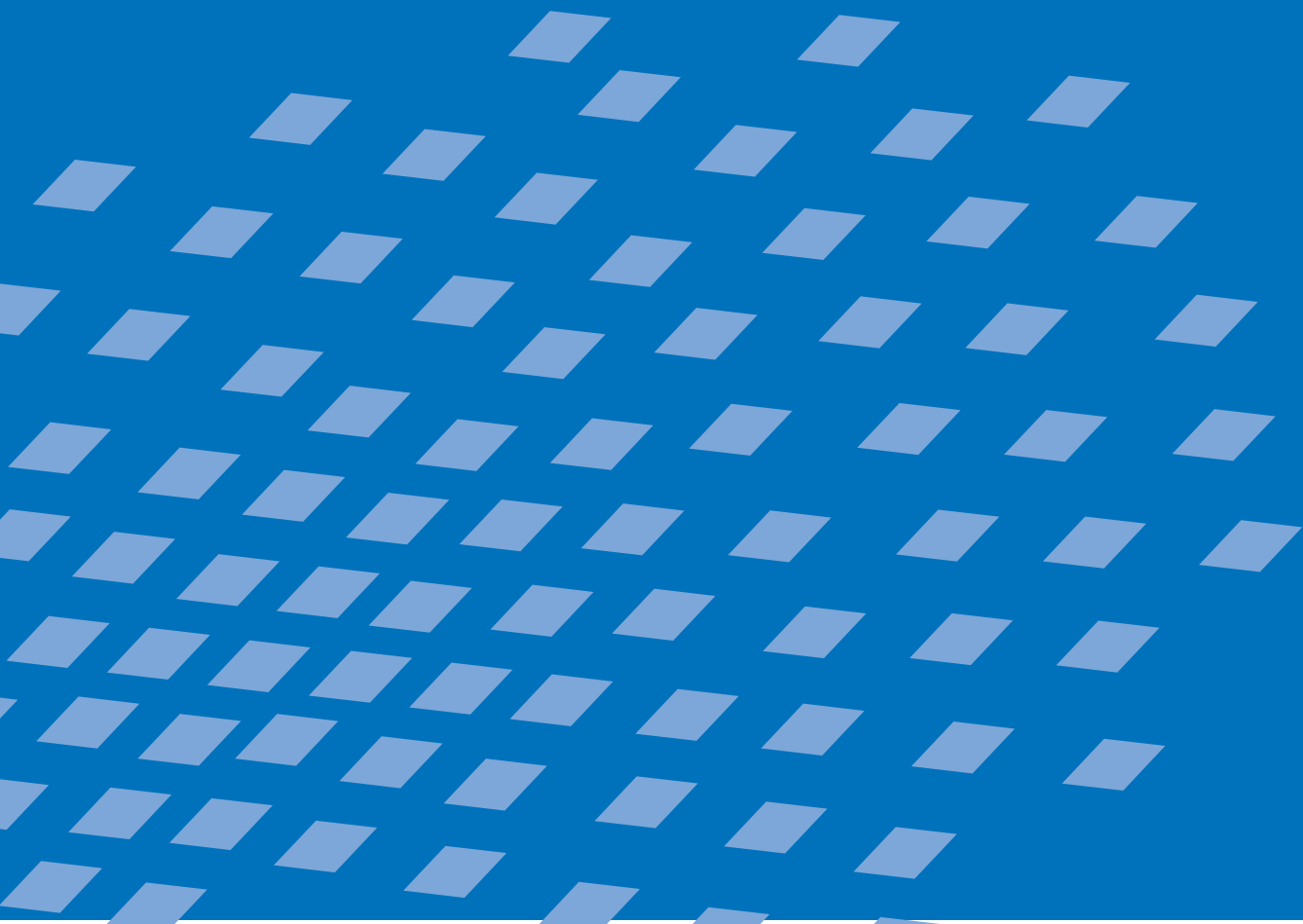




Universität Stuttgart  
Institut für Baustatik  
Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

# Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten

Stefan Schwarz





# **Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten**

von

**Stefan Schwarz**

Bericht Nr. 34 (2001)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 2001



© Stefan Schwarz

*Berichte können bezogen werden über:*

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: 0711 / 685 6123

Fax: 0711 / 685 6130

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

ISBN 3-00-007419-8

# Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Stefan Schwarz**

aus Heilbronn

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr. Michał Kleiber
Tag der mündlichen Prüfung:	12. Januar 2001

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2001



## Zusammenfassung

Zur Generierung aussagekräftiger und zuverlässiger Tragwerke mit Hilfe der Methoden der Strukturoptimierung ist es erforderlich, das tatsächliche, in der Regel nichtlineare Strukturverhalten bereits während des Optimierungsprozesses möglichst gut zu erfassen. Probleme der Strukturoptimierung führen oftmals zu nichtlinearen Optimierungsaufgaben, die mit gradientenbasierten Verfahren effizient gelöst werden können. Hierfür werden die Gradienten, d.h. die Sensitivitäten, der Zielfunktion und der Nebenbedingungen nach den Optimierungsvariablen benötigt. Da die Entwurfskriterien im allgemeinen von der Strukturantwort abhängen, wird die Komplexität sowie die Herleitung der Sensitivitätsanalyse im wesentlichen durch das mechanische und numerische Modell bestimmt. Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Herleitung und numerische Umsetzung der analytischen Sensitivitätsanalyse bei elastoplastischem Materialverhalten mit Ver- und Entfestigung und geometrischer Nichtlinearität mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Aufgrund der Pfadabhängigkeit der Strukturantwort im Rahmen der ratenunabhängigen Plastizitätstheorie (PRANDTL-REUSS) ist eine spezielle Prozedur für die ebenfalls pfadabhängige Sensitivitätsanalyse erforderlich.

Es wird eine variationelle und direkte Formulierung der analytischen Sensitivitätsanalyse vorgestellt, die sich in Verbindung mit elastoplastischem Materialverhalten als besonders vorteilhaft erweist. Besondere Beachtung bei der Herleitung der analytischen Sensitivitätsanalyse ist auf eine zum Lösungsalgorithmus der Strukturanalyse konsistente Vorgehensweise zu legen. Dies bezieht sich sowohl auf das Integrationsverfahren der konstitutiven Gleichungen als auch den Algorithmus für die Pfadverfolgung. Die entwickelte Sensitivitätsanalyse ist wegen ihrer Allgemeingültigkeit für beliebige Optimierungsprobleme, z.B. in der Form- und Topologieoptimierung, einsetzbar.

Der Einfluß des mechanischen und numerischen Modells bei der Berechnung von Optimierungsproblemen wird anhand ausgewählter Beispiele unter Verwendung der zuvor beschriebenen Sensitivitätsanalyse demonstriert und diskutiert. Anhand der Maximierung der Duktilität oder der Minimierung des Gewichts wird zum einen gezeigt, welchen Einfluß das zugrunde gelegte Materialmodell auf die optimale Topologie bzw. Form haben kann, zum anderen wird die Notwendigkeit einer Formoptimierung im Anschluß an eine Topologieoptimierung zur genauen Bestimmung von Details aufgezeigt. Zur Vermeidung von frühzeitigem Tragwerksversagen infolge Stabilität wird eine Stabilitätsnebenbedingung im Optimierungsprozeß zusätzlich berücksichtigt, deren Auswirkung auf die optimale Form des Tragwerks verdeutlicht wird.

# Abstract

To generate meaningful and reliable structures by using the methods of structural optimization it is essential to gather the real, in general nonlinear structural behavior already for the optimization process.

The design problems of interest often lead to nonlinear optimization problems which can be solved efficiently by gradient based methods. Thus, it is necessary to compute the sensitivities, that are the gradients of the objective and the constraints with respect to the optimization variables. Because the optimization criteria depend in general on the structural response, the theoretical and computational complexity of the sensitivity analysis is dominated by the underlying, mechanical and numerical model.

The present work focuses on developing and implementing an analytical approach for the sensitivity analysis. The structural response is characterized by an elastoplastic material behavior with strain hardening and softening as well as geometrical nonlinearities, and is simulated by a Finite Element method. A PRANDTL-REUSS model is applied to describe the elastoplastic material which leads to path-dependent response. In turn, this requires a special procedure to treat the also path-dependent sensitivity analysis.

A variational and direct formulation for the analytical sensitivity analysis is presented. The advantages of this formulation in the context of elastoplasticity are discussed. The proposed procedure is consistent with the one for computing the structural response. This refers to the integration method of the constitutive equations as well as the path following strategy. Due to its generality, the proposed sensitivity analysis can be applied to diverse optimization problems including shape and topology optimization.

The influence of the mechanical and numerical model on the optimization procedure and the optimization results is demonstrated with selected examples. For maximizing the ductility and minimizing the weight the influence of the material model on the optimum topology and shape is studied. The importance of subsequent shape optimization following a topology optimization step is shown. Additional constraints on the structural stability are imposed in order to avoid structural failure. The influence of these constraints on the optimum shape is studied.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1996 bis 2000 während meiner Tätigkeit als Stipendiat der Schweizer Stiftung 'Besinnung und Ordnung' und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, der mir an seinem Institut einen optimalen Rahmen für meine Forschungsarbeit bot. Seine Anregungen zu diesem Thema sowie sein förderndes wissenschaftliches Interesse haben diese Arbeit entscheidend geprägt.

Herrn Prof. Dr. Michal Kleiber möchte ich recht herzlich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts danken. Ich habe mich sehr über seine spontane Bereitschaft gefreut, meine Arbeit zu begutachten und extra zu meiner Doktorprüfung aus Polen anzureisen.

Meinen Kollegen am Institut für Baustatik danke ich für die angenehme Zeit, ihre Hilfsbereitschaft und die zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen und wertvollen Hinweise, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ein besonderer Dank gebührt dabei Roman Kemmler, Ellen Kuhl, Kurt Maute und Holger Steeb, durch die ich nicht nur bei fachlichen Themen neue Einblicke gewonnen, sondern in denen ich auch echte Freunde gefunden habe.

Der Schweizer Stiftung 'Besinnung und Ordnung' möchte ich für die überaus großzügige finanzielle Unterstützung während meiner Zeit am Institut für Baustatik sehr herzlich danken.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders herzlich bei meinen Eltern bedanken, die mir während meiner gesamten Ausbildung jederzeit Unterstützung gewährt haben und mir so ein unverzichtbarer Rückhalt waren.

Stuttgart, im Januar 2001

Stefan Schwarz



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung . . . . .	4
1.3	Gliederung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundelemente der Strukturoptimierung</b>	<b>7</b>
2.1	Einleitung . . . . .	7
2.2	Optimierungsmodell . . . . .	10
2.2.1	Die LAGRANGE-Funktion . . . . .	11
2.2.2	Die KUHN-TUCKER-Bedingungen . . . . .	11
2.2.3	Zielfunktion und Nebenbedingungen . . . . .	13
2.3	Optimierungsverfahren . . . . .	15
2.3.1	Allgemeines . . . . .	15
2.3.2	Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP) . . . . .	18
2.4	Entwurfsmodell . . . . .	20
2.5	Analysemodell . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Form- und Topologieoptimierung</b>	<b>23</b>
3.1	Formoptimierung . . . . .	23
3.2	Topologieoptimierung . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Strukturanalyse</b>	<b>37</b>
4.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	38
4.1.1	Kinematische Grundlagen . . . . .	38
4.1.2	Spannungsmaße . . . . .	40
4.2	Gleichgewichtsbedingung . . . . .	40
4.3	Pfadverfolgung . . . . .	45
4.4	Materielle Nichtlinearität – Elastoplastizität . . . . .	46
4.5	Konsistente Linearisierung . . . . .	48
4.6	Definition des Ver- bzw. Entfestigungsmoduls . . . . .	51
4.7	Geometrische und materielle Nichtlinearität . . . . .	52
4.8	Stabilitätsberechnungen . . . . .	53
4.8.1	Bestimmung des kritischen Lastfaktors . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Sensitivitätsanalyse</b>	<b>55</b>
5.1	Einleitung . . . . .	55
5.2	Numerische Verfahren . . . . .	57
5.3	Analytische Verfahren . . . . .	58

5.3.1	Diskrete Sensitivitätsanalyse . . . . .	61
5.3.2	Variationelle Sensitivitätsanalyse . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Sensitivitätsanalyse bei Nichtlinearität</b>	<b>71</b>
6.1	Einleitung . . . . .	71
6.2	Variationelle, direkte Sensitivitätsanalyse . . . . .	77
6.2.1	Ableitung der Gleichgewichtsbedingung . . . . .	78
6.2.2	Ableitung der kinematischen Beziehungen . . . . .	79
6.2.3	Ableitung der Spannungen und konstitutiven Gleichungen . . . . .	80
6.2.4	Sensitivität der (inkrementellen) Verschiebungen . . . . .	85
6.2.5	Diskretisierung der Gleichungen (FEM) . . . . .	86
6.2.6	Einfluß des Algorithmus auf die Sensitivitäten . . . . .	94
6.2.7	Ableitung der Materialdaten . . . . .	98
6.3	Bemerkungen zur Existenz von Ableitungen . . . . .	99
6.3.1	Analytisches Beispiel . . . . .	100
6.3.2	Numerisches Beispiel . . . . .	103
6.4	Verifikation der Methode . . . . .	105
6.4.1	Beispiel 1: Biegebalken, ideal plastisch . . . . .	106
6.4.2	Beispiel 2: Dünne Scheibe mit Loch – Verfestigung . . . . .	111
6.4.3	Beispiel 3: Dünne Scheibe mit Loch – Entfestigung . . . . .	117
6.4.4	Beispiel 4: Biegebalken, geometrisch und materiell nichtlinear, isotrope und kinematische Verfestigung . . . . .	121
6.5	Zusammenfassung . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Auswertung der Entwurfskriterien</b>	<b>125</b>
7.1	Sensitivität der Duktilität . . . . .	126
7.1.1	Selbstadjungierte Sensitivitätsanalyse der Duktilität . . . . .	126
7.1.2	Probleme bei der Maximierung der Duktilität . . . . .	129
7.2	Sensitivität des kritischen Lastfaktors . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Anwendungen in der Optimierung</b>	<b>133</b>
8.1	Beispiel 1: Maximierung der Duktilität, Balken . . . . .	133
8.2	Beispiel 2: Maximierung der Duktilität, Rahmen . . . . .	139
8.3	Beispiel 3: Gewichtsminimierung, VIERENDEEL-Träger . . . . .	147
8.4	Beispiel 4: Gewichtsminimierung, Stabilität . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Bewertung und Ausblick</b>	<b>155</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	155
9.2	Beurteilung des Verfahrens . . . . .	157
9.3	Ausblick . . . . .	158
<b>A</b>	<b>Umformungen für die konsistente Linearisierung</b>	<b>175</b>
<b>B</b>	<b>Konsistente Linearisierung für die <math>J_2</math>-Plastizität</b>	<b>181</b>
<b>C</b>	<b>Sensitivitätsanalyse für die <math>J_2</math>-Plastizität</b>	<b>187</b>
<b>D</b>	<b>Ableitung der elastoplastischen Materialmatrix</b>	<b>193</b>

# Bezeichnungen

Folgende Abkürzungen und Bezeichnungen werden in der vorliegenden Arbeit verwendet. Davon abweichende Definitionen werden an den entsprechenden Stellen vorgenommen.

## Abkürzungen

CAD	Computer Aided Design
CAGD	Computer Aided Geometric Design
CARAT	Computer Aided Research and Analysis Tool – FEM Programmsystem
EP	EDGEWORTH–PARETO Optimum
FEM	Methode der Finiten Elemente
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
MMA	Method of Moving Asymptotes – Methode der bewegten Asymptoten
OC	Optimalitätskriterienverfahren
MP	Mathematische Programmierung
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen

## Symbole

$(\hat{\cdot})$	Freie, diskrete Funktionsparameter; Knotenfreiwerte
$(\cdot)_{lv}$	Größen bei 'LastVorgabe'
$(\cdot)_{vv}$	Größen bei 'VerschiebungsVorgabe'
$(\cdot)_{add}$	additiver Anteil
$(\cdot)^h$	Näherungsfunktion
$(\cdot)^e$	Elementgrößen
$(\cdot)_{t+1}$	Größen zum Zeitpunkt bzw. Lastniveau $t + 1$
$(\cdot)_t$	Größen zum Zeitpunkt bzw. Lastniveau $t$
$(\cdot)_k$	Index zur Beschreibung des Optimierungsfortschritts
$(\cdot), \Delta(\cdot)$	inkrementelle Größen
$(\cdot)^*$	Lösung des Optimierungsproblems, Werte im Optimum
$\delta(\cdot)$	Variation

## Funktionsräume, Normen

$H^n$	SOBOLEV–Raum
$C^n$	Raum der $n$ –fach stetigen Ableitungen
$V$	Unterraum
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\ \cdot\ $	$L_2$ –Norm

## Gradientenoperatoren

$\nabla(\cdot)$	Ableitung nach dem Inkrement
$\nabla^{ex}(\cdot)$	beinhaltet bekannte Ableitungen
$\nabla_t(\cdot)$	Ableitung nach der Zeit
$\nabla_X(\cdot)$	Ableitung nach den Koordinaten der Referenzkonfiguration

$\nabla_x (\cdot)$	Ableitung nach den Koordinaten der Momentankonfiguration
$\nabla_\xi (\cdot)$	Ableitung nach den Koordinaten des Parameterraums
$\nabla_s (\cdot)$	totale Ableitung nach den Optimierungsvariablen
$\nabla_s^{ex} (\cdot)$	explizite (partielle) Ableitung nach den Optimierungsvariablen bzw. bekannte Ableitungen sind enthalten
$\nabla_s^{im} (\cdot)$	implizite Ableitung nach den Optimierungsvariablen
$\nabla_s^e (\cdot)$	Vielfaches der Ableitung einer Größe nach einer variablen Elementgröße (Skalierungsfeld)
$\bar{\nabla}_s^e (\cdot)$	Ableitung nach den variablen Elementgrößen
$\nabla_\sigma (\cdot)$	partielle Ableitung nach den Spannungen
$\nabla_q (\cdot)$	partielle Ableitung nach den internen Variablen

### Optimierungsgrößen

$L$	LAGRANGE-Funktion
$\tilde{L}$	modifizierte LAGRANGE-Funktion
$f$	Zielfunktion
$\tilde{f}$	modifizierte Zielfunktion, z.B. Zielfunktion des quadratischen Unterproblems
$\bar{f}$	modifizierte Zielfunktion für adjungierte Sensitivitätsanalyse
$\mathbf{h}$	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
$\mathbf{g}$	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen
$\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{g}}$	modifizierte Nebenbedingungen
$\boldsymbol{\eta}, \eta_j$	LAGRANGE-Multiplikatoren für die Gleichheitsnebenbedingungen
$\boldsymbol{\gamma}, \gamma_j$	LAGRANGE-Multiplikatoren für die Ungleichheitsnebenbedingungen
$w_j$	Wichtungsfaktoren
$\mathbf{H}$	HESSE-Matrix (Matrix der zweiten Ableitungen der LAGRANGE-Funktion nach den Optimierungsvariablen)
$s$	Entwurfslösung, z.B. für Geometriebeschreibung
$s^h$	approximierte Entwurfslösung
$\hat{\mathbf{s}}$	Vektor der freien Parameter bzw. der maximal möglichen Optimierungsvariablen
$\hat{\mathbf{s}}$	Vektor der Optimierungsvariablen
$\Delta \hat{\mathbf{s}}$	endliche Störung des Vektors der Optimierungsvariablen
$\hat{\mathbf{s}}_L, \hat{\mathbf{s}}_U$	Untere und obere Schranken der Optimierungsvariablen, Restriktionen
$n_f$	Anzahl der Zielfunktionen
$n_s$	Anzahl der Optimierungsvariablen
$n_h$	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
$n_g$	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
$\varepsilon$	Abbruchkriterium
$\alpha_k$	Skalierungsfaktor ('line search')

### Geometriebeschreibung

$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration
$\mathbf{X}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
$\chi$	Indikatorfunktion, Trägerfunktion (diskret)
$\hat{\chi}$	kontinuierliche Verteilungsfunktion
$\boldsymbol{\chi}_X$	Abbildungsvorschrift des Deformationsprozesses

$\chi_X^t$	Abbildungsvorschrift des Deformationsprozesses zum Zeitpunkt bzw. Lastniveau $t$
$\xi$	Ortsvektor im Parameterraum
$\Phi_i$	Gestaltfunktion, Formfunktion der Design-Elemente
$\Omega_x$	physikalischer Raum der Momentankonfiguration
$\Omega_X$	physikalischer Raum der Referenzkonfiguration
$\Omega_\xi$	Parameterraum
$,_x$	Randbeschreibung in der Momentankonfiguration
$,_X$	Randbeschreibung in der Referenzkonfiguration
$,_\xi$	Randbeschreibung im Parameterraum
$\chi_s$	Abbildungsvorschrift des Parameterraums in den physikalischen Raum
$\mathbf{J}$	JACOBI-Matrix
$ \mathbf{J} $	JACOBI-Determinante
$\tilde{\mathbf{J}}$	Metriktensor
$ \tilde{\mathbf{J}} $	Determinante des Metriktensors
$\mathbf{m}$	Normale auf die Oberfläche $,$
$\mathbf{L}$	Verknüpfungsmatrix, Linkingmatrix

### Kinematik

$\mathbf{u}$	Verschiebungen
$\mathbf{u}^h$	approximierte Verschiebungen
$\bar{\mathbf{u}}$	Verschiebungen, assoziiert zu $\mathbf{K}_T$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$	elastischer Anteil von $\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	plastischer Anteil von $\boldsymbol{\varepsilon}$
$\mathbf{E}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$\mathbf{E}^{el}$	elastischer Anteil von $\mathbf{E}$
$\mathbf{E}^{pl}$	plastischer Anteil von $\mathbf{E}$
$\mathbf{e}$	linearer Anteil und Anfangsverschiebungsanteil der Verzerrungen
$\bar{\mathbf{e}}$	quadratischer Anteil der Verzerrungen
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{L}_J$	Differentialoperator
$\mathbf{B}_L$	diskretisierter, konstanter Differentialoperator (auch als linearer Differentialoperator bezeichnet; wegen linearem Anteil der Verzerrungen)
$\tilde{\mathbf{B}}_L$	alternative Anordnung von $\mathbf{B}_L$
$\mathbf{B}_u$	diskretisierter, von den Verschiebungen zum Zeitpunkt $t$ abhängiger Differentialoperator
$\mathbf{B}_q$	diskretisierter, von den inkrementellen Verschiebungen abhängiger Differentialoperator

### Spannungen, äußere Belastung

$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\mathbf{S}$	zweiter PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bzw. -matrix
$\tilde{\mathbf{S}}$	alternative Anordnung von $\mathbf{S}$
$\boldsymbol{\eta}$	relative Spannungen
$\mathbf{b}$	Volumenlasten

$t$	Oberflächenlasten
$\bar{b}$	normierte Volumenlasten
$\bar{t}$	normierte Oberflächenlasten
$\mathbf{R}^i$	innere Kräfte
$\mathbf{R}$	Knotenkräfte
$\bar{\mathbf{R}}$	normierte Knotenkräfte
$\lambda$	Laststeigerungsfaktor
$\tilde{\lambda}$	Laststeigerungsfaktor für ein vorgegebenes Lastniveau
$\lambda^{act}$	Laststeigerungsfaktor des aktuellen Lastniveaus (z.B. Startpunkt einer Eigenwertanalyse)
$\lambda^{end}$	Laststeigerungsfaktor am Ende des Lastpfades
$\lambda_c$	kritischer Laststeigerungsfaktor
$J_2$	zweite Invariante des Spannungsdeviators
$\tilde{\lambda}_i$	Eigenwert

### Arbeitsausdrücke

$W$	Arbeit
$W^{int}, W^{ext}$	innere (interne), äußere (externe) Arbeit
$\delta W$	virtuelle Arbeit
$\delta W^{int}, \delta W^{ext}$	virtuelle innere, äußere Arbeit

### Steifigkeitsmatrizen

$\mathbf{K}_e$	geometrisch linearer Anteil der Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{el}$	rein elastischer Anteil von $\mathbf{K}_e$
$\mathbf{K}_{pl}$	rein plastischer Anteil von $\mathbf{K}_e$
$\mathbf{K}_u$	Anfangsverschiebungsmatrix
$\mathbf{K}_g$	Anfangsspannungsmatrix, geometrische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_q$	Steifigkeitsmatrix der inkrementellen Verschiebungen (vgl. $\mathbf{K}_u$ )
$\mathbf{K}_T$	tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_S$	Sekantensteifigkeitsmatrix

### Werkstoff, Material

$\mathbf{C}$	elastischer Werkstofftensor
$\hat{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{C}}$	modifizierte, elastische Werkstofftensoren
$\mathbf{C}_{cont}^{ep}$	elastoplastischer Werkstofftensor
$\mathbf{C}^{ep}$	konsistenter elastoplastischer Werkstofftensor
$\mathbf{C}_{lin}^{ep}$	elastoplastischer Werkstofftensor bei linearer Ver- bzw. Entfestigung
$\bar{\nu}$	Nenner des elastoplastischen Werkstofftensors
$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	POISSON-Zahl, Querdehnzahl
$E_h$	Verfestigungsmodul im Raum der totalen Verzerrungen
$H$	Verfestigungsmodul im Raum der plastischen Verzerrungen
$H', K'$	modifizierter Verfestigungsmodul $H$ nach der PRAGER-ZIEGLER-Regel
$\Phi$	Fließbedingung, Fließfunktion
$\mathbf{n}$	Normale auf die Fließfläche



$\sigma_y$	Fließspannung
$K, \bar{\sigma}$	modifizierte Fließspannung
$\mathbf{q}$	Vektor der internen Variablen
$\alpha$	skalarwertige interne Variable (isotrope Ver- bzw. Entfestigung)
$\beta$	tensor- bzw. vektorwertige interne Variable (kinematische Ver- bzw. Entfestigung), 'back stresses'
$\Theta$	Steuerungsparameter der Verfestigungsarten (PRAGER-ZIEGLER-Regel)
$\mathbf{r}$	Fließvektor
$\mathbf{h}$	Ver- bzw. Entfestigungsgesetz
$\gamma$	plastischer Multiplikator
$G_f$	Bruchenergie
$g_f$	elementbezogene Bruchenergie
$h$	charakteristische Länge
$\rho$	Dichte, Porosität
$\rho_0$	Referenzdichte



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Anforderungen an Konstruktionen beschränkten sich in früherer Zeit hauptsächlich auf deren technische Eigenschaften und Funktionalität. Durch das wachsende Bewußtsein in der Bevölkerung in bezug auf Wirtschaftlichkeit und Umweltverträglichkeit, aber auch in bezug auf die Machbarkeit bzw. Ausführbarkeit von Tragstrukturen, sind diese Anforderungen zusätzlich schon vor bzw. während des Konstruktionsprozesses beim Entwurf zu berücksichtigen, ohne jedoch andere Eigenschaften negativ zu beeinflussen. Allerdings dürfen diese zusätzlich zu berücksichtigenden Faktoren den Entwicklungsprozeß aus wirtschaftlichen Gründen nicht verlangsamen. Bei Konstruktionen, die nicht weiter verbessert werden können oder sollen, steht besonders eine schnellere Entwicklungs- bzw. Herstellungszeit zur Reduktion der Kosten im Vordergrund, ohne Qualitätsverluste hinnehmen zu müssen.

Die Wirtschaftlichkeit einer Konstruktion wird durch verschiedene Einflußfaktoren bestimmt. Neben der Entwicklungsphase und dem Herstellungsprozeß selbst sind dies vor allem die Kosten und aufzubringende Mengen der verwendeten Materialien, die Unterhaltung und der Betrieb. Während die Wirtschaftlichkeit des Herstellungsprozesses vom reibungslosen Konstruktionsablauf und einer gut durchdachten Koordination abhängig ist, spielt die Art der Konstruktion, d.h. die verwendeten Materialien und das Prinzip der Lastabtragung, für die Wirtschaftlichkeit der Unterhaltung und den Betrieb eine entscheidende Rolle. Die Einsparung von Ressourcen infolge einer effektiven Ausnutzung der verwendeten Materialien wirkt sich direkt auf die Kosten aus und kann für die technische Machbarkeit einer Tragkonstruktion von entscheidender Bedeutung sein.

Die optimale Ausnutzung von Materialien, wie dies in der Natur vorbildlich, beispielsweise beim Wachstum von Pflanzen oder auch von Knochen, demonstriert wird, ist dann gegeben, wenn die Form der 'Konstruktion' dem Kraftfluß infolge einer Beanspruchung optimal angepaßt ist. Diese optimale Form wird von den Eigenschaften des verwendeten Materials und den gegebenen Randbedingungen (Lasten, Lagerbedingungen) bestimmt, d.h. das Wechselspiel zwischen dem mechanischen Verhalten eines Tragwerks und dessen Geometrie bzw. Form wird durch die Gesetze der Mechanik beschrieben.

Das übliche ingenieurmäßige Vorgehen ist die Bestimmung der inneren Beanspruchung infolge einer äußeren Belastung eines gegebenen, z.B. beruhend auf der Erfahrung des Konstrukteurs, oder auch 'willkürlich' angenommenen Tragwerks. Die Vorgabe der zulässigen Beanspruchung in Form von Spannungen, Verzerrungen oder Verschiebungen und die Er-

mittlung der daran (optimal) angepaßten Geometrie stellt die Umkehrung der üblichen Vorgehensweise dar. Dieses Umkehrprinzip, das dem natürlichen Wachstum zugrunde liegt, wird für den Einsatz zum Entwurf von Tragkonstruktionen auch als Strukturoptimierung bezeichnet.

Die Anfänge der Strukturoptimierung gehen bereits auf GALILEO GALILEI zurück, der 1638 das Gewicht eines Kragbalkens minimierte. Durch die Anpassung des Querschnittsverlaufs des Kragbalkens an die Biegebeanspruchung infolge einer äußeren Belastung läßt sich das Gewicht erheblich reduzieren (SZABÓ [221]). Der Beginn der Entwicklung der mathematischen Optimierung wurde jedoch erst durch die Einführung der Differential- und Integralrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ gegen Ende des 17. Jahrhunderts ermöglicht. Optimalität einer Funktion ist durch deren Ableitung (Differentiation) nach den freien Parametern definiert.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen, entwickelte sich die Variationsrechnung, deren Entstehung BERNOULLI, EULER und LAGRANGE während des 17. und 18. Jahrhunderts zugeschrieben wird, was den Beginn der mathematischen Optimierung darstellt. Allerdings wird erst durch die Arbeiten von MAXWELL um 1870 die mathematische Optimierung als eine Methode zur Generierung von Tragwerken eingesetzt und von MICHELL anfangs des 20. Jahrhunderts fortgeführt (vgl. WIEDEMANN [247]). MICHELL ermittelt in seinen Arbeiten das Gewichtsminimum für eine vorgegebene, maximal zulässige Spannung für einen Lastfall. Die daraus entstehenden optimalen Tragwerke sind jedoch als 'Spezialtragwerke' zu verstehen, da sie aus einem unendlich feinen Netz von orthogonalen Stäben bestehen, das an den Verläufen der Trajektorien orientiert ist. Allerdings gelten diese Tragwerke bis heute als Referenzlösungen.

Jedoch lassen sich nur wenige strukturmechanische Probleme in analytischer Form lösen. Zur Erfassung beliebig komplexer Problemstellungen ist daher der Einsatz von Approximationstechniken zur Beschreibung der Geometrie und zur Bestimmung des Strukturverhaltens erforderlich. In den Ingenieurwissenschaften hat sich zur Ermittlung der Strukturantwort die Methode der Finiten Elemente, die diese mittels lokaler RITZ-Ansätze approximiert, bewährt. Durch die etwa zeitgleiche Entwicklung von Computern entstand eine nahezu ideale Verbindung, große strukturmechanische Probleme numerisch zu behandeln. Eine wegweisende Arbeit für den Einsatz dieser numerischen Verfahren in der Strukturoptimierung wurde 1960 von SCHMIT [197] vorgestellt. Allerdings ist die Behandlung von hochgradig komplexen und nichtlinearen Optimierungsproblemen erst durch die rasante Weiterentwicklung in der Computertechnologie möglich geworden. Immer ausgefeiltere Methoden in bezug auf mathematische Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme, computerorientierte Konstruktionsverfahren zur geometrischen Beschreibung von Tragwerken, wie beispielsweise das 'Computer Aided Design (CAD)', aber auch zuverlässige Methoden zur approximativen Bestimmung des Strukturverhaltens, können dadurch für den Optimierungsprozeß eingesetzt werden.

Die Weiterentwicklung der Approximationsverfahren, wie z.B. das der Methode der Finiten Elemente, in bezug auf eine realistischere Erfassung des tatsächlichen mechanischen Verhaltens von Tragwerken stellt einen Forschungsschwerpunkt dar. Damit werden zur Steigerung der Zuverlässigkeit und Aussagekraft numerischer Berechnungen nichtlineare Effekte berücksichtigt. Dies sind beispielsweise die Erfassung von geometrischer Nichtlinearität (z.B. große Verschiebungen, große Verzerrungen und Stabilitätsphänomene) und/oder materieller Nichtlinearität, wie z.B. Plastizität oder Schädigung. In diesem Zusammenhang sind auch die (nichtlineare) Dynamik und Kontaktprobleme zu nennen. Ein

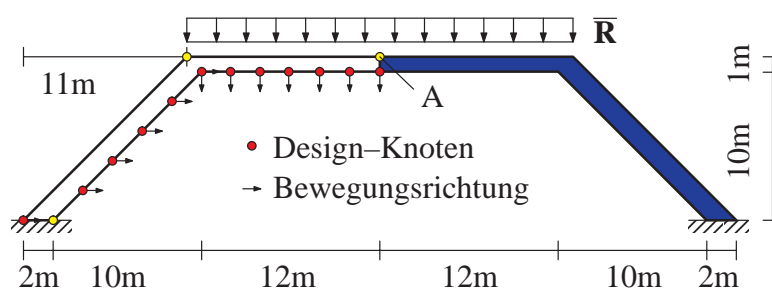
weiterer Faktor zur realistischen Beschreibung der Strukturantwort stellt die Erfassung von Schwankungen der Material-, der Geometrie- und auch der Beanspruchungsgrößen sowie der Lagerbedingungen dar, was auch als Stochastik bezeichnet wird. Unter diese Kategorie fallen beispielsweise geometrische Imperfektionen und statistisch ermittelte Last- und Materialdaten, die eine gewisse Streubreite aufweisen.

Für die Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte in der Strukturoptimierung sind die numerischen Verfahren entsprechend aufzubereiten, um die für die Optimierung erforderlichen Gradienteninformationen mittels der Sensitivitätsanalyse ermitteln zu können.

Der Entwurf von Tragwerken in der Luft- und Raumfahrt, im Automobilbau, im Maschinenbau oder auch im Bauwesen erfordert in bezug auf Wirtschaftlichkeit, Zuverlässigkeit und Sicherheit die Einbeziehung möglichst vieler der genannten Einflußfaktoren. Aus diesem Grund erscheint es für den Einsatz der numerischen Verfahren der Strukturoptimierung als Entwurfshilfe unumgänglich, diese Verfahren sukzessive zu erweitern, um den obengenannten Anforderungen Rechnung tragen zu können. Außerdem sind Tragwerke, die mit Hilfe von Optimierungsverfahren generiert werden, sehr häufig, wie im Fall der sogenannten MICHELL-Strukturen (vgl. MICHELL [146]), hochspezialisierte Tragwerke. D.h. sie stellen ein Optimum bezüglich der gewählten Bedingungen, wie z.B. die äußere Belastung und das zugrunde liegende mechanische Modell, aber auch der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung von Geometrie und Strukturantwort, dar. Je einfacher das mechanische Modell für die Strukturanalyse und den Optimierungsprozeß gewählt wird, desto spezialisierter, aber oftmals auch desto unrealistischer, ist das generierte Tragwerk. Diese Problematik ist beispielsweise in Abbildung 1.1 verdeutlicht.

Ziel dieses Formoptimierungsbeispiels ist es, die Duktilität des Tragwerks, d.h. das Energieabsorptionsvermögen, bei konstant vorgegebener Masse zu maximieren. Basierend auf einem sowohl geometrisch als auch materiell linearen mechanischen Modell, ergibt sich die in Abbildung 1.1 dargestellte, optimal an die definierten Bedingungen angepaßte Form. Aufgrund der Gleichstreckenlast paßt sich die Form des Riegels an den Momentenverlauf an, allerdings werden durch den Optimierungsprozeß sehr dünne Stiele sowie Auflager

Ausgangsstruktur:



Materialdaten:

$$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$E_h = 0.0001 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_y = 2.4 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$d = 0.1 \text{ m}$$

Last:

$$\mathbf{R}_{t+1} = \lambda_{t+1} \bar{\mathbf{R}}$$

Zielfunktion:

Duktilität

Nebenbedingung:

konstante Masse

Optimierte Struktur:

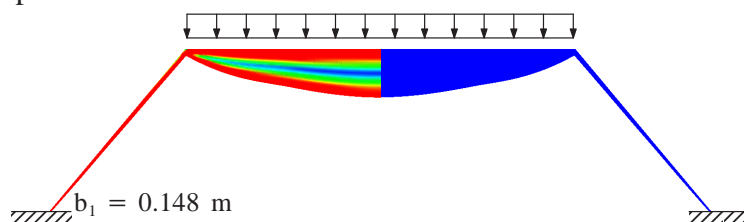


Abbildung 1.1: Formoptimierung eines Rahmentragwerks

sehr geringer Breite ( $b_1 = 0.148 \text{ m}$ ) erzeugt. Dies wird zu Stabilitätsproblemen und zu einer Überschreitung der aufnehmbaren Spannungen führen, wenn das reale Strukturverhalten berücksichtigt wird. Wie sich die Erweiterung bzw. Anpassung des mechanischen Modells an das tatsächliche Strukturverhalten auf das Optimierungsergebnis auswirken kann, wird im Laufe der vorliegenden Arbeit diskutiert.

Der Konstruktionsprozeß von Tragwerken muß in heutiger Zeit vor allem wirtschaftlichen Aspekten Rechnung tragen, ohne jedoch die Sicherheit der Tragkonstruktionen außer acht zu lassen. Aus diesem Grund ist es notwendig, daß die eingesetzten, numerischen Methoden, wie beispielsweise die Strukturoptimierung, diesen Anforderungen entsprechen bzw. dahingehend verbessert werden, um das tatsächliche Strukturverhalten möglichst exakt abbilden zu können.

Allerdings können durch die mathematisch-mechanisch orientierten Methoden der Strukturoptimierung nicht alle Einflußfaktoren, die letztendlich für die Gestalt bzw. Formgebung einer Tragkonstruktion maßgebend sind, erfaßt werden. Diesbezüglich sind beispielsweise die Herstellungs- und Betriebskosten oder auch die Entsorgungskosten, die beim Recycling anfallen, zu nennen. Obwohl diese Einflußfaktoren eventuell approximativ in der Optimierung berücksichtigt werden können, so ist dies bei der Ästhetik einer Konstruktion nahezu unmöglich.

## 1.2 Zielsetzung

Die realistischere Erfassung des mechanischen Tragverhaltens schon während des Konstruktionsprozesses, für den beispielsweise die Methoden der Strukturoptimierung eingesetzt werden können, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Eine abstrakte Methode zur Behandlung und Lösung beliebiger Optimierungsprobleme ist die Mathematische Programmierung. Diese wird in Gradientenverfahren und gradientenfreie Verfahren eingeteilt. In der vorliegenden Arbeit kommen aus Effizienzgründen und aufgrund der großen Variabilität ausschließlich Gradientenmethoden zum Einsatz. Die Ermittlung der hierfür notwendigen Gradienteninformationen wird mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse durchgeführt, die im Optimierungsprozeß infolge ihrer theoretischen und numerischen Komplexität bei nichtlinearen Strukturproblemen eine zentrale Rolle einnimmt.

Die Berechnung von Sensitivitäten bei nichtlinearem Strukturverhalten erfordert besonders bei geschichtsabhängigen Problemen, wie beispielsweise der Elastoplastizität, spezielle Strategien. Wie die Bestimmung der Strukturantwort, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit der Methode der Finiten Elemente ermittelt wird, ist die Sensitivitätsanalyse inkrementell, d.h. nach jedem Gleichgewichtszustand durchzuführen. Um die Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse bei nichtlinearem Strukturverhalten garantieren zu können, ist die Orientierung der Herleitung der Sensitivitätsanalyse am Lösungsalgorithmus für die Strukturantwort notwendig, was zunächst deren Aufarbeitung erfordert.

Daher ist das Ziel dieser Arbeit die Herleitung und numerische Umsetzung eines robusten, effizienten und allgemeingültigen, zur Lösungsstrategie für die Strukturantwort konsistenten Algorithmus zur Bestimmung der für die Optimierung notwendigen Gradienteninformationen. Für geschichtsabhängige Probleme, bei denen die Sensitivitätsanalyse inkrementell durchzuführen ist, eignet sich besonders gut die variationelle, direkte Vorgehensweise, was im Laufe der Arbeit noch vorgestellt und begründet wird. Diese variationelle,

direkte Sensitivitätsanalyse empfiehlt sich außerdem aufgrund ihrer großen Variabilität in idealer Weise zur Bestimmung der Ableitungen beliebiger Entwurfskriterien. Außerdem wird das spezielle Vorgehen bei elastoplastischem Materialverhalten mit Ver- und Entfestigung aufgezeigt und auf den Einfluß der Lösungsmethode bei der Strukturanalyse auf die Sensitivitätsanalyse eingegangen. Zudem werden durch die vorgestellte Formulierung geometrisch nichtlineare Effekte berücksichtigt.

Die exakte Berechnung der Ableitung von Entwurfskriterien, wie beispielsweise der Duktilität oder des kritischen Lastfaktors, die mit anderen Methoden oftmals nur approximativ durchgeführt werden kann, wird demonstriert. Abschließend wird anhand ausgewählter Beispiele der Strukturoptimierung die Einsetzbarkeit der entwickelten Sensitivitätsanalyse bei materiell und geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten aufgezeigt. Außerdem wird mit deren Hilfe die Notwendigkeit der Berücksichtigung von strukturellen Nichtlinearitäten im Optimierungsprozeß zur Generierung zuverlässiger Konstruktionen verdeutlicht.

**Anmerkung:**

Die numerische Umsetzung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Algorithmen auf der Basis der entsprechenden theoretischen Hintergründe ist in dem FE-Programmsystem CARAT [46] verwirklicht. Dieses wurde bzw. wird am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart unter besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Strukturoptimierung entwickelt (BLETZINGER [30], [33], KIMMICH [106], REITINGER [180], MAUTE [136]).

## 1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

In Kapitel 2 werden zunächst die zur effizienten, numerischen Lösung von Optimierungsaufgaben erforderlichen Grundlagen bereitgestellt. Dabei steht besonders die Integration der verschiedenen Teildisziplinen, wie mathematischer Optimierungsalgorithmen (z.B. SQP), computerorientierter Konstruktionsverfahren (z.B. CAD) und Analyseverfahren (z.B. FEM) zur Ermittlung der Strukturantwort, aber auch deren Ableitung in ein Gesamtkonzept, im Vordergrund.

Die Behandlung von Form- und Topologieoptimierungsproblemen und die dafür notwendige geometrische Modellierung und Definition der Optimierungsvariablen wird in Kapitel 3 beschrieben. Im Fall der Formoptimierung sind diese Variablen geometrische Größen wie Querschnittsabmessungen, aber vor allem die Koordinaten von Knoten formbeschreibender Funktionen. Bei der Topologieoptimierung werden sowohl geometrische Größen auf der Mikroebene als auch Materialgrößen auf der Makroebene als Optimierungsvariablen definiert.

Die Beschreibung der Strukturanalyse erfolgt in Kapitel 4. Neben der Definition und phänomenologischen Beschreibung materiell und geometrisch nichtlinearer Strukturprobleme, wie Plastizität mit Ver- und Entfestigung, großer Verformungen und Stabilität, wird auf die numerische Behandlung dieser Randwertprobleme mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente eingegangen. Die dort getroffenen Definitionen bilden die Grundlagen der in den Kapiteln 5 und 6 diskutierten Methoden zur Sensitivitätsanalyse.

In Kapitel 5 werden die prinzipiell unterschiedlichen Methoden zur Sensitivitätsanalyse vorgestellt sowie Vor- und Nachteile für deren Anwendung auf verschiedene strukturmechanische Probleme diskutiert. Eine geeignete Wahl ist besonders für geschichtsabhängige

Probleme und die Behandlung beliebiger Optimierungsaufgaben von entscheidender Bedeutung.

Die analytische Berechnung der Sensitivitäten nichtlinearer Strukturprobleme wird in Kapitel 6 diskutiert. Dabei wird besonders auf die inkrementelle Vorgehensweise zur Behandlung geschichtsabhängiger Probleme, wie der Elastoplastizität bei großen Verformungen, jedoch kleinen Verzerrungen, eingegangen. Um zuverlässige Ergebnisse bei der analytischen Sensitivitätsanalyse zu erhalten, ist eine Formulierung konsistent zur Lösungsmethode zur Ermittlung der Strukturantwort zwingend erforderlich. Je nachdem, ob ver- oder entfestigendes Materialverhalten bzw. welche Art von Optimierungsvariablen definiert ist, ist die Ableitung der Materialparameter entsprechend zu bestimmen. Die numerische Umsetzung im Rahmen der Methode der Finiten Elemente wird ausführlich beschrieben. Die Verifikation der hergeleiteten Theorie und der zugehörigen algorithmischen Umsetzung zur analytischen Sensitivitätsanalyse wird anhand verschiedener strukturelle Beispiele durchgeführt. Zu Vergleichszwecken werden u.a. Beispiele aus der Literatur herangezogen. Außerdem werden Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Sensitivitäten aufgezeigt sowie deren Behandlung beschrieben.

Aufgrund der großen Flexibilität des vorgestellten Algorithmus zur Berechnung der Sensitivität der Strukturantwort können die Ableitungen verschiedenster Entwurfskriterien zur Lösung von Optimierungsaufgaben mittels gradientenbasierter Methoden gebildet werden. Dies ist in Kapitel 7 beschrieben. Dabei wird besonders auf die Ermittlung der Ableitung des kritischen Lastfaktors und der Duktilität eingegangen.

Die Anwendung der vorgestellten Verfahren zur Problembeschreibung und deren Approximation (Geometriemodell), zur Beschreibung der Geometrie- bzw. Materialvariation (Optimierungsmodell) sowie zur Struktur- und Sensitivitätsanalyse (Analysemodell) auf Optimierungsprobleme wird in Kapitel 8 anhand ausgewählter Beispiele der Formoptimierung diskutiert. Die Maximierung der Duktilität oder die Minimierung des Gewichts unter Berücksichtigung verschiedener Nebenbedingungen sind dabei mögliche Optimierungsziele.

Anschließend werden in Kapitel 9 die wichtigsten Ergebnisse und Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefaßt. Es folgt deren Bewertung sowie ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungen.

Die Herleitung der Methoden in den Kapiteln 4, 6 und 7 erfolgt für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall und beliebige Plastizitätsmodelle. Im Anhang wird auf die erforderlichen Umformungen bei der konsistenten Linearisierung der konstitutiven Annahmen, die notwendigen Modifikationen der Herleitungen und Algorithmen für den Spezialfall des ebenen Spannungszustandes ('plane stress') und der VON MISES-Fließbedingung mit linearer, isotroper und kinematischer Ver- und Entfestigung eingegangen. Anhang A beinhaltet die Umformungen und Definitionen für die Ermittlung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente. Anhang B beschäftigt sich mit der Herleitung der für den obengenannten Spezialfall konsistenten, elastoplastischen Materialtangente. Die entsprechenden Modifikationen für die variationelle, direkte Sensitivitätsanalyse sind in Anhang C zu finden, und in Anhang D ist die analytische Ableitung der konsistenten, elastoplastischen Materialtangente nach den Optimierungsvariablen beschrieben.



# Kapitel 2

## Grundelemente und Gesamtkonzept der Strukturoptimierung

### 2.1 Einleitung

Die Strukturoptimierung hat zur Aufgabe, Tragwerke bezüglich eines oder mehrerer definierter Entwurfskriterien zu verbessern. Dabei kommen eine Vielzahl mathematisch formulierbarer, zumeist mechanisch aber auch geometrisch orientierter Entwurfskriterien in Frage. Diese, auch als Zielfunktionen bezeichnet, sind beispielsweise die Maximierung der Steifigkeit oder Duktilität, ein möglichst ausgeglichener Spannungszustand oder auch die Minimierung des Strukturvolumens bzw. des Strukturgewichts. Letztere zählt man zu den geometrischen Entwurfskriterien. Das Gewicht eines Tragwerks ist genau dann minimal, wenn es null ist; abgesehen von negativen und damit unphysikalischen Werten. Diese, aus mathematischer Sicht richtige Aussage, ist allerdings für realistische Problemstellungen ungeeignet, da äußere Lasten nicht abgetragen werden können. Dies führt zu der Einführung von sogenannten Nebenbedingungen, durch die funktionsbedingte bzw. mechanische Aspekte, wie beispielsweise maximal zulässige Spannungen oder Verschiebungen, in die Strukturoptimierung eingebracht werden können. Analog lassen sich auch geometrisch orientierte Nebenbedingungen, wie beispielsweise die Erhaltung des Strukturvolumens, motivieren. Diese Nebenbedingung wird häufig bei der Maximierung der Steifigkeit, was im linearen Fall der Minimierung der inneren Formänderungsenergie entspricht, eingesetzt, um die Möglichkeit des unbegrenzten Massenzuwachses zur Steigerung der Zielfunktion zu verhindern.

Dies ist jedoch lediglich als Motivation der Notwendigkeit von Nebenbedingungen zu verstehen. Eine Kombination von mechanisch orientierten Zielfunktionen und Nebenbedingungen ist ebenfalls denkbar. Normalerweise wird das statische Gleichgewicht a priori erfüllt. Eine andere Möglichkeit ist die Berücksichtigung des Gleichgewichts als Gleichheitsnebenbedingung im Optimierungsprozeß.

Je nachdem, auf welcher Entwurfsebene das zuvor beschriebene Optimierungsproblem definiert ist, spricht man von Topologie-, Form-, Bemessungs- bzw. Querschnitts- und Materialoptimierung.

Mit Hilfe der Topologieoptimierung soll der konzeptionelle Aufbau eines Tragwerks, also die Lage, die Anordnung und die Anzahl von Tragwerkselementen ermittelt werden; d.h. die Nachbarschaftsbeziehungen der Materiepunkte werden bestimmt. Formoptimierungsprobleme starten von einem topologisch bereits bekannten Tragwerk. Es wer-

den lediglich die äußeren und inneren Begrenzungskanten bzw. -flächen durch die Optimierung verändert. Ein Spezialfall der Formoptimierung stellt die Bemessungs- bzw. Querschnittsoptimierung dar. Kennzeichnend für diese Art der Optimierung ist eine direkte (explizite) Abhängigkeit von der definierten variablen Größe bzw. Abmessung und dem mechanischen Verhalten der Struktur. Unter der Annahme von linear elastischem Strukturverhalten ist die Steifigkeit eines Zugstabes proportional zu dessen Querschnittsfläche bzw. eine kubische Funktion bezüglich der Balkenhöhe für eine Biegebeanspruchung. Als Beispiel für eine Materialoptimierung kann die optimale Anordnung von Fasern in einer Matrix genannt werden. Dabei bleiben Topologie, Form und Querschnittsabmessungen unverändert.

Diese Einteilung zeigt den hierarchischen Charakter der verschiedenen Optimierungsaufgaben, was in Abbildung 2.1 nochmals zusammengefaßt und verdeutlicht wird.

Bei den obengenannten Optimierungsaufgaben handelt es sich um gemischte Variationsprobleme mit oder ohne Nebenbedingungen. In den meisten Fällen können derartige Probleme nicht geschlossen gelöst werden. Nur für wenige Fälle existieren geschlossene, kontinuierliche Lösungen für die geometriebeschreibende Entwurfslösung  $s(\mathbf{x})$ . Analoges gilt auch für die Strukturantwort (vgl. Kapitel 4).

Um Optimierungsprobleme numerisch effizient lösen zu können, bedarf es einer approximativen Beschreibung der räumlichen Gestalt (Topologie, Form, Querschnittsabmessung) des zu optimierenden Tragwerks. Dies geschieht im sogenannten Entwurfsmodell mit Hilfe von Näherungsfunktionen  $s^h(\mathbf{x})$ . Für diese gilt der folgende Zusammenhang:

$$s(\mathbf{x}) \approx s^h(\mathbf{x}) = s^h(\mathbf{x}, \underline{\hat{s}}) \quad ; \quad s(\mathbf{x}) \in V_s \subseteq H_0^1, \quad s^h(\mathbf{x}, \underline{\hat{s}}) \in V_s^h \subseteq V_s \quad (2.1)$$

Dabei beinhaltet der Vektor  $\underline{\hat{s}}$  die freien (diskreten) Parameter der Näherungsfunktionen  $s^h$  für die Geometriebeschreibung. „ $\hat{\cdot}$ “ kennzeichnet im weiteren Verlauf diskrete Funktionsparameter. Die Länge des Vektors  $\underline{\hat{s}}$  ist die maximal mögliche Anzahl von Optimierungsvariablen.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  beschreibt eindeutig den Ort, z.B. in einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem.

Das mathematisch abstrakte Optimierungsproblem wird mit Hilfe des Optimierungsmodells aufgestellt. Neben der Definition der Zielfunktion  $f(s)$  und der Nebenbedingungen  $\mathbf{h}(s)$ ,  $\mathbf{g}(s)$  werden die Optimierungsvariablen  $\underline{\hat{s}}$  aus dem Satz der möglichen Optimierungsvariablen  $\underline{\hat{s}}$  bestimmt. Es ergibt sich in der Regel ein hochgradig in  $\underline{\hat{s}}$  nichtlineares System

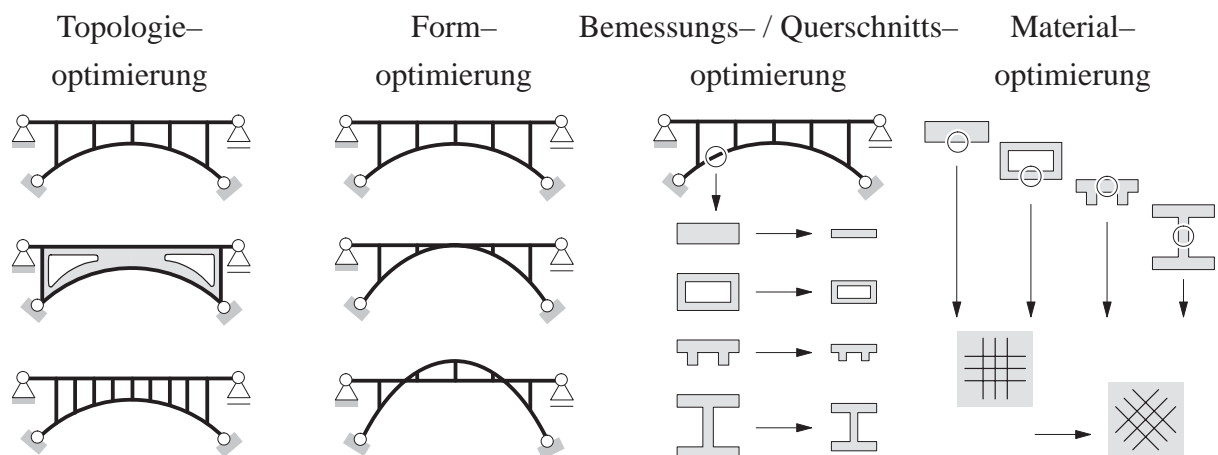


Abbildung 2.1: Disziplinen in der Strukturoptimierung (aus RAMM ET AL. [176])

von Gleichungen und Ungleichungen, das iterativ zu lösen ist. Dafür stehen zahlreiche mathematische Verfahren, auf die an späterer Stelle noch genauer eingegangen wird, zur Verfügung.

Die im Optimierungsmodell definierten Funktionen sind z.T. von der Strukturantwort abhängig (mechanisch orientierte Entwurfskriterien). Da die Strukturantwort, wie bereits angedeutet, für die wenigsten strukturmechanischen Probleme geschlossen ermittelt werden kann, wird diese approximativ bestimmt. Häufig wird diese dabei mit der Methode der Finiten Elemente, auf die in Kapitel 4 näher eingegangen wird, bestimmt. Für die Strukturantwort gilt dann entsprechend:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) \quad ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in V_u \subseteq H_0^1, \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) \in V_u^h \subseteq V_u \quad (2.2)$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  bezeichnet die freien (diskreten) Parameter der Näherungsfunktionen für die Strukturantwort, hier repräsentativ am Beispiel der Verschiebungen aufgezeigt. Die Ermittlung der Strukturantwort und deren Sensitivität erfolgt mit Hilfe des Analysemodells. Dieses baut auf dem Entwurfsmodell auf und berücksichtigt die mechanischen Aspekte. Nachfolgend wird der prinzipielle Ablauf einer Optimierung, basierend auf den vorgestellten drei Modellen, erläutert. Als erster Schritt erfolgt eine Strukturanalyse des im Entwurfsmodell diskretisierten Ausgangsentwurfs mittels des Analysemodells. Basierend auf den Ergebnissen der Strukturanalyse, erfolgt die Auswertung der Zielfunktion und Nebenbedingungen im Optimierungsmodell zur Beurteilung der Qualität des aktuellen Entwurfs. Neben diesen Informationen ist für gradientenbasierte, mathematische Optimierungsverfahren zusätzlich eine Aussage über die Änderung der Strukturantwort bei einer Variation der Optimierungsvariablen  $\hat{s}_i$  (mit  $\hat{s}_i \in \hat{\mathbf{s}}, i = 1, \dots, n_s$ ), wobei  $n_s$  die Anzahl der Optimierungsvariablen darstellt, zu treffen. Diese wird mittels der Sensitivitätsanalyse, der in der vorliegenden Arbeit besondere Beachtung geschenkt wird, bestimmt. Damit läßt sich nun unter Zuhilfenahme von Optimierungsstrategien ein Satz modifizierter Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  ermitteln, die dem optimalen Entwurf näherkommen. Der verbesserte Entwurf wird analog zum Ausgangsentwurf analysiert und mit Hilfe des beschriebenen Vorgehens

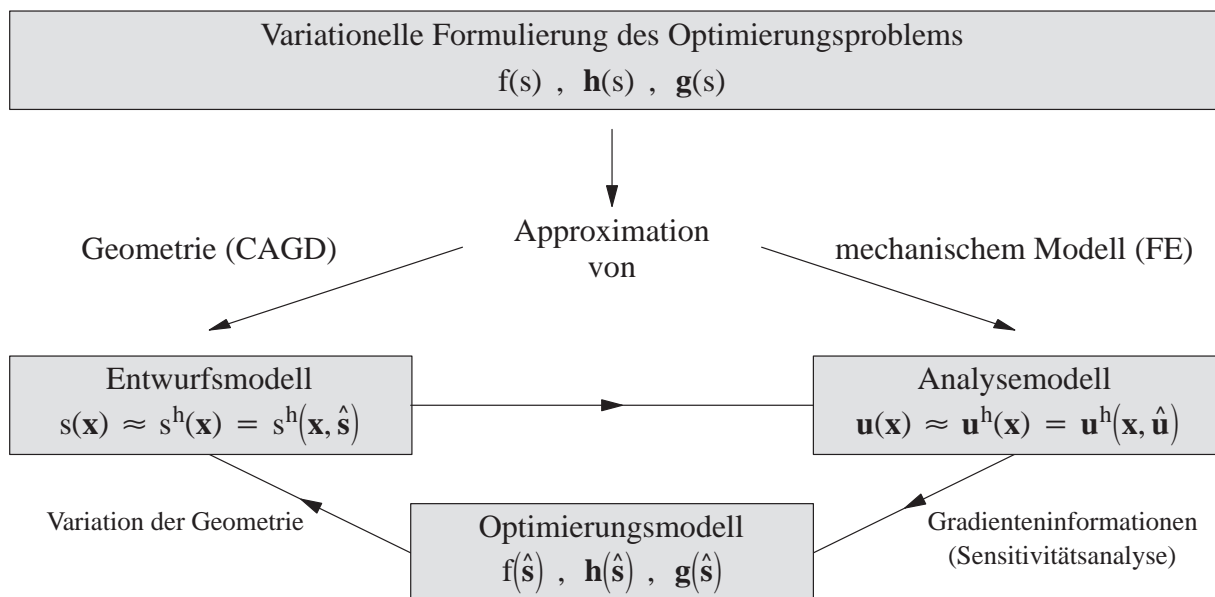


Abbildung 2.2: Modellierung des Optimierungsproblems

erneut verbessert. Diese iterative Prozedur, die aufgrund des in den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  nichtlinearen Optimierungsproblems notwendig ist, wird so lange durchlaufen, bis eine ausreichende Konvergenz für die Lösung erreicht ist. In BARTHOLD [10] wird der Ablauf einer Optimierung sehr treffend mit den Worten 'Konstruieren – Berechnen – Bewerten – Verbessern' beschrieben. Die Konstruktion erfolgt mit Hilfe des Entwurfsmodells, die Berechnung geschieht im Analysemodell, und mittels des Optimierungsmodells wird das Tragwerk durch Auswerten der Entwurfskriterien bewertet und ein verbessertes Tragwerk erzeugt.

Zur effizienten Behandlung von Strukturoptimierungsproblemen sind die drei beschriebenen Modelle zu einem Gesamtoptimierungsmodell zusammenzufassen, weshalb beispielsweise in ESCHENAUER [64] vom Drei-Säulen-Konzept gesprochen wird (vgl. Abbildung 2.2). Aufgrund dieser Modularität und Flexibilität können mit diesem Werkzeug verschiedenste Optimierungsaufgaben bewältigt werden, da die jeweiligen Modelle leicht gegen funktionell entsprechende Module ausgetauscht und die Auswahl an Zielfunktionen und Nebenbedingungen beliebig erweitert werden können.

Die Leistungsfähigkeit des beschriebenen Gesamtkonzepts ist beispielsweise in den Arbeiten von ESCHENAUER [68], BLETZINGER [30], BLETZINGER ET AL. [33], KIMMICH [106], KIMMICH ET AL. [107], MAHNKEN [130], BARTHOLD [10] oder MAUTE [136] beschrieben.

In den letzten zwei Jahrzehnten wurde eine Vielzahl von Aufsätzen und Lehrbüchern veröffentlicht, die einen Überblick über Programmkonzepte sowie verschiedene Methoden und Teildisziplinen der Strukturoptimierung geben. Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit sind nachfolgend einige wesentliche Arbeiten aufgelistet:

GILL ET AL. [77], SCHMIT [198], MORRIS [150], VANDERPLAATS [235],[236], ESCHENAUER & OLSHOFF [67], ATREK ET AL. [6], OSYCZKA [160], RAO [177], BENNETT & BOTKIN [25], DING [62], HAFTKA & GRANDHI [84], MOTA SOARES [151], ARORA [3], ESCHENAUER & THIERAUF [70], BANICHUK [7], HAFTKA ET AL. [85], KIRSCH [108], ROZVANY [189], KAMAT [100], KLEIBER ET AL. [110].

Die für die in der vorliegenden Arbeit behandelten Teilgebiete des Gesamtkonzepts 'Strukturoptimierung' relevanten Arbeiten werden an den entsprechenden Stellen erwähnt. Des Weiteren werden in den nun folgenden Abschnitten die für das weitere Verständnis notwendigen Grundlagen erläutert und diskutiert.

## 2.2 Optimierungsmodell

Im Optimierungsmodell wird das Optimierungsproblem abstrakt definiert. Dabei sind die Optimierungsvariablen, die mit dem Vektor  $\hat{\mathbf{s}}$  der Länge  $n_s$  bezeichnet sind, so zu bestimmen, daß die Zielfunktion  $f(\hat{\mathbf{s}})$  ein Minimum einnimmt.

$$\min_{\hat{\mathbf{s}}} f(\hat{\mathbf{s}}) \quad ; \quad f(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Zur Maximierung von Zielfunktionen werden diese mit '-1' skaliert und dann minimiert. Auf diese Art lassen sich Minimierungs- und Maximierungsaufgaben analog behandeln. Die Berücksichtigung von Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen führt zu folgender Definition:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) &= \mathbf{0} & ; & & \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\ \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) &\leq \mathbf{0} & ; & & \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_g} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$n_h$  ist die Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen,  $n_g$  die der Ungleichheitsnebenbedingungen. Im allgemeinen sind die Funktionen  $f, \mathbf{h}, \mathbf{g}$  hochgradig nichtlinear in  $\hat{\mathbf{s}}$ . Je nachdem, ob der Lösungsraum der Zielfunktion durch Gleichheits- und/oder Ungleichheitsnebenbedingungen beschränkt wird, liegt ein beschränktes oder unbeschränktes Optimierungsproblem vor. Die unteren und oberen Schranken  $\hat{\mathbf{s}}_L$  und  $\hat{\mathbf{s}}_U$  begrenzen den Wertebereich der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$ . Diese werden auch als Restriktionen bezeichnet. Für sie gilt:

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \vdots \\ \hat{s}_{n_s} \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{s}} = \{\hat{\mathbf{s}} \in V_s \mid \hat{\mathbf{s}}_L \leq \hat{\mathbf{s}} \leq \hat{\mathbf{s}}_U\} \quad (2.5)$$

Anmerkung: In der vorliegenden Arbeit wird mit  $\mathbf{h}$  auch das Ver- bzw. Entfestigungsgesetz bezeichnet, was allerdings nicht zu Verwechslungen führen sollte. Gleiches gilt für den Vektor der LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\eta}$ . Im Anhang definiert  $\boldsymbol{\eta}$  die relativen Spannungen.

### 2.2.1 Die LAGRANGE-Funktion

Zur numerischen Behandlung beschränkter Optimierungsprobleme werden diese in quasi-unbeschränkte Extremwertprobleme durch die Einführung der LAGRANGE-Funktion überführt.

$$L(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\hat{\mathbf{s}}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) \quad \rightarrow \quad \text{stat.} \quad (2.6)$$

Die Vektoren  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_h}$  und  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_g}$  der Länge  $n_h$  bzw.  $n_g$  werden als die Vektoren der LAGRANGE-Multiplikatoren oder auch als duale Variablen bezeichnet, weshalb man vom dualen Problem spricht. Ein unbeschränktes Optimierungsproblem wird dementsprechend als primales Problem bezeichnet.

Die Lösung des Optimierungsproblems im  $(n_s + n_h + n_g)$ -dimensionalen Lösungsraum ist durch das globale Minimum der LAGRANGE-Funktion (2.6) bezüglich der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  (primale Variablen) und durch ein Maximum bezüglich der LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\eta}$  und  $\boldsymbol{\gamma}$  (duale Variablen) definiert. Der so definierte Punkt ist der Stationärwert der LAGRANGE-Funktion  $L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$  und stellt einen Sattelpunkt dar.

$$L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) \leq L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \leq L(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \quad (2.7)$$

Der Sattelpunkt  $L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$  der LAGRANGE-Funktion ist auf der linken Seite von Abbildung 2.3 graphisch dargestellt.

### 2.2.2 Die KUHN-TUCKER-Bedingungen

Die notwendigen Bedingungen zur Beschreibung eines Sattelpunktes ergeben sich durch die partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion nach dem erweiterten Satz der Optimierungsvariablen (primale und duale Variablen) und werden als KUHN-TUCKER-Bedingungen (auch unter dem Namen KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen bekannt) bezeichnet (KUHN & TUCKER [121]). Diese sind Bedingungen erster Ordnung.

$$\nabla_s L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}^*) + \boldsymbol{\eta}^{*T} \nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}^*) + \boldsymbol{\gamma}^{*T} \nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}^*) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}^*) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

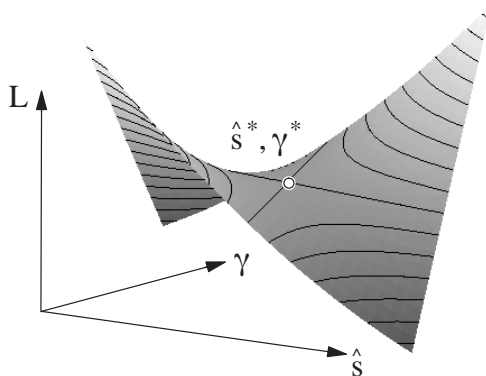
$$\gamma_j^* \nabla_{\gamma_j} L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \gamma_j^* g_j(\hat{\mathbf{s}}^*) = 0 \quad \text{mit } \gamma_j^* \geq 0 \quad (2.10)$$

Es gilt die Definition  $\nabla_s = [\partial_{s_1}, \dots, \partial_{s_{n_s}}]$ . Für  $\gamma_j^*$  werden nur Werte größer oder gleich null zugelassen, um auszuschließen, daß nichtoptimale Werte für  $\hat{\mathbf{s}}$  die KUHN-TUCKER-Bedingungen erfüllen. Die geometrische Deutung der ersten KUHN-TUCKER-Bedingung (Gleichung (2.8)) ist auf der rechten Seite von Abbildung 2.3 dargestellt. Im Optimum läßt sich der negative Gradient der Zielfunktion als Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen darstellen. Damit die Regularitätsbedingung (constraint qualification) erfüllt ist, müssen die Gradienten der aktiven Nebenbedingungen im Optimum linear unabhängig sein. Andernfalls können die dualen Variablen  $\boldsymbol{\eta}$  und  $\boldsymbol{\gamma}$  nicht eindeutig bestimmt werden. Eine Interpretation der LAGRANGE-Multiplikatoren ist beispielsweise in WELL [243] gegeben. Demnach sind die LAGRANGE-Multiplikatoren ein Maß für die Empfindlichkeit (Sensitivität) der Zielfunktion im Optimum bezüglich der zu den jeweiligen LAGRANGE-Multiplikatoren zugehörigen Nebenbedingungen. In erster Näherung gilt, daß sich der minimale Wert der Zielfunktion um den Wert  $\eta_j v$  bzw.  $\gamma_j v$  ändert, wenn der Wert der betrachteten Nebenbedingung um  $v$  verändert wird. Die hinreichende Bedingung, daß ein stationärer Punkt auch ein lokales Minimum der LAGRANGE-Funktion bezüglich der primalen Variablen darstellt, ist die Konvexität der LAGRANGE-Funktion in einer endlich kleinen Umgebung der Lösung. Für zweifach stetig differenzierbare Funktionen  $f, \mathbf{h}, \mathbf{g}$  entspricht diese Forderung, daß die HESSE-Matrix (Matrix der zweifachen Ableitungen, Bedingung zweiter Ordnung) der LAGRANGE-Funktion positiv definit ist. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionen  $f, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  bezüglich der primalen Variablen  $\hat{\mathbf{s}}$  zweifach stetig differenzierbar sind.

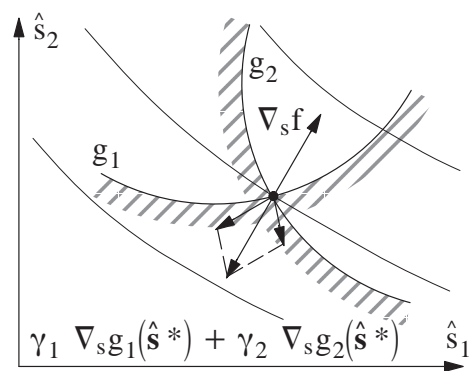
$$\bar{\mathbf{s}}^T \nabla_s^2 L \bar{\mathbf{s}} > 0 \quad ; \quad \bar{\mathbf{s}} = \{ \bar{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{n_s} \mid \bar{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}, \nabla_s \mathbf{h} \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0}, \nabla_s g_j \bar{\mathbf{s}} = 0 \text{ für } \gamma_j^* > 0 \} \quad (2.11)$$

Die HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion ist:

$$\nabla_s^2 L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)}{\partial s_1 \partial s_1} & \dots & \frac{\partial^2 L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)}{\partial s_1 \partial s_{n_s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)}{\partial s_{n_s} \partial s_1} & \dots & \frac{\partial^2 L(\hat{\mathbf{s}}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)}{\partial s_{n_s} \partial s_{n_s}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$



Sattelpunkt der LAGRANGE-Funktion  $L(\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\gamma})$



1. KUHN-TUCKER-Bedingung

Abbildung 2.3: Graphische Darstellung der Lösung eines beschränkten Optimierungsproblems

Wenn für das Optimierungsproblem nachgewiesen werden kann, daß dieses im gesamten Lösungsraum in den primalen Variablen konvex ist, so hat das ermittelte Minimum globalen Charakter.

Diese Konvexitätseigenschaft der LAGRANGE-Funktion im gesamten Lösungsraum ist in der Regel nicht zu garantieren, weshalb die ermittelten Optima meist nur lokalen Charakter haben. Es empfiehlt sich daher, von unterschiedlichen Ausgangsentwürfen zu starten und die jeweiligen gefundenen optimalen Entwürfe zu vergleichen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich u.a. mit materiell nichtlinearen Problemen in der Strukturoptimierung. In der Plastizitätstheorie werden stetige, jedoch am Übergang zwischen elastischem und elastoplastischem Verhalten nicht differenzierbare Materialmodelle entlang den Verzerrungen verwendet, was für die Bestimmung der Ableitungen an diesen Stellen zu Problemen führen kann. Diese Problematik sowie deren 'Lösung' wird in Kapitel 6 ausführlich diskutiert.

### 2.2.3 Zielfunktion und Nebenbedingungen

Sowohl Zielfunktionen als auch Nebenbedingungen können vom mechanischen Strukturverhalten und/oder geometrischen Größen abhängig sein. Für die Ermittlung der von den mechanischen Struktureigenschaften abhängigen Funktionen ist eine Strukturanalyse mit Hilfe des Analysemodells notwendig. Ein Überblick über gängige Zielfunktionen und Nebenbedingungen ist in Tabelle 2.1 gegeben. Die angeführten Entwurfskriterien lassen sich in globale, lokale und integrale Kriterien einteilen.

Globale Kriterien, wie beispielsweise die Maximierung des kritischen Lastfaktors  $\lambda_c$  oder der Eigenfrequenzen  $\omega_j$ , beziehen sich auf das gesamte (globale) Strukturverhalten.

Dagegen beziehen sich lokale Kriterien auf bestimmte Stellen im Tragwerk (Punktinformationen). Dazu gehören Verschiebungen, Spannungen oder auch Schnittgrößen. Diese gehen in den meisten Fällen als Ungleichheitsnebenbedingungen in den Optimierungsprozeß ein.

Bei integralen Kriterien werden lokale Größen über einen bestimmten (integralen) Bereich, wie Volumen, Flächen oder Linien, berücksichtigt. Hierzu zählen Kriterien, wie innere Energie oder Spannungsausgleichsfunktion, die von der Strukturantwort abhängig sind, aber auch Gewicht oder Volumen bzw. Fläche der Tragstruktur.

Die gleichzeitige Berücksichtigung mehrerer Zielfunktionen ist nicht unproblematisch. Man spricht von Mehrkriterienoptimierung. Dabei ist nicht, wie bisher beschrieben, eine skalarwertige Funktion  $f(\hat{\mathbf{s}})$  zu minimieren, sondern jeder Eintrag  $f_j$  im Vektor der Zielfunktionen  $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}})$ , weshalb auch von Vektroptimierung gesprochen wird (ESCHENAUER ET AL. [66]). Für die optimale Wahl der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}^*$  gilt dann für das Optimum des Vektors der Zielfunktionen  $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}^*)$  der Länge  $n_f$ :

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}^*) = \{\mathbf{f}^* \in \mathbb{R}^{n_f} \mid f_j(\hat{\mathbf{s}}^*) \leq f_j(\hat{\mathbf{s}})\} \quad (2.13)$$

Diese Bedingung kann allerdings in den seltensten Fällen erfüllt werden, da ein Satz von optimalen Variablen  $\hat{\mathbf{s}}^*$  gleichzeitig für alle Zielfunktionen  $f_j$  ein Optimum ergeben müßte. Besonders bei widersprüchlichen Zielfunktionen, wie beispielsweise 'Minimales Gewicht' und 'Maximale Steifigkeit', ist die obige Forderung kaum zu erfüllen. Aus diesem Grund ist die gleichzeitige Behandlung mehrerer Zielfunktionen aufwendig. Die Definition des EDGEWORTH-PARETO-Optimums (EP) wird daher bei der Behandlung von Mehrkriterienoptimierungsproblemen bevorzugt. Es ist dann ein EDGEWORTH-PARETO-Optimum

erreicht, wenn kein anderer zulässiger Vektor der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{n_s}$  gefunden werden kann, für den mindestens ein Eintrag im Vektor der Zielfunktionen  $\mathbf{f}$  verbessert wird, ohne gleichzeitig einen oder mehrere andere Einträge in  $\mathbf{f}$  zu verschlechtern. Für widersprüchliche Zielkriterien existieren unendlich viele EP–optimale Lösungsvektoren  $\hat{\mathbf{s}}^*$ . Eine einfache Methode, dieser Problematik Herr zu werden, ist die Wichtungsmethode. Dabei werden die einzelnen Zielfunktionen mit Wichtungsfaktoren  $w_j$  multipliziert und zu einer einzigen, skalarwertigen Zielfunktion aufaddiert.

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^{n_f} w_j f_j = \mathbf{w}^T \mathbf{f} \quad (2.14)$$

Normalerweise gilt für die Wichtungsfaktoren  $w_j$  folgender Zusammenhang:

$$0 \leq w_j \leq 1 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{n_f} w_j = 1 \quad (2.15)$$

Vorteil der Wichtungsmethode ist, daß der Einfluß der Wahl der Wichtungsfaktoren auf das Optimierungsergebnis relativ leicht abgeschätzt werden kann. Die Nachteile, daß beispielsweise nicht alle EP–optimalen Lösungen ermittelt werden können oder ermittelte Lösungen nicht eindeutig sind, sind jedoch von untergeordneter Bedeutung.

Zielfunktion	Nebenbedingung
Gewicht (Volumen) $f_G(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega$	Gewicht (Volumen) $h_G(\mathbf{s}) = \frac{G}{G_{zul}} - 1 = 0$
Formänderungsenergie (elastisch) $f_E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega$	Verschiebungen $g_u(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_{zul}} - 1 \leq 0$
Duktilität (elastoplastisch) $f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega$	$g_u(\mathbf{s}) = \frac{\ \mathbf{u}\ }{\ \mathbf{u}\ _{zul}} - 1 \leq 0$
Spannungsausgleich $f_{\sigma}(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_m)^2 \, d\Omega$	Spannungen $g_{\sigma}(\mathbf{s}) = \frac{\sigma}{\sigma_{zul}} - 1 \leq 0$
Eigenfrequenz $f_{\omega}(\mathbf{s}) = - \omega_j$	Eigenfrequenz $g_{\omega}(\mathbf{s}) = \frac{\omega_j}{\omega_{zul}} - 1 \leq 0$
Kritischer Lastfaktor $f_{\lambda}(\mathbf{s}) = - \lambda_c$	Kritischer Lastfaktor $g_{\lambda}(\mathbf{s}) = \frac{\lambda_j}{\lambda_{zul}} - 1 \leq 0$

Tabelle 2.1: Zielfunktionen und Nebenbedingungen



Analog zu der Vorgehensweise der Wichtungsmethode kann mit anderen Kriterien das Vektoroptimierungsproblem nach Gleichung (2.13) auf ein skalarwertiges Optimierungsproblem reduziert werden. Dabei sind Begriffe wie Distanzmethode, Quotientenmethode oder GERMEIER-Methode zu nennen. Letztere bedient sich der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion (KREISSELMEIER & STEINHAUSER [120]), die wie folgt definiert ist:

$$\tilde{f} = \frac{1}{p} \ln \sum_{j=1}^{n_f} e^{p \bar{f}_j} \quad ; \quad p > 0 \quad (2.16)$$

Bei der GERMEIER-Methode gilt für  $\bar{f}$ :

$$\bar{f} = w_j f_j \quad (2.17)$$

Werden Eigenwerte optimiert (z.B. in REITINGER [180], MAUTE [136]), so setzt man:

$$\bar{f} = \lambda_j \quad (2.18)$$

Bei der Optimierung von Eigenwerten handelt es sich um ein min-max-Problem, wobei der kleinste (minimale) Eigenwert maximiert werden soll. Problematisch bei dieser Problemstellung ist, daß im Laufe des Optimierungsprozesses der zu Beginn minimale Eigenwert vergrößert und gleichzeitig ein anderer verkleinert werden kann ('Oszillationen'). Diese Problematik macht die Verwendung beispielsweise der KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion (Einhüllende-Funktion) notwendig, mit der die näherungsweise Lösung des Optimierungsproblems ermöglicht wird.

Ergänzend sei noch erwähnt, daß Probleme der Mehrkriterienoptimierung mit Hilfe der bekannten Vorgehensweise durch die Definition einer einzigen, skalarwertigen Zielfunktion mit Nebenbedingungen gelöst werden können. Dabei wird die vermeintlich wichtigste Zielfunktion als einzige Zielfunktion definiert, während die restlichen Zielfunktionen als Nebenbedingungen in das Optimierungsproblem eingehen.

Für Details über die Verfahren der Mehrkriterienoptimierung wird auf die Arbeiten von STADLER [215], STADLER & DAUER [216] und ESCHENAUER ET AL. [66] verwiesen. Neben einer Einführung in die Grundlagen ist dort ein Überblick über verschiedene Anwendungsgebiete der Mehrkriterienoptimierung zu finden.

## 2.3 Optimierungsverfahren

### 2.3.1 Allgemeines

Die KUHN-TUCKER-Bedingungen, die im allgemeinen nichtlinear bezüglich der Optimierungsvariablen  $\hat{s}$  sind, lassen sich nur selten geschlossen lösen. Aus diesem Grund ist ein iteratives Lösungsverfahren notwendig. Die Auswahl des zu verwendenden Optimierungsverfahrens hängt sehr stark von den zulässigen Werten der Optimierungsvariablen ab. Eine Übersicht über die Verfahren der Mathematischen Programmierung (MP) und die Optimalitätskriterienverfahren (OC) zur Lösung beschränkter und unbeschränkter Optimierungsprobleme ist in BLETZINGER [30] zu finden. Außerdem werden diesbezüglich die Lehrbücher von GILL ET AL. [77] und LUENBERGER [128] empfohlen.

Für diskrete Optimierungsprobleme, bei denen die Optimierungsvariablen  $\hat{s}$  nur ganzzahlige Werte ( $V_s \subset Z^{n_s}$ ) bzw. diskrete Werte annehmen dürfen, eignen sich z.B. stochastische Optimierungsverfahren. Für diese diskontinuierlichen Optimierungsprobleme werden

häufig Evolutionsstrategien, welche an DARWINS Evolutionstheorie angelehnt sind, eingesetzt (z.B. RECHENBERG [178]). Diskontinuierliche Optimierungsprobleme sind beispielsweise die Bestimmung des optimalen Profiltyps in der Querschnittsoptimierung, wenn nur die bekannten Normprofile aus Profiltabellen verwendet werden sollen, oder auch Probleme der Topologieoptimierung. Wie später noch beschrieben wird, kann das Topologieoptimierungsproblem durch ein diskontinuierliches Materialverteilungsproblem gelöst werden. Während Evolutionsstrategien im Laufe des Optimierungsprozesses durch Mutation, Selektion und Rekombination 'dazulernen' (sequentielle Zufallssuche), wählen Monte-Carlo-Verfahren die Stellen  $\hat{\mathbf{s}}$ , für die eine Funktionsauswertung durchgeführt werden soll, rein zufällig aus. Daher sind Monte-Carlo-Verfahren sehr rechenintensiv und werden für Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik kaum eingesetzt.

Evolutionsstrategien werden allerdings auch für kontinuierliche Optimierungsprobleme eingesetzt. Ein Vergleich der stochastischen mit den deterministischen Verfahren ist in SCHWEFEL [206] zu finden. Deterministische Verfahren werden hauptsächlich zur Lösung kontinuierlicher Optimierungsprobleme ( $V_s \subset \mathbb{R}^{n_s}$ ) eingesetzt. Abhängig von der Art und Größe, d.h. der Anzahl der Funktionen und Optimierungsvariablen, werden Optimalitätskriterienverfahren (OC) oder Methoden der Mathematischen Programmierung (MP) zur Lösung verwendet. Diese Verfahren benötigen in der Regel Gradienteninformationen (Sensitivitäten), weshalb man auch von Gradientenverfahren spricht. Gradientenfreie Verfahren, wie beispielsweise Evolutionsstrategien, zählen ebenfalls zu den Methoden der Mathematischen Programmierung.

Ein Überblick über den Einsatz dieser Verfahren für Strukturoptimierungsprobleme ist in ARORA [3], ATREK ET AL. [6], VANDERPLAATS [235] oder BLETZINGER [30] zu finden. In der vorliegenden Arbeit werden in erster Linie Formoptimierungsaufgaben gelöst. Diese lassen sich auf kontinuierliche, in den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  nichtlineare Optimierungsprobleme zurückführen. Formoptimierungsprobleme besitzen in der Regel eine geringe Anzahl von Optimierungsvariablen ( $n_s < 200$ ), wobei oftmals eine größere Anzahl von Nebenbedingungen zu berücksichtigen ist. Diese Problemklasse läßt sich effektiv durch Methoden der Mathematischen Programmierung lösen, bei denen das Optimierungsproblem auf einer abstrakten, mathematischen Ebene formuliert und gelöst wird. Daraus ergeben sich entscheidende Vorteile der MP-Methoden wie Problemneutralität und Kombinationsmöglichkeit beliebiger, mathematisch formulierbarer Zielfunktionen und Nebenbedingungen. MP-Methoden sind beispielsweise Suchmethoden, konjugierte Gradientenverfahren, Barrier- und Penalty-Verfahren sowie duale oder LAGRANGE-Methoden. Penalty-Verfahren werden auch als Verfahren der äußeren Straffunktion bezeichnet, da sie sich dem Optimum vom unzulässigen Bereich annähern (mindestens eine der Nebenbedingungen ist demnach verletzt). Im Gegensatz dazu nähern sich Barrier-Verfahren dem Optimum vom zulässigen Bereich an (Verfahren der inneren Straffunktion). Formal unterscheiden sich Barrier- und Penalty-Verfahren nicht von den LAGRANGE-Methoden. Entscheidender Unterschied zwischen diesen Verfahren ist jedoch, daß die LAGRANGE-Multiplikatoren (duale Variable) automatisch bestimmt werden, während die Barrier- und Penalty-Faktoren zuvor vom Benutzer gewählt werden müssen (HÖSS [96]). Besonders die LAGRANGE-Methoden sowie lokale und globale Approximationstechniken haben in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Für erstere sind vor allem Verfahren der Sequentiellen Linearen Programmierung (SLP) und die der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP), welche in der vorliegenden Arbeit zur Lösung der Optimierungsprobleme eingesetzt werden, zu nennen. Der theoretische Hintergrund eines

SQP-Algorithmus ist in Abschnitt 2.3.2 genauer erläutert.

Approximationsmethoden kombinieren OC- und MP-Methoden miteinander. Dabei werden Zielfunktion und Nebenbedingungen durch explizite Approximationsfunktionen zur Verringerung der Problemkomplexität und zur schnelleren Funktionsauswertung ersetzt (BLETZINGER [30]). Ein bekannter Vertreter lokaler Approximationsmethoden ist die Methode der bewegten Asymptoten (MMA, Method of Moving Asymptotes), die, wie das SQP-Verfahren, Gradienteninformationen benötigt. Die Methode der bewegten Asymptoten wurde von SVANBERG [218] entwickelt. Eine weitere Approximationsmethode ist das SCP-Verfahren (Sequentielle Convexe Programmierung) nach FLEURY & BRAIBANT [75], bei der die Zielfunktion und Nebenbedingungen sequentiell konvex linearisiert werden. Das MMA-Verfahren stellt eine Sonderform der SCP-Methode dar. Nach numerischen Untersuchungen von SCHITTKOWSKI ET AL. [196], bei denen die gängigsten Optimierungsverfahren anhand ausgewählter Optimierungsprobleme miteinander verglichen werden, sind vor allem SQP und MMA zur Lösung von Optimierungsproblemen für die in dieser Arbeit zu erwartenden Problemstellungen zu empfehlen.

Da für Topologieoptimierungsprobleme in der Regel viele Optimierungsvariablen ( $n_s > 500$ ), jedoch nur wenige Nebenbedingungen (oft nur eine einzige) definiert werden, eignen sich zur Lösung derartiger Probleme OC-Methoden besonders gut (vgl. MAUTE [136]). Diese basieren auf der Annahme, daß Bedingungen für Optimalität a priori bekannt sind und das Optimum durch die Erfüllung dieser Bedingungen (Optimalitätskriterien) mittels einfacher, rekursiver Iterationsschemen ermittelt werden kann. Nach KIRSCH [108] lassen sich OC-Methoden in physikalisch intuitive und mathematische Verfahren unterteilen. Physikalisch intuitive Optimalitätskriterien können aufgrund mechanisch anschaulicher Überlegungen durch Umkehrung von Nachweisformeln hergeleitet werden. Ein bekanntes Beispiel ist das Kriterium, nach dem ein voll ausgelastetes Tragwerk ('Fully Stressed Design') ein spannungsbeschränktes Gewichtsminimum darstellt. Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist, daß mit diesen Kriterien in den meisten Fällen das Optimum nicht exakt zu bestimmen ist. Grund dafür ist, daß die KUHN-TUCKER-Bedingungen nur notwendig, jedoch nicht hinreichend sind. Bei mathematischen OC-Verfahren werden die KUHN-TUCKER-Bedingungen direkt gelöst, indem z.B. aus der ersten KUHN-TUCKER-Bedingung die Rekursionsformel abgeleitet wird. Ein weiterer Nachteil der OC-Methoden liegt darin, daß für jedes Optimierungsproblem (z.B. unterschiedliche Nebenbedingungen) ein speziell angepaßter Algorithmus herzuleiten ist. Ein effizienter OC-Algorithmus zur Lösung von Topologieoptimierungsproblemen ist in MAUTE [136] zu finden. Ein Vorteil von OC-Methoden ist die rasche Konvergenz, die nahezu unabhängig von der Anzahl der Optimierungsvariablen ist; diese ist hauptsächlich vom Strukturverhalten sowie Anzahl und Art der vorhandenen Nebenbedingungen abhängig (BERKE & KHOT [27]).

