

Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke

von

Ulrich Andelfinger



Z

14.7.96

Bericht Nr. 13 (1991)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1991

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke

von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Ulrich Andelfinger

aus Oberhausen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. B. Kröplin

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1991

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1991

KURZFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit vierknotigen hybrid-gemischten Finiten Scheiben-, Platten- und Schalenelementen. Unter der Bezeichnung hybrid-gemischt sind all die Elementformulierungen zusammengefaßt, die neben einer Verschiebungsannahme mindestens eine weitere Variablenapproximation enthalten (Verzerrungen oder Spannungen oder inkompatible Verschiebungen), wobei diese zusätzlichen Felder nicht stetig über die Elementgrenzen hinweg angesetzt werden. Haben diese Felder eigene Freiwerte, so können die Freiwerte auf Elementebene eliminiert werden, das heißt, die hybrid-gemischten Methoden führen stets zu einer Elementsteifigkeitsmatrix.

Typische Formulierungen sind das sogenannte "assumed natural strain"-Konzept (die Verzerrungsfelder haben keine unabhängigen Freiwerte, sondern sie werden an Kollokationspunkten direkt mit den Feldern der Verschiebungsableitungen verknüpft), die auf dem Hellinger-Reissner Prinzip basierende Spannungs-Verschiebungs-Approximation, eine auf dem Hu-Washizu Prinzip basierende Dreifeldapproximation sowie die Methode der erweiterten Verzerrungsansätze ("enhanced assumed strain").

Diskutiert werden die Stabilitätsbedingungen sowie die Versteifungsprobleme ("locking") der hybrid-gemischten Methoden. Mit Hilfe einer tabellarischen Untersuchung der Polynomverteilung der Verschiebungsableitungen können Richtlinien für eine gute Spannungs- und Verzerrungsannahme gegeben werden. Die mit Spannungs- oder/und Verzerrungsansätzen formulierten Scheiben-, Platten- und Schalenelemente (die Schalenformulierung basiert auf dem dreidimensional degenerierten Konzept und erfolgt in lokalen Koordinaten) werden mit zahlreichen, aus der Literatur bekannten Elementen verglichen.

ABSTRACT

The thesis is dealing with four-noded hybrid-mixed membrane, plate and shell finite elements. The term hybrid-mixed encloses formulations which besides a displacement approximation have one or more additional field assumptions (for strains, stresses or incompatible displacements). The additional fields are assumed discontinuously from element to element, so that the corresponding unknowns can be eliminated on the element level. Therefore all the hybrid-mixed methods are leading to an element stiffness matrix.

Typical formulations are the so-called assumed natural strain concept (in this method the strain fields do not possess independent degrees of freedom but are linked directly to the displacement dependent strains at certain sampling points), formulations based on a Hellinger-Reissner principle with stress (or strain) and displacement assumptions, three-field approximations based on the principle of Hu-Washizu and the enhanced assumed strain method.

For all the hybrid-mixed methods main points of discussion are stability and locking. Guidelines for safe stress and strain assumptions are given through a table-like investigation of the polynomial expansion of the displacement derivatives. The membrane, plate and shell finite elements (the shell formulation is based on the three-dimensional degenerated approach and a local coordinate formulation) with stress and/or strain assumptions are compared to numerous other elements known from the literature.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Professor Dr.-Ing. E. Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit, für die Unterstützung in all den Jahren sowie für die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr.-Ing. B. Kröplin danke ich für die wertvollen Anregungen und Hinweise sowie für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Ein herzlicher Dank für die Zusammenarbeit und die vielen Diskussionen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, gilt all meinen Kollegen am Institut.

Ulrich Andelfinger

1	Einleitung	9
2	Mathematische Grundlagen	14
2.1	Einführung	14
2.2	Das lineare Elastizitätsproblem	14
2.3	Ausgewählte Energieprinzipien	16
2.4	Die mathematische Analyse der gemischten Formulierung	18
2.4.1	Die schwache Formulierung	18
2.4.2	Die Operatorform	19
2.4.3	Aufspaltung der Operatoren	20
2.4.4	Lösbarkeits – und Stabilitätsbedingungen	20
2.4.5	Anmerkungen zur Stabilität	21
2.4.6	Bedingungen im diskreten Fall	22
2.4.7	Eine alternative diskrete Bedingung	23
2.4.8	Fehlerschranken	24
3	Versteifungsprobleme der Verschiebungsmodelle	25
3.1	Einführung	25
3.2	Verschiebungsmodell der vierknotigen Scheibe	25
3.2.1	Versteifungseffekte	27
3.2.2	Eigenwertanalyse	28
3.2.3	Reduzierte Integration	29
3.3	Höherwertigere Scheibenelemente	30
3.3.1	Beispiel: Kragarm mit unterschiedlichem Elementnetz	31
3.4	Folgerungen	33
4	”Assumed natural strain” – Modelle	34
4.1	Einführung	34
4.2	Reduzierte Verzerrungsansätze der vierknotigen Scheibe	34
4.2.1	Die Steifigkeitsmatrix des Verschiebungsmodells	36
4.2.2	Die Steifigkeitsmatrix des ANS – Modells	37
4.2.2.1	Berechnung der Basissteifigkeiten	37
4.2.2.2	Berechnung der höherwertigen Steifigkeiten	37
4.3	Variationelle Basis der ANS–Methode	39

4.4	Interpretation der Verschiebungsmodelle als ANS-Modelle	42
5	Hybrid-gemischte Spannungs-Verschiebungs-Approximation	43
5.1	Einführung	43
5.2	Das kontinuierliche Problem	43
5.3	Die diskretisierten Gleichungen	44
5.3.1	Stabilität des diskreten Systems	45
5.3.1.1	Die Elliptizitätsbedingung	45
5.3.1.2	Die Babuska - Brezzi Bedingung	46
5.4	Das vierknotige Scheibenelement	47
5.4.1	Wahl der Spannungsansätze	47
5.4.1.1	Das Element HR - A	48
5.4.1.2	Das Element HR - B	49
5.4.1.3	Das Element HR - C	49
5.4.2	Recheneffizienz	50
5.5	Abschlußbemerkungen	51
6	Hybrid-gemischte Dreifeld-Approximationen	52
6.1	Einführung	52
6.2	Variationsprinzipien in parametrisierter Form	52
6.3	Dreifeld-Approximationen mit dem Prinzip von Hu-Washizu	53
6.3.1	Lösbarkeit und Stabilität	54
6.3.2	Elementbedingungen	55
6.3.3	Das vierknotige Scheibenelement	57
6.3.3.1	Das Element HuW-A	58
6.3.3.2	Das Element HuW-B	58
6.3.3.3	Das Element HuW-C	59
6.3.3.4	Das Element HuW-D	59
6.4	Alternative Dreifeld-Approximation	59
6.4.1	Alternative 1	60
6.4.2	Alternative 2	60
6.4.3	Das Element PAR-A	61
7	Modelle mit erweitertem Verzerrungsansatz	62
7.1	Einführung	62

7.2	Der erweiterte Verzerrungsansatz	62
7.3	Das Gleichungssystem	63
7.4	Der Sonderfall: Die Methode der inkompatiblen Verschiebungen	64
7.5	Das vierknotige Scheibenelement	65
8	Numerische Beispiele der vierknotigen Scheibenelemente	67
8.1	Patch Test	68
8.2	Biegebeanspruchter Kragarm	69
8.3	Der Einfluß der Netzverzerrung	70
8.4	Schubbeanspruchte Ringscheibe	72
8.5	Cooks Scheibenproblem	75
9	Zwischenbilanz und Überleitung zu Schalenelementen	77
10	Die Schalenformulierung	78
10.1	Einführung	78
10.2	Das degenerierte Schalenmodell	78
10.2.1	Schalengeometrie	79
10.2.2	Elementgeometrie	80
10.2.3	Kinematik	81
10.2.4	Koordinatensysteme	82
10.3	Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehung bezüglich des krummlinigen Koordinatensystems	83
10.4	Werkstoffgesetz bezüglich des krummlinigen Koordinatensystems	84
10.5	Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehung bezüglich des orthogonalen Koordinatensystems	85
10.6	Werkstoffgesetz bezüglich des orthogonalen Koordinatensystems	86
11	Vierknotige Schalenelemente	87
11.1	Der Querschubanteil	87
11.1.1	Das Verschiebungsmodell einer vierknotigen Platte	87
11.1.1.1	Selektiv-reduzierte Integration	88
11.1.2	Die ANS-Formulierung des Querschubanteils	89
11.1.2.1	Die \bar{B}_{sb} – Matrix des ANS – Modells	90
11.1.2.2	Die \bar{B}_{sm} – Matrix des ANS – Modells	93

11.2	Der Membran- und Biegeanteil	94
11.2.1	Die Hellinger – Reissner Formulierung des Membrananteils	94
11.2.2	Die Hellinger – Reissner Formulierung des Biegeanteils	97
11.2.3	Die EAS-Formulierung des Membrananteils	97
11.2.4	Die EAS – Formulierung des Biegeanteils	98
11.3	Zusammenstellung der Schalelemente	99
12	Numerische Beispiele der Schalelemente	100
12.1	Patch Test der vierknotigen Plattenelemente	100
12.2	Eigenwertanalyse verschiedener Plattenmodelle	101
12.3	”Locking” – Tests	102
12.3.1	Vierknotige Elemente	102
12.3.2	Höherwertigere Elemente	103
12.4	Einfluß der Netzverzerrung	104
12.5	Naviergelagerte Kreisplatte	105
12.6	Schräge Platte	106
12.7	Quadratplatte unter Gleichlast	107
12.8	Halbkugel mit Loch	109
12.9	Scordelis – Lo – Schale	110
12.10	”Locking” – Test für Schalen	115
12.11	Vorverdrillter Kragarm	117
12.12	Zylinder mit Endscheiben	118
12.13	Wassergefüllter Stahlbehälter	121
12.13.1	Entwurf 1	123
12.13.2	Entwurf 2	127
13	Zusammenfassung und Ausblick	131
14	Literatur	135

1 EINLEITUNG

Wie in vielen Ingenieurbereichen, so sind auch in der Strukturmechanik analytische Lösungen aufgrund komplizierter Geometrien, Randbedingungen und Belastungen selten. Aus diesem Grund ist die Finite Element Methode zu einem wertvollen Werkzeug des konstruktiven Ingenieurs geworden. Dies zeigt sich auch in der großen Verbreitung der kommerziellen FE-Programme.

Wichtig für die Güte der Ergebnisse ist aber ein zuverlässiges, robustes Elementmodell. Die beliebtesten Elemente in der Strukturmechanik sind die C^0 -kontinuierlichen Verschiebungsmodelle. Diese einfach zu formulierenden Elemente enthalten jedoch Versteifungseffekte, die nicht nur die Konvergenz verschlechtern, sondern in Extremfällen zu einem totalen Versteifen, dem sogenannten "locking" führen können.

"Shear-locking" entsteht zum Beispiel dadurch, daß für dünne Platten, bei denen die realen Biegemodes wesentlich weicher sind als die Schubmodes, die Biegemodes eines Finiten Elements mit Schubverzerrungen durchsetzt sind und damit viel zu steif reagieren. Andere "locking"-Arten sind das "membrane-locking", das dadurch entsteht, daß bei gekrümmten Elementen die eigentlich weichen Biegemodes durch parasitäre Dehnungen versteifen, und das "volumetric locking", wo bei inkompressiblen oder fast inkompressiblen Zuständen die gegenüber den volumetrischen Modes viel weicheren deviatorischen Modes durch volumetrische Dehnungsanteile versteifen. Die Forderung nach reinen Biegemodes ohne parasitäre Schubverzerrungen und Dehnungen oder nach reinen deviatorischen Modes ohne volumetrische Verzerrungen können Verschiebungsmodelle im allgemeinen nicht erfüllen.

Der Erfolg der reduzierten (oder selektiv reduzierten) Integration liegt darin begründet, daß genau diese parasitären, unerwünschten Verzerrungsfelder nicht erfaßt werden. Da bei einer Unterintegration in den allermeisten Fällen jedoch zu wenig Verzerrungsanteile berücksichtigt werden, enthält das Element auch bei korrekter Lagerung Verschiebungsformen, die keinerlei Steifigkeit aufweisen, sogenannte "zero energy modes"; man ist also durch die reduzierte Integration über das Ziel hinausgeschossen.

Dieser Defekt kann mit der Stabilisierungsmethode behoben werden. Das Vorgehen ist derart, daß man den "zero energy modes" eines unterintegrierten Elements künstliche Steifigkeiten gibt. Wichtig ist zum einen, daß die zu stabilisierenden Modes orthogonal zu den konstanten Verzerrungsmodes sind, so daß diese konstanten Verzerrungsmodes nicht verändert werden, zum anderen, daß die Steifigkeiten der zu stabilisierenden Modes klein bleiben, so daß sie kein "locking" verursachen.

Der große Vorteil der Stabilisierungsmethode ist ihre Effizienz, Nachteil ist zweifelsohne die mangelnde Zuverlässigkeit, da man die notwendige Größe der Steifigkeit schlecht abschätzen kann. Interessante Elemente sind in [Belytschko, 83], [Liu, 86] und [White, 90] zu finden.

Zuverlässige Verbesserungen der Verschiebungsmodelle können mit gemischten Formulierungen erzielt werden. Bei diesen Methoden werden neben den Verschiebungen Ansätze für die Spannungen oder/und Verzerrungen eingeführt. Dabei gibt es eine Vielzahl von Formulierungsmöglichkeiten (siehe Übersicht in [Pian, 88/2]). Am attraktivsten sind sicherlich die Formulierungen, die zu einer Elementsteifigkeitsmatrix führen, wodurch nichtlineare oder dynamische Berechnungen analog zur Verschiebungsmethode behandelt werden können.

Diese Klasse gemischter Formulierungen wird gerne als hybrid-gemischte Klasse bezeichnet. Sie enthält Elemente mit inneren Freiwerten. Da die Felder dieser inneren Freiwerte nicht a priori kontinuierlich über Elementgrenzen hinweglaufen, können diese Freiwerte auf Elementebene kondensiert werden. Dies steht im Gegensatz zu einer echt-gemischten Formulierung, wo neben den Verschiebungen noch andere Freiwerte im Gesamtsystem auftreten.

Aufbauend auf dem Variationsprinzip von Hellinger-Reissner wurden in den letzten Jahren mehrere vierknotige oder auch höherwertigere Elemente veröffentlicht. Bei den Scheibenelementen ist vor allem das Element von Pian und Sumihara [Pian, 84] zu nennen, bei den Schalen Elementen von [Rhiu, 87], [Saleeb, 87] und [Simo, 89/1].

Zu den hybrid-gemischten Formulierungen ist auch die sogenannte "assumed natural strain"-Formulierung zu zählen. Bei ihr werden Verzerrungsfelder mit Hilfe von Kollokationspunkten festgelegt, was ähnlich zur Unterintegration eine Reduktion der aus den Verschiebungsableitungen berechneten Verzerrungsfelder ermöglicht. Da die frei wählenden Verzerrungsfelder an den Kollokationspunkten mit den Feldern der Verschiebungsableitungen verknüpft werden, sind keine zusätzlichen Unbekannten erforderlich. Die Verschiebungen bleiben die einzigen Unbekannten, was die Methode besonders effizient macht. Erwähnt seien die Elemente in [Hughes, 81/1], [MacNeal, 82], [Dvorkin, 84], [Bathe, 86], [Huang, 86], [Stanley, 86], [Pinsky, 87] und [Wong, 87].

Die Methode der "assumed natural strains" wird teilweise auch B-bar-Methode genannt, da sie im Endeffekt zu einer veränderten Operatormatrix, der \bar{B} -Matrix, führt. Stolarski und Belytschko entwickelten ein zur "assumed natural strain"-Methode ganz ähnliches Verfahren, das "mode decomposition"-Verfahren. In diesem Verfahren wird die B-Matrix mit einer Projektionsmatrix multipliziert, was wiederum zu einer verän-

dernten \bar{B} -Matrix führt. Ziel ist wiederum, mit der Projektionsmatrix die unerwünschten Dehnungsanteile herauszuprojizieren.

Ziel dieser Arbeit ist eine eingehende Untersuchung und Verbesserung der Versteifungs- und Stabilitätsprobleme der Scheiben-, Platten- und Schalenelemente. Die Platten- und Schalenelemente werden über das dreidimensional degenerierte Konzept [Ahmad, 70] formuliert. Der Schwerpunkt wurde auf die vierknotigen Elemente gelegt, wobei aber auch höherwertigere Elemente diskutiert werden. Die formelmäßige Beschreibung ist auf linear elastisches Material und kleine Deformationen beschränkt, besondere nichtlineare Aspekte werden angesprochen.

Zunächst werden die mathematischen Grundlagen einer gemischten Formulierung wie Lösbarkeits- und Stabilitätsbedingungen bereitgestellt. Sie ermöglichen eine einheitliche Beurteilung der verschiedenen hybrid-gemischten Elementkonzepte. Die unterschiedlichen Elementformulierungen sollen dann am Beispiel der vierknotigen Scheibe in den Kapiteln 4 bis 8 diskutiert und verglichen werden.

In Kapitel 4 wird das "assumed natural strain" Konzept angewendet. Neben der zugrunde liegenden Variationsbasis wird die wichtige Orthogonalität der höherwertigeren zu den konstanten Modes diskutiert. Ebenfalls gezeigt wird, daß die reduziert integrierten Verschiebungsmodelle in die Klasse dieser "assumed strain"-Elemente fallen.

In den Kapiteln 5 und 6 werden, basierend auf den Variationsprinzipien von Hellinger-Reissner und Hu-Washizu, verschiedene hybrid-gemischte Zweifeld- und Dreifeldapproximationen diskutiert. Bei den Hu-Washizu-Elementen soll vor allem der Einfluß der Spannungs-, der Verzerrungs- und der Verschiebungsansätze aufeinander herausgearbeitet werden.

Als Ergänzung soll in Kapitel 7 das in [Simo, 90] vorgestellte Konzept der erweiterten Verzerrungsansätze ("enhanced assumed strain") vorgestellt werden. Numerische Scheibenbeispiele sollen die Vor- und Nachteile oder auch Ähnlichkeiten der verschiedenen Formulierungen klar zum Ausdruck bringen.

In Kapitel 10 wird ausgehend von dem dreidimensional degenerierten Konzept eine lokale Schalenformulierung mit kovarianten Verzerrungs- und kontravarianten Spannungskomponenten vorgestellt. Im Gegensatz zu einer Formulierung nach einer Schalentheorie müssen komplizierte mathematische Formen wie Christoffelsymbole oder kovariante Ableitungen aber nicht explizit aufgestellt werden. Da die verschiedenen hybrid-gemischten Methoden unterschiedliche Koordinatensysteme als Bezugssysteme erfordern, wird die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung bezüglich eines konvektiv krummlinigen Koordinatensystems sowie bezüglich eines elementbezogenen, orthogonalen Koordinatensystems aufgestellt.

Aufbauend auf den in Kapitel 4 bis 8 gemachten Erfahrungen werden dann getrennt für Querschub-, Membran- und Biegeanteil verschiedene hybrid-gemischte Konzepte angewendet, die zu verschiedenen Schalenelementen führen. Die Zuverlässigkeit dieser Schalenelemente wird in den abschließenden Beispielen untersucht.

2 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

2.1 Einführung

In dieser Arbeit sollen verschiedene gemischte Finite Element – Approximationen untersucht werden. Unter gemischten Problemen versteht man ein System von zwei (oder mehr) Differentialgleichungen, das durch die Aufspaltung einer höherwertigen Differentialgleichung entstanden ist. Charakteristisch ist, daß das Problem nicht nur einen Variablentyp als Unbekannte enthält, sondern mindestens zwei (zum Beispiel Verschiebungen und Spannungen).

Das gemischte Problem sollte nicht mit dem gekoppelten Problem (zum Beispiel der Fluid – Struktur – Interaktion oder dem thermo – mechanischen Problem) verwechselt werden. Beim gekoppelten Problem hat man es zwar ebenfalls mit mehr als einer Differentialgleichung zu tun; das Differentialgleichungssystem kann jedoch nicht reduziert werden durch Einsetzen einer Gleichung in eine andere.

Zunächst sollen die grundlegenden Gleichungen des Elastizitätsproblems aufgestellt werden. Anschließend werden, ausgehend von verschiedenen Einfeldprinzipien, zwei prinzipiell unterschiedliche gemischte Prinzipien hergeleitet, anhand derer die mathematischen Regeln über Lösbarkeit und Stabilität von Sattelpunktproblemen diskutiert werden.

