

**Stabile Zeitintegrationsalgorithmen
in der nichtlinearen Elastodynamik
dünnwandiger Tragwerke**

von
Detlef Kuhl



Bericht Nr. 22 (1996)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1996

**Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.**

Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Detlef Kuhl

geboren in Stuttgart Bad-Cannstatt

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. E. Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr. rer. nat. K. Kirchgässner
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler
Tag der mündlichen Prüfung:	18. Juli 1996

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1996



Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung numerischer Methoden, welche die stabile Integration des Anfangs–Randwertproblems der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik im allgemeinen und der nichtlinearen Dynamik dünnwandiger Strukturen im speziellen garantieren. Die Integration mit der Semidiskretisierungstechnik basiert auf der sequentiellen Diskretisierung mit Finiten Elementen in Raumrichtung und der Diskretisierung und Integration mit impliziten Zeitintegrationsalgorithmen in Zeitrichtung.

Die räumliche Diskretisierung dünnwandiger Strukturen wird durch ein finites 8–knotiges Serendipity Schalenelement mit Reissner–Mindlin Kinematik realisiert. Die Kinematik des Elementes ist mit einem extensiblen Schalendirektor und dessen Abbildung von der Referenz– in die Momentankonfiguration mit Hilfe des Verschiebungsvektors charakterisiert. Dieses Schalenelement ermöglicht die singularitätenfreie Abbildung endlicher Verschiebungen und Rotationen und die Verwendung dreidimensionaler Stoffgesetze ohne Modifikation. Der Inertialterm des 'Prinzipes der virtuellen Arbeit' kann numerisch effizient, allein mit Hilfe der deformationsunabhängigen Massenmatrix und des Beschleunigungsvektors, formuliert werden. Der Nachteil dieses Schalenelementes, das infolge des extensiblen Schalendirektors auftretende 'Dickenlocking', wird mit Hilfe des 'Enhanced Assumed Strain' Konzeptes kompensiert.

Ein wesentlicher Aspekt bei der Entwicklung von Algorithmen zur Integration des, aus der räumlichen Diskretisierung resultierenden, nichtlinearen semidiskreten Anfangswertproblems ist die numerische Stabilität, die dem Kriterium der Erhaltung der totalen Energie in einem Zeitschritt äquivalent ist. Es werden drei Prinzipien zur Gewährleistung numerischer Stabilität diskutiert:

- die numerische Dissipation (z.B. 'Generalized- α Method'),
- die erzwungene Energieerhaltung ('Constraint Energy Method')
- und die algorithmische Energieerhaltung ('Energy–Momentum Method').

Weiterhin wird der 'Constraint Energy Momentum Algorithm', welcher die kontrollierte numerische Dissipation und die erzwungene Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung im Zeitschritt kombiniert, entwickelt. Dieser implizite und zweiter Ordnung genaue Algorithmus wird durch die Erweiterung der 'Generalized- α Method' mit den konsistent über dem Zeitschritt integrierten semidiskreten Nebenbedingungen der globalen Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren gewonnen.

Ausgewählte Beispiele zeigen die Anwendung der geometrisch nichtlinearen, dynamischen Strukturanalyse auf Beul- und Durchschlagsprobleme sowie die numerischen Eigenschaften der beschriebenen Zeitintegrationsalgorithmen.

Abstract

The objective of this thesis is the development of numerical methods which guarantee the stable integration of the initial boundary value problem given by the geometrically nonlinear elastodynamics especially the nonlinear dynamics of thin walled structures. The semi-discretization technique with Finite Element discretization in space and implicit time integration schemes for discretization and integration in the time domain is used.

Spatial discretization of thin walled structures is done by a finite 8-node Serendipity shell element with Reissner-Mindlin kinematics which includes the thickness stretch of the shell. The element is realized by an extensible shell director and its update from the reference to the current configuration by the difference vector. This element is able to handle finite displacements and rotations and complete three dimensional constitutive equations. A further feature of the shell element is the numerical efficient calculation of the inertia term of the 'Principle of Virtual Work' with acceleration vector and mass matrix being independent of the deformation. In order to avoid artificial stiffening caused by the three dimensional displacement field, termed 'Thickness Locking', the 'Enhanced Assumed Strain' concept is used.

The spatial discretization results in the nonlinear semidiscrete initial value problem. An essential aspect of the development of algorithms for the numerical solution of the nonlinear initial value problem is the numerical stability, which is equivalent to the conservation of total energy within a typical time step. In principle there are three numerical properties which guarantee the satisfaction of the energy condition for numerical stability:

- the algorithmic dissipation (e.g. 'Generalized- α Method'),
- the enforced conservation of energy ('Constraint Energy Method')
- and the algorithmic conservation of energy ('Energy-Momentum Method').

These principles will be discussed. Further the 'Constraint Energy Momentum Algorithm' will be designed. The new algorithm combines controllable algorithmic dissipation and enforced conservation of total energy, linear and angular momentum. This new implicit, second order accurate algorithm is developed by the extension of the 'Generalized- α Method' with constraints via Lagrange multipliers. The constraints result from the global conservation theorems by spatial discretization and consistent integration over the time step.

A set of examples is examined to illustrate the application of time integration methods to the analysis of snap-through and buckling of structures. Furthermore the features of different time integration schemes will be shown.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1992 bis 1996 während meiner Tätigkeit als Stipendiat des Graduiertenkollegs 'Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen' und Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Meinem geschätzten wissenschaftlichen Lehrer Herrn Professor Dr.–Ing. E. Ramm danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein förderndes wissenschaftliches Interesse und die Übernahme des Hauptreferates. Die fruchtbaren Diskussionen während der Anfertigung der Arbeit haben diese entscheidend geprägt.

Herrn Professor Dr. rer. nat. K. Kirchgässner bin ich für den interdisziplinären Austausch, interessante Denkanstöße und die Übernahme des Mitberichtes dankbar.

Herrn Professor Dr.–Ing. D. Dinkler danke ich für die kritischen und wertvollen Anregungen zum Thema der Arbeit sowie für die sorgfältige Durchsicht dieser und die Übernahme des Mitberichtes.

Einen herzlichen Dank möchte ich an die Kollegen Manfred Bischoff, Kai–Uwe Bletzinger, Markus Braun, Fehmi Çirak, André Haufe, Christof Haußer, Kurt Maute, Horst Menrath, Reiner Reitinger, Astrid Schleupen, Martin Schürle, Holger Steeb und Wolfgang Wall, die während meiner Zeit am Institut zu Freunden wurden, richten. Ihre Hilfs– und Diskussionsbereitschaft, die von ihnen geprägte angenehme, den wissenschaftlichen Austausch fördernde, Atmosphäre sowie gemeinsame private Aktivitäten und die infizierende Motivation trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Mein ganz besonderer Dank gebührt meinen Eltern Helga und Franz Kuhl, deren stetiger Rückhalt und Unterstützung, die sie mir während meines Studiums und der Zeit der Erstellung dieser Arbeit gewährten, außergewöhnlich und bewundernswert waren.

Stuttgart, Juli 1996

Detlef Kuhl

Inhalt

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen	13
1 Einleitung	19
1.1 Motivation	19
1.2 Zielsetzung	20
1.3 Duffing Oszillator	21
1.4 Finite Elemente Programmsystem CARAT	27
1.5 Übersicht	27
2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	29
2.1 Kontinuum	29
2.2 Kinematik	29
2.2.1 Referenz- und Momentankonfiguration	29
2.2.2 Lagrange und Euler Formulierung	31
2.2.3 Deformation und Verzerrungen	31
2.3 Kinetik	33
2.4 Bilanzgleichungen	34
2.4.1 Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen	34
2.4.2 Massebilanz	35
2.4.3 Impulsbilanz	36
2.4.4 Drehimpulsbilanz	37
2.4.5 Energiebilanz	38
2.5 Konstitutive Gleichung	38
2.6 Anfangs- Randwertproblem der Elastodynamik	40
2.7 Prinzip der virtuellen Arbeit	41
3 Diskretisierung	43
3.1 Diskretisierungsstrategien	43
3.2 Räumliche Diskretisierung – Semidiskrete Bewegungsgleichung	44
3.3 Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung	46
3.4 Numerische Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren	48
3.4.1 Spektrale Stabilität	48
3.4.2 Energetische Stabilität	49

3.4.3 Genauigkeitsordnung	50
3.4.4 Numerische Dissipation	51
4 Degeneriertes Schalenelement	53
4.1 Geometrie und Kinematik	54
4.2 Diskretisierung	57
4.3 Prinzip der virtuellen Arbeit	58
4.3.1 Externe Lasten	59
4.3.2 Innere Kräfte	59
4.3.3 Tangentensteifigkeit	60
4.3.4 Inertialterme und Massenmatrix	60
4.3.5 Semidiskrete Bewegungsgleichung des Schalenelementes	61
4.4 Bilanzterme	61
4.4.1 Totale Energie	61
4.4.2 Impuls	62
4.4.3 Drehimpuls	63
4.5 Vom Element zur Struktur	64
4.5.1 Semidiskrete Bewegungsgleichung	64
4.5.2 Bilanzterme	64
5 Implizite Einschnitt Zeitintegrationsmethoden	65
5.1 Zeitintegrationsalgorithmus	67
5.1.1 Modifizierte semidiskrete Bewegungsgleichung	67
5.1.2 Zeitdiskretisierung	68
5.1.3 Effektive Strukturgleichung	69
5.1.4 Numerische Eigenschaften und Parameterwahl	69
5.1.5 Lineare Plattenschwingung	71
5.2 Linearisierung und Gleichgewichtssiteration	74
5.2.1 Gâteaux Ableitung der effektiven Strukturgleichung	75
5.2.2 Iterative Lösungsstrategie	75
5.3 Pfadverfolgung und Lastkontrolle	77
5.4 Adaptive Zeitschrittsteuerung	79
5.4.1 Definition des Fehlerästimators und Adaptivität	80
5.4.2 Fehlerästimator nach Zienkiewicz und Xie (1991)	82
5.4.3 Fehlerästimator nach Li, Zeng, Wiberg (1993)	82

5.4.4 Fehlerästimator nach Wiberg, Li (1993)	84
5.5 Duffing Oszillator	85
5.5.1 Effektive Strukturgleichung	85
5.5.2 Linearisierung und iterative Lösung	86
5.5.3 'Generalized-a' Methode	87
5.5.4 Adaptive Zeitschrittsteuerung	89
6 Constraint Energy Momentum Algorithm	93
6.1 Idee und Konstruktion	95
6.2 Basisalgorithmus	97
6.3 Nebenbedingungen – Algorithmische Bilanzgleichungen	97
6.3.1 Energiebilanz	97
6.3.2 Impulsbilanz	98
6.3.3 Drehimpulsbilanz	98
6.4 Konsistente Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen	99
6.4.1 Alternative Methoden	100
6.4.2 Konsistente Integration	100
6.4.3 Integration der algorithmischen Energiebilanz	102
6.4.4 Integration der algorithmischen Impulsbilanz	105
6.4.5 Integration der algorithmischen Drehimpulsbilanz	106
6.5 Variationsproblem mit Nebenbedingungen	108
6.6 Linearisierung	109
6.7 Lösung des erweiterten Systems – Partitionierung	110
6.8 Numerik	112
6.9 Diskussion numerischer Effekte	116
6.9.1 Nichtlineare Plattenschwingung	116
6.9.2 Duffing Oszillator	119
7 Schalenbeulen	125
7.1 Durchschlagsproblem Kreiszyylindersegment	125
7.2 Dynamisches Beulen eines Kreiszylinders	131
8 Weitere numerische Beispiele	135
8.1 'Geworfenes Lineal' in der Ebene	135
8.1.1 Newmark Methode	137
8.1.2 Stabilisierung infolge numerischer Dissipation	139

8.1.3	Stabilisierung infolge erzwungener Energieerhaltung	140
8.1.4	Stabilisierung infolge algorithmischer Energieerhaltung	143
8.1.5	Stabilisierungsmethoden und Langzeitdynamik	144
8.2	Räumliche Bewegung des 'geworfenen Lineales'	144
8.3	'Tumbling Cylinder'	146
8.4	Durchschlagsproblem – Kreiszyylindersegment	148
9	Zusammenfassung und Ausblick	153
9.1	Zusammenfassung und Bewertung	153
9.2	Fazit und Ausblick	155
Literatur	157
A	Anhang	167
A.1	Tensoralgebra	167
A.2	Tensoranalysis	167
A.3	Integralsätze	167
A.4	Alternative Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen	168
A.4.1	Trapezregel	168
A.4.2	Gemischte Integration nach Hughes, Caughey, Liu (1978)	169
Berichte des Instituts für Baustatik	173

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

Vereinbarungen

- In dieser Arbeit wird überwiegend die symbolische Schreibweise verwendet.
- Bei Verwendung der Tensorschreibweise durchlaufen griechische Buchstaben grundsätzlich die Werte 1 und 2, lateinische hingegen die Werte 1, 2 und 3.
- Englischsprachige Eigennamen werden durch Hochkommas gekennzeichnet.
- Literaturangaben befinden sich in den Kapitel an entsprechenden Stellen.

Abkürzungen

CARAT	FEM Programmsystem – 'Computer Aided Research Analysis Tool'
CEM	'Constraint Energy Method'
CEMA	'Constraint Energy Momentum Algorithm'
EAS	'Enhanced Assumed Strain' Konzept
EMM	'Energy–Momentum Method'
FEM	Finite Elemente Methode

Schreibweise

x	Skalar
\mathbf{x}	Vektor oder Matrix
\mathbf{X}	Tensor
X_j	Tensorkomponente

Symbole

(\cdot)	Größe der Momentankonfiguration
(\cdot)	Größe der Referenzkonfiguration
(\cdot)	Größe zu Beginn eines Zeitschrittes
(\cdot)	Markierung besonderer Größen (Erläuterung im Text)
$(\cdot)^*$	Rand- oder Anfangsbedingungen
(\cdot)	Schiefsymmetrische Matrix eines Vektors
$(\cdot)_h$	Finite Elemente Approximation
$(\cdot)_e$	Elementgröße

Mathematische Operationen

$(\cdot)_{,i}$	Partielle Ableitung nach θ^i
$(\cdot)_{,a}$	Richtungsableitung bezüglich des Vektors Δu
$(\dot{\cdot})$	erste Ableitung nach der Zeit
$(\ddot{\cdot})$	zweite Ableitung nach der Zeit
$(\overset{\cdot\cdot}{\cdot})$	dritte Ableitung nach der Zeit
$(\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot})$	vierte Ableitung nach der Zeit
$\nabla(\cdot)$	Gradient
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergenz
$\delta(\cdot)$	Variation
$\Delta(\cdot)$	Inkrement
$\ (\cdot)\ $	L_2 -Norm
$\ (\cdot)\ _E$	Energienorm

Geometrie

θ^i	allgemeine, krummlinige, konvektive Koordinaten
g_{ij}, g^i	ko- und kontravariante Basis
g_{ij}, g^{ij}	ko- und kontravarianter Metriktensor
i, j, α	Indizes $i, j \in [1, 2, 3]^*$, $\alpha \in [1, 2]$
A	Oberfläche
dA, dA	differentielles Oberflächenelement, differentielles orientiertes Flächenelement
V, dV	Volumen, differentielles Volumenelement

Kinematik

B	materieller Körper
∂B	Rand des materieller Körper
$\partial B_u, \partial B_\sigma$	Dirichlet Rand, Neumann Rand
Φ	lineare Abbildung
x	Ortsvektor des materiellen Punktes
\dot{x}	materielle Geschwindigkeit
\ddot{x}	materielle Beschleunigung
u	Verschiebungsvektor des materiellen Punktes
F	materieller Deformationsgradient
C	Cauchy–Green Deformationstensor
E	Green–Lagrange Verzerrungstensor

Kinetik

σ	Cauchy Spannungstensor
P	erster Piola–Kirchhoff Spannungstensor
S	zweiter Piola–Kirchhoff Spannungstensor
t	Cauchy Spannungsvektor
\underline{t}	Nennspannungsvektor
n	Normalenvektor
f	Summe aller auf den Körper wirkender Oberflächen– und Volumenkräfte
m	Moment aller auf den Körper wirkender Oberflächen– und Volumenkräfte
b	massenspezifischer Volumenkraftvektor

Material

C	Elastizitätstensor
ρ	Dichte
λ	Lamé–Konstante
μ	Lamé–Konstante
E	Elastizitätsmodul
ν	Poisson–Zahl

Bilanzen und Arbeitsprinzipien

Y	allgemeine Bilanzgröße
Ψ, Φ, Ξ	allgemeine Feldgröße, allgemeiner Fluß, allgemeine Quelle oder Senke
m	Masse
L	Impulsvektor
J	Drehimpulsvektor
$\mathbf{1}$	Identitätstensor
E	totale Energie
K	kinetische Energie
U	innere oder potentielle Energie
u	massenspezifische freie Helmholtz Energie
\dot{W}_{ext}	Leistung der eingepägten Oberflächen– und Volumenlasten
δW_{ext}	virtuelle Arbeit der externen Lasten
δW_{int}	virtuelle Arbeit der Verzerrungen
δW_{new}	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte
η	Testfunktion

Schale

a_i, a^i	ko- und kontravariante Basis der Schalenmittelfläche
g_i, g^i	ko- und kontravariante Basis der Schalenraumes
a_3	Schalendirektor
θ^3	Dickenkoordinate
h	Schalendicke
r	Ortsvektor der Schalenmittelfläche
v	Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche
w	Differenzvektor des Schalendirektors
T	Rotationstensor des Schalendirektors
s	Rotationsvektor des Schalendirektors
$\det J$	Jacobi Determinante
μ	Schalenshifter
ξ, η	Normierte Elementkoordinaten
P_0, P_1, P_2	Dickenintegrierte der Dichte und des Schalenshifters
NN	Anzahl der Elementknoten
m, n	Knotenzähler (Elementknoten)

Struktur

M	Massenmatrix
C	Dämpfungsmatrix
K	Tangentensteifigkeitsmatrix
K_E	elastischer Anteil der Steifigkeitsmatrix
K_U	Anfangsverschiebungsmatrix
K_G	geometrische Steifigkeitsmatrix
N	Strukturvektor der inneren Kräfte
R	Strukturvektor der äußeren Kräfte
x	Ortsvektor der Strukturknoten
u	Strukturverschiebungsvektor
\dot{u}, \ddot{u}	Strukturgeschwindigkeits- und -beschleunigungsvektor
l	Impulsmatrix
a	Projektionsmatrix der Strukturfreiwerte auf den dreidimensionalen Raum
NE	Anzahl der Elemente
NEQ	Anzahl der Strukturfreiheitsgrade
e	Elementzähler

Zeitdiskretisierung und Zeitintegration

t	Zeit zu Beginn der Zeitintegration – Referenzzeit
T	Gesamtzeit der Zeitintegration
t	aktuelle Zeit – Zeit am Ende eines Zeitschrittes
\bar{t}	Zeit zu Beginn eines Zeitschrittes
Δt	Zeitschritt
τ	variable Zeit in einem Zeitschritt
NT	Anzahl der Zeitschritte
n	Zeitzähler
A	Vergrößerungsmatrix
λ_i	Eigenwerte der Matrix A
λ_R	Realteil der konjugiert komplexen Eigenwerte der Matrix A
λ_I	Imaginärteil der konjugiert komplexen Eigenwerte der Matrix A
T_p	Periodendauer einer Schwingung
ρ_t	Spektralradius der Zeitintegration
ρ_∞	Spektralradius für den Grenzübergang $\Delta t/T_p \rightarrow \infty$
ξ	numerische Dämpfungsrate
e_t	Abbruchfehler der Zeitintegration
β	Newmark Parameter
δ	Newmark Parameter
α_m	Zeitintegrationsparameter zur Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung
α_f	Zeitintegrationsparameter zur Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung
W_{ext}	Arbeit der eingepprägten Oberflächen- und Volumenlasten im Zeitschritt
F	Funktional der effektiven Strukturgleichung
$F_{,u}$	effektive Strukturgleichung
$F_{,uu}$	Richtungsableitung der effektive Strukturgleichung
k	Iterationsindex der Gleichgewichtsiteration
ε	Parameter der Richtungsableitung
η_u	Konvergenzschranke der Verschiebungen
e	Fehlerästimator Verschiebungen
\dot{e}	Fehlerästimator Geschwindigkeiten
η	relative Fehlerästimator
η_e	Toleranz des Fehlermaßes der adaptiven Schrittweitensteuerung
ν_1	Untergrenze des Fehlermaßes der adaptiven Schrittweitensteuerung
ν_2	Obergrenze des Fehlermaßes der adaptiven Schrittweitensteuerung

'Constraint Energy Momentum Algorithm'

Z_E	Nebenbedingung der Energieerhaltung im Zeitschritt
Z_L	Nebenbedingung der Impulserhaltung im Zeitschritt
Z_J	Nebenbedingung der Drehimpulserhaltung im Zeitschritt
Z	Vektor der Nebenbedingungen $Z^T \equiv [Z_E, Z_L^T, Z_J^T]$
λ_E	Lagrange Multiplikator der Energieebenbedingung
λ_L	Lagrange Multiplikator der Impulsnebenbedingung
λ_J	Lagrange Multiplikator der Drehimpulsnebenbedingung
λ	Vektor der Lagrange Multiplikatoren $\lambda^T \equiv [\lambda_E, \lambda_L^T, \lambda_J^T]$
η_λ	Konvergenzschranke der Lagrange Multiplikatoren
β', δ'	Parameter der konsistenten Integration der Nebenbedingungen

1 Einleitung

1.1 Motivation

Zeitintegrationsalgorithmen sind in der linearen Strukturmechanik fast schon solange erfolgreich im Einsatz, wie die Methode der Finiten Elemente. Die Betrachtung von geometrisch nicht-linearem Strukturverhalten erschließt neue Möglichkeiten und birgt leider auch neue Problematiken der numerischen Strukturmechanik.

Die Möglichkeiten erstrecken sich von der Integration des dynamischen Antwortverhaltens von Strukturen, deren Tragverhalten von der Deformation geprägt wird, bis zu der Beschreibung des hochdynamischen Wechsels von Beulmoden beim Stabilitätsversagen eines Tragwerkes. Zwischen diesen Extremen breitet sich ein weiter Fächer von Anwendungen der nichtlinearen Strukturmechanik aus. Beispielhaft seien hier freie Bewegungen von Strukturen mit endlichen Rotationen und Durchschlagsprobleme erwähnt. Besonders interessant ist die dynamische Betrachtung von Durchschlags- oder Beulproblemen. Derartige Vorgänge liefern bei einer geometrisch nicht-linearen statischen Analyse eine Vielzahl von Gleichgewichtspfaden. Eine eindeutige Lösung dieser Problematik kann erst durch die dynamische Betrachtung des Vorganges gewonnen werden. Ausgenommen von dieser Eindeutigkeit ist das Phänomen der dynamischen Instabilität im Sinne von Lyapunov (reprint 1992), wie es zum Beispiel in Basar, Eller, Krätzig (1990), Krätzig, Eller (1992) und Nawrotzki (1992) untersucht wird. Derartige dynamische Systeme können mit den in der vorliegenden Arbeit untersuchten Algorithmen zwar in der Zeit integriert werden, ein Kriterium zur Beurteilung der dynamischen Stabilität nach Lyapunov ist jedoch noch zu ergänzen.

Die Problematik infolge der geometrischen Nichtlinearität ist der Verlust der numerischen Stabilität klassischer Zeitintegrationsverfahren bei Integration des entsprechenden semidiskreten Anfangswertproblems. In der linearen Dynamik unbedingt stabile, robuste und erfolgreich angewandte Algorithmen kollabieren bei der Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichung nach zwei grundsätzlich zu differenzierenden 'Mechanismen': dem Konvergenz- und dem Stabilitätsversagen (Abbildung 1.1). Die Nichtlinearität des strukturdynamischen Problems erfordert zur numerischen Integration die Linearisierung und eine iterative Lösung. Die Konvergenz der iterativen Lösungsstrategie hängt nun entscheidend von der Strukturbewegung und der Wahl der Zeitschrittgröße ab. Ist die Dynamik der Struktur in Relation zum gewählten Zeitschritt zu hochfrequent, kann keine konvergente Lösung erzielt werden, Konvergenzversagen tritt auf! Das zweite Versagensphänomen ist das unvermittelt auftretende numerische Stabilitätsversagen von klassischen Integrationsalgorithmen, das in instabilen, aber konvergenten Lösungen resultiert. Demzufolge sind instabile Integrationen klassischer Zeitintegrationsverfahren nicht zu erkennen, was eine immense Gefahr bei der Anwendung solcher Verfahren birgt, die Zuverlässigkeit der Integration ist in Frage gestellt!

1.2 Zielsetzung

Die vorangehende Darstellung der Problematik der Zeitintegration beschreibt gleichzeitig die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit. Diese Problematik der Zeitintegration, Kriterien zur Beurteilung der Konvergenz sowie der numerischen Stabilität und Lösungsvorschläge zur Behebung der numerischen Defekte sind in Abbildung 1.1 zusammengefasst. Ziel ist die Generierung eines robusten Zeitintegrationsverfahrens, das sowohl numerisch stabil ist, als auch mit vernünftig großen Zeitschritten zu konvergenten und genauen Lösungen führt. Angewendet werden die Zeitintegrationsverfahren auf die Dynamik von dünnwandigen Strukturen mit Schalenelementen, welche die Abbildung von endlichen Deformationen und Rotationen erlauben.

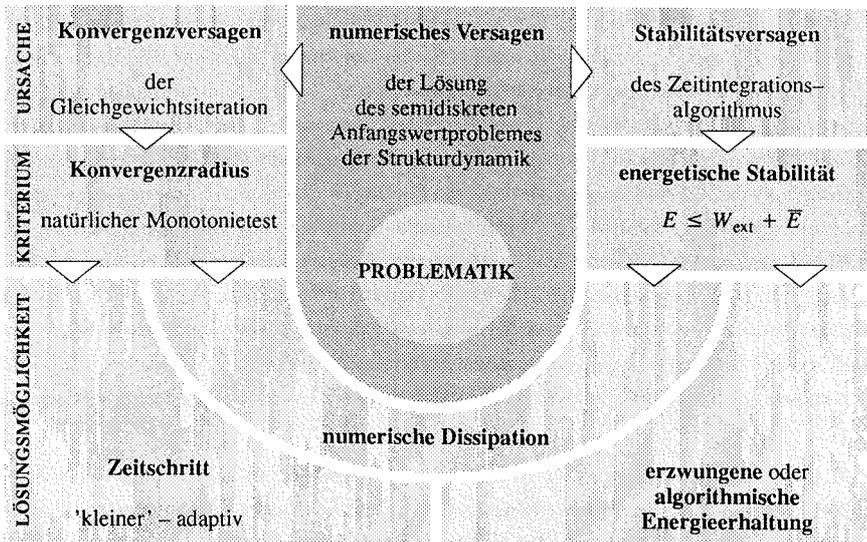


Abbildung 1.1 Klassifizierung numerischen Versagens und Stabilisierungsstrategien

Die Beurteilung der Konvergenz oder das Konvergenzversagen der Newton-Raphson Iteration zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme wird in der Literatur (z.B. Deuffhard, Hohmann (1993)) ausführlich diskutiert und spielt daher in der vorliegenden Arbeit nur eine untergeordnete Rolle. Ein im Algorithmus überprüfbares Konvergenzkriterium ist der natürliche Monotonietest. Wird die Monotoniebedingung nicht erfüllt, gibt es in der Mathematik lediglich zwei Möglichkeiten, eine Lösung zu finden: Die Verwendung eines verbesserten Startwertes oder die Verwendung einer kleineren Schrittweite. Der Startwert der Iteration ist in der Strukturodynamik durch die Systemvariablen zu Beginn und die äußeren Lasten am Ende des Zeitschrittes vorgegeben. Damit bleibt zum Erreichen einer konvergenten Lösung die Möglichkeit, die Schrittweite anzupassen. Hier liegt der Gedanke nahe, eine adaptive Schrittweitenkontrolle, wie sie für klassische Zeitintegrationsalgorithmen in der linearen Dynamik publiziert wird, auch im Nichtlinearen an-

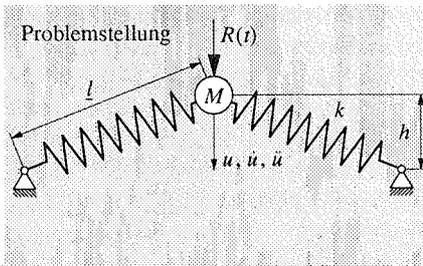
zuwenden. Diese Möglichkeit soll untersucht werden. Alternativ zur Schrittweitensteuerung ermöglicht die numerische Dissipation strukturdynamisch uninteressanter höherfrequenter Moden der Strukturantwort konvergente Lösungen der Newton–Raphson Iteration.

Der Kernpunkt der Arbeit ist die numerische Stabilität der Zeitintegrationsalgorithmen. Definiert wird die Stabilität der Zeitintegration mit dem Energiekriterium nach Belytschko, Schoeberle (1975). Nach diesem Kriterium ist ein Zeitintegrationsverfahren genau dann numerisch stabil, wenn die Energiebilanz im Zeitschritt erfüllt oder Energie numerisch dissipiert wird. Zur Befriedigung dieses Kriteriums stehen algorithmisch zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Die erste Möglichkeit ist die Aufbringung numerischer Dämpfung, welche die Dissipation von Energie und damit die numerische Stabilität garantiert. Die zweite Möglichkeit ist die Erhaltung der Energie im Zeitschritt, die sowohl algorithmisch als auch mit einer Nebenbedingung realisiert werden kann. Von den Verfahren mit numerischer Dissipation wird beispielhaft die 'Generalized- α ' Methode nach Chung, Hulbert (1993) zur Anwendung in der nichtlinearen Dynamik erweitert und untersucht. Als algorithmisch energieerhaltende Methode soll die 'Energy–Momentum Method' von Simo, Tarnow (1992), die neben der Erhaltung der totalen Energie auch die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls im Zeitschritt gewährleistet, auf das Schalelement angewandt und zu Vergleichsrechnungen herangezogen werden. Weiterhin soll als Vertreter der Methoden mit erzwungener Energieerhaltung im Zeitschritt die 'Constraint Energy Method' von Hughes, Caughey, Liu (1978) studiert werden.

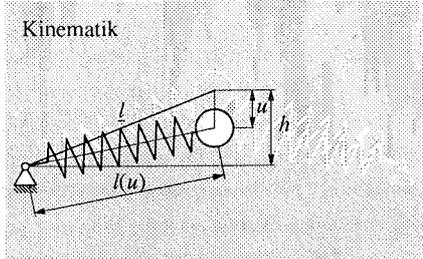
Als einzige numerische Eigenschaft von Zeitintegrationsmethoden, die sowohl die Konvergenz bei endlichen Zeitschritten, als auch die stabile Integration garantiert, sticht numerische Dissipation aus Abbildung 1.1 hervor. Das bedeutet, Algorithmen mit dieser Eigenschaft vereinigen numerische Stabilität und positive Konvergenzeigenschaften. Nachteilig an diesen Methoden ist hingegen gerade die algorithmische Dissipation von Energie. Dies hat zur Folge, daß diese Algorithmen bei der Integration von Langzeitdynamiken unbefriedigende Ergebnisse liefern. Um die positiven Eigenschaften numerisch dissipativer Verfahren zu bewahren und simultan ihren Nachteil, den Energieverlust, zu eliminieren, wird der 'Constraint Energy Momentum Algorithm' entwickelt und diskutiert (siehe auch Kuhl, Ramm (1996)). Dieser Algorithmus kombiniert numerische Dissipation und die erzwungene Erhaltung der globalen Bilanzgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls.

1.3 Duffing Oszillator

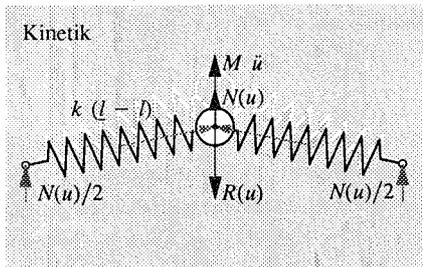
Die Duffing Gleichung ist ein in der Literatur sehr beliebter Illustrator nichtlinearer Phänomene der Dynamik. Thompson, Stewart (1986) und Wiggins (1990) zum Beispiel führen den 'Chaos' Begriff mit Untersuchungen von Lösungen spezieller Duffing Gleichungen ein. Argyris, Faust, Haase (1994) und Argyris, Mlejnek (1988b/1991) zeigen chaotische Phänomene der Duffing Gleichung physikalischer Systeme. So wird ein druckbelasteter Balken in Querrichtung beschleunigt oder die vorgespannte Saite mit zentraler Punktmasse betrachtet.



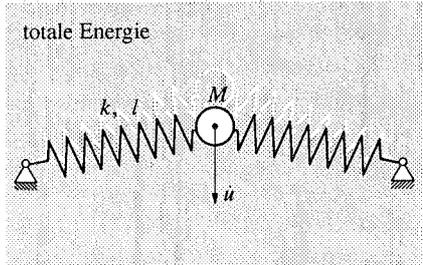
Federlänge	Höhe
$\underline{l} = 1 \text{ m}$	$h = 0.1 \text{ m}$
Punktmasse	lineare Feder
$M = 10 \text{ kg}$	$k = 2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{N}}{\text{m}}$
äußere Last	(bezogene Steifigkeit)
$R(t)$	



Länge in der Momentankonfiguration
$l(u) = l = \sqrt{\underline{l}^2 + u^2} - 2 u h$
Länge in der Referenzkonfiguration
\underline{l}
Längenänderung der Feder
$l - \underline{l} = \underline{l} - \sqrt{\underline{l}^2 + u^2} - 2 u h$



Inertialkraft
$M \ddot{u}$
Federkräfte
$k(l - \underline{l}) = k \underline{l} - k \sqrt{\underline{l}^2 + u^2} - 2 u h$
Innere Kraft
$N(u) = 2 k (h - u) \frac{l - \underline{l}}{l}$



kinetische Energie
$K = \frac{1}{2} M \dot{u}^2$
potentielle Energie
$U = k (l - \underline{l})^2$
Ableitung der potentiellen Energie
$U_{,u}(u) = 2k (l - \underline{l}) \frac{u - h}{l} = N(u)$

Abbildung 1.2 Duffing Oszillator – Problemstellung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Bewegung im bistabilen Potential als spezielle Form der Duffing Gleichung untersucht. Das physikalische Äquivalent ist das in Abbildung 1.2 dargestellte, sehr einfache Durchschlagsproblem eines geometrisch nichtlinearen Schwingers mit linearen, masselosen Federn und einer Punktmasse. Dieses physikalische Problem wurde bereits von Lim, Crisfield (1994) zur Betrachtung der numerischen Stabilität von Zeitintegrations-

verfahren verwendet. Abbildung 1.2 zeigt das schwingungsfähige System, die Kinematik, die Kinetik und die Berechnung der totalen Energie des Systems. Die aktuelle Federlänge l wird durch geometrische Betrachtungen in der Verschiebung u ausgedrückt. Daraus folgen unter der Annahme einer linearen Federkennlinie sofort die Federkräfte, deren vertikale Komponenten die innere Kraft $N(u)$ ergeben. Die totale Energie $E(u, \dot{u})$ setzt sich aus der kinetischen Energie der Punktmasse $K(\dot{u})$ und der in den beiden linearen Federn gespeicherten potentiellen oder inneren Energie $U(u)$ zusammen. Weiterhin ist die Identität der inneren Kraft $N(u)$ und der Ableitung des Potentials nach der Verschiebung $U_{,u}(u)$ gezeigt.

Die Kurven der potentiellen Energie, der Federkräfte, der inneren Kraft und der Verschiebungsableitung der inneren Kraft in Abhängigkeit von der Verschiebung sind in Abbildung 1.3 illustriert. Die potentielle Energie zeigt für $R(t) = 0$ drei Gleichgewichtslagen, die der Bedingung $U_{,u}(u) = N(u) = 0$ genügen. Von diesen Gleichgewichtslagen sind die Positionen $u = 0$ und $u = 0.2 \text{ m}$ mit $U_{,uu}(u) = N_{,uu}(u) > 0$ (Berechnung siehe Abbildung 5.14) stabil. Die dritte Gleichgewichtslage $u = 0.1 \text{ m}$ mit $U_{,uu}(u) < 0$ ist instabil. Anschaulich bedeutet die physikalische Stabilität, daß bei einer infinitesimalen Abweichung von der Gleichgewichtslage eine Bewegungstendenz hin zur Gleichgewichtslage besteht. Im anderen Fall, der Bewegungstendenz weg von der Gleichgewichtslage, ist diese physikalisch instabil. Die Kurve der inneren Kraft bildet im statischen Fall die Last-Verschiebungs-Kurve.

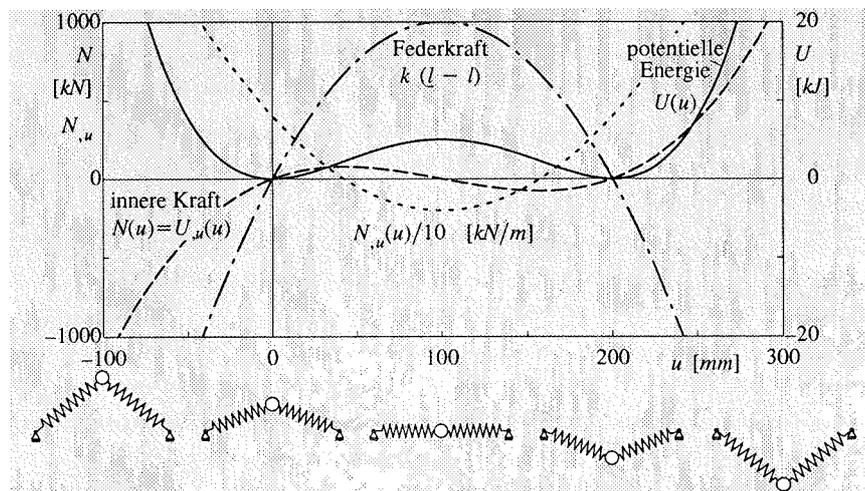


Abbildung 1.3 Duffing Oszillator – Federkräfte, innere Kraft und potentielle Energie

Numerische Experimente werden anhand des in Abbildung 1.4 dargestellten Anfangswertproblems durchgeführt. Betrachtet wird die autonome Bewegungsgleichung mit einer Anfangsver-

schiebung \underline{u}^* und der Anfangsgeschwindigkeit Null. Die Anfangsbeschleunigung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung.

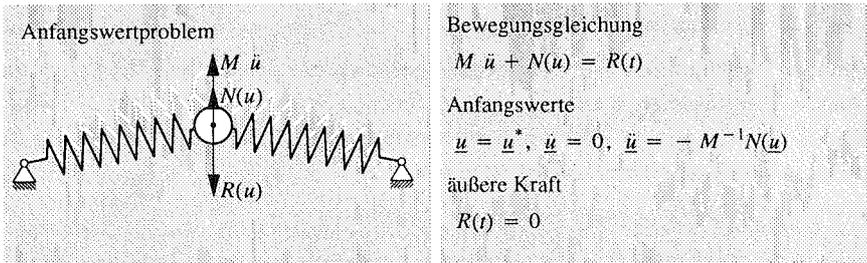


Abbildung 1.4 Duffing Oszillator – Anfangswertproblem

Die kritische Anfangsverschiebung $\underline{u}_{\text{krit}}^*$, die der Bedingung $U(\underline{u}_{\text{krit}}^*) = U(\underline{u} = 0.1 \text{ m})$ genügt, erlaubt die in Abbildung 1.5 dargestellte Klassifizierung der Dynamik in Oszillationen um eine und zwei stabile Gleichgewichtslagen. Anfangsverschiebungen, die der kritischen Anfangsverschiebung entsprechen – in Abbildung 1.5 mit 'instabil' gekennzeichnet – resultieren in einem dynamischen Verzweigungsproblem an der Stelle $\underline{u} = 0.1 \text{ m}$, wo die Bewegung theoretisch zum Erliegen kommt oder bei $\underline{u}^* = 0.1 \text{ m}$ nicht initiiert wird. Numerisch von Interesse sind zum einen kleine Anfangsverschiebungen, die zu einer quasi linearen Oszillation um eine Gleichgewichtslage führen und zum anderen hochgradig nichtlineare Oszillationen um zwei stabile Gleichgewichtslagen. Anfangsverschiebungen in der Nähe der kritischen Anfangsverschiebung führen zu deutlichen Unterschieden bei der numerischen Integration des Anfangswertproblems mit verschiedenen Zeitintegrationsverfahren, Zeitschritten oder Zeitintegrationsparametern.

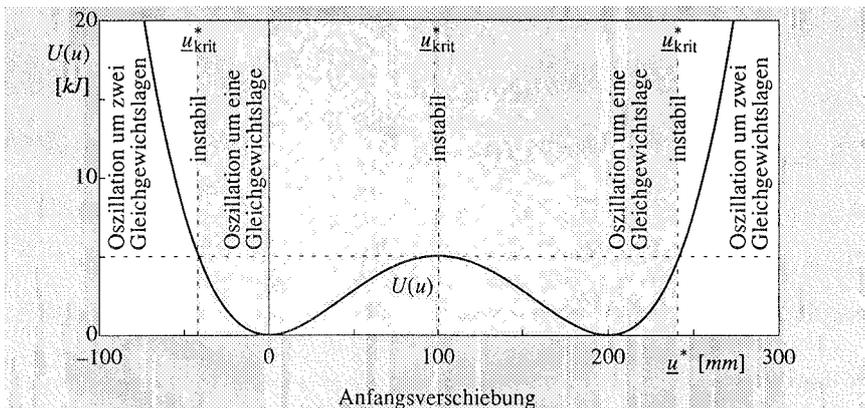


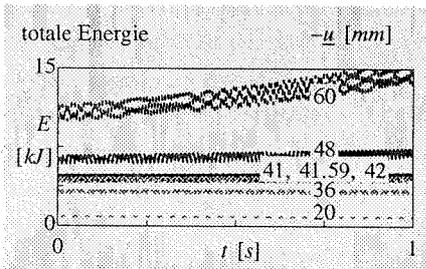
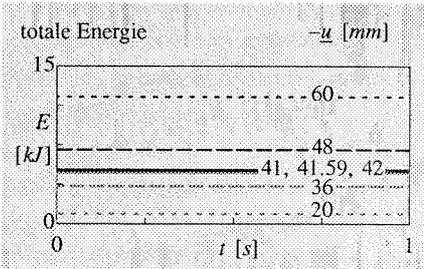
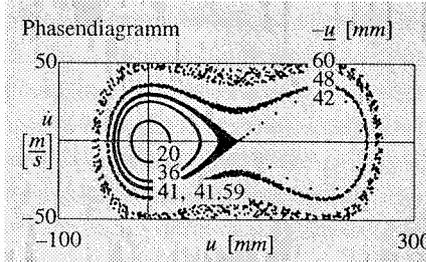
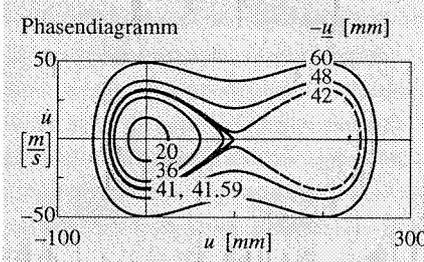
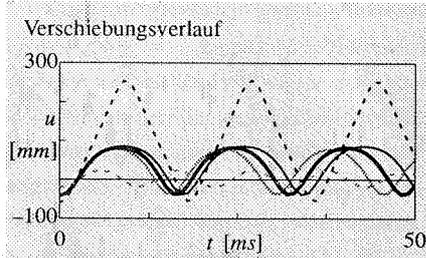
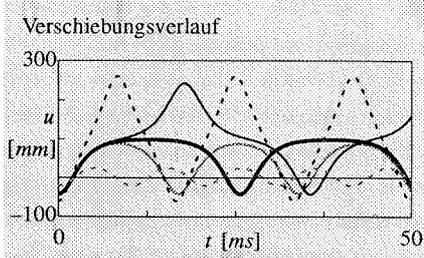
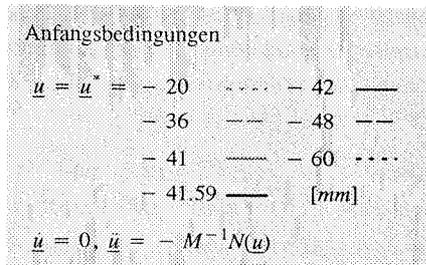
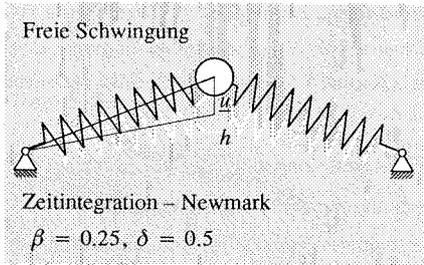
Abbildung 1.5 Duffing Oszillator – Klassifizierung der Dynamik

Die numerischen Lösungen des beschriebenen Anfangswertproblems mit dem Zeitintegrationsalgorithmus nach Newmark (1959) in der Formulierung der konstanten mittleren Beschleunigung

gungsmethode ($\beta = 0.25$, $\delta = 0.5$) sind für verschiedene Anfangsbedingungen \underline{u}^* und Zeitschritte Δt in Abbildung 1.6 zusammengefaßt. Ohne auf die Vorgehensweise zur numerischen Lösung dieses Problems einzugehen – dieses wird in Kapitel 5.5 eingehend erläutert – sollen hier die Ergebnisse diskutiert werden:

Der Zeitschritt $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ liefert plausible Verschiebungsverläufe. Eine kleine Anfangsverschiebung $\underline{u}^* = -20 \text{ mm}$ ergibt einen nahezu harmonischen Schwingungsverlauf, während die große Anfangsverschiebung $\underline{u}^* = -60 \text{ mm}$ fast zu einem dreiecksförmigen Verlauf führt. Interessant sind die Anfangsverschiebungen $\underline{u}^* = -41 \text{ mm}$ und $\underline{u}^* = -42 \text{ mm}$ in der Nähe der kritischen Auslenkung $\underline{u}_{\text{krit}}^* = -41.59 \text{ mm}$; beide ergeben eine periodische Verschiebungslösung um eine oder zwei stabile Gleichgewichtslagen. Die kritische Anfangsverschiebung resultiert in einer Bewegung, die sich der instabilen Gleichgewichtslage $u = 100 \text{ mm}$ langsam nähert und anschließend zur Ausgangslage zurückführt. Die periodische Wiederholung dieses Vorganges läßt den Schluß zu, daß bei der Zeitintegration ein – wenn auch geringer – Amplitudenfehler ein numerisch zufälliges Durchschlagen verhindert. Für einen längeren Integrationszeitraum $T = 1 \text{ s}$ sind in Abbildung 1.6 weiterhin das Phasendiagramm und der Verlauf der totalen Energie dargestellt. Das Phasendiagramm bestätigt die obigen Aussagen bezüglich der Periodizität der Bewegungen. Anfangsverschiebungen nahe $\underline{u}_{\text{krit}}^*$ zeigen eine periodische Bewegung nahe der Separatrix – welche den Phasenraum in Zustände, die zur Bewegung um zwei Gleichgewichtslagen und eine Gleichgewichtslage führen, trennt – ohne diese zu kreuzen und die kritische Anfangsverschiebung liefert nahezu die Separatrix. Die Energieverläufe zeigen die Erhaltung der totalen Energie über den gesamten Integrationszeitraum. Diese Lösungen werden weiteren Untersuchungen – vor allem mit größeren Zeitschritten – als Referenzlösung dienen.

Wird der Zeitschritt um den Faktor 10 vergrößert, zeigen sich Schwachpunkte der numerischen Integration. Während die kleine und große Anfangsverschiebung zu nahezu unveränderten Verschiebungsverläufen führen, ergeben sich bei den Anfangsverschiebungen nahe $\underline{u}_{\text{krit}}^*$ qualitative Fehler im Zeitverlauf der Verschiebungen. Dieser Fehler drückt sich zu Beginn der Zeitintegration in zu klein berechneten Amplituden aus. Die numerische Lösung zu $\underline{u}^* = -42 \text{ mm}$ kreuzt bereits im ersten Zyklus die Separatrix, was zu einer Bewegung um eine stabile Gleichgewichtslage führt; gegen Ende des Integrationszeitraumes wird die Separatrix nochmals gekreuzt, was die Bewegung um zwei stabile Gleichgewichtslagen und einen Anstieg der Energie bedeutet. Dieser Energiezuwachs ist allerdings zu klein, um im Energieverlauf sichtbar zu werden. Anders ist dies für die Anfangsverschiebungen $\underline{u}^* = -48 \text{ mm}$ und $\underline{u}^* = -60 \text{ mm}$; das Phasendiagramm der beiden Lösungen weitet sich mit der zunehmenden Integrationszeit auf und die totale Energie steigt an. Wie in dieser Arbeit noch gezeigt werden wird, bedeutet der Anstieg der totalen Energie, daß das Zeitintegrationsverfahren numerisch nicht stabil ist. Das bedeutet, daß der in der Anwendung für lineare Probleme unbedingt stabile Newmark Algorithmus (vgl. z.B. Bathe 1986) in der nichtlinearen Dynamik nicht unbedingt stabil ist!



$\Delta t = 0.1 \text{ ms}$

$\Delta t = 1 \text{ ms}$

Abbildung 1.6 Duffing Oszillator – Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

1.4 Finite Elemente Programmsystem CARAT

Sämtliche im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Algorithmen der nichtlinearen dynamischen Strukturanalyse wurden in das Finite Elemente Programmsystem CARAT – 'Computer Aided Research Analysis Tool' (Stegmüller, Bletzinger, Kimmich (1987), Bletzinger (1990), Kimmich (1990)) – implementiert und zum Studium dieser Algorithmen anhand der dargelegten Beispiele verwendet. Das 1985 aus dem Programm NISA 80 (Häfner, Ramm, Sättele, Stegmüller (1980)) am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entstandene und in zahlreichen Dissertationen weiterentwickelte Forschungsprogramm bildet die programmtechnische Basis der vorliegenden Arbeit.

1.5 Übersicht

Kapitel 2 befaßt sich mit den Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Basierend auf der Beschreibung der Kinematik und Kinetik werden die globalen und lokalen Bilanzgleichungen der Energie, des Impulses und des Drehimpulses im Rahmen der generalisierten Bilanzgleichung angegeben. Die Verbindung von Kinetik und Kinematik wird durch die Bereitstellung der konstitutiven Beziehung für hyperelastisches, isotropes Material geschaffen. Das durch die lokale Impulsbilanz, die Neumann – und Dirichlet Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen gebildete Anfangs– Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik wird durch die Überführung der lokalen Impulsbilanz in die schwache Form, dem Prinzip der virtuellen Arbeit, einer numerischen Analyse mit der Methode der finiten Elemente zugänglich gemacht.

Kapitel 3 gibt einen Überblick über die Diskretisierungsstrategien des Anfangs–Randwertproblems der nichtlinearen Elastodynamik. Aus den Alternativen wird die Semidiskretisierungstechnik mit der sequentiellen Raum–Zeitdiskretisierung ausgewählt, sowie die räumliche und zeitliche Diskretisierung erläutert. Den Abschluß von Kapitel 3 bilden die Klassifizierung und die Diskussion numerischer Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren.

In Kapitel 4 wird die räumliche Diskretisierung dünnwandiger Strukturen mit degenerierten Schalenelementen, die endliche Verschiebungen und Rotationen zulassen, erläutert. Hierbei wird im speziellen die Beschreibung der Kinematik, die Diskretisierung des Trägheitstermes aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit und die Diskretisierung der globalen Bilanzgleichungen betrachtet.

Thema von Kapitel 5 ist die implizite Zeitintegration des aus der räumlichen Diskretisierung resultierenden, semidiskreten Anfangswertproblems mit Einschrittverfahren. Anhand des generalisierten Zeitintegrationsalgorithmus nach Chung, Hulbert (1993) wird die Strategie zur Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung der nichtlinearen Strukturmechanik erläutert. Diese Strategie gliedert sich in die Entwicklung des Zeitintegrationsalgorithmus und die Linearisierung der entstehenden nichtlinearen algebraischen Gleichung, der sogenannten effektiven Strukturgleichung. Ausführungen zu Verfahren adaptiver Zeitschrittsteuerung runden dieses Kapitel ab.

Kapitel 6 ist dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten 'Constraint Energy Momentum Algorithm' gewidmet. Einem Exkurs über Stabilisierungsmaßnahmen von Algorithmen zur Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichung folgt die Konstruktion des entwickelten Algorithmus. Diese gliedert sich in die Formulierung des in Kapitel 5 vorgestellten generalisierten Algorithmus als Stationaritätsproblem und dessen Erweiterung um die Nebenbedingungen der algorithmischen Erhaltung von totaler Energie, Impuls und Drehimpuls. Ferner wird die Lösungsstrategie des entstandenen erweiterten Systemes von nichtlinearen algebraischen Gleichungen vorgestellt und der numerische Aufwand für das vorgeschlagene Verfahren diskutiert. Numerische Effekte infolge der in das System eingebundenen Nebenbedingungen werden anhand von Beispielen demonstriert.

Kapitel 7 zeigt typische Anwendungsbeispiele der nichtlinearen, numerischen Strukturdynamik. Behandelt werden die statische und dynamische Betrachtungsweise eines Durchschlagsproblems und die numerische Beschreibung des dynamischen Wechsels von Beulmoden.

Zuletzt werden in Kapitel 8 akademische Beispiele behandelt, welche die Eigenschaften verschiedener Zeitintegrationsverfahren sehr prägnant demonstrieren. Diese Eigenschaften sind der Verlust unbedingter Stabilität der Newmark Methode in der nichtlinearen Dynamik, die Energie-dissipation von Algorithmen mit numerischer Dämpfung, die Wirkung von numerischen Stabilisierungsmaßnahmen und das Versagen von Zeitintegrationsalgorithmen bei der iterativen Lösung der effektiven Strukturgleichung.

Wie bereits in der Einleitung wird das Beispiel des Duffing Oszillators in der Arbeit begleitend verwendet, um anhand dieses simplen nichtlinearen Schwingers numerische Phänomene verschiedener Zeitintegrationsverfahren, Algorithmen zur adaptiven Zeitschrittsteuerung und die Wirkung der verwendeten Nebenbedingungen zu demonstrieren.

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik beschreibt die Bewegung und Deformation von Körpern unter der Einwirkung von Kräften. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll lediglich eine kurze Einführung in die nichtlineare Kontinuumsmechanik gegeben werden. Dabei wird auf die Bereitstellung der Grundlagen für die Ausführungen in den folgenden Kapiteln und auf eine zu diesen Kapiteln konforme Nomenklatur besonders Wert gelegt. Ausführliche Darstellungen finden sich unter anderem in Truesdell, Noll, (1965), Green, Zerna (1968), Malvern (1969), Becker, Bürger (1975), Marsden, Hughes (1983), Ciarlet (1988), Stein, Barthold (1992), Betten (1993) und Altenbach, Altenbach (1994).

2.1 Kontinuum

Basis der Kontinuumsmechanik fester Körper ist die Idealisierung realer Strukturen als materielles Punktkontinuum. Hierbei wird der materielle Körper oder das Kontinuum \mathfrak{B} von einer zusammenhängenden Menge materieller Punkte \mathcal{M} gebildet. Die materiellen Punkte sind dabei nach der deterministischen Theorie jederzeit identifizierbar und ihr kontinuierlicher Zusammenhang bleibt bei der Deformation erhalten. Die am Rand des Körpers liegenden materiellen Punkte bilden die Oberfläche, die mit $\partial\mathfrak{B}$ bezeichnet wird.

Für die vorliegende Arbeit wird das allgemeine Kontinuum auf ein Kontinuum mit folgenden Charakteristika reduziert:

- das Kontinuum ist homogen
- die Körper sind hyperelastisch deformierbar
- kleine Verzerrungen werden vorausgesetzt (beliebig große Verschiebungen sind zulässig)
- das Saint Venant–Kirchhoff Materialmodell ist gültig
- jeder materielle Punkt hat drei translatorische Freiheitsgrade (Boltzmann Kontinuum).

2.2 Kinematik

2.2.1 Referenz- und Momentankonfiguration

Die Lage und die Bewegung eines materiellen Körpers \mathfrak{B} wird durch die bijektive und stetige Abbildung

$$\chi : \begin{cases} \mathfrak{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{M}, t) \mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

der materiellen Punkte \mathcal{M} auf die Raumpunkte \mathbf{x} beschrieben. Eine bijektive und stetige Abbildung wird als Konfiguration, topologische Abbildung oder Homöomorphismus bezeichnet. Die

Konfiguration (2.1), die den aktuellen Zustand des Körpers beschreibt, ist die Momentankonfiguration B , die in der Literatur auch als Grundzustand bezeichnet wird. Durch die Wahl eines festen Zeitpunktes $t \rightarrow \underline{t}$ wird die Konfiguration zur Referenzkonfiguration \underline{B} , die durch die Gleichung (2.1) äquivalente Abbildung

$$\underline{\chi} : \begin{cases} \mathfrak{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \underline{B} \subset \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{M}, t) \mapsto \underline{x} = \underline{\chi}(\mathcal{M}, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

bestimmt ist. Mit der Definition der Referenzkonfiguration oder des Ausgangszustandes können die materiellen Punkte durch ihre Lage im Raum zum Zeitpunkt \underline{t} identifiziert werden. Durch die Komposition der Abbildungen $\underline{\chi}^{-1}$ und χ wird die Deformation durch die ebenfalls bijektive und stetige Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \underline{B} \rightarrow B \\ \underline{x} \mapsto x = \Phi(\underline{x}, t, t) = (\chi \circ \underline{\chi}^{-1})(\underline{x}, t, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

beschrieben. Mit der Abbildung Φ werden die räumlichen Punkte \underline{x} auf die räumlichen Punkte x abgebildet. Materieller Körper, Referenz- und Momentankonfiguration sowie die Definition der Abbildungsfunktionen $\underline{\chi}$, χ und Φ sind in Abbildung 2.1 verdeutlicht.

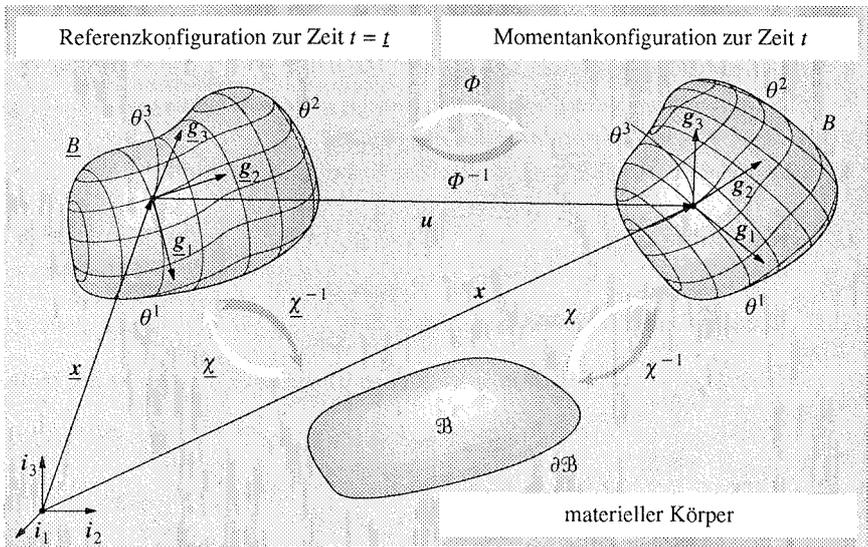


Abbildung 2.1 Topologische Abbildung und Kinematik des Kontinuums

2.2.2 Lagrange und Euler Formulierung

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines materiellen Körpers stehen grundsätzlich zwei klassische Betrachtungsweisen zur Verfügung: Diese werden nach Joseph Louis Lagrange und Leonhard Euler benannt.

Bei der Lagrange Betrachtungsweise, die ebenso als materielle, substantielle oder referenzbezogene Formulierung bezeichnet wird, werden die Änderungen der dem materiellen Punkt zugeordneten Eigenschaften betrachtet. Im Gegensatz hierzu werden bei der Euler, räumlichen oder lokalen Betrachtungsweise die Eigenschaften eines räumlichen Punktes betrachtet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Rahmen dieser Arbeit die Lagrange Formulierung verwendet.

