

Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik

von

Astrid Maute



4004

18.10.01

2

Bericht Nr. 33 (2001)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 2001



© Astrid Maute

Berichte können bezogen werden über:

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: 0711 / 685 6123

Fax: 0711 / 685 6130

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

ISBN 3-00-008177-1

Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Astrid Maute

aus Bietigheim-Bissingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof
Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 2001

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 2001

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Fehlerkontrolle für Finite-Element-Verfahren zur Analyse von geometrisch und materiell linearen Problemen in der Strukturmechanik behandelt. Die Fehlerbetrachtung ist die Grundlage von adaptiven Methoden, mit deren Hilfe die Diskretisierung an die Fehlerverteilung angepaßt und somit die Effizienz der numerischen Berechnung erhöht wird.

Bei der numerischen Berechnung von Problemen in der Strukturmechanik entstehen Fehler sowohl durch die zeitliche, wie auch die räumliche Diskretisierung. Es werden einige aus der Literatur bekannte Verfahren vorgestellt, die den räumlichen mittleren Diskretisierungsfehler an einem Zeitpunkt oder den mittleren zeitlichen Fehler eines Zeitintervalls in der Energienorm bestimmen. Diese Verfahren basieren auf der Verwendung der semi-diskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration.

Der räumliche oder zeitliche mittlere Fehler in der Energienorm ist jedoch oftmals ein ungeeignetes Maß für den Diskretisierungsfehler. Statt dessen ist es vorteilhafter, direkt den Fehler einer vom Benutzer vorgegebenen Zustandsgröße in einem bestimmten Gebiet zu bestimmen.

Es werden Verfahren zur Fehlerkontrolle basierend auf dem Dualitätsprinzip eingeführt, um den Fehler in einer beliebigen Zustandsgröße in beliebigen räumlichen und zeitlichen Gebieten zu kontrollieren. Zusätzlich kann mit Hilfe des Dualitätskonzeptes der zeitliche Verlauf des Fehlers erfaßt werden. Für diese Verfahren wird vorausgesetzt, daß das Problem in einer reinen Finite-Element-Formulierung vorliegt, wie z.B. der diskontinuierlichen Time Galerkin Methode. Das duale Problem, das für die Probleme in der linearen Strukturmechanik hergeleitet wird, stellt dabei den Einfluß der zu bestimmenden lokalen Fehlergröße in räumlicher und zeitlicher Richtung dar.

Beispiele belegen, daß durch die Einführung des dualen Problems der Fehler in bestimmten Größen und beliebigen räumlichen Gebieten dargestellt, sowie der zeitliche Fehlerverlauf erfaßt werden kann. Vergleiche mit den aus der Literatur bekannten Methoden der Fehlerapproximation verdeutlichen das Potential der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Methoden.

Abstract

Errors in numerical analysis of structural dynamics are due to the spatial and temporal discretization. A few methods from literature will be presented for estimating the average spatial discretization error in the energy norm at a specific point in time. The average temporal error of a time interval can be measured accordingly. These methods for controlling the error are based on the semidiscrete formulation and the Newmark-time integration. The efficiency of the adaptive error control can be improved by specifying the variable and the domain for error control instead of using the average error in the energy norm.

The concept of dual problem is introduced for controlling the error in user specified spatial and temporal domains. The problem must be formulated by a finite-element method in space and time, such as the Discontinuous Time Galerkin method. The dual problem, which is derived for linear structural dynamics, represents the influence of the local error control variable in space and time. By introducing the dual concept it is possible to control the error in different variables, as well as the evolution of the error in time.

Examples verify that the error can be measured in different quantities in user defined spatial domains by introducing dual problems. Also, the evolution of the error in time can be controlled. By comparing the dual approach with the traditional methods for error control, the potential of error control based on the dual concept is illustrated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1995–1999 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Ich bedanke mich ganz besonders bei Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm für die Anregungen zu dieser Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich für die Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Mein Dank gilt auch allen Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen des Institutes für Baustatik für viele wissenschaftliche Diskussionen und Anregungen und die vielen netten Erinnerungen.

Ebenso möchte ich mich bei den Professoren und Mitarbeitern des „Center for Aerospace Structures“ an der University of Colorado at Boulder, USA, für die fachliche Unterstützung und die gute Arbeitsatmosphäre während des Zusammenschreiben dieser Arbeit bedanken.

Astrid Maute

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zielsetzung und Motivation	1
1.2	Gliederung	6
2	Grundgleichungen der linearen Strukturdynamik	9
2.1	Grundgleichung	9
2.2	Grundbegriffe	10
2.3	Diskretisierung	13
2.3.1	Zeitdiskretisierung mit diskontinuierlichen finiten Elementen	16
2.3.2	Zeitdiskretisierung mit finiten Differenzen	19
3	Adaptivität des Raumes und der Zeit in der Dynamik	25
3.1	Definition der Fehler	25
3.2	Methoden der Fehlerbestimmung	27
3.3	Adaptive Strategien	33
4	Fehlerindikatoren basierend auf der DTG-Methode	35
4.1	Ursprüngliches Problem	37
4.2	Duales Problem	40
4.3	Darstellung einer Fehlergröße	44
4.3.1	Duale Last	46
4.4	Fehlerindikator	61
4.5	Zusammenfassung	75
5	Fehlerindikatoren basierend auf der Newmark-Methode	77
5.1	Räumlicher und zeitlicher Fehler	78
5.2	Zeitlicher Fehler	80
5.2.1	Zeitlich lokale Fehlerindikatoren	81
5.2.1.1	Voraussetzungen	81
5.2.1.2	Zeitliche Fehlerindikatoren	82
5.2.2	Zeitlich globale Fehlerindikatoren	89
5.2.3	Adaptive Zeitschrittsteuerung	92
5.3	Räumlicher Fehler	96
5.3.1	Räumlicher Fehler in der Energienorm	97

5.3.1.1	Fehler in der Dehnungsenergie	98
5.3.1.2	Fehler in der kinetischen Energie	102
5.3.2	Adaptive Netzanpassung	104
5.3.3	Räumlich lokaler Fehler	113
5.3.3.1	Finite Differenzenverfahren als Galerkin-Verfahren	115
5.3.3.2	Fehlerindikator	117
5.3.3.3	Duale Lasten in der FE-Prozedur	122
5.3.3.4	Numerische Beispiele	124
5.4	Zusammenfassung	129
6	Adaptiver Algorithmus	131
6.1	Zeitpunkt der Fehlerkontrolle	132
6.2	Übertragung der FE-Daten	134
6.3	Nachbehandlung der FE-Daten	135
6.3.1	Glättung der FE-Daten	136
6.3.2	Korrektur der FE-Daten	137
6.4	Numerische Beispiele	139
6.5	Zusammenfassung	149
7	Bewertung und Ausblick	151
A	Normen	157
B	Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren	159
C	Newmark-Verfahren und FE-Methode	165
D	Prädiktor-Multikorrekter Verfahren	169
E	Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit	173

Bezeichnungen

Abkürzungen

<i>AA</i>	Amplitudenabfall
<i>DTG</i>	„Discontinuous Time Galerkin“
<i>DG(m)</i>	Diskontinuierliche Ansätze der <i>m</i> -ten Ordnung
<i>EMS</i>	Einmassenschwinger
<i>FD</i>	Finite Differenzen
<i>FE</i>	Finite Elemente
<i>Fhg</i>	Anzahl der Freiheitsgrade
<i>GL</i>	Gauss-Legendre
<i>GLs</i>	Anzahl der Gauss-Legendre Punkte
<i>HHT</i> - α	Hilber-Hughes-Taylor- α Methode
<i>Kps</i>	Anzahl der FE-Knoten in einem Gebiet
<i>Lb</i>	Lobatto
<i>Lbs</i>	Anzahl der Lobatto-Punkte
<i>PDG</i>	Partielle Differentialgleichung
<i>SPR</i>	„Superconvergent Patch Recovery“
<i>SQP</i>	Sequentielle Quadratische Programmierung
<i>TG</i>	Time Galerkin
<i>Z²</i>	Zienkiewicz-Zhu

Symbole

$\nabla(\cdot)$	Räumlicher Gradient $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}$
$\Delta(\cdot)$	Endliches Inkrement
$\check{\delta}(\cdot)$	Variation
$\delta(\cdot)^d$	Dirac-Delta Operator
$H(\cdot)$	Heaviside-Funktion
$[[\cdot(\mathbf{x})]]$	Räumlicher Sprung
$[[\cdot(t)]]$	Zeitlicher Sprung
$a(\cdot, \cdot)_{\Upsilon}$	Symmetrische Bilinearform auf dem Gebiet Υ
$(\cdot, \cdot)_{\Upsilon}$	Symmetrische Bilinearform auf dem Gebiet Υ ; Skalarprodukt
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Inneres Produkt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
$(\cdot)^{\pm}$	Werte auf unterschiedlichen Seiten benachbarter Elemente
$(\dot{\cdot})$	Zeitliche Ableitung $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$
$(\bar{\cdot})$	Supskript für Elastostatik
$(\bar{\cdot})$	Vorgegebene Größen
$(\cdot)_{ex}$	Exakte Lösung in einem einzelnen Zeitintervall
$(\cdot)^e$	Index für Element
$(\cdot)^h$	Index für diskreten Wert
$(\cdot)^*$	Index für verbesserte Lösung
$(\cdot)_{alt}$	Index für Werte auf dem alten Netz
$(\cdot)_{eq}$	Index für Gleichgewicht

$(\cdot)_{kor}$	Index für korrigierte Werte
$(\cdot)_n$	Index für Zeitintervall n
$(\cdot)_{neu}$	Index für Werte auf dem neuen Netz
$(\cdot)_s$	Index für räumliche Werte
$(\cdot)_{smo}$	Index für geglättete Werte
$(\cdot)_t$	Index für zeitliche Werte
$(\cdot)_{FD}$	Index für Finite-Differenzen-Methode
$(\cdot)_{TG}$	Index für Time Galerkin Methode

Raum & Zeit

r	Regularisierungsradius
t_n	Zeitpunkt
γ	Rand auf $I \times \Gamma$
γ_t	Rand mit vorgeschriebener Belastung auf $I \times \Gamma_t$
γ_u	Rand mit vorgeschriebener Verschiebung auf $I \times \Gamma_u$
ζ, η	Lokale Koordinaten
ω_x	Umgebung von x
I	Zeitliches Gebiet $I = (0, T)$
I_n	Zeitintervall $I_n = (t_{n-1}, t_n)$
K	Anzahl der finiten Elemente in Ω
N	Anzahl der Zeitschritte
Q	Raum-Zeit Gebiet
Q_n	Raum-Zeit Intervall $I_n \times \Omega$
Γ	Rand des räumlichen Gebietes Ω
Γ^*	Rand aller finiten Elemente
Γ_t	Rand mit vorgeschriebener Belastung
Γ_u	Rand mit vorgeschriebener Verschiebung
Ω	Räumliches Gebiet
Δt_n	Zeitschrittgröße von I_n
Π_s	Räumliche Interpolation
Π_t	Zeitliche Interpolation
x	Räumliche Koordinaten
N	Matrix der Ansatzfunktionen
N_t	Matrix der zeitlichen Ansatzfunktionen
N_x	Matrix der räumlichen Ansatzfunktionen
N^u	Ansatzfunktionen für Verschiebungen
N^v	Ansatzfunktionen für Geschwindigkeiten

Normen & Funktionenräume

C^k	Raum der k -fach stetigen Funktionen
$H^1(\Upsilon)$	Sobolev-Raum der ersten Ordnung auf Υ
S	Raum der Ansatzfunktionen
S^h	Raum der diskreten Ansatzfunktionen

\mathcal{V}	Raum der Testfunktionen
\mathcal{V}^h	Raum der diskreten Testfunktionen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\ \cdot\ _1$	Betragsnorm
$\ \cdot\ _\infty$	Maximumsnorm
$\ \cdot\ _0$	L_2 -Norm (auch abgekürzt mit $\ \cdot\ $)

Arbeit & Energie

E	Energie
E_{pot}	Potentielle Energie
E_{kin}	Kinetische Energie
W	Arbeit
W_{ext}	Äußere Arbeit
W_{dam}	Dämpfungsarbeit
W_{kin}	Arbeit der Massenbeschleunigungen
W_{str}	Dehnungsarbeit
\dot{W}	Leistung
$\ \cdot\ _E^2$	Gesamtenergie
$\ \cdot\ _{E_u}^2$	Dehnungsenergie
$\ \cdot\ _{E_v}^2$	Kinetische Energie
$\Pi(\cdot)$	Funktional
$\Pi_w(\cdot)$	Gewichtetes Funktional

Linear- & Bilinearformen

$B(\cdot, \cdot)$	Symmetrische Bilinearform der Elastodynamik
$\tilde{B}(\cdot, \cdot)$	Symmetrische Bilinearform der Elastostatik
$B^*(\cdot, \cdot)$	Adjungierte symmetrische Bilinearform der Elastodynamik
$\tilde{B}^*(\cdot, \cdot)$	Adjungierte symmetrische Bilinearform der Elastostatik
$L(\cdot)$	Belastungsoperator der Elastodynamik; schwache Form
$\tilde{L}(\cdot)$	Belastungsoperator der Elastostatik; schwache Form
\mathcal{L}	Linearer Operator der Elastodynamik; starke Form
$\tilde{\mathcal{L}}$	Linearer Operator der Elastostatik; starke Form
\mathcal{L}^*	Adjungierter linearer Operator der Elastodynamik; starke Form
$\tilde{\mathcal{L}}^*$	Adjungierter linearer Operator der Elastostatik; starke Form
\mathcal{P}	Linearer Lastoperator der Elastodynamik; starke Form
$\tilde{\mathcal{P}}$	Linearer Lastoperator der Elastostatik; starke Form

Statik & Dynamik

d_1, d_2	Rayleigh Dämpfungsparameter
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
σ_v	Vergleichsspannung
ρ	Materialdichte
\mathbf{a}	Beschleunigungen

d	Knotenverschiebungen
n	Normalenvektor
t	Vorgeschriebene verteilte Lasten
u	Verschiebungen
\bar{u}	Vorgeschriebene Randverschiebungen
\bar{u}_0	Anfangsverschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$
$\bar{\dot{u}}_0$	Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)$
$\bar{\ddot{u}}_n$	Mittlere Beschleunigung auf dem Zeitintervall I_n
v	Geschwindigkeiten
σ	Spannungstensor
C	Dämpfungsmatrix
D	Elastischer Werkstofftensor
K	Steifigkeitsmatrix
M	Massenmatrix
M_a^*	Effektive Massenmatrix der Beschleunigungsgleichung
M_v^*	Effektive Massenmatrix der Geschwindigkeitsgleichung
P	Äußere Lasten
R_v	Residualer Lastvektor der Geschwindigkeitsgleichung
R_a	Residualer Lastvektor der Beschleunigungsgleichung

Zeitintegration

α	Parameter der HHT- α Methode
β	Newmark Zeitintegrationsparameter für die Beschleunigungen
δ	Newmark Zeitintegrationsparameter für die Geschwindigkeiten
ϑ	Relative Frequenz
ϑ_{cr}	Kritische relative Frequenz
τ	Dimensionsloser Parameter eines Zeitintervalls $\tau = (0, 1)$
ξ_d	Algorithmische Dämpfungsrate
ς	Parameter im Prädiktor-Multikorrekter Verfahren
λ_A	Eigenwerte von A
ρ_A	Spektralradius
ω	Frequenz
$\underline{\omega}^h$	Frequenz des diskreten Systems ohne Zeitintegrationsalgorithmus
ω^h	Frequenz des diskreten Systems mit Zeitintegrationsalgorithmus
Δt_{cr}	Kritische Zeitschrittgröße
B_1, B_2	Real- und Imaginäranteil
T_p	Periodenlänge
T_p^h	Periodenlänge des diskreten Systems ohne Zeitintegrationsalgorithmus
T_p^h	Periodenlänge des diskreten Systems mit Zeitintegrationsalgorithmus
\check{e}	Fehlervektor $[e, \dot{e}]^T$
\check{y}	Vektor $[u, \dot{u}]^T$
τ	Lokaler Abbruchfehler

A	Vergrößerungsmatrix
A_1, A_2	Invarianten von A
\hat{P}	Lastvektor für erste Ordnung Formulierung

Fehlerschätzung

e_{est}	Geschätzter Fehler
e_{ref}	Referenzfehler
e_{Ω}	Mittlerer räumlicher Fehler
C_s	Stabilitätskonstante
C_1, C_2	Interpolationskonstanten
$D(\cdot)$	Duales Belastungsfunktional
\hat{a}	Koeffizientenmatrix
e	Diskretisierungsfehler
e_s	Räumlicher Fehler
e_t	Zeitlicher Fehler
e_{σ}	Fehler in den Spannungen
\tilde{e}	Approximierter Fehler
$e_{glb}(t_n)$	Zeitlich globaler Fehler des Zeitraumes $(0, t_n)$
$e_{lok}(t_n)$	Zeitlich lokaler Fehler des Zeitintervalls I_n
e_n	Approximierter zeitlich lokaler Fehler des Zeitintervalls I_n
$\ e_n\ _E$	Fehler in der Energienorm des Zeitintervalls I_n
\mathbf{u}^h	Diskrete Verschiebungen ohne zeitlichen Fehler
\mathbf{u}_{ex}	Exakte Verschiebungen
\mathbf{u}_n	Verschiebungen zum Zeitpunkt t_n
z	Duale Lösung
\mathcal{D}	Dualer Lastvektor
J_s	Räumliche Sprungterme
J_{t_v}	Zeitliche Sprungterme in den Geschwindigkeiten
J_{t_u}	Zeitliche Sprungterme in den Verschiebungen
\hat{P}	Polynomansatz
R	Innere Residuen
\bar{R}	Innere Residuen und Sprungterme

Netzadaption

\bar{e}_{glb}	Vorgegebener globaler Fehler
f_{Eu}	Korrekturfaktor für Dehnungsenergie
f_{Ev}	Korrekturfaktor für kinetische Energie
h	Elementgröße
k	Konvergenzordnung
p	Ordnung der Ansatzfunktionen
w	Wichtungsfaktor für L_2 -Projektion
η_t	Relativer zeitlicher Fehler

η_s	Relativer räumlicher Fehler
$\tilde{\eta}_t$	Vorgegebener relativer zeitlicher Fehler
$\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_{s,t}, \bar{\eta}_{s,u}$	Zulässige relative räumliche Fehler
κ	Korrekturfaktor
ψ	Faktor zur Steuerung von $\Delta \ \mathbf{u}\ _{E_u}^2$
ξ	Verfeinerungsindikator
ϑ_1, ϑ_2	Parameter für obere und untere zeitliche Fehlertoleranz
Θ_s	Sicherheitsfaktor des räumlichen Fehlers
$\ \tilde{\mathbf{e}}\ _E$	Zulässiger Fehler in der Energienorm
$\Delta \ \mathbf{u}\ _{E_u}^2$	Toleranzgrenze für Änderung der Dehnungsenergie

Sonstige Größen

c	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
h_1, h_2	Gleichheitsnebenbedingung
\mathcal{I}	Impulslast
\mathbf{I}	Identitätsmatrix

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zielsetzung und Motivation

Probleme der Strukturodynamik werden meist mit Hilfe von Näherungsverfahren, wie z.B. der Finiten-Element Methode, numerisch analysiert. Hierfür muß das Problem zunächst in räumlicher und zeitlicher Richtung diskretisiert werden. Dies führt auf eine große Anzahl von Unbekannten. Daher sind numerische Berechnungen in der Strukturodynamik aufwendig. Mit Hilfe von adaptiven Methoden soll der numerische Aufwand zum Lösen der Probleme optimiert werden, d.h. es soll die maximale Genauigkeit der Lösung bei minimaler Rechenzeit und Speicherbedarf erreicht werden. Die Genauigkeit wird durch den Fehler in der Diskretisierung charakterisiert. Mit Hilfe von verschiedenen Verfahren kann der zeitliche und der räumliche Diskretisierungsfehler in der Strukturodynamik berechnet werden. Die Fehler werden dabei in der globalen Energienorm gemessen, wobei der durchschnittliche räumliche Fehler und der zeitliche Fehler an jedem einzelnen Zeitpunkt bestimmt wird. In dieser Arbeit werden mit Hilfe von dualen Problemen Fehlerindikatoren für variable Fehlergrößen entwickelt. Mit Hilfe dieser Methode kann z.B. der Fehler in den Verschiebungen oder Geschwindigkeiten in einem beliebigen Gebieten berechnet und der Einfluß der Fehler von zurückliegenden Zeitschritten mit berücksichtigt werden. Die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen wird für die geometrisch und materiell lineare Strukturodynamik hergeleitet.

Die Bewegungsgleichung der Strukturodynamik stellt eine partielle Differentialgleichung (PDG) dar, die nur für wenige Probleme analytisch gelöst werden kann. Um die Differentialgleichung numerisch lösen zu können, muß die PDG zunächst diskretisiert werden. Durch die Verwendung der Finite-Element (FE) Methode kann das räumliche Gebiet diskretisiert werden, wodurch die PDG auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit reduziert wird. Diese Formulierung wird deshalb auch semidiskrete Bewegungsgleichung genannt. Die semidiskrete Gleichung kann mit Hilfe der Orthogonalität der Eigenvektoren in ein entkoppeltes Gleichungssystem überführt werden. Diese Methode wird Modalanalyse genannt. Die unabhängigen Gleichungen sind mit geringem numerischen Aufwand zu lösen. Jedoch müssen zu Beginn der Berechnung die Eigenwerte und Eigenvektoren der Diskretisierung bestimmt werden. In Kombination mit adaptiven Methoden steigt durch

die Neubestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren bei der Anpassung der Diskretisierung der numerische Aufwand an. Deshalb wird in dieser Arbeit diese Methode nicht verwendet. Die semidiskrete Bewegungsgleichung kann in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung in der Zeit umgeformt werden. Dadurch können die Ansatzordnungen in zeitlicher Richtung niedriger als bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit gewählt werden. Jedoch verdoppelt sich durch das unbekannte zweite Feld die Anzahl der Unbekannten, wodurch der numerische Aufwand und der Speicherbedarf ansteigt. Wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit verwendet, so muß nur nach einem unbekanntem Feld gelöst werden. Zur Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichung wird der Zeitraum in einzelne Zeitintervalle unterteilt, die nacheinander berechnet werden. Dieses Vorgehen führt auf die **direkten Zeitintegrationsverfahren**. Hierzu gehören u.a. die Newmark-Methode, das Wilson- θ - und die HHT- α -Verfahren. Die Zeitschrittgröße kann bei den direkten Zeitintegrationsverfahren ohne großen numerischen Aufwand kontrolliert und angepaßt werden, weshalb sie in dieser Arbeit verwendet werden. Es wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit mit der direkten Zeitintegration unter der Verwendung von Newmark-Ansätzen gelöst.

Finite-Elemente können ebenso zur Zeitdiskretisierung verwendet werden. Dies führt auf die **Raum-Zeit FE-Formulierungen**. Die ersten verwendeten Raum-Zeit FE-Formulierungen in der Strukturmechanik basieren auf dem Prinzip von Hamilton. Dabei wird der Zeitverlauf mit zeitlich kontinuierlichen Funktionen dargestellt. Ein Nachteil dieser Formulierung ist, daß durch die zeitlich kontinuierlichen Ansatzfunktionen alle Zeitschritte miteinander gekoppelt sind. Dadurch entsteht ein einziges großes Gleichungssystem, das gelöst werden muß. Zeitlich kontinuierlichen Funktionen zur Zeitdiskretisierung haben sich deshalb nicht durchgesetzt. Alternativ dazu können zeitlich diskontinuierliche FE-Ansätze verwendet werden. Darauf basierende Methoden werden als „Discontinuous Time Galerkin“-Methoden (DTG) bezeichnet. Die unbekanntem Felder sind über die Zeitintervallgrenzen diskontinuierlich. Hulbert und Hughes [48][50] haben diesen Ansatz in die Strukturmechanik eingeführt. Sie haben die Formulierung hergeleitet, sowie Konvergenz, Stabilität und Genauigkeit untersucht. Trotz der Vorteile, daß die Algorithmen stabil sind und eine höhere Genauigkeitsordnung in der Zeit besitzen als die Verfahren basierend auf der semidiskreten Formulierung, hat sich die DTG-Methode in der Strukturmechanik nicht durchgesetzt. Der numerische Aufwand steigt bei den DTG-Methoden an. Die Anzahl der Unbekannten erhöht sich und es muß eine zeitliche Integration durchgeführt werden. Die Raum-Zeit FE-Formulierung ermöglicht jedoch die Entwicklung von neuen Fehlerschätzern. Deshalb wird in dieser Arbeit die DTG-Methode verwendet.

Der Rechenaufwand in der Strukturmechanik liegt vorallem in dem wiederholten Lösen der Bewegungsgleichung in der Zeit. Mit Hilfe von **adaptiven Methoden**, die die optimale Diskretisierung finden, wird der numerische Aufwand reduziert. Die optimale Diskretisierung ist von der Zeit abhängig und wird durch die maximale Genauigkeit der Lösung bei minimaler Rechenzeit und Speicherbedarf charakterisiert. Rechenzeit und Speicherbedarf werden vereinfacht durch die Anzahl der Unbekannten gemessen. Die Ge-

nauigkeit wird mit Hilfe des Diskretisierungsfehlers kontrolliert. Andere Fehlerarten, wie z.B. der Modellierungsfehler, der durch die Wahl des physikalischen Modells entsteht, die Berechnungsfehler, die z.B. durch iterative Löser und numerische Integration verursacht werden, werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Da die exakte Lösung des Problems nur in Ausnahmefällen bekannt ist, kann auch der exakte Fehler, die Differenz zwischen der exakten und numerischen Lösung, nicht berechnet werden. Deshalb werden Methoden verwendet, die es ermöglichen, den Diskretisierungsfehler zu schätzen. Da a-priori Methoden den Fehler vor der numerischen Berechnung abschätzen, sind sie nicht sehr genau. A-priori Methoden werden deshalb selten in adaptiven Algorithmen verwendet. A-posteriori Methoden verwenden zur Abschätzung des Fehlers die numerische Lösung selbst. Dadurch können sie den Fehler genauer als a-priori Methoden bestimmen. Diese Arbeit beschränkt sich auf a-posteriori Methoden. Die Genauigkeit wird erhöht, bzw. der Diskretisierungsfehler reduziert, indem die Diskretisierung an die Fehlerverteilung angepasst wird. Bei der r-Adaptivität werden die vorhandenen FE-Knoten entsprechend der Fehlerverteilung verschoben. Der Fehler kann deshalb nicht stark reduziert werden. Sehr viel effektiver wird der Fehler mit Hilfe der p-Adaptivität, d.h. der Anpassung der Ordnung der Ansatzfunktionen an die Fehlerverteilung, reduziert. Bei der h-Adaptivität werden die Elementgrößen entsprechend der Fehlerverteilung berechnet. Werden strukturierte FE-Netze verwendet, so wird die Elementgröße durch Elementunterteilung und -vergrößerung variiert. Bei der Verwendung von strukturierten Netzen ist der Datenübertrag einfach, numerisch nicht aufwendig und relativ genau. Jedoch hängt die Diskretisierung immer von der ersten gewählten Diskretisierung ab, weshalb strukturierte FE-Netze nicht so flexibel in der Anpassung der Diskretisierung sind. Unstrukturierte FE-Netze mit Neuvernetzungsstrategien sind in der Anpassung an die Fehlerverteilung vollständig unabhängig von der vorherigen Diskretisierungen. Jedoch wird die hohe Flexibilität mit einem höheren numerischen Aufwand bei der Neuvernetzung und bei der Datenübertragung, die zudem im Vergleich zu strukturierten Netzen ungenauer ist, bezahlt. In dieser Arbeit werden unstrukturierte FE-Netze mit der Neuvernetzungsstrategien aufgrund der besseren Anpassung an die Fehlerverteilungen verwendet.

Bei der Berechnungen von dynamischen Problemen entstehen Fehler sowohl durch die zeitliche wie auch die räumliche Diskretisierung. So wird bei der **Fehlerbestimmung** zwischen dem **zeitlichen und räumlichen Fehler** unterschieden. Methoden, um den Zeitschritt bei der semidiskreten Formulierung zu steuern, sind fast genauso weit verbreitet wie die semidiskrete Formulierung selbst. Park und Underwood [94] haben vorgeschlagen, die Zeitschrittgröße an der „höchsten auftretenden Frequenz“ der Berechnung auszurichten. Bergan und Mollestad [20] erweitern dieses Vorgehen und bestimmen die Zeitschrittgröße mit der „aktuellen höchsten Frequenz“. Bei einem anderen Ansatz wird anstatt der physikalischen Größe der Frequenz der lokale Fehler, d.h. der Fehler eines Zeitintervalls, verwendet. Bei den ersten Ansätzen den zeitlich Fehler eines Zeitintervalls abzuschätzen, wurde der Zeitschritt mit zwei unterschiedlichen Zeitschrittweiten oder mit Ansätzen von unterschiedlicher zeitlicher Genauigkeitsordnung berechnet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Der numerische Aufwand ist bei diesen Ansätzen sehr hoch.

Der numerische Aufwand, den Zeitschritt durch den zeitlich lokalen Fehler zu kontrollieren, wurde durch die Arbeit von Zienkiewicz und Xie [112] stark reduziert. Dabei wird eine verbesserte Verschiebungslösung durch eine zeitliche Taylorreihenentwicklung berechnet. Die Ableitungen höherer Ordnung der Taylorreihe werden über finite Differenzenquotienten bestimmt. Der Verschiebungsfehler eines Zeitintervalls wird durch die Differenz zwischen den verbesserten Verschiebungen und der numerisch berechneten Verschiebungslösung bestimmt. Mit Hilfe des lokalen Fehlers kann die Größe des Zeitschrittes kontrolliert und gegebenenfalls angepaßt werden. Dieser Ansatz wurde auf die Abschätzung des Geschwindigkeitsfehlers erweitert sowie die Qualität der Abschätzungen weiter verbessert, s. Wiberg et al. [100], Li [61], Riccius [80]. Der zeitlich lokale Fehler wird in dieser Arbeit mit Hilfe dieser algorithmisch einfachen und numerisch effizienten Methoden bestimmt. Wird die „Discontinuous Time Galerkin“-Methode (DTG) zur Diskretisierung der Zeit verwendet, so kann der zeitliche Fehler eines Zeitintervalls einfach durch den Sprung, z.B. in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten, über die Zeitintervallgrenzen gemessen werden [61]. Die beschriebenen Methoden schätzen den lokalen Fehler eines einzelnen Zeitintervalls ab. Es wurde ebenso versucht, anstatt den Fehler in jedem Zeitschritt zu kontrollieren, den Fehler am Ende der Berechnung, unter Berücksichtigung der Fehler von allen bisherigen Zeitschritten, zu bestimmen. Dabei werden die zeitlich lokalen Fehler, die in der Energienorm gemessen werden, über alle bisherigen Zeitschritte aufsummiert [112][100]. Dieses Vorgehen führt auf die **zeitlich globalen Fehler**. In dieser Arbeit wird bei der Anwendung der zeitlich globalen Fehlerbestimmung gezeigt, daß der globale Fehler durch die einfache Summation der lokalen Fehler nicht gut approximiert werden kann.

Der **räumliche Diskretisierungsfehler** der dynamischen Berechnung wird an den einzelnen Zeitpunkten bestimmt, ohne den Einfluß der Fehler der vorherigen Zeitschritte zu berücksichtigen. Dadurch können dieselben Methoden wie für die Approximation des Fehlers in der statischen Strukturanalyse verwendet werden. Der Fehler in der Verzerrungsenergie wird durch die Nachbehandlung der numerischen Lösung bestimmt. Dabei wird der Spannungsfehler durch die Differenz aus den unstetigen FE-Spannungen zu den verbesserten stetigen Spannungen berechnet. Die stetige Spannungslösung kann mit Hilfe der einfachen Mittelung der Spannungswerte an den FE-Knoten, der globalen oder lokalen L_2 -Projektion oder durch die lokale Quadratminimierung der Spannungen in den superkonvergenten Punkten bestimmt werden. Die zuletzt erwähnte Methode wurde von Zienkiewicz und Zhu [113] [114] entwickelt und wird „Superconvergent Patch Recovery“ (SPR) genannt. Zusätzlich zu dem Fehler in der Verzerrungsenergie muß bei der dynamischen Strukturanalyse auch der Fehler in der kinetischen Energie bestimmt werden. Das Konzept der Bestimmung von verbesserten Spannungen mit Hilfe von superkonvergenten Punkte wurde von Wiberg et al. [102] auf die Bestimmung von verbesserten Geschwindigkeiten erweitert. Da die superkonvergenten Punkte für die Geschwindigkeitsapproximationen jedoch nur ab quadratischen räumlichen Ansatzordnungen existieren, wurde für lineare Elemente von Riccius [80] vorgeschlagen, durch die Nachbehandlung der Geschwindigkeitslösung „verschlechterte“ Geschwindigkeiten zu berechnen und damit den

Fehler in der kinetischen Energie zu approximieren. Die Methoden zur Bestimmung des räumlichen Fehlers sind einfach in bestehende Algorithmen zu implementieren. Es wird dabei der durchschnittliche räumliche Fehler der Strukturantwort zu einem Zeitpunkt bestimmt. Der räumliche Fehler wird ebenso wie der zeitliche Fehler in der Energienorm gemessen. In dieser Arbeit wird sowohl der Fehler in der Verzerrungsenergie wie auch in der kinetischen Energie mit Hilfe der Methoden basierenden auf den Superkonvergenzeigenschaften bestimmt. Die Kombination der zeitlichen mit der räumlichen Adaptivität wurde kaum untersucht [61]. In dieser Arbeit werden hierzu einige Untersuchungen vorgenommen.

In jüngster Zeit wurde ein **allgemeines Konzept der Fehlerbestimmung** vorgestellt, das auf der Auswertung eines zusätzlichen, dualen Problems beruht, s. Johnson et al. [55] und Eriksson et al. [35]. Durch die Einführung des dualen Problems, das den Einfluß der zu bestimmenden Fehlergröße in Raum und Zeit darstellen kann, ist es möglich, die Fehler in verschiedenen physikalischen Größen, z.B. Verschiebungen, Spannungen, direkt zu messen. Ebenso kann der Fehler eines bestimmten räumlichen Gebietes und der zeitliche Fehlerverlauf unter Berücksichtigung der Fehler der vorherigen Zeitschritten dargestellt werden. Diese Flexibilität in der Fehlerbestimmung wird durch die Koppelung des ursprünglichen Problems mit dem dualen Problem erreicht. Um dieses allgemeine Konzept zur Fehlerbestimmung anwenden zu können, muß das Problem in einer reinen FE-Formulierung vorliegen. Nur dann kann das duale Problem hergeleitet und die Galerkin Orthogonalität zur Abschätzung des Fehlers verwendet werden. Das duale Problem, daß die Einflußverteilung auf die zu bestimmenden Fehlergröße darstellt, kann bei der Fehlerbestimmung durch eine einzige Konstante, der sogenannten Stabilitätskonstante ersetzt werden. Die Stabilitätskonstante schätzt dabei die Einflußverteilung des dualen Problems ab. Da das duale Problem nur durch eine einzige Konstante ersetzt wird, kann die Fehlerverteilung nicht genau wiedergegeben werden. Deshalb ist dieses Vorgehen nicht zur Steuerung von adaptiven Methoden eignet. Der Einfluß auf die zu bestimmenden Fehlergröße kann ebenso durch die numerische Auswertung des dualen Problems dargestellt werden. Dies führt auf eine genauere Fehlerverteilung und ermöglicht eine effizientere adaptive Anpassung der Diskretisierung. Der Problemkreis auf den die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen angewendet wird, wurde in den letzten Jahren ständig erweitert, z.B. von der geometrisch und materiell linearen Statik auf nichtlineare statische Probleme, Transportprobleme und Optimierungsaufgaben. Der bekannte Fehlerschätzer von Babuška und Miller [5] kann in das Konzept der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen eingeordnet werden. In den ursprünglichen Arbeiten [55][35] und in zahlreichen fortführenden Arbeiten, u.a. [88][76][18], werden formale mathematische Aspekte, wie z.B. Schrankeneigenschaften der Fehlerabschätzung, betont. Es wird dabei wenig auf die algorithmische Umsetzung und Anwendung der Methode eingegangen. Die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen wurde bisher noch nicht auf die Probleme der dynamischen Strukturanalyse angewendet. Gerade bei der aufwendigen Berechnung von zeitabhängigen Probleme ist zur Steuerung einer adaptiven Methode die Kontrolle von bestimmten Fehlergrößen in begrenzten Gebieten über die Zeit wünschenswert. In dieser

Arbeit wird die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen auf die geometrisch und materiell lineare Strukturmechanik erweitert. Dazu wird eine reine FE-Formulierung mit diskontinuierlichen zeitlichen Ansätzen (DTG) verwendet. Das duale Problem wird für diese Formulierung hergeleitet und Fehlerindikatoren entwickelt, die den zeitlichen und räumlichen Fehler über die Zeit approximieren. In ersten Beispielen wird gezielt der lokale Fehler in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten über die Zeit kontrolliert.

Der Nachteil der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen ist, daß eine reine FE-Formulierung verwendet werden muß. Die DTG-Methode ist in der dynamischen Strukturanalyse nicht sehr verbreitet, da sie numerisch aufwendiger ist und einen höheren Speicherbedarf hat als die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration. Arbeiten zur Anwendung der Fehlerbestimmung mit Hilfe von **dualen Problemen bei der semidiskreten Bewegungsgleichung** existieren bisher noch nicht. Jedoch eröffnet die Kombination der Semidiskretisierung mit der flexiblen Fehlerkontrolle in der dynamischen Strukturanalyse neue Möglichkeiten der Fehlerkontrolle. In dieser Arbeit wird durch die Verwendung von dualen Problemen an einem Zeitpunkt der räumliche Fehler in einem bestimmten Gebiet und in einer bestimmten physikalischen Größe bestimmt. Der zeitliche Verlauf des Fehlers kann nicht dargestellt werden.

1.2 Gliederung

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen der Strukturmechanik eingeführt. Es werden Begriffe wie Leistung, Arbeit und Energie in der Dynamik definiert. Die variationalen Formulierungen, mit deren Hilfe die starke Form der Bewegungsgleichung in die schwache Form überführt werden kann, werden eingeführt. Es wird die „Discontinuous Time Galerkin“-Methode (DTG-Methode) und die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration verwendet. Die unterschiedlichen schwachen Formulierungen werden in der Zeit mit finiten Elementen (FE) und finiten Differenzen (FD) diskretisiert. Die Unterschiede der Formulierungen werden herausgearbeitet.

Kapitel 3 gibt einen Überblick über die Fehlertypen und die Methoden der Fehlerbestimmung. Die verschiedenen Fehler werden zunächst klassifiziert. Die Methoden zur Bestimmung des Diskretisierungsfehlers werden eingeteilt. Besonders wird auf den Unterschied zwischen dem lokalen und globalen Fehler im Zusammenhang mit der zeitlichen und räumlichen Fehlerkontrolle eingegangen. Die verschiedenen adaptiven Strategien werden vorgestellt.

In Kapitel 4 wird durch die Einführung des dualen Problems ein allgemeiner Fehlerindikator entwickelt, der den Fehler in verschiedenen physikalischen Größen in einem Gebiet über die Zeit hinweg darstellen kann. Die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen beruht auf der Formulierung der semidiskreten Bewegungsgleichung mit DG-Ansätzen in der Zeit. Zunächst wird das ursprüngliche Problem definiert und anschließend das duale

Problem hergeleitet. Die Rolle des dualen Problems wird anschaulich erklärt. Besonders wird auf die Bedeutung des dualen Problems für den Fehler in verschiedenen Größen eingegangen. Numerische Beispiele zeigen, daß mit dieser Methode der zeitliche Verlauf des lokalen Fehlers dargestellt werden kann. Vergleiche mit den bekannten globalen Fehlerindikatoren (s. Kapitel 5) verdeutlichen die Vorteile des allgemeinen Fehlerindikators.

In Kapitel 5 werden ausschließlich Fehlerindikatoren verwendet, die auf der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration basieren. Das Konzept der Fehlerkontrolle bei der semidiskreten Formulierung wird erklärt und mit dem Vorgehen in Kapitel 4 verglichen. Zunächst werden die Indikatoren für den zeitlichen Fehler eingeführt. Anhand von Beispielen werden die aus der Literatur bekannten zeitlichen Fehlerindikatoren in Kapitel 5.2 miteinander verglichen und bewertet. Der Unterschied zwischen zeitlich lokalen und globalen Fehlern wird anhand von Beispielen erläutert. Die Effektivität der adaptiven Zeitschrittsteuerung wird an einem Beispiel gezeigt. Anschließend wird in Kapitel 5.3.1 ein Überblick über die Verfahren zur Approximation des räumlichen Diskretisierungsfehlers gegeben. In dieser Arbeit wird der Fehler mit verbesserten Lösungen ermittelt. Der Diskretisierungsfehler wird in der Dehnungsenergie und in der kinetischen Energie bestimmt. Anhand von Beispielen wird das vorgeschlagene Vorgehen überprüft und die Vorteile der räumlichen Adaptivität dargestellt. Die Methode der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen wird in Kapitel 5.3.3 auf die semidiskrete Gleichung übertragen. Zunächst wird der Unterschied zwischen der FE- und FD-Diskretisierung in der Zeit dargestellt. Das Vorgehen stützt sich auf die Herleitung des allgemeinen Indikators in Kapitel 4. Die Annahmen und Vereinfachungen zur Entwicklung des Indikators werden erläutert. Der entwickelte Fehlerindikator kontrolliert den räumlich lokalen Fehler zu einem Zeitpunkt. Der Unterschied zu den räumlich globalen Fehlerindikatoren wird an Beispielen verdeutlicht und die Vorteile der lokalen Fehlerkontrolle gezeigt.

In Kapitel 6 wird der adaptive Algorithmus untersucht. Verschiedene Möglichkeiten zur Steuerung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle werden vorgeschlagen und diskutiert. Ein besonders kritischer Punkt ist die Genauigkeit der übertragenen Daten bei der Neuvernetzung. Die Notwendigkeit der Korrektur der transferierten Daten wird gezeigt. Die Techniken und Methoden der Nachbehandlung der transferierten Daten zur Verbesserung der Lösung aus der Literatur werden vorgestellt und an Beispielen getestet. Die Schwierigkeit der Kontrolle des räumlichen und zeitlichen Fehlers mit Hilfe von adaptiven Methoden wird anhand von Beispielen diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 7 die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt und Anregungen für künftige Entwicklungen gegeben.

Im Anhang sind Ergänzungen zu einzelnen Themen aufgeführt. Die Eigenschaften der verschiedenen Zeitintegrationsverfahren werden untersucht. Die Zeitintegration mit der Newmark-Methode wird mit den zeitlichen finiten Element Ansätzen verglichen. Das Prädiktor-Multikorrekter Verfahren, mit dem die DTG-Formulierung gelöst wird, wird

vorgelegt. Verschiedene Formulierungen der Struktur­dynamik erster und zweiter Ordnung in der Zeit werden im Hinblick auf die Fehlerdarstellung mit Hilfe von dualen Problemen untersucht.

Kapitel 2

Grundgleichungen der linearen Strukturodynamik

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der geometrisch und materiell linearen Strukturodynamik eingeführt. Zunächst werden Arbeit und Leistung in der Dynamik definiert. Aufbauend auf den variationellen Formulierungen werden unterschiedliche Diskretisierungsmethoden eingeführt. In dieser Arbeit werden die „Discontinuous Time Galerkin“ (DTG) Methode und das finite Differenzen (FD) Verfahren zur Zeitdiskretisierung verwendet. In Kapitel 2.3.1 wird die DTG-Methode für die Einfeldformulierung beschrieben. In Kapitel 2.3.2 wird die semidiskrete Formulierung mit Newmark-Ansätzen zur Zeitintegration eingeführt. Im folgenden werden für beide Diskretisierungsmethoden, die DTG-Methode und das FD-Verfahren, die Unterschiede in den Grundlagen der Formulierung und daraus folgend die Unterschiede in der Diskretisierung gezeigt. Im Anhang B wird auf die Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren eingegangen. Für eine ausführliche Einführung in die Dynamik wird auf die Literatur verwiesen. Einen Überblick über Zeitintegrationsverfahren und deren Grundlagen und Eigenschaften geben z.B. Hughes [46], Zienkiewicz et al. [109][110] und Argyris et al.[3].

2.1 Grundgleichung

Es wird zunächst die starke Form der linearen Elastodynamik eingeführt. Das räumliche Gebiet wird mit Ω bezeichnet und der Rand $\partial\Omega$ mit Γ . Das Problem der Strukturodynamik stellt ein Anfangs- und Randwertproblem auf dem Raum-Zeit Gebiet $Q = \Omega \times I$ in \mathbb{R}^n dar.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + d_1 \rho \dot{\mathbf{u}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{P} \quad \text{auf } \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{t} \quad \text{auf } \Gamma_t \times (0, T) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.5)$$

Die Dimension des Raumes \mathbb{R}^n wird mit n bezeichnet. Das Zeitintervall I ist definiert durch $I = (0, T)$. Die Verschiebungen werden mit \mathbf{u} bezeichnet, der Spannungstensor mit $\boldsymbol{\sigma}$ und \mathbf{P} sind die äußeren Lasten. Die äußeren Lasten sind in dieser Arbeit von der Zeit abhängig und unabhängig von dem Verschiebungszustand. Die Materialdichte wird mit ρ bezeichnet. Die vorgeschriebenen Randspannungen sind auf dem Rand Γ_t mit \mathbf{t} gegeben, wobei \mathbf{n} der Normalenvektor auf dem Rand Γ_t ist. Die vorgeschriebenen Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ sind auf dem Rand Γ_u angegeben. Es wird lineares elastisches Materialverhalten angenommen.

$$\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Der Materialtensor wird mit \mathbf{D} bezeichnet. Gleichung (2.1) stellt die Bewegungsgleichung mit viskoser, d.h. geschwindigkeitsabhängiger, Dämpfung dar [46]. Vereinfachend wird Rayleigh Dämpfung mit den massen- und steifigkeitsproportionalen Dämpfungstermen angenommen. Über die Parameter d_1 und d_2 können die Dämpfungseigenschaften beeinflusst werden. Diese Art der Dämpfung ist einfach anzuwenden, da sie keine zusätzlichen physikalischen Gesetze benötigt und wird deshalb häufig bei numerischen Berechnungen benutzt. Jedoch ist die Größe der Dämpfungsparameter d_1 und d_2 nicht leicht zu bestimmen [3].

Die Gleichungen (2.2) und (2.3) sind auf den Rändern definiert mit

$$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma = \partial\Omega \quad (2.7)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset \quad (2.8)$$

Die Anfangsbedingungen (2.4) und (2.5) sind in den Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_0$ und Geschwindigkeiten $\bar{\mathbf{u}}_0$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gegeben.

Die starke Form der Bewegungsgleichung (2.1–2.3) wird abgekürzt mit

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathcal{P} \quad (2.9)$$

\mathcal{L} ist der lineare Operator der starken Form. Der Lastoperator wird in der abgekürzten Schreibweise der starken Form mit \mathcal{P} bezeichnet.

2.2 Grundbegriffe

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung in der schwachen Form werden die folgenden Grundbegriffe eingeführt:

- Leistung \dot{W}
- Arbeit $W = \int_t \dot{W} dt$
- Energie $E = -W$

Arbeit In der Statik entspricht die äußere Arbeit:

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (2.10)$$

In der linearen Kinetik sind die Verschiebungen von der Zeit abhängig $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$. Die von einer Last verrichtete äußere Arbeit ist damit

$$W = \int_t \int_{\Omega} \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt \quad (2.11)$$

wobei der Integrand die Leistung $\dot{W} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ darstellt. Bei einem linear elastischen Gesamtsystem können folgende Arbeiten auftreten:

Dehnungsarbeit

$$W_{str} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt = - \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\Omega \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.12)$$

Dämpfungsarbeit

$$W_{dam} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\rho d_1 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \right] d\Omega dt \quad (2.13)$$

Arbeit durch Massenbeschleunigung

$$W_{kin} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt = - \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.14)$$

Äußere Arbeit

$$W_{ext} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt \quad (2.15)$$

Die Dehnungsarbeit und die Arbeit aus der Massenbeschleunigung kann durch die Arbeiten zu den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 berechnet werden. Diese Arbeiten besitzen Potentialeigenschaften, d.h. sie sind weg- und zeitunabhängig. Die Dämpfungsarbeit hingegen ist weg- und zeitabhängig. Die äußere Arbeit W_{ext} besitzt nur Potentialeigenschaften, wenn die Last \mathbf{P} weg- und zeitunabhängig ist. Für eine genaue Beschreibung von Lasten mit Potentialeigenschaften wird auf Schweizerhof et al. [83] verwiesen.

Energie Die Arbeiten mit Potentialeigenschaften können von dem System gespeichert und wiedergewonnen werden. Sie werden als Energie bezeichnet.

- **potentielle Energie**

$$E_{pot} = -W_{str} - W_{ext} \quad \text{bzw.} \quad E_{pot} = -W_{str} \quad (2.16)$$

Bei der potentiellen Energie wird unterschieden, ob die äußere Last Potentialeigenschaften besitzt oder nicht.

- **kinetische Energie**

$$E_{kin} = -W_{kin} \quad (2.17)$$

Arbeitssatz Der Arbeitssatz sagt aus, daß die Summe aller an einem System verrichteten Arbeiten zu null werden muß.

$$W_{kin} + W_{dam} + W_{str} + W_{ext} = 0 \quad (2.18)$$

Der Arbeitssatz kann, da nur Zustände miteinander verglichen werden, keine Aussage über den zeitlichen Verlauf der Bewegung des Systems machen. Der momentane Zustand wird durch die zeitliche Ableitung der Arbeit, der Bilanzgleichung der Leistung, beschrieben.

$$\dot{W}_{kin} + \dot{W}_{dam} + \dot{W}_{str} + \dot{W}_{ext} = 0 \quad (2.19)$$

Werden die Leistungsterme aus (2.12)–(2.15) eingesetzt, so ergibt sich die schwache Form der Bewegungsgleichung.

$$- \int_{\Omega} [\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho d_1 \dot{\mathbf{u}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{P}] \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

Räumliche und zeitliche variationelle Formulierung Um finite Elemente in räumlicher und zeitlicher Richtung benutzen zu können, wurden verschiedene Ansätze, die auf unterschiedlichen Grundlagen beruhen, unternommen. Eine Art der Herleitung, [4][70], basiert auf dem Prinzip von Hamilton. Baruch et al. [15] können mit Hilfe des Prinzip von Hamilton nur für bestimmte Anfangs- und Endbedingungen ($t = 0$ bzw. $t = T$) eine stabile räumlich und zeitlich schwache Formulierung herleiten. Peters et al. [72] zeigen, daß für die Verfahren basierend auf dem Prinzip von Hamilton im allgemeinen die Stabilität und die Konvergenz nicht garantiert werden kann.

Bei einem anderem Ansatz wird direkt die Differentialgleichung bzw. eine variationelle Formulierung verwendet, [48][72][50]. Diese Formulierung ist gegenüber den Ansätzen, die auf dem Prinzip von Hamilton basieren, allgemein gültig, d.h. die Konvergenz kann für beliebige Rand- und Anfangswertprobleme garantiert werden. Die Verfahren basierend auf dem Prinzip von Hamilton sind ein Spezialfall der variationellen Formulierung. Für einen Vergleich der Ansätze, die auf Hamilton's Prinzip basieren, und einer variationellen Formulierung wird auf Peters et al. [72] verwiesen.

Die variationelle Formulierung wird durch die Wichtung der Differentialgleichung der Strukturmechanik (2.1) mit den Funktionen $\dot{\mathbf{w}}$ gewonnen.

$$\int_t \int_{\Omega} [\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho d_1 \dot{\mathbf{u}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{P}] \cdot \dot{\mathbf{w}} \, d\Omega dt = 0 \quad (2.21)$$

Die bilineare Formulierung entspricht der Methode der gewichteten Residuen. Die Bewegungsgleichung wird über das gesamte Raum-Zeit Gebiet schwach erfüllt. Die Integrationsterme können physikalisch als Leistungsterme interpretiert werden, wenn die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{u}}$ als Wichtungsfunktionen verwendet werden.

Räumliche variationelle Formulierung Die variationelle Formulierung in räumlicher Richtung wird, wie die räumliche und zeitliche variationelle Formulierung, durch Wichtung der starken Form mit den Funktionen \boldsymbol{w} hergeleitet.

$$\int_{\Omega} [\rho \ddot{\boldsymbol{u}} + \rho d_1 \dot{\boldsymbol{u}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\boldsymbol{u}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{P}] \cdot \boldsymbol{w} \, d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

Die Bewegungsgleichung wird nicht mehr schwach über die Zeit erfüllt, sondern stark zu jedem Zeitpunkt. Das Vorgehen entspricht der Methode der gewichteten Residuen [108].

Der Zusammenhang zwischen der zeitlich und räumlich bilinearen Formulierungen (2.21) und der rein räumlich bilinearen Formulierung (2.22) wird von Dinkler [31] dadurch veranschaulicht, daß die rein räumliche variationelle Formulierung (2.22) aus der räumlichen und zeitlichen variationellen Formulierung (2.21) hergeleitet wird. Dabei wird ein infinitesimales Zeitintervall Δt betrachtet und der Integrand, z.B. \boldsymbol{u} , auf dem infinitesimalen Zeitintervall als konstant angenommen.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{w}} \, dt = \boldsymbol{u} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t \dot{\boldsymbol{w}} \, dt = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \quad (2.23)$$

Der Zusammenhang (2.23) wird in die Gleichung (2.21) eingesetzt und führt auf die bilineare Formulierung (2.22). Werden als Testfunktion \boldsymbol{w} die virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{u}$ verwendet, dann ergibt sich der Spezialfall des Prinzips der virtuellen Arbeit. Da die virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{u}$ nur in einem infinitesimalen Zeitintervall angenommen werden, müssen sie nicht mehr die Bewegungsgleichung erfüllen. D.h. sie müssen nur noch die kinematischen Bedingungen erfüllen und nicht mehr ein Nachbarzustand von \boldsymbol{u} sein.

2.3 Diskretisierung

Die Verfahren zur numerischen Berechnung von zeitabhängigen Problemen können folgendermaßen eingeteilt werden [46][3].

Direkte und indirekte Zeitintegrationsverfahren Mit Hilfe von den direkten Zeitintegrationsverfahren kann das Gleichungssystem (2.1–2.5) in aufeinander folgenden Zeitintervallen gelöst werden. Bei den indirekten Zeitintegrationsverfahren wird das Gleichungssystem mittels der modalen Analyse entkoppelt. Die einzelnen Eigenwerte und Eigenformen, mit deren Hilfe die Lösungen der entkoppelten Gleichungen bestimmt werden, müssen berechnet werden. Die Strukturantwort ist die Superposition der Lösungen der entkoppelten Gleichungen. Im folgenden werden direkte Zeitintegrationsverfahren verwendet.

Einschrittverfahren und Mehrschrittverfahren gehören zu den direkten Zeitintegrationsverfahren. Bei Einschrittverfahren werden nur die Systemgrößen des letzten Zeitpunktes verwendet, um die Werte zum neuen Zeitpunkt zu berechnen. Bei den Mehrschrittverfahren werden die Größen des aktuellen Zeitschrittes mit Hilfe

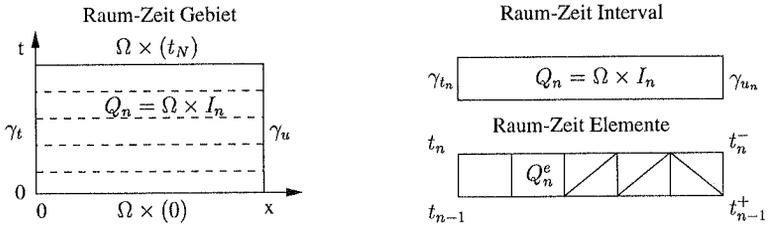


Abbildung 2.1: Bezeichnungen des Raum-Zeit Gebietes

der Größen von mehreren zurückliegenden Zeitschritten berechnet. Ein bekanntes Mehrschrittverfahren ist das Runge–Kutta Verfahren. Der Vorteil der Mehrschrittverfahren besteht in der Möglichkeit einer einfachen Zeitschrittsteuerung, indem die Zeitverläufe mit unterschiedlichen Genauigkeitsordnungen [30] ausgewertet werden. Der erhöhte Speicherbedarf und die erforderliche Startprozedur bei den Mehrschrittverfahren sind jedoch von Nachteil.

Daher werden im folgenden Einschrittverfahren verwendet, die weiter unterteilt werden können in

- implizite Verfahren
- explizite Verfahren
- implizit–explizite Verfahren

Bei expliziten Verfahren wird die Bewegungsgleichung zu Beginn eines Zeitschrittes gelöst. Liegt die Massenmatrix in der Diagonalform vor, so muß das Gleichungssystem nicht gelöst werden. Die unbekanntenen Größen zu einem Zeitpunkt t_n können direkt aus den Werten zu dem Zeitpunkt t_{n-1} ermittelt werden. Nichtlinearitäten verursachen dadurch kaum Mehraufwand. Die Zeitschrittweite muß jedoch unter einer kritischen Zeitschrittweite liegen, um die Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten. Explizite Verfahren werden vor allem bei Kurzzeituntersuchungen und bei Problemen mit ausgeprägten Diskontinuitäten, wie z.B. Crash, Explosion oder extreme Kontaktprobleme, angewendet.

Bei impliziten Verfahren muß ein Gleichungssystem gelöst werden, da die Bewegungsgleichung zu dem neuen Zeitpunkt aufgestellt wird. Der Zeitschritt kann somit größer als bei expliziten Verfahren gewählt werden.

Die implizit–expliziten Verfahren stellen eine Mischung dar, da im Lösungsprozeß sowohl die implizite wie auch die explizite Zeitintegration verwendet wird.

Definitionen Im folgenden Abschnitt werden die Definitionen und Abkürzungen eingeführt, die für die Diskretisierung benötigt werden. Das gesamte Zeitintervall $I = (0, T)$

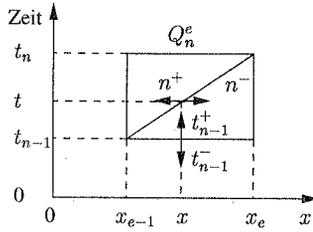


Abbildung 2.2: Bezeichnungen des Raum-Zeit Elementes

wird in N Zeitschritte unterteilt. Das einzelne Zeitintervall wird mit $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ bezeichnet, wie in Abbildung (2.1) dargestellt. Für die Zeitpunkte der Intervallgrenzen gilt: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$. Die Zeitschrittgröße ist $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$. Die Zeitintervalle I_n unterteilen das Raum-Zeit Gebiet Q und den Rand Γ in

$$Q_n = I_n \times \Omega \quad (2.24)$$

$$\gamma_n = I_n \times \Gamma \quad (2.25)$$

$$\gamma_{t_n} = I_n \times \Gamma_t \quad (2.26)$$

$$\gamma_{u_n} = I_n \times \Gamma_u \quad (2.27)$$

Q_n bezeichnet das Raum-Zeit Intervall. Ein Raum-Zeit Intervall besteht aus Raum-Zeit Elementen. Die Raum-Zeit Elemente setzen sich aus dem Elementinneren Q_n^e und den Elementrändern γ_n^e zusammen.

$$Q_n^e \subset Q_n \quad (2.28)$$

Die symmetrischen Bilinearformen werden folgendermaßen abgekürzt.

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u})_\Omega = (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (2.29)$$

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u})_\Omega = a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \, d\Omega \quad (2.30)$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u})_{Q_n} = \int_{I_n} \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega dt \quad (2.31)$$

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u})_{Q_n} = \int_{I_n} \int_\Omega \nabla \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \, d\Omega dt \quad (2.32)$$

In den Gleichungen (2.29), (2.31) bzw. (2.30), (2.32) variiert jeweils das Integrationsgebiet. Die Dehnungsenergie ist durch die Bilinearform (2.30) gegeben. Die Seiten zweier benachbarter Elemente werden mit \pm bezeichnet, s. Abb. (2.2). Bei den Rändern eines Elementes wird zwischen den Zeitintervallgrenzen und den räumlichen Elementrändern unterschieden. Ist auf dem Raum-Zeit Gebiet eine in zeitlicher Richtung nicht stetige Funktion \mathbf{w} definiert, dann entstehen zu dem Zeitpunkt t_n zeitliche Sprungterme $[[\cdot(t_n)]]$.

$$[[\mathbf{w}(t_n)]] = \mathbf{w}(t_n^+) - \mathbf{w}(t_n^-) \quad (2.33)$$

mit

$$\mathbf{w}(t_n^\pm) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \mathbf{w}(t_n + \epsilon \Delta t_n) \quad (2.34)$$

Der Sprung über die räumlichen Elementränder wird als räumlicher Sprungterm $[[\cdot(\mathbf{x})]]$ bezeichnet.

$$[[\mathbf{w}(\mathbf{x})]] = \mathbf{w}(\mathbf{x}^+) - \mathbf{w}(\mathbf{x}^-) \quad (2.35)$$

\pm bezeichnet die Werte auf den benachbarten Seiten des räumlichen Randes γ^e eines Elementes mit

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}^\pm) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \mathbf{w}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}) \quad (2.36)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor senkrecht auf γ^e im Gebiet Ω ist. Für den Normalenvektor an den Elementgrenzen benachbarter Elemente gilt:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^- \quad (2.37)$$

Der räumliche Sprung in den Spannungen ist

$$\mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}))]] = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}^+)) - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}^-)) \quad (2.38)$$

2.3.1 Zeitdiskretisierung mit diskontinuierlichen finiten Elementen

Im folgenden wird zunächst kurz auf die zeitliche Entwicklung der „Discontinuous Time Galerkin“ Methode (DTG) für partielle Differentialgleichungen eingegangen. Ein ausführlicher Überblick über die DTG-Methode mit Literaturhinweisen ist z.B. in Hulbert [49] zu finden.

Mitte der achtziger Jahre wurde damit begonnen die Zeit, mit diskontinuierlichen finiten Elementen, d.h. mit der DTG-Methode, zu diskretisieren. In den ersten Veröffentlichungen über die DTG-Methode von Reed et al. [78] und Lesaint et al. [59] wird die Methode für die Berechnung des Neutronentransports verwendet. Die Methode wurde dann auf die Probleme der Fluidmechanik angewendet, u.a. Bonnerot et al. [22], Johnson et al. [56], Thomée [92], Hughes et al. [47]. Für die DTG-Methode wurden rigorose Konvergenzbeweise geführt und Fehlerschätzer entwickelt, u.a. Johnson et al. [53][56], Hughes et al. [47], Hansbo et al. [41]. Die Fehlerschätzer basierend auf der DTG-Methode werden in Kapitel 4 behandelt.

Die DTG-Methode wurde von Hughes et al. [48] auf die Strukturdynamik angewendet. Zunächst wurde die Bewegungsgleichung als Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit verwendet, da für Systeme erster Ordnung die Konvergenzbeweise einfacher zu führen sind. Ein Nachteil der Formulierung erster Ordnung in der Zeit ist, daß nach mehreren

unbekannten Feldern gelöst werden muß. Deshalb wurde die DTG-Methode auf die Gleichung zweiter Ordnung in der Zeit erweitert. Ausgehend von der Zweifeldformulierung der Elastodynamik [48] entwickelten Hulbert et al. [50] eine reine Verschiebungsformulierung. Hulbert [49] verwendet die gewöhnliche Differentialgleichung der Strukturmechanik, d.h. die semidiskrete Bewegungsgleichung, als einen Spezialfall. Damit ist bei der DTG-Methode die Diskretisierung des Raumes unabhängig von der Diskretisierung der Zeit.

Im folgenden Abschnitt wird zum Lösen der Bewegungsgleichung der linearen Strukturmechanik die Raum-Zeit Formulierung eingeführt. Die schwache Form der Bewegungsgleichung wird über das Raum-Zeit Gebiet gebildet. Durch die Diskretisierung von Raum und Zeit mit finiten Elementen ergibt sich ein reines Galerkin-Verfahren.

Schwache Formulierung und Diskretisierung Die starke Form der Elastodynamik (2.1–2.5) wird durch die räumliche und zeitliche bilineare Formulierung (2.21) in die schwache Form überführt. Das dynamische Gleichgewicht wird dadurch schwach über das Raum-Zeit Gebiet erfüllt. Die Ansatz- und Testfunktionen sind in räumlicher Richtung über die Elemente hinweg stetig. In zeitlicher Richtung sind die Funktionen innerhalb eines Zeitintervalles I_n stetig. An den Zeitintervallgrenzen werden Sprünge zugelassen. Der Raum der Ansatzfunktionen \mathcal{S}_n und der Testfunktionen \mathcal{V}_n auf Q_n ist definiert durch

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \gamma_{u_n}, \mathbf{u} \in H^1(Q_n)\} \quad (2.39)$$

und

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ auf } \gamma_{u_n}, \mathbf{w} \in H^1(Q_n)\} \quad (2.40)$$

Für das gesamte Raum-Zeit Gebiet Q gilt $\mathcal{S}_{TG} = \cup_{n=1}^N \mathcal{S}_n$ sowie $\mathcal{V}_{TG} = \cup_{n=1}^N \mathcal{V}_n$ mit der Anzahl der Raum-Zeit Intervalle N . Der Index der Formulierung mit der „Time Galerkin“ Methode ist $(\cdot)_{TG}$. Das Einsetzen der Ansatz- und Testfunktionen in Gleichung (2.21) führt nach der partiellen Integration auf die folgende schwache Formulierung: Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{TG}$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_{TG}$ gilt

$$B_{TG}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = L_{TG}(\mathbf{w}) \quad (2.41)$$

mit

$$B_{TG}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N [(\dot{\mathbf{w}}, \rho \ddot{\mathbf{u}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{w}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{u}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{w}}, d_2 \dot{\mathbf{u}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{u})_{Q_n}] \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=2}^N [(\dot{\mathbf{w}}(t_{n-1}^+), \rho [[\dot{\mathbf{u}}(t_{n-1})]])_{\Omega} + a(\mathbf{w}(t_{n-1}^+), [[\mathbf{u}(t_{n-1})]])_{\Omega}] \\ &+ (\dot{\mathbf{w}}(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{u}}(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{w}(t_0^+), \mathbf{u}(t_0^+))_{\Omega} \\ L_{TG}(\mathbf{w}) &= \sum_{n=2}^N [(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{P})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{t})_{\gamma_{t_n}}] + (\dot{\mathbf{w}}(t_0^+), \rho \ddot{\mathbf{u}}_0)_{\Omega} + a(\mathbf{w}(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0)_{\Omega} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Durch die Wichtung mit $\dot{\mathbf{w}}$ und die Integration über die Zeit erhält man in den Gleichungen (2.42) und (2.43) wieder die Arbeitsterme (2.12–2.15). Damit kann die Energie einfach berechnet werden und die Stabilität der Methode gezeigt werden. Wird die starke Form (2.9) in die schwache Formulierung (2.41) mit (2.42) und (2.43) eingesetzt, ergibt sich

$$0 = B_{TG}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - L_{TG}(\mathbf{w}) = \quad (2.44)$$

$$\sum_{n=1}^N (\dot{\mathbf{w}}, \mathcal{L}\mathbf{u} - \mathcal{P})_{Q_n} + \sum_{n=2}^N [(\dot{\mathbf{w}}(t_{n-1}^+), \rho[[\dot{\mathbf{u}}(t_{n-1})]])_{\Omega} + a(\mathbf{w}(t_{n-1}^+), [[\mathbf{u}(t_{n-1})]])_{\Omega}]$$

$$+ (\dot{\mathbf{w}}(t_0^+), \rho\dot{\mathbf{u}}(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{w}(t_0^+), \mathbf{u}(t_0^+))_{\Omega} - (\dot{\mathbf{w}}(t_0^+), \rho\dot{\mathbf{u}}_0)_{\Omega} - a(\mathbf{w}(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0)_{\Omega}$$

Die Bewegungsgleichung wird durch den ersten Term in (2.44) schwach über jedes Raum-Zeit Intervall Q_n erfüllt. Die beiden Sprungterme in (2.44) entstehen durch die zeitlich diskontinuierlichen Ansatzfunktionen. Sie erzwingen im schwachen Sinn die Kontinuität der Verschiebungen und Geschwindigkeiten über die Zeitintervallgrenzen. Die beiden letzten Terme in Gleichung (2.44) erfüllen schwach die Anfangsbedingung (2.4) und (2.5) in den Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}_0$ und den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}_0$. Das Raum-Zeit Gebiet wird räumlich durch die Teilung des Gebietes Ω in K Elemente Ω^e diskretisiert. Die diskreten Ansatz- und Testfunktionen \mathcal{S}_{TG}^h und \mathcal{V}_{TG}^h werden aus dem Raum der Ansatzfunktionen $\mathcal{S}_{TG}^h \subset \mathcal{S}_{TG}$ und Testfunktionen $\mathcal{V}_{TG}^h \subset \mathcal{V}_{TG}$ gewählt. Die Formulierung mit dem Galerkin-Verfahren lautet: Finde $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_{TG}^h$, so daß für alle $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h$ gilt

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = L_{TG}(\mathbf{w}^h) \quad (2.45)$$

Im folgenden werden die Ansatz- und Testfunktionen aus demselben Raum gewählt, wodurch sich ein Bubnov-Galerkin Verfahren ergibt. Die diskrete Formulierung (2.45) wird durch die Summation über alle Raum-Zeit Elemente eines Zeitintervalls I_n beschrieben. Durch die partielle Integration der Terme über die einzelnen Raum-Zeit Elemente Q_n^e und die Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes ergeben sich zusätzliche Terme auf den Elementrändern γ_n^e .

$$0 = \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \sum_{e=1}^K [(\dot{\mathbf{w}}^h, \rho\dot{\mathbf{u}}^h + d_1\rho\dot{\mathbf{u}}^h - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{u}}^h) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h) - \mathbf{P})_{\Omega_n^e} \quad (2.46)$$

$$+ \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{w}}^h, \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]])_{\gamma_n^e} + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{w}}^h, d_2\mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{u}}^h)(\mathbf{x})]])_{\gamma_n^e}$$

$$+ (\dot{\mathbf{w}}^h, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h) - \mathbf{t})_{\gamma_n^e}] dt$$

$$+ \sum_{n=2}^N \sum_{e=1}^K [(\dot{\mathbf{w}}^h(t_{n-1}^+), \rho[[\dot{\mathbf{u}}^h(t_{n-1})]])_{\Omega_n^e} + a(\mathbf{w}^h(t_{n-1}^+), [[\mathbf{u}^h(t_{n-1})]])_{\Omega_n^e}]$$

$$+ (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \rho\dot{\mathbf{u}}^h(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{w}^h(t_0^+), \mathbf{u}^h(t_0^+))_{\Omega} - (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \rho\dot{\mathbf{u}}_0)_{\Omega} - a(\mathbf{w}^h(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0)_{\Omega}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor den Sprungtermen ergibt sich durch die Summation über alle Elemente, da jede Elementkante γ_n^e doppelt betrachtet wird. Die Zeitintervalle I_n können durch die diskontinuierlichen zeitlichen Ansätze unabhängig voneinander berechnet werden.

Bei der vollen Koppelung der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung sind die Ansatzfunktionen \mathbf{N} von dem Ort \mathbf{x} und der Zeit t abhängig. Die diskretisierten Verschiebungen werden durch

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\mathbf{d} \quad (2.47)$$

dargestellt, wobei \mathbf{d} die Knotenverschiebungen sind. Die räumlichen Ränder eines finiten Elementes können sich innerhalb eines Zeitschrittes verändern, wie in Abbildung (2.2) dargestellt. Im folgenden wird eine Vereinfachung angenommen.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_t(t)\mathbf{N}_x(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (2.48)$$

Die zeitlichen Ansatzfunktionen \mathbf{N}_t sind von dem Ort \mathbf{x} unabhängig. Umgekehrt ist die räumliche Diskretisierung mit den Ansatzfunktionen \mathbf{N}_x von der Zeit unabhängig. Damit bleibt die räumliche Diskretisierung über einen Zeitschritt unverändert. Mit diesem Ansatz können die Integrale über das Raum-Zeit Intervall in (2.46) entkoppelt werden in die Integration über das Gebiet Ω und über das Zeitintervall I_n . Wird zunächst die räumliche Diskretisierung durchgeführt, so können die Matrizen der semidiskreten Formulierung (s. Kapitel 2.3.2 Gl. (2.64)) für die räumliche Diskretisierung verwendet werden. Diese vereinfachte Methode heißt deshalb auch DTG-Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen in der Zeit [49]. In speziellen Fällen, abhängig von der Formulierung der partiellen Differentialgleichung und der Ordnung der Ansatzfunktionen, können die Formulierungen mit der DTG-Methode als FD-Verfahren interpretiert werden, [34][74]. Auf den Zusammenhang zwischen den Formulierungen mit finiten Elementen und finiten Differenzen zur Zeitdiskretisierung wird in Kapitel 5.3.3 und im Anhang C eingegangen.

Im Vergleich zu der Formulierung mit FD-Verfahren in Kapitel 2.3.2 ist der Lösungsaufwand bei der Formulierung mit der reinen Finiten-Element-Methode höher. Der numerische Aufwand steigt an, da sich die Anzahl der Unbekannten durch die Diskontinuitäten an den Zeitintervallgrenzen verdoppelt und eine Integration über den Zeitschritt notwendig ist. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, benutzt Hulbert [49] ein Prädiktor-Multikorrekter Verfahren zum Lösen, das auch in dieser Arbeit verwendet wird und im Anhang D beschrieben ist.

