkzeug das Verfolgen von Versagensprozessen ermöglicht und einen hilfreichen Einblick in Versagensmechanismen zuläßt. Damit können Parameterstudien für die weitere Entwicklung wirtschaftlicher und sicherer Konstruktionen durchgeführt werden.

Im Anschluß an die vorliegende Arbeit können im Hinblick auf die Simulation von Umformprozessen die thermischen Vorgänge betrachtet werden. Auch die Untersuchung der Anwendbarkeit der 3D–EAS–Elemente bei Problemen des Kontakts oder der Delamination kann dabei von Vorteil sein. In das vorgestellte elastoplastische Materialmodell für endliche Verzerrungen lassen sich weitere Werkstoffmodelle einbetten. Zur Beschreibung des Bauschinger–Effekts bei Metallen sind z.B. Modelle mit kinematischer Verfestigung von Interesse.

Obwohl sich viele Untersuchungen mit der wirklichkeitsnahen Beschreibung des Tragverhaltens von Strukturen befaßt haben, bleibt das volle Verständnis des nachkritischen Verhaltens im inelastischen Bereich weiterhin eine offene Frage. Die konventionelle Modellierung der Materialentfestigung ist nicht ausreichend, da die Ergebnisse weitgehend von der Diskretisierung bestimmt werden. Trotz der Vielzahl von Veröffentlichungen zum Thema der Objektivität der Ergebnisse steht immer noch keine allgemein gültige Lösung zur Verfügung.

Literatur

- [1] Andelfinger, U.: Untersuchung zur Zuverlässigkeit hybrid–gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke. Bericht 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1991).
- [2] Andelfinger, U.; Ramm, E.: EAS–elements for two dimensional, three–dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR–elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **36**, 1311–1337 (1993).
- [3] Andelfinger, U.; Ramm, E.; Roehl, D.: 2D and 3D enhanced assumed strain elements and their application in plasticity. In Owen, D.R.J; Hinton, E.; Onate, E. (Eds.), *Proceedings of the Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Pineridge Press, 1992.
- [4] Bammann, D. J.; Aifantis E. C.: A model for finite–deformation plasticity. *Acta Mechanica* **69**, 97–117 (1987).
- [5] Bathe, K.–J.: *Finite element procedures in engineering analysis*; Prentice–Hall, London (1982).
- [6] Basar, Y.; Krätzig, W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1985).
- [7] Bazant, Z.P; Belytschko, T.; Chang, T.–P.: Continuum Theory for strain–softening. *Trans. ASCE J. Eng. Mech.* **110**, 1666–1692 (1984).
- [8] Bazant, Z.P; Pijaudier–Cabot, G.: Measurement of characteristic length of non–local continuum. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **115**, 755–767 (1989).
- [9] Bazant, Z.P; Pijaudier–Cabot, G.: Nonlocal continuum damage, localization, instability and convergence. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **55**, 287–293 (1988).
- [10] Belytschko, T.; Bachrach, W.E.: Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse–mesh accuracy. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **23**, 323–331 (1986).
- [11] Bigoni, D.; Hueckel, T.: Uniqueness and localization. Associative and non–associative elastoplasticity. *Int. J.Solids Structures* **28**, 197–213 (1991).
- [12] Büchter, N.: Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Bericht 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1992).
- [13] Büchter, N.; Ramm, E.: 3D–extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept. In Hirsch, Ch.; Périaux, J.; Oñate, E. (Eds.), *European Conference on Numerical Methods in Engineering*, Elsevier, Brussels (1992).

- [14] Büchter, N.; Ramm, E.; Roehl, D.: Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Num. Meth. Eng.* (1994). *Zu erscheinen.*
- [15] Bufler, H.: Energiemethoden IV – Vorlesungsskript WS 1991/92. Universität Stuttgart.
- [16] Casey, J.; Naghdi, P. M.: A remark on the use of polar decomposition $F = F_e F_p$ in plasticity. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **47**, 672–674 (1980).
- [17] Chen, Z.; Schreyer, H.L.: A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control. *Computers & Structures* **37**(6), 1043–1050 (1990).
- [18] Cleja-Tigoiu, S.; Soós, E.: Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables. *ASME, Appl. Mech. Rev.* **43**(7), 131–151 (1990).
- [19] Cordts, B. D.; Kollmann, F. G.: An implicit time integration scheme for inelastic constitutive equations with internal state variables. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **23**, 533–554 (1986).
- [20] de Borst, R.: Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, **8**, 317–332 (1991).
- [21] Di, S.; Ramm, E.: On alternative hybrid stress 2d and 3d elements. *Engineering Computations*, **11**, 49–68 (1994).
- [22] Doyle, D.C.; Ericksen, J.L.: *Nonlinear Elasticity. Advances in Appl. Mech. IV*, Academic Press, New York (1956).
- [23] Drucker, D.C.: Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Q. Appl. Math.* **7**, 411–418 (1950).
- [24] Flory, P. J.: Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.*, **57**, 829–838 (1961).
- [25] Fuschi, P.; Peric, D.; Owen, D.R.J.: Studies on generalized midpoint integration in rate-independent plasticity with reference to plane stress J_2 -flow theory. *Comp. & Struc.* **43**, 1117–1133 (1992).
- [26] Glaser, S.: "Berechnung gekoppelter thermomechanischer Prozesse", Springer Verlag (1992).
- [27] Gurtin, M.E.: Modern continuum thermodynamics. In S. Nemat-Nasser (Ed.), *Mechanics Today*, 168–210, Pergamon, Oxford (1974).
- [28] Haupt, P.: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of visco-elastic material behavior. *Int. J. Plasticity*, **1**, 303–316 (1988).
- [29] Hellen, T.K.: Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **4**, 597–600 (1972).