2.2.3 Deformation und Verzerrungen

Der materielle Körper in der Referenz- und Momentankonfiguration wird in krummlinigen, konvektiven Koordinaten θ^i beschrieben. Damit ist jeder materielle Punkt neben den Koordinaten x^i auch durch das Zahlentripel θ^i eindeutig darstellbar (vgl. Abbildung 2.1).

$$\underline{x} = \underline{x}(\theta^i) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i) \qquad (2.4)$$

Die ortsabhängigen kovarianten Basen des Körpers \underline{B} und des Körpers B sind durch das totale Differential der Ortsvektoren in bezug auf die krummlinigen Koordinaten gegeben. Dabei stellen die kovarianten Basisvektoren $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ oder $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ die Richtungsvektoren der Tangenten an die Koordinatenlinien θ^i dar.

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta^i} \qquad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \qquad (2.5)$$

Durch Einführung des Verschiebungsfeldes als Differenz der Ortsvektoren eines materiellen Punktes mit den Koordinaten θ^i aus Momentan- und Referenzkonfiguration

$$\mathbf{u}(\theta^i) = \mathbf{x}(\theta^i) - \underline{\mathbf{x}}(\theta^i) \qquad (2.6)$$

kann die kovariante Basis der Momentankonfiguration in Abhängigkeit von der kovarianten Basis der Referenzkonfiguration dargestellt werden.

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^i} = \underline{\mathbf{g}}_i + \mathbf{u}_{,i} \qquad (2.7)$$

Der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} ist mit der linearen Abbildung eines Linienelementes der Referenzkonfiguration $d\underline{\mathbf{x}}$ auf das entsprechende Linienelement der aktuellen Konfiguration $d\mathbf{x}$ oder gleichbedeutend mit der Abbildung der Basisvektoren $\underline{\mathbf{g}}_i$ und \mathbf{g}_i definiert.

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \cdot d\underline{\mathbf{x}} = \nabla \mathbf{x} \cdot d\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot d\underline{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \cdot \underline{\mathbf{g}}_i \qquad (2.8)$$

Der materielle Deformationsgradient ist ein sogenannter Zweifeldtensor, dessen erste Basis \mathbf{g}_i in der Momentankonfiguration und dessen zweite Basis $\underline{\mathbf{g}}_i$ in der Referenzkonfiguration definiert ist. Aus Gleichung (2.8) folgt für den, im allgemeinen nichtsymmetrischen, materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \nabla \mathbf{x} = \underline{\mathbf{g}} + \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}_i \otimes \underline{\mathbf{g}}^i \quad \mathbf{F}^T = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right)^T = (\nabla \mathbf{x})^T = \underline{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i \neq \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Zur Existenz der inversen Abbildung Φ^{-1} ist es notwendig und hinreichend, daß die Jacobi Funktionaldeterminante des materiellen Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ ungleich Null ist. Die Bedingung

$$\det \mathbf{F} > 0 \quad (2.10)$$

garantiert eine eindeutige und stetige Abbildung Φ . Die Abbildung von differentiellen Flächen- und Volumenelementen ist mit den 'Push-Forward' Transformationen

$$d\mathbf{A} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \quad dV = \det \mathbf{F} d\underline{V} \quad (2.11)$$

gegeben. Dabei sind $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ oder $d\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{n}} d\underline{A}$ die orientierten infinitesimalen Flächenelemente mit den Normaleneinheitsvektoren \mathbf{n} oder $\underline{\mathbf{n}}$. Der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} beschreibt den gesamten materiellen Bewegungsvorgang und enthält daher im allgemeinen auch Starrkörperbewegungen. Aus diesem Grund ist \mathbf{F} als Maß für die Formänderung und die resultierenden endlichen Verzerrungen ungeeignet. Die Definition des Green-Lagrange Verzerrungstensors \mathbf{E} mit Hilfe der Differenz der Quadrate der Linienelemente $d\mathbf{x}$ und $d\underline{\mathbf{x}}$

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\underline{\mathbf{x}} \cdot d\underline{\mathbf{x}} = d\underline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\underline{\mathbf{x}} - d\underline{\mathbf{x}} \cdot d\underline{\mathbf{x}} = d\underline{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \underline{\mathbf{g}}) \cdot d\underline{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

ist frei von Starrkörperbewegungen und liefert in der Referenzkonfiguration den Nulltensor. Die hierin enthaltene Tensordifferenz ist der zweistufige Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{E} , der mit der Gleichung (2.9) als Differenz der Metrikensoren von Momentan- und Referenzkonfiguration ($g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, $\underline{g}_{ij} = \underline{\mathbf{g}}_i \cdot \underline{\mathbf{g}}_j$) ausgedrückt werden kann.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \underline{\mathbf{g}}) \quad (2.13)$$

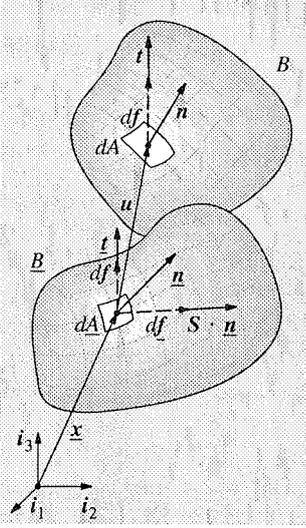
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \otimes \underline{\mathbf{g}}^j - \underline{g}_{ij} \underline{\mathbf{g}}^i \otimes \underline{\mathbf{g}}^j \right) = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - \underline{g}_{ij} \right) \underline{\mathbf{g}}^i \otimes \underline{\mathbf{g}}^j$$

Bemerkungen:

- Der Green-Lagrange Verzerrungstensor ist symmetrisch.
- Die Definition der Formänderung über den Green-Lagrange Verzerrungstensor ist willkürlich, weshalb in der Literatur eine Anzahl von alternativen Verzerrungsmaßen (Ingenieurdehnungen, Euler-Almansi Dehnungen, natürliche Dehnungen – vgl. z.B. Bletzinger (1994)) verwendet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich der Green-Lagrange Verzerrungstensor eingesetzt.

2.3 Kinetik

Die Kinetik beschreibt den Zusammenhang äußerer und innerer Kräfte eines materiellen Körpers. Dies erfordert die Formulierung verschiedener Spannungsvektoren und –tensoren, deren Definitionen und Bezugskonfigurationen in Abbildung 2.2 dargestellt sind.



	Cauchy	1. Piola–Kirchhoff	2. Piola–Kirchhoff
Tensor	σ	P	S
Kraft df	df in B	df in B	df auf \underline{B} transformiert
Fläche dA	dA in B	$d\underline{A}$ in \underline{B}	$d\underline{A}$ in \underline{B}
Vektor t	$t = \sigma \cdot n$	$\underline{t} = P \cdot n$	$S \cdot n$
Basis	$\sigma^{ij} g_i \otimes g_j$	$P^{ij} g_i \otimes \underline{g}_j$	$S^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$
Transforma- tion	$\frac{P \cdot F^T}{\det F}$	$\det F \sigma \cdot F^{-T}$	$\det F F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T}$
Transforma- tion	$\frac{F \cdot S \cdot F^T}{\det F}$	$F \cdot S$	$F^{-1} \cdot P$

Abbildung 2.2 Definition und Transformation von Spannungsmaßen

Als Folge äußerer Kräfte existiert nach dem Spannungsprinzip von Euler–Cauchy auf jeder Schnittfläche ein Vektorfeld der Spannungen. Wird zur Definition eines solchen Spannungsvektors die äußere Kraft auf ein Flächenelement der Referenzkonfiguration bezogen, entsteht der den statischen Randbedingungen \underline{t}^* identische Nennspannungsvektor \underline{t} und mit Hilfe des Cauchy Fundamentaltheorems der erste Piola–Kirchhoff Spannungstensor P .

$$\underline{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A} = \frac{df}{dA} \quad \underline{t} = P \cdot n \quad (2.14)$$

Der erste Piola–Kirchhoff Spannungstensor ist ein Zweifeldtensor, er verbindet den aktuellen Kraftvektor mit dem Flächenelement der Referenzkonfiguration. P ist, wie in Kapitel 2.4.4 gezeigt wird, ein unsymmetrischer Tensor. Aus dieser Eigenschaft resultierende Nachteile bei der numerischen Bearbeitung kontinuumsmechanischer Problemstellungen werden mit der Definition des symmetrischen zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensors S vermieden.

$$S \cdot n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A} = \frac{df}{dA} = F^{-1} \cdot \frac{df}{dA} = F^{-1} \cdot P \cdot n \quad (2.15)$$

$$S = F^{-1} \cdot P = S^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j \quad P = F \cdot S. \quad (2.16)$$

2.4 Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen können in integraler Form als globale Formulierung und für hinreichend glatte Felder in lokaler Formulierung in Form von Differentialgleichungen angegeben werden. Ferner sind die Bilanzgleichungen sowohl für skalare Felder als auch für Tensorfelder anwendbar. Der allgemeinen Formulierung der Bilanzgleichungen folgen in den nächsten Abschnitten die mechanischen Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls, den Drehimpuls und die mechanische Energie.

2.4.1 Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen

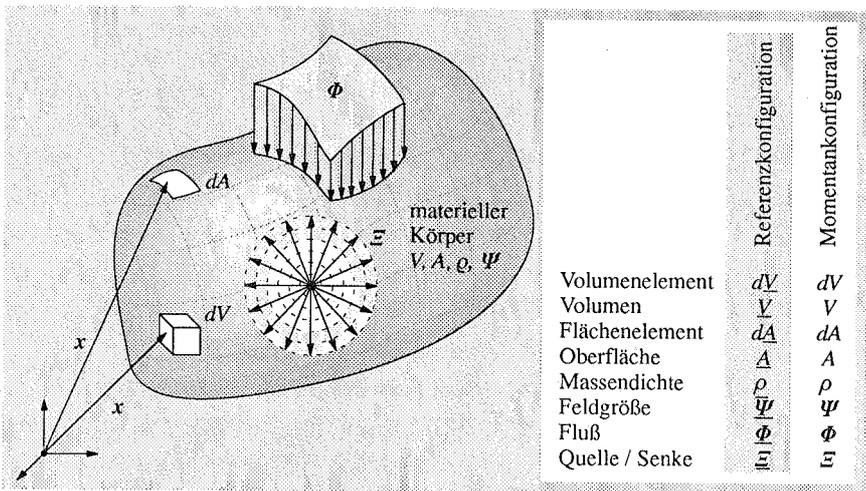


Abbildung 2.3 Allgemeine Bilanzgleichung eines materiellen Körpers

Die allgemeine Aussage der Bilanzgleichungen lautet: Die Änderungsgeschwindigkeit einer Bilanzgröße Y ist gleich dem Zuwachs oder Verlust $\underline{\varepsilon}$ der Bilanzgröße im Körper und der Summe des Zu- und Abflusses $\underline{\Phi}$ über die Oberfläche A mit dem Normalenvektor \underline{n} .

Die extensive Bilanzgröße Y ergibt sich durch Integration der Massendichteverteilung einer Feldgröße $\underline{\Psi}$ über den Körper in der Referenz- oder Momentankonfiguration.

$$Y = \int_V \underline{\rho} \underline{\Psi} dV = \int_V \rho \Psi dV \quad (2.17)$$

Die globalen Bilanzgleichungen für die Referenz- oder Momentankonfiguration werden in der folgenden Form definiert:

$$\frac{DY}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \underline{\rho} \underline{\Psi} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \underline{\rho} \underline{\Psi} dV = \int_A \underline{\Phi} \cdot \underline{n} dA + \int_V \underline{\rho} \underline{\Xi} dV \quad (2.18)$$

$$\frac{DY}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \Psi dV = \int_A \Phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \Xi dV \quad (2.19)$$

Zu beachten ist hierbei, daß bei Verwendung der Lagrange Betrachtungsweise die materielle der partiellen Zeitableitung entspricht. Durch Anwendung des Divergenztheorems (A.6) auf das Flächenintegral erhält man die lokale Formulierung, d.h. die Differentialgleichung, der allgemeinen Bilanzgleichung für die Referenz- und Momentankonfiguration.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{\rho} \underline{\Psi}) = \nabla \cdot \underline{\Phi} + \underline{\rho} \underline{\Xi} \quad \frac{D}{Dt}(\rho \Psi) = \nabla_x \cdot \Phi + \rho \Xi \quad (2.20)$$

Die mechanischen Bilanzgleichungen werden in der vorliegenden Arbeit in materieller Form verwendet und daher in den folgenden Abschnitten lediglich für die Referenzkonfiguration dargestellt. Hieraus können die äquivalenten Beziehungen für die Momentankonfiguration durch die Push-Forward Operation gewonnen werden. Die mechanischen Bilanzgrößen sind von der Form (2.17) und die Bilanzgleichungen sind global und lokal von der Gestalt (2.18) und (2.20). Zur Generierung der mechanischen Bilanzgleichungen sind die Feldgröße Ψ , der Fluss Φ und die Quellstärke Ξ in den allgemeinen Bilanzgleichungen durch die in Tabelle 3.1 angegebenen mechanischen Größen zu ersetzen.

Bilanzgröße Y	Dichtefunktion Ψ	Fluß Φ	Quelle / Senke Ξ
Masse m	Skalar $\Psi \rightarrow 1$	Massenfluß $\Phi = \mathbf{0}$	Massenquelle $\Xi = \mathbf{0}$
Impuls L	Geschwindigkeit $\Psi = \dot{\mathbf{x}}$	Spannungstensor $\Phi = \mathbf{P}$	Volumenkkräfte $\Xi = \mathbf{b}$
Drehimpuls J	Drehgeschwindigkeit $\Psi = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$	Moment von \mathbf{P} $\Phi = -\mathbf{P} \times \mathbf{x}$	Moment von \mathbf{b} $\Xi = \mathbf{x} \times \mathbf{b}$
Energie $E = K + U$	spezifische Energie $\Psi \rightarrow 1/2 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + u$	Spannungsleistung $\Phi = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}}$	Leistung von \mathbf{b} $\Xi \rightarrow \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}}$

Tabelle 3.1 Mechanische Bilanzgleichungen

2.4.2 Massebilanz

Die Masse eines Körpers ist durch das Volumenintegral über das stetige Feld der Massendichte ρ bestimmt.

$$m = \int_V \underline{\rho} dV = \int_V \rho dV \quad (2.21)$$

Unter den Annahmen, daß keine Masse über die Oberfläche ausgetauscht wird und im Innern des Körpers kein Zuwachs oder Verlust von Masse stattfindet, verschwindet die materielle Zeitableitung der Masse. Das heißt, die Masse eines materiellen Körpers ändert sich während des Deformationsvorganges nicht.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, d\underline{V} = 0 \quad (2.22)$$

Die lokale Formulierung der Massebilanz liefert mit der Transformation der Volumenelemente $d\underline{V}$ und dV mit Hilfe der Jacobi Funktionaldeterminante des materiellen Deformationsgradienten nach Gleichung (2.11) den Zusammenhang der Dichte in der Referenz- und der Momentankonfiguration.

$$\underline{\rho} \, d\underline{V} = \rho \, dV \quad \underline{\rho} = \frac{dV}{d\underline{V}} \rho = \det \mathbf{F} \rho \quad (2.23)$$

2.4.3 Impulsbilanz

Die lokale Impulsbilanz stellt die 1. Bewegungsgleichung von Cauchy dar, deren schwache Formulierung wiederum auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen führt. Aufgrund der Bedeutung der Impulsbilanz im Hinblick auf die folgenden Kapitel soll diese hier ausführlich erläutert werden. Der Impulsvektor \underline{L} verbindet das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\underline{x}}$ und das Massefeld ρ des Körpers.

$$\underline{L} = \int_{\underline{V}} \dot{\underline{x}} \, \underline{\rho} \, d\underline{V} = \int_{\underline{V}} \dot{\underline{x}} \, \rho \, dV \quad (2.24)$$

Die zeitliche Änderung des Impulsvektors ist bei der Deformation gleich der Summe f aller auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte.

$$\frac{\partial \underline{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \dot{\underline{x}} \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{t} \, d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{b} \, d\underline{V} = f \quad (2.25)$$

Obige Gleichung entspricht dem 2. Newtonschen Grundgesetz für Kontinua. Die resultierende Kraft f beinhaltet die eingepprägten Volumenkräfte \underline{b} und den, auf das Flächenelement $d\underline{A}$ bezogenen Spannungsvektor \underline{t} . Der Spannungsvektor kann nach dem Theorem von Cauchy (2.14) durch die einfache Kontraktion des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors \underline{P} und des Einheitsnormalenvektors \underline{n} auf der Oberfläche des Körpers ersetzt werden. Durch Anwendung des Divergenztheorems (A.6) auf das Oberflächenintegral dieses Terms entsteht das Volumenintegral der Divergenz des Spannungstensors \underline{P} .

$$\int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{\ddot{x}} \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{P} \cdot \underline{n} \, d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{b} \, d\underline{V} = \int_{\underline{V}} (\nabla \cdot \underline{P} + \underline{\rho} \, \underline{b}) \, d\underline{V} = \underline{f} \quad (2.26)$$

Die lokale Formulierung des Impulssatzes oder die 1. Bewegungsgleichung von Cauchy ist damit in folgender Form gegeben.

$$\underline{\rho} \, \underline{\ddot{x}} = \nabla \cdot \underline{P} + \underline{\rho} \, \underline{b} \quad (2.27)$$

2.4.4 Drehimpulsbilanz

Der Drehimpuls oder Drall eines materiellen Körpers ist das Moment des Impulses bezüglich eines beliebigen raumfesten Punktes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der Koordinatenursprung als Bezugspunkt für den Drallvektor \underline{J} gewählt.

$$\underline{J} = \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{\dot{x}} \, d\underline{V} = \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{\dot{x}} \, d\underline{V} \quad (2.28)$$

Die materielle Zeitableitung des Drehimpulses entspricht dem aus den Oberflächen- und Volumenkräften resultierenden Moment \underline{m} .

$$\frac{\partial \underline{J}}{\partial t} = \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{\ddot{x}} \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{x} \times \underline{P} \cdot \underline{n} \, d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{b} \, d\underline{V} = \underline{m} \quad (2.29)$$

Nach Anwendung des Divergenztheorems ergibt sich die lokale Form der Drehimpulsbilanz.

$$\underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{\ddot{x}} = \nabla \cdot (\underline{x} \times \underline{P}) + \underline{\rho} \, \underline{x} \times \underline{b} \quad (2.30)$$

Mit der Regel für die Berechnung der Divergenz von Vektorprodukten (A.5) und der lokalen Form der Impulsbilanz (2.27) kann die lokale Bilanzgleichung mit dem Identitätstensor $\mathbf{1}$ weiter umgeformt werden.

$$\underline{x} \times (\underline{\rho} \, \underline{\ddot{x}} - \underline{\rho} \, \underline{b} - \nabla \cdot \underline{P}) - \nabla \underline{x} \times \underline{P} = - \underline{F} \times \underline{P} = - \mathbf{1} \times (\underline{F} \cdot \underline{P}^T) = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Diese Bedingung wird genau dann erfüllt, wenn das Produkt $\underline{F} \cdot \underline{P}^T$ ein symmetrischer Tensor ist (vgl. z.B. de Boer (1982), Marsden, Hughes (1983)). Diese Aussage bezüglich der Symmetrieeigenschaften der Spannungstensoren entspricht der 2. Bewegungsgleichung von Cauchy.

$$\underline{P} \cdot \underline{F}^T = \underline{F} \cdot \underline{P}^T, \quad \underline{P} \neq \underline{P}^T \quad \underline{P} = \underline{F} \cdot \underline{S} \rightarrow \underline{S} = \underline{S}^T \quad (2.32)$$

Die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors folgt aus der lokalen Drehimpulsbilanz für die Momentankonfiguration oder durch den Push-Forward des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors.

$$\underline{S} = \det \underline{F} \, \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} \rightarrow \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (2.33)$$

2.4.5 Energiebilanz

Die mechanische Energie wird von der kinetischen Energie K und der inneren Energie U des Systems gebildet. Die Summe dieser beiden Energieformen bildet die totale Energie E .

$$E = K + U \quad (2.34)$$

Kinetische und innere Energie können durch die Integration der massenspezifischen kinetischen Energie $1/2 \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}$ und der massenspezifischen freien Helmholtz Energie u berechnet werden. Für den Sonderfall des Saint Venant–Kirchhoff Materialmodelles kann die innere Energie mit der doppelten Überschiebung des Green–Lagrange Verzerrungstensors und des zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensors berechnet werden:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} d\underline{V} \quad U = \int_{\underline{V}} \underline{\rho} u d\underline{V} = \frac{1}{2} \int_{\underline{V}} \underline{S} : \underline{E} d\underline{V} \quad (2.35)$$

Das Postulat der Energieerhaltung wird folgendermaßen formuliert: Die zeitliche Änderung der totalen Energie eines mechanischen Systems entspricht der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenlasten.

$$\frac{\partial}{\partial t}(K + U) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} + u \right) d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{t} \cdot \dot{\underline{x}} d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \underline{b} \cdot \dot{\underline{x}} d\underline{V} = \dot{W}_{\text{ext}} \quad (2.36)$$

Die lokale Formulierung der mechanischen Energiebilanz liefert nach Einsetzen des ersten Piola–Kirchhoff Spannungstensors (2.14), des Divergenztheorems (A.6), der Beziehung (A.4) und der ersten Cauchy Bewegungsgleichung (2.27) die Aussage für die Änderungsgeschwindigkeit der spezifischen inneren Energie (siehe z.B. Altenbach, Altenbach (1994)).

$$\underline{\rho} \dot{u} = \underline{P} : \dot{\underline{F}}^T = \underline{S} : \dot{\underline{E}} \quad (2.37)$$

2.5 Konstitutive Gleichung

Konstitutive Gleichungen verknüpfen duale, die Deformation beschreibende Feldgrößen eines materiellen Punktes. In der Mechanik der festen Körper sind dies die Feldgrößen Spannungstensor und Verzerrungstensor, deren Zusammenhang durch die Materialgleichung gegeben ist. Im materiellen Sinn, der Lagrange Betrachtungsweise wird das Materialgesetz zwischen dem zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensor \underline{S} und dem aktuellen Deformationszustand und damit dem Green–Lagrange Verzerrungstensor \underline{E} formuliert. Für elastisches Material kann der Spannungstensor \underline{S} allein aus dem Verzerrungstensor \underline{E} hergeleitet werden.

$$\underline{S} = f(\underline{E}) \quad (2.38)$$

Ein solches Materialgesetz wird als Cauchy–elastisch bezeichnet. Wird zusätzlich die Wegunabhängigkeit der von der Spannung geleisteten Arbeit gefordert, erhält man ein hyperelastisches

oder Green–elastisches Materialgesetz. Damit wird die Existenz einer massenspezifischen Formänderungsenergiefunktion (freie Helmholtz Energie)

$$u = f(\underline{E}), \quad (2.39)$$

die eine Potentialfunktion für den zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensor darstellt, gefordert. Durch die Zeitableitung dieser Potentialfunktion ergibt sich die spezifische Änderungsgeschwindigkeit der inneren Energie, deren Vergleich mit der lokalen Form der mechanischen Energiebilanz (2.37) die Beziehung zwischen dem Green–Lagrange Verzerrungstensor und dem zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensor liefert.

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \underline{E}} : \dot{\underline{E}} \quad S = \rho \frac{\partial u}{\partial \underline{E}} \quad (2.40)$$

Der vierstufige Elastizitätstensor \underline{C} ist für kleine Verzerrungen und Spannungs– sowie Verzerrungsfreiheit in der Referenzkonfiguration ($\underline{S}(\underline{B}) = \mathbf{0}$, $\underline{E}(\underline{B}) = \mathbf{0}$) mit der Linearisierung des Spannungstensors \underline{S} bezüglich der Verzerrungen \underline{E} definiert.

$$\underline{S} = \underline{S}(\underline{B}) + \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{E}} : (\underline{E} - \underline{E}(\underline{B})) + O((\underline{E} - \underline{E}(\underline{B}))^2) = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{E}} : \underline{E} + O(E^2) \quad (2.41)$$

Durch den Vergleich der Definition des Elastizitätstensor \underline{C} mit Gleichung (2.40) kann der Elastizitätstensor als Funktion der freien Helmholtz Energie ausgedrückt werden.

$$\underline{S} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{E}} : \underline{E} \equiv \underline{C} : \underline{E} \quad \underline{C} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial \underline{E}} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \underline{E} \otimes \partial \underline{E}} \quad (2.42)$$

Ist das Materialverhalten isotrop, so wird der zweite Piola–Kirchhoff Spannungstensor mit Hilfe von zwei unabhängigen Konstanten λ und μ aus dem Green–Lagrange Verzerrungstensor berechnet (vgl. Stein, Barhold (1992)).

$$\underline{S} = \lambda \operatorname{tr} \underline{E} \underline{g} + 2 \mu \underline{E} + O(\|\underline{E}\|) \quad (2.43)$$

Werden die Terme höherer Ordnung vernachlässigt, so erhält man die konstitutive Gleichung des Saint Venant–Kirchhoff Materials in der Form

$$\underline{S} = \lambda \operatorname{tr} \underline{E} \underline{g} + 2 \mu \underline{E}, \quad (2.44)$$

wobei die die Konstanten λ und μ im Fall des Saint Venant–Kirchhoff Material Modells als Lamé–Konstanten bezeichnet werden. Lamé–Konstanten und Elastizitätsmaße, wie Elastizitätsmodul E , Schubmodul G und Poisson–Zahl ν können ineinander überführt werden. Die spezifische innere Energie kann bei dieser Materialformulierung folgendermaßen dargestellt werden:

$$u = f(\underline{E}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \underline{E} : \underline{S} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} \quad (2.45)$$

Bemerkung:

- Die Anwendbarkeit des Materialgesetzes (2.41) ist auf den Bereich kleiner Verzerrungen \underline{E} beschränkt.

2.6 Anfangs– Randwertproblem der Elastodynamik

Das Anfangs– Randwertproblem der Elastodynamik ist mit den in Kapitel 2.2 bis 2.5 angegebenen lokalen dynamischen Feldgleichungen sowie den Anfangs– und Randbedingungen gegeben. Feldgleichungen, Rand– und Anfangsbedingungen für die Lagrange Betrachtungsweise sind in Abbildung 2.4 zusammengestellt. Die Feldgleichungen, bestehend aus der ersten Cauchy Bewegungsgleichung (2.27), dem kinematischen Zusammenhang zwischen Verschiebungen, beziehungsweise dem Deformationsgradienten und den Green–Lagrange Verzerrungen (2.13), (2.9) und dem Materialgesetz in allgemeiner Form (2.38), bilden ein gekoppeltes, nichtlineares System partieller Differentialgleichungen das durch Anfangs– und Randbedingungen ergänzt wird.

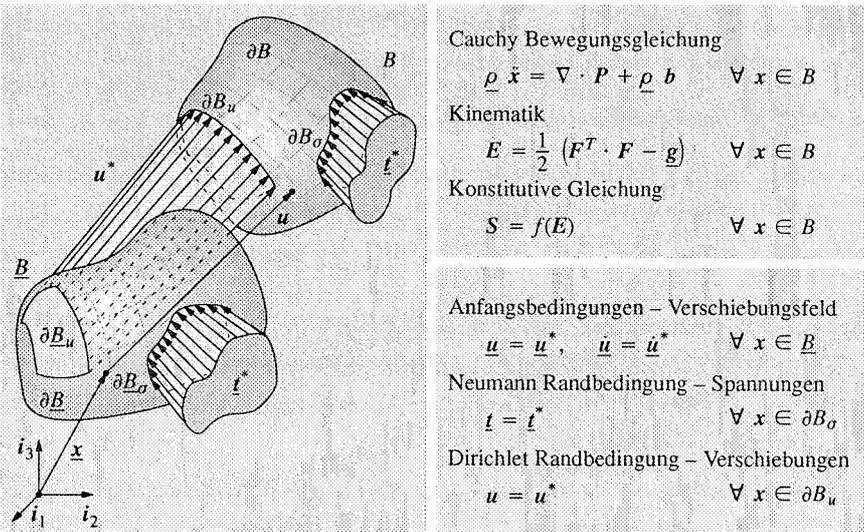


Abbildung 2.4 Anfangs– Randwertproblem der Elastodynamik

Anfangsbedingungen sind die die Position und den Deformations– und Bewegungszustand zur Zeit $t = \underline{t}$ beschreibenden Verschiebungen \underline{u}^* und Geschwindigkeiten $\dot{\underline{u}}^*$. Am Rand des materiellen Körpers können sowohl Verschiebungen \underline{u}^* (Dirichlet – ,geometrische – oder wesentliche Randbedingungen) als auch Spannungen \underline{t}^* (Neumann – ,statische – oder natürliche Randbedingungen) vorgeschrieben sein. Die Berandung ∂B setzt sich aus Bereichen ∂B_u mit geometrischen und ∂B_σ mit statischen Randbedingungen zusammen.

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_\sigma \quad \partial B_u \cap \partial B_\sigma = \emptyset \quad (2.46)$$

2.7 Prinzip der virtuellen Arbeit

Das im Kapitel 2.6 zusammengefaßte gekoppelte System partieller Differentialgleichungen kann nur in Sonderfällen explizit gelöst werden. Im allgemeinen kommen zur Lösung der Aufgabenstellungen der Elastodynamik Diskretisierungsverfahren auf der Basis von Arbeitsprinzipien

- Prinzip der virtuellen Arbeit (virtuellen Verschiebungen)
- Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit (virtuellen Kräfte)

und für Potentialprobleme auf der Basis von Energieprinzipien

- Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie
- Prinzip vom Minimum des Komplementärpotentials

zum Einsatz. Arbeitsprinzipien erfordern nicht die Existenz eines Potentials und können aus diesem Grund allgemeingültiger formuliert werden als Energieprinzipien. Identische Ergebnisse liefern entsprechende Arbeits- und Energieprinzipien bei Verwendung des Saint Venant–Kirchhoff Material Modelles und der Beschränkung auf konservative äußere Kräfte.

Zur Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit werden zunächst die erste Cauchy Bewegungsgleichung und die Neumann Randbedingungen nach der Methode der gewichteten Residuen (siehe z.B. Finlayson (1972) und Zienkiewicz, Taylor (1989)) mit der Testfunktion η skalar multipliziert.

$$(\underline{\rho} \ddot{\underline{x}} - \nabla \cdot \underline{P} - \underline{\rho} \underline{b}) \cdot \eta = 0 \quad \forall \underline{x} \in B, \quad (\underline{t} - \underline{t}^*) \cdot \eta = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial B_\sigma \quad (2.47)$$

Diese Gleichungen gelten genau dann, wenn für die Integration über das Volumen und die Oberfläche des materiellen Körpers in der Referenzkonfiguration die Bedingung

$$\int_{\underline{V}} \underline{\rho} \ddot{\underline{x}} \cdot \eta \, d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \nabla \cdot \underline{P} \cdot \eta \, d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \underline{b} \cdot \eta \, d\underline{V} + \int_{\underline{A}_\sigma} (\underline{t}^* - \underline{t}) \cdot \eta \, d\underline{A} \quad (2.48)$$

erfüllt ist. Hierbei stellt \underline{A}_σ den Neumann Rand des materiellen Körpers dar. Mit der Divergenz verjüngender Produkte von Tensoren (A.4), der Anwendung des Gauß Integralsatzes (A.6) auf den entstandenen Divergenzterm und der Transformationsbeziehung des ersten und zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensors (2.16) folgt:

$$\int_{\underline{V}} \underline{\rho} \ddot{\underline{x}} \cdot \eta \, d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \underline{F} \cdot \underline{S} : \nabla \eta \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{P} \cdot \underline{n} \cdot \eta \, d\underline{A} + \int_{\underline{A}_\sigma} (\underline{t}^* - \underline{t}) \cdot \eta \, d\underline{A} \quad (2.49)$$

$$+ \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \underline{b} \cdot \eta \, d\underline{V}$$

Nach Anwendung des Fundamentaltheorems von Cauchy (2.14) sowie der Berücksichtigung der Tatsache, daß der Spannungsvektor \underline{t} auf dem Dirichlet Rand verschwindet, ergibt sich mit dem Oberflächenintegral

$$\int_{\underline{A}} \underline{P} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} = \int_{\underline{A}} \underline{t} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} = \int_{\underline{A}_\sigma} \underline{t} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} + \int_{\underline{A}_r} \underline{t} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} = \int_{\underline{A}_r} \underline{t} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} \quad (2.50)$$

und der Identität

$$\underline{F} \cdot \underline{S} : \nabla \underline{\eta} = \underline{F}^T \cdot \nabla \underline{\eta} : \underline{S} \quad \text{mit } \underline{S} = \underline{S}^T \quad (2.51)$$

die schwache Form der Impulsbilanz oder der ersten Cauchy Bewegungsgleichung.

$$\int_{\underline{V}} \underline{\rho} \cdot \ddot{\underline{x}} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \underline{F}^T \cdot \nabla \underline{\eta} : \underline{S} \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}_r} \underline{t}^* \cdot \underline{\eta} \, d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \cdot \underline{b} \cdot \underline{\eta} \, d\underline{V} \quad (2.52)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird künftig auf die Kennzeichnung der Spannungsvorgabe ($\underline{t}^* \rightarrow \underline{t}$) und des Neumann Randes ($\underline{A}_\sigma \rightarrow \underline{A}$) bei Oberflächenintegralen verzichtet. Die spezielle Wahl der Variation des Verschiebungsvektors $\underline{\eta} = \delta \underline{u} = \delta(\underline{x} - \underline{x}) = \delta \underline{x}$ als Testfunktion, die den Bedingungen

- die Variation des Verschiebungsvektors ist eine virtuelle Verrückung
- sie genügt den geometrischen Feld- und Randbedingungen

$$\delta \underline{F} = \nabla \delta \underline{x} = \nabla \delta \underline{u} \quad \forall \underline{x} \in B \quad \delta \underline{u} = \mathbf{0} \quad \forall \underline{x} \in \partial B_u \quad (2.53)$$

- sie ist infinitesimal klein
- und sie ist beliebig

genügt, ergibt mit der Variation des Green–Lagrange Verzerrungstensors nach Gleichung (2.13)

$$\delta E : \underline{S} = \frac{1}{2} \delta(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{g}) : \underline{S} = \frac{1}{2} (\delta \underline{F}^T \cdot \underline{F} + \underline{F}^T \cdot \delta \underline{F}) : \underline{S} = \underline{F}^T \cdot \delta \underline{F} : \underline{S} \quad (2.54)$$

– Voraussetzung hierfür ist die Symmetrie des Spannungstensors \underline{S} – und der geometrischen Feldbedingung (2.53) das Prinzip der virtuellen Arbeit bezogen auf die Referenzkonfiguration.

$$\int_{\underline{V}} \underline{\rho} \cdot \ddot{\underline{x}} \cdot \delta \underline{u} \, d\underline{V} + \int_{\underline{V}} \delta E : \underline{S} \, d\underline{V} = \int_{\underline{A}} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} \, d\underline{A} + \int_{\underline{V}} \underline{\rho} \cdot \underline{b} \cdot \delta \underline{u} \, d\underline{V} \quad (2.55)$$

Oder mit der inneren virtuellen Arbeit, die sich aus der virtuellen Arbeit der d'Alembert Kräfte δW_{new} und der virtuellen Arbeit der Verzerrungen δW_{int} zusammensetzt, und äußeren virtuellen Arbeit δW_{ext} in kompakter Schreibweise:

$$\delta W_{\text{new}} + \delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}. \quad (2.56)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der oben angegebenen Form mit nicht verschwindendem Inertialterm $\underline{\rho} \cdot \ddot{\underline{x}} \neq \mathbf{0}$ wird in der Literatur als das Prinzip von d'Alembert in der Lagrange Fassung bezeichnet (z.B.: Bathe (1986), Argyris, Mlejnek, (1988b/1991), Zienkiewicz, Taylor (1991), Dinkler (1994), Tabarrok, Rimrott (1994)).

3 Diskretisierung

Das Anfangs– Randwertproblem der nichtlinearen Elastodynamik kann im allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Zur numerischen Lösung kommt die Methode der finiten Elemente in Verbindung mit Zeitintegrationsalgorithmen zum Einsatz. Hierzu notwendige Diskretisierungsstrategien in Raum und Zeit werden unter anderem von Bathe, Ramm, Wilson (1975) und Fellipa, Park (1979) erläutert.

3.1 Diskretisierungsstrategien

Die numerische Lösung des Anfangs– Randwertproblems der Elastodynamik (Abbildung 2.4) mit der Methode der finiten Elemente macht es erforderlich, dieses Problem zunächst in die schwache Form zu transformieren (Kapitel 2.7) und anschließend sowohl in Raum– als auch in Zeitrichtung zu diskretisieren. Hierzu sind grundsätzlich zwei verschiedene Diskretisierungsstrategien gebräuchlich. Dies sind die sequentielle Diskretisierung und die gleichzeitige Diskretisierung in Raum und Zeit, die hier als simultane Diskretisierung bezeichnet werden soll. Die graphische Darstellung der erwähnten Diskretisierungsstrategien ist in Abbildung 3.1 gegeben.

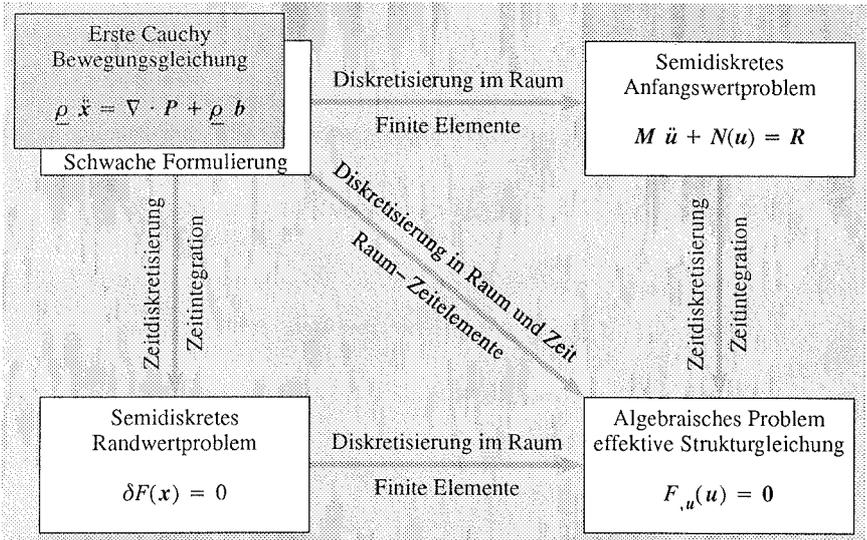


Abbildung 3.1 Diskretisierung der Cauchy Bewegungsgleichung im Raum und in der Zeit

Simultane Diskretisierung

Die simultane Diskretisierung mit Raum–Zeit–Elementen ist unter anderem in Hughes, Hulbert (1988) und Hulbert, Hughes (1990) beschrieben. Diese Diskretisierungsstrategie führt direkt von

der schwachen Form der Bewegungsgleichung zu einem nichtlinearen algebraischen Problem. Bestehende Finite Element Formulierungen können für diese Form der Diskretisierung nicht genutzt werden.

Sequentielle Diskretisierung

Im Gegensatz zur simultanen Diskretisierung sind bei der sequentiellen Diskretisierung in der Raum-Zeit Formulierung die Elementcodes statischer strukturmechanischer Aufgabenstellungen mit äquivalenter Datenstruktur um die Inertialterme zu ergänzen und somit effizient nutzbar. Bei der sequentiellen Diskretisierung kann bezüglich der Reihenfolge der Diskretisierung zwischen sequentieller Raum-Zeit Diskretisierung und sequentieller Zeit-Raum Diskretisierung differenziert werden. In Belytschko (1983) wird die sequentielle Raum-Zeit Diskretisierung mit dem Begriff 'Semidiskretisierungstechnik' bezeichnet. Wie zum Beispiel in Hughes (1983/1987) und Simo, Tarnow (1992) gezeigt wird, ist die Reihenfolge der sequentiellen Diskretisierung kommutativ. Simo, Tarnow (1992) diskretisieren zur Entwicklung der 'Energy-Momentum Method' zunächst in der Zeit und anschließen im Raum. In der vorliegenden Arbeit wird die sequentielle Raum-Zeit Diskretisierung bevorzugt.

Die sequentielle Raum-Zeit Diskretisierung ergibt nach der Diskretisierung im Raum die semidiskrete Bewegungsgleichung und Anfangsbedingungen in diskreter Form. Durch anschließende Diskretisierung in der Zeit resultiert hieraus ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem. Die zweite Möglichkeit der sequentiellen Diskretisierung liefert über ein semidiskretes Randwertproblem das identische algebraische Gleichungssystem.

3.2 Räumliche Diskretisierung – Semidiskrete Bewegungsgleichung

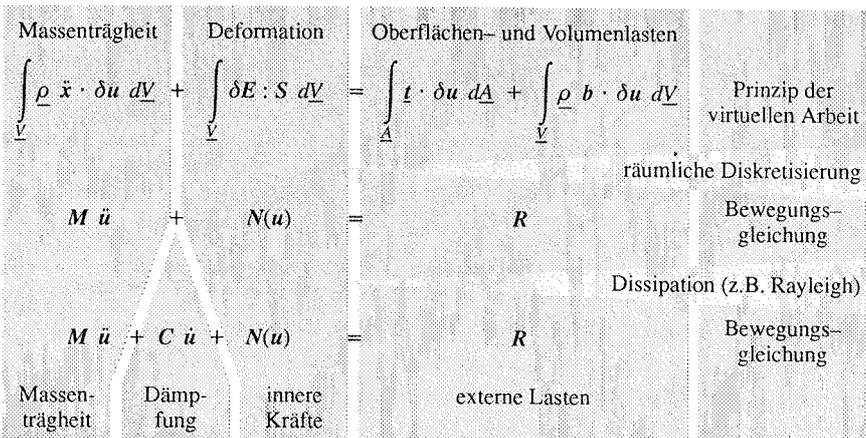
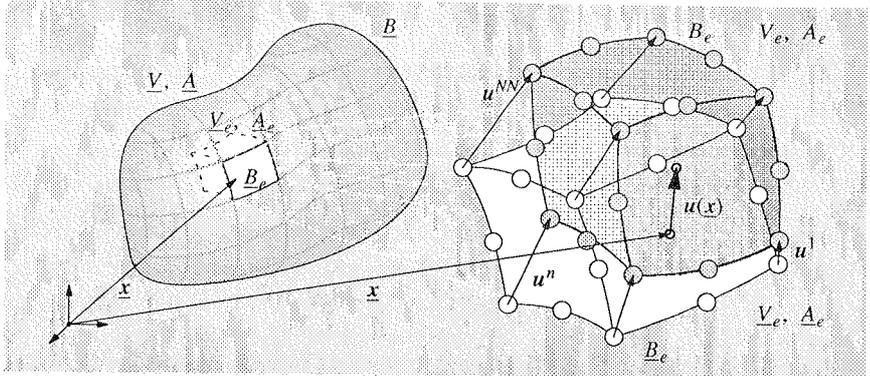


Abbildung 3.2 Semidiskrete Bewegungsgleichung mit Dissipation

Zerlegung des materiellen Körpers B in Teilgebiete B_e

$$B = \bigcup_{e=1}^{NE} B_e \quad \text{mit } B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i, j \in [1, NE]$$



Isoparametrische Approximation des Orts-, Verschiebungs- und Beschleunigungsvektors sowie der Variation des Verschiebungs- oder Ortsvektors mit Ansatzfunktionen N

$$x \approx \sum_{n=1}^{NN} N_n(x) x^n \quad u \approx \sum_{n=1}^{NN} N_n(x) u^n \quad \ddot{u} \approx \sum_{n=1}^{NN} N_n(x) \ddot{u}^n \quad \delta u \approx \sum_{n=1}^{NN} N_n(x) \delta u^n$$

Abbildung 3.3 Räumliche Diskretisierung mit finiten Elementen

Die Transformation des Prinzips der virtuellen Arbeit mit der Methode der finiten Elemente zu der semidiskreten Bewegungsgleichung und die Ergänzung durch einen viskosen Dämpfungsterm ist in Abbildung 3.2 skizziert.

Mit der Diskretisierung im Raum (vgl. Bathe, Ramm, Wilson (1975)), welche auf der Methode der finiten Elemente oder der Bubnov-Galerkin Projektion basiert, und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung geht das nichtlineare kontinuierliche Problem der Elastodynamik in das semidiskrete Anfangswertproblem mit der nichtlinearen Bewegungsgleichung

$$M \ddot{u} + N(u) = R \quad (3.1)$$

in Form eines gekoppelten Differentialgleichungssystems 2. Ordnung mit den diskreten Anfangsbedingungen

$$\underline{u} = \underline{u}^*, \quad \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{u}}^* \quad (3.2)$$

über. Hierbei wurde eine deformationsunabhängige Massenmatrix M angenommen. Mit der Massenmatrix, dem Strukturvektor der Beschleunigungen \ddot{u} , den vom diskreten Verschiebungsvektor abhängigen inneren Kräften $N(u)$ und dem Strukturvektor der äußeren verallgemeinerten Kräfte R wird das dynamische Gleichgewicht in semidiskreter Form beschrieben. Da kontinuier-

liche und diskrete Gleichungen deutlich zu unterscheiden sind, wird in der Schreibweise der entsprechenden Größen auf eine Kennzeichnung verzichtet.

Abbildung 3.3 zeigt schematisch die räumliche Diskretisierung, die sich in die Partitionierung der Struktur in finite Elemente und die Approximation von Feldern kontinuierlicher physikalischer Größen durch Ansatzfunktionen und diskrete Größen an Knoten der jeweiligen Elemente gliedert.

Soll mit der semidiskreten Bewegungsgleichung auch eine Bewegung mit vorhandener Systemdämpfung beschrieben werden, so wird die Gleichung (3.1) um einen viskosen Dämpfungsterm ergänzt.

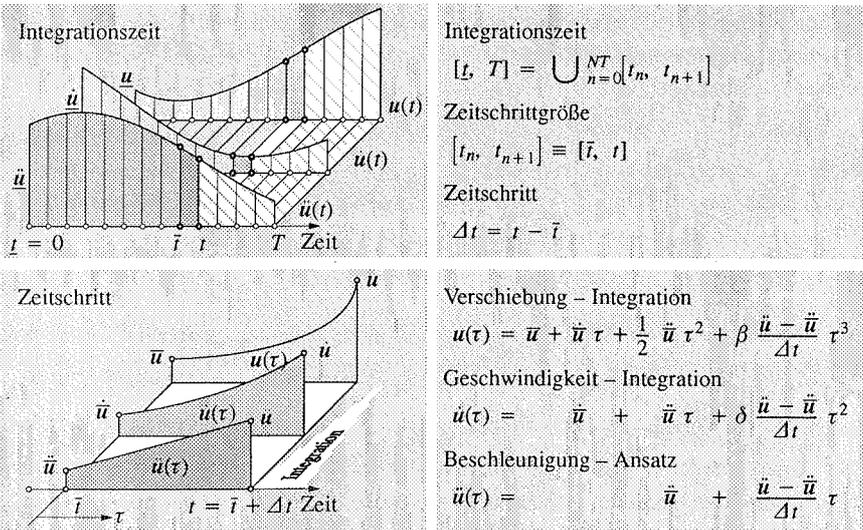
$$M \ddot{u} + C \dot{u} + N(u) = R \tag{3.3}$$

Zu diesem Zweck wird die sehr einfach zu berechnende proportionale Dämpfung auf Basis der Massenmatrix und der elastischen Steifigkeitsmatrix

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 N_{,u}(u) = \alpha_1 M + \alpha_2 K(u), \tag{3.4}$$

angewandt. Die Dämpfungsmatrix C wird hierbei mit einer Linearkombination der Massenmatrix und der Tangentensteifigkeitsmatrix der Referenzkonfiguration $K(u)$ gebildet. Diese Form der Dämpfung wird auch als Rayleigh Dämpfung und die Gleichung (3.4) als Bequemlichkeits-hypothese bezeichnet (Natke (1983), Gasch, Knothe (1987), Argyris, Mlejnek (1988b)).

3.3 Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung



Der numerischen Integration des semidiskreten Anfangswertproblems muß die Diskretisierung in der Zeit vorangehen. Wie in Abbildung 3.4 symbolisiert, wird hierzu die Integrationszeit $[t, T]$ in NT formell äquivalente Zeitintervalle $[t_n, t_{n+1}]$ oder Zeitschritte $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ mit $n \in [1_n, NT]$ und $t_1 = \underline{t}$ zerlegt. Die Systemvektoren der Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind in diesem Fall in der Zeit nicht mehr kontinuierlich sondern nur noch zu diskreten Zeitpunkten t_n bestimmbar. Am Beginn eines Zeitintervalles wird die Lösung als bekannt vorausgesetzt; die Systemgrößen am Ende des Zeitschrittes sind zu bestimmen. Der zuletzt bekannte Systemzustand zu Beginn des aktuell zu integrierenden Zeitintervalles wird mit einem Überstrich gekennzeichnet, die zu bestimmenden Größen werden in der Grundform belassen. So geht zum Beispiel die Schreibweise für das Zeitintervall zu $[\bar{t}, t]$ mit dem Zeitschritt $\Delta t = t - \bar{t}$ über. Die Systemvektoren zu Beginn des Zeitschrittes werden mit \bar{u} , \bar{u} und $\bar{\ddot{u}}$ und am Ende mit u , \dot{u} und \ddot{u} bezeichnet.

Mit Hilfe von Approximationen für den Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor der Struktur (diese sind in Abbildung 3.4 am Beispiel des Newmark (1959) Verfahrens dargestellt) bezüglich des Zeitintervalles wird die Integration des lokalen Anfangswertproblems vom Beginn bis zum Ende des Zeitschrittes durchgeführt und somit die Lösung am Ende des Zeitschrittes bestimmt. Mit dieser Vorgehensweise kann das globale Anfangswertproblem durch die sukzessive Lösung lokaler Anfangswertprobleme einzelner Zeitschritte numerisch gelöst werden.

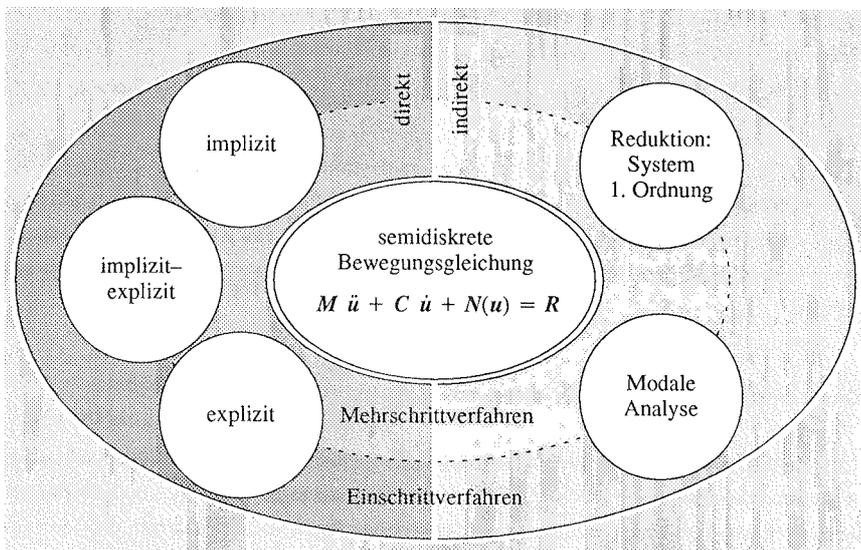


Abbildung 3.5 Klassifizierung von Zeitintegrationsverfahren

Zur numerischen Integration des semidiskreten globalen Anfangswertproblems werden in der Forschung und praktischen Anwendung der Strukturtechnik verschiedene Zeitintegrationsverfahren eingesetzt. Ein Vorschlag zur Klassifizierung von diesen Zeitintegrationsverfahren ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Ein erstes Klassifikationskriterium unterscheidet zwischen direkten und indirekten Zeitintegrationsverfahren. Direkte Verfahren lösen das gekoppelte Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in der ursprünglichen Form (3.3). Wird dieses Differentialgleichungssystem zunächst entkoppelt (modale Analyse) oder auf ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit der doppelten Anzahl von Systemfreiheitsgraden reduziert, spricht man von indirekten Zeitintegrationsverfahren (vgl. Bathe (1986), Hughes (1987), Argyris, Mlejnek (1988b)).

Das zweite Klassifizierungskriterium ist die Anzahl der Zeitschritte, deren Systemvektoren zur Berechnung des neuen Zustandspunktes benötigt werden. Einschrittverfahren verwenden lediglich den zuletzt berechneten Systemzustand zur Zeit \bar{t} zur Approximation eines neuen Zustandes. Mehrschrittverfahren verwenden hingegen mehrere Zustände zu diskreten Zeitpunkten zur Integration des Systemzustandes am Ende des Zeitschrittes.

Weiterhin können die Verfahren nach dem Zeitpunkt, zu dem die Bewegungsgleichung in die Entwicklung des Zeitintegrationsalgorithmus eingebracht wird, unterschieden werden. Wird die Bewegungsgleichung zu Beginn des Zeitschrittes eingebracht, handelt es sich um ein explizites Verfahren (vgl. Belytschko (1983), Bathe (1986), Hughes (1987)). Implizite Verfahren verwenden die Bewegungsgleichung am Ende des Zeitschrittes. Weiterhin sind Kombinationen von entsprechenden impliziten und expliziten Verfahren möglich, diese werden als implizit–explizite Methoden bezeichnet (z.B. Hughes, Pister, Taylor (1979)).

In der Strukturtechnik haben sich wegen der hohen Anzahl von Freiheitsgraden die Einschritt Zeitintegrationsverfahren in impliziter und expliziter Formulierung besonders bewährt. Ferner sind nach Fellipa, Park (1979) implizite Zeitintegrationsverfahren für die Anwendung auf die Strukturtechnik, die durch eine relativ kleine Zahl von niederfrequenten dynamischen Moden gekennzeichnet sind, am effektivsten. Aus diesen Gründen werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausschließlich direkte, implizite, Einschritt–Zeitintegrationsverfahren untersucht und angewandt.

3.4 Numerische Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren

Als wesentliche numerische Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren werden im folgenden Abschnitt die spektrale Stabilität, als Kriterium für Integratoren bei linearem Strukturverhalten, die energetische Stabilität, als Kriterium bei nichtlinearen Bewegungsgleichungen, die Genauigkeitsordnung und die numerische Dissipation wegen ihrer Bedeutung für höherfrequente Schwingungsmoden erläutert.

3.4.1 Spektrale Stabilität

Die Analyse der spektralen Stabilität von Zeitintegrationsverfahren wird in der Literatur – genannt seien hier zum Beispiel Goudreau, Taylor (1972), Bathe, Wilson (1973), Hughes (1983), Bathe (1986), Hughes (1987), Argyris, Mlejnek (1988b), Wood (1990), Argyris, Mlejnek (1991), Zienkiewicz, Taylor (1991) – nach der im folgenden geschilderten Vorgehensweise durchgeführt.

Lineare dynamische Systeme können mittels Modalanalyse in ein System entkoppelter gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen der Form

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = R \quad (3.5)$$

überführt werden (z.B. Gasch, Knothe (1987)). Somit genügt es zur Untersuchung der numerischen Eigenschaften direkter Zeitintegrationsverfahren die homogene Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers (3.5) mit $R = 0$ zu betrachten. Für ein direktes Einschritt Integrationsverfahren kann im homogenen Fall die diskrete Evolution der Größen u , \dot{u} und \ddot{u} mit Hilfe einer linearen Abbildung mit der Matrix A aus den Systemgrößen \bar{u} , $\bar{\dot{u}}$ und $\bar{\ddot{u}}$ zur Zeit \bar{t} gewonnen werden. Die Vergrößerungsmatrix A ist dabei abhängig von der Wahl des Zeitintegrationsverfahrens und des Verhältnisses von Zeitschritt Δt und Schwingungsperiode T_p des harmonischen Oszillators.

$$\begin{bmatrix} u \\ \Delta t \dot{u} \\ \Delta t^2 \ddot{u} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \Delta t \bar{\dot{u}} \\ \Delta t^2 \bar{\ddot{u}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ein Zeitintegrationsverfahren wird als unbedingt stabil bezeichnet, wenn die mit einem beliebigen Zeitschritt Δt ermittelte Lösung nicht über alle Grenzen wächst. Mathematisch bedeutet dies, daß der als größter Eigenwert der Matrix A definierte Spektralradius ρ_t

$$\rho_t(A) = \max_i |\lambda_i(A)| \quad (3.7)$$

nicht größer als Eins sein darf (z.B. Deuffhard, Bornemann (1994), Satz 3.33).

$$\rho_t(A) \leq 1 \quad \forall \Delta t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{unbedingt stabil} \quad (3.8)$$

Ist der Spektralradius kleiner als Eins $\rho_t(A) < 1$ liegt asymptotische Stabilität vor. Gilt die Aussage (3.8) lediglich für einen Zeitschritt, der kleiner als ein kritischer Zeitschritt Δt_{krit} ist, so ist das Zeitintegrationsverfahren bedingt stabil.

$$\rho_t(A) \leq 1 \quad \forall \Delta t < \Delta t_{\text{krit}} \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{bedingt stabil} \quad (3.9)$$

Zeitintegrationsverfahren die den Stabilitätskriterien (3.8) bzw. (3.9) genügen, werden mit unbedingt spektral stabil beziehungsweise bedingt spektral stabil bezeichnet.

3.4.2 Energetische Stabilität

Das Kriterium der spektralen Stabilität ist bei nichtlinearem Strukturverhalten nicht anwendbar, da eine modale Analyse lediglich für eine linearisierte Bewegungsgleichung des dynamischen Systems möglich ist. Eine Veränderung der Steifigkeit des Systems kann bei der spektralen Analyse des Stabilitätsverhaltens von Zeitintegrationsalgorithmen nicht berücksichtigt werden.

Ferner wird in zahlreichen Veröffentlichungen gezeigt, daß selbst bei linearem Strukturverhalten unbedingt stabile Zeitintegrationsalgorithmen bei der Anwendung auf nichtlineare Systeme lediglich bedingt stabil sind. Park (1975) und Wood, Odour (1988) zeigen dieses Phänomen anhand der Trapezregel (oder Methode der konstanten mittleren Beschleunigung – Newmark mit $\delta=1/2$ und $\beta=1/4$), angewandt auf die nichtlineare Bewegungsgleichung der Form $\ddot{u} + N(u) = 0$. Im Vergleich zur exakten periodischen Lösung dieses Problems beobachten Xie, Steven (1994) eine 'chaotische' aber stabile numerische Lösung, welche mit der Wahl eines zu großen Zeitschrittes erklärt wird. Lim, Crisfield (1994) zeigen am Beispiel eines einfachen, nichtlinearen, dynamischen Systemes mit zwei Freiheitsgraden das Anwachsen der konvergenten, numerischen Lösung der Trapezregel über physikalisch sinnvolle Grenzen. Des weiteren zeigen Crisfield, Shi (1994), Crisfield, Moita, Galvanetto (1994), Simo, Tarnow (1994), Crisfield, Galvanetto (1995), Kuhl, Ramm (1996) sowie Kuhl, Ramm (1996b) dieses Instabilitätsversagen der Trapezregel bei der Anwendung der Integrationsregel auf die nichtlineare Dynamik von Stab- beziehungsweise Schalentragwerken.

Sehr gut zur Beurteilung der numerischen Stabilität geeignet ist hingegen die Energiemethode, deren Aussage von Belytschko, Schoeberle (1975) folgendermaßen formuliert wurde: 'A numerical algorithm is stable in energy if the sum of kinetic and internal energies are bounded within each time step relative to the external work and the kinetic and internal energies in the previous time step'. Dies bedeutet, daß die totale Energie am Ende eines Zeitschrittes kleiner oder gleich der totalen Energie am Beginn des Zeitschrittes sein muß.

$$E \leq W_{\text{ext}} + \bar{E} \quad \forall \Delta t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{energetisch stabil} \quad (3.10)$$

Treten externe Lasten oder Dämpfungskräfte am dynamischen System auf, so wird die von ihnen im Zeitschritt verrichtete Arbeit im Energiekriterium berücksichtigt.

$$W_{\text{ext}} = \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot (\mathbf{R}(\tau) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau)) \, d\tau \quad (3.11)$$

Das erläuterte Stabilitätskriterium wird häufig zur Beurteilung der numerischen Stabilität von Zeitintegrationsalgorithmen verwendet. Beispielhaft seien hier die Veröffentlichungen von Oden, Fost (1973), Belytschko, Schoeberle (1975) und Hughes (1976/1977) und die Lehrbücher von Argyris, Mlejnek (1988b) und Gérardin, Rixen (1994) erwähnt.

