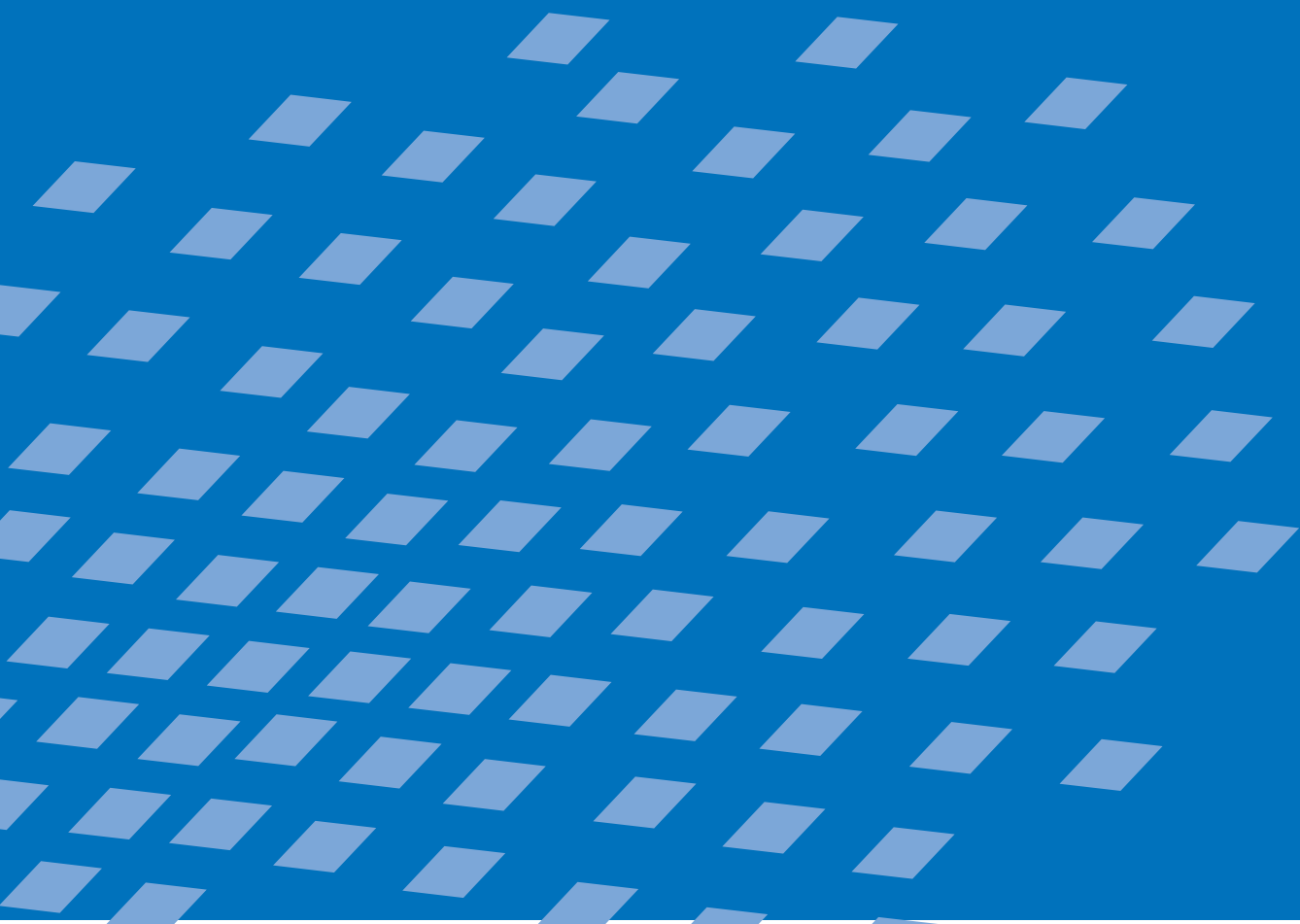




Universität Stuttgart
Institut für Baustatik
Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie

André Haufe



Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie

von

André Haufe

Bericht Nr. 35 (2001)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 2001



© André Haufe

Berichte können bezogen werden über:

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: 07 11 / 6 85 61 23

Fax: 07 11 / 6 85 61 30

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

ISBN 3-00-007418-X

Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

André Haufe

aus Kirchheim/Teck-Nabern

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Günter Hofstetter

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Februar 2001

Zusammenfassung

Aufbauend auf ein geschichtetes, dreidimensional orientiertes Schalenmodell werden Material- und Strukturmodelle für bewehrte Betontragwerke entwickelt und anhand von Versuchen aus der Literatur mittels der Methode der Finiten Elemente untersucht. Hierfür werden zunächst die Besonderheiten des Strukturmodells, die sich aus der Verwendung einer dreidimensionalen Schalenformulierung mit Differenzvektoransatz ergeben, für C^0 - und C^1 -kontinuierliche Verschiebungsfelder über die Schalendicke herausgearbeitet. Auf der Seite der Materialmodelle werden die Möglichkeiten zur numerischen Simulation kohäsiver Reibungsmaterialien mittels unmodifizierter dreidimensionaler Materialgesetze vorgestellt und für die Anwendung zur nichtlinearen Struktursimulation im Rahmen der weiteren Arbeit bewertet. Hier zeigt sich, dass die phänomenologische Abbildung der Materialantwort durch hoch entwickelte Plastizitätsmodelle kombiniert mit einfachen Schädigungsansätzen eine sinnvolle Kombination zur Struktursimulation darstellt.

Für reinen Beton wird daher zum einen ein Vorschlag von Menrath [121], ein assoziiertes Mehrflächenplastizitätsmodell für ebene zweidimensionale Tragwerke des ebenen Spannungszustands, basierend auf den ersten beiden Invarianten des Spannungstensors bzw. -deviators, auf das Schalenmodell erweitert; zum anderen wird ein von Kang [84] vorgeschlagenes nichtassoziertes Einflächenmodell, das alle drei Invarianten des Spannungstensors berücksichtigt, weiter entwickelt. Es werden insbesondere die algorithmischen Aspekte der Zeitdiskretisierung für eine effiziente Implementierung des Einflächenmodells, bedingt durch dessen komplexe Ableitungen der Fließfläche nach den Spannungskomponenten, beleuchtet. Für beide Modelle werden entfestigende Evolutionsgesetze, die die freiwerdende Bruchenergie als Parameter verwenden, eingesetzt. Für den lokalen Entlastungszustand innerhalb statischer Belastungspfade kommt ein skalares Schädigungsmodell zum Einsatz. Die Grundproblematik entfestigender Materialformulierungen, der Verlust der Elliptizitätseigenschaft der zugrunde liegenden Differenzialgleichung und somit die Abhängigkeit der Lösung von der Netzdichte und -orientierung, wird durch den inneren Längenparameter der Bruchenergie gemildert. Es ist jedoch festzuhalten, dass durch diese Vorgehensweise die Berechnungsergebnisse immer noch in geringem Maße von der Netzausrichtung geprägt sind. Weitere Untersuchungen zum Lokalisierungsverhalten der beiden Stoffmodelle zeigen den erwarteten Verlust der Eindeutigkeit bereits im verfestigenden Belastungsast des nichtassozierten Modells. Anhand numerischer Modellprobleme wird die Hierarchie der Versagensindikatoren diskutiert. Der Ansatz viskoplastischer Regularisierung zur Bewahrung der Hyperbolizität des Randwertproblems wird näher untersucht. Während sich eine regularisierende Wirkung bei Materialien mit ausgesprochen viskoser Charakteristik nachweisen lässt, ist die Anwendung auf Beton bei quasi-statischer Belastung nicht motivierbar.

Die Bewehrung wird durch ein nichtlineares, auf der klassischen Plastizitätstheorie aufbauendes orthotropes Stoffmodell berücksichtigt. Es werden unterschiedliche Evolutionsgesetze für stählerne und textile Bewehrung untersucht und im Hinblick auf den *tension-stiffening*-Effekt diskutiert. Die räumliche Wirkung textiler Bewehrungsstrukturen (Gelege, Gewirke etc.) wird innerhalb eines schubweichen Ansatzes in allen drei Raumrichtungen erfasst.

Anhand von Modellproblemen werden notwendige Modellparameter der Materialformulierungen identifiziert. Durch numerische Simulation geeigneter Belastungsversuche von Platten, Schalen und Faltenwerken aus der Literatur werden die entwickelten Modelle verifiziert und ihre praktische Aussagekraft bewertet.

Abstract

Based on a layered 3D-oriented shell formulation structural as well as material models for reinforced concrete structures are developed. Finite element analyses of experiments taken from the literature are used for validation. First the special properties of the layered 3D shell formulation which can be employed with C^0 - or C^1 -continuous displacement fields across the thickness direction will be pointed out. An overview of various possibilities to describe the full three dimensional constitutive relationship of cohesive frictional materials is given and discussed in view of the application in the structural model. It will be shown that the phenomenological description of the material behaviour by advanced plasticity models in combination with a simple approach from damage theory is a suitable means for the numerical simulation of concrete structures.

On the one hand an associated multi-surface plasticity-model for plain concrete which has been proposed by Menrath [121] for 2D-oriented structures obeying the plane stress condition and which is based on two invariants of the stress tensor, is expanded for the 3D shell formulation. On the other hand the non-associated single-surface plasticity-model of Kang [84] which incorporates all three stress invariants is developed further. Aspects of the time discretization of the single-surface model and its implementation are extensively discussed since the required derivatives are extremely involved. Both models exhibit softening evolution laws based on the fracture energy approach. The local unloading effects are taken into account through a simple scalar damage formulation. The main problem of softening materials in numerical investigations is the loss of ellipticity of the underlying differential equation which comes along with undesired effects like dependencies on the mesh orientation and the mesh density. Using a mesh adjusted internal length parameter is a common remedy of the problem, yet the results are slightly dependent on the mesh orientation.

The hierarchy of failure indicators is discussed using established model problems. Numerical investigations of both concrete models show the expected loss of uniqueness already in the hardening regime of the non-associated model. The approach of viscoplastic regularisation is investigated to maintain the well-posedness of the boundary value problem. Here regularising effects can be shown for viscoplastic materials but for concrete material under static loading this approach has been proven to be unsuitable.

The reinforcement is accounted for through an orthotropic constitutive model which is also based on classical plasticity theory with nonlinear or multilinear evolution laws. Different evolution laws are defined for steel and textile reinforcement and are discussed in view of the *tension-stiffening*-effect. The three dimensional load carrying behaviour of textile reinforcement structures (fabrics etc.) is accounted for within a shear deformable approach.

All necessary model parameters are identified by means of model problems. Numerical simulations of appropriate experiments of plates, shells and folded plates are used to verify the developed constitutive models and to show their significance for practical applications.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart von März 1995 bis September 2000.

Herrn Professor Ekkehard Ramm gebührt nicht nur der Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und die sich damit fast zwangsläufig ergebende Übernahme des Hauptberichts, sondern vor allem für seine stetige Förderung und Unterstützung, die sich insbesondere in den gebotenen vielfältigen Möglichkeiten über den „schwäbischen“ Tellerrand hinaus zu schauen widerspiegeln. Mit seiner vorgelebten Integrität und Menschlichkeit hat er nicht nur die wissenschaftlichen Pflichten eines Doktorvaters übernommen, sondern in der Kür ein nachahmenswertes Beispiel für meine Persönlichkeitsentwicklung geschaffen.

Zu großem Dank verpflichtet bin ich auch Herrn Professor Günter Hofstetter, der durch seine interessierte und kritische Prüfung des Manuskripts einen wertvollen Beitrag zur Qualität der Arbeit geliefert hat. Darüber hinaus hat er durch seine äußerst zügige Durchsicht zu einer Beschleunigung des Verfahrens beigetragen und dadurch den anschließenden Lebensabschnitt für meine Familie und mich überhaupt erst möglich werden lassen.

Ganz herzlich zu erwähnen sind auch die Kollegen am Institut. Der rege persönliche, wissenschaftliche und Wissen schaffende Austausch in Diskussionen, Vorträgen und Kaffeepausen hat maßgeblich zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen. Neben einigen speziellen Kollegen, deren aufrichtige Freundschaft ich zu schätzen weiß, ist dabei vor allem mein langjähriger Zimmernachbar, Forscherkollege und Freund Horst Menrath zu nennen, der in vielen Stunden durch Interesse und Diskussionsbereitschaft mein Fachwissen mit erschaffen hat.

Meinen Eltern, Hannelore und Siegfried Haufe, möchte ich ebenso wie meiner Schwiegermutter Renate Kruepper für die stets gewährte Hilfsbereitschaft und das entgegengebrachte Verständnis und Vertrauen – gerade auch in den letzten Phasen der Arbeit – danken.

Und *last but not least* will ich meine Familie erwähnen. Meiner lieben Frau Susanne, die durch die ein oder andere Entbehrung, aber auch ihre tatkräftige und motivierende Unterstützung diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht hat, möchte ich hier ein ganz herzliches Dankeschön aussprechen. Nicht zu vergessen sind auch meinen beiden Söhne Carl Niklas und Paul Jannik, die sehr viel Glück und Freude in mein Leben gebracht haben und damit maßgeblich den willkommenen und notwendigen Ausgleich in den Schaffenspausen gestalteten.

André Haufe

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung	1
1.2	Problemstellung und Ziel der Arbeit	2
1.3	Gliederung	4
2	Grundlagen zum verwendeten 3D-Schalenelement	5
2.1	Dreidimensionales Kontinuum	5
2.1.1	Beschreibung von Deformationen und Verzerrungen	5
2.1.2	Spannungsmaße	9
2.1.3	Prinzip der virtuellen Arbeit	10
2.1.4	Prinzip von Hu-Washizu	11
2.1.5	Konstitutive Beziehung für elastische Werkstoffe	13
2.2	Linearisierung	14
2.3	Kinematik eines 3D-Schalenmodells	15
2.3.1	Übersicht	15
2.3.2	Beschreibung der Deformationen	16
2.3.3	Schnittgrößen und Vorabintegration des Materialgesetzes ...	17
2.3.4	Behandlung von Schalenknicken	19
2.4	Ansätze höherer Ordnung in Dickenrichtung	19
2.4.1	Geschichtetes Schalenmodell	20
2.4.2	Ansatz mit erweiterten Verzerrungen	22
3	Charakteristika der angewendeten Materialien	24
3.1	Beton	24
3.1.1	Allgemeines	24
3.1.2	Einaxiale Beanspruchung	25
3.1.3	Biaxiale Beanspruchung	27
3.1.4	Triaxiale Beanspruchung	28
3.2	Bewehrung	29
3.2.1	Baustahl	29
3.2.2	Textile Fasern	29
4	Werkstoffmodelle für Beton	33
4.1	Übersicht	33
4.2	Einordnung und alternative Modelle	33
4.2.1	Kontinuumsmodelle	34
4.2.2	Diskrete Modelle	36
4.2.3	Gemischte Modelle	36
4.3	Ratenunabhängige Elastoplastizität für kleine Verzerrungen	37
4.3.1	Übersicht und Herleitung der Werkstoffgleichungen	37

4.3.2	Arbeits- vs. Verzerrungsverfestigungshypothese	40
4.3.3	Kinematische und isotrope Verfestigung	41
4.3.4	Drucker'sches Stabilitätspostulat	41
4.3.5	Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation	42
4.3.6	Beispiele einfacher plastischer Werkstoffmodelle	44
4.3.7	Zusammenfassung	45
4.4	Lokalisierungsphänomene und -begrenzer	46
4.4.1	Versagensindikatoren	48
4.4.2	Netzabhängiger Entfestigungsmodul	53
4.4.3	Ratenabhängige Elastoplastizität	54
4.4.4	Nicht-lokale- und Cosserat-Kontinua	56
5	Materialmodelle zur Simulation bewehrter Betonstrukturen	58
5.1	Übersicht	58
5.2	Plastische Werkstoffmodelle für kohäsive Reibungsmaterialien	58
5.3	Mehrflächenmodell nach Menrath	62
5.3.1	Einführung	62
5.3.2	Formulierung der Fließflächen	63
5.3.3	Evolutionsgesetze	67
5.3.4	Parameteridentifikation	69
5.4	Modifiziertes Einflächenmodell	71
5.4.1	Übersicht	71
5.4.2	Fließfläche	72
5.4.3	Plastisches Potenzial	75
5.4.4	Evolutionsgesetz	75
5.4.5	Parameteridentifikation	77
5.5	Schädigung im Entlastungszustand	82
5.6	Berücksichtigung der Bewehrung	85
5.6.1	Verschmierte einaxiale Plastizitätsformulierung	86
5.6.2	Evolutionsgesetze für die Bewehrung	87
5.6.3	Transformation bezüglich der Bewehrungshauptachsen	89
5.6.4	Berücksichtigung des Tension-Stiffening-Effekts	91
6	Numerische Umsetzung	94
6.1	Übersicht	94
6.2	Inkrementelle Elastoplastizität	94
6.2.1	Zeitintegrationsverfahren	97
6.2.2	Viskoplastische Erweiterung des Mehrflächenmodells	98
6.3	Projektionsalgorithmus für das Einflächenmodell	99
6.3.1	Übersicht	99
6.3.2	Diskussion einer Apexlösung für das Einflächenmodell	100
6.3.3	Erweiterte Geometriebeschreibung	102
6.3.4	Unstetigkeitsstellen in den Gradienten	103
6.4	Algorithmische elastoplastische Materialtangente	105

6.4.1	Herleitung der algorithmischen Materialtangente	105
6.4.2	Algorithmischer Tangentenoperator bei Mehrflächenplastizität	110
6.5	Direkte vs. numerische Differenziation	111
6.5.1	Numerische Differenziation der Gradienten \mathbf{m} und \mathbf{n}	113
6.5.2	Numerische Differenziation des Hesse-Tensors \mathbf{M}	116
6.5.3	Zusammenfassung	118
6.6	Untersuchungen zu Lokalisierungsphänomenen	118
6.6.1	Viskoplastisches Modellproblem	118
6.6.2	Zum Lokalisierungsverhalten der Materialmodelle	120
7	Anwendungsbeispiele	127
7.1	Zentrisch belastete Stahlbetonplatte	127
7.2	Flächig belastete Stahlbetonplatte	131
7.3	Kreiszylinderschale mit Randträger	136
7.4	Parabolische Zylinderschale ohne Randträger	140
7.5	Glasfaserbewehrtes U-Profil	145
7.6	Glasfaserbewehrtes Hohlprofil	149
7.7	Zusammenfassung der Beispiele	151
8	Zusammenfassung und Ausblick	153
8.1	Zusammenfassung und Bewertung	153
8.2	Ausblick	155
	Literatur	156
	Anhang A	166
A.1	Tensoranalysis	166
A.2	Tensorinvarianten	167
	Anhang B	170
B.1	Grundgleichungen des modifizierten Kang-Modells	170
B.2	Gradienten für Fließfläche F und Potenzial Q	171
B.3	Notwendige Ableitungen für den Projektionsalgorithmus	173
B.4	Ableitungen für den materiellen Tangentenoperator	175

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

Kontinuumsmechanik und Schalenmodell

Kinematik

\mathfrak{B}	materieller Körper
$\partial\mathfrak{B}$	Rand des materiellen Körpers
Ω	räumlicher Körper
Γ	Rand des räumlichen Körpers
x	Ortsvektor
u	Verschiebungen
Δu	Relativverschiebungen
θ^i	krummlinige Koordinaten
g	Metriktensor (Einheitstensor)
g_i / g^i	ko- und kontravariante Basisvektoren
F	materieller Deformationsgradient
H	Gradient des Verschiebungsvektors
U	<i>Rechts-Streck</i> -Tensor
R	Drehtensor
C	<i>Cauchy-Green</i> -Deformationstensor
E	<i>Green-Lagrange</i> -Verzerrungstensor
\tilde{E}	zusätzliche Verzerrungen beim modifizierten Prinzip von <i>Hu-Washizu</i>
E^u	verschiebungsabhängiger Anteil der Verzerrungen beim modifizierten Prinzip von <i>Hu-Washizu</i> (<i>Green-Lagrange</i> -Verzerrungstensor)
ϵ	allgemeiner Verzerrungstensor

Kräfte und Spannungen

\vec{t}	Kraftvektor
b	Volumskraft
σ	<i>Cauchy</i> -Spannungstensor
P	1. <i>Piola-Kirchhoff</i> -Spannungstensor
S	2. <i>Piola-Kirchhoff</i> -Spannungstensor
s	Spannungsdeviator
$ s $	Norm des Spannungsdeviators
I_1, J_2, J_3	relevante Invarianten des Spannungstensors bzw. -deviators
ξ, ρ, θ	<i>Haigh-Westergaard</i> -Koordinaten (Spannungsinvarianten)

Werkstoff

C	vierstufiger Materialtensor
ρ_0	Massendichte bezüglich der Referenzkonfiguration
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
ν	Querdehnzahl
η	Viskosität
c^{el}	elastische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Bilanzgleichungen, Arbeitssätze und Energieaussagen

W	Arbeit
\dot{W}^{pl}	Rate der plastischen Arbeit
Ψ	Freie Helmholtz Energie
λ, μ, γ	Lagrange'sche Multiplikatoren
D^{pl}	plastische Dissipation

Schalenkinematik

\mathbf{a}_3	Schalendirektor
\mathbf{w}	Differenzvektor der Schalendirektoren
\mathbf{v}	Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche
h	Schalen(schicht)dicke
μ	Schalenshifter
n, m, s	aufintegrierte Schnittgrößen der Schale
$\theta_{L_M}^3$	Kontinuitätskoeffizienten der geschichteten Schale

Werkstoff- und Bemessungsparameter

Beton

E_{cm}	Mittelwert des Sekantenmoduls des Betons
d_{max}	Durchmesser vom Größtkorn des Zuschlags
f_{ck}	charakteristische Zylinderdruckfestigkeit
f_{cm}	maximale Druckfestigkeit
f_{ctm}	mittlere Zugfestigkeit
f_{bd}	übertragbare Verbundspannung
G_c	Bruchenergie (einaxialer Druckversuch)
G_t	Bruchenergie (einaxialer Zugversuch)
G_{Fo}	Grundwert der Zug-Bruchenergie
α_F	Bezugskoeffizient für Größtkorn des Zuschlags

ν_{cm} Querdehnzahl

Bewehrung und tension-stiffening-Modellierung

A_s Querschnittsfläche Stahlbewehrung
 $A_{c,eff}$ effektive Querschnittsfläche Beton
 l_s mittlerer Rissabstand
 l_s^{cr} kritischer Rissabstand
 ρ_{eff} effektiver Bewehrungsgrad
 σ_s Spannungsanteil der Stahlbewehrung
 σ_{ts} Spannungsanteil aus *tension-stiffening*
 \varnothing Durchmesser der Stahlbewehrung

Bau-/Betonstahl

E_s Elastizitätsmodul
 E_h elasto-plastischer Modul
 f_y Nennwert der Streckgrenze
 σ_{mE} charakteristischer Spannungswert der *Ramberg-Osgood*-Evolutionsgleichung
 n charakteristischer Exponent der *Ramberg-Osgood*-Evolutionsgleichung

Textile Bewehrung

ρ_{eff} effektiver Fasergehalt
 $\eta_{(eff)}$ (effektiver) Wirkungsfaktor schrägliegender Fasern

Materialmodelle für Beton

Elasto-plastische Materialmodelle (allgemein)

\tilde{Q} achtstufiger Schädigungstensor
 F Fließfunktion
 n Gradient der Fließfunktion
 Q plastisches Potenzial
 m Gradient des plastischen Potenzials
 H plastischer Modul
 $\dot{\lambda}$ Konsistenzparameter oder plastischer Multiplikator
 q Vektor der inneren Variablen
 Θ algorithmischer Modul
 ϵ^{pl} plastische Verzerrungen
 $\bar{\epsilon}^{pl}, \kappa$ äquivalente plastische Verzerrung
 $\bar{\sigma}$ Fließ- oder äquivalente Spannung
 σ_{conc} Spannungskomponente des Betons

σ_{re}	Spannungskomponente aus der Bewehrung
σ_{ia}	Spannungskomponente des <i>tension-stiffening</i>
σ_m	hydrostatischer Spannungstensor
Q^{ak}	akustischer Tensor
d_{user}	Schädigungsparameter

Elasto-plastisches Mehrflächenmodell

α_i, β_i	Formfunktionen der Drucker-Prager-Teilflächen
c_i	Flag für aktive Fließfläche
D	Matrix der allgemeinen plastischen Moduln
γ_1, γ_2	Modellparameter der Versagensfläche
γ_3, γ_4	Modellparameter des Evolutionsgesetzes im Druckbereich

Elasto-plastisches Einflächenmodell

F_{fail}	Versagensfläche
F_{hard}	Verfestigungsanteil der Fließfunktion
F_{soft}	Entfestigungsfläche der Fließfunktion
Q_{fail}	Anteil der Versagensfunktion des plastischen Potentials
Q_{hard}	Anteil der Verfestigungsfunktion des plastischen Potentials
Q_{soft}	Anteil der Entfestigungsfunktion des plastischen Potentials
ξ_0, ξ_1, ξ_c	charakteristische Punkte der Versagensfläche
ξ_{uc}, ρ_{uc}	charakteristische Werte für einaxiales Druckversagen
$r(\theta, e)$	Willam-Warnke-Funktion
e	Exzentrizität
ξ_e	Modellparameter zur Steuerung der Exzentrizität
μ_f, μ_Q	Modellparameter zur Steuerung des Einflusses von $r(\theta, e)$
S	Modellparameter zur Festlegung der Kappe im Druckbereich
T	Modellparameter zur Definition des Übergangs von sprödem zu duktilem Verhalten
$\alpha, \bar{\alpha}, \beta$	Modellparameter von Entfestigungsfläche /-potential
k	Verfestigungsfunktion
k_0	Grundwert der Verfestigungsfunktion
h_D	Duktilitätsfunktion
A_h, B_h, C_h	Modellparameter der Duktilitätsfunktion
c	Entfestigungsfunktion
c_b, c_c	Entfestigungsfunktionen für Druck und Zugversagen
μ_d	Steuerfunktion des Übergangs c_t nach c_c
n	Exponent für μ_d (Modellparameter)
ϕ^{Apex}	Winkel des invertierten Kegels

Sonstige

Notation

- $(\dot{})$ Ableitung nach der Zeit
 $(\cdot)_i$ Summationsindex im Sinne der *Einstein'schen* Summationskonvention
 δ_i^j *Kronecker-Delta*

Elementtechnologie

- A_e Elementfläche
 h mittlere Elementfläche
 \mathbf{J} Jacobi-Matrix

1 Einleitung

„Die mathematische Elastizitätstheorie hat ein glorifiziertes, in Wirklichkeit nicht existierendes Material erdacht, den ideal-elastischen Körper, und hat alle ihre Begriffe im Hinblick auf dieses Material geformt. Kein Wunder, daß die Materialprüfung, welche mit den wirklich existierenden Werkstoffen und ihrem Formänderungswiderstand zu tun hat, mit vielen Begriffsbildungen der Elastizitätslehre nichts anfangen konnte.“

(H. Hencky, *Der Stahlbau*, Heft 5/7, 1944, pp. 21 ff.)

1.1 Einführung

Bewehrter Beton wurde in der Vergangenheit vielfach für Flächentragwerke aller Art, seien es Platten, Scheiben oder auch Schalen, verwendet. Die Möglichkeiten seiner Anwendung sind vielfältig und nicht zuletzt ein direktes Resultat der freien Formbarkeit des Materials. Und obwohl dieser Werkstoff in seiner heutigen Form schon seit Jahrzehnten als Synonym für Dauerhaftigkeit und Robustheit steht, sind die Lastabtragungsmechanismen dieses Verbundmaterials noch immer Gegenstand der Forschung. Die charakteristischen Eigenschaften aller reibungsbehafteten Materialien (*cohesive frictional materials*) treffen auch auf das Mehrstoffsystem „Beton“ zu. Hierzu zählt neben der Entfestigung und der daraus resultierenden Lokalisierung auch die Abhängigkeit des Versagens von der hydrostatischen Druckkomponente. Hinzu kommt beim Beton eine hohe Sprödigkeit und bereits eine Anfangsanisotropie aus der Rissbildung schon kurz nach der Herstellung infolge Schwinden. Viele der zum Beispiel bei Baustählen beobachteten Eigenschaften und daraus resultierenden Annahmen bei deren Materialmodellierung und numerischen Simulation können für den Werkstoff Beton nicht übernommen werden und machen ganz neue Ansätze notwendig. Dies macht den Zugang zu einer numerischen Abbildung schwierig, den Berechnungslauf unter Umständen instabil und nicht selten unmöglich.

Seit den ersten Arbeiten von Ngo und Scordelis im Jahre 1967 [135] über bewehrte Betonbalken und Rashid 1968 [155] zu Druckbehältern wurden die numerischen Verfahren zur Berechnung von Stahlbetonstrukturen auf Basis der Finite Elemente Methode kontinuierlich verfeinert und verbessert. Insbesondere hat auch die rasante Entwicklung der Computertechnik die Grenzen des Möglichen in numerischen Simulationen stetig erweitert. Umgekehrt hat jedoch auch die Weiterentwicklung der Simulationsmethoden stets die Leistungsfähigkeit der zur jeweiligen Zeit verfügbaren Computeranlagen bis an die Grenzen ausgenutzt. Mit der höheren Rechenleistung wurde jeweils das nächst komplexere und genauere Berechnungsmodell zur Lösung des gestellten Problems verwendet – die Zeitersparnis also nicht selten in wirklichkeitsnähere Modelle investiert.

Diese Entwicklung lässt sich anschaulich anhand einiger ausgewählter Arbeiten zur numerischen Analyse von Stahlbetonschalen – als der allgemeinsten Form der in dieser Arbeit behandelten Flächentragwerke – aufzeigen. Die Literatur ist nahezu unüberschaubar und so erhebt diese kurze Übersicht keinen Anspruch auf Vollständigkeit:

Die Nachfrage nach komplexen Geometrien, geringer Schalendicke und großen Spannweiten hatte Forschungsarbeiten im Bereich der numerischen Analyse von bewehrten Schalenstrukturen zur Folge. Dabei waren die geometrisch wie auch die physikalisch nichtlinearen Effekte Gegenstand der Untersuchungen. Dokumentiert wird dies zum Beispiel in frühen Arbeiten an der *University of California at Berkeley* von Lin [107], Lin und Scordelis [108], Van Greunen [55], Chan

[27], Scordelis und Chan [168] sowie Müller ([130], [131]), in denen zumeist Fünf-Parameter Schalentheorien und nichtlinear-elastische Materialformulierungen teilweise unter Berücksichtigung der Effekte aus Kriechen und Schwinden zur Anwendung kommen.

Aus den Arbeiten weiterer Gruppen seien exemplarisch einige genannt: So sind auf dem Gebiet der numerischen Analyse von Stahlbetonstrukturen die Arbeiten um Schnobrich ([57], [165], [166]) und Argyris ([1],[2]) aus den siebziger Jahren sowie von Gupta [56], Arnesen [3] und Owen [140] aus den achtziger Jahren zu nennen. Des Weiteren wurde im deutschsprachigen Raum intensive Forschungsarbeit in den Gruppen von Mang ([52], [114]), Krätzig [92], Mehlhorn [89] und Ramm ([90], [153]) geleistet, wobei die praktische Komponente im Hinblick auf den Bau und den Betrieb von Stahlbetonkühltürmen eine maßgebliche Rolle spielte.

Die vornehmlich im letzten Jahrzehnt geleistete Entwicklung hin zu dreidimensional orientierten Schalentheorien, die den vollständigen dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand abbilden, erlaubt die Verwendung von dreidimensionalen Stoffgesetzen in der numerischen Simulation. Eine umfassende Abhandlung zur Theorie und Numerik dreidimensionaler Schalentheorien auf der Basis der Methode der Finiten Elemente sowie zu deren Entwicklungsgeschichte findet man in Bischoff [13].

Ein großer Vorteil dieser Entwicklung ist in der Anwendungsmöglichkeit unmodifizierter Materialmodelle, das heißt ohne Eingriff in den Stofftensor bzw. ohne dessen nachträgliche Kondensation, zu sehen. Damit stehen die vielfältigen Entwicklungen aus dem Bereich der konstitutiven Gesetze für dreidimensionale Volumenmodelle zur Berechnung von Betonflächentragwerken zur Verfügung. Andererseits können neuere Entwicklungen im Bereich der dreidimensionalen konstitutiven Modellierung sofort und ohne Änderung effektiv für Schalen- und Volumenmodelle eingesetzt werden.

1.2 Problemstellung und Ziel der Arbeit

In dieser Arbeit sollen die neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der Schalenmodelle mit denen plastizitätsbasierter Materialmodelle für Beton und dessen Bewehrungselementen kombiniert werden, um damit ein geschlossenes Konzept zur numerischen Simulation von Betonflächentragwerken bereitzustellen. Dabei steht insbesondere die wirklichkeitsgetreue Simulation des Tragverhaltens von Schalen- und Faltwerken aber auch einfacher Hochbauplatten im Mittelpunkt des Interesses. Ein vorhandenes mehrschichtiges Schalenmodell dient als Ausgangsbasis für die Implementierung der notwendigen Algorithmen. Im Einzelnen sind die folgenden Punkte zu klären und gegebenenfalls umzusetzen sowie die sich daraus ergebenden Struktur- und Materialmodelle zu untersuchen.

- Ein von Menrath [121] für Scheibenprobleme entwickeltes und auf der klassischen Plastizitätstheorie aufbauendes, vollassoziertes Mehrflächenmodell für Beton ist für den Einsatz in einem dreidimensional orientierten Schalenelement zu überarbeiten.
- Aufgrund der prinzipiellen Unzulänglichkeiten des auf den ersten beiden Spannungsinvarianten basierenden Mehrflächenmodells bei Spannungszuständen im hohen dreiaxialen Druckbereich soll ein weiteres plastizitätsbasiertes konstitutives Modell bereitgestellt werden. Dieses soll sowohl alle drei Spannungsinvarianten berücksichtigen, als auch eine zutreffendere Abbildung experimenteller Ergebnisse im hohen Druckbereich erlauben. Zusätzlich ist die Definition der Versagensfläche durch nur eine Fließfunktion sowie eine

Reduktion der Dilatanz wünschenswert. Ein von Kang [84] entwickeltes Versagenskriterium erfüllt die Anforderungen in Kombination mit einer nichtassozierten Fließregel in geeigneter Weise; es soll hinsichtlich der Evolutionsgesetze modifiziert werden und als Basis weiterer Untersuchungen dienen.

- Für die vorgestellten entfestigenden Materialmodelle sollen ausführliche Untersuchungen zum Lokalisierungsverhalten sowie zur numerischen und materiellen Stabilität geleistet werden. Dabei können die Eigenschaften des assoziierten Modells mit denen des nichtassozierten Modells verglichen werden. Die vorhandenen Möglichkeiten zur Regularisierung des Randwertproblems sind dabei zu untersuchen und auf ihre Anwendbarkeit auf Plastizitätsmodelle mit komplexen Fließ- und Versagensflächen zu überprüfen.
- Die für Betontragwerke notwendige Bewehrung soll durch einen verschmierten Ansatz im Element berücksichtigt werden. Die zugehörigen Algorithmen – ebenfalls auf Basis der Plastizitätstheorie – für eine schichtweise aktive Bewehrung sind bereitzustellen. Dabei sollen die neueren Entwicklungen zu alternativen Bewehrungsmaterialien (Glas-, Aramid- oder Carbonfasern) für textile Bewehrungselemente in die Formulierung Eingang finden.
- Anhand von Modell- und Strukturbeispielen sollen die Leistungsfähigkeit bzw. die Grenzen des Strukturmodells als auch der Materialmodelle demonstriert werden. Dazu sind die numerischen Modelle anhand des Tragverhaltens entsprechender Experimente aus der Literatur zu verifizieren und insbesondere hinsichtlich der Vorhersagegenauigkeit, die schließlich das Ziel aller Bemühungen der numerischen Simulation sein sollte, zu bewerten.

Schlussendlich soll das vorgestellte Konzept die qualitativ hochwertige numerische Simulation bewehrter Betonflächentragwerke auf der Grundlage der jüngsten Entwicklungen sowohl im Material- als auch im Strukturbereich ermöglichen. So kann das Verständnis um das Tragverhalten historischer Gebäude bei Umnutzung oder Restauration, wie zum Beispiel der Markthalle von Algéciras (stark unterschiedliche Schalendicken in Kombination mit faltwerkartiger Randversteifung, siehe Bild 1.1), deren Bemessung zumeist auf sehr stark vereinfachenden analytischen Methoden beruhte, durch die dreidimensional orientierte Simulation gesteigert oder gar erst ermöglicht werden. Darüber hinaus macht die Anwendung solcher numerischer Konzepte auf neue Bewehrungsmaterialien deren wirtschaftlichen Einsatz in der Baupraxis erst möglich, indem



Ingenieur: Eduardo Torroja

Architekt: Manuel Sanchez

Baujahr: 1934

Durchmesser: 47,5 m

Schalendicke: 90 - 460 mm

Bild 1.1 Markthalle in Algéciras, Andalusien, Spanien

zum Beispiel die tatsächlich höhere Tragfähigkeit und Duktilität in entsprechenden Simulationen gezeigt werden kann. Hier sei die Verwendung von textilbewehrten Betonhalbfertigteilen als verlorene Schalung im klassischen Hochbau als Beispiel genannt. Auf der gleichen Basis ließe sich aber auch die Herstellung von schalenartigen Fertigelementen ermöglichen, die der lohnintensiven Herstellung von Stahlbetonschalen entgegenwirken könnte.

1.3 Gliederung

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst ein am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart vorhandenes Schalenmodell, das als Grundlage für diese Arbeit zur Verfügung stand, kurz erläutert. Bevor die Besonderheiten eines geschichteten 3D-Schalenmodells mit C^0 -kontinuierlichem Verschiebungsansatz über die Schalendicke vorgestellt werden, sind jedoch die allgemeinen kontinuumsmechanischen Grundlagen bereitzustellen. Beides wird in **Kapitel 2** in der nötigen Ausführlichkeit zusammengestellt. In **Kapitel 3** werden dann die für das Tragverhalten und das Verständnis der Lastabtragungsmechanismen notwendigen Materialeigenschaften von Beton, als Grundmaterial des Verbundwerkstoffs, sowie die der angewendeten Bewehrungsmaterialien kurz abgehandelt. Bei letzteren werden in dieser Arbeit traditionelle schlaffe Bewehrungseinlagen aus Stahl sowie textile Bewehrungselemente aus Glas- oder Aramidfasern diskutiert, die augenblicklich Gegenstand intensiver Forschung sind.

Für die numerische Simulation des Tragverhaltens von Betonbauteilen wurden in der Vergangenheit unterschiedliche Modelle entwickelt. In **Kapitel 4** wird der Versuch unternommen, gängige Methoden zu charakterisieren und anhand ihrer Merkmale für die Strukturberechnung einzuordnen. Dabei werden insbesondere traditionelle Modelle, aber auch einige jüngere Entwicklungen, die auf der Plastizitätstheorie basieren, kurz vorgestellt. In **Kapitel 5** werden schließlich die implementierten Materialmodelle für Beton, Stahl, Kunstfasern und deren Interaktion, für die eine einheitliche Basis im Rahmen der Plastizitätstheorie gewählt wurde, in ihren Eigenschaften und Besonderheiten vorgestellt.

Zu Beginn von **Kapitel 6** wird das untersuchte nichtassozierte Einflächenmodell für Beton hinsichtlich der Implementierung in Ratenform in ein nichtlineares Finite Elemente Programm formuliert. Dieses nichtassozierte Modell wird anschließend bezüglich des Verlusts von Eindeutigkeit, Stabilität und Elliptizität mit dem vollassozierten Mehrflächenmodell verglichen. Die Ergebnisse aus numerischen Untersuchungen an einfachen Beispielen werden anhand von Lokalisierungsdiagrammen dargestellt und diskutiert. Im Weiteren wird in **Kapitel 7** das vorgestellte Mehrflächenmodell verwendet, um an Strukturbeispielen – vorzugsweise Platten und Schalenträgerwerke – im Vergleich mit den entsprechenden Versuchen die Anwendbarkeit des Material- aber auch des Strukturmodells zu untersuchen. Dabei steht die Erfassung des Deformations- und des Versagenszustands im Vordergrund. Abschließend werden in **Kapitel 9** eine zusammenfassende Bewertung der verwendeten Materialmodelle im Hinblick auf Struktursimulationen vorgenommen und Anregungen für weiterführende Arbeiten gegeben.

2 Grundlagen zum verwendeten 3D-Schalenelement

In diesem Kapitel soll auf die Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums eingegangen werden, wobei die Bilanzgleichungen zunächst ausgeklammert werden. Ausführliche Zusammenstellungen finden sich in Arbeiten von Bufler ([22], [23]), Becker & Bürger [10], Stein [179] und Betten [12], an denen sich die folgende Übersicht orientiert. Im Weiteren wird dann die Schalentheorie des verwendeten geschichteten 3D-Schalenelements vorgestellt. Letztere geht auf Arbeiten von Büchter [20] und Braun [24] zurück.

2.1 Dreidimensionales Kontinuum

„Vergeblich ist die Mühe dessen, der danach trachtete, die geeignete Form eines Tragwerkes aufzufinden, ohne sich vorher bis ins Mark die Spannungsgrundlagen angeeignet zu haben, die alle in diesem Tragwerk vorkommenden Festigkeitsprobleme regieren; genauso vergeblich, wie die Mühe eines Arztes, welcher Rezepte schreiben und die Behandlung seiner Kranken bestimmen wollte, ohne die Physiologie des menschlichen Organismus zu beherrschen.“

(E. Torroja, Die Logik der Form: Spannungsgeschehen, Callway-Verlag München, 1961)

2.1.1 Beschreibung von Deformationen und Verzerrungen

Ein materieller Körper \mathfrak{B} und der zugehörige Rand $\partial\mathfrak{B}$ seien definiert über eine zusammenhängende Menge \mathcal{M} materieller Punkte. Ein *homogener* Körper besteht dabei aus materiellen Punkten gleicher Eigenschaften, die, sofern diese in alle Richtungen die gleichen sind, einen *isotropen* Körper definieren. Weiter sei angenommen, dass als kinematische Variablen nur Verschiebungen (*Boltzmann-Kontinuum*) vorhanden sind. Eine Berücksichtigung von Rotationen des materiellen Punktes (*Cosserat-Kontinuum*) findet nicht statt. Um einen Punkt des materiellen Körpers nun eindeutig zu lokalisieren, ist eine Abbildung des Körperpunktes in den \mathbb{R}^3 (*Euklidischer* Punkt-raum) nötig. Diese Abbildung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

- *Bijektivität* (Jeder Raumpunkt entspricht genau einem materiellen Punkt und umgekehrt.)
- *Stetigkeit* („Nahe“ beieinander liegende materielle Punkte werden auch auf „nahe“ beieinander liegende räumliche Punkte abgebildet.)

Setzt man ein raumfestes, kartesisches Koordinatensystem voraus, so kann diese Abbildung (Homöomorphismus) wie folgt angegeben werden:

$$\chi := \begin{cases} \mathfrak{B} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} \mapsto \mathbf{x} := \chi(\mathcal{M}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet Ω den Körper und \mathbf{x} den Ortsvektor im \mathbb{R}^3 sowie χ die nötige Abbildung. Weiter soll ein allgemeines, krummliniges Koordinatensystem mit θ^1 , θ^2 und θ^3 in Ω definiert sein. Das vollständige Differenzial des Ortsvektors \mathbf{x} definiert dann die kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i in jedem Punkt des Körpers Ω in θ^i :

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} dx^j = \mathbf{g}_i d\theta^i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad (2.2)$$

Über die inverse Beziehung werden die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i definiert:

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.3)$$

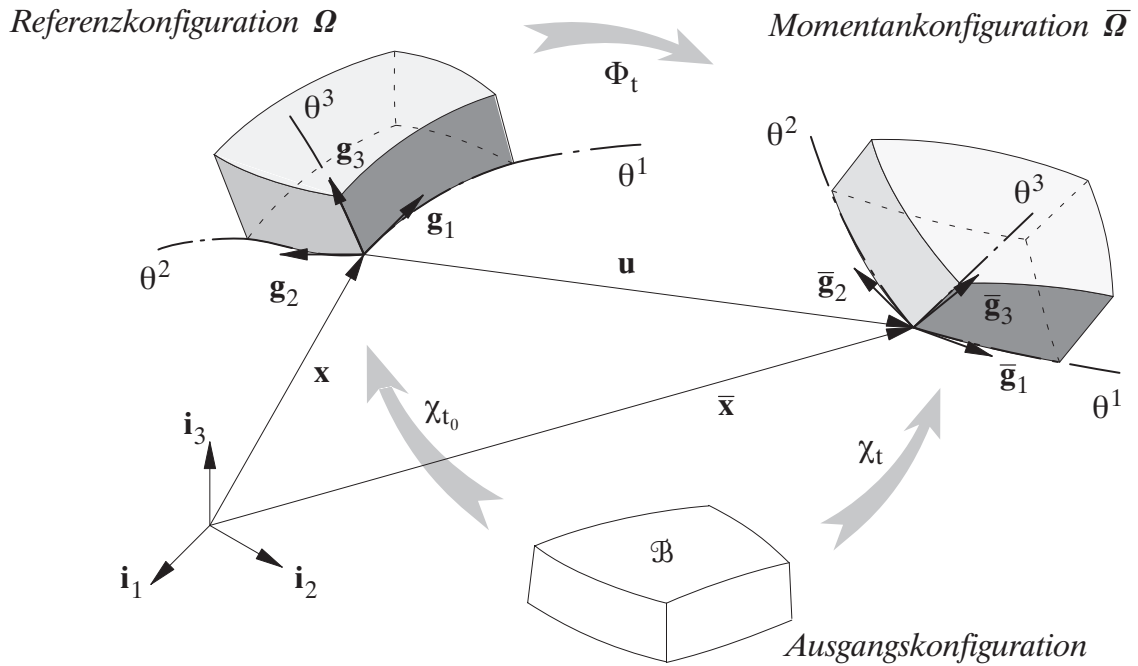


Bild 2.1 Kinematik im Kontinuum

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren stehen somit senkrecht aufeinander. Das Skalarprodukt $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j$ liefert folglich das *Kronecker-Delta* oder auch den Einheitsensor zweiter Stufe δ_i^j .

Die Ränder des räumlichen Körpers werden mit Γ benannt, wobei eine Differenzierung in *von Neumann*-Bereiche (vorgeschriebene Spannungen) Γ_N und in *Dirichlet*-Bereiche (vorgeschriebene Verschiebungen bzw. vorgeschriebene primäre Variablen) Γ_D vorgenommen wird. In jeder beliebigen Konfiguration $\bar{\Omega}$ gilt:

$$\Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset \quad (2.4)$$

Zur Beschreibung von Deformationsvorgängen muss die in (2.1) definierte Abbildung χ um eine weitere Variable, die Zeit t , erweitert werden. Dabei wird als Referenzkonfiguration der Zustand zum Zeitpunkt $t = t_0$ und als Momentankonfiguration der Deformationszustand zum Zeitpunkt t bezeichnet. Die Wahl der Referenzzeit t_0 und somit der Referenzkonfiguration ist beliebig. Die Ausgangskonfiguration, d. h. die Lage des materiellen Körpers zu Beginn der Beobachtung, muss nicht mit der Referenzkonfiguration übereinstimmen (vgl. Bild 2.1). Im Weiteren wird diese Identität jedoch vorausgesetzt. Die Referenzkonfiguration kann somit durch Ω und eine beliebige Momentankonfiguration durch $\bar{\Omega}$ beschrieben werden. Die Differenz beider Konfigurationen wird als Bewegung bezeichnet und über die Abbildung Φ_t definiert:

$$\Phi_t : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}, t, t_0) \mapsto \bar{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}, t, t_0) := \Phi_{t,t_0}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.5)$$

An dieser Stelle sei auf die beiden prinzipiellen Betrachtungsweisen zur Beschreibung von Bewegungen des materiellen Körpers im Raum hingewiesen: Zum einen auf die materielle oder *Lagrange*'sche Betrachtungsweise, die in der Mitte des 18. Jahrhunderts von *Euler* eingeführt wurde, und zum anderen auf die räumliche oder *Euler*'sche Betrachtungsweise, die nun wiederum auf *Bernoulli* und *d'Alembert* zurückgeht. Der erste Fall wird in der Regel in der Festkörpermechanik verwendet. Hier bewegt sich ein imaginärer Beobachter mit dem materiellen Punkt

durch den Raum. Im Gegensatz dazu ist der Beobachter in der *Euler*'schen Betrachtungsweise raumfest, das heißt er misst die Eigenschaften der sich an ihm vorüberbewegenden materiellen Punkte. Diese Art der Beschreibung findet hauptsächlich in der Strömungsmechanik Anwendung.

Aus den Ortsvektoren eines Punktes in der Referenzkonfiguration $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ bzw. der Momentankonfiguration $\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ lässt sich der Verschiebungsvektor \mathbf{u} folgendermaßen bestimmen:

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (2.6)$$

Über die ortsabhängigen, kovarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration aus Gleichung (2.2) erhält man unter Berücksichtigung des Verschiebungsvektors \mathbf{u} sodann

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^j \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = (\mathbf{H} + \mathbf{g}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i \quad (2.7)$$

Der Gradient des Verschiebungsvektors wird mit \mathbf{H} abgekürzt; \mathbf{g} bezeichnet den Metriktensor (Einheitstensor). Der gesamte Klammerausdruck in der vorstehenden Gleichung repräsentiert einen unsymmetrischen *Zweifeldtensor*, den materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} . Der Ausdruck des *Zweifeldtensors* beschreibt dabei die Tatsache, dass ein Satz seiner Basisvektoren in der Referenz- und der andere in der Momentankonfiguration definiert ist. Da diese im Allgemeinen nicht identisch sind, ist der Deformationsgradient unsymmetrisch; insbesondere gilt jedoch für eine reine Starrkörpertranslation oder auch eine reine Starrkörperrotation $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Der Deformationsgradient eignet sich daher wegen der enthaltenen Starrkörperanteile, der Richtungsabhängigkeit der beschriebenen Deformation und seiner Unsymmetrie nicht als Maß zur Beschreibung der Verzerrungen des Kontinuums.

Mit der Gleichung (2.7) werden die kovarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration in diejenigen der Momentankonfiguration transformiert. Eine solche Operation wird auch als „*push forward*“ bezeichnet (vgl. Marsden und Hughes [115]); entsprechend gilt die inverse Abbildung als „*pull back*“-Operation:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{g}}_i \quad \text{wobei} \quad \det \mathbf{F} \neq 0 \quad (2.8)$$

Mit dem Deformationsgradient lassen sich auch die zugehörigen Transformationen für Linien-, Flächen- und Volumenelemente zwischen verschiedenen Konfigurationen durchführen:

$$d\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad d\bar{\mathbf{A}} = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} \cdot d\mathbf{A}, \quad d\bar{\mathbf{V}} = \det \mathbf{F} d\mathbf{V} \quad (2.9)$$

Dabei ist $d\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{n}} d\bar{\mathbf{A}}$ ein orientiertes, infinitesimales Flächenelement mit dem zugehörigen Einheitsnormalenvektor $\bar{\mathbf{n}}$. Entsprechendes gilt für die Referenzkonfiguration. Aus den Bedingungen für die Abbildung χ (Bijektivität und Stetigkeit) ergibt sich weiter die Forderung, dass $\det \mathbf{F} \geq 0$ ist, was schließlich zusammen mit der Bedingung aus Gleichung (2.8) zu $\det \mathbf{F} > 0$ führt.

Zur Herleitung eines geeigneten Verzerrungsmaßes aus dem Deformationsgradienten \mathbf{F} stehen zwei prinzipielle Wege zur Verfügung. Zum einen kann anschaulich über das Quadrat eines Linienelements in der Referenzkonfiguration $ds^2 = \|d\mathbf{x}\|^2$ und in der Momentankonfiguration $d\bar{s}^2 = \|d\bar{\mathbf{x}}\|^2$ die Differenz gebildet werden. Damit wird sofort die Forderung nach Invarianz bezüglich Starrkörperrotationen und Richtungsunabhängigkeit des Deformationstensors erfüllt. Durch Verwendung des Deformationsgradienten lässt sich das differentielle Linienelement der

Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration transformieren (*pull back*). Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (d\bar{s})^2 - (ds)^2 &= \|d\bar{\mathbf{x}}\|^2 - \|d\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{x}\|^2 & (2.10) \\
 &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Im letzten rechtsseitigen Term wird der Metriktensor \mathbf{g} der Referenzkonfiguration als das neutrale Element dieser Konfiguration eingeführt. Für kartesische Koordinatensysteme steht hier der Einheitstensor. Der in der Klammer stehende Ausdruck entspricht dem zweifachen *Green-Lagrange-Verzerrungstensor*, welcher damit wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) \quad (2.11)$$

Der Verzerrungstensor ist folglich symmetrisch. In einem anderen Ansatz kann über eine polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ in den orthogonalen *Drehtensor* \mathbf{R} und den sogenannten *Rechts-Streck-Tensor* \mathbf{U} gezeigt werden, dass das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ keine Rotationsanteile \mathbf{R} mehr enthält¹. Dabei wird von der Orthogonalität des Drehtensors $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$ Gebrauch gemacht:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \quad (2.12)$$

\mathbf{C} wird als *Cauchy-Green-Deformationstensor* bezeichnet. Die Gleichung (2.12) kann schließlich in die Definition des *Green-Lagrange-Verzerrungstensors* eingebracht werden und liefert $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{g})$. Für die numerische Umsetzung erweist sich dagegen eine weitere, alternative Darstellung des Verzerrungstensors als nützlich. Durch Rechtsmultiplikation von Gleichung (2.7) mit den kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration (Tensorprodukt, siehe Gleichung (A.3)) erhält man den Deformationstensor aus den gemischtvarianten Basisvektoren zu $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i$. Durch Einsetzen in Gleichung (2.12) kann diese umgeschrieben werden in

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.13)$$

Der Verzerrungstensor ergibt sich also aus der Differenz der Metriktensoren der beiden Konfigurationen. Setzt man in Gleichung (2.12) die Definition des Deformationsgradienten \mathbf{F} über den Verschiebungsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{g}$ ein (vgl. Gleichung (2.7)), so kann eine Darstellung über die Verschiebungsableitungen in der Referenzkonfiguration gewonnen werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}((\mathbf{H} + \mathbf{g})^T \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{g}) - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{H}) \quad (2.14)$$

Durch eine Linearisierung bezüglich der Referenzkonfiguration erhält man schließlich den Verzerrungstensor für kleine Verschiebungen zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) \quad (2.15)$$

1. Das Formelzeichen \mathbf{C} steht in der Literatur sowohl für den *Cauchy-Green-Deformationstensor* als auch für den *Materialtensor*. Mit Ausnahme dieses Abschnittes ist in dieser Arbeit mit \mathbf{C} jedoch stets der *Materialtensor* bezeichnet.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass sich die klassischen *Ingenieurverzerrungen* γ im linearisierten *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* wiederfinden. Die *Ingenieurdehnungen* $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$ entsprechen dabei exakt den *Green-Lagrange-Dehnungen*, die *Ingenieurgleitungen* $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ jedoch dem doppelten Betrag der *Green-Lagrange-Schubverzerrungen*.

2.1.2 Spannungsmaße

Zur Motivation des Spannungsbegriffs muss kurz auf die materielle Darstellung des statischen Kräftegleichgewichts eingegangen werden. Prinzipiell hergeleitet aus dem Impulserhaltungssatz (Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße), stellt sich das Gleichgewicht eines Teilkörpers p bezogen auf die Momentankonfiguration $\bar{\mathfrak{B}}_p$ wie folgt dar (der Impulserhaltungssatz muss für jeden beliebigen Teilkörper $\mathfrak{B}_p \subset \mathfrak{B}$ und $\partial\mathfrak{B}_p \subset \partial\mathfrak{B}$ erfüllt sein):

$$\int_{\bar{\mathfrak{B}}_p} \bar{\rho} \mathbf{b} \, d\bar{V} + \int_{\partial\bar{\mathfrak{B}}_{s,p}} \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\bar{A} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Der erste Term repräsentiert die Volumenkräfte $\bar{\mathbf{F}}_b$, der zweite die Oberflächenkräfte $\bar{\mathbf{F}}_t$. Der Spannungsvektor \mathbf{t} (*Schnittkraftdichte*) auf dem Rand ist definiert als $\mathbf{t} := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da}$; über das *Cauchy-Theorem* $\bar{\mathbf{t}}_0 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ wird dieser identifiziert als einfache Verjüngung des *Cauchy-Spannungstensors* mit der entsprechenden Flächennormalen – anschaulich vorzustellen als resultierende Kraft eines Flächenelements bei einem gedachten Schnitt durch einen Körper. Da sich der *Cauchy-Spannungstensor* auf die Flächenelemente in derselben Konfiguration bezieht, wird er auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet. Die Symmetrie des *Cauchy-Spannungstensors* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ lässt sich anhand der Drehimpulsbilanz zeigen.

Über die Transformation der resultierenden Oberflächenkräfte $\bar{\mathbf{F}}_t$ in die Referenzkonfiguration – dabei kommt Gleichung (2.9)₂ zur Anwendung – kann ein weiteres Spannungsmaß, der *1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{P} (1. P. K.), abgeleitet werden:

$$\bar{\mathbf{F}}_t = \int_{\bar{\mathfrak{B}}} \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{A} = \int_{\bar{\mathfrak{B}}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{A} = \int_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (2.17)$$

$$\mathbf{P} := \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^T)^{-1} \quad ; \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T \quad (2.18)$$

Der *1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* „erbt“ nunmehr die Eigenschaft der Unsymmetrie des Deformationstensors \mathbf{F} . Um diesen Nachteil zu beheben, wird der *1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* über eine Kongruenztransformation symmetrisiert; man erhält den *2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^T)^{-1} \quad (2.19)$$

Der *2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* (2. P. K.) \mathbf{S} kann physikalisch nicht interpretiert werden, er stellt jedoch zusammen mit dem *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* eine energetisch konjugierte Paarung zur Darstellung der inneren Spannungsleistung W_0 bezogen auf die Referenzkonfiguration dar:

$$W_0 = \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV \quad (2.20)$$

2.1.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die hier nicht näher behandelte Impulsbilanzgleichung für einen Teilkörper p in der Momentankonfiguration dient als Ausgangspunkt für die Herleitung des äquivalenten Prinzips der virtuellen Arbeit:

$$\dot{\mathbf{i}} = \int_{\overline{\mathfrak{B}}_p} \overline{\rho} \ddot{\mathbf{x}} \, d\overline{V} = \int_{\overline{\mathfrak{B}}_p} \overline{\rho} \mathbf{b} \, d\overline{V} + \int_{\partial\overline{\mathfrak{B}}_{s,p}} \overline{\mathbf{t}}_0 \, d\overline{A} \quad (2.21)$$

Anwenden des *Cauchy*-Theorems $\overline{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}}$ und anschließende Umwandlung des Oberflächenintegrals auf dem Rand $\partial\mathfrak{B}$ in ein Volumenintegral mit Hilfe des *Gauß*'schen Integralsatzes liefert:

$$\int_{\overline{\mathfrak{B}}_p} (\overline{\rho} (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) + \overline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}) \, d\overline{V} = 0 \quad (2.22)$$

Die triviale Lösung für einen beliebigen materiellen Teilkörper p (lokale Form) im statischen Gleichgewicht ($\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} = 0$) lautet dann:

$$\overline{\rho} \mathbf{b} + \overline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.23)$$

Gleichung (2.23) wird auch als *starke Form* des Gleichgewichts bezeichnet. Diese wird mit einer beliebigen Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und anschließend über das Volumen integriert. Die Anforderungen an die als Verschiebungsfeld interpretierbare Testfunktion sind *stetige Differenzierbarkeit* und die Einhaltung der geometrischen Randbedingungen auf $\partial\mathfrak{B}$. Für die Momentankonfiguration erhält man damit:

$$\overline{W} = \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \overline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} + \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \overline{\rho} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} = 0 \quad (2.24)$$

Durch Anwendung des Divergenztheorems und des *Gauß*'schen Integralsatzes wird schließlich die *schwache Form* des Gleichgewichts bzw. das Prinzip der virtuellen Arbeit als dessen mechanische Interpretation in der Momentankonfiguration erhalten:

$$\overline{W} = \int_{\partial\overline{\mathfrak{B}}_s} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{A} - \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} + \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \overline{\rho} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} = 0 \quad (2.25)$$

Oder mit den Spannungsrandbedingungen $\overline{\mathbf{t}}_0 = \overline{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}}$:

$$\overline{W} = \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} - \int_{\overline{\mathfrak{B}}} \overline{\rho} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{V} - \int_{\partial\overline{\mathfrak{B}}_s} \overline{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overline{A} = 0 \quad (2.26)$$

Bezogen auf die Ausgangskonfiguration lautet das Prinzip damit:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{P} : \nabla_x \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \\
&= \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

In der letzten Umformung wird von der Symmetrie des 2. P. K.-Spannungstensors Gebrauch gemacht, die nur den symmetrischen Anteil des Produkts $\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}$ berücksichtigt und somit als $\delta \mathbf{E} = \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F})$ identifiziert werden kann.

2.1.4 Prinzip von Hu-Washizu

Im Hinblick auf das verwendete 3D-Schalenelement soll an dieser Stelle zunächst das Prinzip von *Hu-Washizu* vorgestellt werden. Das modifizierte Prinzip, welches Büchter et al. [21] zur Beseitigung des *Poisson-Dicken-Locking* mittels eines EAS-Ansatzes (*Enhanced Assumed Strain*) in Dickenrichtung aufgreifen, wird anschließend kurz behandelt.

Ausgehend vom Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie (*P. M. p. E.*)

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}) = \int_{\mathfrak{B}} W^{int}(\mathbf{E}) \, dV - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA, \tag{2.28}$$

mit der Formänderungsenergiedichte $W^{int}(\mathbf{E})$, werden die geometrischen Gleichungen über die *Lagrange*-Multiplikatoren λ und μ in das Funktional eingebracht:

$$\begin{aligned}
\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \lambda, \mu) &= \int_{\mathfrak{B}} \left\{ W^{int}(\mathbf{E}) + \lambda : \left(\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right\} dV \\
&\quad - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \mu \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) \, dA = \text{stat.}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Die erste Variation liefert

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{HW} &= \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} \, dV \\
&\quad + \int_{\mathfrak{B}} \left\{ \delta \lambda : \left(\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) + \lambda : (\mathbf{F}^T \cdot \nabla_x \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{E}) \right\} dV \\
&\quad - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \delta \mu \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) \, dA = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Mit Hilfe des *Gauß*'schen Integralsatzes führt man die erste Variation in die folgende Form über, aus der sich über das Fundamentallema der Variationsrechnung schließlich die *Euler*-Gleichungen ableiten lassen:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{HW} = & \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \\
& + \int_{\mathfrak{B}} \left\{ \delta \boldsymbol{\lambda} : \left(\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) - \delta \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda} : \delta \mathbf{E} \right\} dV \\
& - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} (\mathbf{t}_0 - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \delta \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) \, dA = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Die *Euler*-Gleichung $\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ identifiziert den *Lagrange*-Multiplikator $\boldsymbol{\lambda}$ mit dem Spannungstensor \mathbf{S} . Der zweite *Lagrange*-Multiplikator $\boldsymbol{\mu}$ kann durch einen Vergleich der Koeffizienten der beiden letzten Terme in Gleichung (2.31) als Spannungsvektor \mathbf{t}^s identifiziert werden. Damit lautet das Prinzip von *Hu-Washizu*:

$$\begin{aligned}
\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{t}^s) = & \int_{\mathfrak{B}} \left\{ W^{int}(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) - \mathbf{E} \right) \right\} dV \\
& - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \mathbf{t}^s \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) \, dA = \text{stat.}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Simo & Rifai [174] verwenden das Prinzip von *Hu-Washizu* in einer modifizierten Form zur Herleitung der EAS-Methode (siehe auch *method of incompatible modes*). Dabei werden, ebenfalls ausgehend vom Prinzip des Minimums der potenziellen Energie (2.28), die Verzerrungen im Funktional reparametrisiert:

$$\tilde{\mathbf{E}} := \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) = \mathbf{E} - \mathbf{E}^u \tag{2.33}$$

Gleichfalls wird (2.33) über die Multiplikatorenmethode in das Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie eingebracht, so dass das modifizierte Prinzip von *Hu-Washizu* erhalten wird:

$$\begin{aligned}
\Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = & \int_{\mathfrak{B}} \left\{ W^{int}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) + \boldsymbol{\lambda} : \tilde{\mathbf{E}} \right\} dV \\
& - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) \, dA = \text{stat.}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Die *Euler*'schen Differenzialgleichungen können dann über die erste Variation und anschließende Anwendung des *Gauß*'schen Integralsatzes aus dem Fundamentallema der Variationsrechnung erhalten werden. Die *Lagrange*-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$ werden wiederum als Spannungstensor bzw. Spannungsvektor identifiziert. Eine detaillierte Abhandlung zur Thematik der Energieprinzipie findet sich in Bischoff [13].

Anmerkung: Bei der Herleitung des Prinzips von Hu-Washizu wird in dieser Arbeit vom Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie ausgegangen. Diese Vorgehensweise ist vor dem Hintergrund der Elemententwicklung für Schalenträgerwerke zu sehen und in der Literatur üblich. Für elastoplastische Problemstellungen, wie sie in dieser Arbeit im Weiteren verfolgt werden sollen, ist diese Potenzialeigenschaft nicht gegeben und diese Vorgehensweise somit streng genommen nicht zulässig. Eine konsistente Herleitung der Finite Elemente Formulierung kann jedoch ausgehend von der variierten Form erfolgen.

2.1.5 Konstitutive Beziehung für elastische Werkstoffe

Den Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen liefert der vierstufige Materialtensor. Definitionsgemäß liegt elastisches Verhalten dann vor, wenn der Spannungstensor durch eine Funktion des Verzerrungstensors eindeutig bestimmt werden kann. Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit behandelten elasto-plastischen Materialien ist der elastische Materialtensor mit im Allgemeinen 21 unabhängigen Parametern. Zwar beinhaltet ein allgemeiner Tensor vierter Stufe 81 Konstanten, durch die Symmetrie des Spannungstensors \mathbf{S} (vgl. (2.19)) und des Verzerrungstensors \mathbf{E} (vgl. (2.11)) mit jeweils sechs Unabhängigen wird deren Anzahl jedoch auf maximal 36 reduziert. Durch die Forderung nach einer wegunabhängigen Spannungsleistung (Potenzialeigenschaft der Formänderungsenergie) lassen sich unter Beachtung des Satzes von Schwarz (Kommutativität der Ableitungen in der mehrdimensionalen Analysis) 21 Konstanten motivieren:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2.35)$$

Sind diese Werkstoffe darüber hinaus auch noch von der Orientierung unabhängig (Isotropie), reduziert sich die Anzahl der unbekanntenen Materialparameter infolge weiterer Symmetriebedingungen auf zwei. Als Zwischenstufe können orthotrope oder transversal-isotrope Werkstoffe mit neun bzw. fünf (sechs für *Cauchy*-Materialien) unabhängigen Parametern auftreten.

Im Vorgriff der Anwendung auf den Werkstoff Beton kann weiter von kleinen Verzerrungen (siehe Kapitel 4.3.1) ausgegangen werden. Das elastische Stoffgesetz bleibt daher auf das *St. Venant-Kirchhoff*-Modell beschränkt, welches große Verschiebungen zulässt. Große Verzerrungen, wie sie zum Beispiel von *Neo-Hooke*-, *Mooney-Rivlin*- oder *Ogden*-Materialien beschrieben werden können, kommen nicht zur Anwendung.

Der vierstufige linear-elastische *St. Venant-Kirchhoff*-Werkstofftensor lautet:

$$\mathbf{C} = \left(2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) g^{ij} g^{kl} + G \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2.36)$$

Dabei bedeutet ν die Querdehnzahl, G den Schubmodul. Der Zusammenhang mit den *Lamé*-Konstanten (μ und λ) und dem Elastizitätsmodul E ist wie folgt gegeben:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \mu = G; \quad \lambda = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \quad (2.37)$$

Die 2. *Piola-Kirchhoff*-Spannungen lassen sich dann über eine zweifache Verjüngung des Werkstoffensors mit den *Green-Lagrange*-Verzerrungen bestimmen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.38)$$

2.2 Linearisierung

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten nichtlinearen konstitutiven Beziehungen führen auf Strukturebene ebenfalls zu nichtlinearen Beziehungen. Zur Lösung wird im Allgemeinen auf inkrementell-iterative Algorithmen zurückgegriffen, in denen die Gesamtbelastung stückweise aufgebracht und danach das Residuum aus äußeren und inneren Lasten ausiteriert wird. Hierfür hat sich das *Newton-Raphson*-Verfahren etabliert, das bei konsistenter Linearisierung eine quadratische Konvergenzrate aufweist. Am Beispiel des Prinzips der virtuellen Arbeit (Gleichung (2.27)) soll die Vorgehensweise in der *total-Langrange*'schen Darstellung, bei der sich sämtliche Größen auf die Ausgangskonfiguration \mathfrak{B} bzw. $\partial\mathfrak{B}_S$ beziehen, verdeutlicht werden. Demgegenüber steht die *updated-Lagrange*'sche Formulierung, bei der sich sämtliche Größen auf den bekannten Gleichgewichtszustand des vorhergehenden Lastschrittes beziehen (siehe hierzu auch Bathe [9], Marsden [113], Hofstetter & Mang [74], Ramm [152], [154]).

Zum Zeitpunkt n seien sowohl die äußeren Kräfte \mathbf{b}_n und $\mathbf{t}_{0,n}$, als auch die hiervon hervorgerufenen Verschiebungen \mathbf{u}_n bekannt. Dann lässt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit in materieller Darstellung wie folgt schreiben:

$$W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}_n : \delta\mathbf{E}_n(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) \, dV - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b}_n \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathfrak{B}_S} \mathbf{t}_{0,n} \cdot \delta\mathbf{u} \, dA = 0 \quad (2.39)$$

Durch inkrementelle Steigerung der Belastung für den Lastschritt $n+1$ stellen sich die zunächst unbekanntes Verschiebungen $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_{n+1}$ ein, die nach der Linearisierung von Gleichung (2.39) mit dem *Newton*-Verfahren zu ermitteln sind.

$$LIN \, W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) + D_{\Delta\mathbf{u}} W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) \, \Delta\mathbf{u} \quad (2.40)$$

Hierfür ist im zweiten Term die *Gateaux*-Ableitung (Richtungsableitung) gemäß

$$\begin{aligned} D_{\Delta\mathbf{u}} W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) \, \Delta\mathbf{u} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [W(\mathbf{u}_n + \epsilon \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})]_{\epsilon=0} \\ &= \left. \frac{\partial W(\mathbf{u}_n + \epsilon \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial (\mathbf{u}_n + \epsilon \Delta\mathbf{u})}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \, \Delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.41)$$

zu bilden. Bei Beschränkung auf Lasten, die nicht vom aktuellen Verschiebungszustand abhängig sind, erhält man aus Gleichung (2.41)

$$\begin{aligned} D_{\Delta\mathbf{u}} W(\mathbf{u}_n, \delta\mathbf{u}) \, \Delta\mathbf{u} &= \int_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_n}{\partial \mathbf{E}_n} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} \right) : \delta\mathbf{E}_n + \mathbf{S}_n : \Delta(\delta\mathbf{E}_{n+1}) \right] dV \\ &\quad - \int_{\mathfrak{B}} \rho \, \Delta\mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathfrak{B}_S} \Delta\mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta\mathbf{u} \, dA \quad , \quad (2.42) \end{aligned}$$

so dass das linearisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.40) unter Verwendung von Gleichung (2.35) wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathfrak{B}} [(\mathbf{C}_n : \Delta \mathbf{E}_{n+1}) : \delta \mathbf{E}_n + \mathbf{S}_n : \Delta(\delta \mathbf{E}_{n+1})] \\
&= \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_n \, dV \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Sämtliche Größen der rechten Seite von Gleichung (2.43) sind nach Aufbringen des Inkrements *a priori* bekannt und stellen die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}_{n+1} aus äußerer virtueller Arbeit des Lastinkrements $n+1$ und den inneren Kräften des Lastinkrements n dar. Innerhalb des iterativen Verfahrens – das selbstverständlich erst nach der Diskretisierung angewendet werden kann – sind daher die unbekanntenen Verschiebungen der linken Seite zu bestimmen. Zur Linearisierung des diskretisierten Problems für Schalenträgerwerke sei an dieser Stelle auf die ausführliche Abhandlung von Bischoff [13] verwiesen.

Die Lösung des diskretisierten und linearisierten Problems mit dem *Newton-Raphson*-Verfahren wird im Allgemeinen durch eine Nebenbedingung gesteuert. Diese kann durch ein Lastinkrement, eine diskrete Verschiebung im Lastschritt oder eine Bogenlänge definiert sein. Den im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Anwendungsbeispielen wurde meist ein Verschiebungs- oder Bogenlängenverfahren, jeweils mit adaptiver Schrittweitenanpassung zugrunde gelegt (siehe hierzu Reitinger [157]).

2.3 Kinematik eines 3D-Schalenmodells

2.3.1 Übersicht

Die Beschreibung von Deformationen dünnwandiger Tragwerke (Platten, Scheiben und Schalen) hat in der Mechanik eine lange Tradition. Eine Klassifizierung wird üblicherweise anhand der zugrunde liegenden und vereinfachenden kinematischen Annahmen für die Deformationen des senkrecht zur Schalenmittelfläche stehenden Direktors vorgenommen. Insofern lässt sich der Begriff des Drei-Parameter-Modells, als in historischer Sicht erstes Schalenmodell auch bekannt als *Kirchhoff-Love*-Modell, anschaulich über die ausschließlich vorhandenen drei Verschiebungsfreiheitsgrade erklären: Die Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts, dem stets senkrecht auf die Schalenmittelfläche stehenden Direktor und dessen unveränderbaren Länge (bei Balkentheorien bekanntlich die *Bernoulli*-Hypothese) lässt nurmehr die drei Translationen im \mathbb{R}^3 als Freiheitsgrade zu. Äquivalent zur *Timoshenko*-Balkentheorie liefert die nächst höhere kinematische Annahme zwei zusätzliche Rotationsfreiheitsgrade. Damit wird nun ein Teil der Hypothese aufgegeben, wodurch der Direktor nicht mehr senkrecht zur Schalenmittelfläche stehen muss. Diese sogenannte *Reissner-Mindlin*-Kinematik ist unter der Bezeichnung Fünf-Parameter-Schalentheorie bekannt. Der logische nächste Schritt besteht in der Aufgabe einer weiteren kinematischen Annahme, indem ein Parameter eingeführt wird, der die Dickenänderung berücksichtigt. In der nachfolgend beschriebenen Schalenkinematik geschieht dies dadurch, dass die Komponenten des Schalendirektors bzw. eigentlich die Differenzvektorkomponenten \mathbf{w} zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration als Freiheitsgrade verwendet werden. Die hierdurch gewonnene Formulierung wird als Sechs-Parameter-Modell (drei Translationen und drei Differenzvektorkomponenten) bezeichnet, dessen Diskretisierung mit Finiten Elementen bereits der Klasse der *Solid-Like-Shell*-Elemente zuzuordnen ist, da die Wurzeln zur Beschreibung der

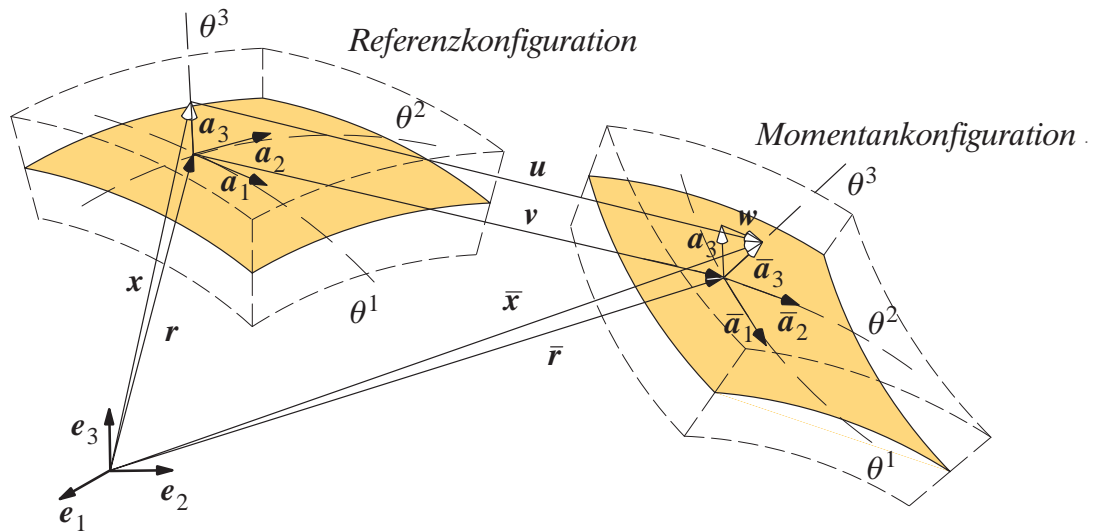


Bild 2.2 Kinematik des Sechs-Parameter-Modells

Schalendehformationen in klassischen Schalentheorien zu finden sind. Weiter existieren Ansätze, die ausgehend von Kontinuumsbeschreibungen klassische *Brick-Elemente* im Hinblick auf Schalenanwendungen optimieren, sogenannte *Shell-Like-Solid*-Konzepte. Eine ausführliche Diskussion zur prinzipiellen Äquivalenz beider Konzepte findet man in Bischoff & Ramm [14]. Ebenfalls zeigen beide Konzepte sogenanntes *Poisson-Dicken-Locking* (siehe Büchter [20], Braun [24] und Bischoff [13]), sofern lineare Verschiebungsansätze in Dickenrichtung verwendet werden. Ansätze höherer Ordnung, wie sie in Kapitel 2.4 beschrieben werden, verhindern diesen Effekt.

Für die in dieser Arbeit behandelten konstitutiven Modelle ist es wichtig anzumerken, dass für das Sechs-Parameter-Modell (und die darauf aufbauenden höheren Modelle) vollständige dreidimensionale Materialtensoren zur Anwendung kommen können. Demgegenüber stehen gängige Fünf-Parameter-Modelle, die im ebenen Spannungszustand formulierte Materialgesetze oder aber einer aufwändigen Kondensation des Material- und des Spannungstensors bedürfen.

2.3.2 Beschreibung der Deformationen

Die Beschreibung des Schalenkontinuums erfolgt ausgehend von einem beliebigen Punkt auf der Schalenmittelfläche über den Direktor \mathbf{a}_3 gemäß

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (2.44)$$

in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration, wobei der Direktor auf die halbe Schalendicke normiert ist:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{h}{2} \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2|} \quad (2.45)$$

Somit gilt für den auch als Semidiskretisierung bezeichneten Ansatz in Dickenrichtung $\theta^3 = [-1..1]$.

Anmerkung: Der Terminus „Semidiskretisierung“ beschreibt die Tatsache, dass bereits zur Herleitung der Schalengleichungen eine Reduktion um eine räumliche Dimension

mit der Annahme eines entsprechenden Verschiebungsansatzes stattfindet. Die daraus entstehenden zweidimensionalen Schalengleichungen können dann mit einem beliebigen Verfahren diskretisiert und gelöst werden.

Die Beschreibung der Verschiebung eines beliebigen Punktes \mathbf{P} mit dem Ortsvektor \mathbf{x} in der Referenzkonfiguration lautet damit

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{r} - \theta^3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} \quad . \quad (2.46)$$

Die zugehörigen *Green-Lagrange*-Verzerrungen \mathbf{E}^u werden schließlich unter Verwendung von Gleichung (2.14) mit dem Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} = \mathbf{u}_{,i}$ gewonnen.

$$E_{ij}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (2.47)$$

Das Superskript u markiert hier die aus den Verschiebungen ermittelten Verzerrungen, um eine formale Unterscheidung zu den in Kapitel 2.4.2 zusätzlich auftretenden erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ zu ermöglichen. Für die kovarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration gilt entsprechend Gleichung (2.7)

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.48)$$

für die Schalenebene. In Dickenrichtung gilt $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ (siehe Gleichung (2.45)₁). Durch Einsetzen der Beziehungen (2.44) und (2.48) in den Ausdruck der *Green-Lagrange*-Verzerrungen (2.47) können dessen Komponenten anhand der auftretenden Potenzen in θ^3 sortiert werden. Aus der Annahme eines linearen Verschiebungsansatzes in θ^3 (siehe Gleichung (2.44)) resultieren maximal quadratische Terme.

$$E_{ij}^u = \alpha_{ij}^u + \frac{h}{2} \beta_{ij} \theta^3 + \frac{h^2}{4} (\theta^3)^2 \gamma_{ij} \quad (2.49)$$

Hier wurde die von Bischoff [13] vorgeschlagene Schreibweise mit Vorfaktoren gewählt, die eine physikalische Interpretation der Verzerrungs- und Spannungskomponenten zulassen (vergleiche Bischoff [13]). Die einzelnen Komponenten lauten damit

$$\alpha_{ij}^u = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) \quad , \quad (2.50)$$

$$\beta_{ij}^u = \frac{1}{h} (\bar{\mathbf{a}}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \bar{\mathbf{a}}_{3,j} \cdot \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{a}_{3,i} \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{3,j} \cdot \mathbf{a}_i) \quad \forall (i,j) \neq (3,3) \quad , \quad (2.51)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^u = \frac{2}{h^2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}) \quad , \quad (2.52)$$

$$\gamma_{i3}^u = 0 \quad \text{sowie} \quad \beta_{33}^u = 0 \quad (2.53)$$

und können entsprechend als Maß für die Normaldehnung, Krümmung oder Schubverzerrung aufgefasst werden.

2.3.3 Schnittgrößen und Vorabintegration des Materialgesetzes

Die in Kapitel 2.1.2 eingeführten 2. P. K.-Spannungen werden nun entsprechend den im vorigen Abschnitt behandelten Verzerrungen zu Spannungsergebnissen zusammengefasst. Zusammen

mit der Vorabintegration des Stoffgesetzes über die Schalendicke bilden sie das Konstitutivgesetz der Schalenformulierung (siehe Büchter [20], Braun [24] und Bischoff [13]). Bei der Reduktion des Volumenintegrals der Spannungsgrößen auf das Flächenintegral der Spannungsergebnisse ist die Änderung eines differenziellen Volumenelements bezogen auf das zugehörige differenzielle Flächenelement auf der Schalenmittelfläche zu berücksichtigen. Diese Änderung geht in die Spannungsintegration über die Schalendicke ein und lässt sich über die Definition des differenziellen Volumen- bzw. Flächenelements

$$dV = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad \text{bzw.} \quad dA = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.54)$$

aus einem linearen Ansatz bestimmen:

$$dV := \mu d\theta^3 dA \quad (2.55)$$

Den hierin als Schalenshifter bezeichneten Skalar μ erhält man somit zu

$$\mu = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad (2.56)$$

Damit lassen sich die Schnittgrößen durch Integration über die Koordinate der Schalendicke θ^3 in den Grenzen -1 bis 1 wie folgt bestimmen:

$$n^{ij} = \int_{-1}^1 S^{ij} \mu d\theta^3, \quad m^{ij} = \int_{-1}^1 \frac{h}{2} S^{ij} \mu \theta^3 d\theta^3 \quad \text{und} \quad s^{ij} = \int_{-1}^1 \frac{h^2}{4} S^{ij} \mu (\theta^3)^2 d\theta^3. \quad (2.57)$$

Entsprechend muss noch das Stoffgesetz vorab integriert werden. Durch die Definition

$$D_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 \mu (\theta^3)^K C^{ijkl} \left(\frac{h}{2}\right)^K d\theta^3, \quad K \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (2.58)$$

wird schließlich das Konstitutivgesetz der zweidimensionalen Schalengleichungen erhalten:

$$\begin{bmatrix} n^{ij} \\ m^{ij} \\ s^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} \\ D_2^{ijkl} & D_3^{ijkl} & D_4^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{kl} \\ \beta_{kl} \\ \gamma_{kl} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Werden die γ_{kl} (Terme höherer Ordnung in θ^3) vernachlässigt sowie der Wert des Schalenshifters μ mit dem Betrag des Schalendirektors $|\mathbf{a}_3|$ angenähert, $\mu \approx |\mathbf{a}_3| = \frac{1}{2} h$, so kann letztere Beziehung zu

$$\begin{bmatrix} n^{ij} \\ m^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{kl} \\ \beta_{kl} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

vereinfacht werden. Die Abweichungen dieser Approximationen von der ursprünglichen Lösung sind nach Büchter [20] nur bei Momentenbelastungen verhältnismäßig dicker Schalen bzw. bei starken Krümmungen von signifikanter Größenordnung. Es ist weiter wichtig darauf hinzuwei-

sen, dass in Gleichung (2.58) der unmodifizierte Materialtensor C^{ijkl} eingesetzt wird. Dies ermöglicht die Formulierung vollständig dreidimensionaler Materialgesetze, wie sie in dieser Arbeit im Rahmen der Plastizitätstheorie angewendet werden.

2.3.4 Behandlung von Schalenknicken

Für die Behandlung von Schalenknicken, wie sie exemplarisch in Bild 2.3 dargestellt sind und in einigen Beispielen in Kapitel 7 auftreten, schlägt Bischoff [13] die Mittelung des Direktors \mathbf{a}_3^{3D} entsprechend der Verschneidung der angrenzenden Schalenlaibungen mit deren jeweiligen Direktoren \mathbf{a}_3^{li} und \mathbf{a}_3^{re} vor. Er zeigt in der Konvergenzstudie eines U-Profiles, dass diese Vorgehensweise schneller gegen die Referenzlösung konvergiert, als eine Mittelung unter Zuhilfenahme des arithmetischen Mittels der angrenzenden Schalendirektoren. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Ansatz von Bischoff auf die einzelnen Schichten des im nächsten Abschnitt ausführlicher beschriebenen *Multi-Layer*-Schalenmodells übertragen und kommt in den Anwendungsbeispielen zum Einsatz. Eine geometrische Darstellung der Vorgehensweise für den mehrschichtigen Schalenbau ist in Bild 2.3b gegeben. Für eine ausführliche Diskussion bei einschichtigen Schalenproblemen sei auf Bischoff [13] verwiesen.

2.4 Ansätze höherer Ordnung in Dickenrichtung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, zeigen Sechs-Parameter- und diesen hinsichtlich ihres kinematischen Ansatzes äquivalente Modelle sogenanntes *Poisson-Dicken-Locking*. Dies resultiert aus dem Umstand, dass die Lage der materiellen Mittelfaser bei Biegebeanspruchung und von Null verschiedener Querdehnzahl nicht mehr mit der Lage der geometrischen Mittelfaser übereinstimmt (siehe zum Beispiel Braun [24]). Dieser Verzerrungszustand kann jedoch durch den linearen Verschiebungsansatz und damit konstanten Dehnungen in Dickenrichtung E_{33} nicht erfasst werden. Die Folge sind parasitäre Normalspannungen in Dickenrichtung S^{33} . Als Lösung bieten sich höhere Polynomansätze (p-Adaptivität), mehrere Schichten desselben linearen Ansatzes (Multi-Layer-Ansatz, h-Adaptivität) oder ein Ansatz auf Basis erweiterter Verzerrungen (EAS-Methode, Sieben-Parameter-Formulierung) an (vergleiche Bild 2.4). Sämtliche Vorgehensweisen lassen sich selbstverständlich auch miteinander kombinieren, wobei jedoch ein er-

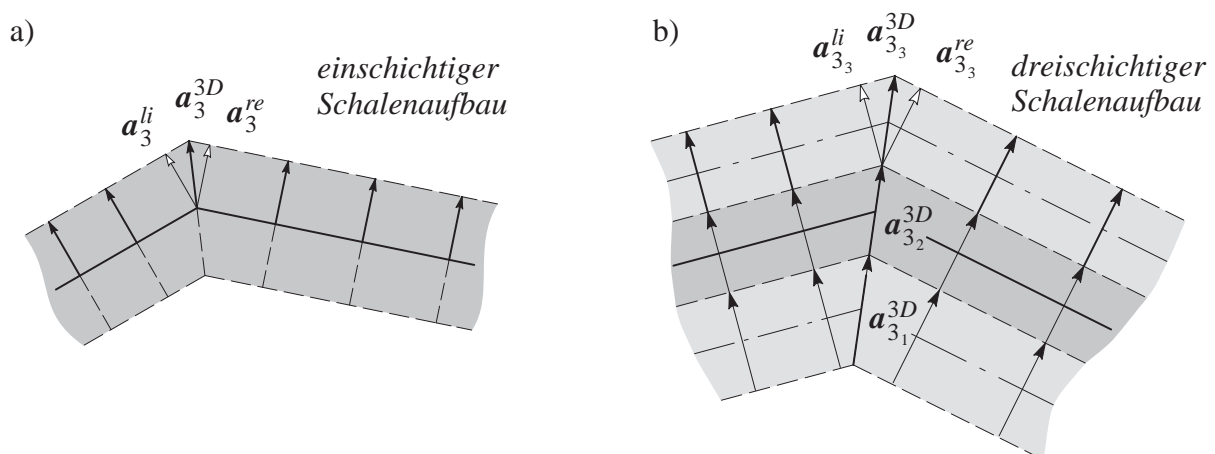


Bild 2.3 Schalendirektor aus dem Schnittpunkt der Schalenlaibungen

weiterer Verzerrungsansatz in Zusammenspiel mit einem Polynomansatz unter Umständen redundant ist.