- [30] Hill, R.: Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids* **10**, 1–6 (1962).
- [31] Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids* **39**, 295–307 (1958).
- [32] Hughes, T.J.R.; Tezduyar, T.E.: Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four–node isoparametric element. *J. for Appl. Mech.* **48**, 587–596 (1981).
- [33] Hughes, T.J.R. : *The finite element method*. Prentice Hall (1988).
- [34] Irons, B.M.: Quadrature rules for brick based finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **3**, 293–294 (1971).
- [35] Krieg, R.D.; Krieg, D.B.: Accuracies of numerical solution methods for the elastic–perfectly plastic model. *J. Pressure Vessel Technology*, ASME, **99**, 510–515 (1977).
- [36] Lee, E. H.; Elastic–plastic deformation at finite strains. *J. for Appl. Mech.*, **36**, 1–6 (1969).
- [37] Lubliner, J. : "On the Thermodynamic foundations of non–linear solid mechanics", *Int. J. Non–Linear Mech.* **7**, 237–254 (1972).
- [38] Lubliner, J.: *Plasticity theory*. Macmillan (1990).
- [39] Luenberger, D.G.: *Linear and nonlinear programming*, Addison–Wesley Publishing Company (1984).
- [40] Mandel, J.: Conditions de Stabilité et postulat de Drucker. In Kravtchenko, J.; Sierieys, P.M. (Eds.), *Rheologie et Mécanique des Sols*, Springer, Berlin (1966).
- [41] Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R.; *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice Hall (1984).
- [42] Matzenmiller, A.: Ein Rationales Lösungskonzept für Geometrisch und Physikalisch Nichtlineare Strukturberechnungen. Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- [43] Mühlhaus, H.–B.; Aifantis, E.C.: A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Structures* **28**, 845–858 (1991).
- [44] Mühlhaus, H.–B.; Vardoulakis, I.: The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique* **37**, 271–283 (1987).
- [45] Müller–Hoeppel, N. : Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen. *Forschungs– und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Bericht **F90/4**, Hannover (1990).
- [46] Nadai, A.: *Theory of flow and fracture of solids*. Vol 1. McGraw–Hill Book Company, Inc (1950).

- [47] Nagtegaal, J.C.; de Jong, J.E.: Some computational aspects of elastic–plastic large strain analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **17**, 15–41 (1981).
- [48] Nagtegaal, J.C.; Parks, D.M.; Rice, J.R.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **4**, 153–177 (1974).
- [49] Needleman, A.: Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **67**, 68–85 (1987).
- [50] Neilsen, M. K.; Schreyer, H. L.: Bifurcations in elasto–plastic materials. *Int. J. Solids and Structures* **30**, 521–544 (1993).
- [51] Ogden, R. W.: *Nonlinear Elastic Deformation*. Wiley & Sons, 1984.
- [52] Ortega, J.M.; Heinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in several Variables*. Academic Press (1970).
- [53] Ortiz, M.; Simo, J. C.: An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **23**, 353–366 (1986).
- [54] Ortiz, M.; Popov, E. P.: Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **21**, 1561–1576 (1985).
- [55] Ortiz, M.; Leroy, Y.; Needleman, A.: A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 189–224 (1987).
- [56] Owen, D.R.J.; Hinton, E.: *Finite elements in plasticity*. Pineridge Press, Swansea (1982).
- [57] Peric, D.; Owen, D.R.J.; Honnor, M.E.: A model for large strain elastoplasticity based on logarithmic strain: computational issues. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **94**, 35–61 (1992).
- [58] Peric, D.; Owen, D.R.J.: The Morley thin shell finite element for large deformation problems: simplicity versus sophistication. In N. Bicanic u.a.(Eds.), *Nonlinear Engineering Computations*, Pineridge Press, Swansea, 1991.
- [59] Pian, T.H.H.; Tong, P.: Relationship between incompatible displacement model and hybrid stress model. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **22**, 173–181 (1986).
- [60] Pian, T.H.H.; Chen, D. P.: Alternative ways for formulation of hybrid stress finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **18**, 1679–1684 (1982).
- [61] Pian, T.H.H.; Sumihara, K.: Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng* **20**, 1685–1695 (1984).
- [62] Pietruszczak, St.; Mroz, Z.: Finite element analysis of deformation of strain–softening materials. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **17**, 327–334 (1981).