3.4.3 Genauigkeitsordnung

Die Genauigkeitsordnung eines Zeitintegrationsverfahrens ist, zum Beispiel nach Hoff, Pahl (1988b), mit dem lokalen Abbruchfehler

$$e_t = \frac{1}{\Delta t^2} [u - 2A_1 \bar{u} + A_2 u(\bar{t} - \Delta t) - A_3 u(\bar{t} - 2\Delta t)] \quad (3.12)$$

gegeben, wobei die Konstanten A_i die Invarianten der Matrix A symbolisieren.

$$\begin{aligned} A &= [A_{ij}] & A_1 &= \text{tr}A = A_{ii} \\ A_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr}A)^2 - \text{tr}A^2) & A_3 &= \det A = |A| \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ein Algorithmus ist von k -ter Genauigkeitsordnung, wenn mit dem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ für den lokalen Abbruchfehler $e_t = O(\Delta t^k)$ gilt.

3.4.4 Numerische Dissipation

Ausführliche Erläuterungen zur numerischen Dissipation finden sich zum Beispiel in Hilber, Hughes, Taylor (1977), Bazzi, Anderheggen (1982) und Hulbert (1992); diese sollen hier zusammengefaßt werden. Die numerische Dissipation eines Zeitintegrationsalgorithmus beschreibt den Amplitudenfehler der Integration. Im niederfrequenten Bereich der Lösung der Differentialgleichung dient die Dämpfungsrate zur Quantifizierung der numerischen Dissipation.

$$\xi = - \frac{\ln \rho_I}{\tan^{-1}(\lambda_I/\lambda_R)} \quad \lambda_{1,2} = \lambda_R \pm i \lambda_I \quad (3.14)$$

λ_R und λ_I sind hierbei der Real- und Imaginärteil der konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der Matrix A . Für den hochfrequenten Lösungsbereich wird die numerische Dissipation anhand des Spektralradius im Grenzübergang $\Delta t/T_p \rightarrow \infty$ beurteilt, wobei mit kleiner werdendem Spektralradius ρ_∞ die numerische Dissipation zunimmt.

$$\rho_\infty(A) \equiv \lim_{\Delta t/T_p \rightarrow \infty} \rho_I(A) \quad (3.15)$$

4 Degeneriertes Schalelement

Zur räumlichen Diskretisierung einer dünnwandigen Struktur wird mit einem isoparametrischen finiten Schalelement, das die Abbildung endlicher Verschiebungen und Rotationen gestattet, operiert. Dieses Schalelement wird nach dem auf Ahmad, Irons, Zienkiewicz (1970) zurückgehenden und von Ramm (1976) auf geometrische Nichtlinearität erweiterten Degenerationskonzept entwickelt. Abgesehen von der Parametrisierung und der Interpolation unbekannter Variablen entspricht dieses Konzept der Vorgehensweise der klassischen Schalentheorie (Büchter(1992), Büchter, Ramm (1992)). Das in Abbildung 4.1 symbolisierte Degenerationskonzept basiert auf der Beschreibung des Schalenraumes durch die Schalenmittelfläche und ein Direktorfeld sowie der isoparametrischen Interpolation des Ortsvektors der Schalenmittelfläche und des Schalendirektors.

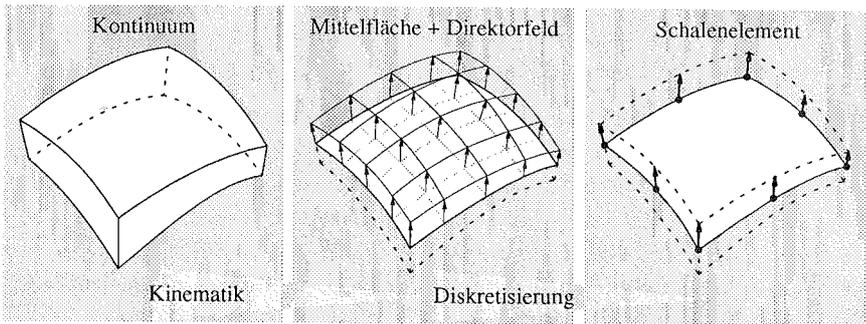


Abbildung 4.1 Modellierung – Kinematik und Diskretisierung

In der verwendeten Form mit extensiblen Direktoren kann ein in Dickenrichtung linear veränderliches Verschiebungsfeld und die Dickenänderung der Schale beschrieben werden. Der herausragende Vorteil des extensiblen Direktors ist die Möglichkeit, dreidimensionale konstitutive Gleichungen in unkondensierter Form einzusetzen (Büchter, Ramm (1992b), Braun (1995)). Die Forderung, daß der Schalendirektor bei der Deformation normal zur Schalenmittelfläche orientiert bleibt, entspricht der Kirchhoff–Love Hypothese. In der vorliegenden Formulierung hingegen werden Schubdeformationen, das heißt Rotationen des Direktors bezüglich der Schalenmittelfläche, zugelassen, womit eine Reissner–Mindlin Kinematik darstellbar ist.

Die Abbildung des Schalendirektors aus der undeformierten in die deformierte Konfiguration geschieht mit dem Differenzvektor \mathbf{w} . Diese Form des 'Direktor–updates' vereinigt mehrere Vorteile:

- die Abbildung endlicher Rotationen ist singularitätenfrei
- im Vergleich zur konkurrierenden Rotationstensor–Formulierung ist die Komplexität von Variation, Linearisierung und Zeitableitung um vieles geringer
- die resultierende Massenmatrix ist deformationsunabhängig

Nachteilig an einem extensiblen Direktor – dieser Nachteil ist allerdings unabhängig von der Form der Aktualisierung des Schalendirektors (vgl. Betsch, Gruttmann, Stein (1996)) – ist der in Braun, Bischoff, Ramm (1994) und Braun (1995) als 'Dickenlocking' bezeichnete Versteifungseffekt infolge des unvollständigen linearen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung. Behoben werden kann dieser Nachteil der Schalenformulierung mit Dickenänderung unter anderem mittels

- des 'Enhanced Assumed Strain' (EAS) Konzeptes, das durch Simo, Rifai (1990) für geometrisch lineare Probleme eingeführt, von Simo, Armero (1992) auf geometrisch nichtlineare Probleme erweitert und von Büchter, Ramm (1992b) zur Behebung des 'Dickenlocking' angewandt wurde
- der Verwendung einer Approximation höherer Ordnung in Dickenrichtung
- oder der in Braun, Bischoff, Ramm (1994) und Braun (1995) publizierten 'Multidirektor' Formulierung der Schale.

Zur Vermeidung des bei biegedominanten Deformationen auftretenden 'Dickenlocking' (vgl. Braun (1995)) wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit das EAS-Konzept verwendet.

In diesem Kapitel erfolgt eine Einführung in die Kinematik des Schalenelementes sowie die isoparametrische Diskretisierung. Das Prinzip der virtuellen Arbeit wird unter Beachtung der Schalenkinematik formuliert, diskretisiert und linearisiert. Die statischen Terme wurden bereits in Braun (1995) aufgearbeitet, daher liegt der Schwerpunkt der Betrachtungen auf der dynamischen Erweiterung. Weiterhin werden die Bilanzgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls wegen ihrer Bedeutung für den in Kapitel 6 beschriebenen 'Constraint Energy Momentum Algorithm' in diskreter Form entwickelt.

4.1 Geometrie und Kinematik

Grundlage des Degenerationskonzeptes bildet die Beschreibung des Schalenraumes durch die Schalenmittelfläche und das Direktorfeld in krummlinig konvektiven Koordinaten θ^i , $i \in [1, 2, 3]$ (Abbildung 4.2). Die kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche werden aus der Ableitung des Ortsvektors der Schalenmittelfläche nach den Koordinaten θ^α , $\alpha \in [1, 2]$ gewonnen.

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha} \qquad \underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha} \qquad (4.1)$$

In der undeformierten Referenzkonfiguration ist der Schalendirektor zu der Schalenmittelfläche normal orientiert. Bei der verwendeten Reissner-Mindlin Kinematik ist diese Normalenbedingung in der deformierten Konfiguration nicht mehr gegeben.

$$\underline{a}_3 = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{2 \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\|} \underline{h} \qquad \|\underline{a}_3\| = \frac{1}{2} \underline{h} \qquad (4.2)$$

Ein Ortsvektor im Schalenraum kann unter den getroffenen Voraussetzungen mit dem Ortsvektor der Schalenmittelfläche und dem mit der Koordinate θ^3 skalierten Schalendirektor beschrieben werden.

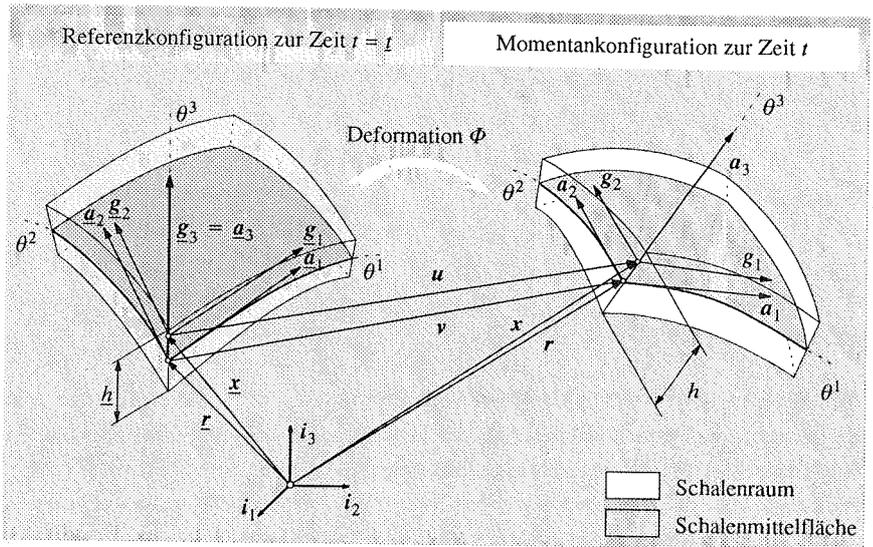


Abbildung 4.2 Schalenkinematik in Referenz- und Momentankonfiguration

$$\underline{x} = \underline{r} + \theta^3 \underline{a}_3 \qquad \underline{x} = \underline{r} + \theta^3 \underline{a}_3 \qquad (4.3)$$

Zwei der drei kovarianten Basisvektoren des Schalenraumes ergeben sich durch Ableitung des Ortsvektors des Schalenraumes nach den konvektiven Koordinaten θ^a und der dritte Basisvektor ist mit dem Schalendirektor \underline{a}_3 gegeben.

$$\underline{g}_a = \underline{x}_{,a} = \underline{a}_a + \theta^3 \underline{a}_{3,a} \qquad \underline{g}_3 = \underline{a}_3 \qquad (4.4)$$

$$\underline{g}_a = \underline{x}_{,a} = \underline{a}_a + \theta^3 \underline{a}_{3,a} \qquad \underline{g}_3 = \underline{a}_3 \qquad (4.5)$$

Unbekannt ist hier der Schalendirektor in der Momentankonfiguration. Dieser kann mit dem Differenzvektor \underline{w} oder dem Rotationstensor \underline{T} von der Referenz- in die Momentankonfiguration abgebildet werden (Abbildung 4.3).

Beide Formulierungen erlauben die Abbildung endlicher Rotationen, wobei die Rotationstensor Formulierung, wie in Büchter (1992) gezeigt wurde, nur in Sonderfällen singularitätenfrei ist. Unterschiede zwischen den prinzipiell unterschiedlichen Aktualisierungen des Schalendirektors gibt es bei der Modellierung der Dickenänderung der Schale. Die Differenzvektor Formulierung erlaubt die Beschreibung eines extensiblen Schalendirektors während in der Rotationstensor Formulierung ohne die Einführung eines Dickenparameters nur ein inextensibler Schalendirektor beschrieben werden kann. In Braun (1995) wird die mechanische Äquivalenz der Differenzvek-

tor Formulierung und der Rotationstensor Formulierung mit einem zusätzlichen Dickenparameter gezeigt.

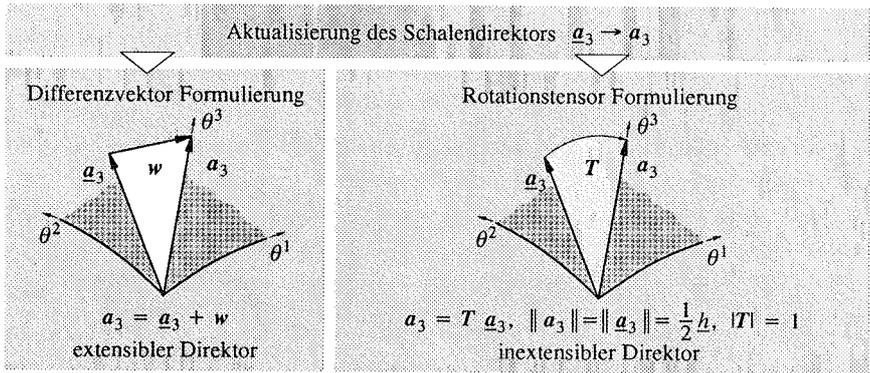


Abbildung 4.3 Aktualisierung der Schalendirektors

Bei der Abbildung großer Rotationen kann, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, zwischen Elementarrotationen und dem Rodrigues Rotationstensor unterschieden werden (z.B. Schiehlen (1986)). Die Aktualisierung des Schalendirektors nach Ramm (1976) mittels Elementarrotationen um die globale x - und y -Achse mit den Winkeln α und β wird für Schalendirektoren parallel zur globalen x -Achse singulär. Wie in Büchter (1992) demonstriert wird, führt die Verwendung des mit dem Rotationsvektor s beschriebenen Rodrigues Rotationstensors zu singulären Tangentensteifigkeitsmatrizen, wenn die Drehung zwischen dem Referenzvektor und der aktuellen Orientierung des Direktors $\pi + 2n\pi$ mit $n \in \mathbf{Z}$ beträgt. Vermieden wird diese Singularität bei der iterativen Lösung nichtlinearer Probleme durch die Aktualisierung des Schalendirektors von Inkrement zu Inkrement. Die klassische Aktualisierung des Schalendirektors direkt von der Referenz- in die Momentankonfiguration wird in Büchter (1992) als 'additiver Rotations-update' und die inkrementelle Aktualisierung des Schalendirektors als 'multiplikativer Rotations-update' bezeichnet.

Den Rotationsformulierungen gemeinsam ist die Tatsache, daß diese Formulierungen bei endlichen Rotationen zu einer deformationsabhängigen Massenmatrix führen. Dies ist zum Beispiel in Burmeister (1987) für das Schalelement nach Ramm (1976) demonstriert. Ferner werden bei diesen Formulierungen die Variationen, Richtungs- und Zeitableitungen deutlich komplexer als bei der Differenzvektor Formulierung. Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Arbeit die Differenzvektor Formulierung

$$\mathbf{a}_3 = \underline{\mathbf{a}}_3 + \mathbf{w} \quad (4.6)$$

zur Aktualisierung des Schalendirektors verwendet. Damit ist das Verschiebungsfeld des Schalenraumes zu definieren, wobei \mathbf{v} den Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche darstellt.

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{x} = \underline{r} - \underline{r} + \theta^3(\underline{a}_3 - \underline{a}_3) = \underline{v} + \theta^3 \underline{w} \quad (4.7)$$

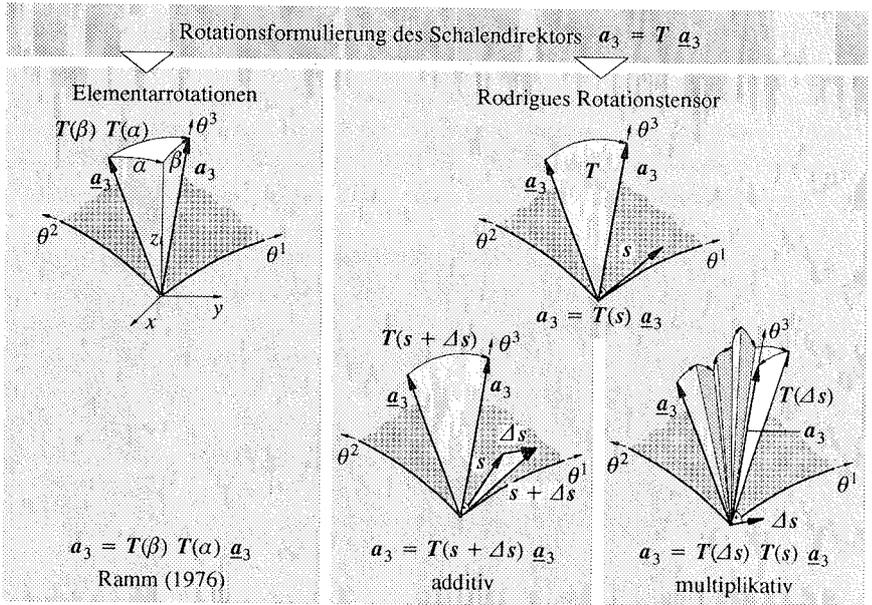


Abbildung 4.4 Rotationsformulierungen des Schalendirektors

Im Rahmen der Schalenformulierung ist es erforderlich, das differentielle Volumenelement auf ein Flächenelement und ein differentielles Element der Dickenkoordinaten θ^3 zu transformieren (vgl. Basar, Krätzig (1985)). Das differentielle Volumenelement des Schalenraumes

$$d\underline{V} = \det \underline{J} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad \det \underline{J} = (\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) \cdot \underline{g}_3 \quad (4.8)$$

und das differentielle Flächenelement der Schalenmittelfläche

$$d\underline{A} = \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\| d\theta^1 d\theta^2 \quad (4.9)$$

liefern die gewünschte Transformationsbeziehung.

$$d\underline{V} = \frac{\det \underline{J}}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\|} d\theta^3 d\underline{A} \equiv \mu d\theta^3 d\underline{A} \quad \mu \equiv \frac{\det \underline{J}}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\|} \quad (4.10)$$

4.2 Diskretisierung

Die Diskretisierung basiert auf der Zerlegung des materiellen Körpers \underline{B} in NE Teilgebiete \underline{B}_e (vgl. Abbildung 3.3).

$$\underline{B} = \bigcup_{e=1}^{NE} \underline{B}_e \quad \text{mit } \underline{B}_i \cap \underline{B}_j = \emptyset, \quad i, j \in [1, NE] \quad (4.11)$$

Ein solches Teilgebiet stellt ein finites Element dar. Innerhalb dieses finiten Elementes werden kontinuierliche physikalische Größen mittels diskreter Größen an Elementknoten und Ansatzfunktionen approximiert. In der vorliegenden Arbeit werden isoparametrische Schalenelemente, bei denen sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen mit identischen Ansatzfunktionen approximiert werden, verwendet. Als Ansatzfunktionen der Flächenelemente kommen hierarchische 'Serendipity' und 'Lagrange' Formfunktionen, wie sie zum Beispiel in Zienkiewicz, Taylor (1989) gegeben sind, zum Einsatz. Am Beispiel eines 8-knotigen Elementes sind die Grundtypen der entsprechenden 'Serendipity' Formfunktionen in Abbildung 4.5 dargestellt.

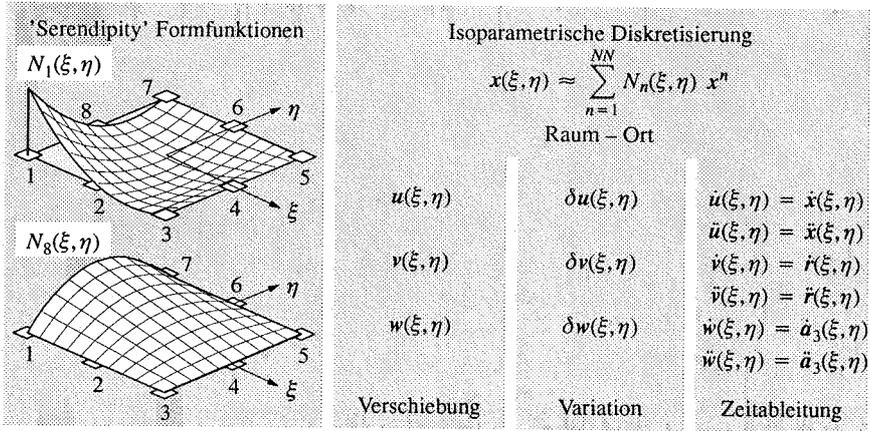


Abbildung 4.5 'Serendipity' Formfunktionen und isoparametrische Diskretisierung

Mit Hilfe der Formfunktionen wird der kontinuierliche Ortsvektor mittels der diskreten Knotenkoordinaten approximiert.

$$x(\xi, \eta) \approx x_h(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{NN} N_n(\xi, \eta) x^n \quad \rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{NN} N_n x^n \quad (4.12)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird künftig auf die Kennzeichnung der approximierten Größen mit dem Index h oder dem Approximationszeichen \approx verzichtet. Neben dem Ortsvektor werden die in Abbildung 4.5 zusammengefaßten Größen mit identischen Formfunktionen nach Gleichung (4.12) approximiert.

4.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Grundlage der Näherungslösung des Anfangs– Randwertproblem der Elastodynamik (vgl. Abbildung 2.4) bildet das Prinzip der virtuellen Arbeit (2.55). Durch Diskretisierung im Raum wird dieses Problem in ein semidiskretes Anfangswertproblem überführt. Hierzu wird das Prinzip der virtuellen Arbeit auf ein einzelnes, durch die Zerlegung des materiellen Körpers in Teilgebiete entstandenes, finites Element angewandt.

$$\int_{\underline{V}_e} \underline{\rho} \, \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\underline{V}_e + \int_{\underline{V}_e} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\underline{V}_e = \int_{\underline{A}_e} \underline{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\underline{A}_e + \int_{\underline{V}_e} \underline{\rho} \, \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\underline{V}_e \quad (4.13)$$

Die Anwendung des degenerierten Schalenelementes auf das Prinzip der virtuellen Arbeit geschieht in zwei Schritten:

- Modellbildung mit Hilfe der Schalenkinematik (Kapitel 4.1)
- Diskretisierung mit 4- und 8-knotigen Schalenelementen durch 'Serendipity' Formfunktionen oder mit 9- und 16-knotigen Schalenelementen durch 'Lagrange' Formfunktionen

Die Einführung der Schalenkinematik führt zu virtuellen Arbeitstermen, die über die Schalendicke vorabintegriert werden können. Die Diskretisierung und die numerische Integration über die Schalenfläche liefern nach Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung die Elementvektoren der inneren Kräfte, der externen Lasten und der Trägheitskräfte. Die Trägheitskräfte oder d'Alembert Kräfte können wiederum in das Produkt der Massenmatrix und des Beschleunigungsvektors des Elementes aufgespalten werden. Die Diskretisierung der virtuellen Arbeitsterme externer Lasten und der Verzerrungen wurde in Braun (1995) ausführlich behandelt. Hier werden lediglich die im Rahmen der vorliegenden Arbeit benötigten Ergebnisse zusammengefaßt. Ausführlich behandelt wird hingegen die dynamische Ergänzung, das heißt die Diskretisierung der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte.

4.3.1 Externe Lasten

Die virtuelle Arbeit der Volumen- und Oberflächenlasten mit Hilfe der Variation des Elementverschiebungsvektors

$$\mathbf{u}_e = \left[\mathbf{v}^{1T}, \mathbf{w}^{1T}, \dots, \mathbf{v}^{nT}, \mathbf{w}^{nT}, \dots, \mathbf{v}^{NNT}, \mathbf{w}^{NNT} \right]^T, \quad (4.14)$$

der die Verschiebungskomponenten \mathbf{v}^n und \mathbf{w}^n an den Elementknoten n enthält, und dem entsprechend definierten Elementvektor der externen Lasten \mathbf{R}_e ausgedrückt (Braun (1995)).

$$\delta W_{\text{ext}e} = \int_{\underline{A}_e} \underline{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\underline{A}_e + \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \underline{\rho} \, \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{R}_e(t) \quad (4.15)$$

4.3.2 Innere Kräfte

Die virtuelle innere Arbeit wird mit dem Vektor der Elementverschiebungen und dem Elementvektor der inneren Kräfte $\mathbf{N}_e(\mathbf{u}_e)$ formuliert (Braun (1995)).

$$\delta W_{\text{int}e} = \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{N}_e(\mathbf{u}_e) \quad (4.16)$$

Hierbei wird der Green–Lagrange Verzerrungstensor nach Gleichung (2.13) mit den kovarianten Basen des Schalenraumes in der Momentan– und Referenzkonfiguration beschrieben, und der zweite Piola–Kirchhoff Spannungstensor ist mit dem Materialgesetz (2.42) gegeben.

4.3.3 Tangentensteifigkeit

Die Linearisierung der inneren Kräfte führt auf die Tangentensteifigkeitsmatrix des Elementes $K_e(u_e)$, die wiederum den gewöhnlichen linearen, elastischen Anteil K_{eE} , die Anfangsverschiebungsmatrix $K_{eU}(u_e)$ und den geometrischen Anteil $K_{eG}(u_e)$ beinhaltet.

$$N_{e,u_e}(u_e) \cdot \Delta u_e = K_e(u_e) \cdot \Delta u_e = (K_{eE} + K_{eU}(u_e) + K_{eG}(u_e)) \cdot \Delta u_e \quad (4.17)$$

Der elastische Anteil der Tangentensteifigkeit und die Anfangsverschiebungsmatrix werden in der Summe als materielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Die explizite Form der Tangentensteifigkeit ist in Braun (1995) gegeben und wird aus diesem Grund hier nicht weiter ausgeführt.

4.3.4 Inertialterme und Massenmatrix

Der Trägheitsterm des Prinzips der virtuellen Arbeit (2.55) wird mit Gleichung (4.10) für den Schalenraum formuliert.

$$\delta W_{newe} = \int_{A_e} \int_{\theta^3} \underline{\rho} \cdot \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u} \mu \, d\theta^3 \, dA_e \quad (4.18)$$

Mit Gleichung (4.7) können die Variation des Verschiebungsvektors und die zweite Zeitableitung des Ortsvektors im Term der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte substituiert werden.

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{v} + \theta^3 \delta \mathbf{w} \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{v}} + \theta^3 \ddot{\mathbf{w}} \quad (4.19)$$

Weiterhin wird die Dickenintegration der in θ^3 konstanten, linearen und quadratischen Terme

$$P_0 \equiv \int_{\theta^3} \underline{\rho} \mu \, d\theta^3 \qquad P_1 \equiv \int_{\theta^3} \underline{\rho} \theta^3 \mu \, d\theta^3 \qquad P_2 \equiv \int_{\theta^3} \underline{\rho} (\theta^3)^2 \mu \, d\theta^3 \quad (4.20)$$

vorab durchgeführt, womit die virtuelle Arbeit der Newton Kräfte durch das Flächenintegral

$$\delta W_{newe} = \int_{A_e} (P_0 \ddot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} + P_1 (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{w} + \ddot{\mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{v}) + P_2 \ddot{\mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{w}) \, dA_e \quad (4.21)$$

beschrieben werden kann. Nach der Diskretisierung der Variation und der zweiten Zeitableitung der Verschiebungskomponenten

$$\delta \mathbf{v} = \sum_{n=1}^{NN} N_n \delta \mathbf{v}^n, \quad \delta \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{NN} N_n \delta \mathbf{w}^n \qquad \ddot{\mathbf{v}} = \sum_{n=1}^{NN} N_n \ddot{\mathbf{v}}^n, \quad \ddot{\mathbf{w}} = \sum_{n=1}^{NN} N_n \ddot{\mathbf{w}}^n \quad (4.22)$$

kann der Trägheitsterm in matrizieller Schreibweise angegeben werden.

$$\begin{aligned} \delta W_{newe} &= \sum_{n=1}^{NN} \sum_{m=1}^{NN} \delta v^n \cdot \ddot{v}^m \int_{\underline{A}_e} P_0 N_n N_m d\underline{A}_e + \sum_{n=1}^{NN} \sum_{m=1}^{NN} \delta w^n \cdot \ddot{w}^m \int_{\underline{A}_e} P_2 N_n N_m d\underline{A}_e \quad (4.23) \\ &+ \sum_{n=1}^{NN} \sum_{m=1}^{NN} \delta v^n \cdot \ddot{w}^m \int_{\underline{A}_e} P_1 N_n N_m d\underline{A}_e + \sum_{n=1}^{NN} \sum_{m=1}^{NN} \delta w^n \cdot \ddot{v}^m \int_{\underline{A}_e} P_1 N_n N_m d\underline{A}_e \\ &= \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e \end{aligned}$$

Hierbei ist \mathbf{M}_e die Massenmatrix und $\ddot{\mathbf{u}}_e$ der Beschleunigungsvektor des Elementes.

Bemerkungen:

- Die Massenmatrix ist deformationsunabhängig
- und invariant bezüglich Koordinatentransformationen (vgl. Gleichung (4.23)).

4.3.5 Semidiskrete Bewegungsgleichung des Schalenelementes

Mit den Gleichungen (4.15), (4.16) und (4.23) kann das Prinzip der virtuellen Arbeit (4.13) für das Schalenelement angegeben werden.

$$\delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{N}_e(\mathbf{u}_e) = \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{R}_e(t) \quad (4.24)$$

Durch Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (z.B. Washizu (1968), Oden (1979), Bufler (1991)) wird hieraus die semidiskrete Bewegungsgleichung des degenerierten Schalenelementes.

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{N}_e(\mathbf{u}_e) = \mathbf{R}_e(t) \quad (4.25)$$

4.4 Bilanzterme

Für die Entwicklung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' (CEMA) in Kapitel 6 ist die diskrete Formulierung der Bilanzgrößen von Interesse. Der Übergang der kinematischen Beschreibung des Kontinuums auf den Schalenraum und die Diskretisierung ist dieser Vorgehensweise zur Formulierung der semidiskreten Bewegungsgleichung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit identisch.

4.4.1 Totale Energie

Die totale Energie des dynamischen Systemes ist mit der Summe der kinetischen und der inneren Energie nach den Gleichungen (2.35) gegeben. Mit der Äquivalenz zur Schreibweise des Inertialterm des Prinzips der virtuellen Arbeit (vgl. Gleichungen (4.18) und (4.23)) kann die kinetische Energie des Schalenelementes in diskreter Form angegeben werden.

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \underline{\rho} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \dot{\mathbf{u}}_e \cdot \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad (4.26)$$

Die Berechnung der inneren Energie erfolgt auf Elementebene mittels des mit der Diskretisierung des Verschiebungsvektors nach den Gleichungen (2.9) und (2.13) gebildeten Green–Lagrange Verzerrungstensors.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e \quad (4.27)$$

Die Variation der inneren Energie

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{U}_{e,u_e} = \frac{1}{2} \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} (\delta \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbf{C} : \delta \mathbf{E}) \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e \\ &= \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \delta \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \delta W_{\text{int}e} = \delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{N}_e \end{aligned} \quad (4.28)$$

liefert die inneren Kräfte nach Gleichung (4.16) als Richtungsableitung der inneren Energie bezüglich des Elementverschiebungsvektors.

$$\mathbf{U}_{e,u_e}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{N}_e(\mathbf{u}_e) \quad (4.29)$$

4.4.2 Impuls

Der Impuls des Schalenelementes in diskreter Form wird durch Einsetzen der Schalenkinematik in die kontinuumsmechanische Formulierung des Impulses (2.24) und der Approximation des kontinuierlichen Geschwindigkeitsvektors mit den Formfunktionen und dem Elementgeschwindigkeitsvektor bestimmt.

$$\mathbf{L}_e = \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \dot{\mathbf{x}} \underline{\rho} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \sum_{n=1}^{NN} \dot{\mathbf{v}}^n \int_{\underline{A}_e} P_0 N_n \, d\underline{A}_e + \sum_{n=1}^{NN} \dot{\mathbf{w}}^n \int_{\underline{A}_e} P_1 N_n \, d\underline{A}_e = \mathbf{l}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad (4.30)$$

Damit ist die Beschreibung des aktuellen Impulses eines Schalenelementes durch die gewichtete Summation der Geschwindigkeiten der Schalenmittelfläche und des Differenzvektors möglich. Zur Bildung der Richtungsableitung oder der Linearisierung des Impulses ist dessen matrizielle Formulierung anzustreben. Damit kann der Elementimpuls mit dem Elementgeschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{u}}_e$ und der 'Impulsmatrix' \mathbf{l}_e bestimmt werden. Zur Beschreibung des linearen Impulses mit Hilfe der Massenmatrix wird die matrizielle Form des Impulses weiter umgeformt.

$$\mathbf{L}_e = \mathbf{l}_e \dot{\mathbf{u}}_e \equiv \mathbf{a}_e \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{M}_e^{-1} \mathbf{l}_e \quad (4.31)$$

Dabei beschreibt die Matrix \mathbf{a}_e die lineare Abbildung oder Projektion

$$\Phi_a : \begin{cases} \mathbb{R}^{6NN} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M_e \dot{u}_e \mapsto L_e = \Phi_a(M_e \dot{u}_e) = a_e M_e \dot{u}_e \end{cases} \quad (4.32)$$

der Elementfreiwerte auf den dreidimensionalen kartesischen Raum.

4.4.3 Drehimpuls

Der Drall oder Drehimpuls des Schalenelementes folgt aus der Drallformulierung des Kontinuums (2.28) durch die Transformation des Volumenelementes (4.10).

$$J_e = \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} x \times \dot{x} \underline{\rho} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e = \int_{\underline{A}_e} \int_{\theta^3} \hat{x} \dot{x} \underline{\rho} \mu \, d\theta^3 \, d\underline{A}_e \quad (4.33)$$

Mit der Definition der schiefsymmetrischen Matrix des Ortsvektors

$$x \times \xi = \hat{x} \xi \quad \text{mit } x, \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \hat{x} = -\hat{x}^T = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

kann das Kreuzprodukt in Gleichung (4.33) durch eine Matrizenmultiplikation ersetzt werden. Durch diese Operation geht der Drall in eine der Schreibweise der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte (4.18) äquivalente Form über, womit der Drehimpuls in diskreter Form

$$J_e = \int_{\underline{A}_e} \left(P_0 \hat{r} \dot{v} + P_1 (\hat{r} \dot{w} + \hat{a}_3 \dot{v}) + P_2 \hat{a}_3 \dot{w} \right) d\underline{A}_e = \bar{x}_e M_e \dot{u}_e = a_e \hat{x}_e M_e \dot{u}_e \quad (4.35)$$

direkt angegeben werden kann. Zur Diskretisierung des Drehimpulses wurden die schiefsymmetrischen Matrizen der Ortsvektoren der Schalenmittelfläche und der Schalendirektoren an Elementknoten in der Matrix \bar{x}_e beziehungsweise der Hyperdiagonalmatrix \hat{x}_e zusammengefaßt.

$$\bar{x}_e \equiv [\hat{r}_1, \hat{a}_{31}, \hat{r}_2, \hat{a}_{32}, \dots, \hat{r}_{NN}, \hat{a}_{3NN}] \quad \hat{x}_e \equiv [\hat{r}_1, \hat{a}_{31}, \hat{r}_2, \hat{a}_{32}, \dots, \hat{r}_{NN}, \hat{a}_{3NN}] \quad (4.36)$$

Bemerkungen:

- Die matrizielle Darstellung des linearen Impulses und des Dralles dient der Generierung der Richtungsableitungen der Impuls- beziehungsweise der Drallbedingung für den CEMA.
- Die Formulierung des Impulses mit der Projektionsmatrix a_e und der Massenmatrix M_e nach Gleichung (4.31) hat gegenüber der konkurrierenden 'Impulsmatrix' l_e nach Gleichung (4.30) den numerischen Vorteil, daß die Matrix a_e neben der Berechnung des Impulses auch der Projektion beliebiger Elementvektoren oder nach der Assemblierung (Kapitel 4.5) entsprechender Strukturvektoren auf den dreidimensionalen Raum dient. Somit muß für die Impulsberechnung keine zusätzliche Matrix bereitgestellt werden.

- Die Matrix \hat{x}_e nach Definition (4.36) symbolisiert lediglich die Rechenvorschrift zur Multiplikation eines Elementvektors mit einer Elementmatrix, das heißt die Matrix \hat{x}_e (oder später generierte entsprechende Matrizen mit dem Verschiebungs- Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsvektor als Basis) muß für den CEMA nicht generiert werden, es genügt die Bereitstellung einer entsprechenden Multiplikationsroutine.
- Die Aufspaltung der $3 \times NN$ Matrix \bar{x}_e in Gleichung (4.35) in das Produkt der $3 \times NN$ Projektionsmatrix a_e und der Diagonalmatrix \hat{x}_e ist in dem programmtechnischen Vorteil begründet, daß die Projektionsvorschrift der Matrix a_e , die bereits zur Impulsberechnung eingesetzt wird, genutzt werden kann.

4.5 Vom Element zur Struktur

Die in den vorangegangenen Kapiteln erläuterten und definierten Elementvektoren und –matrizen einer Struktur werden mit der direkten Steifigkeitsmethode oder mit einer aus der Topologie der Struktur resultierenden Booleschen Matrix zu Strukturvektoren und –matrizen zusammengefaßt (siehe z.B. Mehlhorn (1995), Argyris, Mlejnek (1988)). Die Notation von kontinuumsmechanischen Vektoren und Strukturvektoren (x, u, \dot{u}, \ddot{u}) ist identisch, da eine Verwechslung ausgeschlossen ist.

4.5.1 Semidiskrete Bewegungsgleichung

Mit der erwähnten, auf der Kompatibilität der virtuellen Arbeit

$$\delta W_{\text{ext/int/new}} = \sum_{e=1}^{NE} \delta W_{\text{ext/int/new } e} \quad (4.37)$$

basierenden, Vorgehensweise zur Zusammenfassung der Teilgebiete \underline{B}_e zum Gebiet \underline{B} oder der finiten Elemente zur Struktur ergibt sich die semidiskrete Bewegungsgleichung der Struktur (3.1) wie sie bereits in Kapitel 3 angegeben und um den dissipativen Term erweitert wurde.

4.5.2 Bilanzterme

Bilanzterme der Struktur werden durch einfache Addition der entsprechenden Terme aller Elemente gewonnen.

$$U = \sum_{e=1}^{NE} U_e \quad K = \sum_{e=1}^{NE} K_e = \frac{1}{2} \dot{u} \cdot M \dot{u} \quad (4.38)$$

$$L = \sum_{e=1}^{NE} L_e = a M \dot{u} \quad J = \sum_{e=1}^{NE} J_e = a \hat{x} M \dot{u} \quad (4.39)$$

5 Implizite Einschritt Zeitintegrationsmethoden

Basis für den in Kapitel 6 entwickelten 'Constraint Energy Momentum Algorithm' zur numerisch stabilen, bilanzkonformen und zugleich numerisch dissipativen Integration der nichtlinearen semidiskreten Bewegungsgleichung bildet ein beliebiges numerisch dissipatives implizites Einschritt Zeitintegrationsverfahren mit Newmark Approximationen in der Zeit. Aus der Gruppe dieser Zeitintegrationsalgorithmen wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die von Chung, Hulbert (1993) entwickelte 'Generalized- α Method' ausgewählt. Diese Methode kann als Spezialfall des auf einem gewichteten Residuenansatz basierenden Zeitintegrationsalgorithmus nach Zienkiewicz (1977), Zienkiewicz, Wood, Taylor (1980), Wood (1984) abgeleitet werden. Die 'Generalized- α Method' stellt die Generalisierung des klassischen Newmark Algorithmus, vorgeschlagen von Newmark (1959), dar. Weiterhin sind die in der Strukturtechnik sehr gebräuchlichen Zeitintegrationsverfahren nach Hilber, Hughes, Taylor (1977) beziehungsweise Hughes (1983) und Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981) beziehungsweise Wood (1990) in der 'Generalized- α Method' enthalten.

Um zuverlässige und numerisch effiziente Lösungen des semidiskreten Anfangswertproblems zu ermöglichen, soll der verwendete Zeitintegrationsalgorithmus über die folgenden numerischen Eigenschaften verfügen:

- Unbedingte spektrale beziehungsweise energetische Stabilität bei der Anwendung auf lineare und nichtlineare Aufgaben der Strukturtechnik
- Genauigkeit von zweiter Ordnung
- kontrollierbare algorithmische Dissipation höherer Moden als Voraussetzung zur Integrierbarkeit strukturtechnischer Aufgaben mit praktikablen Zeitschritten
- selbststartender Algorithmus

Ursprung der 'Generalized- α Method' und der oben erwähnten Zeitintegrationsverfahren ist der Algorithmus von Newmark (1959). Newmark verwendet lineare Approximationen des Verlaufes der Beschleunigungen im Zeitintervall $[t, t]$. Die Ansatzfunktionen der Geschwindigkeiten und Verschiebungen werden durch Parametrisierung (β, δ) des Beschleunigungsansatzes und anschließende Integration über das Zeitintervall gewonnen. Bei entsprechender Wahl des Zeitintegrationsparameters ($\delta = 0.5$) ist der Algorithmus von zweiter Ordnung genau. Eine Veränderung des Parameters führt zum Verlust der Genauigkeitsordnung, ermöglicht allerdings die numerische Dämpfung höherer Schwingungsmoden und damit praktikable Zeitschrittgrößen. Kontrollierbare numerische Dämpfung von höheren Moden und gleichzeitige Gewährleistung der Genauigkeit 2. Ordnung wird durch den von Hilber, Hughes, Taylor (1977) vorgeschlagenen 'Hilber- α ' Algorithmus, der auf den Newmark Approximationen und einer Modifikation des Terms der inneren Kräfte in der semidiskreten Bewegungsgleichung basiert, erreicht. Die Ergänzung der semidiskreten Bewegungsgleichung nach Hilber, Hughes, Taylor (1977) um den Term der physikalischen Dämpfung und die Modifikation des Terms der äußeren Lasten, publiziert von

Hughes (1983/1987), führen auf die heute gebräuchliche Form des 'Hilber- α ' Zeitintegrationsverfahrens. Alternativ wurde von Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981) das 'Bossak- α ' Verfahren zur Kombination von numerischer Dämpfung und der Genauigkeitsordnung zwei, das im Gegensatz zum 'Hilber- α ' Verfahren auf der Modifikation des Trägheitsterms der semidiskreten Bewegungsgleichung basiert, vorgeschlagen. Ein Vergleich der numerischen Dämpfungseigenschaften des 'Hilber- α ' und 'Bossak- α ' Verfahrens wurde von Adams, Wood (1983) veröffentlicht.

Die 'Generalized- α Method' ist von der Genauigkeitsordnung zwei, verfügt über eine kontrollierbare numerische Dissipation und ist bei linearer Abhängigkeit der inneren Kräfte von den Verschiebungen unbedingt stabil. Bei Verwendung der numerischen Dämpfungseigenschaften ist dieses Zeitintegrationsverfahren auch bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten energetisch stabil. Diese energetische Stabilität muß allerdings mit einem Energieverlust im Zeitschritt bezahlt werden, was dieses Verfahren zur Integration von großen Integrationsintervallen $[t, T]$ (Langzeitdynamiken) ungeeignet macht.

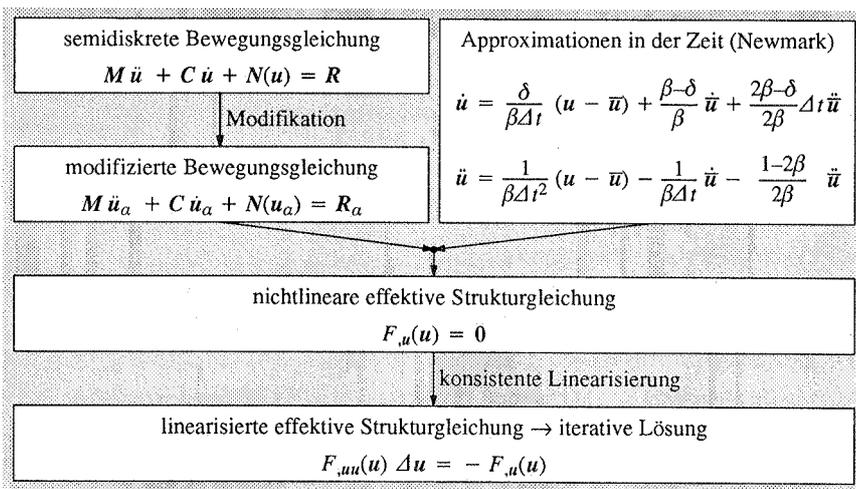


Abbildung 5.1 Entwicklung der 'Generalized- α Method' im Nichtlinearen

Die Entwicklung der 'Generalized- α Method' (Abbildung 5.1) für geometrisch nichtlineares Strukturverhalten ist folgendermaßen gegliedert: Zunächst wird die semidiskrete Bewegungsgleichung modifiziert und mit Hilfe der Newmark Approximationen in der Zeit in die nichtlineare effektive Strukturgleichung überführt. Diese nichtlineare Gleichung wird durch konsistente Linearisierung einer iterativen Lösung mit dem Newton-Raphson oder dem modifizierten Newton-Raphson Verfahren zugänglich gemacht. Anschließend werden Möglichkeiten zur adaptiven Zeitschrittsteuerung diskutiert. Die Anwendung des Zeitintegrationsalgorithmus und die verschiedenen adaptiven Zeitschrittsteuerungen auf den Duffing Oszillator runden die Betrachtungen ab.

5.1 Zeitintegrationsalgorithmus

Die Entwicklung des Zeitintegrationsalgorithmus nach Chung, Hulbert (1993) gründet in der Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung. Durch Einbettung der Approximationen des Beschleunigungs- und des Geschwindigkeitsvektors am Ende des Zeitschrittes als Funktion des Verschiebungsvektors zu diesem Zeitpunkt wird diese in die nichtlineare effektive Strukturgleichung überführt.

5.1.1 Modifizierte semidiskrete Bewegungsgleichung

Zur Kombination von numerischer Dissipation und der Genauigkeit von zweiter Ordnung wird die nichtlineare semidiskrete Bewegungsgleichung

$$M \ddot{\mathbf{u}} + C \dot{\mathbf{u}} + N(\mathbf{u}) = \mathbf{R} \quad (5.1)$$

derart modifiziert, daß die Systemvektoren der Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und äußeren Lasten am Ende des Zeitschrittes durch Linearkombinationen dieser Größen an den Zeitintervallgrenzen ersetzt werden.

$$M \ddot{\mathbf{u}}_\alpha + C \dot{\mathbf{u}}_\alpha + N(\mathbf{u}_\alpha) = \mathbf{R}_\alpha \quad (5.2)$$

Dabei ist die Linearkombination der Beschleunigungen von der Linearkombination der verbleibenden Systemvektoren unabhängig.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_\alpha &= (1 - \alpha_m) \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_m \ddot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\mathbf{u}}_\alpha &= (1 - \alpha_p) \dot{\mathbf{u}} + \alpha_f \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \mathbf{u}_\alpha &= (1 - \alpha_f) \mathbf{u} + \alpha_f \bar{\mathbf{u}} & \mathbf{R}_\alpha &= (1 - \alpha_p) \mathbf{R} + \alpha_f \bar{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Zur Anwendung des von Chung, Hulbert (1993) für lineares Strukturverhalten entwickelten Verfahrens auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen erweist sich die zu den äußeren Kräften äquivalente Approximation der inneren Kräfte als Funktion des linear kombinierten Verschiebungsvektors \mathbf{u}_α durch die Linearkombination der inneren Kräfte zu Beginn und am Ende des Zeitschrittes als günstig.

$$N(\mathbf{u}_\alpha) = N((1 - \alpha_p) \mathbf{u} + \alpha_f \bar{\mathbf{u}}) \approx (1 - \alpha_p) N(\mathbf{u}) + \alpha_f N(\bar{\mathbf{u}}) \quad (5.4)$$

Bemerkungen:

- Diese Approximation hat auf die Linearisierung des Terms der inneren Kräfte in der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung (Kapitel 5.2) Einfluß.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} N((1 - \alpha_p) \mathbf{u} + \varepsilon (1 - \alpha_p) \Delta \mathbf{u} + \alpha_f \bar{\mathbf{u}}) \right|_{\varepsilon=0} &= (1 - \alpha_p) N_{,\mathbf{u}_\alpha}(\mathbf{u}_\alpha) \Delta \mathbf{u} \\ &= (1 - \alpha_p) \mathbf{K}(\mathbf{u}_\alpha) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} [(1 - \alpha_p) N(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) + \alpha_f N(\bar{\mathbf{u}})] \right|_{\varepsilon=0} &= (1 - \alpha_p) N_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \\ &= (1 - \alpha_p) \mathbf{K}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.6)$$

- Die Approximation (5.4) ermöglicht gegenüber der ursprünglichen Fassung die Berechnung der inneren Kräfte und der Tangentensteifigkeit des aktuellen Verschiebungszustandes u , erfordert jedoch neben den aktuellen inneren Kräften die Bereitstellung der inneren Kräfte zu Beginn des Zeitschrittes. Konsequenzen hat dies auf die Berechnung der Richtungsableitungen der Energieebenbedingung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' (Kapitel 6.5 und 6.6), wo die inneren Kräfte und die Tangentensteifigkeitsmatrix am Ende des Zeitschrittes benötigt werden.

5.1.2 Zeitdiskretisierung

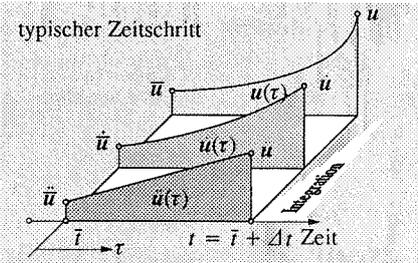
Mit Hilfe der Zeitdiskretisierung werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Ende des Zeitschrittes durch die Systemvektoren zu Beginn des Zeitschrittes und den aktuellen Verschiebungsvektor ausgedrückt. Zu diesem Zweck wurde von Newmark (1959) die Annahme eines linearen Beschleunigungsverlaufes

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u} + \frac{\ddot{u} - \ddot{u}}{\Delta t} \tau \quad (5.7)$$

über dem Zeitintervall $[t, t]$ vorgeschlagen. Nach der Parametrisierung des Beschleunigungsansatzes folgen durch Integration über den Zeitschritt die quadratische Geschwindigkeits- und die kubische Verschiebungsapproximation (vgl. Abbildung 5.2).

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u} + \ddot{u} \tau + \delta \frac{\ddot{u} - \ddot{u}}{\Delta t} \tau^2 \quad (5.8)$$

$$u(\tau) = \bar{u} + \dot{u} \tau + \frac{1}{2} \ddot{u} \tau^2 + \beta \frac{\ddot{u} - \ddot{u}}{\Delta t} \tau^3 \quad (5.9)$$



$$\text{Verschiebung - Integration} \quad (5.10)$$

$$u = \bar{u} + \Delta t \dot{u} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u} + \beta \Delta t^2 \ddot{u} \quad (5.10)$$

$$\text{Geschwindigkeit - Integration} \quad (5.11)$$

$$\dot{u} = \dot{u} + (1 - \delta) \Delta t \ddot{u} + \delta \Delta t \ddot{u} \quad (5.11)$$

$$\text{Beschleunigung - Ansatz} \quad (5.7)$$

$$\ddot{u}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \ddot{u} + \frac{\tau}{\Delta t} \ddot{u} \quad (5.7)$$

Abbildung 5.2 Zeitdiskretisierung und Newmark Ansätze

Die Geschwindigkeiten und Verschiebungen am Ende des Zeitschrittes werden durch Einsetzen der Intervallgrenze $\tau = \Delta t$ in die Gleichungen (5.8) und (5.9) gewonnen. Nach Umformung der Gleichungen (5.10) und (5.11) können die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Ende des Zeitschrittes in Abhängigkeit von den aktuellen Verschiebungen u ausgedrückt werden.

$$\dot{u}(u) = \frac{\delta}{\beta \Delta t} u - \frac{\delta}{\beta \Delta t} \bar{u} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{u} + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u} \quad (5.12)$$

$$\ddot{u}(u) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} u - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \bar{u} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u} \quad (5.13)$$

Bemerkungen:

- In Zienkiewicz (1977) wird die Einführung der Parameter δ und β mit der Taylorentwicklung der Geschwindigkeiten beziehungsweise der Verschiebungen und der Approximation der dritten Zeitableitungen des Verschiebungsvektors mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung begründet.
- Eine anschauliche Erläuterung der Parameter δ und β mit Hilfe der Integralwerte der Geschwindigkeit und Verschiebung über den Zeitschritt ist in dem Lehrbuch von Argyris, Mlejnek (1988b) gegeben.

5.1.3 Effektive Strukturgleichung

Mit der zeitlichen Diskretisierung (5.12) und (5.13) ist es möglich, die modifizierte semidiskrete Bewegungsgleichung (5.2), welche ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung darstellt, in ein nun vollständig diskretisiertes nichtlineares algebraisches Gleichungssystem, im weiteren als effektive Strukturgleichung bezeichnet, mit dem Verschiebungsvektor als Lösung zu überführen. Die Konzentration aller Terme der entstandenen Gleichung auf der linken Gleichungsseite ermöglicht die Formulierung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung als zum Nullvektor werdende Richtungsableitung eines Funktionales F .

$$F_{,u}(u) \equiv (1 - \alpha_f) N(u) + \alpha_f N(\bar{u}) - (1 - \alpha_f) R - \alpha_f \bar{R} \quad (5.14)$$

$$- M \left[\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} (\bar{u} - u) + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{u} + \left(\frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u} \right] - C \left[\frac{(1 - \alpha_f) \delta}{\beta \Delta t} (\bar{u} - u) + \left(\frac{(1 - \alpha_f) \delta}{\beta} - 1 \right) \dot{u} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) (1 - \alpha_f) \Delta t \ddot{u} \right] = \mathbf{0}$$

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Stationaritätsbedingung des Funktionales F (siehe z.B. Bufler (1991)).

$$F_{,u}(u) = \mathbf{0} \quad F(u) = \text{stat} \quad (5.15)$$

5.1.4 Numerische Eigenschaften und Parameterwahl

Die 'Generalized- α ' Methode vereinigt

- die Newmark Methode mit $\alpha_m = \alpha_f = 0.0$ (Newmark (1959)),
- die mittlere Beschleunigungsmethode mit $\alpha_m = \alpha_f = 0.0$ und $2\beta = \delta = 0.5$,
- die 'Hilber- α ' Methode mit $\alpha_m = 0.0$ (Hilber, Hughes, Taylor (1977)),
- und die 'Bossak- α ' Methode mit $\alpha_f = 0.0$ (Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981)).

In Chung, Hulbert (1993) wurden die numerischen Eigenschaften der 'Generalized- α ' Methode in Anwendung auf die Integration linearer Anfangswertprobleme untersucht, optimiert und für die 'Hilber- α ' und die 'Bossak- α ' Methode spezialisiert. Der Algorithmus ist für Parameterkombinationen, die den Bedingungen

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \qquad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m) \qquad (5.16)$$

genügen, unbedingt stabil (linear). Die Forderung nach einer Genauigkeit von zweiter Ordnung und die Optimierung der numerischen Dissipation nieder- und hochfrequenter Moden reduziert die vom Anwender frei zu wählenden Parameter auf den Spektralradius $\rho_\infty \in [0, 1]$.

Der vom Benutzer definierte Spektralradius und die Forderung nach einer minimalen Dissipation niederfrequenter Moden führen mit den Gleichungen (3.14) und (3.15) zu den Parametern α_m und α_f . Wird ferner die maximale Dissipation hochfrequenter Moden und die Genauigkeit von zweiter Ordnung nach Abschnitt 3.4.3 gefordert, ergeben sich die Parameter β und δ als Funktion des Spektralradius. Die Berechnung der Zeitintegrationsparameter nach den genannten Kriterien ist in (Tabelle 5.1) für die 'Generalized- α ', die 'Hilber- α ' und die 'Bossak- α ' Methode zusammengestellt. Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf dieser Parameter, von dem einzelne Punkte in Tabelle 5.2 wiedergegeben sind, über dem Spektralradius. Die Parameter β und δ sind für alle drei beschriebenen Verfahren nach gleicher Art definiert. Unterschiede ergeben sich hingegen bei den Parametern α_m und α_f . Insbesondere wird deutlich, daß die 'Generalized- α ' Methode ohne numerische Dämpfung mit $\rho_\infty = 1.0$ zur Anwendung der semidiskreten Bewegungsgleichung in der Mitte des Zeitschrittes führt, die beiden anderen Verfahren verwenden dagegen die semidiskrete Bewegungsgleichung am Ende des Zeitintervalles.

Algorithmus	Chung, Hulbert (1993)	Hilber, Hughes, Taylor (1977)	Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981)
Bedingung			
• benutzerdefinierter Spektralradius ρ_∞	$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\alpha_m = 0$	$\alpha_m = \frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$
• + minimale Dissipation niederfrequenter Moden	$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\alpha_f = \frac{1 - \rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\alpha_f = 0$
• maximale Dissipation hochfrequenter Moden	$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$	$\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha_f)^2$	$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m)^2$
• Genauigkeit 2. Ordnung	$\delta = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f$	$\delta = \frac{1}{2} + \alpha_f$	$\delta = \frac{1}{2} - \alpha_m$

Tabelle 5.1 Parametrisierung und Spezialisierung der 'Generalized- α ' Methode

Bis auf die unbedingte spektrale Stabilität der Zeitintegration sind alle genannten Eigenschaften auf die Integration des nichtlinearen semidiskreten Anfangswertproblems übertragbar. Bei nichtlinearem Strukturverhalten ist energetische Stabilität nach Gleichung (3.10) nur durch die Aktivierung numerischer Dissipation möglich. Durch die numerische Dämpfung wird im Zeitschritt Energie dissipiert, womit die Forderung (3.10) befriedigt ist.

Nachteilig wirkt sich die numerische Dissipation auf die Integration von Langzeitdynamiken aus; hier bewirkt der Energieverlust ein Abklingen der Dynamik und führt zum Beispiel zu Schwingungsamplituden einer freien Schwingung die wesentlich zu klein berechnet werden.