2.3.2 Zeitdiskretisierung mit finiten Differenzen

In diesem Kapitel wird die Zeit mit finiten Differenzen (FD) diskretisiert. Die Grundlage der Formulierung ist die räumliche bilineare Formulierung (2.22) bzw. das Prinzip der virtuellen Arbeiten als Sonderfall davon. Zunächst wird der Raum mit FE diskretisiert, wodurch sich die semidiskrete Formulierung ergibt. Anschließend wird die Zeit mit FD diskretisiert. Im folgenden wird die Newmark-Methode als Grundlage verschiedener anderer Zeitintegrationsverfahren vorgestellt. Einen Überblick über die verschiedenen Zeitintegrationsverfahren geben u.a. Hughes [46] und Argyris et al. [3].

Schwache Formulierung und Diskretisierung Die starke Form der Strukturdynamik (2.1–2.5) wird mit der räumlichen bilinearen Formulierung (2.22) bzw. dem Prinzip der virtuellen Arbeit in die schwache Form überführt. Im Gegensatz zu der bilinearen Formulierung in Raum und Zeit (2.21), die in Kapitel 2.3.1 die Grundlage für die FE-Zeitdiskretisierung ist, wird bei der räumlichen bilinearen Formulierung nicht über die Zeit integriert. Die Bewegungsgleichung wird nur im Raum schwach erfüllt. Der Raum der Ansatzfunktionen ist:

$$\mathcal{S}_{FD} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \Gamma_u, \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \times I\} \quad (2.49)$$

Die Testfunktionen \mathcal{V}_{FD} sind unabhängig von der Zeit t und sind aus demselben Raum wie in der Statik (2.86).

$$\mathcal{V}_{FD} = \{\mathbf{w}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)\} \quad (2.50)$$

Die schwache Form der Bewegungsgleichung lautet: Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{FD}$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_{FD}$ gilt:

$$B_{FD}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = L_{FD}(\mathbf{w}) \quad (2.51)$$

mit

$$B_{FD}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \rho \ddot{\mathbf{u}})_\Omega + (\mathbf{w}, d_1 \rho \dot{\mathbf{u}})_\Omega + a(\mathbf{w}, d_2 \dot{\mathbf{u}})_\Omega + a(\mathbf{w}, \mathbf{u})_\Omega \quad (2.52)$$

$$L_{FD}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{P})_\Omega + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_t} \quad (2.53)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \mathbf{u}(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}, \rho \bar{\mathbf{u}}_0)_\Omega \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{u}}(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}, \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0)_\Omega \quad (2.55)$$

Wird die starke Form der Bewegungsgleichung (2.9) eingesetzt, ergibt sich

$$0 = B_{FD}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - L_{FD}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathcal{L}\mathbf{u} - \mathcal{P})_\Omega \quad (2.56)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \mathbf{u}(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}, \rho \bar{\mathbf{u}}_0)_\Omega \quad (2.57)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{u}}(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}, \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0)_\Omega \quad (2.58)$$

Im Vergleich zu der schwachen Form der DTG-Methode (2.44) sind in zeitlicher Richtung keine Sprungterme vorhanden. Da räumliche und zeitliche Diskretisierung unabhängig voneinander sind, kann die Reihenfolge der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung vertauscht werden.

Im folgenden wird zunächst der Raum diskretisiert. Dies führt auf die semidiskrete Formulierung. Es muß ein $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_{FD}^h$ gefunden werden, so daß für alle $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{FD}^h$ gilt

$$B_{FD}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = L_{FD}(\mathbf{w}^h) \quad (2.59)$$

$$(\mathbf{w}^h, \rho \mathbf{u}^h(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}^h, \bar{\mathbf{u}}_0)_\Omega \quad (2.60)$$

$$(\mathbf{w}^h, \rho \dot{\mathbf{u}}^h(t_0))_\Omega = (\mathbf{w}^h, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0)_\Omega \quad (2.61)$$

mit den diskretisierten Ansatz- und Testfunktionen $\mathcal{S}_{FD}^h \subset \mathcal{S}_{FD}$ und $\mathcal{V}_{FD}^h \subset \mathcal{V}_{FD}$. Wird die Integration über jedes finite Element Ω^e ausgeführt, dann kann (2.59) folgendermaßen umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{e=1}^K (\mathbf{w}^h, \rho \ddot{\mathbf{u}}^h + d_1 \rho \dot{\mathbf{u}}^h - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) - \mathbf{P})_{\Omega^e} \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^h, \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]])_{\Gamma^e} + \frac{1}{2} (\mathbf{w}^h, d_2 \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^h)(\mathbf{x})]])_{\Gamma^e} \\ & + (\mathbf{w}^h, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) - \mathbf{t})_{\Gamma_i} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Es treten nur Spannungssprünge in räumlicher Richtung $[[\cdot(\mathbf{x})]]$ auf. Die Verschiebungen werden in räumlicher Richtung mit den räumlichen Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ approximiert. In zeitlicher Richtung werden kontinuierliche Knotenverschiebungen $\mathbf{d}(t)$ angenommen.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d}(t) \quad (2.63)$$

Werden die diskreten Verschiebungen $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$ in die Gleichungen (2.59–2.61) eingesetzt, ergibt sich die Matrixformulierung für $t \in I$.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{d}(0) = \bar{\mathbf{d}}_0 \quad (2.65)$$

$$\dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\bar{\mathbf{d}}}_0 \quad (2.66)$$

\mathbf{M} ist die Massenmatrix und \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix. Die Matrix \mathbf{C} der Rayleigh–Dämpfung setzt sich aus einem massen- und einem steifigkeitsproportionalen Anteil zusammen.

$$\mathbf{C} = d_1 \mathbf{M} + d_2 \mathbf{K} \quad (2.67)$$

Zeitdiskretisierung mit der Newmark–Methode Zeitintegrationsverfahren, die auf der Newmark–Methode [69] basieren, sind weit verbreitet. Die Newmark–Methode gehört zu den Finite–Differenzen–Verfahren. Der gesamte Zeitbereich I wird in N Zeitintervalle I_n unterteilt. Die Beschleunigungen \mathbf{a} in einem Zeitintervall I_n werden durch die diskreten Werte zu den Zeitpunkten t_n und t_{n-1} approximiert

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}(t_{n-1}) + (\mathbf{a}(t_n) - \mathbf{a}(t_{n-1}))\tau \quad (2.68)$$

wobei τ die dimensionslose Zeit $\tau = \frac{(t-t_{n-1})}{\Delta t_n}$ ist. Der Verlauf ist innerhalb eines Zeitintervalls linear. Die Zeitintegration erfolgt vorab, d.h. vor der numerischen Berechnung. Nach der Integration des Beschleunigungsverlaufes ergibt sich der Geschwindigkeits- und der Verschiebungsverlauf auf dem Zeitintervall I_n .

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(t_{n-1}) + \mathbf{a}(t_{n-1})\Delta t_n \tau + \delta(\mathbf{a}(t_n) - \mathbf{a}(t_{n-1}))\Delta t_n \tau^2 \quad (2.69)$$

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(t_{n-1}) + \mathbf{v}(t_{n-1})\Delta t_n \tau + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t_{n-1})\Delta t_n^2 \tau^2 + \beta(\mathbf{a}(t_n) - \mathbf{a}(t_{n-1}))\Delta t_n^2 \tau^3 \quad (2.70)$$

Für die Darstellung des Geschwindigkeits- und Verschiebungsverlaufes werden unterschiedliche Integrationsparameter δ und β verwendet. Über diese Parameter lassen sich die

numerischen Eigenschaften, wie z.B. Stabilität und Genauigkeit des Zeitintegrationsverfahrens, steuern. Auf die Eigenschaften des Newmark-Zeitintegrationsverfahrens wird im Anhang B eingegangen. Die Bedeutung der Newmark-Integrationsparameter β und δ wird im Anhang C erläutert. Die Bewegungsgleichung (2.64) wird zum Zeitpunkt t_n aufgestellt. Aus Gleichung (2.64) ergibt sich

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{K}\mathbf{d}_n = \mathbf{P}(t_n) \quad (2.71)$$

mit den Knotenwerten

$$\ddot{\mathbf{d}}(t_n) = \ddot{\mathbf{d}}_n \quad \dot{\mathbf{d}}(t_n) = \dot{\mathbf{d}}_n \quad \mathbf{d}(t_n) = \mathbf{d}_n \quad (2.72)$$

Die unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{d}_n , Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_n$ und Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}_n$ werden durch die Werte zu den Zeitpunkten t_{n-1} und t_n ausgedrückt. Werden die Ansätze für die Systemgrößen (2.68–2.70) zum Zeitpunkt $\tau = 1$ bzw. $t = t_n$ ausgewertet, so ergibt sich

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n \quad (2.73)$$

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1} + [(1 - \delta)\mathbf{a}_{n-1} + \delta\mathbf{a}_n]\Delta t_n \quad (2.74)$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{v}_{n-1}\Delta t_n + [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_{n-1} + 2\beta\mathbf{a}_n]\frac{\Delta t_n^2}{2} \quad (2.75)$$

Die voll diskretisierte Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{K}\mathbf{d}_n = \mathbf{P}(t_n) \quad (2.76)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \dot{\mathbf{d}}_{n-1} + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + \delta\ddot{\mathbf{d}}_n]\Delta t_n \quad (2.77)$$

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1} + \dot{\mathbf{d}}_{n-1}\Delta t_n + [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + 2\beta\ddot{\mathbf{d}}_n]\frac{\Delta t_n^2}{2} \quad (2.78)$$

Die Eigenschaften des Zeitintegrationsverfahrens werden durch die Newmark-Parameter β und δ bestimmt. Werden β und δ so gewählt, daß die Newmark-Methode unbedingt stabil ist, dann besitzt das Verfahren keine numerische Dämpfung (s. Anhang B). Hilber, Hughes und Taylor [43] haben mit der α -Methode (HHT- α Methode) numerische Dämpfung unter Beibehaltung der Genauigkeit eingeführt. Die eigentlichen Newmark-Zeitdiskretisierungen (2.77) und (2.78) bleiben unverändert und nur der Lösungspunkt für den Dämpfungs- und Steifigkeitsterm in einem Zeitintervall wird über den Parameter α verschoben.

$$t_{n+\alpha} = t_n + \alpha\Delta t \quad (2.79)$$

Die Bewegungsgleichung (2.71) wird zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_n + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_n - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{n-1} + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{d}_n - \alpha\mathbf{K}\mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{P}(t_{n+\alpha}) \quad (2.80)$$

Mit $\alpha = 0$ ergibt sich die Newmark-Methode. Die Eigenschaften der HHT- α Methode sind im Anhang B zusammengefaßt.

Statik Um den Unterschied in der Formulierung und der Diskretisierung der Gleichungen der Dynamik und der Statik zu verdeutlichen, wird im folgenden die Formulierung der Elastostatik mit dem Galerkin-Verfahren dargestellt. Die starke Form der linearen Elastostatik kann aus der Grundgleichung der Dynamik mit $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ und $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ abgeleitet werden. Aus der starken Form der Elastodynamik (2.1-2.5) ergibt sich

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{P} = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (2.81)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2.82)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{t} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (2.83)$$

Die starke Form (2.81-2.83) wird abgekürzt mit

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \tilde{\mathcal{P}} \quad (2.84)$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ ist der lineare Operator der Elastostatik und $\tilde{\mathcal{P}}$ der entsprechende Lastvektor. Der Raum der Ansatzfunktionen $\tilde{\mathcal{S}}$ im Gebiet Ω ist definiert durch

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) | \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \Gamma_u, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)\} \quad (2.85)$$

Der Raum der Testfunktionen $\tilde{\mathcal{V}}$ entspricht dem Raum der Testfunktionen bei der Diskretisierung mit FD in der Dynamik (2.50).

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{w}(\mathbf{x}) | \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)\} \quad (2.86)$$

Die schwache Form der Elastostatik lautet: Finde $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{S}}$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{V}}$ gilt:

$$\tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{w}) \quad (2.87)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{w}, \mathbf{u})_\Omega \quad (2.88)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{P})_\Omega + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_t} \quad (2.89)$$

Wird die starke Form der Elastostatik (2.84) eingesetzt, ergibt sich

$$0 = \tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \tilde{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \tilde{\mathcal{P}})_\Omega \quad (2.90)$$

Die diskrete Formulierung lautet: Finde ein $\mathbf{u}^h \in \tilde{\mathcal{S}}^h$, so daß für alle $\mathbf{w}^h \in \tilde{\mathcal{V}}^h$ gilt

$$\tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{w}^h) \quad (2.91)$$

mit den diskreten Ansatz- und Testfunktionen $\tilde{\mathcal{S}}^h \subset \tilde{\mathcal{S}}$ und $\tilde{\mathcal{V}}^h \subset \tilde{\mathcal{V}}$. Wird die Integration elementweise durchgeführt, dann kann Gleichung (2.91) folgendermaßen umgeformt werden.

$$0 = \sum_{e=1}^K (\mathbf{w}^h, \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) + \mathbf{P})_{\Omega^e} \quad (2.92)$$

$$- \frac{1}{2} (\mathbf{w}^h, \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]])_{\Gamma^e} - (\mathbf{w}^h, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) - \mathbf{t})_{\Gamma_t^e}$$

Die Diskretisierung der Verschiebungen \mathbf{u}^h erfolgt mit den vom Ort \mathbf{x} abhängigen Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (2.93)$$

mit den Knotenverschiebungen \mathbf{d} . Eingesetzt in (2.91) ergibt sich die Matrixformulierung.

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (2.94)$$

Kapitel 3

Adaptivität des Raumes und der Zeit in der Dynamik

3.1 Definition der Fehler

Beobachtete Vorgänge, wie z.B. elektromagnetische Vorgänge, Schwingungen von Strukturen oder Explosionen, können mit Hilfe von analytischen oder numerischen Berechnungen wiedergegeben werden. Um die Vorgänge simulieren zu können, werden in der Regel Näherungsverfahren verwendet, d.h. die Vorgänge werden durch die Lösung von numerischen Berechnungen angenähert. Im folgenden wird gezeigt, welche Schritte dabei durchgeführt werden müssen [35].

Physikalische Beschreibung Das beobachtete Verhalten muß zunächst möglichst genau mit physikalischen Gesetzen beschrieben werden. Die daraus resultierende physikalische Beschreibung des Problems ist meist sehr komplex. Es werden deshalb Vereinfachungen unter der Annahme, daß das vereinfachte physikalische Modell die Effekte des beobachteten Problems noch ausreichend genau beschreiben kann, vorgenommen. In dieser Arbeit wird z.B. das Material vereinfachend als homogen mit linearem elastischen Verhalten angenommen. Das physikalische Modell weicht zusätzlich, z.B. durch Meßungenauigkeiten bei der Bestimmung von Parametern, wie Belastungen oder Materialkennwerten, von dem wirklichen Problem ab.

Mathematische Beschreibung Da das vereinfachte physikalische Modell in der Regel nicht mehr analytisch gelöst werden kann, muß es näherungsweise berechnet werden. Für die numerische Berechnung muß das physikalische Problem mathematisch beschrieben werden. Das vereinfachte physikalische Modell wird dazu diskretisiert. Aufgrund der Diskretisierung z.B. der Geometrie und der Belastung kann das gewählte physikalische Modell nur näherungsweise beschrieben werden. Anschließend wird zum Lösen ein Näherungsverfahren, wie z.B. die Finite-Element-Methode (FE) oder Finite-Differenzen Verfahren (FD), verwendet.

Numerische Berechnung Die mathematische Beschreibung des vereinfachten physikalischen Modells wird numerisch gelöst. Bei der numerischen Berechnung werden

ebenfalls Näherungen vorgenommen, weshalb die Lösung der numerischen Berechnung von der exakten Lösung des gewählten mathematischen Modells abweicht. Nichtlineare Probleme in der Kontinuumsmechanik werden z.B. mittels einer Linearisierung gelöst und führen auf Linearisierungsfehler. Ebenso werden zur Erhöhung der Effizienz der Berechnung von Problemen Techniken, wie z.B. iterative Löser und numerische Integration, verwendet, die ebenfalls numerische Fehler verursachen.

In dieser Arbeit wird das verwendete physikalische Modell als „exakt“ angenommen. Fehler durch die Vereinfachungen des Modells, z.B. lineares elastisches Materialverhalten oder zweidimensionale Problembeschreibung, werden nicht betrachtet. Numerische Fehler durch iterative Lösungsverfahren werden ebenfalls nicht berücksichtigt. In dieser Arbeit wird allein der Fehler infolge der Diskretisierung betrachtet.

Die Art der Fehler und die Methoden zur Bestimmung der Fehler ist abhängig von dem untersuchten mechanischen Problem. Im folgenden werden Probleme der geometrisch und materiell linearen Strukturmechanik ohne Kontakt untersucht.

Räumlicher und zeitlicher Fehler Bei zeitabhängigen Problemen pflanzen sich die Fehler in der Zeit fort und beeinflussen sich nicht nur in räumlicher Richtung sondern auch in zeitlicher Richtung. Ist die exakte Lösung \mathbf{u} des mechanischen Modells bekannt, dann kann der Fehler \mathbf{e} berechnet werden mit

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \quad (3.1)$$

Die diskrete numerische Lösung wird mit \mathbf{u}^h bezeichnet. Der Fehler kann ebenfalls in anderen Größen, z.B. den Spannungen oder Geschwindigkeiten, berechnet werden.

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h \quad (3.2)$$

Im Gegensatz zur statischen Betrachtung beinhaltet der Fehler \mathbf{e} auch den Fehler durch die zeitliche Diskretisierung. Es wird angenommen, daß der Fehler in einen Fehler \mathbf{e}_t infolge der zeitlichen Diskretisierung und einen Fehler \mathbf{e}_s infolge der räumlichen Diskretisierung aufgespalten werden kann.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_s \quad (3.3)$$

Bei der numerischen Berechnung von Fehlern kann diese Aufteilung meist nur näherungsweise vorgenommen werden, was zum einen an der Technik zur Bestimmung der Fehler (s. Kapitel 4) oder an der gewählten Diskretisierung in Raum und Zeit (s. Kapitel 5) liegt.

Globaler und lokaler Fehler Im folgenden wird erläutert, wie die Begriffe globaler und lokaler Fehler in dieser Arbeit verwendet werden. Es kann zwischen dem lokalen und dem globalen Fehler (Tabelle 3.1) unterschieden werden. In der Statik ist diese Unterscheidung eindeutig. Der globale Fehler in der Statik bezeichnet den Fehler des gesamten räumlichen Gebietes. Der lokale Fehler mißt hingegen nur den Fehler in einem begrenzten Gebiet. Bei zeitabhängigen Problemen muß der lokale und der globale Fehler weiter

	globaler Fehler	lokaler Fehler
Räumlicher Fehler (Statik, Dynamik)	Fehler des gesamten Gebietes (berücksichtigt alle Elemente)	Fehler eines bestimmten Gebietes z.B. an einem Punkt
Zeitlicher Fehler (Dynamik)	Fehler des gesamten Zeitraumes (berücksichtigt alle Zeitintervalle)	Fehler eines bestimmten Zeitraumes z.B. eines Zeitintervalles

Tabelle 3.1: Einteilung der Fehler

spezifiziert werden. Der zeitlich lokale Fehler beschränkt sich auf den Fehler in einem bestimmten Zeitraum. Der zeitlich globale Fehler berücksichtigt hingegen den Fehler des gesamten bisherigen Zeitraumes. In der Literatur, z.B. [61][80], wird als zeitlicher Fehler, ohne genauere Spezifizierung, in der Regel der Fehler in einem begrenzten Zeitraum, meist eines Zeitschritt, bezeichnet. Diesem Fehler entspricht in dieser Arbeit der zeitlich lokale Fehler. Methoden, die über den gesamten Zeitraum den Einfluß der Fehler berücksichtigen, sind bisher die Ausnahme. Deshalb wird in der Literatur der Fehler bei diesen Methoden genau beschrieben. Dieser Fehler wird zeitlich globaler Fehler genannt. In der Literatur ist mit dem räumlichen Fehler meistens der räumlich globale Fehler gemeint, d.h. der durchschnittliche Fehler des gesamten räumlichen Gebietes. Soll der Fehler eines begrenzten Gebietes beschrieben werden, so wird dieser als räumlich lokaler Fehler bezeichnet. In dieser Arbeit werden die Fehler entsprechend der üblichen Nomenklatur in der Literatur bezeichnet. Ansonsten wird explizit darauf hingewiesen, ob der räumliche oder zeitliche, lokale oder globale Fehler gemeint ist.

3.2 Methoden der Fehlerbestimmung

In der numerischen Mechanik werden Fehlerberechnungen und damit verbunden adaptive Methoden immer häufiger eingesetzt. Das prinzipielle Vorgehen der Fehlerschätzung wird u.a. von Johnson et al. [55], Eriksson et al. [35] und Rannacher [74] beschrieben. Aufgrund der zunehmenden Anzahl von Arbeiten über die Fehlerbestimmung ist eine Klassifikation der Fehlerschätzer und adaptiven Methoden erforderlich. Im folgenden werden die Kriterien zur Einteilung der Fehlerschätzer beschrieben, damit die in der Arbeit verwendeten Verfahren eingeordnet werden können. Klassifikationen von Fehlerschätzern befinden sich in der Literatur u.a. in Eriksson et al. [35], Verfürth [96], Rannacher [74].

A-priori und a-posteriori Fehlerschätzer Die Fehlerschätzer werden in a-priori und a-posteriori Fehlerschätzer eingeteilt.

- A-priori Fehlerschätzer ermitteln den zu erwartenden Fehler mit Hilfe der Elementgröße und Konstanten vor der numerischen Berechnung. Die Konstanten hängen von den Eigenschaften der unbekanntes exakten Lösung \mathbf{u} ab. A-priori Fehlerschätzer bestimmen das asymptotische Verhalten des Fehlers mit feiner werdender Diskre-

tisierung. Aus den a-priori Kriterien können jedoch keine quantitativ zuverlässige Fehlerindikatoren für die Steuerung eines adaptiven Algorithmus gewonnen werden.

- A-posteriori Fehlerschätzer basieren auf der Näherungslösung \mathbf{u}^h einer Analyse. Es wird keine Information über die exakte Lösung benötigt. Die Grenzen der Abschätzung werden allein mit der numerischen Lösung bestimmt. Da a-posteriori Fehlerschätzer die numerische Lösung verwenden, können aus diesen effiziente Verfeinerungsindikatoren zur Steuerung einer adaptiven Methode gewonnen werden.

Im folgenden werden ausschließlich a-posteriori Fehlerindikatoren verwendet.

Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren Um die Größe des Fehlers beurteilen zu können, muß der Fehler \mathbf{e} in einer Norm gemessen werden, d.h. die Elementfehler werden auf eine skalare Größe abgebildet. Im Anhang A werden bekannte Räume und Normen eingeführt. Ein **Fehlerschätzer** ist durch obere und untere Schranken für die Norm des Fehlers $\|\mathbf{e}\|_k$ gekennzeichnet.

$$C_1 e_{est} \leq \|\mathbf{e}\|_k \leq C_2 e_{est} \quad (3.4)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind unabhängig von der Diskretisierung und von der exakten Lösung \mathbf{u} . Ein Fehlerschätzer ist effizient, wenn der geschätzte Fehler e_{est} mit feiner werdender Diskretisierung mit hoher Konvergenzordnung gegen den exakten Fehler $\|\mathbf{e}\|_k$ strebt.

Können mit Hilfe einer Methode die Fehler nicht mit Schranken nach (3.4) abschätzen werden, aber führt eine Methode trotzdem dazu, daß mit feiner werdender Diskretisierung die approximierten Fehlerwerte gegen die exakten Fehler konvergieren, so werden diese approximierten Werte in der Literatur als **Fehlerindikatoren** bezeichnet. Fehlerindikatoren werden häufig, z.B. auch in kommerziellen Programmen, verwendet, da sie in der Regel einfach zu berechnen sind und auf robuste adaptive Methoden führen. Trotz fehlender Abschätzung können Fehlerindikatoren zur effizienten Steuerung von adaptiven Methoden verwendet werden.

An Hand der Abbildung (3.1) wird der Unterschied zwischen Fehlerindikator und Fehler bzw. Fehlerschätzer erläutert. Der absolute Fehlerwert ist in Abb. (3.1) über die Zeit aufgetragen. Zum Zeitpunkt t_s nimmt der Fehler durch eine Störung sprunghaft zu und bleibt danach konstant. Der Fehler zum Zeitpunkt t_N soll durch die Anpassung der zeitlichen Diskretisierung verkleinert werden. Der Fehler zum Zeitpunkt t_N rührt von einem Fehlerzuwachs infolge einer Störung zum Zeitpunkt t_s her. Ein Fehlerindikator zeigt auf die Stelle des Fehlerzuwachses und damit dorthin, wo die Diskretisierung angepaßt werden muß. Ein Fehlerindikator hat an der Stelle der Störung t_s den größten Wert. Durch die Anpassung der Diskretisierung an der Stelle der Störung kann der Fehler zum Zeitpunkt t_N verkleinert werden. Hingegen mißt ein Fehlerschätzer bzw. der Fehler selbst den abgeschätzten Fehlerwert bzw. die absolute Fehlergröße. Damit kann jedoch keine

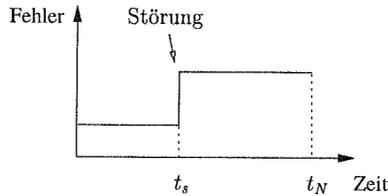


Abbildung 3.1: Modellbeispiel für den Fehlerverlauf in der Zeit

adaptive Methode gesteuert werden, da der absolute Fehlerwert nicht anzeigt, wo die Diskretisierung angepaßt werden muß. Ein Fehlerschätzer zeigt in dem ganzen Bereich nach der Störung einen hohen Wert an. Es ist also zwischen dem Fehlerindikator zur Steuerung der adaptiven Methode und dem Fehlerschätzer zur Abschätzung des Fehlers an einer Stelle zu unterscheiden. Jedoch können aus Fehlerschätzern Fehlerindikatoren zur Steuerung einer adaptiven Methode berechnet werden.

Einteilung der a-posteriori Fehlerschätzer Im folgenden werden anhand der Methoden und Techniken der Fehlerbestimmung die verschiedenen a-posteriori Fehlerschätzer eingeordnet. Eine Klassifikation der Fehlerschätzer haben u.a. Ainsworth et al. [2] und Verfürth [96] vorgenommen. Da es über a-posteriori Fehlerschätzer in der Strukturdynamik bisher nur wenige Arbeiten gibt, wird die Einteilung anhand der bekannten Fehlerschätzer in der Statik vorgenommen. Anschließend werden die Besonderheiten der Fehlerermittlung von zeitabhängigen Problemen in der Strukturdynamik diskutiert. Im folgenden wird kurz auf den Zusammenhang der Methoden und der Techniken der Fehlerermittlung eingegangen. Die Fehlerermittlung wird in den entsprechenden Kapiteln 4 und 5 beschrieben. Die Fehler bzw. die Methoden zur Fehlerabschätzung können folgendermaßen klassifiziert werden:

- Implizite und explizite Methoden
- Fehlerbestimmung mit residualen oder glättungsbasierten Techniken bzw. Interpolationsabschätzungen
- Lokaler und globaler Fehler

Bei **impliziten Methoden** wird der Fehler durch das Lösen von einem oder mehreren Gleichungssystemen bestimmt. Bekannt sind die impliziten residualen Fehlerschätzer. Sie lösen diskrete Teilprobleme auf einem oder mehreren Elementen („Patches“), die mit den Residuen belastet sind. Die Residuen werden bestimmt, indem die Näherungslösung in die starke Form der Problembeschreibung eingesetzt wird. Mit der Lösung aller Teilprobleme auf den einzelnen „Patches“ wird der Fehler der gesamten Struktur abgeschätzt. Bekannte implizite residuale Fehlerschätzer in der Statik sind lokale Dirichlet oder Neumann Schätzer [13][95]. Implizite residuale Fehlerschätzer führen auf genaue Abschätzungen

der Fehler, jedoch steigt der numerische Aufwand durch das Lösen der Teilprobleme. Implizite Fehlerschätzer werden daher in dieser Arbeit nicht verwendet.

Bei **expliziten Methoden** wird die numerische Lösung direkt, d.h. ohne zusätzliches Gleichungslösen, verwendet, um den Fehler zu bestimmen. Der Fehler kann mit verschiedenen Techniken, z.B. über Residuenbestimmung, durch Glättung der numerischen Lösung oder mit Interpolationstechniken, approximiert werden. Bei expliziten residualen Fehlerschätzern wird die numerische Lösung in die starke Form der Differentialgleichung eingesetzt, um die Residuen zu erhalten. Mit den ermittelten Residuen wird der Fehler abgeschätzt. Bei expliziten residualen Fehlerschätzern ist kein Lösen von zusätzlichen Problemen notwendig, weshalb sich der numerische Aufwand im Vergleich zu den impliziten Verfahren reduziert. Dafür gehen in die Abschätzung globale Stabilitätskonstanten sowie lokale Interpolationskonstanten, die bestimmt werden müssen, mit ein. Der bekannte Fehlerschätzer von Babuška et al. [6] in der Statik ist ein expliziter residualer Fehlerschätzer.

Bei **glättungsbasierten Methoden** wird eine verbesserte Lösung durch die Glättung der numerischen Lösung ermittelt. Aus der Differenz zwischen der verbesserten und der diskreten Lösung wird der Fehler berechnet. Die glättungsbasierten Methoden führen in der Regel auf Fehlerindikatoren. Die „Superconvergent Patch Recovery“ (SPR) von Zienkiewicz–Zhu [113] in der Statik ist eine bekannte glättungsbasierte Methode zur Fehlerapproximation. In der linearen Elastostatik haben Rank et al. [73] für lineare finite Elementansätze auf strukturierten Gittern mit rechtwinkligen Elementen die Äquivalenz des residualen Fehlerschätzer mit dem glättungsbasierten Fehlerschätzer basierend auf der SPR-Technik gezeigt. Die SPR-Technik zur Fehlerapproximation ist weit verbreitet, da sie einfach anzuwenden ist und auf gute Fehlerindikatoren führt.

Bei der Bestimmung des Fehlers mit **Interpolationsmethoden** wird der Diskretisierungsfehler der Lösung, bzw. der Ableitungen der Lösung, in einer Norm mit Interpolationsabschätzungen nach oben begrenzt, u.a. Eriksson et al. [34]. In die Abschätzung geht die Interpolationskonstante, die Elementgröße und die kontinuierlichen Ableitungen höherer Ordnung der exakten Lösung mit ein. Die Ableitungen höherer Ordnung, die nicht bekannt sind, können durch den Sprung des Differenzenquotientens der diskreten Lösung approximiert werden, u.a. [5][91]. In Kapitel 4.4 wird gezeigt, wie die Interpolationsabschätzung verwendet werden kann. Zhu et al. [106] zeigen, daß die Fehlerabschätzung nicht sehr genau ist. Sie weisen jedoch darauf hin, daß mit dieser Methode gute Verfeinerungsindikatoren ermittelt werden können.

Der **globale Fehler** ist ein Maß für den mittleren Fehler des gesamten Berechnungsgebietes. Bei den bekannten Fehlerschätzern in der Statik von Babuška und Rheinboldt [6] und Zienkiewicz–Zhu [113] wird der globale Fehler in der Energienorm bestimmt.

Der **lokale Fehler** wird in einem bestimmten Gebiet bzw. in einer bestimmten physikalischen Größe gemessen. Dazu wird ein zusätzliches duales bzw. adjungiertes Problem, das den Einfluß der lokalen Fehlergröße im Gebiet darstellt, eingeführt. Der Zusammenhang zwischen globaler und lokaler Fehlerschätzung wurde u.a. von Johnson et al. [55], Babuška et al. [7] und Becker et al. [19] untersucht.

Während die Fehlerschätzung für die elliptischen Probleme der Statik schon weit entwickelt ist, gibt es über a-posteriori Fehlerschätzer in der dynamischen Strukturanalyse bisher nur sehr wenige Arbeiten. Lokale Fehlerschätzer für die Finite-Element-Methode wurden u.a. von Eriksson et al. [35] und Süli [87] für hyperbolische Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit hergeleitet. Lokale Fehlerschätzer für die Probleme der Strukturodynamik gibt es noch nicht. Globale Fehlerindikatoren in der Energienorm wurden für die semidiskreten Verfahren der Strukturodynamik u.a. von Li [61] und Riccius [80] entwickelt. Erst in den letzten Jahren nahm die Anzahl der Arbeiten über Fehlerschätzer für hyperbolische Gleichungen zu. Im folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Methode der Fehlerbestimmung und dem Zeitintegrationsverfahren hergestellt. Die einzelnen Methoden werden in dem Kapitel 4 und Kapitel 5 dieser Arbeit genau beschrieben. Der Fehler bei zeitabhängigen Problemen kann folgendermaßen eingeteilt werden

- Fehler bei indirekten Zeitintegrationsmethoden
- Fehler bei direkten Zeitintegrationsmethoden
 - Fehler zu einem Zeitpunkt ohne Einfluß der Fehler in der Zeit
 - Fehler zu einem Zeitpunkt mit Einfluß der Fehler in der Zeit

Zeitabhängige Probleme können mit der direkten oder indirekten Zeitintegrationsmethode gelöst werden. Bei der **indirekten Methode** wird die Bewegungsgleichung mit Hilfe der zueinander orthogonalen Eigenformen der Struktur entkoppelt. Die Überlagerung der Verläufe der einzelnen Eigenformen ergibt den Gesamtverschiebungsverlauf. Die Genauigkeit der Lösung hängt von der genauen Ermittlung der einzelnen Eigenformen und Eigenwerte und nicht von der Zeitintegration ab. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, werden meist nicht alle Eigenformen und Eigenwerte bestimmt und berücksichtigt. Es gibt nur wenige Arbeiten zu adaptiven Verfahren bei indirekten Zeitintegrationsverfahren z.B. [38], da nach der Anpassung der Diskretisierung wieder die Eigenwerte und Eigenformen bestimmt werden müssen. Dadurch erhöht sich der numerische Aufwand deutlich. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb die direkte Zeitintegration verwendet.

Bei der **direkten Zeitintegration** mit Einschrittverfahren wird die Bewegungsgleichung an einzelnen Zeitpunkten gelöst. Dazu muß die Zeit und der Raum diskretisiert werden. Weit verbreitet sind die **semidiskreten Verfahren**, die in Kapitel 2.3.2 eingeführt wurden. Bei der Semidiskretisierung wird zunächst der Raum mit finiten Elementen diskretisiert. Dies führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit, die semidiskrete Gleichung. In zeitlicher Richtung werden finite Differenzen zur Diskretisierung verwendet, die nur in Ausnahmefällen einer Finiten-Element-Methode entsprechen. Infolge der

unterschiedlichen Diskretisierungsformen wird der zeitliche Fehler getrennt von dem räumlichen Fehler mit verschiedenen Methoden ermittelt. Der räumliche und zeitliche Fehler wird ohne Berücksichtigung der Fehler aus den vorherigen Zeitschritten bestimmt, d.h. die Fehler sind lokal in der Zeit. Wegen der Einfachheit sind die Methoden zur Kontrolle der Zeitschrittgröße weit verbreitet, [29][71][20][90]. Die verschiedenen Methoden werden in Kapitel 5.2 beschrieben.

Arbeiten zur räumlichen Fehlerkontrolle sind seltener, da die räumliche Adaptivität algorithmisch schwieriger umzusetzen ist und numerisch aufwendiger ist, u.a. [84][61][80]. Zur Bestimmung des räumlichen Fehlers werden glättungsbasierte Techniken, die in Kapitel 5.3 beschrieben werden, verwendet. Mit Hilfe dieser Methoden wird der räumlich globale Fehler, d.h. der mittlere Fehler über das Gebiet, bestimmt. Im Rahmen dieser Arbeit wird zusätzlich in Kapitel 5.3.3 der räumlich lokale Fehler eingeführt, indem zu einem Zeitpunkt duale Probleme ausgewertet werden.

Bei der **DTG-Methode** in Kapitel 2.3.1 wird die Zeit mit finiten Elementen diskretisiert, wodurch sich neue Möglichkeiten der Ermittlung des räumlichen und zeitlichen Fehlers ergeben. Der zeitlich lokale Fehler kann bei der DTG-Methode durch die zeitlichen Sprungterme an den Zeitintervallgrenzen bestimmt werden [61]. In räumlicher Richtung wird, wie bei der semidiskreten Formulierung, der räumlich globale Fehler mit glättungsbasierten Methoden berechnet.

Die Formulierung mit finiten Elementen in Raum und Zeit ermöglicht es, duale Probleme zu verwenden und somit den zeitlich globalen Fehler, d.h. den Fehler des gesamten Zeitraumes, sowie den räumlich lokalen Fehler, d.h. den Fehler in einem bestimmten Gebiet, zu berechnen. Durch das duale Problem kann der Einfluß einer lokalen Fehlergröße in Raum und Zeit dargestellt werden. In Kapitel 4 wird die Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen eingeführt. Die Methoden unterscheiden sich in der Behandlung des dualen Problems, wie in Kapitel 4.4 gezeigt wird. Das duale Problem kann a-priori durch eine Stabilitätskonstante ersetzt werden. Die Stabilitätskonstante schätzt den Einfluß, d.h. die Lösung, des dualen Problems ab. In der Strukturdynamik kann die Stabilitätskonstante nur in speziellen Fällen a-priori bestimmt werden, da die Stabilitätskonstante im allgemeinen nicht nach oben beschränkt ist [35]. D.h. die Fehler in der Strukturdynamik können mit der Zeit immer stärker zunehmen. In der Statik hingegen kann die Stabilitätskonstante nach oben mit eins abgeschätzt werden. Dadurch können globale residuale Fehlerschätzer über duale Probleme hergeleitet werden. Selbst wenn eine Stabilitätskonstante gefunden wird, muß dies nicht auf genaue Fehlerindikatoren führen, da die Stabilitätskonstante zu hoch abgeschätzt werden kann. Die Verteilung des Einflusses der lokalen Fehlergröße kann durch die einzelne Stabilitätskonstante nicht wiedergegeben werden. Effizienter ist es, das duale Problem numerisch zu lösen, und somit den räumlichen und zeitlichen Einfluß des lokalen Fehlers zu erfassen [74].

3.3 Adaptive Strategien

Zu jeder adaptiven Methode gehört neben dem Kontrollkriterium, das in dieser Arbeit die Größe des Diskretisierungsfehlers ist, auch ein adaptive Strategie. Mit der adaptiven Strategie wird die Technik zur Anpassung der Diskretisierung, um den Fehler zu reduzieren, festlegt. Es wird zwischen folgenden Methoden unterschieden:

- **m-Adaptivität:** Anpassung des mechanischen Modells
Bei der Modelladaptivität wird das mechanische Modell an die lokalen mechanischen Anforderungen angepaßt [85]. Es können beispielsweise dreidimensionale Elemente in die zweidimensionale Formulierung von Flächentragwerken eingeführt werden, um wichtige lokale dreidimensionale Effekte abzubilden. Diese Art der Adaptivität wird im folgenden nicht betrachtet, da damit der Modellierungsfehler und nicht, wie angestrebt, der Diskretisierungsfehler reduziert wird.
- **r-Adaptivität:** Verschiebung der Knoten in eine optimale Lage
Der Diskretisierungsfehler wird durch das Verschieben der Knoten, ohne die Anzahl der Knoten zu erhöhen, verkleinert. Da die Verbesserungsmöglichkeiten der Diskretisierung sehr beschränkt sind, wird die Methode nur selten angewendet. In dieser Arbeit wird die r-Adaptivität nicht benutzt.
- **h-Adaptivität:** Anpassung der Elementgröße
Durch die Anpassung der Elementgröße an die Fehlerverteilung wird der Fehler verringert. Dabei wird zwischen Methoden, die strukturierte Netze und solche die unstrukturierte Netze verwenden, unterschieden. Auf strukturierten Netzen werden Elementunterteilungsstrategien bzw. Vergrößerungsstrategien verwendet. Es muß für jedes Element entschieden werden, ob es angepaßt werden soll. Für die Auswahl der Elemente gibt es verschiedene Strategien. Bei der Prozentualfehlersteuerung wird ein bestimmter Anteil an Elementen mit hohem bzw. niedrigem Elementfehler verfeinert bzw. vergrößert. Bei der Methode des Fehlerausgleiches wird iterativ die Anzahl der Elemente so bestimmt, daß die Elementfehler gleichmäßig verteilt sind. Die Methoden sind in der Literatur, z.B. Rannacher [74] und Riccius [80], beschrieben. Strukturierte Netze haben den Vorteil, daß die Datenübertragung einfacher und genauer als bei unstrukturierten Netzen ist. Jedoch kann das Netz nicht in einem Schritt an die Fehlerverteilung angepaßt werden. Außerdem ist das angepaßte Netz immer von der Wahl der ersten Diskretisierung abhängig. In dieser Arbeit wird die h-Adaptivität mit unstrukturierten Netzen verwendet. Bei unstrukturierten Netzen wird eine Elementdichtefunktion, die aus der Fehlerverteilung berechnet wird, verwendet. Aufgrund der Elementdichtefunktion wird dann das neue Netz generiert (s. Kapitel 5.3). Dadurch kann die Diskretisierung in wenigen Schritten an die Fehlerverteilung angepaßt werden. Da jedoch kein hierarchischer Netzaufbau vorhanden ist, ist die Übertragung von Daten auf das neue Netz numerisch aufwendig und mit Fehlern behaftet, wie in Kapitel 6 gezeigt wird.

- **p-Adaptivität:** Anpassung der Ansatzordnung

Der Diskretisierungsfehler wird durch die lokale Erhöhung der Ansatzordnung der finiten Elemente reduziert. Somit ist keine Neuvernetzung notwendig. Die p-Adaptivität ist sehr effizient bei glatten Lösungen.

Mit einer Kombination der Methoden können die Vorteile der einzelnen Techniken zusammen ausgenutzt werden. Vor allem die h-Adaptivität in Kombination mit der p-Adaptivität ist bei lokal hohen Gradienten sehr effizient [45]. In dieser Arbeit wird jedoch allein die h-Adaptivität verwendet.

Kapitel 4

Fehlerindikatoren basierend auf der DTG–Methode

Die Fehler bei einer FE–Berechnung können in verschiedenen Größen gemessen werden. Bei den meisten Methoden wird der Fehler in der Energienorm bestimmt. Hierzu zählen z.B. der residuenbasierte Fehlerschätzer von Babuška et al. [5] und der glättungsbasierte Fehlerindikator von Zienkiewicz–Zhu [113] in der Statik, die den Fehler in der Energienorm ermitteln. Bisher werden in der Strukturmechanik ausschließlich glättungsbasierte Fehlerindikatoren, die den Fehler in der Energienorm messen, angewendet, u.a. Li [61], Riccius [80], Wiberg et al. [101]. Mit Hilfe dieser Methoden wird zum einen der mittlere räumliche Diskretisierungsfehler der Struktur zu einem Zeitpunkt approximiert und zum anderen wird der zeitliche Fehler eines Zeitschrittes ermittelt, u.a. Li et al. [62], Riccius [80] und Zienkiewicz et al. [112]. Die Fortpflanzung des Fehlers in der Zeit wird dabei nicht berücksichtigt.

Bei einer FE–Analyse sind häufig die Ergebnisse in einem bestimmten Bereich, z.B. Auflagerbereich, Lasteinleitung, bzw. in einer bestimmten Größe, z.B. Verschiebungen, Spannungen, von besonderem Interesse. In diesen Fällen ist es sinnvoll, die lokalen Fehler in den Bereichen zu kontrollieren. Johnson et al. [55] haben ein allgemeines Konzept der Fehlerkontrolle eingeführt, das es ermöglicht, den Fehler in verschiedenen Fehlergrößen und in verschiedenen Bereichen zu kontrollieren. Die Methoden basieren auf der Einführung eines dualen Problems, das den Einfluß der lokalen Fehlergröße im Berechnungsgebiet darstellen kann. Um das duale Problem herleiten zu können, muß das ursprüngliche Problem in der schwachen Form vorliegen. Zusätzlich muß für die Fehlerermittlung die Galerkin Orthogonalität erfüllt sein. Deshalb können lokale Fehler nur bei Problemen, die mit Hilfe der finiten Element Methode gelöst werden, berechnet werden. Das Konzept der a–posteriori Fehlerschätzung mit Hilfe von dualen Problemen wurde in den letzten Jahren auf eine Vielzahl von verschiedenen Problemen übertragen und angewandt. Auf die Elastostatik [19][26][25], Elastoplastizität [89][28], Navier–Stokes–Gleichungen [17], Wärmeleitung [36], Wellengleichung [11] und Optimierungsprobleme [18][82], um nur einige Beispiele aufzuführen.

In dieser Arbeit wird das Konzept auf die Probleme in der Strukturodynamik erweitert. Arbeiten zu lokalen a-posteriori Fehlerschätzern bei hyperbolischen Problemen gibt es bisher wenige. Jedoch nimmt die Anzahl der Arbeiten seit einigen Jahren zu [87]. Die Schwierigkeit bei hyperbolischen Problemen besteht darin, daß der Fehler unbegrenzt anwachsen kann, d.h. daß die dualen Probleme nicht immer stabil sind. Das duale Problem kann im allgemeinen nicht, wie in der Elastostatik, durch eine Stabilitätskonstante abgeschätzt und ersetzt werden. Für hyperbolische Problemen, z.B. Konvektion-Diffusionsgleichung, Wellengleichung, werden Stabilitätskonstanten u.a. von Eriksson et al. [35] und Süli [87] für Gleichungen und Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit ermittelt und angewendet. Eine andere Möglichkeit ist, das duale Problem numerisch zu lösen. Damit ist die Fehlerbestimmung unabhängig von der Beschränktheit der Stabilitätskonstante. Banerth et al. [11] ermitteln den lokalen Fehler für die Wellengleichung als Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit durch die numerische Auswertung des dualen Problems. Arbeiten zu der Fehlerbestimmung in der Strukturodynamik mit der Bewegungsgleichung als Gleichung zweiter Ordnung in der Zeit gibt es noch nicht.

Lokale Fehlerindikatoren basieren auf der Verwendung einer reinen Finiten-Elemente-Formulierung. Im folgenden soll der lokale Fehler in der Strukturodynamik approximiert werden, weshalb eine reine Finite-Elemente-Formulierung verwendet werden muß. Es wird die reine FE-Formulierung mit DTG-Ansätzen eingeführt. Die gewählte reine FE-Formulierung soll möglichst ähnlich zu der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Methode sein, da die lokalen Fehlerindikatoren in Kapitel 5.3.3 auf die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration übertragen werden. Die in Kapitel 5 verwendete Newmark-Methode beruht auf einer Einfeldformulierung, weshalb auch im folgenden eine Einfeldformulierung benutzt wird. Es wird die DTG-Methode nach Hulbert et al. [50] (s. Kapitel 2.3.1) zur Lösung der Bewegungsgleichung zweiter Ordnung in der Zeit verwendet. Die lokalen Fehlerschätzer für die Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit können somit nicht verwendet werden. Deshalb wird im folgenden das Konzept der lokalen Fehlerindikatoren auf die Einfeldformulierung der Strukturodynamik unter der Berücksichtigung der Terme der Rayleigh-Dämpfung übertragen. Die Grundlagen und Eigenschaften des in diesem Kapitel entwickelten allgemeinen Fehlerindikators sind im folgenden stichwortartig zusammengefaßt:

Zeitdiskretisierung: Diskontinuierliche finite Elemente (DTG)

Raumdiskretisierung: Finite Elemente (FE)

Fehlermaß: Variabel

Fehlerindikatoren: Gemeinsamer räumlicher und zeitlicher Fehler

Eigenschaften des Fehlers: Variabel, d.h. globaler und lokaler räumlicher Fehler; globaler und lokaler zeitlicher Fehler

In diesem Kapitel wird das Vorgehen der Entwicklung eines lokalen Fehlerindikators in der Strukturodynamik erläutert. Zum besseren Verständnis und zum Vergleich wird par-

allel dazu der entsprechende lokale Indikator der Elastostatik eingeführt. Ausgangspunkt ist das ursprüngliche Problem, das in Kapitel 4.1 beschrieben wird. In Kapitel 4.2 wird das adjungierte Problem, das auch duales Problem genannt wird, hergeleitet. Mit Hilfe des adjungierten Problems wird in Kapitel 4.3 der Fehler in einer bestimmten physikalischen Größe bestimmt. Es wird gezeigt, wie die Belastung des dualen Problems gewählt werden muß, um den Fehler in den verschiedenen Größen zu bestimmen. Der Fehlerindikator wird in Kapitel 4.4 hergeleitet. Da nur Arbeiten über lokale Fehlerindikatoren für Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit bekannt sind, wird im Anhang E der Zusammenhang zwischen den dualen Problemen bei der Verwendung von Einfeld- und der Zweifeldformulierungen hergestellt.

4.1 Ursprüngliches Problem

Der Fehler des ursprünglichen Problems soll berechnet werden. Zur Berechnung wird von der schwachen Formulierung des ursprünglichen Problems ausgegangen und der Fehler \mathbf{e} eingeführt. Die Diskretisierung der schwachen Formulierung (2.41) erfolgt mit der DTG-Methode, wie in Kapitel 2.3.1 gezeigt wurde.

Es wird im folgenden von der diskreten schwachen Form (2.45) der Bewegungsgleichung ausgegangen. Die diskreten Verschiebungen $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_{TG}^h$ müssen die folgende schwache Formulierung erfüllen.

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = L_{TG}(\mathbf{w}^h) \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h \quad (4.1)$$

Auch die exakte Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{TG}$ erfüllt die diskretisierte Bewegungsgleichung.

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}) = L_{TG}(\mathbf{w}^h) \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h \quad (4.2)$$

Die Differenz der beiden Gleichungen (4.1) und (4.2) führt auf die Galerkin Orthogonalität.

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h \quad (4.3)$$

Der Fehler $\mathbf{e} \in \mathcal{S}_{TG}$ ist definiert durch $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$. Der Fehler erfüllt schwach

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h \quad (4.4)$$

Dies bedeutet, daß die Näherungslösung der Verschiebungen \mathbf{u}^h bezüglich der Bilinearform $B_{TG}(\cdot, \cdot)$ die bestmögliche Approximation der exakten Lösung \mathbf{u} im Raum der Ansatzfunktionen \mathcal{S}_{TG}^h ist. Folglich muß die Differenz $\mathbf{u} - \mathbf{u}^h$, d.h. der Fehler \mathbf{e} , orthogonal zu dem Raum der diskreten Testfunktionen $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{TG}^h$ sein. Mit Hilfe der Galerkin Orthogonalität wird das ursprüngliche Problem durch den Fehler \mathbf{e} und die Residuen ausgedrückt. Dazu wird von der Gleichung (4.4) ausgegangen.

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = L_{TG}(\mathbf{w}^h) - B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = 0 \quad (4.5)$$

Das Gebiet Q wird in die Summe über alle Zeitschritte I_n und alle Elemente Ω_n^e zerlegt. Wird die partielle Integration und der Gauss'sche Integralsatz auf Gleichung (4.5) angewendet, führt dies auf die Gleichung (2.46), in die die Residuen eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^K [(\dot{\mathbf{w}}^h, \mathbf{R})_{Q_n^e} + (\dot{\mathbf{w}}^h, \mathbf{J}_s)_{\gamma^*}] \\
& + \sum_{n=2}^N \sum_{e=1}^K [(\dot{\mathbf{w}}^h(t_{n-1}^+), \mathbf{J}_{t_v})_{\Omega_n^e} + (\nabla \mathbf{w}^h(t_{n-1}^+), \mathbf{J}_{t_u})_{\Omega_n^e}] \\
& + (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{u}}^h(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{w}^h(t_0^+), \mathbf{u}^h(t_0^+))_{\Omega} \\
& - (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{u}}_0^h)_{\Omega} - a(\mathbf{w}^h(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0^h)_{\Omega}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

\mathbf{R} sind die inneren Elementresiduen und \mathbf{J} die Sprungterme. Die Anfangsbedingungen werden mit $\bar{\mathbf{u}}_0^h$ und $\dot{\mathbf{u}}_0^h$ bezeichnet, da sie die Abbildung der Anfangsbedingungen auf die Diskretisierung darstellen. Wird zum Beispiel von einem Anfangszustand infolge einer statischen Belastung ausgegangen, so liegen die Anfangsverschiebungen und -geschwindigkeiten, die zuerst numerisch berechnet werden müssen, nur in der diskretisierten Form vor. Die inneren Residuen \mathbf{R} und die Sprungterme \mathbf{J} sind definiert durch

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \rho \ddot{\mathbf{u}}^h - d_1 \rho \dot{\mathbf{u}}^h + d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^h) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) \quad \text{auf } Q_n^e \tag{4.7}$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]] - \frac{1}{2} d_2 \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^h)(\mathbf{x})]] & \gamma^* \subset \gamma_n^e \\ \mathbf{t} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) & \gamma^* \subset \gamma_{t_n} \\ \mathbf{0} & \gamma^* \subset \gamma_{u_n} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{J}_{t_v} = -\rho [[\dot{\mathbf{u}}^h(t_{n-1})]] \quad \text{auf } \Omega_n^e \tag{4.9}$$

$$\mathbf{J}_{t_u} = -[[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h)(t_{n-1})]] \quad \text{auf } \Omega_n^e \tag{4.10}$$

Die inneren Residuen \mathbf{R} entstehen auf dem Raum-Zeit Element Q_n^e . Die Sprungterme \mathbf{J} werden in die zeitlichen \mathbf{J}_t und die räumlichen \mathbf{J}_s Sprünge unterteilt. An den räumlichen Elementgrenzen γ^* tritt der räumliche Sprungterm \mathbf{J}_s , d.h. der Sprung in den Spannungen bzw. der Sprung zu den vorgegebenen Randbedingungen (4.8), auf. Die zeitlichen Sprünge \mathbf{J}_t ergeben sich über das Gebiet Ω an den Zeitintervallgrenzen t_n . Der Sprungterm in den Geschwindigkeiten wird mit \mathbf{J}_{t_v} abgekürzt und der Sprung in den Spannungen mit \mathbf{J}_{t_u} .

Im folgenden werden die Gleichungen in einer verkürzten Schreibweise dargestellt. Anhand dieser Schreibweise wird später die Methode der Fehlerermittlung mit Hilfe von dualen Problemen anschaulich erklärt. Die Kurzform ersetzt jedoch nicht vollständig die ausführlichen Gleichungen. Die schwache Formulierung (4.6) wird abgekürzt mit

$$B_{TG}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = (\dot{\mathbf{w}}^h, \mathcal{L}\mathbf{e})_Q = (\dot{\mathbf{w}}^h, \bar{\mathbf{R}})_Q \tag{4.11}$$

Die inneren Residuen \mathbf{R} und die Sprungterme \mathbf{J} werden zu $\bar{\mathbf{R}}$ zusammengefaßt.

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_s \tag{4.12}$$

Aus Gleichung (4.11) wird die starke Form der Fehlerdarstellung gewonnen.

$$\mathcal{L}e = \bar{\mathbf{R}} \quad (4.13)$$

Die Fehlergleichung sagt aus, daß die Fehlerverteilung e der Strukturantwort infolge der Belastung durch die Residuen $\bar{\mathbf{R}}$ entspricht.

Die dynamischen Gleichungen werden im folgenden mit den statischen Gleichungen verglichen, um die Unterschiede sowie die Gemeinsamkeiten von Statik und Dynamik darzustellen. Dazu wird im folgenden das ursprüngliche Problem der linearen Statik eingeführt.

Statik Die statischen Grundgleichungen können über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder aus den dynamischen Gleichungen durch die Vernachlässigung der zeitabhängigen Terme gewonnen werden. Die Galerkin Orthogonalität wird mit Hilfe der schwachen Formulierung (2.91) hergeleitet, indem die exakte $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{S}}$ und die diskrete $\mathbf{u}^h \in \tilde{\mathcal{S}}^h$ Lösung mit $\tilde{\mathcal{S}}^h \subset \tilde{\mathcal{S}}$ eingesetzt und die Differenz gebildet wird

$$\tilde{B}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = \tilde{L}(\mathbf{w}^h) - \tilde{B}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \tilde{\mathcal{V}}^h \quad (4.14)$$

mit $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$. \tilde{L} (2.89) und \tilde{B} (2.88) werden in die Gleichung (4.14) eingesetzt. Das Integral über das Gebiet Ω wird in die Summe der Integrale über alle Elemente Ω^e aufgelöst. Nach der partiellen Integration und der Anwendung des Gauss' schen Integralsatzes erhält man die Gleichung (2.92), in die die Residuen $\tilde{\mathbf{R}}$ und die Sprungterme $\tilde{\mathbf{J}}_s$ eingesetzt werden. Somit ergibt sich

$$0 = \sum_{e=1}^K [(\mathbf{w}^h, \tilde{\mathbf{R}})_{\Omega^e} + (\mathbf{w}^h, \tilde{\mathbf{J}}_s)_{\Gamma^*}] \quad (4.15)$$

Die Elementinnenresiduen $\tilde{\mathbf{R}}$ und die Sprungterme $\tilde{\mathbf{J}}_s$ sind definiert durch

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) \quad \text{auf } \Omega^e \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_s = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]] & \Gamma^* \subset \Gamma^e \\ \mathbf{t} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}^h) & \Gamma^* \subset \Gamma_t \\ 0 & \Gamma^* \subset \Gamma_u \end{cases} \quad (4.17)$$

Die inneren Residuen $\tilde{\mathbf{R}}$ (4.16) und die Sprungterme $\tilde{\mathbf{J}}_s$ (4.17) können direkt durch die Vernachlässigung der zeitabhängigen Terme von den Residuen \mathbf{R} (4.7) und den Sprungtermen \mathbf{J} (4.8) in der Dynamik hergeleitet werden. Aus den Gleichungen (4.14) und (4.15) folgt die schwache Form der Fehlerdarstellung.

$$\tilde{B}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = (\mathbf{w}^h, \tilde{L}e) = (\mathbf{w}^h, \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}) \quad (4.18)$$

mit

$$\tilde{\tilde{\mathbf{R}}} = \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{J}}_s \quad (4.19)$$

Die abgekürzte starke Form der Fehlergleichung lautet

$$\tilde{\mathcal{L}}e = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}} \quad (4.20)$$

4.2 Duales Problem

Zur Ermittlung des Fehlers in einer bestimmten physikalischen Größe und in einem bestimmten Gebiet wird das adjungierte bzw. duale Problem benötigt. Zunächst wird das duale Problem hergeleitet und dessen Funktion erklärt. Ausgegangen wird von dem kontinuierlichen initialen Problem. Das initiale Problem wird nur zur Herleitung des dualen Problems verwendet. Zur Unterscheidung wird das Problem, dessen Fehler berechnet werden soll, als ursprüngliches Problem bezeichnet (s. Kapitel 4.1). Die Bilinearoperatoren $B_{TG}(\cdot, \cdot)$ des ursprünglichen und des initialen Problems sind identisch und nur die Belastungen sind verschieden. Das initiale Problem lautet: gesucht sind die Verschiebungen $\mathbf{z} \in \mathcal{V}_{TG}$, so daß

$$B_{TG}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = D_{TG}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{TG} \quad (4.21)$$

Die Rolle von Test- und Ansatzfunktionen ist vertauscht. Die schwache Formulierung (2.41) des ursprünglichen Problems wird mit $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_{TG}$ getestet, während in Gleichung (4.21) mit Funktionen aus dem Raum der Ansatzfunktionen $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_{TG}$ getestet wird. Die rechte Seite $D_{TG}(\mathbf{v})$ stellt das Belastungsfunktional dar. Das initiale Problem kann alternativ durch das adjungierte bzw. duale Problem beschrieben werden. Finde $\mathbf{z} \in \mathcal{V}_{TG}$, so daß

$$B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = D_{TG}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{TG} \quad (4.22)$$

$B_{TG}^*(\cdot, \cdot)$ ist der adjungierte bilineare Operator. Der bilineare Operator $B_{TG}^*(\cdot, \cdot)$ wird über die Gleichheit von (4.21) und (4.22) bestimmt.

$$B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = B_{TG}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad (4.23)$$

Für die Herleitung des bilinearen Operator des dualen Problems $B_{TG}^*(\cdot, \cdot)$ wird von der Bilinearform des ursprünglichen Problems (2.42) ausgegangen.

$$\begin{aligned} B_{TG}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = & \sum_{n=1}^N [(\dot{\mathbf{z}}, \rho \ddot{\mathbf{v}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{z}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{v}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{z}}, d_2 \dot{\mathbf{v}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{v})_{Q_n}] \\ & + \sum_{n=2}^N [(\dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^+), \rho [[\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1})]])_{\Omega} + a(\mathbf{z}(t_{n-1}^+), [[\mathbf{v}(t_{n-1})]])_{\Omega}] \\ & + (\dot{\mathbf{z}}(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{v}}(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{z}(t_0^+), \mathbf{v}(t_0^+))_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nach der partiellen Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \sum_{n=1}^N [- (\dot{\mathbf{v}}, \rho \ddot{\mathbf{z}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{v}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{v}}, d_2 \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} - a(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{z})_{Q_n}] \\ & + \sum_{n=1}^N [(\dot{\mathbf{v}}, \rho \dot{\mathbf{z}})_{\Omega} \Big|_{t_{n-1}^+}^{t_n^-} + a(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\Omega} \Big|_{t_{n-1}^+}^{t_n^-}] \\ & + \sum_{n=2}^N [([[\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1})]]), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^+)]_{\Omega} + a([[\mathbf{v}(t_{n-1})]]), \mathbf{z}(t_{n-1}^+)]_{\Omega}] \\ & + (\dot{\mathbf{v}}(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{v}(t_0^+), \mathbf{z}(t_0^+))_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Im folgenden werden nur die Terme an den Zeitintervallgrenzen betrachtet. Dazu werden die Terme in der Gleichung (4.25) ausgeschrieben und mit $T_i(\Omega)$ abgekürzt.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^6 T_i(\Omega) &= \sum_{n=1}^N \left[\underbrace{(\dot{\mathbf{v}}(t_n^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_n^-))_\Omega}_{i=1} - \underbrace{(\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1}^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^+))_\Omega}_{i=2} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{a(\mathbf{v}(t_n^-), \mathbf{z}(t_n^-))_\Omega}_{i=3} - \underbrace{a(\mathbf{v}(t_{n-1}^+), \mathbf{z}(t_{n-1}^+))_\Omega}_{i=4} \right] \\
&\quad + \sum_{n=2}^N \left[\underbrace{(\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1}^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^+))_\Omega}_{i=2} - \underbrace{(\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1}^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^-))_\Omega}_{i=1} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{a(\mathbf{v}(t_{n-1}^+), \mathbf{z}(t_{n-1}^+))_\Omega}_{i=4} - \underbrace{a(\mathbf{v}(t_{n-1}^-), \mathbf{z}(t_{n-1}^-))_\Omega}_{i=3} \right] \\
&\quad + \underbrace{(\dot{\mathbf{v}}(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_0^+))_\Omega}_{i=5} + \underbrace{a(\mathbf{v}(t_0^+), \mathbf{z}(t_0^+))_\Omega}_{i=6}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Terme $T_i(\Omega)$ werden im folgenden zusammengefaßt. Die Terme $T_2(\Omega)$ und $T_5(\Omega)$ heben sich auf.

$$\begin{aligned}
T_2(\Omega) + T_5(\Omega) &= - \sum_{n=1}^N (\dot{\mathbf{v}}(t_{n-1}^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_{n-1}^+))_\Omega + \sum_{n=1}^{N-1} (\dot{\mathbf{v}}(t_n^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_n^+))_\Omega \\
&\quad + (\dot{\mathbf{v}}(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_0^+))_\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ebenso verschwinden die Terme $T_4(\Omega)$ und $T_6(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
T_4(\Omega) + T_6(\Omega) &= - \sum_{n=1}^N a(\mathbf{v}(t_{n-1}^+), \mathbf{z}(t_{n-1}^+))_\Omega + \sum_{n=1}^{N-1} a(\mathbf{v}(t_n^+), \mathbf{z}(t_n^+))_\Omega \\
&\quad + a(\mathbf{v}(t_0^+), \mathbf{z}(t_0^+))_\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Die anderen Terme werden zu Sprungtermen $[[\cdot(t_n)]]$ zusammengefaßt. Aus dem Term $T_1(\Omega)$ wird der Sprungterm in den Geschwindigkeiten über die Zeitintervallgrenzen gebildet.

$$\begin{aligned}
T_1(\Omega) &= \sum_{n=1}^N (\dot{\mathbf{v}}(t_n^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_n^-))_\Omega - \sum_{n=1}^{N-1} (\dot{\mathbf{v}}(t_n^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_n^+))_\Omega \\
&= - \sum_{n=1}^{N-1} (\dot{\mathbf{v}}(t_n^-), \rho [[\dot{\mathbf{z}}(t_n)]])_\Omega + (\dot{\mathbf{v}}(t_N^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_N^-))_\Omega
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Die zeitlichen Sprünge in den Spannungen ergeben sich aus dem Term $T_3(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
T_3(\Omega) &= \sum_{n=1}^N a(\mathbf{v}(t_n^-), \mathbf{z}(t_n^-))_\Omega - \sum_{n=1}^{N-1} a(\mathbf{v}(t_n^-), \mathbf{z}(t_n^+))_\Omega \\
&= - \sum_{n=1}^{N-1} a(\mathbf{v}(t_n^-), [[\mathbf{z}(t_n)]])_\Omega + a(\mathbf{v}(t_N^-), \mathbf{z}(t_N^-))_\Omega
\end{aligned} \tag{4.30}$$

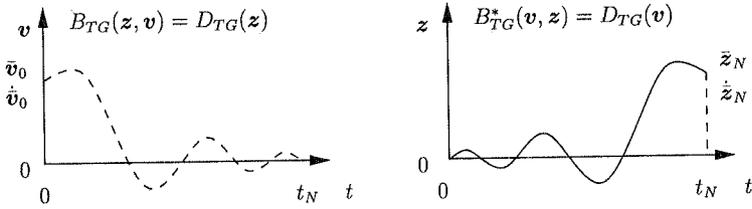


Abbildung 4.1: Lösung \mathbf{v} des initialen Problems mit $B_{TG}(\cdot, \cdot)$ und Lösung \mathbf{z} des dualen Problems mit $B_{TG}^*(\cdot, \cdot)$

Somit lautet die adjungierte Bilinearform $B^*(\cdot, \cdot)$ des dualen Problems

$$\begin{aligned}
 B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \sum_{n=1}^N \left[-(\dot{\mathbf{v}}, \rho \ddot{\mathbf{z}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{v}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{v}}, d_2 \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} - a(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{z})_{Q_n} \right] \quad (4.31) \\
 & - \sum_{n=1}^{N-1} [(\dot{\mathbf{v}}(t_n^-), \rho[[\dot{\mathbf{z}}(t_n)]])_{\Omega} + a(\mathbf{v}(t_n^-), [[\mathbf{z}(t_n)]])_{\Omega}] \\
 & + (\dot{\mathbf{v}}(t_N^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_N^-))_{\Omega} + a(\mathbf{v}(t_N^-), \mathbf{z}(t_N^-))_{\Omega}
 \end{aligned}$$

Das duale Problem stellt ein „Rückwärtsproblem“ dar. Der Vergleich mit der Bilinearform (2.42) des ursprünglichen Problems zeigt, daß die Massen- und Steifigkeitsterme in (4.31) das Vorzeichen gewechselt haben, d.h. die Dämpfung wirkt entgegengesetzt zur Dämpfung des initialen Problems. Die Sprungterme werden mit den Werten an der Stelle t_n^- gewichtet, statt wie bei dem ursprünglichen Problem mit den Werten an der Stelle t_n^+ . Die „Anfangsbedingungen“ des dualen Problems sind zum Zeitpunkt $t = t_N$ gegeben. In Abbildung (4.1) ist links \mathbf{v} als Lösung des initialen Problems dargestellt. Die Anfangsbedingungen sind zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Die Dämpfung ist positiv. Auf der rechten Seite ist \mathbf{z} die Lösung des dualen Problems. Die „Anfangsbedingungen“ sind zum Zeitpunkt $t = t_N$ gegeben und die Dämpfung ist negativ.

Zur Veranschaulichung wird aus dem dualen Problem (4.31) die starke Form abgeleitet.

$$-\rho \ddot{\mathbf{z}} + d_1 \rho \dot{\mathbf{z}} - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{z}}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{z}) = \mathcal{D}_{TG} \quad \text{auf } \Omega \times (0, t_N) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_u \times (0, t_N) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_t \times (0, t_N) \quad (4.34)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t_N) = \bar{\mathbf{z}}_N \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.35)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t_N) = \dot{\bar{\mathbf{z}}}_N \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.36)$$

Der Lastvektor \mathcal{D}_{TG} ergibt sich aus dem Funktional $D_{TG}(\mathbf{v})$. Die starke Form wird abgekürzt mit

$$\mathcal{L}_{TG}^* \mathbf{z} = \mathcal{D}_{TG} \quad (4.37)$$

Für die numerische Auswertung des dualen Problems werden, ebenso wie für das ursprüngliche Problem, die Test- und Ansatzfunktionen aus demselben Raum gewählt. Für die Berechnung wird das duale Problem durch eine Koordinatentransformation in ein „Vorwärtsproblem“ umgewandelt.

$$t^* = t_N - t \quad (4.38)$$

An den Zeitintervallgrenzen gilt folgender Zusammenhang zwischen t und t^* .

$$t_n^{-*} = t_{N-n}^+ \quad ; \quad t_n^{+*} = t_{N-n}^- \quad (4.39)$$

Der Sprungterm $[[\cdot(t_n^*)]]$ im transformierten Koordinatensystem lautet:

$$[[z(t_n^*)]] = z(t_n^{+*}) - z(t_n^{-*}) = -[[z(t_{N-n})]] \quad (4.40)$$

Eingesetzt in die duale Bilinearform (4.31) ergibt sich das „Vorwärtsproblem“.

$$\begin{aligned} B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \sum_{n=1}^N [(\dot{\mathbf{v}}, \rho \ddot{\mathbf{z}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{v}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{v}}, d_2 \dot{\mathbf{z}}^h)_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{z})_{Q_n}] \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} [(\dot{\mathbf{v}}(t_n^{+*}), \rho [[\dot{\mathbf{z}}(t_n^*)]])_{\Omega} + a(\mathbf{v}(t_n^{+*}), [[z(t_n^*)]])_{\Omega}] \\ & + (\dot{\mathbf{v}}(t_0^{+*}), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_0^{+*}))_{\Omega} + a(\mathbf{v}(t_0^{+*}), \mathbf{z}(t_0^{+*}))_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Um die Parallelen und Unterschiede von der Dynamik zu der Statik in Bezug auf das duale Problem zu zeigen, wird im folgenden das duale Problem der Elastostatik eingeführt.

Statik Das Vorgehen zur Herleitung des dualen Bilinearoperators entspricht dem in der Dynamik. Das initiale Problem der Elastostatik wird definiert durch: finde $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{V}}$, so daß

$$\tilde{B}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \tilde{D}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{S}} \quad (4.42)$$

Das dazu adjungierte Problem lautet: finde $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{V}}$, so daß

$$\tilde{B}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \tilde{D}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{S}} \quad (4.43)$$

Die Belastung des initialen und des dualen Problems erfolgt durch das Funktional $\tilde{D}(\mathbf{v})$. Der bilineare Operator $\tilde{B}^*(\cdot, \cdot)$ wird über die Gleichheit von (4.42) und (4.43) bestimmt.

$$\tilde{B}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \tilde{B}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad (4.44)$$

Der Operator $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ entspricht der symmetrischen Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ (2.88). Eingesetzt in die Gleichung (4.44) ergibt sich für die duale Bilinearform

$$\tilde{B}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{v})_{\Omega} = a(\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\Omega} \quad (4.45)$$

Der ursprüngliche $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ und der adjungierte $\tilde{B}^*(\cdot, \cdot)$ Operator sind identisch, d.h. die schwache Formulierung der linearen Elastostatik ist selbstadjungiert. Elliptische Problem,

wie z.B. die lineare Elastostatik, können selbstadjungiert sein. Die starke Form des dualen Problems lautet

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{z}) = \tilde{\mathcal{D}} \quad \text{auf } \Omega \quad (4.46)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (4.47)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (4.48)$$

Für den linearen Operator der starken Form des adjungierten Problems gilt

$$\tilde{\mathcal{L}}^* = \tilde{\mathcal{L}} \quad (4.49)$$

Somit lautet die starke Form des dualen Problems in der Elastostatik in der abgekürzten Schreibweise

$$\tilde{\mathcal{L}} \mathbf{z} = \tilde{\mathcal{D}} \quad (4.50)$$

4.3 Darstellung einer Fehlergröße

In Kapitel 4.1 wurde der Fehler e des ursprünglichen Problems mit Hilfe der Residuen $\bar{\mathbf{R}}$ ausgedrückt. Das duale Problem wurde in dem vorherigen Kapitel 4.2 hergeleitet. In diesem Kapitel werden die beiden Probleme miteinander gekoppelt, um den Fehler des ursprünglichen Problems in einer bestimmten Größe zu bestimmen.