2.2 Das lineare Elastizitätsproblem

Betrachtet wird ein linear elastischer Körper mit dem Volumen V . Die Beschreibung der Bewegung des dreidimensionalen Körpers in einem Lagrangeschen Koordinatensystem erfolgt durch die Verschiebungen

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T \quad (2.1)$$

Mit diesen Verschiebungen können die infinitesimalen Verzerrungen berechnet werden:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{D}{D\mathbf{u}} \mathbf{u} \quad (2.2)$$

Die Indizes i und j laufen von 1 bis 3 und das Komma steht für Differentiation ($u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$). Aufgrund bestehender Symmetrien kann der Verzerrungstensor als sechsdimensionaler Spaltenvektor ($\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23}]^T$) geschrieben werden. Unter der Annahme von Hookeschem Material sind die Spannungen mit den Verzerrungen folgendermaßen verknüpft:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

mit $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}]^T$. \mathbf{C} enthält die Komponenten des Werkstofftensors 4. Stufe. Wird eine statische Belastung vorausgesetzt, so lautet das Gleichgewicht

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.4)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{p}}$ die Volumenbelastung und der statische Operator \mathbf{B}^T der transponierte des in (2.2) benutzten kinematischen Operators. (2.2) bis (2.4) gelten für den Volumenbereich V . Zur Berücksichtigung der Randbedingungen wird die Oberfläche ∂V des Körpers aufgeteilt in einen Bereich ∂V_u , auf dem Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ vorgegeben sind, und einen Bereich ∂V_t mit vorgeschriebenem Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$. Wird die Normale auf ∂V mit \mathbf{n} bezeichnet, dann gilt:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial V_t \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial V_u \quad (2.6)$$

Mit (2.2) bis (2.6) können die Verschiebungen eines Problems bei gegebener Belastung bestimmt werden. Die Aufgabenstellung ist in den meisten Fällen aber so kompliziert, daß Diskretisierungsverfahren wie die Finite Element Methode benutzt werden müssen. Grundlage hierfür sind für alle konservativen Probleme die Variationsprinzipien. In [Oden, 83] sind zahlreiche variationelle Formulierungen aufgeführt, die zu den verschiedensten Finiten Elementen führen. Das in der Vergangenheit beliebteste Prinzip war das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie. Viele sich daraus ergebenden Elemente enthalten aber unangenehme Versteifungseffekte, so daß mehr und mehr zu gemischten Prinzipien übergegangen wird.

Nachteil von gemischten Problemen ist, daß der angenehme Extremumscharakter der Einfeldprinzipien verlorengeht. Für die Interpretation der mathematischen Grundlagen gemischter Probleme sollen zwei gemischte Energieprinzipien eingeführt werden. Zum einen ist dies ein aus der Potentiellen Energie hergeleitetes hybrides Prinzip, zum anderen das Prinzip von Hellinger – Reissner. Vorweggenommen sei, daß beim Prinzip von Hellinger – Reissner die Spannungen die primären Variablen und die Verschiebungen die sekundären Variablen sind; dies ist für das erstgenannte gemischte Prinzip gerade umgekehrt.

2.3 Ausgewählte Energieprinzipien

Die eben genannten gemischten Probleme entstehen dadurch, daß, ausgehend von einem Einfeldprinzip, Nebenbedingungen in das Funktional genommen werden. Ausgangspunkt für das erste Beispiel ist das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials:

$$\Pi_{(u)} = \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{B}u)^T \mathbf{C} \mathbf{B}u \, dV - P_{(u)} \quad (2.7)$$

mit der Nebenbedingung

$$u = \hat{u} \quad \text{auf } \partial V_u \quad (2.8)$$

und dem negativen äußeren Potential

$$P_{(u)} = \int_V u^T \hat{p} \, dV + \int_{\partial V_t} u^T \hat{f} \, dA \quad (2.9)$$

Die gesuchte Funktion u sei ein Element eines Raumes W , der garantiert, daß die Integrale des Variationsproblems definiert sind. (Die genauen Eigenschaften dieser Räume sollen in den nächsten Abschnitten behandelt werden.)

Da u aber auch die Nebenbedingung erfüllen muß, wird der Raum W der eigentlich zulässigen Funktionen auf eine Untermenge K reduziert:

$$K = \{u \in W \mid u = \hat{u} \text{ auf } \partial V_u\} \quad (2.10)$$

Die Aufgabenstellung für dieses gebundene Minimierungsproblem lautet damit: Gesucht ist ein $u \in K$, so daß gilt:

$$\Pi_{(u)} \leq \Pi_{(v)} \quad (2.11)$$

für beliebige, in K enthaltene Funktionen v .

Die Einschränkung des Raumes W kann vermieden werden, wenn das obige Einfeldprinzip durch Hereinnahme der Nebenbedingung (2.8) in das Funktional (2.7) umformuliert wird. Dabei werden die Spannungen auf dem Rand ∂V_u als Lagrangemultiplikatoren eingeführt:

$$\Pi_{(u,\sigma)} = \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{B}u)^T \mathbf{C} \mathbf{B}u \, dV - P_{(u)} - \int_{\partial V_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T (u - \hat{u}) \, dA \quad (2.12)$$

Neben den Verschiebungen tauchen nun Randspannungen als sekundäre Variablen auf. Damit ist das ursprüngliche Minimierungsproblem zu einem Sattelpunktproblem gewor-

den¹. Sind \mathbf{v} wiederum die Testfunktionen der Verschiebungen und $\boldsymbol{\tau}$ diejenigen der Spannungen, so gilt:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \leq \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \leq \Pi(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.13)$$

Das Funktional (2.12) ist konvex bezüglich der primären Variable \mathbf{u} und konkav bezüglich der sekundären Variable, den Randspannungen. Die primären und sekundären Variable vertauschen ihre Rollen, wenn man nicht von (2.7), sondern von der komplementären Energie ausgeht. Das Prinzip vom Minimum des Gesamtkomplementärpotentials lautet:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial V_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T \hat{\mathbf{u}} \, dA \quad (2.14)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathbb{B}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial V_t$$

Der Raum \mathbf{W} aller Funktionen $\boldsymbol{\sigma}$ ist wiederum eingeschränkt durch die statischen Gleichungen:

$$\mathbf{K} = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \mid \mathbb{B}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{p}} = 0 ; \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \text{ auf } \partial V_t \right\} \quad (2.16)$$

Wie (2.7) ist (2.14) ein Minimierungsproblem und für die Lösung $\boldsymbol{\sigma}$ gilt:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}) \leq \Pi(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.17)$$

für alle zulässigen Funktionen $\boldsymbol{\tau}$. Werden die Nebenbedingungen in das Funktional eingebracht, so ergibt sich das Prinzip von Hellinger – Reissner:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_V -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbb{B} \mathbf{u} \, dV - P(\mathbf{u}) - \int_{\partial V_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \, dA \quad (2.18)$$

und für die Lösung $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\}$ gilt:

$$\Pi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \leq \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \leq \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

1. Die hybriden Verschiebungsmodelle basieren auf zu (2.12) ähnlichen Funktionalen, wobei die Übergangsbedingungen die Rolle der hier diskutierten Randbedingung spielen.

Wie in (2.13) ist Π für ein festes \mathbf{u} ein Maximum bei $\boldsymbol{\sigma}$ und für ein festes $\boldsymbol{\sigma}$ ein Minimum bei \mathbf{u} , doch in (2.18) sind die Spannungen die primären Variablen, während in (2.12) die Verschiebungen die primären Variablen sind².

2.4 Die mathematische Analyse der gemischten Formulierung

Im vorigen Kapitel wurden zwei Beispiele für gemischte Probleme angegeben. Die gemischten Probleme entstanden, indem die Einfeldprinzipien vom Minimum der potentiellen Energie beziehungsweise der komplementären Energie mittels Lagrangemultiplikatoren erweitert wurden. Die Variablen wurden von den Nebenbedingungen befreit und können damit aus einem allgemeineren, größeren Raum gewählt werden.

Trotz der Befreiung von den Nebenbedingungen können die Variablen eines Mehrfeldproblems aber nicht beliebig gewählt werden. Es müssen Bedingungen eingehalten werden, so daß eine eindeutige Lösung des Sattelpunktproblems garantiert ist. Diese mathematischen Bedingungen sollen nun aufgestellt und erläutert werden.

2.4.1 Die schwache Formulierung

Um die beiden Problemklassen (das $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ -Problem (2.12) beziehungsweise das $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ -Problem (2.18)) einheitlich behandeln zu können, soll folgende, allgemeine Formulierung mit den Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ eingeführt werden:

Gegeben seien $\mathbf{f} \in \mathbf{W}'$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{V}'$,

finde $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\} \in \mathbf{W} \times \mathbf{V}$, so daß gilt:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = f(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W} \quad (2.20)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Aus der Formulierung folgen die Eulergleichungen des zugrundegelegten Funktionals. Die Variable $\boldsymbol{\sigma}$ steht für die primäre Variable (beim Hellinger – Reissner Problem wären das die Spannungen, beim Funktional (2.12) die Verschiebungen), während \mathbf{u} für die sekundären Variablen steht. $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{v} sind die entsprechenden Testfunktionen.

Für das Hellinger – Reissner Problem stellt die erste Gleichung die Kompatibilitätsgleichung ($f = 0$) und die zweite Gleichung das Gleichgewicht dar. Legt man (2.12) zugrunde, so steht die erste Gleichung für das Gleichgewicht, während die zweite Gleichung die geometrische Randbedingung ergibt.

2. Beim Stokes – Problem sind die Geschwindigkeiten \mathbf{u} die primären und das Druckfeld p die sekundären Variablen, so daß dieses Problem der Form (2.12) ganz ähnlich ist.

W und V sind Hilbert – Räume, die je nach Problemstellung genauer definiert werden. Für ein Hellinger – Reissner Scheibenproblem ist $W = [L_{2(\Omega)}]^3$ der Raum der Spannungen. Dabei ist $L_{2(\Omega)}$ der Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Gebiet Ω .

Da die Verschiebungen mit ersten Ableitungen vorkommen, sind sie Elemente des Raumes $V = [H_{(\Omega)}^1]^2$. Allgemein ausgedrückt ist $H_{(\Omega)}^s$ der Sobolev – Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen einschließlich ihrer Ableitungen bis zur Ordnung s . Folglich gilt:

$$H_{(\Omega)}^0 = L_{2(\Omega)} \quad (2.21)$$

W' und V' sind die zu W beziehungsweise V gehörenden Dualräume.

2.4.2 Die Operatorform

Die Euler – Lagrange Gleichungen der schwachen Form (2.20) führen zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B} \mathbf{u} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Unter der Voraussetzung, daß \mathbf{A} invertierbar ist, kann die erste Gleichung nach $\boldsymbol{\sigma}$ aufgelöst werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (2.23)$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{G} \quad (2.24)$$

oder umgeformt

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} - \mathbf{G} \quad (2.25)$$

Existiert $(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}$, so ist das Sattelpunktproblem eindeutig lösbar.

Die erste Voraussetzung, nämlich daß \mathbf{A} invertierbar ist, ist jedoch nicht notwendig. Ein einfaches Beispiel [Hackbusch, 86] zeigt, daß für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

das Gesamtsystem (2.22) lösbar ist, obwohl \mathbf{A} singular ist.

2.4.3 Aufspaltung der Operatoren

Um eine notwendige Bedingung für \mathbf{A} formulieren zu können, muß aus dem Raum \mathbf{W} aller Variablen $\boldsymbol{\sigma}$ der Unterraum $\mathbf{K} \subset \mathbf{W}$ gebildet werden:

$$\mathbf{K} := \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \mid \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \right\} \quad (2.27)$$

Wird \mathbf{W} dargestellt als direkte Summe der Orthogonalräume \mathbf{K} und \mathbf{W}_\perp ,

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{W}_\perp \quad (2.28)$$

so kann der Operator \mathbf{A} geschrieben werden als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{K}\mathbf{K}} & \mathbf{A}_{\mathbf{K}\perp} \\ \mathbf{A}_{\perp\mathbf{K}} & \mathbf{A}_{\perp\perp} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Mit der entsprechenden Zerlegung von $\mathbf{B}^T = [\mathbf{B}_{\mathbf{K}}^T \quad \mathbf{B}_{\perp}^T]$, wobei nach (2.27) $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}^T$ beziehungsweise $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}$ durch $\mathbf{0}$ ersetzt werden können, ergibt sich folgendes gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{K}\mathbf{K}} & \mathbf{A}_{\mathbf{K}\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\perp\mathbf{K}} & \mathbf{A}_{\perp\perp} & \mathbf{B}_\perp \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_\perp^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{K}} \\ \boldsymbol{\sigma}_\perp \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{K}} \\ \mathbf{F}_\perp \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.4.4 Lösbarkeits – und Stabilitätsbedingungen

Notwendig und hinreichend für eine eindeutige Lösung von (2.30) ist:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}\mathbf{K}}^{-1} \quad \text{existiert} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}_\perp^{-1} \quad \text{existiert} \quad (2.32)$$

Der Beweis ist in [Hackbusch, 86] gegeben. Der Operator \mathbf{A} muß also nur in dem Bereich für den notwendigen Rang sorgen, der durch \mathbf{B}_\perp beziehungsweise \mathbf{B}_{\perp}^T nicht erfaßt werden kann. Im Beispiel (2.26) liefert die Gleichung $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}$ eine Bedingung für die zwei Unbekannten σ_1 und σ_2 . Um eine zweite Gleichung zu erhalten, ist eine Matrix \mathbf{A} mit Rang 1 erforderlich. Eine Matrix \mathbf{A} mit Nullrang wäre dann möglich, wenn \mathbf{B} eine quadratische Matrix mit vollem Rang wäre.

(2.31) und (2.32) garantieren die Lösbarkeit des Systems. Für die Stabilität, die gewährleistet, daß eine kleine Änderung der rechten Seite nur eine kleine – und nicht eine explosionshaft große – Änderung des Lösungsvektors erzeugt, sind die zwei folgenden Bedingungen notwendig [Brezzi, 90]:

$$\|A_{\mathbb{K}\mathbb{K}}^{-1}\|^{-1} \quad \text{mu\ss} \text{ nach unten beschr\ankt sein} \quad (2.33)$$

$$\|B_{\perp}^{-1}\|^{-1} \quad \text{mu\ss} \text{ nach unten beschr\ankt sein} \quad (2.34)$$

Hinter (2.33) und (2.34) steckt die Forderung, da\ss das Verh\altnis des gr\o\ssten zum kleinsten Eigenwert der Matrizen – was der Konditionszahl entspricht – beschr\ankt sein mu\ss, wobei die Beschr\ankung des kleinsten Eigenwerts nach unten besonders wichtig ist. Mit Hilfe der Bilinearformen k\onnen (2.33) und (2.34) folgenderma\ssen ausgedr\uckt werden:

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{K}} \sup_{\tau \in \mathbb{K}} \frac{|a(\sigma, \tau)|}{\|\sigma\|_{\mathbb{W}} \|\tau\|_{\mathbb{W}}} \geq \alpha > 0 \quad (2.35)$$

$$\inf_{v \in \mathbb{V}} \sup_{\tau \in \mathbb{W}} \frac{|b(\tau, v)|}{\|\tau\|_{\mathbb{W}} \|v\|_{\mathbb{V}}} \geq \beta > 0 \quad (2.36)$$

beziehungsweise

$$|a(\tau, \tau)| \geq \alpha \|\tau\|_{\mathbb{W}}^2 > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{K} \quad (2.37)$$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{W}} \frac{|b(\tau, v)|}{\|\tau\|_{\mathbb{W}} \|v\|_{\mathbb{V}}} \geq \beta > 0 \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (2.38)$$

(2.35) bzw. (2.37) entsprechen der Bedingung (2.33), w\ahrend (2.36) bzw. (2.38) die Bedingung (2.34) widerspiegeln.

$\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ bzw. $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ sind die Normen der entsprechenden R\aume. (2.35) und (2.36) sagen aus, da\ss das Infimum \u00fcber das Supremum der beiden Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ gr\o\sser oder gleich einer Konstanten α bzw. β sein mu\ss. Da nur der Teil $A_{\mathbb{K}\mathbb{K}}$ des Operators A beschr\ankt sein mu\ss, wird die Bedingung (2.35) lediglich im Raum \mathbb{K} gefordert. Die zun\achst ausf\uhrlich als inf – sup Gleichung geschriebene Bedingung (2.35) vereinfacht sich zu (2.37), da die Form $a(\cdot, \cdot)$ eine quadratische Form ist. (2.37) ist die Elliptizit\atsbedingung, w\ahrend die oft als inf – sup – Bedingung bezeichnete Form (2.36) beziehungsweise (2.38) zur Babuska – Brezzi Bedingung f\uhrt.

2.4.5 Anmerkungen zur Stabilit\at

Sind die Bedingungen (2.37) und (2.38) erf\ullt, so ist das kontinuierliche Problem stabil. Je nach Problemstellung ist dabei die eine oder andere Bedingung schwieriger zu erf\ullen. Bei kompressibler Elastizit\at oder beim Stokes – Problem macht die Elliptizit\atsbedingung (2.37) keine Schwierigkeiten. Die Form $a(\cdot, \cdot)$ ist elliptisch im ganzen Raum \mathbb{W} , selbst eine Beschr\ankung auf den Unterraum \mathbb{K} ist nicht erforderlich. Damit kann die prim\are Variable σ gem\ass (2.23) und (2.24) vollst\andig eliminiert werden.

Für das Stokes – Problem oder für die Formulierung (2.12) ist die Babuska – Brezzi Bedingung schwierig zu erfüllen, da die primäre Variable aufgrund der auf sie wirkenden Ableitungen im Raum H^1 liegen muß.

Untersucht man die Formulierung (2.18) bei inkompressibler Elastizität, so ist es die Elliptizitätsbedingung, die schwierig zu erfüllen ist. Elliptische Randwertprobleme haben nämlich nicht automatisch elliptische Bilinearformen. In [Franca, 88] ist gezeigt, daß $a_{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})}$ nicht mehr elliptisch ist in \mathbf{W} , da die Konstante α in (2.37) von der Poissonzahl ν abhängt. Da Elliptizität aber im Raum $\mathbf{K} \subset \mathbf{W}$ ausreichend ist, mit

$$\mathbf{K} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W} \mid b_{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \right\} \quad (2.39)$$

kann auch hierfür Stabilität gewährleistet werden [Franca, 88]. Regeln für die Finite Element Approximationen, die die Einhaltung der Stabilitätsbedingungen garantieren, sollen in späteren Kapiteln diskutiert werden. Neben der Elliptizitäts – und der inf – sup – Bedingung sind noch die Kontinuitätsbedingungen einzuhalten:

$$|a_{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}| \leq c_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{W}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{W}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W} \quad (2.40)$$

$$|b_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})}| \leq c_2 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{W}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.41)$$

wobei für die Konstanten c_1 und c_2 gilt:

$$0 < c_1 < \infty \quad (2.42)$$

$$0 < c_2 < \infty \quad (2.43)$$

Die Bedingungen (2.37), (2.38), (2.40) und (2.41) werden im nächsten Abschnitt für ein diskretes System nochmals zusammengestellt.

2.4.6 Bedingungen im diskreten Fall

Im diskreten Fall werden anstatt der Räume \mathbf{W} und \mathbf{V} endlich dimensionale Unterräume $\mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}$ und $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ gewählt, die die Interpolationsfunktionen mit bestimmten Kontinuitätsbedingungen (C^0 , C^1 , ...) enthalten. Dabei steht der Fußzeiger $_h$ für einen allgemeinen Diskretisierungsparameter. Das diskretisierte Problem schreibt sich wie folgt:

Gegeben seien $\mathbf{f} \in \mathbf{W}'$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{V}'$,

finde $\{\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h\} \in \mathbf{W}_h \times \mathbf{V}_h$, so daß gilt:

$$a_{(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)} + b_{(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h)} = f_{(\boldsymbol{\tau}_h)} \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{W}_h \quad (2.44)$$

$$b_{(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h)} = g_{(\mathbf{v}_h)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

Eine eindeutige Lösung $\{\sigma_h, u_h\} \in W_h \times V_h$ existiert, wenn die schon im vorigen Abschnitt erläuterten Kontinuitäts – und Stabilitätsbedingungen erfüllt sind:

Kontinuität:

$$|a(\sigma_h, \tau_h)| \leq c_1 \|\sigma_h\|_W \|\tau_h\|_W \quad \forall \sigma_h, \tau_h \in W_h \quad (2.45)$$

$$|b(\sigma_h, v_h)| \leq c_2 \|\sigma_h\|_W \|v_h\|_V \quad \forall \sigma_h \in W_h, v_h \in V_h \quad (2.46)$$

$$0 < c_1 < \infty \quad (2.47)$$

$$0 < c_2 < \infty \quad (2.48)$$

Stabilität:

$$|a(\tau_h, \tau_h)| \geq \alpha_h \|\tau_h\|_W^2 \quad \forall \tau_h \in K_h \quad (2.49)$$

$$\text{wobei} \quad K_h = \left\{ \tau_h \in W_h \mid b(\sigma_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \right\} \quad (2.50)$$

$$\sup_{\tau_h \in W_h} \frac{|b(\sigma_h, v_h)|}{\|\tau_h\|_W \|v_h\|_V} \geq \beta_h \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.51)$$

$$\alpha_h \geq \alpha > 0 \quad (2.52)$$

$$\beta_h \geq \beta > 0 \quad (2.53)$$

Wie im kontinuierlichen Fall macht die Erfüllung von (2.45) und (2.46) keine Schwierigkeiten. Im weiteren ist für viele Problemstellungen die quadratische Form $a(\cdot, \cdot)$ elliptisch im Raum W , damit ist (2.49) beziehungsweise (2.52) erfüllt.