Innerhalb dieser Arbeit findet insbesondere ein geschichtetes Schalenmodell mit einem linearen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung je Schicht Anwendung, das neben der Verminderung des genannten *Locking*-Problems einer schichtweisen Modellierung bewehrter Betonbauteile entgegenkommt. Des Weiteren wird in einigen Beispielen das Sieben-Parameter-Modell angewendet, für welches ebenfalls eine schichtweise Auswertung des Materialtensors möglich ist. Nachfolgend werden beide Ansätze kurz beschrieben.

2.4.1 Geschichtetes Schalenmodell

Zur Beschreibung des Multi-Layer-Schalenmodells mit NL (Anzahl der Layer) linearen Verschiebungsansätzen in Dickenrichtung, wofür im Weiteren auch der Terminus C^0 -Kontinuität gebraucht werden wird, ist es zweckmäßig, zunächst wieder den Ortsvektor eines Punktes im Schalenraum zu definieren (vergleiche auch Bild 2.5):

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{r}_L + \frac{1}{2}\xi_L \mathbf{a}_{3_L} \quad \xi_L \in [-1, 1] \quad L = 1, \dots, NL \quad (2.61)$$

Dabei ist L die aktuelle Schicht, $|\mathbf{a}_{3_L}|$ der Direktor der aktuellen Schicht, \mathbf{r}_L der Ortsvektor der Referenzschicht und ξ_L die lokale Dickenkoordinate für die aktuelle Schicht L . Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass im Gegensatz zu Kapitel 2.3.2 die Länge des Direktors jeder einzelnen Schicht gleich der Schichthöhe gesetzt wird (siehe Bild 2.6a). Zur Beschreibung des Schalenschnittpunktes ausgehend von der Referenzfläche der Gesamtschale, der Schalenmittelfläche, wird die Kontinuitätsbedingung, die einen C^0 -kontinuierlichen Übergang von einer Schalenschicht auf die nächste sicherstellt, ausgewertet:

$$\mathbf{r}_L + \frac{1}{2}(+1) \mathbf{a}_{3_L} = \mathbf{r}_{L+1} + \frac{1}{2}(-1) \mathbf{a}_{3_{L+1}} \quad \forall L \in \{1, \dots, NL - 1\} \quad (2.62)$$

mit $\xi_L = +1$ und $\xi_{L+1} = -1$.

Sukzessives Berücksichtigen von Gleichung (2.62) in (2.61) führt schlussendlich auf eine geschlossene Form zur geometrischen Beschreibung des Materialpunkts:

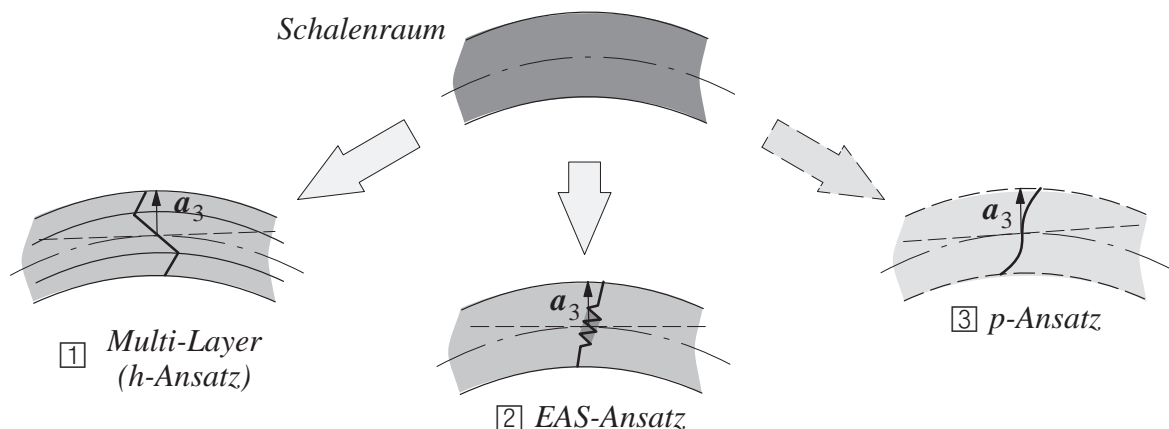


Bild 2.4 Unterschiedliche Verschiebungs- bzw. Verzerrungsansätze in Dickenrichtung

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{r} + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 \mathbf{a}_{3_M} \quad (2.63)$$

Hierin bilden die $\theta_{L_M}^3$ die Einträge in der Kontinuitätsmatrix, die jeweils für die aktuelle Schicht auszuwerten ist (siehe insbesondere Braun [24]). Dabei sind die Kontinuitätskoeffizienten $\theta_{L_M}^3$ für jede nicht „aktive“ Schicht, das heißt für jede Schicht, die den aktuellen Materialpunkt nicht enthält, konstant (0, $\pm 1/2$ und ± 1) und bilden eine Linearkombination zum Ortsvektor \mathbf{x}_L des aktuellen Materialpunkts (vergleiche Bild 2.6b).

Die Differenz aus Momentan- und Referenzkonfiguration liefert den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{v} + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 (\bar{\mathbf{a}}_{3_M} - \mathbf{a}_{3_M}) = \mathbf{v} + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 \mathbf{w}_M \quad (2.64)$$

Die Komponenten des *Green-Lagrange*-Verzerrungstensors $E_{ijL}^u = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ijL} - g_{ijL})$ lassen sich dann durch die Komponenten des kovarianten Metriktensors $g_{ijL} = g_{iL} \cdot g_{jL}$ mit

$$\mathbf{g}_{\alpha L} = \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \theta_L^\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha L} + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 \mathbf{a}_{3_M, \alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_{3L} = \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \theta_L^3} = \mathbf{a}_{3L} \quad (2.65)$$

in der jeweiligen Konfiguration ausdrücken. Entsprechend den Gleichungen (2.49) ff. lassen sich diese schreiben als

$$E_{\alpha\beta L}^u = \alpha_{\alpha\beta}^u + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 \beta_{\alpha\beta_M}^u \quad (2.66)$$

$$E_{\alpha 3L}^u = \alpha_{\alpha 3L}^u + \sum_{M=1}^{NL} \theta_{L_M}^3 \beta_{\alpha 3_{LM}}^u \quad \text{und} \quad (2.67)$$

$$E_{33L}^u = \alpha_{33L}^u \quad (2.68)$$

Referenzkonfiguration

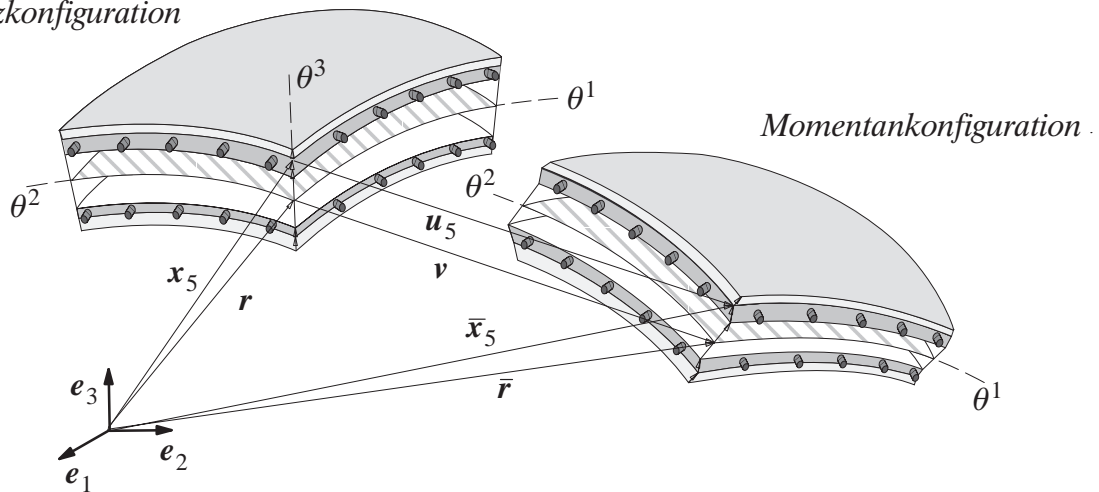


Bild 2.5 Referenz- und Momentankonfiguration im Multi-Layer-Schalenraum

Die Vorabintegration des Materialgesetzes kann entsprechend Kapitel 2.3.3 erfolgen, jedoch muss für jede Schalenschicht die Dickenkoordinate θ^3 durch die jeweilige Schichtkoordinate ζ_L ersetzt werden:

$$D_{K_L}^{ijkl} = \int_{-1}^1 (\zeta_L)^K C_L^{ijkl} \left(\frac{h_L}{2}\right)^K d\zeta_L, \quad K \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (2.69)$$

Entsprechendes gilt für die Ermittlung der Spannungsergebnenden.

Damit stehen prinzipiell sämtliche Gleichungen für die Diskretisierung mit Finiten Elementen auf Basis des Prinzips der virtuellen Arbeit bereit. Hierzu wird auf die ausführliche Abhandlung von Braun [24] verwiesen. Es ist jedoch zu bemerken, dass durch den höheren kinematischen Ansatz der Multi-Layer-Formulierung die Anzahl der Unbekannten um je drei Differenzvektor-komponenten je zusätzlicher Schicht anwächst. Die Gesamtzahl der Freiheitsgrade entspricht somit gerade der, die durch Diskretisieren mit Volumenelementen bei linearem Verschiebungsansatz über die Dicke ebenfalls nötig wäre.

2.4.2 Ansatz mit erweiterten Verzerrungen

Das Problem des *Poisson-Dicken-Locking* lässt sich auch durch einen erweiterten Verzerrungsansatz in Dickenrichtung des Schalenraumes eliminieren. Der aus der Sechs-Parameter-Theorie resultierende konstante Verlauf der transversalen Normaldehnungen E_{33} wird durch einen angenommenen linearen Verzerrungsverlauf \tilde{E}_{33} erweitert. Bischoff zeigt in [13], dass das resultierende Sieben-Parameter-Schalenmodell auch als eigenständige Schalentheorie interpretiert werden kann. Die Gesamtverzerrungen lauten damit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \tilde{E}_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \neq (3,3) \quad (2.70)$$

und $\tilde{E}_{33} = \tilde{\beta}_{33} \theta^3$. Die Komponenten des Verzerrungstensors ergeben sich entsprechend den Gleichungen (2.50) bis (2.53). Lediglich der lineare Anteil der Normalverzerrungen liefert definitionsgemäß einen Beitrag (vergleiche Gleichung (2.53)₂): $\beta_{33} = \tilde{\beta}_{33}$. Damit können die auf

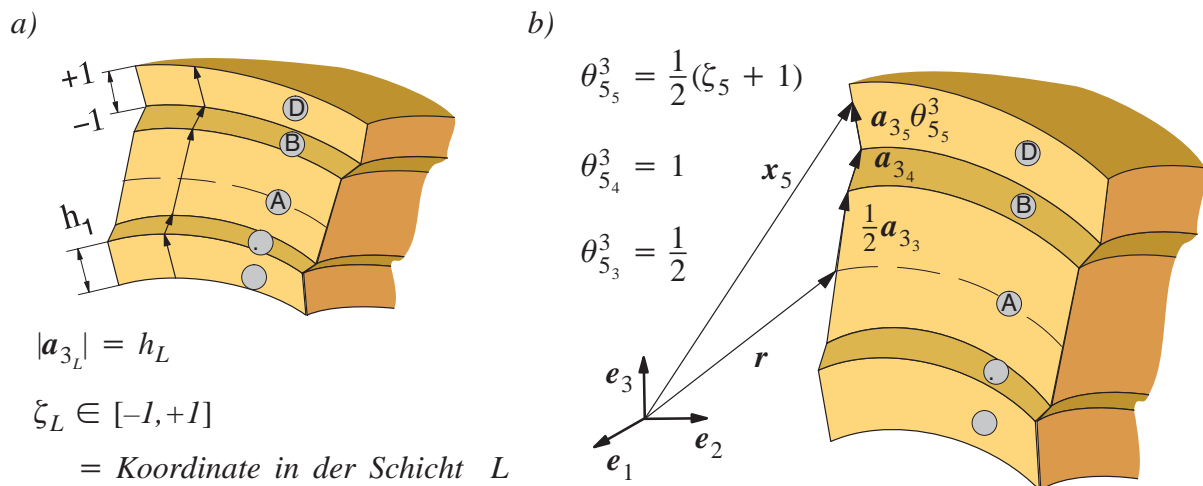


Bild 2.6 Exemplarischer fünfgeschichtiger Schalenbau

dieser Basis entwickelten Finiten Elemente der Sieben-Parameter-Theorie eine Verschiebung der materiellen Mittelfaser unabhängig von der geometrischen Mittellinie beschreiben.

Die Behandlung der Vorabintegration des Stoffgesetzes und der Spannungsergebnisse kann analog zu Kapitel 2.3.2 und 2.3.3 erfolgen. Eine Diskretisierung erfolgt auf Basis des in Kapitel 2.1.4 erläuterten Prinzips von *Hu-Washizu* in den Verschiebungen \mathbf{u} und den zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ (siehe Gleichung (2.34)).

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = & \int_{\mathfrak{B}} \left\{ \tilde{\mathbf{S}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{S}^u : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right\} dV \\ & - \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_s} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\partial \mathfrak{B}_u} \delta \mathbf{t}^s \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) dA \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die weitere Herleitung des diskretisierten Prinzips sowie der zugehörigen Elementformulierungen sind nicht Gegenstand dieser Arbeit. Der Leser wird daher auf die ausführlichen Publikationen von Büchter et al. [21], Braun [24] und Bischoff [13] verwiesen.

Anmerkung: Sowohl bei dem ursprünglichen Sechs- als auch bei dem zuvor erläuterten Sieben-Parameter-Modell kann eine schichtweise Vorabintegration des Stoffgesetzes angewendet werden, um zum Beispiel die in dieser Arbeit behandelten Bewehrungsschichten zu modellieren. Da hierfür nur eine kinematische Schicht, parametrisiert in θ^3 , jedoch mehrere materielle Schichten, parametrisiert in ζ_L , zu integrieren sind, ist Gleichung (2.58) entsprechend der Integrationsgrenzen zu modifizieren und der schichtweise erhaltene „Materialtensor“ zu summieren. Hierfür wird die Transformationsbeziehung

$$\theta^3 = -1 + \frac{1}{h} \left[-h - h_L(1 - \zeta_L) + 2 \sum_{i=1}^L h_i \right] \quad (2.72)$$

aufgestellt, wobei h_L die jeweilige Höhe der Schalenschicht L repräsentiert. Die Vorabintegration (vergleiche Gleichung (2.58)) des Materialtensors kann dann folgendermaßen vorgenommen werden:

$$D_K^{ijkl} = \sum_{L=1}^{NL} \frac{h_L}{h^{K+1}} \int_{-1}^1 \mu_{\zeta_L} \left[-h_L(1 - \zeta_L) + 2 \sum_{i=1}^L h_i \right] C_L^{ijkl} d\zeta_L \quad (2.73)$$

3 Charakteristika der angewendeten Materialien

Nachfolgend werden die für eine numerische Struktursimulation notwendigen physikalischen Eigenschaften bewehrten Betons, getrennt nach denen des reinen Betons sowie der verwendeten Bewehrungsmaterialien, kurz erläutert. Für eine ausführliche Darstellung sei auf die aktuellen Arbeiten aus der Materialforschung verwiesen. Als Ausgangspunkt für praktische Fragestellungen bietet hier sich der Artikel von Hilsdorf & Reinhardt [67] an, während die theoretischen Aspekte unbewehrten Betons, auch im Hinblick auf eine numerische Umsetzung, in den Monographien von Karihaloo [83] und van Mier [126] detailliert beleuchtet werden. Weitere Literaturstellen insbesondere zu den Bewehrungselementen finden sich in den jeweiligen Abschnitten.

3.1 Beton

3.1.1 Allgemeines

Beton besteht aus einem Konglomerat von Zementstein und Zuschlagstoffen unterschiedlicher Größe und Qualität. Für Normalbeton gilt im Allgemeinen, dass die Zuschläge eine dichtere Struktur und eine höhere Festigkeit als die umgebende Zementmatrix haben und somit das Verformungsverhalten und die Versagenscharakteristik maßgeblich durch die Eigenschaften des Zementsteins sowie der Kontaktfläche zwischen Zementmatrix und Zuschlag beeinflusst werden. Es ist jedoch ausdrücklich anzumerken, dass diese Aussage zum Beispiel für hochfeste Betone und Leichtbetone nicht zutreffend ist, da bei Ersteren eine wesentlich steifere Zementmatrix und bei Zweiteren Zuschläge geringerer Dichte und Festigkeit – jeweils im Vergleich zum Normalbeton – verwendet werden. Als Folge weisen diese Betone Versagensmechanismen auf, die gänzlich anderen Gesetzmäßigkeiten folgen.

Betonbauteile sind bereits im Herstellungszustand gekennzeichnet durch Gefügeunregelmäßigkeiten, wie zum Beispiel Mikroporen, Luft- oder Wassereinschlüsse und Schwindrisse, noch bevor überhaupt äußere Belastungen aufgebracht werden. Während besagte Einschlüsse durch eine annähernd statistische Verteilung in der Mesostruktur gekennzeichnet sind, entstehen die Schwindrisse infolge geringerer Festigkeit der Kontaktzone und zugleich höheren Schwinddehnungen der Zementmatrix an den Zuschlagskörnern. Wird der Beton nach dem Aushärten belastet, so wachsen diese Unregelmäßigkeiten an und bilden Mikrorisse, die sich wiederum bei weiterer Lastzunahme mit anderen Mikrorissen vereinigen und die sogenannte Prozesszone darstellen. Die Akkumulation von Mikrorissen mündet schlussendlich in die Bildung von Makrorissen, die letztlich das Versagen des Tragwerks herbeiführen. Die Festigkeit wie auch die Steifigkeit des Betons werden daher maßgeblich durch die Menge an vorhandenen Mikrorissen vor der Erstbelastung beeinflusst.

Diese Betrachtung legt bereits die Vermutung nahe, dass für Beton aufgrund seiner stofflichen Inhomogenität eine numerische Abbildung der Versagensprozesse auf unterschiedlichen Skalen stattfinden sollte. Die Simulation von Tragverhalten und Versagensmodi auf Strukturebene kann jedoch zumindest derzeit noch nicht mit Modellen erfolgen, deren mechanische Basis in der Mikro- oder Meso-Skala gelegt wurde. Eine Einteilung in die drei Bereiche Mikro-, Meso- und Makro-Skala wird zum Beispiel von van Mier [126] gegeben (vergleiche Bild 3.1). Für die Struktursimulation kommen derzeit Modelle der Makro-Skala zur Anwendung. Dabei wird das nichtlineare Antwortverhalten des realen Materials im Materialpunkt phänomenologisch abge-

bildet und die mikromechanischen Prozesse homogenisiert (verschmiert) in einer höheren Skala durch Veränderungen der Materialkenngrößen erfasst.

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Beton bietet es sich an, die nächsten Abschnitte, entsprechend den experimentellen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte, in einaxiales, biaxiales und triaxiales Verhalten zu gliedern. Das Hauptproblem der Versuchsdurchführung liegt in der größtmöglichen Elimination von Effekten, die durch den Versuchsaufbau, die Probengröße und -geometrie die Ergebnisse beeinflussen. Insbesondere sei die Lasteinleitungsproblematik genannt, die durch diverse Materialien für die Druckplatten (Gummi, Teflon oder Stahl) unterschiedlich lange Stahlbürsten oder hydrostatischen Flüssigkeitsdruck zu lösen versucht worden ist. Ziel ist es, den Bereich eines dreiaxialen Spannungszustands im Lasteinleitungsbe- reich möglichst klein zu halten. Darüber hinaus sei der Maßstabeffekt genannt, der das Übertragen von Laboreergebnissen auf reale Tragwerke sowie insbesondere die Einschätzung der in der numerischen Simulation verwendeten Materialparameter hinsichtlich der wirklich vorhandenen Größen zusätzlich erschwert (vergleiche Bazant & Planas [8]).

3.1.2 Einaxiale Beanspruchung

Einaxiale Versuche zur Bestimmung der Druckfestigkeit an Betonproben werden üblicherweise an Zylindern, Prismen oder Würfeln entsprechend der gängigen Normen durchgeführt (siehe [26] bzw. [41]). Dagegen wird die Zugfestigkeit in der Regel anhand indirekter Versuche bestimmt. Der Versagensmechanismus, wie einleitend beschrieben, ist dabei für Zug- und Druckbelastung ähnlich. Ausgangspunkt für die weitere Schädigung des Konglomerats sind stets die bereits vorhandenen Mikrorisse und -poren.

Zugbeanspruchung

Die Zugfestigkeit wird in der Regel an indirekten Versuchen ermittelt. Zwar lässt sich auch ein zentrischer Zugversuch an Betonprismen durchführen, indem anstatt wie bei Stahl üblich die Probe einzuspannen eine lasteinleitende Stahlplatte auf die Enden aufgeklebt wird, jedoch ist die Versuchsdurchführung stark durch Inhomogenitäten des Betons in der Nähe der Lastplatten und Exzentrizität der Belastung geprägt. Beides führt häufig zu ungewollten Versagensmoden (siehe van Mier [126]). Daher werden indirekte Verfahren wie der Spaltzugversuch oder der Biegezug-

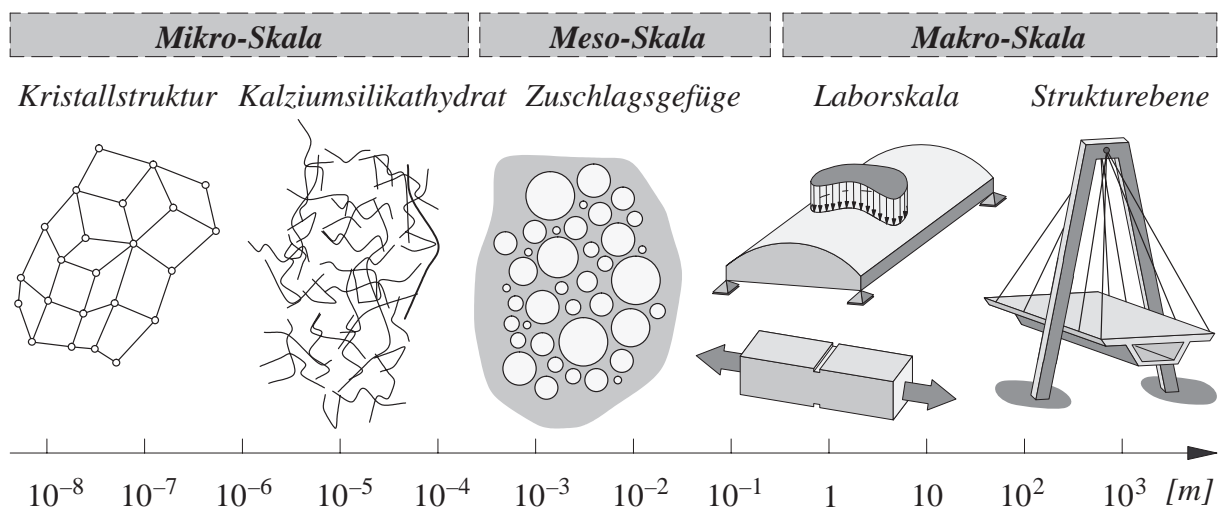


Bild 3.1 Skalen des mechanischen Verhaltens von Beton (nach van Mier [126])

versuch *in praxi* bevorzugt. Für deren Definition sei auf die entsprechenden Normenwerke verwiesen ([26], [41]), jedoch muss festgehalten werden, dass für die Zugfestigkeit eine erhebliche Streuung der Versuchsergebnisse vorliegt. Dies ist insbesondere deshalb problematisch, weil sich, wie sich in den weiteren Untersuchungen herausstellen wird, die Zugfestigkeit als ein äußerst sensibler Parameter bei der numerischen Simulation erweist. Interessanterweise wurden bereits 1870 von Michaelis und Frühling (vergleiche Kahlow [82]) unter der Bezeichnung „Zerreiß-Apparate“ zwei Versuchsaufbauten zur Bestimmung der Festigkeit von Beton vorgeschlagen. Dabei handelt es sich zum einen um einen Biegezugversuch und zum anderen um einen direkten Zugversuch (siehe Bild 3.2).

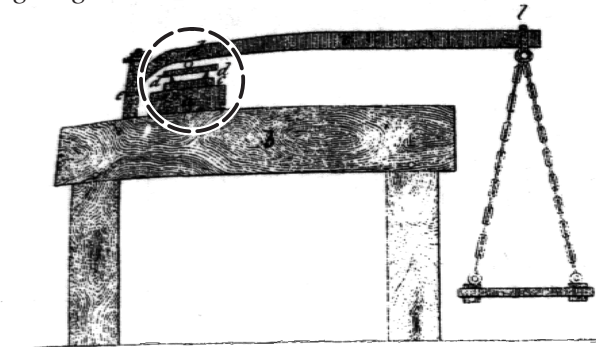
Die Versagensentwicklung bei Zugbeanspruchung von Betonproben ist bestimmt durch ein linear-elastisches Verhalten bis zu ca. 70 % der Zugfestigkeit f_{ctm} . Unter diesem Wert findet kein weiteres nennenswertes Wachstum von Mikrorissen statt. Bei weiterer Belastung bildet sich eine Rissprozesszone von parallel verlaufenden Mikrorissen aus, die sich schließlich in einem Makroriss vereinigen und das Versagen einleiten. Die Versagenszone selbst ist lokal begrenzt, wodurch der restliche Versuchskörper eine Entlastung erfährt. Das Nachbruchverhalten ist geprägt von hohen Verformungen durch Haft- und Reibungsverbund des Zuschlags (Kornverzahnungen) in der Zementmatrix sowie durch Materialbrücken und kann in dehnungsgesteuerten Versuchen nahezu vollständig erfasst werden (vergleiche Karihaloo [83], van Mier [126], Hofstetter & MangI V).

Als weiterer Materialparameter wird aus zugbeanspruchenden Versuchen die Bruchenergie G_t ermittelt. Hierfür wird neben dem Biegezugversuch, für den das RILEM Technical Committee TC-50 FMC eine entsprechende Prüfmethode vorgeschlagen hat, auch der Keilspaltversuch (*wedge-splitting-test*) herangezogen. Beiden Methoden ist gemein, dass die Bruchenergie G_t , definitionsgemäß die Energie, die zur Erzeugung eines Risses der Einheitslänge notwendig ist, der Fläche unter der Last-Verformungskurve gleichgesetzt wird. Erneut gilt jedoch, dass die enorme Streubreite der Versuche hier einen Materialparameter betrifft, der sich in der numerischen Simulation als sehr sensitiv herausstellt (siehe zum Beispiel Haufe, Menrath & Ramm [58]). In den Normenwerken wird für die Bruchenergie bei der formalen Bestimmung aus der Druckfestigkeit daher eine Abweichung von $\pm 30\%$ berücksichtigt (siehe zum Beispiel [26]).

Druckbeanspruchung

Unter einaxialer Druckbeanspruchung verhält sich Beton zunächst nahezu linear-elastisch. Bei etwa einem Drittel der maximalen Druckfestigkeit f_{cm} beginnen die bereits vorhandenen Mikro-

Biegezugversuch



Direkter Zugversuch

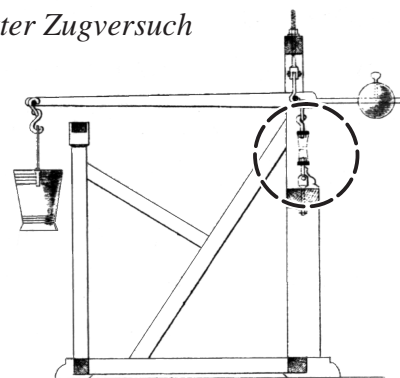


Bild 3.2 „Zerreiß-Apparate“ von Michaelis und Frühling (1870) aus [82]

risse stabil und parallel zur Belastungsrichtung zu wachsen und breiten sich mit größer werdender Belastung vorzugsweise entlang der Grenzschichten, aber auch durch die Zementmatrix aus. Ab ca. 80 - 90 % von f_{cm} führt schließlich eine weitere Belastung zur Vereinigung der bisher gebildeten Mikrorisse zu Makrorissen und zur weiteren Zerstörung des Gefüges infolge instabilen Risswachstums (siehe Bild 3.3). Nach Erreichen der Druckfestigkeit kann in dehnungsgesteuerten Versuchen das Lokalisieren von Verzerrungen zu sich bildenden Makrorissen in Scherbändern beobachtet werden. Außerhalb der Scherbänder findet eine Entlastung der Proben statt. Interessant und für Geomaterialien typisch ist zunächst eine Volumenabnahme (Kontraktanz), die jedoch bei weiterer Belastung bei ca. 70 % der Druckfestigkeit in eine Volumenzunahme (Dilatanz) umschlägt (vergleiche ebenfalls Karihaloo [83], van Mier [126], Suanno [183] sowie Hofstetter & Mang [74]).

Es ist noch anzumerken, dass Vonk [186] entsprechend der Bruchenergie für Zugversagen eine entsprechende Größe G_c für Druckversagen motiviert hat, die das ca. 100- bis 500fache der Zugbruchenergie beträgt. Diese Druckbruchenergie G_c findet in die Formulierung von Evolutionsgesetzen in der numerischen Simulation Eingang.

3.1.3 Biaxiale Beanspruchung

Beton unter biaxialer Beanspruchung ($\sigma_3 = 0$) wurde ausführlich von Kupfer et al. ([99] und nachfolgende Veröffentlichungen) untersucht. Aus den bei unterschiedlichen Spannungsverhältnissen σ_1/σ_2 durchgeführten Versuchen (monoton und proportional) wurde die einschlägig bekannte Versagenskurve ermittelt (siehe Bild 5.9b). Aus der Hüllkurve ist ersichtlich, dass bei Druckbelastung infolge der behinderten Querdehnung in der zweiten Belastungsrichtung die Festigkeit gesteigert werden kann. Für ein biaxiales Druckspannungsverhältnis von $\sigma_1/\sigma_2 = 0,5$ bzw. $2,0$ erreicht die Festigkeit im ebenen Spannungszustand demnach ein Maximum von ca. 20 - 25 % über der einaxialen Druckfestigkeit. Demgegenüber wirkt bereits geringer Querkzug stark festigkeitsmindernd. Im Grenzwert für biaxialen Zug bei einem Spannungsverhältnis $\sigma_1/\sigma_2 = 1,0$ wird die einaxiale Zugfestigkeit entsprechend eines *Rankine*-Kriteriums erreicht. Weiter ist zu bemerken, dass in Abhängigkeit des Hauptspannungsverhältnisses der Versagensmode und die Volumenzunahme variiert (siehe Nelissen [134], Kupfer et al. [99]).

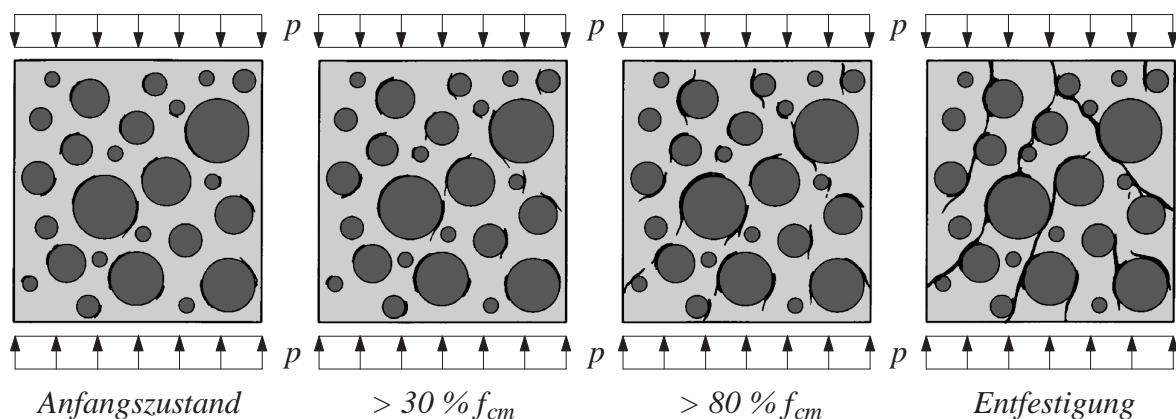


Bild 3.3 Risswachstum in Betondruckproben (qualitativ)

3.1.4 Triaxiale Beanspruchung

Triaxialversuche lassen sich prinzipiell in konventionelle und wahre Triaxialversuche einteilen (vergleiche Hofstetter & Mang [74]). Im ersten Fall kommen zylindrische Proben zur Anwendung, die in axialer Richtung konventionell belastet sind und in Querrichtung durch hydrostatischen Flüssigkeitsdruck beaufschlagt werden. Dadurch sind die beiden Hauptspannungskomponenten aus der Querbelastung jeweils von gleicher Größe, womit sich im Vergleich mit der axialen Hauptspannungskomponente die Unterscheidung in Extensions- ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) und Kompressionsversuch ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) ergibt. Im Gegensatz hierzu lassen sich bei wahren Triaxialversuchen alle drei Hauptspannungskomponenten einzeln steuern. Für die Belastung der dabei verwendeten Betonwürfel stellt sich das gleiche Problem der Lasteinleitung wie bei den ein- bzw. biaxialen Versuchen, das heute im Allgemeinen mit Stahlbürsten gelöst wird.

Versuche hinsichtlich des Verhaltens unter dreiaxialen Spannungszuständen wurden zum Beispiel von van Mier, Reinhardt & van der Vlugt [125], Mills & Zimmerman [127] und Kotsovos & Newman [91] durchgeführt. Weitere Literaturverweise zu Experimenten finden sich in Hofstetter & Mang [74] sowie Ottosen [137] (siehe auch Bild 5.10) und dem Heft 447 des DAfStB.

Aus den Versuchsergebnissen wird ersichtlich, dass Beton mit steigendem Umschnürungsdruck (*confinement*) höhere Festigkeiten entwickelt. Der prinzipielle Spröbruch bei einaxialer Belastung, zurückzuführen auf instabiles Risswachstum, wandelt sich hin zu einem quasi-duktilen Versagen unter mäßigem Querdruck, welches hauptsächlich durch ein „Zerquetschen“ der Zementmatrix durch die Zuschläge erklärt werden kann. Da dieser Versagensmode erneut von der relativen Festigkeit der Zuschläge und der Zementmatrix abhängt, ist er für Leichtbeton und hochfesten Beton von grundsätzlich anderer Ausprägung. Weiter zeigt sich bei den Extensions- und Kompressionsversuchen eine unterschiedliche maximale Beanspruchbarkeit bis zum Versagen. Die Daten dieser Versuche werden bezüglich der anliegenden hydrostatischen Spannung ξ sortiert und entsprechend der Spannungsinvarianten ρ und θ in den *Haigh-Westergaard*-Koordinaten (vergleiche (A.19) ff.) aufgezeichnet. Die so gewonnenen Deviatorschnitte zeigen eine fast dreieckige Hüllkurve im Zugbereich, die durch das klassische *Rankine*-Kriterium abgebildet werden kann. Mit zunehmendem hydrostatischen Spannungsanteil ändert sich diese Hüllkurve zunehmend hin zu einer Kreisform (siehe Bild 5.6a). Das heißt, die Materialantwort aus den Extensions- und Kompressionsversuchen (Meridianschnitte der Versagensfläche) nähert sich zunehmend einander an. Wird die Belastung bei gleichmäßiger dreiaxialer Beanspruchung weiter gesteigert, findet schließlich keine Entfestigung mehr statt, sondern durch vollständiges Zusammendrücken der Zementmatrix und somit vollständigem Schließen der Mikroporen, lässt sich eine weitere Verfestigung im Versuch erreichen. Allerdings liegen diese Festigkeitssteigerungen außerhalb der konventionellen Anwendungsgebiete für Betontragstrukturen.

Die dreidimensionale Versagensfläche von Beton im Hauptspannungsraum lässt sich im Weiteren wie folgt charakterisieren (vergleiche auch Bild 5.7):

- Die Meridiane sind nichtlinear, konvex und glatt.
- Der Schnitt mit der Deviatorebene ist ebenfalls glatt und konvex und geht von einem Dreieck in einen Kreis über.
- Das Verhältnis des Kompressions- zum Extensionsmeridian in der Deviatorebene nimmt von 0,5 an zu, bleibt jedoch immer kleiner 1,0.

Interessant für die Materialmodellierung ist das Verhalten der Volumenänderung während triaxialer Belastung. Über das prinzipielle Phänomen wurde bereits von Kupfer et al. [99] berichtet.

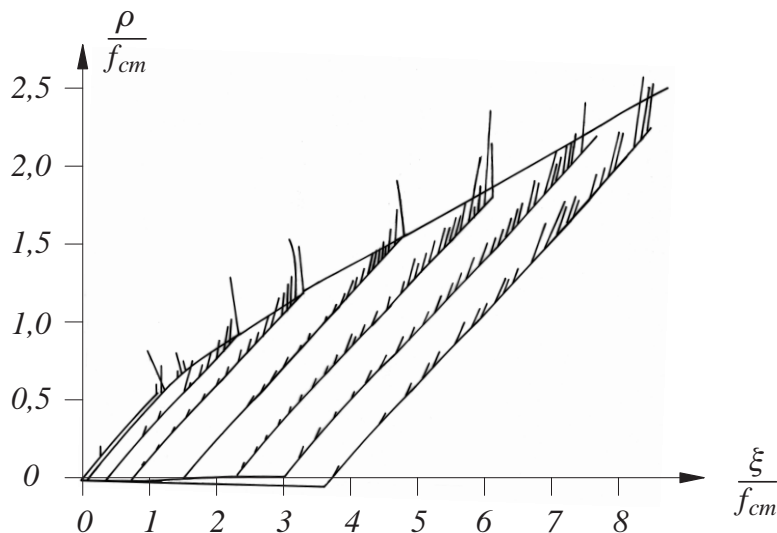


Bild 3.4 Plastische Formänderungen in vektorieller Darstellung nach Smith [47] aufgetragen in den normalisierten Haigh-Westergaard-Koordinaten

Smith (siehe Etse [47]) hat darüber hinaus Untersuchungen zur Quantifizierung der plastischen Formänderung unter dreiaxialer Beanspruchung angestellt. Insbesondere für die Entwicklung von Materialgesetzen auf Basis der klassischen Plastizitätstheorie sind seine in Bild 3.4 dargestellten Ergebnisse zur Festlegung der Richtung des plastischen Flusses und damit des plastischen Potentials Q von besonderer Bedeutung.

3.2 Bewehrung

3.2.1 Baustahl

Stahl ist das klassische Material zur Bewehrung von Betonbauteilen. Als schlaffe Bewehrung wird er hauptsächlich in der Güte eines warmgewalzten, unlegierten Qualitätsstahls mit deutlich erkennbarem Fließplateau und hoher Bruchdehnung eingesetzt. Für die eindimensional beanspruchten Bewehrungsstäbe können typische Zugversuche an normierten Proben zur Ermittlung der Materialparameter (Fließspannung, Bruchdehnung, Festigkeit etc.) herangezogen werden. Einer Modellierung auf der Makroskala (siehe Kapitel 5.6) kommt der nahezu regelmäßige kristalline Aufbau des Eisengitters entgegen, der für eine Erfassung des Verformungsverhaltens mittels der Plastizitätstheorie prädestiniert ist. Für weiterführende Literatur zur Charakterisierung von Baustahl wird beispielsweise auf Bertram [11] und den dort angegebenen Referenzen, aber auch auf die einschlägigen Normen und Regelwerke verwiesen ([26], [41]).

3.2.2 Textile Fasern

Einführung

In den vergangenen Jahren hat der Einsatz von textilen Fasern zur Verstärkung von dünnwandigen Betonbauteilen zunehmend an Bedeutung gewonnen. Dies dokumentiert sich nicht zuletzt an den gestiegenen Forschungsaktivitäten im Bereich des Textilbetons (siehe insbesondere Curbach et al. [38] und folgende Veröffentlichungen, Gollas [54], Eitel [46]). Für die Anwendung

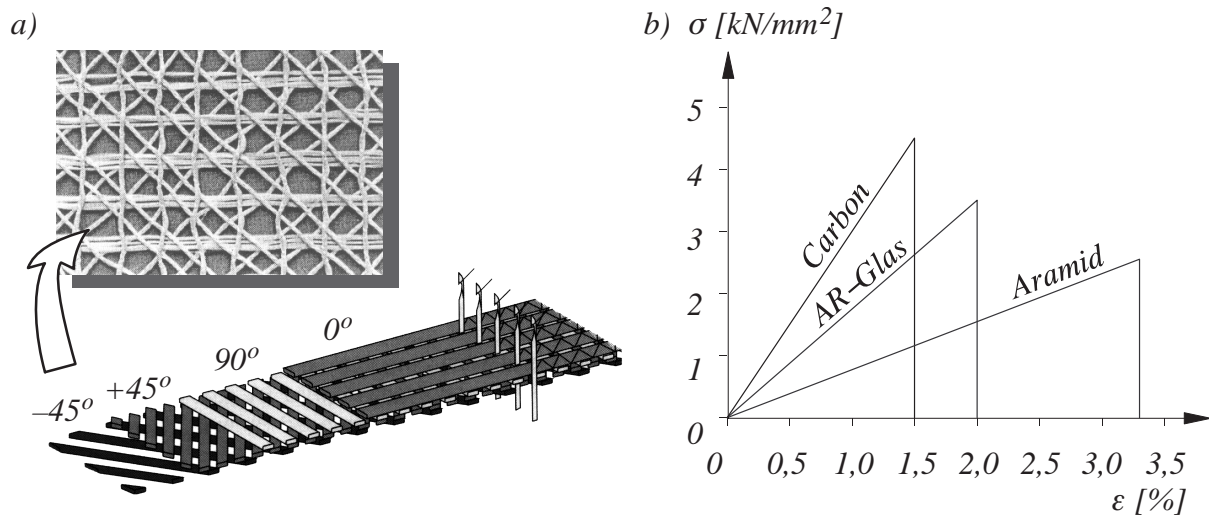


Bild 3.5 a) AR-Glasfasergelege nach [64] b) Arbeitslinien diverser Kunstfasern

als verstärkendes Element innerhalb einer Betonmatrix haben Fasermaterialien jedoch neben Festigkeitsanforderungen auch Anforderungen hinsichtlich Dauerhaftigkeit (Alkali-resistenz) zu erfüllen. Wissenschaftlich abgesicherte Erkenntnisse liegen derzeit für Aramid-, Carbon- sowie alkali-resistente Glasfasern (AR-Glas) vor, wobei insbesondere für letztere die Langzeit-resistenz noch nicht gewährleistet ist. Aramidfasern zeigen darüber hinaus bei langandauernder Belastung, wie sie unter Vorspannung notwendig ist, weiteres Risswachstum infolge progressiver Schädigung der Einzelfaser. Der daraus resultierende Festigkeitsabfall muss im Bemessungskonzept Berücksichtigung finden [54].

Für den vielversprechenden Einsatz in dünnwandigen Bauteilen werden insbesondere Methoden entwickelt, textile Strukturen wie Gewebe, Gelege und Geflechte (zur Nomenklatur siehe DIN 60000), aber auch Maschenwaren zur Erzeugung von Halbzeugen aus Feinbeton (zum Beispiel verlorene Schalungselemente für Decken, Schalen oder Faltwerke) nutzbar zu machen. In ersten experimentellen Untersuchungen zum Tragverhalten (vergleiche Curbach [39], Hegger et al. [63]) wurden verwirkte Gelege aus alkali-resistenten Glasfaserrovings untersucht (siehe auch Kapitel 7.5 und 7.6). Als Gelege wird dabei eine Struktur bezeichnet, die aus dem Übereinanderlegen von Fadensystemen mit oder ohne Fixierung der Kreuzungspunkte entsteht (siehe [38], [64] sowie Bild 3.5a). Gegenüber den Geweben bietet sich der Vorteil, dass sich die einzelnen Faserbündel ohne zusätzliche Fadenwellung aus der Webanordnung (Kette bzw. Schuss) verlegen lassen und daher die maximale Steifigkeit erzielt werden kann. Im Rahmen einer praktischen Anwendung kann jedoch ein gewisser abgestufter „Streckschlupf“ zum Duktilitätsgewinn durchaus erwünscht sein.

Arbeitslinie der Fasern

Letzteres resultiert aus der Tatsache, dass die Arbeitslinien der gängigen Kunstfasern zwar eine Steifigkeit in der Größenordnung von Stahl aufweisen, jedoch bei Erreichen der sehr viel höheren Zugfestigkeit spröde und ohne Vorankündigung versagen (siehe Bild 3.5b). Insofern stellt sich für die Anwendung in tragenden Strukturen zum einen das Problem der Resttragfähigkeit bei plötzlichem Versagen unter statischer Beanspruchung und zum anderen der geringen Duktilität bei dynamischer Beanspruchung wie zum Beispiel im Erdbebenfall.

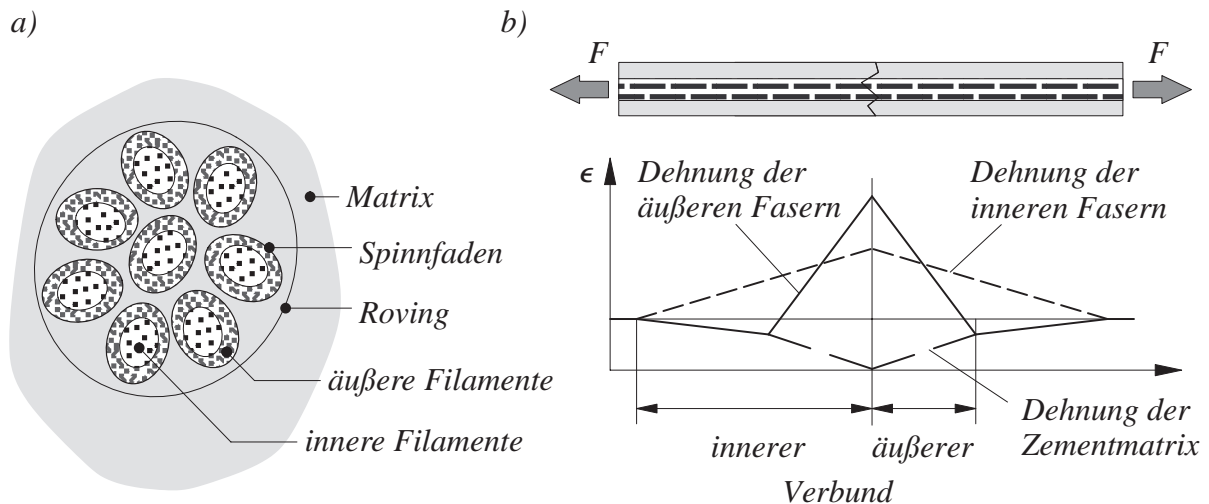


Bild 3.6 a) AR-Glasfaser Rovings in Zementmatrix b) Innerer und äußerer Verbund [136]

Mechanische Eigenschaften des Geleges im mineralischen Matrixverbund

Prinzipiell sind nach Ohno & Hannant [136] drei Verbundmechanismen zu unterscheiden. Zum einen der Haftverbund der äußeren Filamente des Spinnfadens (siehe Bild 3.6a) in der Betonmatrix sowie der nach Überschreiten der Haftfestigkeit auftretende Reibungsverbund und der sogenannte Faser-Reibungsverbund, der innerhalb der Spinnfäden zwischen den Filamenten, die keinen direkten Kontakt zur Matrix haben, stattfindet. Spinnfäden werden daher entsprechend ihrem Verbundverhalten in äußere und innere Filamentgruppen eingeteilt. Ein Resultat dieser Verbundeigenschaften sind die weit geringeren Bruchlasten in zentrischen Zugversuchen, als sie Materialparameter und ideelle Querschnitte zunächst erwarten lassen (siehe Hegger et al. [63]): Nach der Rissbildung im Beton erfolgt die Lastabtragung ausschließlich über die Kunstfasern, wobei die äußeren Filamente infolge der unterschiedlichen Verbundsteifigkeiten sehr viel größere Dehnungen und somit Spannungen aufweisen als die inneren. Die Folge ist ein früheres Versagen der äußeren Filamente, das sich sukzessive nach innen fortsetzt. Eine schematische Darstellung der Längsdehnungen in den unterschiedlichen Querschnitten anhand eines einfachen Zugversuchs ist in Bild 3.6b gegeben [136].

Dabei wird durch einen Vergleich mit Stahlbewehrungen sofort deutlich, dass gerade der Faser-Reibungsverbund dort nicht vorkommt. Weiter ist zu betonen, dass im Gegensatz zur Stahlbewehrung sehr viel feinere Strukturen vorherrschen und somit mehr Kontaktfläche zwischen Matrix und Bewehrung zur Verfügung steht. Dadurch wird das Entstehen und das Wachstum von Mikrorissen in der Zementmatrix gehemmt. Die Bewehrung ist also bereits vor dem Trennbruch der Zementmatrix aktiv an der Lastabtragung beteiligt. Als Konsequenz hiervon bilden sich Gefügerisse erst zu einem späteren Zeitpunkt und verursachen darüber hinaus auch noch größere innere Reibung. Die hierdurch entstehenden Effekte sollen in dieser Arbeit phänomenologisch auf der Makroskala erfasst werden. Hierzu könnte nun entsprechend dem *tension-stiffening*-Konzept ein weiterer Spannungsanteil, wie er in Kapitel 5.6.4 bzw. Gleichung (5.95) für eine Stahlbewehrung vorgestellt wird, eingeführt werden. Da jedoch davon ausgegangen werden muss, dass die zu untersuchenden multiaxialen Gelege entsprechend ihrer räumlichen Struktur die beschriebenen Effekte in allen Raumrichtungen zeigen, werden in einem ersten Ansatz die für Zugversagen relevanten Materialparameter des reinen Betons modifiziert.

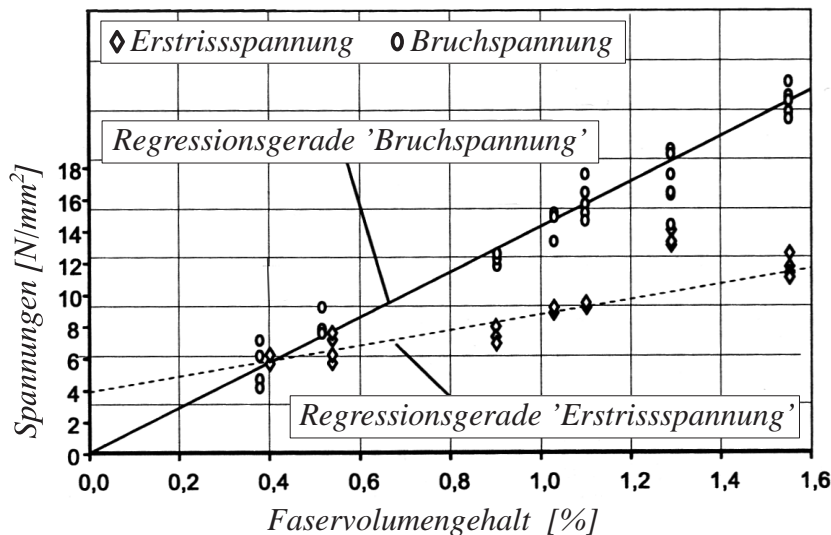


Bild 3.7 Einfluss des Faservolumengehalts auf die Erstriss- und Bruchspannungen [38]

Die Steigerung der Erstrissspannung ist abhängig vom Faservolumengehalt und wird anhand von einaxialen Zugversuchen in [38] dokumentiert. Die aus diesen Untersuchungen ermittelbare Regressionsgerade lautet (siehe auch Eitel [46])

$$f_{ctm,mod} = f_{ctm} (1,0 + 1,5 n_{eff}) \quad (3.1)$$

$$\text{mit } n_{eff} = \rho_{eff} \cdot 100 [\%] \quad \text{und} \quad \rho_{eff} = \rho_{\parallel} + (\rho_{-45} + \rho_{+45}) \cdot \eta \quad (3.2)$$

und liefert schlussendlich die Motivation zur Erhöhung der Zugfestigkeit f_{ctm} des reinen Betons in den numerischen Untersuchungen (vergleiche Bild 3.7). Dabei ist n_{eff} der effektive Fasergehalt, ermittelt aus den effektiven Bewehrungsgraden ρ_{\parallel} in Belastungsrichtung und den zugehörigen 45° -Anteilen ρ_{-45} und ρ_{+45} . Der Multiplikator η liefert einen Wirkungsfaktor, der den Anteil der schrägen Fasern in Lastrichtung berücksichtigen soll (siehe nachfolgenden Abschnitt).

Die einhergehende Erhöhung der inneren Reibung schlägt sich zudem in der Erhöhung der Bruchspannung und einem duktileren Nachbruchverhalten nieder. Letzteres lässt auf eine höhere Zugbruchenergie G_f des Betons im feinen Matrixverbund mit den Textilfasern gegenüber unbewehrtem Beton schließen. Hinsichtlich Stahlfaserbeton sind diese Phänomene hinlänglich bekannt. Für Textilbeton fehlt jedoch derzeit eine Möglichkeit zur quantitativen Abschätzung der Bruchenergie.

Wirkungsfaktor schiefer Fasern

Für den Einsatz textiler Gelege in Tragstrukturen ist der Wirkungsgrad schief zur Belastungsrichtung verlaufender Fasern von entscheidender Bedeutung für die Traglast. In [38] wird diesbezüglich der Wirkungsfaktor $\eta = \cos^4 \alpha$ für das untersuchte verwirkte multiaxiale Gelege (WIMAG) abgeleitet, um die Tragwirkung bezüglich einer um den Winkel α gedrehten Hauptbelastungsrichtung für vereinfachte Bemessungs- und Modellierungskonzepte abschätzen zu können. Die in den Kapiteln 7.5 und 7.6 vorgestellten Anwendungsbeispiele greifen auf diesen Ansatz zurück.

4 Werkstoffmodelle für Beton

4.1 Übersicht

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Plastizitätstheorie und der darauf aufbauenden Werkstoffmodelle erläutert. Neben klassischen Modellen, wie zum Beispiel *von Mises*- oder *Drucker-Prager*-Formulierungen, werden speziell für Beton entwickelte Materialmodelle kurz vorgestellt. Besonderheiten, die bei der Anwendung auf Beton auftreten bzw. nötig sind, werden herausgearbeitet. Die in dieser Arbeit weiterentwickelten Formulierungen werden anschließend beschrieben. Zunächst sollen jedoch plastizitätsbasierte Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien gegenüber anderen möglichen Ansätzen abgegrenzt werden.

4.2 Einordnung und alternative Modelle

In der Kontinuumsmechanik werden Körper (hier Bauteile) im Allgemeinen als zusammenhängendes Gebiet mit exakt definierten Eigenschaften angesehen. Entsprechend kommt den Materialmodellen (*constitutive models*) die Aufgabe zu, Verformungsgrößen in den zugehörigen Kraftgrößen auszudrücken, üblicherweise am infinitesimalen Volumen mittels Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Im Gegensatz hierzu stehen Modelle, deren konstitutive Beziehungen an endlichen Volumina aufgestellt werden (*discrete models*). Dabei bilden zum Beispiel diskrete Balkenelemente die Verbindung zwischen diskreten Partikeln ab und übertragen Verschiebungen und Rotationen. Die Kombination von Kontinuums- und diskreten Modellen in einer Formulie-

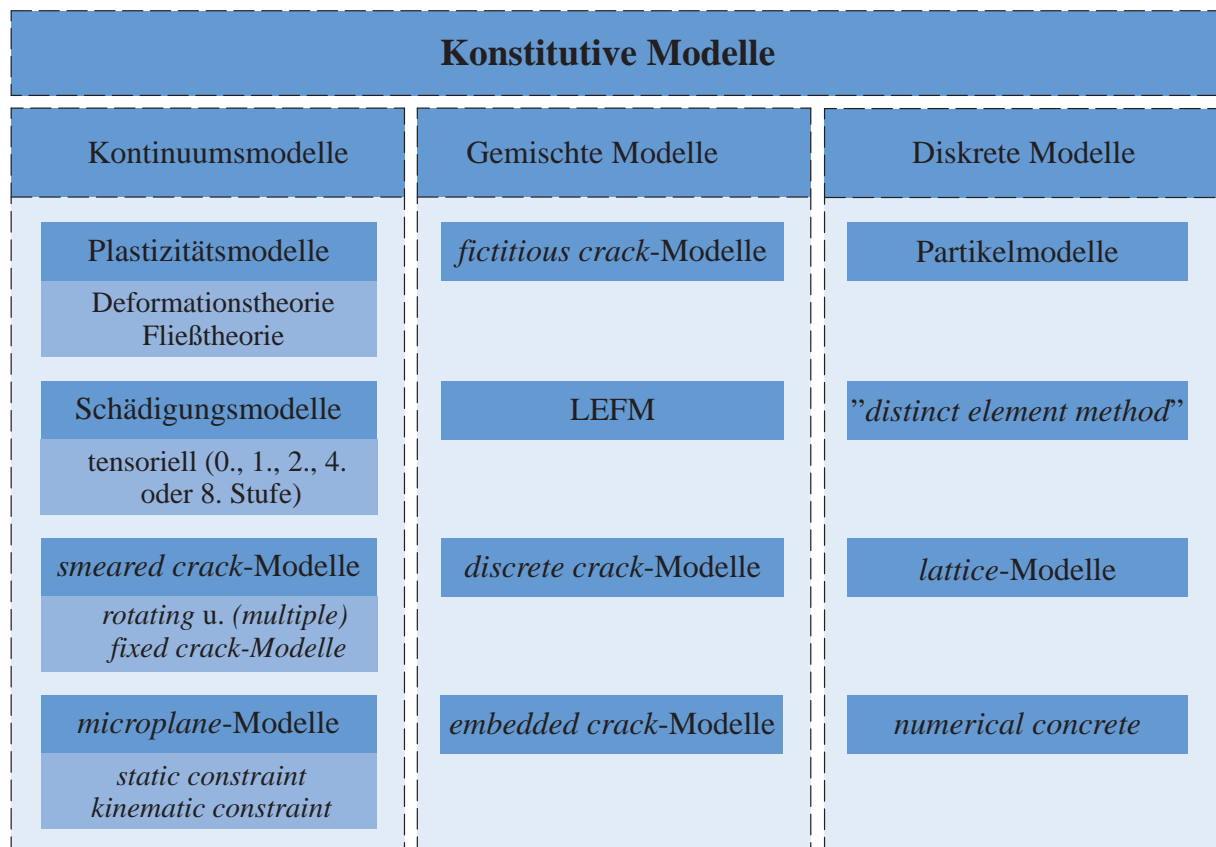


Bild 4.1 Einordnung der Materialmodelle für Reibungsmaterialien

ung führt auf sogenannte gemischte Modelle (*mixed models*). Diese erlauben die Abbildung von elastischen Gebieten im Rahmen des verwendeten Kontinuumsmodells; die inelelastischen Effekte (Risse, Separation in Teilvolumina) werden durch das diskrete Modell der Formulierung erfasst. Die folgende Zusammenstellung orientiert sich an Bild 4.1.

4.2.1 Kontinuumsmodelle

Im Rahmen dieser Arbeit kommen ausschließlich Kontinuumsmodelle mit Translationsfreiheitsgraden (*Boltzmann-Kontinuum*) zur Anwendung. Weitergehende Modelle, wie sie zum Beispiel von den Gebrüdern *Cosserat* [33] (Translationen und Rotationen) vorgeschlagen wurden, sogenannte mikropolare Kontinua, werden nicht betrachtet.

Mit dem *Hooke'schen* Gesetz für isotrope, **linear elastische Materialien** (siehe Gleichung (2.36)) wird das einfachste Werkstoffgesetz definiert. Bei Erweiterungen zu allgemein gültigeren, elastischen Modellen kann zunächst die Linearität bzw. die Isotropie aufgegeben werden. Wie bereits in Kapitel 2.1.5 erläutert, können unter Zuhilfenahme weiterer elastischer Konstanten transversal isotrope, orthotrope oder allgemein anisotrope elastische Modelle definiert werden. Für hyperelastische Materialien wird dabei ein Potenzial zugrunde gelegt, das eine Ableitung der Arbeitslinie zulässt. Im Gegensatz hierzu wird bei hypoelastischen Materialien direkt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in inkrementeller Form postuliert.

Als gängigste Erweiterung der elastischen Modelle dürfen die **Plastizitätsmodelle** gelten. Es muss jedoch die Deformationstheorie, auch *Hencky-Plastizität* [65] genannt, von der Fließtheorie (inkrementelle Plastizitätstheorie) unterschieden werden. In der **Deformationstheorie** werden die plastischen Verzerrungen ϵ^{pl} direkt über die Spannungen bestimmt. Exemplarisch wird die Beziehung für das *von Mises-Kriterium* angegeben (siehe auch Khan & Huang [85])

$$\epsilon^{pl} = \frac{3\bar{\epsilon}^{pl}}{2\bar{\sigma}} s \quad \text{wobei} \quad \bar{\epsilon}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^{pl} : \epsilon^{pl}} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma : \sigma} . \quad (4.1)$$

Hierbei sind ϵ und σ die allgemeinen Verzerrungs- bzw. Spannungstensoren und s der Spannungsdeviator².

Die **inkrementelle Plastizitätstheorie** wiederum erlaubt Formulierungen im Spannungs- und Verzerrungsraum, wobei letztere, obwohl sie einige Vorteile bieten (siehe Naghdi & Trapp [133] und Khan & Huang [85]), selten angewendet werden. Es ist in diesem Zusammenhang wichtig darauf hinzuweisen, dass, obwohl Beton als ein eher spröder Werkstoff weder klassisches plastisches Versagen, noch ausgesprochenes Fließen aufzeigt (wie dies zum Beispiel bei einfachen unlegierten und niedrig legierten Baustählen oder auch Aluminium beobachtet werden kann), das Strukturversagen jedoch phänomenologisch durch Modelle der Plastizitätstheorie zu erfassen ist.

Auf Basis der Fließtheorie formulierte Modelle spalten den Verzerrungstensor in einen elastischen und einen plastischen Anteil (siehe Kapitel 4.3); die Definition einer Vergleichsspannung beschreibt schließlich den Beginn der inelastischen Materialantwort. Die elastischen Parameter

2. In Kapitel 2 wurden die Green-Lagrange-Verzerrungen mit dem Formelzeichen S und die 2. P. K.-Spannungen mit E entsprechend der gängigen Literatur eingeführt. Innerhalb der folgenden Kapitel wird nun ebenfalls konform mit der Literatur aufgrund der Beschränkung auf kleine Verzerrungen das Formelzeichen ϵ für die Verzerrungen sowie für die Cauchy-Spannungen σ verwendet.

werden dabei nicht modifiziert. Dies steht im Gegensatz zu einer weiteren Modellklasse, der **Kontinuumschädigungsmechanik**. Hier wird der elastische Materialtensor als Folge des Degradationsprozesses während der Belastung abgemindert. Einfachste Vertreter dieser Klasse sind die isotropen Schädigungsmodelle, wie sie auch in dieser Arbeit in Kombination mit Plastizitätsformulierungen Verwendung finden (vergleiche Kapitel 5.5). Verfeinerte Theorien versuchen in der Regel, einen achtstufigen Schädigungstensor $\tilde{\mathcal{Q}}$ (siehe Gleichung (4.2)) zu umgehen.

$$C_{ijkl}^{\text{mod}} = \tilde{\mathcal{Q}}_{ijklmnop} C_{mnop}^{\text{el}} \quad (4.2)$$

Diese theoretisch allgemeinste Form der Schädigungsbeschreibung über Evolutionsgesetze eines achtstufigen Schädigungstensors gilt als sehr aufwendig. Sie erweist sich hauptsächlich wegen der Identifizierung der hohen Zahl an Parametern in $\tilde{\mathcal{Q}}_{ijklmnop}$ als sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich. Cordebois & Sidoroff [32] schlagen daher einen Ansatz auf dem Prinzip der Energieäquivalenz vor, der zu einem symmetrischen vierstufigen Schädigungstensor führt. Eine direkte Modifikation des Steifigkeitstensors wird von Yazdani & Schreyer [194] vorgeschlagen und von Yazdani et al. [195] in der Folge weiter untersucht. Neben dem Prinzip der Energieäquivalenz sind auch Formulierungen basierend auf dem Prinzip der Verzerrungsäquivalenz und der Spannungsäquivalenz möglich. Letzteres kommt jedoch selten zur Anwendung (vergleiche Jirásek [77], [79]).

Eine weitere Klasse von Modellen sind die sogenannten **smearred crack-Modelle**. Wie bei plastizitätsbasierten Modellen wird auch hier der Verzerrungstensor in einen elastischen und einen inelastischen Anteil aufgespalten³

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{el}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{frac}} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} (\vec{\boldsymbol{\epsilon}}^f \otimes \vec{\boldsymbol{n}} + \vec{\boldsymbol{n}} \otimes \vec{\boldsymbol{\epsilon}}^f) \quad (4.3)$$

Der inelastische Anteil wird jedoch als Maß für die Rissöffnung verstanden. Hierzu wird ein Rissöffnungsvektor $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ definiert, der in der Normalen $\vec{\boldsymbol{n}}$ der Rissebene agiert. Für die drei zusätzlichen Unbekannten $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ in (4.3) wird eine Kraft-Rissöffnungs-Beziehung postuliert:

$$\vec{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{\phi}}(\vec{\boldsymbol{\epsilon}}, \vec{\boldsymbol{n}}, \dots) \quad (4.4)$$

In diesem Format lassen sich *fixed crack*-Modelle und *rotating crack*-Modelle ausarbeiten; entweder wird die Rissrichtung in sukzessiven Belastungsschritten beibehalten (*fixed crack*) oder aber der jeweiligen neuen Hauptzugspannungsrichtung angepasst (*rotating crack*). Der Implementierungsaufwand für *fixed crack*-Modelle ist durch die Speicherung der Rissrichtung im Allgemeinen höher, das Strukturverhalten meistens steifer. Daneben wird der Übertragung von Schubspannungen im Riss durch Einführen eines sogenannten *shear retention*-Faktors Rechnung getragen [182]. Formulierungen, die mehrere unabhängige Risse zulassen (*multiple fixed crack*), mindern das zu steife Strukturverhalten (siehe zum Beispiel Rots [161], Bazant & Planas [8]). Eine interessante Kombination eines *smearred crack*-Modells mit einem skalaren Schädigungsmodell wurde jüngst von Jirásek & Zimmermann [80] vorgeschlagen.

An dieser Stelle muss die in der Literatur teilweise unkorrekte, aber verständliche Missinterpretation des Begriffes „*smearred crack*-Modell“ erwähnt werden. Danach könnte ein beliebiges Kon-

3. Im Gegensatz zur bisherigen Notation in dieser Arbeit, werden in diesem Kapitel Vektoren ausnahmsweise explizit als solche durch übergestellten Pfeil gekennzeichnet, um eine Verwechslung mit gleichlautenden Größen, die jedoch einen Tensor höherer Stufe darstellen, zu vermeiden.

tinuummodell, also zum Beispiel ein Plastizitäts- oder Schädigungsmodell, als *smearred crack*-Modell bezeichnet werden, schließlich findet eine Berücksichtigung von diskreten Rissen in beiden Fällen nicht statt. Trotzdem sollte der Begriff des „*smearred crack*-Modells“ nur auf Modelle angewendet werden, die ausgeprägte Rissrichtungen in der dargestellten Form berücksichtigen.

Als eigenständige Modellklasse innerhalb der Kontinuumsmodelle sollte ebenfalls das *microplane*-Modell Erwähnung finden. Während bei den anderen Modellen eine direkte Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen mittels eines vierstufigen, nicht zwingend elastischen Materialensors aufgestellt wird, werden beim *microplane*-Modell die konstitutiven Beziehungen als Skalar- bzw. Vektormultiplikation ausgeführt. Hierzu werden einer Motivation aus der Metallplastizität mit ihren ausgeprägten Versagensebenen (entsprechend der atomaren Gitterstruktur) folgend, die tensoriellen Größen zweiter Stufe auf zueinander schief stehende Mikroebenen projiziert. Der Vorgehensweise des *static-constraint*, also der Vorgabe der statischen Zustandsgrößen, steht der *kinematic-constraint*, die Vorgabe der Kompatibilität, gegenüber. Im ersten Fall werden die Spannungen auf die Mikroebenen projiziert und danach die Verzerrungen über einaxiale Gesetze berechnet. Der zweite Weg ist numerisch angenehmer zu implementieren, arbeiten doch die meisten Finite Elemente Programme verzerrungsbasiert. Hier werden die Verzerrungen auf die Mikroebenen projiziert und die evaluierten Spannungen der Mikroebenen danach wieder in geeigneter Weise aufsummiert (siehe zum Beispiel Jirásek [79], Kuhl [95], Bazant [7]). Eine thermomechanisch konsistente Basis für das *microplane*-Modell wurde erst in jüngster Vergangenheit von Carol, Jirásek & Bazant bereitgestellt [25].

4.2.2 Diskrete Modelle

Im Gegensatz zu Kontinuumsmodellen, in denen ein kontinuierliches Medium zum Beispiel mit der Methode der Finiten Elemente diskretisiert wird, erfolgt dieser Schritt bei den diskreten Modellen bereits im Ansatz. Neben Arbeiten von Cundall & Strack [37] (*distinct element method*), die von steifen Partikeln ausgehen, die jedoch über Reibungsgesetze interagieren, haben sich vor allem die Partikelmethode (vergleiche Kun et al. [98], Kuhl et al. [96]) zur Simulation des mikromechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien durchgesetzt. Dabei werden endliche Volumina durch geeignete Geometrien (Kugeln, Polyeder) repräsentiert. Die Interaktion der einzelnen diskreten Elemente erfolgt im Allgemeinen durch Kontakt und verbindende Stab- oder Balkenelemente. Für diese sind Konstitutivgesetze definiert, die die Last-Verschiebungs-Beziehung (starr bzw. Versagen bei definierter Zugbeanspruchung) sowie das Kontaktverhalten (Rückstellkräfte bei Eindringung etc.) der Partikel untereinander regeln. Eine enge Verwandtschaft besteht auch zu sogenannten *lattice*-Modellen (vergleiche Schlangen [164]) und „*numerical concrete*“-Formulierungen (siehe Sadouki & Wittmann [163]). Bei letzteren werden die Gefügebestandteile des Betons – Zementmatrix und Zuschläge sowie deren mechanisches Verhalten an der Kontaktfläche – mittels geeigneter numerischer Verfahren (FEM, FDM) simuliert.

4.2.3 Gemischte Modelle

In die Gruppe der gemischten Modelle fallen jene, die Ansätze der Kontinuumsmodelle mit jenen der diskreten Modelle vereinigen. Sinnvollerweise werden dabei die ungerissenen bzw. ungebrochenen Gebiete durch die Kontinuumsmodelle abgebildet, wogegen in den Riss- bzw. Bruchfronten selbst diskrete Ansätze eingesetzt werden. Die Kontinuumsmodelle sind selbstverständlich

nicht auf elastische Materialien beschränkt – es können sämtliche Modelle aus Kapitel 4.2.1 angewendet werden. Grundsätzlich ist bei diesen Modellen ein Anriss- sowie ein Rissfortschrittskriterium bereitzustellen. Als Beispiel sind hier die Ansätze aus der Linear Elastischen Bruchmechanik (*Linear Elastic Fracture Mechanics*, LEFM), deren Grundlagen von Griffith 1921 gelegt wurden, zu nennen. Hierbei wird eine Rissfront durch eine Einkerbung bzw. einen existierenden Riss vorgegeben. Nach Überschreiten einer kritischen Spannung an der Rissspitze steuert das Rissfortschrittskriterium das weitere Wachstum der Diskontinuität (vergleiche Jirásek [79], Jensen [76]).

Hillerborg et al. [69] schlagen zuerst ein Modell vor, bei dem nach Überschreiten des Anrisskriteriums die Spannungen im Riss nicht sofort zu null gesetzt werden. Stattdessen wird in dem *fictitious crack*-Modell eine Kraft-Rissöffnungs-Beziehung eingeführt, die dem kohäsiven Charakter der sich öffnenden Rissfront gerecht wird. Schlussendlich erweist sich dieses Evolutionsgesetz dem Grenzfall entfestigender Kontinuumsmodelle bei reinem Mode I Versagen (siehe Kapitel 3) äquivalent (vergleiche Simo et al. [176]).

Das wohl bekannteste Modell wurde bereits 1967 von Ngo & Scordelis [135] vorgeschlagen und aufgrund seines direkten Zugangs stetig fortentwickelt. Die Risse werden beim *diskreten Riss*-Modell als Diskontinuitäten geometrisch modelliert – folglich wird nach jedem Überschreiten des Rissfortschrittskriteriums an möglichen Rissfronten eine Neuvernetzung (siehe Cervenka [29]) nötig, sofern die Rissfront nicht *a priori* bekannt ist (zum Beispiel bei Delaminationsvorgängen, vorgegebenen Schwachstellen im Gebiet etc.). In jüngeren Arbeiten werden die entstehenden Diskontinuitäten in der Elementformulierung, aufbauend auf dem Dreifeldfunktional von *Hu-Washizu*, berücksichtigt (siehe Dvorkin et al. [42], Klisinski et al. [87] oder Mosler & Meschke [128]), was in der Bezeichnung *embedded crack*-Modell zum Ausdruck kommt. Eine Übersicht über aktuelle Formulierungen findet man in Jirásek [78].

4.3 Ratenunabhängige Elastoplastizität für kleine Verzerrungen

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der ratenunabhängigen Plastizitätstheorie kurz vorgestellt. Es werden die klassischen Modelle und die notwendigen Erweiterungen zur Simulation von Reibungsmaterialien behandelt, bevor das *Drucker*'sche Stabilitätspostulat und die sich daraus ergebenden Konsequenzen im weiteren diskutiert werden.

4.3.1 Übersicht und Herleitung der Werkstoffgleichungen

Die klassische Fließtheorie der Plastizität hat ihre Ursprünge zu Ende des 19ten bis Anfang des 20sten Jahrhunderts und wird mit Namen wie *Tresca*, *Levy* und natürlich *von Mises* verbunden. Der zur vollständigen Beschreibung des Problems nötige Formelsatz besteht aus der Fließbedingung, der Fließregel sowie einem geeigneten Evolutionsgesetz. Der Zustand des Materialpunktes soll nur von den elastischen, den inelastischen (bzw. hier plastischen) Verzerrungen und einer geeigneten Anzahl innerer Variablen q abhängig sein; es handelt sich also um eine lokale Formulierung. Die Beschränkung auf kleine Verzerrungen – für spröde Materialien wie Beton gerechtfertigt – erlaubt die additive Zerlegung des Verzerrungstensors.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{el} + \boldsymbol{\epsilon}^{pl} \quad (4.5)$$

Der elastische Anteil wird üblicherweise über das verallgemeinerte *Hooke*'sche Gesetz bestimmt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad (4.6)$$

Die Fließbedingung wird als Funktion der Spannungen und der inneren Variablen formuliert.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (4.7)$$

Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum definiert $F = 0$ eine Fläche, die das elastische Gebiet vom inelastischen trennt. Spannungszustände, die innerhalb der Fließfläche liegen, bleiben elastisch, Spannungszustände außerhalb der Fließfläche sind (im Sinne idealer ratenunabhängiger Plastizität) nicht zulässig. Jedoch kann die Fließfläche als Abhängige der inneren Variablen \mathbf{q} im Laufe der Belastungsgeschichte modifiziert werden: Sie kann sich vergrößern, verkleinern, verschieben oder auch die Form ändern. Die Beschränkung der Spannungen auf $F \leq 0$ bedingt bei weiterer Verformungszunahme plastische Verzerrungen, deren Rate als plastischer Fluss bzw. als Fließregel bezeichnet wird.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{m} = \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{m} die Richtung des plastischen Flusses. In diesem Zusammenhang ist es wichtig anzumerken, dass \mathbf{m} nicht notwendigerweise aus einem plastischen Potenzial Q abgeleitet werden muss, sondern die einzelnen Komponenten m_{ij} auch eigenständig definiert sein können (siehe Perez-Foguet et al. [146]). $\dot{\lambda}$ bezeichnet den plastischen Multiplikator, für den $\dot{\lambda} \geq 0$ gilt. Zur Definition des einaxialen Evolutionsgesetzes (oder auch deren mehrere) ist aus dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und den internen Variablen \mathbf{q} durch die Abbildung \mathbf{k} ein geeignetes Maß $\boldsymbol{\kappa}$ zu bilden:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.9)$$

Das Evolutionsgesetz ist dann folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (4.10)$$

In dieser Terminologie sind $\boldsymbol{\kappa}$ im Verzerrungsraum definierte und \mathbf{q} im Spannungsraum definierte Größen, die in Kapitel 4.3.2 im Rahmen der Verfestigungshypothesen nochmals aufgegriffen werden.

Plastische Verzerrungszuwächse können nach Gleichung (4.8) nur auftreten, wenn $\dot{\lambda} > 0$ ist, gleichzeitig gilt jedoch nach Gleichung (4.7) $F = 0$, für elastische Zustände gelten dieselben Beziehungen *vice versa*, so dass die Bedingung

$$\dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.11)$$

jederzeit Gültigkeit hat. Zusammen mit Gleichung (4.7) erhält man so die Belastungs-/Entlastungsbedingungen in der aus der Optimierung bekannten *Kuhn-Tucker-Form* (siehe Simo & Hughes [171]).

$$F \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} F = 0 \quad (4.12)$$

Während des Fließens muss die Bedingung nach (4.11) ebenfalls erfüllt sein. Diese bedingt für die Änderung der Fließfunktion $\dot{F} = 0$, so dass unter Berücksichtigung von Gleichung (4.11) die sogenannte Konsistenzbedingung

$$\dot{\lambda} \dot{F} = 0 \quad (4.13)$$

gilt. Für plastische Belastung ist $\dot{\lambda} > 0$, somit lautet Gleichung (4.13) ausgeschrieben

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen des verallgemeinerten *Hooke*'schen Gesetzes (4.6) in Ratenform in Gleichung (4.5) und Berücksichtigung der Fließregel (4.8) erhält man

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{el} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{m}) \quad . \quad (4.15)$$

Aus der Ratenform von Gleichung (4.10) wird durch Einsetzen von Gleichung (4.9)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \mathbf{k} \quad , \quad (4.16)$$

so dass in Kombination mit Gleichung (4.15) und der Konsistenzbedingung schließlich ein geschlossener Ausdruck für den plastischen Multiplikator gewonnen werden kann:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{H} \mathbf{k}} \quad (4.17)$$

Hierin wurden die gebräuchlichen Abkürzungen für den Verfestigungsmodul $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$ sowie den Gradienten der Fließfläche $\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ verwendet. Rücksubstitution von (4.17) in (4.15) liefert die Ratenform der elasto-plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{C}^{el} - \frac{\mathbf{C}^{el} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{C}^{el} : \mathbf{n}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{H} \mathbf{k}} \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad (4.18)$$

wobei der Klammerausdruck den elasto-plastischen Materialtensor \mathbf{C}^{ep} des Kontinuums darstellt. Bereits hier können die Symmetrieeigenschaften des elasto-plastischen Materialtensors untersucht werden: Nur für den Fall, dass $\mathbf{m} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ gilt, also der Gradient auf die Fließfläche gleich der Richtung des plastischen Flusses ist, wird sich eine symmetrische Materialtangente einstellen.

Hinsichtlich der Be- und Entlastungsbedingungen ist der Vollständigkeit halber anzumerken, dass durch Anwendung der vorgestellten Gleichungen eine Zweideutigkeit für entfestigende Materialien bezüglich elastischer Entlastung und plastischer Belastung im entfestigenden Ast umgangen wird (siehe Simo & Hughes [171], Hofstetter & Mang [74]). Dieser Fall tritt auf, sofern anstatt der Rate der Prädiktorspannung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ in Tabelle 4.1 die Spannungsrate aus der Kontinuumsformulierung verwendet wird. Die Prädiktorspannung ist ein Konstrukt aus der numerischen Umsetzung der Plastizitätstheorie mittels eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens. Sie ergibt sich zu $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$; eingesetzt in Gleichung (4.17) lassen sich die Be- und Entlastungsbedingungen aus Tabelle 4.1 ableiten. Voraussetzung hierfür ist, dass der Nenner in Gleichung (4.17) nicht zu einem Vorzeichenwechsel führt, folglich stets positiv sein muss.

Abschließend sollte noch angemerkt werden, dass die formale Herleitung der Gleichungen in der Plastizitätstheorie im Rahmen einer thermodynamischen Betrachtungsweise ausgehend von der *Freien Helmholtz*-Energie ebenfalls erfolgen kann. Unter Berücksichtigung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung und dem *Postulat der maximalen Dissipation* ergibt sich ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung, dessen *Lagrange*'scher Multiplikator als plastischer Multi-

Bezeichnung	Bedingung
elastische Be- oder Entlastung	$F < 0$
elastische Entlastung von einem plastischen Zustand	① $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}^* < 0$
neutrale Belastung von ei- nem plastischen Zustand	② $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}^* = 0$
plastische Belastung	③ $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}^* > 0$

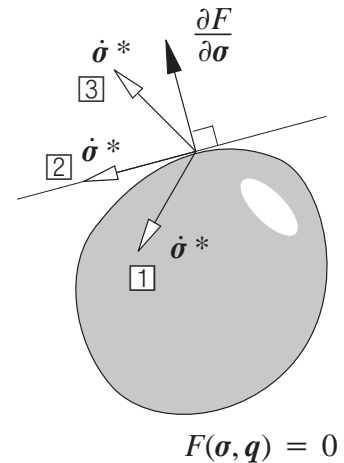


Tabelle 4.1 Be- und Entlastungsbedingungen

pikator in der Plastizität identifiziert werden kann (vergleiche hierzu Betten [12]). Da der zugehörige Gleichungssatz darüber hinaus zu einem assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetz führt, wird diese Vorgehensweise in Kapitel 4.3.5 näher erläutert.

4.3.2 Arbeits- vs. Verzerrungsverfestigungshypothese

Um die Evolution der Fließfläche im Hauptspannungsraum zu beschreiben, wird diese in der Regel über eine einachsige Vergleichskurve, ausgedrückt in äquivalenten Spannungen und äquivalenten Dehnungen, gesteuert. Für die Reduktion der tensoriellen Information auf eine skalare Größe stehen zwei gängige Vorgehensweisen, die Arbeits- und die Verzerrungsverfestigungshypothese, zur Verfügung (siehe Hofstetter & Mang [74], Khan & Huang [85], Simo & Hughes [171]).

Wird die Verzerrungsverfestigungshypothese (*strain-hardening hypothesis*) zugrunde gelegt, wird κ aus Gleichung (4.9) definiert zu

$$\dot{\kappa} = a |\dot{\epsilon}^{pl}| = a \sqrt{\dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad . \quad (4.19)$$

An dieser Stelle wird nur eine interne Variable betrachtet (zum Beispiel für isotrope Verfestigung), somit ist κ ein Skalar. Die Aufgabe des Skalierungsfaktors a ist es, die äquivalenten Verzerrungen an die plastischen Verzerrungen bei einaxialer Belastung anzupassen, vorausgesetzt wird hierbei rein deviatorischer plastischer Fluss. Durch die Verzerrungsverfestigungshypothese wird die Länge der Trajektorie im plastischen Verzerrungsraum als Maß für die inneren Variablen genommen. Unter Zuhilfenahme von Gleichung (4.8) ergibt sich schließlich

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}} \quad (4.20)$$

für die Ermittlung der äquivalenten plastischen Verzerrungen. Bei Anwendung der Arbeitsverfestigungshypothese (*work-hardening hypothesis*) wird

$$\dot{W}^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^{pl} \equiv h(\kappa) \dot{\kappa} \quad (4.21)$$

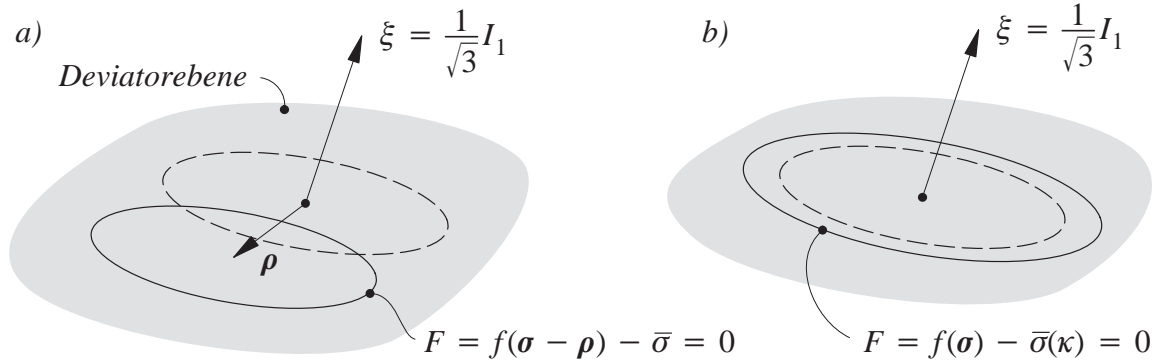


Bild 4.2 a) kinematische Verfestigung b) isotrope Verfestigung in der Deviatorebene

vorausgesetzt. Umstellen nach κ und Einsetzen von Gleichung (4.9) liefert

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{h(\kappa)} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \frac{\dot{\lambda}}{h(\kappa)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m} \quad (4.22)$$

4.3.3 Kinematische und isotrope Verfestigung

Die Veränderung der Fließfläche als Funktion der inneren Variablen kann durch zweierlei Formate eingebracht werden. Anhand einfacher Vergleichsspannungsmodelle der Form

$$F = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}) - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0 \quad (4.23)$$

wird die Translation der Fließfläche, die der kinematischen Verfestigung entspricht und über den sogenannten *back-stress*-Vektor $\boldsymbol{\rho}$ gesteuert wird, und die Expansion der Fließfläche, die über einen skalaren Parameter κ die Vergleichsspannung modifiziert, ersichtlich. Beide Verfahren können kombiniert werden. In Bild 4.2 ist die geometrische Interpretation in der Deviatorebene skizziert. Ausführliche Herleitungen finden sich zum Beispiel in Simo & Hughes [171], Hofstetter & Mang [74] und Menrath [121].