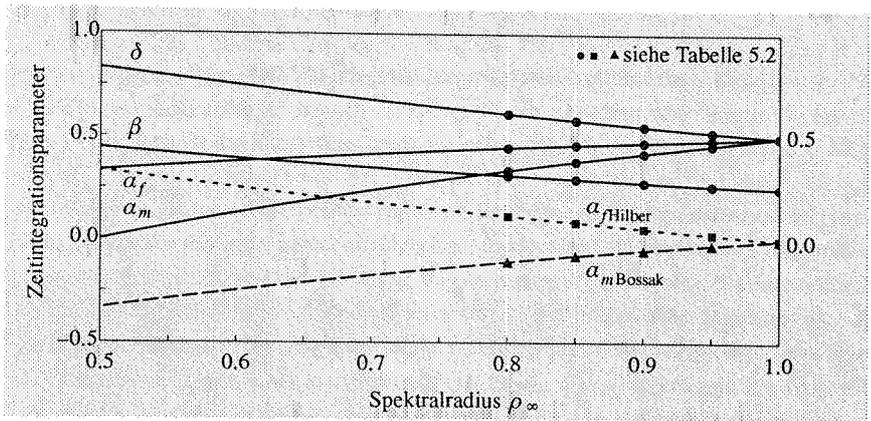


Abbildung 5.3 Parametrisierung der 'Generalized- α ' Methode

Spektralradius ρ_∞	• Newmark Parameter		• 'Generalized- α '		• Hilber	▲ Bossak
	β	δ	α_m	α_f	α_f	α_m
0.80	0.309	0.611	0.333	0.444	0.111	-0.111
0.85	0.292	0.581	0.378	0.459	0.081	-0.081
0.90	0.277	0.553	0.421	0.474	0.053	-0.053
0.95	0.263	0.526	0.461	0.487	0.026	-0.026
1.00	0.250	0.500	0.500	0.500	0.000	-0.000

Tabelle 5.2 Parametrisierung der 'Generalized- α ' Methode

5.1.5 Lineare Plattenschwingung

Anhand der freien ungedämpften Schwingung der in Abbildung 5.4 dargestellten, allseitig gelenkig gelagerten, dünnen quadratischen Platte soll das Phänomen der numerischen Dissipation verdeutlicht werden. Abgebildet werden sollen lediglich die doppelt symmetrischen Deformationen, womit die Modellierung eines Viertels der Platte mit 16 achtknotigen unterintegrierten Schalenelementen zulässig ist. Das Gleichgewicht wird an der undeformierten Konfiguration betrachtet, womit die nichtlineare Bewegungsgleichung (3.1) in die lineare Bewegungsgleichung

$$M \ddot{u} + K_E u = R(t) \quad (5.17)$$

der räumlich diskretisierten Struktur und die nichtlineare effektive Strukturgleichung (5.14) in die direkt lösbare lineare effektive Strukturgleichung (ohne physikalisch dissipativen Term)

$$\left(M \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} + (1 - \alpha_f) K_E \right) \mathbf{u} = (1 - \alpha_f) \mathbf{R} + \alpha_f \bar{\mathbf{R}} - \alpha_f K_E \bar{\mathbf{u}} \quad (5.18)$$

$$+ M \left[\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \left(\frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \right]$$

des räumlich und zeitlich diskretisierten Systems übergeht. Die Platte wird mit einer zentralen Einzellast statisch vorverformt und zum Zeitpunkt $t = 0$ entlastet, das heißt der freien Bewegung überlassen. Von Scholz (1996) werden verschiedene numerische Integrationsverfahren der 'Generalized- α ' Familie, darunter das 'Bossak- α ' Verfahren sowie die Newmark Methode in der Parametrisierung der Trapezregel und mit aktiver numerischer Dämpfung, untersucht. Die differenzierte numerische Dissipation hoch- und niederfrequenter Anteile der Bewegung ist bei der Newmark Methode mit den Parametern $\beta = 0.39$ und $\delta = 0.75$ am deutlichsten ausgeprägt. Aus diesem Grund soll hier lediglich die Newmark Methode in der angegebenen Parametrisierung untersucht werden. Weiterhin ist zu bemerken, daß relativ zur Periodendauer der ersten Grundschiwingung von 266ms ein sehr kleiner Zeitschritt von $\Delta t = 1\text{ms}$ verwendet wird, um auch höherfrequente Moden qualitativ hochwertig zu beschreiben. Der höchste hier dargestellte Schwingungsmodus verfügt über eine Periode von 15.6ms .

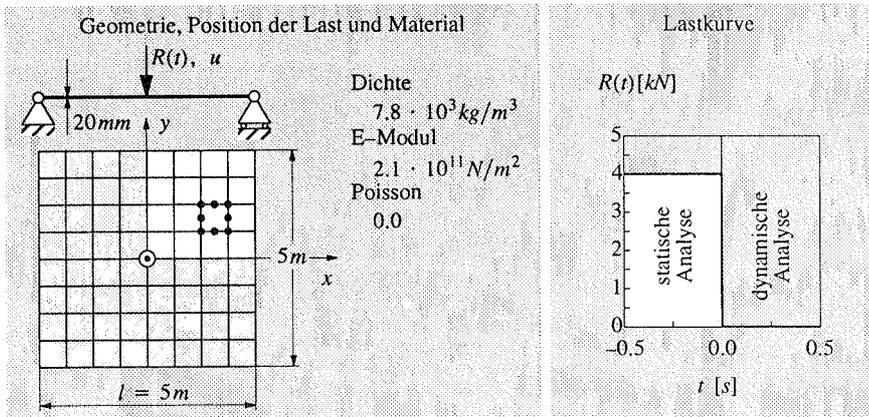


Abbildung 5.4 Lineare Plattenschwingung – Geometrie, Diskretisierung, Belastung, Material
Um Aussagen über einzelne Frequenzanteile der Plattendynamik zu gewinnen, wird nach jedem Zeitschritt die Fourierentwicklung der aktuellen Deformationsfigur

$$u_{\text{Fourier}}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{l} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \bar{u}_{mn}(x, y) \quad (5.19)$$

mittels der finite Elemente Lösung bestimmt (vgl. Scholz (1996)).

$$u_{mn} = \int_A u_{\text{FEM}}(x, y) \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{l} dA \quad (5.20)$$

Die Fourierkoeffizienten u_{mn} stellen dabei die Schwingungsamplitude einzelner Schwingungsmoden mn mit den Eigenformen $\tilde{u}_{mn}(x, y)$ dar. Mit der doppelten Symmetrie der Lösung nach der Finite Element Methode sind nur ebensolche Eigenformen, das bedeutet Eigenformen mit ungeradzahligem m und n , abbildbar.

Abbildung 5.5 zeigt die freie Schwingung der Platte, repräsentiert durch den Zeitverlauf der zentralen Verschiebung, für die eine charakteristische Deformationsfigur in Abbildung 5.6 gegeben ist.

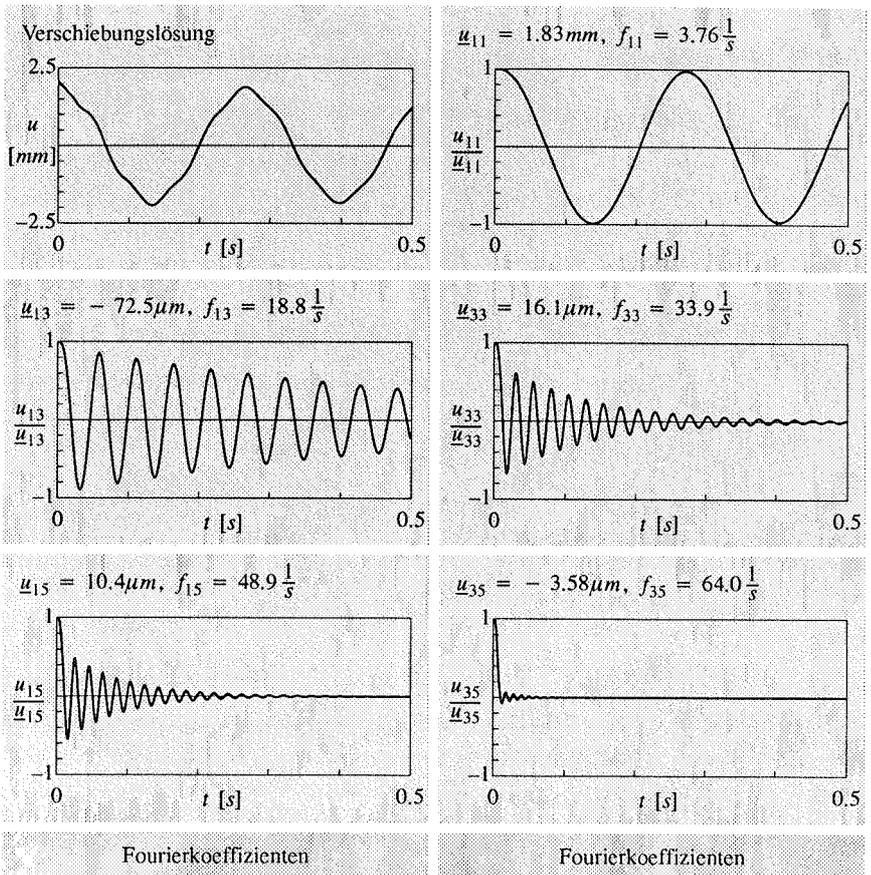


Abbildung 5.5 Zentrale Verschiebung und modale Zerlegung

Zu Beginn der Zeitintegration zeigt der Verschiebungsverlauf höherfrequente Schwingungsanteile die bis zum Ende des Zeitfensters abgeklungen sind. Dieses Abklingen höherfrequenter Moden muß sich nun auch in den Zeitschrieben der Fourierkoeffizienten u_{mn} mit $m, n \in [1, 3, 5]$ widerspiegeln. Die Zeitverläufe der auf den Anfangszustand bezogenen Fourierkoeffizienten sind in Abbildung 5.5 und die entsprechenden Eigenformen in Abbildung 5.6 dargestellt. Der Fourierkoeffizient u_{11} der ersten Eigenform \tilde{u}_{11} zeigt eine konstante Schwingungsamplitude im betrachteten Zeitfenster. Bereits der Fourierkoeffizient u_{13} der zweiten Eigenform zeigt einen Amplitudenabfall im Zeitverlauf. Dieser Amplitudenabfall wird mit zunehmender Eigenfrequenz ausgeprägter. Der fünfte Eigenmode ist schließlich bereits nach einer Periode nahezu abgeklungen.

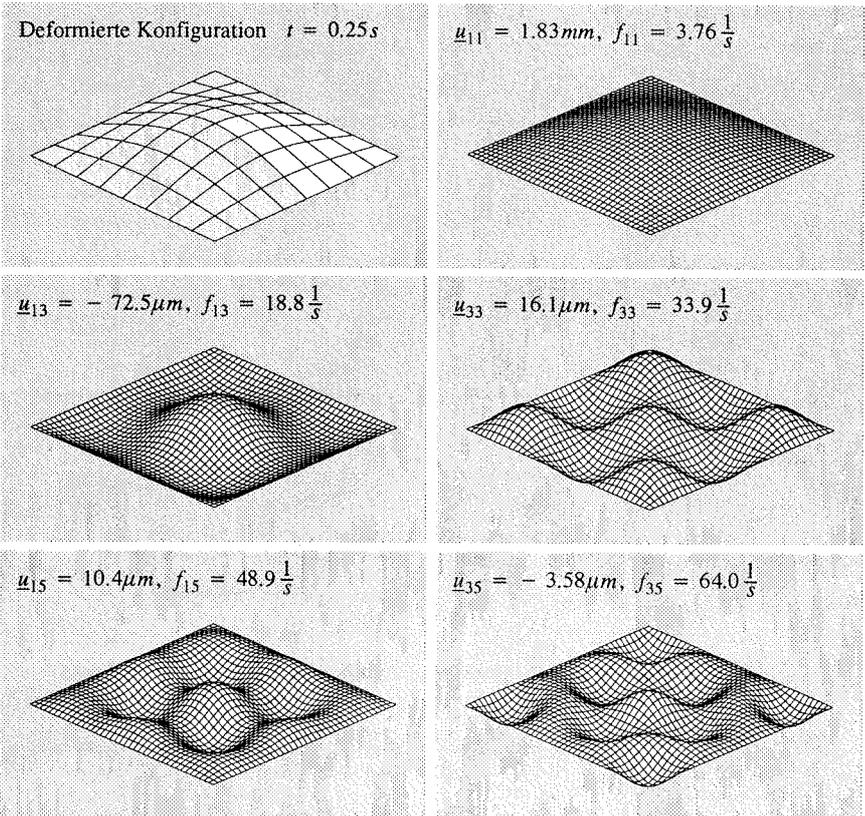


Abbildung 5.6 Deformierte Konfiguration und Eigenformen $u_{mn}(x, y)$

5.2 Linearisierung und Gleichgewichtsiteration

Die nichtlineare effektive Strukturgleichung (5.14) wird nach erfolgter konsistenter Linearisierung mit einer iterativen Strategie gelöst. Zu den im folgenden Kapitel behandelten Themen ist die Literatur von Hughes, Pister (1978), Matthies, Strang (1979), Marsden, Hughes (1983), Strang (1986), Wriggers (1988), Crisfield (1991) und Deuffhard, Hohmann (1993) zu empfehlen.

5.2.1 Gâteaux Ableitung der effektiven Strukturgleichung

Zur Lösung des Systems von nichtlinearen Gleichungen (5.14) wird $F_{,u}(\mathbf{u})$ an der Stelle einer bereits gegebenen Näherungslösung $\mathbf{u}^k \equiv \mathbf{u}$ in eine mehrdimensionale Taylor Reihe entwickelt.

$$F_{,u}(\mathbf{u}^{k+1}) = F_{,u}(\mathbf{u}^k) + F_{,uu}(\mathbf{u}^k) (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) + \mathcal{O}((\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)^2) = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

Hierbei ist k der Iterationsindex, auf den zur Vereinfachung der Schreibweise künftig verzichtet wird. Die Differenz zweier aufeinander folgender Näherungslösungen wird mit

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \equiv \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u} \quad (5.22)$$

bezeichnet. Das Restglied zweiter Ordnung in $\Delta \mathbf{u}$ der Taylor Reihe verschwindet für den Grenzübergang $\Delta \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$.

$$\lim_{\Delta \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{O}(\Delta \mathbf{u}^2) = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Damit wird eine verbesserte Näherungslösung für kleine $\Delta \mathbf{u}$ durch eine lineare Gleichung beschrieben. Eine wesentliche Rolle der linearisierten Lösung spielt die Richtungsableitung der effektiven Strukturgleichung, die ebenso als Gâteaux Ableitung bezeichnet wird. Diese ist wie folgt definiert:

$$\frac{d}{d\varepsilon} [F_{,u}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial F_{,u}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{\partial (\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})} \frac{\partial (\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \equiv F_{,uu}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \quad (5.24)$$

Die Anwendung dieser Definition auf die Gleichung (5.14) liefert die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix oder die effektive Tangente

$$F_{,uu}(\mathbf{u}) = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \delta}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}(\mathbf{u}), \quad (5.25)$$

wobei die tangentielle Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ die Gâteaux Ableitung der inneren Kräfte $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ darstellt.

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{N}(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})]_{\varepsilon=0} = \mathbf{N}_{,u}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{K}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \quad (5.26)$$

Dabei setzt sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix im nichtlinearen Fall aus der elastischen Steifigkeitsmatrix und der materiellen Steifigkeitsmatrix zusammen (vgl. Kapitel 4.3.3).

5.2.2 Iterative Lösungsstrategie

Sukzessives Lösen des linearen Anteiles der Gleichung (5.21)

$$F_{,uu}(u) \Delta u = -F_{,u}(u) \quad (5.27)$$

und Aktualisieren des Verschiebungsvektors nach Gleichung (5.22) liefert nach erfolgter Konvergenz der Iteration die Lösung des Systems von nichtlinearen Gleichungen (5.14). Diese Vorgehensweise beschreibt das reine Newton–Raphson Verfahren. Der erste Iterationsschritt wird als Prädiktor und alle weiteren Iterationsschritte werden als Korrektor bezeichnet. Für einen charakteristischen Freiheitsgrad ist das reine Newton–Raphson Verfahren in Abbildung 5.7 gemeinsam mit dessen Einbettung in ein implizites Zeitintegrationsschema dargestellt.

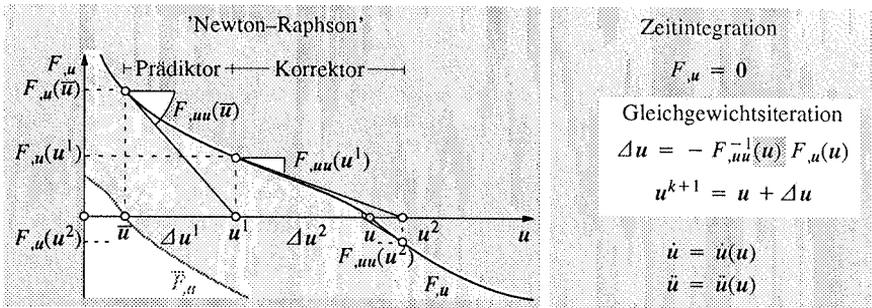


Abbildung 5.7 Iterative Lösung der effektiven Strukturgleichung mit Newton–Raphson

Werden die Korrektoren anstelle der aktuellen Tangente $F_{,uu}(u)$ mit der Tangente zu Beginn des Zeitschrittes $F_{,uu}(\bar{u})$ gebildet, handelt es sich um das in Abbildung 5.8 dargestellte, modifizierte Newton–Raphson Verfahren.

$$F_{,uu}(\bar{u}) \Delta u = -F_{,u}(u) \quad (5.28)$$

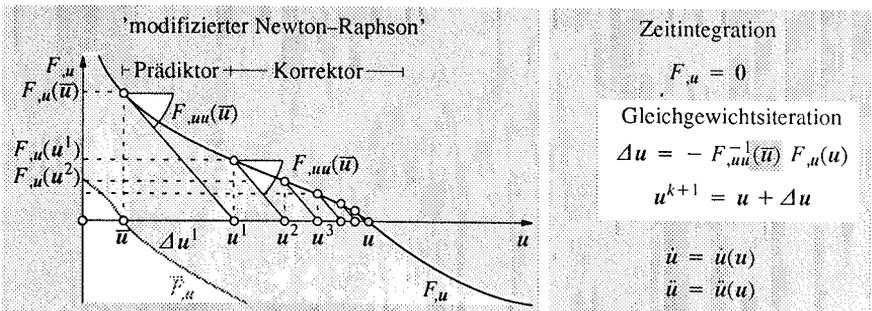


Abbildung 5.8 Lösung von $F_{,u} = 0$ mit dem modifiziertem Newton–Raphson Verfahren

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $F_{,u} = 0$ gilt als iterativ erreicht, wenn ein geeignetes Konvergenzkriterium erfüllt wird. Dieses Konvergenzkriterium kann auf dem Residuum

$F_{,u}(u^{k+1})$) oder der Entwicklung des Verschiebungsinkrements in der Gleichgewichtssiteration basieren. Residuenbasierte Konvergenzkriterien sind nicht normiert und haben damit den Nachteil, daß die Abbruchschranke für jedes zu berechnende Problem neu definiert werden muß. Mit der L_2 -Norm des Verschiebungsinkrements bezogen auf die L_2 -Norm der Verschiebungsdifferenz kann ein 'verschmiertes' Konvergenzkriterium formuliert werden, das über eine problemunabhängige Abbruchschranke η_u verfügt. Eine Alternative ist hier die Formulierung eines 'lokalen' Konvergenzkriteriums, bei dem jede Komponente des Verschiebungsinkrements bezogen auf die entsprechende Verschiebungsdifferenz kleiner als eine vorgegebene Schranke η_u sein muß. Zur Berechnung der Beispiele (Kapitel 7 und 8) der vorliegenden Arbeit wurde das 'verschmierte' Konvergenzkriterium verwendet.

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u - \bar{u}\|} \leq \eta_u \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta u_n}{u_n - \bar{u}_n} \leq \eta_u \quad \forall n = 1, \dots, NEQ \quad (5.29)$$

Es kann gezeigt werden, z.B. Deuffhard, Hohmann (1993), daß das reine Newton-Raphson Verfahren lokal, das heißt in der Nähe der Lösung, quadratisch konvergiert, während das modifizierte Newton-Raphson Verfahren wesentlich langsamer konvergiert. Der schlechteren Konvergenz steht allerdings ein geringerer numerischer Aufwand pro Iterationsschritt gegenüber.

Bemerkungen:

- Bei der 'Generalized- α ' Methode unterscheidet sich der Prädiktor formell nicht von den Korrektoren. Lediglich der numerische Aufwand zur Bereitstellung der rechten Seite $F_{,u}^0(u) = F_{,u}(\bar{u})$ ist beim Prädiktorschritt geringer. Diese verbale Unterscheidung der Iterationsschritte wird erst in Hinblick auf den 'Constraint Energy Momentum Algorithm' (Kapitel 6) sinnvoll.
- Alternativ kann der Prädiktor mit der Annahme eines im Zeitschritt konstanten Beschleunigungsvektors mit Hilfe der Newmark Approximation (5.10) berechnet werden. Dies ist einer Taylor Entwicklung des Verschiebungsvektors um den bekannten Verschiebungszustand zu Beginn des Zeitschrittes äquivalent.

$$u^1 = \bar{u} + \Delta t \bar{\dot{u}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \bar{\ddot{u}} \quad \text{mit} \quad \dot{u}^1 = \bar{\dot{u}} \quad (5.30)$$

- Bei den in dieser Arbeit behandelten Beispielen erwies sich das reine Newton-Raphson Verfahren als das bezüglich der Rechenzeit günstigere. Dieser Vorteil gegenüber dem modifizierten Newton-Raphson Verfahren geht jedoch mit dem Anwachsen der Zahl der Freiheitsgrade einer Struktur verloren.

5.3 Pfadverfolgung und Lastkontrolle

Prinzipiell sind Pfadverfolgungsalgorithmen, wie sie von Ramm (1981), Crisfield (1981) und Reitinger (1994) zur Stabilitätsuntersuchung von Tragwerken publiziert wurden, auf die sukzessive Integration des semidiskreten Anfangswertproblems der nichtlinearen Strukturmechanik

mit der Zeit als Pfadparameter anwendbar. Die Vorgabe von zeitlich veränderlichen äußeren Lasten legt jedoch die Verwendung der Lastkontrolle – auch als Laststeuerung bezeichnet – nahe. Zur geometrischen Veranschaulichung der Lastkontrolle in der bekannten Form (vgl. Ramm (1976), Reitinger (1994)) wird das System nichtlinearer Gleichungen (5.14) nach dem aktuellen Lastvektor aufgelöst (siehe Abbildung 5.9). Der Vektor $\bar{F}_{,u}(u)$ beinhaltet dabei die äußeren Lasten zu Beginn des Zeitschrittes sowie die inneren Kräfte, die Dämpfungskräfte und die Inertialkräfte in mit α_f beziehungsweise α_m parametrisierter Form. Die graphische Darstellung der Laststeuerung in dieser transformierten Form ist anhand eines charakteristischen Freiheitsgrades in Abbildung 5.9 gegeben. Die entsprechende Organisation eines Programm-Codes ist in Abbildung 5.10 skizziert.

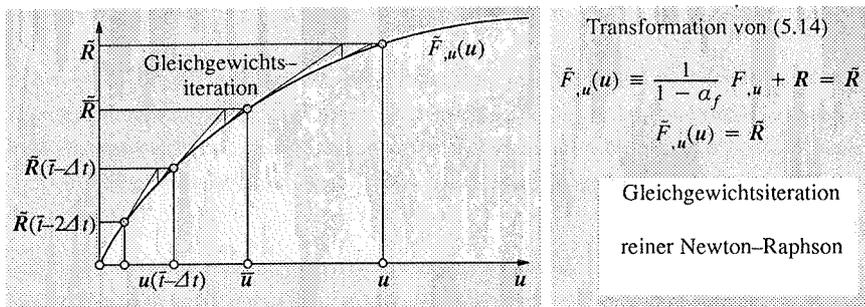


Abbildung 5.9 Laststeuerung in der nichtlinearen Strukturdynamik

Zeitschritt $t \rightarrow t + \Delta t$	
Vektor der äußeren Lasten	R
Prädiktor (Newton-Raphson mit Iterationsindex $k = 0$)	$\Delta u^1, u^1 = \bar{u} + \Delta u^1$
Newton-Raphson Iteration $k \rightarrow k+1$	
Tangentensteifigkeit, innere Kräfte, effektive rechte Seite	K, N
effektive Steifigkeitsmatrix und effektive rechte Seite	$F_{,uu}, -F_{,u}$
Inkrement des Verschiebungsvektors	$\Delta u = -F_{,uu}^{-1} F_{,u}$
aktualisieren von u	$u^{k+1} = u + \Delta u$
Konvergenzkriterium	
aktualisieren des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors	\dot{u}, \ddot{u}
Integrationszeit	

Abbildung 5.10 'Generalized- α ' Methode und Newton-Raphson Gleichgewichtsiteration

Bei gleichzeitigem Auftreten von äußeren Lasten und vorgeschriebenen Verschiebungen in Abhängigkeit von der Zeit oder zur Realisierung einer reinen Verschiebungssteuerung wird die in der Arbeit von Krämer (1995) erläuterte Strategie der gemischten Last-Verschiebungssteuerung angewandt.

5.4 Adaptive Zeitschrittsteuerung

Wesentliche Kriterien bei der Anwendung von Algorithmen zur numerischen Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme sind deren Effektivität und Genauigkeit. Effektivität und Genauigkeit werden entscheidend von der Wahl des Zeitschrittes und dessen Einfluß auf den numerischen Aufwand und den zeitlichen Diskretisierungsfehler beeinflußt. Aus diesem Grund soll der Zeitschritt derart gesteuert werden, daß zum einen der Diskretisierungsfehler kontrollier- und steuerbar ist und zum anderen der numerische Aufwand so gering wie möglich gehalten wird. Hierzu werden in der Literatur verschiedene Methoden zur adaptiven Steuerung der Schrittweite des numerischen Integrationsverfahrens diskutiert.

Grundsätzlich können zur adaptiven Schrittweitensteuerung Verfahren auf Basis der physikalischen Eigenschaften des dynamischen Systems und auf Basis von Fehlerschätzern unterschieden werden. Der ersten Gruppe gehört die von Bergan, Mollestad (1985) und von Jacob, Ebecken (1993) vorgeschlagene Anpassung des Zeitschrittes an die, mittels des Rayleigh Quotienten berechnete, charakteristische Eigenfrequenz oder Schwingungsperiode des nichtlinearen dynamischen Systems an. Givoli, Henigsberg (1993) verwenden hingegen die Vorgabe einer relativen Distanz zwischen den Lösungen zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte als Ausgangspunkt für die Zeitschrittsteuerung. Dies führt zu einem adaptiven Algorithmus, bei dem der Zeitschritt (auch für lineare Systeme) mit sehr hohem numerischen Aufwand iterativ ermittelt werden muß. Eine traditionelle Möglichkeit der zweiten Gruppe von adaptiven Schrittweitensteuerungen stellt die Schätzung des Zeitdiskretisierungsfehlers anhand des Vergleiches von Lösungen dar, die mit verschiedenen Zeitschrittgrößen ermittelt wurden. Alternativ hierzu kann der Vergleich von Zeitintegrationsverfahren verschiedener Genauigkeitsordnung als Fehlerkriterium verwendet werden (Thomas, Gladwell (1988)). Der numerische Aufwand ist bei diesen Verfahren wegen der parallelen Lösung des semidiskreten Anfangswertproblems mit verschiedenen Zeitschritten oder Zeitintegrationsmethoden sehr hoch. Durch Verwendung nachlaufbasierter a posteriori Fehlerästimatoren wird der numerische Aufwand zur Fehlerschätzung stark reduziert. Solche Fehler-schätzer und darauf aufbauende Schrittweitensteuerungen zur Lösung linearer dynamischer Systeme in Verbindung mit Zeitintegrationsmethoden der Newmark-Familie wurden unter anderem von Zienkiewicz, Xie (1991), Li, Zeng, Wiberg (1993) und Wiberg, Li (1993) publiziert.

Ein rein numerisches Kriterium zur Steuerung der Bogenlänge des Prädiktors bei Pfadverfolgungsalgorithmen wird von Reitinger (1994), motiviert durch die Arbeiten von Ramm (1981) und Crisfield (1981), vorgeschlagen. Dieses Kriterium basiert auf den Konvergenzeigenschaften der

Newton–Raphson Iteration und ist damit auf die Schrittweitensteuerung impliziter Zeitintegrationsverfahren in der nichtlinearen Dynamik anwendbar.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden a posteriori Fehlerästimatoren, welche sich durch geringen numerischen Aufwand auszeichnen, verwendet. Der Entwicklung dieser Fehlerästimatoren liegt die Newmark Approximation der Verschiebungen (5.10) zugrunde, womit sie auf die Generalized- α Methode von Chung, Hulbert (1993) anwendbar sind. Ferner wird die Berechnung von a posteriori Fehlerästimatoren lediglich von der Zeitdiskretisierung beeinflusst. Dies ermöglicht die Anwendung der Fehlerschätzer und der entsprechenden adaptiven Lösungsstrategien auf die Integration der nichtlinearen semidiskreten Bewegungsgleichung.

5.4.1 Definition des Fehlerästimators und Adaptivität

In den Aufsätzen Zienkiewicz, Xie (1991), Samuelsson, Wiberg (1991), Zeng, Wiberg, Li, Xie (1992), Wiberg, Zeng, Li (1992) und Li, Zeng, Wiberg (1993) wird zur lokalen Fehlerschätzung (d.h. Fehlerschätzung im Zeitschritt) der Verschiebungsfehler als Differenz der numerischen Verschiebungslösung \mathbf{u} und der exakten $\mathbf{u}_{\text{exakt}}$ definiert. Da die exakte Lösung im allgemeinen nicht bekannt ist, wird der Fehler mit einer im Vergleich zur ursprünglichen Lösung verbesserten numerischen Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$ höherer Genauigkeitsordnung

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{exakt}} \approx \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.31)$$

anstelle der exakten Lösung abgeschätzt und die L_2 -Norm von \mathbf{e} als skalarer a posteriori Fehlerästimator definiert. Praktikable Kriterien zur Zeitschrittsteuerung werden durch Bezug der L_2 -Norm des Verschiebungsfehlers \mathbf{e} auf eine Referenzgröße definiert. In der angegebenen Literatur wird die im Zuge der Zeitintegration ermittelte maximale L_2 -Norm des Verschiebungsvektors als Referenzgröße verwendet.

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = \sqrt{(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})} \quad \eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|_{\max}} \quad (5.32)$$

Von Zeng, Wiberg, Li, Xie (1992) wird alternativ die doppelte Verzerrungsenergienorm mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} als Fehlermaß vorgeschlagen. Zur Erweiterung auf nichtlineares Strukturverhalten wird die Energienorm mit Hilfe der Tangentensteifigkeit in der Mitte des Zeitschrittes, die mit der Tangentensteifigkeit zu Beginn des Zeitschrittes approximiert wird, gebildet.

$$\|\mathbf{e}\|_E = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{u}(1/2(\bar{t} + t)))\mathbf{e}} \approx \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{e}} \quad (5.33)$$

Neben dem Fehler in den Verschiebungen wird in Wiberg, Li (1993) und Wiberg, Li (1994) zusätzlich der Fehler in den Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_{\text{exakt}} \approx \dot{\mathbf{u}} - \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (5.34)$$

zur Definition eines lokalen Zeitdiskretisierungs Fehlerästimators mit der totalen Energienorm des Geschwindigkeits- und Verschiebungsfehlers verwendet. Als Referenzmaß zur Bildung des relativen Fehlerschätzers wird die maximale totale Energienorm der Zeitintegration verwendet.

$$\|e\|_E = \sqrt{\dot{e} \cdot M \dot{e} + e \cdot K(\bar{u})e} \quad \eta = \frac{\|e\|_E}{(\sqrt{2K + 2U})_{\max}} \quad (5.35)$$

Wie die Gleichungen (5.39) oder (5.44) in Beziehung zu der Newmark Approximation der Verschiebungen (5.10) zeigen werden, stellt e neben dem Fehler in den Verschiebungen auch den Fehler im Verschiebungsinkrement des Zeitschrittes dar. Weiterhin sind der geschätzte Fehler in den Geschwindigkeiten und der Fehler in den Geschwindigkeitsinkrementen im Zeitschritt identisch, was durch Vergleich der Gleichungen (5.11) und (5.55) gezeigt werden kann. Dies motiviert die alternative Definition der Fehlermaße auf der Basis des Verschiebungsinkrementes $u - \bar{u}$ bzw. des Geschwindigkeitsinkrementes $\dot{u} - \dot{\bar{u}}$.

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u - \bar{u}\|} \quad \eta = \frac{\|e\|_E}{\sqrt{2|K + U - \bar{K} - \bar{U}|}} \quad (5.36)$$

Die Beurteilung des Zeitschrittes erfolgt mit der Beschränkung

$$\nu_1 \eta_e \leq \eta \leq \nu_2 \eta_e, \quad (5.37)$$

des relativen Fehlers, wobei η_e , ν_1 und ν_2 die anwenderdefinierte Toleranz, Unter- und Obergrenze des Fehlermaßes darstellen. Genügt η obiger Beziehung nicht, so wird der Zeitschritt

$$\Delta t_{\text{neu}} = \Delta t_{\text{alt}} \sqrt[3]{\frac{\eta_e}{\eta}} \quad (5.38)$$

verändert, wobei bei einer adaptiven Zeitschrittverkleinerung mit den beschriebenen a posteriori Fehlerästimatoren der letzte Zeitschritt wiederholt wird. Der Algorithmus zur Anpassung des Zeitschrittes ist in Abbildung 5.11 zusammengefaßt.

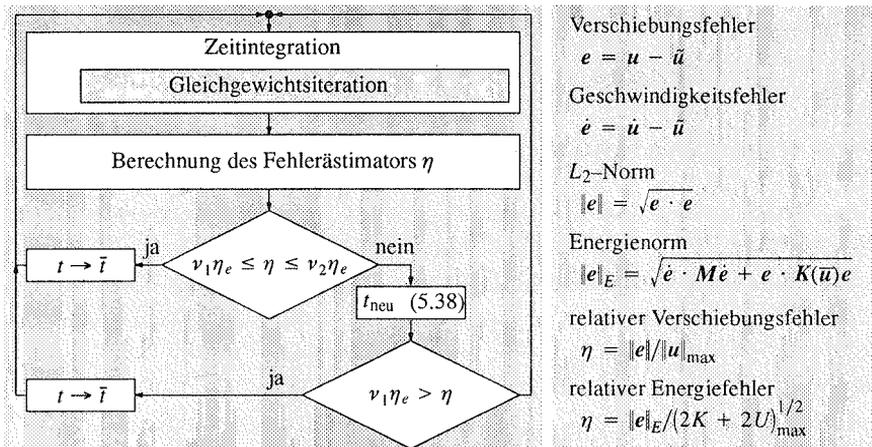


Abbildung 5.11 Adaptive Zeitschrittsteuerung mit a posteriori Fehlerästimatoren

5.4.2 Fehlerästimator nach Zienkiewicz und Xie (1991)

Mit der Taylorentwicklung der Verschiebungen am Ende des Zeitschrittes

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta t \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^3}{6} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.39)$$

steht nach Zienkiewicz, Xie (1991) eine Lösung höherer Genauigkeitsordnung zur Abschätzung des Verschiebungsfehlers, der mit der Newmark Approximation (5.10) des Verschiebungsvektors am Ende des Zeitschrittes die Form

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \beta \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) - \frac{\Delta t^3}{6} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.40)$$

annimmt, zur Verfügung. Die zeitliche Ableitung der Beschleunigung zur Zeit \bar{t} wird mit der Taylorentwicklung der Beschleunigung oder dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (z.B. Bronstein, Semendjajew (1979)) gewonnen.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \Delta t \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad \overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.41)$$

Wie in Zienkiewicz, Xie (1991) gezeigt wurde, ist der Schätzer des Verschiebungsfehlers von der Genauigkeit dritter Ordnung.

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = (\beta - \frac{1}{6}) \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.42)$$

Dieses Fehlermaß wurde von Samuelsson, Wiberg (1991), Zeng, Wiberg, Li, Xie (1992) und Wiberg, Zeng, Li (1992) mit Hilfe einer im Zeitschritt linearen Beschleunigungsapproximation und der daraus entstehenden Verschiebungslösung hergeleitet. Ferner wird in diesen Veröffentlichungen behauptet, daß das Fehlermaß (5.42) lediglich für die Newmark Methode mit dem Parameter $\beta = 1/4$ eine Lösung höherer Genauigkeitsordnung darstellt.

5.4.3 Fehlerästimator nach Li, Zeng, Wiberg (1993)

Von den in den Publikationen Samuelsson, Wiberg (1991), Zeng, Wiberg, Li, Xie (1992) und Wiberg, Zeng, Li (1992) gewonnenen Erkenntnissen bezüglich der Genauigkeitsordnung eines linearen Beschleunigungsansatzes motiviert, wird in den genannten Veröffentlichungen und in Li, Zeng, Wiberg (1993) eine lineare Approximation der zeitlichen Ableitung der Beschleunigung

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{u}}(\tau) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} \tau \quad (5.43)$$

zur Berechnung der höherwertigen Lösung vorgeschlagen. Die Integration dieses Ansatzes führt zu den Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen

$$\begin{aligned}
\ddot{\underline{u}} &= \ddot{\underline{u}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}} \right) \\
\dot{\underline{u}} &= \dot{\underline{u}} + \Delta t \ddot{\underline{u}} + \frac{\Delta t^2}{6} \left(\ddot{\underline{u}} + 2 \ddot{\underline{u}} \right) \\
\underline{u} &= \underline{u} + \Delta t \dot{\underline{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\underline{u}} + \frac{\Delta t^3}{24} \left(\ddot{\underline{u}} + 3 \ddot{\underline{u}} \right)
\end{aligned} \tag{5.44}$$

höherer Genauigkeitsordnung am Ende des Zeitschrittes. Die Approximationen höherer Genauigkeitsordnung (5.44) in die semidiskrete Bewegungsgleichung (5.2) der 'Generalized- α Method' eingesetzt, ergeben ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die zeitlichen Ableitungen der Beschleunigungen am Ende des Zeitschrittes mit deren Hilfe wiederum die verbesserte Verschiebungslösung nach Gleichung (5.44) berechnet werden kann. Dieses Vorgehensweise erfordert einen numerischen Aufwand, welcher dem Aufwand zur Ermittlung der Verschiebungslösung entspricht. Um mit geringen Rechenzeiten eine Approximation des Fehlers im Zeitschritt zu ermöglichen, wird von Li, Zeng, Wiberg (1993) eine Abschätzung der zeitlichen Ableitungen der Beschleunigungen am Ende des Zeitschrittes vorgeschlagen, die auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Mittelwertbildung der Beschleunigungsableitung basiert.

$$\frac{\dot{\underline{u}} + \ddot{\underline{u}}}{2} = \frac{\ddot{\underline{u}} - \ddot{\underline{u}}}{\Delta t} \quad \dot{\underline{u}} = 2 \frac{\ddot{\underline{u}} - \ddot{\underline{u}}}{\Delta t} - \ddot{\underline{u}} \tag{5.45}$$

Die Beschleunigungsableitung zu Beginn der Zeitintegration wird mit Hilfe der Zeitableitung der linearisierten Bewegungsgleichung der Referenzkonfiguration berechnet. Hierbei wird die Zeitableitung der äußeren Lasten mit Hilfe der Taylorentwicklung der äußeren Lasten zur Zeit Δt approximiert.

$$\dot{\underline{u}} = \mathbf{M}^{-1} \left(\dot{\underline{R}} - \mathbf{C} \ddot{\underline{u}} - \mathbf{K}(\underline{u}) \dot{\underline{u}} \right) \quad \dot{\underline{R}} \approx \frac{\underline{R}(\Delta t) - \underline{R}}{\Delta t} \tag{5.46}$$

Alternativ wird hier die Berechnung der Beschleunigungsableitung $\dot{\underline{u}}$ mit der Taylor Entwicklung der Beschleunigung zur Zeit $t = \Delta t$ vorgeschlagen.

$$\dot{\underline{u}} = \frac{\ddot{\underline{u}}(\Delta t) - \ddot{\underline{u}}}{\Delta t} \tag{5.47}$$

Mit der höherwertigen Verschiebungslösung nach den Gleichungen (5.44) und der Approximation (5.45) und dem Newmark Ansatz für die Verschiebungen (5.10) wird der Fehlervektor in folgender Form berechnet.

$$\mathbf{e} = \frac{\Delta t^3}{12} \left[\left(6\beta - \frac{1}{2}\right) \dot{\underline{u}} + \left(6\beta - \frac{3}{2}\right) \ddot{\underline{u}} \right] = \frac{\Delta t^2}{12} \left[(12\beta - 1) (\ddot{\underline{u}} - \ddot{\underline{u}}) - \Delta t \ddot{\underline{u}} \right] \tag{5.48}$$

In Li, Zeng, Wiberg (1993) wird für diesen Fehlerschätzer die gegenüber dem in Abschnitt 5.4.2 vorgestellten Verfahren von Zienkiewicz, Xie (1991) erhöhte Genauigkeitsordnung gezeigt. Der Fehlerschätzer (5.48) ist nach dieser Aussage von vierter Ordnung genau.

Bemerkungen:

- Die Verschiebungslösung höherer Genauigkeitsordnung (5.44) ist der Taylorentwicklung der Verschiebungen am Ende des Zeitschrittes

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta t \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^3}{6} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^4}{24} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (5.49)$$

in Verbindung mit der ebenfalls mittels einer Taylorentwicklung approximierten vierten Zeitableitung der Verschiebungen

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \Delta t \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} - \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.50)$$

äquivalent. Die mit den Gleichungen (5.49) und (5.50) approximierten Verschiebungen sind vierter Ordnung genau.

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \Delta t \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^3}{24} \left(\overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + 3 \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (5.51)$$

- Die Approximation der dritten Zeitableitung der Verschiebungen in der Mitte des Zeitintervalles mit Hilfe einer Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz

$$\begin{aligned} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} &= \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} &= \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} - \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.52)$$

zeigt, daß die Approximation (5.45) die Genauigkeitsordnung des Fehlerästimators nach Li, Zeng, Wiberg (1993) reduziert.

$$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}}{2} = \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} - \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} = 2 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} - \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} - \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (5.53)$$

Damit ist der mit den Gleichungen (5.31), (5.51), (5.53) und Newmark Approximation (5.10) gebildete Fehlerästimator, wie auch der Fehlerästimator nach Zienkiewicz, Xie (1991), von dritter Ordnung genau.

$$e = \frac{\Delta t^2}{12} \left[(12\beta - 1) (\overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} - \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}}) - \Delta t \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.54)$$

5.4.4 Fehlerästimator nach Wiberg, Li (1993)

Von Wiberg, Li (1993) und Wiberg, Li (1994) wird neben der Fehlerschätzung der Verschiebungen nach Gleichung (5.48) auch der Fehler in den Geschwindigkeiten zur Ermittlung eines Kriteriums zur Zeitschrittsteuerung einbezogen. Da der Fehlerschätzer in den Verschiebungen dem im Abschnitt 5.4.3 dargestellten identisch ist, genügt es, den Fehler in den Geschwindigkeiten abzuleiten. Hierzu wird die Geschwindigkeit am Ende des Zeitschrittes mit einer Taylorentwicklung

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \Delta t \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^2}{2} \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{\Delta t^3}{6} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.55)$$

bis zum vierten Term approximiert, wobei die vierte Zeitableitung der Verschiebungen durch die Taylorentwicklung der dritten Zeitableitung des aktuellen Verschiebungsvektors

$$\ddot{\vec{u}} = \frac{\dot{\vec{u}} - \dot{\vec{u}}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (5.56)$$

ersetzt wird. Mit der Newmark Approximation der Geschwindigkeit zur Zeit t (5.11) und Gleichung (5.45) für die Beschleunigungsdifferenz $\ddot{\vec{u}} - \dot{\vec{u}}$ ergibt sich nach Wiberg, Li (1993) und Wiberg, Li (1994) der Fehlerschätzer der Geschwindigkeiten mit der Genauigkeitsordnung drei.

$$\dot{e} = \dot{\vec{u}} - \dot{\vec{u}} = \frac{\Delta t^2}{6} \left[(3\delta - 1) \ddot{\vec{u}} + (3\delta - 2) \dot{\vec{u}} \right] + O(\Delta t^4) \quad (5.57)$$

Zur Zusammenfassung des Geschwindigkeits- und Verschiebungsfehlers zu einem Schrittweitenkriterium ist die totale Energienorm (5.35) zu verwenden.

Bemerkung:

- Da in Gleichung (5.57) $\dot{\vec{u}}$ mit der Approximation (5.53) ersetzt werden muß, ist der Fehler- estimator der Geschwindigkeiten lediglich von zweiter Ordnung genau.

5.5 Duffing Oszillator

Der bereits in Kapitel 1.3 erläuterte Duffing Oszillator wird im folgenden zur Illustration der Vorgehensweise zur numerischen Lösung eines nichtlinearen Anfangswertproblems verwendet. Zunächst wird die die Bewegung beschreibende Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Diskretisierung in der Zeit in eine nichtlineare algebraische Gleichung, die effektive Strukturgleichung, überführt. Anschließend wird diese Gleichung linearisiert und iterativ gelöst. Numerische Experimente mit der 'Generalized- α ' Methode und zu den vorgestellten adaptiven Schrittweitensteuerungen runden die Ausführungen zum Duffing Oszillator in diesem Kapitel ab.

5.5.1 Effektive Strukturgleichung

Die in Abbildung 1.4 gegebene nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung des Duffing Oszillators wird in der Zeit diskretisiert. Für einen typischen Zeitschritt wird die Beschleunigung am Ende des Zeitschrittes mit der Newmark Approximation (5.13) durch die Verschiebung am Ende sowie die Verschiebung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung am Beginn des Zeitschrittes ausgedrückt. Dies resultiert in der effektiven Strukturgleichung des Duffing Oszillators in Verbindung mit der Newmark Methode, wie sie in Abbildung 5.12 dargestellt ist. Die effektive Strukturgleichung ist eine nichtlineare algebraische Gleichung in der Verschiebung u . Die Lösung dieser Gleichung ist bei bekannten Anfangsbedingungen zu Beginn eines typischen Zeitschrittes die Lösung der Differentialgleichung am Ende des Zeitschrittes. Die Lösbarkeit dieser effektiven Strukturgleichung vorausgesetzt, kann so die Lösung des Anfangswertproblems sukzessive gefunden werden.

Zur synchronen Gewährleistung von numerischer Dämpfung und einer Genauigkeit von zweiter Ordnung wird die 'Generalized- α ' Methode auf die Differentialgleichung des Duffing Oszilla-

tors angewandt. Einzige Änderung zu den obigen Ausführungen bezüglich des Newmark Verfahrens ist die Modifikation der Bewegungsgleichung. Zu diesem Zweck werden die Verschiebungen und Beschleunigungen am Ende des Zeitschrittes durch Linearkombinationen der entsprechenden Größen an den Intervallgrenzen ersetzt. Im Vergleich zu dem von Chung, Hulbert (1993) für lineare Differentialgleichungen veröffentlichten Verfahren wird die innere Kraft nicht mit Hilfe der modifizierten Verschiebung berechnet, sondern analog zu der äußeren Kraft nach Gleichung (5.4) modifiziert. Die Vorgehensweise zur Generierung der algebraischen nichtlinearen Gleichung eines typischen Zeitschrittes ist analog zum Newmark Verfahren. Die Entwicklungsgeschichte dieser algebraischen Gleichung ausgehend von der Bewegungsgleichung ist in Abbildung 5.13 zusammengefasst.

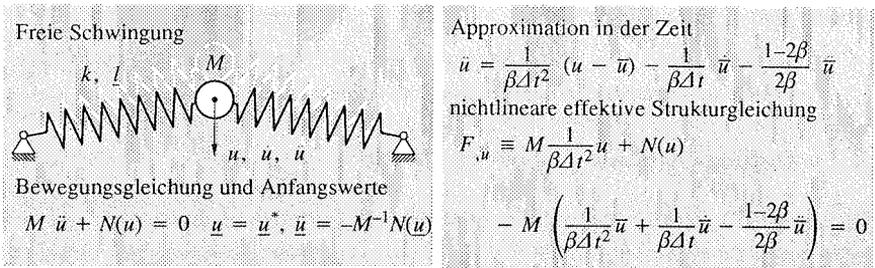


Abbildung 5.12 Duffing Oszillator – Zeitintegration mit dem Newmark Algorithmus (1959)

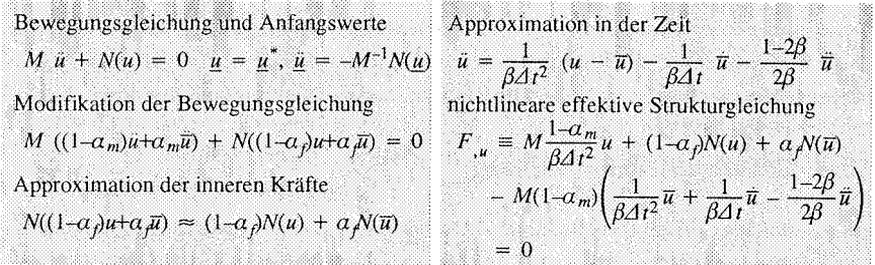


Abbildung 5.13 Duffing Oszillator – Zeitintegration mit der 'Generalized- α ' Methode

5.5.2 Linearisierung und iterative Lösung

Die Lösung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung erfolgt mit der reinen Newton-Raphson Methode wie dies in Kapitel 5.2 erläutert wurde iterativ. Abbildung 5.14 zeigt am Beispiel der 'Generalized- α ' Methode die Taylorentwicklung der effektiven Strukturgleichung, die linearisierte effektive Strukturgleichung mit dem Tangentenoperator $F_{,uu}(u)$ sowie die Tangentensteifigkeit $U_{,uu}(u) = N_{,u}(u)$ des Duffing Oszillators. Der Tangentenoperator des Newmark Verfahrens geht aus dem Tangentenoperator der 'Generalized- α ' Methode durch die Wahl der Parameter $\alpha_m = \alpha_f = 0$ hervor.

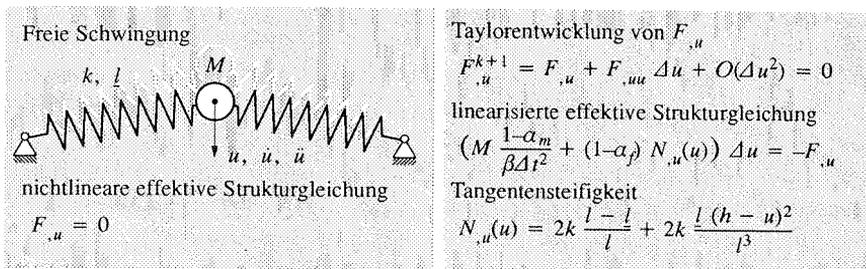


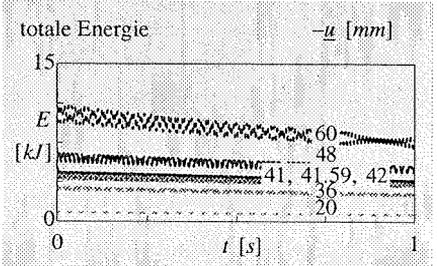
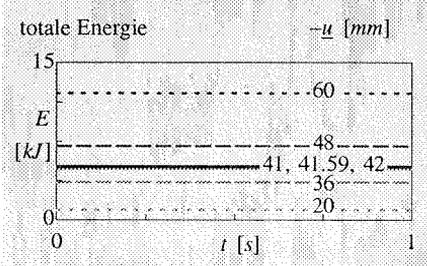
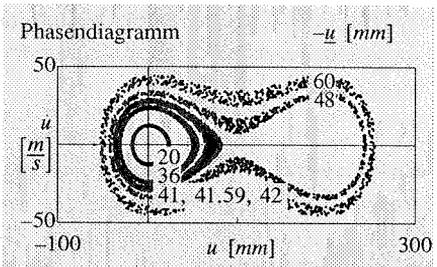
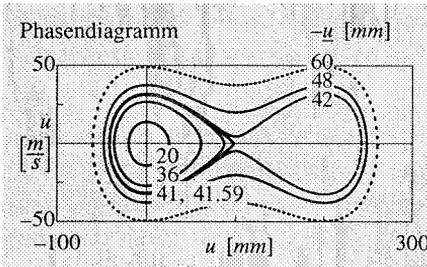
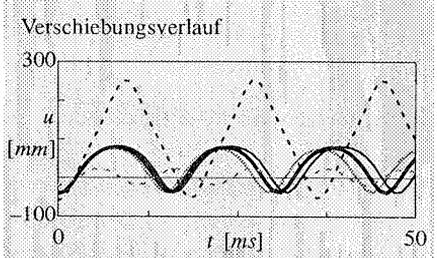
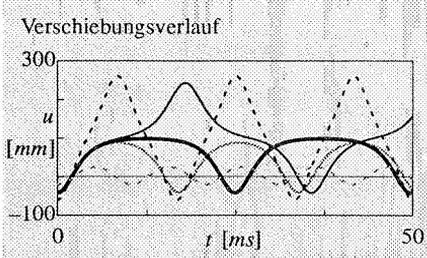
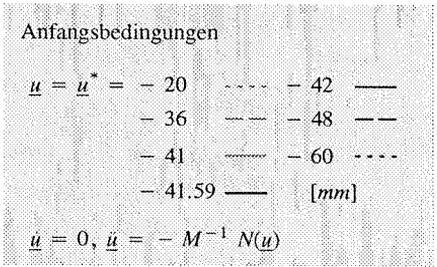
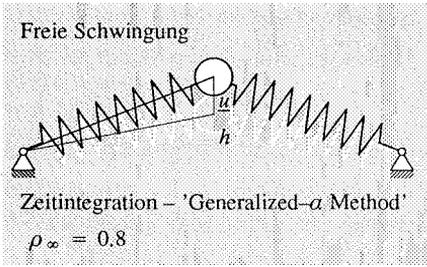
Abbildung 5.14 Duffing Oszillator – Konsistente Linearisierung von $F_{,u} = 0$

5.5.3 'Generalized- α ' Methode

Mit den in den vorangehenden Kapitel gelegten Grundlagen kann nun das Anfangswertproblem des Duffing Oszillators mit der 'Generalized- α ' Methode numerisch in der Zeit integriert werden. Die Problemstellung und die Anfangsbedingungen sind denen im Beispiel in Kapitel 1.3 identisch. Gegenüber dem numerischen Experiment im Kapitel 1.3 ist hier lediglich die Aktivierung der numerischen Dämpfung neu. Numerisch ermittelte Ergebnisse sind in Abbildung 5.15 dargestellt.

Gegenüber der Newmark Lösung (Abbildung 1.6) zeigen die mit dem kleinen Zeitschritt erzielten Ergebnisse keinen Unterschied. Die auftretenden Schwingungen sind bezüglich des Verhältnisses von Zeitschritt und Schwingungsperiode im niederfrequenten Bereich angesiedelt. In diesem Bereich wurde die 'Generalized- α ' Methode von Chung, Hulbert (1993) auf geringe numerische Dämpfung hin optimiert, was zur Folge hat, daß die auftretenden Bewegungen nur sehr schwach gedämpft werden. Der größere Zeitschritt verschiebt die auftretenden Bewegungen in Richtung des relativ hochfrequenten Bereiches, was die Aktivierung der numerischen Dämpfungseigenschaften des Zeitintegrationsverfahrens zur Folge hat. Dies führt bezüglich der Zeitverläufe der Verschiebungen zu keiner Verbesserung gegenüber dem Newmark Verfahren. Die Anfangsverschiebungen in der Nähe der kritischen Auslenkung resultieren in Bewegungen um eine Gleichgewichtslage, was nach den Analysen mit dem keinen Zeitschritt nicht korrekt ist.

Die entscheidende Veränderung gegenüber Newmark ist, daß hier im Phasendiagramm die Separatrix auch bei langen Integrationszeiten nicht mehr gekreuzt wird. Das Gegenteil ist der Fall: Die totale Energie des Systemes nimmt mit zunehmender Integrationsdauer ab, was zum einen in den Energieverläufen und zum anderen im Phasendiagramm sichtbar wird. Damit ist die Bedingung (3.10) der energetischen Stabilität erfüllt; die 'Generalized- α ' Methode mit numerischer Dämpfung ist auch im Nichtlinearen unbedingt energetisch stabil! Trotzdem sind die Ergebnisse nicht befriedigend, da der Vorteil der unbedingten Stabilität im energetischen Sinn von dem Nachteil der Verschlechterung der Genauigkeit der Zeitintegration relativiert wird.



$\Delta t = 0.1 \text{ ms}$

$\Delta t = 1 \text{ ms}$

Abbildung 5.15 Duffing Oszillator – Lösung der homogenen Bewegungsgleichung

5.5.4 Adaptive Zeitschrittsteuerung

Adaptive Zeitschrittsteuerungen in Anwendung auf die Integration der nichtlinearen Duffing Gleichung werden im folgenden Kapitel untersucht. In einem ersten Schritt werden hierzu die Fehlerästimatoren nach Zienkiewicz und Xie (1991), Li, Zeng, Wiberg (1993) und Wiberg, Li (1993) mit dem Fehler der numerischen Analyse des Newmark Verfahrens bezüglich einer Referenzlösung verglichen. Die Referenzlösung wird ebenfalls mit dem Newmark Verfahren, allerdings mit einem Zeitschritt $\Delta t/10$, gewonnen. Ein Vergleich der Lösungen mit verschiedenen Zeitschritten, ausgedrückt in der Verschiebung und der Geschwindigkeit ist in Abbildung 5.16 gegeben. Sofort wird deutlich, daß diese Form der Referenzlösung nicht geeignet ist, um die vorgestellten Fehlerschätzer zu vergleichen, da hier die Fehler über alle Zeitschritte aufsummiert werden, und für den angestrebten Vergleich nur der Fehler in einem Zeitschritt von Interesse ist. Somit wird die Referenzlösung in jedem Zeitschritt mit den Anfangsbedingungen des größeren Zeitschrittes ermittelt. Der resultierende Fehler ist in Abbildung 5.16 mit der durchgezogenen Linie markiert. Deutlich ist, daß der Fehler in der Verschiebung beziehungsweise in der Geschwindigkeit, immer dann groß wird, wenn die Gradienten des entsprechenden Zeitverlaufes groß sind. Der Fehlerschätzer nach Zienkiewicz und Xie (1991) liefert eine gute Übereinstimmung mit dem Referenzfehler. Die Fehlerschätzer nach Li, Zeng, Wiberg (1993) und Wiberg, Li (1993) hingegen weichen stark vom Referenzfehler ab, wobei das deutlich zu erkennende mittlere Fehlerniveau sehr stark von der Berechnung der Beschleunigung zu Beginn der Zeitintegration abhängt. Die dargestellten Fehlerkurven wurden mit der Beschleunigungsableitung nach Gleichung (5.47) ermittelt; die Gleichung (5.46) führt zu einem wesentlich höheren mittleren Fehlerniveau.

Die Anwendung der diskutierten Fehlerästimatoren zur adaptivem Schrittweitensteuerung nach dem in Abbildung 5.11 skizzierten Schema mit verschiedenen relativen Fehlermaßen ist in Abbildung 5.17 und in Abbildung 5.18 dargestellt. Die auf Verschiebungsfehlern basierenden Zeitschrittsteuerungen in Abbildung 5.17 führen zu qualitativ ähnlichen Verläufen der Zeitschrittgröße Δt , weisen allerdings auch dieselbe Problematik auf: In keiner der zugrundeliegenden Veröffentlichungen (vgl. Kapitel 5.4) wird eine Möglichkeit zur Ermittlung der Fehlertoleranz η_e vorgeschlagen. Die verwendeten Fehlertoleranzen resultieren aus numerischen Versuchen, eine Vorgehensweise die für realistische Berechnungen denkbar ungeeignet ist. Eine qualitative Beurteilung der Schrittweitensteuerungen ist – unter der erwähnten Einschränkung – dennoch möglich.

Wie nach der Diskussion der Fehlerschätzer zu erwarten war, liefert die Zeitschrittsteuerung nach Zienkiewicz, Xie (1991) einen Zeitschrittverlauf, der sehr gut mit dem tatsächlichen Fehler bei der Zeitintegration mit konstantem Zeitschritt korreliert. Die maximale Verschiebungsnorm als Referenzmaß des Schrittweitenkriteriums nach Gleichung (5.32) ergibt zu Beginn der Zeitintegration zu kleine Zeitschritte, liefert allerdings nach dem Erreichen des ersten Verschiebungsmaximums einen sehr regelmäßigen Zeitschrittverlauf. Durch Verwendung der Norm der Verschie-

bungsdifferenz nach Gleichung (5.36) als Referenzmaß für die Schrittweitensteuerung wird das oben erwähnte 'Startproblem' behoben. Diese Methode bildet jedoch den tatsächlichen Fehler nicht so gut ab, eine Periodizität in der Zeitschrittgröße ist jedoch zu erkennen.