- [63] Ramm, E.: Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W.; Stein, E.; Bathe, J.-K. (Eds.), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 63–89 (1981).
- [64] Ramm, E.; Matzenmiller, A.: Consistent linearization in elasto–plastic shell analysis. *Engineering Computations* **5**, 289–299 (1988).
- [65] Reddy, B.D.; Simo, J.C.: *Stability and convergence of a class of enhanced strain methods*. FRD/UCT Center for Research in Computational and Applied Mechanics, Report No. 174, University of Cape Town, South Africa (1992).
- [66] Rudnicki, J.W.; Rice, J.R.: Conditions for the localization of deformation in pressure–sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids* **23**, 371–394 (1975).
- [67] Simo, J. C.; Armero, F.; Taylor, R. L.: Improved versions of assumed enhanced strain tri–linear elements for 3d finite deformation problems. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* (1994). *Zu erscheinen*.
- [68] Simo, J.C.; Miehe, C.: Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **98**, 41–104 (1992).
- [69] Simo, J. C.; Armero, F.: Geometrically non–linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **33**, 1413–1449 (1992).
- [70] Simo, J. C.; Govindjee, S.: Non–linear B–stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **31**, 151–176 (1991).
- [71] Simo, J.C.; Rifai, M.S.; Fox, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model, Part IV: Variable thickness shells with through–the–thickness stretching. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **81**, 53–91 (1990).
- [72] Simo, J. C.; Rifai, M.S.: A class of assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **29**, 1595–1638 (1990).
- [73] Simo, J. C.; Kennedy, J. G.; Taylor, R. L.: Complementary mixed finite element formulations for elasto–plasticity. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **74**, 177–206 (1989).
- [74] Simo, J.C.; Fox, D.D.; Rifai, M.S.: On a stress resultant geometrically exact shell model, Part II. The linear theory, Computational aspects. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **73**, 53–92 (1989).
- [75] Simo, J. C.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **66**, 199–219 (1988).

- [76] Simo, J. C.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **68**, 1–31 (1988).
- [77] Simo, J. C.: On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic relations in finite deformation plasticity. *Mechanics of Materials* **4**, 439–451 (1986).
- [78] Simo, J. C.; Ortiz, M.: A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **49**, 221–245 (1985).
- [79] Simo, J.C.; Taylor, R.L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **48**, 101–118 (1985).
- [80] Simo, J.C.; Taylor, R.L.; Pister, K.S.: Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity. *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **51**, 177–208 (1985).
- [81] Sluys, L.J.: Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. Dissertation, Delft University of Technology, Delft (1992).
- [82] Stegmüller, H., Bletzinger, K.U., Kimmich, S. *Finite Element Programmsystem CARAT – Eingabebeschreibung*. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- [83] Stein, E.; Barthold, F.–J.: *Unterlagen zur Vorlesung Elastizitätstheorie*. WS 92/93. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [84] Steinmann, P.; Willam, K.: Finite elements for capturing localized failure. *Arch. of Appl. Mech.* **61**, 259–275 (1991).
- [85] Suanno, R.L.M.: *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. Bericht 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1994).
- [86] Sze, K.Y.; Ghali, A.: Hybrid hexaedral element for solids, plates, shells and beams by selectiv scaling. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **36**, 1519–1540 (1993).
- [87] Taylor, R.L.; Simo, J.C.; Zienkiewicz, O.C.; Chan, A.C.: The patch–test: A condition for assessing finite element convergence. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **22**, 39–62 (1986).
- [88] Taylor, R. L.; Beresford, P.J.; Wilson, E.L.: A non–conforming element for stress analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **10**, 1211–1220 (1976).
- [89] Theocaris, P.S.; Marketos, E.: Elastic–plastic analysis of perforated thin strips of a strain hardening material. *J. Mech. Phys. Solids* **12**, 377–390 (1964).
- [90] Timoshenko, S.P.; Woinowsky–Krieger, S.: *Theory of plates and shells*. 2. Ausgabe, McGraw–Hill, New York (1982).

- [91] Truesdell, C.; Noll, W.: The nonlinear field theories. *Handbuch der Physik*, Bd. III/3, Flügge (Ed.), Springer Verlag, Berlin (1965).
- [92] Wilkins, M. L.: Calculation of elasto–plastic flow. *Method of Computational Physics* 3, B. Alder et al. (Eds.), Academic Press, New York (1964).
- [93] Willam, K.; Montgomery, K.: Fracture energy–based softening plasticity model for shear failure. *Proc. Conf. on Interaction of Non–Nuclear Munitions and Structures*, Vol II, 679–691, Mannheim (1987).
- [94] Wilson, E. L.; Taylor, R. L., Doherty, W. P.; Ghaboussi, J.: Incompatible displacement models. Fenves, S.J. et al. (Eds.) *Numerical and computer models in structural mechanics*, 43–57, Academic Press, New York (1973).
- [95] Wriggers, P.; Simo, J.C.: A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 30, 155–176 (1990).
- [96] Wriggers, P.: Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite–Element–Methode. *Forschungs– und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Bericht F 88/4, Hannover 1988.
- [97] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, McGraw–Hill, London, 4. Auflage (1989).
- [98] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 3, 275–290 (1971).

Anhang A – Konsistente Linearisierung des Stoffgesetzes

Zur Bestimmung der Element–StEIFigkeitsmatrix wird die Materialtangente gebraucht, die im folgenden hergeleitet wird. Um die quadratische Konvergenz der Newton–Iteration zu erreichen, muß die mechanische Gleichung konsistent linearisiert werden. Dabei ist bei der Linearisierung des Stoffgesetzes das numerische Zeitintegrationsverfahren mit zu berücksichtigen. In der gewählten impliziten Integrationsmethode wird der Spannungsdeviator \mathbf{s} der Konfiguration $n+1$ durch Gl.(4.44) gewonnen.