4.3.4 Drucker'sches Stabilitätspostulat

Das *Drucker'sche* Stabilitätspostulat von 1950/51 fordert eine positive Arbeitsbilanz während inkrementeller Belastung bzw. eine nicht negative Arbeitsbilanz während eines geschlossenen Belastungszyklus. In der erweiterten Definition (*Minimalprinzip* von Prager, 1955) über die Differenz zu einer elastischen Anfangsspannung $\boldsymbol{\sigma}^*$ muss im weiteren gelten (siehe ebenfalls [74], [85], [171]):

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \geq 0 \quad (4.24)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet einen beliebigen Punkt auf der Fließfläche. Dabei ist Gleichung (4.24) zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend für die Erfüllung des *Drucker'schen* Postulats im Rahmen der Plastizitätstheorie. Vielmehr sind zu dessen Erfüllung zwei weitere Bedingungen einzuhalten: Konvexität und Assoziativität des Potentials. Anhand Bild 4.3a lässt sich anschaulich die Bedingung für die Konvexität der Fließfläche verdeutlichen: Konkave Fließflächen würden, unabhängig von der Fließregel, negative plastische Arbeit ermöglichen. Fasst man Gleichung (4.24) in

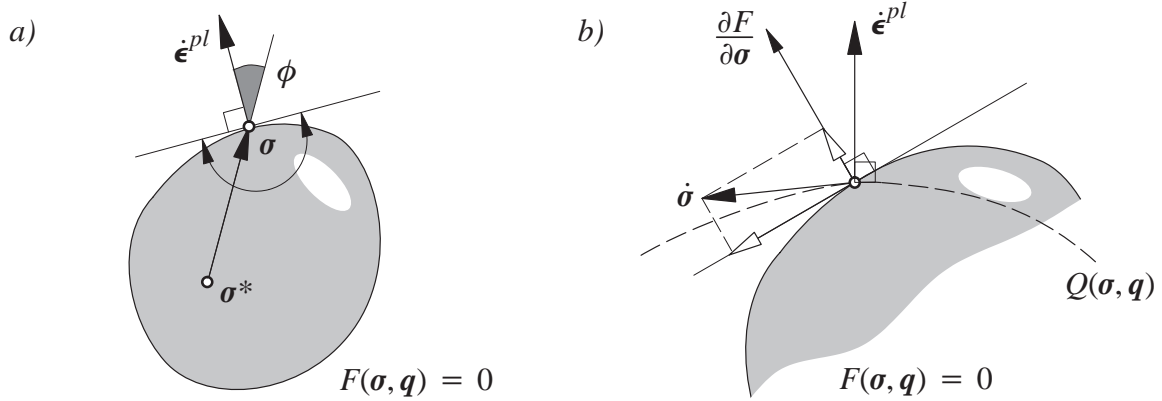


Bild 4.3 Drucker'sches Stabilitätspostulat a) Konvexität b) Assoziativität

ihrer Bedeutung enger und setzt $\sigma - \sigma^* = \dot{\sigma}$, so muss auch $\dot{\sigma} : \dot{\epsilon}^{pl} \geq 0$ erfüllt sein. Dagegen verdeutlicht Bild 4.3b die Forderung nach Assoziativität anhand eines nichtassozierten Potentials Q : Für ein beliebig nach außen gerichtetes Spannungszinkrement $\dot{\sigma}$ ist im Allgemeinen dann und nur dann die Rate der plastischen Arbeit positiv, wenn die Richtung des plastischen Flusses $\dot{\epsilon}^{pl}$ mit der Normalen der Fließfläche übereinstimmt, folglich $F = Q$ und somit eine assoziierte Fließregel (Normalenregel) vorliegt.

Entfestigende Materialien, die im Drucker'schen Sinne nicht mehr stabil sind, müssen die Forderung nach Konvexität der Fließfläche weiterhin erfüllen. Durch die Normalenregel wird bei kohäsiven Reibungsmaterialien die Dilatation jedoch in der Regel überschätzt. Sie wird deshalb oftmals aufgegeben, indem die deviatorische Komponente des Fließvektors parallel zur Normalen der Fließfläche gewählt wird, die hydrostatische, volumenrelevante Komponente jedoch abgemindert wird.

4.3.5 Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation

Aus dem *Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation* (von Mises 1928, Taylor 1947, Hill 1948 bzw. Bishop & Hill 1951) folgen direkt die Konvexität der Fließfläche und die Normalenregel, wie im weiteren gezeigt werden wird. Es ermöglicht die Formulierung der Plastizitätstheorie im Rahmen der Thermodynamik (siehe Hofstetter [71], Simo et al. [173], Suanno [183], Ristinmaa [159]), womit ein assoziiertes Verfestigungsgesetz einher geht.

Formal lässt sich das Postulat als

$$D^{pl}(\dot{\epsilon}^{pl}, \mathbf{q}) = \max(\sigma^* : \dot{\epsilon}^{pl}) \quad \forall \sigma^* : F(\sigma^*, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (4.25)$$

schreiben. Aus Gleichung (4.24) folgt damit anschaulich (siehe auch Bild 4.3a)

$$D^{pl}(\dot{\epsilon}^{pl}, \mathbf{q}) \geq \sigma^* : \dot{\epsilon}^{pl} \quad (4.26)$$

Die Einbettung der Plastizitätstheorie in die Thermodynamik geht von der freien *Helmholtz* Energie Ψ , namentlich dem Teil der freien Energie, der bei gleichbleibender Temperatur für mechanische Prozesse zur Verfügung steht, aus. Sie wird additiv aufgespalten in einen Anteil der spezifischen, elastischen Verzerrungsenergie Ψ_ϵ sowie einen inelastischen Anteil, der die inneren Variablen in Ψ_κ berücksichtigt. Diese additive Zerlegung der freien Energie ist nach Lubliner [109] nur dann zulässig, wenn auch die Verzerrungen additiv zerlegt werden können (vergleiche Kapitel 4.3.1, Gleichung (4.5)).

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}) = \Psi_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) + \Psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (4.27)$$

Die spezifische Verzerrungsenergie ist gegeben über die zweifache doppelte Verjüngung des Elastizitätstensors mit den elastischen Verzerrungen.

$$\Psi_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) \quad (4.28)$$

Der zweite Term in Gleichung (4.27) entspricht dem Integral des Evolutionsgesetzes gemäß

$$\Psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_0^{\boldsymbol{\kappa}} q(\bar{\boldsymbol{\kappa}}) d\bar{\boldsymbol{\kappa}} \quad (4.29)$$

Die Auswertung der *Clausius-Duhem*-Ungleichung $D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0$ (nach Coleman & Noll [31]) liefert für die elastischen Verzerrungsanteile die Definition der Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{el}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) \quad (4.30)$$

sowie für die nichtlinearen Anteile die Dissipationsungleichung über die negative zeitliche Änderung der freien *Helmholtz*-Energie

$$D^{pl} = - \dot{\Psi}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}) = - \frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\kappa}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad (4.31)$$

Die hierin verwendeten Ableitungen

$$\frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} = - \boldsymbol{\sigma} = - \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\kappa}}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.32)$$

führen auf

$$D^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad (4.33)$$

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sind die im Spannungsraum, und $\boldsymbol{\kappa}$ die hierzu konjugierten, im Verzerrungsraum definierten, inneren Variablen. Wird nun das *Maximum der plastischen Dissipation* innerhalb des Belastungsprozesses postuliert, lässt sich Gleichung (4.33) in ein Optimierungsproblem überführen, in der nun die Fließbedingung (vergleiche Gleichung (4.7)) $F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \geq 0$ als Nebenbedingung einzuhalten ist. Das zu maximierende *Lagrange*'sche Funktional lautet:

$$L = - D^{pl} + \dot{\gamma} F(\boldsymbol{\sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*) = - \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* : \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \dot{\gamma} F(\boldsymbol{\sigma}^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*) \quad (4.34)$$

Dabei bezeichnen $\boldsymbol{\sigma}^*$ und $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ jeweils die Nebenbedingung erfüllende Zustände. Über die Stationaritätsbedingung erhält man schließlich – nach Identifikation des *Lagrange*'schen Multiplikators $\dot{\gamma}$ mit dem plastischen Multiplikator $\dot{\lambda}$ – die Fließregel

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \quad (4.35)$$

die Evolutionsgleichung der inneren Variablen

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*} = \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*} \quad (4.36)$$

und natürlich die als Nebenbedingung eingebrachte Fließbedingung

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = F(\boldsymbol{\sigma}^*, \bar{\sigma}^*) = 0 \quad . \quad (4.37)$$

Hieraus folgt die Assoziativität sowie die Konvexität der Fließfläche:

- Aus Gleichung (4.35) wird sofort ersichtlich, dass das plastische Potenzial Q mit der Fließfläche F identisch sein muss und folglich eine assoziierte Fließregel vorliegt. Weiter muss auch das Evolutionsgesetz, siehe Gleichung (4.36), mit der Formulierung der Fließfläche assoziiert sein.
- Spezifiziert man mit $\boldsymbol{\sigma}$ einen Punkt auf der Fließfläche, der somit das *Postulat Maximaler plastischer Dissipation* erfüllt, so gilt $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \geq \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}$. Durch Umformung lässt sich Gleichung (4.24) erhalten, so dass dieselben Argumente wie in Kapitel 4.3.4 die Konvexität der Fließfläche erfordern.

Es ist wichtig anzumerken, dass für kinematisch verfestigende Werkstoffe (siehe Kapitel 4.3.3) Gleichung (4.24) nur solange erfüllt wird, wie der Spannungsursprung innerhalb der Fließfläche liegt. Andernfalls würde durch reine elastische Entlastung aus einem plastischen Zustand „Rückwärtsfließen“, also plastisches Fließen in Richtung des Ursprungs, eintreten.

Es zeigt sich weiter, dass Werkstoffmodelle, die das Postulat vom *Maximum der plastischen Dissipation* erfüllen, bei konsistenter Linearisierung zu symmetrischen algorithmischen Materialtensoren führen.

4.3.6 Beispiele einfacher plastischer Werkstoffmodelle

Nachfolgend sollen einfache Vergleichsspannungsmodelle der Form $F = f(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0$ kurz vorgestellt werden, die – zumindest als Einflächenmodelle – in dieser Arbeit nicht angewen-

<i>Tresca</i>	<i>von Mises</i>
Äquiv. Spannung: $f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$	Äquiv. Spannung: $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2}$
Fließbed.: $F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \bar{\sigma} \leq 0$	Fließbed.: $F = \sqrt{J_2} - \bar{\sigma} \leq 0$

Tabelle 4.2 Tresca und von Mises Fließbedingung im Hauptspannungsraum

det werden. Eine Ausnahme stellt der 1D Vergleichsspannungsansatz dar, welcher für den Bewehrungsstahl eingesetzt und in Kapitel 5 ausführlicher behandelt wird. Weitergehende Literatur findet sich zum Beispiel in den bekannten Textbüchern von Betten [12], Khan [85], Crisfield [36] oder Chen [28].

Materialien, deren Versagenspunkt nahezu unabhängig vom hydrostatischen Anteil der anliegenden Spannungen ist, lassen sich durch die Versagenskriterien von *Tresca* (Schubspannungshypothese) und *von Mises* (Gestaltsänderungshypothese) ausreichend genau beschreiben. Zur Beschreibung geeignete Materialien sind hauptsächlich solche, die eine metallische Gitterstruktur mit ausgewiesenen Gleitebenen auf Mikroebene aufweisen (unbehandelte, legierte oder kaltgezogene Baustähle, Aluminium sowie einige Aluminiumlegierungen; nicht geeignet ist zum Beispiel Grauguß). Die Versagensflächen bilden im Hauptspannungsraum eine zylindrische Fläche konstanten Querschnitts (vergleiche Tabelle 4.2). Für Materialien, deren Versagen durch innere Reibung beeinflusst ist (Beton, Böden, Gestein etc.), folglich also unterschiedlich hohe Druck- und Zugspannungen aufnehmen können, muss die hydrostatische Spannungskomponente bei der Versagensfläche berücksichtigt werden. Zu den entsprechenden Formulierungen gehören *Drucker-Prager* und *Mohr-Coulomb* Versagensflächen (siehe Tabelle 4.3). Durch entsprechende Wahl der Parameter (hier: $\gamma = 0$) lassen sich die allgemeineren Kriterien nach *Drucker-Prager* und *Mohr-Coulomb* in die jeweils enthaltenen Sonderfälle *Tresca* und *von Mises* überführen. Die beiden Versagenskriterien nach *Tresca* und *Mohr-Coulomb* sind in den sortierten Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ angegeben.

4.3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die generellen Konzepte ratenunabhängiger Plastizitätstheorie vorgestellt. Insbesondere vor dem Hintergrund der in den Kapiteln 5.3 und 5.4 vorzustellenden Mate-

<i>Mohr-Coulomb</i>	<i>Drucker-Prager</i>
<p>Äquiv. Spannung:</p> $f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\gamma}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$	<p>Äquiv. Spannung:</p> $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} + \gamma I_1$
<p>Fließbed.:</p> $F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\gamma}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \bar{\sigma} \leq 0$	<p>Fließbed.:</p> $F = \sqrt{J_2} + \gamma I_1 - \bar{\sigma} \leq 0$

Tabelle 4.3 *Mohr-Coulomb* und *Drucker-Prager* Fließbedingung im Hauptspannungsraum

rialmodelle für Beton wurden die Bedingungen für Stabilität sowie Notwendigkeit von Assoziativität und Konvexität diskutiert. Es ist wichtig anzumerken, dass für kohäsive Reibungsmaterialien die Normalenregel wegen der Überschätzung der Dilatanz physikalisch nicht motiviert werden kann – trotzdem wird von diesem Konzept erfolgreich Gebrauch gemacht (siehe zum Beispiel Menrath [121] oder Feenstra [51]). Die unbestrittenen Vorteile seien hier vorweggenommen: Sie liegen in der einfacheren numerischen Umsetzung, der Möglichkeit zur Verwendung symmetrischer Gleichungslöser und in größerer numerischer Stabilität. Der Umkehrschluss bedeutet somit mindestens einen Mehraufwand an Rechenzeit – nicht unbeachtet bleiben sollte jedoch auch der Verlust der Eindeutigkeit bereits im Verfestigungsbereich (siehe hierzu Kapitel 6.6) sowie die Verletzung des *Postulats vom Maximum der plastischen Dissipation*. So ermöglicht ein konkaves plastisches Potenzial ebenso wie eine nichtassozierte Fließregel unter Umständen eine negative plastische Dissipation.

4.4 Lokalisierungsphänomene und -begrenzer

Im Weiteren sollen die grundsätzlichen Probleme entfestigender Materialien innerhalb der in dieser Arbeit verwendeten, üblichen Kontinuumstheorie aufgezeigt werden. Nach der Diskussion der für plastizitätsbasierte Werkstoffmodelle in der Literatur vorhandenen Versagenskriterien, werden die bekannten Lokalisierungsbegrenzer kurz vorgestellt und die in dieser Arbeit untersuchten und angewendeten Verfahren näher beleuchtet.

Unter Lokalisierung wird im Allgemeinen die Konzentration von Verzerrungen während eines Belastungsversuchs innerhalb eines schmalen Bandes verstanden. Dabei ist das auf Makroebene auftretende Phänomen des Entfestigens für viele unterschiedliche Materialien, wie zum Beispiel Stahl, Aluminium (-legierungen), Kunststoffe, Beton, Sand oder Gestein, gleichermaßen vorhanden. Dagegen differiert das auf Mikroebene stattfindende Versagen mitunter erheblich. Unterschieden wird in Mode I bzw. Mode II Versagen. Reine Trennbrüche, in denen sich Mikrorisse innerhalb eines Bandes ansammeln und schließlich einen Makroriss bilden, sind dabei eher für spröde, kohäsive Materialien (Gestein, Beton, Grauguss) charakteristisch, während duktile Stähle und Nichteisenmetalle (jeweils bei Normaltemperaturen), wie auch Böden, eher zu Gleit- oder Schubbrüchen neigen. In allen Fällen konzentriert sich das Versagen und somit die nicht reversiblen Verzerrungen auf ein schmales, vom Werkstoff abhängiges Band. Die Breite dieses Bandes charakterisiert einen materialspezifischen inneren Längenparameter.

Bei der Umsetzung von entfestigenden Materialgesetzen in numerische Verfahren wurde bereits früh die ausgeprägte Netzabhängigkeit der Ergebnisse beobachtet und diskutiert (siehe Bazant [4], Crisfield [34], [35]). Es zeigt sich, dass bei entfestigenden Materialformulierungen Versagen innerhalb eines Elementbandes stattfindet. In einer unendlich feinen Diskretisierung werden sich schließlich im Grenzzustand sämtliche Verzerrungen in einem infinitesimal schmalen Band lokalisieren, während im umgebenden Gebiet eine Entlastung zu beobachten ist. Dieses Phänomen kann anhand eines einfachen, eingängigen Gedankenexperiments näher untersucht werden:

Man betrachte den mit $m = 5$ linearen, einpunkt-integrierten Finiten Elementen diskretisierten Zugstab der Länge l aus Bild 4.4a (siehe Crisfield [34], Menrath [121], Simo & Hughes [171]). Das zugrunde liegende Evolutionsgesetz des plastischen Materials sei für alle Elemente nach Überschreiten der Fließspannung $\bar{\sigma}_y$ linear entfestigend (siehe Bild 4.4b). Die Strukturantwort kann somit bei verschiebungskontrollierter Belastung fünf unterschiedliche Gleichgewichtspfade aufzeigen: Der flachste Pfad entspricht einem gleichzeitigen Entfestigen in allen fünf

Gauß-Punkten, während für den steilsten Pfad jeweils nur ein Element entfestigt und die anderen elastisch entlasten. Der jeweils steilste Gleichgewichtspfad ist bei gegebener Diskretisierung der in materiellem Sinne stabilste: Eine beliebige numerische, physikalische oder geometrische Störung, die eine Auswirkung auf die Fließbedingung hat, führt stets auf diesen stabilen Gleichgewichtspfad (siehe auch Crisfield [36]), da die Lokalisierung aller plastischen Verzerrungen in einem Element mit der geringsten Energiedissipation G_t , der Fläche unter der Spannungs-Verzerrungs-Kurve, verbunden ist. Formal läßt sich der Zusammenhang wie folgt begründen:

Wird vorausgesetzt, dass die plastischen Verzerrungen in n Elementen lokalisieren, so lassen sich die gesamten Verzerrungen wie folgt schreiben:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} = \frac{\sigma}{E} + \frac{n}{m} \left(\frac{\sigma - \bar{\sigma}_y}{H} \right) \quad (4.38)$$

Darin bezeichnet $H = (E E_h)/(E - E_h)$ den Ent- bzw. Verfestigungsmodul (vergleiche Bild 4.5b). Für entfestigendes Materialverhalten ist dieser somit negativ. Die Materialtangente errechnet sich zu

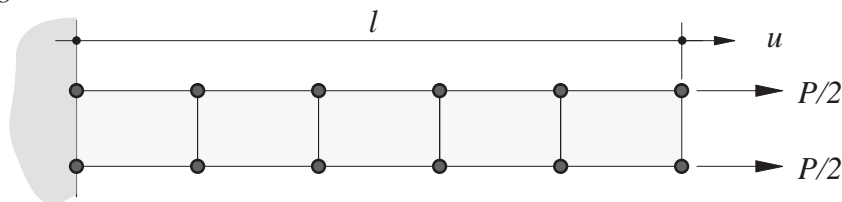
$$C^{ep,tan} = \left[\frac{d\bar{\epsilon}}{d\sigma} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{E} + \frac{n}{H m} \right]^{-1} = \frac{E H m}{H m + E n} \quad (4.39)$$

und die freigesetzte Energie der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung mit der Rissbreite w_c zu

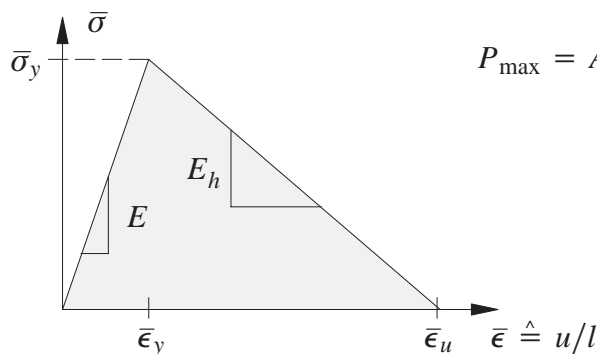
$$G_t = \int \sigma du = \frac{1}{2} \frac{n}{m} (E \bar{\epsilon}_y) \bar{\epsilon}_u w_c \quad \text{mit} \quad u_{u,n} = \bar{\epsilon}_u w_c \quad (4.40)$$

Anhand Gleichung (4.39) lässt sich nun leicht der Einfluss der Diskretisierung und der Anzahl der entfestigenden Elemente erläutern. Die kritische Diskretisierung wird durch einen infiniten Tangentenoperator charakterisiert: Für $m = -nE/H$ wird der Nenner in (4.39) zu null; bei weiterer Verfeinerung kann das in Bild 4.4c für $n=1$ dargestellte *snap-back* Verhalten beobachtet

a) Diskretisierung



b) Evolutionsgesetz



c) Strukturantwort als Funktion von n

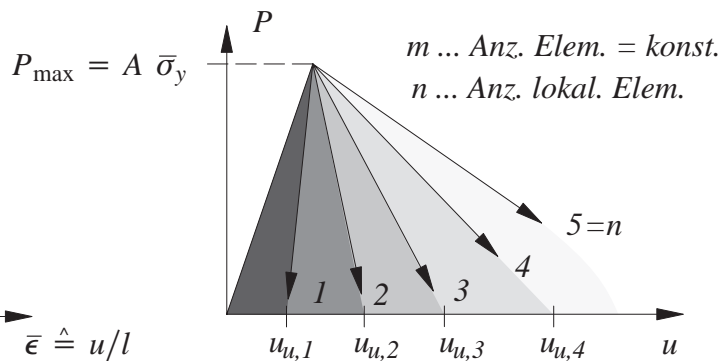


Bild 4.4 Lokalisierungsphänomen am Beispiel des Zugstabs

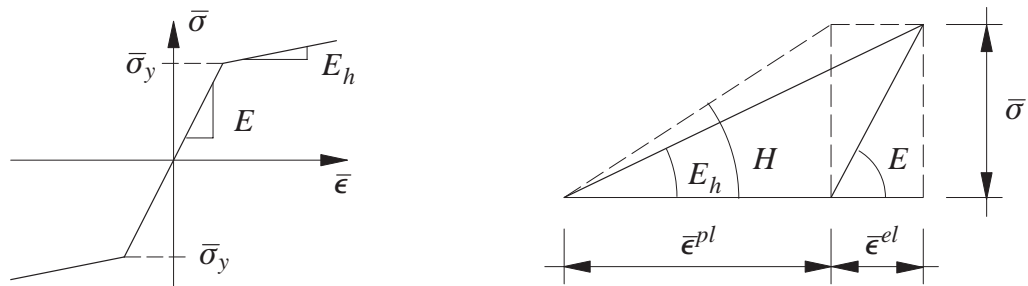
werden. Im Regelfall des materiell stabilen Pfades ($n = 1$) erhält man folglich als kritische Elementanzahl $m_{krit} = -E/H$. Anhand Gleichung (4.40) wird offensichtlich, dass die dissipierte Energie für alle möglichen Gleichgewichtspfade bei gegebener Diskretisierung m für $n = 1$ minimal wird. Als Grenzwert für eine unendlich feine Diskretisierung $m = \infty$ findet nach Gleichung (4.41) folglich keine Energiedissipation mehr statt, was offensichtlich konträr zu physikalischen Beobachtungen ist.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \frac{n}{m} (E \bar{\epsilon}_y) \bar{\epsilon}_u w_c \right] = 0 \quad (4.41)$$

Die Tatsache, dass die sich bildende Diskontinuität des Verzerrungsfeldes von der Diskretisierung abhängig ist, widerspricht den Beobachtungen in Experimenten, wonach die Breite der Scherbänder ein mit dem Material assoziierter Parameter sein sollte. Der Grund für die Netzabhängigkeit bei entfestigenden Materialformulierungen liegt in der *a priori* Schlechtgestellttheit des Problems (vergleiche Sluys [178]). Die ursprünglich elliptische Eigenschaft der Differentialgleichung des inkrementellen Randwertproblems geht verloren. Durch „Anreicherung“ der Formulierung mit einem inneren Längenparameter, der mit der natürlichen Breite der Diskontinuität identifiziert werden muss, kann eine netzunabhängige Lösung erhalten werden. Der Zusammenhang zwischen den Lokalisierungsbedingungen und den klassischen Stabilitätskriterien nach Hill [68] wird von Rudnicki & Rice [162] diskutiert und später ausführlich von Ottosen & Runesson in [138] für nichtassoziative Plastizitätsmodelle abgehandelt.

4.4.1 Versagensindikatoren

Für entfestigende, kohäsive Materialien werden eine Reihe von Versagensindikatoren in der Literatur diskutiert (siehe zum Beispiel de Borst et al. [18], Willam [189], Etse [47], Schreyer & Neilson [167], Ottosen & Runesson [138], Kuhl et al. [97]). Dabei schließt der Begriff Phänomene, wie den *Verlust der Eindeutigkeit*, der *Stabilität* und der *Elliptizität* ein. Neben einem lokalen Versagen, das auf Materialpunktebene beobachtet werden kann, können mit den ersten beiden Indikatoren auch Versagensbedingungen auf globaler Ebene (Strukturebene) formuliert werden. Insbesondere führen numerische Modelle für Reibungsmaterialien in vielen Fällen auf nichtsymmetrische Tangentenoperatoren, so dass die Begriffe Stabilität und Eindeutigkeit für solche Modelle (im Gegensatz zu assoziierten Plastizitätsmodellen) zu trennen sind. Bei beiden Indikatoren hat sich der Begriff des diffusen Versagens (siehe Willam [189] und Etse [47]) durchgesetzt. Er ist definiert durch ein über das Versagensband kontinuierliches Geschwindigkeitsfeld



a) Einaxiales bilineares Evolutionsgesetz

b) Verfestigungsmodul für 1D-Problem

Bild 4.5 Elastizitäts- und Verfestigungsmodul eines einaxialen Werkstoffmodells

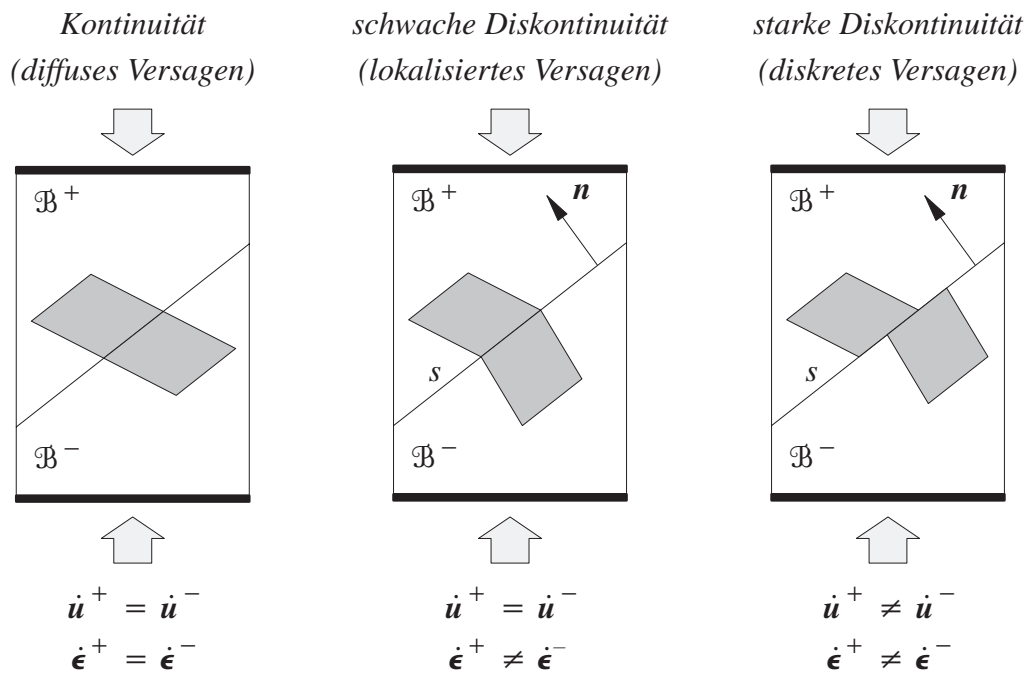


Bild 4.6 Hierarchie der Diskontinuitäten am Beispiel des einaxialen Drucks

sowie auch einer kontinuierlichen Rate im Verzerrungsfeld. Für die Begriffe des lokalisierten bzw. auch diskreten Versagens werden diese Bedingungen schrittweise (hierarchisch) gelockert (siehe Bild 4.6). Eine Zusammenstellung der nachstehend behandelten Versagensindikatoren gibt Bild 4.7.

Eindeutigkeit:

Die Eindeutigkeit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung am Materialpunkt (lokal) ist bei spannungskontrollierter Belastung durch ein monoton steigendes Spannungskrement gewährleistet: $\dot{\sigma} > 0$ Unter Berücksichtigung der inkrementell linearen Beziehung

$$\dot{\sigma} = C^{tan} : \dot{\epsilon} \quad (4.42)$$

und der Auswertung des Indikators des Grenzzustands $\dot{\sigma} = \mathbf{0}$ kann die Bedingung für den *Verlust der Eindeutigkeit* auf Materialpunktebene angegeben werden:

$$\det C^{tan} = 0 \quad (4.43)$$

Auf Strukturebene (global) führen ähnliche Überlegungen ebenfalls auf einen Indikator für den *Verlust der Eindeutigkeit*, dabei ist es jedoch wichtig darauf hinzuweisen, dass der lokale *Verlust der Eindeutigkeit* zwar eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für den globalen *Verlust der Eindeutigkeit* ist:

Innerhalb der inkrementellen Lösung des Randwertproblems muss sichergestellt sein, dass keine zwei Spannungsrate des gesamten Gebiets $\dot{\sigma}$ die inkrementelle Gleichgewichtsbeziehung bei gegebenen Verzerrungsraten $\dot{\epsilon}$ (ebenfalls im Gebiet) und unter Einhaltung der Randbedingungen existieren. Setzt man voraus, dass zwei solche Spannungskremente $\dot{\sigma}_A$ und $\dot{\sigma}_B$ existieren, so müssen beide die globale, inkrementelle Gleichgewichtsbeziehung (siehe Gleichung (2.27))

$$\int_V \dot{\sigma}_{A,B} : \delta \epsilon \, dV = \int_V \rho \dot{b} \cdot \delta u \, dV + \int_A \dot{t}_0 \cdot \delta u \, dA \quad (4.44)$$

erfüllen. Da die rechte Seite per Definition identisch ist, liefert eine Subtraktion der beiden linken Seiten ($\Delta \dot{\sigma}_{\{A-B\}}$ bezeichnet die Differenz der beiden Spannungsinkremente)

$$\int_V \Delta \dot{\sigma}_{\{A-B\}} : \delta \epsilon \, dV = 0 \quad (4.45)$$

bzw. nach der Diskretisierung mit Finiten Elementen

$$\mathbf{K}^{tan} : \Delta \dot{u} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.46)$$

Diese globale Beziehung liefert nur für eine singuläre Steifigkeitsmatrix eine nichttriviale Lösung. Folglich lautet der Indikator für den *Verlust der Eindeutigkeit auf Strukturebene* (wie erwartet):

$$\det \mathbf{K}^{tan} = 0 \quad (4.47)$$

Stabilität:

Im Rahmen der Lokalisierungsindikatoren wird dem *Hill'schen* Stabilitätsbegriff dem bereits in Kapitel 4.3.4 erläuterten Stabilitätsbegriff nach *Drucker* im Allgemeinen der Vorzug gegeben. Letzterer lautet im Kleinen:

$$d^2 W^{pl} = \dot{\sigma} : \dot{\epsilon}^{pl} > 0 \quad (4.48)$$

Der Stabilitätsbegriff nach *Hill* baut auf der Zweiten Methode von *Lyapunow* (siehe *Vielsack* [185]) auf, die besagt, dass eine endliche kleine Störung des Gleichgewichtszustandes des Randwertproblems im nachfolgend ablaufenden Prozess ebenfalls zu endlich kleinen Abweichungen von der ursprünglichen Lösung führt. *Hill* wendet die Methode auf elastoplastische Problemstellungen an und erhält eine hinreichende Stabilitätsbedingung für den Fall, dass für die zweite Variation der Arbeit

$$d^2 W = \dot{\sigma} : \dot{\epsilon} \geq 0 \quad \forall \dot{\epsilon} \neq \mathbf{0} \quad (4.49)$$

im gesamten Körper gilt, jedoch in mindestens einem Punkt

$$d^2 W = \dot{\sigma} : \dot{\epsilon} > 0 \quad \forall \dot{\epsilon} \neq \mathbf{0} \quad (4.50)$$

erfüllt sein muß. Gleichung (4.50) bezeichnet das punktweise Stabilitätspostulat nach *Hill*. Bei Beschränkung auf monotone Belastung lässt sich die zweite Variation der Arbeit in einen elastischen und einen plastischen Teil aufspalten $d^2 W = d^2 W^{el} + d^2 W^{pl}$. Der elastische Anteil ist immer positiv, somit folgt aus Stabilität nach *Drucker* immer auch Stabilität nach *Hill*.

Berücksichtigt man Gleichung (4.42) in Gleichung (4.50), so erhält man die lokale Bedingung

$$d^2 W = \dot{\epsilon} : \mathbf{C}^{tan} : \dot{\epsilon} > 0 \quad . \quad (4.51)$$

Die quadratische Form aktiviert nur den symmetrischen Anteil des Materialtensors; die nichttriviale Lösung bedingt folglich

$$\det \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{tan} + \mathbf{C}^{T,tan}) \stackrel{\wedge}{=} \det \mathbf{C}_{tan}^{sym} = 0 \quad (4.52)$$

als Indikator für lokales Stabilitätsversagen nach *Hill*. Aus denselben Überlegungen, die für den Eindeutigkeitsindikator angestellt wurden, lässt sich ein Indikator für die Stabilität auf Strukturebene ableiten. Erneut ist dieser globale Indikator jedoch nicht mit der lokalen Bedingung gleichzusetzen. *Hill's* Postulat in integraler Form auf Strukturebene lautet

$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV > 0 \quad (4.53)$$

und führt nach Berücksichtigung linear inkrementellen Materialverhaltens (Gleichung (4.42)) und erfolgter Diskretisierung zu der globalen Bedingung

$$\dot{\mathbf{u}} : \mathbf{K} : \dot{\mathbf{u}} > 0 \quad (4.54)$$

Erneut liefert die quadratische Form nur den symmetrischen Anteil der Steifigkeitsmatrix, so dass die nichttriviale Lösung den globalen Stabilitätsindikator auf Strukturebene wie folgt liefert:

$$\det \frac{1}{2}(\mathbf{K}^{tan} + \mathbf{K}^{T,tan}) \stackrel{\wedge}{=} \det \mathbf{K}_{tan}^{sym} > 0 \quad (4.55)$$

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass für assoziierte Plastizitätsmodelle der Materialtensor und somit auch die Gesamtsteifigkeitsmatrix stets symmetrisch sind. Somit fallen der Indikator für den *Verlust der Eindeutigkeit* und für den *Verlust der Materialstabilität* auf Material- und Strukturebene jeweils zusammen. Für unsymmetrische Materialtensoren nichtassoziierter Plastizitätsmodelle lässt sich eine Hierarchie durch Eigenwertbetrachtungen ermitteln (siehe zum Beispiel Etsch [47]). Es zeigt sich dabei, dass der *Verlust der Stabilität* das strengere Kriterium darstellt, jedoch der *Verlust von Eindeutigkeit* bei verfestigenden Materialien bereits im ansteigenden Ast der Belastungsgeschichte auftreten kann.

Elliptizität:

Der *Verlust der Elliptizität* ist mit der Bildung einer lokalisierten Versagenszone (Scher- bzw. Trennfuge) assoziiert, wie sie in Bild 4.6 Mitte dargestellt ist. Demnach sind die Bedingungen für lokalisiertes Versagen in einer materiellen Diskontinuitätsfläche s unter quasi-statischem Verformungszuwachs zum einen ein stetiges Geschwindigkeitsfeld in den Verschiebungen

$$\dot{\mathbf{u}}^- - \dot{\mathbf{u}}^+ = 0 \quad (4.56)$$

sowie zum anderen ein Sprung (in der folgenden Notation gekennzeichnet durch die Klammern [...]) im Geschwindigkeitsgradient bzw. der Verzerrungen

$$[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \neq \mathbf{0} \quad (4.57)$$

Diese geometrische Kompatibilitätsbedingung kann für den allgemeinen Fall unter Verwendung des *Maxwell*-Theorems für materielle Diskontinuitätsflächen erster Ordnung (siehe Truesdell & Toupin [184]) geschrieben werden zu

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\gamma} \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{m}} \otimes \vec{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{n}} \otimes \vec{\mathbf{m}}) \quad (4.58)$$

Hier ist $\vec{\mathbf{n}}$ die Flächennormale auf die Diskontinuität s , $\vec{\mathbf{m}}$ die Bewegungsrichtung der materiellen Punkte (bei Wellenfortpflanzungsproblemen in der Regel Polarisierungsrichtung genannt) und

$\dot{\gamma}$ ein skalarer Proportionalitätsfaktor. Anhand von Gleichung (4.58) lassen sich zwei Grenzfälle der entstehenden Diskontinuität veranschaulichen:

- $\vec{n} \perp \vec{m}$: Die Diskontinuität ist durch eine Scherfuge gekennzeichnet.
- $\vec{n} \parallel \vec{m}$: Die Diskontinuität ist durch einen Trennfuge gekennzeichnet.

Bei der sich bildenden Diskontinuität erster Ordnung sind die Kräfte auf beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche im Gleichgewicht. Nach dem *Cauchy*-Theorem $\vec{t} = \vec{n} \cdot \dot{\sigma}$ erhält man

$$\vec{t}^- - \vec{t}^+ = [\vec{n} \cdot \dot{\sigma}]^- - [\vec{n} \cdot \dot{\sigma}]^+ = \vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} : [|\dot{\epsilon}|] = \vec{0} . \quad (4.59)$$

Kombination von Gleichung (4.58) mit Gleichung (4.59) liefert

$$\dot{\gamma} (\vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{m} = \vec{0} . \quad (4.60)$$

Der Klammerausdruck wird als akustischer Tensor oder Lokalisierungstensor \mathbf{Q}^{ak} bezeichnet und ist auf der Materialpunktebene definiert. Die nichttriviale Lösung für beliebige Polarisierungsrichtungen \vec{m} von Gleichung (4.60) lautet demnach:

$$\det \mathbf{Q}^{ak} = 0 \quad (4.61)$$

Die Gleichung (4.61) liefert das Kriterium zur Initiierung der Änderung der zugrunde liegenden Differentialgleichung vom elliptischen zum hyperbolischen Typ. Dieses Phänomen wird als *Verlust der Elliptizität* bezeichnet. Fasst man die Bedingung (4.60) enger und berücksichtigt nur den symmetrischen Anteil des Materialtensors \mathbf{C}_{tan}^{sym} im akustischen Tensor $\mathbf{Q}^{ak,sym}$, so erhält man analog zum Stabilitätskriterium ein stärkeres Kriterium, welches den *Verlust der starken Elliptizität* kennzeichnet.

$$\det \mathbf{Q}^{ak,sym} = 0 \quad (4.62)$$

Eine Betrachtung des Eigenwertspektrums beider Kriterien liefert erneut eine Hierarchie der beiden Indikatoren (siehe zum Beispiel Etse [47], Ottosen & Runesson [138]). Durch die weiteren Symmetrien des Lokalisierungstensors durch die Kontraktion mit \vec{n} im Vergleich zum Materialtensor, kann der *Verlust der starken Elliptizität* erst dann auftreten, wenn bereits zuvor das Stabilitätskriterium nach Gleichung (4.52) (Stabilität) verletzt wurde. Dies bedeutet jedoch auch, dass ein *Verlust der Elliptizität* nicht notwendigerweise mit dem *Verlust der Stabilität* (auf Material-

<i>Verlust von ...</i>	<i>Bedingung</i>
<i>Eindeutigkeit</i>	$\det \mathbf{C}^{tan} = 0$
<i>Stabilität</i>	$\frac{1}{2} \det (\mathbf{C}^{tan} + \mathbf{C}^{T,tan}) = \det \mathbf{C}_{sym}^{tan} = 0$
<i>Elliptizität</i>	$\det (\vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{n}) = \det \mathbf{Q}^{ak} = 0$
<i>starker Elliptizität</i>	$\frac{1}{2} \det (\mathbf{Q}_{tan}^{ak} + \mathbf{Q}_{tan}^{T,ak}) = \det \mathbf{Q}_{sym}^{ak} = 0$

Bild 4.7 Hierarchie der Versagensindikatoren auf Materialpunktebene (lokal)

punktebene) verbunden ist. Folglich kann für nichtassozierte Plastizitätsmodelle, die durch einen unsymmetrischen Materialtensor gekennzeichnet sind, bereits im verfestigenden Ast ein *Verlust der Elliptizität* eintreten. Die daraus folgende Diskontinuität im Verzerrungsfeld (Singularität des akustischen Tensors), die wegen der lokalen Eigenschaft des Kriteriums an einem beliebigen Materialpunkt induziert wird, liefert nun extrem netzabhängige Ergebnisse bei der numerischen Simulation.

4.4.2 Netzabhängiger Entfestigungsmodul

Eine populäre und einfach umzusetzende Möglichkeit, netzunabhängige Ergebnisse für Entfestigungsprobleme zu erhalten, besteht darin, den Entfestigungsmodul intern in Abhängigkeit der Netzgröße zu modifizieren (siehe zum Beispiel Bazant & Oh [5], Willam [188]). Ein Maß, um die Modifikation des Entfestigungsmoduls in die Finite Elemente Formulierung einzubetten lässt sich über die Bruchenergie, also der Fläche unter der Entfestigungskurve, gewinnen. Die Bruchenergie G_t wird dabei als freiwerdende Energie senkrecht zu der sich bildenden Diskontinuität infolge Zugbeanspruchung als konstanter Materialparameter vorausgesetzt (Hillerborg et al. [69]).

$$G_t = \int \frac{F}{A} du \quad (4.63)$$

Um nun netzunabhängige Ergebnisse im Entfestigungsast sicherzustellen, ist die freigesetzte Bruchenergie als Funktion der Elementgröße des Finite Elemente Netzes zu postulieren. D. h. es wird ein interner Längenparameter h in die Formulierung für das Evolutionsgesetz eingebracht, der folglich für unterschiedliche Diskretisierungen die zur Verfügung stehende Bruchenergie g_t im Modell variiert.

$$g_t = \frac{1}{h} G_t = \int \bar{\sigma} d\epsilon \quad (4.64)$$

Für das in Kapitel 4.4 diskutierte Beispiel würde sich somit ein interner Längenparameter, identifizierbar mit der Scherband- oder Rissbandbreite w_c , ergeben, der in Abhängigkeit der Strukturgröße l (hier also der Länge) definiert wird.

$$h = w_c = \frac{l}{m} \quad (4.65)$$

Wendet man diese Überlegungen auf Gleichung (4.40) an, so zeigt sich, dass die freiwerdende Bruchenergie im System nicht länger von der Diskretisierung m abhängt:

$$g_t = \frac{1}{h} \int \sigma du = \frac{m}{l} \frac{1}{2} \frac{n}{m} (E \bar{\epsilon}_y) \bar{\epsilon}_u w_c = \frac{n}{2l} (E \bar{\epsilon}_y) \bar{\epsilon}_u w_c \quad (4.66)$$

Nach wie vor lokalisieren die Verzerrungen jedoch in einem Elementband. Das zugrunde liegende mathematische Problem wurde durch Einführen des netzabhängigen Entfestigungsmoduls, der jedoch immer noch entfestigendes Verhalten beschreibt, nicht geändert. Die Schlechtgestellttheit des Randwertproblems folglich auch nicht beseitigt. Die Regularisierung mit Hilfe der Bruchenergie liefert zwar netzunabhängige Ergebnisse in Hinsicht auf eine Verfeinerung des ursprünglichen Elementnetzes, die Ergebnisse sind jedoch nach wie vor nicht ganz unabhängig von der Netzorientierung.

Vorschläge für die Wahl des Längenparameters h , der vom verwendeten Elementtyp, der Integrationsordnung, der Ordnung der Ansatzfunktionen und natürlich von der Elementgröße abhängt, gibt Rots in [161]. Dabei wird die Wurzel aus der Finiten Elementfläche mit einem einheitenlosen Wichtungsfaktor χ_h beaufschlagt. Rots [161] schlägt für vierknotige Elemente $\chi_h = 1, 0$ und für acht- oder neunknotige Elemente $\chi_h = 1, 2$ vor. Die Elementfläche wird über eine Standard-Gauss-Integration mit den Wichtungsfaktoren w_ξ und w_η über die Anzahl der Gauss-Punkte n_ξ und n_η ermittelt.

$$h = \chi_h \sqrt{A_e} = \chi_h \sqrt{\sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} w_\xi w_\eta \det \mathbf{J}} \quad (4.67)$$

Es sei weiter angemerkt, dass Feenstra [51] die weitere Abhängigkeit des inneren Längenparameters von der betrachteten Problemstellung betont.

Anmerkung: Entsprechend der Bruchenergie für den Zugbereich hat Vonk [186] für Beton die Verwendung einer bruchenergetischen Kenngröße G_c für den Druckbereich vorgeschlagen. Quantitativ beträgt die charakteristische Bruchenergie für Druckprobleme G_c ungefähr das 100- bis 500fache der Zugbruchenergie G_t (siehe auch van Mier [126]). Dieser Vorschlag wird in den Modellen des Kapitels 5 aufgegriffen.

4.4.3 Ratenabhängige Elastoplastizität

Im Gegensatz zu den ratenunabhängigen Formulierungen aus Kapitel 4.3 sollen hier gebräuchliche ratenabhängige Modelle kurz diskutiert werden. Es ist anzumerken, dass ratenabhängige Plastizitätsformulierungen durch Einführung eines inneren Längenparameters einen regularisierenden Effekt haben. Neben den klassischen Überspannungsmodellen vom *Duvaut-Lions*- und *Perzyna*-Typ, die näher behandelt werden, existieren auch Vorschläge für sogenannte konsistente Formulierungen (siehe zum Beispiel Wang et al. [187], Sluys [178]). Bei letzteren geht die Rate der inneren Variablen $\dot{\kappa}$ direkt in die Fließfunktion $F(\sigma, \kappa, \dot{\kappa})$ ein, so dass sich neben dem Verfestigungsmodul $h = \partial F / \partial \kappa$ direkt die Viskosität durch $\eta = -\partial F / \partial \dot{\kappa}$ aus der Fließbedingung ergibt. Die Fließfläche reagiert damit nicht nur auf die Evolution der inneren Variablen, sondern auch auf deren Änderungsrate. Dieses Format lässt die Simulation sogenannter *Portevin-Le Chatelier* Effekte (auch als PLC-Band, S-Instabilität oder Sägezahnfließen bekannt) wie auch von H-Instabilität zu. Das Auftreten von S-Instabilität setzt einen positiven Verfestigungsmodul $h > 0$ bei gleichzeitiger negativer Verzerrungsrate (Viskosität) $\eta < 0$ voraus und tritt zum Beispiel bei metallischen Werkstoffen nur dann in Erscheinung, wenn Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit in einem geeigneten Wertebereich liegen. H-Instabilität (Lokalisierung in einem Elementband) kann bei Entfestigung $h < 0$ und positiver Verzerrungsrate $\eta > 0$ beobachtet werden.

Im Weiteren werden viskoplastische Formulierungen vom *Perzyna*-Typ sowie vom *Duvaut-Lions*-Typ vorgestellt. Beide Formate verwenden nach wie vor das Konzept einer Fließfläche bzw. eines plastischen Potentials, um die viskoplastischen Verzerrungsgrößen zu bestimmen. Da Spannungen außerhalb der Fließfläche zugelassen werden, spricht man auch von Überspannungsmodellen. Für konstant bleibende Belastung wird für $t \rightarrow \infty$ der vollplastische Zustand erreicht – die viskosen Effekte werden abhängig von den viskosen Parametern ausgeblendet.

Perzyna-Viskoplastizität:

Perzyna [148] definiert die viskoplastische Verzerrungsrate im Rahmen der additiven Zerlegung des Verzerrungstensors $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp}$ über ein prinzipiell beliebiges Exponentialgesetz ϕ wie folgt:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle \phi(F(\sigma, \kappa)) \rangle m \quad (4.68)$$

Dabei ist η die Viskosität oder Zähigkeit des Werkstoffes [N sec/mm²], die entweder als Konstante oder aber als Funktion der Spannungs- oder Verzerrungsrate definiert werden kann und m der Gradient des plastischen Potentials. Die Notation $\langle \rangle$ bezeichnet die *McCauley*-Klammern, für die gilt:

$$\langle X \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq 0 \\ X & \text{für } X > 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

Die Exponentialfunktion der Fließbedingung nimmt folgende Form an:

$$\phi(F(\sigma, \kappa)) = \left(\frac{F(\sigma, \kappa)}{\bar{\sigma}_0} \right)^N \quad (4.70)$$

mit N als dimensionslosem Modellparameter und $\bar{\sigma}_0$ als ursprünglicher Fließgrenze des ratenunabhängigen Problems. Für die geplante Anwendung ist es wichtig zu bemerken, dass dieses Format für nichtglatte Fließflächen (*Mohr-Coulomb*, *Tresca* etc.) nicht anwendbar ist. Für mehrere Fließflächen wird im Allgemeinen die *Koiter*'sche Regel [88] zur Addition der plastischen Verzerrungen aller aktiven Teilflächen verwendet. Da Gleichung (4.68) für den Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ (Verschwinden der viskosen Effekte) nicht auf den ratenunabhängigen Fall führt, leisten alle aktiven Fließflächen des Prädiktorzustands einen Beitrag zu den viskoplastischen Verzerrungen. Es sei bemerkt, dass nicht notwendigerweise jede im Prädiktorzustand aktive Fließfläche auch am Ende des Projektionsverfahrens noch aktiv sein muss und folglich einen Beitrag zu den plastischen bzw. viskoplastischen Verzerrungen leistet. Somit ist die viskoplastische Formulierung vom *Perzyna*-Typ nicht geeignet, mit den in Kapitel 5.3 und 5.4 vorzustellenden Materialmodellen physikalisch akzeptable Ergebnisse zu liefern.

Duvaut-Lions-Viskoplastizität:

Die im letzten Kapitel angemerkte Unzulänglichkeit trifft auf das *Duvaut-Lions*-Modell [43] (siehe auch Simo et al. [172]) nicht zu. Die Formulierung basiert auf der Differenz zwischen ratenunabhängigen Größen und ratenabhängigen Größen. Die viskoplastischen Verzerrungen werden wie folgt definiert:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\tau} C^{-1} : (\sigma - \sigma_\infty) \quad (4.71)$$

Das Verfestigungsgesetz in Ratenform lautet entsprechend

$$\dot{\kappa} = \frac{H^{-1}}{\tau} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_\infty) , \quad (4.72)$$

wobei $\tau = \frac{\eta}{E}$ die Relaxationszeit [sec.] definiert und die mit ∞ indizierten Größen der ratenunabhängigen Lösung entsprechen (*back-bone model*). Setzt man Gleichung (4.71) in das differen-

zielle Spannungs-Dehnungs-Gesetz (siehe Gleichungen (4.5) und (4.6)) ein, erhält man die Überspannungsbeziehung zu

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon} - \frac{1}{\tau} (\sigma - \sigma_{\infty}) \quad . \quad (4.73)$$

Im Vorgriff auf Kapitel 6.2.2 liefert die inkrementelle Form am Ende des Zeitschritts (*backward-Euler-Verfahren*) das Spannungsinkrement

$$\Delta\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1} - \frac{\Delta t}{\tau} (\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1,\infty}) \quad . \quad (4.74)$$

Für die algorithmische Tangente erhält man entsprechend:

$$\mathbf{C}^{vp,alg} = \frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon} = \frac{\tau}{\tau + \Delta t} \mathbf{C}^{el} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \mathbf{C}^{ep,alg} \quad (4.75)$$

Anhand dieser beiden Gleichungen lassen sich die beiden Grenzfälle der viskoplastischen Formulierung, elastische Systemantwort und plastische Systemantwort, leicht verdeutlichen: Für den Grenzfall $\frac{\Delta t}{\tau} \rightarrow 0$ erhält man aus Gleichung (4.74) die elastische Antwort. Für $\frac{\Delta t}{\tau} \rightarrow \infty$ liefert Gleichung (4.75) den algorithmischen Tangentenoperator des ratenunabhängigen plastischen Problems $\mathbf{C}^{ep,alg}$. Letzterer wird in der Literatur auch als Operator des *back-bone*-Problems bezeichnet.

Die Gutgestelltheit des Problems wird in beiden Viskoplastizitätsformulierungen über die zeitabhängigen viskosen Parameter erreicht. Durch Multiplikation mit der elastischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in Längsrichtung c^{el} wird die inhärente Berücksichtigung eines inneren Längenparameters l in den Formulierungen für den Fall des Mode I Versagens ersichtlich (siehe Sluys [178]).

$$l = c^{el} \tau \quad \text{mit} \quad c^{el} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{in} \quad \left[\frac{N/m^2}{kg/m^3} \right] = \left[\frac{m}{s} \right] \quad (4.76)$$

4.4.4 Nicht-lokale- und Cosserat-Kontinua

Wie bereits in Kapitel 2.1.1 bemerkt, sind dieser Arbeit lediglich klassische Kontinua zugrunde gelegt. Die Anreicherung der Kontinuumsformulierung durch Gradienten höherer Ordnung (nicht-lokale Formulierungen) bzw. durch mikro-polare Freiheitsgrade in einem Cosserat-Kontinuum liefern den in der klassischen Kontinuumstheorie fehlenden inneren Längenparameter. Somit bleibt das zu lösende Randwertproblem gut gestellt.

Im Fall der Gradientenmodelle werden räumliche Ableitungen der plastischen (allgemein: nicht-elastischen) Zustandsvariablen in den konstitutiven Gleichungen berücksichtigt. Neben Vorschlägen zu nichtlokalen Verzerrungs- (siehe zum Beispiel Bazant et al. [6]) und Schädigungsmodellen (siehe Kuhl [95]) sind auch Modelle, in denen die Fließfunktion in Abhängigkeit der Gradienten der äquivalenten Verzerrungen formuliert ist (siehe de Borst & Mühlhaus [17], Pamin & de Borst [141], Mühlhaus & Aifantis [129], Sluys [178], Wang et al. [187]), Gegenstand der Forschung.

Das von den Gebrütern Cosserat [33] vorgeschlagene Kontinuumsmodell baut gedanklich auf Makro-Elementen auf, die in endliche Mikro-Elemente unterteilt werden. Durch die endliche Größe dieser Elemente wird ein innerer Längenparameter eingebracht, der die Schlechtgestell-

heit des Problems *a priori* vermeidet. Zur Beschreibung von Deformationen der endlichen Elemente der Cosserat-Theorie sind neben Translationen auch noch Rotationen erforderlich. Sluys [178] berichtet, dass mit diesem Ansatz zwar Mode II Versagenszustände netzunabhängig simuliert werden können, für Mode I Versagen die Theorie jedoch keine zufriedenstellende regulierende Wirkung hat. Allen Ansätzen ist gemein, dass die zusätzlich nötigen Modell- und Materialparameter, insbesondere auch der innere Längenparameter, nicht direkt aus Versuchen bestimmbar sind (siehe de Borst et al. [18], Kuhl [95]).

5 Materialmodelle zur Simulation bewehrter Betonstrukturen

5.1 Übersicht

Ziel dieses Kapitels ist es, die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Materialmodelle, die zur numerischen Simulation des Tragverhaltens bewehrter Flächentragwerke aus Beton angewendet wurden, vorzustellen. Das Kapitel wird prinzipiell unterteilt in Werkstoffmodelle für Beton und solche, die die Bewehrung abzubilden haben. Im ersteren Fall wird darüber hinaus zu Beginn eine vergleichende Übersicht bekannter dreidimensionaler Plastizitätsmodelle gegeben. Eine entsprechende Übersicht und Klassifizierung für zweidimensionale Modelle findet sich in Menrath [121]. Anschließend werden die beiden verwendeten Modelle, das assoziierte Mehrflächenmodell nach Menrath sowie eine Modifikation des von Kang [84] vorgeschlagenen Einflächenmodells, eingeführt. Im zweiten Teil des Kapitels erfolgt die Beschreibung der orthotropen Bewehrungsmodellierung. Die numerische Umsetzung der Modelle wird schließlich in Kapitel 6 diskutiert.

5.2 Plastische Werkstoffmodelle für kohäsive Reibungsmaterialien

Im Folgenden sollen einige aus der Literatur bekannte, dreidimensional orientierte Plastizitätsmodelle für kohäsive Reibungsmaterialien bzw. deren Versagensflächen aufgezeigt und gegenübergestellt werden. Einige Modelle wurden ursprünglich für Böden entwickelt und erst später auf den Werkstoff Beton angewendet. Auf eine ausführliche grafische oder formale Darstellung der Versagensflächen wird aus Platzgründen weitgehend verzichtet – der Leser sei an dieser Stelle auf die angegebene Literatur verwiesen. Insbesondere werden hauptsächlich Modelle berücksichtigt, die eine Abhängigkeit von der dritten Invariante des Spannungsdeviators J_3 aufweisen und somit, sofern es sich um Einflächenmodelle handelt, nach der Klassifikation von Menrath [121] dem Typ IV zuzuordnen sind.

Bereits **1935** veröffentlicht **Leon** eine „Hüllfläche“ für den Versagenszustand von Beton (siehe [104] & [105]). Er festigt seine Theorie anhand von Versuchen von Mörsch und Rôs & Eichinger [160] und grenzt sie zu den klassischen Kriterien hin ab. Formal handelt es sich bei seinem Vorschlag um eine Kombination der *Mohr-Coulomb*-Fläche mit dem *Rankine*'schen Hauptspannungskriterium.

$$F(\sigma) = F(\sigma_1, \sigma_3) = \frac{1}{f_{cm}} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + m \frac{\sigma_1}{f_{cm}} - c = 0 \quad (5.1)$$

Pramono (1988) [150] greift schließlich eine von Willam, Hurlbut & Sture weiterentwickelte Formulierung des bekannten Fünf-Parametermodells von Willam und Warnke [191] auf. Letzteres zeichnet sich durch eine elliptische Erweiterung der Beschreibung in Deviatorebene aus (siehe hierzu auch Kapitel 5.4.2), um eine stetig differenzierbare Versagensfläche zu erhalten. Diese Eigenschaft liegt jedoch dem sogenannten *Leon-Pramono*-Modell nicht zugrunde. Es lautet in den Hauptspannungen σ_1 und σ_3

$$F(\sigma_1, \sigma_3, k, c) = \left((1 - k) \frac{\sigma_1^2}{f_{cm}^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f_{cm}} \right)^2 + k^2 m \frac{\sigma_1}{f_{cm}} - k^2 c = 0 \quad (5.2)$$

Folglich ist ein großer Nachteil dieses Kriteriums, neben der Formulierung in den Hauptspannungen, die Unstetigkeit der Gradienten der Deviatorschnitte. k ist hierin der Verfestigungs-, c der

Kohäsions- und m der Reibungsparameter. Das *modifizierte Leon*-Versagenskriterium von **Etse (1992)** [47] kombiniert das Kriterium aus Gleichung (5.2) und eine Ausrundung der „Ecken“ mittels der *Willam-Warnke*-Funktion (siehe Gleichung (5.46)) und liefert damit eine stetig differenzierbare, geschlossene Fließfläche, die das Kompressions- und Extensionsverhalten berücksichtigt. Sie lautet in den *Haigh-Westergaard*-Koordinaten

$$F(\xi, \rho, \theta, k, c) = \left[3 (1 - k) \left(\frac{\xi}{f_{cm}} + \frac{\xi r(\theta)}{\sqrt{6} f_{cm}} \right)^2 + \frac{3 \xi r(\theta)}{\sqrt{2} f_{cm}} \right]^2 + \frac{\sqrt{3} k^2 m}{f_{cm}} \left(\xi + \frac{\xi r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad . \quad (5.3)$$

Die Parameter entsprechen dem *Leon-Pramono*-Modell.

Menetrey und Willam (1995) schlagen ein Einflächenmodell mit exponentieller isotroper Entfestigung vor, das auf einer bruchenergetischen Regularisierung beruht [119]. Die Versagensfläche ist abhängig von den drei Invarianten I_1 , J_2 und θ mit

$$F(I_1, J_2, \theta, c) = \frac{\Phi}{3f_{cm}} (I_1 + r(\theta) \sqrt{3J_2}) + \frac{3J_2}{f_{cm}^2} - c = 0 \quad , \quad (5.4)$$

wohingegen das zugehörige plastische Potenzial

$$Q(I_1, J_2) = 2J_2 + B \sqrt{2J_2} + \frac{C}{\sqrt{3}} I_1 \quad (5.5)$$

die dritte Invariante nicht berücksichtigt. Hierin sind B und C Modellparameter, die sich anhand der Versagensfläche bestimmen lassen und Φ ein aus Versuchen bestimmbarer, konstanter Materialparameter. Die dritte Invariante wird, da das Modell auf dem Fünf-Parametermodell von *Willam & Warnke* aufbaut, über die bekannte Funktion $r(\theta)$ (siehe Gleichung (5.46)) eingebracht. Eine Verfestigung der Fließfläche ist nicht vorgesehen.

Ottosen [137] veröffentlicht **1977** einen Vorschlag für ein hinsichtlich der triaxialen Druckspannungsrichtung offenes Versagenskriterium, das ebenfalls die dritte Spannungsinvariante berücksichtigt. Im Gegensatz zu den Arbeiten von *Argyris et al.* [1] und *Mills & Zimmerman* [127], ist die Versagensfläche von *Ottosen* im gesamten Gebiet konvex.

Im Aufsatz von **Simo und Meschke (1993)** [175] wird neben einer neuen Klasse von Algorithmen für finite Plastizität auch ein verallgemeinertes, isotropes Einflächenkriterium für granulare Materialien vorgestellt. Die einfache Erweiterung für kohäsive Materialien wird ebenfalls angegeben, so dass das Kriterium in den Invarianten I_1 , J_2 und J_3 bzw. θ

$$F(I_1, J_2, J_3, q(\alpha)) = [\gamma(J_2, J_3) J_2 + c_1 |q|^m (\bar{I}_1 + q)^n]^{1/2} - c_2 \bar{I}_1 - \sqrt{c_1 |q|^{n+m}} - c_3 q = 0 \quad (5.6)$$

geschrieben werden kann. Die Abkürzungen lauten

$$\gamma(J_2, J_3) = \sqrt{1 - \beta \cos 3\theta} \quad \text{und} \quad \bar{I}_1 = 3\sqrt{3} f_{ctm} - I_1 \quad . \quad (5.7)$$

Lade & Kim (1995) stellen in [101] ein Einflächenmodell vor, das auf insgesamt zwölf Parametern basiert. Als Besonderheit ist der Elastizitätsmodul des Modells nichtlinear vom anliegenden

Spannungszustand abhängig. Die Fließfläche besteht aus einem Vergleichsspannungskriterium und ist abhängig von den Invarianten des Spannungstensors (I_1, I_2 und I_3), das zugehörige Potenzial entspricht prinzipiell der Fließfläche, erfährt jedoch durch die Wahl anderer Parameter eine Reduktion der hydrostatischen Spannungskomponenten des Gradienten. Die Fließfunktion liefert nicht für alle Kombinationen von Materialparametern eine Versagensfläche, so dass diese in einer weiteren Beziehung explizit definiert werden muss. Das Modell wird insbesondere für bodenmechanische Problemstellungen verwendet.

Eine Fortschreibung dieses Konzepts stellt das **MRS-Lade-Modell (1996)** dar. Es wurde von Masari, Runesson & Sture [181] ausgehend vom ursprünglichen Drei-Invarianten-Modell von Lade (1986) weiterentwickelt und gehört zur Klasse der Zweiflächen-Kappenmodelle mit Singularität an der Kappenspitze (Apex). Obwohl für Böden entwickelt, kann es durch einfache Modifikationen (Addition der hydrostatischen Zugspannungskomponente auf den tatsächlich anliegenden Spannungstensor) auch für Beton eingesetzt werden. Die beiden Teilflächen für die Kappe und den Konus berücksichtigen die dreiecksähnliche Form des Deviatorschnitts durch Multiplikation der zweiten Deviatorinvariante mit der in Gleichung (5.46) gegebenen *William-Warnke-Funktion* $r(\theta, e)$, die Exzentrizität e wird jedoch als Modellkonstante betrachtet. Der Konus weist eine nichtlineare Erzeugende in der Meridianebene auf, die Kappe wird durch eine Ellipse beschrieben. Für den Konus ist in der Weiterentwicklung von Pérez-Foguet & Huerta [147] eine nichtasoziierte, für die Kappe dagegen eine assoziierte Fließregel definiert.

Ehlers (1995) diskutiert in [45] eingehend bekannte Modelle von Desai und Lade (siehe obige Erläuterungen) und konstruiert schließlich ein Sieben-Parametermodell (sechs Geometrieparameter plus Verfestigungsvariable), das in den *Haigh-Westergaard*-Koordinaten die folgende Form annimmt:

$$F = \sqrt{\Phi} + \sqrt{3} \beta \xi + 3 \epsilon \xi^2 - \kappa = 0 \quad \text{wobei} \quad (5.8)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho^2 (1 + \gamma \vartheta)^m + \frac{3}{2} \alpha \xi^2 + 9 \delta^2 \xi^4 \quad \text{mit} \quad \vartheta = \frac{2}{\sqrt{27}} \sin (3\theta) \quad (5.9)$$

Einige Umformungen führen auf die ebenfalls gebräuchliche folgende Form, die sich durch Multiplikation des hydrostatischen Terms F_h mit dem deviatorischen Term F_d auszeichnet:

$$\rho = F_h(\xi) F_d(\theta) \quad (5.10)$$

mit

$$F_h = \sqrt{2} \left[9(\epsilon^2 - \delta^2) \xi^4 + 6\sqrt{3} \beta \epsilon \xi^3 + \frac{3}{2} (2\beta^2 - \alpha - 4\epsilon\kappa) \xi^2 - 2\sqrt{3} \beta \xi + \kappa^2 \right]^{1/2} \quad (5.11)$$

und

$$F_d = \left[1 + \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma \sin (3\theta) \right]^{-m/2} \quad (5.12)$$

Die Ehlers'sche Fließfunktion kann durch entsprechende Wahl der Parameter ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa, m$) in die einfachen Kriterien nach *von Mises* und *Drucker-Prager* überführt werden.

Krenk (1996) [100] stellt eine Familie von Versagenskriterien vor, deren Basis Erzeugende in der Deviatorebene (*deviatoric generators*) sind, die die Forderung nach einem Übergang von der

dreiecksförmigem hin zu einer kreisrunden Form erfüllen. In die allgemeine Form von Gleichung (5.13) werden die Erzeugenden in hydrostatischer Richtung (*hydrostatic generators*) für Extension q_t und Kompression q_c eingebettet, welche innerhalb der Konvexitätsbedingung $\frac{1}{2} q_c(\xi) \leq q_t(\xi) \leq q_c(\xi)$ eine beliebige Form annehmen können.

$$27(q_c - q_t) J_3 + 6(q_c^2 - q_c q_t + q_t^2) J_2 = 2 q_c^2 q_t^2 \quad (5.13)$$

Lambrech & Mieke (1999) schlagen eine Modifikation des *Drucker-Prager*-Kegels vor, die durch Abrundung an der Kegelspitze das bekannte Problem der dortigen Spannungsprojektion löst (siehe Lambrecht & Mieke [102]). In Erweiterung auf ein Einflächenmodell für Böden wird folgende Versagensfläche vorgeschlagen, die hier zum besseren Vergleich ebenfalls in den *Haigh-Westergaard*-Koordinaten angegeben wird:

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\gamma(\sigma, \kappa) \rho^2 + \alpha_F^2} - \frac{1}{v_F} \frac{\hat{a}(\rho, \kappa) - 1}{\hat{\xi} \hat{a}(\rho, \kappa) - 1} = 0 \quad (5.14)$$

Über den zweiten Term wird ein Verfestigungsgesetz formuliert, κ ist die innere, im Spannungsraum definierte, skalare Verfestigungsvariable und $\gamma(\sigma, \kappa)$ bringt die Dreiecksform der Deviatorobene multiplikativ in die Formulierung ein.

$$\gamma(\sigma, \kappa) = \sqrt{1 - \hat{\delta}(\kappa) (1 - \cos 3\theta)} \quad (5.15)$$

$\hat{\delta}(\kappa)$ ist eine von der Verfestigungsvariable abhängige Funktion zur Steuerung des Einflusses des *Lode*-Winkels in Deviatorobene. Der in Gleichung (5.14) zusätzlich vorhandene Materialparameter α_F kann als endlich kleine Perturbation angesehen werden. Er ermöglicht somit die Differenzierbarkeit der Versagensfläche, ohne jedoch als eigener Materialparameter identifiziert werden zu müssen. Das plastische Potenzial des vorgeschlagenen Modells basiert prinzipiell ebenfalls auf Gleichung (5.14). Jedoch wird die Abhängigkeit von Gleichung (5.15) in (5.14) entfernt sowie durch geeignete Parameterwahl die notwendige flachere Repräsentation des Potenzials in der Meridianebene erreicht. Das Potenzial ist somit in Deviatorobene kreisförmig und daher sowohl in deviatorischer als auch hydrostatischer Richtung nicht mehr assoziiert.

Diskussion

Die vorgenannten Modelle zeigen insbesondere, dass eine geschlossene, stetig differenzierbare Beschreibung der Versagensfläche für kohäsive Reibungsmaterialien von zwei Punkten abhängig ist. Zum einen ist eine geeignete Erzeugende in der Deviatorobene und zum anderen in der Meridianebene notwendig. Für erstere existiert neben der elliptischen *Willam-Warnke*-Funktion $r(\theta)$ aus Gleichung (5.46) auch die Möglichkeit zur Verwendung einer trigonometrischen Funktion der allgemeinen Form $\gamma(\theta) = (1 - A \cos 3\theta)^{B/2}$. Beide Ansätze werden multiplikativ auf einen Term, der die zweite Invariante berücksichtigt, angewendet und liefern bei geeigneter Parameterwahl konvexe Versagensflächen. Die Erzeugende in hydrostatischer Richtung muss zunächst nur konvex gekrümmt sein. Anpassungen an Versuchsergebnisse haben Potenzfunktionen, deren Basis eine Funktion der ersten Invariante des Spannungstensors darstellt, als geeignetste Wahl erscheinen lassen. Nach wie vor bleibt jedoch bei den meisten Versagensflächen die gesonderte numerische Behandlung der Unstetigkeitsstellen am Schnittpunkt mit der hydrostatischen Achse zu bemerken.

5.3 Mehrflächenmodell nach Menrath

Menrath schlägt in [121] zur ebenen numerischen Simulation des Tragverhaltens von Stahlverbundträgern ein dreidimensional orientiertes Mehrflächenplastizitätsmodell für Beton vor. In Kombination mit den eingesetzten Modellen zur Abbildung der Last-Schlupf-Charakteristik der Betondübel sowie der materiell nichtlinearen Berücksichtigung des Stahlträgers konnte ein umfangreiches Konzept zur Erfassung der materiell nichtlinearen Phänomene in Verbundträgern vorgestellt werden (siehe Menrath, Haufe & Ramm [120], [122]). In weiteren Studien wurde das Konzept hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Ver- und Entfestigungsgesetze für zweidimensionale Problemstellungen (ebener Verzerrungs- und ebener Spannungszustand) erweitert (vergleiche Haufe, Menrath & Ramm [59], [60]). Wichtigster Vorteil des Modells ist die sehr geringe Anzahl an Material- und Modellparametern, die zur Definition der Versagensfläche und der Evolutionsgesetze notwendig ist. In der hier vorgestellten modifizierten Version sind neben den elastischen Parametern E_{cm} und ν , die Zugfestigkeit f_{ctm} und die Druckfestigkeit f_{cm} des Betons sowie die Bruchenergien im Zug- und im Druckbereich G_t und G_c festzulegen. Vier weitere Parameter γ_i steuern die Geometrie der Versagensfläche sowie das verfestigende Evolutionsgesetz im Druckbereich.

Zur Anwendung auf dreidimensional orientierte Flächentragwerke innerhalb des in Kapitel 2.3 vorgestellten geschichteten 3D-Schalenelements ist das Betonmodell neu implementiert worden. Im Folgenden wird die zugrunde liegende Kontinuumsformulierung des Modells vorgestellt. Für weitere Informationen, insbesondere zur numerischen Umsetzung, sei der Leser jedoch auf die wesentlich umfangreichere Abhandlung von Menrath [121] verwiesen.

5.3.1 Einführung

Das von Menrath vorgeschlagene Mehrflächenmodell definiert eine Versagensfläche im Spannungsraum, die sich aus zwei regulären *Drucker-Prager*-Kegelflächen (vergleiche auch Kapitel 4.3.6) sowie einer kugelförmigen Kappe, die die Versagensfläche in Richtung des hydrostatischen Druckbereichs begrenzt, zusammensetzt (siehe Bild 5.1a und Bild 5.3). Der erste *Drucker-Prager*-Kegel F_1 definiert das Versagen unter Zugbeanspruchung, während das Versagen im Druckbereich durch den zweiten Kegel F_2 sowie durch die Kugelkappe F_4 beschrieben wird. Ein mit der Fließfläche assoziiertes plastisches Potenzial $Q_i = F_i$ ($i=1..4$) bedingt die Einhaltung der Normalenregel (siehe Kapitel 4.3.4) und liefert für alle regulären Projektionsrichtungen symmetrische Tangentenoperatoren. Letztgenannte Einschränkung auf reguläre Projektionen resultiert aus der Tatsache, dass zur Spannungsrückprojektion aus dem Apexbereich, namentlich der Zugbereich der Fließfläche, für den keine Standardprojektion vorgenommen werden kann, auf das Konzept eines invertierten Kegels zurückgegriffen wird. Diese Vorgehensweise wurde von Panjak & Bicanic (vergleiche [143] und [144]) zuerst auf das *Mohr-Coulomb*-Versagenskriterium angewendet (invertierte Pyramide) und von Menrath [121] auf die *Drucker-Prager*-Problemstellung erweitert. Der Algorithmus beruht auf einer zum ersten *Drucker-Prager*-Kegel F_1 invertierten Hilfsfließfläche F_3 , das zugehörige plastische Potenzial wird in gleicher Weise invertiert.

Das nichtlineare Verhalten des Betons, wie eingehend in Kapitel 3 beschrieben, ist stark vom anliegenden Querdruck und somit der hydrostatischen Spannungskomponente abhängig. Bei Mehrflächenmodellen wird diese Abhängigkeit in der Regel nicht kontinuierlich in die Evolutionsgesetze eingebracht, sondern die einzelnen Komponenten der Fließfläche per Definition mit

eher spröden oder eher duktilen Evolutionsgesetzen ausgestattet. Der Nachteil der Diskontinuität manifestiert sich in einem höheren Aufwand im Projektionsalgorithmus. Für Einflächenmodelle, wie zum Beispiel in Kapitel 5.4 vorgestellt, findet im Allgemeinen nur ein Evolutionsgesetz, das sich über weitere Abhängigkeiten vom aktuellen Spannungszustand parametrisieren lässt, Verwendung. Allerdings führt in diesem Fall besagte Abhängigkeit vom Spannungszustand bzw. seinen Invarianten zu weit komplexeren Ausdrücken in den notwendigen ersten und zweiten Ableitungen der Fließfläche oder des Potenzials (siehe hierzu insbesondere Kapitel 6).

Die Ver- und Entfestigungsgesetze des Mehrflächenmodells bauen auf Vorschlägen von Feenstra [51] auf und bestehen aus einem exponentiellen Entfestigungsgesetz im Zugbereich sowie einem bi-parabolischen Ver-/Entfestigungsgesetz im Druckbereich. In beiden Fällen wird eine Regularisierung des Modells über einen netzangepassten Entfestigungsmodul, basierend auf der Zug- bzw. Druckbruchenergie (siehe hierzu insbesondere Vonk [186]), vorgenommen. Die äquivalenten Verzerrungen werden entsprechend der Arbeitsverfestigungshypothese ermittelt (vergleiche Kapitel 4.3.2).

5.3.2 Formulierung der Fließflächen

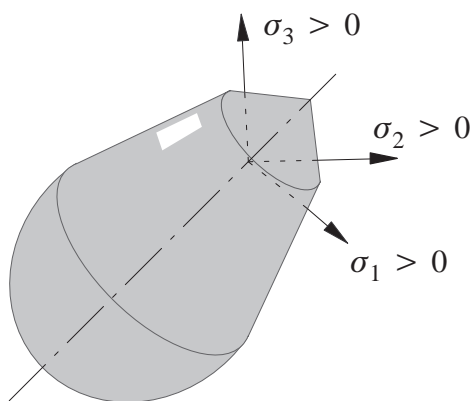
Die von Menrath vorgeschlagenen Teilflächen des Betonmodells basieren auf der ersten Invariante des Spannungstensors I_1 sowie auf der zweiten Invariante des Spannungsdeviators J_2 . Ein Schnitt der Fließfläche parallel zur γ -Ebene (Deviatorebene) liefert immer einen Kreis (siehe Bild 5.1b). Somit wird das unterschiedliche Extensions- und Kompressionsverhalten, charakteristisches Merkmal kohäsiver Reibungsmaterialien, nicht erfasst.

Die Definition der ersten beiden regulären *Drucker-Prager*-Teilflächen lautet:

$$F_i(s, I_1, \bar{\epsilon}_i) = |s| + \alpha_i I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_i(\bar{\epsilon}_i) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (5.16)$$

Die Vergleichsspannungen für den Druck- und den Zugbereich werden über die beiden skalaren Funktionen $\bar{f}_i(\bar{\epsilon}_i) = \beta_i \bar{\sigma}_i(\bar{\epsilon}_i)$ eingebracht und beschreiben folglich ein isotropes Ver- und Entfestigungsverhalten. Die $\bar{\epsilon}_i$ definieren zugehörige äquivalente plastische Verzerrungen. Die Multiplikatoren α_i und β_i dienen dazu, die beiden Teilflächen im Hauptspannungsraum zu positionieren. Für die erste Teilfläche F_1 gilt

a) Räumliche Darstellung



b) Darstellung in Deviatorebene

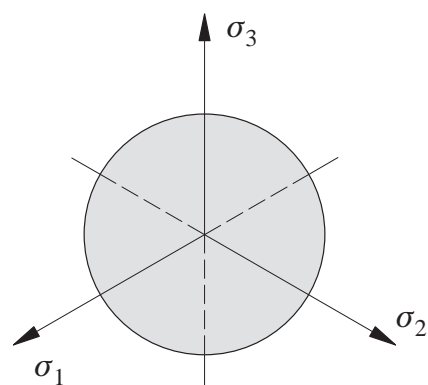


Bild 5.1 Mehrflächenmodell im Hauptspannungsraum

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_1 f_{cm} - f_{ctm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{2 \gamma_1 f_{cm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad (5.17)$$

und für die zweite Teilfläche F_2

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_2 - 1}{2 \gamma_2 - 1} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2 \gamma_2 - 1} \quad . \quad (5.18)$$

Anschaulich können die Bedingungen zum Erhalt obiger Gleichungen im ebenen Hauptspannungsraum anhand Bild 5.2a erklärt werden. Wird die Approximation der von Kupfer, Hülsdorf & Rüschi (siehe Bild 5.2b, [99]) veröffentlichten biaxialen Versagenskurve im ebenen Spannungszustand mittels F_1 und F_2 angestrebt, kann über jeweils einen Modellparameter je Teilfläche γ_i eine ausreichend genaue Abbildung erfolgen. Für die Versagensteilfläche F_1 im Zugbereich lassen sich zwei Spannungszustände (a) und (b) angeben, die die Fläche hinreichend definieren. Diese lauten

$$\sigma_a = \begin{bmatrix} f_{ctm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_b = \begin{bmatrix} \gamma_1 f_{cm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

mit den zugehörigen Fließbedingungen

$$\begin{aligned} F_{1,a}(\sigma_a, \bar{\epsilon}_1) &= |s| + \alpha_1 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 f_{ctm} = 0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} f_{ctm} + \alpha_1 f_{ctm} - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 f_{ctm} = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

und

$$\begin{aligned} F_{1,b}(\sigma_b, \bar{\epsilon}_1) &= |s| + \alpha_1 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 \gamma_1 f_{cm} = 0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_1 f_{cm} + \alpha_1 \gamma_1 f_{cm} - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 \gamma_1 f_{cm} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Das Lösen des durch Gleichung (5.20) und (5.21) definierten linearen Gleichungssystems liefert die Bestimmungsgleichungen für die Parameter α_1 und β_1 . Entsprechende Vorgehensweise für den zweiten *Drucker-Prager-Kegel* F_2 in den Punkten (c) und (d) (siehe Bild 5.2) liefert α_2 und β_2 .

Für die numerische Umsetzung des Projektionsverfahrens wurde im Bereich des Apex die von Pankaj & Bicanic [143] vorgeschlagene Lösung einer invertierten Pyramide auf die *Drucker-Prager-Fließbedingung* erweitert. Die nötige Hilfsfläche F_3 beschreibt einen bezüglich des Gradienten an der Spitze von F_2 (siehe Punkt (e) in Bild 5.3) senkrecht stehenden *Drucker-Prager-Kegel*.

$$F_3(s, I_1, \bar{\epsilon}_1) = |s| + \alpha_3 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_3(\bar{\epsilon}_1) \quad (5.22)$$

Die hierin vorkommenden Parameter α_3 und \bar{f}_3 können über die Geometrie der Teilfläche F_1 definiert werden. Die Einhaltung der Orthogonalität bedingt senkrecht aufeinander stehende Ableitungen der Fließflächen

$$\frac{\partial F_1}{\partial \sigma} : \frac{\partial F_3}{\partial \sigma} = 0 \quad , \quad (5.23)$$

des Weiteren bildet Punkt \textcircled{e} die Kegelspitze beider Flächen und muss daher die Randbedingung

$$F_1(\boldsymbol{\sigma}_e, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = F_3(\boldsymbol{\sigma}_e, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = 0 \quad (5.24)$$

erfüllen. Aus der ersten Bedingung kann unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|} + \alpha_1 \mathbf{I} = \hat{\boldsymbol{n}} + \alpha_1 \mathbf{I} \quad (\text{entsprechend für } F_3) \quad (5.25)$$

und der Tatsache, dass $\hat{\boldsymbol{n}}$ definitionsgemäß (siehe Gleichungen (A.24) und (A.26)) für beide Teilflächen keine hydrostatischen Komponenten enthält und somit keinen Beitrag zum Produkt in Gleichung (5.23) liefert, direkt

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3\alpha_1} \quad (5.26)$$

ermittelt werden. Für die zweite Bedingung muss die anliegende Spannung auf der hydrostatischen Achse liegen, deren deviatorischen Anteile daher null sind ($\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$). Für die hydrostatischen Komponenten lässt sich unter Verwendung von Gleichung (5.24)

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}_e) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\bar{f}_1}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\bar{f}_3}{\alpha_3} \quad (5.27)$$

schreiben. Schließlich liefert Gleichung (5.26) hieraus

$$\bar{f}_3 = -\frac{1}{3\alpha_1^2} \bar{f}_1 \quad . \quad (5.28)$$

Es ist noch anzumerken, dass das plastische Potenzial zur Teilfläche F_3 ebenfalls in gleicher Weise invertiert wird. Im Hinblick auf den zugrunde gelegten Mehrflächenprojektionsalgorithmus wird daher eine im Apexbereich befindliche Prädiktorspannung $\boldsymbol{\sigma}^*$ zum einen auf die Teilfläche F_3 und zum anderen entlang der Senkrechten zu F_1 ($F_3=0$) projiziert. Die entsprechenden Gradienten sind in Bild 5.3 skizziert. An dieser Stelle ist weiter zu bemerken, dass die Auswertung der Fließfläche F_3 entsprechend Gleichung (5.22) für $\boldsymbol{\sigma}^*$ einen negativen Wert annimmt. Daher sind die traditionellen *Kuhn-Tucker*-Bedingungen (Gleichung (4.12)) ebenfalls zu modifizieren: Der elastische Bereich der Teilfläche wird durch $F_3 \geq 0$ charakterisiert, entsprechend lautet die Bedingung für den plastischen Multiplikator $\dot{\lambda}_3 \leq 0$.

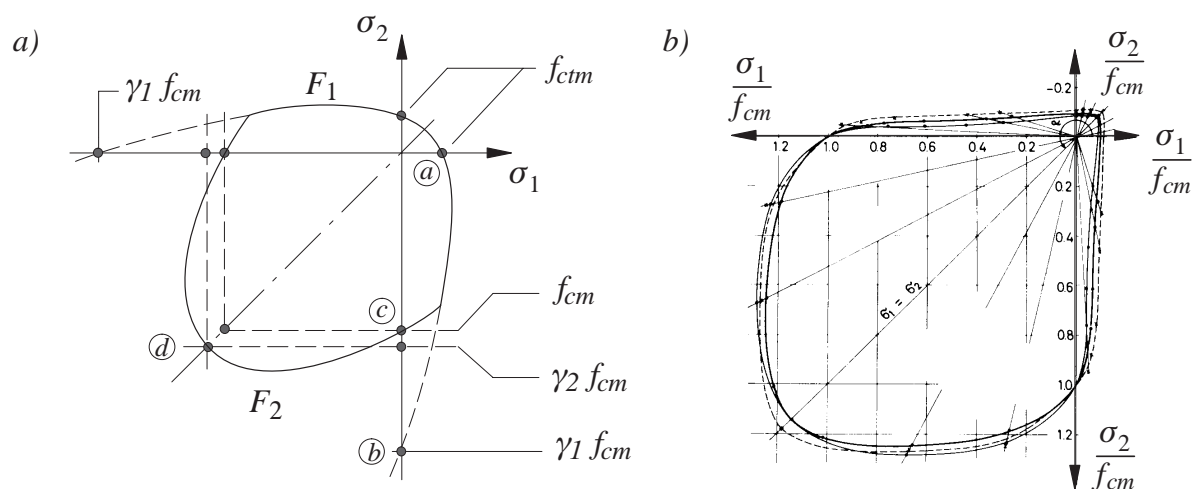


Bild 5.2 a) Mehrflächenmodell im zweidimensionalen Hauptspannungsraum
b) Versagenskurve von Kupfer, Hülsdorf & Rüsich [99]

Die vierte Teilfläche F_4 ist als Kugelkappe, entsprechend der Kappenmodelle von Hofstetter et al. [73] und Suanno [183], in Richtung des triaxialen hydrostatischen Druckbereichs ausgebildet. Ihre allgemeine Definition lautet:

$$F_4(s, I_1, \bar{\epsilon}_2) = \sqrt{|s| + \frac{1}{9}(I_1 - I_{1,m}(\bar{\epsilon}_2))^2} - R(\bar{\epsilon}_2) \quad (5.29)$$

Hierin bezeichnet $I_{1,m}(\bar{\epsilon}_2)$ den Mittelpunkt der Kugelkappe und $R(\bar{\epsilon}_2)$ deren Radius, jeweils in Abhängigkeit der äquivalenten plastischen Verzerrungen für den Druckbereich $\bar{\epsilon}_2$ (siehe auch Bild 5.3). Zur geometrischen Anbindung an die zweite Teilfläche F_2 wird ein C^1 -kontinuierlicher Übergang von F_2 auf F_4 im Punkt $I_1^0 = -2\gamma_2\bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_2)$ gefordert. Somit ergeben sich die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial F_2(s, I_1 = I_1^0, \bar{\epsilon}_2)}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_4(s, I_1 = I_1^0, \bar{\epsilon}_2)}{\partial \sigma} \quad (5.30)$$

und

$$F_4(s, I_1 = I_1^0, \bar{\epsilon}_2) = F_2(s, I_1 = I_1^0, \bar{\epsilon}_2) \quad (5.31)$$

Das Auflösen von Gleichung (5.16) bezüglich der zweiten Teilfläche nach $|s|$ und Einsetzen von $I_1 = I_1^0$ in den erhaltenen Ausdruck, liefert die nötigen Bedingungen, um aus Gleichung (5.30) und (5.31) die beiden unbekanntenen Größen $I_{1,m}(\bar{\epsilon}_2)$ und $R(\bar{\epsilon}_2)$ zu bestimmen. Diese ergeben sich zu

$$I_{1,m}(\bar{\epsilon}_2) = -(\sqrt{54}a_2 + 2)\gamma_2\bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_2) \quad (5.32)$$

und

$$R(\bar{\epsilon}_2) = \sqrt{\frac{2}{3} + 6a_2^2}\gamma_2\bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_2) \quad (5.33)$$

Mit den vorstehenden Gleichungen wurden die einzelnen Versagensflächen $F_1 \div F_4$ des Mehrflächenmodells im Invariantenraum definiert. Es wurde weiter gezeigt, welche Abhängigkeiten zwischen den Teilflächen bestehen. Insbesondere die einfache Ermittlung des invertierten Kegels zur Rückprojektion im Apexbereich wird in Kapitel 6.3.3 hinsichtlich des dort behandelten Einflächenmodells weiter diskutiert werden.