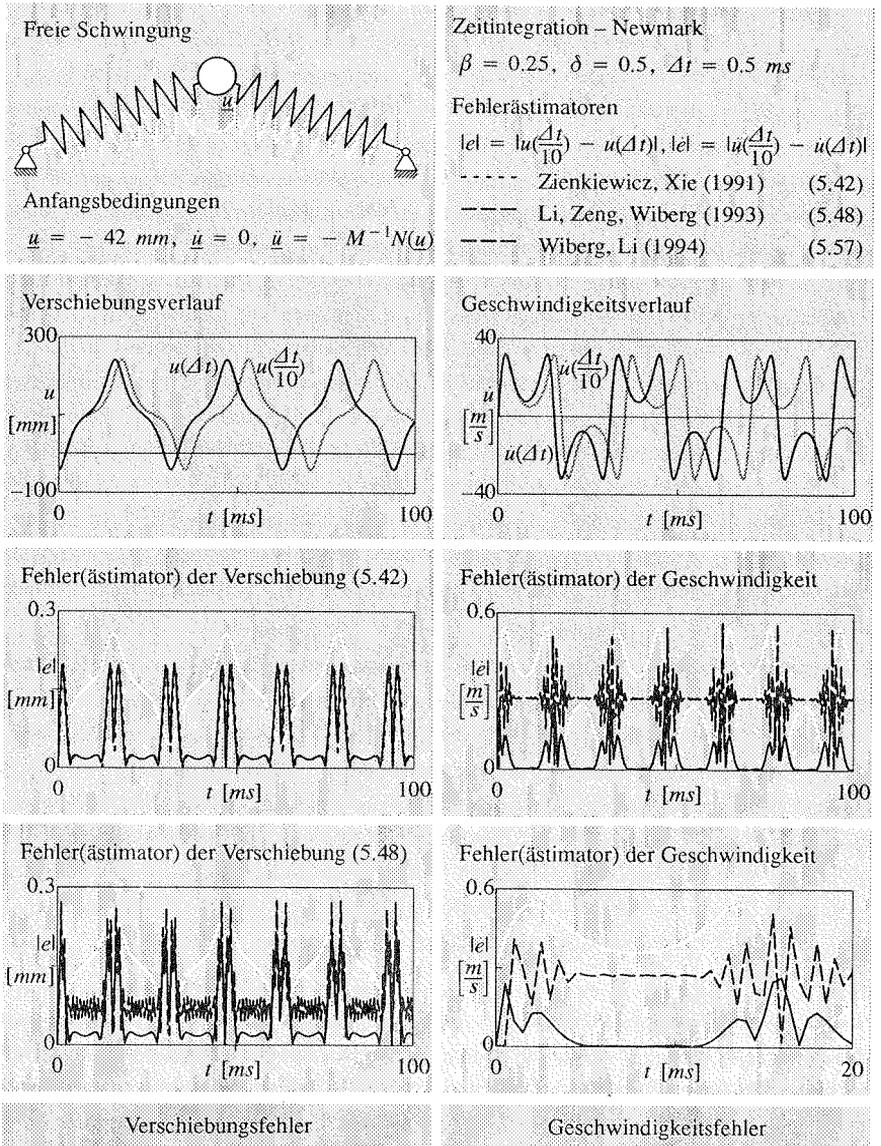
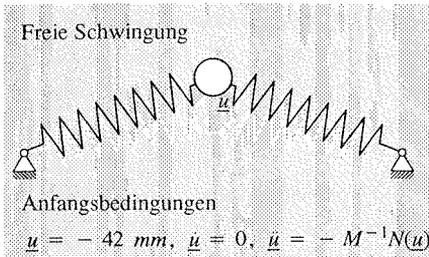


Abbildung 5.16 Duffing Oszillator – Vergleich von Fehlerästimatoren



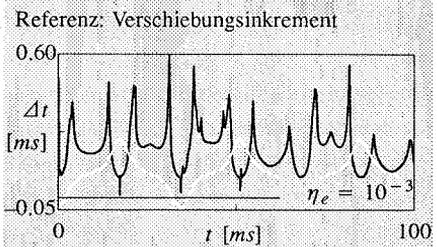
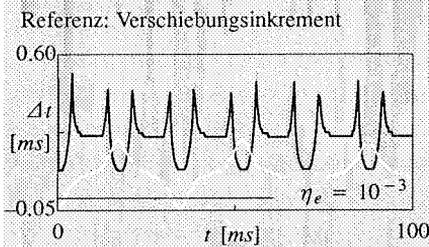
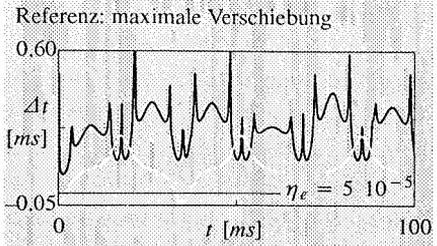
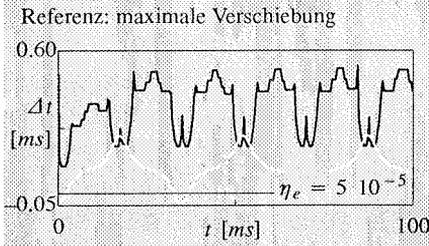
Zeitintegration – Newmark

$$\beta = 0.25, \delta = 0.5, \Delta t = 0.5 \text{ ms}$$

Fehlerästimatoren $\nu_1 = 0.8, \nu_2 = 1.2$

$$\eta_{ZX} = \frac{\|e\|}{\|u\|_{\max}} \quad \eta_{LZW} = \frac{\|e\|}{\|u\|_{\max}}$$

$$\eta_{ZX} = \frac{\|e\|}{\|u - \bar{u}\|} \quad \eta_{LZW} = \frac{\|e\|}{\|u - \bar{u}\|}$$



Fehlerästimator Zienkiewicz, Xie (1991)

Fehlerästimator Li, Zeng Wiberg (1993)

Abbildung 5.17 Duffing Oszillator – Adaptive Zeitschrittsteuerung (L_2 -Norm)

Die Beobachtungen legen die Empfehlung nahe, für Zeitintegrationen mit zu erwartendem periodischem Antwortverhalten das Fehlermaß nach Gleichung (5.32) zu verwenden. Bei nicht periodischem Antwortverhalten halten die 'Startprobleme' dieses Fehlermaßes über den gesamten Zeitintegrationsbereich an, weshalb hier das Fehlermaß nach Gleichung (5.36) zu empfehlen ist. Die Untersuchungen der Zeitschrittsteuerung nach Li, Zeng, Wiberg (1993) bestätigen die obigen Ergebnisse bezüglich des Referenzmaßes. Eine Periodizität der Zeitschrittgröße ist bei diesem Fehlermaß allerdings nur qualitativ zu erkennen, was diese Zeitschrittsteuerung infolge der schlechten Fehlerschätzung bei dem gezeigten Beispiel als weniger geeignet erscheinen läßt.

Der in Abbildung 5.18 dargestellte auf der totalen Energie des Fehlers der Verschiebung und Geschwindigkeit basierende Fehlerschätzer von Wiberg, Li (1993) nach Gleichung (5.35) resultiert bei der Wahl der maximalen totalen Energie als Referenzmaß in einem Zeitschrittverlauf der

keine Korrelation zum tatsächlichen Fehler aufweist. Ungeeignet zur Normierung des Energiefehlers ist hier die Energiedifferenz im Zeitschritt nach Gleichung (5.36), da gerade die exakte Zeitintegration die Energiedifferenz Null und damit einen nicht endlichen relativen Fehler liefert.

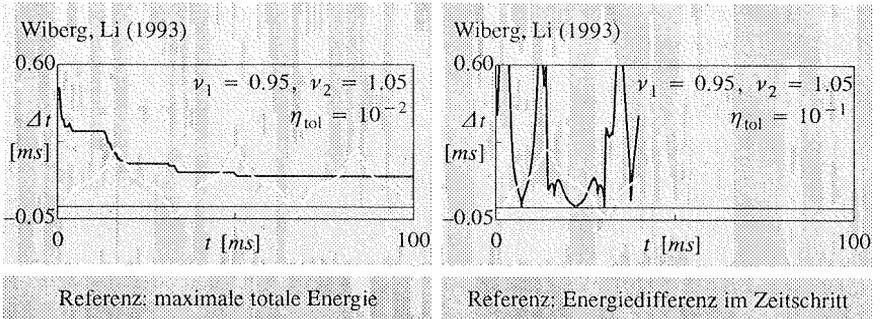


Abbildung 5.18 Duffing Oszillator – Adaptive Zeitschrittsteuerung (Energie-Norm)

Die vorangehenden Untersuchungen von Fehlerschätzern zur Schrittweitensteuerung der Zeitintegration lassen lediglich eine Empfehlung der adaptiven Schrittweitensteuerung nach Zienkiewicz, Xie (1991) zu. Diese Aussage wird von Scholz (1996) anhand der Untersuchung von Fehlerästimatoren am Beispiel der linearen Plattenschwingung bestätigt. Scholz stellt weiterhin fest, daß auch der Fehlerschätzer nach Zienkiewicz, Xie (1991) nur dann eine qualitativ richtige Abschätzung liefert, wenn in der Strukturantwort keine hochfrequenten Moden auftreten oder diese numerisch dissipiert werden. Wie bereits erwähnt, stellt weiterhin die Wahl der zulässigen Fehlertoleranz η_e sowie der unteren Schranke ν_1 und oberen Schranke ν_2 zur Steuerung des Zeitschrittes ein ungelöstes Problem dar.

6 Constraint Energy Momentum Algorithm

Numerische Stabilität bei der Integration semidiskreter Anfangswertprobleme der nichtlinearen Strukturmechanik zu gewährleisten, ist das Ziel aktueller Forschungsvorhaben in diesem Teilgebiet der 'Computational Mechanics'. Dies erfordert bei nichtlinearem Strukturverhalten die Befriedigung der Bedingung der unbedingten energetischen Stabilität (3.10). Bereits erwähnt wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit, daß das klassische Newmark Verfahren diese Bedingung nicht erfüllen kann. Zahlreiche Veröffentlichungen zeigen das Versagen dieses Verfahrens bei Anwendung zur Integration nichtlinearer Anfangswertprobleme. Genannt seien hier nochmals die Arbeiten von Park (1975), Wood, Odour (1988) und Xie, Steven (1994) über die numerische Lösung der skalaren Gleichung $\ddot{u} + N(u) = 0$ und Lim, Crisfield (1994), Crisfield, Shi (1994), Crisfield, Moita, Galvanetto (1994), Crisfield, Galvanetto (1995), Stander, Stein (1995), Galvanetto, Crisfield (1996), Kuhl, Ramm (1996) sowie Kuhl, Ramm (1996b) über die Integration im Bereich der Strukturmechanik mit der Methode der finiten Elemente. Weiterhin zeigen Simo, Tarnow (1992), Simo, Tarnow (1992b), Simo, Tarnow (1994) und Simo, Tarnow, Doblare (1995) das Versagen des Newmark Algorithmus bei Anwendung zur Integration der Bewegungsgleichung der Finite Elemente Methode in Verbindung mit Kontinuums-, Schalen- und Balkenelementen.

Zur Erfüllung der Bedingung der unbedingten energetischen Stabilität kann mit drei grundsätzlich verschiedenen Ansätzen operiert werden:

- Algorithmen mit numerischer Dissipation
- Methoden mit algorithmischer Energieerhaltung
- Algorithmen, welche die Erfüllung der Stabilitätsbedingung (3.10) numerisch erzwingen

Der ersten Gruppe gehören die bereits in Kapitel 5 vorgestellten numerisch dissipativen Zeitintegrationsverfahren an. Algorithmische Dämpfung resultiert in einem numerisch bedingten Verlust von totaler Energie innerhalb eines repräsentativen Zeitintegrationsschrittes. Dieser Verlust totaler Energie garantiert die Befriedigung der energetischen Stabilitätsbedingung (3.10). Negative Konsequenzen hat die numerische Dissipation auf die Genauigkeit der Integration. Aus diesem Grund sind numerisch dissipative Zeitintegrationsverfahren ohne algorithmische Modifikationen nicht zur Integration von Langzeitdynamiken geeignet.

Algorithmische Energieerhaltung wird mit den von der Forschergruppe um Juan C. Simo entwickelten Algorithmen gewährleistet. Diese Algorithmen verwenden eine modifizierte Mittelpunktsregel zur Zeitintegration. Die sogenannte 'Energy-Momentum Method' garantiert allein durch die kinematischen Approximationen in der Zeit und die spezielle Berechnung des Verzerrungstensors der Mittelpunktskonfiguration mit dem Mittelwert der Verzerrungstensenoren an den Zeitintervallgrenzen die algorithmische Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung. Damit ist das Verfahren energetisch stabil. Theoretische Arbeiten hierzu wurden von Simo, Posbergh, Marsden (1990), Simo, Tarnow, Wong (1992) und Lewis, Simo (1994) veröffentlicht. In Simo,

Beim 'Constraint Energy Momentum Algorithm' kann der algorithmisch dissipative Basisalgorithmus ein beliebiges implizites Einschrittverfahren mit Newmark Approximationen in der Zeit sein. Aus der Vielzahl von Möglichkeiten wird die 'Generalized- α Method' von Chung, Hulbert (1993) wegen ihrer Generalisierung sehr gebräuchlicher Zeitintegrationsverfahren als Basisalgorithmus ausgewählt. Mit diesem Verfahren als Grundlage hat der neu entwickelte Algorithmus die in Abbildung 6.1 zusammengestellten Charakteristika. Wie die 'Generalized- α Method' ist auch das erweiterte Verfahren ein implizites, numerisch dissipatives Einschritt-Zeitintegrationschema mit der Genauigkeitsordnung zwei. Durch die Nebenbedingungen wird zusätzlich die algorithmische Energie-, Impuls- und Drallerhaltung garantiert.

Bei äquivalenter Vorgehensweise zur Entwicklung des erweiterten Algorithmus könnten alternativ zum verwendeten Basisalgorithmus die Zeitintegrationsmethoden nach Wood (1977), Bazzi (1982), Bazzi, Anderheggen (1982), Hoff, Pahl (1988/1988b), Hulbert (1994) oder die 'Unified Set' Familie nach Zienkiewicz, Wood, Hine, Taylor (1984), Wood (1984b), Zienkiewicz, Katona (1985) und Wood (1986) eingesetzt werden. Der Kreis möglicher Basisalgorithmen ist auf alle impliziten Einschritt-Zeitintegrationsverfahren mit beliebigen Approximationen in der Zeit erweiterbar, wenn auf die Konsistenz von Zeitintegration und algorithmischer Energie-, Impuls- und Drallerhaltung verzichtet oder die Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen (Kapitel 6.4) an den Basisalgorithmus angepaßt wird.

6.1 Idee und Konstruktion

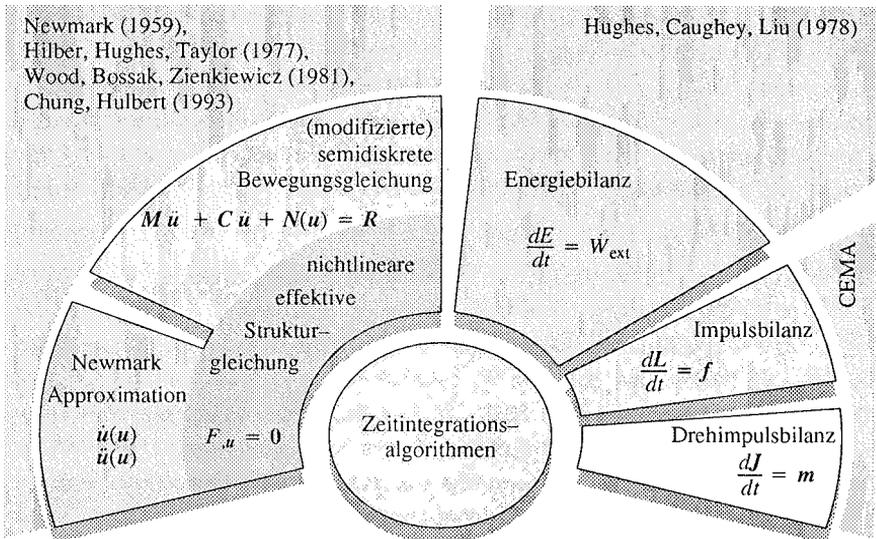


Abbildung 6.2 Geschichte des 'Constraint Energy Momentum Algorithm'

Inspiziert von der 'Constraint Energy Method' nach Hughes, Caughey, Liu (1978) entstand der neue Algorithmus durch konsequente Erweiterung der in der entsprechenden Veröffentlichung konzentrierten Ideen. Dies sind die Einbindung der Nebenbedingung in den Zeitintegrationsalgorithmus, die entsprechende mathematische Formulierung und die numerische Realisierung.

Der Aufbau eines klassischen Zeitintegrationsverfahrens, in dem die semidiskrete Bewegungsgleichung in originaler oder modifizierter Form mit der Diskretisierung in der Zeit in die effektive Strukturgleichung überführt wird, wurde bereits in Kapitel 5 eingehend erläutert. Solche Methoden sind in Abbildung 6.2 auf der linken Seite zusammengefaßt. Neben den angegebenen Algorithmen sind die in Kapitel 5 zitierten, impliziten Zeitintegrationsverfahren ebenfalls nach diesem Schema aufgebaut.

Hughes, Caughey, Liu (1978) verwenden die Newmark Methode in numerisch nicht dissipativer und zweiter Ordnung genauer Parametrisierung (Trapezregel, Methode der konstanten mittleren Beschleunigung, $\beta = 0.25$, $\delta = 0.5$). Zusätzlich wird die räumlich diskrete Form der Energiebilanz über dem Zeitschritt integriert und so als Nebenbedingung mit der effektiven Strukturgleichung gekoppelt. Der 'Constraint Energy Momentum Algorithm' stellt in den Punkten

- Verwendung eines beliebigen algorithmisch, dissipativen Basisalgorithmus
- Einbindung der Impuls- und Drallnebenbedingung
- konsistente Integration der Bilanzgleichungen

eine Weiterentwicklung der 'Constraint Energy Method' nach Hughes, Caughey, Liu (1978) dar. Gerade die Kombination von numerischer Dissipation und algorithmischer Erfüllung der Bilanzgleichungen stellt eine sehr interessante Möglichkeit dar, hochfrequente Bewegungen numerisch zu dämpfen und trotzdem das globale Strukturverhalten im Sinn der Bilanzgleichungen richtig zu beschreiben. Dadurch wird es möglich, große Zeitschritte mit konvergenten Gleichgewichtssituationen zu realisieren. Die konsistente Integration der räumlich diskretisierten Bilanzgleichungen garantiert eine genaue Approximation der von den äußeren Lasten oder den Dämpfungskräften am System verrichteten Arbeit, sowie der von diesen Kräften induzierten Impuls- oder Dralländerung.

Die Konstruktion des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' gestaltet sich nach den in Abbildung 6.3 dargestellten Entwicklungsphasen. In der ersten Phase wird die effektive Strukturgleichung als Stationaritätsbedingung formuliert. Die räumlich diskreten Bilanzgleichungen werden in der zweiten Phase formuliert und durch konsistente Integration über dem typischen Zeitintervall in Nebenbedingungen überführt. Mit Hilfe der Methode der Lagrange Multiplikatoren können daraufhin die Nebenbedingungen in das Stationaritätsproblem der effektiven Strukturgleichung eingebunden werden. Das entstehende, nichtlineare Gleichungssystem in den gesuchten Verschiebungen und Lagrange Multiplikatoren kann nach konsistenter Linearisierung iterativ gelöst werden. Der letzte Entwicklungsschritt wird von der Lösung des linearisierten Gleichungssystems mit der Partitionierungsstrategie gebildet.

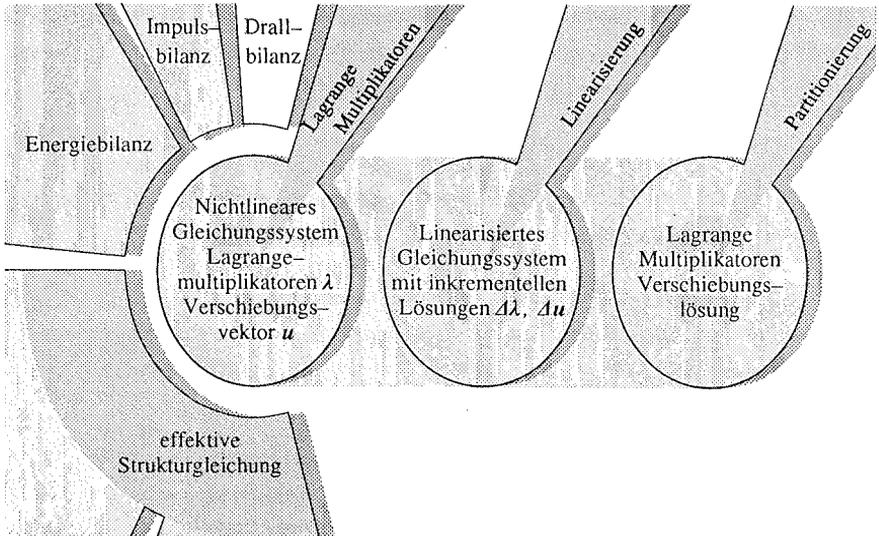


Abbildung 6.3 Konstruktion des 'Constraint Energy Momentum Algorithm'

6.2 Basisalgorithmus

Als Basisalgorithmus des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' wird die in Kapitel 5 vorgestellte 'Generalized- α ' Methode verwendet. Nach der Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung und der Diskretisierung in der Zeit wurde die als nichtlineare Vektorgleichung dargestellte, effektive Strukturgleichung (5.14) generiert. Die Basis des zu entwickelnden Algorithmus bildet die Formulierung dieser Gleichung als Stationaritätsbedingung (5.15).

$$F_{,u}(u) = 0$$

$$F(u) = \text{stat}$$

6.3 Nebenbedingungen – Algorithmische Bilanzgleichungen

Voraussetzung zur Berücksichtigung der Energie-, Impuls- und Drehimpulsbilanz als Nebenbedingungen des Stationaritätsproblems (5.15) ist die Formulierung der kontinuumsmechanischen globalen Bilanzgleichungen der Energieerhaltung (2.36), Impulserhaltung (2.25) und Drallerhaltung (2.29) in räumlich und zeitlich diskretisierter Form. Die sequentielle Raum-Zeit Diskretisierung der kontinuumsmechanischen Bilanzen führt über die räumlich diskretisierten Bilanzgleichungen zu den voll diskretisierten algorithmischen Bilanzgleichungen, die im folgenden als Neben- oder Zwangsbedingungen bezeichnet werden.

6.3.1 Energiebilanz

Mit der kinetischen Energie der bewegten Struktur (4.38), der in der Deformation des Systems gespeicherten inneren oder potentiellen Energie (4.38), sowie dem Strukturvektor der Geschwin-

digkeiten und der äußeren Lasten folgt die Energiebilanz (2.36) in räumlich diskretisierter Form. Ergänzt wird diese durch die Leistung der Dämpfungskräfte $\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}$, gebildet mit dem inneren Produkt der Dämpfungskräfte $\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}$ und dem Geschwindigkeitsvektor.

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{dK}{d\tau} + \frac{dU}{d\tau} = \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{R}(\tau) - \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{W}_{\text{ext}} \quad (6.1)$$

Durch Integration der räumlich diskreten Energiebilanz über das Zeitintervall $[\bar{t}, t]$, oder äquivalent dem Zeitintervall $[0, \Delta t]$, entsteht die algorithmische Energiebilanz.

$$Z_E \equiv K + U - \bar{K} - \bar{U} - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{R}(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = 0 \quad (6.2)$$

6.3.2 Impulsbilanz

Die algorithmische Impulsbilanz wird mit der kontinuumsmechanischen Impulsbilanz (2.25), der diskreten Formulierung des Impulses (4.39) und der Projektion des Lastvektors und der Dämpfungskräfte, deren Anteil gegenüber der kontinuierlichen Formulierung (2.25) ergänzt wurde, auf den dreidimensionalen kartesischen Raum

$$\frac{dL}{d\tau} = \mathbf{a} \mathbf{R}(\tau) - \mathbf{a} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{f} \quad (6.3)$$

und anschließender Integration über dem Zeitschritt Δt gewonnen.

$$Z_L \equiv L - \bar{L} - \int_0^{\Delta t} \mathbf{a} \mathbf{R}(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta t} \mathbf{a} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

6.3.3 Drehimpulsbilanz

Nach der Drehimpulsbilanz (2.29) ist die Änderung des Drehimpulses pro Zeiteinheit dem Moment der äußeren Kräfte bezüglich eines beliebigen Referenzpunktes identisch. Bezüglich des Koordinatenursprunges ergibt sich, nach räumlicher Diskretisierung und Erweiterung der entstandenen Gleichung um das dissipative Moment $\mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}$, die diskrete Drehimpulsbilanz.

$$\frac{dJ}{d\tau} = \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}}(\tau) \mathbf{R}(\tau) + \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}}(\tau) \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{m} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(\tau) = \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\tau) \quad (6.5)$$

Dabei setzt sich der aktuelle Ortsvektor aus dem Ortsvektor in der Referenzkonfiguration und dem Verschiebungsvektor zusammen. Der Strukturdrall in räumlich diskretisierter Form ist in Gleichung (4.39) gegeben. Die Integration über den Zeitschritt Δt liefert schließlich die algorithmische Drehimpulsbilanz.

$$Z_J \equiv J - \bar{J} - \int_0^{\Delta t} \mathbf{a} (\hat{\underline{\mathbf{x}}} + \hat{\mathbf{u}}(\tau)) \mathbf{R}(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta t} \mathbf{a} (\hat{\underline{\mathbf{x}}} + \hat{\mathbf{u}}(\tau)) \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

Bemerkungen:

- Sowohl die algorithmische Impulsbilanz (6.4) als auch die Drehimpulsbilanz (6.6) werden durch Lagerreaktionen beeinflusst. Diese sind in den angegebenen Formulierungen noch nicht enthalten. Eine Möglichkeit ist die Berechnung der Reaktionskräfte und dem im Zeitschritt resultierenden Impuls und Drehimpuls in jedem Iterationsschritt, sowie deren Integration in die Nebenbedingungen und deren Richtungsableitungen. Alternativ hierzu ist die Berechnung des resultierenden Impulses und Drehimpulses auf Basis der inneren Kräfte mit Dirichlet Randbedingungen denkbar.
- Die Nebenbedingungen der Impuls- und Drallerhaltung sind damit zum derzeitigen Entwicklungsstand des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' für elastodynamische Problemstellungen mit $\partial B_u = 0$, das heißt für reine Neumann Probleme, einsetzbar.
- Die Nebenbedingung der Energieerhaltung ist eine skalare Gleichung. Die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls muß hingegen jeweils in drei linear unabhängigen Raumrichtungen erfüllt sein. Damit stehen insgesamt sieben Nebenbedingungen zu Verfügung.
- Die Gleichung (6.1) wird in der englischsprachigen Literatur (z.B. Simo, Tarnow (1992) oder Antman (1995)) als 'Theorem of Expanded Power' bezeichnet.

6.4 Konsistente Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen

Um die algorithmischen Bilanzgleichungen der numerischen Berechnung zugänglich zu machen, ist es erforderlich, die Riemann oder bestimmten Integrale der Last- und Dämpfungsterme dieser Bilanzen zu lösen. Eine analytische Lösung der bestimmten Integrale ist infolge der Zeitdiskretisierung nicht möglich, da der Funktionsverlauf des Integranden im Zeitschritt unbekannt ist. Somit sind eine numerische Quadratur oder Annahmen bezüglich des Verlaufes des Integranden im Zeitschritt notwendig. Zur Integration der Bilanzgleichungen stehen die in Kapitel 6.4.1 angegebenen Methoden und die in den folgenden Kapiteln vertiefte, konsistente Integration zur Verfügung. Die Durchführung der konsistenten Integration ist für die algorithmische Energie-, Impuls- und Drehimpulsbilanz in den Kapiteln 6.4.3 bis 6.4.5 demonstriert. Des Weiteren werden in diesen Kapiteln die ersten und zweiten Gâteaux Ableitungen der Nebenbedingungen bereitgestellt. Diese Richtungsableitungen werden zur Variation der Stationaritätsbedingung mit Nebenbedingungen in Kapitel 6.5 und bei der Linearisierung der modifizierten effektiven Strukturgleichung in Kapitel 6.6 benötigt.

Die Vorgehensweise zur konsistenten Integration, die Substitution des Beschleunigungsvektors am Ende des Zeitschrittes durch die aktuellen Verschiebungen und die Bildung der Richtungsableitungen sind für die Bilanzgleichungen (6.2), (6.4) und (6.6) identisch. Exemplarisch wird diese Strategie anhand der Energiebilanz ausführlich erläutert; bei der Integration und Ableitungen der Impuls- und Drehimpulsbilanz wird lediglich auf Besonderheiten näher eingegangen.

6.4.1 Alternative Methoden

Eine Übersicht von Integrationsmethoden, die allein mit den Systemgrößen an den Zeitintervallgrenzen eine Approximation der Riemann Integrale der algorithmischen Bilanzgleichungen zulassen, ist in Abbildung 6.4 gegeben.

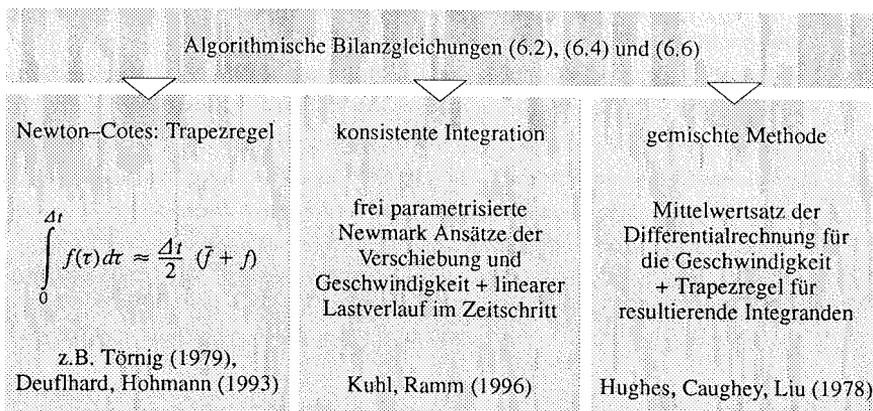


Abbildung 6.4 Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen – Übersicht

Eine der Möglichkeiten der numerischen Integration ist die von Kuhl, Ramm (1996b) zur Integration der Bilanzgleichungen vorgeschlagene Newton-Cotes Quadratur mit zwei Stützstellen, die Trapezregel, angewandt auf ein Zeitintervall. Von Hughes, Caughey, Liu (1978) wird zur Integration der algorithmischen Energiebilanz alternativ ein gemischtes Verfahren vorgeschlagen. Bei dieser Methode wird der Verlauf der Geschwindigkeiten im Zeitintervall konstant mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung approximiert.

Die Annahme linearer Verläufe der äußeren Lasten und der Dämpfungskräfte (in der genannten Veröffentlichung nicht berücksichtigt) ermöglicht die analytische Integration des mit dem konstanten Geschwindigkeitsvektor resultierenden bestimmten Integrales. Die Annahme linearer Lasten und eines konstanten Geschwindigkeitsvektors ist der numerischen Quadratur mit der Trapezregel im Polynomgrad äquivalent. Im Anhang A.4 sind die Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen mit der Trapezregel und der gemischten Methode und die Richtungsableitungen der resultierenden Nebenbedingungen ausgeführt.

Beide Methoden nutzen nur die sehr grobe Approximation des linearen Zeitverlaufes des Integranden. Diese Approximation kann ohne die Ergänzung durch weitere Stützstellen im Zeitintervall mit Hilfe der im folgenden vorgestellten Integrationsmethode, der konsistenten Integration, verbessert werden.

6.4.2 Konsistente Integration

Konsistente Integration bedeutet, daß zur Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen die Verläufe des Geschwindigkeits- und Verschiebungsvektors mit Polynomen vom Grad zwei beziehungsweise drei in der Zeit approximiert werden. Damit werden diese Systemvektoren zur Integration der Bilanzgleichungen mit zu den Newmark Annahmen (5.8) und (5.9) konsistenten Polynomen approximiert. Um die Integration von den Zeitintegrationsparametern unabhängig zu gestalten, werden die Ansatzpolynome mit den frei wählbaren Parametern δ' und β' versehen.

$$\dot{u}(\tau) = \dot{\bar{u}} + \ddot{\bar{u}} \tau + \delta' \frac{\ddot{\bar{u}} - \ddot{\bar{u}}}{\Delta t} \tau^2 \quad (6.7)$$

$$u(\tau) = \bar{u} + \dot{\bar{u}} \tau + \frac{1}{2} \ddot{\bar{u}} \tau^2 + \beta' \frac{\ddot{\bar{u}} - \ddot{\bar{u}}}{\Delta t} \tau^3 \quad (6.8)$$

Mit den Parametern $\delta' = 1/2$ und $\beta' = 1/6$ entspricht dies einer linearen Beschleunigungsannahme mit den Stützwerten $\dot{\bar{u}}$ und $\ddot{\bar{u}}$, wobei zur Approximation der Geschwindigkeiten und der Verschiebungen weiterhin die Stützwerte $\ddot{\bar{u}}$ und \bar{u} erforderlich sind. Neben der Approximation der Geschwindigkeits- und Verschiebungsverläufe ist die Diskretisierung der Lastfunktion im Zeitschritt erforderlich. Da lediglich die Lasten zu den diskreten Zeiten \bar{t} und t bekannt sind, wird hierzu ein linearer Ansatz des Lastverlaufes über dem Zeitschritt verwendet.

$$R(\tau) = \bar{R} + \frac{R - \bar{R}}{\Delta t} \tau \quad (6.9)$$

algorithmische Bilanz	Energie Z_E	Impuls Z_L	Drehimpuls Z_J
äußere Last	1	1	1
Trapez / gemischt			
Dämpfung	1	1	1
äußere Last	3	1	4
konsistent			
Dämpfung	4	2	5

Tabelle 6.1 Grad der Ansatzpolynome zur Integration der Bilanzgleichungen

Mit den obigen Annahmen sind die Integranden der algorithmischen Bilanzgleichungen Polynome vom Grad 1 bis 5. Die Polynomgrade der aus äußeren Lasten oder physikalischer Dämpfung resultierenden Integranden der Bilanzgleichungen werden in Tabelle 6.1 für die Trapezregel (bezüglich des Polynomgrades ist die gemischte Methode identisch) und die konsistente Integration verglichen. Die Riemann Integrale in den algorithmischen Bilanzgleichungen (6.2), (6.4) und (6.6) können unter den Annahmen (6.7) bis (6.9) analytisch integriert werden.

6.4.3 Integration der algorithmischen Energiebilanz

Die Ansätze der Geschwindigkeiten (6.7) und der äußeren Lasten (6.9) ergeben mit der algorithmischen Energiebilanz (6.2) den folgenden Ausdruck:

$$Z_E = K - \bar{K} + U - \bar{U} - \int_0^{\Delta t} \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \tau + \delta' \frac{\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} \tau^2 \right) \cdot \left(\bar{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{R} - \bar{\mathbf{R}}}{\Delta t} \tau \right) dt \quad (6.10)$$

$$+ \int_0^{\Delta t} \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \tau + \delta' \frac{\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} \tau^2 \right) \cdot \mathbf{C} \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \tau + \delta' \frac{\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}}{\Delta t} \tau^2 \right) dt$$

Deutlich wird in dieser Gleichung die Approximation des Lasttermes und des Dämpfungstermes mit Polynomen dritten beziehungsweise vierten Grades. Das Einsetzen der kinetischen Energie nach Gleichung (4.38) und die analytische Integration liefern die Energieebenbedingung, ausgedrückt in den aktuellen Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}$ als freie Variablen und den nach Gleichung (5.11) abhängigen Variablen der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}$.

$$Z_E \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + U - \bar{U} \quad (6.11)$$

$$- \left[\frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t + \frac{1}{3} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^2 + \frac{\delta'}{4} (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \Delta t^2 \right] \cdot \mathbf{R} - \left[\frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t + \frac{1}{6} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^2 + \frac{\delta'}{12} (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \Delta t^2 \right] \cdot \bar{\mathbf{R}}$$

$$+ \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{C} \left[\dot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^2 + \frac{\delta'}{3} (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \Delta t^2 \right] + \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{C} \left[\frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^2 + \frac{1}{3} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^3 + \frac{\delta'}{4} (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \Delta t^3 \right]$$

$$+ \delta' (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \cdot \mathbf{C} \left[\frac{1}{3} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^2 + \frac{1}{4} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \Delta t^3 + \frac{\delta'}{5} (\ddot{\bar{\mathbf{u}}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) \Delta t^3 \right]$$

Mit der Newmark Approximation (5.13) in der Form

$$\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \frac{1}{2\beta} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (6.12)$$

gelingt der Übergang von den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}$ zu den Verschiebungen \mathbf{u} als freie Variable der Zwangsbedingung. Die aktuellen Geschwindigkeiten werden nun nach Gleichung (5.12) zu abhängigen Variablen der Verschiebungen. Die Aufspaltung der Nebenbedingung in Terme, die lediglich von den Systemgrößen zu Beginn des Zeitschrittes abhängen, und Terme, die die aktuellen Verschiebungen \mathbf{u} enthalten, ist für die Programmierung und den numerischen Aufwand vorteilhaft. Entscheidend ist dies für die iterative Lösung: Für die zuerst erwähnten Terme genügt die einmalige Berechnung zu Beginn des Zeitschrittes, wohingegen die zweitgenannten Terme in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden müssen.

$$\begin{aligned}
Z_E = & -\frac{1}{2} \dot{\bar{u}} \cdot M \dot{\bar{u}} - \bar{U} & (6.13) \\
& + \left[\frac{\delta'}{4\beta} \bar{u} + \left(\frac{\delta'}{4\beta} - \frac{1}{2} \right) \Delta t \dot{\bar{u}} + \left(\frac{\delta'}{8\beta} - \frac{1}{3} \right) \Delta t^2 \ddot{\bar{u}} \right] \cdot R \\
& + \left[\frac{\delta'}{12\beta} \bar{u} + \left(\frac{\delta'}{12\beta} - \frac{1}{2} \right) \Delta t \dot{\bar{u}} + \left(\frac{\delta'}{24\beta} - \frac{1}{6} \right) \Delta t^2 \ddot{\bar{u}} \right] \cdot \bar{R} \\
& + \dot{\bar{u}} \cdot C \left[-\frac{\delta'}{3\beta} \bar{u} + \left(1 - \frac{\delta'}{3\beta} \right) \Delta t \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{6\beta} \right) \Delta t^2 \ddot{\bar{u}} \right] \\
& + \ddot{\bar{u}} \cdot C \left[-\frac{\delta'}{4\beta} \Delta t \bar{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{4\beta} \right) \Delta t^2 \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta'}{8\beta} \right) \Delta t^3 \ddot{\bar{u}} \right] \\
& - \left[\frac{\delta'}{\beta \Delta t^2} \bar{u} + \frac{\delta'}{\beta \Delta t} \dot{\bar{u}} + \frac{\delta'}{2\beta} \ddot{\bar{u}} \right] \cdot C \left[-\frac{\delta'}{5\beta} \Delta t \bar{u} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta'}{5\beta} \right) \Delta t^2 \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta'}{10\beta} \right) \Delta t^3 \ddot{\bar{u}} \right] \\
& + \frac{1}{2} \dot{u} \cdot M \dot{u} + \frac{\delta'}{\beta} u \cdot C \left[\frac{\delta'}{5\beta \Delta t} u - \frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\delta'}{10\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \\
& + U - \frac{\delta'}{4\beta} u \cdot \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right)
\end{aligned}$$

Die Gâteaux Ableitung der Energieebenbedingung (der konstante Anteil von Z_E verschwindet), definiert durch

$$\begin{aligned}
Z_{E,u} \Delta u = & \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{2} \dot{u}(u + \eta \Delta u) \cdot M \dot{u}(u + \eta \Delta u) \right] \Big|_{\eta=0} & (6.14) \\
& + \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} (u + \eta \Delta u) \cdot C (u + \eta \Delta u) \right] \Big|_{\eta=0} \\
& + \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\delta'}{\beta} (u + \eta \Delta u) \cdot C \left[-\frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\delta'}{10\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \right] \Big|_{\eta=0} \\
& + \frac{d}{d\eta} \left[U(u + \eta \Delta u) - \frac{\delta'}{4\beta} (u + \eta \Delta u) \cdot \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right) \right] \Big|_{\eta=0},
\end{aligned}$$

resultiert mit der Richtungsableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Newmark Approximation (5.12)

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{,u}(u) \Delta u = & \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\delta}{\beta \Delta t} (u + \eta \Delta u - \bar{u}) + \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \Big|_{\eta=0} & (6.15) \\
= & \frac{\delta}{\beta \Delta t} \Delta u & \rightarrow \dot{u}_{,u}(u) = \frac{\delta}{\beta \Delta t}
\end{aligned}$$

und dem Vektor der inneren Kräfte

$$U_{,u}(u) \cdot \Delta u = \frac{d}{d\eta} [U(u + \eta \Delta u)]|_{\eta=0} = N(u) \cdot \Delta u \rightarrow U_{,u}(u) = N(u), \quad (6.16)$$

der nach Gleichung (4.29) der Richtungsableitung der inneren Energie entspricht, in der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} Z_{E,u} \Delta u &= \frac{1}{2} \left(\dot{u}_{,u}(u) \Delta u \cdot M \dot{u}(u) + \dot{u}(u) \cdot M \dot{u}_{,u}(u) \Delta u \right) \quad (6.17) \\ &+ \frac{\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} (\Delta u \cdot C u + u \cdot C \Delta u) \\ &+ \Delta u \cdot C \frac{\delta'}{\beta} \left[-\frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\delta'}{10\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \\ &+ N(u) \cdot \Delta u - \frac{\delta'}{4\beta} \Delta u \cdot \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right). \end{aligned}$$

Dies ist eine skalare Gleichung, weshalb einzelne Terme transponiert werden können. Für eine symmetrische Massenmatrix und Dämpfungsmatrix folgt damit die Richtungsableitung der Energienebenbedingung.

$$\begin{aligned} Z_{E,u} \Delta u &= \frac{\delta}{\beta \Delta t} \dot{u}(u) \cdot M \Delta u + N(u) \cdot \Delta u - \frac{\delta'}{4\beta} \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right) \cdot \Delta u \quad (6.18) \\ &+ \frac{\delta'}{\beta} \left[-\frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\delta'}{10\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \cdot C \Delta u + \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} u \cdot C \Delta u \\ &+ N(u) \cdot \Delta u - \frac{\delta'}{4\beta} \Delta u \cdot \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right) \end{aligned}$$

Durch Ersetzen des Geschwindigkeitsvektors durch die Newmark Approximation (5.12) und das Aufspalten der entstehenden Terme in konstante und variable Anteile entsteht die endgültige Form der Gâteaux Ableitung der Energiezwangs- oder -nebenbedingung.

$$\begin{aligned} Z_{E,u} &= \left[-\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \bar{u} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \ddot{\bar{u}} \right] \cdot M - \frac{\delta'}{4\beta} \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right)^T \quad (6.19) \\ &+ \frac{\delta'}{\beta} \left[-\frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{5\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \cdot C \\ &+ \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} u \cdot M + \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} u \cdot C + N^T(u) \end{aligned}$$

Auf zu den obigen Ausführungen analoge Weise wird die zweite Gâteaux Ableitung der Energienebenbedingung entwickelt.

$$Z_{E,uu} \Delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} (\mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{M} + \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} (\mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} + \mathbf{N}^T (\mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u}) \right] \Bigg|_{\eta=0} \quad (6.20)$$

Die Richtungsableitung des Vektors der inneren Kräfte $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ ergibt dabei nach Gleichung (4.17) die Tangentensteifigkeit $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ des Systems.

$$Z_{E,uu} \Delta \mathbf{u} = \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{M} + \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} \quad (6.21)$$

Schließlich folgt die zweite Richtungsableitung der Energieebenbedingung unter Berücksichtigung der Symmetrie der Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{C} in der folgenden Form.

$$Z_{E,uu} = \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) \quad (6.22)$$

Bemerkungen:

- Die Nebenbedingung der algorithmischen Energieerhaltung (6.13) ist eine skalare Gleichung, womit die Richtungsableitung $Z_{E,u}$ nach der getroffenen Vereinbarung einen Vektor ergeben muß. Die Formulierung der Richtungsableitung als Zeilenmatrix ist in der in Kapitel 6.5 folgenden Zusammenfassung aller (sieben) Nebenbedingungen in einem Vektor begründet.
- Bei nicht symmetrischen Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{C} ist die Formulierung der Richtungsableitungen der Energiezwangsbedingung ebenso möglich, dies muß jedoch bei den Umformungen von Gleichung (6.17) nach (6.18) und von Gleichung (6.21) nach (6.22) berücksichtigt werden.

6.4.4 Integration der algorithmischen Impulsbilanz

Die konsistente Integration der algorithmischen Impulsbilanz (6.4) ergibt mit den Annahmen des Geschwindigkeits- (6.7) und Lastverlaufes (6.9) die Nebenbedingung der Impulserhaltung. Mit der Newmark Approximation (6.12) wird die Nebenbedingung mit den Verschiebungen \mathbf{u} als freie Variable ausgedrückt. Nach dem Trennen der entstandenen Terme nach in der Gleichgewichtsiteration konstanten und variablen Anteilen ergibt sich die schließlich verwendete Form der Impulsnebenbedingung.

$$Z_L = -a \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{2} a (\mathbf{R} + \bar{\mathbf{R}}) \quad (6.23)$$

$$+ a \mathbf{C} \left[-\frac{\delta'}{3\beta} \bar{\mathbf{u}} + \left(1 - \frac{\delta'}{3\beta}\right) \Delta t \dot{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{6\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}} \right]$$

$$+ a \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + a \frac{\delta'}{3\beta} \mathbf{C} \mathbf{u}$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{u}}$ ist nach Gleichung (5.12) als Funktion der Verschiebung gegeben. Damit führt die Gâteaux Ableitung der Impulsnebenbedingung auf den im Zeitschritt konstanten Ausdruck

$$\mathbf{Z}_{L,u} = \mathbf{a} \left(\frac{\delta}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{\delta'}{3\beta} \mathbf{C} \right), \quad (6.24)$$

womit die zweite Richtungsableitung verschwindet.

$$\mathbf{Z}_{L,uu} = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

6.4.5 Integration der algorithmischen Drehimpulsbilanz

Die konsistente Integration der algorithmischen Drehimpulsbilanz (6.6) ergibt mit den Ansätzen der Geschwindigkeiten (6.7), der Verschiebungen (6.8) und der äußeren Lasten (6.9) nach Umformung mit Gleichung (6.12) folgende Nebenbedingung der Drehimpulserhaltung im Zeitschritt.

$$\mathbf{Z}_J = -\mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{a} \left[\frac{1}{2} \Delta t \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{8} - \frac{\beta'}{10\beta} \right) \Delta t^3 \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{R} \\ & -\mathbf{a} \left[\frac{1}{2} \Delta t \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta'}{20\beta} \right) \Delta t \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\beta'}{20\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{24} - \frac{\beta'}{40\beta} \right) \Delta t^3 \hat{\mathbf{u}} \right] \bar{\mathbf{R}} \\ & + \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} \mathbf{C} \left[-\frac{\delta'}{3\beta} \bar{\mathbf{u}} + \left(1 - \frac{\delta'}{3\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{6\beta} \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}} \right] \\ & + \mathbf{a} \left[\left(1 - \frac{\beta'}{4\beta} \right) \Delta t \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta'}{4\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{6} - \frac{\beta'}{8\beta} \right) \Delta t^3 \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{C} \ddot{\mathbf{u}} \\ & + \mathbf{a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t^3 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{8} - \frac{\beta'}{10\beta} \right) \Delta t^4 \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{C} \ddot{\mathbf{u}} \\ & + \mathbf{a} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta'}{6\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta'}{6\beta} \right) \Delta t^3 \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{10} - \frac{\beta'}{12\beta} \right) \Delta t^4 \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{C} \cdot \\ & \cdot \left[-\frac{\delta'}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{u}} - \frac{\delta'}{\beta \Delta t} \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\delta'}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}} \right] \\ & + \mathbf{a} \hat{\mathbf{u}} \frac{\beta' \Delta t}{5\beta} \left(-\mathbf{R} - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{R}} \right) + \mathbf{a} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \\ & + \mathbf{a} \hat{\mathbf{u}} \mathbf{C} \left[\frac{\beta' \delta'}{6\beta^2} \mathbf{u} - \frac{\delta'}{3\beta} \bar{\mathbf{y}} + \frac{1}{4\beta} (\beta' - \delta') \Delta t \ddot{\mathbf{u}} + \frac{1}{5\beta} \left(\beta' - \frac{\delta'}{2} \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}} \right] \end{aligned}$$

Auch hier hat die Trennung von im Zeitschritt konstanten und variablen Anteilen große Auswirkungen auf den numerischen Aufwand zur Ermittlung der Nebenbedingung. Bei der Gâteaux Ableitung der Gleichung (6.26) tritt eine Besonderheit bezüglich der Terme $\hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}$ und $\dot{\mathbf{u}} \mathbf{C} \mathbf{u}$ auf, die zunächst behandelt werden soll. Mit der Zeitdiskretisierung (5.12) sind die Richtungsableitungen des Massen- und Dämpfungstermes auf ein äquivalentes Problem

$$\left(\hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \mathbf{u} \right)_{,u} \Delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\eta} \left[\left(\hat{\mathbf{u}} + \eta \Delta \hat{\mathbf{u}} \right) \mathbf{M} \left(\mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{u} \right) \right]_{\eta=0} \quad (6.27)$$

zu transformieren. Die Ausführung der Ableitungsvorschrift liefert

$$\left(\hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \mathbf{u} \right)_{,u} \Delta \mathbf{u} = \Delta \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} = - \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.28)$$

Zur Bestimmung dieses Ergebnisses ist die für das Systemäquivalent einer schiefsymmetrischen Matrix $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ und den Systemvektor \mathbf{u} gültige Identität

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \mathbf{u} = - \hat{\mathbf{u}} \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} \quad (6.29)$$

erforderlich. Mit dieser Identität können auch bei der Richtungsableitung entstehende Terme, die $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ enthalten, umgeformt werden. Damit ist es möglich, den Vektor der Verschiebungsincremente zu separieren und die erste Richtungsableitung der Drallzangsbedingung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} Z_{J,u} &= a \frac{\beta'}{5\beta} \left(\hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{4} \hat{\mathbf{R}} \right) \Delta t \quad (6.30) \\ &+ a \left[\frac{\delta}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right) \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{M} \\ &+ a \left[\frac{\delta'}{3\beta} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\delta'}{4\beta} - \frac{\beta'}{4\beta} \right) \Delta t \hat{\mathbf{u}} + \left(\frac{\delta'}{10\beta} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\mathbf{u}} \right] \mathbf{C} \end{aligned}$$

Die erste Richtungsableitung der Nebenbedingung der Drallerhaltung ist im Zeitschritt konstant, damit ist die zweite Richtungsableitung der Nullmatrix identisch.

$$Z_{J,uu} = \mathbf{0} \quad (6.31)$$

Bemerkung:

- Gleichung (6.29) ist sehr einfach mit Hilfe des kontinuumsmechanischen Äquivalentes zu beweisen.

$$\int_{\underline{V}} \Delta \hat{\mathbf{u}} \mathbf{u} \underline{\rho} \, dV = \int_{\underline{V}} \Delta \mathbf{u} \times \mathbf{u} \underline{\rho} \, dV = - \int_{\underline{V}} \mathbf{u} \times \Delta \mathbf{u} \underline{\rho} \, dV = - \int_{\underline{V}} \hat{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \underline{\rho} \, dV \quad (6.32)$$

6.5 Variationsproblem mit Nebenbedingungen

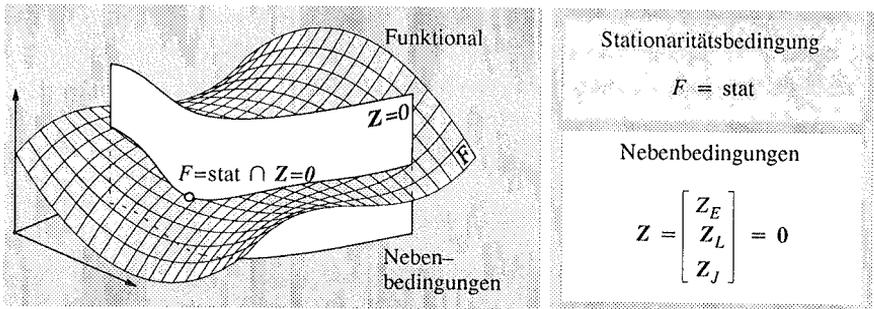


Abbildung 6.5 Geometrische Deutung des Variationsproblems mit Nebenbedingungen
 Mit der effektiven Strukturgleichung (5.14) und den Nebenbedingungen der Energie– (6.13), Impuls– (6.23) und Drallerhaltung (6.26) ist das Gleichungssystem zur Lösung des Verschiebungsvektors \mathbf{u} überbestimmt. Aus diesem Grund wird der Verschiebungszustand gesucht, der sowohl die Gleichung (5.14) entsprechende Stationaritätsbedingung (5.15) als auch die Nebenbedingungen befriedigt. Eine geometrische Deutung dieses Sachverhaltes an einem System mit 2 Freiheitsgraden ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Ein Lösungspunkt ist dadurch gekennzeichnet, daß er auf der Fläche der Nebenbedingungen liegt und das Funktional an dieser Stelle eine horizontale Tangente besitzt. Mathematisch wird dieses Problem mit der Methode der Lagrange Multiplikatoren (z.B. Strang (1986)) gelöst. Hierzu wird die Stationaritätsbedingung mit zusätzlichen Variablen, den Lagrange Multiplikatoren, und den Zwangsbedingungen erweitert (vgl. Abbildung 6.6). Insgesamt entsteht eine Stationaritätsbedingung in den unbekanntenen Verschiebungen und den Lagrange Multiplikatoren.

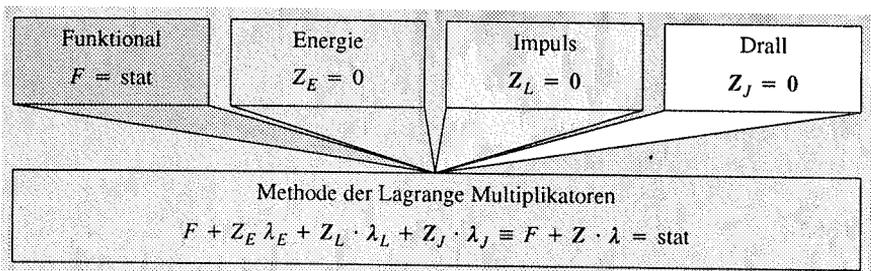


Abbildung 6.6 Integration der Nebenbedingungen in das Stationaritätsproblem

Werden die Nebenbedingungen der Energie–, Impuls– und Drallerhaltung und die entsprechenden Lagrange Multiplikatoren in jeweils einem Vektor zusammengefaßt, entsteht das erweiterte Stationaritätsproblem in kompakter Schreibweise.

$$F(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \text{stat} \qquad \mathbf{Z}^T \equiv [\mathbf{Z}_E, \mathbf{Z}_L^T, \mathbf{Z}_J^T], \boldsymbol{\lambda}^T \equiv [\lambda_E, \lambda_L^T, \lambda_J^T] \quad (6.33)$$

Gelöst wird eine solche Stationaritätsbedingung durch Variation nach den freien Variablen \mathbf{u} und λ . Diese Variation erfordert nun die Gâteaux Ableitungen des Funktionales der effektiven Strukturgleichung, welche die effektive Strukturgleichung selbst ergibt, und der Zwangsbedingungen, die in Kapitel 6.4 bereitgestellt wurden.

$$\delta \mathbf{u} \cdot (F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}) \lambda) + \delta \lambda \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{u}) = 0 \quad (6.34)$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (z.B. Washizu (1968), Oden (1979), Bifulter (1991)) muß die Gleichung (6.34) für beliebige Variationen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \lambda$ Gültigkeit besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gleichungen

$$F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}) \lambda = \mathbf{0} \quad \mathbf{Z}(\mathbf{u}) = 0 \quad (6.35)$$

befriedigt werden. Diese Gleichungen stellen die modifizierte effektive Strukturgleichung und die Gleichung der Zwangs- oder Nebenbedingungen dar. Die erste Gleichung verfügt über NEQ Freiheitsgrade, ist nichtlinear in \mathbf{u} und linear in λ , während die zweite Gleichung sieben Freiheitsgrade aufweist, unabhängig von den Lagrange Multiplikatoren und nichtlinear in den Verschiebungen \mathbf{u} ist.

Bemerkungen:

- Die Lagrange Multiplikatoren haben keine physikalische Bedeutung, es sind mathematische Hilfsgrößen.
- Der Versuch einer physikalischen Interpretation der Lagrange Multiplikatoren kann anhand eines Dimensionsvergleichs durchgeführt werden. Danach ist λ_E ein dimensionsloser Wichtungsfaktor der totalen Energie, λ_L eine Geschwindigkeitskorrektur und λ_J eine Drehgeschwindigkeitskorrektur der deformierten Struktur.

6.6 Linearisierung

Das nichtlineare Gleichungssystem (6.35) wird iterativ gelöst. Voraussetzung für die iterative Lösung ist die Linearisierung des Gleichungssystems. Hierzu werden die modifizierte effektive Strukturgleichung und die Gleichungen der Zwangsbedingungen in eine mehrdimensionale Taylorreihe um einen bereits ermittelten genäherten Lösungspunkt (\mathbf{u}, λ) bezüglich der Variablen \mathbf{u} und λ entwickelt.

$$F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{k+1}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}^{k+1}) \lambda^{k+1} = F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}) \lambda + (F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}) \lambda)_{,\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \quad (6.36)$$

$$+ (F_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{,\mathbf{u}}^T(\mathbf{u}) \lambda)_{,\lambda} \Delta \lambda = \mathbf{0}$$

Dabei sind die Inkremente des Verschiebungsvektors und des Vektors der Lagrange Multiplikatoren folgendermaßen definiert:

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u} \quad \Delta \lambda \equiv \lambda^{k+1} - \lambda \quad (6.37)$$

Die Richtungsableitung der modifizierten effektiven Strukturgleichung in Richtung des Verschiebungsinkrementes führt auf die zweiten Richtungsableitungen des Funktionales F (5.25) und der Zwangsbedingungen (6.22), (6.25) und (6.31). Die entsprechenden Ableitungen der Energienebenbedingung ergeben eine symmetrische Matrix und die zweiten Gâteaux Ableitungen der Impuls- und Drallnebenbedingung sind der Nullmatrix identisch, womit die aufgeführten Umformungen zulässig sind.

$$\begin{aligned} (F_{,uu}(u) + Z_{,u}^T(u) \lambda)_{,u} &= F_{,uu}(u) + Z_{,uu}^T(u) \lambda = F_{,uu}(u) + \lambda \cdot Z_{,uu}(u) \\ &= F_{,uu}(u) + \lambda_E Z_{E,uu}(u) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Mit der linearen Abhängigkeit der modifizierten effektiven Strukturgleichung von den Lagrange Multiplikatoren ergibt ihre Gâteaux Ableitung in Richtung des Inkrements der Lagrange Multiplikatoren; zusammen mit der Gâteaux Ableitung der Zwangsbedingungen nach den Verschiebungen (6.19), (6.24) und (6.30) folgt:

$$(F_{,u}(u) + Z_{,u}^T(u) \lambda)_{,\lambda} = Z_{,u}^T(u) \quad (6.39)$$

Die Linearisierung der Zwangsbedingungen resultiert in der Beziehung

$$Z(u^{k+1}) = Z(u) + Z_{,u}(u) \Delta u = 0, \quad (6.40)$$

die wiederum die Bereitstellung der Gâteaux Ableitung der Nebenbedingungen erforderlich macht. Die Ergebnisse der Linearisierung können zu einem linearisierten Gleichungssystem in den Inkrementen Δu und $\Delta \lambda$ zusammengefaßt werden.

$$(F_{,uu}(u) + Z_{,uu}^T(u) \lambda) \Delta u + Z_{,u}(u) \Delta \lambda = -F_{,u}(u) - Z_{,u}^T(u) \lambda \quad (6.41)$$

$$Z_{,u}(u) \Delta u = -Z(u) \quad (6.42)$$

6.7 Lösung des erweiterten Systems – Partitionierung

In Matrixschreibweise nimmt das linearisierte Gleichungssystem die folgende Gestalt an:

$$\begin{bmatrix} F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda & Z_{,u}^T \\ Z_{,u} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda \\ -Z \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Dieses linearisierte Gleichungssystem vom Rang $NEQ + 7$ verfügt über eine positiv definite und symmetrische Koeffizientenmatrix. Die Lösung kann damit mit standardisierten Lösern für symmetrische Gleichungssysteme direkt gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wird wegen der zum Basisalgorithmus konsistenten Datenstruktur und des geringen numerischen Aufwandes bei Verwendung der Dreieckszerlegung und Rücksubstitution zur Lösung der linearisierten effektiven Strukturgleichung eine Partitionierungsstrategie angewandt. Partitionierungsstrategien wur-

den unter anderem von Batoz, Dhatt (1979) und Reitinger (1995) zur Lösung der linearisierten statischen Strukturgleichung mit einem zusätzlichen Kontrollparametern verwendet.