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{tr}} - 2\bar{\mu} \Delta\lambda \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}^{\text{tr}} = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}}] \quad (\text{A.1})$$

Um die Notation zu vereinfachen, wird der Index $n+1$ unterdrückt. Bei allen Spannungen handelt es sich um ausiterierte Größen der letzten Gleichgewichtssiteration.

Gemäß (4.16) und (A.1) spaltet sich der Kirchhoff–Spannungstensor wie folgt auf:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k} + \mathbf{s}^{\text{tr}} - 2\bar{\mu} \Delta\lambda \mathbf{n} \quad (\text{A.2})$$

Der konsistente tangentielle Stofftensor der Momentankonfiguration ergibt sich dann aus (A.2) mit der Doyle–Ericksen–Formel (4.7).

$$J \mathbf{C} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} \quad (\text{A.3})$$

Einige für die Herleitung von (A.3) benötigte Beziehungen folgen.

- Ableitung der Invarianten eines Tensors \mathbf{T} nach dem kovarianten Metriktensor in der Momentankonfiguration.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{g}} &= \mathbf{T} \\ \frac{\partial I_2(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{g}} &= -\det \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} + I_2 \mathbf{g} \\ \frac{\partial I_3(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{2} I_3(\mathbf{T}) \mathbf{g}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

- Ableitung des kontravarianten Metriktensors \mathbf{g}^{-1} nach dem kovarianten Metriktensor in der Momentankonfiguration. In Komponentendarstellung erhält man:

$$\frac{\partial (\mathbf{g}^{-1})^{ij}}{\partial \mathbf{g}_{kl}} = -(\mathbf{g}^{-1})^{ik} (\mathbf{g}^{-1})^{lj} \quad (\text{A.5})$$

Mit der konstitutiven Gleichung für den Kirchhoff–Spannungstensor gemäß (4.17) folgt der volumetrische (elastische) Anteil der Materialtangente.

$$J \mathbf{C}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{g}} = \kappa \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} - 2\kappa \ln J \mathbf{I}_4 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{mit } \frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}} = \frac{1}{2} J \mathbf{g}^{-1} \quad (\text{siehe (A.4c)}) \quad (\text{A.7})$$

Der zweiten Term in (A.2) führt wiederum zu einer elastischen Teilmatrix. Mit

$$\mathbf{s}^{\text{tr}} = \mu \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} = \mu J^{-\frac{2}{3}} [\mathbf{b}^{\text{tr}} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{b}^{\text{tr}} \mathbf{g}^{-1}], \quad \text{wobei } [\bar{\mathbf{b}}]^{\text{tr}} = [\bar{\mathbf{b}}^{\text{e}}]^{\text{tr}} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{b}}^{\text{e tr}}}{\partial \mathbf{g}} = -\frac{1}{3} \bar{\mathbf{b}}^{\text{e tr}} \otimes \mathbf{g}^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \text{tr} \mathbf{b}^{\text{e}}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{b}^{\text{e}} \quad (\text{siehe (A.4a)}) \quad (\text{A.9})$$

kann man mit der Produktregel die folgende Ableitung angeben.

$$J \mathbb{C}_{\text{dev}}^{\text{tr}} = \frac{\partial \mathbf{s}^{\text{tr}}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{3} \mu [\text{tr} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} (-\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1}) - \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{g}^{-1} - \mathbf{g}^{-1} \otimes \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}}] \quad (\text{A.10})$$

Gleichung (A.10) stellt einen unsymmetrischen Tensor dar. Unter Berücksichtigung von (A.5) und Ausnutzung der Symmetrie der Spannungs- und Verzerrungstensoren lautet die symmetrisierte Form von (A.10):

$$[J \mathbb{C}_{\text{dev}}^{\text{tr}}]^{\text{s}} = \frac{2}{3} \mu [(\bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} : \mathbf{g}) \mathbf{I}_{\text{dev}} - (\text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}})], \quad (\text{A.11})$$

$$\text{wobei } \mathbf{I}_{\text{dev}} := \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l - \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1}$$

Die Ableitung des letzten Terms in (A.2) lautet:

$$\frac{\partial (-2\bar{\mu} \Delta \lambda \mathbf{n})}{\partial \mathbf{g}} = -4 \Delta \lambda \mathbf{n} \otimes \partial_{\mathbf{g}} \bar{\mu} - 4 \bar{\mu} \mathbf{n} \otimes \partial_{\mathbf{g}} \Delta \lambda - 4 \bar{\mu} \Delta \lambda \partial_{\mathbf{g}} \mathbf{n} \quad (\text{A.12})$$

Für die Berechnung (A.12) werden die benötigten Ableitungen angegeben.