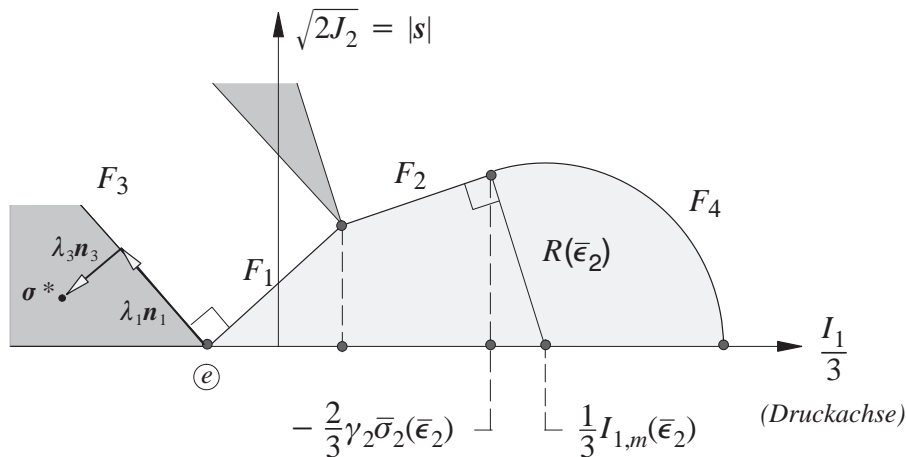


Bild 5.3 Mehrflächenmodell im I_1 - J_2 -Invariantenraum

5.3.3 Evolutionsgesetze

Im vorigen Kapitel wurde die Versagensfläche des Mehrflächenmodells vorgestellt. Die im Sinne eines ver- und entfestigenden Verhaltens des Materials notwendigen Evolutionsgesetze, die die isotrope und kinematische Verfestigung der Teilflächen steuern, werden in diesem Kapitel behandelt.

Wie bereits in Kapitel 5.3.1 einleitend erläutert, liefert die Mehrflächenplastizität durch die Unterteilung des Spannungsraums einzelne Gebiete, innerhalb derer die Verwendung spannungsunabhängiger Evolutionsgesetze möglich ist. Das heißt, das verwendete Evolutionsgesetz verwendet als einzigen Parameter eine im Verzerrungsraum definierte skalare Variable. Es hat sich gezeigt (vergleiche [51], [121], [123]), dass durch geeignete Wahl der Teilflächen die Hauptversagenszustände mit solchen Modellen sehr gut abgebildet werden können.

Äquivalente Vergleichsdehnungen

Dem von Menrath vorgeschlagenen Mehrflächenmodell liegt die Arbeitsverfestigungshypothese nach Gleichung (4.21) zugrunde. Mit Erfüllung der Fließbedingung am Ende des Projektionsverfahrens gilt somit

$$\dot{\bar{\epsilon}}_1 = \dot{\lambda}_1 ; \quad \dot{\bar{\epsilon}}_2 = \dot{\lambda}_i \quad \forall \quad i = [2, 4] \quad . \quad (5.34)$$

Der invertierte Kegel F_3 trägt nur zur Stabilisierung des Projektionsalgorithmus bei – er liefert keinen Beitrag zu den äquivalenten plastischen Verzerrungen. Die äquivalenten Vergleichsdehnungen für den Druckbereich werden im rückprojizierten Zustand jeweils durch die aktive Teilfläche (F_4 oder F_2) aufdatiert.

Zugversagen

Für den Zugbereich wird ein am einaxialen Zugversuch orientiertes Entfestigungsgesetz definiert. Die in entsprechenden Versuchen (siehe Kapitel 3.1.2) ermittelte Bruchenergie dient als Eingangsparameter, der die „Fülligkeit“ der Kurve bestimmt und somit direkt den Entfestigungsmodul beeinflusst. Im Gegensatz zu linearen oder bilinearen Ansätzen für das Entfestigungsgesetz, wie zum Beispiel unter anderem von Rots [161] verwendet, kommt ein exponentielles Evolutionsgesetz zur Anwendung. Für erstere wird von Meschke et al. [123] von Instabilitäten beim Übergang in den horizontalen Ast berichtet. Letztere wurden unter anderem von Feenstra [51] oder Sluys [178] vorgeschlagen.

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_1) = f_{ctm} \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}_1}{\kappa_{tu}}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa_{tu} = \frac{G_t}{h f_{ctm}} \quad (5.35)$$

In den charakteristischen Schädigungsparameter κ_{tu} gehen die Bruchenergie im Zugbereich G_t sowie die Zugfestigkeit f_{ctm} ein, vergleiche Bild 5.4a. Über h wird ein innerer, charakteristischer Längenparameter in das Entfestigungsgesetz eingebracht, der im Sinne des in Kapitel 4.4.2 vorgestellten angepassten Entfestigungsmoduls von der Diskretisierung abhängig ist und die Netzabhängigkeit der Strukturantwort regularisieren soll. Ausgehend von den Überlegungen in Kapitel 4.4 zur kritischen Diskretisierung des 1D-Problems, lässt sich für dieselbe Aufgabenstellung auch ein kritischer Entfestigungsmodul für das vorliegende exponentielle Entfestigungsgesetz bestimmen (siehe hierzu auch Rots [161], Menrath [121]). Gleichung (5.35) liefert den steilsten Gradienten des Evolutionsgesetzes für $\bar{\epsilon}_1 = 0$ zu

$$H_{\min} = \frac{d\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_1 = 0)}{d\bar{\epsilon}_1} = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}_1}{\kappa_{tu}}\right) = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} = -\frac{h f_{ctm}^2}{G_t} \quad (5.36)$$

Berücksichtigt man diese Beziehung in der eindimensionalen Entsprechung zu Gleichung (4.52), der materiellen Stabilitätsbedingung

$$\det C^{ep} = \frac{E H}{E + H} = 0 \quad , \quad (5.37)$$

so sieht man, dass diese für $E = -H$ nicht definiert ist. Zugleich muss der Nenner stets positiv sein $E > -H$, da eine Vorzeichenumkehr durch den Nenner in den in Kapitel 4.3.1 angegebenen Be- und Entlastungsbedingungen ausgeschlossen wird. Einsetzen von Gleichung (5.36) liefert damit eine Bedingung, die zur Einhaltung der Objektivität im Sinne des netzangepassten Entfestigungsmoduls erfüllt sein muss:

$$h < \frac{E_{cm} G_t}{f_{ctm}^2} \quad (E_{cm} = \text{Elastizitätsmodul des Betons}) \quad (5.38)$$

Überschreitet die Diskretisierung die von (5.38) gegebene Grenze, so ist durch geeignete Wahl der Materialparameter E_{cm} , f_{ctm} und G_t die Stabilität und die Eindeutigkeit der Be- und Entlastungsbedingungen wieder herzustellen. Alternativ kann Gleichung (5.38) natürlich durch Neuvernetzen erfüllt werden.

Druckversagen

Das Versagen von Beton unter Druckbeanspruchungen ist stark abhängig vom anliegenden Querdruck (Umschnürungsdruck oder auch *confinement*) und somit maßgeblich an die hydrostatische Komponente der anliegenden Spannungen gekoppelt. Diese wird in den Evolutionsgesetzen des vorgestellten Betonmodells jedoch nicht berücksichtigt. Entsprechend der Vorgehensweise im Zugbereich werden die das Druckversagen abbildenden Teilflächen F_2 und F_4 über ein einaxiales Evolutionsgesetz gesteuert. Die experimentelle Grundlage wird von einaxialen Druckversuchen geliefert, denen die Charakteristik des ansteigenden Asts bis zum Maximalwert der ertragbaren Spannung entnommen wird. Das entfestigende Verhalten wird entsprechend dem Zugversagen über die freiwerdende Bruchenergie kontrolliert (vergleiche Vonk [186]) und ebenfalls über einen charakteristischen Längenparameter h regulisiert.

Dem Evolutionsgesetz liegt eine bi-parabolische Funktion zugrunde (vergleiche Bild 5.4b). Der verfestigende Ast wird zum einen durch die maximale Druckfestigkeit f_{cm} und der zugehörigen Verzerrung $\kappa_e(\gamma_4)$ und zum anderen durch das Einsetzen nichtlinearen Materialverhaltens als

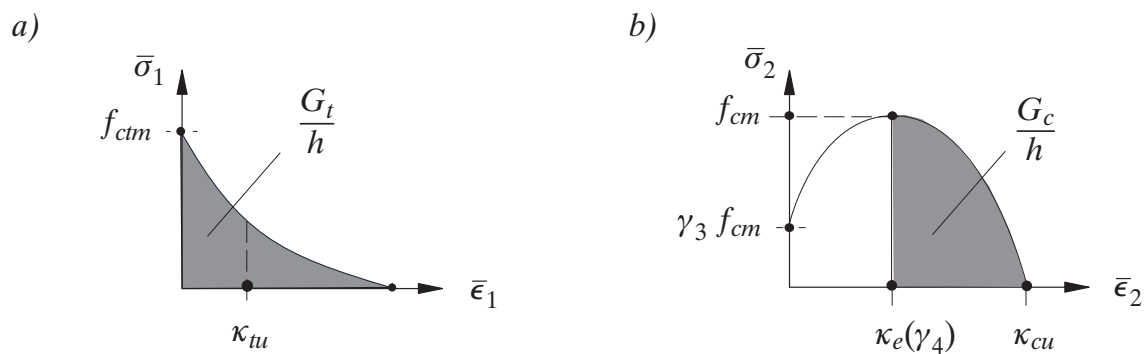


Bild 5.4 Evolutionsgesetze a) für den Zugbereich b) für den Druckbereich

Fraktilwert γ_3 der Druckfestigkeit definiert. Durch die beiden Parameter γ_3 und γ_4 kann abweichend vom ursprünglichen Modell, das für normalfeste Betone konzipiert war, auch das sprödere Versagen hochfester Betone näherungsweise simuliert werden (vergleiche Haufe, Menrath & Ramm [59]). Die beiden Evolutionsgesetze lauten damit:

$$\bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_2) = \begin{cases} f_{cm} \left[\gamma_3 + 2(1 - \gamma_3) \frac{\bar{\epsilon}_2}{\kappa_e} - (1 - \gamma_3) \left(\frac{\bar{\epsilon}_2}{\kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \bar{\epsilon}_2 < \kappa_e \\ f_{cm} \left[1 - \left(\frac{\bar{\epsilon}_2 - \kappa_e}{\kappa_{cu} - \kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \kappa_e \leq \bar{\epsilon}_2 < \kappa_{cu} \end{cases} \quad (5.39)$$

Die charakteristischen Dehnungen bei maximaler Druckfestigkeit bzw. bei Druckversagen sind gegeben zu

$$\kappa_e = \gamma_4 \frac{f_{cm}}{E_c} \quad \text{und} \quad \kappa_{cu} = \frac{3 G_c}{2 h f_{cm}} + \kappa_e \quad (5.40)$$

Ebenso wie für das Entfestigungsgesetz im Zugbereich, lässt sich für den Druckbereich ein kritischer Entfestigungsmodul angeben. Der maximale Gradient des Entfestigungsgesetzes wird erreicht für $\bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_2 = \kappa_{cu})$. Die weitere Herleitung erfolgt analog zu den Gleichungen (5.36) ff. und führt auf

$$h < \frac{3}{4} \frac{G_c E_{cm}}{f_{cm}^2} \quad (5.41)$$

Die Maßnahmen zur Sicherung der Stabilität sind entsprechend zu übertragen.

5.3.4 Parameteridentifikation

In Menrath, Haufe & Ramm [120] wurde gezeigt, dass die beiden Formparameter $\gamma_1 = 3,0$ und $\gamma_2 = 1,2$ die biaxiale Versagenskurve nach Kupfer, Hilsdorf & Rüsich [99] ausreichend genau abzubilden vermögen. Für Normalbeton besteht nach Eurocode 2 [50] die Möglichkeit, ausgehend von der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit die weiteren Materialparameter wie die

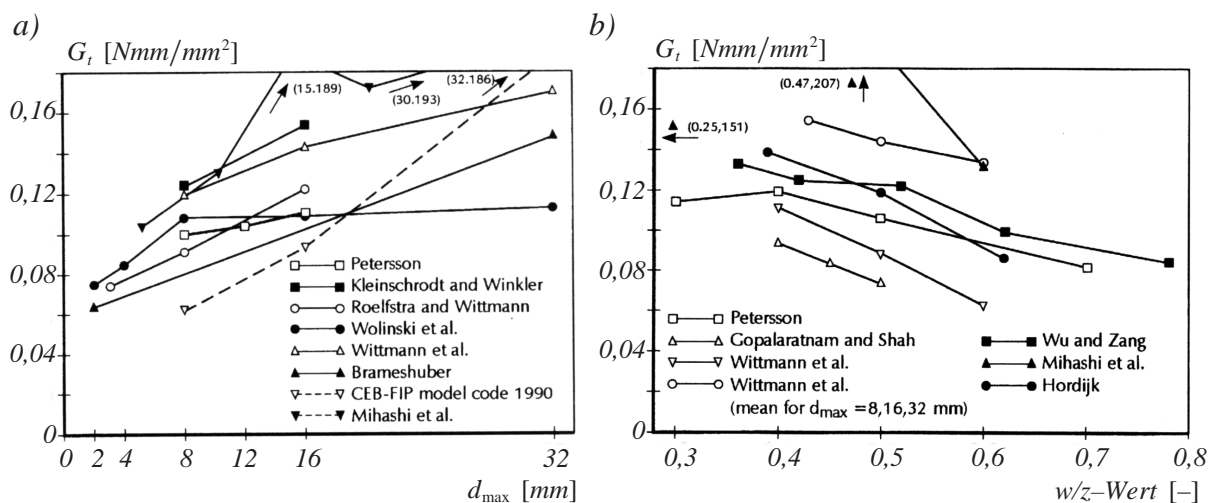


Bild 5.5 Abhängigkeit der Zugbruchenergie G_t von a) der Korngröße b) w/z -Wert [126]

maximale Druckfestigkeit, die Zugfestigkeit oder auch den Elastizitätsmodul abzuschätzen. Sofern detailliertere Angaben aus direkten Versuchen zum Beispiel für den Elastizitätsmodul oder die Biegezugfestigkeit vorliegen, sollten diese in der numerischen Simulation Verwendung finden. Die Poissonzahl (Querdehnzahl) kann innerhalb der zulässigen Werte aus dem Eurocode 2 von $\nu_{cm} = 0,1-0,2$ variiert werden. Ihr Einfluss auf das Gesamttragverhalten von Betonstrukturen ist innerhalb dieser Grenzen von zweiter Ordnung.

Zur Ermittlung der Bruchenergie im Zugbereich G_t sind eine Reihe von Vorschlägen basierend auf unterschiedlichen Versuchsreihen veröffentlicht worden. Ein gute Zusammenstellung findet man in der Monographie von van Mier [126], der auch Bild 5.5a entnommen wurde. Es zeigt sich, dass die Bruchenergie, die grundsätzlich stark abhängig ist von der Größe der Zuschlagskörner, eine starke Streuung aufweist. Hauptverantwortlich hierfür sind nach van Mier weitere Einflussgrößen, wie zum Beispiel der Wasser-Zement-Wert (vergleiche Bild 5.5b), die Porosität, das Betonalter und die Betongüte, die jedoch zum Großteil noch weiterer Untersuchungen bedürfen und daher in den empirischen Formeln des Normenwerks nicht berücksichtigt werden. In dieser Arbeit wird die Ermittlung der Zugbruchenergie auf Basis der Empfehlungen des CEB-FIP [26], in die der maximale Korndurchmesser der Zuschläge d_{max} eingeht, vorgenommen. Die große Streubreite der Versuche findet sich im Grundwert der Bruchenergie G_{F0} wieder, der innerhalb

<i>Parameter</i>	<i>Bestimmungsgleichung</i>	<i>Quelle</i>								
E_{cm}	$9500 (f_{ck} + 8)^{1/3} \quad [N/mm^2]$	[50]								
ν_{cm}	0,1 bis 0,2 [–]									
γ_1	3,0 [–]	[120]								
γ_2	1,2 [–]									
γ_3	0,3 bis 0,9 [–]	[60]								
γ_4	1,1 bis 1,33 [–]									
f_{cm}	$f_{ck} + 8 \quad [N/mm^2]$	[50]								
f_{ctm}	$0,30 f_{ck}^{2/3} \quad [N/mm^2]$ Streubreite : $\pm 30\%$									
G_t	$G_{F0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \quad [Nmm/mm^2]$ mit $f_{cm0} = 10 \text{ N/mm}^2$ Streubreite : $\pm 30\%$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>$d_{max} \text{ [mm]}$</th> <th>$G_{F0} \text{ [Nmm/mm}^2\text{]}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>8</td> <td>0,025</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>0,030</td> </tr> <tr> <td>32</td> <td>0,058</td> </tr> </tbody> </table>	$d_{max} \text{ [mm]}$	$G_{F0} \text{ [Nmm/mm}^2\text{]}$	8	0,025	16	0,030	32	0,058	[26]
$d_{max} \text{ [mm]}$	$G_{F0} \text{ [Nmm/mm}^2\text{]}$									
8	0,025									
16	0,030									
32	0,058									
G_c	$(100...500) \times G_t \quad [Nmm/mm^2]$	[186]								

Tabelle 5.1 Materialparameter für das Mehrflächenmodell

von $\pm 30\%$ variieren kann. An dieser Stelle ist bereits darauf hinzuweisen, dass die Zugbruchenergie als extrem sensitiver Parameter in den Beispielrechnungen identifiziert wurde und damit die Streubreite die Ergebnisse nachhaltig beeinflusst. Die Bruchenergie im Druckbereich G_c wird nach Empfehlungen von Vonk [186] (siehe auch van Mier [126]) abgeschätzt.

Als letzte Parameter sind die beiden Formbeiwerte des Verfestigungsgesetzes im Druckbereich zu bestimmen. Wie das gesamte Evolutionsgesetz im Druckbereich können auch diese anhand einaxialer Druckversuche bestimmt werden. Für Normalbeton wird $\gamma_3 = 1/3$ und $\gamma_4 = 4/3$, wie auch von Menrath vorgeschlagen, zu guten Ergebnissen führen. Für hochfesten Beton kann das Einsetzen der nichtlinear-verfestigenden Materialantwort angehoben werden. Typische Werte für γ_3 sind dann ca. $0,7-0,9$ und für $\gamma_4 = 1,1-1,2$ (siehe auch Haufe, Menrath & Ramm [60]). Eine Zusammenfassung zur Ermittlung der Materialparameter liefert Tabelle 5.1.

5.4 Modifiziertes Einflächenmodell

Nachfolgend soll ein Einflächenmodell für Beton vorgestellt werden, welches in seinen Grundzügen auf eine Arbeit von Kang [84] zurückzuführen ist. Innerhalb der Herleitung wird auf die Modifikationen bezüglich der Originalarbeit eingegangen. Entwickelt wurde das Modell auf Basis der Arbeit von Etse [47] (siehe auch Kapitel 5.2), die wiederum aufbaut auf dem Modell von Pramono ([149] & [150]) bzw. dem *Leon*-Modell [104].

5.4.1 Übersicht

Einflächenmodelle zeichnen sich durch eine geschlossene Beschreibung der Versagensfläche im Spannungsraum aus. Sie besitzen maximal zwei Unstetigkeitsstellen der Gradienten, an denen sie die hydrostatische Achse schneiden. Bedingt durch die Tatsache, dass keine Diskontinuität in der Versagensfläche den Wechsel unterschiedlicher Evolutionsgesetze ermöglicht, müssen diese kontinuierlich definiert werden. Da für Beton das Versagen in zug- und druckdominierten Spannungszuständen unterschiedlich ist, wird üblicherweise der hydrostatische Spannungsanteil im Evolutionsgesetz dahingehend berücksichtigt, dass durch ihn der Übergang vom spröden zum duktilen Versagen gesteuert wird.

Ein Merkmal des modifizierten Einflächenmodells nach Kang [84] ist die Berücksichtigung der dritten Invariante des Spannungsdeviators. Diese erlaubt die Beschreibung der charakteristischen Versagenskurve von Beton in der Deviatorebene, die sich von einem Dreieck hin zu einem Kreis in Abhängigkeit des Umschnürungsdrucks ändert (siehe Bild 5.6a). Das Einflächenmodell wird im Gegensatz zum Mehrflächenmodell aus Kapitel 5.3 nicht in den Invarianten I_1 und J_2 beschrieben, sondern in den ebenfalls invarianten *Haigh-Westergaard*-Koordinaten ξ , ρ und θ (siehe Anhang Gleichung (A.19) ff.). Das Konzept der assoziierten Fließregel, beim Mehrflächenmodell im Hinblick auf eine stabile Implementierung angewendet, wird beim Einflächenmodell schließlich aufgegeben. Entsprechend der Versagensfläche wird ein plastisches Potenzial definiert, dessen Spannungsableitungen geringere hydrostatische Komponenten aufweisen. Somit lässt sich die bei assoziierten Modellen festgestellte extreme Überschätzung der Dilatanz (Volumenzunahme) vermeiden.

Im Hinblick auf die ursprüngliche Formulierung nach Kang [84] wurde die Evolution der Fließfläche sowie des Potenzials verändert, um insbesondere die notwendigen Ableitungen des ur-

sprünglichen Modells, die in der Originalarbeit nicht nachvollziehbar sind, zu vereinfachen (vergleiche Anhang B). Darüber hinaus wurde die algorithmische Umsetzung der Formulierung durch Hinzufügen eines invertierten Kegels (Apex) erweitert (siehe Kapitel 6.3).

5.4.2 Fließfläche

Innerhalb der vorgestellten Arbeit wurde die Anfangsfließfläche von Kang, das heißt das Fließkriterium zu Anfang der Belastung des ungeschädigten, elastischen Materials, nicht modifiziert. Im Gegensatz zu den in Kapitel 4.3.6 vorgestellten Vergleichsspannungskriterien, die sich in der Form $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - F(\boldsymbol{q}) = 0$ darstellen lassen, ist dies für das vorgestellte Kriterium nicht mehr möglich. Es setzt sich additiv aus drei Einzeltermen, der eigentlichen Beschreibung der Versagensfläche F_{fail} , der Modifikation zur Steuerung der Verfestigung F_{hard} sowie einem weiteren Term zur Steuerung der Entfestigung F_{soft} zusammen.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = F_{fail}(\boldsymbol{\sigma}) + F_{hard}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) + F_{soft}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0 \quad (5.42)$$

$$\Rightarrow F_{fail} = \frac{\rho}{f_{cm}} (\mu_F + (1-\mu_F) r(\theta, e)) - \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \right)^\alpha \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow F_{hard} = -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left[\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta - 1 \right] \quad (5.44)$$

$$\Rightarrow F_{soft} = \frac{\rho_1}{f_{cm}} (1 - c) \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \quad (5.45)$$

Wie aus den Gleichungen (5.44) und (5.45) sofort ersichtlich ist, geht in den Verfestigungs- und den Entfestigungsterm, die in ihrer Summe als Vergleichsspannung interpretiert werden können,

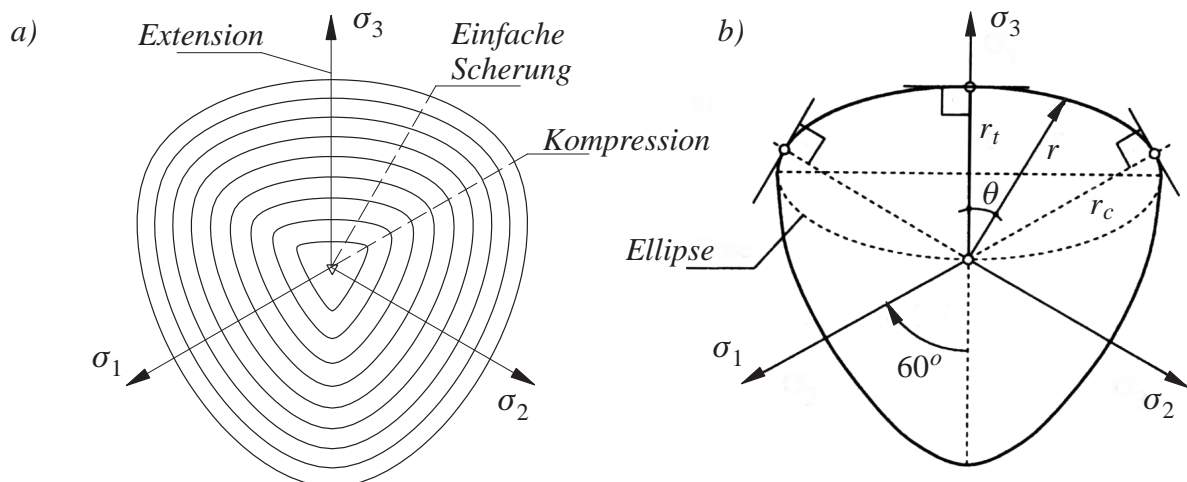


Bild 5.6 a) Änderung der Versagenskurve in Deviatorebene infolge ξ
b) Konstruktion der Ellipse in der Deviatorebene

die hydrostatische Spannungskomponente ξ ein. Die Versagensfläche F_{fail} wird additiv zusammengesetzt aus einem deviatorischen Term, der die dreiecksähnliche Form (*out-of-roundness*) berücksichtigt und einer hydrostatischen Komponente, welche die Aufweitung der Versagensfläche in Richtung des dreiaxialen Druckzustandes beschreibt. Anhand dieser beiden Terme wird die Verwandtschaft zum *Drucker-Prager-Kegel* deutlich (siehe Bild 5.7).

In Gleichung (5.43) steuert der Modellparameter μ_f den Einfluss der sogenannten *Willam-Warnke-Funktion* (siehe Willam & Warnke [191])

$$r(\theta, e) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}}, \quad (5.46)$$

so dass für $\mu_f = 0,0$ die ursprünglich von Kang [84] vorgeschlagene Versagensfläche erhalten wird und für $\mu_f = 1,0$ der Einfluss der Dreiecksform ausgeblendet wird. Letzteres resultiert in einer Zwei-Invarianten-Formulierung. Neben dem *Lode-Winkel* θ geht die Exzentrizität e in Gleichung (5.46) ein. Die Konvexität der Versagensfläche ist sichergestellt, sofern die Bedingung $0,5 \leq e \leq 1,0$ eingehalten wird. An den besagten Grenzen erhält man für $e = 0,5$ nahezu die Dreiecksform mit $r = 2 \cos \theta$, was einem *Rankine-Kriterium* im Zugbereich entspricht. $e = 1,0$ liefert schließlich $r = 1,0$, wodurch die Dreiecksform der Versagensfläche im hohen Druckbereich ausgeblendet wird (siehe auch Bild 5.6a). Unter Verwendung von

$$e = e(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_0 - \xi_e f_{cm}}{\xi - \xi_e f_{cm}} \right) \quad (5.47)$$

wird der Einfluss der Exzentrizität mit zunehmendem hydrostatischen Druck ξ sukzessive vermindert. Dabei wird der Parameter ξ_e im Hinblick auf eine bessere Approximation der Versuchsergebnisse neu eingeführt. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass eine Reihe von Vorschlägen zur Beschreibung dieser dreiecksähnlichen Form existieren (siehe Kapitel 5.2). Allerdings führt nicht jede zu einer konvexen Versagensfläche bei den für reale Materialien notwendigen Materialparametern (Beispiele sind die Vorschläge von Argyris et al. [1] und Mills & Zimmermann [127]). Bild 5.6b zeigt die Konstruktion der Deviatorschnitte mittels der durch Gleichung (5.46) definierten Ellipsen. Jeweils für $\theta = -\frac{\pi}{3}$ und $\theta = \frac{\pi}{3}$ wird der Kompressionspunkt r_c definiert, an

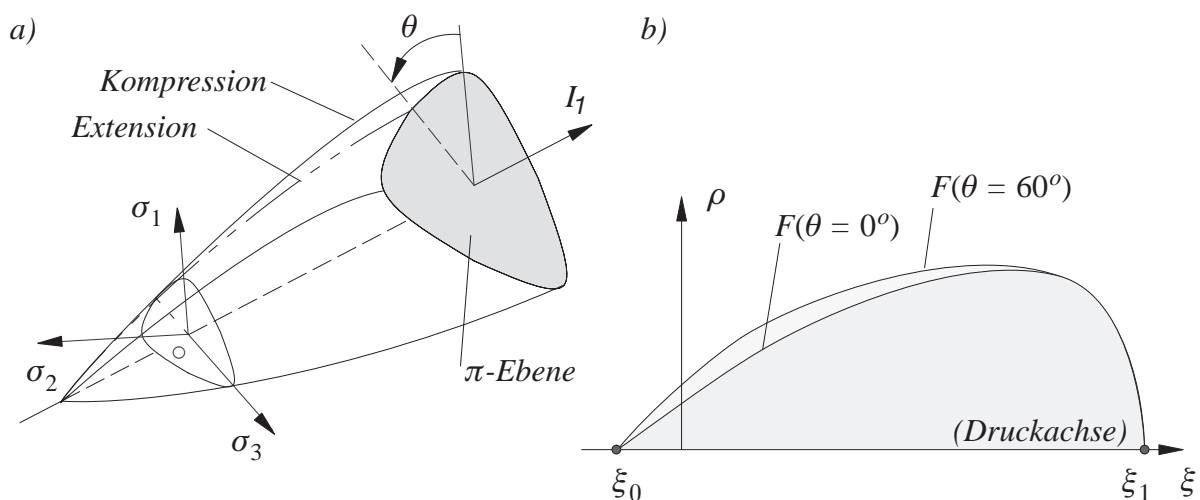


Bild 5.7 Fließfläche a) im 3D-Hauptspannungsraum b) im I_1 - J_2 -Invariantenraum

den die nächste Ellipse C^1 -kontinuierlich angeschlossen wird. Auf die numerische Differenziation an dieser Stelle wird in Kapitel 6.3.4 kurz eingegangen.

Im zweiten Term von Gleichung (5.43) wird die anliegende hydrostatische Spannungskomponente ξ innerhalb der Grenzen ξ_0 und ξ_1 linear skaliert:

$$\xi_0 = \sqrt{3} f_{ctm} \quad \text{und} \quad \xi_1 = -\sqrt{3} S f_{cm} \quad (5.48)$$

Innerhalb der Gleichung (5.48)_b dient S zur Festlegung der Kappe im Druckbereich. Der Exponent α in (5.43) dient zur Anpassung der Versagensfläche in Meridianrichtung an Versuchsergebnisse. Der Vorfaktor ρ_1 bestimmt sich aus dem einaxialen Druckversuch über die zugehörigen Werte der Spannungsinvarianten bei Maximallast ξ_{uc} und ρ_{uc} durch Auflösen der Bedingung $F_{fail}(\xi_{uc}, \rho_{uc}, \theta = \pi/3, \rho_1) = 0$ zu

$$\rho_1 = \frac{\rho_{uc}}{\left(\frac{\xi_{uc} - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}\right)^\alpha} \quad (5.49)$$

Die ersten beiden Invarianten des einaxialen Druckversuchs lauten

$$\xi_{uc} = -\frac{f_{cm}}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \rho_{uc} = \frac{\sqrt{6}}{3} f_{cm} \quad (5.50)$$

dabei steht der Index uc für *ultimate compression*.

Das Verfestigungsverhalten wird additiv durch Gleichung (5.44) in der Fließfläche berücksichtigt. Der Exponent β , definiert über

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - k^2}{1 - k_0^2} \right) \quad (5.51)$$

bringt über die Funktion $k(\xi, \bar{\epsilon})$ das einaxiale Evolutionsgesetz, das wie bereits erwähnt abhängig von der hydrostatischen Spannungskomponente sein muss, in den Verfestigungsterm ein. Mit $k_0 = 0,3$ wird das Ende des linear elastischen Gebietes für Normalbetone definiert (vergleiche auch γ_3 des Mehrflächenmodells). Das einaxiale Verfestigungsgesetz liefert Funktionswerte im Intervall $[k_0, 1, 0]$ (vergleiche Kapitel 5.4.4). Für $k = 1,0$ wird der Exponent β zu null und infolge dessen leistet der Verfestigungsterm F_{hard} keinen Beitrag mehr zur Fließfläche. Der Vorschlag von Kang [84] sieht eine Abhängigkeit von ξ_1 (siehe Gleichung (5.48)_b) vom einaxialen Verfestigungsgesetz vor. Da sich hierdurch die notwendigen ersten und zweiten Ableitungen der Fließfläche und des Potentials nach den Spannungen noch aufwändiger gestalten als die im Anhang B angegebenen, wurde in dieser Arbeit auf diese Abhängigkeit verzichtet. Die Konsequenz hieraus ist, dass sich die Fließfläche mit zunehmender Verfestigung in den triaxialen Druckbereich nicht öffnen kann. Sieht man die Anwendung des Modells nur auf dreidimensional orientierte Schalen- und Flächentragwerke vor, so kann diese Unzulänglichkeit mit dem in Flächentragwerken vorherrschenden ebenen Spannungszustand entschuldigt werden. Sie muss aber bei der Ergebnisinterpretation, insbesondere im Auflagerbereich und an Lasteinleitungsstellen, also den klassischen D-Bereichen des Massivbaus, Berücksichtigung finden. Es sei weiter bemerkt, dass Kang in seiner Arbeit die vollständigen Ableitungen für eine konsistente Implementierung nicht angibt und auf dieser Basis eine nur suboptimale Konvergenzrate erzielen kann.

Der Wert des Entfestigungsterms F_{soft} (siehe Gleichung (5.45)) wird durch die Entfestigungsfunktion $c(\xi, \bar{\epsilon})$ dominiert. Der Entfestigungsterm ist nach Kang nur dann aktiv, wenn die hydro-

statische Spannungskomponente ξ größer als der Grenzwert des Übergangs von sprödem zu duktilem Versagen (*transition point*)

$$\xi_c = -T \xi_0 \quad (5.52)$$

ist, wobei T einen Modellparameter darstellt. Bei der in dieser Arbeit vorgestellten Implementierung ist nach Überschreiten des *transition point* weiterhin eine bruchenergetisch gesteuerte Entfestigung basierend auf G_c möglich. Der Entfestigungsterm ist inaktiv, das heißt $c = 1, 0$, solange der Verfestigungsparameter $k \leq 1, 0$ ist. Umgekehrt bleibt $k = 1, 0$, wenn das Material entfestigt und somit $c \leq 1, 0$ wird.

5.4.3 Plastisches Potenzial

Das plastische Potenzial des Einflächenmodells entspricht formal der in Kapitel 5.4.2 vorgestellten Versagensfläche. Jedoch wird die grundsätzliche Form, wie sie sich als Schnitt in der I_1 - J_2 -Ebene darstellt, zur Vermeidung extremer Dilatanz (Volumenzunahme) abgeflacht. Der Gleichungssatz für das Potenzial lautet damit:

$$Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = Q_{fail}(\boldsymbol{\sigma}) + Q_{hard}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) + Q_{soft}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = 0 \quad (5.53)$$

$$\Rightarrow Q_{fail} = \frac{\rho}{f_{cm}} \left(\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e) \right) \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \right)^{\bar{\alpha}} \quad (5.54)$$

$$\Rightarrow Q_{hard} = F_{hard} \quad (5.55)$$

$$\Rightarrow Q_{soft} = F_{soft} \quad (5.56)$$

Der Parameter $\bar{\alpha}$ wird gegenüber dem entsprechenden Parameter der Versagensfläche geringer gewählt. Somit enthält der Gradient auf das Potenzial \boldsymbol{m} eine geringere hydrostatische Komponente als der Gradient der Fließfläche \boldsymbol{n} , womit übermäßige Volumenzunahme vermieden werden kann. In Gleichung (5.54) wird darüber hinaus entsprechend zur Versagensfläche F_{fail} der Parameter μ_Q zur Modifikation des Potenzials in der Deviatorebene eingeführt. Dies lässt die Berücksichtigung einer dreiecksförmigen Versagensfläche bei gleichzeitigem kreisrunden plastischen Potenzial zu. Beide Modifikationen führen zu einer nichtassozierten Fließregel. Für den ersten Fall, der sich nur in hydrostatischer Richtung auswirkt, ist dies physikalisch motivierbar. Im zweiten Fall kann lediglich mit einem stabileren Projektionsalgorithmus, der radial zur Raumdiagonalen im dreidimensionalen Hauptspannungsraum rückprojiziert, argumentiert werden.

5.4.4 Evolutionsgesetz

Das Evolutionsgesetz für das Einflächenmodell setzt sich aus einem Ver- und einem Entfestigungsgesetz zusammen. Die beiden Teilgesetze müssen dabei von sprödem Versagen im zugdominanten Spannungsbereich zu duktilem Versagen im druckdominanten Versagensbereich übergehen. Als innere Variable wird die äquivalente plastische Verzerrung basierend auf der Verzerrungsverfestigungshypothese verwendet:

$$\bar{\epsilon} = \int_{t=0}^{\tau} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl} d\tau = q \quad (5.57)$$

Das Verfestigungsgesetz lautet

$$k = \frac{2}{h_D} (1 - k_0) (\sqrt{2 h_D \bar{\epsilon}} - \bar{\epsilon}) + k_0 \quad , \quad (5.58)$$

und wird aus der *Hognestad*-Parabel durch Elimination der elastischen Verzerrungsanteile gewonnen (siehe Etse [47]). Bei elastischer Belastung sind die äquivalenten plastischen Verzerrungen $\bar{\epsilon} = 0$, womit $k = k_0$ und Gleichung (5.51) zu $\beta = 1/4$ wird. Der Einfluss der Verfestigung ist dann nahezu ausgeblendet. $h_D(\xi)$ bezeichnet die quadratische Duktilitätsfunktion zur Beschreibung des Übergangs von sprödem zu duktilem Versagen bei hohem Umschnürungsdruck.

$$h_D(\xi) = A_h \left(\frac{\xi}{f_{cm}} \right)^2 + B_h \left(\frac{\xi}{f_{cm}} \right) + C_h \quad (5.59)$$

Die darin benötigten Konstanten A_h , B_h und C_h werden von Etse ([47] & [48]) angegeben. In Bild 5.8a ist der Verlauf der Verfestigungsfunktion und der Einfluss des Umschnürungsdrucks schematisch dargestellt.

Das Entfestigungsgesetz wird abweichend vom Originalmodell über die bruchenergetischen Funktionen des in Kapitel 5.3.3 vorgestellten Mehrflächenmodells formuliert. Um eine stetig differenzierbare Funktion im $\xi - \bar{\epsilon}$ -Raum zu erhalten, wird zunächst die äquivalente plastische Verzerrung um den Anteil aus der Verfestigung reduziert (vergleiche auch Bild 5.8a).

$$\bar{\epsilon}_s = \left\langle \bar{\epsilon} - \frac{h_D}{2} \right\rangle \quad (5.60)$$

Das Entfestigungsgesetz lautet damit

$$c = c_t \mu_D + c_c (1 - \mu_D) \quad , \quad (5.61)$$

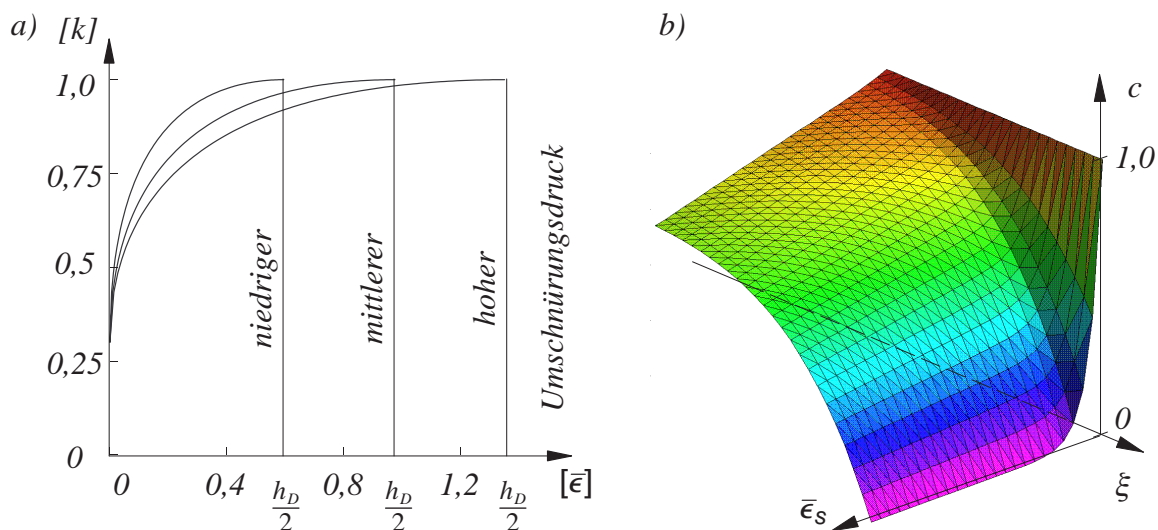


Bild 5.8 a) Einfluss des Umschnürungsdrucks ξ auf das Verfestigungsgesetz
b) Entfestigungsgesetz

wobei der erste Term für den zugdominanten Bereich mit niedrigem Umschnürungsdruck entsprechend Gleichung (5.35)₁ eine exponentielle Form hat

$$c_t = \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}_s}{\kappa_{tu}}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa_{tu} = \frac{G_t}{h f_{ctm}} \quad (5.62)$$

und der zweite Term der Parabel aus Gleichung (5.39)₂ entspricht

$$c_c = 1 - \left(\frac{\bar{\epsilon}_s}{\kappa_{cu}}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \kappa_{cu} = \frac{3}{2} \frac{G_c}{h f_{cm}} \quad (5.63)$$

Durch den Überblendparameter μ_D kann das Modell an einaxialen Druck- bzw. Zugversuchen kalibriert werden. Hierfür steht der Exponent n in

$$\mu_D = \left(\frac{\xi - \xi_c}{\xi_0 - \xi_c}\right)^n \quad (5.64)$$

als Modellparameter zur Verfügung. Eine Darstellung der Entfestigungsfunktion $c(\xi, \bar{\epsilon}_s, n)$ findet sich in Bild 5.8b.

Für $\bar{\epsilon}_s = 0$ wird $c = 1, 0$ und somit wird das Entfestigungsgesetz wunschgemäß nicht aktiv. Die *McCauley*-Klammern in Gleichung (5.60) liefern nur für $\bar{\epsilon} > h_D/2$ von null verschiedene Werte und leiten somit das Entfestigen des Materialpunkts ein.

5.4.5 Parameteridentifikation

Innerhalb des vorgestellten Modells sind die verwendeten Parameter zu identifizieren. Für die Materialparameter (f_{cm} , f_{ctm} , G_t und G_c) wird die beim Mehrflächenmodell (siehe Kapitel 5.3.4) bereits angeführte Vorgehensweise gewählt. Die Modellparameter der Versagensfläche F_{fail} , S , ξ_e und α werden anhand der Daten aus Triaxialversuchen bestimmt. Bild 5.10 zeigt hierzu die Ergebnisse triaxialer Extensions- und Kompressionsversuche im hohen Druckbereich, wie sie unter anderem im Aufsatz von Ottosen [137] veröffentlicht sind. Die eingezeichneten Meridianschnitte wurden für einen Wert von $S = 7,0$ ermittelt (siehe Kang [84]). S stellt den Multipli-

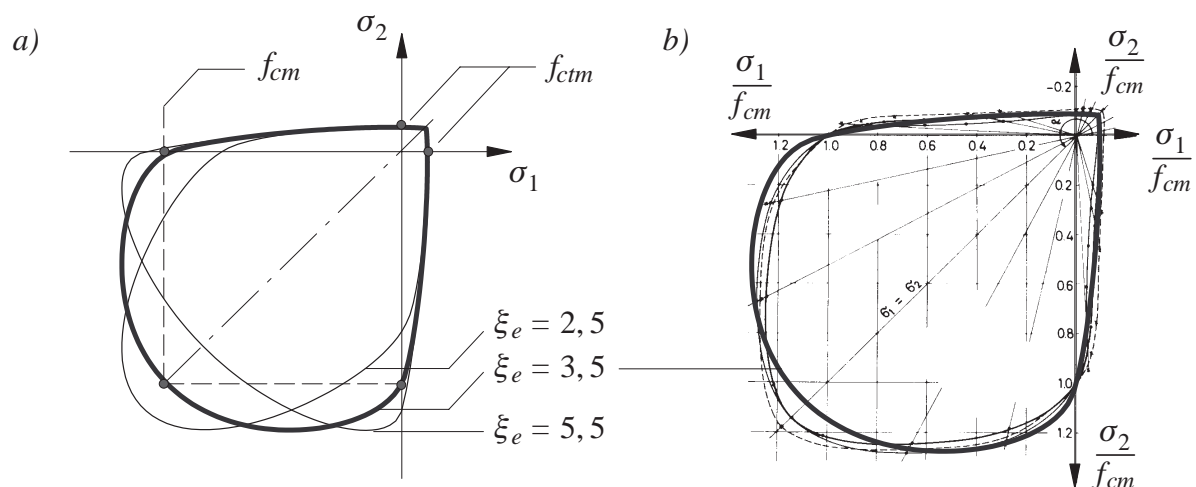


Bild 5.9 a) Einflächenmodell im zweidimensionalen Hauptspannungsraum
b) Versagenskurve von Kupfer, Hilsdorf & Rüsich [99]

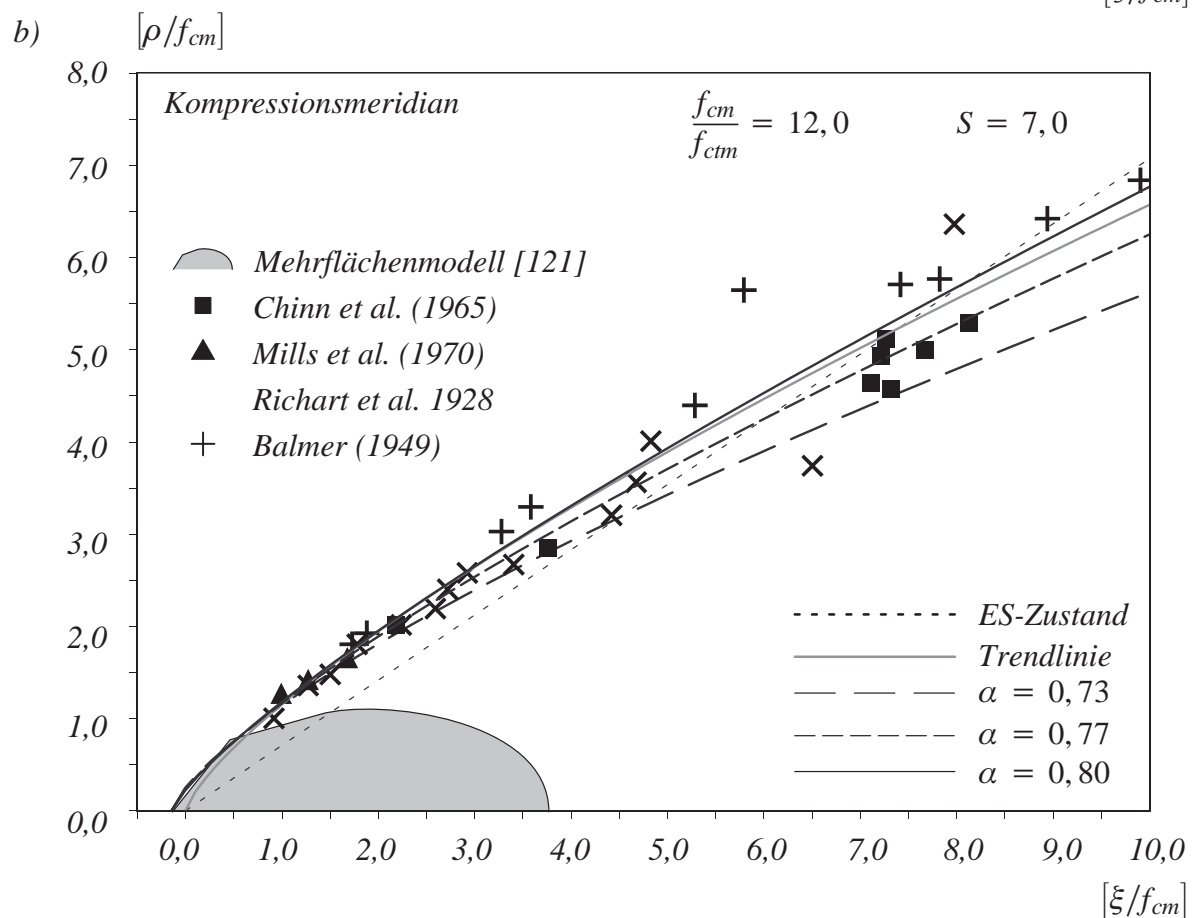
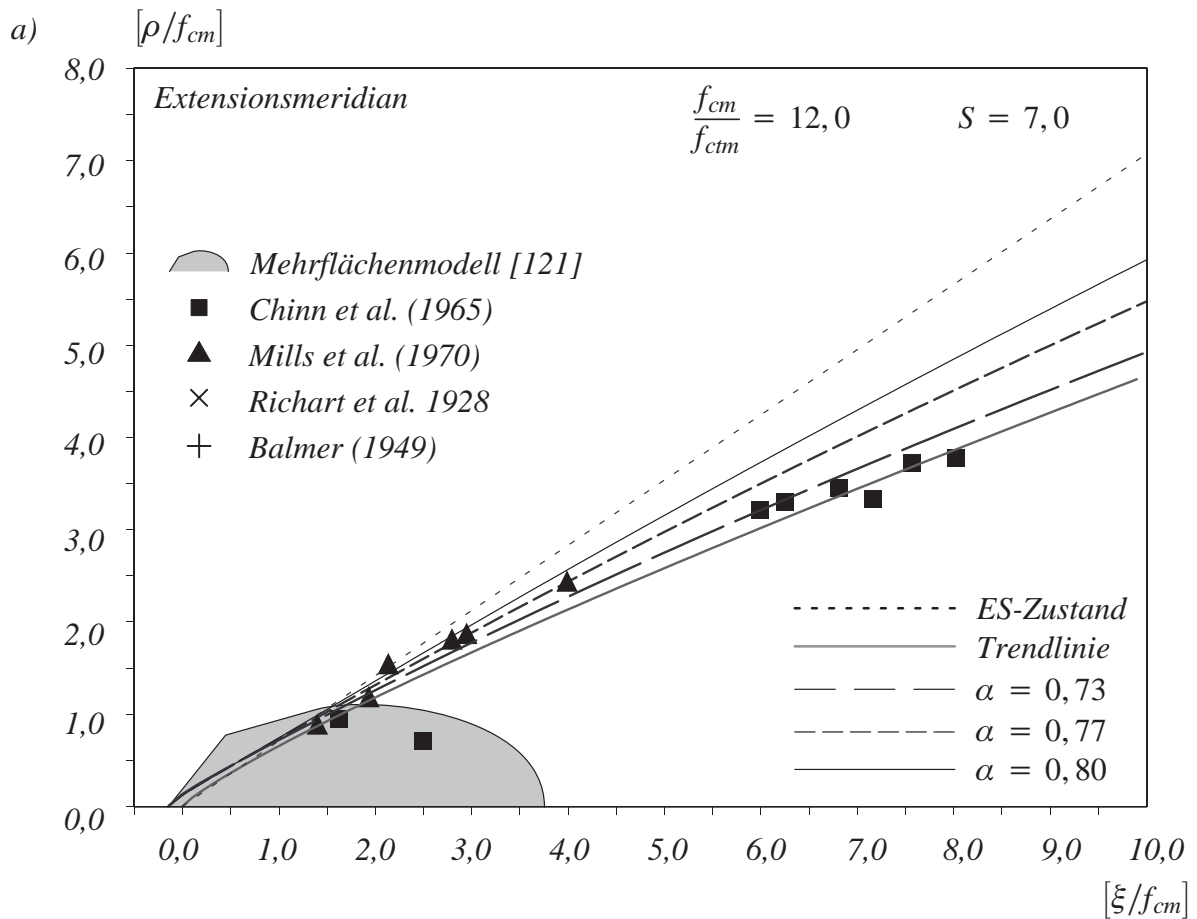
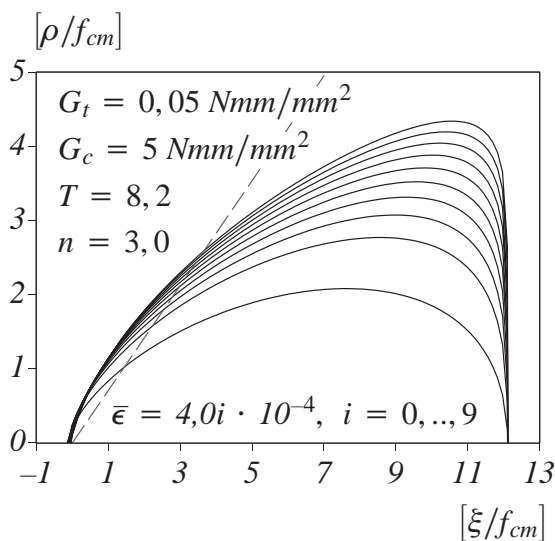


Bild 5.10 a) Extensionsversuche und b) Kompressionsversuche vs. Versagensfläche

kator der einaxialen Druckspannung dar, der die Versagensfläche im triaxial-hydrostatischen Druckbereich begrenzt.

Ausgehend hiervon wurde zunächst die Versagenskurve im ebenen Spannungszustand (ESZ) berechnet. Es zeigt sich, dass die von Kang vorgeschlagene Formulierung der Exzentrizität e (siehe Gleichung (5.47)), die für $\xi_e = 5,5$ erhalten wird, die Versagenshülle nach Kupfer, Hilsdorf & Rüsich [99] nur unzureichend annähert. In Bild 5.9a ist eine Studie für den Modellparameter ξ_e angegeben. Die Versagenskurve kann für $\xi_e = 3,5$ ausreichend genau approximiert werden (siehe hierzu auch Bild 5.9b). Da auch die Meridianschnitte von dieser Modifikation betroffen sind, ist der Exponent α aus Gleichung (5.43) ebenfalls anzupassen. Die in Bild 5.10a&b skizzierte Parameterstudie für Extensions- und Kompressionsbelastung führt letztendlich auf

a) *Kompression*



b) *Extension*

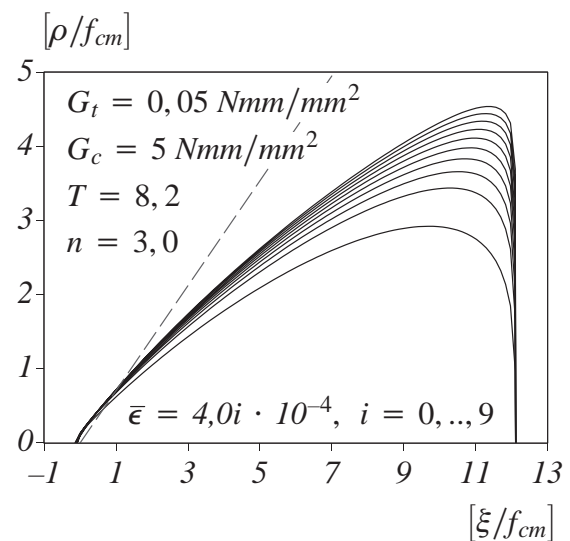
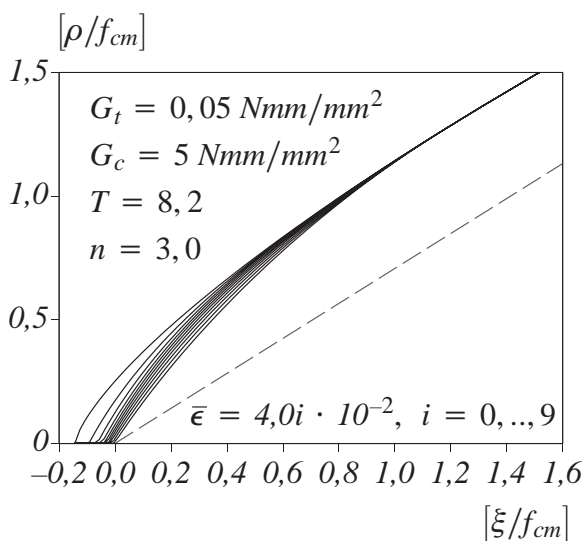


Bild 5.11 Versagensmeridiane bei Verfestigung a) Kompression b) Extension

a) *Kompression*



b) *Extension*

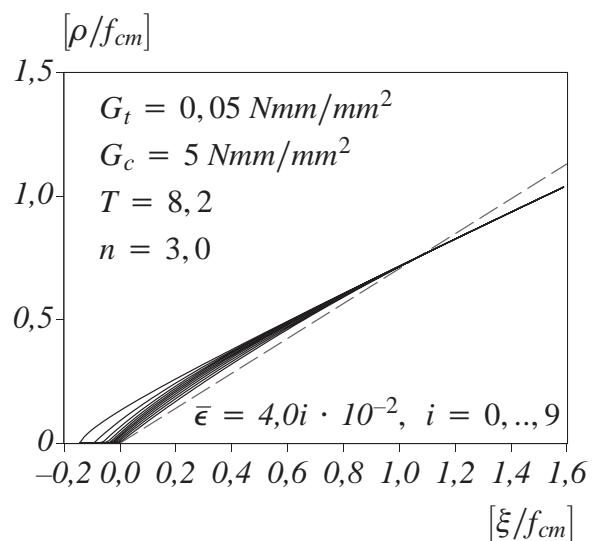
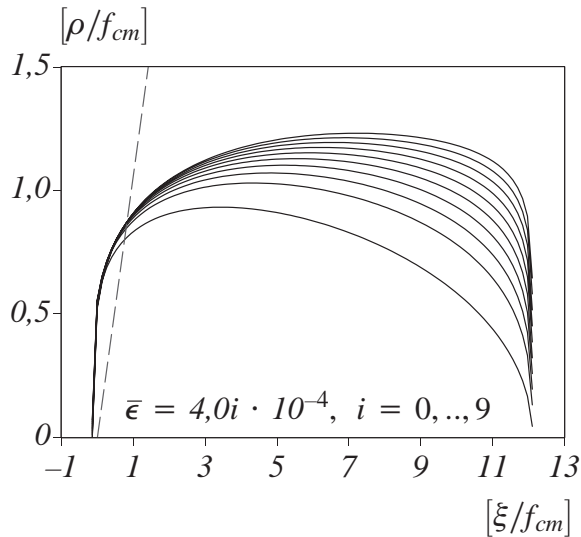


Bild 5.12 a) Versagensmeridiane bei Entfestigung a) Kompression b) Extension

$\alpha = 0,73$. Die ermittelten Parameter S , ξ_e und α können im Rahmen der Anwendung auf normalfeste Betone als konstante Modellparameter angesehen werden.

Für den Verfestigungsterm (5.44) stellt sich die Frage nach der Wahl des Schwellwerts k_0 sowie die in der Evolutionsgleichung indirekt über die Duktilitätsfunktion eingehenden Parameter A_h , B_h und C_h . Der Schwellwert k_0 bestimmt das Einsetzen des nichtlinear verfestigenden Verhaltens und kann aus gängigen Normen (EC2 [50] oder CEB-FIP [26]) zum Beispiel für Normalbeton zu 0,3 angesetzt werden. Die Parameter der Duktilitätsfunktion (Gleichung (5.59)) können anhand von Versuchen bei unterschiedlichem Umschnürungsdruck (*confinement*) ermittelt werden und wurden von Etse [47] anhand der Versuchsreihe von Hurlbut (1985) für einen Normalbeton mit der Druckfestigkeit $f_{cm} = 22,06 \text{ N/mm}^2$ kalibriert (siehe Tabelle 5.2).

a) *Kompression*



b) *Extension*

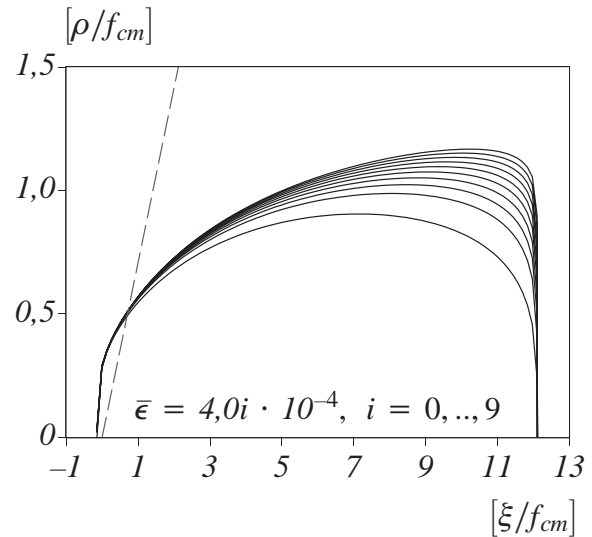
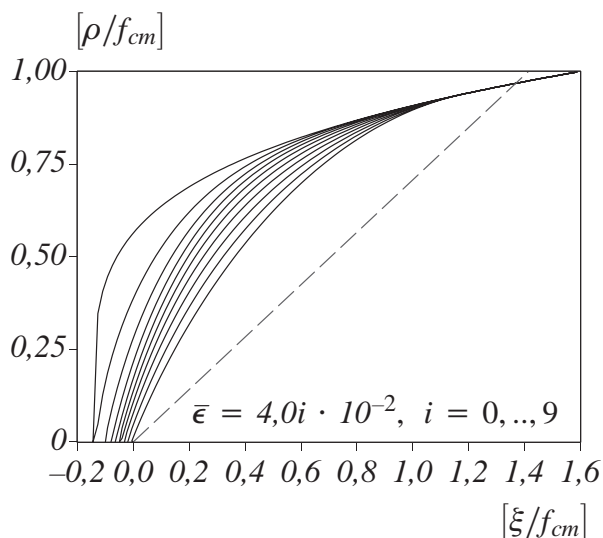


Bild 5.13 a) *Plastisches Potenzial bei Verfestigung* a) *Kompression* b) *Extension*

a) *Kompression*



b) *Extension*

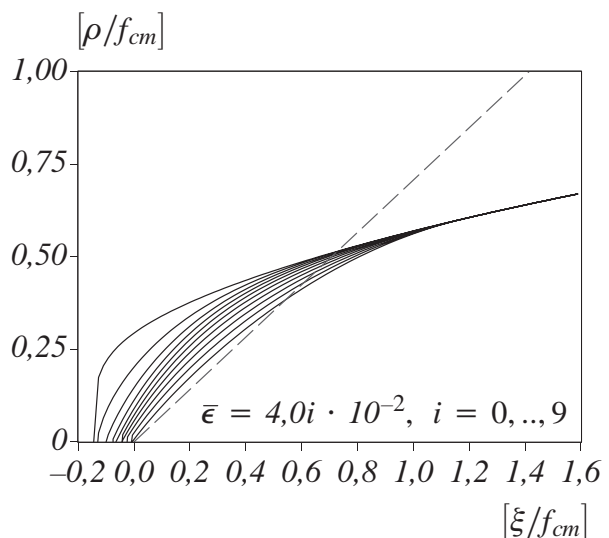


Bild 5.14 a) *Plastisches Potenzial bei Entfestigung* a) *Kompression* b) *Extension*

In Bild 5.11 ist die Evolution der Fließfläche jeweils getrennt für den Extensions- und den Kompressionsmeridian infolge Verfestigung skizziert. Man erkennt die Wirkung der Verfestigung auf die gesamte Fließfläche. Der innerhalb der Implementierung konstant angesetzte maximale hydrostatische Druck ξ_c schließt die Fläche unabhängig von der Belastungsgeschichte bzw. der inneren Variablen. Sollen gedrungene Bauteile im hohen hydrostatischen Druckbereich simuliert werden, ist diese Vereinfachung schwer motivierbar. Für die in dieser Arbeit behandelten Flächentragwerke, die mit Ausnahme konzentrierter Lasteinleitungs- und Lagerungsstellen hauptsächlich durch Spannungen in der Ebene dominiert sind, ist jedoch anhand der eingezeichneten gestrichelten Linien des ebenen Spannungszustands zu erkennen, dass diese hohen Druckbereiche des Modells im Allgemeinen nicht geweckt werden.

Der im Entfestigungsterm (5.45) notwendige dimensionslose Parameter zur Festlegung des Übergangs von sprödem zu duktilem Versagen T wird von Kang mit 8,2 angegeben. Darauf aufbauend wird der in Gleichung (5.64) eingeführte Exponent n anhand einaxialer Zug- und Druckversuche bestimmt. Im vorgestellten modifizierten Modell wird nach Überschreiten des *transition points* weiterhin entfestigendes Verhalten angenommen. Für diesen Bereich gilt dann

$$c = c_c = 1 - \left(\frac{\bar{\epsilon}_s}{\kappa_{cu}} \right)^2 . \quad (5.65)$$

Entsprechend ist in Bild 5.12a&b die Entwicklung nach Überschreiten des Versagenszustands, also die Entfestigung dargestellt. Die Bruchenergien wurden entsprechend Tabelle 5.1 für eine Druckfestigkeit von $f_{cm} = 36 \text{ N/mm}^2$ ermittelt. Als Exponent der Entfestigungsbeschreibung wird $n = 3$ angesetzt. Erwartungsgemäß entfestigt die Fließfläche nur oberhalb des *transition point* von

$$\frac{\xi_c}{f_{cm}} = -8,2 \xi_0 = -8,2 \sqrt{3} \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} = -8,2 \sqrt{3} \frac{3,0}{36,0} = -1,18 . \quad (5.66)$$

Eine eindeutige Identifikation des Überblendparameteres n kann anhand von einaxialen Druck- und Zugversuchen erfolgen, wie zum Beispiel in Kapitel 5.5 in Bild 5.16 beschrieben.

Durch die nichtassoziierte Form der Formulierung ergibt sich für das plastische Potenzial ein weiterer Parameter. Der Exponent $\bar{\alpha}$ aus Gleichung (5.54) kann anhand von Verzerrungsgeschwindigkeitsprofilen aus Triaxialversuchen (Smith 1987, siehe Bild 3.4) approximiert werden. In Bild 5.14 sowie in Bild 5.13 sind die Meridianschnitte des Potenzials bei zunehmenden

Parameter	Wert	Quelle	Parameter	Wert	Quelle
α	0,73 [-]		A_h	-0,000283 [-]	} [47]
$\bar{\alpha}$	0,23 [-]	} [84]	B_h	-0,00572 [-]	
S	7,0 [-]		C_h	0,000424 [-]	
T	8,2 [-]	[84]	n	3,0 [-]	
ξ_e	3,5 [-]		k_0	0,3 [-]	

Tabelle 5.2 Materialparameter für das Einflächenmodell (in Ergänzung zu Tabelle 5.1)

äquivalenten Verzerrungen $\bar{\epsilon}$ und für den von Kang vorgeschlagenen Wert von $\bar{\alpha} = 0,23$ aufgetragen.

In Tabelle 5.2 sind die für das beschriebene Einflächenmodell notwendigen Modell- und Materialparameter nochmals übersichtlich zusammengestellt.

5.5 Schädigung im Entlastungszustand

Die in den vorigen Kapiteln vorgestellten Modelle basieren auf dem phänomenologischen Ansatz, der durch die Plastizitätstheorie gegeben ist. Eine offensichtliche Verletzung des in Versuchen ermittelten Materialverhaltens geschieht bei der Entlastung der Probe aus dem ver- bzw. entfestigenden Zustand. Während im Versuch eine Degradation der elastischen Materialparameter (Elastizitätsmodul und *Poisson*-Zahl) festgestellt werden kann, liefern die Plastizitätsmodelle eine unveränderte lineare Entlastungsantwort. An dieser Stelle greift die mit den Namen Kachanov und Rabotnov in Verbindung zu bringende Schädigungsmechanik. Eine ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung sowie auch der in jüngerer Vergangenheit angewendeten Formulierungen findet sich in der Arbeit von Kuhl [95].

Der Grund für die Degradation der Materialparameter liegt ebenfalls wie das Entfestigungsphänomen zum einen in der Akkumulation von Spannungen an lokalen Unstetigkeitsstellen (Defekte im Gefüge), die zu einem Versagen an der jeweiligen Grenzschicht führen, und zum anderen am Aufbrechen von Atombindungen innerhalb des Kristallgitters selbst. Beide Effekte beeinflussen sowohl den Elastizitätsmodul als auch die Querdehnzahl in der jeweiligen Degradationsrichtung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur die isotrope Schädigung des Elastizitätsmoduls im Entlastungszustand berücksichtigt. Zum einen wird durch das isotrope Konzept mit einer Schädigungsvariablen die gerichtete Degradation bei Änderung der Belastungsrichtung auf alle Raumrichtungen übertragen und zum anderen bleibt die physikalisch motivierte Degradation der Querdehnzahl unberücksichtigt, sofern sie nicht durch einen konstanten Faktor ebenfalls einbezogen wird. Diese beiden Punkte schränken die Anwendung des Konzepts ein. So können zum Beispiel zyklische Belastungsversuche, die eine Änderung der Belastungsrichtung induzieren bzw. diese *a priori* vorsehen, nicht simuliert werden. Letzteres wird offensichtlich für ein negatives Spannungsverhältnis $\bar{\sigma}_{cycl} = \sigma_{max}/\sigma_{min}$: Die Schädigung der Materialprobe infolge Zugbe-

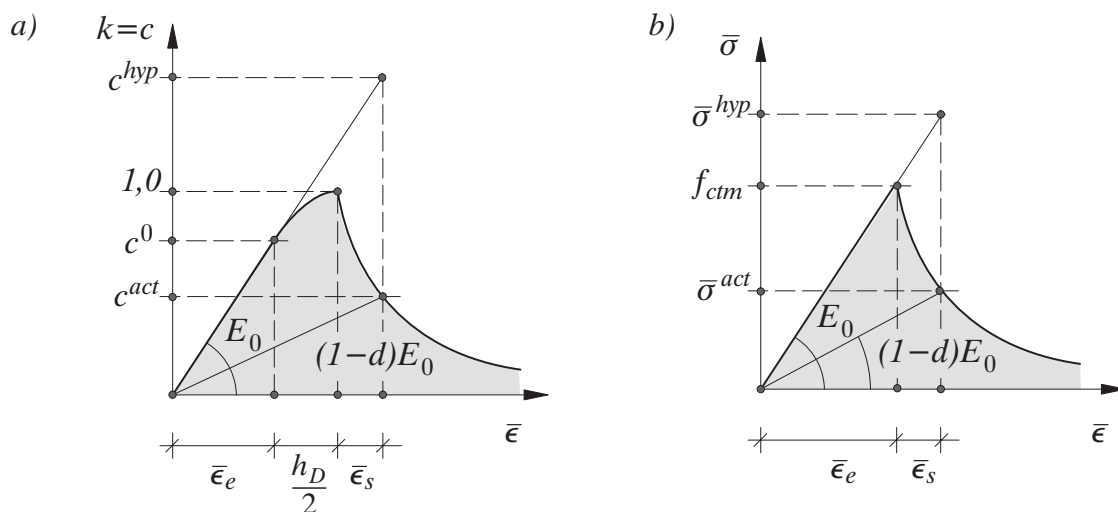


Bild 5.15 Skalare Schädigung a) Einflächenmodell b) Mehrflächenmodell

anspruchung σ_{\min} über den Schwellwert hinaus würde die Materialantwort bei Druckbeanspruchung σ_{\max} beeinflussen. Zusätzlich ist die Ermittlung von aussagekräftigen lateralen Spannungen und Dehnungen nach und während der Entlastung und der Wiederbelastung nicht mehr möglich. Trotzdem erfreut sich dieses Konzept seiner einfachen Umsetzung zufolge großer Verbreitung. Für eine allgemeine kontinuumsmechanisch konsistente Herleitung einer auf der Spannungsäquivalenz (effektive Verzerrungen) aufbauenden Elasto-Schädigung wird von der freien *Helmholtz*-Energie des ungeschädigten Materials

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \frac{1-d}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.67)$$

ausgegangen, wobei d die skalare Evolutionsvariable einer monoton steigenden Verzerrungsfunktion (Schädigungsfunktion) F^d im Sinne eines Schwellwertes darstellt

$$d = F^d(\bar{\epsilon}_{\max}) \quad \text{mit} \quad \bar{\epsilon}_{\max} = \max(\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_0) \quad . \quad (5.68)$$

Der Tangentenmodul wird durch

$$\mathbf{C}_{kon}^d = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} = (1-d) \mathbf{C}^{el} - \frac{1}{\partial F^d / \partial \bar{\epsilon}_{\max}} \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{n}^d \quad (5.69)$$

ausgedrückt. Das dyadische Produkt ist bestimmt durch die effektiv anliegenden Spannungen

$$\mathbf{m}^d = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \quad (5.70)$$

sowie den Gradienten der aktuellen Schädigungsfläche im Verzerrungsraum

$$\mathbf{n}^d = \frac{\partial \bar{\epsilon}_{\max}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \bar{\epsilon}_{\max}}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad . \quad (5.71)$$

Entsprechend der Plastizitätstheorie spricht man auch hier von assoziierten Modellen, falls $\mathbf{m}^d \parallel \mathbf{n}^d$ gilt. Für reine Schädigungsmodelle erhebt sich folglich die Frage, wie die skalare Schädigungsfunktion $F^d(\bar{\epsilon}_{\max})$ bzw. $\bar{\epsilon} = f(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{C}^{el}, \dots)$ zu definieren ist, um eine assoziierte Formulierung zu erhalten. Die Definition der Spannungen über die freie *Helmholtz*-Energie (Gleichung (5.67))

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial \Psi / \partial \boldsymbol{\epsilon} = (1-d) \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.72)$$

schränkt die Wahl weitestgehend ein. Die „äquivalenten Verzerrungen“ für assoziierte Schädigungsformulierungen sind daher über

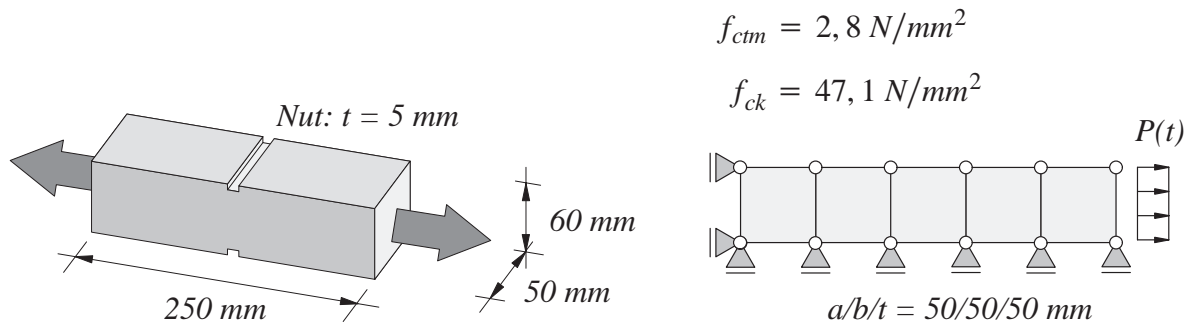


Bild 5.16 Zyklischer Zugversuch [193]: Probenabmessungen und Diskretisierung

$$\bar{\epsilon} = A \left(\int C^{el} : \epsilon d\epsilon \right) = A(\epsilon : C^{el} : \epsilon) \quad (5.73)$$

zu definieren, wobei sich A als eine beliebige Funktion herausstellt, die von der Energiefreisetzungsrate abhängig ist. Lemaître [103] verwendet zur Definition der äquivalenten Verzerrungen $\bar{\epsilon} = \sqrt{\epsilon : \epsilon}$, was auf eine nichtassozierte Formulierung $m^d \nparallel n^d$ führt.

Da in dieser Arbeit nur isotrope Schädigung während des elastischen Entlastungspfades im Sinne einer vereinfachten Betrachtungsweise berücksichtigt werden soll, kann auf die für Belastungspfade im Schädigungsbereich notwendige algorithmische Tangente verzichtet werden.

Bild 5.15a zeigt den hierzu für das Einflächenmodell verwendeten Ansatz, der infolge der Abhängigkeit des Evolutionsgesetzes von der hydrostatischen Spannungskomponente die Speicherung des Grundwertes der äquivalenten Verzerrungen $\bar{\epsilon}_e$ bedingt. Die Schädigungsevolution lautet

$$d_{single} = 1 - \frac{c^{act} \bar{\epsilon}_e}{(\bar{\epsilon}_e + \bar{\epsilon}_s + h_D/2) c_0} d_{user} \quad (5.74)$$

In Bild 5.15b ist die entsprechende Funktion für das Mehrflächenmodell skizziert, deren Schädigungsevolution wie folgt lautet:

$$d_{multi} = 1 - \frac{\bar{\sigma}^{act}}{\bar{\sigma}^{hyp}} d_{user} = 1 - \frac{\bar{\sigma}^{act}}{(\bar{\epsilon}_e + \bar{\epsilon}_s) E_0} d_{user} \quad (5.75)$$

Sowohl in Gleichung (5.74) als auch (5.75) werden die äquivalenten Verzerrungen aus $\bar{\epsilon} = \sqrt{\epsilon : \epsilon}$ ermittelt (nichtassozierte Formulierung). Weiter wird der konstante Skalar d_{user} eingeführt, der eine Anpassung der Materialantwort an einaxiale Versuchsergebnisse erlaubt.

In Bild 5.17a&b ist jeweils die Versuchskurve des Typ II Versuchs (siehe Bild 5.16) für zyklische Be- und Entlastung im Zugspannungsbereich ohne Vorzeichenänderung von Yankelevsky & Reinhardt [193] im Vergleich zu den Ergebnissen aus der Simulation mit den vorgestellten Mate-

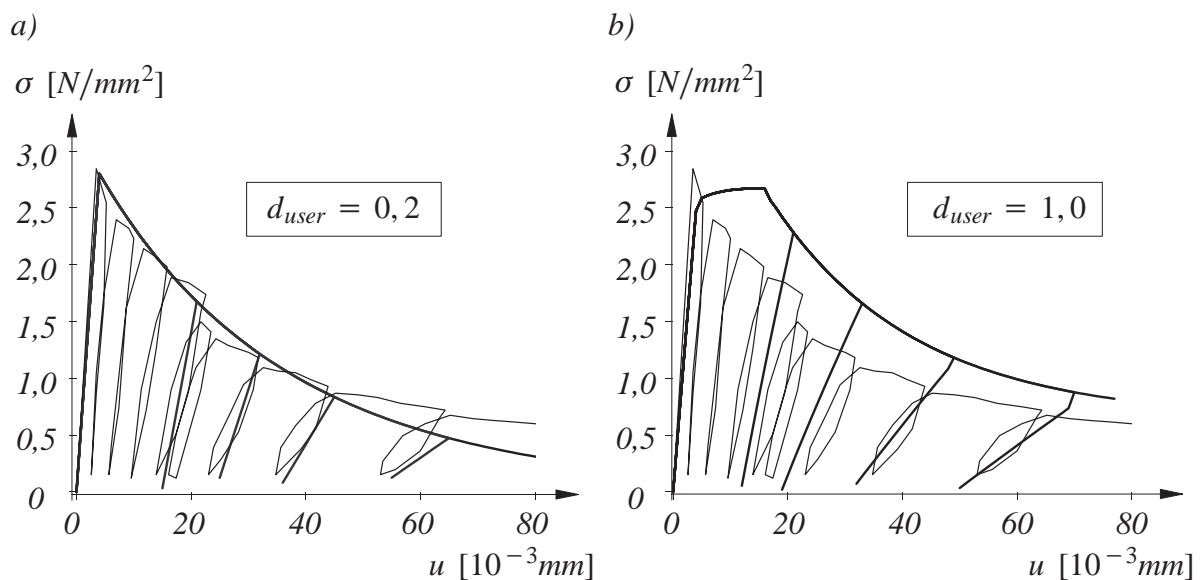


Bild 5.17 Skalare Schädigung a) Mehrflächenmodell b) Einflächenmodell

rialmodellen aufgetragen. Die maßgeblichen Materialparameter wurden der angegebenen Veröffentlichung ($f_{ck} = 47,1 \text{ N/mm}^2$) bzw. dem zugehörigen Spannungs-Verschiebungs-Diagramm ($f_{ctm} = 2,9 \text{ N/mm}^2$) entnommen. Alle weiteren Parameter entstammen aus Tabelle 5.1 bzw. aus Tabelle 5.2. Für das Einflächenmodell wurde, bedingt durch die Schädigungsevolution aus Gleichung (5.74), die einen größeren plastischen Verzerrungsanteil enthält, zur Reproduktion des Versuchsergebnisses $d_{user} = 1,0$ gewählt. Für das Mehrflächenmodell musste der Eingabeparameter hingegen zu $d_{user} = 0,2$ gesetzt werden, um die Entlastung zum Ursprung, welche für $d_{user} = 1,0$ stattfinden würde, abzumildern. In beiden Fällen zeigt sich, dass die Strukturantwort des einaxialen zyklischen Zugversuchs – wie erwartet – gut abgebildet wird. Der Grund liegt selbstverständlich in der Tatsache, dass die unidirektionale Schädigung durch das skalare Schädigungsmodell per Definition abgebildet werden kann. Die physikalisch unmotiviert Degradation der lateralen und entgegengesetzten Druckkomponenten des Materialtensors wird in der Strukturantwort nicht sichtbar.

5.6 Berücksichtigung der Bewehrung

Die Simulation bewehrter Betonstrukturen bedingt neben möglichst wirklichkeitsnahen konstitutiven Modellen für den Beton auch die Erfassung von Steifigkeitsanteilen aus der Bewehrung sowie deren Interaktion mit der Betonmatrix (Verbundverhalten). Erstere ergeben sich direkt aus dem nichtlinearen Materialverhalten des Bewehrungswerkstoffes (Stahl bzw. Kunstfasern), während letztere insbesondere durch Verbundschlupf (*bond slip*), Dübelwirkung (*dowel action*) sowie das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen (*tension stiffening*) bestimmt sind (vergleiche Stempniewski & Eibl [180], Hofstetter & Mang [74]). Die detaillierte Erfassung des Verbundverhaltens im Rahmen von strukturorientierten numerischen Simulationen gilt derzeit noch als zu rechenintensiv, bedingt doch jeder Verbundeffekt für sich die Definition eigener nichtlinearer Arbeitslinien und zusätzliche Freiheitsgrade, weshalb bei schlaffer Bewehrung im Allgemeinen von starrem Verbund zwischen Betonmatrix und Bewehrungsmittel ausgegangen wird. Bei vorgespannten Tragwerken (vergleiche Hofstetter [70]) sowie Detailuntersuchungen in neueren Arbeiten (siehe Pamin & de Borst [141]) wird der Verbundschlupf dagegen berücksichtigt.

Bei starrem Verbund stehen drei Möglichkeiten zur Modellierung der Bewehrung zur Verfügung: die diskrete, die eingebettete oder die verteilte/verschmierte Modellierung (vergleiche Bild 5.18). Innerhalb dieser Arbeit wird die Bewehrung verschmiert auf die Elementfläche bzw. in die entsprechende Schicht des Schalenelements berücksichtigt. Diese Vorgehensweise besticht durch eine einfache numerische Umsetzung, da lediglich der konstitutive Tensor der Elementschicht additiv modifiziert werden muss. Die Integration der Elementsteifigkeitsmatrix bleibt

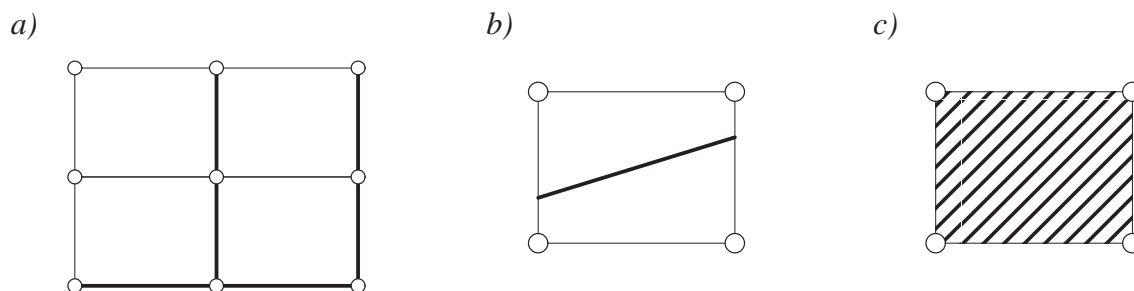


Bild 5.18 a) Diskrete, b) eingebettete und c) verschmierte Bewehrungsmodellierung

unverändert und es müssen auch keine weiteren Terme einaddiert werden. Als Nachteil ist die Abhängigkeit der Bewehrungsführung von der Diskretisierung des Problems zu nennen.

Im Folgenden wird die einaxiale Berücksichtigung der Bewehrungslagen in der entsprechenden Schalenschicht vorgestellt. Da auf konstitutiver Seite Plastizitätsmodelle zur Anwendung kommen, werden diverse Evolutionsgesetze für den Werkstoff Stahl sowie für das Strukturverhalten der Kunststofffasern vorgestellt. Abschließend wird der Effekt des *tension stiffening*, der innerhalb einer verschmierten Modellierung als Modifikation der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Bewehrungswerkstoffes berücksichtigt werden kann, diskutiert.

5.6.1 Verschmierte einaxiale Plastizitätsformulierung

Wie bereits im vorigen Absatz erwähnt, ist zur Berücksichtigung der verschmierten Bewehrungslage jeweils nur der konstitutive Tensor additiv zu modifizieren. Wird das nichtlineare Materialverhalten der Bewehrung mittels der Plastizitätstheorie beschrieben, erfordert der inkrementell iterative Algorithmus auch die Bestimmung der zugehörigen Spannungen. Für m Bewehrungslagen innerhalb einer Schalenschicht, die sich durch elastische Materialeigenschaften, Evolutionsgesetz, Menge und Orientierung unterscheiden können, werden die Gesamtspannungen und der gesamte konstitutive Tensor jeder bewehrten Elementschicht wie folgt bestimmt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{conc} + \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\sigma}_{re,k} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{conc} + \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_{re,k} \quad (5.76)$$

Für die Bewehrung werden keine Schubsteifigkeiten in Schalenebene (*inplane shear*) angesetzt, das heißt Schweißverbindungen, wie sie bei gängigen Mattenbewehrungen vorkommen, oder auch der zwar geringe aber dennoch vorhandene Schubwiderstand von verwirkten Kunststofffasern wird nicht berücksichtigt (siehe zum Beispiel Feenstra [51]). Unter diesen Voraussetzungen lautet der Materialtensor in bekannter Matrizenschreibweise

$$\mathbf{C}_{re,k} = \begin{bmatrix} \rho_k^r E_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_k^s E_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k^t E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \quad (5.77)$$

Wie anhand Gleichung (5.77) festgestellt werden kann, wird durch den Ansatz unterschiedlicher Bewehrungsgrade ρ_k^r , ρ_k^s und ρ_k^t , jeweils bezogen auf die aktuelle Schichthöhe, eine orthogonale Bewehrungsführung möglich. Für nichtrechtwinklige Bewehrung ist eine weitere Bewehrungsschicht anzulegen.

Die Umsetzung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfolgt für jede Richtung getrennt mit der Plastizitätstheorie. Im Folgenden wird der Index zur Bezeichnung der Bewehrungslage k sowie der orthogonalen Richtung (r , s und t) aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Die in Richtung der Bewehrung wirkenden Verzerrungsinkremente $\dot{\epsilon}_{re}$ lassen sich additiv in einen elastischen $\dot{\epsilon}_{el, re}$ und einen plastischen Anteil $\dot{\epsilon}_{pl, re}$ zerlegen. Das zugehörige

Spannungskrement lautet damit $\dot{\sigma}_{re} = \rho E \dot{\epsilon}_{el, re}$. Das Vergleichsspannungskriterium zur Definition der isotrop verfestigenden Fließbedingung reduziert sich für den eindimensionalen Fall zu $F_{re} = \sigma_{re} - \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) = 0$, worin $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ die aktuelle Fließspannung aus dem Evolutionsgesetz darstellt. Die Fließregel unter Berücksichtigung der Arbeitsverfestigungshypothese lautet somit

$$\dot{\epsilon}_{pl, re} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_{re}}{\partial \sigma_{re}} = \dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F_{re}}{\partial \sigma_{re}} = 1 \quad . \quad (5.78)$$

Aus der Konsistenzbedingung

$$\dot{F}_{re} = 0 = \frac{\partial F_{re}}{\partial \sigma_{re}} \dot{\sigma}_{re} + \frac{\partial F_{re}}{\partial \bar{\epsilon}} \dot{\bar{\epsilon}} \quad (5.79)$$

und dem Verfestigungsmodul gemäß $H = -\partial F_{re}/\partial \bar{\epsilon}$ erhält man $\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{\dot{\sigma}_{re}}{H}$. Dies eingesetzt in die infinitesimale Spannungsbeziehung $\dot{\sigma} = E (\dot{\epsilon}_{re} - \dot{\epsilon}_{pl, re}) = E (\dot{\epsilon}_{re} - \dot{\sigma}_{re}/H)$ führt auf die elasto-plastische Materialtangente in der folgenden Form (siehe hierzu für bilineare Verfestigungsgesetze auch Bild 4.5b):

$$C^{ep} = \frac{E H}{E + H} = E_h \quad (5.80)$$

Neben dem klassischen bilinearen Evolutionsgesetz wie in Bild 4.5a dargestellt, können auch multilineare oder kontinuierlich nichtlineare Gesetze für $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ angewendet werden. Beides wird im nachfolgenden Kapitel kurz diskutiert.

