

✓

EINFLUSS EINER RUNDSCHWEISSNAHT AUF DIE STABILITÄT UND TRAGLAST DES AXIALBELASTETEN KREISZYLINDERS

von

LOTHAR HÄFNER



Bericht Nr. 82-1

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1982

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen am 15. Juli 1981 vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 1982

Hauptberichter: Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter: Professor Dr. techn. H. Bednarczyk

Professor Dr. -Ing. E. Ramm

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

VORWORT

Diese Arbeit entstand aufbauend auf meine Tätigkeit am Institut für Baustatik im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens.

Die Anregung zu dieser Arbeit habe ich von meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer, erhalten. Für die Förderung, Unterstützung und die Übernahme des Hauptberichts danke ich recht herzlich.

Herrn Prof. Dr.techn. H. Bednarczyk danke ich für die Übernahme des Mitberichts und seine wertvollen Hinweise. Anregungen und wichtige Ratschläge zu dieser Arbeit habe ich in Diskussionen mit Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm gewonnen. Dafür sowie für die Übernahme des Mitberichts sei ihm recht herzlich gedankt.

Lothar Häfner

SUMMARY

The influence of a circumferential weld seam on the stability of an axially loaded cylindrical shell is studied. The weld seam was represented by realistically geometrical imperfections and residual stresses.

The effect of the residual stress was added in the used geometrically and materially nonlinear theory. The numerical solution is based on the finite element method, axisymmetric as well as nonaxisymmetric idealisations of the problem were investigated. In the incremental iterative solution phase several criteria were applied to determine the critical load. These are eigenvalue calculations, the use of the current stiffness parameter and the characteristics of the total stiffness matrix.

Using simple beam and plate example the influence of the residual stresses is demonstrated on the geometrically and materially nonlinear response of the structure.

The cylindrical shell studied is a typical silo construction which has a radius to thickness ratio of 500. Different kinds of imperfections were investigated, such as locally geometrical imperfections and locally residual stress states. The geometrical imperfections are the main reason for the knock down of the buckling load, residual stresses cause a further but small reduction of the critical load.

It could be demonstrated that realistic buckling loads can be calculated provided that realistic assumptions of the imperfections and material behaviour have been introduced.

INHALTSVERZEICHNIS

Bezeichnungen	Seite
1. EINLEITUNG UND LÖSUNGSMETHODE	11
1.1 Problemstellung	11
1.2 Wissensstand, Bemessungsvorschriften und Sicherheitsüberlegungen	12
1.3 Lösungsweg	14
2. ZUM BEULPROBLEM DES AXIALBELASTETEN KREISZYLINDERS	15
2.1 Zur klassischen Beultheorie des axialbelasteten Kreiszylinders	15
2.2 Die klassische Beullast im Vergleich zu Versuchen	18
3. IMPERFEKTIONEN INFOLGE VON SCHWEISSNÄHTEN	21
3.1 Allgemeine Definition von Imperfektionen	21
3.2 Schweißverformungen und Schweißeigenstressungen	21
3.3 Zur Entstehung und Ermittlung von Schweißeigenstressungen	26
3.4 Herstellungstoleranzen und Fertigungsbedingungen	29
4. THEORETISCHE GRUNDLAGEN	31
4.1 Allgemeine Vorbemerkungen	31
4.2 Geometrisch nichtlineare Theorie	32
4.3 Physikalische Nichtlinearität	43
4.4 Finite Element Diskretisierung	50
4.5 Versagensarten und numerische Rechentechnik	61
4.6 Versagungskriterien	68
4.7 Programmsystem	73
5. TESTBEISPIELE	75
5.1 Balken mit Einzellast bei vorhandenen Eigenstressungen	75
5.2 Geometrisch imperfekte Platte mit und ohne Eigenstressungen	78

	Seite
6. AXIALBELASTETER KREISZYLINDER MIT RUND- SCHWEISSNAHT	84
6.1 Abmessungen und Vergleichslösungen des perfekten Kreiszylinders	84
6.2 Zur Finiten Element Idealisierung	84
6.3 Imperfektionsannahmen infolge der Rund- schweißnaht	87
6.4 Zum Einfluß der Randbedingungen	94
6.5 Der Einfluß der durch die Rundnaht bedingten geometrischen Imperfektionen	107
6.6 Die geometrische Imperfektion und Schweiß- eigenstressungen	130
6.7 Vergleich eigener Lösungen mit experimentellen Beullasten und Traglastkurve	143
7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN	146
LITERATURVERZEICHNIS	147
ANHANG: Plottbilder	164

BEZEICHNUNGEN

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Text erläutert; die wichtigsten sind nachfolgend aufgeführt.

Indizes für kontinuumsmechanische Größen

<u>links_oben:</u>	$o, n, n+1$	Festlegung Zustände
<u>rechts_oben:</u>	e	für elastisch
	p	für plastisch
	$'$	deviatorisch
	E	für Eigenspannungen
<u>rechts_unten:</u>	i, j, k, ℓ, p	Komponenten des kartesischen Koordinatensystems ($i, j, k, \ell, p=1, 2, 3$)
	s, u	Festlegung Art der Randbedingungen

Indizes für Vektoren und Matrizen

<u>links_oben:</u>	$o, n, n+1, i$	Festlegung Zustände
<u>rechts_oben:</u>	$i, j, (j)$	Festlegung Zwischenzustände
<u>rechts_unten:</u>	$I = e$	elastisch
	$I = p$	plastisch
	G	gesamt
	u	Anfangsverschiebung
	g	geometrisch
	E	Eigenspannungen

Symbole und Vereinbarungen

$, j$	Ableitung nach der j-ten Koordinate
$\delta()$	Variation von ()
$\Delta()$	inkrementelle Größe von ()
$d()$	differentielle Größe von ()
$\partial()$	partielle Größe von ()
$\sum_{M=1}^N$	Summation über $M = 1$ bis N

$\prod_{i=1}^l$	Multiplikation, z.B. $\prod_{i=1}^l a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_l$
$\ \cdot \ $	Euklidische Vektornorm, z.B. $\ \mathbf{a} \ = (a_i a_i)^{1/2}$
R_{N+1}	N+1 dimensionaler Vektorraum
ϵ_{ijk}	Permutationstensor
δ_{ij}	Kroneckersymbol
$(\hat{\quad})$	vorgegebene Größe von ()
$\det (\quad)$	Determinante von ()

zur kontinuumsmechanischen Formulierung

a) vektorielle Größen

\mathbf{e}_i	Einheitsvektoren (i=1,2,3)
\mathbf{g}_i	Gittervektoren (i = 1,2,3)
\mathbf{x}	Ortsvektor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{t}_i	Pseudospannungsvektor (i=1,2,3)
\mathbf{q}	Vektor der Volumenkräfte

b) skalare Größen

x_i	kartesisches Koordinatensystem (i=1,2,3)
F	Fläche
V	Volumen
ρ	Dichte
J	Jacobische Determinante
u_i	Verschiebungen zum Zustand n
$u_{i,j}$	Verschiebungsgradient
F_{ij}	Deformationsgradient
R_{ik}	Rotationstensor
U_{ik}	Dehnungstensor
ϵ_{ij}	Green-Lagrangesche Verzerrungstensor
e_{ij}	linearer Anteil aus Green-Lagrangeschem
	Verzerrungstensor
n_{ij}	nichtlinearer Anteil aus Green-Lagrangeschem
	Verzerrungstensor
τ_{ij}	Cauchy-Euler Spannungen

s_{ij}	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
q_K	Volumenkräfte
\hat{S}_i	Oberflächenkräfte
n_i	Normalenwinkel
δW_a	virtuelle äußere Arbeit
C_{ijkl}	Stofftensor
f	Fließbedingung
I_2'	zweite Invariante des Spannungsdeviators
g	Verfestigungsfunktion; für isotrope Verfestigung \bar{g}
σ_v	Vergleichsspannung
ϵ_v	Vergleichsdehnung
T_p	plastischer Tangentenmodul
p	mittlerer Normalendruck

Werkstoffkenngrößen

E	Elastizitätsmodul
ν	Querdehnzahl
σ_F	Fließspannung
T	Tangentenmodul
α	Temperaturkoeffizient

skalare Größen, Vektoren und Matrizen nach Diskretisierung

Φ	Vektor der Interpolationsfunktionen
q, p	Vektor der Volumen- und Oberflächenkräfte
u	Verschiebungsvektor
d	Verschiebungsgradient
ϵ	Vektor der Verzerrungen
e, η	linearer bzw. nichtlinearer Anteil des Verzerrungsvektors
S	Spannungsmatrix
s	Spannungsvektor
C	Stoffmatrix
B	Operatormatrix, lineare Kinematik

\hat{B}	Operationsmatrix für die Verschiebungsableitungen
K	Steifigkeitsmatrix
F	Vektor der inneren Kräfte
R	Vektor der verallgemeinerten äußeren Kräfte
J	Jacobimatrix
r, s, t	lokales Koordinatensystem
N	Gesamtanzahl Unbekannte
$A \quad B$	Matrizen für Eigenwertproblem
x	Eigenvektor (ohne Index)
λ_i	Eigenwerte ($i=1,2,3\dots N$)
R_{krit}	kritische Last aus Eigenwertberechnung
v	verallgemeinerte Vektoren in R_{N+1}
\tilde{t}	verallgemeinerter Tangentenvektor in R_{N+1}
R	Referenzlast
n_λ	Lastparameter

am Balken

l	Länge
b	Breite
h	Höhe
f	Durchbiegung
σ_R^E	Eigenspannungen am Balkenrand in Längsrichtung
P	Einzellast
P_T	Traglast
$\lambda = P/P_T$	bezogene Traglast

an der Platte

a	Breite
b	Länge
t	Dicke
δ_M	Imperfektionsamplitude
P_{x2}	Belastung pro Längeneinheit
s_{22}^E	Eigenspannungen in x_2 -Richtung
σ_I, σ_{II}	Hauptspannungen
w_M	Mittendurchbiegung

am Kreiszyylinder

r	Radius	
t	Wanddicke	
ℓ	Kreiszyylinderlänge	
P _x	Längsbelastung pro Länge, z.B. [kN/cm]	
P _{xkℓ}	klassische Beullast	
ρ = P _x /P _{xkℓ}	bezogene Beullast bzw. Traglast	
$Z = \frac{\ell^2}{rt} \sqrt{(1-\nu^2)}$	Batdorf-Parameter	
m	Längshalbwellen (LHW)	
n	Umfangsvollwellen (UVW)	
x, φ, z	Koordinaten am Kreiszyylinder	
u, v, w	Verschiebungen in den Koordinaten x, φ, z	
w ₀	geometrische Imperfektion in z-Richtung	
σ _x	Längsspannung	
σ _φ	Ringspannung	
q	Querkraft	} bezüglich Koordinatensystem x, φ, z
n	Membrankraft	
m	Biegemoment	

Randbedingungen

SS1:	w = m _x = n _x = n _{xφ} = 0
SS2:	w = m _x = u = n _{xφ} = 0
SS3:	w = m _x = n _x = v = 0 (klassische Randbedingung)
SS4:	w = m _x = u = v = 0
C-1:	w = w _{,x} = n _x = n _{xφ} = 0
C-2:	w = w _{,x} = u = n _{xφ} = 0
C-3:	w = w _{,x} = n _x = v = 0
C-4:	w = w _{,x} = u = v = 0 (Versuchsrandbedingung)
$\bar{\ell}$	Länge geometrische Imperfektion
ℓ _s	Länge Eigenspannungsansatz
ℓ _m	Meßlänge zur Kontrolle Schweißnahteinziehung

$\max \epsilon_v = \frac{\max |w_0|}{t}$ bezogene Imperfektionsamplitude

t_v Toleranzwert Schweißnahteinziehung

Abkürzungen

VZW	Vorzeichenwechsel
LHW	Längshalbwellen
UVW	Umfangsvollwellen
kr	kritisch
IMP	Imperfektion

1. EINFÜHRUNG UND LÖSUNGSMETHODE

1.1 Problemstellung

Bei der in Bild 1.1 dargestellten Silozelle, die Bestandteil einer Karbidsilo-Anlage von vier zylindrischen Zellen ist, sind im Bereich von Rundnähten längliche Beulen eingefallen.

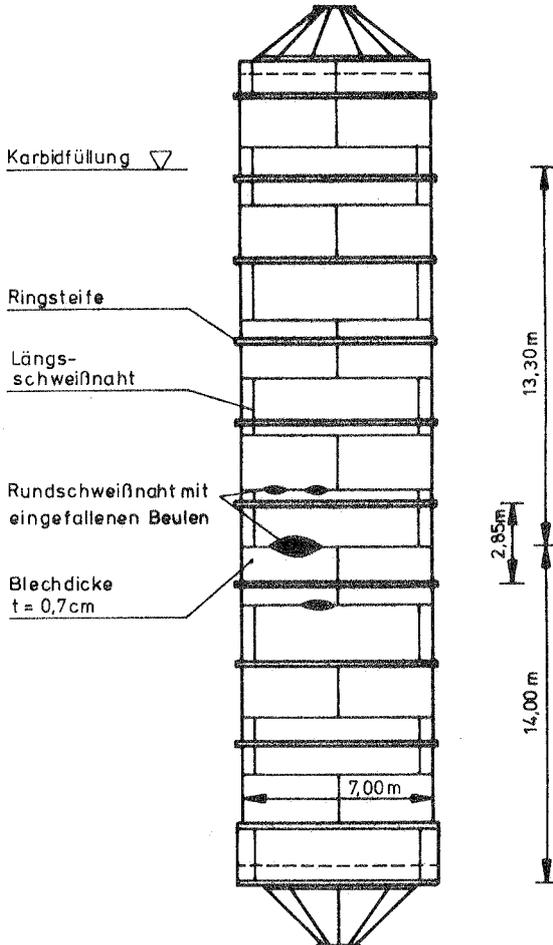


Bild 1.1: gebulte Silozelle im Bereich einer Rundschweißnaht

Über diesen Schadensfall wurde von Bornscheuer in [15] berichtet. Hier entstanden die Beulen während des Ablaßvorganges bei Teilfüllung. Die Längsdruckspannungen infolge Wandreibung können somit nicht allein als die maßgebende Ursache des Schadensfalles angesehen werden. Als Ursache kommen die durch die Rundschweißnaht bedingten Imperfektionen in Frage, wie

- geometrische Imperfektion aus Schweißverformungen und
- Schweißbeigenspannungen.

Daneben könnte sich natürlich eine Reihe weiterer Einflüsse ausgewirkt haben, wie z.B. Art der Silodruckverteilung, Frage der Randbedingungen infolge der Ringstreifen und etwaige zusätzliche Belastungen aus Temperatur.

Dieses komplexe Bauwerksproblem wird deshalb reduziert auf das Forschungsmodell des axialbelasteten Kreiszylinders mit einer Rundschweißnaht in der halben Kreiszylinderlänge. Daran sollen die Einflüsse der durch die Rundschweißnaht bedingten lokalen Imperfektionsarten auf die Stabilität und Traglast untersucht werden.

1.2 Wissensstand, Bemessungsvorschriften, Sicherheitsüberlegungen

Über das Beulverhalten des axialbelasteten Kreiszylinders wurde eine Vielzahl von theoretischen wie auch experimentellen Untersuchungen durchgeführt. Ausgehend von den klassischen Arbeiten von Lorenz [65] (1908), Timoshenko [102] (1910) und Flügge [36] (1932) zeigten sich gegenüber den experimentellen Beullasten erhebliche Unterschiede. Als Erklärung wurde anfänglich das Nachbarbeulverhalten angesehen, woraus eine Reihe von Untersuchungen resultierte, wie z.B. die Arbeiten von Karman & Tsien [48] (1941) oder Kempner [49] (1954). Daneben sind Untersuchungen mit verschiedenartigen geometrischen Imperfektionen durchgeführt worden, siehe z.B. die Arbeiten von Dannell/Wan [26] (1950), Koiter [54]

(1963) oder Arbocz/Sechler [4] (1970), womit sich eine teilweise Erklärung des Abfalls bei den experimentellen Beullasten ergab. Der Beulvorgang mit dem Entstehen des rautenförmigen Nachbeulmusters wurde von Esslinger [31] (1970) durch Hochgeschwindigkeitsaufnahmen erfaßt.

Während bei Stäben und Platten eine Reihe von Untersuchungen mit Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen und auch Eigenspannungen vorliegt - siehe z.B. Thürlimann [101] (1957), Lindner [64] (1974), Kröplin [60] (1977) - gibt es am Kreiszyylinder nur wenige Untersuchungen mit Berücksichtigung solcher Imperfektionsarten. Von Harding [40] (1978) ist der Einfluß einer Längsschweißnaht am axialbelasteten Kreiszyylinder durch numerische Methoden untersucht worden. Experimente an dicken Kreiszyindern (r/t -Verhältnis von 40 bis 120) mit Längsschweißnähten wurden von Ostapenko/Gunzelman [71], [72] durchgeführt. Von Esslinger [33] (1978) wird an einem Mylarzyylinder, der durch ein Streichholz vorgewärmt und ansonsten perfekt ist, ein zusätzlicher Abfall der Beullast aufgezeigt.

Bei den Bemessungsvorschriften, wie z.B. DAST-Ri. 013, ECCS-Richtlinie, "Norske Veritas Rules" oder ÖNORM B 4650, werden die beullastmindernden Einflüsse durch Abminderungsfaktoren erfaßt. Eine Unterscheidung und Berücksichtigung der verschiedenartigen Einflüsse ist damit nicht möglich, sondern es wird global die klassische Beullast reduziert.

Dabei werden bis auf "Norske Veritas Rules" globale Sicherheitsfaktoren γ verwendet, womit γ -fache Gebrauchsspannungen den Tragspannungen gegenübergestellt werden. Bei Verwendung semiprobabilistischer Sicherheitskonzepte mit unterschiedlichen Teilsicherheitsfaktoren ließen sich die verschiedenartigen Einflüsse - wie Randbedingungen, geometrische Imperfektionen, Schweißeigenspannungen usw. - besser berücksichtigen.

1.3 Lösungsweg

Zuerst wird auf das Beulproblem des axialbelasteten Kreiszylinders kurz eingegangen. Der Einfluß von Imperfektionen aus Schweißnähten wird in Abschnitt 3 diskutiert.

Die Erfassung von Eigenspannungen bei geometrischer Nichtlinearität und der Einfluß bei physikalischer Nichtlinearität werden bei den theoretischen Grundlagen des Abschnittes 4 hergeleitet. Die Berücksichtigung von Eigenspannungen in der Finiten Element Methode wird diskutiert. Neben einer kurzen Darstellung der verwendeten Finite Elemente werden die inkrementell iterativen Lösungsmethoden und Bewertungskriterien der nichtlinearen Rechnungen angegeben.

In Abschnitt 5 werden anhand einfacher Testbeispiele die Einflüsse von Eigenspannungen gezeigt. Soweit vorhanden, werden Vergleichslösungen angegeben.

Im sechsten Abschnitt wird auf die Untersuchungen am axialbelasteten Kreiszyylinder mit einer Rundschweißnaht eingegangen. Es wurde ein Kreiszyylinder mit einem r/t -Verhältnis von 500 des mittellangen Längenbereiches untersucht. Neben den beiden Rechenmodellen, axialsymmetrische und nichtaxialsymmetrische FE-Idealisierung, sind die Imperfektionsannahmen dargestellt. In einer Vorstudie wird zuerst der Einfluß der Biegerandstörung des perfekten Kreiszylinders kurz behandelt. Danach erfolgt die Untersuchung zweier geometrischer Imperfektionsarten aus Schweißverformungen. Durch Hinzunahme von Eigenspannungen wird schließlich das Problem der Rundschweißnaht simuliert. Dabei werden die geometrischen Imperfektionen mit verschiedenartigen Eigenspannungsansätzen variiert.

Abschließend erfolgt eine Wertung und Gegenüberstellung der Ergebnisse mit experimentellen Beullasten aus dem Schrifttum, Vergleich mit der Abminderungskurve und Herstellungstoleranz aus der DAST-Ri.013 "Beulsicherheitsnachweise für Schalen".

2. ZUM BEULPROBLEM DES AXIALBELASTETEN KREISZYLINDERS

Einen allgemeinen Überblick über Stabilitätsprobleme von Schalen findet man z.B. in den Büchern von Kollár/Dulácska [55] oder Brush/Almroth [21]. Eine zusammenfassende Darstellung über einige der recht zahlreichen Untersuchungen des axialbelasteten Kreiszyllinders wird von Hoff [42] angegeben. Nachfolgend wird auf die klassische Beultheorie des axialbelasteten Kreiszyllinders eingegangen, zumal bei den eigenen Untersuchungen auf die Werte der klassischen Beultheorie Bezug genommen wird. So wird damit der Ausschnitt bei den nichtaxialsymmetrischen Untersuchungen festgelegt. Der Vergleich der Beulformen dient zur Elementrasterabsicherung. Anschließend erfolgt eine Gegenüberstellung der klassischen Beullast mit experimentellen Beullasten.

2.1 Zur klassischen Beultheorie des axialbelasteten Kreiszyllinders

Die klassische Beullast des axialbelasteten Kreiszyllinders geht zurück auf Lorenz [65] und Timoshenko [102]. In der klassischen Beultheorie ist der Grundzustand ein Membranspannungszustand, und die zugehörigen Verschiebungen werden vernachlässigt. Bei Voraussetzung von Axialsymmetrie läßt sich damit die klassische Beullast des Kreiszyllinders aus der Differentialgleichung oder auf energetischem Wege herleiten. Sie ergibt sich mit der zugehörigen axialsymmetrischen Beulwellenzahl $m_{k\ell}$

$$p_{xk\ell} = \frac{Et^2}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} , \quad m_{k\ell} = \frac{\ell}{\pi\sqrt{\frac{r^2 t^2}{12(1-\nu^2)}}} . \quad (2.1a,b)$$

In die Formel der klassischen Beullast geht die Kreiszyllinderlänge nicht ein. Eine Abgrenzung zum kurzen oder langen Kreiszyllinder ist damit nicht möglich.

Eine Abgrenzung ist mit der vollständigen linearen Beultheorie nach Flügge [36] möglich. Mit gewissen Voraussetzungen - wie zweite schalentheoretische Approximation nach Love/Flügge und Gleichgewicht am verformten Element - ist bei der Flüggeschen Stabilitätstheorie eine Abhängigkeit bei den Membrankräften von den Krümmungen und Verwindungen und bei den Biegemomenten von den Mittelflächenverzerrungen vorhanden. Die Lösung der drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erfolgt mittels Schachbrettansatz für das Beulmuster, unter Erfüllung der klassischen Randbedingung (SS3). Aus der Lösung eines algebraischen Eigenwertproblems (z.B. mit [69]) ergibt sich bei Änderung der Längshalbwellen m und Umfangsvollwellen n die Beullast durch Minimierung. Sie läßt sich für Geometrieparameter in einem Diagramm darstellen (siehe vereinfachte Darstellung des Diagramms aus [37] in Bild 2.1). Anhand dieses Diagramms ist eine Unterscheidung zwischen kurzer, mittellanger und langer Kreiszylinderschale möglich. Für den mittellangen Bereich unterscheidet sich die Beullast geringfügig von der klassischen Beullast (nach Formel (2.1a)). Der Übergang zum Plattenstreifen bzw. Stabknicken wird durch die Flüggesche Stabilitätstheorie erfaßt.

Verwendet man dagegen die Donnell'sche Stabilitätstheorie [25], ist der Übergang zum Stabknicken nicht erfaßbar (siehe auch [32]) und der zum Plattenstreifen nur unter gewissen Voraussetzungen (siehe auch [21]). Bei dieser Theorie erfolgt eine Entkoppelung der Differentialgleichungen, wobei zur Lösung wiederum ein Schachbrettansatz verwendet wird. Bei einer Vorgehensweise wie bei der Flüggeschen Stabilitätstheorie - Ermittlung der Beullast durch Lösung eines algebraischen Eigenwertproblems - ergeben sich mehrfache Eigenformen, wobei der Eigenwert der klassischen Beullast entspricht. Die Formel für die klassische Beullast läßt sich unmittelbar aus der Ableitung nach dem Beulwellenzahlverhältnis herleiten. Dabei sind jedoch die Beulwellenzahlen unbestimmt.

Aus der Flüggeschen Stabilitätstheorie läßt sich die Donnell-Theorie oder die axialsymmetrische klassische Theorie herleiten, indem man in den drei gekoppelten partiellen Differentialglei-

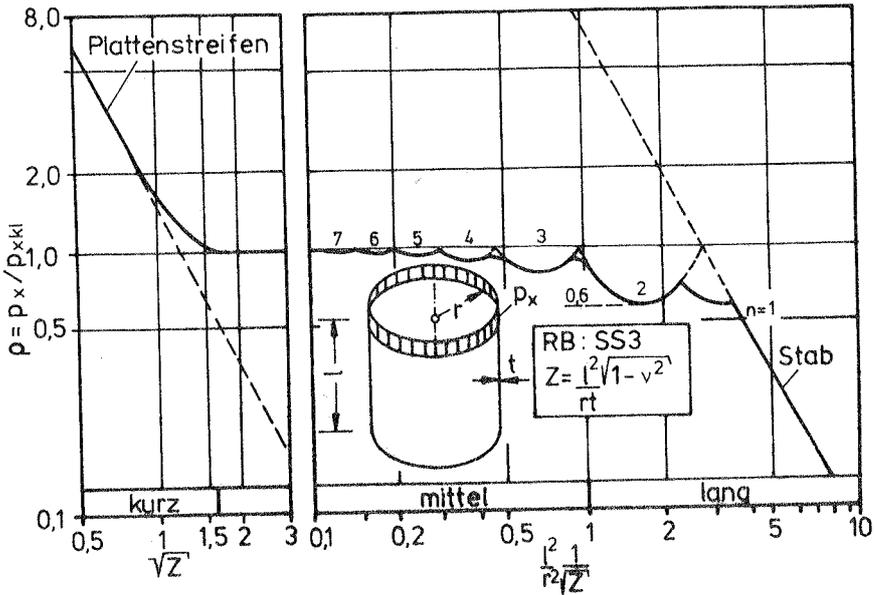


Bild 2.1: Abgrenzung Längenbereiche perfekter Kreiszyylinder unter Axialbelastung

chungen der Flügge Theorie entsprechende Terme wegstreicht. Das axialsymmetrische Beulproblem entspricht dem Knickproblem des elastisch gebetteten Balkens.

Jetzt soll kurz auf die Beulformen eingegangen werden (siehe Bild 2.2). Die Ringbeulen liegen der axialsymmetrischen Theorie nach Lorenz/Timoshenko zugrunde, die Schachbrettbeulen der Beultheorie nach Flügge bzw. Donnell. Ausgehend von den Schachbrettbeulen des Verzweigungspunktes (siehe Versuche in [99]) entstehen im Nachbeulbereich die aus Experimenten [31],[75] bekannten rautenartigen Beulmuster.

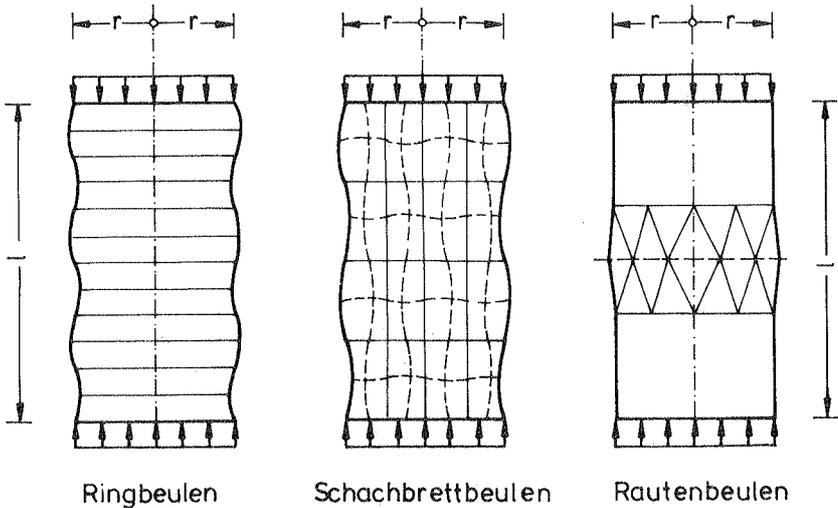


Bild 2.2: Schematisierte Darstellung der Beulformen

2.2 Die klassische Beullast im Vergleich zu Versuchen

Eine umfassende Zusammenstellung von Versuchsergebnissen mit statistischen Auswertungen ist von Schulz [96] vorgenommen. Die Bedeutung von Versuchen bei den heutigen Möglichkeiten von Stabilitätsnachweisen an Schalen mit Computermethoden wird von Singer [91] diskutiert. Auf Folgerungen aus Versuchen für baupraktische Schalenkonstruktionen wird von Bornscheuer [16] eingegangen.

Wie stark die experimentellen Beullasten im Vergleich zur klassischen Beullast streuen, zeigt die Versuchsauswertung in Bild 2.3 aus [34], wobei nur der baupraktisch wichtige r/t -Bereich wiedergegeben ist. Es handelt sich dabei um ausschließlich elastisch beulende Zylinder, da sich für elasto-plastisch beulende Stahlzylinder - wie dies bei kleiner werdendem r/t -Verhältnis zutrifft - wesentlich niedrigere Beullasten ergeben. Bei den hier

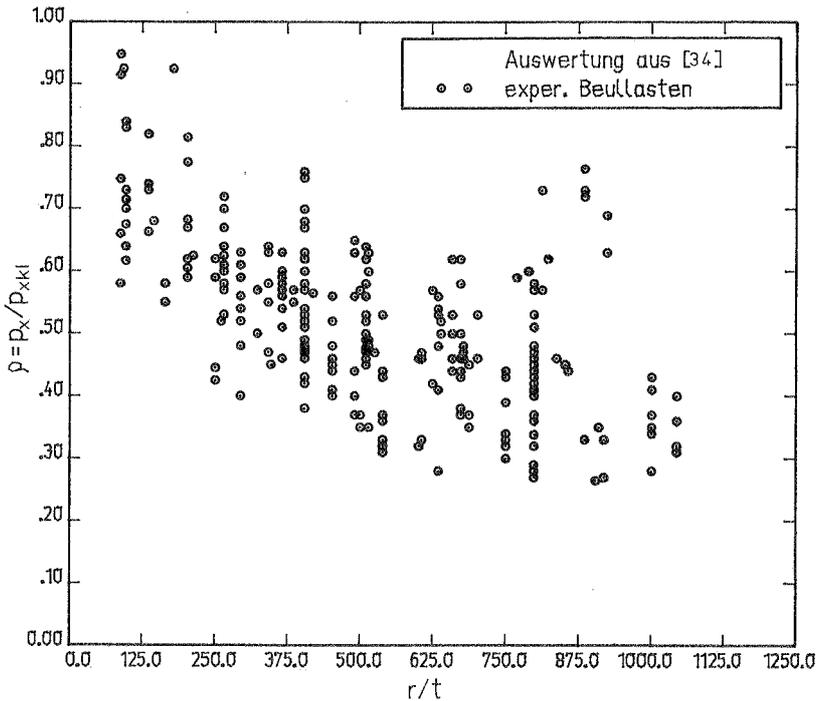


Bild 2.3: Auswertung experimenteller Beullasten axialbelasteter Kreiszyylinder

dargestellten Versuchsergebnissen zeigt sich mit zunehmenden r/t -Verhältnissen ein Abfall gegenüber der klassischen Beullast. Die bekannten Ursachen sind

- geometrische Imperfektionen,
- strukturelle Imperfektionen und
- Randbedingungen.

Dabei wirken sich die verschiedenen Einflüsse unterschiedlich stark aus, so daß eine Übertragung von Beullastversuchen an Modellzylindern auf baupraktische Schalenkonstruktionen nicht unproblematisch ist. Selbst durch unterschiedliche Versuchstechnik, Ver-

suchserfahrung und Modellkörper ergeben sich gewisse Streuungen. Ältere Versuche sind zum Teil nicht ausreichend dokumentiert. Durch gezielte Auswahl läßt sich der Punktehaufen nach oben oder nach unten verschieben (siehe auch [87]).

Durch numerische Rechenverfahren lassen sich gezielt einzelne Einflüsse untersuchen, wobei die Problematik in realistischen Imperfektionsannahmen - wie z.B. Art der Imperfektion und ihre Größe - liegt.

3. IMPERFEKTIONEN INFOLGE VON SCHWEISSNÄHTEN

3.1 Allgemeine Definition von Imperfektionen

Im Stahl- und Behälterbau [29], [85] unterscheidet man folgende Imperfektionsarten:

- geometrische Imperfektionen, wie Walztoleranzen, Vorverformungen, geometrische Abweichungen bei Kräfteinleitung,
- strukturelle Imperfektionen, wie Eigenspannungen aus Walzen, Schweißen, Warmrichten sowie Eigenspannungen aus plastischen Formänderungen, Streuung der Werkstoffkennwerte im Querschnitt.

Silos, Behälter oder Tankbauten werden aus gewalzten Blechen durch Rund- und Längsschweißnähte zusammengeschweißt. Dabei ist ein Zusammenhang zwischen geometrischer und struktureller Imperfektion vorhanden. In dicken Blechen sind große Eigenspannungen und kleine Vorverformungen vorhanden, dagegen werden die Eigenspannungen bei dünnen Blechen durch größere Vorverformungen abgebaut. Im weiteren werden einige Meßergebnisse von Vorverformungen als auch Schweiß eigenspannungen angegeben. Auf die Problematik der Entstehung und Ermittlung von Schweiß eigenspannungen wird kurz eingegangen. Die Frage der Herstellungstoleranzen mit dem Einfluß auf die Fertigungsbedingungen wird diskutiert.

3.2 Schweißverformungen und Schweiß eigenspannungen

Im nachfolgenden sind Meßergebnisse dargestellt von

- a) Schweißnahtverformungen im Bereich von Rundschweißnähten an Tankbauten,
- b) Schweiß eigenspannungen infolge einer Rundschweißnaht,
- c) Schweiß eigenspannungen an ebenen Blechen aus verschiedenen Stahlsorten.

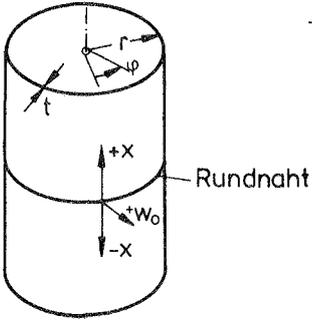
Aufgrund dieser Meßergebnisse sollen baupraktisch sinnvolle Imperfektionsannahmen für die theoretischen Untersuchungen festgelegt werden.

a) Darstellung von Schweißverformungen im Bereich von Rundschweißnähten

Von Schulz [95] wurden Messungen an Tankbauwerken vorgenommen. Dabei handelt es sich um automatengeschweißte V-Nähte mit drei oder mehr Lagen und gegengeschweißter Wurzel. Zum Aufmaß wurde eine Meßbrücke von 1000 mm Länge verwendet. Von den umfangreichen Meßergebnissen sind einige ausgewählt und in Bild 3.1 dargestellt. Dies sind die Ergebnisse an einem Tank mit r/t -Verhältnis von 829 und der Blechdicke $t = 7$ mm mit vier Meßstellen am Umfang. Man erkennt eine mittlere Nahteinziehung von $w_0/t \approx -0.60$ und eine leichte Aufweitung nach außen mit $w_0/t \approx 0.10$. Im weiteren sind Ergebnisse von vier Meßreihen für verschiedene r/t -Verhältnisse und Blechdicken angegeben. Daran erkennt man eine mit dem r/t -Verhältnis zunehmende maximale Imperfektionsamplitude bis zu einem Wert von $w_0/t \approx -1.80$ für den Zylinder mit $r/t = 1710$. Hieraus läßt sich folgern, daß die Imperfektionsannahme eines bereichsweise stetigen Verlaufs, bei axialsymmetrischen Voraussetzungen, eine realistische Annahme ist. Die Form der Nahteinziehung kann jedoch durchaus anders sein. So wird von White/Dwight [112] für einen Modellzylinder als Vorverformung eine sogenannte "herzförmige" Nahteinziehung skizziert. Durch gezielte Schweißfolge - Wechsel des Schweißvorgangs zwischen Innen- und Außenseite - kann die Vorverformung sehr klein gehalten werden, wie dies an einem Silo [61] vorgenommen wurde.

b) Schweißspannungen infolge einer Rundschweißnaht

Die nachfolgend dargestellten Meßergebnisse wurden von Ebel/Reinhard [28] an einem Rohr mit $r/t = 32$ und der Blechdicke $t = 12$ mm ermittelt. Das aus Kesselblech, mit der Fließspannung $\sigma_F = 24 \text{ kp/mm}^2$, bestehende Rohr wurde aus zwei Abschnitten mit einer X-Naht mittels Gasschmelzschweißung zusammengefügt. In Bild 3.2 sind die mit dem Siebelschen Setz-Dehnungsmesser ermit-



r = Radius
 t = Wanddicke
 w_0 = Vorverformung
 Koordinaten: x, φ

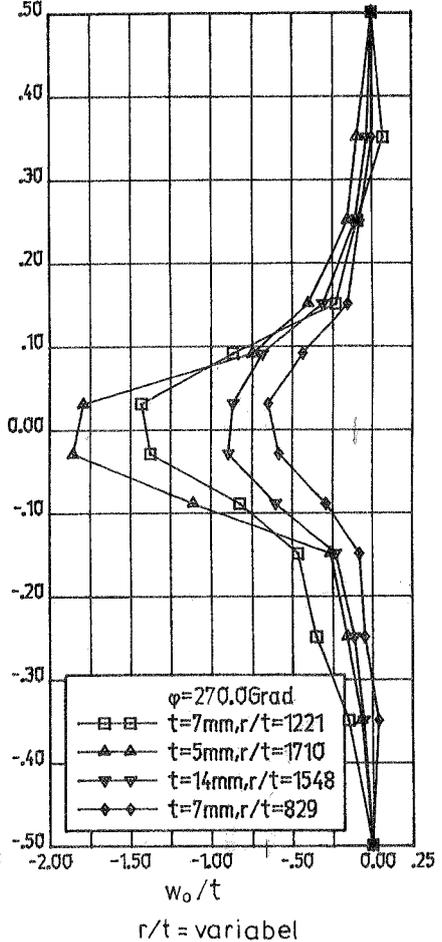
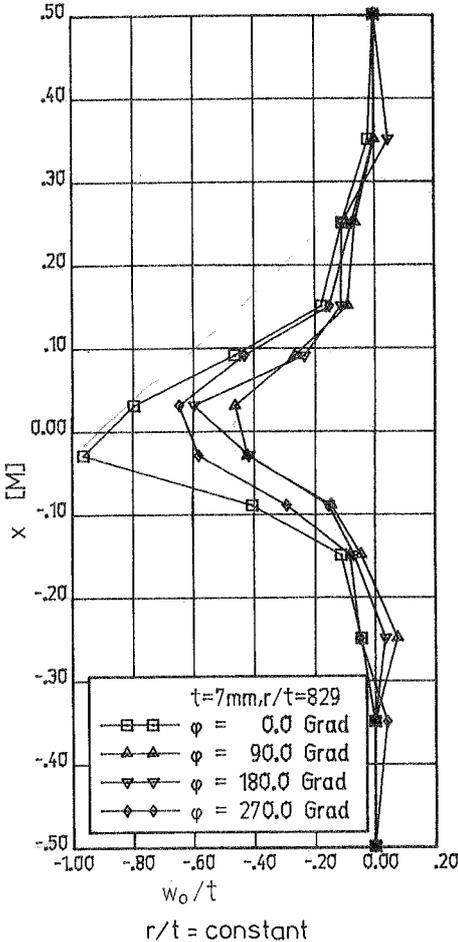


Bild 3.1: Messergebnisse Rundschweißnahtverformung aus [95]

telten Schweißelgenschaften für die ausgewählte Meßstelle SP5 angegeben. Neben der über der Wanddicke t gemittelten Ringelgenschaft σ_φ^E sind die nicht unerheblichen Bieeelgenschaften σ_x^E der Außenseite des Rohres dargestellt.

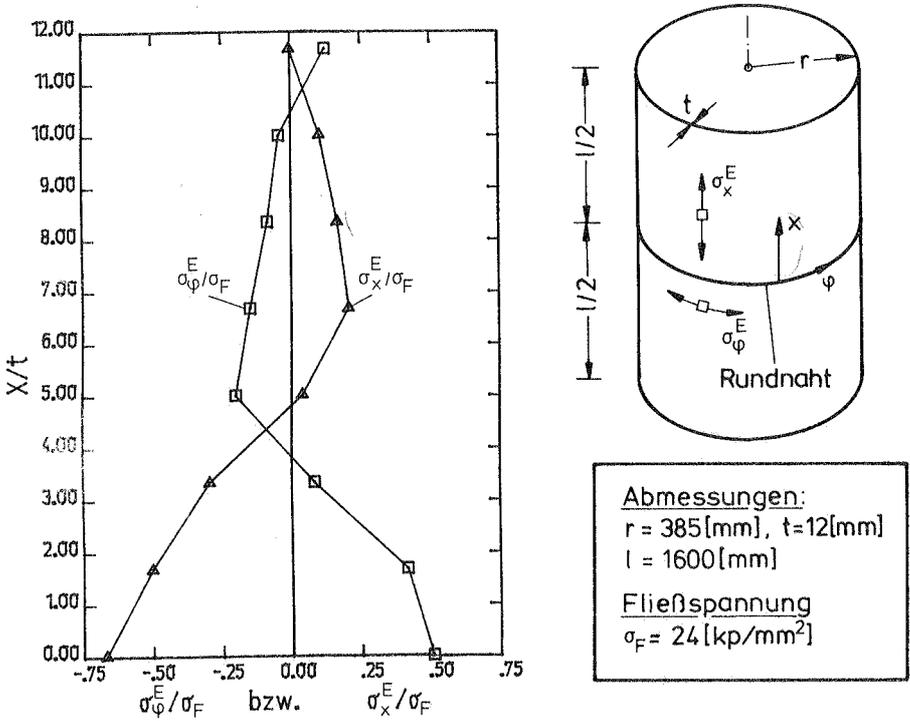


Bild 3.2: Meßergebnisse Schweißelgenschaften einer Rundnaht nach [28]

Diese Bieeelgenschaften sind aus Gleichgewichtsgründen erforderlich. Solche Bieeelgenschaften kommen auch an Kreiszyklindern mit rotationssymmetrischen Wärmeeigenschaftszuständen vor [50]. Die maximalen bzw. minimalen Spannungswerte liegen bei den hier angegebenen Meßergebnissen bei den Ringelgenschaften bei

0,50 σ_F bzw. -0,20 σ_F und für die Biegeeigenspannung in der Größenordnung -0,70- bzw. +0,20-fachen Fließspannung. Die Spannungskombination ergibt bei der Mises-Vergleichsspannung für den ungünstigsten Fall (bei $x = 0$) ungefähr die Fließspannung.

c) Schweißeigenspannungen an ebenen Blechen aus verschiedenen Stahlorten

Zur Veranschaulichung, wie stark die maximalen Zug- und Druckeigenspannungen streuen, sind hier noch einige der umfangreichen Meßergebnisse an ebenen Blechen aus [46] angegeben. Bei diesen Blechen wurde der Eigenspannungszustand durch Schweißraupen an der Oberseite des Blechs erzeugt. So ist in Bild 3.3 der Verlauf

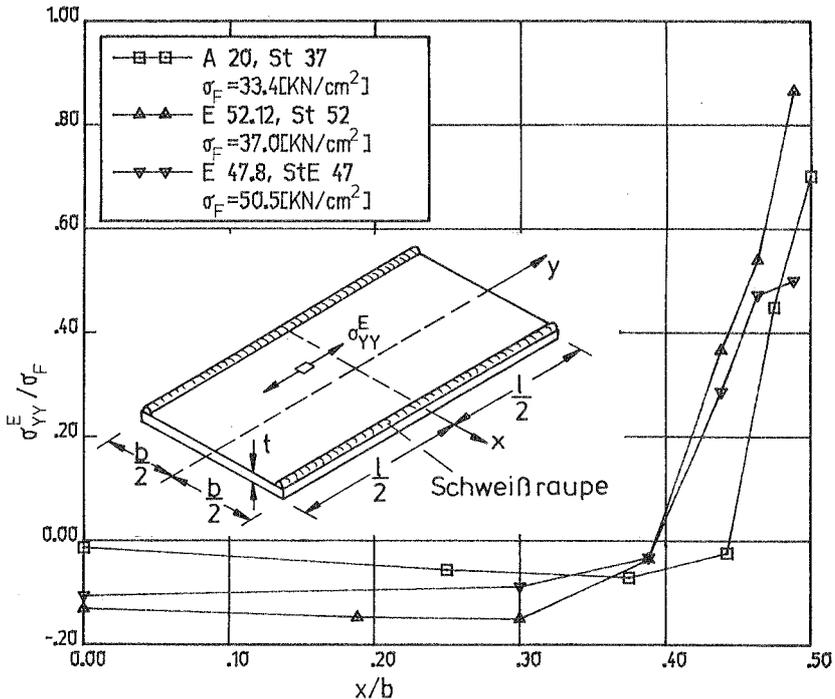


Bild 3.3: Meßergebnisse Schweißeigenspannungen an ebenen Blechen für verschiedene Stahlorten aus [46]

der bezogenen Membraneigenspannung σ_{YY}^E über die halbe Blechbreite für Bleche aus verschiedenen Stahlsorten dargestellt. Die Blechbreite war einheitlich 600 mm, die Länge 1000 mm bzw. 800 mm, während die Blechdicke t mit 20 mm, 12,17 mm und 8,23 mm angegeben ist. Man sieht, die Zugspannungen neben der Schweißraupe bewegen sich in der Größenordnung der 0,5- bis 0,9-fachen Fließspannung, dagegen liegen die Druckeigenspannung in Blechmitte bei 0,05- bis 0,15 σ_P . Die Meßergebnisse an ebenen Blechen zeigen das typische Verhalten, daß die Zugeigenspannungen neben der Schweißnaht gegen die Fließspannung gehen, wie dies auch bei Längsschweißnähten an Kreiszyllindern [71][72] zutrifft.

Aus den dargestellten Meßergebnissen von Schweißeigenspannungen läßt sich schließen, daß der Verlauf als auch die maximalen bzw. minimalen Werte stark streuen. Deshalb sind für die Rechenannahmen karikierte Eigenspannungsverläufe sinnvoll, um damit Grenzwerte der Stabilitäts- bzw. Traglast zu ermitteln.

3.3 Zur Entstehung und Ermittlung von Schweißeigenspannungen

Durch den Schweißvorgang wird der Werkstoff im Bereich der Naht in seinem Gefügebau verändert und beeinflusst [77][86]. Auf diesen komplexen Vorgang im mikroskopischen Bereich wird hier nicht näher eingegangen. Anhand vereinfachter Modelle erfolgt eine Erklärung über das Entstehen von Schweißeigenspannungen. Der Schrumpfvorgang einer Schweißnaht wird in [52] mittels eines Modellversuches an einem Stab veranschaulicht. Eine sehr vereinfachte ingenieurmäßige Darstellung über das Entstehen von Schweißeigenspannungen an einer Scheibe anhand eines Fasermodells findet sich bei Roik [85] und ist in Bild 3.4 wiedergegeben. Aus dem Ablauf läßt sich erkennen, daß nach dem Schweißvorgang in der betrachteten Faser neben der Naht Zugeigenspannungen in Längsrichtung vorhanden sind. In den von der Schweißnaht weiter entfernten Blechteilen ergeben sich aus Gleichgewichtsgründen Druckeigenspannungen in Längsrichtung. Aufgrund solcher Fasermodelle finden sich in [27][111] vereinfachte Abschätzungen über resultierende innere Kräfte, die zu vereinfachten Stabilitätsnachweisen an ebenen Blechkonstruktionen verwendet werden können (siehe auch [24]).

„Poik.“

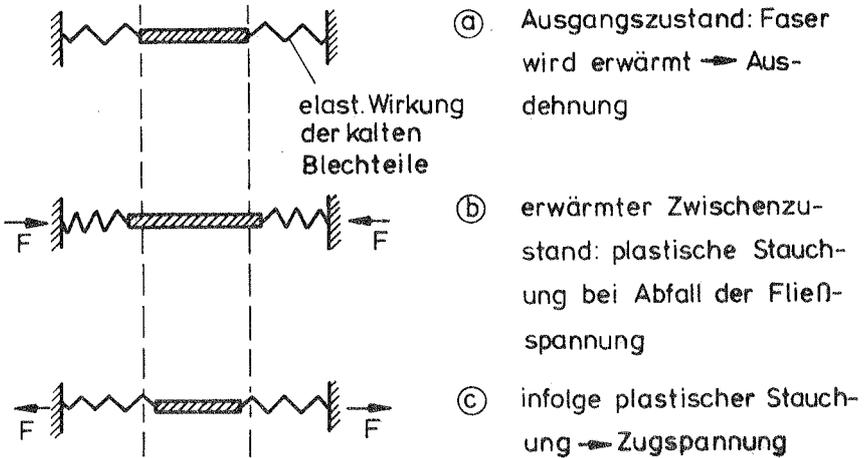
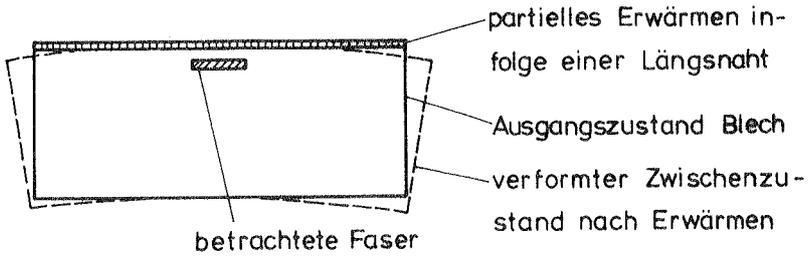


Bild 3.4: Veranschaulichung Entstehung Schweißzugspannung mittels Fasermodell an einer Scheibe

Die Ermittlung von Schweißzugspannungen ist bei experimentellen Methoden durch zerstörende oder zerstörungsfreie Verfahren möglich [77][86]. Bei der zerstörenden Methode wird der Versuchskörper zerlegt und aus der Messung der elastischen Rückfederung die Eigenspannungsverteilung ermittelt. Bei der zerstörungsfreien Spannungsermittlung erfolgt die Messung bleibender Verformungen mittels Setzdehnungsmesser.

Auf rechnerischem Wege sind anfängliche Wärmespannungen infolge nichtlinearer Temperaturverteilungen berechnet worden [50][51].

In [92] wird dagegen aufgrund experimentell ermittelter Dehnungen der Eigenspannungsquellen die Eigenspannungsverteilung an Stäben und Scheiben berechnet. Wirklichkeitsnähere Berechnungen erfolgten in letzter Zeit mit der Finiten Element Methode [76][12][66], bzw. der Finite Differenzen Methode [47]. So werden in [12] die Schweiß eigenspannungen einer Scheibe mit Längsschweißnaht ermittelt unter Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens, wie temperaturabhängige Werkstoffkennwerte bei plastischen Werkstoffeigenschaften. Zur Veranschaulichung sind in Bild 3.5 für Stahl St52 temperaturabhängige Werkstoffkennwerte aus [103] dargestellt. Den Berechnungen liegen zeitlich veränderliche Temperaturfelder zugrunde. Die Problematik bei solchen Untersuchungen liegt im richtigen Ansatz der Werkstoffkennwerte, Temperaturverteilung und eingebrachter Wärmemenge [90]. Damit läßt sich mehr oder minder gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen erzielen.