Eine Einführung in die OC-Verfahren ist in HÖRNLEIN [95] zu finden. Der Arbeit von PATNAIK ET AL. [165] ist eine aktuelle Zusammenstellung und Bewertung der verschiedenen OC-Methoden zu entnehmen.

Um die Vorteile der OC-Methoden nutzen zu können, werden bei der Lösung von Optimierungsproblemen oft auch Kombinationen von OC- und MP-Methoden eingesetzt. Zuerst nähert man sich unter dem Einsatz von OC-Methoden mit wenigen Optimierungsschritten an das Optimum an, um dieses dann exakt mittels eines MP-Verfahrens zu bestimmen. Vorteilhaft bei dieser Vorgehensweise ist die rasche Konvergenz und die exakte Bestimmung der Extremalstelle. Zudem werden bei nichtkonvexen Problemstellungen lokale Minima übersprungen.

### 2.3.2 Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP)

Die Methode der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) zählt zu den LAGRANGE-Methoden. Diese beruhen auf der direkten Lösung der notwendigen Bedingungen (KUHN-TUCKER-Bedingungen). Das Optimum wird dabei im Raum der primalen und dualen Variablen bestimmt. Zur Lösung der KUHN-TUCKER-Bedingungen wird ein erweitertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet. Deshalb werden die KUHN-TUCKER-Bedingungen bezüglich der primalen und dualen Variablen linearisiert, was zu einer quadratischen Approximation dieser Bedingungen führt. Dadurch entsteht eine Sequenz nichtlinearer Gleichungssysteme (quadratische Unterprobleme). Nachfolgend wird das beschriebene Vorgehen genauer erläutert.

Die Linearisierung der KUHN-TUCKER-Bedingungen (2.8)–(2.10) bezüglich der primalen und dualen Variablen an der Stelle  $k$  des Optimierungsfortschritts liefert:

$$\begin{aligned} & \nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}_k) + \nabla_s^2 f(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \\ & + \boldsymbol{\eta}_k^T \nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) + \boldsymbol{\eta}_k^T \nabla_s^2 \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \\ & + \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) + \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s^2 \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \\ & + (\nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k))^T [\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k] + (\nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k))^T [\boldsymbol{\gamma}_{k+1} - \boldsymbol{\gamma}_k] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) + \nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) + \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] + (\mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k))^T [\boldsymbol{\gamma}_{k+1} - \boldsymbol{\gamma}_k] = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Zur Vereinfachung werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \nabla_s^2 L(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) &= \nabla_s^2 f(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \\ &+ \boldsymbol{\eta}_k^T \nabla_s^2 \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] + \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s^2 \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\nabla_s L(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) = \nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}_k) + \boldsymbol{\eta}_k^T \nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) + \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) \quad (2.23)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{s}} = [\hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k] \quad (2.24)$$

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k] \quad (2.25)$$

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_{k+1} - \boldsymbol{\gamma}_k] \quad (2.26)$$

Die zweiten Ableitungen der LAGRANGE-Funktion  $\nabla_s^2 L$  nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  wird als HESSE-Matrix der LAGRANGE-Funktion bezeichnet. Mit den Gleichungen (2.19)–(2.26) erhält man folgendes Iterationsschema:

$$\begin{bmatrix} \nabla_s^2 L_k & (\nabla_s \mathbf{g}_k)^T & (\nabla_s \mathbf{h}_k)^T \\ \boldsymbol{\gamma}_k^T \nabla_s \mathbf{g}_k & \mathbf{g}_k^T & \mathbf{0} \\ \nabla_s \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{s}} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma} \\ \Delta \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_s L \\ \boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, wird das Problem in ein äquivalentes, quadratisches Unterproblem umgeformt, welches dann beispielsweise mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren effizient gelöst werden kann. Andere Verfahren sind z.B. in KÜNZI ET AL. [122] oder GILL ET AL. [77] zu finden. Das äquivalente, quadratische Unterproblem lautet wie folgt:

$$\tilde{f}(\Delta \hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{s}}^T \nabla_s^2 L \Delta \hat{\mathbf{s}} + \nabla_s f \Delta \hat{\mathbf{s}} \rightarrow \min_{\Delta \hat{\mathbf{s}}} \quad (2.28)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{s}}_k, \Delta \hat{\mathbf{s}}) = \nabla_s \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) \Delta \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}_k) = 0 \quad (2.29)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{s}}_k, \Delta \hat{\mathbf{s}}) = \nabla_s \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) \Delta \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}_k) \leq 0 \quad (2.30)$$

Die zugehörige LAGRANGE-Funktion ergibt sich dann zu:

$$\tilde{L}(\hat{\mathbf{s}}_k, \Delta\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) = \tilde{f}(\Delta\hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) + \boldsymbol{\eta}^T \tilde{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{s}}_k, \Delta\hat{\mathbf{s}}) + \boldsymbol{\gamma}^T \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{s}}_k, \Delta\hat{\mathbf{s}}) \quad (2.31)$$

Die KUHN-TUCKER-Bedingungen dieser LAGRANGE-Funktion (vgl. Gleichung (2.31)) sind identisch zu denen, die in dem Iterationsschema in Gleichung (2.27) enthalten sind. Der Name 'Sequentielle Quadratische Programmierung' kommt von der wiederholten Lösung des in den Gleichungen (2.28)–(2.30) definierten quadratischen Unterproblems. Das Abbruchkriterium  $\varepsilon$  (Stopkriterium) der Optimierungsiteration ist z.B. die Norm der Gradienten der LAGRANGE-Funktion und die Summe der Beträge der Gleichheitsnebenbedingungen und der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen. Diese Summe ist ein Maß für die Differenz zwischen Zielfunktion und LAGRANGE-Funktion. Unterschreiten diese Werte eine vorgegebene Schranke  $\varepsilon$ , so ist definitionsgemäß ein Optimum bzw. eine Extremalstelle erreicht.

$$\|\nabla_s L(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k)\| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n_h} |h_j(\hat{\mathbf{s}}_k)| + \sum_{j=1}^{n_g} |\max(0, g_j(\hat{\mathbf{s}}_k))| \leq \varepsilon \quad (2.32)$$

Oftmals wird auch die Veränderung der Zielfunktion benachbarter Optimierungsschritte als Abbruchkriterium verwendet.

$$\left| \frac{f(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) - f(\hat{\mathbf{s}}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_{k-1})}{f(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k)} \right| \leq \varepsilon \quad (2.33)$$

Ein Nachteil des vorgestellten Lösungsverfahrens ist die Verwendung der zweiten Ableitungen der LAGRANGE-Funktion. Diese sind im allgemeinen nur mit enormem Rechenaufwand zu bestimmen. Aus diesem Grund wird die HESSE-Matrix mit Hilfe der ersten Ableitungen approximiert, weshalb auch von einem Quasi-NEWTON-Verfahren gesprochen wird. Dafür stehen verschiedene Approximationsverfahren zur Verfügung. Hinter diesen Verfahren steht die Idee, die Krümmungen der LAGRANGE-Funktion durch einen Differenzausdruck der ersten Ableitungen sukzessive zu approximieren (HÖSS [96]).

Eines dieser Verfahren ist beispielsweise das PSB-Approximationsverfahren (POWELL-Symmetric-BROYDEN), aus dem das bekannte DFP-Approximationsverfahren (DAVIDON-FLETCHER-POWELL) hergeleitet werden kann. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das BFGS-Approximationsverfahren eingesetzt, das von BROYDEN, FLETCHER, GOLDFARB und SHANNO vorgeschlagen wird. Näheres hierzu kann in GILL ET AL. [77] nachgeschlagen werden. Die HESSE-Matrix  $\mathbf{H}_k$  berechnet sich hierbei nach folgender Gleichung, wobei für den Startwert  $k = 0$  die anfängliche HESSE-Matrix  $\mathbf{H}_0$  positiv definit sein muß.

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{d}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{d}_k)^T}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k} + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{c}_k} \quad (2.34)$$

Dabei sind:

$$\mathbf{d}_k = \alpha_k \Delta\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{k+1} - \hat{\mathbf{s}}_k \quad ; \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{c}_k = \nabla_s L(\hat{\mathbf{s}}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) - \nabla_s L(\hat{\mathbf{s}}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\gamma}_k) \quad (2.36)$$

Problematisch bei diesem Verfahren ist der enorme Speicherbedarf der approximierten HESSE-Matrix für große Optimierungsprobleme. Mit dem Faktor  $\alpha_k$  wird gleichzeitig

zur Suchrichtung die Schrittweite bestimmt, was einen Vorteil des SQP-Algorithmus gegenüber anderen Verfahren der quadratischen Programmierung darstellt.  $\alpha_k$  kann mit dem 'line search', einer eindimensionalen Minimumsuche, bestimmt werden. Jedoch beschreibt die LAGRANGE-Funktion einen Sattelpunkt. Für derartige Probleme ist die 'line search'-Technik ungeeignet. Aus diesem Grund werden zur Bestimmung der Schrittweite Abstiegs- oder Meritfunktionen verwendet, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen wird. Näheres hierzu ist z.B. in BLETZINGER [30] ausführlich diskutiert. Für die inkrementelle Änderung der primalen und dualen Variablen gilt:

$$(\cdot)_{k+1} = (\cdot)_k + \alpha_k \Delta(\cdot) \quad ; \quad \text{mit} \quad (\cdot) = \hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma} \quad (2.37)$$

Die Qualität der Abschätzung der HESSE-Matrix ist entscheidend für das globale Konvergenzverhalten des vorgestellten SQP-Verfahrens. Durch eine Skalierung der Zielfunktion kann die approximierte HESSE-Matrix skaliert werden, was Einfluß auf das Konvergenzverhalten hat. Die Skalierung der Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen ist nicht erforderlich, da dies automatisch durch die LAGRANGE-Multiplikatoren erfolgt. Um Konvergenzprobleme zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Optimierungsvariablen auf einen gemeinsamen Wertebereich zu skalieren. In der Nähe des Optimums ist die Konvergenz des SQP-Verfahrens im günstigsten Fall superlinear. Für Details zu dem in der vorliegenden Arbeit verwendeten NLPQL-Algorithmus wird auf die Arbeiten von SCHITTKOWSKI [195] und BLETZINGER [30] verwiesen.

## 2.4 Entwurfsmodell

Das Entwurfsmodell stellt die Verbindung zwischen dem im Optimierungsmodell in abstrakter mathematischer Form formulierten Optimierungsproblem und dem realen Tragwerk dar. Es dient der Beschreibung von Geometrie, also der Topologie der einzelnen Tragwerkskomponenten sowie deren Form, und dem materiellen Aufbau des Startwurfs. Dadurch sind auch die Nachbarschaftsbeziehungen der materiellen Punkte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  definiert. Eine 'stetige' Anhäufung dieser materiellen Punkte, die auch als Träger der physikalischen Eigenschaften bezeichnet werden, wird auch als Kontinuum bezeichnet (vgl. BETTEN [28]). Die mechanischen Eigenschaften dieses Kontinuums werden in der Regel aus einer makroskopischen Sichtweise heraus beschrieben. Diese makroskopischen Eigenschaften ergeben sich durch Homogenisierung des mikroskopischen Strukturverhaltens. Dadurch kann der tatsächliche mikroskopische Aufbau vernachlässigt werden. Zur Beschreibung von Geometrie und materiellem Aufbau wird oftmals eine parametrisierte (approximierte) Darstellung verwendet. Die variablen Größen dieser Parametrisierung repräsentieren den maximal möglichen Vektor  $\hat{\mathbf{s}}$  der Optimierungsvariablen und erhalten so ihre physikalische Bedeutung. Die Art dieser variablen Größen entscheidet darüber, ob es sich um ein Topologie-, Form- oder Materialoptimierungsproblem handelt. Die Querschnittsoptimierung wurde dabei als Untergruppe der Formoptimierung eingestuft. Prinzipiell können zur Beschreibung der Gestalt eines Tragwerks zwei unterschiedliche Ansätze herangezogen werden. Bei der kontinuierlichen Beschreibung wird das Kontinuum mittels Kanten und Flächen definiert. Es wird angenommen, daß die dadurch begrenzte Fläche bzw. der dadurch abgegrenzte Raum kontinuierlich mit Masse bzw. Materie belegt ist. Die Geometrie dieser Begrenzungselemente ist während des Optimierungsprozesses variabel und wird häufig mit Hilfe der Methoden des 'Computer Aided

Geometric Design' (CAGD) verwirklicht (IMAM [98], BRAIBANT & FLEURY [37], BENNETT & BOTKIN [25]). Die Veränderung der Geometrie erfolgt über die Variation der Koordinaten der formbeschreibenden Kontroll-Knoten  $\hat{\mathbf{s}} \in \hat{\underline{\mathbf{s}}}$ .

Bei dieser Vorgehensweise wird die örtliche Veränderung eines Materiepunktes gemäß einer LAGRANGE-Betrachtungsweise verfolgt, was mit Hilfe der Abbildung  $\chi_X(\mathbf{x}, k)$  erfolgt. Der Parameter  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  beschreibt eindeutig den Ort eines Materiepunktes in einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem und  $k$  den Optimierungsschritt (materielle Beschreibung). Diese Vorgehensweise entspricht derjenigen beim Deformationsprozeß. Einziger Unterschied ist die Bedeutung des Parameters  $k$ , der im Deformationsprozeß die Abfolge der Lastaufbringung beschreibt und daher in diesem Zusammenhang mit  $t$  bezeichnet wird.

Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß zur Auffindung des Optimums lediglich die Berandung einer Struktur verändert werden muß, was eine relativ geringe Anzahl an Optimierungsvariablen zur Folge hat (BLETZINGER [30], WIEGHARDT [248]). Nachteilig ist jedoch, daß bei dieser Formulierung keine Änderungen der Nachbarschaftsbeziehungen von Materieteilchen vorgenommen werden können. D.h. die Topologie der Struktur kann während der Optimierung, beispielsweise durch Hinzufügen bzw. Entfernen von Löchern, nicht verändert werden. Demnach sind nur topologische Abbildungen möglich. Nichttopologische Abbildungen, wie sie auch durch Aufreißen einer Struktur während des Deformationsprozesses auftreten können, lassen sich durch die kontinuierliche Beschreibung nicht erfassen (MAUTE [136]). In diesem Fall müßte für jeden materiellen Punkt eine entsprechende Abbildungsfunktion definiert werden. Aus diesem Grund eignet sich für die Beschreibung nichttopologischer Abbildungen ein diskontinuierliches Geometriemodell. Bei diesem Ansatz wird einem Punkt  $\mathbf{x}$  im definierten Raum  $\Omega$  (Kontrollvolumen) Material zugewiesen oder nicht. Diese pixelartige Beschreibungsmethode ist definiert durch die Indikatorfunktion  $\chi$ :

$$\chi(\mathbf{x}, k) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{kein Material} \\ 1 & \rightarrow \text{Material} \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.38)$$

Diese Beschreibung entspricht beim Deformationsprozeß einer EULER-Betrachtungsweise (räumliche Beschreibung), da die materielle Veränderung der räumlichen Punkte beschrieben wird. Man spricht deshalb auch vom materiellen Fluß durch ein raumfestes Kontrollvolumen  $\Omega$ . Nachteil dieser Vorgehensweise ist, daß das gesamte Tragwerk parametrisiert werden muß. Dies führt zu einer sehr großen Entwurfsvielzahl, hat allerdings eine Vielzahl von Optimierungsvariablen zur Folge. Theoretisch sind dies unendlich viele Optimierungsvariablen. Bei Verwendung der Methode der Finiten Elemente reduziert sich jedoch diese Anzahl, da allen Materiepunkten innerhalb eines Finiten Elements normalerweise derselbe Zustand (0 oder 1) zugewiesen wird.

Wegen der unterschiedlichen Vor- und Nachteile der beschriebenen Ansätze ist, je nach Entwurfsaufgabe, der passende zu wählen. So eignet sich für die Formoptimierung aufgrund der klaren und formelmäßig erfaßbaren Geometriebeschreibung mittels des CAGD der kontinuierliche Ansatz. Zur prinzipiellen Bestimmung des Tragwerksaufbaus mittels Topologieoptimierung ist jedoch wegen der großen Entwurfsvielzahl der diskontinuierliche Ansatz vorzuziehen. (MAUTE [136], RAMM ET AL. [174]). In Abbildung 2.4 sind die beiden verschiedenen Ansätze nochmals graphisch dargestellt.

## 2.5 Analysemodell

Die Berechnung der Strukturantwort sowie die Durchführung der Sensitivitätsanalyse erfolgt im Analysemodell für den jeweiligen aktuellen Entwurf. In der vorliegenden Arbeit geschieht diese Ermittlung approximativ mit der Methode der Finiten Elemente, da die analytisch exakte Strukturantwort nur in Ausnahmefällen bestimmt werden kann. Die Ermittlung der Strukturantwort mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird in Kapitel 4 ausführlich diskutiert, um die notwendigen Grundlagen für die Sensitivitätsanalyse in den Kapiteln 5 und 6 bereitzustellen.

Die Aufgaben des Analysemodells im Optimierungsablauf lassen sich wie folgt gliedern. Zuerst wird das zugrundeliegende mechanische Modell definiert, d.h. es fällt die Entscheidung, ob lineare oder nichtlineare, statische oder dynamische, usw. Effekte zu berücksichtigen sind bzw. berücksichtigt werden sollen. Außerdem ist zu entscheiden, durch welche Theorie das Tragverhalten am besten beschrieben werden kann. Zur Auswahl stehen beispielsweise die Stab-, Balken-, Scheiben-, Platten- oder Schalentheorie oder eine Volumenbeschreibung. Im numerischen Modell wird die Elementformulierung definiert und somit die Qualität der Finiten Elemente festgelegt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Scheibenprobleme behandelt.

Basierend auf diesen Annahmen, wird die Strukturantwort für den aktuellen Entwurf ermittelt. Mit diesen Informationen können nun die Funktionswerte der Zielfunktion und Nebenbedingungen sowie deren Sensitivitäten bestimmt werden. Das gewählte mechanische und numerische Modell beeinflusst das Optimierungsergebnis sehr stark, was in Kapitel 8 verdeutlicht wird. Besonders die Berücksichtigung materiell und geometrisch nichtlinearer Effekte, wie Plastizität und Beulen, sind an dieser Stelle zu nennen. Wie später noch in den Kapiteln 5 und 6 (Sensitivitätsanalyse) gezeigt wird, beeinflusst das zugrundeliegende mechanische Modell auch die Wahl der Sensitivitätsanalyse selbst. Obwohl alle möglichen Varianten der Sensitivitätsanalyse zum selben Ergebnis führen, so ist diese Wahl für die Effizienz eines Optimierungsalgorithmus von zentraler Bedeutung.

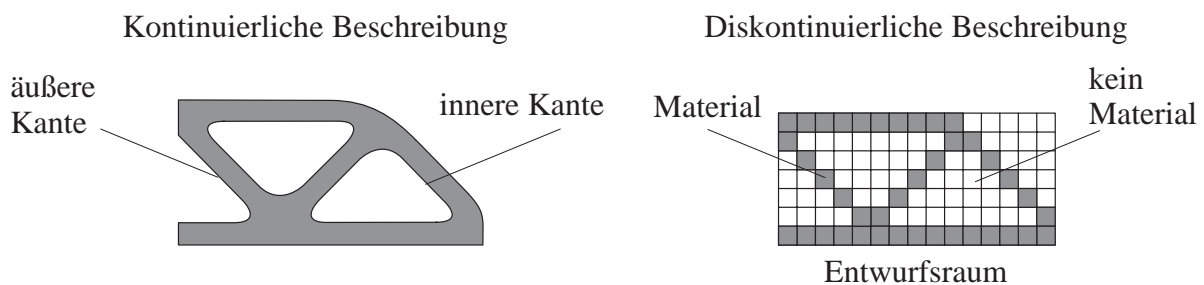


Abbildung 2.4: Kontinuierlicher und diskontinuierlicher Ansatz



# Kapitel 3

## Form- und Topologieoptimierung

Im vorigen Kapitel wurde zwischen Topologie-, Form-, Querschnitts- bzw. Bemessungs-optimierung und Materialoptimierung unterschieden. Besonders Probleme der Topologie- und Formoptimierung sind zur Zeit Gebiete intensiver Forschungsarbeiten. Der zentrale Punkt der vorliegenden Arbeit ist die Berücksichtigung geometrisch und materiell nichtlinearer Effekte in der Strukturoptimierung. Dabei steht vor allem die Ermittlung der Sensitivitäten unter Einbeziehung eben dieser strukturellen Nichtlinearitäten im Vordergrund. Die in Kapitel 6 vorgestellte Herleitung der Sensitivitätsanalyse ist allgemeiner Natur, d.h. sie kann sowohl für Topologie- als auch für Formoptimierungsprobleme herangezogen werden. Selbstverständlich lassen sich mit der in Kapitel 6 vorgestellten Methode auch die Gradienten für Querschnitts- und Materialoptimierungsprobleme bestimmen. In den folgenden Abschnitten werden die freien Parameter (Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$ ) für Form- und Topologieoptimierungsprobleme definiert und erläutert. Diese Parameter sind durch die Optimierungsprozedur derart zu verändern, daß die definierte Zielfunktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen und Restriktionen ein (globales) Minimum einnimmt.

### 3.1 Formoptimierung

Die Formoptimierung, die zu den Aufgaben der Variationsrechnung gehört, eignet sich dazu, die optimale Form von Kanten und Oberflächen zu bestimmen. Die durch eine Formoptimierung zu verbessernde Tragstruktur kann beispielsweise durch einen vorangegangenen Topologieoptimierungsschritt ermittelt werden. Prinzipiell könnte bei einer genügend feinen Diskretisierung die exakte Form der Berandung auch mittels Topologieoptimierung bestimmt werden. Aus Effizienzgründen wird jedoch eine Formoptimierung bevorzugt, um das optimale Tragwerk im Detail zu bestimmen.

In den meisten Fällen lassen sich Probleme der Strukturanalyse und -optimierung nicht geschlossen lösen (vgl. Kapitel 4). Daher muß sowohl die Geometrie  $s(\mathbf{x})$  der Struktur als auch die Strukturantwort (z.B.  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ) durch Approximationsfunktionen angenähert werden. Dadurch wird das ursprüngliche Variationsproblem in ein Parameteroptimierungsproblem überführt. Als Optimierungsvariablen werden dabei die diskreten, freien Parameter  $\hat{\mathbf{s}}$  oder auch  $\hat{\mathbf{u}}$  definiert (vgl. Gleichungen (2.1) und (2.2) in Kapitel 2).

Bis 1973 wurden fast ausschließlich Probleme der Querschnittsoptimierung behandelt. Die Topologie und die äußere Gestalt der Struktur bleiben dabei unverändert. Als erste haben ZIENKIEWICZ & CAMPBELL [257] eine Methode vorgestellt, bei der die äußere Gestalt,

nicht aber der topologische Aufbau verändert wird. Als Optimierungsvariablen dienen bei diesem Ansatz die Knoten der Finiten Elemente (siehe Kapitel 4.2). Diese Vorgehensweise bringt jedoch einige Probleme mit sich. Zur Veränderung großer Bereiche der Struktur ist die Definition vieler Optimierungsvariablen notwendig, was zu großen Optimierungsproblemen führt. Dies kann jedoch zu numerischen Instabilitäten führen, hervorgerufen von starken Elementverzerrungen, die durch oszillierende Formen der Finiten Elemente entstehen. Diese Problematik wird beispielsweise in BRAIBANT & FLEURY [37], KIKUCHI ET AL. [105] oder HAFTKA ET AL. [85] geschildert. Dies führt dazu, daß oftmals ein Optimum der Versteifungseffekte (Locking) der Finiten Elemente aufgefunden wird (Optimierung des Diskretisierungsfehlers). Ein anderer Nachteil ist, daß für den weiteren Konstruktionsprozeß die durch die Formoptimierung gewonnene Struktur in ein CAD-Modell zu überführen ist.

Ziel muß es daher sein, eine Formbeschreibung zu verwenden, die einerseits mit wenigen charakteristischen, formbeschreibenden Eingangsgrößen (Design- bzw. Kontroll-Knoten) auskommt und andererseits trotzdem eine genügend große Formvielfalt bietet. Hierfür haben sich die Methoden des 'Computer Aided Geometric Design' (CAGD) bewährt (FAUX & PRATT [73], BÖHM ET AL. [36]). Neben dem Vorteil, nur wenige, aber charakteristische Freiheitsgrade definieren zu müssen, zeichnen sich diese Methoden durch weitere Eigenschaften aus. Die zu beschreibende Geometrie kann durch den Einsatz von mehreren sogenannten Design-Elementen oder mittels höherer Ansatzfunktionen beliebig genau approximiert werden. Der Einsatz dieser Methoden zur Beschreibung der Form(änderung) in der Formoptimierung sowie die Bezeichnung 'Design-Elemente' ist auf IMAM [98] zurückzuführen. Außerdem sind in diesem Zusammenhang Autoren wie BRAIBANT & FLEURY [37] und BENNETT & BOTKIN [24] zu nennen. In der Literatur findet man auch die Bezeichnungen 'Macro-' oder 'Super-Elemente', was den übergeordneten Charakter dieser Elemente gegenüber den Finiten Elementen ausdrückt. Die Finiten Elemente werden mittels der Design-Elemente, die als eine Art 'Preprocessor' verwendet werden, erzeugt (generiert). Mit Hilfe der CAGD-Technik werden nun das Entwurfsmodell, in dem die Geometrie des Tragwerks approximiert wird, und das Analysemodell miteinander gekoppelt.

Dadurch kann die Änderung der Koordinaten beliebiger Punkte innerhalb der Design-Elemente (z.B. die Koordinaten der FE-Knoten) infolge einer Variation der Kontroll-Knoten bestimmt werden. Das Feld dieser Änderungen wird als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld bezeichnet und ist die zentrale geometrische Größe in der Formoptimierung bzw. der Sensitivitätsanalyse für Formoptimierungsprobleme.

Die Beschreibung der Formänderung einer Struktur durch Design-Elemente zählt man zu den geometrischen Methoden, da das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld mit Hilfe geometrischer Formfunktionen eindeutig bestimmen werden kann. Bei komplexen Geometrien mit vielen Details und Aussparungen ist die Beschreibung mittels zwei- bzw. dreidimensionaler Design-Elemente sehr aufwendig. Für diesen Fall eignet sich eine alternative Methode. Dabei wird lediglich der Rand bzw. die Oberfläche einer Fläche bzw. eines Volumens mit Hilfe von Formfunktionen beschrieben. Es existieren keine geometrischen Formfunktionen ins Innere der Fläche bzw. des Körpers. Im Gegensatz zum Konzept der zuvor beschriebenen Design-Elemente, bei denen die Finiten Elemente, basierend auf der geometrischen Beschreibung der Design-Elemente, automatisch, d.h. strukturiert generiert werden, ist dies nun nicht mehr möglich. Das Netz der Finiten Elemente wird mit Hilfe eines Freivernetzers, z.B. nach der 'advancing front'-Methode, erzeugt (z.B. LO [126], PERAIRE

ET AL. [167]; in der vorliegenden Arbeit wird eine Implementierung von REHLE [179] verwendet). Da für dieses Konzept, das als B-rep-Konzept (boundary representation, vgl. WIEGHARDT [248]) bezeichnet wird, keine geometrischen Formfunktionen ins Innere der Struktur existieren, muß das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld alternativ ermittelt werden. MAUTE [136] schlägt hierzu eine modifizierte LAPLACE-Glättung vor. Das Vorgehen bei dieser Methode gliedert sich in zwei Schritte. Wegen der Verwendung geometrischer Formfunktionen für die Beschreibung der Ränder bzw. der Oberflächen der Struktur ist das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld dort bekannt. Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld der übrigen Punkte im Inneren der Geometrie wird zu Beginn der Prozedur zu null gesetzt, während das auf den Rändern bzw. den Oberflächen unverändert bleibt (Schritt 1). Das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld eines Punktes (z.B. eines FE-Knotens) berechnet sich aus den Werten des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes der angrenzenden Knoten. Diese Prozedur wird nun für jeden Knoten (außer für diejenigen auf den Rändern bzw. Oberflächen) der Struktur durchgeführt (Schritt 2). Die Iteration ist dann beendet, wenn die Änderung des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes des Iterationsschritts  $i + 1$  zu dem des Iterationsschritts  $i$  unter einer vorgegebenen Schranke liegt. Näheres hierzu ist beispielsweise in der Arbeit von MAUTE [136] nachzulesen.

Die Ermittlung von Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern mit Hilfe geometrischer Formfunktionen erfordert eine speziell dafür angelegte Programmstruktur für den Einsatz in der Strukturoptimierung (z.B. in BLETZINGER [30], BLETZINGER ET AL. [33], KIMMICH [106], BARTHOLD [10], LUND [129], WIEGHARDT [248], FALK ET AL. [72]). Diese ist oftmals in bereits bestehenden oder kommerziellen Programmkonzepten nur schwer zu verwirklichen, da Daten zwischen dem Geometriemodell und dem Analysemodell ausgetauscht werden müssen. Aus diesem Grund werden in solchen Fällen die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder auf anderem Wege ermittelt. Diese Verfahren sollten jedoch zumindest zu glatten Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern führen und trotzdem ausschließlich auf dem FE-Modell basieren. Die Forderung nach Glattheit der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder ist bei der Verwendung der Koordinaten der FE-Knoten als Optimierungsvariablen nicht erfüllt (vgl. Abbildung 3.1). Daher bietet sich eine mechanische Deformation zur Ermittlung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder an. Diese Art der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder wird aus diesem Grund als deformationsbasierende oder auch natürliche Entwurfsgeschwindigkeitsfelder bezeichnet. Eine denkbare Methode zur Ermittlung dieser Felder ist das Aufbringen von fiktiven, äußeren Lasten. Unter der Annahme linearer Elastizität deformiert sich die Struktur infolge dieser fiktiven Last. Die entstandene Deformation wird als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld für die gewählte fiktive Last bzw. Lastkombination definiert. Die zugehörige Optimierungsvariable ist die Größe bzw. der Betrag der fiktiven Last (z.B. in BELEGUNDU & RAJAN [16], ZHANG & BELEGUNDU [256]). Ein alternatives, jedoch ähnliches Vorgehen ist beispielsweise in CHOI & CHANG [54] beschrieben. Dort wird durch einen fiktiv aufgebrachten Verschiebungslastfall auf dem Rand bzw. der Oberfläche die elastische Deformation der Struktur als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld interpretiert. Die Optimierungsvariablen sind dabei die Beträge der fiktiv aufgebrachten Verschiebungen. In TORTORELLI [226] und SCHWARZ [201] werden die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder infolge einer (fiktiven) thermischen Beanspruchung der Struktur bestimmt. Auch hierbei handelt es sich um eine elastische Deformation. Analog zu den beiden zuvor beschriebenen Vorgehensweisen stellen bei diesem Ansatz die Temperaturen die Optimierungsvariablen dar. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der Eigenformen der Struktur als Entwurfsgeschwindigkeitsfelder. Vorteil dieser Vorgehensweise ist die lineare

Unabhängigkeit der Eigenformen, da diese stets orthogonal zueinander sind.

Die Vorteile der mechanisch orientierten oder auch deformationsbasierenden Verfahren sind nach BELEGUNDU & RAJAN [16] die geringen Elementverzerrungen infolge der Formänderung sowie die Tatsache, daß diese Methoden einfach in bestehende Programme zu implementieren sind.

Die vom Benutzer zugelassenen Möglichkeiten der Formänderung im Optimierungsprozeß unterscheiden sich in den meisten Fällen von den Verformungsmöglichkeiten infolge der tatsächlichen äußeren Belastung und der Definition der Lagerbedingungen. Daher ist es oftmals notwendig, zusätzliche Lagerbedingungen zur Ermittlung der deformationsbasierenden Entwurfsgeschwindigkeitsfelder einzuführen (vgl. Abbildung 3.1, modifiziertes System). Dadurch ändert sich auch die Steifigkeitsmatrix im Vergleich zu der bei der 'eigentlichen' Strukturanalyse, was die Lösung weiterer Randwertprobleme erforderlich macht. Ein zweiter Nachteil ist, daß die Struktur für den weiteren Fertigungsprozeß wieder in eine CAD-Beschreibung zurückzuführen ist, was sich jedoch bei der Verwendung deformationsbasierender Entwurfsgeschwindigkeitsfelder im Gegensatz zur CAGD-orientierten Beschreibung der Formänderung wesentlich aufwendiger gestaltet. In Abbildung 3.1 ist der Einfluß der Art der Optimierungsvariablen auf das zugehörige Entwurfsgeschwindigkeitsfeld verdeutlicht.

Zur Lösung beliebiger Optimierungsaufgaben eignet sich der in Kapitel 2 vorgestellte mathematisch orientierte Ansatz besonders gut. Die Art der Entwurfskriterien ist zur Lösung des Problems wegen der Abstrahierung nicht relevant. Jedoch haben sich für spezielle Formoptimierungsprobleme alternative, meist heuristische Verfahren bewährt. Als Aufgabenstellung sei hier die Ermittlung eines homogenen Spannungszustandes (Spannungsausgleich) genannt. Viele dieser Methoden wurden von biologischen Prozessen, wie beispielsweise dem Wachstum von Bäumen oder Knochen, abgeleitet. Diese Verfahren sind in der Regel nicht zu beweisen, erscheinen aber plausibel, weshalb man von heuristischen Verfahren spricht. Ein Vertreter dieser Verfahren ist die Methode nach MATTHECK

Design-Modell mit generierten FE-Knoten

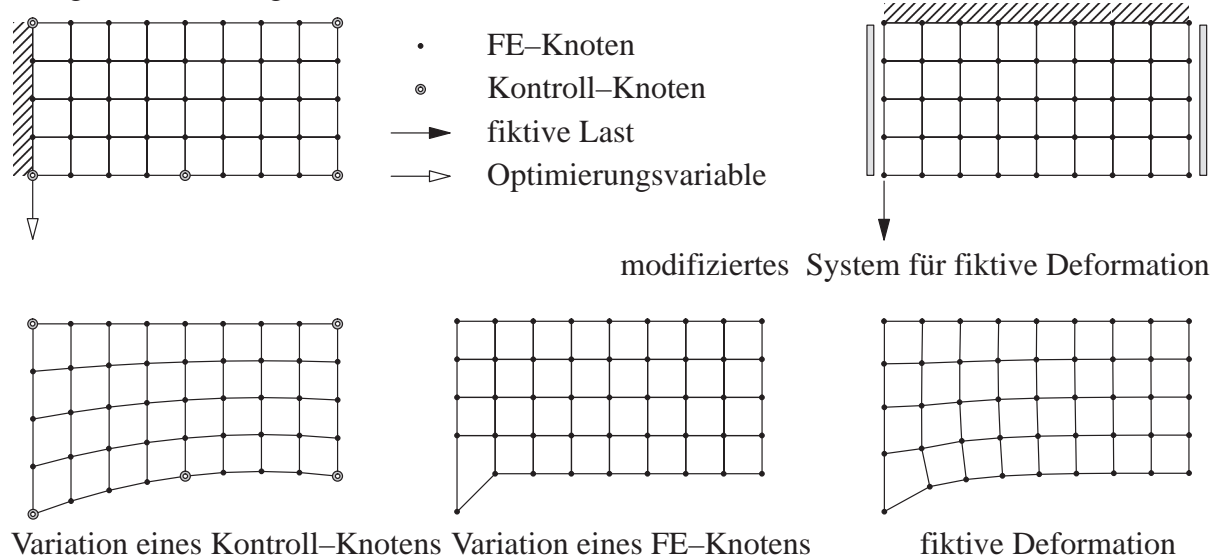


Abbildung 3.1: Beschreibung der Formänderung im Optimierungsprozeß, Entwurfsgeschwindigkeitsfelder

& BURKHARDT [134]. Die zu optimierende Struktur wird bei deren Ansatz in zwei Bereiche, einen steifen innenliegenden Teil mit einer Wärmeleitfähigkeit von null, und einen dünnen, sehr weichen Teil mit einer von null verschiedenen Wärmeleitfähigkeit, unterteilt. Dieser äußere Teil wird daher als Schwellschicht bezeichnet. Mit Hilfe der VON MISES-Vergleichsspannungen werden nun (fiktive) Dehnungen in der Schwellschicht berechnet, die zu einer geometrischen Änderung der Struktur führen, um einen möglichst ausgeglichenen Spannungszustand entlang der Kanten zu erhalten. Diese Dehnungen werden entweder direkt aus den Spannungen ermittelt oder indirekt über eine thermische Beanspruchung der Struktur infolge der Spannungen hervorgerufen.

Die Vorteile der heuristischen Verfahren sind die einfache Implementierung und die rasche Konvergenz, da kein zusätzliches Optimierungsproblem mit MP- oder OC-Methoden zu lösen ist. Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist, daß die Formänderungen gegenüber dem Startentwurf relativ gering sind und daher lediglich spezielle Problemstellungen, wie beispielsweise der Spannungsausgleich, behandelt werden können.

In der vorliegenden Arbeit werden die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder mittels geometrisch orientierter Verfahren, wie der erwähnten CAGD-Technik, ermittelt. Dabei werden sowohl strukturierte als auch unstrukturierte (freivernetzte) Elementnetze verwendet. Bei den letzteren werden die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder im Inneren der Struktur mit Hilfe der beschriebenen modifizierten LAPLACE-Glättung (MAUTE [136]) ermittelt.

Der folgende Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die Methoden des 'Computer Aided Geometric Design'. Für Details sei auf FAUX & PRATT [73], BÖHM ET AL. [36], BLETZINGER [30] oder auch WIEGHARDT [248] verwiesen.

Das Konzept der Design-Elemente ist hierarchisch geordnet, d.h. Elemente höherer Stufen werden aus den vorherigen definiert und zusammengesetzt. Eindimensionale Elemente, auch als Design-Kanten bezeichnet, werden durch die Design-Knoten (Kontroll-Knoten) definiert. Als Beispiele für Design-Kanten sind LAGRANGE-Polynome, BÉZIER-Interpolationen oder B-Splines zu nennen. Ein Nachteil der LAGRANGE-Polynome sind oszillierende Formen bei steigendem Polynomgrad, weshalb die geometriebeschreibenden Kurven häufig aus abschnittsweise definierten Polynomen niedrigerer Ordnung zusammengesetzt werden, was zur Definition von Splines führt. Grund für diese Oszillationen ist der größere Einfluß eines formbeschreibenden Design-Knotens auf die gesamte Kurve bei Verwendung eines LAGRANGE-Polynoms, als dies bei einem B-Spline der Fall ist. Näheres hierzu ist in BLETZINGER [30] oder WIEGHARDT [248] zu finden.

Zweidimensionale Elemente werden durch Kanten definiert. Übliche Flächenelemente sind beispielsweise LAGRANGE-, COONS- oder BÉZIER-Elemente. Analog zu dieser Definition ergeben sich dreidimensionale Elemente durch Zusammensetzen der Flächenelemente. Diese hierarchische Gliederung ist in Abbildung 3.2 veranschaulicht.

Dieses hierarchische Konzept wird auch von CAD-Techniken verwendet und erlaubt wegen der aufeinander aufbauenden Definitionen beliebige topologische Kombinationen zwischen den einzelnen Hierarchiestufen. Die mathematische Definition der Design-Elemente wird im folgenden erläutert. Dabei wird die Geometrie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3(\Omega_x)$  abschnittsweise über Gestaltsfunktionen  $\Phi_i$  (KNEPPE [116], BLETZINGER [30]) im Parameterraum  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{1,2,3}(\Omega_\xi)$  der Design-Elemente beschrieben. In der Literatur werden oftmals auch die Bezeichnungen 'Formfunktion', 'Interpolationsfunktion' oder 'Ansatzfunktion' für  $\Phi_i$  verwendet. Um jedoch Verwechslungen mit den Ansatzfunktionen der Finiten Elemente (vgl. Kapitel 4) zu vermeiden, wird in dieser Arbeit der Begriff 'Gestaltsfunktion' in Zusammenhang mit

Design-Elementen bevorzugt.

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{x}}_i \tag{3.1}$$

Der Vektor  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  stellt den Ort eines materiellen Punktes im Parameterraum  $\Omega_\xi$  dar. Der Vektor  $\hat{\mathbf{x}}_i$  beschreibt die Koordinaten der  $n$  formbeschreibenden Design-Knoten eines Design-Elements, die in der Formoptimierung die freien Parameter (Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$ ) darstellen. Mit Hilfe dieser Gestaltsfunktionen gelingt es, abschnittsweise glatte Kanten und Oberflächen zu erzeugen, was bei der Formoptimierung wünschenswert ist. Um die Glattheit an Übergängen zwischen Design-Elementen zu garantieren, bedarf es der Definition von Übergangs- bzw. Kontinuitätsbedingungen. Bei dieser Kontinuität sind Begriffe wie 'geometrische Kontinuität' oder auch 'visuelle Kontinuität' und 'parametrische Kontinuität' zu unterscheiden. Nach BLETZINGER [30] ist die geometrische Kontinuität zwischen Design-Elementen dann gewährleistet, wenn die wirkliche, sichtbare Form an den Übergangsstellen die gestellten Bedingungen erfüllt. Die Bedingung für parametrische Kontinuität orientiert sich im Gegensatz dazu an den Verhältnissen im Parameterraum.

Die Kontinuitätsbedingungen sind besonders einfach für BÉZIER- und B-Splines mit Hilfe geometrischer Beziehungen der Koordinaten der formbeschreibenden Kontroll-Knoten zu

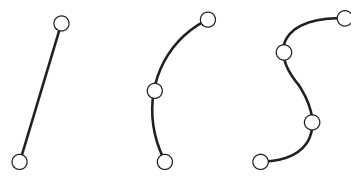
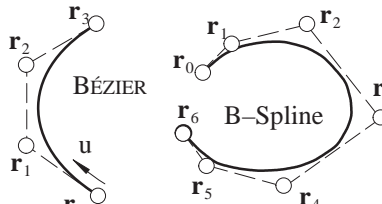
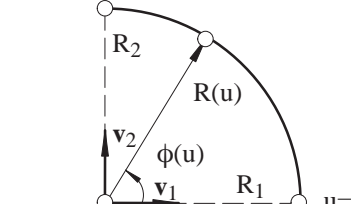
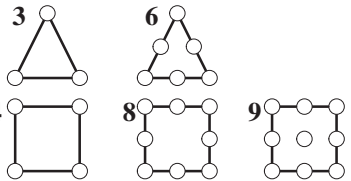
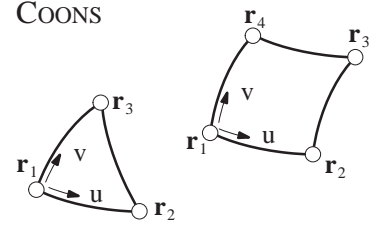
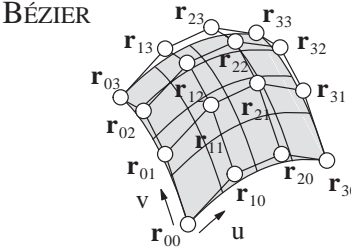
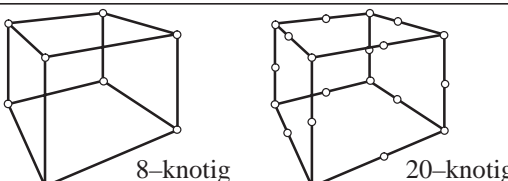
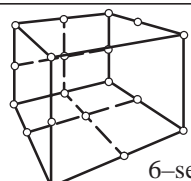
1D Kurven-Elemente $\xi \in \mathbb{R}^1$		○ Kontroll-Knoten	
<p>LAGRANGE</p>  <p>linear    quadratisch    kubisch</p>	<p>Splines</p>  <p>BÉZIER    B-Spline</p>	<p>Kreise, Spiralen</p>  <p><math>R(u)</math> <math>\phi(u)</math> <math>u=0</math></p>	
2D Flächen-Elemente $\xi \in \mathbb{R}^2$			
<p>LAGRANGE</p>  <p>3    4    6    8    9</p>	<p>COONS</p>  <p><math>r_1, r_2, r_3, r_4</math> <math>u, v</math></p>	<p>BÉZIER</p>  <p><math>r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03}, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}</math> <math>u, v</math></p>	
3D Volumen-Elemente $\xi \in \mathbb{R}^3$			
<p>LAGRANGE</p>  <p>8-knotig    20-knotig</p>	<p>COONS</p>  <p>6-seitig</p>		

Abbildung 3.2: Hierarchischer Aufbau der Design-Elemente (aus BLETZINGER ET AL. [32] bzw. BLETZINGER [30])

gewährleisten. Die (geometrische) Verknüpfung von Optimierungsvariablen wird auch als 'variable linking' bezeichnet. Neben dem bereits beschriebenen Effekt der Gewährleistung von kontinuierlichen Übergängen wird durch diese Verknüpfung die Anzahl der Optimierungsvariablen reduziert und somit auch die Formvielfalt des Entwurfsmodells eingeschränkt. Durch diese Linking-Vorschriften können beispielsweise bestimmte Bewegungsrichtungen einzelner Kontroll-Knoten, Symmetriebedingungen oder auch relative Bewegungen von Kontroll-Knoten zueinander erzwungen werden.

Die beschriebenen Verknüpfungsvorschriften werden in der während des Optimierungsprozesses konstanten Verknüpfungsmatrix  $\mathbf{L}$  zusammengefaßt. Für die Lage der voneinander unabhängigen Kontroll-Knoten  $\hat{\mathbf{x}}$  ergibt sich dann folgender Zusammenhang:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^0 + \mathbf{L} \hat{\mathbf{s}} \quad (3.2)$$

In dem Vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  sind die formbeschreibenden Design-Knoten aller Design-Elemente zusammengefaßt. Der Vektor  $\hat{\mathbf{x}}^0$  beschreibt den von den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  unabhängigen Anteil der Koordinaten der Kontroll-Knoten. Diese sind in Abbildung 3.3 als Design-Parameter bezeichnet. Neben der Verknüpfung von Kontroll-Knoten kann die Abhängigkeit zwischen den Kontroll-Knoten der Design-Elemente und den Knoten der Finiten Elemente auch als eine Art Verknüpfung interpretiert werden. Diese erfolgt über die zuvor definierten Gestaltsfunktionen und wird mit Hilfe des Entwurfsgeschwindigkeitsfeldes ausgedrückt.

Mit Hilfe dieser Verknüpfung von Optimierungsvariablen und Kontroll-Knoten der Design-Elemente sowie der Verknüpfung der Kontroll-Knoten und der Strukturparameter (FE-Knoten) läßt sich die in Abbildung 3.3 angegebene Variablenhierarchie im Optimierungsmodell aufstellen.

Näheres zum Konzept der Variablenverknüpfung ist in BLETZINGER [30] und RAMM ET AL. [175] zu finden. Die Definition bzw. Ermittlung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder, basierend auf der CAGD-Beschreibung, ist nachfolgend kurz erklärt.

Wie bereits erläutert, beschreiben die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder die Änderung der Materialpunkte (z.B. FE-Knoten) innerhalb eines definierten Gebietes in Abhängigkeit von der Variation eines freien Parameters (Optimierungsvariable). In ZHANG & BELEGUNDU [256] wird aus diesem Grund auch von der Sensitivität des FE-Netzes infolge einer Designänderung gesprochen. Demnach wird auf diese Art das Analysemodell mit dem

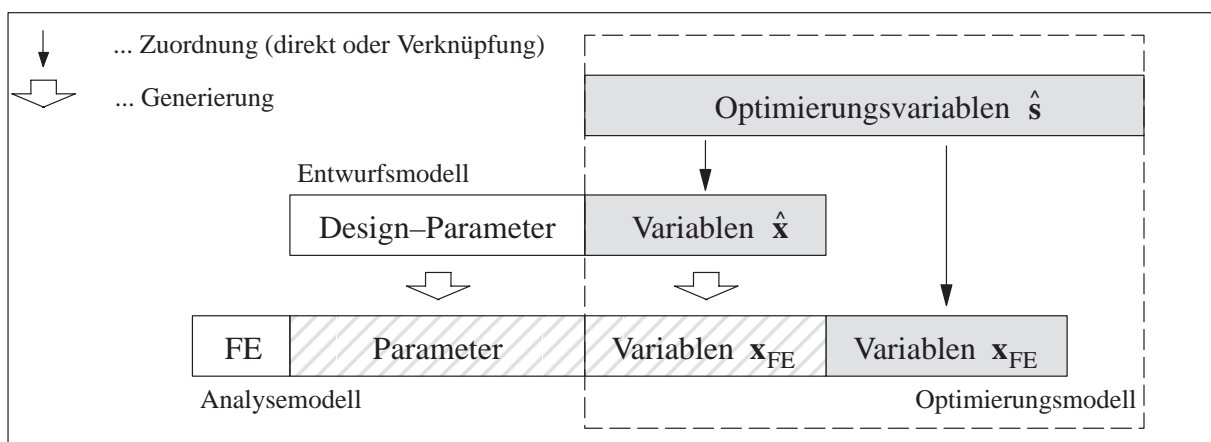


Abbildung 3.3: Hierarchie der Optimierungsvariablen (aus BLETZINGER [30])

Entwurfsmodell verknüpft. Dieser geometrische Zusammenhang ist durch Gleichung (3.3) ausgedrückt. Eine Änderung der Position eines Kontroll-Knotens  $i$  bzw. einer Optimierungsvariablen  $\hat{s}_i$  führt zu einer Änderung der Punkte (z.B. FE-Knoten) innerhalb des Design-Elements.

$$\nabla_s \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\xi}) \nabla_s \hat{\mathbf{x}}_i \quad ; \quad \nabla_s \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{L} \nabla_s \hat{\mathbf{s}} \quad (3.3)$$

$\nabla_s \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  stellt dabei die in einer Matrix zusammengefaßten Entwurfsgeschwindigkeitsfelder der Materiepunkte für die einzelnen Design-Knoten und damit auch der Optimierungsvariablen dar. Diese Entwurfsgeschwindigkeitsfelder werden innerhalb einer Optimierungsiteration an zwei Stellen benötigt. Zum einen bei der Sensitivitätsanalyse der Strukturantwort bzw. der Entwurfskriterien zur Ableitung der geometrischen Größen (vgl. Kapitel 5, 6 und 7), zum anderen bei der Bestimmung der verbesserten Tragwerksgeometrie bzw. der neuen Lage der FE-Knoten. Für diese ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{x}_{FE}^{(k+1)} = \mathbf{x}_{FE}^{(k)} + \nabla_s \mathbf{x}_{FE}^{(k)T} \Delta \hat{\mathbf{s}}^{(k)} \quad (3.4)$$

Die Vektoren  $\mathbf{x}_{FE}^{(k+1)}$  und  $\mathbf{x}_{FE}^{(k)}$  bezeichnen die Position der Knoten der Finiten Elemente in den Optimierungsschritten  $(k+1)$  und  $(k)$ .  $\nabla_s \mathbf{x}_{FE}^{(k)}$  stellt die Matrix der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder aller FE-Knoten im Gebiet dar. In den meisten Fällen ändern sich die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder während des Optimierungsfortschritts nicht bzw. werden während des gesamten Optimierungsprozesses konstant gehalten. Deshalb kann die Lage der FE-Knoten nach Gleichung (3.4) für den optimalen Entwurf auch wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{x}_{FE}^* = \mathbf{x}_{FE}^0 + \nabla_s \mathbf{x}_{FE}^0T \hat{\mathbf{s}}^* \quad (3.5)$$

$\mathbf{x}_{FE}^0$  beschreibt die Lage der FE-Knoten zu Beginn der Optimierung. Gleichung (3.5) macht deutlich, daß der optimale Entwurf aus einer Linearkombination der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder ermittelt wird. Wird jedoch infolge großer Designveränderungen eine Neuvernetzung notwendig oder basieren die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder auf der jeweils aktuellen Geometrie, ist diese Vorgehensweise nicht mehr zulässig.

Bei Verwendung strukturierter Netze, die mittels der Gestaltsfunktionen  $\Phi_i$  der Design-Elemente erzeugt werden, können die optimalen Koordinaten der FE-Knoten auch direkt, ohne Verwendung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder wie in den Gleichungen (3.4) und (3.5), durch Einsetzen der optimalen Lösung  $\hat{\mathbf{s}}^*$  in Gleichung (3.1) bestimmt werden.

## 3.2 Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung stellt die allgemeinste Methode in der Strukturoptimierung dar. Durch sie wird der grundlegende topologische Aufbau einer Tragstruktur ermittelt, ohne jedoch exakte Aussagen über Form und Querschnittsabmessungen der beteiligten Bauteile treffen zu können.

In der vorliegenden Arbeit werden in erster Linie Formoptimierungsprobleme behandelt. Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Sensitivitätsanalyse bei nichtlinearem Strukturverhalten. Dieses Verfahren ist sowohl für Form- als auch für Topologieoptimierungsprobleme anwendbar. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle nur kurz auf die bekannten



Verfahren der Topologieoptimierung eingegangen. Für Details sei auf die Arbeiten von BENDSØE [18], BENDSØE & MOTA SOARES [22], ESCHENAUER & OLHOFF [67], ROZVANY ET AL. [190], MAUTE [136] oder auch KEMMLER [103] verwiesen.

Bei den Verfahren der Topologieoptimierung unterscheidet man zwischen heuristischen, geometrischen und materiellen Methoden. Letztere werden wiederum in materiell diskret und materiell kontinuierlich eingeteilt. Bei dem materiell diskreten Ansatz spricht man von 'Layout'-Optimierung.

Erste Ansätze zur Bewältigung von Topologieoptimierungsproblemen verwenden einen analytischen Zugang des materiell diskreten Ansatzes und gehen auf MAXWELL [141] 1869 und MICHELL [146] 1904 zurück. Ziel dieser Optimierungsprobleme ist die Maximierung der Steifigkeit bei vorgeschriebener Masse. Die dabei entstehenden optimalen Strukturen bestehen aus einem orthogonalen Netz von Stäben (sogenannte MICHELL-Strukturen), die jedoch nur für einen bestimmten Lastfall und lineares Strukturverhalten optimal sind. In den siebziger Jahren wurde MICHELLS Ansatz z.B. von HEMP [93] oder auch PRAGER & ROZVANY [171] für die Anwendung auf komplexere Topologieoptimierungsprobleme mit mehreren Nebenbedingungen und Lastfällen erweitert. Das Hauptproblem dieser Vorgehensweise besteht darin, daß sie für allgemeine Aufgabenstellungen ungeeignet ist. DORN ET AL. [63] haben 1964 eine Methode zur Optimierung einer Grundstruktur aus endlich vielen Fachwerkstäben und/oder Balkenelementen vorgestellt. Auf diese Art und Weise wird das Topologieoptimierungsproblem in ein Querschnittsoptimierungsproblem umgewandelt und wird daher auch als 'approximativ-diskrete' Topologieoptimierung bezeichnet.

Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist die Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der zugrundeliegenden Grundstruktur und dem vereinfachten mechanischen Modell durch die Annahme von Fachwerkstäben bzw. Balkenelementen. Daher wird der kontinuierliche Ansatz zur Lösung von Optimierungsproblemen bevorzugt. Wie bereits angedeutet, unterscheidet man hier wiederum zwischen einem heuristischen, einem geometrischen und einem materiell kontinuierlichen Ansatz.

Als heuristische Verfahren der Topologieoptimierung werden beispielsweise die 'soft-kill'-Methode (z.B. WALTHER & MATTHECK [242]) oder die 'hard-kill'-Methode (z.B. SIENZ [208]) bezeichnet. Der Grund für deren Einstufung als heuristische Methoden ist, daß die Entscheidung über die Verteilung der Steifigkeitsverhältnisse in der Struktur mit Hilfe des aktuellen Spannungszustandes getroffen wird. Diese Methoden haben ihren Ursprung in der 'Fully Stressed Design'-Technik, bei der ein möglichst ausgeglichener Spannungszustand angestrebt wird. Schwach beanspruchte Bereiche werden sukzessive entfernt. Bei der 'soft-kill'-Methode wird die Steifigkeit, z.B. mittels des Elastizitätsmoduls, an einer bestimmten Stelle des Tragwerks als lineare Funktion des dort herrschenden Spannungszustandes in bezug zur maximalen Spannung oder der Vergleichsspannung definiert. Bei der 'hard-kill'-Methode werden schwach beanspruchte Gebiete unter einer vorgegebenen Schranke, die während der Prozedur verändert wird, sofort entfernt; dieses Vorgehen kann auch als Integer-Optimierung bezeichnet werden, bei der die Entscheidung über 'Material' oder 'kein Material' (vgl. Kapitel 2) mit Hilfe des Spannungszustands getroffen wird. Die 'penalty-kill'-Methode ist zwischen den beiden zuvor beschriebenen Methoden einzustufen, da die Steifigkeit nicht linear, sondern über eine Exponentialfunktion (Penalty-Funktion) vom Spannungszustand abhängig ist. Durch eine entsprechende Wahl des Exponenten kann sowohl die 'soft-kill'-Methode als auch die 'hard-kill'-Methode beschrieben bzw. approximiert werden. Ein analoges Vorgehen wird bei dem an späterer

Stelle noch beschriebenen SIMP-Ansatz angewendet. Der Vorteil der heuristischen Methoden ist die sehr einfache Implementierung, da kein Optimierungsalgorithmus, wie z.B. die SQP-Methode, zur Ermittlung eines neuen Satzes von Optimierungsvariablen benötigt wird. Es ist lediglich ein Analyseverfahren, wie beispielsweise die Methode der Finiten Elemente, erforderlich. Allerdings können mit diesen Verfahren keine allgemeinen Optimierungsprobleme, d.h. unterschiedliche Zielfunktionen und Nebenbedingungen, behandelt werden, wie dies bereits im Abschnitt zuvor bei dem Verfahren nach MATTHECK & BURKHARDT [134] der Fall war.

Beim geometrischen Ansatz werden in eine gegebene Struktur Löcher eingebracht. Diese und die bereits vorhandenen werden anschließend durch Methoden der Formoptimierung derart verändert, daß die Zielfunktion verbessert wird. Die Anzahl und die Position dieser zusätzlichen Löcher ist allerdings nur schwer zu bestimmen. Heuristische Verfahren, wie sie von ROSEN & GROSSE [186] vorgeschlagen werden, bringen die Löcher an Stellen niedriger Spannung (meistens Vergleichsspannung) ein. Bei ESCHENAUER ET AL. [65] und SCHUMACHER [200] wird dieses Problem durch ein lokales Optimierungsproblem gelöst. Ein infinitesimal kleines, kreisförmiges oder elliptisches Loch ('bubble') wird in die Struktur an der Stelle eingebracht, an der der Gradient der LAGRANGE-Funktion bezüglich einer Variation der Form des Loches minimal ist. Dadurch wird der Spannungszustand in der Struktur nicht gestört, da diese Methode auf dem SAINT-VENANT-Prinzip beruht. Anschließend wird die Form des Loches optimiert. Diese Vorgehensweise wird als 'bubble'-Methode bezeichnet. Der Vorteil gegenüber materiellen Methoden ist, daß die Ergebnisse aus einer Topologieoptimierung nicht durch Methoden der Formoptimierung nachbearbeitet werden müssen, da dieses Verfahren direkt die Formoptimierung in den Topologieoptimierungsprozeß integriert. Nachteilig ist die rechenintensive Auswertung des Optimierungsproblems zur Positionierung der zusätzlichen Löcher. Außerdem stellen geometrische Methoden hohe Anforderungen an den Optimierungsalgorithmus, da die Löcher an beliebigen Stellen plaziert werden könnten, was häufige Netzwechsel bzw. Netz-anpassungen erfordert. Das Einbringen von Löchern führt zu einem irreversiblen Wechsel des zugrundeliegenden mechanischen Problems. Daher ist die Optimierungsprozedur diskontinuierlich bzw. pfadabhängig und somit an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Aufgrund dieser grundlegenden Schwierigkeiten bzw. Anforderungen verwenden die meisten Methoden in der Topologieoptimierung den materiell kontinuierlichen Ansatz, der nachfolgend kurz diskutiert wird. Ein Überblick über die Methoden der materiellen Topologieoptimierung ist beispielsweise in MAUTE [136] oder MAUTE ET AL. [140] zu finden. Wie in Kapitel 2 bereits beschrieben, handelt es sich bei der materiellen Topologieoptimierung um ein Materialverteilungsproblem. Bei der klassischen Topologieoptimierungsaufgabe wird eine bestimmte Masse  $\bar{m}$  optimal in einem definierten Raum  $\Omega$  verteilt, was durch eine diskontinuierliche Indikatorfunktion  $\chi(\mathbf{x}, k)$  (oder auch Trägerfunktion) beschrieben wird (vgl. Gleichung (2.38)). Häufig ist bei Topologieoptimierungsproblemen die Maximierung der Steifigkeit das zugrundeliegende Entwurfskriterium. Dann wird die Masse  $\bar{m}$  während der Optimierung konstant gehalten. Für den linear elastischen Fall entspricht die Maximierung der Steifigkeit der Minimierung der inneren Formänderungsenergie (Dehnungsenergie). Es ergibt sich folgendes, beschränktes Optimierungsproblem:

$$\min_{\mathbf{C}} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega - \bar{m} = 0 \quad (3.7)$$

$\rho(\mathbf{x})$  beschreibt die Dichteverteilung über das Gebiet  $\Omega$ . Die Optimierungsvariablen sind in dem aus isotropem Material bestehenden elastischen Materialtensor  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  enthalten, welcher, wie die Dichteverteilung, abhängig von der obengenannten Indikatorfunktion  $\chi(\mathbf{x})$  ist.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathbf{C}_0 \quad ; \quad \rho(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \rho_0 \quad (3.8)$$

$\mathbf{C}_0$  beschreibt den Materialtensor und  $\rho_0$  die Dichte des isotropen, homogenen Materials. Da das mechanische Problem wie auch das Optimierungsproblem in den seltensten Fällen analytisch gelöst werden kann, ist eine approximative Beschreibung notwendig. In der vorliegenden Arbeit wird hierzu die Methode der Finiten Elemente verwendet. U.a. wird dabei die Indikatorfunktion  $\chi$  elementweise mit stetigen (meist konstanten) Ansätzen für die Indikatorfunktion  $\chi(\mathbf{x})$  approximiert.

$$\chi(\mathbf{x}) \approx \chi^h(\mathbf{x}) \quad ; \quad \chi^h \in V_{\chi}^h \subseteq H^1 \quad (3.9)$$

Die konstanten Ansätze führen zu einer diskontinuierlichen Materialverteilung, weshalb man von einem '0-1'-Optimierungsproblem (Integer-Optimierungsproblem) spricht. Dieses ist im allgemeinen nur mit enormem numerischen Aufwand zu lösen. Außerdem sind die Ergebnisse stark von der gewählten Diskretisierung abhängig und zudem existieren zahlreiche lokale Minimumstellen.

Erste Ansätze in der materiellen Topologieoptimierung unter Verwendung der kontinuierlichen Methode sind ROSSOW & TAYLOR [187] zuzuschreiben. Sie verwenden die Dicke von Scheibenelementen als Optimierungsvariablen und bestimmen so aus der optimalen Dickenverteilung die optimale Topologie eines Tragwerks. Neben der Unsicherheit, welche Stellen anhand der optimalen Dickenverteilung als Löcher zu interpretieren sind, existieren weitere Nachteile dieser Vorgehensweise. Beispielsweise fand OLHOFF [155] heraus, daß die Optimierungsergebnisse, wie bereits erwähnt, sehr stark von der Diskretisierung abhängig sind. Je feiner die Diskretisierung gewählt wird, um so mehr Rippen (Tragelemente) ergeben sich durch die Optimierung. Dies läßt darauf schließen, daß das Optimum unendlich viele Rippen besitzt (CHENG & OLHOFF [53], vgl. MICHELL-Struktur).

Diese numerischen Probleme entstehen durch das fundamentale Problem der Integer-Optimierung. Das Variationsproblem (Gleichung (3.6)) besitzt im Unterraum  $H_0^1$  der approximierten Strukturantwort  $\mathbf{u}^h$  ( $\mathbf{u}^h \in H_0^1$ ) keine Lösung, da es sich um ein schlecht gestelltes, nichtkonvexes Optimierungsproblem handelt (KOHN & STRANG [118]).

Zur Lösung des schlecht gestellten '0-1'-Optimierungsproblems stellen KOHN & STRANG [117], [118] eine mathematisch fundierte Methode vor, die drei Disziplinen miteinander verknüpft. Diese sind die Strukturoptimierung, Relaxation von nichtkonvexen Funktionalen und Homogenisierung von Mikrostrukturen.

Es stellt sich heraus, daß die Verschiebungen im Optimum sehr stark oszillieren, was auf eine Struktur mit beliebig vielen und beliebig kleinen Löchern hindeutet. Durch die Einführung poröser Werkstoffe kann dieses Problem gelöst werden. Dabei wird die diskrete Parameterfunktion  $\chi$  durch eine kontinuierliche Verteilungsfunktion  $\hat{\chi}$  ersetzt. Dadurch wird der Funktionenraum der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  erweitert und somit relaxiert. Man spricht von Relaxation oder auch Regularisierung. Für die kontinuierliche Verteilungsfunktion  $\hat{\chi}$  gilt dann:

$$0 \leq \hat{\chi} \leq 1 \quad (3.10)$$

Der Materialtensor  $\mathbf{C}$  ist nun nicht länger ausschließlich eine Funktion des Ortes  $\mathbf{x}$  und des Optimierungsfortschrittes  $k$ , sondern zusätzlich eine Funktion der Porosität bzw. Dichte  $\rho$ . Das Optimierungsproblem läßt sich daher folgendermaßen darstellen:

$$\min_{\mathbf{C}} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.11)$$

$$\text{mit} \quad \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega - \bar{m} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0 \quad (3.12)$$

Für  $\rho = \rho_0$ , also homogenes Material, ist  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{C}_0(\mathbf{x})$ . Der Materialtensor  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \rho)$  beschreibt dabei das makroskopische Verhalten des porösen Materials und ist derart zu wählen, daß gewisse Bedingungen erfüllt werden (KOHN & STRANG [118]), auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird.

Diejenigen porösen Materialmodelle, die diese Bedingungen erfüllen, werden als optimale Materialmodelle oder auch optimale Mikrostrukturen bezeichnet. Die einzigen zum jetzigen Zeitpunkt bekannten Materialmodelle, die diese Bedingungen erfüllen, sind die periodisch strukturierten 'rank-n'-Lamine (vgl. Abbildung 3.4). Obwohl die 'rank-n'-Lamine aus mathematischer Sicht die geforderten Bedingungen exakt erfüllen, führen sie zu optimalen Strukturen mit einem großen Anteil an porösem Material. Eine Überführung dieser Ergebnisse in reale Tragwerke ist nahezu unmöglich. Aus diesem Grund werden nichtoptimale (suboptimale) poröse Werkstoffmodelle eingeführt, welche die in der Arbeit von KOHN & STRANG [118] geforderten Bedingungen nicht erfüllen. Dies hat zur Folge, daß mit diesen vereinfachten Ansätzen im Optimum eine eindeutige '0-1'-Verteilung erzielt werden kann, die jedoch von der Diskretisierung abhängig ist. Mit Hilfe der Filter-Methode nach SIGMUND [209] oder der Perimeter-Methode (Umfangsmethode) nach HABER ET AL. [82] kann diese Netzabhängigkeit nahezu beseitigt werden.

Nichtoptimale Materialmodelle können wiederum in makroskopische und mikroskopische Ansätze unterteilt werden. Der wohl bekannteste mikroskopische Ansatz geht auf BENDSØE & KIKUCHI [20] zurück. Dieser sogenannte 'micro hole'-Ansatz ist in Abbildung 3.4 anschaulich dargestellt. Dabei sind die Abmessungen  $a$  und  $b$  des Repräsentativen-Volumen-Elements (RVE, Einheitszelle) sowie deren Orientierung  $\varphi$  in der Ebene variable Größen, d.h. die Optimierungsvariablen. Durch eine kontinuierliche Variation dieser Variablen können Materialzustände beliebiger Porosität und Orientierung erzeugt werden. Die makroskopischen Materialeigenschaften für die erwähnten mikroskopischen Ansätze werden mit Hilfe von Homogenisierungsverfahren bestimmt, die die Geometrie der Einheitszelle berücksichtigen (z.B. BENSOUSSAN ET AL. [26], SANCHEZ-PALENCIA [193]).

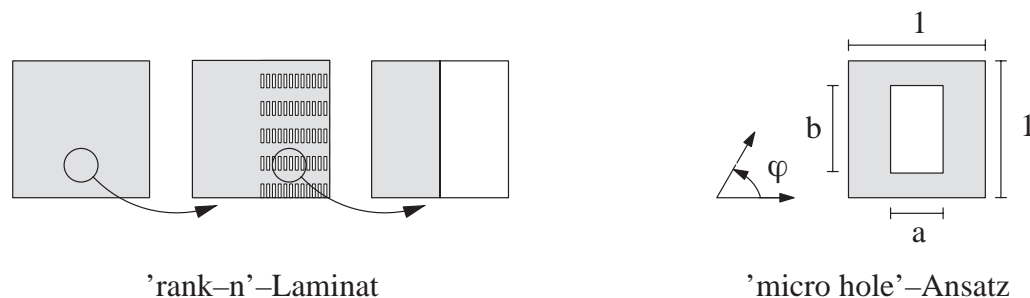


Abbildung 3.4: Mikroskopische Materialmodelle: 'rank-n'-Laminat, 'micro hole'-Ansatz

Da diese Homogenisierung für jede Kombinationsmöglichkeit der Variablen durchzuführen ist, werden häufig aus Effizienzgründen nur endlich viele Kombinationen exakt bestimmt und dazwischenliegende durch Interpolation ermittelt (GUEDES & KIKUCHI [80]).

Andere Materialmodelle variieren direkt makroskopische Materialeigenschaften. So werden beispielsweise von RINGERTZ [185] oder BENDSØE ET AL. [19] direkt die Einträge im Materialtensor als Optimierungsvariablen interpretiert. Verschiedene Normen des makroskopischen Materialtensors, wie z.B. dessen Spur, werden herangezogen, um einen Zusammenhang zur Dichte herzustellen.

Ein relativ einfacher und anschaulicher makroskopischer Ansatz stellt einen direkten Zusammenhang der Materialparameter, wie beispielsweise dem Elastizitätsmodul  $E$ , und der aktuellen Dichte  $\rho$  an einer Stelle  $\mathbf{x}$  her.

$$E = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta \quad ; \quad \rho = \{\rho \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \rho \leq \rho_0\} \quad ; \quad \beta = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \geq 1\} \quad (3.13)$$

Bei diesem Ansatz werden die Steifigkeiten bei Zwischenzuständen der Dichten  $\rho$  gegenüber denen des Vollmaterials bestraft, weshalb man auch vom SIMP-Ansatz spricht (Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density). Als einzige Optimierungsvariable fungiert bei diesem Ansatz die Dichte  $\rho$  jedes Finiten Elements. Für den ebenen Spannungszustand und  $\beta = 1$  entspricht dieses Materialverteilungsproblem einer Dickenoptimierung. Wie bereits angedeutet, liefern die Ergebnisse einer Dickenoptimierung selten eindeutige '0-1'-Resultate, was auf den linearen Zusammenhang zwischen der Dichte  $\rho$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  zurückzuführen ist. Bei steigendem Exponenten ( $\beta > 1$ ) werden poröse Zustände immer ungünstiger in bezug auf die zugehörige Steifigkeit, als dies für Vollmaterial der Fall ist. Auf diese Art und Weise werden poröse Zwischenzustände bestraft, was letztendlich zu einer (fast) reinen '0-1'-Verteilung führt. Der nichtlineare Zusammenhang zwischen  $\rho$  und  $E$  in Abhängigkeit des Penalty-Faktors  $\beta$  ist in Abbildung 3.5 veranschaulicht.

Entsprechende Ansätze werden u.a. von BENDSØE [17], ROZVANY ET AL. [191], MLEJNEK [149] oder auch SWAN & ARORA [219] verwendet.

Um die Netzabhängigkeit des makroskopisch isotropen Ansatzes zu verringern, wurde von MAUTE & RAMM [138] ein orthotropes Materialmodell vorgeschlagen. Ähnlich zum beschriebenen 'micro hole'-Ansatz werden hierbei die Elastizitätsmoduli  $E_i$  durch approximierte Verteilungsfunktionen  $\hat{\chi}_i$  variiert. Zudem ist die Orientierung der Hauptrichtungen in der Ebene ( $i = 1, 2$ ) bzw. im Raum ( $i = 1, 2, 3$ ) variabel.

Ein ausführlicher Überblick über die verschiedenen makroskopischen und mikroskopischen Materialansätze zur Behandlung von Topologieoptimierungsproblemen ist in BENDSØE & SIGMUND [21] zu finden.

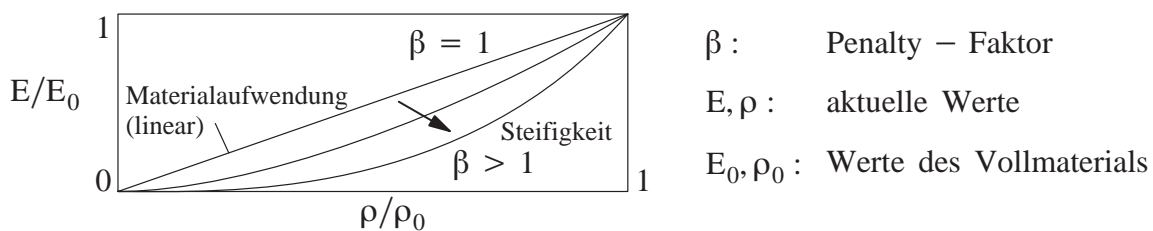


Abbildung 3.5: Makroskopisches Materialmodell: Penalty-Methode

In Anlehnung an den makroskopischen isotropen Ansatz (SIMP-Ansatz) werden in MAUTE ET AL. [139] zur Behandlung von Topologieoptimierungsproblemen bei elastoplastischem Materialverhalten zusätzliche Materialparameter an die Dichte  $\rho$  gekoppelt.

$$E = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\beta_1} ; E_h = E_{h0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\beta_2} \quad \text{bzw.} \quad G_f = G_{f0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\beta_2} ; \sigma_y = \sigma_{y0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\beta_3} \\ \beta_i \geq 1 ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

Dabei ist  $E$  der Elastizitätsmodul (vgl. elastisches Materialverhalten),  $E_h$  der Verfestigungsmodul bzw.  $G_f$  die Bruchenergie (Näheres dazu vgl. Kapitel 4) und  $\sigma_y$  die Fließspannung. Die mit '0' gekennzeichneten Größen beschreiben die Materialparameter für das isotrope homogene Material. Obwohl dieser Ansatz das Integer-Optimierungsproblem möglicherweise nicht korrekt relaxiert, führt er doch zu einer klaren '0-1'-Verteilung. Allerdings stimmt dieser Ansatz näherungsweise mit den numerischen Ergebnissen von elastoplastischen Homogenisierungsverfahren nach YUGE & KIKUCHI [254] und YUGE ET AL. [253] überein.

# Kapitel 4

## Nichtlineare Strukturanalyse

Die Durchführung einer Sensitivitätsanalyse und die Auswertung der mechanisch orientierten Entwurfskriterien setzt die Kenntnis der Strukturantwort voraus. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf die Herleitung der hierfür notwendigen Gleichungen bei geometrisch und materiell nichtlinearem Strukturverhalten im Hinblick auf die Bestimmung der Ableitungen (Sensitivitäten) in aller Kürze eingegangen.

Ausgehend von den allgemeinen Grundlagen der Kontinuumsmechanik, die in der Literatur bereits erschöpfend behandelt wurden (z.B. BETTEN [28], MALVERN [132]), wird das weitere Vorgehen erläutert. Das strukturelle Gleichgewicht ist durch die am infinitesimalen Element aufgestellten Differentialgleichungen definiert, wobei das mechanische Verhalten lokal beschrieben wird. Die EULER-Gleichungen bestehen aus dem statischen Gleichgewicht, den zugehörigen statischen Randbedingungen (NEUMANN-Randbedingungen), den konstitutiven Beziehungen (Materialgesetz) sowie den kinematischen Feldgleichungen und den zugehörigen kinematischen Randbedingungen (DIRICHLET-Randbedingungen). Man spricht auch von der starken Form des mechanischen Problems. Da dieser Satz von gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen im allgemeinen für ganze Tragsysteme nicht geschlossen gelöst werden kann, bedient man sich eines Energieausdrucks, z.B. des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV), zur Erfüllung des Gleichgewichts. Das PvV erfüllt das Gleichgewicht nur noch global (integraler Ausdruck), nicht lokal, weshalb auch der Begriff 'schwache Form des Gleichgewichts' verwendet wird. Dieser ist auf die schwächeren Anforderungen an die Ansatzfunktionen der Strukturvariablen bei der Verwendung der Methode der Finiten Elemente (FEM) zurückzuführen. In der vorliegenden Arbeit wird sowohl die Strukturanalyse als auch die Sensitivitätsanalyse mit Hilfe der FEM durchgeführt. Sie wird in den Ingenieurwissenschaften häufig eingesetzt und ist z.B. bei CLOUGH [56], BATHE [13], CRISFIELD [59], [60], HUGHES [97], ARGYRIS & MLEJNEK [2] oder ZIENKIEWICZ & TAYLOR [258] anschaulich dargestellt, wobei in der vorliegenden Arbeit die von BATHE [13] verwendete Notation besondere Beachtung finden wird.

Zur Berechnung geometrisch nichtlinearer (z.B. große Verschiebungen bei kleinen Verzerrungen) und materiell nichtlinearer (z.B. elastoplastisches Materialverhalten) Phänomene werden die zur Beschreibung dieser Phänomene erforderlichen Gleichungen definiert. Dies ist im Hinblick auf die Sensitivitätsanalyse, die konsistent zum verwendeten Lösungsalgorithmus bei der Strukturanalyse sein muß, notwendig (VIDAL & HABER [239]). Außerdem können entsprechende Analogien zwischen Struktur- und Sensitivitätsanalyse aufgezeigt und erörtert werden.

Des Weiteren wird auf die numerische Behandlung von Stabilitätsproblemen eingegan-

gen sowie die dafür notwendigen Pfadverfolgungsalgorithmen kurz erläutert (vgl. WAGNER [241], REITINGER [180]), da diese die Sensitivitäten beeinflussen.

Bei der kontinuierlichen Formulierung des nichtlinearen Strukturproblems wie auch des Optimierungsproblems und der dafür benötigten Sensitivitäten wird die Tensornotation verwendet. Infolge der notwendigen Diskretisierung mit der Methode der Finiten Elemente wird, wie allgemein üblich, auf die Vektor–Matrix–Schreibweise gewechselt.

## 4.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Grundlage der folgenden Gleichungen bildet die Annahme eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Verschiebungen und Verzerrungen sowie einer linearen Spannungs–Dehnungs–Beziehung. Die Elastoplastizität wird an späterer Stelle diskutiert. Des Weiteren wird von kleinen Verzerrungen ausgegangen.

### 4.1.1 Kinematische Grundlagen

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums unterscheidet man zwischen zwei Betrachtungsweisen, der LAGRANGE’schen oder materiellen und der EULER’schen oder räumlichen Betrachtungsweise. Je nachdem, ob die Größen des kinematischen Vorgangs bei der LAGRANGE’schen Betrachtungsweise auf das undeformierte Referenzsystem (Referenzkonfiguration) oder auf die aktuelle (updated), deformierte Konfiguration (Momentankonfiguration) bezogen werden, spricht man von Total LAGRANGE (TL) bzw. Updated LAGRANGE (UL) Beschreibung. Im weiteren wird lediglich auf die Total LAGRANGE Formulierung eingegangen.

Ein materieller Punkt  $P$  kann zu jedem Zeitpunkt  $t$  des Deformationsvorgangs einem Ort  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  in einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem zugeordnet werden. Dieser Punkt, dessen Lage in der Referenzkonfiguration durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  beschrieben ist, wird durch die Abbildungsvorschrift  $\chi_X^t$  in die deformierte Momentankonfiguration abgebildet. In MAUTE [136] wird zusätzlich noch zwischen topologischer, bei der die Nachbarschaftsbeziehungen der materiellen Punkte durch die Deformation unverändert bleiben, und nichttopologischer Abbildung unterschieden. Eine nichttopologische Abbildung ist beispielsweise bei der Entstehung von Rissen infolge der Belastung erforderlich. Es gilt nun folgender Zusammenhang für einen materiellen Punkt  $P$ :

$$\mathbf{x} = \chi_X(\mathbf{X}, t) = \chi_X^t(\mathbf{X}) \quad (4.1)$$

Dieser Zusammenhang wird mit Hilfe von Abbildung 4.1 verdeutlicht.  $\mathbf{x}$  stellt dabei den Ortsvektor eines materiellen Punktes  $P_x$  in der Momentankonfiguration dar. Für die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  der Materiepunkte gilt demnach:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi_X(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (4.2)$$

Die kinematischen Größen können z.B. durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  beschrieben werden. Der Deformationsgradient ergibt sich mittels Differentiation des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration nach dem der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \quad (4.3)$$



Der GREEN–LAGRANGE–Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ist ein objektiver, in den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nichtlinearer, zweistufiger Verzerrungstensor.  $\mathbf{I}$  stellt den zweistufigen Identitätstensor dar. Für die weitere Darstellung des Verzerrungstensors wird eine alternative Notation verwendet, wie dies auch in BATHE [13] der Fall ist. Des weiteren werden im Hinblick auf eine Inkrementierung zur Lösung nichtlinearer Probleme die Verzerrungen in inkrementeller Schreibweise dargestellt. Im folgenden sind alle Größen ohne Index  $t$  bzw.  $t + 1$  als inkrementelle Größen zu interpretieren. Diese können als Differenz der Verzerrungen  $\mathbf{E}_{t+1}$  und  $\mathbf{E}_t$  ausgedrückt werden, wobei der Index  $t$  bzw.  $t + 1$  den Zeitpunkt des Deformationsprozesses und der Index am Gradientenoperator  $\nabla_{(\cdot)}$  die Konfiguration bezeichnet. Im Hinblick auf die Verwendung der Methode der Finiten Elemente zur Bestimmung der Strukturantwort werden die nachfolgenden Definitionen bereits auf den Parameterraum  $\Omega_\xi$  bezogen (vgl. Abbildung 4.1). Diese durch die Abbildung  $\chi_s$  beschriebene Transformation verhält sich analog zu der Transformation  $\chi_X$  zwischen Referenz- und Momentankonfiguration infolge des Deformationsprozesses. Die Abbildung von der Darstellung im Parameterraum in die Momentankonfiguration erfolgt durch eine Verknüpfung der zwei beschriebenen Abbildungsvorschriften  $\chi_X$  und  $\chi_s$ . Es ergibt sich für die Ableitungen nach den Koordinaten des Referenzsystems und des Parameterraums folgender Zusammenhang:

$$\nabla_\xi(\cdot) = \nabla_X(\cdot)\mathbf{J} \quad \text{bzw.} \quad \nabla_X(\cdot) = \nabla_\xi(\cdot)\mathbf{J}^{-1} \quad (4.4)$$

$\mathbf{J}$  bezeichnet die JACOBI–Matrix. Entsprechend transformiert sich das Strukturvolumen  $\Omega_X$  und die Strukturoberfläche  $\cdot, X$  vom physikalischen Raum in den Parameterraum und wird dort mit  $\Omega_\xi$  bzw.  $\cdot, \xi$  bezeichnet. Es gelten dann folgende Zusammenhänge:

$$\Omega_X = |\mathbf{J}| \Omega_\xi \quad ; \quad \cdot, X = |\tilde{\mathbf{J}}|, \xi \quad (4.5)$$

$|\mathbf{J}|$  bezeichnet die Determinante der JACOBI–Matrix  $\mathbf{J}$  und  $|\tilde{\mathbf{J}}|$  die des Metriktensors  $\tilde{\mathbf{J}}$ . Diese ist durch

$$|\tilde{\mathbf{J}}| = |\mathbf{J}| ((\mathbf{J}^{-1} \mathbf{m}) (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{m}))^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

definiert (vgl. MALVERN [132]), wobei mit  $\mathbf{m}$  der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor auf die Oberfläche  $\cdot, \xi$  bezeichnet ist.

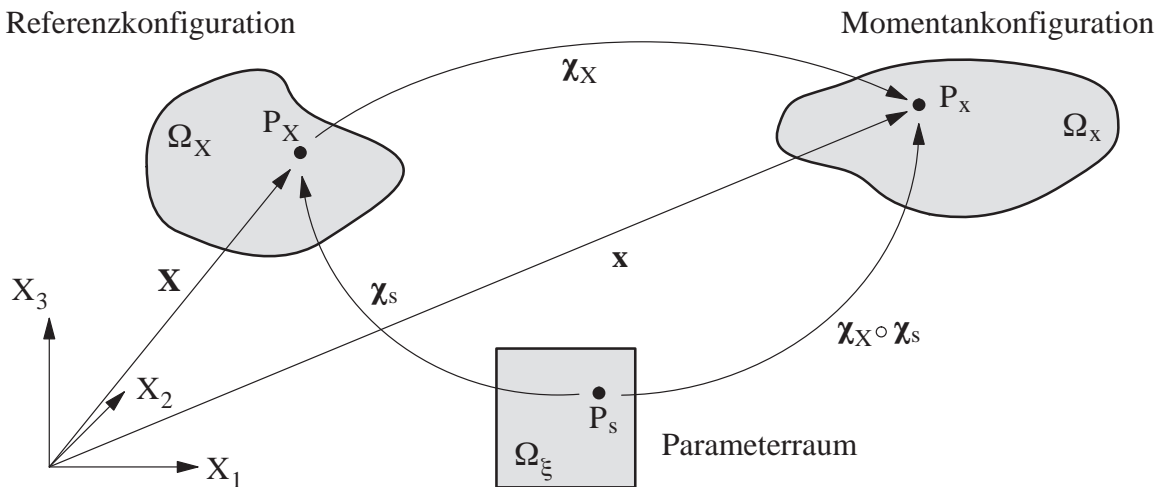


Abbildung 4.1: Konfigurationen und Abbildungen

Mit  $\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}$  und  $\mathbf{E}_{t+1} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}$  folgt für die inkrementellen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und deren Variation  $\delta\mathbf{E}$ , die im Hinblick auf die Verwendung des PvV benötigt werden:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_{\xi} \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{e} + \delta\bar{\mathbf{e}} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \delta\mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_{\xi} \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\delta\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left( (\nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_{\xi} (\delta\mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{\xi} \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} \right) \quad (4.12)$$

Es gelten die Definitionen  $\nabla_{\xi} = [\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_3}]$  bzw.  $\nabla_X = [\partial_{X_1}, \partial_{X_2}, \partial_{X_3}]$  und  $\mathbf{u}^T = [u_{X_1}, u_{X_2}, u_{X_3}]$ . Der Tensor  $\mathbf{e}$  beinhaltet die linearen Anteile und die von den bekannten Verschiebungen zu Beginn des Inkrements (Zeitpunkt  $t$ ) abhängigen Anteile. Die quadratischen Anteile der inkrementellen Verzerrungen sind mit  $\bar{\mathbf{e}}$  bezeichnet.  $\delta\mathbf{e}$  beinhaltet linear die Variation  $\delta\mathbf{u}$  und die bereits bekannten Verschiebungen  $\mathbf{u}_t$ ,  $\delta\bar{\mathbf{e}}$  die Variation  $\delta\mathbf{u}$  und die unbekannteren inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$ .

### 4.1.2 Spannungsmaße

Je nachdem, auf welche Konfiguration die Spannungen bezogen sind, spricht man vom zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  bezüglich der Referenzkonfiguration oder dem CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  für die Momentankonfiguration. Mit Hilfe des CAUCHY-Theorems ( $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}$ ) kann ein Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  als Produkt des Spannungstensors mit dem Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{m}$  bestimmt werden.  $\mathbf{S}$  läßt sich mittels des zuvor definierten Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  durch folgende Gleichung bestimmen:

$$\mathbf{S} = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (4.13)$$

$|\mathbf{F}|$  stellt dabei die Determinante des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  dar. Es bleibt noch zu erwähnen, daß der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor das energetisch konjugierte Spannungsmaß zu den GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen  $\mathbf{E}$  darstellt.