Die Ableitung $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{g}}$ ergibt sich mit der Definition (4.43) und unter Anwendung von (A.7) zu:

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial (\frac{1}{3} \mu J^{-\frac{2}{3}} \text{tr} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{g}} = \frac{1}{3} \mu [-\frac{1}{3} J^{-\frac{2}{3}} \text{tr} \mathbf{b}^{\text{tr}} \mathbf{g}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b}^{\text{tr}}] = \frac{1}{3} \mu \text{dev} \bar{\mathbf{b}}^{\text{tr}} \quad (\text{A.13})$$

Die Berechnung des zweiten Terms in (A.12) erfordert die Bestimmung der Ableitung $\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \mathbf{g}}$, welche mit Hilfe von Gleichung (4.42) gewonnen wird. Das Differenzieren von (4.42) nach der kovarianten Basis \mathbf{g} liefert:

$$\frac{\partial \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|}{\partial \mathbf{g}} - 2 \bar{\mu} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \mathbf{g}} - 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{g}} \Delta \lambda - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_{\text{F}}(\bar{\mathbb{E}}^{\text{P}}(\Delta \lambda))}{\partial \bar{\mathbb{E}}^{\text{P}}} \frac{\partial \bar{\mathbb{E}}^{\text{P}}}{\partial \Delta \lambda} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \mathbf{g}} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Die Ableitung der Norm des Spannungsdeviators nach der Metrik in der Momentankonfiguration folgt in Indexschreibweise.

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{s^{ij} s^{kl} g_{ik} g_{jl}} \quad (\text{A.15})$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wird hierbei das hochgestellte tr fortgelassen. Da der Spannungsdeviator \mathbf{s} eine Funktion von \mathbf{g} ist (siehe A.8), lautet diese Ableitung

$$\frac{\partial \|\mathbf{s}\|}{\partial \mathbf{g}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \left[\frac{\partial (s^{ij} s^{kl} g_{ik} g_{jl})}{\partial s^{rs}} \frac{\partial s^{rs}}{\partial g_{mn}} + s^{ij} s^{kl} \frac{\partial (g_{ik} g_{jl})}{\partial g_{mn}} \right] \quad (\text{A.16})$$

Mit dem Term

$$\frac{\partial (s^{ij} s^{kl} g_{ik} g_{jl})}{\partial s^{rs}} = (g_{rk} g_{sl} s_{kl} + g_{lr} g_{js} s^{ij}) \quad (\text{A.17})$$

und der Gleichung aus der direkten Abhängigkeit der Norm $\|\mathbf{s}\|$ von \mathbf{g}

$$s^{ij} s^{kl} \frac{\partial (g_{ik} g_{jl})}{\partial g_{mn}} = s^{ij} s^{kl} (\delta_i^m \delta_k^n g_{jl} + \delta_j^m \delta_l^n g_{ik}) \quad (\text{A.18})$$

zusammen mit der Ableitung $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{g}}$ (A.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|} \left[\frac{\mu}{3} \text{tr}[\mathbf{b}] \mathbf{s}^{\text{tr}} - \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{s}^{\text{tr}}]^2 \mathbf{g}^{-1} + [\mathbf{s}^{\text{tr}}]^2 \right] \\ &= \bar{\mu} \mathbf{n} + \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\text{wobei } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}^{\text{tr}}}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|}$$

Mit der Ableitung $\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}^{\text{P}}}{\partial \Delta \lambda}$ aus (4.45)

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}^{\text{P}}}{\partial \Delta \lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{A.20})$$

und (A.13), (A.19) ersetzt in (A.14) folgt für $\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \mathbf{g}}$:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \mathbf{g}} = \frac{1}{2\bar{\mu} + \frac{2}{3} \frac{\partial \sigma(\bar{\mathcal{E}}^{\text{P}})}{\partial \bar{\mathcal{E}}^{\text{P}}}} \left[(\bar{\mu} - \frac{2}{3} \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \Delta \lambda) \mathbf{n} + \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \text{dev}[\mathbf{n}^2] \right] \quad (\text{A.21})$$

Der letzte Term in (A.12) erfordert die Berechnung der Ableitung $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{g}}$, welche durch (A.19) und Anwendung der Kettenregel folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{s}^{\text{tr}}}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|} \right)}{\partial \mathbf{g}} = \frac{1}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|^2} \left(\frac{1}{2} J \mathcal{C}^{\text{tr}}_{\text{dev}} - \bar{\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2] \right) \quad (\text{A.22})$$

Damit ist die Berechnung der elastoplastischen konsistenten Materialtangente vollständig, die dem Materialmodell und dem Integrationsalgorithmus in Tabelle 4.1 entspricht. Die setzt sich aus (A.6), (A.11) und (A.12) mit den Einzeltermen (A.13), (A.21) und (A.22) zusammen.

$$J\mathcal{C} = J\mathcal{C}_{\text{vol}} + (1 - \delta_1)J\mathcal{C}_{\text{dev}}^{\text{tr}} + \delta_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \delta_3 [\mathbf{n} \otimes \text{dev}[\mathbf{n}^2]]^s \quad (\text{A.23})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\bar{\mu}'}{3\bar{\mu}}} \\ \delta_1 &= \frac{2\bar{\mu}\Delta\lambda}{\|\mathbf{s}^{\text{tr}}\|} \\ \delta_2 &= 2\bar{\mu} \left[\delta_0 \left[1 - \frac{\frac{2}{3} \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \Delta\lambda}{\bar{\mu}} \right] - \delta_1 \right] \\ \delta_3 &= 4\bar{\mu}\Delta\lambda + 2\delta_0 \|\mathbf{s}^{\text{tr}}\| \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Anhang B – Schalenformulierung mit extensilem Direktor

B.1 Die 6-Parameter-Schalentheorie

Als nächstes wird eine 3D-Erweiterung der nichtlinearen Schalenformulierung dargestellt. Eine ausführliche Behandlung dieser Theorie ist in [12] zu finden.