5.6.2 Evolutionsgesetze für die Bewehrung

Als Evolutionsgesetze für die einaxiale Bewehrungsmodellierung kommen zum einen multilineare Ansätze zur Anwendung, die eine variable jedoch zeitaufwändige Anpassung an unterschiedlichste Materialien und Festigkeiten anhand einfacher Zugversuche zulassen, sowie zum anderen nichtlineare Evolutionsgleichungen, deren funktionaler Verlauf mit einer geringen An-

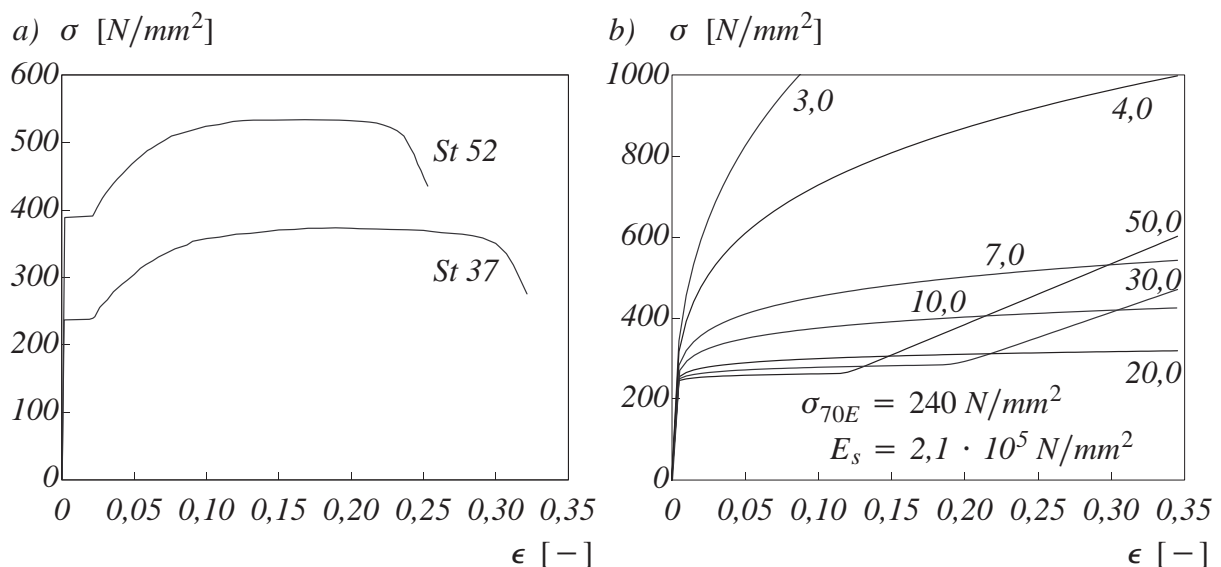


Bild 5.19 a) Nichtlineare Evolutionsgesetze für Baustahl: multilinear approximiert
b) Ramberg-Osgood-Verfestigungsgesetz [151] bei diversen Exponenten n

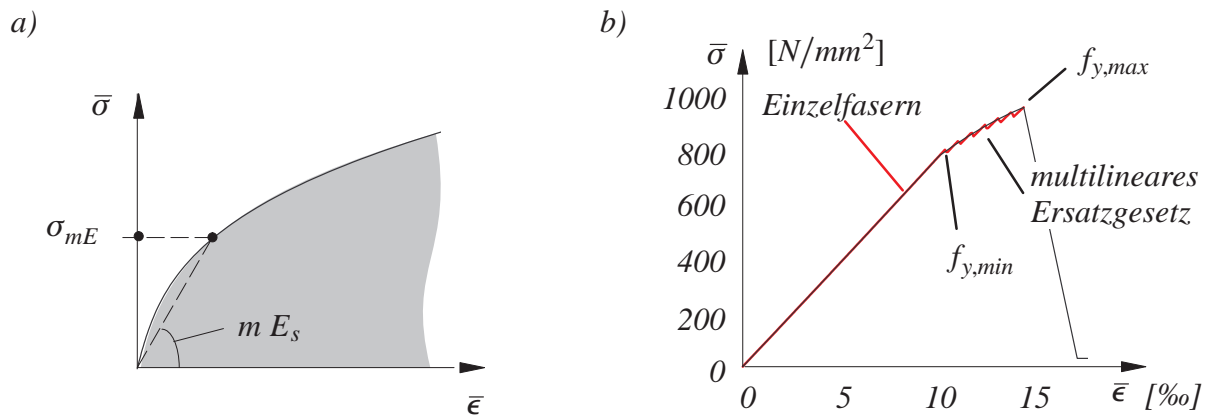


Bild 5.20 a) Definition des Ordinatenwertes für Evolutionsgesetz nach Ramberg-Osgood
 b) Evolutionsgesetz für multiaxial verwirkte Gelege aus Glasfasern

zahl an Parametern an Versuche angepasst werden kann. Der Unterschied beim Implementierungsaufwand ist in beiden Fällen vernachlässigbar klein. Allerdings ergibt sich für die multiliniaren Modelle bei der 1D-Plastizität (wie auch bei der klassischen J_2 -Plastizität) noch ein weiterer Vorteil: Bei linearen Ent- und Verfestigungsgesetzen kann der lokale *Newton*-Algorithmus auf *Gauß*-Punktebene durch eine geschlossene Form der Spannungsrückprojektion umgangen werden (siehe Simo & Hughes [171]). Durch abschnittsweise lineare Definition des Evolutionsgesetzes kann somit von diesem Geschwindigkeitsvorteil Gebrauch gemacht werden. Eine entsprechende Umsetzung für die ebene Berechnung von Verbundtragwerken wurde in Haufe, Menrath & Ramm [60] vorgestellt.

Stahlbewehrung

Im Bereich der multiliniaren Gesetze wurden für den Werkstoff Stahl die beiden Güten St-37 und St-52 berücksichtigt (siehe Bild 5.19a). Bei den geschlossenen Formulierungen wurde das Modell nach Ramberg & Osgood [151] in seiner ursprünglichen Form implementiert:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_s} + \frac{\sigma_{mE}}{E_s} \left(\frac{1-m}{m} \right) \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{mE}} \right)^n \quad (5.81)$$

Wie sofort ersichtlich ist, kann Gleichung (5.81) nicht nach $\bar{\sigma}$ aufgelöst werden. Bei vorgegebener Vergleichsdehnung ist also ein lokaler *Newton*-Algorithmus zur Ermittlung der Spannung nötig. Als Eingangsparameter sind neben dem elastischen Modul noch ein Exponent n , ein Ordinatenparameter m und $\bar{\sigma}_{mE}$ notwendig. Dabei bezeichnet $\bar{\sigma}_{mE}$ den Spannungswert der nichtlinearen Evolutionsgleichung, der beim Schnitt mit der Geraden $\bar{\sigma} = m E_s \bar{\epsilon}$ erreicht wird (siehe hierzu Bild 5.20a). In Haufe, Menrath & Ramm [60] wurde gezeigt, dass sich mit Werten von $m = 0,7$ und $n = 17$ bzw. $n = 20$ Probleme des ebenen Spannungsbereiches (J_2 -Plastizität) ausreichend genau simulieren lassen. Bild 5.19b gibt die Evolutionskurven für eine Reihe von unterschiedlichen Exponenten n an.

Kunstfaserbewehrung

Für die einaxiale Kunstfaserbewehrung werden multiliniare Evolutionsgesetze verwendet. Zwar zeigen einzelne Fasern im Zugversuch linear-elastisches Verhalten bis zum Bruch, innerhalb des Geleges, das in den entsprechenden Versuchen verwendet wurde, kommt es jedoch zu stark unter-

schiedlichen Belastungen und somit ebenfalls zu unterschiedlichen Dehnungen einzelner Fasern infolge variierender Verbundeigenschaften. Schließlich versagen die höher beanspruchten Fasern etwas früher (siehe Kapitel 3.2.2). Die Annahme eines homogenen Faserverbundes, der den mechanischen Eigenschaften der Einzelfaser (Spinnfaden) entspricht, ist somit nicht gültig. Infolge des vorzeitigen Versagens einzelner Fasern kommt es zu einer Art Reißverschlusseffekt, während dessen sich das Versagen sukzessive im Faserverbund fortsetzt. Im Versuch ist somit eine geringere Bruchdehnung und eine geringere Zugfestigkeit des Faserverbundes zu beobachten (vergleiche Mayer [117]) als die einzelne Faser erwarten lässt.

Um diesen Effekt phänomenologisch abbilden zu können, wird das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Faserverbundes als einaxiales multilineares Ersatz-Evolutionsgesetz abgebildet (siehe Bild 5.20b). Die aus Versuchen ermittelte Bruchdehnung dient zusammen mit dem Elastizitätsmodul der Einzelfaser zur Abschätzung der maximalen Zugfestigkeit F_{max} der jeweiligen Filamentgruppe. Der durch einen Querschnittsvergleich der tatsächlich vorhandenen Faserbewehrung mit der für die Maximallast der Zugprobe notwendigen Bewehrung ermittelte Überschuss wird gleichmäßig als Fasergruppe geringerer Zugfestigkeit addiert. Das Resultat ist eine kurz vor der Versagensspannung infolge des Reißverschlusseffekts verfestigende Arbeitslinie. Nach Erreichen der Versagensspannung wird eine lineare Entfestigung vorgegeben (vergleiche Eitel [46]).

5.6.3 Transformation bezüglich der Bewehrungshauptachsen

Zur Auswertung der einaxialen Materialgesetze sind zunächst die Verzerrungen des Schalensystems ϵ_L^* der entsprechenden Schicht L in die Richtung der aktuellen Bewehrungslage zu transformieren. Die Verzerrungen des Bewehrungskoordinatensystems ϵ_L lauten mit den Basisvektoren \mathbf{g}_L^i (siehe Bild 5.21a)

$$\epsilon_L = \left\{ \epsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \right\}_L \quad . \quad (5.82)$$

Die Verzerrungskomponenten $\epsilon_{ij,L}^*$ des Schalenkoordinatensystems der aktuellen Schicht lassen sich mit der zweistufigen Tensortransformation

$$\epsilon_{ij,L} = T^m_i \epsilon_{mn,L}^* T^n_j \quad (5.83)$$

in die entsprechenden Koordinaten der Bewehrung überführen. Entsprechendes gilt nach der Auswertung der Fließbedingung für die Spannungen σ_L und den konstitutiven Tensor C_L des Bewehrungskoordinatensystems in umgekehrter Richtung. Die Spannungstransformation lautet

$$\sigma_L^* = \sigma_L^{ij*} \mathbf{g}_i^* \otimes \mathbf{g}_j^* \quad \text{mit} \quad \sigma_L^{ij*} = T_m^i \sigma_L^{mn} T_n^j \quad . \quad (5.84)$$

Die vierstufige Tensortransformation für den Materialtensor im Koordinatensystem der Schalenschicht

$$C_L^* = C_L^{ijkl*} \mathbf{g}_i^* \otimes \mathbf{g}_j^* \otimes \mathbf{g}_k^* \otimes \mathbf{g}_l^* \quad (5.85)$$

kann entsprechend geschrieben werden:

$$C_L^{ijkl*} = T_m^i T_n^j T_o^k T_p^l C_L^{mnop} \quad (5.86)$$

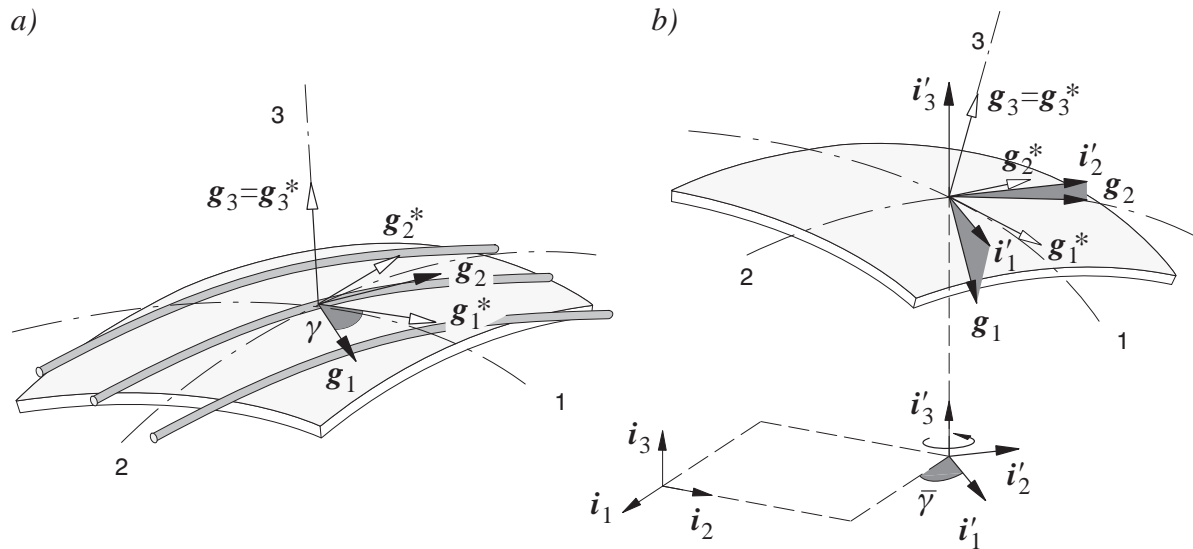


Bild 5.21 a) Basisvektoren der Schalen- und der Bewehrungsschicht
b) Transformation hinsichtlich globalem Basiskoordinatensystem

Die bekannte Transformationsmatrix T setzt die Basisvektoren der beiden Koordinatensysteme \mathbf{g}_i^* und \mathbf{g}_i miteinander in Beziehung. Dabei ist die Modellierung auf eine parallel zur Schalenmittelfläche angeordnete Bewehrung limitiert.

$$T_{ij}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Der hier auftretende Winkel γ (siehe Bild 5.21a) kann direkt vorgegeben werden, was eine Abhängigkeit der Bewehrung von der Diskretisierungsrichtung beinhaltet. Dies ist insbesondere für adaptive Verfahren (allgemein: nichtrechtwinklige Elementierung) nicht wünschenswert. Durch die Definition einer globalen Bewehrungsrichtung $\bar{\gamma}$ im orthonormierten Basissystem \mathbf{i}_i (siehe Bild 5.21b) wird in Anlehnung an Braun [24] dieser Nachteil umgangen. Über das Kreuzprodukt der Rotationsachse \mathbf{i}'_3 des im orthonormierten Basisraum transformierten Koordinatensystems

$$\mathbf{i}'_i = T_{ij}(\bar{\gamma}) \mathbf{i}_j \quad (5.88)$$

mit der Schalenschichtnormalen $\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3^*$ lässt sich durch den Hilfsvektor $\vec{\mathbf{i}}$ sukzessive ein Koordinatensystem in Richtung der Bewehrung aufbauen:

$$\vec{\mathbf{i}} = \mathbf{i}'_1 \times \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_3 \times \vec{\mathbf{i}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 \quad (5.89)$$

Über die Definition des Skalarprodukts von Vektoren lässt sich dann in jedem *Gauß*-Punkt der aktuelle Winkel zur Bewehrung ermitteln.

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^*}{|\mathbf{g}_1| |\mathbf{g}_1^*|} \right) \quad (5.90)$$

Die weitere Vorgehensweise zur Spannungsermittlung entspricht damit Gleichung (5.82) ff. Es sei noch erwähnt, dass die Abbildung (5.89) nur für $\mathbf{i}'_1 \times \mathbf{g}_3 \neq 0$ frei von Singularitäten ist. Ist der Schalendirektor \mathbf{g}_3 parallel der Rotationsachse, wird auf folgende Bildungsvorschrift für das Bewehrungskoordinatensystem zurückgegriffen:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3^* , \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{i}'_3 \times \mathbf{g}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \quad (5.91)$$

5.6.4 Berücksichtigung des *Tension-Stiffening*-Effekts

Als *tension-stiffening* wird gemeinhin das Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen verstanden (siehe zum Beispiel Hofstetter & Mang [74], Wittek et al. [192], Stempniewski [180], EC2 [44] oder DIN 1045 (neu) [41]). Am eindimensionalen Zugstab, wie in Bild 5.22a dargestellt, lässt sich der Effekt einfach verdeutlichen: Durch das auf Zug belastete Bewehrungselement (Stahl, Kunstfaser etc.) wird ein Teil der Belastung über Verbundspannungen in den umliegenden Betonquerschnitt eingetragen. Der Beton trägt folglich einen Teil der Gesamtlast aufgrund seiner vorhandenen Zugfestigkeit mit ab. Bei deren Überschreiten bildet sich durch Konzentration und Akkumulation von Mikrorissen an der schwächsten Querschnittsstelle (erhöhter Mikroporenanteil, makroskopische Defekte etc.) ein Einzelriss, siehe Bild 5.22b. Die Verbundspannungen nehmen zu diesem Riss hin wieder auf null ab, um nach der Überbrückung des Risses durch die Bewehrung wieder anzuwachsen. Bei weiterer Belastung entspricht der Abstand zum Nachbarriss mindestens der Lasteinleitungslänge, da erst danach die volle Betonzugfestigkeit wieder erreicht wird. Ein abgeschlossenes Rissbild hat sich dann eingestellt, wenn bei weiterer Laststeigerung die zwischen den Rissen noch verfügbare Verbundlänge nicht mehr ausreicht, um die volle Zugfestigkeit im Betonquerschnitt zu wecken. Der sich dabei einstellende mittlere Rissabstand wird mit l_s bezeichnet, siehe Bild 5.22c.

Der Einfluss des *tension-stiffening*-Effekts auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Gesamtquerschnitts eines Stahlbetonzugstabs ist in Bild 5.22d schematisch dargestellt. Deutlich sind die höheren ertragbaren Spannungen bei Dehnungsäquivalenz, bzw. umgekehrt die geringeren Dehnungen bei Spannungsäquivalenz des Stahlstabs und des Stahlbetonstabs im Zustand II zu erkennen. Diese Beobachtung macht deutlich, dass es sich beim *tension-stiffening*-Effekt um einen Struktureffekt handelt (siehe auch Crisfield [34]), der innerhalb des konstitutiven Modells nur dann Berücksichtigung finden sollte, falls die Diskretisierung eine Erfassung der Lastumla-

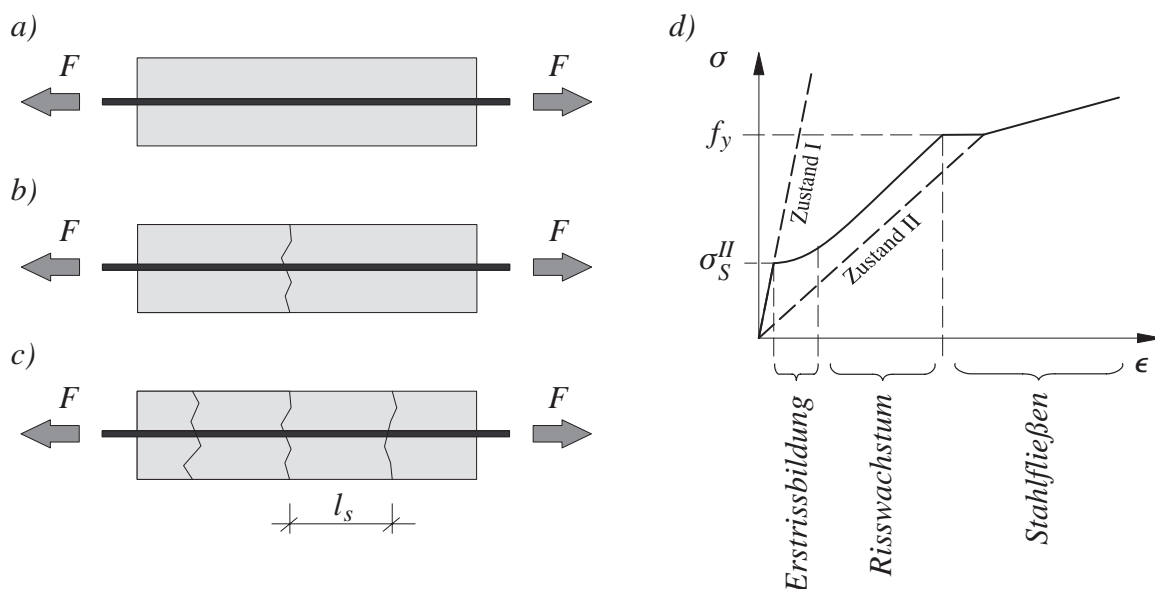


Bild 5.22 a–c) Bewehrter Zugstab d) *tension-stiffening* am Zugstab

gerung vom Bewehrungsquerschnitt in den umgebenden Betonquerschnitt (teilweise in der Literatur auch als effektiver Querschnitt bezeichnet) nicht genügend genau auflösen kann.

In diesem Sinne sind dann die im EC2 [44] oder der DIN 1045 (neu) [41] vorgestellten Konzepte zur Berücksichtigung des *tension-stiffening*-Effekts bei Balken-, Platten- und Schalentragwerken zu verstehen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die gesamte Querschnittshöhe (Balkenhöhe bzw. Schalen- oder Plattendicke) durch ein Finites Element mit linearem Ansatz in Dickenrichtung bzw. ein Balkenelement repräsentiert wird (Einhaltung der *Bernoulli*-Hypothese). Bei genügend feiner Diskretisierung ist dagegen der Verbundschluss, der im *tension-stiffening*-Modell ebenfalls phänomenologisch mit erfasst wird, weil eine Trennung der Effekte nicht das Ziel des Modells ist, eine auf lokaler Ebene sehr viel maßgebendere Größe (siehe Pamin & de Borst [141]), die jedoch wiederum in Strukturanalysen einen untergeordneten Effekt darstellt.

In der vorliegenden Arbeit wird insbesondere für Platten- und Schalentragwerke ein *tension-stiffening*-Konzept verwendet, das auf Arbeiten von Feenstra [51] und Menrath [121] zurückgeht und den Effekt auf der Stahlseite berücksichtigt. Daneben existieren auch Vorschläge, den Effekt durch Modifikationen auf der Seite des Betonmodells zu erfassen (siehe Wittek [192]). Dabei wird die Spannungsdifferenz aus Bild 5.22d in geeigneter Weise auf das Betonmodell aufgeschlagen. Der anisotrope Charakter der Bewehrung kann dabei jedoch verloren gehen, weshalb dem ersten Modell gemeinhin der Vorzug gegeben wird.

Grundlage des Konzepts sind die auf der Bruchenergie basierenden Evolutionsgesetze der eingesetzten Materialmodelle. Da innerhalb der Finite Elemente Simulation abhängig von der Elementgröße mehrere parallele Risse durch ein Element verlaufen können, deren Abstand jedoch mindestens dem mittleren Rissabstand l_s entspricht, wird der innere Längenparameter h in der Simulation durch den kritischen Rissabstand ersetzt (siehe hierzu Gleichungen (5.35) und (5.62)).

$$l_s^{cr} = \min [l_s, h] \quad (5.92)$$

Der mittlere Rissabstand selbst ist eine Größe, die von der Betondeckung c , dem Stabdurchmesser des Bewehrungsstahls \varnothing , dem Bewehrungsgrad ρ_{eff} und der Betonzugfestigkeit f_{ctm} (bzw. der Verbundspannung f_{bd}) abhängig ist. Aus dem CEB-FIP Model-Code [26] kann für mehrere Risse unter der Annahme realistischer Bewehrungsgrade die folgende Gleichung entnommen werden:

$$l_s \approx \frac{2}{3} l_{s,max} = \frac{2}{3} \frac{\varnothing}{2 f_{bd}} \sigma_s \quad \text{mit} \quad f_{bd} = 1,8 f_{ctm} \quad (5.93)$$

Über die Gleichgewichtsbetrachtung $f_{ctm} A_{c,eff} = \sigma_s A_s$ am effektiv auf Zug beanspruchten Betonquerschnitt $A_{c,eff}$ lässt sich ein effektiver Bewehrungsgrad in (5.93) einbringen:

$$l_s \approx \frac{2}{3} \frac{\varnothing}{3,6 \rho_{eff}} \quad \text{mit} \quad \rho_{eff} = \frac{f_{ctm}}{\sigma_s} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} \quad (5.94)$$

Anmerkung: Derzeit sind keine Untersuchungen bzw. empirische Formeln zum mittleren Rissabstand bzw. dem Verbundverhalten bei textilbewehrten Bauteilen bekannt (siehe Hegger et al. [63]). Die auf der Makroskala stattfindende numerische Simulation ist phänomenologisch motiviert. Eine Berücksichtigung des mittleren Rissabstands würde somit die Kenntnis dieser Größe für die unterschiedlichsten textilen Gelege oder Gewebe, deren Struktur die Rissentwicklung nachhaltig beeinflusst, erfordern.

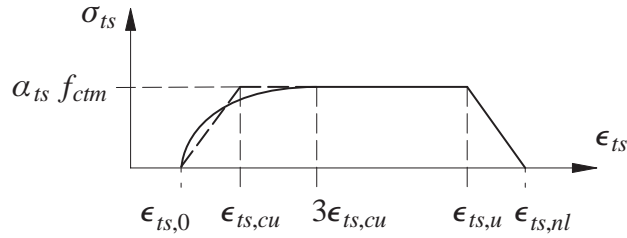


Bild 5.23 Zusätzliche Spannungskomponente infolge *tension-stiffening*

Die Berücksichtigung der durch den *tension-stiffening*-Effekt zusätzlich aufnehmbaren Spannungen der Struktur erfolgt additiv als zusätzliche Spannungskomponente.

$$\sigma_{ges} = \sigma_c + \sigma_s + \sigma_{ts} \quad (5.95)$$

Feenstra [51] greift zur Definition der Spannungskomponente σ_{ts} einen Vorschlag von Cervenka et al. [30] auf, den Menrath [121] in einer modifizierten Form anwendet (siehe Bild 5.23a). Die maximal übertragbare Spannungskomponente infolge *tension-stiffening* entspricht darin der mit α_{ts} faktorisierten Betonzugspannung f_{ctm} . Der Parameter α_{ts} wird aus obiger Gleichgewichtsbeurteilung am effektiven Zugquerschnitt des Betons zu $\alpha_{ts} = 1,0$ abgeschätzt. Setzt man voraus, dass die Bewehrungsachse um den Winkel θ_{ts} gegenüber der Hauptzugrichtung in Schalen- bzw. Plattenebene gedreht ist, so ergibt sich aus Zugfestigkeit f_{ctm} und Elastizitätsmodul E_{cm} des Betons der Verzerrungswert, ab dem *tension-stiffening* auftritt, zu

$$\epsilon_{ts,0} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \cos^2 \theta_{ts} \quad (5.96)$$

Die ansteigende Rampe wird von Menrath [121] parabelförmig in Anlehnung an das exponentielle Entfestigungsverhalten des Betonmodells gewählt. Dabei repräsentiert der C^0 -kontinuierliche Übergang im Scheitelpunkt bei $3\epsilon_{ts,cu}$ das Erreichen eines stabilen Risszustands. Bei weiterer Belastung wird der zusätzliche Spannungsanteil ab $\epsilon_{ts,u}$ linear bis zum Einsetzen der nichtlinearen Dehnungen der Bewehrung $\epsilon_{ts,nl}$ ausgeblendet.

$$\epsilon_{ts,cu} = \frac{G_t}{l_s f_{ctm}} \cos^2 \theta_{ts} \quad ; \quad \epsilon_{ts,u} = \epsilon_{ts,nl} - \alpha_{ts} \frac{f_{ctm}}{\rho_{eff} E_s} \quad (5.97)$$

Während das in dieser Arbeit verwendete *tension-stiffening*-Konzept eine Spannungserhöhung nur im elastischen Bereich der Bewehrung berücksichtigt, wie es auch im CEB-FIP [26] und im EC2 [50] vorgeschlagen wird, ist in der Neufassung der DIN 1045 [41] auch ein Ansatz für den plastischen Bereich bei Bewehrungsmitteln aus Stahl vorgesehen.

6 Numerische Umsetzung

6.1 Übersicht

Nachfolgend soll die numerische Umsetzung der in Kapitel 5 vorgestellten Materialmodelle aufgezeigt werden. Eingebettet in ein inkrementell-iteratives Schema (siehe Kapitel 2.2) werden die linearisierten Bestimmungsgleichungen auf Strukturebene mit dem *Newton-Raphson*-Verfahren gelöst. Innerhalb dieser Gleichgewichtsiteration sind bei den vorgestellten Plastizitätsmodellen basierend auf dem Prädiktor-Korrektor-Konzept wiederum ein bzw. mehrere plastische Multiplikatoren λ_i iterativ mit einem weiteren *Newton*-Verfahren zu bestimmen. Eine Diskussion weiterer Integrationsalgorithmen findet sich beispielsweise in der Arbeit von Matzenmiller [116]. Um die Notation möglichst lesbar zu halten, wird üblicherweise in der Darstellung der einzelnen Algorithmen nur der relevante Kopfzeiger der Iteration bzw. des Inkrements verwendet. Dies ist insbesondere auch dann sinnvoll, wenn innerhalb des Projektionsalgorithmus weitere Nullstellen numerisch zu bestimmen sind (vergleiche Kapitel 6.3.3). Eine schematische Darstellung der gesamten Lösungsprozedur ist in Bild 6.1 gegeben.

Die numerische Umsetzung für das Mehrflächenmodell wird nicht näher angesprochen. Hierzu wird auf die ausführliche Abhandlung von Menrath [121] verwiesen. Lediglich die Erweiterung des Projektionsalgorithmus für viskoplastische Problemstellungen wird kurz vorgestellt.

Weiter sind innerhalb der numerischen Umsetzung die Ableitungen der Fließfläche bzw. des plastischen Potentials nach den Spannungen notwendig. Im Gegensatz zu einfachen Fließbedingungen führen diese insbesondere bei Fließbedingungen, die von der dritten Invariante des Spannungstensors abhängen, zu komplexen Ausdrücken. Die Verwendung numerischer Ableitungen wird daher ein weiterer Schwerpunkt dieses Kapitels sein, bevor schließlich Untersuchungen zur Materialstabilität und viskoplastischer Regularisierung anhand von Modellproblemen das Kapitel schließen.

6.2 Inkrementelle Elastoplastizität

Die Grundaufgabe der numerischen Plastizitätstheorie stellt sich darin, dass für ein endliches Verzerrungsincrement $\epsilon_{n+1} - \epsilon_n$, welches durch den übergeordneten *Newton-Raphson*-Algorithmus, der auf einer meist verzerrungsbasierten Implementierung aufbaut, vorgegeben wird, ein am Ende des Inkrements zulässiger Spannungszustand unter Beachtung der Nebenbedingungen aus den inneren Variablen gefunden werden muss. Üblicherweise wird hierzu auf ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren zurückgegriffen, welches aus den bekannten Größen zum Zeitpunkt n ($\epsilon_n, q_n, \sigma_n$) eine elastische Prädiktorspannung σ^*_{n+1} bestimmt. Die Werte der inneren Variablen werden für die anschließende Überprüfung der Fließbedingung als unverändert (eingefroren zum Zeitpunkt n) angenommen. Die Kopfzeiger der Gleichgewichtsiteration werden im Weiteren zur besseren Übersicht weggelassen.

$$\Delta\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \quad (6.1)$$

$$\sigma^*_{n+1} = \sigma_n + C_{el} : \Delta\epsilon_{n+1} \quad (6.2)$$

$$F = F(\sigma^*_{n+1}, q_n) \quad (6.3)$$

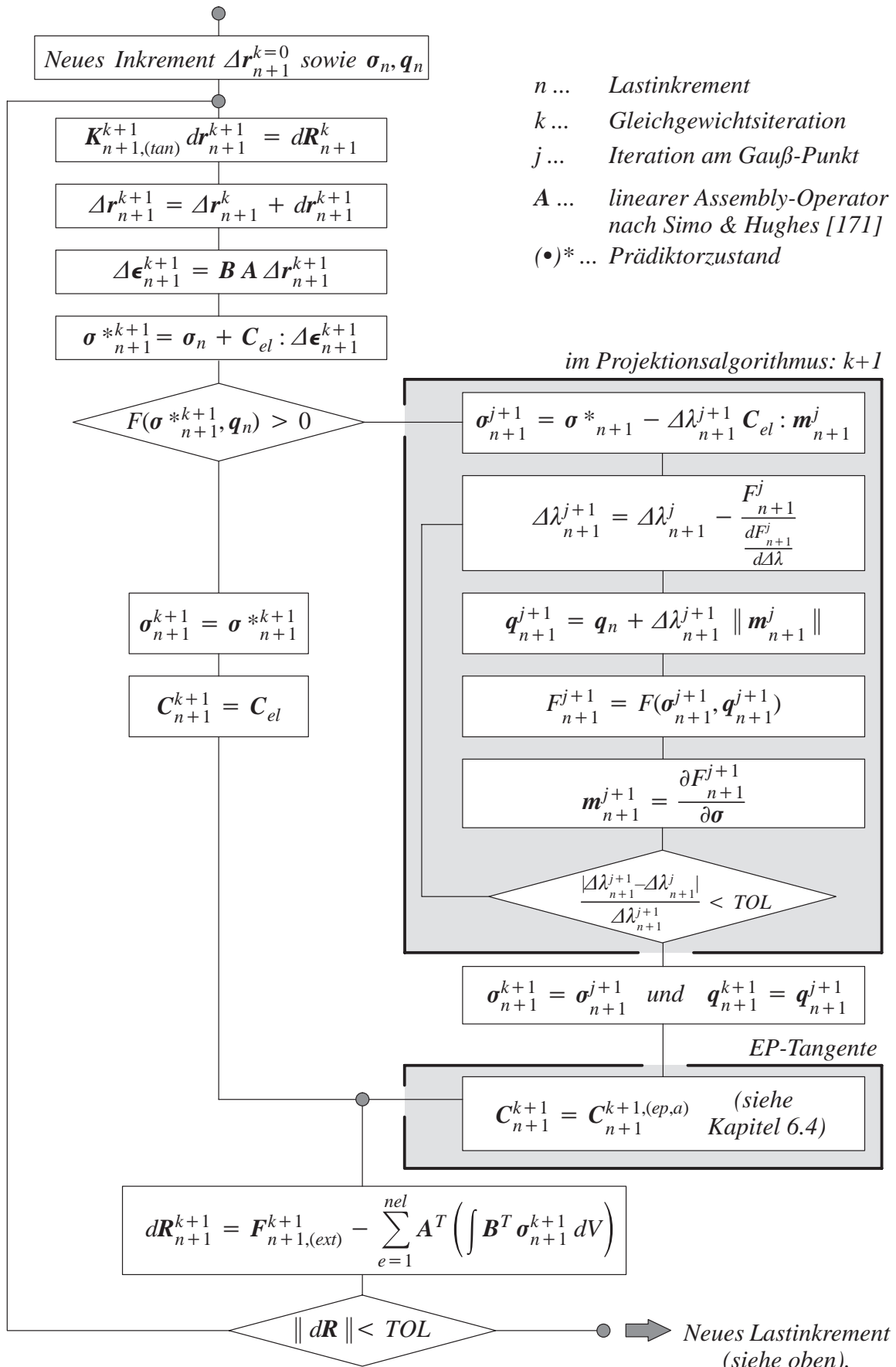


Bild 6.1 Inkrementelles-iteratives Lösungsschema

Sofern die Prädiktorspannung die Fließbedingung verletzt ($F > 0$), ist durch Rückprojektion entlang des plastischen Verzerrungsincrementes $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$ (siehe Gleichung (4.8)) die Fließbedingung zu erfüllen. Dabei kann zunächst für J_2 -Plastizität (von *Mises*-Bedingung) mit Verfestigung

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p = \Delta \lambda_{n+1} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (6.4)$$

geschrieben werden. Für die inneren Variablen (hier am Beispiel der Verzerrungsverfestigungshypothese) gilt entsprechend

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} \left\| \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right\| = \Delta \lambda_{n+1} \|\mathbf{m}_{n+1}\| \quad . \quad (6.5)$$

Womit sich jeweils die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}_{el} : \mathbf{m}_{n+1} \quad (6.6)$$

und die inneren Variablen

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \lambda_{n+1} \|\mathbf{m}_{n+1}\| \quad (6.7)$$

aktualisieren lassen. Damit steht nun mit der Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = F(\Delta \lambda_{n+1}) = 0 \quad (6.8)$$

eine nichtlineare Gleichung in $\Delta \lambda_{n+1}$ bereit, die im allgemeinen Fall mit einem lokalen (weil auf *Gauß*-Punkt-Ebene verwendeten) *Newton*-Verfahren gelöst werden kann.

$$\Delta \lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta \lambda_{n+1}^j - \frac{F_{n+1}^j}{\frac{dF_{n+1}^j}{d\Delta \lambda}} \quad (6.9)$$

Zur besseren Übersicht ist die Vorgehensweise nochmals in Bild 6.1 dargestellt.

Darüber hinaus sind noch einige weitere Anmerkungen von Interesse:

Wird die inkrementelle Fließregel (siehe Gleichung (6.4)) am Ende des Lastschrittes t_{n+1} ausgewertet, erhält man ein *Rückwärts-Euler*-Verfahren, für eine Auswertung zum Zeitpunkt t_n entsprechend ein *Vorwärts-Euler*-Verfahren; beides wird im folgenden Kapitel 6.2.1 näher erläutert. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass die formale Bezeichnung des plastischen Multiplikators mit $\Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t$ auf ein Inkrement hindeutet. Tatsächlich lässt sich jedoch die inkrementelle Eigenschaft $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_{n+1}$ nur für eine einfache monoton ver- oder entfestigende Fließbedingung (zum Beispiel dem *von Mises-Zylinder*) motivieren, da hier λ_{n+1} unter Umständen als „physikalische“ Geschichtsvariable interpretiert werden kann. Für allgemeine Fließgesetze, die diese Bedingung nicht erfüllen, hat das „Inkrement“ $\Delta \lambda_{n+1}$ folglich den Charakter einer skalaren Größe, die nur innerhalb des *Lastinkrements* definiert ist. Diese Unterscheidung wird in der Literatur gemeinhin nicht getroffen.

Für eine mit dem plastischen Potenzial assoziierte, konvexe Fließfläche wird bei einem *Rückwärts-Euler*-Verfahren auf den nächstliegenden Spannungspunkt der Fließfläche rückprojiziert (*closest point projection*), siehe Bild 6.2b. Für klassische ideale J_2 -Plastizität hat Wilkins 1964

hierfür den Begriff des *radial-return*-Algorithmus geprägt (Rückprojektion in Richtung der hydrostatischen Achse, siehe Bild 6.2a), der von Krieg & Key 1976 auf lineare Verfestigung erweitert wurde. In beiden Fällen ist keine *Newton*-Iteration zur Bestimmung des plastischen Multiplikators erforderlich, da Gleichung (6.8) direkt nach $\Delta\lambda_{n+1}$ aufgelöst werden kann.

6.2.1 Zeitintegrationsverfahren

Formal können die Gleichungen (6.4) und (6.5) für $\dot{F}_{n+1} = 0$ über die verallgemeinerte Mittelpunktsregel (*generalized midpoint rule*, GMR)

$$\Delta\epsilon_{n+1}^{pl} = \Delta\lambda_{n+\alpha} \mathbf{m}_{n+\alpha} \quad (6.10)$$

$$\Delta\mathbf{q}_{n+1} = \Delta\lambda_{n+\alpha} \|\mathbf{m}_{n+\alpha}\| \quad (6.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{m}_{n+\alpha} = \mathbf{m} \left((1-\alpha)\boldsymbol{\sigma}_n + \alpha\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, (1-\alpha)\mathbf{q}_n + \alpha\mathbf{q}_{n+1} \right) \quad (6.12)$$

oder die verallgemeinerte Trapezregel (*generalized trapezoidal rule*, GTR)

$$\Delta\epsilon_{n+1}^{pl} = \Delta\lambda_{n+\alpha} \left[(1-\alpha)\mathbf{m}_n + \alpha\mathbf{m}_{n+1} \right] = \Delta\lambda_{n+\alpha} \bar{\mathbf{m}}_{n+\alpha} \quad (6.13)$$

$$\Delta\mathbf{q}_{n+1} = \Delta\lambda_{n+\alpha} \|\bar{\mathbf{m}}_{n+\alpha}\| \quad (6.14)$$

in Abhängigkeit von α integriert werden (siehe Ortiz & Popov [139] und Jirasek [77], [79]). Das der *closest point projection method* (CPPM) zugrunde liegende *Rückwärts-Euler*-Schema wird in beiden Fällen für $\alpha = 1$ und $\mathbf{m}_{n+1} \parallel \mathbf{n}_{n+1}$ erhalten. Die unbedingte Stabilität des *Rückwärts-Euler*-Schemas ist dabei neben der Tatsache, dass der algorithmische Tangentenoperator für assoziierte Fließregeln symmetrisch wird, eines der Hauptargumente für seine Anwendung. Dass der Algorithmus andererseits nur erster Ordnung exakt ist und daher die Verzerrungsinkremente nicht zu groß gewählt werden sollten, wird dabei in Kauf genommen. Sowohl die GMR als auch die GTR sind dagegen für $\alpha = 0,5$ (ausschließlich) von zweiter Ordnung genau, liefern jedoch unsymmetrische Tangentenoperatoren wegen $\mathbf{m}_{n+\alpha} \not\parallel \mathbf{n}_{n+1}$ bzw. $\bar{\mathbf{m}}_{n+\alpha} \not\parallel \mathbf{n}_{n+1}$, das heißt die Konsistenzbedingung wird zum Zeitpunkt t_{n+1} erfüllt, während die Richtung des plastischen Flusses im Zeitpunkt $t_{n+\alpha}$ bestimmt wird. In Simo & Govindjee [170] wird vorgeschlagen, die Auswertung der Konsistenzbedingung im Rahmen der GMR ebenfalls zum Zeitpunkt $t_{n+\alpha}$ vor-

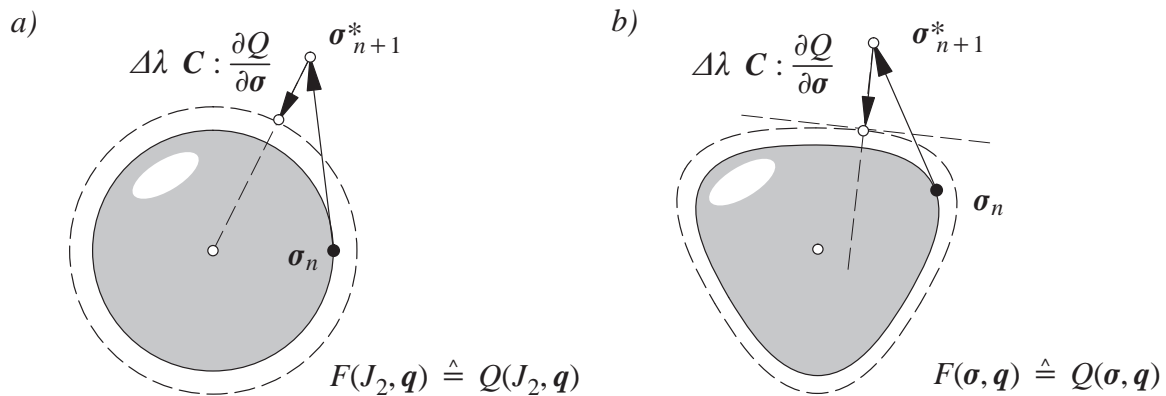


Bild 6.2 a) Radial-return-Algorithmus b) Closest point projection

zunehmen, wodurch die Symmetrie des Tangentenoperators wiederum gewährleistet ist. Macari, Weihe & Arduino [112] geben eine Übersicht über gängige implizite und explizite Projektionsverfahren und beschreiben eine Zwei-Schritt-Strategie auf Basis der CPPM zur Verbesserung der Genauigkeit bei Modellen mit nichtlinearen Entfestigungsgesetzen.

Kommen *a priori* nichtassoziierte Modelle zum Einsatz, das heißt, die algorithmische Tangente ist in jedem Fall unsymmetrisch, so wird durch den Einsatz der GMR bzw. der GTR und $\alpha = 0,5$ auf algorithmischer Seite kein Vorteil verschenkt. Ortiz & Popov [139] bemerken jedoch, dass für große Verzerrungsinkremente auch Werte von $\alpha > 0,5$ zu verbesserter Genauigkeit führen können. Bezüglich der Stabilität der beiden Verfahren für $\alpha = 0,5$ kommen dagegen Ortiz & Popov [139] und Simo & Govindjee [170] sowie Jirasek [79] zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen. In der vorliegenden Arbeit wird für das nichtassoziierte Einflächenmodell aus Gründen der unbedingten Stabilität stets das *Rückwärts-Euler*-Schema ($\alpha = 1,0$) verwendet.

6.2.2 Viskoplastische Erweiterung des Mehrflächenmodells

Nachfolgend sollen die konstitutiven Ratengleichungen der für Mehrflächenplastizität geeigneten *Duvaut-Lions*-Formulierung (siehe Kapitel 4.4.3) zusammengestellt werden. Die Herleitung orientiert sich an den Arbeiten von Simo & Hughes [171], Simo et al. [172] und Hofstetter [71] und ist auf eine Fließfläche beschränkt. Die Verallgemeinerung für mehrere Fließflächen ist innerhalb eines generalisierten Algorithmus, wie er zum Beispiel von Simo & Hughes [171] beschrieben wird, vorzunehmen und bedingt die Modifikation der ratenunabhängigen Spannungen, inneren Spannungsvariablen und der algorithmischen Materialtangente für jede aktive Fließfläche wie nachfolgend dargestellt.

Wie bereits in Kapitel 4.4.3 erläutert, erhält man durch Einsetzen der postulierten Gleichung der viskoplastischen Verzerrungsanteile (4.71) in die Gleichungen (4.5) und (4.6) die – hier etwas umgestellte – Überspannungsgleichung (4.73)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\tau} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\infty}}{\tau} \quad (6.15)$$

mit der bereits eingeführten Relaxationszeit $\tau = \eta/E$. Durch numerische Integration im Zeitinkrement $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ und Berücksichtigen von $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n$ erhält man daraus im Sinne eines *Rückwärts-Euler*-Verfahrens

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau} = \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1} \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau} \quad (6.16)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau} \right) = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1} \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau} \quad (6.17)$$

Die ersten beiden linksseitigen Terme entsprechen der Prädiktorspannung (siehe Gleichung (6.2)), wodurch sich vereinfachend

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\tau \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* + \Delta t_{n+1} \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \quad (6.18)$$

schreiben lässt. Dies eingesetzt in die integrierte Ratenform der viskoplastischen Verzerrungen (siehe Gleichung (4.71))

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau} \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1}) \quad (6.19)$$

liefert

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \mathbf{C}^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1} \right) . \quad (6.20)$$

Berücksichtigen der Bestimmungsgleichung der rückprojizierten Spannungen des ratenunabhängigen Modells

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \Delta \lambda_{\infty, n+1} \mathbf{C}^{el} : \mathbf{m}_{n+1} , \quad (6.21)$$

die identisch den *back-bone*-Spannungen des viskosen Modells sind, führt auf

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \Delta \lambda_{\infty, n+1} \mathbf{m}_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1}^{vp} \mathbf{m}_{n+1} \quad (6.22)$$

mit

$$\Delta \lambda_{n+1}^{vp} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \Delta \lambda_{\infty, n+1} . \quad (6.23)$$

Für die Evolution der inneren Spannungsvariablen kann, ausgehend von Gleichung (4.72) und sinngemäß entsprechender Herleitung, die folgende Beziehung ermittelt werden:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \frac{\tau \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \Delta t_{n+1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\infty, n+1}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \quad (6.24)$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass für den Prädiktorzustand die innere Spannungsvariable eingefroren wurde, das heißt $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^* = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$.

Der Tangentenoperator $\mathbf{C}^{vp, alg}$ wird aus Gleichung (6.18) durch Differenziation nach den Verzerrungen erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{vp, alg} &= \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{\tau \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} + \Delta t_{n+1} \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\infty, n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}}{\tau + \Delta t_{n+1}} \\ &= \frac{\tau}{\tau + \Delta t_{n+1}} \mathbf{C}^{el} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \mathbf{C}_{n+1}^{ep, alg} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Offensichtlich ist der viskoplastische Tangentenoperator aus einer einfachen Modifikation der bekannten elastischen und der ratenunabhängigen algorithmischen Materialtangente zu bestimmen.

In Kapitel 6.6.1 wird der vorgestellte Algorithmus als Regularisierungsverfahren bei assoziierten Plastizitätsmodellen untersucht.

6.3 Projektionsalgorithmus für das Einflächenmodell

6.3.1 Übersicht

Bereits in Kapitel 5.3.2 wurde auf die Besonderheiten für Rückprojektionen aus dem Apexbereich typischer ver- und entfestigender Fließflächen für kohäsive Reibungsmaterialien hingewiesen. Die vorgeschlagenen trivialen Lösungen (vergleiche [47] und [84]) sind in der Umsetzung zumeist einfach, leiden jedoch unter schlechter Konvergenz bis hin zur Divergenz der Lösung

innerhalb der Gleichgewichtsiteration. Diese Aussage ist dabei unabhängig von der gewählten Schrittweite oder der Iterationsmethode gültig. Einzig der durchlaufene Spannungspfad, also die aktuelle Prädiktorspannung in Kombination mit den Geschichtsvariablen ($\bar{\epsilon}^{pl}$ bzw. ϵ^{pl}) der letzten auskonvergierten Konfiguration sind für dieses Verhalten verantwortlich.

Erwähnung finden sollte an dieser Stelle die triviale Lösung für ideal-plastische Materialien. Die Singularitätsstelle der Versagensfläche ist *a priori* aus der Fließfläche bekannt und erlaubt somit die direkte Rückprojektion aus dem Apexbereich auf dieselbe. Für das modifizierte *Kang*-Modell mit ideal-plastischem Evolutionsgesetz ($k = 1$, $c = 1$ und somit $\xi_t = \xi_0$, $\forall t \geq 0$) ergibt sich der Vektor des plastischen Flusses zu:

$$\mathbf{m}_o = \boldsymbol{\sigma}^* - \xi_0 \mathbf{I} \quad (6.26)$$

Eine weitere Klasse von Algorithmen im Apexbereich wird durch Lösungen aus der Mehrflächenplastizität motiviert. Dabei werden weitere Fließflächen beschrieben, die als „invertierte“ Versagensflächen an Singularitätsstellen definiert werden. Neben Arbeiten von Simo, Kennedy & Govindjee [172] und Pramono & Willam [149], die sich allgemein mit Lösungsansätzen für Eckbereiche (*gray regions*) der Mehrflächenplastizität befassen, wird in de Borst [15], Pankaj [142] und Pankaj & Bicanic [143], [144] die Rückprojektionsproblematik am Apex von *Mohr-Coulomb*-Kriterien behandelt. Menrath [121] greift diese Idee auf und erweitert das Konzept auf das *Drucker-Prager*-Kriterium. In Hofstetter & Taylor [72] findet sich eine weitere Lösung für den Apex des *Drucker-Prager*-Kriteriums.

6.3.2 Diskussion einer Apexlösung für das Einflächenmodell

Für das in dieser Arbeit behandelte modifizierte *Kang*-Modell wird im Folgenden ein Vorschlag von Pankaj [142] auf nichtassoziierte, entfestigende Plastizität erweitert. Besonderheiten, die sich aus der Annahme einer Verzerrungsverfestigungshypothese (*strain-hardening hypothesis*) ergeben, werden aufgezeigt. Die zur Umsetzung nötige erweiterte Geometriebeschreibung wird anschließend hergeleitet.

Die Lösung des Projektionsproblems im Apexbereich des Einflächenmodells wird durch Hinzunahme einer weiteren Fließfläche, einer bezüglich der Singularitätsstelle invertierten Hilfsfläche, vorgenommen. Für Spannungszustände, die innerhalb des Apex liegen, sind folglich beide Fließflächen aktiv. Dabei ist es wichtig zu betonen, dass aufgrund von Entfestigung während der lokalen Iteration am *Gauß*-Punkt die zweite Fließfläche aktiviert werden kann (vergleiche Bild 6.3). Dasselbe gilt sinngemäß für Verfestigung *vice versa*. Die Summe der Verzerrungsanteile aller am Ende des Lastschritts (*Rückwärts-Euler*-Schema) aktiven Fließflächen bildet das plastische Verzerrungsinkrement:

$$d\epsilon^{pl} = \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \mathbf{m}_j \quad (6.27)$$

Diese Vorgehensweise geht für assoziierte Plastizität auf Koiter [88] zurück. Dabei ist m die Anzahl aller Fließflächen bzw. der zugehörigen plastischen Potentiale und $c \in \{0, 1\}$ ein ganzzahliger Steuerungsparameter zur Identifikation der aktiven Fließflächen. Aus der Konsistenzbedingung (siehe Gleichung (4.13))

$$dF_i c_i = 0, \quad \forall i = 1 \dots m \quad (6.28)$$

$$\Rightarrow dF_i c_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} : d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \right) c_i$$

erhält man schließlich unter Einbeziehung von Gleichung (6.27)

$$dF_i c_i = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} : \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] c_i = 0 \quad . \quad (6.29)$$

Das Gleichungssystem (6.29) kann in Matrixschreibweise zusammengefasst werden zu

$$\bar{\mathbf{n}}_i : d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{j=1}^m A_{ij} d\lambda_j \quad , \quad (6.30)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{n}}_i = \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} c_i \quad \text{und} \quad A_{ij} = -c_i c_j \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} : \mathbf{m}_j \quad . \quad (6.31)$$

Aus der inkrementellen Konstitutivgleichung (4.15) lässt sich durch Einsetzen von (6.27) und Linksmultiplikation mit $\bar{\mathbf{n}}_i$ die folgende Form gewinnen:

$$\bar{\mathbf{n}}_i : d\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \left[d\boldsymbol{\epsilon} - \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \mathbf{m}_j \right] = \sum_{j=1}^m A_{ij} d\lambda_j \quad (6.32)$$

Ausmultiplizieren des Klammerprodukts unter Beachtung der Hauptdiagonalterme ($i = j$) der Kopplungsmatrix A_{ii} liefert

$$\bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : d\boldsymbol{\epsilon} = d\lambda_i (A_{ii} + \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \mathbf{m}_i c_i) + \sum_{j=1, i \neq j}^m d\lambda_j (A_{ij} + \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \mathbf{m}_j c_j) \quad (6.33)$$

$$\Leftrightarrow d\lambda_i + \sum_{j=1, i \neq j}^m d\lambda_j \left(\frac{A_{ij} + \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \mathbf{m}_j c_j}{A_{ii} + \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \mathbf{m}_i c_i} \right) = \frac{\bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : d\boldsymbol{\epsilon}}{A_{ii} + \bar{\mathbf{n}}_i : \mathbf{C} : \mathbf{m}_i c_i} \quad . \quad (6.34)$$

Der Term auf der rechten Seite von Gleichung (6.34) wird mit $\overline{d\lambda}_i$ abgekürzt und entspricht dem plastischen Multiplikator bei nur einer aktiven Fließfläche. Für das betrachtete Problem zweier Fließflächen erhält man ein Gleichungssystem 2ter Ordnung zur Bestimmung der plastischen Multiplikatoren.

Im Fall der Arbeitsverfestigungshypothese (siehe Kapitel 4.3.2 und Menrath [121]) sind die Gleichungen in $d\lambda_i$ linear. Dies ist zurückzuführen auf lineare Anteile in $d\lambda_i$ beim Aufaddieren des Inkrements der plastischen Arbeit jeder aktiven Fließfläche:

$$dW = \boldsymbol{\sigma} : \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \mathbf{m}_j \quad (6.35)$$

Die zugehörige Kopplungsmatrix A_{ij} nimmt unter Berücksichtigung von Gleichung (6.35) sowie (6.28)ff. folgende Form an:

$$A_{ij} = c_i c_j \frac{\partial F_i}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{\partial Q_j}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} H \quad \text{mit} \quad H = -\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} \quad (6.36)$$

Für isotrope, assoziierte Plastizität gilt $\frac{\partial Q_j}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial F_j}{\partial \bar{\sigma}}$, womit die Kopplungsmatrix singulär wird.

Für den Fall der Verzerrungsverfestigungshypothese ergibt sich die Schwierigkeit, dass die äquivalenten plastischen Verzerrungen (vgl. Kapitel 4.3.2) über die *von Mises*'schen Vergleichsdehnungen definiert sind:

$$d\bar{\epsilon}^{pl,sh} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^{pl} : d\epsilon^{pl} \quad \text{mit} \quad d\epsilon^{pl} = \sum_{j=1}^m c_j d\lambda_j \mathbf{m}_j \quad (6.37)$$

Somit werden die Bestimmungsgleichungen (6.34) in $d\lambda_i$ nichtlinear, was eine numerische Umsetzung neben den in Kapitel 6.3.3 noch zu behandelnden Problemen weiter erschwert. Die Kopplungsmatrix A_{ij} behält das allgemeine Format aus Gleichung (6.31)₂. Die Nebendiagonalkoeffizienten deuten also eine Kopplung des plastischen Flusses an: Eine zunächst nicht aktive Fließfläche verfestigt/entfestigt als Antwort auf die Entfestigung bzw. Verfestigung der zugehörigen inversen Fließfläche.

6.3.3 Erweiterte Geometriebeschreibung

Im Gegensatz zu einfachen Fließflächen der Form $F = f(\boldsymbol{\sigma}) - \kappa(\bar{\epsilon}^p) = 0$ kann die Singularitätsstelle und der zugehörige Gradient beim modifizierten *Kang*-Modell nicht geschlossen ermittelt werden. Dies folgt direkt aus der Form der Fließfunktion $F = f(\boldsymbol{\sigma}) - \kappa(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = 0$, das heißt in die Evolutionsgleichungen gehen neben den äquivalenten plastischen Verzerrungen auch die aktuellen Spannungen mit ein. Um einen Spannungspunkt im Apexbereich zu identifizieren, muss die Versagensfläche (siehe Gleichung (5.42)) an der Stelle $F(\rho = 0, \xi) = 0$ ausgewertet werden:

$$F(\rho = 0) = -\frac{\xi_1}{f_{cm}} \left[\left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \right)^\alpha - (1 - c) \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \right] \quad (6.38)$$

Die Nullstelle $\xi_{0,s}$ für Gleichung (6.38) wird über ein *Standard-Newton*-Verfahren ausgewertet. Die notwendige Ableitung $\frac{dF}{d\xi}$ ist im Anhang (Gleichung (B.24)) gegeben. Über den Gradienten

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho(\xi = \xi_{0,n+1}, \rho = 0, \theta = \theta_{n+1})}{\partial \xi} \quad (6.39)$$

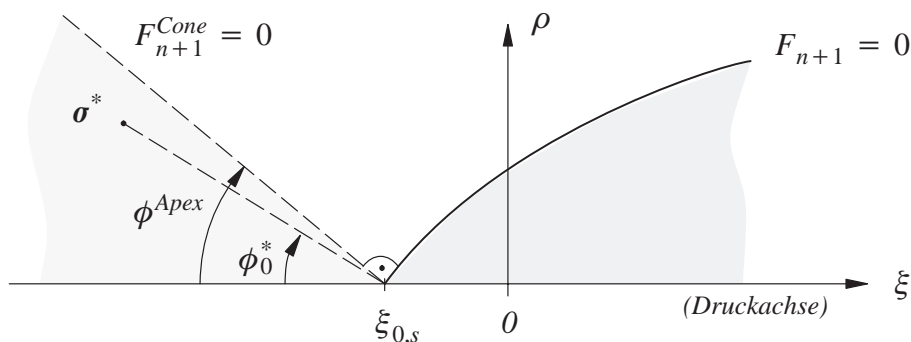


Bild 6.3 Rückprojektion im Apexbereich

(siehe Gleichung (B.50) für die Versagensfläche bzw. Gleichung (B.51) für das plastische Potenzial) kann schließlich der eingeschlossene Winkel ϕ^{Apex} bestimmt werden:

$$\phi^{Apex} = \arctan\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (6.40)$$

Die Bedingung für einen Spannungspunkt im Apexbereich lautet damit:

$$\phi^{Apex} > \phi^* = \arctan\left(\frac{\rho}{\xi - \xi_{0,s}}\right) \quad (6.41)$$

Unter Verwendung von ϕ^{Apex} aus Gleichung (6.40) und $\xi_{0,s}$ wird ein inverser Kegel (*Drucker-Prager-Fließfläche*) an der Singularitätsstelle wie folgt definiert:

$$F^{Cone} = \phi^{Apex}(\xi - \xi_{0,s}) - \rho = 0 \quad (6.42)$$

Das zugehörige plastische Potenzial ist inverser Natur, das heißt die Rückprojektion aus dem Kegel findet nicht in Richtung auf die hydrostatische Achse statt, sondern der plastische Fluss ist nach außen gerichtet. Da im allgemeinen Fall das plastische Potenzial nicht der Versagensfläche des Modells entspricht ($\bar{\alpha} \neq \alpha$), ist der Winkel des invertierten Apex für das Potenzial $\phi^{Apex,P}$ ebenfalls sinngemäß aus den Gleichungen (6.38) und (6.40) zu ermitteln.

Im Gegensatz zu einfachen Fließflächen muss also für das modifizierte *Kang*-Modell bereits zur Definition der invertierten *Drucker-Prager-Fließfläche* ein nicht zu unterschätzender Aufwand betrieben werden. Dabei stellt die Annahme eines *Drucker-Prager-Kegels* bereits eine grundlegende Vereinfachung dar. Streng genommen müsste der Kegel dieselben Kompressions- und Extensionseigenschaften wie die Hauptfließfläche aufweisen. Für den Apexbereich würde dies eine extreme Verformung des Deviatorschnittes von einem Kreis hin zu dem bekannten Dreieck bedeuten. Die anschließende Implementierung des Mehrflächen-Projektionsalgorithmus bereitet durch die Annahme einer Verzerrungsverfestigungshypothese weiteren numerischen Mehraufwand.

6.3.4 Unstetigkeitsstellen in den Gradienten

Für Spannungspfade, die einer reinen Kompressionsbelastung entsprechen, wie sie sich zum Beispiel bei einem einfachen Druckversuch nach Bild 6.4 ergeben, nimmt der *Lode*-Winkel der Prädiktorspannung einen Wert von $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$ (entsprechend $\theta = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$) an. Dadurch ergeben sich für die numerische Umsetzung zweierlei Besonderheiten. Zum einen sind die in Anhang B definierten Ableitungen des plastischen Potenzials Q und der Versagensfläche F nach den Spannungen nicht vollständig definiert (siehe Gleichung (A.30), $\arccos(3\theta) \rightarrow \infty$), zum anderen liefert die Abschätzung des plastischen Multiplikators aus der linearisierten Konsistenzbedingung keine hinreichend genaue Näherung für das lokale *Newton*-Verfahren. Letzteres operiert damit in einem Gebiet außerhalb des Konvergenzradius und führt daher zu deutlich mehr Iterationen als gewöhnlich (abseits der singulären Punkte konvergiert der Algorithmus erwartungsgemäß quadratisch innerhalb von maximal fünf Schritten). Ähnliche Probleme ergeben sich zum Beispiel auch bei Fließflächen vom *Mohr-Coulomb*-Typ für $|\theta| = 30^\circ$. Crisfield [36] schlägt daher für Fälle, in denen $|\theta| \geq 29.99^\circ$ ist, die Verwendung der *Drucker-Prager-Gradienten* vor.

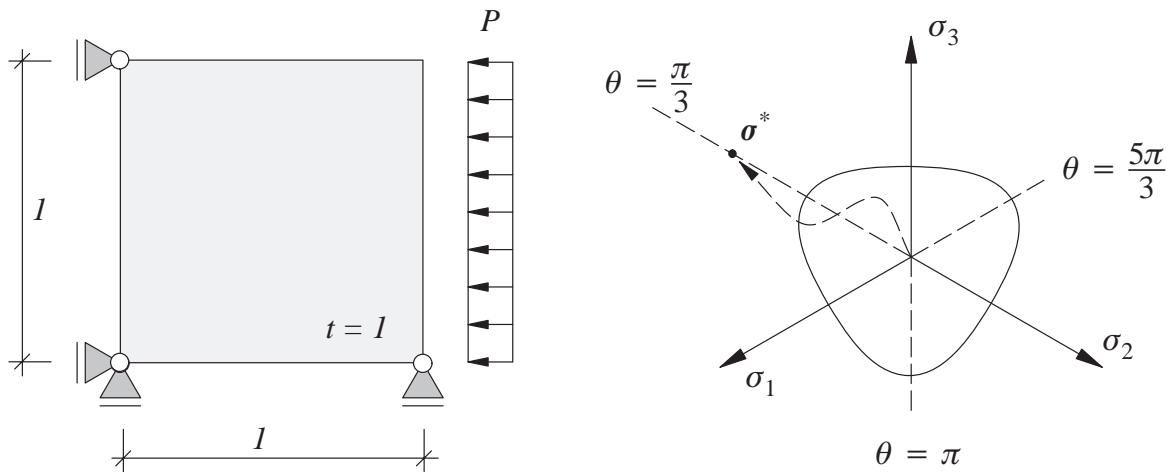


Bild 6.4 Einfacher Druckversuch und zugehörige Prädiktorspannung im Deviatorraum

Für die sehr schlechte Konvergenz im modifizierten *Kang*-Modell zeichnen sich die hohen Gradienten der *Willam-Warnke*-Funktion im Kompressionspunkt verantwortlich (vergleiche hierzu auch Bild 5.6b). Untersuchungen haben gezeigt, dass darüber hinaus auch noch numerische Oszillationen innerhalb des lokalen *Newton*-Verfahrens auftreten können. Hierzu ist in Bild 6.5 der Wert der Fließbedingung F als Funktion der Iteration während eines Rückprojektionsschritts auf den Kompressionspunkt dargestellt. Im oberen Diagramm sind hierfür 68 Schritte bis zum Erreichen der Abbruchschranke notwendig. Um die Konvergenz zu beschleunigen, wird der plastische Multiplikator nach Auftreten der Oszillationen wie folgt abgeschätzt:

$$\Delta\lambda_{k+1}^{neu} = \Delta\lambda_{k+1} + (\Delta\lambda_k - \Delta\lambda_{k+1}) \frac{f_{k+1}}{f_k - f_{k+1}} \quad (6.43)$$

Dadurch wird die Konvergenzgeschwindigkeit bis zum Erreichen der Projektionslösung $F = 0$ bei gleicher Abbruchschranke um den Faktor 2-3 erhöht (vergleiche Bild 6.5 unten, 24 Iterationen).

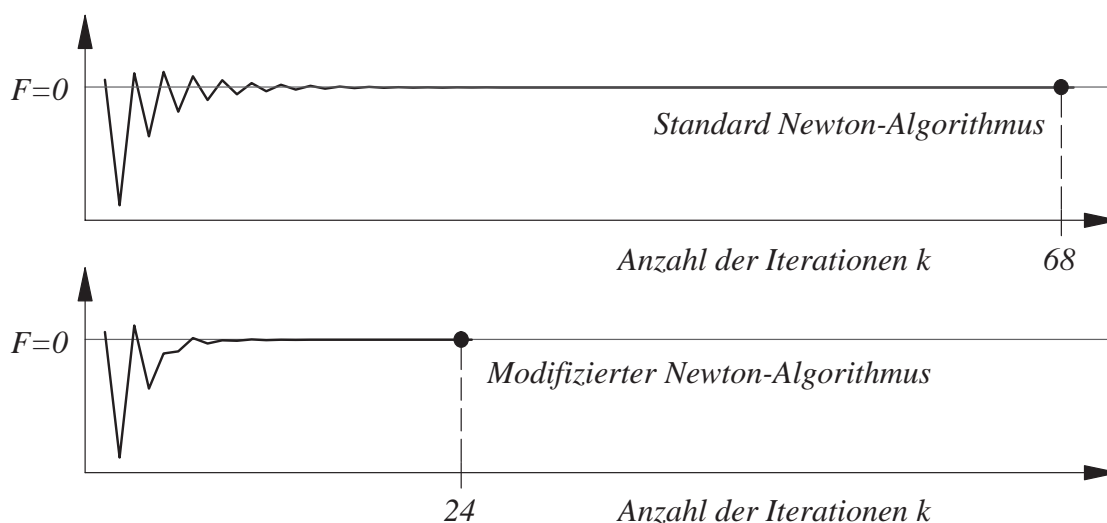


Bild 6.5 Konvergenzgeschwindigkeit (Abbruchschranke: 10^{-7}), $\theta = \frac{\pi}{3}$

6.4 Algorithmische elastoplastische Materialtangente

Zur numerischen Umsetzung des in Kapitel 5.4 vorgestellten Materialmodells mittels der Finite Elemente Methode zeigt sich die Verwendung der sogenannten Kontinuumstangente (siehe Gleichung (4.18)) als unzureichende Näherung der wahren Tangentensteifigkeit innerhalb der numerischen Simulation. Bedingt durch den Übergang von differenziellen Zeit- bzw. Lastinkrementen hin zu endlichen, ergeben sich weitere Terme in deren Herleitung. Dabei ist insbesondere auf eine konsistente Linearisierung der Ratengleichungen mit dem verwendeten numerischen Verfahren zu achten. Simo und Taylor berichten in [177] über die Notwendigkeit des konsistenten Tangentenoperators zur Erzielung einer quadratischen Konvergenzrate, zuvor wird jedoch auch von Nagtegaal in [132] auf diesen Zusammenhang hingewiesen. Dabei ist der gewählte Begriff durchaus nicht unumstritten. Schließlich stellt auch die Kontinuumstangente bereits eine konsistent hergeleitete Tangente dar. Im Folgenden wird daher der Begriff der algorithmischen (Material-)Tangente verwendet. Weiterführende Literatur zu deren Bestimmung findet man zum Beispiel in Simo & Hughes [171], Menrath [121] oder Hofstetter & Mang [74]. Während sich die Herleitungen in den vorgenannten Quellen zumeist auf ein Plastizitätsmodell unter Annahme einer Arbeitsverfestigungshypothese (*work-hardening hypothesis*) stützen, sollen hier die entsprechenden Gleichungen für eine Verzerrungsverfestigungshypothese (*strain-hardening hypothesis*) angegeben werden.

Zunächst wird die algorithmische Materialtangente für eine aktive Fließfläche hergeleitet. In einem zweiten Schritt wird die Herleitung dann auf die Mehrflächenplastizität erweitert.

6.4.1 Herleitung der algorithmischen Materialtangente

Zu einem Zeitpunkt t_n seien die gesamten Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_n$, Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_n$ und internen Variablen \mathbf{q}_n des diskretisierten Problems bekannt. Darüber hinaus ist aus der inkrementell-iterativen Berechnung der Strukturantwort innerhalb eines verschiebungsgesteuerten Verfahrens das Verzerrungsinkrement $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ gegeben. Im Weiteren sind nun die Spannungen und Verzerrungen sowie auch die Zustandsvariablen am Ende des Lastschritts $n+1$ zu bestimmen. Legt man ein *Rückwärts-Euler*-Schema (*backward-Euler*) zugrunde, so erhält man über die diskreten *Kuhn-Tucker*-Bedingungen das folgende Optimierungsproblem (siehe auch Simo, Kennedy & Govindjee [172]):

$$F_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0; \quad \Delta\lambda_{n+1} \geq 0; \quad \Delta\lambda_{n+1} F_{n+1} = 0 \quad (6.44)$$

Hierbei gilt $\Delta\lambda_{n+1} = \dot{\lambda} \Delta t_{n+1}$. Weiter wird von einer additiven Zerlegung des Verzerrungstensors ausgegangen, was eine Beschränkung des Modells auf kleine Verzerrungen impliziert, was bei Beton weitgehend zutrifft. Die Gesamtverzerrungen ergeben sich somit zu

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (6.45)$$

Weiter erhält man den Spannungstensor aus der Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : \left(\boldsymbol{\epsilon}_n - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} \right) \quad (6.46)$$

Die darin benötigten plastischen Gesamtverzerrungen am Ende des Zeitschritts lassen sich mit der Definition der Fließregel weiter aufspalten in

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\epsilon}_n^{pl} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} \quad (6.47)$$

$$\text{mit } \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} = \Delta \lambda_{n+1} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{m}_{n+1} \quad (6.48)$$

In gleicher Weise ist die Aktualisierung der inneren Variablen des Ver-/Entfestigungsgesetzes (Evolutionsgesetz) vorzunehmen. Dabei wird deren Inkrement unter Anwendung der Verzerungsverfestigungshypothese über das Inkrement der effektiven plastischen Verzerrungen $\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{pl}$ definiert:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{pl} \quad (6.49)$$

An dieser Stelle muss auf eine unter Umständen verwirrende Notation aufmerksam gemacht werden. Abhängig von der Art des Materialmodells können mehrere oder aber auch nur eine interne Variable eingeführt werden. Entsprechend ist \mathbf{q} als Vektor oder als Skalar zu definieren. Exemplarisch wird daher hier in Gleichung (6.50) die Definition eines Eintrages im Vektor der inneren Variablen angegeben. Weitere Vorschläge werden zum Beispiel von Etse [47] oder Kang [84] gemacht. Dabei werden nur die positiven bzw. negativen Komponenten des plastischen Verzerrungstensors berücksichtigt und somit mehrere innere Variablen zur Beschreibung der Evolution nötig. Im Folgenden soll daher die Vektornotation beibehalten werden. Unter Verwendung von Gleichung (6.48) wird folgender skalare Ausdruck für die effektiven plastischen Verzerrungen erhalten:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}} = \Delta \lambda_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m}_{n+1} : \mathbf{m}_{n+1}} \quad (6.50)$$

Bei der weiteren Herleitung der algorithmischen Materialtangente werden die totalen Differenziale der diskretisierten Spannungen, der plastischen Verzerrungen, der inneren Verzerrungsvariablen sowie der Konsistenzbedingung benötigt:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : (d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}) \quad (6.51)$$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} = d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) \Big|_{n+1} \quad (6.52)$$

$$d\mathbf{q}_{n+1} = d\Delta\lambda \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \Delta\lambda \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \Delta\lambda \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} \quad (6.53)$$

$$dF_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} = 0 \quad (6.54)$$

Ziel der folgenden algebraischen Umformungen ist die Elimination der Größen $d\Delta\lambda_{n+1}$ (die Änderung des Inkrements des plastischen Multiplikators $\Delta\lambda_{n+1}$) und $\Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1}$, um eine Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsincrementen aufzustellen. Durch Einsetzen von Gleichung (6.52) in Gleichung (6.51) und Umsortieren nach dem totalen Differenzial der Spannungen wird

$$\mathbf{C}_{el}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : d\boldsymbol{\sigma} \Big|_{n+1} = d\boldsymbol{\epsilon} - d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} \quad (6.55)$$

gebildet. In der weiteren Folge erhält man direkt die modifizierte elastische Materialtangente (6.58) aus den Gleichungen (6.55) bis (6.57):

$$\left(\mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma^2} \right) : d\sigma \Big|_{n+1} = d\epsilon - d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} \quad (6.56)$$

$$\Leftrightarrow d\sigma_{n+1} = \Theta : \left(d\epsilon - d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) \Big|_{n+1} \quad (6.57)$$

$$\text{mit } \Theta_{n+1} = \left(\mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \sigma} \right)^{-1} \Big|_{n+1} = \left(\mathbf{C}_{el}^{-1} + \Delta\lambda \mathbf{M} \right)^{-1} \Big|_{n+1} \quad (6.58)$$

wobei mit $\mathbf{M} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma}$ der *Hesse*-Tensor eingeführt wurde. Das Einsetzen von Gleichung (6.57) in den Ausdruck der differentiellen Konsistenzbedingung (6.54) liefert

$$dF_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \Theta : \left(d\epsilon - d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1}. \quad (6.59)$$

Weiteres Umsortieren unter Berücksichtigung von $dF_{n+1} = 0$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \Theta : d\epsilon \Big|_{n+1} &= \Delta\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \Theta : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) : d\mathbf{q} \\ &+ d\Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \Theta : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Abermalige Anwendung von Gleichung (6.57) auf den Ausdruck des totalen Differenzials der inneren Variablen (6.53) führt auf

$$\begin{aligned} d\mathbf{q}_{n+1} &= d\Delta\lambda \bar{\epsilon}^{pl} + \Delta\lambda \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \Theta : \left(d\epsilon - d\Delta\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) \\ &+ \Delta\lambda \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Durch weiteres Umsortieren des erhaltenen Ausdrucks (6.61) wird schließlich die folgende Form erreicht:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \Theta : d\epsilon \right) \Big|_{n+1} &= d\Delta\lambda \Delta\lambda \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \Theta : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\Delta\lambda} \right) \\ &+ \Delta\lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \Theta : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{\Delta\lambda^2} \right) : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Damit führen nun die Gleichungen (6.60) und (6.62) auf ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{Z}_{n+1} \begin{Bmatrix} d\Delta\lambda \\ \Delta\lambda d\mathbf{q} \end{Bmatrix} \Big|_{n+1} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \Theta : d\epsilon \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \Theta : d\epsilon \end{Bmatrix} \Big|_{n+1} \quad (6.63)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
z_{11,n+1} &= \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\Delta \lambda} \Big|_{n+1} \\
z_{12,n+1} &= \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial q} - \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial q} + \frac{1}{\Delta \lambda^2} \Big|_{n+1} \\
z_{21,n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} \\
z_{22,n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial q} - \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{n+1}
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Das Lösen des linearen Gleichungssystems (6.63) und Einsetzen der nunmehr bekannten Größen $d\Delta\lambda_{n+1}$ und $\Delta\lambda_{n+1}dq_{n+1}$ in Gleichung (6.57) führt auf die algorithmische Materialtangente in der folgenden Form:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{ep,a} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \tag{6.65}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{n+1}^{ep,a} &= \boldsymbol{\theta} - \bar{z}_{11} \left(\boldsymbol{\theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} \right) - \bar{z}_{12} \left(\boldsymbol{\theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} \right) \\
&\quad - \bar{z}_{21} \left(\boldsymbol{\theta} : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial q} \otimes \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} \right) - \bar{z}_{22} \left(\boldsymbol{\theta} : \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial q} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\theta} \right) \Big|_{n+1}
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Die Koeffizienten $\bar{z}_{ij,n+1}$ in Gleichung (6.66) bestimmen sich durch Inversion der Matrix \mathbf{Z}_{n+1} .

$$\bar{\mathbf{Z}}_{n+1} = (\mathbf{Z}_{n+1})^{-1} \tag{6.67}$$

Aus der Gleichung des algorithmischen Tangentenmoduls lässt sich im Weiteren leicht erkennen, welche Bedingungen von einem Materialmodell, hier basierend auf der Verzerrungsverfestigungshypothese, zu erfüllen sind, um einen symmetrischen Tangentenoperator zu erhalten. Ausgehend von der Nicht-Kommutativität des dyadischen Produkts (siehe Anhang A), lassen sich die folgenden Aussagen treffen:

- Wird der Formulierung der Fließregel ein plastisches Potenzial Q zugrunde gelegt, so wird die zweite Ableitung nach dem Spannungstensor unabhängig von der Form des gewählten Potenzials zum symmetrischen *Hesse*-Tensor vierter Stufe \mathbf{M} führen. Letzterer wird zur Bildung der modifizierten elastischen Tangente (siehe Gleichung (6.58)) benötigt und geht direkt in die vorstehenden Gleichungen ein. Somit kann der modifizierte elastische Modul keinen Anteil zu einer unsymmetrischen algorithmischen Tangente beisteuern (vergleiche [47]).
- Als offenkundige, aber im Allgemeinen nicht hinreichende Bedingung für einen symmetrischen elasto-plastischen algorithmischen Tangentenoperator ist eine assoziierte Fließregel zu nennen. Wird das plastische Potenzial Q gleich der Fließbedingung F gewählt, so wird der dritte Summand in Gleichung (6.66) symmetrisch. Wird darüber hinaus die Evolution der inneren Variablen direkt über das plastische Potenzial abgeleitet – dies entspricht dann für eine assoziierte Fließregel auch einem assoziierten Ver-/Entfestigungsgesetz – so wird schließlich auch der vierte Term in (6.66) symmetrisch (vergleiche Satz von Schwarz bezüglich der Kommutativität der Ableitungen in der mehrdimensionalen Analysis). Der zweite und fünfte Term bleiben weiterhin unsymmetrisch, bilden jedoch jeweils die Transponierte zueinander. Unter Berücksichtigung der Identität der jeweiligen Vorfaktoren $\bar{z}_{11,n+1} = \bar{z}_{22,n+1}$, ergibt sich in der Summe ein symmetrischer Beitrag zur algorithmischen Tangente.

- Werden wie in den vorgeschlagenen Materialmodellen die äquivalenten plastischen Verzerrungen über eine Verzerrungsverfestigungshypothese als Verfestigungsparameter für komplexe Verfestigungsfunktionen gewählt, so lässt sich kein assoziiertes Ver-/Entfestigungsgesetz verwirklichen. Selbst bei assoziierter Fließregel wird daher der algorithmische Tangentenoperator keine Symmetrie-Eigenschaften besitzen. Dies ist insbesondere im Vergleich zum konsistenten Kontinuumsmodul bemerkenswert. Letzterer stellt die Tangente am Anfang des Zeitschritts dar und ist bei kleiner werdender Schrittweite der Grenzwert der algorithmischen Tangente. Sämtliche unsymmetrischen Anteile aus der Nichtassoziativität des Ver-/Entfestigungsgesetzes werden also bei kleiner werdenden Lastinkrementen sukzessive eliminiert. Dagegen bleiben die unsymmetrischen Anteile aus der Nichtassoziativität der Fließregel erhalten.

An dieser Stelle sollte auch auf eine genäherte Herleitung hingewiesen werden, wie sie zum Beispiel in den Arbeiten von Etse [47] oder Kang [84] Verwendung findet. Dabei werden in den Gleichungen (6.52) und (6.53) die Terme der Evolutionsvariablen in den totalen Differenzialen

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \quad (6.68)$$

vernachlässigt. Dies führt auf eine einfachere Form des Tangentenoperators, die innerhalb einer numerischen Umsetzung teure Operationen (insbesondere die Inversion \mathbf{Z}_{n+1}) einspart. Des Weiteren ist diese Form auch noch einer eleganten Herleitung zugänglich. Als Sonderfall kann sie jedoch wie folgt aus der allgemeinen Form extrahiert werden: Durch Elimination der linksseitigen Multiplikatoren aus (6.68) aus den Gleichungen (6.64)₂ und (6.64)₄ sowie aus dem zweiten und dritten Summand der Gleichung (6.66) erhält man unter Berücksichtigung der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} = \frac{2}{3 \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{m} : \mathbf{m}} \mathbf{m} : \mathbf{M} \quad (6.69)$$

den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{ep,a} = \boldsymbol{\Theta} & - \frac{\left(-\frac{1}{\Delta \lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\right)}{\det(\mathbf{Z})} \left(\boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\Theta} \right) \\ & - \frac{\left(-\frac{1}{\Delta \lambda^2}\right)}{\det(\mathbf{Z})} \left(\boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\Theta} \right) \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\text{wobei} \quad \det(\mathbf{Z}) = \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\Delta \lambda} \right) \left(\frac{-1}{\Delta \lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left(\frac{1}{\Delta \lambda^2} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (6.71)$$

Weiteres Umformen führt dann schließlich auf die folgende Form, wie sie auch in der zweitgenannten Arbeit zu finden ist:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep,a} = \boldsymbol{\Theta} - \frac{\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} + \frac{2}{3} \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{m} : \mathbf{m}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} (\boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\Theta})}{\mathbf{n} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{m} - \bar{\epsilon}^{pl} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} + \frac{2}{3} \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{m} : \mathbf{m}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{m} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\Theta} : \mathbf{n})} \quad (6.72)$$

Dabei finden die gebräuchlichen Abkürzungen des Gradienten auf die Fließfläche $\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ und des plastischen Potentials $\mathbf{m} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ Verwendung. Es bleibt festzuhalten, dass im Vergleich zu Gleichung (6.66) deutlich weniger Rechenoperationen anfallen und insbesondere die Inversion einer 2x2-Matrix entfällt. Inwiefern sich dies auf die gesamte Rechenzeit auswirkt, die bekanntermaßen auch von der Güte der algorithmischen Tangente abhängt, wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht.

6.4.2 Algorithmischer Tangentenoperator bei Mehrflächenplastizität

Die in Kapitel 6.3.2 beschriebene Lösung zur Rückprojektionsproblematik am Apex bedarf selbstverständlich einer zugehörigen algorithmischen Tangente. Dabei wird sinnvollerweise von den Annahmen in Gleichung (6.68) Gebrauch gemacht, so dass sich die totalen Differenziale der benötigten Größen näherungsweise wie folgt darstellen:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : \left(d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} \right) \quad (6.73)$$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} = \sum_{i=1}^2 \left(d\Delta\lambda_i c_i \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda_i c_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right) \Bigg|_{n+1} \quad (6.74)$$

$$dq_{n+1} = \left[d\Delta\lambda_1 c_1 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p \right]_{n+1} \quad (6.75)$$

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F_j}{\partial q} : dq = 0 \Bigg|_{n+1}; \quad j = 1, 2 \quad (6.76)$$

An dieser Stelle ist es wichtig auf den Umstand hinzuweisen, dass die Evolution der inneren Variablen nur von der Hauptfließfläche gesteuert wird; plastische Verzerrungsanteile aus dem invertierten Kegel werden dafür nicht ausgewertet (siehe Gleichung (6.74)). Zur weiteren Herleitung wird Gleichung (6.74) in (6.73) eingesetzt,

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \mathbf{C}^{el} : \left[\sum_{i=1}^2 d\Delta\lambda_i c_i \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \sum_{i=1}^2 \Delta\lambda_i c_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right] \Bigg|_{n+1} \quad (6.77)$$

und durch weiteres Umformen in

$$\left[\mathbf{C}^{-1} + \sum_{i=1}^2 \Delta\lambda_i c_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right] : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \sum_{i=1}^2 d\Delta\lambda_i c_i \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Bigg|_{n+1} \quad (6.78)$$

übergeführt. Dabei kann bereits der algorithmische elastische Modul des Mehrflächenproblems extrahiert werden:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \left[\mathbf{C}^{-1} + \sum_{i=1}^2 \Delta\lambda_i c_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \Bigg|_{n+1} \quad (6.79)$$

Damit lässt sich Gleichung (6.78) vereinfachend wie folgt schreiben:

$$d\sigma_{n+1} = \bar{\Theta} : \left[d\epsilon_{n+1} - \sum_{i=1}^2 d\Delta\lambda_i c_i \frac{\partial Q_i}{\partial \sigma} \right] \Bigg|_{n+1} \quad (6.80)$$

Hinzunahme der Konsistenzbedingung (6.76) liefert schließlich ein nichtlineares Gleichungssystem in $d\Delta\lambda_1$ und $d\Delta\lambda_2$:

$$\frac{\partial F_j}{\partial \sigma} : \bar{\Theta} : \left[d\epsilon_{n+1} - \sum_{i=1}^2 d\Delta\lambda_i c_i \frac{\partial Q_i}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial F_j}{\partial q} d\Delta\lambda_1 c_1 \bar{\epsilon}_p \Bigg|_{n+1} = 0 \quad (6.81)$$

Durch weiteres Umformen lässt sich der gewonnene Ausdruck schließlich vereinfachen zu

$$\mathbf{Z}_{n+1} \begin{Bmatrix} d\Delta\lambda_1 \\ d\Delta\lambda_2 \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \partial_{\sigma} F_1 : \bar{\Theta} : d\epsilon_{n+1} \\ \partial_{\sigma} F_2 : \bar{\Theta} : d\epsilon_{n+1} \end{Bmatrix}_{n+1} \quad (6.82)$$

mit

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} F_1 : \bar{\Theta} : \partial_{\sigma} Q_1 c_1 - \partial_q F_1 c_1 \bar{\epsilon}_p & \partial_{\sigma} F_1 : \bar{\Theta} : \partial_{\sigma} Q_2 c_2 \\ \partial_{\sigma} F_2 : \bar{\Theta} : \partial_{\sigma} Q_1 c_1 - \partial_q F_2 c_1 \bar{\epsilon}_p & \partial_{\sigma} F_2 : \bar{\Theta} : \partial_{\sigma} Q_2 c_2 \end{bmatrix}_{n+1}. \quad (6.83)$$

Auflösen nach $d\Delta\lambda_1$ und $d\Delta\lambda_2$ bzw. Berücksichtigen von $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^{-1}$ liefert den algorithmischen Tangentenmodul des Mehrflächenproblems

$$d\sigma_{n+1} = \mathbf{C}_{ms}^{ep,alg} : d\epsilon_{n+1}, \quad (6.84)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ms}^{ep,alg} = & \bar{\Theta} - \bar{Z}_{11} c_1 (\bar{\Theta} : \partial_{\sigma} F_1 \otimes \partial_{\sigma} Q_1 : \bar{\Theta}) - \bar{Z}_{12} c_1 (\bar{\Theta} : \partial_{\sigma} F_2 \otimes \partial_{\sigma} Q_1 : \bar{\Theta}) \\ & - \bar{Z}_{21} c_2 (\bar{\Theta} : \partial_{\sigma} F_1 \otimes \partial_{\sigma} Q_2 : \bar{\Theta}) - \bar{Z}_{22} c_2 (\bar{\Theta} : \partial_{\sigma} F_2 \otimes \partial_{\sigma} Q_2 : \bar{\Theta}). \end{aligned} \quad (6.85)$$

Auch hier lässt sich bereits aus der Gleichungsform erkennen, dass der Tangentenmodul im Allgemeinen unsymmetrisch sein wird; lediglich für den Sonderfall, dass nur die erste Fließfläche aktiv ist, erhält man für eine assoziierte Fließregel $Q_1 = F_1$ einen symmetrischen Tangentenmodul.