Bei der Überprüfung der Babuska – Brezzi Bedingung (2.51) muß jedoch für alle Problemstellungen jede Kombination $W_h - V_h$ untersucht werden. Damit sich eine stabile und konvergente Methode ergibt, ist eine abgestimmte Wahl der Räume W_h und V_h notwendig.

2.4.7 Eine alternative diskrete Bedingung

Betrachtet man zum Beispiel das Hellinger – Reissner Problem, wo die primäre Variable (Spannungen) mit den Ableitungen der sekundären Variable (Verschiebungen) verknüpft ist, so ist für eine stabile Methode eine Kompatibilität zwischen dem Raum W_h der Spannungsansätze und dem Raum ∇V_h mit

$$\nabla V_h = \{z_h \mid z_h = \nabla v_h ; v_h \in V_h\} \quad (2.54)$$

erforderlich. Dabei steht ∇v_h für die abgeleiteten Verschiebungsansätze.

Für das Problem kann eine etwas einfacher zu handhabende Stabilitätsbedingung angegeben werden [Carey, 83]: Wird die Projektion des Raumes der Verschiebungsableitungen ∇V_h in den Raum W_h ausgedrückt mit

$$P_h^{\sigma} \nabla v_h \quad (2.55)$$

so muß entsprechend zu (2.51) gelten:

$$\min_{v_h \in V_h} \frac{\|P_h^{\sigma} \nabla v_h\|_W}{\|\nabla v_h\|_W} \geq \beta_h > \beta > 0 \quad (2.56)$$

(2.56) fordert für die Verschiebungsableitungen die entsprechenden "Partner" auf der Spannungsseite. Mit sinngemäß abgeänderten Projektionen kann (2.56) auf die verschiedensten gemischten Finiten Elementmodelle (Spannungselemente, Verzerrungselemente, ...) angewendet werden. Die Kompatibilität muß aber für beliebige Elementgeometrien und Diskretisierungen gegeben sein.

2.4.8 Fehlerschranken

Erfüllen die Konstanten α_h und β_h die obigen Bedingungen für alle Parameter h einer Folge von Diskretisierungen, so ist die Diskretisierung stabil. Es können optimale Fehlerschranken angegeben werden [Brezzi, 90]:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_W + \|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{\sigma_h \in W_h} \|\sigma - \sigma_h\|_W + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \right\} \quad (2.57)$$

Dabei ist $\{\sigma, u\}$ die exakte Lösung. C ist eine positive Konstante, die typischerweise die Stabilitätskonstanten α_h und β_h im Nenner enthält. Damit wird deutlich, daß zum Beispiel ein bei Netzverfeinerung kleiner werdendes β_h die Konvergenzrate zerstört beziehungsweise ein $\beta_h = 0$ zu einem singulären Gleichungssystem mit unendlichen Spannungs- oder Verschiebungsamplituden führt.

3 VERSTEIFUNGSPROBLEME DER VERSCHIEBUNGSMODELLE

3.1 Einführung

Im vorigen Kapitel wurden die mathematischen Grundlagen für die gemischten Modelle diskutiert. Bevor die gemischten Elemente vorgestellt werden, sollen die Versteifungsprobleme der reinen Verschiebungsmodelle analysiert werden. Die einzelnen Versteifungsarten ("shear - locking", "membrane - locking" und "volumetric locking") scheinen zunächst sehr verschiedenartig; Ursache ist jedoch stets ein nicht ausgeglichenes Verhältnis zwischen den Verschiebungsformen auf der einen Seite und den Spannungs- oder Verzerrungsfeldern auf der anderen Seite.

Daß die Spannungs- und Verzerrungsfelder der reinen Verschiebungsmodelle zu hochwertig sind, soll zunächst für das vierknotige Scheibenelement und anschließend für die acht- beziehungsweise neunknotigen Elemente verdeutlicht werden.

3.2 Verschiebungsmodell der vierknotigen Scheibe

Grundlage für die Verschiebungsmodelle ist das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials. Die Potentielle Energie Π ergibt sich nach (2.7) aus der Differenz des inneren Potentials U und des negativen äußeren Potentials P :

$$\Pi = U - P \quad (3.1)$$

Hierbei berechnet sich U aus der Summe der Energien der einzelnen Elemente:

$$U = \sum_e U_e \quad (3.2)$$

In U beziehungsweise U_e ist die zu approximierende Variable \mathbf{u} mit ersten Ableitungen enthalten. Konforme Finite Element Ansätze müssen somit aus dem Kontinuitätsraum $C^0(\Omega)$ sein, mit dem diskretisierten Gebiet Ω . Die Verschiebungsansätze des vierknotigen Scheibenelements werden definiert durch

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{u}_h \in [C^0(\Omega)]^2 \mid \mathbf{u}_h|_{\alpha_e} = \mathbf{N} \mathbf{d} ; \mathbf{d} \in \mathbf{R}^8 \right\} \quad (3.3)$$

Mit dem Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.4)$$

und

$$\mathbf{B}^D \mathbf{u}_h = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.5)$$

sowie der Werkstoffmatrix \mathbf{C} ergibt sich die Potentielle Energie des Elements zu

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \, \mathbf{d} \quad (3.6)$$

\mathbf{N} enthält die bilinearen Formfunktionen, ausgedrückt in den natürlichen Koordinaten ξ und η , und \mathbf{d} ist der Vektor der Knotenfreiheitsgrade (Bild 3.1).

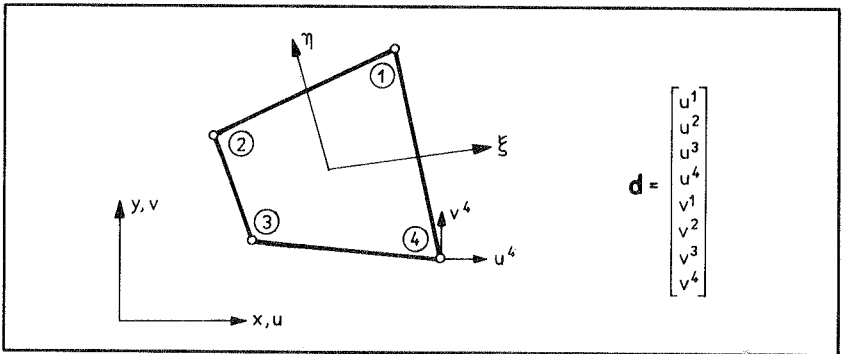


Bild 3.1: Vierknotiges Scheibenelement mit Freiheitsgraden

Zur Beurteilung der einzelnen Verschiebungsformen (Modes) soll die folgende Aufspaltung vorgenommen werden:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{p} = [1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Wird anstelle des Vektors \mathbf{d} der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ der acht verallgemeinerten Freiheitsgrade eingeführt

$$\mathbf{d} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.10)$$

mit

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

so kann (3.4) umgeschrieben werden in

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.12)$$

\mathbf{P} ist eine Matrix, die die für den Verschiebungsansatz gewählten Polynomterme enthält. Werden die Matrizen \mathbf{P} , \mathbf{A} und \mathbf{Q} zusammengefaßt, so ergibt sich die zu (3.12) alternative Form

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.13)$$

In den kommenden Ausführungen wird jedoch auf (3.12) zurückgegriffen.

3.2.1 Versteifungseffekte

Für ein Rechteckelement, dessen Achsen ξ und η mit den globalen Koordinatenachsen x und y zusammenfallen, haben die Verschiebungsmodes die in Bild 3.2 gezeigten Formen.

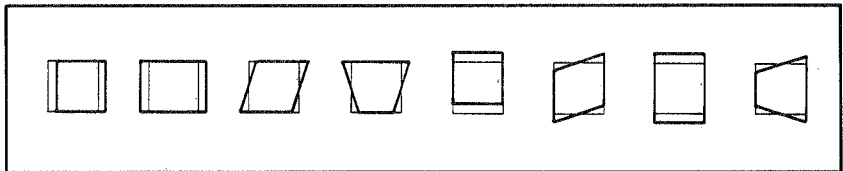


Bild 3.2: Verschiebungsmodes eines Vierknotenelements

Die ersten vier Modes ergeben sich aus den vier Polynomtermen für die Verschiebung u , die letzten vier Modes entsprechend für die Verschiebung v . Die Polynomterme sind in den ersten beiden Zeilen von Tabelle 3.1 aufgelistet. Berechnet man für das oben

u	1	ξ	η	$\xi\eta$				
v					1	ξ	η	$\xi\eta$
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$		1		η				
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$							1	ξ
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$			1	ξ		1		η

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

Tabelle 3.1: Verzerrungsverteilung der Verschiebungsformen des vierknotigen Scheibenelements

genannte Rechteckelement die zu Verzerrungen führenden Verschiebungsableitungen, so können spaltenweise die in den einzelnen Modes enthaltenen Verzerrungen abgelesen werden.

Neben den drei Starrkörperverschiebungen ((3) minus (6) ergibt die Rotation) können die drei konstanten Verzerrungsmodes (2), (7) und (3) plus (6) sowie zwei lineare Modes identifiziert werden. Während die drei Starrkörperverschiebungen und die drei konstanten Modes sich wie gewünscht ergeben, erzeugen die beiden linearen Modes (4) und (8) gleichzeitig Dehnungen und Schubverzerrungen. Diese linearen Schubverzerrungen sind der Grund des zu steifen Elementverhaltens, was durch die anschließende Eigenwertuntersuchung unterstrichen werden soll.

3.2.2 Eigenwertanalyse

Die in Bild 3.3 dargestellten Eigenwertverläufe geben die Steifigkeiten der fünf Deformationsmodes eines vierknotigen Scheibenelements wieder, wobei eine Seitenlänge des Elements variiert wurde. Nicht dargestellt sind die drei Nulleigenwerte der Starrkörperanteile, die sich ebenso wie die drei konstanten Modes ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{xy} = \text{konstant}$) stets korrekt ergeben. Vergleicht man die Eigenwerte der linearen Verzerrungsmodes (4) und (8) mit den Ergebnissen exakter Biegemodes (gestrichelt), so erkennt man, daß bei zunehmender Seitenlänge l_x der Eigenwert von Mode (4) um ein Vielfaches über dem gewünschten Eigenwert liegt. Schon bei einem Seitenverhältnis $l_x : l_y$ von 2 : 1 ist zum Beispiel Mode (4) um den Faktor 3 zu steif, was sich in Rechnungen dadurch niederschlägt, daß nur 33% der exakten Verschiebung erreicht wird. Ziel ist es deshalb, das Verhalten dieser linearen Dehnungsmodes zu verbessern.

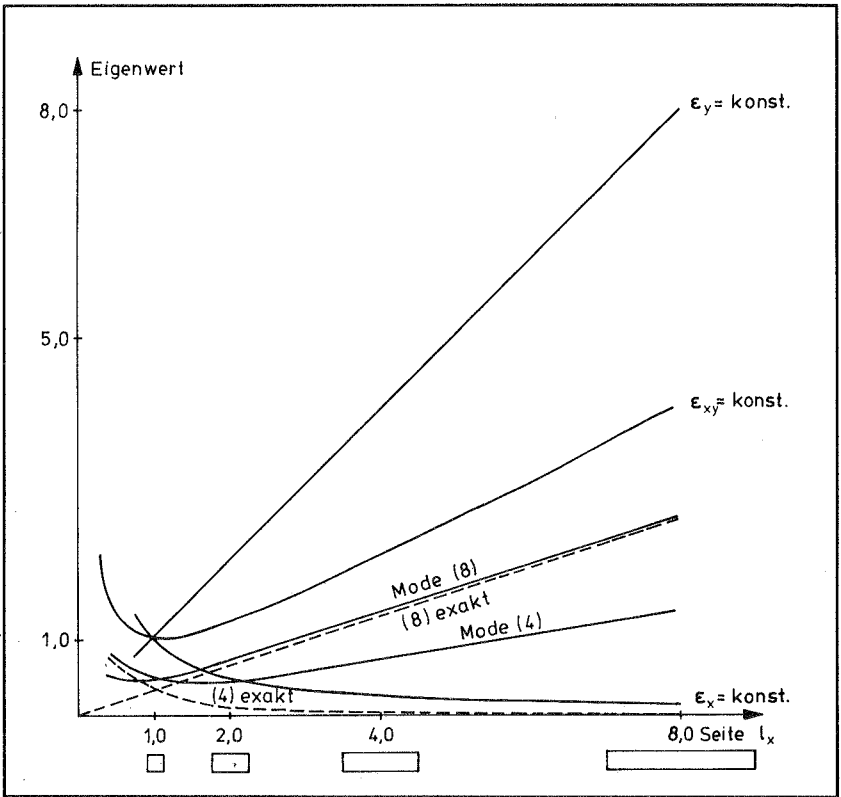


Bild 3.3: Eigenwertverläufe des vierknotigen Scheibenelements bei variierender Elementlänge l_x ($l_y = 1,0$; $E = 1,0$; $\nu = 0,0$)

3.2.3 Reduzierte Integration

Ein erster Weg, die Versteifungseffekte von Verschiebungselementen zu vermeiden, war die Unterintegration [Zienkiewicz, 71]. Für die vierknotige Scheibe bedeutet dies eine Einpunkt- statt der üblichen 2×2 -Integration. Die Einpunktintegration an der Stelle $\xi = \eta = 0$ kann jedoch die linearen Felder der Verschiebungsableitungen nicht erfassen. Wie in Tabelle 3.2 dargestellt, entstehen zwei zusätzliche Nullspalten. Solche Deformationsmoden (hier Mode (4) und (8)), die keine Verzerrungen entwickeln und somit auch keine Energie aufnehmen, die aber keine Starrkörperverschiebungen darstellen, nennt man "zero energy modes" (ZEM).

u	1	ξ	η	$\xi\eta$				
v					1	ξ	η	$\xi\eta$
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$		1						
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$							1	
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$			1			1		

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

Tabelle 3.2: Verzerrungsverteilung des reduziert integrierten Scheibenelements

Wendet man die selektiv reduzierte Integration an (Einpunkt-Integration nur für den Schub), so kommt es zu keinem ZEM. Das Versteifen kann jedoch nur für rechteckige Elemente beseitigt werden, weil bei verzerrter Elementgeometrie Dehnungen und Schubverzerrungen gekoppelt sind. Ein optimales Elementverhalten wird durch eine zusätzliche Verzerrungs- oder Spannungsannahme erreicht. Bevor diese verbesserten Elementmodelle vorgestellt werden, soll das Verhalten der höherwertigen Verschiebungselemente untersucht werden.

3.3 Höherwertigere Scheibenelemente

Nach der Analyse des vierknotigen Elements stellt sich die Frage, ob die Versteifungsprobleme mit höherwertigeren, acht- oder neunknotigen Elementen vermieden werden können. Zur Klärung dieser Frage soll wieder eine tabellarische Untersuchung der Elementmodes durchgeführt werden. Tabelle 3.3, die für die Verschiebungen die Polynomterme bis zum Grad $\xi^2\eta^2$ enthält, kann sowohl für das neunknotige als auch für das achtknotige Scheibenelement (Mode (9) und (18) entfallen) benutzt werden.

u	1	ξ	η	$\xi\eta$	ξ^2	η^2	$\xi^2\eta$	$\xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$									
v										1	ξ	η	$\xi\eta$	ξ^2	η^2	$\xi^2\eta$	$\xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$		1		η	ξ		$\xi\eta$	η^2	$\xi\eta^2$									
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$			1	ξ							1	ξ	η		η^2	$\xi^2\eta$	$\xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$			1	ξ		η^2	$\xi\eta$	$\xi^2\eta$		1		η	ξ		$\xi\eta$	η^2	$\xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18)

Tabelle 3.3: Verzerrungsverteilung des acht- und neunknotigen Scheibenelements

Wie beim Vierknotenelement ergeben sich die drei Starrkörperverschiebungen (1), (10) sowie (3) minus (11) und die drei konstanten Verzerrungsmodes (2), (12) und (3) plus (11) stets exakt. Auch das beim vierknotigen Element noch problematische Verhalten der linearen Modes (4) und (13) ist durch die hinzugekommenen Modes (5), (6) und (14), (15) verbessert. Zum Beispiel wird Mode (4) mit Hilfe von Mode (14) zu einem reinen Dehnungsmode.

Die quadratischen Verzerrungsmodes (7), (8), (9) und (16), (17), (18) weisen jedoch die unerwünschte, zum Versteifen führende Kopplung zwischen Dehnungen und Schubverzerrungen auf.

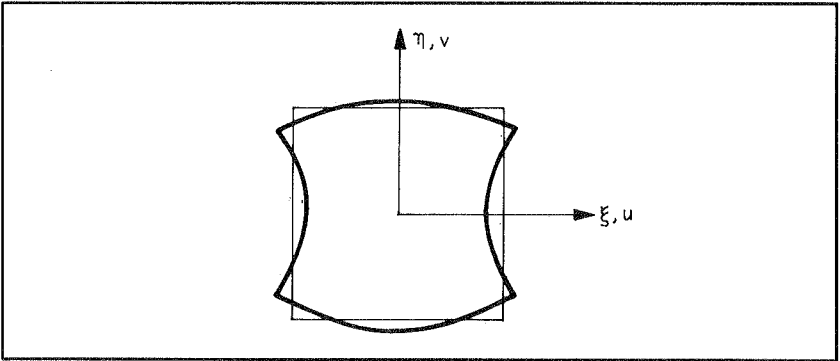


Bild 3.4: ZEM des 2x2-integrierten achtknotigen Scheibenelements

Verbessert wird das zu steife Verhalten wiederum durch eine 2x2-Unterintegration, die die quadratischen Verzerrungsfelder nicht mehr erfaßt (die Terme sind in Tabelle 3.3 unterlegt). Für das Neunknotenelement ergeben sich dadurch drei zusätzliche Nullspalten, das heißt drei "zero-energy-modes" (Mode (9), (18) und (8) minus (16)), für das achtknotige Element ergibt sich ein ZEM ((8) minus (16)). Dieser bei beiden Elementen auftretende ZEM ist in Bild 3.4 dargestellt.

Daß sich das zu steife Verhalten der voll integrierten Elemente wie beim vierknotigen Element schon für einfache Lastfälle zeigt, soll im folgenden Beispiel gezeigt werden. Zum zweiten wird dort die besondere Problematik, die mit den ZEM verbunden ist, deutlich.

3.3.1 Beispiel: Kragarm mit unterschiedlichem Elementnetz

Berechnet wurde ein mit zwei achtknotigen Elementen idealisierter Kragarm, der durch zwei gegenläufige Lasten auf Biegung beansprucht wird (Bild 3.5). Untersucht wurden fünf verschiedene Elemententeilungen. Im Fall A sind die Elemente rechteckig, für den Fall B linear und in den Fällen C, D und E zunehmend quadratisch verzerrt. Gezeigt sind die ursprünglichen Netze und die zugehörigen Deformationen.

Für den Fall A ergeben die volle sowie die reduzierte Integration das richtige Ergebnis, da die versteifenden Modes (7), (8), (16) und (17) für diesen Lastfall nicht angeregt werden. Sind die Elemente aber linear (Fall B) oder quadratisch (Fall C) verzerrt, so werden auch für diesen Lastfall die versteifenden Modes aktiviert. Die volle Integration

ergibt deshalb im Fall B nur ungefähr 60% der Sollverschiebung (nicht dargestellt),
im Fall C sind es nur noch ca. 20%.