## 4.2 Gleichgewichtsbedingung

Zur Darstellung des Gleichgewichts wird dieses in schwacher Form durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das mittels der Methode der gewichteten Residuen hergeleitet werden kann, erfüllt. Dieses Prinzip besagt, daß bei einer virtuellen Verschiebung eines Gleichgewichtszustandes die Summe der verrichteten Arbeit der äußeren und inneren

Kräfte gleich null sein muß. Ist dies der Fall, ist ein belasteter Körper im Gleichgewicht. Bei der Behandlung geometrisch nichtlinearer Probleme wird das Gleichgewicht am deformierten Körper aufgestellt. Für die Definition des Gleichgewichtszustandes ergibt sich:

$$\delta W(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \delta W^{int}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \delta W^{ext}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad ; \quad \delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \in V_{\delta u, u} \subseteq H_0^1 \quad (4.14)$$

Dabei ist der innere Anteil der virtuellen Arbeit durch das Skalarprodukt der Spannungen  $\mathbf{S}$  mit den energetisch konjugierten, virtuellen Verzerrungen  $\delta \mathbf{E}$  definiert. Bei Verwendung der Referenzkonfiguration und der Darstellung der Größen im Parameterraum  $\Omega_\xi$  ergibt sich:

$$-\delta W^{int} = \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (4.15)$$

Der äußere Anteil der virtuellen Arbeit ergibt sich durch das Skalarprodukt der äußeren Belastung  $\bar{\mathbf{b}}$  und  $\bar{\mathbf{t}}$  mit den virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \quad (4.16)$$

$$= \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \quad (4.17)$$

Die äußere Belastung setzt sich aus normierten, eingepprägten Volumenlasten  $\bar{\mathbf{b}}$  sowie Oberflächenlasten  $\bar{\mathbf{t}}$  zusammen. Der Index  $t + 1$  zeigt das aktuelle Lastniveau an. Alternativ können mit diesem Index direkt die äußeren Lasten  $\mathbf{b}_{t+1}$  und  $\mathbf{t}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  gekennzeichnet oder durch Einführen eines Laststeigerungsfaktors  $\lambda_{t+1}$  das aktuelle Lastniveau angezeigt werden.

Das strukturelle Gleichgewicht, ausgedrückt durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, stellt eine bezüglich der inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nichtlineare Gleichung dar, die nicht direkt gelöst werden kann. Die nichtlinearen Anteile der inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  sind sowohl in den virtuellen Verzerrungen  $\delta \mathbf{E}$  als auch über das Stoffgesetz in den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen  $\mathbf{S}_{t+1}$  enthalten. Häufig wird zur Lösung derartiger Probleme das iterative NEWTON-RAPHSON-Verfahren auf der Basis einer Finite Elemente-Formulierung angewendet. Zur Behandlung nichtlinearer Probleme wird das Gleichgewicht inkrementell zum Zeitpunkt  $t + 1$  formuliert, dann diskretisiert und zur iterativen Bestimmung der Strukturantwort linearisiert.

Zunächst wird für die folgende Herleitung ein linear elastisches Materialverhalten (HOOKE'sches Gesetz bzw. ST.VENANT-KIRCHHOFF-Materialmodell bei geometrischer Nichtlinearität) angenommen. Mit der inkrementellen Beziehung

$$\mathbf{S}_{t+1} = \mathbf{S}_t + \mathbf{S} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (4.18)$$

ergibt sich für die Gleichgewichtsaussage (Gleichungen (4.14)–(4.17)) und unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.7) und (4.10):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{e} \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \bar{\mathbf{e}} \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{C} (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (4.19) \\ & = \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi = \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{C}$  ist der vierstufige Materialtensor des elastischen Materials und  $\mathbf{E} = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}$  sind die inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen. Der erste Term auf der linken Seite von Gleichung (4.19) ist unabhängig von den inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$ . Dieser hängt lediglich von der Variation der inkrementellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$ , den Verschiebungen  $\mathbf{u}_t$  bzw. den Spannungen  $\mathbf{S}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  ab und stellt die bereits bekannten inneren Kräfte zum Zeitpunkt  $t$  dar. Aus diesem Grund wird dieser Term auf der Lastseite berücksichtigt. Der zweite Term auf der linken Seite von Gleichung (4.19) ist eine lineare Funktion von  $\mathbf{u}$  und wird auch als Anfangsspannungsmatrix oder geometrische Steifigkeitsmatrix (die mit  $\mathbf{u}$  multipliziert wird) bezeichnet. Hingegen ist der dritte Term dieser Gleichung eine nichtlineare Funktion der inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$ . Gleichung (4.19) ist als Ausgangsgleichung für eine spätere Sensitivitätsanalyse zwingend erforderlich.

Zur Lösung dieser nichtlinearen Gleichung ist eine Linearisierung mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung notwendig. Dies wird durch Vernachlässigung der quadratischen Ausdrücke  $\delta\bar{\mathbf{e}}$  und  $\bar{\mathbf{e}}$  erzielt. Durch diese Linearisierung nach  $\hat{\mathbf{u}}$  ergibt sich eine Gleichung, die nur noch linear von den inkrementellen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  abhängig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird für die Bestimmung der Strukturantwort und der Sensitivitätsanalyse (vgl. Kapitel 5 und 6) ein Verschiebungselement verwendet. Ein Überblick über verbesserte Elementformulierungen ist beispielsweise in BISCHOFF [29] zu finden. Der Einsatz höherwertigerer Elemente in der Formoptimierung ist in WIEGHARDT [248] diskutiert, wobei lediglich lineare Strukturprobleme behandelt werden.

Die kontinuierlichen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und deren Variation  $\delta\mathbf{u}$  werden durch lokale Ansätze (Interpolationsfunktionen, Ansatzfunktionen) approximiert.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}} \quad ; \quad \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \delta\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{N} \delta\hat{\mathbf{u}} \quad ; \quad \mathbf{u}^h, \delta\mathbf{u}^h \in V_{u, \delta u}^h \subseteq V_{u, \delta u} \quad (4.20)$$

$\hat{\mathbf{u}}$  sind die diskreten Knotenverschiebungen auf Elementebene. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle auf eine Kennzeichnung von Elementgrößen verzichtet. Die Matrix der Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}$  wird üblicherweise in den lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  des Parameterraums  $\Omega_\xi$  definiert. Die Verwendung derselben Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}$  für die Approximation der Variation der Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$  wird als BUBNOV–GALERKIN–Konzept bezeichnet. Dieses führt, zumindest bei verschiebungsunabhängiger Belastung und bei gewissen Stoffgesetzen, zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen. Beim isoparametrischen Konzept werden sowohl die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  als auch die Geometrie der Struktur  $\mathbf{X}$  mit denselben Ansätzen elementweise approximiert.

Zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrizen werden nun die Verzerrungen sowie deren Variation diskretisiert. Für die inkrementellen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  erhält man aus den Gleichungen (4.7)–(4.9):

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) && \hat{=} \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) && \hat{=} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) && \hat{=} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \quad \cong \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

wobei die Beziehung  $\mathbf{u}_t = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t$  verwendet wurde. Der Operator  $\mathbf{B}_L$  ist eine Funktion der Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  bzw. deren Ableitung nach den Koordinaten des Parameterraums und der inversen JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}^{-1}$ . Der Operator  $\mathbf{B}_u$  hängt zusätzlich von den bereits im vorangegangenen Inkrement ermittelten Verschiebungen  $\mathbf{u}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  ab. Durch Umformung des nichtlinearen (quadratischen) Anteils (vgl. Gleichung (4.23)) erkennt man, daß der Operator  $\mathbf{B}_q$  die gleiche Struktur wie der Operator  $\mathbf{B}_u$  besitzt. Einziger Unterschied ist die Abhängigkeit von den inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  anstatt von den Verschiebungen  $\mathbf{u}_t$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Aufgrund der impliziten Abhängigkeit des Operators  $\mathbf{B}_q$  von den bisher unbekanntem inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  kann dieser zur Lösung des nichtlinearen Problems nicht herangezogen werden. Durch die vorher gezeigte Linearisierung des Gleichgewichts entfällt dieser Term. Bei der in Kapitel 6 beschriebenen Sensitivitätsanalyse wird  $\mathbf{B}_q$  jedoch benötigt.

Analog zum obigen Vorgehen lassen sich die virtuellen Verzerrungen  $\delta \mathbf{E}$  darstellen. Einziger Unterschied ist der doppelte Anteil (Faktor zwei) beim Term  $\delta \bar{\mathbf{e}}$ .

$$\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{e} + \delta \bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \delta \hat{\mathbf{u}} + 2\mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \delta \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) \quad \cong \mathbf{B}_L \delta \hat{\mathbf{u}} \\
&+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \quad \cong \mathbf{B}_u \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \quad \cong 2\mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Mit dieser Notation lauten nach Herausziehen der diskreten Knotenwerte  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  und  $\hat{\mathbf{u}}$  aus den integralen Ausdrücken die diskretisierten Arbeitsterme von Gleichung (4.19) unter Verwendung der Gleichungen (4.21)–(4.26) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_q) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_q} + \underbrace{\int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_t \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{K}_g} \\
&= \underbrace{\int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi - \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u)^T \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi}_{\mathbf{R}} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_S \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_S = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_q + \mathbf{K}_g \quad , \quad \mathbf{R} = \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad (4.28)$$

Eine Zusammenfassung der elastischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$ , der Anfangsverschiebungsmatrix  $\mathbf{K}_u$  der Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}_t$  zum Zeitpunkt  $t$ , der 'Anfangsverschiebungsmatrix'  $\mathbf{K}_q$  der inkrementellen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  und der Anfangsspannungsmatrix  $\mathbf{K}_g$  (geometrische Steifigkeitsmatrix) führt zur Sekantensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_S$ . Die Sekante (Gleichung (4.27)) stellt die Verbindung zwischen zwei Gleichgewichtszuständen her, d.h. sie erfüllt das 'inkrementelle Gleichgewicht' und kann daher als Ausgangsgleichung für die inkrementelle Sensitivitätsanalyse (vgl. Kapitel 6) herangezogen werden. Da die Tangente lediglich durch Informationen an einem bestimmten Lastniveau definiert ist, eignet sich diese nicht für die in Kapitel 6 beschriebene Sensitivitätsanalyse.

Die Terme auf der rechten Seite von Gleichung (4.27) ergeben den inkrementellen Lastvektor  $\mathbf{R}$ . Aufgrund der in der Summe unterschiedlichen  $\mathbf{B}$ -Operatoren des ersten Terms auf der linken Seite von Gleichung (4.27) ist zu erkennen, daß dieser Anteil der Sekantensteifigkeitsmatrix nicht symmetrisch ist. Da  $\mathbf{B}_q$  implizit von den unbekanntem inkrementellen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  abhängig ist, bedient man sich zur Isolation von  $\hat{\mathbf{u}}$  aus dem Integral beispielsweise der Notation, wie sie auch in BATHE [13] verwendet wird. Man erhält für den zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.19) bzw. (4.27) folgenden Zusammenhang:

$$\int_{\Omega_\xi} \delta \bar{\mathbf{e}} \mathbf{S}_t | \mathbf{J} | d\Omega_\xi = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} (2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_t | \mathbf{J} | d\Omega_\xi = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_t \tilde{\mathbf{B}}_L | \mathbf{J} | d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \quad (4.29)$$

Die Tilden symbolisieren lediglich eine andere Anordnung der Matrixeinträge; die Komponenten der Operatoren  $\mathbf{B}_L$  und  $\tilde{\mathbf{B}}_L$  bzw. der Spannungen  $\mathbf{S}_t$  und  $\tilde{\mathbf{S}}_t$  sind identisch. Der Operator  $\mathbf{B}_q$  ist eine Funktion von Geometriegrößen und inkrementellen Verschiebungen. Durch die in Gleichung (4.29) verwendete Schreibweise erfolgt eine Trennung dieser zwei Anteile ( $\tilde{\mathbf{B}}_L$  und  $\hat{\mathbf{u}}$ ). Bei der in Kapitel 6 durchgeführten Sensitivitätsanalyse wird sich diese Schreibweise noch als hilfreich erweisen. Des weiteren sollte angemerkt werden, daß diese Matrix symmetrisch ist; durch Summation mit dem erstem Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.27) ergibt sich jedoch eine unsymmetrische Sekantensteifigkeitsmatrix.

Die zur iterativen Berechnung der Strukturantwort notwendige Linearisierung gewinnt man aus Gleichung (4.27) durch Vernachlässigung des Operators  $\mathbf{B}_q$ . Dadurch ergibt sich eine symmetrische Steifigkeitsmatrix, die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t$ , die allerdings das Gleichgewicht nicht mehr erfüllt.

$$\mathbf{K}_T \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g \quad , \quad \mathbf{R} = \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad (4.30)$$

Anmerkung: Bisher wurde ausschließlich linear elastisches Materialverhalten in Betracht gezogen. Ersetzt man nun den elastischen Materialtensor  $\mathbf{C}$ , der für jedes Lastniveau identisch ist, durch die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  zum Zeitpunkt  $t$  (vgl. Abschnitt 4.5), so erhält man nach Gleichung (4.30) die tangentielle Steifigkeitsmatrix zum Zeitpunkt  $t$  bei elastoplastischem Materialverhalten. Durch die Linearisierung des Gleichgewichtsausdrucks zum Zeitpunkt  $t$ , der durch die Gleichungen (4.14)–(4.17) definiert wird, ergibt sich auch die Definition der Materialtangente  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{C}_{cont}^{ep}$  für elastisches bzw. elastoplastisches Materialverhalten. Diese beschreibt das Verhalten für ein bestimmtes Lastniveau (Punktinformation). Die Linearisierung der (diskretisierten) inneren Arbeit liefert:

$$\text{LIN } (-\delta W^{int}) = \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_t | \mathbf{J} | d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \nabla (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_t | \mathbf{J} | d\Omega_\xi \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \nabla \mathbf{S}_t | \mathbf{J} | d\Omega_\xi \quad (4.31)$$

$$\text{mit } \nabla \mathbf{S}_t = \nabla_E \mathbf{S}_t \nabla_u \mathbf{E} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_{cont}^{ep} \mathbf{e} \quad (4.32)$$

$$\nabla(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{d\hat{\mathbf{u}}} \quad ; \quad \nabla_E(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{E}} \quad ; \quad \nabla_u(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \quad (4.33)$$

Der Term  $\nabla_E \mathbf{S}_t$  stellt die Materialtangente  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{C}_{cont}^{ep}$  dar. Die von  $\hat{\mathbf{u}}$  unabhängigen Terme in Gleichung (4.31) werden auf der Lastseite der Gleichgewichtsaussage berücksichtigt, die abhängigen gehen in die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  ein (vgl. Gleichung (4.30)).

Für numerische Berechnungen bei elastoplastischem Materialverhalten mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist eine konsistente Linearisierung erforderlich, die in Abschnitt 4.5 diskutiert wird. Setzt man allerdings die konsistente elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  in die (inkrementierte) Gleichgewichtsbedingung (Gleichung (4.27)) ein, so erfüllt diese Gleichung nicht mehr das Gleichgewicht, da  $\mathbf{C}^{ep}$  lediglich eine Punktinformation zum Zeitpunkt  $t$  enthält.

### 4.3 Pfadverfolgung

Definitionsgemäß ist das Gleichgewicht dann erfüllt, wenn die Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{G}$  im Laufe einer NEWTON-RAPHSON-Iteration verschwinden:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_{t+1}, \lambda_{t+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}^i - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

$\mathbf{R}^i$  bezeichnet die inneren Kräfte als eine Funktion der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{u}_{t+1}$ ,  $\mathbf{R}$  die äußeren. Für nichtlineare Probleme ist es in der Regel nicht mehr möglich, die Gleichgewichtsbedingung (4.27) direkt in einem Schritt zu lösen. Die Verschiebungen können demnach nur inkrementell, iterativ gelöst werden. Dazu wird zunächst die zu erwartende Last-Verschiebungs-Beziehung inkrementiert. Je nachdem, welche Nebenbedingung  $c$  einzuhalten ist, wird der Lastfaktor, eine diskrete Verschiebung oder auch die Bogenlänge in Inkremente unterteilt. Die gewählte Nebenbedingung  $c$  ist dann für jedes Inkrement zu erfüllen. Die zusätzlich zu Gleichung (4.34) zu erfüllende Nebenbedingung  $c$  lautet:

$$c(\mathbf{u}_{t+1}, \lambda_{t+1}) = c(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (4.35)$$

Die Linearisierung der Gleichungen (4.34) und (4.35) bezüglich der Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  und des Lastfaktors  $\lambda$  zur iterativen Bestimmung der Strukturantwort liefert:

$$\nabla_u \mathbf{G} \hat{\mathbf{u}} + \nabla_\lambda \mathbf{G} \lambda = -\mathbf{G} \quad \text{mit} \quad \nabla_u \mathbf{G} = \mathbf{K}_T \quad , \quad \nabla_\lambda \mathbf{G} = -\mathbf{R} \quad (4.36)$$

$$\nabla_u c \hat{\mathbf{u}} + \nabla_\lambda c \lambda = -c \quad (4.37)$$

Mit  $\nabla$  ist hier die FRÉCHET-Ableitung (totales Differential) bezeichnet. Als Nebenbedingungen  $c$  sind verschiedene Kriterien denkbar (vgl. Abbildung 4.2). Die Vorgabe einer bestimmten äußeren Belastung  $\tilde{\lambda}$  liefert für die Nebenbedingung  $c$ :

$$c = \lambda - \tilde{\lambda} = 0 \quad (4.38)$$

Die Vorgabe eines bestimmten Lastniveaus ist nur dann sinnvoll, wenn das Last-Verschiebungsdiagramm monoton steigend ist. Gewisse Probleme, wie beispielsweise das Steigern der Verschiebungen über einen Durchschlagspunkt hinweg, können auf diese Weise nicht

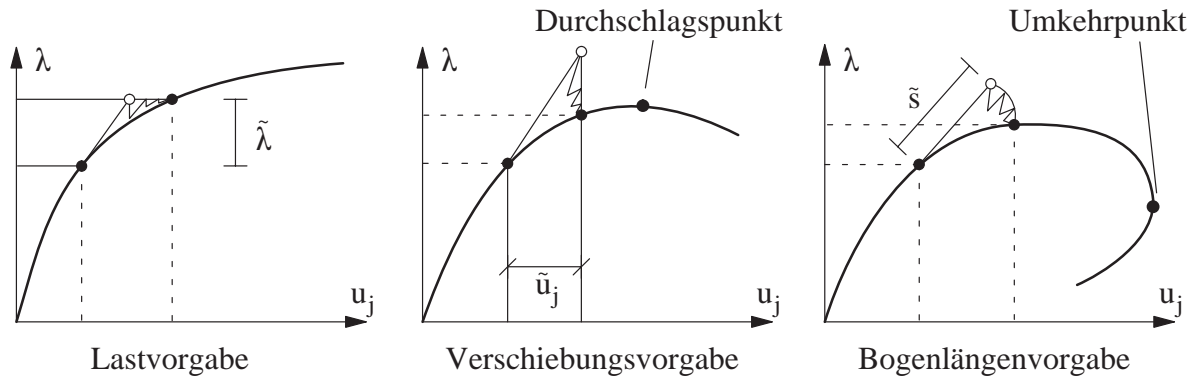


Abbildung 4.2: Verschiedene Pfadverfolgungsstrategien

berechnet werden (vgl. Abbildung 4.2). Dann ist die Vorgabe einer diskreten Knotenverschiebung  $\tilde{u}_j$  am Freiheitsgrad  $j$  notwendig. Die Nebenbedingung  $c$  lautet dann:

$$c = \hat{u}_j - \tilde{u}_j = 0 \quad (4.39)$$

Für Strukturverhalten, bei denen Umkehrpunkte auftreten, versagt auch das Verfahren der Verschiebungsvorgabe. Abhilfe schafft dann die Verwendung des sogenannten Bogenlängenverfahrens, mit dem beliebige Last-Verschiebungscharakteristiken nachgefahren werden können. Für die Definition dieser Nebenbedingung  $c$  stehen mehrere Alternativen zur Verfügung. Häufig wird für die Bogenlängengleichung

$$c = \sqrt{\|\hat{\mathbf{u}}_{t+1} - \hat{\mathbf{u}}_t\|^2 + \psi^2 (\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2} - \tilde{s} = 0 \quad (4.40)$$

verwendet. Diese ist beispielsweise den Arbeiten von WEMPNER [244], RIKS [183], [184], RAMM [173] oder CRISFIELD [57] zu entnehmen. Der Parameter  $\tilde{s}$  kennzeichnet hier die vorgegebene, inkrementelle Bogenlänge. Aufgrund der unterschiedlichen Dimensionen der in Gleichung (4.40) eingehenden Größen ist die Einführung eines Skalierungsparameters  $\psi$  notwendig ( $0 \leq \psi \leq \infty$ ). Für Details zur numerischen Umsetzung der Methoden der Pfadverfolgung sei an dieser Stelle auf die Arbeit von REITINGER [180] verwiesen.

Neben der geometrischen Nichtlinearität erfordert auch materiell nichtlineares Strukturverhalten eine inkrementelle, iterative Vorgehensweise zur Bestimmung der Strukturantwort. In den nun folgenden Abschnitten wird die ratenunabhängige Plastizitätstheorie beschrieben.

## 4.4 Materielle Nichtlinearität – Elastoplastizität

Die lineare, auf dem HOOKE'schen Gesetz basierende Elastizitätstheorie (z.B. MARSDEN & HUGHES [133], ESCHENAUER & SCHNELL [69] oder STEIN & BARTHOLD [217]) begrenzt die Spannungen in ihrer Größe nicht und ist damit häufig unrealistisch.

Die Plastizitätstheorie stellt ein geeignetes Werkzeug dar, das tatsächliche Verhalten von Metallen oder auch Geomaterialien phänomenologisch zu beschreiben (z.B. SIMO & HUGHES [211], LEMAITRE & CHABOCHE [125], BETTEN [28], KALISZKY [99], MATZENMILLER [135]).



Im nun folgenden Abschnitt werden alle benötigten Größen zur numerischen Beschreibung elastoplastischer Probleme in Form der ratenunabhängigen PRANDTL–REUSS–Elastoplastizität definiert und erläutert. Es ist anzumerken, daß an dieser Stelle lediglich auf elastoplastisches Materialverhalten (materielle Nichtlinearität) eingegangen wird. Daher wird  $\boldsymbol{\varepsilon}$  anstelle der nichtlinearen Verzerrungen  $\boldsymbol{E}$  verwendet. Später wird für die Kombination von geometrischer und materieller Nichtlinearität wieder die Bezeichnung  $\boldsymbol{E}$  verwendet. Die inkrementellen Zuwächse der Zustandsvariablen, d.h. der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ , Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  sowie der internen Variablen  $\boldsymbol{q}$ , sind im allgemeinen integrale Ausdrücke. Zur Durchführung der Zeitintegration stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung. Dies ist z.B. der 'radial return'–Algorithmus. Die Approximation der Zustandsvariablen erfolgt z.B. mit der verallgemeinerten Mittelpunktsregel. Der Spezialfall dieser Regel, das implizite EULER–Rückwärts–Verfahren, ist unbedingt stabil (ORTIZ & POPOV [158]). Die Vorgehensweise dieser Algorithmen ist ausführlich in den Arbeiten von SIMO & HUGHES [211], SIMO & TAYLOR [212] oder ORTIZ & SIMO [159] beschrieben. Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf kleine Verzerrungen. Mit dieser Annahme lassen sich sowohl die absoluten Verzerrungen als auch deren Raten additiv in elastische und plastische Anteile aufspalten (OWEN & HINTON [161], LUBLINER [127]).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad \text{mit} \quad (\dot{\cdot}) = \nabla_t(\cdot) \quad (4.41)$$

Für die Behandlung großer Verzerrungen wird an dieser Stelle auf die Arbeit von MIEHE [147] verwiesen.

Der Spannungszuwachs nach dem HOOKE'schen Gesetz führt damit zu:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \quad (4.42)$$

Die Evolutionsgleichung der plastischen Verzerrungen in Ratenform  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  ist:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\gamma} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \quad ; \quad \boldsymbol{r} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{n} \quad (4.43)$$

$\boldsymbol{r}$  stellt den Fließvektor dar,  $\dot{\gamma}$  wird als plastischer Multiplikator bzw. Konsistenzparameter bezeichnet.  $\boldsymbol{n}$  ist die Normale auf das plastische Potential  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ . Stimmt dieses mit der Fließbedingung für den dreidimensionalen Fall

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \leq 0 \quad (4.44)$$

überein, spricht man von einem assoziierten Fließgesetz.

Die Ratengleichung des Verfestigungsgesetzes lautet in allgemeiner Form:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\dot{\gamma} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \quad ; \quad \boldsymbol{q} = [\alpha, \boldsymbol{\beta}] \quad (4.45)$$

$\boldsymbol{q}$  ist der Vektor der im Spannungsraum definierten internen Variablen. Dieser setzt sich aus einem skalaren Anteil  $\alpha$ , der die isotrope Verfestigung beschreibt, und einem tensoriellen Anteil  $\boldsymbol{\beta}$  ('back stress'–Tensor, Rückspannungs– oder Mittelpunktstensor) für die kinematische Verfestigung zusammen.  $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$  beschreibt das Ver– bzw. Entfestigungsgesetz. Eine Kombination von isotroper und kinematischer Ver– bzw. Entfestigung kann mit Hilfe der PRAGER–ZIEGLER–Regel vorgenommen werden (SIMO & HUGHES [211]). Die effektiven internen Variablen ergeben sich dadurch zu:

$$\alpha_{eff} = \Theta \alpha \quad ; \quad \boldsymbol{\beta}_{eff} = (1 - \Theta) \boldsymbol{\beta} \quad \text{mit} \quad (0 \leq \Theta \leq 1) \quad (4.46)$$

Der plastische Multiplikator  $\dot{\gamma}$  ist definitionsgemäß eine nichtnegative Funktion. Zudem wird gefordert, daß die sogenannten KUHN-TUCKER-Bedingungen, die auch als Be- und Entlastungsbedingungen bekannt sind, erfüllt werden.

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (4.47)$$

Zur Bestimmung des plastischen Multiplikators  $\dot{\gamma}$  wird die Konsistenzbedingung benötigt.

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla_{\mathbf{q}} \Phi \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0 \quad (4.48)$$

## 4.5 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen

Numerische Berechnungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente erfordern endliche (finite) Last- bzw. Zeitinkremente. Für die quadratische Konvergenz des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens innerhalb des Konvergenzradius ist daher eine (konsistente) Linearisierung (Bildung des totalen Differentials) der konstitutiven Annahmen erforderlich. Dies führt zur konsistenten elastoplastischen Materialtangente, die für die in Kapitel 6 diskutierte Sensitivitätsanalyse zwingend erforderlich ist, um exakte Ergebnisse zu erhalten.

Die inkrementelle Darstellung der Evolutionsgleichungen der benötigten Zustandsvariablen ist nachfolgend angegeben. Diese Gleichungen beschreiben die Änderung der Zustandsvariablen vom Zeitpunkt  $t$  zum Zeitpunkt  $t+1$  – also die inkrementellen Zuwächse.

$$\text{Spannungen:} \quad \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (4.49)$$

$$\text{Verzerrungen:} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.50)$$

$$\text{plastische Verzerrungen:} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \int_t^{t+1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dt \quad (4.51)$$

$$\text{interne Variablen:} \quad \mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t + \mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \int_t^{t+1} \dot{\mathbf{q}} dt \quad (4.52)$$

Die Zeitintegration wird z.B. mittels eines 'radial return'-Algorithmus durchgeführt. Die hierfür benötigten Werte werden mit Hilfe der verallgemeinerten Mittelpunktsregel approximiert. Dadurch ergibt sich für die integralen Ausdrücke, beispielsweise für die inkrementellen plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ :

$$\int_t^{t+1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dt \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \Delta t = \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (4.53)$$

Als abkürzende Schreibweise wurde dabei  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \cdot \Delta t = \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  verwendet, was auch analog für alle anderen Größen, wie z.B.  $\mathbf{q}$  bzw.  $\gamma$ , gilt. Die Größen mit dem Index  $t+\vartheta$  werden nach folgender Gleichung berechnet:

$$(\cdot)_{t+\vartheta} = \vartheta (\cdot)_{t+1} + (1-\vartheta) (\cdot)_t \quad \text{mit} \quad (0 \leq \vartheta \leq 1) \quad (4.54)$$

Für  $\vartheta = 1$  ergibt sich das implizite EULER-Rückwärts-Verfahren, für  $\vartheta = 0$  das explizite EULER-Vorwärts-Verfahren. Mit dieser linearen Interpolation zwischen benachbarten Gleichgewichtszuständen lassen sich die approximierten Evolutionsgleichungen in folgender Form darstellen:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})) \quad (4.55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (4.56)$$

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t - \gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (4.57)$$

Der Einfachheit halber wird für die weitere Herleitung darauf verzichtet, die approximierten Werte zu kennzeichnen, da dies für alle endlichen Inkremente notwendig ist.

Für die Bestimmung der konsistenten Materialtangente muß für die obigen Gleichungen das totale Differential nach dem Inkrement von  $\hat{\mathbf{u}}$  gebildet werden. Um später die Analogie zu der Berechnung der Sensitivitäten zeigen zu können, werden an dieser Stelle auch Größen des Lastniveaus  $t$  abgeleitet, obwohl diese eigentlich verschwinden. Das totale Differential der Gleichungen (4.55)–(4.57) nach dem Inkrement, das durch den Gradientenoperator  $\nabla$  symbolisiert wird (vgl. Gleichung 4.33), lautet dann:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})) \\ &\quad + \mathbf{C}(\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) - \gamma \nabla \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \nabla \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) + \gamma \nabla \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (4.59)$$

$$\nabla \mathbf{q}_{t+1} = \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) - \gamma \nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (4.60)$$

Normalerweise ist der elastische Materialtensor  $\mathbf{C}$  unabhängig vom Lastniveau, d.h. seine Ableitung verschwindet. Neben der Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$ , die an späterer Stelle bestimmt wird, sind die Ableitungen des Fließvektors  $\nabla \mathbf{r}$  und des Ver- bzw. Entfestigungsgesetzes  $\nabla \mathbf{h}$  zu bestimmen. Diese sind von den approximierten Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}$  und den approximierten internen Variablen  $\mathbf{q}_{t+\vartheta}$  abhängig und lauten:

$$\nabla \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) = \nabla \mathbf{r} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta} + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{r} \nabla \mathbf{q}_{t+\vartheta} \quad (4.61)$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{r} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)$$

$$\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) = \nabla \mathbf{h} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{h} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta} + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{h} \nabla \mathbf{q}_{t+\vartheta} \quad (4.62)$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)$$

Durch Einsetzen dieser beiden Ableitungen für den approximierten Fließvektor (Gleichung (4.61)) und des approximierten Ver- bzw. Entfestigungsgesetzes (Gleichung (4.62)) in die Ableitung des Spannungstensors zum Zeitpunkt  $t + 1$  (Gleichung (4.58)) bzw. die der internen Variablen zum Zeitpunkt  $t + 1$  (Gleichung (4.60)) erhält man:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + \mathbf{C}(\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}) \quad (4.63)$$

$$- \gamma \mathbf{C}[\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{r} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)]$$

$$\nabla \mathbf{q}_{t+1} = \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \mathbf{h} \quad (4.64)$$

$$- \gamma [\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)]$$

Ziel ist es nun, die Abhängigkeit der Ableitung der Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  von  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  und  $\nabla \gamma$  zu eliminieren, so daß nur noch die Abhängigkeit von den inkrementellen Verzerrungen  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$

vorhanden ist. Dieser Vorgang ist ebenfalls bei der in Kapitel 6 aufgezeigten Herleitung der analytischen Sensitivitätsanalyse durchzuführen. Dort ist der hierfür notwendige Ablauf in Tabelle 6.1 dargestellt und kann analog bei der Herleitung der konsistenten, elasto-plastischen Materialtangente herangezogen werden. Des weiteren ist die Ableitung der internen Variablen  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  als Funktion der einzigen Unbekannten  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  auszudrücken. Durch Isolation von  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  in Gleichung (4.63) und von  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (4.64) ergibt sich nach einigen Umformungen (vgl. Anhang A):

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}} (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}) - \gamma \tilde{\mathbf{C}} \nabla_{\sigma} \mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla \mathbf{q}_t - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h} \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^{-1} + \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{r})^{-1} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{I} + \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{h})^{-1} \quad (4.67)$$

Gegenseitiges Ineinandereinssetzen der Gleichungen (4.65) und (4.66) reduziert die Abhängigkeit von  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  und  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  auf die Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  und die Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ . Man erhält:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{C}} (\mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h}) \nabla \gamma + \hat{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{C}} (\nabla_{\sigma} \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h}) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{C}} (\nabla_q \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h}) \nabla \mathbf{q}_t \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\nabla \mathbf{q}_{t+1} = \nabla \mathbf{q}_t + \nabla^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} (\mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r}) \nabla \gamma - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \nabla^{ex} \mathbf{q} &= -\gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{Q}} (\nabla_{\sigma} \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_{\sigma} \mathbf{r}) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{Q}} (\nabla_q \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r}) \nabla \mathbf{q}_t \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\text{mit } \hat{\mathbf{C}} = (\tilde{\mathbf{C}}^{-1} - \gamma^2 \vartheta^2 \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h})^{-1} \quad ; \quad \hat{\mathbf{Q}} = (\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} - \gamma^2 \vartheta^2 \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r})^{-1} \quad (4.72)$$

Die hierfür notwendigen Umformungen sind in Anhang A angegeben. Die Terme  $\nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma}$  und  $\nabla^{ex} \mathbf{q}$  enthalten ausschließlich Werte vorangegangener Zeitschritte, die bei der Ableitung nach dem Inkrement verschwinden.

Zur Bestimmung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  wird die Konsistenzbedingung (vgl. Gleichung (4.48)) verwendet.

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) &= 0 = \nabla_{\sigma} \Phi \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta} + \nabla_q \Phi \nabla \mathbf{q}_{t+\vartheta} \\ &= \nabla_{\sigma} \Phi (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_q \Phi (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (4.68)–(4.71) in die Konsistenzbedingung (Gleichung (4.73)) und Auflösen nach dem inkrementellen plastischen Multiplikator  $\nabla \gamma$  erhält man nach einigen Umformungen (vgl. Anhang A):

$$\nabla \gamma = \nabla^{ex} \gamma + \frac{1}{\vartheta} (\nabla_{\sigma} \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_{\sigma} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}}) \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.74)$$

$$\nabla^{ex} \gamma = \frac{1}{\bar{\nu}} (\nabla_\sigma \Phi \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \nabla_q \Phi \nabla^{ex} \mathbf{q}) + \frac{1}{\bar{\nu} \vartheta} (\nabla_\sigma \Phi \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla_q \Phi \nabla \mathbf{q}_t) \quad (4.75)$$

$$\bar{\nu} = \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \mathbf{r} + \left( \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \right) \mathbf{h} \quad (4.76)$$

Die endgültige Bestimmung der elastoplastischen Materialtangente erfolgt durch Einsetzen von Gleichung (4.74) in die Gleichung (4.68) der Ableitung des Spannungstensors. Eine Auswertung zum Zeitpunkt  $t + 1$  ergibt die elastoplastische Materialtangente an eben dieser Stelle. Die durchgeführten Umformungen sind Anhang A zu entnehmen.

$$\left. \frac{\nabla \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+1} = \mathbf{C}^{ep} = \left[ \hat{\mathbf{C}} - \frac{\left( \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \right) \otimes \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right)}{\bar{\nu}} \right] \quad (4.77)$$

Die sich ergebenden Vereinfachungen für die Bestimmungsgleichung von  $\mathbf{C}^{ep}$  für den Sonderfall der linearen Ver- bzw. Entfestigung sind in Anhang A angegeben. Die Herleitung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente für den Spezialfall der VON MISES-Fließbedingung mit linearer isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung für den ebenen Spannungszustand ist für das EULER-Rückwärts-Verfahren in Anhang B dargestellt.

## 4.6 Definition des Ver- bzw. Entfestigungsmoduls

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf ein lineares, isotropes und kinematisches Ver- und Entfestigungsverhalten. Die Kombination beider Verfestigungsarten erfolgt nach der PRAGER-ZIEGLER-Regel (SIMO & HUGHES [211]).

Der Verfestigungsmodul  $H$ , der durch die Ableitung der aktuellen Fließspannung  $\bar{\sigma}$  nach der plastischen Verzerrung  $\varepsilon^{pl}$  definiert ist, was für den eindimensionalen Fall der Ableitung nach der internen Variablen  $\alpha$  entspricht, ist durch folgende Beziehung definiert:

$$H = \nabla_{\varepsilon^{pl}} \bar{\sigma} = \nabla_\alpha \bar{\sigma} = \frac{E E_h}{E - E_h} \quad (4.78)$$

$$\text{mit } \bar{\sigma} = \sigma_y + \Theta \frac{E E_h}{E - E_h} \varepsilon^{pl} \quad (4.79)$$

Darin bezeichnet  $E$  den Elastizitätsmodul und  $E_h$  den elastoplastischen Modul im Raum der totalen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Der Parameter  $\Theta$  steuert den Anteil an isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung.

Die Beschreibung des Entfestigungsmoduls erfolgt im Rahmen der vorliegenden Arbeit durch die freiwerdende Energie  $G_f$  (Bruchenergie). Diese ist als Materialparameter zu verstehen, welcher nach oben beschränkt ist. Dieser Ansatz hat seinen Ursprung in der Beschreibung des Fortschreitens von Rissen in Materialien wie Metallen, Beton oder Keramik und wird auch als Reißbandmethode bezeichnet. Die Spannung, die nach Eintritt des Fließens bzw. des Bruchs noch vorhanden ist, wird erst nach Erreichen einer Reißöffnung der Größe  $w_{max}$  zu null. Dieser Ansatz, der auf HILLERBORG ET AL. [94] zurückgeht, ermöglicht es, einen Riß nicht diskret, sondern als verschmiert über eine gewisse Breite  $w$  (Lokalisierungszone) darzustellen. Ein Vorteil dieser Methode ist, daß weiterhin mit der klassischen Kontinuumsmechanik für feste Körper gearbeitet werden kann.

Bei der Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente ist durch Vorgabe der Netzfeinheit auch die maximale Größe der Lokalisierungszone definiert. Diese erstreckt sich über ein Element. Um nun eine objektive Aussage zwischen der maximalen Verschiebung (Rißöffnung)  $w_{max}$  und der Elementgröße zu erhalten, ist es notwendig, die Bruchenergie  $G_f$  auf die Elementgröße zu beziehen (elementbezogene Bruchenergie  $g_f$ ).

$$g_f = \frac{G_f}{h} \quad \text{mit} \quad h = \alpha_h \sqrt{A^e} = \alpha_h \left( \sum_{\xi_1=1}^{n_{\xi_1}} \sum_{\xi_2=1}^{n_{\xi_2}} |\mathbf{J}| w_{\xi_1} w_{\xi_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

Die Definition der charakteristischen Länge  $h$  ist z.B. BAŽANT & OH [14], CRISFIELD [58], ROTS [188], FEENSTRA [74], MENRATH [143] zu entnehmen.  $\sqrt{A^e}$  ist dabei die Kantenlänge eines zu dem jeweiligen betrachteten Finiten Element flächengleichen Quadrats. Die Parameter  $w_{\xi_1}$  und  $w_{\xi_2}$  sind die Wichtungsfaktoren der GAUSS'schen Integration. Der Einfluß des Elementansatzes wird durch den Faktor  $\alpha_h$  berücksichtigt. Nach ROTS [188] kann dieser durch ' $\sqrt{2}$ ' für Elemente mit linearen Ansatzfunktionen und durch '1' für Elemente mit quadratischen Ansätzen angesetzt werden.

Für lineare Entfestigung lautet der Spannungsverlauf  $\bar{\sigma}$  (vgl. FEENSTRA [74]):

$$\bar{\sigma} = \sigma_y \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{max}} \right) \quad (4.81)$$

Der maximal mögliche Wert für die interne Variable  $\alpha_{max}$  berechnet sich dann zu:

$$g_f = \frac{G_f}{h} = \frac{1}{2} \sigma_y \alpha_{max} \quad \rightarrow \quad \alpha_{max} = \frac{2 G_f}{h \sigma_y} \quad (4.82)$$

Damit ergibt sich der Entfestigungsmodul  $H$  zu:

$$H = \nabla_{\alpha} \bar{\sigma} = -\frac{\sigma_y}{\alpha_{max}} = -\frac{h \sigma_y^2}{2 G_f} \quad (4.83)$$

Aus numerischen Gründen ist nach ROTS [188] für die charakteristische Länge  $h$  ein gewisser Grenzwert bei der Wahl des Netzes einzuhalten. Dieser und weitere Bedingungen zur Wahl der beschriebenen Parameter sind der Arbeit von ROTS [188] zu entnehmen.

## 4.7 Geometrisch und materiell nichtlineare Strukturberechnung

Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Fließtheorie ist in materieller Darstellung angegeben (GREEN & NAGHDI [79]); d.h. es sind die physikalisch korrekten Spannungen einzusetzen. Bei geometrischer Nichtlinearität sind diese in der Momentankonfiguration (CAUCHY-Spannungen) definiert. Wird die Total LAGRANGE Formulierung verwendet, sind die zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen mit Hilfe von Gleichung (4.13) in CAUCHY-Spannungen umzuwandeln.

Sind die Verzerrungen genügend klein, wie dies bei Flächentragwerken in der Regel der Fall ist und bereits bei der Definition des elastoplastischen Materialmodells angenommen wurde, kann der Unterschied der Beträge zwischen den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen und den CAUCHY-Spannungen vernachlässigt werden (z.B. SIMO & HUGHES [211]). Für große Verzerrungen sind diese Annahmen nicht mehr zulässig.

## 4.8 Stabilitätsberechnungen

Durchschlags- und Verzweigungspunkte werden auch als kritische oder singuläre Punkte bezeichnet. Ein Durchschlagspunkt ist dadurch gekennzeichnet, daß die Last in unmittelbarer Nähe nicht weiter gesteigert werden kann. Der Verzweigungspunkt (Mehrdeutigkeitspunkt) zeichnet sich dadurch aus, daß neben einem Gleichgewichtszustand mindestens eine infinitesimal benachbarte Gleichgewichtslage bei gleichem Lastniveau existiert. Die zugehörige Bedingung für kritische Punkte lautet:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c) \mathbf{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi}_i = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (4.84)$$

$\mathbf{u}_c$  beschreibt den kritischen Verschiebungszustand und  $\lambda_c$  den kritischen Laststeigerungsfaktor. Der Vektor  $\mathbf{u}$  bzw.  $\boldsymbol{\phi}_i$  repräsentiert den Singularitätsvektor oder Eigenvektor. Die Auswertung von Gleichung (4.84) kann mittels des Determinantenkriteriums durchgeführt werden. Danach existiert nur dann eine nichttriviale Lösung von Gleichung (4.84) für den Singularitätsvektor  $\boldsymbol{\phi}_i$ , wenn die Determinante der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  verschwindet, d.h.  $\mathbf{K}_T$  singulär wird ( $|\mathbf{K}_T| = 0$ ). Dieses Verfahren setzt allerdings eine genaue Berechnungsmöglichkeit der kritischen Punkte voraus. Ein effizientes Verfahren, derartige Punkte zu bestimmen, ist das der erweiterten Systeme. Erste Anwendungen sind bereits in den siebziger Jahren in der mathematischen Literatur zu finden (KEENER & KELLER [102] oder SEYDEL [207]). Die Berechnung der kritischen Punkte mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente wird in WRIGGERS ET AL. [250], WRIGGERS & SIMO [249], WAGNER [241], REITINGER [180] ausführlich diskutiert.

Ein Nachteil des Determinantenkriteriums ist, daß der Abstand des Lastniveaus eines beliebigen Zustandes zu dem der Versagenslast kaum beurteilt werden kann. Mittels einer Eigenwertformulierung für den Lastparameter ist es möglich, das kritische Lastniveau von beliebigen Gleichgewichtszuständen aus abzuschätzen (HELNWEIN [92]).

Die Annahme, daß das aktuelle Lastniveau ( $\mathbf{R}^{act}$ ) proportional gesteigert werden kann, um das kritische Lastniveau ( $\mathbf{R}^{crit}$ ) zu erreichen, führt zur Definition des Eigenwertproblems.

$$\left( \mathbf{K}_e + \tilde{\lambda}_i (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g) \right) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (4.85)$$

Dabei wird angenommen, daß die durch die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität zusätzlich zu berücksichtigenden Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_u$  und  $\mathbf{K}_g$  linear mit dem Faktor  $\tilde{\lambda}_i$  (Eigenwert) skaliert werden können. Für Werte  $\tilde{\lambda}_i > 1$  bedeutet dies, daß das aktuelle Lastniveau unter dem kritischen Lastniveau liegt, für  $\tilde{\lambda}_i = 1$  ist dieses exakt erreicht und für  $\tilde{\lambda}_i < 1$  bereits überschritten. Diese Einteilung gilt für die Eigenwertprobleme, die durch die Gleichungen (4.85), (4.88) und (4.90) definiert sind. Für den Fall, daß die Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_u$  und  $\mathbf{K}_g$  zusätzlich durch Verwendung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  in der Formulierung des Eigenwertproblems enthalten sind, wie dies in den Gleichungen (4.86), (4.87) und (4.91) der Fall ist, gilt eine entsprechende Einteilung für den Wert '0' anstelle von '1'.

Vereinfachte Ansätze für die Definition des Eigenwertproblems sind beispielsweise:

$$\left( \mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (4.86)$$

$$\left( \mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i \Delta \mathbf{K}_g \right) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (4.87)$$

$$\left( (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u) + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_g \right) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (4.88)$$

Dabei werden keine Anteile der tangentiellen Steifigkeitsmatrix (vgl. Gleichung (4.86)) bzw. nur  $\mathbf{K}_g$  (vgl. Gleichungen (4.87) und (4.88)) linear gesteigert. Diese Approximationen sind um so genauer, je kleiner der Abstand zum kritischen Lastniveau ist. Eine ausführliche Diskussion dieser Eigenwertprobleme ist in den Arbeiten von RAMM [172], BRENDDEL [38], BRENDDEL & RAMM [39], WAGNER [241] oder REITINGER [180] zu finden. Für elastoplastisches Strukturverhalten ist anstelle der elastischen Materialtangente  $\mathbf{C}$  die elastoplastische  $\mathbf{C}^{ep}$  (vgl. Abschnitt 4.5) beim Aufstellen der entsprechenden Steifigkeitsmatrizen zu verwenden, wie es beispielsweise in KLEIBER & HIEN [111] beschrieben ist. Die Aufspaltung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  in die elastische  $\mathbf{K}_e$  (diese Bezeichnung ist im Falle elastoplastischen Materialverhaltens und der damit verbundenen Verwendung der elastoplastischen Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  etwas irreführend), die Anfangsverschiebungsmatrix  $\mathbf{K}_u$  sowie die Anfangsspannungsmatrix  $\mathbf{K}_g$  erlaubt die Unterscheidung der verschiedenen Eigenwertprobleme (Gleichungen (4.85)–(4.88)).

Die genaueste Abschätzung der kritischen Last ist dann gewährleistet, wenn alle durch die Nichtlinearität verursachten Zusatzterme linear mit  $\tilde{\lambda}_i$  skaliert werden. Dies gilt sowohl für die geometrische als auch für die materielle Nichtlinearität. Folgerichtig muß demnach die mit  $\mathbf{K}_e$  bezeichnete Steifigkeitsmatrix in einen rein elastischen und einen rein plastischen Anteil aufgespalten werden. Die Berechnung der rein elastischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{el}$  erfolgt nach Gleichung (4.27) unter Verwendung der elastischen Materialtangente  $\mathbf{C}$  und dem linearen Ableitungsoperator  $\mathbf{B}_L$ . Analog wird die elastoplastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  mit Hilfe von  $\mathbf{C}^{ep}$  bestimmt. Die rein plastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{pl}$  ist dann:

$$\mathbf{K}_{pl} = \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_{el} \quad (4.89)$$

Damit ergibt sich für das Eigenwertproblem in Gleichung (4.85):

$$\left( \mathbf{K}_{el} + \tilde{\lambda}_i (\mathbf{K}_{pl} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g) \right) \phi_i = \mathbf{0} \quad (4.90)$$

$$\left( \mathbf{K}_T + \tilde{\lambda}_i (\Delta \mathbf{K}_{pl} + \Delta \mathbf{K}_u + \Delta \mathbf{K}_g) \right) \phi_i = \mathbf{0} \quad (4.91)$$

wobei nun angenommen wird, daß alle durch die strukturellen Nichtlinearitäten verursachten zusätzlichen Anteile linear zu steigern sind.

### 4.8.1 Bestimmung des kritischen Lastfaktors

Der kritische Lastfaktor  $\lambda_c$  berechnet sich aus dem relevanten Vergrößerungsfaktor  $\tilde{\lambda}_i$  (Eigenwert) und dem Lastfaktor  $\lambda^{act}$ , für den zur Durchführung der Eigenwertanalyse die notwendigen Steifigkeitsmatrizen aufgestellt wurden. Sind die mit  $\tilde{\lambda}_i$  zu steigernden Steifigkeitsmatrizen bereits in der Ausgangsmatrix, wie dies beispielsweise bei der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  der Fall ist (vgl. Gleichungen (4.86), (4.87), (4.91)), enthalten, so berechnet sich der kritische Lastfaktor  $\lambda_c$  additiv nach folgender Beziehung:

$$\lambda_c = \tilde{\lambda}_i + \lambda^{act} \quad (4.92)$$

Andernfalls sind diese infolge der Nichtlinearität zusätzlich zu berücksichtigenden Matrizen noch nicht in der Ausgangsmatrix enthalten, wie z.B. bei den Gleichungen (4.85), (4.88) und (4.90). Dann berechnet sich der kritische Lastfaktor  $\lambda_c$  durch eine Multiplikation der beiden Faktoren:

$$\lambda_c = \tilde{\lambda}_i \lambda^{act} \quad (4.93)$$



# Kapitel 5

## Sensitivitätsanalyse

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit nimmt die Sensitivitätsanalyse eine zentrale Position ein. Besonders die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte, wie beispielsweise der Plastizität oder des Beulens, beeinflussen die Art der zur effizienten Berechnung der Sensitivitäten zu wählenden Formulierung.

In diesem Kapitel wird aus diesem Grund auf die prinzipiellen Möglichkeiten der Sensitivitätsanalyse sowie deren Einsatzgebiete kurz eingegangen. Die Vorgehensweise bei der Ermittlung der Sensitivitäten der Strukturantwort unter Berücksichtigung materieller und geometrischer Nichtlinearität wird dann im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert.

### 5.1 Einleitung

Mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse kann die Parameterempfindlichkeit einer Lösung ermittelt werden. In den meisten Fällen handelt es sich bei diesen Lösungen um mathematisch-mechanische Problemstellungen, wie beispielsweise die Zielfunktion und Nebenbedingungen oder die Strukturantwort, mit deren Ableitung sich dann die Sensitivitäten der mechanisch orientierten Entwurfskriterien bestimmen lassen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden mittels der Sensitivitätsanalyse die durch eine Parametervariation verursachten Veränderungen des mechanischen Strukturverhaltens bestimmt. Demnach erlaubt die Sensitivitätsanalyse sowohl eine quantitative als auch qualitative Aussage über die zu erwartende Veränderung des Strukturverhaltens infolge einer Parametervariation. Für Formoptimierungsprobleme sind diese Parameter geometriebeschreibende Größen, wie z.B. die Koordinaten der Design- oder FE-Knoten, während bei der Topologieoptimierung Materialparameter auf makroskopischer Ebene bzw. materialparameterbeeinflussende geometrische Größen auf mikroskopischer Ebene die veränderlichen Parameter repräsentieren. Diese Art der Sensitivitätsanalyse wird auch als Sensitivität der Strukturantwort (behavioral response sensitivity), mit der dann die Sensitivitäten der Zielfunktion und der Nebenbedingungen ermittelt werden können, bezeichnet. Davon zu unterscheiden ist nach SCHMIT [199] die Sensitivität des Optimums (optimum design sensitivity). Mit ihr kann beispielsweise der Einfluß von Imperfektionen auf die optimale Lösung (REITINGER [180]) bestimmt werden. Diese Imperfektionen können Ungenauigkeiten in Bauteilabmessungen (Geometriegrößen), der Last- und Lagerbedingungen oder auch der Materialparameter sein.

Normalerweise wird der Begriff 'Sensitivitätsanalyse' im Zusammenhang mit Strukturoptimierung verwendet. Allerdings hat sich die Sensitivitätsanalyse in den letzten Jahren zu

einer eigenständigen Disziplin entwickelt, was auch durch Veröffentlichungen, beispielsweise der Arbeiten von HAUG ET AL. [90], HAFTKA ET AL. [85] und KLEIBER ET AL. [110], verdeutlicht wird. Grund dafür ist die Anwendung von Sensitivitäten in den verschiedensten Gebieten der Strukturmechanik.

Die Ursprünge der Sensitivitätsanalyse sind in der 'Optimierung von Hand' bzw. der Optimierung unter Zuhilfenahme entsprechender Parameterstudien zu finden (trial and error). Bei dieser Art der Optimierung unterstützt die Sensitivitätsanalyse den Konstrukteur, um die für das Strukturverhalten relevanten Größen zu identifizieren und in geeigneter Weise zu verändern. Problematisch wird diese Vorgehensweise mit steigender Anzahl von Parametern und vor allem bei sich widersprechenden Einflüssen verschiedener variabler Größen. Zur Lösung derartiger Probleme ist der Einsatz effizienter Optimierungsstrategien unumgänglich.

Ein weiterer Einsatzbereich der Sensitivitätsanalyse ist die sogenannte inverse Analyse. Als Beispiel kann die Ermittlung der einwirkenden Lasten bzw. Lastkombination auf ein Tragwerk bei Kenntnis einer bestimmten Verschiebung oder Spannung genannt werden. Diese im Vergleich zum gewohnten Vorgehen inverse Problemlösung führt zur Namensgebung dieser Problemklasse. In Abhängigkeit der Belastung für die 'bekannte' Größe (Verschiebung, Spannung) wird eine Bestimmungsgleichung aufgestellt. Damit wird dann ein least-square-Problem formuliert und gelöst. Manchmal ist dieses jedoch schlecht (im Sinne von nicht eindeutig) gestellt und erfordert daher eine Regularisierung (TORTORELLI [227]).

Analog zur inversen Analyse erfolgt die Parameteridentifikation, weshalb oftmals nicht zwischen den beiden Methoden unterschieden wird. Von Parameteridentifikation spricht man beispielsweise bei der Bestimmung von Materialparametern, die aufgrund von Meßergebnissen mittels eines least-square-Problems ermittelt werden. Für Details sei an dieser Stelle lediglich auf die Arbeit von MAHNKEN [131] und die darin zitierten Literaturstellen verwiesen.

Als weiteres Anwendungsgebiet der Sensitivitätsanalyse ist die Zuverlässigkeitsanalyse zu nennen. Mit ihr kann eine Vorhersage über die Zuverlässigkeit (Versagenswahrscheinlichkeit) einer berechneten Strukturantwort bei einer Parametervariation, wie beispielsweise Imperfektionen oder Streuung von geometrischen und materiellen Eingangsgrößen (stochastische Größen), getroffen werden (vgl. optimum design sensitivity).

Die Sensitivitätsanalyse stellt eine entscheidende Komponente bei der numerischen Lösung von Optimierungsproblemen mittels Gradientenverfahren dar. Ihre Qualität beeinflußt sehr stark die Konvergenz des Optimierungsprozesses und die Erreichbarkeit der optimalen Lösung. Da die Sensitivitätsanalyse bis zu 90% der Rechenzeit benötigt, ist eine möglichst exakte und effiziente Methode anzustreben. Neben der Anzahl der Optimierungsvariablen und der Anzahl der auszuwertenden Funktionen (Entwurfskriterien) entscheidet das zugrundeliegende mechanische Problem über eine geeignete Wahl der zur Verfügung stehenden Methoden der Sensitivitätsanalyse und ob ein Optimierungsproblem überhaupt mit vertretbarem Aufwand gelöst werden kann. Ein weiterer, wenn auch für die vorliegende Arbeit nicht entscheidender Faktor, der die Wahl der Methode der Sensitivitätsanalyse beeinflußt, ist die Verfügbarkeit und Zugänglichkeit der benötigten Programmquellen.

Prinzipiell unterscheidet man bei der Sensitivitätsanalyse zwischen einer diskreten und einer variationellen Vorgehensweise. Während bei der diskreten Vorgehensweise die idealisierte, kontinuierliche Struktur (Entwurfsmodell) bzw. die Systemgleichungen vor der Durchführung der Sensitivitätsanalyse diskretisiert werden, erfolgt der Schritt der Dis-

cretisierung bei der variationellen Vorgehensweise erst im Anschluß an die Bildung der Gradienten. Die Diskretisierung der Systemgleichungen kann beispielsweise durch die Methode der Finiten Elemente erfolgen (vgl. Kapitel 4). Damit sind die Entwurfskriterien von den gewählten Approximationsfunktionen der Finiten Elemente abhängig, welche wiederum von den Optimierungsvariablen abhängig sind. Die Optimierungsvariablen sind wiederum Abhängige der approximativen Beschreibung der Geometrie im Entwurfsmodell (vgl. Kapitel 2). Bei gleicher Wahl der Diskretisierung führen beide Methoden (diskrete und variationelle Sensitivitätsanalyse) zum selben Ergebnis.

Die diskrete Sensitivitätsanalyse wird wiederum in numerische, semi-analytische und (rein) analytische Methoden unterteilt. Diese Einteilung macht bei der variationellen Sensitivitätsanalyse nur wenig Sinn, weshalb hier nur analytische Methoden Eingang finden.

Die semi-analytische und analytische Sensitivitätsanalyse werden, je nach der Reihenfolge der Matrixoperationen, in direkte und adjungierte Methoden eingeteilt. Ein ausführlicher Überblick über die grundsätzlichen Methoden der Sensitivitätsanalyse und deren Entwicklung ist beispielsweise in den Arbeiten von ARORA & HAUG [4], HAUG ET AL. [90], ADELMAN & HAFTKA [1], HASLINGER & NEITTAANMÄKI [88], HAFTKA & ADELMAN [83], HAFTKA ET AL. [85], KIMMICH [106], TORTORELLI & MICHALERIS [228], KLEIBER ET AL. [110] zu finden.

Nachfolgend werden die oben beschriebenen Methoden der Sensitivitätsanalyse in ihrer prinzipiellen Vorgehensweise kurz erläutert und Vor- und Nachteile diskutiert, was für die Wahl einer entsprechenden Vorgehensweise zur Ermittlung der Sensitivitäten der Entwurfskriterien für bestimmte strukturmechanische Problemstellungen und die Art der Optimierungsaufgabe von entscheidender Bedeutung ist. Auf die Behandlung materiell und geometrisch nichtlinearer Effekte des Strukturverhaltens bei der Sensitivitätsanalyse wird in Kapitel 6 ausführlich eingegangen.

## 5.2 Numerische Verfahren

Die bekanntesten numerischen Verfahren zur Sensitivitätsanalyse sind das Vorwärts-, das Rückwärts- und das zentrale Differenzenverfahren. Ihre große Beliebtheit verdanken diese Verfahren besonders dem geringen Formulierungsaufwand und der einfachen Implementierung, vor allem in kommerzielle oder bestehende Programmpakete. Diese Verfahren lassen sich aus einer abgebrochenen Taylorreihenentwicklung herleiten.

$$f(\hat{\mathbf{s}} + \Delta\hat{\mathbf{s}}) = f(\hat{\mathbf{s}}) + \nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}) \Delta\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \nabla_s^2 f(\hat{\mathbf{s}}) (\Delta\hat{\mathbf{s}})^2 + \text{THO} \quad (5.1)$$

$$f(\hat{\mathbf{s}} - \Delta\hat{\mathbf{s}}) = f(\hat{\mathbf{s}}) - \nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}) \Delta\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \nabla_s^2 f(\hat{\mathbf{s}}) (\Delta\hat{\mathbf{s}})^2 - \text{THO} \quad (5.2)$$

Während beim Vorwärts- und Rückwärts-Differenzenverfahren die Reihe nach dem linearen Term abgebrochen wird, geschieht dies beim zentralen Differenzenverfahren erst nach dem quadratischen Term. Dies hat zur Folge, daß sowohl das Vorwärts- als auch das Rückwärts-Differenzenverfahren erster Ordnung genau sind, das zentrale Differenzenverfahren jedoch zweiter Ordnung genau ist. Die Umformung von Gleichung (5.1) unter Vernachlässigung der quadratischen Terme und der Terme höherer Ordnung (THO) liefert durch Auflösen nach dem Gradienten der Funktion  $\nabla_s f(\hat{\mathbf{s}})$  die Bestimmungsgleichung für

die Sensitivität nach dem Vorwärts-Differenzenverfahren.

$$\nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}) \approx \frac{f(\hat{\mathbf{s}} + \Delta\hat{\mathbf{s}}) - f(\hat{\mathbf{s}})}{\Delta\hat{s}_i} \quad ; \quad \Delta\hat{s}_j = \delta_{ij}\Delta\hat{s}_i \quad (5.3)$$

Analoges gilt für entsprechende Umformungen von Gleichung (5.2). Das Rückwärts-Differenzenverfahren ergibt sich demnach zu:

$$\nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}) \approx \frac{f(\hat{\mathbf{s}}) - f(\hat{\mathbf{s}} - \Delta\hat{\mathbf{s}})}{\Delta\hat{s}_i} \quad (5.4)$$

Die Bestimmungsgleichung für das zentrale Differenzenverfahren ergibt sich durch die Subtraktion der Gleichung (5.2) von Gleichung (5.1), wobei alle Terme ab der dritten Ordnung vernachlässigt werden. Auflösen nach  $\nabla_s f(\hat{\mathbf{s}})$  liefert:

$$\nabla_s f(\hat{\mathbf{s}}) \approx \frac{f(\hat{\mathbf{s}} + \Delta\hat{\mathbf{s}}) - f(\hat{\mathbf{s}} - \Delta\hat{\mathbf{s}})}{2\Delta\hat{s}_i} \quad (5.5)$$

Die Gleichungen (5.3)–(5.5) verdeutlichen, daß zur Sensitivitätsanalyse mittels numerischer Verfahren lediglich die Funktionswerte für verschiedene Entwürfe zu bestimmen sind. Aus diesem Grund nimmt der numerische Aufwand bei steigender Anzahl von Optimierungsvariablen zu, da für jede Variable  $\hat{s}_i$  eine zusätzliche Funktionsauswertung erforderlich ist. Beim zentralen Differenzenverfahren sind es sogar zwei Auswertungen pro Variable. Ein weiterer Nachteil ist die Abhängigkeit des Ergebnisses von der gewählten Schrittweite (Störung)  $\Delta\hat{s}_i$ . Zu kleine Schrittweiten in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit führen zu sogenannten Rundungs- bzw. Konditionierungsfehlern (round-off errors). Wählt man jedoch die Schrittweite  $\Delta\hat{s}_i$  zu groß, entstehen Fehler aufgrund der abgebrochenen Taylorreihe, da der Einfluß der vernachlässigten Terme höherer Ordnung zu groß ist (truncation error). Diese Problematik bei der Wahl der Größe der Störung  $\Delta\hat{s}_i$  ist in der Literatur auch als Schrittweitendilemma bekannt (z.B. GILL ET AL. [76], KIMMICH [106]). Aus diesem Grund wird beispielsweise in GILL ET AL. [76] ein Verfahren zur Berechnung der optimalen Schrittweite vorgeschlagen, was allerdings nicht für alle Problemstellungen zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Außerdem steigt der numerische Aufwand zusätzlich an. Auf problemspezifische Schwierigkeiten der Methode der finiten Differenzen wird später an den entsprechenden Stellen in Kapitel 6 näher eingegangen. Trotz dieser prinzipiellen Schwierigkeiten liefern die vorgestellten Differenzenverfahren für viele Optimierungsprobleme qualitativ zufriedenstellende Ergebnisse. Wegen des hohen numerischen Aufwandes kommen jedoch zur effizienten Lösung strukturmechanischer Optimierungsprobleme, besonders bei materieller und geometrischer Nichtlinearität, nur analytische Verfahren in Frage. Wegen der Komplexität analytischer Sensitivitätsanalysen dienen die numerischen Verfahren häufig zu deren Verifikation (TSENG & ARORA [233]).

### 5.3 Analytische Verfahren

Wie bereits erwähnt, unterscheidet man bei den analytischen Verfahren der Sensitivitätsanalyse zwischen einer diskreten und einer variationellen Vorgehensweise. Zur Bestimmung der Sensitivitäten ist die Information, wie sich ein definiertes Kontinuum (materieller Körper) verändern kann, notwendig. Die (geometrische) Veränderung eines Körpers,

der im Parameterraum der Referenzkonfiguration definiert ist, infolge der Variation einer Optimierungsvariablen kann mit Hilfe der Ableitung der Abbildungsvorschrift  $\nabla_s \chi_s$  beschrieben werden. Diese Veränderung wird mittels des Entwurfsmodells und der dort festgelegten Parametrisierung der realen Struktur vorgenommen. Die Abbildungsvorschrift  $\chi_s(\hat{s})$  (vgl. Abbildungen 4.1 und 5.1) bildet die Konfiguration vom Parameterraum in Abhängigkeit der Optimierungsvariablen  $\hat{s}$  bzw. der geometriebeschreibenden Parameter (Design-Parameter) auf den undeformierten, materiellen Körper im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  ab (in Abbildung 5.1 mit 'Design 1' bezeichnet).

Des weiteren ist die Kenntnis über das mechanische Strukturverhalten infolge einer äußeren Belastung erforderlich. Der Deformationsprozeß wird durch die Abbildungsvorschrift  $\chi_X(\mathbf{X}, t) = \chi_X^t(\mathbf{X})$  im Analysemodell beschrieben (vgl. Abbildungen 4.1 und 5.1). Daraus wird ersichtlich, daß für die Sensitivitätsanalyse die Kenntnis beider Abbildungsvorschriften  $\chi_s$  und  $\chi_X$  sowie deren Verknüpfung notwendig ist. Eine derartige Formulierung ist auf CEA [49], [48] zurückzuführen, gewann jedoch erst mit der Arbeit von HABER [81] an Popularität und ist heute Grundlage zahlreicher Arbeiten (z.B. PHELAN & HABER [168], VIDAL [238], VIDAL & HABER [239], TORTORELLI & WANG [229], BARTHOLD [10] oder BARTHOLD & STEIN [12]). Man bezeichnet dieses Vorgehen auch als Referenzvolumen-Ansatz. Es wird vorausgesetzt, daß die Abbildungsvorschriften hinreichend oft differenzierbar sind. Im Falle von materieller Nichtlinearität, wie bei der Plastizität, ist diese Forderung für die Abbildung  $\chi_X^t(\mathbf{X})$  des Deformationsprozesses nicht immer erfüllt. Diese Problematik wird jedoch erst im nachfolgenden Kapitel diskutiert. Der beschriebene Zusammenhang der Abbildungsvorschriften ist zur Verdeutlichung in Abbildung 5.1 graphisch dargestellt.

Eine Änderung des Vektors der Optimierungsvariablen  $\hat{s}$  um  $\Delta\hat{s}$  bewirkt eine Änderung der materiellen Punkte  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega_X$  um den Betrag  $\Delta\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}$ .

$$\Delta\mathbf{X} = \chi_s(\tilde{\hat{s}}) - \chi_s(\hat{s}) \neq \chi_s(\tilde{\hat{s}} - \hat{s}) = \chi_s(\Delta\hat{s}) \tag{5.6}$$

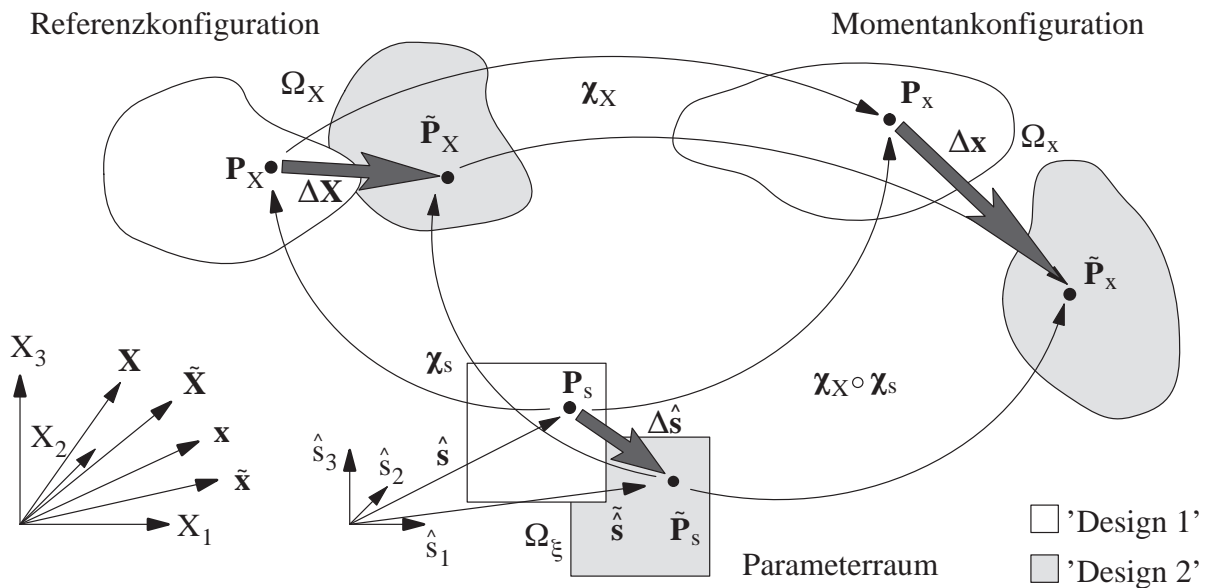


Abbildung 5.1: Optimierungs- und Deformationsprozeß

Die durch die Störung  $\Delta \hat{\mathbf{s}}$  veränderte Situation in der Referenzkonfiguration ('Design 2', mit '' gekennzeichnet) hat Auswirkung auf den Deformationsvorgang der Struktur infolge der äußeren Belastung. Die deformierte Lage der um  $\Delta \hat{\mathbf{s}}$  gestörten Struktur ist mit dem Ortsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  bezeichnet. Die Änderung der Deformation gegenüber der ungestörten Struktur beträgt:

$$\Delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_X^t(\tilde{\mathbf{X}}) - \boldsymbol{\chi}_X^t(\mathbf{X}) \neq \boldsymbol{\chi}_X^t(\Delta \mathbf{X}) \quad (5.7)$$

Die Ungleichheitszeichen in den Gleichungen (5.6) und (5.7) ergeben sich aufgrund der Nichtlinearität der Abbildungsvorschriften  $\boldsymbol{\chi}_s$  und  $\boldsymbol{\chi}_X^t$ . Die Verknüpfung der Abbildungsvorschriften beschreibt den Zusammenhang zwischen der Definition des materiellen Körpers im Parameterraum und dem deformierten Körper im physikalischen Raum (Anschaungsraum). Dies gilt sowohl für die um  $\Delta \hat{\mathbf{s}}$  gestörte als auch die ungestörte Struktur und wird aus diesem Grund lediglich für die ungestörte demonstriert.

$$\boldsymbol{\chi}_{Xs} = \boldsymbol{\chi}_X^t \circ \boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\chi}_{Xs}(\boldsymbol{\chi}_X^t(\mathbf{X}), \boldsymbol{\chi}_s(\hat{\mathbf{s}})) = \boldsymbol{\chi}_{Xs}(\mathbf{X}(\hat{\mathbf{s}}), \hat{\mathbf{s}}) \quad (5.8)$$

Unter Verwendung von Gleichung (4.2) aus Kapitel 4 ergibt sich für die Abbildungsvorschrift  $\boldsymbol{\chi}_{Xs}$  alternativ folgender Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\chi}_{Xs} = \boldsymbol{\chi}_X^t \circ \boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\chi}_{Xs}(\mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}}), \boldsymbol{\chi}_s(\hat{\mathbf{s}})) = \boldsymbol{\chi}_{Xs}(\mathbf{u}(\hat{\mathbf{s}}), \hat{\mathbf{s}}) \quad (5.9)$$

Alle für den Optimierungsprozeß relevanten Funktionen, wie Zielfunktion und Nebenbedingungen, sind Abhängige von der in Gleichung (5.8) bzw. (5.9) definierten Abbildungsvorschrift  $\boldsymbol{\chi}_{Xs}$ .

$$f = f(\boldsymbol{\chi}_{Xs}) \quad (5.10)$$

Für die Sensitivität dieser Funktion sind nun prinzipiell zwei verschiedene Varianten denkbar. Mit Hilfe von Gleichung (5.8) berechnet sich der Gradient bezüglich der freien Parameter  $\hat{\mathbf{s}}$  der Funktion  $f$  zu:

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \nabla_X f \nabla_s \mathbf{X} \quad (5.11)$$

Der Term  $\nabla_s \mathbf{X}$  wird als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld der kontinuierlichen Struktur bezeichnet (vgl. Kapitel 3). Dieser drückt die (endliche) Änderung der materiellen Punkte  $\Delta \mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega_X$  infolge einer Änderung der geometriebeschreibenden Größen  $\Delta \hat{\mathbf{s}}$  im Parameterraum aus. Die Variante in Gleichung (5.11) wird als Materialableitung bezeichnet, da diese die Veränderung der Funktion  $f$  in einem materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  im Optimierungsfortschritt mißt. Dieses Konzept wurde von CEA und ZOLESI [259] eingeführt. Die Weiterentwicklung dieser Vorgehensweise ist z.B. in den Arbeiten von ADELMAN & HAFTKA [1], HAFTKA & ADELMAN [83] oder HAUG ET AL. [90] dokumentiert. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird darauf allerdings nicht weiter eingegangen. Die Formulierung als Materialableitung und der Referenzvolumen-Ansatz führen auf dieselben Ausdrücke zur Bestimmung der Gradienten, was beispielsweise in ARORA ET AL. [5] aufgezeigt ist.

Alternativ zur Materialableitung, in der die Änderung des mechanischen Verhaltens in dem Ausdruck  $\nabla_X f$  enthalten ist, kann die Bestimmung des Gradienten der Entwurfsvorschrift  $\nabla_s f$  unter Berücksichtigung von Gleichung (5.9) erfolgen. Die Sensitivität der

Funktion  $f$  ergibt dann folgenden Ausdruck, wobei dort die Änderung des mechanischen Verhaltens in dem Term  $\nabla_s \mathbf{u}$  ausgedrückt wird:

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \nabla_s \mathbf{u} \quad (5.12)$$

Sowohl in Gleichung (5.11) als auch in Gleichung (5.12) wird der erste Term auf der rechten Seite als lokaler, der zweite als konvektiver Anteil bezeichnet. Während der lokale Anteil die explizite Ableitung nach den freien Parametern  $\hat{\mathbf{s}}$  darstellt, repräsentiert der konvektive Anteil die implizite Abhängigkeit der Funktion  $f$  von  $\hat{\mathbf{s}}$ . Die Ableitung  $\nabla_s \mathbf{X}$  in Gleichung (5.11) wie auch die Ableitung  $\nabla_s \mathbf{u}$  in Gleichung (5.12) lassen sich mit Hilfe von Abbildung 5.1 anschaulich deuten. Entsprechend der numerischen Sensitivitätsanalyse mit Hilfe der finiten Differenzenverfahren ergibt sich:

$$\nabla_s \mathbf{X} \approx \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta \hat{\mathbf{s}}} \quad \text{bzw.} \quad \nabla_s \mathbf{x} \approx \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \hat{\mathbf{s}}} \quad (5.13)$$

Die Sensitivität der Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  läßt sich mit Hilfe von Gleichung (4.2) folgendermaßen ausdrücken:

$$\nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{x} - \nabla_s \mathbf{X} \approx \frac{\Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{X}}{\Delta \hat{\mathbf{s}}} \quad (5.14)$$

Für  $\Delta \hat{\mathbf{s}} \rightarrow \mathbf{0}$  gehen die durch die finiten Differenzen approximierten Sensitivitäten in die exakten über (analytische Sensitivitäten). Für das weitere Vorgehen wird zur Ermittlung der Sensitivität der Entwurfskriterien Gleichung (5.12) verwendet.

### 5.3.1 Diskrete Sensitivitätsanalyse

Bei dieser Art der Sensitivitätsanalyse wird von der bereits diskretisierten Form der Strukturgleichungen ausgegangen. Die Entwurfskriterien, wie Zielfunktion und Nebenbedingungen, sind dann als Funktionen der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  und der diskreten Knotenfreiwerte  $\hat{\mathbf{u}}$  darstellbar. Um Gleichung (5.12) auswerten zu können, ist die Sensitivität der diskreten Knotenfreiwerte  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  zu bestimmen. Ausgegangen wird von der diskretisierten Form der Gleichgewichtsbedingung.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad (5.15)$$

$\mathbf{K}$  stellt dabei die elastische, globale Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{R}$  die resultierenden, externen Lasten dar. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle von einer linearen Kinematik und linear elastischem Materialverhalten ausgegangen. Es sollen lediglich die unterschiedlichen Varianten der Sensitivitätsanalyse aufgezeigt und verglichen werden. Die Problematik einer inkrementellen Vorgehensweise wird in Abschnitt 5.3.2 diskutiert. Die Ableitung der Gleichgewichtsbeziehung in Gleichung (5.15) nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  liefert:

$$\nabla_s \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \nabla_s \mathbf{R} \quad (5.16)$$

Die Auflösung nach den Sensitivitäten der diskreten Knotenfreiwerte  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  führt formal zu einer analogen Gleichung wie zur Bestimmung der diskreten Knotenfreiwerte  $\hat{\mathbf{u}}$  (vgl. Gleichung (5.15)), weshalb der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (5.17) auch als Pseudo-Lastvektor  $\mathbf{R}^{pseudo}$  bezeichnet wird.

$$\mathbf{K} \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \nabla_s \mathbf{R} - \nabla_s \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}^{pseudo} \quad \rightarrow \quad \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^{pseudo} \quad (5.17)$$

Zur analytischen Berechnung der Gradienten des Lastvektors  $\nabla_s \mathbf{R}$  und der Systemsteifigkeitsmatrix  $\nabla_s \mathbf{K}$  ist die explizite Ableitung der Elementformulierung erforderlich. Die entsprechenden Ableitungen wurden für ein Schalenelement in KIMMICH [106] beschrieben. Diese werden elementweise bestimmt und lauten (vgl. Gleichung (4.27) in Kapitel 4):

$$\begin{aligned} \nabla_s^e \mathbf{R}^e &= \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T (\nabla_s^e \mathbf{b} |\mathbf{J}| + \mathbf{b} \nabla_s^e |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T (\nabla_s^e \mathbf{t} |\tilde{\mathbf{J}}| + \mathbf{t} \nabla_s^e |\tilde{\mathbf{J}}|) d, \xi \quad (5.18) \\ \nabla_s^e \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s^e \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \nabla_s^e \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \nabla_s^e \mathbf{B}_L) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \nabla_s^e |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (5.19) \end{aligned}$$

Der Ableitungsoperator  $\nabla_s^e(\cdot)$  bezeichnet ein Vielfaches der Ableitung einer Größe nach einer variablen Elementgröße (z.B. eines FE-Knotens). Diese setzt sich zusammen aus der Ableitung nach der variablen Elementgröße  $\bar{\nabla}_s^e(\cdot)$  und einem 'Skalierungsfeld', das die Abhängigkeit der variablen Elementgrößen von den Optimierungsvariablen berücksichtigt.

$$\nabla_s^e(\cdot) = (\nabla_s^e \hat{\mathbf{s}})^T \bar{\nabla}_s^e(\cdot) \quad (5.20)$$

Der Operator  $\nabla_s^e \hat{\mathbf{s}}$  repräsentiert eine Art Linking-Vorschrift, der die Abhängigkeit der einzelnen variablen Größen auf Elementebene von den (übergeordneten) Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  beschreibt. Im Falle der Formoptimierung wird dieses Feld als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld eines Finiten Elements der diskretisierten Struktur bezeichnet (vgl. Kapitel 3). Es stellt den Zusammenhang zwischen der Bewegung eines Design-Knotens und der damit verbundenen (abhängigen) Bewegung der FE-Knoten her.

$$\nabla_s^e(\cdot) = (\nabla_s^e \mathbf{x}_{FE})^T \bar{\nabla}_s^e(\cdot) \quad (5.21)$$

Werden FE-Knoten direkt als Optimierungsvariablen definiert, entspricht das Entwurfsgeschwindigkeitsfeld der Einheitsmatrix. Mit der Kenntnis dieser Ableitungen auf Elementebene kann nun die Ableitung der globalen Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors durch Aufsummieren über alle Finiten Elemente bestimmt werden. Für den Pseudo-Lastvektor, der die zu bestimmende Größe bei der Sensitivitätsanalyse darstellt, ergibt sich dann folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{R}^{pseudo} = \bigcup_{e=1}^{n_{nel}} \nabla_s^e \mathbf{R} - \bigcup_{e=1}^{n_{nel}} (\nabla_s^e \mathbf{x}_{FE})^T \bar{\nabla}_s^e \mathbf{K}^e \hat{\mathbf{u}}^e \quad (5.22)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im folgenden auf die Darstellung des Superkripts  $e$  bei den Gradientenoperatoren  $\nabla_s^e$  verzichtet. Die Sensitivitäten des bzw. der  $\mathbf{B}$ -Operatoren und der Lasten  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  sind stets als elementbezogene Ableitungen zu verstehen und bedürfen daher keiner zusätzlichen Kennzeichnung. Liegen die expliziten Ableitungen der Elementformulierung nicht vor oder sind diese nur mit großem Aufwand zu bestimmen, besteht die Möglichkeit, die erforderlichen Ableitungen zur Bestimmung des Pseudo-Lastvektors mit Hilfe numerischer Verfahren zu ermitteln. Man spricht von einem semi-analytischen Vorgehen, da die Bestimmungsgleichungen für die Sensitivitätsanalyse



analytisch hergeleitet, die Ableitungen auf Elementebene dann numerisch bestimmt werden. Dieses Vorgehen kombiniert die Vorteile der analytischen und der numerischen Methode. Die Kenntnis der Ableitungen der Elementformulierung, wie beim analytischen Verfahren, ist bei der semi-analytischen Vorgehensweise nicht erforderlich, weshalb sich diese Vorgehensweise besonders zur Implementierung in kommerzielle oder bestehende Programmpakete anbietet. Die Ableitung des Lastvektors  $\nabla_s \mathbf{R}$  und der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\nabla_s \mathbf{K}$  werden auf globaler Ebene, die der Elementlastvektoren  $\nabla_s^e \mathbf{b}$ ,  $\nabla_s^e \mathbf{t}$  und der  $\mathbf{B}$ -Operatoren  $\nabla_s^e \mathbf{B}_L$  auf Elementebene bestimmt. Zur Berechnung der Ableitung der  $\mathbf{B}$ -Operatoren ist u.a. die Sensitivität der inversen JACOBI-Matrix  $\nabla_s (\mathbf{J}^{-1})$  erforderlich. Da die JACOBI-Matrix eine Funktion der Koordinaten (FE-Knoten) ist, genügt zur Bestimmung von  $\nabla_s (\mathbf{J}^{-1})$  die Ableitung dieser Koordinaten nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$ . Mit der Kenntnis der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder (vgl. Gleichungen (3.3), (5.13), (5.20), (5.21)) kann die Ableitung der inversen JACOBI-Matrix bestimmt werden. Obwohl die semi-analytischen Verfahren für viele Problemstellungen sehr effizient sind (z.B. bei der Querschnittsoptimierung), können sie bei Problemen der Formoptimierung zu erheblichen Fehlern führen, was in BARTHELEMY ET AL. [8] diskutiert ist. Für lineare strukturmechanische Probleme wurden dazu verschiedene Studien durchgeführt (z.B. BARTHELEMY & HAFTKA [9], PEDERSEN ET AL. [166], OLHOFF & RASMUSSEN [156]). Es zeigt sich, daß diese Fehler besonders bei schlanken Strukturen auftreten. Außerdem steigt der Fehler mit zunehmender Netzfeinheit. Analog zu den numerischen Verfahren hängt der Fehler zudem von der Wahl der Schrittweite  $\Delta \hat{\mathbf{s}}$  ab.

Zur Reduktion der Fehler werden verschiedene Methoden in der Literatur vorgeschlagen. Ein Vorschlag, der beispielsweise von BARTHELEMY & HAFTKA [9] oder auch von OLHOFF & RASMUSSEN [156] unterbreitet wird, ist die Verwendung höherwertigerer Finiter Elemente. Der Fehler kann damit nach DE BOER & VAN KEULEN [34] zwar reduziert, jedoch nicht prinzipiell behoben werden.

Den Einfluß der Strukturschlankheit auf den Fehler in den Sensitivitäten führt MLEJNEK [148] auf die Ableitungen von Starrkörperrotationen zurück, welcher durch Verwendung des 'natural approach' weitgehend behoben wird. OLHOFF ET AL. [157] schlagen ein Korrekturverfahren vor, mit dessen Hilfe für bestimmte Elementformulierungen die 'exakten' Ableitungen bzw. der 'exakte' Pseudo-Lastvektor ermittelt werden kann. Je nach Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  werden die numerisch gebildeten Ableitungen der Elementsteifigkeitsmatrizen mit einem zu bestimmenden Faktor skaliert. DE BOER & VAN KEULEN [34] identifizieren die Starrkörperbewegungen der einzelnen Finiten Elemente und ermitteln für diese die Ableitungen analytisch. Ein Überblick über die verschiedenen Methoden und eine Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen ist in DE BOER & VAN KEULEN [35] zu finden.

Nachdem der Pseudo-Lastvektor entweder mittels der analytischen oder der semi-analytischen Methode bestimmt wurde, können die Gradienten der Entwurfskriterien  $\nabla_s f$  berechnet werden.

Da die inverse Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{-1}$  bei der Verwendung direkter Gleichungslöser bereits bei der Strukturanalyse aufgestellt wird, kann die Sensitivität der diskreten Knotenfreiwerte  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  einfach aus Gleichung (5.17) bestimmt werden. Eingesetzt in Gleichung (5.12) ergibt sich die Sensitivität der Entwurfskriterien zu:

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \nabla_s \mathbf{u} \quad (5.23)$$

$$= \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^{pseudo} \quad (5.24)$$

Je nachdem, in welcher Reihenfolge die Matrixoperationen bei der Bestimmung des zweiten Summanden (konvektiver Anteil) in Gleichung (5.24) durchgeführt werden, handelt es sich um die direkte oder die adjungierte Methode. Für beide Methoden ist der Pseudo-Lastvektor für jede unabhängige Optimierungsvariable, also  $n_s$  mal, aufzustellen (z.B. nach Gleichung (5.22)). Genauso oft ist bei der direkten Methode die Matrixoperation ( $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^{pseudo}$ ), die die Sensitivität der Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  ergibt (vgl. Gleichung (5.17)), durchzuführen. Bei der adjungierten Methode hingegen ist das Produkt ( $\nabla_u f^T \mathbf{K}^{-1}$ ) für alle Entwurfskriterien (Zielfunktion und Nebenbedingungen) zu bestimmen. Es wird deutlich, daß für Optimierungsprobleme, bei denen die Anzahl der Optimierungsvariablen  $n_s$  geringer als die Anzahl der Entwurfskriterien ( $n_f + n_h + n_g$ ) ist, die direkte Methode effizienter ist. Andernfalls ist die adjungierte Methode vorzuziehen. KIMMICH [106] beziffert den Unterschied der beiden Methoden, bezogen auf den gesamten numerischen Aufwand, zumindest für linear elastische Problemstellungen in der Formoptimierung als eher gering. Für Topologieoptimierungsprobleme trifft diese Aussage jedoch nicht mehr zu, da die Anzahl der Optimierungsvariablen deutlich größer als bei Problemen der Formoptimierung ist und daher für derartige Probleme in der Regel die adjungierte Methode zum Einsatz kommt.

Bei der direkten Methode wird zuerst die Sensitivität der Strukturantwort, z.B. die der Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ , bestimmt und damit die Sensitivität der Entwurfskriterien  $\nabla_s f$  berechnet. Die Vorgehensweise bei der adjungierten Methode soll nun nachfolgend kurz erläutert und hergeleitet werden. Die Funktion  $f$  wird mit einem Nullterm, in der Regel dem strukturellen Gleichgewicht, erweitert und mit einem Vektor der sogenannten LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\gamma}$ , der in diesem Zusammenhang auch als Hilfsvariable bzw. adjungierte Variable bezeichnet wird, multipliziert. Das so erzeugte adjungierte Problem lautet dann:

$$\bar{f} = f - \boldsymbol{\gamma}^T \underbrace{(\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{R})}_{=0} \quad (5.25)$$

Die Ableitung dieser Gleichung liefert nach Umordnen der Terme, die  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  enthalten, und unter Berücksichtigung von Gleichung (5.12) folgenden Zusammenhang:

$$\nabla_s \bar{f} = \nabla_s^{ex} f + (\nabla_u f - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{K}) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\gamma}^T (\nabla_s \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \nabla_s \mathbf{R}) \quad (5.26)$$

Die Ableitung der LAGRANGE-Multiplikatoren muß nicht gebildet werden, da diese mit dem Nullterm aus Gleichung (5.26) multipliziert wird und damit verschwindet. Der Vektor der LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\gamma}$  wird so gewählt, daß der erste Klammerausdruck in Gleichung (5.26) verschwindet. Für  $\boldsymbol{\gamma}$  ergibt sich dann für den Fall einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ :

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \nabla_u f \mathbf{K}^{-1} \quad (5.27)$$

Einsetzen in Gleichung (5.26) und Verwendung des Ausdrucks für den Pseudo-Lastvektor aus Gleichung (5.17) liefert:

$$\nabla_s \bar{f} = \nabla_s^{ex} f - \boldsymbol{\gamma}^T (-\mathbf{R}^{pseudo}) = \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}^{pseudo} \quad (5.28)$$

Demnach entsprechen sich die direkte und die adjungierte Methode (vgl. Gleichungen (5.24) und (5.28)).