6.5 Direkte vs. numerische Differenziation

Innerhalb der numerischen Umsetzung der vorgestellten Plastizitätsmodelle werden sowohl auf *Gauß*-Punkt-Ebene, also bei der Lösung des lokalen Problems der Plastizität, als auch beim globalen Problem auf Strukturebene, jeweils die ersten bzw. auch zweiten Ableitungen der Fließfläche(n) und des plastischen Potenzials nach den Spannungen bzw. den inneren Variablen benötigt. Für einfache Fließflächen und Potenziale (zum Beispiel bei *von Mises*- oder *Drucker-Prager*-Kriterien) lassen sich diese Ableitungen leicht bestimmen; unter Umständen sind diese sogar

konstant oder werden zu null. Im Gegensatz hierzu stehen Fließkriterien, deren Schnitte mit der Deviatorzebene keine konstanten Krümmungen aufweisen (alle Modelle, die die *Willam-Warnke*-Funktion o. ä. anwenden) oder/und die in hydrostatischer Richtung Krümmungen vorweisen (wie zum Beispiel das *MRS-Lade*-Modell, die Erweiterung zum parabolischen *Drucker-Prager*-Modell oder die diversen *Kappen*-Modelle). Zusätzlich erschweren nichtlineare Evolutionsgesetze und innere Abhängigkeiten der Modelle die Herleitung geschlossener Ausdrücke vielfach oder machen diese unmöglich (siehe zum Beispiel ursprüngliches *Kang*-Modell).

Als Lösung wird in diesen Fällen die numerische Ermittlung der benötigten Terme untersucht; entsprechende Arbeiten findet man zum Beispiel bei Jeremic & Sture [81], Miehe [124] (für das globale Problem) oder auch Pérez-Foguet, Rodríguez-Ferran & Huerta [146], [147]. Das prinzipielle Problem der numerischen Differenziation liegt dabei in der endlichen Anzahl der relevanten Stellen bei der Zahlendarstellung im Computer. Bei derzeitigen Computern (32-bit-Darstellung) liefert eine doppelt genaue Zahl (*double precision*) 13 bis 14 signifikante Mantissenstellen [94]. Dies bedeutet, dass innerhalb der angewendeten Differenzenverfahren (vergleiche Tabelle 6.1 nach Pérez-Foguet et al. [146]) die Schrittweite (Störung bzw. Perturbation) h_i nicht zu klein gewählt werden darf, um relevante Stellen in der Zahlendarstellung des Computers trotzdem zu beeinflussen. Zugleich darf die Störung aber nicht zu groß sein, wodurch die Ableitung unter Umständen nicht genau genug erhalten werden kann. Dies wird natürlich bei den angewendeten *Rückwärts-Euler*-Verfahren zu einem Verlust der quadratischen Konvergenzrate führen.

Prinzipiell muss zwischen Rundungs- und Abschneidefehler unterschieden werden. Der Abschneidefehler (*truncation error*) wird kleiner je geringer die Schrittweite gewählt wurde. Dagegen wird der Rundungsfehler mit kleinerer Schrittweite immer größer. Daraus lässt sich nach Dennis & Schnabel [40] ein optimaler Wert h^{opt} bestimmen, der die Summe aus beiden Fehlern minimiert:

$$h^{opt} = h_r^{opt} \max \{|x|, 1\} \quad (6.89)$$

Die hierin verwendete relative Schrittweite h_r^{opt} kann für die Ableitungen erster Ordnung wie folgt abgeschätzt werden:

$$1^{nd}\text{-}O(h_i) : h_r^{opt} = \sqrt{\eta} \quad (6.90)$$

Bezeichnung	Bildungsvorschrift
$1^{nd}\text{-}O(h_i)$	$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h_i} + O(h_i) \quad (6.86)$
$1^{nd}\text{-}O(h_i^2)$	$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} - h_i \mathbf{e}_i)}{2 h_i} + O(h_i^2) \quad (6.87)$
$2^{nd}\text{-}O(h_i^2)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - 2f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x} - h_i \mathbf{e}_i)}{h_i^2} + O(h_i^2) \quad (6.88)$

Tabelle 6.1 Differenzenverfahren für numerische Ableitungen

$$1^{nd}\text{-}O(h_i^2) : h_r^{opt} = \sqrt[3]{\eta} \quad (6.91)$$

Pérez-Foguet et al. [146] geben nach vereinfachenden Annahmen, die auf denselben Überlegungen basieren wie jene von Dennis & Schnabel [40], für die relative Schrittweite bei Ableitungen zweiter Ordnung die folgende Abschätzung an:

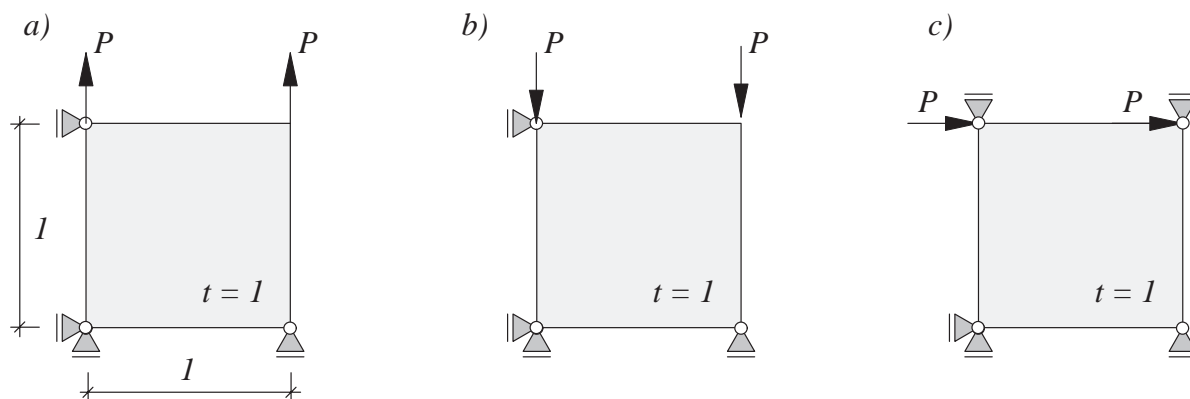
$$2^{nd}\text{-}O(h_i^2) : h_r^{opt} = \sqrt[4]{\eta} \quad (6.92)$$

Hierin ist η der geforderte Genauigkeitswert für die Ableitung der Funktion $f(x)$; dieser kann maximal Maschinengenauigkeit, also 10^{-13} , annehmen. Für das Vorwärts-Differenzen-Verfahren erhält man daraus $h_i \approx \sqrt{10^{-13}} \approx 3,1 \cdot 10^{-7}$ als relative, optimale Schrittweite.

Für die erste Ableitung des Fließpotenzials nach den Spannungen, \mathbf{m} , wird in der Literatur sowohl ein Zentrales-Differenzen-Verfahren $1^{nd}\text{-}O(h_i^2)$ als auch ein Vorwärts-Differenzen-Verfahren $1^{nd}\text{-}O(h_i)$ vorgeschlagen. Für die zweiten Ableitungen des Potenzials nach den Spannungen, \mathbf{M} , werden ausschließlich Zentrale-Differenzen-Verfahren diskutiert. Bei den in Tabelle 6.1 aufgeführten Verfahren ist zu beachten, dass sämtliche Größen in der gebräuchlichen Vektornotation angeschrieben sind. Damit gilt für die beiden Gleichungen (6.95) und (6.96) der nachfolgenden Kapitel $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \sigma_i$ mit $i \in \{1, \dots, 6\}$, sowie für den Selektionsvektor $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ mit Ausnahme des Elements $e_i = 1$ (z. B. $e_2 = \{0, 1, 0, 0, 0, 0\}$, siehe auch Perez-Foguet et al. [147]).

6.5.1 Numerische Differenziation der Gradienten \mathbf{m} und \mathbf{n}

Für die ersten Ableitungen des Einflächenmodells wurde das Vorwärts-Differenzen-Verfahren gewählt. Pérez-Foguet et al. [146] geben an, dass zwischen dem Vorwärts- und dem Zentralen-



Materialparameter		Modellparameter	
$f_{ctm} = 3,80 \text{ N/mm}^2$	$f_{cm} = 36,5 \text{ N/mm}^2$	$\alpha = 0,77$	$\bar{\alpha} = 0,23$
$G_t = 0,05 \text{ Nmm/mm}^2$	$G_c = 50,0 \text{ Nmm/mm}^2$	$S = 7,0$	$T = 8,2$
$E_c = 35\,000,0 \text{ N/mm}^2$	$\nu = 0,15$	$\mu_F = 0,0$	$\mu_Q = 0,0$
Alle weiteren Parameter siehe Tabelle 5.2.			$n = 5,0$

Bild 6.6 Untersuchte Beispiele des lokalen Problems

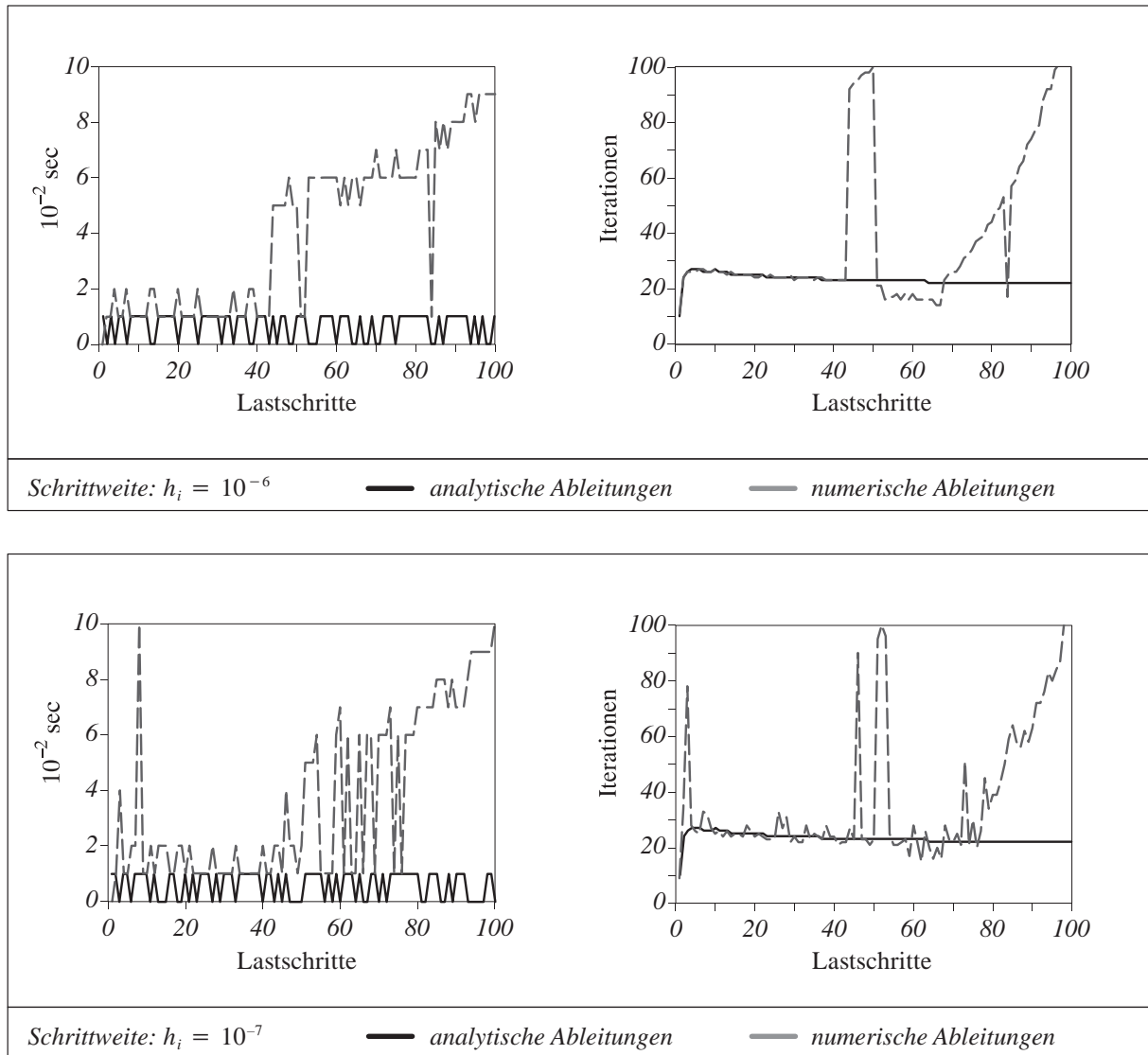


Bild 6.7 Lokales Problem: Einfacher Zugversuch

Differenzen-Verfahren keine signifikanten Unterschiede bezüglich der Konvergenzrate festzustellen waren; in beiden Fällen war eine quadratische Konvergenzrate erreicht worden. Lediglich bei einer Abbruchschranke von kleiner als 10^{-8} konnte mit dem Zentralen-Differenzen-Verfahren aufgrund dessen höherer Genauigkeit die Schrittweite großzügiger gewählt werden.

Im Folgenden wird anhand von drei einfachen Beispielen des ebenen Spannungszustands die Effizienz der numerischen Ableitungen, gemessen am Laufzeitverhalten und an der Anzahl der Iterationen, mit der Effizienz der analytischen Ableitungen verglichen. Ein einfacher Zugversuch (a), ein einfacher Druckversuch (b) und ein einfacher Scherversuch (c) werden jeweils mit einem vierknotigen Finiten Element simuliert, siehe Bild 6.6. Dabei wird der Projektionsalgorithmus mit den numerischen bzw. analytischen Ableitungen der Fließfläche bzw. des Potentials des modifizierten Einflächensmodells nach den Spannungen (n bzw. m) durchgeführt. In Bild 6.7 bis Bild 6.9 sind die Iterationszahlen bzw. die benötigten Rechenzeiten, die zur Lösung des lokalen Problems notwendig waren, aufgetragen. Die Laufzeit konnte mit der zur Verfügung stehenden Systemfunktion auf $\frac{1}{100}$ Sekunde genau gemessen werden. Diese Auflösung ist nicht fein genug, um eine sichere Aussage bezüglich der Mehrkosten für eine analytische Differenziation

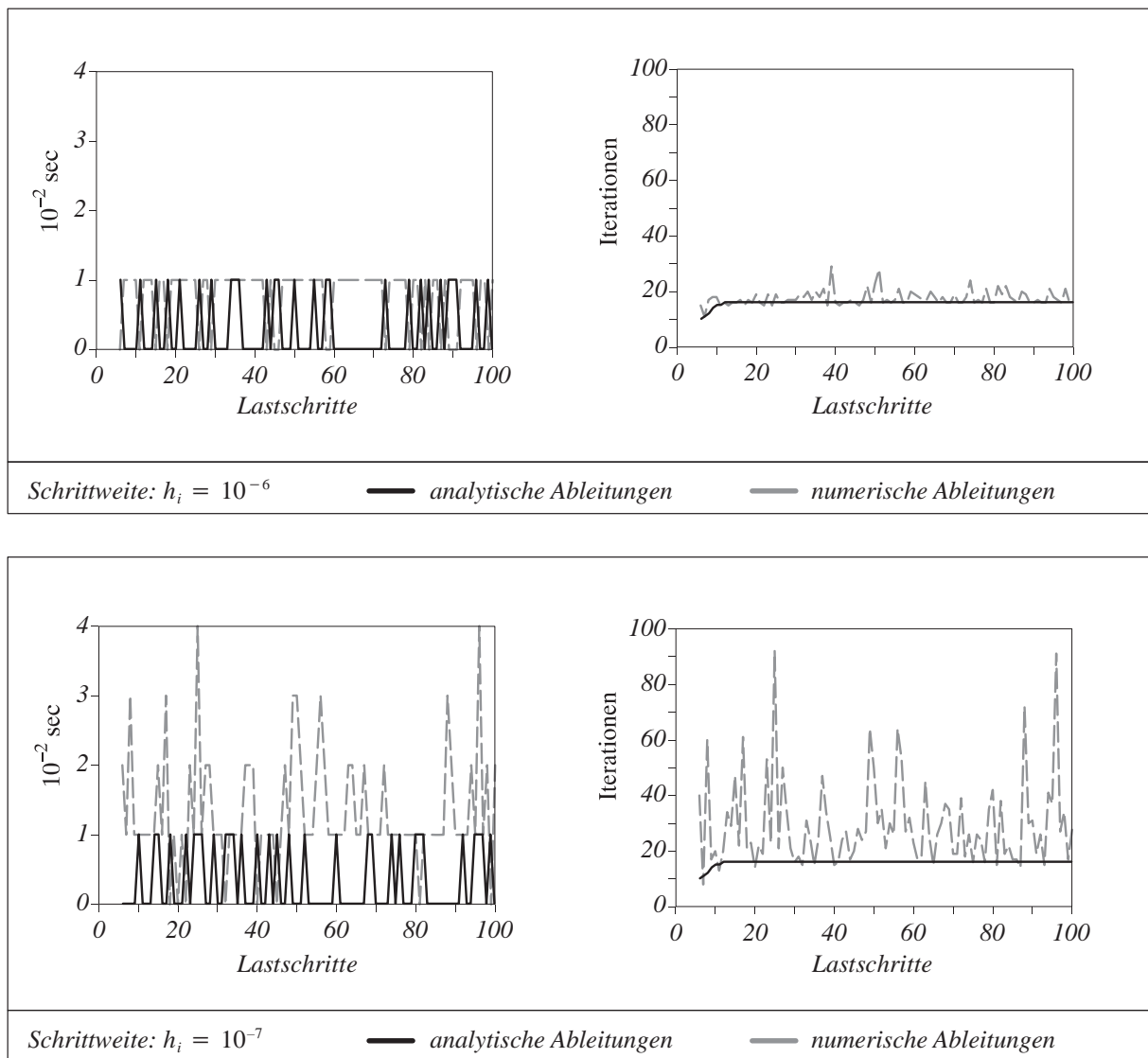


Bild 6.8 Lokales Problem: Einfacher Druckversuch

quantifizieren zu können. Trotzdem lässt sich eine grobe Tendenz feststellen, wonach zumindest die doppelte Rechenzeit nötig ist, um das gestellte Problem mit numerischen Ableitungen zu lösen. Diese Aussage ist jedoch nur für das hier verwendete modifizierte Kang-Modell gültig.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Bedeutung der Schrittweite bzw. Störung h_i . Die Wahl von $h_i = 10^{-7}$ kann nicht als optimal gelten, wie an den Diagrammen (untere Reihe) in Bild 6.7 bis Bild 6.9 leicht zu überprüfen ist. Weder die Konvergenzrate noch die direkt einhergehende Laufzeit können überzeugen. Pérez-Foguet et al. [146] weisen darauf hin, dass insbesondere für numerisch aufwändige Ableitungen, die entsprechend große Rundungsfehler mit sich bringen, ein größerer Wert für h_i zu wählen ist. Die Untersuchungen für $h_i = 10^{-6}$ bestätigen dies, siehe obere Reihe in Bild 6.7 bis Bild 6.9. Es ist weiter festzuhalten, dass je weiter in den entfestigenden Ast des Zugversuchs gerechnet wird, desto schlechter auch das Konvergenzverhalten der numerischen Ableitungen wird. Dieses Phänomen lässt sich auf die sich stark ändernde Fließfläche zurückführen. Mit zunehmender Entfestigung werden ehemals inaktive Terme nun aktiv und tragen zu den bereits genannten Rundungsfehlern bei. Konsequenterweise müsste eine Anpassung von h_i während der Berechnung erfolgen. Weiter ist anzumerken, dass diese Problematik auch bei anderen Spannungspfaden – wenn auch zu einem späteren Zeitpunkt – zu erwarten ist.

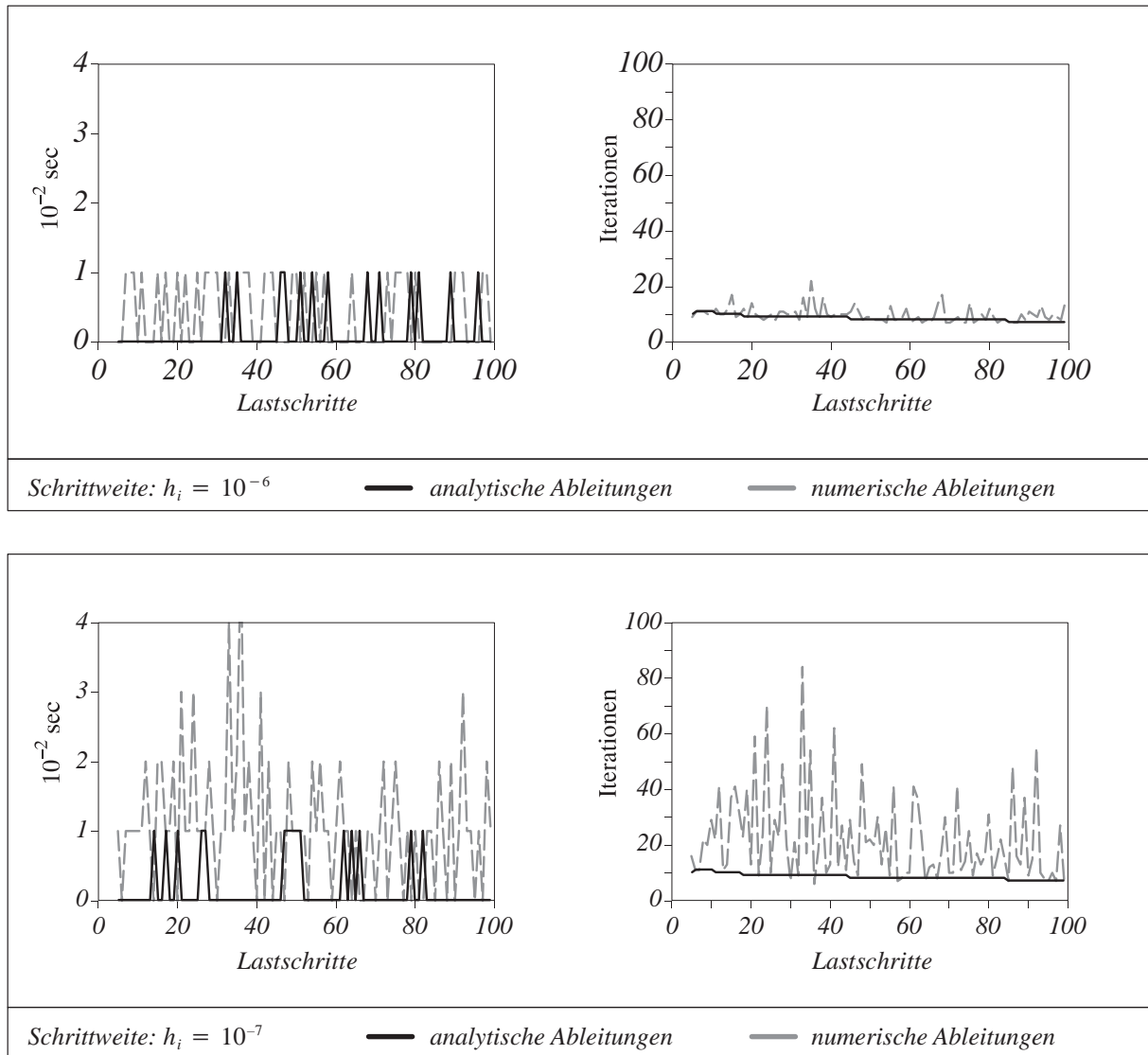


Bild 6.9 Lokales Problem: Einfacher Scherversuch

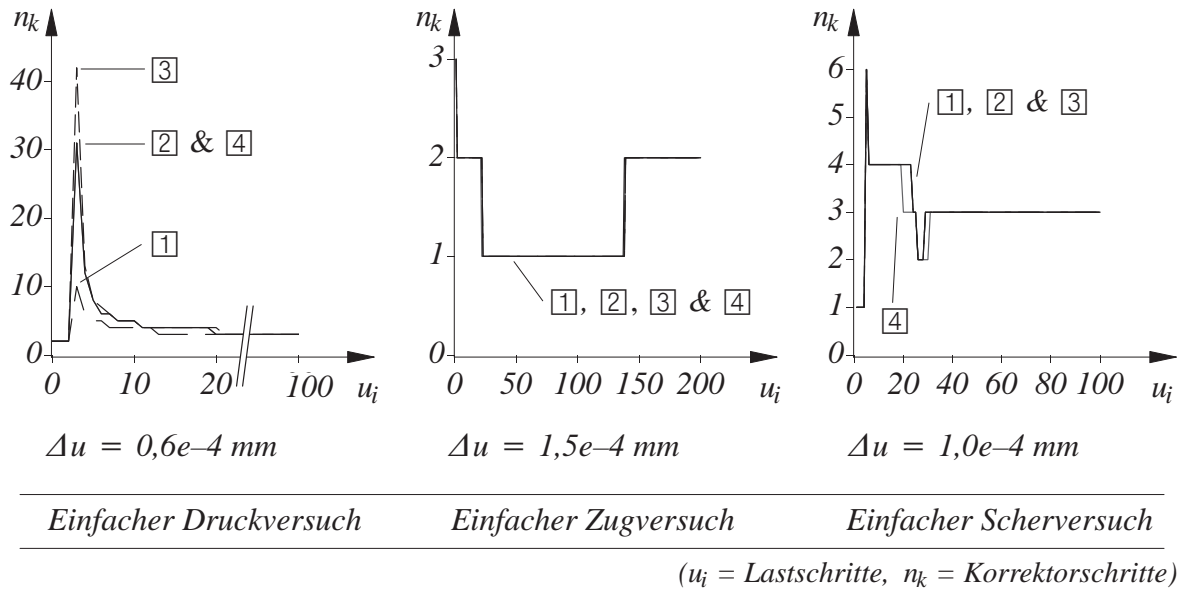
6.5.2 Numerische Differenziation des Hesse-Tensors \mathbf{M}

Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel soll nun die Effizienz numerischer Ableitungen für den Hesse-Tensor \mathbf{M} ermittelt werden. Hierzu stehen prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Zum einen kann der Hesse-Tensor \mathbf{M} aus den analytischen Ableitungen des Fließpotenzials nach den Spannungen, \mathbf{m} , über eines der Verfahren erster Ordnung (siehe Tabelle 6.1) ermittelt werden

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad (6.93)$$

zum anderen bietet sich die Option, \mathbf{M} direkt aus dem Fließpotenzial über ein Verfahren zweiter Ordnung zu bestimmen:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.94)$$



	CPU-Zeit [sec.]			
	Störung h_i	Druck	Zug	Scherung
① — — —	10^{-4}	51,520	93,080	62,070
② —————	10^{-5}	54,260	93,310	62,120
③ - - - - -	10^{-7}	54,740	93,270	62,150
④ —————	analyt. Abl.	53,990	93,400	62,160

Bild 6.10 Numerische Ableitung des Hesse-Tensors

Verfahren erster Ordnung 1nd-O(h_i):

Die Untersuchungen zur numerischen Bestimmung des *Hesse*-Tensors werden mittels des Vorwärts-Differenzen-Verfahrens aus \mathbf{m} anhand der drei Beispiele aus Kapitel 6.5.1 durchgeführt. Hierzu ist Gleichung (6.90) in der folgenden Form notwendig, wobei $i \in (1, \dots, 6)$ die jeweilige Komponente der tensoriellen Ableitung in Vektornotation für σ_i und e_i darstellt:

$$\mathbf{M} \approx \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma_i} = \frac{\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma} + h_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma})}{h_i} + O(h_i) \quad (6.95)$$

In Bild 6.10 sind die Ergebnisse der Belastungsversuche für unterschiedliche Störungen (Perturbationen) h_i zusammengefasst, wobei die notwendigen Korrektorschritte und die CPU-Zeit für die Gesamtlösung dargestellt sind. Aus der Anzahl der Korrektorschritte für alle drei Belastungsversuche wird deutlich, dass das Verfahren äußerst insensitiv bezüglich der Störungsgröße h_i ist. In allen Rechnungen wurde mit dem größtmöglichen Verschiebungsincrement gearbeitet, das jeweils mit den analytischen Ableitungen ermittelt worden war. Bezüglich der Konvergenzrate hat sich eine Perturbation in der Größenordnung von $h_i = 10^{-5}$ bewährt. In den beiden Fällen ① und ② konvergiert der Algorithmus mit einer quadratischen Rate. Überraschend sind dagegen die Laufzeitvergleiche. Gemeinhin wird davon ausgegangen, dass numerische Ableitungen längere Laufzeiten bedeuten und somit teurer sind. Dies wurde im letzten Kapitel für die ersten Ableitungen des Fließpotenzials bzw. der Fließfläche bestätigt. Für die ersten

Ableitungen des Fließvektors nach den Spannungen scheint jedoch zu gelten, dass die numerischen den algorithmischen bezüglich CPU-Zeit ebenbürtig sind. Diese Aussage ist jedoch stark an das verwendete Modell, die darin notwendigen Ableitungen (siehe Anhang B) und die Implementierung gebunden und kann nicht verallgemeinert werden.

Verfahren zweiter Ordnung $2^{nd}-O(h_i^2)$:

Um die von Pérez-Foguet et al. [146] angegebene Gleichung (6.88) für ein Zentrales-Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung anwenden zu können, muss diese zunächst für die gemischten Ableitungen, die auf einen Tensor vierter Stufe führen, erweitert werden:

$$\mathbf{M} \approx \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma_i \otimes \partial \sigma_j} = \frac{Q(\boldsymbol{\sigma} + h_i \mathbf{e}_i) - 2Q(\boldsymbol{\sigma}) + Q(\boldsymbol{\sigma} - h_j \mathbf{e}_j)}{h_i h_j} + O(h_i, h_j) \quad (6.96)$$

Untersuchungen in [146] zeigen jedoch, dass die Genauigkeit der so gewonnenen Ableitungen nur bei einfachen Fließpotenzialen (*von Mises*) ausreichend ist, um die Konvergenz des globalen *Newton-Raphson*-Algorithmus zu gewährleisten. Eine quadratische Konvergenzrate kann nur für Modelluntersuchungen am *Gauß*-Punkt nachgewiesen werden, während diese für Strukturberechnungen eine extreme Sensitivität bezüglich der gewählten Perturbation zeigt. Für das hier untersuchte modifizierte *Kang*-Modell war aufgrund der sehr hohen Gradienten des Potenzials bei den untersuchten einelementigen Beispielen keine Konvergenz nachzuweisen. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von Pérez-Foguet et al. [147] für das *MRS-Lade*-Modell.

6.5.3 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann die Verwendung von numerischen Ableitungen der Form $1^{nd}-O(h_i)$ für die Gradienten des plastischen Potenzials sowie der Fließfläche in Zusammenhang mit dem untersuchten Modell nicht empfohlen werden. Diese Aussage begründet sich hauptsächlich mit den längeren Iterationszahlen innerhalb des lokalen Problems. Hier scheint der Projektionsalgorithmus sehr sensitiv bezüglich der Genauigkeit der Ableitungen zu sein. Im Gegensatz dazu steht die Möglichkeit zur Gewinnung des *Hesse*-Tensors durch numerisches Differenzieren des Fließvektors. Hier lassen sich bei vergleichbarem numerischen Aufwand dieselben Konvergenzraten erzielen. Die aufwändige Herleitung und Implementierung der analytischen Ableitungen lässt sich folglich vermeiden. Die Anwendung des Zentralen-Differenzen-Verfahrens zweiter Ordnung $2^{nd}-O(h_i^2)$ verbietet sich hingegen für komplexe plastische Potenziale. Die daraus gewonnenen Ableitungen zeigen nicht die notwendige Genauigkeit, um innerhalb des globalen *Newton-Raphson*-Algorithmus eine Konvergenz der Lösung sicherzustellen. Es muss jedoch nochmals darauf hingewiesen werden, dass diese Aussagen lediglich bedingt auf andere Modelle übertragbar sind. Neben der Komplexität der Fließfläche bzw. des plastischen Potenzials sind insbesondere Eigenheiten der Implementierung (Effizienz des Codes und des Compilers) für widersprüchliche Veröffentlichungen in diesem Bereich verantwortlich.

6.6 Untersuchungen zu Lokalisierungsphänomenen

6.6.1 Viskoplastisches Modellproblem

Zur Ermittlung des regularisierenden Einflusses einer viskoplastischen Erweiterung der Materialformulierung auf das Lokalisierungsverhalten entfestigender assoziierter Plastizitätsformu-

lierungen wird das Modellproblem des Zugstabs (ebener Spannungszustand) untersucht. Um die Lokalisierung auszulösen wird für das erste Element von insgesamt zehn bilinearen Elementen mit 2x2 *Gauß*-Integration eine geringere Zugfestigkeit angesetzt. Als Materialmodell wird das Mehrflächenmodell der Einfachheit halber mit linearer Entfestigung verwendet. Die Geometrie- und Materialdaten sind in Bild 6.11 zusammengefasst. Für das innerhalb der Gleichungen (6.23)ff. auftretende Zeitinkrement Δt_{n+1} wird die folgende Funktion als Pseudozeit postuliert:

$$\Delta t_{n+1} = \frac{1}{2} 2^{(D t_{vp})} t_{incr} \quad \text{mit} \quad t_{vp} = n_{vp} t_{incr} \quad (6.97)$$

Hierin ist t_{incr} das aus der vorgegebenen Belastungsgeschwindigkeit v_{load} und dem vorgegebenen Verschiebungsinkrement Δu zu ermittelnde Zeitinkrement $t_{incr} = \frac{\Delta u}{v_{load}}$, n_{vp} ist die Anzahl der Lastinkremente, die einen plastischen Korrektorschritt erforderten und D ein Dämpfungsfaktor. Die Funktion (6.97) wurde gewählt, um den Einfluss der Regularisierung während der Belastung sukzessive zu eliminieren (Für $\Delta t_{n+1} \rightarrow \infty$ ergibt sich die nichtviskose Lösung). Dass sich durch die Wahl der Funktion eine Abhängigkeit der Lösung von der zeitlichen Diskretisierung bzw. des gewählten vorgegebenen Verschiebungsinkrements ergibt, wurde für das Modellproblem zur Verdeutlichung des viskosen Effekts in Kauf genommen.

Zunächst wird der unregularisierte Stab (siehe [1] in Bild 6.12) betrachtet. Wie erwartet lokalisieren sämtliche Verzerrungen in Längsrichtung in dem Element, in welchem die Zugfestigkeit herabgesetzt wurde, während in den restlichen Elementen eine elastische Entlastung stattfindet und somit die Verzerrungen bei weiterer Belastung abnehmen. Im zugehörigen Diagramm sind die Verzerrungen an den jeweiligen Integrationspunkten aufgetragen. Im zweiten numerischen Experiment [2] wird der Dämpfungsfaktor D zu null gesetzt, so dass bei konstantem Verschiebungsinkrement sowohl die Belastungsgeschwindigkeit als auch das Inkrement der Pseudozeit konstant bleiben. Bei ebenfalls konstanter Zähigkeit bzw. Viskosität η wird folglich der plastische Multiplikator (siehe Gleichung (6.23)) stets mit demselben Faktor abgemindert. Wie aus dem rechten unteren Diagramm in Bild 6.12 ersichtlich ist, wird durch diese Maßnahme bei gleicher Gesamtdehnung des Stabes ein extremes Lokalisieren in einem Element fast vollständig unterbunden. Wird dagegen der Einfluss der Viskosität wie in der dritten Rechnung [3] über den Verlauf der Berechnung sukzessive vermindert, wird natürlich mit Erreichen der nichtviskosen Lösung das Lokalisierungsproblem in der bekannten Form erneut auftreten. Dies ist in den Dia-

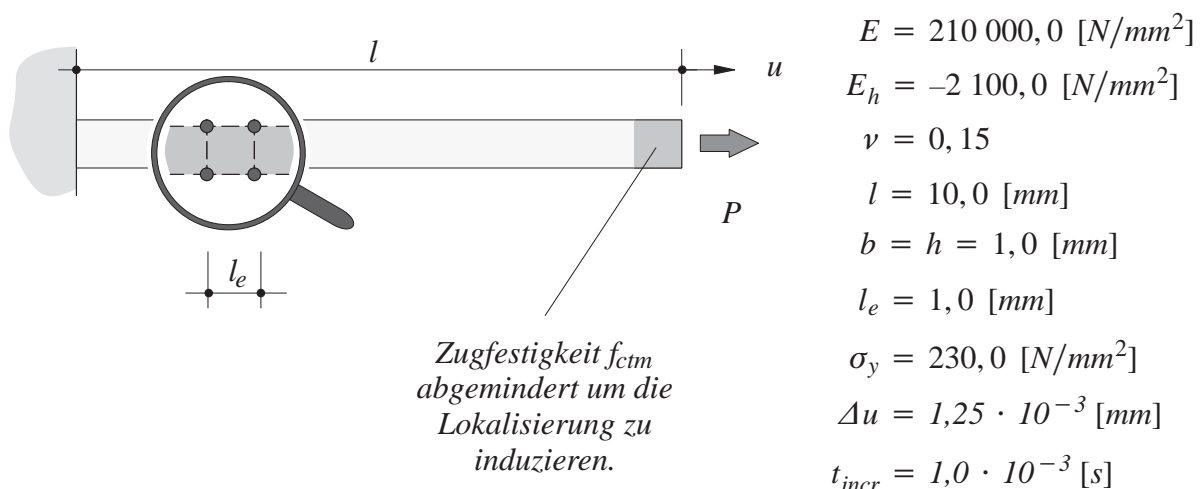


Bild 6.11 Viskoplastisches Modellproblem: Geometrie- und Materialdaten

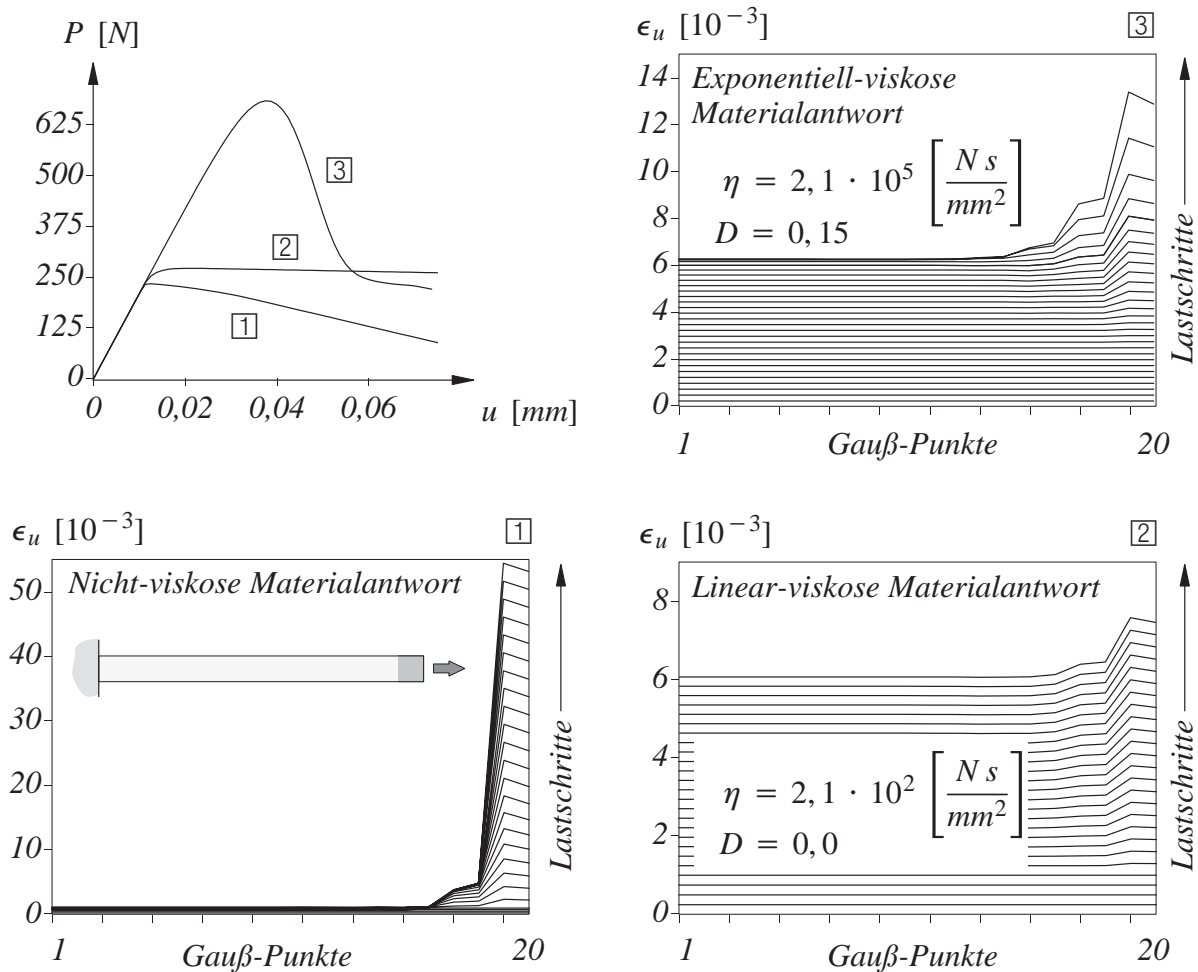


Bild 6.12 Viskoplastisches Modellproblem: Spannungs-Verschiebungs-Diagramm und zugehörige Verzerrungen an den Integrationspunkten

grammen in Bild 6.12, die die Verzerrungen bis zu einer Gesamtverschiebung von 0,06 mm darstellen, leicht zu erkennen.

Insgesamt muss festgehalten werden, dass zwar eine regularisierende Wirkung der viskosen Formulierung nachweisbar ist, jedoch das zugehörige physikalische Problem (statische Belastung, keine Effekte aus Schwinden und Kriechen) durch die Regularisierung verändert wurde. Somit empfiehlt sich diese Vorgehensweise hauptsächlich bei Problemstellungen, in denen viskose Effekte *a priori* zu berücksichtigen sind.

6.6.2 Zum Lokalisierungsverhalten der Materialmodelle

In den nachfolgend angestellten Untersuchungen wird das Lokalisierungsverhalten des Einflächensowie des Mehrflächenmodells im ebenen Spannungszustand anhand der typischen Belastungen der bereits in Kapitel 6.5 (Bild 6.6) vorgestellten einelementigen Modellprobleme (vierknotige, 2×2 -integrierte Verschiebungselemente) diskutiert. Neben der allgemeinen nicht-assozierten Drei-Invarianten-Formulierung *3INA* (siehe Kapitel 5.4, Gleichung (5.42) ff. mit $\alpha \neq \bar{\alpha}$ und $\mu_F = \mu_Q = 0$) wird jeweils noch das assoziierte Drei-Invarianten-Modell *3IA* (mit $\alpha = \bar{\alpha}$ und $\mu_F = \mu_Q = 0$), das assoziierte Zwei-Invarianten-Modell *2IA* (mit $\alpha = \bar{\alpha}$ und $\mu_F = \mu_Q = 1$) und der Vollständigkeit halber das Mehrflächenmodell *MFM* untersucht. In den

Diagrammen (siehe Bild 6.13ff.) ist der Verlust der Stabilität $\det \mathbf{C}_{tan}^{sym} = 0$ mit ● und der Verlust der Elliptizität $\det \mathbf{Q}^{ak} = 0$ mit ○ markiert. Die ▲ [1] kennzeichnen einen Lastpunkt im Spannungs-Verschiebungs-Diagramm, der als Kurve im Lokalisierungsdiagramm dargestellt ist.

Im Lokalisierungsdiagramm ist jeweils die Determinante des akustischen Tensors \mathbf{Q}^{ak} (siehe Kapitel 4.4.1 und Bild 4.7) als Funktion der Raumrichtung des Vektors \vec{n} , ausgedrückt durch den Winkel β zwischen der vertikalen Raumachse und der sich einstellenden Diskontinuität, aufgetragen. Um eine normierte Darstellung zu erhalten, wird sie auf die Determinante des aus dem elastischen Materialtensor ermittelten akustischen Tensors bezogen (siehe Willam, Hansen & Kang [190]):

$$f(\beta, \mathbf{C}^{tan}) = \frac{\det(\vec{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \vec{n})}{\det(\vec{n} \cdot \mathbf{C}^{el} \cdot \vec{n})} = \frac{|\mathbf{Q}^{ak}|}{|\mathbf{Q}_0|} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = f(\beta) \quad (6.98)$$

Einaxialer Zugversuch

Wie in Bild 6.13 dargestellt, liefert die Lokalisierungsanalyse für alle Versionen des Einflächenmodells und für das Mehrflächenmodell (siehe Bild 6.16 oben) wie erwartet eine Lokalisierungsrichtung von $\beta = 90^\circ$ (senkrecht zur Belastungsrichtung). Während bei dem allgemeinen nicht-assozierten Modell *3INA* bereits im Verfestigungsast der Verlust der Elliptizität (Punkt ▲ [2]) zu beobachten ist, zeigen die assoziierten Modelle *3IA*, *2IA* und *MFM* das bekannte und erwartete Zusammentreffen des Verlusts von Elliptizität und Stabilität. Durch die Analyse wird somit das reale Mode I-Versagen zutreffend abgebildet.

Einaxialer Druckversuch

Für den einaxialen Druckversuch (siehe Bild 6.14 und Bild 6.16) wird in allen Versionen diffuses Versagen prognostiziert. Dies widerspricht zunächst dem gängigen Verständnis, wonach Beton unter einaxialem Druck infolge Schubbruch versagt und somit durch die Lokalisierungsanalyse ein entsprechendes Scherband erhalten werden sollte. Dabei wird jedoch nicht berücksichtigt, dass in den Versuchen stets Einflüsse aus der Lagerung der Probe eine signifikante Rolle spielen, wodurch sich der Umschnürungsdruck infolge Reibung oder Zwängung erhöht. Werden diese Einflüsse weitestmöglich ausgeschaltet, so kann ein trennbruchartiges Versagen parallel zur Belastungsrichtung festgestellt werden, das nicht auf ein einzelnes Versagensband beschränkt bleibt. Die Diffusität des Versagens wird von allen Modellen erwartungsgemäß wiedergegeben. Bezüglich der Versagensorientierung kann jedoch nur das Drei-Invarianten-Modell (*3INA* und *3IA*) die in Experimenten festgestellte Versagensrichtung ($\beta = 0^\circ$) näherungsweise reproduzieren. Dabei bildet das nichtassozierte Modell *3INA* die Versuchsergebnisse deutlich ab, während das assoziierte bereits leicht zu gekoppeltem Versagen in Mode I und Mode III tendiert. Die assoziierten Zwei-Invarianten-Modelle neigen zur Vorhersage von diffusem Schubversagen (Mode III) bei $\beta = 45^\circ$, wie es üblicherweise bei duktilen, metallischen Materialien, die durch ausgesprochene Versagensrichtungen entlang der Gitterstruktur des Kristalls geprägt sind, als lokalisiertes Versagen erfolgt.

Es ist anzumerken, dass die Spannungs-Verschiebungsdiagramme der beiden Modelle *3IA* und *2IA* identisch sind, da der Spannungspfad beim Drei-Invarianten-Modell unter Druckbelastung einem Kompressionsversuch entspricht und somit der *Lode*-Winkel einen Wert von $\theta = 60^\circ$ annimmt, womit die Exzentrizität aus der Gleichung der Versagensfläche ausgeblendet wird.

Einfacher Scherversuch

Beim einfachen Scherversuch (siehe Bild 6.15 und Bild 6.16 unten) wird nur die Schubverzerrung γ_{xy} in der Belastungsebene geweckt. Die anderen ebenen Komponenten des Verzerrungstensors sind null. Die durchlaufene Belastungsgeschichte ist gekennzeichnet durch den sogenannten *Reynolds*-Effekt reibungsbehafteter Materialien. Dabei ergeben sich während der Belastung positive Normalspannungen, die hervorgerufen werden durch die unterdrückte inelastische Dilatanz infolge der volumenerhaltenden Randbedingungen. Der dadurch geschaffene Umschnürungsdruck (*confinement*) führt schließlich dazu, dass sich durch die Belastung eine monoton verfestigende Systemantwort ergibt, solange das Versagenskriterium im triaxialen Druckbereich nicht begrenzt ist. Das Stabilitätskriterium $d^2W \neq 0$ bzw. $\det C \neq 0$ ist zunächst immer erfüllt.

Für das nichtassozierte Drei-Invarianten-Modell (*3INA*) liefert die Lokalisierungsanalyse ein Scherband mit den möglichen Winkeln $\beta = 124^\circ/158^\circ$ (bzw. $\beta = 22^\circ/56^\circ$, sofern die Belastungsrichtung entgegengesetzt angenommen wird). Weil diese Lokalisierung in einer diskontinuierlichen Verzweigung von nur einem Element nicht abgebildet werden kann, ist die Systemantwort infolge der Randbedingungen weiter verfestigend. Bemerkenswert ist wiederum, dass die Lokalisierung des nichtassozierten Modells bereits im ansteigenden Ast stattfindet (vergleiche Kapitel 4.4.1). Sämtliche assoziierten Modelle zeigen dagegen wie erwartet kein ausgeprägtes lokales Versagen, sondern versagen diffus. Die jeweilige Versagensrichtung deutet auf einen gemischten Mode aus Schub und Druck hin und liegt im Bereich von $\beta = 115^\circ\text{--}165^\circ$ für *3IA*- und bei $\beta = 140^\circ$ für *2IA*- und *MFM*-Modell.

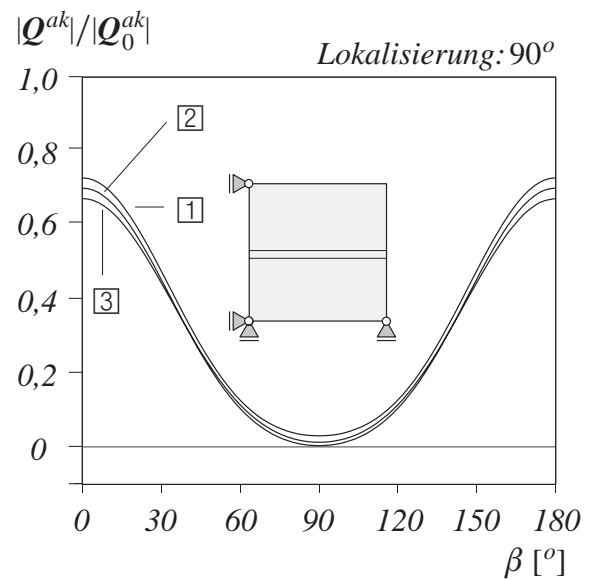
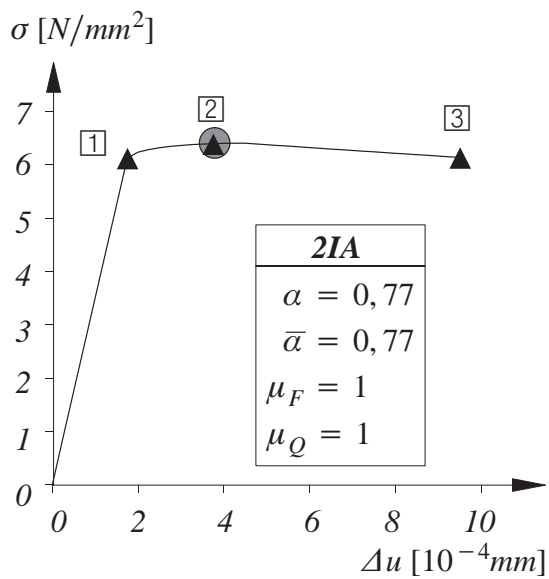
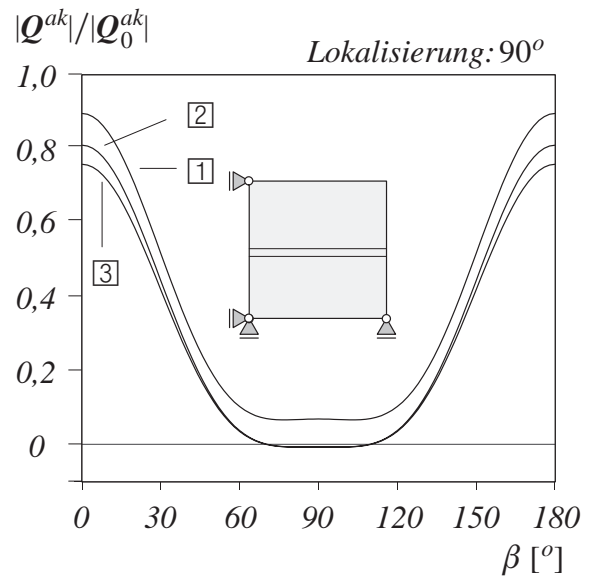
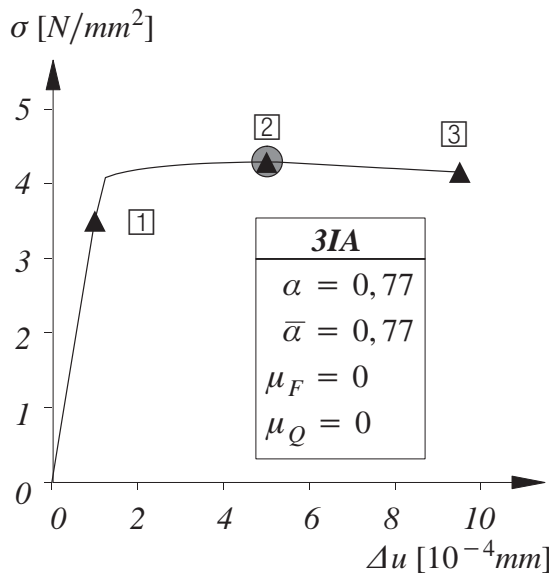
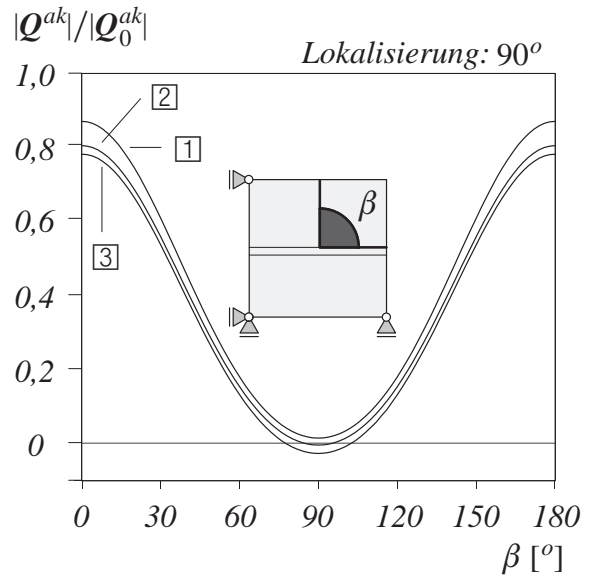
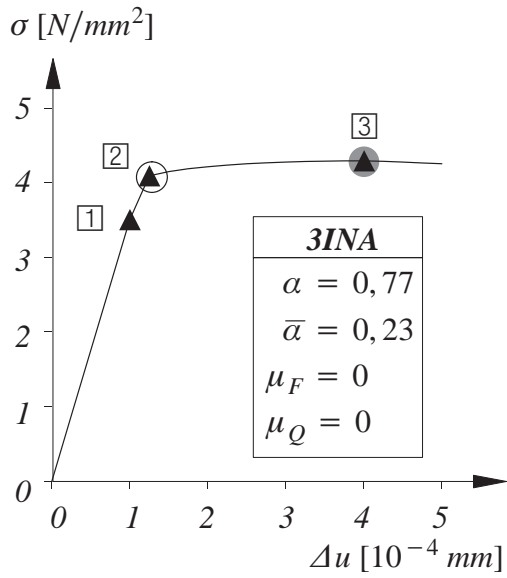


Bild 6.13 Lokalisierungsuntersuchungen: Einaxialer Zugversuch (uniaxial tension)

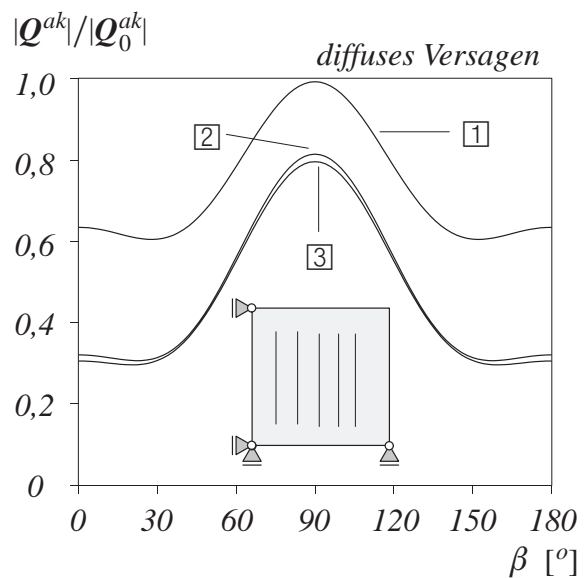
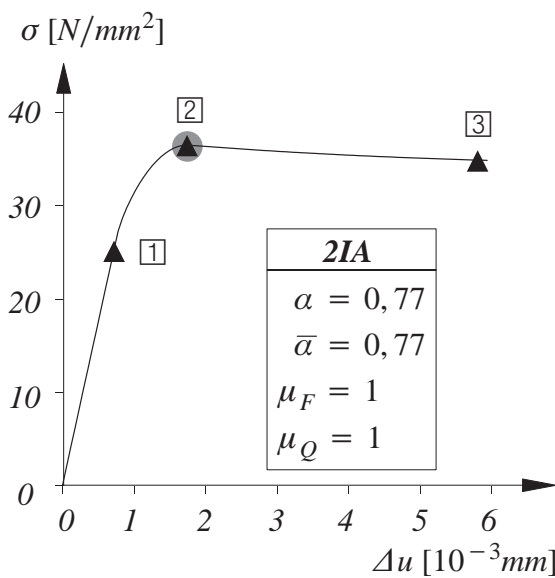
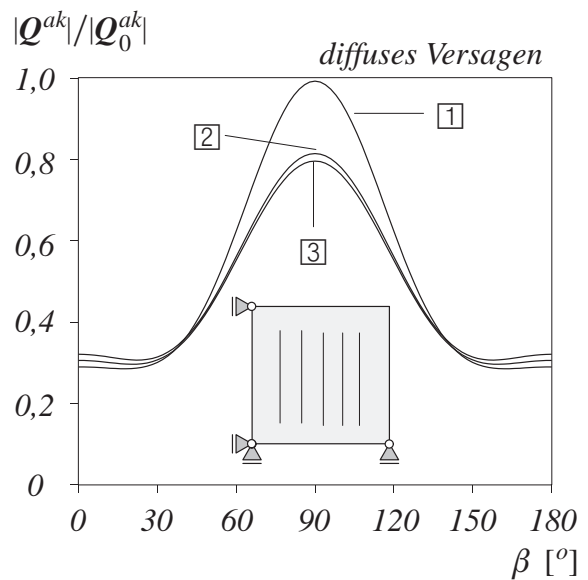
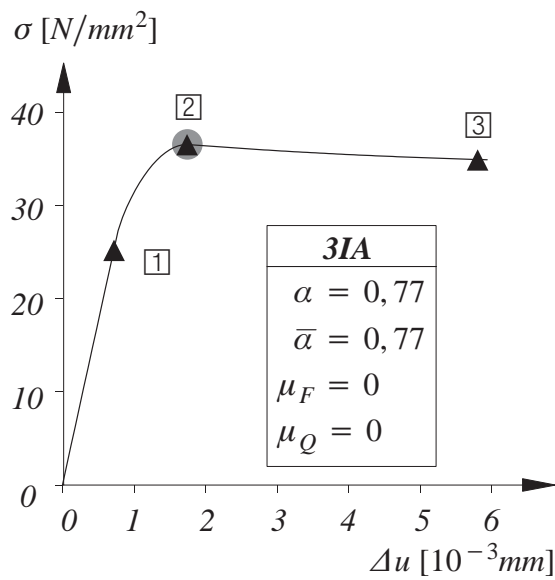
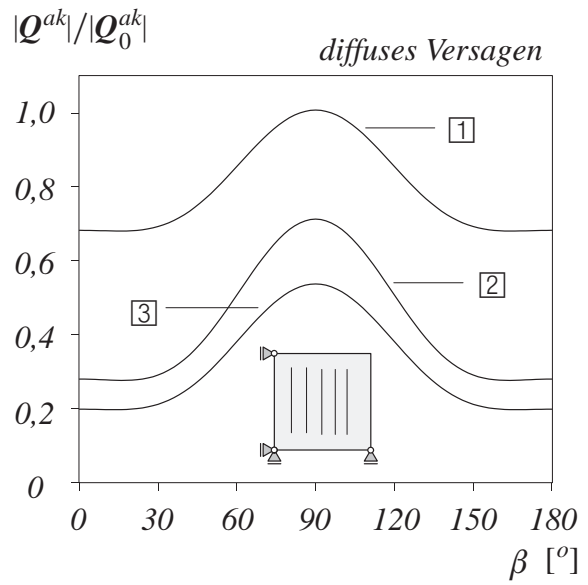
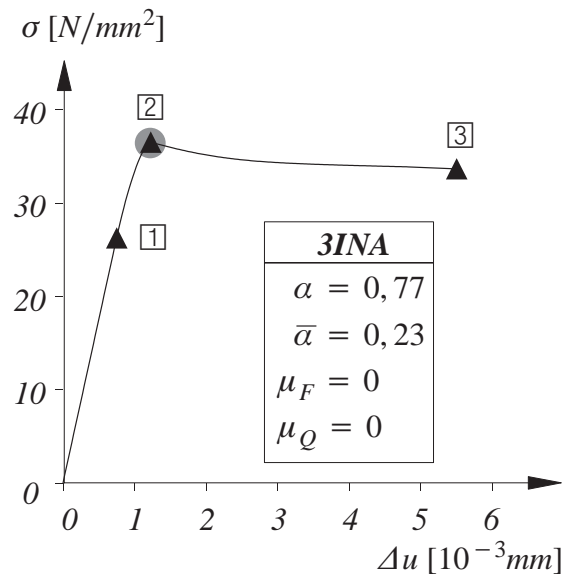


Bild 6.14 Lokalisierungsuntersuchungen: Einaxialer Druckversuch (uniaxial compression)

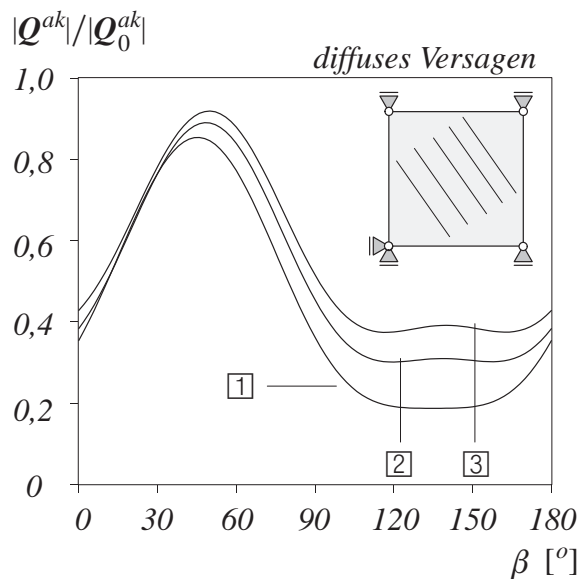
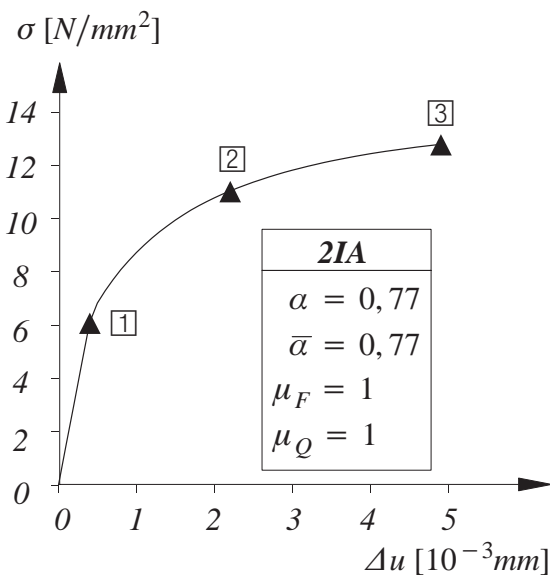
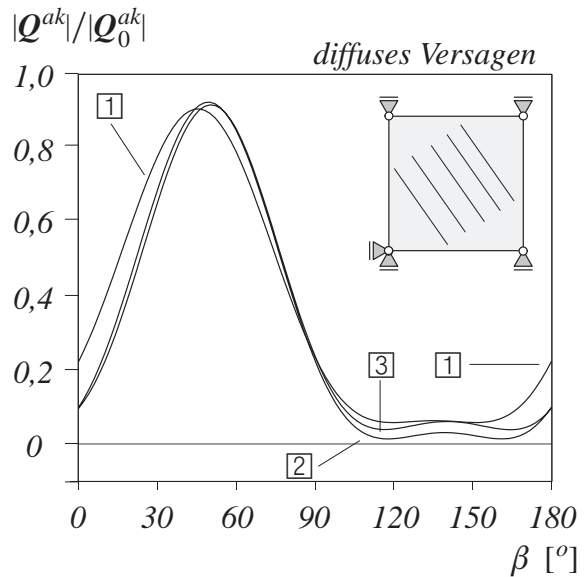
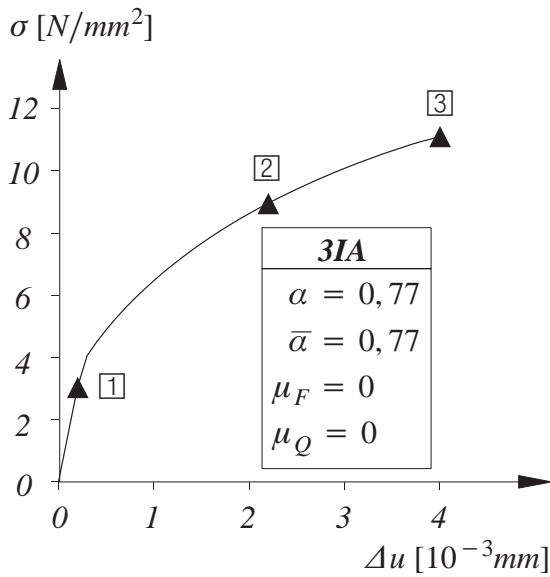
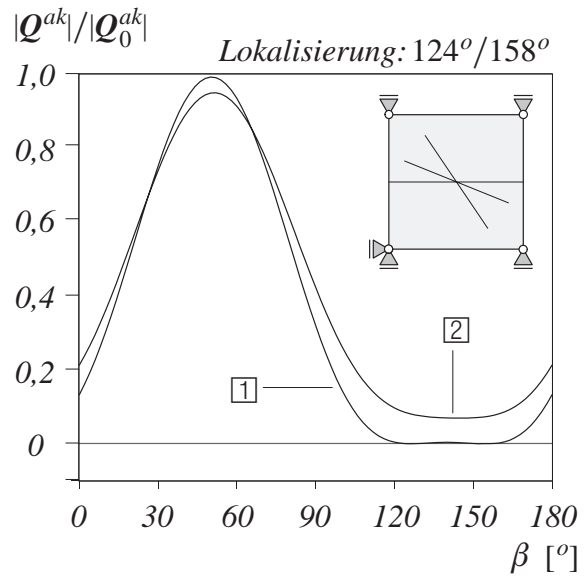
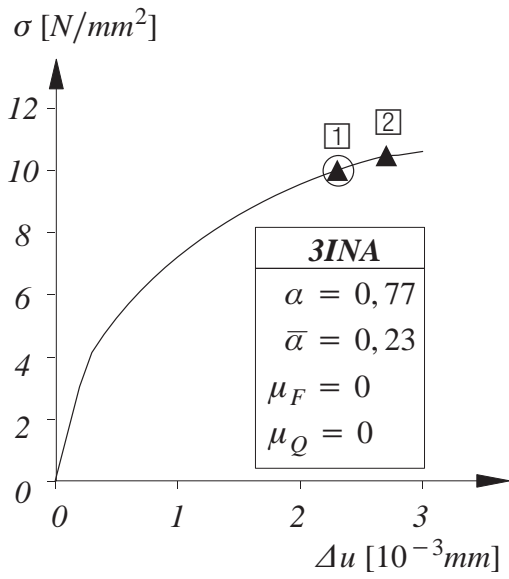


Bild 6.15 Lokalisierungsuntersuchungen: Einfacher Scherversuch (simple shear)

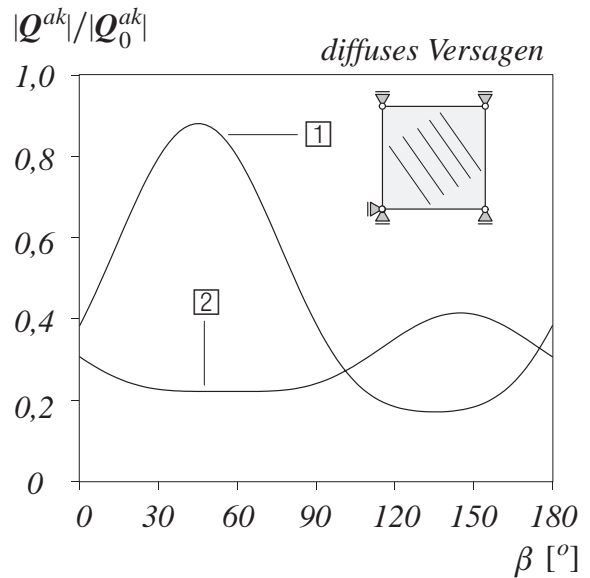
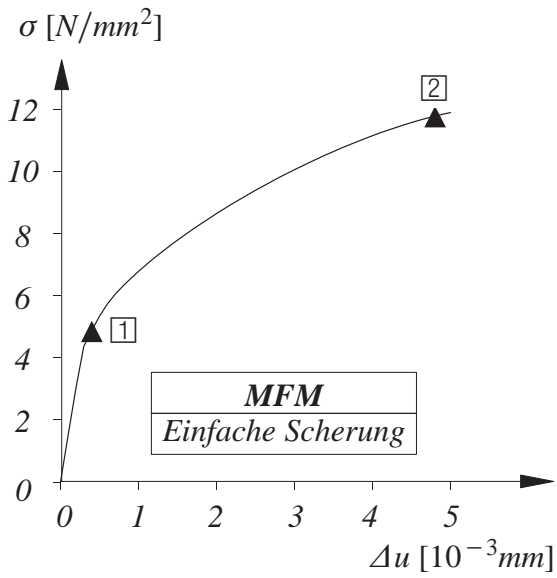
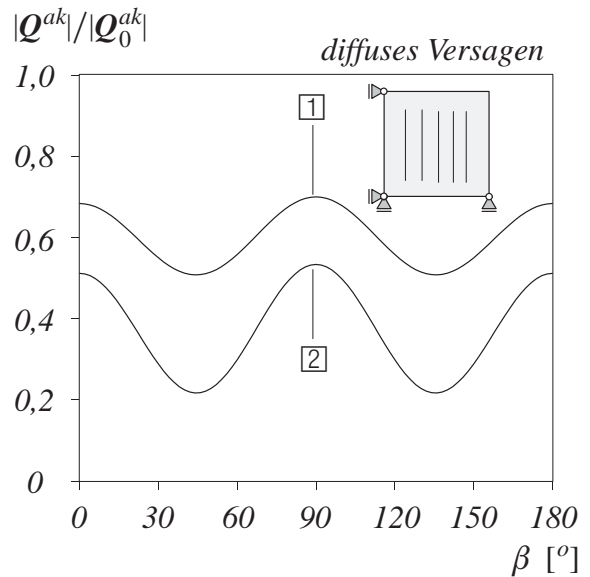
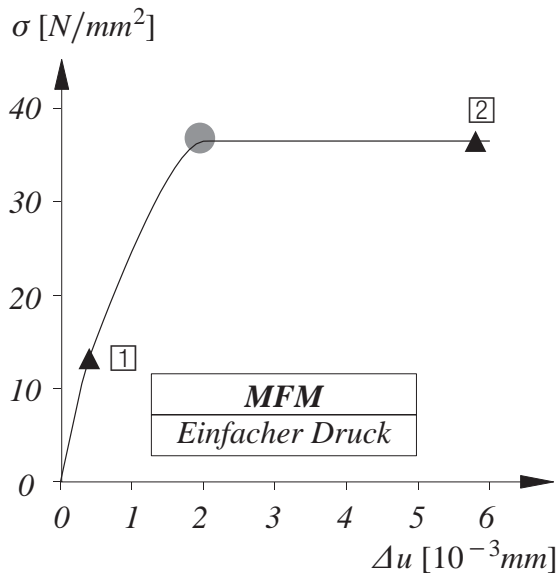
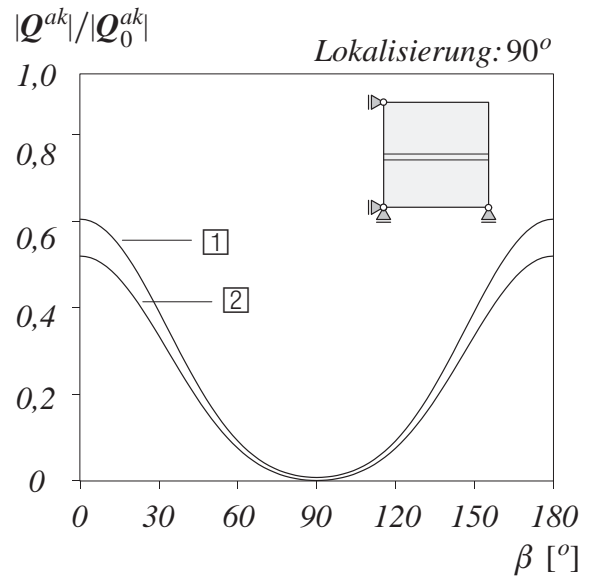
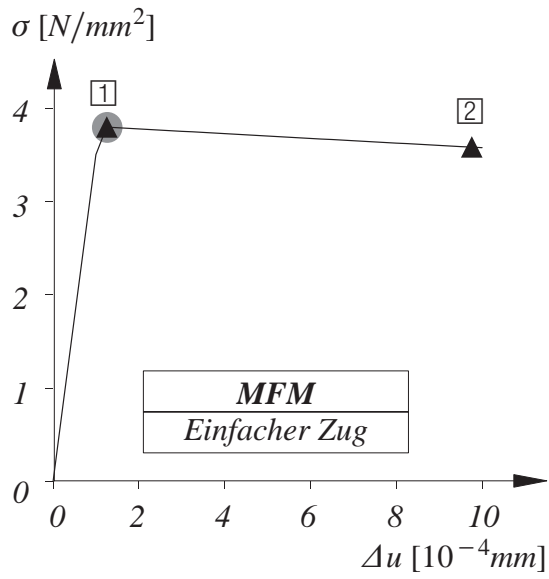


Bild 6.16 Lokalisierungsuntersuchungen: Mehrflächenmodell

7 Anwendungsbeispiele

In Kapitel 6.6 konnten Lokalisierungsphänomene sowie einfache Geometrien (siehe Kapitel 5.5) mit dem vorgestellten nichtassozierten Einflächenmodell untersucht werden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass kein ausreichend stabiler Algorithmus zur Lösung des lokalen Problems erreicht wurde, um Strukturen erfolgreich zu analysieren. Hierfür ist insbesondere hinsichtlich der Stabilität des Projektionsalgorithmus im Apexbereich und hinsichtlich der Konvergenz des Verfahrens im numerischen Sinne, noch weiterer Forschungsbedarf notwendig, wogegen jedoch die Implementierung des algorithmischen Tangentenoperators die für eine konsistente Linearisierung im Rahmen des *Rückwärts-Euler*-Verfahrens charakteristische quadratische Konvergenzrate aufweist.

In den folgenden Abschnitten wird daher lediglich das ebenfalls vom Verfasser für die Anwendung auf dreidimensional orientierte Schalenstrukturen überarbeitete und implementierte Mehrflächenmodell (siehe Kapitel 5.3) zur numerischen Simulation einiger experimenteller Untersuchungen verwendet, dessen Entwicklung für zweidimensionale Finite Elemente Berechnungen des ebenen Spannungszustands auf Menrath [121] zurückgeht.

7.1 Zentrisch belastete Stahlbetonplatte

In einer ersten Studie soll das Mehrflächenmodell für die Simulation des Versuchs einer konzentriert gelagerten Quadratplatte unter zentrischer Einzellast verwendet werden. Dieses Experiment wurde bereits 1967 von McNeice [118] durchgeführt und war im Laufe der Jahre immer wieder Gegenstand vielfältiger numerischer Untersuchungen. Insbesondere existieren entsprechende Arbeiten von Lin & Scordelis [108], Zahlten [93] und Krätzig & Mancevski [196]. Die Versuchsgeometrie mit den in der Berechnung verwendeten Materialparametern ist in Bild 7.1 gegeben. Im Experiment wurde die Durchbiegung der Platte am Punkt A, 3 in. vom Lastpunkt, gemessen.

Für die geometrisch und materiell nichtlineare Simulation wird ein Viertel der Platte mit 6x6 achtknotigen finiten Elementen ($2 \times 2 \times 2$ Gauß-Punkte je Schicht) in der Ebene diskretisiert. Die Plattenhöhe wird durch fünf Schichten eines C^0 -kontinuierlichen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung (*multi-layer*-Formulierung mit linearem Ansatz, vergleiche Kapitel 2.4.1) aufgelöst. Damit repräsentiert jeder Knoten 18 Freiheitsgrade (3 Translationen sowie zusätzlich 3x5 Differenzvektorkomponenten). Die Gesamtgröße des Randwertproblems liegt damit bei 2237 DOF. Sowohl die konzentrierte Einzellast als auch die Lagerkräfte wurden für eine wirk-

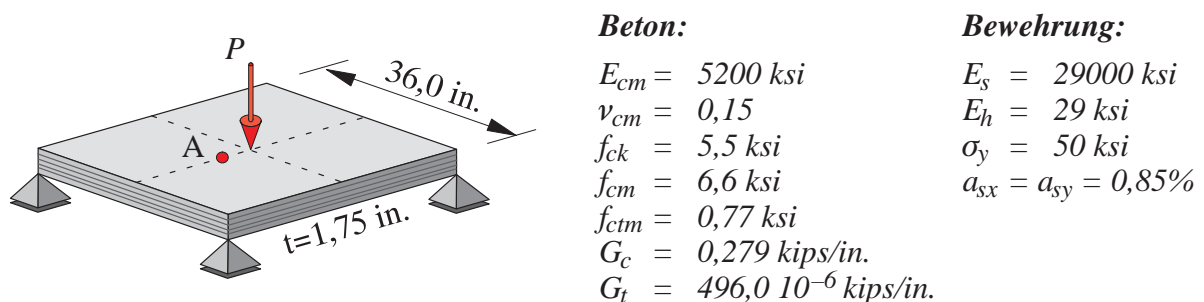


Bild 7.1 Platte unter Einzellast nach McNeice: Geometrie und Materialparameter

lichkeitsnahe Lasteinleitung über die direkt angrenzenden Elementknoten verschmiert. Hinsichtlich der Lagerung ist bei allen in dieser Arbeit angeführten Beispielen zu erwähnen, dass die verwendete Schalenformulierung zwar prinzipiell eine Lagerung an der Oberfläche zulässt, hierfür jedoch abhängige Verschiebungsrandbedingungen (*kinematic constraints*) auf der Ebene der globalen Steifigkeitsmatrix einzuführen sind. Für die geschichtete Schalenformulierung gilt entsprechendes. Da diese numerisch und algorithmisch sehr aufwändig sind, wird jeweils die Schalenmittelfläche gelagert.

Die einzelnen Schichthöhen betragen beginnend mit der untersten Lage 16,0 %, 15,0 %, 38,0 %, 15,0 % und 16,0 % der Plattendicke von 1,75 in. (entsprechend 4,4 cm), wobei die zweite Schicht entsprechend den Angaben in Bild 7.1 mit einem Bewehrungsgrad von 0,85 % bezogen auf die Gesamthöhe in beide Richtungen gleichmäßig bewehrt wird. Der Schwerpunkt der Bewehrung, gemessen von der Unterseite der Platte, liegt demnach bei 0,41 in. Die sich aus der zweilagigen kreuzweisen Bewehrungsanordnung ergebenden Unterschiede des inneren Hebelarms werden nicht berücksichtigt. Der Bewehrungsstahl wird, da keine detaillierten Angaben über die Stahlqualität vorliegen, durch ein bilineares Evolutionsgesetz mit Verfestigung (vergleiche Kapitel 5.6) verschmiert innerhalb des finiten Elements modelliert. Der Verfestigungsmodul E_h wird, wie auch die weiteren Materialparameter für den Beton, entsprechend dem Vorschlag von Zahlen [196] gewählt. Für die Abschätzung der Bruchenergien im Zug- als auch im Druckbereich kommen die in Tabelle 5.1 vorgestellten Ansätze zur Anwendung.

Das Ergebnis der Berechnung ist in Bild 7.2 im Vergleich zu solchen aus der Literatur (siehe [93], [108], [196]) als Last-Verschiebungs-Kurve des Punktes A aufgetragen. Wie sich zeigt, liefert das Mehrflächenmodell auch nach dem Einsetzen nichtlinearen Verhaltens im Versuch weiterhin eine elastische Strukturantwort, wie es auch im Ergebnis von Lin & Scordelis [108] zu beobach-

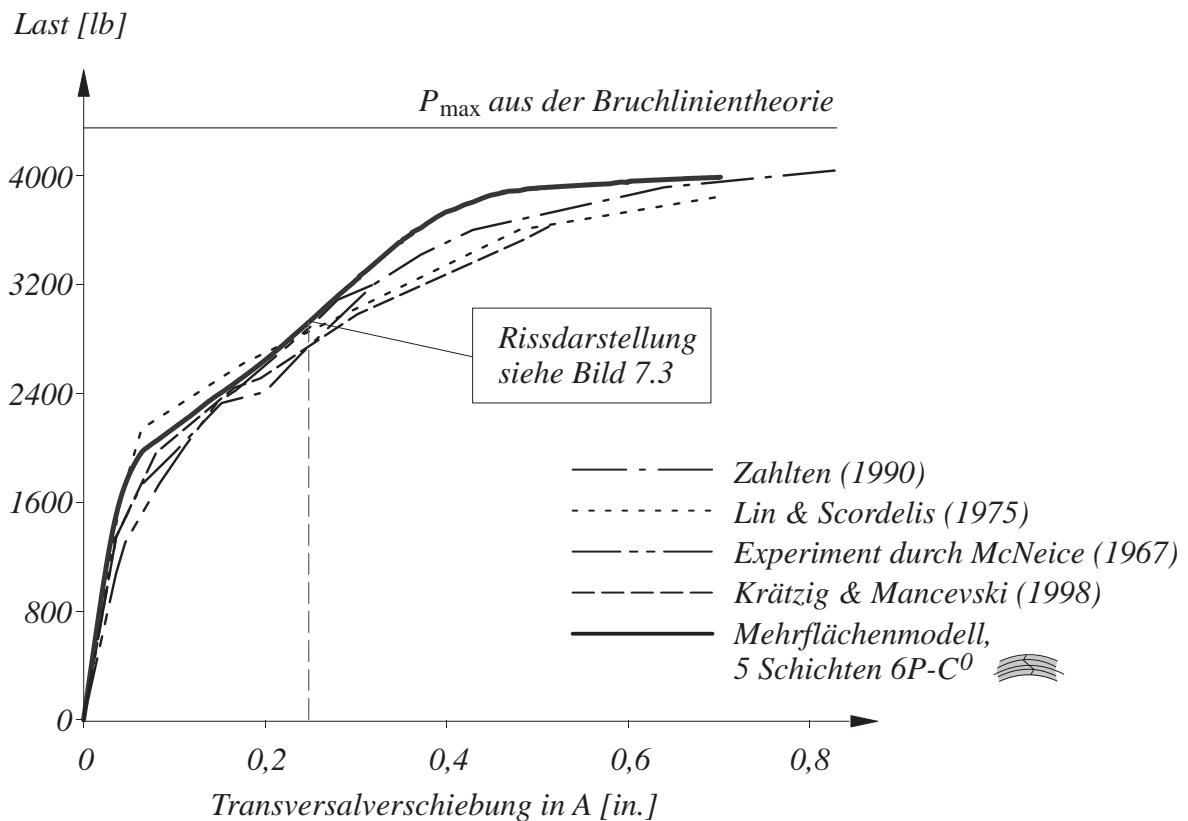


Bild 7.2 Last-Verschiebungs-Kurven unterschiedlicher Autoren im Vergleich (2237 DOF)

ten ist. Nach Zahlten [196] ist dies auf eine zu hoch angesetzte Zugfestigkeit des Betons zurückzuführen. Tatsächlich liefert die Abschätzung der Zugfestigkeit mit den Gleichungen aus Tabelle 5.1 eine Zugfestigkeit von $f_{ctm} = 0,49 \text{ ksi}$. Der Zustand II wird dagegen im Vergleich zum Experiment ausreichend genau abgebildet. Während der Versuch bei 3200 lb abgebrochen wurde, liefern die numerischen Untersuchungen auch eine in diesem Falle hypothetische, weil nicht mehr im Versuch ermittelte Strukturantwort bis in den Zustand III. Der hierfür im Diagramm dargestellte Verlauf ist hauptsächlich vom Verfestigungsmodul abhängig und kann in Unkenntnis der tatsächlichen Arbeitslinie des verwendeten Stahls und der zugrunde liegenden Annahme einer linearen Verfestigung des Bewehrungsmodells nicht weiter interpretiert werden. Darüber hinaus ist zu bemerken, dass durch das Evolutionsgesetz des Stahls auch keine materielle Entfestigung (Abnehmen der Last) auf Strukturebene auftreten kann.

In Bild 7.3 ist die Rissentwicklung über die Querschnittshöhe an dem analysierten Plattenviertel für eine Mittendurchbiegung von 0,25 in. dargestellt. Dabei wird dem phänomenologischen Ansatz des Betonmodells folgend die jeweils freigesetzte Menge an Bruchenergie bezüglich der Haupttrichtungen der in Plattenebene liegenden Spannungen als Riss interpretiert. Entsprechend den Erwartungen bilden sich in den unteren Schichten sukzessive radiale Risse, die sich dann entlang der Symmetrieebene ausrichten. Damit zeigt die vorgestellte Berechnung denselben Versagenszustand wie die Untersuchung von Zahlten [196].