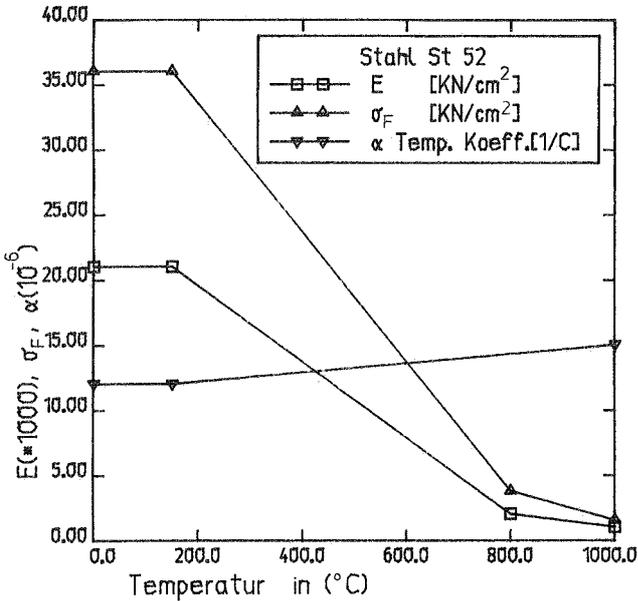


Bild 3.5: Idealisierte Temperaturabhängigkeit Werkstoffkennwerte für Stahl St52 für Berechnungen in [103]

3.4 Herstellungstoleranzen und Fertigungsbedingungen

Bei der Fertigung von dünnwandigen Schalenkonstruktionen des Stahl- und Behälterbaus sind Maßabweichungen von der Sollform unvermeidbar. In den einschlägigen Richtlinien und Vorschriften [116], wie ASME-Code, AD-Merkblatt H1, DIN 4119 oder DAST-Richtlinie o13, werden verschiedenartige Kontrollen von Toleranzgrenzen gefordert, wie Unrundheit, Abweichungen von der lotrechten Mittelachse, Kontrolle der örtlichen Abweichungen durch Anlegen von Schablonen, Blechkantenversatz. Bei Einhaltung vorgegebener Grenzwerte dürfen die in den Richtlinien und Vorschriften festgelegten Beullasten den statischen Nachweisen zugrunde gelegt werden. So wird in der DAST-Richtlinie o13 für die Schweißverformung die in Bild 3.6 dargestellte Kontrolle verlangt. Vergleicht

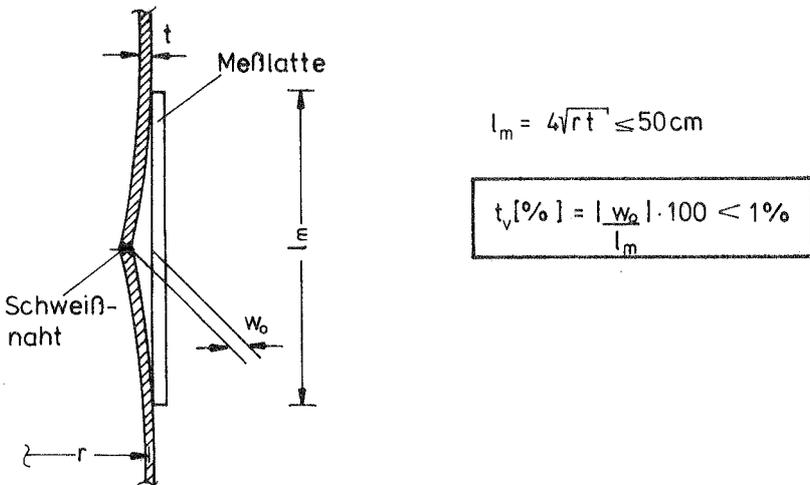


Bild 3.6: Herstellungstoleranz Schweißnahteinziehung nach DAST-Ri. o13

man die Meßergebnisse über Schweißnahteinziehungen an Behälterbauten [94] mit dieser Herstellungstoleranz, so stellt man fest, daß die zulässigen Toleranzen bei diesen Konstruktionen über-

schritten sind. So sind dort für Schweißnahteinziehungen bei Schablonenlänge von 500 mm Abweichungen bis 10 mm und bei einer Meßlänge von 2000 mm Abweichungen bis zu 20 mm angegeben. Es stellt sich nun die Frage, ob diese Behälterbauten unsicher sind oder ob die Toleranzgrenzen zu scharf sind. Die Festlegung von Toleranzen sollte durch Untersuchungen theoretischer oder auch experimenteller Art abgesichert sein. So könnte sich ergeben, daß für den Toleranzwert der Schweißnahteinziehung ein größerer Wert als in obengenannter Richtlinie zugelassen werden könnte. Kreiszyylinder mit solchen Schweißnahteinziehungen könnten dabei solche Beullasten ergeben, die noch an der unteren Grenze der Versuchswerte liegen (siehe Bild 2.3), die durch Abminderungskurven der einschlägigen Richtlinien abgedeckt sind. Erhöhte Herstellungstoleranzen bewirken längere Montagezeiten und damit höhere Fertigungskosten [61].

4. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

4.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Nachfolgend werden die theoretischen Grundlagen zur Darstellung des Lösungsweges dargestellt. Für die geometrisch nichtlineare Theorie wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen aus den differentiellen Gleichgewichtsbedingungen bei vorhandenen Eigenspannungen hergeleitet und in inkrementeller Form aufbereitet. Die auf der Grundlage der klassischen Plastizitätstheorie beruhende physikalische Nichtlinearität wird angegeben. Dabei werden die Einflüsse von Eigenspannungen diskutiert. Ausgehend von der dreidimensionalen Theorie führt die Herleitung unter Voraussetzung schalentheoretischer Annahmen - wie die Schalennormale bleibt während der Verformung gerade, und die Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche werden im Arbeitsausdruck vernachlässigt - durch bereichsweise Approximation der Ausgangsgeometrie und des Verschiebungsfeldes zur Finiten Element Methode (degenerierte Elemente). Die Lösung der nichtlinearen algebraischen Gleichungen erfolgt mittels inkrementell iterativer Methoden.

Die theoretischen Voraussetzungen für die Eigenspannungen, wie sie den weiteren Ausführungen zugrundeliegen, sollen hier dargestellt werden. Diese Voraussetzungen folgen teilweise den von Reissner in [82] gemachten Aussagen.

Danach gilt:

- Eigenspannungen sind Spannungen in einem Körper mit spannungsfreier Oberfläche bei Abwesenheit von Volumenkräften und für sich im Gleichgewicht.
- Der Körper verhält sich isotrop, homogen und bis zum Grenzwert der Fließbedingung elastisch.
- Auf eine Zuordnung von Eigendehnungen, wie dies bei den Messungen von Eigenspannungen an Stahlbaukonstruktionen geschieht [46], wird im weiteren verzichtet.

Die makroskopische Betrachtungsweise von Eigenspannungen ist für die meisten technischen Anwendungen ausreichend, so daß eine mikroskopische Betrachtungsweise als Versetzungen im Metallgitter, wie z.B. in [58][59], hier nicht erforderlich ist.

4.2 Geometrisch nichtlineare Theorie

Die kontinuumsmechanische Darstellung dieser Theorie findet man z.B. in [23], [63], [67], [104]. Im nachfolgenden wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen entsprechend der Darstellung von Bufler [23] angegeben, wobei hier noch zusätzlich Eigenspannungen berücksichtigt werden. Dies erfolgt in Lagrangescher Formulierung in kartesischen Koordinaten bei Gültigkeit der Summationskonvention. Im Hinblick eine späteren Inkrementierung nach Bathe, Ramm, Wilson [10] bzw. Ramm [78] wird der unverformte und verformte Zustand mit linksstehendem Index 0 bzw. n gekennzeichnet.

4.2.1 Allgemeine Bezeichnungen

Zwischen den in Bild 4.1 dargestellten Ortsvektoren ${}^0\mathbf{x}$ und ${}^n\mathbf{x}$ am unverformten bzw. verformten Körper gilt folgende stetige und umkehrbare Abbildung:

$${}^n x_i = {}^n x_i ({}^0 x_j) , \quad (4.1)$$

$${}^0 x_i = {}^0 x_i ({}^n x_j) . \quad (4.2)$$

Für die dargestellten Volumenelemente gelten:

$$d{}^0\mathbf{x} = \mathbf{e}_i d{}^0 x_i , \quad (4.3)$$

$$d{}^n\mathbf{x} = \mathbf{e}_i d{}^n x_i . \quad (4.4)$$

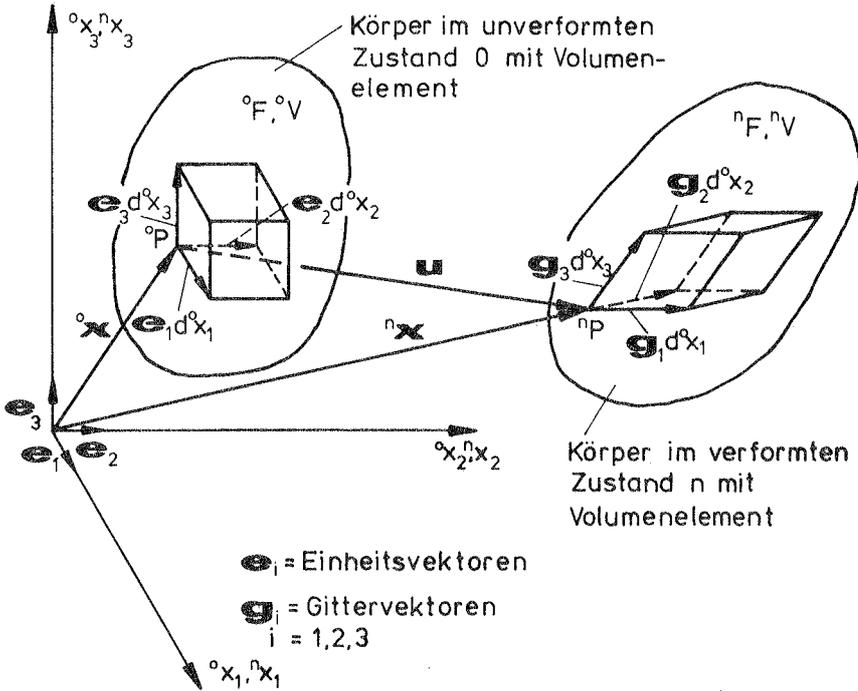


Bild 4.1: Bewegung eines Körpers im Raum

Mit (4.1) folgt aus (4.4)

$$d^n \mathbf{x} = \mathbf{e}_i \frac{\partial^n x_i}{\partial^0 x_j} d^0 x_j = \underline{\mathbf{e}_i^n x_{i,j}} d^0 x_j ; \quad (4.5)$$

dabei sind die unterstrichenen Terme die schiefwinkligen Gittervektoren (siehe auch Bild 4.1)

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i^n x_{i,j} \quad j = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.6)$$

Mit (4.3) und (4.4) ergeben sich unter Benutzung des Permutations-Tensors ϵ_{ijk} die

$$\text{Flächenelemente: } d^{\circ}F_i = \varepsilon_{ijk} d^{\circ}x_j d^{\circ}x_k, \quad (4.7)$$

$$d^n F_i = \varepsilon_{ijk} d^n x_j d^n x_k \quad (4.8)$$

und

$$\text{Volumenelemente: } d^{\circ}V = \varepsilon_{ijk} d^{\circ}x_i d^{\circ}x_j d^{\circ}x_k, \quad (4.9)$$

$$d^n V = \varepsilon_{ijk} d^n x_i d^n x_j d^n x_k. \quad (4.10)$$

Es gilt das Gesetz der Massenerhaltung

$$\frac{d^n V}{d^{\circ}V} = \frac{\rho}{\rho^{\circ}} = J; \quad (4.11)$$

wobei ρ die Dichte des Körpers ist und für die Jacobische Determinante J gilt:

$$J = \det({}^n x_{i,j}). \quad (4.12)$$

4.2.2 Kinematik

Mit dem Ortsvektor am verformten Körper (siehe Bild 4.1)

$${}^n \mathbf{x} = \mathbf{e}_j^n x_j = \mathbf{e}_j^{\circ} x_j + \mathbf{e}_j u_j \quad (4.13)$$

folgt durch Differentiation der Deformationsgradient

$$F_{ij} = {}^n x_{i,k} = \delta_{ik} + u_{i,k}. \quad (4.14)$$

Die zugehörige inverse Beziehung lautet

$$F_{jk}^{-1} = {}^{\circ} x_{j,k}. \quad (4.15)$$

Aus den unverformten und verformten Längenquadraten, die sich aus den Gleichungen (4.3) und (4.5) angeben lassen, folgt durch

Bildung der Differenz $2\epsilon_{ij} \cdot d^0x_i \cdot d^0x_j = d^0x^2 - d^0x^2$ mit (4.14) der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) . \quad (4.16)$$

4.2.3 Statik

Wie in Bild 4.2 dargestellt, sind bereits am unverformten Volumenelement innere Kräfte \mathbf{t}_i^E infolge Eigenspannungen (Index E für Eigenspannungen) vorhanden.

Dieses Kräftefeld ist für sich im Gleichgewicht, und es gilt

$$\mathbf{t}_{i,i}^E = 0 , \quad (4.17)$$

woraus sich mit

$$\mathbf{t}_i^E = \mathbf{e}_j \tau_{ij}^E \quad (4.18)$$

die skalaren Gleichgewichtsbedingungen ergeben, ausgedrückt in den Cauchy-Euler Spannungen

$$\tau_{ij,i}^E = 0 . \quad (4.19)$$

Es werden endliche Verschiebungen mit kleinen Verzerrungen vor- ausgesetzt. Am verformten Volumenelement (siehe Bild 4.2) gilt folgende Gleichgewichtsbedingung

$${}^n \mathbf{t}_{i,i} + \mathbf{q}^0 = 0 , \quad (4.20)$$

wobei \mathbf{q} die Volumenkräfte sind. Für den aus Eigenspannungen und Lastspannungszustand herrührenden Pseudospannungsvektor ${}^n \mathbf{t}_i$ ergibt sich die Beziehung zum 2. Piola-Kirchhoffschen - (Trefftz, Kappus) Spannungstensor wie folgt:

$${}^n \mathbf{t}_i = \mathbf{g}_j (s_{ij}^E + s_{ij}) . \quad (4.21)$$

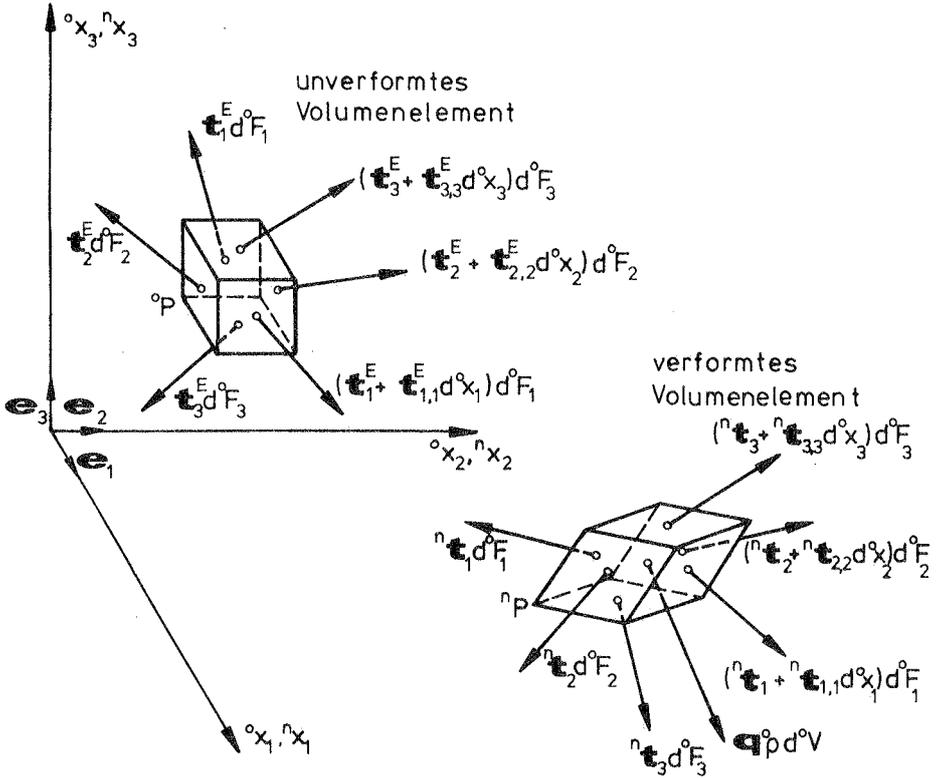


Bild 4.2: Kräftegleichgewicht am unverformten und verformten Volumenelement

Zwischen dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und den Cauchy-Euler Spannungen gilt die Beziehung:

$$s_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{il}^{-1} F_{jp}^{-1} \tau_{lp} \quad (4.22)$$

Mit (4.21) und (4.6) folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (4.20)

$$[(s_{ij}^E + s_{ij}) \mathbf{e}_k^{} n_{x_{k,j}}]_{,i} + \mathbf{q}^{\rho} = 0 \quad (4.23)$$

was sich mit dem Deformationsgradienten aus (4.14) wie folgt aufspalten läßt

$$[s_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} \mathbf{e}_k + [s_{ij}^E(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} \mathbf{e}_k + \mathbf{q}^{\circ\rho} = 0 \quad (4.24)$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen (4.18) und (4.19) ergeben sich die skalaren Gleichgewichtsbedingungen am verformten Volumelement, wie sie auch in [30] für Vorspannung dargestellt sind:

$$[s_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,i})]_{,i} + \underline{[s_{ij}^E u_{k,j}]_{,i}} + q_k^{\circ\rho} = 0 \quad (4.25)$$

Der unterstrichene Term in dieser Gleichung stellt den Einfluß vorhandener Eigenspannungen bei der geometrischen Nichtlinearität dar. Es ist eine Koppelung zwischen den bereits im Ausgangszustand vorhandenen Eigenspannungen und dem erreichten Verschiebungszustand vorhanden.

4.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.)

Die dem Prinzip zugrunde gelegten Voraussetzungen werden zuerst noch einmal zusammengestellt.

A Statik:

1. Gleichgewichtsbedingung aus (4.25) mit (4.14)

$$(s_{ij}^n x_{k,i})_{,i} + (s_{ij}^E u_{k,j})_{,i} + q_k^{\circ\rho} = 0 \quad \text{in } {}^{\circ}V \quad (4.26a)$$

2. Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$s_{ij} = s_{ji} \quad \text{in } {}^{\circ}V \quad (4.26b)$$

3. Randbedingungen

$$s_{ij}^n x_{k,j} n_i = \quad \text{auf } {}^{\circ}F_S \quad (4.26c)$$

B Kinematik:

1. Green-Lagrangescher Verzerrungstensor aus (4.16)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad \text{in } {}^0V. \quad (4.26d)$$

2. Vorgegebene Randverschiebung

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{auf } {}^0F_u. \quad (4.26e)$$

Mit der Variation $\delta^n x_k = \delta u_k$ des Ortsvektors (4.13) folgt aus Gleichung (4.26a) nach Integration über das unverformte Volumen:

$$\begin{aligned} \int_{{}^0V} (s_{ij}^n x_{k,j})_{,i} \delta^n x_k d^0V + \int_{{}^0V} (s_{ij}^E u_{k,j})_{,i} \delta^n x_k d^0V + \\ + \int_{{}^0V} q_k^o \rho \delta^n x_k d^0V = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aus den nicht unterstrichenen Anteilen dieser Gleichung ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz bei Berücksichtigung (4.26b,c,d,e,f) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der bekannten Weise:

$$\int_{{}^0V} s_{ij} \delta \epsilon_{ij} d^0V = \int_{{}^0V} q_i^o \delta u_i d^0V + \int_{{}^0F_s} \hat{s}_i \delta u_i d^0F. \quad (4.28)$$

Der aus den Eigenspannungen herrührende unterstrichene Term bedarf noch zusätzlicher Überlegungen, wozu der Anteil wie folgt dargestellt wird:

$$\begin{aligned} \int_{{}^0V} (s_{ij}^E u_{k,j})_{,i} \delta^n x_k d^0V = - \int_{{}^0V} s_{ij}^E u_{k,j} \delta^n x_{k,i} d^0V + \\ + \int_{{}^0V} (s_{ij}^E u_{k,j} \delta^n x_k)_{,i} d^0V. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Unter Verwendung des Verschiebungsgradienten $u_{k,j}$ aus (4.14) und des Gaußschen Integralsatzes läßt sich zeigen, daß der unterstrichene Term in dieser Gleichung zu null wird.

Das P.d.v.V. ergibt sich nun mit $\delta^n x_{k,i} = \delta u_{k,i}$ aus den Anteilen der Gleichungen (4.28) und (4.29) wie folgt (siehe auch [108]):

$$\int_{\overset{\circ}{V}} s_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d^{\overset{\circ}{V}} + \int_{\overset{\circ}{V}} s_{ij} E_{u_{k,i}} \delta u_{k,j} d^{\overset{\circ}{V}} = \int_{\overset{\circ}{V}} q_i^{\overset{\circ}{\rho}} \delta u_i d^{\overset{\circ}{V}} + \int_{\overset{\circ}{F}} \hat{S}_i \delta u_i d^{\overset{\circ}{F}} . \quad (4.30)$$

4.2.5 Inkrementierung des P.d.v.V.

Die Inkrementierung geschieht nach Bathe, Ramm, Wilson [10] bzw. Ramm [78] in "Totaler Lagrange Formulierung" (T.L.), d.h., der Referenzzustand ist der Ausgangszustand. Für das P.d.v.V. werden die Verschiebungen und damit die Verzerrungen mit Spannungen inkrementiert. Bei der Inkrementierung wird vorausgesetzt, daß die Verschiebungen und Spannungen des Zustandes n bekannt sind, während die zugehörigen inkrementellen Größen gesucht werden.

Mit dem Ortsvektor am Zustand n+1 (siehe Bild 4.3)

$${}^{n+1} \mathbf{x} = {}^0 \mathbf{x} + \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \quad (4.31)$$

läßt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor für diesen Zustand entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 4.2.2 herleiten und wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}] + \\ &+ \frac{1}{2} [\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \Delta u_{k,j}] . \end{aligned} \quad (4.32)$$

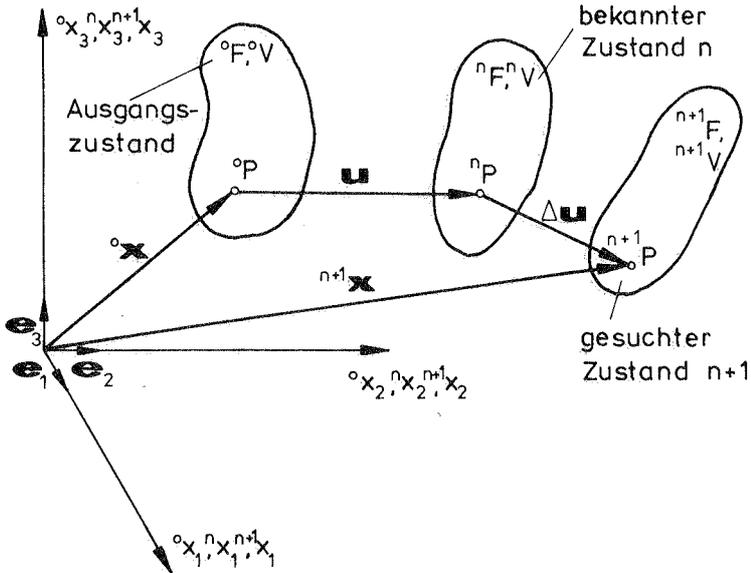


Bild 4.3: Inkrementierung des Verschiebungszustandes

Der inkrementelle Verzerrungstensor $\Delta \epsilon_{ij}$ wird in einen linearen und nichtlinearen Anteil aufgespalten:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} , \quad (4.33)$$

mit

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} u_{k,j}] , \quad (4.34)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} . \quad (4.35)$$

Im weiteren werden inkrementelle Beziehungen für Spannungen $s_{ij} + \Delta s_{ij}$, Volumenkräfte $q_i + \Delta q_i$ und Oberflächenkräfte $\hat{s}_i + \Delta \hat{s}_i$

entsprechend dem Verschiebungszustand eingeführt. Bei Berücksichtigung von

$$\delta(u_i + \Delta u_i) = \delta \Delta u_i \quad (4.36)$$

$$\delta(\epsilon_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}) = \delta \Delta \epsilon_{ij} \quad (4.37)$$

ergibt sich damit das P.d.v.V. für den Zustand n+1 aus Gleichung (4.30) zu

$$\begin{aligned} & \int_{\circ_V} (s_{ij} + \Delta s_{ij}) \delta \Delta \epsilon_{ij} d^{\circ V} + \int_{\circ_V} s_{ij}^E(u_{k,i} + \Delta u_{k,j}) \delta \Delta u_{k,i} d^{\circ V} = \\ & = \int_{\circ_V} (q_i + \Delta q_i) \delta \Delta u_i d^{\circ V} + \int_{\circ_{F_S}} (\hat{S}_i + \Delta \hat{S}_i) \delta \Delta u_i d^{\circ F} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit der virtuellen äußeren Arbeit

$${}^{n+1} \delta W_a = \int_{\circ_V} (q_i + \Delta q_i) \delta \Delta u_i d^{\circ V} + \int_{\circ_{F_S}} (\hat{S}_i + \Delta \hat{S}_i) \delta \Delta u_i d^{\circ F} \quad (4.39)$$

und der Beziehung $\delta \Delta \epsilon_{ij} = \delta \Delta \epsilon_{ij} + \delta \Delta \eta_{ij}$ aus (4.33) mit (4.37) läßt sich schließlich das P.d.v.V. folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} & \int_{\circ_V} \Delta s_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} d^{\circ V} + \int_{\circ_V} s_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} d^{\circ V} + \int_{\circ_V} s_{ij}^E \Delta u_{k,j} \delta \Delta u_{k,i} d^{\circ V} = \\ & = {}^{n+1} \delta W_a - \int_{\circ_V} s_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} d^{\circ V} - \int_{\circ_V} s_{ij}^E u_{k,j} \delta \Delta u_{k,i} d^{\circ V} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Der erste Ausdruck ist nichtlinear in den unbekanntem Verschiebungszustand Δu_i . Eine direkte Lösung ist nicht möglich, so daß folgende Linearisierung $\delta \Delta \epsilon_{ij} \rightarrow \delta \Delta \epsilon_{ij}$ erforderlich ist, womit sich ergibt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{O_V} \Delta s_{ij} \delta \Delta e_{ij} d^{O_V} + \int_{O_V} s_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} d^{O_V} + \int_{O_V} s_{ij}^E \Delta u_{k,j} \delta \Delta u_{k,i} d^{O_V} = \\
 & = {}^{n+1} \delta W_a - \int_{O_V} s_{ij} \delta \Delta e_{ij} d^{O_V} - \int_{O_V} s_{ij}^E u_{k,j} \delta \Delta u_{k,i} d^{O_V}. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Der dadurch bedingte Fehler wird im Rahmen der inkrementell-iterativen Rechentechnik beseitigt. Berücksichtigt man, daß gilt $s_{ij}^E \Delta u_{k,j} \delta \Delta u_{k,i} = s_{ij}^E \delta \Delta \eta_{ij}$, so erkennt man, daß die Eigenspannungen einen ähnlichen Term ergeben wie der zweite Anteil in (4.41), der bei der Finiten Element Methode zur geometrischen Steifigkeitsmatrix führt. Auf den letzten Anteil, der wiederum dem vorletzten ähnlich ist, wird bei der Matrizenformulierung der Finiten Element Methode näher eingegangen.

4.2.6 Elastisches Werkstoffgesetz

Für die elastischen Spannungszustände wird angenommen das Hookesche Gesetz mit den inkrementellen Größen des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor

$$\Delta s_{ij} = C_{ijkl}^e \Delta \epsilon_{kl}, \quad (4.42)$$

wobei für den elastischen Stofftensor C_{ijkl}^e gilt:

$$C_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl}]. \quad (4.43)$$

Ausführlich läßt sich (4.42) mit

$$\Delta s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} [\Delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \Delta \epsilon_{kk}] \quad (4.44)$$

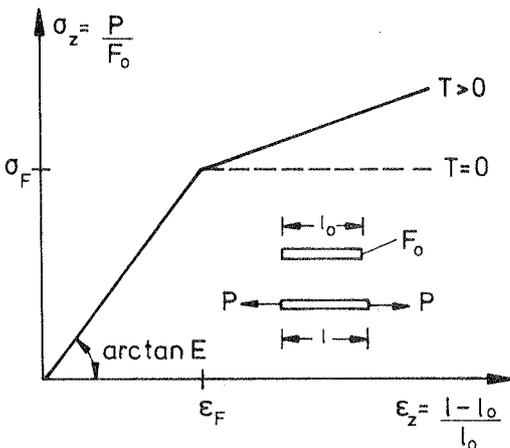
angeben, woraus sich nach Zwischenrechnung die inverse Beziehung ergibt:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} [\Delta s_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \Delta s_{kk}]. \quad (4.45)$$

4.3 Physikalische Nichtlinearität

4.3.1 Voraussetzungen

Zur Berechnung realistischer Traglasten ist ein physikalisch nichtlineares Werkstoffverhalten erforderlich. Die Grundlagen der klassischen Plastizitätstheorie, wie man sie z.B. in den Lehrbüchern von Reckling [81], Hill [41] findet, werden kurz dargestellt. Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß nur Spannungen aus dem Lastzustand vorhanden sind. Der Einfluß von Eigenspannungen wird abschließend diskutiert. Angenommen wird elastisch-idealplastisches bzw. elastisch-plastisch verfestigendes Werkstoffverhalten, wie dies durch den idealisierten einachsigen Zugversuch nach Bild 4.4 festgelegt ist.



Bezeichnungen

E = Elastizitätsmodul

σ_F = Fließspannung

T = Tangentenmodul

$T = 0$ → elastisch-idealplastischer Werkstoff

$T > 0$ → elastisch-plastisch verfestigender Werkstoff

Bild 4.4: Idealisierter einachsiger Zugversuch bei geometrischer Linearität

Die mehrachsigen Spannungszustände werden durch Fließbedingung, Verfestigungsfunktion und ein Fließgesetz beschrieben. Diesem mehrachsigen Verhalten liegen folgende weitere Voraussetzungen zugrunde:

- keine Abhängigkeit von der Temperatur, Zeit und Verformungsgeschwindigkeit;
- die Verzerrungen sind klein und lassen sich somit additiv in elastische und plastische Dehnungen wie folgt zerlegen $\Delta \epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij}^e + \Delta \epsilon_{ij}^p$;
- die elastischen Verzerrungen genügen dem Hookeschen Gesetz nach Abschnitt 4.2.6;
- das Werkstoffverhalten ist stabil nach dem Stabilitätskriterium von Drucker;
- das Fließen ist unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand. Vorausgesetzt wird Isotropie mit plastischen, inkompressiblen Verformungen;
- die Verschiebungen und Rotationen sind endlich, jedoch die Verzerrungen - wie bereits erwähnt - infinitesimal. Das Werkstoffgesetz kann näherungsweise mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor und dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor formuliert werden, wie in [8], [62], [74], [88].

4.3.2 Fließbedingung

Bei Stählen mit ausgeprägter Streckgrenze, z.B. nach DIN 17100, ist für einachsige Spannungszustände durch die Fließgrenze σ_F der elastische Grenzzustand festgelegt. Für mehrachsige Zustände ist dagegen eine Fließbedingung erforderlich, die angibt, bei welcher Spannungscombination Fließen eintritt. Für Metalle besonders geeignet, was durch Experimente belegt wurde, ist die Mises-Fließbedingung (Huber-Mises-Hencky-Fließbedingung)

$$f = I_2' - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0 . \quad (4.46)$$

Die Mises-Fließbedingung ist eine Funktion der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators

$$I_2' = \frac{1}{2} s_{ij}' s_{ij}' ; \quad (4.47)$$

wobei für den Spannungsdeviator s_{ij}' gilt:

$$s_{ij}' = s_{ij} + \delta_{ij}p, \quad (4.48)$$

Für den mittleren Normalendruck p gilt bei Voraussetzung kleiner Dehnungen und endlicher Verschiebungen

$$p = -\frac{\tau_{kk}}{3} = -\frac{s_{kk}}{3}. \quad (4.49)$$

Dies läßt sich zeigen, indem man den Deformationsgradienten aus (4.14) mit dem polaren Zerlegungssatz aufspaltet

$$F_{ik} = R_{i\ell} U_{\ell k}. \quad (4.50)$$

Bei Voraussetzung kleiner Dehnungen gilt $U_{\ell k} \approx \delta_{\ell k}$, womit sich nach Zwischenrechnung für den inversen Deformationsgradienten $F_{k\ell}^{-1}$ angeben läßt

$$F_{ik} = R_{ik} = F_{k\ell}^{-1}. \quad (4.51)$$

Damit folgt aus der Transformationsgleichung (4.22) zwischen dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und den Cauchy-Euler-Spannungen mit ${}^0\rho/{}^D\rho \approx 1$

$$s_{ij} = R_{\ell i} R_{pj} \tau_{\ell p}, \quad (4.52)$$

woraus sich mit $j = i$ die gesuchte Beziehung $s_{kk} = \tau_{kk}$ ergibt. Die Fließbedingung läßt sich mit Hauptspannungen geometrisch als eine Fläche bzw. Kurve darstellen (siehe Bild 4.5) und begrenzt den elastischen Zustand.

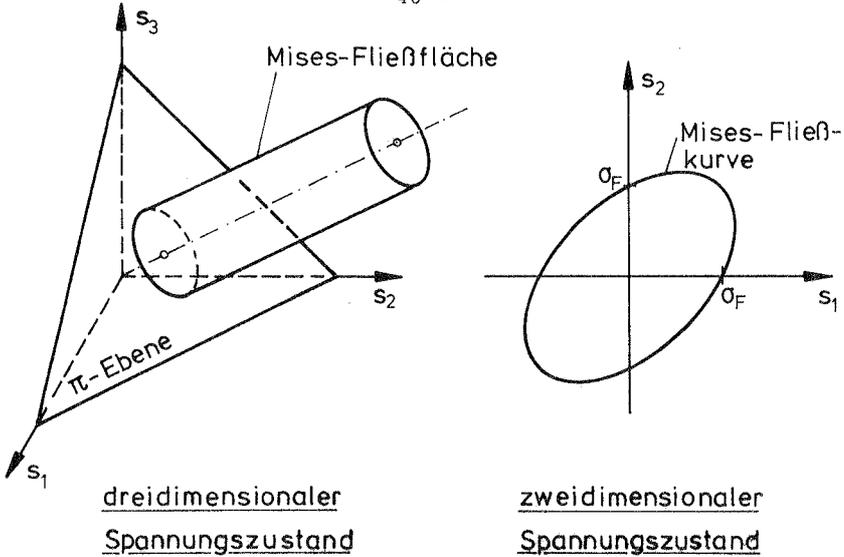


Bild 4.5: Geometrische Darstellung der Mises-Fließbedingung

4.3.3 Verfestigungsfunktion

Der momentane Zustand nach dem Fließen läßt sich durch folgende skalare Verfestigungsfunktion darstellen

$$g = g(s_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) , \quad (4.53)$$

die vom Spannungszustand s_{ij} , den plastischen Dehnungen ϵ_{ij}^p und einem Verfestigungsparameter k abhängen. Folgende Zustände sind festgelegt:

$$\begin{aligned} g < 0 & \text{ ein elastischer Zustand,} \\ g = 0 & \text{ ein plastischer Zustand,} \\ g > 0 & \text{ ist unzulässig.} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aus dem totalen Differential

$$dg = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial g}{\partial k} dk \quad (4.55)$$

lassen sich folgende Bedingungen angeben:

$$g=0; \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} ds_{ij} = \begin{cases} < 0 & \text{Entlastung} \\ = 0 & \text{Spannungsumlagerung} \\ > 0 & \text{Belastung} \end{cases} \quad (4.56)$$

Für den elastisch-ideal-plastischen Werkstoff gibt es nur Entlastung und Spannungsumlagerung.

4.3.4 Differentielles Verzerrungs - Spannungsgesetz

Die Voraussetzung eines stabilen Werkstoffverhaltens nach Drucker (Stabilität im Kleinen mit $d\epsilon_{ij}^P ds_{ij} > 0$) ergibt bei Beachtung von (4.56) die plastische Verzerrungsänderung

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} d\lambda \quad \text{mit } d\lambda > 0. \quad (4.57)$$

Dies wird als Normalenregel bezeichnet, da der Vektor $\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}$ in Richtung der äußeren Normale der Verfestigungshyperfläche weist. Die Hyperfläche ist nach Drucker eine konvexe Fläche (Stabilität im Großen). Mit isotroper Verfestigung, d.h. einer zur Ausgangsfließfläche affinen Verfestigungsfläche,

$$\tilde{g}(s_{ij}) = k^2 \quad (4.58)$$

und der Mises-Fließbedingung als Ausgangsfließfläche folgt aus (4.57) das differentielle Gesetz für die plastischen Verzerrungsanteile

$$d\epsilon_{ij}^P = s_{ij}' d\lambda. \quad (4.59)$$

Der skalare Faktor $d\lambda$ wird bestimmt, indem man die plastische Dissipationsarbeit des mehrachsigen mit dem einachsigen Zustand vergleicht

$$dA^P = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = \sigma_V d\varepsilon_V^P, \quad (4.60)$$

und die Vergleichsspannung σ_V in die Mises-Fließbedingung einsetzt, womit folgt

$$d\lambda = \frac{3 d\varepsilon_V^P}{3\sigma_V} = \frac{3 d\sigma_V}{2T_p(\sigma_V)\sigma_V}. \quad (4.61)$$

Darin ist T_p der plastische Tangentenmodul des einachsigen Vergleichszustandes $T_p = \frac{d\sigma_V}{d\varepsilon_V^P}$, der sich für elastisch-plastisch verfestigenden Werkstoff mit $T_p = \frac{ET}{E-T}$ ergibt.

Das vollständige differentielle Verzerrungs-Spannungs-Gesetz ergibt sich, indem man die elastischen Dehnungen aus (4.45) in differentieller Form in den Deviator- und Kugelanteil aufspaltet

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} ds_{ij}' - \frac{1-2\nu}{E} \frac{ds_{kk}}{3} \quad (4.62)$$

und die plastischen Dehnungen aus (4.59) mit (4.61) hinzuaddiert. Es folgt das Prandtl-Reuss-Gesetz für isotrope Verfestigung:

$d\varepsilon_{ij}' = \frac{1+\nu}{E} ds_{ij}' + \frac{3 s_{ij}' d\sigma_V}{2 T_p(\sigma_V)\sigma_V} \quad \text{für } d\sigma_V > 0$	
$d\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} ds_{ij}. \quad \text{für } d\sigma_V \geq 0$	(4.63a,b)

Während Gleichung (4.63a) für Belastung gilt ($d\sigma_V > 0$), fällt bei Entlastung der zweite Anteil in dieser Gleichung weg, so daß nur die elastischen Verzerrungen übrig bleiben.

Bei der Finiten Element Methode wird das Werkstoffgesetz aus (4.63) in inverser Darstellung benötigt. Diese Ableitung geht zurück auf Yamada u.a. und ist in [114] angegeben. So ergibt sich das inverse Prandtl-Reuss-Gesetz zu

$$ds_{ij} = \frac{E}{1+\nu} [d\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\epsilon_{kk} - \frac{s_{ij} s'_{kl}}{S} d\epsilon_{kl}] , \quad (4.64)$$

mit der Abkürzung

$$S = \frac{2}{3} \sigma_v^2 [1 + \frac{2}{3} T_p \frac{(1+\nu)}{E}] . \quad (4.65)$$

In abgekürzter Form läßt sich dies mit dem plastischen Stofftensor C_{ijkl}^P wie folgt darstellen:

$$ds_{ij} = C_{ijkl}^P d\epsilon_{kl} \quad \text{mit}$$

$$C_{ijkl}^P = \frac{E}{1+\nu} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{s_{ij} s'_{kl}}{S}] . \quad (4.66), (4.67)$$

Wie der Vergleich mit dem Hookeschen Gesetz aus (4.45) zeigt, ergibt der dritte Term in Gleichung (4.67) den Einfluß der Plastizität. Dieser Term wird zu null gesetzt für den elastischen Zustand ($g < 0$) und bei Entlastung aus dem plastischen Zustand ($g = 0, \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} ds_{ij} < 0$).

Während das elastische Werkstoffgesetz bei der geometrischen Nichtlinearität mit inkrementellen Größen gebildet (siehe Abschnitt 4.2.6) wird, gilt das physikalische nichtlineare Werkstoffgesetz nur in differentieller Form. Im Rahmen numerischer Rechenmethoden werden die inkrementellen Spannungen, z.B. durch Linearisierung mit Summation berechnet. Für N Subinkremente folgt aus (4.66) das Spannungsinkrement

$$\Delta s_{ij} = \sum_{M=1}^N C_{ijkl}^P \frac{\Delta \epsilon_{kl}}{N} , \quad (4.68)$$

wobei in einem Subinkrement der plastischen Stofftensor C_{ijkl}^P konstant ist.

4.3.5 Zum Einfluß von Eigenspannungen in der physikalischen Nichtlinearität

Hier wird der Einfluß zusätzlich vorhandener Eigenspannungen in der physikalischen Nichtlinearität diskutiert. Unmittelbar wirken sich Eigenspannungen in der Fließbedingung aus. Danach hängt der Fließbeginn von den Gesamtspannungen ab, d.h. von Last- und Eigenspannungen. Für die zu Beginn eines Belastungsvorganges bereits vorhandenen Eigenspannungen, z.B. infolge einer Schweißnaht, liegen die sich ergebenden Spannungspunkte für den elastischen Fall innerhalb, oder für den plastischen Zustand auf der Fließfläche bzw. Fließkurve.

In der Verfestigungsfunktion, besonders bei isotroper Verfestigung, wirken sich Eigenspannungen ebenfalls aus. Danach ist die momentane Fließfläche eine Funktion der Gesamtspannungen.

Beim differentiellen Verzerrungs-Spannungsgesetz gehen über den plastischen Tangentenmodul T_p der Elastizitäts- und Tangentenmodul ein. Ändern sich nun die Werkstoffkennwerte durch den Schweißvorgang, wie dies im Temperaturkreislaufversuch von Klöppel/Schönbach [52] festgestellt wurde, wirkt sich dies in den plastischen Verzerrungen aus. Auf den Einfluß von Eigenspannungen bei der Spannungsberechnung, und damit im Stofftensor, wird in Abschnitt 4.4.1 bei Ableitung der Iterationsgleichungen noch ausführlicher eingegangen.

4.4 Finite Element Diskretisierung

Die Finite Element Methode als bereichsweises Ritz-Verfahren ist im Schrifttum ausreichend dargestellt [22],[115]. Hier werden nur die sich ergebenden Elementmatrizen mit den Iterationsgleichungen und die verwendeten Elemente kurz angegeben. Was den Zusammenbau der Elementmatrizen und die Berücksichtigung der Rand- und Übergangsbedingungen betrifft, wird auf das Schrifttum verwiesen.

4.4.1 Isoparametrisches Verschiebungsmodell

Das verwendete Konzept ist ein isoparametrisches Verschiebungsmodell, bei dem Geometrie und Verschiebungen in gleicher Weise interpoliert werden. Dabei gilt für

$$\text{Geometrie} \quad n_{x_i} = \sum_{k=1}^M \Phi^k n_{x_i}^k, \quad (4.69)$$

$$\text{Gesamtverschiebungen} \quad u_i = \sum_{k=1}^M \Phi^k u_i^k, \quad (4.70)$$

$$\text{Verschiebungsinkrement} \quad \Delta u_i = \sum_{k=1}^M \Phi^k \Delta u_i^k, \quad (4.71)$$

$$i = 1, 2, 3$$

mit folgenden Größen:

$n_{x_i}^k$ Koordinaten des Knotenpunktes k im Zustand n ,

$u_i^k, \Delta u_i^k$ Verschiebungen des Zustandes n bzw. Verschiebungsinkrement des Punktes k ,

Φ Interpolationsfunktionen,

M Gesamtanzahl der Elementknoten.

Die zur Diskretisierung verwendeten Vektoren und Matrizen sind in Tafel 4.1 dargestellt.

Das Werkstoffgesetz folgt für den elastischen Fall aus (4.42) mit

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{C}^e \Delta \mathbf{\epsilon} \quad (4.72)$$

und für den plastischen Fall aus (4.66) mit

$$d\mathbf{s} = \mathbf{C}^p d\mathbf{\epsilon}. \quad (4.73)$$

Volumen- und Oberflächenkräfte	${}^{n+1}\mathbf{q} = [q_{x_1} \ q_{x_2} \ q_{x_3}]$ ${}^{n+1}\mathbf{p} = [p_{x_1} \ p_{x_2} \ p_{x_3}]$																																																																																				
Knotenverschiebungen Ⓐ Gesamt Ⓑ Inkrement	Ⓐ $\mathbf{u}^T = [u_1^1 \ u_2^1 \ u_3^1 \ \dots \ \dots \ u_1^M \ u_2^M \ u_3^M]$ Ⓑ $\Delta\mathbf{u}^T = [\Delta u_1^1 \ \Delta u_2^1 \ \Delta u_3^1 \ \dots \ \dots \ \Delta u_1^M \ \Delta u_2^M \ \Delta u_3^M]$																																																																																				
Verschiebungsgradient Ⓐ Gesamt Ⓑ Inkrement	Ⓐ $\mathbf{d}^T = [u_{,1,1} \ u_{,2,2} \ u_{,3,3} \ u_{,1,2} \ u_{,2,1} \ u_{,1,3} \ u_{,3,1} \ u_{,2,3} \ u_{,3,2}]$ Ⓑ $\Delta\mathbf{d}^T = [\Delta u_{,1,1} \ \Delta u_{,2,2} \ \Delta u_{,3,3} \ \Delta u_{,1,2} \ \Delta u_{,2,1} \ \Delta u_{,1,3} \ \Delta u_{,3,1} \ \Delta u_{,2,3} \ \Delta u_{,3,2}]$																																																																																				
Verzerrungen Ⓐ Gesamt Ⓑ Inkrement Ⓒ linearer Anteil Ⓓ nichtlinearer Anteil	Ⓐ $\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23}]$ Ⓑ $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^T = [\Delta\epsilon_{11} \ \Delta\epsilon_{22} \ \Delta\epsilon_{33} \ 2\Delta\epsilon_{12} \ 2\Delta\epsilon_{13} \ 2\Delta\epsilon_{23}]$ Ⓒ $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^T = [\Delta e_{11} \ \Delta e_{22} \ \Delta e_{33} \ 2\Delta e_{12} \ 2\Delta e_{13} \ 2\Delta e_{23}]$ Ⓓ $\Delta\boldsymbol{\eta}^T = [\Delta\eta_{11} \ \Delta\eta_{22} \ \Delta\eta_{33} \ 2\Delta\eta_{12} \ 2\Delta\eta_{13} \ 2\Delta\eta_{23}]$																																																																																				
Lastspannungen Ⓐ Gesamt Ⓑ Inkrement Ⓒ Gesamtspannungsmatrix	Ⓐ $\mathbf{s}^T = [s_{11} \ s_{22} \ s_{33} \ s_{12} \ s_{13} \ s_{23}]$ Ⓑ $\Delta\mathbf{s}^T = [\Delta s_{11} \ \Delta s_{22} \ \Delta s_{33} \ \Delta s_{12} \ \Delta s_{13} \ \Delta s_{23}]$ Ⓒ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>s_{11}</td><td>s_{12}</td><td>s_{13}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>s_{22}</td><td>s_{23}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>s_{33}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>s_{11}</td><td>s_{12}</td><td>s_{13}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>s_{22}</td><td>s_{23}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>s_{33}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3" style="text-align: center;">Symmetrie</td><td></td><td>s_{11}</td><td>s_{12}</td><td>s_{13}</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>s_{22}</td><td>s_{23}</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>s_{33}</td></tr> </table>	s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0	0	0	0		s_{22}	s_{23}	0	0	0	0	0	0			s_{33}	0	0	0	0	0	0				s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0					s_{22}	s_{23}	0	0	0						s_{33}	0	0	0				Symmetrie				s_{11}	s_{12}	s_{13}									s_{22}	s_{23}										s_{33}
s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0	0	0	0																																																																													
	s_{22}	s_{23}	0	0	0	0	0	0																																																																													
		s_{33}	0	0	0	0	0	0																																																																													
			s_{11}	s_{12}	s_{13}	0	0	0																																																																													
				s_{22}	s_{23}	0	0	0																																																																													
					s_{33}	0	0	0																																																																													
			Symmetrie				s_{11}	s_{12}	s_{13}																																																																												
								s_{22}	s_{23}																																																																												
									s_{33}																																																																												
Eigenspannungen für Ⓐ \mathbf{s}_E Ⓒ \mathbf{s}_E entsprechend Lastspannungen	Ⓒ $\mathbf{S} =$																																																																																				

Tafel 4.1: Vektoren und Matrizen der kinematischen und statischen Größen

Während für die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix folgende Linearisierung vorgenommen wird

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{C}^I \Delta \mathbf{e}, \quad (4.74)$$

mit $I = e$ für den elastischen bzw. $I = p$ für den plastischen Zustand. Die plastischen Spannungsinkremente bei der Ermittlung der inneren Kräfte erfolgt durch Subinkrementierung entsprechend Gleichung (4.68) mit

$$\Delta \mathbf{s} = \sum_{M=1}^N \mathbf{C}^p \frac{\Delta \mathbf{\epsilon}}{N}. \quad (4.75)$$

Für die kinematischen Beziehungen gelten

$$\Delta \mathbf{e} = {}^n \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad (4.76)$$

$$\Delta \mathbf{d} = {}^n \hat{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}, \quad (4.77)$$

darin sind festgelegt die Operatorenmatrizen ${}^n \mathbf{B}$ und ${}^n \hat{\mathbf{B}}$. Sie verknüpfen die linearen Verzerrungsanteile bzw. Verschiebungsgradienten mit den inkrementellen Verschiebungen. Dabei läßt sich der Operator ${}^n \mathbf{B}$ folgendermaßen aufspalten

$${}^n \mathbf{B} = {}^n \mathbf{B}_1 + {}^n \mathbf{B}_2(\mathbf{u}), \quad (4.78)$$

wobei der erste Operator unabhängig von den Verschiebungen ist, der zweite jedoch linear abhängig von den Anfangsverschiebungen. Jetzt lassen sich die Integralausdrücke der Tafel 4.2 angeben, womit aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (4.41) die Gleichgewichtsbedingung für ein Element folgt:

$$\boxed{[{}^n \mathbf{K}_I + {}^n \mathbf{K}_g + {}^n \mathbf{K}_E] \Delta \mathbf{u} = {}^{n+1} \mathbf{R} - {}^n \mathbf{F} - {}^n \mathbf{F}_E}, \quad (4.79)$$

Bezeichnung der Vektoren u. Matrizen	Gleichgewichts- ausdruck	Ausdruck im P.d.v.V nach Gleichung (4.41)
inkrementelle Steifigkeitsmatrix (a) ${}^n \mathbf{K}_e$ bzw. (b) ${}^n \mathbf{K}_p$	(a) <u>elastischer Fall</u> $\int_{\circ V} {}^n \mathbf{B} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^T d^{\circ}V$ (b) <u>plastischer Fall</u> $\int_{\circ V} {}^n \mathbf{B} \mathbf{C}^p \mathbf{B}^T d^{\circ}V$	$\int_{\circ V} \Delta s_{ij} \delta \Delta e_{ij} d^{\circ}V$
geometrische Steifigkeitsmatrix ${}^n \mathbf{K}_g$	$\int_{\circ V} {}^n \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{B}}^T d^{\circ}V$	$\int_{\circ V} s_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} d^{\circ}V$
Eigenspannungs- matrix ${}^n \mathbf{K}_E$	$\int_{\circ V} {}^n \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{S}}_E \hat{\mathbf{B}}^T d^{\circ}V$	$\int_{\circ V} s_{ij}^E \delta \Delta \eta_{ij} d^{\circ}V$
Vektor infolge äußerer Belastung ${}^{n+1} \mathbf{R}$	$\int_{\circ V} \rho \Phi^T {}^{n+1} \mathbf{q} d^{\circ}V$ $\int_{\circ F_S} \rho \Phi^T {}^{n+1} \mathbf{p} d^{\circ}V$	${}^{n+1} \delta W =$ $= \int_{\circ V} ({}^n q_i + \Delta q_i) \rho \delta \Delta u_i d^{\circ}V +$ $+ \int_{\circ F_S} ({}^n \hat{S}_i + \Delta \hat{S}_i) \delta \Delta u_i d^{\circ}F$
verallgemeinerte innere Kräfte ${}^n \mathbf{F}$	$\int_{\circ V} {}^n \mathbf{B} \mathbf{s} d^{\circ}V$	$\int_{\circ V} s_{ij} \delta \Delta e_{ij} d^{\circ}V$
innere Kräfte infolge Eigenspannungen ${}^n \mathbf{F}_E$	$\int_{\circ V} {}^n \mathbf{B}_2 \mathbf{s}_E d^{\circ}V$	$\int_{\circ V} s_{ij}^E u_{,kj} \delta \Delta u_{,ki} d^{\circ}V$

Tafel 4.2: Steifigkeitsausdrücke

wobei für $I = e$ für den elastischen bzw. $I = p$ für den plastischen Zustand gilt. Neben der inkrementellen Steifigkeitsmatrix ${}^n\mathbf{K}_I$, die für den elastischen Fall bei der "Totalen Lagrange Formulierung" sich mit ${}^n\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e + {}^n\mathbf{K}_u$ aufspaltet, ergibt sich die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g und eine entsprechende Matrix infolge Eigenspannungen ${}^n\mathbf{K}_E$. Diese Matrix könnte man als einen zusätzlichen Anteil der geometrischen Matrix ansehen, was für eine Eigenwertformulierung des Lastparameters nicht sinnvoll wäre. Neben dem Vektor infolge äußerer Belastung ${}^{n+1}\mathbf{R}$, den verallgemeinerten inneren Kräften ${}^n\mathbf{F}$, entstehen noch innere Kräfte infolge Eigenspannungen ${}^n\mathbf{F}_E$ (siehe auch [56]). Der Integralausdruck ${}^n\mathbf{F}_E$ wird mit dem zweiten Operator ${}^n\mathbf{B}_2(\mathbf{u})$ aus (4.78) gebildet, d.h., es wirken sich hier die Anfangsverschiebungen \mathbf{u} des Zustandes n aus. Ein linearer Anteil ${}^n\mathbf{F}_E = \int_{\text{Ov}} {}^n\mathbf{B}_1^T \mathbf{s}_E d^{\text{Ov}}$ wie in [115], der nach Zusammenbau der Gesamtvektoren zu Null wird, kommt hier nicht vor, was durch Definition der Eigenspannungen im P.d.v.V bereits erfüllt ist.