### 5.3.2 Variationelle Sensitivitätsanalyse

Im Gegensatz zur diskreten Sensitivitätsanalyse wird bei der variationellen Sensitivitätsanalyse die vollständige Ableitung der kontinuumsmechanischen, kontinuierlichen, jedoch bereits idealisierten Problemfunktionen (im Entwurfsmodell) nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  bestimmt. Anschließend werden die so erhaltenen Gleichungen zur approximativen Lösung zum Näherungsverfahren (FEM) konsistent diskretisiert.

Die mathematische Grundlage der variationellen Formulierung der Sensitivitätsanalyse wurde in HAUG & CEA [89] von mehreren Autoren beschrieben. Erste Anwendungen der variationellen Sensitivitätsanalyse, jedoch ohne numerische Verifikation, ist z.B. in DEMS & MRÓZ [61] für die Anwendung im Bereich der Querschnittsoptimierung beschrieben. Eine Zusammenfassung für die Anwendung in der Formoptimierung ist in HASLINGER & NEITTAANMÄKI [88] zu finden. Des weiteren sind in diesem Zusammenhang die grundlegenden Arbeiten von HAUG ET AL. [90], HAFTKA ET AL. [85] und KLEIBER ET AL. [110] zu nennen. Ein relativ aktueller Überblick über die Methoden der variationellen Sensitivitätsanalyse sowie ein Vergleich zwischen der Materialableitung (material derivative approach) und dem Referenzvolumen-Ansatz (domain parameterization approach) ist in BARTHOLD & STEIN [12] zu finden.

#### Direkte Vorgehensweise

Analog zur diskreten Sensitivitätsanalyse wird auch hier aus Gründen der Übersichtlichkeit von einem materiell und geometrisch linearen Strukturverhalten ausgegangen. Im Hinblick auf materiell und geometrisch nichtlineare Probleme wird jedoch trotz linearem Strukturverhalten bereits an dieser Stelle die inkrementelle Vorgehensweise eingeführt und erläutert. Ausgangspunkt der direkten, variationellen Sensitivitätsanalyse ist die kontinuierliche Gleichung der schwachen Form des Gleichgewichts (vgl. Gleichung (4.19)) zum Zeitpunkt  $t + 1$ :

$$\int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \quad (5.29)$$

$\delta \mathbf{E}$  sind dabei die virtuellen Verzerrungen und  $\mathbf{S}_{t+1}$  die Spannungen.  $\delta \mathbf{u}$  stellen die virtuellen Verschiebungen,  $\mathbf{b}_{t+1}$  die Volumenlasten und  $\mathbf{t}_{t+1}$  die Oberflächenlasten zum Zeitpunkt  $t + 1$  dar. Die inkrementellen Beziehungen der Spannungen  $\mathbf{S}_{t+1}$  und der Verschiebungen  $\mathbf{u}_{t+1}$  lauten für den linear elastischen Fall:

$$\mathbf{S}_{t+1} = \mathbf{S}_t + \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \quad (5.31)$$

Die linearen Dehnungen sowie deren Variation lassen sich mit Hilfe des Differentialoperators  $\mathbf{L}_J$  wie folgt darstellen:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \right) = \mathbf{L}_J \mathbf{u} \quad (5.32)$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi (\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) = \mathbf{L}_J \delta \mathbf{u} \quad (5.33)$$

Der Index  $J$  symbolisiert die Differentiation bezüglich der Referenzkonfiguration im Parameterraum. Die Ableitung der Gleichung (5.29) nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$

liefert:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| + \delta \mathbf{E} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| + \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi \\ &= \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} (\nabla_s \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| + \mathbf{b}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} (\nabla_s \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| + \mathbf{t}_{t+1} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}|) d, \xi \end{aligned} \quad (5.34)$$

Da die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  beliebig wählbar sind, jedoch kinematisch zulässig sein müssen, verschwindet ihre Ableitung. Einsetzen der inkrementellen Beziehung der Spannungen  $\mathbf{S}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t+1$  (Gleichung (5.30)) sowie deren Ableitung nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$

$$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{E} + \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{E} \quad (5.35)$$

in Gleichung (5.34) ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} \nabla_s (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \nabla_s \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_t \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \nabla_s (\delta \mathbf{E}) \mathbf{C} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{C} \mathbf{E} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \nabla_s R_{t+1} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde dabei die rechte Seite von Gleichung (5.34) in dem Term  $\nabla_s R_{t+1}$  zusammengefaßt. Die Sensitivität der (linearen) Verzerrungen und deren Variation ergibt sich nach den Gleichungen (5.32) und (5.33) zu:

$$\nabla_s \mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{L}_J \mathbf{u} + \mathbf{L}_J \nabla_s \mathbf{u} \quad (5.37)$$

$$\nabla_s (\delta \mathbf{E}) = \nabla_s \mathbf{L}_J \delta \mathbf{u} + \mathbf{L}_J \nabla_s (\delta \mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{L}_J \delta \mathbf{u} \quad (5.38)$$

Setzt man diese Ableitungen in die obige Gleichung (5.36) ein und ordnet die so entstehende Gleichung entsprechend nach bekannten und unbekanntem Größen, erhält man die Bestimmungsgleichung für die Sensitivität des kontinuierlichen, inkrementellen Verschiebungsfeldes  $\nabla_s \mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \nabla_s \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \\ \nabla_s R_{t+1} & - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \mathbf{L}_J^T \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ & - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \nabla_s \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ & - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \mathbf{S}_t \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (5.39)$$

Aufgrund der Annahme geometrischer Linearität enthält die Ableitung des Differentialoperators  $\nabla_s \mathbf{L}_J$  keine unbekanntenen Terme (z.B. die Ableitung der Strukturantwort), wie dies bei einer nichtlinearen Kinematik der Fall wäre. Im Hinblick auf die Diskretisierung der Gleichungen und die Verwendung der Matrixschreibweise wurden die virtuellen Größen transponiert. Während bei der diskreten Sensitivitätsanalyse die rechte Seite der Bestimmungsgleichung als Pseudo–Lastvektor bezeichnet wird, spricht man bei der variationellen Vorgehensweise von Pseudo–Anfangsspannungen und Pseudo–Anfangsdehnungen. Diese Begriffe werden jedoch nicht weiter verwendet, da auch die variationell hergeleiteten Gleichungen nach dem Ableiten zu diskretisieren sind und auf diese Weise ein Pseudo–Lastvektor erzeugt wird.

Ohne an dieser Stelle näher auf die Sensitivität des Differentialoperators  $\nabla_s \mathbf{L}_J$  und die Diskretisierung einzugehen, kann nun Gleichung (5.39) mit Hilfe der in Kapitel 4 definierten Parametrisierung folgendermaßen dargestellt werden. Mit der Approximation der Sensitivität der (linearen) Verzerrungen und ihrer Variation in diskretisierter Form

$$\nabla_s \mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{L}_J \mathbf{u} + \mathbf{L}_J \nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_L \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (5.40)$$

$$\nabla_s (\delta \mathbf{E}) = \nabla_s \mathbf{L}_J \delta \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{B}_L \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (5.41)$$

erhält man die diskretisierte Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der Sensitivität der diskretisierten, inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \\ \nabla_s \mathbf{R}_{t+1} & - \int_{\Omega_\xi} \nabla_s \mathbf{B}_L^T \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi & - \int_{\Omega_\xi} \nabla_s \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \\ & - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \nabla_s \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| d\Omega_\xi & - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{B}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \\ & - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \mathbf{S}_t \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi & - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{B}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \\ & & - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Im Vergleich zur diskreten Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 5.3.1 unterscheidet sich die hier hergeleitete Bestimmungsgleichung für die Sensitivität der inkrementellen Knotenfreiwerte  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  in zwei Punkten, was auf die inkrementelle Vorgehensweise zurückzuführen ist. Es sind für den Pseudo–Lastvektor drei zusätzliche Terme, die Informationen über den Spannungszustand bzw. dessen Ableitung am Ende des letzten Zeitpunktes ( $t$ ) enthalten, erforderlich. Aus diesem Grund sind dann die Knotenfreiwerte  $\hat{\mathbf{u}}$  und deren Ableitungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  inkrementeller Natur. Wählt man für den Zeitpunkt  $t$  den Startpunkt der Belastungsgeschichte ( $t = 0$ ) und für den Zeitpunkt  $t + 1$  den Endpunkt ( $t + 1 = \tau$ ) der

Belastungsgeschichte, so entspricht für einen verschiebungs- und spannungsfreien Nullzustand die rechte Seite von Gleichung (5.42) den Gleichungen (5.18) und (5.19), die für die diskrete Sensitivitätsanalyse hergeleitet wurden. Ist jedoch eine Anfangsverschiebung bzw. eine Anfangsspannung infolge einer Temperatur, einer Vorspannung oder einer plastischen Verzerrung einer früheren Beanspruchung vorhanden, so sind deren Ableitungen gegebenenfalls zu berücksichtigen.

Nachdem die Sensitivität der Knotenfreiwerte  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  bzw.  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}_{t+1}$  bestimmt wurde, können alle anderen Sensitivitäten, wie die der Spannungen und die der Entwurfskriterien, ermittelt werden. Die Sensitivität der totalen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  ergibt sich durch Ableiten der Gleichung (5.31).

### Adjungierte Vorgehensweise

Die variationelle, adjungierte Vorgehensweise wird nachfolgend erläutert. Analog zum vorherigen Vorgehen bei der diskreten, adjungierten Sensitivitätsanalyse wird die Funktion  $f$  mit einem geeigneten Nullterm, dem strukturellen Gleichgewicht in schwacher Form, erweitert.

$$\bar{f} = f - \underbrace{\gamma_j \left( \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right)}_{=0} \quad (5.43)$$

Unter Verwendung der bei der direkten Vorgehensweise hergeleiteten Gleichungen (5.26)–(5.28) ergibt sich die Ableitung von Gleichung (5.43). Die implizite Ableitung (konvektiver Anteil) der Funktion  $f$  setzt sich aus zwei additiven Anteilen zusammen, da die Sensitivität der Knotenfreiwerte  $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  bei der inkrementellen Vorgehensweise durch eine Summe zu repräsentieren ist ( $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{u}_t + \nabla_s \mathbf{u}$ ). Die Ableitung des Nullterms in Gleichung (5.43), dem strukturellen Gleichgewicht, ist in Gleichung (5.39) bei der direkten Vorgehensweise bereits angegeben und wird für die adjungierte Sensitivitätsanalyse verwendet. Die Ableitung von Gleichung (5.43) lautet dann:

$$\begin{aligned} \nabla_s \bar{f} &= \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \nabla_s \mathbf{u}_t + \left( \nabla_u f \nabla_s \mathbf{u} - \gamma_j \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \nabla_s \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right) \\ &- \gamma_j \left( -\nabla_s R_{t+1} + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T (\nabla_s \mathbf{L}_J^T \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| + \mathbf{L}_J^T \nabla_s \mathbf{S}_t |\mathbf{J}| + \mathbf{L}_J^T \mathbf{S}_t \nabla_s |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi \right) \\ &- \gamma_j \left( \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T (\nabla_s \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}| + \mathbf{L}_J^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi \right) \\ &- \gamma_j \left( \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{L}_J \mathbf{u} |\mathbf{J}| + \mathbf{L}_J^T \mathbf{C} \mathbf{L}_J \mathbf{u} \nabla_s |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Terme, die unbekannte Sensitivitäten enthalten (hier  $\nabla_s \mathbf{u}$ ), sind im ersten Klammerausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (5.44) zusammengefaßt. Auf diese Art und

Weise werden die Terme, die die Sensitivität der inkrementellen Knotenfreiwerte  $\nabla_s \mathbf{u}$  enthalten, eliminiert, indem der LAGRANGE-Multiplikator  $\gamma_j$  entsprechend gewählt wird. Allerdings ist bei dieser inkrementellen Vorgehensweise trotzdem die Kenntnis der Sensitivität der Knotenfreiwerte  $\nabla_s \mathbf{u}_t$  und die der zugehörigen Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  erforderlich. Zur Berechnung bzw. Elimination dieser Terme ist die Lösung weiterer adjungierter Probleme erforderlich. Dies ist gemäß der Anzahl der bereits durchlaufenen Inkremente zu wiederholen, da mittels der zuvor beschriebenen Prozedur lediglich die inkrementellen Sensitivitäten bestimmt werden. Werden die Ableitungen  $\nabla_s \mathbf{u}_t$  und  $\nabla_s \mathbf{S}_t$  durch adjungierte Probleme eliminiert, erscheinen in der so entstehenden Gleichung die Sensitivitäten  $\nabla_s \mathbf{u}_{t-1}$  und  $\nabla_s \mathbf{S}_{t-1}$  des Lastniveaus  $t-1$ , usw.. Die dafür notwendigen adjungierten Probleme aller inkrementellen Zeitschritte können abgespeichert, was jedoch einen immensen Speicherbedarf mit sich bringt, oder jedesmal neu berechnet werden. Diese Vorgehensweise ist jedoch besonders für viele Inkremente sehr zeitaufwendig und sollte daher vermieden werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Bestimmung der Sensitivität der Strukturantwort, was jedoch wiederum sehr aufwendig ist und daher prinzipiell durch die Anwendung der adjungierten Methode umgangen werden soll.

Prinzipiell gilt für die Elimination von Sensitivitäten von Spannungen, daß für jeden Freiheitsgrad ein adjungiertes Problem gelöst werden muß (vgl. z.B. MAUTE [136]), wodurch die Vorteile der effizienten Berechnung der Ableitungen bei der adjungierten Vorgehensweise verloren gehen. Für die inkrementelle Vorgehensweise, die für geschichtsabhängige Probleme notwendig ist, läßt sich dies jedoch nicht vermeiden. Es wird deutlich, daß aufgrund dieser Schwierigkeiten die adjungierte Sensitivitätsanalyse eher ungeeignet für die inkrementelle Vorgehensweise ist. Diese ist jedoch bei geschichtsabhängigen Problemen, wie der Plastizität, unumgänglich, da für diese Problemklasse neben der Strukturantwort auch deren Sensitivitäten geschichtsabhängig sind. Daher wird in der Literatur die direkte (variationelle) Methode zur Bestimmung der Sensitivitäten geschichtsabhängiger Probleme empfohlen (TSAY & ARORA [230], [231], TSAY ET AL. [232], VIDAL ET AL. [240], VIDAL [238], VIDAL & HABER [239], LEE ET AL. [124], KLEIBER [109], KLEIBER ET AL. [113], [112], [110], CHEN [50], MICHALERIS ET AL. [145], LEE & ARORA [123], KLEIBER & KOWALCZYK [114], [115], KOWALCZYK & KLEIBER [119], CHEN ET AL. [52]). Bei rein geometrischer Nichtlinearität eignet sich aufgrund des Potentialcharakters des strukturmechanischen Problems eine diskrete Vorgehensweise. Die Ermittlung der Sensitivitäten kann in einem einzigen Schritt am Ende bzw. an einer beliebigen Stelle des Lastpfades erfolgen, da weder die Strukturantwort noch deren Sensitivität pfadabhängig sind. Die Wahl zwischen der direkten und der adjungierten Methode wird daher, wie bei materieller und geometrischer Linearität, hauptsächlich durch die Anzahl der Optimierungsvariablen und der Anzahl der Entwurfskriterien bestimmt.

Für bestimmte Probleme der Topologieoptimierung, z.B. die Maximierung der Steifigkeit bei linearer Elastizität, kann die Sensitivität der Entwurfskriterien direkt, ohne vorheriges Lösen eines adjungierten Problems, bestimmt werden. Daher spricht man auch von einer selbstadjungierten Sensitivitätsanalyse. Für spezielle Annahmen kann diese auch bei der Maximierung der Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten angewendet werden. Für Details sei an dieser Stelle auf MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] verwiesen. Zudem wird in Kapitel 7 kurz auf diese Vorgehensweise eingegangen.





# Kapitel 6

## Sensitivitätsanalyse bei nichtlinearem Strukturverhalten

### 6.1 Einleitung

Im vorigen Kapitel wurden die grundsätzlichen Möglichkeiten für die Ermittlung von Sensitivitäten vorgestellt. Dabei wurde zwischen numerischer und analytischer Sensitivitätsanalyse unterschieden. Die analytische Sensitivitätsanalyse kann wiederum in variationell und diskret bzw. direkt und adjungiert eingeteilt werden. Eine geeignete Wahl aus diesen prinzipiellen Möglichkeiten für ein bestimmtes Optimierungsproblem hängt von mehreren Faktoren ab.

Das finite Differenzenverfahren ist zwar mit relativ geringem Aufwand zu implementieren, ist aufgrund der in Kapitel 5 genannten Schwierigkeiten, wie Zuverlässigkeit und Effizienz, für nichtlineare Problemstellungen nicht zu empfehlen. Allerdings werden in der vorliegenden Arbeit die analytisch ermittelten Sensitivitäten mit Hilfe des finiten Differenzenverfahrens verifiziert, wobei die genannten Schwierigkeiten zum Teil beobachtet werden können.

Die Wahl zwischen der diskreten und der variationellen Sensitivitätsanalyse ist (hauptsächlich) von der Notwendigkeit einer möglichst variablen Ausgangsgleichung (z.B. Gleichgewicht in schwacher Form) zur Ermittlung der Gradienten abhängig (z.B. VAZ & HINTON [237]). Diese Variabilität ist besonders bei der Behandlung materiell nichtlinearer Probleme, wie der Plastizität, erforderlich. Problematisch für den Einsatz der diskreten Sensitivitätsanalyse für geschichtsabhängige Probleme ist, daß die Gleichgewichtsbedingung nur sehr schwer in der für die Sensitivitätsanalyse notwendigen Form zur Verfügung gestellt werden kann. Die diskretisierten Gleichungen zur Bestimmung der Strukturantwort werden linearisiert und erfüllen daher nicht mehr das Gleichgewicht (vgl. Kapitel 4). Für die inkrementelle Vorgehensweise müßte zur Erfüllung des Gleichgewichts eine inkrementelle elastoplastische Materialtangente ('Sekanten-Materialtangente') verwendet werden. Normalerweise steht bei Verwendung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens jedoch nur eine elastoplastische Materialtangente für ein bestimmtes Lastniveau zur Verfügung (Punktinformation, z.B. zum Zeitpunkt  $t + 1$ ). Aus diesem Grund wird für die in dieser Arbeit vorgestellte Sensitivitätsanalyse für geschichtsabhängige Problemstellungen die variationelle Methode als Grundlage dienen.

Die Anzahl der Entwurfsvariablen und der auszuwertenden Funktionen (Zielfunktion, Nebenbedingungen) entscheidet, zumindest für lineare Strukturprobleme, zwischen der di-

rekten und der adjungierten Vorgehensweise. Üblicherweise wird für Probleme der Topologieoptimierung die adjungierte Methode aufgrund der zahlreichen Optimierungsvariablen im Vergleich zu der geringen Anzahl an auszuwertenden Funktionen bevorzugt. Hingegen eignet sich die direkte Methode besonders gut für Formoptimierungsprobleme, bei denen in der Regel diverse Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind. Wie im vorigen Kapitel bereits angedeutet, ist diese Einteilung für geschichtsabhängige Probleme, wie der PRANDTL-REUSS-Plastizität, nicht mehr unbedingt gegeben, und es wird daher die direkte Vorgehensweise favorisiert. Grund hierfür ist die Notwendigkeit der Kenntnis der Ableitung der Strukturantwort früherer Zeitpunkte infolge der inkrementellen Vorgehensweise, die bei der adjungierten Vorgehensweise nicht berechnet wird. Der Aufwand, diese mittels der adjungierten Methode zu bestimmen, ist sehr groß und bringt daher in den meisten Fällen keinen Vorteil gegenüber der direkten Vorgehensweise (VIDAL & HABER [239]).

Nachfolgend soll die Entwicklung der Sensitivitätsanalyse für nichtlineare Strukturprobleme aufgezeigt werden, um einen Eindruck über die Vielfalt der vor allem in den vergangenen 10 – 15 Jahren entwickelten Verfahren zu geben. Diese Aufzählung erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Sie dient lediglich der thematischen Einordnung der vorliegenden Arbeit in die für gewisse Problemstellungen bekannten und geeigneten oder auch teilweise ungeeigneten Methoden. Außerdem wird deutlich gemacht, daß die Berücksichtigung etwaiger Nichtlinearitäten zur Ermittlung zuverlässiger Entwürfe durch Optimierungsverfahren zwingend notwendig ist. Dies wird jedoch erst in Kapitel 8 ausführlicher diskutiert. Als Beispiel kann an dieser Stelle die Maximierung der Steifigkeit oder die Minimierung des Gewichts angeführt werden. Die optimalen Strukturen weisen häufig schlanke bzw. hochbelastete Tragwerkskomponenten auf. Diese sind in höchstem Maß stabilitätsgefährdet, bzw. die vorhandene Beanspruchung übersteigt die maximal zulässige Beanspruchbarkeit des Materials. Durch Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität, wie beispielsweise des Beulens, oder der materiellen Nichtlinearität, wie des elastoplastischen Materialverhaltens, im Optimierungsprozeß kann diesen nichtlinearen Problemen Rechnung getragen werden.

Die Ermittlung von Gradienten für lineare Strukturprobleme ist in der Literatur erschöpfend beschrieben. Anders verhält sich dies jedoch für die Berechnung von Sensitivitäten bei nichtlinearem Strukturverhalten. Erste Arbeiten, die Optimierungsprobleme der nichtlinearen Elastizität behandeln, entstanden Anfang bzw. Mitte der achtziger Jahre. Hier sind beispielsweise die Arbeiten von RYU ET AL. [192], HAFTKA & MRÓZ [86], CHOI & SANTOS [55], WU & ARORA [251], CARDOSO & ARORA [47], SANTOS & CHOI [194], GOPALAKRISHNA & GREIMANN [78], PHELAN ET AL. [169], TORTORELLI [225] zu nennen. Die darin angesprochene Nichtlinearität entsteht durch eine nichtlineare Beziehung zwischen Verzerrungen und Verschiebungen (geometrische Nichtlinearität). Die entsprechenden Sensitivitätsanalysen sind für Stab-, Balken-, Scheiben-, Platten- oder Schalentragwerke hergeleitet. Bei diesem zugrundeliegenden strukturmechanischen Problem ist die Wahl der Sensitivitätsanalyse (diskret oder variationell bzw. direkt oder adjungiert) denselben Auswahlkriterien unterworfen, die bei linearem Strukturverhalten maßgebend sind. Grund hierfür ist die Tatsache, daß für diese Problemklasse weiterhin ein (elastisches) Potential vorhanden ist und demnach ein pfadunabhängiges Problem vorliegt, was die Ermittlung der Sensitivitäten in einem Schritt am Ende des Lastpfades (oder auch an einer beliebigen Stelle des Lastpfades) ermöglicht. Lediglich der theoretische Aufwand für die Herleitung der Sensitivitätsanalyse sowie der Aufwand

der Implementierung steigt, im Vergleich zur Sensitivitätsanalyse für linear elastisches Strukturverhalten, an.

Ein ähnliches mechanisches Problem ist die materielle Nichtlinearität mit der Einschränkung, daß keine lokale Entlastung bei global steigender Belastung auftreten darf. Man kann auch im Fall der HENCKY-Plastizität (Deformationstheorie) mit linearer Verfestigung von einer multilinearen Elastizität sprechen. Auch bei dieser Problemklasse ist die Potentialeigenschaft weiterhin gewährleistet, was auf dieselben Kriterien zur Auswahl eines geeigneten Verfahrens zur Sensitivitätsanalyse, wie im zuvor beschriebenen Fall, führt. Beispiele in der Literatur für die Sensitivitätsanalyse bei elastoplastischem Materialverhalten mit diesen Eigenschaften sind KANEKO & MAIER [101] und BENDSØE & SOKOLOWSKI [23]. Im Gegensatz zur PRANDTL-REUSS-Plastizitätstheorie sind die Sensitivitäten der bei den geschilderten mechanischen Problemklassen nicht geschichtsabhängig. RYU ET AL. [192] waren mit die ersten, die bemerkt haben, daß für geschichtsabhängige Probleme, wie der PRANDTL-REUSS-Plastizitätstheorie, die zugehörigen Sensitivitäten ebenfalls geschichtsabhängig sind und daher einer speziellen Behandlung bedürfen. Sowohl die Struktur- als auch die Sensitivitätsanalyse sind in einer inkrementellen Vorgehensweise durchzuführen, d.h. die Sensitivitäten des aktuellen Inkrements (vom Zeitpunkt  $t$  bis  $t+1$ ) sind von der Strukturantwort zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t+1$  sowie den Sensitivitäten der Strukturantwort zum Beginn des Inkrements (Zeitpunkt  $t$ ) abhängig.

Eine allgemeine Theorie für die Berechnung von Sensitivitäten für geometrisch und materiell nichtlineare Strukturprobleme wurde von HARIRIAN ET AL. [87] und TSAY & ARORA [230], [231] vorgestellt. Als Berechnungsmethode für die Struktur- und Sensitivitätsanalyse wird für diese Verfahren die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. MUKHERJEE & CHANDRA [152] verwenden die Randelemente-Methode; allerdings ist in deren Arbeit geometrische Linearität angenommen. Eine Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Probleme behandeln ZHANG ET AL. [255].

Zur Ermittlung der inkrementellen Sensitivitäten wird in den bisher genannten Arbeiten die kontinuierliche Materialtangente verwendet, was bei der Wahl zu großer Inkremente zu erheblichen Fehlern führen kann. Es ist daher notwendig, für die Ermittlung der Sensitivitäten eine zur eingesetzten Berechnungsmethode der Strukturantwort konsistente Formulierung, d.h. konsistent zur zugrundegelegten Integrationsmethode der konstitutiven Gleichungen zur Berechnung der Inkremente, zu verwenden. Dies führt zur Verwendung der konsistenten Materialtangente für die Bestimmungsgleichung der inkrementellen Sensitivitäten. Diese Tatsache wurde von VIDAL ET AL. [240] für das Materialgesetz für Kriechprobleme nach NORTON-SODERBERG und von VIDAL [238], VIDAL & HABER [239] oder auch von KLEIBER [109], KLEIBER ET AL. [113], [112], MICHALERIS ET AL. [145] für elastoplastisches Materialverhalten nach der PRANDTL-REUSS-Plastizitätstheorie festgestellt und anhand von Beispielen belegt. Die Arbeiten von VIDAL und Co-Autoren [240], [238], [239] beschränken sich auf geometrische Linearität, berücksichtigen jedoch die theoretisch und numerisch aufwendigere EULER-Rückwärts-Prozedur zur Integration der konstitutiven Gleichungen. In der Arbeit von KLEIBER [109] wird neben der materiellen Nichtlinearität zusätzlich die geometrische Nichtlinearität für beliebige Optimierungsprobleme berücksichtigt. Zur Integration wird der einfachere EULER-Vorwärts-Algorithmus verwendet, was jedoch keine Einschränkung der Methode darstellt.

Die Existenz von Ableitungen (Sensitivitäten) ist allerdings nicht immer gewährleistet. Dies wurde beispielsweise für das Auftreten mehrfacher Eigenwerte von HAUG ET AL. [90] oder auch von LUND [129] untersucht. Ein analoges Problem ergibt sich für Material-

modelle, wie die Elastoplastizität, mit einem stetigen, jedoch nicht differenzierbaren Spannungsverlauf entlang der Verzerrungen (local non-uniqueness). Am Übergang vom elastischen zum plastischen Zustand (und umgekehrt) existiert die Sensitivität der Strukturantwort nicht, was von verschiedenen Autoren festgestellt wurde (z.B. TSAY ET AL. [232], OHSAKI & ARORA [154], MICHALERIS ET AL. [145], LEE & ARORA [123], KLEIBER & KOWALCZYK [114], KLEIBER ET AL. [110], KOWALCZYK & KLEIBER [119]). Auf diese geschilderte Problematik der Existenz von Sensitivitäten und deren numerische Behandlung wird an späterer Stelle genauer eingegangen.

Es sei noch erwähnt, daß bei der von VIDAL und Co-Autoren [240], [238], [239] sowie KLEIBER und Co-Autoren [109], [114], [110], [119] vorgestellten Sensitivitätsanalyse neben den Iterationen für die Strukturanalyse keine zusätzlichen Iterationen zur Ermittlung der inkrementellen Sensitivitäten notwendig sind. Nach der inkrementellen Strukturanalyse wird in einem weiteren Schritt die Sensitivität dieses Inkrements direkt bestimmt und anschließend zu der der vorherigen Inkremente addiert.

Eine alternative Vorgehensweise wird von LEE & ARORA [123] als Erweiterung ihrer Arbeit (LEE ET AL. [124]) für viskoplastische Probleme in der Optimierung vorgestellt. Dabei werden die Sensitivitäten der Verschiebungen zum aktuellen Zeitpunkt  $t + 1$  direkt und nicht durch Aufaddieren der Inkremente bestimmt. Allerdings müssen die Ableitungen der inkrementellen plastischen Verzerrungen ermittelt und akkumuliert werden (vgl. auch KLEIBER ET AL. [110]). Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist jedoch die Notwendigkeit von Iterationen zur Berechnung der Sensitivitäten und die komplizierte Erweiterung dieser Methode auf geometrisch nichtlineare Probleme (vgl. KLEIBER ET AL. [110]), was beim zuvor beschriebenen Ansatz ohne Iterationen unproblematischer ist. Aufbauend auf diesen Entwicklungen für die Sensitivitätsanalyse diskreter und kontinuierlicher Tragwerke bei geometrisch und/oder materiell nichtlinearem Strukturverhalten, sind weitere z.T. problemspezifische Modifikationen und Anwendungen entstanden.

Die Behandlung von Formoptimierungsproblemen bei hyperelastischem Materialverhalten ist beispielsweise in BARTHOLD [10] und BARTHOLD ET AL. [11] beschrieben. Ein weiteres, geometrisch nichtlineares Problem ist die Berücksichtigung der Stabilität in der Optimierung. Der Eingang in die Formulierung der Sensitivitätsanalyse ist z.B. in WU & ARORA [252], PARK & CHOI [163] und KLEIBER & HIEN [111] zu finden. Für die Optimierung diskreter Tragwerke unter Berücksichtigung des Stabilitätsverhaltens sei auf BECKER [15] verwiesen. Die Maximierung der kritischen Last sowie die Berücksichtigung von Imperfektionsempfindlichkeit bei Schalentragwerken ist in REITINGER [180], REITINGER ET AL. [181], REITINGER & RAMM [182] und POLYNKIN ET AL. [170] beschrieben. BLETZINGER [31] ermittelt die optimale Form von Membrantragwerken.

Die Berücksichtigung der Elastoplastizität bei der Sensitivitätsanalyse und die Anwendung auf Formoptimierungsprobleme ist beispielsweise in WIECHMANN & BARTHOLD [246] nachzulesen. Der in deren Arbeit verwendete variationelle Ansatz kommt ebenfalls in SCHWARZ ET AL. [203], [204] oder PARK & CHOI [164] zur Ermittlung der Sensitivitäten zum Einsatz. Die Ansätze für die Sensitivitätsanalyse sind dabei konsistent zum Algorithmus zur Ermittlung der nichtlinearen Strukturantwort. Außerdem wird in SCHWARZ ET AL. [203], [204] die Kopplung von Topologie- und Formoptimierung bei der Maximierung der Duktilität für elastoplastisches Materialverhalten demonstriert. Die Modifikation der entsprechenden Gleichungen zur Herleitung der Sensitivitätsanalyse für den ebenen Spannungszustand bei elastoplastischem und viskoplastischem Materialverhalten, analog zur modifizierten Strukturanalyse, ist in KLEIBER & KOWALCZYK [115] dargestellt. Eine

Erweiterung auf geometrische Nichtlinearität und Elastoplastizität für Form- und Topologieoptimierungsprobleme ist in SCHWARZ ET AL. [202] und SCHWARZ & RAMM [205] zu finden. Neben verfestigendem Materialverhalten kann dabei auch Entfestigung des Materials berücksichtigt werden. Zusätzlich ist bei diesem Ansatz die Berücksichtigung von Stabilitätsphänomenen in der Optimierung möglich. In CHEN ET AL. [52], CHEN [50] wird ebenfalls die Sensitivitätsanalyse bei geometrisch und materiell nichtlinearem Strukturverhalten diskutiert. Allerdings wird die Ableitung der konstitutiven Gesetze und damit die Ableitung der inneren Kräfte numerisch durchgeführt, um unabhängig von der Formulierung des Materialmodells zu sein. Ein Vergleich verschiedener Methoden der Sensitivitäten bei nichtlinearem Strukturverhalten ist in CHEN ET AL. [51] zu finden.

In den Arbeiten von VALIDO ET AL. [234] und SOUSA ET AL. [214] wird das minimale Gewicht von Stabstrukturen mittels Querschnitts- und Formoptimierung bestimmt. Dabei werden materiell und geometrisch nichtlineare Effekte berücksichtigt. In VALIDO ET AL. [234] wird eine zyklische Belastung angenommen. Bei SOUSA ET AL. [214] geht die kritische Last mit Hilfe einer Verschiebungsnebenbedingung in das Optimierungsproblem ein. Die Algorithmen für die Sensitivitätsanalyse basieren allerdings nicht auf der konsistenten Materialtangente, was zu Problemen bezüglich der Genauigkeit führen kann (vgl. VIDAL & HABER [239]). Die Berücksichtigung von dynamischen Einwirkungen und elastoplastischem Materialverhalten in der Optimierung von Stabtragwerken ist in SOUSA & CARDOSO [213] beschrieben. Die Vorgehensweise bei der Ermittlung der Sensitivitäten bei elastoplastischem (geschichtsabhängigem) Materialverhalten und bei dynamischer Beanspruchung ist sehr ähnlich. Während bei der materiellen Nichtlinearität die Sensitivitäten entlang des Lastpfades akkumuliert werden, sind die Sensitivitäten bei dynamischer Belastung entlang der Zeitachse aufzuaddieren. Die sukzessive Lastaufbringung bei elastoplastischem Materialverhalten kann allerdings auch als ein zeitlicher Prozeß aufgefaßt werden. Für Formoptimierungsprobleme in der Strukturmechanik wird an dieser Stelle auf MEYER [144] verwiesen.

Aufgrund der Komplexität der Herleitung und dem großen numerischen Aufwand wurden auch zahlreiche approximative Ansätze zur Bestimmung der Sensitivitäten für Formoptimierungsprobleme entwickelt (z.B. VAZ & HINTON [237], SILVA ET AL. [210], PARENTE ET AL. [162]). Dabei wird von einer totalen, nicht wie zuvor bei VIDAL oder KLEIBER von einer inkrementierten Gleichgewichtsform ausgegangen. Eine weitere Anwendung dieser Vorgehensweise ist in BUGEDA ET AL. [44], BUGEDA & GIL [43] für entfestigendes Materialverhalten (Damage) diskutiert. Allerdings ist dieser Ansatz auf Problemklassen mit Potentialcharakter, wie anfangs erwähnt, beschränkt, d.h. bei elastoplastischem Materialverhalten ist eine lokale (elastische) Entlastung bei gleichzeitiger globaler Laststeigerung nicht zulässig bzw. würde die Genauigkeit der berechneten Sensitivitäten negativ beeinflussen. Wie groß diese Ungenauigkeiten sind, hängt von der jeweiligen Geometrie, den Lagerbedingungen und vor allem dem Lastniveau ab.

Die bisher genannten Untersuchungen bei elastoplastischem Materialverhalten beschränken sich auf kleine Verzerrungen, z.T. jedoch große Verschiebungen. Eine Methode zur Berücksichtigung großer Verzerrungen für elastoplastisches Materialverhalten ist beispielsweise in WIECHMANN & BARTHOLD [245] vorgestellt.

Zur Berücksichtigung von Stabilitätsphänomenen in der Topologieoptimierung wird von NEVES ET AL. [153] und MAUTE [136] ein lineares Eigenwertproblem gelöst. Die so gewonnenen Eigenwerte dienen zur Erfassung des Stabilitätsproblems als Nebenbedingung oder zur Maximierung des kritischen Lastfaktors als Zielfunktion eines Optimierungs-

problems. Die Berücksichtigung großer Verschiebungen bei der Ermittlung der steifsten Struktur bzw. Topologie durch die Minimierung der Komplementärenergie für Topologieoptimierungsprobleme wird in BRUNS & TORTORELLI [41], [42] und BUHL ET AL. [45] vorgestellt. Darüber hinaus wird in KEMMLER ET AL. [104] und KEMMLER [103] ein Algorithmus zur Maximierung der kritischen Last für geometrisch nichtlineare Probleme vorgestellt. Die Topologieoptimierung von Fachwerken unter Berücksichtigung materieller Nichtlinearität wird beispielsweise in BENDSØE [18] diskutiert und zusammengestellt. TAYLOR & LOGO [223] und TAYLOR [222] maximieren den Lastfaktor von Stabstrukturen bei einer Beschränkung der Energie. Sowohl Ver- als auch Entfestigung kann berücksichtigt werden. Die Topologieoptimierung kontinuierlicher Strukturen unter Berücksichtigung von materieller Nichtlinearität wird beispielsweise in den Arbeiten von RAMM ET AL. [175], MAUTE & RAMM [137], YUGE & KIKUCHI [254], MAYER ET AL. [142], SWAN & KOSAKA [220], MAUTE ET AL. [139], YUGE ET AL. [253] beschrieben. Dabei handelt es sich teilweise um vereinfachte Ansätze. RAMM ET AL. [175] und MAUTE & RAMM [137] berücksichtigen quasi-sprödes Materialverhalten, wie z.B. das von Stahlbeton, im Optimierungsprozeß, um die optimale Anordnung der Bewehrung im Tragwerk zu ermitteln. In der Arbeit von YUGE & KIKUCHI [254] wird die Steifigkeit von Rahmentragwerken nach der EULER-TIMOSHENKO-Balkentheorie maximiert. Dabei kommt ein makroskopisches, isotropes elastoplastisches Werkstoffmodell mit linearer Verfestigung zum Einsatz. Ein ähnliches Materialmodell wird von MAYER ET AL. [142] in der Topologieoptimierung zur Verbesserung des Energieabsorptionsverhaltens von Schalenträgwerken bei dynamischer Beanspruchung verwendet. Allerdings werden die Gradienten für ein quasi-statisches Verhalten bestimmt, und das nichtlineare Materialverhalten wird nur approximativ berücksichtigt. In MAUTE ET AL. [139] wird die Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten ( $J_2$ -Plastizität) mit Hilfe der Topologieoptimierung maximiert. Dabei wird ein isotropes, poröses Werkstoffmodell eingesetzt. Die Gradienten werden unter Berücksichtigung der algorithmisch konsistenten Materialtangente approximativ bestimmt. YUGE ET AL. [253] ermitteln die makroskopischen Materialeigenschaften durch eine elastoplastische Homogenisierung der Mikrostruktur. Das Optimierungsproblem in deren Arbeit ist die Maximierung der plastischen Versagenslast bzw. die Minimierung der äußeren Arbeit. Zusätzlich zur materiellen Nichtlinearität werden große Verformungen berücksichtigt. Die Ermittlung der Sensitivitäten der Entwurfskriterien erfolgt mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen.

Diese Auflistung ist natürlich nicht vollständig, und gewisse strukturmechanische Probleme, wie beispielsweise die nichtlineare Dynamik, für die ein ähnliches Vorgehen bei der Bestimmung der Sensitivitäten wie bei geschichtsabhängigen Problemen notwendig ist, sind nicht weiter diskutiert. Auch Umformprozesse, die die Berücksichtigung großer Verzerrungen und von Kontakt erfordern, wurden komplett ausgeklammert. Einen sehr guten Überblick über die Methoden der Sensitivitätsanalyse für die verschiedensten strukturmechanischen Probleme, wie geometrische Nichtlinearität, Stabilität, materielle Nichtlinearität wie Elasto- und Viskoplastizität, nichtlineare dynamische Beanspruchung, Umformprozesse und nichtlineare thermische Prozesse, bietet das Buch von KLEIBER ET AL. [110]. Details zu den erwähnten, jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht diskutierten Verfahren, sind dort an entsprechender Stelle bzw. den angeführten Literaturstellen zu entnehmen.

In der vorliegenden Arbeit werden Strukturen unter Berücksichtigung des elastoplastischen Materialverhaltens und großer Verschiebungen hinsichtlich definierter Ziele, wie

Maximierung der Duktilität oder Minimierung des Gewichts, optimiert. Je nach Problemstellung sind zusätzlich Nebenbedingungen, wie beispielsweise konstantes Gewicht, maximal zulässige Verschiebungen und/oder Spannungen oder auch die Sicherheit gegen Stabilitätsversagen, zu berücksichtigen.

Zur effizienten und, im Rahmen der eingesetzten approximativen Lösungsverfahren und Idealisierungen zur Ermittlung der Strukturantwort, exakten Bestimmung der Sensitivitäten ist die Verwendung der konsistenten Materialtangente, wie dies von VIDAL und Co-Autoren [240], [238], [239] bzw. KLEIBER und Co-Autoren [109], [114], [110], [119] vorgeschlagen wird, erforderlich. Außerdem erscheint für eine möglichst große Variabilität die variationelle Vorgehensweise sinnvoll. Damit lassen sich geschichtsabhängige Probleme effektiv behandeln. Ebenfalls aus Gründen der Effizienz und wegen der Möglichkeit, die Ableitungen beliebiger Entwurfskriterien bestimmen zu können, wird für die meisten Aufgaben der Formoptimierung die direkte Variante der Sensitivitätsanalyse bevorzugt. Für Topologieoptimierungsprobleme wird eher die adjungierte Variante eingesetzt. Diese ist jedoch in der Topologieoptimierung für geschichtsabhängige Probleme nicht zu empfehlen. Dies ist wahrscheinlich auch der Grund dafür, daß bisher, zumindest nach der Kenntnis des Autors, noch keine allgemeingültige und effiziente, veröffentlichte Theorie zur Behandlung materiell nichtlinearer Probleme in der Topologieoptimierung vorgestellt wurde. Für geschichtsabhängige Probleme, wie die Elastoplastizität, wird in der Literatur die direkte Vorgehensweise empfohlen (TSAY & ARORA [230], [231], TSAY ET AL. [232], VIDAL ET AL. [240], VIDAL [238], VIDAL & HABER [239], LEE ET AL. [124], KLEIBER [109], KLEIBER ET AL. [113], [112], [110], CHEN [50], MICHALERIS ET AL. [145], LEE & ARORA [123], KLEIBER & KOWALCZYK [114], [115], KOWALCZYK & KLEIBER [119] CHEN ET AL. [52]). Grund hierfür ist u.a., daß bei der adjungierten Methode die Sensitivitäten der auszuwertenden Funktionen direkt bestimmt werden, nicht aber die der Strukturantwort. Für geschichtsabhängige Probleme ist diese Kenntnis jedoch notwendig, da die inkrementellen Sensitivitäten des aktuellen Inkrements von denen der Strukturantwort der vorangegangenen Zeitschritte abhängen. Um diese zu bestimmen, wären zusätzliche adjungierte Probleme für jede Komponente an jedem GAUSS-Punkt (Integrationspunkt) aufzustellen (vgl. VIDAL [238]). Alternativ dazu können die für die zuvor durchlaufenen Inkremente aufgestellten adjungierten Probleme zur Bestimmung der Sensitivität der Entwurfskriterien abgespeichert werden. Beide Möglichkeiten stehen im Gegensatz zu der Forderung nach effizienten Lösungsalgorithmen für die Berechnung von Sensitivitäten bei geschichtsabhängigem Materialverhalten. Aus diesen Gründen wird für die Ermittlung der Sensitivitäten in der vorliegenden Arbeit die variationelle, direkte Methode gewählt und nachstehend hergeleitet, die prinzipiell für Form- und Topologieoptimierungsprobleme bzw. beliebige Optimierungsprobleme eingesetzt werden kann.

## 6.2 Variationelle, direkte Sensitivitätsanalyse

Die Vorgehensweise bei dieser Art der Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung der Gradienten der Entwurfskriterien und damit auch der Gradienten der LAGRANGE-Funktion (Gleichung (2.8)) gliedert sich in mehrere Abschnitte. Zuerst wird die Sensitivität der Strukturantwort bestimmt. Im Fall von geschichtsabhängigem Strukturverhalten, wie beim vorliegenden Problem der Elastoplastizität, ist die Sensitivitätsanalyse ebenfalls geschichtsabhängig und daher nach jedem Gleichgewichtszustand am Ende eines Inkrements ohne zusätzliche Iterationen durchzuführen. Mit den so ermittelten Sensitivitäten

der inkrementellen Verschiebungen werden die restlichen inkrementellen Sensitivitäten der Strukturantwort, wie die der Spannungen, Verzerrungen und internen Variablen, bestimmt und anschließend zu den bereits bestimmten Sensitivitäten früherer Zeitschritte addiert. Mit diesen Gradienteninformationen werden dann die Sensitivitäten der definierten Entwurfskriterien (Zielfunktion und Nebenbedingungen) berechnet.

Als Ausgangsgleichung der variationellen, direkten Sensitivitätsanalyse dient die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung, die mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen nach den Gleichungen (4.14)–(4.17) bzw. der Gleichung (4.19) ausgedrückt wird. Das Gleichgewicht wird für den Zeitpunkt  $t + 1$  in inkrementeller Form aufgestellt.

### 6.2.1 Ableitung der Gleichgewichtsbedingung

Die Ableitung der einzelnen Komponenten der Gleichungen (4.15)–(4.17) bzw. der Gleichung (4.19) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  liefert die folgende Beziehung.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\xi} \nabla_s (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&= \int_{\Omega_\xi} \left( \nabla_s^{ex} (\delta \mathbf{E}) + \boxed{\nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E})} \right) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&+ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \boxed{\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&= \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \mathbf{b}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{b}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&+ \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \mathbf{t}_{t+1} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \mathbf{t}_{t+1} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \\
&= \boxed{\nabla_s \lambda_{t+1}} \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\
&+ \boxed{\nabla_s \lambda_{t+1}} \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \\
&= \delta \mathbf{u} \nabla_s R_{t+1} = \delta \mathbf{u} (\nabla_s \lambda_{t+1} \bar{R} + \lambda_{t+1} \nabla_s \bar{R}) \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Bei der Bildung der Gradienten wurde bereits berücksichtigt, daß die Ableitungen der kinematisch zulässigen, jedoch frei wählbaren, virtuellen, inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s (\delta \mathbf{u})$  unabhängig von den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  sind und daher verschwinden. Die unbekannt, noch zu bestimmenden Größen sind die impliziten Ableitungen der nichtlinearen, virtuellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E})$ , die Ableitung des zweiten PIOLA–KIRCHHOFF–Spannungstensors  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  und die Ableitung des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$ . Alle anderen Gradienten sind infolge der gewählten geometrischen Parametrisierung (CAGD Beschreibung der Geometrie mittels Design–Elementen) unabhängig vom mechanischen Tragverhalten der Struktur zu bestimmen bzw. von bereits ermittelten Sensitivitäten der



Strukturantwort der vorangegangenen Inkremente bekannt. Die Ableitung der Geometrie ist mit Hilfe der in Kapitel 3 definierten Entwurfsgeschwindigkeitsfelder zu ermitteln. Zudem wird vorausgesetzt, daß die äußeren Lasten  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{t}$  verformungsunabhängig sind. Die Aufspaltung der Ableitung der inkrementellen, virtuellen Verzerrungen in einen expliziten, d.h. direkt von der Geometrie bzw. direkt von den Optimierungsvariablen und der bekannten Ableitung der Verschiebungen früherer Zeitschritte abhängigen, und einen impliziten Anteil wird bei der Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s \mathbf{E}$  an späterer Stelle analog erfolgen. Der implizite Anteil enthält zu diesem Zeitpunkt unbekannte Ableitungen der Strukturantwort, d.h. die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  ist enthalten. Die Behandlung dieser Problematik wird im folgenden genauer diskutiert.

## 6.2.2 Ableitung der kinematischen Beziehungen

Die nun folgenden Ableitungen gehen von den Gleichungen (4.7)–(4.9) und (4.10)–(4.12), die im Parameterraum  $\Omega_\xi$  definiert sind, aus. Die Ableitung der Gleichungen (4.7)–(4.9) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  und der Aufspaltung in explizite und implizite Anteile liefert folgende Zusammenhänge:

$$\nabla_s \mathbf{E} = \nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E} = \nabla_s^{ex} \mathbf{e} + \nabla_s^{ex} \bar{\mathbf{e}} + \nabla_s^{im} \mathbf{e} + \nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \nabla_s^{ex} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) + (\nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u}_t \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u}_t \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \quad (6.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) + (\nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1} \right) \\ \nabla_s^{ex} \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \quad (6.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{im} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1} \right) \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} \right) \quad (6.6) \end{aligned}$$

Es wird deutlich, daß der explizite Teil der Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{ex} \mathbf{e}$  und  $\nabla_s^{ex} \bar{\mathbf{e}}$  die Ableitung der inversen JACOBI-Matrix  $\nabla_s (\mathbf{J}^{-1})$  und die Ableitung der bereits bekannten Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  beinhaltet. Die unbekanntenen Ableitungen der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  gehen in die impliziten Anteile  $\nabla_s^{im} \mathbf{e}$  und  $\nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}}$  ein. In den obigen Gleichungen (6.2)–(6.6) wurde bereits der SATZ VON SCHWARZ berücksichtigt, welcher besagt, daß die partiellen Ableitungen stetiger Funktionen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen (vgl. BRONSTEIN & SAMENDJAJEW [40]).

Für die Ableitung der virtuellen Verzerrungen  $\nabla_s(\delta \mathbf{E})$  ergeben sich analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned}\nabla_s(\delta \mathbf{E}) &= \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{E}) + \nabla_s^{im}(\delta \mathbf{E}) \\ &= \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{e}) + \nabla_s^{ex}(\delta \bar{\mathbf{e}}) + \nabla_s^{im}(\delta \mathbf{e}) + \nabla_s^{im}(\delta \bar{\mathbf{e}})\end{aligned}\quad (6.7)$$

$$\begin{aligned}\text{mit } \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}) + (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}))^T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\nabla_s \mathbf{u}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\nabla_s \mathbf{u}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u}_t \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u}_t \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi \mathbf{u}_t \mathbf{J}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{ex}(\delta \bar{\mathbf{e}}) &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi \mathbf{u} \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \nabla_s(\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi \mathbf{u} \mathbf{J}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (6.9)$$

$$\nabla_s^{im}(\delta \mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{im}(\delta \bar{\mathbf{e}}) &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi(\delta \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi(\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{J}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (6.11)$$

Es sei nochmals erwähnt, daß die Ableitung der virtuellen Verschiebungen  $\nabla_s(\delta \mathbf{u})$  null ist.

### 6.2.3 Ableitung der Spannungen und konstitutiven Gleichungen

Eine weitere unbekannte Größe in Gleichung (6.1) ist die Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t+1$ . Aufgrund der zusätzlich zu berücksichtigenden geometrischen Nichtlinearität (nichtlineare Kinematik) wird  $\boldsymbol{\sigma}$  in den konstitutiven Gleichungen von Kapitel 4 durch  $\mathbf{S}$  ersetzt, und für die Verzerrungen werden anstelle von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen  $\mathbf{E}$  eingesetzt. Um Verwechslungen mit den Ableitungen nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  zu vermeiden, wird für die partielle Ableitung nach den Spannungen  $\mathbf{S}$  weiterhin der Ableitungsoperator  $\nabla_\sigma(\cdot)$  anstelle von  $\nabla_S(\cdot)$  verwendet. Die Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  bzw.  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  läßt sich durch Differenzieren der inkrementellen Beziehung aus Gleichung (4.55) folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s \mathbf{C}(\mathbf{E} - \gamma \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})) \\ &+ \mathbf{C} \left( (\nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E}) - \nabla_s \gamma \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) - \gamma \nabla_s \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \right)\end{aligned}\quad (6.12)$$

Da Gleichung (4.55) im allgemeinen implizit von den Spannungen  $\mathbf{S}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  abhängig ist, können diese nur iterativ bestimmt werden. Allerdings erfüllt der ausiterierte Zustand am Ende eines jeweiligen Inkrements die Aussage in Gleichung (4.55), weshalb diese nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  abgeleitet werden kann, ohne den Iterationsprozeß berücksichtigen zu müssen.

Formal entspricht diese Gleichung (6.12) der Gleichung (4.58), die zur Ermittlung der konsistenten (elastoplastischen) Materialtangente in Kapitel 4 benötigt wird. Anstatt nach dem Inkrement abzuleiten, wird hier nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  abgeleitet. In Gleichung (6.12) sind verschiedene Ableitungen nach den Optimierungsvariablen enthalten, die es zu bestimmen gilt. Im Gegensatz zur Herleitung der konsistenten Materialtangente, bei der die Ableitung des elastischen Materialtensors  $\mathbf{C}$  nach dem Inkrement in der Regel verschwindet, ist dies für die Ableitung nach  $\mathbf{s}$  im allgemeinen nicht der Fall. Für Aufgaben der Topologieoptimierung werden, je nach Materialmodell, entweder mikroskopische geometrische Größen oder direkt makroskopische Materialkennwerte, wie beispielsweise der Elastizitätsmodul  $E$  bzw. die Dichte  $\rho$ , als Optimierungsvariablen definiert (vgl. Gleichungen (3.13)–(3.14)).

Zur Ermittlung der Ableitung des Fließvektors  $\nabla_s \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})$ , der eine Funktion der approximierten Spannungen  $\mathbf{S}_{t+\vartheta}$  und der approximierten internen Variablen  $\mathbf{q}_{t+\vartheta}$  darstellt, bedarf es neben der Ableitung dieser approximierten Größen zusätzlich der Ableitung des Verfestigungsgesetzes  $\nabla_s \mathbf{h}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})$ . In Analogie zur Herleitung in Kapitel 4 ergeben sich die Ableitungen der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  (vgl. Gleichung (4.60)) sowie die des Fließvektors  $\nabla_s \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})$  (vgl. Gleichung (4.61)) und des Verfestigungs- bzw. Entfestigungsgesetzes  $\nabla_s \mathbf{h}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})$  (vgl. Gleichung (4.62)) zu:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{q}_t - \nabla_s \gamma \mathbf{h}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) - \gamma \nabla_s \mathbf{h}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) \quad (6.13) \\ \nabla_s \mathbf{r}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) &= \nabla_s \mathbf{r} = \nabla_s^{ex} \mathbf{r} + \nabla_\sigma \mathbf{r} \nabla_s \mathbf{S}_{t+\vartheta} + \nabla_q \mathbf{r} \nabla_s \mathbf{q}_{t+\vartheta} \\ &= \nabla_s^{ex} \mathbf{r} + \nabla_\sigma \mathbf{r} (\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t) \\ &\quad + \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t) \quad (6.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{h}(\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) &= \nabla_s \mathbf{h} = \nabla_s^{ex} \mathbf{h} + \nabla_\sigma \mathbf{h} \nabla_s \mathbf{S}_{t+\vartheta} + \nabla_q \mathbf{h} \nabla_s \mathbf{q}_{t+\vartheta} \\ &= \nabla_s^{ex} \mathbf{h} + \nabla_\sigma \mathbf{h} (\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t) \\ &\quad + \nabla_q \mathbf{h} (\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t) \quad (6.15) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den entsprechenden Gleichungen in Kapitel 4 sind bei den Gradienten des Fließgesetzes und der Verfestigungsfunktion zusätzlich die expliziten (direkten) Ableitungen nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  zu berücksichtigen. Mit Hilfe der Gleichungen (6.14) und (6.15) lassen sich die Ableitungen der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  in Gleichung (6.12) und die der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (6.13) umformulieren.

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s \mathbf{C}(\mathbf{E} - \gamma \mathbf{r}) + \mathbf{C} ((\nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E}) - \nabla_s \gamma \mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma \mathbf{C} [\nabla_s^{ex} \mathbf{r} + \nabla_\sigma \mathbf{r} (\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t)] \\ &\quad - \gamma \mathbf{C} [\nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t)] \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{q}_t - \nabla_s \gamma \mathbf{h} \\ &\quad - \gamma [\nabla_s^{ex} \mathbf{h} + \nabla_\sigma \mathbf{h} (\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t)] \\ &\quad - \gamma [\nabla_q \mathbf{h} (\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t)] \quad (6.17) \end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Abhängigkeit des Fließvektors  $\mathbf{r}$  und des Verfestigungsgesetzes  $\mathbf{h}$  von den approximierten Größen nicht weiter dargestellt. Die

Isolation der Terme  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  bzw.  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (6.16) bzw. (6.17) ergibt folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} (\mathbf{E} - \gamma \mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}} \left( (\nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E}) - \nabla_s \gamma \mathbf{r} \right) \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{C}} [\nabla_s^{ex} \mathbf{r} + \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t) + \nabla_\sigma \mathbf{r} \nabla_s \mathbf{S}_t] \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{q}_t - \nabla_s \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} [\nabla_s^{ex} \mathbf{h} + \nabla_\sigma \mathbf{h} (\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t) + \nabla_q \mathbf{h} \nabla_s \mathbf{q}_t] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Tensoren  $\tilde{\mathbf{C}}$  und  $\tilde{\mathbf{Q}}$  entstehen durch Ausklammern und wurden bereits in Kapitel 4 in Gleichung (4.67) angegeben (vgl. auch in Anhang A Gleichungen (A.5) und (A.6)).

Um die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$ , die in der impliziten Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  enthalten ist (vgl. Gleichungen (6.5) und (6.6)), ermitteln zu können, muß die Funktion der Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  so umgeformt werden, daß  $\nabla_s \mathbf{u}$  als einzige unbekannte Größe darin enthalten ist. Dementsprechend sind die Ableitungen des plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  und die der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  aus Gleichung (6.18) zu eliminieren. Diese Elimination ist im Fall eines linearen Strukturverhaltens nicht nötig, da die Spannungen nach Gleichung (5.35) nur die Sensitivität der inkrementellen Verzerrungen bzw. die der inkrementellen Verschiebungen als Unbekannte beinhalten (vgl. Kapitel 5, Herleitung der variationellen, direkten Sensitivitätsanalyse für lineare Elastizität).

Die Prozedur dieser Elimination entspricht dem Vorgehen bei der Herleitung der konsistenten (elastoplastischen) Materialtangente und wird aus diesem Grund nachfolgend in der entsprechenden Kürze und unter Verwendung der in Kapitel 4 bzw. Anhang A eingeführten abkürzenden Schreibweisen aufgezeigt. Zur Verdeutlichung und zur besseren Übersicht ist die folgende Prozedur in Tabelle 6.1 zusammengefaßt.

Um die gegenseitige Abhängigkeit der Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  von der Sensitivität der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  zum selben Zeitpunkt zu beseitigen, wird Gleichung (6.19) in Gleichung (6.18) eingesetzt. Die Abhängigkeit der Ableitung der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  von  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  wird in analoger Weise eliminiert. Einsetzen von Gleichung (6.19) in Gleichung (6.18) und Auflösen nach  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  liefert:

$$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s \gamma + \hat{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{ex} \mathbf{S} &= -\gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_\sigma \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \right) \nabla_s \mathbf{S}_t \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_q \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h} \right) \nabla_s \mathbf{q}_t \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_s^{ex} \mathbf{h} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} (\mathbf{E} - \gamma \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{C}} \nabla_s^{ex} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Der Ausdruck  $\hat{\mathbf{C}}$  ist bereits in Gleichung (4.72) angegeben. Die Ermittlung von  $\hat{\mathbf{C}}$  ist den Gleichungen (A.10)–(A.12) in Anhang A zu entnehmen. Alle Terme, die mit dem Ausdruck  $\nabla_s^{ex} \mathbf{S}$  zusammengefaßt bzw. darin enthalten sind, wurden entweder zu einem früheren Zeitpunkt bereits berechnet oder können aus den expliziten Abhängigkeiten von den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  direkt bestimmt werden. In Gleichung (6.20) sind weiterhin die Sensitivitäten des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  und die implizite Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  nach den Optimierungsvariablen unbekannt.

Zur Elimination der Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  in Gleichung (6.19) wird in diese die Gleichung (6.18) eingesetzt und nach dem Ausdruck  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  aufgelöst.

$$\nabla_s \mathbf{q}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{q}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \nabla_s \gamma - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{ex} \mathbf{q} &= -\gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_\sigma \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_\sigma \mathbf{r} \right) \nabla_s \mathbf{S}_t \\ &- \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_q \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \right) \nabla_s \mathbf{q}_t \\ &- \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{ex} \mathbf{r} \right) \\ &- \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \left( \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} (\mathbf{E} - \gamma \mathbf{r}) + \nabla_s^{ex} \mathbf{E} \right) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Der Ausdruck  $\hat{\mathbf{Q}}$  ist bereits in Gleichung (4.72) angegeben. Die Ermittlung von  $\hat{\mathbf{Q}}$  ist den Gleichungen (A.16)–(A.18) in Anhang A zu entnehmen. Der Term  $\nabla_s^{ex} \mathbf{q}$  enthält, wie

Die Sensitivität der Spannungen $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ ist eine Funktion von drei unbekanntem Ableitungen:	
$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma, \nabla_s \mathbf{r}(\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}, \nabla_s \mathbf{q}_{t+1}) \right)$	Gleichung (6.12) bzw. (6.16)
1. Die Sensitivität der internen Variablen $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$ lautet:	
$\nabla_s \mathbf{q}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma, \nabla_s \mathbf{h}(\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}, \nabla_s \mathbf{q}_{t+1}) \right)$	Gleichung (6.17)
2. Die Abhängigkeit von $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ und $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$ von sich selbst wird durch Isolation beseitigt:	
$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma, \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} \right)$	Gleichung (6.18)
$\nabla_s \mathbf{q}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma, \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \right)$	Gleichung (6.19)
3. Elimination von $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$ in Gleichung (6.18) durch Einsetzen von Gleichung (6.19):	
$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma \right)$	Gleichung (6.20)
4. Elimination von $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ in Gleichung (6.19) durch Einsetzen von Gleichung (6.18):	
$\nabla_s \mathbf{q}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}), \nabla_s \gamma \right)$	Gleichung (6.22)
5. Ableitung der Fließfunktion liefert die Quasi-Konsistenzbedingung:	
$\nabla_s \Phi(\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}, \nabla_s \mathbf{q}_{t+1}) \rightarrow \nabla_s \gamma \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}) \right)$	Gleichung (6.26) bzw. (6.28)
6. Einsetzen von Gleichung (6.28) in Gleichung (6.20) liefert:	
$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \left( \nabla_s^{im} \mathbf{E}(\nabla_s \mathbf{u}) \right)$	Gleichung (6.30)

Tabelle 6.1: Ablauf zur Bestimmung der Sensitivität des Spannungstensors  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$

bereits der Term  $\nabla_s^{ex} \mathbf{S}$  in Gleichung (6.21), ausschließlich bekannte Anteile.

Der Aufbau der Gleichungen für die Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  und die der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  ist identisch zu denen in Kapitel 4. Die Unterschiede sind die Ableitung nach den Optimierungsvariablen anstelle der Ableitung nach dem aktuellen Inkrement und zusätzlich zu berücksichtigende Terme. Dies sind die expliziten Ableitungen des Fließgesetzes  $\nabla_s^{ex} \mathbf{r}$  und des Ver- bzw. Entfestigungsgesetzes  $\nabla_s^{ex} \mathbf{h}$  nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  sowie die Ableitung des elastischen Materialtensors  $\nabla_s \mathbf{C}$ , der in Kapitel 4 zwar berücksichtigt wurde, jedoch in der Regel verschwindet. Diese zusätzlichen Anteile sind in den expliziten Ableitungen  $\nabla_s^{ex} \mathbf{S}$  und  $\nabla_s^{ex} \mathbf{q}$  berücksichtigt.

Um nun die Abhängigkeit der beiden Gleichungen (6.20) und (6.22) von der Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  zu beseitigen, bedarf es einer zusätzlichen Bedingung. An entsprechender Stelle in Kapitel 4 ist dies die Konsistenzbedingung, die eine zusätzliche Gleichung zur Ermittlung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\gamma$  bzw.  $\nabla \gamma$  liefert. Analog zu diesem Vorgehen wird an dieser Stelle eine Quasi-Konsistenzbedingung benötigt. Diese besagt, daß im Falle des Fließens bei einer Änderung des Designs gemäß der Definition der Optimierungsvariablen folgende Beziehung erfüllt sein muß (vgl. Gleichung (4.73)):

$$\nabla_s \Phi = \nabla_s \Phi (\mathbf{S}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

Ausführlich geschrieben führt dies zu:

$$\begin{aligned} \nabla_s \Phi &= \nabla_s^{ex} \Phi + \nabla_\sigma \Phi \nabla_s \mathbf{S}_{t+\vartheta} + \nabla_q \Phi \nabla_s \mathbf{q}_{t+\vartheta} \\ &= \nabla_s^{ex} \Phi + \nabla_\sigma \Phi [\vartheta \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t] + \nabla_q \Phi [\vartheta \nabla_s \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.20) bzw. (6.22) für  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  bzw.  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (6.25) liefert eine Gleichung zur Ermittlung der Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$ :

$$\begin{aligned} &\nabla_s^{ex} \Phi + \nabla_\sigma \Phi (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_q \Phi (1 - \vartheta) \nabla_s \mathbf{q}_t \\ &+ \nabla_\sigma \Phi \left[ \vartheta \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s \gamma + \hat{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \right) \right] \\ &+ \nabla_q \Phi \left[ \vartheta \left( \nabla_s \mathbf{q}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \nabla_s \gamma - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \right) \right] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die Isolation der unbekanntenen Terme  $\nabla_s \gamma$  und  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  sowie Division durch  $\vartheta$  ( $\vartheta \neq 0$ ) ergibt folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\left[ \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) + \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \right] \nabla_s \gamma \\ &= \frac{1}{\vartheta} \nabla_s^{ex} \Phi + \nabla_\sigma \Phi \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{S} + \frac{1}{\vartheta} \nabla_s \mathbf{S}_t \right) + \nabla_q \Phi \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{q} + \frac{1}{\vartheta} \nabla_s \mathbf{q}_t \right) \\ &+ \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \nabla_s^{im} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.76) aus Kapitel 4 folgt für die Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators:

$$\nabla_s \gamma = \nabla_s^{ex} \gamma + \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (6.28)$$

$$\nabla_s^{ex} \gamma = \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \nabla_\sigma \Phi \nabla_s^{ex} \mathbf{S} + \nabla_q \Phi \nabla_s^{ex} \mathbf{q} \right) + \frac{1}{\bar{\nu} \vartheta} \left( \nabla_\sigma \Phi \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_q \Phi \nabla_s \mathbf{q}_t + \nabla_s^{ex} \Phi \right) \quad (6.29)$$

Auch hier sind die bekannten Anteile in dem Ausdruck  $\nabla_s^{ex}\gamma$  zusammengefaßt. Formal unterscheiden sich diese Gleichungen nicht von denen für die Herleitung des inkrementellen plastischen Multiplikators (Gleichungen (4.74) und (4.75)). Lediglich die expliziten Ableitungen der Spannungen  $\nabla_s^{ex}\mathbf{S}$ , der internen Variablen  $\nabla_s^{ex}\mathbf{q}$  und des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s^{ex}\gamma$  setzen sich aus anderen bzw. zusätzlichen Anteilen gemäß den Gleichungen (6.21), (6.23) und (6.29) zusammen.

Durch Einsetzen der Bestimmungsgleichung der Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s\gamma$  (Gleichung (6.28)) in die der Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s\mathbf{S}_{t+1}$  (Gleichung (6.20)) wird dieser dort eliminiert, und man erhält nach Isolieren der impliziten Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im}\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \nabla_s\mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s\mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex}\mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}}\left(\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h}\right)\nabla_s^{ex}\gamma \\ &+ \underbrace{\left[\hat{\mathbf{C}} - \frac{\left(\hat{\mathbf{C}}\left(\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h}\right)\right) \otimes \left(\nabla_\sigma\Phi\hat{\mathbf{C}} - \gamma\vartheta\nabla_q\Phi\hat{\mathbf{Q}}\nabla_\sigma\mathbf{h}\tilde{\mathbf{C}}\right)}{\bar{\nu}}\right]}_{\mathbf{C}^{ep}} \nabla_s^{im}\mathbf{E} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Der Klammerausdruck vor der impliziten Ableitung der inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen  $\nabla_s^{im}\mathbf{E}$ , welche die einzige verbliebene Unbekannte in Gleichung (6.30) darstellt, entspricht der elastoplastischen Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  (vgl. Gleichung (4.77)).

Diese Analogie macht deutlich, daß die Verwendung der zum Integrationsalgorithmus konsistenten, elastoplastischen Materialtangente für die zuverlässige Ermittlung der Sensitivitäten zwingend erforderlich ist. Während die Verwendung der konsistenten, elastoplastischen Materialtangente bei der Strukturanalyse 'nur' die quadratische Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius garantiert, so ist sie bei der Sensitivitätsanalyse unverzichtbar, was auch in der Literatur bestätigt wird (z.B. VIDAL und Co-Autoren [240], [238], [239] bzw. KLEIBER und Co-Autoren [109], [114], [110], [119]).

#### 6.2.4 Sensitivität der (inkrementellen) Verschiebungen

Die Abhängigkeit der Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s\mathbf{S}_{t+1}$  von mehreren unbekanntem Größen wurde im vorangegangenen Abschnitt auf die Abhängigkeit der impliziten Ableitung der inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen  $\nabla_s^{im}\mathbf{E}$  und somit der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s\mathbf{u}$  reduziert. Eine analoge Abhängigkeit ist auch bei der direkten, variationellen Sensitivitätsanalyse für den linear elastischen Fall zu beobachten (vgl. Gleichung (5.35)). Zur Ermittlung der Sensitivität der (inkrementellen) Verschiebungen wird aus diesem Grund eine entsprechende Vorgehensweise verwendet, wie sie in Kapitel 5 aufgezeigt wurde.

Die Ableitung der Spannungen  $\nabla_s\mathbf{S}_{t+1}$  (Gleichung (6.30)) wird in die Ableitung des Gleichgewichts in schwacher Form (Gleichung (6.1)) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\xi} \left(\nabla_s^{ex}(\delta\mathbf{E}) + \nabla_s^{im}(\delta\mathbf{E})\right) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta\mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \delta\mathbf{E} \left(\nabla_s\mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex}\mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}}\left(\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h}\right)\nabla_s^{ex}\gamma + \mathbf{C}^{ep}\nabla_s^{im}\mathbf{E}\right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\
&+ \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \quad (6.31)
\end{aligned}$$

Die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  ist sowohl in der impliziten Ableitung der inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  als auch in der Ableitung deren Variation  $\nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E})$  enthalten. Für eine lineare Kinematik verschwindet die Ableitung  $\nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E})$ , da die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  nur im nichtlinearen Term enthalten ist (vgl. Gleichung (6.11)). Die Ableitung  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  setzt sich im Gegensatz dazu aus einem linearen (Gleichung (6.5)) und einem quadratischen Anteil (Gleichung (6.6)) zusammen.

Gleichung (6.31) wird nun derart umgeordnet, daß alle impliziten (unbekannten) Ableitungen auf der linken, alle expliziten (bekannten) Anteile auf der rechten Seite stehen. Diese bekannten Anteile werden für gewöhnlich zu einem Ausdruck zusammengefaßt und als Pseudo-Lastvektor bezeichnet.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{C}^{ep} \nabla_s^{im} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&= \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\
&+ \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \\
&- \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{ex} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
&- \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s^{ex} \gamma \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (6.32)
\end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (6.32) die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  enthält (vgl. Gleichung (4.30)). In diskretisierter Form ergibt sich dann Gleichung (6.32) zu:

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}^{pseudo} \quad (6.33)$$

was an späterer Stelle noch bewiesen wird.  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  symbolisiert die Sensitivität der diskretisierten, inkrementellen Verschiebungen.

### 6.2.5 Diskretisierung der Gleichungen (FEM)

Zur numerischen Behandlung der für die Sensitivitätsanalyse hergeleiteten Gleichungen sind diese analog zum Vorgehen bei der Strukturanalyse (vgl. Kapitel 4.2) zu diskretisieren. Dies erfolgt mit der Methode der Finiten Elemente. Beim Verschiebungselement



werden die globalen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{u}_t$  abschnittsweise durch lokale Ansätze approximiert (vgl. Gleichung (4.20)).

Die Definition der inkrementellen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  sowie deren Variation  $\delta\mathbf{E}$  wurde bereits in Kapitel 4 vorgenommen und wird an dieser Stelle zur besseren Orientierung für deren Approximation kurz wiedergegeben.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \\ \delta\mathbf{E} &= \delta\mathbf{e} + \delta\bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \delta\hat{\mathbf{u}} + 2\mathbf{B}_q \delta\hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (6.34)$$

Dabei wurde festgestellt, daß der Operator  $\mathbf{B}_q$  dieselbe Struktur wie der Operator  $\mathbf{B}_u$  besitzt, sich lediglich durch einen Faktor und die enthaltenen Verschiebungen unterscheidet. Anstelle der Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  werden beim Aufstellen des Operators  $\mathbf{B}_q$  die inkrementellen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  verwendet. Diese Tatsache hat zur Folge, daß die Ableitung des Operators  $\mathbf{B}_q$  nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  neben den expliziten (bekannten) Anteilen (Ableitung der inversen JACOBI-Matrix) auch implizite Anteile, nämlich die Ableitung der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ , beinhaltet. Die Ermittlung bzw. die numerische Behandlung dieser impliziten Anteile, die sowohl in dem Ausdruck  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  als auch  $\nabla_s^{im} (\delta\mathbf{E})$  enthalten sind, wird nachfolgend beschrieben. Um den Pseudo-Lastvektor  $\mathbf{R}^{pseudo}$  aufstellen zu können, müssen zusätzlich die expliziten Ableitungen der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{ex} \mathbf{E}$  und deren Variation  $\nabla_s^{ex} (\delta\mathbf{E})$  bestimmt werden.

Die Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s \mathbf{E}$  unter Verwendung der Approximation der Verschiebungen gemäß Kapitel 4 ergibt sich zu (vgl. Gleichungen (6.2)–(6.6)):

$$\nabla_s \mathbf{E} = \nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (6.35)$$

$$= \nabla_s^{ex} \mathbf{e} + \nabla_s^{ex} \bar{\mathbf{e}} + \nabla_s^{im} \mathbf{e} + \nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned}&= (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u) \hat{\mathbf{u}} + \nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \\ &+ (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} + \nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}})\end{aligned}\quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}\text{mit } \nabla_s^{ex} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1})) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \right) \quad \hat{=} \quad \nabla_s \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \quad \hat{=} \quad \nabla_s \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (6.38)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{ex} \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \hat{=} \nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{im} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} + (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \right) \hat{=} \mathbf{B}_L \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \hat{=} \mathbf{B}_u \nabla_s \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (6.40)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \hat{=} (\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \hat{=} \nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \hat{=} \mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (6.41)$$

Die Sensitivitäten der Operatoren  $\nabla_s \mathbf{B}_L$  und  $\nabla_s \mathbf{B}_u$  sowie die explizite Ableitung des Operators  $\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q$  sind ausschließlich von bekannten Ableitungen abhängig, und zwar von der Sensitivität der inversen JACOBI-Matrix  $\nabla_s (\mathbf{J}^{-1})$  und der Sensitivität der Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  (aus vorangegangenen Inkrementen).  $\nabla_s (\mathbf{J}^{-1})$  ist bei Kenntnis der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder (vgl. Kapitel 3), also der Änderung der Koordinaten der FE-Knoten bei einer Variation der Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$ , einfach zu bestimmen. Da die Matrix der Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}$  vom Design unabhängig ist, verschwinden ihre Ableitungen.

Der Term  $\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}}$ , der implizit von der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  abhängig ist, kann aufgrund der Struktur von Gleichung (6.41) alternativ dargestellt werden. Es gilt für die einzelnen Terme dieser Gleichung folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} &= \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (6.42)$$

$$\begin{aligned}\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}} &= \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right)\end{aligned}\quad (6.43)$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}}\quad (6.44)$$

Durch Vertauschen der Zeilen in Gleichung (6.43) ergibt sich Gleichung (6.42), was letztendlich zu der Aussage in Gleichung (6.44) führt. Damit kann die implizite Ableitung des

quadratischen Anteils der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}}$  umgeschrieben werden:

$$\nabla_s^{im} \bar{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} + \nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{u}}) = (\mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) = 2\mathbf{B}_q \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (6.45)$$

Die Sensitivität der Variation der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s(\delta \mathbf{E})$  wird analog zu den obigen Gleichungen für die Sensitivität der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s \mathbf{E}$  bestimmt.

$$\nabla_s(\delta \mathbf{E}) = \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{E}) + \nabla_s^{im}(\delta \mathbf{E}) \quad (6.46)$$

$$= \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{e}) + \nabla_s^{ex}(\delta \bar{\mathbf{e}}) + \nabla_s^{im}(\delta \mathbf{e}) + \nabla_s^{im}(\delta \bar{\mathbf{e}}) \quad (6.47)$$

$$= (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u) \delta \hat{\mathbf{u}} + 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}} \\ + \mathbf{0} + (\mathbf{0} + 2\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}}) \quad (6.48)$$

$$\text{mit } \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{e}) = \frac{1}{2} (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1})) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \right) \cong \nabla_s \mathbf{B}_L \delta \hat{\mathbf{u}} \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_t) \mathbf{J}^{-1} \right) \cong \nabla_s \mathbf{B}_u \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (6.49)$$

$$\nabla_s^{ex}(\delta \bar{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \nabla_s (\mathbf{J}^{-1}))^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \cong 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (6.50)$$

$$\nabla_s^{im}(\delta \mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (6.51)$$

$$\nabla_s^{im}(\delta \bar{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left( (\nabla_\xi (\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1})^T \nabla_\xi (\mathbf{N} \nabla_s \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} \right) \cong 2\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (6.52)$$

Es wurde dabei bereits berücksichtigt, daß die Ableitungen der Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}$  und die der virtuellen Verschiebungen  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  null sind. Die Ableitungen  $\nabla_s \mathbf{B}_L$ ,

$\nabla_s \mathbf{B}_u$  und  $\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q$  sind bekannt. Einzige Unbekannte ist die implizite Ableitung des Operators  $\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q$ . Aufgrund der Tatsache, daß die Sensitivität der virtuellen Verschiebungen  $\nabla_s (\delta \hat{\mathbf{u}})$  verschwindet, ist die Ermittlung dieses Ausdrucks gemäß Gleichung (6.44) nicht möglich. Zur Ermittlung dieses Terms bedarf es der Betrachtung des entsprechenden Anteils in der Ableitung der Gleichgewichtsbedingung, der diesen Term enthält (erster Term auf der linken Seite von Gleichung (6.32)).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s^{im} (\delta \mathbf{e}) + \nabla_s^{im} (\delta \bar{\mathbf{e}})) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im} (\delta \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = ? \end{aligned} \quad (6.53)$$

Dabei wurde Gleichung (6.51) bereits berücksichtigt. Nach der Notation von BATHE [13] gilt folgender Zusammenhang für einen Term ähnlicher Form (vgl. auch Gleichung (4.29)):

$$\int_{\Omega_\xi} \delta \bar{\mathbf{e}} \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} (2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \quad (6.54)$$

Mit dieser Schreibweise läßt sich die Abhängigkeit des Operators  $\mathbf{B}_q$  von der Geometrie in Form der JACOBI-Matrix und von den inkrementellen Verschiebungen aufschlüsseln. Der Operator  $\tilde{\mathbf{B}}_L$  ist nur noch eine Funktion der Geometrie (vgl. Kapitel 4). Im Gegensatz zu Gleichung (4.29) sind hier lediglich die Spannungen zum Zeitpunkt  $t$  durch diejenigen zum Zeitpunkt  $t+1$  ersetzt. Die Tilden symbolisieren eine andere Anordnung der Matrixeinträge der entsprechenden Größen  $\mathbf{B}_L$  bzw.  $\mathbf{S}_{t+1}$ . Die Ableitung von Gleichung (6.54) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  liefert:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{ex} (\delta \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im} (\delta \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \delta \bar{\mathbf{e}} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \bar{\mathbf{e}} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\nabla_s^{im} \mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\mathbf{B}_q^T \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \left( \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \nabla_s \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Die expliziten Ableitungen der virtuellen Verzerrungen  $\nabla_s^{ex}(\delta\bar{\mathbf{e}})$  und des Operators  $\nabla_s^{ex}\mathbf{B}_q$  enthalten ausschließlich die Ableitungen der inversen JACOBI-Matrix (vgl. Gleichung (6.50)). Bei Kenntnis dieser Ableitungen ist auch die Sensitivität des linearen Operators  $\nabla_s\tilde{\mathbf{B}}_L$  problemlos zu bestimmen, dessen Einträge denen von  $\nabla_s\mathbf{B}_L$  entsprechen. Der implizite Anteil der Ableitung der virtuellen Verzerrungen  $\nabla_s^{im}(\delta\bar{\mathbf{e}})$  ist nach Gleichung (6.52) nur von der Ableitung der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s\hat{\mathbf{u}}$  abhängig. Mit dieser Information ergibt sich nun folgende Zuordnung der einzelnen Ausdrücke aus Gleichung (6.55):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{ex}(\delta\bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\nabla_s^{ex}\mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \left( \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im}(\delta\bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\nabla_s^{im}\mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \delta\bar{\mathbf{e}} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\mathbf{B}_q^T \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \nabla_s \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \delta\bar{\mathbf{e}} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} 2\mathbf{B}_q^T \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6.56)–(6.59) lassen sich die Ausdrücke aus Gleichung (6.32), die die Sensitivität der inkrementellen Verzerrungen oder deren Variation in diskretisierter Form beschreiben, ersetzen. Im einzelnen sind dies:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im}(\delta\mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im}(\delta\bar{\mathbf{e}}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Die implizite Ableitung  $\nabla_s^{im}(\delta\mathbf{e})$  verschwindet (vgl. Gleichung (6.10) bzw. (6.51)). Zusätzlich wurde Gleichung (6.57) herangezogen. Der Ausdruck, der die implizite Ableitung  $\nabla_s^{im}\mathbf{E}$  in Gleichung (6.32) beinhaltet, ergibt in diskretisierter Form mit Hilfe der

Gleichungen (6.40)–(6.45):

$$\int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{C}^{ep} \nabla_s^{im} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (6.61)$$

Der Ausdruck, der die explizite Ableitung der Variation der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{E})$  in Gleichung (6.32) enthält, kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{ex}(\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u)^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &\quad + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_\xi} \left( \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich durch die Berücksichtigung der Gleichungen (6.49), (6.50) und (6.56). Mit Hilfe der Gleichungen (6.60)–(6.62) kann nun die Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  in diskretisierter Form angegeben werden. Man erhält aus Gleichung (6.32):

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \\ &+ \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \\ &= \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\ &+ \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \\ &- \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &- \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &- \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s^{ex} \gamma \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \end{aligned} \quad (6.63)$$

Die Operatoren  $\mathbf{B}_u$  und  $\mathbf{B}_q$  besitzen dieselbe Struktur. Sie unterscheiden sich lediglich durch einen Faktor 2 und in der Verwendung der Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  bzw.

der inkrementellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  (vgl. Gleichungen (4.22) und (4.23)). Daher gilt für die Operatoren folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{B}_u(\mathbf{u}_{t+1}) = \mathbf{B}_u(\mathbf{u}_t) + 2\mathbf{B}_q(\mathbf{u}) \quad (6.64)$$

Dies hat zur Folge, daß die integralen Ausdrücke auf der linken Seite von Gleichung (6.63) zur tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t+1$  zusammengefaßt werden können (vgl. z.B. BATHE [13] und Gleichung (4.30); dort ist  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t$  angegeben). Der Unterschied zur Sekantensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_S$  in Gleichung (4.27) liegt in der Verwendung der Spannungen  $\mathbf{S}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t+1$  anstelle der Spannungen  $\mathbf{S}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  im ersten Term auf der linken Seite von Gleichung (6.63). Damit ist die zuvor aufgestellte Behauptung bestätigt, und Gleichung (6.63) vereinfacht sich zu folgender Form:

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}^{pseudo} = \nabla_s \lambda_{t+1} \bar{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{R}}^{pseudo} \quad (6.65)$$

Die Anteile des Pseudo-Lastvektors, die nicht von der Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  abhängen, sind in dem Ausdruck  $\tilde{\mathbf{R}}^{pseudo}$  zusammengefaßt. Die Sensitivität des Faktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  ist vom verwendeten Algorithmus abhängig. Diese Problematik wird im folgenden Abschnitt diskutiert und eine Berechnungsmöglichkeit vorgestellt.

Zunächst wird die Bestimmung der Sensitivität der Strukturantwort skizziert. Mit Hilfe von Gleichung (6.65) wird die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  bestimmt, wobei die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors dafür zu null gesetzt werden kann, wenn eine konstante Last vorgegeben wird. Da die inverse tangentielle Steifigkeitsmatrix bereits bei der Strukturanalyse ermittelt wurde, ist der numerische Aufwand dieser Operation relativ gering. Es sind jedoch die Pseudo-Lastvektoren für jede unabhängige Optimierungsvariable aufzustellen, was im Fall der materiellen Nichtlinearität viele Matrixoperationen erforderlich macht.

Die Sensitivität der Verschiebungen und der nichtlinearen Verzerrungen zum Zeitpunkt  $t+1$  ist dann:

$$\nabla_s \hat{\mathbf{u}}_{t+1} = \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t + \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (6.66)$$

$$\nabla_s \mathbf{E}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{E}_t + \nabla_s \mathbf{E} \quad (6.67)$$

Die Sensitivitäten der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ , der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  und des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  sind gemäß den Gleichungen (6.20), (6.30), (6.21), (6.22), (6.23), (6.28) und (6.29) zu bestimmen. In diskretisierter Form erhält man für die Sensitivität der Spannungen zum Zeitpunkt  $t+1$ :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s^{ex} \gamma \\ &+ \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla_s \gamma \\ &+ \hat{\mathbf{C}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{ex} \mathbf{S} &= -\gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_\sigma \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \right) \nabla_s \mathbf{S}_t \\ &- \gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_q \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h} \right) \nabla_s \mathbf{q}_t \\ &- \gamma \hat{\mathbf{C}} \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_s^{ex} \mathbf{h} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} ((\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{r}) \\
& + \hat{\mathbf{C}} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + \nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Für die Sensitivität der internen Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}
\nabla_s \mathbf{q}_{t+1} & = \nabla_s \mathbf{q}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \nabla_s \gamma \\
& - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_s^{ex} \mathbf{q} & = -\gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_\sigma \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_\sigma \mathbf{r} \right) \nabla_s \mathbf{S}_t \\
& - \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_q \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \right) \nabla_s \mathbf{q}_t \\
& - \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_s^{ex} \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{ex} \mathbf{r} \right) \\
& - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} ((\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{r}) \\
& - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + \nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Die Gleichung für die Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators lautet:

$$\nabla_s \gamma = \nabla_s^{ex} \gamma + \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \tag{6.73}$$

$$\nabla_s^{ex} \gamma = \frac{1}{\bar{\nu}} (\nabla_\sigma \Phi \nabla_s^{ex} \mathbf{S} + \nabla_q \Phi \nabla_s^{ex} \mathbf{q}) + \frac{1}{\bar{\nu} \vartheta} (\nabla_\sigma \Phi \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_q \Phi \nabla_s \mathbf{q}_t + \nabla_s^{ex} \Phi) \tag{6.74}$$

Bei der Elastoplastizität handelt es sich um ein geschichtsabhängiges Problem. Die hergeleiteten Gleichungen zeigen, daß die Sensitivitäten der Strukturantwort ebenfalls geschichtsabhängig sind, da die Terme zur Berechnung der inkrementellen Sensitivitäten die Ableitungen der Strukturantwort vorangegangener Zeitschritte (Index  $t$ ) beinhalten. Aus diesem Grund müssen die Sensitivitäten zum Zeitpunkt  $t$  und die der inkrementellen Zuwächse für jeden Integrationspunkt abgespeichert werden.

Es bleibt noch anzumerken, daß für die vorgestellte Herleitung eine Finite Element-Formulierung für ein reines Verschiebungselement verwendet wurde. Für alternative Formulierungen (z.B. gemischte oder gemischt-hybride Finite Elemente) muß die Herleitung entsprechend angepaßt werden, wobei größere Probleme infolge des elastoplastischen Materialverhaltens auftreten können.

Für den Spezialfall der VON MISES-Plastizität für den ebenen Spannungszustand und einem linearen, isotropen und kinematischen Ver- bzw. Entfestigungsgesetz ist die hier vorgestellte Prozedur der Herleitung der Sensitivitätsanalyse entsprechend modifiziert und in Anhang C dargestellt.