Bei dem dualen Problem (4.22) werden dazu die Funktionen \mathbf{v} aus dem Raum der Ansatzfunktionen \mathcal{S}_{TG} durch den Fehler $e \in \mathcal{S}_{TG}$ ersetzt, sowie das Lastfunktional $D_{TG}(e) = (\dot{e}, \mathcal{D}_{TG})_Q$ eingesetzt.

$$B_{TG}^*(e, \mathbf{z}) = (\dot{e}, \mathcal{D}_{TG})_Q \quad (4.51)$$

In der schwachen Formulierung wird mit den zeitlichen Ableitungen \dot{e} bzw. $\dot{\mathbf{z}}$ getestet, damit nach der Zeitintegration wieder Arbeitsterme entstehen, s. Kapitel 2.3.1. Die schwache Formulierung des ursprünglichen Problems lautet

$$B_{TG}(\mathbf{z}, e) = (\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{R}})_Q \quad (4.52)$$

Zunächst wird das Prinzip der Fehlerbestimmung anschaulich erklärt. Dazu wird die abgekürzte Schreibweise der starken Form der Bewegungsgleichung verwendet. Die starke Form des adjungierten (4.37) und des ursprünglichen (4.13) Problems werden in die schwache Form des dualen (4.51) und des ursprünglichen (4.52) Problems eingesetzt.

$$B_{TG}^*(e, \mathbf{z}) = (\dot{e}, \mathcal{L}_{TG}^* \mathbf{z})_Q = (\dot{e}, \mathcal{D}_{TG})_Q \quad (4.53)$$

$$B_{TG}(\mathbf{z}, e) = (\dot{\mathbf{z}}, \mathcal{L}_{TG} e)_Q = (\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{R}})_Q \quad (4.54)$$

Die Definition des dualen Problems (4.23) führt auf

$$B_{TG}(\mathbf{z}, e) = B_{TG}^*(e, \mathbf{z}) \quad (4.55)$$

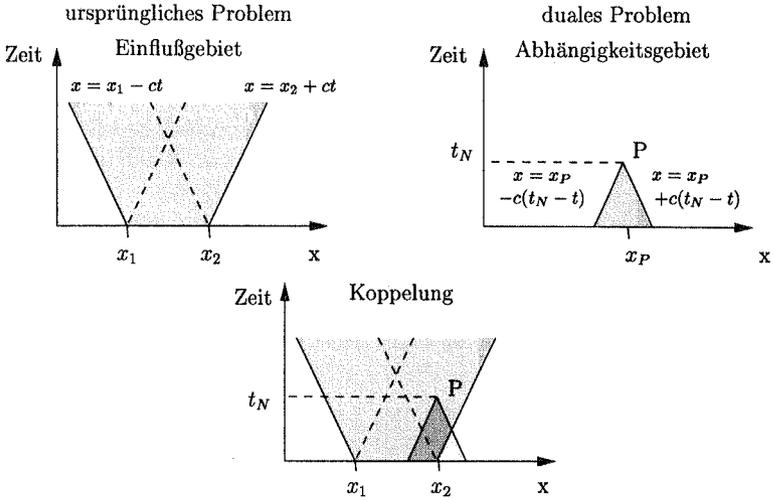


Abbildung 4.2: Modellbeispiel für die Darstellung des Fehlers am Punkt P

Daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Fehlerverteilung e und der Lösung z des adjungierten Problems.

$$(\dot{e}, \mathcal{D}_{TG})_Q = (\bar{R}, \dot{z})_Q \quad (4.56)$$

Die Last \mathcal{D}_{TG} filtert aus der räumlichen und zeitlichen Fehlerverteilung \dot{e} den gesuchten Fehler heraus. Mit Hilfe der rechten Seite von Gleichung (4.56) kann gezeigt werden, daß der lokale Fehler äquivalent zu der Wichtung der Residuen \bar{R} des ursprünglichen Problems mit der Lösung des dualen Problems \dot{z} ist.

Das Prinzip der Fehlerbestimmung für eine lokale Größe wird anhand einfacher Charakteristiken erläutert [65]. In Abbildung (4.2) links oben ist das ursprüngliche Problem mit einer Anfangsverschiebung in dem Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ dargestellt. Die Störung breitet sich mit der Wellengeschwindigkeit c entlang der Charakteristiken $x = x_1 - ct$ und $x = x_2 + ct$ aus. Der Einflußbereich der Anfangsverschiebungen ist durch den grauen Bereich gekennzeichnet. Nur Punkte in diesem Bereich erfahren eine Veränderung in den Verschiebungen und in den Geschwindigkeiten aufgrund der Anfangsbedingungen. Auf der rechten Seite oben in Abb. (4.2) ist das duale Problem dargestellt. An einem Punkt P soll der Fehler bestimmt werden. Dazu wird dort eine Störung bzw. Belastung aufgebracht und beobachtet, wie diese sich ausbreitet. Für dieses Problem ist nur der Zeitraum $t < t_N$ von Interesse. Die Größe der Störung in Punkt P hängt allein von den Werten in dem grauen Bereich ab. Dieser Bereich, der durch die Charakteristiken $x = x_p - c(t_N - t)$ und $x = x_p + c(t_N - t)$ begrenzt ist, nennt man Abhängigkeitsbereich. Das duale Problem verläuft mit der „Anfangsbedingung“ zum Zeitpunkt t_N in zeitlich umgekehrter Richtung. In Abb. (4.2) unten ist die Überlagerung des Abhängigkeitsbereiches und des Einflußbereiches dargestellt. Nur

die Punkte in dem gemeinsamen Gebiet des Abhängigkeitsbereiches und des Einflußbereiches, das dunkelgrauen gekennzeichnet ist, haben einen Einfluß auf die Fehlergröße an dem Punkt P. Dieses Beispiel mit den einfachen Charakteristiken dient allein zur Erklärung der Methode der Fehlerbestimmung in der Dynamik. In der Regel sind die Charakteristiken keine Geraden. Eine ausführliche Beschreibung von Charakteristiken ist z.B. in John [52] zu finden.

Nachdem das Prinzip der Koppelung des ursprünglichen Problems mit dem dualen Problems zur Fehlerbestimmung anschaulich erklärt wurde, wird die Kurzschreibweise (4.56) nun durch die ausführlichen Terme ersetzt. Der duale bilineare Operator $B_{TG}^*(\cdot, \cdot)$ (4.31) wird in das adjungierte Problem (4.51) eingesetzt. Das adjungierte Problem (4.51) mit den „Anfangsbedingungen“ $\bar{\mathbf{z}}_N$ und $\dot{\bar{\mathbf{z}}}_N$ lautet dann

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left[-(\dot{\mathbf{e}}, \rho \ddot{\mathbf{z}})_{Q_n} + (\dot{\mathbf{e}}, d_1 \rho \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} + a(\dot{\mathbf{e}}, d_2 \dot{\mathbf{z}})_{Q_n} - a(\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{z})_{Q_n} \right] \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} \left[(\dot{\mathbf{e}}(t_n^-), \rho [[\dot{\mathbf{z}}(t_n)]] \right]_{\Omega} + a(\mathbf{e}(t_n^-), [[\mathbf{z}(t_n)]] \right]_{\Omega} + a(\mathbf{e}(t_N^-), \mathbf{z}(t_N^-))_{\Omega} + (\dot{\mathbf{e}}(t_N^-), \rho \dot{\mathbf{z}}(t_N^-))_{\Omega} \\ & = \sum_{n=1}^N (\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{e}})_{Q_n} + a(\mathbf{e}(t_N^-), \bar{\mathbf{z}}_N)_{\Omega} + (\dot{\mathbf{e}}(t_N^-), \rho \dot{\bar{\mathbf{z}}}_N)_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Der Fehler des ursprünglichen Problems in einer bestimmten physikalischen Größe kann, indem die Fehler des ursprünglichen Problems mit der Lösung des dualen Problems gewichtet werden, durch die Gleichung (4.57) bestimmt werden.

4.3.1 Duale Last

Das Belastungsfunktional $D_{TG}(\mathbf{e})$ des dualen Problems steuert die zu bestimmende Fehlergröße des ursprünglichen Problems. Im folgenden werden verschiedene Möglichkeiten gezeigt, wie das Funktional $D_{TG}(\mathbf{e})$ gewählt werden kann. Zunächst wird alleine der Fehler in zeitlicher Richtung betrachtet, weshalb es ausreichend ist, die verschiedenen Belastungsfunktionale an Hand eines Einmassenschwingers (EMS) herzuleiten. Anschließend wird die Belastung auf räumliche Systeme erweitert.

EMS Für einen Einmassenschwinger vereinfacht sich die Fehlergleichung (4.57).

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left[-(\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}})_{I_n} + (\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}})_{I_n} - (\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{K} \mathbf{z})_{I_n} \right] \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} \left[(\dot{\mathbf{e}}(t_n^-), \mathbf{M} [[\dot{\mathbf{z}}(t_n)]] \right] + (\mathbf{e}(t_n^-), \mathbf{K} [[\mathbf{z}(t_n)]] \right] + (\mathbf{e}(t_N^-), \mathbf{K} \mathbf{z}(t_N^-)) + (\dot{\mathbf{e}}(t_N^-), \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}(t_N^-)) \\ & = \sum_{n=1}^N (\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{e}})_{I_n} + (\mathbf{e}(t_N^-), \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}}_N) + (\dot{\mathbf{e}}(t_N^-), \mathbf{M} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_N) \end{aligned} \quad (4.58)$$

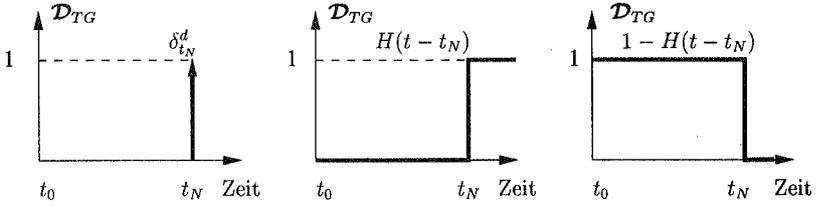


Abbildung 4.3: Lastfälle: Dirac-Delta Last und Heaviside-Lasten

Die Masse M , die Dämpfung C und die Steifigkeit K sind in diesem Fall skalare Werte. Die starke Form (4.32) für den Einmassenschwinger lautet

$$-M\ddot{z} + C\dot{z} - Kz = \mathcal{D}_{TG} \quad (4.59)$$

$$z(t_N) = \bar{z}_N \quad (4.60)$$

$$\dot{z}(t_N) = \dot{\bar{z}}_N \quad (4.61)$$

Dirac-Delta Last: Im folgenden wird zunächst auf die Besonderheiten der punktförmigen Dirac-Delta Funktion δ^d eingegangen, s. Meyberg et al. [66], bevor die Dirac-Delta Last in die Fehlergleichung eingesetzt wird. Die Lastfunktion ist links in Abbildung (4.3) dargestellt. Da die Dirac-Delta Funktion bzw. der Operator nur über einen infinitesimalen Bereich, d.h. an einem Punkt, wirkt, kann der Operator nur in integraler Form verwendet werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^d(t - t_N) dt = 1 \quad (4.62)$$

Der Dirac-Delta Operator kann auf stetige Funktionen in bestimmten Integralen angewendet werden. Der Dirac-Delta Operator $\delta^d(t - t_N)$ filtert dabei aus der stetigen Funktion $f(t)$ den Funktionswert an der Stelle t_N heraus.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^d(t - t_N) f(t) dt = \int_{t_0}^{t_N} \delta^d_{t_N} f(t) dt = f(t_N) \quad (4.63)$$

Die duale Last wird mit Hilfe des Dirac-Delta Operators definiert.

$$\mathcal{D}_{TG} = \delta^d_{t_N} \quad (4.64)$$

Das Integral der Last über die Zeit ist der Impuls, d.h. das System wird zum Zeitpunkt t_N mit einem Einheitsimpuls aus der Dirac-Delta Last beansprucht.

$$\mathcal{I}_{TG} = \int_{t_0}^{t_N} \mathcal{D}_{TG} dt = \int_{t_0}^{t_N} \delta^d_{t_N} dt = 1 \quad (4.65)$$

Die Dirac-Delta Last $\delta^d_{t_N}$ wird in die Fehlergleichung (4.58) eingesetzt und umgeformt

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_I = \int_{t_0}^{t_N} \delta^d_{t_N} \dot{e} dt = \dot{e}(t_N) \quad (4.66)$$

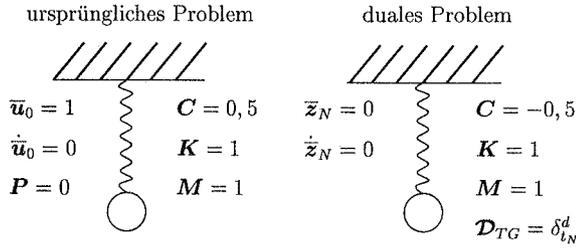


Abbildung 4.4: Ursprüngliches Problem und duales Problem für den Fehler in der Geschwindigkeit

Mit der Impulslast kann der Fehler in der Geschwindigkeit $\dot{e}(t_N)$ zum Zeitpunkt t_N bestimmt werden.

Anfangsbedingungen In der Strukturdynamik werden häufig die Anfangsbelastungen in die entsprechenden Anfangsverschiebungen und -geschwindigkeiten umgewandelt. Im folgenden wird gezeigt, zu welchen „Anfangsbedingungen“ die Belastung infolge der Dirac-Delta Last äquivalent ist. Werden die entsprechenden „Anfangsbedingungen“ eingesetzt, ergibt sich ebenfalls der Geschwindigkeitsfehler zum Zeitpunkt t_N . Infolge der Dirac-Delta Belastung sind die Verschiebungen und Geschwindigkeiten in t_N nicht stetig [66], d.h. das System ist zum Zeitpunkt t_N^- in Ruhe.

$$\mathbf{z}(t_N^-) = 0 \quad (4.67)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t_N^-) = 0 \quad (4.68)$$

Der Impuls $\mathcal{I}_{TG} = 1$ muß von dem System aufgenommen werden.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}(t_N^-) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}(t_N^+) = \mathcal{I}_{TG} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}}(t_N^+) = -\mathbf{M}^{-1}\mathcal{I}_{TG} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1} \quad (4.69)$$

Aus dem Impuls lassen sich die „Anfangsbedingungen“ ableiten.

$$\bar{\mathbf{z}}_N = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_N = -(\dot{\mathbf{z}}(t_N^+) - \dot{\mathbf{z}}(t_N^-)) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}$$

Statt der Impulsbelastung kann die Verschiebung und die Geschwindigkeit als „Anfangsbedingung“ vorgegeben werden. Werden die „Anfangsbedingungen“ in (4.58) eingesetzt, ergibt sich ebenfalls der Fehler in der Geschwindigkeit.

$$(\dot{e}(t_N^-), \mathbf{M}\dot{\bar{\mathbf{z}}}_N) = (\dot{e}(t_N^-), \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}) = \dot{e}(t_N^-) \quad (4.71)$$

Numerische Beispiele An dem Beispiel des Einmassenschwingers wird im eindimensionalen Raum die Vorgehensweise zur lokalen Fehlerbestimmung erläutert. Das ursprüngliche Problem ist in Abbildung (4.4) dargestellt. Das System ist gedämpft, und es ist

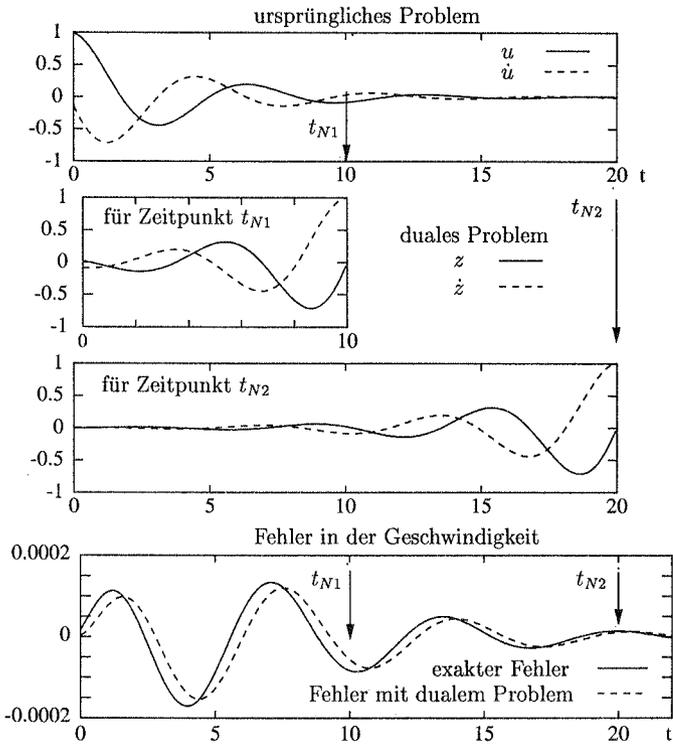


Abbildung 4.5: Fehler in der Geschwindigkeit ($\Delta t = 0,05$)

eine Anfangsverschiebung vorgegeben. Um den Fehler in der Geschwindigkeit zu ermitteln, wird eine Dirac-Delta Last $\mathbf{D}_{TG} = \delta_{t_N}^d$ zum Zeitpunkt der Fehlerberechnung t_N aufgebracht (Abb. 4.4 rechts). Die Dirac-Delta Last entspricht einem Sprung in den Geschwindigkeiten. Die Randbedingung kann bei der numerischen Berechnung als Geschwindigkeitssprung aufgebracht werden. Der Geschwindigkeitssprung ergibt keine numerischen Probleme, da die Ansatzfunktionen in der Zeit diskontinuierlich sind und somit Sprünge in zeitlicher Richtung zugelassen sind. Die Auswertung des dualen Problems ist für zwei Zeitpunkte t_{N1} und t_{N2} in Abbildung (4.5) dargestellt. Das duale Problem ist ein „Rückwärtsproblem“. Die „Anfangsbedingungen“ sind zum Zeitpunkt t_N gegeben. Die Residuen des ursprünglichen Problems werden nach Gleichung (4.56) mit der Lösung des dualen Problems in dem Bereich $t_0 \leq t \leq t_N$ gekoppelt. Das Integral über den Zeitraum $t_0 \leq t \leq t_N$ der gekoppelten Werte ergibt den Fehlerwert zu dem Zeitpunkt t_N . Dabei kann das duale Problem ebenso wie das ursprüngliche Problem vorwärts ausgewertet werden. Wenn sich die Diskretisierung nicht verändert, muß das duale Problem nur einmal berechnet werden. Aus dem Verlauf der Verschiebung und der Geschwindigkeit

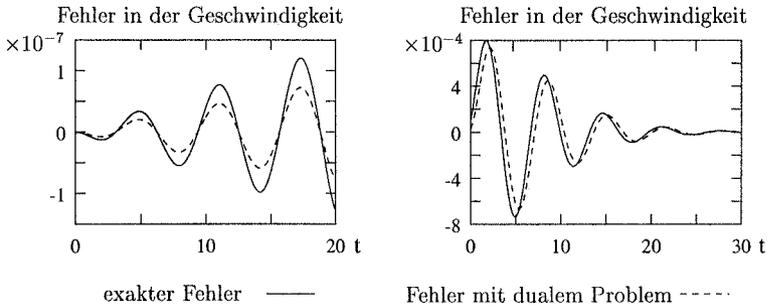


Abbildung 4.6: Fehler in der Geschwindigkeit $M = 1$; $K = 1$; $P = 0$; $\mathcal{D}_{TG} = \delta_{t_N}^d$; Links: $\bar{u}_0 = 1$; $\bar{\tilde{u}}_0 = 0$; $C = 0$; $\Delta t = 0,01$; Rechts: $\bar{u}_0 = 0$; $\bar{\tilde{u}}_0 = 1$; $C = 0,5$; $\Delta t = 0,1$

des ursprünglichen Problems in Abb. (4.5) ist der Einfluß der Dämpfung zu erkennen. Die Bewegung des ursprünglichen Problems klingt mit der Zeit ab. Das duale Problem verhält sich umgekehrt. Das bedeutet je größer t_N ist, desto kleiner ist der Einfluß der Residuen des ursprünglichen Problems zu Beginn der Berechnung ($t \ll t_N$) auf den Fehler zum Zeitpunkt t_N . Mit Hilfe des dualen Problems kann der zeitliche Verlauf des Fehlers wiedergegeben werden, indem für jeden Zeitpunkt der Verlauf des dualen Problems mit dem Verlauf der Residuen gekoppelt wird. Der berechnete Fehlerverlauf wird in Abbildung (4.5) unten mit dem exakten Fehlerverlauf verglichen. Der exakte Fehler wird aus der Differenz zwischen der analytischen und der numerischen Lösung berechnet. Der Verlauf und die Größe des exakten Fehlers kann durch den berechneten Fehler wiedergegeben werden. Die Kurven des exakten und des berechneten Fehlers stimmen nicht genau überein. Eine Ursache dafür sind die numerischen Eigenschaften des Zeitintegrationsverfahrens, die das duale Problem nicht erfassen kann. Auf diese Fehlerquelle wird am Ende dieses Kapitels eingegangen.

Im folgenden wird zunächst der Verlauf des Geschwindigkeitsfehlers des Einmassenschwingers ohne Dämpfung berechnet. Anschließend werden die Anfangsbedingungen des gedämpften Problems aus Abb. (4.4) geändert und der Geschwindigkeitsfehlerverlauf ermittelt. Der Einmassenschwinger in Abb. (4.4) wird nun nicht mehr gedämpft. Es wird gezeigt, daß das Anwachsen des Fehlers in der Zeit dargestellt werden kann. Die Anfangs- und Randbedingungen bleiben unverändert, wie in Abb. (4.4) dargestellt. Das duale Problem wird, um den Fehler in der Geschwindigkeit zu ermitteln, mit einer Dirac-Delta Last belastet. Der exakte und der berechnete Fehler in der Geschwindigkeit sind links in Abbildung (4.6) dargestellt. Der berechnete Geschwindigkeitsfehler gibt qualitativ den Verlauf des exakten Fehlers wieder. Die Amplitude des exakten Fehlers ist größer als die des berechneten Fehlers. Dies ist auf den Einfluß der numerischen Eigenschaften des Zeitalgorithmus, d.h. den Amplituden- und Periodenfehler, zurückzuführen.

Im folgenden werden nur die Anfangsbedingungen des ursprünglichen Problems in Abb.

(4.4) geändert. Als Anfangsbedingungen des ursprünglichen Problems mit Dämpfung wird eine Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben. Dadurch verändert sich nur das ursprüngliche Problem. Das duale Problem ist dasselbe wie in dem Beispiel in Abb. (4.4) bzw. Abb. (4.5), d.h. der Einfluß in Raum und Zeit auf den Fehler zu einem Zeitpunkt t_N bleibt gleich. Nur die Größe der Residuen ändert sich. Der Verlauf des exakten Fehlers in Abbildung (4.6) rechts stimmt gut mit dem Verlauf des berechneten Fehlers überein.

Duale Last für $t > t_N$: In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß eine konstante Belastung \mathcal{D}_{TG} für $t > t_N$ (s. Abb. 4.3 Mitte) auf die Fehler in den Verschiebungen führt. Der Lastverlauf kann mit einer Heaviside-Funktion dargestellt werden, s. Meyberg et al. [66].

$$\mathcal{D}_{TG} = H(t - t_N) = \begin{cases} 0 & t < t_N \\ 1 & t_N < t \end{cases} \quad (4.72)$$

Die Last wird in die Fehlergleichung (4.58) eingesetzt und zur Auswertung partiell integriert.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_I = \int_{t_0}^{t_N} H(t - t_N) \dot{e} dt = \underbrace{H(t - t_N) e \Big|_{t_0}^{t_N}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_N} \delta_{t_N}^d e dt = -e(t_N) \quad (4.73)$$

Da der Dirac-Delta Operator die Ableitung der Heaviside-Funktion ist, ergibt sich der Fehler $e(t_N)$ in der Verschiebung zum Zeitpunkt t_N .

Anfangsbedingungen Die duale Belastung durch die Heaviside-Funktion wird im folgenden in äquivalente „Anfangsbedingungen“ umgewandelt. Die Verschiebungen und Geschwindigkeiten sind stetig in t_N . Das duale System ist zunächst für $t < t_N$ in Ruhe, d.h.

$$\dot{z}(t_N^-) = \dot{z}(t_N^+) = \dot{\bar{z}}_N = 0 \quad (4.74)$$

Die Belastung durch die Heaviside-Funktion wird in Dehnungsenergie umgewandelt. Obwohl die Verschiebungen in t_N stetig sind, werden sie im folgenden, wie in Gleichung (4.58), in $z(t_N^-)$ und $z(t_N^+)$ aufgespalten, um \bar{z}_N mit dem richtigen Vorzeichen einzuführen.

$$\mathbf{K}z(t_N^-) - \mathbf{K}z(t_N^+) = \mathcal{D}_{TG} = \mathbf{1} \Rightarrow \bar{z}_N = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{1} \quad (4.75)$$

Werden die „Anfangsbedingungen“ in Gleichung (4.58) eingesetzt, ergibt sich ebenfalls der Fehler $e(t_N^-)$ in der Verschiebung zum Zeitpunkt t_N .

$$(\mathbf{e}(t_N^-), \mathbf{K}\bar{z}_N) = (\mathbf{e}(t_N^-), -\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{1}) = -\mathbf{e}(t_N^-) \quad (4.76)$$

Numerische Beispiele Für den gedämpften Einmassenschwinger in Abb. (4.4) wird der Fehler in der Verschiebung ermittelt. Dazu wird auf das duale Problem zum Zeitpunkt t_N eine Heaviside-Last $\mathcal{D}_{TG} = H(t - t_N)$ aufgebracht. In Abbildung (4.7) links

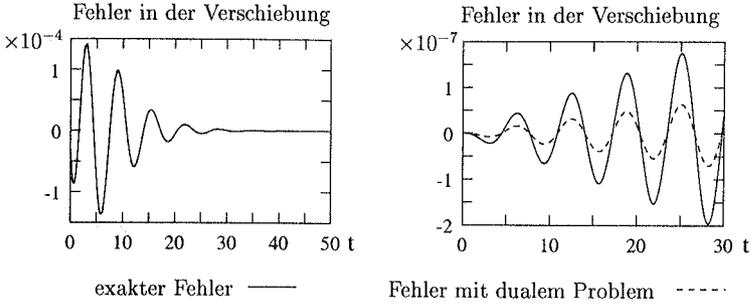


Abbildung 4.7: Fehler in der Verschiebung ($M=1; K=1; P=0; \bar{u}_0=1; \dot{\bar{u}}_0=0; \mathcal{D}_{TG} = H(t-t_N)$; Links: $C=0,5; \Delta t=0,05$; Rechts: $C=0; \Delta t=0,01$)

ist der Verlauf des exakten und des mit dem dualen Problem ermittelten Fehlers abgebildet. Ist das System gedämpft, stimmen die Fehlerverläufe (Abb. 4.7 links) nahezu überein.

Der Verschiebungsfehler des ungedämpften Problems wird ebenfalls berechnet. Es ändert sich im Vergleich zum gedämpften Problem das ursprüngliche und das duale Problem. Im ungedämpften Fall (Abb. 4.7 rechts) verhält sich der berechnete Fehler qualitativ wie der exakte Fehler. Es sind quantitative Unterschiede vorhanden, die mit den numerischen Eigenschaften des Zeitintegrationsalgorithmus erklärt werden können. Im ungedämpften Fall werden die Fehler, auch die durch die Eigenschaften des Zeitintegrationsalgorithmus, nicht mehr herausgedämpft, sondern pflanzen sich in der Zeit fort, weshalb der Unterschied zwischen dem exakten und berechneten Fehler im Laufe der Zeit zunimmt.

Konstante Last: Eine weitere Art der Belastung \mathcal{D}_{TG} ist eine konstante Last über das gesamte Zeitintervall $I = (0, t_N)$. Die Belastung ist in Abb. (4.3) rechts dargestellt. Sie kann wiederum mit einer Heaviside-Funktion beschrieben werden.

$$\mathcal{D}_{TG} = 1 - H(t - t_N) = \begin{cases} 1 & t < t_N \\ 0 & t_N < t \end{cases} \quad (4.77)$$

Die Last wird in die Fehlergleichung (4.58) eingesetzt und partiell integriert.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_I = \int_{t_0}^{t_N} (1 - H(t - t_N)) \dot{e} dt = \underbrace{(1 - H(t - t_N)) e|_{t_0}^{t_N}}_{=0} + \int_{t_0}^{t_N} \delta_{t_N}^d e dt = e(t_N) \quad (4.78)$$

Eine konstante Last führt auf den Verschiebungsfehler $e(t_N)$ zum Zeitpunkt t_N , der äquivalent zum Integral des Fehlers in den Geschwindigkeiten über das Zeitintervall $(0, t_N)$ ist

$$\int_{t_0}^{t_N} \dot{e} dt = e(t_N) \quad (4.79)$$

wobei $e(t_0) = 0$ gilt.

Fehler in der L_2 -Norm: Um den Fehler in der L_2 -Norm der Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten zu bestimmen, wird die duale Einheitslast in den Gleichungen (4.64), (4.72) bzw. (4.77) durch die Fehlerverteilung in den Verschiebungen \mathbf{e} bzw. Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{e}}$ ersetzt. Da die Fehlerverteilung a-priori nicht bekannt ist, schlägt Rannacher [74] vor, den Fehler mit Hilfe der diskreten Lösung zu approximieren, z.B. mit Interpolationsabschätzungen. Da für den Fehler in der L_2 -Norm zunächst die Fehlerverteilung selbst approximiert werden muß, hat die Fehlerbestimmung in der L_2 -Norm keine große Bedeutung. Im folgenden wird nur das prinzipielle Vorgehen gezeigt. Der approximierte Fehler ist im folgenden $\bar{\mathbf{e}}$ bzw. $\dot{\bar{\mathbf{e}}}$. Die L_2 -Norm wird mit $\|\cdot\|$ abgekürzt.

Um den Fehler in der L_2 -Norm der Verschiebungen zu ermitteln, wird in Gleichung (4.72) statt der dualen Einheitslast der approximierte Fehler $\bar{\mathbf{e}}$ verwendet.

$$\mathcal{D}_{TG} = \frac{-\bar{\mathbf{e}}(t_N)}{\|\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)\|} H(t - t_N) \quad (4.80)$$

Die Belastung wird in die Fehlergleichung (4.58) eingesetzt und partiell integriert.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{e}})_I = \int_{t_0}^{t_N} \frac{-\bar{\mathbf{e}}(t_N)}{\|\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)\|} H(t - t_N) \dot{\mathbf{e}} dt \approx \|\mathbf{e}(t_N)\| \quad (4.81)$$

Damit kann der Fehler $\|\mathbf{e}(t_N)\|$ in der L_2 -Norm der Verschiebungen zum Zeitpunkt t_N approximiert werden.

Der Fehler in der L_2 -Norm der Geschwindigkeiten wird analog zum Fehler in der L_2 -Norm der Verschiebungen berechnet. Statt der Einheitslast wird die approximierte L_2 -Norm der Geschwindigkeiten in (4.64) eingesetzt.

$$\mathcal{D}_{TG} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)}{\|\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)\|} \delta_{t_N}^d \quad (4.82)$$

Die Last wird in die Fehlergleichung (4.58) eingesetzt.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{e}})_I = \int_{t_0}^{t_N} \frac{\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)}{\|\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)\|} \delta_{t_N}^d \dot{\mathbf{e}} dt \approx \|\dot{\mathbf{e}}(t_N)\| \quad (4.83)$$

Es ergibt sich der approximierte Fehler $\|\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t_N)\|$ in der L_2 -Norm der Geschwindigkeiten.

Räumlicher Fehler Die Fehlerermittlung wird im folgenden auf die Raumrichtung erweitert. Wird die Belastung in den Gleichungen (4.64), (4.72), (4.77) bzw. den Gleichungen für den Fehler in der L_2 -Norm (4.80), (4.82) über das gesamte Gebiet Ω definiert, dann wird der mittlere Fehler im Gebiet Ω bestimmt. Der durchschnittliche Geschwindigkeitsfehler $\dot{\mathbf{e}}_\Omega$ im Gebiet Ω kann mit der Dirac-Delta Last $\mathcal{D}_{TG} = \delta_{t_N}^d$, die im Gebiet Ω zum Zeitpunkt t_N aufgebracht wird, ermittelt werden.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{e}})_Q = \int_{t_0}^{t_N} (\delta_{t_N}^d, \dot{\mathbf{e}})_\Omega dt = (\mathbf{1}, \dot{\mathbf{e}}(t_N))_\Omega = \dot{\mathbf{e}}_\Omega(t_N) \quad (4.84)$$

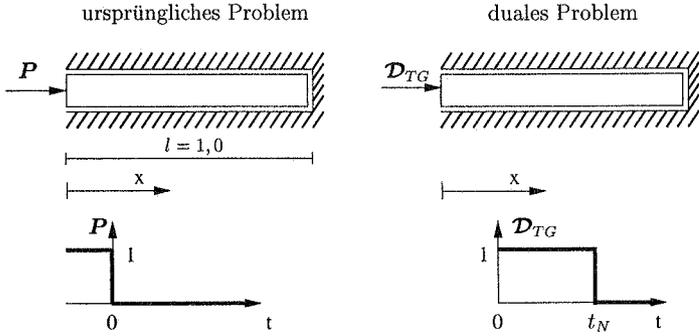


Abbildung 4.8: Stabproblem: ursprüngliches Problem und duales Problem für Fehler in der Verschiebung bei $x = 0$

Mit der Heaviside-Last $\mathcal{D}_{TG} = H(t - t_N)$ zum Zeitpunkt t_N kann der mittlere Verschiebungsfehler e_Ω im Gebiet Ω berechnet werden.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_Q = \int_{t_0}^{t_N} (H(t - t_N), \dot{e})_\Omega dt = (1, -e(t_N))_\Omega = -e_\Omega(t_N) \quad (4.85)$$

Ebenso kann mit einer über das Gebiet Ω konstanten Last der durchschnittliche Verschiebungsfehler $e_\Omega(t_N)$ berechnet werden.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_Q = \int_{t_0}^{t_N} (1 - H(t - t_N), \dot{e})_\Omega dt = e_\Omega(t_N) \quad (4.86)$$

Der approximierte Fehler in der L_2 -Norm $\|\dot{e}_\Omega(t_N)\|$ und $\|e_\Omega(t_N)\|$ wird entsprechend mit den Gleichungen (4.81) und (4.83) und den approximierten Fehlerverteilungen \check{e} und \check{e}^* bestimmt.

Fehler für \mathbf{x}_0 Der Fehler an einem Punkt \mathbf{x}_0 im Raum kann durch die Anwendung des Dirac-Delta Operators $\delta_{\mathbf{x}_0}^d$ in räumlicher Richtung berechnet werden.

$$\mathcal{D}_{TG} = \delta^d(x - x_0) = \delta_{x_0}^d \quad (4.87)$$

Der Fehler in der Geschwindigkeit $\dot{e}(\mathbf{x}_0, t_N)$ zum Zeitpunkt t_N an einem Punkt \mathbf{x}_0 wird mit der Dirac-Delta Last $\mathcal{D}_{TG} = \delta_{x_0}^d \delta_{t_N}^d$ bestimmt.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_Q = (\delta_{x_0}^d \delta_{t_N}^d, \dot{e})_Q = \dot{e}(\mathbf{x}_0, t_N) \quad (4.88)$$

Um den Fehler in der Verschiebung $e(\mathbf{x}_0, t_N)$ zu berechnen, wird in zeitlicher Richtung die Heaviside-Last und in räumlicher Richtung die Dirac-Delta-Last aufgebracht.

$$\mathcal{D}_{TG} = H(t - t_N) \delta_{x_0}^d \quad (4.89)$$

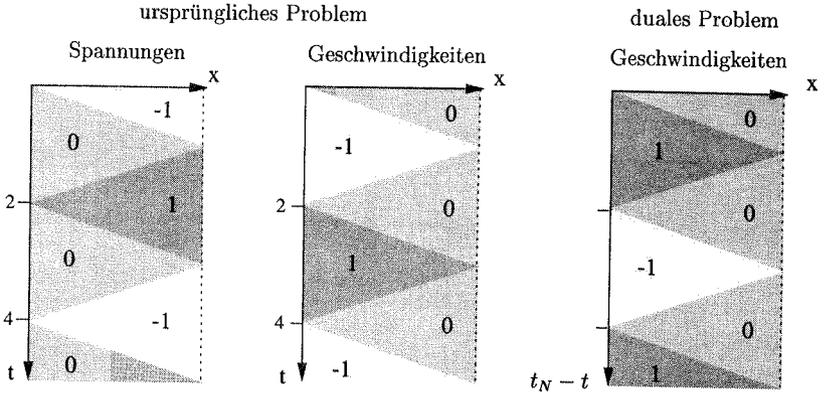


Abbildung 4.9: Spannungen und Geschwindigkeiten des ursprünglichen Problems und Geschwindigkeiten des dualen Problems

Eingesetzt in die Fehlergleichung (4.58) ergibt sich

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_Q = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_N} -H(t - t_N) \delta_{x_0}^d \dot{e} dt d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{x_0}^d e(t_N) d\Omega = e(x_0, t_N) \quad (4.90)$$

Alternativ kann eine räumliche Punktlast $\mathcal{D}_{TG} = \delta_{x_0}^d (1 - H(t - t_N))$, die in zeitlicher Richtung konstant ist, aufgebracht werden, um den Verschiebungsfehler zu bestimmen.

$$(\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_Q = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_N} (1 - H(t - t_N)) \delta_{x_0}^d \dot{e} dt d\Omega = e(x_0, t_N) \quad (4.91)$$

Numerisches Beispiel Auf den Stab mit der Länge $l = 1$ in Abbildung (4.8) wird eine Einheitslast aufgebracht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Stab entlastet. Der Fehler in der Verschiebung an dem Lastangriffspunkt ($x_0 = 0$) soll bestimmt werden. Das duale System wird dazu mit der Last $\mathcal{D}_{TG} = \delta_{x_0}^d H(t - t_N)$ belastet. Das ursprüngliche Problem wird mit räumlich linearen Ansatzfunktionen und zeitlich quadratischen Ansätzen diskretisiert ($\Delta t = 0,005$; $h = 0,0125$).

Die analytische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit hängt von den Materialgrößen ab. Die Materialparameter sind so gewählt ($E = 1$; $\rho = 1$), daß sich eine Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von $c = 1$ ergibt. In dem ursprünglichen System breitet sich die Spannung $|\sigma| = 1$ mit der Geschwindigkeit $c = 1,0$ aus. In Abbildung (4.9) ist die Spannungsverteilung des Stabes über dem Raum-Zeit Gebiet dargestellt. Die räumliche Koordinate x verläuft horizontal, während die Zeitachse t vertikal verläuft. Die Geschwindigkeit $|\dot{u}| = 1$ breitet sich ebenfalls mit der Wellengeschwindigkeit c im Stab aus. Das duale Problem wird analytisch gelöst. Die Geschwindigkeitsverteilung \dot{z} des dualen Problems

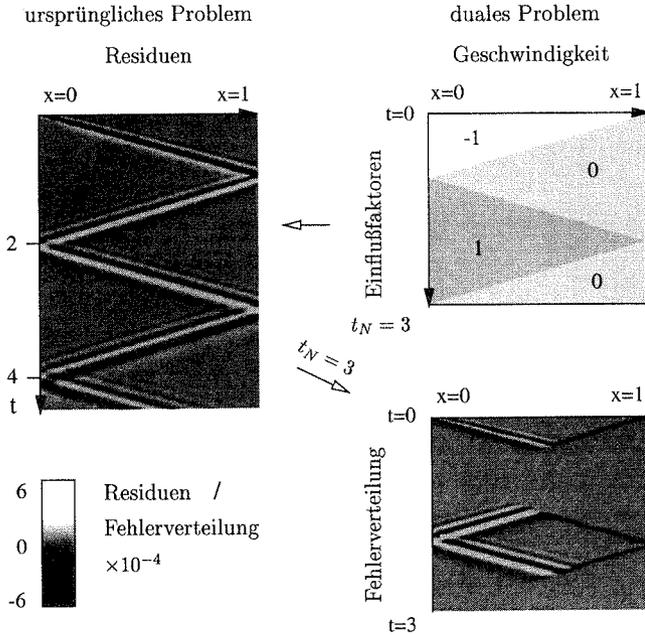


Abbildung 4.10: Stabproblem: Residuen des ursprünglichen Problems; Geschwindigkeit des dualen Problems, Fehlerverteilung zum Zeitpunkt $t_N = 3,0$ für Verschiebungsfehler $e(x_0, t_N)$

ist in Abb. (4.9) dargestellt. Infolge der konstanten Belastung des dualen Problems wandert eine Geschwindigkeitswelle mit $|\dot{z}| = 1$ durch den Stab.

Die Lösung \dot{z} des dualen Problems zum Zeitpunkt $t_N = 3,0$ ist in Abb. (4.10) dargestellt. Das duale Problem wird zur Fehlerermittlung mit dem ursprünglichen Problem gekoppelt. Der Verlauf der Residuen \bar{R} des ursprünglichen Problems über das Raum-Zeit Gebiet ist in Abb. (4.10) oben links dargestellt. Die Residuen sind entlang der Stoßfront groß, während sie im übrigen Gebiet ungefähr null sind. Die Residuen \bar{R} werden elementweise mit der Lösung \dot{z} des dualen Problems (Abb. 4.10 oben rechts) gewichtet. Dadurch ergibt sich die Fehlerverteilung (Abb. 4.10 unten rechts) für den Verschiebungsfehler zum Zeitpunkt $t_N = 3,0$ bei $x = 0$. An der Fehlerverteilung erkennt man die räumlichen und zeitlichen Gebiete, die einen Beitrag zu dem Fehler in der Verschiebung $e(x_0, t_N)$ zum Zeitpunkt t_N leisten. In den Bereichen, wo die Lösung des dualen Problems null ist, haben die Residuen keinen Einfluß auf den Fehler, somit trägt nur ein Teil der Residuen ($0 \leq x \leq 0,5$) zum Fehler (siehe Abb. 4.10 unten links) bei.

Die Fehleranteile der einzelnen Elemente in Abb. (4.10) werden zu dem Fehler in der

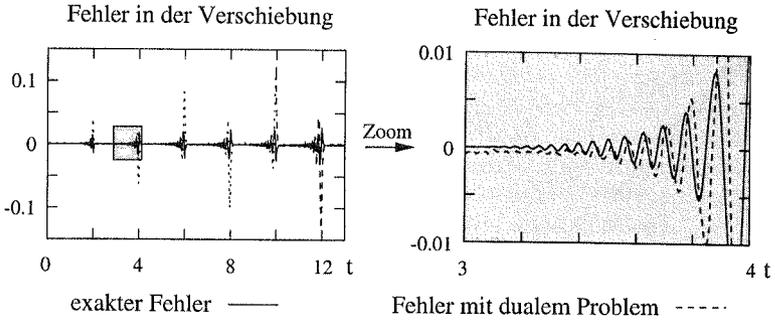


Abbildung 4.11: Stabproblem: Fehler in der Verschiebung ($\Delta t = 0,005$; $h = 0,0125$)

Verschiebung zum Zeitpunkt t_N aufsummiert. Der exakte Fehler wird aus der Differenz der analytischen Lösung und der diskreten Lösung berechnet. Der zeitliche Verlauf des exakten und des berechneten Fehlers ist in Abbildung (4.11) dargestellt. In dem rechten Schaubild ist ein Abschnitt des Fehlerverlaufes vergrößert dargestellt. Sowohl der exakte wie auch der berechnete Fehler besitzen dieselbe Periodizität. Der berechnete Fehler stimmt gut mit dem exakten Fehler überein. Der Fehler summiert sich, während der Sprung durch den Stab läuft, zunächst auf. Erst wenn wieder ein konstanter Spannungsverlauf bzw. Geschwindigkeitsverlauf (z.B. bei $t = 2$, $t = 4$) vorhanden ist, den die FE-Methode darstellen kann, geht der Fehler auf Null zurück.

Einfluß der numerischen Zeitintegration und der diskreten Massenverteilung Unabhängig von der Art der Belastung des dualen Problems weicht der berechnete Fehler in den vorherigen Beispielen (Abb. 4.6 und Abb. 4.7) von dem tatsächlichen Fehler ab. Bei gedämpften Problemen ist der Unterschied zwischen den Fehlerverläufen nicht sehr groß. In Abbildung (4.12) wird der Einmassenschwinger ($M = 1$; $C = 0$; $K = 1$) mit einer Anfangsverschiebung ($\bar{u}_0 = 1$; $\dot{\bar{u}}_0 = 0$) untersucht. Dargestellt ist der exakte

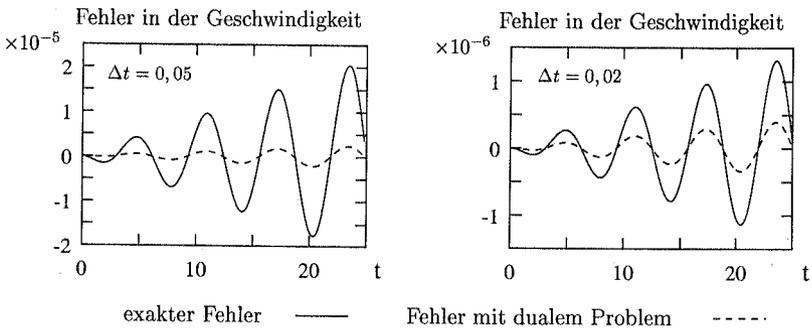


Abbildung 4.12: Einfluß der Zeitschrittgröße auf den Fehlerverlauf

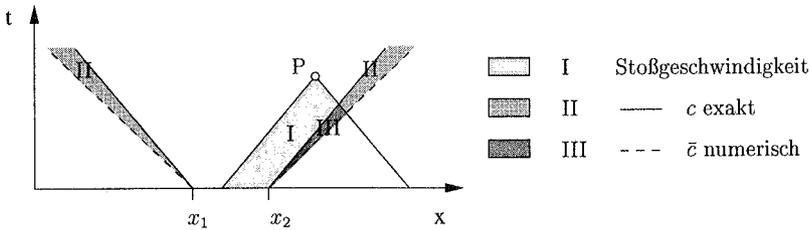


Abbildung 4.13: Modellbeispiel für Einfluß der Numerik auf den Fehler

und der berechnete Verlauf des Fehlers in der Geschwindigkeit für unterschiedliche Zeitschrittgrößen. Mit kleiner werdender Zeitschrittgröße nähert sich der berechnete Fehler dem exakten Fehler an.

Die Abweichung von dem exakten Fehler hat im allgemeinen zwei Ursachen: die numerischen Eigenschaften des Zeitalgorithmus und die Approximation der Massenverteilung des kontinuierlichen Systems [10]. Die Diskretisierung der Massenverteilung kann gesondert von der Diskretisierung der Steifigkeitsmatrix durch z.B. „lumped“ oder konsistente Massenmatrizen erfolgen. Beide Einflüsse können durch den berechneten Fehler, der den Diskretisierungsfehler approximiert, nicht erfaßt werden. Eine Ursache für die Abweichungen des berechneten Fehlers von dem exakten Fehler sind die numerischen Eigenschaften des DTG-Verfahrens, die im Anhang B untersucht werden. Eine numerische Eigenschaft ist der Periodenfehler, der in Abbildung (B.4) dargestellt ist. Der Periodenfehler $T_p^h / \underline{T}_p^h$ nimmt mit zunehmender dimensionsloser Schrittweite $\Delta t / \underline{T}_p^h$ zu, d.h. die Periodenlänge der numerischen Lösung T_p^h wächst im Vergleich zu der exakten Periodenlänge des diskreten Systems \underline{T}_p^h an. Der zweite Effekt ist die Periodenverkürzung durch Verwendung von konsistenten Massenmatrizen, s. Hughes [46]. Die exakte Periodenlänge \underline{T}_p^h des diskretisierten Systems, d.h. ohne numerische Berechnung, ist kleiner als die exakte Periodenlänge T_p des kontinuierlichen Problems. Je gröber ein System diskretisiert ist, desto größer ist dieser Fehler.

Im folgenden werden die Auswirkungen der Veränderung der Periodenlänge auf die Fehlerberechnung an dem Modellbeispiel in Abb. (4.13) veranschaulicht. In dem Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ wird eine Anfangsverschiebung aufgebracht. Es breiten sich zwei Wellen entlang der Charakteristiken aus. An dem Punkt P soll der Fehler in einer bestimmten Größe bestimmt werden. Der Abhängigkeitsbereich des Punktes P wird mit der analytischen Lösung bestimmt. Die durchgezogene Linie stellt die exakte analytische Charakteristik mit der analytischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c dar. Zunächst wird das ursprüngliche Problem analytisch gelöst, wodurch sich der Einflußbereich des ursprünglichen Problems, der durch die durchgezogene Linie begrenzt wird, ergibt. Wird die analytische Lösung des ursprünglichen Problems durch die numerische Lösung ersetzt, verändern sich die Charakteristiken. Die Charakteristik mit der numerischen Stoßgeschwindigkeit ist

durch die gestrichelte Linie in Abb. (4.13) dargestellt. Für die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit \bar{c} gilt $\bar{c} \neq c$. Da der Frequenzfehler und der Fehler durch die Massendiskretisierung einen gegensätzlichen Einfluß auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit \bar{c} haben, kann a-priori keine Aussage über die Richtung der Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c} > c$ oder $\bar{c} < c$ gemacht werden. Nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu, so vergrößert sich der Einflußbereich des ursprünglichen Problems um den Bereich *II* (s. Abb. 4.13). Dadurch wird der Einflußbereich auf den lokalen Fehler um die Fläche *III* größer. Der Fehler im Punkt P kann nicht mehr exakt dargestellt werden.

Um den Zusammenhang und die Unterschiede zwischen der lokalen Fehlerbestimmung in der Dynamik zu der in der Statik zu verdeutlichen, wird im folgenden gezeigt, wie der lokale Fehler bei Problemen in der geometrisch und materiell linearen Statik bestimmt werden kann.

Statik Zur Bestimmung eines bestimmten Fehlers wird – wie in der Dynamik – von dem ursprünglichen Problem (4.14) und dem dualen Problem (4.45) ausgegangen. Bei dem dualen Problem werden die Funktionen v aus dem Raum der Ansatzfunktionen \tilde{S} durch den Fehler $e \in \tilde{S}$ ersetzt. In das duale Problem wird das Lastfunktional $\tilde{D}(e) = (e, \tilde{\mathcal{D}})_{\Omega}$ eingesetzt. Die schwachen Formulierungen des ursprünglichen und des dualen Problems lauten dann

$$\tilde{B}(z, e) = (\tilde{\mathbf{R}}, z)_{\Omega} \quad (4.92)$$

$$\tilde{B}^*(e, z) = (e, \tilde{\mathcal{D}})_{\Omega} \quad (4.93)$$

Aus der Definition des dualen Problems $\tilde{B}(z, e) = \tilde{B}^*(e, z)$ (4.44) ergibt sich der folgende Zusammenhang.

$$(e, \tilde{\mathcal{D}})_{\Omega} = (\tilde{\mathbf{R}}, z)_{\Omega} \quad (4.94)$$

In der Strukturmechanik ist die Gleichung (4.94) als der Satz von Betti–Maxwell bekannt. Die Arbeit der Last $\tilde{\mathcal{D}}$ an der Lösung e des ursprünglichen Problems (4.92) entspricht der Arbeit der Belastung $\tilde{\mathbf{R}}$ des ursprünglichen Problems an der Lösung z des dualen Problems (4.93). Das Prinzip von Betti–Maxwell wird bei der Ermittlung von Einflußlinien und –flächen in der Strukturmechanik angewendet. In Bezug auf Fehlerschätzung wurde das Prinzip schon von Tottenham [93] und später u.a. von Johnson et al. [55], Babuška et al. [7], Rannacher et al. [19][75] und Cirak et al. [26] verwendet. Die schwache Form der Fehlergleichung lautet:

$$a(z, e)_{\Omega} = (\tilde{\mathcal{D}}, e)_{\Omega} \quad (4.95)$$

Wahl der dualen Last Wie in der Dynamik bestimmt auch in der Statik die duale Last $\tilde{\mathcal{D}}$ die physikalische Fehlergröße. Zunächst wird das duale Problem (4.93) mit einer konstanten Last über das ganze Gebiet Ω belastet.

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \quad \text{für } x \in \Omega \quad (4.96)$$

Wird diese Belastung in die Fehlergleichung (4.95) eingesetzt,

$$(\tilde{\mathcal{D}}, \mathbf{e})_\Omega = (\mathbf{1}, \mathbf{e})_\Omega = e_\Omega \quad (4.97)$$

ergibt sich der durchschnittliche Verschiebungsfehler e_Ω im Gebiet Ω . Wie zuvor gezeigt wurde, kann auch in der Dynamik der Verschiebungsfehler mit Hilfe einer Kraft ermittelt werden. Für den Fehler in der Verschiebung $e(\mathbf{x}_0)$ an dem Punkt \mathbf{x}_0 wird die Dirac-Delta Funktion $\delta_{\mathbf{x}_0}^d$ verwendet.

$$\tilde{\mathcal{D}} = \delta_{\mathbf{x}_0}^d \quad (4.98)$$

In die Gleichung (4.95) eingesetzt, ergibt sich der Verschiebungsfehler an dem Punkt \mathbf{x}_0 .

$$(\tilde{\mathcal{D}}, \mathbf{e})_\Omega = \int_\Omega \delta_{\mathbf{x}_0}^d \mathbf{e} \, d\Omega = e(\mathbf{x}_0) \quad (4.99)$$

Der Fehler in der L_2 -Norm kann analog zu dem Vorgehen in der Dynamik durch das Ersetzen der Einheitslast mit dem Fehler \mathbf{e} berechnet werden. Es entsteht ein nichtlineares Problem, da die Belastung $\tilde{\mathcal{D}}$ von dem Fehler \mathbf{e} abhängig ist. Da der Fehler \mathbf{e} a-priori nicht bekannt ist, wird ein approximierter Fehler $\tilde{\mathbf{e}}$ verwendet, s. Rannacher [74] und Suttmeier [89].

$$\tilde{\mathcal{D}} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}}{\|\tilde{\mathbf{e}}\|} \quad (4.100)$$

Die Belastung wird in die Fehlergleichung (4.95) eingesetzt und führt auf den approximierten Fehler in der L_2 -Norm $\|\mathbf{e}\|$.

$$(\tilde{\mathcal{D}}, \mathbf{e})_\Omega = \left(\frac{\tilde{\mathbf{e}}}{\|\tilde{\mathbf{e}}\|}, \mathbf{e} \right)_\Omega \approx \|\mathbf{e}\| \quad (4.101)$$

Die Belastung mit einer Kraft führt in der Statik, wie auch in der Dynamik, auf den Fehler in den Verschiebungen. Somit können andere Lastfälle der Statik auf die Dynamik übertragen werden. In der Statik wird z.B. der Fehler in den Spannungen durch das Aufbringen einer Einheitsdehnung berechnet. Diese Belastung kann auf die Dynamik übertragen werden. In Kapitel 5.3.3.3 wird gezeigt, wie der Einheitsdehnungszustand für verschiedene Spannungsgrößen im adaptiven Algorithmus gefunden werden kann. Weitere duale Lastfälle der Statik sind in der Literatur, u.a. Rannacher et al. [76][89], Cirak et al. [27], zu finden.

Im Vergleich zur Dynamik kann der lokale Fehler in der Statik mit dualen Problemen genauer berechnet werden [89][27], da für den lokalen Fehler die Residuen nur einmal mit der Lösung des dualen Problems gekoppelt werden müssen. In der Dynamik hingegen hängt das duale Problem auch von der Zeit ab, weshalb die Koppelung über Raum und Zeit erfolgt. Dadurch können die Ungenauigkeiten bei der Fehlerbestimmung exponentiell in zeitlicher Richtung zunehmen. Zusätzlich pflanzen sich die Frequenzfehler und die Modellierungsfehler der Massenmatrix in zeitlicher Richtung fort.

4.4 Fehlerindikator

In dem vorherigen Kapitel wurde gezeigt, wie die duale Last \mathcal{D} in der Dynamik und in der Statik gewählt werden muß, um den Fehler in einer gewissen physikalischen Größe zu bestimmen. Im vorherigen Kapitel war für die einfachen Beispiele die Lösung des dualen Problems bekannt. Im allgemeinen ist jedoch die duale Lösung unbekannt und der Einfluß des dualen Problems auf das ursprüngliche Problem muß approximiert werden. Der Fehler wird dadurch nur näherungsweise bestimmt. Die Vorgehensweise wird im folgenden erläutert.

Es wird von dem ursprünglichen Problem (4.52) ausgegangen. Mit Hilfe der Galerkin Orthogonalität (4.3) wird die diskrete Lösung \mathbf{z}^h eingeführt.

$$B_{TG}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = B_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) = D_{TG}(\mathbf{e}) \quad (4.102)$$

Die Gleichung wird entsprechend der Gleichung (4.5) umgeformt.

$$\begin{aligned} B_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) &= B_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{u}) - B_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{u}^h) \\ &= L_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h) - B_{TG}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{u}^h) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Die Definitionen der Linear- und Bilinearform werden eingesetzt und die Residuen (4.7) und Sprungterme (4.8-4.10) verwendet. Dies führt auf die Gleichung (4.6).

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^K \sum_{n=1}^N [(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{R})_{Q_n^e} + (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{J}_s)_{\gamma^*}] \\ &+ \sum_{e=1}^K \left[\sum_{n=2}^N [((\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_{n-1}^+), \mathbf{J}_{t_n})_{\Omega_n^e} + (\nabla(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_{n-1}^+), \mathbf{J}_{t_n})_{\Omega_n^e}] \right. \\ &\quad + ((\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{u}}^h(t_0^+))_{\Omega^e} + a((\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_0^+), \mathbf{u}^h(t_0^+))_{\Omega^e} \\ &\quad \left. - ((\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_0^+), \rho \dot{\mathbf{u}}_0^h)_{\Omega^e} - a((\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0^h)_{\Omega^e} \right] = D_{TG}(\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Die Residuen des ursprünglichen Problem werden mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_s = \int_s \mathbf{a} \mathbf{b} ds \leq \left[\int_s \mathbf{a}^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_s \mathbf{b}^2 ds \right]^{1/2} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \quad (4.105)$$

von der Lösung des dualen Problems getrennt.

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^K \sum_{n=1}^N [\|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{Q_n^e} \|\mathbf{R}\|_{Q_n^e} + \|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{\gamma^*} \|\mathbf{J}_s\|_{\gamma^*}] \\ &+ \sum_{e=1}^K \left[\sum_{n=2}^N [\|(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_{n-1}^+)\|_{\Omega_n^e} \|\mathbf{J}_{t_n}\|_{\Omega_n^e} + \|\nabla(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_{n-1}^+)\|_{\Omega_n^e} \|\mathbf{J}_{t_n}\|_{\Omega_n^e}] \right. \\ &\quad + \|(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_0^+)\|_{\Omega^e} \|\rho \dot{\mathbf{u}}^h(t_0^+)\|_{\Omega^e} + \|\nabla(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_0^+)\|_{\Omega^e} \|\mathbf{u}^h(t_0^+)\|_{\Omega^e} \\ &\quad \left. - \|(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_0^+)\|_{\Omega^e} \|\rho \dot{\mathbf{u}}_0^h\|_{\Omega^e} - \|\nabla(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_0^+)\|_{\Omega^e} \|\bar{\mathbf{u}}_0^h\|_{\Omega^e} \right] \geq D_{TG}(\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (4.106)$$

Da die Lösung des dualen Problems nicht bekannt ist, muß der Fehler des dualen Problems $\dot{z} - \dot{z}^h$ abgeschätzt bzw. approximiert werden. Im folgenden werden verschiedene, aus der Literatur bekannte, Methoden zur Approximation von $\dot{z} - \dot{z}^h$ gezeigt. Da es für hyperbolische partielle Differentialgleichungen (PDG) bisher nur sehr wenig Literatur zur Fehlerabschätzung mit dualen Problemen gibt, werden im folgenden Methoden aufgeführt, die von anderen, d.h. von elliptischen und parabolischen, PDG bekannt sind und dort angewandt wurden.

Stabilitätskonstante Mit der Stabilitätskonstante C_s kann die Lösung des dualen Problems \mathbf{z} in der L_2 -Norm der Verschiebungen durch die Belastung $D_{TG}(\mathbf{e})$, die eine Funktion des Verschiebungsfehlers ist, abgeschätzt werden, u.a. Eriksson et al. [35] und Süli et al. [88].

$$\|\mathbf{z}\| \leq C_s \|D_{TG}(\mathbf{e})\| \quad (4.107)$$

Die Stabilitätskonstante mißt damit die Sensitivität der Lösung des Problems, d.h. das Verhältnis der Fehler zu der Lösung. Ist die Stabilitätskonstante groß, so ist die Lösung des Problems stark von der Belastung mit den Fehlern abhängig. So kann z.B. bei zeitabhängigen Problemen die Lösung \mathbf{z} infolge der Belastung durch die Fehler mit der Zeit sehr stark anwachsen. Derartige Probleme sind nicht stabil. Die Stabilitätskonstante hängt im allgemeinen von dem speziellen Problem, das approximiert werden soll, ab. Für bestimmte Klassen von Problemen wird dieselbe Stabilitätskonstante verwendet. So wird zum Beispiel für elliptische Probleme die Stabilitätskonstante $C_s = 1$ gewählt, da die Abschätzung (4.107) immer erfüllt ist. In der Regel ist die obere Schranke der Stabilitätskonstante jedoch nicht für alle Probleme eines Problemtyps identisch. Die analytischen oberen Schranken der Stabilitätskonstanten sind meist zu ungenau, um sie zur effizienten Fehlerkontrolle zu verwenden. Daher wird die Stabilitätskonstante oft numerisch, indem das Problem mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen berechnet wird, approximiert. Je genauer die Stabilitätskonstante bestimmt wird, desto zuverlässiger ist die Fehlerabschätzung. Gleichzeitig steigt jedoch der numerische Aufwand, um die Stabilitätskonstanten zu bestimmen.

In der Regel ist die Stabilitätskonstante bei zeitabhängigen Problemen nicht beschränkt. Eriksson et al. [35] zeigen, wie die Konstante bei ungedämpften Problemen exponentiell anwächst. Da C_s keine obere Schranke besitzt, ist keine Fehlerkontrolle über einen beliebig langen Zeitraum möglich. Wird die exponentiell zunehmende Stabilitätskonstante für die Abschätzung des dualen Problems verwendet, so wird in der Regel die Lösung des dualen Problems und damit der Einfluß auf die lokale Fehlergröße des ursprünglichen Problems überschätzt. Die Abschätzung des dualen Problems mit Stabilitätskonstanten ist sehr grob, da das gesamte duale Problem durch eine einzige, analytisch oder numerisch bestimmte Konstante ersetzt wird. Die Verwendung von Stabilitätskonstanten eignet sich daher nicht zur Berechnung von effizienten Verfeinerungsindikatoren, s. Becker et al. [19][74], da die genaue Information über die Einflußverteilung des lokalen Fehlers verlohrengeht. Die Fehlerabschätzungen mit Hilfe von Stabilitätskonstanten sind mathematisch

orientiert, u.a. Süli et al. [87][88] (hyperbolische Gleichungen), Johnson et al. [55] (elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen), Eriksson et al. [35] [37] (elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen).

Direkte Auswertung Eine genaue Fehlerverteilung erhält man durch die direkte Auswertung des gekoppelten Problems. Es wird keine Abschätzung mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung vorgenommen, d.h. die Berechnung der Residuen des ursprünglichen Problems wird nicht von der Bestimmung des Diskretisierungsfehlers des dualen Problems getrennt. Die Fehlergleichung (4.104) wird direkt ausgewertet. Becker et al. [19] haben verschiedene Methoden zur Berechnung des Approximationsfehlers $z - z^h$ untersucht.

- **Approximation mit höheren Ansatzordnungen** Das duale Problem wird mit Ansätzen höherer Ordnung gelöst. Dadurch steigt der numerische Aufwand, da das duale Problem zweimal gelöst werden muß.
- **Approximation mit Interpolationen höherer Ordnung** Auf einem Patch von mehreren Elementen werden lokale Interpolationen höherer Ordnung verwendet.
- **Approximation mit Differenzenquotienten höherer Ordnung** Die Fehler werden mit Differenzenquotienten höherer Ordnung approximiert.
- **Approximation mit lokalen Problemen** Die Fehler werden durch das Lösen von lokalen Problemen mit Polynomansätzen höherer Ordnung approximiert. In der Statik können z.B. lokale Neumannprobleme oder Dirichletprobleme gelöst werden.
- **Approximation mit glättungsbasierten Methoden** Die Fehler können ebenso mit lokalen glättungsbasierten Methoden, z.B. der SPR–Technik von Zienkiewicz–Zhu, angenähert werden.

Die Ergebnisse der Untersuchungen von Becker et al. [19] an Hand der Poisson–Gleichung werden kurz zusammengefaßt. Wie erwartet ist der Fehler bei der Berechnung von $z - z^h$ mit Ansätzen höherer Ordnung sehr genau. Der numerische Aufwand ist jedoch sehr groß, weshalb diese Methode kaum angewendet wird. Auch bei der Fehlerberechnung mit Hilfe von lokalen Problemen mit Ansätzen höherer Ordnung können gute Ergebnisse erzielt werden. Jedoch steigt der numerische Aufwand durch das Lösen der lokalen Probleme. Die Approximationen mit den lokalen Interpolationen und den Differenzenquotienten höherer Ordnung sind in der Effektivität vergleichbar. Ein Nachteil bei der Verwendung von Differenzenquotienten ist, daß zusätzlich Interpolationskonstanten bestimmt werden müssen. Für effiziente Verfeinerungsindikatoren ist die Approximation von $z - z^h$ mit Interpolationen bzw. Differenzenquotienten höherer Ordnung ausreichend, s. Becker et al. [19], Rannacher et al. [76] und Cirak et al. [28].

Für die Wellengleichung (hyperbolisches PDG–System erster Ordnung) verwendet Bangerth [10] Ansatzfunktionen höherer Ordnung im Raum. In zeitlicher Richtung wird

dieselbe Ordnung bzw. dasselbe Zeitintegrationsverfahren (Crank–Nicolson oder DTG–Methode mit linearen zeitlichen Ansätzen) benutzt. Da die Testfunktionen bei der Crank–Nicolson Methode in der Zeit konstant sein müssen, wird die diskrete duale Lösung in der Zeit in den Raum mit Funktionen niedriger Ordnung (konstanter Verlauf) interpoliert [12]. Das ursprüngliche Problem wird nicht von dem dualen Problem getrennt, sondern der Fehler wird direkt durch die Koppelung des ursprünglichen mit dem dualen Problem bestimmt. Zwar können durch die direkte Auswertung der Fehlergleichung gute Abschätzungen gewonnen werden, jedoch ist der numerische Mehraufwand nicht gerechtfertigt, s. Bangerth [10]. Die gesamte Lösung des ursprünglichen und des dualen Problems muß gespeichert werden und für jeden Zeitschritt und für jeden Knoten vollständig neu miteinander gekoppelt werden. Zur Ermittlung eines guten Fehlerindikators ist es ausreichend, die Approximationen elementweise auszuwerten. Dies führt auf die getrennte Auswertung der Residuen des ursprünglichen Problems und des Diskretisierungsfehlers des dualen Problems.

Getrennte Auswertung Die Lösung des dualen Problems \mathbf{z} wird mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung von den Residuen $\bar{\mathbf{R}}$ des ursprünglichen Problems getrennt. Die Residuen des ursprünglichen Problems werden getrennt von dem Fehler des dualen Problems berechnet und müssen nur noch elementweise gespeichert werden. Das ursprüngliche und das duale Problem werden dann elementweise gekoppelt. Durch die Abschätzung mit Hilfe der Cauchy–Schwarz Ungleichung kann der Fehler nicht mehr genau berechnet werden. Die algorithmische Umsetzung vereinfacht sich jedoch und der numerische Aufwand nimmt ab. Die getrennte Auswertung wurde für unterschiedliche Probleme verwendet, u.a. für die Elastostatik [93][19][25], Elastoplastizität [76][28], Wärmeleitung [42] und Navier–Stokes [17]. Die aufgeführten Techniken für die direkte Auswertung der Fehlergleichung können ebenfalls bei der getrennten Berechnung zur Approximation des Fehlers des dualen Problems $\mathbf{z} - \mathbf{z}^h$ verwendet werden.

Bei zeitabhängigen Problemen kann zusätzlich zwischen folgenden Techniken unterschieden werden:

- Interpolationsabschätzung
- Interpolationsabschätzung mit Projektionseigenschaften

Bei der Interpolationsabschätzung werden räumliche und zeitliche Ableitungen höherer Ordnung zur Approximation des Fehlers verwendet, s. Hartmann [42].

Bei der Interpolation mit Projektionseigenschaft wird eine spezielle Interpolation verwendet, d.h. eine Interpolation, die global stetig ist und L_2 –Projektionseigenschaft im Raum und in der Zeit besitzt. An dem Beispiel von bilinearen Elementen soll das Vorgehen, wie die spezielle Interpolation Π_s^* bestimmt werden kann, kurz erläutert werden. Dazu werden aus jeweils vier Elementen sogenannte Makroelemente \tilde{K} gebildet, wie in Abb. (4.14) dargestellt ist. Auf den Makroelementen wird nun die neue Interpolation $\Pi_s^*(\tilde{K})$ bestimmt,

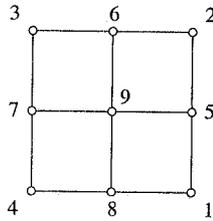


Abbildung 4.14: Makroelement \tilde{K} mit Numerierung der Knoten $i = 1, \dots, 9$

die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $(\Pi_s^*(\tilde{K}) \mathbf{u})_i = u_i$ für $i = 1, \dots, 4$
2. $(\Pi_s^*(\tilde{K}) \mathbf{u})_i = \frac{1}{2}(u_i^{N_1} + u_i^{N_2})$ für $i = 5, \dots, 8$
3. $(\mathbf{u} - \Pi_s^*(\tilde{K}) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\tilde{K}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

wobei die Knoten des Makroelementes mit i durchnummeriert werden und die Werte an den benachbarten Knoten von den Mittelknoten i mit $(\cdot)_i^{N_1}$ und $(\cdot)_i^{N_2}$ bezeichnet werden. Durch die Eigenschaften 1. und 2. wird erreicht, daß die Interpolation global stetig ist. Damit bildet diese Interpolation wieder in den Raum der stetigen Ansatzfunktionen ab. Die 3. Bedingung stellt die Projektionseigenschaft dar. Diese wird erfüllt, indem der Wert an dem Knoten $i = 9$ mit Hilfe der 3. Gleichung berechnet wird. Durch die Einführung dieser lokalen Interpolation $\Pi_s^*(\tilde{K})$ kann eine lokale Interpolationsabschätzung durchgeführt werden. Die normale lokale Interpolation führt auf eine global unstetige Abbildung. Sie besitzt daher keine Projektionseigenschaften und läßt keine lokale Interpolationsabschätzung in Raum und Zeit zu [42]. Durch die Einführung der lokalen Interpolation mit Projektionseigenschaften kann die Interpolation in einen räumlichen und einen zeitlichen Anteil aufgespalten werden, da die zeitlichen und räumlichen Projektionen in den verwendeten Räumen orthogonal zueinander sind. Die Projektionseigenschaften ermöglichen die Trennung der Terme nach der Zeitschrittgröße Δt und der räumlichen Elementgröße h . Dadurch können Verfeinerungsindikatoren für die räumliche und zeitliche Netzanpassung gebildet werden. Zusätzlich können durch die Projektionseigenschaften geeignete Terme in das ursprüngliche Problem eingeschoben werden und dadurch höhere Konvergenzordnungen in Δt und h erreicht werden. Damit wird sichergestellt, daß die Abschätzung schneller konvergiert als die FE-Lösung. Es muß angemerkt werden, daß die spezielle Interpolation $\Pi_s^*(\tilde{K})$ nur für die Abschätzung wichtig ist und bei der numerischen Berechnung der Fehler nicht verwendet wird, s. Hartmann [42].

Allgemeine Literatur zu den Projektions- und Interpolationseigenschaften gibt es u.a. von Hughes [46] und in Bezug auf Adaptivität u.a. von Eriksson et al. [34] und Süli [87]. Abschätzungen mit der Interpolationstheorie und der Interpolationstheorie mit Projektionseigenschaften wurden von Hartmann [42] für die Wärmeleitung eingeführt. Bangerth [10] hat die Interpolation mit Projektionseigenschaften als sinnvolle Alternative für

die direkte Koppelung vorgeschlagen. Er hat die Methode auf die Wellengleichung als Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit übertragen, ohne sie jedoch anzuwenden.

Für die Anwendung von Fehlerindikatoren ist es wichtig eine einfache, robuste Methode zur Fehlerapproximation zu entwickeln, die dem Anwender zeigt, wo die Problemereiche der numerischen Berechnung liegen. Zusätzlich soll der numerische Aufwand für die Berechnung der Fehlerindikatoren möglichst gering sein. Daher sind die im folgenden vorgenommenen Vereinfachungen bei der Entwicklung des Fehlerindikators zulässig. Die Fehler des dualen und des ursprünglichen Problems werden getrennt berechnet und elementweise gekoppelt. Einzelne Anteile des Fehlerindikators werden approximiert oder ganz vernachlässigt. Trotz dieser Vereinfachungen können sinnvolle Indikatoren berechnet werden. Becker et al. [19] weisen bereits darauf hin, daß schon grob abgeschätzte duale Probleme zu erstaunlich guten Fehlerindikatoren führen.

Im folgenden wird von der Abschätzung (4.106) ausgegangen. Die Residuen des ursprünglichen Problems und die Fehler des dualen Problems werden getrennt berechnet und elementweise gespeichert. Zur klaren Darstellung werden die Terme mit den Anfangsbedingungen nicht weiter mit aufgeführt. Die Sprungterme werden in (4.106) durch den Term $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|^*$ ersetzt, s. Becker et al. [19] und Rannacher [74].