Im weiteren werden folgende Zusammenfassungen eingeführt:

$${}^n\mathbf{K}_G = {}^n\mathbf{K}_I + {}^n\mathbf{K}_g + {}^n\mathbf{K}_E, \quad (4.80)$$

$${}^n\mathbf{F}_G = {}^n\mathbf{F} + {}^n\mathbf{F}_E, \quad (4.81)$$

womit aus der Gleichgewichtsbedingung (4.79) folgt

$$\boxed{{}^n\mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u} = {}^{n+1}\mathbf{R} - {}^n\mathbf{F}_G} \quad (4.82)$$

Diese linearisierten Gleichungen erfordern Gleichgewichtsiterationen für den Übergang vom Zustand n nach $n+1$, um den Linearisierungsfehler zu beseitigen. Mit den in Bild 4.6 festgelegten Verschiebungen für die Zwischenzustände i und j lassen sich die Iterationsgleichungen angeben. Verwendet man bei der Iteration die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Zustandes n , so folgt

$${}^n\mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u}^{(j)} = {}^{n+1}\mathbf{R} - {}^i\mathbf{F}_G, \quad (4.83)$$

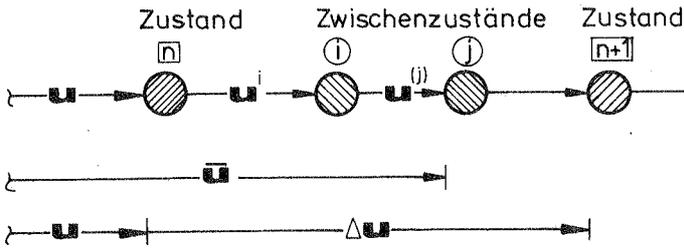


Bild 4.6: Zwischenzustände für Gleichgewichtsiterationen

was dem Modifizierten-Newton-Raphson-Verfahren entspricht. Würde man die Gesamtsteifigkeitsmatrix der Zwischenzustände nehmen, so ergibt sich

$${}^i \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u}^{(j)} = {}^{n+1} \mathbf{R} - {}^i \mathbf{F}_G, \quad (4.84)$$

was auf das Standard-Newton-Raphson-Verfahren führt. Auf beide Iterationsverfahren wird in Abschnitt 4.5 noch näher eingegangen.

Hier soll auf den Einfluß von Eigenspannungen bei der plastischen Spannungsberechnung eingegangen werden. Dies soll mittels eines bei numerischen Methoden verwendeten Algorithmus (siehe z.B. [73]) erfolgen, der in Bild 4.7 dargestellt ist. Die Verschiebungszustände wurden bereits in Bild 4.6 festgelegt, wobei der Zwischenzustand j mit einem Querstrich gekennzeichnet ist. Es werden die Iterationsgleichungen aus (4.83) verwendet. Im Zustand n sind die aus dem Lastzustand herrührenden Verschiebungen \mathbf{u} mit zugehörigen Dehnungen ε_{ij} und Spannungen s_{ij} bekannt. Daneben sind Eigenspannungen s_{ij}^E vorgegeben. Im erreichten Zwischenzustand i ergibt sich aus den Ungleichgewichtskräften der inkrementelle Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$ zum Nachbarzustand j . Damit ergeben sich die Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$, woraus die Dehnungen $\bar{\varepsilon}_{ij}$ folgen. Danach können mit ε_{ij} die inkrementellen Dehnungen $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}$ berechnet werden. Unter Annahme elastischer Voraussetzungen folgen die inkrementellen Spannungen $\Delta \bar{s}_{ij}^e$. Die Plastizitätskontrolle wird mit Gesamtspan-

nungen geführt; danach werden drei Fälle unterschieden. Für den elastischen Zustand (Fall ①) ergeben sich die Spannungen unmittelbar. Beim Übergang vom elastischen zum plastischen Zustand in Fall ② werden durch den Faktor r die elastischen Spannungen abgespalten. Im Fall ③ liegt bereits ein plastischer Spannungszustand vor. In der Subinkrementierung werden die inkrementellen Spannungsänderungen mit dem über den elastischen Zustand hinausgehenden Dehnungszuwachs berechnet. Diese Dehnungsanteile ergeben sich für Fall ② nach Aufspalten mit Faktor r entsprechend den Spannungsanteilen; dagegen wird für Fall ③ das gesamte Dehnungsinkrement verwendet. Da den Eigenspannungen keine Dehnungen zugeordnet werden, ist hier eine gewisse Inkonsistenz vorhanden. Nach Berechnung des Verschiebungsinkrementes $\Delta \mathbf{u}^{(j+1)}$ wird die Konvergenzabfrage vorgenommen (siehe Abschnitt 4.5.2). Falls keine Konvergenz vorliegt, erfolgt ein weiterer Iterationsschritt. Für Konvergenz ist der Zustand $n+1$ erreicht, und die zugehörigen Verschiebungen mit Dehnungen und Spannungen sind bekannt. Die Spannungen wandern für plastische Zustände auf der Fließfläche bzw. Fließkurve. Durch Eigenspannungen ist der Fließbeginn früher oder später, wobei das Wandern der Spannungspunkte sowohl von den Gesamtspannungen als auch den Dehnungsinkrementen abhängt.

4.4.2 Verwendete Finite Elemente

Die nachfolgend dargestellten Elemente sind im Programmsystem NISA [18][38] enthalten. Diese isoparametrischen Elemente beruhen auf dem Konzept der Degeneration. Das Konzept entstand aus der Anwendung dreidimensionaler Körperelemente auf Schalenverhältnisse [1], wobei diese für dünne und mäßig dicke Schalen und Platten verwendet werden. Einen Überblick über die Vor- und Nachteile, sowie die Erweiterung auf den geometrisch nichtlinearen Bereich, findet sich bei Ramm [78][79]. Die Erweiterung bei zusätzlicher Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität sind von Krakeland [57], Sättele [88] und Bathe/Bolourchi [7] vorgenommen worden.

Im folgenden wird kurz der Grundgedanke der Degeneration dargestellt. Der numerische Prozeß bei degenerierten Elementen beginnt direkt in den Ausgangsgleichungen der dreidimensionalen Theorie. Zwei zusätzliche Annahmen einer vergleichbaren Schalentheorie werden gemacht:

- Die Schalennormale bleibt während der Verformung gerade und ändert ihre Länge nicht.
- Der Anteil der Normalspannung senkrecht zur Mittelfläche leistet im Arbeitsausdruck keinen Beitrag.

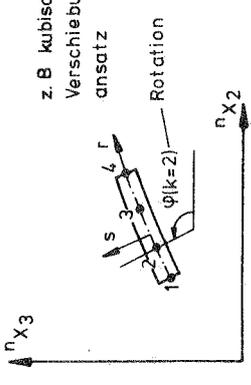
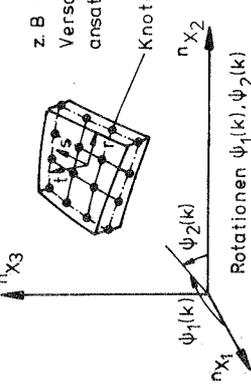
Die Diskretisierung im Rahmen der Finiten Element Methode ergibt direkt resultierende kinematische Größen, wie Verschiebungen der Mittelfläche und Rotationen der Normale. Tafel 4.3 zeigt einen Überblick über die verwendeten Finite Elemente mit den Anwendungsmöglichkeiten, wählbaren Verschiebungsansätzen, sowie die Freiheitsgrade pro Elementknoten. Die Interpolationspolynome und die daraus sich ergebenden Operatorenmatrizen sind in [78], [79], [88] angegeben. Die Elemente können geometrische und physikalische Nichtlinearität aufweisen, jedoch auch beide Nichtlinearitäten sind getrennt möglich. Die geometrische Nichtlinearität ist in "Totaler Lagrange Formulierung" (T.L. Darstellung) als auch in "Mitgehender Lagrange Formulierung (U.L. Darstellung) angegeben [78].

Auf die numerische Integration soll etwas ausführlicher eingegangen werden. Dies wird an der inkrementellen Steifigkeitsmatrix für den plastischen Zustand des dreidimensional degenerierten Elementes gezeigt. Es gilt folgende Summation:

$${}^n \mathbf{K}_p = \sum_{i=1}^{Nr} \sum_{j=1}^{Ns} w_i w_j \sum_{k=1}^{Nt} w_k [{}^n \mathbf{BC}^p \mathbf{B}] \det \mathbf{J} \quad (4.85)$$

Die numerische Integration erfolgt in den lokalen Koordinaten r, s, t , in denen die Matrizelemente definiert sind. Der Zusammenhang zwischen den lokalen und globalen kartesischen Koordinaten eines Volumenelementes wird durch die Jacobi-Determinante \mathbf{J} hergestellt

$$d^0V = d^0x_1 d^0x_2 d^0x_3 = \det \mathbf{J} dr ds dt. \quad (4.86)$$

Elemente	zweidimensional degeneriertes Element	dreidimensional degeneriertes Element
Skizze	 <p>z. B. kubischer Verschiebungsansatz Rotation</p>	 <p>z. B. bikubischer Verschiebungsansatz Knoten k</p> <p>Rotationen $\psi_1(k), \psi_2(k)$</p>
Verwendung für	ebener Spannungs-, ebener Dehnungs- und axialsymmetrischer Spannungszustand	Platten-Schalenelement
Verschiebungsansätze	linear, quadratisch, kubisch, quartisch kompatible Verschiebungsansätze	biquadratische und kubische kompatible Verschiebungsansätze
Freiheitsgrade	2 Verschiebungen und 1 Rotation	3 Verschiebungen und 2 Rotationen
Nichtlinearitäten	geometrisch und physikalisch nichtlinear	geometrisch u. physikalisch nichtlinear
Numer. Integration	Gauß im r-System, Simpson über s	Gauß im r-s System, Simpson über t
Literatur	a) Entwicklung [78][18][88] b) Anwendung geom. N.L. [17][88] c) Anwendung geom. u. physikal. N.L. [88]	a) Entwicklung [78][79][88] b) Anwendung geom. N.L. [17][19][20] c) Anwendung geom. u. physikal. N.L. [88][89]

Tafel 4.3: Überblick über verwendete Finite Elemente

Die Flächenintegration erfolgt mit der Gaußschen Integrationsformel an diskreten Stellen mit den zugehörigen Gewichten w_i, w_j . Über die Dicke kommt die Simpson-Integration zur Anwendung. Dies ergibt ein Schichtenmodell mit gleichbleibenden Schichtdicken, bei dem der Plastizierungsbeginn an der Ober- oder Unterseite des Elementes feststellbar ist. Zur Erfassung des nichtlinearen Spannungsverlaufes ist über t eine ausreichende Anzahl von Integrationspunkten zu wählen. Nach den in [88] gemachten Untersuchungen ergeben sich mit sieben Integrationspunkten ausreichend gute Ergebnisse. Der numerische Rechenaufwand ist für plastische Fälle im Vergleich zum elastischen nicht unerheblich, da bei elastischen Zuständen mit linearem Verschiebungsverlauf über die Dicke zwei Gaußpunkte ausreichen. Hinzu kommt noch der Mehraufwand für die Abspeicherung der Spannungen und Dehnungen jedes Integrationspunktes aufgrund des differentiellen Stoffgesetzes.

4.5 Versagensarten und numerische Rechentechnik

Zuerst erfolgt eine kurze Darstellung möglicher Versagensarten von Tragsystemen. Die numerische Rechentechnik, die sich aus den Iterationsgleichungen ergibt, wird angegeben. Die bei den Untersuchungen verwendeten Methoden zum Übergang in den instabilen Bereich werden dargestellt.

4.5.1 Versagensarten

Aussagen über das Tragverhalten von Systemen erhält man durch Lastverschiebungsdiagramme. Dabei wird der Lastwert oder Lastparameter über einer ausgewählten Verschiebung aufgetragen. Bei den Versagensarten wird vielfach zwischen Stabilitäts- und Traglastproblemen unterschieden.

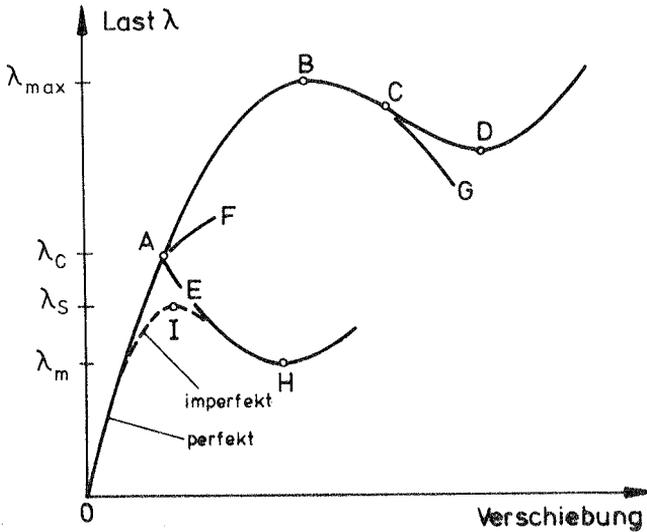
Für elastische Stabilitätsprobleme sind von Koiter [53] grundlegende Definitionen angegeben worden. Einen zusammenfassenden Überblick findet man hierüber bei Brendel [17]. Auf Stabilitätspro-

bleme im plastischen Bereich wird in [105] eingegangen. Der Begriff der Traglast ist eine im Stahlbau übliche Definition [93] [106]. Danach liegen der Traglastberechnung eine geometrisch und physikalisch nichtlineare Theorie zugrunde. Die Einflüsse von geometrischen oder auch strukturellen Imperfektionen werden erfaßt. Die Traglast eines Systems ist dann erreicht, wenn es zu einem Abfall im Lastverschiebungsdiagramm kommt, wobei das System bereits plastische Zustände aufweist. Anhand eines schematisierten Lastverschiebungsdiagramms wurde in [70] versucht, eine allgemeine Definition der verschiedenen Versagensarten vorzunehmen. Dieses Diagramm ist in Bild 4.8 wiedergegeben. Danach kann man die Traglast dem Punkt I zuordnen. Man kann sich jedoch noch eine weitere Kurve vorstellen, mit der die Traglast oberhalb A liegt (z.B. imperfekte Platte mit Traglast oberhalb des Verzweigungspunktes). Es läßt sich hier festhalten, daß der Übergang zwischen einem Traglastproblem und einem Stabilitätsproblem fließend ist. Was den Verlauf von Lastverschiebungsdiagrammen im Nachbeulbereich betrifft, so können sich sehr komplizierte Verläufe ergeben, besonders bei elastisch beulenden Schalenkonstruktionen (siehe z.B. [44]).

4.5.2 Numerische Rechentechnik

Die Ermittlung der Lastverschiebungsdiagramme ergibt sich aus der Lösung der Iterationsgleichungen. Dabei soll auf die Problematik der Überwindung instabiler Bereiche hier noch nicht eingegangen werden. Wie bereits bei der Darstellung der Iterationsgleichungen hingewiesen (Gleichung (4.83) und (4.84)), ergibt sich je nach verwendeter Gesamtsteifigkeitsmatrix das Modifizierte-Newton-Raphson-Verfahren oder der Standard-Newton-Raphson.

Verwendet man die Gesamtsteifigkeitsmatrix ${}^n \mathbf{K}_G$ für das Lastinkrement vom Zustand n nach $n+1$, so führt dies auf das Modifizierte-Newton-Raphson-Verfahren. Die Berücksichtigung der Nichtlinearität geschieht nur über die inneren Kräfte \mathbf{F}_G . Bei ausgeprägteren Nichtlinearitäten konvergiert der Modifizierte-Newton-Raphson nur sehr langsam oder überhaupt nicht. Mit dem Standard-Newton-Raphson-



- $\left. \begin{matrix} B, I \\ D \end{matrix} \right\}$ lokale Last - $\left\{ \begin{matrix} \text{Maxima} \\ \text{Minima} \end{matrix} \right.$
 $\left. \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \right\}$ typische Verzweigungspunkte bei $\left\{ \begin{matrix} \text{Druck-} \\ \text{Zug-} \end{matrix} \right\}$ Belastung
 OA stabiler (i.a. nichtlinearer) Vorbeulbereich
 $\left. \begin{matrix} AF \\ AE \end{matrix} \right\}$ anfänglich $\left\{ \begin{matrix} \text{stabiles} \\ \text{instabiles} \end{matrix} \right\}$ Nachbeulverhalten
 $\left. \begin{matrix} AE \\ BD \\ CG \end{matrix} \right\}$ instabile Gleichgewichtslagen bei vorgeschriebener Belastung
 H Nachbeul-Lastminimum

Instabilitäten unter

- (A) Druckbelastung: Knicken, Kippen, Biegedrillknicken
 Beulen
 (B) Zugbelastung: Einschnürung, Rißbildung

Bild 4.8: Zur Festlegung kritischer Belastungszustände

Verfahren, bei dem die Gesamtsteifigkeitsmatrix im Rahmen der Iteration eines Inkrementes angepaßt wird, lassen sich auch noch für ausgeprägtere Nichtlinearitäten Lösungen erzielen. Beide Verfahren zeigen unterschiedliche Konvergenzeigenschaften, wie dies z.B. in [97] für den geometrisch nichtlinearen Fall gezeigt wird. Die verbesserte Konvergenz des Standard-Newton-Raphson wird durch einen erhöhten numerischen Aufwand zur mehrfachen Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix erkauft. Bild 4.9 zeigt eine schematisierte Darstellung beider Verfahren.

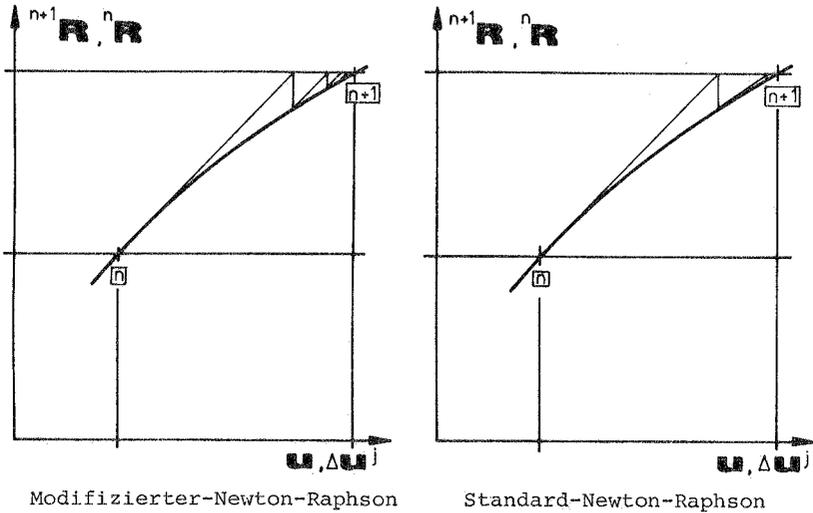


Bild 4.9: Inkrementell iterative Lösungsverfahren

Die Konvergenz beider Verfahren lassen sich durch folgende Kriterien überprüfen:

1. Konvergenzkriterium aus der Euklidischen Vektornorm der Verschiebungen

$$\epsilon = \frac{||\Delta \mathbf{U}^j - \Delta \mathbf{U}^i||}{||\Delta \mathbf{U}^j||} < \text{RTOL} , \quad (4.87)$$

mit der Toleranzgrenze von z.B. $\text{RTOL} = 10^{-3}$.

2. Divergenzkriterium aus der Euklidischen Vektornorm der äußeren und inneren Kräfte

$$\frac{\| \mathbf{R}^{n+1} - \mathbf{F}_G^i \|}{\| \mathbf{R}^{n+1} \|} < 1 . \quad (4.88)$$

Das Divergenzkriterium wird dabei erst nach einer festgelegten Anzahl von Iterationen überprüft. Wird diese Bedingung nicht eingehalten, so folgt ein Abbruch der Iteration und nach Festlegung eines verkleinerten Inkrements ein neuer Start.

4.5.3 Der Übergang in den instabilen Bereich

Zur Bestimmung der Stabilitäts- oder Traglast ist die Rechnung in den instabilen Bereich angebracht. Wie bereits gezeigt, liegt der instabile Bereich in der Lastverschiebungskurve nach einem kritischen Punkt (Verzweigen, Durchschlagen oder Traglast). Dabei geht es nicht so sehr um eine "exakte" Ermittlung des Versagenspunktes als um Absicherung, daß der maximale Punkt im Lastverschiebungsdiagramm überschritten ist. Im weiteren ist die Kenntnis des Verlaufs der Lastverschiebungskurve über den kritischen Punkt hinaus nicht uninteressant, zumal man über die Art des Abfalls der Kurve eine Aussage über die Empfindlichkeit gegenüber Störungen, wie z.B. geometrische Imperfektionen, erhält.

a) Überwindung eines lokalen Maximum (z.B. Durchschlagen, Traglast

Hierzu werden zwei Methoden angegeben, um in den Bereich nach dem maximalen Punkt zu kommen.

1. Methode: Lastumkehr bei Vorzeichenwechsel aus Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix im Rahmen des Standard-Newton-Raphson-Verfahrens. Wie an der schematisierten Lastverschiebungskurve in Bild 4.10 gezeigt, liegt zwischen Zustand n und n+1 ein lokales Maximum. Nach diesem Punkt ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit. Aus der Dreieckszerlegung der Gesamtsteifigkeitsmatrix für den Punkt i mittels Gaußschen Algorithmus [9] ergibt sich ein Vorzeichenwechsel bei den Diagonalelementen.

Damit hat man ein Kriterium, ob der maximale Punkt überschritten ist. Während bis zum Zwischenzustand i die Iteration mit dem Lastvektor ${}^{n+1}\mathbf{R}$ erfolgt, wird nun mit dem Lastvektor ${}^n\mathbf{R}$ iteriert. Im weiteren sind noch die inkrementellen Verschiebungen $\Delta\mathbf{u}^{(j')}$ auf $\Delta\mathbf{u}^{(j)}$ zu reduzieren (z.B. mit der Verschiebungsnorm $\Delta\tilde{s} = \|\Delta\mathbf{u}^{(1)}\| = \|\Delta\mathbf{u}^{(j)}\|$), worauf die Rechnung nach dem Zustand $n+1$ konvergiert. Daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix im maximalen Punkt singular wird, wirkt sich bei numerischen Rechnungen nicht aus, da dieser Punkt bei diesen mehrdimensionalen Problemen nie genau erreicht wird. Die Vorgehensweise dieser einfachen Methode entspricht dem in [14] gezeigten Verfahren, wobei dort die

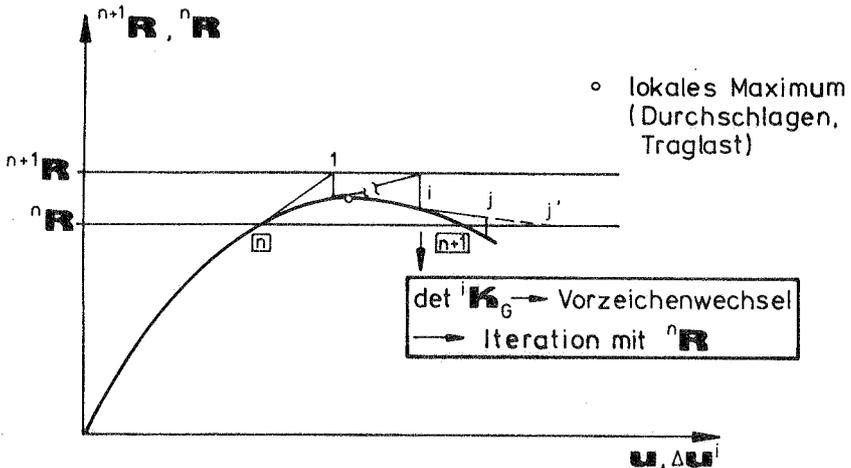


Bild 4.10: Überwindung eines lokalen Maxima (Durchschlagen, Traglast)

Lastreduktion durch den sogenannten Steifigkeitsparameter gesteuert wird. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß eine kleine Inkrementierung und die Verwendung des numerisch aufwendigeren Standard-Newton-Raphson-Verfahrens erforderlich ist.

2. Methode: Methode der "Konstanten Bogenlänge nach Riks-Wempner". Dieses Verfahren wurde unabhängig voneinander von Riks [83] und

Wempner [109] angegeben. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode und ein Vergleich mit anderen Verfahren wurde von Ramm in [80] vorgenommen. Hier werden kurz die wesentlichen Grundgedanken der Methode dargestellt. Dies erfolgt anhand von Bild 4.11 mit den dort definierten Größen. Im weiteren gilt:

1. Im Iterationsschema werden die verallgemeinerten Vektoren verwendet, wie z.B. der Vektor $\mathbf{v}^T = [{}^n\lambda, u_1]$ in R_{N+1} .
2. Es wird folgende Zwangsbedingung eingeführt $|\mathbf{t}| = ds^2$, wobei ds die verallgemeinerte Bogenlänge darstellt.
3. Mit der Normalenbedingung $\mathbf{t} \Delta \mathbf{v}^{(j)} = 0$ erfolgt die Iteration senkrecht zur Tangente \mathbf{t} , z.B. vom Zwischenzustand i nach j .

In der ursprünglichen Form der Methode wurde die Zwangsbedingung zu den Gleichungen aus den Steifigkeitsausdrücken hinzugefügt, wodurch die Symmetrie und Bandstruktur der Matrizen zerstört wird.

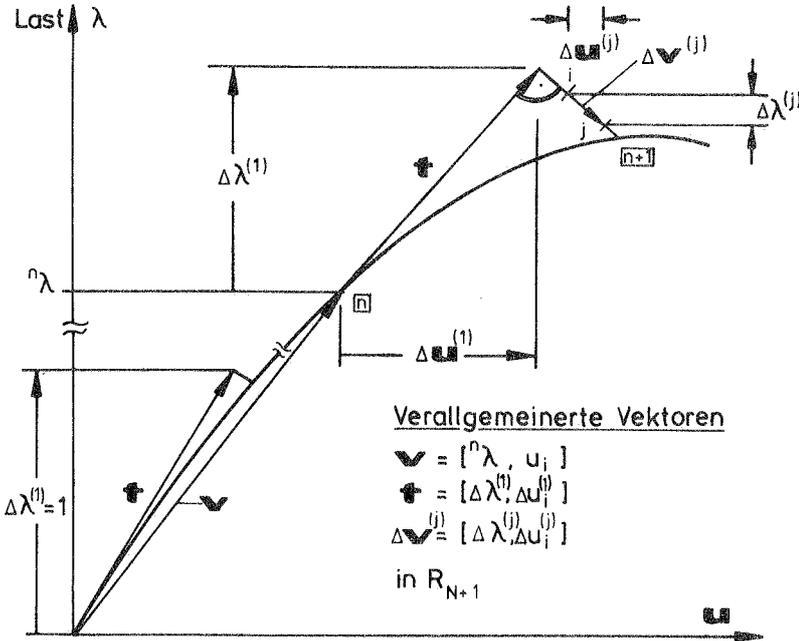


Bild 4.11: "Riks-Wempner Methode konstante Bogenlänge"

Von Wessel [110] wurde dies aufgrund geometrischer Überlegungen umgangen, indem die inkrementellen Verschiebungen $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$ in zwei Schritten ermittelt werden. Diese Vorgehensweise entspricht dem in [5] gezeigten verschiebungskontrollierten Verfahren. Die Lastreduktion erfolgt, wenn die Steifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit ist.

b) Die Überwindung eines Verzweigungspunktes

Die Rechnung in den Nachbeulbereich nach einem Verzweigungspunkt ist mit den vorgenannten Methoden nicht ohne weiteres möglich. Eine Möglichkeit besteht darin, daß kurz vor Erreichen des Verzweigungspunktes durch eine kleine Störung dem System die Beulform aufgezwungen wird, womit sich statt einem Verzweigen ein lokales Maximum ergibt (z.B. Traglast). Eine Alternative ist die Überlagerung von Eigenformen zum Verschiebungszustand (siehe z.B. [67][84]).

4.6 Versagenskriterien

Der Zweck nichtlinearer Rechnungen ist die Ermittlung kritischer Lasten, d.h. die Angabe einer Stabilitäts- oder Traglast. Dabei sind Kriterien zum Erkennen kritischer Punkte wichtig, zumal man aus der Nichtkonvergenz der nichtlinearen Rechnung nicht auf die kritische Last schließen kann. Im nachfolgenden werden die bei den Untersuchungen verwendeten Versagenskriterien zusammengestellt.

4.6.1 Das Stabilitätskriterium

Einen umfassenden Überblick über mögliche Stabilitätsuntersuchungen findet man z.B. bei Brendel [17]. Aus dem statischen Stabilitätskriterium ergibt sich bei Voraussetzung, daß der Grundzustand im Gleichgewicht ist und ein Nachbarzustand bei gleicher Belastung existiert, aus Gleichung (4.82) die Bedingung für

indifferentes Gleichgewicht

$$\det({}^n \mathbf{K}_G) = 0 . \quad (4.89)$$

Im Rahmen der FE-Methode läßt sich damit ein lineares Eigenwertproblem für den Lastparameter λ angeben. Ohne Berücksichtigung von Eigenspannungen und plastischer Zustände lassen sich aus (4.89) nach Aufspalten der Gesamtsteifigkeitsmatrix ${}^n \mathbf{K}_G$ z.B. folgende Eigenwertgleichungen angeben:

Eigenwertproblem (I) : $\det[\mathbf{K}_e + \lambda ({}^n \mathbf{K}_u + {}^n \mathbf{K}_g)] = 0 ,$
Eigenwertproblem (II) : $\det[\mathbf{K}_e + {}^n \mathbf{K}_u + \lambda {}^n \mathbf{K}_g] = 0 .$

(4.90a,b)

Der Eigenwert λ_1 ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$) liefert mit dem Lastniveau einen Wert für die kritische Last

$${}^n \mathbf{R}_{\text{krit}} = \lambda_1 {}^n \mathbf{R} . \quad (4.91)$$

Dabei ergibt sich ein umso besserer Wert je näher der Zustand n beim kritischen Punkt liegt, z.B. eine Eigenwertuntersuchung kurz vor dem Verzweigungspunkt ergibt einen sehr guten Wert für die Verzweigungslast. Eigenwertuntersuchungen als begleitende Maßnahme der nichtlinearen Rechnung wurden hier nicht vorgenommen, sondern eine Eigenwertberechnung erfolgt immer dann, wenn die nichtlineare Rechnung nicht mehr konvergierte. Damit lassen sich besonders gut Verzweigungspunkte erkennen.

a) Die Lösung des algebraischen Eigenwertproblems

Eine ausführliche Darstellung des Eigenwertlösers mit den Besonderheiten der Programmorganisation in NISA [38], findet sich in [39]. Hier wird nur kurz auf die Lösung des algebraischen Eigenwertproblems eingegangen. Die Eigenwertprobleme aus (4.90) lassen

sich in die bekannte Darstellung des allgemeinen algebraischen Eigenwertproblems überführen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{x} = 0 \quad . \quad (4.92)$$

Die Lösung erfolgt mit der "Subspace Iteration", wobei sich neben den gewünschten Eigenwerten die zugehörigen Eigenformen ergeben. Eine Transformation des allgemeinen Eigenwertproblems in ein spezielles Eigenwertproblem ist nicht erforderlich. Diese Methode geht zurück auf Bathe [6], wobei für den Eigenwertlöser bei Stabilitätsproblemen eine Modifikation erforderlich ist, da dieser in seiner ursprünglichen Fassung nur bei dynamischen Untersuchungen verwendet wurde.

Der Algorithmus läßt sich wie folgt darstellen:

1. Erzeugen der Matrix \mathbf{Y}_k mit Startvektoren für $k = 1$. Diese Vektoren müssen linear unabhängig sein. Ihre Anzahl sollte größer sein als die Anzahl der gewünschten Eigenwerte, z.B. für q Eigenwerte sind $p = 2q$ Iterationsvektoren zu verwenden. Die Zahl p ist dabei wesentlich kleiner als die Ordnung der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} .
2. Dreiecksverlegung der Matrix \mathbf{A} mit Gaußschem Algorithmus, z.B. in [9] mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad . \quad (4.93)$$

3. Im weiteren erfolgt im Gaußschen Algorithmus die Reduktion von \mathbf{Y}_k und erstellen der Iterationsvektoren $\bar{\mathbf{Y}}_{k+1}$ mit

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{Y}}_{k+1} = \mathbf{Y}_k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.94)$$

4. Erzeugen der Projektionen:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \bar{\mathbf{Y}}_{k+1}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{Y}}_{k+1} \quad , \quad (4.95)$$

$$\mathbf{B}_{k+1} = \bar{\mathbf{Y}}_{k+1}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{Y}}_{k+1} \quad . \quad (4.96)$$

5. Lösen des verkleinerten Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1}, \quad (4.97)$$

wobei \mathbf{Q}_{k+1} die Eigenvektoren sind und $\mathbf{\Lambda}_{k+1}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte des verkleinerten Problems (im Unterraum).

6. Erstellen neuer Iterationsvektoren

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \bar{\mathbf{Y}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \quad (4.98)$$

Die Schritte 3 bis 6 werden mehrfach durchlaufen, wobei für die Iteration über k gilt

$$\mathbf{\Lambda}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Lambda} \quad \text{und} \quad \mathbf{Y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{x} \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

d.h., es ergeben sich die Eigenwerte in der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ und die zugehörigen Eigenformen \mathbf{x} des Eigenwertproblems aus (4.92). Als Konvergenzkriterium für den Abbruch nach $k+1$ Iteration wurde verwendet

$$\text{RTOLEI} \leq \frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{|\lambda_i^{(k)}|} \leq 10^{-3}, \quad (4.99)$$

mit $\lambda_i^{(k+1)}$ Eigenwerten ($i = 1, 2, \dots, q$).

Die Lösung des verkleinerten Eigenwertproblems in (4.97) erfolgt mit dem in [69] angegebenen QZ-Algorithmus, während in [6] das Jacobische Rotationsverfahren verwendet wird, was bei Stabilitätsuntersuchungen versagt, da die Matrix \mathbf{B} und damit auch \mathbf{B}_{k+1} nicht mehr positiv definit sein kann.

4.6.2 Kriterium im Rahmen der nichtlinearen Rechnungen

a) Verhalten der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Im Rahmen der inkrementell iterativen Lösungsverfahren wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix mehrfach neu erstellt. Aus der sich an-

schließenden Dreieckszerlegung mittels Gaußschen Algorithmus kann man erkennen, ob ein kritischer Punkt überschritten worden ist. Für die Dreieckszerlegung der symmetrischen Gesamtsteifigkeitsmatrix gilt (z.B. in [9])

$${}^n \mathbf{K}_G = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T, \quad (4.100)$$

wobei \mathbf{L} eine obere Dreiecksmatrix und \mathbf{D} eine Diagonalmatrix darstellen. Entsteht bei den Diagonalelementen D_{ii} ein Vorzeichenwechsel, so zeigt dies an, daß ein kritischer Punkt (Stabilitäts- oder Traglast) erreicht ist. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist nicht mehr positiv definit. Diese kritischen Punkte werden in den Lastverschiebungsdiagrammen markiert.

Mit Multiplikation der Diagonalelemente läßt sich der Determinantenwert der Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnen

$$\det {}^n \mathbf{K}_G = \prod_{i=1}^{\ell} D_{ii} \quad (4.101)$$

(mit ℓ = Ordnung von \mathbf{D}). Dieser Wert läßt sich im Lastverschiebungsdiagramm über der Last oder einer ausgewählten Verschiebung auftragen, wobei man bei der kritischen Last einen Nulldurchgang erhält. Dabei zeigt es sich, daß für Systeme mit vielen Freiheitsgraden der Determinantenwert trotz erfolgter Normierung so klein wird, daß man den Nulldurchgang nicht eindeutig erkennen kann.

b) Auswertung_des_Steifigkeitsparameters (Sp-Parameter)

Ein besseres Kriterium als der Determinantenwert ist der von Bergan u.a. [13] angegebene Steifigkeitsparameter, bei dem eine Norm mit den inkrementellen Lasten und zugehörigen Verschiebungen gebildet wird. Der Sp-Parameter ist wie folgt definiert

$$Sp = \frac{\mathbf{u}_1^T \tilde{\mathbf{R}}}{\mathbf{u}_n^T \tilde{\mathbf{R}}}, \quad (4.102)$$

wobei $\tilde{\mathbf{R}}$ die Referenzlast bei proportionaler Belastung ist, z.B.

der Lastvektor für den Zustand n ergibt sich damit zu

$${}^n \mathbf{R} = n_\lambda \tilde{\mathbf{R}} \quad (4.103)$$

Der "Punkt" über den Verschiebungsvektoren entspricht der Ableitung nach dem Lastparameter λ . Im Rahmen inkrementeller Methoden, wie z.B. Modifizierter-Newton-Raphson oder Standard-Newton-Raphson, ergibt dies im ersten bzw. n-ten Lastschritt

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(1)}}{1_\lambda} , \quad (4.104)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(1)}}{n+1_{\lambda-n_\lambda}} . \quad (4.105)$$

Trägt man den Sp-Parameter im Lastverschiebungsdiagramm über einen Verschiebungswert auf, so erhält man bei einem lokalen Maximum (Durchschlagen, Traglast) einen Nulldurchgang, da $\dot{\mathbf{u}}_n \rightarrow \infty$ geht.

4.7 Programmsystem

Die durchgeführten Untersuchungen erfolgten mit dem FE-Programm NISA (Nichtlineare-Struktur-Analysen). Das Programm NISA [18] ist in FORTRAN geschrieben und entstand aus einer Version des Programms NONSAP [11]. Zur Erfassung der Eigenspannungszustände wurde ein entsprechendes Unterprogramm erstellt. In der neuesten Fassung NISA 80 [38] ist eine zusätzliche Optimierung (Verwendung weiterer RANDOM-Files zum Abspeichern von Vektoren) durchgeführt. Das Programm ist am Rechenzentrum der Universität Stuttgart an einer CDC 6000- und CYPER 174 -Anlage installiert. Zum Laden des Programms sind ca. 32 K Worte Kernspeicher erforderlich, während für den Arbeitsspeicher noch ca. 24 K Worte zur Verfügung stehen. Neben den verwendeten zwei Elementen sind noch weitere drei Elemente vorhanden (Fachwerk, Balken, 2-D-Element).

Das Programm enthält einen leistungsfähigen Gleichungsaflöser ("Out of Core" Löser, durch "Skyline" Vermeidung der Nulloperationen). Dieser Gleichungsaflöser wird auch beim Eigenwertlöser verwendet. Die Datenverwaltung für die Iterationsvektoren des Eigenwertlösers erfolgt ebenfalls dynamisch (RANDOM-Files). Es besteht die Möglichkeit von einem erreichten Verschiebungszustand wieder zu starten (RESTART-Möglichkeit). Die Auswertung der Verschiebebilder und Eigenformen erfolgt mit Plottprogrammen.

5. TESTBEISPIELE

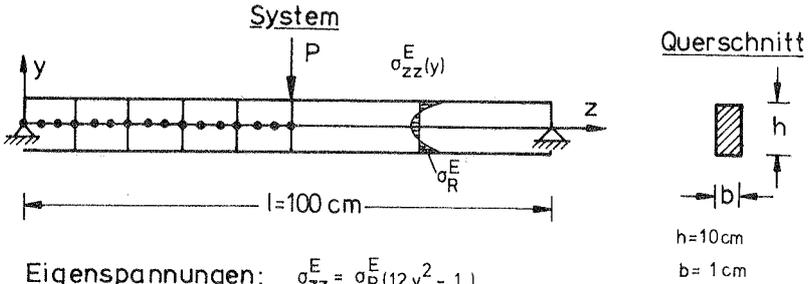
In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse von Testbeispielen angegeben. Dabei handelt es sich um Testfälle für die Erfassung von Eigenspannungen im geometrisch und physikalisch nichtlinearen Rechenmodell. Sofern vorhanden, werden Vergleiche mit Lösungen aus dem Schrifttum vorgenommen. Die Auswirkungen von Eigenspannungen in der physikalisch bzw. geometrisch nichtlinearen Theorie werden diskutiert.

5.1 Balken mit Einzellast bei vorhandenen Eigenspannungen

Diesem Beispiel lagen eine geometrisch lineare und physikalisch nichtlineare Theorie zugrunde. Bild 5.1 zeigt Geometrie, Abmessungen, Werkstoffkennwerte, FE-Idealisierung und das Lastverschiebungsdiagramm. Der Eigenspannungsansatz hat parabelförmige Verteilung über die Höhe, sowie in Längs- und Dickenrichtung ist er konstant. Es wurden zwei Fälle mit unterschiedlichen Randspannungswerten untersucht. Die FE-Idealisierung erfolgte mit 5 zweidimensional degenerierten Elementen mit kubischem Verschiebungsansatz bei ebenem Spannungszustand. Bei der numerischen Integration wurden 7 Simpsonpunkte über die Höhe und 4 Gaußpunkte in Längsrichtung verwendet.

Ergebnisse

Aus dem Lastverschiebungsdiagramm sieht man, daß die Rechnung für den Balken ohne Eigenspannungen die Traglast wiedergibt. Dies ist für den Rechteckquerschnitt die 1,5-fache elastische Grenzlast P_e , da sich bei dem gewählten l/h -Verhältnis der Einfluß der Querkraft nicht auswirkt [81]. Bei dem Balken mit Eigenspannungen zeigt es sich, daß die Verschiebungen zunehmen, jedoch die Traglast nicht reduziert wird. Diese Tendenz wurde auch an Versuchen mit I-Profilen festgestellt [107]. Im weiteren sind in Bild 5.2



Eigenspannungen: $\sigma_{zz}^E = \frac{\sigma_R^E}{2} (12y^2 - 1)$

Randspannung: Fall ① $\sigma_R^E = \frac{2}{3} \sigma_F$, Fall ② $\sigma_R^E = 0,80 \sigma_F$

Elast. Grenzlast:
(ohne Eigenspannung)

$M_e = \sigma_F \frac{bh^2}{6} \rightarrow P_e = \sigma_F \frac{bh^2}{l} \frac{2}{3}$

Traglast:

$M_T = \sigma_F \frac{bh^2}{4} \rightarrow P_T = \sigma_F \frac{bh^2}{l}$

Werkstoff:

Stahl St 37

$E = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$

$\nu = 0,30$

$\sigma_F = 24 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$

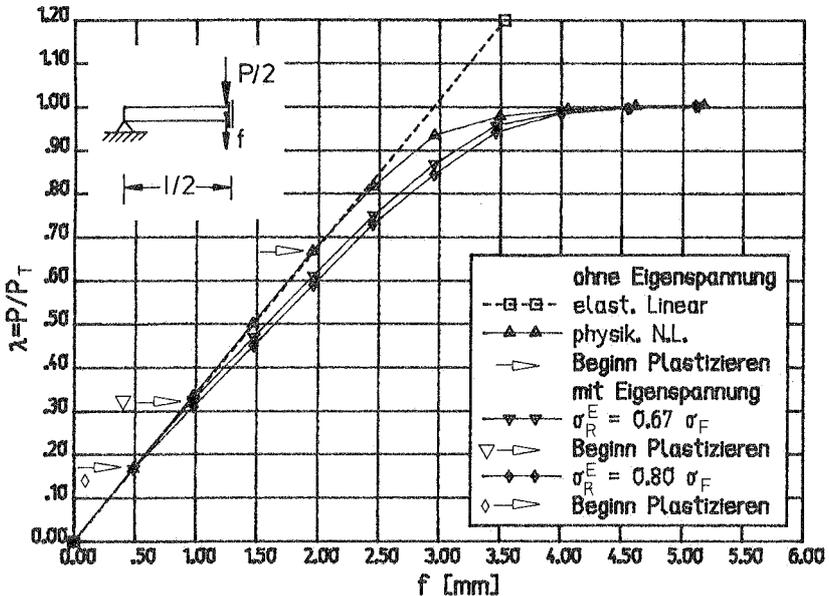
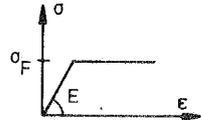
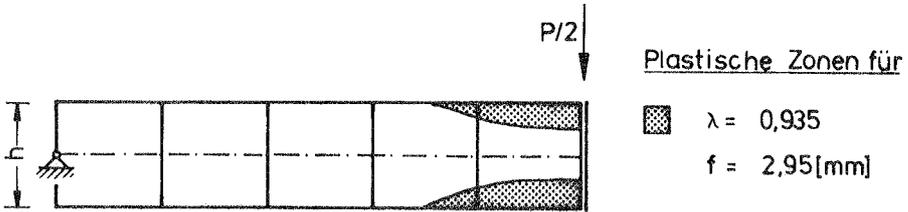
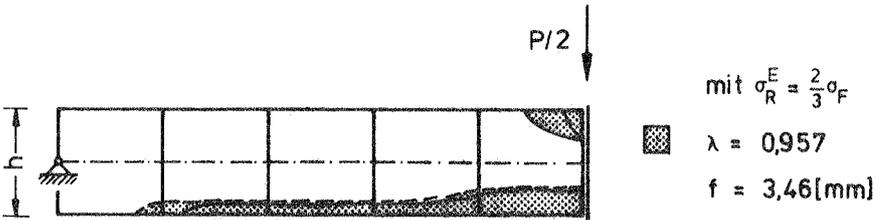


Bild 5.1: Biegebalken mit Eigenspannungen - Geometrie, Werkstoff, Lastverschiebungsdiagramm

die plastischen Zonen für verschiedene Laststufen λ angegeben. Die Laststufen haben etwa den gleichen Wert, während die zu den Laststufen gehörenden Verschiebungen f bei vorhandenen Eigenspan-



Balken ohne σ_{zz}^E



Balken mit σ_{zz}^E

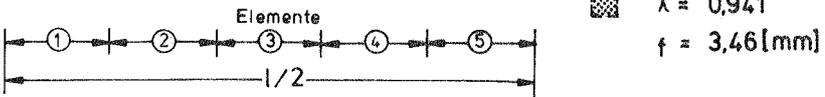


Bild 5.2: Plastische Zonen - Balken mit und ohne Eigenspannung

nungen zunehmen. Während die plastischen Zonen für den Balken ohne Eigenspannungen symmetrisch zur Mittelachse sind, ergeben sich bei vorhandenen Eigenspannungen ungleichmäßige Verteilungen der plastischen Zonen. Diese resultieren aus der Überlagerung der Druck- und Zugspannungen aus dem Lastzustand mit den Zug-eigenspannungen am Balkenrand. Abschließend läßt sich feststellen, daß im Rahmen der physikalischen Nichtlinearität kein Abfall der Traglast stattfindet, die Verschiebungen jedoch zunehmen und eine Umlagerung der plastischen Zonen stattfindet.