### 6.2.6 Einfluß des Algorithmus auf die Sensitivitäten

Wie bereits angedeutet, beeinflusst der für die Berechnung der Strukturantwort zugrundegelegte Algorithmus die Sensitivitätsanalyse. Dieser Sachverhalt kommt auch in Gleichung (6.65) zum Ausdruck, da die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  entsprechend zu bestimmen ist. Wird für den Optimierungsprozeß ein konstantes, für jedes (verbesserte) Design gleichbleibendes Lastniveau für das Ende des Belastungspfades bzw. jedes Inkrements vorgegeben, so verschwindet die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$ . Wird jedoch beispielsweise eine konstante Verschiebung eines bestimmten



Freiheitsgrads oder konstante Bogenlänge vorgegeben, die für jedes Design als Konstante definiert wird, so ist  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  im allgemeinen ungleich null. Diese Problematik ist in Abbildung 6.1 verdeutlicht.

Auf der linken Seite von Abbildung 6.1 sind die Last–Verschiebungs–Kurven für den Freiheitsgrad  $j$  für zwei unterschiedliche Entwürfe bei gleichem Lastniveau angegeben. Der Faktor  $\Delta \hat{s}$  stellt die Größe der Störung dar, die die Entwürfe 1 und 2 voneinander unterscheidet. Die (numerische) Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  verschwindet, da die Differenz der Laststeigerungsfaktoren der zwei Entwürfe gleich null ist. Analoges gilt für das rechte Diagramm in Abbildung 6.1, wobei in diesem Fall ein konstantes Verschiebungsniveau ( $\hat{u}_j = \text{const.}$ ) für den Freiheitsgrad  $j$  vorgegeben wird. Hier verschwindet die Sensitivität der Verschiebung des Freiheitsgrades  $j$ , nicht aber die des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$ .

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird für die Vorgabe eines bestimmten, für die Optimierung konstanten Lastniveaus der Begriff 'Lastvorgabe' verwendet. Die Vorgabe einer bestimmten, während der Optimierung konstanten Verschiebung wird entsprechend als 'Verschiebungsvorgabe' bezeichnet. In der Literatur werden oftmals auch Bezeichnungen wie 'Lastkontrolle' oder 'Laststeuerung' bzw. 'Verschiebungskontrolle' oder 'Verschiebungssteuerung' verwendet. Diese beziehen sich auf die Art der Steuerung des Algorithmus. Es ist z.B. denkbar, ein konstantes Lastniveau vorzugeben und dieses mit einem Algorithmus, basierend auf der Methode der Verschiebungssteuerung, zu erreichen. Dieses Vorgehen ist eher unüblich und für die vorgestellte inkrementelle Sensitivitätsanalyse nicht möglich. Grund hierfür ist, daß die Sensitivitätsanalyse nach jedem Inkrement (Gleichgewichtszustand) durchzuführen ist. Bei Vorgabe einer Last und gleichzeitiger Verschiebungssteuerung ist nur für die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors am Ende des Belastungspfades eine Aussage zu treffen ( $\nabla_s \lambda_{end} = 0$ ). Für Zwischenzustände ist dies nicht möglich. Analoges gilt für die Vorgabe einer Verschiebung bei Verwendung eines lastgesteuerten Algorithmus.

Aus diesen Gründen wird für die Berechnungen in der vorliegenden Arbeit bei Vorgabe eines Lastniveaus ein lastgesteuerter, bei Vorgabe einer Verschiebung ein verschiebungsgesteuerter Algorithmus verwendet. So kann für jeden Gleichgewichtszustand eine Aussage über die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors getroffen werden.

Nachfolgend wird eine Methode zur Ermittlung der Sensitivität des Laststeigerungsfak-

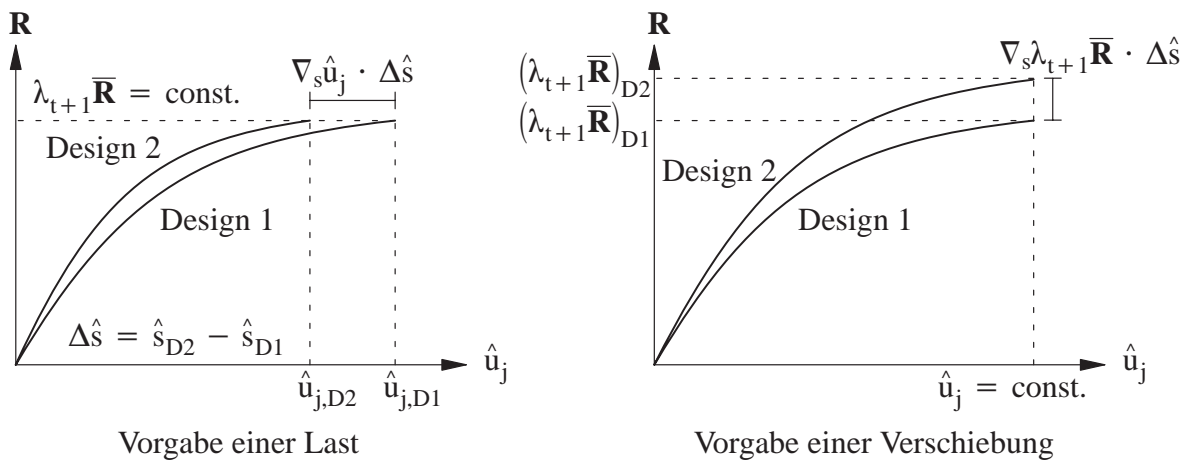


Abbildung 6.1: Einfluß des Algorithmus auf die Sensitivitäten

tors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  vorgestellt (vgl. auch SCHWARZ ET AL. [204]).

Für den allgemeinen Fall ist  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  ungleich null und wird daher auch mit dem Index 'vv' ('VerschiebungsVorgabe') versehen. 'lv' steht im weiteren für 'LastVorgabe'. Ausgegangen wird für die folgende Herleitung von Gleichung (6.65). Multipliziert man diese mit der inversen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{-1}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla_s \hat{\mathbf{u}} &= (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv} = \mathbf{K}_T^{-1} (\nabla_s \lambda_{t+1} \bar{\mathbf{R}}) + \mathbf{K}_T^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^{pseudo} \\ &= (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{add} + (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv} \end{aligned} \quad (6.75)$$

Verschwundet die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$ , dann geht der Term  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  in die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen bei Lastvorgabe  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv}$  über. Andernfalls ist ein zusätzlicher, additiver Term  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{add}$  zu bestimmen. Dieser ist nach Gleichung (6.75):

$$(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{add} = \mathbf{K}_T^{-1} (\nabla_s \lambda_{t+1} \bar{\mathbf{R}}) = \nabla_s \lambda_{t+1} (\mathbf{K}_T^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \quad (6.76)$$

Das Produkt der inversen, tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{-1}$  mit dem normierten Lastvektor  $\bar{\mathbf{R}}$  kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\mathbf{K}_T \bar{\mathbf{u}} = \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_T^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{\lambda} \bar{\mathbf{u}} \quad (6.77)$$

Der inkrementelle Verschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{u}}$  verbindet die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  mit der inkrementellen Laststeigerung des aktuellen Inkrements  $\lambda \bar{\mathbf{R}}$ . Dieser Sachverhalt sowie der Unterschied zu den tatsächlich vorhandenen inkrementellen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  ist in Abbildung 6.2 veranschaulicht. Zur graphischen Darstellung wurde  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  angenommen.

Damit kann die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}$  wie folgt dargestellt werden (Einsetzen von Gleichung (6.77) in Gleichung (6.75)):

$$(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv} = \nabla_s \lambda_{t+1} \frac{1}{\lambda} \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv} \quad (6.78)$$

Zur Ermittlung der Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  bedarf es nun der Einführung einer zusätzlichen Bedingung. Mögliche Bedingungen sind in Kapitel 4 durch

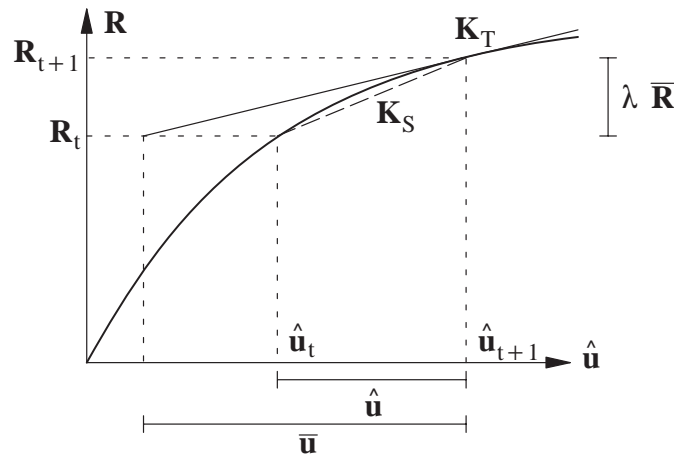


Abbildung 6.2: Last-Verschiebungsdiagramm

die Gleichungen (4.38), (4.39) und (4.40) angegeben. Die Größen mit den Tilden symbolisieren in diesen Gleichungen vorgegebene, während des Optimierungsprozesses konstante Werte. Die Ableitung von Gleichung (4.38) ergibt, daß die Sensitivität des (inkrementellen) Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda$  bzw.  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  bei der Vorgabe einer Last gleich null ist. Im Fall einer Verschiebungsvorgabe ist die Verschiebung eines bestimmten Freiheitsgrads  $\hat{u}_j$  für jeden Entwurf konstant (vgl. Gleichung (4.39)). Die Sensitivität dieser Verschiebung ergibt sich durch Ableitung von Gleichung (4.39) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  und ist demnach gleich null.

$$(\nabla_s \hat{u}_j)_{vv} = 0 = \frac{\nabla_s \lambda_{t+1}}{\lambda} \bar{u}_j + (\nabla_s \hat{u}_j)_{lv} \quad (6.79)$$

Diese Bedingungsgleichung liefert die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  bei Vorgabe einer konstanten Verschiebung.

$$\nabla_s \lambda_{t+1} = -\lambda \frac{(\nabla_s \hat{u}_j)_{lv}}{\bar{u}_j} \quad (6.80)$$

Die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}$  ist dann:

$$(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv} = -\frac{(\nabla_s \hat{u}_j)_{lv}}{\bar{u}_j} \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv} \quad (6.81)$$

Bei der Vorgabe einer konstanten Bogenlänge ist das Vorgehen analog. Es verschwindet nicht zwangsläufig die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors oder die einer bestimmten Verschiebung, da die Bedingungsgleichung beim Bogenlängenverfahren (vgl. Gleichung (4.40)) u.a. die Norm der Verschiebungen verwendet und somit der Einfluß aller Freiheitsgrade zu berücksichtigen ist. Die Bedingungsgleichung (4.40) kann auch alternativ in quadratischer Form und unter Verwendung von inkrementellen Größen anstatt Differenzausdrücken dargestellt werden und lautet:

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda_{t+1} - \lambda_t)^2 = \tilde{s}^2 \quad \text{mit} \quad \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}} \quad (6.82)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  liefert die Bestimmungsgleichung für die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  bei Vorgabe einer konstanten Bogenlänge:

$$2 \hat{\mathbf{u}}^T (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv} + 2 \psi^2 (\lambda_{t+1} - \lambda_t) (\nabla_s \lambda_{t+1} - \nabla_s \lambda_t) = 0 \quad (6.83)$$

Dieser ist dann:

$$\nabla_s \lambda_{t+1} = \nabla_s \lambda_t - \frac{\hat{\mathbf{u}}^T (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}}{\psi^2 (\lambda_{t+1} - \lambda_t)} = \nabla_s \lambda_t - \frac{\hat{\mathbf{u}}^T (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}}{\psi^2 \lambda} \quad (6.84)$$

Einsetzen dieser Gleichung in Gleichung (6.78) führt zu:

$$(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv} = \left( \frac{\nabla_s \lambda_t}{\lambda} - \frac{\hat{\mathbf{u}}^T (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}}{\psi^2 \lambda^2} \right) \bar{\mathbf{u}} + (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv} \quad (6.85)$$

Der Term  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}$  in Gleichung (6.85) kann nicht isoliert werden. Zur Ermittlung der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}$  muß demnach das obige lineare

Gleichungssystem gelöst werden. Dies ist bei der Vorgabe einer Verschiebung nicht nötig, da dort die zusätzliche Bedingung nur von einem Freiheitsgrad, und nicht wie bei der Vorgabe einer Bogenlänge, von allen Freiheitsgraden abhängig ist.

Die gesamte Vorgehensweise der Sensitivitätsanalyse, wenn die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors nicht verschwindet, wird nachstehend kurz erläutert. Wird in einem Optimierungsprozeß beispielsweise die Verschiebung eines Freiheitsgrades  $j$  vorgegeben, so ist in einem ersten Schritt die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{lv}$  gemäß einer Lastvorgabe zu ermitteln. Anschließend ist die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors zu bestimmen und damit die der inkrementellen Verschiebungen  $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{vv}$  bei Verschiebungs- bzw. Bogenlängenvorgabe. Sind diese bekannt, werden mit Hilfe der in den Gleichungen (6.66)–(6.74) angegebenen Formeln die Sensitivitäten der totalen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}$ , der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ , der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  und des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  ermittelt. Diese Prozedur wird nach jedem Inkrement (Gleichgewichtszustand) durchgeführt, bis das vorgegebene Last- oder Verschiebungsniveau erreicht ist.

### 6.2.7 Ableitung der Materialdaten

In der gezeigten Herleitung zur Ermittlung der Sensitivitäten der Strukturantwort sind die Ableitungen der Materialkenngrößen, wie beispielsweise der Elastizitätsmodul  $E$ , welcher im Materialtensor  $\mathbf{C}$  enthalten ist, der Ver- bzw. Entfestigungsmodul  $H$  ( $E_h$ ), die Bruchenergie  $G_f$  oder die anfänglichen Fließspannung  $\sigma_y$ , zu bestimmen. Bei der Sensitivitätsanalyse für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall sind die Ableitungen von  $H$  bzw.  $E_h$ ,  $G_f$  und  $\sigma_y$  in den Termen für die explizite Ableitung der Fließbedingung nach den Optimierungsvariablen  $\nabla_s^{ex} \Phi$  bzw. der Ableitung der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  enthalten (vgl. Kapitel 6.2). Offensichtlicher ist der Eingang dieser Größen in die Formulierung bei der Herleitung der Sensitivitäten für den Spezialfall des ebenen Spannungszustandes (vgl. Anhang C). Dort sind die Sensitivitäten der Materialkennwerte direkt in den entsprechenden Gleichungen explizit enthalten.

Bei Verwendung des in Kapitel 3 vorgestellten SIMP-Ansatzes in der Topologieoptimierung, bei dem die makroskopischen Materialeigenschaften über die variable Dichte  $\rho$  der Materiepunkte gesteuert werden (vgl. Gleichungen (3.13) und (3.14)), sind die Ableitungen der Materialkennwerte im allgemeinen ungleich null. Sie ergeben sich durch Ableiten der Terme in Gleichung (3.14) nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  bzw.  $\rho_i$ . Alle anderen Größen sind bei diesem Ansatz konstant. Die Ableitungen der Materialkennwerte nach den Optimierungsvariablen ergeben sich zu:

$$\nabla_s E = \nabla_{\rho_i} E = E_0 \frac{\beta_1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\beta_1-1} \underbrace{\nabla_{\rho_i} \rho_i}_{=1} = \frac{\beta_1}{\rho_i} E \quad (6.86)$$

$$\text{bzw. } \nabla_s \mathbf{C} = \nabla_{\rho_i} \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 \frac{\beta_1}{\rho_0} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\beta_1-1} = \frac{\beta_1}{\rho_i} \mathbf{C} \quad (6.87)$$

$$\nabla_s E_h = \nabla_{\rho_i} E_h = E_{h0} \frac{\beta_2}{\rho_0} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\beta_2-1} = \frac{\beta_2}{\rho_i} E_h \quad (6.88)$$

$$\text{bzw. } \nabla_s G_f = \nabla_{\rho_i} G_f = G_{f0} \frac{\beta_2}{\rho_0} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\beta_2-1} = \frac{\beta_2}{\rho_i} G_f \quad (6.89)$$

$$\nabla_s \sigma_y = \nabla_{\rho_i} \sigma_y = \sigma_{y0} \frac{\beta_3}{\rho_0} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\beta_3-1} = \frac{\beta_3}{\rho_i} \sigma_y \quad (6.90)$$

Die Ableitung des Ver- bzw. Entfestigungsmoduls  $H$  ergibt sich durch Ableiten von Gleichung (4.78):

$$\nabla_s H = \frac{\nabla_s E_h E^2 - \nabla_s E E_h^2}{(E - E_h)^2} \quad (6.91)$$

Für Formoptimierungsprobleme entfallen diese Sensitivitäten, da die Materialkennwerte wie Elastizitätsmodul  $E$ , Verfestigungsmodul  $E_h$  und Fließspannung  $\sigma_y$  konstante Werte sind.

Wird der Ver- bzw. Entfestigungsmodul  $H$  jedoch mit Hilfe der in Kapitel 4 definierten Bruchenergie  $G_f$  und der charakteristischen Länge  $h$  bestimmt, verschwindet dessen Ableitung nach den Optimierungsvariablen  $\hat{\mathbf{s}}$  auch für Formoptimierungsprobleme nicht, da  $h$  eine Funktion der Größe der Finiten Elemente ist (vgl. Gleichung (4.80)). Diese kann durch eine Designänderung variiert werden. Die Sensitivität des Entfestigungsmoduls  $\nabla_s H$  ergibt sich nach Ableiten von Gleichung (4.83) zu:

$$\nabla_s H = -\frac{(\nabla_s h \sigma_y^2 + 2 h \sigma_y \nabla_s \sigma_y) G_f - h \sigma_y^2 \nabla_s G_f}{2 G_f^2} \quad (6.92)$$

Die Sensitivität der charakteristischen Länge  $\nabla_s h$  erhält man durch Ableitung von  $h$  in Gleichung (4.80):

$$\nabla_s h = \alpha_h \frac{1}{2\sqrt{A^e}} \nabla_s A^e = \alpha_h \frac{1}{2\sqrt{A^e}} \left( \sum_{\xi_1=1}^{n_{\xi_1}} \sum_{\xi_2=1}^{n_{\xi_2}} \nabla_s |\mathbf{J}| w_{\xi_1} w_{\xi_2} \right) \quad (6.93)$$

Die Ableitung der JACOBI-Determinanten  $\nabla_s |\mathbf{J}|$  ist eine von der geometrischen Veränderungsmöglichkeit (Entwurfsgeschwindigkeitsfeld) abhängige Größe und somit bekannt. Eine ähnliche Vorgehensweise zur Ermittlung der Sensitivität des Entfestigungsmoduls ist in BUGEDA ET AL. [44], BUGEDA & GIL [43] zu finden.

### 6.3 Bemerkungen zur Existenz von Ableitungen

Die Existenz von Sensitivitäten ist nicht für alle Problemklassen immer gewährleistet. HAUG ET AL. [90] oder auch LUND [129] haben dies, z.B. beim Auftreten von mehrfachen Eigenwerten, festgestellt. Es existieren dann lediglich die Richtungsableitungen (GÂTEAUX-Ableitungen). Eine analoge Problematik gibt es bei elastoplastischen Problemstellungen. Die Ableitung der Verzerrungen bzw. der Verschiebungen am Übergangspunkt (im weiteren auch für die Sensitivitätsanalyse als kritischer Punkt bezeichnet) vom elastischen in den plastischen Zustand sowie vom plastischen in den elastischen Zustand existiert nicht. Grund hierfür ist der abrupte Wechsel vom elastischen zum plastischen Strukturverhalten. Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung besitzt an dieser Stelle einen Knick, ist also dort zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar. Diese Problematik bei elastoplastischem Materialverhalten wurde bereits von mehreren Autoren festgestellt und diskutiert (OHSAKI & ARORA [154], MICHALERIS ET AL. [145], LEE & ARORA [123], KLEIBER & KOWALCZYK [114], [115], KLEIBER ET AL. [110], KOWALCZYK & KLEIBER [119]).

### 6.3.1 Analytisches Beispiel

Am Beispiel eines Zugstabs soll diese Problematik genauer erläutert werden. Ähnliche Beispiele sind auch in den zuvor genannten Arbeiten diskutiert. Da dieses System nur einen Freiheitsgrad besitzt, entspricht der qualitative Verlauf der Last–Verschiebungskurve der des Spannungs–Verzerrungs–Diagramms (vgl. Abbildung 6.3).

Als einzige Optimierungsvariable wird die Querschnittsfläche  $A$  des Zugstabs definiert. Die Diskontinuität der Sensitivität der Verschiebung des Lastangriffspunkts wird nachfolgend analytisch gezeigt. Dazu wird zunächst das Strukturverhalten des Zugstabs im elastischen Bereich betrachtet. Die elastischen Verzerrungen sind für  $\sigma < \sigma_y$  bzw.  $R < R_y$ :

$$\varepsilon^{el} = \frac{R}{E A} \quad (6.94)$$

Die elastische Verschiebung  $u^{el}$  für den Lastangriffspunkt ( $x = L$ ) ist demnach:

$$u^{el} = L \varepsilon^{el} = \frac{R L}{E A} \quad ; \quad 0 \leq R < R_y \quad (6.95)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der (einzigen) Optimierungsvariablen  $A$  liefert die Sensitivität der Verschiebung des Lastangriffspunkts im elastischen Bereich:

$$\nabla_s u^{el} = \nabla_A u^{el} = -\frac{R L}{E A^2} \quad (6.96)$$

Die Verzerrungen im plastischen Bereich ( $\sigma \geq \sigma_y$  bzw.  $R \geq R_y$ ) werden in einen rein elastischen und einen rein plastischen Anteil zerlegt:

$$\varepsilon^{el} = \frac{R}{E A} \quad (6.97)$$

$$\varepsilon^{pl} = \left( \frac{R}{A} - \sigma_y \right) \frac{1}{H} \quad (6.98)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) \frac{R}{A} - \frac{\sigma_y}{H} = \frac{1}{E_h} \frac{R}{A} - \frac{\sigma_y}{H} \quad (6.99)$$

Die Definition der Verfestigungsfunktion  $H$  ist dabei Gleichung (4.78) zu entnehmen. Für die Verschiebung des Lastangriffspunkts im plastischen Bereich folgt daraus:

$$u^{pl} = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) \frac{R L}{A} - \frac{\sigma_y L}{H} \quad (6.100)$$

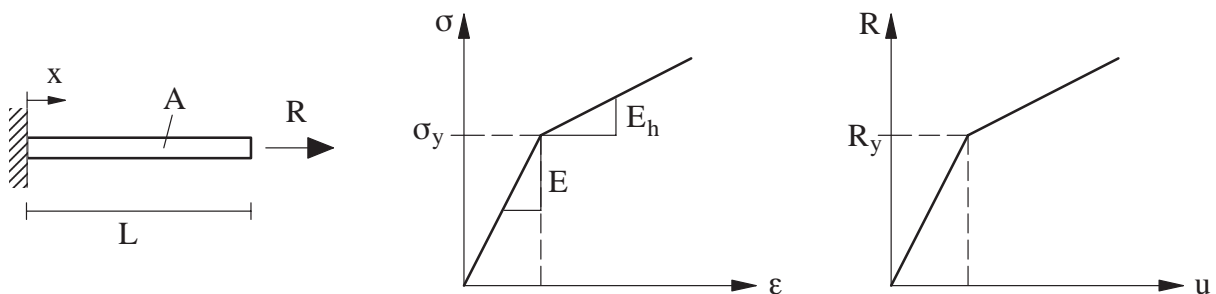


Abbildung 6.3: Analytisches Beispiel: Zugstab

		elastisch ←	→ plastisch	
<b>R</b> in [kN]	0.0	1.0	1.0	1.5
<b>u</b> in [m]	0.0	0.5	0.5	1.5
<b>− ∇<sub>s</sub>u</b> in [m/m]	0.0	0.5	2.0	3.0

Tabelle 6.2: Zahlenwerte zu Abbildung 6.4

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Querschnittsfläche  $A$  ergibt:

$$\nabla_s u^{pl} = \nabla_A u^{pl} = -\frac{RL}{E_h A^2} \quad (6.101)$$

Eine Betrachtung der Sensitivitäten, die durch die Gleichungen (6.96) und (6.101) definiert sind, am Übergang für den Wert  $R = R_y$  ergibt:

$$\nabla_s u^{el} = -\frac{R_y L}{E A^2} \quad (6.102)$$

$$\nabla_s u^{pl} = -\frac{R_y L}{E_h A^2} \quad (6.103)$$

In Gleichung (6.102) ist der Zustand gerade noch elastisch, während in Gleichung (6.103) Fließen gerade einsetzt. Es wird deutlich, daß an dieser Stelle eine Diskontinuität in der Sensitivität der Verschiebung des Lastangriffspunkts existiert. Daher ist die Ableitung in diesem, für die Sensitivitätsanalyse kritischen Punkt nur in Form der Richtungsableitung (GÂTEAUX-Ableitung) definiert. Diese Problematik ist nachfolgend in Abbildung 6.4 graphisch dargestellt. Die für die Diagramme verwendeten Zahlenwerte der Materialgrößen sind ebenfalls in Abbildung 6.4 angegeben. Die Auswertung der entsprechenden Gleichungen für die Verschiebungs- und Sensitivitätswerte sind in Tabelle 6.2 zu finden.

Auf der linken Seite von Abbildung 6.4 ist der Knick im Last-Verschiebungsdiagramm des Zugstabs abgebildet. Im rechten Diagramm von Abbildung 6.4 ist die Diskontinuität in der Sensitivität der Verschiebung deutlich zu erkennen.

Materialdaten:  $E = 2.0 \text{ kN/m}^2$        $E_h = 0.5 \text{ kN/m}^2$        $\sigma_y = 1.0 \text{ kN/m}^2$   
 $A = 1.0 \text{ m}^2$        $L = 1.0 \text{ m}$        $0 \leq R \leq 1.5 \text{ kN}$

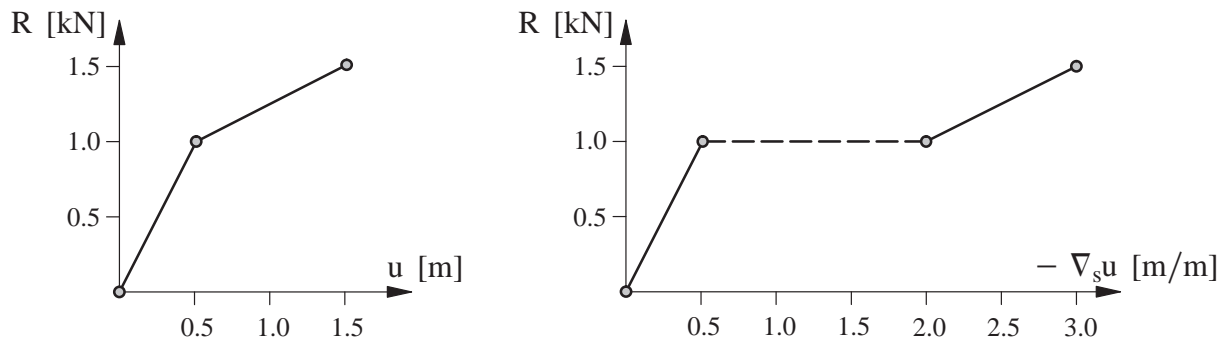


Abbildung 6.4: Analytisches Beispiel: Zugstab

Die geschilderte Problematik beim vorliegenden eindimensionalen Beispiel macht deutlich, daß diese Diskontinuität in der Sensitivität auch bei zwei- und dreidimensionalen Strukturen auftritt.

Die numerische Behandlung dieser Schwierigkeit in einem Computerprogramm hat jedoch keine größeren Probleme zur Folge. Ein Grund hierfür ist, daß die Wahrscheinlichkeit, einen derartigen kritischen Punkt, an dem die Ableitung nicht existiert, exakt zu treffen, sehr gering ist, was auch mit der Rechengenauigkeit zusammenhängt. D.h. in den meisten Fällen befindet sich ein Integrationspunkt, zumindest numerisch, entweder noch im elastischen oder schon im plastischen Zustand. Für den seltenen Fall, daß die Diskontinuität exakt getroffen wird, hat die Nichtexistenz der Sensitivitäten an dieser Stelle trotzdem kaum negative Auswirkung auf die Qualität der Sensitivitätsanalyse. Um dennoch die Sensitivität berechnen zu können, wird für den betreffenden Integrationspunkt entweder ein elastischer oder ein plastischer Zustand willkürlich definiert (in KLEIBER ET AL. [110] wird in solchen Fällen stets der elastische Zustand definiert). Endet ein inkrementeller Lastschritt noch im elastischen Bereich bzw. wird dieser als elastisch definiert, so ist der zuvor erwähnte Sprung in den Sensitivitäten im nächsten inkrementellen Schritt enthalten, sofern für diesen an der betreffenden Stelle ein Zustandswechsel eintritt. Befindet man sich jedoch bereits im plastischen Zustand am Ende eines inkrementellen Schritts, nachdem von einem elastischen Zustand zu Beginn des Inkrements gestartet wurde, so ist der Sprung bereits in diesem Inkrement enthalten. Damit wird deutlich, daß der Sprung auf jeden Fall berücksichtigt wird, es sei denn, die Belastung endet direkt zu dem Zeitpunkt bzw. Lastniveau, bei dem die Diskontinuität auftritt. Dann kann sich die willkürliche Definition durchaus negativ auf die Qualität der Sensitivitätsanalyse auswirken. Für Systeme, bei denen große Bereiche der Struktur gleichzeitig zu fließen beginnen, wie z.B. bei dem zuvor demonstrierten Zugstab, kann der Fehler sehr groß sein. Bei dem Beispiel des Zugstabs ist dies für die Last  $R = 1.0 \text{ kN}$  der Fall. Das gesamte System beginnt zu fließen, und die Sensitivität der Verschiebung des Lastangriffspunkts ist, je nach Definition (elastisch oder plastisch),  $\nabla_s u = -0.5 \text{ m/m}$  bzw.  $-2.0 \text{ m/m}$  (vgl. Tabelle 6.2). Wird jedoch die Last über diesen kritischen Wert weiter gesteigert, so verschwindet der Fehler, zumindest für dieses Beispiel, vollständig. Für mehrdimensionale Strukturen mit einer großen Anzahl von Integrationspunkten, die nicht gleichzeitig, sondern mehr oder weniger nacheinander in den plastischen Bereich übergehen, macht sich die mögliche Problematik, daß am Ende des Belastungspfades ein derartiger kritischer Punkt auftritt, kaum bemerkbar.

Die Größe der aufgebrachten Inkremente wirkt sich demnach nicht negativ auf die Qualität der Sensitivitäten aus. Die Qualität ist in erster Linie davon abhängig, wie viele im Sinne der Sensitivitätsanalyse kritische Punkte am Ende des Belastungspfades exakt getroffen werden. Ein Nachteil bei der Wahl großer Inkremente ist, daß innerhalb dieser Inkremente möglicherweise eine große Anzahl von Sprüngen berücksichtigt wird und daher der exakte Verlauf der Sensitivitäten nicht bestimmt werden kann. Je kleiner die Inkremente gewählt werden, desto weniger Sprünge bzw. Diskontinuitäten sind in einem Inkrement enthalten. D.h. der tatsächliche Verlauf der Sensitivitäten entlang der aufgebrachten Belastung kann genauer abgebildet werden, was auch in der Arbeit von KOWALCZYK & KLEIBER [119] für die Sensitivität einer Spannung für eine Lochscheibe verdeutlicht wird. Für die Qualität der Sensitivität am Ende des Belastungspfades hat dies jedoch, wie bereits angedeutet, kaum eine Auswirkung. Es sei noch angemerkt, daß die Inkrementgröße einen Einfluß auf die Qualität der Strukturantwort und somit auch auf deren Sensitivitäten in bezug auf



die tatsächlichen (nicht bekannten) Sensitivitäten besitzt. Diese Problematik ist jedoch unabhängig von der zuvor beschriebenen, die infolge der Diskontinuität entsteht. In den Beispielen zur Sensitivitätsanalyse in diesem Kapitel wird der Einfluß der Qualität der Strukturantwort infolge der in Raum und Zeit gewählten Diskretisierung diskutiert und bewertet.

Die Berechnung der Sensitivitäten mittels numerischer Methoden, wie beispielsweise dem finiten Differenzenverfahren (vgl. Kapitel 5), bringt analoge Probleme mit sich, wie sie zuvor geschildert wurden. Fehler bei der numerischen Sensitivitätsanalyse, die für lokale Entwurfskriterien nur am Ende des Belastungspfads, für integrale Entwurfskriterien jedoch nach jedem Inkrement durchzuführen ist, treten dann auf, wenn eine Designänderung eine Änderung des Zustands in einem oder mehreren Integrationspunkten hervorruft. Wann und wie stark sich diese Fehler auf die Qualität der Sensitivitätsanalyse auswirken, wurde bereits zuvor für die analytische Sensitivitätsanalyse diskutiert und trifft für die numerische in gleicher Weise zu. Außerdem spielt die Größe der aufgetragenen Störung  $\Delta \hat{s}$  eine Rolle. Je größer diese gewählt wird, desto mehr der beschriebenen kritischen Punkte können infolge der Designänderung auftreten und somit die Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse beeinflussen.

Je nachdem, ob eine Designänderung positiv oder negativ bezüglich eines definierten Koordinatensystems gewählt wird, kann dies Auswirkungen auf die Sensitivität einer Strukturgröße an einem Integrationspunkt haben, dessen Zustand am Ende des Belastungspfads direkt am Übergang zwischen elastisch und plastisch ist. Die Sensitivität ist demnach abhängig von der Richtung der Designänderung. Für eine einzige Optimierungsvariable können also maximal zwei unterschiedliche Sensitivitäten (Richtungsableitungen) an einem kritischen Punkt existieren, wie dies auch am Beispiel des Zugstabs demonstriert wurde. Diese Anzahl steigt mit der Anzahl der Optimierungsvariablen. Die Anzahl der Richtungsableitungen (GÂTEAUX–Ableitungen) berechnet sich dann zu  $2^{n_s}$ , wobei  $n_s$  die Anzahl der Optimierungsvariablen darstellt. Die Berechnung der GÂTEAUX–Ableitungen ist für große Systeme extrem zeitaufwendig bzw. unmöglich durchzuführen. Aufgrund der obigen Schilderung ist dies allerdings auch nicht notwendig, da die Qualität der Sensitivitäten trotz Verwendung der FRÉCHET–Ableitung (Ableitung bei Vorhandensein mehrerer Optimierungsvariablen) absolut zufriedenstellend ist. Zu dieser Schlußfolgerung kommen auch MICHALERIS ET AL. [145] sowie KLEIBER und Co–Autoren [114], [115], [110], [119].

### 6.3.2 Numerisches Beispiel

Das nachfolgende numerische Beispiel, das dem vorherigen analytischen Beispiel entspricht, dient zur Verdeutlichung des Einflusses der Diskretisierung in der Zeit auf die Sensitivitäten der Strukturantwort. Außerdem soll gezeigt werden, daß der in Abschnitt 6.2 vorgestellte Algorithmus zur Berechnung der Sensitivitäten der Strukturantwort in der Lage ist, den erwähnten Sprung im Verlauf der Sensitivitäten abzubilden. Grund hierfür ist die Tatsache, daß bei der Herleitung der Sensitivitäten der inkrementellen Verschiebungen und damit derjenigen der totalen Verschiebungen sowie der restlichen Komponenten der Strukturantwort von der inkrementierten Gleichgewichtsbedingung zum Zeitpunkt  $t + 1$  (absolute Werte) ausgegangen wird (vgl. Gleichungen (4.19), (4.27) bzw. Gleichung (6.1)). Eine analoge Vorgehensweise wurde auch bei dem analytischen Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts verwendet.

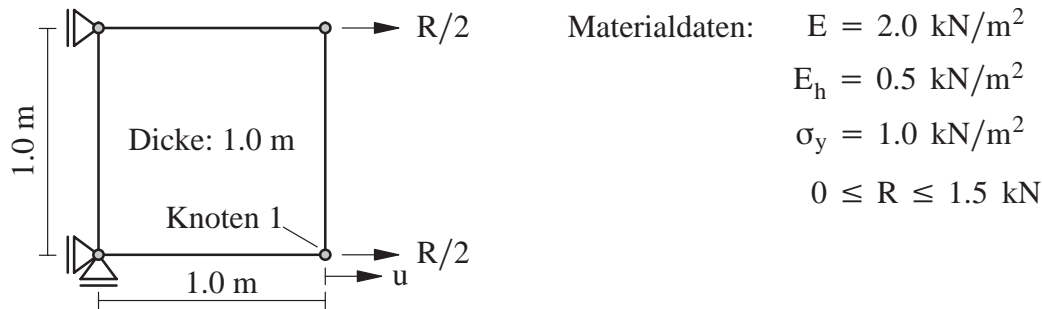


Abbildung 6.5: Numerisches Beispiel: Zugstab

Außerdem wird mit diesem numerischen Beispiel verdeutlicht, daß, unabhängig von der willkürlichen Definition des Zustands, an den beschriebenen kritischen Punkten dieselben Sensitivitäten erzielt werden; es sei denn, der Belastungspfad endet exakt beim Erreichen eines kritischen Punktes.

Die Abmessungen und Materialdaten stimmen mit denen des vorigen analytischen Beispiels überein. Zur Berechnung der Sensitivitäten wird ein 4-knotiges Scheibenelement mit vier Integrationspunkten verwendet. Die Struktur und die verwendeten Materialdaten sind in Abbildung 6.5 dargestellt.

Die vorgegebene Belastung ( $R = 1.5 \text{ kN}$ ) wird zunächst in 15 gleich großen Schritten aufgebracht. Nach 10 Schritten ist der für die Sensitivitätsanalyse kritische Punkt (Fließbeginn des Zugstabs) erreicht. Die zugehörige Last-Verschiebungskurve für den Knoten 1 ist auf der linken Seite von Abbildung 6.6 dargestellt.

Nach 10 Schritten geht der elastische Zustand in den plastischen über. An dieser Stelle ist die Sensitivität der Verschiebung nicht definiert, bzw. es existiert nur die Richtungsableitung. Auf der rechten Seite von Abbildung 6.6 sind unterschiedliche Verläufe der Sensitivität der Verschiebungen der Lastangriffspunkte in Abhängigkeit der (willkürlich) gewählten Definition des Zustands nach 10 Lastschritten dargestellt. Für Kurve 1 ist ein elastischer Zustand angenommen. Daher ist der Sprung in der Sensitivität der Verschiebung im nächsten Inkrement nach dem für die Sensitivitätsanalyse kritischen Punkt enthalten (11. inkrementeller Schritt). Im Gegensatz dazu ist für die Kurve 2 bereits ein plastischer Zustand für das Ende des 10. Inkrements definiert, d.h. der Sprung ist in diesem Inkrement enthalten. Die Sensitivitäten am Ende des Belastungspfads nach 15 Lastschritten sind identisch. Diese Tatsache spricht dafür, daß die willkürliche Wahl des Zustands an derartigen kritischen Punkten keinen bzw. kaum einen Einfluß auf die Qualität der Sensitivitäten hat, es sei denn, der Belastungspfad endet exakt an einem kritischen Punkt

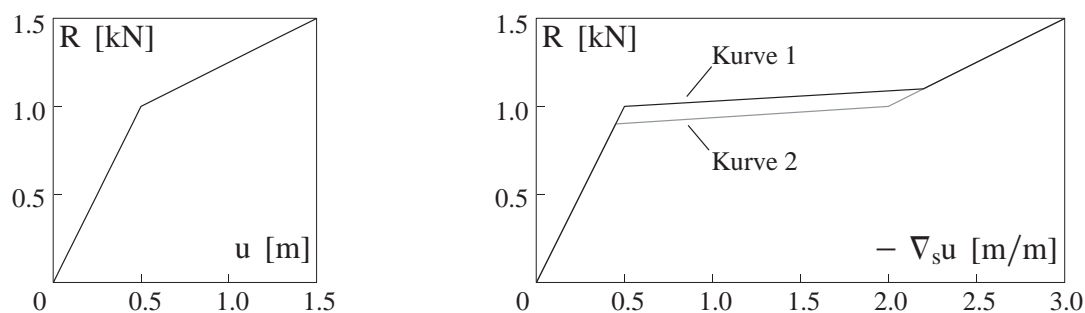


Abbildung 6.6: Last-Verschiebungs- und Last-Sensitivitätsdiagramme (15 Schritte)

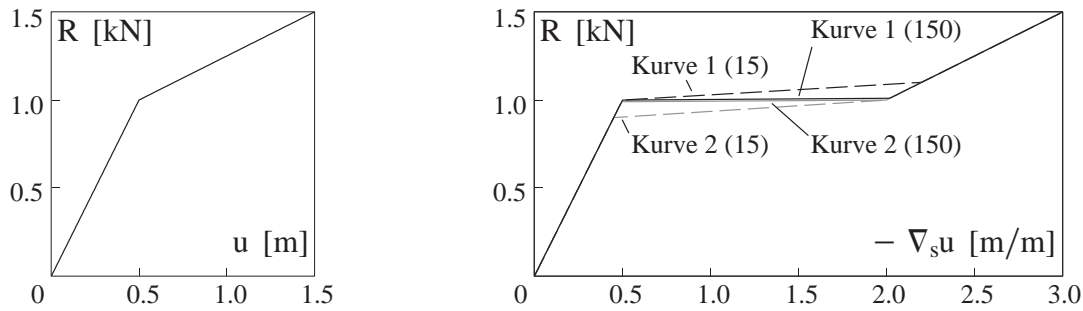


Abbildung 6.7: Last-Verschiebungs- und Last-Sensitivitätsdiagramme (150 Schritte)

(bei diesem Beispiel also nach 10 Schritten). Dort existieren zwei Werte. Der Grund, weshalb die Linien im Mittelabschnitt in Abbildung 6.6 nicht horizontal verlaufen, liegt an der Inkrementierung. Der Sprung ist zusätzlich im Betrag der inkrementellen Sensitivität des Inkrements enthalten.

Mit kleiner werdenden Inkrementen nähert sich der Verlauf der Sensitivitäten im Mittelabschnitt der Horizontalen an (vgl. Abbildung 6.7). Um dies zu verdeutlichen, wird dasselbe Beispiel mit 150 Inkrementen berechnet. Der Unterschied, ob am kritischen Punkt ein elastischer oder plastischer Zustand angenommen wird, ist kaum noch zu erkennen. Außerdem verlaufen die Kurven im Mittelbereich nahezu horizontal, da der inkrementelle Zuwachs der Sensitivitäten im Vergleich zur Größe des Sprungs für immer kleiner werdende Inkremente gegen null strebt. Bei unendlich vielen Lastschritten kann der Sprung in der Sensitivität exakt abgebildet werden.

Zu Vergleichszwecken sind in Abbildung 6.7 zusätzlich die Verläufe der Sensitivität bei Verwendung von 15 Lastschritten angegeben. Man erkennt, daß der tatsächliche Verlauf der Sensitivität der Verschiebung durch die Knicke in den Kurven der mit der Methode der Finiten Elemente ermittelten Sensitivitäten, die sich nur in der Definition des Zustandes am kritischen Punkt ( $R = 1.0 \text{ kN}$ ) unterscheiden, definiert ist.

## 6.4 Verifikation der Methode anhand ausgewählter Beispiele

Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode zur analytischen Ermittlung der Sensitivitäten der Strukturantwort wird nachfolgend anhand ausgewählter Beispiele verifiziert. Außerdem werden Einflüsse, wie beispielsweise die Diskretisierung in Raum und Zeit und verschiedene Ver- bzw. Entfestigungsverhalten, auf die Qualität der Sensitivitätsanalyse aufgezeigt und diskutiert. Da für elastoplastische Problemstellungen kaum analytische Lösungen existieren, werden die Sensitivitäten zusätzlich mit denen verglichen, die mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen bestimmt werden (vgl. Kapitel 5).

Eine Sensitivitätsanalyse ist qualitativ maximal so gut, wie es die zugrundegelegte Methode der Strukturanalyse zuläßt. Da es sich jedoch bei der Sensitivitätsanalyse um Ableitungen der Strukturantwort handelt, sind allein hierdurch Qualitätsverluste zu erwarten. Demnach sind mögliche Abweichungen in der Strukturantwort beim Vergleich mit Werten aus der Literatur geringer, als die Abweichungen zwischen den jeweils zugehörigen Sensitivitäten. Um jedoch einen Unterschied in den Sensitivitäten, die mittels des vorgestellten Algorithmus bestimmt werden, zu denen aus der Literatur richtig einschätzen

zu können, ist die Kenntnis von analytischer (vorgestellter Algorithmus) und numerischer (finite Differenzen) Sensitivitätsanalyse, die auf derselben Strukturantwort basieren, erforderlich. Stimmen diese überein, so ist ein Unterschied zu Sensitivitäten aus der Literatur möglicherweise bereits auf Unterschiede bei der Ermittlung der Strukturantwort und nicht ausschließlich auf die Formulierung bzw. Herleitung der Sensitivitätsanalyse zurückzuführen. Außerdem können unterschiedliche Annahmen und Vereinfachungen bei der Herleitung der Sensitivitätsanalyse Differenzen zwischen den Sensitivitäten des hier vorgestellten Algorithmus und Beispielen aus der Literatur hervorrufen.

### 6.4.1 Beispiel 1: Biegebalken, ideal plastisch

Untersucht wird die Sensitivität der vertikalen Verschiebung  $u$  des freien Endes eines sehr langen, einseitig eingespannten Balkens (Kragbalken), der am freien Ende durch eine Einzellast belastet ist. Unter der Annahme der EULER–BERNOULLI–Balkentheorie, die für sehr lange, schlanke Balken angenommen werden kann, haben TIMOSHENKO & GERRE [224] eine Gleichung zur Berechnung der vertikalen Verschiebung des freien Endes bei linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten hergeleitet. Diese gilt allerdings ausschließlich für Kragbalken mit Rechteckquerschnitt und lautet:

$$u = u^{el} \left( \frac{R_y}{R} \right)^2 \left[ 5 - \left( 3 + \frac{R}{R_y} \right) \sqrt{3 - 2 \frac{R}{R_y}} \right] \quad \text{mit} \quad 1 \leq \frac{R}{R_y} \leq \frac{3}{2} \quad (6.104)$$

$u^{el}$  ist die vertikale Verschiebung des freien Endes unmittelbar vor Einsetzen des Fließens. Für einen Kragarm ist diese nach der EULER–BERNOULLI–Balkentheorie:

$$u^{el} = \frac{R_y l^3}{3 EI} \quad (6.105)$$

Die Länge des Kragbalkens ist durch  $l$  gekennzeichnet,  $E$  stellt den Elastizitätsmodul dar, und  $I$  ist das Trägheitsmoment des Rechteckquerschnitts.  $R_y$  symbolisiert die Last, bei der an der Einspannstelle Fließen eintritt, und ist definiert durch:

$$R_y = \frac{M_y}{l} \quad (6.106)$$

Das zugehörige Moment  $M_y$  ist:

$$M_y = \frac{\sigma_y}{W} = \frac{b h^2}{6} \sigma_y \quad (6.107)$$

$W$  ist hier das Widerstandsmoment eines Rechteckquerschnitts und  $\sigma_y$  die Fließspannung. Die geometrischen Größen  $l, b, h$ , die Last- und Lagerbedingungen sowie die Materialdaten des beschriebenen Strukturproblems sind in Abbildung 6.8 dargestellt.

Die mit Hilfe des in diesem Kapitel (6.2) vorgestellten Algorithmus und der Methode der finiten Differenzen ermittelten Sensitivitäten der Vertikalverschiebung werden am Punkt  $A$  (Lastangriffspunkt) ausgewertet. Als Optimierungsvariablen werden die Balkenlänge  $l$  sowie die Balkenhöhe  $h$  definiert. Die Ableitung von Gleichung (6.104) nach  $l$  bzw.  $h$  ist nachfolgend angegeben. Dieses analytische Beispiel zur Verifikation von Sensitivitäten bei elastoplastischem Materialverhalten ist auch in VAZ & HINTON [237] und SILVA ET AL. [210] zu finden. Die Wahl der Geometrie, der Materialkennwerte und

der Diskretisierung für die Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente ist zu Vergleichszwecken an diesen Arbeiten orientiert. Allerdings unterscheidet sich die Herleitung der Sensitivitätsanalyse in diesen Arbeiten grundsätzlich von der in Kapitel 6.2 vorgestellten Methode. Während in der vorliegenden Arbeit die Sensitivitäten aufgrund der Geschichtsabhängigkeit inkrementell ermittelt werden, bestimmen VAZ & HINTON [237] bzw. SILVA ET AL. [210] die Sensitivitäten in einem Schritt am Ende des Belastungspfad, was allerdings nur für ganz spezielle Strukturprobleme mit Potentialcharakter (z.B. bei der Deformationstheorie) möglich ist. Diese Vereinfachung kann allerdings zu erheblichen Fehlern in den Sensitivitäten führen, was jedoch für dieses Beispiel nicht der Fall ist. Die Ableitungen der obigen Gleichungen (6.104)–(6.107) nach der Balkenlänge  $l$  lauten:

$$\nabla_l u^{el} = \frac{1}{3EI} (\nabla_l R_y l^3 + 3 R_y l^2) = \frac{2 R_y l^2}{3EI} \quad (6.108)$$

$$\text{mit } \nabla_l R_y = -\frac{M_y}{l^2} = -\frac{R_y}{l} \quad ; \quad \nabla_l M_y = 0 \quad (6.109)$$

Damit ergibt sich für die Ableitung der Verschiebung des freien Endes (Gleichung (6.104)) nach einigen Umformungen:

$$\nabla_l u = \frac{R_y l^2}{EI} \frac{1}{\sqrt{3 - 2\frac{R}{R_y}}} \quad (6.110)$$

Diese Gleichung ist auch in VAZ & HINTON [237] bzw. SILVA ET AL. [210] angegeben. Für die Verifikation des in Kapitel 6.2 vorgestellten Algorithmus werden nun die Materialdaten aus den zuvor genannten Arbeiten verwendet (vgl. Abbildung 6.8). Während in diesen Arbeiten noch zusätzliche Studien über den Einfluß der Anzahl der Integrationspunkte und die Größe der Störung auf die numerische Sensitivitätsanalyse mittels finiter Differenzen angestellt werden, beschränken sich die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit auf die Verwendung eines biquadratischen Serendipity–Scheibenelements mit vier Integrationspunkten. Die Größe der Störung für die numerische Sensitivitätsanalyse wird zu  $10^{-5} [m]$  gewählt. Es werden zwei verschiedene Elementnetze verwendet. Die Anzahl der Finiten Elemente beträgt dabei 198 bzw. 690; 3 bzw. 5 Elemente über die Balkenhöhe  $h$  und 66 bzw. 138 über die Balkenlänge  $l$  gleichmäßig verteilt. Aufgrund der geringen Anzahl von Integrationspunkten über die Balkenhöhe kann bei Verwendung von 198 Finiten Elementen die Strukturantwort bei Überschreiten der Fließgrenze nur relativ grob approximiert werden. Dieser Sachverhalt ist auf der linken Seite von Abbildung 6.9 nur schwer erkennbar, jedoch in Tabelle 6.3 recht gut verdeutlicht. Die linke Seite von Abbildung 6.9 zeigt die Last–Verschiebungskurven des freien Endes nach der

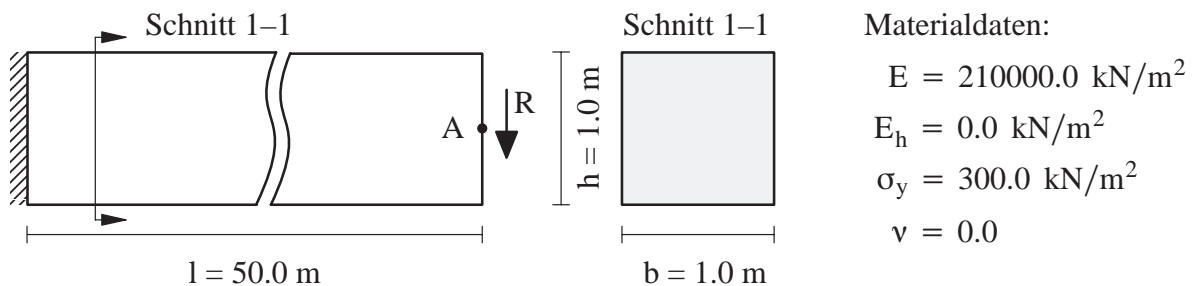


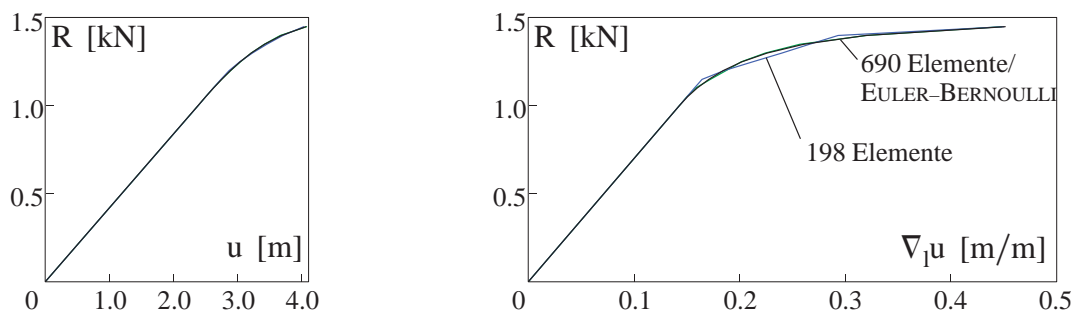
Abbildung 6.8: Geometrie und Materialdaten des Kragbalkens

$R/R_y$	$u_{\text{Balken}}$	$u_{\text{FE198}}$	$u_{\text{FE690}}$
0.00	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00	2.3809524	2.3815218	2.3815228
1.05	2.5004484	2.5005979	2.5005990
1.10	2.6226850	2.6196740	2.6198783
1.15	2.7506722	2.7387501	2.7488756
1.20	2.8880522	2.8676096	2.8913728
1.25	3.0396894	3.0326486	3.0452723
1.30	3.2127940	3.2303265	3.2125201
1.35	3.4194355	3.4560586	3.4171460
1.40	3.6835036	3.7058572	3.6671329
1.45	4.0686104	4.0331155	4.0765924

Tabelle 6.3: Zahlenwerte der Verschiebung  $u$  für die verschiedenen Methoden

analytischen Balkenlösung nach TIMOSHENKO & GERE [224] (Gleichung (6.104)) und den FE-Lösungen für die beide Netze mit 198 und 690 Finiten Elementen.

Ein entsprechender Qualitätsunterschied zwischen den verschiedenen Methoden zur Berechnung der Strukturantwort ist auch bei den Verläufen der Sensitivitäten zu erkennen, was durch die Diagramme auf der rechten Seite von Abbildung 6.9 bestätigt wird. Im Gegensatz zur Strukturanalyse ist dieser Unterschied deutlich sichtbar, was darauf hindeutet, daß die Qualität der Sensitivitäten wesentlich stärker von der Diskretisierung in Raum (und Zeit) abhängig ist, als dies für die Strukturanalyse der Fall ist. Die zugehörigen Zahlenwerte der Sensitivitäten der vertikalen Verschiebung von Punkt  $A$  nach Gleichung (6.110), der analytischen Sensitivitäten mittels der in Kapitel 6.2 vorgestellten Methode und der numerischen Sensitivitäten nach der Methode der finiten Differenzen sind in Tabelle 6.4 angegeben. Die maximal auftretende Abweichung zwischen der Sensitivitätsanalyse nach Gleichung (6.110) für  $\nabla_l u$  und der analytisch, basierend auf der Methode der Finiten Elemente, hergeleiteten Sensitivitätsanalyse beträgt mit dem gro-

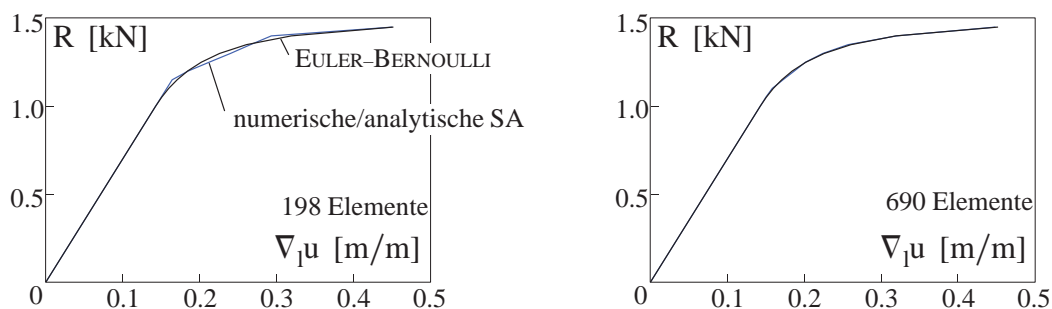
Abbildung 6.9: Last-Verschiebungs- bzw. Last-Sensitivitätsdiagramme mit  $l$  als Optimierungsvariable

R/R <sub>y</sub>	$\nabla_l u_{\text{Balken}}$	$\nabla_l u_{FE198}$		$\nabla_l u_{FE690}$	
		analytisch	numerisch	analytisch	numerisch
0.00	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00	0.1428571	0.1428685	0.1428686	0.1428686	0.1428686
1.05	0.1505847	0.1500120	0.1500120	0.1500120	0.1500120
1.10	0.1597191	0.1571554	0.1571554	0.1582951	0.1582951
1.15	0.1707469	0.1642988	0.1642989	0.1722605	0.1722605
1.20	0.1844278	0.1852404	0.1852404	0.1871979	0.1871979
1.25	0.2020305	0.2123496	0.2123496	0.2015274	0.2015274
1.30	0.2258770	0.2401071	0.2401071	0.2242669	0.2242669
1.35	0.2608203	0.2662059	0.2662059	0.2570724	0.2570724
1.40	0.3194383	0.2933093	0.2933094	0.3201927	0.3201928
1.45	0.4517540	0.4503630	0.4503631	0.4484276	0.4484276

Tabelle 6.4: Zahlenwerte für die Sensitivität der Verschiebung  $u$ ,  $l$  ist variabel

ben Netz (198 Elemente) 8.18 % bzw. 1.50 % mit dem feinen Netz (690 Elemente). Diese Differenz ist nicht weiter verwunderlich, da bereits bei der Strukturanalyse eine maximale Abweichung von 1.07 % für das grobe bzw. 0.44 % für das feine Netz vorhanden ist. Dieser Effekt wird durch Bilden der Ableitung (Sensitivität) verstärkt, was den Anstieg der prozentualen Abweichung bei der Sensitivitätsanalyse erklärt. Diese Abweichung zwischen den analytisch bzw. numerisch ermittelten Sensitivitäten mittels der Methode der Finiten Elemente zu denen der in Gleichung (6.110) angegebenen Sensitivitäten ist in Abbildung 6.10 zu erkennen.

Die Qualität der analytischen Sensitivitätsanalyse nach Kapitel 6.2 ist durch Abbildung 6.10 verdeutlicht. Ein Unterschied zwischen numerischer (mittels finiter Differenzen) und analytischer Sensitivitätsanalyse ist praktisch nicht zu erkennen, was auch durch die Zahlenwerte in Tabelle 6.4 in den Spalten für  $\nabla_l u_{FE198}$  und  $\nabla_l u_{FE690}$  bestätigt wird. Die maximal auftretende prozentuale Abweichung beträgt zwischen den numerisch und den analytisch ermittelten Sensitivitäten 0.000037 % für das grobe bzw. 0.000032 % für das feine Netz. Dies läßt darauf schließen, daß die Formulierung der Sensitivitätsanalyse, kon-

Abbildung 6.10: Numerisch und analytisch ermittelte Sensitivitäten,  $l$  ist variabel

sistent zum Algorithmus zur Ermittlung der Strukturantwort, korrekt ist. Ein Unterschied zwischen Vorwärts- und Rückwärts-Differenzenverfahren wurde bei diesem Beispiel nicht festgestellt, weshalb nur die Diagramme und Zahlenwerte des Vorwärts-Differenzenverfahrens angegeben sind. Die Unterschiede zwischen den Sensitivitäten, die zum einen mit Hilfe der analytischen Lösung nach Gleichung (6.110) und zum anderen analytisch bzw. numerisch mit den vorgestellten Verfahren ermittelt wurden, ist demnach hauptsächlich auf Unterschiede bei der Ermittlung der Strukturantwort zurückzuführen.

Der Vollständigkeit halber wird die Sensitivitätsanalyse mit der Balkenhöhe  $h$  als Optimierungsvariable aufgezeigt. Die Ableitungen der entsprechenden Gleichungen (6.104)–(6.107) nach  $h$  liefern folgende Ausdrücke:

$$\nabla_h R_y = \frac{\nabla_h M_y}{l} = \frac{2 R_y}{h} \quad \text{mit} \quad \nabla_h M_y = \frac{2 b h \sigma_y}{6} = \frac{2 M_y}{h} \quad (6.111)$$

$$\nabla_h u^{el} = -\frac{R_y l^3}{3 E I h} \quad (6.112)$$

Die Ableitung der Verschiebung des freien Endes (Gleichung (6.104)) ergibt sich nach einigen Umformungen zu:

$$\nabla_h u = \frac{l^3}{E I h} \left( \frac{R_y}{R} \right)^2 \left[ 5 R_y - \frac{9 R_y^2 - 3 R_y R}{R_y \sqrt{3 - 2 \frac{R}{R_y}}} \right] \quad (6.113)$$

Die zuvor getroffenen Aussagen gelten hier ebenfalls. Die Diagramme für die analytische und numerische Sensitivitätsanalyse für die beiden Netze sind in Abbildung 6.11 dargestellt. Zusätzlich sind die Verläufe der Sensitivität der Vertikalverschiebung nach der EULER-BERNOULLI-Balkentheorie gemäß Gleichung (6.113) zu erkennen. Die zugehörigen Zahlenwerte sind Tabelle 6.5 zu entnehmen. Die maximale Abweichung zwischen der Sensitivitätsanalyse nach Gleichung (6.113) für  $\nabla_h u$  und den analytisch hergeleiteten Sensitivitäten beträgt mit dem groben Netz 12.82 % bzw. 2.75 % mit dem feinen Netz, was wiederum auf die unterschiedlich durchgeführte Strukturanalyse zurückzuführen ist. Abbildung 6.11 verdeutlicht erneut, daß die Abweichung zwischen numerischer und analytischer Sensitivitätsanalyse vernachlässigbar klein ist. Diese beträgt für das grobe Netz 0.0032 % bzw. 0.0025 % für das feine Netz.

Der Unterschied der Abweichungen zwischen numerischer und analytischer Sensitivitätsanalyse bei den verschiedenen Optimierungsvariablen ist auf die Größe der Störung zurückzuführen. Diese wurde stets zu  $10^{-5} [m]$  gewählt, hat jedoch bei einer Änderung der Balkenhöhe  $h$  einen größeren Einfluß auf die Strukturantwort, als dies bei der Balkenlänge  $l$

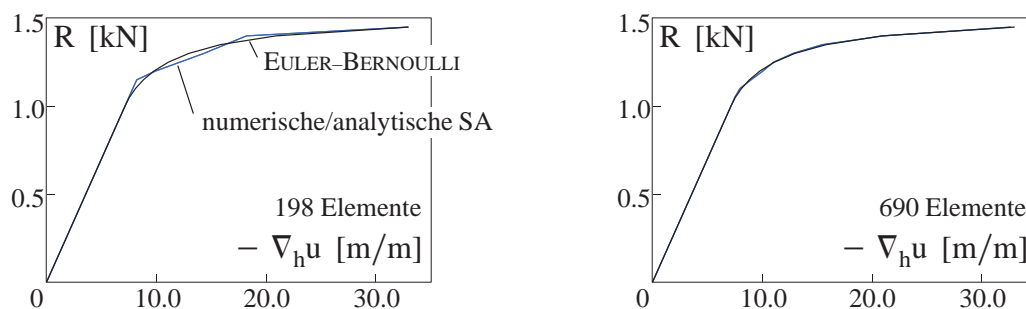


Abbildung 6.11: Numerisch und analytisch ermittelte Sensitivitäten,  $h$  ist variabel



R/R <sub>y</sub>	$\nabla_{h^u}^u \text{Balken}$	$\nabla_{h^u}^u \text{FE198}$		$\nabla_{h^u}^u \text{FE690}$	
		analytisch	numerisch	analytisch	numerisch
0.00	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00	-7.1428971	-7.1434273	-7.1432845	-7.1434283	-7.1432855
1.05	-7.5571198	-7.5005987	-7.5004887	-7.5005998	-7.5004498
1.10	-8.1038591	-7.8577701	-7.8576130	-7.9712307	-7.9710702
1.15	-8.8226777	-8.2149415	-8.2147772	-8.9808824	-8.9806990
1.20	-9.7786211	-9.9226545	-9.9224448	-10.0471340	-10.0469260
1.25	-11.0839826	-12.1383592	-12.1380976	-11.0184445	-11.0182145
1.30	-12.9493154	-14.3210569	-14.3207430	-12.7900019	-12.7897264
1.35	-15.8237202	-16.2538063	-16.2534476	-15.4559601	-15.4556213
1.40	-20.8933174	-18.2148164	-18.2144127	-21.0128436	-21.0123310
1.45	-32.9695639	-32.9147459	-32.9137021	-32.6013349	-32.6005253

Tabelle 6.5: Zahlenwerte für die Sensitivität der Verschiebung  $u$ ,  $h$  ist variabel

als Optimierungsvariable der Fall ist. Eine Bestätigung dieser Aussage liefert die Tatsache, daß bereits die Sensitivitäten bei den numerischen und analytischen Sensitivitätsanalysen im elastischen Bereich mit Abweichungen derselben Größenordnung behaftet sind. Dies ist den entsprechenden Tabellen für die Werte des Lastniveaus  $1.05 \text{ kN}$  (elastischer Zustand) zu entnehmen.

Im Vergleich zu den ermittelten Sensitivitäten in den Arbeiten von VAZ & HINTON [237] und SILVA ET AL. [210] wurden geringfügige Differenzen festgestellt. Dies ist hauptsächlich auf die unterschiedlichen Ansätze bei der Herleitung der Sensitivitätsanalyse, aber auch auf leicht unterschiedliche Werte bei der Strukturanalyse zurückzuführen.

### 6.4.2 Beispiel 2: Dünne Scheibe mit Loch – Verfestigung

Anhand dieses Beispiels wird die Qualität der Sensitivität der Verschiebungen und der Spannungen an bestimmten Stellen eines Tragwerks überprüft. Außerdem wird der Einfluß der Diskretisierung in Raum und Zeit auf die Qualität der Sensitivitäten untersucht. Damit kann das Auftreten von Diskontinuitäten in den Sensitivitäten am zweidimensionalen Beispiel gezeigt und diskutiert werden. Analysiert wird aus Symmetriegründen nur ein Viertel einer dünnen Scheibe mit kreisförmiger Aussparung in der Mitte. Die Geometrie, Last- und Lagerbedingungen und Materialdaten sind in Abbildung 6.12 dargestellt. Es wird das VON MISES-Fließkriterium mit linearer, isotroper Verfestigung ( $\Theta = 1.0$ ) angenommen. Zur Berechnung der Strukturantwort mit der Methode der Finiten Elemente werden bilineare Scheibenelemente mit vier Integrationspunkten verwendet. Außerdem wird eine lineare Kinematik vorausgesetzt. Beansprucht wird die Struktur infolge einer vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}$  der oberen Kante. Diese vorgegebene Verschiebung wird schrittweise in 39 bzw. 780 gleich großen Inkrementen aufgebracht.

Die beschriebene Problemstellung entspricht exakt derjenigen, die auch von KOWALCZYK

& KLEIBER [119] zur Verifikation der in deren Arbeit vorgestellten Sensitivitätsanalyse für Formoptimierungsprobleme gewählt wurde. Diese Formulierung entspricht der in der vorliegenden Arbeit aufgezeigten Vorgehensweise für eine lineare Kinematik. In der Arbeit von KOWALCZYK & KLEIBER [119] wird für die Untersuchungen eine Diskretisierung der Struktur mit 164 Finiten Elementen gemäß Abbildung 6.12 verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird zusätzlich eine doppelt so feine Unterteilung der Kanten vorgenommen, was zu 656 Finiten Elementen führt.

Die Auswertung der Strukturantwort und ihrer Sensitivität bezüglich des Radius  $r$  wird für dieses Beispiel an zwei charakteristischen Stellen der Struktur vorgenommen. Für die Verschiebung und die Sensitivität der Verschiebung wird die Stelle  $A$  an der Außenseite der Struktur gewählt. An der Stelle  $B$ , am Lochrand, wird die Spannung und deren Sensitivität in vertikaler Richtung betrachtet. Der Einfachheit halber werden die Spannungswerte an dem zu  $B$  nächstliegenden Integrationspunkt ausgewertet. In den Diagrammen in Abbildung 6.13 sind die Verläufe der horizontalen Verschiebung im Punkt  $A$  und der Spannung in vertikaler Richtung im Punkt  $B$  über der vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}$  aufgetragen.

Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Zahlenwerte, die durch die Berechnung in 780 Schritten entstehen, die Punkte bzw. Kreuze die in 39 Schritten ermittelten Zahlenwerte. Die Verläufe zeigen deutlich, daß es sich hierbei um ein hochgradig nichtlineares Problem handelt. Die Qualität der Strukturantwort ist bei diesem Beispiel nahezu unabhängig von der gewählten Zeitdiskretisierung. Die maximalen prozentualen Abweichungen in der Strukturantwort infolge einer unterschiedlichen Zeitdiskretisierung betragen für Berechnungen auf dem groben Netz (164 Finite Elemente) 0.0979 % für die horizontale Verschiebung in Punkt  $A$  und 0.1345 % für die Spannung in vertikaler Richtung in Punkt  $B$ . Ähnlich geringe Werte für die Abweichungen ergeben sich für Berechnungen auf dem feinen Netz (656 Finite Elemente) für unterschiedliche Zeitinkrementierungen. Diese sind 0.1258 % für  $u_A$  und 0.2055 % für  $\sigma_B$ . Damit wird deutlich, daß der Einfluß der Zeitinkrementierung auf die Qualität der Strukturantwort für dieses Beispiel ver-

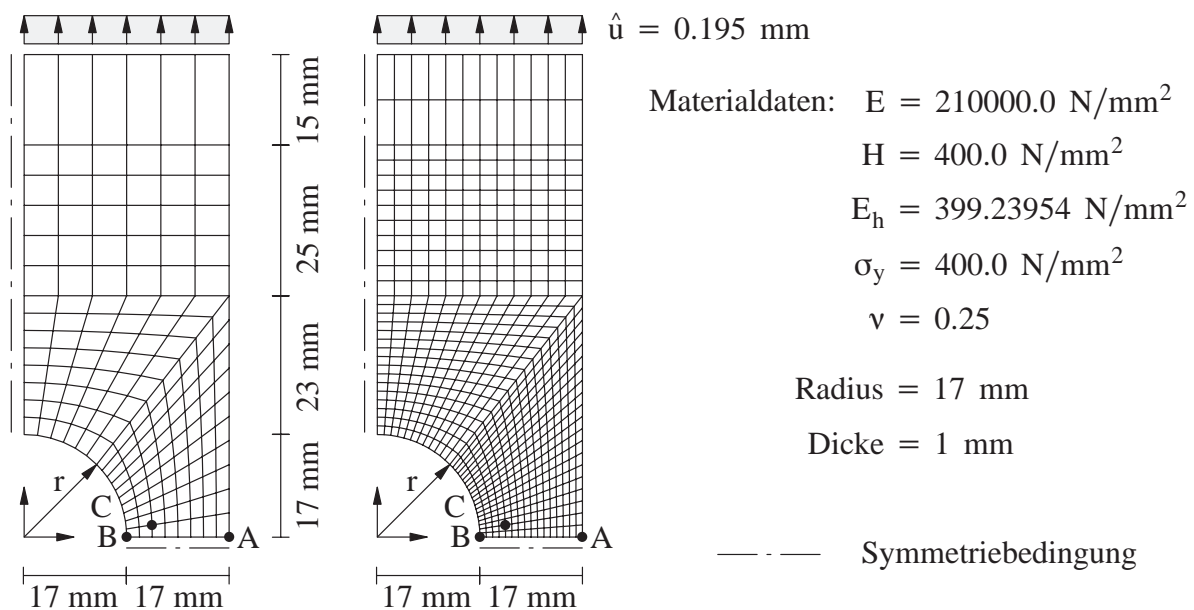


Abbildung 6.12: Geometrie, Diskretisierung und Materialdaten der Lochscheibe

nachlässigbar klein ist, was durch die geringen Unterschiede der entsprechenden Kurven in Abbildung 6.13 verdeutlicht wird. Es ist optisch kaum ein Unterschied zwischen den durchgezogenen Linien (780 Inkremente) und den zugehörigen Punktwerten (39 Inkremente) für die jeweils gleichen Netze zu erkennen. Vergleicht man die Strukturantwort für unterschiedliche Finite Element–Netze, jedoch gleicher Zeitdiskretisierung, ergibt sich eine deutlich größere Abweichung. Bei einer Inkrementierung der vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}$  von 39 Schritten beträgt die Abweichung für unterschiedliche Raumdiskretisierungen für  $u_A$  2.148 % und für  $\sigma_B$  3.426 %. Ähnliche Werte ergeben sich für die feine Zeitdiskretisierung (780 Schritte). Für die Verschiebung  $u_A$  ist dann die Abweichung 2.138 %, und für die Spannung  $\sigma_B$  liegt diese bei 3.424 %. Dieser Unterschied wird auch durch die unterschiedlichen Verläufe der durchgezogenen Linien und die der Punkt–Kurven in Abbildung 6.13 wiedergegeben. Der Einfluß der Diskretisierung im Raum hat demnach im Vergleich zur Zeitdiskretisierung einen größeren Einfluß auf die Qualität der Strukturantwort. Gravierend ist dieser Einfluß bei diesem Beispiel allerdings nicht.

Zur Verifikation der hergeleiteten Sensitivitätsanalyse wird als einzige Optimierungsvariable der Radius  $r$  des Loches gewählt. Es werden für jede Inkrementierung sowohl die Sensitivitäten nach der vorgestellten analytischen Methode als auch mittels des Vorwärts–Differenzenverfahrens bestimmt. Als Störung wird dabei  $10^{-4}[mm]$  angesetzt. Ein Vergleich der analytischen mit den numerischen Sensitivitäten für die jeweilige Inkrementierung zeigt erneut die Richtigkeit der Formulierung der Sensitivitätsanalyse, die konsistent zum Verfahren zur Ermittlung der Strukturantwort sein muß. Abbildung 6.14 zeigt die Verläufe der Sensitivitäten entlang der aufgebrachten Verschiebung  $\hat{u}$ . Die durchgezogenen Linien kennzeichnen die Sensitivitäten für die feine Zeitdiskretisierung (780 Inkremente), die Punkte bzw. Kreuze repräsentieren die Sensitivitäten für die grobe Diskretisierung in der Zeit (39 Inkremente). Aufgrund des optisch nicht wahrzunehmenden Unterschieds zwischen den analytischen und den numerischen Lösungen sind in Abbildung 6.14 lediglich die analytisch ermittelten Sensitivitäten der Verschiebung  $\nabla_s u_A$  und der Spannung  $\nabla_s \sigma_B$  für die verschiedenen Diskretisierungen in Raum und Zeit dargestellt. Die maximale Abweichung zwischen den analytisch und den numerisch ermittelten Sensitivitäten, bei jeweils gleicher Diskretisierung in Raum und Zeit, liegt für alle untersuchten Werte unter 0.1 %. In Abschnitt 6.3 wurde das Auftreten von Diskontinuitäten in den Sensitivitäten bei elastoplastischem Materialverhalten angesprochen und ausführlich diskutiert. Anhand

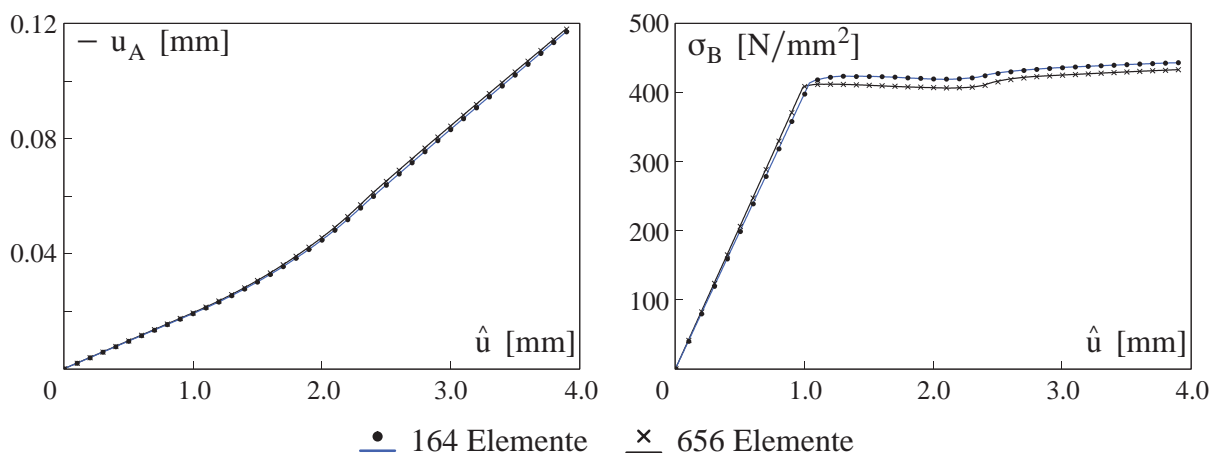


Abbildung 6.13: Verschiebungs– und Spannungsverläufe in  $A$  bzw.  $B$

der extrem unterschiedlichen Inkrementierung in der Zeit von 39 und 780 Schritten werden diese Diskontinuitäten graphisch für beide Diskretisierungen im Raum dargestellt. Wie im Beispiel des Zugstabs (vgl. Abschnitt 6.3) können die Sprünge (Diskontinuitäten) in den Sensitivitäten nicht exakt, jedoch mit feiner werdender Inkrementierung deutlich gemacht werden. Aus diesem Grund sind in Abbildung 6.14 die analytischen Lösungen der Sensitivitäten für die Verschiebung  $u_A$  und die Spannung  $\sigma_B$  für die jeweilige Inkrementierung in einem Schaubild dargestellt. Die Sprünge in den Sensitivitäten sind besonders bei den Sensitivitäten der Spannung in Punkt  $B$  zu erkennen. Der größte Sprung in der Sensitivität der Spannung tritt bei Beginn des Fließens der Lochscheibe auf, welcher in der Nähe des Punkts  $B$  stattfindet.

Für die grobe Zeitdiskretisierung (39 Schritte) sind die Sprünge in den Sensitivitäten zwar vorhanden und auch zu erkennen, jedoch ist der Verlauf der Sensitivitäten nicht so 'hochfrequent', wie dies für die feine Inkrementierung mit 780 Schritten der Fall ist. Diese Tatsache hängt damit zusammen, daß die Anzahl der Integrationspunkte, die innerhalb eines Inkrements zu fließen beginnen, mit steigender Größe des Zeitinkrements zunehmen, was eine 'glättende' Wirkung auf den Verlauf der Sensitivitäten zur Folge hat (vgl. Abbildung 6.14, rechtes Diagramm). Eine ähnliche Einschätzung wird auch von KOWALCZYK & KLEIBER [119] geäußert. Des weiteren ist in Abbildung 6.14 zu erkennen, daß für die feine Zeitdiskretisierung mit 780 Inkrementen die Sprünge im Verlauf der Sensitivität für die Spannung  $\sigma_B$  bei Verwendung des feinen Netzes (656 Finite Elemente) nicht so ausgeprägt sind wie bei dem groben Netz (164 Finite Elemente). Grund hierfür ist der geringere Einflußbereich eines Integrationspunktes, da die Elementgrößen beim Netz mit 656 Finiten Elementen kleiner sind als beim Netz mit 164 Finiten Elementen. Die Sprünge in den Sensitivitäten können genauer (im Sinne von räumlich begrenzt) abgebildet werden, wodurch das globale Verhalten der Sensitivitäten infolge der Diskontinuität an einem Integrationspunkt weniger beeinflußt wird.

Die Abweichungen in der Strukturantwort für die unterschiedlichen Diskretisierungen in Raum und Zeit wurden zuvor für dieses Beispiel als eher gering eingestuft, wobei der Einfluß der Diskretisierung im Raum als entscheidender beschrieben wurde. Ein analoger Vergleich wird nachfolgend für die Sensitivitäten für unterschiedliche Diskretisierungen in Raum und Zeit vorgenommen. Der Einfluß der Inkrementgröße in der Zeit auf die Sensitivität der horizontalen Verschiebung von Punkt  $A$  ergibt eine Abweichung von 0.385 %

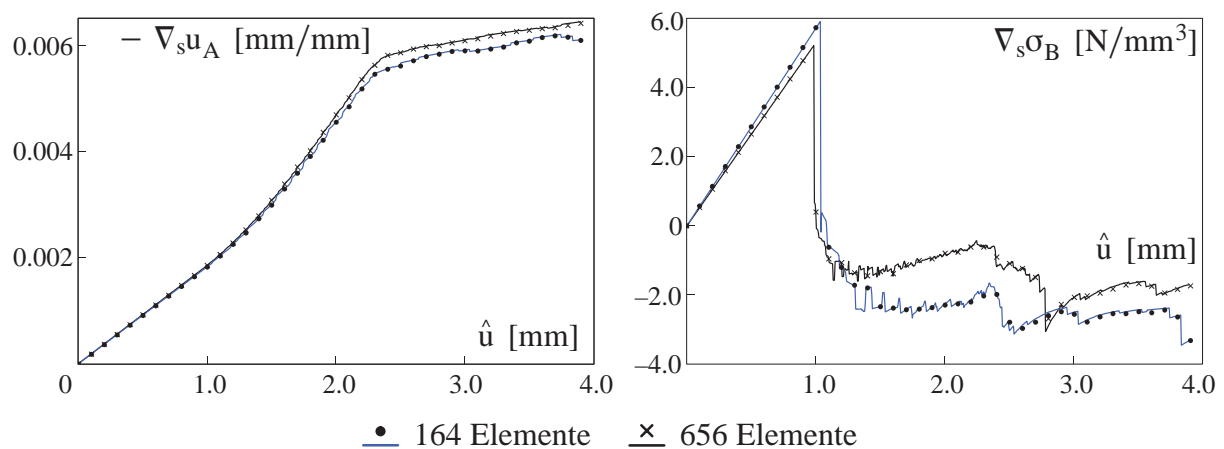


Abbildung 6.14: Sensitivitäten der Verschiebung in  $A$  und der Spannung in  $B$

und für die Sensitivität der Spannung in Punkt  $B$  von 5.944 %. Diese Berechnungen beziehen sich auf die grobe Raumdiskretisierung (164 Finite Elemente). Für das feinere Netz mit 656 Elementen betragen die Abweichungen in den Sensitivitäten der Verschiebungen  $\nabla_s u_A$  0.536 % und in den Sensitivitäten der Spannungen  $\nabla_s \sigma_B$  18.744 %. Im Gegensatz zu der Strukturantwort, bei der der Einfluß der Zeitinkrementierung auf die Qualität vernachlässigbar klein ist, sind, zumindest für die Sensitivitäten der Spannungen in Punkt  $B$ , deutliche Unterschiede zu erkennen. Grund hierfür ist, daß die Sensitivitäten der Spannungen aus den Sensitivitäten der Primärvariablen der Strukturantwort (den Verschiebungen) bestimmt werden und daher ein größerer Fehler, als bei der Sensitivität der Verschiebungen selbst zu erwarten ist. Ein weiterer Grund für die relativ starken Abweichungen für die Sensitivität der Spannung ist die Fähigkeit des gewählten mechanischen Modells, das reale Strukturverhalten und somit auch die tatsächlich auftretenden Sprünge im Verlauf der Sensitivitäten besser abbilden zu können. Je feiner diskretisiert wird, um so exakter werden diese Sprünge erfaßt. Da im Verlauf der Sensitivitäten der Verschiebung weitaus weniger bzw. betragsmäßig kleinere Sprünge zu erkennen sind (vgl. Abbildung 6.14), ist die Abweichung der Sensitivitäten für unterschiedliche Diskretisierungen deutlich geringer, was durch die oben angeführten Werte bestätigt wird. Trotzdem kann die Qualität der Sensitivitätsanalyse für unterschiedliche Zeitdiskretisierungen als zufriedenstellend eingestuft werden. Die Abweichungen in den Sensitivitäten der Verschiebungen sind sehr gering, und auch die der Spannungen sind, außer an wenigen, ganz bestimmten Stellen sehr großer plastischer Verformungen, qualitativ gut. Die großen prozentualen Abweichungen von 5.944 % bzw. 18.744 % sind für Werte in der Nähe von null ermittelt worden und daher nicht sehr aussagekräftig. Für andere Werte sind die prozentualen Abweichungen deutlich geringer.

Deutlicher erscheint die Abweichung in den Sensitivitäten bei Vergleichen für unterschiedliche Netze, jedoch gleicher Zeitinkrementierung. Dann beträgt der Unterschied in den Sensitivitäten der Verschiebung bereits 5.014 % und 260.496 % für die der Spannung. Diese Werte beziehen sich auf eine Zeitinkrementierung von 39 Inkrementen. Noch etwas größer sind die Abweichungen bei 780 Zeitschritten. Für die Sensitivitäten der Verschiebung sind dann 5.270 % und für die Sensitivitäten der Spannung 349.511 % zu beobachten. (In der Nähe des Nulldurchgangs sind die prozentualen Abweichungen bei den Sensitivitäten der Spannung noch wesentlich größer; sie liegen bei mehreren tausend Prozent und sind daher für eine qualitative Aussage wenig repräsentativ.)

Diese beschriebenen Abweichungen sind auch deutlich in den Diagrammen von Abbildung 6.14 zu erkennen. Während die Punkt-Kurven (39 Zeitschritte) relativ gut mit den entsprechenden durchgezogenen Linien (780 Zeitschritte) übereinstimmen (gleiches Netz, unterschiedliche Zeitdiskretisierung), so sind die unterschiedlichen Verläufe der verschiedenen durchgezogenen Linien und die der verschiedenen Punkt-Kurven deutlich sichtbar (gleiche Zeitdiskretisierung, unterschiedliches Netz).

Es sollte noch angemerkt werden, daß die sehr starke Abweichung in den Sensitivitäten der Spannung besonders in Punkt  $B$  auftritt, da an dieser Stelle die größten plastischen Verzerrungen zu erwarten sind. An anderen Stellen des Tragwerks sind deutlich geringere Abweichungen zu beobachten, die ein Indiz dafür sind, daß der Einfluß der Sensitivität der Spannung in Punkt  $B$  bzw. weiterer Punkte mit großen plastischen Verzerrungen lokal begrenzt ist.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß der in diesem Kapitel vorgestellte Algorithmus zur analytischen Berechnung der Sensitivitäten der Strukturantwort korrekte Werte

liefert. Durch die sehr geringen Abweichungen zwischen den numerisch und den analytisch ermittelten Sensitivitäten der Verschiebungen und Spannungen für die unterschiedlichen Diskretisierungen in Raum und Zeit läßt sich dies eindeutig belegen. Dies bedeutet, die Sensitivitäten sind, bezogen auf das zugrundegelegte mechanische und numerische Modell, richtig und in einem akzeptablen Genauigkeitsbereich. Ein weiterer Beleg für die Qualität der analytischen Sensitivitätsanalyse ist der Vergleich der ermittelten Sensitivitäten dieses Beispiels mit den in der Arbeit von KOWALCZYK & KLEIBER [119] angestellten Untersuchungen. In Abbildung 6.15 sind die Sensitivitäten der horizontalen Verschiebung

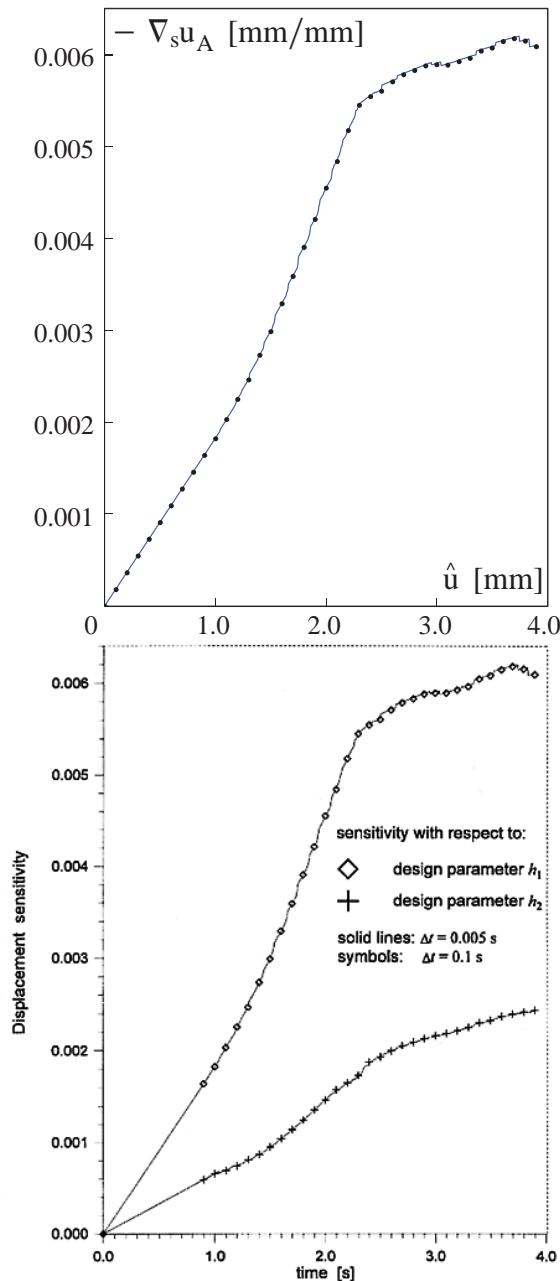


Fig. 9. Design derivatives of the displacement  $u_A$ .