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|^* = \max\{h^{1/2}\|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{\gamma^*}, \Delta t^{1/2}\|(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)(t_{n-1}^+)\|_{\Omega_n^e}, \Delta t^{1/2}\|\nabla(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h)(t_{n-1}^+)\|_{\Omega_n^e}\} \quad (4.108)$$

Aus Fehlerabschätzung (4.106) wird dadurch

$$\sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^K \|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{Q_n^e} \|\mathbf{R}\|_{Q_n^e} + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|^* [h^{-1/2}\|\mathbf{J}_s\|_{\gamma^*} + \Delta t^{-1/2}\|\mathbf{J}_{t_v}\|_{\Omega_n^e} + \Delta t^{-1/2}\|\mathbf{J}_{t_u}\|_{\Omega_n^e}] \geq D_{TG}(\mathbf{e}) \quad (4.109)$$

Die Finite-Element-Methode selbst stellt eine globale Projektion dar, d.h. die Orthogonalitätsbedingung zum Raum der Testfunktionen ist global erfüllt. Die lokale Interpolation auf Elementebene erfüllt nicht mehr die Orthogonalitätsbedingung. Zur Fehlerbestimmung müßte nun auf Elementebene eine Interpolation mit Projektionseigenschaften eingeführt werden, damit die Orthogonalität wieder erfüllt ist. Jedoch konvergiert die lokale finite Elemente Interpolation für $(\Delta t, h) \rightarrow 0$ gegen die Interpolation mit Projektionseigenschaften und erfüllt somit näherungsweise die Orthogonalitätsbedingung, s. Hartmann [42]. Daher wird im folgenden die lokale Interpolation der FE-Methode verwendet. Die FE-Projektion wird in eine räumliche und eine zeitliche Interpolation aufgespalten $\dot{\mathbf{z}}^h = \Pi_s \Pi_t \dot{\mathbf{z}}$. Für die räumlichen und zeitlichen Interpolationen Π_s und Π_t von \mathbf{z} gilt im Raum der Ansatzfunktionen

$$(\dot{\mathbf{z}} - \Pi_s \Pi_t \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{v})_{Q_n} = 0 \quad (4.110)$$

Die Interpolationen können auf Elementebene unter der Annahme, daß die Orthogonalitätsbedingung dort näherungsweise erfüllt ist, getrennt werden.

$$(\dot{\mathbf{z}} - \Pi_s \Pi_t \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{v})_{Q_n^e} = ((\dot{\mathbf{z}} - \Pi_s \dot{\mathbf{z}}) + \Pi_s(\dot{\mathbf{z}} - \Pi_t \dot{\mathbf{z}}), \mathbf{v})_{Q_n^e} \quad (4.111)$$

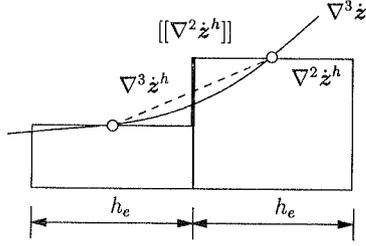


Abbildung 4.15: Approximation der unbekanntes höheren Ableitung $\nabla^3 \dot{z}$ durch den den Sprung des Differenzenquotienten $[[\nabla^2 \dot{z}^h]]$

Die zeitliche und räumliche Interpolation wird mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung vollständig getrennt.

$$(\dot{z} - \Pi_s \Pi_t \dot{z}, \mathbf{v})_{Q_n^e} \leq [|\dot{z} - \Pi_s \dot{z}|_{Q_n^e} + |\Pi_s(\dot{z} - \Pi_t \dot{z})|_{Q_n^e}] \|\mathbf{v}\|_{Q_n^e} \quad (4.112)$$

Mit Hilfe von lokalen Interpolationsabschätzungen kann der räumliche und der zeitliche Anteil approximiert werden. Es werden dazu Ableitungen höherer Ordnung in der Zeit und im Raum verwendet. Für quadratische Ansätze in Raum und Zeit werden die dritten Ableitungen der diskreten Funktion benötigt [25].

$$\|\dot{z} - \dot{z}^h\|_{Q_n^e} \approx C_1 \Delta t_n^2 \|\partial_t^2 \dot{z}^h\|_{Q_n^e} + C_2 h_e^3 \|\nabla^3 \dot{z}^h\|_{Q_n^e} \quad (4.113)$$

Die Interpolationskonstanten C_1 und C_2 können a-priori numerisch ermittelt werden u.a. Eriksson et al. [34], Cirak et al. [26]. Die Konstanten werden auf einem Einheitsselement Ω_e berechnet. Dabei wird der Ausdruck

$$\|f - f^h\|_{\Omega_e} \leq C h_e^n \|\partial_h^n f\|_{\Omega_e}$$

auf einem Element der Größe $h_e = 1$ ausgewertet. Es wird eine Funktion f , z.B. eine quadratische Funktion mit $n = 2$, auf dem Element angenommen. Die Interpolation der quadratischen Funktion, z.B. eine lineare Interpolation, wird mit f^h bezeichnet. Mit der berechneten Interpolation kann die Norm $\|f - f^h\|_{\Omega_e}$ bestimmt werden. Ebenso kann die Norm $\|\partial_h^n f\|_{\Omega_e}$ durch die analytische Berechnung der zweiten Ableitungen der Funktion ermittelt werden [34][25]. Die Konstante C ergibt sich aus dem Verhältnis der beiden Normen zueinander. Für die lokalen Abschätzungen auf verzerrten Elementen werden die Konstanten nur approximiert. Sie werden in dieser Arbeit zu $C_1 = \frac{1}{120}$ und $C_2 = 5,88 \cdot 10^{-5}$ gesetzt. Die unbekanntes diskreten höheren Ableitungen in Gleichung (4.113) werden mit dem Sprung des Differenzenquotienten bestimmt, u.a. Rannacher et al. [75] und Cirak [25]. Der Sprung des Differenzenquotienten wird durch die höchsten berechenbaren Ableitungen berechnet, wie in Abb. (4.15) dargestellt ist.

$$\partial_t^2 \dot{z}^h \approx \Delta t_n^{-1} [[D_t \dot{z}^h]] \quad (4.114)$$

$$\nabla^3 \dot{z}^h \approx h_e^{-1} [[\nabla^2 \dot{z}^h]] \quad (4.115)$$

Der Term $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|^*$ aus Gleichung (4.108) wird ebenfalls mit dem Differenzenquotient (4.113) angenähert. Die fehlenden Faktoren infolge der Integration über den räumlichen Rand Γ bzw. über das Gebiet Ω stehen vor den entsprechenden Sprungtermen (4.109). Numerische Untersuchungen zeigen, daß damit die dominanten Terme berücksichtigt sind. Das Fehlerfunktional $D_{TG}(\mathbf{e})$ aus Gleichung (4.109) wird mit der Näherung von $\|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{Q_n^e}$ aus (4.113) wie folgt approximiert

$$\sum_{n=1}^N \sum_{e=1}^K [\|\tilde{\mathbf{R}}\|_{Q_n^e} + h^{-1/2} \|\mathbf{J}_s\|_{\gamma^*} + \Delta t^{-1/2} \|\mathbf{J}_{t_v}\|_{\Omega_n^e} + \Delta t^{-1/2} \|\mathbf{J}_{t_v}\|_{\Omega_n^e}] \|\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h\|_{Q_n^e} \approx D_{TG}(\mathbf{e}) \quad (4.116)$$

Im folgenden wird das entsprechende Vorgehen zur Entwicklung eines Fehlerindikators an Hand der Statik vorgestellt. Für die Statik gibt es viele Arbeiten über die Approximation des Fehlers mit Hilfe von dualen Problemen, weshalb die Abschätzung des Fehlers nur kurz dargestellt wird. Für die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Methoden wird auf die Literatur verwiesen, u.a. Babuška et al. [7], Eriksson et al. [35], Becker et al. [19], Rannacher et al. [75], Cirak [25].

Statik Bei der Fehlerapproximation in der Statik wird wie in der Dynamik vorgegangen. Es wird von dem ursprünglichen Problem (4.92) ausgegangen und mit Hilfe der Galerkin Orthogonalität (4.14) wird der Fehler des dualen Problems eingeführt.

$$\tilde{B}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) = (\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_\Omega \quad (4.117)$$

Die Definition des dualen Problems (4.94) wird in (4.117) eingesetzt.

$$(\mathbf{e}, \tilde{\mathcal{D}})_\Omega = (\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_\Omega \quad (4.118)$$

Die Residuen $\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}$ werden durch die Elementinnenresiduen $\tilde{\mathbf{R}}$ (4.16) und die Sprungterme $\tilde{\mathbf{J}}_s$ (4.17) ersetzt.

$$\sum_{e=1}^K [(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \tilde{\mathbf{R}})_{\Omega^e} + (\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \tilde{\mathbf{J}}_s)_{\Gamma^*}] = \tilde{D}(\mathbf{e}) \quad (4.119)$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung kann anschließend die Berechnung der Residuen von der Bestimmung des Diskretisierungsfehlers des dualen Problems getrennt werden.

$$\sum_{e=1}^K [\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|_{\Omega^e} \|\tilde{\mathbf{R}}\|_{\Omega^e} + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|_{\Gamma^*} \|\tilde{\mathbf{J}}_s\|_{\Gamma^*}] \geq \tilde{D}(\mathbf{e}) \quad (4.120)$$

In der Statik gibt es verschiedene Methoden, den Fehler zu berechnen. Da die Methoden in der Literatur ausführlich beschrieben sind, u.a. Babuška et al. [6][7], Johnson et al. [55], Eriksson et al. [35], Verfürth [96], Braess [23] und Rannacher [74], werden zum Vergleich

mit dem Vorgehen in der Dynamik nur einige Techniken erwähnt.

Die Lösung des dualen Problems kann durch die Abschätzung mit der Stabilitätskonstante C_s ersetzt werden. Bei den Problemen in der linearen Statik ist die Stabilitätskonstante nach oben beschränkt, da die Lösung des dualen Problems stabil ist, d.h. die Lösung in der Statik kann infolge von Fehlern nicht unendlich groß werden. Somit kann die Stabilitätskonstante a-priori für alle Probleme der linearen Statik nach oben mit dem maximalen Wert $C_s = 1$ abgeschätzt werden. Die Abschätzung der Lösung des dualen Problems mit Hilfe der Stabilitätskonstante führt auf den globalen Fehlerschätzer in der Energienorm von Babuška et al. [6]. Die Herleitung und die Zusammenhänge der verschiedenen Fehlerschätzer sind u.a. in Verfürth [96], Becker et al. [19] dargestellt. Genauere Fehlerschätzer erhält man jedoch, wenn die Abschätzung der Lösung des dualen Problems mit Hilfe der Stabilitätskonstante durch die numerische Berechnung des dualen Problems ersetzt wird. Dabei können die Residuen des ursprünglichen Problems entweder direkt an jedem Punkt oder elementweise mit den Fehlern des dualen Problems gekoppelt werden. Die elementweise Berechnung und Koppelung ist wesentlich effizienter, wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zur Trennung des ursprünglichen von dem dualen Problems angewendet wird, u.a. Rannacher et al. [75], Suttmeier [89] und Cirak et al. [26]. Der Diskretisierungsfehler des dualen Problems $\mathbf{z} - \mathbf{z}^h$ kann dabei mit Interpolationsabschätzungen berechnet werden. Diese Technik wird z.B. von Becker et al. [19], Rannacher et al. [75], Suttmeier [89] und Cirak [26] angewendet.

Numerische Beispiele Im folgenden werden an Hand von zwei numerischen Beispielen die Vorteile der lokalen Fehlerapproximation verdeutlicht. Zunächst wird an einem eingespannten Balken gezeigt, daß der zeitliche Fehlerverlauf sowohl für gedämpfte und ungedämpfte Probleme dargestellt werden kann und der approximierte Fehler mit feiner werdender Diskretisierung kleiner wird. Anschließend wird am Beispiel einer Pleuelstange der Unterschied zwischen der Approximation des zeitlichen Verlaufes des lokalen Fehlers und der Approximation des globalen Fehlers in der Energienorm an bestimmten Zeitpunkten verdeutlicht.

Im folgenden Beispiel wird der beidseitig eingespannte Balken in Abb. (4.16) untersucht. In der Mitte ist er mit einer Gleichstreckenlast \mathbf{p} belastet. Der Balken schwingt ungedämpft aus dem statischen Gleichgewicht infolge der Last \mathbf{p} . Der Verlauf der vertikalen Verschiebung des Punktes A ist in Abb. (4.16) rechts dargestellt. Das System wird gleichmäßig mit bilinearen Scheibenelementen diskretisiert. In zeitlicher Richtung werden quadratische Ansätze gewählt. Im folgenden wird der lokale Fehler der vertikalen Verschiebungen unter der Belastung approximiert. Dazu wird das duale Problem mit der zeitlichen Heaviside-Last $H(t - t_N)$, die nur im Bereich der Gleichstreckenlast wirkt, belastet. Der Fehler zu einem Zeitpunkt wird unter Berücksichtigung der Fehler aller bisherigen Zeitschritte berechnet. Die Residuen des ursprünglichen Problems werden elementweise im gesamten Raum-Zeit Gebiet bestimmt. Die Diskretisierungsfehler des dualen Problems werden mit Hilfe der Interpolationsabschätzungen (Gl. 4.113-4.115)

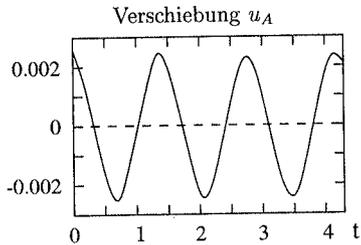
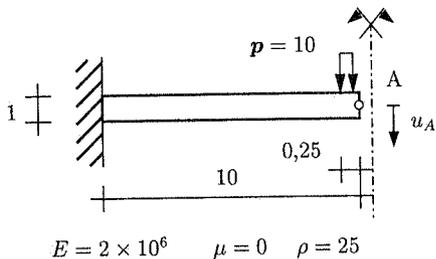
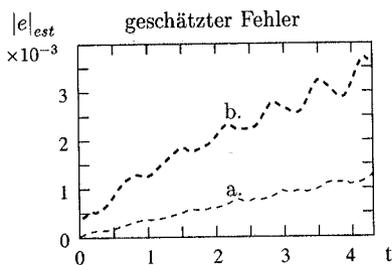
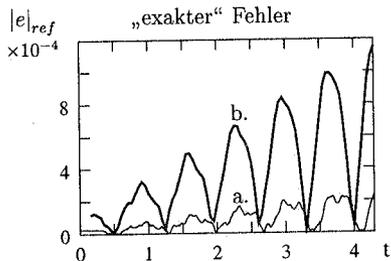


Abbildung 4.16: Eingespannter Balken mit statischer Anfangsauslenkung infolge der Last p und die vertikale Verschiebung des Punktes A infolge der Last p



a. $\Delta t = 0,01$ 890 Fhg $|e|_{est}$ -----
 b. $\Delta t = 0,05$ 422 Fhg -----



$|e|_{ref}$

Abbildung 4.17: Eingespannter Balken: geschätzter $|e|_{est}$ und „exakter“ $|e|_{ref}$ Fehler in den vertikalen Verschiebungen unter der Last

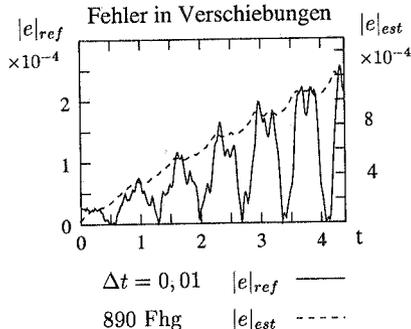
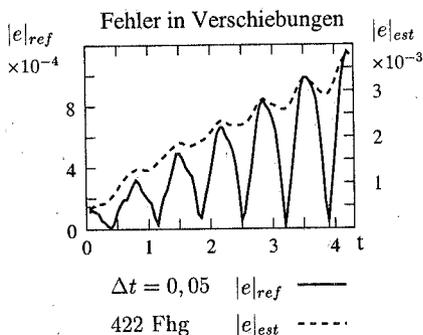


Abbildung 4.18: Eingespannter Balken: Vergleich des geschätzten $|e|_{est}$ und „exakten“ $|e|_{ref}$ Fehlers in den Verschiebungen

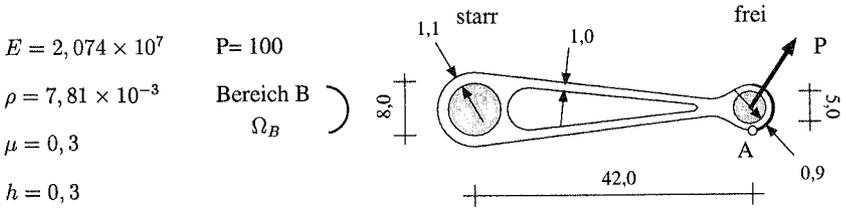


Abbildung 4.20: Einseitig eingespannte Pleuelstange

ungedämpften Problemen der Anstieg des „exakten“ zeitlich globalen Fehlers im Laufe der Zeit zwar dargestellt werden, jedoch schätzt der Fehlerindikator den Fehler sehr grob ab. Der zeitliche Fehlerverlauf bei gedämpften Problemen kann mit den „klassischen“ Methoden nicht wiedergegeben werden (s. Abb. 5.10 rechts). Hier wird der Vorteil der Verwendung von dualen Problemen zur Approximation des zeitlichen Fehlerverlaufes deutlich. Dazu wird der Balken mit Hilfe der Rayleigh-Koeffizienten $d_1 = 0,001$ und $d_2 = 0,04$ gedämpft. In Abb. (4.19) sind die zeitlichen Verläufe des approximierten Fehlers $|e|_{est}$ und des „exakten“ Fehlers $|e|_{ref}$ dargestellt. Der Fehlerindikator nimmt genauso ab wie der „exakte“ Fehler. Der Fehlerindikator kann den zeitlichen Verlauf des Fehlers gut wiedergeben.

Im folgenden soll der Unterschied zwischen der Approximation des Fehlerverlaufes mit Hilfe von dualen Problemen und der Approximation des zeitlich lokalen Fehlers, d.h. der Fehler eines Zeitschrittes, in der Energienorm verdeutlicht werden. Dazu wird die Pleuelstange in Abb. (4.20) untersucht. Die Geometrie wird von Maute [64] beschrieben. Die Materialdaten des Systems sind in Abb. (4.20) angegeben. Das linke Ende der Pleuelstange ist fest eingespannt, während das rechte Ende frei beweglich ist. Die Last P greift unter 60° gegenüber der Horizontalen an. Das System schwingt frei und ungedämpft aus der statischen Gleichgewichtslage infolge der Last P . Die Pleuelstange wird mit bilinearen Scheibenelementen diskretisiert (812 Fhg). Der Zeitschritt ist konstant $\Delta t = 0,0005$. Der zeitliche Verlauf der vertikalen Verschiebung des Punktes A und einige Verformungszustände sind in Abb. (4.21) dargestellt. Der lokale Fehler der vertikalen Verschiebungen in dem Bereich B (Ω_B) an dem freien Ende wird approximiert. Das duale Problem wird mit einer Heaviside-Last $\mathcal{D}_{TG}(\mathbf{x}, t) = H(t - t_N)$ in dem Bereich B für $\mathbf{x} \in \Omega_B$ belastet. Der Fehler wird zu jedem Zeitpunkt t_n berechnet, indem die Residuen des ursprünglichen Problems mit den Fehlern des dualen Problems elementweise gekoppelt werden. Die Diskretisierungsfehler des dualen Problems werden mit Interpolationsabschätzungen angenähert.

In Abb. (4.22) ist der zeitliche Verlauf des relativen lokalen Fehlers dargestellt. Der relative lokale Fehler η_{lok} wird folgendermaßen berechnet

$$\eta_{lok} = \frac{|e|_{est}}{|(\mathcal{D}_{TG}, \dot{\mathbf{u}}^h)_Q|} \quad (4.121)$$

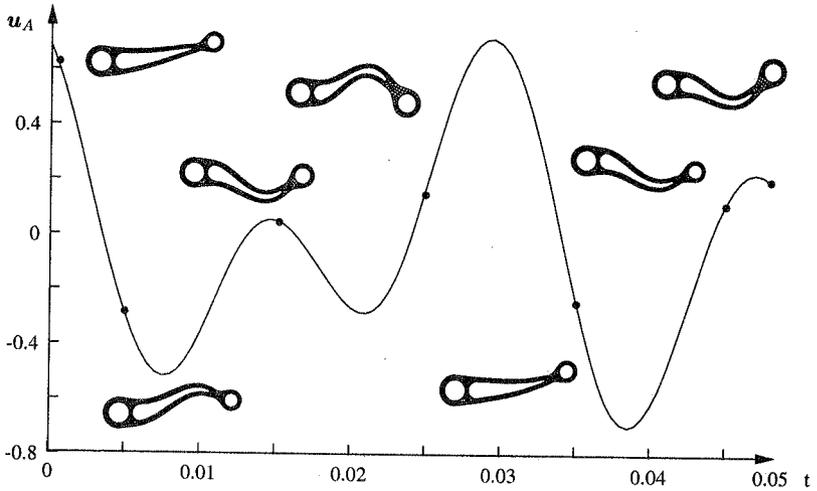


Abbildung 4.21: Verformungsfiguren und Verlauf der vertikalen Verschiebung des Punktes A

Wie erwartet nimmt der relative lokale Fehler mit der Zeit zu. In Abb. (4.22) links sind die Fehlerverteilungen, die den Einfluß der Fehler in zeitlicher Richtung mit berücksichtigt, an unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Das Anwachsen der Elementfehler in der Zeit ist deutlich zu erkennen.

Zum Vergleich wird der relative räumlich globale Fehler des Systems mit den „klassischen“ Fehlerindikatoren aus Kapitel 5.3 bestimmt. Als Zeitintegrationsverfahren wird die Newmark-Methode mit $d_1 = 0,25$ und $d_2 = 0,5$ verwendet. Das räumliche Gebiet wird mit achtknotigen Scheibenelementen diskretisiert (1466 Fhg), da die Geschwindigkeiten nur für Elemente mit quadratischen und höheren Ansatzordnungen superkonvergente Eigenschaften besitzen. Die Zeitschrittweite wird im ersten Zeitintervall adaptiv angepaßt ($\Delta t = 0,0007$) und bleibt danach konstant. Der Fehlerindikator mißt den Fehler in der Dehnungsenergie und in der kinetischen Energie. Der Fehler wird mit den glättungs-basierten Methoden aus Kapitel 5.3 bestimmt. Es wird die SPR-Technik für den Fehler in der Dehnungsenergie und für den Fehler in den kinetischen Energie verwendet. Der relative räumliche Fehler $\eta_{s,gb}$ wird im Abstand von $\Delta t_A = 0,0028$ berechnet. In Abb. (4.23) ist der zeitliche Verlauf des relativen räumlichen globalen Fehlers $\eta_{s,gb}$ dargestellt. Der relative Fehler zu einem Zeitpunkt wird mit Hilfe des räumlichen Fehlers in der Energienorm $\|\mathbf{e}_s\|_E$ zu dem Zeitpunkt berechnet. Der Fehler in der Energienorm wird auf die maximale aufgetretene Gesamtenergie $\|\mathbf{u}^h\|_{E,max}$ aller bisherigen Zeitpunkte bezogen.

$$\eta_{s,gb} = \frac{\|\mathbf{e}_s\|_E}{\|\mathbf{u}^h\|_{E,max}} \quad (4.122)$$

In Abb. (4.23) rechts ist das zyklische Verhalten des relativen Fehlers zu erkennen. Da

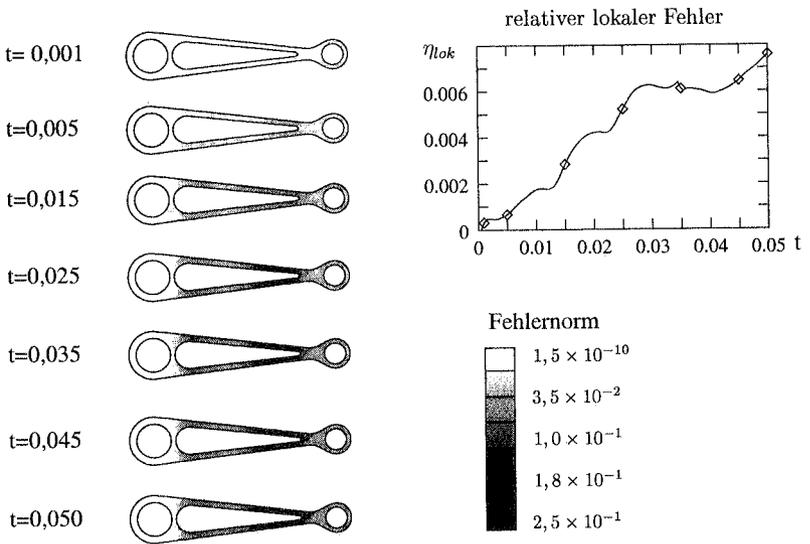


Abbildung 4.22: Relativer lokaler Fehler η_{lok} in den vertikalen Verschiebungen im Bereich B und Darstellung der Elementfehlnormen

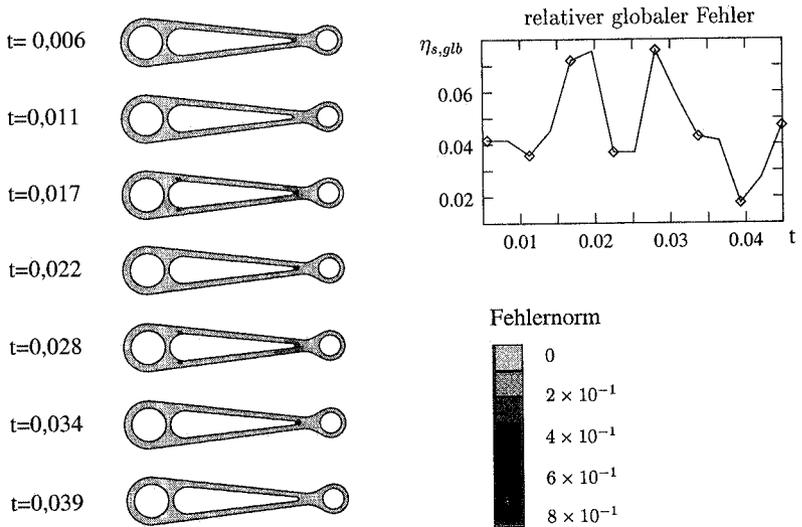


Abbildung 4.23: Relativer globaler Fehler $\eta_{s,glb}$ und Darstellung der Elementfehlnormen mit der Newmark-Methode

nur der räumliche Fehler zu einem Zeitpunkt bestimmt wird, nimmt der Fehler zu und dann wieder ab. Das zyklische Verhalten kann ebenso an den Elementfehlerverteilungen in Abb. (4.23) links beobachtet werden. Der Vergleich der Verteilungen des zeitlich lokalen Fehlers mit den Verteilungen des zeitlich globalen Fehlers in Abb. (4.22) zeigt, daß der Einfluß der Fehler von vorherigen Zeitintervallen auf den Fehler in der Zeit vernachlässigt wird. Mit den „klassischen“ Fehlerindikatoren wird der durchschnittliche räumliche Fehler zu einem Zeitpunkt bestimmt. Mit Hilfe von dualen Problemen ist es dagegen möglich, den zeitlichen Einfluß auf den Fehler sowie Fehler in verschiedenen physikalischen Größen und in bestimmten Gebieten darzustellen.

4.5 Zusammenfassung

Im folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse der Berechnung des lokalen Fehlers im Raum und in der Zeit zusammengefaßt und auf weitere mögliche Entwicklungen hingewiesen.

- Der qualitative Verlauf des Fehlers wird richtig wiedergegeben, obwohl der berechnete lokale Fehler quantitativ von dem exakten Fehler abweichen kann. Die Fehlerverteilung eignet sich daher gut zur Berechnung von Verfeinerungsindikatoren.
- Bei der Analyse eines Problems entstehen bereits durch die Verwendung von Zeitintegrationsalgorithmen und die Wahl der diskreten Massenverteilungen Fehler. Diese Fehler lassen sich mit der Fehlerapproximation, die nur die Diskretisierungsfehler erfaßt, nicht kontrollieren. Der mit Hilfe eines dualen Problems berechnete lokale Fehler wird deshalb durch die Fehler des Zeitintegrationsalgorithmus und der Modellierung der Massenverteilung ungenau.
- In diesem Kapitel wurde ein Indikator entwickelt, der den räumlichen und zeitlichen Fehler gemeinsam darstellt. Dieser Indikator eignet sich nicht zur Steuerung einer adaptiven Methode, sondern nur zur Fehlerkontrolle. Für ein adaptives Verfahren muß der Fehlerindikator in einen zeitlichen und einen räumlichen Indikator aufgespalten werden. Mit den getrennten Fehlerindikatoren kann dann die räumliche und zeitliche Verfeinerung gesteuert werden. Räumlich und zeitlich getrennte Fehlerindikatoren werden z.B. von Hartmann [42] und Bangerth et al. [12] vorgestellt. Der numerische Aufwand steigt geringfügig gegenüber der Bestimmung eines gemeinsamen Indikators für den räumlichen und zeitlichen Fehlers an, da mehr Terme berechnet und gespeichert werden müssen, um den Fehler zu approximieren.
- Mit Hilfe von dualen Problemen ist es möglich, den Fehlerverlauf in der Zeit darzustellen. Jedoch muß hinterfragt werden, ob der Fehlerverlauf zur Steuerung einer adaptiven Methode oder nur zur Fehlerkontrolle verwendet werden soll. In diesem Kapitel wurde die lokale Fehlerapproximation alleine zur Fehlerkontrolle verwendet. Wird die Fehlerverteilung jedoch zur Steuerung einer adaptiven Methode verwendet, so wird der Zeitschritt und die räumliche Diskretisierung an die Fehlerverteilung

angepaßt. In diesem Fall muß das gesamte ursprüngliche und duale Problem neu berechnet werden. Der numerische Aufwand ist daher sehr groß. Besser ist es, die Fehler in kleineren Zeitabschnitten zu kontrollieren und gegebenenfalls die Diskretisierung anzupassen. Dadurch sinkt der numerische Aufwand bei der Neuberechnung und der Speicherbedarf.

- Das duale Problem wird meistens auf demselben inhomogenen Netz gelöst wie das ursprüngliche Problem. Wird der lokale Fehler nicht, wie in diesem Kapitel, zur Fehlerkontrolle sondern zur Steuerung einer adaptiven Methode verwendet, dann wird in der Regel das FE-Netz und die Zeitschrittweite an den Fehler des ursprünglichen Problems angepaßt. Diese gewählte Diskretisierung kann jedoch für das duale Problem zu grob sein. Der Diskretisierungsfehler des dualen Problems kann größer sein als der des ursprünglichen Problems. Es ist daher sinnvoll, das FE-Netz und den Zeitschritt zusätzlich an das duale Problem anzupassen, zumal der zusätzliche numerische Aufwand für diese Modifikation gering ist.

Kapitel 5

Fehlerindikatoren basierend auf der Newmark–Methode

Die Bewegungsgleichung wird in diesem Kapitel in zeitlicher Richtung mit finiten Differenzen und mit finiten Elementen in räumlicher Richtung diskretisiert. Die Formulierung wurde in Kapitel 2.3.2 eingeführt. Für die semidiskrete Formulierung der Bewegungsgleichung mit der Newmark Zeitintegration werden im folgenden Indikatoren für den zeitlichen und räumlichen Diskretisierungsfehler eingeführt. Es werden zwei Arten von Fehlern berechnet, der globale Fehler und der lokale Fehler. In diesem Kapitel wird der zeitliche Fehler getrennt von dem räumlichen Fehler berechnet.

Die Zeitschrittsteuerung ist in der dynamischen Strukturanalyse sehr verbreitet. Sie ist einfach anzuwenden, da nur der Zeitschritt, d.h. eine einzelne Größe, angepaßt werden muß. Die meisten zeitlichen Fehlerindikatoren basieren auf der Newmark–Zeitintegration, u.a. Zienkiewicz et al. [112], Wiberg et al. [100], Li et al. [63], Kuhl [57], Riccius et al. [81]. Sie ermitteln innerhalb eines Zeitschrittes eine verbesserte Lösung mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung. Der zeitlich lokale Fehler wird, ohne den Einfluß der Fehler von den vorherigen Zeitschritten zu berücksichtigen, approximiert. Um den zeitlich globalen Fehler zu erfassen, werden alle zeitlich lokalen Fehler aufsummiert, s. u.a. Zienkiewicz et al. [112], Wiberg et al. [100]. Wird die DTG–Methode zur Lösung der Bewegungsgleichung verwandt, so kann ein zeitlich lokaler Fehlerindikator sehr einfach aus den Sprüngen über die Zeitintervallgrenzen berechnet werden, u.a. Li [61], Neumann et al. [68]. Da diese Methode auf einen zeitlich lokalen Fehlerindikator führt, wird sie in diesem Kapitel mit aufgeführt.

Der räumliche Fehler ist aufwendiger zu kontrollieren als der zeitliche Fehler, da das FE–Netz angepaßt werden muß. Die räumliche Adaptivität ist deshalb in der Strukturdynamik nicht so verbreitet wie die Zeitschrittsteuerung. Die „klassischen“ Fehlerindikatoren in der Dynamik, die auf der semidiskreten Formulierung beruhen, bestimmen den räumlich globalen Fehler in der Energienorm, d.h. es wird zu einem Zeitpunkt der mittlere Fehler des Gebietes in der Energienorm approximiert. Für den Anteil in der Dehnungsenergie werden die glättungsbasierten Methoden aus der Statik verwendet. Der Fehler in

der kinetischen Energie wird ebenfalls mit glättungs-basierten Techniken berechnet. Arbeiten zu den „klassischen“ Fehlerindikatoren in der Struktur-dynamik wurden u.a. von Li et al. [101][61] und Riccius et al. [81][80] verfaßt.

Wenn der Fehler nur in einer bestimmten Größe und in einem gewissen Bereich kontrolliert werden soll, sind die globalen Fehlerindikatoren nicht effizient. In dieser Arbeit wird deshalb ein räumlich lokaler Fehlerindikator entwickelt. Dazu wird die Idee des allgemeinen Fehlerindicators, der mit Hilfe von dualen Problemen den Fehler in verschiedenen physikalischen Größen und in bestimmten Gebieten approximieren kann, aufgegriffen. Der allgemeine lokale Fehlerindikator wurde in Kapitel 4 für die Formulierung der Bewegungsgleichung mit der DTG-Methode eingeführt. Die Methode der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen wird auf die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration angewendet. Da das Newmark-Verfahren nicht als FE-Methode interpretiert werden kann, kann die Methode der Fehlerbestimmung nicht vollständig auf die semidiskrete Formulierung übertragen werden. Der räumliche Fehler wird deshalb getrennt von dem zeitlichen Fehler berechnet, wobei der räumlich lokale Fehler zu einem Zeitpunkt bestimmt wird. Der zeitliche Verlauf des Fehlers kann nicht dargestellt werden.

Die Grundlage und Eigenschaften der Fehlerindikatoren in diesem Kapitel sind stichwortartig zusammengefaßt:

Zeitdiskretisierung: Newmark-Methode

Raumdiskretisierung: Finite Elemente

Fehlerindikatoren: Getrennter räumlicher und zeitlicher Fehler

Eigenschaften des Fehlers: Räumlich globaler bzw. lokaler Fehler –
zeitlich globaler bzw. lokaler Fehler

Zunächst wird in Kapitel 5.1 der Fehler in den räumlichen und zeitlichen Fehler aufgespalten. Anschließend werden die zeitlich lokalen und globalen Fehlerindikatoren aus der Literatur in Kapitel 5.2 eingeführt und miteinander verglichen. Der räumliche Fehler wird in Kapitel 5.3 behandelt. Die „klassischen“ Methoden aus der Literatur werden in Kapitel 5.3.1 eingeführt und getestet. Der adaptive Algorithmus wird in Kapitel 5.3.2 dargestellt. In Kapitel 5.3.3 wird anschließend der räumlich lokale Fehlerindikator entwickelt. Der lokale Indikator wird anhand von Beispielen untersucht und mit den räumlich globalen Fehlerindikatoren verglichen.

5.1 Räumlicher und zeitlicher Fehler

In Kapitel 3.1 wurde der Diskretisierungsfehler in verschiedenen Größen (3.1) und (3.2) eingeführt. Der Diskretisierungsfehler ist die Differenz zwischen der exakten Lösung \mathbf{u} und der diskreten numerischen Lösung \mathbf{u}^h . Der Fehler wird in (3.3) in den zeitlichen Fehler

e_t und den räumlichen Fehler e_s getrennt. Anhand des Fehlers in den Verschiebungen e wird im folgenden die Trennung des Fehlers dargestellt [63][61].

$$e = e_s + e_t = (\mathbf{u} - \underline{\mathbf{u}}^h) + (\underline{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}^h) \quad (5.1)$$

Der zeitliche Fehler e_t wird durch die Differenz $\underline{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}^h$ ersetzt. Die Lösung $\underline{\mathbf{u}}^h$ ist frei von zeitlichen Fehlern, während die diskrete numerische Lösung \mathbf{u}^h zeitliche Fehler beinhaltet. Die Differenz drückt also allein den zeitlichen Fehler aus. Der räumliche Fehler e_s ist die Differenz zwischen der exakten Lösung \mathbf{u} und der Lösung $\underline{\mathbf{u}}^h$. Da die Lösung $\underline{\mathbf{u}}^h$ nicht bekannt ist, muß sie zunächst approximiert werden. Die verschiedenen Methoden zur Approximation werden in Kapitel 5.2 vorgestellt.

Der adaptive Algorithmus bei den FD-Zeitintegrationsverfahren unterscheidet sich von dem Algorithmus bei den DTG-Verfahren. Bei der DTG-Methode wird der zeitliche und räumliche Fehler gleichzeitig berechnet. Bei den FD-Zeitintegrationsverfahren muß zunächst eine Lösung $\underline{\mathbf{u}}^h$ bestimmt werden. Mit Hilfe dieser Lösung kann der zeitliche Fehler eines Zeitschrittes approximiert werden. Die Größe des Zeitschrittes wird so angepaßt, daß der zeitliche Fehler innerhalb einer vorgegebenen Toleranz liegt. Erst wenn der zeitliche Fehler innerhalb der Toleranz liegt, wird der räumliche Fehler der Lösung bestimmt. Das FE-Netz wird so an die räumliche Fehlerverteilung angepaßt, daß der räumliche Fehler innerhalb der vorgegebenen Toleranzgrenzen liegt. Der adaptive Algorithmus ist in Abb. (5.1) dargestellt.

Im Gegensatz zu den Fehlerindikatoren in Kapitel 4, die auf der Auswertung von dualen Problemen basieren, wird der Fehler bei der FD-Zeitintegration in der Energienorm $\|e\|_E$ gemessen. Es wird der mittlere Fehler über das räumliche Gebiet Ω bestimmt, weshalb der Fehler auch als räumlich globaler Fehler bezeichnet wird.

Der Fehler in der Energienorm setzt sich aus einem kinetischen Anteil $\|e\|_{E_v}$ und einem Dehnungsanteil $\|e\|_{E_u}$ zusammen.

$$\|e\|_E^2 = \|e\|_{E_v}^2 + \|e\|_{E_u}^2 = (\dot{e}, \rho \dot{e})_\Omega + a(e, e)_\Omega \quad (5.2)$$

Der Fehler e (5.1) wird in die Gleichung (5.2) eingesetzt. Es wird angenommen, daß der räumliche Fehler e_s unabhängig von dem zeitlichen Fehler e_t ist. Somit kann der Fehler in der Energie in einen rein zeitlichen $\|e_t\|_E$ und einen rein räumlichen $\|e_s\|_E$ Fehleranteil aufgespalten werden. In der Literatur wurden keine Hinweise auf die Überprüfung der Genauigkeit dieser Annahme gefunden. Auch in dieser Arbeit wird diese Annahme nicht kontrolliert.

$$\begin{aligned} \|e\|_E^2 &= \|e_s + e_t\|_E^2 = (\dot{e}_s, \rho \dot{e}_s)_\Omega + a(e_s, e_s)_\Omega + (\dot{e}_t, \rho \dot{e}_t)_\Omega + a(e_t, e_t)_\Omega \\ &= \|e_s\|_E^2 + \|e_t\|_E^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die räumlichen und die zeitlichen Fehleranteile in der Gleichung (5.3) haben wiederum jeweils einen Anteil von der Dehnungsenergie und der kinetischen Energie.

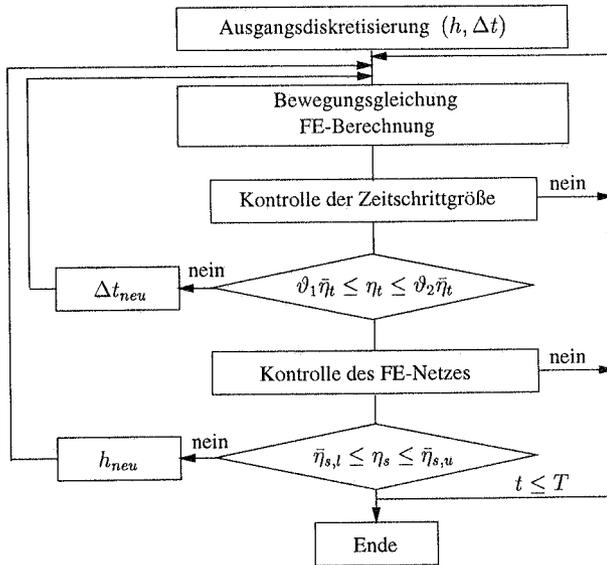


Abbildung 5.1: Adaptive Steuerung in der Dynamik mit der semidiskreten Formulierung

5.2 Zeitlicher Fehler

Die Genauigkeit der Zeitintegration ist sehr wichtig und wurde schon in vielen Arbeiten behandelt. In den achtziger Jahren haben Park et al. [71] vorgeschlagen, den Zeitschritt über die höchste auftretende Frequenz zu bestimmen. Bergan et al. [20] haben darauf basierend eine adaptive Zeitschrittsteuerung verwandt, indem der Zeitschritt an die aktuell auftretenden Frequenzen angepaßt wird.

Andere Verfahren vergleichen die Lösungen von zwei unterschiedlichen Zeitschrittgrößen miteinander oder verwenden Zeitintegrationsverfahren mit unterschiedlicher Genauigkeitsordnung, u.a. Thomas et al. [90], Diebels et al. [30]. Der numerische Aufwand ist bei diesen Methoden hoch, da entweder das Problem zweimal gelöst werden muß oder aufwendige Mehrschrittverfahren verwendet werden.

Die Verwendung von Einschrittverfahren und der Zeitschrittkontrolle durch Fehlerindikatoren, die mit Hilfe der numerischen Lösung bestimmt werden, ist effizienter. Zeitliche Fehlerindikatoren wurden u.a. von Zienkiewicz et al. [112], Wiberg et al. [63][100] und Riccius et al. [81] entwickelt. Sie basieren auf der Newmark-Zeitintegration und approximieren den Fehler eines Zeitschrittes mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen. In diesem Kapitel werden die zeitlich lokalen und globalen Fehlerindikatoren vorgestellt.

Globaler und lokaler Fehler Im folgenden wird die Definition des lokalen und globalen Fehlers eingeführt. Es wird zunächst nur der zeitliche Fehler betrachtet, der räumliche Fehler wird vernachlässigt. Es muß zwischen dem globalen e_{glob} und dem lokalen e_{lok} zeitlichen Fehler unterschieden werden. Der globale zeitliche Fehler $e_{glob}(t_n)$ zu dem Zeitpunkt t_n wird aus der exakten Lösung $u_{ex}(t_n)$ und der diskreten Lösung u_n^h berechnet.

$$e_{glob}(t_n) = u_{ex}(t_n) - u_n^h \quad (5.4)$$

Der globale Fehler mißt den gesamten zeitlichen Fehler des bisherigen Zeitraumes $(0, t_n)$. Der zeitlich lokale Fehler e_{lok} mißt den Fehler eines einzelnen Zeitintervalls $I_n = (t_{n-1}, t_n)$. Dabei wird angenommen, daß die Lösung zu Beginn des Zeitschrittes bei $t = t_{n-1}$ „exakt“ ist. Diese „exakte“ Lösung wird als Anfangsbedingung verwendet, um die „exakte“ Lösung \hat{u}_{ex} am Ende des Zeitschrittes $t = t_{n+1}$ zu berechnen. Der lokale Fehler in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten wird aus der Differenz berechnet.

$$e_{lok}(t_n) = \hat{u}_{ex}(t_n) - u_n^h \quad (5.5)$$

$$\dot{e}_{lok}(t_n) = \dot{\hat{u}}_{ex}(t_n) - \dot{u}_n^h \quad (5.6)$$

Im folgenden wird zunächst der lokale Fehler, d.h. der zeitliche Fehler in einem Zeitschritt I_n , betrachtet. Anschließend werden verschiedene Ansätze zur Bestimmung des globalen Fehlers gezeigt.

5.2.1 Zeitlich lokale Fehlerindikatoren

5.2.1.1 Voraussetzungen

Um die zeitlich lokalen Fehlerindikatoren zu berechnen, muß die „exakte“ Lösung (5.5) und (5.6) am Ende des Zeitschrittes bestimmt werden. Die „exakten“ Lösungen \hat{u}_{ex} und $\dot{\hat{u}}_{ex}$ sind jedoch unbekannt und werden deshalb mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen durch die verbesserten Lösungen u^* bzw. \dot{u}^* approximiert. Durch Einsetzen der approximierten Lösung in die Gleichungen (5.5) bzw. (5.6) können für verschiedene Zeitintegrationsverfahren die zeitlich lokalen Fehlerindikatoren bestimmt werden.

$$e_{lok}(t_n) \approx e_n = u_n^* - u_n^h \quad (5.7)$$

$$\dot{e}_{lok}(t_n) \approx \dot{e}_n = \dot{u}_n^* - \dot{u}_n^h \quad (5.8)$$

Im folgenden wird die Newmark-Zeitintegration verwendet, d.h. für die diskreten Approximationen u_n^h bzw. \dot{u}_n^h werden in (5.7) und (5.8) die Newmark-Ansätze eingesetzt. Damit können die Indikatoren für alle Zeitintegrationsverfahren, die auf der Newmark-Methode basieren, verwendet werden. Die Fehlerindikatoren sind u.a. anwendbar auf die HHT- α Methode [43] und das Verfahren nach Chung & Hulbert [24].

Bei Zeitintegrationsverfahren basierend auf den Newmark-Ansätzen ist die maximale Konvergenzordnung des globalen Fehlers $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Die Konvergenzordnung des lokalen Fehlers kann bis zu $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ betragen, s. Dahlquist et al. [29]. An dem ungedämpften Einmassenschwinger werden in Abb. (5.2) die Konvergenzordnungen des globalen und lokalen

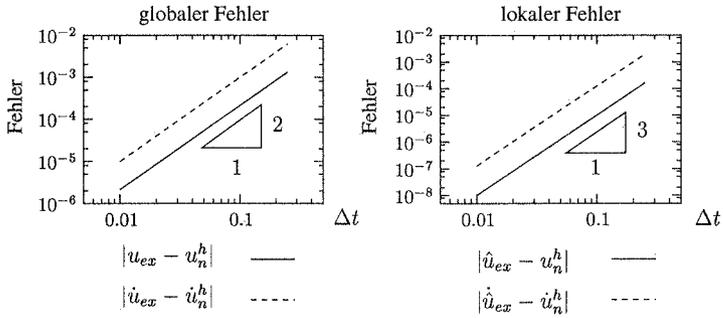


Abbildung 5.2: Konvergenz des globalen und lokalen Fehlers für das Newmark-Verfahren ($\beta = 0,25; \delta = 0,5$) bei $t = 1,0$ (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = \sin(t); \bar{\mathbf{u}}_0 = 0; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

Fehlers dargestellt. Die Rand- und Anfangsbedingungen ($\mathbf{P} = \sin(t); \bar{\mathbf{u}}_0 = 0; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$) sind so gewählt, daß mit dem Newmark-Verfahren ($\beta = 0,25; \delta = 0,5$) die maximale Konvergenzordnung des globalen und lokalen Fehlers erreicht werden kann. Im Bild (5.2) ist die Konvergenz der Verschiebungen und der Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t = 1,0$ dargestellt. Der lokale Fehler in den Verschiebungen wird mit der Gleichung (5.5) und in den Geschwindigkeiten mit der Gleichung (5.6) berechnet. Die Konvergenzordnung ist wichtig, um die minimale Ordnung der Taylorreihenentwicklung, die für die verbesserte Lösung verwendet werden muß, zu bestimmen. Ebenso wird in dem adaptiven Verfahren mit Hilfe der Konvergenzordnung die neue Zeitschrittgröße bestimmt.

5.2.1.2 Zeitliche Fehlerindikatoren

Im folgenden wird ein Überblick über die verschiedenen zeitlichen Fehlerindikatoren aus der Literatur gegeben und die Unterschiede zwischen den Indikatoren gezeigt. Anhand von numerischen Beispielen werden die Indikatoren überprüft und verglichen.

Fehlerindikator A für Verschiebungen Der Fehlerindikator für die Verschiebungen, beruht auf einer Taylorreihe dritter Ordnung für die verbesserte Verschiebungsapproximation, u.a. Zienkiewicz et al. [112], Wiberg et al. [103][105].

$$\mathbf{u}_n^* = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\ddot{\mathbf{u}}}_{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.9)$$

Die Ableitungen höherer Ordnung werden mit dem Differenzenquotient erster Ordnung bestimmt.

$$\dot{\ddot{\mathbf{u}}}_{n-1} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.10)$$

Damit ergibt sich folgende verbesserte Lösung \mathbf{u}_n^A

$$\mathbf{u}_n^* \approx \mathbf{u}_n^A = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{3} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.11)$$

Zur Berechnung der verbesserten Lösung werden die diskreten Werte $(\cdot)^h$ der Lösung in die Gleichung (5.11) eingesetzt. Der zeitlich lokale Fehler e_n^A in der Gleichung (5.7) wird mit Hilfe der verbesserten Lösung u_n^A und der Newmark-Approximation (2.78) berechnet.

$$e_n^A = \Delta t^2 \left(\frac{1}{6} - \beta \right) (\ddot{u}_n^h - \ddot{u}_{n-1}^h) \quad (5.12)$$

Der Fehlerindikator kann nur für Newmark-Ansätze mit $\beta \neq \frac{1}{6}$ verwendet werden. Bei Newmark-Ansätzen mit linearen Beschleunigungen ($\beta = \frac{1}{6}$) ist der lokale Abbruchfehler von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^4)$. Der Fehler kann durch den Fehlerindikator (5.12) nicht erfasst werden, da der Fehler vollständig in den Termen höherer Ordnung enthalten ist, s. Riccius [80].

Ein ähnlicher lokaler Fehlerindikator wurde u.a. von Zienkiewicz et al. [111], Johnson [54] und Thomas et al. [90] entwickelt. Als Fehlerindikator wird direkt der Term höherer Ordnung in der Taylorreihe (5.9) verwendet. Die Ableitung \dot{u} wird ebenfalls mit dem Differenzenquotienten (5.10) ausgewertet.

$$e_n^{A'} = \frac{\Delta t^2}{6} (\dot{u}_n^h - \dot{u}_{n-1}^h) \quad (5.13)$$

Der Fehlerindikator $e_n^{A'}$ gilt für beliebige Zeitintegrationsverfahren, da keine Newmark-Ansätze verwendet werden. Er unterscheidet sich nur durch einen Faktor von dem Indikator e_n^A (5.12).

Fehlerindikator B für Verschiebungen und Geschwindigkeiten Li et al. [61][63] [100] leiten einen Indikator für beliebige Newmark-Parameter β her, indem eine Taylorreihe vierter Ordnung ausgewertet wird.

$$u_n^* = u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\ddot{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^4}{24} \ddot{\ddot{u}}_{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (5.14)$$

Ebenso wird für die Geschwindigkeit eine Lösung mit höherer Genauigkeit angenommen.

$$\dot{u}_n^* = \dot{u}_{n-1} + \Delta t \ddot{u}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{\ddot{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\ddot{u}}_{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.15)$$

Die Terme höherer Ordnung in den Gleichungen (5.14) und (5.15) werden mit dem Differenzenquotient erster Ordnung bestimmt.

$$\ddot{\ddot{u}}_{n-1} = \frac{\dot{\ddot{u}}_n - \dot{\ddot{u}}_{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.16)$$

Die Ableitung der Beschleunigung $\dot{\ddot{u}}_n$ in (5.16) zum Zeitpunkt t_n wird aus den bekannten Beschleunigungen \ddot{u}_{n-1} und \ddot{u}_n sowie $\dot{\ddot{u}}_{n-1}$ zum alten Zeitpunkt t_{n-1} berechnet.

$$\frac{\dot{\ddot{u}}_n + \dot{\ddot{u}}_{n-1}}{2} = \frac{\ddot{u}_n - \ddot{u}_{n-1}}{\Delta t} \quad (5.17)$$

Die Ableitung der Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$ wird aus der Ableitung der Bewegungsgleichung ermittelt [61]. Mit Hilfe der Taylorreihe (5.14) wird die verbesserte Verschiebungslösung \mathbf{u}_n^B berechnet.

$$\mathbf{u}_n^* \approx \mathbf{u}_n^B = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^3}{24} (3\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (5.18)$$

Ebenso wird die verbesserte Geschwindigkeitslösung $\dot{\mathbf{u}}_n^B$ ermittelt.

$$\dot{\mathbf{u}}_n^* \approx \dot{\mathbf{u}}_n^B = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (2\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.19)$$

Die diskreten verbesserten Lösungen werden in die Fehlergleichungen (5.7) und (5.8) eingesetzt. Mit den Newmark-Approximationen für die Verschiebungen (2.78) und für die Geschwindigkeiten (2.77) in den Fehlergleichungen ergibt sich der Fehlerindikator in den Verschiebungen und in den Geschwindigkeiten.

$$\mathbf{e}_n^B = \frac{\Delta t^3}{12} [(6\beta - \frac{1}{2})\dot{\mathbf{u}}_n^h + (6\beta - \frac{3}{2})\dot{\mathbf{u}}_{n-1}^h] \quad (5.20)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_n^B = \frac{\Delta t^2}{6} [(3\delta - 1)\ddot{\mathbf{u}}_n^h + (3\delta - 2)\ddot{\mathbf{u}}_{n-1}^h] \quad (5.21)$$

Der Indikator in den Verschiebungen konvergiert mit $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ und kann damit bei beliebigen β -Werten verwendet werden. Der Fehlerindikator für die Geschwindigkeiten kann für alle δ -Werte benutzt werden, da er mit $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ konvergiert.

Ein Nachteil dieser Fehlerindikatoren (5.20) und (5.21) ist, daß die Ableitungen der Beschleunigungen $\dot{\mathbf{u}}$ zu jedem Zeitpunkt t_n benötigt werden. Zu Beginn der Berechnung sind diese Ableitungen ziemlich ungenau. Diese Ungenauigkeit pflanzt sich durch die Gleichung (5.17) in allen weiteren Ableitungen der Beschleunigungen fort, weshalb der Indikator nicht immer gute Ergebnisse liefert.

Fehlerindikator C für Verschiebungen und Geschwindigkeiten Der Fehlerindikator nach Riccius [80] verwendet ebenfalls die Taylorreihenentwicklungen (5.14) und (5.15). Um die Ableitungen der Beschleunigungen $\dot{\mathbf{u}}_{n-1}$ zu vermeiden, werden die Terme höherer Ordnung nicht über Differenzenquotienten erster Ordnung, sondern mit dem zentralen Differenzenquotienten, bestimmt.

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{n-2} - 2\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{u}}_n}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (5.22)$$

Die Ableitungen der Beschleunigungen werden ebenfalls mit dem zentralen Differenzenquotienten ermittelt.

$$\dot{\mathbf{u}}_{n-1} = \frac{\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}_{n-2}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (5.23)$$

Das Einsetzen von Gleichungen (5.22) und (5.23) in die Taylorreihenentwicklungen (5.14) und (5.15) liefert die verbesserten Verschiebungen und Geschwindigkeiten \mathbf{u}_n^C und $\dot{\mathbf{u}}_n^C$.

$$\mathbf{u}_n^* \approx \mathbf{u}_n^C = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{24} (-\ddot{\mathbf{u}}_{n-2} + 10\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + 3\ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (5.24)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_n^* \approx \dot{\mathbf{u}}_n^C = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t}{12} (-\ddot{\mathbf{u}}_{n-2} + 8\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + 5\ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.25)$$

Die diskreten verbesserten Lösungen werden in die Fehlergleichungen (5.7) und (5.8) eingesetzt und führen auf die Fehlerindikatoren in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten.

$$\mathbf{e}_n^C = \frac{\Delta t^2}{24} [\ddot{\mathbf{u}}_{n-2}^h + (2 - 24\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{n-1}^h + (24\beta - 3)\ddot{\mathbf{u}}_n^h] \quad (5.26)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_n^C = \frac{\Delta t}{12} [\dot{\mathbf{u}}_{n-2}^h + (4 - 12\delta)\dot{\mathbf{u}}_{n-1}^h + (12\delta - 5)\dot{\mathbf{u}}_n^h] \quad (5.27)$$

Für die Berechnung der Fehlerindikatoren \mathbf{e}_n^C und $\dot{\mathbf{e}}_n^C$ werden die Beschleunigungen an drei aufeinander folgenden Zeitschritten benötigt. Dadurch können die Indikatoren erst ab dem zweiten Zeitschritt verwendet werden.

Riccus [80] wählt für $\beta \neq \frac{1}{6}$ eine Taylorreihe niedrigerer Ordnung und vereinfacht den Indikator des Verschiebungsfehlers. Dieses Vorgehen führt auf den Fehlerindikator \mathbf{e}_n^A in Gleichung (5.13). Ebenso wird der Fehlerindikator in den Geschwindigkeiten für $\delta \neq \frac{1}{2}$ vereinfacht, indem eine Taylorreihe zweiter Ordnung verwendet wird. Wird die Ableitung der Beschleunigung durch die Vorwärtsdifferenz berechnet, ergibt sich folgender vereinfachter Indikator.

$$\dot{\mathbf{e}}_n^{C'} = \Delta t \left(\frac{1}{2} - \delta \right) (\ddot{\mathbf{u}}_{n-1}^h - \ddot{\mathbf{u}}_n^h) \quad (5.28)$$

Für $\delta = \frac{1}{2}$ ist der Indikator null, da der Fehler vollständig in den Termen höherer Ordnung liegt.

Fehlerindikator D für die DTG-Methode Im folgenden Abschnitt wird ein Fehlerindikator basierend auf der DTG-Methode eingeführt, s. Li [61]. Im Gegensatz zu den Fehlerindikatoren in Kapitel 4, die ebenfalls auf der DTG-Methode beruhen und den Fehler mit Hilfe von dualen Problemen ermitteln, wird hier kein zusätzliches duales Problem gelöst. Der Indikator bestimmt, ebenso wie die zeitlichen Fehlerindikatoren A, B und C in den vorherigen Abschnitten, den zeitlich lokalen Fehler eines Zeitintervalls.

Li [61] verwendet eine Zweifeldformulierung mit zeitlich linearen Ansätzen in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten auf einem Zeitintervall. Durch die Diskontinuität an den Zeitintervallgrenzen ergeben sich Sprungterme in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten. Der Fehlerindikator wird aus der Größe der Sprünge an den Zeitintervallgrenzen berechnet.

$$\mathbf{e}_n^D = [[\mathbf{u}(t_n)]] = \mathbf{u}_n^+ - \mathbf{u}_n^- \quad (5.29)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_n^D = [[\dot{\mathbf{u}}(t_n)]] = \dot{\mathbf{u}}_n^+ - \dot{\mathbf{u}}_n^- \quad (5.30)$$

Die Sprungterme $[[\cdot(t_n)]]$ sind in Gleichung (2.33) definiert. Aus dem Fehlerindikator D kann eine neue Zeitschrittgröße berechnet werden. Die neue Zeitschrittgröße wird genauso wie für die Indikatoren A, B und C basierend auf der Newmark-Methode in Kapitel 5.2.3 bestimmt. Für die adaptive Methode besteht kein Unterschied zwischen den Indikatoren A, B und C mit Newmark-Ansätzen und dem Indikator D basierend auf der DTG-Methode. In dieser Arbeit wird die Einfeldformulierung aus Kapitel 2.3.1 verwendet. Bei

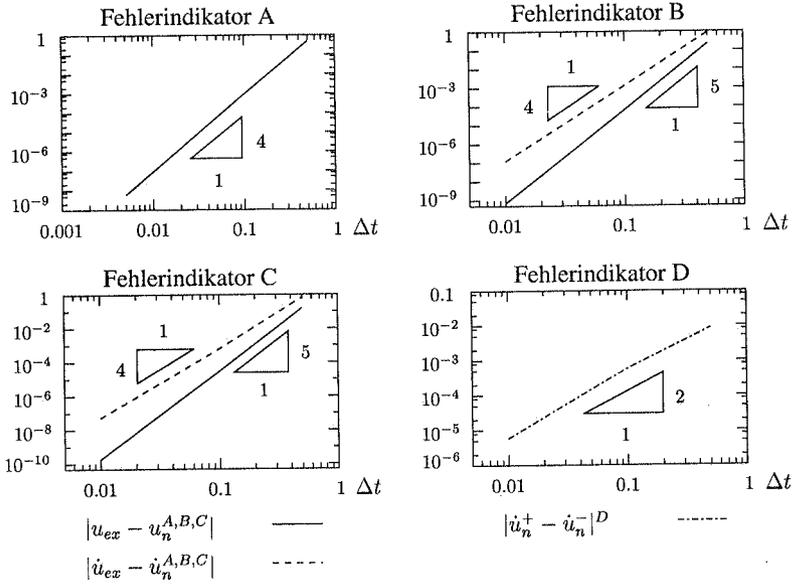


Abbildung 5.3: Konvergenz der Fehlerindikatoren A,B,C und D in den Verschiebungen und den Geschwindigkeiten bei $t = 5,0$ (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0, 5; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = 0; \bar{\mathbf{u}}_0 = 1; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

dieser Formulierung entstehen lediglich Diskontinuitäten in den Geschwindigkeiten, da die Verschiebungen stetig über die Zeitintervallgrenzen sind. Deshalb kann kein Fehlerindikator nach Gleichung (5.29) berechnet werden.

Vergleich der Indikatoren Im folgenden werden die Konvergenzordnungen der verschiedenen zeitlichen Fehlerindikatoren an einem Einmassenschwinger überprüft. Dazu wird der Fehler aus der Differenz der analytischen \mathbf{u}_{ex} bzw. $\dot{\mathbf{u}}_{ex}$ und der verbesserten Lösungen \mathbf{u}_n^* bzw. $\dot{\mathbf{u}}_n^*$, die mit den analytischen Werten bestimmt werden, berechnet. Die freie Schwingung des Einmassenschwingers wird gedämpft ($\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0, 5; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = 0; \bar{\mathbf{u}}_0 = 1; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$). In Bild (5.3) sind die Konvergenzordnungen der Indikatoren dargestellt. Alle Indikatoren erreichen die erwartete maximale Konvergenzordnung. Der Indikator A konvergiert mit $\mathcal{O}(\Delta t^4)$, der Indikator B in den Verschiebungen mit einer Ordnung mehr, d.h. mit $\mathcal{O}(\Delta t^5)$, und in den Geschwindigkeiten mit $\mathcal{O}(\Delta t^4)$. Der Indikator C hat die gleiche Konvergenzordnung wie der Indikator B. Der Sprungindikator D konvergiert mit $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Die maximale Ordnung kann nicht immer erreicht werden, z.B. bei Beispielen mit Singularitäten nimmt die Konvergenzordnung ab. In der Literatur wird selten auf den Zusammenhang zwischen der Konvergenzordnung und den numerischen Beispielen eingegangen.

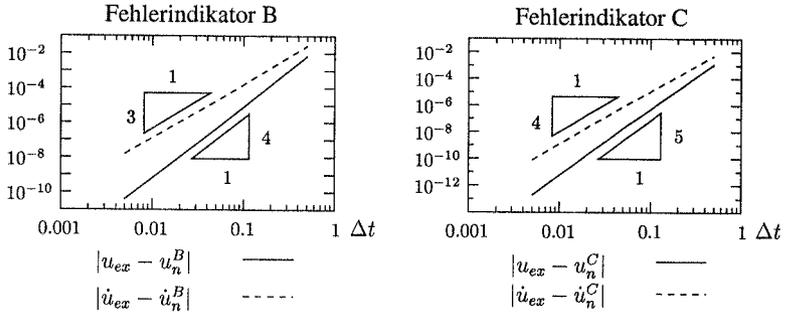


Abbildung 5.4: Konvergenz der Fehlerindikatoren B und C in den Verschiebungen und den Geschwindigkeiten bei $t=5, 0$ (EMS: $M = 1; C = 0; K = 1; P = \sin(t); \bar{u}_0 = 0; \dot{\bar{u}}_0 = 0$)

Die Konvergenzordnung wird entweder nicht numerisch überprüft oder es werden nur Beispiele mit maximaler Konvergenzordnung verwendet. Wie später in Kapitel 5.2.3 gezeigt wird, kann bei der Adaption der Zeitschrittgröße die Abnahme der Konvergenzordnung durch Gleichung (5.38) berücksichtigt werden.

Das Beispiel der erzwungenen ungedämpften Schwingung ($M = 1; C = 0; K = 1; P = \sin(t); \bar{u}_0 = 0; \dot{\bar{u}}_0 = 0$) zeigt den Verlust der Konvergenzordnung. In Bild (5.4) werden die Fehlerindikatoren B von Li et al. [100][61] und C von Riccius [80] gegenübergestellt. Die Konvergenzordnung in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten des Indikators B nimmt ab, während die des Indikators C ungestört ist. Die Ergebnisse des Indikators B sind schlechter als die des Indikators C, da die Ableitung der Beschleunigungen bei dem Indikator B mit Gleichung (5.17) bestimmt wird. Der Fehlerindikator B zum Zeitpunkt t_n hängt somit von den Ableitungen der Beschleunigungen zu dem alten Zeitpunkt t_{n-1} ab. Der Indikator C hingegen berechnet die Ableitung der Beschleunigungen mit Gleichung (5.23) unabhängig von den Ableitungen der Beschleunigungen zu dem alten Zeitpunkt. Dadurch kann sich der Fehler in den Ableitungen der Beschleunigungen nicht in der Zeit fortpflanzen und der Fehlerindikator führt auf bessere Ergebnisse.

Die Fehlerindikatoren werden an dem ungedämpften Einmassenschwinger ($M=1; C=0; K=1; P=0; \bar{u}_0=1; \dot{\bar{u}}_0=0$) untersucht. In Bild (5.5) ist der exakte globale Fehler über alle Zeitschritte und der „exakte“ lokale Fehler eines Zeitschrittes mit dem Newmark-Verfahren ($\beta = 0,25; \delta = 0,5; \Delta t = 0,1$) dargestellt. Der globale Fehler, $e_{glob,ex} = u_{ex} - u^h$ bzw. $\dot{e}_{glob,ex} = \dot{u}_{ex} - \dot{u}^h$, nimmt wie erwartet mit der Zeit zu (s. Abb. 5.5 links). Die Amplitude des lokalen Fehlers, $e_{lok,ex} = \hat{u}_{ex} - u^h$ bzw. $\dot{e}_{lok,ex} = \hat{\dot{u}}_{ex} - \dot{u}^h$, bleibt konstant. Die Fehlerindikatoren A, B und C für die Verschiebungen verhalten sich in Bild (5.6) bezüglich der Frequenz und der Amplitude wie der „exakte“ lokale Fehler. Ebenso können die Indikatoren der Geschwindigkeiten B und C den zeitlich lokalen Fehler gut darstellen. Bei diesem Beispiel, der freien Schwingung, liefern beide Fehlerindikatoren B und C denselben Fehlerverlauf. In Bild (5.6) ist ebenfalls der Sprungindikator D

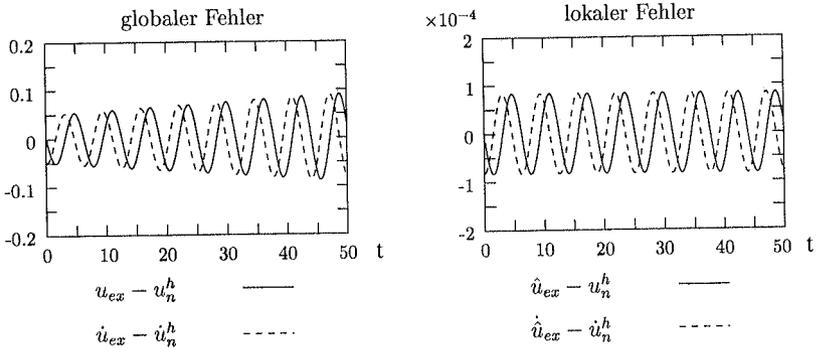


Abbildung 5.5: Exakter globaler und lokaler Fehler mit dem Newmark-Verfahren (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = 0; \bar{\mathbf{u}}_0 = 1; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

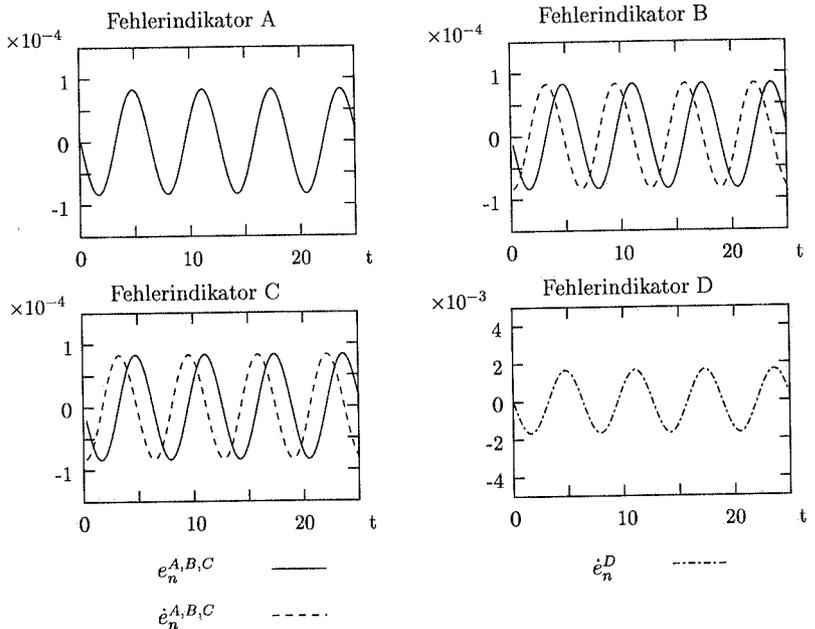


Abbildung 5.6: Zeitlicher Verlauf der Fehlerindikatoren A,B,C und des Sprungindicators D (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = 0; \bar{\mathbf{u}}_0 = 1; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

dargestellt, der auf der DTG-Methode basiert. Der exakte globale und „exakte“ lokale Fehlerverlauf der DTG-Methode ist in Abbildung (5.7) dargestellt. Der Fehler ist kleiner als bei der Newmark-Methode, da die DTG-Methode eine größere Genauigkeit besitzt. Auch der Sprungindikator D gibt den Verlauf des „exakten“ lokalen Fehlers gut wieder.

Die Nachteile des Indikators B, die schon in Abbildung (5.4) deutlich wurden, wirken sich auch auf den Fehlerverlauf negativ aus. Es wird die ungedämpfte erzwungene Schwingung des Einmassenschwingers ($M = 1; C = 0; K = 1; P = \sin(t); \bar{u}_0 = 0; \dot{\bar{u}}_0 = 0$) untersucht. Der Verlauf des exakten globalen und des „exakten“ lokalen Fehlers ist in Bild (5.8) dargestellt. In Abb. (5.9) ist der Verlauf der Fehlerindikatoren B und C angegeben. Zwischen dem Verlauf des Indikators B und C ist zunächst kein Unterschied festzustellen. Die Frequenz und die Amplitude stimmen mit dem „exakten“ lokalen Fehler überein. Wird jedoch der Verlauf des Indikators B genauer betrachtet (s. Abb. 5.9 links), dann sind hochfrequente Anteile zu erkennen, die beim Indikator C nicht vorhanden sind. Diese hochfrequenten Anteile entstehen durch die Art der Berechnung der Beschleunigungsableitungen.

Der Vergleich der Indikatoren hat gezeigt, daß der Fehlerindikator C dem Indikator B vorzuziehen ist. Die Indikatoren A bzw. D können ebenfalls den lokalen Fehlerverlauf darstellen, jedoch bestimmen sie jeweils nur den Fehler in den Verschiebungen bzw. in den Geschwindigkeiten. Die lokalen Fehlerindikatoren können definitionsgemäß nur den Verlauf des zeitlich lokalen Fehlers in den Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten darstellen.