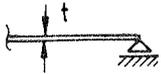
5.2 Geometrisch imperfekte Platte mit und ohne Eigenspannungen

Bei der betrachteten Platte unter Längsverschiebung sind neben geometrischer Imperfektion noch Eigenspannungen vorhanden. Der Untersuchung lag eine geometrisch und physikalisch nichtlineare Theorie zugrunde. Die Abmessungen, Werkstoffkennwerte und Eigenspannungsverläufe sind wie bei der Vergleichslösung von Kröplin [60] festgelegt (siehe Bild 5.3). Ein Viertel der Platte wurde mit vier Schalenelementen bei den Eigenspannungsverläufen wurden drei Fälle untersucht (siehe Bild 5.3). Während die Eigenspannungsverläufe 1 und 2 die globalen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, trifft dies für Eigenspannung 3 nicht zu. Dieser Spannungszustand ist eigentlich kein Eigenspannungszustand; er läßt sich jedoch als praktischer Grenzfall eines ausgesteiften Blechfeldes ansehen. Im Rahmen der Finiten Element Methode bedeutet dies, daß die Spannungen nur in der Eigenspannungsmatrix zu berücksichtigen sind, im Vektor der inneren Kräfte jedoch nicht, da sich sonst Verschiebungen aus dem "Eigenspannungszustand" ergeben.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 5.4 ist die bezogene Traglast als Funktion der bezogenen Mittendurchbiegung dargestellt. Mit der Vergleichslösung von Kröplin [60] ist bis kurz vor Erreichen der maximalen Last ausreichend gute Übereinstimmung vor-

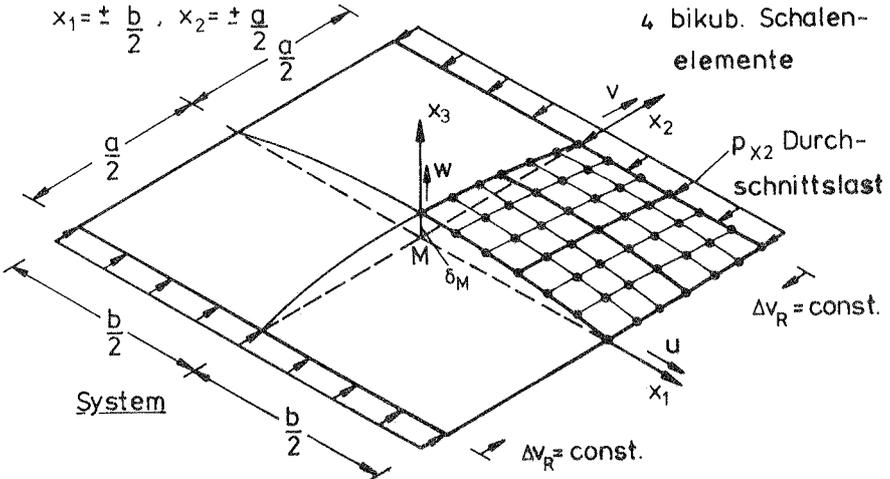
Randbedingungen



$$x_1 = \pm \frac{b}{2}, \quad x_2 = \pm \frac{a}{2}$$

FE-Idealisierung

4 bikub. Schalen-
elemente



Abmessungen

$$\left. \begin{aligned} a &= 87,5 \text{ [cm]} \\ b &= 100 \text{ [cm]} \end{aligned} \right\} \alpha = a/b = 0,875$$

$$b/t = 80 \rightarrow t = b/80 = 1,25 \text{ [cm]}$$

Werkstoff

$$E = 20600 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

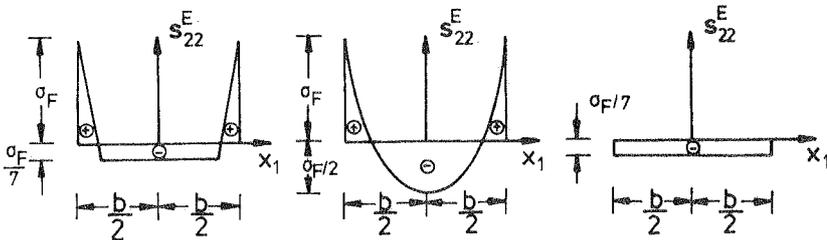
$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_F = 25 \text{ [kN/cm}^2\text{]}, T = 0$$

Geometrische Imperfektion

$$w_0 = \delta_M \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \quad \delta_M = 0,001b = 0,1 \text{ [cm]}$$

Eigenspannungen Membraneigenspannung s_{22}^E über x_2 const.



Eigenspannung 1

Eigenspannung 2

Eigenspannung 3

Bild 5.3: Imperfekte Platte - Geometrie, Werkstoff, Eigenspannungen

handen. Die Abweichung im Bereich der Traglast dürfte an dem Rechenmodell Kröplin liegen, das keine stetige Querschnittsplastizierung vorsieht. Eine Fortsetzung der Rechnung in den abfallenden Teil der Traglastkurve erfolgte nicht.

Bis zum Plastizierungsbeginn - markiert durch Pfeile im Lastverschiebungsdiagramm - zeigt sich der Einfluß der Eigenspannungen in der geometrisch nichtlinearen Theorie. Man erkennt, je nach Eigenspannungsverteilung ergibt sich eine unterschiedlich starke Zunahme in den Verschiebungen, wobei der Plastizierungsbeginn an der Plattenunterseite bei etwa der gleichen Mittendurchbiegung stattfindet. Die Traglast wird gegenüber der nur geometrisch imperfekten Platte durch Hinzunahme von Eigenspannungen reduziert. So fällt die bezogene Traglast von 0.59 auf etwa 0.48 für die verschiedenen Eigenspannungsansätze, wobei die Mittendurchbiegung bei Eigenspannung 2 am größten ist.

Im weiteren wird auf die Problematik der Spannungsumlagerung eingegangen. So sind in Bild 5.5 die Hauptspannungspunkte für verschiedene Laststufen und die Mises-Fließbedingung für den dritten Quadranten dargestellt. Der Punkt, für den die Auswertung erfolgt, liegt etwa in der Plattenmitte (am Integrationspunkt mit den Koordinaten $x_1 = 2.82$ [cm], $x_2 = 2.48$ [cm]) an der Unterseite. Dargestellt sind Spannungspunkte für den Fall ohne Eigenspannungen bzw. mit Eigenspannung 2. Bei der Platte mit Eigenspannungen ist der Fließbeginn bereits bei der Laststufe $p_{x2}/\sigma_F \cdot t = -0.23$, während die Spannungspunkte auf der Fließkurve etwa im gleichen Bereich wandern. Es zeigen sich größere Spannungsumlagerungen. So ergibt sich für die erste Laststufe - gekennzeichnet durch eine ① entsprechend dem Lastniveau aus dem Lastverschiebungsdiagramm in Bild 5.4 - bei vorhandenen Eigenspannungen ein viel größerer Zuwachs in den bezogenen Hauptspannungen σ_I/σ_F und σ_{II}/σ_F .

In Bild 5.6 ist der Verlauf der bezogenen Membranspannungen s_{22} über die halbe Plattenbreite dargestellt. Aufgetragen sind die Membranspannungen für die Laststufen $p_{x2}/\sigma_F \cdot t = -0.12$ bzw. $p_{x2}/\sigma_F \cdot t = -0.44$. An der Platte ohne Eigenspannungen zeigt sich

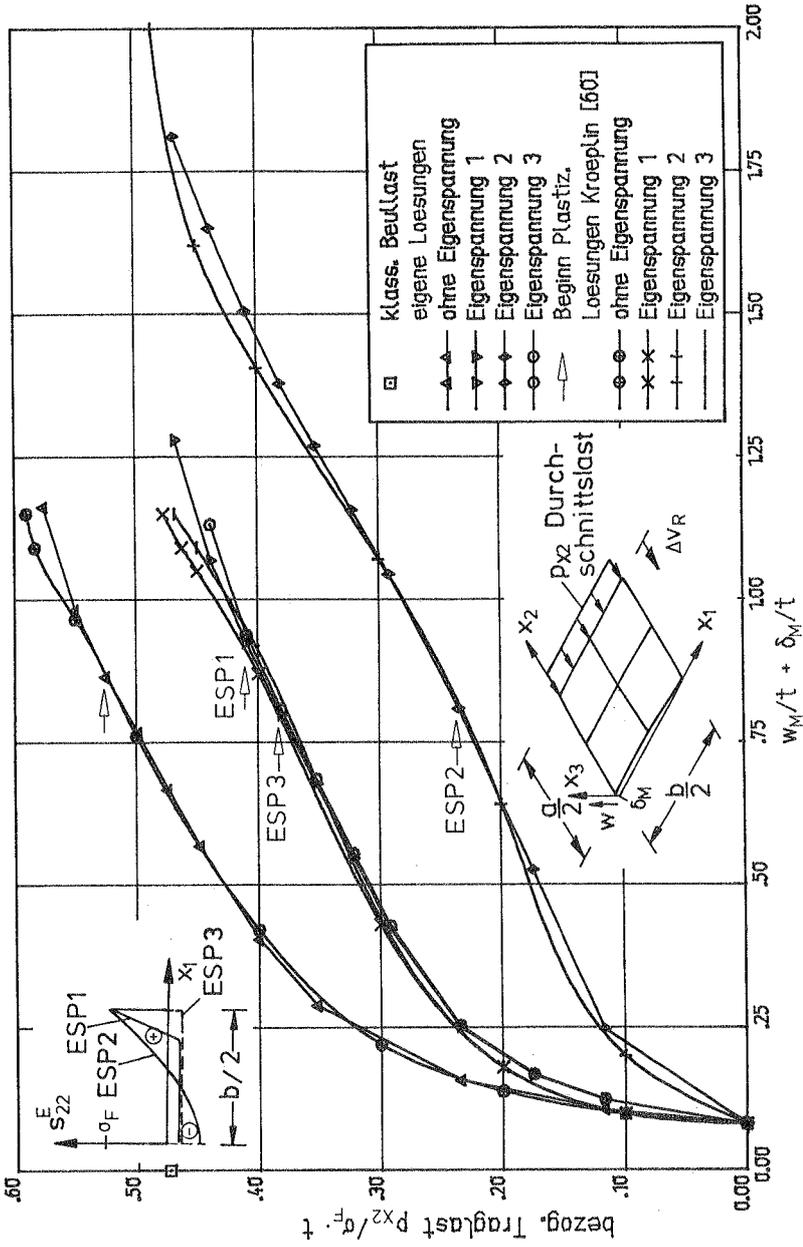


Bild 5.4: Lastverschiebungsdiagramm - imperfekte Platte

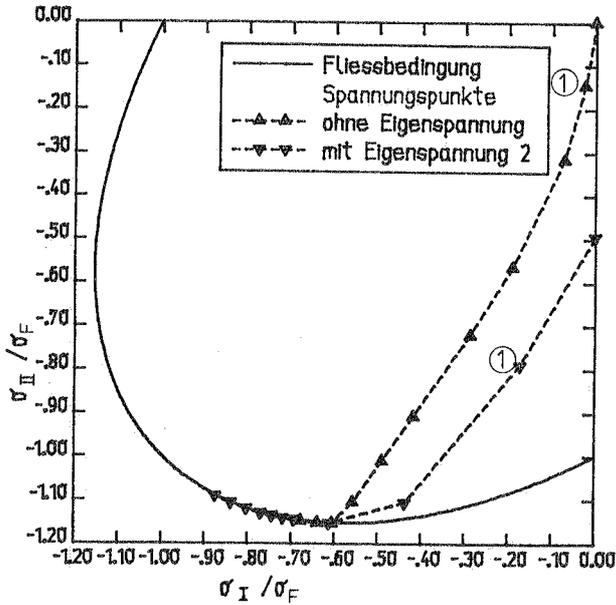


Bild 5.5: Hauptspannungsänderung in Plattenmitte

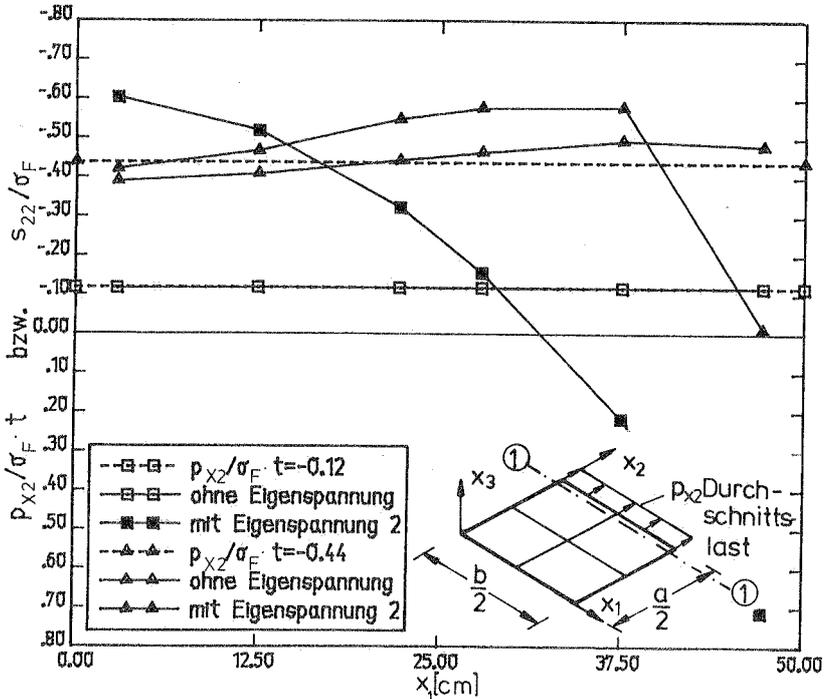


Bild 5.6: Membranspannungen in Schnitt ① - ①

für die Laststufe $p_{x2}/\sigma_F \cdot t = -0.44$ das bekannte Bild der Spannungumlagerung von der Plattenmitte zum Plattenrand hin. In der Platte mit Eigenspannung 2 finden größere Spannungumlagerungen statt. So werden die aus dem Eigenspannungszustand herrührenden Zugspannungen im Randbereich erheblich reduziert, die Druckspannung in Plattenmitte geringfügig reduziert. Im weiteren wird für diese beiden Laststufen eine Gleichgewichtskontrolle durch Gaußintegration der Membranspannungen vorgenommen. Tafel 5.1 zeigt das Ergebnis der resultierenden Kräfte im Vergleich zur Gesamtlast. Der Fehler ist bei vorhandenen Eigenspannungen für die erhöhte Laststufe am größten, jedoch ansonsten ausreichend klein. Eine Verbesserung ließe sich für den Fall mit Eigenspannungen durch Elementverdichtung erzielen.

Aus den Untersuchungen der Platte lassen sich die Schlußfolgerungen ziehen:

Platte ohne/mit Eigenspannung	Laststufe $p_{x2}/\sigma_F \cdot t$	Last $P_x = p_{x2} \cdot \frac{b}{2}$ [kN]	$S = \int_0^{b/2} s_{22} dx_1$ [kN]	Fehler [%]
				$\frac{ S - P_x }{ P_x } \cdot 100$
ohne Eigen- spannung	-0.1173	-183.28	-183.16	0.07
	-0.4480	-700.00	-699.84	0.02
mit Eigen- spannung 2	-0.1174	-183.43	-183.32	0.06
	-0.4384	-685.00	-702.66	2.5

Tafel 5.1: Gleichgewichtskontrolle-Membrankräfte

- In der geometrisch nichtlinearen Theorie bewirken Eigenspannungen eine Zunahme in den Verschiebungen.
- Der Plastizierungsbeginn erfolgt bei einem niedrigeren Lastniveau.
- Es kommt zu einem Abfall der Traglast infolge Eigenspannungen.
- Bei vorhandenen Eigenspannungen finden erhebliche Spannungumlagerungen statt.

6. AXIALBELASTETER KREISZYLINDER MIT RUNDSCHWEISSNAHT

6.1 Abmessungen und Vergleichslösungen des perfekten Kreis- zylinders

Die Abmessungen sind so gewählt, daß es sich um einen mittellangen Kreiszylinder handelt (Nachweis Längenbereich siehe Bild 6.1). Für das gewählte r/t -Verhältnis ergibt sich für den perfekten Kreiszylinder elastisches Beulen. In Bild 6.1 sind Geometriekennwerte, Werkstoffdaten und Randbedingungen angegeben. Daneben sind noch die x -Koordinaten ausgewählter Punkte angegeben. Für diese Punkte werden ausgewählte Verschiebungen in den Lastverschiebungsdiagrammen dargestellt.

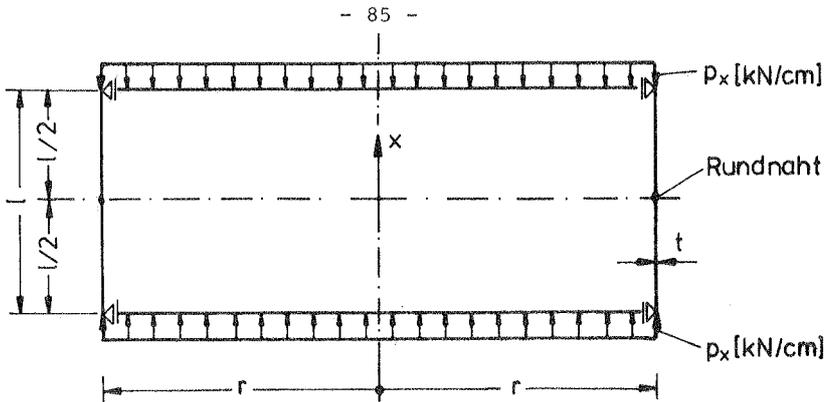
In Tafel 6.1 sind die nach den linearen Beultheorien (siehe Abschnitt 2.1) ermittelten Beullasten mit zugehörigen Beulformen angegeben. Zur Absicherung der FE-Idealisierung werden damit Vergleiche vorgenommen.

6.2 Zur Finiten Element Idealisierung

Mit der Finiten Element Idealisierung sollen folgende Einflüsse erfaßt werden:

- geometrische Imperfektion im Bereich der Rundnaht,
- Eigenspannungen aus der Rundschweißnaht,
- Einflüsse der Biegerandstörung,
- Wiedergabe des Beulverhaltens des Zylinders, mit Stabilitäts- oder Traglast.

Bei den Untersuchungen wurden zwei Finite Element Modelle verwendet (siehe Bild 6.2), eine axialsymmetrische Finite Element Idealisierung mit dem zweidimensional degenerierten Element und eine nichtaxialsymmetrische Finite Element Idealisierung eines Ausschnittes mit dem dreidimensional degenerierten Element. Am Ausschnittsrand sind Symmetriebedingungen vorgegeben.



GeometrieKennwerte:

$$\left. \begin{aligned} r &= 350 \text{ [cm]} \\ t &= 0,7 \text{ [cm]} \end{aligned} \right\} \frac{r}{t} = 500$$

$$l = 285 \text{ [cm]}$$

Batdorf-Parameter:

$$Z = \frac{l^2 \sqrt{1 - \nu^2}}{rt} = 316,3$$

WerkstoffKennwerte:

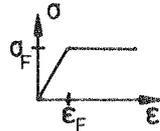
Baustahl St 37

$$E = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_F = 24 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

$$T = 0$$



Randbedingungen: bei $x = \pm \frac{l}{2}$

klassische Randbedingungen: $w = m_x = v = 0, n_x = \text{const.}$

entspricht SS3 (siehe z. B [43])

Längenbereich:

$$\frac{l^2}{r^2 \sqrt{Z^2}} = 0,04 \rightarrow \text{mittlerer Längenbereich nach [37]}$$

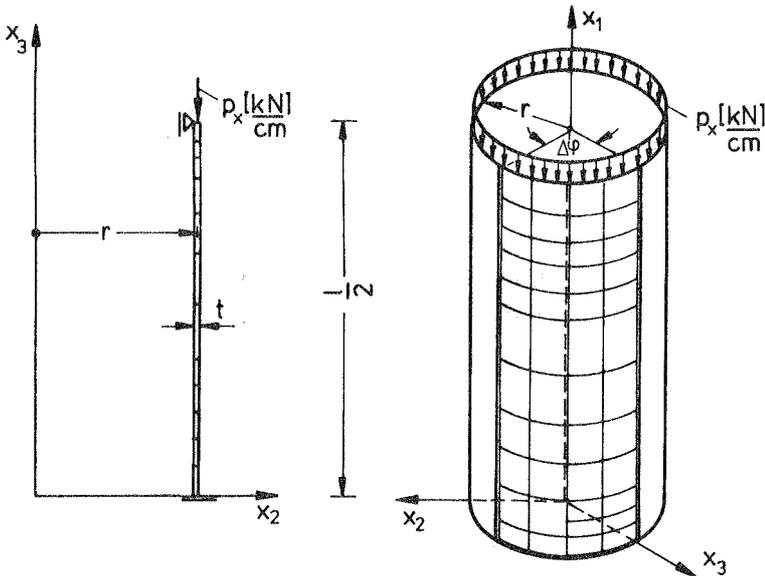
Punkte für Auswertung:

Punkt	A	B	C	D
x-Koord. [cm]	142,5	25,67	0,0	130,0

Bild 6.1: Kreiszyylinder - Geometrie, Werkstoff, Längenbereich
Randbedingungen, Koordinaten

lineare Beultheorien	Beulformen/Anzahl Beulwellen
a) klassische Beultheorie nach Timoshenko/Lorenz: $P_{xkl} = \frac{Et^2}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 17.79 \frac{[kN]}{cm}$	axialsymmetrische Beulformen $m = 11$ LHW (<u>L</u> ängs <u>h</u> alb <u>w</u> ellen)
b) Flüggesche Stabilitätstheorie: $P_{xFl} = 17.66 \frac{[kN]}{cm}$	Schachbrettbeulen $m = 1$ LHW $n = 12$ UVW (<u>U</u> mfang <u>v</u> oll <u>w</u> ellen)
c) Donnell'sche Stabilitätstheorie: $P_{xkr} = P_{xkl}$	Schachbrettbeulen m, n unbestimmt, mehrfache Eigenformen

Tafel 6.1: Ergebnisse lineare Beultheorien



Rechenmodell (I)

z.B. 12 zweidim.deg.Elemente
 axialsymmetrisch

Rechenmodell (II)

z.B. 4x12 dreidim.deg.Elemente
 für Ausschnitt $\Delta\varphi$

Bild 6.2: Überblick - verwendete Finite Element Modelle

6.3 Imperfektionsannahmen infolge der Rundschweißnaht

Die Rundschweißnaht ergibt:

- lokale geometrische Imperfektion und
- lokale Schweißbeigenspannungen.

Aufgrund von Meßergebnissen über Schweißverformungen und Schweißbeigenspannungen erfolgt die Festlegung baupraktisch sinnvoller Annahmen. Kantenversetzungen der Bleche, die infolge der Abstufung der Blechdicken vorkommen, werden nicht berücksichtigt. Die Eigenspannungen aus Kaltverformung der Bleche werden ebenfalls nicht berücksichtigt.

6.3.1 Geometrische Imperfektionen

Es sind nur geometrische Imperfektionen vorhanden, wenn durch Spannungsarmglühen die Eigenspannungen weitgehend abgebaut werden. Zwei Arten von Imperfektionsformen wurden untersucht:

IMP ① bereichsweise stetige Imperfektion in Anlehnung an Meßergebnisse von Schulz [95]

IMP ② sog. "herzförmige" Nahteinziehung entsprechend den Angaben von White/Dwight [112].

Es wird vorausgesetzt, daß die Rundschweißnaht in der halben Zylinderlänge liegt (siehe Bild 6.1). Während durch \bar{l} der gestörte Bereich infolge der Schweißverformung festgelegt ist, wird durch $\max \epsilon_v$ die maximale Imperfektionsamplitude definiert

$$(\max \epsilon_v = \frac{|\max w_o|}{t}).$$

Tafel 6.2 gibt einen Überblick über die beiden Imperfektionsformen. Dabei hat IMP ① einen bereichsweise stetigen Verlauf mit Nahteinziehung nach innen und einen leichten Knick nach außen. Die Imperfektion IMP ②, die sog. "herzförmige" Nahtein-

Geometrie	Be- reich i	Funktion $w_0 = w_0(x)$	Definitionsbereich	l_i	$w_0 \otimes$ $\frac{t}{l}$ $x = a, b, c, d$ $\max \epsilon_v = 0,5 \mid \max \epsilon_v = 1,0$	
<p>IMP1</p>	1	$w_0 = w_0^a$	$0 \leq x \leq l_1$	4,28t	-0,5	
	2	$w_0 = \frac{w_0^b}{l_2} [x - l_1] + w_0^c$	$l_1 \leq x \leq (l_1 + l_2)$	15,72t	-0,2	
	3	$w_0 = \frac{w_0^c - w_0^b}{l_3} [x - (l_1 + l_2)] + w_0^b$	$(l_1 + l_2) \leq x \leq (l_1 + l_2 + l_3)$	15,71t	+0,05	+0,10
	4	$w_0 = -\frac{w_0^c}{l_4} [x - (l_1 + l_2 + l_3)] + w_0^c$	$(l_1 + l_2 + l_3) \leq x \leq l$	14,29t	0,00	0,00
<p>IMP2</p>	1	$w_0 = w_0^a \left[\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x}{l} + 1 \right]$	$0 \leq x \leq l$	35,71t	-0,5	

Tafel 6.2: Zusammenstellung geometrischer Imperfektionen

ziehung, hat nur Verformungen nach innen. Bei der maximalen Imperfektionsamplitude wurde jeweils die halbe bzw. ganze Wanddicke angenommen.

6.3.2 Schweißeigenspannungen

Aus Gleichgewichtsgründen sind am Kreiszyylinder mit einer Rundschweißnaht neben Eigenspannungen in Ringrichtung noch solche in Längsrichtung infolge Biegung vorhanden (siehe auch Meßergebnisse aus [28]). Die Ermittlung dieser Biegeeigenspannungen erfolgt mittels der Biegetheorie des Kreiszyinders bei Annahme der Ringeigenspannungen. Bei Voraussetzung perfekter Kreiszyinder mit Axialsymmetrie lassen sich die in Bild 6.3 dargestellten Schnittkräfte des Eigenspannungszustandes angeben.

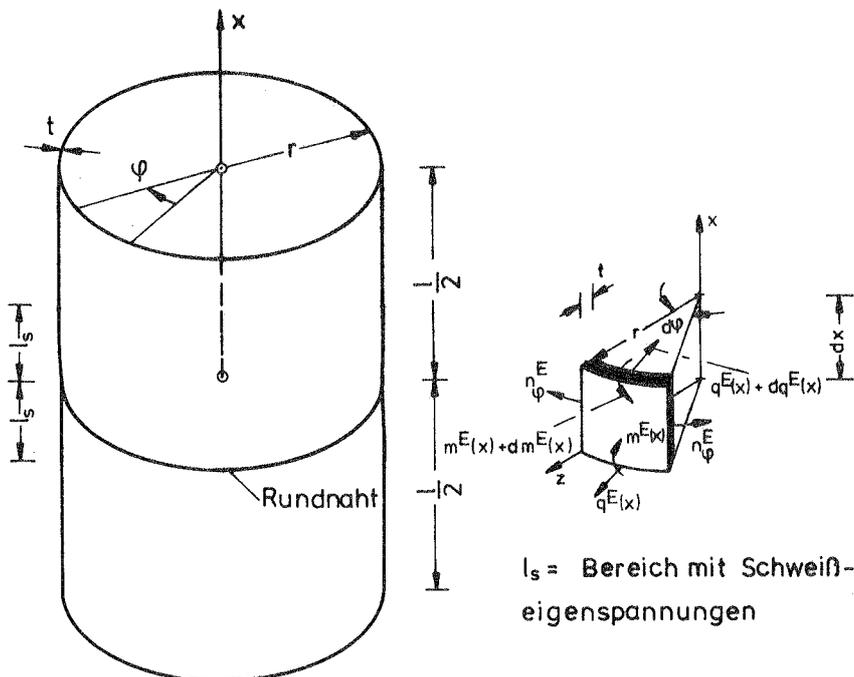


Bild 6.3: Kreiszyylinder mit Schnittkräften infolge Eigenspannungen

Damit ergeben sich die aus der Biegetheorie des Kreiszyllinders (siehe z.B. [37]) bekannte Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung und die Momentenbedingung um die Ringtangente für die Eigenspannungskräfte:

$$\frac{dq^E(x)}{dx} + \frac{n_\varphi^E}{r} = 0 , \quad (6.1)$$

$$\frac{dm^E(x)}{dx} - q^E(x) = 0 . \quad (6.2)$$

Die Ringmembrankraft folgt aus der Annahme eines Eigenspannungsverlaufes in Längsrichtung in Anlehnung an Meßergebnisse. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Ringspannung σ_φ^E über die Wanddicke t konstant ist und in Längsrichtung veränderlich, wobei folgende globale Gleichgewichtsbedingungen im Gesamtabschnitt eingehalten wird:

$$\int_0^l \sigma_\varphi^E(x) dx = 0 . \quad (6.3)$$

Mit der Ringmembrankraft

$$n_\varphi^E(x) = \sigma_\varphi^E(x) \cdot t \quad (6.4)$$

lassen sich die Querkräfte und Biegemomente des Eigenspannungszustandes aus den Gleichungen (6.1) und (6.2) durch Integration wie folgt ermitteln

$$q^E(x) = - \int_0^x \frac{n_\varphi^E(x)}{r} dx + C , \quad (6.5)$$

$$m^E(x) = - \int_0^x \int_0^x \frac{n_\varphi^E(x)}{r} dx + Cx + D . \quad (6.6)$$

Hieraus ergeben sich die Schub- und Biegeeigenstressungen mit den bekannten Stressformeln. Dabei ist zu beachten, daß die sich ergebenden Stresskombinationen die Mises-Fließbedingung einhalten. Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen erfüllt.

$$\text{bei } x = 0 \quad q^E(x) = 0 \quad (6.7a)$$

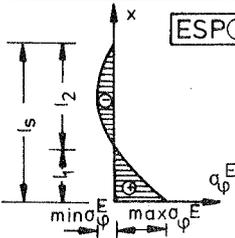
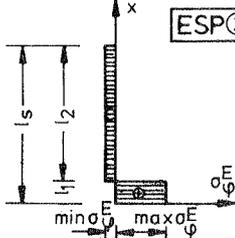
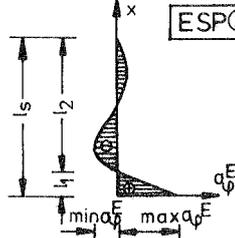
$$\text{bei } x = l_s \quad m^E(x) = 0 \quad (6.7b)$$

Für die Eigenstressungsverläufe $\sigma_\varphi^E(x)$, mit Zugstressungen unmittelbar neben der Naht und Druckstressungen weiter entfernt davon, wurden folgende Annahmen getroffen:

- | | |
|-------|---------------------------------|
| ESP ① | parabelförmiger Stressverlauf, |
| ESP ② | rechteckförmiger Stressverlauf, |
| ESP ③ | abklingender Stressverlauf. |

Tafel 6.3 gibt einen Überblick über die gewählten Stressfunktionen $\sigma_\varphi^E(x)$, mit den maximalen und minimalen Stresswerten sowie die Längenbereiche. Dabei erfüllen die drei Stressfunktionen die globale Gleichgewichtsbedingung nach Gleichung (6.3). Diese unterschiedlichen Eigenstressansätze wurden deswegen gewählt, da die Meßergebnisse von Eigenstressungen sehr stark streuen.

Mit diesen Stressansätzen ergeben sich die Schnittkräfte $q^E(x)$ und $m^E(x)$, woraus die restlichen Eigenstressungen τ^E und σ_x^E folgen. Für die bereichsweise definierten Funktionen ESP ② und ESP ③ sind bei der Integration an den Bereichsgrenzen Übergangsbedingungen zu erfüllen. Auf eine Wiedergabe der Integration wird verzichtet. In Bild 6.4 ist das Ergebnis der bezogenen Biegeeigenstressung σ_x^E/σ_F an der Außenseite des Kreiszyinders mit den jeweiligen Ringspannungsansätzen $\sigma_\varphi^E/\sigma_F$ dargestellt. Die sehr kleinen Schub-eigenstressungen sind nicht dargestellt. Man sieht, daß je nach Ringspannungsansatz σ_φ^E sich unterschiedlich große Biegeeigenstressungen ergeben. So werden für die mehr theoretischen Ansätze

Eigenspannungen	Funktion $\sigma_{\varphi}^E(x_i)$	$\frac{\max \sigma_{\varphi}^E}{\max \sigma_{\varphi}^E}$	$\frac{l_s}{l_1}$ $\frac{l_s}{l_2}$	$\int_0^{l_1} \sigma_{\varphi}^E(x_1) dx_1$
 <p>ESP ①</p>	$\sigma_{\varphi}^E(x) = \max \sigma_{\varphi}^E \left(3 \frac{x^2}{l_s^2} - 2 \frac{x}{l_s} + 1 \right)$ <p>für $0 \leq x \leq l_s$</p>	$\frac{2}{3} \sigma_F$ $-\frac{2}{9} \sigma_F$	30t ----- 10t ----- 20t	$\frac{80}{27} \sigma_F t$
 <p>ESP ②</p>	$\sigma_{\varphi}^E(x) = \max \sigma_{\varphi}^E$ <p>für $0 \leq x \leq l_1$</p> $\sigma_{\varphi}^E(x) = \min \sigma_{\varphi}^E$ <p>für $l_1 \leq x \leq (l_1 + l_2)$</p>	$\frac{2}{3} \sigma_F$ $-\frac{8}{69} \sigma_F$	30t ----- $\frac{40}{9} t$ ----- $\frac{230}{9} t$	$\frac{80}{27} \sigma_F t$
 <p>ESP ③</p>	$\sigma_{\varphi}^E(x) = \max \sigma_{\varphi}^E \left(-\frac{x}{l_1} + 1 \right)$ <p>für $0 \leq x \leq l_1$</p> $\sigma_{\varphi}^E(x) = -\max \sigma_{\varphi}^E \frac{l_1}{2} \frac{a^2 + b^2}{b(1 - e^{a/2})} \cdot e^{a(x-l_1)} \sin b(x-l_1)$ <p>für $l_1 \leq x \leq l_s$ mit $b = \frac{2\pi}{l_2}$, $a = -\frac{b}{l_2}$</p>	$\frac{3}{4} \sigma_F$ $-0,31 \sigma_F$	30t ----- 5t ----- 25t	$\frac{15}{8} \sigma_F t$

Tafel 6.3: Eigenspannungsansätze σ_{φ}^E

ESP ① und ESP ② gerade noch die Mises-Fließbedingung eingehalten. Für ESP ③, die mehr den Meßergebnissen nahekkommt, ergeben sich kleinere Biegeeigenspannungen. Die Festlegung der Länge l_s hat einen wesentlichen Einfluß auf die maximalen Biegeeigenspannungen. Die Eigenspannungsansätze nach Bild 6.4 wurden bei den Rechnungen mit dem Finiten Element Programm NISA durch ergänzende Unterprogramme erfaßt.

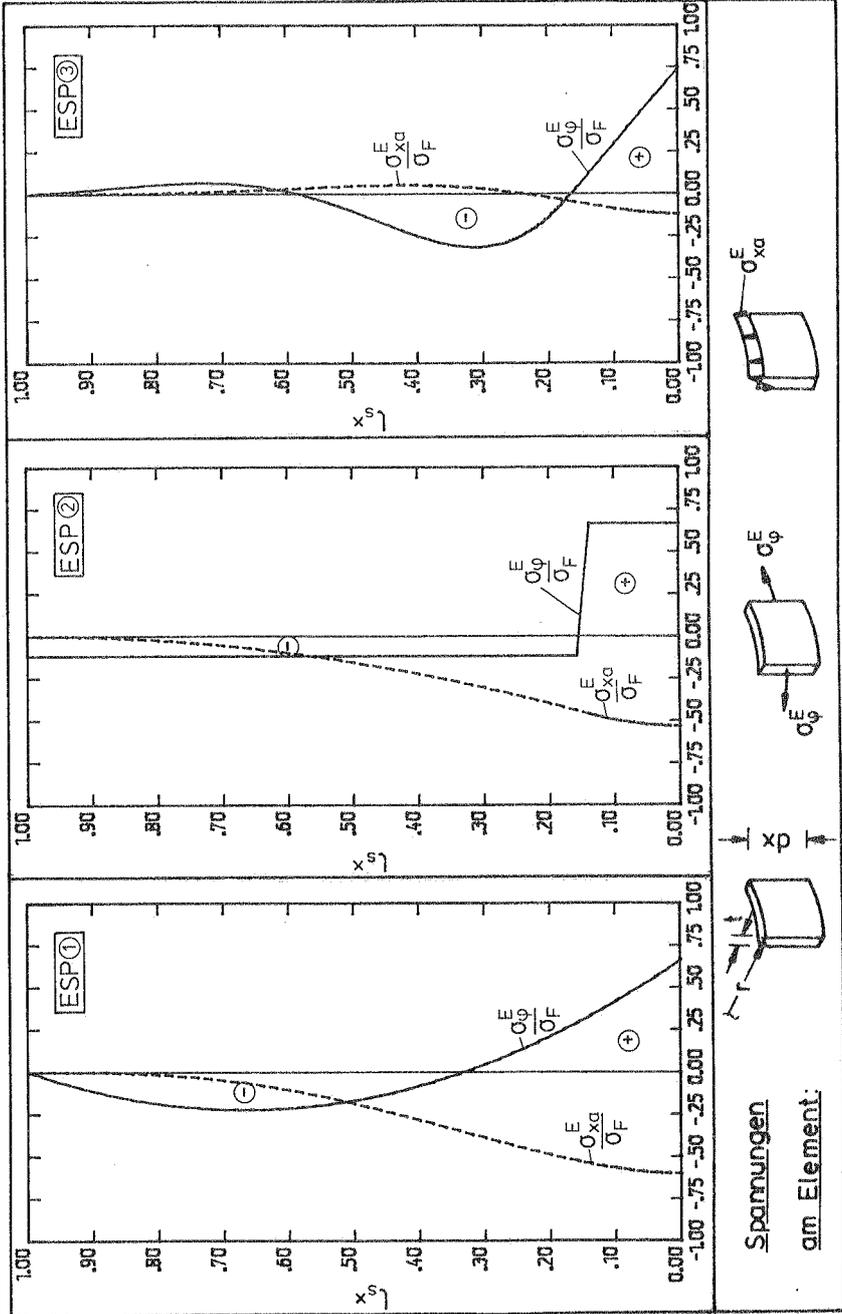


Bild 6.4: Eigenspannungsansätze

6.4 Zum Einfluß der Randbedingungen

6.4.1 Allgemeines

Wie bereits in Abschnitt 2.1 hingewiesen, ergibt sich für den mittellangen Kreiszyylinder bei der Randbedingung SS3 mit der Voraussetzung, daß der Grundzustand ein Membranzustand ist, die klassische Beullast. Wie von Thielemann/Esslinger [100] gezeigt, gilt dies auch für die Versuchsrandbedingung C4 (Definition der Randbedingungen siehe Bezeichnungen). Die Änderung der Randbedingung - Verschieblichkeit in Umfangsrichtung, was bei den Randbedingungen SS1 oder SS2 entspricht - ergibt einen Abfall der Beullast auf $\rho \approx 0.50$ (siehe Arbeiten von Almroth [2], bzw. Hoff/Soong [43]). Dabei ist wiederum der Grundzustand ein Membranzustand. Wie bereits von Fischer [35] festgestellt, ergibt die Biegerandstörung bei der Randbedingung SS3 eine Beullast von $\rho \approx 0.85$. Würde man dagegen die Biegerandstörung bei SS2 berücksichtigen, so ergibt sich eine Beullast von $\rho \approx 0.45$ (siehe Arbeit von Stein [98]).

Bei der Finiten Element Methode wird bei den hier verwendeten Elementen der Einfluß der Biegestörung unmittelbar erfaßt. Um den Einfluß dieser lastabhängigen Imperfektion gegenüber den vorgegebenen Imperfektionen aus der Rundschweißnaht aufzuzeigen, werden zuerst Untersuchungen am perfekten Kreiszyylinder mit Randbedingung SS3 vorgenommen.

6.4.2 Einfluß der Biegerandstörung bei geometrisch nichtlinearen Voraussetzungen

a) Rechenmodell (I) : axialsymmetrische FE-Idealisierung

Die Beullast bei axialsymmetrischen Voraussetzungen ist ein oberer Grenzwert für den nichtaxialsymmetrischen Fall. Der numerische Aufwand ist dabei gegenüber der nichtaxialsymmetrischen Finite Element Idealisierung wesentlich geringer. Die Absicherung der Idealisierung in Längsrichtung durch Elementverdichtung ist unproblematisch. Für die Idealisierung des halben Zylinders - mit

Symmetriebedingung in der Mitte - wurden drei verschiedene Elementraster mit 9, 12 (siehe Plottbild A1) und 18 Elementen verwendet.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.5 sind die bezogenen Verschiebungen u_A/t , w_D/t und w_C/t aus den Untersuchungen mit 12 und 18 Elementen dargestellt. Zwischen beiden Elementrastern ist kein Unterschied, d.h., 12 Elemente sind ausreichend. Der Vergleich mit den Verschiebungen aus der linearen Biegetheorie zeigt, daß die Verschiebung w_D eine ausgeprägte Nichtlinearität aufweist. Bei den Verschiebungen u_A und w_C zeigen sich erst ab einem Lastniveau von $\rho \approx 0.80$ nichtlineare Einflüsse.

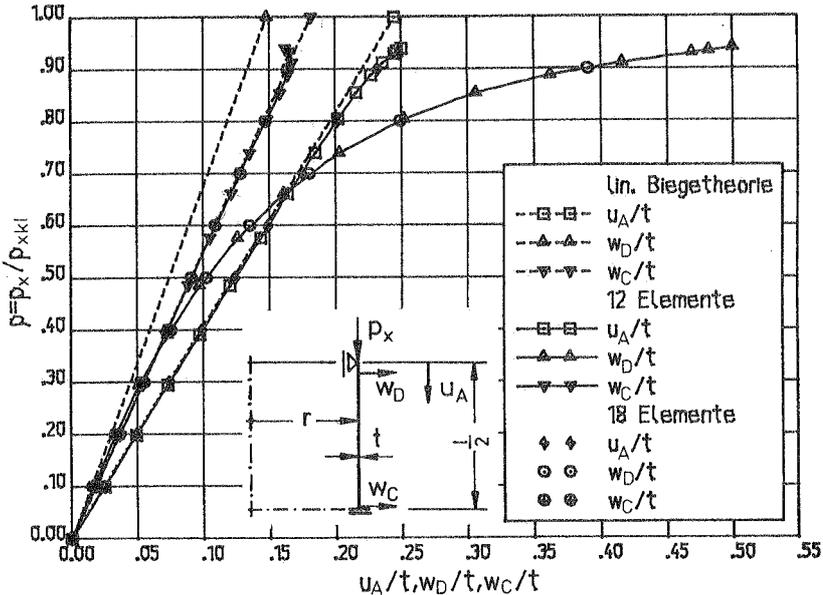


Bild 6.5: Lastverschiebungsdiagramm - Biegerandstörung

1.0 lin. 10mm : $\frac{w_C}{t} \approx 0.17 \Rightarrow w_C = 1.7 \text{ mm}$

0.9 12 EC : $\frac{w_C}{t} \approx 0.11 \Rightarrow w_C = 1.1 \text{ mm}$
(mit (+) lin.)

Die Randstörung bewirkt, daß die Verschiebungen für $\rho \approx 1.0$ immer mehr zunehmen - was bereits von Flügge [36] festgestellt wurde, und sich eine Verschiebungsfigur entsprechen dem klassischen Beulmuster mit 11 Längshalbwellen einstellt. Im Plottbild A1 des Anhangs sind Verschiebungsfiguren für verschiedene Laststufen ρ dargestellt. Der Abbruch der Rechnungen erfolgt bei dem Lastniveau $\rho = 0.93$ infolge ungenügender Konvergenz. Dieses Lastniveau liegt über den aus der Untersuchung von Fischer [35] und den Versuchen von Tennyson [99] bekannten Beullasten. Bei der Laststufe $\rho = 0.70$ ergeben sich Spannungen, die über der Fließgrenze für Baustahl St 37 liegen.

In Tafel 6.4 sind die Ergebnisse von Eigenwertuntersuchungen bei den Laststufen $\rho = 0.01$ und $\rho = 0.934$ für beide Eigenwertformulierung

Eigenwert problem	Last- stufe ρ	Eigenwerte		krit. Last $\rho(kr)$ $=\lambda_1\rho$	Beulwellen- zahl (LHW)		Plott- bilder im Anhang
		λ_1	λ_2		1.Ei- gen- form	2.Ei- gen- form	
Ⓘ : $K_e + \lambda(K_u + K_g)$	0.01	99.84	104.24	0.998	11	9	Bild A2
Ⓜ : $K_e + K_u + \lambda K_g$	0.01	100.95	105.11	1.009	11	9	wie A2
Ⓘ : $K_e + \lambda(K_u + K_g)$	0.934	1.06	1.10	0.991	11	9	wie A2
Ⓜ : $K_e + K_u + \lambda K_g$	0.934	1.08	1.12	1.005	11	9	wie A2

Tafel 6.4: Eigenwertberechnungen

lierungen angegeben. Dabei ergibt sich unabhängig vom Lastniveau und der Eigenwertformulierung jeweils eine kritische Last in der Größenordnung der klassischen Beullast mit der zugehörigen Beulwellenzahl von 11 Längshalbwellen. Daraus läßt sich schließen, daß dieses Rechenmodell trotz der Biegestörung als kritische Last die klassische Beullast ergibt. Abschließend wird noch auf Bild 6.6 verwiesen, in dem die Eigenwertkurven und der Sp-Parameter über der

bezogenen Radialverschiebung w_D/t dargestellt sind. Man erkennt, daß mit zunehmender Verschiebung der Sp-Parameter stark abfällt. Aufgrund der Eigenwertberechnung kann man als kritische Last die klassische Beullast ansehen.

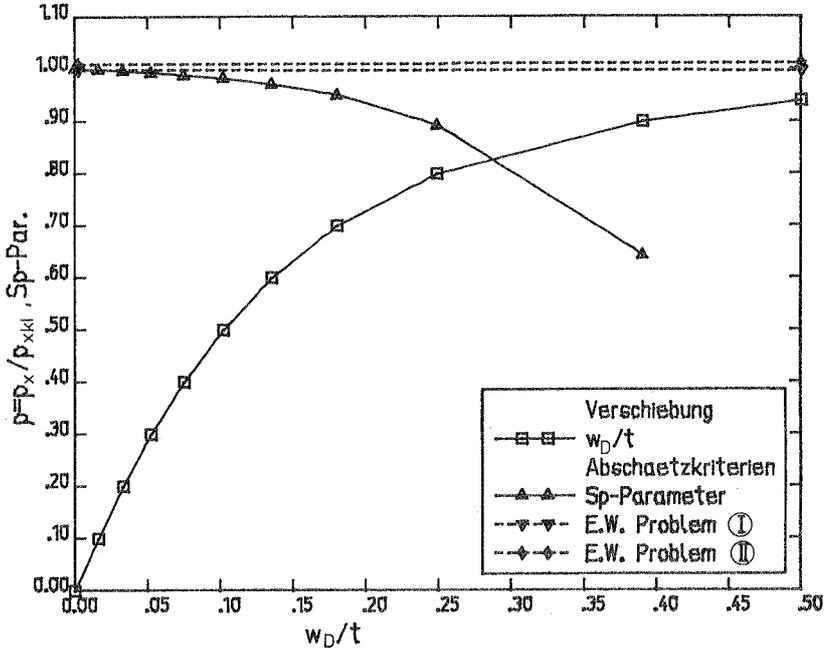
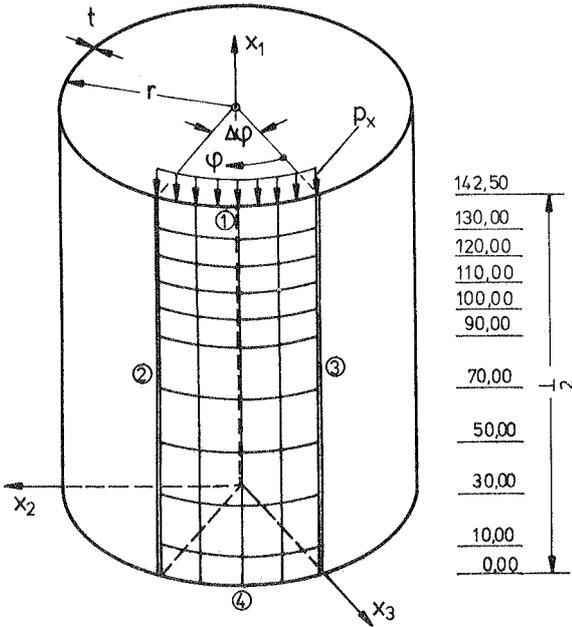


Bild 6.6: Abschätzkriterien kritische Last-Biegerandstörung

b) Rechenmodell (II): nichtaxialsymmetrische FE-Idealisierung

Das Rechenmodell (I) - die axialsymmetrische FE-Idealisierung - kann das physikalische Verhalten des axialbelasteten Kreiszylinders nicht voll erfassen. Zur Erfassung des unsymmetrischen Beulen- Schachbrett- oder Rautenbeulen - ist eine Finite Element Idealisierung mit dreidimensional degenerierten Elementen erforderlich. Für die Idealisierung des gesamten Zylinders ist der numerische Aufwand zu groß, so daß beim Rechenmodell (II) ein Ausschnitt $\Delta\varphi$ idealisiert wird. Bild 6.7 zeigt einen Ausschnitt mit



10x4 bikub. Schalenelemente

Vergleichsraster

10 x 2 Elemente

(wie bei 10x4 Elemente jedoch 2 Elemente in Umfangsrichtung)

$$\Delta\varphi = \frac{180}{n}$$

n = vorgegebene Umfangsvollwellenzahl

Rand	Koordinaten	Art der Randbedingungen	Symbole
①	$x = 1/2$ $0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi$	klassische Randbedingung $w = m_x = v = 0, n_x = \text{const (SS3)}$	
② ③	$\varphi = 0$ bzw. $\Delta\varphi$ $0 \leq x \leq 1/2$	Symmetrie Bedingungen	
④	$x = 0$ $0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi$	Symmetrie Bedingungen	

Bild 6.7: Idealisierung Ausschnitt mit Randbedingungen

der Idealisierung von 10×4 bikubischen Schalenelementen. Für das Vergleichsraster werden 10×2 Schalenelemente verwendet. Die Randbedingungen des Ausschnittes sind ebenfalls in Bild 6.7 wiedergegeben. Zur Erfüllung der Symmetriebedingung bei $\varphi = \Delta\varphi$ werden lokale Koordinatensysteme verwendet. Durch die Idealisierung nur des halben Zylinders in Längsrichtung und der Symmetriebedingung in der Zylindermitte werden antisymmetrische Beulformen ausgeschlossen.

Die Festlegung des Ausschnittswinkels $\Delta\varphi$ erfolgt durch Vorgabe der Umfangsvollwellenzahl n in Anlehnung an die Umfangsvollwellenzahl aus der Flüggeschen Stabilitätstheorie [36] des perfekten Kreiszyllinders. In Tafel 6.5 sind die sich ergebenden Beullasten - normiert auf die klassische Beullast - für einen ausgewählten Beulwellenzahlbereich wiedergegeben. Man erkennt, daß die Beulwerte sehr nahe beieinander liegen. Für $n = 12$ UVW und $m = 1$ LHW ergibt sich die kleinste Beullast, während der nächstgrößere Beulwerte zu $n = 16$ UVW und $m = 2$ LHW gehört. Die Querstriche kennzeichnen die mehrfachen Eigenformen nach der Donnell'schen Stabilitätstheorie [25] mit $\rho = 1.0$. Da die Beullasten sehr nahe beieinander liegen, kann zur kritischen Beullast infolge einer Störung eine andere Beulwellenzahl als $n = 12$ gehören, d.h., eine Variation des Öffnungswinkels ist angebracht. Da jedoch die Erfassung der Biegerandstörung kritische Beullasten ergibt, die sehr nahe bei der klassischen Beullast liegen, dürfte sich dieser Einfluß hier nicht stark auswirken. Für die Untersuchung der Biegerandstörung wird $n = 12$ festgelegt, womit sich $\Delta\varphi = 15^\circ$ ergibt. Durch die Vorgabe eines relativ kleinen Öffnungswinkels $\Delta\varphi$ wird das an Versuchen festgestellte Umordnen der Beulformen im Nachbeulbereich (siehe z.B. [31],[113]) ausgeschlossen. Um dies festzustellen, müßte man einen größeren Ausschnitt auswählen, z.B. mit $\Delta\varphi = 45^\circ$ könnte man $n = 4, 8, 12, \dots$ UVW erfassen, doch der numerische Aufwand ist hierzu sehr groß.