Sensitivitäten gemäß des  
in Abschnitt 6.2  
vorgestellten Algorithmus

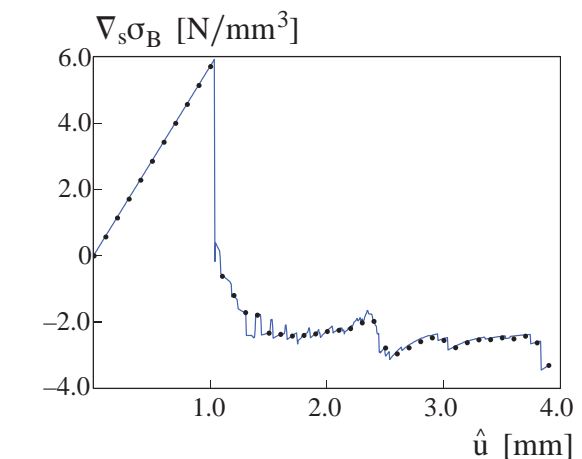


Diagramme aus  
KOWALCZYK & KLEIBER [119]

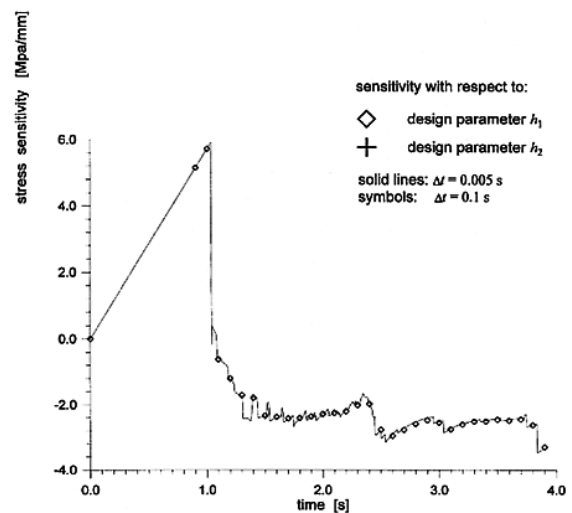


Fig. 10. Design derivatives of the stress  $\sigma_{xx}$  at point B.

Abbildung 6.15: Vergleich von Verläufen der Sensitivitäten aus KOWALCZYK & KLEIBER [119] und nach der vorgestellten Methode

von Punkt  $A$  und die Spannung in vertikaler Richtung in Punkt  $B$  für zwei verschiedene Optimierungsvariablen dargestellt. Die Kurven, die zur Optimierungsvariablen 'Radius' gehören, sind in Abbildung 6.15 mit  $h_1$  bezeichnet. Es ist zumindest optisch kein Unterschied zwischen den Verläufen zu erkennen.

Ein Vergleich der Strukturantwort für unterschiedliche Diskretisierungen in Raum und Zeit ergibt für dieses strukturmechanische Problem nur sehr geringe Differenzen im Prozentbereich. Optisch ist nur für die Spannungen  $\sigma_B$  ein geringfügiger Unterschied zu erkennen. Für die Sensitivitäten ist der Unterschied für verschiedene Diskretisierungen weitaus größer, was auch anhand der Diagramme in Abbildung 6.14 zu erkennen ist. Die Verläufe für die Sensitivitäten der Verschiebung in Punkt  $A$  sind recht ähnlich. Im Gegensatz dazu sind die Verläufe für die Sensitivitäten der Spannung in Punkt  $B$  nur tendenziell ähnlich. Die Zahlenwerte differieren z.T. sehr stark. Da diese großen Differenzen jedoch nur lokal, an wenigen Stellen der Struktur auftreten, ist ihr globaler Einfluß eher gering, es sei denn, große Bereiche der Struktur erfahren große plastische Deformationen. Für Optimierungsprobleme, bei denen globale bzw. integrale Entwurfskriterien berücksichtigt werden (z.B. inneren Energie, Duktilität), sind daher nur geringe Einflüsse der Diskretisierung auf das Optimierungsergebnis zu erwarten. Werden jedoch lokale Entwurfskriterien, wie Verschiebungen oder Spannungen, in Form von Nebenbedingungen bei der Optimierung berücksichtigt, so sind die genannten Einflüsse wesentlich größer (vgl. Kapitel 8). Neben den Einflüssen der unterschiedlichen Diskretisierungen in Raum und Zeit auf die Sensitivitäten sind in der Regel weitere Einflüsse, wie beispielsweise die der Ansatzordnung der Finiten Elemente, die hier nicht untersucht wurde, zu erwarten. Demnach kann ein Optimierungsergebnis immer nur als ein Optimum bezogen auf das zugrundegelegte mechanische und numerische Modell verstanden werden. Je realistischer die Wirklichkeit abgebildet werden kann, desto näher liegt das ermittelte Optimum am tatsächlichen, oftmals nicht bekannten Optimum.

### 6.4.3 Beispiel 3: Dünne Scheibe mit Loch – Entfestigung

Zur Verifikation der Sensitivität der Strukturantwort bei entfestigendem Materialverhalten wird erneut die dünne Scheibe mit kreisförmiger Aussparung in der Mitte untersucht. Die Geometrie- und Materialdaten werden analog zu denen in Abbildung 6.12 des vorigen Beispiels gewählt. Anstelle des Verfestigungsmoduls  $H = 400 \text{ N/mm}^2$  im Raum der plastischen Verzerrungen  $\epsilon^{pl}$  wird jetzt eine Bruchenergie von  $G_f = 50 \text{ N/mm}$  definiert (vgl. Kapitel 4). Es werden sowohl Berechnungen mit 164 Finiten Elementen als auch mit einer doppelt so feinen Unterteilung der Design-Kanten (656 Elemente) durchgeführt (vgl. Abbildung 6.12). Dabei handelt es sich wiederum um bilineare Scheibenelemente mit vier Integrationspunkten. Die Auswertung der Sensitivitäten der Verschiebungen in horizontaler Richtung erfolgt an drei Stellen der Scheibenstruktur, die in Abbildung 6.12 mit den Buchstaben  $A$ ,  $B$  und  $C$  gekennzeichnet sind. Einzige Optimierungsvariable ist der Radius  $r$  der Aussparung. Die Aufbringung der Verschiebung am oberen Rand erfolgt, wie im vorigen Beispiel, in 39 bzw. 780 Schritten. Die Last-Verschiebungskurven für die verschiedenen Kombinationen von Diskretisierungen der Geometrie und Lastinkrementierung (Diskretisierung in Raum und Zeit) an den ausgewählten Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind in Abbildung 6.16 zusammengefaßt.

Die Last-Verschiebungsdiagramme zeigen deutlich, daß das globale Strukturverhalten entfestigend ist. Die Abweichungen der Strukturantwort (hier repräsentativ die horizontalen

Verschiebungen an den Punkten  $A, B, C$ ) für die verschiedenen Diskretisierungen in Raum und Zeit sind z.T. beträchtlich. Während die Strukturantwort für die gleiche Elementanzahl, jedoch einer unterschiedlichen Anzahl von Lastschritten, Abweichungen von wenigen Prozent (außer bei kleinen absoluten Werten, dort sind die prozentualen Abweichungen größer) aufweist, sind die Unterschiede in der Strukturantwort für unterschiedliche Netze um ein Vielfaches höher (vgl. Diagramme in Abbildung 6.16). Es wird deutlich, daß der Einfluß der Diskretisierung im Raum wie auch in der Zeit auf die Strukturantwort und dadurch auch auf deren Sensitivität, im Vergleich zum vorigen Beispiel, wesentlich größer ist. Diese Aussage wird durch die großen Unterschiede in den Verschiebungen  $u_A, u_B$  und  $u_C$  für unterschiedliche Diskretisierungen deutlich. Noch deutlicher ist dies für die Spannungen, die in diesem Beispiel nicht dargestellt sind. Aufgrund dieser Problematik ist für die Qualität der Sensitivitäten der Strukturantwort kein zufriedenstellendes Ergebnis zu erwarten. Diese schlechte Qualität bezieht sich dabei nicht auf die tatsächliche, nicht bekannte Sensitivität der Strukturantwort, sondern auf den Vergleich der analytisch ermittelten Sensitivitäten mit dem in Kapitel 6 vorgestellten Verfahren, mit den numerischen Sensitivitäten mittels des Verfahrens der finiten Differenzen. Diese geäußerte Befürchtung wird in den Diagrammen in Abbildung 6.17 bestätigt.

Im Gegensatz zum vorigen Beispiel ist in einigen Diagrammen bereits optisch ein Unterschied zwischen den analytisch und den numerisch ermittelten Sensitivitäten, besonders gegen Ende des Belastungspfades, zu erkennen. Zudem ergeben sich für dieselbe Sensitivität, z.B. die Sensitivität der Verschiebungen im Punkt  $A$ , für verschiedene Diskretisierungen in Raum und Zeit sehr große Unterschiede (vgl. Diagramme in den jeweiligen Spalten von Abbildung 6.17). Dies gilt sowohl für die analytisch als auch für die numerisch ermittelten Sensitivitäten. Derartige Probleme sind für die Sensitivitäten des Beispiels 2 dieses Unterkapitels nicht bzw. nur in sehr geringem Maße vorhanden. Eine Verfeinerung der Diskretisierung in Raum und Zeit ist für das Beispiel in Abschnitt 6.4.2 zur Verbes-

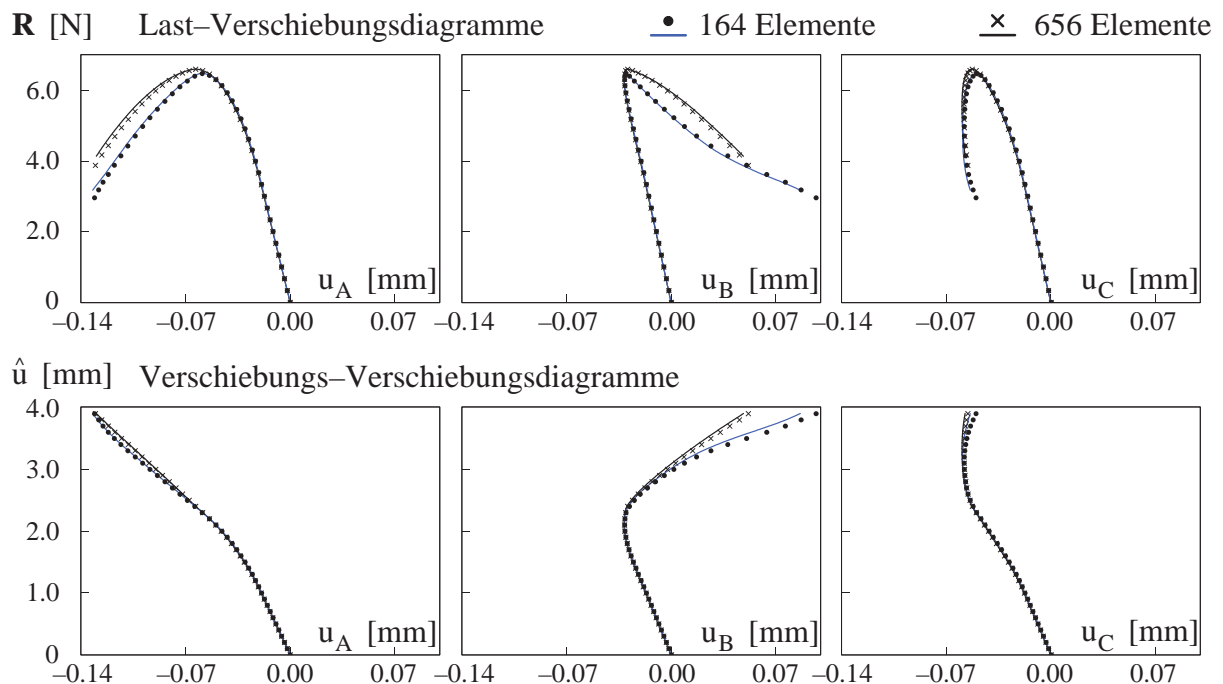


Abbildung 6.16: Last-Verschiebungs- bzw. Verschiebungs-Verschiebungsdiagramme



serung der Übereinstimmung von analytischer und numerischer Sensitivitätsanalyse nicht erforderlich. Dort ist für jede gewählte Diskretisierung kaum ein Unterschied zwischen analytischer und numerischer Sensitivitätsanalyse festzustellen.

Erst mit zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung in Raum und Zeit ist die Abweichung in den Werten der analytischen und der numerischen Sensitivitätsanalyse bei diesem Beispiel zufriedenstellend. Die maximale Abweichung für die Sensitivität der Verschiebung in Punkt *A* beträgt für die jeweils feinste Diskretisierung in Raum und Zeit 0.0098 % und liegt damit etwa im Bereich der Abweichung für dieselbe Sensitivität beim vorigen

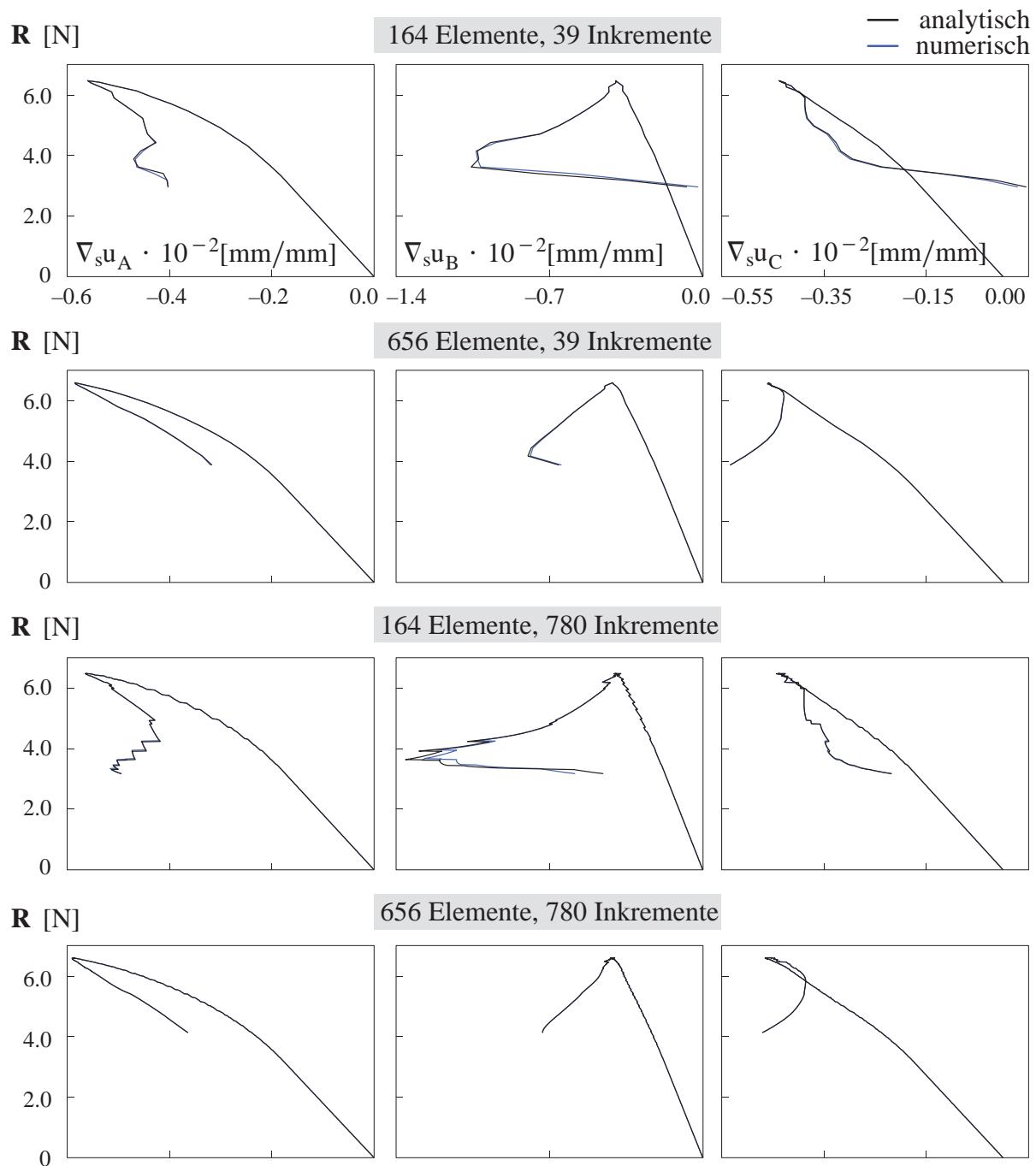


Abbildung 6.17: Last-Sensitivitätsdiagramme

Beispiel, bei Verwendung einer deutlich größeren Diskretisierung in Raum und Zeit. Für andere Diskretisierungen wird für die Sensitivität der Verschiebung in Punkt  $A$  eine Abweichung zwischen analytischer und numerischer Sensitivitätsanalyse von bis zu 7.937 % beobachtet. Noch größer sind die Abweichungen an anderen Stellen des Tragwerks (z.B. in den Punkten  $B$  und  $C$ ). Für die feinste Diskretisierung in Raum und Zeit sind die Unterschiede zwischen analytischer und numerischer Sensitivität der Verschiebungen in  $B$  bzw.  $C$  mit 0.036 % bzw. 0.0236 % sehr gering. Die maximalen Abweichungen für gröbere Diskretisierungen liegen bei 235.878 % bzw. 56.267 %.

Diese extrem großen prozentualen Fehler sind auf einen Vorzeichenwechsel bzw. auf Werte in der Nähe des Nulldurchgangs der Sensitivitäten der Verschiebungen in  $C$  bzw.  $B$  zurückzuführen, weshalb diese Zahlen nicht besonders aussagekräftig sind. An anderen Stellen des Lastpfades sind Abweichungen in der Größenordnung wie bei Punkt  $A$  vorhanden. Auf jeden Fall ist eine relativ große Diskrepanz zwischen analytischer und numerischer Sensitivitätsanalyse zu beobachten (vgl. Abbildung 6.17). Als wesentlich kritischer ist jedoch der große Unterschied zwischen den Werten der Sensitivitäten in den kontrollierten Punkten für die analytische (und auch numerische) Methode bei einer Veränderung der Zeitinkrementierung zu beurteilen. Hier liegen die Abweichungen für die Sensitivität der Verschiebungen in den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  bei 19.616 %, 83.879 % und 121.059 % für das grobe Netz und bei 13.165 %, 18.099 % und 14.248 % für das feinere Netz. Neben diesen lokal ermittelten, großen Abweichungen sind zudem gegen Ende des Belastungspfades stark unterschiedliche Verläufe in den Sensitivitäten für die verschiedenen Diskretisierungen zu beobachten (vgl. Abbildung 6.17). Mit steigender Elementanzahl schwächt sich dieses Problem ab. Diese Problematik der großen Unterschiede in den Sensitivitäten für verschiedene Diskretisierungen in Raum und Zeit ist bei verfestigendem Materialverhalten nicht zu beobachten (vgl. voriges Beispiel).

Es wird deutlich, daß für die Berechnung von Sensitivitäten und demnach auch für die Durchführung von Optimierungen für Strukturen mit entfestigendem Materialverhalten die tatsächliche, jedoch nicht bekannte Strukturantwort sehr genau abgebildet werden muß, um zuverlässige Sensitivitäten und somit auch zuverlässige Optimierungsergebnisse zu erhalten. Prinzipiell gilt diese Aussage auch bei verfestigendem Materialverhalten. Ein Optimierungsergebnis kann immer nur als optimal bezüglich des gewählten mechanischen Modells und dessen numerischer Umsetzung verstanden werden. Allerdings beeinflußt die Wahl der Diskretisierung in Raum und Zeit bei verfestigendem Materialverhalten die Qualität der Strukturantwort und deren Sensitivität nicht in dem Maße, wie dies bei entsprechender Diskretisierung bei entfestigendem Materialverhalten zu beobachten ist. Diese Aussage läßt sich anhand der Ergebnisse der vorangegangenen Beispiele belegen. Bei entfestigendem Materialverhalten wurden numerische Schwierigkeiten, vor allem bei der Verwendung biquadratischer, unterintegrierter Scheibenelemente (Serendipity-Elemente mit vier Integrationspunkten) in Form von Konvergenzproblemen beobachtet. Diese sind möglicherweise auf den Wechsel des Typs der Differentialgleichung und somit den Verlust der Elliptizität bei Entfestigung zurückzuführen und für den unterschiedlichen Einfluß der Diskretisierung in Raum und Zeit bei ver- und entfestigendem Materialverhalten auf die Qualität der Sensitivitäten verantwortlich.

Es sollte jedoch erwähnt werden, daß die in Kapitel 6 vorgestellte Methode zur analytischen Ermittlung von Sensitivitäten auch bei entfestigendem Materialverhalten exakte Werte liefert. Dies wird durch die sehr gute Übereinstimmung der Sensitivitäten der analytischen mit denen der numerischen Vorgehensweise bei einer sehr feinen Diskretisierung

in Raum und Zeit bestätigt. Für die anderen untersuchten Diskretisierungen ist lediglich gegen Ende der Belastung eine mehr oder weniger große Diskrepanz, vor allem für Sensitivitäten der Horizontalverschiebungen der Punkte  $B$  und  $C$ , zu beobachten. Im Endbereich des Belastungspfades ist es nicht möglich, mit Hilfe der numerischen Sensitivitätsanalyse eine Aussage über die Qualität der analytisch ermittelten Sensitivitäten zu treffen. Grund hierfür ist die schlechte Qualität der Strukturantwort. Da die numerische Sensitivitätsanalyse jedoch durch eine endliche Variation der Strukturgeometrie bestimmt wird, ist aufgrund der unzureichenden Qualität der Strukturantwort anzunehmen, daß die analytischen Sensitivitäten qualitativ besser als die numerischen sind. Bei diesem strukturellen Problem ist ein sehr starker Einfluß der äußeren Bedingungen, wie z.B. Geometrie und Lager- und Lastbedingungen, auf die Strukturantwort zu beobachten, d.h. diese ist sehr sensitiv. Eine Veränderung der Störung von  $10^{-6}$  [mm] auf andere Werte ergab bei weiteren Untersuchungen an diesem Beispiel keine nennenswerte Verbesserung bzw. Veränderung der numerischen Sensitivitäten. Prinzipiell hat die Wahl der Größe der Störung jedoch einen Einfluß auf das Ergebnis der numerisch ermittelten Sensitivitäten. Zur Lösung von Optimierungsproblemen mit entfestigendem Materialverhalten empfiehlt es sich demnach, nicht nur aus Effizienzgründen, die analytische Methode zur Ermittlung der Sensitivitäten der numerischen Methode vorzuziehen. Um jedoch auch dann die Qualität und Aussagekraft der Optimierungsergebnisse sicherzustellen, ist sowohl in Raum- als auch in Zeitrichtung eine sehr feine Diskretisierung zu wählen. Da die Sensitivitätsanalyse für geschichtsabhängige Probleme nach jedem Inkrement (Gleichgewichtszustand) durchzuführen ist, hat dies einen enormen numerischen Aufwand zur Folge. Daher erscheint es zur effizienten Behandlung derartiger Probleme unumgänglich, adaptive Methoden zur Minimierung der Anzahl der Freiheitsgrade bei gleichzeitiger qualitativ kontrollierbarer Ergebnisse für die Strukturantwort und deren Sensitivität einzusetzen. Je nach Optimierungsproblem eignen sich dafür lokale oder globale Fehlerschätzer bzw. Fehlerindikatoren. Zur adaptiven Behandlung von Strukturoptimierungsproblemen sei auf MAUTE [136] und FALK [71] verwiesen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird jedoch nicht weiter auf adaptive Probleme und deren Berücksichtigung in der Strukturoptimierung eingegangen.

#### 6.4.4 Beispiel 4: Biegebalken, geometrisch und materiell nicht-linear, isotrope und kinematische Verfestigung

Das folgende Beispiel einer schlanken Scheibenstruktur (Kragbalken) wird zur Verifikation der in diesem Kapitel vorgestellten Sensitivitätsanalyse bei geometrisch und materiell nichtlinearem Strukturverhalten herangezogen. Zudem wird der Einfluß der Verfestigungsart auf die Sensitivitäten untersucht. Hierzu werden drei verschiedene Werte für den Steuerungsparameter  $\Theta$  der Verfestigung angenommen. Für  $\Theta = 1.0$  ergibt sich eine rein isotrope Verfestigung, für  $\Theta = 0.0$  verfestigt das Material rein kinematisch (vgl. Kapitel 4). Eine Kombination zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung nach der PRAGER-ZIEGLER-Regel (SIMO & HUGHES [211]) wird beispielsweise mit einem Wert von  $\Theta = 0.5$  erzielt. Um Unterschiede zwischen den Verfestigungsarten feststellen zu können, wird eine zyklische Belastung aufgebracht, deren Verlauf neben den Geometrie- und Materialdaten der Struktur in Abbildung 6.18 angegeben ist.

Zur Berechnung der Strukturantwort und der Sensitivitäten bezüglich der Balkenhöhe mit der Methode der Finiten Elemente werden  $4 \times 40$  unterintegrierte Serendipity-Scheibenele-

mente verwendet. Die Last–Verschiebungsdiagramme der Vertikalverschiebung des Lastangriffspunktes  $A$  sowie deren Sensitivitäten sind in Abbildung 6.19 dargestellt. Dort ist auf der linken Seite erst bei Entlastung bzw. Lastumkehr und erneutem Fließen ein Unterschied in der Verschiebung des Lastangriffspunktes für die verschiedenen Verfestigungsarten bzw.  $\Theta$ -Werte zu erkennen. Der Zeitpunkt des Fließens bei Lastabnahme bzw. Lastumkehr ist von der Verfestigungsart und den bereits vorhandenen plastischen (irreversiblen) Verzerrungen bei der zuvor aufgetragenen Belastung abhängig. Daher ergeben sich nach Beendigung des Lastzyklus ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) unterschiedliche, bleibende Verformungen. Analoges gilt auch für die Sensitivitäten der vertikalen Verschiebung des Lastangriffspunktes, was auf der rechten Seite von Abbildung 6.19 dargestellt ist. Beispielhaft sind nur die analytisch ermittelten Sensitivitäten abgebildet.

Eine Abweichung zwischen den numerischen und den analytischen Sensitivitäten wäre optisch nicht zu erkennen, weshalb auf die Darstellung der numerisch ermittelten Sensitivitäten an dieser Stelle verzichtet wird. Die maximale prozentuale Abweichung zwischen den numerischen und den analytischen Sensitivitäten für die drei verschiedenen Kombinationen der Verfestigungsarten liegen für  $\Theta = 1.0$  bei 0.104 % und für  $\Theta = 0.5$  bei 0.275 %. Lediglich die maximale prozentuale Abweichung für rein kinematische Verfestigung ( $\Theta = 0.0$ ) ist mit 5.099 % relativ hoch. Dieser Fehler tritt jedoch nur für Werte der Sensitivitäten in der Nähe des Nulldurchgangs auf. Für die übrigen Werte der Sensitivitäten bei rein kinematischer Verfestigung liegt die Abweichung zwischen 0.1 % und 0.2 %. Zudem wurden für dieses Beispiel numerische Instabilitäten in Form von Konvergenzschwierigkeiten bei der Ermittlung der Strukturantwort festgestellt, was, wie im vorigen Beispiel (Entfestigung) beschrieben, die Qualität der (numerischen) Sensitivitäten negativ beeinflussen kann. Eine Steigerung der Qualität der Sensitivitäten kann durch eine feinere Diskretisierung in Raum und Zeit und durch Veränderung der Größe der Störung erzielt werden (vgl. Beispiel 6.4.3), was allerdings an dieser Stelle nicht näher untersucht wird.

Exemplarisch wird nun noch die Sensitivität der Verschiebung des Lastangriffspunktes für rein isotrope Verfestigung ( $\Theta = 1.0$ ) bei geometrisch linearem und nichtlinearem Strukturverhalten gegenübergestellt (vgl. Abbildung 6.20). Elastoplastisches Materialverhalten wird weiterhin berücksichtigt.

Es zeigt sich, daß die Verläufe der Sensitivität der Vertikalverschiebung von Punkt  $A$

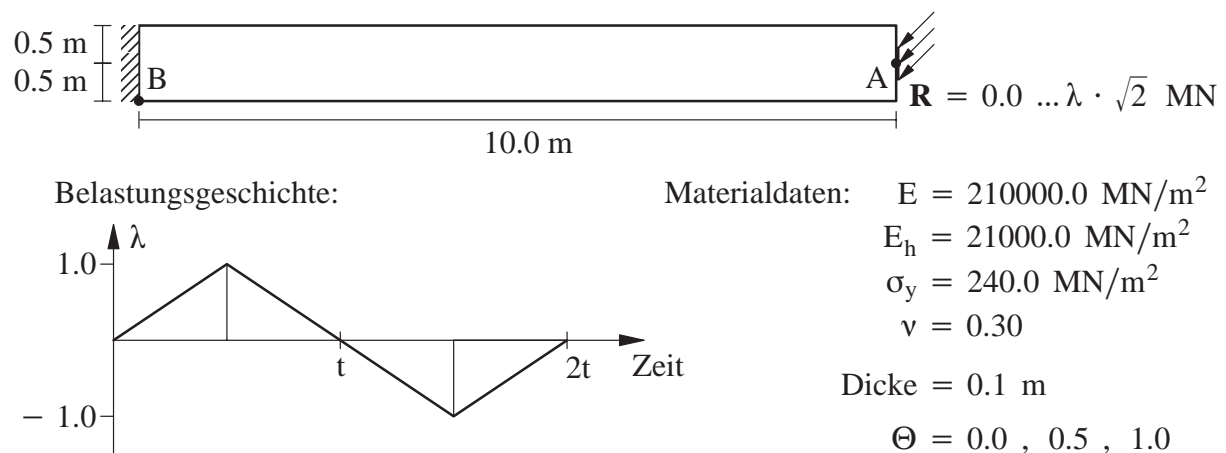
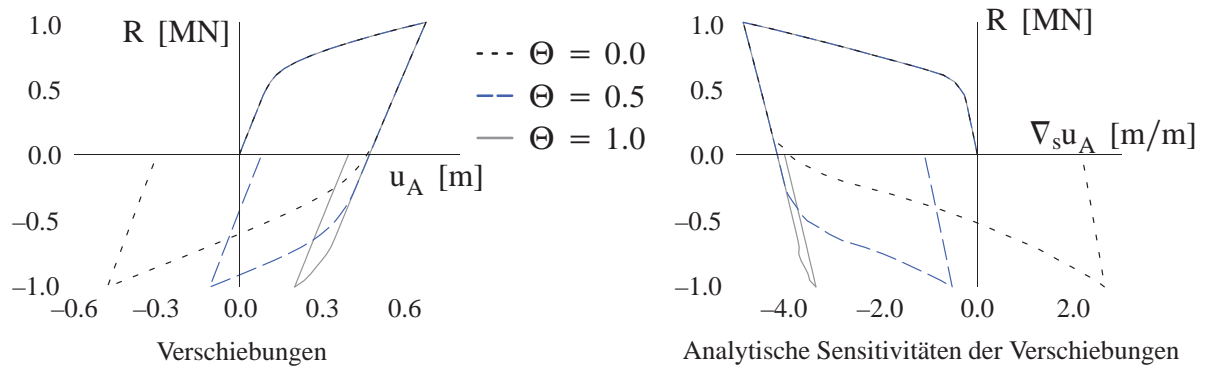


Abbildung 6.18: Geometrie, Materialdaten und Belastungsgeschichte

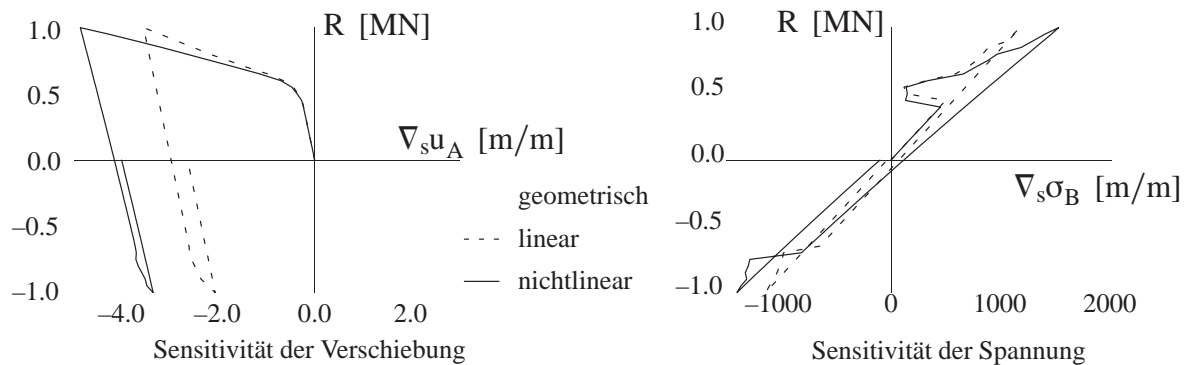
Abbildung 6.19: Vertikalverschiebungen in  $A$  und deren Sensitivitäten für  $\Theta = 0.0, 0.5, 1.0$ 

eine ähnliche Charakteristik aufweisen, jedoch die Absolutwerte infolge der zusätzlichen Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität sehr stark differieren. Analoges gilt für die Sensitivität der horizontalen Normalspannungen in Punkt  $B$ , die auf der rechten Seite von Abbildung 6.20 für geometrisch lineares und nichtlineares Strukturverhalten dargestellt ist. Zwischen der analytischen und der numerischen Methode zur Ermittlung der Sensitivität der Strukturantwort ist erneut kein Unterschied zu erkennen. Die zugehörigen Kurven sind nahezu deckungsgleich (vgl. Abbildung 6.20).

Dieses Beispiel verdeutlicht erneut, daß die in diesem Kapitel vorgestellte analytische Sensitivitätsanalyse korrekte Ergebnisse liefert, was hier speziell für geometrische und materielle Nichtlinearität für verschiedene Verfestigungsarten bei zyklischer Belastung aufgezeigt wurde.

## 6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Sensitivitätsanalyse für nichtlineare strukturmechanische Probleme diskutiert. Insbesondere wurde dabei auf die Besonderheiten bei der Behandlung geschichtsabhängiger Probleme, wie der Elastoplastizität, bei der die Sensitivität an manchen Stellen nicht definiert ist, was zu Diskontinuitäten führt, eingegangen. Da für derartige Probleme neben der Strukturantwort auch deren Sensitivität geschichtsabhängig

Abbildung 6.20: Numerische und analytische Sensitivitäten bei isotroper Verfestigung ( $\Theta = 1.0$ )

ist, muß diese nach jedem inkrementellen Schritt (Gleichgewichtszustand) durchgeführt werden. Im Gegensatz dazu genügt es für Probleme mit Potentialcharakter, wie der rein geometrischen Nichtlinearität, die Sensitivitätsanalyse am Ende des Belastungspfades in einem einzigen Schritt durchzuführen, unabhängig davon, in wie vielen inkrementellen Schritten dieser Endpunkt des Belastungspfades erreicht wird.

Aufgrund der zwingend erforderlichen inkrementellen Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse für geschichtsabhängige Probleme empfiehlt sich eine variationelle, direkte Methode, bei der zuerst die Sensitivität der Strukturantwort und anschließend die beliebiger Entwurfskriterien bestimmt wird. Für Formoptimierungsprobleme wird im allgemeinen, unabhängig vom mechanischen Problem, die direkte Methode favorisiert, da normalerweise die Anzahl der Optimierungsvariablen im Vergleich zur Anzahl der Entwurfskriterien gering ist. Für Topologieoptimierungsprobleme wird dagegen aufgrund der Vielzahl an Optimierungsvariablen die adjungierte Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse bevorzugt, die allerdings für geschichtsabhängige Probleme eher ungeeignet ist, was in diesem Kapitel und in Kapitel 5 erläutert wurde. Diese Einschätzung ist auch in der Literatur zu finden (vgl. VIDAL [238], KLEIBER ET AL. [110]). Da die Verwendung der direkten Methode für Topologieoptimierungsprobleme jedoch sehr rechenintensiv ist, werden zur numerischen Behandlung oftmals vereinfachende Annahmen getroffen, die dann nur für spezielle Optimierungsprobleme verwendet werden können. Eine dieser Methoden ist die von MAUTE ET AL. [139] vorgestellte Methode zur Sensitivitätsanalyse für die Maximierung der Duktilität, auf die im nächsten Kapitel kurz eingegangen wird.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine variationelle, direkte Methode zur analytischen Sensitivitätsanalyse für beliebige Optimierungsvariablen hergeleitet, um Form- aber auch Topologieoptimierungsprobleme behandeln zu können. Materielle Nichtlinearität in Form der Elastoplastizität mit Ver- und Entfestigung bei gleichzeitiger Berücksichtigung großer Verformungen können mit dieser Methode bei der Sensitivitätsanalyse, die konsistent zum Algorithmus der Strukturantwort ist, berücksichtigt werden.

Das Auftreten von Diskontinuitäten in den Sensitivitäten wurde sowohl analytisch als auch numerisch anhand ausgewählter Beispiele aufgezeigt sowie deren numerische Behandlung und der Einfluß auf die Qualität der Ergebnisse diskutiert. Dabei wurde ebenfalls der Einfluß der Diskretisierung in Raum und Zeit verdeutlicht.

Die Qualität der vorgestellten Methode wurde anhand von Vergleichsrechnungen mit Beispielen aus der Literatur sowie dem finiten Differenzenverfahren (numerische Sensitivitätsanalyse) verifiziert. Die Ergebnisse zeigen für die verschiedensten strukturemechanischen Probleme eine sehr gute Übereinstimmung. Mit der Kenntnis der Sensitivität der Strukturantwort können nun beliebige bzw. die für Optimierungsprobleme relevanten Sensitivitäten der Entwurfskriterien bestimmt werden. Einige, die im Rahmen dieser Arbeit für Optimierungsbeispiele verwendet werden, sind im nachfolgenden Kapitel angegeben.

# Kapitel 7

## Auswertung der Entwurfskriterien

Die Behandlung von abstrakten Optimierungsproblemen mit Hilfe von Gradientenmethoden, wie z.B. dem SQP-Verfahren, erfordert die Ableitung der LAGRANGE-Funktion nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  (vgl. Kapitel 2). Die Ableitung der LAGRANGE-Funktion beinhaltet wiederum die der Zielfunktion und der Nebenbedingungen (vgl. Gleichung (2.8)). Einige dieser Entwurfskriterien, wie beispielsweise das Gewicht oder das Volumen der Struktur, basieren auf der Geometrie des zu optimierenden Tragwerks. Andere hängen von der Strukturantwort ab. Dazu gehören beispielsweise Formänderungsenergie, Duktilität, Spannungsausgleichsfunktion, Verschiebungen, Spannungen, Eigenfrequenzen oder der kritische Lastfaktor. Diese Kriterien sind in Tabelle 2.1 in Kapitel 2 zusammengefaßt.

Wie in den Kapiteln 5 und 6 beschrieben, gibt es mehrere Möglichkeiten, die Ableitungen (Sensitivitäten) dieser Entwurfskriterien zu ermitteln. Mit der adjungierten Sensitivitätsanalyse werden direkt die Sensitivitäten der Entwurfskriterien bestimmt, ohne zuvor die der Strukturantwort berechnen zu müssen. Allerdings muß die adjungierte Sensitivitätsanalyse für jedes Entwurfskriterium neu hergeleitet und implementiert werden. Besonders bei Problemen der Topologieoptimierung bietet sich diese Vorgehensweise an, da in der Regel nur wenige Entwurfskriterien (meistens nur die Formänderungsenergie als Zielfunktion und die Masse als einzige Nebenbedingung) zu berücksichtigen sind. Zudem ist die Anzahl der Optimierungsvariablen im Vergleich zu Problemen der Formoptimierung wesentlich größer, was wiederum für die adjungierte Methode spricht.

Die Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse, bei der zuerst die Sensitivität der kompletten Strukturantwort ermittelt wird, bietet jedoch einige Vorteile in bezug auf Variabilität und Effizienz bei geschichtsabhängigem Materialverhalten. Ist die Sensitivität der Strukturantwort bekannt, so können die Ableitungen beliebiger, auf der Strukturantwort basierender Entwurfskriterien bestimmt werden. Außerdem ist dieses direkte Vorgehen für Probleme der Formoptimierung besonders effizient, da die Anzahl der Optimierungsvariablen normalerweise unter der der Entwurfskriterien liegt (vgl. Kapitel 5). Bei geschichtsabhängigen Strukturproblemen ist die Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse fast unumgänglich.

Nachfolgend werden die Ableitungen einiger Entwurfskriterien gebildet. Die Sensitivitäten der Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}$ , der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  bzw.  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ , der Verzerrungen  $\nabla_s \mathbf{E}_{t+1}$  bzw.  $\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ , wie auch der plastischen Verzerrungen  $\nabla_s \mathbf{E}_{t+1}^{pl}$  bzw.  $\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl}$  und der internen Variablen  $\nabla_s \mathbf{q}_{t+1}$  sind bei Verwendung des in Kapitel 6 vorgestellten Algorithmus zur Sensitivitätsanalyse bei elastoplastischem Materialverhalten und großen Verschiebungen bekannt. Die Ermittlung der Sensitivität von Nebenbedingungen, wie

Verschiebungen und Spannungen, ist demnach mit der Kenntnis der Sensitivität der Strukturantwort unproblematisch und automatisch gegeben.

Im nachfolgenden Kapitel werden einige Optimierungsbeispiele zur Minimierung des Gewichts unter Berücksichtigung bestimmter Nebenbedingungen behandelt. Neben Verschiebungs- und Spannungsnebenbedingungen ist dies die Berücksichtigung des kritischen Lastfaktors  $\lambda_c$ . Als weitere Zielfunktion kommt die Maximierung der Duktilität zum Einsatz. Auch hier ist die Einbindung der kritischen Last als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem für bestimmte Beispiele erforderlich. Die Duktilität ist ein integraler Ausdruck und daher nach jedem Inkrement (Gleichgewichtszustand) zu bestimmen. Entsprechendes gilt für die Sensitivität der Duktilität. Nachfolgend werden diese Gradienten hergeleitet.

## 7.1 Sensitivität der Duktilität

Nach Tabelle 2.1 ist die Duktilität im Parameterraum  $\Omega_\xi$  folgendermaßen definiert:

$$f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega_\xi} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}_{t+1} d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (7.1)$$

Diese Gleichung gilt sowohl bei geometrischer Linearität  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$  als auch bei geometrischer Nichtlinearität  $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ . Aufgrund des (materiell) nichtlinearen Zusammenhangs zwischen den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bzw.  $\mathbf{E}$  und den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  bzw.  $\mathbf{S}$  (vgl. Gleichung (4.49)) ist dieses Integral entlang den Verzerrungen auszuwerten. Die Ableitung von Gleichung (7.1) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  liefert:

$$\nabla_s f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega_\xi} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} (\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1} d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| + \boldsymbol{\sigma}_{t+1} \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| + \boldsymbol{\sigma}_{t+1} d\boldsymbol{\varepsilon} \nabla_s |\mathbf{J}|) d\Omega_\xi \quad (7.2)$$

Bei Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse sind alle Ableitungen, die in Gleichung (7.2) benötigt werden, bekannt. Damit läßt sich die Sensitivität der Duktilität bestimmen. In MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] wird für Probleme der Topologieoptimierung die Duktilität von Scheibentragwerken für den ebenen Spannungszustand und eine lineare Kinematik maximiert. Da die direkte Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse für Topologieoptimierungsprobleme zwar möglich, wie auch in Kapitel 6 gezeigt, jedoch extrem rechenintensiv ist, wurde in den obengenannten Arbeiten eine selbstadjungierte Sensitivitätsanalyse hergeleitet und implementiert. Das Ergebnis der in MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] beschriebenen Topologieoptimierungsprozedur dient in Kapitel 8 als Startentwurf für eine Formoptimierung. Aus diesem Grund wird die Herleitung für diese selbstadjungierte Sensitivitätsanalyse kurz skizziert und auf ihre vereinfachenden Annahmen und Vernachlässigungen eingegangen. Details sind MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] zu entnehmen.

### 7.1.1 Selbstadjungierte Sensitivitätsanalyse der Duktilität

Grundsätzliche Voraussetzungen bei dieser Herleitung sind eine lineare Kinematik (geometrisch linear) und ein durch die Optimierung unveränderliches Gebiet  $\Omega_X$  bzw.  $\Omega_\xi$ , was



typisch für die materielle Topologieoptimierung ist. Diese Annahmen liefern:

$$\nabla_s |\mathbf{J}| = 0 \quad ; \quad \nabla_s (\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

Ausgegangen wird bei dieser Herleitung von folgender Gleichung für die Duktilität, die Gleichung (7.1) entspricht.

$$f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega_\xi} \int_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (7.4)$$

$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ergibt sich aus der Vorgabe der Verschiebung  $\tilde{\mathbf{u}}$  eines bestimmten Freiheitsgrades. Als Gleichgewichtsbedingung wird, im Gegensatz zur Herleitung der Sensitivitätsanalyse in Kapitel 6, ein inkrementeller Ausdruck verwendet (inkrementelle Gleichgewichtsbedingung). Dieser beschreibt das Gleichgewicht der inneren und äußeren Zuwächse (Inkrememente).

$$\int_{\Omega_\xi} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi = \lambda \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \quad (7.5)$$

Der Einfachheit halber werden hier nur Oberflächenlasten berücksichtigt. Dabei sind  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\lambda$  inkrementelle Größen. Die inkrementelle Beziehung zwischen den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wird wie folgt approximiert:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.6)$$

Diese Gleichung ist für endliche Inkremente im allgemeinen nicht zulässig, da die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  zu einem bestimmten Lastniveau (im allgemeinen am Ende des Inkrements zum Zeitpunkt  $t + 1$ ) aufgestellt wird. Um diesen 'Fehler' bei Verwendung endlicher Inkremente wieder auszugleichen, wird bei der Implementierung dieser Sensitivitätsanalyse eine gemittelte Tangente verwendet (vgl. MAUTE ET AL. [139]). Die Kombination der Ableitungen der Gleichungen (7.4)–(7.6) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  ergibt für die Ableitung der Duktilität folgenden Zusammenhang:

$$\nabla_s f_D(\mathbf{s}) = \int_{\Omega_\xi} \int_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - 2 \int_{\Gamma_\xi} \int_{\tilde{\mathbf{u}}} \int_{\lambda} \nabla_s d\lambda \mathbf{t} d\mathbf{u} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \quad (7.7)$$

Dabei wurden die virtuellen Verschiebungen und Verzerrungen den inkrementellen Ausdrücken gleichgesetzt ( $\delta \mathbf{u} = d\mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Außerdem wurde angenommen, daß die äußeren Lasten designunabhängig sind ( $\nabla_s \mathbf{t} = \mathbf{0}$ ). Die Ableitung des inkrementellen Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s d\lambda$  bzw.  $\nabla_s \lambda$  verschwindet bei Vorgabe eines konstanten Lastniveaus für die Optimierungsaufgabe. Bei der Vorgabe einer konstanten Verschiebung eines bestimmten Freiheitsgrades ist diese Ableitung nicht null und, wie bereits in Kapitel 6 beschrieben, mit Hilfe der inkrementellen Sensitivitäten der Verschiebungen bei Lastvorgabe zu ermitteln. Bei der adjungierten Vorgehensweise sind diese jedoch nicht bekannt. Für den Sonderfall, daß nur der kontrollierte Freiheitsgrad belastet ist, kann die Sensitivität des inkrementellen Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda$  einfach bestimmt werden, da das Skalarprodukt von äußerer Last und den inkrementellen Verschiebungen für jedes Inkrement konstant ist und dessen Ableitung damit verschwindet (vgl. MAUTE ET AL. [139]). Die Sensitivität der Duktilität ist dann (bei Verschiebungsvorgabe):

$$\nabla_s f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega_\xi} \int_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \nabla_s \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (7.8)$$

Die Sensitivität der Duktilität ist demnach nur noch von der Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$ , die in MAUTE ET AL. [139] für die VON MISES-Fließbedingung mit linearer Verfestigung für den ebenen Spannungszustand bestimmt wird (vgl. Anhang B), abhängig. Deren approximative Ermittlung wird nachfolgend erläutert. Die elastoplastische Materialtangente ist bei der  $J_2$ -Plastizität u.a. eine Funktion des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\gamma$  und eine Funktion des Fließvektors bzw. bei assoziierter Plastizität eine Funktion der Normalen auf die Fließfläche. Diese ist wiederum vom aktuellen Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  abhängig. Da diese Größen von der Strukturantwort abhängen, sind ihre Ableitungen bei der adjungierten Vorgehensweise nicht bekannt. Allerdings ist bei der Topologieoptimierung im allgemeinen die Änderung des Spannungszustandes aufgrund einer Variation einer Optimierungsvariablen sehr gering, weshalb diese Ableitungen bei der Bildung der Ableitung der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  vernachlässigt werden können. Numerische Untersuchungen in MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] haben dies bestätigt. Daher wird  $\mathbf{C}^{ep}$  lediglich nach denjenigen Größen abgeleitet, die direkt von den Optimierungsvariablen abhängig sind. Dies sind der Elastizitätsmodul  $E$  und der tangentielle Verfestigungsmodul  $E_h$ . Damit lautet die approximative Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente:

$$\nabla_s \mathbf{C}^{ep} \approx \nabla_E \mathbf{C}^{ep} \nabla_s E + \nabla_{E_h} \mathbf{C}^{ep} \nabla_s E_h \quad (7.9)$$

Die Ableitungen der Materialgrößen von  $E$  bzw.  $\mathbf{C}$  und  $E_h$  sind in den Gleichungen (6.86)–(6.88) angegeben. Die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  ist von der Fließspannung  $\sigma_y$  unabhängig, was jedoch nicht für die Duktilität gilt. Da die Duktilität ein integraler Ausdruck entlang der Verzerrungen ist, wirkt sich eine Änderung der Fließspannung infolge einer Variation der Optimierungsvariablen auf diesen integralen Ausdruck aus. Der Zeitpunkt, wann Fließen einsetzt, variiert in Abhängigkeit der Fließspannung, und somit variiert auch der Anteil der elastischen und plastischen Verzerrungen an den gesamten Verzerrungen; d.h. die Integrationsgrenzen für die einzelnen Anteile hängen von der Fließspannung ab. Da für diese Herleitung der Sensitivitätsanalyse eine inkrementelle Gleichgewichtsbeziehung verwendet wird (vgl. Gleichung (7.5)), muß in dem Moment, in dem Fließen an einem Integrationspunkt einsetzt, ein additiver Term (Sprungterm) für die Sensitivität der Duktilität berücksichtigt werden. Der Grund hierfür ist, daß wegen der inkrementellen Gleichgewichtsbedingung die Sensitivität der Integrationsgrenzen nicht erfaßt wird. Für Details sei an dieser Stelle auf MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] verwiesen.

Bei der in Kapitel 6 vorgestellten Sensitivitätsanalyse ist dieser Sprungterm implizit bereits berücksichtigt, da vom totalen Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t + 1$  in inkrementierter Form bei der Herleitung ausgegangen wird. Daher sind die Sensitivitäten der Spannungen und Verzerrungen zum Zeitpunkt  $t + 1$  bekannt. Eine eventuelle Variation der Integrationsgrenzen ist demnach automatisch in dieser Formulierung enthalten. Die beschriebene Diskontinuität in den Sensitivitäten infolge einer nicht-differenzierbaren Spannungs-Dehnungsbeziehung ist durch die Verwendung der Ableitung der konsistenten, elastoplastischen bzw. elastischen Materialtangente bei dieser selbstadjungierten Sensitivitätsanalyse beinhaltet.

In Abschnitt 7.2, bei der Bestimmung des kritischen Lastfaktors, ist die Ableitung der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  ebenfalls erforderlich. Da bei Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse die Ableitungen der Strukturantwort bekannt sind, kann die Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente exakt bestimmt werden.

### 7.1.2 Probleme bei der Maximierung der Duktilität

Die Behandlung der Zielfunktion 'Maximierung der Duktilität' bringt einige numerische bzw. theoretische Schwierigkeiten mit sich. Wie in Beispiel 8.1 in Kapitel 8 zu sehen ist, wird bei manchen Optimierungsaufgaben durch die Maximierung der Duktilität eine Topologie bzw. Form mit einem möglichst ausgeglichenen Spannungszustand generiert. Im Fall von Elastoplastizität bedeutet dies, daß viele und große Bereiche der Struktur gegen Ende des aufgebrachtten Last- oder Verschiebungspfades plastizieren. Selbst geringe Designänderungen einer bereits optimumsnahen Geometrie können daher erhebliche Unterschiede in der Strukturantwort bewirken. Aufgrund der in Kapitel 6 beschriebenen Problematik der Existenz von Ableitungen am Übergangspunkt vom elastischen in den plastischen Bereich und umgekehrt, wirken sich diese Unterschiede in der Strukturantwort besonders stark bei der Ermittlung deren Sensitivitäten aus. Daher ist die Schrittweite im Optimierungsprozeß sehr klein zu wählen, da sonst aufgrund der stark wechselnden Sensitivitäten Oszillationen im Optimierungsverlauf auftreten können. Allerdings ist das Auffinden des Optimums aufgrund der kleinen Schrittweite sehr rechenintensiv.

Normalerweise sind Optimierungsprobleme Minimumsuchen. Anders ist das bei der Maximierung der Duktilität. Die daraus resultierende Problematik wird mit Hilfe eines Vergleichs mit der Maximierung der Steifigkeit, die jedoch für lineares Strukturverhalten über die Minimierung der Formänderungsenergie ermittelt wird, verdeutlicht. Bei Vorgabe einer Last (konstantes Lastniveau) ist die Minimierung der inneren Energie bei linear elastischem Materialverhalten durch eine Verringerung der Verschiebungen zu erreichen. Dieser Sachverhalt ist auf der linken Seite von Abbildung 7.1 verdeutlicht. Die Größen des Ausgangsdesigns sind mit '0' gekennzeichnet, die eines bezüglich der Zielfunktion verbesserten Entwurfs mit '1'. Die Maximierung der Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten kann dagegen zum einen durch die Maximierung der Steifigkeit im elastischen Bereich und ideal plastischem Verhalten im plastischen Bereich oder durch Vergrößern der Verschiebungen erreicht werden (vgl. Abbildung 7.1), was jedoch eine verringerte Steifigkeit voraussetzt.

Ein ähnliches Problem ergibt sich bei Vorgabe einer Verschiebung an einem bestimmten Freiheitsgrad. Eine Steigerung der Duktilität kann für den kontrollierten (vorgegebenen) Freiheitsgrad  $j$  nur durch eine Steigerung der maximal aufnehmbaren äußeren Last erzielt werden. Für alle anderen Freiheitsgrade  $i$  besteht jedoch die Möglichkeit, die Duktilität entweder durch Steigern der Last oder (und) durch Vergrößern der Verschiebungen zu erhöhen (vgl. Abbildung 7.2).

Diese Problematik führt dazu, daß durch den Optimierungsprozeß Systeme generiert wer-

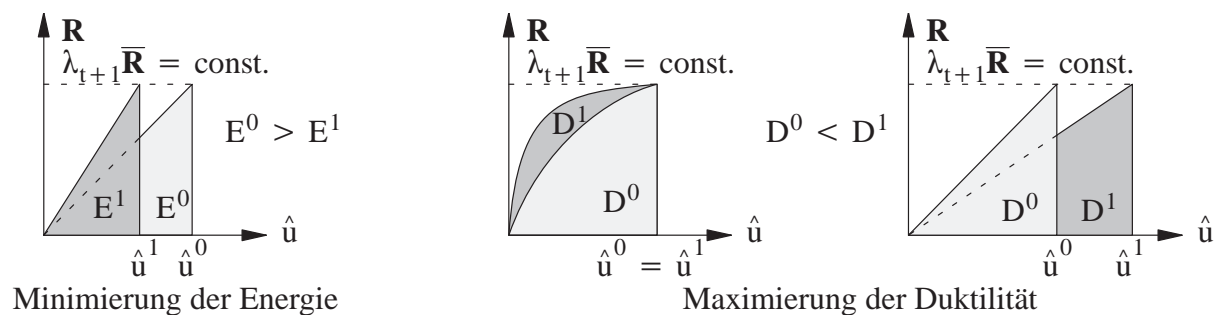


Abbildung 7.1: Optimierung bei Lastvorgabe

kontrollierter DOF 'j':  $\hat{u}_j = \text{const.}$

übrige DOFs 'i':  $\hat{u}_i$

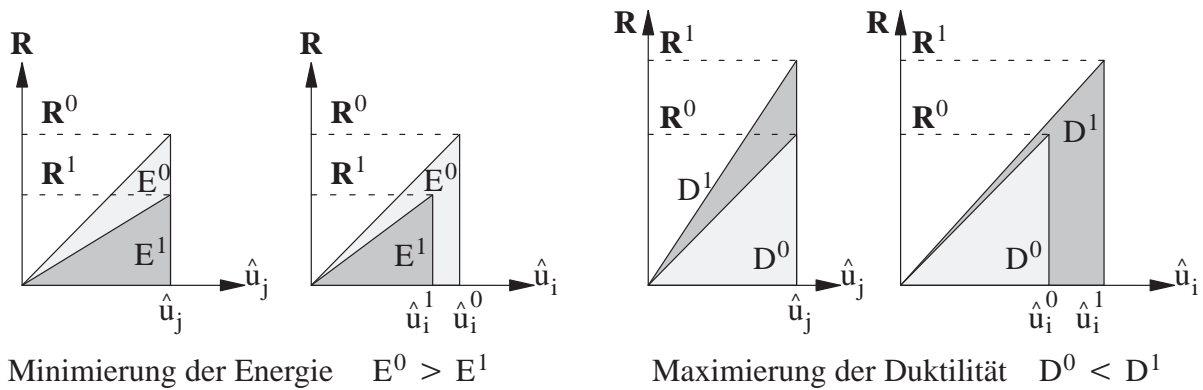


Abbildung 7.2: Optimierung bei Verschiebungsvorgabe

den können, die unter der vorgegebenen Last bzw. Verschiebung annähernd kinematisch sind bzw. sehr große Verformungen aufweisen (z.B. HEIM [91]). Dies deutet auf ein schlecht gestelltes Optimierungsproblem hin. Ein analoges Problem tritt bei der Minimierung der Formänderungsenergie nicht auf (vgl. linke Seite von Abbildung 7.2). Abhilfe schaffen zusätzliche Verschiebungsnebenbedingungen. Allerdings ist sowohl deren Anzahl als auch deren Plazierung im Tragwerk von verschiedenen Bedingungen, wie Ausgangsgeometrie oder Last- und Lagerbedingungen, abhängig. Eine andere Möglichkeit ist die Beschränkung des Skalarprodukts der Verschiebungen ( $g_u(\mathbf{s}) = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|_{zul}} - 1 \leq 0$ ).  $\|\mathbf{u}\|_{zul}$  ist dabei ein vorgegebener skalarer Wert, z.B. das Skalarprodukt der Verschiebungen der Ausgangsgeometrie. Durch diese Nebenbedingung werden die Verschiebungen nicht an einigen wenigen Stellen im Tragwerk kontrolliert, sondern es wird das globale Verschiebungsverhalten in Betracht gezogen. Die Ableitung dieser Nebenbedingung erfordert allerdings die Kenntnis der Sensitivität der Verschiebungen, die nur im Fall der direkten Sensitivitätsanalyse (vgl. Kapitel 6) bekannt ist. Dies gilt auch für den Fall, wenn nur einzelne Verschiebungen als Nebenbedingungen berücksichtigt werden.

## 7.2 Sensitivität des kritischen Lastfaktors

Je nach zugrundegelegtem Eigenwertproblem berechnet sich der kritische Lastfaktor  $\lambda_c$  gemäß Gleichung (4.92) oder (4.93). In beiden Fällen setzt sich dieser aus den Eigenwerten  $\tilde{\lambda}_i$  und dem Laststeigerungsfaktor  $\lambda^{act}$ , für den die Eigenwertanalyse durchgeführt wird, zusammen. Die Ableitung der Gleichungen (4.92) und (4.93) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  liefert folgende Zusammenhänge:

$$\nabla_s \lambda_c = \nabla_s \tilde{\lambda}_i + \nabla_s \lambda^{act} \quad (7.10)$$

$$\text{bzw. } \nabla_s \lambda_c = \nabla_s \tilde{\lambda}_i \lambda^{act} + \tilde{\lambda}_i \nabla_s \lambda^{act} \quad (7.11)$$

Die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda^{act}$  entfällt für konstante Lasten bzw. konstante Lastinkremente. Andernfalls berechnet sich diese Ableitung bei Verschiebungsvorgabe nach Gleichung (6.80) bzw. nach Gleichung (6.84) bei der Vorgabe einer konstanten Bogenlänge. Die Sensitivität der Eigenwerte ergibt sich durch Ableiten des zugrundegelegten Eigenwertproblems. In Kapitel 4 sind verschiedene Möglichkeiten für Eigenwertprobleme angegeben (vgl. Gleichungen (4.85)–(4.88), (4.90), (4.91)). Unabhängig davon,

welches Eigenwertproblem verwendet wird, ist die Ableitung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\nabla_s \mathbf{K}_T$  zu bilden. Selbst wenn  $\mathbf{K}_T$  als solche nicht direkt in das Eigenwertproblem eingeht, so ist diese jedoch in die entsprechenden Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{el}$ ,  $\mathbf{K}_{pl}$ ,  $\mathbf{K}_u$ ,  $\mathbf{K}_g$  bzw.  $\mathbf{K}_q$  zu zerlegen. Nach Gleichung (4.30) ergibt sich für die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  bei elastoplastischem Materialverhalten und geometrischer Nichtlinearität:

$$\mathbf{K}_T = \underbrace{\int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi}_{\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u} + \underbrace{\int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi}_{\mathbf{K}_g} \quad (7.12)$$

Der Operator  $\mathbf{B}_u$  ist dabei eine Funktion der Verschiebungen  $\mathbf{u}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$ . Alternativ kann  $\mathbf{B}_u(\mathbf{u}_{t+1})$  auch durch den Ausdruck  $\mathbf{B}_u(\mathbf{u}_{t+1}) = \mathbf{B}_u(\mathbf{u}_t) + 2\mathbf{B}_q(\mathbf{u})$  ersetzt werden (vgl. Gleichung (6.64)).  $\mathbf{K}_e$  beinhaltet lediglich die linearen Ableitungsoperatoren  $\mathbf{B}_L$  und die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$ . Eine Aufspaltung von  $\mathbf{K}_e$  in  $\mathbf{K}_{el}$  und  $\mathbf{K}_{pl}$  (vgl. Gleichung (4.89)) erlaubt die Aufstellung beliebiger Eigenwertprobleme durch das Bilden geeigneter Summen und Differenzen der verschiedenen Anteile der tangentiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ . Die Ableitung von Gleichung (7.12) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{K}_T &= \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u)^T \nabla_s \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u)^T \mathbf{C}^{ep} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u) \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \nabla_s \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &+ \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \end{aligned} \quad (7.13)$$

Die Ableitungen der Operatoren  $\nabla_s \mathbf{B}_L$  bzw.  $\nabla_s \tilde{\mathbf{B}}_L$  sind, wie in Kapitel 6 bereits erläutert, ausschließlich von der Ableitung der Geometrie abhängig, während der Operator  $\mathbf{B}_u$  bzw. dessen Ableitung  $\nabla_s \mathbf{B}_u$  zusätzlich von den Verschiebungen  $\mathbf{u}_{t+1}$  zum Zeitpunkt  $t + 1$  bzw. deren Sensitivität  $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}$  abhängig ist. Die Ableitung der Strukturantwort ist jedoch bekannt, d.h.  $\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}$  und  $\nabla_s \tilde{\mathbf{S}}_{t+1}$  können in die obige Gleichung eingesetzt werden. Einzige noch zu bestimmende Größe ist die Ableitung der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$ , die für den allgemeinen Fall in Gleichung (4.77) angegeben ist.  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  kann als eine Funktion mehrerer Ableitungen angegeben bzw. auf folgende Form reduziert werden:

$$\nabla_s \mathbf{C}^{ep} = \nabla_s \mathbf{C}^{ep} (\nabla_s \mathbf{u}_{t+1}, \nabla_s \mathbf{S}_{t+1}, \nabla_s \mathbf{q}_{t+1}, \nabla_s \gamma) \quad (7.14)$$

Um die endgültige Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  bestimmen zu können, sind diverse Ableitungen, wie beispielsweise  $\nabla_s \tilde{\mathbf{C}}, \nabla_s \dot{\mathbf{C}}, \nabla_s \tilde{\mathbf{Q}}, \nabla_s \mathbf{r}, \nabla_s \mathbf{h}, \nabla_s \Phi$ , zu bilden. Diese lassen sich jedoch alle aus der bekannten Sensitivität der Strukturantwort berechnen. Auf die Darstellung einer analytischen Gleichung für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall zur Bestimmung der Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$ , die sich durch mehrfaches Anwenden der Ketten- und Quotientenregel ergibt, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit an dieser Stelle verzichtet. Jedoch ist eine analytische Gleichung zur Bestimmung der Sensitivität der elastoplastischen Materialtangente für den Spezialfall des ebenen Spannungszustandes und der VON MISES-Fließbedingung mit linearer Ver- und Entfestigung in Anhang D angegeben.

Mit der Kenntnis von  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  kann die Ableitung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix bzw. ihrer einzelnen Steifigkeitsmatrizen bestimmt werden.

Exemplarisch wird die Ermittlung der Sensitivität der Eigenwerte  $\nabla_s \tilde{\lambda}_i$  für folgendes (allgemeines) Eigenwertproblem aufgezeigt. Im Gegensatz zu den in Kapitel 4 definierten Eigenwertproblemen ist dieses mit dem transponierten Eigenvektor  $\phi_i^T$  vormultipliziert. Bei dieser Vorgehensweise entfällt die Bestimmung der Sensitivität der Eigenvektoren  $\nabla_s \phi_i$ .

$$\phi_i^T \left( \mathbf{K}_1 + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_2 \right) \phi_i = 0 \quad (7.15)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach den Optimierungsvariablen liefert:

$$\begin{aligned} & \nabla_s \phi_i^T \underbrace{\left( \mathbf{K}_1 + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_2 \right) \phi_i}_{=0} + \phi_i^T \left( \nabla_s \mathbf{K}_1 + \nabla_s \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_2 + \tilde{\lambda}_i \nabla_s \mathbf{K}_2 \right) \phi_i \\ & + \underbrace{\phi_i^T \left( \mathbf{K}_1 + \tilde{\lambda}_i \mathbf{K}_2 \right)}_{=0} \nabla_s \phi_i = 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Für die Sensitivität der Eigenwerte  $\nabla_s \tilde{\lambda}_i$  ergibt sich demnach:

$$\nabla_s \tilde{\lambda}_i = - \frac{\phi_i^T \left( \nabla_s \mathbf{K}_1 + \tilde{\lambda}_i \nabla_s \mathbf{K}_2 \right) \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{K}_2 \phi_i} \quad (7.17)$$

Je nachdem, welches Eigenwertproblem gewählt wird, sind die Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$  bzw. deren Ableitungen entsprechend zu ersetzen.

Es sollte noch erwähnt werden, daß die numerische Sensitivitätsanalyse der Eigenwerte, die von einem Lastniveau in der Nähe eines kritischen Punktes (Durchschlagpunkt, Verzweigungspunkt) gestartet wird, nicht immer zuverlässige Ergebnisse liefert, weshalb in diesen Fällen die analytische Methode vorzuziehen ist. In Kapitel 8 wird anhand eines Beispiels der Einfluß der unterschiedlichen Eigenwertprobleme (vgl. Kapitel 4) auf die Optimierungsergebnisse verdeutlicht und bewertet.

# Kapitel 8

## Anwendungen in der Optimierung

In den Kapiteln 5 und 6 wurden Methoden zur Berechnung der Sensitivität für verschiedene mechanische Problemstellungen vorgestellt und hergeleitet. Die Kenntnis der Sensitivitäten bestimmter Größen ist zur Behandlung von Optimierungsproblemen mit Hilfe von Gradientenmethoden, wie beispielsweise dem OC- und SQP-Algorithmus, notwendig.

In diesem Kapitel werden verschiedene Optimierungsprobleme unter Berücksichtigung des geschichtsabhängigen, elastoplastischen Materialverhaltens diskutiert. Außerdem werden große Verformungen (geometrische Nichtlinearität) und Stabilitätsprobleme im Optimierungsprozeß berücksichtigt. Als Zielfunktionen werden die Maximierung der Duktilität sowie die Minimierung des Gewichts im Vordergrund stehen. Je nach Zielfunktion ist die Gleichheitsnebenbedingung 'konstantes Gewicht' und/oder sind Ungleichheitsnebenbedingungen, wie beispielsweise maximal zulässige Verschiebungen, Spannungen und erforderlicher kritischer Lastfaktor, zu berücksichtigen.

Als Optimierungsvariablen werden bei der Topologieoptimierung die Dichten der Finiten Elemente gemäß des in Kapitel 3 vorgestellten SIMP-Ansatzes bei elastoplastischem Materialverhalten (vgl. MAUTE ET AL. [139], MAUTE [136]) und bei der Formoptimierung die Koordinaten der geometriebeschreibenden Kontroll-Knoten definiert. Die Lösung der nichtlinearen Optimierungsprobleme erfolgt mit den in Kapitel 2 beschriebenen OC- bzw. SQP-Algorithmen mit BFGS-Update zur Approximation der zweiten Ableitungen (HESSE-Matrix). Für die Lösung in der Topologieoptimierung wird ein OC-Verfahren verwendet (vgl. MAUTE [136]), und die Formoptimierungsprobleme werden mittels des SQP-Verfahrens gelöst. Sowohl die Struktur- als auch die Sensitivitätsanalyse erfolgt mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (vgl. Kapitel 4). Zur Berechnung werden ausschließlich Scheibenelemente eingesetzt. Zur Abgrenzung zulässiger Spannungszustände von den unzulässigen wird die VON MISES-Fließbedingung für den ebenen Spannungszustand verwendet. Außerdem wird lineare, isotrope und kinematische Verfestigung angenommen. Genauere Angaben sind den entsprechenden Abbildungen zur Definition und Beschreibung der Beispiele zu entnehmen.

### 8.1 Beispiel 1: Maximierung der Duktilität mittels kombinierter Topologie- und Formoptimierung

Mit Hilfe dieses Beispiels wird zum einen die Notwendigkeit der Berücksichtigung nichtlinearer Effekte in der Optimierung aufgezeigt. Außerdem zeigt dieses Beispiel sehr deut-

lich, daß zur Bestimmung des Optimums neben der Topologieoptimierung zur Ermittlung des prinzipiellen (optimalen) Tragwerksaufbaus eine anschließende Formoptimierung zur exakten Detailermittlung notwendig ist.

Die Zielfunktion dieses Optimierungsbeispiels ist die Maximierung der Duktilität bei vorgegebener, anfangs gleichmäßig verteilter Masse im Entwurfsraum. Die Geometrie, die Last- und Lagerbedingungen des Optimierungsproblems sowie die Materialdaten sind Abbildung 8.1 zu entnehmen. Dieses Beispiel wurde bereits in MAUTE ET AL. [139] bzw. MAUTE [136] behandelt.

Der Balken ist auf beiden Seiten fest eingespannt und wird in der Mitte der oberen Kante vertikal belastet. Die belasteten Freiheitsgrade sind in vertikaler Richtung gekoppelt. Die Verschiebung in Balkenmitte am Punkt  $A$  wird gleichmäßig in 50 Schritten bis auf den Wert  $\hat{u}_A = 0.25\text{ m}$  gesteigert. Für die Wahl der Penalty-Faktoren  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  (vgl. Gleichung (3.14)) hat sich herausgestellt, daß Werte zwischen 2.0 und 3.0 keinen nennenswert unterschiedlichen Einfluß auf das Optimierungsergebnis und die Konvergenz haben. Je größer diese Werte gewählt werden, um so eindeutiger wird die zu optimierende Struktur in Bereiche mit Vollmaterial und leere Bereiche eingeteilt. Die Steifigkeit der Struktur wird hauptsächlich durch den Elastizitätsmodul  $E$  und den Verfestigungsmodul  $E_h$  bestimmt, weshalb deren Penalty-Faktoren  $\beta_1$  und  $\beta_2$  größer als der der Fließspannung ( $\beta_3$ ) gewählt werden. Zu große Werte können allerdings zu numerischen Schwierigkeiten führen. Aufgrund der Symmetrie des Optimierungsproblems genügt die Betrachtung des halben Systems. Die Struktur- und Sensitivitätsanalyse erfolgt mit der Methode der Finiten Elemente, wobei biquadratische, unterintegrierte Serendipity-Scheibenelemente verwendet werden.

In einem ersten Schritt wird die optimale Topologie des beschriebenen Optimierungsproblems bestimmt. Der Topologieoptimierung liegt ein makroskopisches, isotropes Werkstoffmodell, bei dem die Dichten der Finiten Elemente die Optimierungsvariablen darstellen, zugrunde (vgl. SIMP-Ansatz in Kapitel 3). Zudem wird ein adaptiver Algorithmus eingesetzt, wie er in MAUTE & RAMM [138] für die adaptive Optimierung elastischer Strukturen vorgestellt wurde. Grund dafür ist neben der Steigerung der Effizienz infolge der Reduktion der Anzahl an Freiheitsgraden die Vermeidung gezackter Ränder und der dadurch entstehenden zahlreichen (geometrischen) Singularitäten, die im Fall eines elastoplastischen Materialverhaltens künstliches Fließen verursachen würden. Dieser Effekt und dessen mögliche Auswirkungen sind in MAUTE ET AL. [139] und MAUTE [136] diskutiert. Ein weiterer Vorteil der adaptiven Vorgehensweise ist die Generierung von

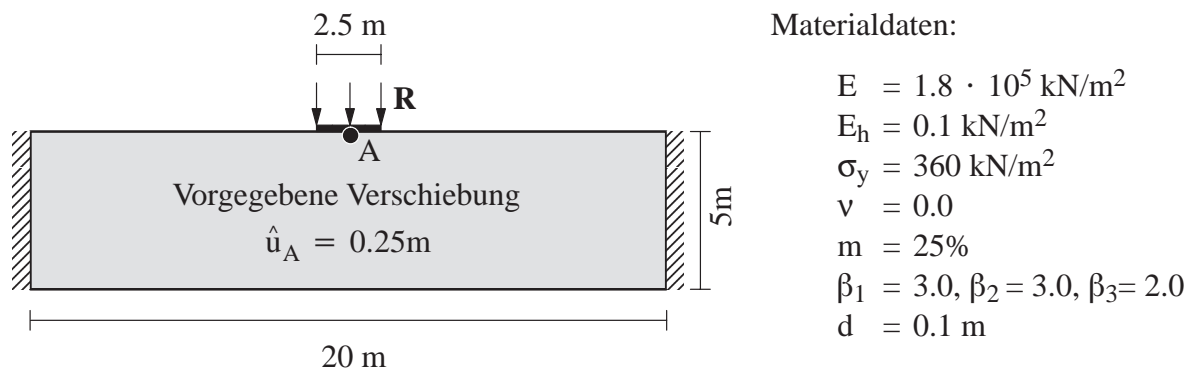


Abbildung 8.1: Geometrie und Materialdaten des Optimierungsproblems



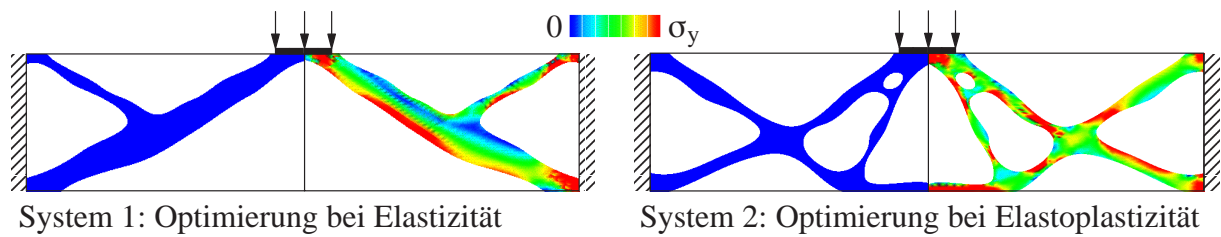


Abbildung 8.2: Ergebnisse durch Topologieoptimierung und VON MISES-Spannungen

formbeschreibenden Funktionen (vgl. Kapitel 3), deren Kontroll-Knoten direkt für eine anschließende Formoptimierung als Optimierungsvariablen verwendet werden können. Die Vernetzung der durch die formbeschreibenden Funktionen definierten Fläche erfolgt mit einem Freivernetzer nach der 'advancing front'-Methode (vgl. REHLE [179]). Bei der Berechnung sind mehrere adaptive Schritte erforderlich (vgl. MAUTE ET AL. [139]).

Die für die Topologieoptimierung erforderlichen Sensitivitäten werden mit dem in MAUTE ET AL. [139] bzw. MAUTE [136] und in Kapitel 7 dieser Arbeit kurz skizzierten Algorithmus bestimmt. Die Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems erfolgt mit einem OC-Algorithmus (vgl. MAUTE [136] bzw. Kapitel 2).

Zu Vergleichszwecken wird die optimale Topologie des in Abbildung 8.1 angegebenen Optimierungsproblems bei rein elastischem Materialverhalten ebenfalls adaptiv bestimmt ( $E = E_h, \sigma_y \rightarrow \infty$ ). Die optimalen Entwürfe auf der Basis eines elastischen und eines elastoplastischen Materialverhaltens sind in Abbildung 8.2 dargestellt. Diese enthalten ausschließlich Vollmaterial bzw. leere Bereiche.

Es ist deutlich zu erkennen, daß das gewählte mechanische Modell (hier speziell das Materialmodell) sehr starken Einfluß auf die optimale Topologie des Tragwerks hat. Zwar besitzt 'System 1', das auf der Basis eines elastischen Materialverhaltens bestimmt wurde, eine etwas höhere Steifigkeit im elastischen Bereich (vgl. Abbildung 8.4 und Tabelle 8.1), beginnt jedoch bei weiterer Belastung im Bereich der Auflager sehr stark zu fließen. Durch eine bessere Anordnung der Tragwerkskomponenten und eine gleichmäßigere Ausnutzung der Auflagerbereiche wird dieses Problem abgeschwächt. Ein derartiges Tragverhalten besitzt 'System 2', das mittels eines elastoplastischen Materialverhaltens generiert wurde. Die Ermittlung der optimalen Form der Struktur erfolgt mit Hilfe einer Formoptimierung. Die adaptive Prozedur bei der Topologieoptimierung erzeugt zur Geometriebeschreibung zahlreiche BÉZIER-Splines mit  $C^1$ -kontinuierlichen Übergangsbedingungen. Um den numerischen Aufwand bei der Formoptimierung zu reduzieren, wird das geometrische Modell durch Reduktion der formbeschreibenden Parameter vereinfacht (von 270 Kontroll-Knoten auf 53), ohne jedoch das Strukturverhalten wesentlich zu verändern.

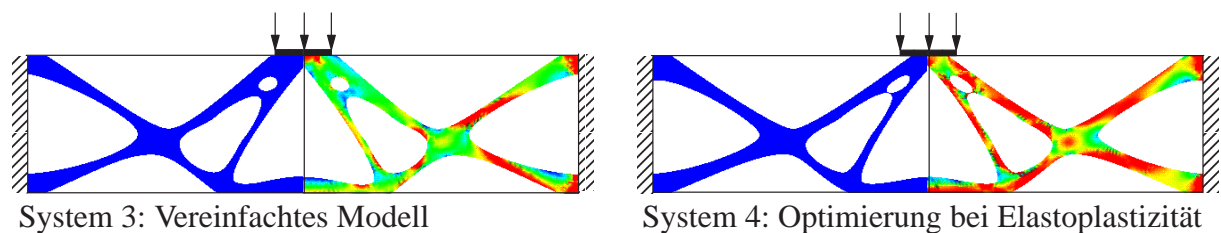


Abbildung 8.3: Vereinfachtes Modell, Ergebnis der Formoptimierung und VON MISES-Vergleichsspannungen

Das vereinfachte Modell von 'System 2', als Ausgangsbasis für die Formoptimierung unter Berücksichtigung der Elastoplastizität, ist auf der linken Seite von Abbildung 8.3 dargestellt und als 'System 3' bezeichnet.

Als Optimierungsvariablen für die Formoptimierung (68 Variablen) werden die Koordinaten der Kontroll-Knoten der äußeren und inneren Ränder der Struktur definiert. Die für die Sensitivitätsanalyse, wie sie in Kapitel 6 vorgestellt wurde, erforderlichen Entwurfsgeschwindigkeitsfelder werden im Inneren der Struktur mit Hilfe der Glättungsmethode bestimmt (vgl. Kapitel 3). Das nichtlineare (Form)-Optimierungsproblem wird sukzessive mittels des in Kapitel 2 diskutierten SQP-Algorithmus gelöst. Die optimale Form der Struktur ist auf der rechten Seite von Abbildung 8.3 dargestellt und als 'System 4' bezeichnet. Anhand der Spannungsplots der VON MISES-Vergleichsspannungen ist zu erkennen, daß der Spannungszustand von 'System 4', der infolge der äußeren Belastung und durch die Formoptimierung erzielt wird, im Vergleich zu den anderen Strukturen (vgl. Abbildungen 8.2 und 8.3) wesentlich ausgeglichener ist. Um nun die mittels Topologieoptimierung gewonnenen Strukturen ('Systeme 1 und 2'), die vereinfachte Struktur ('System 3') und die durch eine zusätzliche Formoptimierung erzeugte Geometrie ('System 4') bezüglich ihrer mechanischen Eigenschaften bei elastoplastischem Materialverhalten beurteilen und vergleichen zu können, werden alle auf der Basis des elastoplastischen Materialmodells untersucht. Die entsprechenden Materialdaten sind Abbildung 8.1 zu entnehmen.

Die Last-Verschiebungsdiagramme für die Vertikalverschiebung von Punkt  $A$  sind in Abbildung 8.4 dargestellt. Die Duktilität entspricht der Summe der Flächen unter den Last-Verschiebungskurven an allen Freiheitsgraden der Struktur. Daher ist zu erwarten, daß die Struktur, die mit Hilfe der Formoptimierung ermittelt wurde ('System 4'), die größte Duktilität besitzt. Nach Abbildung 8.4 müßte demnach die mittels Topologieoptimierung bei elastischem Materialverhalten generierte Struktur ('System 1') bezüglich der Duktilität das schlechteste Strukturverhalten aller Tragwerke aufweisen. Diese Vermutungen werden anhand der Zahlenwerte in Tabelle 8.1 bestätigt. Dort werden neben der Duktilität auch die erreichte äußere Last, die zur Aufbringung der vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}_A = 0.25\text{ m}$  notwendig ist, und das Verhalten im elastischen Bereich miteinander verglichen.

Die Struktur, die basierend auf einem elastischen Materialmodell durch Topologieoptimierung ermittelt wurde ('System 1'), weist im elastischen Bereich das steifste Verhalten auf. Im Fall des Fließens sind die mechanischen Eigenschaften deutlich schlechter als bei den übrigen Strukturen. Sowohl die äußere Last als auch die Duktilität liegen mehr als 20 % unter den Werten des durch Topologieoptimierung, basierend auf einem elastoplastischen Materialmodell, ermittelten Tragwerks ('System 2'). Die für die Formoptimierung vereinfachte Struktur ('System 3') weist ein ähnliches Tragverhalten wie 'System 2' auf, d.h. die getroffenen Vereinfachungen verändern das mechanische Verhalten nur geringfügig

	System 1	System 2	System 3	System 4	System 5
Duktilität	100%	127%	121%	162%	156%
Grenzlast	100%	122%	116%	156%	152%
Elastische Steifigkeit	100%	87%	88%	96%	94%

Tabelle 8.1: Zahlenwerte bei elastoplastischem Materialverhalten

(vgl. Abbildung 8.4). Obwohl die Geometrie der durch eine zusätzliche Formoptimierung generierten Struktur ('System 4') optisch nur wenige Unterschiede zu 'System 3' bzw. 'System 2' aufweist, werden die ertragbare Last wie auch die Duktilität erheblich gesteigert. Außerdem ist das Tragverhalten im elastischen Bereich besser als das der 'Systeme 2 und 3'. Diese Beobachtung läßt sich jedoch nicht verallgemeinern.

Der Grund für das bessere mechanische Verhalten von 'System 4' in bezug auf Duktilität und aufnehmbare, äußere Belastung, im Vergleich zu den anderen Strukturen, ist in dem ausgeglicheneren Spannungszustand zu suchen (vgl. Abbildung 8.3). Es sind mehr und auch größere Gebiete der Struktur im plastischen Bereich, d.h. es ist eine bessere Materialausnutzung gegeben. Allerdings liegt die enorme Steigerung der Duktilität, im Vergleich zu 'System 2 bzw. 3', auch an der Vorgehensweise des adaptiven Algorithmus bei der Topologieoptimierung. Es handelt sich hierbei um eine Art Bildverarbeitungsprozeß zur Generierung der formbeschreibenden Kanten, bei dem die mechanischen Eigenschaften nicht berücksichtigt werden können. Dadurch wird die Zielfunktion in der Regel, im Vergleich zum Zustand vor der Glättung der Ränder, durch den adaptiven Prozeß verschlechtert. Dies zeigt jedoch auch die Notwendigkeit eines weiteren Formoptimierungsschrittes zur Auffindung des Optimums.

Es ist noch anzumerken, daß die zwei Löcher bei 'System 4' dazu neigen, 'zusammenzuwachsen'. Dies deutet auf einen Wechsel der Topologie hin, welcher möglicherweise durch die für die Formoptimierung getroffenen, geometrischen Vereinfachungen ausgelöst wird. Dieser Sachverhalt ist schematisch in Abbildung 8.5 angedeutet.

Das markierte Tragelement ist im vereinfachten Modell nicht mehr an der Lastabtragung beteiligt und wird demnach durch den Optimierungsprozeß entfernt bzw. das dort verwendete Material an anderen, höher beanspruchten Stellen angelagert. Diese Tatsache stellt jedoch die zuvor getroffenen Aussagen über die Notwendigkeit einer Formoptimierung zur Steigerung gewisser Ziele (hier der Duktilität) nicht in Frage. Im Gegenteil, bei genauerer Approximation des Ergebnisses der Topologieoptimierung ('System 2') ist durch die Formoptimierung eine noch größere Steigerung der Qualität der mechanischen

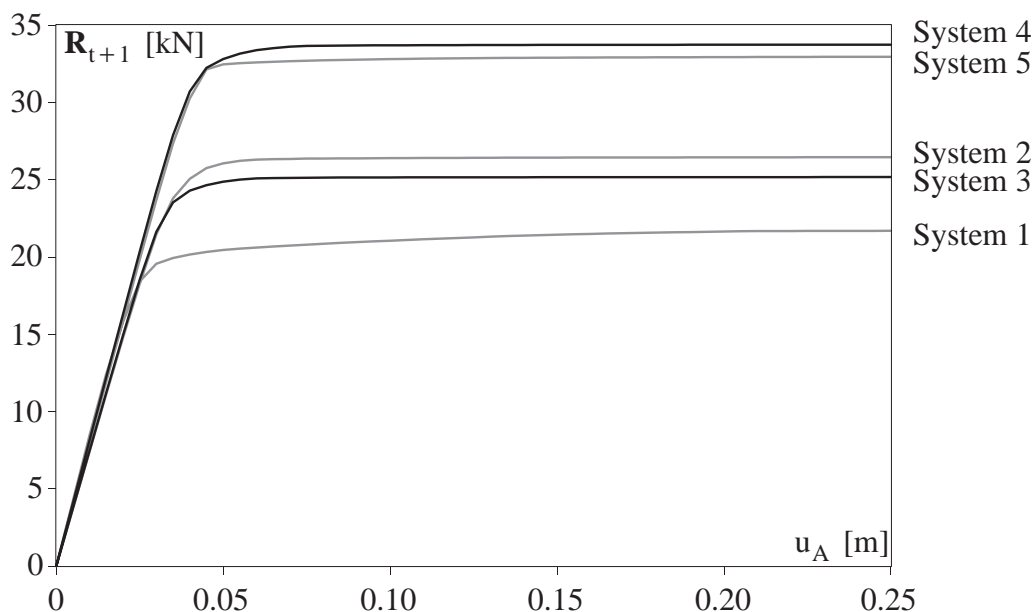


Abbildung 8.4: Last-Verschiebungsdiagramme

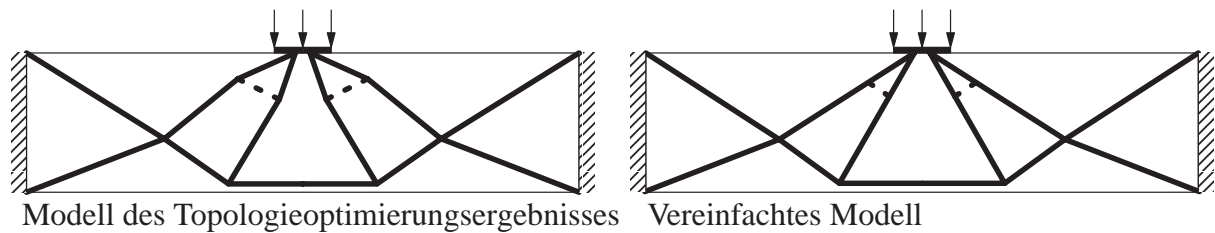


Abbildung 8.5: Stabwerksmodelle

Eigenschaften bezüglich der definierten Ziele zu erwarten, als dies ohnehin der Fall ist. Es wurde bereits angedeutet, daß die Steigerung der Duktilität durch die Formoptimierung bei diesem Beispiel hauptsächlich durch das Erzeugen eines möglichst ausgeglichenen Spannungszustandes erzielt wird. Dies führt zu der Vermutung, daß die Durchführung einer Optimierung mit der Zielfunktion 'Spannungsausgleich' bezüglich der VON MISES-Vergleichsspannungen bei elastischem Materialverhalten gleichzeitig zu einer Verbesserung des duktilen Verhaltens der Struktur bei Elastoplastizität führt. Der Spannungsausgleich wird auf der Basis der vereinfachten Struktur ('System 3') durchgeführt. Als Optimierungsvariablen des Formoptimierungsproblems werden die Koordinaten der Kontrollknoten definiert (68 Variablen). Das Ergebnis des Spannungsausgleichs ist auf der rechten Seite von Abbildung 8.6 dargestellt.