5.2.2 Zeitlich globale Fehlerindikatoren

Die zeitlich lokalen Fehlerindikatoren aus dem vorherigen Abschnitt können nur den Fehler eines Zeitschrittes erfassen. Die numerische Lösung beinhaltet jedoch auch die Fehler aller vorangegangenen Zeitschritte. Es gibt verschiedene Ansätze, den zeitlich globalen Fehler zu bestimmen. Zienkiewicz et al. [112] schlagen vor den zeitlich globalen Fehler e_{gib} in der Energienorm zu einem Zeitpunkt t_N durch die Summation der lokalen Fehler e_n über alle Zeitschritte zu berechnen.

$$\|e_{gib}(t_N)\|_E \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|e_n\|_E \quad (5.31)$$

Wiberg et al. [100] erklären dieses Vorgehen über die Vergrößerungsmatrix A des Zeitintegrationsverfahrens. Die exakte Lösung und die Newmark-Approximation werden dazu in die entsprechende Gleichung (B.1) mit der Vergrößerungsmatrix A eingesetzt und durch die Differenz der zwei Gleichungen wird der Fehler zu dem Zeitpunkt t_n gewonnen.

$$\check{e}_{gib}(t_n) = A\check{e}_{gib}(t_{n-1}) + \check{e}_{lok}(t_{n-1}) \quad (5.32)$$

Wird die Gleichung (5.32) wiederholt ineinander eingesetzt, kann der Fehler zum Zeitpunkt t_N durch die lokalen Fehler $\check{e}_{lok}(t_n)$ und die Vergrößerungsmatrix ausgedrückt

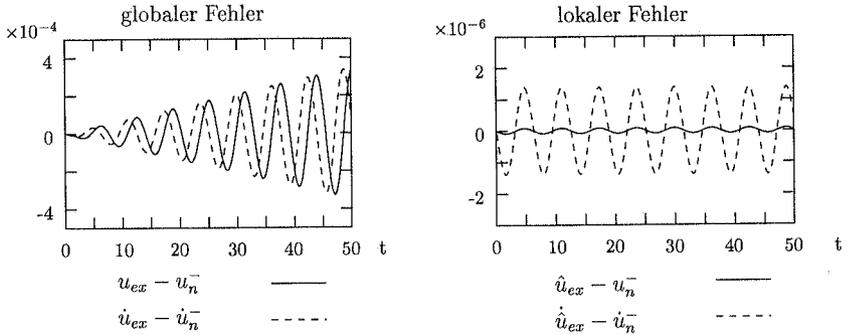


Abbildung 5.7: Exakter globaler und lokaler Fehler mit der DTG-Methode (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = 0; \bar{\mathbf{u}}_0 = 1; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

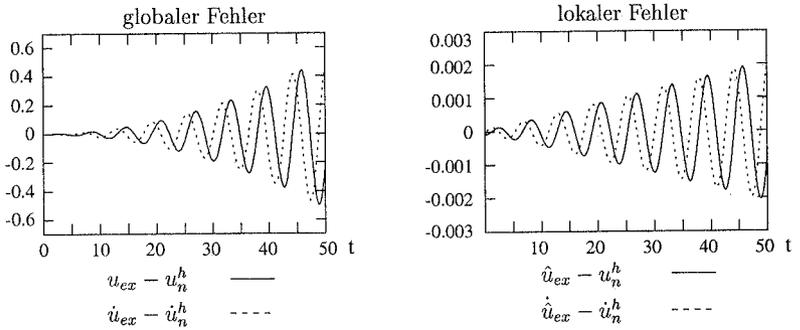


Abbildung 5.8: Exakter globaler und lokaler Fehler mit dem Newmark-Verfahren (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = \sin(t); \bar{\mathbf{u}}_0 = 0; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

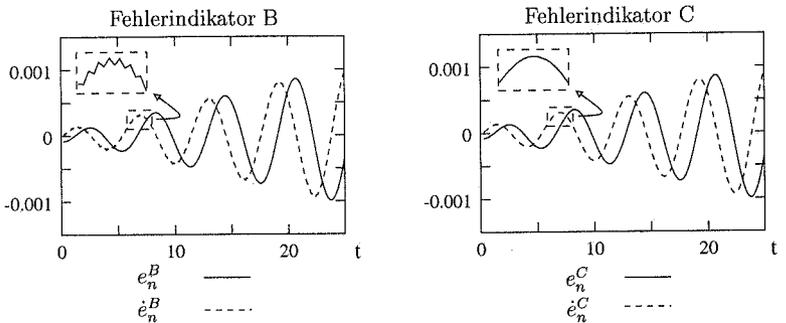


Abbildung 5.9: Vergleich der Fehlerindikatoren B und C (EMS: $\mathbf{M} = 1; \mathbf{C} = 0; \mathbf{K} = 1; \mathbf{P} = \sin(t); \bar{\mathbf{u}}_0 = 0; \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$)

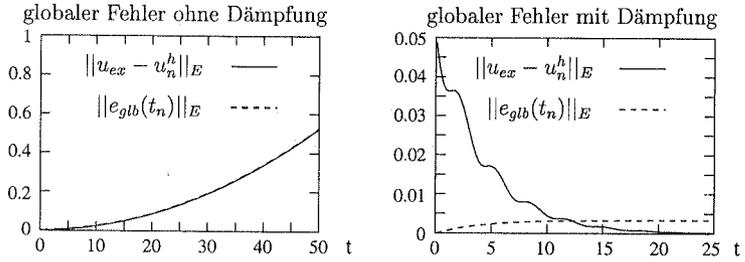


Abbildung 5.10: Exakter globaler Fehler und globaler Fehlerindikator (Gl. 5.31) des EMS: Links: $\mathbf{M} = 1$; $\mathbf{C} = 0$; $\mathbf{K} = 1$; $\mathbf{P} = \sin(t)$; $\bar{\mathbf{u}}_0 = 0$; $\bar{\mathbf{u}}_0 = 0$; Rechts: $\mathbf{M} = 1$; $\mathbf{C} = 0, 5$; $\mathbf{K} = 1$; $\mathbf{P} = 0$; $\bar{\mathbf{u}}_0 = 1$; $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = 0$

werden.

$$\check{e}_{glob}(t_N) = \mathbf{A}^N \check{e}_{glob}(t_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-1-n} \check{e}_{lok}(t_n) \quad (5.33)$$

Da angenommen wird, daß der Fehler $\check{e}_{glob}(t_0)$ null ist, verschwindet der erste Term in (5.33). Die exakten lokalen Fehler $\check{e}_{lok}(t_n)$ werden durch die genäherten Fehler \mathbf{e}_n und $\dot{\mathbf{e}}_n$ ersetzt. Wird die Stabilitätsbedingung des Zeitintegrationsverfahrens ausgenutzt, d.h. für die Eigenwerte λ_{Ai} von \mathbf{A} muß gelten $\lambda_{Ai} \leq 1$ (B.5), dann kann die rechte Seite von (5.33), unter Verwendung der Energienorm, nach oben abgeschätzt werden. Es ergibt sich somit die Abschätzung (5.31).

Der Fehler nach Gleichung (5.33) kann nur gemeinsam in der Dehnungs- und der kinetischen Energie abgeschätzt werden. Wiberg et al. [100] erhalten gute Ergebnisse mit dieser Abschätzung im Gegensatz zu Zienkiewicz et al. [112]. Der Grund für die unterschiedlichen Einschätzungen der Methoden liegt an den untersuchten Beispielen. Wiberg et al. [100] haben ungedämpfte Systeme untersucht. Die Summation der lokalen Fehler liefert eine plausible Abschätzung. In Abbildung (5.10) ist links der exakte und der approximierte globale Fehler des ungedämpften Einmassenschwingers aufgetragen. Der lokale Fehler \mathbf{e}_n wird mit dem Fehlerindikator C berechnet. Der exakte und der approximierte globale Fehler wachsen mit der Zeit an. Für dieses einfache ungedämpfte System ist zwischen dem exakten und dem genäherten globalen Fehler kein Unterschied zu erkennen. Zienkiewicz et al. [112] haben gedämpfte Systeme untersucht. In Abbildung (5.10) ist rechts der Fehler des gedämpften Einmassenschwingers dargestellt. Der exakte globale Fehler nimmt mit der Zeit ab. Der mit (5.31) berechnete globale Fehler kann diesen Verlauf jedoch nicht abbilden. In diesem Fall ist die Summation der einzelnen zeitlich lokalen Fehler ein schlechtes Maß für den globalen Fehler.

Alternativ wird von Zienkiewicz et al. [112] vorgeschlagen, den Fehler durch den lokalen

Fehler mal die Anzahl der Zeitschritte zu approximieren.

$$\mathbf{e}_{glob}(t_N) \approx N \mathbf{e}_N \quad (5.34)$$

Es wird davon ausgegangen, daß der lokale Fehler gleichmäßig über die Zeit verteilt ist. Zienkiewicz et al. [112] haben für ein gedämpftes Modellproblem mit dieser Fehlerapproximation gute Ergebnisse erhalten. Dies ist offensichtlich, da der lokale Fehler \mathbf{e}_N abnimmt und mit (5.34) auch der globale Fehler.

Wird der Typ des Problems berücksichtigt, dann wird klar, daß für ungedämpfte Systeme mit (5.33) und für gedämpfte Systeme mit der Fehlerapproximation (5.34) bessere Ergebnisse erzielt werden können. Diese Faustregel ist nur für einfache Probleme anwendbar. Das globale Fehlermaß (5.33) führt im allgemeinen auf eine sehr ungenaue Abschätzung und wird deshalb nicht zur Beurteilung der Qualität der numerischen Lösung verwendet. Erst durch die Einführung von zusätzlichen dualen Problemen kann der zeitliche Verlauf des Fehlers richtig dargestellt werden, wie in Kapitel 4 gezeigt wurde.

5.2.3 Adaptive Zeitschrittsteuerung

Der zeitliche Fehler \mathbf{e}_n eines Zeitintervalls soll in einem vorgegebenen Toleranzbereich liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, muß die Zeitschrittgröße angepaßt werden. In der Literatur werden u.a. von Li et al. [101][61] und Zienkiewicz et al. [112] Verfahren zur Bestimmung der neuen Zeitschrittgröße vorgestellt, die sich kaum unterscheiden. Die adaptive Zeitschrittsteuerung ist im folgenden dargestellt. Der zeitliche Fehler kann entweder mit dem absoluten Fehler $\|\mathbf{e}\|_t$ oder mit dem relativen Fehler η_t gemessen werden. Der relative Fehler η_t hat den Vorteil, daß er unabhängig von der absoluten Größe der Energie des Systems ist.

$$\eta_t = \frac{\|\mathbf{e}_n\|_{E,t}}{\|\mathbf{u}\|_E} \quad (5.35)$$

Der zeitliche Fehler in der Energienorm in dem Zeitintervall I_n wird mit $\|\mathbf{e}_n\|_{E,t}$ bezeichnet. Der Fehler wird auf die maximale Energie $\|\mathbf{u}\|_E$ aller bisherigen Zeitschritte bezogen. Da die exakte Energie nicht bekannt ist, wird die Energie der diskreten Lösung berechnet. Statt den Fehler in der Gesamtenergie $\|\mathbf{e}_n\|_{E,t}$ kann auch nur der Fehler in der kinetischen $\|\mathbf{e}_n\|_{E_v,t}$ bzw. in der Dehnungsenergie $\|\mathbf{e}_n\|_{E_u,t}$ bestimmt werden.

Es ist sinnvoll, den Fehler auf die maximale Energie aller bisherigen Zeitschritte zu beziehen und nicht auf die Energie des aktuellen Zeitschrittes. Durch den Bezug auf die maximale Energie aller bisherigen Zeitschritte werden die relativen Fehler der verschiedenen Zeitschritte zueinander in ein Verhältnis gesetzt. Der lokale Fehler ist somit von der aktuellen Energie des Zeitschrittes unabhängig. Der relative lokale Fehler η_t soll innerhalb der folgenden Grenzen liegen.

$$\vartheta_1 \bar{\eta}_t \leq \eta_t \leq \vartheta_2 \bar{\eta}_t \quad (5.36)$$

Die Grenzen werden durch die vorgeschriebene relative Fehlertoleranz $\bar{\eta}_t$ und die Parameter ϑ_1 und ϑ_2 berechnet. Die Parameter ϑ_1 und ϑ_2 liegen in den Intervallen $0 \leq \vartheta_1 \leq 1$ und $1 \leq \vartheta_2$. Ist der berechnete Fehler größer als die obere Schranke, so muß der Zeitschritt verkleinert werden. Unterschreitet der Fehler η_t die untere Schranke, so wird das nächste Zeitintervall vergrößert. Es ist sinnvoll erst nach mehrmaligem Unterschreiten der Grenze $\vartheta_1 \bar{\eta}_t$ den Zeitschritt anzupassen. Die neue Zeitschrittgröße Δt_{neu} wird mit Hilfe der Konvergenzordnung des lokalen Fehlers ermittelt. Die Konvergenzordnung des lokalen Fehlers ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^3)$, s. Dahlquist et al. [29]. Der relative Fehler η_t ist proportional zu Δt^3 , ebenso wie der zu erzielende relative Fehler $\bar{\eta}_t$ proportional zu der neuen Zeitschrittgröße Δt_{neu}^3 ist. Somit wird die neue Zeitschrittgröße berechnet mit

$$\Delta t_{neu} = \Delta t \sqrt[3]{\frac{\bar{\eta}_t}{\eta_t}} \quad (5.37)$$

Für Newmark-Ansätze mit $\delta \neq \frac{1}{2}$ nimmt die Konvergenzordnung ab (s. Anhang B Tabelle B.1). Entsprechend muß die neue Zeitschrittgröße korrigiert werden, u.a. Zeng [104], Li [61].

$$\Delta t_{neu} = \Delta t \sqrt[3\kappa]{\frac{\bar{\eta}_t}{\eta_t}} \quad (5.38)$$

Der Korrekturfaktor κ liegt in dem Intervall $0 \leq \kappa \leq 1$.

Riccius [80] verwendet den globalen absoluten Fehler $\|e_{glob}\|_E$ zur Zeitschrittsteuerung. Im folgenden wird der Zusammenhang von der Kontrolle des globalen absoluten Fehlers und der Kontrolle des relativen lokalen Fehlers hergestellt. Der absolute globale Fehler soll einen vorgegebenen Wert $\|\bar{e}_{glob}\|_{E,t}$ nicht überschreiten. Mit Hilfe der Gleichung (5.34) kann aus der globalen Fehlerschranke $\|\bar{e}_{glob}\|_{E,t}$ eine lokale Fehlerschranke $\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t}$ ermittelt werden, wenn die gleichmäßige Verteilung des Fehlers über den Zeitraum $(0, T)$ angenommen wird.

$$\|\bar{e}_{glob}\|_{E,t} = \frac{T}{\Delta t} \|\bar{e}_{lok}\|_{E,t} \quad (5.39)$$

Ebenso wird der globale Fehlerindikator $\|e_{glob}\|_{E,t}$ aus dem lokalen Fehler $\|e_{lok}\|_{E,t}$ berechnet.

$$\|e_{glob}\|_{E,t} = \frac{T}{\Delta t} \|e_{lok}\|_{E,t} \quad (5.40)$$

Über die Proportionalität der Zeitschrittgröße zu dem absoluten Fehler, kann die neue Zeitschrittgröße bestimmt werden. Da Riccius von dem globalen Fehler ausgeht, nimmt er eine globale Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ an. Die neue Zeitschrittgröße Δt_{neu} kann mit Hilfe der lokalen Größen $\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t}$ und $\|e_n\|_{E,t}$ berechnet werden.

$$\Delta t_{neu} = \Delta t \sqrt[2]{\frac{\|\bar{e}_{glob}\|_{E,t}}{\|e_{glob}\|_{E,t}}} = \Delta t \sqrt[2]{\frac{\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t}}{\|e_n\|_{E,t}}} \quad (5.41)$$

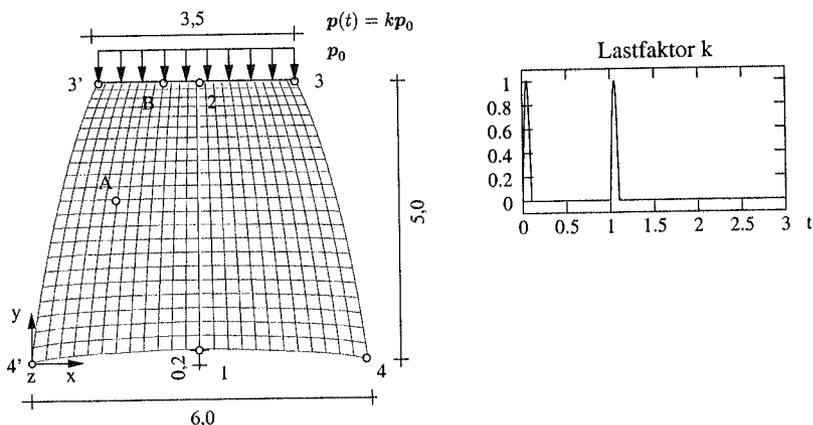


Abbildung 5.11: Schwach gekrümmtes Formteil und zeitlicher Verlauf der Belastung

Der absolute lokale Fehler $\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t}$ kann wiederum durch den relativen lokalen Fehler $\bar{\eta}_t$ ausgedrückt werden.

$$\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t} = \bar{\eta}_t \|\mathbf{u}\|_E \quad (5.42)$$

Die relative lokale Fehlerschranke $\bar{\eta}_t$ wird in diesem Fall nur verwendet, um den Zusammenhang zwischen der Bestimmung des Zeitschrittes mit dem relativen lokalen Fehler und dem absoluten globalen Fehler herzustellen. Wird der Zusammenhang (5.42) zwischen dem absoluten vorgegebenen lokalen Fehler $\|\bar{e}_{lok}\|_{E,t}$ und der Energie $\|\mathbf{u}\|_E$ in (5.41) eingesetzt, sowie Gleichung (5.35) in (5.41) verwendet, ergibt sich bis auf die Wurzel die neue Zeitschrittgröße mit dem relativen lokalen Fehler (5.37). Der Unterschied zwischen der Steuerung über den globalen und den lokalen Fehler liegt in der Konvergenzordnung und den vorgegebenen Schranken $\|\bar{e}_{glob}\|_{E,t}$ bzw. $\bar{\eta}_t$.

Im folgenden wird der relative lokale Fehler (5.35) zur adaptiven Zeitschrittsteuerung verwendet.

Numerisches Beispiel Das folgende Beispiel zeigt, daß durch die adaptive Zeitschrittsteuerung der numerische Aufwand ohne einen Verlust an Genauigkeit reduziert werden kann. Ein räumlich gekrümmtes Blechbauteil wird in der xy-Ebene belastet. Die Abmessungen des Formbleches sind in Abb. (5.11) angegeben. Die maximalen Abmessungen der Projektion des Bleches in die xy-Ebene beträgt $6,00 \times 5,00$ und in der xz-Ebene $6,00 \times 0,13$. Die Beschreibung der Geometrie ist [64] entnommen. An der vorderen Kante (4-4') sind alle Verschiebungen festgehalten. Die Kante (3-3') ist unverschieblich in der x- und z-Richtung. Die Längsränder sind frei beweglich. Belastet wird die Kante 3-3' ($y=5,0$) in y-Richtung mit dem in Abb. (5.11) angegebenen zeitlichen Verlauf des Lastfaktors. Das Material hat den E-Modul $E = 2,1 \times 10^8$, die Dichte $\rho = 75$, die Querdehnzahl

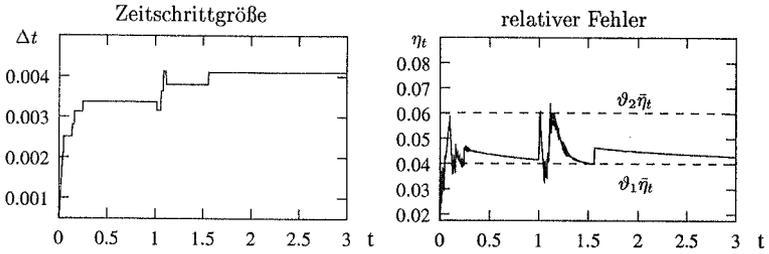


Abbildung 5.12: Verlauf der adaptiven Zeitschrittgröße Δt und des relativen Fehlers η_t

$\mu = 0,3$ und die Dicke $h = 0,01$. Es wird die Hälfte der Schale diskretisiert. Die Schale wird mit achtknotigen Schalenelementen, die unterintegriert werden, diskretisiert. Die Rayleigh-Dämpfung wird mit $d_1 = 0$ und $d_2 = 0,001$ angesetzt. Zur Zeitdiskretisierung wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Der Punkt A besitzt die Koordinaten $\mathbf{x} = (1,72/2, 55/0,01)$ und der Punkt B liegt bei $\mathbf{x} = (2,23/5, 0/0,13)$ (s. Abb. 5.11). Das FE-Netz mit 4116 Freiheitsgraden ist in Abb. (5.11) dargestellt. Die räumliche Diskretisierung ist ausreichend genau, d.h. mit einem feineren Netz ist bei maximaler Belastung kein Unterschied in der Lösung des statischen Problems festzustellen. Es wird der Fehlerindikator C nach Riccius für den Fehler in den Verschiebungen (5.26) und in den Geschwindigkeiten (5.27) verwendet. Zunächst wird die Zeitschrittgröße mit $\Delta t = 0,001$ gewählt. Mit der Zeitschrittkontrolle wird im vierten Zeitschritt begonnen und der relative zeitlich lokale Fehler η_t berechnet. Der vorgegebene relative Fehler beträgt $\bar{\eta}_t = 0,05$ mit den Parametern $\vartheta_1 = 0,8$ und $\vartheta_2 = 1,2$ für die untere und obere Schranke (5.36). Der zeitlich lokale Fehler wird auf die maximale gesamte Energienorm aller bisherigen Zeitschritte bezogen. Erst wenn die vorgegebene Toleranzschranke fünfmal hintereinander unterschritten wird, wird der Zeitschritt verkleinert. Damit wird das zu schnelle Verkleinern des Zeitschrittes verhindert. Zum Vergleich wird das Problem mit einem konstanten Zeitschritt ($\Delta t = 0,0005$) berechnet. Der Zeitschritt ist so groß gewählt, wie der kleinste adaptive Zeitschritt, damit sichergestellt ist, daß die obere Gren-

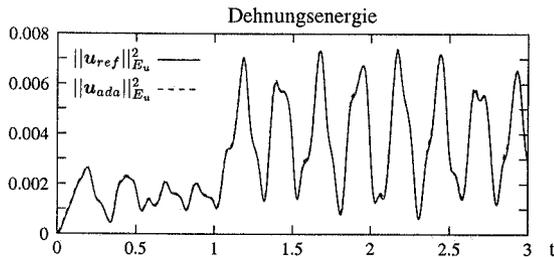


Abbildung 5.13: Zeitlicher Verlauf der Dehnungsenergie $\|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ mit konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0,0005$ (Index: ref) und mit adaptiver Zeitschrittsteuerung (Index: ada)

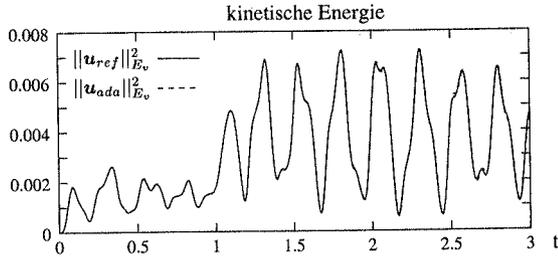


Abbildung 5.14: Zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie $\|\mathbf{u}\|_{E_v}^2$ mit konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0,0005$ (Index: ref) und mit adaptiver Zeitschrittsteuerung (Index: ada)

ze des zeitlichen Fehlers eingehalten wird.

In Abb. (5.12) ist der Verlauf der Zeitschrittgröße Δt dargestellt. Zu Beginn wird der Zeitschritt, kaum erkennbar in Abb. (5.12), halbiert. Anschließend, wenn das System frei schwingt, wird der Zeitschritt wieder vergrößert. Erst bei der erneuten Lasteinwirkung ($t=1,0$) wird der Zeitschritt wieder etwas verkleinert. Der Verlauf des relativen zeitlichen Fehlers η_t ist in Abb. (5.12) rechts dargestellt. In den Bereichen, wo der zeitliche Fehler nicht mehr in dem Toleranzbereich $\vartheta_1 \bar{\eta}_t \leq \eta_t \leq \vartheta_2 \bar{\eta}_t$ liegt, wird der Zeitschritt adaptiert. Zum Vergleich ist in Abb. (5.13) und Abb. (5.14) die Dehnungs- und die kinetische Energie der adaptiven Lösung $(\cdot)_{ada}$ und der Lösung mit dem konstanten Zeitschritt $(\cdot)_{ref}$, der dem kleinsten adaptiven Zeitschritt entspricht, dargestellt. Obwohl nur ca. 15% der Zeitschritte der Referenzlösung ($\Delta t = 0,0005$) bei der adaptiven Berechnung benötigt werden ($n_{ref} = 6000$ und $n_{ada} = 838$ für $0 \leq t \leq 3,0$), ist in dem Verlauf der Energien kein Unterschied zu erkennen. Auch der Verlauf der Verschiebung des Punktes A in z-Richtung in Abb. (5.15) links und der Geschwindigkeit des Punktes B in y-Richtung in Abb. (5.15) rechts kann durch die adaptive Lösung dargestellt werden. Dies zeigt, daß durch die Kontrolle und Anpassung des Zeitschrittes der numerische Aufwand deutlich verringert werden kann, ohne an Genauigkeit zu verlieren.

5.3 Räumlicher Fehler

In diesem Kapitel werden räumliche Fehlerindikatoren vorgestellt, die auf der semidiskreten Formulierung basieren. Bei diesen „klassischen“ Verfahren zur Fehlerkontrolle wird der räumliche Fehler zu einem Zeitpunkt bestimmt. Dadurch können die Verfahren zur Approximation des räumlichen Fehlers von der Statik auf die Dynamik übertragen werden. Der Fehler wird in der Energienorm gemessen. Im Gegensatz zur Statik wird der Fehler in der Dynamik in der Dehnungsenergie und in der kinetischen Energie bestimmt. Bei der Anpassung des FE-Netzes mit der h-Adaptivität muß für jedes Element eine neue Elementgröße berechnet werden. Dazu werden Verfeinerungsindikatoren aus den einzelnen Elementfehlern bestimmt, mit deren Hilfe die neue Elementgröße berechnet wird. Im

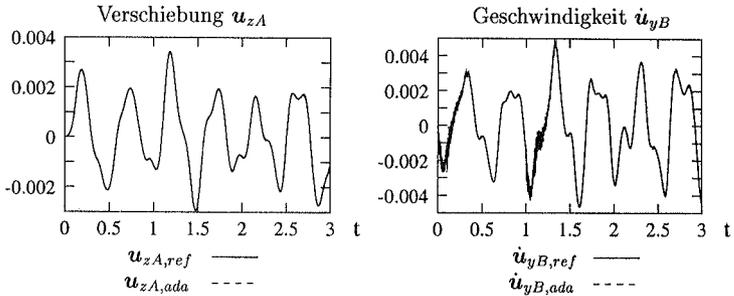


Abbildung 5.15: Vergleich der Referenzlösung (Index: ref) und der adaptiven Lösung (Index: ada) in der Verschiebung \mathbf{u}_z des Punktes A und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}_y$ des Punktes B

folgenden werden zwei verschiedene Fehler approximiert:

Globaler Fehler in der Energienorm

Lokaler Fehler mit Hilfe von dualen Problemen

In Kapitel 5.3.1 werden zunächst Indikatoren eingeführt, die den räumlich globalen Fehler, d.h. den mittleren Fehler in der Energienorm im Gebiet Ω zu einem Zeitpunkt, kontrollieren. Fehlerindikatoren für den globalen Fehler sind aus der Literatur bekannt. In Kapitel 5.3.1 werden die Indikatoren für den Fehler in der Dehnungsenergie und den Fehler in der kinetischen Energie eingeführt und getestet. Die adaptive Netzanpassung wird in Kapitel 5.3.2 behandelt. In Kapitel 5.3.3 wird anschließend der Gedanke der Fehlerbestimmung mit dualen Problemen auf die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration übertragen, um den lokalen Fehler zu bestimmen. Es wird dabei auf die Herleitung der Fehlerindikatoren in Kapitel 4, die auf der DTG-Methode basieren, zurückgegriffen. Da zur Zeitintegration, im Gegensatz zu der Methode in Kapitel 4, keine finiten Elemente sondern finite Differenzen verwendet werden, kann der Indikator aus Kapitel 4 nicht vollständig, d.h. für den räumlichen und zeitlichen Fehler, auf die FD-Verfahren übertragen werden. Es wird ein Indikator für den räumlich lokalen Fehler entwickelt und getestet. Der zeitliche Verlauf des Fehlers kann nicht berücksichtigt werden.

Im folgenden wird der Index des Zeitpunktes weggelassen, da der Fehler immer zu einem Zeitpunkt ermittelt wird. Alle Zustandsgrößen, z.B. \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ und $\boldsymbol{\sigma}$, werden zu demselben Zeitpunkt ausgewertet.

5.3.1 Räumlicher Fehler in der Energienorm

Der räumliche Fehler $\|\mathbf{e}_s\|_E$ in der Energienorm setzt sich aus dem Fehler in der Dehnungsenergie $\|\mathbf{e}_s\|_{E_u}^2$ und dem Fehler in der kinetischen Energie $\|\mathbf{e}_s\|_{E_v}^2$ zusammen. In

diesem Kapitel werden die Methoden zur Approximation des Dehnungsfehlers und des kinetischen Fehlers beschrieben. Arbeiten zur räumlichen Adaptivität bei der semidiskreten Formulierung werden u.a. von Wiberg et al. [101][103], Li [61] und Riccius et al. [80][81] vorgestellt.

5.3.1.1 Fehler in der Dehnungsenergie

Der Fehler in der Dehnungsenergie $\|e_s\|_{E_u}$ wird mit dem Fehler in den Spannungen e_σ berechnet. Die Summe aller Elementfehler in der Dehnungsenergie $a(e, e)_{\Omega^e}$ ergibt den gesamten Fehler in der Dehnungsenergie.

$$\|e_s\|_{E_u}^2 = \sum_{e=1}^K a(e, e)_{\Omega^e} \quad (5.43)$$

Der Spannungsfehler e_σ kann nicht berechnet werden, da die exakte Spannungslösung σ unbekannt ist. Die exakte Spannung wird deshalb mit einer verbesserten Lösung σ^* approximiert.

$$e_\sigma = \sigma - \sigma^h \approx \sigma^* - \sigma^h \quad (5.44)$$

Die verbesserte Lösung σ^* wird mit Hilfe der diskreten Lösung σ^h bestimmt. Es gibt verschiedene Methoden die verbesserten Spannungen σ^* zu berechnen. Im folgenden werden die, aus der Literatur bekannten, glättungsbasierten Techniken vorgestellt.

Mittelwert Für jedes Element werden die Spannungen σ_{Kp} an den FE-Knoten x_{Kp} berechnet. Die verbesserte Spannungslösung σ_{Kp}^* wird aus dem Mittelwert der Knotenspannungen aller an den Knoten Kp angrenzenden Elemente berechnet [107].

$$\sigma_{Kp}^* = \frac{1}{Kps} \sum_{e=1}^{Kps} \sigma^h(x_e) \quad (5.45)$$

Kps ist die Anzahl der Knoten von allen Elementen, die den Knoten KP gemein haben. Wenn für jeden FE-Knoten verbesserte Spannungen σ_{Kp}^* berechnet wurden, kann der Spannungsfehler mit (5.43) und (5.44) berechnet werden.

L_2 -Projektion Die globale L_2 -Projektion ist von Hinton et al. [44] zur Berechnung der verbesserten Lösung verwendet worden. Die Methode ist jedoch sehr aufwendig, da ein globales Gleichungssystem gelöst werden muß. Die lokale L_2 -Projektion wird nachfolgend im Rahmen der „Superconvergent Patch Recovery“ Technik beschrieben.

„Superconvergent Patch Recovery“ (SPR) Die SPR-Technik zur Bestimmung der verbesserten Spannungslösung ist weit verbreitet, da die Methode einfach anzuwenden und robust ist. Die ursprüngliche Methode wurde von Zienkiewicz und Zhu [113][114] entwickelt und wird auch als Z^2 -Fehlerindikator bezeichnet. Die SPR-Technik führt im allgemeinen nicht auf Fehlerschätzer. Rank et al. [73] konnten jedoch für lineare Elemente zeigen, daß die Ergebnisse bis auf einen Faktor

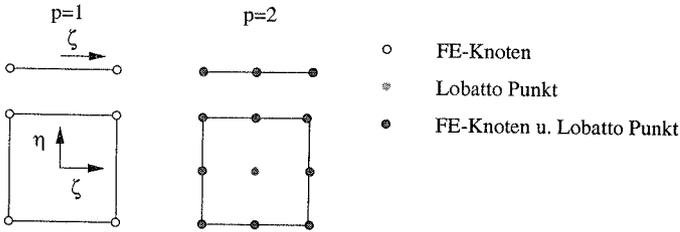


Abbildung 5.16: Lobatto-Punkte

äquivalent zu denen des residualen Fehlerschätzers von Babuška–Miller [5] sind. Im folgenden wird gezeigt, wie mit Hilfe der SPR-Technik die verbesserte Spannungslösung bestimmt wird. Zunächst wird auf die Superkonvergenzeigenschaften der FE-Methode eingegangen.

Superkonvergenzeigenschaften Die FE-Lösung bzw. deren Ableitung besitzt superkonvergente Eigenschaften, wenn sie an speziellen Punkten mit einer höheren Ordnung als global konvergiert. Barlow [14] fand spezielle Punkte im inneren der Elemente, an denen die Ableitung der FE-Lösung eine höhere Konvergenzordnung aufweist. Strang et al. [86] haben für die FE-Lösung selbst Superkonvergenz nachgewiesen. Im Mehrdimensionalen gibt es u.a. von Zlámal et al. [116][60] Arbeiten zu den Superkonvergenzeigenschaften. Eine ausführliche Literaturrecherche zur Superkonvergenz wurde von Krížek et al. [58] vorgenommen.

Für eindimensionale Randwertprobleme zeigt Bakker [9], daß es für jedes Element $p - 1$ innere Punkte gibt, an denen \mathbf{u}^h mit $\mathcal{O}(h^{p+2})$ konvergiert. Damit wird die globale Konvergenzrate des Fehlers von $\mathcal{O}(h^{p+1})$ übertroffen. Diese speziellen Punkte werden Lobatto-Punkte genannt. Die Lobatto-Punkte (Lb) sind in Abbildung (5.16) dargestellt. Die lokalen Koordinaten der Lobatto-Punkte sind:

$$\begin{aligned}
 \text{lineare Elemente:} & \quad \text{keine superkonvergenten Punkte} & (5.46) \\
 \text{quadratische Elemente: 1D:} & \quad \zeta_{Lb} = \{-1; 0; 1\} \\
 & \quad 2D: \quad \zeta_{Lb} = \{-1; 0; 1\} \quad \eta_{Lb} = \{-1; 0; 1\}
 \end{aligned}$$

Lesaint et al. [60] zeigen für die Ableitung der FE-Lösung die Existenz von superkonvergenten Punkten. Es gibt für jedes Element p innere Punkte, für die $\nabla \mathbf{u}^h$ mit $\mathcal{O}(h^{p+1})$ statt $\mathcal{O}(h^p)$ konvergiert. Diese Punkte heißen Gauss-Legendre Punkte. Für lineare und quadratische Elemente sind die Gauss-Legendre Punkte in Abbildung (5.17) dargestellt.

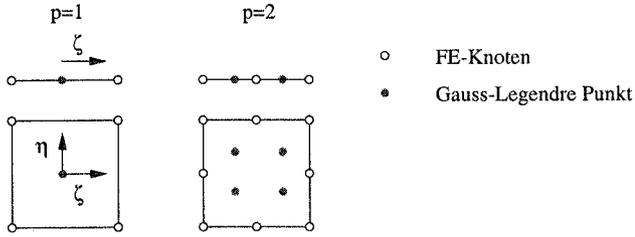


Abbildung 5.17: Gauss-Legendre Punkte

Die lokalen Koordinaten ζ_{GL} und η_{GL} der Gauss-Legendre Punkte (GL) sind:

$$\begin{aligned}
 \text{lineare Elemente:} \quad & 1\text{D: } \zeta_{GL} = \{0\} & (5.47) \\
 & 2\text{D: } \zeta_{GL} = \{0\} \quad \eta_{GL} = \{0\} \\
 \text{quadratische Elemente:} \quad & 1\text{D: } \zeta_{GL} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \\
 & 2\text{D: } \zeta_{GL} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \quad \eta_{GL} = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}
 \end{aligned}$$

Die Lobatto und Gauss-Legendre Punkte sind von der numerischen Integration bekannt. Superkonvergente Eigenschaften existieren streng genommen nur bei regulären Lösungen auf Gittern mit rechtwinkligen Elementen. Die Superkonvergenzeigenschaften werden trotzdem auf Probleme, bei denen die Voraussetzungen für Superkonvergenz nicht erfüllt sind, z.B. bei Lösungen mit Singularitäten oder auf unstrukturierten Netzen, angewendet. Auch für diese Probleme können gute Ergebnisse erzielt werden, u.a. Zienkiewicz et al. [106][114][113].

Bestimmung des Spannungsfehlers Die Spannungen besitzen an den Gauss-Legendre (GL) Punkten eine höhere Konvergenzordnung.

$$\sigma_{GL} = \sigma^h(\mathbf{x}_{GL}) \quad (5.48)$$

σ_{GL} sind die Spannungen an den Gauss-Legendre Punkten \mathbf{x}_{GL} . Mit Hilfe dieser Spannungen wird durch einen „Least Square Fit“ eine verbesserte Spannungslösung berechnet. Der „Least Square Fit“ stellt eine L_2 -Projektion auf einem lokalen Patch dar. Der „Patch Assembly“ Punkt (s. Abb. 5.18) ist der Knoten, an dem die Spannungen verbessert werden. Das lokale Patch wird durch alle an den „Patch Assembly“ Punkt angrenzenden Elemente gebildet.

Die verbesserten Spannungen σ_p^* werden mit dem Polynomansatz \hat{P} auf dem Patch beschrieben.

$$\sigma_p^* = \hat{P}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{a}} \quad (5.49)$$

Der Polynomansatz enthält dieselben Terme wie die Ansatzfunktion N für die Verschiebungen \mathbf{u}^h .

$$\hat{P}(\mathbf{x}) = [1; x; y; x^2; y^2; xy \dots] \quad (5.50)$$

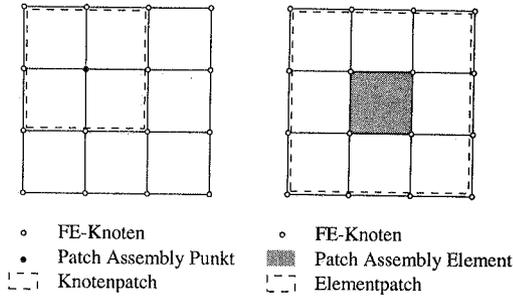


Abbildung 5.18: Knotenpatch und Elementpatch

Der unbekannte Koeffizientenvektor ist $\hat{\mathbf{a}}$.

$$\hat{\mathbf{a}} = [a_1; a_2; a_3 \dots]^T \quad (5.51)$$

Damit kann das folgende Funktional $\Pi(\hat{\mathbf{a}})$ aufgestellt werden.

$$\Pi(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{GLs} (\sigma_p^*(\mathbf{x}_k) - \sigma^h(\mathbf{x}_k))^2 = \sum_{k=1}^{GLs} (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{a}} - \sigma^h(\mathbf{x}_k))^2 \quad (5.52)$$

GLs ist die Anzahl der Gauss-Legendre Punkte eines Patches. Das Funktional stellt das Fehlerquadrat zwischen den verbesserten σ_p^* und den diskreten σ^h Spannungen an den Gauss-Legendre Punkten (GL) dar. Aus der Forderung, daß das Fehlerquadrat minimal sein soll, wird der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{a}}$ bestimmt.

$$\frac{\partial \Pi(\hat{\mathbf{a}})}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 \quad (5.53)$$

Die Minimierung wird als „Least Square Fit“ oder Fehlerquadratminimum bezeichnet.

$$\sum_{k=1}^{GLs} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{GLs} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\sigma^h(\mathbf{x}_k) \quad (5.54)$$

Aus dem Gleichungssystem (5.54) wird der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{a}}$ bestimmt. Für jeden „Patch Assembly“ Punkt kann mit Gleichung (5.49) die verbesserte Lösung σ_p^* auf dem Patch angegeben werden. Für Knoten, die keine „Patch Assembly“ Punkte sind, wie z.B. Randknoten, werden modifizierte Patches verwendet, s. Zienkiewicz et al. [113][115]. Sind für alle Knoten verbesserte Spannungen σ_{Kp}^* berechnet worden, kann der Verlauf der verbesserten Spannungen mit Hilfe der Ansatzfunktionen \mathbf{N} der Verschiebungslösung \mathbf{u}^h dargestellt werden.

$$\sigma^* = \mathbf{N}\sigma_{Kp}^* \quad (5.55)$$

Um die Qualität der verbesserten Lösung weiter zu erhöhen, kann das Funktional $\Pi(\hat{\mathbf{a}})$ um zusätzliche Terme, die z.B. das Gleichgewicht und die Randbedingungen kontrollieren,

erweitert werden. Arbeiten dazu wurden u.a. von Wiberg et al. [99] und Abdulwahab [1] vorgestellt. Weitere Modifikationen der ursprünglichen Methode sind die Wichtung der Funktionswerte $\sigma^h(\mathbf{x}_{GL})$, s. Blacker et al. [21], Wiberg et al. [99] und die Verwendung von Elementpatches (Abb. 5.18) statt Knotenpatches, s. Wiberg et al. [102], Abdulwahab [1]. Elementpatches werden bei der Ermittlung der verbesserten Geschwindigkeitslösung verwendet (s. Kapitel 5.3.1.2). Ein Nachteil der Elementpatches ist, daß größere Gleichungssysteme gelöst werden müssen [104]. Dafür werden die verbesserten Werte sofort auf dem ganzen Element bestimmt, da es im Gegensatz zu den Knotenpatches keine überlappende Bereiche gibt. Der Fehler eines Elementes kann nach der Bestimmung der verbesserten Werte des Elementes sofort berechnet werden. Insgesamt haben sich die Elementpatches jedoch nicht durchgesetzt.

Statik Die Techniken in der Statik zur Approximation des Fehlers in der Dehnungsenergie unterscheiden sich nicht von den Methoden in der Dynamik.

5.3.1.2 Fehler in der kinetischen Energie

Der Fehler in der kinetischen Energie $\|\mathbf{e}\|_{E_v,s}^2$ ist die Summe der Elementfehler in der kinetischen Energie $(\dot{\mathbf{e}}, \rho \dot{\mathbf{e}})_{\Omega^e}$ über alle K Elemente.

$$\|\mathbf{e}_s\|_{E_v}^2 = \sum_{e=1}^K (\dot{\mathbf{e}}, \rho \dot{\mathbf{e}})_{\Omega^e} \quad (5.56)$$

Zur Berechnung des Elementfehlers $\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_v}$ wird der Fehler in der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{e}}$ benötigt. Da die exakte Geschwindigkeitslösung $\dot{\mathbf{u}}$ nicht bekannt ist, wird sie durch eine verbesserte Geschwindigkeitslösung $\dot{\mathbf{u}}^*$ approximiert.

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h \approx \dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^h \quad (5.57)$$

Die verbesserte Geschwindigkeitslösung $\dot{\mathbf{u}}^*$ wird mit Hilfe der Glättung der diskreten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}^h$ berechnet. Der Geschwindigkeitsverlauf wird durch die Ansatzfunktionen \mathbf{N} und die Knotengeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}$ dargestellt.

$$\dot{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}} \quad (5.58)$$

Im Gegensatz zu den Spannungen sind die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}^h$ über die Elementränder Γ^e stetig. Die Methoden, mit denen der Fehler in der Dehnungsenergie approximiert wird, können deswegen nicht einfach übertragen werden. Der Fehler in der kinetischen Energie kann mit den folgenden Techniken berechnet werden.

- SPR-Technik der Geschwindigkeiten
- Lokale L_2 -Projektion
- „Verschlechterte“ Geschwindigkeiten

SPR der Geschwindigkeiten In Abschnitt 5.3.1.1 wurden die Superkonvergenzeigenschaften der FE-Lösung behandelt. Die FE-Lösung ist an den Lobatto-Punkten superkonvergent. Die Superkonvergenz wird von Wiberg et al. [102] zur Berechnung der verbesserten Geschwindigkeitslösung $\hat{\mathbf{u}}^*$ ausgenutzt. Die Geschwindigkeitslösung $\hat{\mathbf{u}}^h$ wird an den Lobatto-Punkten \mathbf{x}_{Lb} bestimmt.

$$\hat{\mathbf{u}}_{Lb} = \hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_{Lb}) \quad (5.59)$$

Da die Lobatto-Punkte meist identisch mit den FE-Knoten sind, können keine Knotenpatches wie bei der SPR-Technik für den Spannungsfehler verwendet werden. Wiberg et al. [102] führen deshalb Elementpatches (s. Abb. 5.18) ein. Der „Patch Assembly“ Knoten wird durch das „Patch Assembly“ Element ersetzt. Das Patch wird von allen Elementen, die das „Patch Assembly“ Element umgeben, gebildet. Die verbesserte Lösung $\hat{\mathbf{u}}^*$ wird durch das Polynom $\hat{\mathbf{P}}$ beschrieben.

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{a}} \quad (5.60)$$

Das Polynom $\hat{\mathbf{P}}$ (5.50) enthält die Terme aus den Ansatzfunktionen \mathbf{N} sowie mindestens ein bis zwei Terme höherer Ordnung, s. Wiberg et al. [102]. Mit mehr als zwei zusätzlichen Termen konnte bei numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit keine große Verbesserung im Vergleich zur Erhöhung des Aufwands beobachtet werden. Das Funktional $\Pi(\hat{\mathbf{a}})$ enthält die Summe der Fehlerquadrate der Geschwindigkeiten ($\hat{\mathbf{u}}^* - \hat{\mathbf{u}}^h$) über alle Lobatto-Punkte Lbs des Elementpatches.

$$\Pi(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{Lbs} (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_k))^2 \quad (5.61)$$

Das Fehlerquadrat soll minimal sein. Durch die Minimierung des Funktionals $\Pi(\hat{\mathbf{a}})$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, durch das der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{a}}$ bestimmt werden kann.

$$\sum_{k=1}^{Lbs} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{Lbs} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_k) \quad (5.62)$$

Wenn die Koeffizienten von $\hat{\mathbf{a}}$ berechnet worden sind, kann sofort mit Gleichung (5.60) der verbesserte Geschwindigkeitsverlauf $\hat{\mathbf{u}}^*$ eines Elementes angegeben werden und der Elementfehler $\|e(\Omega^e)\|_{E_{v,s}}$ berechnet werden. Im Gegensatz dazu müssen bei den Knotenpatches, um dann den Elementfehler in der Dehnungsenergie berechnen zu können, mehrere Knotenpatches ausgewertet werden, bevor alle verbesserten Knotenspannungen σ_{kP}^* eines Elementes bekannt sind.

L_2 -Projektion Da für lineare und bilineare Elemente keine superkonvergenten Eigenschaften vorliegen, wird in dieser Arbeit die verbesserte Geschwindigkeitslösung für diese Elemente mit der lokalen L_2 -Projektion bestimmt. Das lokale Patch wird wie bei der SPR-Technik der Geschwindigkeiten gewählt. Die verbesserte Lösung wird mit einem quadratischen bzw. biquadratischen Polynomansatz angenommen.

„Verschlechterte“ Geschwindigkeiten Riccius [80] ersetzt die verbesserten Geschwindigkeiten durch „verschlechterte“ Geschwindigkeiten. Ein Vorteil ist, daß die Lösung $\dot{\mathbf{u}}^h$ keine superkonvergenten Eigenschaften besitzen muß und das Lösen des großen Gleichungssystems nicht mehr notwendig ist. Die Geschwindigkeiten werden an den Elementmittelpunkten durch die Mittelung der Knotengeschwindigkeiten eines Elementes bestimmt. Mit diesen „verschlechterten“ Geschwindigkeiten in den Elementmittelpunkten werden durch eine Mittelung der Werte an allen umliegenden Elementmittelpunkten die „verschlechterten“ Werte an den FE-Knoten bestimmt. Ein numerischer Korrekturfaktor berücksichtigt, daß die Differenz zu einer „verschlechterten“ Geschwindigkeitslösung und nicht zu einer verbesserten Geschwindigkeitslösung berechnet wird. Daß die Geschwindigkeiten verschlechtert sind, wird mit der Auswertung auf einem größeren Gitter erklärt. Mit diesem Verfahren hat Riccius [80] bei der Untersuchung von analytischen Funktionen bessere bzw. gleich gute Ergebnisse erhalten wie mit der SPR-Technik von Wiberg et al. [101].

Die Methode wurde für lineare und bilineare Elemente entwickelt, s. Riccius [80]. Da es keine Untersuchungen für die Methode der „verschlechterten“ Geschwindigkeiten mit Elementen höherer Ordnung auf unstrukturierten Gittern gibt und somit auch keine Korrekturfaktoren bekannt sind, wird im folgenden die SPR-Technik und die lokale L_2 -Projektion zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfehlers verwendet.

5.3.2 Adaptive Netzanpassung

Der räumliche Fehler $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ berechnet sich aus der Summe der Elementfehler $\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E,s}$. Der Elementfehler setzt sich aus einem Fehler in der Dehnungsenergie $\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_u,s}^2$ und in der kinetischen Energie $\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_v,s}^2$ zusammen.

$$\|\mathbf{e}\|_{E,s}^2 = \sum_{e=1}^K \|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E,s}^2 = \sum_{e=1}^K \|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_u,s}^2 + \|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_v,s}^2 \quad (5.63)$$

Die einzelnen Fehleranteile $\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_u,s}$ und $\|\mathbf{e}_s(\Omega^e)\|_{E_v,s}$ können mit den in Kapitel 5.3.1 vorgestellten Verfahren approximiert werden.

$$\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_u,s}^2 \approx a(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h, \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)_{\Omega^e} \quad (5.64)$$

$$\|\mathbf{e}(\Omega^e)\|_{E_v,s}^2 \approx (\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^h, \rho(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^h))_{\Omega^e} \quad (5.65)$$

Im folgenden wird nicht mehr zwischen dem approximierten und dem exakten Fehler unterschieden, d.h. der Fehler $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ stellt den approximierten Fehler dar. Der Fehler wird mit dem relativen räumlichen Fehler η_s gemessen.

$$\eta_s = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E,s}}{\|\mathbf{u}^h\|_E} \quad (5.66)$$

Der approximierte Fehler $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ wird dabei auf die maximale Energienorm $\|\mathbf{u}^h\|_E$ über alle Zeitschritte bezogen. Die räumliche Diskretisierung wird akzeptiert, wenn der be-

rechnete relative Fehler η_s innerhalb des vorgegebenen Toleranzbereichs liegt.

$$\bar{\eta}_{s,l} \leq \eta_s \leq \bar{\eta}_{s,u} \quad \text{bzw.} \quad \eta_s \leq \bar{\eta}_s \quad (5.67)$$

Der Toleranzbereich wird durch die obere und untere Schranken $\bar{\eta}_{s,u}$ und $\bar{\eta}_{s,l}$ begrenzt. Die untere Schranke $\bar{\eta}_{s,l}$ wird oft vernachlässigt. Liegt der relative räumliche Fehler η_s nicht im zulässigen Toleranzbereich, dann wird das FE-Netz der Fehlerverteilung angepaßt. Das neu generierte FE-Netz ist optimal, wenn die Elementfehler gleichmäßig über das Gebiet Ω verteilt sind. Der zulässige gesamte Fehler $\|\bar{e}\|_{E,s}$ in der Energienorm wird aus der vorgegebenen Toleranz $\bar{\eta}_s$ bzw. $\bar{\eta}_{s,u}$ und der maximalen Energie $\|\mathbf{u}^h\|_E$ berechnet.

$$\|\bar{e}\|_{E,s} = \Theta_s \bar{\eta}_s \|\mathbf{u}^h\|_E \quad (5.68)$$

Θ_s ist ein Sicherheitsfaktor, der in dem Intervall $0, 8 \leq \Theta_s \leq 1, 1$ liegt. Da die Elementfehler des neuen Netzes gleichmäßig verteilt sein sollen, wird ein zulässiger Elementfehler $\|\bar{e}(\Omega^e)\|_{E,s}$ berechnet.

$$\|\bar{e}(\Omega^e)\|_{E,s} = \frac{\|\bar{e}\|_{E,s}}{K} \quad (5.69)$$

K ist die Anzahl der Elemente des aktuellen Netzes. Der lokale Verfeinerungsindikator ξ_e mißt die relative Größe der Elementfehler $\|e(\Omega^e)\|_{E,s}$.

$$\xi_e = \frac{\|e(\Omega^e)\|_{E,s}}{\|\bar{e}(\Omega^e)\|_{E,s}} \quad (5.70)$$

Mit Hilfe der Verfeinerungsindikatoren ξ wird die neue Elementgröße h_{neu} wie folgt bestimmt.

$$h_{neu} = \frac{h_{alt}}{\xi_e^{1/p}} \quad (5.71)$$

Die alte Elementgröße wird mit h_{alt} bezeichnet und p ist die Ordnung der räumlichen Ansatzfunktionen \mathcal{N} . Bei der Berechnung der neuen Elementgrößen h_{neu} wird angenommen, daß der globale Fehler mit der Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$ konvergiert. In der Nähe von Singularitäten trifft dies jedoch nicht mehr zu. Babuška et al. [8] führen einen Parameter χ ein, der die Regularität der Lösung mißt und für praktische Beispiele im Bereich von $0, 5 \leq \chi \leq 1$ liegt. Damit wird die neue Elementgröße wie folgt berechnet

$$h_{neu} = \frac{h_{alt}}{\xi_e^{\min(\chi; 1/p)}} \quad (5.72)$$

Modifikationen Im folgenden werden Alternativen zu dem dargestellten adaptiven Vorgehen beschrieben.

1. Li [61] approximiert den räumlichen Fehler $\|e\|_{E,s}$ in der Energienorm nur mit dem Fehler in der Dehnungsenergie, da keine Methode zur Berechnung des Geschwindigkeitsfehlers zur Verfügung stand [61]. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung (5.63).

$$\|e_1\|_{E,s}^2 = \sum_{e=1}^K \|e(\Omega^e)\|_{E_u,s}^2 \quad (5.73)$$

Wiberg et al. [102] stellen zwar die SPR-Technik zur Berechnung des Geschwindigkeitsfehlers vor, die von Li [61] jedoch noch nicht benutzt wurde. Li [61] verwendet den relativen Fehler $\eta_{s,1}$, der auf die maximale Gesamtenergie aller vorangegangenen Zeitschritte bezogen wird.

$$\eta_{s,1} = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_{E,s}}{\|\mathbf{u}^h\|_E} \quad (5.74)$$

2. Statt den Fehler auf die maximale Energie aller Zeitschritte zu beziehen, kann der relative Fehler auch mit der Energie des aktuellen Zeitschrittes berechnet werden. Untersuchungen in dieser Arbeit haben jedoch gezeigt, daß die maximale Energie verwendet werden sollte. Werden die Fehler auf die aktuelle Energie bezogen, können starke Schwankungen des relativen Fehlers auftreten, die durch die Änderungen der Energie der aktuellen Zeitschritte entstehen. Die Abhängigkeit des relativen Fehlers η_s von der Energie des aktuellen Zeitschrittes kann durch die Verwendung der maximalen Energie aller Zeitschritte vermieden werden. Die Fehler zu den verschiedenen Zeitpunkten werden durch den Bezug auf die maximale Energie zueinander in ein Verhältnis gesetzt und können miteinander verglichen werden.
3. Wie bei dem zeitlichen Fehler in Kapitel 5.2, kontrolliert Riccius [80] den absoluten räumlichen Fehler $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ und nicht den relativen Fehler. Die absolute Zunahme des Fehlers $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ wird dadurch erkennbar und wird nicht durch den Bezug auf die Gesamtenergie relativiert. Bei der Kontrolle des absoluten Fehlers ist es schwierig im voraus die Toleranzgrenzen $\|\bar{\mathbf{e}}\|_{E,s}$ zu bestimmen. Riccius [80] schlägt vor, zur Bestimmung der Toleranzgrenze des absoluten Fehlers eine Berechnung auf einem groben Gitter durchzuführen. Zusätzlich wird der zulässige Elementfehler $\|\bar{\mathbf{e}}(\Omega^e)\|_{E,s}$ mit der Anzahl der Elemente des neuen Netzes K_{neu} berechnet.

$$\|\bar{\mathbf{e}}(\Omega^e)\|_{E,3} = \frac{\|\bar{\mathbf{e}}\|_E}{K_{neu}} \quad (5.75)$$

Da K_{neu} zunächst nicht bekannt ist, stellt Riccius [80] verschiedene Methoden vor, wie die Elementanzahl K_{neu} vorab approximiert werden kann. Durch die Verwendung des absoluten Fehlers $\|\mathbf{e}\|_{E,s}$ erhöht sich der numerische Aufwand der adaptiven Methode, da die Toleranzgrenzen und die Anzahl der Elemente des neuen Netzes bestimmt werden müssen. Dieser erhöhte Aufwand im Vergleich zur Verwendung des relativen Fehlers η_s ist nicht durch eine effektivere adaptive Methode gerechtfertigt.

Im folgenden wird der relative Fehler η_s verwendet, da die Toleranzschranken $\bar{\eta}_{s,l}$ und $\bar{\eta}_{s,u}$ ohne vorherige Berechnung des Problems festgelegt werden können. Der relative Fehler wird mit der maximalen Energie aller Zeitschritte berechnet.

Numerische Beispiele In den folgenden Beispielen wird der räumliche Fehler untersucht. Es wird zunächst gezeigt, daß der Fehler in der kinetischen Energie, sowohl für lineare wie auch quadratische Elemente, mit den glättungsbasierten Methoden dargestellt

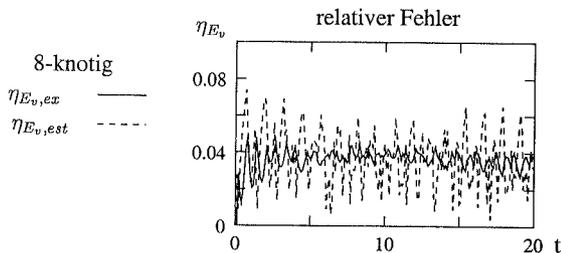


Abbildung 5.19: „Exakter“ ($\eta_{E_v,ex}$) und approximierter ($\eta_{E_v,est}$) relativer räumlicher Fehler in der kinetischen Energie mit der SPR-Technik für 8-knotige Elemente (3855 Fhg)

werden kann. Anhand eines Beispiels wird dargestellt, wie der räumlich globale Fehler zu einem Zeitpunkt bestimmt wird. Es wird deutlich, daß mit Hilfe der adaptiven Verfeinerung der Fehler gleichmäßig verteilt wird und dadurch der numerische Aufwand verringert wird.

Kinetischer Fehlerindikator Die Ausbreitung einer Welle in einem Stab ist ein häufig betrachtetes Beispiel für numerische Untersuchungen in der Dynamik. Li [61] und Riccius [80] haben die adaptive Netzanpassung anhand der Ausbreitung einer sinusförmigen Welle untersucht. Im folgenden wird der berechnete relative Fehler in der kinetischen Energie mit dem „exakten“ Fehler verglichen. Der „exakte“ Fehler wird mit der analytischen Lösung bestimmt [40]. Der Stab in Abb. (4.8) links wird untersucht. Die Abmessungen des Systems sind $L/H = 10/1$. Die Materialdaten sind so gewählt ($E = 1; \rho = 1; \mu = 0$), daß die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1$ beträgt. Das System ist ungedämpft. Es wird die Newmark-Zeitintegration mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Der Stab wird durch eine statische Anfangsauslenkung infolge der Last $\mathbf{P} = 1$ belastet. Ein Geschwindigkeits- und Spannungssprung läuft mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c durch den Stab. Zu Beginn jedes Zeitschrittes wird die analytische Lösung vorgegeben und damit verhindert, daß sich der Fehler in der Zeit fortpflanzt. Es ist dadurch nur der Fehler eines Zeitschrittes enthalten. Die Zeitschrittgröße $\Delta t = 0,1$ wurde so gewählt, daß der Fehler infolge der zeitlichen Diskretisierung vernachlässigt werden kann. Der kinetische Fehler wird mit der SPR-Technik bzw. der lokalen L_2 -Projektion auf Elementpatches berechnet. Der exakte relative Fehler in der kinetischen Energie $\eta_{E_v,ex}$ wird wie folgt bestimmt

$$\eta_{E_v,ex} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|_{E_v}^2 - \|\mathbf{u}^h\|_{E_v}^2}}{\|\mathbf{u}_{ex}\|_E}$$

Der Raum wird zunächst mit achtknotigen Verschiebungselementen (3855 Fhg) diskretisiert. Der approximierter kinetische Fehler wird mit der SPR-Technik berechnet. Es wird ein Polynom mit den Termen der Ansatzfunktionen und zwei zusätzlichen Termen höherer Ordnung verwendet. Der „exakte“ und der approximierter relative Fehler in der

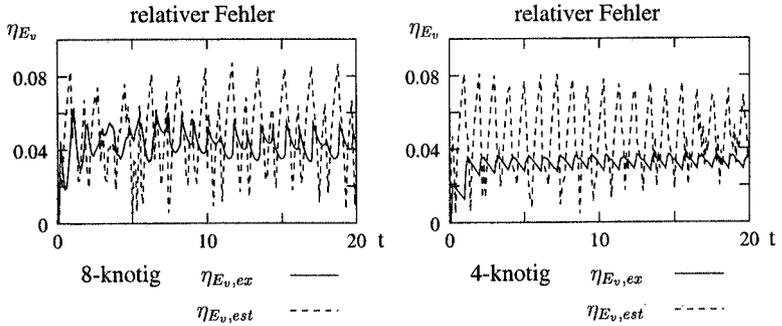


Abbildung 5.20: „Exakter“ ($\eta_{E_v,ex}$) und approximierter ($\eta_{E_v,est}$) relativer räumlicher Fehler in der kinetischen Energie. Links: 8-knotige Elemente (1439 Fhg) – Fehler mit der SPR-Technik; Rechts: 4-knotige Elemente (1669 Fhg) – Fehler mit der lokalen L_2 -Projektion

kinetischen Energie ist in Abb. (5.19) dargestellt. Der berechnete Fehler in der kinetischen Energie kann die Größe und den Verlauf des exakten Fehlers einigermaßen wiedergeben. Die Ergebnisse der Fehlerberechnung für eine gröbere Diskretisierung (1439 Fhg) sind in Abb. (5.20) links dargestellt. Es werden ebenfalls achtknotige Elemente verwendet. Der „exakte“ und der approximierter relative Fehler in der kinetischen Energie sind erwartungsgemäß höher als bei der feineren Vernetzung in Abb. (5.19).

Bei achtknotigen Elementen wird der Fehler in der Dehnungsenergie mit der SPR-Technik meist unterschätzt. Sehr viel genauer kann der Fehler in der Dehnungsenergie bei der Verwendung von vierknotigen Elementen bestimmt werden [79]. Vierknotige Elemente besitzen jedoch für die finite Elementlösung selbst keine Superkonvergenzeigenschaften. Deshalb wird im folgenden untersucht, ob der Indikator für den Fehler in der kinetischen Energie auch für vierknotige Elemente verwendet werden kann.

Der Stab wird mit vierknotigen Elementen diskretisiert (1669 Fhg). Der Fehler wird mit der lokalen L_2 -Projektion auf Elementpatches bestimmt. Für die verbesserte Lösung werden biquadratische Polynome verwendet. Der Verlauf des exakten und des berechneten relativen Fehlers ist in Abb. (5.20) rechts dargestellt. Die Approximation des relativen Fehlers ist nicht so gut wie mit achtknotigen Elementen (Abb. 5.20). Der Fehler in der Dehnungsenergie kann für vierknotige Elemente wesentlich genauer als für achtknotige Elemente ermittelt werden. Da sich der Fehler aus einem Anteil in der Dehnungsenergie und einem Anteil in der kinetischen Energie zusammensetzt, können auch vierknotige Elemente zur Bestimmung des kinetischen Fehlers verwendet werden. Der Fehler in der kinetischen Energie mit der Glättung über Elementpatches wird zwar ungenauer bestimmt, dafür wird der Fehler in der Dehnungsenergie sehr genau gemessen.

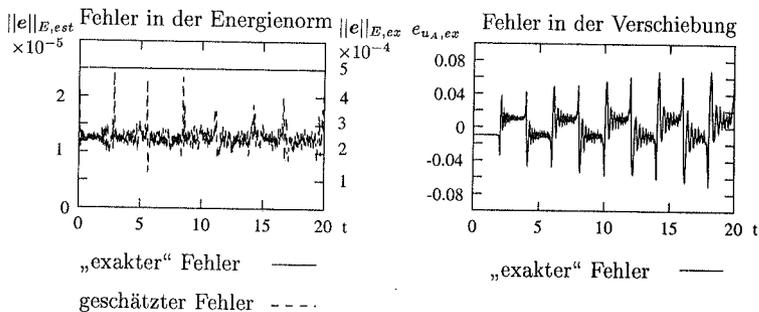


Abbildung 5.21: „Exakter“ ($\|e\|_{E,ex}$) und geschätzter ($\|e\|_{E,est}$) Fehler in der Energienorm; „Exakter“ Fehler ($e_{u_A,ex}$) in der Verschiebung u_A

Globaler Fehler zu einem Zeitpunkt Im folgenden wird wiederum die Wellenausbreitung in dem Stab in Abb. (4.8) untersucht. Die Geometrie und die Materialdaten sind dieselben wie bei dem vorherigen Beispiel. In Kapitel 4 wurde der lokale Fehler in der Verschiebung am Lastangriffspunkt (Punkt A) des Problems berechnet. Zur Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen der Fehlerapproximation mit und ohne duale Probleme wird im folgenden der räumlich globale Fehler in der Energienorm berechnet.

Zur Zeitintegration wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Das System wird nicht gedämpft. Das Gebiet wird mit achtknotigen Elementen diskretisiert (1159 Fhg) und der Zeitschritt ist $\Delta t = 0,02$. Der Fehler wird in der Dehnungs- und in der kinetischen Energie bestimmt. Der Dehnungsfehler wird mit dem Z^2 -Fehlerindikator ermittelt und der Fehler in der kinetischen Energie wird mit Hilfe der SPR-Technik berechnet. Der „exakte“ Fehler wird wiederum mit der analytischen Lösung bestimmt.

In Abb. (5.21) ist der „exakte“ und der approximierte Fehler in der Energienorm dargestellt. Die Größe des berechneten Fehlers in der Energienorm stimmt nicht mit dem „exakten“ Fehler in der Energienorm überein. Da die Gesamtenergie des Systems über die Zeit konstant ist, ist auch der Fehler in der Energie $\|e\|_{E,ex}$ konstant. Der approximierte Fehler oszilliert um einen Wert der ca. eine Zehnerpotenz kleiner ist als der „wahre“ Fehler. Die Verteilung der Elementfehlernorm ist in Abb. (5.22) für verschiedene Zeitpunkte abgebildet. Die Elementfehler sind an der Stoßfront am größten. Mit der Zeit wird die Stoßfront immer unschärfer, da der Stoß durch die kontinuierliche Formulierung nicht abgebildet werden kann. Der räumlich globale Fehler wird quantitativ schlecht wiedergegeben. Der Indikator gibt jedoch die Gebiete mit den größten Gradienten und damit die Bereiche mit großen Elementfehlern meistens richtig an (s. Abb. 5.22). In Fällen, wo die exakte Lösung selbst Sprünge hat, zeigt der Indikator jedoch auch für die exakte Lösung Fehler an.

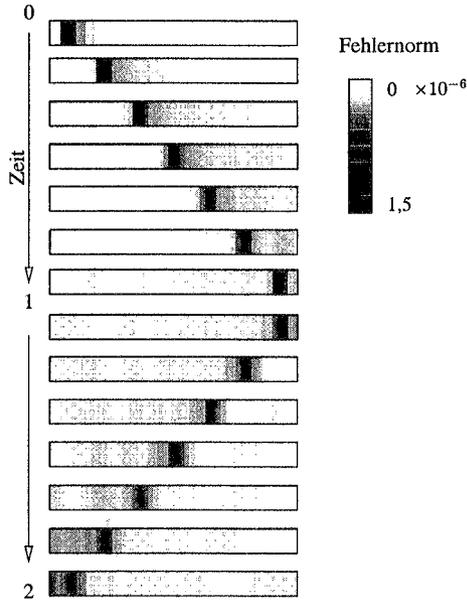


Abbildung 5.22: Zeitlicher Verlauf der Elementfehlernorm

In Kapitel 4 wurde für dieses Beispiel der Fehler in der Verschiebung am Lastangriffspunkt A bestimmt. Mit Hilfe von dualen Problemen kann der zeitliche Verlauf des räumlich lokalen Fehlers dargestellt werden (s. Abb. 4.11). Es wird darauf hingewiesen werden, daß die Verläufe des „exakten“ Fehlers in Abb. (4.11) und Abb. (5.21) verschieden sind, da unterschiedliche Diskretisierungsmethoden verwendet wurden. Für dieses Beispiel ist der Verlauf der Verschiebung und der Geschwindigkeit des Lastangriffspunktes A für die semi-diskrete Formulierung in Abb. (5.23) dargestellt. Der „exakte“ Fehler in der Verschiebung des Lastangriffspunktes A ist in Abb. (5.21) rechts gegeben. Der globale Fehler in der

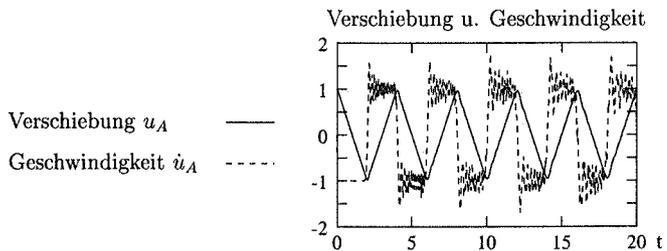


Abbildung 5.23: Verschiebung und Geschwindigkeit des Lastangriffspunktes A

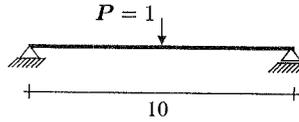


Abbildung 5.24: Einfacher Balken

Energienorm (s. links Abb. 5.21) kann den lokalen Fehler nicht wiedergeben. Die Verteilungen der Elementfehlernorm in Abb. (5.22) stellen den räumlich globalen Fehler zu einem Zeitpunkt dar. In Abb. (4.10) kann der zeitliche Verlauf des Fehlers durch das duale Problem dargestellt werden. Dadurch sieht die Verteilung der Elementfehlernorm mit dualen Problemen (s. Abb. 4.10 unten) zu einem Zeitpunkt anders aus als die Verteilung der Elementfehler in Abb. (5.22). Der Verteilung der Elementfehlernorm in Abb. (5.22) zu den einzelnen Zeitpunkten entspricht bei dem Beispiel der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen in Kapitel 4 der Verteilung der Residuen zu dem jeweiligen Zeitpunkten in Abb. (4.10) links oben.

Adaptive Verfeinerung Im folgenden Beispiel wird die adaptive räumliche Verfeinerung untersucht. Dazu wird ein Beispiel mit bekannter analytischer Lösung herangezogen. Die analytische Lösung wird als Anfangsbedingung zu jedem Zeitschritt vorgegeben, wodurch sich der Fehler in der Zeit nicht fortpflanzen kann. Das Beispiel hat damit einen akademischen Charakter und keinen Bezug zur Praxis. Es wird die freie Schwingung eines Balkens untersucht. Der Balken mit der Höhe $h = 1$ ist beidseitig gelenkig gelagert (s. Abb. 5.24). Die Lagerung ist so gewählt, daß keine Singularitäten am Auflager entstehen. Die Materialdaten sind $E = 1$; $\rho = 1$ und $\mu = 0$. Das System schwingt ungedämpft aus der statischen Ruhelage infolge der Last P zum Zeitpunkt $t = 0$. Zur Zeitdiskretisierung wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Die Zeitschrittgröße ist $\Delta t = 0,2$. Zur Diskretisierung des Raumes werden vierknotige Scheibenelemente verwendet. Vierknotige Elemente approximieren den Fehler in der Deh-

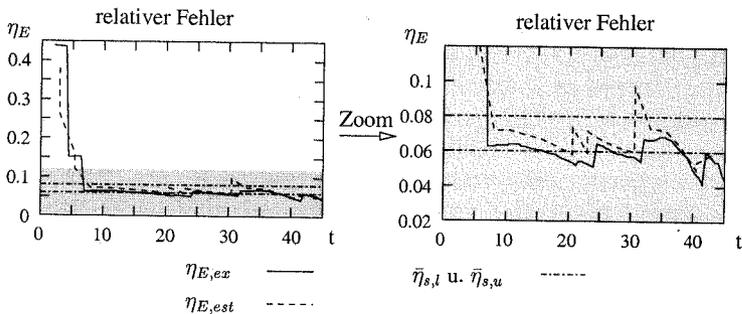


Abbildung 5.25: „Exakter“ ($\eta_{E,ex}$) und geschätzter ($\eta_{E,est}$) relativer räumlicher Fehler in der kinetischen und der Dehnungsenergie

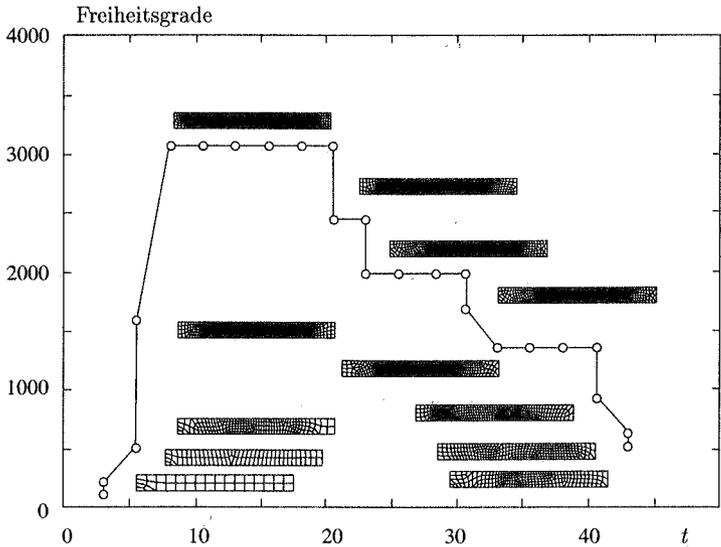


Abbildung 5.26: FE-Netze und Anzahl der Freiheitsgrade über die Zeit

nungsenergie besser als achtknotige Elemente, die den Fehler in der Dehnungsenergie unterschätzen. Da es für lineare Elemente keine Superkonvergenz der finiten Elementlösung selbst gibt, wird der Fehler in der kinetischen Energie mit der lokalen L_2 -Projektion auf Elementpatches bestimmt. Der Fehler in der Dehnungsenergie wird mit der SPR-Technik von Zienkiewicz-Zhu bestimmt. Im folgenden wird der Balken adaptiv verfeinert. Der relative räumliche Fehlerindikator η_s soll innerhalb des Toleranzbereichs $0,06 \leq \eta_s \leq 0,08$ liegen. Pro Zeitschritt werden zwei Neuvernetzungen zugelassen. Da bei zu schnellem Verfeinern die Übertragung der Daten von dem alten auf das neue Netz sehr ungenau wird, wird die Anzahl der neu generierten Elemente begrenzt. Zu einem Zeitpunkt darf sich die Elementanzahl maximal vervierfachen.