Bemerkenswert ist weiterhin, dass sich für die untersuchte Platte auf Basis der Bruchlinientheorie (siehe insbesondere DIN 1045 (neu) [41]) ein maximales Moment von $m = P/8$ ergibt, wobei ein Versagen entlang der Symmetrieachsen der numerischen Simulation vorausgesetzt wird. Damit lässt sich durch übliche Gleichgewichtsbetrachtungen am Plattenquerschnitt die Maximallast zu $P_{\max} \approx 4350 \text{ lb}$ ermitteln. Es zeigt sich, dass dieser Wert verglichen mit den dargestellten nu-

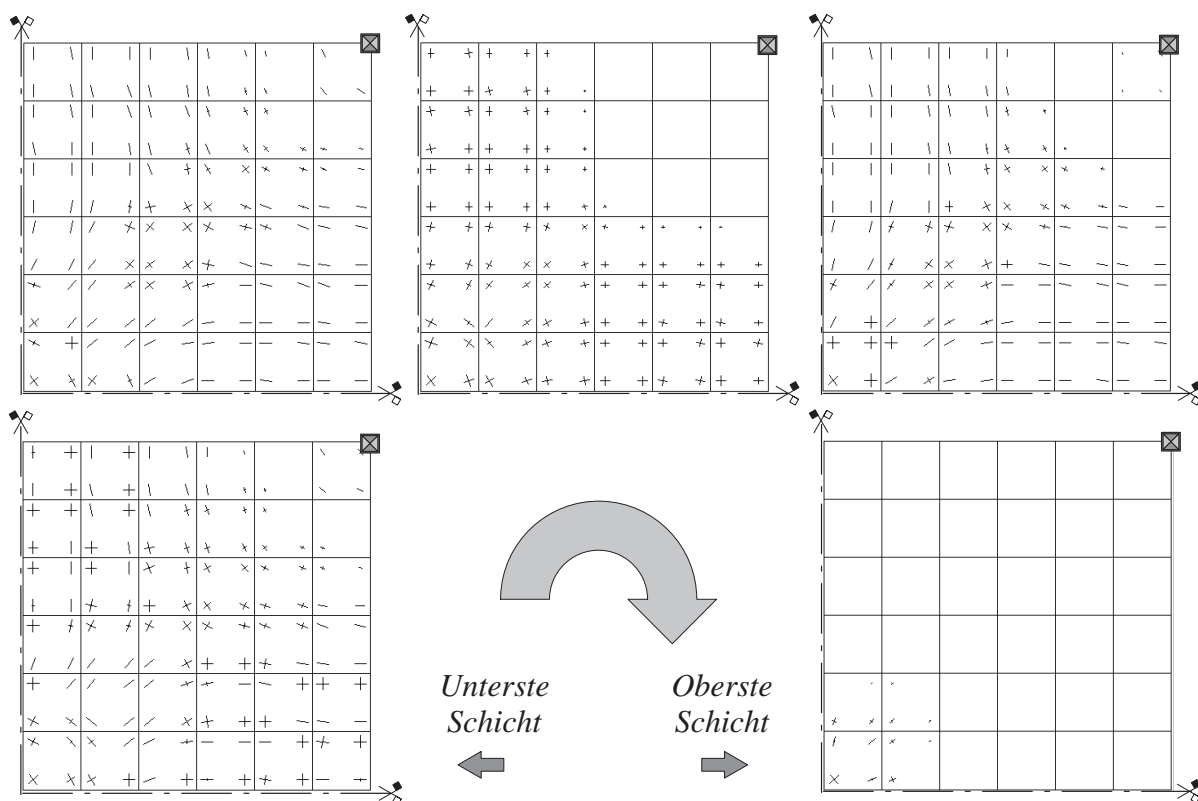


Bild 7.3 Schichtweise Darstellung der Risse bei 0,25 in. Mittendurchbiegung

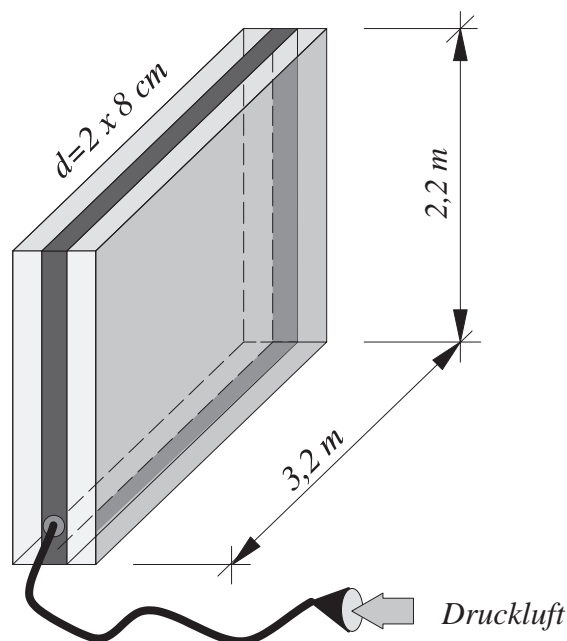
merischen Untersuchungen die Traglast erwartungsgemäß überschätzt und das Verfahren insofern mit Bedacht anzuwenden ist. Weiter ist festzuhalten, dass der *tension-stiffening*-Effekt in dieser Berechnung keine Berücksichtigung in Form eines zusätzlichen Spannungsanteils σ_{ts} entsprechend Kapitel 5.6.4 fand. Durch die Unterteilung der Schalendicke in fünf *Elementschichten*, wodurch ein Ebenbleiben des Querschnitts nicht mehr vorausgesetzt wird (Aufgabe der *Bernoulli*-Hypothese in der Balkenalogie), kann der Effekt durch die Diskretisierung abgebildet werden (vergleiche Crisfield [34]). Wie sich anhand der weiteren Beispiele jedoch zeigen wird, ist auch eine Diskretisierung mit nur drei C^0 -kontinuierlichen Elementschichten zur Erfassung des Tragverhaltens ausreichend.

7.2 Flächig belastete Stahlbetonplatte

Im Jahr 1970 wurden von Franz [53] Belastungsversuche an vierseitig frei drehbar gelagerten, flächig belasteten Stahlbetonplatten unternommen. Um eine gleichmäßige und symmetrische Flächenlast zu gewährleisten, wurden jeweils zwei Platten vertikal aufgerichtet, in einem Abstand von 5,8 cm an den Rändern gegenseitig gelenkig verbunden und der dazwischen entstandene Hohlraum mit Druckluft als Belastungsmedium beaufschlagt. So wurden in einem Belastungsversuch jeweils zwei identisch bewehrte und aus der gleichen Materialcharge bestehende Platten lastgesteuert und nahezu unter Ausschluss des Eigengewichts untersucht. Die äußeren Plattenabmessungen betragen 2,2 m x 3,2 m, wovon jedoch jeweils 10 cm je Rand als Montagebereich vorgesehen waren. Die Stützweiten betragen daher 2,0 m bzw. 3,0 m bei einer Plattendicke von 8 cm.

Die hier zu untersuchenden Betonplatten waren unter Verwendung zweier unterschiedlicher Stahlgüten (BSt III K und BSt IV R) jeweils beidseitig kreuzweise bewehrt: Die untere (äußere) Bewehrungslage durchgehend, die obere (innere) Lage dagegen nur im Randbereich. Eine detaillierte Aufschlüsselung für eine verschmierte Modellierung ist in Bild 7.5 gegeben.

Als einziger Materialparameter für den Beton wird in [53] die Betondruckfestigkeit der hier untersuchten Platte Nr. 5.2 mit $f_{ck} = 31,2 \text{ N/mm}^2$ angegeben. Aus der Angabe der Sieblinie lässt sich darüber hinaus der Beiwert der Bruchenergie im Zugbereich $G_{F0} = 0,058$ bestimmen, womit $G_t = 0,13 \text{ N/mm}$ festgelegt werden kann. Die weiteren Materialparameter werden entsprechend Tabelle 5.1 ermittelt. Jähmig [75] zeigt, dass die auf dieser Basis ermittelte Zugfestigkeit von $f_{ctm} = 2,97 \text{ N/mm}^2$ eine Überschätzung des Zustands I in der Simulation zur Folge hat und schlägt daher eine Abminderung der Zugfestigkeit f_{ctm} um bis zu 50 % vor (vergleiche Bild 7.4). Entsprechend der Versuchsbeschreibung [53] kann dies durch die nicht unerhebliche Vorschädigung der Platte durch den Transport in die senkrechte Versuchseinrichtung motiviert werden.



Stahlbewehrung BSt III K:

$$\begin{aligned} E_s &= 210000,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ E_h &= 8200,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ f_y &= 422,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Stahlbewehrung BSt IV R:

$$\begin{aligned} E_s &= 210000,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ E_h &= 6500,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ f_y &= 500,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Beton:

$$\begin{aligned} E_{cm} &= 32.000,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ \nu_{cm} &= 0,2 \text{ [-]} \\ f_{cm} &= 33,0 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ G_c &= 50,0 \text{ [N/mm]} \\ f_{ctm} &= 1,6 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ G_t &= 0,13 \text{ [N/mm]} \end{aligned}$$

Bild 7.4 Versuchsaufbau und Materialparameter

Darüber hinaus muss die Unsicherheit, mit der die Zugfestigkeit f_{ctm} und im Übrigen auch die Zug-Bruchenergie G_t infolge der Unkenntnis des tatsächlichen Materialwerts behaftet ist, in diesem Zusammenhang betont werden. Alle Materialparameter sind in Bild 7.4 zusammengefasst, wobei anzumerken ist, dass der Bewehrungsstahl in der Simulation durch eine bilineare Arbeitslinie erfasst wurde.

Das Last-Verformungsverhalten wurde im Versuch in der Plattenmitte aufgezeichnet und ist in Bild 7.6 wiedergegeben. Dabei wurde die Belastung im Versuch stufenweise aufgebracht und die Verformung jeweils nach 15 min. Haltezeit abgelesen. Bei einer Last von ca. 30 kN/m^2 wurde die Versuchsplatte je dreimal ent- und belastet, bevor die Last weiter gesteigert wurde. Für die numerische Simulation wird zunächst ein Plattenviertel mit insgesamt 30 achtknotigen finiten Elementen in drei Schichten diskretisiert. Dabei bedingte die Schwerpunktlage der Bewehrung äußere Schichthöhen von jeweils 3,6 cm und eine mittlere unbewehrte Schicht von 0,8 cm. Für die durchgeführte geometrisch und materiell nichtlineare Analyse wurde der Randüberstand von 10 cm ebenfalls modelliert und entsprechend den anliegenden Feldern bewehrt.

Anhand dieser Platte sollen die Effekte unterschiedlicher Ansätze des Schalenelements in Dickenrichtung untersucht und verdeutlicht werden. Zum einen wird daher die bereits im vorigen Beispiel angewendete Schichtung mittels eines linearen Ansatzes in Dickenrichtung auf die materiell notwendigen drei Schichten angewendet ($6P-C^0$). Die Änderung der Schalendicke wird folglich in einem trilinearen Ansatz erfasst und führt auf 12 Freiheitsgrade je Elementknoten (siehe Bild 2.4, Skizze [1]). Alternativ kommt die bereits in Kapitel 2.4.2 erläuterte Sieben-Parameter-Theorie zur Anwendung (vergleiche Bild 2.4 Skizze [2]), deren erweiterter linearer Verzerrungsansatz in Dickenrichtung eine zumindest hinsichtlich der Dickenordinate vergleichbare Diskretisierung (linear in den Verzerrungen) bei lediglich sechs Freiheitsgraden und einer *Elementschicht* bietet ($7P-C^1$). Der EAS-Parameter wird bekanntermaßen auf Elementebene kondensiert und trägt nicht zu einer größeren Anzahl globaler Unbekannter bei. Insbesondere für einen Vergleich zu den Ergebnissen der Sieben-Parameter-Theorie wird der EAS-Ansatz für einen Berechnungslauf mit nur einer *Elementschicht* ausgeschaltet ($6P-C^1$). Sämtliche Untersu-

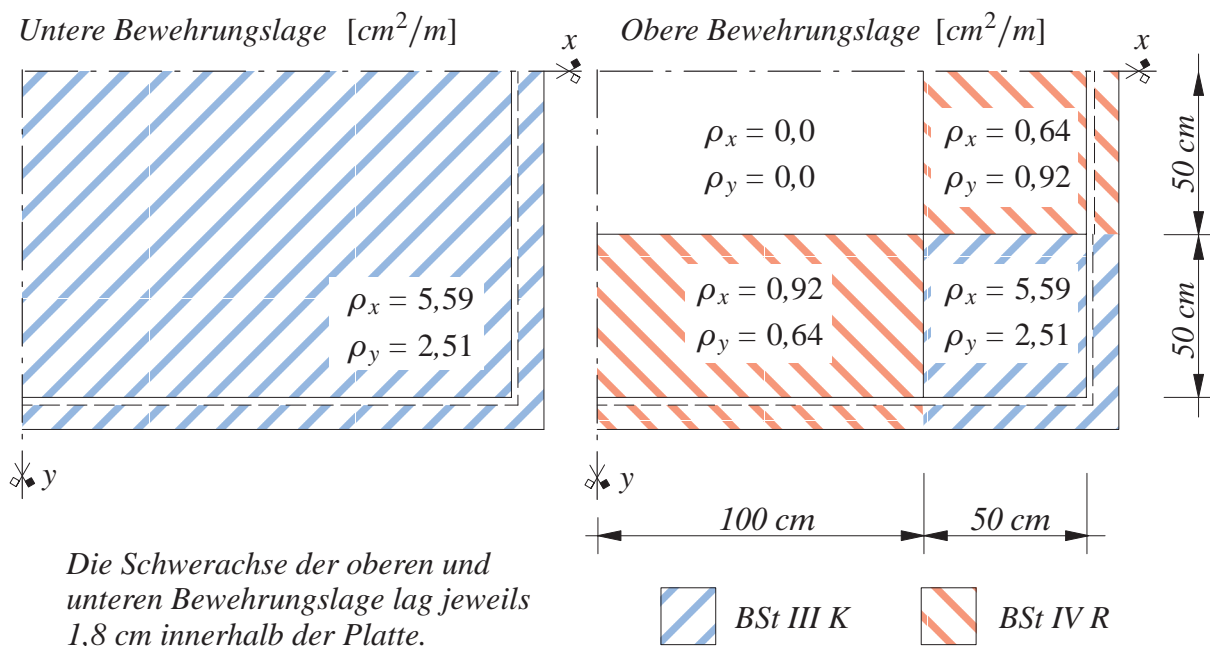


Bild 7.5 Bewehrungsanordnung (Viertelsystem)

chungen werden mit denselben Materialparametern durchgeführt, wobei lediglich die Zugfestigkeit zur besseren Approximation des Versuchsergebnisses abgemindert wird (siehe Bild 7.6). Um die Überschätzung des Strukturverhaltens im Zustand I bei einer Zugfestigkeit f_{ctm} nach Tabelle 5.1 zu verdeutlichen, wird zudem das Ergebnis eines Berechnungslaufs mit dreischichtigem C^0 -kontinuierlichen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung und $f_{ctm} = 2,97 \text{ N/mm}^2$ angegeben ($6P-C^0$).

Wie aus Bild 7.6 ersichtlich ist, können sowohl die Berechnung $6P-C^0$ als auch $7P-C^1$, beide mit verminderter Zugfestigkeit, das Versuchsergebnis ausreichend genau abbilden. In beiden Fällen werden unter Umständen vorhandene *Poisson-Dicken-Locking*-Effekte durch den höheren Ansatz der Verschiebungen bzw. Verzerrungen in Dickenrichtung weitgehend vermieden. Infolge des sehr homogenen Tragzustands macht sich darüber hinaus auch die Einschränkung auf die *Bernoulli*-Hypothese im Vergleich zur höheren Auflösung in Dickenrichtung der $6P-C^0$ -Berechnung mit trilinearen Ansätzen auch in der Plattenebene nicht bemerkbar. Es ist jedoch zu erwarten, dass die beiden Lösungen bei weiterer Lastzunahme und Erreichen des Zustands III zunehmend auseinander driften. Der Versuch selbst wurde aus Sicherheitsgründen bereits vor Erreichen des Zustandes III abgebrochen.

Der Berechnungslauf $6P-C^1$ ohne EAS-Ansatz liefert mit zunehmendem Lastfaktor die erwartete steifere Strukturantwort. Jedoch ist der Einfluss bezogen auf die Unsicherheiten der sensiblen Materialparameter f_{ctm} und G_t sowie der nur geringen Deformationen bei Betontragwerken erfreulich gering. Anhand der Rissbildung, die in Bild 7.7 jeweils für den untersten sowie den obersten Integrationspunkt des Modells $6P-C^0$ ($f_{ctm} = 1,6 \text{ N/mm}^2$) zu verschiedenen Belas-

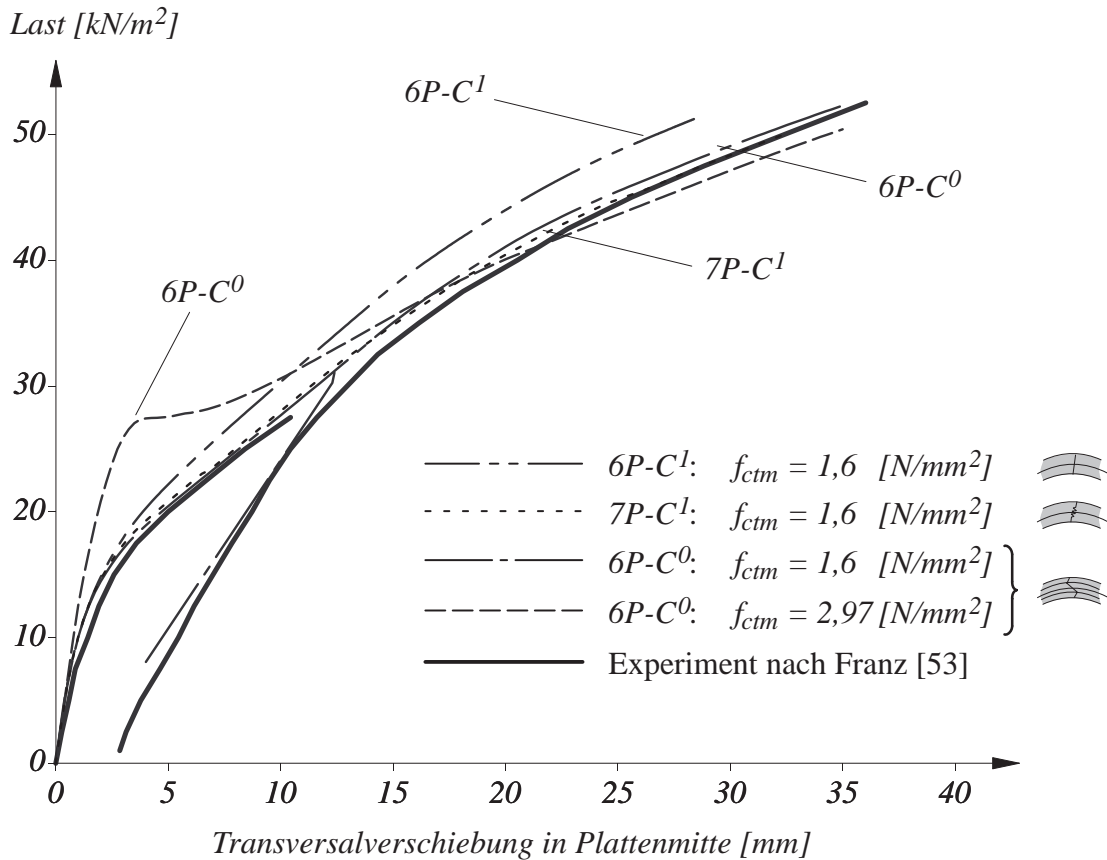
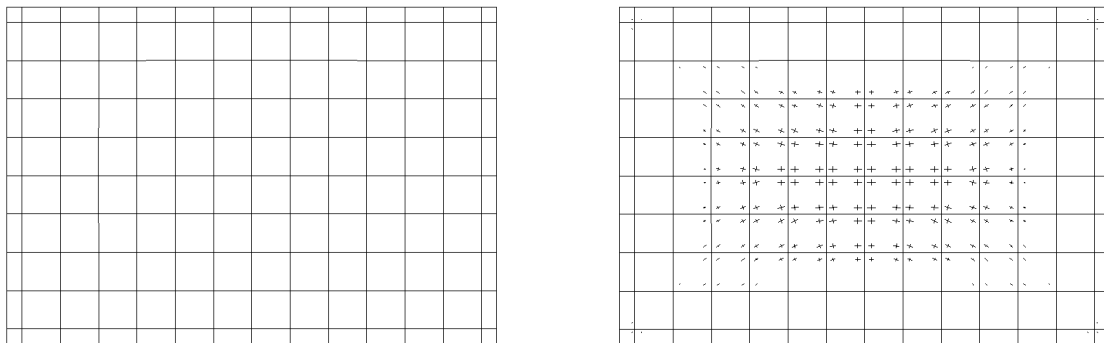


Bild 7.6 Last-Verschiebungs-Diagramm des Versuchs 5.2 (1435 DOF)

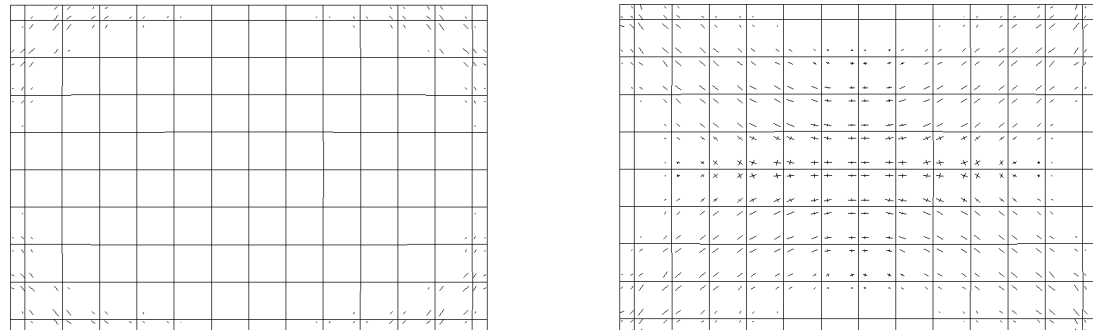
tungszeitpunkten dargestellt ist, kann der Versagensmode der Platte studiert werden. Dabei zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem Rissbild aus dem Versuch (siehe Bild 7.8).

Zur Simulation von Ent- und Belastungszyklen wird in der numerischen Simulation dieses Beispiels ($6P-C^0$) der skalare Schädigungsparameter $d_{user} = 0,35$ gewählt (siehe Gleichung (5.75)). Es zeigt sich, dass damit der Entlastungsast des Plattenversuchs ausreichend genau abgebildet werden kann, jedoch bezüglich des einaxialen Zugversuchs aus Kapitel 5.6 (Mehrflächenmodell, vergleiche Bild 5.17), für welchen $d_{user} = 0,2$ zu wählen war, eine gewisse Diskrepanz besteht. Offensichtlich wird der skalare Schädigungsfaktor zur Abminderung des Elastizitätsmoduls sehr

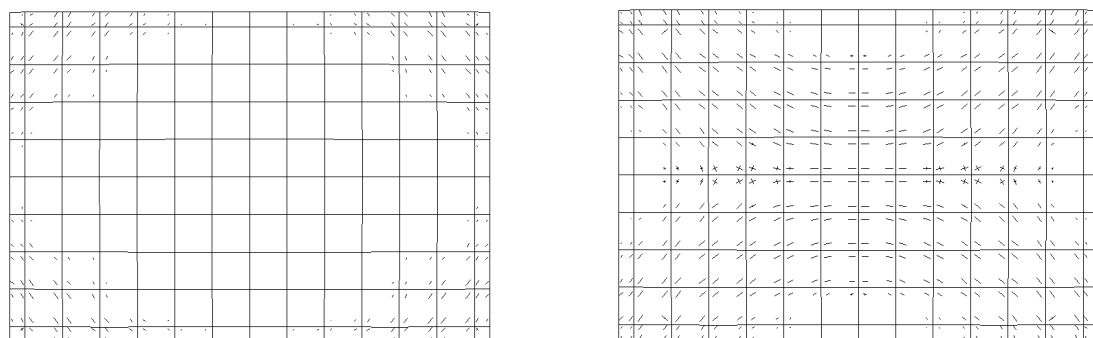
Transversalverschiebung in Plattenmitte: 1,25 mm



Transversalverschiebung in Plattenmitte: 2,50 mm



Transversalverschiebung in Plattenmitte: 5,00 mm



[innen]

[außen]

Bild 7.7 Rissentwicklung der Simulation an der Innen- und Außenseite der Platte

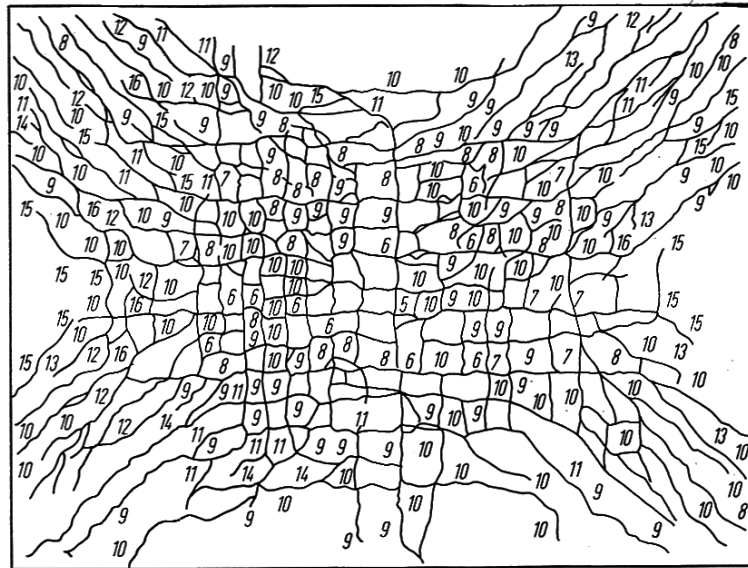


Bild 7.8 Rissbild der Außenseite (Unterseite) der Platte nach Ende des Versuchs

stark durch die Problemstellung dominiert, was aufgrund seiner einfachen skalaren Natur verglichen mit höherwertigen Ansätzen auf Basis von Schädigungstensoren auch zu erwarten gewesen war. Trotzdem kann im Vorgriff auf Kapitel 7.5 bemerkt werden, dass mit $d_{user} = 0,35$ auch die dortigen zyklischen Belastungsversuche an einem U-Profil simuliert werden können.

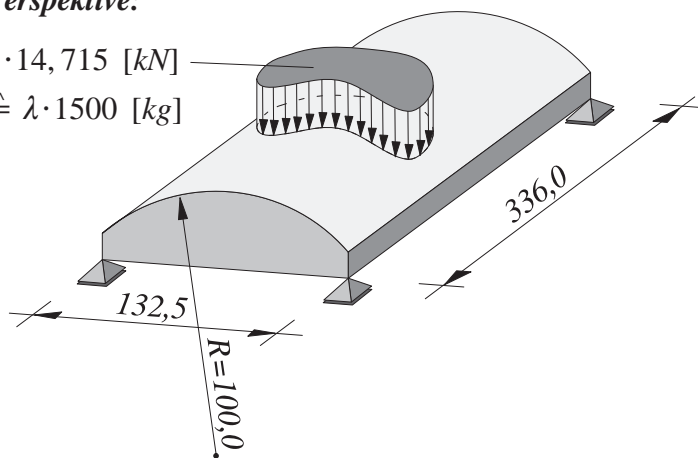
7.3 Kreiszyinderschale mit Randträger

Eine Serie von elf konzentriert gelagerten Tonnenschalen mit Randträgern wurden von Bouma et al. ([19], [158]) zwischen 1957 und 1961 untersucht. Die mit einer dem Eigengewicht proportionalen Gleichflächenlast beaufschlagten Versuchsschalen waren Modelle wirklicher Schalen im Maßstab 1:8 und wurden insbesondere hinsichtlich unterschiedlicher Bewehrungsgrade und Bewehrungsdurchmesser untersucht. Die Schale A2 der Versuchsserie soll als weiteres Beispiel für eine geometrisch und materiell nichtlineare numerische Simulation vorgestellt werden. Die Geometrie- und Materialdaten der Schale A2 sind in Bild 7.9 dargestellt.

Perspektive:

$$\lambda \cdot 14,715 \text{ [kN]}$$

$$\hat{=} \lambda \cdot 1500 \text{ [kg]}$$



Stahlbewehrung:

$$E_s = 210000,0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$E_h = 21000,0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$f_{sy} = 280,0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

Beton:

$$E_{cm} = 33700,0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$\nu_{cm} = 0,2 \text{ [-]}$$

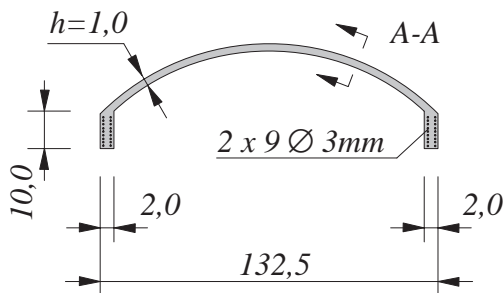
$$f_{cm} = 35,7 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$G_c = 30,0 \text{ [N/mm]}$$

$$f_{ctm} = 3,4 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

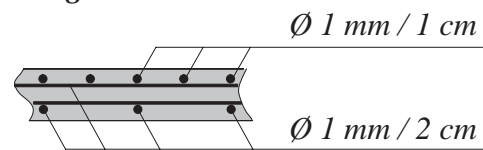
$$G_t = 0,05 \text{ [N/mm]}$$

Schnitt in Umfangsrichtung:



(Alle Angaben in [cm])

Längsschnitt A-A:



Bewehrung des Randträgers:

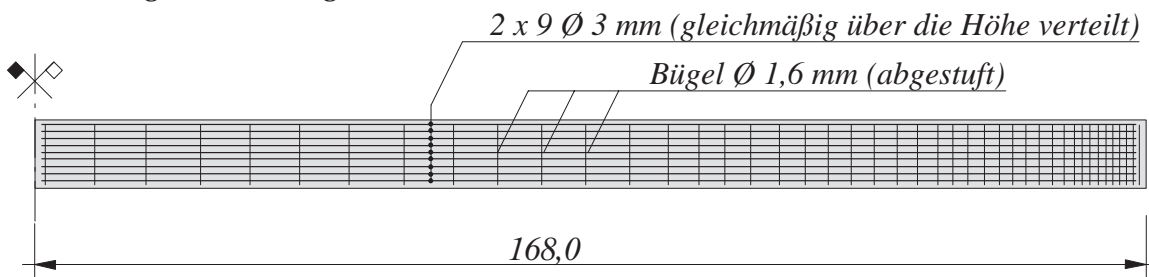


Bild 7.9 Kreiszyinderschale A2: Geometrie- und Materialparameter

Die Randträger waren in Längsrichtung mit $2 \times 9 \varnothing 3$ mm „Bewehrungseisen“ gewöhnlichen Baustahls bewehrt, die gleichmäßig über die Trägerhöhe angeordnet waren. Senkrecht hierzu war eine Bügelbewehrung mit einem Durchmesser von 1,6 mm vorgesehen, die entsprechend der Querkraftbeanspruchung gestaffelt wurde (siehe Bild 7.9 bzw. [19]). Der eigentliche gekrümmte Schalenkörper war in Längsrichtung oben und unten mit $\varnothing 1$ mm / 2 cm sowie in Umfangsrichtung oben mit $\varnothing 1$ mm / 1 cm und unten mit $\varnothing 1$ mm / 2 cm bewehrt. Über die Eckbereiche waren Stäbe $\varnothing 1,2$ mm / 2,8 cm in einem Winkel von 45° zwischen der oberen und unteren Bewehrungslage zugelegt.

Sämtliche Versuchsschalen wurden durch zwei 2 cm dicke und leicht bewehrte Endscheiben gestützt, die jedoch in der nachfolgenden Diskretisierung der Schale als starre Lagerung in vertikaler Richtung betrachtet werden (vergleiche auch Hofstetter [70]). Da aus der Versuchsbeschreibung die Anschlussbewehrung der Endscheibe an die Tonnenschale nicht hervorgeht, werden in der Simulation die entsprechenden Differenzvektorkomponenten der gelagerten Kante nicht gehalten und somit eine freie Rotation zugelassen. Ein Viertel des Versuchskörpers wird mit insgesamt 120 achtknotigen finiten Elementen ($2 \times 2 \times 2$ Gauß-Punkte je Schicht) diskretisiert (vergleiche Bild 7.11), wobei für die Dickenrichtung ein C^0 -kontinuierlicher Verschiebungsverlauf mit drei Elementschichten (12 Freiheitsgrade je Knoten) zu je 35 %, 30 % und 35 % der Schalendicke angesetzt wird.

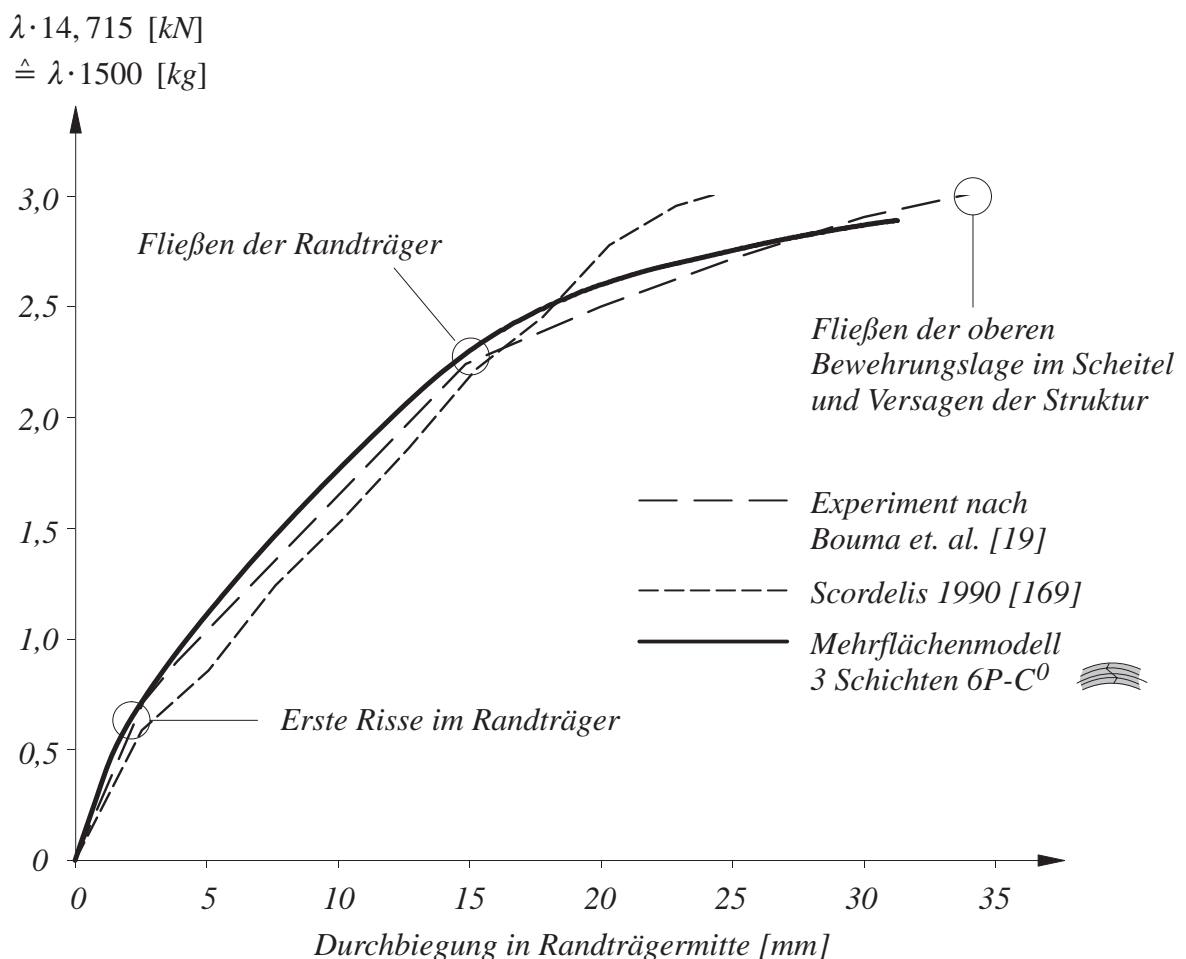


Bild 7.10 Kreiszylinderschale A2: Last-Verschiebungs-Kurve

Bezüglich der verwendeten Materialparameter wird soweit möglich auf die Angaben in [19] und [158] zurückgegriffen. Ausgehend von der dort angegebenen Obergrenze der charakteristischen Würfeldruckfestigkeit $f_{ck} = 35,0 \text{ N/mm}^2$ können weitere Parameter, wie die mittlere Druckfestigkeit f_{cm} , entsprechend der Tabelle 5.1 bestimmt werden bzw. werden, wie zum Beispiel die mittlere Zugfestigkeit $f_{ctm} = 3,4 \text{ N/mm}^2$, aus der Arbeit von Hofstetter [71] übernommen. Für die Querdehnzahl wurde mangels näherer Informationen ebenfalls in Anlehnung an Hofstetter $\nu_{cm} = 0,2$ angenommen.

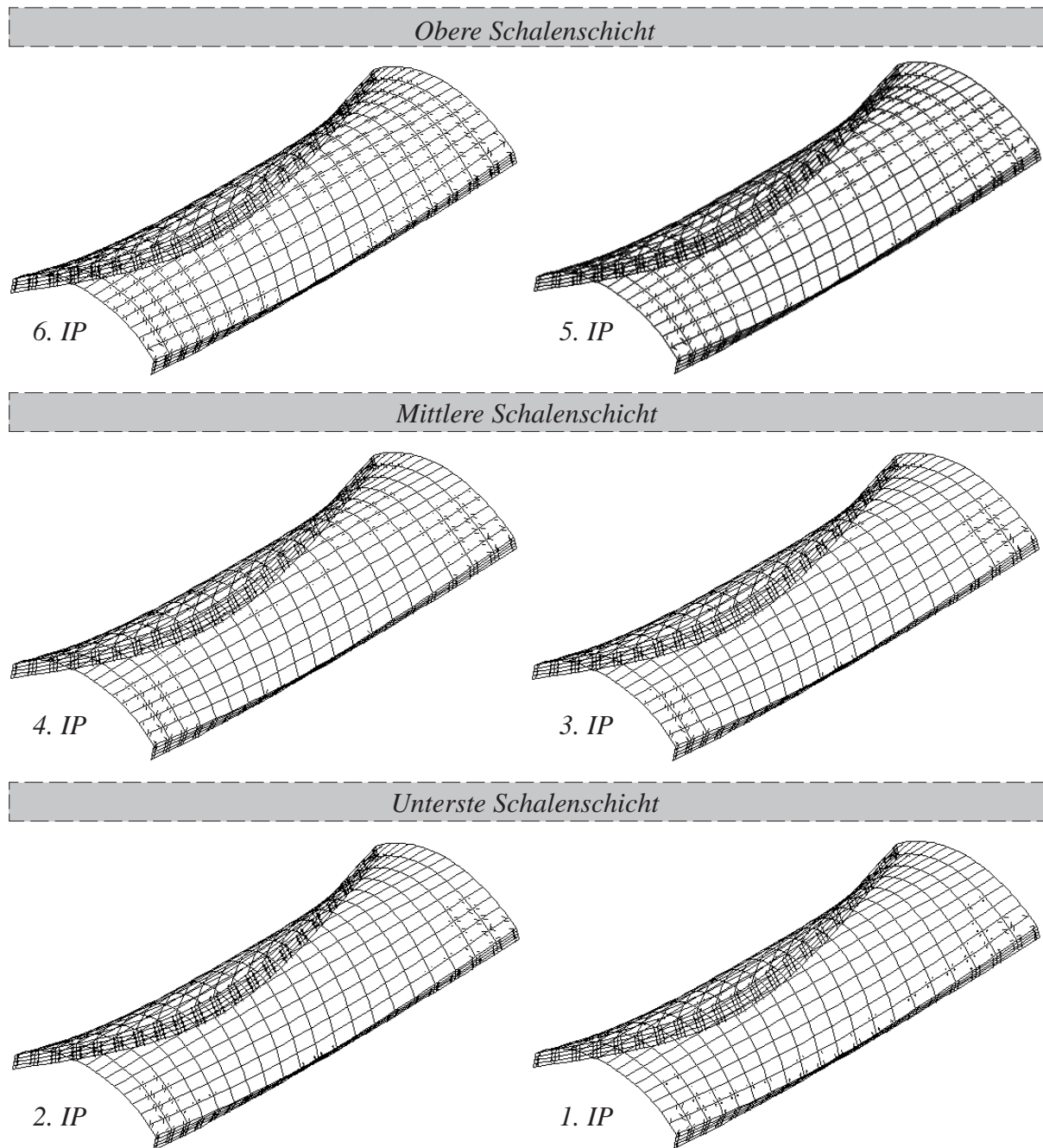


Bild 7.11 Entwicklung der Risse über die Schalenschichten und die zugehörigen Integrationspunkte IP bei 30 mm Mittenabsenkung des Randträgers entsprechend einem Lastfaktor von $\lambda = 2,925$ (3 Schichten 6P-C⁰, 4255 DOF).

Die Abschätzung der Zug- wie auch der Druck-Bruchenergie stellt für die maßstäblich verkleinerten Kreiszyinderschalen, wie im Übrigen für alle Modellversuche, für deren Betonmischung keine speziellen Versuche gefahren werden, eine gewisse Schwierigkeit dar. In gängigen Normenwerken (vergleiche [26] oder [41]) wird die Zug-Bruchenergie über das jeweilige Größtkorn des Zuschlags abgeschätzt, das bei *in praxi* üblichen Betonmischungen eine Untergrenze von 8 mm aufweist, bei den Versuchen von Bouma et al. [19] jedoch 2,8 mm beträgt. Zur Abschätzung der Bruchenergie G_t wird daher eine Trendlinie (Parabel zweiter Ordnung) in Abhängigkeit des Größtkorndurchmessers d_{\max} für den Beiwert G_{F0} aus Tabelle 5.1 entwickelt

$$G_{F0} = 5,0 \cdot 10^{-5} (d_{\max})^2 - 0,0005 \cdot d_{\max} + 0,026 \quad , \quad (7.1)$$

womit sich die Bruchenergie in der Größenordnung $G_t = 0,05 \text{ N/mm}$ für den vorliegenden Feinbeton motivieren lässt.

Für die schlaffe Bewehrung wird in [158] eine Fließgrenze von umgerechnet $f_y = 280,0 \text{ N/mm}^2$ angegeben, die zusammen mit den in Bild 7.9 angegebenen Parametern das bilineare Evolutionsgesetz für den Stahl definieren.

In Bild 7.10 ist beispielhaft die Mittenabsenkung des Randträgers als Last-Verschiebungs-Diagramm dargestellt. Der Lastfaktor wird dabei auf die Bemessungslast $G_{Simulation}$ der realen Tonnenschale bezogen. Diese errechnet sich aus dem achtfachen Eigengewicht der Modellschale unter Berücksichtigung eines 25 %igen Aufschlags für Eindeckung, Isolierung und Schneelast zu

$$G_{Simulation} = 1,25 \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 8 \cdot V_{Modell} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 14,715 \text{ kN} \quad , \quad (7.2)$$

entsprechend 1500 kg. Hieraus lässt sich eine vertikale Gleichflächenlast für den Schalenbereich von $q_{Schale} = 0,0025 \text{ N/mm}^2$ und von $q_{Randträger} = 0,005 \text{ N/mm}^2$ für den Randträger bestimmen. Im Diagramm ist neben dem Versuchsergebnis und der hier vorgestellten Simulation auch das Simulationsergebnis einer Studie von Scordelis [169] aufgetragen, der ein orthotropes, nicht-linear-elastisches Materialmodell innerhalb einer Fünf-Parameter Schalenformulierung zugrunde liegt.

Aus Bild 7.10 kann entnommen werden, dass das verwendete numerische Modell unter Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearität in der Lage ist, die Strukturantwort im beobachteten Punkt gut wiederzugeben. Sowohl der Eintritt der ersten Risse als auch das Fließen der Bewehrung im Randträger wird zutreffend erfasst. Lediglich die Traglast kann nicht angemessen wiedergegeben werden, wobei jedoch ein Fließen der oberen Bewehrungslage entsprechend der Versuchsbeschreibung ebenfalls eintritt. Hinsichtlich des Versagenszustands ist zu bemerken, dass die Versuchsschale einen zentralen Längsriss im Scheitel ausbildete, der von der Rechnung in einem verschmierten Sinne über mehrere Elementreihen ebenfalls wiedergegeben wird. In Bild 7.11 sind hierzu die Rissbilder der verformten Schale in den einzelnen Schichten und Integrationspunkten bei 30 mm Mittenabsenkung des Randträgers aufgetragen. Insbesondere die Risseverteilung im sechsten Integrationspunkt verdeutlicht den auch im Versuch erhaltenen Versagensmode.

7.4 Parabolische Zylinderschale ohne Randträger

Nachfolgend soll das in den vorigen Kapiteln vorgestellte Konzept auf eine dünne parabelförmige Zylinderschale mit veränderlicher Schalendicke angewendet werden. Der entsprechende Versuch an maßstäblich verkleinerten Modellschalen wurde von Hedgren [62] 1965 durchgeführt. Numerische Untersuchungen finden sich in der Literatur zum Beispiel bei Lin [107] sowie bei Flögl & Mang [52] auf der Basis von Fünf-Parameter Schalenformulierungen mit schichtweise integriertem Materialtensor. In Bild 7.12 sind die wesentlichen geometrischen und physikalischen Parameter, die in der hier vorgestellten numerischen Untersuchung verwendet werden, zusammengestellt. Bezüglich der Abschätzung der Bruchenergie des verwendeten Feinbetons wird auf die Ausführungen in Abschnitt 7.3 verwiesen. Die weiteren Materialparameter des Betons werden ebenso wie die Parameter der trilinearen Arbeitslinien des Betonstahls aus der Lite-

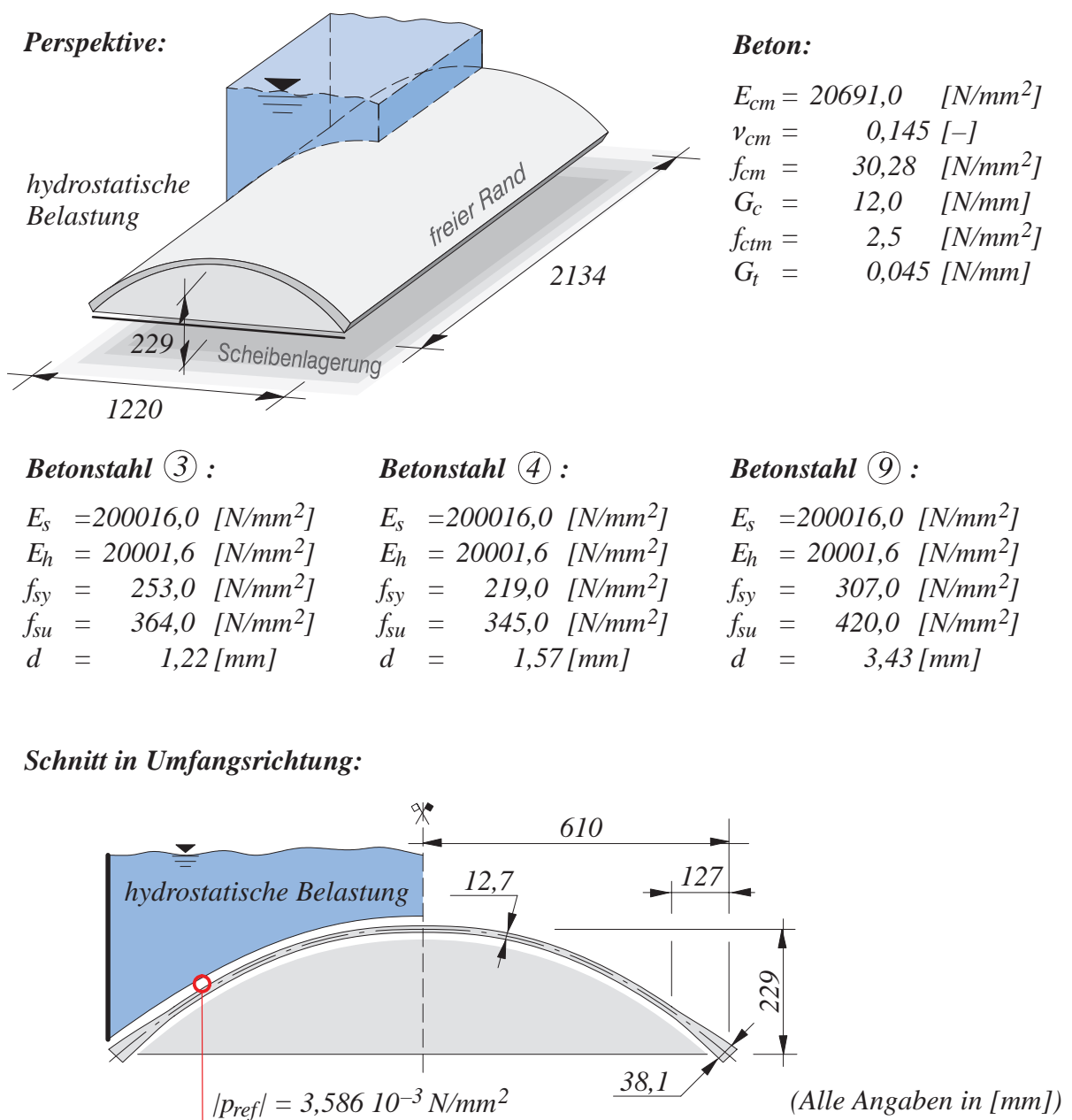


Bild 7.12 Geometrie- und Materialdaten der parabolischen Zylinderschale (Hedgren [62])

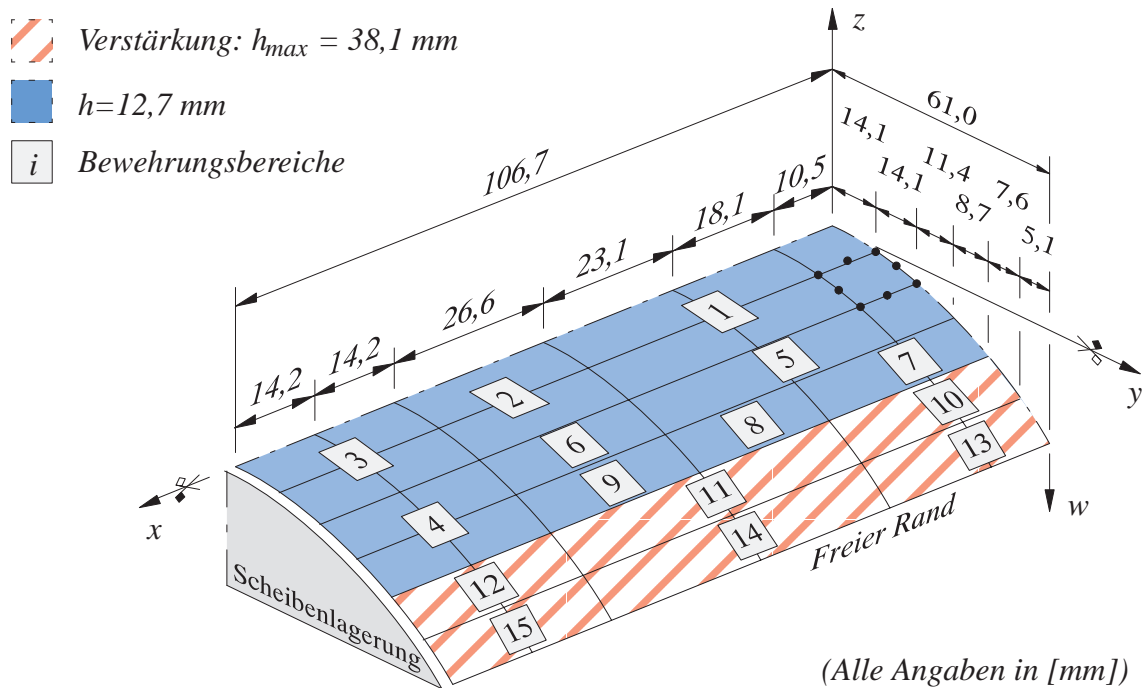


Bild 7.13 Schalengeometrie und Definition der Bewehrungsbereiche

Bewehrungsgrad je Schicht q [10^{-2}]							
Schicht	unten		mitte		oben		
Bereich	längs	quer	Rand	diagonal	längs	quer	Rand
1	0,603	2,757	0,0	0,0	0,603	2,300	0,0
2		0,603				2,013	
3		0,724				1,208	
4		3,019				1,150	
5		2,757				1,006	
6		0,603				1,150	
7		1,379				1,006	
8		1,206				0,0	
9		0,919				2,013	
10	0,804	0,483	1,342	0,241	0,805	4,578	
11		0,919	0,0		0,460		
12		0,483	1,208		4,277		
13	0,805	0,551	4,578	8,050	0,290	2,852	
14		0,551	4,277		0,483		
15		0,290	2,852		0,483		

$\hat{=}$ Stahl ③
 $\hat{=}$ Stahl ④
 $\hat{=}$ Stahl ⑨

Bild 7.14 Bewehrungsgrade und -richtungen der unterschiedlichen Bewehrungsbereiche

ratur übernommen. Für die aufwändige Bewehrung, bestehend aus einer oberen und einer unteren Lage dreier unterschiedlicher Stahlqualitäten, sowie Zulagen unter 45° in der Schalensmittelfläche der Eckbereiche, wird die Schale gemäß Bild 7.13 in unterschiedliche Bereiche aufgeteilt, deren Bewehrungsgrad jeweils bezogen auf die Schalenschichthöhe in Bild 7.14 angegeben ist.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Modellschale durch hydrostatischen Druck beaufschlagt wurde. Entsprechende Untersuchungen zum Einfluss der damit erzeugten Folgelasten auf die Ergebnisse der numerischen Simulation wurden von Flögl & Mang [52] unternommen. Dabei wurde jedoch gezeigt, dass die Annahme richtungstreuer Belastung, wie sie auch bei der hier vorgestellten Berechnung getroffen wird, die Simulationsergebnisse bei dieser Struktur nur unerheblich beeinflusst. Im Last-Verschiebungsdiagramm (Bild 7.15) wird der Laststeigerungsfaktor λ stets auf die Referenzbelastung von $|p_{ref}| = 3,586 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ bezogen.

Ein Viertel der Modellschale wird in der Schalenebene mit 36 achtknotigen finiten Elementen entsprechend dem Vorschlag von Flögl & Mang [52] diskretisiert. In die Schalendickenrichtung wird ein C^0 - sowie ein C^1 -kontinuierlicher Ansatz mit jeweils drei Materialschichten zu 40 %, 20 % und 40 % der gesamten Schalendicke untersucht, die der bisherigen Nomenklatur folgend mit $6P-C^0$ (12 Freiheitsgrade je FE-Knoten, 1467 DOF gesamt) und $7P-C^1$ (sechs Freiheitsgrade mit linear erweiterten Verzerrungen in Dickenrichtung, 721 DOF gesamt) bezeichnet werden. Die Verstärkung des Randbereichs wird durch lineare Dickenänderung der zugehörigen Elemente (entsprechend Kapitel 2.3.4) berücksichtigt. Da von Flögl & Mang [52] ebenfalls von einem signifikanten Einfluss geometrischer Nichtlinearität auf die Strukturantwort in der Simulation berichtet wird, werden für beide Diskretisierungen Berechnungsläufe mit linearer sowie nichtlinearer Kinematik unternommen.

Zunächst kann in Bild 7.15 eine sehr gute Übereinstimmung beider geometrisch nichtlinearer Berechnungen mit dem Versuchsergebnis festgestellt werden, wobei der numerisch teurere An-

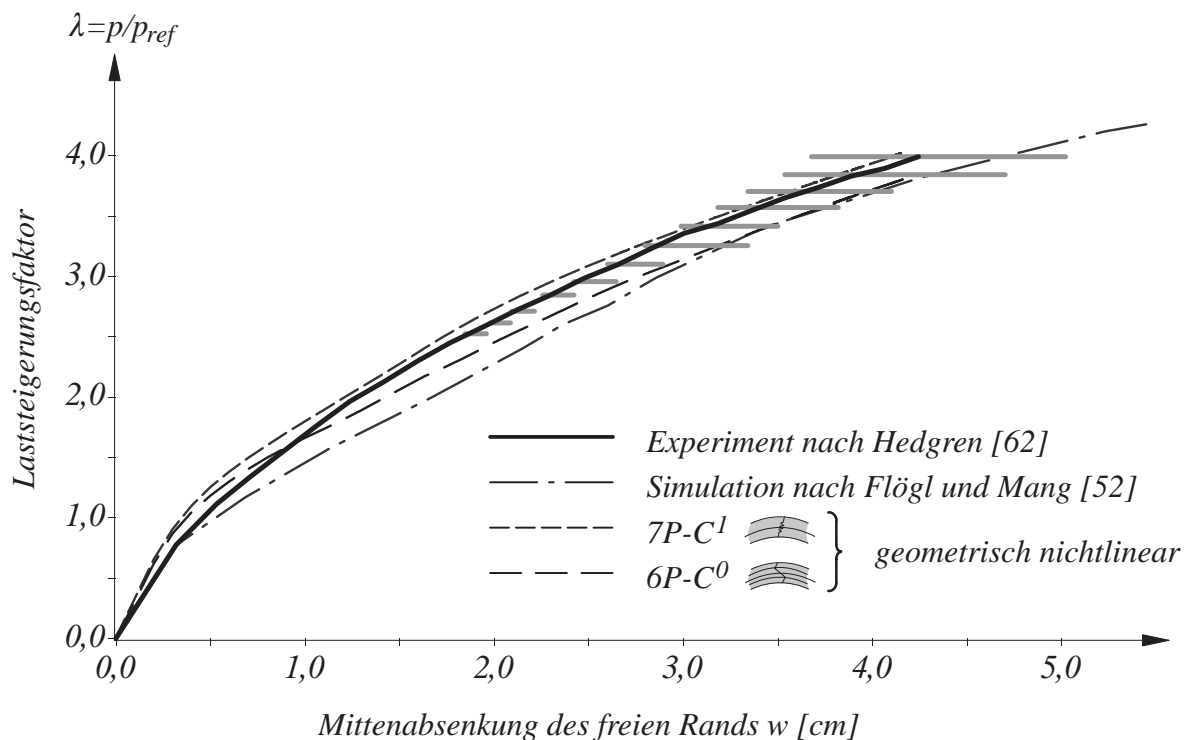


Bild 7.15 Last-Verschiebungskurven der geometrisch nichtlinearen Simulation

satz $6P-C^0$ eine etwas weichere Strukturantwort aufweist. Es ist zu bemerken, dass die in der Last-Verschiebungskurve eingezeichneten horizontalen Striche einen extrapolierten Bereich aus anderen Messpunkten des Versuchs darstellen und somit nur eine Abschätzung der Strukturantwort am betrachteten Mittelpunkt des freien Rands aus dem Experiment vorliegt. Neben den eigenen Untersuchungen sind in Bild 7.15 bzw. Bild 7.16 ebenfalls noch eine Lösung von Flögl & Mang [52] sowie von Lin [107] skizziert, wobei das Ergebnis von Lin auf einer geometrisch linearen Berechnung basiert. Diese sehr viel weichere Lösung im Zustand II wird durch zwei eigene geometrisch lineare Untersuchungen $6P-C^0$ und $7P-C^1$ bestätigt (vergleiche Bild 7.16). Danach sind die geometrisch nichtlinearen Effekte bei der untersuchten Tonnenschale nicht zu vernachlässigen. Diese werden hervorgerufen durch das charakteristische „Einklappen“ der Randbereiche, welches zugleich mit der Anhebung des Scheitels einhergeht. Damit steht für die globale Lastabtragung ein größerer Hebelarm des Gesamttragwerks zur Verfügung, der die Struktursteifigkeit weiter erhöht.

Bezüglich des Versagensmodes werden in [52] keine Angaben gemacht, so dass eine mögliche Übereinstimmung nicht überprüft werden kann. In Bild 7.17 ist für die geometrische C^0 -kontinuierliche Simulation die aktive Rissentwicklung über die Schalendicke dargestellt. Dabei zeigt sich, dass sich bereits ein Großteil der Integrationspunkte zu diesem Zeitpunkt im entfestigenden Ast befindet. Die Berechnung liefert das typische Versagen infolge Rissbildung im Scheitel, wobei die Krümmungsänderung in Richtung des freien Rands zu weiteren Rissen auf der Schalenseite führt.

Weitere numerische Untersuchungen auf Basis des vorgestellten Schalen- und Materialmodells zum Tragverhalten von Stahlbetontonnenschalen aus den Versuchsreihen von Bouma et al. ([19], [158]) bzw. Hedgren [62] sind in der Arbeit von Herzinger [66] enthalten.

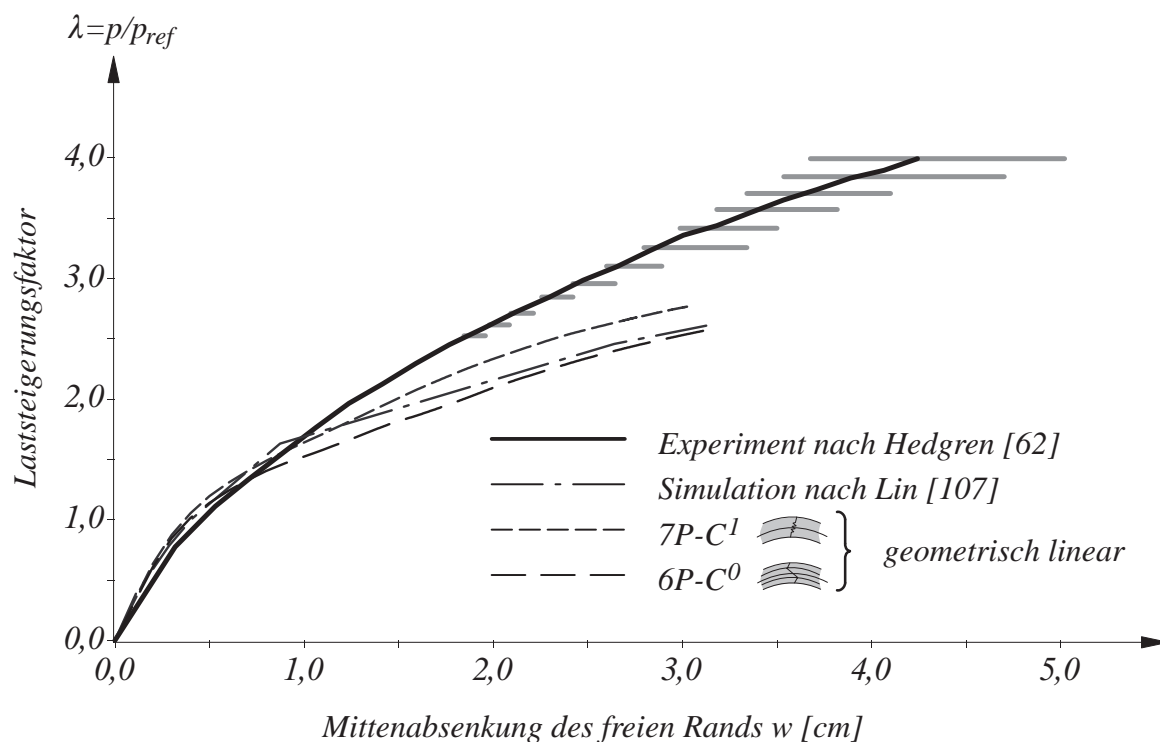


Bild 7.16 Last-Verschiebungskurven der geometrisch linearen Simulation

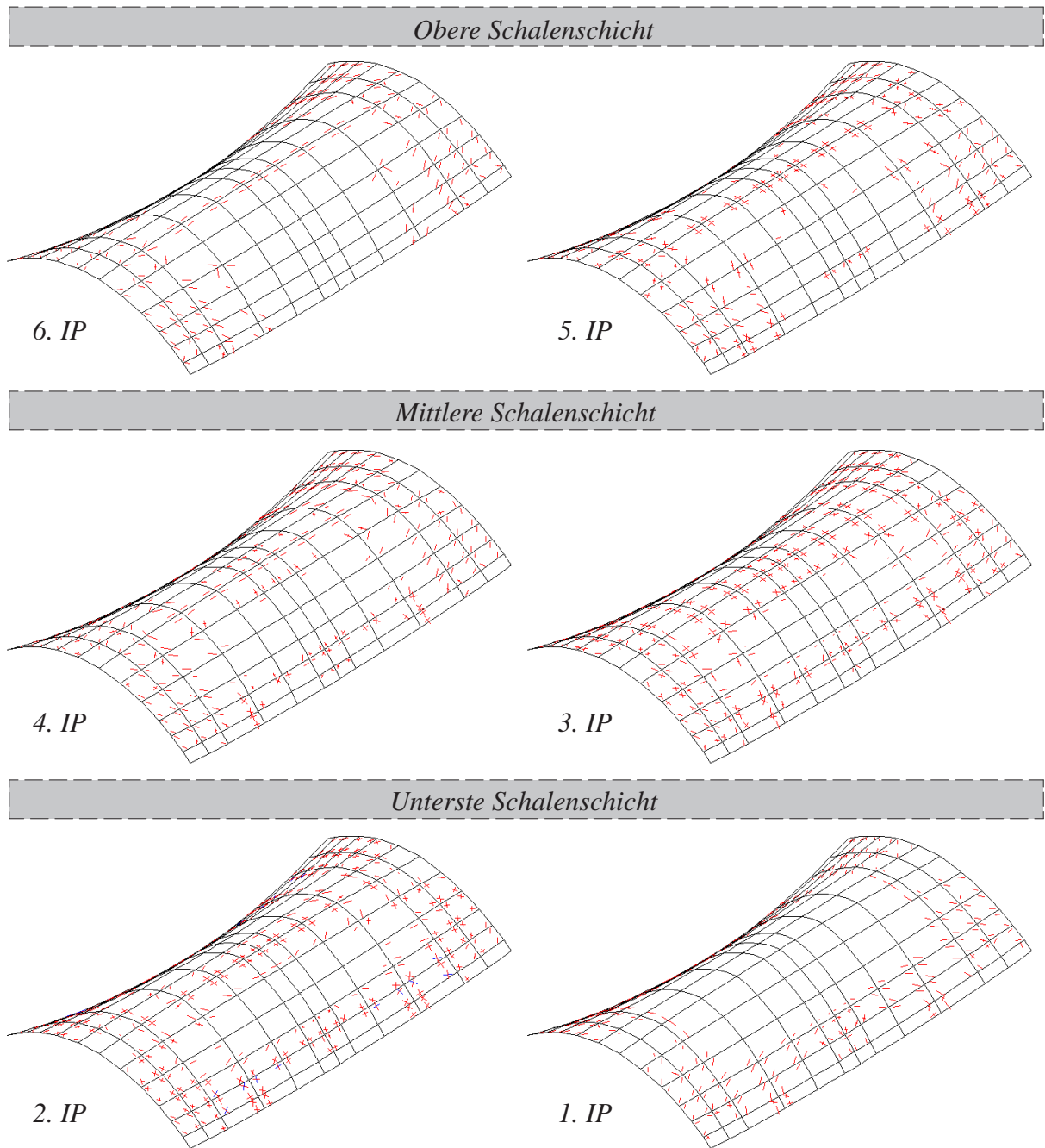


Bild 7.17 Entwicklung der Risse über die Schalenschichten und die zugehörigen Integrationspunkte bei 4,0 cm Mittenabsenkung des freien Rands entsprechend einem Lastfaktor $\lambda = 3,9277$ (3 Schichten 6P-C⁰)

7.5 Glasfaserbewehrtes U-Profil

Als Alternative zum üblichen Bewehrungsmaterial Stahl werden sich zukünftig vermehrt Bewehrungselemente aus AR-Glas, Carbon oder Aramid durchsetzen. Dabei sind, wie in Kapitel 3.2.2 bereits erläutert, besonders die erhöhten Festigkeitseigenschaften von Interesse, während die Dauerhaftigkeit im alkalischen Milieu des Betons sowie die Anwendbarkeit in der Baupraxis teilweise noch gewährleistet werden muss. Die hierzu unternommenen Anstrengungen sind im Sachstandsbericht (siehe Curbach et al. [38]) dokumentiert. Hierfür wurden an der RWTH-Aachen sechs Versuchsserien (Lastgesteuerte Tastversuche) an U-Profilen aus Feinbeton durchgeführt (siehe Bild 7.18 und Hegger et al. [64]), die mit einem multiaxial verwirkten Gelege (*WIMAG*, siehe Bild 3.5a) aus alkaliresistenten Glasfasern (*NEG AR 615 tex*) bewehrt wurden. Um die prinzipielle Anwendbarkeit des in dieser Arbeit vorgestellten Struktur- und Materialmodells auf Textilbeton zu zeigen, wird nachstehend ein Vierpunkt-Biegeversuch der Serie 5, der innerhalb der Serien den höchsten Bewehrungsgrad aufwies, numerisch simuliert.

Die Materialwerte für den Feinbeton sind in Bild 7.19 zusammen mit denen der AR-Glas-Rovings angegeben. Dabei muss insbesondere die um den Faktor 10 erhöhte Bruchenergie G_f des Feinbetons im Zugbereich bemerkt werden, die das duktilere Verhalten des textilbewehrten Feinbetons berücksichtigen soll. Letzteres wird im Allgemeinen mit der Tatsache motiviert, dass die Akkumulation von Mikro- zu Makrorissen durch die feingliedrige Bewehrung einzelner Filamente stark verzögert wird (rissüberbrückende Wirkung der einzelnen Fasern auf Mikroebene). Im Gegensatz zu üblichen Stahlbewehrungen findet somit eine maßgebliche Beeinflussung des nachkritischen Tragverhaltens des Betons durch die mechanische Präsenz der Bewehrung auf einer anderen Größenskala statt. Es sei weiter angemerkt, dass für kurzfaserbewehrten Feinbeton von Reinhardt [156] ein Erhöhungsfaktor für die Bruchenergie von 65 vorgeschlagen wird, der jedoch bei langfaserbewehrten Bauteilen sicherlich nicht in dieser Größenordnung anzusetzen ist. Der hier gewählte ingenieurmäßige Ansatz, die Bruchenergie maßvoll zu erhöhen, kann allerdings hinsichtlich einer allgemein gültigen Vorgehensweise nicht vollständig überzeugen. Schließlich kann der Erhöhungsfaktor, der zumindest vom Bewehrungsgrad, dem Bewehrungsmaterial und dessen Geometrie abhängt, beim Stand der derzeitigen Forschung nicht quantitativ spezifiziert werden. Untersuchungen von Eitel [46] haben jedoch gezeigt, dass die gewählte Erhöhung der Bruchenergie aus einaxialen Zugversuchen zu motivieren ist. Darüber hinaus ist zu bemerken, dass noch keine ausreichenden Ergebnisse aus der Materialforschung bereitstehen, die zum Beispiel eine Berücksichtigung des Duktilitätsgewinns textilbewehrten Feinbetons in einer weiteren nichtlinearen Spannungskomponente – ähnlich dem *tension-stiffening*-Effekt – quanti-

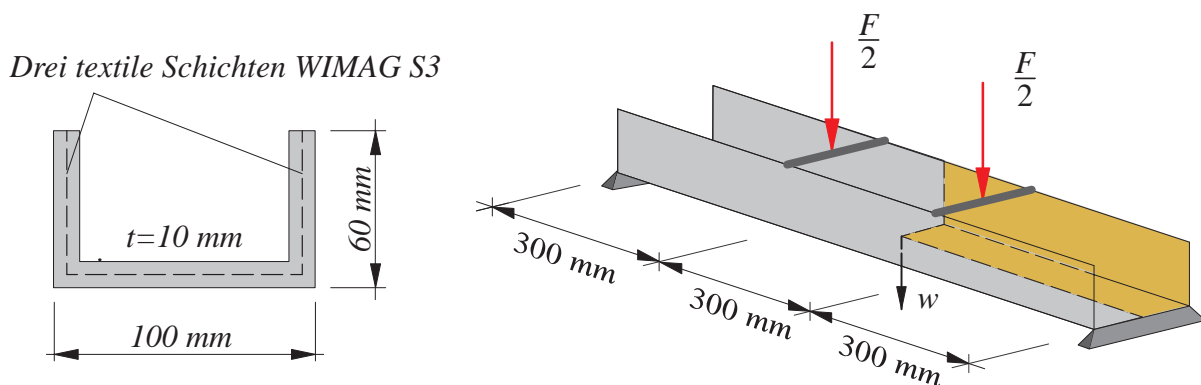
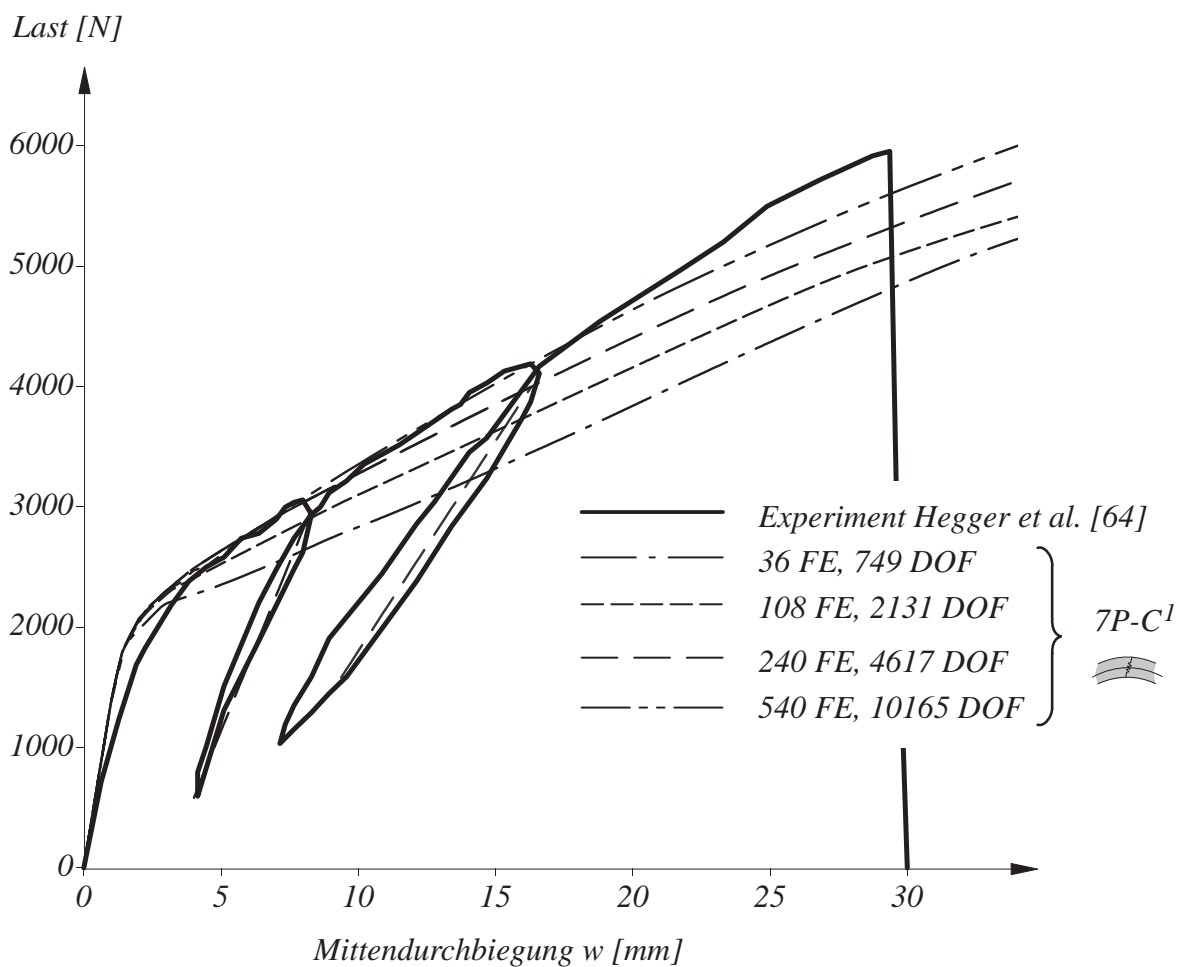


Bild 7.18 U-Profil: Geometriedaten des Vierpunkt-Biegeversuchs

tativ unterstützen könnten. Erste analytische Ansätze hierzu findet man zum Beispiel bei Ohno & Hannant [136] und Mayer [117].

Die weiteren Materialparameter der Simulation werden nach Tabelle 5.1 ermittelt, wobei die Zugfestigkeit f_{ctm} des Feinbetons entsprechend dem effektiven Fasergehalt nach Gleichung (3.1) erhöht wird.

Die Geometrieinformationen sind in Bild 7.18 wiedergegeben. Ein Viertel des U-Profiles wird mit unterschiedlichen Diskretisierungen (36, 108, 240 und 540 achtknotige finite Elemente mit regelmäßiger Vernetzung) unter Beachtung geometrisch und materiell nichtlinearer Effekte numerisch untersucht, wobei aufgrund des symmetrischen bewehrten Wandaufbaus nur eine Elementschicht $7P-C^1$ zur Anwendung kommen muss. Bezüglich der Bewehrung wird auf das in Bild 5.20b dargestellte multilineare Modell zurückgegriffen, welches das reißverschlussartige



Multilineare Arbeitslinie eines Rovings:

E_s	= 74.000,0 [N/mm ²]
$f_{y,min}$	= 773,0 [N/mm ²]
$f_{y,max}$	= 950,0 [N/mm ²]

Bewehrungsgrade dreier Schichten WIMAG S3:

ρ_0	= 0,01094
ρ_{+45}	= 0,00798
ρ_{-45}	= 0,00798

Beton:

E_{cm}	= 43.000,0 [N/mm ²]
ν_{cm}	= 0,15 [-]
f_{cm}	= 93,0 [N/mm ²]
G_c	= 50,0 [N/mm]
f_{ctm}	= 6,2 [N/mm ²]
G_t	= 1,0 [N/mm]

Bild 7.19 U-Profil: Last-Verschiebungsdiagramm

Versagen der Faserbündel phänomenologisch durch eine nichtlineare Arbeitslinie erfasst. Die maximale Zugfestigkeit des Glasfasergarns von $1400,0 \text{ N/mm}^2$ kann aus den in Kapitel 3.2.2 genannten Gründen jedoch nicht ausgenutzt werden. Die Bewehrungsgrade der einzelnen Bewehrungsschichten sind in Bild 7.19 zusammengefasst.

Wie sich anhand Bild 7.19 nachvollziehen lässt, liefert die Simulation abhängig von der Netzdichte ein unterschiedliches Verhalten im Zustand II. Prinzipiell sind solche Effekte durch den netzangepassten Entfestigungsmodul der Implementierung reguliert und daher nicht dem Verlust der Eindeutigkeit im Sinne der Entfestigung zuzuschreiben. Für die Implementierung des hier verwendeten Betonmodells wurden entsprechende Untersuchungen zur Objektivität an einaxialen Zugversuchen unterschiedlicher Diskretisierung von Menrath [121] mit Scheibenelementen durchgeführt, worauf hier verwiesen wird. Für Anwendungen auf Strukturebene ergeben sich allerdings durch eine gröbere Vernetzung unter Umständen geringfügig andere Deformationszustände wodurch schließlich im Laufe der Berechnung eine andere Strukturantwort induziert wird. Mit zunehmender Verfeinerung werden diese Effekte – im Gegensatz zu Ergebnissen aus unregulierten Implementierungen – jedoch im Sinne der klassischen Konvergenz von FE-Lösungen geringer. Dieselben Phänomene wurden in [121] beobachtet.

Grundsätzlich lässt sich mit dem vorgestellten Material- und Strukturmodell bei ausreichend feiner Diskretisierung und der beschriebenen Abschätzung der sensitiven Materialparameter, namentlich der Bruchenergie G_f und der Zugfestigkeit f_{ctm} , eine überzeugende Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis erzielen. Der flachere Anstieg der Last-Verschiebungskurve im Zustand II lässt eine größere Steifigkeit des Geleges bzw. dessen Interaktion mit dem Feinbeton im Versuch vermuten, als dies in der Rechnung berücksichtigt wurde. Dies drückt sich auch in der Bruchverformung (Verschiebung w bei Maximallast) des U-Profils aus, die in der Rechnung rund 30 % überschätzt wird. Da jedoch die Zusammenhänge der Lastabtragung von experimenteller Seite noch nicht ausreichend geklärt sind, wäre eine weitere Parameteranpassung rein spekulativer Natur. In Bild 7.20 ist exemplarisch eine Darstellung der Risseverteilung im analysierten Viertelsystem bei einer Mittendurchbiegung von $w = 30 \text{ mm}$ gegeben.

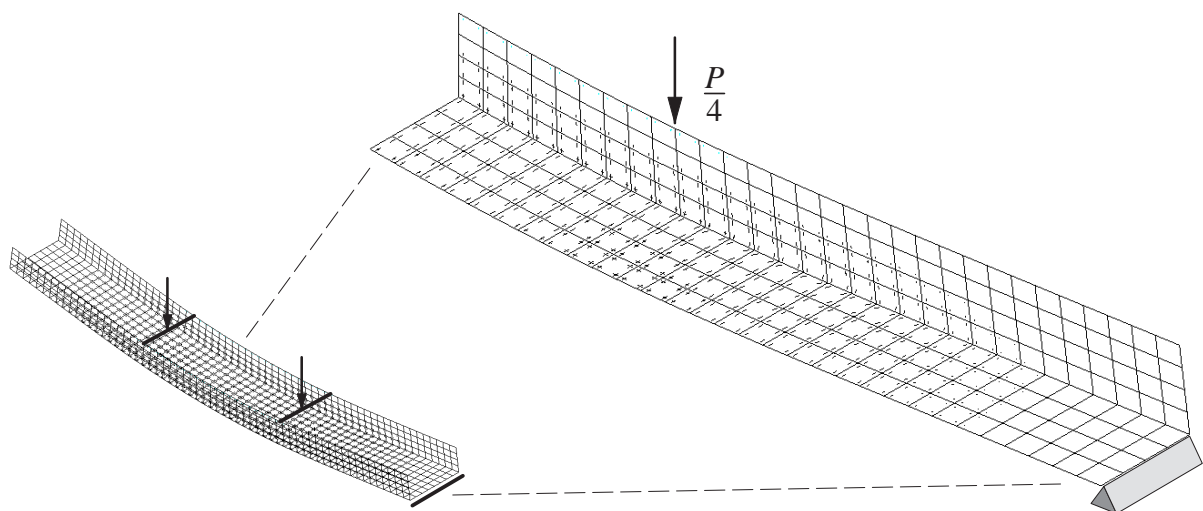


Bild 7.20 U-Profil: Rissbild und Verformungsfigur am 1,5fach überhöht dargestellten Viertelsystem bei einer Last von $P = 5369 \text{ kN}$ (240 Finite Elemente, 4617 DOF)

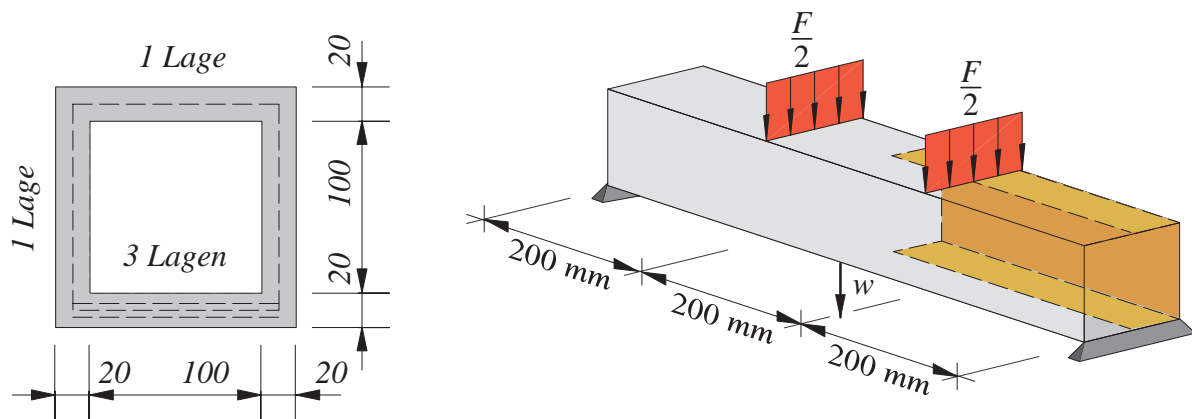
Trotzdem kann an diesem Beispiel die Effizienz der skalaren Schädigungsformulierung des zugrunde liegenden Betonmodells gezeigt werden (siehe Bild 7.19). Die im Versuch durchgeführten Entlastungszyklen werden mit einer Diskretisierung mit 240 finiten Elementen nachgefahren. Dabei wird der Schädigungsfaktor wie bereits in Kapitel 7.2 zu $d_{user} = 0,35$ gesetzt, womit erneut eine zufriedenstellende Erfassung des Entlastungszustands gelingt. Es muss jedoch betont werden, dass der Schädigungsfaktor d_{user} , bedingt durch seine skalare Eigenschaft, sehr starke problemabhängige Streuungen aufweist.

7.6 Glasfaserbewehrtes Hohlprofil

In Anlehnung an das Anwendungsbeispiel aus dem vorigen Abschnitt soll hier der Vollständigkeit halber ein an der TU Dresden von Curbach et al. (siehe [38] & [39]) durchgeführter lastgesteuerter Vierpunkt-Biegeversuch eines idealisierten Fenstersturzes aus Textilbeton untersucht werden. Der Versuchsaufbau sowie die Geometrie des Versuchskörpers sind in Bild 7.21 gegeben. Der Probekörper aus Feinbeton entstammt der Serie G3 und war im Steg- und im Deckelbereich jeweils einlagig, im Bodenbereich dreilagig mit einem Gelege aus AR-Glasfasern bewehrt. Der sich ergebende Bewehrungsgrad ist in Bild 7.21 angegeben. Zur Bestimmung der Materialparameter gelten die in Kapitel 7.5 getroffenen Aussagen, wobei jedoch in Ermangelung exakter Daten des Feinbetons (vergleiche Curbach et al. [38]), die im Bemessungsansatz von Hegger et al. [38] getroffenen Annahmen für die Druckfestigkeit f_{cm} und den Elastizitätsmodul E übernommen werden. Insofern ist dieses Anwendungsbeispiel eher zur Demonstration qualitativer Ergebnisse geeignet, als zur exakten numerischen Verifikation des Experiments.

Die Diskretisierung des Hohlprofils erfolgt am Viertelsystem mit insgesamt 270 achtknotigen, einschichtigen finiten Elementen mit erweitertem Verzerrungsansatz in Dickenrichtung ($7P-C^1$, vergleiche Bild 7.23). Die zentrische Lage der Bewehrung macht eine Diskretisierung in unterschiedliche Schichten innerhalb des Deckels oder des Bodens nur für Detailstudien interessant, weshalb an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

Wie sich anhand von Bild 7.22 nachvollziehen lässt, wird durch die geometrisch und materiell nichtlineare Simulation das Last-Verformungsverhalten der Struktur in den zugehörigen Zuständen gut erfasst. Es zeigt sich auch, dass die Anfangssteifigkeit durch den ungewöhnlich niedrigen Elastizitätsmodul in der Rechnung gut wiedergegeben wird, was die Annahmen von Hegger et al. [63] in deren Bemessungskonzept bestätigt. Die Abbildung des Tragverhaltens im Zustand II ist ausreichend genau, während die Bruchlast und vor allem die Bruchdehnungen unterschätzt



(Angaben in [mm])

Bewehrungsgrade einer Lage des Geleges G3:

ρ_0	=	0,0020
ρ_{+45}	=	0,0010
ρ_{-45}	=	0,0010

Multilineare Arbeitslinie eines Rovings:

E_s	=	74.000,0 [N/mm ²]
$f_{y,min}$	=	773,0 [N/mm ²]
$f_{y,max}$	=	950,0 [N/mm ²]

Beton:

E_{cm}	=	24.000,0 [N/mm ²]
ν_{cm}	=	0,15 [-]
f_{cm}	=	90,0 [N/mm ²]
G_c	=	50,0 [N/mm]
f_{ctm}	=	3,2 [N/mm ²]
G_t	=	1,0 [N/mm]

Bild 7.21 Hohlprofil: Geometrie- und Materialdaten

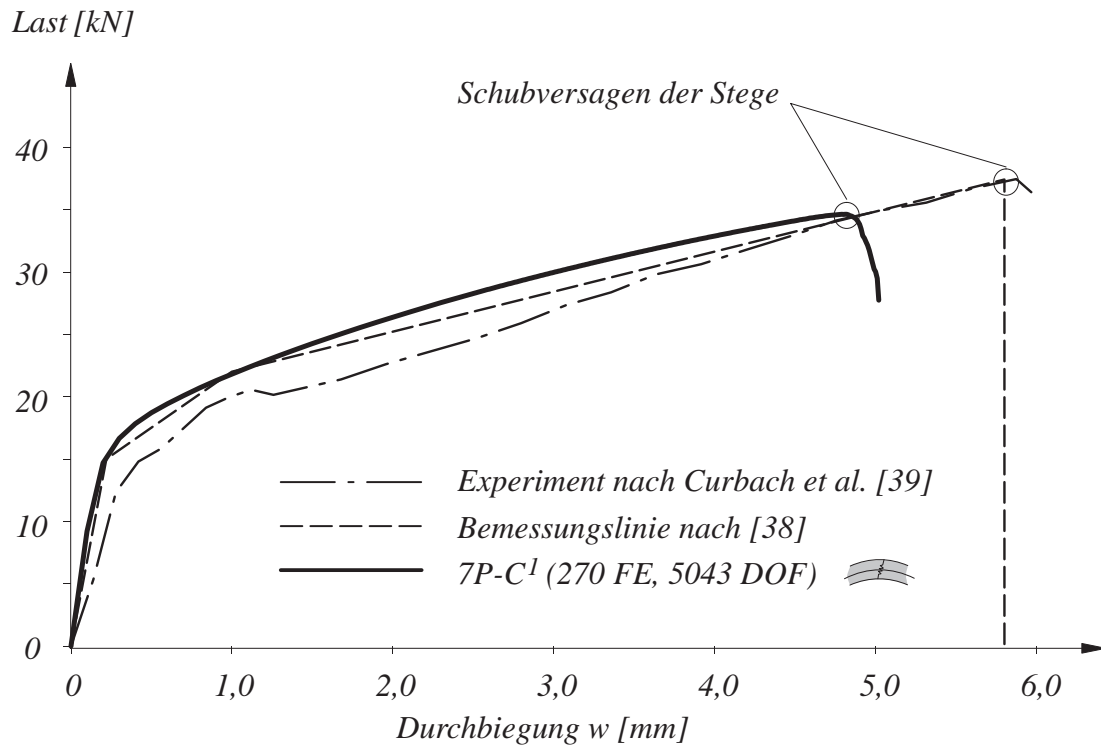


Bild 7.22 Hohlprofil: Last-Verschiebungsdiagramm

werden. Allerdings sind diese Aussagen vor dem Hinterrund der mit starken Unsicherheiten behafteten Materialparameter des Feinbetons zu sehen.