Die FE-Idealisierung in Längsrichtung erfolgt in Anlehnung an die axialsymmetrischen Untersuchungen, wobei mit 10 Elementen eine gezielte Verdichtung im Randbereich möglich ist. Zur Absicherung der Idealisierung in Umfangsrichtung dient das Element-

LHW m \ UVW n	$\rho = P_{xFl} / P_{xkl}$								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1.187	1.032	<u>.992</u>	1.044	1.174	1.377	1.652	2.003	2.434
2	2.043	1.661	1.388	1.199	1.079	1.014	<u>.996</u>	1.018	1.078
3	2.133	1.839	1.599	1.406	1.257	1.145	1.067	1.019	<u>0.998</u>
4	1.860	1.684	1.528	1.393	1.279	1.186	1.113	1.058	1.021
5	1.558	1.458	1.368	1.285	1.213	1.150	1.098	1.057	1.026
6	1.322	1.268	1.217	1.170	1.128	1.090	1.059	1.033	1.015
7	1.161	1.133	1.106	1.081	1.058	1.039	1.023	1.010	<u>1.003</u>
8	1.062	1.049	1.036	1.025	1.015	1.008	<u>1.002</u>	<u>1.00</u>	<u>1.00</u>

Tafel 6.5: Beullasten nach Flüggeschen Stabilitätstheorie

raster mit 10 x 2 Elementen. Neben Vergleichen in Lastverschiebungsdiagrammen werden für die verschiedenen Elementraster noch Eigenwertuntersuchungen bei der Laststufe $\rho = 0.10$ vorgenommen.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.8 ist ein Vergleich für ausgewählte Verschiebungen für die Elementraster 10 x 4 und 12 axialsymmetrische Elemente vorgenommen. Dabei ist sehr gute Übereinstimmung vorhanden. Bei der nichtaxialsymmetrischen Rechnung zeigt sich bei der Laststufe $\rho \approx 0.86$ ein Vorzeichenwechsel aus der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix ($\det K + VZW = 1$), was auf ein Verzweigen in den nichtaxialsymmetrischen Zustand hinweist. Zur Absicherung des verwendeten Elementrasters wird auf

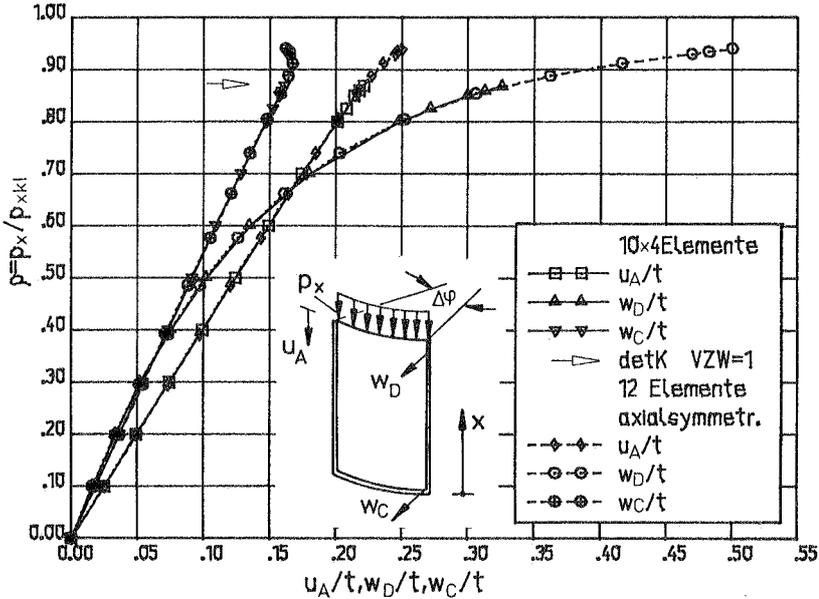


Bild 6.8: Lastverschiebungsdiagramm - Biegerandstörung

die Eigenwertberechnungen beim Lastniveau $\rho \approx 0.10$ in Tafel 6.6 verwiesen. Danach sind diese 10×4 Elemente ausreichend (vergleiche Beulformen in Plottbilder A3 und A4).

Wie in Tafel 6.6 angegeben, ergibt die Eigenwertuntersuchung beim Lastniveau $\rho \approx 0.86$ (siehe auch Plottbild A6 der zugehörigen Verschiebungsfigur) ein Verzweigen in eine nichtaxialsymmetrische Beulform. Dabei ist die 1. Eigenform ein Schachbrettmuster (siehe Plottbild A7), und als 2. Eigenform ergibt sich ein Rautenbeulmuster (Plottbild A8). Während bei Versuchen die Rautenbeulen in Zylindermitte einfallen [31][75], zeigen sich hier die Rautenbeulen im Randbereich, da die auslösende Ursache die Randstörung ist. Warum es sich bei den Rautenbeulen um die 2. Eigenform handelt, lässt sich damit erklären, daß die Rautenbeulen sich erst bei relativ großen Verschiebungen einstellen, was hier noch nicht zutrifft. Die Rechnung in den Nachbeulbereich wurde nicht vorgenommen.

Elem. Raster	Last- stufe ρ	detK VZW =	Eigenwertberechnung $K_e + \lambda(K_u + K_g) = 0$			Eigenformen		Plott- bilder
			λ_1	λ_2	$\rho(kr) = \lambda_1 \rho$	1.	2.	
10 x 2	0.0995	0	10.025	10.154	0.998	7 LHW 12 UVW	11 LHW 12 UVW	A3 -
10 x 4	0.0995	0	9.892	10.051	0.984	1 LHW 12 UVW	11 LHW 0 UVW	A4 A5
10 x 4	0.865	1	0.992	1.073	0.859	1 LHW 12 UVW	Rauten- beulen	A7 A8

Tafel 6.6: Eigenwertberechnungen - Biege-randstörung

6.4.3 Einfluß der Biege-randstörung bei zusätzlicher Berücksichti-
gung der physikalischen Nichtlinearität

Wie bereits hingewiesen, ergeben sich bei der Laststufe $\rho > 0.70$ Spannungen, die über der Fließgrenze für den hier zugrunde gelegten Baustahl St 37 liegen, d.h., die Hinzunahme der physikalischen Nichtlinearität ist angebracht.

a) Rechenmodell (I) axialsymmetrische FE-Idealisierung

Für die FE-Idealisierung können die Elementraster aus der geometrisch nichtlinearen Untersuchung verwendet werden. Dabei ist zu beachten, daß die Ausbreitung der plastischen Zonen im Randbereich erfaßt wird. Die numerische Integration in Längsrichtung erfolgt mit vier Gaußpunkten und in Dickenrichtung mit neun Simpsonpunkten.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.9 sind die bezogenen Verschiebungen u_A/t und w_D/t angegeben. Mit dem Plastizierungsbeginn bei der Laststufe $\rho = 0.68$ nehmen die Verschiebungen gegenüber

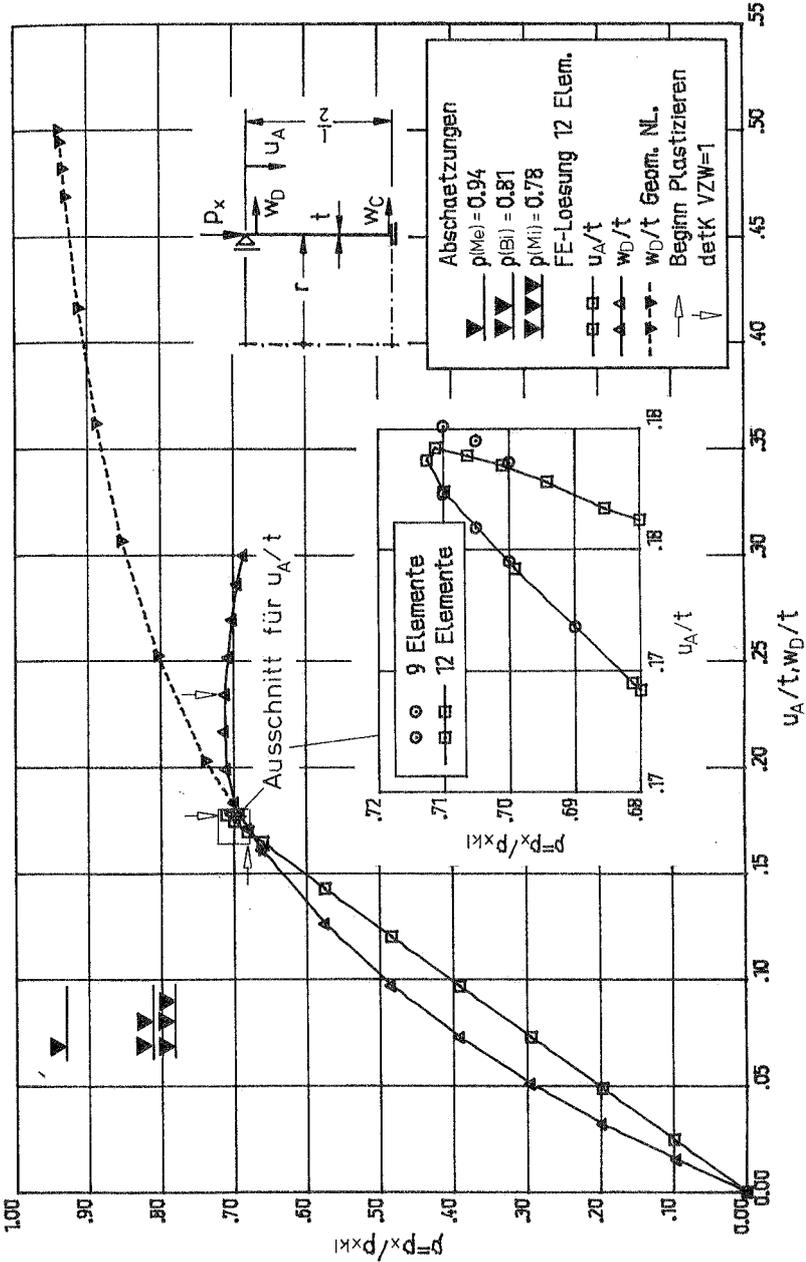


Bild 6.9: Lastverschiebungsdiagramm - Biegerandstörung - axialsymmetrisches Rechenmodell

der geometrisch nichtlinearen Lösung zu, und es ergibt sich eine kritische Last von $\rho = 0.713$. Als Vergleich ist die bezogene Verschiebung w_D/t für elastische Bedingungen angegeben.

In dem vergrößerten Ausschnitt für die Längsverschiebung u_A/t ist noch ein Vergleich mit Ergebnissen von neun Elementen durchgeführt. Dabei zeigt sich kein wesentlicher Unterschied für die beiden Elementraster, weder in den Verschiebungen noch in der kritischen Last. Hier ergibt sich das vom Kreiszyylinder unter Längsbelastung bekannte typische Bild mit dem Rückgang in den Verschiebungen nach der maximalen Last.

Im weiteren sind ingenieurmäßige Abschätzungen mit der linearen Biegetheorie wiedergegeben. Dies sind:

1. Membranlängsspannung gleich der Fließspannung ergibt $\rho(Me)$,
2. Membran- und Biegespannung in Längsrichtung an der Innenseite bei D gleich der Fließspannung ergibt $\rho(Bi)$,
3. Erfüllen der Misesfließbedingung für Längs- und Ringspannung an der Innenseite bei D ergibt $\rho(Mi)$.

Die dritte Bedingung liefert einen guten Schätzwert für die kritische Last. Dies gilt jedoch nur für diesen Zylinder; bei anderen Abmessungen kann sich dies ändern.

Im Plottbild A9 sind Verschiebungsfiguren für verschiedene Lastniveaus dargestellt. Man erkennt, daß die Radialverschiebungen w im Randbereich immer mehr zunehmen, selbst wenn die kritische Last erreicht ist. Die Versagensart läßt sich anschaulich durch das Entstehen eines Gelenkes im Randbereich deuten.

b) Rechenmodell (II): nichtaxialsymmetrische FE-Idealisierung

Bei einer nichtaxialsymmetrischen Rechnung würde sich nur dann ein weiterer Abfall der kritischen Last einstellen, wenn es durch die plastischen Zonen im Randbereich zu einem früheren nichtaxialsymmetrischen Beulen kommt. Hierzu wurde bei dem Elementraster

von 10×4 aus der geometrisch nichtlinearen Rechnung bei den Elementen im Randbereich zusätzlich physikalisch nichtlineares Werkstoffverhalten angenommen. Bei diesen Elementen wurde mit 4×4 Gaußpunkten und 7 Simpsonpunkten integriert.

Ergebnisse

Das Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.10 zeigt, daß sich gegenüber dem axialsymmetrischen Rechenmodell kein weiterer Abfall der kritischen Last ergibt. Ergänzend sind hier noch die Verschiebungen für den elastischen Fall und die Markierung des Verzweigungspunktes bei $\rho = 0.86$ angegeben. In Plottbild A10 ist die Verschiebungsfigur für die kritische Laststufe von $\rho = 0.713$ in Seitenansicht (Projektion auf x-z Ebene) dargestellt, woran sich keinerlei Unsymmetrien zeigen.

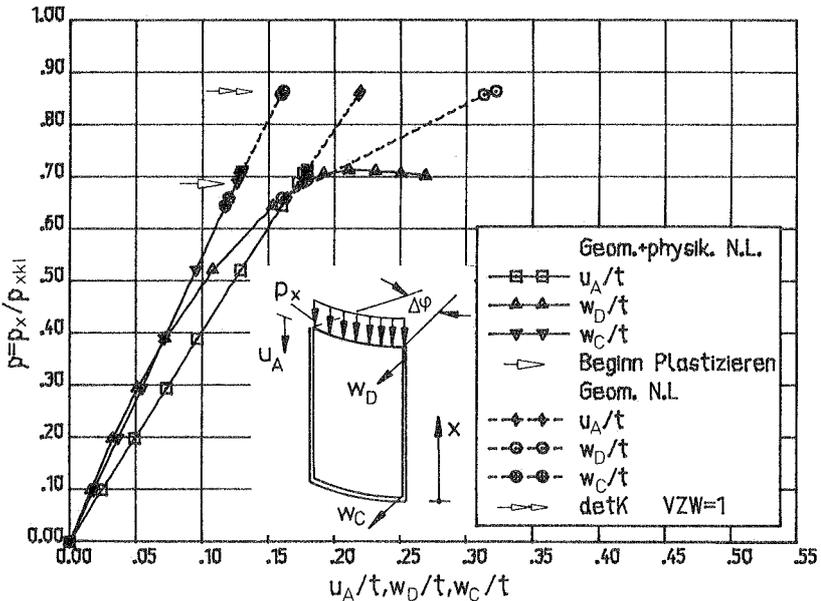


Bild 6.10: Lastverschiebungsdiagramm - Biegerandstörung

6.4.4 Schlußfolgerungen aus den Untersuchungen über den Einfluß der Biegerandstörung

Die Untersuchungen zum Einfluß der Biegerandstörung zeigen, daß das Rechenmodell (II) für den elastischen Fall eine Beullast ergibt, die in der Größenordnung liegt, wie sie aus theoretischen als auch experimentellen Untersuchungen bekannt ist (siehe Vergleiche mit ausgewählten Versuchen in Bild 6.11). An diesen sehr perfekten Kreiszyklindern ist bei der Beullast kein großer Einfluß vom r/t -Verhältnis feststellbar.

Bei Berücksichtigung der Werkstoffeigenschaften für Baustahl St 37 mit $\sigma_F = 24$ [kN/cm²] zeigt sich ein weiterer Abfall der kritischen Last. Diese Traglast läßt sich mit dem weniger numerisch aufwendigen Rechenmodell (I) ermitteln. Bei anderem r/t -Verhältnis ändert sich dies, wie von Versuchen an elasto-plastisch beulenden Kreiszyklindern bekannt ist [71][72].

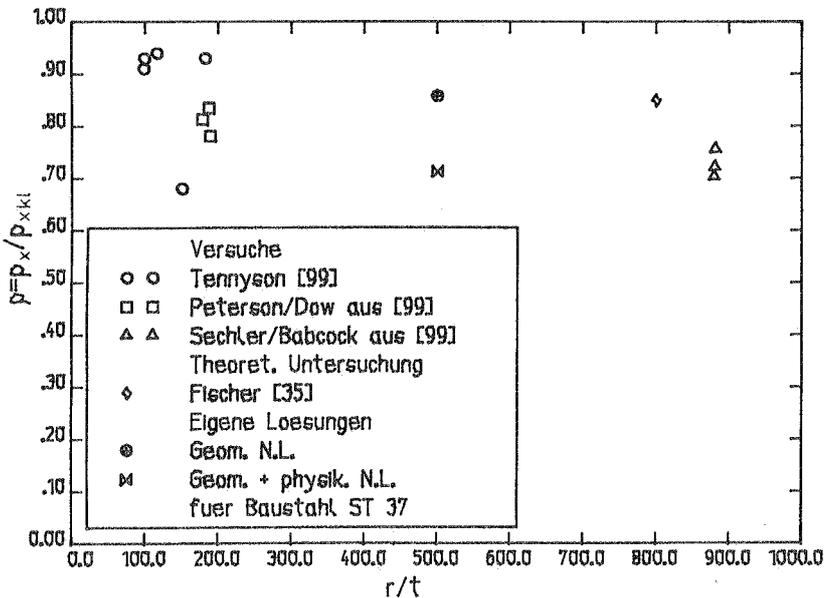


Bild 6.11: Biegerandstörung - Vergleich theoretische Ergebnisse mit Versuchsergebnissen

6.5 Zum Einfluß der durch die Rundnaht bedingten geometrischen Imperfektionen

Zuerst werden Untersuchungen mit nur geometrischer Imperfektion vorgenommen. Durch die getrennten Untersuchungen lassen sich die Auswirkungen der verschiedenen Einflüsse - wie geometrische Imperfektion und zusätzlich Eigenspannungen - auf das Stabilitäts- und Traglastverhalten viel besser unterscheiden, was bei Versuchen nur sehr schwierig ist. Im weiteren kann man die lokale geometrische Imperfektion als den baupraktischen Fall ansehen, bei dem durch Spannungsarmglühen die Eigenspannungen weitgehend abgebaut werden.

6.5.1 Rechenmodell (I): axialsymmetrische FE-Idealisierung

Untersuchungen wurden für die beiden Imperfektionsarten IMP (1) und IMP (2) mit der maximalen Imperfektionsamplitude $\max \epsilon_v = 0.5$ und 1.0 durchgeführt.

a) IMP (1), $\max \epsilon_v = 0.5$

Es wurden Untersuchungen mit einem Element raster von 14 bzw. 28 Elementen durchgeführt. Dabei zeigte es sich, daß 14 Elemente ausreichen (dieses Raster ist in Plottbild A11 dargestellt). Allen Elementen lag geometrische und physikalische Nichtlinearität zugrunde, mit der Integration von vier Gaußpunkten in Längsrichtung und neun Simpsonpunkten über die Dicke.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.12 sind die bezogenen Verschiebungen u_A/t , w_B/t und w_C/t der Rechnungen mit den Elementarrastern 14 bzw. 28 Elementen dargestellt. Bis zum Plastizierungsbeginn - das unterschiedliche Lastniveau erklärt sich aus der verschiedenen Lastinkrementierung - zeigt sich bei der Längsverschiebung u_A weitgehend lineares Verhalten. Bei den Radial-

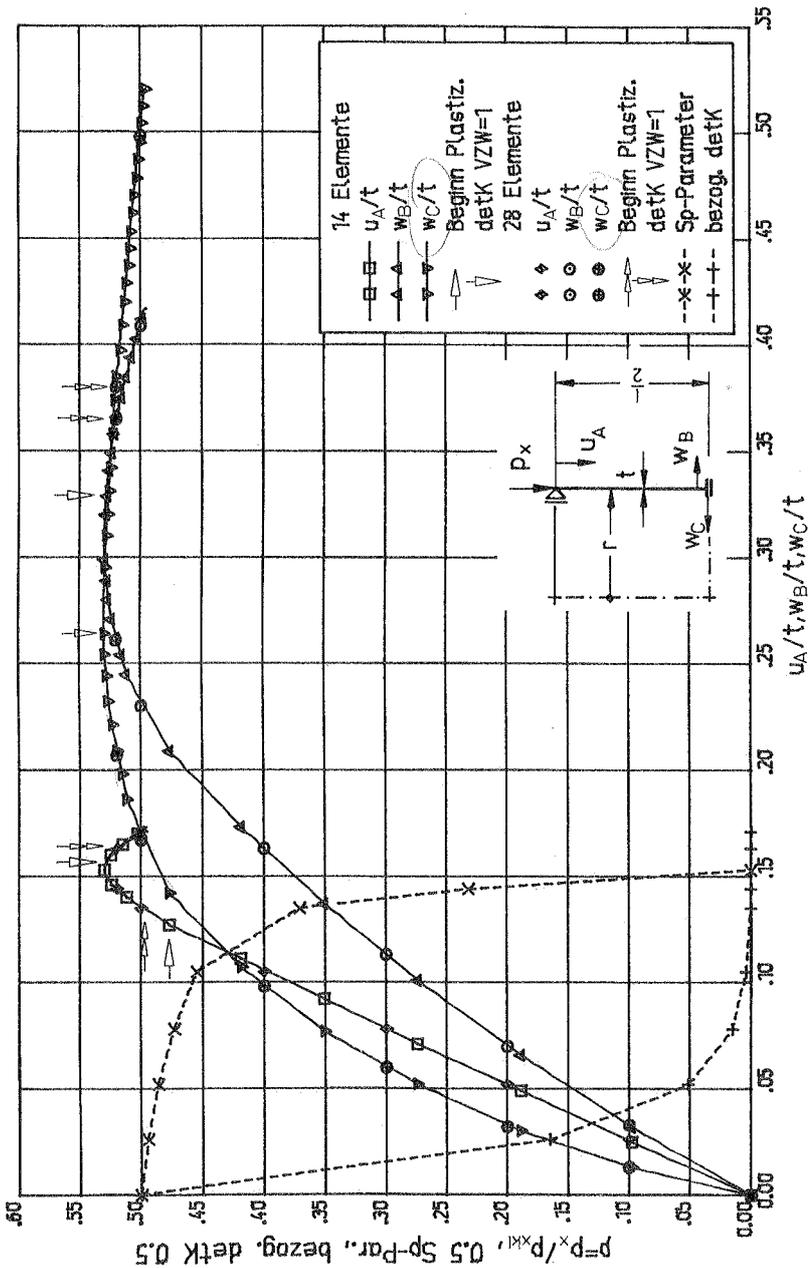


Bild 6.12: Lastverschiebungsdiagramm - geometrische Imperfektion IMP (1), max $\epsilon_y = 0.5$

verschiebungen ergeben sich von Anfang an geometrisch nicht-lineare Einflüsse. Durch die Plastizierungen wird das System weicher, bis die kritische Last von $\rho \approx 0.530$ erreicht wird. Nach Erreichen der Traglast zeigt sich aus der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix ein Vorzeichenwechsel ($\det K \rightarrow VZW = 1$). Der Vergleich mit dem Raster mit 28 Elementen ergibt sehr gute Übereinstimmung. Bei der Rechnung mit 28 Elementen wurde das Newton-Raphson-Verfahren mit Lastumkehr nach Vorzeichenwechsel (Methode ①) verwendet; dagegen kam bei der Untersuchung mit 14 Elementen die Riks-Wempner-Methode zum Einsatz.

Im weiteren sind über der Verschiebung u_A/t aus der Untersuchung mit 28 Elementen der Sp-Parameter und der bezogene Determinantenwert der Steifigkeitsmatrix aufgetragen. Beim Sp-Parameter ergibt sich bei der Traglast ein eindeutiger Nulldurchgang, wobei die negativen Werte beim Lastabfall nicht dargestellt sind. Der bezogene Determinantenwert - normiert auf den Anfangswert 1.0 - ergibt einen schleifenden Schnitt bei der kritischen Last.

Wie aus den Verschiebungsfiguren für verschiedene Laststufen in Plottbild A11 zu ersehen ist, nehmen die Radialverschiebungen nach innen mehr zu als nach außen.

Plastische Zonen (siehe Bild 6.13) ergeben sich bei der kritischen Last von $\rho = 0.530$ infolge Biegung bei den Elementen ① und ② an der Außenseite und bei den Elementen ⑤ bis ⑧ an der Innenseite. Nach dem Lastabfall auf $\rho = 0.495$ ($VZW = 1$) ist das Element ① vollplastisch, und bei den Elementen ⑤ bis ⑦ zeigen sich plastische Zonen bis etwa $t/2$; dabei kommt es zu teilweisen Entlastungen. Die Traglast bei $\rho(kr) = 0.530$ ist durch das Entstehen der plastischen Zonen bedingt, da die Längskraft nicht mehr übertragen werden kann.

b) IMP ② max $\epsilon_v = 0.5$

Die FE-Idealisierung erfolgt hier mit 14 zweidimensional degenerierten Elementen wie bei IMP ① (siehe auch Plottbild A12), wobei die Elementeneigenschaften ebenfalls dieselben sind.

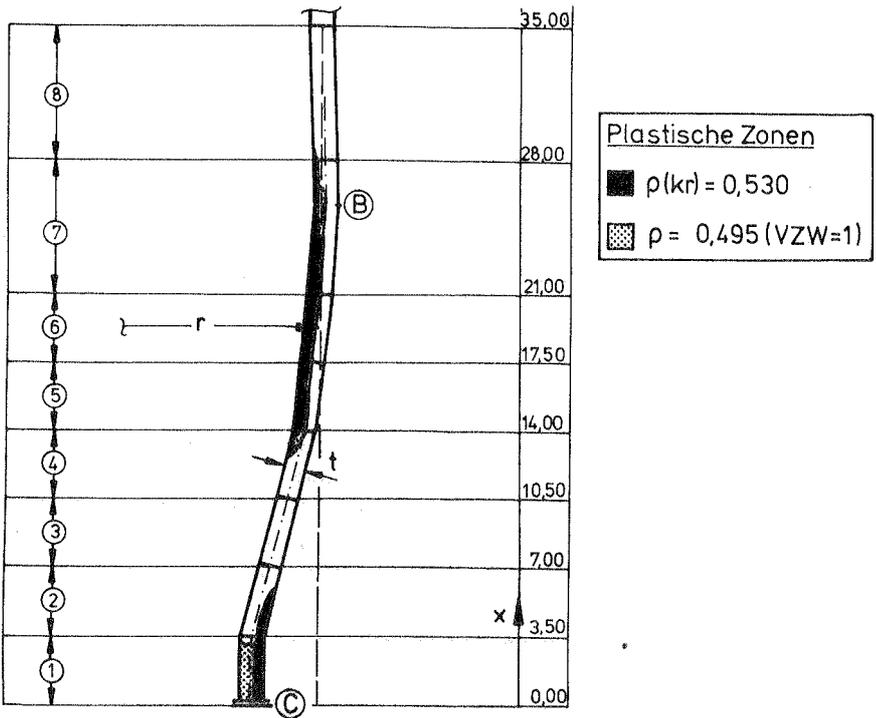


Bild 6.13: Plastische Zonen für zwei Laststufen - IMP ① ,
 $\max \epsilon_v = 0.5$

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.14 zeigen sich ähnliche Tendenzen wie bei IMP ① , jedoch ergibt sich eine geringfügig größere kritische Last von $\rho = 0.549$. Der Plastizierungsbeginn ist früher, bei der Laststufe $\rho = 0.430$.

Die Verschiebungsfiguren für verschiedene Laststufen (siehe Plottbild A12) sind ähnlich wie bei IMP ① , mit der ausgeprägten Verschiebung nach innen. Nach Lastabfall kommt es oberhalb der geometrischen Imperfektion zu einem Rückgang der Verschiebungen (bei $x \approx 35$ [cm]).

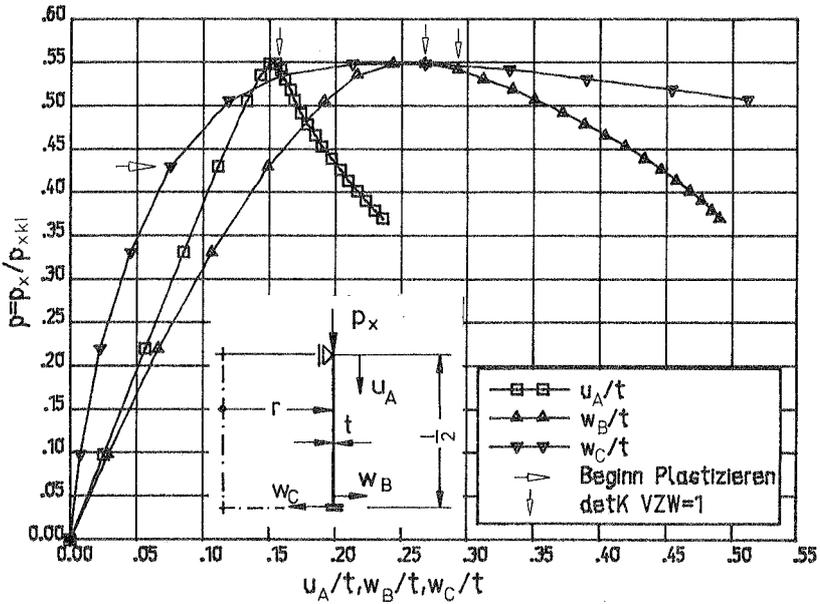


Bild 6.14: Lastverschiebungsdiagramm - geometrische Imperfektion IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$

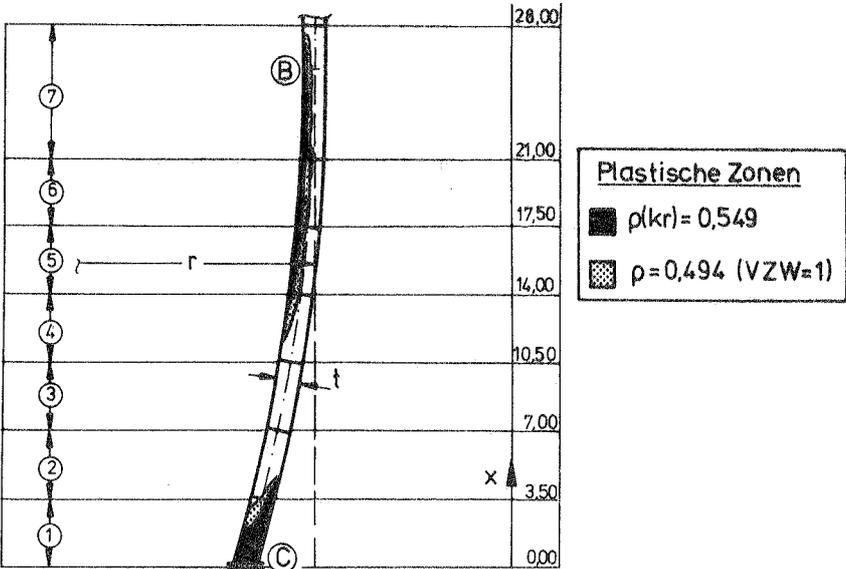


Bild 6.15: Plastische Zonen für zwei Laststufen - IMP ② $\max \epsilon_v = 0.5$

Bei den plastischen Zonen (siehe Bild 6.15) ist bei der kritischen Last von $\rho = 0.549$ der untere Bereich bereits vollplastisch, während sich oberhalb die plastischen Zonen wie bei IMP ① bis etwa $t/4$ erstrecken. Nach Lastabfall folgt wiederum Zunahme der plastischen Bereiche, wobei teilweise Entlastungen entstehen.

c) IMP ①, IMP ②, $\max \epsilon_V = 1.00$

Die FE-Idealisierung wurde hier mit 16 Elementen vorgenommen, wobei zusätzlich zwei weitere Elemente im Bereich der geometrischen Imperfektion angeordnet wurden. Bei den Ergebnissen werden im nachfolgenden nur solche dargestellt, die wesentliche Änderungen gegenüber den vorhergehenden Untersuchungen aufweisen.

Ergebnisse

Es wird zuerst auf die Untersuchungen bei IMP ① eingegangen. Aus dem Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.16 zeigt sich eine kritische Last von $\rho = 0.406$. Bei den Radialverschiebungen sind

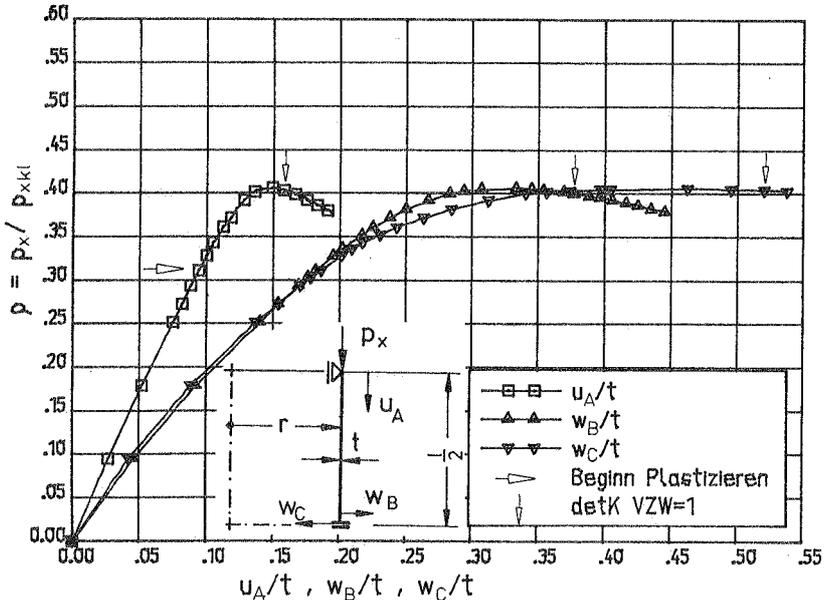


Bild 6.16: Lastverschiebungsdiagramm - IMP ①, $\max \epsilon_V = 1.0$

ausgeprägte Nichtlinearitäten erkennbar. Der Plastizierungsbeginn erfolgt bei $\rho = 0.303$.

Aus der Verschiebungsfigur für verschiedene Lastniveaus in Plottbild A 13 erkennt man die feine Elementunterteilung im Bereich der Rundnaht, mit dem Rückgang der Verschiebungen oberhalb der Imperfektion (Elemente ⑨ bis ⑪).

Bei den plastischen Zonen ergeben sich ähnliche Bilder wie bei den vorhergehenden Untersuchungen, so daß auf eine Darstellung verzichtet wird. Es läßt sich jedoch feststellen, daß bei der kritischen Last sich stets die plastischen Zonen im oberen Bereich der geometrischen Imperfektion bis etwa $t/4$ erstrecken, ausgehend von der Innenseite. Im unteren Bereich (bei $x = 0$) zeigen sich unterschiedliche Verteilungen mit vollplastischen Zonen. Die maximalen Dehnungen liegen bei der kritischen Last in der Größenordnung bis zu 2%, wobei die Fließdehnung für den hier zugrunde gelegten Baustahl St 37 $\epsilon_F \approx 1.14\%$ beträgt.

Bei den Ergebnissen für IMP ② genügt die Wiedergabe des Lastverschiebungsdiagramms (siehe Bild 6.17), woran sich im Vergleich zu IMP ① eine geringfügig höhere kritische Last von $\rho = 0.416$ ergab. Ansonsten sind die Ergebnisse - Verschiebungsfiguren, plastische Zonen - ähnlich wie bei IMP ①, so daß auf eine Wiedergabe von Ergebnissen verzichtet wird.

c) Zusammenfassung der Untersuchungen mit Rechenmodell ①

In Bild 6.18 ist im Lastverschiebungsdiagramm für die bezogene Längsverschiebung u_A/t ein Vergleich für die beiden Imperfektionsarten vorgenommen. Dabei ergibt sich das typische Bild (wie z.B. in [26]), d.h. flacher werdender Abfall bei zunehmender Imperfektionsamplitude. Eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungsergebnisse ist in Tafel 6.7 vorgenommen. Neben der kritischen Last ist noch das Lastniveau des Plastizierungsbeginns bei Verwendung von Baustahl St 37 ($\sigma_F = 24 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$) angegeben. Die Ermittlung der kritischen Last führt auf ein Traglastproblem, d.h., ein Stabilitätsproblem mit Verzweigen ist bei diesem Rechenmodell ausgeschlossen.

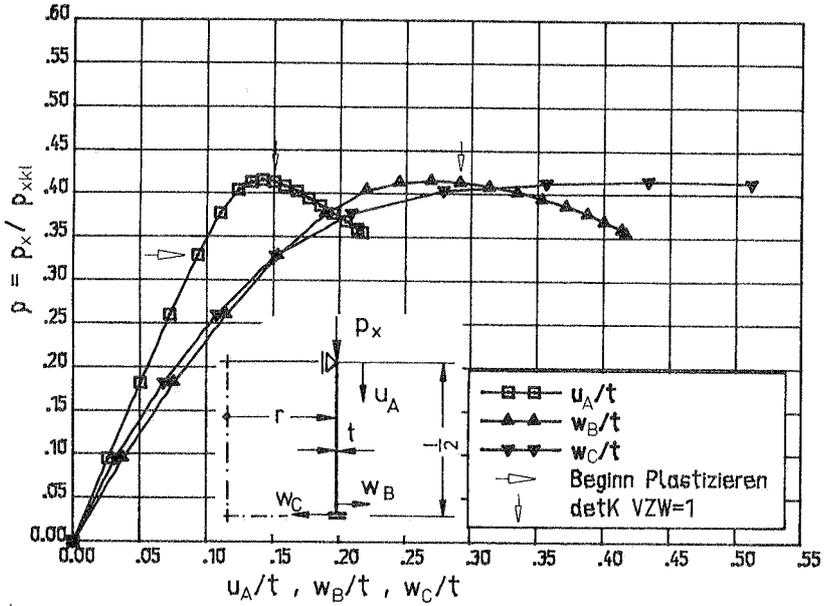


Bild 6.17: Lastverschiebungsdiagramm - IMP (2), $\max \epsilon_v = 1.0$

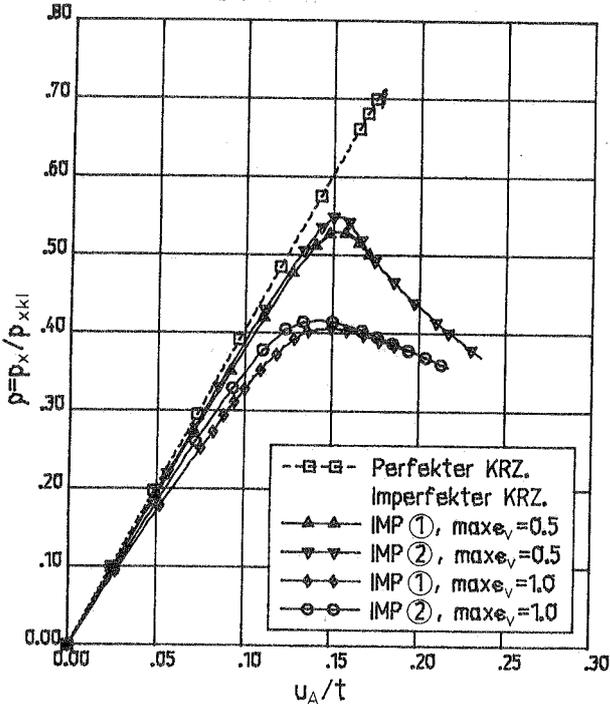
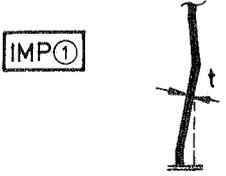
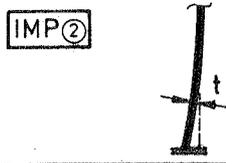


Bild 6.18: Lastverschiebungsdiagramm - Vergleich für beide Imperfektionsarten

Imperfektionsart	max ε_v	Beginn Plastizieren bei ρ	kritische Last $\rho(kr)$
	0.5	0.477	0.530
	1.0	0.303	0.406
	0.5	0.437	0.549
	1.0	0.329	0.416

Tafel 6.7: Kritische Lasten und Plastizierungsbeginn - geometrisch imperfekter Kreiszyylinder IMP ① und IMP ②

6.5.2 Rechenmodell ①: nichtaxialsymmetrische FE-Idealisierung

Der Kreiszyylinder mit axialsymmetrischer Imperfektion kann - ausgehend von einem axialsymmetrischen Spannungszustand - in einen nichtaxialsymmetrischen Zustand verzweigen (siehe z.B. Koiter [54]). Dabei kommt es teilweise zu einem drastischen Abfall der kritischen Last im Vergleich zur klassischen Beullast.

Die Vorgehensweise ist hier wie bei der Untersuchung der Biege-
randstörung in Abschnitt 6.4, jedoch erfolgt eine Variation des
Öffnungswinkels $\Delta\psi$, ausgehend von $\Delta\psi = 15^\circ$ ($n=12$). Die FE-Idea-
lisierung erfolgt mit 14 x 4 Elementen, wobei als Vergleichs-
raster 21 x 4 Elemente verwendet wurden (siehe Bild 6.19). Um den
numerischen Aufwand kleiner zu machen, hatten nur die Elemente
im Rundnahtbereich (bis $x = 28.00$ [cm]) geometrisch und physika-
lisch nichtlineare Eigenschaften, während die anderen Elemente
unbegrenzt elastisch waren. Bei geometrischer und physikalischer
Nichtlinearität wird mit 4 x 4 Gauß- und 7 Simpsonpunkten inte-
griert, dagegen genügen bei geometrischer Nichtlinearität 4x4x2

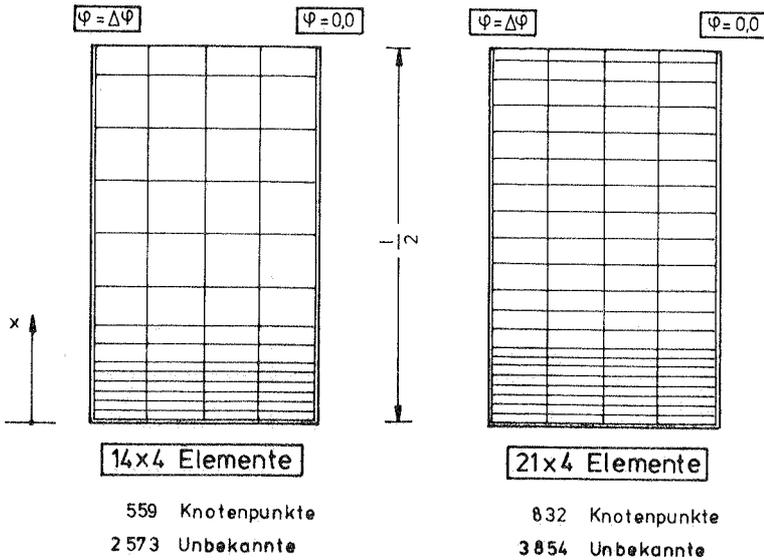


Bild 6.19: Elementraster

Gaußpunkte. Die 14x4 bikubischen Schalenelemente ergeben 2573 Unbekannte, während 14 axialsymmetrische Elemente nur 126 Unbekannte liefern.

a) IMP (1), max_ε_v = 0.5

Untersuchungsergebnisse im Vorbeulbereich

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.2o sind die bezogenen Verschiebungen u_A/t , w_B/t und w_C/t dargestellt. Die gestrichelten Kurven sind die Ergebnisse aus der axialsymmetrischen Lösung. Wie man sieht, ist zwischen beiden Rechenmodellen bis zum Lastniveau $\rho \approx 0.42$ kein Unterschied. Aus dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell ergibt sich bei diesem Lastniveau bei der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix ein Vorzeichenwechsel ($\det K \rightarrow \text{VZW} = 1$), was auf einen Verzweigungspunkt schließen läßt. Die Rechnung konvergiert über diesen Punkt hinaus nicht mehr, so daß zur eindeutigen Ermittlung der Verzweigungslast bei diesem Verschiebungszustand eine Eigenwertberechnung durchgeführt wird.

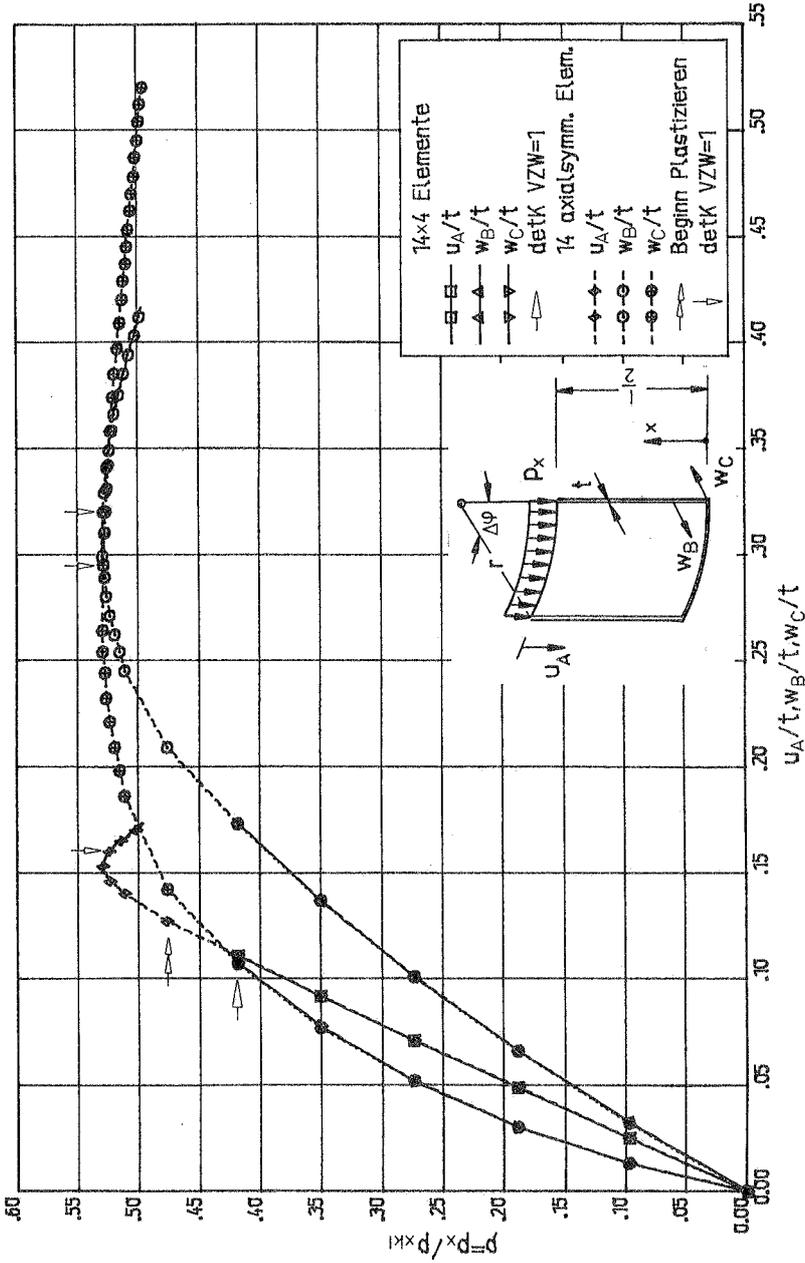


Bild 6.20: Lastverschiebungsdiagramm - IMP ①, $\max \epsilon_y = 0.5$, $\Delta\varphi = 15^\circ$ ($n=12$)

Diese ergab einen Verzweigungspunkt mit der kritischen Last von $\rho(kr) = 0.415$. Auf die Eigenwertberechnungen wird später bei der Variation des Öffnungswinkels $\Delta\varphi$ noch ausführlicher eingegangen. Der sich beim axialsymmetrischen Rechenmodell ergebende Plastifizierungsbeginn liegt oberhalb der Verzweigungslast, d.h., die Annahme von Elementen mit physikalischer Nichtlinearität ist nicht erforderlich, da der Kreiszyylinder rein elastisch beult.

In der Verschiebungsfigur (siehe Plottbild A14) zeigen sich beim Verzweigungslastniveau axialsymmetrische Verschiebungszustände entsprechend dem Rechenmodell $\textcircled{\text{I}}$.

Da die Verzweigungslast hier einiges unterhalb der klassischen Beullast liegt, kann der maßgebende Ausschnitt $\Delta\varphi$ stärker von der zur Flüggeschen Stabilitätstheorie gehörenden Beulwellenzahl $n=12$ abweichen, d.h., eine Variation des Öffnungswinkels ist angebracht.

Die Ergebnisse der Verzweigungslasten - ermittelt durch Eigenwertberechnungen - für verschiedene Ausschnitte $\Delta\varphi$ sind in Tafel 6.8 zusammengestellt. Eigenwertuntersuchungen bei einem Lastniveau kurz vor dem Verzweigungspunkt sind ein leistungsfähiges - wenn auch rechenzeitintensives - Hilfsmittel zur Ermittlung der kritischen Last. Die erreichten Lastniveaus (siehe Tafel 6.8) lagen geringfügig über oder unter dem Verzweigungspunkt auf dem primären Ast ($\det K + VZW = 1$ oder $VZW = 0$). Mit dem Ausschnitt aus $n = 13$ ergibt sich die minimale Last mit $\rho(kr) = 0.415$. Das Vergleichsraster mit 21×4 Elementen ergab die gleiche kritische Last. Zwischen dem Ausschnitt aus $n = 12$ und $n = 13$ zeigt sich bei der kritischen Last kein wesentlicher Unterschied. Mit größerem n stieg die kritische Last an. Bei den 1. Eigenformen ergaben sich für die untersuchten Ausschnitte schachbrettartige Beulmuster (siehe Plottbilde A15). Die 2. Eigenform war für den Ausschnitt aus $n = 15$ ein axialsymmetrisches Beulmuster mit 11 LHW entsprechend der klassischen Beultheorie und ansonsten das aus Versuchen bekannte rautenförmige Beulmuster des Nachbeulbereichs (siehe Plottbilder A16 und A17).

Untersuchungsergebnisse im Nachbeulbereich

Mit dem Vergleichsraster von 21 x 4 Elementen wurde an einem Ausschnitt von $\Delta\psi = 13.846^\circ$ die Rechnung in den Nachbeulbereich fortgesetzt. Der Vergleich der Verschiebungen im Vorbeulbereich ergab

n	$\Delta\psi = \frac{180}{n}$	Element-raster	Last-niveau ρ	detK vZW=	Eigenwertberechnung $K_e + \lambda(K_u + K_g) = 0$			Eigen-formen Plott-bild
					λ_1	λ_2	$\rho(kr) = \lambda_1 \rho$	
11	16.363	14x4	0.419	0	1.03	1.28	0.433	wie A15 wie A16
12	15.000	14x4	0.419	1	0.99	1.45	0.415	wie A15 wie A16
13	13.846	14x4	0.419	1	0.99	1.65	0.415	wie A15 wie A16
		21x4	0.415	0	1.00	1.66	0.415	A15 A16
14	12.857	14x4	0.428	1	0.98	1.84	0.422	wie A15 wie A16
15	12.00	14x4	0.428	0	1.00	2.04	0.429	wie A15 A17

Tafel 6.8: Eigenwertberechnungen, IMP ①, $\max \epsilon_V = 0.5$ -
Öffnungswinkel $\Delta\psi$ veränderlich

gute Übereinstimmung für beide Elementraster, wie dies auch bei der Eigenwertberechnung der Fall war.