Die Multiplikation der Gleichung (6.41) mit der Inversen der modifizierten Tangente $F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda$ liefert die Gleichung

$$\Delta u = (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} (-F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda) - (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} Z_{,u}^T \Delta \lambda, \quad (6.44)$$

deren erster Term den Teillösungsvektor

$$\Delta u_F \equiv (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} (-F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda) \quad (6.45)$$

darstellt. Zur Berechnung der Teillösung Δu_F wird der Tangentenoperator dreieckszerlegt und das Gleichungssystem durch Rücksubstitution gelöst. Der matrizielle Faktor des Inkrements der Lagrange Multiplikatoren ist die Teillösungsmatrix

$$\Delta u_Z \equiv (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} Z_{,u}^T \quad (6.46)$$

der Dimension $NEQ \times 7$. Die Spalten der Teillösungsmatrix Δu_Z werden durch sieben Rücksubstitutionen der Richtungsableitungen der Zwangsbedingungen mit dem bereits dreieckszerlegten Tangentenoperator gewonnen. Die Teillösungen (6.45) und (6.46) in die Gleichung (6.42) eingesetzt, ergibt die Beziehung

$$Z_{,u} \Delta u = Z_{,u} \Delta u_F - Z_{,u} \Delta u_Z \Delta \lambda = -Z \quad (6.47)$$

zur Bestimmung der inkrementellen Lagrange Multiplikatoren.

$$\Delta \lambda = (Z_{,u} \Delta u_Z)^{-1} (Z + Z_{,u} \Delta u_F) \quad (6.48)$$

Die zu invertierende Matrix $Z_{,u} \Delta u_Z$ der Dimension 7×7 ist symmetrisch, was durch Einsetzen von Δu_Z nach Gleichung (6.46) leicht gezeigt werden kann, und positiv definit. Da jede Komponente der Matrix $Z_{,u} \Delta u_Z$ das Skalarprodukt eines Teillösungsvektors und der Richtungsableitung einer Zwangsbedingung darstellt, ist die Symmetrie weniger für die Invertierung der Matrix als vielmehr für die numerische Effizienz ihrer Generierung von Bedeutung. Mit dem Inkrement der Lagrange Multiplikatoren nach Gleichung (6.48) und den Teillösungen (6.45) und (6.46) wird schließlich der Vektor der Verschiebungsinkremente berechnet.

$$\Delta u = \Delta u_F - \Delta u_Z \Delta \lambda \quad (6.49)$$

Das nichtlineare Gleichungssystemes (6.35) gilt als iterativ gelöst, wenn neben der Konvergenzbedingung (5.29) für die Verschiebungen die Konvergenzbedingung

$$\frac{|\Delta \lambda|}{|\lambda|} \leq \eta_\lambda \quad (6.50)$$

der Lagrange Multiplikatoren erfüllt ist. Dabei stellt η_λ eine benutzerdefinierte obere Schranke des Konvergenzkriteriumes dar.

6.8 Numerik

Entscheidend für den Einsatz von Zeitintegrationsalgorithmen ist neben der Qualität der Ergebnisse vor allem die numerische Effizienz. Ein Vergleich des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' und des zugrunde liegenden Basisalgorithmus bezüglich der Grundgleichungen und der linearisierten Gleichungssysteme sowie deren Lösung ist in Abbildung 6.7 gegeben. Diesem Vergleich sind die für die Einbindung der Nebenbedingungen zusätzlich notwendigen Operationen zu entnehmen.

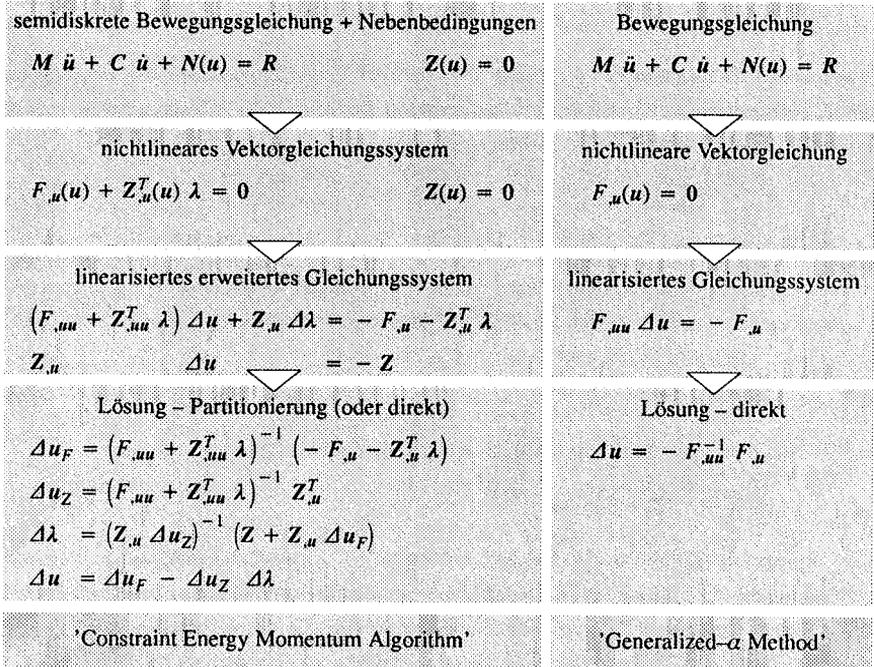


Abbildung 6.7 Symbolischer Vergleich von CEMA und dem Basisalgorithmus

Das semidiskrete Anfangswertproblem wird durch die Nebenbedingungen der Energie-, Impuls- und Drallerhaltung ergänzt. Dies führt mit der Zeitdiskretisierung anstelle der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung zu einem nichtlinearen Gleichungssystem bestehend aus der modifizierten effektiven Strukturgleichung und den Nebenbedingungen. Die Modifikation der effektiven Strukturgleichung ist durch einen additiven Term der Richtungsableitung der Nebenbedingungen und der zusätzlich als Lösungsvariablen eingeführten Lagrange Multiplikatoren gegeben. Nach der Linearisierung ergibt dies ein gegenüber der 'Generalized- α Method' um sieben Gleichungen erweitertes Gleichungssystem mit den Lösungsvektoren der Inkremente von Verschiebungen und Lagrange Multiplikatoren. Die Lösung des erweiterten Gleichungssystems mit der erläuterten Partitionierungsstrategie erfordert neben den beim Basisalgorithmus durch-

geführten Operationen der Dreieckszerlegung und Rücksubstitution sieben weitere Rücksubstitutionen. Ferner muß die Matrix $Z_{,u} \Delta u_Z$ zur Lösung des Inkrements der Lagrange Multiplikatoren generiert und invertiert werden, wobei die Symmetrie der Matrix von Vorteil ist.

Die Berechnung des Verschiebungsincrementes erfordert eine mit dem Inkrement der Lagrange Multiplikatoren gewichtete Addition der Teillösungen.

$$\begin{aligned}
 & -F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda = \tag{6.51} \\
 & = -\alpha_f N(\bar{u}) + (1 - \alpha_\rho) R + \alpha_f \bar{R} \\
 & + M \left[\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \bar{u} + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{u}} \right] \\
 & + C \left[\frac{(1 - \alpha_\rho)\delta}{\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{(1 - \alpha_\rho)\delta}{\beta} - 1 \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) (1 - \alpha_\rho) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \\
 & + (1 - \alpha_\rho) N(u) + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} M u + \frac{(1 - \alpha_\rho)\delta}{\beta \Delta t} C u \quad \text{effektive RHS des Basisalgorithmus} \\
 & + \frac{\delta'}{4\beta} \left(R + \frac{1}{3} \bar{R} \right) \lambda_E \\
 & - M \left[-\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \bar{u} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \ddot{\bar{u}} \right] \lambda_E \\
 & - C \left[-\frac{2\delta'}{5\beta \Delta t} \bar{u} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2\delta'}{5\beta} \right) \dot{\bar{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta'}{5\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \frac{\delta'}{\beta} \lambda_E \\
 & - \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} M u \lambda_E - \frac{2\delta'^2}{5\beta^2 \Delta t} C u \lambda_E - N(u) \lambda_E \quad \text{Energie Nebenbedingung} \\
 & - \frac{\delta}{\beta \Delta t} M a \cdot \lambda_L - \frac{\delta'}{3\beta} C a \cdot \lambda_L \quad \text{Impuls Nebenbedingung} \\
 & + \frac{\beta'}{5\beta} \left(\hat{R} + \frac{1}{4} \bar{R} \right) \Delta t a \cdot \lambda_J \\
 & + M \left[\frac{\delta}{\beta \Delta t} \hat{x} + \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right) \hat{u} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \hat{\ddot{u}} \right] a \cdot \lambda_J \\
 & + C \left[\frac{\delta'}{3\beta} \hat{x} + \left(\frac{\delta'}{4\beta} - \frac{\beta'}{4\beta} \right) \Delta t \hat{\dot{u}} + \left(\frac{\delta'}{10\beta} - \frac{\beta'}{5\beta} \right) \Delta t^2 \hat{\ddot{u}} \right] a \cdot \lambda_J \quad \text{Drall Nebenbedingung}
 \end{aligned}$$

Abbildung 6.8 CEMA – modifizierte effektive rechten Seite

Zur Durchführung der obengenannten Operationen ist die Berechnung der Nebenbedingungen nach den Gleichungen (6.13), (6.23) und (6.26), der Richtungsableitungen der Nebenbedingungen nach den Gleichungen (6.19), (6.24) und (6.30) sowie der zweiten Gâteaux Ableitung der Energienebenbedingung (6.22) in jedem Korrektorschritt erforderlich.

Auf den Prädiktorschritt hat die Einbindung der algorithmischen Bilanzgleichungen, ebenso wie die Berücksichtigung der Energienebenbedingung in der von Hughes, Caughey, Liu (1978) vorgestellten 'Constraint Energy Method', hingegen keinen Einfluß.

Nach den obigen Ausführungen nimmt die modifizierte effektive rechte Seite nach Einsetzen der effektiven Strukturgleichung (5.14) des Basisalgorithmus nach Gleichung (5.14) und der Ableitungen der Nebenbedingungen (6.19), (6.24) und (6.30) die in Abbildung 6.8 dargestellte Form an. In der modifizierten effektiven rechten Seite ist der Ursprung der einzelnen Terme gekennzeichnet. Lediglich die durch die gestrichelte Linie markierten Terme der effektiven rechten Seite des Basisalgorithmus und der Energienebenbedingung müssen in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden, für alle weiteren Terme genügt die einmalige Berechnung zu Beginn der Gleichgewichtsiteration.

Die Modifikation der effektiven Steifigkeitsmatrix mit der zweiten Ableitung der Energienebenbedingung und dem entsprechenden Lagrange Multiplikator (wie bereits gezeigt wurde, sind die zweiten Richtungsableitungen der Impuls- und Drehimpulsnebenbedingung der Nullmatrix identisch (6.25), (6.31)) erfordert praktisch keinen zusätzlichen numerischen Aufwand (siehe Abbildung 6.9).

$$\begin{aligned}
 & F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda && (6.52) \\
 & = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} M + \frac{(1 - \alpha_p) \delta}{\beta \Delta t} C + (1 - \alpha_p) K(u) && \text{effektive Steifigkeit des Basisalgorithmus} \\
 & + \frac{\delta^2 \lambda_E}{\beta^2 \Delta t^2} M + \frac{2\delta^2 \lambda_E}{5\beta^2 \Delta t} C + \lambda_E K(u) && \text{Energienebenbedingung}
 \end{aligned}$$

Abbildung 6.9 CEMA – modifizierte effektive Tangentensteifigkeitsmatrix

Wie die Gleichung der modifizierten effektiven Steifigkeitsmatrix (6.52) in Abbildung 6.9 zeigt, genügt es die Faktoren der Massen-, Dämpfungs- und Tangentensteifigkeitsmatrix zur Generierung der effektiven Steifigkeit zu modifizieren.

$$\begin{aligned}
 & F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda && (6.53) \\
 & = \left(\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\delta^2 \lambda_E}{\beta^2 \Delta t^2} \right) M + \left(\frac{(1 - \alpha_p) \delta}{\beta \Delta t} + \frac{2\delta^2 \lambda_E}{5\beta^2 \Delta t} \right) C + (1 - \alpha_f + \lambda_E) K(u)
 \end{aligned}$$

Neben dem eben erläuterten Kriterium des numerischen Aufwandes ist die Komplexität der Codierung eines Zeitintegrationsalgorithmus von Interesse. Abbildung 6.10 zeigt schematisch die Organisation eines Programm-Codes unter Verwendung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm'. Der Vergleich der Programmstruktur mit der des Basis Algorithmus nach Abbildung 5.10 macht deutlich, daß die Codierung an Komplexität deutlich zunimmt. Vorteilhaft ist allerdings, daß mit zum Basisalgorithmus äquivalenten Daten- und Programmstrukturen operiert werden kann. Im Vergleich zu der ebenfalls energie-, impuls- und drallerhaltenden 'Energy-Momentum Method' nach Simo, Tarnow (1992) erweist sich der geringe Codierungsaufwand auf Elementebene als vorteilhaft. Während bei der 'Energy-Momentum Method' durch die modifizierte Berechnung des Verzerrungstensors der Mittelpunktskonfiguration ein erheblicher Codierungsaufwand auf Elementebene notwendig ist, beschränkt sich dieser bei dem 'Constraint Energy Momentum Algorithm' auf die Generierung der Projektionsmatrix α und die Ermittlung der inneren Energie $U(u)$.

Zeitschritt $t \rightarrow t+\Delta t$	
Vektor der äußeren Lasten	R
Prädiktor	$\Delta u^1, u^1 = \bar{u} + \Delta u^1$
Anfangsbedingungen, Energie, Impuls, Drall	$\Delta \lambda^1 = 0, \lambda^1 = 0, E, L, J$
Newton-Raphson Iteration $k \rightarrow k+1$	
Tangentensteifigkeit, innere Kräfte	K, N
Energie, Impuls, Drall	E, L, J
Zwangsbedingungen und deren Richtungsableitungen	$Z, Z_{,u}$
modifizierte effektive Steifigkeit und RHS	$F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda, -F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda$
partitionierter Verschiebungsvektor	$\Delta u_F = (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} (-F_{,u} - Z_{,u}^T \lambda)$
partitionierte Verschiebungsmatrix	$\Delta u_Z = (F_{,uu} + Z_{,uu}^T \lambda)^{-1} Z_{,u}^T$
Lagrange Multiplikatoren	$\Delta \lambda = (Z_{,u} \Delta u_Z)^{-1} (Z + Z_{,u} \Delta u_F), \lambda^{k+1} = \lambda + \Delta \lambda$
lösen und aktualisieren von u	$\Delta u = \Delta u_F - \Delta u_Z \Delta \lambda, u^{k+1} = u + \Delta u$
Konvergenzkriterium	
aktualisieren des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors	\dot{u}, \ddot{u}
Integrationszeit	

Abbildung 6.10 Integration des CEMA in den Basisalgorithmus (vgl. Abbildung 5.10)

6.9 Diskussion numerischer Effekte

Das dem 'Constraint Energy Momentum Algorithm' eigene, numerische Phänomen der Kombination numerischer Dissipation und Energieerhaltung wird im folgenden anhand der nichtlinearen Plattenschwingung dargestellt. Anhand dieses Beispiels wird der Effekt dieser ungewöhnlichen Kombination, scheinbar widersprüchlicher numerischer Eigenschaften, diskutiert. Weiterhin wird in diesem Kapitel die Lösung der Impuls- und Energieerhaltung am Beispiel des Duffing Oszillators demonstriert.

6.9.1 Nichtlineare Plattenschwingung

Das bereits in Kapitel 5.1.5 dargelegte Beispiel der linearen Plattenschwingung (Abbildung 5.4) wird hier zur Demonstration numerischer Effekte der Energieerhaltung in Kombination mit einem numerisch dissipativen Zeitintegrationsalgorithmus verwendet. Im Gegensatz zu den Darstellungen in Kapitel 5.1.5 wird hier, um das im Rahmen der vorliegenden Arbeit für die nichtlineare Dynamik entwickelte Programm-Modul von CARAT mit dem 'Constraint Energy Momentum Algorithm' anwendbar zu machen, die geometrisch nichtlineare Plattendynamik betrachtet. Die Ergebnisse von linearer und nichtlinearer Berechnung unterscheiden sich infolge der sehr geringen Deformationen nur geringfügig.

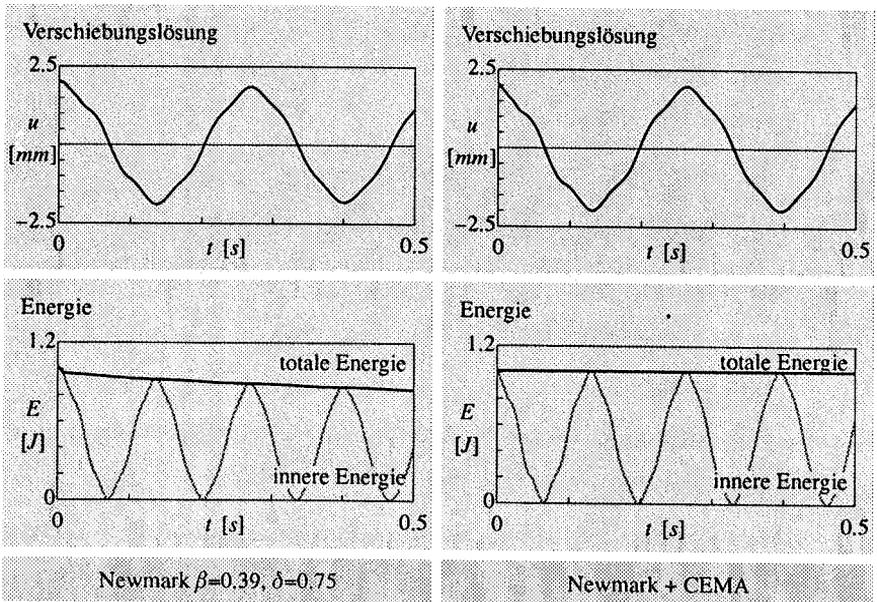


Abbildung 6.11 Zentrale Verschiebung und modale Zerlegung

Zur Zeitintegration wird, wie bei der geometrisch linearen Betrachtung, das erster Ordnung genaue und numerisch dissipative Newmark Verfahren mit den Parametern $\beta = 0.39$ und $\delta = 0.75$ und zusätzlich der auf die Energieerhaltung bedingte CEMA verwendet. Als Basis des CEMA dient das Newmark Verfahren in der angegebenen Parametrisierung. Die ergänzend in das Variationsproblem eingebrachte Energieerhaltungsbedingung (6.13) nimmt für die homogene, dämpfungsfreie Bewegungsgleichung ($\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$) eine von den Parametern der konsistenten Integration β' und δ' unabhängige Form an.

In Abbildung 6.11 sind die Zeitverläufe der zentralen Verschiebung und der totalen Energie der Lösungen mit dem Newmark Algorithmus in reiner und modifizierter Form (CEMA) dargestellt. Während der Basisalgorithmus infolge der numerischen Dissipation einen Energieverlust aufweist, wird mit dem CEMA die totale Energie erhalten.

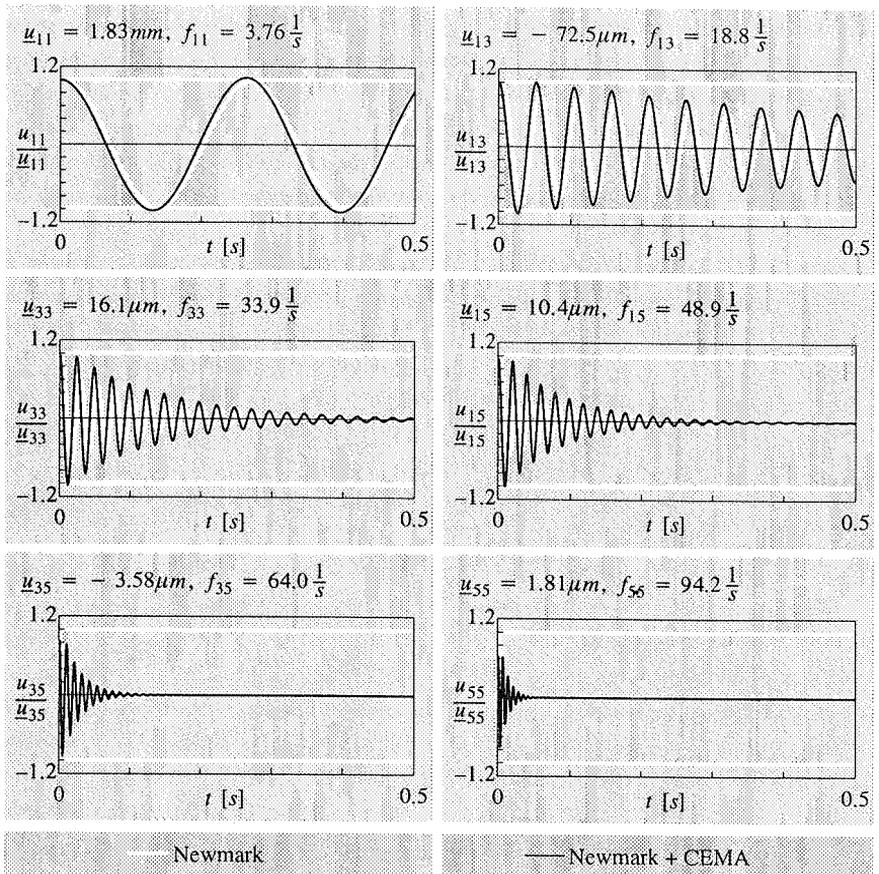


Abbildung 6.12 Modale Zerlegung der Basis- und der CEMA-Lösung

Aufschluß über die numerischen Effekte der Energieebenenbedingung in Kombination mit numerischer Dissipation geben die in Abbildung 6.12 dargestellten Zeitschriebe der Fourierkoeffizienten des linearisierten Systemes. Sämtliche dargestellten Grundmoden (bis zur Periodendauer von $T_{55} = 10.6\text{ms}$) sind mit CEMA (schwarz) gegenüber dem Basisalgorithmus (weiß – identisch mit Abbildung 5.5) erhöht. Dies läßt den Schluß zu, daß die in der Strukturmechanik interessanten niederen Moden durch den Energietransfer von sehr hohen Moden besser abgebildet werden als mit dem Basisalgorithmus. Andererseits besteht dadurch die Gefahr einer Überhöhung der Grundmoden. Der Fourierkoeffizient u_{11} in Abbildung 6.12 zeigt diesen Effekt eines leicht überhöhten Grundmode. Das Anwachsen des normierten Fourierkoeffizienten $u_{11}/\underline{u}_{11}$ über den Wert Eins korreliert mit der numerischen Dissipation höherer Moden.

Die Betrachtung eines größeren Zeitfensters in Abbildung 6.13 gibt näheren Aufschluß über den Einfluß der numerischen Dissipation und die erzwungene Energieerhaltung auf die niederfrequenten Schwingungsmoden. Die numerische Dissipation alleine führt zu einem Amplitudenabfall des ersten Mode. Problematisch wird dieser Amplitudenabfall für Langzeitdynamiken wegen seiner in Abbildung 6.14 dokumentierten Linearität. Dies bedeutet, daß die Amplitude – selbst der Grundschiwingung – infolge der numerischen Dämpfung mit zunehmender Integrationszeit verschwindet; die frei schwingende Platte kommt zur Ruhe! Anders hingegen resultiert die zusätzliche Zwangsbedingung der algorithmischen Energieerhaltung in einem Anstieg der Amplitude des ersten Mode.

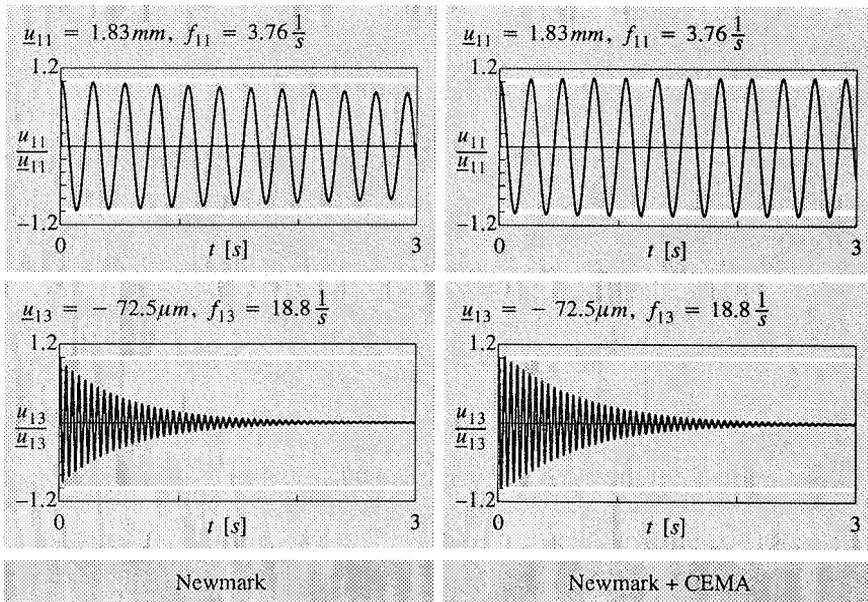


Abbildung 6.13 Modale Zerlegung der Basis- und der CEMA-Lösung (Langzeitdynamik)

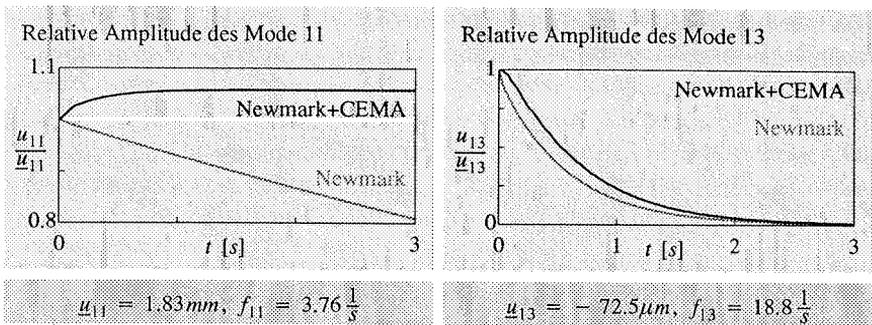


Abbildung 6.14 Relative Amplitude der Fourierkoeffizienten (Langzeitdynamik)

Entscheidend hierbei ist, daß dieser Amplitudenanstieg nach der Dissipation numerisch schädlicher hochfrequenter Moden beendet ist (Abbildung 6.14). Wird die Langzeitdynamik des zweiten Mode betrachtet, ergeben sich lediglich quantitative Unterschiede der entsprechenden Fourierkoeffizienten, wobei der Fourierkoeffizient bei Einbindung der Energieerhaltung etwas langsamer abfällt.

6.9.2 Duffing Oszillator

Anhand des Duffing Oszillators (vgl. Kapitel 1.3 und Kapitel 5.5) soll die Funktion des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' gezeigt werden. Für das Modellproblem sind neben der Bewegungsgleichung die Nebenbedingungen der Energieerhaltung und der Erhaltung des vertikalen Impulses formulierbar. Da lediglich eine unbekannte Verschiebung existiert, kann jede dieser Bedingungen allein nach den Verschiebungen gelöst werden. Die Anwendung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' auf dieses Modellproblem ist damit nicht möglich. Eine Veranschaulichung der Funktion der Energie- und Impulsnebenbedingung ist jedoch anhand des Lösens dieser Bedingungen nach der Verschiebung gestattet.

Lösung der algorithmischen Impulsbilanz

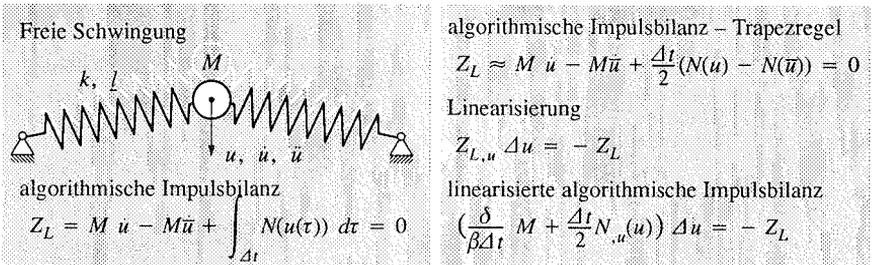


Abbildung 6.15 Duffing Oszillator – Algorithmische Impulsbilanz $Z_L = 0$ und Lösung

Die Nebenbedingung der Impulserhaltung (6.23) wird für die freie Bewegung des Duffing Oszillators auf die Differenz des Impulses am Ende und zu Beginn des Zeitschrittes reduziert.

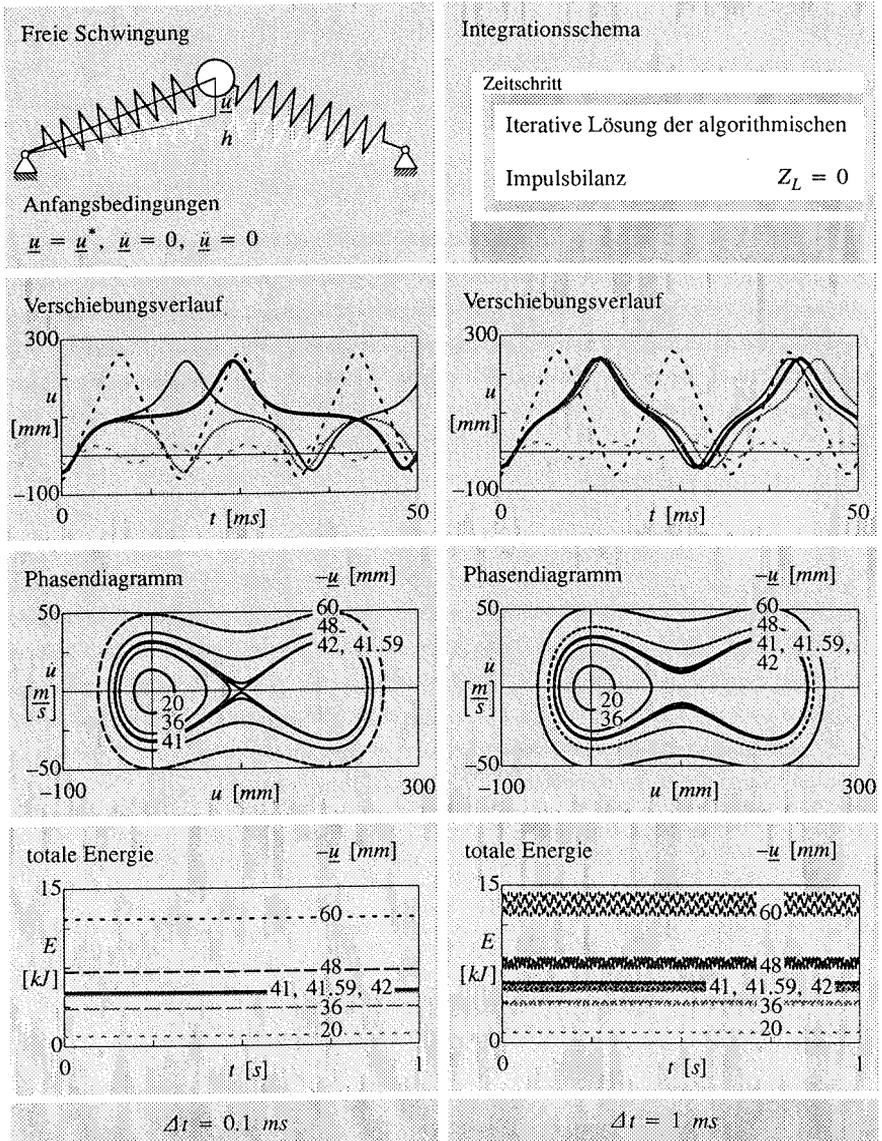


Abbildung 6.16 Duffing Oszillator – Iterative Lösung der algorithmischen Impulsbilanz

Zusätzlich zu den in Gleichung (6.23) angegebenen Termen kann hier die Impulsänderung infolge der Lagerreaktionen eingebunden werden. Die Summe der Lagerreaktionen ist mit den vertikalen Komponenten der Federreaktionen, demnach der inneren Kraft, gegeben. Die Integration der inneren Kraft über dem Zeitschritt wird mit der Trapezregel (A.9) durchgeführt. Die Zusammenstellung der algorithmischen Impulsbilanz und deren Linearisierung, wobei die Newmark Approximation der Geschwindigkeit nach Gleichung (5.12) eingesetzt wird, ist in Abbildung 6.15 gegeben.

Abbildung 6.16 zeigt das Integrationsschema zur sukzessiven iterativen Lösung des Anfangswertproblems des vorgespannten Duffing Oszillators mit Hilfe der algorithmischen Impulsbilanz sowie die mit einem kleinen ($\Delta t = 0.1\text{ ms}$) und einem großen Zeitschritt ($\Delta t = 1.0\text{ ms}$) ermittelten Ergebnisse. Diese sind als Zeitverlauf von Verschiebungen und Energie sowie als Phasendiagramm dargestellt. Die numerischen Experimente mit dem kleinen Zeitschritt $\Delta t = 0.1\text{ ms}$ liefern für nahezu alle Anfangsverschiebungen zu der Lösung mit dem Newmark Verfahren (Abbildung 1.6) identische Ergebnisse.

Einzig die kritische Anfangsverschiebung weist qualitative Differenzen zur Referenzlösung in Abbildung 1.6 auf. Die Bewegung um eine stabile Gleichgewichtslage wird mit der Lösung der algorithmischen Impulsbilanz zur Bewegung um zwei stabile Gleichgewichtslagen, was am Zeitverlauf der Verschiebung und im Phasendiagramm zu erkennen ist. Dies deutet auf eine Lösung hin, welche die totale Energie im System überschätzt. Wie am Phasendiagramm und am Energieverlauf deutlich wird, tritt diese Überhöhung der totalen Energie nur zu Beginn der Zeitintegration auf. Während der Zeitintegration ist die Bewegung periodisch und die totale Energie ist konstant.

Bei der Integration der algorithmischen Impulsbilanz mit dem großen Zeitschritt $\Delta t = 1.0\text{ ms}$ liefern alle Anfangsverschiebungen in der Nähe der kritischen Anfangsverschiebung zu große Schwingungsamplituden. Die Bewegung ist allerdings weiterhin periodisch und ergibt einen nicht anwachsenden Energieverlauf.

Lösung der algorithmischen Energiebilanz

Freie Schwingung



algorithmische Energiebilanz

$$Z_E = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 - \bar{u}^2) + U(u) - U(\bar{u}) = 0$$

Approximation in der Zeit

$$\dot{u} = \frac{\delta}{\beta \Delta t} (u - \bar{u}) + \frac{\beta - \delta}{\beta} \bar{u} + \frac{2\beta - \delta}{2\beta} \Delta t \bar{u}$$

Linearisierung

$$Z_{E,u} \Delta u = -Z_E$$

linearisierte algorithmische Energiebilanz

$$\left(\frac{\delta}{\beta \Delta t} M \dot{u} + N(u) \right) \Delta u = -Z_E$$

Abbildung 6.17 Duffing Oszillator – Algorithmische Energiebilanz $Z_E = 0$ und Lösung

Die Nebenbedingung der Impulserhaltung (6.23) wird für die freie Bewegung des Duffing Oszillators auf die Differenz des Impulses am Ende und zu Beginn des Zeitschrittes reduziert.

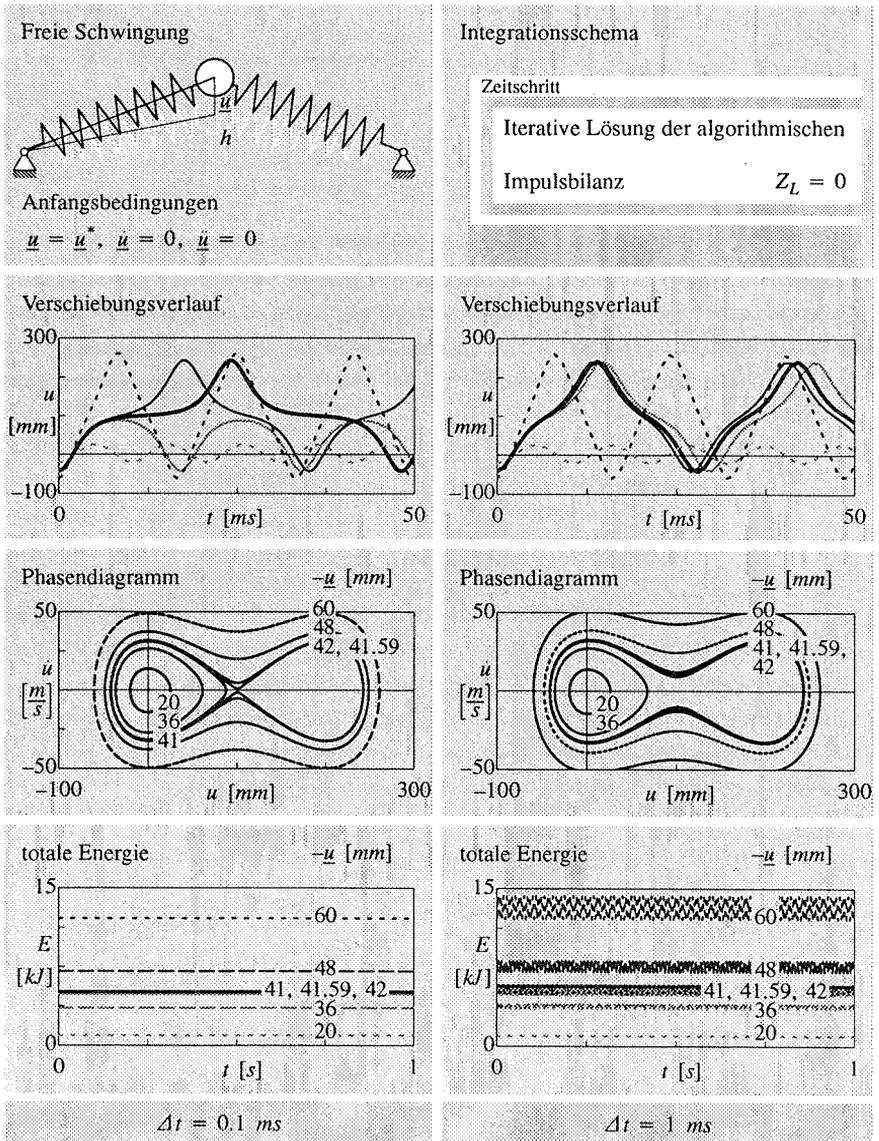


Abbildung 6.16 Duffing Oszillator – Iterative Lösung der algorithmischen Impulsbilanz

Zusätzlich zu den in Gleichung (6.23) angegebenen Termen kann hier die Impulsänderung infolge der Lagerreaktionen eingebunden werden. Die Summe der Lagerreaktionen ist mit den vertikalen Komponenten der Federreaktionen, demnach der inneren Kraft, gegeben. Die Integration der inneren Kraft über dem Zeitschritt wird mit der Trapezregel (A.9) durchgeführt. Die Zusammenstellung der algorithmischen Impulsbilanz und deren Linearisierung, wobei die Newmark Approximation der Geschwindigkeit nach Gleichung (5.12) eingesetzt wird, ist in Abbildung 6.15 gegeben.

Abbildung 6.16 zeigt das Integrationsschema zur sukzessiven iterativen Lösung des Anfangswertproblems des vorgespannten Duffing Oszillators mit Hilfe der algorithmischen Impulsbilanz sowie die mit einem kleinen ($\Delta t = 0.1 \text{ ms}$) und einem großen Zeitschritt ($\Delta t = 1.0 \text{ ms}$) ermittelten Ergebnisse. Diese sind als Zeitverlauf von Verschiebungen und Energie sowie als Phasendiagramm dargestellt. Die numerischen Experimente mit dem kleinen Zeitschritt $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ liefern für nahezu alle Anfangsverschiebungen zu der Lösung mit dem Newmark Verfahren (Abbildung 1.6) identische Ergebnisse.

Einzig die kritische Anfangsverschiebung weist qualitative Differenzen zur Referenzlösung in Abbildung 1.6 auf. Die Bewegung um eine stabile Gleichgewichtslage wird mit der Lösung der algorithmischen Impulsbilanz zur Bewegung um zwei stabile Gleichgewichtslagen, was am Zeitverlauf der Verschiebung und im Phasendiagramm zu erkennen ist. Dies deutet auf eine Lösung hin, welche die totale Energie im System überschätzt. Wie am Phasendiagramm und am Energieverlauf deutlich wird, tritt diese Überhöhung der totalen Energie nur zu Beginn der Zeitintegration auf. Während der Zeitintegration ist die Bewegung periodisch und die totale Energie ist konstant.

Bei der Integration der algorithmischen Impulsbilanz mit dem großen Zeitschritt $\Delta t = 1.0 \text{ ms}$ liefern alle Anfangsverschiebungen in der Nähe der kritischen Anfangsverschiebung zu große Schwingungsamplituden. Die Bewegung ist allerdings weiterhin periodisch und ergibt einen nicht anwachsenden Energieverlauf.

Lösung der algorithmischen Energiebilanz

Freie Schwingung



algorithmische Energiebilanz

$$Z_E = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 - \bar{u}^2) + U(u) - U(\bar{u}) = 0$$

Approximation in der Zeit

$$\dot{u} = \frac{\delta}{\beta \Delta t} (u - \bar{u}) + \frac{\beta - \delta}{\beta} \bar{u} + \frac{2\beta - \delta}{2\beta} \Delta t \bar{u}$$

Linearisierung

$$Z_{E,u} \Delta u = -Z_E$$

linearisierte algorithmische Energiebilanz

$$\left(\frac{\delta}{\beta \Delta t} M \dot{u} + N(u) \right) \Delta u = -Z_E$$

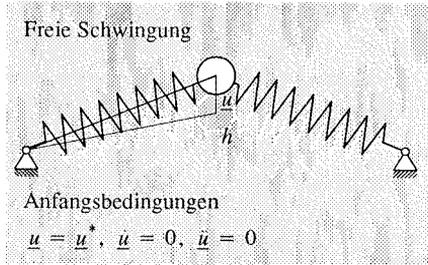
Abbildung 6.17 Duffing Oszillator – Algorithmische Energiebilanz $Z_E = 0$ und Lösung

Die Nebenbedingung der Energieerhaltung (6.13) reduziert sich bei verschwindenden Dämpfungskräften und äußeren Lasten zu der Differenz der totalen Energie am Ende und zu Beginn des Zeitintervalles $[\bar{t}, \bar{t}]$. Abbildung 6.17 zeigt die algorithmische Energiebilanz und ihre linearisierte Form. Zur konsistenten Linearisierung der algorithmischen Energiebilanz wird, wie in Abbildung 6.17 dargestellt, die Newmark Approximation der Geschwindigkeit (5.12) eingesetzt.

Das Schema zur Integration der Energiebilanz mit den in Abbildung 1.4 gegebenen Anfangsbedingungen ist in Abbildung 6.18 dargestellt. Da der Ausgangszustand zu Beginn eines Zeitschrittes die Energieebenbedingung erfüllt, ist ein Prädiktorschritt mit einem klassischen Zeitintegrationsverfahren erforderlich, um in Nähe der energetisch zulässigen Lösung am Ende des Zeitschrittes zu gelangen. Erst von dieser Näherung aus kann die Energieebenbedingung als Korrektor mit der Newton–Raphson Methode iterativ gelöst werden. Als Prädiktor wird eine bereits konvergierte Gleichgewichtsiteration eines Newmark Schrittes in der Formulierung der konstanten mittleren Beschleunigung verwendet.

Abbildung 6.18 zeigt weiterhin die Ergebnisse der numerischen Lösung des betrachteten Anfangswertproblems mit Hilfe der Energieebenbedingung. Die Verwendung des kleinen und großen Zeitschrittes ergibt, wie infolge der Lösung der Energieebenbedingung zu erwarten ist, konstante Energieverläufe und identische Phasendiagramme. Einzig die Zeitverläufe der Verschiebung zeigen Differenzen bezüglich der Referenzlösung in Abbildung 1.6. Der Zeitschritt $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ resultiert für nichtkritische Anfangsverschiebungen in Lösungen, die der Referenzlösung entsprechen. Die Lösung der kritischen Anfangsverschiebung entspricht qualitativ der Referenzlösung; Unterschiede in der Periode sind jedoch auffällig. Auch die Integration mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1.0 \text{ ms}$ liefert eine stabile Lösung deren Verschiebungsverlauf allerdings von der Referenzlösung abweicht. Nach dem Anfangsbereich der Integration sind die Lösungen qualitativ richtig, d.h. die Bewegungen um eine oder zwei stabile Gleichgewichtslagen sind mit entsprechenden Anfangsbedingungen der Referenzlösung äquivalent.

Generalisiert für einen eindimensionalen Schwinger mit mehr als zwei Freiheitsgraden können aus den betrachteten Beispielen folgende Aussagen gewonnen werden: Durch simultane Erfüllung der effektiven Strukturgleichung in der Form nach Abbildung 5.12, der Impulsnebenbedingung nach Abbildung 6.15 und der Nebenbedingung der algorithmischen Energieerhaltung nach Abbildung 6.17, könnten nun energetisch stabile Zeitintegrationsalgorithmen, die infolge der Impulserhaltung Genauigkeit garantieren, entwickelt werden. Diese Algorithmen stellen den Sonderfall des CEMA für eindimensionale Bewegungen dar. Die allein mit der Energie- und Impulsnebenbedingung gefundenen Lösungen sind nicht eindeutig (Anzahl der Freiheitsgrade des eindimensionalen Schwingers > 2). Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch die zusätzliche Einbindung der effektiven Strukturgleichung erreicht.

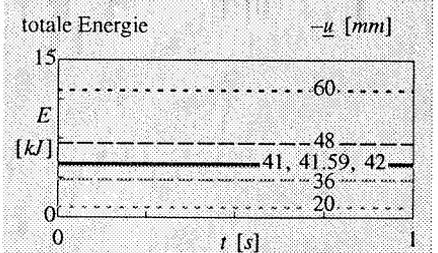
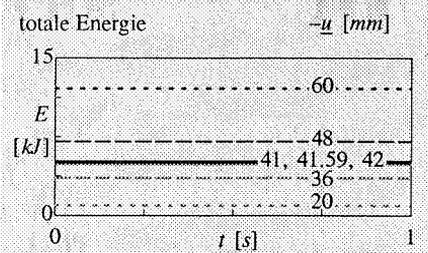
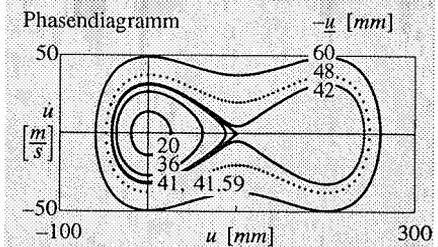
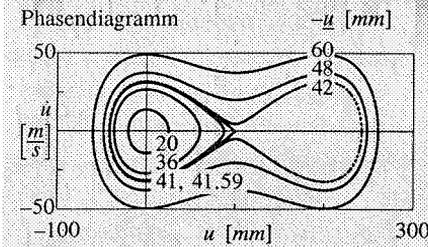
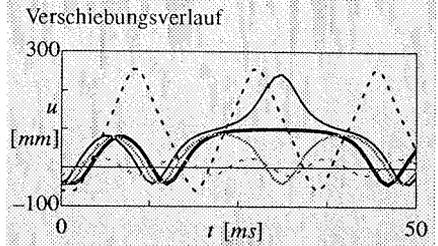
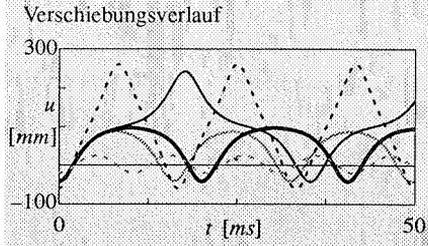


Integrationschema

Zeitschritt

Prädiktor: Newmark Schritt

Korrektor: Energiebedingung $Z_E = 0$



$\Delta t = 0.1 \text{ ms}$

$\Delta t = 1 \text{ ms}$

Abbildung 6.18 Duffing Oszillator – Iterative Lösung der algorithmischen Energiebilanz

7 Schalenbeulen

Im vorliegenden Kapitel sollen typische Anwendungsgebiete der nichtlinearen, numerischen Strukturmechanik aufgezeigt werden. Nichtlineare, dynamische Strukturanalysen sind unumgänglich, wenn

- das Tragverhalten einer Struktur von der geometrischen Nichtlinearität geprägt ist (zum Beispiel die Brückenschwingung bei Krämer (1995)),
- große Deformationen und Rotationen auftreten,
- dynamisches Durchschlagen
- oder der dynamische Wechsel von Beulmoden, ein Effekt der auch als 'Mode-Jumping' bezeichnet wird, simuliert werden sollen.

Die Beschreibung von Beulvorgängen mit statischen Analysen bereitet wegen der Vielzahl von Gleichgewichtspfaden im überkritischen Bereich das Problem, eine eindeutige Lösung zu bestimmen. Ein Ausweg aus diesem Dilemma bietet die dynamische Betrachtung von Beulvorgängen, wobei entsprechend der Lastaufbringung zu jedem Zeitpunkt ein eindeutiger Systemzustand in Deformation und Geschwindigkeit ermittelt werden kann. Das Potential, aber auch die Problematik einer dynamischen Analyse von Durchschlags- oder Beulproblemen sollen anhand zweier Beispiele demonstriert werden. Am Beispiel des durchschlagenden Kreiszyylindersegmentes werden die Strategien der Verschiebungs- und Lastkontrolle in der Dynamik, zum Beispiel zur Simulation entsprechender Versuche, mit der statischen Lösung verglichen. Das Phänomen des 'Mode-Jumping' und das Potential seiner numerischen Beschreibung wird anhand des axial belasteten Kreiszyinders demonstriert.

7.1 Durchschlagsproblem Kreiszyylindersegment

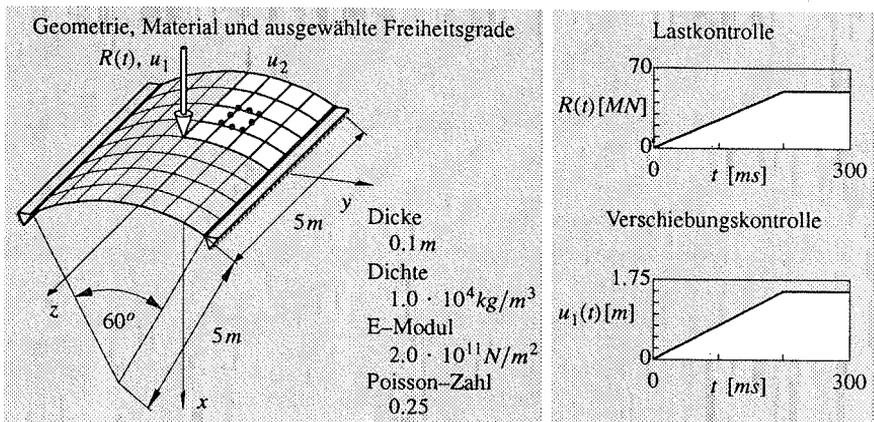


Abbildung 7.1 Durchschlagsproblem Kreiszyylindersegment – Geometrie und Belastung

Der physikalische Vorgang des Durchschlagens oder Beulens wird entgegen seiner statischen Analyse von Trägheitskräften beeinflusst. Um diesen Einfluß bei der Simulation zu erfassen, werden im folgenden die dynamischen Kräfte bei der Bildung des Gleichgewichtes berücksichtigt und die Bewegung der Struktur numerisch integriert. Die erste dynamische Analyse simuliert ein Durchschlagsexperiment mit einer langsam in der Zeit anwachsenden zentralen Einzellast, wie sie in Abbildung 7.1 dargestellt ist.

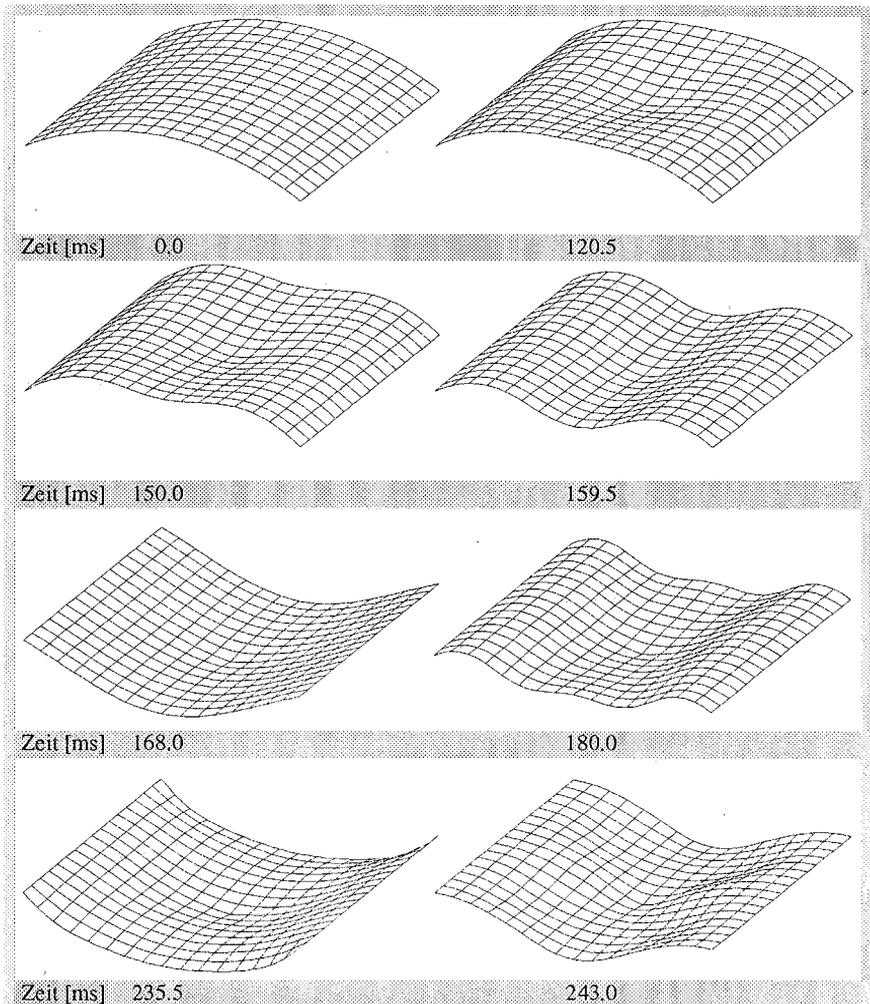


Abbildung 7.3 Deformierte Konfigurationen des Kreiszyylindersegmentes bei Lastkontrolle

Diese Analyse führt zu dem in Abbildung 7.2 gegebenen Zeitverlauf der zentralen Verschiebung und der Randverschiebung. Deutlich zu erkennen ist der Vorbeulbereich mit dem flachen Anstieg der zentralen Verschiebung und der nahezu verschwindenden Randverschiebung. Das bedeutet, die Randbereiche des Kreiszylindersegmentes bleiben zu Beginn der Lastaufbringung undeformiert und stabilisieren somit das Bogentragwerk (vgl. Abbildung 7.3). Erst nachdem auch die Randbereiche deformiert werden, beginnt der Vorgang des Durchschlagens, der sich in Abbildung 7.2 in einem steilen Anstieg der Verschiebungen äußert.

Nach Erreichen der durchgeschlagenen Position wirken die dynamischen Kräfte äquivalent einer Impulsbelastung, wodurch höherfrequente Schwingungsmoden induziert werden. Numerisch erweisen sich diese Moden als sehr kritisch, da eine Konvergenz in der Gleichgewichtssiteration bei gleichbleibendem Zeitschritt infolge der sehr kleinen Schwingungsperioden nicht mehr erreicht werden kann. Zur Lösung dieses Problems gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist die Anpassung des Zeitschrittes an die Ansprüche des dynamischen Modells. Das bedeutet, daß sehr kleine Zeitschritte verwendet werden müssen und die Zeitintegration damit ineffektiv und vor allem unwirtschaftlich wird. Die zweite, hier angewandte, Methode ist die Elimination der hochfrequenten Moden durch numerische Dämpfung. Dadurch ist im Nachbeulbereich die Bewegung der Struktur, repräsentiert durch die niederfrequenten Moden, numerisch integrierbar. Negative Auswirkungen hat die numerische Dämpfung allerdings auch auf die niederfrequenten Moden, was sich in Abbildung 7.2 durch den Abfall der Schwingungsamplitude im Nachbeulbereich bemerkbar macht.

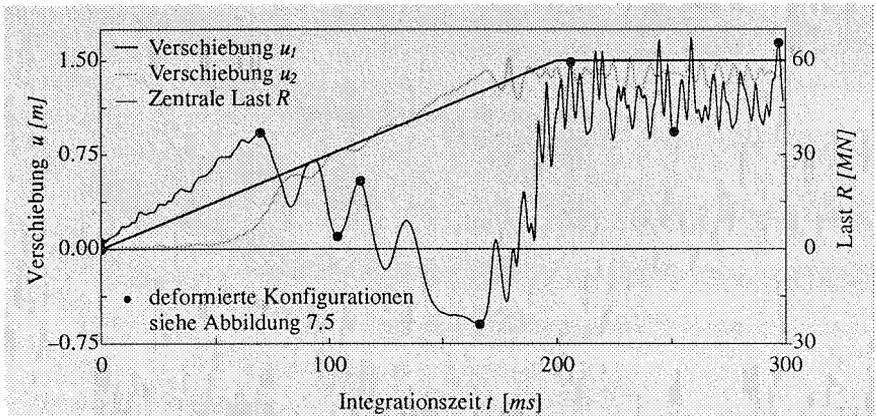


Abbildung 7.4 Zeitverlauf der Last und der Randverschiebung bei Verschiebungskontrolle Numerisch unkritischer zu beschreiben ist das verschiebungskontrollierte Durchschlagen, dargestellt in Abbildung 7.4 und Abbildung 7.5. Durch den kontrollierten Bewegungsablauf des Durchschlagens wird die Induktion hochfrequenter Schwingungsanteile vermieden. Bemerkenswert an dieser Berechnung sind die von Beginn der Zeitintegration an existierenden Oszillationen

der Reaktionskraft. Ursache dieser Oszillationen ist die zur Zeit $t = 0$ lediglich C^0 -stetige Verschiebungsvorgabe. Dies ergibt für die Geschwindigkeit einen Sprung und die Beschleunigung ist zu diesem Zeitpunkt nicht mehr endlich. Durch die Diskretisierung wird der Geschwindigkeitssprung 'verschmiert' und eine endlich Beschleunigung wird vorgeschrieben. Trotzdem entsteht damit eine dynamische Last, die wiederum für die Oszillationen um die statische Gleichgewichts-lage verantwortlich ist.