B.1.1 Geometrie und Kinematik der Schale

In Bild B1.1 sind die Variablen zur Beschreibung der Geometrie und Kinematik der Schale dargestellt. Diese Variablen werden auf eine Referenzfläche bezogen, die hier die Schalenmittelfläche ist. Es wird zunächst ein linear veränderliches Verschiebungsfeld über die Dicke angenommen. Die üblichen Annahmen der Schalenformulierungen, Schalendirektor senkrecht auf der Schalenmittelfläche und konstante Schalendicke, werden hier nicht getroffen. Die Beschreibung erfolgt bezüglich der krummlinigen, konvektiven Koordinaten $\theta^1, \theta^2, \theta^3$.

Der Ortsvektor $\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ der unverformten Schale wird durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2)$ zum Bezugspunkt der Schalenmittelfläche und durch den Einheitsschalendirektor $\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2)$ an dieser Stelle ausgedrückt. Hierbei steht \mathbf{d} nicht zwingend senkrecht auf der Schalenmittelfläche. Mit der veränderlichen Schalendicke $h(\theta^1, \theta^2)$ in Richtung von \mathbf{d} lautet der Ausdruck für $\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \xi^3 \frac{h(\theta^1, \theta^2)}{2} \mathbf{d}(\theta^1, \theta^2) \\ &= \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Mit $\xi^3 \in [-1, 1]$ und $\theta^3 = \xi^3 \frac{h_0}{2}$

In (B.1) ist h_0 eine konstante Bezugsgröße und $\mathbf{a}_3 = h(\theta^1, \theta^2)/h_0$ der Schalendirektor in der Bezugskonfiguration.

Gemäß der Annahme von linear veränderlichen Verschiebungen in Dickenrichtung,

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2)\tag{B.2}$$

lautet der Ortsvektor \mathbf{x} der verformten Schale:

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (\mathbf{r} + \mathbf{v}) + \theta^3 (\mathbf{a}_3 + \mathbf{w}) = \bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3\tag{B.3}$$

Die Vektoren \mathbf{v} bzw. \mathbf{w} stellen den Verschiebungsvektor eines Punktes auf der Referenzfläche bzw. den Differenzvektor des verformten Direktors $\bar{\mathbf{a}}_3$ und des unverformten Direktors \mathbf{a}_3 dar, siehe Bild 9.1.

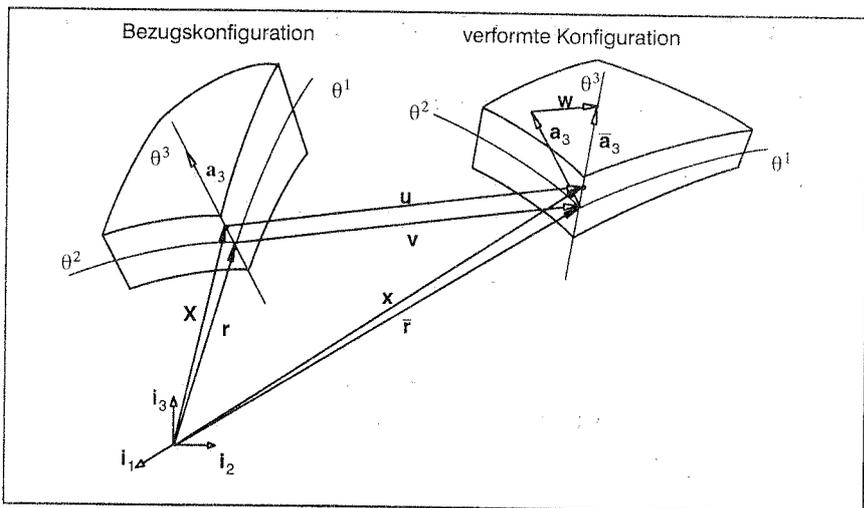


Bild B.1: Schalentheorie und -kinematik

Die materiellen und räumlichen Basen des allgemeinen, krummlinigen Koordinatensystems gehen aus partiellen Ableitungen der undeformierten und der aktuellen Konfigurationen nach den Schalenkoordinaten θ^i hervor, siehe Gl.(2.5), d.h.

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^i = \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \quad (\text{B.4})$$

sind die kovarianten bzw. kontravarianten Basisvektoren der unverformten Konfiguration. Analog zu (B.4) folgt für die verformte Konfiguration:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (\text{B.5})$$

Aus (B.1) und (B.2) erhält man die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} & \text{mit} & \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha = 1, 2 \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{g}_\alpha &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} & \text{mit} & \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \\ \mathbf{g}_3 &= \bar{\mathbf{a}}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 Green-Lagrange-Verzerrungen

Die Komponenten der Green-Lagrange-Verzerrungen errechnen sich gemäß Gln.(2.31) und (2.32) aus der Differenz der Komponenten der Metriktensoren der verformten und der unverformten Konfigurationen.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Mit der Annahme (B.2) für die Verschiebungen lauten die Komponenten E_{ij} (siehe [12]):

$$E_{ij} = \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} + (\theta^3)^2 \varrho_{ij} \quad (\text{B.8})$$

mit

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_\beta - \mathbf{a}_{3,\beta} \mathbf{a}_\alpha) \\ \beta_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_3) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\beta_{33} = 0$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_{3,\beta}) \quad (\text{B.11})$$

$$\varrho_{\alpha 3} = 0$$

$$\varrho_{33} = 0$$

Aus (B.8)–(B.11) ist zu erkennen, daß als direkte Folge der Annahme (B.2) ε_{33} konstant über die Dicke ist ($\beta_{33}=0$).