Bei der Verschiebungsfigur (siehe Plottbild A18) zeigt sich bis kurz vor der Verzweigungslast das zu erwartende axialsymmetrische Bild. Ab dem Lastniveau $\rho = 0.4148$ ergaben sich durch eine Laststörung entsprechend der Beulform, unsymmetrische Verschiebungen (siehe Plottbild A19 und A20). Durch Zunahme der Unsymmetrie erfolgen die Rechnungen in den Nachbeulbereich.

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.21 sind die bezogenen Verschiebungen an den bisher ausgewerteten Punkten dargestellt, jedoch unterschieden zwischen dem Rand $\psi = 0$ und $\psi = \Delta\psi$. Wie man sieht, ergeben sich besonders bei den Radialverschiebungen starke Änderungen, mit w_B/t , $\psi = 0$ und w_C/t , $\psi = \Delta\psi$ sogar eine Vorzeichenumkehr. Die Längsverschiebung u_A weist im Nachbeulbereich den typischen starken Abfall auf. Nach der Störung, die eine extrem kleine Lastinkrementierung erforderlich machte, zeigte sich nach einigen Lastschritten der Vorzeichenwechsel aus der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix ($\det K + VZW = 1$).

Zur Absicherung der Ergebnisse wurden noch Eigenwertberechnungen vorgenommen (siehe Tafel 6.9), und zwar vor und nach dem Vorzeichenwechsel. Im weiteren sind in Tafel 6.9 noch die bezogenen Verschiebungen für die ausgewählten Punkte wiedergegeben, woran man sieht, daß bei der zweiten Eigenwertberechnung erhebliche Unsymmetrien des Grundzustands vorhanden sind.

Als Folgerung aus der Rechnung in den Nachbeulbereich läßt sich ziehen

Last-niveau ρ	detK VZW=	Verschiebungen des Grundzustandes			Eigenwertberechnung $K_e + \lambda(K_u + K_g) = 0$			Eigenformen Plottbild
		u_A/t	w_B/t	w_C/t	λ_1	λ_2	$\rho(kr) = \lambda_1 \cdot \rho$	
		$\psi=0.0$ $\psi=\Delta\psi$	$\psi=0.0$ $\psi=\Delta\psi$	$\psi=0.0$ $\psi=\Delta\psi$				
0.41475	0	0.1092 - - - 0.1097	0.1896 - - - 0.1551	-0.0794 - - - -0.1311	1.0007	1.66	0.415	A15 A16
0.41467	1	0.1087 - - - 0.1102	0.2147 - - - 0.1265	-0.0334 - - - -0.1785	0.9998	1.66	0.415	wie A15 wie A16

Tafel 6.9: Eigenwertberechnung - Rechnung im Nachbeulbereich

- das Rechenmodell kann die komplizierten Zustände erfassen,
- das Lastverschiebungsdiagramm hat je nach ausgewählter Verschiebung verschiedenartigen Verlauf,
- die erforderliche Störung zur Rechnung in den Nachbeulbereich ist sehr klein, was eine Aussage über die Imperfektionsempfindlichkeit bedeutet,
- der numerische Aufwand - Rechenzeitverbrauch - zur Rechnung in den Nachbeulbereich ist nicht unerheblich.

Untersuchungsergebnisse über das antisymmetrische Beulen in Längsrichtung

Es besteht die Möglichkeit, daß der Kreiszyylinder in Längsrichtung antisymmetrisch beult, zumal sich hier nach der Flüggeschen Stabilitätstheorie für den perfekten Kreiszyylinder mit $m = 2$ LHW und $n = 16$ UVW die zweitkleinste Beullast ergibt. Durch Vorgabe der Symmetriebedingung bei $x = 0,0$, d.h. Idealisierung nur des halben Zylinders, wird dies unterdrückt. So wurde hier die gesamte Länge mit 28×4 bikubischen Schalenelementen idealisiert (5124 Unbekannte). Bei den Randbedingungen war bei $x = +l/2$ wie bisher SS3 und bei $x = -l/2$ jedoch SS4 mit $u = 0$, d.h. zusätzlich behinderte Verwölbung. Tafel 6.10 enthält die Verzweigungslasten, wobei für den Ausschnitt aus $n = 13$ Ergebnisse mit und ohne Symmetriebedingungen angegeben sind. Der Vergleich bei den Beulformen zeigt, daß zur kleinsten Verzweigungslast jeweils in Längsrichtung symmetrische Beulformen gehören (siehe Plottbilder A21 und A24) und es zu einem Anstieg der Verzweigungslast durch die behinderte Verwölbung kommt. Dabei zeigt es sich, daß die Art der Randbedingung - hier SS3 mit SS4 - auch beim imperfekten Kreiszyylinder einen Einfluß auf die Verzweigungslast hat. Beim Ausschnitt aus $n = 16$ ergibt sich zwar eine niedrigere Verzweigungslast als $n = 13$, jedoch ist auch hier die 1. Eigenform symmetrisch und erst die 3. Eigenform antisymmetrisch in Längsrichtung. Mit anderen Abmessungen kann sich dies ändern (siehe z.B. Versuche von Yamaki u.a. [113]).

n/ $\Delta\varphi [^\circ]$	Symmetrie- beding.	Verzweigungslast			Eigenformen in Längsrichtung	Plott- bilder
		$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$	ρ	$\rho(kr)$ $=\lambda_1 \cdot \rho$		
13/ 13.85°	ja	0.990 ----- 1.65	0.419	0.415	symmetr. Schachbrettb. ----- symmetr. Rautenbeulen ----- nicht ermittelt	A15 ----- A16 -----
13/ 13.85°	nein	1.079 ----- 1.661 ----- 2.104	0.415	0.449	symmetr. Schachbrettb. ----- symmetr. Rautenbeulen ----- symmetr. Ringbeulen	A21 ----- A22 ----- A23
16/ 11.25°	nein	1.029 ----- 2.057 ----- 2.080	0.425	0.437	symmetr. Schachbrettb. ----- symmetr. Ringbeulen ----- antisymm.Schachbrettb.	A24 ----- A25 ----- A26

Tafel 6.1o: Verzweigungslasten, IMP ①, max $\epsilon_v = 0.5$, - mit und ohne Symmetriebedingung

b) IMP ②, max $\epsilon_v = 0.5$

Die Imperfektion IMP ② - die sogenannte "herzförmige" Naht-einziehung - wird häufig als kritischer im Vergleich zu IMP ① angesehen. Es wurden hier nur Untersuchungen mit dem Elementarstr von 14 x 4 Element durchgeführt, wobei zunächst elastische Voraussetzungen angenommen werden.

Untersuchungsergebnisse im Vorbeulbereich

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.22 zeigt sich bis zum Lastniveau von $\rho = 0.40$ Übereinstimmung bei beiden Rechenmodellen. Darüber hinaus ergibt sich ein anderes Verhalten als bei IMP ①. Es kommt beim axialsymmetrischen Modell bei $\rho = 0.430$ zu teil-

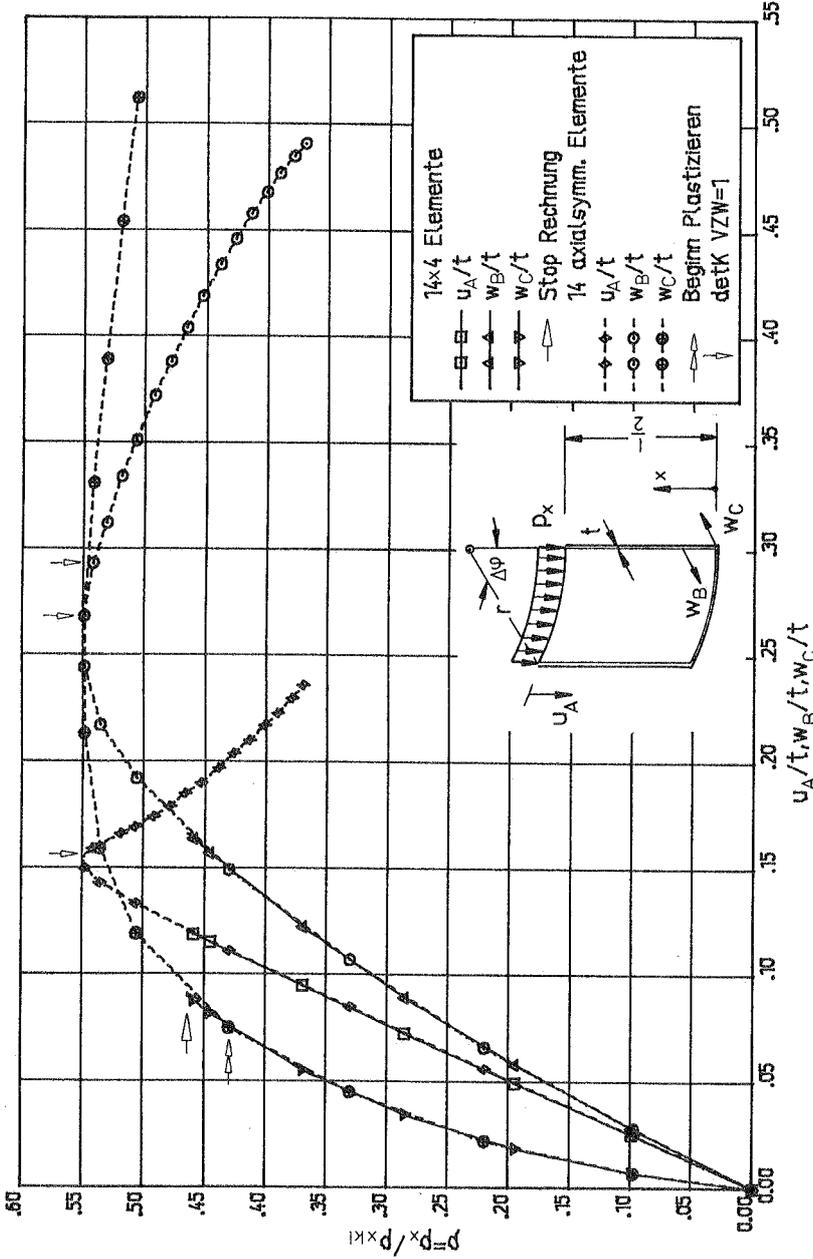


Bild 6.22: Lastverschiebungsdiagramm, IMP ②, $\max \epsilon_V = 0.5$, $\Delta\varphi = 15^\circ$ ($n = 12$)

plastischen Zonen, bevor das nichtaxialsymmetrische Modell verzweigt. Die Verzweigungslast ergibt sich mit $\rho(kr) = 0.478$ für $\Delta\varphi = 15^\circ$ und liegt höher als bei IMP ①.

In Tafel 6.11 sind die kritischen Lasten aus den Eigenwertberechnungen für die Ausschnitte aus $n = 12$ bis $n = 14$ angegeben. Es ergibt sich auch hier beim Ausschnitt aus $n = 13$ die kleinste kritische Last, wobei sich ebenfalls zwischen den einzelnen Ausschnitten keine großen Unterschiede in der kritischen Last ergeben. Die Eigenformen sind entsprechend wie bei IMP ① (siehe Plottbilder A27 und A28).

n	$\Delta\varphi = \frac{180}{n}$	Lastniveau ρ	detK VZW =	Eigenwertberechnung $K_e + \lambda(K_u + K_g) = 0$			Eigenformen siehe Plottbild
				λ_1	λ_2	$\rho(kr) = \lambda_1 \cdot \rho$	
12	15.00	0.476	o	1.004	1.33	0.478	A27 A28
13	13.84	0.469	o	1.001	1.52	0.475	wie A27 wie A28
14	12.85	0.469	o	1.023	1.72	0.480	wie A27 wie A28

Tafel 6.11: Eigenwertberechnungen, IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$
Öffnungswinkel $\Delta\varphi$ veränderlich

Eine Erklärung, warum hier die Beullasten höher liegen als bei der Imperfektion IMP ①, ergibt der Vergleich der Ringmembrankräfte n_ϕ für den Zylinder mit beiden Imperfektionsarten, ermittelt mit dem Rechenmodell ①. Das Zusammenwirken der Längsdruckkraft mit der Ringdruckkraft führt zum nichtaxialsymmetrischen Beulen (siehe auch Koiter [54]). So zeigt sich in Bild 6.23 bei IMP ② für die Laststufe $\rho = 0.438$ eine kleinere Druckmembrankraft im Bereich der geometrischen Imperfektion als für IMP ① bei der niedrigeren Laststufe $\rho = 0.419$. Man erkennt auch, daß

sich im Randbereich infolge der Biegerandstörung Ringdruckkräfte aufbauen, die jedoch kleiner sind als die aus den geometrischen Imperfektionen. Die auslösende Ursache für das nichtaxialsymmetrische Beulen sind hier die vorhandenen geometrischen Imperfektionen.

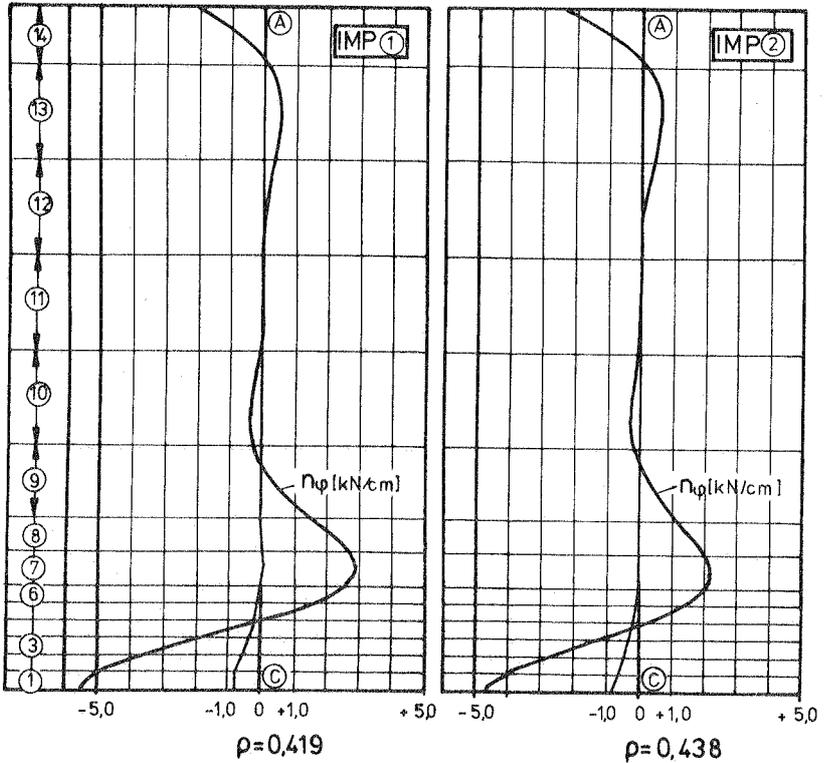


Bild 6.23: Ringmembrankräfte n_ϕ für IMP ① und IMP ②
 $\max \epsilon_v = 0.5$ aus Rechenmodell ①

Untersuchungsergebnisse zum Einfluß teilplastischer Zonen

Wie bereits hingewiesen, kommt es bei der Imperfektion IMP ② zu teilplastischen Zonen, bevor die Verzweigungslast erreicht wird. Als Voraussetzungen liegen Werkstoffkennwerte für Baustahl St 37 zugrunde. Welchen Einfluß teilplastische Zonen auf

die kritische Last haben, wird im nachfolgenden etwas näher an dem Ausschnitt mit $\Delta\varphi = 15^\circ$ untersucht.

Durch die teilplastischen Zonen im Bereich der geometrischen Imperfektion nehmen die Radialverschiebungen w etwas mehr zu. Dies zeigt der Ausschnitt aus dem Lastverschiebungsdiagramm für w_C/t in Bild 6.24. So ergibt sich $\rho(kr) = 0.465$ gegenüber der elastischen Verzweigungslast von $\rho(kr) = 0.478$. Dies bedeutet einen geringfügigen Abfall von $\Delta\rho \approx 2.7\%$, der jedoch bei vorhandenen Eigenspannungen noch weiter zunehmen kann, zumal durch Eigenspannungen ein früherer Plastizierungsbeginn möglich ist. Die elastische Verzweigungslast infolge der lokalen geometrischen Imperfektion läßt sich als oberer Grenzwert für das Rundschweißnahtproblem ansehen.

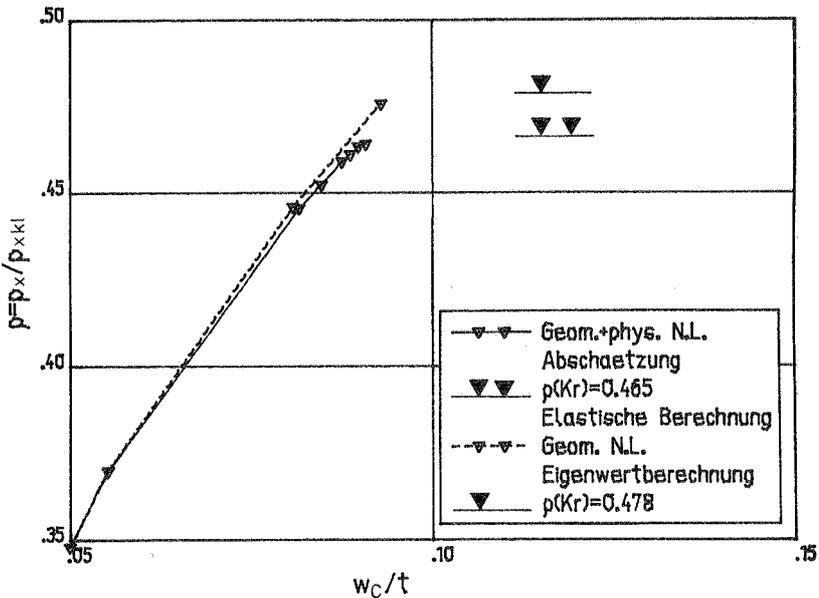


Bild 6.24: Einfluß teilplastischer Zonen bei IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$

c) Zusammenfassung und Vergleiche mit den Untersuchungen aus dem Rechenmodell (II)

Wie die bisherigen Untersuchungen gezeigt haben, ist die wesentliche Kenngröße der kritischen Last die Verzweigungslast in den nichtaxialsymmetrischen Zustand. Je nach Imperfektionsart kommt es zu teilplastischen Zonen, die eine weitere Reduktion der kritischen Last bewirken. Dieses Teilplastizieren hängt dabei von den Werkstoffkennwerten ab und bedarf zusätzlicher Untersuchungen. Würde man bei der Untersuchung der Imperfektion IMP ② für $\max \epsilon_v = 0.5$ die Werkstoffkennwerte von Baustahl St 52 mit $\sigma_F = 36 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ zugrunde legen, so würde der hier untersuchte Zylinder noch elastisch beulen.

Die Verzweigungslasten sind in Tafel 6.12 für den Ausschnitt aus $n = 13$ für die beiden untersuchten Imperfektionsarten noch einmal zusammengestellt. Ergänzend sind noch die Ergebnisse für die maximale Amplitude $\max \epsilon_v = 1.0$ angegeben. Daran sieht man, daß es dann noch zu einem weiteren Abfall bei der kritischen Last kommt. Daneben sind noch die beiden Laststufen angegeben, zwischen denen es zum Plastizieren kommt. Zwischen beiden Laststufen ergibt sich der Plastizierungsbeginn im Rahmen der iterativen Lösung, wobei der größere Wert jeweils in den Lastverschiebungsdiagrammen markiert ist. Für IMP ①, $\max \epsilon_v = 1.0$ kommt es hier auch zu teilplastischen Zonen, bevor der Zylinder beult.

Mit den Verzweigungslasten aus Tafel 6.12 wird ein Vergleich mit im Schrifttum angegebenen Ergebnissen von Beullasten an Zylindern mit geometrischen Imperfektionen vorgenommen. So ist im Imperfektionsdiagramm in Bild 6.24 ein von Hutchinson/Tennyson/Muggeridge [45] auf einer Näherungsformel beruhende Abschätzung der kritischen Last angegeben für lokale geometrische Imperfektionen. Ergänzend wurden von diesen Autoren noch Versuche durchgeführt an elastisch beulenden Mylarzylindern mit einer lokalen cosinusförmigen Imperfektion. Neben der Abminderungskurve infolge einer stochastischen Imperfektionsannahme von Amazigo/Budiansky [3] ist noch das bekannte Ergebnis von Koiter [54] für den unendlich langen Kreiszylinder mit der axialsymmetrischen Imperfektion entsprechend der klassischen Beulwellenzahl dargestellt. Der Ver-

IMP ①	max ϵ_v	Plastizieren zwischen Lastniveau ρ	det K VZW =	Verzweigungslasten		
				λ_1	ρ	$\rho(kr)$ = $\lambda_1 \cdot \rho$
①	0.5	0.419-0.477	1	0.990	0.419	0.415
	1.0	0.294-0.303	0	1.046	0.296	0.310
②	0.5	0.370-0.446	0	1.001	0.469	0.475
	1.0	0.261-0.329	0	1.026	0.330	0.339

Tafel 6.12: Verzweigungslasten IMP ① IMP ②, max $\epsilon_v = 0.5, 1.0$
 - Öffnungswinkel $\Delta\varphi = 13.85^\circ (n = 13)$

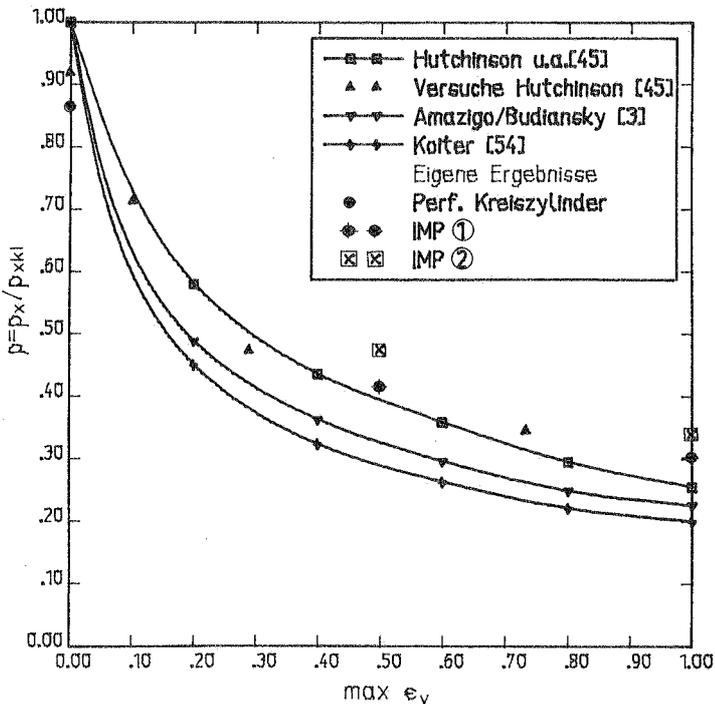


Bild 6.24: Imperfektionsdiagramm - Vergleich eigener Lösungen mit Ergebnissen aus dem Schrifttum

gleich mit den eigenen Ergebnissen zeigt gute Übereinstimmung, besonders bei IMP ① mit der Näherungsformel und den Versuchen. Die Beullasten für IMP ② liegen etwas über diesen Ergebnissen. Was das r/t -Verhältnis betrifft, so haben die Versuchszylinder und der hier untersuchte Kreiszyylinder verschiedene Verhältnisse. Die Koitersche Kurve kann man als untere Grenzkurve für den geometrisch imperfekten Kreiszyylinder ansehen, während die Kurve von Amazigo/Budiansky noch etwas weiter oben liegt.

Dieser Vergleich zeigt, daß sich mit der Annahme realistischer Imperfektionen sich Beullasten berechnen lassen, die sowohl mit Versuchsergebnissen als auch mit anderen theoretischen Arbeiten ausreichend gut übereinstimmen.

Was das Problem der Rundschweißnaht betrifft, kommt es noch zu einem zusätzlich weiteren Abfall der kritischen Last, da neben der lokalen geometrischen Imperfektion Schweißeigenstressungen vorhanden sind. Auf diese Problematik wird in nachfolgendem Abschnitt eingegangen.

6.6 Die geometrische Imperfektion und Schweißeigenstressungen

Infolge einer Rundschweißnaht gibt es neben den bisher untersuchten geometrischen Imperfektionen noch Schweißeigenstressungen. Eine Überlagerung beider Einflüsse findet statt. Wie die bisherigen Untersuchungen infolge der geometrischen Imperfektionen gezeigt haben, ergibt sich die maßgebende kritische Last aus dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell, so daß hier die Untersuchungen mit dem axialsymmetrischen Rechenmodell kürzer dargestellt werden. Der Vorteil des Rechenmodells ① liegt darin, daß sich verschiedene Einflüsse - wie z.B. Verschiebungsverläufe, Plastizierungsbeginn, Verteilung der Ringmembrankräfte - mit einem viel kleineren Aufwand an Rechenzeiten ermitteln lassen. Diese Ergebnisse sind auch für die nichtaxialsymmetrischen Untersuchungen von Bedeutung.

6.6.1 Rechenmodell ①: axialsymmetrische FE-Idealisierung

Die FE-Idealisierung erfolgte in Anlehnung an die Untersuchung der geometrischen Imperfektionen. Um die Eigenstressansätze richtig

erfassen zu können, wurden die Elementgrenzen teilweise geringfügig verschoben, beziehungsweise je nach Eigenspannungsansatz einige weitere Elemente hinzugefügt. Die Elementraster sind zum Teil bei den Ergebnissen dargestellt.

Ergebnisse

Als wesentliches Ergebnis der Untersuchungen mit dem axialsymmetrischen Rechenmodell läßt sich feststellen, daß es je nach Eigenspannungsansatz zu einem unterschiedlich großen Abfall der kritischen Last kommt (siehe Tafel 6.13). Der Abfall liegt in der Größenordnung bis zu 9% gegenüber dem Fall ohne Eigenspannungen. Die parabelförmige Eigenspannungsverteilung ESP ① liefert die größte Reduktion der kritischen Last, während der wirklichkeitsnähere Eigenspannungsansatz ESP ③, einer abklingenden Funktion, keinen erkennbaren Abfall ergibt. Bei der Imperfektion IMP ② ist der

geometrische Imperfektion	Eigenspannung	$\rho(kr)$	$\frac{\rho(kr) \text{ mit ESP}}{\rho(kr) \text{ ohne ESP}}$
IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$	ohne ESP	0.530	-
	ESP ①	0.497	0.937
	ESP ②	0.507	0.957
	ESP ③	0.530	1.00
IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$	ohne ESP	0.549	-
	ESP ①	0.501	0.913
	ESP ②	0.514	0.936
	ESP ③	0.549	1.00
IMP ①, $\max \epsilon_v = 1.0$	ohne ESP	0.406	-
	ESP ①	0.379	0.933
IMP ②, $\max \epsilon_v = 1.0$	ohne ESP	0.416	-
	ESP ①	0.382	0.918

Tafel 6.13: Kritische Lasten aus Rechenmodell ① für geometrisch imperfekte Kreiszyylinder mit Eigenspannungen

bezogene Abfall infolge Eigenspannungen im Vergleich zu IMP ① geringfügig größer.

Wie das Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.25 für IMP ①, $\max \epsilon_V = 0.5$, ESP ① zeigt, nehmen die Verschiebungen bei vorhandenen Eigenspannungen mehr zu, was durch den früheren Plastizierungsbeginn bedingt ist.

Die Versagensart entspricht dem Fall ohne Eigenspannungen. Die teilplastischen Zonen (siehe Bild 6.26) erstrecken sich bei den

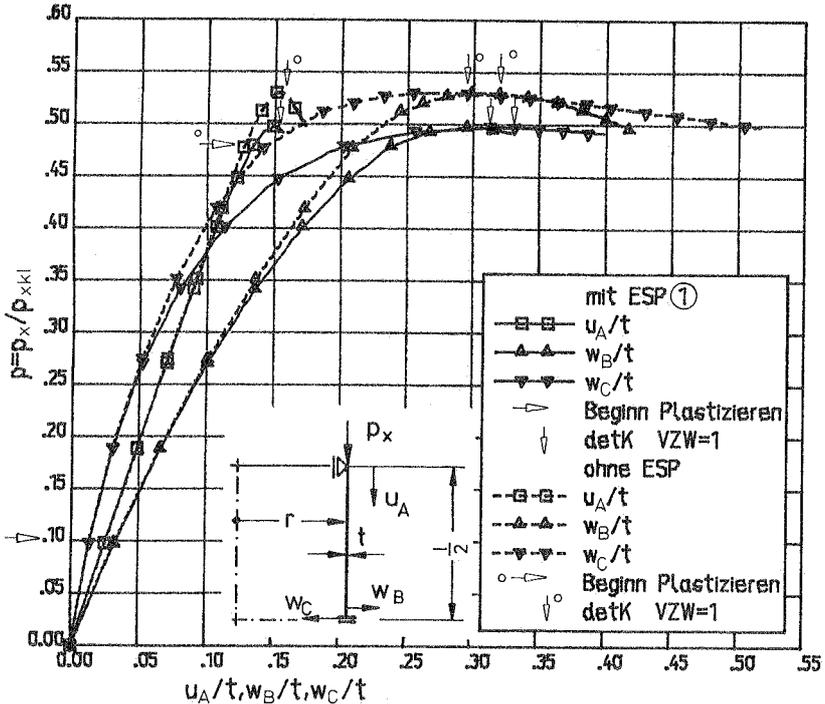
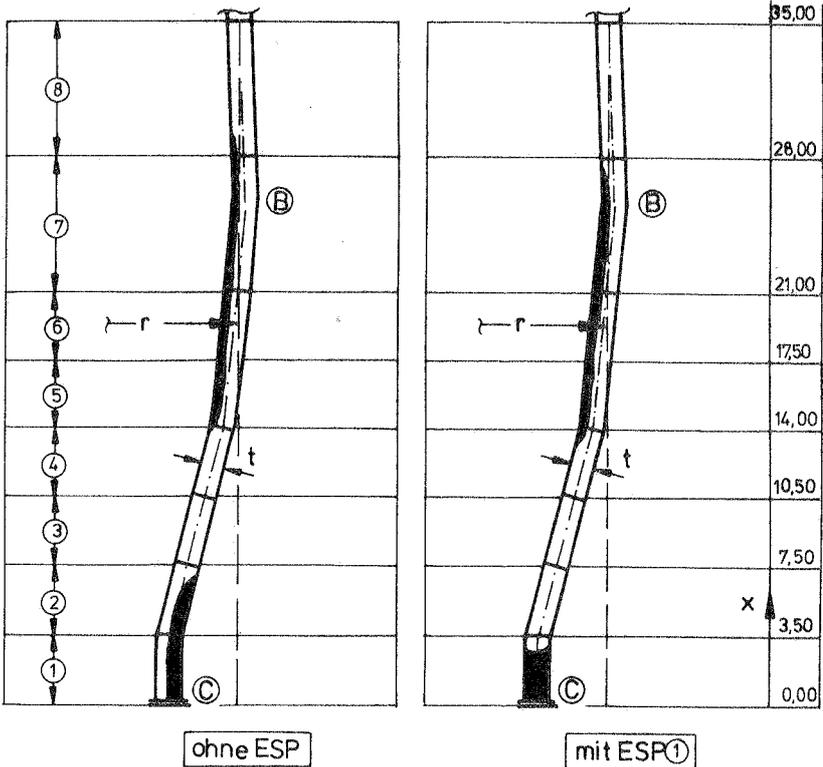


Bild 6.25: Lastverschiebungsdiagramm, IMP ①, $\max \epsilon_V = 0.5$, mit und ohne Eigenspannungen ESP ①

Elementen ⑤ bis ⑦ bis etwa $t/4$, wodurch die Längskraft nicht mehr übertragen werden kann. Im Bereich neben der Rundnaht (bei $x = 0,0$) ergeben sich infolge Eigenspannungen teilweise vollplastische Zonen, wie der Vergleich ohne und mit Eigenspannung ESP ① zeigt.

Bei den Ringmembrankräften - die sich besonders stark auf das nichtaxialsymmetrische Beulen auswirken - finden erhebliche Kräfteumlagerungen statt (siehe Bild 6.27). Dabei überlagern sich die Zugmembrankräfte aus dem Eigenspannungszustand mit Druckmembrankräften, verursacht durch die geometrische Imperfektion unmittelbar neben der Rundnaht. Bei vorhandenen Eigenspannungen ist der Betrag der Druckmembrankraft teilweise erheblich größer, siehe



■ plast. Zonen $p(kr)=0,530$ ■ plast. Zonen $p(kr)=0,497$

Bild 6.26: Plastische Zonen IMP ①, $\max \epsilon_v = 0,5$ mit und ohne Eigenspannungen

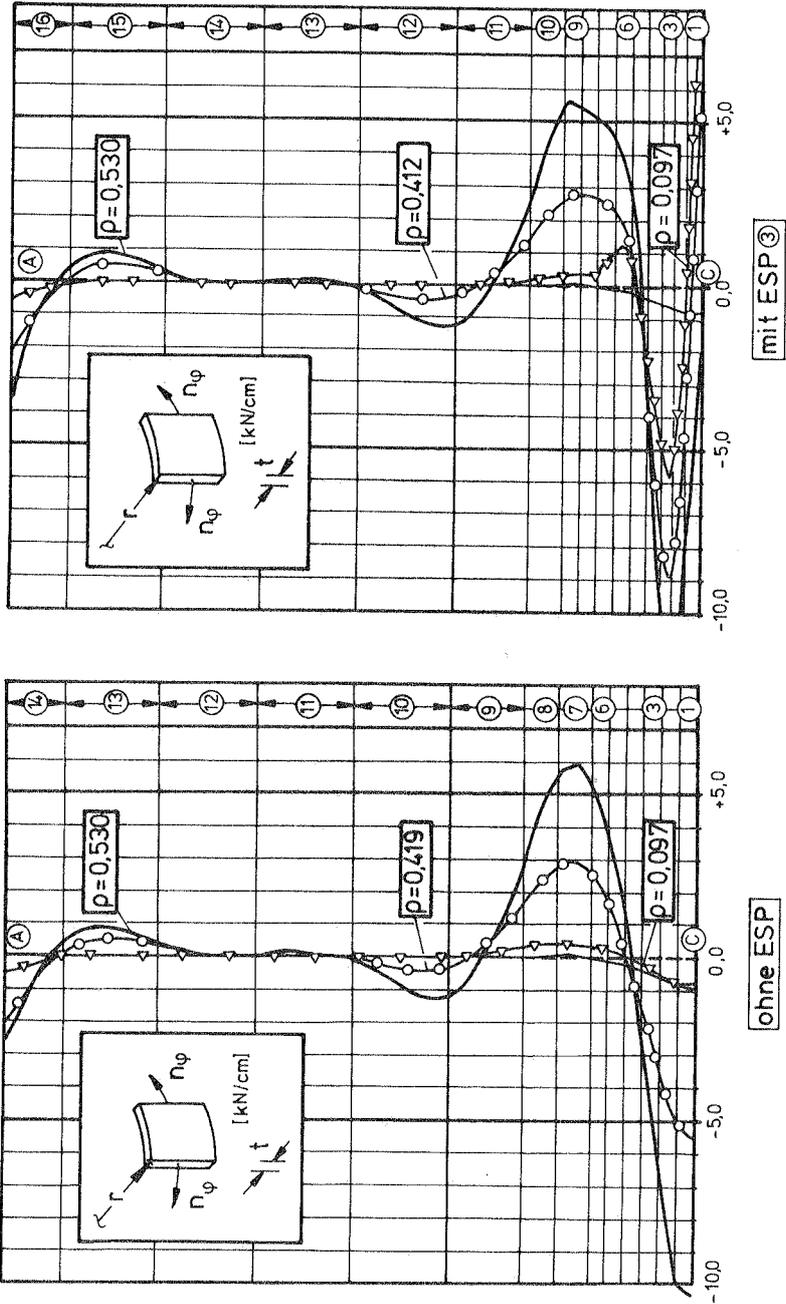


Bild 6.27: Ringmembrankräfte, IMP ①, max $\varepsilon_y = 0,5$, ohne bzw. mit Eigenspannungen

Membrankräfteverlauf für Laststufe $\rho = 0.412$ bei ESP ③, wobei diese Kräfte auf einem kürzeren Bereich vorhanden sind.

c) Zusammenfassung der Untersuchung mit Rechenmodell I

Als Schlußfolgerung aus den Untersuchungen läßt sich festhalten, daß durch Eigenspannungen die Traglast des geometrisch imperfekten Kreiszyylinder weiter reduziert wird. Die Traglast reduzierenden Haupteinflüsse resultieren aus der geometrischen Nichtlinearität, wie sich dies auch bei der imperfekten Platte bei den Testbeispielen in Abschnitt 5.2 gezeigt hat. Die Traglasten, die werkstoffabhängig sind, liegen noch über den Verzweigungslasten des nur geometrisch imperfekten Kreiszyinders. Zur Ermittlung wirklichkeitsnaher kritischer Lasten sind deshalb noch Untersuchungen mit dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell angebracht.

6.6.2 Rechenmodell II : nichtaxialsymmetrische FE-Idealisierung

Die FE-Idealisierung in Längsrichtung erfolgte wie beim Rechenmodell I. In Umfangsrichtung wurden vier Elemente verwendet wie bei den Untersuchungen der geometrischen Imperfektionen. Den Elementen im Rundnahtbereich lag geometrische und physikalische Nichtlinearität zugrunde, da hier infolge der Eigenspannungen teilplastische Zonen entstehen.

a) IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$ mit Eigenspannungen

Wie bei den Untersuchungen der geometrischen Imperfektionen festgestellt, können sich teilplastische Zonen ergeben, welche die kritische Last gegenüber der Verzweigungslast zusätzlich reduzieren (siehe Untersuchung IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$). Dieser Einfluß ist auch hier zu erwarten, zumal es durch die Eigenspannungen zu einem früheren Plastzierungsbeginn kommt (siehe Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.25). Den Untersuchungen lag ein Ausschnitt von $\Delta\varphi = 13.846$ ($n = 13$) zugrunde, wobei auf eine Variation von $\Delta\varphi$ verzichtet wurde.

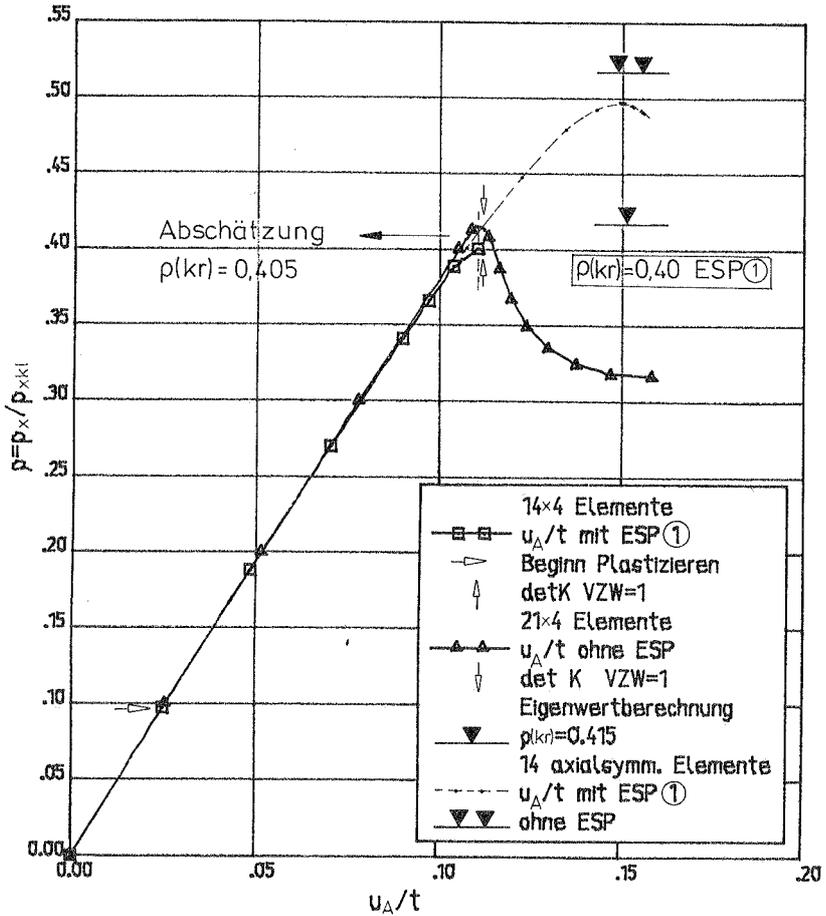


Bild 6.28: Lastverschiebungsdiagramm für IMP (1), $\max \epsilon_v = 0.5$, ohne bzw. mit Eigenspannung ESP (1)

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.28 sind die bezogenen Längsverschiebungen u_A/t aus beiden Rechenmodellen für die Fälle ohne bzw. mit Eigenspannung ESP (1) dargestellt. Während der Fall ohne Eigenspannungen - angegeben mit dem abfallenden Ast im Nach-

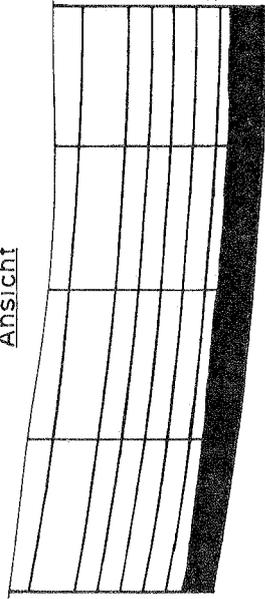
beulbereich - eine kritische Last von $\rho(kr) = 0.415$ hat, kommt es bei vorhandenen Eigenspannungen zu einem weiteren geringfügigen Abfall auf $\rho(kr) = 0.400$. Bei diesen Untersuchungen wurden beim Lastniveau $\rho = 0.388$ in radialer Richtung zwei kleine gegenseitig gerichtete Störlasten von $\Delta P = 2\pi r p_x / 3.2 \cdot 10^6$ angebracht (bei $x = 0$ und $\psi = 0$ bzw. $\psi = \Delta\psi$), womit sich unsymmetrische Verschiebungen einstellten (wie z.B. bei Plottbild A19 für den Fall ohne Eigenspannungen). Durch diese unsymmetrischen Verschiebungen kam es bei den teilplastischen Zonen zu teilweisen Entlastungen (siehe Darstellung plastische Zonen in Bild 6.29). Nach der Störung zeigt sich ein Lastabfall mit dem Vorzeichenwechsel bei der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix ($\det K \rightarrow VZW = 1$).

Wie der Vergleich in Bild 6.28 zeigt, liegen die Verschiebungen aus den axialsymmetrischen Untersuchungen im Bereich des Verzweigungspunktes geringfügig über den Ergebnissen aus der nichtaxialsymmetrischen Untersuchung. Setzt man nun voraus, daß die kritische Last dann erreicht ist, wenn die Längsverschiebung aus dem axialsymmetrischen Modell mit Eigenspannungen in der Größenordnung der Verschiebung bei der kritischen Last des nur geometrisch imperfekten Kreiszyinders liegt, so läßt sich damit eine Abschätzung der kritischen Last für vorhandene Eigenspannungen angeben. Es ergibt sich damit eine geringfügig größere kritische Last von $\rho(kr) = 0.405$ (siehe Bild 6.28), im Vergleich zu $\rho(kr) = 0.400$ aus dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell mit Eigenspannungen. Für andere r/t -Verhältnisse, z.B. dicke Kreiszyinder mit kleinem r/t -Verhältnis, wäre diese Abschätzung noch zu überprüfen.

Mit dieser Abschätzung ergibt sich im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.30 für den Fall mit Eigenspannung ESP ② eine kritische Last von $\rho(kr) = 0.407$.

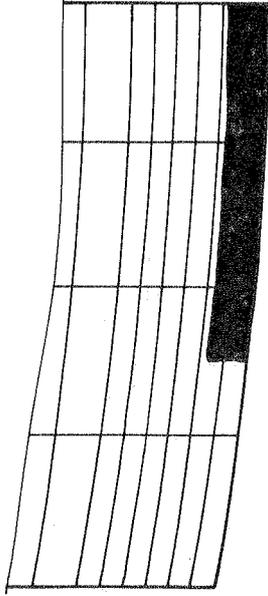
Neben dem Einfluß plastischer Zonen können sich noch erhöhte Druckkräfte in Ringrichtung aus dem Eigenspannungszustand auswirken, besonders bei Eigenspannung ESP ③ (siehe Bild 6.27). Für diesen Fall wurde deshalb eine Untersuchung mit dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell durchgeführt. Im Lastverschiebungsdiagramm

Ansicht



28,00
21,00
17,50
14,00
10,50
7,50
3,50
0,00

Ansicht



$\varphi = \Delta\varphi$

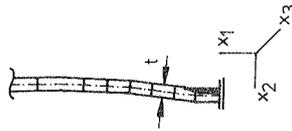
$\varphi = \Delta\varphi/2$

$\varphi = 0$

$\varphi = \Delta\varphi$

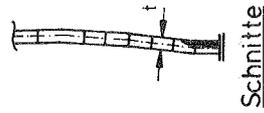
$\varphi = \Delta\varphi/2$

$\varphi = 0$



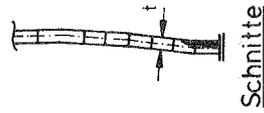
Schnitte

plast. Zonen $p = 0,388$



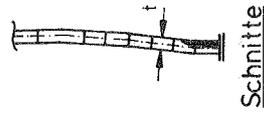
Schnitte

plast. Zonen $p = 0,400 (VZW=1)$



Schnitte

plast. Zonen $p = 0,400 (VZW=1)$



Schnitte

plast. Zonen $p = 0,400 (VZW=1)$

Bild 6.29: Plastische Zonen IMP ①, max $\epsilon_v = 0.5$, ESP ①, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$

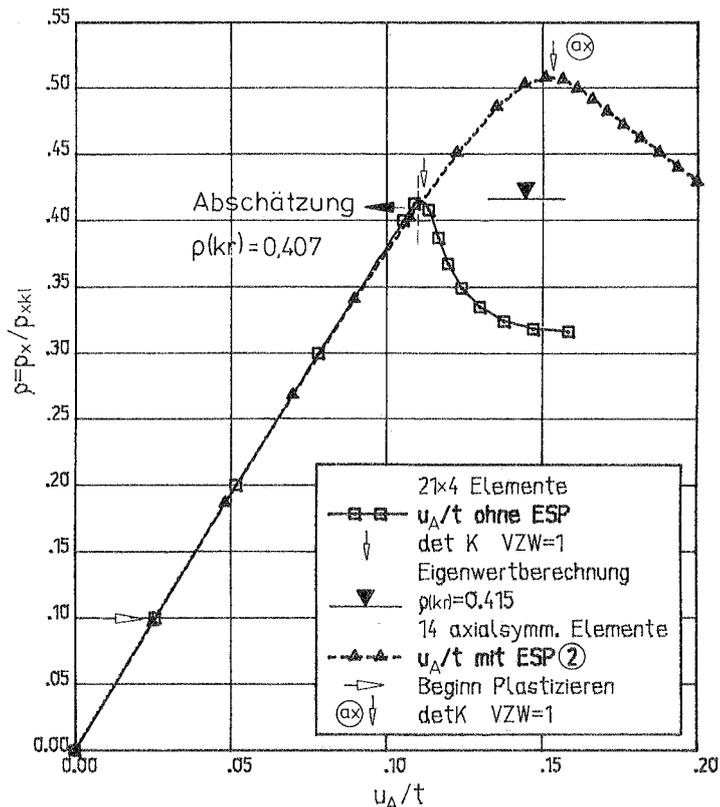


Bild 6.30: Lastverschiebungsdiagramm - IMP (1) $\max \epsilon_v = 0.5$
 ESP (2), Abschätzung kritische Last

in Bild 6.31 ergibt sich eine kritische Last von $\rho(kr) = 0.406$ als Vergleich die Abschätzung ergibt $\rho = 0.405$. Bei dieser Rechnung wurden gleich von Anfang an kleine Störlasten in radialer Richtung angesetzt. Eine Erklärung, warum sich die erhöhten Ringdruckkräfte hier nicht wesentlich auf das unsymmetrische Beulen auswirken, lässt sich mit ihrer kurzen Verteilung in Längsrichtung angeben (siehe Bild 6.27 Fall mit ESP (3)).

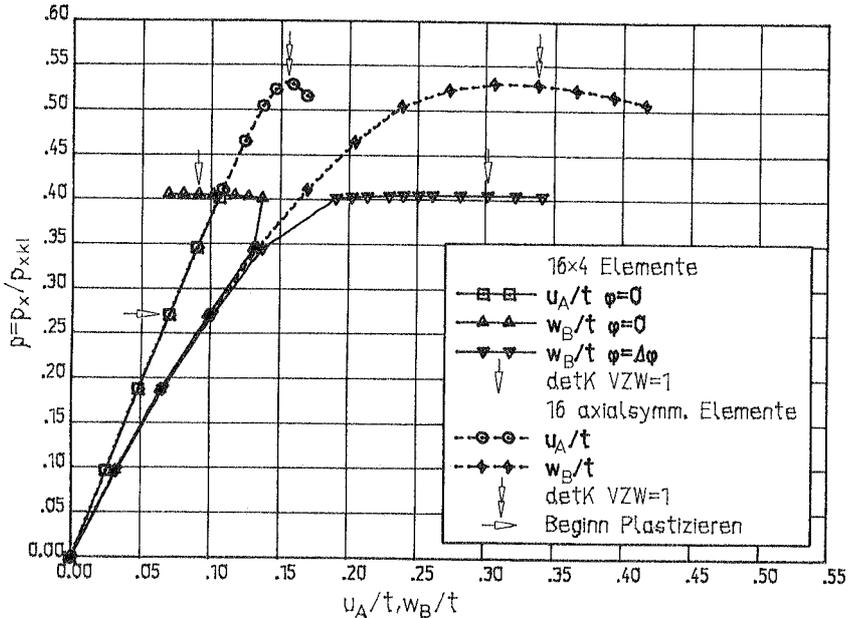


Bild 6.31: Lastverschiebungsdiagramm - IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
ESP ③

b) IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$, mit Eigenspannungen

Bei der geometrischen Imperfektion IMP ② ergeben sich teilplastische Zonen, bevor es zu einem Verzweigen kommt. Dieser Einfluß wird bei vorhandenen Eigenspannungen noch verstärkt, d.h., es gibt noch ausgeprägtere plastische Zonen. Die FE-Idealisierung erfolgte wie bei IMP ①. Als Ausschnitt wurde $\Delta\varphi = 15^\circ$ ($n = 12$) gewählt, wie bei den Untersuchungen der teilplastischen Zonen in Abschnitt 6.5.2.