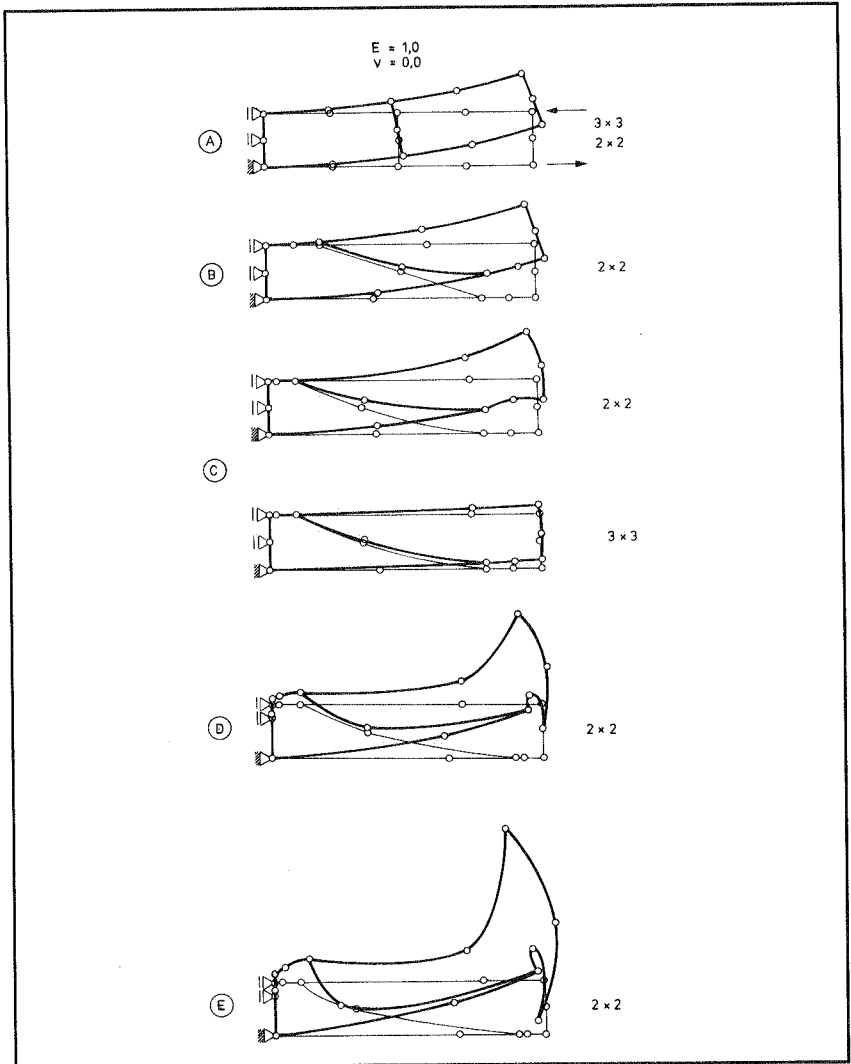


Bild 3.5: Untersuchung an acht-knotigen Scheibenelementen bei zunehmender geometrischer Verzerrung

Bei Unterintegration wird das Ergebnis für Fall B korrekt. Man erkennt jedoch, daß bei zunehmender quadratischer Verzerrung (Fall C, D, E) der in Bild 3.4 dargestellte Mode mehr und mehr angesprochen wird und, da es sich um einen viel zu weichen Mode ("soft mode") handelt, das Ergebnis verfälscht.

Etwas irreführend ist es daher, den ZEM des unterintegrierten Achtknotenelements als "noncommunicable"³ zu bezeichnen. Bei entsprechender geometrischer Verzerrung kann der Mode in einem Elementverband als "soft mode" auftreten.

3.4 Folgerungen

Anhand einer tabellarischen Untersuchung wurde das Versteifungsproblem des vierknotigen Scheibenelements dargelegt. Auch die höherwertigen Elemente zeigen für die höherwertigen Modes ein ähnlich steifes Verhalten.

Daß diese höherwertigen Modes bei starker Elementverzerrung auch für einfache Lastfälle aktiviert werden, konnte mit dem Beispiel des Kragarms gezeigt werden.

Will man versteifungsfreie Elemente, so müssen die versteifenden Modes dieser Elemente verbessert werden. Der gegenüber Vierknotenelementen höhere Aufwand zur Verbesserung der acht- beziehungsweise neunknotigen Elemente scheint nicht gerechtfertigt, so daß in dieser Arbeit alternative Formulierungen für das vierknotige Element vorgestellt werden sollen.

3. "Noncommunicable" wird ein ZEM genannt, der nur für ein einzelnes Element, nicht jedoch in einem Elementverband auftreten kann.

4 "ASSUMED NATURAL STRAIN" – MODELLE

4.1 Einführung

Aufgrund der Ähnlichkeit zur Verschiebungsmethode soll als erste alternative Formulierung die sogenannte "assumed natural strain"-Methode (ANS-Methode) vorgestellt werden. Bei dieser Methode werden, um Versteifungseffekte zu vermeiden, die sich aus den Verschiebungsableitungen ergebenden Verzerrungsfelder reduziert. Dabei werden die neuen Verzerrungsfelder über geschickt gewählte Stützpunkte ("sampling points") definiert. Für ein Scheiben- oder Plattenelement kann zum Beispiel mit einem Kollokationspunkt ein konstantes Verzerrungsfeld, mit 2x2 Punkten ein bilineares oder, für höherwertige Elemente, mit 2x3 Punkten ein linear-quadratisches Feld definiert werden.

Im Gegensatz zu den später erläuterten hybrid-gemischten Formulierungen, haben die Verzerrungsfelder aber keine eigenen Freiwerte, sondern sie werden an den Kollokationspunkten direkt aus den Verschiebungsfeldern berechnet. Die daraus resultierende Effizienz ist ein großer Vorteil der ANS-Methode.

Im folgenden wird das Verfahren auf die vierknotige Scheibe angewendet.

4.2 Reduzierte Verzerrungsansätze der vierknotigen Scheibe

Während die Verschiebungen

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.1)$$

bezüglich des globalen Koordinatensystems definiert sind, werden die Verzerrungen in der ANS-Formulierung auf das natürliche, elementorientierte Koordinatensystem ξ, μ bezogen. Dies hat den großen Vorteil, daß die Invarianz des Elements bezüglich seiner Lage auch dann gegeben ist, wenn die Verzerrungsansätze aus unvollständigen Polynomfeldern bestehen. Unter Benutzung der Jakobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ergeben sich die kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors zu [Malvern, 69]

$$\boldsymbol{\epsilon}_h^{(u)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi} \\ \epsilon_{\eta\eta} \\ \epsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Betrachtet man zum Beispiel den Term

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \xi} = \mathbf{P}_{,\xi} \mathbf{A} \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.4)$$

so erkennt man, daß sich die aus den Verschiebungsfeldern berechneten kompatiblen Verzerrungsfelder schlicht durch Ableitung der in \mathbf{P} gewählten Polynomterme ergeben (siehe Tabelle 3.1). Da der Raum der zulässigen Verzerrungsfelder

$$\mathbf{E}_h = \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_h \mid \boldsymbol{\epsilon}_h \in [L_{2(\omega)}]^3 \right\} \quad (4.5)$$

auch diskontinuierliche Verzerrungsfelder zuläßt, kann die folgende Polynomverteilung gewählt werden:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi\xi} &: [1 \ \eta] \\ \epsilon_{\eta\eta} &: [1 \ \xi] \\ \epsilon_{\xi\eta} &: [1] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wird die Projektion des Raums der in (4.3) berechneten Verschiebungsableitungen in den Raum der Verzerrungen \mathbf{E}_h ausgedrückt durch

$$\mathbf{P}_h^c \nabla \mathbf{u}_h \quad (4.7)$$

so kann die Stabilität des Elements mit (2.56) nachgewiesen werden. Anschaulich gesprochen entspricht (2.56) einer "Partnersuche" zwischen den Verschiebungsableitungen und den in (4.6) angesetzten Verzerrungen. Die tabellarische Untersuchung mit Tabelle 3.1 zeigt, daß durch die Verzerrungsannahme (4.6) jedem Verschiebungsmode (sofern er keine Starrkörperverschiebung darstellt) im Rechteckelement ein einzelner Verzerrungsparameter zugeordnet werden kann.

Aufgrund der bilinearen Verschiebungsannahme hat die Steifigkeitsmatrix die Größe 8×8 . Drei Nullzeilen beziehungsweise - spalten entsprechen den drei Starrkörperverschiebungen und drei Zeilen und Spalten repräsentieren die drei konstanten Verzerrungsmodes. Da die Steifigkeitsterme für diese sechs Modes exakt sein sollen (Patch Test - Forderung), muß bei der Erfassung der beiden linearen Anteile darauf geachtet werden, daß diese exakten Terme nicht beeinflusst werden.

Eine Orthogonalität der linearen zu den restlichen Anteilen ist gegeben, wenn die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} in den verallgemeinerten Freiheitsgraden α_i formuliert wird. Dies soll in den folgenden Abschnitten gezeigt werden. Mit dieser Formulierung können auch die versteifenden Terme des Verschiebungsmodells isoliert werden.

4.2.1 Die Steifigkeitsmatrix des Verschiebungsmodells

Die Elementsteifigkeitsmatrix des reinen Verschiebungsmodells ergibt sich zu (der Index α soll auf die Formulierung in α_i hinweisen):

$$\mathbf{k}_\alpha = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\alpha \, d\Omega \quad (4.8)$$

Dabei ist \mathbf{C} der konstitutive Tensor und \mathbf{B}_α berechnet sich über (4.3) und (4.4).

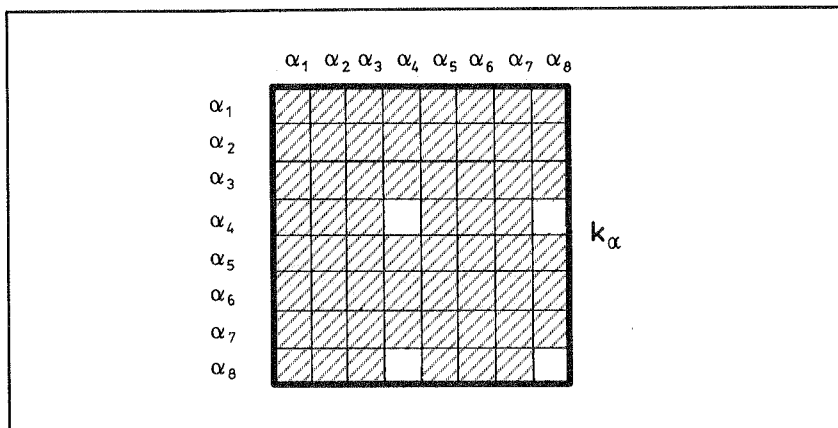


Bild 4.1: Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_α

Aufgrund der Formulierung bezüglich der globalen Modes α_i entsprechen die acht Zeilen oder Spalten den Steifigkeitskomponenten der acht Modes. Da die Modes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ (siehe Bild 3.2) die Starrkörperverschiebungen und die konstanten Modes repräsentieren und diese Modes exakt enthalten sind, sind die Steifigkeitskomponenten dieser Zeilen und Spalten exakt (Bild 4.1).

Die Versteifungseffekte des voll integrierten Verschiebungselements sind in den Komponenten k_{44}, k_{48}, k_{84} und k_{88} enthalten. Sie repräsentieren die zu steifen linearen Verzerrungsmodes und genau diese vier Komponenten sollen nun verbessert werden.

4.2.2 Die Steifigkeitsmatrix des ANS – Modells

Da die Starrkörperverschiebungen und die konstanten Verzerrungsmodes auch mit einer Einpunkt – Integration erfaßt werden können, ist es sinnvoll, die Steifigkeitsmatrix additiv aufzuspalten und in zwei Teilen zu berechnen:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^c + \mathbf{k}^l \quad (4.9)$$

4.2.2.1 Berechnung der Basissteifigkeiten

Die Steifigkeitsterme für die Basissteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^c werden mit einer 1x1 – Unterintegration ermittelt; sie stellen die Starrkörperverschiebungen sowie die konstanten Verzerrungsmodes dar. Die Basissteifigkeitsmatrix ist für all die FE – Modelle identisch, die den Patch Test passieren.

4.2.2.2 Berechnung der höherwertigen Steifigkeiten

Während die Matrix \mathbf{k}^c die Konvergenz sichert, erfaßt die Matrix \mathbf{k}^l die linearen Verzerrungsmodes und sorgt damit für den notwendigen Rang der Gesamtmatrix \mathbf{k} . Um die Konvergenz nicht zu zerstören, müssen die linearen Anteile jedoch orthogonal zu den in \mathbf{k}^c enthaltenen Modes sein.

Ist die Operatormatrix \mathbf{B} analog zu (4.9) zerlegt in

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^c + \mathbf{B}^l \quad (4.10)$$

so kann folgende Bedingung aufgestellt werden:

Wird die zur Berechnung von \mathbf{k}^c aufgestellte Operatormatrix \mathbf{B}^c um höherwertige Anteile \mathbf{B}^l erweitert, so darf die beim Patch Test verrichtete Arbeit der konstanten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^c$ nicht verändert werden:

$$\mathbf{d}^T \int_{\Omega_c} \mathbf{B}^{cT} \boldsymbol{\sigma}^c d\Omega = \mathbf{d}^T \int_{\Omega_c} (\mathbf{B}^c + \mathbf{B}^l)^T \boldsymbol{\sigma}^c d\Omega \quad (4.11)$$

((4.11) könnte auch über (3.10) bezüglich der Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ formuliert werden, da \mathbf{Q} nur konstante Terme enthält und somit den Integranden nicht beeinflusst.) Aus (4.11) kann eine Art Patch Test Bedingung oder Orthogonalitätsbedingung aufgestellt werden:

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{B}^{lT} d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

(4.12) kann erfüllt werden, wenn \mathbf{k}^l bezüglich der verallgemeinerten Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}_l$ aufgestellt wird

$$\mathbf{k}_\alpha^I = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_\alpha^{IT} \mathbf{C} \mathbf{B}_\alpha^I d\Omega \quad (4.13)$$

und in (4.13) nur die Komponenten k_{44} , k_{48} , k_{84} und k_{88} berücksichtigt werden. Für diese vier Steifigkeitsterme brauchen nur vier Terme in der Operatormatrix \mathbf{B}_α^I erstellt zu werden (Bild 4.2).

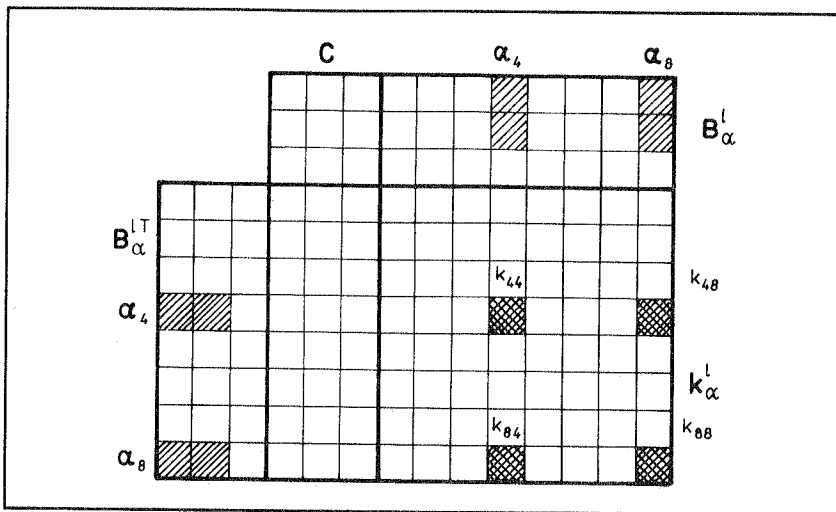


Bild 4.2: Steifigkeitsterme für die Berechnung von \mathbf{k}_α^I

Die Berechnung der Komponenten für \mathbf{B}_α^I erfolgt über jeweils zwei Kollokationspunkte (Bild 4.3), wodurch sich die gewünschte linear - konstante Verteilung ergibt:

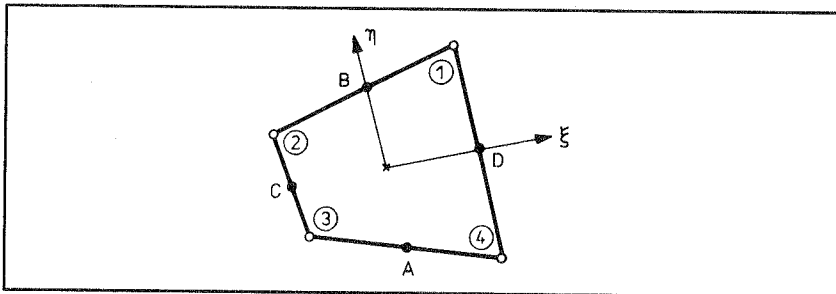


Bild 4.3: Kollokationspunkte des Vierknotenelements

$$\epsilon_{\xi\xi}^{\xi} = \frac{1}{2}(1-\eta)\epsilon_{\xi\xi}^{\Lambda} + \frac{1}{2}(1+\eta)\epsilon_{\xi\xi}^{\text{B}} \quad (4.14)$$

$$\epsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(1-\xi)\epsilon_{\eta\eta}^{\text{C}} + \frac{1}{2}(1+\xi)\epsilon_{\eta\eta}^{\text{D}}$$

$\epsilon_{\xi\xi}^{\Lambda}$, $\epsilon_{\xi\xi}^{\text{B}}$ sowie $\epsilon_{\eta\eta}^{\text{C}}$, $\epsilon_{\eta\eta}^{\text{D}}$ sind die an den Kollokationspunkten nach (4.3) berechneten Verzerrungskomponenten. Über (4.9) wird die endgültige, bezüglich der Knotenfreiheitsgrade \mathbf{d} formulierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} gebildet. Während \mathbf{k}° über die 1x1 - Integration direkt in \mathbf{d} aufgestellt wird, muß $\mathbf{k}_{\alpha}^{\text{I}}$ beziehungsweise deren vier Komponenten noch transformiert werden. Die Transformation ergibt sich gemäß (3.10) zu

$$\mathbf{k}^{\text{I}} = \mathbf{Q}^{-\text{T}} \mathbf{k}_{\alpha}^{\text{I}} \mathbf{Q}^{-1} \quad (4.15)$$

Auch hier beschränkt sich die Matrizenmultiplikation auf wenige Operationen (Bild 4.4).

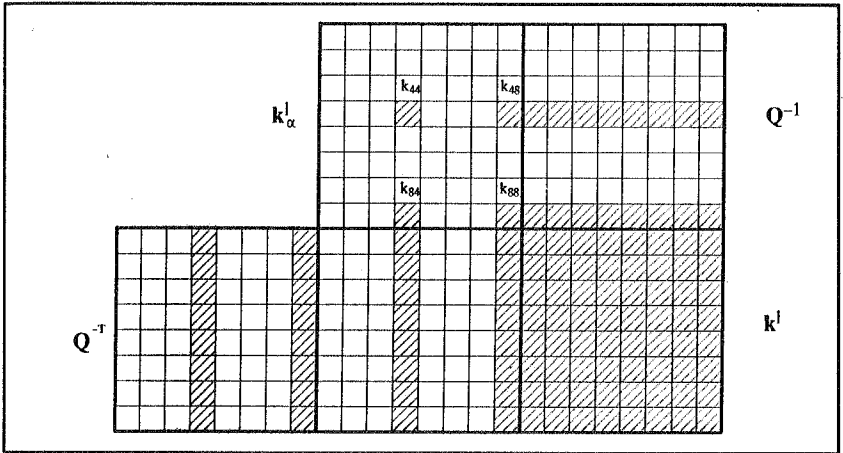


Bild 4.4: Transformation der Steifigkeitsterme von $\mathbf{k}_{\alpha}^{\text{I}}$

4.3 Variationelle Basis der ANS-Methode

Aus Gründen der Anschaulichkeit wurde in den vorigen Abschnitten das "assumed-natural-strain"-Element direkt aus dem Verschiebungsmodell entwickelt. Dieses Vorgehen entspricht auch der Entstehungsgeschichte der Methode. Das Verfahren wäre aber mathematisch unbefriedigend, würde es – ähnlich der Unterintegration – nur auf Ingenieurtricks und nicht auf einem sauberen Funktional basieren.

Durch die Annahme von Verschiebungs- und Verzerrungsfeldern hat man das Einfeldprinzip der potentiellen Energie verlassen, und so stellt sich die Frage nach der veränderten variationellen Basis.

In [Dvorkin, 84] und [Huang, 86] wurde der Ausdruck der potentiellen Energie mit Termen erweitert, die die Arbeiten der veränderten Verzerrungsfelder erfassen:

$$U_e^* = U_e + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\lambda}_h(\boldsymbol{\epsilon}_h - \overset{D}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h) \, d\Omega \quad (4.16)$$

Die $\boldsymbol{\lambda}_h$ sind Lagrange - Multiplikatoren, die die Spannungen widerspiegeln. Aufgrund der punktweisen Verknüpfung von $\boldsymbol{\epsilon}_h$ und $\overset{D}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h$ werden sie als Dirac-delta-Funktionen gewählt.