Der Verlauf des berechneten relativen Fehlers η_{est} in der Dehnungs- und der kinetischen Energie nach Gleichung (5.66) ist in Abb. (5.25) dargestellt. Mit einer Referenzlösung (21000 Fhg) wird der „exakte“ Fehler η_{ex} berechnet. Der Verlauf des „exakten“ Fehlers kann auch von dem Fehlerindikator wiedergegeben werden. Der berechnete relative Fehler η_{est} bewegt sich meist in dem vorgegebenen Toleranzbereich (s. Abb. 5.25). Bei Über- bzw. Unterschreiten wird ein neues Netz generiert. Zu Beginn der Simulation ist die Durchbiegung maximal und das FE-Netz wird zunächst verfeinert. Anschließend wird das FE-Netz wieder vergröbert, wenn die Durchbiegung abnimmt und schließlich die Ausgangslage erreicht wird ($t \approx 45$). Die generierten FE-Netze sind in Abb. (5.26) dargestellt.

In Abb. (5.27) links ist der relative Fehler η_{E_v} nur mit dem kinetischen Fehleranteil be-

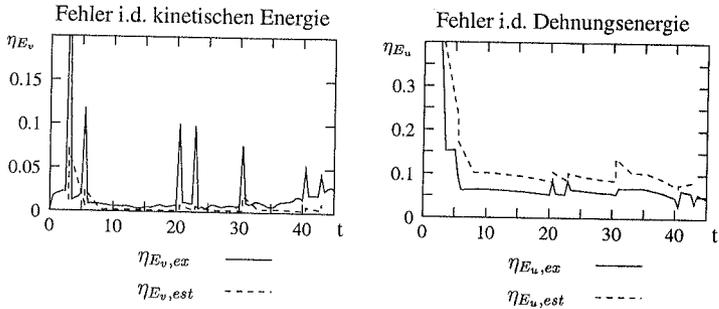


Abbildung 5.27: „Exakter“ und geschätzter relativer räumlicher Fehler. Links: in der kinetischen Energie ($\eta_{E_v,ex}$ und $\eta_{E_v,est}$); Rechts: in der Dehnungsenergie ($\eta_{E_u,ex}$ und $\eta_{E_u,est}$)

rechnet worden. Der Verlauf des relativen Fehlers η_{E_u} infolge des Fehleranteils in der Dehnungsenergie ist in Abb. (5.27) rechts dargestellt. Der Vergleich zeigt, daß der relative Fehler des kinetischen Fehleranteils η_{E_v} wesentlich kleiner ist ($\eta_{E_v} \approx 1/10\eta_{E_u}$) als der relative Fehler der Dehnungsenergie η_{E_u} . Der Dehnungsfehler ist dominant. Die Abschätzung des Fehlers in der Dehnungsenergie ist daher bei diesem Beispiel wichtiger als die des Fehlers in der kinetischen Energie. Der Vergleich der Verläufe des relativen Fehlers η_{E_u} in der Dehnungsenergie in Abb. (5.27) rechts und des relativen Fehlers η_E unter Berücksichtigung der Dehnungs- und kinetischen Fehlerenergie in Abb. (5.25) zeigt, daß der kinetische Anteil keinen großen Einfluß hat.

In Abb. (5.28) ist an mehreren Zeitpunkten die Verteilung der Elementfehlernorm bei der Verwendung eines homogenen FE-Netztes der Verteilung der Elementfehlernorm mit adaptiver Verfeinerung gegenübergestellt. Bei der maximalen Durchbiegung zu Beginn der Berechnung ist der Elementfehler am größten. Das FE-Netz wird verfeinert. Wird die Ausgangslage erreicht für $t \rightarrow 45$, dann nimmt die Verformung ab. Die Elementfehler des homogenen Netzes werden kleiner und das adaptive FE-Netz wird größer. Der Vergleich der Elementfehlerverteilungen zeigt, daß es erst mit Hilfe der Adaptivität möglich ist, den Fehler im Laufe der Berechnung gleichmäßig zu verteilen. Der numerische Aufwand ist sehr viel größer, wenn man mit homogenen Netzen einen niedrigen Elementfehler erreichen möchte.

5.3.3 Räumlich lokaler Fehler

In Kapitel 4 wurde ein allgemeiner Fehlerindikator entwickelt. Dieser Indikator kann den räumlich lokalen oder globalen Fehler, d.h. den Fehler in einer lokalen Verschiebung, Geschwindigkeit oder den Fehler in der L_2 -Norm bestimmen. Ebenso kann der Fehlerindikator den Verlauf des Fehlers über einen Zeitraum oder den Fehler zu einem Zeitpunkt darstellen. Die physikalische Fehlergröße sowie der Ort und der Zeitpunkt, an dem der Fehler bestimmt wird, sind beliebig. Die wichtigsten Punkte für diese Art der Fehlerbe-

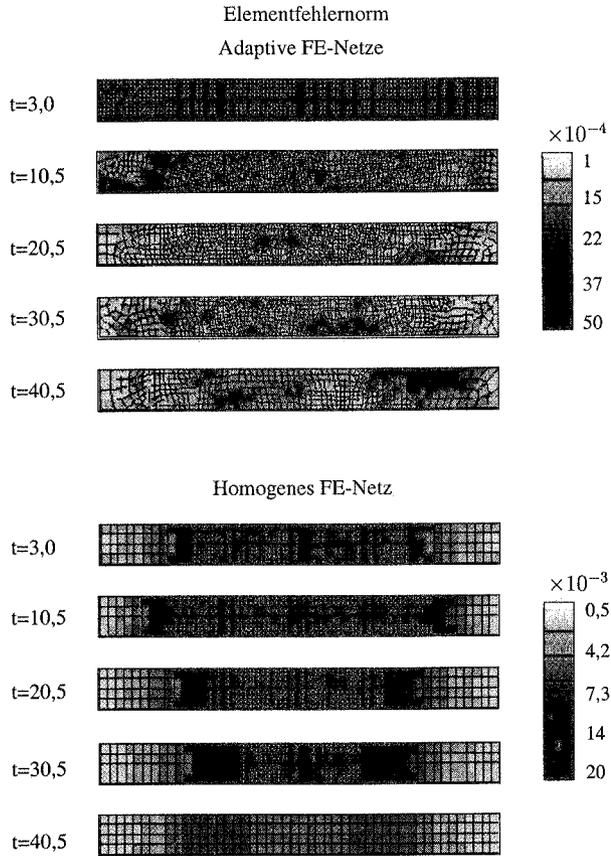


Abbildung 5.28: Verlauf der Elementfehlnorm mit adaptiver Netzverfeinerung und mit einem homogenen Netz

stimmung werden im folgenden zusammengefaßt.

Die Methode basiert auf einem reinen Galerkin-Verfahren im Raum und in der Zeit. In dieser Arbeit wird die semidiskrete Formulierung mit der DTG-Methode verwendet (s. Kapitel 2.3.1). Die Bewegungsgleichung wird als PDG zweiter Ordnung formuliert. Für die DTG-Methode werden in zeitlicher Richtung diskontinuierliche quadratische Ansätze $DG(2)$ gewählt [49]. Der Raum wird mit finiten Elementen, die unabhängig von der Zeit sind, diskretisiert. Der Einfluß der Fehlergröße in Raum und Zeit wird durch die Berechnung eines zusätzlichen dualen Problems dargestellt. Durch die Wahl der dualen Belastung wird die physikalische Fehlergröße festgelegt. Das duale Problem, das ein „Rückwärtsproblem“ in der Zeit ist, wurde in Kapitel 4.2 eingeführt. Der Fehler wird, wie in Kapitel 4.3 gezeigt, durch die Koppelung der Residuen des ursprünglichen Problems mit den Diskretisierungsfehlern des dualen Problems berechnet.

In diesem Kapitel wird die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration verwendet. Die Methode der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen, die in Kapitel 4 eingeführt wurde, wird anschaulich auf die FD-Verfahren übertragen. Die Übertragung der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen auf die semidiskrete Bewegungsgleichung ist nicht generell möglich. Voraussetzung ist, daß das FD-Verfahren einer Galerkin-Methode entspricht. Für manche FD-Zeitintegrationsverfahren ist in der Literatur eine Interpretation als Galerkin-Verfahren bekannt. Für diese FD-Diskretisierungen wurde eine vollständige Übertragung der Fehlerschätzung mit dualen Problemen auf die FD-Verfahren vorgenommen, z.B. Hartmann [42] und Bangerth et al. [12]. Die Newmark-Methode entspricht jedoch keinem Galerkin-Verfahren, weshalb die Methode der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen aus Kapitel 4 nicht vollständig auf die semidiskrete Formulierung übertragen werden kann.

Im folgenden wird ein Indikator, der den räumlich lokalen Fehler der semidiskreten Formulierung mißt, entwickelt. Das duale Problem wird dazu in räumlicher Richtung mit dem ursprünglichen Problem gekoppelt. Der zeitliche Verlauf des Fehlers kann nicht dargestellt werden. Das Vorgehen lehnt sich an die Herleitung der allgemeinen Fehlerindikatoren für die DTG-Methode an. Der Schwerpunkt liegt in dieser Arbeit in der anschaulichen Übertragung der Methode und nicht in der Entwicklung eines Fehlerschätzers. Zunächst wird auf den Zusammenhang von FD- und FE-Verfahren in Kapitel 5.3.3.1 eingegangen, bevor in Kapitel 5.3.3.2 der Fehlerindikator entwickelt und angewendet wird.

5.3.3.1 Finite Differenzenverfahren als Galerkin-Verfahren

Für die Übertragung der Fehlerschätzer mit dualen Problemen auf die Verfahren mit FD-Zeitdiskretisierung muß die Formulierung des ursprünglichen Problems einem Galerkin-Verfahren entsprechen. Die Eigenschaften der FD-Verfahren wurden allgemein untersucht, und der Zusammenhang von FD und FE wurde hergestellt, Hulme [51], Hughes [46], Eriksson et al. [34], Rannacher [74]. In der Literatur sind FD-Verfahren mit konstanten

und linearen Ansätzen zu finden, die als Galerkin-Verfahren interpretiert werden können.

Das **implizite Eulerverfahren** (Rückwärts-Euler) kann als Galerkin Methode mit DG(0) Ansätzen interpretiert werden, Hughes [46], Eriksson et al. [34]. Die Ansatzfunktionen $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^0$ sind stückweise konstant auf einem Zeitintervall. Der Raum der diskontinuierlichen konstanten Funktionen wird mit \mathcal{S}^0 bezeichnet. Die Testfunktionen \mathbf{w} sind aus demselben Raum $\mathbf{w} \in \mathcal{S}^0$. Das implizite Eulerverfahren entspricht einer Bubnov-Galerkin Methode.

Das **Crank-Nicolson Verfahren** (Trapez-Regel; Mittelpunktsregel) kann als DG(1)-Methode interpretiert werden. Die Ansatzfunktionen $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_s^1$ sind linear auf einem Zeitintervall und stetig über die Zeitintervallgrenzen. Die Diskontinuität ergibt sich erst durch die Testfunktionen $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^0$, die stückweise konstant sind. Da Ansatz- und Testfunktionen aus unterschiedlichen Räumen sind, zählt die Crank-Nicolson-Methode zu den Petrov-Galerkin Verfahren.

Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung werden häufig als Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit geschrieben. In Anhang E werden für die Bewegungsgleichung zwei verschiedene, aus der Literatur bekannte, Formulierungen erster Ordnung in der Zeit gezeigt und miteinander verglichen. Der Vorteil der Formulierung erster Ordnung ist, daß die Anforderungen an die Differenzierbarkeit geringer sind als bei der Formulierung zweiter Ordnung in der Zeit. Es muß jedoch ein zusätzliches unbekanntes Feld eingeführt werden. Bei der Formulierung erster Ordnung in der Zeit können die finiten Differenzenverfahren, die FE-Methoden entsprechen, verwendet werden.

In diesem Kapitel wird die semidiskrete Formulierung der Bewegungsgleichung mit Newmark-Ansätzen in der Zeit verwendet. Das Newmark-Verfahren kann nicht als Galerkin-Verfahren interpretiert werden. Im Anhang C wird der Zusammenhang von Newmark-Verfahren mit gemittelten Beschleunigungen ($\beta = 0,25$; $\delta = 0,5$) und FE-Ansätzen untersucht [3]. Das gemittelte Beschleunigungsverfahren entspricht einem zeitlichen FE-Ansatz von $\mathbf{N}_t = \frac{1}{2}$ für die Beschleunigungen, wie in Gleichungen (C.11) und (C.12) gezeigt wird. Die Verschiebungsverläufe sind dann quadratisch in der Zeit (C.13). Die Ähnlichkeit des Newmark-Verfahrens mit dem FE-Ansatz ist sehr groß. FE-Methoden erfüllen die Verträglichkeit, d.h. die Werte aus den FE-Ansätzen an den Knoten sind äquivalent zu den berechneten Knotenwerten. Bei den Newmark-Verfahren interpretiert als FE-Ansätzen ist die Verträglichkeit nicht erfüllt, da die Newmark-Ansätze in der Zeit stetig sind und damit keine Sprünge zulassen (s. Anhang C). Die Ansätze der Newmark-Methode müßten also Sprünge an den Zeitintervallgrenzen zulassen. Da die Newmark-Zeitintegration keinem Galerkin-Verfahren entspricht, kann die Fehlerbestimmung mit dualen Problemen nicht vollständig auf die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration übertragen werden.

Voraussetzungen für den räumlichen Fehlerindikator Da das Newmark-Verfahren auf keiner reinen FE-Methode beruht, kann das duale Problem in zeitlicher Richtung nicht angewendet werden. Der zeitliche Verlauf des Fehler kann dadurch auch nicht dargestellt werden. Es kann weder das duale Problem in zeitlicher Richtung aufgestellt werden, noch ist die Galerkin Orthogonalität in der Zeit erfüllt. Bei beiden Verfahren, der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Methode und der DTG-Methode, wird der Raum mit finiten Elementen diskretisiert. Im folgenden wird nur die räumliche Diskretisierung, d.h. der räumliche Fehler betrachtet. Die duale Methode wird verwendet, um den räumlich lokalen Fehler zu bestimmen. Dazu wird das duale Problem nur noch zu einem Zeitpunkt mit dem ursprünglichen Problem gekoppelt, wie in Kapitel 4 beschrieben wird. Im Unterschied zu den Fehlerindikatoren in Kapitel 4 findet die elementweise Koppelung der Fehler des ursprünglichen mit den Fehlern des dualen Problem nicht mehr in zeitlicher Richtung statt. Der zeitliche Fehler wird getrennt von dem räumlichen Fehler bestimmt. Da der Indikator in diesem Kapitel möglichst einfach und robust sein soll, werden zur Approximation der Fehler des ursprünglichen und des dualen Problems die „klassischen“ Fehlerindikatoren der semidiskreten Formulierung mit der FD-Zeitdiskretisierung aus Kapitel 5.3.1 verwendet.

5.3.3.2 Fehlerindikator

Zur Herleitung des räumlichen Fehlerindikator für das FD-Verfahren wird von der allgemeinen Fehlergleichung für die DTG-Methode ausgegangen. Die Formulierung mit DTG-Ansätzen basiert auf der räumlichen und zeitlichen variationellen Formulierung (2.21). Hingegen beruht die semidiskrete Formulierung nur auf der variationellen Formulierung im Raum (2.22), weshalb auch für die Fehlergleichung diese Formulierung verwendet werden muß.

Fehlergleichung Die Herleitung des allgemeinen Fehlerindikator für die DTG-Methode in Kapitel 4.3 führt auf die folgende Fehlergleichung, s. (4.57).

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N [-(\dot{e}, \rho \ddot{z})_{Q_n} + (\dot{e}, d_1 \rho \dot{z})_{Q_n} + a(\dot{e}, d_2 \dot{z})_{Q_n} - a(\dot{e}, z)_{Q_n}] \\
 & - \sum_{n=1}^{N-1} [(\dot{e}(t_n^-), \rho [[\dot{z}(t_n)]]_{\Omega} + a(e(t_n^-), [[z(t_n)]]_{\Omega})] + a(e(t_N^-), z(t_N^-))_{\Omega} + (\dot{e}(t_N^-), \rho \dot{z}(t_N^-))_{\Omega} \\
 & = \sum_{n=1}^N (\mathcal{D}_{TG}, \dot{e})_{Q_n} + a(e(t_N^-), \bar{z}_N)_{\Omega} + (\dot{e}(t_N^-), \rho \dot{\bar{z}}_N)_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Zur Bestimmung des lokalen Fehlers muß ein zusätzliches duales Problem gelöst werden. Das duale Problem, das in Kapitel 4.2 für die Formulierung mit DTG-Ansätzen eingeführt

wurde, lautet in der starken Form (4.32)–(4.36):

$$\begin{aligned}
 -\rho\ddot{\mathbf{z}} + d_1\rho\dot{\mathbf{z}} - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}) &= \mathcal{D}_{TG} & \text{auf } \Omega \times (0, t_N) & \quad (5.77) \\
 \mathbf{z} &= \mathbf{0} & \text{auf } \Gamma_u \times (0, t_N) & \\
 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}) &= \mathbf{0} & \text{auf } \Gamma_t \times (0, t_N) & \\
 \mathbf{z}(\mathbf{x}, t_N) &= \bar{\mathbf{z}}_N & \mathbf{x} \in \Omega & \\
 \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t_N) &= \dot{\bar{\mathbf{z}}}_N & \mathbf{x} \in \Omega &
 \end{aligned}$$

In diesem Kapitel wird das ursprüngliche und das duale Problem mit Hilfe der semidiskreten Bewegungsgleichung und der Newmark–Zeitintegration gelöst. Bei der semidiskreten Formulierung wird die Bewegungsgleichung nur im Raum Ω schwach erfüllt (s. Kapitel 2.3.2). Die Zeit wird mit finiten Differenzen diskretisiert. Das duale Problem aus Gleichung (5.77) lautet in der semidiskreten Formulierung: gesucht sind die Verschiebungen $\mathbf{z} \in \mathcal{S}_{FD}$ so, daß für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{FD}$ gilt

$$\begin{aligned}
 -(\mathbf{v}, \rho\ddot{\mathbf{z}})_\Omega + (\mathbf{v}, d_1\rho\dot{\mathbf{z}})_\Omega + a(\mathbf{v}, d_2\dot{\mathbf{z}})_\Omega - a(\mathbf{v}, \mathbf{z})_\Omega &= (\mathbf{v}, \mathcal{D}_{FD})_\Omega & (5.78) \\
 (\mathbf{v}, \rho\mathbf{z}(t_N))_\Omega &= (\mathbf{v}, \rho\bar{\mathbf{z}}_N)_\Omega \\
 (\mathbf{v}, \rho\dot{\mathbf{z}}(t_N))_\Omega &= (\mathbf{v}, \rho\dot{\bar{\mathbf{z}}}_N)_\Omega
 \end{aligned}$$

Das duale Problem gibt den Einfluß des Fehlers wieder. Es läuft „rückwärts“ in der Zeit. Die „Anfangsbedingungen“ sind zum Zeitpunkt $t = t_N$ der Fehlerbestimmung gegeben. Das ursprüngliche Problem wird in der schwachen Formulierung beschrieben, s. Gl. (2.52–2.55). Gesucht ist $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{FD}$ so, daß für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_{FD}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{w}, \rho\ddot{\mathbf{u}})_\Omega + (\mathbf{w}, d_1\rho\dot{\mathbf{u}})_\Omega + a(\mathbf{w}, d_2\dot{\mathbf{u}})_\Omega + a(\mathbf{w}, \mathbf{u})_\Omega &= (\mathbf{w}, \mathbf{P})_\Omega + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_t} & (5.79) \\
 (\mathbf{w}, \rho\mathbf{u}(t_0))_\Omega &= (\mathbf{w}, \rho\bar{\mathbf{u}}_0)_\Omega \\
 (\mathbf{w}, \rho\dot{\mathbf{u}}(t_0))_\Omega &= (\mathbf{w}, \rho\dot{\bar{\mathbf{u}}}_0)_\Omega
 \end{aligned}$$

Die Test- und Ansatzfunktionen sind aus demselben Raum $H^1(\Omega)$, s. (2.49) und (2.50). Das diskretisierte ursprüngliche Problem (5.79) wird partiell integriert und führt auf die Gleichung (2.62), wobei die Terme durch die inneren Residuen \mathbf{R}_{FD} und die räumlichen Sprungterme \mathbf{J}_{FD} ersetzt werden.

$$0 = \sum_{e=1}^K (\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_{FD})_{\Omega^e} + (\mathbf{w}^h, \mathbf{J}_{FD})_{\Gamma} \quad (5.80)$$

mit

$$\mathbf{R}_{FD} = \rho\ddot{\mathbf{u}}^h + d_1\rho\dot{\mathbf{u}}^h - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{u}}^h) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h) - \mathbf{P} \quad \text{auf } \Omega^e \quad (5.81)$$

$$\mathbf{J}_{FD} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h)(\mathbf{x})]] + \frac{1}{2}d_2\mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{u}}^h)(\mathbf{x})]] & \Gamma^* \subset \Gamma^e \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^h) - \mathbf{t} & \Gamma^* \subset \Gamma_t \\ \mathbf{0} & \Gamma^* \subset \Gamma_u \end{cases} \quad (5.82)$$

Die inneren Residuen \mathbf{R}_{FD} und die Sprungterme \mathbf{J}_{FD} werden zu $\bar{\mathbf{R}}_{FD}$ zusammengefaßt.

$$\bar{\mathbf{R}}_{FD} = \mathbf{R}_{FD} + \mathbf{J}_{FD} \quad (5.83)$$

Damit lautet die starke Form der Fehlergleichung abgekürzt

$$\mathcal{L}_{FD}e = \overline{\mathbf{R}}_{FD} \quad (5.84)$$

Die Koppelung des ursprünglichen und des dualen Problems ergibt die Fehlergleichung. Es kann entweder, wie in Kapitel 4.2 gezeigt wurde, von dem dualen Problem (5.78), in dem die Testfunktion \mathbf{v} durch den Fehler \mathbf{e} ersetzt wird, ausgegangen werden, oder alternativ hierzu kann die Fehlergleichung der DTG-Methode (5.76) mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten formuliert werden. Die Fehlergleichung der semidiskreten Formulierung lautet

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{e}, \rho \ddot{\mathbf{z}})_\Omega + (\mathbf{e}, d_1 \rho \dot{\mathbf{z}})_\Omega + a(\mathbf{e}, d_2 \dot{\mathbf{z}})_\Omega - a(\mathbf{e}, \mathbf{z})_\Omega + (\mathbf{e}, \rho \mathbf{z}(t_N))_\Omega + (\mathbf{e}, \rho \dot{\mathbf{z}}(t_N))_\Omega \\ &= (\mathcal{D}_{FD}, \mathbf{e})_\Omega + (\mathbf{e}, \rho \ddot{\mathbf{z}}_N)_\Omega + (\mathbf{e}, \rho \dot{\mathbf{z}}_N)_\Omega \end{aligned} \quad (5.85)$$

Im Vergleich zu der Fehlergleichung mit der DTG-Methode (5.76) entfallen die Sprungterme über die Zeitintervallgrenzen, da nur der Raum Ω betrachtet wird.

Belastung des dualen Problems Wie in Kapitel 4.3.1 für die DTG-Methode gezeigt wurde, bestimmt die Belastung des dualen Problems die physikalische Fehlergröße. Im folgenden wird für die FD-Methode der Zusammenhang zwischen der Belastung des dualen Problems \mathcal{D}_{FD} und dem Fehler \mathbf{e} gezeigt.

Das duale Problem (5.78) wird mit einer Einheitslast belastet.

$$\mathcal{D}_{FD} = \mathbf{1} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.86)$$

Eingesetzt in die Fehlergleichung (5.85) ergibt sich der mittlere Verschiebungsfehler e_Ω über das Gebiet Ω .

$$(\mathcal{D}_{FD}, \mathbf{e})_\Omega = \int_\Omega \mathbf{1} \cdot \mathbf{e} \, d\Omega = e_\Omega \quad (5.87)$$

Der Fehler an einem Punkt \mathbf{x}_0 kann durch die Einführung des Dirac-Delta Operators $\delta_{\mathbf{x}_0}^d$ bestimmt werden.

$$\mathcal{D}_{FD} = \delta_{\mathbf{x}_0}^d \quad (5.88)$$

In die Fehlergleichung (5.85) eingesetzt, ergibt sich der Verschiebungsfehler $e(\mathbf{x}_0)$ an dem Punkt \mathbf{x}_0 .

$$(\mathcal{D}_{FD}, \mathbf{e})_\Omega = \int_\Omega \delta_{\mathbf{x}_0}^d \mathbf{e} \, d\Omega = e(\mathbf{x}_0) \quad (5.89)$$

Der Fehler in der L_2 -Norm der Verschiebungen kann entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 4.3.1 ermittelt werden. Dazu wird die Einheitslast durch den Verschiebungsfehler \mathbf{e} ersetzt. Da der Verschiebungsfehler a-priori nicht bekannt ist, muß er zuerst mit $\mathbf{e} \approx \hat{\mathbf{e}}$ approximiert werden, z.B. Rannacher [74].

$$\mathcal{D}_{FD} = \frac{\hat{\mathbf{e}}}{\|\hat{\mathbf{e}}\|} \quad (5.90)$$

Aus der Fehlergleichung ergibt sich der approximierte Fehler in der L_2 -Norm der Verschiebungen.

$$(\mathcal{D}_{FD}, \mathbf{e})_\Omega = \int_\Omega \frac{\dot{\mathbf{e}}}{\|\dot{\mathbf{e}}\|} \cdot \mathbf{e} \, d\Omega \approx \|\mathbf{e}\| \quad (5.91)$$

Fehlerindikator Das duale Problem der Formulierung mit DTG-Ansätzen (5.77) wird ebenso wie das ursprüngliche Problem mit der semidiskreten Formulierung basierend auf der räumlichen variationellen Formulierung bzw. dem Prinzip der virtuellen Arbeit gelöst. Das duale Problem (5.78) wurde nicht extra für die semidiskrete Formulierung, d.h. über $B_{FD}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = B_{FD}(\mathbf{z}, \mathbf{v})$, hergeleitet. Dabei würde sich dasselbe duale Problem ergeben, wobei sich die Vorzeichen aller Terme ändern, da keine partielle Integration über die Zeit stattfindet. Statt dessen wird das duale Problem der DTG-Methode (5.77) verwendet, das für den allgemeinen zeitlichen und räumlichen Fehler hergeleitet wurde. Die Fehlergleichung (5.85) wird mit Hilfe des bilinearen Operators $B_{FD}(\cdot, \cdot)$ (2.52) geschrieben.

$$B_{FD}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = D_{FD}(\mathbf{e}) \quad (5.92)$$

$D_{FD}(\mathbf{e})$ ist das Belastungsfunktional. Mit Hilfe der Galerkin Orthogonalität wird die diskrete Lösung des dualen Problems in die Fehlergleichung eingeführt. Die Galerkin Orthogonalität wurde für die DTG-Methode in (4.3) und für die statische Gleichung in (4.14) dargestellt. Die Galerkin Orthogonalität ist bei der semidiskreten Formulierung nur im Raum erfüllt, da in zeitlicher Richtung keine FE-Ansätze verwendet werden. Die Galerkin Orthogonalität wird im folgenden für die Formulierung mit FD-Verfahren hergeleitet. In das diskretisierte ursprüngliche Problem (2.59) wird die exakte Lösung \mathbf{u} und die diskrete Lösung \mathbf{u}^h eingesetzt.

$$B_{FD}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}) = L_{FD}(\mathbf{w}^h) \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{FD}^h \quad (5.93)$$

$$B_{FD}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = L_{FD}(\mathbf{w}^h) \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{FD}^h \quad (5.94)$$

Die Differenz ergibt die Galerkin Orthogonalität in räumlicher Richtung.

$$B_{FD}(\mathbf{w}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) = B_{FD}(\mathbf{w}^h, \mathbf{e}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_{FD}^h \quad (5.95)$$

Die diskrete Lösung \mathbf{u}^h ist die bestmögliche Approximation von \mathbf{u} bezüglich der Bilinearform $B_{FD}(\cdot, \cdot)$ in dem Raum der Ansatzfunktionen \mathcal{S}_{FD}^h . Der Fehler \mathbf{e} steht deshalb senkrecht zum Raum der Testfunktionen \mathcal{V}_{FD}^h . Die Galerkin Orthogonalität wird in der Fehlergleichung (5.92) ausgenutzt.

$$B_{FD}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) = D_{FD}(\mathbf{e}) \quad (5.96)$$

Die starke Form der Fehlergleichung (5.84) und die Residuen $\overline{\mathbf{R}}_{FD}$ werden eingesetzt.

$$B_{FD}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) = (\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathcal{L}_{FD}\mathbf{e})_\Omega = (\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \overline{\mathbf{R}}_{FD})_\Omega \quad (5.97)$$

Damit ergibt die Fehlergleichung (5.96)

$$(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \overline{\mathbf{R}}_{FD})_\Omega = D_{FD}(\mathbf{e}) \quad (5.98)$$

Die Fehlergleichung wird elementweise ausgewertet.

$$\sum_{e=1}^K (\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \overline{\mathbf{R}}_{FD})_{\Omega^e} = D_{FD}(\mathbf{e}) \quad (5.99)$$

Der Diskretisierungsfehler $\mathbf{z} - \mathbf{z}^h$ des dualen Problems ist vollständig mit den Residuen des ursprünglichen Problems gekoppelt. Eine Trennung des dualen und des ursprünglichen Problems wird durch die Cauchy–Schwarz Ungleichung (4.105) erreicht.

$$\sum_{e=1}^K \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|_{\Omega^e} \|\overline{\mathbf{R}}_{FD}\|_{\Omega^e} \geq D_{FD}(\mathbf{e}) \quad (5.100)$$

Das Fehlerfunktional $D_{FD}(\mathbf{e})$ kann nun durch die elementweise Koppelung der Residuen $\|\overline{\mathbf{R}}_{FD}\|$ des ursprünglichen Problems mit den Diskretisierungsfehlern $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|$ des dualen Problems approximiert werden. Da ein Fehlerindikator und kein Fehlerschätzer entwickelt wird, werden die Diskretisierungsfehler des ursprünglichen und des dualen Problems mit den „klassischen“ Methoden der Fehlerapproximation bei FD–Zeitdiskretisierung aus Kapitel 5.3.1 berechnet. Bei diesen Verfahren kann der räumliche Fehler mit Hilfe einer verbesserten Lösung, die durch die Glättung der numerischen Lösung berechnet wird, bestimmt werden.

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|_{\Omega^e} \approx \sqrt{a(\mathbf{z}^* - \mathbf{z}^h, \mathbf{z}^* - \mathbf{z}^h)_{\Omega^e} + (\dot{\mathbf{z}}^* - \dot{\mathbf{z}}^h, \rho(\dot{\mathbf{z}}^* - \dot{\mathbf{z}}^h))_{\Omega^e}} \quad (5.101)$$

Ebenso werden die Residuen des ursprünglichen Problems mit den glättungsbasierten Verfahren angenähert.

$$\|\overline{\mathbf{R}}_{FD}\|_{\Omega^e} \approx \sqrt{a(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h)_{\Omega^e} + (\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^h, \rho(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^h))_{\Omega^e}} \quad (5.102)$$

Die Methoden zur Berechnung der verbesserten Lösung $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{u})$, $\dot{\mathbf{u}}^*$ bzw. $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{z}}^*$ sind in Kapitel 5.3 beschrieben. Es wird die SPR–Technik nach Zienkiewicz–Zhu zur Bestimmung der verbesserten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^*$ verwendet. Die verbesserten Geschwindigkeiten werden mit Hilfe der SPR–Technik oder der lokalen L_2 –Projektion bestimmt. Glättungsbasierte Methoden werden auch in der Statik zur Approximation der Fehler des ursprünglichen und des dualen Problems verwendet, u.a. Cirak et al. [26], Schleupen et al. [82].

Adaptive Netzanpassung In Kapitel 5.3.2 wurde die adaptive Netzanpassung zur Kontrolle des räumlich globalen Fehlers beschrieben. Das Vorgehen zur adaptiven Kontrolle des räumlich lokalen Fehlers unterscheidet sich davon nur wenig, weshalb im folgenden nur die Unterschiede in der Berechnung des relativen Fehlers η_s und der neuen Elementgröße h_{neu} gezeigt werden. Der relative lokale Fehler η_s berechnet sich aus

$$\eta_s = \frac{\sum_{e=1}^K \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^h\|_{\Omega^e} \|\overline{\mathbf{R}}_{FD}\|_{\Omega^e}}{(\mathcal{D}_{FD}, \mathbf{u}^h)_{\Omega}} \quad (5.103)$$

Der relative Fehler η_s ist damit unabhängig von der absoluten Größe der Belastung \mathcal{D}_{FD} des dualen Problems. Die Verfeinerungsindikatoren ξ werden wie für den räumlich globalen Fehler in Kapitel 5.3.2 berechnet. Für den Verschiebungsfehler wird die neue Elementgröße mit

$$h_{neu} = \frac{h_{alt}}{\xi_e^{1/(p+1)}} \quad (5.104)$$

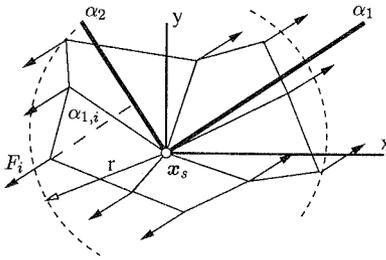
bestimmt. Der Fehler in den Verschiebungen konvergiert mit einer höheren Ordnung $\mathcal{O}(h^{p+1})$ als der Fehler in den Spannungen bzw. der Energie $\mathcal{O}(h^p)$, weshalb in (5.104) eine höhere Konvergenzordnung angenommen wird.

5.3.3.3 Duale Lasten in der FE-Prozedur

Der algorithmische Unterschied zwischen lokaler und globaler Fehlerkontrolle besteht in dem Lösen eines zusätzlichen dualen Problems. Die Fehler des ursprünglichen und des dualen Problems werden gekoppelt und führen auf den lokalen Fehler. Die Art der lokalen Fehlergröße wird von der dualen Last bestimmt. Das Aufstellen der dualen Last wird im folgenden für den räumlichen Fehler in der ersten Hauptspannung σ_I in der Statik beschrieben [82]. Die Technik kann von der Statik auf die Dynamik übertragen werden, wenn in räumlicher Richtung dasselbe duale Problem aufgebracht wird wie in der Statik. Soll bei der Verwendung von der DTG-Formulierung in der Zeit auch der zeitliche Fehlerverlauf bestimmt werden, so muß der zeitliche Verlauf der dualen Last entsprechend Kapitel 4.3.1 gewählt werden.

Um den Fehler in der Hauptspannung an einem Punkt \mathbf{x}_s zu bestimmen, muß eine Diskontinuität in der entsprechenden Dehnung aufgebracht werden. Diskontinuitäten können mit kontinuierlichen FE-Ansätzen nicht dargestellt werden, weshalb eine Regularisierung der Belastung durchgeführt werden muß. Die Diskontinuität in der Dehnung kann durch entgegengesetzt wirkende Kräfte approximiert werden. Da die Hauptspannungsrichtungen a-priori nicht bekannt sind, muß erst das ursprüngliche Problem gelöst werden. Die Richtung der ersten Hauptspannung σ_I an dem Punkt \mathbf{x}_s gibt die Richtung α der dualen Last vor, wie in Abb. (5.29) gezeigt wird. Die duale Belastung wird regularisiert, indem die Last auf alle FE-Knoten im Gebiet ω verteilt wird. Das Gebiet ω wird durch den Radius r definiert. Der Regularisierungsradius gewährleistet, daß der Bereich der Regularisierung während des adaptiven Zyklus gleich groß bleibt und damit möglichst unabhängig von der Diskretisierung ist.

Die duale Belastung darf nur einen Einheitsdehnungszustand in der Hauptspannungsrichtung erzeugen, da sonst am Punkt \mathbf{x}_s nicht nur der Fehler in der ersten Hauptspannung, sondern auch in anderen Größen, ermittelt wird. Der Einheitsdehnungszustand wird durch die Kräfte \mathbf{F}_i erzeugt, die mit sich selbst im Gleichgewicht sind. Die Kräfte \mathbf{F}_i an den Punkten \mathbf{x}_i links von \mathbf{x}_s ($\alpha_{1,i} < 0$) wirken in die entgegengesetzte Richtung wie die Kräfte an den Punkten \mathbf{x}_i rechts von \mathbf{x}_s ($\alpha_{1,i} > 0$) (Abb. 5.29). Zusätzlich muß das Momentengleichgewicht erfüllt sein. Die dementsprechende Lastverteilung wird durch das



- x, y globale Koordinaten
- α_1, α_2 lokale Koordinaten
- \circ Fehler im Punkt x_s
- r Suchradius - - - -

Abbildung 5.29: Regularisierte Belastung des dualen Problems für den Fehler in der Spannung in α_1 -Richtung am Punkt x_s

Lösen eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen bestimmt. Das Problem wird mit der Methode der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) gelöst.

$$\begin{aligned} \min_{F_i} \quad & \sum_i (F_i \alpha_{2,i})^2 & (5.105) \\ h_1 : \quad & \sum_i F_i = 0 \\ h_2 : \quad & \sum_i F_i^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

mit $F_i < 0$ für $\alpha_{1,i} < 0$ und $F_i > 0$ für $\alpha_{1,i} > 0$. Die Zielfunktion in Gleichung (5.105) erfüllt das Momentengleichgewicht und die Gleichheitsnebenbedingung h_1 das Kräftegleichgewicht. Der Lastvektor wird durch die zweite Nebenbedingung h_2 normiert. Da alle Kriterien explizite Funktionen der dualen Kräfte sind, kann das Optimierungsproblem effizient gelöst werden. Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß diese Art der Bestimmung der dualen Lastverteilung sehr robust ist und auf den Fehler in der ersten Hauptspannung σ_I führt.

Die Abschätzung des Fehlers in den globalen Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} ist ein Spezialfall, da die Richtungen α_1 und α_2 identisch mit den globalen Koordinatenrichtungen x und y sind. Die Vergleichsspannung σ_v ist eine Funktion der Hauptspannungen $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, weshalb der Fehler in der Vergleichsspannung $e(\sigma_v)$ explizit durch die Fehler in den Hauptspannungen $e(\sigma_I), e(\sigma_{II})$ und $e(\sigma_{III})$ berechnet werden kann.

$$e(\sigma_v) = \frac{\partial \sigma_v}{\partial \sigma_I} e(\sigma_I) + \frac{\partial \sigma_v}{\partial \sigma_{II}} e(\sigma_{II}) + \frac{\partial \sigma_v}{\partial \sigma_{III}} e(\sigma_{III}) \quad (5.106)$$

Die Kontrolle von Hauptspannungen bzw. Vergleichsspannungen ist für die Bemessung von Tragwerken wichtig.

An einem Balken wird die Effizienz der lokalen Kontrolle der Hauptspannungen im Vergleich zu der Kontrolle des globalen Fehlers in der Energienorm gezeigt. Der Balken ist beidseitig fest eingespannt und mit einer konstanten Gleichstreckenlast entlang der oberen

lokaler Fehlerindikator



A

798 Fhg

$$\eta_{lok}^A = 3,198\%$$

$$\eta_{ref,lok}^A = 0,381\%$$



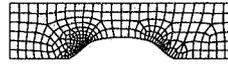
B

764 Fhg

$$\eta_{lok}^B = 1,462\%$$

$$\eta_{ref,lok}^B = 0,184\%$$

globaler Fehlerindikator



564 Fhg

$$\eta_{gltb} = 3,130\%$$

$$\eta_{ref,gltb}^A = 15,66\%$$

$$\eta_{ref,gltb}^B = 0,642\%$$

○ Kontrolle des lokalen Fehlers

Abbildung 5.30: Vergleich des lokalen Fehlers η_{lok} in der ersten Hauptspannung und des globalen Fehlers η_{gltb}

Kante belastet. Der globale Fehler in der Energienorm und der lokale Fehler in der ersten Hauptspannung an den Punkten A und B werden berechnet. Für die Fehlerermittlung wird der glättungsbasierte Z^2 -Fehlerindikator verwendet. Der lokale Fehler wird durch die Anwendung des Z^2 -Fehlerindikators für das ursprüngliche und das duale Problem ermittelt. Die Struktur wird mit bilinearen Elementen diskretisiert. Die vorgegebene relative Fehlergrenze ist für den globalen und den lokalen Fehler $\eta \leq 5\%$. Auf der linken Seite in Abb. (5.30) sind die verfeinerten Netze aufgrund der lokalen Fehlerkontrolle gezeigt. Das FE-Netz auf der rechten Seite ist an den globalen Fehler in der Energienorm angepaßt. Die berechneten relativen Fehler der FE-Netze sind in Abb. (5.30) angegeben. Die Anzahl der Freiheitsgrade für die globale Fehlerkontrolle ist etwas geringer als für die Netze mit lokaler Fehlerkontrolle. Die berechneten Fehler werden mit den „exakten“ Fehlern kontrolliert. Dazu werden die „exakten“ Spannungen und Energien mit einem sehr feinen FE-Netz bestimmt. Der Vergleich des „exakten“ relativen Fehlers der Spannung η_{ref} mit dem geschätzten Wert η_A im Punkt A zeigt, daß der globale Fehlerindikator den lokalen Fehler in der Spannung nicht erfassen kann. Im Punkt B ist die Richtung der ersten Hauptspannung identisch zu der globalen Spannungsrichtung. Der relative Referenzfehler des global verfeinerten Netzes $\eta_{ref,gltb} = 0,642\%$ ist deshalb unter dem berechneten relativen Fehler $\eta_{gltb} = 3,130\%$. Die Netzadaption nach dem Fehler in Punkt A hat gezeigt, daß der lokale Fehler mit Hilfe der dualen Probleme gut approximiert werden kann.

5.3.3.4 Numerische Beispiele

In den folgenden Beispielen wird zunächst das Prinzip der Bestimmung des lokalen Fehlers veranschaulicht und anschließend an Hand eines Beispiels der lokale und der globale Fehler

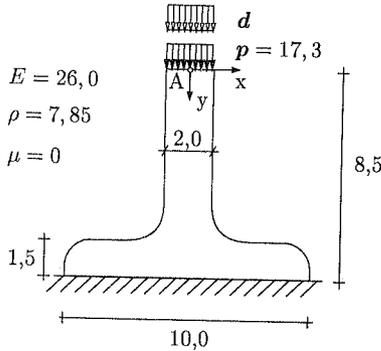


Abbildung 5.31: Zweidimensionales Modell eines Kolbens

miteinander verglichen. Der Unterschied zwischen lokaler und globaler Fehlerkontrolle wird bei der adaptiven Verfeinerung deutlich.

Räumliche Koppelung An dem Beispiel der ungestörten Wellenausbreitung in einem Kolben wird das Prinzip der lokalen Fehlerbestimmung erklärt. Der Kolben ist in Abb. (5.31) dargestellt. Die Geometrie und die Materialparameter sind dort angegeben. Das System wird nicht gedämpft. Die Verschiebungen zum Zeitpunkt $t = 0$ ergeben sich aus der statischen Verformung infolge der verteilten Last p . Anschließend schwingt das System mit der Last $p = 0$ um die Ruhelage. Zur Zeitdiskretisierung wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Der Zeitschritt ist mit $\Delta t = 0,01$ konstant. Der zeitliche Fehler wird nicht kontrolliert. Der Kolben wird mit vierknotigen Scheibenelementen und einem gleichmäßig verfeinerten Netz (636 Freiheitsgrade) diskretisiert. Der globale Fehler in der Dehnungsenergie und der lokale Fehler in den vertikalen Verschiebungen unter der Belastung p werden kontrolliert. Um den lokalen Fehler in den Verschiebungen zu erhalten, wird auf das duale Problem zum Zeitpunkt t_N eine verteilte Einheitslast $d = 1$ in vertikaler Richtung am Ende des Kolbens aufgebracht, die für $t \neq t_N$ null ist. Nur der Fehler in der Dehnungsenergie wird bei der Berechnung des globalen und lokalen relativen Fehlers η_s berücksichtigt. Da der Fehler in der kinetischen Energie im Verhältnis zum Fehler in der Dehnungsenergie meist vernachlässigbar klein ist (s. Kapitel 5.3.1.2), wird er im folgenden nicht berechnet. Der Fehler in der Dehnungsenergie wird mit Hilfe der SPR-Technik von Zienkiewicz-Zhu berechnet. Der relative Fehler η_s wird zum Zeitpunkt $t_N = 0,06$ ermittelt. Zur Berechnung des lokalen Fehlers wird zu dem Zeitpunkt t_N die Elementfehlnorm des globalen Fehlers von dem ursprünglichen und dem dualen Problem bestimmt.

Die Verteilung der globalen Fehlernorm des ursprünglichen Problems zu dem Zeitpunkt t_N ist in Abb. (5.32) links oben dargestellt. Der lokale Fehler kann nur an einem Zeitpunkt ohne Berücksichtigung des Einfluß aller vorherigen Zeitschritte berechnet werden,

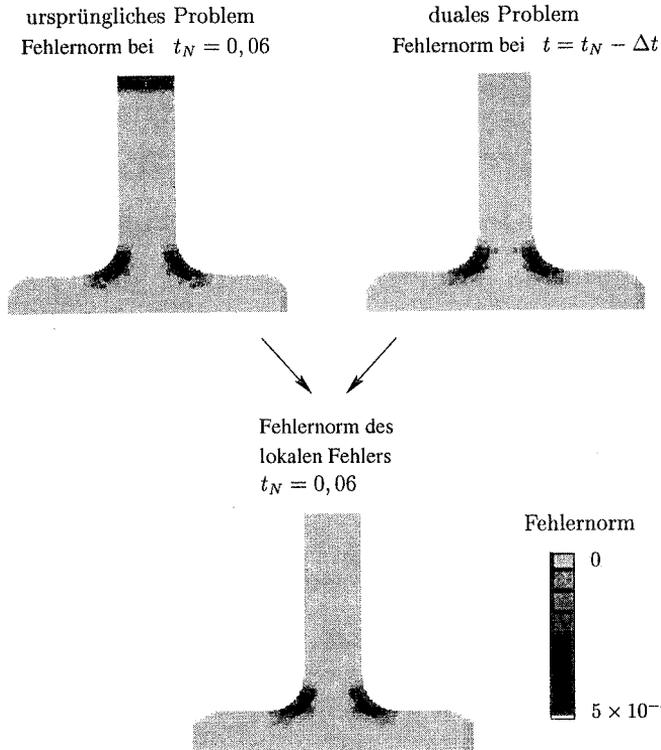


Abbildung 5.32: Koppelung der Elementfehlnorm für den lokalen Fehler in den Verschiebungen unter der Last zum Zeitpunkt $t_N = 0,06$

da in zeitlicher Richtung mit Finiten-Differenzen diskretisiert wird. Um den lokalen Fehler in den Verschiebungen zu dem Zeitpunkt t_N zu bestimmen, wird die Verteilung der Fehlernorm des dualen Problems zu dem Zeitpunkt $t = t_N - \Delta t$ berechnet, d.h. es wird ein einziger Zeitschritt des dualen „Rückwärtsproblem“ berechnet, wie in Abb. (5.32) rechts oben dargestellt ist. Durch die Berechnung eines Zeitschrittes des dualen Problems werden nicht nur die „Anfangsbedingungen“, d.h. die statische Lösung, zur Fehlerapproximation verwendet, sondern es wird auch die Ausbreitung der dualen Last im Raum und in der Zeit berücksichtigt. Der dynamische Einfluß ist jedoch fast vernachlässigbar. Das duale Problem muß nur bis zu dem Zeitpunkt $t = t_N - \Delta t$ berechnet werden. Danach wird nur noch das ursprüngliche Problem gelöst. Die Verteilung des Fehlers des ursprünglichen Problems wird mit der Verteilung des Fehlers des dualen Problems gekoppelt. Dadurch kann der Fehler in den Verschiebungen unter der Last approximiert werden. Der relative lokale Fehler zu dem Zeitpunkt t_N beträgt $\eta_{s,lok} = 0,09\%$. Der globale relative Fehler ist mit $\eta_{s,glb} = 4,7\%$ größer. Der globale Fehler stellt den durchschnittlichen Fehler im

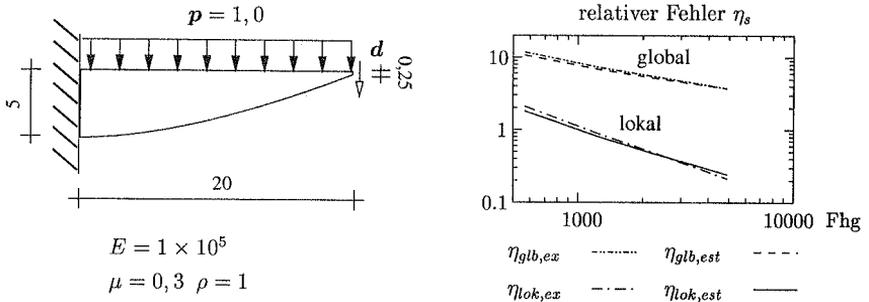


Abbildung 5.33: Konvergenz des „exakten“ ($\eta_{glb,ex}$) und approximierten ($\eta_{glb,est}$) relativen globalen Fehlers in der Dehnungsenergie und des „exakten“ ($\eta_{lok,ex}$) und approximierten ($\eta_{lok,est}$) relativen lokalen Fehlers in den Verschiebungen unter der Last d

Gebiet zu dem Zeitpunkt t_N dar, weshalb die Stoßfront in der Verteilung der Elementfehlernorm (Abb. 5.32 oben links) deutlich zu erkennen ist. Da nur ein einziger Zeitschritt des dualen Problems berechnet wurde, ist die zeitliche Ausbreitung des dualen Problems noch sehr klein. Bei dem dualen Problem konnte sich noch keine Stoßfront ausbilden. Dadurch werden die hohen Fehler an der Stoßfront des ursprünglichen Problems mit den sehr kleinen Werten des dualen Problems am Kolbenende gewichtet. Dadurch unterscheidet sich die Fehlerverteilung des lokalen Fehlerindikators gerade an der Stoßfront von der Fehlerverteilung des globalen Indikators, wo der globale Indikator große Fehler anzeigt.

Konvergenz des lokalen Fehlers Am Beispiel des Kragträgers in Abb. (5.33) wird die Genauigkeit des lokalen Fehlerindikators überprüft. Die Geometrie und die Materialdaten sind in Abb. (5.33) angegeben. Die untere Kante wird mit einer kubischen Bézierkurve dargestellt. Der Kragträger wird an der oberen Kante mit der Gleichstreckenlast p belastet. Er schwingt frei aus der statischen Anfangsauslenkung infolge der Last p zu $t = 0$. Für $t > 0$ ist die Belastung $p = 0$. Zur Zeitintegration wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0, 25$ und $\delta = 0, 5$ verwendet. Der Zeitschritt ist konstant $\Delta t = 0, 005$ groß. Das Gebiet wird mit vierknotigen Scheibenelementen diskretisiert, wobei die Anzahl der Elemente variiert wird. Der Fehler in der Dehnungsenergie wird mit Hilfe der SPR-Methode bestimmt. Der Fehler in der kinetischen Energie wird vernachlässigt. Der Fehler wird bereits nach sechs Zeitschritten zum Zeitpunkt $t_N = 0, 03$ bestimmt, da die Konvergenz des Fehlerindikators unabhängig von dem Zeitpunkt der Fehlerbestimmung ist. Es wird der globale Fehler in der Dehnungsenergie und der lokale Fehler in den vertikalen Verschiebungen am Trägerende bestimmt. Für den lokalen Fehler muß am Trägerende die vertikal verteilte Last d aufgebracht werden. Der „exakte“ Fehler wird mit einer Referenzlösung (18856 Fhg; $\Delta t = 0, 005$) berechnet. In Abb. (5.33) ist die Konvergenz des „exakten“ und des berechneten relativen Fehlers η_s für den globalen und den lokalen Fehlerindikator dargestellt. Der lokale Fehlerindikator kann den „exakten“ Fehler in den Verschiebungen gut wiedergeben. Im Vergleich zum globalen Fehler ist er kleiner, da er nur das lokale

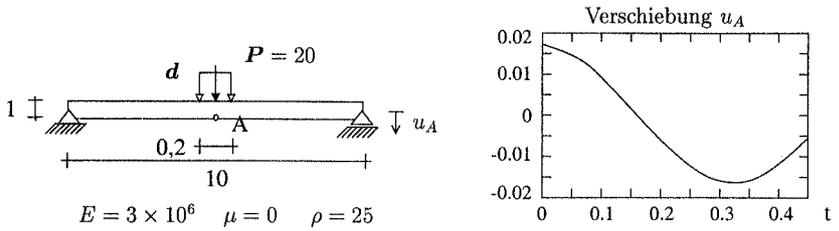


Abbildung 5.34: Balken mit Belastung P des ursprünglichen Problems und d des dualen Problems; Verlauf der vertikalen Verschiebung u_A des Punktes A in Balkenmitte

Verhalten der Struktur berücksichtigt, und konvergiert schneller.

Adaptivität mit lokaler Fehlerkontrolle Im folgenden Beispiel wird die Effektivität der lokalen Fehlerkontrolle im adaptiven Algorithmus gezeigt. Es wird das Tragwerk in Abb. (5.34) untersucht. Das System ist an den Enden so gelagert, daß keine Singularitäten entstehen. Die Geometrie und die Materialdaten sind in Abb. (5.34) angegeben. Das System wird mit einer Einzellast $P = 20$ belastet. Das System schwingt frei aus der statischen Ausgangsverformung infolge der Last P . Anschließend ist $P = 0$. Zur Zeitintegration wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Die Zeitschrittgröße ist $\Delta t = 0,0005$. Der Zeitschritt ist sehr klein gewählt, so daß nur die räumliche Diskretisierung adaptiv kontrolliert werden muß. Der Raum wird mit vierknotigen Scheibenelementen diskretisiert. Bei der Approximation des globalen und lokalen Fehlers wird alleine der Fehler in der Dehnungsenergie berücksichtigt. Der kinetische Fehler wird vernachlässigt. Die verbesserte Spannungslösung wird mit Hilfe der SPR-Methode bestimmt. Der globale Fehler in der Dehnungsenergie und der lokale Fehler in den vertikalen Verschiebungen in der Tragwerksmitte werden kontrolliert. Für den lokalen Fehler wird das duale Problem mit der Last d in der Tragwerksmitte belastet. Der globale relative Fehler η_{glib} soll innerhalb der Toleranzgrenzen $0,04 \leq \eta_{s,glib} \leq 0,075$ liegen. Um zu große Netzveränderungen zu vermeiden, ist die neue Elementgröße auf $0,25h_{alt} \leq h_{neu} \leq 4h_{alt}$ beschränkt. Die Toleranzgrenzen für den relativen lokalen Fehler betragen $0,01 \leq \eta_{s,lok} \leq 0,02$. Sie sind kleiner als für den relativen globalen Fehler. Für den lokalen Fehler ist die neue Elementgröße auf $0,125h_{alt} \leq h_{neu} \leq 8h_{alt}$ beschränkt. Der Zeitpunkt der Fehlerkontrolle wird, wie in Kapitel 6.1 beschrieben, adaptiv bestimmt. Bei der Änderung der Dehnungsenergie $\|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ um mehr als $0,1\|\mathbf{u}\|_{E_u, max}^2$ seit der letzten Fehlerkontrolle wird eine räumliche Fehlerkontrolle durchgeführt. Die von dem alten auf das neue Netz übertragenen Daten werden mit einer lokalen gewichteten L_2 -Projektion ($w=2$) geglättet. Anschließend werden die Energieanteile korrigiert und wieder ein Gleichgewichtspunkt berechnet(s. Kapitel 6.1).

In Abb. (5.35) ist der zeitliche Verlauf des relativen Fehlers und die Anzahl der Freiheitsgrade dargestellt. Der lokale Fehlerindikator benötigt für die Kontrolle der vertikalen

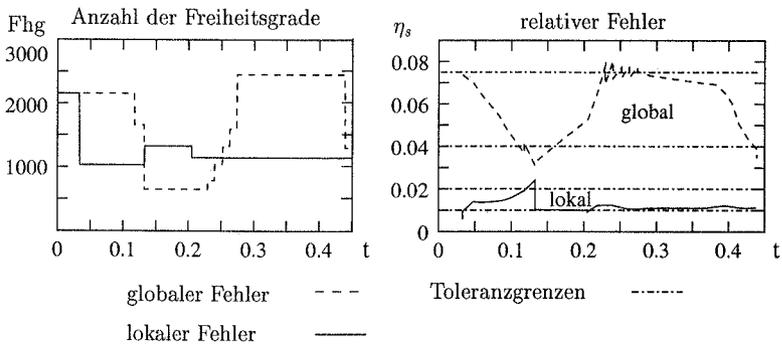


Abbildung 5.35: Anzahl der Freiheitsgrade und relativer Fehler η_s ; Globaler Fehler in der Dehnungsenergie und lokaler Fehler in den vertikalen Verschiebungen unter der Last d

Verschiebungen weniger Freiheitsgrade als der globale Fehlerindikator für die Kontrolle des mittleren Fehlers des Systems. Dieses Verhalten kann häufig beobachtet werden, da der lokale Fehler nur in einem bestimmten Gebiet gemessen wird. Die gemessenen physikalischen Größen, zum einen die Verschiebungen und zum anderen die Dehnungsenergie, unterstützen diese Beobachtung. Da bei der Verschiebungsformulierung die Verschiebungen genauer bestimmt werden können als die Dehnungen, ist der Verschiebungsfehler in der Regel kleiner. Der relative globale Fehler kontrolliert den Fehler der gesamten Struktur und benötigt deshalb mehr Freiheitsgrade, um innerhalb der Toleranzgrenzen zu bleiben. Der globale Fehler ist von dem globalen Verformungsverhalten abhängig. Bei Durchlaufen der Ruhelage nimmt der globale relative Fehler ab. Das FE-Netz wird vergrößert und die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert. Der lokale Fehler ist nicht so stark von dem globalen Verformungsverhalten abhängig. Die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert sich bei Durchlaufen der Ruhelage nicht. Dieses Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen lokaler und globaler Fehlerkontrolle.

5.4 Zusammenfassung

Im folgenden werden die wichtigen Punkte der Fehlerermittlung in Raum und Zeit mit der semidiskreten Formulierung zusammengefasst.

- Der zeitliche Fehler wird bei der semidiskreten Formulierung immer getrennt von dem räumlichen Fehler berechnet. Der zeitlich lokale Fehler ermittelt den Fehler eines Zeitschrittes. Die besten Ergebnisse wurden mit dem zeitlichen Fehlerindikator von Riccius [80] erzielt, da dieser die höheren Ableitungen der Taylorreihenentwicklung mit zentralen Differenzenquotienten statt mit Differenzenquotienten erster Ordnung berechnet. Der zeitlich lokale Fehler kann mit diesem Indikator dargestellt werden.

- Die zeitlich globalen Fehlerindikatoren [112][100], d.h. die Indikatoren für den zeitlichen Fehler des gesamten bisherigen Zeitraumes, approximieren den tatsächlichen Fehler ungenau und werden deshalb nicht angewandt.
- Bei dem räumlich globalen Fehlerindikator kann der Fehleranteil in der kinetischen Energie im Vergleich zu dem Anteil in der Dehnungsenergie meist vernachlässigt werden [61], da der kinetische Anteil klein ist. Ein Grund dafür ist, daß die Dehnungsenergie mit den Ableitungen der FE-Ansätze berechnet wird. Der Fehler in den Spannungen ist größer als der Fehler in den Geschwindigkeiten, da die Geschwindigkeiten direkt mit den FE-Ansätzen approximiert werden. Trotz der Vernachlässigung des kinetischen Anteils führt die adaptive Fehlerkontrolle auf sinnvolle Ergebnisse.
- In dieser Arbeit wird der Fehler durch den relativen zeitlichen, wie auch räumlichen, Fehler kontrolliert. Der Fehler wird dabei auf die maximale Energie aller bisherigen Zeitschritte bezogen. Der relative Fehler ist einfach anzuwenden und als Kontrollgröße der adaptiven Methode geeignet.
- Die Adaptivität mit dem räumlich lokalen Fehler ist sehr effektiv, wenn nur eine lokale Größe kontrolliert werden soll und die globale Lösung nicht von Interesse ist. Der zeitliche Einfluß des Fehlers kann bei der Zeitdiskretisierung mit der Newmark-Methode nicht erfaßt werden. Daher wird nur ein Zeitschritt des dualen Problems gelöst, um den räumlich lokalen Fehler zu erhalten. Der zusätzliche numerische Aufwand durch die Einführung des dualen Problems ist dadurch gering. Die Fehler des dualen Problems werden mit den Fehlern des ursprünglichen Problems gekoppelt, um den lokalen Fehler zu erhalten.
- Der lokale Fehler an einem Zeitpunkt kann nicht die Fehler von den vorherigen Zeitschritten berücksichtigen, da die Newmark-Methode keinem Galerkin-Verfahren entspricht. Jedoch können zu einem Zeitpunkt die Anteile des räumlich lokalen Fehlers an allen bisherigen Zeitschritten berechnet werden. Die einzelnen Anteile des räumlich lokalen Fehlers an allen bisherigen Zeitschritten erfassen dabei nicht den Einfluß der zeitlichen Fehler der vorherigen Zeitpunkte, sondern stellen für den Fehler zum Zeitpunkt der Fehlerberechnung nur die Anteile des Fehlers an allen bisherigen Zeitpunkten dar. Dazu muß das duale Problem ebenso wie das ursprüngliche Problem an allen Zeitpunkten gelöst werden. Die Fehler des dualen Problems werden mit den Diskretisierungsfehlern des ursprünglichen Problems von allen bisherigen Zeitpunkten gekoppelt, wobei das duale Problem „rückwärts“ in der Zeit läuft. Mit Hilfe der einzelnen Anteile des lokalen Fehlers an allen bisherigen Zeitpunkten kann die Entwicklung des räumlich lokalen Fehlers dargestellt werden, wobei der zeitliche Fehler vernachlässigt wird. Erste Untersuchungen zeigen, daß dieses Vorgehen ein lohnenswerter Ansatz für künftige Entwicklungen der Fehlerkontrolle im Ingenieursbereich darstellt.

Kapitel 6

Adaptiver Algorithmus

In den bisherigen Kapiteln wurde gezeigt, wie der zeitliche und räumliche Fehler approximiert werden kann. Der zeitliche Fehler in Kapitel 5.2 wird getrennt von dem räumlichen Fehler in Kapitel 5.3 berechnet. Die Zeitschrittgröße wird an den zeitlichen Fehler angepaßt (s. Kapitel 5.2.3). Die räumliche Diskretisierung, d.h. in dieser Arbeit die Elementgröße, wird entsprechend der Verteilung des räumlichen Fehlers (s. Kapitel 5.3.2) gewählt. In dieser Arbeit werden unstrukturierte FE-Netze verwendet, da diese gut und schnell an die Fehlerverteilung und die Geometrie anpaßt werden können. Die Netze werden mit dem Freivernetzer von Rehle [79] generiert. In diesem Kapitel wird auf den adaptiven Algorithmus eingegangen und die folgenden Punkte untersucht:

- Zeitpunkt der Fehlerkontrolle
- Übertragung der FE-Daten
- Nachbehandlung der FE-Daten

Zunächst muß der **Zeitpunkt der Fehlerkontrolle** bestimmt werden. In der Literatur, u.a. Wiberg et al. [101], Li [61], Riccius [80], Neumann et al. [67], werden Fehlerindikatoren für die Zeitschrittgröße bzw. für den räumlichen Fehler entwickelt und der Fehler in jedem Zeitschritt kontrolliert. Die Kontrolle des Fehlers erfordert jedoch einen zusätzlichen Rechenaufwand. Um das Problem möglichst effizient mit adaptiven Methoden zu lösen, sollte die Fehlerkontrolle so oft wie nötig, jedoch so selten wie möglich durchgeführt werden. Deshalb ist es optimal, wenn der Fehler nur kontrolliert wird, wenn es notwendig ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Möglichkeiten zur Steuerung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle vorgestellt und miteinander verglichen.

Liegt der berechnete Fehler innerhalb der vorgegebenen Toleranz, dann kann mit der Berechnung fortgefahren werden. Überschreitet der Fehler die Toleranzgrenze, muß der Zeitschritt bzw. das FE-Netz angepaßt werden. Die Adaption des Zeitschrittes bereitet keine Probleme, da sich die Topologie des FE-Netzes nicht ändert. Die Adaption des FE-Netzes ist jedoch aufwendiger, da ein neues Netz generiert wird und die Daten von dem alten Netz auf das neue Netz übertragen werden müssen. Die **Übertragung der Daten**

auf das neue Netz ist mit Fehlern verbunden. Diese Fehler beeinflussen die Genauigkeit der dynamischen Berechnung an allen folgenden Zeitpunkten. Die Auswirkungen des Datentransfers auf die zeitliche und räumliche Fehlerkontrolle wurden bisher in der Literatur nicht untersucht, s. Li [61], Riccius [80]. In dieser Arbeit werden die Schwierigkeiten des Datentransfers bei Systemen mit unterschiedlichen physikalischen und numerischen Eigenschaften diskutiert. Zunächst wird die Technik des Datentransfers kurz beschrieben. Anschließend werden verschiedene Methoden aus der Literatur zur Verbesserung der transferierten Daten vorgestellt und untersucht. Anhand von numerischen Beispielen wird der Einfluß des Datentransfers auf die zeitliche und räumliche Fehlerkontrolle verdeutlicht.

6.1 Zeitpunkt der Fehlerkontrolle

In diesem Abschnitt wird der Zeitpunkt der zeitlichen bzw. räumlichen Fehlerkontrolle behandelt. Die räumliche Fehlerkontrolle schließt sich an die zeitliche Fehlerkontrolle an. Es wird dabei angenommen, daß der zeitliche Fehler innerhalb der Fehlertoleranz liegt, wenn der räumliche Fehler bestimmt wird. Wann die zeitliche bzw. räumliche Fehlerkontrolle sinnvoll ist, wurde bisher nicht untersucht. Es ist eindeutig, daß die adaptive Methode effizienter ist, wenn der Fehler nur kontrolliert wird, wenn es notwendig ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Möglichkeiten, den Zeitpunkt der Fehlerkontrolle zu bestimmen, vorgestellt und in Kapitel 6.4 an Hand von numerischen Beispielen beurteilt. Im folgenden wird von der zeitlichen Fehlerkontrolle gesprochen, jedoch sind die Methoden auch auf die räumliche Fehlerkontrolle übertragbar.

- Fehlerkontrolle in jedem Zeitschritt
- Fehlerkontrolle in jedem n -ten Zeitschritt
- Fehlerkontrolle gekoppelt an die Änderung der Dehnungsenergie

In der Literatur wird die zeitliche Fehlerkontrolle in **jedem Zeitschritt** durchgeführt, u.a. Li et al. [61][63], Riccius et al. [80][81]. Damit ist sichergestellt, daß der zeitliche Fehler in jedem Zeitschritt innerhalb der Toleranz liegt. Jedoch kann die Fehlerkontrolle unnötig sein, wenn z.B. stark gedämpfte Probleme untersucht werden oder der Zeitschritt gerade angepaßt wurde. Die Berechnung des zeitlichen Fehlers ist nicht so aufwendig wie die Berechnung des räumlichen Fehlers. Der zusätzliche Aufwand bei der Zeitschrittkontrolle in jedem Zeitschritt ist im Vergleich zu der Kontrolle des räumlichen Fehlers gering. Schließt sich jedoch an jede Zeitschrittkontrolle eine Kontrolle des räumlichen Fehlers an, so erhöht sich der numerische Aufwand stark.

Als Alternative zu der Kontrolle in jedem Zeitschritt wird untersucht den zeitlichen Fehler in **jedem n -ten Zeitschritt** zu kontrollieren und damit den Aufwand der Fehlerkontrolle zu reduzieren. Der optimale Abstand n der Fehlerkontrolle ist jedoch a-priori schwer zu bestimmen. In den meisten untersuchten Beispielen wurde $n = 3$ gewählt. Da der

zeitliche Fehler gleichmäßig verteilt sein soll, wird angenommen, daß der zeitliche Fehler in jedem n -ten Zeitschritt gleich groß und unabhängig von der absoluten Zeitschrittgröße ist. Dies wird mit Hilfe des Fehlerindikators kontrolliert.

Es ist nicht sinnvoll, den absoluten zeitlichen Abstand Δt_{crit} zwischen den Fehlerkontrollen vorzuschreiben, da zeitliche Abschnitte mit nur geringen Veränderungen der Zustandsgrößen genauso oft kontrolliert werden würden wie zeitliche Abschnitte mit großen Veränderungen der Zustandsgrößen. Der Nachteil der Fehlerkontrolle in jedem n -ten Zeitschritt ist, daß der Fehler in den dazwischenliegenden $n-1$ Zeitschritten nicht erfaßt wird. Im Laufe der Berechnung können sich diese Fehler fortpflanzen. Diese Fehler können mit den Fehlerindikatoren aus Kapitel 5 zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr erfaßt werden. In der Zeit zurückliegende Fehler können nur mit Hilfe der dualen Probleme, wie in Kapitel 4 für die Formulierung mit DTG-Ansätzen gezeigt wurde, dargestellt werden. In Kapitel 6.4 wird an einem numerischen Beispiel gezeigt, daß die Zeitschrittkontrolle in konstanten Zeitschrittabstand nicht zu empfehlen ist.

Anstatt die Abstände der Fehlerkontrolle durch die Anzahl der Zeitschritte zu steuern, wurde alternativ untersucht, den Zeitpunkt der Fehlerkontrolle an die **Änderung der Dehnungsenergie** zu koppeln. Die Änderung in der Dehnungsenergie $\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ wird zwischen dem Zeitpunkt der letzten Fehlerkontrolle und dem aktuellen Zeitpunkt gemessen. Der Fehler wird kontrolliert, wenn die Änderung der Dehnungsenergie seit der letzten Fehlerkontrolle größer als ein vorgegebener Grenzwert $\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ ist.

$$|\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2| \geq |\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2| \quad (6.1)$$

Der Grenzwert $\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ wird aus der maximalen Dehnungsenergie $\|\mathbf{u}\|_{E_u, max}^2$ aller bisherigen Zeitschritte und dem vom Benutzer vorgegebenen Faktor ψ berechnet.

$$\Delta \|\mathbf{u}\|_{E_u}^2 = \psi \|\mathbf{u}\|_{E_u, max}^2 \quad (6.2)$$

Zu Beginn der Berechnung ist im allgemeinen die maximale Dehnungsenergie nicht bekannt, weshalb die Fehlerkontrolle zunächst in festen Abständen durchgeführt wird. Bei der Koppelung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle an die Dehnungsenergie wird davon ausgegangen, daß der Anteil des Fehlers in der Dehnungsenergie dominant ist, u.a. [61][80]. In Kapitel 5.3.1.2 wurde gezeigt, daß der Fehler in der kinetischen Energie in vielen Fällen vernachlässigt werden kann. Es wird davon ausgegangen, daß die zeitliche Änderung der Dehnungsenergie mit Veränderungen in der Beanspruchung der Struktur bzw. des Spannungszustandes einhergehen. Da die Diskretisierung noch nicht an die veränderte Beanspruchung angepaßt ist, wächst der Fehler an. Der Zeitpunkt der Fehlerkontrolle wird durch ein globales Maß bestimmt. Lokale Veränderungen, z.B. räumliche Umlagerungen der Dehnungsenergie in der Struktur, können damit nicht erfaßt werden. Durch die Koppelung der Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle an die Dehnungsenergie kann die Effizienz des adaptiven Algorithmus im Vergleich zu den anderen Methoden verbessert werden, wie an Hand von numerischen Beispielen in Kapitel 6.4 gezeigt wird.

6.2 Übertragung der FE-Daten

Der räumliche Fehler wird in der Regel nach dem zeitlichen Fehler kontrolliert. In vielen Arbeiten wird entweder der zeitliche Fehler oder der räumliche Fehler kontrolliert [80]. Die Kombination der räumlichen und zeitlichen Fehlerkontrolle wird selten verwendet, da der zeitliche Fehler sensitiv auf die Änderung des FE-Netzes bzw. auf die Ungenauigkeiten bei der Übertragung der FE-Daten reagiert. Li [61] erwähnt die Schwierigkeiten und führt für bestimmte Systeme die zeitliche und räumliche Fehlerkontrolle durch ohne die Problematik näher zu untersuchen. Im folgenden wird der Einfluß der Ungenauigkeiten des Datentransfers auf die zeitliche und räumliche Fehlerkontrolle untersucht. Zunächst wird die Übertragung der FE-Daten auf das neue Netz beschrieben.

Liegt der zeitliche bzw. der räumliche Fehler nicht innerhalb der vorgegebenen Toleranzschranken, dann muß der Zeitschritt bzw. das FE-Netz an den Fehler bzw. die Fehlerverteilung angepaßt werden. Bei der Adaption des Zeitschrittes wird nur die Zeitschrittgröße geändert. Die Topologie des FE-Netzes bleibt erhalten. Es müssen nur die Faktoren für die Zeitintegration und für die Berechnung des zeitlichen Fehlers angepaßt werden. Die FE-Lösung selbst bleibt unverändert. Die Berechnung ist konsistent, da dasselbe Anfangswertproblem gelöst wird wie vor der Zeitschrittanpassung.

Die Adaption des FE-Netzes ist aufwendiger, da sich die Topologie ändert. Die Systemmatrizen müssen neu aufgestellt werden, wodurch jedoch keine zusätzlichen Fehler entstehen. Durch die Änderung des FE-Netzes müssen die Daten, die als Anfangswerte für den aktuellen Zeitschritt dienen, von dem alten Netz auf das neue FE-Netz übertragen werden. Diese Übertragung der Zustandsgrößen auf das neue Netz ist mit Fehlern behaftet. Die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten werden meist direkt auf das neue Netz transferiert. Die Beschleunigungen werden entweder direkt auf das neue Netz übertragen oder aus der Bewegungsgleichung berechnet (s. Kapitel 6.3.2). Wenn der zeitliche Fehler kontrolliert wird, müssen zusätzlich Daten, wie z.B. die Ableitung der Beschleunigung, von den vorherigen Zeitschritten auf das neue Netz übertragen werden oder der zeitliche Fehler kann in den nächsten Zeitschritten nicht kontrolliert werden.