Ergebnisse

Im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 6.32 sind bezogene Längsverschiebungen u_A/t bzw. Radialverschiebungen w_B/t aus beiden Rechenmodellen dargestellt. Bei der Rechnung wurden wiederum gleich von Anfang an kleine radiale Störlasten angesetzt. Ab der Laststufe $\rho = 0.400$ nehmen beim Rechenmodell II bei den Radialverschiebun-

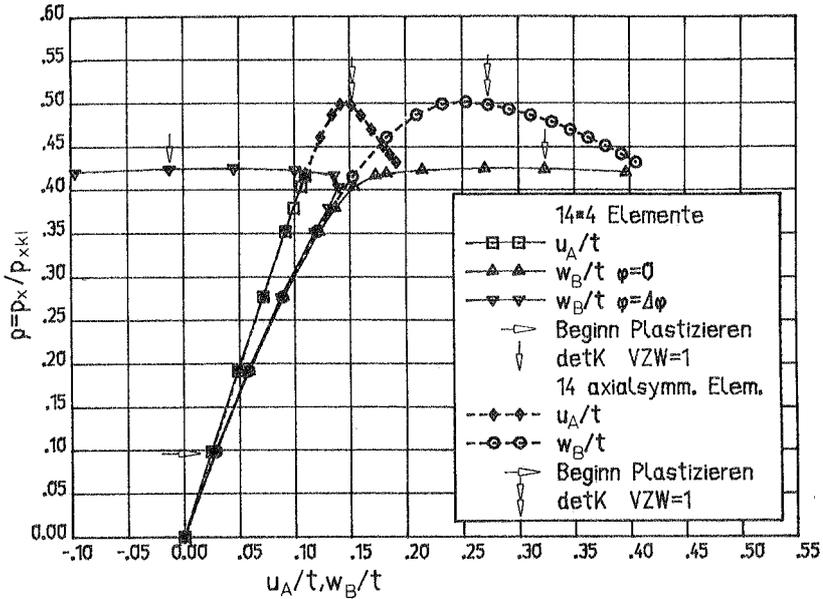


Bild 6.32: Lastverschiebungsdiagramm - IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$
ESP ①

gen w_B die Unsymmetrien zu, und es ergibt sich eine kritische Last von $\rho = 0.424$. Dabei kommt es im Bereich der Rundnaht bei den plastischen Zonen zu Entlastungen. Eine Abschätzung würde eine kritische Last von $\rho = 0.425$ liefern.

Auf Ermittlung weiterer kritischer Lasten mit dem numerisch sehr aufwendigen Rechenmodell ① für die Eigenspannungszustände ESP ② und ESP ③ wird hier verzichtet, zumal sich mit den Abschätzungen ausreichend gute Werte ergeben. Ergebnisse von Abschätzungen für diese Fälle finden sich in der nachfolgenden Zusammenfassung.

c) Zusammenfassung der Untersuchungen mit Rechenmodell ①

In Tafel 6.14 sind die kritischen Lasten für beide geometrischen Imperfektionen mit vorhandenen Eigenspannungen zusammengestellt,

wobei die aus einer Abschätzung herrührenden kritischen Last durch einen "Stern" markiert sind. Durch Eigenspannungen kommt es zu einem weiteren Abfall der kritischen Lasten gegenüber den Fällen ohne Eigenspannungen. Der Abfall liegt in der Größenordnung bis zu 10%. Bei Platten mit Eigenspannungen ergibt sich ein größerer Abfall (siehe Testbeispiel in Abschnitt 5.2). Dies läßt sich damit erklären, daß bei Platten vielfach globale Eigenspannungszustände vorliegen (siehe z.B. [46]), während beim Kreiszyylinder infolge einer Rundnaht lokal begrenzte Eigenspannungszustände vorhanden sind.

geometrische Imperfektionen	Eigenspannung	$\rho(kr)$	$\frac{\rho(kr) \text{ mit ESP}}{\rho(kr) \text{ ohne ESP}}$
IMP ①, $\max \epsilon_V = 0.5$	ohne ESP	0.415	-
	ESP ①	0.400	0.964
	ESP ②	0.407*	0.981
	ESP ③	0.406	0.978
IMP ②, $\max \epsilon_V = 0.5$	ohne ESP	0.465	-
	ESP ①	0.424	0.912
	ESP ②	0.430*	0.925
	ESP ③	0.450*	0.967
IMP ①, $\max \epsilon_V = 1.0$	ohne ESP	0.303	-
	ESP ①	0.290*	0.957
IMP ②, $\max \epsilon_V = 1.0$	ohne ESP	0.339	-
	ESP ①	0.305*	0.900

Tafel 6.14: kritische Lasten bei vorhandenen geometrischen Imperfektionen und Eigenspannungen

6.7 Vergleich eigener Lösungen mit experimentellen Beullasten und Traglastkurve

In Bild 6.33 erfolgt eine Gegenüberstellung der eigenen Ergebnisse mit experimentellen Beullasten und der Traglastkurve nach der DAST-Ri.013 [116]. Bei den experimentellen Ergebnissen handelt es sich um eine Versuchsauswertung von Esslinger/Geier [34] über im Schrifttum angegebene Beulversuche an axialbelasteten Kreiszyklindern. Die eigenen Ergebnisse aus dem nichtaxialsymmetrischen Rechenmodell sind in diesem Bild durch einen "Balken" markiert. Dieser Balken veranschaulicht die Streubreite der Ergebnisse bei

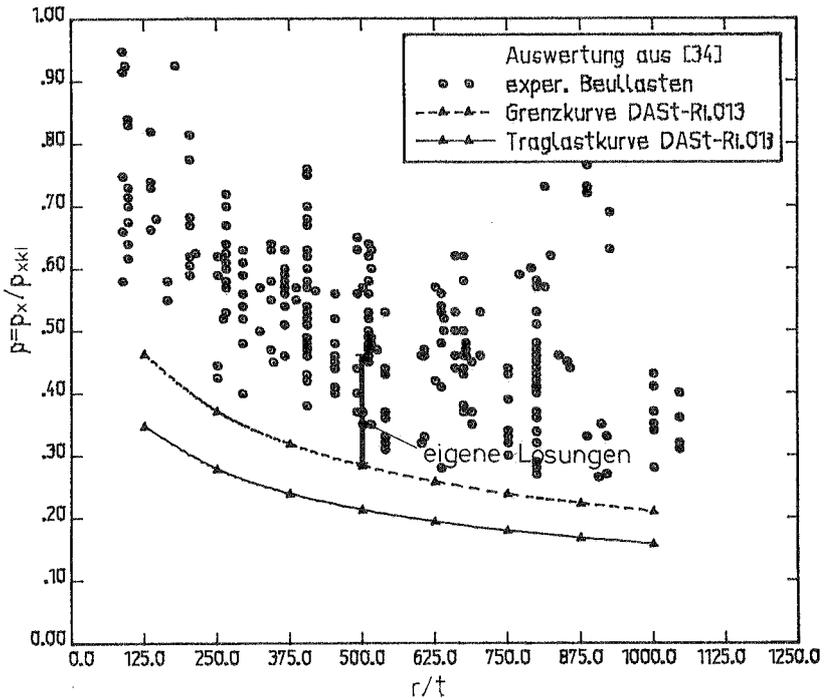


Bild 6.33: Vergleich eigene Lösungen mit experimentellen Beullasten und Traglastkurve nach DAST-Ri.013

den verschiedenen Imperfektionsannahmen, wobei die minimalen und maximalen Werte durch die Querstriche unten bzw. oben gekennzeichnet sind. Man sieht, daß die Ergebnisse in der Größenordnung von Beulversuchen liegen und daß ein ausreichender Abstand gegenüber der Traglastkurve vorhanden ist.

Bei Verwendung dieser Traglastkurve werden Herstellungstoleranzen über die Schweißnahtverformung vorgeschrieben (s. Abschn. 3.4). In Tafel 6.15 ist damit ein Vergleich mit den eigenen Imperfektionsannahmen durchgeführt. Es zeigt sich, daß für beide Imperfektionsarten bei der maximalen Amplitude $\max \epsilon_v = 1.0$ der zulässige Wert überschritten wird. Nach der Richtlinie ist damit eine Reduktion des Abminderungsfaktors auf die Hälfte vorzunehmen.

geometrische Imperfektion	max. Imperfekt. Amplitude $\max \epsilon_v$	Toleranzwert $t_v = \frac{ w_o(o) - w_o(l_m/2) }{l_m} \cdot 100$	Vergleich mit zulässigem Wert	Abminderungswert α
IMP ①	0.5	$= \frac{ 0.35 - (-0.035) }{50} \cdot 100 = 0.77\%$	0.77 < 1%	0.21
	1.0	$= \frac{ 0.70 - (-0.07) }{50} \cdot 100 = 1.54\%$	1.54 > 1%	0.105
IMP ②	0.5	$= \frac{ 0.35 }{50} \cdot 100 = 0.70\%$	0.7 < 1%	0.21
	1.0	$= \frac{ 0.70 }{50} \cdot 100 = 1.40\%$	1.4 > 1%	0.105

Tafel 6.15: Vergleich Imperfektionsamplituden mit Herstellungstoleranzen aus DASt-Ri.013 [116]

Im Imperfektionsdiagramm in Bild 6.34 wird dies noch veranschaulicht, wobei neben der Traglastkurve noch eine zusammenfassende Darstellung der eigenen Ergebnisse aus beiden Rechenmodellen vorgenommen ist. Dabei zeigt es sich, daß die Reduktion des Abminderungsfaktors auf die Hälfte, für den Toleranzwert $t_v > 1,0\%$, eine sehr scharfe Forderung darstellt. Nach weiteren Untersuchun-

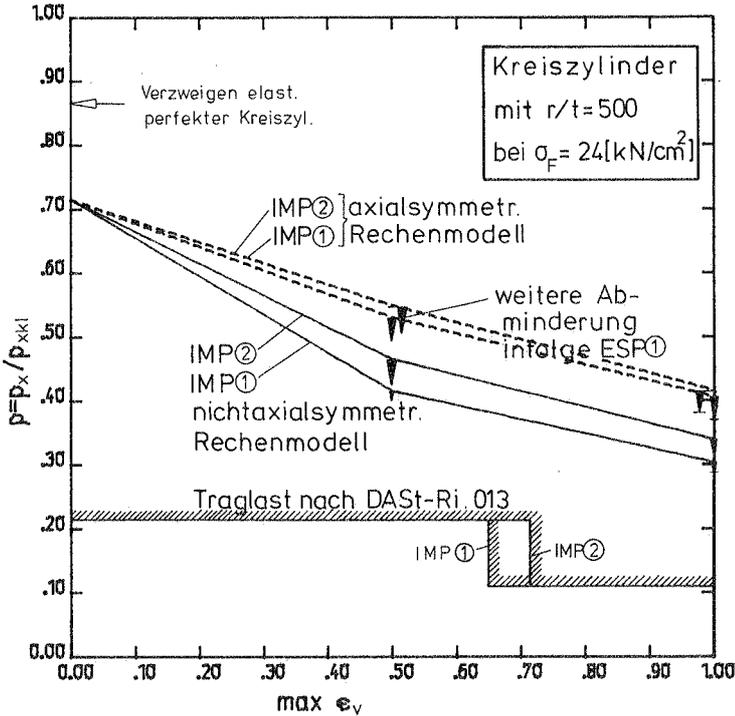


Bild 6.34: Vergleich eigene Ergebnisse mit Traglast nach DAST-Ri.013

gen mit anderen r/t -Verhältnissen wäre eine Änderung der Herstellungstoleranz in dieser Richtlinie angebracht, z.B. ein linearer Abfall bis zum doppelten Toleranzwert.

An diesem Bild erkennt man sehr gut den geringen Einfluß von Eigenspannungen auf die kritische Last. Die "Pfeile" zeigen den zusätzlichen Abfall der kritischen Beullast infolge zusätzlich vorhandener Eigenspannungen gegenüber den nur geometrisch imperfekten Kreiszy lindern. Die wesentliche Ursache für den Abfall der Beullast sind die geometrischen Imperfektionen.

7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Untersuchung über den Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders. Die Einflüsse der Rundschweißnaht - geometrische Imperfektion und Schweißspannungen - wurden durch wirklichkeitsnahe Imperfektionsannahmen festgelegt.

Auf den Einfluß von Eigenspannungen in der verwendeten geometrisch und physikalisch nichtlinearen Theorie wird eingegangen. Als numerische Methode kam die Finite Element Methode zum Einsatz, mit axialsymmetrischen und nichtaxialsymmetrischen Idealisierungen. Im Rahmen der inkrementell iterativen Lösungsmethoden wurden Bewertungskriterien - wie Eigenwertberechnungen, Steifigkeitsparameter und Verhalten der Gesamtsteifigkeitsmatrix - zum Aufzeigen der kritischen Lasten (Traglast, Verzweigungslast) verwendet. An einfachen Testbeispielen (Balken, Platte) wurde der Einfluß von Eigenspannungen in der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität gezeigt.

Der untersuchte Kreiszylinder hatte ein r/t -Verhältnis von 500, wie dies z.B. bei Silokonstruktionen vorkommt. Den Untersuchungen lagen verschiedenartige Imperfektionen zugrunde, wie lokale geometrische Imperfektion und lokale Eigenspannungszustände. Die geometrischen Imperfektionen waren die Hauptursache für den Abfall der Beullasten, wobei Eigenspannungen einen weiteren zusätzlichen geringfügigen Abfall bewirkten.

Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß sich mit den heutigen numerischen Rechenmethoden bei realistischen Imperfektionsannahmen wirklichkeitsnahe Beullasten von Schalenkonstruktionen berechnen lassen. Dabei können gezielt einzelne Parameter variiert werden, was bei Versuchen nur schwer möglich ist.

LITERATUR

- [1] Ahmad, S., Curved Thick Shell and Membrane
Irons, B.M., Elements with Particular Reference
Zienkiewicz, O.C.: to Axisymmetric Problems.
Proc. 2nd Conf. "Matrix Methods in
Structural Mechanics",
AFFDL-TR-68-150, pp. 539/571(1968).
- [2] Almroth, B.O.: Influence of Edge Conditions on the
Stability of Axially Compressed
Cylindrical Shells.
AIAA Journal Vol. 4 (1966), No. 1,
pp. 134/140.
- [3] Amazigo, J.C., Asymptotic Formulas for the Buckling
Budiansky, B.: Stresses of Axially Compressed Cylinders
with Localized or Random Axisymmetric
Imperfections.
Transactions of ASME, Vol. 39(1972),
pp. 179/184.
- X [4] Arbocz, J., On the Buckling of Axially Compressed
Sechler, E.E.: Imperfect Cylindrical Shells.
J. Appl. Mech. Vol. 41(1974), No.3,
pp. 737/747.
- [5] Batoz, J.L., Incremental Displacement Algorithmus for
Dhatt, G.: Nonlinear Problems.
Int. J. Num. Meth. Engng. 14(1979),
pp. 1262/1267.
- [6] Bathe, K.-J.: Solution Methods for Large Generalized
Eigenvalue Problems in Structural
Engineering.
SESM Report No. 71-20, Dept. Civil Eng.,
University of California, Berkeley (1971).

- [7] Bathe, K.-J., Bolourchi, S.: A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element. Computers & Structures, Vol. 11(1980), pp. 23/48.
- [8] Bathe, K.-J., Ozdemir, H.: Elastic-plastic Large Deformations Static and Dynamic Analysis. Computers & Structures, Vol. 6(1976), pp. 81/92.
- [9] Bathe, K.-J., Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
- [10] Bathe, K.-J., Ramm, E., Wilson, E.L.: Finite Element Formulations for Large Deformations Dynamic Analysis. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9(1975), pp. 353/386.
- [11] Bathe, K.-J., Wilson, E.L., Iding, R.H.: NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems. SESM Report No. 74-3, Dept. Civil Eng., University of California, Berkeley (1974).
- [12] Beer, G.: Nichtlineare Temperaturspannungsberechnung mit Hilfe der Finiten-Element-Methode unter besonderer Berücksichtigung auf extreme Hitzeeinwirkung. Der Stahlbau 45(1976), H. 9, S. 263/268.
- [13] Bergan, P.G., Horrignoe, G., Krakeland, B., Soreide, T.H.: Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems. Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 12(1978), pp. 1677/1696.

- [14] Bergan, P.G.: Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems.
Int. Conf. on "Engng. Appl. of the F.E. Method", Hovik, Norway 1979
Published by A.S. Computas.
- [15] Bornscheuer, F.W.: Durch Schweißseigenspannungen an zylinderförmigen Konstruktionen ausgelöste Beulerscheinungen.
Schweissen und Schneiden 9(1957), H. 11. S. 492/494.
- [16] Bornscheuer, F.W.: Zur Berechnung und Konstruktion druckbeanspruchter Schalen aus Stahl.
Bericht aus Forschung und Entwicklung des deutschen Ausschusses für Stahlbau 4(1977), S. 3/9.
- [17] Brendel, B.: Geometrisch nichtlineare Elasto-Stabilität. Dissertation Universität Stuttgart 1979. Bericht Nr. 79-2 aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.
- [18] Brendel, B., Häfner, L., Ramm, E., Sättele, J.M.: Programmdokumentation - Programmsystem NISA,
Bericht Institut für Baustatik, Universität Stuttgart 1977.
- [19] Brendel, B., Häfner, L., Ramm, E., Sättele, J.M.: Analysis and Response of a Thin Glasfiber - Reinforced Concrete Shell.
Vorbericht zum Kolloquium des 2. Internationalen Symposiums "Weitgespannte Flächentragwerke" des Sonderforschungsbereich 64 der Universität Stuttgart. Stuttgart, Mai 1979.

- [20] Brendel, B., Ramm, E.: Linear and Nonlinear Stability Analysis of Cylindrical Shells. Proc. Int. Conf. "Engineering Applications of the Finite Element Method", Paper 18, Hovik, Norwegen (1979).
- [21] Brush, D.O., Almroth, B.O.: Buckling of Bars, Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company 1975.
- [22] Buck, K.E., Scharpf, D.W., Stein, E., Wunderlich, W.: Finite Elemente in der Statik. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.
- [23] Bufler, H.: Vorlesung Energiemethoden 4, WS 1975/76 an der Universität Stuttgart
- [24] Buttenschön, K.: Beulen von dünnwandigen Kästenträgern aufgrund von Schweißzugspannungen. Schweissen und Schneiden 24(1972), H. 6, S. 217/221.
- X [25] Donnell, L.H.: A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending. Trans. ASME 56(1934) pp. 795/806.
- [26] Donnell, L.H., Wan, C.C.: Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under axial Compression. J. of Appl. Mech., Vol. 17(1950), pp.73/83.
- (x) [27] Dwight, J.B., White, J.D.: Prediction of Weld Shrinkage Stresses in Plated Structures. Sec. Int. Colloquium Stability of Steel Structures, Liege 13-15 April 1977, Prelim. Report.
- od
[27]

- [28] Ebel, Reinhard: Spannungsmessungen an geschweißten Rundnähten.
Autogene Metallbearbeitung 27(1934), H. 19, S. 305/310.
- [29] Einführung in die Norm SIA 161(1979) Stahlbauten, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure.
4.-6. April 1979 ETH Zürich, veranstaltet vom Lehrstuhl für Baustatik und Stahlbau, Kursleiter: Prof. Dr. P. Dubas.
- [30] El-Masri, M.: Theorie und Berechnung nichtlinearer Schwingungen vorgespannter Membrane nach der Methode der Finiten Elemente.
SFB 64 Mitteilung 17/1973 Universität Stuttgart.
- X [31] Esslinger, M.: Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vom Beulvorgang dünnwandiger axialbelasteter Zylinder.
Der Stahlbau 39(1970), H. 3, S. 73/76.
- X [32] Esslinger, M.: Berechnung der klassischen Beullasten isotroper und orthotroper Zylinder nach der Flüggeschen Schalentheorie.
Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1(1977), H. 5, S. 378/382.
- [33] Esslinger, M.: Neues über beulgefährdete Zylinder und Kegel.
Erarbeitet für die Formulierung von Schalen-Beulvorschriften.
1. Mitteilung aus dem Institut für Leichtbau der TH Aachen, 1978, Wissenschaftliches Kolloquium zum Gedenken von Prof. Ebner.

- [34] Esslinger, M., Geier, B.: Postbuckling Behavior of Structures. CISM Courses and Lectures No. 236, Int. Centre of Mechanical Sciences, Springer-Verlag, Wien/New York 1975.
- [35] Fischer, G.: Über den Einfluß der gelenkigen Lagerung auf die Stabilität dünnwandiger Kreiszyylinder unter Axiallast und Innendruck. Z. Flugwiss. 11(1963), H. 3, S. 111/119.
- X [36] Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyinderschale. Ingenieur-Archiv 3. Band 1932, S. 463/506.
- [37] Flügge, W.: Stresses in Shells. Sec. Ed. Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1973.
- [38] Häfner, L., Ramm, E., Sättele, J.M., Stegmüller, H.: NISA 80 - Programmdokumentation - Programmsystem. Bericht Institut für Baustatik Universität Stuttgart 1981.
- [39] Häfner, L., Sättele, J.M.: Geometrisch nichtlineare Berechnung von Platten und Teilschalen unter Berücksichtigung von Imperfektion. Anhang zum Zwischenbericht Mai 1979, DFG - Forschungsvorhaben B₀ 184/19.
- [40] Harding, J.E.: The Elasto-Plastic Analysis of Imperfect Cylinders. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2(1978), 65, Dec., pp. 875/892.
- [41] Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press 1960.

- [42] Hoff, N.J.: The Perplexing Behavior of Thin Circular Cylindrical Shells in Axial Compression. Israel Journal of Technology, Vol. 4, No. 1(1966), pp. 1/28.
- [43] Hoff, N.J. Buckling of Circular Cylindrical Shells
Soong, T.C.: in Axial Compression. Int. J. Mech. Sci.
Vol. 7(1965), pp. 489/520.
- [44] Hutchinson, J.W., Postbuckling Theory.
Koiter, W.T.: Appl. Mech. Rev. 23(1970), pp. 1353/1366.
- [45] Hutchinson, J.W., Effect of a Local Axisymmetric Imperfection
Tennyson, R.C., on the Buckling Behavior of a Circular
Muggeridge, D.B.: Cylindrical Shell under Axial
Compression.
AIAA Journ. Vol. 9(1971), pp. 48/52.
- [46] Jungbluth, O., Untersuchungen der Tragfähigkeit von
Kubsch, G.: Stahlkonstruktionen mit ebenen, scheiben-
 artigen beanspruchten Blechen mittels
 wirklichkeitsnaher Großversuche.
 DAST-Gemeinschaftsprogramm Plattenbeul-
 versuche, Forschungsbericht Nr. 15/78.
- [47] Kamtekar, A.G.: The Calculation of Welding Residual
 Stresses in Thin Steel Plates.
 Int.J. Mech. Sci. Vol.20(1978), pp.207/227.
- [48] Karmann, v.T., Buckling of Thin Cylindrical Shells under
Tsien, H.-S.: Axial Compression.
 Journ.of the Aeronaut.Scienc. Vol.8(1941),
 pp. 302/312.
- [49] Kempner, J.: Postbuckling Behavior of Axially Compressed
 Circular Cylindrical Shells.
 Journ.of Aeronaut.Sciences Vol.21(1954),
 pp. 329/335.

- [50] Klöppel, K.,
Reuschling, D.: Berechnung der Wärmeeigenstressungen an den Rundnähten rotationssymmetrisch vorgewärmter Kreiszyylinder. Fachbuchreihe Schweißtechnik, Band 53/I: Tragfähigkeitsermittlung bei Schweißstressungen. Deutscher Verlag für Schweißtechnik (DVS) GmbH, Düsseldorf.
- [51] Klöppel, K.,
Schönbach, W.: Wärmespannungen in rechteckig berandeten Scheiben.
Der Stahlbau 27(1958), H. 5, S. 122/125.
- (X) [52] Klöppel, K.,
Schönbach, W.: Der Temperaturkreislaufversuch.
Der Stahlbau 30(1961), H. 9, S. 257/263.
- [53] Koiter, W.T.: On the Stability of Elastic Equilibrium Translation of "Over de Stabiliteit von het Elastisch Evenwicht". Thesis, Polytechnic Institute Delft, H.J. Paris, Publisher Amsterdam, 1945.
NASA TT F-10,833 1967.
- X [54] Koiter, W.T.: The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells Under Axial Compression.
Roy. Netherl. Acad. Sci., Ser. B, 66, 1963, pp. 265/279.
- [55] Kollár, L.,
Dulácska, E.: Schalenbeulung.
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1975.
- [56] Komatsu, S.,
Nara, S.,
Kitada, T.: Elasto-Plastic Analysis of Orthogonally Stiffened Plates with Initial Imperfections under Uniaxial Compression.
Computers & Structures Vol. 11(1980), pp. 429/437.

- [57] Krakeland, B.: Large Displacement Analysis of Shells Considering Elasto-Plastic and Elasto-Viscoplastic Materials. Report No. 77-6 Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology The University of Trondheim, Norway, 1977.
- [58] Kröner, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
- [59] Kröner, E.: Plastizität und Versetzungen. In Vorlesung über theoretische Physik, Band II, A. Sommerfeld: Mechanik der deformierbaren Medien. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt 1978.
- [60] Kröplin, B.-H.: Beulen ausgesteifter Blechfelder mit geometrischer und stofflicher Nichtlinearität Bericht Nr. 77-22 aus dem Institut für Statik TU Braunschweig.
- [61] Lacher, G.,
Haspel, H.: Baustellenmaßnahmen zur Erzielung von Maßhaltigkeit bei einem großen Zementklinkersilo. Der Stahlbau 49(1980), H. 3, S. 65/69.
- [62] Larsen, P.K.,
Popov, E.P.: A Note on Incremental Equations and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations. Acta Mechanica, Vol. 19(1974), pp. 1/4.
- [63] Leipholz, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. G. Braun Verlag, Karlsruhe 1968.

- [64] Lindner, J.: Der Einfluß von Eigenspannungen auf die Traglast von I-Trägern.
Der Stahlbau 43(1974), H. 2, S. 39/45,
H. 3, S. 86/91.
- × [65] Lorenz, R.: Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern.
Z. Ver. Deut. Ingenieure, Band 52, Nr. 43 (1908), S. 1706/1713.
- [66] Locci, J.M.,
Barbé, B.,
Haug, E.: Numerical Simulation of Elektron Beam Welding.
Schweissen und Schneiden 32(1980), H.6,
S. 224/228.
- [67] Maewal, A.,
Nachbar, W.: Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Deformation, Buckling and Post-buckling behavior of Cylindrical Shells. Proc. of Symposium on "Appl. of Computer Methods in Engng." Vol. 1(1977), Wellford, L.C. (ed), USC.
- [68] Malvern, L.E.: Introduction to the Mechanics of Continous Medium.
Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs,
New Jersey 1969.
- [69] Moler, C.B.
Stewart, G.W.: An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems.
Siam J. Numer. Anal., Vol. 10(1973), No. 2,
pp. 241/256.
- [70] Obrecht, H.: Beul- und Nachbeulverhalten von Bauteilen im elastischen und nichtlinearen Materialbereich, Vortrag am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 6.12.1978.

- [71] Ostapenko, A., Local Buckling of Tubular Steel Columns.
Gunzelman, S.X.: Proc. of the Nat. Structur. Engineer.
Conf. of ASCE, Methods of Structural
Analysis. Vol. 2, Published by ASCE,
New York, N.Y. 10017, 1976.
- [72] Ostapenko, A., Local Buckling Tests on Three Steel Large-
Gunzelman, S.X.: Diameter Tubular Columns.
Fourth Int. Specialty Conference on Cold-
Formed Steel Structures, Recent Research
and Developments in Cold-Formed Steel
Structures June 1-2, 1978.
- [73] Owen, D.R.J., Finite Elements in Plasticity: Theory
Hinton, E.: and Practice. Pineridge Press Limited
Swansea, U.K. 1980.
- [74] Paulun, J.: Zur Theorie und Berechnung geometrisch
und physikalisch nichtlinearer Kontinua
mit Anwendung der Methode der Finiten
Elemente.
Bericht Nr. F 77-4 aus dem Bereich der
Mechanik der TU Hannover (1977).
- [75] Pflüger, A.: Zur praktischen Berechnung der axialge-
drückten Kreiszyinderschale.
Der Stahlbau 32(1963), H. 6, S. 161/165.
- [76] Radaj, D.: Berechnung der Schweißbeigenspannungen in
Stäben mit Längsnähten.
Schweissen und Schneiden 2(1971), Bericht 7.
- [77] Radaj, D.: Fachbuchreihe Schweißtechnik, Band 64/I:
Festigkeitsnachweise. Deutscher Verlag für
Schweißtechnik (DVS) GmbH, Düsseldorf.

- [78] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente.
Bericht Nr. 76-2 aus dem Institut für Bau-
statik der Universität Stuttgart (1976).
- [79] Ramm, E.: A Plate/Shell Element for Large Deflections
and Rotations. Formulations and Computa-
tional Algorithms in Finite Element Ana-
lysis, Bathe, K.J., Oden, J.T., and
Wunderlich, W., (eds.), M.I.T.Press (1977).
- [80] Ramm, E.: Strategies for Tracing the Nonlinear
Response Near Limit Points. Nonlinear Finite
Element Analysis in Structural Mechanics,
Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.J.,
(eds.), Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/
New York 1981.
- [81] Reckling, K-A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung
auf Festigkeitsprobleme.
Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York
1967.
- [82] Reissner, H.: Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen.
ZAMM Band 11(1931), H.1., S. 1/8.
- [83] Riks, E.: The Application of Newton's Method to
Problems of Elastic Stability.
J. Appl. Mech. 39(1972), pp. 1060/1066.
- [84] Riks, E.: An Incremental Approach to the Solution
of Snapping and Buckling Problems.
Int. J. Solids 15(1979), pp. 529/551.
- X [85] Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau.
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1978.

- [86] Ruge, J.: Handbuch der Schweißtechnik.
Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New York,
1974. Kap. 23.5 Eigenspannungen, von
H. Schimmöller.
- [87] Saal, H.: Buckling of Circular Cylindrical Shells
under Combined Axial Compression and
Internal Pressure
Sec. Int. Colloquium Stability of Steel
Structures.
Liege 13-15. April 1977, Prelim. Report.
- [88] Sättele, J.M.: Ein Finites Elementkonzept zur Berechnung
von Platten und Schalen bei stofflicher
und geometrischer Nichtlinearität.
Dissertation Universität Stuttgart 1980.
- [89] Sättele, J.M.,
Ramm, E.,
Fischer, M.: Traglastkurven einachsig gedrückter Recht-
eckplatten mit Seitenverhältnissen $\alpha \leq 1$
bei vorgegebenen geometrischen Imperfek-
tionen.
Der Stahlbau 50(1981), H. 7, S. 205-210.
- [90] Satoh, K.,
Terasaki, T.: Effect of Weld Heat-Input Parameters on
Residual Stress Distribution in Butt Joint.
Int. Inst. of Welding, Colloquium Applicat.
of Numerical Techniques in Welding, Dublin
1978.
- [91] Singer, J.: Buckling Experiments on Shells.
Euromech Colloquium No. 128, "Stability,
Buckling and Postbuckling Behavior;
Foundations and Analysis"
Delft, March 31 - April 2, 1980.
- [92] Schönbach, W.: Zur Ermittlung der Eigenspannung in stab-
und scheibenartigen Bauteilen infolge Quer-
nähten und punktförmigen Eigenspannungsquel-
len. Der Stahlbau 31(1962), H.12, S. 365/378.

- [93] Schmidt, H.: Zum Tragverhalten axial gedrückter, geschweißter, längsversteifter Platten. Schriftenreihe Lehrstuhl f. Stahlbau Hannover 1975, Heft 9. Vier Vorträge zum Plattenbeulproblem.
- [94] Schröder, H.: Toleranzen im Behälterbau. Vorträge und Diskussionsbeiträge der Schalenbeultagung in Meersburg am 29./30. April 1976. Sonderheft der DFVLR, Institut für Strukturmechanik, herausgegeben von Esslinger, M., Geier, B.
- X [95] Schulz, U.: Zur Beulstabilität von Kreiszyinderschalen. Dissertation Universität Karlsruhe 1970.
- [96] Schulz, U.: Der Stabilitätsnachweis von Schalen. Bericht der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Herausgeber: Bähre, R., Ehlbeck, J. 1981.
- [97] Stein, E.,
Kessel, M.H.: Numerische Methoden und deren Konvergenz zur statischen Berechnung geometrisch nichtlinearer Stabwerke im unter- und überkritischen Bereich. Ingenieur-Archiv 46(1977), S. 323/335.
- [98] Stein, M.: The Influence of Prebuckling Deformations and Stresses on the Buckling of Perfect Cylinders. NASA, Technical Rep. R-190, Feb. 1964.
- [99] Tennyson, R.C.: An Experimental Investigation of the Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression Using the Photoelastic Technique. Rep. 102, Nov. 1964, Univ. of Toronto Institute for Aerospace Studies.

- [100] Thielemann, W.,
Esslinger, M.: Einfluß der Randbedingungen auf die Beul-
last von Kreiszylinderschalen.
Der Stahlbau 33(1964), H. 12, S. 353/361.
- [101] Thürlimann, B.: Der Einfluß von Eigenspannungen auf das
Knicken von Stahlstützen.
Schweizer Archiv 23(1957), S. 388/404.
- X[102] Timoshenko, S.: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizi-
tätstheorie.
Z. Math. Physik, 58. Band (1910) H. 4,
S. 337/385.
- [103] Toyoda, M.,
Terasaki, T.,
Sato, K.: Local Stress-Strains in Weld with particular
Reference to Weld Cracking.
Int. Inst. of Welding, Colloquium Applicat.
of Numerical Techniques in Welding, Dublin
1978.
- [104] Truesdell, C.
Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics.
In Handbuch der Physik, Band III/3. Heraus-
gegeben von S. Flügge, Springer Verlag
Berlin/Heidelberg/New York 1965.
- [105] Tvergaard, K.: Buckling Behaviour of Plate and Shell
Structures. Theoretical and Applied
Mechanics, W.T. Koiter (ed.), North-Holland
Publishing Company, Amsterdam (1976),
pp. 233/247.
- [106] Unger, B.: Zur Weiterentwicklung des Tragfähigkeits-
nachweises bei beulgefährdeten Platten.
Bauingenieur 52(1977), S. 327/337.
- [107] Urban, W.: Über das Verhalten eines Trägers mit Dop-
pel-T-Profil im plastischen Bereich unter
Berücksichtigung der Eigenspannungen und
der unterschiedlichen Fließgrenze nach Theo-
rie und Versuch. Dissertation TU Berlin 1974.

- [108] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity.
Sec. Ed. Pergamon Press 1975.
- [109] Wempner, G.A.: Discrete Approximations Related to Non-linear Theories of Solids.
Int.J. Solids Struct. 7(1971), pp. 1581/1599.
- [110] Wessels, M.: Das statische und dynamische Durchschlagsproblem der imperfekten Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung. Diss. TU Hannover, 1977, Mitteil. Nr. 23 des Instituts für Statik.
- [111] White, J.D.,
Leggat, R.H.,
Dwight, J.B.: Weld Shrinkage Prediction. BOSS 79, Sec. Int. Conf. on Behaviour of Off-Shore Structures. Held at: Imperial College, London, England 28-31 August 1979.
- (X) [112] White, J.D.,
Dwight, J.B.: Weld Shrinkage in Large Stiffened Tubulars. Conf. on Residual Stresses in Welded Constructions. The Welding Institute, London, Nov. 1977, pp. 337/348.
- [113] Yamaki, N.,
Otomo, K.,
Matsuda, K.: Experiments on the Postbuckling Behavior of Circular Shells under Compression. Experim. Mechanics, Vol. 15(1975), pp.23/28.
- [114] Yamada, Y.,
Yoshimura, N.,
Sakurai, T.: Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method.
Int. J. Mech. Sci. Vol.10(1968), pp. 343/354.
- [115] Zienkiewicz, D.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, Sec. Ed. McGraw Hill, London 1971.

[116] Normen und Richtlinien:

DAST-Richtlinie O13, Beulsicherheitsnachweise für Schalen,
Deutscher Ausschuß für Stahlbau, Ausgabe Juli 1980.

AD-Merkblatt H1: Schweißen von Druckbehältern aus Stahl,
Ausgabe 4/1968.

DIN 4119: Oberirdische zylindrische Flachboden-Tankbau-
werke aus metallischen Stoffen, Ausgabe Juni 1979.

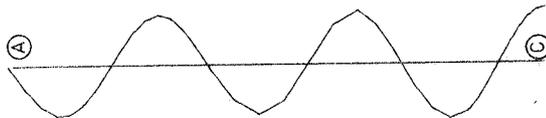
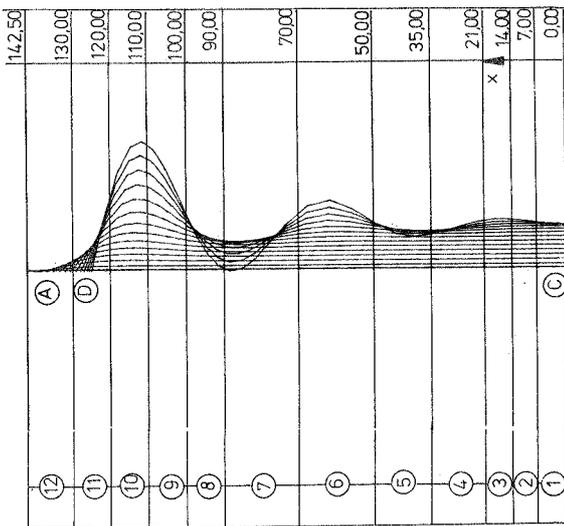
ASME-Code: Metal Containment Shell Buckling Design Methods,
Section III, Division 1, Class MC 1980.

ÖNORM B 4650, Teil 4, Stahlbau;
Beulung von Kreiszyinderschalen, Ausgabe Nov. 1977.

European Convention for Constructional Steelwork:
Recommendations for Steel Construction, Section 4.6
Buckling of Shells 1979 (ECCS-Recommendations).

Det Norske Veritas: Rules for the Design Construction and
Inspection of Offshore Structures 1977, Appendix C,
Steel Structures.

Anhang Plottbilder

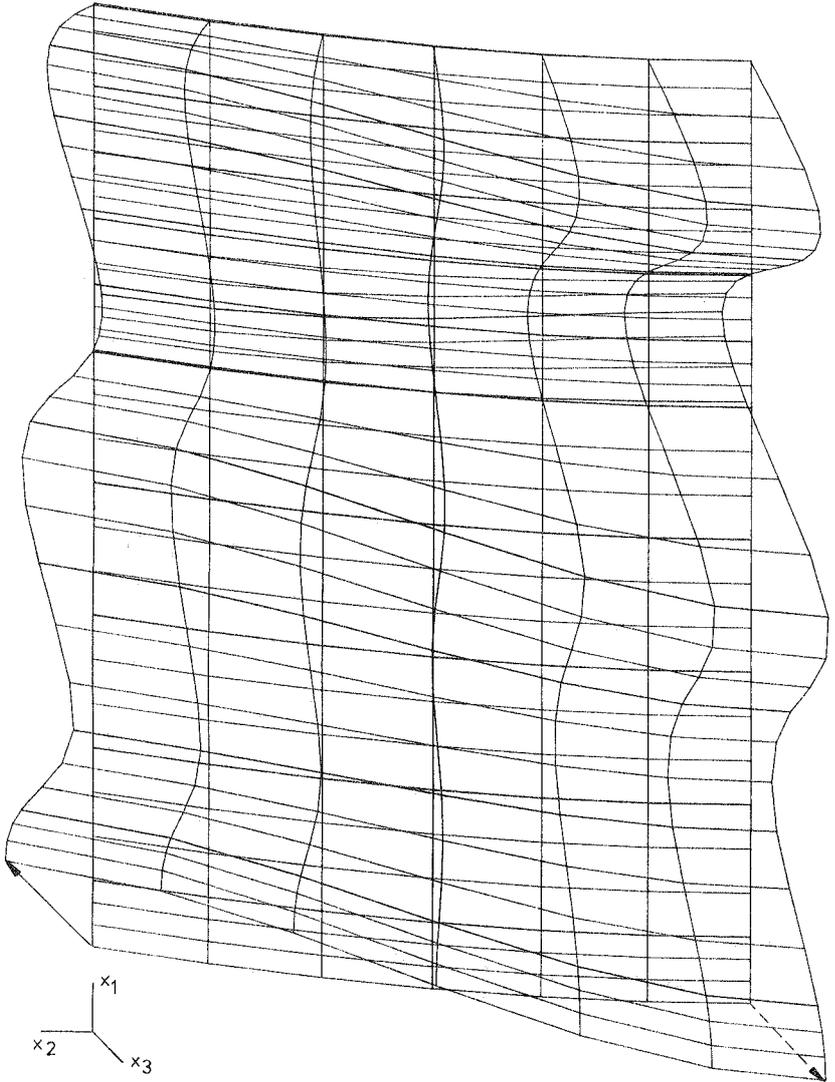


2. Eigenform

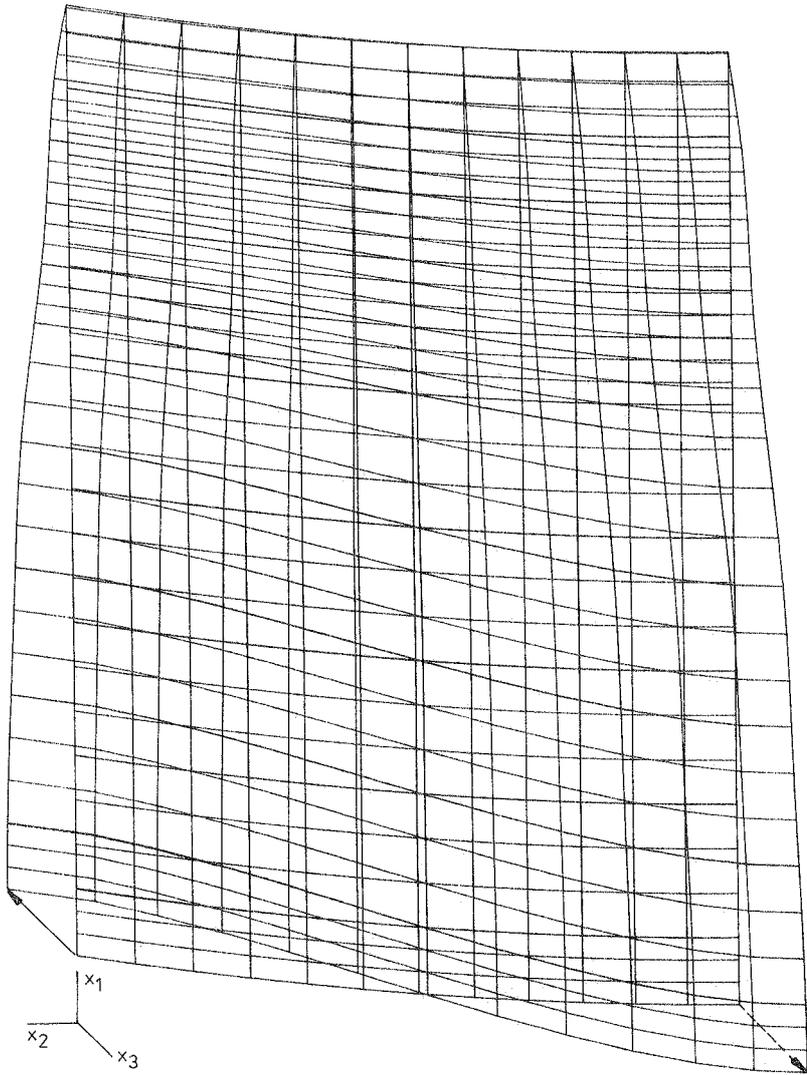
1. Eigenform

<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (I), 12 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.099 - 0.93$
<u>Plottbild A1:</u>	Verschiebungsfiguren

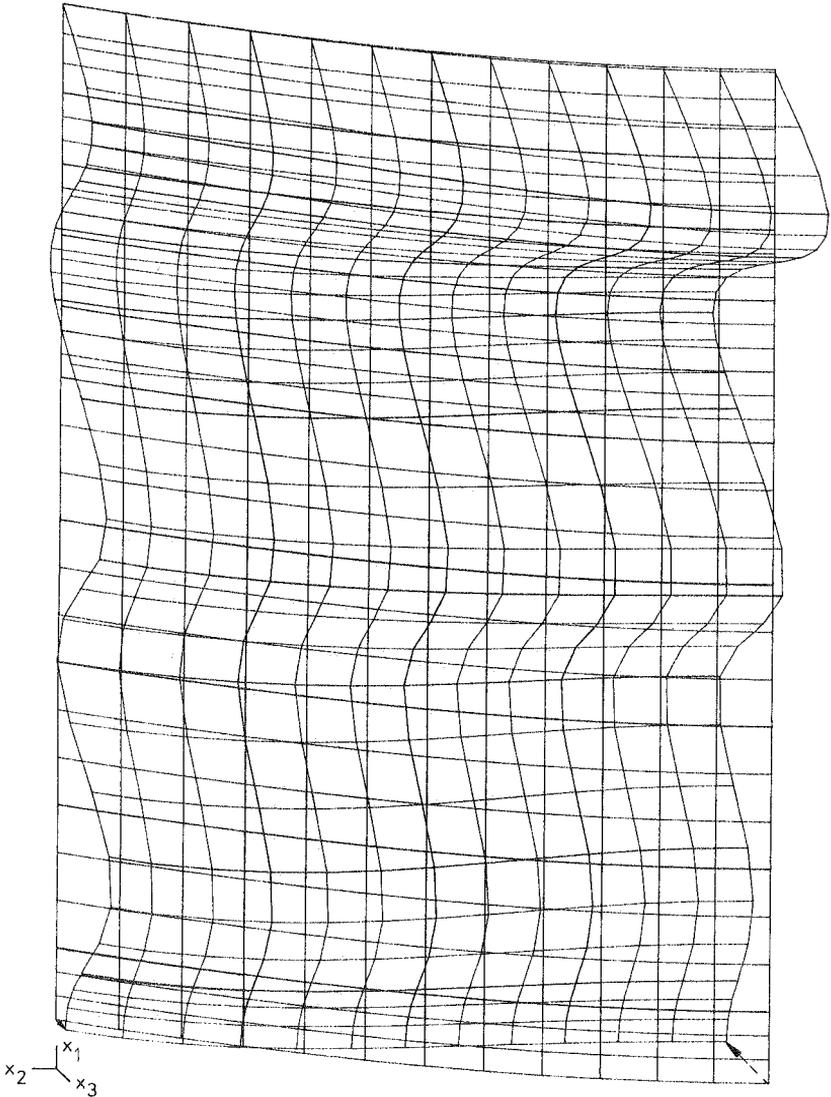
<u>Imperfektion:</u>	keine
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (I), 12 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.01$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	$\lambda_1 = 99.84 + \rho(kr) = 0.998$
<u>Plottbild A2:</u>	Eigenformen



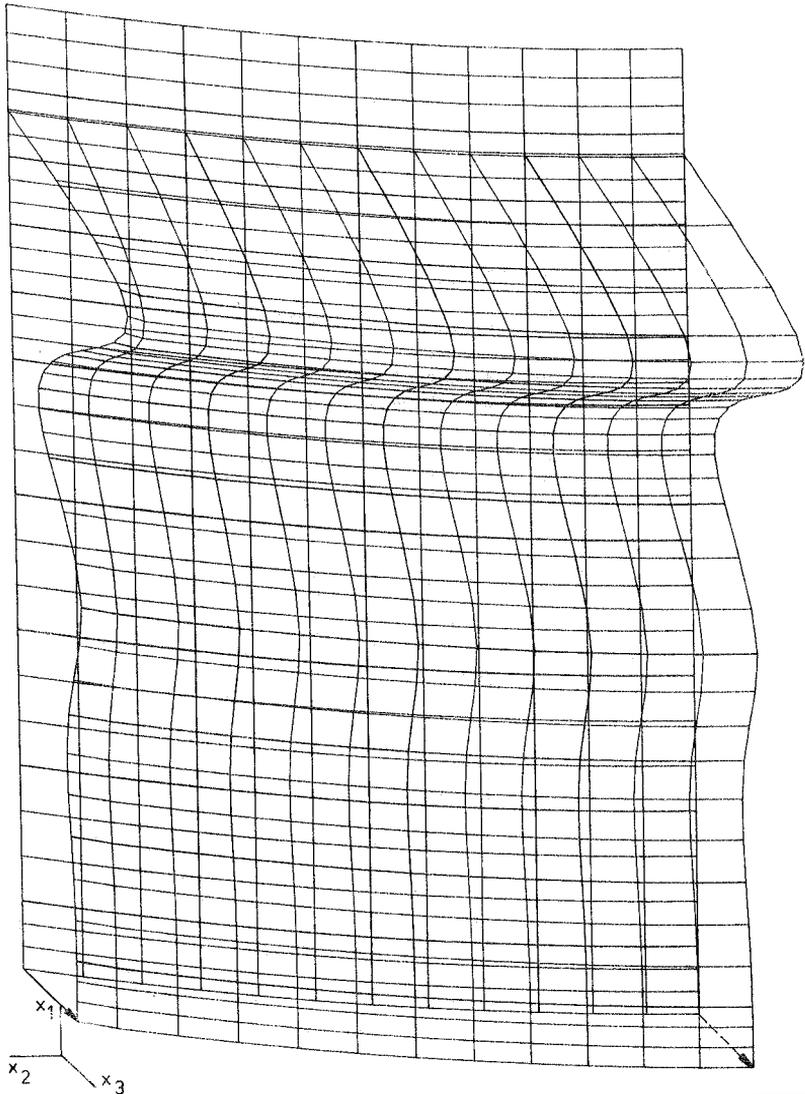
<u>Imperfektion:</u>	keine
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II) , 10 x 2 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.0995$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 10.025 \rightarrow \rho(kr) = 0.998$
<u>Plottbild A3:</u>	Eigenform



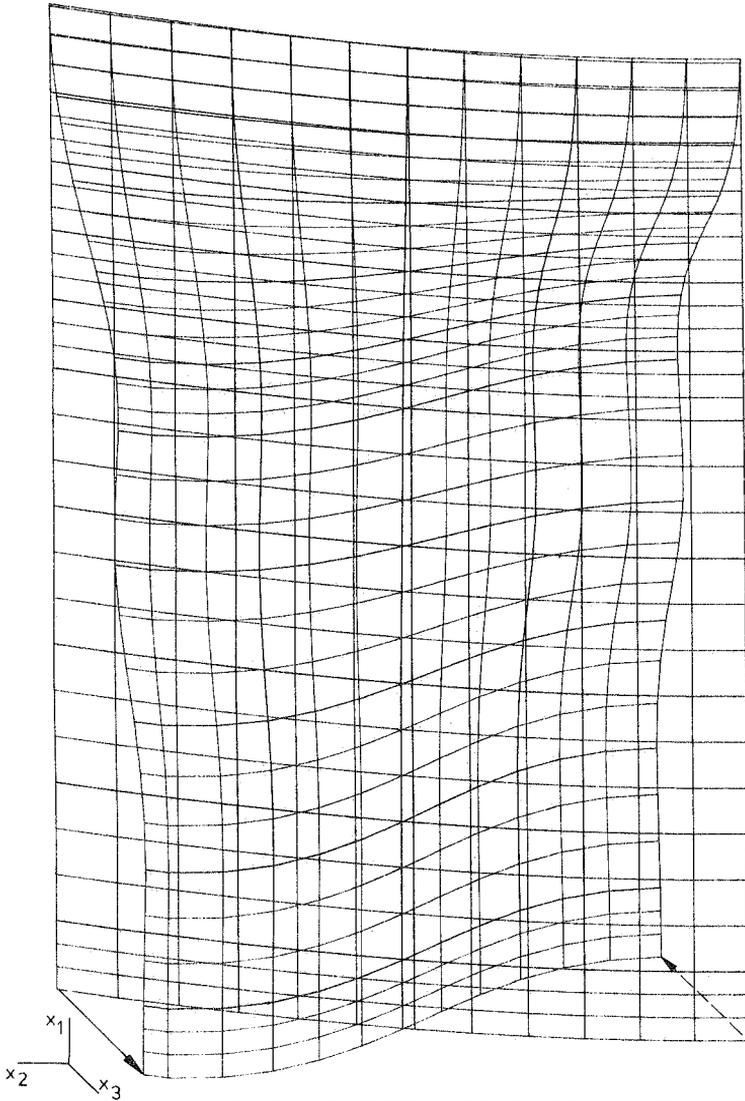
<u>Imperfektion:</u>	keine
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II) , 10 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.0995$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 9.892 \rightarrow \rho(kr) = 0.984$
<u>Plottbild A4:</u>	Eigenform