Letztendlich zufriedenstellend war aber erst die Arbeit von [Simo, 86], in der gezeigt wurde, daß der Methode das Prinzip von Hu-Washizu zugrunde liegt. Ausgehend von diesem Funktional ist die innere Energie der Volumenterme

$$U_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_h^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^T \boldsymbol{\epsilon}_h + \boldsymbol{\sigma}^T \overset{D}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h \, d\Omega \quad (4.17)$$

Wie im vorigen Abschnitt diskutiert, bestehen die sich aus den Verschiebungsableitungen ergebenden Verzerrungen

$$\boldsymbol{\epsilon}_h^{(u)} = \overset{D}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h = \boldsymbol{\epsilon}_h^c + \boldsymbol{\epsilon}_h^l + \boldsymbol{\epsilon}_h^s \quad (4.18)$$

aus einem konstanten Anteil sowie einem höherwertigen Anteil, der in (4.18) in einen erwünschten Anteil $\boldsymbol{\epsilon}_h^l$ sowie einen versteifenden Anteil $\boldsymbol{\epsilon}_h^s$ aufgespalten ist. Wählt man nun einen Verzerrungsansatz, bestehend aus dem konstanten sowie dem erwünschten höherwertigen Anteil

$$\boldsymbol{\epsilon}_h = \boldsymbol{\epsilon}_h^c + \boldsymbol{\epsilon}_h^l \quad (4.19)$$

und setzt (4.18) und (4.19) in (4.17) ein, dann ergibt sich

$$U_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_h^c + \boldsymbol{\epsilon}_h^l)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\epsilon}_h^c + \boldsymbol{\epsilon}_h^l) + \boldsymbol{\sigma}_h^T \boldsymbol{\epsilon}_h^s \, d\Omega \quad (4.20)$$

Werden die Spannungen so berechnet, daß sie orthogonal zu den versteifenden Verzerrungsanteilen sind, so entfällt der letzte Term in (4.20). Ist im weiteren die schon angesprochene Orthogonalität zwischen $\boldsymbol{\epsilon}_h^c$ und $\boldsymbol{\epsilon}_h^l$ gegeben, so ergibt sich (4.20) zu

$$U_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_h^{c^T} \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_h^c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_h^{l^T} \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_h^l d\Omega \quad (4.21)$$

was zur Steifigkeitsmatrix (4.9) führt.

Die aus dem Funktional herausgefallenen Spannungen müssen in der Nachlaufrechnung allerdings so berechnet werden, daß sie orthogonal zu den Verzerrungsfeldern

$$\boldsymbol{\epsilon}_h^s = (\mathbf{B}^{\text{alt}} - \mathbf{B}^{\text{neu}}) \mathbf{d} \quad (4.22)$$

sind, wobei sich \mathbf{B}^{alt} über (4.18) und \mathbf{B}^{neu} über (4.19) ergibt. Wird die ursprüngliche Operatormatrix \mathbf{B}^{alt} vollständig aufgestellt, so können die korrekten Spannungsfelder über eine Gram – Schmidt – Orthogonalisierung konstruiert werden [Simo, 86]. Einfacher ist es jedoch, die Spannungen auf die konstanten Felder zu beschränken. Für diesen Fall ist die gewünschte Orthogonalität gewährleistet, da $\boldsymbol{\epsilon}_h^s$ keine konstanten, sondern nur lineare Anteile enthält.

Anmerkung 1: Selbstverständlich beeinflusst die nachträgliche Spannungsberechnung in keiner Weise die Verschiebungen und hat somit auch keinerlei Einfluß auf die Konvergenz des Elements. Sie sorgt lediglich dafür, daß die Methode variationell abgesichert ist. Daß eine zusätzliche Spannungsglättung die variationelle Basis wiederum verändert, sei hier am Rande erwähnt.

Anmerkung 2: In [Belytschko, 89] wurde für ein ANS – Modell das modifizierte Prinzip von Hellinger – Reissner mit

$$U_e = \int_{\Omega_e} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_h^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_h + \boldsymbol{\epsilon}_h^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_h d\Omega \quad (4.23)$$

als Variationsbasis benutzt. Will man aber sämtliche versteifenden Anteile herausstreichen, so reicht dieses Prinzip nicht aus. Sind nämlich die zu approximierenden Verzerrungen festgelegt durch (4.19), so sind die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_h = \mathbf{C}(\mathbf{B}^c + \mathbf{B}^l) \mathbf{d} \quad (4.24)$$

so daß die versteifenden Anteile nicht vollständig eliminiert werden können.

4.4 Interpretation der Verschiebungsmodelle als ANS – Modelle

Da die Integrationspunkte von Verschiebungselementen auch als Kollokationspunkte einer "assumed natural strain" – Methode angesehen werden können, stellt ein numerisch integriertes Verschiebungsmodell einen Sonderfall der ANS – Methode dar.

Durch die gewählten Integrationspunkte (volle, selektive oder reduzierte Integration) werden wie bei der ANS – Methode Verzerrungsfelder festgelegt, die an eben diesen Integrationspunkten mit den Verschiebungsfeldern verknüpft werden.

Die Variationsbasis der ANS – Modelle, das Prinzip von Hu – Washizu, wäre damit die Variationsbasis der selektiv oder reduziert integrierten Verschiebungselemente. Da im Gegensatz zur ANS – Methode keine speziellen Extrapolationsverfahren von den Kollokations – zu den Integrationspunkten hin benutzt werden müssen, erfüllt eine Spannungsberechnung über

$$\sigma_h = C \epsilon_h \quad (4.25)$$

aber stets die Orthogonalität zu den nicht berücksichtigten Anteilen ϵ_h^s . Damit reduziert sich das Prinzip von Hu – Washizu zu dem Hellinger – Reissner Prinzip. Die Identität von Hellinger – Reissner – Elementen und unterintegrierten Verschiebungselementen wurde in [Malkus, 78] gezeigt.

Im Falle einer vollen Integration entsprechen die durch die Integrationspunkte festgelegten Verzerrungsfelder den Feldern, die sich aus den Verschiebungsableitungen ergeben:

$$\epsilon_h = \epsilon_h^{(u)} = \overset{D}{B} u_h \quad (4.26)$$

Damit reduziert sich das Prinzip von Hu – Washizu zum Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie und die Spannungen können beliebig berechnet werden.

5 HYBRID-GEMISCHTE SPANNUNGS-VERSCHIEBUNGS-APPROXIMATION

5.1 Einführung

Im Gegensatz zu den ANS - Elementen erfolgt die Formulierung der Spannungs - Verschiebungs - Elemente direkt mit einem Variationsprinzip, dem Prinzip von Hellinger - Reissner. Ansätze werden für die Spannungen und die Verschiebungen eingeführt, wobei die Spannungsansätze diskontinuierlich sind. Dies ermöglicht eine Elimination der Spannungsunbekannten auf Elementebene, so daß diese Formulierung ebenfalls zu einer Elementsteifigkeitsmatrix führt.

Schwierigkeit bereitet das Auffinden der optimalen Ansätze, die ein versteifungsfreies und zugleich stabiles Element ergeben. Hinsichtlich dieser Punkte werden die in Kapitel 2 eingeführten Lösbarkeits- und Stabilitätsbedingungen diskutiert.

5.2 Das kontinuierliche Problem

Grundlage der hybrid - gemischten Spannungselemente ist das Prinzip von Hellinger - Reissner (2.18). Werden die Rand - und Übergangsterme außer acht gelassen, so schreibt sich das Funktional als

$$\Pi_{(\sigma, u)} = \int_V -\frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma + \sigma^T B u - u^T \hat{p} \, dV \quad (5.1)$$

(5.1) ist definiert auf dem Raumpaar $W \times V$:

$$\Pi : W \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.2)$$

mit den Räumen

$$W = \left\{ \sigma \mid \sigma \in [L_{2(\sigma)}]^{n_\sigma} \right\} \quad (5.3)$$

$$V = \left\{ u \mid u \in [H_{(V)}^1]^{n_u} \right\} \quad (5.4)$$

Für ein zweidimensionales Kontinuum ist W ein dreidimensionaler und V ein zweidimensionaler Raum ($n_\sigma = 3$, $n_u = 2$). Das Funktional Π hat einen stationären Wert, wenn

$$\int_V \left[(B u - C^{-1} \sigma)^T \epsilon + (\sigma^T B v - v^T \hat{p}) \right] dV = 0 \quad (5.5)$$

für beliebige Funktionen $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W}$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ mit

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [\mathbf{H}_{(V)}^1]^{n_u}; \mathbf{v}|_{\partial V_u} = 0 \right\} \quad (5.6)$$

(5.5) ist äquivalent mit den beiden Gleichungen

$$\int_V (\overset{B}{\mathbf{B}}\mathbf{u} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{\tau} \, dV = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{W} \quad (5.7)$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \overset{B}{\mathbf{B}}\mathbf{v} - \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{p}} \, dV = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \quad (5.8)$$

5.3 Die diskretisierten Gleichungen

Um zu einer Näherungslösung zu gelangen, wird das Kontinuum durch Finite Elemente diskretisiert, wobei für die unbekanntenen Variablen über jedes Element Polynomapproximationen gelegt werden. Im Falle des zweidimensionalen Kontinuums werden die Spannungsapproximationen definiert durch

$$\mathbf{W}_h = \left\{ \boldsymbol{\sigma}_h \in [L_{2(\omega)}]^3 \mid \boldsymbol{\sigma}_h|_{\omega_e} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{n_\beta} \right\} \quad (5.9)$$

Analog zu den Verschiebungsansätzen enthält \mathbf{P} wiederum die Polynomansätze. $\boldsymbol{\beta}$ stellt den Vektor der Spannungsfreiwerte dar. Die Verschiebungen werden C^0 -kontinuierlich angesetzt, wobei

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{u}_h \in [C_{(\Omega)}^0]^2 \mid \mathbf{u}_h|_{\omega_e} = \mathbf{N} \mathbf{d}; \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d} \right\} \quad (5.10)$$

Die Vektoren \mathbf{d} und $\boldsymbol{\beta}$ sind Elemente des n_d -dimensionalen beziehungsweise n_β -dimensionalen Raums. Dabei steht n_d für die Anzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade pro Element und n_β für die Anzahl der Elementspannungsfreiwerte.

Unter Berücksichtigung, daß sich das innere Potential U aus der Summe der Beiträge U_e der einzelnen Elemente berechnet, ergibt sich mit den obigen Ansätzen und (5.1) folgender Ausdruck:

$$U_e = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (5.11)$$

wobei

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, d\Omega \quad (5.12)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, d\Omega \quad (5.13)$$

Variation bezüglich der Unbekannten $\boldsymbol{\beta}$ und \mathbf{d} ergibt das Gleichungssystem

$$-\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R} \quad (5.15)$$

Für korrekt angesetzte Spannungen (was im folgenden diskutiert werden soll) und einer positiv definiten inversen Werkstoffmatrix ist \mathbf{H} positiv definit und $\boldsymbol{\beta}$ kann über

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}\mathbf{d} \quad (5.16)$$

aus dem Gleichungssystem (5.14) – (5.15) eliminiert werden. Die verbleibenden Unbekannten sind die Verschiebungen und die Elementsteifigkeitsmatrix ist

$$\mathbf{k} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (5.17)$$

Im Gegensatz zu einer echt – gemischten Methode ist damit der Ablauf bei der hybrid – gemischten Methode dem der konventionellen Verschiebungsmethode sehr ähnlich. Nach dem Zusammenbau und der Gleichungslösung sind die Verschiebungen bekannt; die Spannungen werden anschließend über (5.16) berechnet:

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{P}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}\mathbf{d} \quad (5.18)$$

5.3.1 Stabilität des diskreten Systems

Wie bei jedem gemischten Verfahren stellt sich auch hier die Frage nach der numerischen Stabilität. Neben den leicht zu erfüllenden Kontinuitätsbedingungen (2.45) und (2.46) gilt es vor allem, die Elliptizitätsbedingung (2.49) und die Babuska – Brezzi – Bedingung (2.51) einzuhalten.

Obwohl diese Bedingungen für das Gesamtsystem gelten, können sie im diskreten Fall, da die Spannungen diskontinuierlich angesetzt und auf Elementebene herauskondensiert werden, an einem Element diskutiert werden.

5.3.1.1 Die Elliptizitätsbedingung

In (2.49) wird Elliptizität für die Form $a_{(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)}$ (hier Matrix \mathbf{H}) bezüglich des Unterraums \mathbf{K}_h (siehe (2.50)) gefordert. Ist \mathbf{H} positiv definit, so ist Elliptizität sogar für den gesamten Raum \mathbf{W}_h gegeben. Für den Fall der kompressiblen Elastizität (\mathbf{C}^{-1} ist positiv definit) gilt dies, wenn die Spannungsansätze linear unabhängig sind.

Schwieriger wird es, wenn – wegen eines komplizierten Werkstoffgesetzes oder Inkompressibilität – die Matrix \mathbf{C}^{-1} nicht mehr positiv definit ist. Der Nachweis der Elliptizität bezüglich des Kerns \mathbf{K}_h muß dann, da $\mathbf{K}_h \not\subset \mathbf{W}_h$ für jeden Elementansatz individuell überprüft werden [Franca, 88].

5.3.1.2 Die Babuska – Brezzi Bedingung

Die diskrete Babuska – Brezzi Bedingung, die eine Überprüfung von \mathbf{G} darstellt, schreibt sich unter Berücksichtigung von (5.9) und (5.10) folgendermaßen:

$$\inf_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} \sup_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{n_\beta}} \frac{\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d}}{\|\boldsymbol{\beta}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2} \geq \beta_h > \beta > 0 \quad (5.19)$$

wobei $\|\cdot\|_2$ für die Euklidische Norm steht. (5.19) fordert, daß innerhalb der Spalten von \mathbf{G} nur so viel lineare Abhängigkeiten vorhanden sein dürfen, wie Starrkörperverschiebungen n_r möglich sind [Hartmann, 86]. Betont werden muß, daß es jedoch nicht ausreicht, nur eine Diskretisierung zu untersuchen. Stabilität ist erst gewährleistet, wenn für beliebige Diskretisierungsparameter h , das heißt für beliebige Elementgeometrien, stets ein β_h existiert, so daß gilt:

$$\beta_h > \beta > 0 \quad (5.20)$$

Da (5.19) für beliebige Fälle äußerst schwierig zu berechnen ist, soll zusätzlich die alternative Form (2.56) diskutiert werden. Sie fordert eine Kompatibilität zwischen den Räumen \mathbf{W}_h und $\nabla \mathbf{V}_h$, wobei $\nabla \mathbf{V}_h$ – wie in (2.54) dargestellt – die Verschiebungsableitungen enthält.

Bedingung (2.56) bedeutet nicht, daß $\mathbf{W}_h \supset \nabla \mathbf{V}_h$. Ein Modell mit solch hohen Spannungsansätzen, die mindestens so hoch sind wie die Verschiebungsableitungen, würde (analog dem "limitation principle" von [Fraeijs de Veubeke, 65]) dem Verschiebungsmodell entsprechen. Damit \mathbf{G} den notwendigen Rang hat, muß gelten:

$$\dim \mathbf{W}_h \geq \dim \nabla \mathbf{V}_h \quad (5.21)$$

beziehungsweise mit den Ansätzen aus (5.9) und (5.10)

$$n_\beta \geq n_d - n_r \quad (5.22)$$

Aussagekräftiger als die reine Abzählregel (5.22) ist eine tabellarische Untersuchung, in der die Polynomfelder der Verschiebungsableitungen berechnet werden (siehe zum Beispiel Tabelle 3.1). Die Untersuchung gibt über die notwendige Anzahl der Spannungsmodes hinaus Auskunft darüber, welche Spannungsparameter gewählt werden

müssen, damit die geforderte Kompatibilität der Räume W_h und ∇V_h gegeben ist. Anhand des vierknotigen Scheibenelements soll das Vorgehen verdeutlicht werden.

5.4 Das vierknotige Scheibenelement

Die C^0 -kontinuierlichen Verschiebungsansätze und die diskontinuierlich verlaufenden Spannungsansätze für ein Element lauten gemäß (5.9) und (5.10):

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_h = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad (5.24)$$

Für (5.23) werden wiederum die bilinearen Ansätze gewählt. Die Interpolationsmatrix \mathbf{P} ergibt sich aus

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_0 \mathbf{P}_\xi \quad (5.25)$$

Dabei ist \mathbf{P}_ξ auf das natürliche Koordinatensystem bezogen und enthält die für den Spannungsansatz gewählten Polynomterme. Sie kann als Interpolationsmatrix für die kontravarianten Komponenten $\sigma^{\alpha\beta}$ des Spannungstensors angesehen werden. \mathbf{T}_0 ist die Transformationsmatrix, die die Ansätze in ein orthogonales Bezugssystem transformiert. Wird das globale Koordinatensystem als Bezugssystem gewählt, so ist

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{21}^2 & 2J_{11}J_{21} \\ J_{12}^2 & J_{22}^2 & 2J_{12}J_{22} \\ J_{11}J_{12} & J_{21}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix}_{\xi=\eta=0} \quad (5.26)$$

J_{ij} sind die Terme der Jakobimatrix (4.2); der Index $_0$ bei \mathbf{T}_0 soll darauf hindeuten, daß die Terme J_{ij} an der Stelle $\xi = \eta = 0$ berechnet werden. Somit enthält \mathbf{T}_0 nur konstante Terme. Eine Matrix \mathbf{T}_0 mit in ξ und η variierenden Termen würde – aufgrund der Multiplikation (5.25) – in \mathbf{P} und folglich für die Spannungen in (5.24) keine rein konstanten Ansätze zulassen; ein Zustand wie zum Beispiel $\sigma_{xx} = \text{konstant}$ wäre nicht möglich.

Mit der im nächsten Abschnitt diskutierten Interpolationsmatrix \mathbf{P}_ξ können über (5.12) und (5.13) \mathbf{H} und \mathbf{G} und damit die Elementsteifigkeitsmatrix (5.17) aufgestellt werden.

5.4.1 Wahl der Spannungsansätze

Die Parameter für \mathbf{P}_ξ können mit Hilfe von Tabelle 3.1, das heißt der Polynomverteilung der Verschiebungsableitungen und den folgenden Regeln festgelegt werden:

1. Keine Spannungsansätze für die Starrkörperverschiebungen
2. Konstante Ansätze müssen für alle Spannungskomponenten enthalten sein
3. Um ZEM auszuschließen, muß aus jeder Spalte der Tabelle der Verschiebungsableitungen mindestens ein Polynomterm gewählt werden
4. Um ein Versteifen zu vermeiden, sollten die Spannungsansätze auf einen Polynomterm je Spalte reduziert werden
5. Invarianz für die Steifigkeitskomponenten ist gewährleistet, wenn \mathbf{P}_ξ bezüglich der Parameter ξ und η invariant angesetzt wird

Mit Hilfe dieser Regeln kann die für Stabilität notwendige Kompatibilität zwischen den Räumen der Spannungs – und Verschiebungsansätze sichergestellt werden. Da sich die tabellarische Berechnung auf ein regelmäßiges Element beschränkt, ist die Kompatibilität zunächst nur für den Parameterraum ξ, η gewährleistet. Für Hellinger – Reissner Probleme ist diese Betrachtungsweise aber ausreichend, da die Transformation in das Bezugssystem die Kompatibilität nicht schwächt, sondern zum Beispiel bei Elementverzerrung eher verstärkt.

Ungünstiger verhält es sich beim Stokes – Problem oder bei Finite Element Modellen, die mit (2.12) formuliert werden. Im Gegensatz zum Hellinger – Reissner Problem ist jetzt die primäre Variable die kontinuierlich angesetzte und abzuleitende Variable. Damit gibt es Elemente, die für rechteckige Netzeinteilungen eine stabile Methode, für verzerrte Netze aber eine instabile Methode ergeben (siehe [Mang, 77]), da Elementverzerrungen den Raum der sekundären Variable erweitern. Die Erfüllung der Babuska – Brezzi Bedingung ist für diese Problemgruppe deshalb besonders schwierig [Franca, 88].

Im folgenden sollen für das Hellinger – Reissner Element drei Spannungsansätze diskutiert werden. Die Beispiele sollen ein optimales, ein instabiles und ein versteifendes Element ergeben.

5.4.1.1 Das Element HR – A

Die Interpolationsmatrix wurde wie folgt gewählt:

$$\mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Dieser Spannungsansatz führt zu dem in [Pian, 84] auf andere Weise entwickelten Element; die Parameterwahl soll hier bezüglich der im vorigen Abschnitt eingeführten Regeln 1 bis 5 diskutiert werden.

Gemäß Regel 2 sind die drei konstanten Spannungsfelder berücksichtigt. Nach Regel 4 wurden die bilinearen Verschiebungsmodes (4) und (8) (siehe Tabelle 3.1) als reine Biegemodes, das heißt ohne die linearen Schubmodes angesetzt. Durch die fünf Spannungsparameter ist Regel 3 eingehalten; jeder der fünf Deformationsmodes (2), (3) plus (6), (4), (7) und (8) findet einen "Arbeitspartner" bei den Spannungen. Leicht zu verifizieren ist mit diesem Beispiel auch (5.22). Würde man weniger als fünf Spannungsparameter wählen, so wäre (5.22) oder Regel 3 verletzt, was schon auf Elementebene zu einem (oder mehreren) ZEM führen würde.