Der Datentransfer von dem alten Netz auf das neu generierte Netz wird kurz beschrieben. Diese Technik wird ebenfalls in den Arbeiten von u.a. Rehle [79], Maute [64], Cirak [25], Gee [39] und Erhart [33] verwendet.

Datentransfer Zunächst werden die Daten des alten FE-Netzes auf dem Hintergrundnetz gespeichert. Als Hintergrundnetz wird das alte FE-Netz verwendet. Die Koordinaten \mathbf{x}_{neu} auf dem neuen Netz werden mit einer lokalen Interpolation ermittelt. Für die lokale Interpolation werden die lokalen Koordinaten ζ, η der neuen Punkte benötigt.

$$\mathbf{x}_{neu}(\zeta, \eta) = \sum_{k=1}^{K_{ps}} \mathbf{N}_k(\zeta, \eta) \mathbf{x}_{alt,k} \quad (6.3)$$

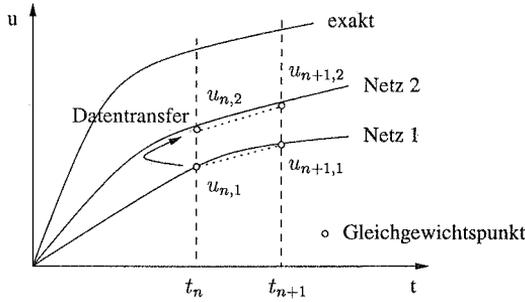


Abbildung 6.1: Darstellung des Netzwechsels

Die lokalen Koordinaten ζ, η können im allgemeinen nicht direkt berechnet werden, da die Gleichung (6.3) in ζ, η nichtlinear ist. Für lineare Elemente können die lokalen Koordinaten direkt berechnet werden. Für Elemente mit höheren Ansatzfunktionen müssen die lokalen Koordinaten iterativ bestimmt werden. Die neuen Knoten \mathbf{x}_{neu} werden zunächst den Elementen des Hintergrundnetzes zugeordnet und das lokale Funktional $\Pi(\zeta, \eta)$ aufgestellt. Das Funktional beinhaltet die Differenz zwischen den globalen Koordinaten \mathbf{x} und den über die lokalen Ansatzfunktionen bestimmten Koordinaten $\mathbf{x}(\zeta, \eta)$.

$$\Pi(\zeta, \eta) = (\mathbf{x}(\zeta, \eta) - \mathbf{x})^2 \quad (6.4)$$

Durch die Minimierung des Funktionals $\Pi(\zeta, \eta)$ können die lokalen Koordinaten ζ, η iterativ mit dem Newton-Raphson Verfahren berechnet werden [32]. Sind die lokalen Koordinaten ζ, η bekannt, können beliebige Werte an den neuen FE-Knoten bestimmt werden. Für die Verschiebungen \mathbf{u} gilt z.B.

$$\mathbf{u}_{neu} = \sum_{k=1}^{Kps} \mathbf{N}_k(\zeta, \eta) \mathbf{u}_{alt,k} \quad (6.5)$$

Die Werte der zu übertragenden Funktionen werden an den lokalen Koordinaten ζ, η des Elementes ausgewertet und über alle Kps Knoten des Elementes aufsummiert. Mit dieser Methode werden die Verschiebungen und Geschwindigkeiten von dem alten Netz auf das neue Netz übertragen.

6.3 Nachbehandlung der FE-Daten

Der Datentransfer auf das neue Netz ist mit Fehlern verbunden, die z.B. die Änderung der Energie des Systems zur Folge haben. Da sich durch den Transfer der Zustandsgrößen das Anfangswertproblem ändert, ist die dynamische Berechnung nicht mehr konsistent. In Abb. (6.1) ist der Netzwechsel dargestellt. Das Anfangswertproblem auf dem neuen Netz ist nicht mit dem Anfangswertproblem auf dem alten Netz identisch. Das Anfangswertproblem mit den übertragenen Daten auf dem neuen Netz stimmt auch nicht

mit der Berechnung des dynamischen Problems überein, wenn von Beginn an das neue Netz verwendet wird. Die Fehler bzw. die Störungen durch den Datenübertrag bei dem Netzwechsel sollen möglichst gering sein, da diese Fehler in allen folgenden Zeitschritten enthalten sind und nicht kompensiert werden können. In der Literatur schlagen, u.a. Li [61], Riccius [80] Schweizerhof et al. [81][67], verschiedene Verfahren vor, wie die Qualität der transferierten Lösung verbessert werden kann. Im folgenden werden diese Verfahren beschrieben sowie einige Techniken getestet und beurteilt.

6.3.1 Glättung der FE-Daten

Riccius et al. [81][80] haben beobachtet, daß die Lösung nach dem Datentransfer nicht mehr dieselbe Glattheit besitzt wie davor. Deshalb schlagen sie eine Glättung der transferierten Daten vor. Die Techniken sind der Methode zur Ermittlung der verbesserten Spannungslösung in Kapitel 5.3.1.1 sehr ähnlich.

Mittelung der Knotenwerte Die geglätteten Werte, z.B. die Verschiebungen \mathbf{u}_{smo} am Punkt \mathbf{x}_0 , werden aus dem Mittel der Werte $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k)$ an den Kps umliegenden Knoten von Knoten \mathbf{x}_0 bestimmt.

$$\mathbf{u}_{smo}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{Kps + 1} (\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{Kps} \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)) \quad (6.6)$$

Die geglätteten Geschwindigkeiten können auf die gleiche Weise berechnet werden. Der Nachteil der einfachen Mittelung ist, daß die Elementgeometrie, d.h. die Entfernung der umliegenden Knotenpunkte \mathbf{x}_k von dem Punkt \mathbf{x}_0 , nicht in die Berechnung des geglätteten Wertes eingeht. Bei der L_2 -Projektion wird der Abstand $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k|$ in der Berechnung berücksichtigt.

Gewichtete L_2 -Projektion Die L_2 -Projektion wird bei der Ermittlung der verbesserten Spannungslösung in Kapitel 5.3.1.1 und bei der Berechnung der verbesserten Geschwindigkeitslösung in Kapitel 5.3.1.2 eingesetzt. Im folgenden wird nur die Aspekte der zusätzlichen Wichtung der L_2 -Projektion, wie von Riccius et al. [81] verwendet, beschrieben. Auf einem Knotenpatch, wie in Abb. (5.18) links dargestellt, wird die geglättete Lösung durch das Polynom \hat{P} beschrieben.

$$\mathbf{u}_{smo}(\mathbf{x}_0) = \hat{P}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{a}} \quad (6.7)$$

Um den numerischen Aufwand gering zu halten, sollte der Polynomansatz keine höheren Terme als die Ansatzfunktionen der finiten Elemente enthalten. Riccius et al. [81] verwenden nur lineare Terme. In dieser Arbeit werden die Terme der Ansatzfunktionen benutzt. Das gewichtete Funktional $\Pi_w(\hat{\mathbf{a}})$ wird in Abhängigkeit von den unbekanntem Koeffizienten $\hat{\mathbf{a}}$ (5.51) des Polynoms \hat{P} (5.50) aufgestellt.

$$\Pi_w(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{Kps} (\hat{P}(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_k))^2 + w(\hat{P}(\mathbf{x}_0)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_0))^2 \quad (6.8)$$

Der Wichtungsfaktor w steuert die Stärke der Glättung. Wird $w = 1$ gewählt, dann ist die Projektion ungewichtet und es wird stark geglättet. Für $w \rightarrow \infty$ findet keine Glättung statt. Riccius et al. [81] wählen $w = 9$. Bei den numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit konnten mit diesem Wichtungsfaktor gute Ergebnisse erzielt werden. Der Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{a}}$ berechnet sich aus der Forderung, daß das Funktional $\Pi_w(\hat{\mathbf{a}})$ minimal wird.

$$\frac{\partial \Pi_w(\hat{\mathbf{a}})}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 \quad (6.9)$$

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$(w\hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_0)\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{Kps} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_k))\hat{\mathbf{a}} = w\hat{\mathbf{P}}^T\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{Kps} \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_k) \quad (6.10)$$

Mit dem Koeffizientenvektor $\hat{\mathbf{a}}$ und der Gleichung (6.7) werden auf dem Patch die geglätteten Werte \mathbf{u}_{smo} bestimmt.

In dieser Arbeit werden zunächst alle geglätteten Knotenwerte $\mathbf{u}_{smo,i}(\mathbf{x}_k)$ eines Patches i mit den unglätteten Werten \mathbf{u}^h bestimmt. Da sich die Patches von verschiedenen Knoten überschneiden, ergeben sich mehrere geglättete Werte $\mathbf{u}_{smo,i}$. Der endgültige geglättete Werte $\mathbf{u}_{smo}(\mathbf{x}_0)$ wird aus dem Mittel der geglätteten Werte $\mathbf{u}_{smo,i}$ von den verschiedenen Patches i an dem Knoten \mathbf{x}_0 bestimmt.

6.3.2 Korrektur der FE-Daten

Die transferierten FE-Daten bzw. die transferierten, geglätteten FE-Daten erfüllen im allgemeinen weder die Bewegungs- noch die Erhaltungsgleichungen. In Abb. (6.1) ist der Einfluß des Netzwechsels auf die transferierte Lösung dargestellt. Liegt zum Zeitpunkt t_{n+1} der räumliche Fehler des Netzes 1 nicht in der vorgegebenen Fehlertoleranz, dann wird ein neues Netz 2 generiert. Die Daten zu Beginn des Zeitschrittes zum Zeitpunkt t_n müssen nun vom Netz 1 auf Netz 2 übertragen werden. Mit den auf Netz 2 transferierten Daten wird anschließend weitergerechnet. Zuvor können die zum Zeitpunkt t_n transferierten FE-Daten so korrigiert werden, daß sie zumindest die Erhaltungs- und die Bewegungsgleichung erfüllen. Es wird angemerkt, daß trotz der Erfüllung der Erhaltungs- und der Bewegungsgleichung ein anderes Anfangswertproblem gelöst wird, wie wenn von Beginn an mit Netz 2 gerechnet worden wäre. Deshalb liegt in Abb. (6.1) der Gleichgewichtspunkt der transferierten Daten nicht auf der Verschiebungslösung des Netzes 2. Im folgenden werden die Möglichkeiten der Korrektur der transferierten Daten beschrieben.

Korrektur der Energie Durch den Datentransfer ändert sich die Energie des Systems. Riccius et al. [81] schlagen vor die Energieanteile über Faktoren zu korrigieren. Die Verschiebungen werden mit dem Faktor f_{Eu} korrigiert, so daß die Dehnungsenergie global erhalten bleibt.

$$f_{Eu} = \frac{\|\mathbf{u}_{att}^h\|_{Eu}}{\|\mathbf{u}_{neu}^h\|_{Eu}} \quad (6.11)$$

Die Norm der Dehnungsenergie auf dem neuen bzw. alten Netz wird mit $\|\mathbf{u}_{neu}^h\|_{E_u}$ bzw. $\|\mathbf{u}_{alt}^h\|_{E_u}$ bezeichnet. Die korrigierte Verschiebungslösung $\mathbf{u}_{neu,kor}^h$ auf dem neuen Netz wird mit dem globalen Faktor f_{E_u} berechnet.

$$\mathbf{u}_{neu,kor}^h = f_{E_u} \mathbf{u}_{neu}^h \quad (6.12)$$

Riccus [80] verwendet statt der Werte \mathbf{u}_{alt}^h auf dem alten Netz die Werte vor der Glättung \mathbf{u}_{neu}^h auf dem neuen Netz. Es wird damit nur die Energieänderung durch die Glättung ausgeglichen. Jedoch weist er darauf hin, daß mit dieser Methode nicht nur die Änderung der Energie durch die Glättung, sondern ebenfalls die Änderung der Energie durch den Datentransfer ausgeglichen werden kann. In dieser Arbeit wird der Korrekturfaktor zum Ausgleich des Fehlers in der Energie durch den Datentransfer und durch die Glättung verwendet.

Die Geschwindigkeiten werden, ebenso wie die Verschiebungen, durch die Bedingung der Erhaltung der kinetischen Energie korrigiert. Dazu wird der Korrekturfaktor aus der Norm der kinetischen Energie auf den verschiedenen Netzen berechnet.

$$f_{E_v} = \frac{\|\mathbf{u}_{alt}^h\|_{E_v}}{\|\mathbf{u}_{neu}^h\|_{E_v}} \quad (6.13)$$

Die neuen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}_{neu}^h$ werden mit dem globalen Faktor f_{E_v} korrigiert.

$$\dot{\mathbf{u}}_{neu,kor}^h = f_{E_v} \dot{\mathbf{u}}_{neu}^h \quad (6.14)$$

Bemerkungen

- Es wird der globale Erhalt der einzelnen Energieanteile gefordert. Damit ist nicht gewährleistet, daß die Energie lokal erhalten bleibt und die lokale Lösung durch die Korrektur genauer wird. Eine Möglichkeit, die lokale Genauigkeit zu verbessern, ist, die Korrekturfaktoren $f_{E_u}^e$ bzw. $f_{E_v}^e$ elementweise zu bestimmen. Die Faktoren an den einzelnen Knoten werden von allen angrenzenden Elementen ermittelt und anschließend gemittelt. Da die Faktoren an einem Knoten gemittelt werden, muß der globale Energieerhalt zusätzlich gefordert werden. Der numerische Aufwand für den globalen Erhalt der Energie ist im Vergleich zur Bestimmung der lokalen Korrekturfaktoren vernachlässigbar. Jedoch ist zu untersuchen, inwiefern die Glättung der übertragenen Daten durch die elementweise Bestimmung der Faktoren und deren Mittelung an den FE-Knoten ersetzt werden kann.
- Eine weitere Alternative ist, die Glättung auf einem Patch mit der lokalen L_2 -Projektion aus Kapitel 6.3.1 durch die Glättung mit Nebenbedingungen, wie z.B. Energieerhalt und Gleichgewicht, zu ersetzen. Wiberg et al. [97][98] verwenden die lokale L_2 -Projektion mit Nebenbedingungen zur Berechnung der verbesserten Spannungslösung σ^* .

Durch die lokale Bestimmung der Korrekturfaktoren bzw. der lokalen L_2 -Projektion mit Nebenbedingungen steigt jedoch der numerische Aufwand, weshalb die Methoden in dieser Arbeit nicht verwendet werden.

Korrektur des Impulses Es kann ebenfalls beim Datentransfer auf das neue Netz der globale Erhalt des Impulses gefordert werden. Der Impuls berechnet sich aus

$$\mathcal{I}(\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (6.15)$$

Riccus [80] verwendet den Impuls, um die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}_{neu}^h$ zu korrigieren.

$$\dot{\mathbf{u}}_{neu, kor}^h = \frac{\mathcal{I}(\dot{\mathbf{u}}_{alt}^h)}{\mathcal{I}(\dot{\mathbf{u}}_{neu}^h)} \dot{\mathbf{u}}_{neu}^h \quad (6.16)$$

Diese Bedingung wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, da nicht gleichzeitig die kinetische Energie und der Impuls erhalten werden können [80]. Riccius stellt in [80] eine Möglichkeit vor, wie gleichzeitig die Gesamtenergie und der Impuls korrigiert werden. Die einzelnen Energieanteile, d.h. die Dehnungs- und die kinetische Energie, müssen dabei jedoch nicht erhalten bleiben.

Gleichgewicht Die transferierten \mathbf{u}_{neu}^h und $\dot{\mathbf{u}}_{neu}^h$ bzw. die geglätteten und korrigierten Daten $\mathbf{u}_{neu, kor}^h$ und $\dot{\mathbf{u}}_{neu, kor}^h$ erfüllen im allgemeinen nicht mehr die Bewegungsgleichung. Li et al. [101][61] berechnen für das Newmark-Verfahren die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}_{neu}^h$ aus der Bewegungsgleichung, wobei die transferierten FE-Daten \mathbf{u}_{neu}^h und $\dot{\mathbf{u}}_{neu}^h$ eingesetzt werden. In dieser Arbeit werden die nachbehandelten FE-Daten des neuen Netzes $\mathbf{u}_{neu, kor}^h$ und $\dot{\mathbf{u}}_{neu, kor}^h$ in die Bewegungsgleichung eingesetzt,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{neu, eq}^h + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{neu, kor}^h + \mathbf{K} \mathbf{u}_{neu, kor}^h = \mathbf{F} \quad (6.17)$$

und nach den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}_{neu, eq}^h$ gelöst. Die Daten sind damit auf dem neuen Netz wieder im Gleichgewicht. Der numerische Aufwand ist sehr groß, da ein Gleichungssystem gelöst werden muß. Numerische Untersuchungen in dieser Arbeit haben gezeigt, daß die Glattheit der Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}_{neu, eq}^h$ stark abnimmt und sich dadurch die Qualität der Lösung verschlechtert.

Eine alternative Berechnung der Beschleunigungen wird von Riccius [80] für den Spezialfall der Bewegungsgleichung mit $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ eingeführt. Die Beschleunigungen werden wie die Verschiebungen mit derselben Diagonalmatrix, die sich aus der Glättung des Verschiebungsvektors ergibt, multipliziert. Anschließend können die Energieanteile korrigiert werden.

6.4 Numerische Beispiele

In den folgenden Beispielen wird zunächst der Vorteil der automatischen Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle gezeigt. Anschließend wird die Notwendigkeit der Bearbeitung der übertragenen Daten dargestellt und die Auswirkungen des Fehlers durch den Datentransfer auf die Zeitschrittsteuerung untersucht.

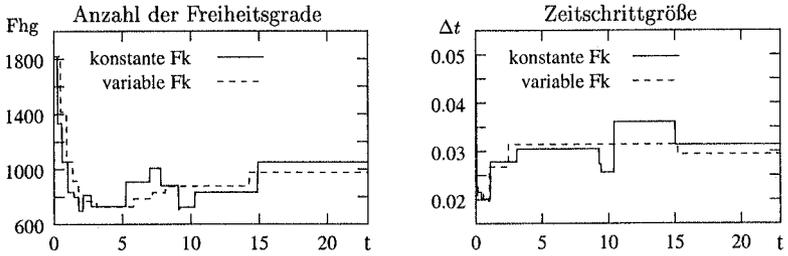


Abbildung 6.2: Anzahl der Freiheitsgrade (Fhg) und Zeitschrittgröße Δt des Kolbens mit konstantem Abstand der Fehlerkontrolle (Fk) und variablem, an die Energie gekoppeltem, Abstand der Fehlerkontrolle

Zeitpunkt der Fehlerkontrolle Im folgenden Beispiel wird der Fehler in jedem n -ten Zeitschritt bzw. über die Koppelung an die Energie automatisch kontrolliert. Der Zeitschritt und das FE-Netz werden an die Fehler angepaßt. Es wird der Kolben in Abb. (5.31) untersucht. Da das System symmetrisch ist, wird nur die Hälfte des Kolbens diskretisiert. Die Materialdaten und die Abmessungen des Kolben sind in Abb. (5.31) angegeben. Der Kolben wird mit der verteilten Last $p = 17,5$ für $t \leq 0$ belastet und schwingt danach frei mit $p = 0$. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit vierknotigen Scheibenelementen. Zur Zeitintegration wird das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Es ist keine physikalische Dämpfung vorhanden. Der zeitliche Fehler wird mit dem Fehlerindikator von Riccius mit (5.27) für den Fehler in den Verschiebungen und (5.26) für den Fehler in den Geschwindigkeiten ermittelt. Der relative zeitliche Fehler η_t wird mit der maximalen Energienorm $\|u\|_E$ über alle Zeitschritte (5.35) berechnet. Die Fehlertoleranz ist $\bar{\eta}_t = 0,01$ mit den Faktoren $\vartheta_1 = 0,5$ und $\vartheta_2 = 1,2$ für die untere und obere Schranke (5.36). Die Anzahl der zulässigen Unterschreitungen, bis der Zeitschritt verkleinert wird, ist eins. Die neue Zeitschrittgröße wird mit dem lokalen Fehler eines Zeitintervalls (5.37) berechnet.

Der räumliche Fehlerindikator berücksichtigt den Fehler in der Dehnungsenergie, der mit Hilfe der SPR-Technik von Zienkiewicz-Zhu (s. Abschnitt 5.3.1.1) berechnet wird. Der Fehler in der kinetischen Energie wird nicht berücksichtigt, da er meistens keinen großen Einfluß auf das neu generierte Netz hat. Die Toleranzgrenze für den räumlichen Fehler ist $\bar{\eta}_s = 0,04$ (5.67). Der Sicherheitsfaktor Θ_s ist eins. Das zu schnelle Verfeinern bzw. Vergröbern des FE-Netzes soll vermieden werden, da ansonsten die Qualität des Datenübertrags auf das neue Netz stark abnimmt. Die Änderung der Elementanzahl wird im folgenden durch die Vorgabe von oberen und unteren Grenzen für die Verfeinerungsindikatoren kontrolliert. Somit können in diesem Beispiel die Elemente maximal um das Vierfache verkleinert bzw. vergrößert werden. Damit trotzdem eine an die Fehlerverteilung angepaßte Diskretisierung generiert werden kann, werden pro adaptivem Zyklus, d.h. zu einem Zeitpunkt, maximal zwei Neuvernetzungen zugelassen. Dadurch steigt zwar der numerische Aufwand im Vergleich zu der Neuvernetzung in einem Schritt, jedoch ist

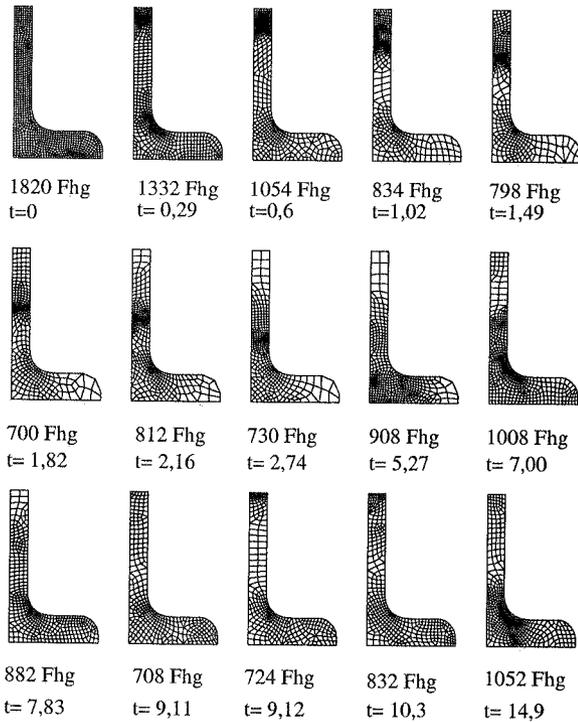


Abbildung 6.3: FE-Netze für konstanten Abstand der Fehlerkontrolle

der Fehler durch die Datenübertragung kleiner.

Nach der Netzgenerierung werden die Daten auf das neue Netz übertragen. Die transferierten Daten werden mit der gewichteten lokalen L_2 -Projektion (s. Kapitel 6.3.1) geglättet. Der Wichtungsfaktor ist $w = 9$. Die Dehnungs- und die kinetische Energie werden über die Faktoren f_{E_u} und f_{E_v} korrigiert. Die Beschleunigungen werden aus der Bewegungsgleichung zurückgerechnet, wodurch wieder ein Gleichgewichtszustand hergestellt wird. Gestartet wird die Berechnung mit einem feinen Netz, damit Anfangsfehler vermieden werden. Die räumliche Adaption wird erst nach 10 Zeitschritten zugelassen. Die Zeitschrittgröße kann nach dem dritten Zeitschritt angepaßt werden. Da die zeitliche Fehlerkontrolle nicht so aufwendig ist, wird sie in jedem Zeitschritt durchgeführt. Die räumliche Fehlerkontrolle ist aufwendiger und erfolgt daher in konstanten Abständen, d.h. in jedem dritten Zeitschritt. Alternativ dazu wird die räumliche Fehlerkontrolle an die Änderung der Dehnungsenergie gekoppelt (6.2). Der räumliche Fehler wird kontrolliert, wenn sich die Dehnungsenergie seit der letzten Fehlerkontrolle um mehr als 10% verändert hat, d.h. $\psi = 0, 1$.

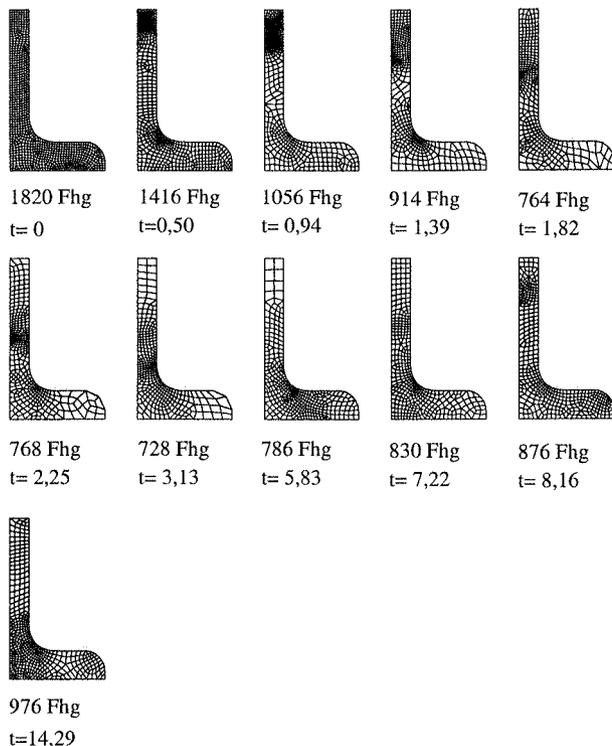


Abbildung 6.4: FE-Netze für variablen, an die Energie gekoppelten, Abstand der Fehlerkontrolle

Für beide Arten der Steuerung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle ist der zeitliche Verlauf der Anzahl der Freiheitsgrade in Abb. (6.2) dargestellt. Die generierten FE-Netze sind in Abb. (6.3) für die Fehlerkontrolle in konstanten Zeitschrittabständen und in Abb. (6.4) für die Koppelung der Fehlerkontrolle an die Dehnungsenergie dargestellt. In beiden Fällen wird an der Stoßfront verfeinert. Auch der Verlauf der Anzahl der Freiheitsgrade ist ähnlich. Die adaptiv bestimmte Zeitschrittgröße in Abb. (6.2) wird durch die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle nicht stark beeinflusst. Die berechneten Zeitschrittgrößen sowie die Anzahl der Freiheitsgrade sind nahezu unabhängig von der Methode zur Steuerung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle. Die variable, d.h. an die Änderung der Dehnungsenergie gekoppelte, Steuerung der Fehlerkontrolle ist effizienter. Es werden 30% weniger Fehlerkontrollen durchgeführt, als bei konstantem Abstand der Fehlerkontrolle (64 Fehlerkontrollen mit konstantem Abstand gegenüber 45 Fehlerkontrollen mit variablem Abstand). Das Netz wird bei der Methode mit konstantem Abstand der Fehlerkontrolle 14 mal in dem Beobachtungszeitraum ange-

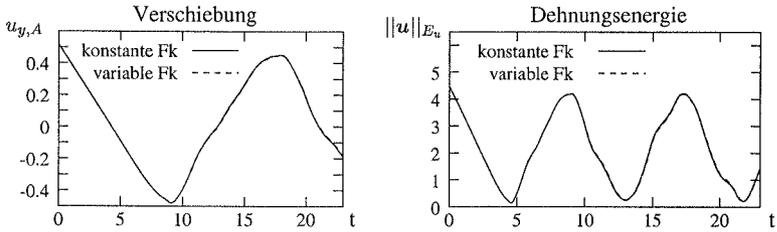


Abbildung 6.5: Verschiebung $u_{y,A}$ und Dehnungsenergie $\|u\|_{E_u}$ des Kolbens mit konstantem Abstand der Fehlerkontrolle (Fk) und variablem, an die Energie gekoppeltem, Abstand der Fehlerkontrolle

paßt – im Gegensatz zu 10 Netzwechseln bei der variablen Fehlerkontrolle.

Eine Abnahme der Genauigkeit durch die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle ist nicht erkennbar. In Abb. (6.5) sind die Verschiebungen u_y des Punktes A (s. Abb. 5.31) dargestellt. Es ist kein Unterschied in dem Verschiebungsverlauf für die beiden Arten der Fehlerkontrolle zu erkennen. Ebenso ist der Verlauf der Dehnungsenergie (Abb. 6.5) für die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle nahezu identisch. Der Verlauf des approximierten räumlichen relativen Fehlers bzw. des zeitlichen relativen Fehlers (Abb. 6.6) ist unter Berücksichtigung der entsprechenden FE-Netze bzw. der Zeitschrittgröße sehr ähnlich. Insgesamt nimmt bei der Bestimmung des Zeitpunktes der Fehlerkontrolle durch die Änderung der Dehnungsenergie die Effizienz der adaptiven Methode zu, da unnötige Fehlerkontrollen vermieden werden. Trotzdem ist kein wesentlicher Verlust der Genauigkeit zu erkennen.

Nachbearbeitung der übertragenen Daten Das folgende Beispiel verdeutlicht die Probleme der Datenübertragung bei der räumlichen Adaptivität. Das symmetrische Trag-

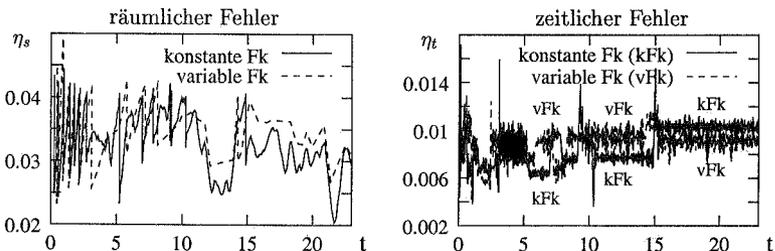


Abbildung 6.6: Approximierter räumlicher η_s und zeitlicher η_t Fehler des Kolbens mit konstantem Abstand der Fehlerkontrolle (Fk) und mit variablem, an die Energie gekoppeltem, Abstand der Fehlerkontrolle

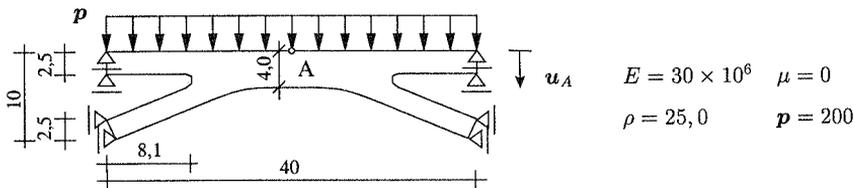


Abbildung 6.7: „Brücke“

werk in Abb. (6.7) wird untersucht, wobei nur das halbe System diskretisiert wird. Die Geometrie und die Materialdaten sind in Abb. (6.7) angegeben. Das System schwingt frei aus dem statischen Anfangsverschiebungszustand infolge der Gleichstreckenlast p zu $t = 0$. Das System wird nicht gedämpft. Zur Zeitdiskretisierung wird das Newmark-Verfahren mit den Parametern $\beta = 0,25$ und $\delta = 0,5$ verwendet. Der Zeitschritt ist mit $\Delta t = 0,0005$ konstant und sehr viel kleiner als die Periodendauer. Die vertikale Verschiebung des Punktes A ist in Abb. (6.10) dargestellt. Es wird zunächst der räumliche Fehler kontrolliert. Der relative Fehler η_s wird mit dem Fehler in der Dehnungsenergie berechnet. Der Fehler in der kinetischen Energie wird vernachlässigt. Die Fehlerkontrolle wird durchgeführt, wenn sich die Dehnungsenergie $\|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ um mehr als 10% seit der letzten Fehlerkontrolle verändert hat. Der berechnete relative Fehler η_s muß innerhalb der vorgegebenen Toleranz $0,045 \leq \eta_s \leq 0,08$ liegen. Die Elemente können maximal um das Vierfache vergrößert bzw. verkleinert werden. Es werden pro adaptivem Zyklus, d.h. zu einem Zeitpunkt, maximal zwei Neuvernetzungen zugelassen.

Zunächst wird die Notwendigkeit der Bearbeitung der übertragenen Daten gezeigt. Dazu werden bei der adaptiven Berechnung die Daten zunächst ohne Nachbehandlung auf das neue Netz übertragen. Die Abnahme der Gesamtenergie ist in Abb. (6.8) links zu erkennen. Im Gegensatz dazu wird, wenn die Lösung nach dem Transfer auf das neue

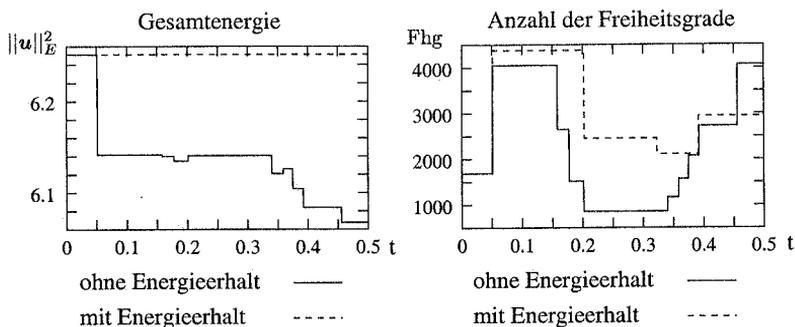


Abbildung 6.8: Gesamtenergie $\|\mathbf{u}\|_E^2$ und Anzahl der Freiheitsgrade (Fhg) des „Brückenbeispiels“ bei räumlicher Adaptivität ohne und mit Energieerhalt

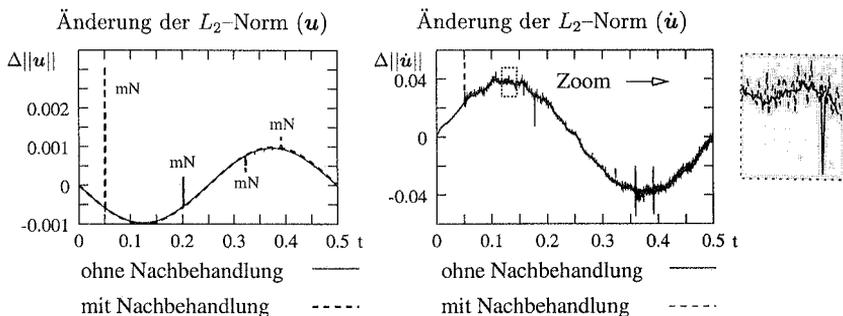


Abbildung 6.9: „Brückenbeispiel“ mit räumlicher Adaptivität mit (mN) und ohne (oN) Nachbehandlung der transferierten Daten: zeitliche Änderung der L_2 -Norm $\Delta\|\mathbf{u}\|$ und $\Delta\|\dot{\mathbf{u}}\|$

Netz korrigiert wird, die Energie erhalten (s. Abb. 6.8 links). Mit und ohne Energieerhalt wird das FE-Netz bei Durchlaufen der Ruhelage gröber und später wieder verfeinert, wie in Abb. (6.8) rechts an der Anzahl der Freiheitsgrade zu erkennen ist. Bei einer weiteren Berechnung werden die übertragenen FE-Daten mit der gewichteten lokalen L_2 -Projektion ($w = 2$) geglättet. Anschließend wird der Erhalt der Dehnungs- und der kinetischen Energie gefordert und durch die Rückrechnung der Beschleunigungen aus der Bewegungsgleichung die Lösung wieder ins Gleichgewicht gebracht. Die Gesamtenergie wird erhalten. Jedoch wird nur der globale Erhalt der beiden Energieanteile gefordert. Lokal können große Unterschiede auftreten, die global ausgeglichen werden. Deshalb wird im folgenden die globale L_2 -Norm, die der Energienorm sehr ähnlich ist, berechnet. Der Erhalt der L_2 -Norm wird bei der Datenübertragung nicht gefordert. In Abb. (6.9) ist die Änderung der L_2 -Norm $\Delta\|\mathbf{u}\|$ in den Verschiebungen und in den Geschwindigkeiten $\Delta\|\dot{\mathbf{u}}\|$ für zwei aufeinander folgende Zeitschritte dargestellt. Die Verläufe der L_2 -Norm der Verschiebungen mit und ohne Nachbehandlung in Abb. (6.9) sind bis auf die Spitzen fast identisch. Diese Spitzen entstehen hauptsächlich durch die Nachbehandlung der transferierten Daten. An den lokalen Spitzen im Verlauf der L_2 -Norm ist zu erkennen, daß die übertragene Lösung nicht mehr konsistent ist. Die ansonsten glatten Kurven werden zu den Zeitpunkten der Neuvernetzung durch den Datentransfer mit anschließender Nachbearbeitung der neuen Daten gestört. Durch die Korrektur der transferierten Daten entstehen hochfrequente Anteile, die zu einer großen Änderung in der L_2 -Norm führen. Werden die übertragenen Daten nicht nachbehandelt, so ändert sich die L_2 -Norm der Verschiebungen nicht sprunghaft. Die Änderung der L_2 -Norm in den Geschwindigkeiten wird jedoch in beiden Fällen durch die Neuvernetzung gestört. Die Kurven sind wieder fast identisch und es entstehen hochfrequente Anteile mit und ohne Bearbeitung der transferierten Daten. Die Störungen der L_2 -Norm sind jedoch mit der Nachbearbeitung der transferierten Daten größer als ohne Nachbearbeitung.

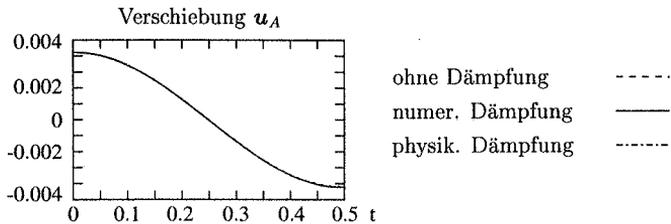


Abbildung 6.10: „Brückenbeispiel“: Verschiebung u_A des Punktes A

Bei der räumlichen Netzanpassung entstehen durch die Datenübertragung Fehler, die auch durch die Nachbearbeitung der transferierten Daten nicht vermieden werden können. Werden die Daten nicht nachbehandelt, so wird die Energie nicht erhalten und es ist kein Gleichgewichtszustand mehr vorhanden. Keine der beiden Vorgehensweisen, d.h. mit und ohne Nachbehandlung, kann Fehler verhindern bzw. die Qualität der transferierten Daten ausreichend verbessern. Diese Fehler haben somit einen Einfluß, der nicht vernachlässigt werden kann, auf die Berechnung an allen nachfolgenden Zeitschritten. Der Einfluß auf die Zeitschrittsteuerung wird im folgenden Abschnitt gezeigt.

Einfluß auf die Zeitschrittsteuerung Im folgenden wird anhand desselben Tragwerks, das bereits in dem vorherigen Beispiel untersucht wurde, der Einfluß der räumlichen Netzanpassung auf die Zeitschrittsteuerung verdeutlicht. Der zeitliche Fehler wird in jedem Zeitschritt mit dem Fehlerindikator von Riccius (5.26) und (5.27) in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten kontrolliert. Der relative zeitliche Fehler η_t wird auf die maximale Gesamtenergie (5.35) bezogen. Der relative Fehler η_t muß innerhalb der vorgegebenen Grenzen $0,04 \leq \eta_t \leq 0,08$ liegen. Die Kontrolle der räumlichen Diskretisierung wurde bereits in dem vorherigen Abschnitt beschrieben. Nach einer Netzadaptation kann der zeitliche Fehler erst wieder nach drei Zeitschritten kontrolliert werden, da der Indikator die Werte von drei aufeinander folgenden Zeitschritten benötigt. Die übertragenen FE-Daten werden durch Glättung, erzwungenem Energieerhalt und Gleichgewichtskorrektur nachbehandelt. Zunächst wird das ungedämpfte System betrachtet. Anschließend wird der Einfluß von physikalischer und numerischer Dämpfung untersucht. Die physikalische Dämpfung wird über die Rayleigh-Koeffizienten mit $d_1 = 0,01$ und $d_2 = 0,0005$ vorgegeben (2.1). Die numerische Dämpfung wird durch die Newmark-Parameter $\beta = 0,256$ und $\delta = 0,51$ eingeführt. Das Newmark-Verfahren ist unbedingt stabil, da $\delta \geq 0,5$ und $\beta \geq 0,25(\delta+0,5)^2$ ist und dämpft hohe Moden (Spektralradius $\rho = 0,98$). Jedoch ist es in der Zeit nur erster Ordnung genau. Die zeitlichen Fehlerindikatoren werden unverändert angewendet und der adaptive Zeitschritt wird wie bei den Verfahren mit höherer Genauigkeit bestimmt.

In Abb. (6.10) ist die vertikale Verschiebung des Punktes A für alle drei Fälle dargestellt. Da die Dämpfung sehr klein ist, ist in dem Verschiebungsverlauf fast kein Unterschied

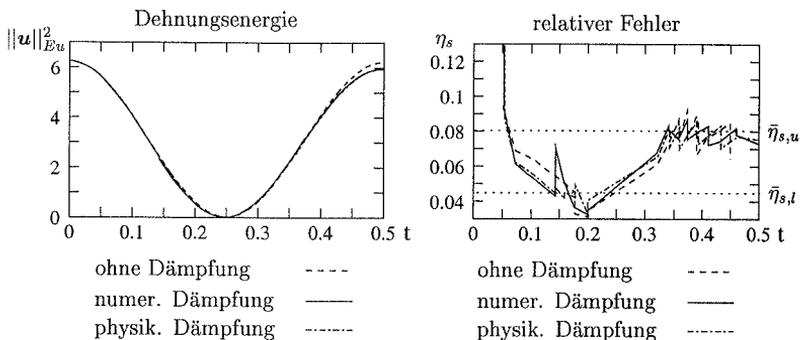


Abbildung 6.11: „Brückenbeispiel“ mit räumlicher und zeitlicher Adaptivität bei unterschiedlicher Dämpfung: Dehnungsenergie $\|\mathbf{u}\|_{E_u}^2$ und berechneter relativer räumlicher Fehler η_s

zu erkennen. Auch in dem Verlauf der Dehnungsenergie (Abb. 6.11) ist der Einfluß der Dämpfung kaum sichtbar. Der räumliche relative Fehler η_s , der in Abb. (6.11) rechts dargestellt ist, verletzt in allen drei Fällen die obere und untere Fehlerschranke. Die FE-Netze werden verfeinert bzw. vergröbert. In Abb. (6.12) links ist der Verlauf der Anzahl der Freiheitsgrade dargestellt, durch den die Anpassung der FE-Netze an die Fehlertoleranz gezeigt werden kann. Da die Dämpfung sehr klein ist, sind die Verläufe ähnlich. In Abb. (6.12) rechts ist die adaptive Zeitschrittgröße dargestellt. Die Zeitschrittgröße Δt wird in allen drei Fällen von der räumlichen Netzanpassung beeinflusst. Der Zeitschritt wird stark verkleinert, wenn ein Netzwechsel stattfindet. Bei der Übertragung der Daten auf das neue Netz und der Korrektur der transferierten Daten entstehen hochfrequente Anteile, die der zeitliche Fehlerindikator mißt. Dadurch steigt der zeitliche Fehler η_t stark an und der Zeitschritt wird nach der Neuvernetzung verkleinert (Abb. 6.12). Die Störungen sind in Abb. (6.13) deutlich an der Änderung in der globalen L_2 -Norm in den Verschiebungen $\Delta\|\mathbf{u}\|$ und den Geschwindigkeiten $\Delta\|\dot{\mathbf{u}}\|$ von zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten zu erkennen.

Die Dämpfung bewirkt, daß der Zeitschritt Δt im Laufe der Zeit wieder vergrößert wird. Sobald jedoch wieder eine Netzanpassung stattfindet, nimmt der zeitliche Fehler sprunghaft zu und der Zeitschritt wird wieder verkleinert (Abb. 6.12). Der Unterschied zwischen sehr kleiner numerischer Dämpfung und physikalischer Dämpfung auf die Zeitschrittgröße ist nicht groß. Der Einfluß des Datentransfers auf die Zeitschrittsteuerung ist nicht bei allen Beispielen dominant. Die Zeitschrittsteuerung wird z.B. bei Stoßvorgängen, bei denen die Lösung in großen Gebieten glatt ist, oder bei stark gedämpften Strukturen, nicht oder nur wenig gestört.

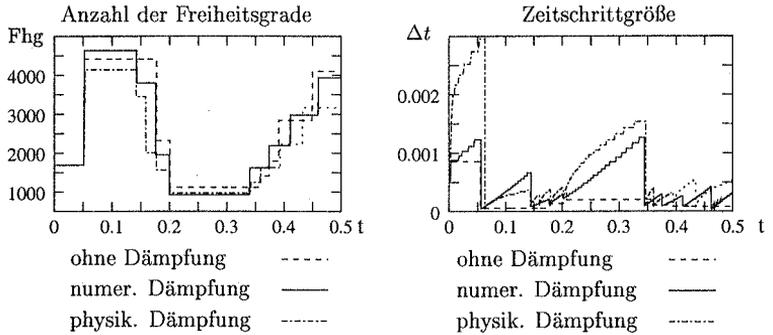


Abbildung 6.12: „Brückenbeispiel“ mit zeitlicher und räumlicher Adaptivität bei unterschiedlicher Dämpfung: Anzahl der Freiheitsgrade (Fhg) und Zeitschrittgröße Δt

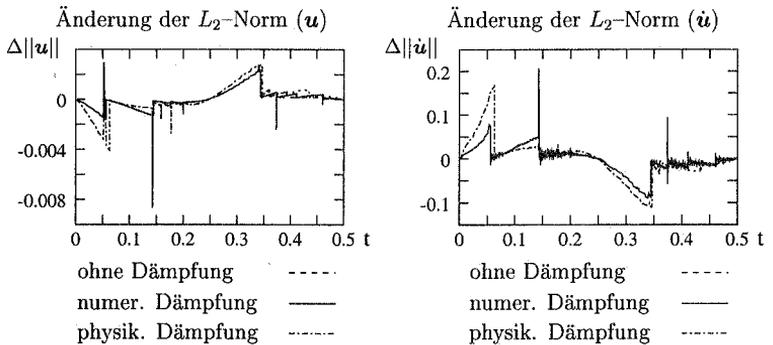


Abbildung 6.13: „Brückenbeispiel“ mit räumlicher und zeitlicher Adaptivität bei unterschiedlicher Dämpfung: zeitliche Änderung der L_2 -Norm $\Delta\|\mathbf{u}\|$ und $\Delta\|\dot{\mathbf{u}}\|$

6.5 Zusammenfassung

Die Beobachtungen der räumlichen und zeitlichen Fehlerkontrolle im adaptiven Algorithmus werden im folgenden zusammengefaßt.

- Der räumliche Fehlerindikator ist unempfindlich gegenüber der Wahl der Zeitschrittgröße.
- Der Zeitpunkt der Fehlerkontrolle kann durch die Koppelung der Fehlerkontrolle an die Änderung der Dehnungsenergie seit der letzten Fehlerkontrolle bestimmt werden. Die Methode erhöht im Vergleich zur Fehlerkontrolle in jedem Zeitschritt die Effektivität der adaptiven Methode.
- Von einem adaptiven Algorithmus wird gefordert, daß die Energie bei der Übertragung der FE-Daten auf das neue Netz erhalten bleibt und das System weiterhin im Gleichgewicht ist. Dazu ist eine Nachlaufrechnung notwendig, wodurch jedoch neue Fehler entstehen. Bei einer Neuvernetzung ist die dynamische Berechnung im allgemeinen nicht mehr konsistent.
- Der zeitliche Fehlerindikator reagiert sensitiv auf die Fehler durch die Datenübertragung und die Nachbearbeitung der transferierten Daten. Als Folge kann der Zeitschritt nach dem Netzwechsel stark verkleinert werden. Es wird darauf hingewiesen, daß dies kein Fehler des zeitlichen Fehlerindikators ist. Nicht bei allen Beispielen ist die Störung des zeitlichen Fehlerindikators dominant. Bei einigen Beispielen können die Fehler durch den Datentransfer und die Nachbearbeitung der übertragenen Daten auch vernachlässigbar klein sein.
- Die Ursache für die Störung der zeitlichen Adaptivität liegt in der Ungenauigkeit der Datenübertragung und der Nachbearbeitung der übertragenen Daten. Deshalb wird das Problem auch nicht durch die Einführung von physikalischer oder numerischer Dämpfung beseitigt. Dämpfung kann nur die entstandenen Fehler im Laufe der Zeit verkleinern, wodurch der Zeitschritt wieder vergrößert wird.
- Die Koppelung von räumlicher und zeitlicher Adaptivität ist, trotz der Schwierigkeiten bei der Datenübertragung, sinnvoll, da die zeitlichen und räumlichen Fehler erkannt werden. Wird nur die räumliche Adaptivität ohne die zeitliche Adaptivität verwendet, werden die beim Netzwechsel entstehenden Fehler nicht erkannt, da der räumliche Fehlerindikator nicht durch die Übertragungsfehler gestört wird. Nur mit Hilfe des zeitlichen Fehlerindikators werden die Probleme durch die Fehler des Datenübertrags sichtbar. Deshalb sollte bei diesen Beispielen die räumliche Adaptivität nur in Kombination mit der Zeitschrittsteuerung verwendet werden. Bei der räumlichen Adaptivität muß an der besseren Übertragung der FE-Daten mit einer genaueren Nachbehandlung der transferierten Daten gearbeitet werden.

Kapitel 7

Bewertung und Ausblick

In der numerischen Mechanik werden adaptive Methoden eingesetzt, um die Genauigkeit und die Effizienz der Berechnung zu erhöhen. Für manche Problemstellungen, wie z.B. in der Elastostatik, sind adaptive Methoden weit entwickelt und werden viel eingesetzt. Adaptive Methoden in der Strukturodynamik sind dagegen noch nicht Standard. Bei zeitabhängigen Problemen tritt ein zeitlicher und räumlicher Fehler auf. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die aus der Literatur bekannten Fehlerindikatoren für die semidiscrete Bewegungsgleichung mit der FD-Zeitdiskretisierung untersucht. Diese Indikatoren messen den räumlich globalen Fehler und den zeitlich lokalen Fehler in der Energienorm. Zusätzlich wurde ein neuer Fehlerindikator entwickelt, der den zeitlichen Verlauf des Fehlers in verschiedenen physikalischen Größen mit Hilfe von dualen Problemen darstellen kann. Diese Fehlerindikatoren beruhen auf der schwachen Formulierung in Raum und Zeit, weshalb die semidiscrete Formulierung mit der DTG-Methode verwendet wurde. Anschließend wurde die Methode der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen auf die semidiscrete Formulierung mit der FD-Zeitdiskretisierung übertragen. Die Ergebnisse der Untersuchungen werden im folgenden zusammengefaßt und bewertet. Es wird ebenfalls ein Ausblick auf künftige Entwicklungen gegeben.

Lokale Fehlerindikatoren für die DTG-Methode In der Strukturodynamik werden bisher glättungsbasierte Fehlerindikatoren, die den räumlich globalen Fehler an einem Zeitpunkt ermitteln, verwendet. Für andere Problemstellungen, wie z.B. Wärmeleitung, radioaktiver Transport usw., wurden in jüngster Zeit variable Fehlerindikatoren entwickelt. Durch die Verwendung von dualen Problemen können diese Indikatoren den zeitlichen Verlauf des Fehlers in verschiedenen Größen darstellen.

In der Strukturodynamik wird die Bewegungsgleichung meist als Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit geschrieben und mit der Newmark-Zeitintegration gelöst. Die Voraussetzung für die Anwendung von lokalen Fehlerindikatoren, die auf dualen Problemen beruhen, ist jedoch, daß die Diskretisierung auch in der Zeit einer reinen FE-Methode entspricht. Die Grundlagen und der Zusammenhang zwischen dem Newmark-Verfahren und der FE-Methode wurden im Anhang C untersucht. Da die Newmark-Zeitdiskretisierung nicht als FE-Verfahren interpretierbar ist, wurden zunächst lokale Feh-

lerindikatoren für die Finite-Elemente Diskretisierung in der Zeit mit der DTG-Methode entwickelt. Die Formulierung mit DTG-Ansätzen wurde möglichst ähnlich der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitdiskretisierung gewählt, da sie als Hilfestellung für eine spätere Anwendung der dualen Methode auf die semidiskrete Formulierung diente. Für die DTG-Methode wurde das duale Problem hergeleitet und ein Indikator für den zeitlichen und räumlichen Fehler entwickelt. Damit kann der zeitliche Verlauf des Fehlers in verschiedenen physikalischen Größen dargestellt werden. Das duale Problem, das die zu bestimmende Fehlergröße steuert, wurde für den Fehler in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten eingeführt. Die Genauigkeit der Fehlerbestimmung in einer lokalen Größe und die Unterschiede im Vergleich zu den globalen Fehlerindikatoren wurden gezeigt. Bei der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen wurden bisher Zweifeldformulierungen verwendet. Der Zusammenhang der dualen Probleme von Einfeld- und Zweifeldformulierungen wurde im Anhang E dieser Arbeit untersucht.

Der Ansatz des lokalen Fehlerindikators kann in zwei Richtungen weiterentwickelt werden. Eine Möglichkeit ist, die DTG-Methode weiterhin zu verwenden. Der vorgestellte Indikator mißt den räumlichen und zeitlichen Fehler gleichzeitig. Für die Steuerung der adaptiven Verfeinerung muß jedoch für die räumliche und die zeitliche Diskretisierung getrennte Verfeinerungsindikatoren berechnet werden. Ein möglicher Ansatz ist, den zeitlichen Fehler mit Hilfe von Interpolationen mit Projektionseigenschaften von dem räumlichen Fehler zu trennen. Ein anderer Weg, der in dieser Arbeit eingeschlagen wurde, besteht darin die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration zu benutzen und darauf das duale Problem anzuwenden. Zunächst wurden die globalen Fehlerindikatoren der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration untersucht. Sie trennen den zeitlichen von dem räumlichen Fehler. Die Fehlerindikatoren werden mit glättungs-basierenden Techniken ermittelt. Die Techniken sind einfach anzuwenden und robust. Für die meisten Probleme, z.B. solche mit glatten Lösungen, können sie die Fehlerverteilung gut darstellen.

Globale Fehlerindikatoren für die Newmark-Methode Die aus der Literatur bekannten zeitlichen Fehlerindikatoren der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration wurden miteinander verglichen und bewertet. Sie ermitteln den zeitlichen Fehler eines Zeitschrittes in der globalen Energienorm. Der zeitlich lokale Fehler kann mit diesen Indikatoren gut dargestellt werden. Es gibt Ansätze den zeitlich globalen Fehler, d.h. den Fehler des gesamten bisherigen Zeitraumes, zu ermitteln. Diese Verfahren wurden für Systeme mit unterschiedlichen Eigenschaften untersucht. Der globale Fehler kann mit diesen Methoden nicht zufriedenstellend dargestellt werden. Der räumliche Fehler wird getrennt von dem zeitlichen Fehler bestimmt. Der Fehlerindikator mißt zu einem Zeitpunkt den räumlich globalen (mittleren) Fehler in der Energienorm. Mit den globalen Indikatoren wird die globale Beanspruchung der Struktur erfaßt. Der Fehler in der Dehnungsenergie wurde mit Hilfe der SPR-Technik aus der Statik approximiert. Der Fehler in der kinetischen Energie ist schwieriger zu ermitteln, da für die Bestimmung des kinetischen Fehlers die FE-Lösung selbst superkonvergent sein muß. Verfahren

zur Bestimmung des kinetischen Fehlers werden danach unterschieden, ob sie auf der Verbesserung oder der Verschlechterung der Geschwindigkeitslösung basieren. In dieser Arbeit wurden verbesserte Geschwindigkeitslösungen verwendet. Für achtknotige Elemente wurde die SPR-Technik der Geschwindigkeiten und für vierknotige Elemente eine lokale L_2 -Projektion benutzt. Mit beiden Techniken wurden ausreichend gute Ergebnisse erzielt. Bei den Untersuchungen wurde festgestellt, daß der Fehleranteil in der Dehnungsenergie dominant ist und daher die Bestimmung des Fehlers in der kinetischen Energie von untergeordneter Bedeutung ist.

Lokale Fehlerindikatoren für die Newmark-Methode Die räumlich globalen Fehlerindikatoren geben die Fehlerverteilung der globalen Beanspruchung des Systems richtig wieder. Oftmals sind aber nur lokale Größen von Interesse. Die Effektivität der adaptiven Methoden kann gesteigert werden, wenn der Fehlerindikator direkt den Fehler in der lokalen Größe mißt. Dazu werden lokale Fehlerindikatoren für die semidiskrete Bewegungsgleichung mit der Newmark-Zeitdiskretisierung benötigt. Als erster Schritt wurden in dieser Arbeit Indikatoren für den räumlich lokalen Fehler zu einem Zeitpunkt entwickelt. Das duale Problem, das über die DTG-Methode hergeleitet wurde, wurde dazu mit der semidiskreten Formulierung und der Newmark-Zeitintegration gelöst. Die Fehler des ursprünglichen und des dualen Problems wurden, ebenso wie bei der Fehlerbestimmung mit der DTG-Methode, miteinander gekoppelt. Zur Approximation der Fehler des ursprünglichen und des dualen Problems wurden die glättungsbasierten Techniken verwendet, mit denen auch der räumlich globale Fehler bestimmt wird. Für den räumlich lokalen Fehler zu einem Zeitpunkt wurde ein Zeitschritt des dualen Problems berechnet, da der zeitliche Fehlerverlauf nicht dargestellt werden kann. Die dualen Fehler wurden zu einem Zeitpunkt mit den Fehlern des ursprünglichen Problem gekoppelt. Numerische Untersuchungen zeigten, daß der Indikator den lokalen Fehler richtig erfaßt. Im Vergleich zur Verwendung der räumlich globalen Fehlerkontrolle ist die lokale Fehlerkontrolle im adaptiven Algorithmus effizienter, wenn auch nur eine lokale Größe von Interesse ist.

Die globale Beanspruchung kann mit dem lokalen Fehlerindikator jedoch nicht erfaßt werden. Ein weiterer Nachteil ist, daß die Diskretisierung nur an den lokalen Fehler des ursprünglichen Problems angepaßt wird und dadurch das duale Problem teilweise sehr ungenau gelöst wird. Es erscheint daher eine lohnenswerte Weiterentwicklung zu sein, die Diskretisierung ebenfalls an den globalen Fehler des dualen Problems anzupassen. Mit sehr geringem Aufwand kann sowohl der globale Fehler des ursprünglichen Problems, als auch der globale Fehler des dualen Problems bei der Berechnung von den Verfeinerungsindikatoren berücksichtigt werden. Weiterhin muß die Darstellung des Fehlers mit Hilfe von dualen Problemen in anderen physikalischen Größen untersucht werden.

Bei der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration kann der zeitliche Verlauf des Fehlers mit Hilfe von den dualen Problemen nicht dargestellt werden, da die Newmark-Methode keinem FE-Ansatz entspricht. Trotzdem liegt aus Ingenieurssicht in der Fehlerbestimmung mit Hilfe von dualen Problemen auch für die semidiskreten For-

mulierung mit der Newmark-Zeitintegration ein großes Potential für zukünftige Entwicklungen. Einige mögliche Vorgehensweisen werden im folgenden beschrieben. Das duale Problem kann mit der semidiskreten Formulierung und der Newmark-Zeitintegration in Raum und Zeit gelöst werden. Es können für das ursprüngliche und das duale Problem die räumlichen und zeitlichen Fehlerindikatoren mit den bekannten globalen Fehlerindikatoren für die semidiskrete Bewegungsgleichung berechnet werden. Die räumlichen und die zeitlichen Fehlerindikatoren des ursprünglichen und des dualen Problems werden miteinander gekoppelt und führen auf einen räumlichen und einen zeitlichen Fehlerindikator. Zukünftige Untersuchungen müssen zeigen, inwiefern der gekoppelte zeitliche und räumliche Indikator den zeitlichen Verlauf des lokalen Fehlers darstellen kann. Die Erweiterung der dualen Methode auf die Zeit und die Entwicklung von Indikatoren zur Steuerung des adaptiven Algorithmus für die semidiskrete Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration sind ein vielversprechender Ansatz. Der zusätzliche Aufwand besteht darin, daß das duale Problem über mehrere Zeitschritte berechnet werden muß und die räumliche und zeitliche Verteilung der Fehlerindikatoren des ursprünglichen und des dualen Problems gespeichert werden muß. Zusätzlich müssen die Zustandsgrößen des ursprünglichen Problems in dem Berechnungszeitraum gespeichert werden, da sie die Anfangswerte für den Zeitschritt sind, in dem gegebenenfalls das FE-Netz bzw. die Zeitschrittgröße angepaßt wird.

Der kritische Punkt bei den variablen Fehlerindikatoren, die den zeitlichen Verlauf des Fehlers darstellen, ist, wieviele Zeitschritte zurück der Fehler bzw. das duale Problem berücksichtigt werden soll. Die adaptive Methode ist umso aufwendiger, je weiter der Fehler zurückverfolgt wird. Auf der anderen Seite soll der Verlauf des zeitlichen Fehlers möglichst genau dargestellt werden. Hierzu sind prinzipielle Untersuchungen notwendig, die feststellen, welcher Kompromiß zwischen dem numerischen Aufwand und der Darstellung des zeitlichen Verlaufes des Fehlers sinnvoll ist. Ein möglicher Ansatz besteht darin, den betrachteten Zeitraum adaptiv, durch die Koppelung an den zeitlichen Verlauf des lokalen Fehlers, zu steuern. Wird der Einfluß des Fehlers zu einem zurückliegenden Zeitpunkt sehr klein, so kann dieser Fehler vernachlässigt werden. Als Maß dafür kann der berechnete lokale Fehler zu einem Zeitpunkt dienen. Den Fehler in kleinen Zeitabschnitten anstatt erst nach einem langen Zeitabschnitt zu kontrollieren ist sinnvoller. Die Effizienz der adaptiven Methode hängt stark von der Steuerung der Fehlerkontrolle mit Hilfe von dualen Problemen ab.

Steuerung der adaptiven Methode und Nachbehandlung der übertragenen Daten Die bekannten Fehlerindikatoren der Strukturdynamik, die auf der semidiskreten Formulierung mit der Newmark-Zeitintegration basieren, bestimmen zunächst den zeitlichen Fehler und passen den Zeitschritt an. Anschließend wird der räumliche Fehler bestimmt. Der Aufwand der zeitlichen Fehlerkontrolle ist nicht groß, weshalb sie meistens in jedem Zeitschritt durchgeführt wird. Die Kontrolle des räumlichen Fehlers ist numerisch aufwendiger. Deshalb wurde in dieser Arbeit die räumliche Fehlerkontrolle an die Änderung der Energie gekoppelt, wodurch die Effektivität des adaptiven Algorithmus im Vergleich zur Fehlerkontrolle in jedem Zeitschritt erhöht werden konnte. Wird das FE-Netz an

die Fehlerverteilung angepaßt, dann werden die Daten von dem alten Netz auf das neue Netz übertragen. Durch den Transfer der Daten entstehen unerwünschte Fehler. Da die übertragenen Daten die Anfangswerte für die weitere Berechnung sind, pflanzt sich dieser Fehler in allen weiteren Schritten fort.

Zunächst wurde die Notwendigkeit der Nachbearbeitung der übertragenen Daten gezeigt. Die aus der Literatur bekannten Methoden wurden verwendet, um die Lösung zu verbessern. Trotz der Nachbehandlung konnte bei der Koppelung von zeitlicher und räumlicher Fehlerkontrolle im allgemeinen beobachtet werden, daß der zeitliche Fehlerindikator sehr sensitiv auf die Fehler der Datenübertragung reagiert und der Zeitschritt stark verkleinert wird. Die zeitliche und räumliche Adaptivität kann in dieser Art nicht auf beliebige Beispiele angewendet werden. Zeitliche Fehlerindikatoren alleine können ohne Probleme angewendet werden. Es konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, daß es wichtig ist, an der genaueren Nachbehandlung der übertragenen Daten zu arbeiten. Ein Ansatz, die Nachbearbeitung zu verbessern, ist, die lokale Projektion mit Nebenbedingungen zu untersuchen.

Adaptive Methoden werden auch bei zeitabhängigen Problemen immer häufiger eingesetzt. Meistens wird jedoch die einfachste Art der Adaptivität, die Zeitschrittsteuerung, verwendet. Um auch den räumlichen Fehler effizient kontrollieren zu können, muß an den folgenden Punkten gearbeitet werden:

- Flexible Fehlerindikatoren
- Genauigkeit der Nachbehandlung der transferierten Daten
- Steuerung des adaptiven Algorithmus

Bei zukünftigen Entwicklung von adaptiven Methoden ist sicherzustellen, daß der Fehler durch die Adaptivität wirklich reduziert wird. Gleichzeitig darf der numerische Aufwand des gesamten adaptiven Algorithmus nicht zu groß werden. Erst wenn diese Punkte für beliebige Probleme der Strukturdynamik gelöst sind, wird die räumliche und zeitliche Adaptivität standardmäßig angewendet werden können. Erste neue Ansätze zur variablen Fehlerkontrolle wurden in dieser Arbeit gezeigt.

Anhang A

Normen

Um die Größe des Fehlers beurteilen zu können, muß der Fehler e in einer Norm gemessen werden. Eine Norm bildet Elemente aus einem Raum auf skalare Größen ab. Besitzt ein Raum Normen, dann heißt er normierter Raum. Ist in einem Raum das innere Produkt definiert, so heißt er innerer Produktraum. Im folgenden werden die Räume und Normen eingeführt, die für diese Arbeit wichtig sind. Die theoretischen Grundlagen können in der Literatur über Funktionalanalysis nachgelesen werden, u.a. in den Büchern von Reedy [77] und Braess [23].

In der Mathematik werden Räume beispielsweise durch Zahlen, Vektoren oder Funktionen, gebildet. Das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eines linearen Raumes ist die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & (\text{A.1}) \\ \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &\geq 0 \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Norm $\|\cdot\|$ eines linearen Raumes ist die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &\geq 0 & (\text{A.2}) \\ \|\mathbf{u}\| &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0 \\ \|\alpha \mathbf{u}\| &= |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert automatisch eine Norm, die Euklidische Norm.

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

Definitionen anderer bekannter Normen für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sind die L_1 -Norm (Betragsnorm) und die L_∞ -Norm (Maximumsnorm).

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i| \quad (\text{A.4})$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \quad (\text{A.5})$$

Normen definieren, wie die Elemente eines Raumes durch ein Skalar gemessen werden. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ sind äquivalent, wenn es eine Konstante $0 \leq C \leq \infty$ gibt für die gilt:

$$\frac{1}{C} \|\mathbf{v}\|_a \leq \|\mathbf{v}\|_b \leq C \|\mathbf{v}\|_a \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (\text{A.6})$$

Die Räume der Funktionen, z.B. der Ansatzfunktionen bei der Finiten-Element-Methode können nach der Differenzierbarkeit und der Integrabilität eingeteilt werden. Die Menge aller Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die k mal stetig differenzierbar sind, bilden den Raum C^k . Die Menge der stückweise stetigen Funktionen gehören zu dem Raum C^{-1} . C^0 ist die Menge der stetigen Funktionen.

Eine Voraussetzung für die Lösung der Finiten-Element-Methode ist die Quadratintegrierbarkeit. Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen wird mit H^0 oder auch L_2 bezeichnet. Das innere Produkt und die Norm des H^0 - bzw. L_2 -Raumes sind definiert durch $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u}, \mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{A.7})$$

$$\|\mathbf{u}\|_0 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} \quad (\text{A.8})$$

Allgemein gilt für den Raum H^k

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_k = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{v}_{,i} + \dots + \mathbf{u}_{,ij\dots k} \cdot \mathbf{v}_{,ij\dots k}) d\Omega \quad 1 \leq i, j, \dots, k \leq n \quad (\text{A.9})$$

$$\|\mathbf{u}\|_k = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_k^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

mit der partiellen Ableitung $\mathbf{u}_{,i}$ nach der i -ten Komponente. Der Sobolev-Raum H^k wird gebildet durch die Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für die gilt

$$H^k(\Omega) = \{f \in H^k \mid \|f\|_k < \infty\} \quad (\text{A.11})$$

Sobolev-Räume höherer Ordnung sind Teilräume der Sobolev-Räume niedrigerer Ordnung. Die stückweise stetigen Funktionen C^{-1} gehören zu dem Sobolev-Raum H^0 . Funktionen, die nicht mehr quadratintegrierbar sind, wie z.B. die Dirac-Delta Funktion gehören zu H^{-1} .

Anhang B

Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren

Für unterschiedliche Problemstellungen, z.B. Crash, Explosion oder Langzeitbeobachtungen, werden Zeitintegrationsverfahren mit bestimmten Eigenschaften verwendet. Die Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren sind u.a. in Bathe et al. [16], Hughes [46], Zienkiewicz et al. [109] und Argyris et al. [3] beschrieben. Im folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften der DTG- und der Newmark-Methode aus den Kapiteln 2.3.1 und 2.3.2 zusammengefaßt. Ein Zeitintegrationsverfahren wird charakterisiert durch

- Stabilität
- Konvergenz
- Genauigkeit

Stabilität Die spektrale Stabilität eines Zeitintegrationsverfahrens stellt sicher, daß die Lösung beschränkt ist. Die energetische Stabilität ist nur für nichtlineares Strukturverhalten wichtig, wenn keine modale Analyse durchgeführt werden kann. Im folgenden wird deshalb nur auf die spektrale Stabilität eingegangen. Die Stabilität eines Zeitintegrationsverfahrens wird anhand der entkoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung untersucht, die mit Hilfe der modalen Analyse gewonnen werden. Die Lösung \check{y}_n zu einem Zeitpunkt t_n wird in Abhängigkeit der Lösung des vorherigen Zeitpunktes \check{y}_{n-1} mit Hilfe der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} dargestellt.

$$\check{y}_n = \mathbf{A}\check{y}_{n-1} + \check{P}_{n-1} \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\check{y}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Bei Stabilitätsuntersuchungen werden keine äußeren Kräfte und keine physikalische Dämpfung angenommen. Der Lastvektor \check{P}_{n-1} wird zu null gesetzt. Die Stabilität hängt von den Eigenwerten λ_A der Vergrößerungsmatrix \mathbf{A} ab.

$$0 = \det|\mathbf{A} - \lambda_A \mathbf{I}| = \lambda_A^2 - 2A_1 \lambda_A + A_2 \quad (\text{B.3})$$

mit den Invarianten

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{trace} \mathbf{A} \quad A_2 = \det \mathbf{A} \quad (\text{B.4})$$

Die Gleichung (B.3) ist die charakteristische Gleichung. Um die Stabilität zu erfüllen, müssen alle Eigenwerte λ_{A_i} kleiner oder gleich eins sein. Der größte Eigenwert definiert den Spektralradius.

$$\rho_A = \max_i |\lambda_{A_i}| \quad (\text{B.5})$$

Ein Zeitintegrationsverfahren ist unbedingt stabil, wenn für alle Zeitschrittgrößen Δt_n gilt:

$$\rho_A \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t_n \quad (\text{B.6})$$

Ist die Stabilität nur erfüllt, wenn die Zeitschrittgröße Δt_n kleiner einer kritischen Zeitschrittgröße Δt_{cr} ist, dann ist das Verfahren bedingt stabil.

$$\rho_A \leq 1 \quad \forall \quad \Delta t_n < \Delta t_{cr} \quad (\text{B.7})$$

Bei stabilen Verfahren sind alle Eigenwerte kleiner als eins. Dies bedeutet aber auch, daß Dämpfung vorhanden ist, die im physikalischen Modell nicht existiert. Diese Dämpfung wird als algorithmische Dämpfung bezeichnet, da sie allein durch den Algorithmus verursacht wird.

Konvergenz Die Konvergenz ergibt sich aus der Stabilität und der Konsistenz eines Verfahrens. Die Konvergenzordnung kann von dem lokalen Abbruchfehler abgelesen werden. Der lokale Abbruchfehler τ in der diskretisierten Gleichung (B.1) ist definiert durch

$$\check{y}(t_n) = \mathbf{A}\check{y}(t_{n-1}) + \check{\mathbf{P}}_{n-1} + \Delta t \tau(t_{n-1}) \quad (\text{B.8})$$

Der Abbruchfehler $\tau = \mathcal{O}(\Delta t^k)$ ergibt die Konvergenzordnung k . Eine Fehlerdarstellung erhält man durch die Differenz von (B.1) und (B.8).

$$\check{e}(t_n) = \mathbf{A}^n \check{e}(0) - \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \tau(t_{n-1-i}) \quad (\text{B.9})$$

wobei $\check{e}(t_n)$ der Fehler aus der Differenz $\check{y}_n - \check{y}(t_n)$ in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten ist.

Genauigkeit Im folgenden werden zwei Maße für die Genauigkeit eines Zeitintegrationsverfahrens eingeführt, die numerische Dissipation und die numerische Dispersion, u.a. Hilber et al. [43], Hughes [46]. Die algorithmische Dämpfungsrate ξ_d^h mißt die Stärke der numerischen Dissipation.

$$\xi_d^h = -\frac{\ln \rho_A}{\Delta t \omega^h} \quad (\text{B.10})$$

$(\cdot)^h$ kennzeichnet die Werte des diskreten Systems mit der Verwendung des Zeitalgorithmus. Die approximierte Frequenz des diskretisierten Systems ist ω^h und ergibt sich aus der komplexen Lösung des Eigenwertproblems (B.3)

$$\lambda_{1/2} = B_1 \pm B_2 i \quad B_2 \neq 0 \quad (\text{B.11})$$

mit

$$\omega^h = \frac{1}{\Delta t \tan \frac{B_2}{B_1}} \quad (\text{B.12})$$

Im hochfrequenten Bereich kann die numerische Dissipation mit dem Spektralradius gemessen werden.

$$\rho_{A_\infty} \equiv \lim_{\frac{\Delta t}{T_p} \rightarrow \infty} \rho_A \quad (\text{B.13})$$

T_p ist die Periodendauer. Für kleine Dämpfungsraten kann der Amplitudenabfall AA nach einer Periode durch

$$AA \approx 2\Pi c_d^h \quad (\text{B.14})$$

approximiert werden [46]. Mit abnehmendem Spektralradius ρ_A nimmt die numerische Dämpfung zu. Die numerische Dispersion wird mit dem relativen Periodenfehler gemessen.

$$\frac{\underline{\omega}^h}{\omega^h} = \frac{T_p^h}{T_p^h} \quad (\text{B.15})$$

Der Wert $\underline{\omega}^h$ ist die exakte Frequenz des diskretisierten Systems, bzw. \underline{T}_p^h die exakte Periodendauer des diskreten Systems. Die Werte ω^h und T_p^h des diskreten Systems ergeben sich durch die Verwendung eines Zeitintegrationsalgorithmus, d.h. der Fehler wird durch den Algorithmus verursacht und nicht durch die Diskretisierung.