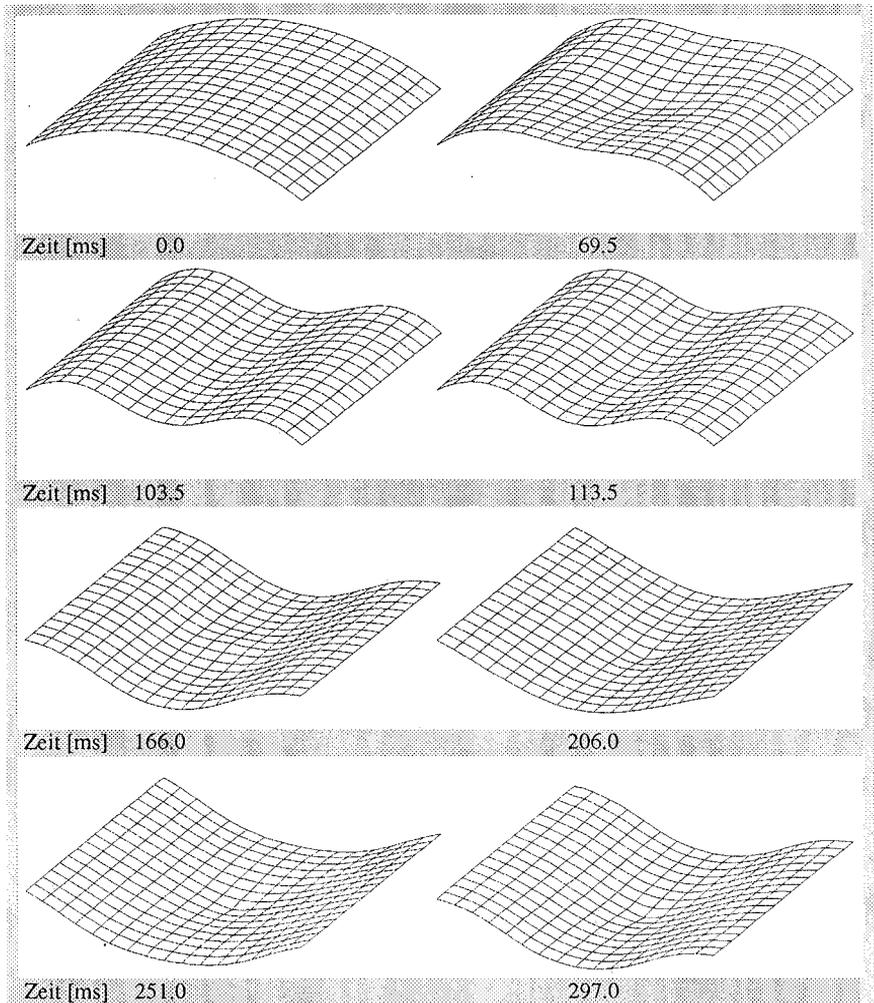


Abbildung 7.5 Deformierte Konfigurationen bei Verschiebungskontrolle

In Abbildung 7.6 sind die Last–Verschiebungs–Diagramme der statischen und dynamischen Analysen zusammengefaßt. Deutlich zu erkennen sind zwei Phänomene der dynamischen Strukturanalyse:

- Die kritische Last wird infolge der Massenträgheit gegenüber der statischen Analyse erhöht
- und die dynamisch ermittelten Last–Verschiebung–Kurven oszillierten um die statische Gleichgewichtslage.

Die verschiebungsgesteuerte Analyse liefert die Oszillation der Last und die lastgesteuerte Rechnung eine Schwingung der zentralen Verschiebung um den statischen Gleichgewichtspfad. Der Mittelwert der Oszillationen der Verschiebungen (Laststeuerung) entspricht nicht der statischen Verschiebung bei einer entsprechenden Last, was mit der unterschiedlichen Steifigkeit der Struktur in den beiden Bewegungsrichtungen, ausgehend von der statischen Gleichgewichtslage, erklärt werden kann. Wie an der statischen Lösung in Abbildung 7.6 zu erkennen ist, haben relativ zu statischen Gleichgewichtslage positive Verschiebungen eine Versteifung des durchgeschlagenen Kreiszyylindersegmentes zur Folge, während negative Relativverschiebungen eine deutliche Abnahme der Steifigkeit hervorrufen. Dies bedeutet eine große Verschiebungsamplitude in negativer und eine kleine Amplitude in positiver Richtung.

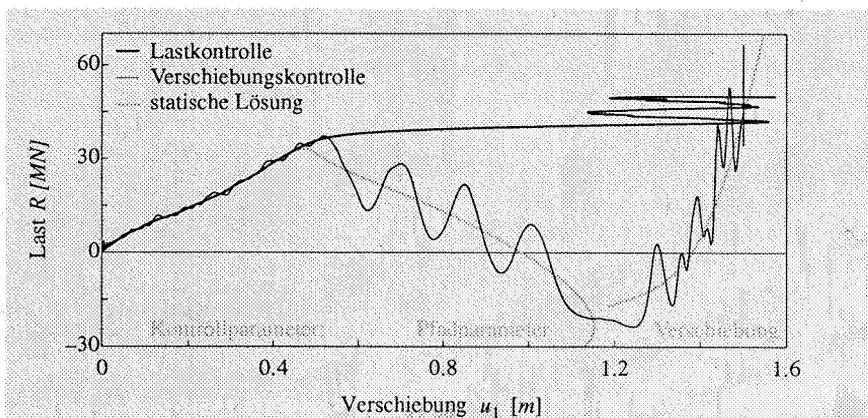


Abbildung 7.6 Last–Verschiebungs–Kurve $R(u_1)$ des Kreiszyylindersegmentes

Extreme Unterschiede in der Struktursteifigkeit des Kreiszyylindersegmentes bei dem bereits simulierten lastgesteuerten Durchschlagsvorgang und die darin begründete starke Veränderung der dynamischen Eigenschaften prädestinieren dieses Beispiel zur Untersuchung adaptiver Zeitschrittsteuerungen in der nichtlinearen Strukturndynamik. Nach den Ergebnissen in Kapitel 5.5.4 ist der Fehlerästimator (5.42) nach Zienkiewicz, Xie (1991) als Relativmaß nach Gleichung (5.36) am besten geeignet, um eine an die Dynamik der Struktur angepaßte Zeitschrittgröße zu realisieren. Eine gute Qualität wird diesem Fehlermaß in Scholz (1996) bei der Anwendung mit numerisch dissipativen Zeitintegrationsalgorithmen in der linearen Strukturndynamik attestiert.

Aus diesen Gründen wird das oben charakterisierte lokale, relative Fehlermaß zur Schrittweitensteuerung in Verbindung mit dem numerisch dissipativen 'Bossak- α ' Verfahren ($q_\infty = 0.9$ nach Tabelle 5.1) angewandt. Die frei definierbare Toleranz, Unter- und Obergrenze des Fehlermaßes werden

$$\eta_e = 5\% \qquad \nu_1 = 0.8, \nu_2 = 1.2 \qquad (7.1)$$

und der erste Zeitschritt $\Delta t = 0.5\text{ms}$ gewählt. In Abbildung 7.7 ist das relative Fehlermaß bei einem konstanten Zeitschritt ($\Delta t = 1\text{ms}$) und einem adaptiv gesteuerten Zeitschritt im Vergleich dargestellt. Die Zeitintegration mit konstantem Zeitschritt zeigt zu Beginn bei einer sehr streifen Struktur und am Ende der Zeitintegration infolge der auftretenden hochfrequenten Schwingungsmoden einen großen relativen Fehler. Der Vorbeulbereich und das Beulen können mit einem kleinen Fehler berechnet werden, wobei zu bemerken ist, daß der Fehler mit kleiner werdender Struktursteifigkeit ebenfalls abnimmt. Bei Anwendung der adaptiven Zeitschrittsteuerung wird ein zwischen den vorgegebenen Grenzen variierendes Fehlermaß erreicht. Das Unterschreiten der unteren Fehlergrenze ist möglich, da ein neuer Zeitschritt berechnet, der Zeitschritt allerdings nicht, wie bei der Überschreitung der oberen Fehlergrenze, wiederholt wird.

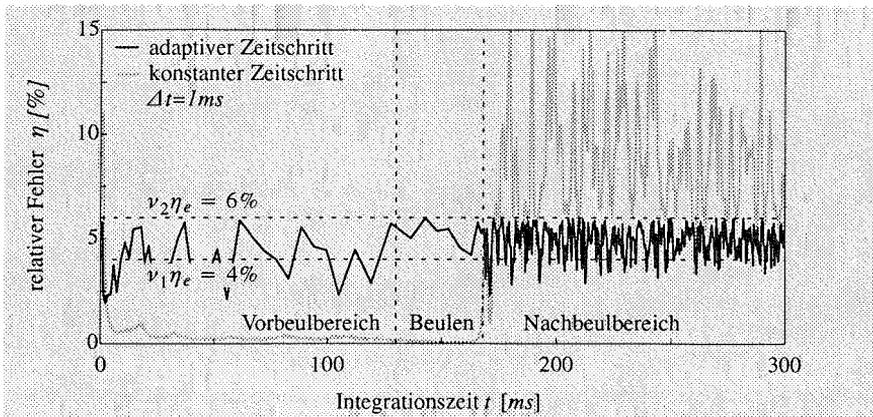


Abbildung 7.7 Lokaler, relativer Fehler bei adaptivem und konstantem Zeitschritt

Der mit dem berechneten relativen Fehler nach Gleichung (5.38) korrelierende adaptive Zeitschritt ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Die mit der Deformation abnehmende Steifigkeit der Struktur spiegelt sich im Vorbeulbereich im anwachsenden Zeitschritt wider. Der sehr schnelle, jedoch mit den Grundmoden beschreibbare, Durchschlag des Segmentes kann mit einem mittleren Zeitschritt berechnet werden. Einen sehr kleinen Zeitschritt erfordert hingegen die Präsenz hochfrequenter Moden im Nachbeulbereich.

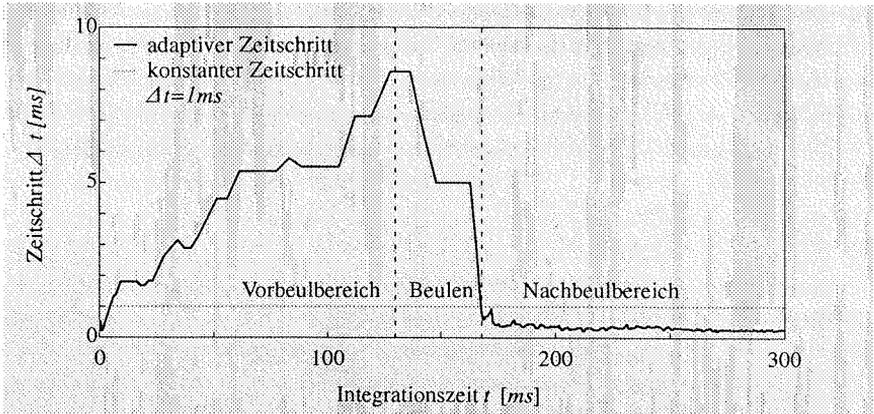


Abbildung 7.8 Adaptiver Zeitschritt des durchschlagenden Kreiszylindersegmentes

7.2 Dynamisches Beulen eines Kreiszylinders

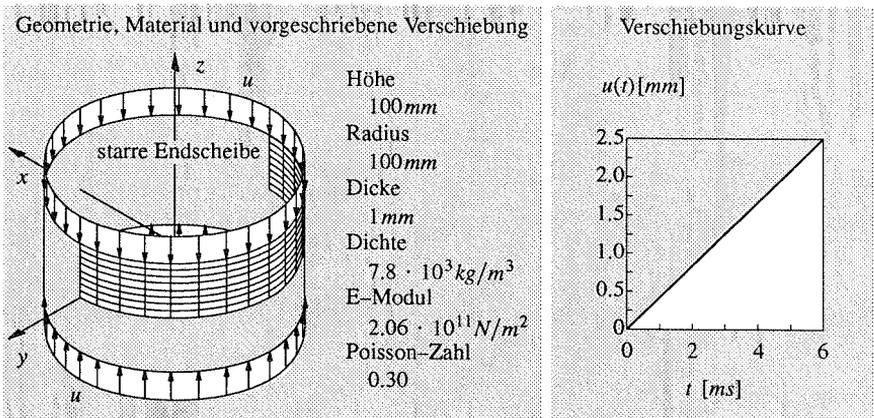


Abbildung 7.9 Dynamisches Beulen eines Kreiszylinders – Geometrie und Belastung

'Mode-Jumping', der dynamische Wechsel von Beulmoden einer Struktur, soll anhand des axial belasteten Kreiszylinders erläutert werden. Betrachtet wird hierzu die in Geometrie und Material zu dem in Dinkler (1988) untersuchten Kreiszylinder mit starren Endscheiben identische Struktur in Abbildung 7.9. Die Endscheiben sollen mit konstanter Geschwindigkeit aufeinander zubelegt und die resultierende Dynamik beobachtet werden. Ohne Einschränkung der approximierbaren Beulmoden ist eine symmetrische Diskretisierung in Umfangsrichtung möglich. Die vorausgesetzte Symmetrie in Längsrichtung des Zylinders bedeutet hingegen eine Einschränkung bezüglich der darstellbaren Beulmoden. Das betrachtete Viertel des Zylinders wird mit 16×8 achtknotigen Schalenelementen, die zur Vermeidung des 'Dickenlocking' mit dem 'En-

hanced Assumed Strain' Konzept nach Büchter, Ramm (1992b) modifiziert sind, diskretisiert. Die Zeitintegration wird mit der sehr robusten numerisch dissipativen 'Bossak- α ' Methode mit dem Spektralradius $\varrho_{\infty} = 0.9$ und einem Zeitschritt von $\Delta t = 7.5\mu s$ durchgeführt.

Abbildung 7.10 zeigt den zeitlichen Verlauf der Lastkomponente R_I und der Resultierenden der Lasten des diskretisierten Segmentes bei der nach Abbildung 7.9 vorgeschriebenen Verschiebung der Endscheiben. Einem nahezu linearen Anstieg der Last folgt nach dem Übergang in den ersten Beulmode in Längsrichtung – den in Abbildung 7.11 dargestellten sogenannten 'Elefantenfuß' – ein weiterer Verschiebungsbereich mit konstanter Axiallast. In direkter Verbindung zu dem kurzen Anstieg der Last steht der dynamische Wechsel der Beulform von einem axialen zu einem radialen Mode mit sieben Beulen über den Umfang. Nach Ausbildung der radialen Beulen sinkt die Summe der Lasten bis auf ein konstantes Niveau. In diesem Zeitbereich wechselt die Beulform dynamisch auf einen Beulmode mit fünf Beulen. Ferner wird die Dynamik des 'Mode-Jumping' von den Schwankungen der Einzellast widergespiegelt. Bei einer weiteren Steigerung der Verschiebungen im Zeitintervall $[3.907ms, 6ms]$ tritt kein Wechsel der Beulform auf.

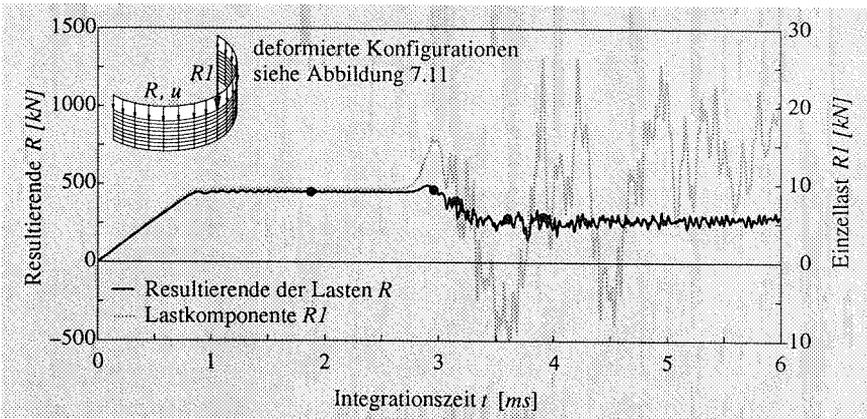


Abbildung 7.10 Zeitverlauf einer Einzellast und der Resultierenden der Lasten

Anzumerken ist an dieser Stelle die Problematik der Simulation der eben beschriebenen 'hochdynamischen' Prozesse. Zum einen führt die numerische Dissipation zur Elimination hochfrequenter Moden, die den auf Störungen sehr sensibel reagierenden physikalischen dynamischen Prozess entscheidend beeinflussen. Zum anderen erfordern kleine Zeitschritte, die eine numerische Lösung ohne algorithmische Dissipation ermöglichen, sehr rechenzeitintensive Simulationen. Infolge der physikalischen Sensitivität von 'Mode-Jumping' Vorgängen und der über die Numerik eingebrachten 'Imperfektion' kann auch bei sehr kleinen Zeitschritten nicht sicher gestellt werden, daß der physikalisch exakte Beulvorgang am Ende einer Zeitintegration erreicht wird. Qualitative Aussagen bezüglich des Beulvorganges und die quantitative Ermittlung des Lastniveaus sind jedoch, wie oben gezeigt, durchaus möglich.

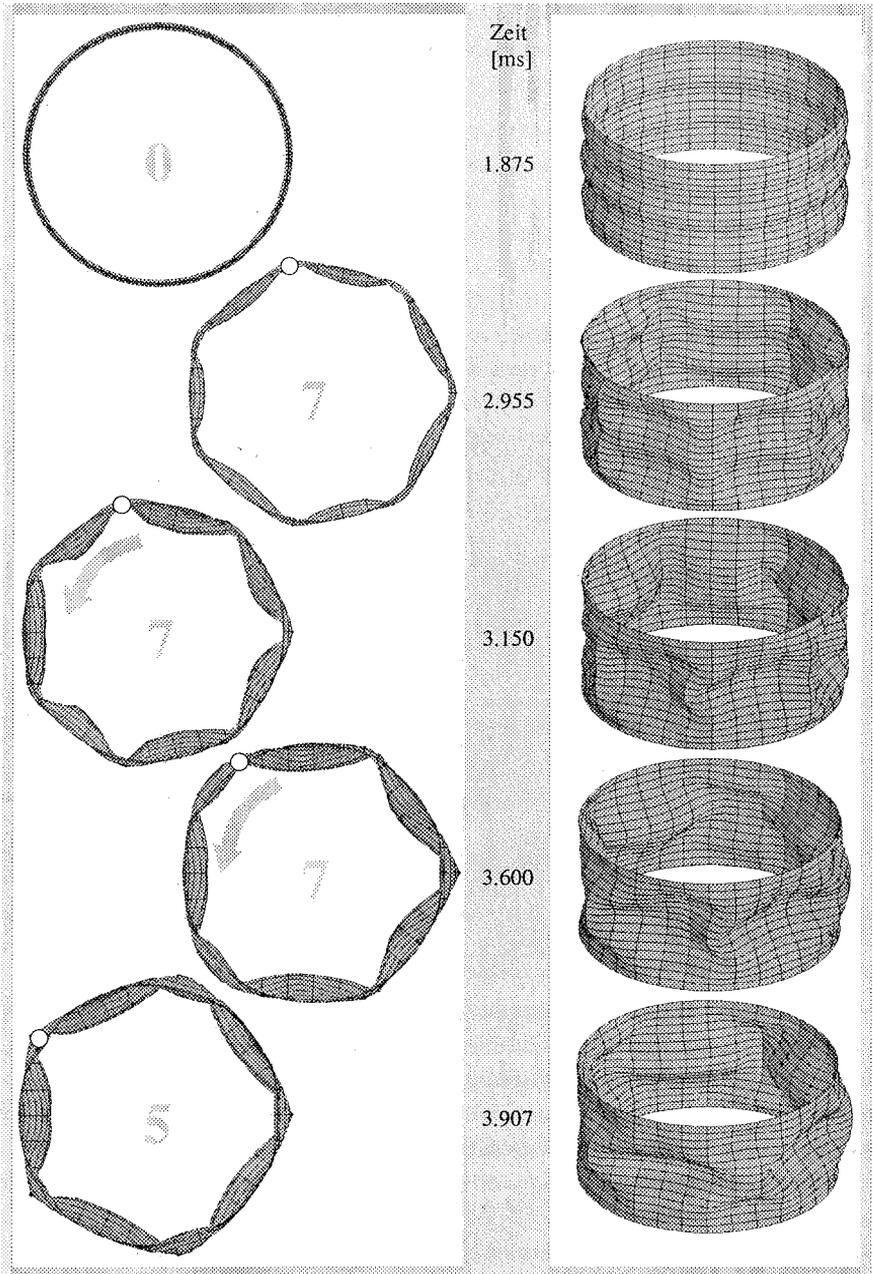


Abbildung 7.11 Deformierte Konfigurationen des Kreiszyinders bei Verschiebungskontrolle

8 Weitere numerische Beispiele

Dieses Kapitel dient ausschließlich der Demonstration numerischer Eigenschaften von Zeitintegrationsverfahren. Diese Charakteristika sind im einzelnen:

- das Stabilitätsversagen der Methode nach Newmark (1959) ohne numerische Dämpfung,
- die Stabilisierung infolge numerischer Dissipation mit den Verfahren nach Hilber, Hughes, Taylor (1977) – Hilber- α , Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981) – Bossak- α und Chung, Hulbert (1993) – 'Generalized- α Method'
- das Konvergenzversagen der 'Constraint Energy Method' (CEM) nach Hughes, Caughey, Liu (1978)
- das Konvergenzversagen des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' (CEMA) ohne numerische Dissipation,
- die robuste Zeitintegration mit der 'Energy-Momentum-Method' (EMM) nach Simo, Tarnow (1992) bei glatten Lösungen,
- das Konvergenzversagen der EMM beim Auftreten höherfrequenter Moden
- und die robuste Zeitintegration mit dem CEMA mit numerischer Dissipation; auch bei Lösungen mit hochfrequenten Moden.

Die Auswahl der Beispiele erfolgt derart, daß die Abbildung endlicher Verschiebungen, Rotationen und Deformationen erforderlich ist. Zur Durchführung von Parameterstudien und zur Demonstration der Mehrzahl der erwähnten numerischen Effekte ist es sinnvoll, ein möglichst einfaches Modell zu wählen. Als ein solches einfaches Modell wird ein in der Ebene 'geworfenes Lineal' betrachtet. Die Funktionsfähigkeit des CEMA und die Wirkung der numerischen Dissipation bei dreidimensionalen Bewegungs- und Deformationsvorgängen wird anhand der räumlichen Bewegung des Lineales verifiziert. Da das Beispiel des 'Tumbling Cylinder' in Tarnow (1993), Simo, Tarnow (1994), Betsch (1996) und Brank, Tonello, Briseghella (1996) zur Demonstration der Leistungsfähigkeit der 'Energy-Momentum Method' verwendet wird, sollen auch hier Ergebnisse gezeigt werden. Anhand des bereits in Kapitel 7.1 erläuterten durchschlagenden Kreiszyylindersegmentes bei Lastkontrolle werden die von höherfrequenten Moden initiierten numerischen Effekte und Versagensformen erläutert.

8.1 'Geworfenes Lineal' in der Ebene

Parameterstudien und Vergleiche von Zeitintegrationsverfahren der vorliegenden Arbeit werden anhand des 'geworfenen Lineales' in der Ebene unternommen. Das in Abbildung 8.1 dargestellte Lineal mit den Materialparametern

$$E = 2.06 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}, \quad \rho = 7.8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \quad (8.1)$$

und $\nu = 0.0$ wird in der gravitationsfreien Ebene durch Impulslasten in Bewegung gesetzt.

Nach Beendigung der Lastaufbringung müssen physikalisch die totale Energie sowie die jeweils drei Komponenten von Impuls und Drehimpuls konstant bleiben. Anhand dieser globalen Bilanzgrößen werden die im folgenden dargestellten numerischen Analysen des semidiskreten Anfangswertproblems beurteilt.

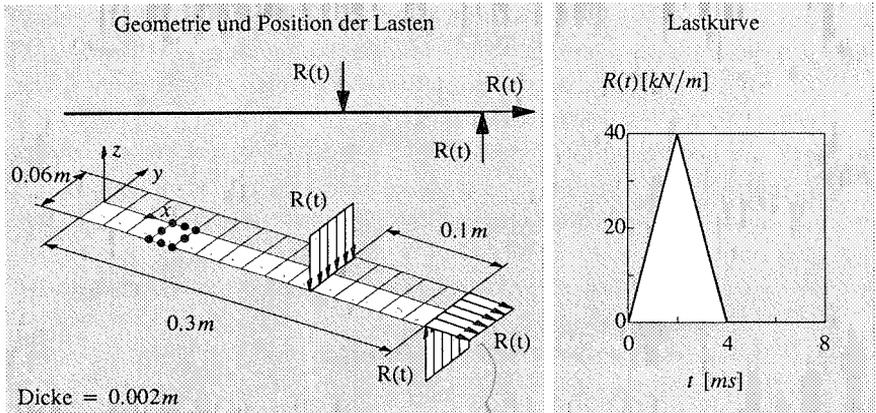


Abbildung 8.1 Geworfenes Lineal – Geometrie, Diskretisierung und Belastung

Algorithmus	Nebenbedingungen	Δt	Zeitintegrationsparameter $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3$					Abbildung
			ϱ_∞	β	δ	α_f	α_m	
Newmark	–	0.1	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.2
Newmark	–	0.1	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.3
Newmark	–	0.1	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.4
Newmark	–	●	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.5
Generalized- α	–	0.1	●	–	Tabelle 5.1		–	Abbildung 8.6
Bossak- α	–	0.1	●	–	Tabelle 5.1		–	Abbildung 8.6
Hilber- α	–	0.1	●	–	Tabelle 5.1		–	Abbildung 8.6
CEM	Z_f	0.1	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.7
CEMA	Z_f, Z_L, Z_j	0.1	1.000	0.250	0.500	0.000	0.000	Abbildung 8.7
Bossak- α	–	0.1	0.900	0.277	0.553	0.000	-0.053	Abbildung 8.8
CEMA	Z_f, Z_L, Z_j	0.1	0.900	0.277	0.553	0.000	-0.053	Abbildung 8.9
Bossak- α	–	0.1	–	0.280	0.550	0.000	0.100	Abbildung 8.10
CEMA	Z_f	0.1	–	0.280	0.550	0.000	0.100	Abbildung 8.10
CEMA	Z_f, Z_L	0.1	–	0.280	0.550	0.000	0.100	Abbildung 8.10
CEMA	Z_f, Z_L, Z_j	0.1	–	0.280	0.550	0.000	0.100	Abbildung 8.10
EMM	–	0.1	–	–	–	–	–	Abbildung 8.11
EMM	–	0.1	–	–	–	–	–	Abbildung 8.12
CEMA	Z_f, Z_L, Z_j	0.1	0.900	0.277	0.553	0.000	-0.053	Abbildung 8.12
Bossak- α	–	0.1	0.900	0.277	0.553	0.000	-0.053	Abbildung 8.13
CEMA	Z_f, Z_L, Z_j	0.1	0.900	0.277	0.553	0.000	-0.053	Abbildung 8.13
EMM	–	0.1	–	–	–	–	–	Abbildung 8.13

Tabelle 8.1 Zeitintegrationsverfahren und –parameter

Diskretisiert wird die Hälfte des Lineales mit 15 unterintegrierten achtknotigen Schalenelementen. Sämtliche Angaben der Bilanzgrößen erfolgen für das diskretisierte halbe Lineal. Wichtig für den Einsatz des CEMA ist, daß lediglich Neumann Randbedingungen und Cauchy Randbedingungen, die keine Lagerreaktion hervorrufen, vorliegen. Die Belastung des Lineales resultiert in einer Biegedeformation, einer endlichen Rotation und Translation (Abbildung 8.3).

Tabelle 8.1 zeigt den Überblick der im folgenden untersuchten Zeitintegrationsverfahren mit der entsprechend angegebenen Parametrisierung und dem Verweis auf die Visualisierung der Ergebnisse. Der Punkt (●) steht hierbei für im numerischen Experiment variierte Parameter, die in den entsprechenden Diagrammen explizit angegeben werden.

8.1.1 Newmark Methode

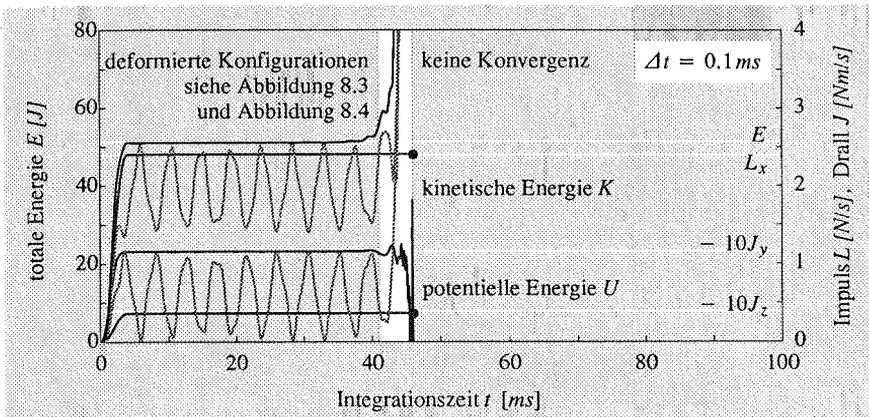


Abbildung 8.2 Newmark Methode – Energie, Impuls und Drall – Numerische Instabilität

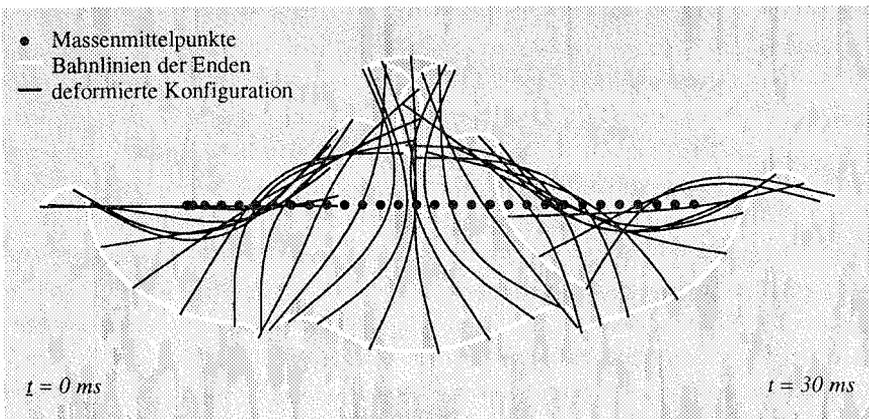


Abbildung 8.3 Newmark Methode – Deformierte Konfigurationen $\Delta T = 1 \text{ ms}$

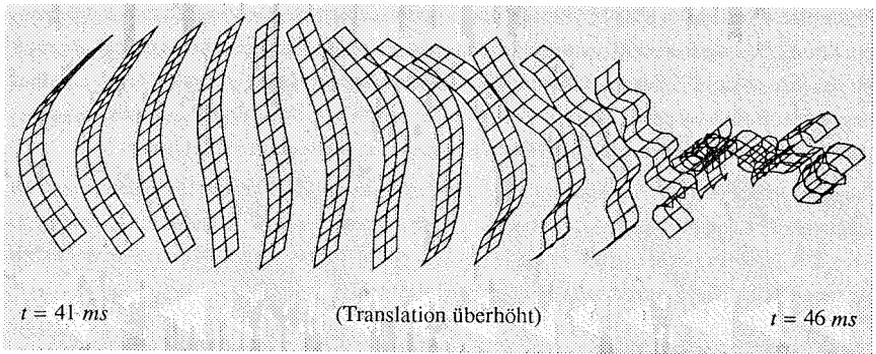


Abbildung 8.4 Newmark Methode – Numerisches Stabilitätsversagen $\Delta T = 0.5\text{ms}$

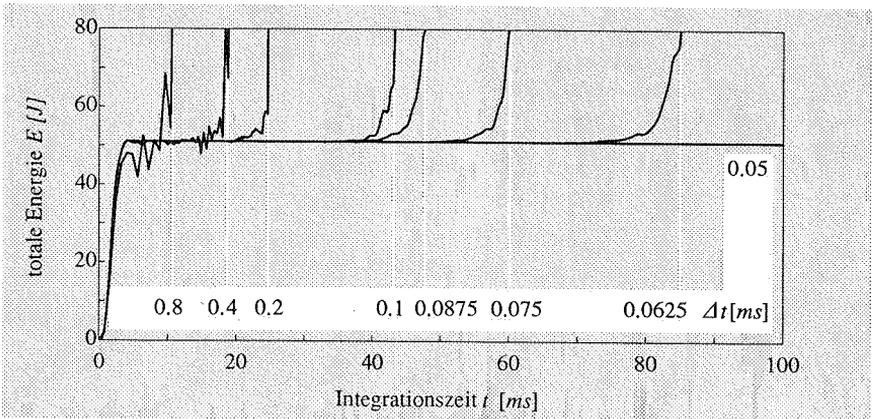


Abbildung 8.5 Newmark Methode – Numerische Instabilität bei variiertem Zeitschritt Δt

Das erste numerische Experiment dokumentiert das Stabilitätsversagen der Newmark Methode in der Parametrisierung der Trapezregel mit Genauigkeit zweiter Ordnung. Abbildung 8.2 zeigt den Verlauf der totalen, kinetischen und inneren Energie des mechanischen Systemes. Des weiteren sind in diesem Diagramm die Komponenten des Impulses und des Drehimpulses dargestellt. Dabei ist zu bemerken, daß eine Schwerpunktbewegung lediglich in Längsrichtung des Lineales initiiert wird, womit die Impulskomponenten in vertikaler Richtung und Querrichtung Null sind. Des weiteren wird nur die Rotation um die y -Achse angeregt (die J_z Komponente resultiert aus dem linearen Impuls L_x und dem Schwerpunktabstand des diskretisierten halben Lineales vom Koordinatenursprung). Das Newmark Verfahren liefert in einem Integrationsintervall bis ca. 40ms zuverlässige Lösungen mit konstanten Bilanzgrößen. Entsprechende Deformationsfiguren dieses Lösungsbereiches sind in Abbildung 8.3 dargestellt. Nach diesem numerisch stabilen Integrationsintervall wird das Zeitintegrationsverfahren instabil, was nach dem Kriterium der energetischen Stabilität (3.10) mit dem Anstieg der totalen Energie korreliert.

Problematisch für die Anwendung eines solchen Verfahrens sind die Tatsachen, daß trotz einer instabilen numerischen Integration Gleichgewichtslösungen gefunden werden und die deformierten Konfigurationen zu Beginn dieser Phase instabiler Integration keinen Defekt erkennen lassen. Erst einige Zeitschritte vor dem Konvergenzversagen, bei inzwischen stark angewachsener totaler Energie, zeigt auch der Bewegungsablauf (Abbildung 8.4) das numerisch instabile Verhalten.

Wie in Abbildung 8.5 dokumentiert, scheitert der Versuch das Newmark Verfahren durch geeignete Wahl des Zeitschrittes zu stabilisieren. In Abbildung 8.5 ist der Verlauf der totalen Energie über der Integrationszeit für verschiedene Zeitschritte dargestellt. Die Wahl der Zeitschrittgröße beeinflusst lediglich den Zeitpunkt des Versagens. Eine stabile Zeitintegration mit der Newmark Methode ist auch bei einem sehr kleinen Zeitschritt nicht zu garantieren!

8.1.2 Stabilisierung infolge numerischer Dissipation

Eine der Möglichkeiten eine, nach dem Energiekriterium (3.10) stabile Zeitintegration bei nicht-linearem Strukturverhalten zu gewährleisten, ist die algorithmische Dissipation. Parameterstudien der Zeitintegrationsmethoden Hilber- α , Bossak- α und 'Generalized- α Method' sind in Abbildung 8.6 für vorgegebene Spektralradien ρ_∞ dargestellt. Die Hilber- α Methode ist für Spektralradien $\rho_\infty < 1/3$ nach Gleichung (5.16) lediglich bedingt spektral stabil, weshalb die Studien in diesem Parameterbereich keine sinnvollen Ergebnisse liefern.

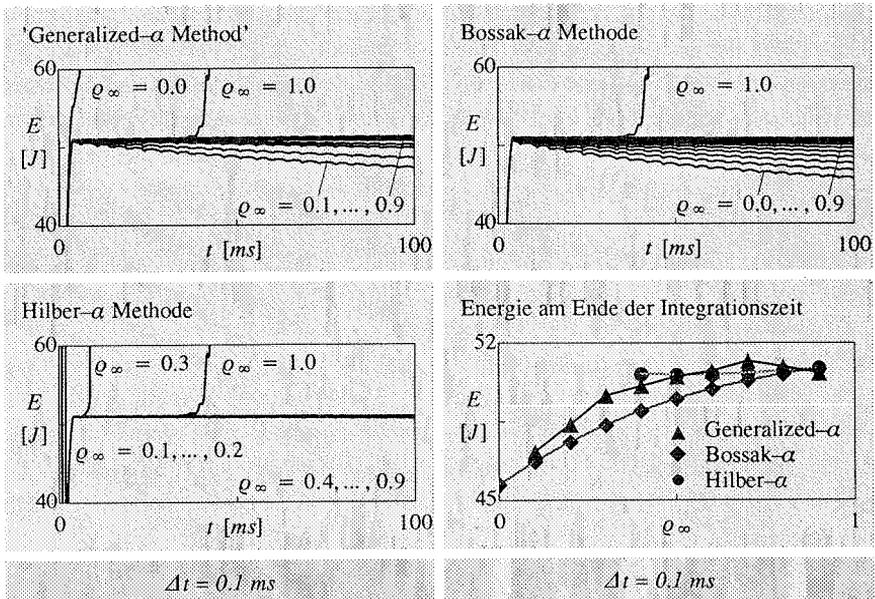


Abbildung 8.6 Dissipative Algorithmen – Energieverlauf bei verschiedenen ρ_∞

Beide klassisch dissipativen Algorithmen, die Hilber- α und Bossak- α Methode, sind mit dem Spektralradius $\rho_\infty = 1.0$ mit dem bereits untersuchten Newmark Verfahren identisch. Auch die 'Generalized- α Method' weist in dieser Parametrisierung keine numerische Dissipation auf. An den Zeitschritten der totalen Energie ist deutlich zu erkennen, daß bereits durch eine geringe numerische Dämpfung die Zeitintegration stabilisiert werden kann. Nachteilig wirkt sich die numerische Dissipation auf die Integration von Langzeitdynamiken aus. Hier macht sich der dargestellte Verlust der totalen Energie negativ bemerkbar. Da bei dem behandelten Modellproblem keine hochfrequenten Moden initiiert werden, ist dieser numerische Energieverlust bei geeigneter Parameterwahl (Abbildung 8.8) vernachlässigbar. Das bedeutet, dieses Problem kann sehr gut mit einem numerisch dissipativen Algorithmus stabil gelöst werden.

8.1.3 Stabilisierung infolge erzwungener Energieerhaltung

Neben der algorithmischen Dissipation wird von Hughes, Caughey, Liu (1978) eine weitere Möglichkeit zur Gewährleistung numerischer Stabilität vorgeschlagen. Bei der 'Constraint Energy Method' (CEM) wird die Stabilität des Newmark Verfahrens durch die Kombination der effektiven Strukturgleichung (5.14) mit $\alpha_m = \alpha_f = 0.0$, $2\beta = \delta = 0.5$ und der Energieebenenbedingung (A.10) erreicht. Wie in Abbildung 8.7 gezeigt wird, kann mit diesem Algorithmus die totale Energie erhalten werden, das Verfahren ist somit energetisch unbedingt stabil. Trotzdem versagt die CEM. Dabei handelt es sich jedoch nicht um ein numerisches Stabilitätsversagen, sondern um ein Versagen der Gleichgewichtsiteration infolge eines zu kleinen Konvergenzradius. Auch mit der Erweiterung der Newmark Methode mit den Nebenbedingungen der algorithmischen Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung nach Kapitel 6.4 (Sonderfall des CEMA ohne numerische Dissipation) kann die Elimination des Defektes der CEM nicht erreicht werden.

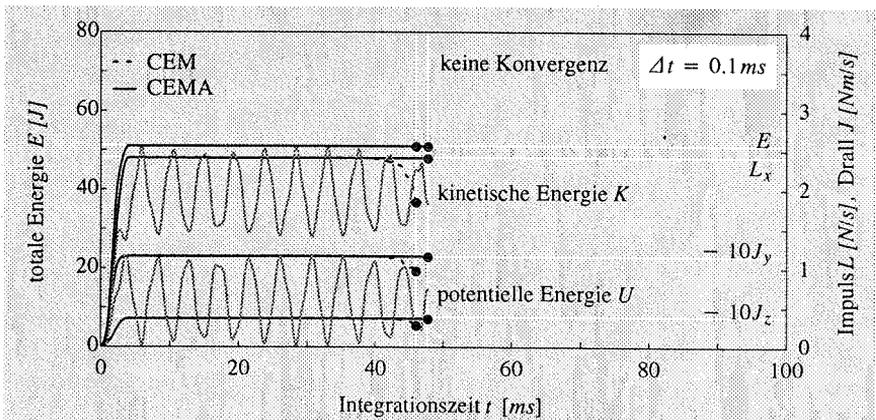


Abbildung 8.7 Newmark mit Energieebenenbedingung – Newton–Raphson Iteration

Erst die Kombination von numerischer Dissipation und der Nebenbedingung der Energieerhaltung garantiert eine numerisch stabile, sukzessiv konvergente Integration des semidiskreten Anfangswertproblems. Neben der notwendigen Erhaltung der Energie wird mit dem CEMA die Erhaltung der verbleibenden globalen Erhaltungsvektoren, des Impulses und des Drehimpulses, ebenfalls erzwungen. Abbildung 8.8 zeigt das Ergebnis des numerisch dissipativen Basisalgorithmus nach Wood, Bossak, Zienkiewicz (1981) in den Bilanzgrößen. Impuls und Drehimpuls werden erhalten, die totale Energie zeigt geringe Schwankungen. Da bereits der Basisalgorithmus sehr gute Ergebnisse liefert, wird die Verbesserung durch die mit den Parametern $\beta' = 1/6$ und $\delta' = 1/2$ im Zeitschritt integrierten Nebenbedingungen an diesem Beispiel nicht deutlich (CEMA – Abbildung 8.9). Lediglich die Schwankungen im Verlauf der totalen Energie können infolge der Aktivierung der Energie Nebenbedingung behoben werden.

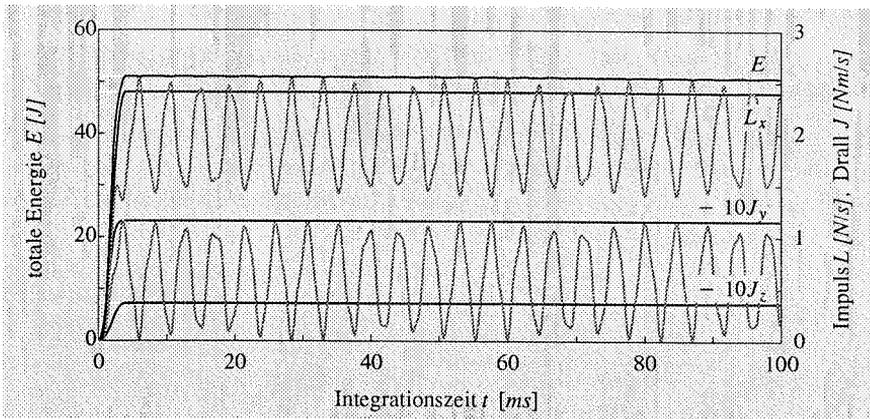


Abbildung 8.8 Basisalgorithmus Bossak- α

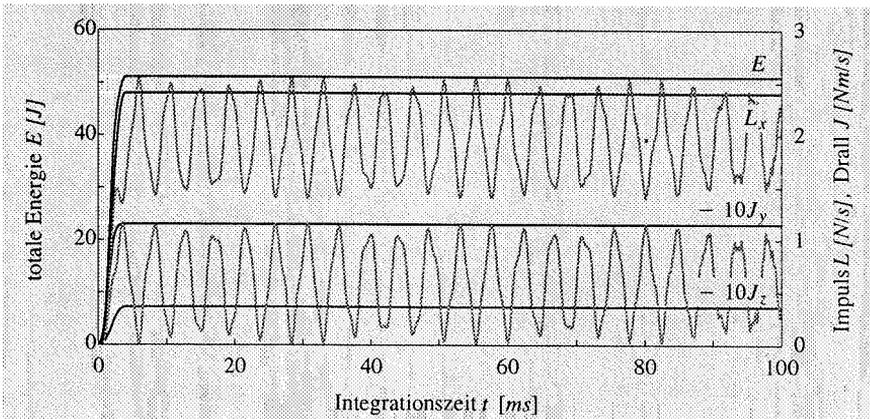


Abbildung 8.9 'Constraint Energy Momentum Algorithm' mit Basisalgorithmus Bossak- α

Um an dem Beispiel des 'geworfenen Lineales' den Einfluß der Nebenbedingungen herauszuarbeiten, wird der Basisalgorithmus derart parametrisiert (Tabelle 8.1), daß ein deutlicher Energieverlust bereits nach 1000 Zeitschritten auftritt (Abbildung 8.10). Die Implementierung des CEMA im Programmsystem CARAT ('Computer Aided Research Analysis Tool' – Stegmüller, Bletzinger, Kimmich (1987)) erlaubt die Untersuchung des Einflusses einzelner aufgebrachtener Nebenbedingungen.

Wie in Abbildung 8.10 dargestellt, wird bei Ergänzung des Basisalgorithmus mit der Energieebenebedingung ($\delta' = 1/2$) der Energieverlust infolge der numerischen Dissipation kompensiert. Dies hat jedoch zur Folge, daß Impuls und Drehimpuls anwachsen. Wird zusätzlich die Erhaltung der 3 Komponenten des Impulses gefordert, bleiben auch diese konstant, der Drall steigt jedoch noch stärker an, als dies bei alleiniger Ergänzung des Basisalgorithmus mit der Energieebenebedingung der Fall war. Erst die erzwungene Erhaltung von Energie-, Impuls und Drehimpuls ($\beta' = 1/6$) ermöglicht eine zuverlässige und genaue Zeitintegration (Vergleich mit Abbildung 8.8, Abbildung 8.9 und Abbildung 8.11).

Der Aufwand an zusätzlicher Rechenzeit zur Berücksichtigung der Nebenbedingungen der Energie-, Impuls- und Drallerhaltung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' im Vergleich zum verwendeten Basisalgorithmus wird in Kuhl, Ramm (1996) für das eben gezeigte Beispiel mit ca. 40% ermittelt.

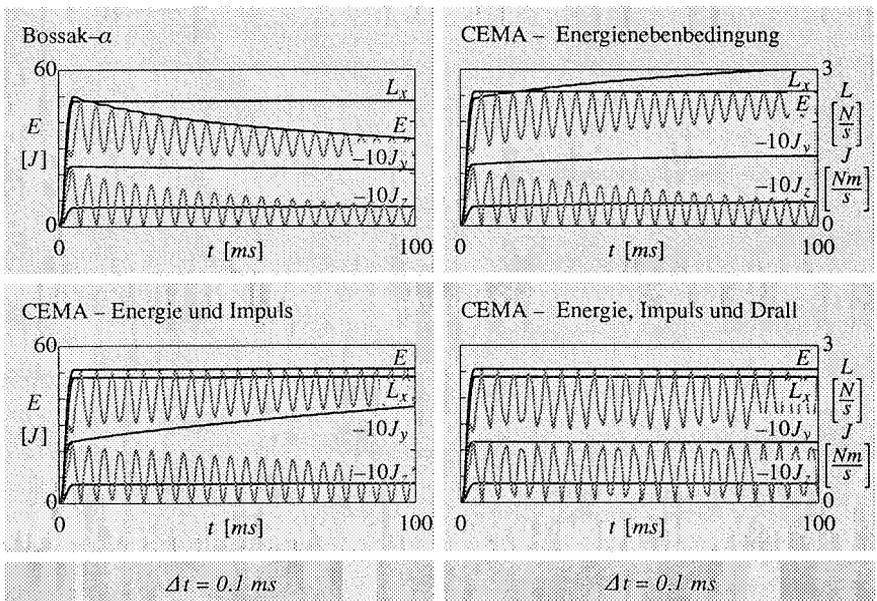


Abbildung 8.10 'Constraint Energy Momentum Algorithm' – Einfluß der Nebenbedingungen

8.1.4 Stabilisierung infolge algorithmischer Energieerhaltung

Die dritte Möglichkeit, um energetische Stabilität in der nichtlinearen Dynamik zu garantieren, ist die algorithmische Energieerhaltung, wie sie zum Beispiel von Simo, Posbergh, Marsden (1990), Simo, Tarnow (1992) und Lewis, Simo (1994) publiziert wurde. Die von Simo, Tarnow (1992) für Kontinuumselemente vorgestellte 'Energy-Momentum Method' (EMM) kann auf das in Kapitel 4 beschriebene Schalelement mit extensiblem Direktor angewandt werden. Die Zeitintegration des vorliegenden Problems mit diesem Algorithmus gewährleistet numerisch stabile und konvergente Lösungen bei der Erhaltung globaler Bilanzgrößen (Abbildung 8.11).

Abbildung 8.12 zeigt die Deformationsfiguren, berechnet mit der EMM und dem CEMA, im Vergleich. Nach 1000 Zeitschritten unterscheiden sich die deformierten Konfigurationen der beiden Algorithmen nur geringfügig. Die Unterschiede sind auf eine sehr geringe Differenz in der Periode zurückzuführen.

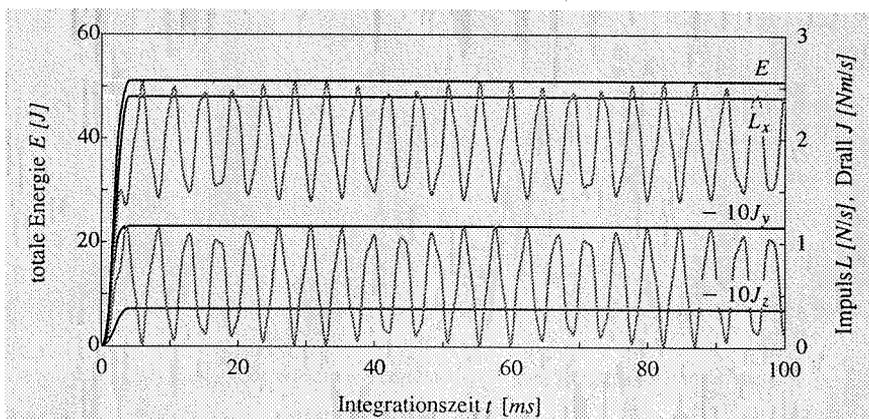


Abbildung 8.11 'Energy-Momentum Method'

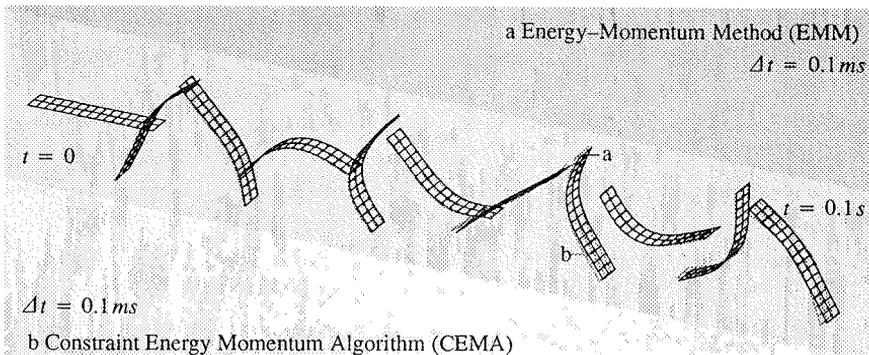


Abbildung 8.12 Energetisch stabile Algorithmen – Deformierte Konfigurationen $\Delta T = 10ms$

8.1.5 Stabilisierungsmethoden und Langzeitdynamik

Unterschiede der in den Kapiteln 8.1.2 bis 8.1.4 eingesetzten numerisch stabilen Zeitintegrationsverfahren werden erst bei der Betrachtung eines sehr großen Integrationszeitraumes deutlich. Abbildung 8.13 zeigt die Betrachtung der Langzeitdynamik des 'geworfenen Lineales' (80000 Zeitschritte). Die EMM und der CEMA zeigen in den Bilanzgrößen identische Ergebnisse, wo hingegen die Bossak- α Methode einen Energieverlust aufweist. Dieser Energieverlust macht ein numerisch dissipatives Zeitintegrationsverfahren, auch bei Problemen ohne die Anregung hochfrequenter Moden, für die Betrachtung von Langzeitdynamiken unbrauchbar.

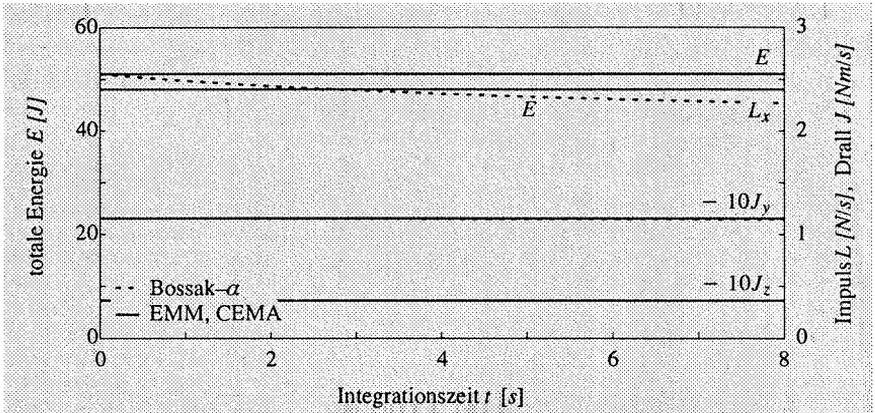


Abbildung 8.13 Energetisch stabile Zeitintegrationsalgorithmen – Langzeitdynamik

8.2 Räumliche Bewegung des 'geworfenen Lineales'

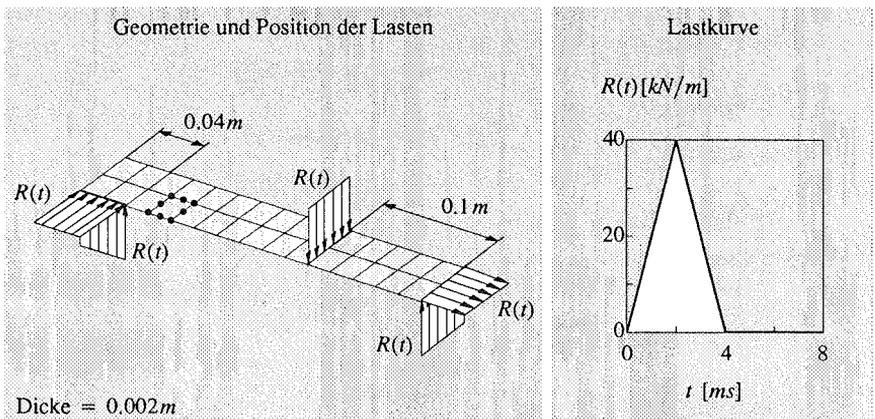


Abbildung 8.14 Räumliche Bewegung des 'geworfenen Lineales' – Geometrie und Belastung

Die Funktionsfähigkeit des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' und die Wirkung der numerischen Dissipation bei dreidimensionalen Bewegungs- und Deformationsvorgängen wird anhand der räumlichen Bewegung des bereits in Kapitel 8.1 behandelten Lineales verifiziert.

Gegenüber Kapitel 8.1 wird lediglich die Lastaufbringung und die Diskretisierung, wie in Abbildung 8.14 dargestellt, modifiziert. Die veränderte Aufbringung der Last bewirkt eine Translation in allen 3 Raumrichtungen, eine Rotation um 3 Achsen sowie eine Biege- und Torsionsdeformation des Lineales. Die komplexe Bewegung des Lineales im Raum ist in Abbildung 8.15 für den Beginn des Integrationsintervalles dargestellt.

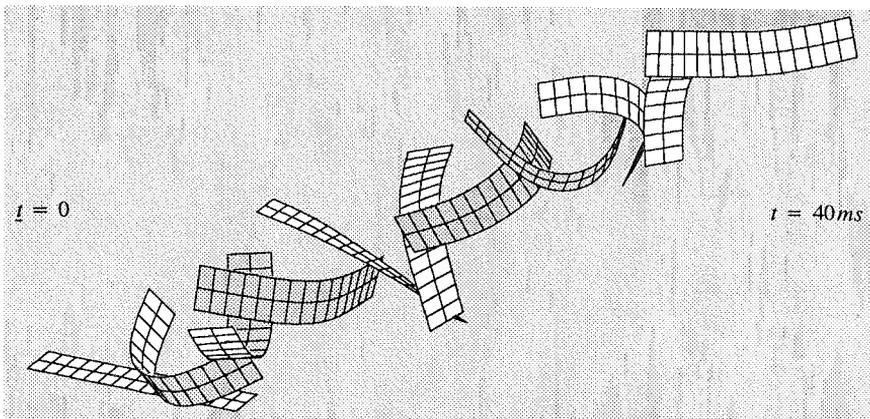


Abbildung 8.15 'Constraint Energy Momentum Algorithm' – Bewegungsvorgang $\Delta T = 4 \text{ ms}$

Die Zeitintegration mit der Bossak- α Methode, deren Zeitintegrationsparameter nach Tabelle 5.1 durch den Spektralradius $\varrho_\infty = 0.9$ charakterisiert sind, ist mit dem Zeitschritt $\Delta t = 0.05 \text{ ms}$ numerisch stabil; weist allerdings einen starken Verlust der totalen Energie auf (Abbildung 8.16). Interessant ist die Abnahme der Energie nach dem Auftreten höherfrequenter Moden und die Konstanz der Energie nach deren numerischer Dissipation. Begründet in der starken Abnahme der Energie der Zeitintegrationen mit der Bossak- α Methode ist dieses Verfahren für derartige Problemstellungen ungeeignet.

Die in Abbildung 8.17 dokumentierte Analyse der räumlichen Bewegung des geworfenen Lineales mit dem 'Constraint Energy Momentum Algorithm' bestätigt die in Kapitel 8.1 getroffenen Aussagen bezüglich des Algorithmus:

- Der Algorithmus ist numerisch stabil,
- sukzessive quadratisch konvergent
- und die Energie, der Impuls und der Drehimpuls werden erhalten.

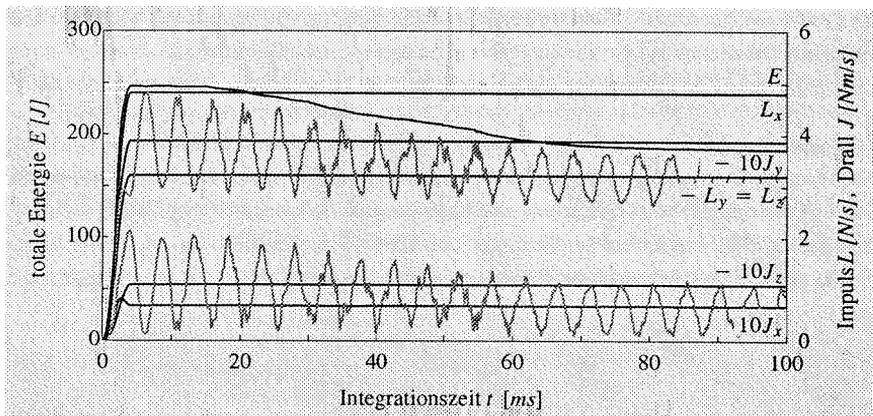


Abbildung 8.16 Basisalgorithmus – Bossak- α

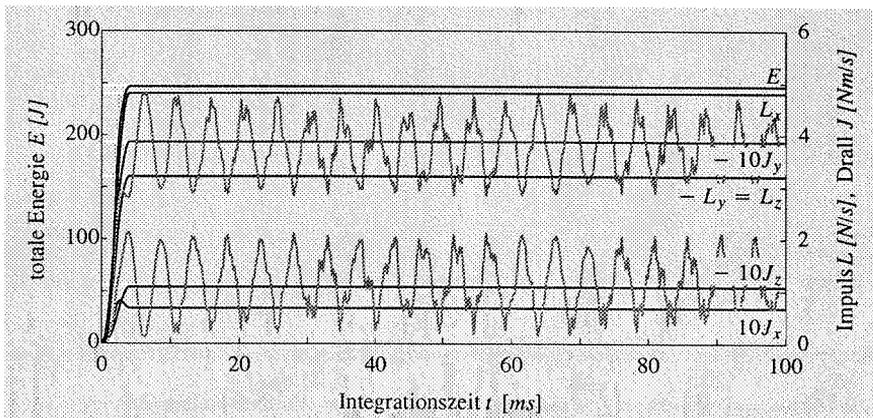


Abbildung 8.17 'Constraint Energy Momentum Algorithm' – Bossak- α

8.3 'Tumbling Cylinder'

Das in Tarnow (1993) zur Demonstration der Leistungsfähigkeit der 'Energy-Momentum Method' eingeführte Beispiel des 'Tumbling Cylinder', dessen Bewegungsvorgang in Abbildung 8.19 dargestellt ist, liefert keine neuen Aussagen bezüglich der Zeitintegrationsverfahren. Hier soll lediglich gezeigt werden, daß dieses Beispiel für die numerische Integration unkritischer ist, als die räumliche Bewegung des geworfenen Lineales. Bereits der Einsatz eines klassischen Zeitintegrationsverfahrens mit numerischer Dissipation, hier am Beispiel der 'Generalized- α Method' demonstriert, liefert sehr gute Ergebnisse, die von den in Tarnow (1993), Simo, Tarnow (1994), Betsch (1996) und Brank, Tonello, Briseghella (1996) gezeigten nicht abweichen.