5.4.1.2 Das Element HR – B

Es sei

$$\mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Obwohl die Anzahl der gewählten Spannungsmodes ausreichend scheint, zeigt Tabelle 3.1, daß die Verschiebungsmodes (4) und (8) aufgrund der Verletzung von Regel 3 keinen passenden Spannungsparameter finden. Das Element enthält zwei ZEM. Zwar gibt es Netzkonfigurationen, die mit so angesetzten Elementen keine ZEM aufweisen (viele Randzwangsbedingungen oder stark verzerrte Elemente), doch kann sich dies bei Netzverfeinerung ändern. Solche Instabilitäten können vermieden werden, wenn für jeden Deformationsmode ein passender Spannungsparameter gewählt wird.

5.4.1.3 Das Element HR – C

Für dieses Element wurden die Spannungen vollständig bilinear angesetzt:

$$\mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Aufgrund der Verletzung von Regel 4 wird das Element versteifen. Die bilinearen Verschiebungsmodes sind mit (5.29) durch Schubterme versteift, wobei sich das Problem durch die hohen Spannungsansätze im verzerrten Zustand stark verschlimmern wird. Aus diesem und aus Gründen der Effizienz sollte der Ansatz so niedrigwertig wie möglich gewählt werden. Da das reine Verschiebungsmodell auch eine bilineare Spannungsverteilung erzeugt, ist die Steifigkeitsmatrix des Hellinger – Reissner – Elements HR–C mit der des reinen Verschiebungselements identisch ("limitation principle" von [Fraeijs de Veubeke, 65]). Dies zeigen auch die numerischen Beispiele.

5.4.2 Recheneffizienz

Verglichen mit einer Verschiebungsformulierung scheint der Rechenaufwand eines hybrid – gemischten Elements erheblich größer. Die Erstellung der Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{G} sowie die Inversion der Flexibilitätsmatrix \mathbf{H} kann aber stark vereinfacht werden, wenn die Ansatzmatrix \mathbf{P}_ξ entsprechend geschickt gewählt wird. Anstelle von (5.27) kann

$$\mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{\xi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

mit

$$\bar{\xi} = \xi - \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \xi \, d\Omega \quad (5.31)$$

$$\bar{\eta} = \eta - \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \eta \, d\Omega \quad (5.32)$$

gewählt werden. Die für ein Membranelement im dreidimensionalen Raum gültigen Formeln (5.31) und (5.32) vereinfachen sich für ein Scheibenelement zu den in [Zienkiewicz, 89] angegebenen Ausdrücken

$$\bar{\xi} = \xi - \frac{j_1}{3j_0} \quad (5.33)$$

$$\bar{\eta} = \eta - \frac{j_2}{3j_0} \quad (5.34)$$

wobei sich die Terme j_0 , j_1 , j_2 aus der Determinante der Jakobimatrix ergeben:

$$\det \mathbf{J} = j_0 + j_1 \xi + j_2 \eta \quad (5.35)$$

Mit (5.30) sind auch für verzerrte Elemente die drei konstanten Modes von den beiden linearen Modes entkoppelt. Dies bedeutet, daß die 5×5 – Flexibilitätsmatrix \mathbf{H} nie voll besetzt ist, sondern sich in zwei Untermatrizen, eine 3×3 – und eine 2×2 – Matrix gliedert.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} vereinfacht sich damit zu einer Einpunktintegration, die die Starrkörperverschiebungen und die drei konstanten Modes erfaßt, sowie

einer aus den beiden linearen Anteilen herrührenden Rang – 2 Stabilisierung. Die formelmäßige Aufbereitung soll in Kapitel 11 bei der Formulierung des Membrananteils eines Schalenelements erfolgen.

5.5 Abschlußbemerkungen

Ausgehend von dem Variationsprinzip von Hellinger – Reissner wurden verschiedene Spannungs – Verschiebungs – Approximationen für das vierknotige Scheibenelement vorgestellt. Optimale Spannungsansätze für höherwertige Scheibenelemente oder dreidimensionale Kontinuumselemente können in entsprechender Weise gewonnen werden. Beispiele finden sich in [Andelfinger, 90] oder [Eisele, 89]. Anwendungen auf Plattenbeziehungsweise Schalenelemente werden in Kapitel 10 diskutiert.

Problematischer als Spannungs – Verschiebungs – Approximationen sind auf einem modifizierten Hellinger – Reissner – Funktional basierende Verzerrungs – Verschiebungs – Ansätze. Dies liegt an der teilweise fehlenden Orthogonalität zwischen konstanten, linearen und höherwertigen Verzerrungsmodes (siehe Kapitel 4).

Um zu guten Verzerrungsansätzen zu gelangen, sollen im folgenden Kapitel verschiedene Dreifeldapproximationen betrachtet werden.

6 HYBRID-GEMISCHTE DREIFELD-APPROXIMATIONEN

6.1 Einführung

Die vergangenen Kapitel haben gezeigt, daß man das Einfeldprinzip der potentiellen Energie aufgeben muß, will man versteifungsfreie, energetisch ausbalancierte Elemente. Benutzt wurden für das ANS - Modell das Prinzip von Hu - Washizu beziehungsweise für das gemischte Spannungselement das von Hellinger - Reissner. Daß über das Prinzip von Hu - Washizu hinaus noch allgemeinere, parametrisierte Funktionale [Tong, 88] [Felippa, 89] konstruiert werden können, soll im folgenden aufgezeigt werden. Neben den Lösbarkeits - und Stabilitätsbedingungen soll dann die Problematik der ZEM bei der Anwendung des Prinzips von Hu - Washizu sowie zweier parametrisierter Funktionale diskutiert werden.

6.2 Variationsprinzipien in parametrisierter Form

Die zugrundeliegenden Funktionale haben die folgende, allgemeine Form:

$$\Pi = U - W \quad (6.1)$$

Dabei ist U die innere, im Volumen gespeicherte Energie und W enthält Arbeitsanteile aus äußerer Belastung oder Energien aus Randtermen. Um die folgende Diskussion einzuschränken, sollen die Terme in W außer acht gelassen werden.

Werden für die innere Energie U die drei Volumenfelder ϵ , σ und u als Unabhängige eingeführt, so können mit diesen Variablen (unter Berücksichtigung der Symmetrie) sechs verschiedene Arbeitsterme gebildet werden. Die allgemeinste Form für U ist damit:

$$U = \int_V a_{11} \frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon + a_{12} \epsilon^T \sigma + a_{13} \epsilon^T C^B u + a_{22} \frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma + a_{23} \sigma^T B u + a_{33} \frac{1}{2} u^T B^T C^B u \, dV \quad (6.2)$$

In [Felippa, 89] wird eine Matrixdarstellung gewählt:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \epsilon^T & \sigma^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} C & a_{12} I & a_{13} C^B \\ a_{12} I & a_{22} C^{-1} & a_{23} B \\ a_{13} B^T C & a_{23} B^T & a_{33} B^T C^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \sigma \\ u \end{bmatrix} \, dV \quad (6.3)$$

Die sechs Koeffizienten a_{ij} sind noch festzulegende Parameter, wobei drei Abhängigkeiten zu berücksichtigen sind. Damit die Eulergleichungen zu den korrekten Feldgleichungen führen, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \quad (6.4)$$

$$a_{12} + a_{22} + a_{23} = 0 \quad (6.5)$$

$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 \quad (6.6)$$

(6.4) spiegelt die Forderung nach Spannungscompatibilität wider, (6.5) ergibt die Verzerrungscompatibilität und (6.6) sorgt für das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften. Damit reduziert sich die Anzahl der frei zu wählenden Koeffizienten auf drei. Mit Hilfe dieser Parameter können unendlich viel Variationsprinzipien gebaut werden. Als Sonderfälle ergeben sich die allgemein bekannten Funktionale; mit $a_{22}=-1$ $a_{23}=1$ und allen anderen $a_{ik}=0$ kommt man zum Beispiel zum Funktional von Hellinger – Reissner.

6.3 Dreifeld – Approximationen mit dem Prinzip von Hu–Washizu

Bevor allgemeine, mit beliebigen Parametern konstruierte Funktionale analysiert werden, soll das Funktional des Hu – Washizu – Prinzips genauer betrachtet beziehungsweise die Lösbarkeits – und Stabilitätsbedingungen diskutiert werden. Zum Hu – Washizu Funktional gelangt man mit

$$a_{11} = 1 ; a_{12} = -1 ; a_{23} = 1 ; a_{13} = a_{22} = a_{33} = 0$$

was zu der bekannten Form

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \, dV \quad (6.7)$$

führt. Entsprechend den Anforderungen im Funktional können die Räume \mathbf{E} und \mathbf{W} der Verzerrungen und Spannungen als Hilbert – Räume gewählt werden. Die die Diskretisierung definierenden Unterräume sind

$$\mathbf{E}_h = \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_h \in \left[L_{2(\omega)} \right]^{n_\epsilon} \mid \boldsymbol{\epsilon}_h|_{\omega_\alpha} = \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^{n_\alpha} \right\} \quad (6.8)$$

beziehungsweise \mathbf{W}_h aus (5.9). Analog zur Spannungsannahme ist \mathbf{M} die Interpolationsmatrix der Verzerrungen und $\boldsymbol{\alpha}^\alpha$ der n_α – dimensionale Vektor der unbekanntenen Verzerrungsfreiwerte. Die Approximation der Verschiebungen erfolgt wieder mit (5.10),

4. Gewählt wurde die im Schrifttum übliche Bezeichnungsweise. Auf die Doppelbezeichnung mit (3.12) sei hingewiesen.

das heißt den üblichen isoparametrischen Formfunktionen. Über diese Ansätze und den entsprechenden Lasttermen gelangt man zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{F} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

mit

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega_e} \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} \, d\Omega \quad (6.10)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_e} \mathbf{M}^T \mathbf{P} \, d\Omega \quad (6.11)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, d\Omega \quad (6.12)$$

Anzumerken ist, daß die Untermatrizen in (6.9) exakt so angeordnet sind, wie die vorher gewählten Parameter a_{ij} in der Matrixdarstellung (6.3). Da die im folgenden zu diskutierenden Lösbarkeitsbedingungen beziehungsweise die Stabilität von der Anordnung der Untermatrizen, das heißt der gewählten Verknüpfung der Variable abhängen, kann über die Wahl der Parameter a_{ij} die Stabilität des Systems direkt mitgesteuert werden.

6.3.1 Lösbarkeit und Stabilität

Wie das Gleichungssystem einer Hellinger – Reissner Formulierung ist (6.9) nicht positiv definit. Damit das System lösbar ist, müssen analog zu (5.22) bestimmte Bedingungen eingehalten werden. Für das Hu – Washizu Problem lauten sie

$$n_\alpha + \bar{n}_d \geq n_\beta \quad (6.13)$$

$$n_\beta \geq \bar{n}_d \quad (6.14)$$

n_α und n_β sind die Anzahl der Verzerrungs- beziehungsweise Spannungsfreiwerte und \bar{n}_d ist die Anzahl der durch Randbedingungen verminderten Verschiebungsmodes. (6.13) besagt, daß die Anzahl der Verzerrungsmodes und Verschiebungsmodes mindestens so groß sein muß wie die Anzahl der Spannungsmodes, und (6.14) fordert mindestens so viel Spannungsmodes wie Verschiebungsmodes. Werden die Bedingungen nicht eingehalten, so ist (6.9) nicht lösbar und es kommt zu ZEM.

Allerdings muß nun beachtet werden, daß ZEM nicht nur bei den Verschiebungsmodes entstehen (sie seien mit $ZEM_{(u)}$ bezeichnet), wie man es von der Unterintegration bei

den Verschiebungsmodellen oder von Hellinger – Reissner Elementen her kennt. In [Wu, 88] wird gezeigt, daß für ein Zweifeld – Funktional auch $ZEM_{(\sigma)}$, also ZEM bei den Spannungsmodes auftreten können.

Allgemeiner ausgedrückt: Für ein beliebiges Funktional $\Pi(\epsilon, \sigma, u, \dots)$ mit Variablen $\epsilon, \sigma, u, \dots$ können ZEM für alle Variablen auftreten. Ein $ZEM_{(.)}$ einer Variable $(.)$ ist ein Mode dieser Variable, der keinerlei Arbeit liefert, da dieser Mode keinen "Arbeitspartner", das heißt keine duale Variable mit entsprechendem Polynomgrad findet.

Am Beispiel des Prinzips von Hu–Washizu soll das ZEM-Problem für ein Element erläutert werden:

$ZEM_{(\sigma)}$: Die Spannungsmodes finden "Arbeitspartner" über die Terme
$$\int_{\Omega_e} \sigma_h^T \epsilon_h \, d\Omega \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_e} \sigma_h^T B^D u_h \, d\Omega$$
. "Arbeitspartner" für Spannungen können somit Verzerrungen oder Verschiebungen sein, was zu (6.13) führt.

$ZEM_{(u)}$: Die Verschiebungen sind nur in dem Term $\int_{\Omega_e} \sigma_h^T B^D u_h \, d\Omega$ enthalten. Sie haben lediglich Spannungen als "Arbeitspartner". Damit keine $ZEM_{(u)}$ entstehen, muß (6.14) erfüllt sein.

$ZEM_{(\epsilon)}$: Aufgrund des quadratischen Terms $\int_{\Omega_e} \epsilon_h^T C \epsilon_h \, d\Omega$ sind keine $ZEM_{(\epsilon)}$ möglich.

Voraussetzung für die obigen Ausführungen ist eine ausreichende Integrationsordnung. Bekanntlich kommt es bei unterintegrierten Verschiebungselementen trotz des zugrundeliegenden quadratischen Terms $\int_{\Omega_e} u_h^T B^D C B^D u_h \, d\Omega$ zu $ZEM_{(u)}$. Dies liegt an der zu geringen Integrationsordnung, die die höherwertigeren Verschiebungsmodes nicht erfaßt.

6.3.2 Elementbedingungen

Die Lösbarkeitsbedingungen (6.13) und (6.14) wurden am Beispiel eines Elements diskutiert. Werden mehrere Elemente zu einem Gesamtsystem zusammengebaut, so müssen die Bedingungen auch für das Gesamtsystem erfüllt sein. Während sich n_α und n_β dann aus der Summe der Elementmodes ergeben, reduziert sich die Anzahl der Verschiebungsmodes durch den C^0 – kontinuierlichen Zusammenbau.

Oft werden auf Systemebene Elemente benutzt, die auf Elementebene ZEM enthalten, zum Beispiel unterintegrierte Verschiebungselemente. Soll aber ein stabiles Element entworfen werden, das als einzelnes Element oder im Verband, stets zu einer stabilen Methode führt, so müssen (6.13) und (6.14) verschärft werden.

Da durch einen Zusammenbau die Anzahl der Verschiebungsmodes verändert wird, muß hierfür in (6.13) und (6.14) der jeweils ungünstigste Fall angenommen werden. In (6.13) wird $\bar{n}_d = 0$ gesetzt, was zu

$$n_\alpha \geq n_\beta \quad (6.15)$$

führt. (6.14) wird für ein maximales \bar{n}_d am ungünstigsten. \bar{n}_d wird für ein Element maximal, wenn von allen Verschiebungsmodes n_d lediglich die Starrkörperverschiebungen n_r abgezogen werden. Somit wird aus (6.14)

$$n_\beta \geq n_d - n_r \quad (6.16)$$

Für ein einzelnes Element muß also gelten:

$$n_\alpha \geq n_\beta \geq n_d - n_r \quad (6.17)$$

Eine zu (5.21) analoge Gleichung wäre

$$\dim E_h \geq \dim W_h \geq \dim \nabla V_h \quad (6.18)$$

Entsprechend zur Bedingung (2.56), die für die Hellinger – Reissner Modelle verwendet wurde, können für das Hu – Washizu Problem zwei Stabilitätsbedingungen formuliert werden: Wird die Projektion des Raumes W_h der Spannungen in den Verzerrungsraum E_h mit P_h^ϵ bezeichnet und die Projektion des Raumes der Verschiebungsableitungen ∇V_h in den Spannungsraum W_h mit P_h^σ , so muß gelten:

$$\min_{\tau_h \in W_h} \frac{\|P_h^\epsilon \tau_h\|_W}{\|\tau_h\|_W} \geq \beta_h^1 > \beta^1 > 0 \quad (6.19)$$

$$\min_{v_h \in V_h} \frac{\|P_h^\sigma \nabla v_h\|_W}{\|\nabla v_h\|_W} \geq \beta_h^2 > \beta^2 > 0 \quad (6.20)$$

Sind (6.19) und (6.20) erfüllt, so ist die Stabilität des Hu – Washizu Elements gegeben. Wie bei den Hellinger – Reissner Elementen soll über eine tabellarische Untersuchung der Polynomverteilungen die Kompatibilität der Räume sichergestellt werden.

6.3.3 Das vierknotige Scheibenelement

Konkrete Elementansätze sollen anhand des vierknotigen Scheibenelements diskutiert werden. Die Verschiebungs- und Spannungsansätze sind in (5.23) und (5.24) gegeben. Die Verzerrungsansätze lauten:

$$\epsilon_h = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix}_h = \mathbf{M} \alpha \quad (6.21)$$

mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}_\xi \quad (6.22)$$

\mathbf{M}_ξ enthält analog zur Spannungsansatzmatrix \mathbf{P}_ξ die gewählten Polynomterme und kann als Interpolationsmatrix für die kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors interpretiert werden. Die Matrix \mathbf{T}_0^{-T} , die die Ansätze auf ein orthogonales Bezugssystem transformiert, ist die invertierte transponierte der für die Spannungen benutzten Matrix \mathbf{T}_0 (siehe (5.26)).

Damit können die Elementmatrizen (6.10) bis (6.12) und das Gleichungssystem (6.9) gebildet werden. Eliminiert man die Verzerrungsfreiwerte α über

$$\alpha = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} \beta \quad (6.23)$$

so entsteht das in (5.14)–(5.15) gezeigte Gleichungssystem mit

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} \quad (6.24)$$

Die Kondensation der Spannungsfreiwerte mit

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (6.25)$$

führt zur Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k} = \mathbf{G}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G} \quad (6.26)$$

Die schrittweise Kondensation läßt erkennen, daß, wie bei den Stabilitätsbedingungen (6.19) und (6.20) diskutiert, die Verzerrungsansätze auf die Spannungsmodes wirken und die daraus resultierenden, eventuell veränderten Spannungsfelder den Verschiebungsmodes – wie beim Hellinger–Reissner Problem – die entsprechenden Steifigkeiten geben.

Aufgrund des zum Hellinger–Reissner Problem sehr ähnlichen Formelapparats wird deutlich, daß eine Hu–Washizu Approximation für bestimmte Verzerrungsansätze einer Hellinger–Reissner Approximation identisch ist (siehe [Stolarski, 85]). Die folgenden Elementbeispiele sollen den Einfluß der Ansätze aufeinander erläutern.

6.3.3.1 Das Element HuW-A

Für das erste Beispiel sollen die Verzerrungen als auch die Spannungen nur konstant angesetzt werden:

$$\mathbf{M}_\xi = \mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Die Anzahl der Verzerrungsmodes entspricht der der Spannungsmodes, so daß es zu keinen $ZEM_{(v)}$ kommt. Verglichen mit den Verschiebungsmodes sind die Spannungsansätze jedoch zu niedrigwertig, was zu $ZEM_{(u)}$ führt. Betont werden soll, daß auch eine höhere Verzerrungsannahme die $ZEM_{(u)}$ nicht verhindern kann. Verzerrungsansätze können nämlich die Spannungsansätze nicht erhöhen, sondern – wenn sie niedrigwertiger sind als die Spannungsansätze – sie nur reduzieren. Beliebige höherwertige Verzerrungsansätze führen bei gleichbleibendem rein konstanten Spannungsansatz stets zu der gleichen Steifigkeitsmatrix, die mit jener des Einpunkt-integrierten Verschiebungsmodells identisch ist.

6.3.3.2 Das Element HuW-B

Da die Spannungsansätze wie beim Hellinger-Reissner Modell auf die Verschiebungen wirken, soll für die weiteren Beispiele der dort als optimal erkannte Ansatz

$$\mathbf{P}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

übernommen werden. Analog dazu müssen die Verzerrungen nun auf diesen Spannungsansatz abgestimmt werden. Ein Beispiel für einen nicht passenden Verzerrungsansatz wäre:

$$\mathbf{M}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Dieser Ansatz würde die geforderte Kompatibilität in (6.19) nicht erfüllen, da zum Beispiel σ_{xx} linear in η , ϵ_{xx} jedoch linear in ξ angesetzt wurde, was in manchen Fällen zu $ZEM_{(v)}$ führen würde. (\mathbf{H} in (6.24) hat nicht den erforderlichen Rang). Mit diesem Beispiel wird deutlich, daß der Verzerrungsansatz den Spannungsansatz enthalten muß.