In Verbindung mit der Anwendung unmodifizierter 3D–Materialgesetze wird in [14] und [6] auf die Relevanz eines linear veränderlichen Dehnungsfeldes β_{33} bei der Berechnung von Strukturen hingewiesen, welche hauptsächlich durch Biegung beansprucht werden. In [14] wird die Bedeutung von β_{33} an numerischen Beispielen gezeigt.

B.1.3 Piola–Kirchhoff–Schnittgrößen 2. Art

Gemäß einer materiellen Betrachtungsweise werden hier die Schalenschnittgrößen aus den 2. Piola–Kirchhoff–Spannungen definiert. Die Komponenten der symmetrischen PK2–Schnittgrößen für den Schnittkrafttensor \mathbf{n} und für den Momententensor \mathbf{m} lauten:

$$n^{ij} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu S^{ij} d\theta^3 ; \quad m^{(K)ij} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu (\theta^3)^K S^{ij} d\theta^3 \quad (\text{B.12})$$

$$\text{wobei} \quad \mu d\theta^3 = \frac{dV}{dA} ; \quad K = 1, 2$$

B.1.4 Prinzip der virtuellen Arbeit für Schalen

Für eine materielle Beschreibung lautet die schwache Form des Gleichgewichts für das Kontinuum:

$$-\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \int_V \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, dV = \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \quad (\text{B.13})$$

Mittels (B.8) und (B.12) kann die innere virtuelle Arbeit in Schnittgrößen- und Verzerungstensoren der Schale ausgedrückt werden.

$$-\delta W_{\text{int}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_V \delta E_{ij} S^{ij} \, dV = \int_A (\delta \alpha_{ij} n^{ij} + \delta \beta_{ij} m^{(1)ij} + \delta \varrho_{ij} m^{(2)ij}) \, dA \quad (\text{B.14})$$

Im Hinblick auf ein iteratives Newton-Lösungsverfahren wird die obige nichtlineare Gleichung bezüglich \mathbf{v} und \mathbf{w} linearisiert. Mit der Richtungsableitung

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \Delta \mathbf{E} = \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E} \quad (\text{B.15})$$

lautet die linearisierte Form der virtuellen Arbeit (siehe [12], Kap 3):

$$-\Delta \delta W_{\text{int}} = \int_A \begin{bmatrix} \delta \alpha_{ij} & \delta \beta_{ij} & \delta \varrho_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} \\ D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & D_4^{ijkl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_{kl} \\ \Delta \beta_{kl} \\ \Delta \varrho_{kl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n^{ij} & m^{(1)ij} & m^{(2)ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \alpha_{ij} \\ \Delta \delta \beta_{ij} \\ \Delta \delta \varrho_{ij} \end{bmatrix} \, dA \quad (\text{B.16})$$

$$\text{mit } D_K^{ijkl} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu(\theta^3) K_C^{ijkl} \, d\theta^3 \quad (\text{B.17})$$

Werden in (B.8) die quadratischen Terme in θ^3 vernachlässigt, vereinfachen sich die Gleichungen (B.14) und (B.16) zu:

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_A (\delta \alpha_{ij} n^{ij} + \delta \beta_{ij} m^{(1)ij}) \, dA \quad (\text{B.18})$$

$$-\Delta \delta W_{\text{int}} = \int_A \begin{bmatrix} \delta \alpha_{ij} & \delta \beta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_{kl} \\ \Delta \beta_{kl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n^{ij} & m^{(1)ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \alpha_{ij} \\ \Delta \delta \beta_{ij} \end{bmatrix} \, dA \quad (\text{B.19})$$

Anmerkung: In (B.17) enthält \mathbf{C} ein dreidimensionales konstitutives Gesetz ohne Kondensation. Für nichtlineares Materialverhalten oder bei Laminaten, bei welchen der Materialtensor \mathbf{C} eine Funktion von θ^3 ist, erfolgt die explizite Dickenintegration im allgemeinen numerisch.

B.2 Die 7-Parameter-Schalentheorie

B.2.1 Einführung eines linear veränderlichen Verzerrungsfeldes β_{33} durch die EAS-Methode

Durch die Einführung einer zusätzlichen inneren Verzerrungsvariablen wird im Rahmen der EAS-Formulierung (siehe Kapitel 6) ein linear in Dickenrichtung veränderliches Dehnungsfeld in die 6-Parameter-Schalenformulierung eingebracht.

$$E_{33} = \alpha_{33} + \theta^2 \tilde{\beta}_{33}, \quad (\text{B.20})$$

d.h. die EAS-Erweiterung betrifft hier nur eine Dehnungskomponente.