Die Bewegung des in Abbildung 8.18 dargestellten Kreiszyinders mit den Materialparametern

$$E = 2.0 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2} \qquad \rho = 1.0 \frac{kg}{m^3} \qquad (8.2)$$

und $\nu = 0.25$ wird im gravitationsfreien Raum durch Impulslasten (Abbildung 8.18) initiiert. Im Gegensatz zu den genannten Veröffentlichungen, in denen 4-knotige Elemente verwendet werden, wird der Kreiszyinder hier mit 96 unterintegrierten 8-knotigen Schalelementen diskretisiert. Dies hat zur Folge, daß höherfrequente Eigenformen approximiert werden können und somit die iterative Lösung der effektiven Strukturgleichung im Zeitschritt kritischer wird. Zur Zeitintegration werden die Newmark Methode mit $\beta = 1/4$, $\delta = 1/2$ und die 'Generalized- α ' Methode ($\rho_\infty = 0.9$) mit einem Zeitschritt $\Delta t = 20ms$ eingesetzt.

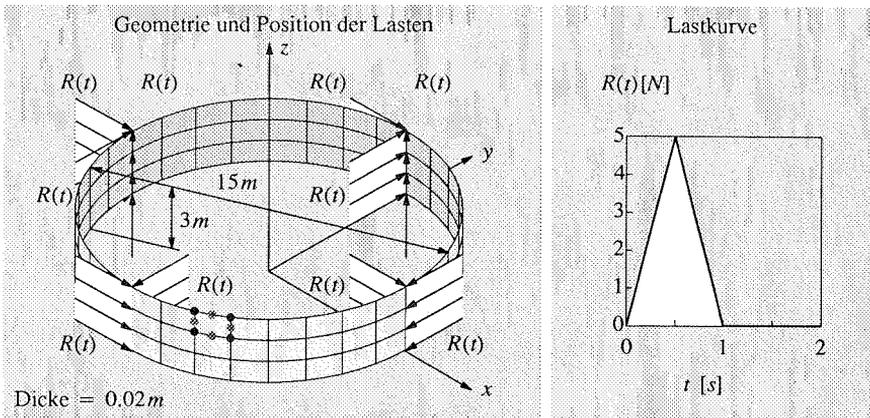


Abbildung 8.18 'Tumbling Cylinder' – Geometrie, Diskretisierung und Belastung

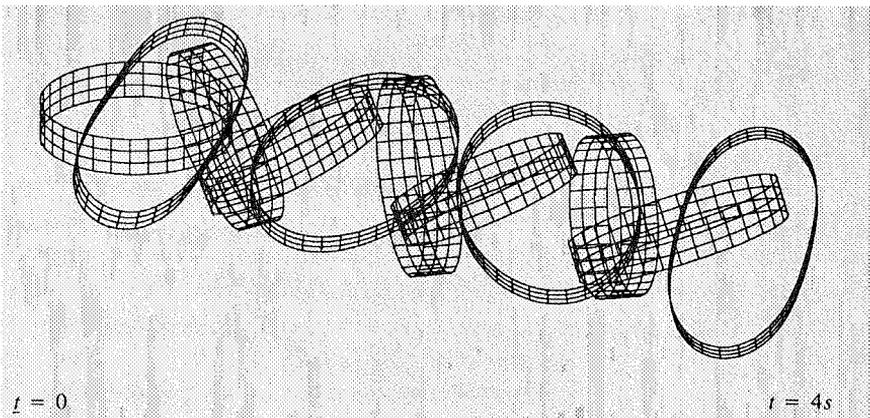


Abbildung 8.19 Bewegungsvorgang des 'Tumbling Cylinder' $\Delta T = 400ms$

Die Zeitintegration mit der Newmark Methode zeigt das nach den Ausführungen in der genannten Literatur und in Kapitel 8.1.1 zu erwartende Stabilitätsversagen (Abbildung 8.20). Allein durch die Aufbringung einer numerischen Dissipation (Abbildung 8.21) können die Integration stabilisiert und zuverlässige Ergebnisse erzielt werden. Die numerische Dissipation wurde dabei derart gewählt, daß die niederfrequenten Moden nicht beeinflusst werden. Das Verhältnis von kinetischer zu innerer Energie macht den Grund für das numerisch unkritische Verhalten des 'Tumbling Cylinder' deutlich: Der Deformationsanteil der totalen Energie ist gegenüber der kinetischen Energie, und somit dem Anteil der Starrkörperdynamik, sehr gering. Das bedeutet, die Deformation des Zylinders spielt eine untergeordnete Rolle.

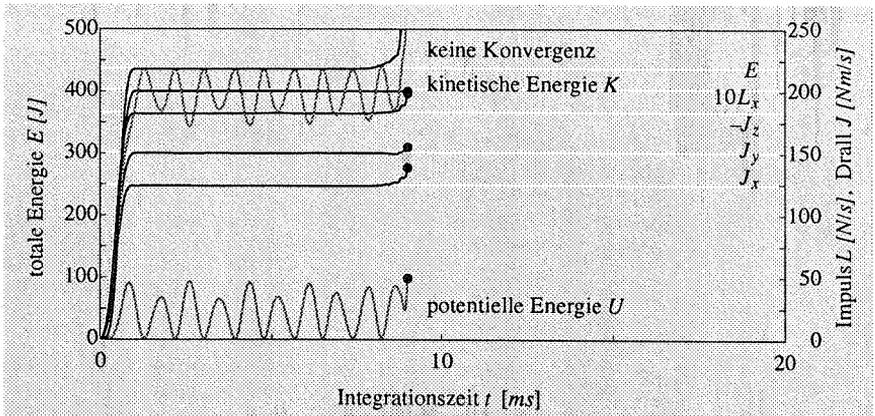


Abbildung 8.20 Newmark – Energie, Impuls und Drehimpuls

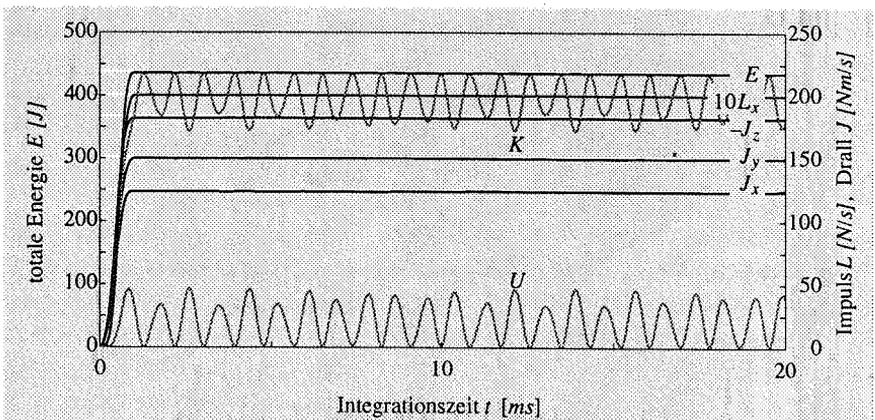


Abbildung 8.21 'Generalized- α ' Methode – Energie, Impuls und Drehimpuls

8.4 Durchschlagsproblem – Kreiszyylindersegment

Das bereits in Kapitel 7.1 behandelte und in Abbildung 8.22 nochmals dargelegte Durchschlagproblem eines zentral belasteten Kreiszyylindersegmentes bei Lastkontrolle soll hier verwendet werden, um die Problematik hochfrequenter Moden und deren Auswirkungen auf die Numerik der Zeitintegration zu demonstrieren. Ferner sollen die Leistungsfähigkeit und die Problematik des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten 'Constraint Energy Momentum Algorithm' studiert werden. Durch die parallele Dissipation höherer Moden und erzwungene Erhaltung der Bilanzgrößen ist es mit CEMA möglich, Probleme mit hochfrequentem Störanteil der Bewegung einerseits stabil und andererseits in den globalen Erhaltungsgrößen korrekt in der Zeit zu integrieren.

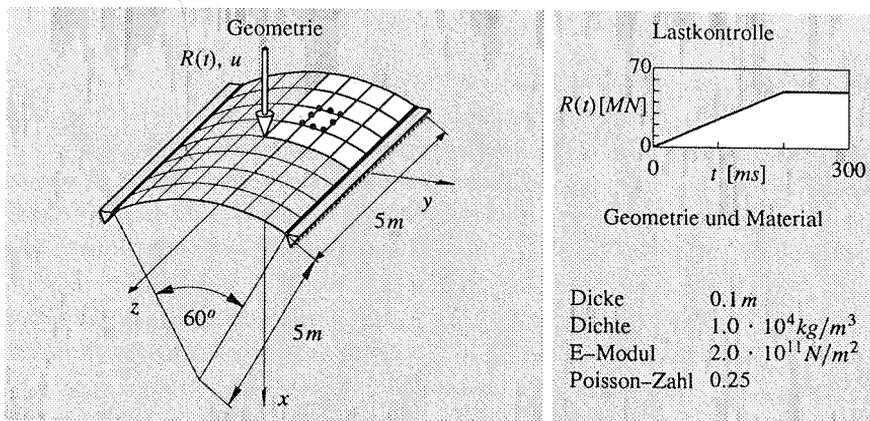


Abbildung 8.22 Durchschlagproblem Kreiszyylindersegment – Geometrie und Belastung

Der Vorteil hierbei ist, daß infolge der Dissipation hochfrequenter Anteile auch mit im Vergleich zur EMM großen Zeitschritten konvergente Lösungen im Zeitintervall garantiert werden können. Auf der anderen Seite besteht folgende Problematik: Wie bereits bei der Entwicklung des CEMA deutlich gemacht wurde, ist in dem Algorithmus eine Berücksichtigung von Dirichlet Randbedingungen in den Nebenbedingungen der Impuls- und Drallerhaltung gegenwärtig noch nicht berücksichtigt. Der Algorithmus wird aus diesem Grund in der auf den Basialgorithmus und die Energieebenbedingung reduzierten Form verwendet. Weiterhin kann derzeit keine Aussage über eine, von der Standardparametrisierung ($\beta' = 1/6$ und $\delta' = 1/2$) abweichende, günstige Wahl der Parameter β' und δ' zur Integration der diskreten algorithmischen Bilanzgleichungen getroffen werden. Die in den vorangehenden Abschnitten erfolgreich gewählte Standardparametrisierung führt hier infolge schlechter Konvergenzeigenschaften nicht zum erwünschten Ergebnis. Mit der Parameterwahl $\delta' = 0.8$ (β' wird lediglich zur Integration der Drallbedingung benötigt) folgt eine robuste und quadratisch konvergente Zeitintegration mit CEMA. Alle weiteren Zeitintegrationsparameter sind mit denen in Kapitel 7.1 identisch.

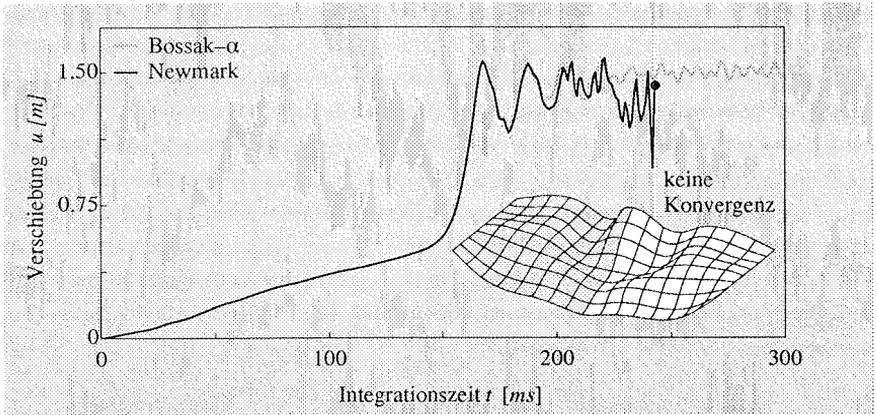


Abbildung 8.23 Verschiebungsverlauf bei Lastkontrolle (Newmark und Bossak- α)

Der Zeitpunkt des Beginns der instabilen numerischen Integration der Newmark Methode in der Formulierung der Trapezregel ist hier nicht, wie in dem vorangegangenen Beispielen, zu erkennen. Selbst die im letzten konvergenten Zeitschritt ermittelte Deformationsfigur erscheint sinnvoll (Abbildung 8.23). Hier drängt sich der Gedanke auf, die Stabilität der Zeitintegration nach der Energiebedingung (3.10) und somit mit dem Residuum der Nebenbedingung der Energieerhaltung (6.13) mit $\delta' = 0.5$ zu beurteilen. Dieses Residuum ist für die Integration mit dem Newmark und dem Bossak- α Algorithmus in Abbildung 8.24 dargestellt. Newmark, wie auch Bossak- α , weisen nach erfolgtem Durchschlag des Kreiszyylindersegmentes Oszillationen des Residuums nach Gleichung (6.13) auf, wobei diese für das Newmark Verfahren stark anwachsen, bei der Bossak- α Methode hingegen tendenziell abnehmen. Die Definition einer algorithmischen Stabilitätsaussage ist hiermit jedoch noch nicht möglich.

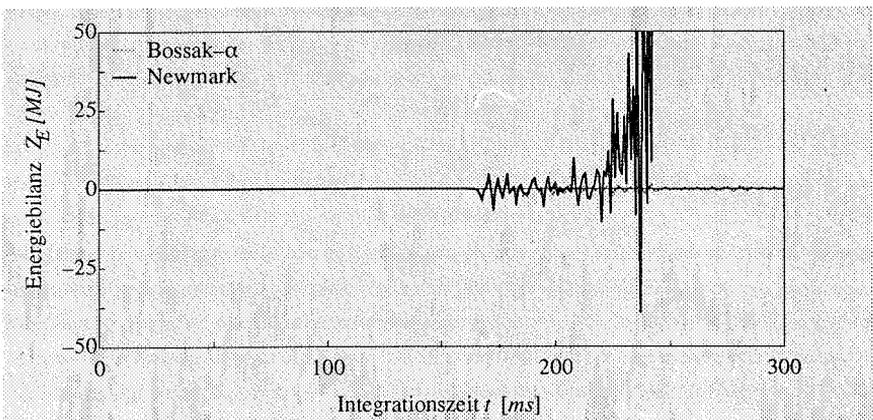


Abbildung 8.24 Algorithmische Energiebilanz (6.13) (Newmark und Bossak- α)

Die Analyse des Durchschlagsproblems mit der EMM und mit dem CEMA (Abbildung 8.25) offenbart die Vorteile des entwickelten Algorithmus: Die durch den Durchschlagsvorgang initiierten hochfrequenten Moden führen bei dem vorgegebenen Zeitschritt zum Versagen des EMM in der Gleichgewichtsiteration. Die entsprechende Deformationsfigur des letzten konvergenen Zeitschrittes ist in Abbildung 8.25 dargestellt. Durch die Dissipation hochfrequenter Moden konvergiert die Lösung der modifizierten effektiven Strukturgleichung des CEMA in jedem Zeitschritt. Damit ist eine stabile und konvergente Zeitintegration mit einem relativ großen Zeitschritt zu realisieren. Zu bemerken ist hier, daß die Dissipation höherfrequenter Moden in Kombination mit der Energieebenenbedingung mit einem Energietransfer von hohen zu niedrigen Moden verbunden ist. Demnach werden die Schwingungsamplituden der niederfrequenten Moden leicht überhört analysiert. Dieser Effekt, bereits anhand der nichtlinearen Plattenschwingung in Kapitel 6.9.1 diskutiert, wird aber als tolerierbar angesehen.

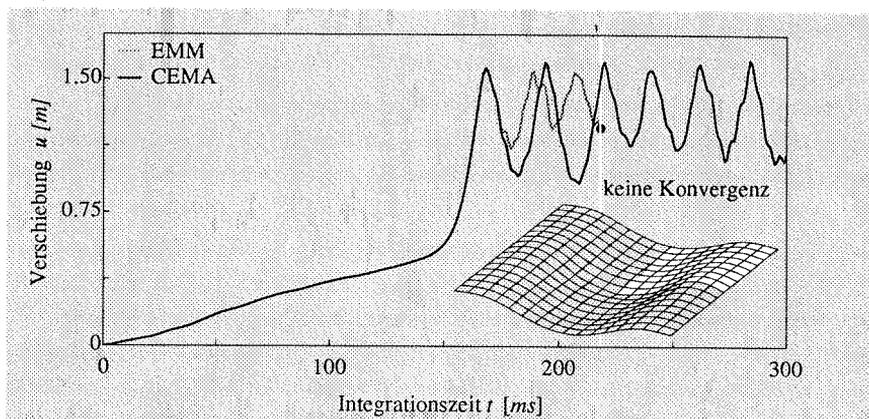


Abbildung 8.25 Verschiebungsverlauf bei Lastkontrolle (EMM und CEMA)

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung und Bewertung

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine Methode zur dynamischen, materiell linearen und geometrisch nichtlinearen Analyse von dünnwandigen Strukturen mit endlichen Deformationen und Rotationen. Die Problematik infolge der geometrischen Nichtlinearität ist der Verlust der numerischen Stabilität klassischer Zeitintegrationsverfahren bei Integration des entsprechenden semi-diskreten Anfangswertproblems. In der linearen Dynamik unbedingt stabile, robuste und erfolgreich angewandte Algorithmen kollabieren bei der Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichung infolge zwei zu differenzierender Ursachen: dem Konvergenz- und dem Stabilitätsversagen. Ziel der Arbeit war die Bereitstellung eines robusten Zeitintegrationsverfahrens, das sowohl nach der Definition des Energiekriteriums nach Belytschko, Schoeberle (1975) stabil ist, als auch mit endlichen Zeitschritten zu konvergenten Lösungen führt.

Basierend auf einer kontinuumsmechanischen Formulierung des Anfangs- Randwertproblems der Elastodynamik wird die auf der schwachen Form gegründete sequentielle Raum-Zeitdiskretisierung für die numerische Lösung mit Finiten Elementen und Zeitintegrationsalgorithmen diskutiert und angewandt.

Zur räumlichen Diskretisierung dünnwandiger Strukturen wird ein isoparametrisches finites Schalenelement eingesetzt, das den Bewegungsvorgang mit endlichen Verschiebungen und Rotationen beschreiben kann. Dieses Schalenelement wird nach dem Degenerationskonzept entwickelt. Hierbei wird dem typischen Vorgehen für dünnwandige Strukturen entsprechend der Schalenraum durch die Schalenmittelfläche und ein Direktorfeld beschrieben und der Ortsvektor der Schalenmittelfläche und der Schalendirektor isoparametrisch interpoliert. In der verwendeten Form mit extensiblen Direktor wird ein in Dickenrichtung linear veränderliches Verschiebungsfeld (Reissner-Mindlin Kinematik) und die Dickenänderung der Schale beschrieben. Der herausragende Vorteil des extensiblen Direktors ist die Möglichkeit, dreidimensionale konstitutive Gleichungen in unkondensierter Form einzusetzen. Der als 'Dickenlocking' bezeichnete Versteifungseffekt infolge des unvollständigen linearen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung kann mit dem 'Enhanced Assumed Strain' Konzept vermieden werden. Bezüglich der zu entwickelnden Variation und Zeitableitungen des Verschiebungsfeldes erwies sich die angewandte Formulierung des Schalenelementes mit Differenzvektor als äußerst günstig. In der vorliegenden Arbeit werden hierzu der Trägheitsterm des Prinzips der virtuellen Arbeit sowie die globalen Bilanzgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls für dieses Element in diskreter Form entwickelt und damit die Grundlage zur Entwicklung des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' geschaffen.

Die Diskretisierung in der Zeit wird mit der Zerlegung des Integrationszeitraumes in Zeitintervalle mit Newmark Approximationen für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Be-

schleunigungen realisiert. Die 'Generalized- α ' Methode nach Chung, Hulbert (1993) als verallgemeinerter Vertreter direkter, impliziter Einschritt-Zeitintegrationsverfahren mit kontrollierbarer algorithmischer Dissipation wird zur Integration nichtlinearer semidiskreter Anfangswertprobleme erweitert. Die aus der Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung und den Newmark Approximationen in der Zeit resultierende effektive Strukturgleichung mit dem Verschiebungsvektor als primärer Lösungsvariablen wird konsistent linearisiert und damit einer iterativen Lösung mit dem Newton-Raphson Schema zugänglich gemacht. Um den Zeitintegrationsalgorithmus von 2. Ordnung genau, spektral stabil und bezüglich der algorithmischen Dissipation nieder- und hochfrequenter Moden optimal zu parametrisieren, werden die Zeitintegrationsparameter als Funktion eines einzig freien Parameters des Spektralradius gewählt. Bei Aktivierung der numerischen Dämpfungseigenschaften durch geeignete Parameterwahl erwies sich die vorgestellte 'Generalized- α ' Methode bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten als energetisch stabil. Diese energetische Stabilität muß allerdings mit einem algorithmischen Energieverlust bezahlt werden, was dieses Verfahren zur Integration von Langzeitdynamiken ungeeignet macht.

Effektivität und Genauigkeit von Zeitintegrationsverfahren werden entscheidend von der Wahl des Zeitschrittes beeinflusst. Um einen Kompromiß aus Rechengenauigkeit und -aufwand zu finden und die Anpassung des Zeitschrittes an die mit der Deformation der Struktur veränderlichen dynamischen Eigenschaften des Tragwerkes zu ermöglichen, werden Methoden zur adaptiven Zeitschrittsteuerung, die für die Anwendung in der linearen Dynamik konzipiert sind, vorgestellt und diskutiert. Lediglich eine nachlaufbasierte a posteriori Fehlerschätzung nach Zienkiewicz, Xie (1991) oder Li, Zeng, Wiberg (1993) kann, allerdings mit Einschränkungen, als numerisch effektive Basis für eine adaptive Schrittweitensteuerung empfohlen werden. Die erwähnten Einschränkungen sind die mangelnde Übereinstimmung von geschätztem und tatsächlichem Fehler und die ungelöste Problematik der Wahl der zulässigen Fehlertoleranzen und -grenzen.

Auf der 'Generalized- α ' Methode aufbauend wird der 'Constraint Energy Momentum Algorithm' (CEMA) durch Formulierung der effektiven Strukturgleichung als Stationaritätsproblem und dessen Ergänzung durch die Nebenbedingungen der algorithmischen Bilanzgleichungen von Energie-, Impuls- und Drallerhaltung entwickelt. Hierzu ist es erforderlich, die globalen Bilanzgleichungen räumlich zu diskretisieren und anschließend über einen typischen Zeitschritt konsistent mit den Approximationen des zugrunde gelegten Zeitintegrationsalgorithmus zu integrieren. Das mit Hilfe der Methode der Lagrange Multiplikatoren entstandene nichtlineare Gleichungssystem der erweiterten effektiven Strukturgleichung und der algorithmischen Bilanzgleichungen wird konsistent linearisiert und nach der Partitionierungsstrategie gelöst. Der entwickelte Algorithmus verbindet zwei an sich widersprüchliche numerische Eigenschaften: Zum einen ist der Algorithmus numerisch dissipativ und zum anderen wird die totale Energie in einem typischen Zeitschritt erhalten. Erklärt werden kann dieses Paradoxon, wie anhand eines

Beispielen gezeigt wird, mit dem Energietransfer von hochfrequenten zu niederfrequenten dynamischen Moden der Strukturantwort.

Beispiele zeigen zum einen die Anwendung von Zeitintegrationsalgorithmen zur Analyse von dynamischem Beulen und Bewegungen mit endlichen Deformationen und Rotationen und zum anderen die Eigenschaften, Funktionen und Versagensursachen verschiedener Algorithmen. Diese Eigenschaften der Zeitintegrationsalgorithmen können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Der Newmark Algorithmus in der Parametrisierung der Trapezregel erweist sich bei der Integration des nichtlinearen semidiskreten Anfangswertproblems als nicht stabil.
- Die von Hughes, Caughey, Liu (1978) vorgeschlagene Ergänzung der Trapezregel mit der algorithmischen Nebenbedingung der Energieerhaltung führt zu einer stabilen, jedoch nicht immer konvergenten Zeitintegration.
- Algorithmen mit algorithmischer Dissipation sind energetisch stabil, liefern allerdings infolge der auch für niederfrequente Moden unvermeidbaren Dissipation bei der Integration großer Integrationsintervalle unbrauchbare Ergebnisse.
- Die 'Energy-Momentum Method' (EMM) nach Simo, Tarnow (1992) ist energie-, impuls- und drehimpulserhaltend und somit energetisch stabil und genau.
- Die Integration von Strukturantworten mit hochfrequenten dynamischen Moden und akzeptabler Zeitschrittgröße mit der EMM versagt während der Gleichgewichtsiteration im Newton-Raphson Schema. Zu Integration derartiger Probleme sind mit der EMM kleine Zeitschritte erforderlich.
- Der CEMA garantiert die Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses in einem Zeitschritt und ist damit energetisch stabil und in den Bilanzgrößen exakt. Der Algorithmus erfordert allerdings einen erhöhten Rechenaufwand im Zeitschritt.
- CEMA mit aktiver algorithmischer Dissipation ist weiterhin auf Probleme mit angeregten hochfrequenten Moden bei akzeptablen Zeitschritten anwendbar.
- Die Kombination von algorithmischer Dissipation und der erzwungenen Energieerhaltung (CEMA) führt zum Energietransfer von hochfrequenten zu niederfrequenten Moden.

9.2 Fazit und Ausblick

Mit dem CEMA steht eine Methode zur Verfügung, die numerische Dissipation und algorithmische Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung in idealer Weise kombiniert. Infolge numerischer Dissipation strukturdynamisch unrelevanter hochfrequenter Moden wird eine, in der Vergrößerung des Konvergenzradius der Gleichgewichtsiteration begründete, numerisch stabile Integration mit endlichen Zeitschritten ermöglicht. Die mit Nebenbedingungen erzwungene Erhaltung der Bilanzgrößen erzielt weiterhin eine global korrekte Lösung des semidiskreten Anfangswertproblems. Da die algorithmische Dissipation und der damit verbundene Energietransfer nur bei Strukturantworten mit hochfrequenten Anteilen auftritt, können Probleme mit glatten

Lösungen mit einer dem Newmark Verfahren äquivalenten Genauigkeit und, im Gegensatz zum Newmark Verfahren, numerisch stabil gelöst werden. Im Vergleich zum ebenfalls energetisch stabilen, numerisch dissipativen Basisalgorithmus liefert der CEMA beim Auftreten hochfrequenter Moden oder bei der Integration großer Zeitintervalle verbesserte Ergebnisse. Gegenüber der EMM hat der CEMA Vorteile bei der Integration von Dynamiken mit hochfrequenten Anteilen; hier ermöglicht die algorithmische Dissipation vergleichsweise große Zeitschritte.

Derzeit nicht integrierte Bestandteile des CEMA sind die Einbindung von Dirichlet Randbedingungen in die Nebenbedingungen der Impuls- und Drehimpulserhaltung sowie die Bestimmung der von der Standardparametrisierung abweichenden Parameter der konsistenten Integration algorithmischer Bilanzgleichungen. Die Lösung des ersten Punktes ist zur Erlangung der Praxistauglichkeit des Algorithmus unabdingbar. Der Versuch, die in der Gleichgewichtsiteration am Ende jedes Iterationsschrittes berechneten Lagerreaktionen in die Impuls- und Drehimpulsnebenbedingung einzubinden, scheidet derzeit infolge einer mangelnden Konvergenzrate. Der zweite Teilaspekt kann mit Parameterstudien untersucht werden.

Bei der Integration der Bewegungsvorgänge von Strukturen mit hochgradiger geometrischer Nichtlinearität und der damit verbundenen extremen Veränderung modaler Komponenten in Eigenfrequenz und -form erfordert zur effektiven numerischen Integration in der Zeit eine zuverlässige adaptive Kontrolle der Schrittweite. Auf diesem Forschungsgebiet sind weitere Untersuchungen von a posteriori Fehlerästimatoren in Anwendung auf nichtlineare diskrete Probleme mit einer Vielzahl von Freiheitsgraden oder neuer Kontrollkonzepte von Interesse. Ein Ansatz eines neuartigen Kontrollkonzeptes könnte die Generierung einer Referenzlösung mit Hilfe einer polynomialen oder harmonischen Extrapolation des aktuellen Verschiebungszustandes sein, die von bereits ermittelten Verschiebungszuständen ausgehen.

Ein in der vorliegenden Arbeit ausgenommener physikalischer Effekt ist die materielle Nichtlinearität. Plastische Deformationen und die damit verbundene Konvertierung mechanischer Energie in thermische Energie läßt einen positiven Einfluß auf die Numerik der Zeitintegration vermuten. Infolge der im mechanischen Feld dissipierten Energie kann auf Grund der physikalischen Gewährleistung des Energiekriteriums eine numerisch stabilisierende Wirkung erwartet werden. Die Integration der Plastizität ist damit neben einer verbesserten Modellierung der Physik auch aus Gründen der Numerik von Vorteil.

Literatur

- Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C. (1970):**
Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 419–451.
- Altenbach, J.; Altenbach, H. (1994):**
Einführung in die Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Antman, S.S. (1995):**
Nonlinear Problems of Elasticity. *Applied Mathematical Sciences* 107. Springer-Verlag New York etc.
- Argyris, F.R.S.; Faust, G.; Haase, M. (1994):**
Die Erforschung des Chaos. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Argyris, F.R.S.; Mlejnek, H.-P. (1988):**
Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band I: Verschiebungsmethode in der Statik. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Argyris, F.R.S.; Mlejnek, H.-P. (1988b):**
Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band III: Einführung in die Dynamik. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Argyris, F.R.S.; Mlejnek, H.-P. (1991):**
Dynamics of Structures. *Texts on Computational Mechanics*, North-Holland, Amsterdam etc.
- Basar, Y.; Eller, C.; Krätzig, W.B. (1990):**
Finite Element Procedures for the Nonlinear Dynamic Stability Analysis of Arbitrary Shell Structures. *Computational Mechanics* 6, 157–166.
- Basar, Y.; Krätzig, W.B. (1985):**
Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Bathe K.J. (1986):**
Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin etc.
- Bathe, K.J.; Wilson, E.L. (1973):**
Stability and Accuracy of Direct Integration Methods. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, 283–291.
- Bathe, K.-J.; Ramm, E.; Wilson, E.L. (1975):**
Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 353–386.
- Batoz, J.-L.; Dhatt, G. (1979):**
Incremental Displacement Algorithm for Nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1262–1267.
- Bazzi, G. (1982):**
Ein Beitrag zur dynamischen Berechnung nichtlinearer Tragwerke. Ph.D. Dissertation Nr. 7080, Institut für Informatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Bazzi, G.; Anderheggen, E. (1982):**
The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 537–550.

- Becker, E.; Bürger, W. (1975):**
Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Belytschko, T. (1983):**
An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures. In: Belytschko, T.; Hughes, T.J.R.: Computational Methods for Transient Analysis. North-Holland Amsterdam New York Oxford, 1–65.
- Belytschko, T.; Schoeberle, D.F. (1975):**
On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics. Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, 865–869.
- Bergan, P.G.; Mollestad, E. (1985):**
An Automatic Time-Stepping Algorithm for Dynamic Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 49, 299–318.
- Betsch, P. (1996):**
Statische und dynamische Berechnungen von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten finiten Elementen. Ph.D. Dissertation. Bericht Nr. F 96/4, Institut für Bau-mechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Betsch, P.; Gruttmann, F.; Stein, E. (1996):**
A 4-Node Finite Shell Element for the Implementation of General Hyperelastic 3D-Elasticity at Finite Strains. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 130, 57–79.
- Betten, J. (1993):**
Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik. Springer-Verlag, Berlin etc.
- Bletzinger, K.-U. (1990):**
Formoptimierung von Flächentragwerken. Ph.D. Dissertation. Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bletzinger, K.-U. (1992):**
Nichtlineare Strukturanalyse und Finite Elemente. Vorlesungsmanuskript. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- de Boer, R. (1982):**
Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin etc.
- Brank, B.; Tonello, N.; Briseghella, L. (1996):**
On Non-Linear Dynamics of Elastic Shells: Implementation of Energy-Momentum Conserving Algorithm. Submitted for publication in: International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- Braun, M. (1995):**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken. Ph.D. Dissertation. Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Braun, M.; Bischoff, M.; Ramm, E. (1994):**
Nonlinear Shell Formulations for Complete Three-Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates. Computational Mechanics 15, 1–18.
- Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A. (1979):**
Taschenbuch der Mathematik. 22. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main.

- Büchter, N. (1992):**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Büchter, N.; Ramm, E. (1992):**
Shell Theory versus Degeneration – a Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, 39–59.
- Büchter, N.; Ramm, E. (1992b):**
3D–Extension of Nonlinear Shell Equations Based on the Enhanced Assumed Strain Concept. In: Hirsch, Ch.: *Computational Methods in Applied Sciences*. Elsevier Science Publishers B.V., 55–62.
- Bufler, H. (1991):**
Energimethoden. Vorlesungsmanuskript. Institut für Mechanik, Universität Stuttgart.
- Burmeister, A. (1987):**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 6, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Chung, J.; Hulbert, G.M. (1993):**
A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, 371–375.
- Ciarlet, P.G. (1988):**
Mathematical Elasticity. Volume 1: Three Dimensional Elasticity. North–Holland, Amsterdam etc.
- Crisfield, M.A. (1981):**
A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap Through. *Computers & Structures*, Vol. 13, 55–62.
- Crisfield, M.A. (1991):**
Non–Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume I: Essentials. John Wiley & Sons, Chichester etc.
- Crisfield, M.A.; Galvanetto, U. (1995):**
Some Unreliable Finite Element Solutions for Nonlinear Dynamics. *Proceedings of the Fifth International Conference on Reliability of Finite Element Methods for Engineering Applications*. Amsterdam, The Netherlands 10–12 May, 346–355.
- Crisfield, M.A.; Moita, G.F.; Galvanetto, U. (1994):**
Some Unconventional Applications of the Co–Rotational Techniques to Continua and Dynamics. In: Hughes, T.J.R.; Oñate, E.; Zienkiewicz, O.C.: *Recent Developments in Finite Element Analysis. A Book Dedicated to Robert L. Taylor*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) Barcelona, Spain, 87–97.
- Crisfield, M.A.; Shi, J. (1994):**
A Co–Rotational Element/Time–Integration Strategy for Non–Linear Dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1897–1913.
- Deuffhard, P.; Hohmann, A. (1993):**
Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung. Walter de Gruyter, Berlin etc.

- Deuffhard, P.; Bornemann, F. (1994):**
Numerische Mathematik II. Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Walter de Gruyter, Berlin etc.
- Dinkler, D. (1988):**
Stabilität dünner Flächentragwerke bei zeitabhängigen Einwirkungen. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Habilitation, Bericht–Nr. 88–52.
- Dinkler, D. (1994):**
Dynamik. Vorlesungsmanuskript. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Fellipa, C.A.; Park, K.C. (1979):**
Direct Time Integration Methods in Nonlinear Structural Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 17/18, 277–313.
- Finlayson, B.A. (1972):**
The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, New York etc.
- Galvanetto, U.; Crisfield, M.A. (1996):**
An Energy–Conserving Co–Rotational Procedure for the Dynamics of Planar Beam Structure. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 2265–2282.
- Gasch, R.; Knothe, K. (1987):**
Strukturodynamik. Band 1: Diskrete Systeme. Springer–Verlag, Berlin etc.
- Gérardin, M.; Rixen, D. (1994):**
Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics. John Wiley & Sons, Chichester etc.
- Green, A.E.; Zerna, W. (1968):**
Theoretical Elasticity. Second edition, Oxford University Press, London.
- Givoli, D.; Henigsberg, I. (1993):**
A Simple Time–Step Control Scheme. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 873–881.
- Häfner, L.; Ramm, E.; Sättele, J.M.; Stegmüller, H. (1980):**
NISA 80 – A Multi–Purpose Finite Element Program for Geometrically and Materially Nonlinear Structural Analysis. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Hilber, H.M.; Hughes, T.J.R.; Taylor, R.L. (1977):**
Improved Numerical Dissipation for the Time Integration Algorithms in Structural Dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, 283–292.
- Hoff, C.; Pahl, P.J. (1988):**
Practical Performance of the θ_1 –Method and Comparison with other Dissipative Algorithms in Structural Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 67, 87–110.
- Hoff, C.; Pahl, P.J. (1988b):**
Development of an Implicit Method with Numerical Dissipation from Generalized Single Step Algorithm for Structural Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 67, 367–385.

- Hughes, T.J.R. (1976):**
Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics. *Computers & Structures*, Vol. 6, No. 2, 313–324.
- Hughes, T.J.R. (1977):**
A Note on the Stability of Newmark's Algorithm in Nonlinear Structural Dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 383–386.
- Hughes, T.J.R. (1987):**
The Finite Element Method. Prentice–Hall International Edition, London.
- Hughes, T.J.R.; Caughey, T.K.; Liu, W.K. (1978):**
Finite–Element Methods for Nonlinear Elastodynamics which Conserve Energy. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, 366–370.
- Hughes, T.J.R.; Hulbert, G.M. (1988):**
Space–Time Finite Element Methods for Elastodynamics: Formulation and Error Estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 66, 339–363.
- Hughes, T.J.R.; Pister, K.S. (1978):**
Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures. *Computers & Structures*, Vol. 8, 391–397.
- Hughes, T.J.R.; Pister, K.S.; Taylor, R.L. (1979):**
Implicit–Explicit Finite Elements in Nonlinear Transient Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17/18, 159–182.
- Hulbert, G.M. (1992):**
Time Finite Element Methods for Structural Dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 307–331.
- Hulbert, G.M.; Hughes, T.J.R. (1990):**
Space–Time Finite Element Methods for Second–Order Hyperbolic Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 84, 327–348.
- Jacob, B.P.; Ebecken, N.F.F. (1993):**
Adaptive Time Integration of Nonlinear Dynamic Problems. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 12, No. 2, 277–298.
- Kimmich, S. (1990):**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen. Ph.D. Dissertation. Bericht Nr. 12, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Klingbeil, E. (1989):**
Tensorrechnung für Ingenieure. BI–Hochschultaschenbuch, Band 197, Wissenschaftsverlag, Mannheim etc.
- Krämer, S. (1995):**
Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens der Fußgängerbrücke über den Allmandring. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Krätzig, W.B.; Eller, C. (1992):**
Numerical Algorithms for Nonlinear Unstable Dynamic Shell Responses. *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 1/2, 263–271.

- Kuhl, D.; Ramm, E. (1996):**
 Constraint Energy Momentum Algorithm and its Application to Nonlinear Dynamics of Shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 136, 293–315.
- Kuhl, D.; Ramm, E. (1996b):**
 Conservation of Energy and Momentum for Implicit Single Step Time Integration Schemes. In: Augusti, G.; Borri, C.; Spinelli, C.: *Structural Dynamics. Eurodyn '96 – Pre-Third European Conference on Structural Dynamics*. Florence. 5. – 8. June, Balkema, Rotterdam Brookfield, 349–356.
- Lewis, D.; Simo, J.C. (1994):**
 Conserving Algorithms for the Dynamic of Hamiltonian Systems on Lie Groups. *Journal of Nonlinear Science*, Vol. 4, No. 3, 253–299.
- Li, X.D.; Zeng L.F.; Wiberg, N.–E. (1993):**
 A Simple Local Error Estimator and an Adaptive Time–Stepping Procedure for Direct Integration Method in Dynamic Analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 273–292.
- Lim, K.L.; Crisfield, M.A. (1994):**
 Dynamic Finite Element Analysis Applied to a Simple Model Exhibiting Dynamic Instability. *Engineering Computations*, Vol. 11, 483–494.
- Lippmann, H. (1993):**
Angewandte Tensorrechnung für Ingenieure, Physiker und Mathematiker. Springer–Verlag, Berlin etc.
- Lyapunov, A.M. (1992):**
General Problem of the Stability of Motion. Taylor & Francis, London Washington.
- Malvern, L.E. (1969):**
Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- Marsden, J.E.; Hughes, T.J.R. (1983):**
Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- Matthies, H.; Strang, G. (1979):**
 The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1613–1626.
- Mehlhorn, G. (1995):**
Der Ingenieurbau. Baustatik. Baudynamik. Ernst & Sohn, Berlin.
- Natke, H.G. (1983):**
Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen– und Modalanalyse. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Newmark, N.N. (1959):**
 A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanic Division* 85, 67–94.
- Oden, J.T. (1979):**
 The Classical Variational Principles of Mechanics. In: Glowinski, R.; Rodin, E.Y.; Zienkiewicz, O.C.: *Energy Methods in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester etc., 1–31.

Oden, J.T.; Fost, R.B. (1973):

Convergence, Accuracy and Stability of Finite Element Approximations of a Class of Non-Linear Hyperbolic Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, 357–365.

Park, K.C. (1975):

Improved Stiffly Stable Method for Direct Integration of Nonlinear Structural Dynamic Equations. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, 464–470.

Ramm, E. (1976):

Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Habilitation, Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Ramm, E. (1981):

Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points In: W. Wunderlich, E. Stein, K.–J. Bathe: *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer–Verlag Berlin etc., 63–89.

Reitinger, R. (1994):

Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke. Ph.D. Dissertation. Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Samuelsson, A.; Wiberg, N.E. (1991):

Finite Element Adaptivity in Dynamics and Elastoplasticity. In: Oñate, E.; Periaux, J.; Samuelsson, A.: *The Finite Element Method in the 1990's. A Book Dedicated to O.C. Zienkiewicz*. Barcelona, Spain, 152–162.

Schiehlen, W. (1986):

Technische Dynamik. Teubner Studienbücher, Stuttgart.

Scholz, B. (1996):

Verifikation von a posteriori Fehlerästimatoren der Zeitdiskretisierung anhand der Dynamik von Platten. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Simo, J.C.; Armero, F. (1992):

Geometrically Non-linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 1413–1449.

Simo, J.C.; Fox, D.D.; Rifai, M.S. (1992):

On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part VI: Conserving Algorithms for Non-Linear Dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, 117–164.

Simo, J.C.; González, O. (1994):

Recent Results on the Numerical Integration of Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems. In: Hughes, T.J.R.; Oñate, E.; Zienkiewicz, O.C.: *Recent Developments in Finite Element Analysis. A Book Dedicated to Robert L. Taylor*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) Barcelona, Spain, 255–271.

Simo, J.C.; Posbergh, T.A.; Marsden, J.E. (1990):

Stability of Coupled Rigid Body and Geometrically Exact Rods: Block Diagonalization and the Energy–Momentum Method. *Physics Reports* 193, No. 6, 279–360.

- Simo, J.C.; Rifai, M.S. (1990):**
A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, 1595–1638.
- Simo, J.C.; Tarnow, N. (1992):**
The Discrete Energy–Momentum Method. Conserving Algorithms for Nonlinear Elastodynamics. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 43, 757–792.
- Simo, J.C.; Tarnow, N. (1992b):**
Conserving Algorithms for Nonlinear Dynamics. In: Smolinski, P.; Liu, W.K.; Hulbert, G.; Tamma, K.: *New Methods in Transient Analysis. The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers Anaheim, California, November 8–13. The American Society of Mechanical Engineers, New York.* 41–50.
- Simo, J.C.; Tarnow, N. (1994):**
A New Energy and Momentum Conserving Algorithm for the Nonlinear Dynamics of Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 2527–2549.
- Simo, J.C.; Tarnow, N.; Doblaré, M. (1995):**
Non–Linear Dynamics of Three–Dimensional Rods: Exact Energy and Momentum Conserving Algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 1431–1473.
- Simo, J.C.; Tarnow, N.; Wong, K.K. (1992):**
Exact Energy–Momentum Conserving Algorithms and Symplectic Schemes for Nonlinear Dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 100, 63–116.
- Simo, J.C.; Wong, K.K. (1991):**
Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics that Exactly Preserve Energy and Momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, 19–52.
- Stander, N.; Stein, E. (1995):**
An Energy–Conserving Planar Finite Beam Element for Dynamics of Flexible Mechanisms. Submitted for publication to: *Engineering Computations*.
- Stegmüller, H.; Bletzinger, K.–U.; Kimmich, S. (1987):**
Finite Element Programmsystem CARAT – Eingabebeschreibung. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Stein, E.; Barthold, F.–J. (1992):**
Unterlagen zur Vorlesung Elastizitätstheorie. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, WS 92/93.
- Strang, G. (1986):**
Introduction to Applied Mathematics. Wellesley–Cambridge Press.
- Tabarrok, B.; Rimrott, F.P.J. (1994):**
Variational Methods and Complementary Formulations in Dynamics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc.
- Tarnow, N. (1993):**
Energy and Momentum Conserving Algorithms for Hamiltonian Systems in the Nonlinear Dynamics of Solids. Ph.D. Dissertation. Sudam Report No. 93–4, Division of Applied Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.

- Thomas, R.M.; Gladwell, I. (1988):**
Variable-Order Variable-Step Algorithm for Second-Order Systems. Part 1: The Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 39-53.
- Thompson, J.M.T.; Stewart, H.B. (1986):**
Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley & Sons, Chichester etc.
- Törnig, W. (1979):**
Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Band 2: Eigenwertprobleme und numerische Methoden der Analysis. Springer-Verlag, Berlin etc.
- Truesdell, C.; Noll, W. (1965):**
The Nonlinear Field Theories of Mechanics. *Encyclopedia of Physics*, Vol III/3 (Ed. S. Flügge), Springer-Verlag.
- Washizu, K. (1968):**
Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford etc.
- Wiberg, N.-E.; Zeng, L.F.; Li, X.D. (1992):**
Error Estimation and Adaptivity in Elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 101, 369-395.
- Wiberg, N.-E.; Li, X.D. (1993):**
A Post-Processing Technique and an A Posteriori Error Estimate for the Newmark Method in Dynamic Analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, 465-489.
- Wiberg, N.-E.; Li, X.D. (1994):**
A Postprocessed Error Estimate and an Adaptive Procedure for the Semidiscrete Finite Element Method in Dynamic Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 3585-3603.
- Wiggins, S. (1990):**
Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. *Texts in Applied Mathematics* 2. Springer-Verlag New York etc.
- Wood, W.L. (1977):**
On the Zienkiewicz Four-Time-Level Scheme for the Numerical Integration of Vibration Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1519-1528.
- Wood, W.L. (1984):**
A Further Look at Newmark, Houbolt, etc., Time-Stepping Formulae. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1009-1017.
- Wood, W.L. (1984b):**
A Unified Set of Single Step Algorithms. Part II: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 2303-2309.
- Wood, W.L. (1986):**
A Unified Set of Single Step Algorithms. Part 4: Backward Error Analysis Applied to Solution of Dynamic Vibration Equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 929-944.
- Wood, W.L. (1990):**
Practical Time-Stepping Schemes. Clarendon Press, Oxford.

- Wood, W.L.; Bossak, M.; Zienkiewicz, O.C. (1981):**
An Alpha Modification of Newmark's Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1562–1566.
- Wood, W.L.; Odour, M.E. (1988):**
Stability Properties of Some Algorithms for the Solution of Nonlinear Dynamic Vibration Equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4, 205–212.
- Wriggers, P. (1988):**
Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode. *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Habilitation, Bericht-Nr. F88/4.*
- Xie, Y.M.; Steven, G.P. (1994):**
Instability, Chaos, and Growth and Decay of Energy of Time-Stepping Schemes for Non-Linear Dynamic Equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 393–401.
- Zeng L.F.; Wiberg, N.-E.; Li, X.D.; Xie, Y.M. (1992):**
A Posteriori Local Error Estimation and Adaptive Time-Stepping for Newmark Integration in Dynamic Analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 21, 555–571.
- Zienkiewicz, O.C. (1977):**
A New Look at the Newmark, Houbold and other Time Stepping Schemes. A Weighted Residual Approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, 413–418.
- Zienkiewicz, O.C.; Katona, M.G. (1985):**
A Unified Set of Single Step Algorithms. Part 3: The Beta-m Method, a Generalization of the Newmark Scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1345–1359.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. (1989):**
The Finite Element Method, Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill, London.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. (1991):**
The Finite Element Method, Volume 2. Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity. McGraw-Hill, London.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M. (1971):**
Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 275–290.
- Zienkiewicz, O.C.; Wood, W.L.; Hine, N.W.; Taylor, R.L. (1984):**
A Unified Set of Single Step Algorithms. Part I: General Formulation and Applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1529–1552.
- Zienkiewicz, O.C.; Wood, W.L.; Taylor, R.L. (1980):**
An Alternative Single-Step Algorithm for Dynamic Problems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, 31–40.
- Zienkiewicz, O.C.; Xie, Y.M. (1991):**
A Simple Error and Adaptive Time Stepping Procedure for Dynamic Analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, 871–887.

A Anhang

In diesem Kapitel werden, zum besseren Verständnis der Arbeit, einige in der Arbeit benötigte Rechenregeln der Tensoralgebra und Tensoranalysis erläutert. Diese Zusammenstellung erhebt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ausführliche Erklärungen zur Tensorrechnung finden sich u.a. in de Boer (1982), Hughes (1987), Klingbeil (1989) und Lippmann (1993).

In einem weiteren Abschnitt werden Alternativen zur konsistenten Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen des 'Constraint Energy Momentum Algorithm' aufgezeigt.

A.1 Tensoralgebra

Ein beliebiger nichtsymmetrischer Tensor s_{ij} zweiter Stufe kann additiv in einen symmetrischen $s_{(ij)}$ und schiefsymmetrischen $s_{[ij]}$ Anteil aufgespalten werden.

$$s_{ij} = s_{(ij)} + s_{[ij]} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} + \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2} \quad (\text{A.1})$$

Ist s_{ij} ein nichtsymmetrischer Tensor und $t_{ij} = t_{ji}$ ein symmetrischer Tensor, dann gilt für die doppelte Kontraktion der Tensoren (Hughes (1987)):

$$s_{ij} t_{ij} = s_{(ij)} t_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Hieraus folgt unmittelbar für den Sonderfall eines schiefsymmetrischen Tensors $s_{ij} = -s_{ji}$.

$$s_{ij} t_{ij} = s_{(ij)} t_{ij} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} t_{ij} = \frac{s_{ij} - s_{ij}}{2} t_{ij} = 0 \quad (\text{A.3})$$

A.2 Tensoranalysis

Rechenregeln bei der Bildung der Divergenz:

$$\nabla \cdot (S \cdot s) = S^T : \nabla s + \nabla \cdot S^T \cdot s \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot (s \times S) = s \times \nabla \cdot S + \nabla s \times S \quad (\text{A.5})$$

A.3 Integralsätze

Mit dem Gauss-Integralsatz ist die Umwandlung von Volumen- in Flächenintegrale möglich. Das Volumenintegral der Divergenz eines Tensors kann durch das Flächenintegral der einfachen Kontraktion des Tensors mit dem Einheitsnormalenvektor der Oberfläche n ersetzt werden.

$$\int_V \nabla \cdot S \, dV = \int_A S \cdot n \, dA \quad S = S^{ij} g_i \otimes g_j \quad (\text{A.6})$$

$$\int_V \nabla \cdot s \, dV = \int_A s \cdot n \, dA \quad s = s^i g_i \quad (\text{A.7})$$

Das Green Theorem oder die partielle Integration:

$$\int_V s \frac{\partial S}{\partial x} \, dV = - \int_V \frac{\partial s}{\partial x} S \, dV + \int_A s S n_x \, dA \quad (\text{A.8})$$

A.4 Alternative Integration der algorithmischen Bilanzgleichungen

Die Integration der algorithmischen Bilanzgleichung über dem Zeitintegrationsschritt zur Generierung von Nebenbedingungen des Stationaritätsproblem es als Grundlage für den 'Constraint Energy Momentum Algorithm' kann, wie in Kapitel 6.4 erwähnt und in Abbildung 6.4 dargestellt, alternativ zu der in erläuterten konsistenten Integration mit der Trapezregel oder einer gemischten Integrationsmethode erfolgen.

A.4.1 Trapezregel

Mit der Trapezregel wird ein bestimmtes Integral durch die Trapezfläche unter dem Integranden approximiert.

$$\int_0^{\Delta t} f(\tau) \, d\tau \approx \frac{\Delta t}{2} (f(\tau = 0) + f(\tau = \Delta t)) = \frac{\Delta t}{2} (\vec{f} + f) \quad (\text{A.9})$$

Angewandt auf die algorithmische Energiebilanz (6.2) liefert die Trapezregel die Nebenbedingung

$$Z_E \approx K + U - \bar{K} - \bar{U} - \frac{\Delta t}{2} (\dot{u} \cdot R + \dot{u} \cdot \bar{R} - \dot{u} \cdot C \dot{u} - \dot{u} \cdot C \dot{u}) \quad (\text{A.10})$$

der Energieerhaltung in einem Zeitintegrationsschritt. Neben der Nebenbedingung selbst, werden zur Generierung der modifizierten effektiven Strukturgleichung und deren Tangentenoperator ihre ersten beiden Richtungsableitungen benötigt. Die Gâteaux Ableitung der kinetischen und der inneren Energie ist analog zu Gleichung (6.13) gegeben. Während die Richtungsableitung der Arbeit der äußeren Kräfte im Zeitschritt sehr schnell entwickelt werden kann, sind für die Gâteaux Ableitung der Arbeit der Dämpfungskräfte die Kettenregel, die Richtungsableitung (6.15) und die Newmark Approximation (5.12) des aktuellen Geschwindigkeitsvektors zu beachten. Wie schon in Kapitel 6.4.2 kann auch hier die Richtungsableitung der Nebenbedingung der algorithmischen Energieerhaltung in während der Newton–Raphson Iteration konstante und variable Anteile aufgespalten werden.

$$\begin{aligned}
Z_{E,u} = & \left[-\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \bar{u} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\bar{u}} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \ddot{\bar{u}} \right] \cdot M - \frac{\delta}{2\beta} R^T \\
& + \left[-\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t} \bar{u} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\bar{u}} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\bar{u}} \right] \cdot C \\
& + \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} u \cdot M + \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t} u \cdot C + N^T(u)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Die zweite Gâteaux Ableitung der Nebenbedingung der algorithmischen Energieerhaltung unterscheidet sich lediglich im Wichtungsfaktor der Dämpfungsmatrix von Gleichung (6.22).

$$Z_{E,uu} = \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} M + \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t} C + K(u) \tag{A.12}$$

Die Approximation der algorithmischen Impulsbilanz (6.4) mit der Trapezregel liefert die Impuls Nebenbedingung

$$Z_L \approx L - \bar{L} - \frac{\Delta t}{2} a \left(R + \bar{R} - C \dot{u} - C \ddot{u} \right), \tag{A.13}$$

deren erste Richtungsableitung in der Gleichgewichtsiteration konstant ist, womit die zweite Richtungsableitung der Impuls Nebenbedingung identisch Null ist.

$$Z_{L,u} = a \left(\frac{\delta}{\beta \Delta t} M + \frac{\delta}{2\beta} C \right) \quad Z_{L,uu} = 0 \tag{A.14}$$

Die Integration der Drehimpulsbilanz (6.6) nach der Trapezregel ergibt die Drehimpuls Nebenbedingung.

$$Z_J \approx J - \bar{J} - \frac{\Delta t}{2} a \left(\hat{y} + \hat{u} \right) R + \hat{y} \bar{R} - \left(\hat{y} + \hat{u} \right) C \dot{u} - \hat{y} C \ddot{u} \tag{A.15}$$

Gâteaux Ableitungen führen zu einer in der Gleichgewichtsiteration konstanten ersten Richtungsableitung der Drall Nebenbedingung

$$\begin{aligned}
Z_{J,u} = & a \left[\frac{\delta}{\beta \Delta t} \hat{y} + \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right) \hat{u} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \hat{\ddot{u}} \right] M + a \frac{\Delta t}{2} \hat{R} \\
& + a \left[\frac{\delta}{2\beta} \hat{y} + \left(\frac{\delta}{2\beta} - \frac{1}{2} \right) \Delta t \hat{\ddot{u}} + \left(\frac{\delta}{4\beta} - \frac{1}{2} \right) \Delta t^2 \hat{\ddot{\ddot{u}}} \right] C
\end{aligned} \tag{A.16}$$

und damit zum Verschwinden der zweiten Richtungsableitung.

$$Z_{J,uu} = 0 \tag{A.17}$$

A.4.2 Gemischte Integration nach Hughes, Caughy, Liu (1978)

Der Energieerhaltende Algorithmus von Hughes, Caughy, Liu (1978) – 'Constraint Energy Method' – auf Basis der Newmark Methode in der Formulierung der konstanten mittleren Beschleunigungsmethode mit $\beta = 1/4$ und $\delta = 1/2$ verwendet die Nebenbedingung der Energieerhaltung – ohne die Berücksichtigung physikalischer Dämpfung – mit dem Ziel der Gewährleistung von unbedingter energetischer Stabilität. Die algorithmische Energiebilanz (6.2) wird nach Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (z.B. Bronstein, Semendjajew (1979)) auf den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{u}(\tau) \approx \frac{\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} \quad (\text{A.18})$$

mit der Trapezregel integriert. Die in der genannten Veröffentlichung verwendete Entwicklung der Energie Nebenbedingung wird, ergänzt um den Term der physikalischen Dämpfung und die Erweiterung auf beliebige Parameter β und δ , im Folgenden demonstriert.

$$Z_E \approx K + U - \bar{K} - \bar{U} - \int_0^{\Delta t} \frac{\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{R}(\tau) \, d\tau + \int_0^{\Delta t} \frac{\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{C} \, \dot{u}(\tau) \, d\tau \quad (\text{A.19})$$

$$Z_E \approx K + U - \bar{K} - \bar{U} - \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{R} + \bar{\mathbf{R}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{C} (\dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}) \quad (\text{A.20})$$

Die erste Gâteaux Ableitung der kinetischen und potentiellen Energie ist auch hier analog zu Gleichung (6.19). Mit einer zu Kapitel A.4.1 analogen Vorgehensweise ergibt sich die erste Gâteaux Ableitung der verbleibenden Terme der äußeren lasten und der Dämpfungskräfte.

$$\begin{aligned} Z_{E,u} = & \left[-\frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}} \right] \cdot \mathbf{M} - \frac{1}{2} (\mathbf{R} + \bar{\mathbf{R}})^T \quad (\text{A.21}) \\ & + \left[-\frac{\delta}{2\beta \Delta t} \bar{\mathbf{u}} + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{4\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}} \right] \cdot \mathbf{C} \\ & + \frac{\delta}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{M} + \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} + N^T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Aus obiger Gleichung ergibt sich die zweite Gâteaux Ableitung der Energie Nebenbedingung. Diese enthält als einzigen in der Gleichgewichtsiteration variablen Anteil die Tangentensteifigkeit.

$$Z_{E,uu} = \frac{\delta^2}{\beta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) \quad (\text{A.22})$$

Die Nebenbedingungen der algorithmischen Impuls- und Drehimpulserhaltung werden in Ergänzung zu der Veröffentlichung von Hughes, Caughy, Liu (1978) mit der Trapezregel nach Kapitel A.4.1 integriert.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Detlef Kuhl
Geburtsdatum: 1. Mai 1964
Geburtsort: Stuttgart–Bad Cannstatt
Eltern: Franz Kuhl
Helga Kuhl, geb. Dietrich

Ausbildung und beruflicher Werdegang

1976–1981 Max–Eyth–Realschule in Backnang.
Abschluß: Mittlere Reife

1981–1984 Technisches Gymnasium in Backnang.
Abschluß: Fachgebundene Hochschulreife

1984–1985 Grundwehrdienst

1985–1992 Universität Stuttgart, Fakultät für Luft– und Raumfahrttechnik.
Abschluß: Diplom–Ingenieur

1987–1988 Fachpraktikum bei der Firma ANT Nachrichtentechnik in Backnang

1988–1990 Wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Flugzeugbau der
Universität Stuttgart

1991 Wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Statik und Dynamik
der Luft– und Raumfahrtkonstruktionen der Universität Stuttgart

1992 Konstrukteur bei der Firma ENERCON in Aurich

1992–1995 Stipendiat des Graduiertenkollegs 'Modellierung und
Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen' der
Universität Stuttgart am Institut für Baustatik

1995–1996 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der
Universität Stuttgart

seit 1996 Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Deutschen Forschungsanstalt für
Luft– und Raumfahrt e.V. im Forschungszentrum Lampoldshausen

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

In dieser Schriftenreihe bisher erschienene Berichte:

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalenträgwerken (in englischer Sprache).

- 80-1 R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.

- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Hauber:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.