6.3.3.3 Das Element HuW-C

Ein Modell ohne ZEM ergibt sich mit

$$\mathbf{M}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Beispielrechnungen zeigen jedoch Versteifungen, da die Verzerrungsannahme die Spannungsannahme nicht vollständig enthält, was im Querdehneffekt begründet ist. Beim ebenen Spannungszustand ergibt sich zum Beispiel σ_{xx} aus (E sei der Elastizitätsmodul, ν die Querdehnzahl):

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \quad (6.31)$$

(6.31) macht deutlich, daß für ein linear in η verlaufendes σ_{xx} nicht nur das entsprechende ϵ_{xx} sondern auch ein linear in η verlaufendes ϵ_{yy} erforderlich ist. Dies soll im nächsten Ansatzbeispiel berücksichtigt werden.

6.3.3.4 Das Element HuW-D

Für dieses Element sind die Verzerrungen vollständig linear angesetzt:

$$\mathbf{M}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Damit ist gewährleistet, daß auch für verzerrte Elementgeometrien der Spannungsansatz (6.29) enthalten ist. Beispielrechnungen zeigen das gute Verhalten dieses Elements. Während die Spannungen auf ein Minimum reduziert werden müssen (um Versteifungseffekte zu vermeiden), muß bei den Verzerrungsansätzen also auf Vollständigkeit geachtet werden.

6.4 Alternative Dreifeld-Approximation

In den vorigen Abschnitten wurden das Dreifeldprinzip von Hu-Washizu und die speziellen Probleme der ZEM diskutiert. Da ZEM mit quadratischen Funktionaltermen ($\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$, ...) vermieden werden, sollen zwei Funktionale mit zwei beziehungsweise drei quadratischen Termen untersucht werden. Gebildet werden die Funktionale aus der allgemeinen Form (6.2).

6.4.1 Alternative 1

Gewählt wurden folgende Parameter:

$$a_{11} = -1 ; a_{12} = 1 ; a_{22} = -2 ; a_{23} = 1 ; a_{13} = a_{33} = 0$$

Die Bedingungen (6.4) bis (6.6) sind erfüllt und das innere Potential ergibt sich zu

$$U = \int_V -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \, dV \quad (6.33)$$

(6.33) kann auch aus dem zweifachen Potential des Prinzips von Hellinger–Reissner gebildet werden, wenn das Potential des Hu–Washizu Prinzips subtrahiert wird.

Aufgrund der quadratischen Terme für $\boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ können für diese Variable keine ZEM entstehen. Auftreten können lediglich $ZEM_{(u)}$. Im Gegensatz zum Prinzip von Hu–Washizu vereinfacht sich die Lösbarkeitsbedingung (6.17) zu

$$n_\beta \geq n_d - n_r \quad (6.34)$$

Folglich können die Verzerrungsansätze freier gewählt werden.

6.4.2 Alternative 2

Mit den Parametern

$$a_{11} = \frac{1}{2} ; a_{12} = \frac{1}{2} ; a_{13} = -1 ; a_{22} = -\frac{3}{2} ; a_{23} = 1 ; a_{33} = 1$$

kann ein Funktional gebildet werden, das quadratische Terme für $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ und \mathbf{u} besitzt. Hier können keinerlei ZEM auftreten und das Gleichungssystem ist – für beliebige Ansätze – stets lösbar. Während bei den Prinzipien von Hellinger–Reissner oder Hu–Washizu die Ansätze noch aufeinander abgestimmt werden mußten, um ZEM zu vermeiden, scheint dieses Problem umgangen. Das folgende Beispiel für das Funktional (6.33) zeigt jedoch, daß zwar keine ZEM für Spannungen und Verzerrungen möglich sind, daß die Ergebnisse eines Elements aber nur dann gut sind, wenn die Ansätze der verschiedenen Variablen aufeinander abgestimmt sind. Dies soll mit Hilfe der Euler–Gleichungen erläutert werden.

6.4.3 Das Element PAR-A

Die Ansätze des mit (6.33) konstruierten Scheibenelements basieren auf (6.8), (5.9) sowie (5.10), wobei für die Verschiebungen wiederum die bilineare Approximation gewählt wird. Da das Funktional für die Verzerrungen niedrigwertigere Ansätze als für die Spannungen ermöglicht, soll der Verzerrungsansatz

$$\mathbf{M}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

mit dem Spannungsansatz

$$\mathbf{P}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

getestet werden. Zwar ergibt dieser Ansatz keine $ZEM_{(\sigma)}$, doch die Euler-Gleichung

$$\int_{\Omega_e} (-2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\epsilon}_h + \overset{\text{D}}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h) \boldsymbol{\tau}_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{W}_h \quad (6.37)$$

wird für die linearen Modes zu

$$\int_{\Omega_e} (-2\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_h + \overset{\text{D}}{\mathbf{B}}\mathbf{u}_h) \boldsymbol{\tau}_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{W}_h \quad (6.38)$$

da für die beiden Biegemodes keine Verzerrungen angesetzt wurden. Damit entfallen die Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_h$ in (6.37), wodurch die Biegemodes nur die halbe Steifigkeit bekommen (siehe (6.38)).

Durch die Benutzung des aufwendigeren Funktionals (6.33) konnte das Problem der ZEM zwar vermindert werden, doch das Kernproblem, die Abstimmung der Verzerrungs-, Spannungs- und Verschiebungsansätze aufeinander, bleibt bestehen.

7 MODELLE MIT ERWEITERTEM VERZERRUNGSANSATZ

7.1 Einführung

Bisher wurden ausbalancierte Elemente konstruiert, indem die Verzerrungs- und Spannungsfelder auf die Verschiebungsmodes abgestimmt wurden. Eine weitere Möglichkeit, optimale Elemente zu erhalten, ist, die Verschiebungen durch zusätzliche inkompatible Modes zu erweitern [Wilson, 73] [Taylor, 76] [Wu, 87], also die Verschiebungsfelder den Verzerrungs- und Spannungsfeldern anzupassen.

Da das in [Simo, 90] entwickelte "enhanced assumed strain" - Konzept (EAS -Konzept) die Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes als Sonderfall enthält, soll dieses EAS - Verfahren erläutert werden.

7.2 Der erweiterte Verzerrungsansatz

Variationelle Basis der "enhanced assumed strain" - Methode [Simo, 90] ist das Prinzip von Hu - Washizu mit der inneren Energie eines Elements

$$U_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \epsilon_h^T C \epsilon_h - \sigma_h^T \epsilon_h + \sigma_h^T \mathbf{B} u_h \, d\Omega \quad (7.1)$$

Der elementweise Verzerrungsansatz wird nun so gewählt, daß er die kompatiblen Verzerrungen $\epsilon_h^{(u)}$ mit

$$\epsilon_h^{(u)} = \mathbf{B} u_h \quad (7.2)$$

sowie ein erweitertes Verzerrungsfeld $\tilde{\epsilon}_h$ enthält:

$$\epsilon_h = \mathbf{B} u_h + \tilde{\epsilon}_h \quad (7.3)$$

(7.3) eingesetzt in (7.1) ergibt

$$U_e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} (\mathbf{B} u_h + \tilde{\epsilon}_h)^T C (\mathbf{B} u_h + \tilde{\epsilon}_h) - \sigma_h^T \tilde{\epsilon}_h \, d\Omega \quad (7.4)$$

Werden die $\tilde{\epsilon}_h$ und die Spannungen nun so aufeinander abgestimmt, daß die Felder orthogonal zueinander sind, so wird

$$\int_{\Omega_e} \sigma_h^T \tilde{\epsilon}_h \, d\Omega = 0 \quad (7.5)$$

Damit entfällt der Term in (7.4). Als unbekannte, zu approximierende Felder bleiben die Verschiebungen \mathbf{u}_h sowie die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h$. Während beim in Kapitel 4 vorgestellten ANS – Konzept die sich aus den Verschiebungsableitungen ergebenden Verzerrungsfelder reduziert wurden, werden sie hier erweitert, allerdings – im Gegensatz zu den in Kapitel 6 diskutierten Hu – Washizu Elementen – nur um höherwertige Anteile.

Da die Spannungen zumindest die konstanten Anteile enthalten müssen, ergibt sich aus (7.5) folgende Bedingung für die erweiterten Verzerrungsansätze:

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h \, d\Omega = 0 \quad (7.6)$$

7.3 Das Gleichungssystem

Neben den Verschiebungsansätzen

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (7.7)$$

wird für die erweiterten Verzerrungen folgender Ansatz gewählt:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h = \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha} \quad (7.8)$$

mit

$$\mathbf{M} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}_\xi \quad (7.9)$$

Dabei ist $\det \mathbf{J}$ die Determinante der Jakobimatrix und $\det \mathbf{J}_0$ entsprechend für $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}|_{\xi=\eta=0}$. Der in (7.9) gewählte Faktor $\frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}}$ erweist sich aufgrund der notwendigen Bedingung (7.6) als vorteilhaft. Werden nämlich (7.8) und (7.9) in (7.6) eingesetzt, so ergibt sich die Bedingung

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}_\xi \boldsymbol{\alpha} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta = 0 \quad (7.10)$$

beziehungsweise ($\det \mathbf{J}_0$, \mathbf{T}_0^{-T} und $\boldsymbol{\alpha}$ enthalten nur konstante Komponenten)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{M}_\xi \, d\xi d\eta = 0 \quad (7.11)$$

Diese gegenüber (7.6) vereinfachte Bedingung ist für die zu wählenden Polynomterme einzuhalten. Das Elementgleichungssystem lautet mit (7.7) und (7.8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Dabei sind

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (7.13)$$

die Steifigkeitsmatrix des reinen Verschiebungsmodells und

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega_e} \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} \, d\Omega \quad (7.14)$$

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega_e} \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (7.15)$$

Aufgrund der diskontinuierlichen Verzerrungsansätze können die Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ wieder eliminiert werden, und die Elementsteifigkeitsmatrix berechnet sich zu

$$\mathbf{k} = \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad (7.16)$$

7.4 Der Sonderfall: Die Methode der inkompatiblen Verschiebungen

Das EAS – Konzept enthält als Sonderfall die Methode der inkompatiblen Verschiebungen, wo die Verschiebungsansätze durch nichtkompatible, diskontinuierliche Felder erweitert werden:

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} + \mathbf{u}_h^{\text{inc}} \quad (7.17)$$

Die aus den inkompatiblen Verschiebungen berechneten Ableitungen $\mathbf{B} \mathbf{u}_h^{\text{inc}}$ können als die in (7.3) direkt angesetzten, erweiterten Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_h$ interpretiert werden. Da die EAS – Methode auf dem Prinzip von Hu – Washizu basiert, kann die Methode der inkompatiblen Verschiebungen damit variationell begründet werden.

Die EAS – Methode macht auch klar, daß trotz der erweiterten Ansätze der Lastvektor unverändert bleibt; dies ging bei der Benutzung von inkompatiblen Verschiebungsmoden nicht direkt hervor und wurde eher aus physikalischen Gesichtspunkten heraus erklärt.

7.5 Das vierknotige Scheibenelement

Um die Zusammenhänge zu den bisherigen Methoden deutlich zu machen, soll wieder das vierknotige Scheibenelement diskutiert werden. Während für (7.7) die üblichen bilinearen Formfunktionen angesetzt werden, wird für die erweiterten Verzerrungen in (7.9) folgender vierparametrischer Ansatz gewählt:

$$\mathbf{M}_\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Aufgrund der linearen Polynomterme ist (7.11) automatisch erfüllt. Eine Stabilitätsuntersuchung kann über Tabelle 7.1 erfolgen. Stabilität ist gewährleistet, wenn es zum einen keine linearen Abhängigkeiten zwischen den Spalten der kompatiblen Verzerrungen und denen der erweiterten Verzerrungsansätze gibt. Zum zweiten dürfen innerhalb der Matrix \mathbf{M}_ξ keine Abhängigkeiten auftreten. Diese Bedingungen sorgen für den vollen Rang der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{N} .

u	1	ξ	η	$\xi\eta$								
v					1	ξ	η	$\xi\eta$				
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$		1		η				ξ				
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$							1	ξ			η	
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$			1	ξ		1		η		η	ξ	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)				

Tabelle 7.1: Verschiebungsableitungen und erweiterte Verzerrungen der vierknotigen Scheibe

Während bei den bisherigen Modellen stets eine Kompatibilität zwischen den anzusetzenden Variablen erforderlich war, ist hier gerade das Gegenteil der Fall. Wird der Raum der kompatiblen Verschiebungsableitungen wieder mit $\mathbf{V}\mathbf{V}_h$ bezeichnet und der Raum der erweiterten Verzerrungsansätze mit $\bar{\mathbf{E}}_h$, so muß gelten:

$$\mathbf{V}\mathbf{V}_h \cap \bar{\mathbf{E}}_h = \emptyset \quad (7.19)$$

Tabelle 7.1 verdeutlicht, daß durch die Erweiterung alle drei Verzerrungskomponenten vollständig linear sind, was auch in Kapitel 6 gefordert wurde. Werden die zu (7.18) gehörenden Polynomterme der Verschiebungskomponenten u und v konstruiert (Tabelle 7.2), so erkennt man, daß die Verzerrungserweiterung (7.18) exakt den Verzerrungen entspricht, die sich aus den in [Wilson, 73] angesetzten inkompatiblen Verschiebungen des Q6-Elements ergeben. In [Simo,90] ist gezeigt, daß beide Modelle identisch sind, wenn die in [Taylor,76] eingeführte Patch Test - Bedingung, die (7.10) entspricht, be-

rücksichtigt wird (Qm6-Element). Neben (7.18) wurde in [Simo, 90] ein weiterer Ansatz vorgeschlagen, der ebenfalls (7.11) erfüllt:

$$\mathbf{M}_\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & \eta & -\xi\eta \\ 0 & \eta & \xi & 0 & \xi^2 - \eta^2 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Das daraus resultierende Element zeigt aufgrund des zusätzlichen fünften Modes ein geringfügig besseres Verhalten als das in [Taylor, 76] entwickelte Qm6-Element.

u	ξ^2	η^2		
v			ξ^2	η^2
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$	ξ			
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$				η
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$		η	ξ	

Tabelle 7.2: Quadratische Verschiebungsmodes mit Verzerrungsverteilung

8 NUMERISCHE BEISPIELE DER VIERKNOTTIGEN SCHEIBENELEMENTE

Folgende Elemente wurden verglichen:

- Q4: 2x2 – integriertes Verschiebungsmodell
- ANS-5: "Assumed natural strain" Modell (Kapitel 4)
- HR-A: Hellinger – Reissner Modell (Kapitel 5); entspricht dem Element von Pian und Sumihara [Pian, 84].
- HR-C: Hellinger – Reissner Modell (Kapitel 5)
- HuW-C: Hu – Washizu Modell (Kapitel 6)
- HuW-D: Hu – Washizu Modell (Kapitel 6)
- PAR-A: Modell mit parametrisiertem Funktional (Kapitel 6)
- EAS-4: "Enhanced assumed strain" Modell (Kapitel 7)
- EAS-5: "Enhanced assumed strain" Modell (Kapitel 7)
- Q6: Inkompatibles Verschiebungsmodell [Wilson, 73]
- Qm6: Modifiziertes inkompatibles Verschiebungsmodell [Taylor, 76]
- Qcs6: Element mit speziellen Verzerrungs-, Spannungs- und inkompatiblen Verschiebungsansätzen [Chen, 87]
- 5 β -II: Element mit Spannungs- und inkompatiblen Verschiebungsansätzen [Pian, 88]

Aufgrund der übereinstimmenden Ergebnisse in den Verschiebungen sei vorab auf die folgenden Identitäten hingewiesen:

$$\text{HR-C} \Leftrightarrow \text{Q4}$$

$$\text{HuW-D} \Leftrightarrow \text{HR-A}$$

$$\text{EAS-4} \Leftrightarrow \text{Qm6}$$

$$\text{Qcs6} \Leftrightarrow \text{Qm6}$$

8.1 Patch Test

Mit Hilfe des Patch Tests [Taylor, 86] soll überprüft werden, ob die Elemente bei beliebig verzerrter Geometrie einen Zustand konstanter Spannungen und Verzerrungen darstellen können. Gewählt wurde das in Bild 8.1 gezeigte Elementnetz. Die Randbedingungen sind so gewählt, daß lediglich die Starrkörperverschiebungen behindert sind. Als Belastung wurden die in Bild 8.2 gezeigten Zustände aufgebracht.

Der Patch Test gilt als bestanden, wenn die Spannungen und Verschiebungen in jedem Punkt der fünf Elemente exakt sind. Mit Ausnahme des Elements Q6 passieren alle im vorigen Abschnitt genannten Elemente den Patch Test.

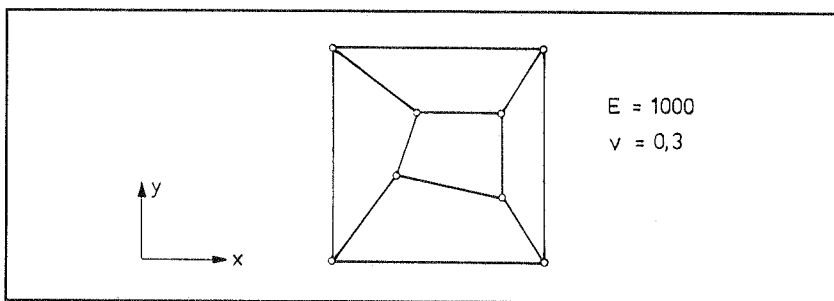


Bild 8.1: Geometrie des Patch Test

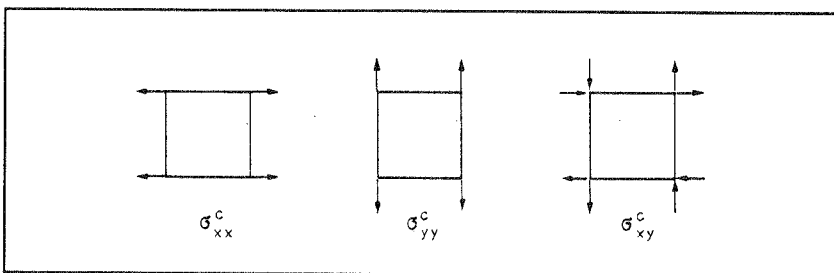


Bild 8.2: Lastfälle des Scheiben - Patch Tests

Anmerkung: Da die in Bild 8.1 gewählte Elementkonfiguration nicht alle ZEM eines Elements aufdecken kann, ist für eine vollständige Elementüberprüfung eine zusätzliche Eigenwertanalyse (oder ein Ein-Element Test mit allgemeiner Belastung) erforderlich. Alle in diesem Kapitel benutzten vierknotigen Scheibenelemente passieren den Eigenwerttest, das heißt, sie enthalten keine ZEM.

8.2 Biegebeanspruchter Kragarm

Anhand des in Bild 8.3 gezeigten Kragarms sollen die in den vorigen Kapiteln diskutierten vierknotigen Scheibenmodelle verglichen werden. Zur Untersuchung des Effekts der Elementverzerrung wurden drei verschiedene Elementnetze gewählt. In Tabelle 8.1 ist jeweils die Durchbiegung der Kragarmspitze, normiert zur FE-Solllösung, angegeben.

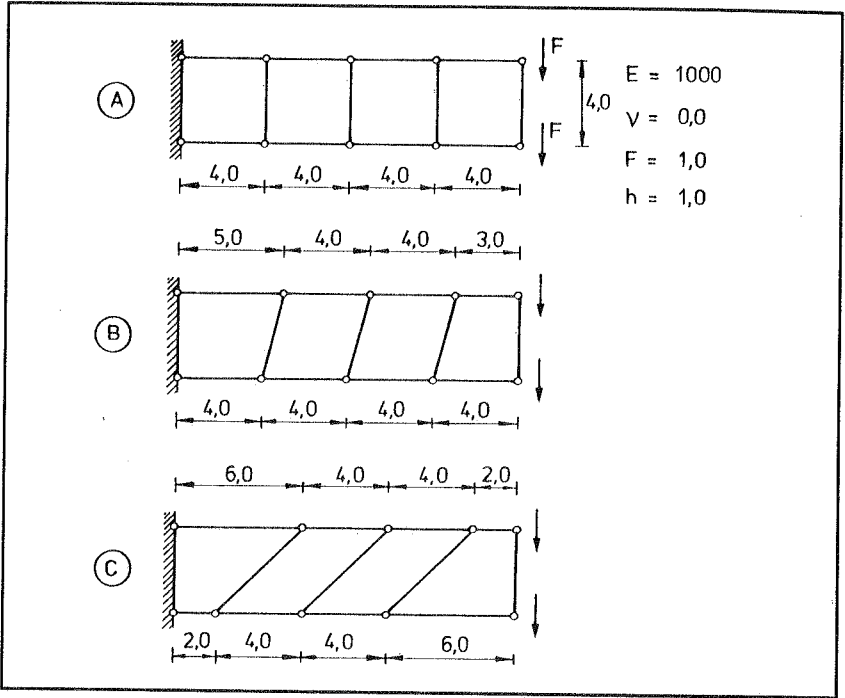


Bild 8.3: Kragarm mit unverzerrtem und verzerrtem Elementnetz

	Q4	ANS-5	HR-A	HuW-C	HuW-D	PAR-A	Q6	Qm6	EAS-5
A	0,68	1,00	1,00	1,00	1,00	1,97	1,00	1,00	1,00
B	0,60	0,93	0,98	0,96	0,98	1,89	0,98	0,98	0,98
C	0,35	0,66	0,88	0,53	0,88	1,63	0,96	0,87	0,88

Tabelle 8.1: Normierte Durchbiegung der Kragarmspitze (Oberkante); Solllösung = 1,0.