Der zugehörige Spannungszustand wurde auf der Basis eines elastoplastischen Materialmodells (vgl. Abbildung 8.1) und infolge der Vertikalverschiebung von Punkt A ( $\hat{u}_A = 0.25 m$ ) bestimmt. Sowohl die Last-Verschiebungskurven in Abbildung 8.4 als auch die zugehörigen Funktionswerte der Duktilität und ertragbaren Last in Tabelle 8.1 zeigen, daß der Unterschied zwischen 'System 4' und 'System 5' sehr gering ist. Der numerische Aufwand zur Bestimmung der optimalen Entwürfe ist im Fall des Spannungsausgleichs aufgrund der angenommenen Linearität während des Optimierungsprozesses um ein Vielfaches geringer.

Der Grund für die Steigerung der Duktilität bei Durchführung eines Spannungsausgleichs liegt bei diesem Optimierungsproblem an der Art des Tragsystems. Die Last wird hauptsächlich über Zug- und Druckkräfte abgetragen (Fachwerk). Der Spannungsausgleich führt zu einem möglichst homogenen Spannungszustand, was sich in diesem speziellen Fall auch positiv auf die elastische Steifigkeit und das Duktilitätsverhalten des Fachwerksystems auswirkt. Im nachfolgenden Beispiel wird u.a. gezeigt, daß ein Spannungsausgleich in der Regel nicht der optimalen Geometrie bzw. deren mechanischen Eigenschaften in bezug auf die Duktilität nahekommt.

Die Generierung eines Tragwerks mittels der Topologieoptimierung mit der Zielfunktion 'Maximale Steifigkeit' unter Berücksichtigung von Spannungsnebenbedingungen führt für

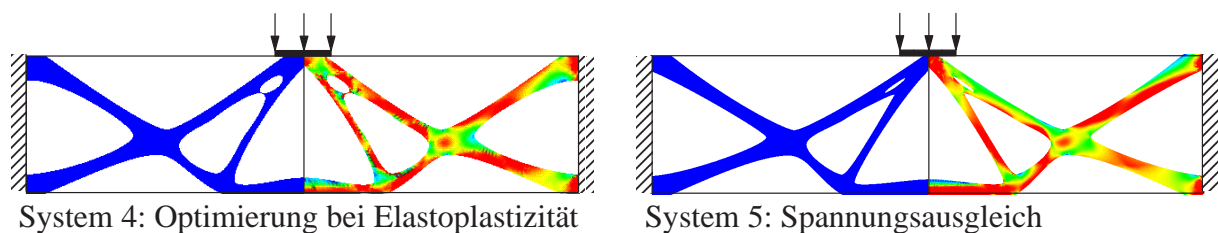


Abbildung 8.6: Ergebnisse durch Maximierung der Duktilität und Spannungsausgleich

die in Abbildung 8.1 definierte Ausgangssituation auf ein ähnliches Tragwerk wie 'System 2'. Dieses Ergebnis ist in MAUTE [136] angegeben.

## 8.2 Beispiel 2: Maximierung der Duktilität bei geometrischer Nichtlinearität

Neben der Berücksichtigung materiell nichtlinearer Effekte in der Optimierung ist die Einbeziehung der geometrischen Nichtlinearität in den Optimierungsprozeß erforderlich, um das tatsächliche Tragverhalten möglichst genau zu erfassen. Das Ziel dieses Beispiels ist, wie zuvor, die Maximierung der Duktilität bei vorgegebenem Strukturvolumen.

Zusätzlich soll anhand dieses Beispiels die Anwendung der Zielfunktion 'Spannungsausgleich' auf der Basis eines linear elastischen Materialmodells zur Steigerung der Duktilität bei elastoplastischem Materialverhalten, wie im vorigen Beispiel, untersucht werden. Weitere Gesichtspunkte der Untersuchungen sind der Einfluß verschiedener Nebenbedingungen, wie beispielsweise unterschiedliche Sicherheiten gegen Stabilitätsversagen, oder verschiedener Lastfälle auf die optimale Form von Tragwerken.

Die Geometrie des Formoptimierungsproblems sowie die Materialdaten sind in Abbildung 8.7 angegeben. Der Riegel der Rahmenkonstruktion ist in vertikaler Richtung mit einer Gleichstreckenlast belastet. Die vertikale Verschiebung des Punktes  $A$  wird in 20 gleich großen Schritten bis auf den Wert  $\hat{u}_A = 0.20 \text{ m}$  gesteigert. Die zu dieser Verschiebung zugehörige äußere Belastung ist mit  $\mathbf{R}_{end}^v = \lambda_{end} \bar{\mathbf{R}}^v$  bezeichnet. Zwischenzustände während der Belastungsgeschichte für den Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  sind durch den Index  $t + 1$  gekennzeichnet (vgl. Abbildung 8.7). Aus Symmetriegründen wird nur das halbe System analysiert und optimiert, es sei denn, der kritische Lastfaktor wird als Nebenbedingung berücksichtigt. Da in diesem Fall unsymmetrische Eigenformen (Versagensformen) auftreten können, ist die Betrachtung des Gesamtsystems notwendig.

Als Optimierungsvariablen werden die Koordinaten der Design-Knoten definiert. Die zulässigen Bewegungsrichtungen der jeweiligen Knoten sind in Abbildung 8.7 angegeben. Die Innenkanten des Rahmens sind mit BÉZIER- und B-Splines modelliert. Alle anderen Kanten sind lineare LAGRANGE-Interpolationen. Die Struktur- und Sensitivitätsanalyse wird mit einem strukturierten Finite Elemente Netz, bestehend aus 480 biquadratischen, unterintegrierten Serendipity-Scheibenelementen, durchgeführt. Bei der Berechnung der gesamten Struktur sind es entsprechend 960 Finite Elemente.

### Maximierung der Duktilität

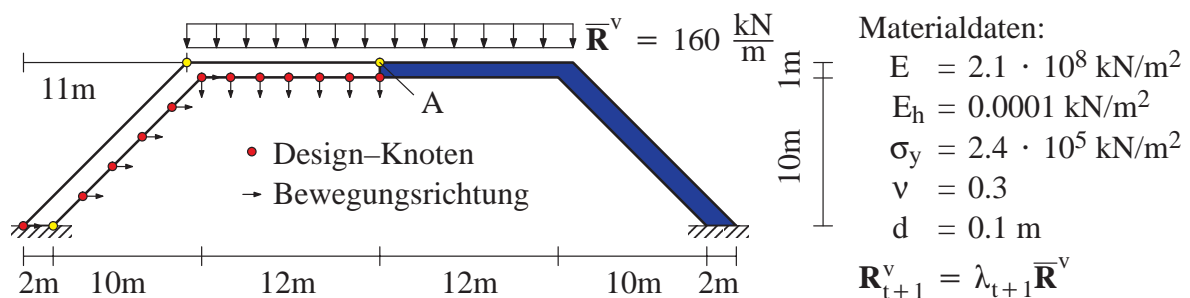


Abbildung 8.7: Geometrie und Materialdaten des Optimierungsproblems

Zu Vergleichszwecken wird die optimale Form bezüglich der Duktilität auf der Basis eines rein elastischen Materialverhaltens bestimmt. Außerdem wird in diesem Fall eine lineare Kinematik angenommen. Die optimale Geometrie bei diesem mechanischen Modell ist in Abbildung 8.8 dargestellt und als 'System 1' bezeichnet. Die Auflagerbreite wird im Laufe der Optimierung von ursprünglich  $2\text{ m}$  auf  $0.148\text{ m}$  reduziert. Die Gleichstreckenlast wird mit Hilfe eines der Momentenlinie angepaßten Trägers (Riegel) zu den Stielen geführt, die die ankommenden Lasten hauptsächlich über Druckkräfte in die Lager leiten. Ein ganz ähnliches Tragverhalten ergibt sich bei der Optimierung auf der Basis eines elasto-plastischen Materialmodells (VON MISES–Fließbedingung; lineare, isotrope Verfestigung; ebener Spannungszustand) und einer linearen Kinematik. Die auf diesem mechanischen Modell beruhende optimale Struktur ist als 'System 2' bezeichnet. Einziger nennenswerter Unterschied zu 'System 1' ist die Auflagerbreite von  $0.727\text{ m}$ . Dadurch wird die Spannung am Auflager reduziert und Fließen beginnt dort erst bei einem späteren Last- bzw. Verschiebungsniveau.

Zusätzlich zur materiellen Nichtlinearität wird nun eine nichtlineare Kinematik berücksichtigt. Das zu diesem mechanischen Modell zugehörige Optimierungsergebnis ('System 3') ist ebenfalls in Abbildung 8.8 dargestellt. Auch diese Struktur unterscheidet sich nur unwesentlich von den zuvor ermittelten. Die Stiele sind etwas dicker und die Auflagerbreite beträgt  $0.980\text{ m}$ . Die Veränderungen der Form zur Maximierung der Duktilität führen bei diesem mechanischen Modell (und auch bei den anderen) zum Stabilitätsversagen der Struktur vor Erreichen der vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}_A = 0.20\text{ m}$  (vgl. Diagramme in Abbildung 8.10).

Trotz des Auftretens dieses Stabilitätsproblems schon während der Optimierung bzw. vor dem Erreichen der vorgegebenen Verschiebung, kann die Duktilität durch den Optimierungsprozeß weiterhin gesteigert werden. Aus diesem Grund wird zur Vermeidung des Stabilitätsversagens vor Erreichen des vorgegebenen Verschiebungsniveaus zusätzlich zur materiellen und geometrischen Nichtlinearität eine Stabilitätsnebenbedingung in der Optimierung berücksichtigt. Der kritische Lastfaktor  $\lambda_c$  (vgl. Gleichungen (4.92) und (4.93)) darf bei diesem Beispiel den Wert  $\lambda_c = 1.0 \cdot \lambda_{end}$  nicht unterschreiten. Der hierfür notwendige Eigenwert wird mit Hilfe des in Gleichung (4.88) definierten Eigenwertproblems approximiert und muß die Bedingung  $\tilde{\lambda}_i \geq 1.0$  erfüllen. Allerdings ist für die Bedingung  $\lambda_c \geq 1.0 \cdot \lambda_{end}$  die Wahl des Eigenwertproblems aus den möglichen, die durch die

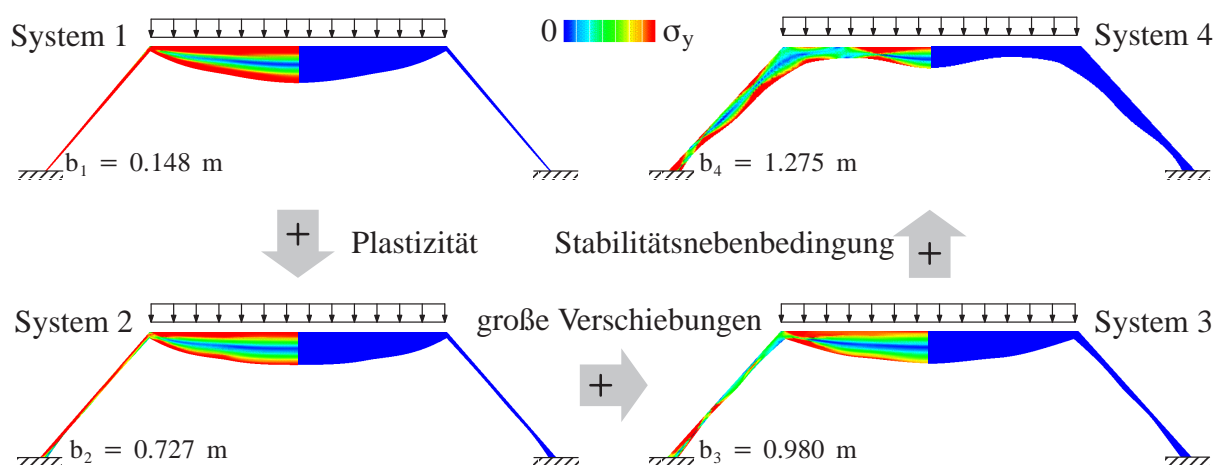


Abbildung 8.8: Optimale Entwürfe für verschiedene mechanische Modelle

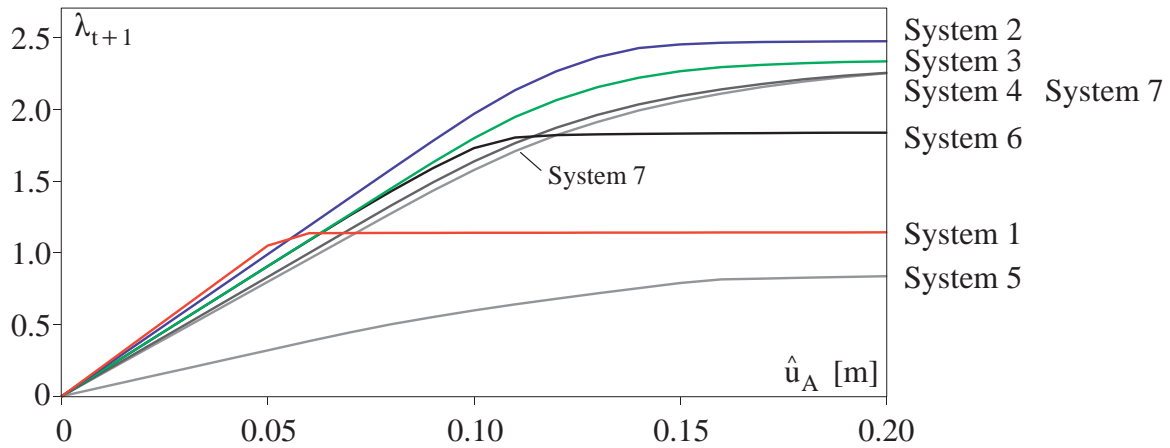


Abbildung 8.9: Last–Verschiebungsdiagramme bei materieller Nichtlinearität

Gleichungen (4.85)–(4.88), (4.90) und (4.91) definiert sind, von geringer Bedeutung. Die zugehörige optimale Geometrie ist ebenfalls in Abbildung 8.8 dargestellt ('System 4'). Diese unterscheidet sich wesentlich von den zuvor erzeugten Strukturen. Neben der Auflagerbreite von  $1.275\text{ m}$  sind die Rahmenecken deutlich stärker, der Riegel hingegen etwas weniger bauchig ausgebildet.

Zu Vergleichszwecken werden nun alle ermittelten Strukturen auf der Basis des elasto-plastischen Materialmodells bezüglich ihrer mechanischen Eigenschaften untersucht und verglichen. In Abbildung 8.9 sind die Last–Verschiebungsdiagramme bei geometrisch linearem, in Abbildung 8.10 bei geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten abgebildet. Bei geometrischer Linearität besitzt, wie zu erwarten, 'System 2' die größte Duktilität. Grund hierfür ist die Tatsache, daß sowohl die Ermittlung von 'System 2' mittels der Optimierung als auch diese vergleichende Untersuchung auf der Basis desselben mechanischen Modells durchgeführt wurde. Wegen der geringen Auflagerbreite von 'System 1' beginnen diese Bereiche frühzeitig zu fließen, weshalb die Duktilität und die ertragbare Last dieses Tragwerks deutlich unter den Werten der anderen Systeme liegt.

Bei materieller und geometrischer Nichtlinearität weist 'System 3' die besten mechanischen Eigenschaften in bezug auf Duktilität und Grenzlaster auf. 'System 4' wird auf der Basis desselben mechanischen Modells wie 'System 3' optimiert. Der Lösungsraum ist jedoch infolge der Stabilitätsnebenbedingung eingeschränkt, was letztendlich zu einer geringeren Duktilität führt. Allerdings wird ein frühzeitiges Stabilitätsversagen verhindert. Die ertragbare Last ist dagegen etwas größer. Die zugehörigen Zahlenwerte der Duktilität, der Grenzlaster und der elastischen Steifigkeit für die unterschiedlichen mechanischen Modelle sind den Tabellen 8.2 und 8.3 zu entnehmen.

	System 1	System 2	System 3	System 4	System 5	System 6
Duktilität	100%	157%	120%	102%	24%	115%
Grenzlaster	100%	217%	204%	197%	73%	161%
Elastische Steifigkeit	100%	94%	86%	79%	30%	86%

Tabelle 8.2: Zahlenwerte bei elastoplastischem Materialverhalten (geometrisch linear)

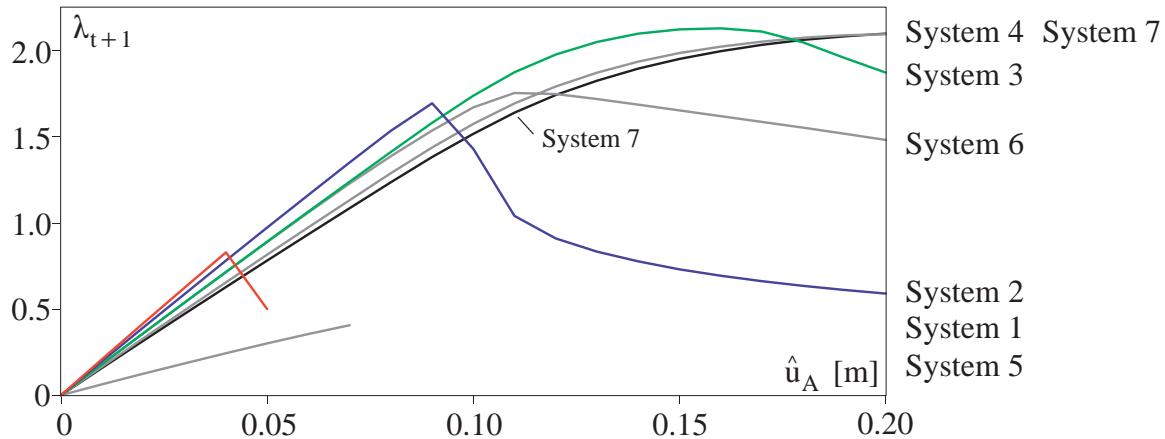


Abbildung 8.10: Last-Verschiebungsdiagramme bei materieller und geometrischer Nichtlinearität

### Zielfunktion 'Spannungsausgleich' zur Steigerung der Duktilität

In Abschnitt 8.1 führte die Optimierung 'Spannungsausgleich' zu einer für die Duktilität sehr günstigen Form. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß dort das Tragwerk hauptsächlich durch Normalkräfte beansprucht wird. Dies ist bei Beispiel 8.2 nicht der Fall. Die äußere Belastung kann, zumindest im Riegel, nur über Biegung abgetragen werden. In Abbildung 8.11 sind die optimalen Geometrien nach der Durchführung eines Spannungsausgleichs bezüglich der VON MISES-Vergleichsspannungen dargestellt. Beiden Optimierungen liegt ein linear elastisches Materialverhalten zugrunde. Während auf der linken Seite von Abbildung 8.11 die optimale Struktur bei Vorgabe einer Verschiebung von  $\hat{u}_A = 0.20 \text{ m}$  infolge einer Gleichstreckenlast ('System 5') abgebildet ist, zeigt die rechte Seite die optimale Geometrie bei Vorgabe der Gleichstreckenlast ('System 6'), deren Größe keinen Einfluß auf die optimale Geometrie, wohl aber auf den Zielfunktionswert hat. Die ebenfalls abgebildeten Spannungsplots der VON MISES-Vergleichsspannungen wurden auf der Basis eines elastoplastischen Materialmodells (vgl. Abbildung 8.7) und einer linearen Kinematik ermittelt.

'System 5' wird infolge des Optimierungsprozesses derart ausgebildet, daß die aufgebrachte Verschiebung ( $\hat{u}_A = 0.20 \text{ m}$ ) möglichst geringe Spannungen in der Struktur hervorruft. Dies wird durch eine sehr geringe Steifigkeit erreicht, was auch anhand der Last-Verschiebungskurven in den Abbildungen 8.9 und 8.10 zu erkennen ist. Aufgrund der Vorgabe einer Verschiebung an einer bestimmten Stelle des Tragwerks kann der Laststeigerungsfaktor  $\lambda_{t+1}$  und somit die äußere Last während des Optimierungsprozesses

	System 1	System 2	System 3	System 4	System 5	System 6
Duktilität	–	65%	100%	73%	–	82%
Grenzlast	–	31%	100%	112%	–	79%
Elastische Steifigkeit	100%	94%	86%	79%	30%	86%

Tabelle 8.3: Zahlenwerte bei materieller und geometrischer Nichtlinearität



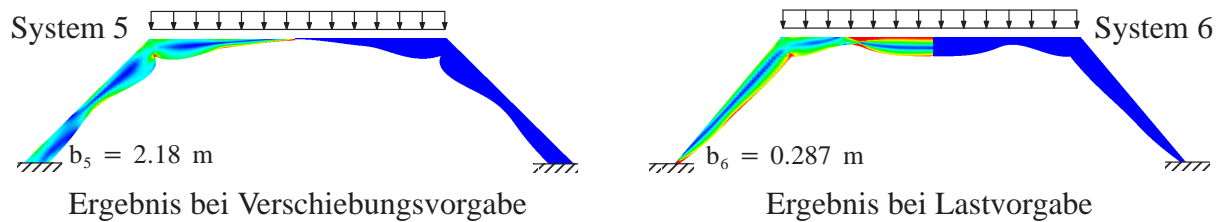


Abbildung 8.11: Optimierungsergebnisse bei Zielfunktion 'Spannungsausgleich'

verändert, d.h. in diesem Fall reduziert werden (vgl. Abbildung 6.1). Die Einschnürung im Eckbereich von 'System 5' ist auf die Wahl der geometrischen Parametrisierung und die Definition der Optimierungsvariablen zurückzuführen.

Die Duktilität, die elastische Steifigkeit und die ertragbare Last von 'System 5' liegen weit unter den Werten der anderen Systeme (vgl. Tabellen 8.2 und 8.3). Das Tragverhalten von 'System 6' ist deutlich besser, da sich das Tragwerk nicht durch Reduktion der Steifigkeit der während des Optimierungsprozesses konstanten Last entziehen kann (vgl. Abbildung 6.1). Das Tragwerk weist eine gewisse Ähnlichkeit zu 'System 4' auf. Die mechanischen Eigenschaften bei elastoplastischem Materialverhalten und einer linearen Kinematik sind jedoch deutlich schlechter als die von 'System 2', welches auf der Basis des eben genannten mechanischen Modells ermittelt wurde und diesbezüglich optimal ist. Dieser Sachverhalt ist Tabelle 8.1 zu entnehmen. Analoges gilt bei materieller und geometrischer Nichtlinearität. Bezüglich der Duktilität ist 'System 6' deutlich schlechter als 'System 3' (vgl. Tabelle 8.2), was vor allem auf die geringe Auflagerbreite zurückzuführen ist. Außerdem versagt das Tragwerk frühzeitig infolge einer Instabilität (vgl. Abbildung 8.10).

Es kann demnach festgestellt werden, daß die durch einen Spannungsausgleich generierten Tragwerke ('Systeme 5 und 6') bei weitem nicht die Qualität der bezüglich der Duktilität optimierten Tragwerke erreichen, was bei diesem Beispiel auf die Ausgangsgeometrie (Rahmentragwerk) und die Art der Beanspruchung (Biegung) zurückzuführen ist. Der Einsatz des Spannungsausgleichs zur Optimierung des mechanischen Verhaltens bezüglich der Duktilität ist folglich nur in Ausnahmefällen möglich und daher für allgemeine Problemstellungen nicht zu empfehlen.

### Einfluß eines höheren kritischen Lastfaktors auf die Optimierung

Bisher wurden wichtige Einflüsse, wie beispielsweise der eines höheren einzuhaltenden kritischen Lastfaktors als Nebenbedingung (z.B.  $\lambda_c \geq 2.0 \cdot \lambda_{end}$ ) oder der eines zusätzlichen Lastfalls, auf das Optimierungsergebnis nicht diskutiert, was nachfolgend geschehen soll.

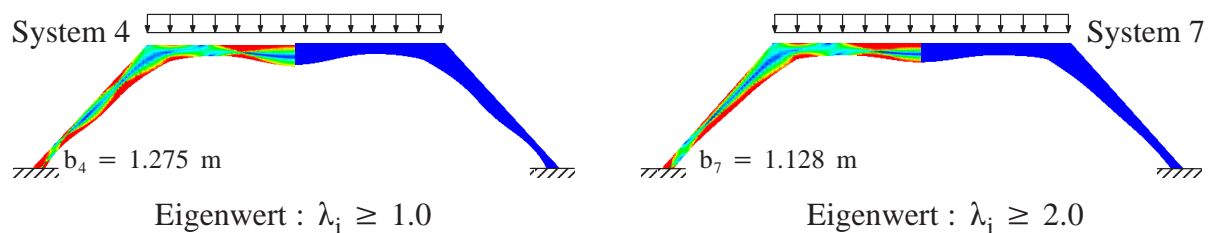


Abbildung 8.12: Optimierungsergebnisse für verschiedene Stabilitätsnebenbedingungen

Zuerst wird die Nebenbedingung 'kritischer Lastfaktor', die zur Ermittlung von 'System 4' verwendet wurde, von  $\lambda_c \geq 1.0 \cdot \lambda_{end}$  auf  $\lambda_c \geq 2.0 \cdot \lambda_{end}$  erhöht, um eine größere Sicherheit gegen Stabilitätsversagen zu erzielen. Der kritische Lastfaktor wird dabei mittels der in Gleichung (4.93) angegebenen Formel bestimmt. Der dafür notwendige Eigenwert wird mit Hilfe von Gleichung (4.88) approximativ bestimmt. Das zugehörige Optimierungsergebnis ist in Abbildung 8.12 dargestellt und als 'System 7' bezeichnet.

Es ergeben sich rein optisch keine nennenswerten Unterschiede zu 'System 4', bei dessen Ermittlung ein kritischer Lastfaktor von  $\lambda_c \geq 1.0 \cdot \lambda_{end}$  gefordert war. Auch das mechanische Verhalten der beiden Systeme in Abbildung 8.12 ist sehr ähnlich, was anhand der Last-Verschiebungsdiagramme in Abbildung 8.9 und 8.10 verdeutlicht wird. Allerdings läßt die Last-Verschiebungskurve von 'System 7' in Abbildung 8.10 nicht darauf schließen, daß ein kritischer Lastfaktor von  $\lambda_c \geq 2.0 \cdot \lambda_{end}$  erreicht werden kann.  $\lambda_{end}$  beträgt für 'System 7' etwa 2.098; dies führt zu einem Lastfaktor der zugehörigen, approximativen Versagenslast von  $\lambda_c = 2.0 \cdot \lambda_{end} = 4.196$ . Untersuchungen haben gezeigt, daß der Lastfaktor, bei dem bei 'System 7' ein Stabilitätsversagen auftritt, etwa bei  $\lambda_c = 2.118$  liegt. Der Grund für die große Abweichung zwischen tatsächlicher Versagenslast und der durch eine Eigenwertanalyse (Gleichung (4.88)) abgeschätzten Versagenslast liegt an der Qualität der Eigenwertanalyse für das materiell und geometrisch nichtlineare Strukturproblem. Mit Hilfe von Gleichung (4.88) können die Eigenwerte bei der Berücksichtigung dieser Nichtlinearitäten nur sehr schlecht approximiert werden. Die Berechnung der Eigenwerte mittels Gleichung (4.90) liefert wesentlich bessere Werte. Der kleinste positive Eigenwert von 'System 7' beträgt dann  $\tilde{\lambda}_i = 1.008$ , was zu einem kritischen Lastfaktor von  $\lambda_c = 1.008 \cdot 2.098 = 2.115$  führt. Es wird deutlich, daß die realistische Erfassung der zu erwartenden kritischen Last durch die Approximation mittels einer Eigenwertanalyse von großer Bedeutung für das Optimierungsergebnis ist. Andernfalls ist die Diskrepanz zwischen tatsächlicher und für die Optimierung zugrunde gelegter bzw. zulässiger Versagenslast sehr groß.

Eine Optimierung unter Berücksichtigung der Stabilitätsnebenbedingung, die auf der Basis von Gleichung (4.90) ermittelt wird, ist für das vorliegende Beispiel aufgrund erheblicher numerischer Schwierigkeiten nicht möglich. Diese Schwierigkeiten sind darin begründet, daß die Stabilitätsnebenbedingung bereits für den Startentwurf sehr stark verletzt ist und dadurch der Optimierungsalgorithmus keinen verbesserten Entwurf berechnen kann; d.h. es steht, zumindest zu Beginn der Optimierung, zu wenig Material aufgrund der Gewichtskonstanz zur Verfügung, um das gestellte Optimierungsproblem lösen zu können.

### **Einfluß der Belastung auf die Optimierungsergebnisse**

Der Einfluß eines zusätzlichen Belastungszustandes auf die Optimierungsergebnisse ist in Abbildung 8.13 dargestellt. Neben der Ausgangsgeometrie, den Lagerbedingungen und der vertikalen Belastung, die sich nicht von denen in Abbildung 8.7 unterscheiden, ist die Rahmenkonstruktion zusätzlich durch zwei an den Rahmenecken angreifende, horizontale Einzellasten beansprucht. Die Optimierungsergebnisse auf der Basis eines elastoplastischen Materialmodells und einer linearen Kinematik ('System 8'), eines elastoplastischen Materialverhaltens und einer nichtlinearen Kinematik ('System 9') und der Berücksichtigung einer zusätzlichen Stabilitätsnebenbedingung für dieses mechanische Modell ('System 10') sind in Abbildung 8.13 zusammengestellt. Die VON MISES-Vergleichsspannungen sind dabei für den vertikalen Lastfall  $\mathbf{R}_{t+1}^v$  und auf der Basis des

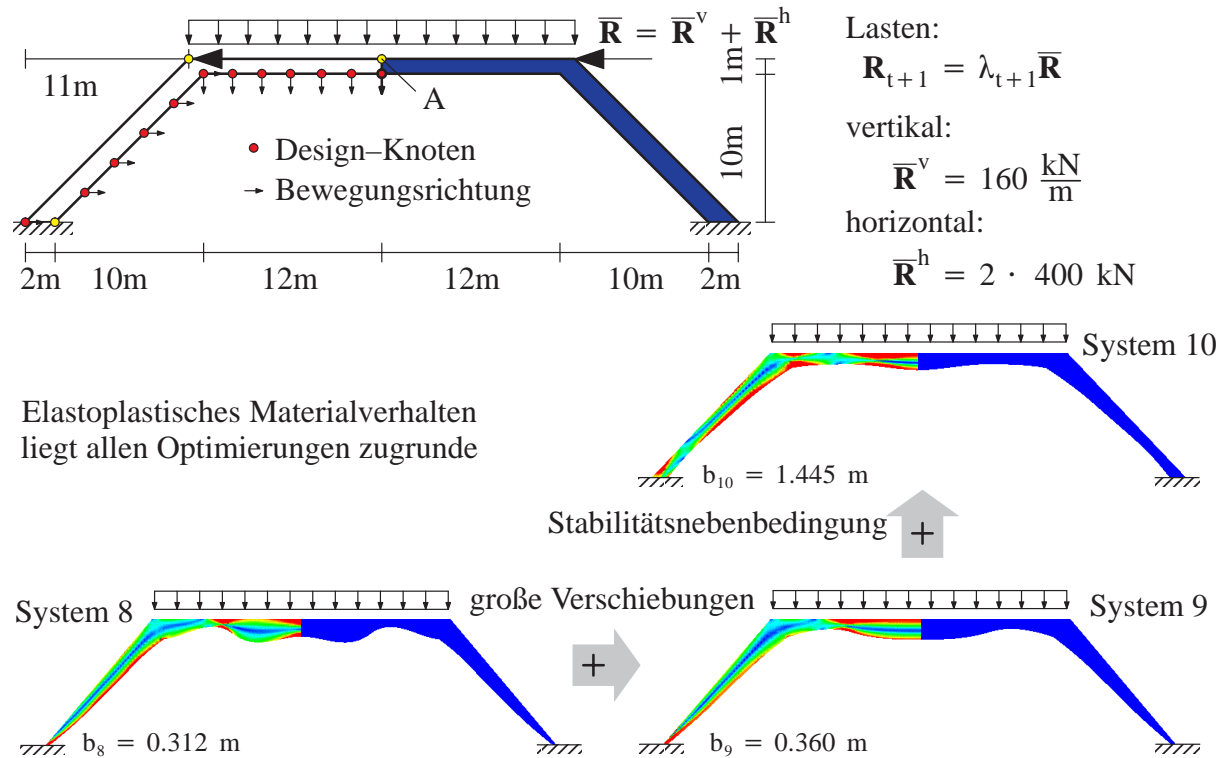


Abbildung 8.13: Optimierungsergebnisse bei zusätzlicher horizontaler Belastung

jeweiligen mechanischen Modells, das den Optimierungen zugrunde liegt, angegeben. Tendenziell ähneln die 'Systeme 8–10' demjenigen, das auf der Basis eines elastoplastischen Materialmodells, einer nichtlinearen Kinematik und der Stabilitätsnebenbedingung für vertikale Belastung ermittelt wurde ('System 4'). Die zugehörigen Last-Verschiebungsdiagramme der so ermittelten Systeme, die für elastoplastisches Materialverhalten und eine lineare Kinematik sowie eine nichtlineare Kinematik für den Lastfall 'vertikale Last' ermittelt wurden, sind in den Abbildungen 8.14 und 8.15 dargestellt. Die Last-Verschiebungsdiagramme in Abbildung 8.14 zeigen deutlich, daß alle drei Systeme die Qualität von

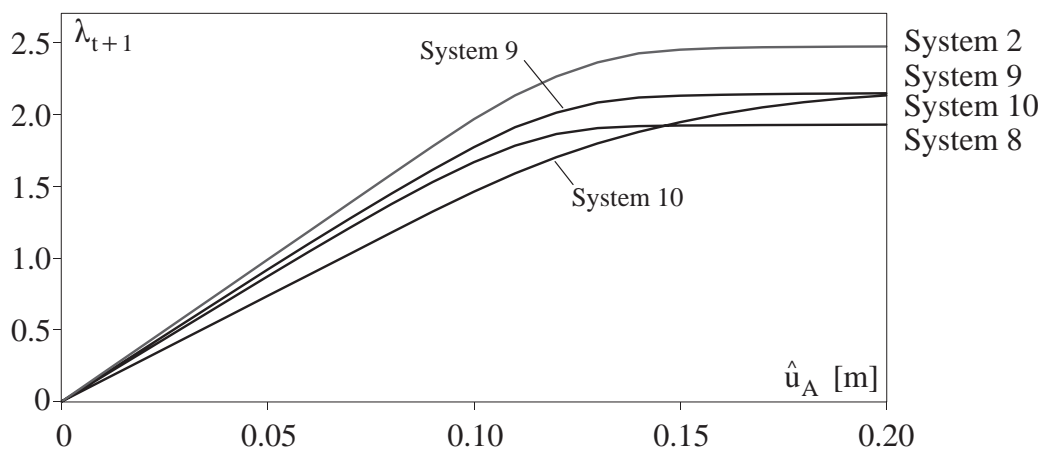


Abbildung 8.14: Last-Verschiebungsdiagramme bei materieller Nichtlinearität für vertikale Belastung

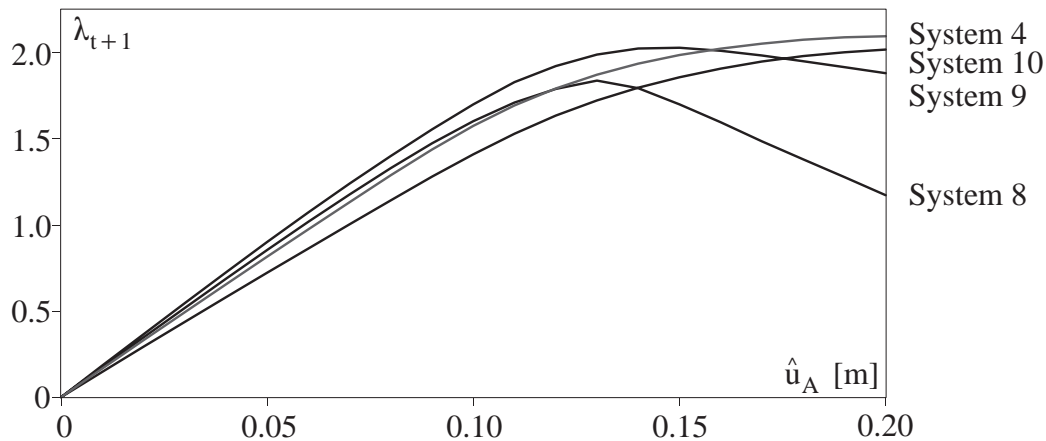


Abbildung 8.15: Last-Verschiebungsdiagramme bei materieller und geometrischer Nichtlinearität für vertikale Belastung

'System 2' bezüglich der Duktilität (wie zu erwarten) nicht erreichen. Grund dafür sind die unterschiedlichen formgebenden Lastfälle. Obwohl 'System 8' auf der Basis desselben mechanischen Modells (elastoplastisches Materialverhalten, lineare Kinematik) wie 'System 2' bestimmt wurde, ist das duktile Verhalten von 'System 9', welches bezüglich einer nichtlinearen Kinematik ermittelt wurde, deutlich besser. Diese Feststellung bestätigt die Aussage, daß das Verhalten eines bezüglich eines bestimmten mechanischen Modells und Lastfalls, einer bestimmten Geometrie und Lagerbedingung optimierten Tragwerks auf Änderungen eines oder mehrerer dieser genannten Faktoren sehr sensitiv reagieren kann. Als weiteres Beispiel dafür kann die Imperfektionsempfindlichkeit von Tragwerken genannt werden (vgl. REITINGER [180]). Die Folge ist ein nicht-optimales Tragwerk; allerdings ist es bei der vorgestellten Vorgehensweise kaum möglich, eine zufriedenstellende Aussage darüber zu treffen, wie stark die Abweichung vom 'optimalen Tragwerk' bei Veränderung einer der zuvor aufgezählten Größen sein wird.

Das Verhalten von 'System 8 und 9' für elastoplastisches Materialverhalten und eine nichtlineare Kinematik (vgl. Abbildung 8.15) zeigt das Auftreten eines Stabilitätsproblems vor Erreichen der vorgegebenen Verschiebung. Grund hierfür sind vor allem die dünnen Stiele in Auflagernähe. Ein analoges Verhalten konnte bereits für 'System 2 und 'System 3' in Abbildung 8.10 beobachtet werden.

Bei der Untersuchung von 'System 10' ist dagegen kein Stabilitätsversagen (bei vertikaler Belastung) zu erkennen. Dies liegt jedoch nicht daran, daß 'System 10' unter Einbeziehung einer Stabilitätsnebenbedingung (für eine zusätzliche, horizontale Belastung) generiert wurde, sondern ist eher zufälliger Natur und kann nicht verallgemeinert werden.

Auf die Angabe der Werte für Duktilität, Laststeigerungsfaktor und elastische Steifigkeit für die 'Systeme 7–10' gemäß den Tabellen 8.1 und 8.2 wurde verzichtet. Eine Abschätzung dieser Werte kann anhand der Last-Verschiebungsdiagramme in den Abbildungen 8.9, 8.10, 8.14 und 8.15 vorgenommen werden. Es wird lediglich der Einfluß eines veränderten Optimierungsproblems in Form einer anderen Nebenbedingung oder einer anderen Belastung auf das Optimierungsergebnis aufgezeigt. Außerdem wurde das mechanische Verhalten der so erzeugten Geometrien auf der Basis der Definitionen des ursprünglichen Optimierungsproblems bestimmt und beurteilt.

### 8.3 Beispiel 3: Minimierung des Gewichts eines VIERENDEEL-Trägers

Dieses Beispiel dient zur Verdeutlichung des Einflusses der Wahl einer zu groben Diskretisierung im Raum (numerisches Modell) auf das Optimierungsergebnis. Aus diesem Grund wird die Struktur in Abbildung 8.16 mit nur 384 Finiten Elementen für die Bereiche um die Löcher diskretisiert und in einem ersten Schritt mit biquadratischen (8-knotigen) Serendipity-Scheibenelementen analysiert und optimiert. Zum Vergleich wird die Berechnung auf der Basis von bilinearen (4-knotigen) Scheibenelementen durchgeführt, was zu einer unzureichenden Qualität der Strukturantwort und somit auch der Optimierungsergebnisse führt. In beiden Fällen werden vier Integrationspunkte verwendet. Zusätzlich wird der Einfluß des mechanischen Modells auf das Optimierungsergebnis untersucht. Die Optimierung wird jeweils für elastisches und elastoplastisches Materialverhalten durchgeführt.

Das Beispiel wird in Anlehnung an die Formoptimierung eines VIERENDEEL-Trägers in der Arbeit von BLETZINGER [30] bei elastischem Materialverhalten untersucht. Dieser VIERENDEEL-Träger ist Teil einer Dachkonstruktion und wird dort als Querträger zur Überbrückung einer Spannweite von  $36.4\text{ m}$  dimensioniert. Die Querträger stehen in einem regelmäßigen Abstand von  $10.8\text{ m}$  und sind über Seilverspannungen an den Obergurten gegen Ausknicken aus der Ebene gesichert. Näheres hierzu ist in BLETZINGER [30] zu finden.

Gesucht ist eine Form der Löcher, die sowohl ästhetischen als auch technischen Ansprüchen genügt. Zur Gestaltung der Löcher und zur Realisierung einer möglichst leichten und transparenten Konstruktion wird die Minimierung des Gewichts als Zielfunktion definiert. Der für die Formgebung zu berücksichtigende Lastfall setzt sich aus dem Eigengewicht des Trägers, dem Gewicht der Dachkonstruktion und der Belastung aus Schnee, die als Einzelkräfte an Ober- und Untergurt angreifen, zusammen. Die für die Formoptimierung parametrisierte Geometrie des VIERENDEEL-Trägers ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Die Geometrie, die Last- und Lagerbedingungen sowie die Materialdaten sind ebenfalls

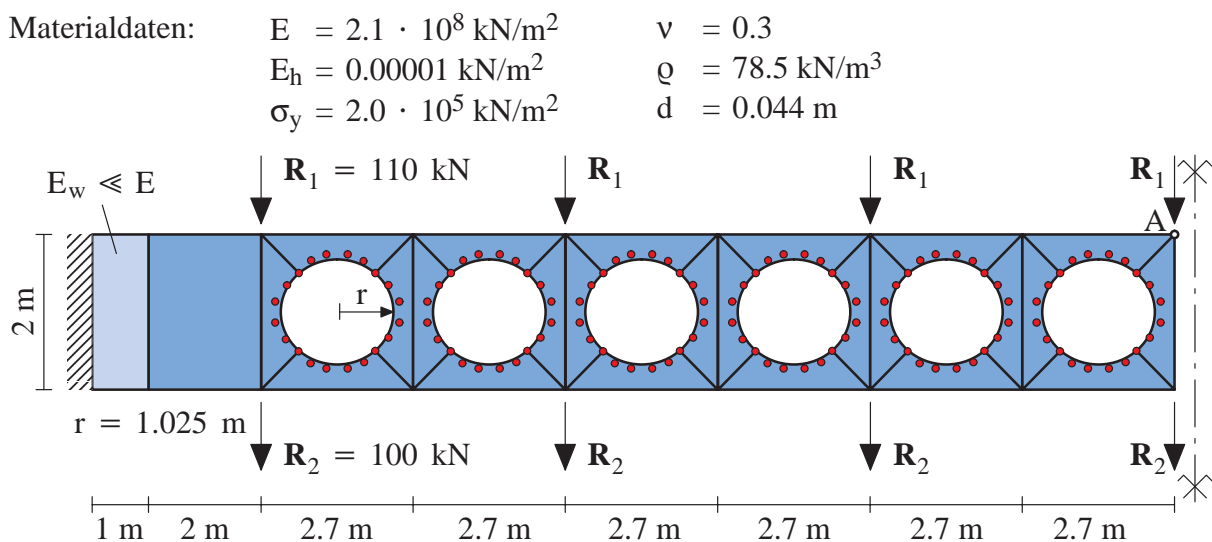


Abbildung 8.16: Geometrie, Lasten und Materialdaten des Optimierungsproblems

Abbildung 8.16 zu entnehmen. Das Eigengewicht ist nicht explizit dargestellt, wird jedoch bei der Optimierung berücksichtigt. Aus Symmetriegründen genügt die Betrachtung und Optimierung des halben Systems.

Die anfangs kreisförmigen Aussparungen sind jeweils mittels vier B-Splines modelliert, die wiederum durch sechs Design-Knoten definiert sind. Die Übergänge der B-Splines sind  $C^2$ -kontinuierlich, um möglichst viele verschiedene Lochformen infolge der Optimierung zu ermöglichen (vgl. BLETZINGER [30]). Die formbeschreibenden Design-Knoten der Löcher werden als Optimierungsvariablen definiert, deren Bewegungsrichtungen zu den jeweiligen Lochmittelpunkten vorgeschrieben sind. Außerdem werden die Optimierungsvariablen derart miteinander verknüpft, daß der Träger bezüglich seiner Längsachse symmetrisch bleibt. Um eine konstruktive Mindesthöhe der Gurte bzw. Stege von 15 cm bzw. 30 cm zu gewährleisten, werden entsprechende Restriktionen eingeführt. Die Lagerung des Trägers besteht aus einer weichen Einspannung, die durch einen Bereich einer im Vergleich zum Elastizitätsmodul des Trägers sehr geringen Steifigkeit ( $E_w$ ) modelliert ist.

Die Zielfunktion des Optimierungsproblems ist die Minimierung des Gewichts durch eine Variation der Lochformen. Als Nebenbedingungen werden Spannungsnebenbedingungen und eine Verschiebungsnebenbedingung in Trägermitte definiert. Die VON MISES-Vergleichsspannungen an den äußeren und inneren Rändern des VIERENDEEL-Trägers werden auf  $\sigma_v = 2.0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$  begrenzt. Die Schubspannungen zwischen den Löchern dürfen den Wert  $\tau = 8.0 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$  nicht überschreiten. Diese Werte wurden in BLETZINGER [30] als Nebenbedingungen verwendet. Die Verschiebungsnebenbedingung in Feldmitte wird zu  $\hat{u}_A \leq l/300 \approx 0.12 \text{ m}$  definiert. Zur Bestimmung des Optimums wird der in Kapitel 2 beschriebene SQP-Algorithmus mit BFGS-Update verwendet.

Sowohl die Struktur- als auch die Sensitivitätsanalyse wird zunächst mit biquadratischen, unterintegrierten Serendipity-Scheibenelementen durchgeführt. Das Ausgangsgewicht der Struktur beträgt  $W_0 = 105.7 \text{ kN}$ . Dieses wird durch die Optimierung auf der Basis eines elastischen Materialverhaltens auf  $W_{opt} = 95.5 \text{ kN}$  reduziert. Die Durchbiegung in Feld-

Zielfunktion: Minimales Gewicht,  $W_0 = 105.7 \text{ kN}$  8-knotige Elemente  
 Nebenbedingungen: VON MISES-Vergleichsspannungen  $\sigma_v = 2.0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$   
 Schubspannungen  $\tau = 8.0 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$   
 Verschiebung  $\hat{u}_A = 0.12 \text{ m}$

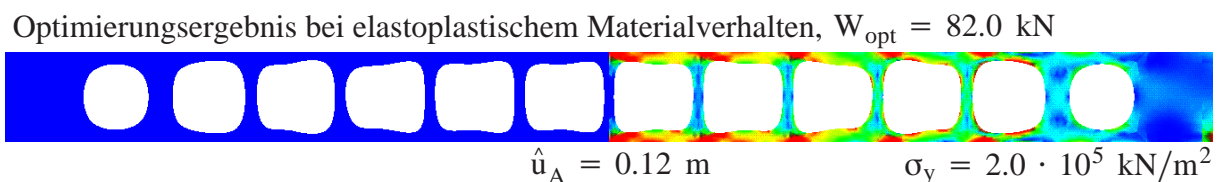
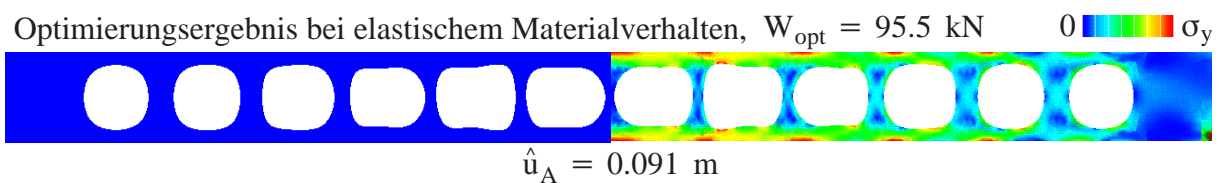


Abbildung 8.17: Optimierung mit 8-knotigen Finiten Elementen

mitte in Punkt *A* beträgt  $9.1\text{ cm}$ , was darauf hindeutet, daß mindestens eine Spannungsnebenbedingung aktiv ist. Die optimale Geometrie und der zugehörige Spannungszustand sind in Abbildung 8.17 dargestellt.

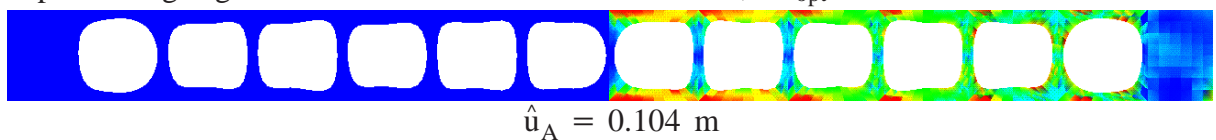
Anhand der Spannungsplots in Abbildung 8.17 ist zu erkennen, daß nur an einigen wenigen Stellen die Spannungsnebenbedingungen verletzt und somit aktiv sind. An anderen Stellen hingegen ist die Vergleichsspannung weit unter den 'kritischen Werten'. Bei der Annahme eines elastischen Materialverhaltens besteht jedoch nicht die Möglichkeit, Spannungen umzulagern, falls ein bestimmter Wert überschritten ist. Um nun das Material besser und effizienter ausnutzen zu können und Spannungsumlagerungen zu ermöglichen, wird ein elastoplastisches Materialverhalten angenommen. Dazu wird die **VON MISES-Fließbedingung** verwendet. In diesem Beispiel wird nahezu ohne Verfestigung gerechnet (ideal plastisch). Zu Vergleichszwecken wird die Fließspannung in der Höhe der Nebenbedingung der **VON MISES-Vergleichsspannungen** definiert ( $\sigma_y = \sigma_v = 2.0 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$ ). Eine Gewichtsoptimierung auf der Basis des elastoplastischen Materialmodells unter Berücksichtigung der Schubspannungs- und Verschiebungsnebenbedingungen führt zu einer Struktur mit einem Gewicht von  $W_{opt} = 82.0\text{ kN}$  (vgl. Abbildung 8.17). Die Vergleichsspannungsnebenbedingungen werden dabei durch die Fließspannung 'ersetzt'. Die Verschiebung in Feldmitte entspricht exakt der Verschiebungsnebenbedingung; d.h. diese ist aktiv und beendet die Optimierung. Das Optimierungsergebnis und der zugehörige Spannungszustand sind ebenfalls in Abbildung 8.17 dargestellt. Obwohl die geforderten konstruktiven Vorgaben in Form von Nebenbedingungen und Restriktionen eingehalten sind, kann das Gewicht bei elastoplastischem Materialverhalten um  $22.4\%$  gegenüber dem Ausgangszustand reduziert werden. Bei elastischem Materialverhalten sind es dagegen nur  $9.6\%$ .

Der Einfluß der Elementwahl wird anhand zweier Optimierungen entsprechend dem obigen Vorgehen mittels bilinearen Scheibenelementen demonstriert. Die optimalen Geometrien für die im übrigen gleichen Randbedingungen sind für elastisches und elastoplastisches Materialverhalten mit den zugehörigen Spannungszuständen in Abbildung 8.18 dargestellt. Aufgrund der geringen Anzahl an Finiten Elementen wird erwartet, daß sich die

Zielfunktion: Minimales Gewicht,  $W_0 = 106.1\text{ kN}$  4-knotige Elemente

Nebenbedingungen: **VON MISES-Vergleichsspannungen**  $\sigma_v = 2.0 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$   
 Schubspannungen  $\tau = 8.0 \cdot 10^4\text{ kN/m}^2$   
 Verschiebung  $\hat{u}_A = 0.12\text{ m}$

Optimierungsergebnis bei elastischem Materialverhalten,  $W_{opt} = 80.0\text{ kN}$



Optimierungsergebnis bei elastoplastischem Materialverhalten,  $W_{opt} = 72.8\text{ kN}$

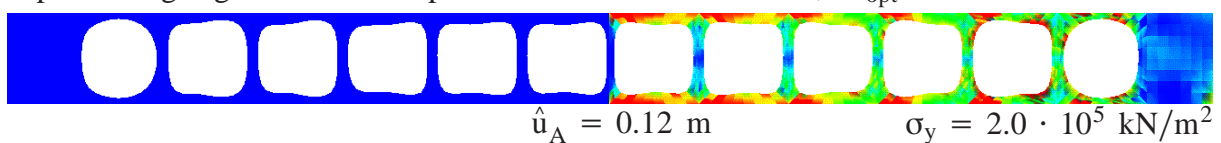


Abbildung 8.18: Optimierung mit 4-knotigen Finiten Elementen

Struktur zu steif verhält.

Das Ausgangsgewicht beträgt nun  $W_0 = 106.1 \text{ kN}$ . Der Unterschied zu den vorherigen Untersuchungen, bei denen  $W_0 = 105.7 \text{ kN}$  beträgt, ist auf die unterschiedlichen Ansatzfunktionen der Finiten Elemente zurückzuführen. Biquadratische Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen am Rand können die Kreisform besser approximieren, als dies mit linearen Finiten Elementen möglich ist. Die Reduktion des Gewichts beträgt im Fall der Elastizität 24.6 % und bei elastoplastischem Materialverhalten 31.4 %. Die absoluten Werte des Strukturgewichts sind Abbildung 8.18 zu entnehmen.

Es wird deutlich, daß die Wahl der Finiten Elemente, zumindest bei diesem Beispiel, qualitativ kaum einen Einfluß auf die Optimierungsergebnisse hat. Bei elastoplastischem Materialverhalten kann aufgrund der Möglichkeit der Spannungsumlagerung deutlich mehr Material eingespart werden, als dies bei elastischem Materialverhalten der Fall ist. Allerdings sind die Zielfunktionswerte und damit auch die optimale Geometrie der Struktur sehr stark von der Qualität der Strukturantwort abhängig, da bei diesem Optimierungsproblem lokale Entwurfskriterien in Form von Verschiebungs- und Spannungsnebenbedingungen verwendet werden. Die Bestimmung der tatsächlich optimalen Geometrie setzt jedoch eine möglichst genaue Approximation der Struktur voraus, um die lokalen Größen so exakt wie möglich ermitteln zu können. Dies gilt sowohl für die Methode zur Bestimmung der Strukturantwort (numerisches Modell) als auch für das zugrundegelegte mechanische Modell.

## 8.4 Beispiel 4: Minimierung des Gewichts unter Berücksichtigung von Stabilitätsnebenbedingungen

Wie im Beispiel zuvor, ist bei diesem Optimierungsproblem das minimale Gewicht zu ermitteln. Die Geometrie, die Materialdaten und die Last- und Lagerbedingungen sind in Abbildung 8.19 angegeben. Die Balken-Stützen-Konstruktion ist in der Mitte der beiden Felder durch je eine vertikale Last der Größe  $1500 \text{ kN}$  beansprucht. Die Optimierungsvariablen und deren zulässige Bewegungsrichtungen sind ebenfalls in Abbildung 8.19 definiert. Die Unterkante des Balkens ist auf beiden Seiten der Stütze mit einem 5-knotigen B-Spline approximiert; die restlichen Kanten sind 2-knotige LAGRANGE-Kanten. Die

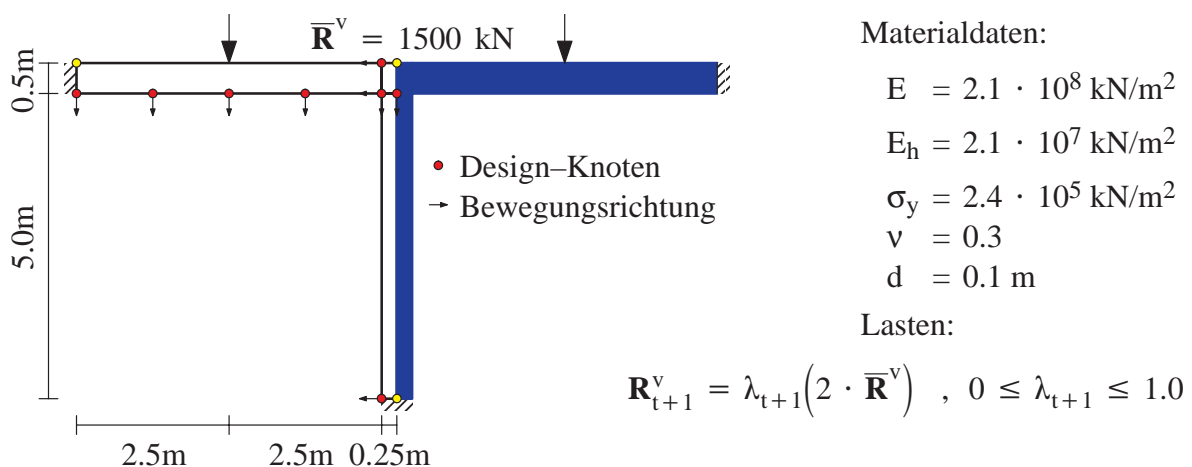


Abbildung 8.19: Geometrie, Lasten und Materialdaten des Optimierungsproblems



Optimierungsvariablen sind derart gekoppelt (linking), daß die Symmetrie bezüglich der vertikalen Achse erhalten bleibt. Zudem führen entsprechende Verknüpfungen der Variablen zu einer konstanten Dicke der Stütze.

Die vertikalen Verschiebungen der Unterkante des Balkens werden mit Hilfe zahlreicher Verschiebungsnebenbedingungen auf  $2\text{ cm}$  begrenzt. Die Analyse und Optimierung der Struktur erfolgt, trotz Symmetrie, am gesamten System mit 1116 biquadratischen, unterintegrierten Serendipity-Scheibenelementen.

Das Ausgangstragwerk in Abbildung 8.19 wird zu Vergleichszwecken auf der Grundlage verschiedener mechanischer Modelle optimiert. Zuerst erfolgt die Optimierung bei geometrisch und materiell linearem Strukturverhalten. Das zugehörige Optimierungsergebnis und die VON MISES-Vergleichsspannungen sind auf der linken Seite von Abbildung 8.20 dargestellt und als 'System 1' bezeichnet. Das Gewicht konnte dabei von ursprünglich  $0.775\text{ kN}$  auf  $0.3628\text{ kN}$  reduziert werden. Die aktive Verschiebungsnebenbedingung befindet sich in einem Abstand von  $2.82\text{ m}$  von den Auflagern des Balkens, etwa in Feldmitte. Die Durchbiegung bzw. Absenkung der  $4.26\text{ cm}$  breiten Stütze beträgt  $6.675\text{ mm}$ . Die vertikale Auflagerlast der Stütze (Stützenkraft) beträgt  $R_s = 1169.91\text{ kN}$ , was einer durchschnittlichen Spannung in der Auflagerfuge der Stütze von  $2.746 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$  entspricht. Die Stützenlast wurde mit Hilfe der vertikalen Spannungskomponente an den Knoten der Finiten Elemente und der SIMPSON-Regel ermittelt.

Es wird deutlich, daß die sehr schlanke Konstruktion extrem stabilitätsgefährdet ist. Entsprechende Untersuchungen haben gezeigt, daß die ertragbare Last nach dem EULER'schen Stabilitätskriterium für den EULER-Fall 4  $R_{krit} = 213.64\text{ kN}$  beträgt (mit  $R_{krit} = (\pi^2 EI)/s_k^2$ ).  $I$  stellt das Trägheitsmoment der Stütze dar und  $s_k$  ist deren Knicklänge, die hier für alle Systeme zu  $s_k = 5.00\text{ m}$  angenommen wird. Die Höhe des Balkens über der Stütze beträgt  $39.95\text{ cm}$  und an den Lagern  $65.54\text{ cm}$ .

In einem zweiten Schritt wird die Gewichtsminimierung auf der Basis eines elastoplastischen Materialmodells, der VON MISES-Fließbedingung mit linearer, isotroper Verfestigung und einer linearen Kinematik durchgeführt. Das zugehörige Optimierungsergebnis ('System 2') und der daraus resultierende Spannungszustand der VON MISES-Vergleichsspannungen sind auf der rechten Seite von Abbildung 8.20 dargestellt. Prinzipiell unterscheiden sich 'System 1' und 'System 2' rein optisch nur unwesentlich voneinander. Das Gewicht wurde von  $0.775\text{ kN}$  auf  $0.3851\text{ kN}$  reduziert. Der Abstand der aktiven Verschiebungsnebenbedingungen beträgt  $3.09\text{ m}$  von den Auflagern des Balkens. Obwohl die Breite der Stütze mit  $3.74\text{ cm}$  noch etwas schmaler als die von 'System 1' ist, beträgt die Absenkung über der Stütze nur  $5.94\text{ mm}$ . Grund hierfür ist die geringere Stützenkraft von  $R_s = 896.00\text{ kN}$  infolge einer anderen Dickenverteilung des Balkens entlang seiner

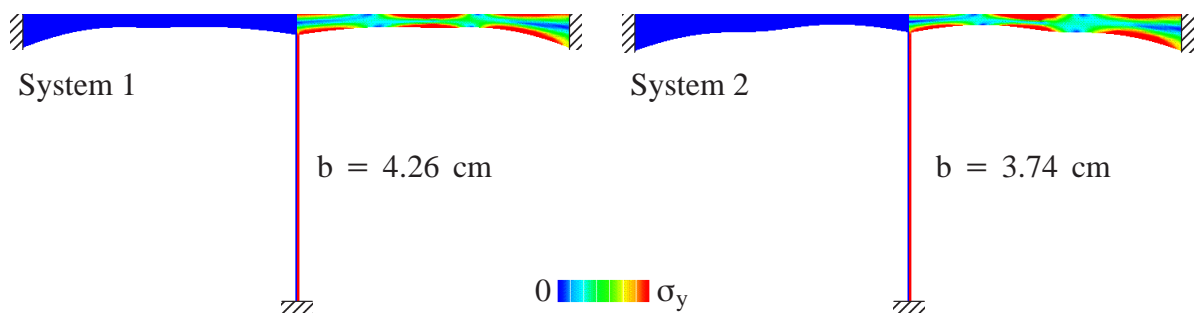


Abbildung 8.20: Optimierung bei elastischem und elastoplastischem Materialverhalten

Längsachse. Die Höhe des Balkens über der Stütze beträgt  $35.81\text{ cm}$ , die an den Auflagern  $71.49\text{ cm}$ . Die Stützenkraft wurde erneut mit der SIMPSON-Regel bestimmt und führt zu einer durchschnittlichen Spannung in der Lagerfuge von  $2.396 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$ , was etwa der definierten Fließspannung entspricht.

Auch bei diesem Optimierungsergebnis ist die sehr schlanke Stütze äußerst stabilitätsgefährdet. Die ertragbare Last nach dem EULER'schen Stabilitätskriterium (Fall 4) beträgt  $R_{krit} = 144.56\text{ kN}$  und ist damit deutlich niedriger als die vorhandene Last.

Anhand dieser Schwierigkeiten, sowohl bei elastischem als auch elastoplastischem Materialverhalten, wird die stark eingeschränkte Aussagekraft und Zuverlässigkeit der Optimierungsergebnisse für unrealistische mechanische Modelle deutlich. Die Berücksichtigung des Stabilitätsproblems während des Optimierungsprozesses ist hier unbedingt erforderlich, um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten. Zwar beeinflusst das gewählte Materialmodell die optimale Geometrie bezüglich des minimalen Gewichts, jedoch führen beide mechanischen Modelle zu unrealistischen und unzulässigen Entwürfen.

Die optimale Geometrie auf der Basis eines elastoplastischen Materialverhaltens, großer Verformungen (geometrisch nichtlinear) und der Berücksichtigung des Stabilitätsproblems ist in Abbildung 8.21 dargestellt und als 'System 3' bezeichnet. Zur approximativen Bestimmung der kritischen Last nach Gleichung (4.93) wurde das Eigenwertproblem nach Gleichung (4.88) verwendet, da bei diesem Optimierungsproblem lediglich eine Sicherheit von 1.0 gegenüber Stabilitätsversagen gefordert wird. Daher ist die Wahl des Eigenwertproblems von geringer Bedeutung. Die notwendige Ableitung des kritischen Lastfaktors ist in Kapitel 7 beschrieben.

Bei dieser Optimierung konnte das Gewicht der Struktur auf  $0.4028\text{ kN}$  reduziert werden und liegt damit nur unwesentlich über den Werten von 'System 1' und 'System 2'. Die Breite der Stütze beträgt nun  $8.08\text{ cm}$  und ist demnach deutlich dicker als bei den zuvor durchgeführten Optimierungen. Neben der bei dieser Optimierung zusätzlich eingeführten Stabilitätsnebenbedingung ist eine Verschiebungsnebenbedingung im Abstand von  $2.68\text{ m}$  vom Auflager des Balkens aktiv. D.h. genau bei Erreichen der vorgegebenen Last tritt Stabilitätsversagen der Stütze ein (Sicherheitsfaktor 1.0), und die maximal zulässige Vertikalverschiebung des Balkens wird erreicht.

Die Stützenkraft beträgt  $1416.69\text{ kN}$ , was allerdings aufgrund der größeren Breite der Stütze nur einer durchschnittlichen Spannung von  $1.753 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$  entspricht. Dieser Wert liegt deutlich unter der Fließspannung, was auch anhand des Spannungsplots in Abbildung 8.21 zu erkennen ist. Aufgrund des Stabilitätsproblems kann die zu ertragende Spannung (Fließspannung) nicht erreicht werden, wie dies bei 'System 2' der Fall ist (vgl.

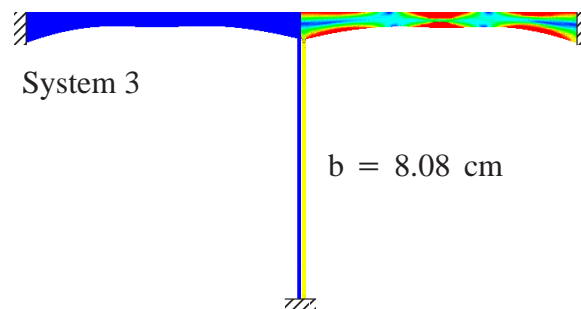


Abbildung 8.21: Optimierung mit Stabilitätsnebenbedingungen, materiell und geometrisch nichtlinear

Abbildung 8.20). Dies wird anhand der im Vergleich zu 'System 1' und 'System 2' geringeren Absenkung der Stütze von  $4.17\text{ mm}$  zusätzlich deutlich. Allerdings ist gewährleistet, daß die vorhandene Stützenkraft unter der nach dem EULER'schen Stabilitätskriterium von  $R_{krit} = 1457.78\text{ kN}$  liegt. Der Grund für den geringen Unterschied der beiden Werte ist vor allem in der approximativen Ermittlung der Stützenkraft mittels der SIMPSON-Regel, der Berechnung mit der Methode der Finiten Elemente und der Annahme des EULER-Falls 4 sowie der Knicklänge  $s_k = 5.0\text{ m}$  zu suchen.

Durch den Einfluß der Stabilitätsnebenbedingung auf die optimale Formgebung gestaltet sich die Ausbildung des Balkens in anderer Art und Weise. Die Höhe des Balkens über der Stütze beträgt  $51.47\text{ cm}$  und über den Auflagern  $59.36\text{ cm}$ . Zusammenfassend sind die erwähnten Werte der drei durch die Formoptimierung generierten Systeme in Tabelle 8.4 dargestellt.

Es sollte ergänzend erwähnt werden, daß im Laufe der Ermittlung von 'System 3' mehrere lokale Minima auftraten, was die Durchführung der Optimierung von zahlreichen, unterschiedlichen Startentwürfen notwendig machte, um zumindest ungefähr in die Nähe des tatsächlichen, globalen Optimums zu gelangen. Ob das ermittelte Tragwerk das globale Optimum darstellt, kann jedoch trotzdem nicht garantiert werden. Diese Problematik trat bei der Generierung der Systeme '1' und '2' nicht auf. Dies führt zu der Vermutung, daß für die Schwierigkeiten bei der Optimierung die Berücksichtigung der Stabilitätsnebenbedingung verantwortlich ist.

Eine mögliche Erklärung für das Auftreten dieser Schwierigkeiten ist, daß erst durch die Minimierung des Gewichts eines bestimmten Tragelements, das für die Lastabtragung nicht unbedingt benötigt wird, ein Stabilitätsproblem auftritt (sofern von einem zulässigen Entwurf aus gestartet wurde). Ein ähnliches Problem ergibt sich bei der Topologieoptimierung. Bei Verwendung des SIMP-Ansatzes (vgl. Kapitel 3) werden die Dichten als Optimierungsvariablen definiert. In der Nähe der Dichte '0', die infolge des Optimierungsprozesses an vielen Stellen des Tragwerks erzeugt wird, können lokale Stabilitätsprobleme auftreten. Die Beanspruchung dieser Stellen ist zwar sehr gering, jedoch gilt dies auch für die zugehörige Steifigkeit. Zur Lösung bzw. Umgehung dieses Problems werden die entsprechenden Einträge in der geometrischen Steifigkeitsmatrix vernachlässigt (vgl. NEVES ET AL. [153], MAUTE [136]), da diese Bereiche im Optimum wahrscheinlich nicht mehr vorhanden sein werden.

Die verwendeten Methoden der Formoptimierung sind allerdings nicht in der Lage, die Topologie eines Tragwerks zu ändern, indem die Stütze komplett entfernt wird. Dadurch

	System 1	System 2	System 3
Optimales Gewicht in [kN]	0.3628	0.3851	0.4028
Stützenbreite in [cm]	4.26	3.74	8.08
Balkenhöhe in [cm] , Lager/Stütze	65.54/39.95	71.49/35.81	59.36/51.47
Spannung in der Stütze in [kN/m <sup>2</sup> ]	$2.746 \cdot 10^5$	$2.396 \cdot 10^5$	$1.753 \cdot 10^5$
Stützenkraft in [kN]	1169.91	896.00	1416.69
Kritische Last nach EULER in [kN]	213.64	144.56	1457.78

Tabelle 8.4: Zahlenwerte zu den Optimierungsergebnissen

könnte jedoch das Stabilitätsproblem des Tragwerks verhindert werden. Die Entscheidung, ab welchem Lastniveau bzw. ob überhaupt eine Stütze zur Lastabtragung für die gegebenen Randbedingungen erforderlich ist, kann daher nur mit Methoden der Topologieoptimierung getroffen werden. Die Durchführung einer Topologieoptimierung auf der Basis der in Kapitel 6 vorgestellten Methode zur Ermittlung der Sensitivitäten ist aufgrund der großen Anzahl an Optimierungsvariablen extrem rechenintensiv und im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht durchführbar.

Die Formoptimierung mit Stabilitätsnebenbedingungen ist jedoch dann auf jeden Fall sinnvoll, wenn aus bestimmten Gründen eine gewählte Topologie bezüglich der Form optimiert werden soll, um das Entstehen stabilitätsgefährdeter Tragwerke zu verhindern. Eine nachträgliche Verbreiterung von Tragelementen, wie dies zur Vermeidung von Stabilitätsproblemen bei 'System 1' und 'System 2' notwendig wäre, beeinflusst jedoch das globale Tragverhalten und somit auch die optimale Geometrie des gesamten Tragwerks, was anhand der unterschiedlichen Formen des Balkens bei diesem Beispiel zu erkennen ist.

Abschließend bleibt noch zu erwähnen, daß die ermittelten Systeme die optimalen Lösungen bezüglich der gewählten mechanischen Modelle, und hier besonders des gewählten Lastfalls bzw. Lastniveaus, darstellen. Eine Veränderung einer oder mehrerer dieser Größen kann zu völlig anderen 'optimalen' Tragwerken führen.

# Kapitel 9

## Bewertung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe der Methoden der Strukturoptimierung kann das mechanische Verhalten von Tragwerken in Abhängigkeit von Gegebenheiten wie äußere Last, Ausgangsgeometrie, Material sowie Lagerbedingungen optimiert bzw. verbessert werden. Während die Topologieoptimierung zur Ermittlung des prinzipiellen Tragwerksaufbaus eingesetzt wird, läßt sich die genaue, d.h. optimale Form der Struktur mittels der Formoptimierung bestimmen. Analoges gilt für die Querschnittsoptimierung und die Materialoptimierung, mit deren Hilfe optimale Querschnittsabmessungen bzw. der optimale Materialaufbau ermittelt werden können.

Allerdings stellen alle derart gewonnenen Optimierungsergebnisse bzw. Tragwerke ein Optimum bezüglich der zugrundegelegten Annahmen und Vereinfachungen gegenüber der Wirklichkeit dar. Das bedeutet, daß die optimale Topologie und Form von den Idealisierungen des tatsächlichen Ausgangstragwerks mittels des Entwurfsmodells sowie der Approximation des mechanischen Strukturverhaltens und damit auch dessen Sensitivität im Analysemodell abhängig sind. Die Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse vom Analysemodell ist auf das gewählte Berechnungsverfahren, in der vorliegenden Arbeit die Methode der Finiten Elemente, die Qualität der verwendeten Elementformulierung und die gewählte Kinematik, aber besonders auf das zugrundegelegte physikalische Modell, wie beispielsweise das Materialverhalten, zurückzuführen. Bisherige Optimierungsverfahren basieren in den meisten Fällen auf der Annahme geometrischer und materieller Linearität, womit die Berücksichtigung von nichtlinearen Strukturproblemen, wie beispielsweise der Elastoplastizität oder Stabilitätsphänomenen, bereits während des Optimierungsprozesses nicht möglich ist.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden einige dieser strukturmechanischen Probleme in den Optimierungsprozeß aufgenommen, um deren Einfluß auf die optimale Topologie bzw. Formgebung zu untersuchen. Ziel ist es, damit die Zuverlässigkeit der Optimierungsergebnisse infolge einer genaueren Erfassung des realen Strukturverhaltens zu steigern und außerdem eine optimale Ausnutzung der eingesetzten Materialien zu gewährleisten, um Ressourcen und damit Kosten einzusparen und trotzdem die Sicherheit der Tragwerke garantieren zu können.

Aus diesen Gründen wurden die notwendigen Grundlagen zur Erfassung der Elastoplastizität mit ver- wie auch entfestigendem Materialverhalten nach Überschreiten der Fließspannung und großen Verformungen (geometrische Nichtlinearität, Stabilitätsphänomene)

für den Einsatz in der Strukturoptimierung, und hier speziell für die Bestimmung der Gradienten von Strukturantwort und Entwurfskriterien (Zielfunktion, Nebenbedingungen), aufgearbeitet (vgl. Kapitel 4). Besondere Beachtung verdient dabei die Berücksichtigung und numerische Behandlung des im Falle der Elastoplastizität geschichtsabhängigen Materialverhaltens. Damit sind neben der Strukturantwort auch die Sensitivitäten (Gradienten) geschichtsabhängig, was für die Auswahl eines geeigneten Verfahrens zu deren Bestimmung von entscheidender Bedeutung ist. Aus diesem Grund wurden die prinzipiellen Methoden der Sensitivitätsanalyse in Kapitel 5 vorgestellt und anhand deren Vor- und Nachteile die Einsetzbarkeit dieser Verfahren für geschichtsabhängige Probleme diskutiert. Es stellte sich heraus, daß eine variationelle, direkte und aufgrund der Geschichtsabhängigkeit inkrementelle Vorgehensweise zur exakten und effizienten Bestimmung der Ableitungen zu verwenden ist. Eine Bestätigung dieser Aussage ist in verschiedenen Literaturstellen zu finden. Ein weiterer Vorteil der direkten Methode ist die Möglichkeit der Behandlung beliebiger Optimierungsprobleme, da aufgrund der Kenntnis der Sensitivität der Strukturantwort die Ableitungen aller mechanisch orientierten Entwurfskriterien einfach zu berechnen sind. In Kapitel 6 erfolgte dann die Herleitung der variationellen, direkten Sensitivitätsanalyse für geschichtsabhängige Materialmodelle, speziell für elastoplastisches Materialverhalten mit isotroper und kinematischer Ver- und Entfestigung (vgl. auch Anhang C). Das entfestigende Materialverhalten wurde dabei mit Hilfe der Bruchenergie beschrieben. Die Auswirkungen auf die Sensitivitätsanalyse und der Eingang in die Formulierung wurden diskutiert. Aufgrund erheblicher numerischer Schwierigkeiten bei der Optimierung mit entfestigendem Materialverhalten konnte jedoch kein Optimierungsbeispiel diskutiert werden. Diese Schwierigkeiten sind vor allem in zu großen Designänderungen während des Optimierungsprozesses zu suchen. Während die gewählten Diskretisierungen in Raum und Zeit für das Ausgangssystem genügend fein sind, ist vor allem die Zeitinkrementierung im Lauf des Optimierungsprozesses ständig, z.T. sehr stark zu verfeinern, um Konvergenz zu erhalten.

Neben der materiellen Nichtlinearität wurde die Berücksichtigung und numerische Umsetzung großer Verschiebungen bei der Berechnung der Sensitivitäten erörtert und hergeleitet.

Auf die Notwendigkeit der Konsistenz der Herleitung der Sensitivitätsanalyse zum verwendeten Algorithmus zur Bestimmung des nichtlinearen Strukturverhaltens (Strukturanalyse) wurde besonders hingewiesen. Aus diesem Grund wurde die Analogie zwischen Struktur- und Sensitivitätsanalyse aufgezeigt. Es wurde darüber hinaus verdeutlicht, daß eine konsistente Linearisierung der elastoplastischen Materialtangente für die quadratische Konvergenz des Verfahrens der Strukturanalyse, nicht aber für die Qualität der Ergebnisse der Strukturantwort, erforderlich ist. Im Gegensatz dazu ist die Verwendung der konsistent linearisierten elastoplastischen Materialtangente bei der Durchführung der Sensitivitätsanalyse zwingend erforderlich, um die Genauigkeit der Ableitungen garantieren zu können. Dies wird bei der Herleitung der entsprechenden Gleichungen in Kapitel 6 deutlich.

Die Qualität und Zuverlässigkeit der vorgestellten Sensitivitätsanalyse wurde in Kapitel 6 anhand ausgewählter, verschiedenster strukturmechanischer Beispiele demonstriert. Zur Beurteilung der Qualität dieser analytischen Vorgehensweise wurden Beispiele aus der Literatur sowie der Vergleich mit numerischen Methoden, beispielsweise dem finiten Differenzenverfahren, herangezogen.

Die Auswertung bzw. die Bestimmung der Ableitungen verschiedenster mechanisch ori-

entierter Entwurfskriterien ist aufgrund der Verwendung der direkten Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse unproblematisch, was in Kapitel 7 für einige Beispiele aufgezeigt wurde. Insbesondere wurde auf die Bestimmung der Sensitivität der Duktilität und des kritischen Lastfaktors bzw. der hierfür notwendigen Eigenwerte eingegangen. Auf die Nachteile anderer Verfahren wurde exemplarisch hingewiesen.

Die ausführliche Diskussion der Sensitivitätsanalyse in Kapitel 6 ist für den Einsatz in der Strukturoptimierung mittels gradientenbasierter Optimierungsmethoden, wie dem SQP- oder dem OC-Verfahren, erforderlich. Dazu wurde in den Kapiteln 2 und 3 eine bekannte, allgemeingültige Methode zur Behandlung von mathematisch erfaßbaren Optimierungsproblemen vorgestellt. Neben der Definition der Optimierungsvariablen für Topologie- und Formoptimierungsprobleme wurden vor allem gradientenbasierte Optimierungsstrategien zur Auffindung des Optimums kurz diskutiert.

Die Berücksichtigung der vorgestellten Nichtlinearitäten in der Strukturoptimierung, für welche die Sensitivitätsanalyse in Kapitel 6 hergeleitet wurde, konnte anhand von (z.T. akademischen) Optimierungsbeispielen demonstriert werden (vgl. Kapitel 8). Aufgrund des extrem großen numerischen Aufwands erfolgte bei der Auswahl der Beispiele die Beschränkung auf ebene Scheibenprobleme, ohne jedoch die Allgemeingültigkeit der vorgestellten Methode bzw. der gewonnenen Erkenntnisse einzuschränken. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Optimierungsprobleme zeigen sehr deutlich den Einfluß des gewählten mechanischen und numerischen Modells auf die optimale Topologie bzw. Geometrie. Diese Erkenntnis unterstreicht die Notwendigkeit der Berücksichtigung des, im Rahmen der Möglichkeiten, realen Tragverhaltens von Strukturen bei deren Generierung mit Hilfe von Optimierungsstrategien, aber auch alternativer Methoden.

## 9.2 Beurteilung des Verfahrens

Das in dieser Arbeit vorgestellte, inkrementelle Verfahren zur Sensitivitätsanalyse ermöglicht die Berechnung der Ableitungen bei geschichtsabhängigem Materialverhalten mit Ver- und Entfestigung. Allerdings ist die Methode auf kleine Verzerrungen beschränkt. Das vorgestellte Verfahren kann zur Behandlung inverser Probleme, zur Parameteridentifikation und zur Vorhersage von Zuverlässigkeiten eingesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die Sensitivitätsanalyse zur Optimierung von Tragstrukturen mittels gradientenbasierter Optimierungsverfahren eingesetzt.

Prinzipiell lassen sich die Sensitivitäten bei der vorgestellten Formulierung bezüglich beliebiger Optimierungsvariablen bestimmen. Allerdings ist aufgrund der gewählten und für geschichtsabhängige Probleme auch notwendigen bzw. empfehlenswerten direkten Vorgehensweise zur Ermittlung der Sensitivitäten deren Einsatz für Topologieoptimierungsaufgaben wegen der großen Anzahl an Optimierungsvariablen sehr teuer und mit enormen, in manchen Fällen kaum zu rechtfertigenden Rechenzeiten verbunden. Für die Behandlung derartiger Probleme sind daher alternative, effizientere Methoden notwendig. Dazu sind verschiedene Vereinfachungen und Vernachlässigungen zu treffen, deren Gültigkeitsbereich jedoch nur durch den Vergleich mit einem exakten Verfahren definiert werden kann. Eine Referenzlösung läßt sich mit dem vorgestellten Verfahren bestimmen, um die Auswirkungen der Vereinfachungen und Vernachlässigungen abschätzen zu können.

Für Formoptimierungsprobleme, deren Anzahl an Optimierungsvariablen im Vergleich zu Aufgaben der Topologieoptimierung erheblich kleiner ist, eignet sich die vorgestellte, di-

rekte Methode besonders gut.

Obwohl die vorgestellte Theorie und Herleitung für dreidimensionale Problemstellungen durchgeführt wurde, beschränkten sich die in Kapitel 8 zur Verifikation der Methode vorgestellten Optimierungsbeispiele auf Scheibenprobleme für den ebenen Spannungszustand. Die entsprechenden Modifikationen der Herleitung der Sensitivitätsanalyse wurden im Anhang der Arbeit dargestellt. Allerdings genügen diese zweidimensionalen Beispiele zur Erfassung der prinzipiellen Einflüsse des nichtlinearen Strukturverhaltens auf die Optimierungsergebnisse; zusätzlich kann der numerische Aufwand reduziert werden. Im Rahmen der Untersuchungen hat sich die hergeleitete Methode zur Sensitivitätsanalyse als sehr robust und zuverlässig erwiesen. Probleme bei der Optimierung von Tragwerken lassen sich in erster Linie auf Schwierigkeiten bei der Strukturanalyse zurückführen. Besonders bei entfestigendem, aber auch verfestigendem Materialverhalten oder bei der Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte verursachten zu große Designänderungen zwischen den einzelnen Optimierungsschritten Probleme bei der Berechnung der Strukturantwort, da die ursprünglich gewählte Zeitdiskretisierung für die durch die Optimierung veränderte Entwurfsituation zu grob ist. Eine relativ simple, adaptive Zeitschrittsteuerung schafft hier Abhilfe, vergrößert allerdings den numerischen Aufwand zusätzlich.

### 9.3 Ausblick

Die Motivation der vorliegenden Arbeit ist in der realistischeren Erfassung des tatsächlichen Strukturverhaltens durch ein entsprechendes mechanisches Modell bei der Optimierung von Tragwerken begründet. Dabei wurde elastoplastisches Materialverhalten mit der Beschränkung auf kleine Verzerrungen und geometrische Nichtlinearität während des Optimierungsprozesses berücksichtigt.

Obwohl die Sensitivitäten der Strukturantwort bei entfestigendem Materialverhalten bestimmt werden können, ist die Berücksichtigung von Entfestigung in der Optimierung weiterhin problematisch und erfordert daher alternative Konzepte. Für gewisse Problemstellungen, wie beispielsweise Umformprozesse, ist eine Theorie großer Verzerrungen zu verwenden. Weitere, in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigte Probleme sind z.B. Kontakt, Dynamik oder Imperfektionen. Zur Effizienzsteigerung ist der Einsatz paralleler und adaptiver Algorithmen denkbar.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden und deren Anwendung auf Optimierungsaufgaben den Einfluß eines realistischeren Strukturverhaltens auf die Optimierungsergebnisse deutlich aufzeigen. Daher ist das vorliegende Konzept als Grundlage weiterführender Forschungsarbeiten zu verstehen.



# Literaturverzeichnis

- [1] ADELMAN, H. M. & R. T. HAFTKA [1986]. ‘Sensitivity analysis of discrete structural systems.’ *AIAA Journal*, **24**, pp. 823–832.
- [2] ARGYRIS, J. H. & H.-P. MLEJNEK [1987]. *Die Methode der Finiten Elemente, Band I–III*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.
- [3] ARORA, J. S. [1989]. *Introduction to optimum design*. McGraw–Hill, New York.
- [4] ARORA, J. S. & E. J. HAUG [1979]. ‘Methods of design sensitivity analysis in structural optimization.’ *AIAA Journal*, **17**, pp. 970–974.
- [5] ARORA, J. S., T. H. LEE & J. B. CARDOSO [1992]. ‘Structural shape sensitivity analysis: Relationship between material derivative and control volume approaches.’ *AIAA Journal*, **30**, pp. 1638–1648.
- [6] ATREK, E., R. H. GALLAGHER, K. M. RAGSDALL & O. C. ZIENKIEWICZ [1984]. *New directions in optimum structural design*. Wiley & Sons, Chichester, New York.
- [7] BANICHUK, N. V. [1990]. *Introduction to optimization of structures*. Springer–Verlag, Berlin.
- [8] BARTHELEMY, B., C. T. CHON & R. T. HAFTKA [1988]. ‘Accuracy problems associated with semi–analytical derivatives of static response.’ *Finite Elements in Analysis and Design*, **4**, pp. 249–265.
- [9] BARTHELEMY, B. & R. T. HAFTKA [1988]. ‘Accuracy analysis of the semi–analytical method for shape sensitivity calculation.’ In *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/ASC 29th Structures, Structural Dynamics and Material Conference*. Williamsburg, VA, USA.
- [10] BARTHOLD, F.-J. [1993]. *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [11] BARTHOLD, F.-J., A. FALK & E. STEIN [1994]. ‘Structural optimization for rubberlike materials using analytical sensitivity analysis.’ In *Advances in Design Automation*, edited by B. J. Gilmore, D. A. Hoeltzel, D. Dutta & H. A. Eschenauer. CIMNE, Barcelona.
- [12] BARTHOLD, F.-J. & E. STEIN [1996]. ‘A continuum mechanical–based formulation of the variational sensitivity analysis in structural optimization. Part I: Analysis.’ *Structural Optimization*, **11**, pp. 29–42.
- [13] BATHE, K.-J. [1996]. *Finite Element Procedures*. Prentice–Hall, London.
- [14] BAŽANT, Z. P. & B. H. OH [1983]. ‘Crack band theory for fracture of concrete.’ *RILEM Materials & Structures*, **16**, pp. 155–177.