Das EAS-Konzept basiert auf dem 3-Feld Hu-Washizu-Funktional, definiert in Gl. (5.15). Nach neuer Parametrisierung von (5.15) mit dem erweiterten Green-Lagrange-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{B.21})$$

und dem Kichhoff-Piola Spannungen 2. Art \mathbf{S} lautet dieses Prinzip:

$$\Pi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) = -\Pi^I(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) - \Pi^a(\mathbf{u}) \quad (\text{B.22})$$

$$\text{mit} \quad -\Pi^I(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) = \int_V [\hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}] dV$$

Analog zur Entwicklung in 6.2.1 sollen auch hier die Ansatzfunktionen für das erweiterte inkompatible Dehnungsfeld $\tilde{\mathbf{E}}$ und für das unabhängige Spannungsfeld $\tilde{\mathbf{S}}$ die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_V \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} dV = 0 \quad [\text{vgl. Gl. (6.12)}] \quad (\text{B.23})$$

erfüllen, so daß sich das 3-Feld-Funktional auf ein 2-Feld-Funktional reduziert, in dem die Spannungen $\tilde{\mathbf{S}}$ nicht explizit auftreten.

$$\Pi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = -\Pi^I(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) - \Pi^a(\mathbf{u}) \quad (\text{B.24})$$

$$\text{mit} \quad -\Pi^I(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \int_V \hat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{E}}) dV$$

Mit dem in (B.20) gegebenen Ansatz lautet die Erweiterung des Verzerrungstensors:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \theta^2 \tilde{\beta}_{33} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3 \quad \text{mit} \quad \tilde{\beta}_{33} = \tilde{\beta}_{33}(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{B.25})$$

Gemäß (B.21) und (B.25) sind die modifizierten Komponenten der Green – Lagrange – Verzerrungen:

$$E_{ij}^* = \begin{cases} E_{ij}^* = E_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & i, j \neq 3, 3 \\ E_{33}^* = \alpha_{33}(\mathbf{w}) + \tilde{\beta}_{33}\theta^3 \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Bei der Linearisierung von (B.24) sind im Hinblick auf (B.26) die ersten und zweiten Variationen bezüglich $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \tilde{\beta}_{33})$ formal durch die Gleichungen (B.14) bzw. (B.16) gegeben oder auch nach Vernachlässigung der quadratischen Terme in θ^3 durch (B.18) bzw. (B.19). Die zusätzliche Variable $\tilde{\beta}_{33}$ trägt in (B.14) oder in (B.18) mit dem folgenden Term bei:

$$\int_A \delta \tilde{\beta}_{33} m^{33} dA \quad (\text{B.27})$$

B.2.2 Finite – Element – Diskretisierung

Nach der üblichen FE – Diskretisierung für isoparametrische degenerierte Schalenelemente lauten die Interpolationen des Ortsvektors zur Schalenmittelfläche und des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{x}_h = \sum_{K=1}^{NK} N^K(\xi, \eta) [\mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3]^K \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{u}_h = \sum_{K=1}^{NK} N^K(\xi, \eta) [\mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}]^K \quad (\text{B.29})$$

sowie der Schalendirektoren

$$\mathbf{a}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{a}_3^K \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{a}}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \bar{\mathbf{a}}_3^K \quad (\text{B.30})$$

Im folgenden wird die EAS – Formulierung am Beispiel des quadratischen Lagrange – Elementes angewandt. Für die Diskretisierung von $\tilde{\beta}_{33}$ wird ein bilineares Polynom gewählt:

$$\tilde{\beta}_{33} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad (\text{B.31})$$

wobei α_i $i = 1, \dots, 4$ zusätzliche Unbekannte darstellen. Da die Verzerrungskomponente $\tilde{\beta}_{33}$ nicht über die Elementgrenzen hinweg kontinuierlich sein muß, können die Parameter α_i auf Elementebene eliminiert werden, so daß keine zusätzlichen globalen Freiheitsgrade entstehen und die Struktur des Verschiebungsmodells erhalten bleibt.

Die Integration der EAS–Methode in das Newton–Lösungsverfahren wurde bereits in Tabelle 6.1 beschrieben.

Lebenslauf

Zur Person:

21.09.61 geboren in Rio de Janeiro, Brasilien
Tochter des Prof. João Luis Pascal Roehl, Ph.D.
und dessen Ehefrau Ednea, geb. Pontes de Mesquita
Ehemann Rodolfo Luiz Martins Suanno
Sohn Mateus Roehl Suanno

Schule, Ausbildung und Beruf:

1968–1970	Grundschule in Houston, Texas
1971–1979	Gymnasium in Rio de Janeiro Colégio Sto. Agostinho
Dez. 1979	Abitur
1980–1984	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro Fachrichtung Bauingenieurwesen
Juli 1984	Diplom
1985–1987	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro Master of Science – Fachrichtung Bauingenieurwesen
Sept 1987	mündliche Prüfung
1987–1989	wissenschaftliche Assistentin an der Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
seit Okt. 1989	Stipendiatin des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD) am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Quer-
schnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung
bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wiss-
mann:
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattent-
heorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter
Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem
mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von
Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher
Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berück-

sichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:
Formoptimierung von Flächentragwerken.

- 12 (1990) S. Kimmich:
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.