Dagegen wird der Versagensmode in der Simulation richtig erfasst. Der Versuchskörper versagt infolge eines Schubbruchs in den Stegen. Das zugehörige Versagen in der numerischen Simulation ist in Bild 7.23 durch das schräg verlaufende Rissband ersichtlich, während im Boden bzw. im Deckel des Hohlprofils noch keine ausgeprägte Rissbildung stattfindet. Eitel [46] zeigt in diversen Studien, dass auch der Versagensmode der Serie G1 (Biegebruch infolge geringerer Zugbewehrung im Boden) durch Rissbildung im Profilboden durch das Berechnungsmodell treffend erfasst wird.

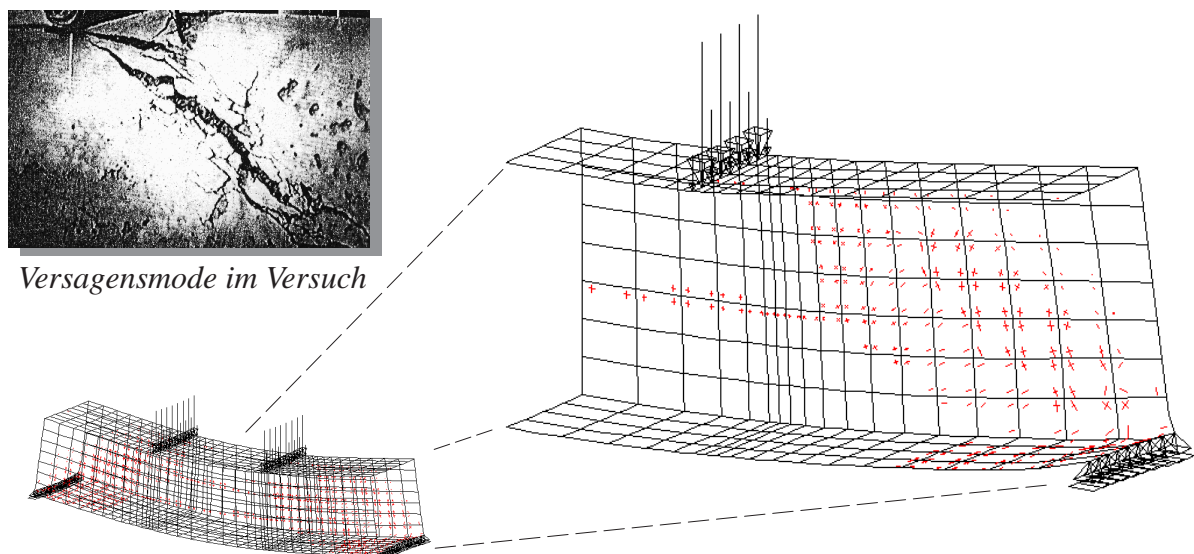


Bild 7.23 Rissbild am Viertelsystem bei Maximallast von 34,6 kN ($w = 4,79$ mm)

7.7 Zusammenfassung der Beispiele

Nachfolgend werden die in diesem Kapitel vorgestellten Anwendungsbeispiele mit unterschiedlicher Strukturmodellierung kurz zusammengefasst. Allen Berechnungen liegt als Konstitutivgesetz für den Beton das Mehrflächenmodell zugrunde.

Plattenbeispiele:

Die beiden Plattenbeispiele sollen die prinzipielle Anwendbarkeit des gewählten Struktur- und Materialmodells zur Simulation von relevanten Betontragwerken der täglichen Ingenieurpraxis zeigen. Die zentrisch belastete Quadratplatte nach McNeice [118] wird mit fünf Schalenschichten in Dickenrichtung diskretisiert und die Ergebnisse werden mit solchen aus der Literatur verglichen. Während die Übereinstimmung im Last-Verschiebungsdiagramm von Versuch und Berechnung zufriedenstellend ist, bleibt zu bemerken, dass die Berechnung selbst durch große numerische Schwierigkeiten gekennzeichnet ist. Offensichtlich machen sich in der untersten unbewehrten Betonschicht die bereits von Crisfield [35] berichteten Instabilitäten bei Kombination von Unterintegration und entfestigendem Materialverhalten bemerkbar. Das Verschmieren der Bewehrung über mehrere *Schalenschichten* verbessert die numerische Stabilität dementsprechend. Die in diesem Fall ebenfalls mögliche näherungsweise Berechnung durch die Bruchlinientheorie zeigt deren prinzipielle Überschätzung der Traglast.

Als weiteres Plattenproblem wird eine flächig belastete Stahlbetonplatte der Experimente von Franz [53] untersucht. Die Diskretisierung mit drei *Schalenschichten* erweist sich als numerisch äußerst stabil, obwohl die Zugfestigkeit im numerischen Modell gegenüber den Angaben aus der Versuchsdurchführung signifikant vermindert werden musste. Durch die höhere Kinematik in Plattendickenrichtung wird der *tension-stiffening*-Effekt durch das Strukturmodell abgebildet – eine Berücksichtigung auf der konstitutiven Seite kann entfallen. Die aus der Rechnung ermittelten Rissbilder stimmen qualitativ mit denen aus dem Versuch überein. Des Weiteren kann der Entlastungsvorgang durch den skalaren Schädigungsansatz gut wiedergegeben werden.

Schalenbeispiele:

Die Simulation zweier Modellschalen zeigt die gute Übereinstimmung des Modells auch für diese Problemklasse. Dabei wird neben der parabelförmigen Tonnenschale nach Hedgren [62], die zwar ohne Randträger gefertigt wurde, deren Randbereiche jedoch in der Dicke verstärkt wurden, auch eine Kreiszylinderschale mit Randträger aus der Serie von Bouma et al. [19] nachgerechnet. Dabei hat sich als Ergebnis aus den beiden Untersuchungen herauskristallisiert, dass neben der Berücksichtigung der geometrisch nichtlinearen Effekte auch die exakte Modellierung der Bügelbewehrung für eine wirklichkeitsgetreue numerische Simulation ein wichtiges Kriterium darstellt. In beiden Untersuchungen konnte sowohl die globale Last-Verschiebungsbeziehung als auch das Rissbild inklusive des Versagensmodes abgebildet werden. Hinsichtlich des Ansatzes in Dickenrichtung ist der C^0 -kontinuierlichen Modellierung mit mehreren *Schalenschichten* – auch bei deutlich höherem numerischen Aufwand – bei Detailuntersuchungen der Vorzug zu geben. Durch die mitunter stark bewehrten und daher steiferen *Schalenschichten* lässt sich die Forderung nach dem Ebenbleiben der Querschnitte nicht länger aufrecht erhalten.

Beispiele zur textilen Bewehrung:

Die Anwendung textiler Bewehrungselemente in der Baupraxis steckt noch in ihren Anfängen. Doch gerade die erfolgreiche numerische Simulation einiger – wenn auch geometrisch einfach

gearteter – Gelege ist als Ansporn für weitere Arbeiten zu sehen. Die beiden simulierten Falwerke zeichnen sich durch einen Feinbeton hoher Güte als Matrixmaterial in Verbindung mit einem feingliedrigen Glasfasergelege aus. Die in dieser Kombination auftretenden Mikroeffekte, die schließlich zu einer Erhöhung der Bruchdehnung bzw. -spannung und zu einem duktileren Nachbruchverhalten des Matrixmaterials führen, werden in den Simulationen durch eine entsprechend motivierte Erhöhung der Bruchenergie bzw. der Zugfestigkeit phänomenologisch erfasst. Hier ist jedoch Forschungsbedarf durch weitere experimentelle materialmechanische Untersuchungen gegeben, die schließlich in ein fundierteres Konzept (quantitative Absicherung der Erhöhungsfaktoren oder gar eine Berücksichtigung weiterer Spannungskomponenten der Matrix-Faser-Interaktion) münden müssen.

In beiden Untersuchungen kann dennoch sowohl das globale Tragverhalten als auch der Versagensmode der ersten Tastversuche zu textilbewehrtem Beton abgebildet werden. Auch der bereits bei den Plattenberechnungen erfolgreich simulierte Entlastungsast, kann – bei gleicher Parameterwahl – für das untersuchte U-Profil [64] angewendet werden. Da sowohl das Hohl- als auch das U-Profil eine zentrische Bewehrung enthielten, ließen sich beide Bauteile mit nur einer C^1 -kontinuierlichen Schalenschicht diskretisieren.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung und Bewertung

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Materialmodelle zur phänomenologischen Beschreibung des Strukturverhaltens bewehrter Betontragwerke beschrieben und im Hinblick zur Anwendung auf allgemeine Flächentragwerke, wie Scheiben, Platten und Schalen, in das Finite Elemente Programmsystem CARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert. Hierzu wird auf ein bestehendes dreidimensionales Multi-Layer-Schalenelement zurückgegriffen, das in der Lage ist, Schichtdickenänderungen über schichtweise extensible Direktoren darzustellen. Die notwendigen kontinuumsmechanischen Grundlagen sowie eine kurze Einführung in die zugehörige Schalentheorie werden zu Beginn der Arbeit gegeben. Weiter werden in einem kurzen Überblick alternative Ansätze zur konstitutiven Beschreibung von Beton diskutiert, bevor die Plastizitätstheorie als Basis der weiteren Arbeit gewählt wird. Deren Grundlagen werden eingehend erläutert und vorhandene Materialmodelle aus der Literatur kurz vorgestellt.

Für den Einsatz in Verbindung mit dem vorgestellten 3D-Schalenmodell werden schließlich zwei Ansätze aus der Klasse der Plastizitätsmodelle ausgewählt, deren Fließflächen im allgemeinen dreidimensionalen Spannungsraum definiert sind. Zum einen wird das von Menrath [121] für Scheibenprobleme vorgeschlagene Mehrflächenmodell auf die vorgestellte Schalenformulierung erweitert und zum anderen ein von Kang [84] veröffentlichtes Einflächenmodell verallgemeinert und hinsichtlich der Evolutionsgesetze weiterentwickelt. Beide Formulierungen werden mit einem skalaren Schädigungsmodell zur Erfassung von Entlastungsvorgängen kombiniert.

Das Mehrflächenmodell basiert auf den ersten beiden Spannungsinvarianten und nähert die zweiaxiale Versagenshülle des ebenen Spannungszustands von Beton durch die Kombination zweier Kegelschnitte an. Eine prinzipielle Unzulänglichkeit des Modells liegt im Verzicht der Formulierung, die dritte Spannungsinvariante und somit die dreiecksförmige Gestalt der Versagenshüllkurve in der Deviatorebene, zu berücksichtigen. Bei der Anwendung auf Flächentragwerke, die außerhalb von Lasteinleitungsbereichen und Lagern durch einen annähernd ebenen Spannungszustand dominiert sind, ist dieser Nachteil jedoch unbedeutend. Mit derselben Überlegung kann das Argument einer ungenügenden Approximation von Versuchsdaten des hohen triaxialen Druckbereichs entkräftet werden. Die geringe Anzahl an Material- und Modellparametern wiegt für praktische Problemstellungen bedeutend schwerer. Ein weiterer wichtiger Punkt betrifft die Stabilität und Robustheit der Implementierung. Durch die kreisförmige Gestalt der Deviatorschnitte und der assoziierten Fließregel ist der Projektionsalgorithmus im Rahmen des *Rückwärts-Euler*-Verfahrens unbedingt stabil. Probleme bei der Spannungsintegration, wie sie im nächsten Abschnitt für das Einflächenmodell beschrieben werden, treten bei gemäßigten Verzerrungszuwächsen bzw. Evolutionsgesetzen mit genügend flachem Gradienten nicht auf.

Das auf allen drei Spannungsinvarianten basierende Einflächenmodell wurde für die Verwendung in triaxial druckdominanten Bauteilen entwickelt. Die Versagensfläche lässt eine sehr gute Approximation sämtlicher Versuchsdaten zu. Als Sonderfall der dreidimensionalen Versagensfläche wird die Bruchumhüllende des ebenen Spannungszustands ebenfalls sehr gut wiedergegeben. Für das Einflächenmodell hat sich innerhalb dieser Arbeit kein für Strukturberechnungen ausreichend stabiler Algorithmus zur Spannungsintegration verwirklichen lassen. Insbesondere Rückprojektionen aus dem Apexbereich erweisen sich als äußerst instabil. Zwar lässt sich durch

Variation der Modellparameter je nach Problemstellung eine bedingt stabile Spannungsrückprojektion erhalten, hierfür kann zum Beispiel das plastische Potenzial kreisrund bezüglich der Deviatorschnitte gewählt werden, doch für eine allgemeingültige Anwendung, insbesondere mit dem Ziel der Struktursimulation, kann diese Vorgehensweise nicht befriedigen. Ein unangenehmer Nebeneffekt einer solchen Parameterwahl ist eine nichtassoziierte Fließregel in Deviatorrichtung, die im Gegensatz zu einer physikalisch begründeten und die Dilatanz mindernde Nichtassoziativität in hydrostatischer Richtung unerwünscht ist.

Neben den vorgestellten Verbesserungsmöglichkeiten, die zum einen aus dem Einflächenmodell durch Hinzunahme einer inversen Apex-Fließfläche tatsächlich ein Zweiflächenmodell machen (der Terminus *Einflächenmodell* wird jedoch beibehalten) und zum anderen einem Verfahren zur Beschleunigung der Konvergenz innerhalb der Spannungsrückprojektion bei reinen Kompressionslastpfaden, sind noch weitere Ansätze denkbar. So kann die Anwendung von Zwischeniterationen auf lokaler Ebene erfolgreich sein. Dazu wird eine Aufspaltung des Verzerrungskrements des aktuellen Lastschritts im Sinne eines Homotopieverfahrens in n Teilinkremente, für die nacheinander das lokale Projektionsproblem definiert und gelöst wird, vorgenommen (siehe zum Beispiel Leppin [106]). Vor dem Hintergrund der Stabilitätsprobleme auf lokaler Ebene wurden die analytischen Ableitungen durch numerische Differenziation überprüft. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Verwendung numerischer Ableitungen erster Ordnung der Fließfläche bzw. des plastischen Potenzials für das Einflächenmodell zwar möglich, jedoch mit einer Zunahme der Iterationszahlen verbunden ist und daher nicht empfohlen werden kann. Dagegen führt dieselbe Vorgehensweise bei den Ableitungen des Fließvektors zur Bildung des Hesse-Tensors zu gleichen Iterationszahlen innerhalb der Gleichgewichtsiteration und ist daher als Alternative anwendbar. Die Verwendung numerischer Ableitungen zweiter Ordnung zur Bildung des Hesse-Tensors direkt aus dem Fließpotential kann für komplexe dreidimensionale Modelle nicht empfohlen werden. Für die analytischen bzw. die numerischen Ableitungen erster Ordnung ist zu bemerken, dass bei den vorgestellten Modellproblemen jeweils eine quadratische Konvergenzrate innerhalb der Gleichgewichtsiteration erzielt wurde.

Für beide Plastizitätsmodelle werden Evolutionsgesetze vorgeschlagen, die auf einer bruchenergetischen Formulierung basieren und die Verwendung eines netzangepassten Entfestigungsmoduls motivieren. Dabei besteht die Problematik, dass zwar das globale Strukturverhalten infolge des Entfestigungsmoduls regularisiert wird, innerhalb des Verzerrungsfeldes jedoch trotzdem ein bzw. bei komplexeren Strukturen auch mehrere Lokalisierungsbänder auftreten können. Die weiteren einfachen Möglichkeiten zur Regularisierung werden diskutiert. Der untersuchte viskoplastische Ansatz kann für ratenunabhängige Problemstellungen, in denen weder die Belastungsgeschwindigkeit noch die Belastungsdauer eine Rolle spielen, nur bedingt angewendet werden.

Die Bewehrung wird basierend auf der eindimensionalen Plastizitätstheorie mit multilinearen Evolutionsgesetzen oder solchen vom *Ramberg-Osgood*-Typ innerhalb eines orthotropen Materialtensors berücksichtigt. Der zusätzliche konstitutive Tensor aus der Bewehrung wird auf den algorithmischen Materialtensor einer Schicht des Schalenelements addiert, wobei unerheblich ist, ob das verwendete Schalenmodell einen C^0 - oder C^1 -kontinuierlichen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung berücksichtigt. Der für Balken- und Plattenprobleme signifikante *tension-stiffening*-Effekt kann als zusätzliche Spannungskomponente berücksichtigt werden. Im Zuge der untersuchten Strukturbeispiele aus Stahlbeton hat sich jedoch gezeigt (siehe Crisfield [35]), dass der Effekt nur bei linearem Verschiebungsansatz und einer Schalenschicht, also bei Restriktion des Schalenmodells auf die klassische *Bernoulli*-Hypothese, von praktischer Bedeutung ist. Bereits drei *Schalenschichten* sind in der Lage, das sogenannte Mittragen des Betons zwischen den

Rissen ausreichend genau wiederzugeben, so dass auf Strukturebene kein unterschiedliches Verformungsverhalten mehr festgestellt werden kann. Der trotzdem auftretende Bewehrungsschlupf hat bei Strukturberechnungen keinen signifikanten Einfluss auf das Tragverhalten, sollte jedoch bei Detailuntersuchungen berücksichtigt werden.

Für die numerische Simulation von Experimenten ist insbesondere die genaue Kenntnis der im Versuch verwendeten Materialien und deren Parameter notwendig. Für beide vorgestellten Betonmodelle lassen sich die Modellparameter anhand von Daten allgemeiner Belastungsversuche gut bestimmen. Die Anpassung des Materialmodells an den tatsächlich verwendeten Werkstoff sollte dann unabhängig von den Modellparametern ausschließlich durch Materialparameter erfolgen. Dabei zeigt sich, dass insbesondere die Werte für die Zugfestigkeit f_{ctm} und die Bruchenergie des Betons sehr starken Schwankungen unterliegen. Dies ist zum einen in den Versuchseinrichtungen aber mehr noch in der prinzipiellen Inhomogenität des Materials selbst – auf der betrachteten Skala – begründet. Klassischerweise wird bei Experimenten nur die Druckfestigkeit f_{cm} und seltener die (Biege-)Zugfestigkeit f_{ctm} des verwendeten Betons angegeben, so dass nicht vorhandene Parameter aus den vorhandenen grob abgeschätzt werden müssen. Die numerische Simulation ist umgekehrt jedoch sehr sensitiv gegenüber den mit hohen Unsicherheiten behafteten abgeschätzten Parametern, wie der Zugfestigkeit f_{ctm} und der Bruchenergie G_f .

8.2 Ausblick

Die Entwicklung von Struktur- und Materialmodellen für Betontragwerke kann mit dem vorgestellten Konzept sicherlich noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Insbesondere sind aus der Sicht des Autors die folgenden Probleme noch zu lösen und bieten genügend Raum für weitere Forschungsaktivitäten:

- Insbesondere die numerische Stabilität des Einflächenmodells muss in weiteren Untersuchungen verbessert werden, um dieses vielversprechende, jedoch in der numerischen Umsetzung auch äußerst komplexe Modell für Strukturberechnungen anwendbar zu machen.
- Die bruchenergetische Regularisierung, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird, liefert auf globaler Ebene ein befriedigendes Antwortverhalten der Gesamtstruktur, ohne jedoch ein netzabhängiges Lokalisieren innerhalb eines bzw. auf Strukturebene auch mehrerer Elementbänder zu unterbinden. Einen gängigen Ansatz liefern für einfache Plastizitätsmodelle sogenannte Gradientenmodelle. Eine Kombination von komplexer Fließfläche und gradientenbasierter Formulierung ist dem Autor derzeit nicht bekannt, kann jedoch als vielversprechender Ausgangspunkt weiterer Entwicklungen gelten.
- Um die spontan auftretenden numerischen Probleme entfestigender Materialien bei der Gleichgewichtsiteration auf globaler Ebene zu lösen, wurden in jüngster Vergangenheit entsprechende Arbeiten veröffentlicht (siehe zum Beispiel Zohdi & Wriggers [197]). Diese Ansätze sind an geeigneten Beispielen zu verifizieren.
- Es bietet sich an, die einfache skalare Schädigungsformulierung durch etwas komplexere Ansätze, zum Beispiel auf Basis von Tensoren zweiter Stufe, zu erweitern und damit die Simulation von zyklischen Belastungsversuchen, wie sie für Stahlbetonrahmentragwerke existieren, zu ermöglichen.

Darüber hinaus liefern die Entwicklungen im Bereich der Fluid-Struktur-Interaktion ein weites Betätigungsfeld, um mit den geleisteten Entwicklungen auf konstitutiver Seite, zum Beispiel zur Simulation von winderregten Stahlbetonschalen, kombiniert zu werden.

Literatur

- [1] **Argyris, J. H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, E.P., Willam, K. (1974):** „Recent Developments in the Finite Element Analysis of Prestressed Concrete Reactor Vessels”, *Nucl. Engng. Design*, Vol. 28, pp. 42–75.
- [2] **Argyris, J. H., Faust, G., Willam, K. J. (1976):** „Limit Load Analysis of Thick Walled Concrete Structures – A Finite Element Approach to Fracture“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, pp. 215–243.
- [3] **Arnesen, A., Bergan, P. G., Sorensen, S. O. (1980):** „Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 571-579.
- [4] **Bazant, Z. P. (1976):** „Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 102(2), pp. 331-344.
- [5] **Bazant, Z. P., Oh, B. (1983):** „Crack Band Theory for Fracture of Concrete”, RILEM, *Mat. Struct.*, Vol. 16, pp. 155-177.
- [6] **Bazant, Z. P., Belytschko, T. B., Chang, T.-P. (1984):** „Continuum Theory for Strain Softening”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, pp. 1666-1692.
- [7] **Bazant, Z. P., Prat, P. (1988):** „Microplane model for brittle plastic materials. I: Theory, II: Verification”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, pp. 1672-1702.
- [8] **Bazant, Z. P., Planas, J. (1998):** „*Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*”, CRC Press, New York, ISBN 0-8493-8284-X.
- [9] **Bathe, K.-J. (1982):** „*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, German Translation: **Bathe K.-J. (1986):** „*Finite-Elemente-Methoden*”, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [10] **Becker, E., Bürger, W. (1975):** „*Kontinuumsmechanik*”, Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- [11] **Bertram, D. (1999):** „*Stahl im Bauwesen*“, Betonkalender 1997, Teil 1, pp. 151-282, Ernst & Sohn-Verlag, Berlin.
- [12] **Betten, J. (1993):** „*Kontinuumsmechanik*”, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-56646-5.
- [13] **Bischoff, M. (1999):** „Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung”, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [14] **Bischoff, M., Ramm, E. (1999):** „Solid-Like Shell or Shell-Like Solid Formulation? A personal View”, In W. Wunderlich (ed.), *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Proc. ECCM'99, Technische Universität München.
- [15] **de Borst, R. (1987):** „Integration of Plasticity Equations for Singular Yield Functions”, *Computers & Structures*, Vol. 26, pp. 823-829.
- [16] **de Borst, R., Nauta, P. (1985):** „Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model”, *Eng. Comp.*, Vol. 2, pp. 35-46.
- [17] **de Borst, R., Mühlhaus, H.-B. (1992):** „Gradient Dependent Plasticity: Formulation and Algorithmic Aspects”, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 521-539.
- [18] **de Borst, R., Sluys, L. J., Mühlhaus, H.-B., Pamin, J. (1993):** „Fundamental Issues in Finite Element Analysis of Localization of Deformation”, *Eng. Comp.*, Vol. 10, pp. 99-121.
- [19] **Bouma, A. L., van Riel, A. C., van Koten, H., Beranek, W. J. (1961):** „Investigations on Models of Eleven Cylindrical Shells of Reinforced and Prestressed Concrete”, *Proceedings of the Symposium on Shell Research*, Delft, North-Holland, Amsterdam, 1961.

- [20] **Büchter, N. (1992):** „Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [21] **Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D. (1994):** „Three-Dimensional Extension of Nonlinear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept“, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 2551-2568.
- [22] **Bufler, H. (1991):** „Elastizitätstheorie“, *Vorlesungsskript 1991*, Institut für Mechanik, Universität Stuttgart.
- [23] **Bufler, H. (1993):** „Energimethoden“, *Vorlesungsskript WS 1993/94*, Institut für Mechanik, Universität Stuttgart.
- [24] **Braun, M. (1995):** „Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [25] **Carol, I., Jirásek, M., Bazant, Z. P. (2000):** „New Thermodynamic Approach to Microplane Model. Part I: Free Energy and Consistent Microplane Stresses“, *Intl. J. Solids & Structures*, im Druck.
- [26] **CEB-FIP - Model Code 1990**, Bulletin d'Information CEB (1990).
- [27] **Chan, E. C. (1982):** „Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells with Edge Beams“, *Ph. D.-Dissertation*, Structural Engineering and Structural Mechanics Report No. UC-SESM 82-8, University of California, Berkeley.
- [28] **Chen, W. F. (1982):** „*Plasticity in Reinforced Concrete*“, McGraw-Hill Book Company Inc., ISBN 0-07-010687-8.
- [29] **Cervenka, J. (1994):** „Discrete Crack Modeling in Concrete Structures“, *Ph. D.-Dissertation*, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado at Boulder.
- [30] **Cervenka, V., Pukl, R., Eligehausen, R. (1992):** „Computer Simulation of Anchoring Technique in Reinforced Concrete Beam“, In: Bicanic, N. et al. (Eds.): *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Swansea, UK, pp. 1-9.
- [31] **Coleman, B. D., Noll, W. (1963):** „The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity“, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 13, pp. 167-178.
- [32] **Cordebois, J. P., Sidoroff, F. (1982):** „Anisotropic Damage in Elasticity and Plasticity“, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 2 (Numéro spécial), pp. 45-60.
- [33] **Cosserat E., Cosserat F. (1909):** „*Théorie des corps déformables*“, A. Herrman et Fils, Paris.
- [34] **Crisfield, M. A. (1982):** „Local Instabilities in the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams and Slabs“, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, Vol. 73, Part 2, pp. 55-62.
- [35] **Crisfield, M. A. (1986):** „Snap-Through and Snap-Back Response in Concrete Structures and the Dangers of Under-Integration“, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22, pp. 751-767.
- [36] **Crisfield, M. A. (1997):** „Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures“, Volume 2: Advanced Topics, ISBN 0 471 95649 X, John Wiley & Sons Ltd., UK.
- [37] **Cundall, P. A., Strack, O. D. L. (1979):** „A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies“, *Géotechnique*, Vol. 29, pp. 47-65.
- [38] **Curbach et al. (1998):** „Sachstandsbericht zum Einsatz von Textilien im Massivbau“, DAfStB Heft 488.
- [39] **Curbach, M. (1997):** „Verwendung von technischen Textilien im Betonbau“, *Bauen mit Textilien*, Sonderheft 1997.
- [40] **Dennis, J. E., Schnabel, R. B. (1983):** „*Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*“, Prentice-Hall, New Jersey (Reprinted by Siam, Classics in Applied Mathematics, 1996).

- [41] **DIN 1045, neu (1998):** „Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Teil 1: Bemessung und Konstruktion“, Entwurf 12/98, Beuth Verlag GmbH, Berlin.
- [42] **Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M., Gioia, G. (1990):** „Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortions“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 90, pp. 892-844.
- [43] **Duvaut, G., Lion, J. L. (1972):** „Les Inequations en Mechanique et en Physique“, *Dunod*, Paris.
- [44] **DIN V 18932 (DIN V ENV 1992-4):** „Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau“, Ausgabe 8/2000.
- [45] **Ehlers, W. (1995):** „A Single-Surface Yield Function for Geomaterials“, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 65, pp. 246-259.
- [46] **Eitel, L. (1999):** „Untersuchung des Tragverhaltens von textilbewehrten Betonbauteilen“, *Diplomarbeit*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [47] **Etse, G. (1992):** „Theoretische und numerische Untersuchungen zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton“, *Dissertationsschrift*, Institut für Mechanik, Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- [48] **Etse, G., Willam, K. (1994):** „Fracture Energy-Based Constitutive Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete“, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, pp. 1983-2011.
- [49] **Etse, G., Willam, K. (1997):** „Failure Analysis of Elastoviscoplastic Material Models“, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, pp. 60-69.
- [50] **Eurocode 2 (1993):** „Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau“, in: *Techn. Baubest.*, 6. Aufl., 193. Lieferung, S. 205-268-222.
- [51] **Feenstra, P.H. (1993):** „Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete“, *Ph. D.-Dissertation*, Delft University of Technology Press.
- [52] **Flögl, H., Mang, H. (1981):** „On Tension Stiffening in Cracked Reinforced Concrete Slabs and Shells Considering Geometric and Physical Nonlinearity“, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 51, pp. 215-242.
- [53] **Franz, G. (1970):** „Über die Beanspruchung der Bewehrung bei kreuzweise bewehrten, vierseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatten aus Stahlbeton“, *Untersuchungsbericht zum Forschungsauftrag F 505*, Institut für Beton und Stahlbeton, Universität Karlsruhe.
- [54] **Gollas, Liane (1998):** „Untersuchungen an vorgespannten Verbundelementen mit mineralischer Matrix und Vorspannelementen aus Aramid“, *Dissertationsschrift*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- [55] **van Greunen, J. (1979):** „Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Slabs and Panels“, *Ph. D.-Dissertation*, Structural Engineering and Structural Mechanics Report No. UC-SESM 79-3, University of California, Berkeley.
- [56] **Gupta, A. K., Akbar, H. (1984):** „Cracking in Reinforced Concrete Analysis“, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, pp. 1735-1746.
- [57] **Hand, F. R., Pecknold, W. C., Schnobrich, W. C. (1972):** „A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells“, *Structural Research Series No. 389*, UILU-ENG-72-2011, University of Illinois, Urbana.
- [58] **Haufe, A., Menrath, H., Ramm, E. (1998):** „Results of the Round Robin on a Wedge Splitting Test“, *Internal Report submitted to V. E. Saouma, University of Colorado, Boulder, USA, December 12, 1998*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [59] **Haufe, A., Menrath, H., Ramm, E. (1999):** „Nonlinear Analysis of Composite Steel-Concrete Structures“, In: *Proceedings of ASCE Structures Congress 1999*, New Orleans, USA, April 18-21, pp. 219-223.

- [60] **Haufe, A., Menrath, H., Ramm, E. (2000):** „Numerical Simulation of High Strength Steel-High Strength Concrete Composite Structures“, in: *Proceedings of the 6th ASCCS Conference on Steel and Concrete Composite Structures 2000*, Los Angeles, CA, USA, March 22-24, pp. 1131-1140.
- [61] **Haufe, A., Menrath, H., Ramm, E. (2000):** „A Comparison of Plasticity Models for Thin-Walled Reinforced Concrete Structures“, In: Owen, D.R.J.; Onate, E.; Hinton, E. (Eds.): *Proc. of 'COMPLAS 2000'*, CD-ROM, Barcelona, Spain, 11-14 September.
- [62] **Hedgren, A.W. Jr. (1965):** „A Numerical and Experimental Study of Translational Shell Roofs“, *Ph. D.-Dissertation*, Princeton University.
- [63] **Hegger, J., Döinghaus, P., Littwin, R., Will, N., Bischoff, T., Wulfhorst, B. (1999):** „Das Tragverhalten von Textilbeton – Versuche und Berechnungen“, *Bauen mit Textilien*, Heft 2, pp. 20-23.
- [64] **Hegger, J., Sasse, H. R., Wulfhorst, B., Döinghaus, P., Molter, M., Rößler, G., Schneider, M. (1999):** „U-Träger als bauteilintegrierte Schalung“, *Bauen mit Textilien*, Heft 2, pp. 24-28.
- [65] **Hencky, H. (1924):** „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen“, *ZAMM*, Vol. 4, pp. 323 ff.
- [66] **Herzinger, R. (2000):** „Numerische Untersuchungen von Flächen- und Schalentragwerken aus Stahlbeton“, *Diplomarbeit*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [67] **Hilsdorf, K. H., Reinhardt, H.-W. (1999):** „Beton“, Betonkalender 1999, Teil 1, pp. 1-156, Ernst & Sohn-Verlag, Berlin.
- [68] **Hill, R. (1958):** „A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids“, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6, pp. 236-249.
- [69] **Hillerborg, A., Modéer, M., Peterson, P. E. (1976):** „Analysis of Crack Propagation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements“, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782.
- [70] **Hofstetter, G. (1990):** „Physikalisch und geometrisch nichtlineare Traglastanalysen von Spannbetonscheiben, -platten und -schalen mittels der Methode der Finiten Elemente“, *Dissertationsschrift*, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien.
- [71] **Hofstetter, G. (1990):** „Höhere Festigkeitslehre“, Skriptum zur Vorlesung, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien.
- [72] **Hofstetter, G., Taylor, R. L. (1991):** „Treatment of the Corner Region for Drucker-Prager Type Plasticity“, *ZAMM*, Vol. 71, pp. 589-591.
- [73] **Hofstetter, G., Simo, J. C., Taylor, R. L. (1993):** „A Modified Cap Model: Closest Point Solution Algorithms“, *Comp. & Struct.*, Vol. 46, pp. 203-214.
- [74] **Hofstetter, G., Mang, H.A. (1995):** „*Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*“, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- [75] **Jähnig, P. (2000):** „Untersuchungen zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten“, *Diplomarbeit*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [76] **Jensen, H. M. (1998):** „Notes on Fracture Mechanics“, *Ph. D.-Course on Continuum Mechanics and Finite Strain Plasticity*, DCAMM, Technical University of Denmark, 21.-30. January, Lecture Notes.
- [77] **Jirásek, M. (1998):** „*Modeling of Damage and Fracture in Quasibrittle Materials*“, Ph. D.-Course, University of Stuttgart, 16-17 December, Lecture Notes.
- [78] **Jirásek, M. (1998):** „Embedded Crack Models for Concrete Fracture“, *Proceedings of the EURO-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Eds.: De Borst, R., Bicanic, N., Mang, H. A., Meschke, G.; Badgastein/Austria, A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, Vol. 1, pp. 291-300.

- [79] **Jirásek, M. (1999):** „*Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*“, Ph. D.-Course, RWTH-Aachen, 3-7 May, Lecture Notes.
- [80] **Jirásek, M., Zimmermann, T., (1998):** „Rotating Crack Model with Transition to Scalar Damage. Part I & II“, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, pp. 277-284 und pp. 842-851.
- [81] **Jeremic, B., Sture, S. (1997):** „Implicit Integrations in Elastoplastic Geotechnics“, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, Vol. 2, pp. 165-183.
- [82] **Kahlow, A. (1999):** „Stampfbeton. Frühe Anwendungsbeispiele im Hochbau“, in: Schmidt (ed.): *Zur Geschichte des Stahlbetonbaus – Die Anfänge in Deutschland 1850 bis 1910*, Ernst & Sohn Verlag, Berlin.
- [83] **Karihaloo, B. L. (1995):** „*Fracture Mechanics & Structural Concrete*“, Longman Scientific & Technical, Essex, England, ISBN 0-582-21582-X.
- [84] **Kang, H. D. (1997):** „Triaxial Constitutive Model for Plain and Reinforced Concrete Behavior“, *Ph. D.-Dissertation*, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado at Boulder.
- [85] **Khan, A. S., Huang, S. (1995):** „*Continuum Theory of Plasticity*“, John Wiley and Sons, Inc., New York, ISBN 0-471-31034-3.
- [86] **Klingbeil, E. (1989):** „*Tensorrechnung für Ingenieure*“, BI-Hochschultaschenbuch, 179.
- [87] **Klisinski, M., Runesson, K., Sture, S. (1991):** „Finite Element with Inner Softening Band“, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, pp. 575-587.
- [88] **Koiter, W. T. (1953):** „Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with Singular Yield Surface“, *Q. appl. Math.*, Vol. 11, pp. 350-354.
- [89] **Kolleger, J. Mehlhorn, G. (1989):** „Material Model for the Analysis of Reinforced Concrete Shells“, *Forschungsbericht Nr. 7*, Fachgebiet für Massivbau, Gesamthochschule Kassel.
- [90] **Kompfner, T. A. (1983):** „Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [91] **Kotsovos, M. D., Newman, J. B. (1978):** „Generalized Stress-Strain Relations for Concrete“, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 104, No. EM4, pp. 845-856.
- [92] **Krätzig, B. W., Zhuang, Y. (1992):** „Collapse Simulation of Reinforced Concrete Natural Drought Cooling Towers“, *Engineering Structures*, Vol. 14, 1992, pp. 291-299.
- [93] **Krätzig, B. W., Mancevski, D. (1998):** „Structural Simulation with Softening Incorporation into the Cap-Model“, *Proceedings of the EURO-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Eds.: De Borst, R., Bicanic, N., Mang, H. A., Meschke, G.; Badgastein/Austria, A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, Volume 1, pp. 43-50.
- [94] **Krüger, G. (1998):** „*Go To: C Programmierung*“, ISBN 3-8273-1368-6, Addison-Wesley-Longman, Bonn.
- [95] **Kuhl, E. (2000):** „Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 32, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [96] **Kuhl, E., D’Addetta, G. A., Herrmann, H. J., Ramm, E. (1999):** „A Comparison of Discrete Granular Material Models with Continuous Microplane Formulations“, *Granular Matter*, Vol. 2 (3), pp. 113-121.
- [97] **Kuhl, E., Ramm, E., Willam, K. (1999):** „Failure Analysis for Elasto-Plastic Material Models on Different Levels of Observation“, *Intl. J. Solids & Structures*, Vol. 37, pp. 7259-7280.
- [98] **Kun, F., D’Addetta, G.A., Herrmann, H. J., Ramm, E. (1999):** „Two-Dimensional Dynamic Simulation of Fracture and Fragmentation of Solids“, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, Vol. 6, pp. 385-402.

- [99] **Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., Rüsç, H. (1969):** „Behavior of concrete under biaxial stress”, *ACI Journal*, pp. 656-666.
- [100] **Krenk, S. (1996):** „Family of Invariant Stress Surfaces”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No. 3, pp. 201-208.
- [101] **Lade, P. V., Kim, M. K. (1995):** „Single Hardening Constitutive Model for Soil, Rock and Concrete“, *Intl. J. Solids & Structures*, Vol. 32, No. 14, pp. 1963-1978.
- [102] **Lambrecht, M., Miehe, C. (1999):** „Two Non-Associated Isotropic Elastoplastic Hardening Models for Frictional Materials“, *Acta Mechanica*, Vol. 135, pp. 73-90.
- [103] **Lemaître, J. (1996):** „*A Course on Damage Mechanics*“, Second Edition, Springer-Verlag Berlin, Germany, ISBN 3-540-60980-6.
- [104] **Leon, A. (1933):** „Über das Maß der Anstrengung bei Beton“, *Ingenieurarchiv*, Vol. 4, pp. 421-431.
- [105] **Leon, A. (1935):** „Über die Scherfestigkeit des Betons“, *Beton & Eisen*, Jahrgang 34, Heft 8, pp. 130-135.
- [106] **Leppin, C. (2000):** „Ein diskontinuierliches Finite-Element-Modell für Lokalisierungsversagen in metallischen und granularen Materialien“, *Dissertationsschrift*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [107] **Lin, C. S. (1973):** „Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells“, *Ph. D.-Dissertation*, Structural Engineering and Structural Mechanics Report No. UC-SESM 73-7, University of California, Berkeley.
- [108] **Lin, C. S., Scordelis, A. C. (1975):** „Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form“, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, No. ST3.
- [109] **Lubliner, J. (1972):** „On the Thermodynamic Foundations of Nonlinear Solid Mechanics“, *Intl. J. Non-linear Mech.*, Vol. 7, pp. 237-254.
- [110] **Lubliner, J. (1990):** „*Plasticity Theory*“, Macmillan Publishing Company, New York, ISBN 0-02-372161-8.
- [111] **Luenberger, D.G. (1984):** „*Linear and Nonlinear Programming*“, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company.
- [112] **Macari, E. J., Weihe, S., Arduino, P. (1997):** „Implicit Integration of Elastoplastic Constitutive Models for Frictional Materials with Highly Non-Linear Hardening Functions“, *Mechanics of Cohesive Materials*, Vol. 2, pp. 1-29.
- [113] **Malvern, L. E. (1969):** „*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*“, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [114] **Mang, H.A., Flögl, H. (1982):** „Traglastberechnung von Stahlbetonscheiben, -platten, und -schalen“, *Finite Elemente in der Bruchmechanik*, Rossmann, H.-P. (Hg.), Springer Verlag, Wien, pp. 333-364.
- [115] **Marsden, J. E., Hughes, T. J R. (1983):** „*Mathematical Foundations of Elasticity*“, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [116] **Matzenmiller, A. (1988):** „Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [117] **Mayer, A. (1991):** „Wellcrete – an Advanced Technology for the Economic Production of High-Quality Fibrous Concrete Products“, *Concrete Precasting Plant and Technology*, Vol. 57, Nr. 8, pp. 70-79.
- [118] **McNeice, G. M. (1967):** „*Elastic-Plastic Bending of Plates and Slabs by the Finite Element Method*“, University of London, London.
- [119] **Menétrey, Ph., Willam, K. J. (1995):** „A Triaxial Failure Criterion for Concrete and its Generalization“, *ACI Structural Journal*, Vol. 92, pp. 311-318.

- [120] **Menrath, H., Haufe, A., Ramm, E. (1998):** „A Model for Composite Steel-Concrete Structures“, *Proceedings of the EURO-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Eds.: De Borst, R., Bicanic, N., Mang, H. A., Meschke, G.; Badgastein/Austria, A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, Volume 1, pp. 33-42.
- [121] **Menrath, H. (1999):** „Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 29, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [122] **Menrath, H., Haufe, A., Ramm, E. (1999):** „Ein nichtlineares Materialmodell für FE-Analysen von Stahlverbundträgern“, *Stahlbau*, 68, Heft 9, pp. 703-713.
- [123] **Meschke, G., Mang, H.A., Lackner, R. (1997):** „Recent Accomplishments and Future Research Directions in Computational Plasticity of Reinforced Concrete Structures“, In: Owen, D.R.J.; Onate, E.; Hinton, E. (Eds.): *Proc. of 'COMPLAS 1997', Fundamentals and Applications (Part 1)*, CIMNE, Barcelona, Spain, pp. 119-144.
- [124] **Miehe, C. (1996):** „Numerical Computation of Algorithmic (Consistent) Tangent Moduli in Large Strain Inelasticity“, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 134, pp. 223-240.
- [125] **van Mier, J. G. M., Reinhardt, H. W., van der Vlugt, B. W. (1987):** „Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton“, *Bauingenieur*, Vol. 62, pp. 353-361.
- [126] **van Mier, J. G. M. (1996):** „*Fracture Processes of Concrete: Assessment of Material Parameters for Fracture Models*“, ISBN 0-8493-9123-7, CRC Press, New York.
- [127] **Mills, L. L., Zimmermann, R. M. (1970):** „Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions“, *ACI Journal*, Vol. 67, pp. 803-807.
- [128] **Mosler, J., Meschke, G. (2000):** „3D FE Analysis Of Cracks By Means Of The Strong Discontinuity Approach“, In: Owen, D.R.J.; Onate, E.; Hinton, E. (Eds.): *Proc. of 'COMPLAS 2000', CD-ROM*, Barcelona, Spain, 11-14 September.
- [129] **Mühlhaus, H.-B., Aifantis, E. C. (1991):** „A Variational Principle for Gradient Plasticity“, *Intl. J. Solids & Structures*, Vol. 28, pp. 845-857.
- [130] **Müller, G. (1977):** „Numerical Problems in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete“, *Structural Engineering and Structural Mechanics Report*, No. UC-SESM 77-5, University of California, Berkeley.
- [131] **Müller, G. (1977):** „Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Hyperbolic Paraboloid Shells“, *Structural Engineering and Structural Mechanics Report*, No. UC-SESM 77-6, University of California, Berkeley.
- [132] **Nagtegaal, J. C. (1982):** „On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems“, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 33.
- [133] **Naghdi, P. M., Trapp, J. A. (1975):** „The Significance of Formulating Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space“, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 13, pp. 785-797.
- [134] **Nelissen, L.J.M. (1972):** „Biaxial Testing of Normal Concrete“, *Heron*, Vol. 18, No. 1.
- [135] **Ngo, D., Scordelis, A. C. (1967):** „Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams“, *ACI Journal*, Vol. 64, No. 3.
- [136] **Ohno, S., Hannant, D. J. (1994):** „Modeling of Stress-Strain Response of Continuous Fiber Reinforced Cement Composites“, *ACI Material Journal*, Vol. 91, No. 3, pp. 306-312.
- [137] **Ottosen, N. S. (1977):** „A Failure Criterion for Concrete“, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 103, pp. 527-535.
- [138] **Ottosen, N. S., Runesson, K. (1991):** „Properties of Discontinuous Bifurcation Solutions of Elasto-Plasticity“, *Intl. J. Solids & Structures*, Vol. 27, pp. 401-421.

- [139] **Ortiz, M.; Popov, E. (1985):** „Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations”, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 1561-1576.
- [140] **Owen, D. R. J., Figueiras, J. A., Damjanic, F. (1983):** „Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures including Thermal Loading”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 41, pp. 323-366.
- [141] **Pamin, J., de Borst, R., (1998):** „Simulation of Crack Spacing Using a Reinforced Concrete Model With an Internal Length Parameter”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 68, pp. 613-625.
- [142] **Pankaj (1989):** „Finite Element Analysis in Strain Softening and Localisation Problems”, *Ph. D.-Dissertation*, University College Swansea, University of Wales.
- [143] **Pankaj, Bicanic, N. (1990):** „Singularity Indicators for Stress Return Mapping in hardening/softening Mohr-Coulomb Plasticity“, *Proc. Int. Conf. Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*, Editors: Pande, N. G., Middleton, J., Vol. 2, pp. 854-861, Elsevier Applied Science, London.
- [144] **Pankaj, Bicanic, N. (1997):** „Detection of Multiple Active Yield Conditions for Mohr-Coulomb Elastoplasticity“, *Computers & Structures*, Vol. 62, pp. 51-61.
- [145] **Parisch, H. (1992):** „Einführung in das Rechnen mit Tensoren“, *Vorlesungsmanuskript*, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- [146] **Perez-Foguet, A., Rodriguez-Ferran, A., Huerta, A. (1998):** „Numerical Differentiation for Local and Global Tangent Operators in Computational Plasticity“, *Publication CIMNE*, No. 144, Barcelona, Spain.
- [147] **Perez-Foguet, A., Rodriguez-Ferran, A., Huerta, A. (1999):** „Numerical Differentiation for Non-Trivial Consistent Tangent Matrices: An Application to the MRS-Lade Model“, *Publication CIMNE*, No. 151, Barcelona, Spain.
- [148] **Perzyna, P. (1996):** „Fundamental Problems in in Viscoplasticity“, in *Recent Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, Academic Press, New York, pp. 243-377.
- [149] **Pramono, E., Willam, K. (1988):** „Implicit Integration of Composite Yield Surfaces with Corners“, *Eng. Comput.*, Vol. 6, pp. 186-197.
- [150] **Pramono, E., Willam, K. (1989):** „Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete“, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 115, pp. 1183-1204.
- [151] **Ramberg, W., Osgood, W. R. (1943):** „Description of stress-strain curves by three parameters”, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note, No. 902.
- [152] **Ramm, E. (1976):** „Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente”, *Habilitationsschrift*, Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [153] **Ramm, E. (1987):** „Ultimate Load and Stability Analysis of Reinforced Concrete Shells”, *Proc. IABSE Colloquium on Computational Mechanics of Concrete Structures*, Delft, The Netherlands.
- [154] **Ramm, E. (1997):** „Nichtlineare Strukturanalyse und Finite Elemente ”, *Vorlesungsmitschrift SS 97 und WS 97/98*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [155] **Rashid, Y. R. (1968):** „Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels“, *Nucl. Eng. Des.*, Vol. 7(4), pp. 334-355.
- [156] **Reinhardt, H.-W. (1997):** „Werkstoffe im Bauwesen II”, *Arbeitsblätter zur Vorlesung Faserbeton*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- [157] **Reitinger, R. (1994):** „Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke”, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [158] **van Riel, A. C., Beranek, W. J., Bouma, A. L. (1957):** „Tests on Shell Roof Models of Reinforced Concrete”, *Proceedings of the second Symposium on Concrete Shell Roof Construction*, Teknisk Ukeblad, Oslo, Norway, 1957.

- [159] **Ristinmaa, M. (1999):** „Therodynamic Formulation of Plastic Work Hardening Materials”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, pp. 152-155.
- [160] **Rös, M., Eichinger, A. (1949):** „Bruchgefahr fester Körper bei ruhender statischer Beanspruchung”, Bericht Nr. 172, Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA), Zürich.
- [161] **Rots, J. G. (1988):** „Computational Modeling of Concrete Fracture”, *Ph. D.-Dissertation*, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [162] **Rudnicki, J. W., Rice, J. R. (1975):** „Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394.
- [163] **Sadouki, H., Wittmann, F. H. (1995):** „Numerical Concrete Applied to Investigate Size Effect and Stability of Crack Propagation“, *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Proc. of FRAMCOS-2, ed. by F. H. Wittmann, AEDIFICATIO Publishers, Freiburg, Germany.
- [164] **Schlangen, E. (1993):** „Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete“, *Ph. D.-Dissertation*, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [165] **Schnobrich, W. C. (1976):** „Behavior of Reinforced Concrete Structures Predicted by the Finite Element Method“, *Proc. 2nd National Symposium on Computerized Structural Analysis*, Washington, D. C., USA.
- [166] **Schnobrich, W. C. (1978):** „Prediction of Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Shells“, *In: Proc. IASS Symposium on Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Structures*, Mehlhorn (Ed.), Vol. 3, Darmstadt, Germany.
- [167] **Schreyer, H. L., Neilsen, M. K. (1996):** „Analytical and Numerical Tests for Loss of Material Stability“, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 1721-1736
- [168] **Scordelis, A. C., Chan, E. C. (1987):** „Nonlinear Analysis of reinforced Concrete Shells“, *Proc. ACI Symposium on Computer Applications in Concrete Technology*, San Francisco, ACI Special Publication SP-98.
- [169] **Scordelis, A. C. (1990):** „Nonlinear Material, Geometric and Time-Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Shells”, *Bulletin of the IASS*, Vol. 31, pp. 57-70.
- [170] **Simo, J.C., Govindjee, S. (1991):** „Non-Linear B-Stability and Symmetry Preserving Return Mapping Algorithms for Plasticity and Viscoplasticity“, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 31, pp. 151-176.
- [171] **Simo, J. C., Hughes, T. J. R. (1998):** „*Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics*“, Vol. 7, Springer Verlag, New York, Inc.
- [172] **Simo, J. C., Kennedy, J. G., Govindjee, S. (1988):** „Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity; Loading/unloading conditions and numerical algorithms“, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2161-2185.
- [173] **Simo, J. C., Kennedy, J. G., Taylor, R.L. (1989):** „Complementary Mixed Finite Element Formulations for Elastoplasticity“, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74, pp. 177-206.
- [174] **Simo, J. C., Rifai, S. (1990):** „A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes“, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp. 1595-1638.
- [175] **Simo, J. C., Meschke, G. (1993):** „A New Class of Algorithms for Classical Plasticity Extended to Finite Strains. Application to Geomaterials“, *Comp. Mech.*, Vol. 11, pp. 253-278.
- [176] **Simo, J. C., Oliver, J., Armero, F. (1993):** „An Analysis of Strong Discontinuities Induced by Strain Softening in Rate-Independent Inelastic Solids“, *Comp. Mech.*, Vol. 12, pp. 277-296.
- [177] **Simo, J.C., Taylor, R. L. (1985):** „Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity“, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 48, pp. 101-118.
- [178] **Sluys, L. J. (1992):** „Wave Propagation, Localization and Dispersion in Softening Solids”, *Ph. D.-Dissertation*, Delft University of Technology Press.

- [179] **Stein, E., Barthold, F.-J. (1992):** „Elastizitätstheorie“, *Vorlesungsmanuskript*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [180] **Stempniewski, L., Eibl, J. (1993):** „Finite Elemente im Stahlbeton“, In: *Betonkalender 1993*, Teil I, Ernst & Sohn Verlag, S. 249-312.
- [181] **Sture, S., Runesson, K., Macari-Pasqualino, E. J. (1989):** „Analysis and Calibration of a Three-Invariant Plasticity Model for Granular Materials“, *Ingenieur Archiv*, vol. 59, pp. 253-266.
- [182] **Suidan, M., Schnobrich, W. C. (1973):** „Finite Element Analysis of Reinforced Concrete“, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 99, pp. 2109-2122.
- [183] **Suanno, R. L. M. (1995):** „Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung“, *Dissertationsschrift*, Bericht Nr. 18, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [184] **Truesdell, C., Toupin, R. (1960):** „The Classical Field Theories“, In: *Handbuch der Physik*, ed. by Flügge, Vol. III/1, Springer-Verlag, Berlin.
- [185] **Vielsack, P. (1988):** „Stabilitätskriterien in der Strukturmechanik“, *Schriftenreihe des Instituts für Mechanik*, Universität Fridericiana Karlsruhe.
- [186] **Vonk, R. A. (1992):** „Softening of Concrete Loaded in Compression“, *Ph. D.-Dissertation*, Eindhoven University of Technology, The Netherlands..
- [187] **Wang, M. W., Sluys, L. J., de Borst, R. (1997):** „Viscoplasticity for Instabilities due to Strain Softening and Strain-Rate Softening“, *Intl. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 3839-3864.
- [188] **Willam, K. J. (1984):** „Experimental and Computational Aspects of Concrete Failure“, *Proc. Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Eds. F. Damjanic et al., Pineridge Press, Swansea, pp. 33-70.
- [189] **Willam, K. J. (1998):** „Deterioration Analysis of Materials and Structures“, In der Vorlesung 'Nichtlineare Strukturanalyse und Finite Elemente', Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [190] **Willam, K. J., Hansen, E., Kang, H. D. (1999):** „Performance Evaluation of Damage and Plasticity Formulations for Concrete“, In: *Proceedings of the US-Japan Seminar on Post-Peak Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Seismic Loads*.
- [191] **Willam, K. J., Warnke, E. (1975):** „Constitutive Model for Triaxial Behavior of Concrete“, *Proc. Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, Int. Assoc. for Bridge and Struc. Eng., Section III, Zürich, pp. 1-30.
- [192] **Wittek, U., Meiswinkel, R., Lang, C. (2000):** „Beitrag zu nichtlinearen Dimensionierungskonzepten von Flächentragwerken“, *Bericht Nr. 2*, Fachgebiet Baustatik, Universität Kaiserslautern.
- [193] **Yankelevsky, D. Z., Reinhardt, H. W. (1989):** „Uniaxial Behavior of Concrete in Cyclic Tension“, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No. 1, pp. 166-182.
- [194] **Yazdani, S., Schreyer, H. L. (1988):** „An Anisotropic Damage Model with Dilatation for Concrete“, *Mechanics of Materials*, Vol. 7, No. 3, pp. 231-244.
- [195] **Yazdani, S., Karnawat, S. (1996):** „A Constitutive Theory for Brittle Solids with Application to Concrete“, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 5, pp. 93-110.
- [196] **Zahlten, W. (1990):** „Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen“, *Dissertationsschrift*, Techn.-wiss. Mitteilungen 90-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität, Bochum.
- [197] **Zohdi, T. I., Wriggers, P. (2000):** „Some Aspects of Modeling and Computation of Micromechanical Deterioration“, In: *Proc. of 'COMPLAS 2000'*, In: Owen, D.R.J.; Onate, E.; Hinton, E. (Eds.): *Proc. of 'COMPLAS 2000'*, CD-ROM, Barcelona, Spain, 11-14 September.

Anhang A

A.1 Tensoranalysis

Im folgenden sollen einige der in dieser Arbeit notwendigen Grundlagen zur Tensoralgebra wiedergegeben werden. Ausführliche Abhandlungen findet man unter anderem in Klingbeil [86]. Eine sehr gute Zusammenstellung der wichtigsten Rechenregeln gibt Parisch in [145]. Es wird die symbolische und die Notation in Komponenten jeweils für den Fall einer kartesischen Metrik angegeben.

② Vektorprodukt (nicht kommutativ)

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \qquad c_k = a_i b_j \delta_{ijk} \qquad (\text{A.1})$$

dabei ist γ_{ijk} das Permutationssymbol definiert über

$$\delta_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{für } i,j,k = 12312 \\ -1 & \text{für } i,j,k = 32132 \\ 0 & \text{für } i,j,k = \text{übrige Permutationen} \end{array} \right\}. \qquad (\text{A.2})$$

② Tensorprodukt oder dyadisches Produkt (i. A. nicht kommutativ)

① für Vektoren:

$$\mathbf{c} = \vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}} \qquad c_{ij} = a_i b_j \qquad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{c}^T = (\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}})^T = \vec{\mathbf{b}} \otimes \vec{\mathbf{a}} \qquad c_{ji} = a_i b_j \qquad (\text{A.4})$$

① für Tensoren zweiter Stufe:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \qquad C_{ijkl} = a_{ij} b_{kl} \qquad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \qquad C_{klij} = a_{kl} b_{ij} \qquad (\text{A.6})$$

② Inneres Produkt oder Skalarprodukt zweier Vektoren (kommutativ)

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \qquad \alpha = a_i b_i \qquad (\text{A.7})$$

② Inneres Produkt oder einfache Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe mit einem Vektor

Rechtsmultiplikation:

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{c} \cdot \vec{\mathbf{b}} \qquad a_i = c_{ij} b_j \qquad (\text{A.8})$$

Links-multiplikation:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{c} \qquad a_i = c_{ji} b_j \qquad (\text{A.9})$$

Die beiden Produkte sind nur für einen symmetrischen Tensor \mathbf{T} kommutativ.

Inneres Produkt oder einfache Verjüngung zweier Tensoren zweiter Stufe

$$c = a \cdot b \qquad c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \qquad (\text{A.10})$$

Dieses Produkt ist nur für symmetrische Tensoren A und B kommutativ.

Doppelte Verjüngung zweier Tensoren zweiter Stufe

$$\alpha = a : b \qquad \alpha = a_{ik} b_{ik} \qquad (\text{A.11})$$

Dieses Produkt ist ebenfalls nur für symmetrische Tensoren A und B kommutativ.

A.2 Tensorinvarianten

Nachfolgend werden notwendige Invarianten (I_1, I_2, I_3) für den Spannungstensor (allgemein Tensoren zweiter Stufe) angegeben. Für die Invarianten des Verzerrungstensors (I_1', I_2', I_3') sowie des Verzerrungsdeviators (J_1', J_2', J_3') gelten sinngemäß die selben Gleichungen und Herleitungen.

Invarianten des Spannungstensors

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \qquad (\text{A.12})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \qquad (\text{A.13})$$

$$I_3 = \det \sigma_{ij} \qquad (\text{A.14})$$

Spannungsdeviator

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \qquad (\text{A.15})$$

Invarianten des Spannungsdeviators (Grundinvarianten)

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_{ii} = 0 \qquad (\text{A.16})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{3} I_2^2 - I_2 \qquad (\text{A.17})$$

$$J_3 = \det s_{ij} \qquad (\text{A.18})$$

Haigh-Westergaard-Koordinaten (ξ, ρ, θ)

Die *Haigh-Westergaard-Koordinaten* (auch *Reuß'sche Variablen*) beschreiben ebenfalls einen gegebenen Spannungspunkt eindeutig im Hauptspannungsraum.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{ii} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \qquad (\text{A.19})$$

$$\rho = \sqrt{2 J_2} = \sqrt{s : s} = \|s\| \qquad (\text{A.20})$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{1.5}} \right) \qquad (\text{A.21})$$

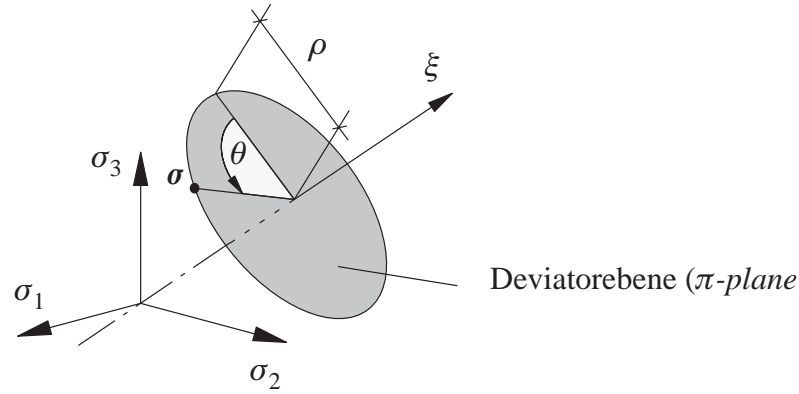


Abb. A.1: Definition der Haigh-Westergaard-Koordinaten

Differenzial des Spannungsdeviators

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \sigma} = \mathbf{P} &= \frac{\partial \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{ij} \right)}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{mk} \delta_{ml} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} 0 = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Mit der Projektionsmatrix

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.23})$$

Differenziale der ersten Spannungsinvarianten

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad (\text{A.24})$$

Differenziale der Deviatorinvarianten

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \mathbf{s} \quad (\text{A.25})$$

Die Norm des Spannungsdeviators wird folgendermaßen abgekürzt:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{I} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.27})$$

Differenziale der *Haigh-Westergaard*-Koordinaten

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{\partial \sigma} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{3}} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} = \frac{\partial (s : s)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s : s}} [\mathbf{P} : s + s : \mathbf{P}] = \frac{s}{|s|} = \frac{s}{\rho} = \frac{s}{\rho} : \frac{\partial s}{\partial \sigma} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= \frac{1}{3} \frac{\partial \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{1.5}} \right)}{\partial \sigma} = - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 27 \frac{J_3^2}{J_2^3}}} \left[J_2^{-1.5} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{2J_2^{2.5}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \right] \\ &= - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1 - \cos^2 3\theta}} \left[\frac{1}{J_2^{1.5}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{2J_2^{2.5}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

\Rightarrow *Beachte:* Für $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ wird $\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0$

Anhang B

B.1 Grundgleichungen des modifizierten *Kang*-Modells

Im folgenden werden die Bestimmungsgleichungen des modifizierten Modells angegeben. Eine detaillierte Beschreibung der Formulierung findet sich in Kapitel 5.4.

- **Definition der Versagensfläche**

$$F = F_{failure} + F_{hard} + F_{soft} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\Rightarrow F_{failure} = \frac{\rho}{f_{cm}} (\mu_F + (1-\mu_F) r(\theta, e)) - \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \right)^\alpha \quad (\text{B.2})$$

$$\Rightarrow F_{hard} = -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left[\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta - 1 \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\Rightarrow F_{soft} = \frac{\rho_1}{f_{cm}} (1 - c) \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

Für einige Ableitungen sind noch folgende Teilfunktionen sinnvoll:

$$F_1 = \frac{\rho}{f_{cm}} (\mu_F + (1-\mu_F) r(\theta, e)) \quad ; \quad F_2 = F - F_1 \quad (\text{B.5})$$

- **Definition des plastischen Potentials**

Das plastische Potenzial entspricht im wesentlichen der Versagensfläche, lediglich der unabhängige Eingabeparameter $\bar{\alpha}$ erlaubt die Kontrolle der Dilatanz.

$$Q = Q_{failure} + Q_{hard} + Q_{soft} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\Rightarrow Q_{failure} = \frac{\rho}{f_{cm}} (\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)) - \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \right)^{\bar{\alpha}} \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow Q_{hard} = F_{hard} \quad \text{und} \quad Q_{soft} = F_{soft} \quad (\text{B.8})$$

Für einige Ableitungen sind ebenfalls die folgenden Teilfunktionen sinnvoll:

$$Q_1 = \frac{\rho}{f_{cm}} (\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)) \quad ; \quad Q_2 = Q - Q_1 \quad (\text{B.9})$$

- **Willam-Warnke-Funktion**

$$r(\theta, e) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (\text{B.10})$$

$$e = e(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_0 - \xi_e f_{cm}}{\xi - \xi_e f_{cm}} \right) \quad (\xi_e \text{ siehe Tabelle 5.2}) \quad (\text{B.11})$$

- **Gebräuchliche Größen zur Definition der Fließfläche bzw. des Potentials**

$$\xi_0 = \sqrt{3} f_{ctm} \quad \xi_1 = -\sqrt{3} S f_{ctm} \quad (\text{B.12})$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_{uc}}{\left(\frac{\xi_{uc}-\xi_0}{\xi_1-\xi_0}\right)^\alpha} \quad \rho_{uc} = \frac{\sqrt{6}}{3} f_{cm} \quad (\text{B.13})$$

$$\xi_{uc} = -\frac{f_{cm}}{\sqrt{3}} \quad \xi_c = -T \xi_0 \quad (\text{B.14})$$

- **Evolutionsgesetz im Verfestigungsbereich**

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{1-k^2}{1-k_0^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$k = \frac{2}{h_D} (1-k_0) (\sqrt{2h_D \epsilon_p} - \epsilon_p) + k_0 \quad (\text{B.16})$$

$$h_D = A_h \left(\frac{\xi}{f_{cm}} \right)^2 + B_h \left(\frac{\xi}{f_{cm}} \right) + C_h \quad (\text{B.17})$$

- **Evolutionsgesetz im Entfestigungsbereich**

$$c = c_t \mu_D + c_C (1 - \mu_D) \quad (\text{B.18})$$

$$c_t = \exp\left(-\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}}\right) ; \quad \kappa_{tu} = \frac{G_f}{h f_{ctm}} \quad ; \quad \epsilon_s = \epsilon_p - h_D \mu_{DO} \quad (\text{B.19})$$

$$c_C = 1 - \left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{cu}}\right)^{\kappa_{cn}} ; \quad \kappa_{cu} = \kappa_{cp} \frac{G_c}{h f_{cm}} \quad ; \quad \kappa_{cp} = \frac{3}{2} \quad (\text{B.20})$$

$$\mu_D = \left(\frac{\xi - \xi_c}{\xi_0 - \xi_c} \right)^n \quad ; \quad \mu_{DO} = \frac{1}{2} \quad (\text{B.21})$$

B.2 Gradienten für Fließfläche F und Potenzial Q

- **Gradient der Versagensfläche**

$$\frac{\partial F(\xi, \rho, \theta)}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \quad (\text{B.22})$$

- **Gradient des plastischen Potentials**

$$\frac{\partial Q(\xi, \rho, \theta)}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \mathbf{m} \quad (\text{B.23})$$

- **Skalare Gradienten der Versagensfläche**

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F_1}{\partial r(\theta, e)} \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{\rho}{f_{cm}}(1 - \mu_F) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\mu_F + (1 - \mu_F) r(\theta, e)}{f_{cm}} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial e} = & \frac{-8e \cos^2 \theta + 4(2e - 1)}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1)R} - \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{\{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1)R\}^2} \\ & \times \left\{ -4e \cos \theta + 2R + \frac{(2e - 1)(-4e \cos^2 \theta + 5e - 2)}{R} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\text{wobei} \quad R = \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e} \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial e}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{(\xi_0 - \xi_e f_{cm})}{(\xi - \xi_e f_{cm})^2} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = & -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left[\alpha \frac{(\xi - \xi_0)^{\alpha-1}}{(\xi_1 - \xi_0)^\alpha} + \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\beta}{\xi - \xi_1} \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \frac{(\xi_c - \xi)^2}{\xi_c^2} \left\{ 2 \left(\frac{1 - c}{\xi_c - \xi} \right) + \frac{\partial c}{\partial \xi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \xi} = & \frac{n \left(\frac{\xi - \xi_c}{\xi_0 - \xi_c} \right)^n}{\xi - \xi_c} \left[\exp \left(-\frac{\epsilon_s h f_{ctm}}{G_f} \right) - \left(1 - \left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{cu}} \right)^{\kappa_{cn}} \right) \right] \\ & + \frac{\partial h_D}{\partial \xi} \mu_{DO} \left(\frac{\mu_D}{\kappa_{tu}} \exp \left(-\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right) + \frac{2\epsilon_s}{\kappa_{cu}^2} (1 - \mu_D) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial h_D}{\partial \xi} = 2 A_h \frac{\xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = -\frac{k(1-k_0)}{2(1-k_0^2)} \left[-2 \frac{(\sqrt{2h_D \epsilon_p} - \epsilon_p) \left(2A_h \frac{\xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right)}{h_D^2} + \frac{\sqrt{2} \epsilon_p \left(2A_h \frac{\xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right)}{h_D \sqrt{h_D \epsilon_p}} \right] \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{-8(1-e^2) \sin \theta \cos \theta}{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R} - \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\left\{4(1-e^2) \cos^2 \theta + (2e-1)^2\right\} \left\{-2(1-e^2) \sin \theta + (2e-1) \frac{-4(1-e^2) \cos \theta \sin \theta}{R}\right\}}{\left\{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R\right\}^2}$$

- **Skalare Gradienten des Potentials (sofern nicht bereits vorstehend angegeben)**

$$\frac{\partial Q_1}{\partial r} = (1 - \mu_Q) \frac{\rho}{f_{cm}} \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)}{f_{cm}} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} = & -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left[\frac{(\xi - \xi_0)^{\bar{\alpha}-1}}{(\xi_1 - \xi_0)^{\bar{\alpha}}} + \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\beta}{\xi - \xi_1} \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \frac{(\xi_c - \xi)^2}{\xi_c^2} \left\{ 2 \left(\frac{1-c}{\xi_c - \xi} \right) + \frac{\partial c}{\partial \xi} \right\} \right] \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

Die übrigen Terme entsprechen denen der Versagensfläche.

B.3 Notwendige Ableitungen für den Projektionsalgorithmus

- **Konsistenzbedingung**

$$\frac{dF_{n+1}}{d\Delta\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda} \quad (\text{B.38})$$

$$\text{wobei} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbf{n}_{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = -\mathbf{C} : \mathbf{m}_{n+1} \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \Delta\mathbf{q}} = \mathbf{1} \quad (\text{B.40})$$

- **Verfestigung**

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{q}} ; \quad \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda} = \sqrt{\mathbf{m} : \mathbf{m}} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{B.42})$$

- **Entfestigung**

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \mathbf{q}} ; \quad \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial \Delta\lambda} = \sqrt{\mathbf{m}_t : \mathbf{m}_t} \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial q} = -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left\{ \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \right\} \frac{\partial c}{\partial q} \quad (\text{B.44})$$

- **Weitere skalare Ableitungen**

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left\{ \alpha \frac{(\xi - \xi_0)^\alpha}{(\xi_1 - \xi_0)^{1+\alpha}} + \beta \left[\frac{(\xi - \xi_1)^{\beta-1}}{(\xi_0 - \xi_1)^\beta} - \frac{(\xi - \xi_1)^\beta}{(\xi_0 - \xi_1)^{\beta+1}} \right] \right\} \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = -\frac{k}{2(1 - k_0^2)} \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial k}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial \epsilon_p} = E_p = (1 - k_0) \frac{2}{h_D} \left[\frac{h_D}{\sqrt{2h_D q}} - 1 \right] \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial c}{\partial q} = \frac{\partial c}{\partial \epsilon_p} = \frac{\partial c}{\partial \epsilon_s} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial \epsilon_p} = -\frac{\mu_D}{\kappa_{tu}} e^{\left(-\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}}\right)} - \frac{2\epsilon_s}{\kappa_{cu}^2} (1 - \mu_D) \quad (\text{B.49})$$

- **Invertierter Drucker-Prager des Apex**

Zur Bestimmung des Winkels der invertierten Versagensfläche ϕ^I nach Gleichung (6.39) ff.:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right]_F = \frac{\rho_1}{\mu_F + (1 - \mu_F) r(\theta, e)} \quad (\text{B.50})$$

$$\times \left[\alpha \frac{(\xi - \xi_0)^{\alpha-1}}{(\xi_1 - \xi_0)^\alpha} + \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \frac{1 - c}{\xi_c - \xi} \right]$$

Zur Bestimmung des Winkels des invertierten plastischen Potentials ϕ^I nach Gleichung (6.39) ff.:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right]_Q = \frac{\rho_1}{\mu_Q + (1 - \mu_Q) r(\theta, e)} \quad (\text{B.51})$$

$$\times \left[\bar{\alpha} \frac{(\xi - \xi_0)^{\bar{\alpha}-1}}{(\xi_1 - \xi_0)^{\bar{\alpha}}} + \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \frac{1 - c}{\xi_c - \xi} \right]$$

B.4 Ableitungen für den materiellen Tangentenoperator

Hesse-Tensor:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho \partial \xi} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) \otimes \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \rho} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \rho} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) \otimes \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) \otimes \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 r}{\partial e^2} \left(\frac{\partial e}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} \right] + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \xi^2} \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial e^2} = \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial r}{\partial e} \right) = \frac{8(1 - \cos^2 \theta)}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1)R} \quad (\text{B.54})$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \frac{\left[8e \cos^2 \theta - 4(2e - 1) \right] \left\{ -4e \cos \theta + 2R - \frac{(2e - 1)(4e \cos^2 \theta - 5e + 2)}{R} \right\}}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^2} \\ &+ \frac{2(2e - 1)^2 - 8(e^2 - 1) \cos^2 \theta}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^3} \\ &\quad \times \left\{ -4e \cos \theta + 2R - \frac{(2e - 1)(4e \cos^2 \theta - 5e + 2)}{R} \right\}^2 \\ &- \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^2} \times \left[-4 \cos \theta - 2 \frac{8e \cos^2 \theta - 10e + 4}{R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2e - 1)(-8e \cos^2 \theta + 10e - 4)^2}{4R^3} + \frac{(2e - 1)(10 - 8 \cos^2 \theta)}{2R} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial e}{\partial \xi} \right) = \frac{5,5 f_{cm} - \xi_0}{(\xi - 5,5 f_{cm})^3} \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = \frac{n \mu_D}{(\xi - \xi_c)^2} (1-n) \left(1 - \left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{cu}} \right)^2 - e^{\left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right)} \right) \quad (\text{B.56})$$

$$+ 2 (1-\mu_D) \frac{\mu_{DO}}{\kappa_{cu}^2} \frac{\partial^2 h_D}{\partial \xi^2} (\epsilon_s - \mu_{DO}) - 4n \frac{\epsilon_s}{\kappa_{cu}^2} \frac{\mu_D \mu_{DO}}{\xi - \xi_c} \frac{\partial h_D}{\partial \xi}$$

$$+ \frac{\mu_D \mu_{DO}}{\kappa_{tu}} e^{\left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right)} \left(\frac{\partial h_D}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_D}{\partial \xi^2} \frac{\mu_{DO}}{\kappa_{tu}} + \frac{\partial h_D}{\partial \xi} \frac{2n}{\xi - \xi_c} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \xi} \right) = - \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left[\bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 1) \frac{(\xi - \xi_0)^{\bar{\alpha}-2}}{(\xi_1 - \xi_0)^{\bar{\alpha}}} \right. \quad (\text{B.57})$$

$$+ \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\beta}{\xi - \xi_1} \right\}^2$$

$$+ \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \left\{ \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \frac{2}{\xi - \xi_1} - \frac{\beta}{(\xi - \xi_1)^2} \right\}$$

$$- \frac{2(\xi_c - \xi)}{\xi_c^2} \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(2 \frac{1-c}{\xi_c - \xi} + \frac{\partial c}{\partial \xi} \right)$$

$$+ \left. \frac{(\xi_c - \xi)^2}{\xi_c^2} \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left[\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + 2 \frac{(1-c)}{(\xi_c - \xi)^2} - \frac{2}{\xi_c - \xi} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right] \right]$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi^2} = - \frac{1}{2(1-k_0^2)} \left[-2 \frac{(1-k_0) k'}{h_D^2} \left(2 \frac{A_h \xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right) \right. \quad (\text{B.58})$$

$$+ \left. \frac{1-k_0}{h_D \sqrt{h_D \epsilon_p}} \sqrt{2} \epsilon_p \left(2 \frac{A_h \xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right) \right]^2$$

$$- \frac{1}{2(1-k_0^2)} \left(2 \frac{(1-k_0) k'}{h_D} + k_0 \right) \left[4 \frac{(1-k_0) k'}{h_D^3} \left(2 \frac{A_h \xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right)^2 \right.$$

$$- 2 \frac{(1-k_0) \sqrt{2} \epsilon_p}{h_D^2 \sqrt{h_D \epsilon_p}} \left(2 \frac{A_h \xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right)^2 - 4 \frac{(1-k_0) k' A_h}{h_D^2 f_{cm}^2}$$

$$\left. - \frac{(1-k_0) \sqrt{2} \epsilon_p^2}{2h_D (h_D \epsilon_p)^{\frac{3}{2}}} \left(2 \frac{A_h \xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \right)^2 + 2 \frac{(1-k_0) \sqrt{2} \epsilon_p A_h}{h_D \sqrt{h_D \epsilon_p} f_{cm}^2} \right]$$

$$\text{wobei} \quad k^* = \sqrt{2h_D \epsilon_p} - \epsilon_p \quad (\text{B.59})$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial h_D}{\partial \xi} = 2 A_h \frac{\xi}{f_{cm}^2} + \frac{B_h}{f_{cm}} \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho \partial \xi} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \rho \partial r} \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \rho \partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial^2 e}{\partial \rho \partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \rho \partial \xi} \quad (\text{B.61})$$

$$= \frac{(1-\mu_Q)}{f_{cm}} \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi}$$

$$\text{wegen } \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \rho \partial r} = \frac{(1-\mu_Q)}{f_{cm}} \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \xi} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta \partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \theta \partial \xi} \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial e} &= \frac{16e \cos \theta \sin \theta}{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R} + \frac{8e \cos^2 \theta - 4(2e-1)}{\{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R\}^2} \\ &\times \left\{ -2(1-e^2) \sin \theta - \frac{4(2e-1)(1-e^2) \cos \theta \sin \theta}{R} \right\} \\ &+ \left[\frac{8(1-e^2) \cos \theta \sin \theta}{\{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R\}^2} + \frac{8(1-e^2) \cos^2 \theta + 2(2e-1)^2}{\{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R\}^3} \right. \\ &\times \left. \left\{ -2(1-e^2) \sin \theta - \frac{4(2e-1)(1-e^2) \cos \theta \sin \theta}{R} \right\} \right] \\ &\times \left\{ -4e \cos \theta + 2R + \frac{(2e-1)(-4e \cos^2 \theta + 5e - 2)}{R} \right\} \\ &- \frac{4(1-e^2) \cos^2 \theta + (2e-1)^2}{\{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1)R\}^2} \times \left[4e \sin \theta - \frac{8(1-e^2) \cos \theta \sin \theta}{R} \right. \\ &+ \frac{8e(2e-1) \cos \theta \sin \theta}{R} \\ &\left. - \frac{2(2e-1)(1-e^2) \cos \theta \sin \theta (8e \cos^2 \theta - 10e + 4)}{R^3} \right] \quad (\text{B.64}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)}{f_{cm}} \right) = \frac{(1-\mu_Q)}{f_{cm}} \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi} \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)}{f_{cm}} \right) = 0 \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_Q + (1-\mu_Q) r(\theta, e)}{f_{cm}} \right) = \frac{(1-\mu_Q)}{f_{cm}} \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \theta} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi \partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \theta} = \frac{\rho}{f_{cm}} (1 - \mu_Q) \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \theta} \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial e}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 r}{\partial e \partial \theta} \frac{\partial e}{\partial \xi} \quad (\text{B.69})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \rho \partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{(1 - \mu_Q)}{f_{cm}} \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (\text{B.70})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_1}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} = \frac{\rho}{f_{cm}} (1 - \mu_Q) \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right) &= \frac{8(1 - e^2)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R} \quad (\text{B.72}) \\ &+ \frac{16(1 - e^2) \sin \theta \cos \theta \left\{ -2(1 - e^2) \sin \theta - 4 \frac{(2e - 1)(1 - e^2) \sin \theta \cos \theta}{R} \right\}}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^2} \\ &- \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^2} \times \left[-2(1 - e^2) \cos \theta \right. \\ &+ (2e - 1) \left\{ \frac{4(1 - e^2)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{R} - \frac{\left\{ 4(1 - e^2) \sin \theta \cos \theta \right\}^2}{R^3} \right\} \\ &+ \frac{2 \left\{ 4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2 \right\}}{\left\{ 2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) R \right\}^3} \\ &\times \left. \left\{ -2(1 - e^2) \sin \theta - \frac{4(2e - 1)(1 - e^2) \sin \theta \cos \theta}{R} \right\}^2 \right] \end{aligned}$$

• **Gradienten der Tensoren vierter Stufe**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{3}} \right) = \mathbf{0}_4 \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\mathbf{s}}{\rho} : \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \sigma} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\rho^3} = \frac{1}{\rho} \mathbf{P} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\rho^3} \quad (\text{B.74})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{-2\sqrt{3}}{3 \sqrt{4-27 \frac{J_3^2}{J_2^3}}} \left[\frac{3}{2J_2^{1.5}} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{4J_2^{2.5}} \left\{ \left(\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \left(\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{45J_3}{8J_2^{3.5}} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{9J_3}{4J_2^{2.5}} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \\
&\quad + \frac{-36J_3}{J_2^{1.5} \sqrt{3} \sqrt{4-27 \frac{J_3^2}{J_2^3}}} \left[\frac{3}{2J_2^{1.5}} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{9J_3}{4J_2^{2.5}} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \otimes \left[\frac{3}{2J_2^{1.5}} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{9J_3}{4J_2^{2.5}} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]
\end{aligned} \tag{B.75}$$

- **Weitere Gradienten der Tensoren zweiter Stufe**

$$\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{s} \tag{B.76}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{I} J_2 + J_2 \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s} - \frac{2}{3} J_2 \boldsymbol{I} \tag{B.77}$$

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{P} \tag{B.78}$$

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s} - \frac{2}{3} J_2 \boldsymbol{I})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{P} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{s} \otimes \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{s}) \tag{B.79}$$

- **Gradienten der Tensoren zweiter Stufe nach den inneren Variablen**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi \partial q} \frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \xi \partial q} \frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial q} = \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial q}
\end{aligned} \tag{B.80}$$

Für Entfestigung gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \xi \partial \epsilon_p} &= -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \frac{\partial}{\partial \epsilon_p} \left[\left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \left\{ 2 \left(\frac{1-c}{\xi_c - \xi} + \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) \right\} \right] \\
&= -2 \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi_c - \xi}{\xi_c} \right)^2 \left[\frac{1}{\xi_c - \xi} \left(\frac{\mu_D}{\kappa_{tu}} e^{\left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right)} + \frac{2\epsilon_s(1-\mu_D)}{\kappa_{cu}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial h_D}{\partial \xi} \mu_{DO} \left(2 \frac{1-\mu_D}{\kappa_{cu}^2} - \frac{\mu_D}{\kappa_{tu}^2} e^{\left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right)} \right) + \frac{\mu_D}{\xi - \xi_c} \left(\frac{2\epsilon_s}{\kappa_{cu}^2} - \frac{e^{\left(\frac{\epsilon_s}{\kappa_{tu}} \right)}}{\kappa_{tu}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.81}$$

Für Verfestigung gilt:

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \xi \partial \epsilon_p} = -\frac{\rho_1}{f_{cm}} \frac{\partial}{\partial \epsilon_p} \left[\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\beta}{\xi - \xi_1} \right\} \right] \quad (\text{B.82})$$

$$= \frac{\rho_1}{f_{cm}} \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right)^\beta \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{k(1-k_0)}{h_D(1-k_0^2)} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) \left[\frac{h_D}{\sqrt{2h_D\epsilon_p}} - 1 \right] \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) + \frac{\beta}{\xi - \xi_1} \right\} \right. \\ & + \frac{(1-k_0)^2}{h_D(1-k_0^2)} \left[\frac{h_D}{\sqrt{2h_D\epsilon_p}} - 1 \right] \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) \frac{\partial h_D}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{2}\epsilon_p}{h_D\sqrt{h_D\epsilon_p}} - 2 \frac{\sqrt{2h_D\epsilon_p - \epsilon_p}}{h_D^2} \right] \\ & + \frac{(1-k_0)k}{2(1-k_0^2)} \ln \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \right) \frac{\partial h_D}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{2}}{h_D\sqrt{h_D\epsilon_p}} - \frac{\epsilon_p}{\sqrt{2}(h_D\epsilon_p)^{3/2}} - \frac{2}{h_D^2} \left[\frac{h_D}{\sqrt{2h_D\epsilon_p}} - 1 \right] \right] \\ & \left. + \frac{(1-k_0)k}{h_D(1-k_0^2)(\xi - \xi_1)} \left[\frac{h_D}{\sqrt{2h_D\epsilon_p}} - 1 \right] \right] \end{aligned}$$

Äquivalente plastische Verzerrungen nach den Spannungen:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}} = \frac{2}{3\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}}} \mathbf{m} : \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \sigma} = \mathbf{M} \quad (\text{B.84})$$

Äquivalente plastische Verzerrungen nach den inneren Variablen:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^{pl}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}} = \frac{2}{3\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{m} : \mathbf{m}}} \mathbf{m} : \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{q}} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} \quad (\text{B.85})$$

Lebenslauf

Name: *André Haufe*

Geburtsdatum: *30. September 1968 in Göppingen*

Eltern: *Siegfried und Hannelore Haufe, geb. Hochberger*

Familienstand: *Seit 27.09.1996 verheiratet mit Susanne Haufe, geb. Kruepper
Sohn Carl Niklas geboren am 19.2.1997
Sohn Paul Jannik geboren am 17.7.2000*

1974 – 1976 *Besuch der Grundschule in Ebersbach an der Fils*

1976 – 1978 *Besuch der Grundschule in Uhingen an der Fils*

1978 – 1985 *Besuch des Raichberg-Gymnasiums
in Ebersbach an der Fils*

1985 – 1988 *Besuch des Max-Eyth-Gymnasiums
in Kirchheim unter Teck*

Mai 1988 *Abitur*

1988 – 1989 *15-monatiger Grundwehrdienst in Germersheim,
Manching und Leipheim*

1989 – 1995 *Studium des Bauingenieurwesens
an der Universität Stuttgart*

1992 – 1993 *Stipendiat im Rahmen des Integrierten Auslandsstudiums
des DAAD an der University of Calgary, Kanada*

Februar 1995 *Abschluß als Diplom-Ingenieur*

Juli 1995 *Preis der Freunde der Universität Stuttgart
für herausragende wissenschaftliche Leistungen
in der Diplomarbeit*

April 1995 –
September 2000 *Angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*

November 2000 –
Februar 2001 *Freie Mitarbeit im Ingenieurbüro Leonhardt,
Andrä & Partner, Stuttgart*

März 2001 –
Februar 2002 *Stipendiat im Post-Doc-Programm des Deutschen Akademischen
Austauschdienstes an der University of Calgary, Kanada*

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1** **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2** **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3** **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4** **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1** **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2** **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie
nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3** **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger
unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1** **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2** **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1** **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer faltwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1** **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung
von Stahlbetonplatten.
- 79-1** **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2** **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem
Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3** **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).

- 80-1 R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. André:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.

- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.



Universität Stuttgart

ISBN 3-00-007418-X