- [15] BECKER, A. [1992]. *Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenbestimmung*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [16] BELEGUNDU, A. D. & S. D. RAJAN [1988]. ‘A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **66**, pp. 87–106.
- [17] BENDSØE, M. P. [1989]. ‘Optimal shape design as a material distribution problem.’ *Structural Optimization*, **1**, pp. 193–202.
- [18] BENDSØE, M. P. [1995]. *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer-Verlag, Berlin.
- [19] BENDSØE, M. P., J. M. GUEDES, R. B. HABER, P. PEDERSEN & J. E. TAYLOR [1994]. ‘An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design.’ *J. Appl. Mech.*, **61**, pp. 930–937.
- [20] BENDSØE, M. P. & N. KIKUCHI [1988]. ‘Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **71**, pp. 197–224.
- [21] BENDSØE, M. P. & O. SIGMUND [1999]. ‘Material interpolation schemes in topology optimization.’ *Archive of Applied Mechanics*, **69**, pp. 635–654.
- [22] BENDSØE, M. P. & C. A. MOTA SOARES [1993]. *Topology design of structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [23] BENDSØE, M. P. & J. SOKOŁOWSKI [1987]. ‘Sensitivity analysis and optimization of elasto-plastic structures.’ *Engineering Optimization*, **11**, pp. 31–38.
- [24] BENNETT, J. A. & M. E. BOTKIN [1985]. ‘Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh generation.’ *AIAA Journal*, **23**, pp. 458–464.
- [25] BENNETT, J. A. & M. E. BOTKIN (EDS.) [1986]. *The optimum shape – Automated structural design*. Plenum Press, New York, London.
- [26] BENSOUSSAN, A., J.-L. LIONS & G. PAPANICOLAOU [1978]. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam.
- [27] BERKE, L. & N. S. KHOT [1987]. ‘Structural optimization using optimality criteria.’ In *Computer Aided Optimal Design – Structural and Mechanical Systems, NATO ASI Series F27*, edited by C. A. Mota Soares, pp. 271–311. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [28] BETTEN, J. [1993]. *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Verlag, Berlin.
- [29] BISCHOFF, M. [1999]. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [30] BLETZINGER, K.-U. [1990]. *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [31] BLETZINGER, K.-U. [1996]. ‘Shape optimization by homotopy methods with special application to membrane structures.’ In *Proceedings of the 6th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pp. 122–129. Bellevue, USA.

- [32] BLETZINGER, K.-U., S. KIMMICH & E. RAMM [1991]. ‘Efficient modeling in shape optimal design.’ *Comp. Systems in Eng.*, **2**, pp. 483–495.
- [33] BLETZINGER, K.-U., R. REITINGER, S. KIMMICH & E. RAMM [1993]. ‘Shape optimization with program CARAT.’ In *Software Systems of Structural Optimization*, edited by K. Schittkowski, H. R. E. M. Hörnlein & C. A. Mota Soares, pp. 97–124. Birkhäuser, Basel.
- [34] DE BOER, H. & F. VAN KEULEN [1997]. ‘Error analysis of refined semi-analytical design sensitivities.’ *Structural Optimization*, **14**, pp. 242–247.
- [35] DE BOER, H. & F. VAN KEULEN [2000]. ‘Refined semi-analytical design sensitivities.’ *Int. J. Solids Struct.*, **37**, pp. 6961–6980.
- [36] BÖHM, W., G. FARIN & J. KAHMANN [1984]. ‘A survey of curve and surface methods in CAGD.’ *Computer Aided Geometric Design*, **1**, pp. 1–60.
- [37] BRAIBANT, V. & C. FLEURY [1984]. ‘Shape optimal design using B-splines.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **44**, pp. 247–267.
- [38] BRENDDEL, B. [1979]. *Zur geometrisch nichtlinearen Elastostabilität*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [39] BRENDDEL, B. & E. RAMM [1982]. ‘Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der Finiten Elemente.’ *Ingenieur-Archiv*, **51**, pp. 337–362.
- [40] BRONSTEIN, I. N. & K. A. SAMENDJAJEW [1991]. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig.
- [41] BRUNS, T. E. & D. A. TORTORELLI [1998]. ‘Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms.’ In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pp. 1874–1882. St. Louis, USA.
- [42] BRUNS, T. E. & D. A. TORTORELLI [1999]. ‘Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms.’ In *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May, 17–21, 1999, Buffalo, USA*.
- [43] BUGEDA, G. & L. GIL [1999]. ‘Shape sensitivity analysis for structural problems with non-linear material behavior.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **33**, pp. 1385–1404.
- [44] BUGEDA, G., L. GIL & E. OÑATE [1999]. ‘Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening.’ *Structural Optimization*, **17**, pp. 162–171.
- [45] BUHL, T., C. B. W. PEDERSEN & O. SIGMUND [1999]. ‘Designing geometrically non-linear structures using topology optimization.’ In *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May, 17–21, 1999, Buffalo, USA*.
- [46] CARAT [2000]. *Programmsystem CARAT, Eingabebeschreibung und Dokumentation*. Unveröffentlichter Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [47] CARDOSO, J. B. & J. S. ARORA [1988]. ‘Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics.’ *AIAA Journal*, **26**, pp. 595–603.

- [48] CEA, J. [1981]. ‘Numerical methods of shape optimal design.’ In *Optimization of distributed parameter structures, Vol. 1, 2*, edited by E. J. Haug & J. Cea, pp. 1049–1087. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- [49] CEA, J. [1981]. ‘Problems of shape optimal design.’ In *Optimization of distributed parameter structures, Vol. 1, 2*, edited by E. J. Haug & J. Cea, pp. 1005–1048. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- [50] CHEN, X. [1994]. *Nonlinear finite element sensitivity analysis for large deformation elastoplastic and contact problems*. Ph.D. thesis, University of Tokyo, Japan.
- [51] CHEN, X., T. HISADA, M. KLEIBER & H. NOGUCHI [1993]. ‘Comparison of different sensitivity analysis algorithms for large deformation elasto–plastic problems.’ In *Design sensitivity analysis*, edited by M. Kleiber & T. Hisada, pp. 209–229. Atlanta Technology Publ.
- [52] CHEN, X., K. NAKAMURA, M. MORI & T. HISADA [1999]. ‘Sensitivity analysis of inelastic structures.’ *Theoretical and Applied Mechanics*, **48**, pp. 39–47.
- [53] CHENG, K. T. & N. OLHOFF [1981]. ‘An investigation concerning optimal design of solid elastic plates.’ *Int. J. Solids Struct.*, **17**, pp. 305–323.
- [54] CHOI, K. K. & K.-H. CHANG [1994]. ‘A study of design velocity field computation for shape optimal design.’ *Finite Elements in Analysis and Design*, **15**, pp. 317–341.
- [55] CHOI, K. K. & J. L. T. SANTOS [1987]. ‘Design sensitivity analysis of non–linear structural systems. Part I: Theory.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, pp. 2039–2055.
- [56] CLOUGH, R. W. [1965]. ‘The finite element method in structural mechanics.’ In *Stress Analysis: Recent Developments in Numerical and Experimental Methods*, edited by O. C. Zienkiewicz & S. Holister. Wiley & Sons.
- [57] CRISFIELD, M. A. [1981]. ‘A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through.’ *Computers & Structures*, **13**, pp. 55–62.
- [58] CRISFIELD, M. A. [1984]. ‘Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions.’ In *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, edited by F. Damjanić, E. Hinton, D. R. J. Owen, N. Bićanić & V. Simović, pp. 331–358. Pineridge Press, Swansea, U.K.
- [59] CRISFIELD, M. A. [1991]. *Non–linear finite element analysis of solids and structures. Vol. 1: Essentials*. Wiley & Sons, Chichester.
- [60] CRISFIELD, M. A. [1997]. *Non–linear finite element analysis of solids and structures. Vol. 2: Advanced topics*. Wiley & Sons, Chichester.
- [61] DEMS, K. & Z. MRÓZ [1983]. ‘Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis – I.’ *Int. J. Solids Struct.*, **19**, pp. 677–692.
- [62] DING, Y. [1986]. ‘Shape optimization of structures – a literature survey.’ *Computers & Structures*, **24**, pp. 985–1004.
- [63] DORN, W. S., R. E. GOMORY & H. J. GREENBERG [1964]. ‘Automatic design of optimal structures.’ *J. de Mécanique*, **3**, pp. 25–52.
- [64] ESCHENAUER, H. A. [1985]. *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen*. Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) 1980–1984, Technischer Bericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität–Gesamthochschule Siegen.

- [65] ESCHENAUER, H. A., V. V. KOBELEV & A. SCHUMACHER [1994]. ‘Bubble method for topology and shape optimization.’ *Structural Optimization*, **8**, pp. 42–51.
- [66] ESCHENAUER, H. A., J. KOSKI & A. OSYCZKA [1990]. *Multicriteria design optimization*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [67] ESCHENAUER, H. A. & N. OLHOFF (EDS.) [1983]. *Optimization methods in structural design*. BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
- [68] ESCHENAUER, H. A., P. U. POST & M. BREMICKER [1988]. ‘Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten.’ *Bauingenieur*, **63**, pp. 515–526.
- [69] ESCHENAUER, H. A. & W. SCHNELL [1993]. *Elastizitätstheorie: Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- [70] ESCHENAUER, H. A. & G. THIERAUF [1989]. *Discretization methods and structural optimization – procedures and applications*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [71] FALK, A. [1995]. *Adaptive Verfahren für die Formoptimierung von Flächentragwerken unter Berücksichtigung der CAD–FEM–Kopplung*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [72] FALK, A., F.-J. BARTHOLD & E. STEIN [1999]. ‘A hierarchical design concept for shape optimization based on the interaction of CAGD and FEM.’ *Structural Optimization*, **18**, pp. 12–23.
- [73] FAUX, I. D. & M. J. PRATT [1979]. *Computational geometry for design and manufacture*. Ellis Horwood Publishers, Chichester.
- [74] FEENSTRA, P. H. [1993]. *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Netherlands.
- [75] FLEURY, C. & V. BRAIBANT [1986]. ‘Structural optimization: A new dual method using mixed variables.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, pp. 409–428.
- [76] GILL, P. E., W. MURRAY, M. A. SAUNDERS & M. H. WRIGHT [1983]. ‘Computing forward–difference intervals for numerical optimization.’ *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, **4**, pp. 310–321.
- [77] GILL, P. E., W. MURRAY & M. H. WRIGHT [1981]. *Practical optimization*. Academic Press, London.
- [78] GOPALAKRISHNA, H. S. & L. F. GREIMANN [1988]. ‘Newton–Raphson procedure for the sensitivity analysis of nonlinear structural behavior.’ *Computers & Structures*, **30**, pp. 1263–1273.
- [79] GREEN, A. E. & P. M. NAGHDI [1965]. ‘A general theory of an elastic–plastic continuum.’ *Arch. Rational Meth. Anal.*, **18**, pp. 251–281.
- [80] GUEDES, J. M. & N. KIKUCHI [1990]. ‘Pre– and post–processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, pp. 143–198.
- [81] HABER, R. B. [1987]. ‘A new variational approach to structural shape sensitivity analysis.’ In *Computer aided optimal design – Structural and mechanical systems, NATO ASI Series F27*, edited by C. A. Mota Soares, pp. 573–587. Springer–Verlag, Berlin.

- [82] HABER, R. B., C. S. JOG & M. P. BENDSØE [1996]. 'A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter.' *Structural Optimization*, **11**, pp. 1–12.
- [83] HAFTKA, R. T. & H. M. ADELMAN [1989]. 'Recent developments in structural sensitivity analysis.' *Structural Optimization*, **1**, pp. 137–151.
- [84] HAFTKA, R. T. & R. V. GRANDHI [1986]. 'Structural shape optimization – a survey.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **57**, pp. 517–522.
- [85] HAFTKA, R. T., Z. GÜRDAL & M. P. KAMAT [1990]. *Elements of structural optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [86] HAFTKA, R. T. & Z. MRÓZ [1986]. 'First- and second-order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures.' *AIAA Journal*, **24**, pp. 1187–1192.
- [87] HARIRIAN, M., J. B. CARDOSO & J. S. ARORA [1987]. 'Use of ADINA for design optimization of nonlinear structures.' *Computers & Structures*, **26**, pp. 123–133.
- [88] HASLINGER, J. & P. NEITTAANMÄKI [1988]. *Finite element approximation for optimal shape design: Theory and applications*. Wiley & Sons, Chichester.
- [89] HAUG, E. J. & J. CEA (EDS.) [1981]. *Optimization of distributed parameter structures, Vol. 1, 2*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- [90] HAUG, E. J., K. K. CHOI & V. KOMKOV [1986]. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Orlando, New York.
- [91] HEIM, T. [1999]. *Tragwerkoptimierung mit elastischen und elastoplastischen Materialgesetzen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [92] HELNWEIN, P., H. A. MANG & B. PILCHER [1999]. 'Ab initio estimates of stability limits on nonlinear load–displacement paths: potential and limitations.' *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, **6**, pp. 345–360.
- [93] HEMP, W. S. [1973]. *Optimum structures*. Clarendon Press, Oxford.
- [94] HILLERBORG, A., M. MODÉER & P.-E. PETERSSON [1976]. 'Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.' *Cement & Concrete Research*, **6**, pp. 773–782.
- [95] HÖRNLEIN, H. R. E. M. [1995]. 'Optimalitätskriterien in der Strukturoptimierung.' In *Computerunterstützte Strukturoptimierung, COMETT-Seminarunterlagen, Thurnau/Bayreuth, 13.–15. September 1995*.
- [96] HÖSS, P. [1995]. *Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.
- [97] HUGHES, T. J. R. [1987]. *The finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [98] IMAM, M. H. [1982]. 'Three-dimensional shape optimization.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, pp. 661–673.
- [99] KALISZKY, S. [1984]. *Plastizitätslehre: Theorie und technische Anwendungen*. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [100] KAMAT, M. P. (ED.) [1993]. *Structural optimization: Status and promise*, Volume 150. AIAA.

- [101] KANEKO, I. & G. MAIER [1981]. ‘Optimum design of plastic structures under displacement constraints.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **27**, pp. 369–391.
- [102] KEENER, J. P. & H. B. KELLER [1973]. ‘Perturbed bifurcation theory.’ *Arch. Rational Meth. Anal.*, **50**, pp. 159–175.
- [103] KEMMLER, R. [2001]. *Stabilität und finite Deformationen in der Form- und Topologieoptimierung*. Dissertation (in Bearbeitung), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [104] KEMMLER, R., S. SCHWARZ & E. RAMM [1999]. ‘Topology optimization including geometrically nonlinear response.’ In *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May, 17–21, 1999, Buffalo, USA*.
- [105] KIKUCHI, N., K. Y. CHUNG, T. TORIGAKI & J. E. TAYLOR [1986]. ‘Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **57**, pp. 67–89.
- [106] KIMMICH, S. [1990]. *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [107] KIMMICH, S., R. REITINGER & E. RAMM [1992]. ‘Integration of different numerical techniques in shape optimization.’ *Structural Optimization*, **4**, pp. 149–155.
- [108] KIRSCH, U. [1993]. *Structural optimization: Fundamentals and applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [109] KLEIBER, M. [1993]. ‘Shape and non–shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic non–linearity.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **108**, pp. 73–97.
- [110] KLEIBER, M., H. ANTÚNEZ, T. D. HIEN & P. KOWALCZYK [1997]. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: Theory and finite element computations*. Wiley & Sons, Chichester.
- [111] KLEIBER, M. & T. D. HIEN [1997]. ‘Parameter sensitivity of inelastic buckling and post–buckling response.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **145**, pp. 239–262.
- [112] KLEIBER, M., T. D. HIEN, H. ANTÚNEZ & P. KOWALCZYK [1995]. ‘Parameter sensitivity of elastoplastic response.’ *Engineering Computations*, **12**, pp. 263–280.
- [113] KLEIBER, M., T. D. HIEN & E. POSTEK [1994]. ‘Incremental finite element sensitivity analysis for non–linear mechanics applications.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**, pp. 3291–3308.
- [114] KLEIBER, M. & P. KOWALCZYK [1995]. ‘Constitutive parameter sensitivity in elasto–plasticity.’ *Computational Mechanics*, **17**, pp. 36–48.
- [115] KLEIBER, M. & P. KOWALCZYK [1996]. ‘Sensitivity analysis in plane stress elasto–plasticity and elasto–viscoplasticity.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **137**, pp. 395–409.
- [116] KNEPPE, G. [1986]. *Direkte Lösungsstrategien zur Gestaltsoptimierung von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Siegen, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [117] KOHN, R. V. & G. STRANG [1983]. ‘Optimal design for torsional rigidity.’ In *Hybrid and mixed finite element methods*, edited by S. N. Atluri, R. H. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, pp. 281–288. Wiley & Sons, Chichester.

- [118] KOHN, R. V. & G. STRANG [1986]. ‘Optimal design and relaxation of variational problems. I–III.’ *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**, pp. 113–137.
- [119] KOWALCZYK, P. & M. KLEIBER [1999]. ‘Shape sensitivity in elasto–plastic computations.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **171**, pp. 371–386.
- [120] KREISSELMEIER, G. & R. STEINHAUSER [1983]. ‘Application of vector performance optimization to a robust control loop design for a fighter aircraft.’ *Int. J. of Control*, **37**, pp. 251–284.
- [121] KUHN, H. W. & A. W. TUCKER [1951]. ‘Nonlinear programming.’ In *2nd Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by J. Neyman, pp. 487–492. University of California Press, Berkeley, Los Angeles.
- [122] KÜNZI, H. P., W. KRELLE & R. VON RANDOW [1979]. *Nichtlineare Programmierung*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [123] LEE, T. H. & J. S. ARORA [1995]. ‘A computational method for design sensitivity analysis of elastoplastic structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **122**, pp. 27–50.
- [124] LEE, T. H., J. S. ARORA. & V. KUMAR [1993]. ‘Shape design sensitivity analysis of viscoplastic structures.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **108**, pp. 237–259.
- [125] LEMAITRE, J. & J.-L. CHABOCHE [1990]. *Mechanics of solid materials*. University Press, Cambridge.
- [126] LO, S. H. [1985]. ‘A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, pp. 1403–1426.
- [127] LUBLINER, J. [1990]. *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York.
- [128] LUENBERGER, D. G. [1984]. *Linear and nonlinear programming*. Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [129] LUND, E. [1994]. *Finite element based design sensitivity analysis and optimization*. Ph.D. thesis, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [130] MAHNKEN, R. [1993]. *Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [131] MAHNKEN, R. [1998]. *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht–Nr. 98/2.
- [132] MALVERN, L. E. [1969]. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice–Hall, London.
- [133] MARSDEN, J. E. & T. J. R. HUGHES [1983]. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice–Hall, London.
- [134] MATTHECK, C. & S. BURKHARDT [1990]. ‘A new method of structural optimization based on biological growth.’ *Int. J. Fatigue*, **12**, pp. 185–190.
- [135] MATZENMILLER, A. [1988]. *Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [136] MAUTE, K. [1998]. *Topologie– und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.



- [137] MAUTE, K. & E. RAMM [1994]. ‘Topology optimization – a general tool in structural design.’ In *Proceedings of the Euro-C 1994 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by H. Mang, N. Bićanić & R. de Borst, pp. 805–824. Pineridge Press, Swansea, Innsbruck, Austria.
- [138] MAUTE, K. & E. RAMM [1995]. ‘Adaptive topology optimization.’ *Structural Optimization*, **10**, pp. 100–112.
- [139] MAUTE, K., S. SCHWARZ & E. RAMM [1998]. ‘Adaptive topology optimization of elastoplastic structures.’ *Structural Optimization*, **15**, pp. 81–91.
- [140] MAUTE, K., S. SCHWARZ & E. RAMM [1999]. ‘Structural optimization – the interaction between form and mechanics.’ *ZAMM*, **79**, pp. 651–673.
- [141] MAXWELL, C. [1869]. *Scientific papers II*. University Press, Cambridge.
- [142] MAYER, R. R., N. KIKUCHI & R. A. SCOTT [1996]. ‘Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, pp. 1383–1403.
- [143] MENRATH, H. [1999]. *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [144] MEYER, L. [1998]. *Formoptimierung in der Strukturdynamik*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [145] MICHALERIS, P., D. A. TORTORELLI & C. A. VIDAL [1994]. ‘Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**, pp. 2471–2499.
- [146] MICHELL, A. G. M. [1904]. ‘The limits of economy of material in frame structures.’ *Philosophical Magazine, Serie 6*, **8**, pp. 589–597.
- [147] MIEHE, C. [1993]. *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität – Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 93/1.
- [148] MLEJNEK, H.-P. [1992]. ‘Accuracy of semi-analytical sensitivities and its improvements by the ‘natural method’.’ *Structural Optimization*, **4**, pp. 128–131.
- [149] MLEJNEK, H.-P. [1993]. ‘Some aspects of the genesis of structures.’ *Structural Optimization*, **5**, pp. 64–69.
- [150] MORRIS, A. J. (ED.) [1982]. *Foundations of structural optimization: A unified approach*. Wiley & Sons, Chicester, New York.
- [151] MOTA SOARES, C. A. (ED.) [1987]. *Computer aided optimal design – Structural and mechanical systems, NATO ASI Series F27*. Springer-Verlag, Heidelberg, New York.
- [152] MUKHERJEE, S. & A. CHANDRA [1989]. ‘A boundary element formulation for design sensitivities in materially nonlinear problems.’ *Acta Mechanica*, **78**, pp. 243–253.
- [153] NEVES, M. M., H. RODRIGUES & J. M. GUEDES [1995]. ‘Generalized topology design of structures with buckling load criterion.’ *Structural Optimization*, **10**, pp. 71–78.

- [154] OHSAKI, M. & J. S. ARORA [1994]. ‘Design sensitivity analysis of elastoplastic structures.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**, pp. 737–762.
- [155] OLHOFF, N. [1974]. ‘Optimal design of vibrating rectangular plates.’ *Int. J. Solids Struct.*, **10**, pp. 93–109.
- [156] OLHOFF, N. & J. RASMUSSEN [1991]. ‘Study of inaccuracy in semi-analytical sensitivity analysis – a model problem.’ *Structural Optimization*, **3**, pp. 203–213.
- [157] OLHOFF, N., J. RASMUSSEN & E. LUND [1993]. ‘A method of ‘exact’ numerical differentiation for error elimination in finite-element-based semi-analytical shape sensitivity analyses.’ *Mech. Struct. & Mach.*, **21**, pp. 1–66.
- [158] ORTIZ, M. & E. P. POPOV [1985]. ‘Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, pp. 1561–1576.
- [159] ORTIZ, M. & J. C. SIMO [1986]. ‘An analysis of a new class of algorithms for elastoplastic constitutive relations.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, pp. 353–366.
- [160] OSY CZKA, A. [1984]. *Multicriteria optimization in engineering*. Ellis Horwood, Chichester.
- [161] OWEN, D. R. J. & E. HINTON [1980]. *Finite elements in plasticity: Theory and practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- [162] PARENTE, E., J. B. M. SOUSA, L. E. VAZ & E. HINTON [1997]. ‘Shape sensitivity for elastic and elastoplastic response of axisymmetric models.’ In *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Plasticity*, edited by D. R. J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, pp. 830–835. CIMNE, Barcelona.
- [163] PARK, J. S. & K. K. CHOI [1990]. ‘Design sensitivity analysis of critical load factor for nonlinear structural systems.’ *Computers & Structures*, **36**, pp. 823–838.
- [164] PARK, Y. H. & K. K. CHOI [1999]. ‘Shape sensitivity analysis of nonlinear 2-D solids with elasto-plastic material.’ *Structural Optimization*, **18**, pp. 236–246.
- [165] PATNAIK, S. N., D. J. GUPTILL & L. BERKE [1995]. ‘Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **38**, pp. 3087–3120.
- [166] PEDERSEN, P., G. CHENG & J. RASMUSSEN [1989]. ‘On accuracy problems for semi-analytical sensitivity analysis.’ *Mech. Struct. & Mach.*, **17**, pp. 373–384.
- [167] PERAIRE, J., M. VAHDATI, K. MORGAN & O. C. ZIENKIEWICZ [1987]. ‘Adaptive remeshing for compressible flow computations.’ *J. Comp. Phys.*, **72**, pp. 449–466.
- [168] PHELAN, D. G. & R. B. HABER [1989]. ‘Sensitivity analysis of linear elastic systems using domain parametrization and a mixed mutual energy principle.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **77**, pp. 31–59.
- [169] PHELAN, D. G., C. A. VIDAL & R. B. HABER [1991]. ‘An adjoint variable method for sensitivity analysis of non-linear elastic systems.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **31**, pp. 1649–1667.
- [170] POLYNKIN, A. A., F. VAN KEULEN & V. V. TOROPOV [1995]. ‘Optimization of geometrically nonlinear thin-walled structures using the multipoint approximation method.’ *Structural Optimization*, **9**, pp. 105–116.

- [171] PRAGER, W. & G. I. N. ROZVANY [1977]. ‘Optimization of structural geometry.’ In *Dynamical systems*, edited by A. R. Bednarek & L. Cesari. Academic Press, New York.
- [172] RAMM, E. [1976]. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 76–2.
- [173] RAMM, E. [1981]. ‘Strategies for tracing the nonlinear response near limit points.’ In *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, edited by W. Wunderlich, E. Stein & K.-J. Bathe, pp. 63–89. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [174] RAMM, E., K.-U. BLETZINGER & K. MAUTE [1996]. ‘Strukturoptimierung – Das Wechselspiel zwischen Form und Kraft.’ *Anschlußbuch Sonderforschungsbereich 230: Natürliche Konstruktionen*, pp. 1–26.
- [175] RAMM, E., K.-U. BLETZINGER, R. REITINGER & K. MAUTE [1994]. ‘The challenge of structural optimization.’ In *Advances in structural optimization*, edited by B. H. V. Topping & M. Papadrakakis, pp. 27–52. Civil-Comp Press, Edinburgh.
- [176] RAMM, E., K. MAUTE & S. SCHWARZ [1998]. ‘Conceptual design by structural optimization.’ In *Proceedings of the Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang & G. Meschke, pp. 879–896. A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, Badgastein, Austria.
- [177] RAO, S. S. [1984]. *Optimization – theory and applications*. Wiley Eastern Limited, New Delhi, Bangalore, Bombay, Calcutta.
- [178] RECHENBERG, I. [1989]. ‘Evolution strategy: Nature’s way of optimization.’ In *Optimization: Methods and Applications, Possibilities and Limitations*, edited by H. Bergmann, pp. 106–126. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [179] REHLE, N. [1996]. *Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächen-tragwerken*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [180] REITINGER, R. [1994]. *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [181] REITINGER, R., K.-U. BLETZINGER & E. RAMM [1994]. ‘Shape optimization of buckling sensitive structures.’ *Computing Systems in Engineering*, **5**, pp. 65–75.
- [182] REITINGER, R. & E. RAMM [1995]. ‘Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures.’ *Thin-Walled Structures*, **23**, pp. 159–177.
- [183] RIKS, E. [1972]. ‘The application of Newtons method to the problem of elastic stability.’ *J. Appl. Mech.*, **39**, pp. 1060–1066.
- [184] RIKS, E. [1979]. ‘An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems.’ *Int. J. Solids Struct.*, **15**, pp. 529–551.
- [185] RINGERTZ, U. T. [1993]. ‘On finding the optimal distribution of material properties.’ *Structural Optimization*, **5**, pp. 265–267.
- [186] ROSEN, D. W. & I. R. GROSSE [1992]. ‘A feature based shape optimization technique for the configuration and parametric design of flat plates.’ *Eng. with Comp.*, **8**, pp. 81–91.
- [187] ROSSOW, M. P. & J. E. TAYLOR [1973]. ‘A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets.’ *AIAA Journal*, **11**, pp. 1566–1568.

- [188] ROTS, J. G. [1988]. *Computational modeling of concrete fracture*. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Netherlands.
- [189] ROZVANY, G. I. N. [1993]. *Optimization of large structural systems, NATO ASI Series E231-I*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [190] ROZVANY, G. I. N., M. P. BENDSØE & U. KIRSCH [1995]. ‘Layout optimization of structures.’ *Appl. Mech. Rev.*, **48**, pp. 41–119.
- [191] ROZVANY, G. I. N., M. ZHOU & T. BIRKER [1992]. ‘Generalized shape optimization with homogenization.’ *Structural Optimization*, **4**, pp. 250–252.
- [192] RYU, Y. S., M. HARIRIAN, C. C. WU & J. S. ARORA [1985]. ‘Structural design sensitivity analysis of nonlinear response.’ *Computers & Structures*, **21**, pp. 245–255.
- [193] SANCHEZ-PALENCIA, E. [1980]. *Non-homogeneous media and vibrating theory. (Lecture Notes in Physics 127)*. Springer-Verlag, Berlin.
- [194] SANTOS, J. L. T. & K. K. CHOI [1988]. ‘Sizing design sensitivity analysis of nonlinear structural systems. Part II: Numerical method.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, pp. 2097–2114.
- [195] SCHITTKOWSKI, K. [1985]. ‘NLPQL: A FORTRAN subroutine for solving constrained nonlinear programming problems.’ *Ana. Oper. Res.*, **5**, pp. 485–500.
- [196] SCHITTKOWSKI, K., C. ZILLOBER & R. ZOTEMANTEL [1994]. ‘Numerical comparison on nonlinear programming algorithms for structural optimization.’ *Structural Optimization*, **7**, pp. 1–28.
- [197] SCHMIT, L. A. [1960]. ‘Structural design by systematic synthesis.’ In *Proceedings of the Second Conference on Electronic Computation*, pp. 105–122. ASCE, New York.
- [198] SCHMIT, L. A. [1981]. ‘Structural synthesis – its genesis and development.’ *AIAA Journal*, **19**, pp. 1249–1263.
- [199] SCHMIT, L. A. [1986]. ‘Symposium summary and concluding remarks.’ In *The optimum shape – Automated structural design*, edited by J. A. Bennett & M. E. Botkin. Plenum Press, New York, London.
- [200] SCHUMACHER, A. [1996]. *Topologieoptimierung und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Dissertation, FOMAAS, Universität-Gesamthochschule Siegen.
- [201] SCHWARZ, S. [1996]. *Mechanisch orientierte Ansätze zur Beschreibung der Formänderung in der Strukturoptimierung*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [202] SCHWARZ, S., R. KEMMLER & E. RAMM [1999]. ‘Shape and topology optimization with nonlinear structural response.’ In *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics, August 31 - September 3, 1999, München, Germany*, edited by W. Wunderlich. Lehrstuhl für Statik, TU München, Germany.
- [203] SCHWARZ, S., K. MAUTE & E. RAMM [1998]. ‘Topology and shape optimization including elastoplastic material behavior.’ In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pp. 1911–1921. St. Louis, USA.

- [204] SCHWARZ, S., K. MAUTE & E. RAMM [2000]. ‘Topology and shape optimization for elastoplastic structural response.’ *Accepted for publication in: Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*.
- [205] SCHWARZ, S. & E. RAMM [2001]. ‘Sensitivity analysis and optimization for nonlinear structural response.’ *To appear in: Engineering Computations*, **18** (in May 2001).
- [206] SCHWEFEL, H.-P. [1977]. *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie*. Birkhäuser Verlag, Stuttgart, Basel.
- [207] SEYDEL, R. [1979]. ‘Numerical computation of branch points in nonlinear equations.’ *Numer. Math.*, **33**, pp. 339–352.
- [208] SIENZ, J. [1994]. *Integrated structural modelling, adaptive analysis and shape optimization*. Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK.
- [209] SIGMUND, O. [1994]. *Design of material structures using topology optimization*. Ph.D. thesis, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark.
- [210] SILVA, C. E. K., E. HINTON, L. E. VAZ & J. SIENZ [1997]. ‘2D shape optimization with rate-independent elastoplasticity.’ In *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Plasticity*, edited by D. R. J. Owen, E. Oñate & E. Hinton, pp. 836–854. CIMNE, Barcelona.
- [211] SIMO, J. C. & T. J. R. HUGHES [1998]. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, Berlin.
- [212] SIMO, J. C. & R. L. TAYLOR [1986]. ‘A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **22**, pp. 649–670.
- [213] SOUSA, L. G. & J. B. CARDOSO [1997]. ‘Optimal cross-section and configuration design of elastoplastic structures subjected to dynamic cyclic loading.’ *Structural Optimization*, **13**, pp. 112–118.
- [214] SOUSA, L. G., A. J. VALIDO & J. B. CARDOSO [1999]. ‘Optimal design of elasto-plastic structures with post-critical behaviour.’ *Structural Optimization*, **17**, pp. 147–154.
- [215] STADLER, W. [1988]. *Multicriteria optimization in engineering and in the sciences*. Plenum Press, London.
- [216] STADLER, W. & J. DAUER [1993]. ‘Multicriteria optimization in engineering: A tutorial and survey.’ In *Structural Optimization: Status and Promise*, edited by M. P. Kamat, Volume 150. AIAA.
- [217] STEIN, E. & F.-J. BARTHOLD [1992]. *Elastizitätstheorie*. Unterlagen zur Vorlesung ‘Elastizitätstheorie’, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [218] SVANBERG, K. [1987]. ‘The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, pp. 359–373.
- [219] SWAN, C. C. & J. S. ARORA [1997]. ‘Topology design of material layout in structured composites of high stiffness and strength.’ *Structural Optimization*, **13**, pp. 45–59.

- [220] SWAN, C. C. & I. KOSAKA [1997]. ‘Voigt–Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behavior.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **40**, pp. 3785–3814.
- [221] SZABÓ, I. [1979]. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart.
- [222] TAYLOR, J. E. [1993]. ‘Truss topology design for elastic/softening materials.’ In *Topology Design of Structures*, edited by M. P. Bendsøe & C. A. Mota Soares. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [223] TAYLOR, J. E. & J. LOGO [1993]. ‘Analysis and design of elastic/softening truss structures based on a mixed–form extremum principle.’ In *Optimization of Large Structural Systems*, edited by G. Rozvany. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [224] TIMOSHENKO, S. P. & J. M. GERE [1972]. *Mechanics of materials*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne.
- [225] TORTORELLI, D. A. [1992]. ‘Sensitivity analysis for non–linear constrained elastostatic systems.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **33**, pp. 1643–1660.
- [226] TORTORELLI, D. A. [1993]. ‘A geometric representation scheme suitable for shape optimization.’ *Mech. Struct. & Mach.*, **21**, pp. 95–121.
- [227] TORTORELLI, D. A. [1997]. *Non–linear and time–dependent structural systems: Sensitivity analysis and optimization*. Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark, Lecture Notes.
- [228] TORTORELLI, D. A. & P. MICHALERIS [1994]. ‘Design sensitivity analysis: Overview and review.’ *Inverse Problems in Engineering*, **1**, pp. 71–105.
- [229] TORTORELLI, D. A. & Z. WANG [1993]. ‘A systematic approach to shape sensitivity analysis.’ *Int. J. Solids Struct.*, **30**, pp. 1181–1212.
- [230] TSAY, J. J. & J. S. ARORA [1989]. ‘Optimum design of nonlinear structures with path dependent response.’ *Structural Optimization*, **1**, pp. 203–213.
- [231] TSAY, J. J. & J. S. ARORA [1990]. ‘Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 1: General theory.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **81**, pp. 183–208.
- [232] TSAY, J. J., J. E. B. CARDOSO & J. S. ARORA [1990]. ‘Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 2: Analytical examples.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **81**, pp. 209–228.
- [233] TSENG, C. S. & J. S. ARORA [1989]. ‘Numerical verification of design sensitivity analysis.’ *AIAA Journal*, **27**, pp. 117–119.
- [234] VALIDO, A. J., L. G. SOUSA & J. B. CARDOSO [1996]. ‘Optimal cross–sectional and configuration design of cyclic loaded elasto–plastic structures.’ *Structural Engineering and Mechanics*, **4**, pp. 25–35.
- [235] VANDERPLAATS, G. N. [1982]. ‘Structural optimization – past, present, and future.’ *AIAA Journal*, **20**, pp. 992–1000.
- [236] VANDERPLAATS, G. N. [1984]. *Numerical optimization techniques for engineering design: With applications*. McGraw–Hill, New York, London.
- [237] VAZ, L. E. & E. HINTON [1995]. ‘FE–shape sensitivity of elastoplastic response.’ *Structural Optimization*, **10**, pp. 231–238.

- [238] VIDAL, C. A. [1992]. *A consistent design sensitivity analysis formulation for systems with history-dependent response*. Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA.
- [239] VIDAL, C. A. & R. B. HABER [1993]. ‘Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **107**, pp. 393–431.
- [240] VIDAL, C. A., H.-S. LEE & R. B. HABER [1991]. ‘The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response.’ *Computing Systems in Engineering*, **2**, pp. 509–523.
- [241] WAGNER, W. [1991]. *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 91/1.
- [242] WALTHER, F. & C. MATTHECK [1993]. ‘Local stiffening and sustaining of shell and plate structures by SKO and CAO.’ In *Proceedings of the International Conference on Structural Optimization, Zaragoza, Spain*, edited by C. A. Brebbia & S. Hernandez, pp. 181–188. Computational Mechanics, Southampton, UK.
- [243] WELL, K. H. [1996]. *Bahnoptimierung*. Unterlagen zur Vorlesung ‘Bahnoptimierung’, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart.
- [244] WEMPNER, G. A. [1971]. ‘Discrete approximations related to nonlinear theories of solids.’ *Int. J. Solids Struct.*, **7**, pp. 1581–1599.
- [245] WIECHMANN, K. & F.-J. BARTHOLD [1998]. ‘Remarks on variational design sensitivity analysis of structures with large elasto-plastic deformations.’ In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pp. 349–358. St. Louis, USA.
- [246] WIECHMANN, K., F.-J. BARTHOLD & E. STEIN [1997]. ‘Optimization of elasto-plastic structures using the finite element method.’ In *Proceedings of the 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, edited by W. Gutkowski & Z. Mróz, pp. 1013–1018. Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland.
- [247] WIEDEMANN, J. [1989]. *Leichtbau, Band 2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
- [248] WIEGHARDT, K. [1995]. *Ein Konzept zur interaktiven Formoptimierung kontinuierlicher Strukturen*. Dissertation, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- [249] WRIGGERS, P. & J. C. SIMO [1990]. ‘A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points.’ *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **30**, pp. 155–176.
- [250] WRIGGERS, P., W. WAGNER & C. MIEHE [1988]. ‘A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **70**, pp. 329–347.
- [251] WU, C. C. & J. S. ARORA [1987]. ‘Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structural response using incremental procedure.’ *AIAA Journal*, **25**, pp. 1118–1125.
- [252] WU, C. C. & J. S. ARORA [1988]. ‘Design sensitivity analysis of non-linear buckling load.’ *Computational Mechanics*, **3**, pp. 129–140.

- [253] YUGE, K., N. IWAI & N. KIKUCHI [1999]. ‘Optimization of 2-D structures subjected to nonlinear deformations using the homogenization method.’ *Structural Optimization*, **17**, pp. 286–299.
- [254] YUGE, K. & N. KIKUCHI [1995]. ‘Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation.’ *Structural Optimization*, **10**, pp. 197–208.
- [255] ZHANG, Q., S. MUKHERJEE & A. CHANDRA [1992]. ‘Shape design sensitivity analysis for geometrically and materially nonlinear problems by the boundary element method.’ *Int. J. Solid Struct.*, **29**, pp. 2503–2525.
- [256] ZHANG, S. & A. D. BELEGUNDU [1992]. ‘A systematic approach for generating velocity fields in shape optimization.’ *Structural Optimization*, **5**, pp. 84–94.
- [257] ZIENKIEWICZ, O. C. & J. S. CAMPBELL [1973]. ‘Shape optimization and sequential linear programming.’ In *Optimum structural design: Theory and applications*, edited by R. H. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, pp. 109–126. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto.
- [258] ZIENKIEWICZ, O. C. & R. L. TAYLOR [1989]. *The finite element method, Volume I, II*. McGraw-Hill, New York, London.
- [259] ZOLESIO, J.-P. [1981]. ‘The material derivative (or speed) method for shape optimization.’ In *Optimization of distributed parameter structures, Vol. 1, 2*, edited by E. J. Haug & J. Cea, pp. 1089–1151. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.



# Anhang A

## Umformungen für die konsistente Linearisierung in Kapitel 4.5

Nachfolgend werden die zur Ermittlung der konsistenten elastoplastischen Materialtangenten  $\mathbf{C}^{ep}$  in Kapitel 4 notwendigen Umformungen durchgeführt. Entsprechendes gilt für die Umformungen in Kapitel 6 bei der Sensitivitätsanalyse für die nichtlineare Strukturantwort.

Für die Umformungen wird von der Ableitung des Spannungstensors zum Zeitpunkt  $t + 1$  (vgl. Gleichung (4.63)) und der Ableitung der internen Variablen zum Zeitpunkt  $t + 1$  (vgl. Gleichung (4.64)) ausgegangen.

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + \mathbf{C} (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}) \\ &- \gamma \mathbf{C} [\nabla_{\sigma} \mathbf{r} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \mathbf{h} \\ &- \gamma [\nabla_{\sigma} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_q \mathbf{h} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Durch Isolation der Ableitung des Spannungstensors  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  in Gleichung (A.1) und der internen Variablen  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (A.2) zum Zeitpunkt  $t + 1$  erhält man:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbf{I} + \gamma \vartheta \mathbf{C} \nabla_{\sigma} \mathbf{r})}_{\tilde{\mathbf{C}}^{-1}} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= (\mathbf{I} + \gamma \vartheta \mathbf{C} \nabla_{\sigma} \mathbf{r}) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t - \gamma \mathbf{C} \nabla_{\sigma} \mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &+ \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + \mathbf{C} (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}) \\ &- \gamma \mathbf{C} \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbf{I} + \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{h})}_{\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}} \nabla \mathbf{q}_{t+1} &= (\mathbf{I} + \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{h}) \nabla \mathbf{q}_t - \gamma \nabla_q \mathbf{h} \nabla \mathbf{q}_t \\ &- \nabla \gamma \mathbf{h} - \gamma \nabla_{\sigma} \mathbf{h} (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die Größen  $\tilde{\mathbf{C}}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , die sich durch Ausklammern von  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  und  $\mathbf{C}$  in Gleichung (A.3) bzw.  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  in Gleichung (A.4) ergeben, definieren sich zu:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \gamma \vartheta \mathbf{C} \nabla_{\sigma} \mathbf{r}) &= \mathbf{C} (\mathbf{C}^{-1} + \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{r}) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \\ \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} &= (\mathbf{C}^{-1} + \gamma \vartheta \nabla_{\sigma} \mathbf{r})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{I} + \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{h})^{-1} \quad (\text{A.6})$$

Nach Multiplikation von Gleichung (A.3) mit  $\mathbf{C}^{-1}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}$  bzw. von Gleichung (A.4) mit  $\tilde{\mathbf{Q}}$  erhält man für die Ableitung des Spannungstensors bzw. der internen Variablen folgende Ausdrücke (vgl. Gleichungen (4.65) und (4.66)):

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}\nabla\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}}(\nabla\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\gamma\mathbf{r}) - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_{\sigma}\mathbf{r}\nabla\boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}(\vartheta\nabla\mathbf{q}_{t+1} + (1-\vartheta)\nabla\mathbf{q}_t)\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{q}_{t+1} &= \nabla\mathbf{q}_t - \gamma\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_q\mathbf{h}\nabla\mathbf{q}_t - \nabla\gamma\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h} \\ &\quad - \gamma\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}(\vartheta\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1-\vartheta)\nabla\boldsymbol{\sigma}_t)\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Einsetzen von Gleichung (A.8) in Gleichung (A.7) liefert für die Ableitung des Spannungstensors  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ :

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla\boldsymbol{\sigma}_t - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_{\sigma}\mathbf{r}\nabla\boldsymbol{\sigma}_t + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}\nabla\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}}(\nabla\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\gamma\mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\left[\vartheta\left(\nabla\mathbf{q}_t - \gamma\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_q\mathbf{h}\nabla\mathbf{q}_t - \nabla\gamma\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \gamma\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}(\vartheta\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1-\vartheta)\nabla\boldsymbol{\sigma}_t)\right) + (1-\vartheta)\nabla\mathbf{q}_t\right]\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Isolation und Ausklammern der Terme, die  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  enthalten, liefert:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I} - \gamma^2\vartheta^2\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\right)\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla\boldsymbol{\sigma}_t - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_{\sigma}\mathbf{r}\nabla\boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad + \gamma^2\vartheta(1-\vartheta)\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\nabla\boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}\nabla\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}}(\nabla\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\gamma\mathbf{r}) \\ &\quad + \gamma\vartheta\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}(\gamma\nabla_q\mathbf{h}\nabla\mathbf{q}_t + \nabla\gamma\mathbf{h}) \\ &\quad - \gamma\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\nabla\mathbf{q}_t\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Der Klammerausdruck auf der linken Seite von Gleichung (A.10), der ebenfalls auf der rechten Seite durch Ausklammern von  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_t$  entsteht, wird nachfolgend vereinfachend dargestellt:

$$\left(\mathbf{I} - \gamma^2\vartheta^2\tilde{\mathbf{C}}\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\right) = \tilde{\mathbf{C}}\underbrace{\left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} - \gamma^2\vartheta^2\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\right)}_{\hat{\mathbf{C}}^{-1}} = \tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^{-1}\quad (\text{A.11})$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \left(\tilde{\mathbf{C}}^{-1} - \gamma^2\vartheta^2\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\right)^{-1}\quad (\text{A.12})$$

Nach Multiplikation von Gleichung (A.10) mit  $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$  und  $\hat{\mathbf{C}}$  vereinfacht sich diese wie folgt; zusätzlich wurden die Terme bezüglich der Zustandsvariablen geordnet (vgl. Gleichungen (4.68) und (4.69)):

$$\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{C}}\left(\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{h}\right)\nabla\gamma + \hat{\mathbf{C}}\nabla\boldsymbol{\varepsilon}\quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}\nabla^{ex}\boldsymbol{\sigma} &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}\nabla\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma\mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma\hat{\mathbf{C}}\left(\nabla_{\sigma}\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_{\sigma}\mathbf{h}\right)\nabla\boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma\hat{\mathbf{C}}\left(\nabla_q\mathbf{r} - \gamma\vartheta\nabla_q\mathbf{r}\tilde{\mathbf{Q}}\nabla_q\mathbf{h}\right)\nabla\mathbf{q}_t\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Einsetzen von Gleichung (A.7) in Gleichung (A.8) liefert für die Ableitung der internen Variablen  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla \mathbf{q}_t - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h} \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \left[ \vartheta \left( \nabla \boldsymbol{\sigma}_t - \gamma \tilde{\mathbf{C}} \nabla_\sigma \mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{C}} (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t) \right) + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Isolation und Ausklammern der Terme, die  $\nabla \mathbf{q}_{t+1}$  enthalten, liefert:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \gamma^2 \vartheta^2 \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r}) \nabla \mathbf{q}_{t+1} &= \nabla \mathbf{q}_t - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_q \mathbf{h} \nabla \mathbf{q}_t \\ &\quad - \gamma^2 \vartheta (1 - \vartheta) \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \nabla \mathbf{q}_t - \nabla \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \\ &\quad - \gamma \vartheta \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} [\mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) + (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{r})] \\ &\quad - \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \left( (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_t - \gamma \vartheta \tilde{\mathbf{C}} \nabla_\sigma \mathbf{r} \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Der Klammerausdruck auf der linken Seite von Gleichung (A.16) wird vereinfachend wie folgt dargestellt:

$$(\mathbf{I} - \gamma^2 \vartheta^2 \tilde{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r}) = \underbrace{\tilde{\mathbf{Q}} \left( \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} - \gamma^2 \vartheta^2 \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \right)}_{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}} = \tilde{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \left( \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} - \gamma^2 \vartheta^2 \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \right)^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Nach Multiplikation der Gleichung (A.16) mit  $\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}$  und  $\hat{\mathbf{Q}}$  vereinfacht sich diese folgendermaßen; zusätzlich wurden die Terme bezüglich der Zustandsvariablen geordnet (vgl. Gleichungen (4.70) und (4.71)):

$$\nabla \mathbf{q}_{t+1} = \nabla \mathbf{q}_t + \nabla^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \nabla \gamma - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \nabla^{ex} \mathbf{q} &= -\gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{r}) \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_\sigma \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_\sigma \mathbf{r} \right) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \\ &\quad - \gamma \hat{\mathbf{Q}} \left( \nabla_q \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \right) \nabla \mathbf{q}_t \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Die Ermittlung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  erfolgt mit Hilfe der Konsistenzbedingung (vgl. Gleichung (4.73)):

$$\begin{aligned} \nabla \Phi (\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta}) &= \nabla_\sigma \Phi \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta} + \nabla_q \Phi \nabla \mathbf{q}_{t+\vartheta} = \nabla \Phi \\ &= \nabla_\sigma \Phi (\vartheta \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) + \nabla_q \Phi (\vartheta \nabla \mathbf{q}_{t+1} + (1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (A.13) und (A.19) kann eine Bestimmungsgleichung für die Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  formuliert werden.

$$\begin{aligned} &\nabla_\sigma \Phi \left[ \vartheta \left( \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} - \tilde{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla \gamma + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \right) + (1 - \vartheta) \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \right] \\ &+ \nabla_q \Phi \left[ \vartheta \left( \nabla \mathbf{q}_t + \nabla^{ex} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \nabla \gamma - \gamma \vartheta \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \right) \right] \\ &+ \nabla_q \Phi [(1 - \vartheta) \nabla \mathbf{q}_t] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Auflösen nach  $\nabla\gamma$  liefert folgendes, wobei bereits durch  $\vartheta$  dividiert wurde ( $\vartheta \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) + \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{h} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \right) \right] \nabla\gamma \\ &= \nabla_\sigma \Phi \left( \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\vartheta} \nabla \boldsymbol{\sigma}_t \right) + \nabla_q \Phi \left( \nabla^{ex} \mathbf{q} + \frac{1}{\vartheta} \nabla \mathbf{q}_t \right) \\ &+ \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Vereinfachend wird für den Klammerausdruck der linken Seite von Gleichung (A.23)

$$\bar{\nu} = \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \mathbf{r} + \left( \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} - \gamma \vartheta \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \right) \mathbf{h} \quad (\text{A.24})$$

gesetzt (vgl. Gleichung (4.76)). Damit läßt sich die Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla\gamma$  in folgender Weise darstellen (vgl. Gleichungen (4.74) und (4.75)):

$$\nabla\gamma = \nabla^{ex} \gamma + \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right) \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.25})$$

$$\nabla^{ex} \gamma = \frac{1}{\bar{\nu}} \left( \nabla_\sigma \Phi \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \nabla_q \Phi \nabla^{ex} \mathbf{q} \right) + \frac{1}{\bar{\nu} \vartheta} \left( \nabla_\sigma \Phi \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla_q \Phi \nabla \mathbf{q}_t \right) \quad (\text{A.26})$$

Einsetzen von Gleichung (A.25) in Gleichung (A.13) führt zur elastoplastischen Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$ . Man erhält für die Ableitung des Spannungstensors  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \nabla^{ex} \gamma \\ &+ \left[ \hat{\mathbf{C}} - \frac{\left( \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \right) \otimes \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right)}{\bar{\nu}} \right] \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Subtraktion des Terms  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_t$  führt auf der linken Seite von Gleichung (A.27) zu einem Ausdruck für die Ableitung des inkrementellen Spannungstensors  $\nabla \boldsymbol{\sigma}$ . Bei gleichzeitiger Manipulation dieser Gleichung, daß der Term  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  hinter dem Klammerausdruck verschwindet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \frac{\nabla^{ex} \gamma}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \\ &+ \left[ \hat{\mathbf{C}} - \frac{\left( \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \right) \otimes \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right)}{\bar{\nu}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Wertet man Gleichung (A.28) zum Zeitpunkt  $t + 1$  aus, ergibt sich die elastoplastische Materialtangente an eben dieser Stelle, wobei die Terme mit  $\nabla^{ex}$  verschwinden (vgl. Gleichung (4.77)).

$$\left. \frac{\nabla \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+1} = \mathbf{C}^{ep} = \left[ \hat{\mathbf{C}} - \frac{\left( \hat{\mathbf{C}} \left( \mathbf{r} - \gamma \vartheta \nabla_q \mathbf{r} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h} \right) \right) \otimes \left( \nabla_\sigma \Phi \hat{\mathbf{C}} - \gamma \vartheta \nabla_q \Phi \hat{\mathbf{Q}} \nabla_\sigma \mathbf{h} \tilde{\mathbf{C}} \right)}{\bar{\nu}} \right] \quad (\text{A.29})$$

Bei linearer Ver- bzw. Entfestigung, d.h. für eine lineare Abhängigkeit der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  von den internen Variablen  $\mathbf{q}$ , verschwindet die Ableitung des Fließvektors  $\mathbf{r}$  nach den internen Variablen ( $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) und die Ableitung der Verfestigungsfunktion  $\mathbf{h}$  nach den Spannungen ( $\nabla_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ). Für die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{lin}^{ep}$  folgt dann:

$$\mathbf{C}_{lin}^{ep} = \tilde{\mathbf{C}} - \frac{\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{r} \otimes \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi \tilde{\mathbf{C}}}{\bar{\nu}} \quad (\text{A.30})$$



# Anhang B

## Konsistente Linearisierung für die $J_2$ -Plastizität

Die Definitionen aus Kapitel 4 bezüglich des elastoplastischen Materialverhaltens gelten hier im Anhang in analoger Weise. Darauf aufbauend wird nachstehend der Sonderfall der PRANDTL-REUSS-Plastizität und der VON MISES-Fließbedingung ( $J_2$ -Plastizität) mit linearer, isotroper und kinematischer Ver- und Entfestigung für den ebenen Spannungszustand diskutiert und auf die damit verbundenen Besonderheiten eingegangen. Außerdem wird ein assoziiertes Fließ- und Verfestigungsgesetz angenommen. Die integralen Ausdrücke werden mittels des impliziten EULER-Rückwärts-Verfahrens bestimmt. Eine entsprechende Notation der für diesen Sonderfall geltenden Gleichungen sind beispielsweise in SIMO & TAYLOR [212] oder SIMO & HUGHES [211] angegeben. Die hier in Anhang B getroffenen Annahmen gelten ebenfalls für Anhang C und D.

Zuerst werden die erforderlichen Gleichungen in Ratenform sowie die approximierten, inkrementellen Gleichungen definiert. Mit der Bildung der totalen Differentiale und der Ermittlung des Konsistenzparameters, der aus der approximierten Konsistenzbedingung gewonnen wird, ergibt sich schließlich die konsistente elastoplastische Materialtangente. Die Fließfläche, die hier geeigneterweise in quadratischer Form definiert ist, lautet:

$$\Phi^2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3} K^2 \leq 0 \quad (\text{B.1})$$

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall, bei dem die Tensornotation verwendet wurde, wird für diesen Sonderfall, entsprechend der üblichen Darstellung in der Literatur, eine Vektor-Matrix-Schreibweise verwendet.  $\mathbf{P}$  ist eine konstante Transformationsmatrix. Der Vektor  $\boldsymbol{\eta}$  beschreibt die relativen Spannungen, welche durch die Differenz zwischen den absoluten Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem sogenannten 'back stress'-Vektor  $\boldsymbol{\beta}$  definiert sind. Dieser 'back stress'-Vektor  $\boldsymbol{\beta}$  beschreibt die vektorwertige interne Variable der kinematischen Verfestigung; die Verfestigungsfunktion  $K$  (modifizierte Fließspannung) beschreibt die isotrope Verfestigung, wobei die zugehörige, skalarwertige interne Variable mit  $\alpha$  bezeichnet ist. Zusammengefaßt sind die verschiedenen internen Variablen in der Funktion  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{q} = [\alpha, \boldsymbol{\beta}] \quad (\text{B.2})$$

Die Definitionen der notwendigen Größen, wie z.B. Fließ- oder Verfestigungsgesetz, in Ratenform lauten:

$$\text{Fließgesetz: } \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\gamma} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{skalare interne Variable:} \quad \dot{\alpha} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{'back stress'-Vektor:} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{relative Spannungen:} \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta} \quad (\text{B.6})$$

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  überführt den ebenen Spannungszustand in einen Spannungszustand in der Deviatorebene.

$$\mathbf{P}: V_P \rightarrow V_D \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Der Raum  $V_P$  des ebenen Spannungszustandes ist ein Unterraum von  $V_S$ ;  $V_P$  ist als Vektorraum eines zweistufigen Tensors definiert. Dieser hat die Dimension 6. Für  $V_P$  gilt:

$$V_P := \{ \boldsymbol{\sigma} \in V_S \mid \sigma_{i3} \equiv 0, i = 1, 2, 3 \} \quad (\text{B.8})$$

Der Unterraum  $V_D$ , der mittels der Projektionsmatrix  $\mathbf{P}$  und  $V_P$  bestimmt wird, ist definiert als:

$$V_D := \{ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in V_S \mid \tilde{\sigma}_{13} = \tilde{\sigma}_{23} \equiv 0, \text{tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] \equiv 0 \} \quad (\text{B.9})$$

Die deviatorischen Spannungen errechnen sich nach folgender Beziehung:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Der Unterschied zwischen den Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\tilde{\mathbf{P}}$  hängt mit der Berücksichtigung des Faktors zwei bei der Schubspannungskomponente zusammen.

Bei der VON MISES-Plastizität sind die eigentlich zweistufigen Tensoren der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ , Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sowie der 'back stresses'  $\boldsymbol{\beta}$  als Vektoren definiert, wobei die Einträge wie folgt angeordnet sind:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Das Verfestigungsverhalten wird mit Hilfe der Funktionen  $K$  bzw.  $K'$  und  $H'$  definiert. Der Parameter  $\Theta$  steuert den Einfluß des isotropen und des kinematischen Verfestigungsverhaltens.

$$K = \sigma_y + K' \alpha \quad ; \quad K' = \Theta H \quad (\text{B.12})$$

$$H' = (1 - \Theta) H \quad (\text{B.13})$$

$H$  stellt den Ver- bzw. Entfestigungsmodul im Raum der plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  dar.

Analog zum Vorgehen beim allgemeinen, dreidimensionalen Fall wird nun die konsistente, elastoplastische Materialtangente hergeleitet. Die Evolutionsgleichungen lauten:

$$\text{Spannungen:} \quad \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (\text{B.14})$$



$$\text{Verzerrungen:} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.15})$$

$$\text{plastische Verzerrungen:} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \int_t^{t+1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dt \quad (\text{B.16})$$

$$\text{skalare interne Variable:} \quad \alpha_{t+1} = \alpha_t + \int_t^{t+1} \dot{\alpha} dt \quad (\text{B.17})$$

$$\text{'back stress'-Vektor:} \quad \boldsymbol{\beta}_{t+1} = \boldsymbol{\beta}_t + \int_t^{t+1} \dot{\boldsymbol{\beta}} dt \quad (\text{B.18})$$

$$\text{relative Spannungen:} \quad \boldsymbol{\eta}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_{t+1} - \boldsymbol{\beta}_{t+1} \quad (\text{B.19})$$

Für den ebenen Spannungszustand ist die elastische Materialmatrix  $\mathbf{C}$  folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Die Berechnung der Integrale wird mittels eines 'radial return'-Algorithmus vorgenommen. Die Approximation der Gleichungen erfolgt mit Hilfe des EULER-Rückwärts-Verfahrens, welches einen Sonderfall der verallgemeinerten Mittelpunktsregel darstellt ( $\vartheta = 1.0$ ). Für die approximierten Evolutionsgleichungen bedeutet dies:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+\vartheta}) = \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) \quad (\text{B.21})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+\vartheta} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.22})$$

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+\vartheta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+\vartheta}} = \alpha_t + \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \quad (\text{B.23})$$

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1} = \boldsymbol{\beta}_t + \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+\vartheta} = \boldsymbol{\beta}_t + \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.24})$$

Für die lineare, isotrope Verfestigungsfunktion  $K$  gilt dann:

$$K = \sigma_y + K' \alpha_{t+1} \quad (\text{B.25})$$

Es ist anzumerken, daß, wie bei der allgemeinen Herleitung, diese Werte Approximationen darstellen und der Übersichtlichkeit halber nicht weiter als solche gekennzeichnet werden. Die totalen Differentiale der Gleichungen (B.21)–(B.24), die zur Ermittlung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente erforderlich sind, definieren sich zu:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \gamma \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1}) \quad (\text{B.26})$$

$$\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^{pl} = \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_t^{pl} + \nabla \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.27})$$

$$\nabla \alpha_{t+1} = \nabla \alpha_t + \nabla \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} + \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1}}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}}}} \quad (\text{B.28})$$

$$\nabla \boldsymbol{\beta}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\beta}_t + \nabla \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} H' \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.29})$$

$$\nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} - \nabla \boldsymbol{\beta}_{t+1} \quad (\text{B.30})$$

Die elastische Materialmatrix  $\mathbf{C}$ , die Matrix  $\mathbf{P}$  sowie die kinematische Verfestigungsfunktion  $H'$  als Funktion des Ver- bzw. Entfestigungsmoduls  $H$  sind vom Lastniveau unabhängig, weshalb deren Ableitungen verschwinden und in der folgenden Herleitung nicht weiter berücksichtigt werden. Bei der Sensitivitätsanalyse ist diese Unabhängigkeit im allgemeinen nicht gegeben, worauf an entsprechender Stelle in Kapitel 6 bzw. in Anhang C eingegangen wird.

Ziel der nun folgenden Prozedur ist es, die Ableitung der Spannungen  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  als Funktion der Ableitung der inkrementellen Verzerrungen  $\nabla\boldsymbol{\varepsilon}$  darzustellen. In einem ersten Schritt ist die Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla\boldsymbol{\eta}_{t+1}$  als Funktion der Ableitung der absoluten Spannungen  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  auszudrücken. Einsetzen von Gleichung (B.29) in Gleichung (B.30) liefert:

$$\nabla\boldsymbol{\eta}_{t+1} = \nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} - \nabla\boldsymbol{\beta}_t - \nabla\gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \gamma \frac{2}{3} H' \nabla\boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.31})$$

Nach Isolation von  $\nabla\boldsymbol{\eta}_{t+1}$  erhält man:

$$\nabla\boldsymbol{\eta}_{t+1} = \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} - \nabla\boldsymbol{\beta}_t - \nabla\gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \quad (\text{B.32})$$

$$\text{mit } \Theta_1 = \left( 1 + \gamma \frac{2}{3} H' \right) \quad (\text{B.33})$$

Einsetzen von Gleichung (B.32) in die Ableitung der absoluten Spannungen  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  (Gleichung (B.26)) führt zu:

$$\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{C} (\nabla\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) - \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \left( \nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} - \nabla\boldsymbol{\beta}_t - \nabla\gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \quad (\text{B.34})$$

Auflösen nach  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \right) \nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + \left( \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \nabla\boldsymbol{\sigma}_t - \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \nabla\boldsymbol{\sigma}_t \right) \\ &+ \mathbf{C} (\nabla\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla\gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \left( \nabla\boldsymbol{\beta}_t + \nabla\gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Aus Gründen der besseren Darstellung wurde ein Nullterm auf der rechten Seite hinzugefügt.  $\mathbf{1}$  stellt die Einheitsmatrix dar. Mit Hilfe der Umformung des Klammerausdrucks auf der linken Seite von Gleichung (B.35)

$$\left( \mathbf{1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{C} \mathbf{P} \right) = \mathbf{C} \underbrace{\left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{P} \right)}_{\tilde{\mathbf{C}}^{-1}} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{C}} = \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{P} \right)^{-1} \quad (\text{B.36})$$

liefert eine Multiplikation von Gleichung (B.35) mit  $\mathbf{C}^{-1}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}$  für die Ableitung der absoluten Spannungen  $\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  folgenden Zusammenhang:

$$\nabla\boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla\boldsymbol{\sigma}_t - \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \nabla\boldsymbol{\sigma}_t \quad (\text{B.37})$$

$$+ \tilde{\mathbf{C}} \nabla\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \nabla\boldsymbol{\beta}_t + \nabla\gamma \underbrace{\left( \frac{\gamma \frac{2}{3} H'}{\Theta_1} - 1 \right)}_{-\Theta_1^{-1}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.38})$$

Entsprechend der Notation in Kapitel 4 erhält man für die Ableitung der absoluten Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ :

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\nabla \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{B.39})$$

$$\nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} (\nabla \boldsymbol{\beta}_t - \nabla \boldsymbol{\sigma}_t) \quad (\text{B.40})$$

Der Term mit dem expliziten Gradientenoperator  $\nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma}$  enthält lediglich bekannte Werte zum Zeitpunkt  $t$ , die in diesem Fall (Ableitung nach dem Inkrement) verschwinden. Um die Abhängigkeit der Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  von der der absoluten Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  zu eliminieren, setzt man Gleichung (B.39) in Gleichung (B.32) ein.

$$\nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} = \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\nabla \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \nabla \boldsymbol{\beta}_t - \nabla \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \quad (\text{B.41})$$

Die Berechnung der Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  erfolgt mittels der Konsistenzbedingung. Diese ergibt sich durch die Ableitung der Fließbedingung in quadratischer Form:

$$\nabla (\Phi^2 (\boldsymbol{\sigma}_{t+\vartheta}, \mathbf{q}_{t+\vartheta})) = \nabla (\Phi^2 (\boldsymbol{\sigma}_{t+1}, \mathbf{q}_{t+1})) = \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \frac{2}{3} K \nabla K = 0 \quad (\text{B.42})$$

Im Falle des Fließens ( $\Phi^2 = 0$ ) liefert Auflösen der Fließbedingung (Gleichung (B.1)) nach der isotropen Verfestigungsfunktion  $K$ :

$$K = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \quad (\text{B.43})$$

Die Ableitung der linearen, isotropen Verfestigungsfunktion  $K$  wird aus Gleichung (B.25) gewonnen, wobei die Anfangsfließspannung  $\sigma_y$  und der Ver- bzw. Entfestigungsmodul  $H$  bezüglich des totalen Differentials unabhängig sind. Allerdings ist für die Sensitivitätsanalyse anzumerken, daß diese Ableitungen nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  nicht notwendigerweise null sein müssen (vgl. Anhang C).

$$\nabla K = K' \nabla \alpha_{t+1} \quad (\text{B.44})$$

Mit den Gleichungen (B.42), (B.43) und (B.44) lautet die Konsistenzbedingung:

$$\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} K' \nabla \alpha_{t+1} = 0 \quad (\text{B.45})$$

Einsetzen der Ableitung der internen Variablen  $\nabla \alpha_{t+1}$  aus Gleichung (B.28) führt bei gleichzeitigem Ausklammern der relativen Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  zu:

$$\left( 1 - \gamma \frac{2}{3} K' \right) \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1} - K' \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \nabla \alpha_t - \nabla \gamma \frac{2}{3} K' \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} = 0 \quad (\text{B.46})$$

Die Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  aus Gleichung (B.41), die ebenfalls von der Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla \gamma$  abhängig ist, wird zur Ermittlung des Konsistenzparameters in Gleichung (B.46) eingesetzt. Mit

$$\Theta_2 = \left( 1 - \gamma \frac{2}{3} K' \right) \quad (\text{B.47})$$

führt dies zu:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \left( \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\nabla \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \nabla \boldsymbol{\beta}_t - \nabla \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \\ & - K' \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \nabla \alpha_t - \nabla \gamma \frac{2}{3} K' \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Auflösen nach dem Konsistenzparameter bzw. plastischen Multiplikator  $\nabla \gamma$  liefert:

$$\begin{aligned} & \nabla \gamma \left( \frac{\Theta_2}{\Theta_1^2} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \frac{2}{3} K' \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \\ & = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \left( \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \boldsymbol{\beta}_t \right) - K' \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \nabla \alpha_t \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Nach Multiplikation mit  $\frac{\Theta_1^2}{\Theta_2}$  läßt sich der Konsistenzparameter  $\nabla \gamma$  wie folgt bestimmen:

$$\nabla \gamma = \nabla^{ex} \gamma + \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \nabla^{ex} \gamma &= \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} (\nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} - \nabla \boldsymbol{\beta}_t) \\ & - \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2} K' \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \nabla \alpha_t \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

$$\bar{\nu} = \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \frac{2}{3} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\Theta_2 H' + \Theta_1 K') \right) \quad (\text{B.52})$$

Zur endgültigen Bestimmung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente ist der Konsistenzparameter  $\nabla \gamma$  aus Gleichung (B.50) im Ausdruck für die Ableitung der absoluten Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  (Gleichung (B.39)) zu ersetzen.

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+1} = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \left( \nabla^{ex} \gamma + \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{aligned} & = \nabla \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nabla^{ex} \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \\ & + \left( \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1}{\bar{\nu}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Subtraktion von  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_t$  ergibt auf der linken Seite von Gleichung (B.54) einen Ausdruck für die Ableitung der inkrementellen Spannungen  $\nabla \boldsymbol{\sigma}$ . Bei gleichzeitiger Manipulation dieser Gleichung, so daß der Term  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  hinter dem Klammerausdruck verschwindet, ergibt sich:

$$\frac{\nabla \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\nabla^{ex} \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\nabla^{ex} \gamma}{\Theta_1 \nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \left( \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1}{\bar{\nu}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \quad (\text{B.55})$$

Die konsistente elastoplastische Materialtangente lautet somit für den Sonderfall der VON MISES-Plastizität mit linearer, isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung für den ebenen Spannungszustand:

$$\left. \frac{\nabla \boldsymbol{\sigma}}{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+1} = \mathbf{C}^{ep} = \left( \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1}{\bar{\nu}} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \quad (\text{B.56})$$

# Anhang C

## Sensitivitätsanalyse für die $J_2$ -Plastizität

Die Ermittlung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  hängt sehr stark von dem zugrunde gelegten Materialmodell ab. Die Einflußfaktoren sind z.B. die Art der Fließfläche, das Ver- bzw. Entfestigungsgesetz oder auch die Wahl zwischen einem zweidimensionalen oder dreidimensionalen Spannungszustand.

In Kapitel 4 wurde die Herleitung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall vorgestellt. In Anhang B ist der Sonderfall für die VON MISES-Fließbedingung mit linearer, isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung für den ebenen Spannungszustand angegeben. Diese Unterschiede zeigen sich selbstverständlich auch bei der Ermittlung der entsprechenden Sensitivitäten (der Strukturantwort). Nachfolgend werden die Gleichungen zur Ermittlung der Sensitivitäten der Strukturantwort für das in Anhang B diskutierte Materialmodell hergeleitet. Das Vorgehen unterscheidet sich prinzipiell nicht von der Sensitivitätsanalyse für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall (vgl. Kapitel 6) und wird daher entsprechend knapp abgehandelt. Die Herleitung für den hier diskutierten Spezialfall orientiert sich, ähnlich wie dies für den allgemeinen Fall ausgeführt wurde, an der Herleitung der konsistenten Materialtangente in Anhang B.

Ausgegangen wird für die folgende Herleitung ebenfalls von der Ableitung der Gleichgewichtsbedingung in schwacher Form (vgl. Gleichung (6.1)). Die Ableitung der kinematischen Beziehungen bleibt unverändert, weshalb die entsprechenden Gleichungen für die nichtlinearen Verzerrungen, deren Variation sowie die diskretisierte Darstellung dieser Größen direkt übernommen werden. Einziger Unterschied ist die Ableitung der Spannungen und der konstitutiven Gleichungen. Zur Ermittlung der Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  wird von den Gleichungen (B.21)–(B.24) in Anhang B ausgegangen. Analog zum Vorgehen beim allgemeinen Fall wird hier  $\boldsymbol{\sigma}$  durch  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  durch  $\mathbf{E}$  ersetzt, um die zusätzliche Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität zum Ausdruck zu bringen. Als zusätzliche Annahme wurde für diese Herleitung von einem EULER-Rückwärts-Verfahren ausgegangen ( $\vartheta = 1.0$ ).

Die Ableitung der Spannung  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  (Gleichung (B.21)) zum Zeitpunkt  $t + 1$  nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s \mathbf{C}(\mathbf{E} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) + \mathbf{C}(\nabla_s \mathbf{E} - (\nabla_s \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1})) \\ &= \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s \mathbf{C}(\mathbf{E} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) - \mathbf{C}(\nabla_s \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}) \\ &+ \mathbf{C}(\nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Die Matrix  $\mathbf{P}$  ist konstant und demnach designunabhängig. In Gleichung (C.1) sind, wie beim allgemeinen Fall, drei unbekannte Ableitungen enthalten. Dies sind die Ableitungen der impliziten Anteile der inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen bzw. Verschiebungen ( $\nabla_s^{im} \mathbf{E} = f(\nabla_s \mathbf{u})$ ), die Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  und die Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  und damit die der 'back stress'–Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1}$ . Durch die folgende Prozedur sind  $\nabla_s \gamma$  und  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  zu eliminieren, um die Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  als Funktion der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  als einzige Unbekannte darstellen zu können.

Die Ableitung der relativen Spannungen ergibt sich aus der Differenz der Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  und der 'back stress'–Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1}$  (vgl. Gleichung (B.30)).

$$\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} - \nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1} \quad (\text{C.2})$$

$\nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1}$  erhält man durch Ableitung von Gleichung (B.24) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$ .

$$\nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1} = \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \nabla_s \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} H' \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} \quad (\text{C.3})$$

$$= \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \nabla_s \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} H' (\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} - \nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1}) \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \nabla_s \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} H' \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} \right) \quad (\text{C.5})$$

$\Theta_1$  wurde bereits in Gleichung (B.33) definiert. Die Ableitung der relativen Spannungen aus Gleichung (C.2) ist damit:

$$\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} = \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} - \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t - \nabla_s \gamma \frac{2}{3} H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \quad (\text{C.6})$$

Setzt man diese Gleichung in die Bestimmungsgleichung (C.1) für die Sensitivität der (absoluten) Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  ein, führt dies nach einigen Umformungen zu:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{S}_{t+1} &= \nabla_s \mathbf{S}_t - \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \nabla_s \mathbf{S}_t + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} (\mathbf{E} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) + \tilde{\mathbf{C}} (\nabla_s^{ex} \mathbf{E} + \nabla_s^{im} \mathbf{E}) \\ &\quad - \frac{\nabla_s \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \left( \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Um diese Gleichung zu erhalten, wurden dieselben Umformungen wie bei der Herleitung der konsistenten Materialtangente in Anhang B durchgeführt (vgl. Gleichungen (B.34)–(B.38)). Im Gegensatz zu Anhang B sind bei der Sensitivitätsanalyse die Terme, die die Ableitung der elastischen Materialmatrix  $\nabla_s \mathbf{C}$  und die Ableitung des modifizierten Ver- bzw. Entfestigungsmoduls  $\nabla_s H'$  enthalten, zu berücksichtigen. Analog zu der in Kapitel 4 und 6 bzw. Anhang B eingeführten, abkürzenden Schreibweise erhält man für die Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$ :

$$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \frac{\nabla_s \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{ex} \mathbf{S} &= \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \left( \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \nabla_s \mathbf{S}_t \right) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} (\mathbf{E} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) + \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{ex} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Wiederum enthält der Term  $\nabla_s^{ex} \mathbf{S}$  lediglich bekannte Ableitungen der Geometrie und der Strukturantwort zum Zeitpunkt  $t$ . Mit den Gleichungen (C.8) und (C.9) erhält man für die Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  aus Gleichung (C.6) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} &= \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Theta_1} \left( \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \nabla_s \gamma \left( \frac{2}{3} H' + \frac{1}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \right) \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Zur Ermittlung der Ableitung des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  wird eine zusätzliche Bedingung benötigt. Diese Quasi-Konsistenzbedingung erhält man durch Ableiten der Fließbedingung (Gleichung (B.1)) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  analog zum Vorgehen bei der Ermittlung des Konsistenzparameters  $\gamma$  bzw.  $\nabla \gamma$  (vgl. Gleichung (B.42)).

$$\nabla_s \Phi^2 = \nabla_s \Phi^2 (\mathbf{S}_{t+1}, \mathbf{q}_{t+1}) = \nabla_s \Phi^2 (\boldsymbol{\eta}_{t+1}, \alpha_{t+1}) = \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \frac{2}{3} K \nabla_s K = 0 \quad (\text{C.11})$$

Die Definition der Funktion  $K$  ist in Gleichung (B.43) angegeben. Die Sensitivität dieser Ver- bzw. Entfestigungsfunktion ergibt sich nach Ableitung von Gleichung (B.25) nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$ .

$$\nabla_s K = \nabla_s \sigma_y + \nabla_s K' \alpha_{t+1} + K' \nabla_s \alpha_{t+1} \quad (\text{C.12})$$

Für die Sensitivität der internen Variablen  $\nabla_s \alpha_{t+1}$  folgt aus Gleichung (B.23) bzw. (B.28):

$$\nabla_s \alpha_{t+1} = \nabla_s \alpha_t + \nabla_s \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} + \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}}}} \quad (\text{C.13})$$

Setzt man diese Gleichungen (C.11)–(C.13) sukzessive ineinander ein, erhält man für die Quasi-Konsistenzbedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} (\nabla_s \sigma_y + \nabla_s K' \alpha_{t+1}) \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} K' \left( \nabla_s \alpha_t + \nabla_s \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} + \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Isolation der Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta_2 \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} (\nabla_s \sigma_y + \nabla_s K' \alpha_{t+1}) \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} K' \left( \nabla_s \alpha_t + \nabla_s \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$\Theta_2$  wurde in Gleichung (B.47) definiert. Mit Hilfe der Ableitung der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  aus Gleichung (C.10) erhält man mit den analogen Umformungen aus

Anhang B (vgl. Gleichungen (B.48)–(B.52)) einen Ausdruck für die Sensitivität des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$ .

$$\nabla_s \gamma = \nabla_s^{ex} \gamma + \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \nabla_s^{ex} \gamma &= \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t - \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}} (\nabla_s \sigma_y + \nabla_s K' \alpha_{t+1} + K' \nabla_s \alpha_t) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Der Ausdruck  $\bar{\nu}$  wurde bereits in Gleichung (B.52) definiert. Erneut enthält der Term  $\nabla_s^{ex} \gamma$  ausschließlich bekannte Ableitungen. Einsetzen von Gleichung (C.16) in die Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  (Gleichung (C.8)) führt zu:

$$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \frac{\nabla_s^{ex} \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \mathbf{C}^{ep} \nabla_s^{im} \mathbf{E} \quad (\text{C.18})$$

In dieser Gleichung ist erneut die Bestimmungsgleichung für die elastoplastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{ep}$  enthalten (vgl. Gleichung (B.56)). Als einzige unbekannte Größe ist die implizite Ableitung der inkrementellen, nichtlinearen Verzerrungen  $\nabla_s^{im} \mathbf{E}$  und somit die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$  enthalten. Setzt man diese in die abgeleitete Gleichgewichtsbedingung (Gleichung (6.1)) ein, ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \mathbf{u}$ . Nach analogen Umformungen, wie beim allgemeinen Vorgehen in Kapitel 6, folgt (vgl. Gleichung (6.32)):

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{im} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{C}^{ep} \nabla_s^{im} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &= \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\ &+ \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \\ &- \int_{\Omega_\xi} \nabla_s^{ex} (\delta \mathbf{E}) \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi - \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\ &- \int_{\Omega_\xi} \delta \mathbf{E} \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \frac{\nabla_s^{ex} \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Die Diskretisierung der hergeleiteten Gleichungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente erfolgt analog zu der in Kapitel 6 aufgezeigten Vorgehensweise und wird aus diesem Grund hier nicht wiederholt. Der Vollständigkeit halber werden nur die diskretisierten Gleichungen zur Sensitivitätsanalyse der Strukturantwort angegeben.

Die Bestimmungsgleichung der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$  lautet dann (vgl. Gleichung (6.63)):

$$\int_{\Omega_\xi} \tilde{\mathbf{B}}_L^T \tilde{\mathbf{S}}_{t+1} \tilde{\mathbf{B}}_L |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \\
& = \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \nabla_s \bar{\mathbf{b}} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi + \int_{\Omega_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \right] \\
& + \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \lambda_{t+1} \left[ \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \nabla_s \bar{\mathbf{t}} |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi + \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \nabla_s |\tilde{\mathbf{J}}| d, \xi \right] \\
& - \int_{\Omega_\xi} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + 2\nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
& - \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \mathbf{S}_{t+1} \nabla_s |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \\
& - \int_{\Omega_\xi} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q)^T \left( \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \frac{\nabla_s^{ex} \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) |\mathbf{J}| d\Omega_\xi \quad (\text{C.20})
\end{aligned}$$

Die Ableitung der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  und des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  ergeben sich nach der endgültigen Berechnung der Sensitivität der inkrementellen Verschiebungen  $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ , die eine Funktion der Ableitung des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  darstellen. Die Bestimmung der Sensitivität des Laststeigerungsfaktors  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  in Abhängigkeit vom zugrunde gelegten Algorithmus und damit der Sensitivität der Verschiebungen bei Verschiebungsvorgabe ist ausführlich in Kapitel 6 erläutert. Die Sensitivität der Spannungen  $\nabla_s \mathbf{S}_{t+1}$  und des inkrementellen plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  in diskretisierter Form lauten:

$$\nabla_s \mathbf{S}_{t+1} = \nabla_s \mathbf{S}_t + \nabla_s^{ex} \mathbf{S} - \frac{\nabla_s^{ex} \gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \mathbf{C}^{ep} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned}
\nabla_s^{ex} \mathbf{S} & = \frac{\gamma}{\Theta_1} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \left( \nabla_s \boldsymbol{\beta}_t + \frac{2}{3} \gamma \nabla_s H' \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \nabla_s \mathbf{S}_t \right) \\
& + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} ((\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1}) \\
& + \tilde{\mathbf{C}} (\nabla_s \mathbf{B}_L + \nabla_s \mathbf{B}_u + \nabla_s^{ex} \mathbf{B}_q) \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{C.22})
\end{aligned}$$

$$\nabla_s \gamma = \nabla_s^{ex} \gamma + \frac{\Theta_1}{\bar{\nu}} \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_u + 2\mathbf{B}_q) \nabla_s \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{C.23})$$

Alle anderen Ableitungen, wie die der Entwurfskriterien, die der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$  (Gleichung (C.10)) und die des 'back stress'-Vektors  $\nabla_s \boldsymbol{\beta}_{t+1}$  (Gleichungen (C.3)–(C.5)), können mit Hilfe dieser Gleichungen (C.21)–(C.23) ermittelt werden. Die Bestimmungsgleichung für  $\nabla_s^{ex} \gamma$  wurde in Gleichung (C.17) definiert.



# Anhang D

## Ableitung der konsistenten elastoplastischen Materialmatrix

Wie in Anhang C bezieht sich diese Ableitung der konsistenten elastoplastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  auf die Vereinbarungen in Anhang B.  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  wird beispielsweise für die Bestimmung der Ableitung des approximierten kritischen Lastfaktors  $\nabla_s \lambda_c$  bzw. für die Ableitung des dafür erforderlichen Eigenwertes  $\nabla_s \tilde{\lambda}_i$  benötigt (vgl. Kapitel 7). Die Ableitung von  $\mathbf{C}^{ep}$  nach den Optimierungsvariablen ergibt sich aus Gleichung (B.56) und lautet:

$$\begin{aligned}
 \nabla_s \mathbf{C}^{ep} &= \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} - \frac{\left[ \nabla_s \left( \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) + \left( \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \nabla_s \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \right] \bar{\nu}}{\bar{\nu}^2} \\
 &+ \frac{\nabla_s \bar{\nu} \left[ \left( \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \right]}{\bar{\nu}^2} \\
 &= \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} - \frac{\left[ \left( \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \right] \bar{\nu}}{\bar{\nu}^2} \\
 &- \frac{\left[ \left( \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \left( \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} \right) \right] \bar{\nu}}{\bar{\nu}^2} \\
 &+ \frac{\nabla_s \bar{\nu} \left[ \left( \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} \right) \left( \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \right) \right]}{\bar{\nu}^2} \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

Nachfolgend werden nun die einzelnen Ableitungen gebildet. Die Projektionsmatrix  $\mathbf{P}$  ist konstant und daher unabhängig von den Optimierungsvariablen. Die Sensitivität der modifizierten elastischen Materialtangente  $\nabla_s \tilde{\mathbf{C}}$  ergibt sich zu (Ableitung von Gleichung (B.36)):

$$\nabla_s \tilde{\mathbf{C}} = \nabla_s \left[ \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{P} \right)^{-1} \right] ; \quad \nabla_s \left( \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \right) = \nabla_s \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{\gamma}{\Theta_1} \mathbf{P} \right) \tag{D.2}$$

Die Ableitung einer inversen Matrix kann durch Verwendung der Beziehung  $\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{1}$  für symmetrische Matrizen gebildet werden. Daraus folgt:

$$\nabla_s \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} + \tilde{\mathbf{C}} \nabla_s \left( \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \right) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} = -\tilde{\mathbf{C}} \nabla_s \left( \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \right) \tilde{\mathbf{C}} \tag{D.3}$$

Entsprechend läßt sich die Ableitung der inversen elastischen Materialmatrix  $\nabla_s(\mathbf{C}^{-1})$  bestimmen, die bei der Bildung von  $\nabla_s(\tilde{\mathbf{C}}^{-1})$  erforderlich ist.

$$\nabla_s(\mathbf{C}^{-1}) = -\mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{D.4})$$

Die Ableitung der inversen, modifizierten, elastischen Materialmatrix  $\nabla_s(\tilde{\mathbf{C}}^{-1})$  ist dann:

$$\nabla_s(\tilde{\mathbf{C}}^{-1}) = -\mathbf{C}^{-1} \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} + \frac{\nabla_s \gamma \Theta_1 - \gamma \nabla_s \Theta_1}{\Theta_1^2} \mathbf{P} \quad (\text{D.5})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (B.13) und (B.33) bzw. (B.12) und (B.47) ergeben sich die Ableitungen der Größen  $\nabla_s \Theta_1$  und  $\nabla_s \Theta_2$  zu:

$$\nabla_s \Theta_1 = \nabla_s \gamma \frac{2}{3} H' + \gamma \frac{2}{3} \nabla_s H' \quad ; \quad \nabla_s H' = (1 - \Theta) \nabla_s H \quad (\text{D.6})$$

$$\nabla_s \Theta_2 = -\nabla_s \gamma \frac{2}{3} K' - \gamma \frac{2}{3} \nabla_s K' \quad ; \quad \nabla_s K' = \Theta \nabla_s H \quad (\text{D.7})$$

Je nachdem, ob Ver- oder Entfestigung berücksichtigt wird, ist die Ableitung  $\nabla_s H$  den Gleichungen (6.91) bzw. (6.92) zu entnehmen. Die darin enthaltenen Sensitivitäten sind in Kapitel 6 an den entsprechenden Stellen angegeben. Die Sensitivität des plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  ist in den Gleichungen (C.16) bzw. (C.23) definiert.

Die Sensitivität des Nenners der 'Rang 1 Modifikation' in Gleichung (D.1)  $\nabla_s \bar{\nu}$  erhält man durch Ableiten der Gleichung (B.52) aus Anhang B. Diese lautet:

$$\begin{aligned} \nabla_s \bar{\nu} &= \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} + \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_2} [\nabla_s \Theta_1 \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\Theta_2 H' + \Theta_1 K')] \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_2} [\Theta_1 \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\Theta_2 H' + \Theta_1 K') + \Theta_1 \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\Theta_2 H' + \Theta_1 K')] \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_2} [\Theta_1 \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\nabla_s \Theta_2 H' + \Theta_2 \nabla_s H' + \nabla_s \Theta_1 K' + \Theta_1 \nabla_s K')] \\ &- \frac{2 \nabla_s \Theta_2 \Theta_1 \boldsymbol{\eta}_{t+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}_{t+1} (\Theta_2 H' + \Theta_1 K')}{3 \Theta_2^2} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Die Ableitung der Strukturantwort, wie die des plastischen Multiplikators  $\nabla_s \gamma$  und die der relativen Spannungen  $\nabla_s \boldsymbol{\eta}_{t+1}$ , ist in den Gleichungen (C.16) bzw. (C.23) und (C.10) angegeben. Damit sind alle Ableitungen für die Ermittlung der Sensitivität der elasto-plastischen Materialtangente  $\nabla_s \mathbf{C}^{ep}$  bekannt und können in Gleichung (D.1) eingesetzt werden.

# Lebenslauf

Name: Stefan Alexander Schwarz  
Geburtstag: 10.12.1970  
Geburtsort: Heilbronn-Sontheim  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Eltern: Hans-Jörg und Renate Schwarz, geb. Widmann

08/1977 – 07/1981 Besuch der Ludwig-Pfau-Grundschule in Heilbronn-Sontheim  
08/1981 – 05/1990 Besuch des Justinus-Kerner-Gymnasiums in Heilbronn  
05/1990 Abschluß Abitur  
09/1990 – 11/1991 Zivildienst beim Arbeiter-Samariter-Bund in Heilbronn  
10/1991 – 07/1996 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart  
07/1996 Abschluß Diplom-Ingenieur  
07/1997 Artur-Fischer-Preis für hervorragende Studienleistungen  
bei kurzer Studiendauer  
10/1996 – 12/2000 wissenschaftlicher Mitarbeiter/Doktorand am Institut für  
Baustatik der Universität Stuttgart; von 10/1996 bis 09/2000  
als Stipendiat der Schweizer Stiftung 'Besinnung und Ordnung'  
seit 01/2001 Berechnungsingenieur bei der Dr. Ing. h.c. F. Porsche AG



## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J.M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. M. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79–3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalenträgwerken (in englischer Sprache).
- 80–1 R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80–2 R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80–3 J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82–1 L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82–2 K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82–3 H.–P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.



- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.





Universität Stuttgart

ISBN 3-00-007419-8