Das Ziel eines Zeitintegrationsverfahrens ist es stabil und möglichst genau zu sein. Höhere Moden, die durch die Diskretisierung fälschlicherweise angeregt werden, sollen gedämpft werden oder ganz verschwinden. Niedere Moden sollen möglichst exakt dargestellt und nicht gedämpft werden. Die Zeitintegrationsverfahren werden auf diese Aspekte hin untersucht.

Numerische Eigenschaften Im folgenden werden die Eigenschaften der eingeführten Zeitintegrationsverfahren dargestellt und in der Tabelle B.1 zusammengefasst. Das Newmark-Verfahren ist unbedingt stabil, wenn gilt

$$2\beta \geq \delta \geq \frac{1}{2} \quad (\text{B.16})$$

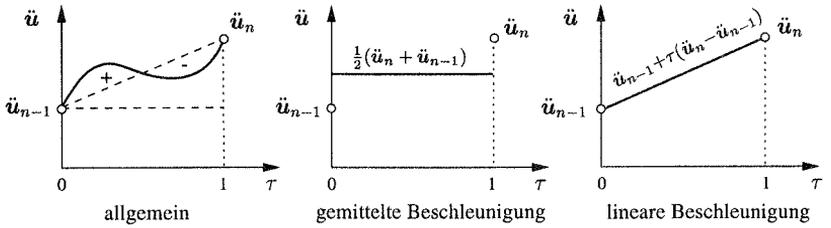


Abbildung B.1: Unterschiedliche Beschleunigungsverläufe

und bedingt stabil für

$$\delta \geq 1/2; \quad \beta < \frac{\delta}{2}; \quad \vartheta \leq \vartheta_{cr} = \left[\frac{\delta}{2} - \beta \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.17})$$

mit der relativen Frequenz $\vartheta = \omega^h \Delta t$ und der kritischen relativen Frequenz ϑ_{cr} . Das gemittelte Beschleunigungsverfahren (Trapezregel) ($\delta = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$), mit dem in Abbildung (B.1) in der Mitte dargestellte Beschleunigungsverlauf, ist unbedingt stabil, während das lineare Beschleunigungsverfahren (Abb. B.1 rechts) ($\delta = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$) bedingt stabil ist mit $\vartheta_{cr} = 2\sqrt{3}$. Für $\delta < \frac{1}{2}$ ist das Newmark-Verfahren instabil. Der Spektralradius ρ_A wird für $\delta > \frac{1}{2}$ kleiner 1, d.h. das System wird algorithmisch gedämpft. Für $\delta = \frac{1}{2}$ ist der Spektralradius $\rho_A = 1$, d.h. es ist keine algorithmische Dämpfung vorhanden. Da das Newmark Verfahren für $\delta = \frac{1}{2}$ zweiter Ordnung genau ($\mathcal{O}(\Delta t^2)$) ist, wird es in dieser Arbeit benutzt. Es soll aber auch auf die Nachteile des Verfahren hingewiesen werden. Das Verfahren mit gemittelten Beschleunigungen ($\delta = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}$) ist zwar unbedingt stabil, jedoch ist der Periodenfehler sehr groß.

Bei bedingt stabilen Verfahren ($\delta = \frac{1}{2}$ und $\beta < \frac{1}{4}$) ist der Periodenfehler kleiner. Trotzdem können auch sie die hochfrequenten Anteile nicht dämpfen, die durch die Diskretisierung entstehen. Erst Verfahren mit $\delta > \frac{1}{2}$ würden eine Verbesserung bringen (s. Abb. B.2), jedoch sind diese Verfahren nur erster Ordnung genau.

Mit der HHT- α -Methode können die Dämpfungseigenschaften verbessert werden. Die Eigenschaften der algorithmischen Dämpfung im hochfrequenten Bereich sind in Abbildung (B.2) dargestellt. Werden die Parameter folgendermaßen gewählt

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \quad \delta = \frac{1-2\alpha}{2}, \quad \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \quad (\text{B.18})$$

ergibt sich ein unbedingt stabiles Verfahren, das zweiter Ordnung genau ist. Der Frequenzfehler nimmt jedoch mit der algorithmischen Dämpfung zu.

Hughes [46] weist darauf hin, daß schon bei der exakten Lösung des diskreten Systems die Periode \underline{T}_p^h durch die diskrete Massenverteilung von der exakten Periode T_p abweicht.

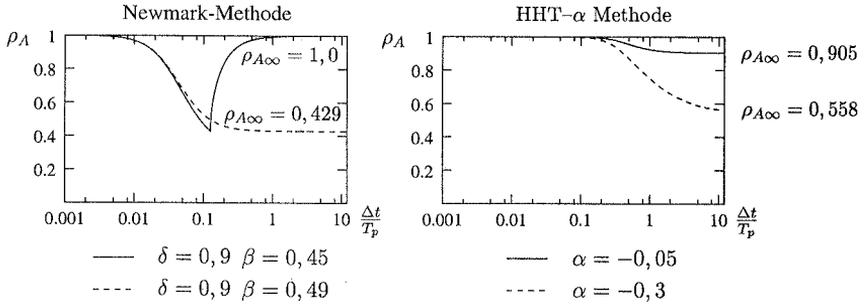


Abbildung B.2: Spektralradii für Newmark-Verfahren und HHT- α Verfahren

Durch geschickte Kombination der Newmark-Ansätze und der Art der diskreten Massenverteilung kann der Fehler minimiert werden. So führt der gemittelte Beschleunigungsansatz zu einer Periodenverlängerung, welche durch die Verwendung einer konsistenten Massenmatrix, die eine Periodenverkürzung bewirkt, teilweise kompensiert werden kann.

Im folgenden werden die Eigenschaften der Formulierung mit dem DTG-Verfahren zusammengefaßt. Das DTG-Verfahren wird mit dem Prädiktor-Multikorrekter Algorithmus, der im Anhang D dargestellt ist, gelöst. Die Ansatzfunktionen sind in zeitlicher Richtung quadratisch. Es werden die konsistenten Massenmatrizen \mathbf{M}_v^* (D.14) und \mathbf{M}_a^* (D.15), die sich ohne Vereinfachung aus dem Prädiktor-Multikorrekter Verfahren ergeben, verwendet. Die Verfahren mit den vereinfachten Massenmatrizen (D.16) und (D.17) sowie (D.18) und (D.19) sind für adaptive Methoden nicht geeignet. Nur für die Verfahren mit konsistenten Massenmatrizen ist es möglich eine maximale Konvergenzrate von Δt^3 zu erzielen, bei gleichzeitiger Stabilität und hoher Genauigkeit im niederfrequenten Bereich. Für die Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren mit den verschiedenen impliziten und expliziten Massenmatrizen wird auf Hulbert [49] verwiesen. Die Ergebnisse sind im Anhang D zusammengefaßt.

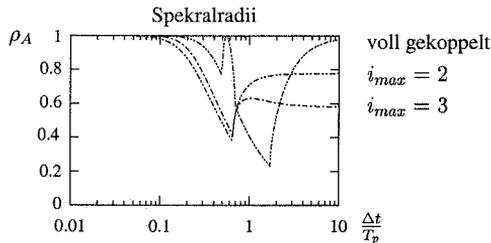


Abbildung B.3: Spektralradii für DTG-Verfahren mit Prädiktor-Multikorrekter Verfahren und konsistenten Massenmatrizen

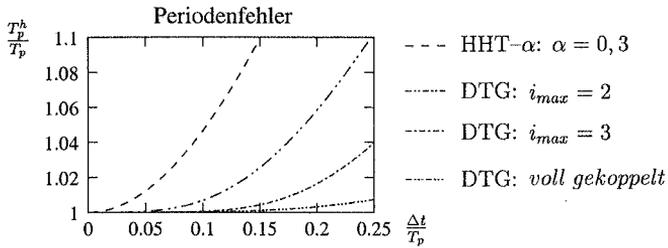


Abbildung B.4: Fehler in der Periodendauer für das DTG-Verfahren und das HHT- α Verfahren

Die DTG-Methode wird in Abhängigkeit der Anzahl der Korrekturiterationen i_{max} untersucht. Für $i_{max} = 1$ entspricht der Prädiktor-Multikorrekter Algorithmus (D.7–D.13) einem zeitlich linearen Ansatz. Die Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ kann erst ab $i_{max} = 2$ erreicht werden. Abbildung (B.3) zeigt, daß der voll gekoppelte Algorithmus, d.h. ohne Prädiktor-Multikorrekter Verfahren, keine algorithmische Dämpfung im hochfrequenten Bereich besitzt. Erst durch das Prädiktor-Multikorrekter Verfahren nimmt der Spektralradius ab. Im Vergleich zur HHT- α Methode ($\alpha = -0,3$) ist der Grenzwert des Spektralradius bei der DTG-Methode größer. Der Frequenzfehler der DTG-Methode ist jedoch kleiner als mit der HHT- α Methode und nimmt mit der Anzahl der Korrekturiterationen ab (siehe Abb. B.4). Im folgenden wird die DTG-Methode mit $i_{max} = 3$ verwendet.

Methode	β	δ	Stabilität	Genauigkeit
Newmark	$\beta < \frac{\delta}{2}$	$\delta > \frac{1}{2}$	$\vartheta_{cr} = [\frac{\delta}{2} - \beta]^{-\frac{1}{2}}$	$\mathcal{O}(\Delta t^1)$
mittlere Beschleunigung	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	unbedingt	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
lineare Beschleunigung	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\vartheta_{cr} = 2\sqrt{3}$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
zentrale Differenz	0	$\frac{1}{2}$	$\vartheta_{cr} = 2$	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
HHT- α : $\alpha \in [-\frac{1}{3}; 0]$	$\frac{(1-\alpha)^2}{4}$	$\frac{1-2\alpha}{2}$	unbedingt	$\mathcal{O}(\Delta t^2)$
DTG (kons. \mathcal{M})				
$i_{max} = 1$	–	–	unbedingt	$\mathcal{O}(\Delta t^1)$
$i_{max} = 2$	–	–	unbedingt	$\mathcal{O}(\Delta t^3)$
$i_{max} = 3$	–	–	unbedingt	$\mathcal{O}(\Delta t^3)$

Tabelle B.1: Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren

Anhang C

Newmark–Verfahren und FE–Methode

In diesem Kapitel wird die Newmark–Zeitintegration mit der Zeitintegration mit Hilfe von finiten Elementen verglichen. Argyris et al. [3] haben für die Newmark–Methode die Integrationsparameter δ und β anschaulich erklärt. Darauf aufbauend wird im folgenden der Unterschied in der Zeitintegration zwischen dem FD–Verfahren mit der Newmark–Methode und der DTG–Methode gezeigt.

In dem Intervall $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ wird der Beschleunigungsverlauf $\ddot{\mathbf{u}}(\tau)$ angenommen, wobei $\tau = (0, 1)$ der dimensionslose Zeitparameter ist. Um die Geschwindigkeiten und Verschiebungen zu erhalten, wird der Beschleunigungsverlauf $\ddot{\mathbf{u}}(\tau)$ integriert.

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t \int_0^\tau \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (\text{C.1})$$

Die Anfangswerte $\dot{\mathbf{u}}(\tau = 0) = \dot{\mathbf{u}}_{n-1}$ bzw. $\mathbf{u}(\tau = 0) = \mathbf{u}_{n-1}$ auf dem Zeitintervall (t_{n-1}, t_n) sind bekannt.

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} \tau + \Delta t^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau d\tau \quad (\text{C.2})$$

Durch partielle Integration kann das Doppelintegral in Gl. (C.2) umgeformt werden in

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} \tau + \Delta t^2 \left[\tau \int_0^\tau \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau - \int_0^\tau \tau \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \right] \quad (\text{C.3})$$

Der Beschleunigungsverlauf wird mit den Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_t(\tau)$ über das Zeitintervall approximiert, wobei $\ddot{\mathbf{d}}$ die Werte an den Stützstellen darstellen.

$$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{N}_t(\tau) \ddot{\mathbf{d}}^T = [\mathbf{N}_{1,t}(\tau), \mathbf{N}_{2,t}(\tau)] [\ddot{\mathbf{d}}_{n-1}, \ddot{\mathbf{d}}_n]^T \quad (\text{C.4})$$

Da bei der Diskretisierung der Bewegungsgleichung mit FD in zeitlicher Richtung nur die Werte am Ende des Zeitintervalls interessieren, wird $\tau = 1$ gesetzt. Damit ergeben sich aus den Geschwindigkeitsapproximationen (C.1) und den Verschiebungsapproxima-

tionen (C.2) mit den Ansatzfunktionen für die Beschleunigungen (C.4) folgende Approximationen für die Geschwindigkeit und die Verschiebung

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \dot{\mathbf{d}}(\tau = 1) = \dot{\mathbf{d}}_{n-1} + \Delta t \int_0^1 \mathbf{N}_t^v(\tau) d\tau \ddot{\mathbf{d}}^T \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}(\tau = 1) = \mathbf{d}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{n-1} + \Delta t^2 \int_0^1 (1 - \tau) \mathbf{N}_t^u(\tau) d\tau \ddot{\mathbf{d}}^T \quad (\text{C.6})$$

wobei \mathbf{N}_t^v und \mathbf{N}_t^u die Ansatzfunktionen der Beschleunigungen für die Geschwindigkeits- und Verschiebungsapproximation sind. Die Verschiebungen \mathbf{u} und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}$ werden zu den diskreten Zeitpunkten durch die Knotenwerte \mathbf{d} bzw. $\dot{\mathbf{d}}$ ersetzt. Die Newmark-Parameter ersetzen die Integration über das Zeitintervall I_n .

$$\int_0^1 \mathbf{N}_{1,t}^v(\tau) d\tau = 1 - \delta \quad \int_0^1 \mathbf{N}_{2,t}^v(\tau) d\tau = \delta \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^1 (1 - \tau) \mathbf{N}_{1,t}^u(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \quad \int_0^1 (1 - \tau) \mathbf{N}_{2,t}^u(\tau) d\tau = \beta \quad (\text{C.8})$$

Werden die Newmark-Ansätze in die Gleichungen (C.5) und (C.6) eingesetzt, so ergeben sich die Geschwindigkeiten zu

$$\dot{\mathbf{d}}_n = \dot{\mathbf{d}}_{n-1} + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + \delta\ddot{\mathbf{d}}_n]\Delta t \quad (\text{C.9})$$

und die Verschiebungen zu dem Zeitpunkt t_n zu

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1} + \dot{\mathbf{d}}_{n-1}\Delta t + [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + 2\beta\ddot{\mathbf{d}}_n]\frac{\Delta t^2}{2} \quad (\text{C.10})$$

Nur über die Newmark-Parameter β und δ kann auf den Verlauf der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}$ und Verschiebungen \mathbf{u} zurück geschlossen werden. Für die gemittelten Beschleunigungen sind im folgenden die Ansatzfunktionen dargestellt.

Für die gemittelten Beschleunigungen mit $\beta = \frac{1}{4}$ und $\delta = \frac{1}{2}$ reduzieren sich die Ansatzfunktionen auf $\mathbf{N}_t = 0,5$ [3].

$$\mathbf{N}_{1,t}^v = \frac{1}{2} \quad \mathbf{N}_{2,t}^v = \frac{1}{2} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{N}_{1,t}^u = \frac{1}{2} \quad \mathbf{N}_{2,t}^u = \frac{1}{2} \quad (\text{C.12})$$

Werden die Ansatzfunktionen in die Gleichungen (C.1–C.3) eingesetzt, dann ergeben sich folgende Verläufe für die Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen auf dem Zeitintervall $I_n = (t_{n-1}, t_n)$.

$$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) = \ddot{\mathbf{u}}'_n \quad (\text{C.13})$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}'_n \tau \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} \tau + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}'_n \tau^2 \quad (\text{C.15})$$

Auf einem Zeitintervall I_n entspricht dies quadratischen Verschiebungsansätzen in der Zeit. Im folgenden werden zum Vergleich die diskontinuierlichen FE-Ansätze eingeführt. Die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der DTG-Methode mit einem quadratischen Verschiebungsverlauf auf einem Zeitintervall $I = (t_{n-1}, t_n)$ sind gegeben durch

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1}^+ = \mathbf{a}_n^- \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{v}^h(t) = \mathbf{v}_{n-1}^+ + (t - t_{n-1})\mathbf{a}_n \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{u}^h(t) = \mathbf{u}_{n-1}^+ + (t - t_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}^+ + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})^2\mathbf{a}_n \quad (\text{C.18})$$

Werden die Gleichungen (C.13–C.15) mit den diskontinuierlichen FE-Ansätzen (C.16–C.18) verglichen, so unterscheiden sie sich lediglich in den Diskontinuitäten an den Zeitintervallgrenzen. Bei dem DTG-Verfahren weist die Beschleunigung Sprünge an den Zeitintervallgrenzen auf. In den einzelnen Zeitintervallen ist die Beschleunigung konstant. Diese konstante Beschleunigung (C.16) entspricht dem Mittel der Knotenbeschleunigungen $\dot{\mathbf{u}}'_n$ (C.13) beim Newmark-Verfahren mit den gemittelten Beschleunigungen. Jedoch ist die Verträglichkeit bei der Newmark-Methode, interpretiert als FE-Verfahren, nicht mehr erfüllt, da die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}'_n$ aus den Ansatzfunktionen an den Knotenpunkten nicht mit den Knotenbeschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}_{n-1}$ und $\ddot{\mathbf{u}}_n$ übereinstimmen. Dies kann gezeigt werden, wenn die zeitlich schwache Formulierung mit den Ansätzen der Newmark-Methode (C.11)–(C.12) bzw. (C.13)–(C.15) hergeleitet wird. Dabei kann von der semidiskreten Formulierung mit den Massen- und Steifigkeitsmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} ausgegangen werden, da die zeitlichen Ansätze unabhängig von den räumlichen Ansätzen sein sollen. Die schwache Formulierung in der Zeit lautet dann

$$(\dot{\mathbf{w}}(t), \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t))_{I_n} = 0 \quad (\text{C.19})$$

Die Testfunktionen $\dot{\mathbf{w}}(t)$ werden, damit die einzelnen Zeitintervalle nacheinander berechnet werden können, auf einem Zeitintervall als konstant und über die Zeitintervallgrenzen diskontinuierlich angenommen.

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \dot{\mathbf{w}}_{n-1}^+ = \dot{\mathbf{w}}_n^- = \dot{\mathbf{w}}_n \quad (\text{C.20})$$

Für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden die Newmark-Ansätze für $\beta = \frac{1}{4}$ und $\delta = \frac{1}{2}$, d.h. mit gemittelten Beschleunigungen, eingesetzt. Da die Testfunktionen konstant sind, können sie vor das Integral gezogen werden. Dadurch können die bereits über die Zeit integrierten Ansätze aus Gl. (C.13)–(C.15) verwendet werden. Die Zeitintegration der schwachen Formulierung (C.19) wurde somit ausgeführt und die Bewegungsgleichung am Ende des Zeitintervalls lautet

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4}\mathbf{K}\right)\ddot{\mathbf{u}}_n = -\left[\frac{1}{2}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \mathbf{K}(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{4}\ddot{\mathbf{u}}_{n-1})\right] \quad (\text{C.21})$$

wobei die konstanten Testfunktionen nicht mehr explizit aufgeführt werden. Zum Vergleich wird die bekannte Bewegungsgleichung nach der Newmark-Methode mit gemittelten Beschleunigungen aufgeführt.

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4}\mathbf{K}\right)\ddot{\mathbf{u}}_n = -\mathbf{K}(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{4}\ddot{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (\text{C.22})$$

Der Unterschied zwischen der schwachen Formulierung (C.21) und der Finiten-Differenzen Formulierung (C.22) besteht lediglich in den Beschleunigungstermen. Bei der Finiten-Differenzen Methode werden die gemittelten Beschleunigungen nicht explizit angesetzt. Wie zuvor erwähnt ist dadurch die Verträglichkeit der Beschleunigungen bei der Newmark-Methode interpretiert als FE-Verfahren nicht mehr erfüllt.

Anhang D

Prädiktor–Multikorrekter Verfahren

Bei der Diskretisierung der schwachen Form mit diskontinuierlichen finiten Elementen in zeitlicher Richtung (2.41) entstehen mindestens doppelt so viele Freiheitsgrade wie bei Finiten–Differenzen–Verfahren. Zusätzlich wird über die Zeit integriert, wodurch der numerische Aufwand zum Lösen steigt. Durch die Verwendung eines Prädiktor–Multikorrekter Algorithmus kann der Lösungsaufwand verringert werden. Der Einfluß des Prädiktor–Multikorrekter Verfahrens auf die Genauigkeit und die Stabilität des Zeitintegrationsverfahrens wurde von Hulbert [49] untersucht. Da die Stabilität des Verfahrens nicht verletzt wird und die Genauigkeit nicht stark abnimmt, wird das Prädiktor–Multikorrekter Verfahren in dieser Arbeit verwendet.

Im folgenden wird die DTG–Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen mit quadratischen Verschiebungsansätzen in der Zeit benutzt. Die Ansatzfunktionen werden von Hulbert [49] über Taylorreihenentwicklungen hergeleitet. Ein Polynom der Ordnung p kann durch die Werte an $(p+1)$ Stellen mit Lagrange Ansatzfunktionen beschrieben werden oder durch $(p+1)$ Terme einer Taylorreihenentwicklung. Das Vorgehen über Lagrange Ansatzfunktionen und Taylorreihenentwicklungen ist zueinander äquivalent. Wird eine Taylorreihenentwicklung zur Diskretisierung verwendet, ergeben sich die unbekanntenen Größen an den Zeitintervallgrenzen. Es liegt nahe als Unbekannte die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu verwenden.

Der Verschiebungsverlauf auf dem Intervall $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ ist quadratisch in der Zeit.

$$\mathbf{u}^h(t) = \mathbf{u}_{n-1}^+ + (t - t_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}^+ + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})^2\mathbf{a}_n \quad (\text{D.1})$$

Die Geschwindigkeiten sind in der Zeit linear veränderlich.

$$\mathbf{v}^h(t) = \mathbf{v}_{n-1}^+ + (t - t_{n-1})\mathbf{a}_n \quad (\text{D.2})$$

Und die Beschleunigungen sind auf dem Zeitintervall konstant.

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1}^+ = \mathbf{a}_n^- \quad (\text{D.3})$$

Die Verläufe (D.1–D.3) werden in der schwachen Formulierung (2.45) für die Ansatzfunktionen wie auch für die Testfunktionen verwendet. Da die räumliche und zeitliche Diskretisierung voneinander unabhängig sind, kann von der semidiskreten Formulierung (2.45) ausgegangen werden.

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{n=1}^N (\dot{\mathbf{w}}^h, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^h + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^h + \mathbf{K}\mathbf{u}^h - \mathbf{P})_{I_n} \\
& + \sum_{n=2}^N [(\dot{\mathbf{w}}^h(t_{n-1}^+), \mathbf{M}[[\dot{\mathbf{u}}^h(t_{n-1})]])_{I_n} + (\mathbf{w}^h(t_{n-1}^+), \mathbf{K}[[\mathbf{u}^h(t_{n-1})]])_{I_n}] \\
& + (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}^h(t_0^+))_{I_1} + (\mathbf{w}^h(t_0^+), \mathbf{K}\mathbf{u}^h(t_0^+))_{I_1} \\
& - (\dot{\mathbf{w}}^h(t_0^+), \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_0)_{I_1} - (\mathbf{w}^h(t_0^+), \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_0)_{I_1}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Die zeitlichen Approximationen (D.1–D.3) werden in die schwache Formulierung (D.4) eingesetzt und über das Zeitintervall I_n integriert. Durch das Zusammenfassen der Terme mit $\mathbf{w}^h, \dot{\mathbf{w}}^h$ und $\ddot{\mathbf{w}}^h$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Delta t^2 \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \mathbf{K} \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{K} & \frac{1}{3} \Delta t^2 \mathbf{K} & \frac{1}{2} (\mathbf{M} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n-1}^+ \\ \Delta t \mathbf{v}_{n-1}^+ \\ \Delta t^2 \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{u}_{n-1}^- \\ \mathbf{M} \Delta t \mathbf{v}_{n-1}^- \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{D.5}$$

wobei die Anfangsbedingungen nicht dargestellt sind. Die erste Gleichung des Gleichungssystem (D.5) fordert

$$\mathbf{u}_{n-1}^+ = \mathbf{u}_{n-1}^- = \mathbf{u}_{n-1} \tag{D.6}$$

Es sind keine Sprünge in den Verschiebungen vorhanden, obwohl die Verschiebungen diskontinuierlich über die Zeitintervallgrenzen angesetzt werden.

Aus dem Gleichungssystem (D.5) wird ein Prädiktor–Multikorrekter Verfahren gebildet. Die erste Gleichung stellt den Prädiktor dar. Die zweite Gleichung wird nach den Geschwindigkeiten gelöst. Mit den neuen Geschwindigkeiten werden aus der dritten Gleichung die Beschleunigungen berechnet. Gleichung zwei und drei in (D.5) werden so oft nacheinander gelöst, bis die geforderte Genauigkeit oder die maximale Anzahl von Korrekteriterationen i_{max} erreicht ist. Der Algorithmus lautet folgendermaßen:

initialisieren (D.7)

$$\mathbf{u}(t_0^-) = \bar{\mathbf{u}}_0$$

$$\mathbf{v}(t_0^-) = \bar{\mathbf{v}}_0$$

für $n = 1, \dots, N$

Prädiktor (D.8)

$$\mathbf{u}(t_{n-1}^+) = \mathbf{u}(t_{n-1}^-)$$

$$\mathbf{v}(t_{n-1}^+)^0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}(t_n)^0 = \mathbf{0}$$

Multikorrekter (D.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_v^* \Delta \mathbf{v}^0 &= -\mathbf{R}_v^0 \\ \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^1 &= \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^0 + \Delta \mathbf{v}^0 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, i_{max} - 1$ (D.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_a^* \Delta \mathbf{a}^{i-1} &= -\mathbf{R}_a^{i-1} \\ \mathbf{a}(t_n)^i &= \mathbf{a}(t_n)^{i-1} + \Delta \mathbf{a}^{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_v^* \Delta \mathbf{v}^i &= -\mathbf{R}_v^i \\ \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^{i+1} &= \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^i + \Delta \mathbf{v}^i \end{aligned}$$

nächstes i

nächster Zeitschritt (D.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_n^-) &= \mathbf{u}(t_{n-1}^+) + \Delta t \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^{i_{max}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{a}(t_n)^{i_{max}-1} \\ \mathbf{v}(t_n^-) &= \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^{i_{max}} + \Delta t \mathbf{a}(t_n)^{i_{max}-1} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{R}_v^i = -\mathbf{M} \mathbf{v}(t_{n-1}^-) + \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}(t_{n-1}^+) \quad (D.12)$$

$$+ \left(\mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^i + \Delta t \left(\mathbf{M} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{a}(t_n)^i$$

$$\mathbf{R}_a^i = \mathbf{K} \mathbf{u}(t_{n-1}^+) + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{K} \mathbf{v}(t_{n-1}^+)^{i+1} + \left(\mathbf{M} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{a}(t_n)^i \quad (D.13)$$

Für die Massenmatrizen \mathbf{M}_v^* und \mathbf{M}_a^* in (D.9) und (D.10) gibt Hulbert [49] verschiedene Möglichkeiten der Berechnung an. Die Art der Massenmatrizen und die Anzahl der Korrekteriterationen i_{max} steuern die Eigenschaften des Algorithmus. Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die Möglichkeiten im Hinblick auf die Stabilität und die Konvergenzordnung des Algorithmus gegeben.

Die DTG-Methode ist unbedingt stabil und besitzt eine Genauigkeit von $\mathcal{O}(\Delta t^3)$, wenn das Gleichungssystem (D.5) direkt gelöst wird. Mit Hilfe des Prädiktor-Multikorrekter Verfahrens muß nicht mehr das voll gekoppelte Gleichungssystem gelöst werden. Durch die Wahl der Massenmatrizen \mathbf{M}_v^* und \mathbf{M}_a^* läßt sich der numerische Aufwand des Prädiktor-Multikorrekter Verfahren steuern. Für das Prädiktor-Multikorrekter Verfahren können die Massenmatrizen \mathbf{M}_v^* und \mathbf{M}_a^* folgendermaßen gewählt werden:

$$\text{implizites Verfahren: } \mathbf{M}_v^* = \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (D.14)$$

$$\mathbf{M}_a^* = \mathbf{M} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (D.15)$$

Diese Massenmatrizen werden auch als konsistente Matrizen bezeichnet, da sie sich aus dem Gleichungssystem (D.5) ohne Vereinfachung ergeben. Unabhängig von der Anzahl der Korrekteriterationen i_{max} ist der Algorithmus unbedingt stabil. Für $i_{max} = 1$ ist das Verfahren erster Ordnung genau in der Zeit. Dies entspricht linearen Verschiebungsansätzen in der Zeit. Eine Genauigkeit von $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ wird ab zwei Korrekteriterationen erreicht. Die Eigenschaften des Algorithmus mit konsistenten Massenmatrizen werden im

Anhang B beschrieben.

$$\text{implizites Verfahren: } M_v^* = M + \zeta \Delta t^2 K \quad (\text{D.16})$$

$$M_a^* = M_v^* \quad (\text{D.17})$$

Im Vergleich zu den Massenmatrizen (D.14) und (D.15) wird in den Gleichungen (D.16) und (D.17) nur eine Massenmatrix verwendet. Der Parameter ζ steuert die numerischen Eigenschaften des Algorithmus. Unbedingte Stabilität wird mit zwei Korrektoiterationen erreicht, wenn $\zeta > 0,182$. Die Konvergenzordnung beträgt mindestens $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Das Verfahren konvergiert für $\zeta = 0,5$ mit Δt^3 . Mit $i_{max} \geq 3$ ist das Verfahren für $\zeta > 0,212$ unbedingt stabil und die Konvergenzordnung beträgt $\mathcal{O}(\Delta t^3)$.

$$\text{explizites Verfahren: } M_v^* = M \quad (\text{D.18})$$

$$M_a^* = M_v^* \quad (\text{D.19})$$

Mit dieser starken Vereinfachung wird für $i_{max} = 1$ lineare Konvergenz erreicht. Die kritische relative Frequenz $\vartheta_{cr} = \omega \Delta t_{cr}$ ist $\vartheta_{cr} = 2$. Für $i_{max} = 2$ ist die Konvergenz quadratisch und die kritische relative Frequenz beträgt $\vartheta_{cr} = 1,82$. Ab $i_{max} \geq 3$ konvergiert das Verfahren mit Δt^3 und die kritische relative Frequenz ist $\vartheta_{cr} = 1,53$.

Anhang E

Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit

Die Probleme in der Strukturodynamik (2.1) werden mit einer partiellen Differentialgleichung (PDG) zweiter Ordnung in der Zeit beschrieben. In Kapitel 2.3.1 wird die schwache Formulierung der Strukturodynamik als Gleichung zweiter Ordnung in der Zeit gelöst. Eine andere Möglichkeit ist, die Gleichung zweiter Ordnung in ein Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit umzuformen. Dadurch wird die Anzahl der Unbekannten (Verschiebungen und Geschwindigkeiten) verdoppelt. Die Anforderungen an die Differenzierbarkeit sind jedoch geringer und es können Finite-Differenzen-Verfahren niedrigerer Ordnung zur Diskretisierung verwendet werden. Der Vorteil der Formulierung erster Ordnung in der Zeit ist zudem, daß finite Differenzen verwendet werden können, die finiten Element Ansätzen entsprechen, Hughes [46], Eriksson et al. [34] und Kapitel 5.3.3.1. Weiterhin sind mathematische Nachweise mit Gleichungen erster Ordnung einfacher bzw. überhaupt nur möglich. Deshalb werden Gleichungssysteme erster Ordnung in der Zeit hauptsächlich für die Herleitung einer Formulierung z.B. der DTG-Methode [48], für Fehlerabschätzungen [34][74][87] oder für die genauere Geschwindigkeitsermittlung [61][68] verwendet. Der Nachteil von Gleichungssystemen erster Ordnung besteht in dem erhöhten numerischen Aufwand, da nach einem zusätzlichen unbekanntem Feld gelöst werden muß.

Im folgenden werden zwei verschiedene Formulierungen erster Ordnung in der Zeit eingeführt, die beispielsweise von Eriksson et al. [34] und Bangerth et al. [12] verwendet wurden. Die Formulierungen erster Ordnung werden mit der Formulierung zweiter Ordnung in der Zeit aus Kapitel 4.1 verglichen. Zunächst werden die ursprünglichen Probleme in der Formulierung erster Ordnung eingeführt und die adjungierten Probleme hergeleitet. Zusätzlich zu den Formulierungen in der Literatur [34][12] wird Rayleigh-Dämpfung angenommen. Die Äquivalenz zu der Formulierung zweiter Ordnung des dualen Problems in Kapitel 4.2 wird gezeigt und der Unterschied in der Belastung des dualen Problems zur Bestimmung des Fehlers erläutert.

Starke Form des ursprünglichen Problems Die starke Form der Elastodynamik wird als ein Gleichungssystem erster Ordnung geschrieben mit $\mathbf{u}_1 = \dot{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$.

Gesucht ist der Vektor $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, so daß gilt:

$$\mathcal{L}_1 \mathbf{U} = \mathbf{P}_1 \quad \text{auf } \Omega \times (0, T) \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \times (0, T) \quad (\text{E.2})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t_0) = \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{E.4})$$

Die Linearformen lauten

$$\mathcal{L}_1 \mathbf{U} = \rho \mathbf{u}_1 + d_1 \rho \mathbf{u}_1 - d_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}_1) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}_2) \quad (\text{E.5})$$

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{U} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \dot{\mathbf{u}}_2) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}_1) \quad (\text{E.6})$$

Zur klareren Schreibweise werden die Randbedingungen nicht mit aufgeführt. \mathbf{P}_1 ist der Lastvektor für das Gleichungssystem erster Ordnung. Die Gleichungen (E.1) und (E.2) entsprechen der starken Form der Gleichung zweiter Ordnung (2.1). Der Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeits- und dem Verschiebungsfeld wird durch die Divergenz des Spannungstensors (E.2) hergestellt. Dadurch kann sehr einfach der Energieerhalt der Formulierung nachgewiesen werden [34]. Bangerth et al. [12] verwenden eine andere Formulierung (E.26–E.29), indem die Geschwindigkeits- und Verschiebungsfelder direkt über den Massenerhalt gekoppelt werden.

Schwache Form des ursprünglichen Problems Die Diskretisierung erfolgt mit finiten Elementen in Raum und Zeit. Die zeitlichen Ansätze sind über die Zeitintervallgrenzen diskontinuierlich. Die Räume der Ansatzfunktionen auf einem Raum-Zeit Intervall I_n sind

$$\mathcal{S}_{1,n} = \{\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) | \mathbf{u}_1 = \dot{\bar{\mathbf{u}}} \text{ auf } \gamma_{u_n}, \mathbf{u}_1 \in H^1(Q_n)\} \quad (\text{E.7})$$

$$\mathcal{S}_{2,n} = \{\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) | \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \gamma_{u_n}, \mathbf{u}_2 \in H^1(Q_n)\} \quad (\text{E.8})$$

Die Testfunktionen \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 sind aus dem folgenden Raum

$$\mathcal{V}_{i,n} = \{\mathbf{w}_i(\mathbf{x}, t) | \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \text{ auf } \gamma_{u_n}, \mathbf{w} \in H^1(Q_n)\} \quad i = 1, 2 \quad (\text{E.9})$$

Die Formulierung mit der DTG-Methode lautet: gesucht ist $\mathbf{U} \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, so daß für alle $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ gilt:

$$B(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = L(\mathbf{W}) \quad (\text{E.10})$$

mit

$$B(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = \sum_{n=1}^N [(\mathbf{w}_1, \rho \dot{\mathbf{u}}_1)_{Q_n} + (\mathbf{w}_1, d_1 \rho \mathbf{u}_1)_{Q_n} + a(\mathbf{w}_1, d_2 \mathbf{u}_1)_{Q_n} + a(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2)_{Q_n} + a(\mathbf{w}_2, \dot{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{u}_1)_{Q_n}] \quad (\text{E.11})$$

$$+ \sum_{n=2}^N [(\mathbf{w}_1(t_{n-1}^+), \rho[[\mathbf{u}_1(t_{n-1})]])_{\Omega} + a(\mathbf{w}_2(t_{n-1}^+), [[\mathbf{u}_2(t_{n-1})]])_{\Omega}] + (\mathbf{w}_1(t_0^+), \rho \mathbf{u}_1(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{w}_2(t_0^+), \mathbf{u}_2(t_0^+))_{\Omega}$$

$$L(\mathbf{W}) = \sum_{n=2}^N (\mathbf{w}_1, \mathbf{P}_1)_{Q_n} + (\mathbf{w}_1(t_0^+), \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0)_{\Omega} + a(\mathbf{w}_2(t_0^+), \bar{\mathbf{u}}_0)_{\Omega} \quad (\text{E.12})$$

Herleitung des dualen Problems In Kapitel 4.2 wurde das duale Problem über die Äquivalenz des initialen (4.21) und des dualen (4.22) Problems hergeleitet. Der Definition (4.23) des dualen Operators der Formulierung zweiter Ordnung in der Zeit entspricht bei der Formulierung erster Ordnung: Es ist $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ gesucht, so daß

$$B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z}) = B(\mathbf{Z}, \mathbf{V}) \quad (\text{E.13})$$

Die Bilinearform des ursprünglichen Problems (E.11) wird eingesetzt und durch partielle Integration wird der adjungierte Bilinearoperator $B^*(\cdot, \cdot)$ hergeleitet.

$$B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z}) = \sum_{n=1}^N [- (\mathbf{v}_1, \rho \dot{\mathbf{z}}_1)_{Q_n} + (\mathbf{v}_1, d_1 \rho \mathbf{z}_1)_{Q_n} + a(\mathbf{v}_1, d_2 \mathbf{z}_1)_{Q_n} + \underbrace{a(\mathbf{v}_2, \mathbf{z}_1)_{Q_n}}_1 - a(\mathbf{v}_2, \dot{\mathbf{z}}_2)_{Q_n} - \underbrace{a(\mathbf{v}_1, \mathbf{z}_2)_{Q_n}}_1]$$

$$+ \sum_{n=1}^N [(\mathbf{v}_1, \rho \mathbf{z}_1)_{\Omega} \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} + a(\mathbf{v}_2, \mathbf{z}_2)_{\Omega} \Big|_{t_{n-1}}^{t_n}]$$

$$+ \sum_{n=2}^N [(\rho[[\mathbf{v}_1(t_{n-1})]], \rho \mathbf{z}_1(t_{n-1}^+))_{\Omega} + a(\rho[[\mathbf{v}_2(t_{n-1})]], \mathbf{z}_2(t_{n-1}^+))_{\Omega}]$$

$$+ (\mathbf{v}_1(t_0^+), \rho \mathbf{z}_1(t_0^+))_{\Omega} + a(\mathbf{v}_2(t_0^+), \mathbf{z}_2(t_0^+))_{\Omega}$$

Die Sprungterme können, wie bei der Herleitung des dualen Operators der Einfeldformulierung in Kapitel 4.2 beschrieben wurde, zusammengefaßt werden. Die Terme $\underbrace{(\cdot)}_1$

werden nur vertauscht. Es ergibt sich die duale Bilinearform $B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z})$.

$$B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z}) = \sum_{n=1}^N [- (\mathbf{v}_1, \rho \dot{\mathbf{z}}_1)_{Q_n} + (\mathbf{v}_1, d_1 \rho \mathbf{z}_1)_{Q_n} + a(\mathbf{v}_1, d_2 \mathbf{z}_1)_{Q_n} - a(\mathbf{v}_1, \mathbf{z}_2)_{Q_n} + a(\mathbf{v}_2, \mathbf{z}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2)_{Q_n}]$$

$$- \sum_{n=1}^{N-1} [(\mathbf{v}_1(t_n^-), \rho[[\mathbf{z}_1(t_n)]])_{\Omega} + a(\mathbf{v}_2(t_n^-), [[\mathbf{z}_2(t_n)]])_{\Omega}]$$

$$+ (\mathbf{v}_1(t_N^-), \rho \mathbf{z}_1(t_N^-))_{\Omega} + a(\mathbf{v}_2(t_N^-), \mathbf{z}_2(t_N^-))_{\Omega}$$

Die starke Form des dualen Problems (E.15) lautet:

$$-\rho\dot{z}_1 + d_1\rho z_1 - d_2\nabla \cdot \sigma(\nabla z_1) + \nabla \cdot \sigma(\nabla z_2) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \times (0, T) \quad (\text{E.16})$$

$$-\nabla \cdot \sigma(\nabla \dot{z}_2) + \nabla \cdot \sigma(\nabla z_1) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \times (0, T) \quad (\text{E.17})$$

$$z_2(\mathbf{x}, t_N) = \bar{z}_N \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{E.18})$$

$$z_1(\mathbf{x}, t_N) = \dot{\bar{z}}_N \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{E.19})$$

Die starke Formulierung erster Ordnung (E.16–E.19) ist ebenfalls ein „Rückwärtsproblem“ und ist äquivalent zu der Formulierung zweiter Ordnung (4.32–4.36). Wird in die Gleichungen (E.16–E.19) $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2$ und $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_1$ eingesetzt, ergibt sich die starke Form des dualen Problems zweiter Ordnung (4.32–4.36). Der duale Bilinearoperator $B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z})$ (E.15) kann durch Einsetzen von $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2$ und $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_1$ bzw. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ und $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1$ in den dualen Bilinearoperator $B_{TG}^*(\mathbf{v}, \mathbf{z})$ der Gleichung zweiter Ordnung (4.31) überführt werden.

Fehlerdarstellung Nachdem die Äquivalenz des adjungierten Problems erster Ordnung in der Zeit mit dem adjungierten Problem zweiter Ordnung in der Zeit gezeigt wurde, wird die Darstellung des Fehlers für die Formulierung erster und zweiter Ordnung verglichen. Zusätzlich zu dem in dem vorherigen Abschnitt präsentierten Ansatz erster Ordnung wird eine alternative Formulierung erster Ordnung verwendet, z.B. Bangerth et al. [12]. Es wird gezeigt, daß die Wahl des Funktionals $D(\cdot)$ zur Bestimmung der Fehlergröße von der schwachen Formulierung des dualen Problems abhängt. Zum besseren Vergleich wird die Einfeldformulierung aus Kapitel 4 ebenfalls dargestellt.

Im folgenden treten keine Sprungterme mehr auf, da angenommen wird, daß die Ansatz- und Testfunktionen in räumlicher und zeitlicher Richtung ausreichend oft stetig differenzierbar sind. Zur klaren Darstellung wird nachfolgend die Vektorschreibweise verwendet. Das initiale Problem und das adjungierte Problem des Gleichungssystems erster Ordnung werden wie folgt zusammengefaßt.

$$B(\mathbf{Z}, \mathbf{V}) = D(\mathbf{V}) \quad (\text{E.20})$$

$$B^*(\mathbf{V}, \mathbf{Z}) = D(\mathbf{V}) \quad (\text{E.21})$$

Das initiale Problem erster Ordnung aus dem vorherigen Abschnitt lautet:

$$\left(\left(\begin{array}{c} \rho\dot{\mathbf{v}}_1 + d_1\rho\mathbf{v}_1 - d_2\nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{v}_1) - \nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{v}_2) \\ \nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{v}_1) - \nabla \cdot \sigma(\nabla \dot{\mathbf{v}}_2) \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} \right)_Q = \left(\left(\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q \quad (\text{E.22})$$

Das adjungierte Problem lautet:

$$\left(\left(\begin{array}{c} -\rho\dot{\mathbf{z}}_1 + d_1\rho\mathbf{z}_1 - d_2\nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{z}_1) + \nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{z}_2) \\ -\nabla \cdot \sigma(\nabla \dot{\mathbf{z}}_2) + \nabla \cdot \sigma(\nabla \mathbf{z}_1) \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q = \left(\left(\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q \quad (\text{E.23})$$

Zur Illustration wird die starke Form gebildet. Diese starke Form ist „im schwachen Sinne“ zu verstehen, da im allgemeinen die Belastung in der starken Form nicht definiert ist [10].

$$\begin{aligned} -\rho\dot{z}_1 + d_1\rho z_1 - d_2\nabla \cdot \sigma(\nabla z_1) + \nabla \cdot \sigma(\nabla z_2) &= \mathcal{D}_1 \\ -\nabla \cdot \sigma(\nabla \dot{z}_2) + \nabla \cdot \sigma(\nabla z_1) &= \mathcal{D}_2 \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Das Gleichungssystem erster Ordnung des dualen Problems wird in eine PDG zweiter Ordnung umgeformt.

$$-\rho\ddot{\mathbf{z}}_1 + d_1\rho\dot{\mathbf{z}}_1 - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}_1) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}_1) = \dot{\mathcal{D}}_1 + \mathcal{D}_2 \quad (\text{E.25})$$

Eine alternative Formulierung wird von Bangerth et al. [12] verwendet. Die Kompatibilität des Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeldes wird direkt über den Massenerhalt gefordert. Im folgenden werden zur Vollständigkeit zusätzlich zu [12] die Rayleigh-Dämpfungsterme berücksichtigt. Die Gleichungen des initialen Problems lauten somit:

$$\left(\left(\begin{array}{c} \rho\dot{\mathbf{v}}_1 + d_1\rho\dot{\mathbf{v}}_2 - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{v}}_2) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{v}_2) \\ -\rho\mathbf{v}_1 + \rho\dot{\mathbf{v}}_2 \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} \right)_Q = \left(\left(\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ -\mathcal{D}_2 \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q \quad (\text{E.26})$$

Das adjungierte Problem ergibt sich nach der partiellen Integration zu:

$$\left(\left(\begin{array}{c} -\rho\mathbf{z}_2 - \rho\dot{\mathbf{z}}_1 \\ -\rho\dot{\mathbf{z}}_2 - d_1\rho\dot{\mathbf{z}}_1 + d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}_1) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}_1) \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q = \left(\left(\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ -\mathcal{D}_2 \end{array} \right)^T, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)_Q \quad (\text{E.27})$$

Der Vergleich der adjungierten Probleme (E.23) und (E.27) zeigt, daß sich die Bedeutung von \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 und damit auch die Rolle der Belastung vertauscht hat. Dies entspricht der Vertauschung der Terme $\underbrace{(\cdot)}_1$ in Gl. (E.14). Die Vertauschung der Rollen von \mathbf{z}_1 und

\mathbf{z}_2 kann damit erklärt werden, daß der Zusammenhang zwischen dem Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeld zum einen über die Divergenz des Spannungstensors Gl. (E.6) und zum anderen direkt über Gl. (E.26) hergestellt wird. Die starke Form dieser Formulierung erster Ordnung hat sich im Vergleich zu der Formulierung erster Ordnung (E.24) geändert.

$$\begin{aligned} -\rho\mathbf{z}_2 - \rho\dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathcal{D}_1 \\ -\rho\dot{\mathbf{z}}_2 - d_1\rho\dot{\mathbf{z}}_1 + d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}_1) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}_1) &= -\mathcal{D}_2 \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Die PDG zweiter Ordnung, die aus der starken Form des dualen Problems (E.28) gewonnen wird, ist jedoch zu der PDG (E.25) äquivalent.

$$-\rho\ddot{\mathbf{z}}_1 + d_1\rho\dot{\mathbf{z}}_1 - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}_1) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}_1) = \dot{\mathcal{D}}_1 + \mathcal{D}_2 \quad (\text{E.29})$$

Zum Vergleich wird aus Kapitel 4 das initiale (E.30) und das duale (E.31) Problem der Formulierung zweiter Ordnung in derselben Schreibweise dargestellt.

$$(\rho\dot{\mathbf{v}} + d_1\rho\dot{\mathbf{v}} - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{v}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{v}), \dot{\mathbf{z}}) = (\mathcal{D}, \dot{\mathbf{v}}) \quad (\text{E.30})$$

$$(-\rho\dot{\mathbf{z}} + d_1\rho\dot{\mathbf{z}} - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}), \dot{\mathbf{v}}) = (\mathcal{D}, \dot{\mathbf{v}}) \quad (\text{E.31})$$

Zur Vollständigkeit wird die starke Form des dualen Problems angegeben.

$$-\rho\ddot{\mathbf{z}} + d_1\rho\dot{\mathbf{z}} - d_2\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\dot{\mathbf{z}}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{z}) = \mathcal{D} \quad (\text{E.32})$$

Folgende Punkte können bei dem Vergleich der unterschiedlichen Formulierungen des dualen Problems festgestellt werden:

starke Formulierung Wird aus den Gleichungssystemen erster Ordnung (E.24) und (E.28) des dualen Problems eine Gleichung zweiter Ordnung gebildet, dann sind diese äquivalent (E.25) und (E.29). Die linken Seiten der starken Formulierungen (E.25) und (E.29) des dualen Problems stimmen mit der Formulierung zweiter Ordnung (E.32) überein. Da die rechten Seiten der Gleichungen jedoch nicht gleich sind, ergibt sich ein Unterschied in der korrespondierenden dualen Last, die die Art der Fehlergröße bestimmt.

schwache Formulierung Die Wahl der rechten Seite des dualen Problems führt in der schwachen Formulierung auf den Fehler in einer bestimmten Größe. Die schwachen Formulierungen der adjungierten Probleme (E.23), (E.27) und (E.31) sind unterschiedlich. Für dieselbe Fehlergröße müssen bei unterschiedlichen Formulierungen des Problems verschiedene duale Lasten \mathcal{D} aufgebracht werden. Die Lastfälle für die Formulierung erster Ordnung (E.23) sind u.a. bei Eriksson et al. [34] und für die alternative Formulierung (E.27) bei Bangerth et al. [12] angegeben. In Kapitel 4.3 sind die Belastungen für die Formulierung zweiter Ordnung dargestellt.

Der Unterschied wird an einem Beispiel verdeutlicht. Gewählt wird die Dirac-Delta Last $\mathcal{D} = \delta_{t_N}^d$ aus Kapitel 4.3. Mit dieser Belastung wird der Fehler in den Geschwindigkeiten $\dot{e}_\Omega(t_N)$ bei der Gleichung zweiter Ordnung bestimmt. Aus dem Vergleich der starken Formulierungen (E.25) und (E.32) des dualen Problems ergibt sich $\mathcal{D} = \dot{\mathcal{D}}_1 + \mathcal{D}_2$. Die Belastung \mathcal{D} kann durch die Last $\dot{\mathcal{D}}_1$ des Systems erster Ordnung ersetzt werden. Die integrierte Belastung $\dot{\mathcal{D}}_1 = \delta_{t_N}^d$ ist eine Heaviside Funktion. Das duale Problem wird mit \mathcal{D}_1 belastet ($\mathcal{D}_2 = 0$). Die Last wird in die rechte Seite des dualen Problems (E.23) eingesetzt und ausgewertet.

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1, \mathbf{v}_1)_Q &= \int_{t_0}^{t_N} (H(t - t_N), \mathbf{v}_1)_\Omega dt \\ &= (H(t - t_N), \mathbf{v}_2)_\Omega \Big|_0^{t_N} - \int_{t_0}^{t_N} (\delta_{t_N}^d, \mathbf{v}_2)_\Omega dt = -v_{2,\Omega}(t_N) \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Es ergibt sich der Fehler in der Verschiebung mit $\mathbf{v}_2(t_N) = \mathbf{e}(t_N)$. Die Belastung \mathcal{D}_1 führt auf eine „Anfangsverschiebung“ $\bar{\mathbf{z}}_N$ (s. Kapitel 4.3). Mit der schwachen Formulierung der Anfangsbedingung (E.18) ergibt sich ebenfalls der Fehler in der Verschiebung mit $\mathbf{v}_2(t_N) = \mathbf{e}(t_N)$.

Wird die Belastung $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$ gewählt ($\mathcal{D}_1 = 0$), so ist die Last \mathcal{D}_2 der Dirac-Delta Operator $\delta_{t_N}^d$, der zum Zeitpunkt $t = t_N$ wirkt. Eingesetzt in die rechte Seite des dualen Problems (E.23) ergibt sich ebenfalls der Fehler in der Verschiebung mit $\mathbf{v}_2(t_N) = \mathbf{e}(t_N)$.

$$(\mathcal{D}_2, \mathbf{v}_2)_Q = (\delta_{t_N}^d, \mathbf{v}_2)_Q = v_{2,\Omega}(t_N) \quad (\text{E.34})$$

Die Fehlergröße, die mit einer bestimmten dualen Last erhalten wird, hängt immer von der Formulierung des ursprünglichen Problems ab. Für die Formulierung zweiter Ord-

nung in der Zeit aus Kapitel 4 erhält man mit der Dirac-Delta Last den Fehler in der Geschwindigkeit. Bei der entsprechenden Belastung in der Formulierung erster Ordnung wird der Fehler in der Verschiebung berechnet. Da die Formulierungen erster und zweiter Ordnung verschieden sind, ändert sich das adjungierte Problem und damit die Belastung des dualen Problems, um eine bestimmte Fehlergröße zu bestimmen. Es muß also eine andere duale Last aufgebracht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ABDULWAHAB, F. [1995]. *Postprocessing techniques and adaptivity in the finite element method*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Department of Structural Mechanics.
- [2] AINSWORTH, M. & J. ODEN [1997]. 'A-posteriori error estimation in finite element analysis.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **142**, pp. 1–88.
- [3] ARGYRIS, J. & H. MLEJNEK [1997]. *Computerdynamik der Tragwerke*. Vieweg & Sohn Verlag.
- [4] ARGYRIS, J. & D. SCHARF [1969]. 'Finite elements in time and space.' *Nucl. Eng. Des.*, **10**, pp. 456–464.
- [5] BABUŠKA, I. & A. MILLER [1984]. 'The post-processing approach in the finite element method. Part I: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements; Part II: The calculation of stress intensity factors; Part III: A-posteriori error estimates and adaptive mesh selection.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**, pp. 1085–1109; 1111–1129; 2311–2324.
- [6] BABUŠKA, I. & W. RHEINOLDT [1978]. 'A-posteriori error estimates for the finite element method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **12**, pp. 1597–1615.
- [7] BABUŠKA, I., T. STROUBOULIS, S. GANGARAJ & C. UPADHYAY [1995]. 'A-posteriori estimation and adaptive control of pollution error in the h-version of the finite element method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **38**, pp. 4207–4235.
- [8] BABUŠKA, I. & B. SZABO [1982]. 'On the rates of convergence of the finite element method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **18**, pp. 323–341.
- [9] BAKKER, M. [1981]. 'A note on C^0 Galerkin methods for two-point boundary problems.' *Numer. Math.*, **38**, pp. 447–453.
- [10] BANGERTH, W. [1998]. *Adaptive Finite Element Methode zur Lösung der Wellengleichung mit Anwendung in der Physik der Sonne*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg.

- [11] BANGERTH, W. [2000]. 'Mesh adaptivity and error control for a finite element approximation of the elastic wave equation.' In *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Waves2000)*, Santiago de Compostela, Spain, 2000, edited by A. Bermúdez, D. Gómez, C. Hazard, P. Joly & J. E. Roberts, pp. 725–729. SIAM.
- [12] BANGERTH, W. & R. RANNACHER [1999]. 'Adaptive finite element approximation of the acoustic wave equation: Error estimation and mesh adaptation.' *East-West J. Numer. Math.*, **7**(4), pp. 263–282.
- [13] BANK, R. & A. WEISER [1985]. 'Some a-posteriori error estimators for elliptic partial differential equations.' *Math. Comp.*, **44**, pp. 283–301.
- [14] BARLOW, J. [1976]. 'Optimal stress location in finite element method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **10**, pp. 243–251.
- [15] BARUCH, M. & R. RIFF [1982]. 'Hamilton's law – 6th correct formulations.' *AIAA J.*, **20**(5), pp. 687–692.
- [16] BATHE, K. & E. WILSON [1973]. 'Stability and accuracy of direct integration methods.' *Earthq. Eng. Struc. Dyn.*, **1**, pp. 283–291.
- [17] BECKER, R. [1995]. *An adaptive finite element method for incompressible Navier–Stokes equations on time-dependent domains*. Dissertation, Universität Heidelberg, Institut für Angewandte Mathematik.
- [18] BECKER, R., H. KAPP, & R. RANNACHER [1999]. 'Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations: Basic concept.' *SIAM J. Control and Optimization*, **4**, pp. 237–264.
- [19] BECKER, R. & R. RANNACHER [1996]. 'A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples.' *East-West J. Numer. Math.*, **4**, pp. 237–264.
- [20] BERGAN, P. & E. MOLLESTAD [1985]. 'An automatic time-stepping algorithm for dynamic problems.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **49**, pp. 299–318.
- [21] BLACKER, T. & T. BELYTSCHKO [1994]. 'Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, pp. 517–536.
- [22] BONNEROT, R. & P. JAMET [1979]. 'A third accurate discontinuous finite element method for the one-dimensional Stefan problem.' *J. Comput. Phys.*, **32**, pp. 145–167.
- [23] BRAESS, D. [1997]. *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2. Auflage.

- [24] CHUNG, J. & G. HULBERT [1993]. 'A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized α -method.' *J. Appl. Mech.*, **60**, pp. 371–375.
- [25] CIRAK, F. [1998]. *Adaptive finite Element Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Bericht-Nr. 27.
- [26] CIRAK, F. & E. RAMM [1998]. 'A-posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **156**, pp. 351–362.
- [27] CIRAK, F. & E. RAMM [1999]. 'A-posteriori error estimation and adaptivity for the finite element method using duality principles.' In *GAMM Conf. '98, Bremen Germany*, volume 79, pp. 139–142. ZAMM.
- [28] CIRAK, F. & E. RAMM [2000]. 'A-posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **47**, pp. 379–393.
- [29] DAHLQUIST, G. & A. BJÖRCK [1974]. *Numerical methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y.
- [30] DIEBELS, S., P. ELLSIEPEN & W. EHLERS [1999]. 'Error-controlled Runge-Kutta time integration of a viscoplastic hybrid two-phase model.' *Technische Mechanik*, **19**, pp. 19–27.
- [31] DINKLER, D. [1997]. *Dynamik*. Vorlesungsskript, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- [32] ELWI, A. & T. HRUDEY [1989]. 'Finite element method for curved embedded reinforcement.' *J. Eng. Mech.*, **114**(3), pp. 539–547.
- [33] ERHART, T. [1999]. *Zur gradientenbasierten Adaptivität für transiente Finite Elemente Berechnungen mit großen Deformationen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [34] ERIKSSON, K., D. ESTEP, P. HANSBO & C. JOHNSON [1996]. *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press.
- [35] ERIKSSON, K., D. ESTEP, P. HANSBO & C. JOHNSON [1996]. 'Introduction to adaptive methods for differential equations.' *Acta Numerica*, pp. 105–158.
- [36] ERIKSSON, K. & C. JOHNSON [1991]. 'Adaptive finite element methods for parabolic problems. Part I: A linear model problem.' *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, pp. 43–77.

- [37] ERIKSSON, K. & C. JOHNSON [1995]. 'Adaptive finite element methods for parabolic problems. Part V: Long-time integration.' *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**, pp. 1750–1763.
- [38] FRIBERG, O., P. MÖLLER, D. MAKOVICKA & N.-E. WIBERG [1987]. 'An adaptive procedure for eigenvalue problems using hierarchical finite element methods.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **24**, pp. 319–335.
- [39] GEE, M. [1999]. *Remeshing für finite Elemente Berechnungen mit großen Deformationen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [40] HAGEDORN, P. [1989]. *Technische Schwingungslehre. Band 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer Verlag.
- [41] HANSBO, P. [1989]. *Adaptivity and streamline diffusion procedures in the finite element method*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, Department of Structural Mechanics.
- [42] HARTMANN, R. [1998]. *A-posteriori Fehlerschätzung und adaptive Schrittweiten- und Ortsgittersteuerung bei Galerkin-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg.
- [43] HILBER, H., T. HUGHES & R. TAYLOR [1977]. 'Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics.' *Earthq. Eng. Struc. Dyn.*, **5**, pp. 283–292.
- [44] HINTON, E. & J. CAMPBELL [1974]. 'Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using least squares method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **8**, pp. 461–480.
- [45] HOLZER, S., E. RANK & H. WERNER [1990]. 'An implementation of the hp-version of the finite element method for Reissner–Mindlin plate problems.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **30**, pp. 459–471.
- [46] HUGHES, T. [1987]. *The finite element method: Linear Static and dynamic finite element analysis*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [47] HUGHES, T., L. FRANCA & M. MALLET [1987]. 'A new finite element formulation for computational fluid dynamics. Part VI: Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multidimensional advective–diffusive systems.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **63**, pp. 97–112.
- [48] HUGHES, T. & G. HULBERT [1988]. 'Space–time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **66**, pp. 339–363.

- [49] HULBERT, G. [1989]. *Space-Time finite Element methods for second order hyperbolic equations*. Ph.D. thesis, Stanford University, Department of Mechanical Engineering.
- [50] HULBERT, G. & T. HUGHES [1990]. 'Space-time finite element methods for second order hyperbolic equations.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **84**, pp. 327-348.
- [51] HULME, B. [1972]. 'One-step piecewise Galerkin methods for initial value problems.' *Math. Comp.*, **26**, pp. 881-891.
- [52] JOHN, F. [1982]. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin.
- [53] JOHNSON, C. [1984]. 'Error estimates and automatic time step control for numerical methods for stiff ordinary differential equations.' *Technical Report 1984-27, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden*.
- [54] JOHNSON, C. [1988]. 'Error estimates and adaptive time step control for a class of one step methods for stiff ordinary differential equations.' *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, pp. 908-926.
- [55] JOHNSON, C. & P. HANSBO [1992]. 'Adaptive finite element methods in computational mechanics.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **101**, pp. 143-181.
- [56] JOHNSON, C., U. NÄVERT & J. PITKÄRANTA [1984]. 'Finite element methods for linear hyperbolic problems.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **45**, pp. 285-312.
- [57] KUHL, D. [1996]. *Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik; Bericht-Nr. 22.
- [58] KRÍŽEK, M. & P. NEITTAANMÄKI [1998]. 'Bibliography on superconvergence.' In *Lecture notes in pure and applied mathematics. Finite element methods: superconvergence, post-processing and a-posteriori estimates*, edited by R. S. M. Krížek, P. Neittaanmäki, volume 196, pp. 315-348. Marcel Dekker, Inc.
- [59] LESAINTE, P. & P. RAVIART [1974]. 'On a finite element method for solving the neutron transport equation.' In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, edited by C. de Boor, pp. 89-123. Academic Press, New York.
- [60] LESAINTE, P. & M. ZLÁMAL [1979]. 'Superconvergence of the gradient of finite element solutions.' *RAIRO Anal. Numer.*, **13**, pp. 139-166.
- [61] LI, X. [1996]. *Adaptive finite element procedures in structural dynamics*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- [62] LI, X. & N.-E. WIBERG [1996]. 'Structural dynamics analysis by time-discontinuous Galerkin finite element method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, pp. 2131-2152.

- [63] LI, X., L. ZENG & N.-E. WIBERG [1993]. 'A simple local error estimator and adaptive time-stepping procedure for direct integration method in dynamical analysis.' *Com. Num. Meth. Eng.*, **9**, pp. 273–292.
- [64] MAUTE, K. [1998]. *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Bericht-Nr. 25.
- [65] MEIROVITCH, L. [1975]. *Analytical Methods in Vibrations*. The MacMillan Company.
- [66] MEYBERG, K. & P. VACHENAUER [1997]. *Höhere Mathematik 2*. Springer Verlag.
- [67] NEUMANN, J., J. RICCIUS & K. SCHWEIZERHOF [1998]. 'Adaptive analysis of dynamically loaded shell structures.' In *Comp. Mech. New Trends & Applications*, edited by S. Idelsohn, E. Oñate & E. Dvorkin. CIMNE, Barcelona, Spain. CD-ROM.
- [68] NEUMANN, J. & K. SCHWEIZERHOF [1999]. 'Analysis of shell structures under transient loading using adaptivity in time and space.' In *ECCM'99*, edited by W. Wunderlich. CIMNE, Barcelona, Spain. CD-ROM.
- [69] NEWMARK, N. M. [1959]. 'A method of computation for structural dynamics.' *J. Eng. Mech. Division*, **85**, pp. 167–94.
- [70] ODEN, J. [1969]. 'A general theory of finite elements II. Applications.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **1**, pp. 247–259.
- [71] PARK, K. & P. UNDERWOOD [1980]. 'A variable central difference method for structural dynamic analysis – Part I: Theoretical aspects.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **22**, pp. 241–258.
- [72] PETERS, D. & A. IZADPANAH [1988]. 'hp-version finite elements for space-time domain.' *Comp. Mech.*, **3**, pp. 73–88.
- [73] RANK, E. & O.C. ZIENKIEWICZ [1993]. 'A simple error estimator in the finite element method.' *Com. Num. Meth. Eng.*, **9**, pp. 121–129.
- [74] RANNACHER, R. [1998]. 'Error control in finite element computations.' In *Proceedings NATO Summer School: "Error Control and Adaptivity in Scientific Computing"*. Kluwer, Dordrecht.
- [75] RANNACHER, R. & F. SUTTMEIER [1997]. 'A feed-back approach to error control in finite element methods: Applications to linear elasticity.' *Comp. Mech.*, **19**, pp. 434–446.
- [76] RANNACHER, R. & F. SUTTMEIER [1998]. 'A-posteriori error control in finite element methods: Applications to perfect plasticity.' *Comp. Mech.*, **21**, pp. 123–133.

- [77] REDDY, B. [1986]. *Functional analysis and boundary - value problems: An introductory treatment*. Longman, London and Wiley, New York.
- [78] REED, W. & T. HILL [1973]. 'Triangular mesh methods for neutron transport.' *Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos*.
- [79] REHLE, N. [1996]. *Adaptive finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Bericht-Nr. 20.
- [80] RICCIUS, J. [1997]. *Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen finiten Elementen*. Dissertation, Universität Fridericiana Karlsruhe, Institut für Mechanik.
- [81] RICCIUS, J. & K. SCHWEIZERHOF [1996]. 'Aspects of hierarchical h-adaptive dynamic analyses.' In *Third Conf. on Comp. Struct. Technology*, edited by B. Topping, pp. 61-69. Civil-Comp. Press, Budapest.
- [82] SCHLEUPEN, A., K. MAUTE & E. RAMM [2000]. 'Adaptive FE-procedure in shape optimization.' *Struc. Opt.*, **19**, pp. 282-302.
- [83] SCHWEIZERHOF, K. & E. RAMM [1984]. 'Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analysis.' *Comp. & Struc.*, **18**(6), pp. 1099-1114.
- [84] SELMAN, A. & E. HINTON [1993]. 'Two-dimensional transient dynamic analysis with adaptive mesh refinement.' *Com. Num. Meth. Eng.*, **9**, pp. 825-836.
- [85] STEIN, E. & S. OHNIMUS [1996]. 'Dimensional adaptivity in linear elasticity with hierarchical test spaces for h- and p-refinement processes.' *Eng. with Comp.*, **12**, pp. 107-119.
- [86] STRANG, G. & G. FIX [1973]. *An analysis of the finite element methods*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New York.
- [87] SÜLI, E. [1998]. 'A-posteriori error analysis for finite element approximations of hyperbolic problems.' In *An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws, Lecture notes in Computational Science and Engineering 5*, edited by D. Kröner, M. Ohlberger & C. Rohde, pp. 123-194. Springer Verlag.
- [88] SÜLI, E. & P. HOUSTON [1997]. 'Finite element methods for hyperbolic problems: a-posteriori error analysis and adaptivity.' In *The State of the Art in Numerical Analysis*, edited by I. Duff & G.A. Watson. April 1996, Oxford Press, York.
- [89] SUTTMEIER, F. [1996]. *Adaptive finite element approximation of problems in elastoplasticity theory*. Dissertation, Universität Heidelberg, Institut für Angewandte Mathematik.

- [90] THOMAS, R. & I. GLADWELL [1988]. 'Variable-order variable-step algorithms for second order systems. Part I: The method.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **26**, pp. 39–53.
- [91] THOMÈE, V. [1977]. 'High order local approximations to derivatives in the finite element displacement method.' *Math. Comp.*, **31**, pp. 414–442.
- [92] THOMÈE, V. [1984]. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Springer, New York.
- [93] TOTTENHAM, H. [1970]. 'Basic principles.' In *Finite element techniques in structural mechanics*, edited by H. Tottenham & C. Brebbia, pp. 1–22. Southampton University Press, Southampton.
- [94] UNDERWOOD, P. & K. PARK [1980]. 'A variable central difference method for structural dynamic analysis – Part II: Implementation and performance aspects.' *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **22**, pp. 259–279.
- [95] VERFÜRTH, R. [1994]. 'A-posteriori error estimation and adaptive mesh refinement.' *J. Comput. Appl. Math.*, **50**, pp. 67–83.
- [96] VERFÜRTH, R. [1996]. *A review of a-posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, Chichester.
- [97] WIBERG, N. & F. ABDULWAHAB [1992]. 'An efficient postprocessing technique for stress problems based on superconvergent derivatives and equilibrium.' In *Eccomas Proc.: Numerical methods in engineering*, edited by C. Hirsch, pp. 25–32. Elsevier, Amsterdam.
- [98] WIBERG, N. & F. ABDULWAHAB [1993]. 'Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **36**, pp. 2703–2724.
- [99] WIBERG, N., F. ABDULWAHAB & S. ZIUKAS [1994]. 'Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, pp. 3417–3440.
- [100] WIBERG, N. & X. LI [1993]. 'A postprocessing technique and an a-posteriori error estimate for the Newmark method in dynamic analysis.' *Earthq. Eng. Struc. Dyn.*, **22**, pp. 465–489.
- [101] WIBERG, N. & X. LI [1994]. 'A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semidiscrete finite element method in dynamic analysis.' *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, pp. 3585–3603.
- [102] WIBERG, N. & X. LI [1994]. 'Superconvergent patch recovery of finite element solution and a-posteriori L_2 -norm error estimate.' *Com. Num. Meth. Eng.*, **10**, pp. 313–320.

- [103] WIBERG, N., L. ZENG & X. LI [1992]. ‘Error estimation and adaptivity in elastodynamics.’ *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **101**, pp. 369–395.
- [104] ZENG, L. [1991]. *On adaptive finite element procedures for static and dynamic problems*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Department of Structural Mechanics.
- [105] ZENG, L., N. WIBERG, X. LI & Y. XIE [1992]. ‘A–posteriori local error estimation and adaptive time–stepping for Newmark integration in dynamic analysis.’ *Earthq. Eng. Struc. Dyn.*, **21**, pp. 555–571.
- [106] ZHU, J. & O.C. ZIENKIEWICZ [1990]. ‘The superconvergent patch recovery technique and a–posteriori error estimators.’ *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **30**, pp. 1321–1340.
- [107] ZIENKIEWICZ, O.C. & Y. CHEUNG [1967]. *The finite element method in structural and continuum mechanics: Numerical solution of problems in structural and continuum mechanics*. McGraw–Hill, London, New York.
- [108] ZIENKIEWICZ, O.C. & R. TAYLOR [1989]. *The finite element method Volume 1: Basic formulation and linear problems*. McGraw–Hill, London, New York.
- [109] ZIENKIEWICZ, O.C. & R. TAYLOR [1991]. *The finite element method. Volume 2: Solids and fluid mechanics, dynamics and nonlinearity*. McGraw–Hill, London.
- [110] ZIENKIEWICZ, O.C. & R. TAYLOR [2000]. *The finite element method. Volume 1: The Basis; Volume 2: Solid mechanics*. Butterworth–Heinemann, Oxford.
- [111] ZIENKIEWICZ, O.C., W. WOOD, N. HINE & R. TAYLOR [1984]. ‘A unified set of single step algorithms. Part I: General formulation and applications.’ *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**, pp. 1529–1552.
- [112] ZIENKIEWICZ, O.C. & Y. XIE [1991]. ‘A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis.’ *Earthq. Eng. Struc. Dyn.*, **20**, pp. 871–887.
- [113] ZIENKIEWICZ, O.C. & J. ZHU [1992]. ‘The superconvergent patch recovery and a–posteriori error estimates. Part I: The recovery technique.’ *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**, pp. 1331–1364.
- [114] ZIENKIEWICZ, O.C. & J. ZHU [1992]. ‘The superconvergent patch recovery and a–posteriori error estimates. Part II: Error estimates and adaptivity.’ *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**, pp. 1365–1382.
- [115] ZIENKIEWICZ, O.C. & J. ZHU [1992]. ‘The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement.’ *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **101**, pp. 207–224.

- [116] ZLÁMAL, M. [1978]. 'Superconvergence and reduced integration in the finite element method.' *Math. Comp.*, **32**, pp. 663–685.

Lebenslauf

Name: Astrid Ingeborg Maute geb. Schleupen
Geburtsdatum: 30.4.1970 in Bietigheim (jetzt Bietigheim-Bissingen)
Eltern: Richard und Dagmar Schleupen geb. Römer

1976–1980 Besuch der Schillerschule in Ingersheim
1980–1998 Besuch der Ellental-Gymnasien in Bietigheim-Bissingen
April 1989 Abitur
1989–1995 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart
1992–1993 Studium des Bauingenieurwesens an der University of Calgary
in Calgary, Kanada
1995 Abschluß des Diplom-Ingenieur
1995–1999 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baustatik
der Universität Stuttgart
2000 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am National Center for
Atmospheric Research in Boulder, USA

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J.M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. M. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79-3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 **R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 **J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 **L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyinders.
- 82-2 **K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 **H.-P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.

- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Elementberechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.