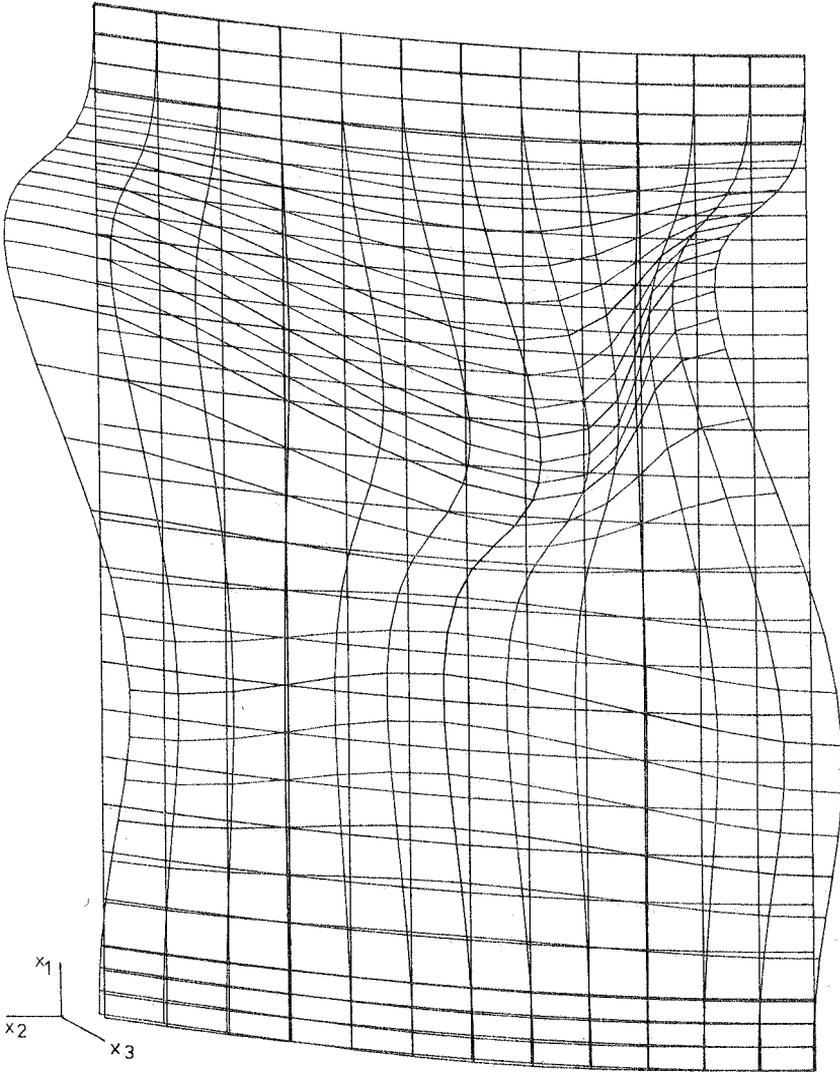
<u>Imperfektion:</u>	keine
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II) , 10 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.0995$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 10.052$
<u>Plottbild A5:</u>	Eigenform



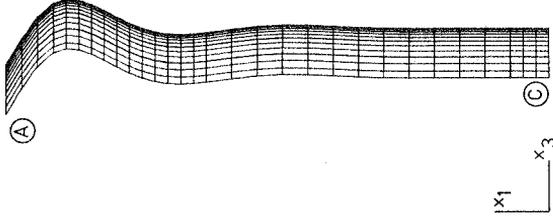
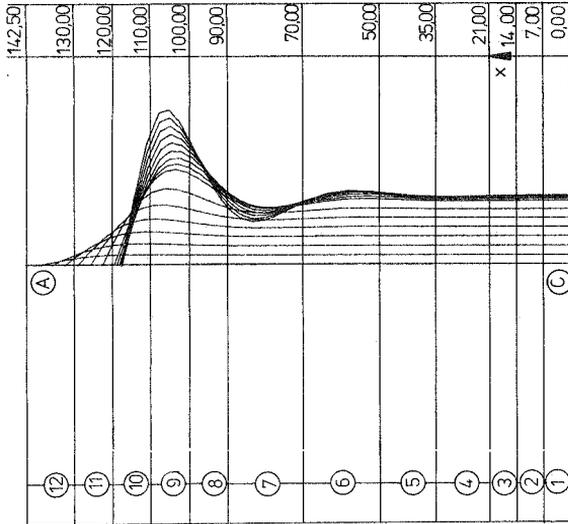
<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II), 10 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.865$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A6:</u>	Verschiebungsfigur



<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II), 10 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.865$ (VZW = 1)
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 0.993 \rightarrow \rho(kr) = 0.859$
<u>Plottbild A7:</u>	Eigenform

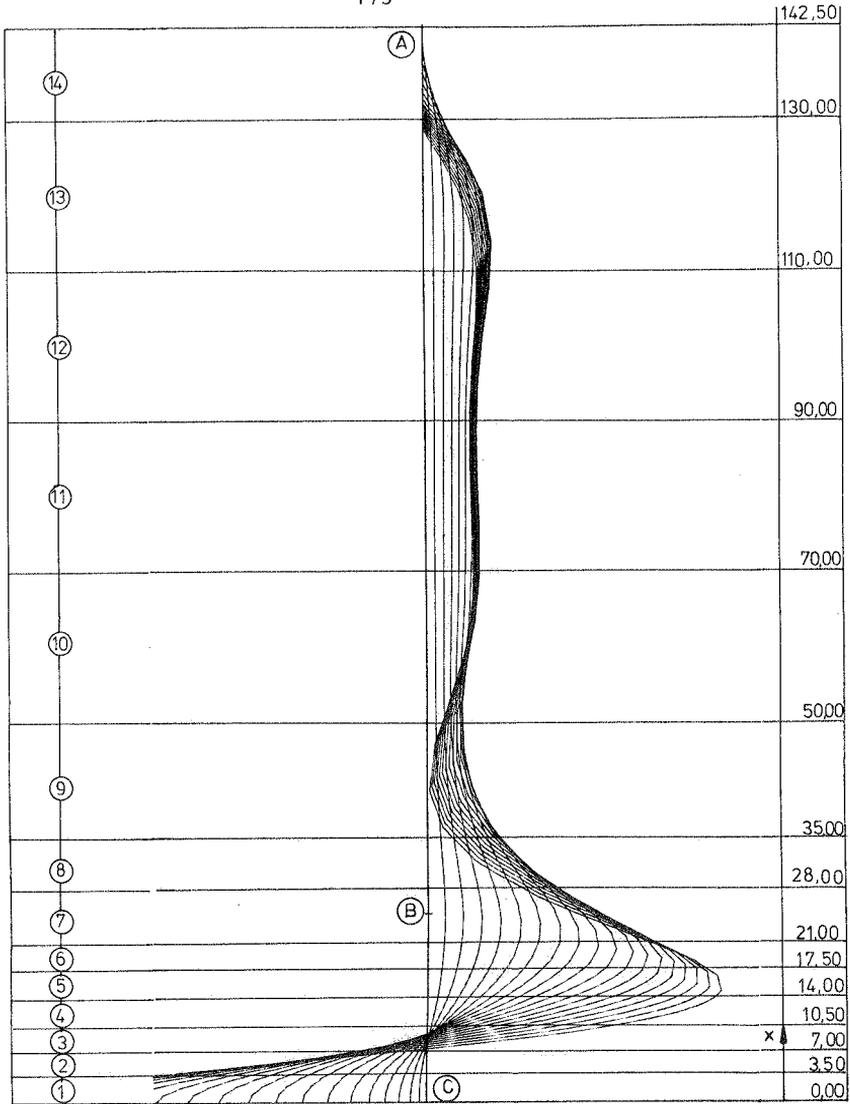


<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. $\textcircled{\text{II}}$, 10×4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ ($n=12$)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.865$ (VZW = 1)
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 1.073$
<u>Plottbild A8:</u>	Eigenform

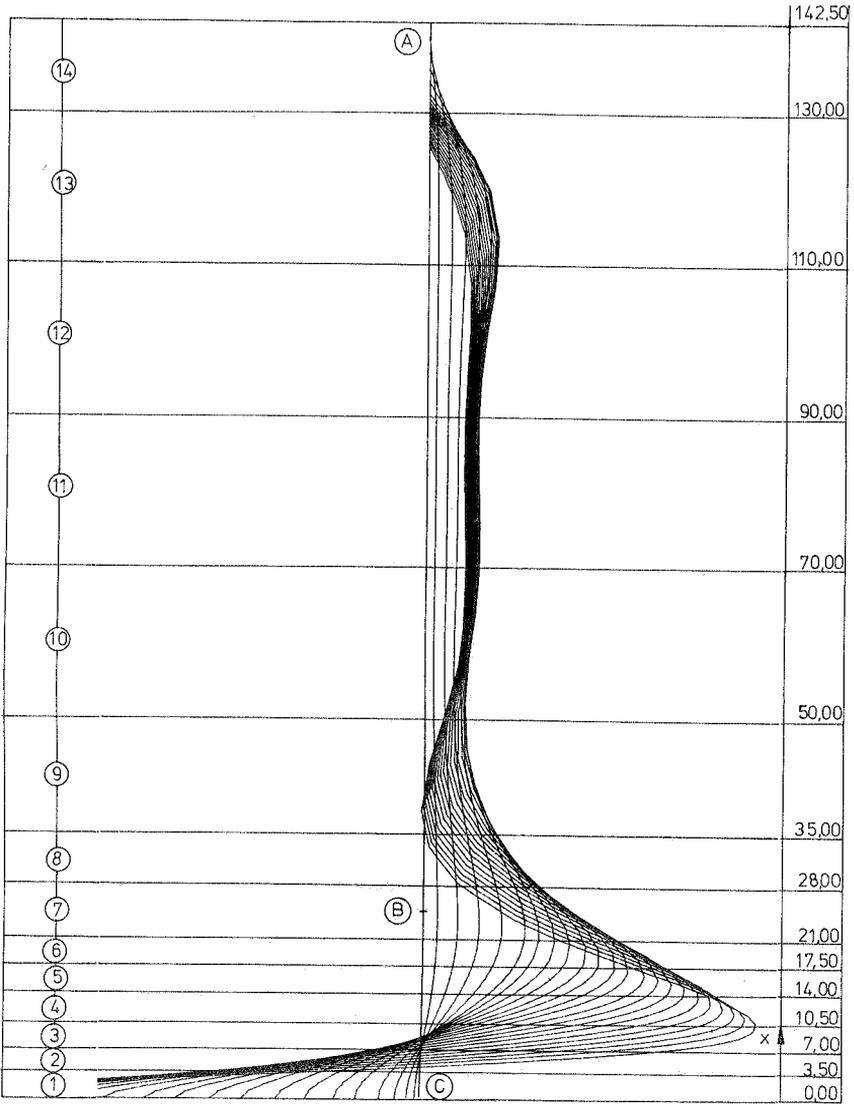


<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (I) , 12 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.099 - 0.694$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A9:</u>	Verschiebungsfiguren

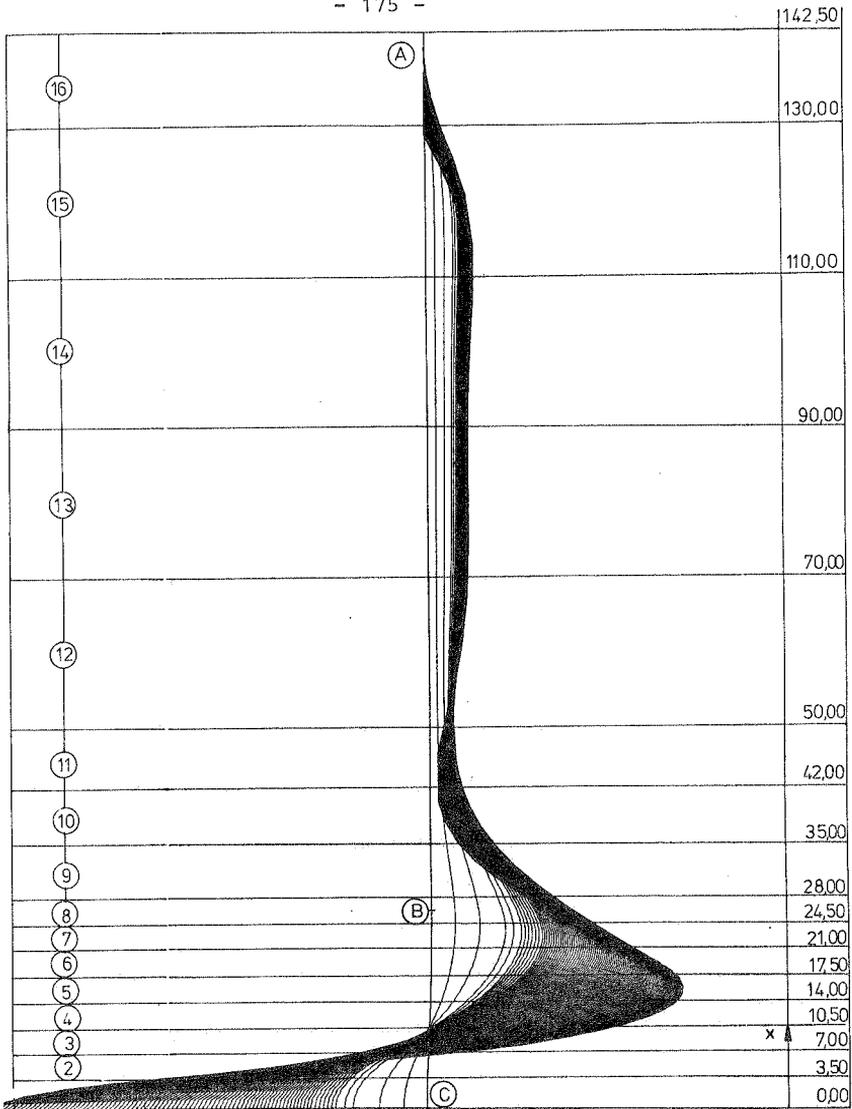
<u>Imperfektion:</u>	keine, Biegerandstörung
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II) , 10 x 4 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.713$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A10:</u>	Verschiebungsfigur



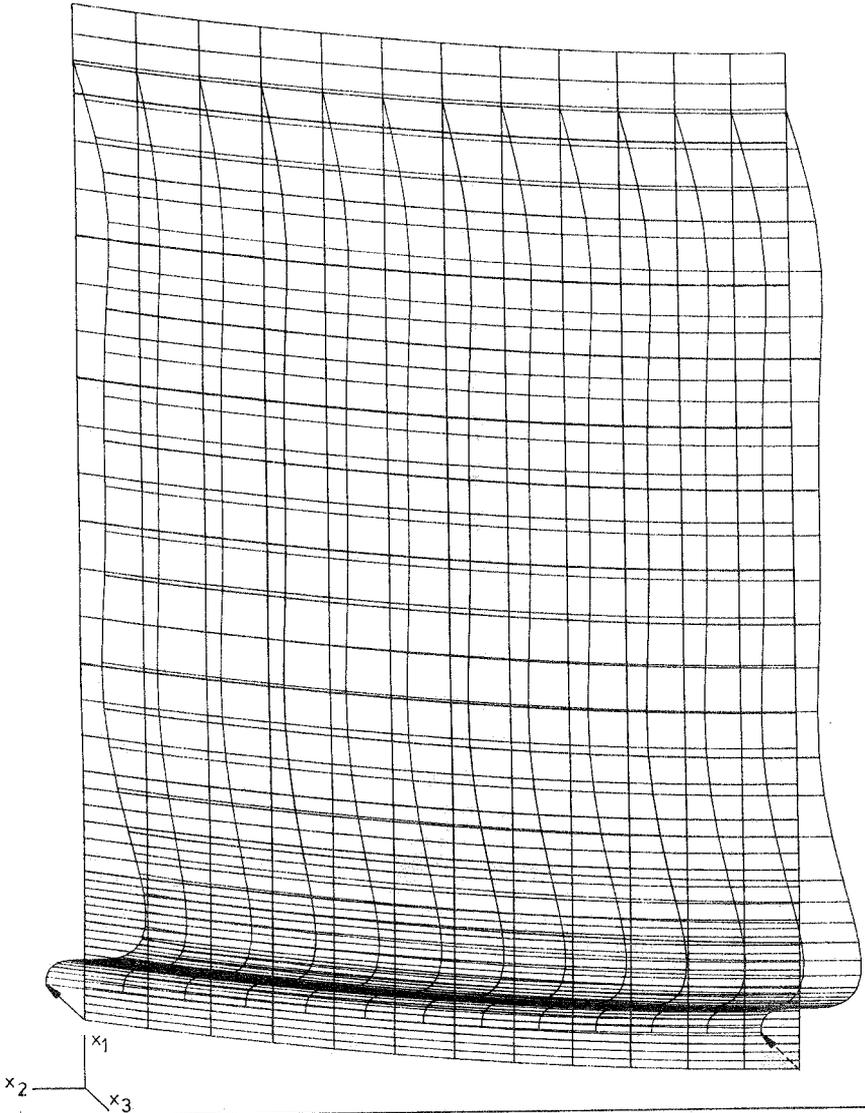
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①, 14 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.099 - 0.44$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A11:</u>	Verschiebungsfiguren



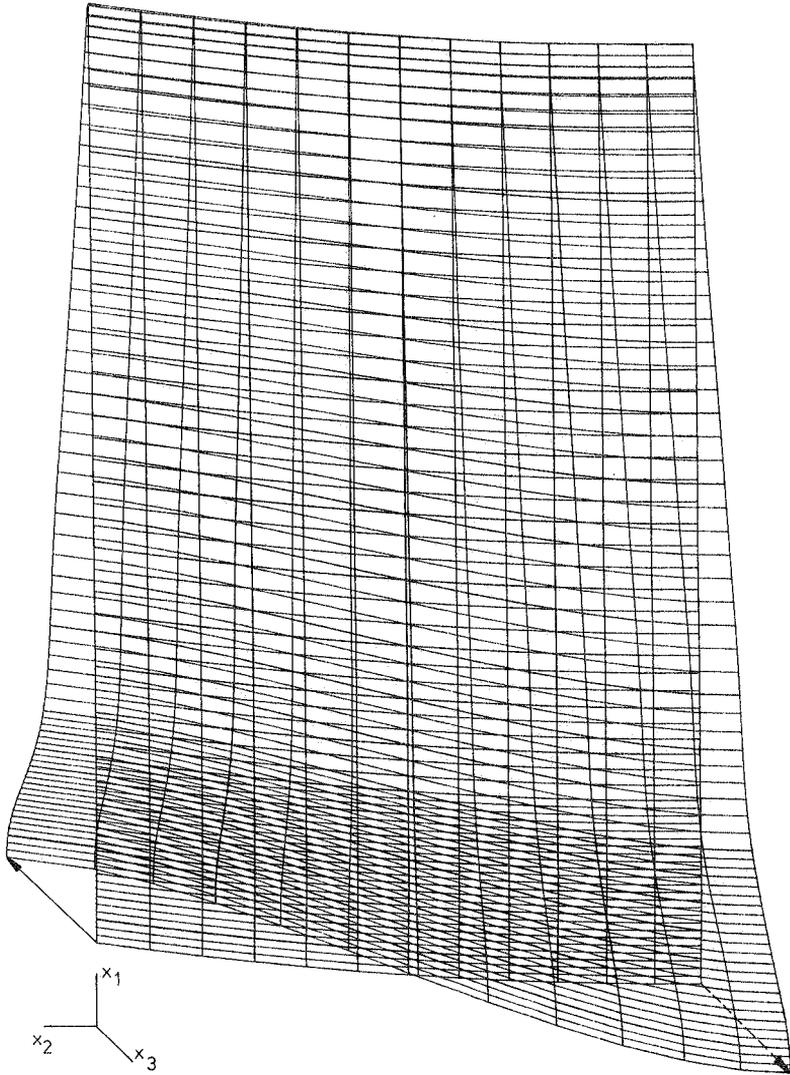
<u>Imperfektion:</u>	IMP ② , $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ① , 14 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.098 - 0.378$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A12:</u>	Verschiebungsfiguren



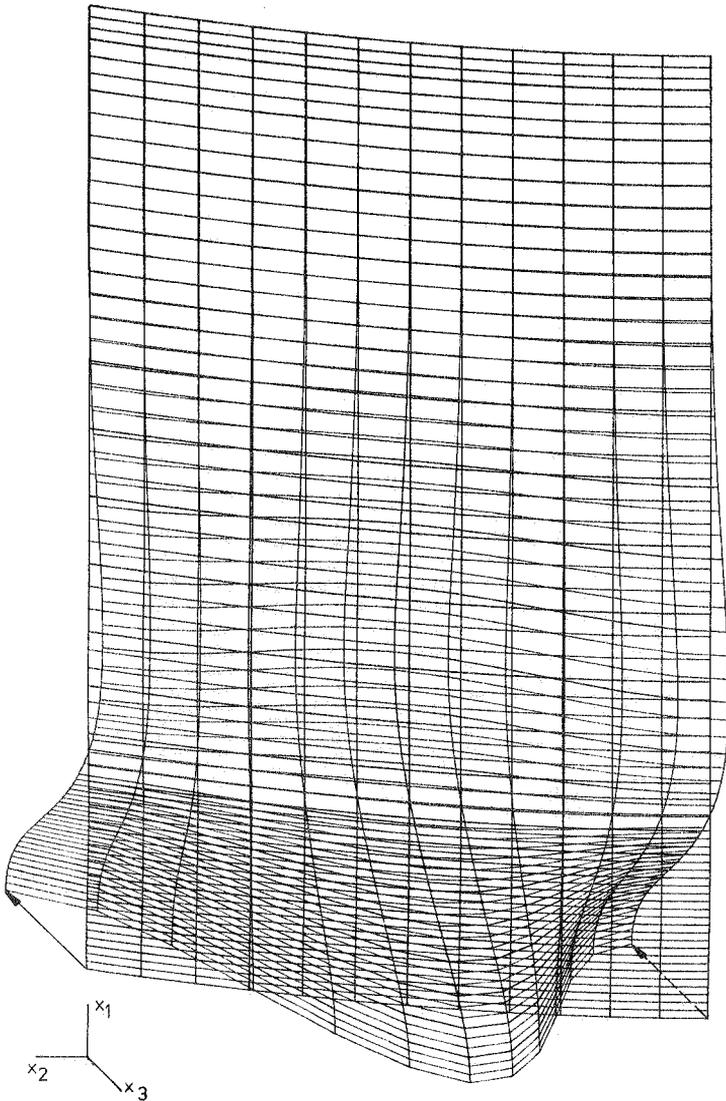
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 1.0$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①, 16 Elemente
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.098 - 0.378$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A13:</u>	Verschiebungsfiguren



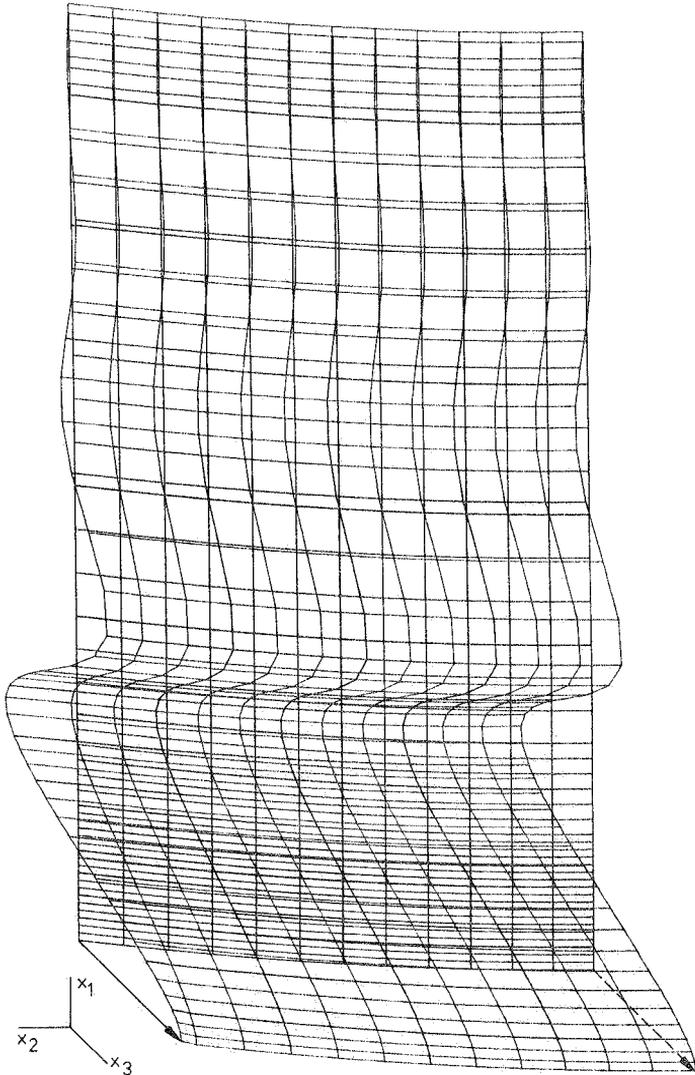
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 14 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.419$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A14:</u>	Verschiebungsfigur



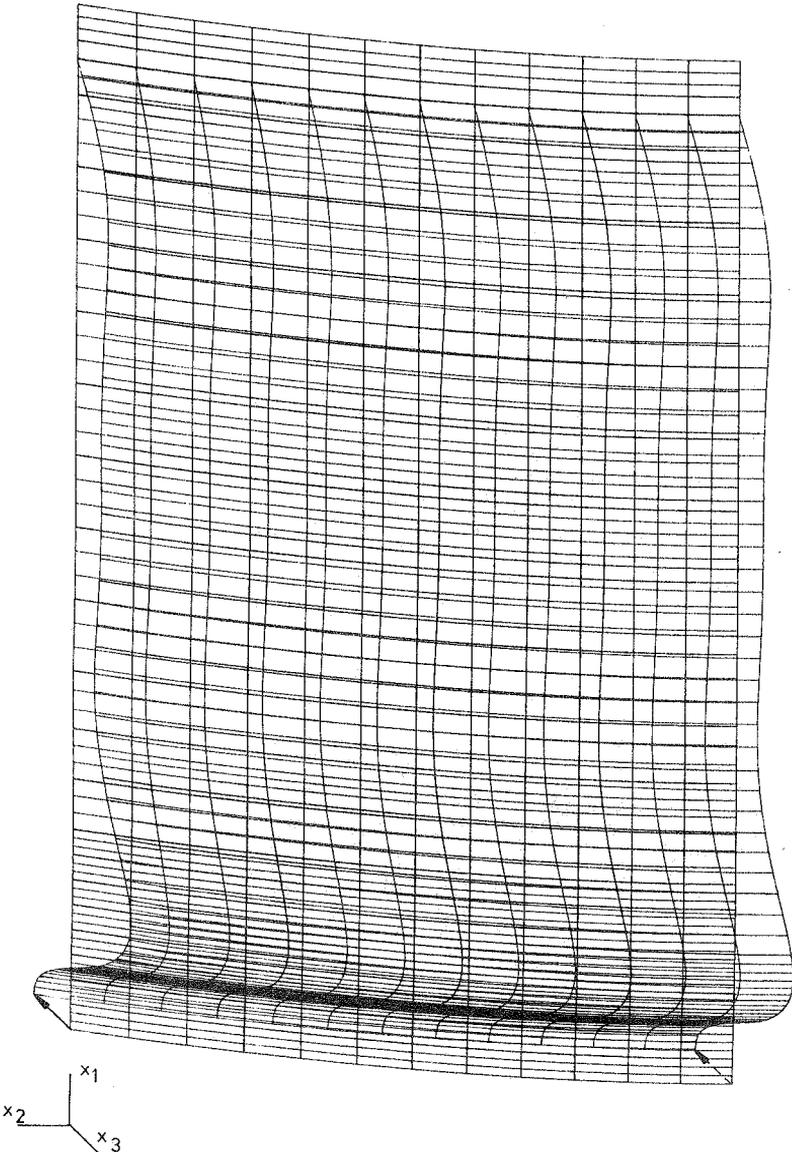
<u>Imperfektion:</u>	IMP ① , $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ② , 21 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.415$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 1.00 + \rho(kr) = 0.415$
<u>Plottbild A15:</u>	Eigenform



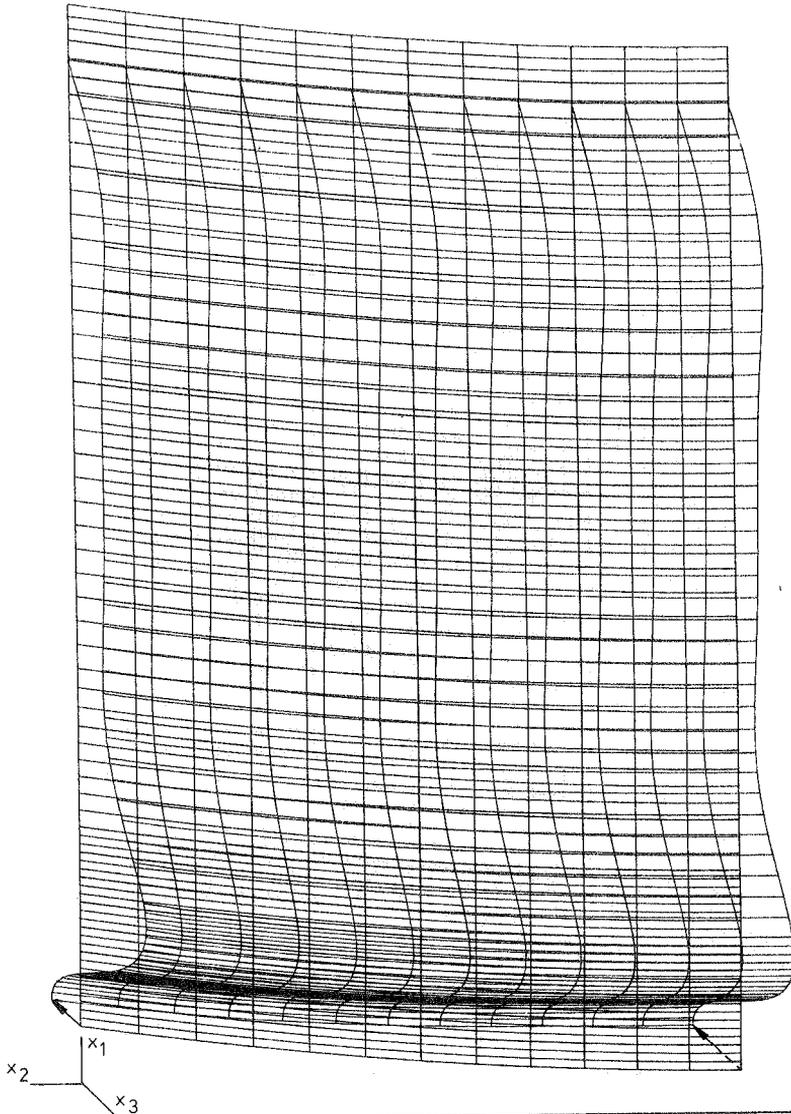
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 21 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.415$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 1.66$
<u>Plottbild A16:</u>	Eigenform



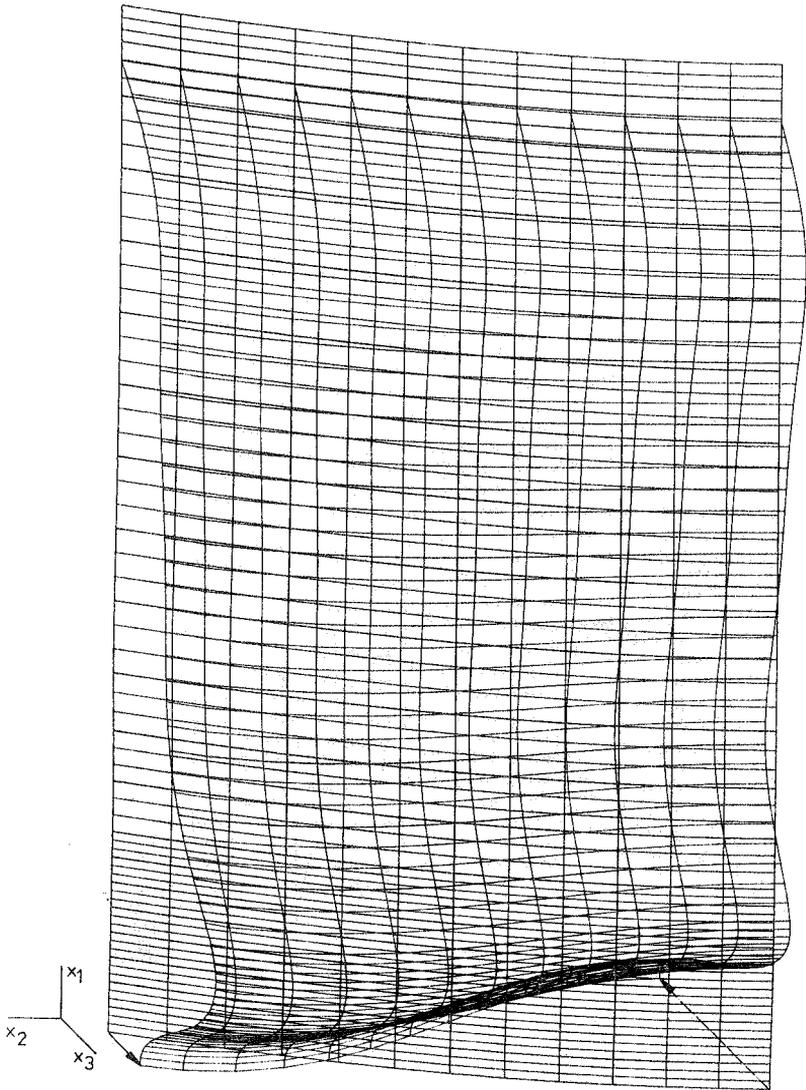
<u>Imperfektion:</u>	IMP ① , max $\epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①① , 14 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 12^\circ$ (n=15)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.428$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 2.04$
<u>Plottbild A17:</u>	Eigenform



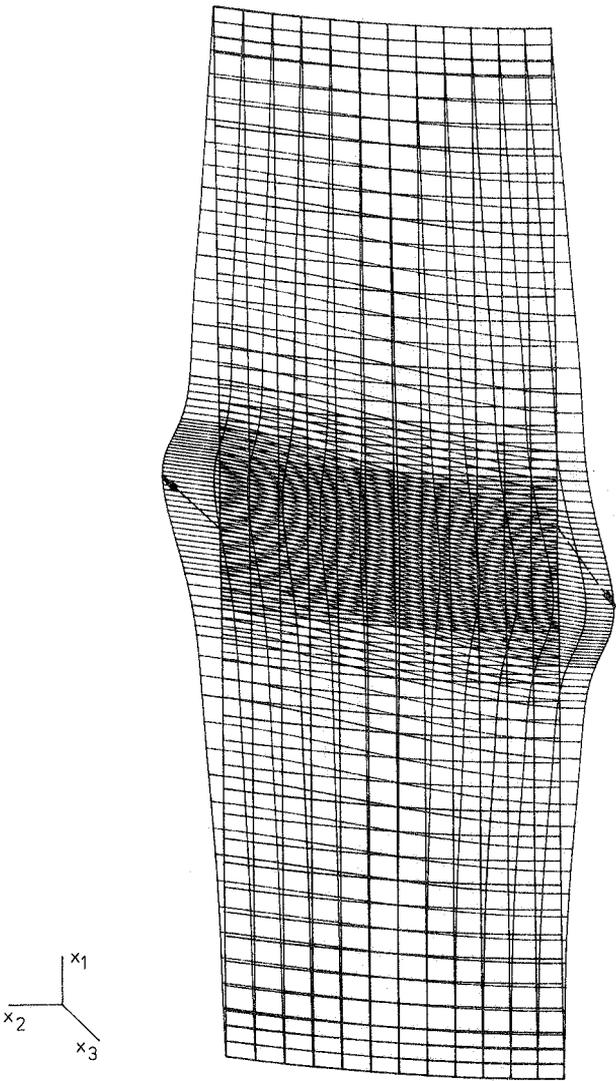
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 21 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.406$
<u>Plottbild A18:</u>	Verschiebungsfigur



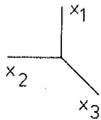
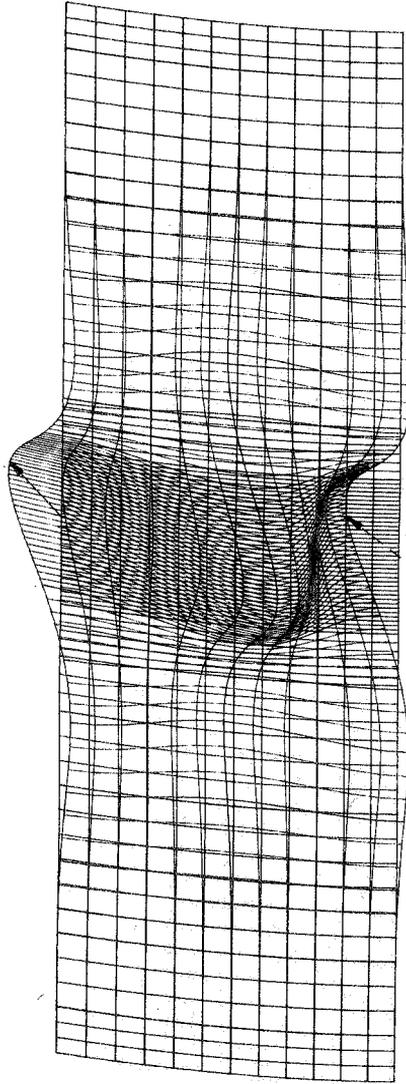
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①①, 21 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.414$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A19:</u>	Verschiebungsfigur



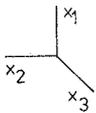
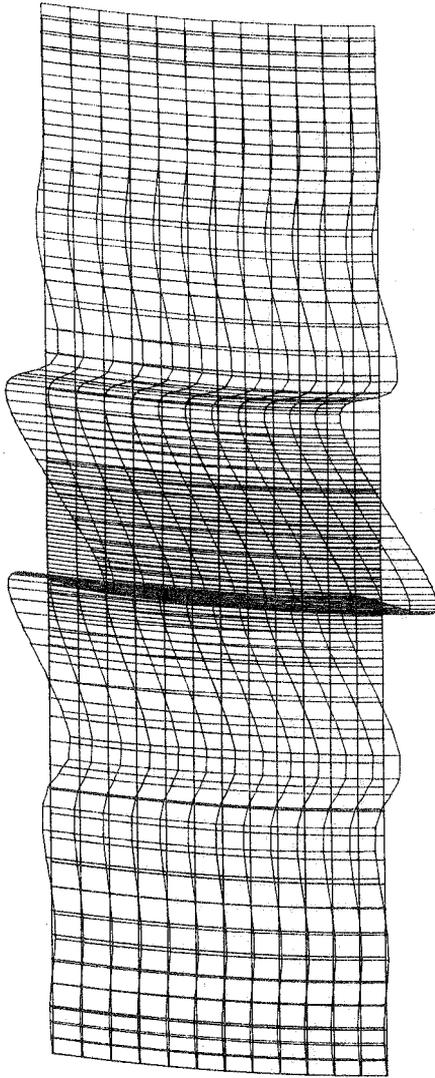
<u>Imperfektion:</u>	IMP (1), $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. (II), 21 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.405$ (VZW = 1)
<u>Plottbild A20:</u>	Verschiebungsfigur



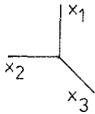
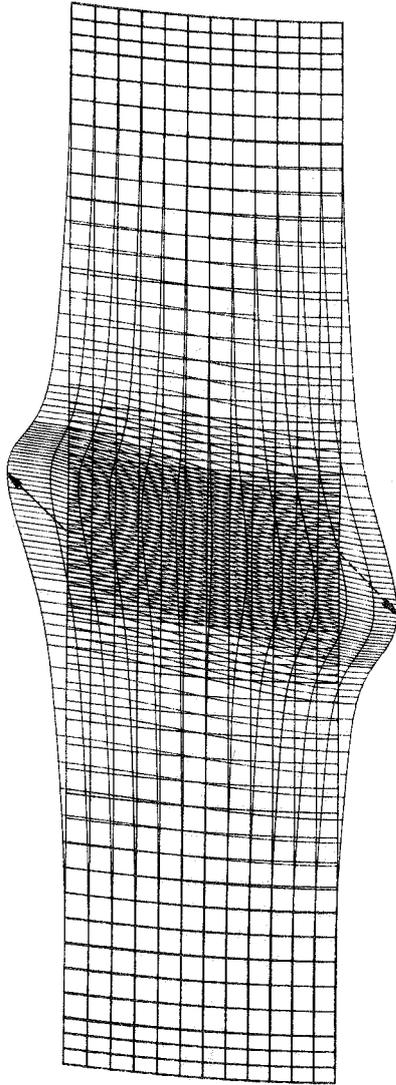
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 28 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.415$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 1.079 \rightarrow \rho(kr) = 0.449$
<u>Plottbild A21:</u>	Eigenform



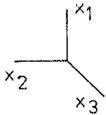
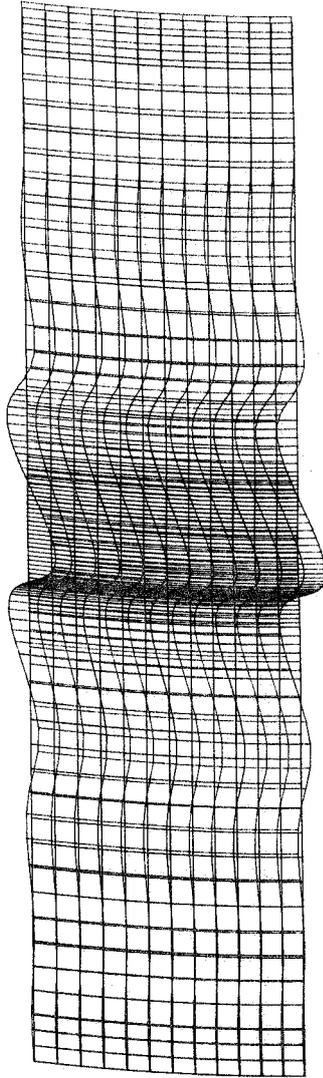
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_V = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 28 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 13.846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.415$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 1.66$
<u>Plottbild A22:</u>	Eigenform



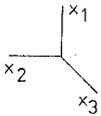
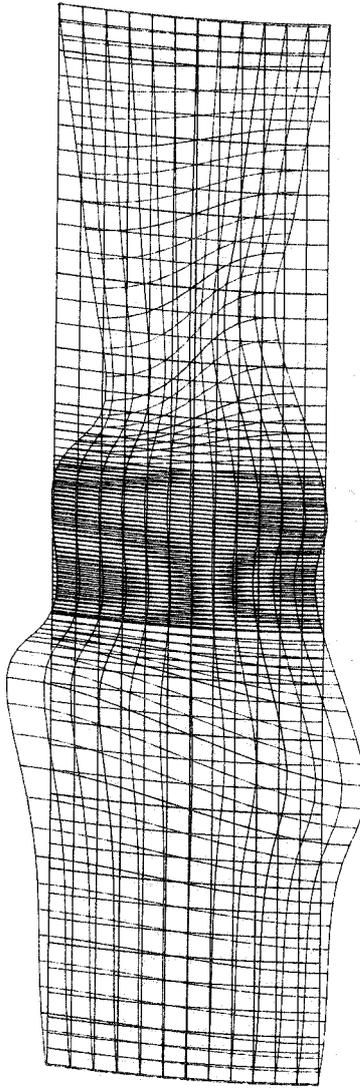
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①①, 28 x 4 Elemente, $\Delta\psi = 13,846^\circ$ (n=13)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.415$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	3. Eigenform, $\lambda_3 = 2.10$
<u>Plottbild A23:</u>	Eigenform



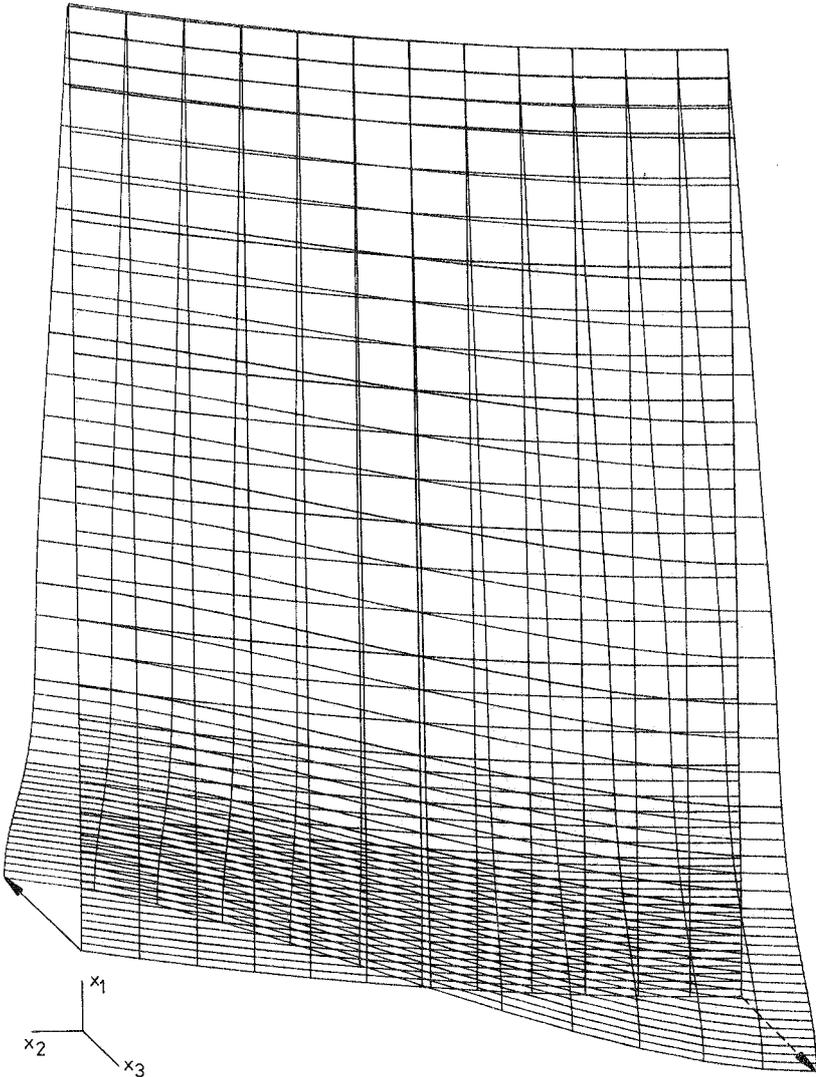
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 28 x 4 Elemente, $\Delta\psi = 11.25^\circ$ (n=16)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.425$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 1.029 \rightarrow \rho(kr) = 0.437$
<u>Plottbild A24:</u>	Eigenform



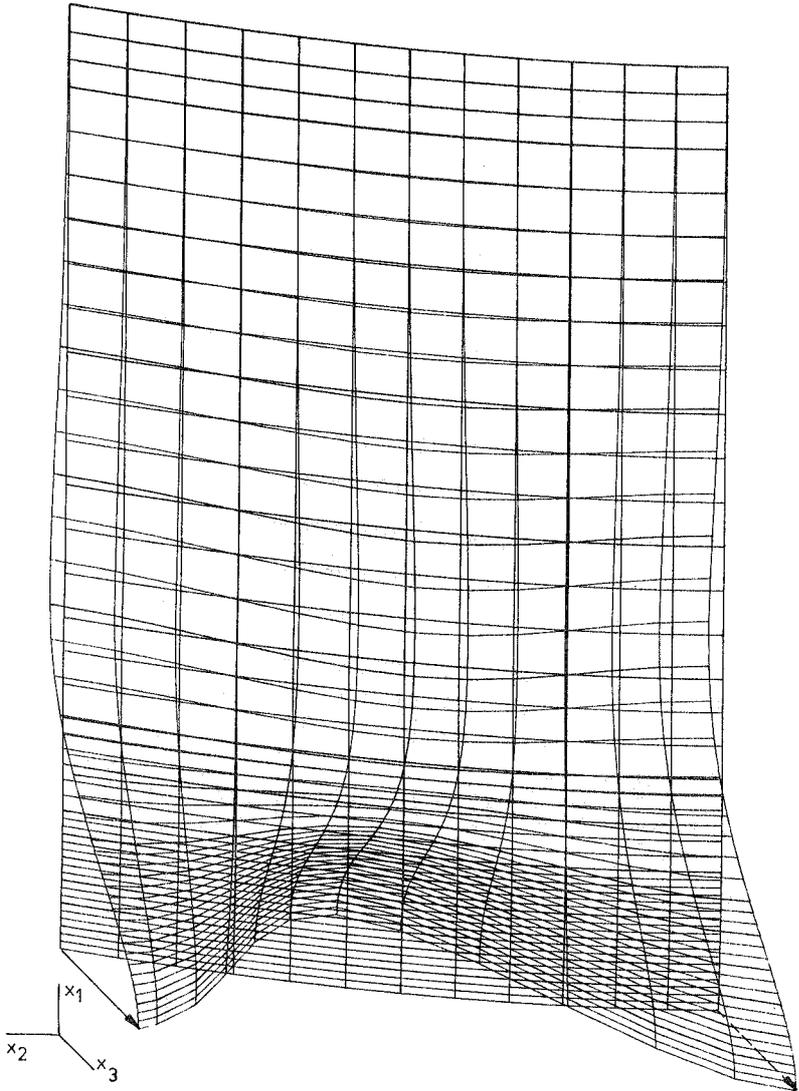
<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ⑪, 28 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 11.25^\circ$ (n=16)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.425$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 2.06$
<u>Plottbild A25:</u>	Eigenform



<u>Imperfektion:</u>	IMP ①, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ②, 28 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 11.25^\circ$ (n=16)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.425$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	3. Eigenform, $\lambda_3 = 2.08$
<u>Plottbild A26:</u>	Eigenform



<u>Imperfektion:</u>	IMP ②, $\max \varepsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①①, 14 x 4 Elemente, $\Delta\varphi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.478$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	1. Eigenform, $\lambda_1 = 1.00 \rightarrow \rho(kr) = 0.478$
<u>Plottbild A27:</u>	Eigenform



<u>Imperfektion:</u>	IMP ②, $\max \epsilon_v = 0.5$
<u>FE-Idealisierung:</u>	R.M. ①①, 14 x 4 Elemente, $\Delta\psi = 15^\circ$ (n=12)
<u>Lastniveau:</u>	$\rho = 0.472$
<u>Eigenwertberechnung:</u>	2. Eigenform, $\lambda_2 = 1.34$
<u>Plottbild A28:</u>	Eigenform

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74 - 1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74 - 2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74 - 3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unter-
lage.
- 74 - 4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-
mente.
- 75 - 1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75 - 2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-
weiterten Trefftz-Methode.
- 75 - 3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76 - 1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76 - 2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77 - 1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78 - 1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79 - 1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79 - 2 H. -G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79 - 3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80 - 1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80 - 2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80 - 3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.