In der ersten Spalte sind die Ergebnisse des herkömmlichen Verschiebungselements Q4 eingetragen. Zu erkennen ist das zu steife Verhalten, das sich mit zunehmender Elementverzerrung verschlimmert.

Für Rechteckelemente bringt das Element ANS-5 die gewünschten Ergebnisse. Vergleicht man aber die Verformungen unter Elementverzerrung mit denen des Elements HR-A, so sieht man, daß aufgrund der nicht vollständig linearen Verzerrungsverteilung bei ANS-5 Versteifungseffekte auftreten. (Der Fehler würde sich mit zunehmendem Querdehneffekt noch verschlimmern).

Da das Element HuW-C ebenfalls eine fünfparametrische Verzerrungsannahme besitzt, kann dort ein ähnlicher Versteifungseffekt beobachtet werden. Eine Durchbiegung von nur 53% für das Netz C unterstreicht die Notwendigkeit eines vollständig linearen Verzerrungsansatzes.

Das Element HuW-D besitzt solch einen vollständigen, neunparametrischen Verzerrungsansatz, was zusammen mit dem fünfparametrischen Spannungsansatz zu den Ergebnissen des HR-A Elements führt (siehe "limitation principle" der Hu-Washizu Modelle in [Stolarski, 85]).

In der sechsten Spalte ist das Element PAR-A der alternativen Dreifeld-Approximation angegeben. Die Ergebnisse zeigen einen Biegemodus mit nur halber Steifigkeit (aufgrund des Schubs sind die Ergebnisse etwas unterhalb von 2,0), was wie in Kapitel 6.4.3 diskutiert, an der zu niedrigwertigen Verzerrungsannahme liegt.

Bei der Betrachtung der Verschiebungen der letzten drei Elemente fallen die hervorragenden Ergebnisse des Q6-Elements auf, während die Elemente Qm6 (identisch mit EAS-4) und EAS-5 ähnlich wie HR-A abschneiden. Eine genaue Differenzierung dieser fünf Elemente soll im nächsten Beispiel erfolgen.

8.3 Der Einfluß der Netzverzerrung

Ein auf reine Biegung beanspruchter Kragarm wird mit zwei Elementen idealisiert, wobei die Elemente schrittweise verzerrt werden (Bild 8.4). Der Grad der geometrischen Verzerrung wird durch den Parameter α gesteuert. Aufgetragen ist die Verschiebung v der oberen Kragarmspitze, die bezüglich der Solllösung normiert wurde.

Auffallend ist wie im vorigen Beispiel das hervorragende Abschneiden des Q6-Elements. Es sei jedoch daran erinnert, daß das Element Q6 den Patch Test nicht passiert und somit keine exakten konstanten Moden besitzt.

Von den Elementen, die den Patch Test passieren, zeigen HR-A und 5 β -II die besten Ergebnisse. (Die beiden Elemente bringen bei diesem Beispiel die gleichen Ergebnisse,

da zwei Elementseiten parallel sind; in allgemeiner Lage schneidet 5β -II geringfügig besser ab, was den vermehrten Aufwand aber nicht rechtfertigt).

Ganz ähnlich liegt das Element EAS-5 sowie die identischen Elemente EAS-4, Qm6 und Qcs6. Zum Vergleich sind die Ergebnisse des Verschiebungsmodells Q4 mit selektiv reduzierter und voller Integration angegeben.

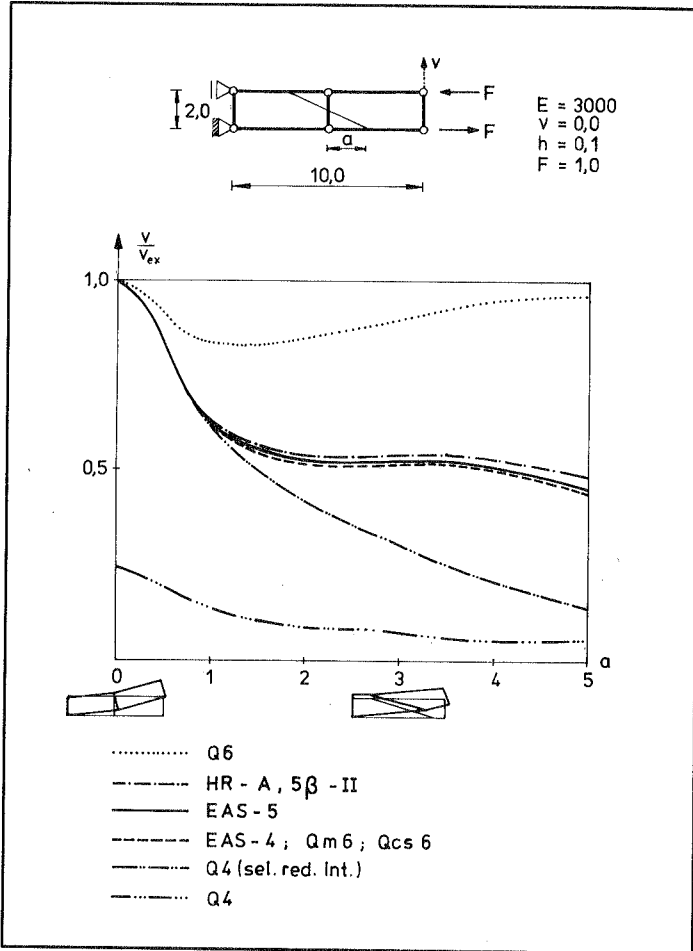


Bild 8.4: Einfluss der Netzverzerrung verschiedener Scheibenelemente

8.4 Schubbeanspruchte Ringscheibe

Es soll eine am Innenrand gelagerte Ringscheibe berechnet werden, die durch die in Umfangsrichtung wirkende Gleichlast f belastet ist (Bild 8.5).

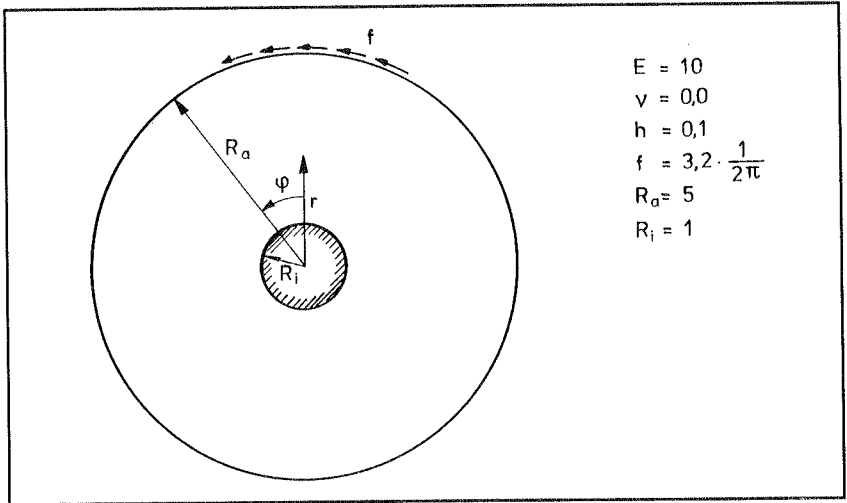


Bild 8.5: Schubbeanspruchte Ringscheibe

Die Schwierigkeit für die Elemente besteht darin, daß sich die Deformationen der Scheibe allein aus Schubverformungen ergeben, während die Normalspannungen in Radius- und Umfangsrichtung Null sind.

In Tabelle 8.2 sind die zur Vergleichslösung 61,26 normierten Außenrandverschiebungen für 12 verschiedene Diskretisierungen aufgelistet, so daß der Einfluß der Verfeinerung in Umfangs- beziehungsweise Radiusrichtung getrennt studiert werden kann.

Aufgrund der verzerrten Elementgeometrie treten bei allen Elementen oszillierende Normalspannungen in Radiusrichtung auf. In Bild 8.6 sind zum Beispiel die Spannungen des Elements HR-A für die elfte Diskretisierung dargestellt. Die Ergebnisse der Verschiebungen zeigen jedoch, daß auch bei sehr schlanken Elementen kein Versteifen (im Sinne eines "locking") infolge dieser Normalspannungsozillationen auftritt.

Das äußerst gute Verhalten des Elements HR-A zeigt sich auch darin, daß eine Netzverfeinerung in Radiusrichtung die Verschiebungen nicht mehr verbessert.

Erwähnenswert sind noch die bei Verfeinerung in Umfangsrichtung schlechter werdenden Ergebnisse des Elements Q6, was auf die nicht exakten konstanten Modes zurückzuführen ist.

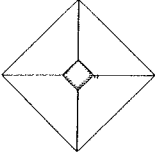
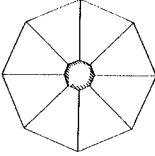
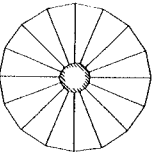
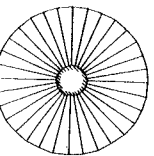
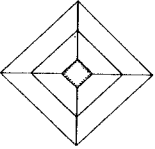
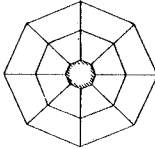
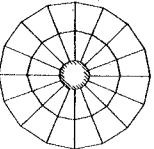
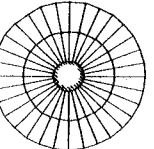
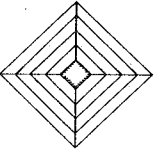
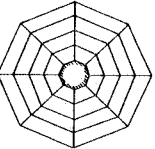
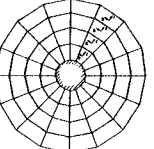
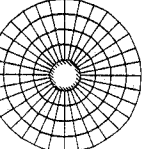
				
Q4	0,8009	0,8471	0,8497	0,8510
HR-A	0,9403	0,9944	0,9974	0,9988
EAS-4	0,8791	0,9769	0,9930	0,9977
Q6	0,8760	0,8686	0,8551	0,8524
				
Q4	0,8663	0,9161	0,9189	0,9202
HR-A	0,9403	0,9944	0,9974	0,9988
EAS-4	0,9091	0,9857	0,9953	0,9982
Q6	0,9474	0,9395	0,9248	0,9217
				
Q4	0,9108	0,9632	0,9662	0,9684
HR-A	0,9403	0,9944	0,9974	0,9988
EAS-4	0,9282	0,9911	0,9966	0,9984
Q6	0,9962	0,9879	0,9724	0,9692

Tabelle 8.2: Normierte Verschiebungen des Außenrandes der Ringscheibe für verschiedene Diskretisierungen (Vergleichslösung einer konvergierten FE-Lösung: 61,26)

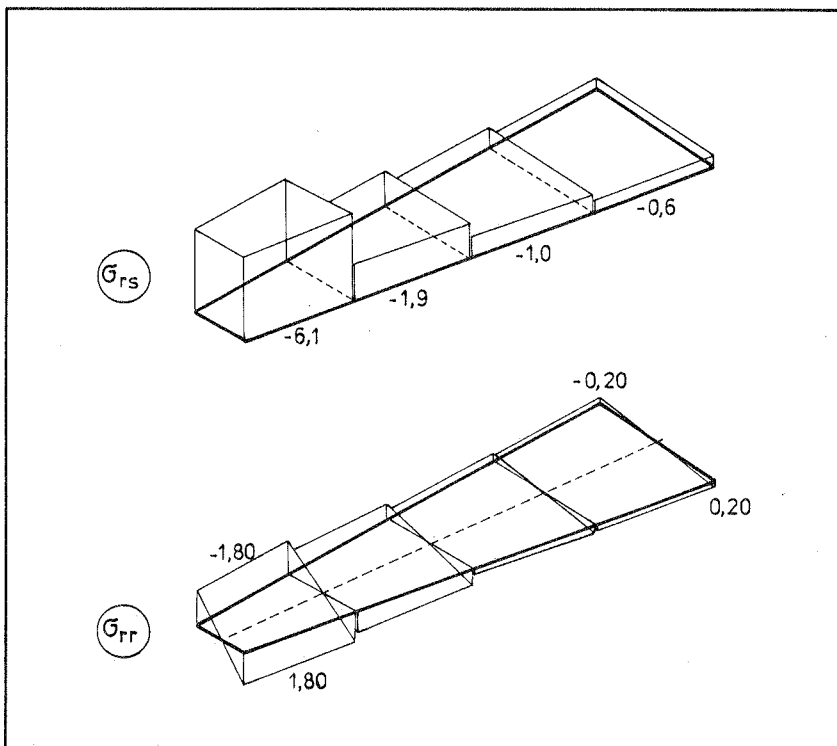


Bild 8.6: Spannungen des Elements HR-A für die elfte Diskretisierung (4 Elemente in Radiusrichtung, 16 Elemente in Umfangsrichtung)

8.5 Cooks Scheibenproblem

Ein beliebter Test für Scheibenelemente ist der in Bild 8.7 gezeigte Kragarm. Aufgrund der trapezförmigen Geometrie sind die verzerrten Elemente einem komplizierten Spannungszustand unterworfen.

Die in Tabelle 8.3 aufgetragenen normierten Verschiebungen der Kragarmspitze zeigen das gute Verhalten der Elemente HR-A sowie EAS-4 und EAS-5. Das praktisch identische Verhalten der beiden EAS-Elemente macht deutlich, daß sich der Aufwand für den fünften Mode von EAS-5 nicht lohnt.

Netz	Q4	HR-A	EAS-4	EAS-5	9kn (2x2)
2x2	0,4952	0,8833	0,8804	0,8804	1,0109
4x4	0,7654	0,9628	0,9624	0,9624	1,0033
8x8	0,9235	0,9908	0,9904	0,9904	1,0004

Tabelle 8.3: Normierte Verschiebungen der Cook – Scheibe
(Vergleichslösung einer konvergierten FE-Lösung: 23,91)

In Bild 8.8 sind für das 4x4 – Netz die Spannungen σ_{rr} entlang der Achse A--A' (siehe Bild 8.7) aufgetragen. Als Vergleichslösung können die Ergebnisse des neunknotigen unterintegrierten Verschiebungselements dienen. Benutzt wurde hierfür ein Netz mit 64 Elementen; die Spannungen des Neunknotenelements wurden an den 2x2 – Gaußpunkten berechnet und mit einer Ausgleichsrechnung geglättet. Die Spannungen des Elements EAS-4 wurden am Elementmittelpunkt berechnet, so daß sich für diese Elemente ein abschnittsweise konstanter Verlauf ergibt. Herauszustreichen sind die – trotz grober und verzerrter Elementgeometrie – exzellenten Ergebnisse des HR-A Elements.

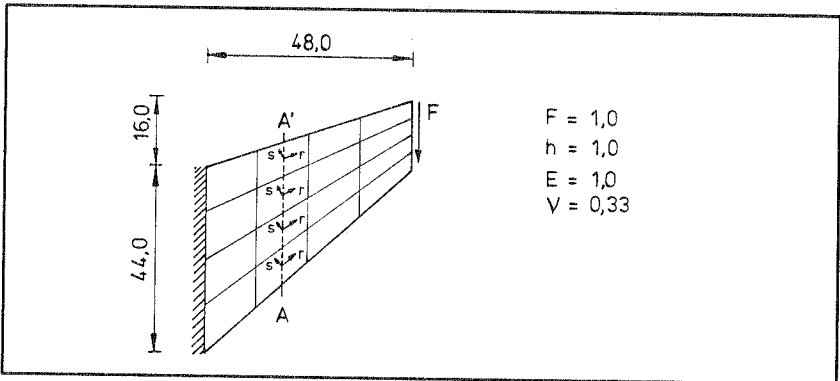


Bild 8.7: Cooks Kragarm

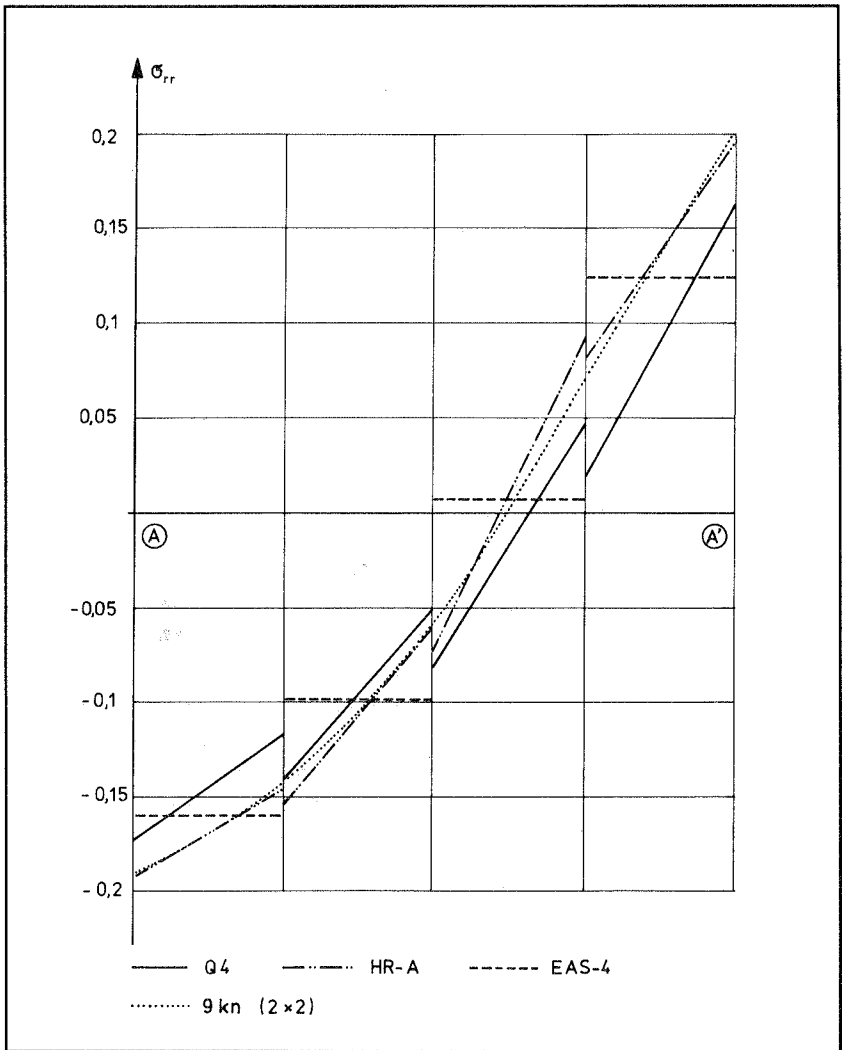


Bild 8.8: Spannungsberechnung am Cook – Kragträger

9 ZWISCHENBILANZ UND ÜBERLEITUNG ZU SCHALENELEMENTEN

In den Kapiteln 4 bis 7 wurden das ANS – Konzept, die hybrid – gemischten Spannungs – Verschiebungs – und Dreifeld – Approximationen sowie das EAS – Konzept vorgestellt. Werden die Modelle mit korrekten Ansätzen versehen, so ergeben sie stets eine Verbesserung der reinen Verschiebungsmodelle. Neben den Zusammenhängen sollten aber auch die Nachteile der verschiedenen Methoden aufgezeigt werden.

Beim Übergang zu den Schalenelementen stellt sich die Frage, welche Konzepte für diese Elemente am geeignetsten sind, wobei für Membran-, Biege- und Querschubanteil durchaus verschiedene Methoden eingesetzt werden können.

Das ANS – Konzept hat den großen Vorteil, daß durch die direkte Verknüpfung der Verzerrungsfelder mit den Verschiebungsableitungen keine zusätzlichen Unbekannten notwendig sind. Für das vierknotige Scheibenelement hat sich jedoch gezeigt, daß aufgrund des Querdehneffekts die Verzerrungsansätze nicht auf ein Minimum reduziert werden können, sondern vollständig linear anzusetzen sind. Da beim Querschubanteil einer Schale (oder Platte) aber kein Querdehneffekt auftritt, ist die ANS – Methode für diesen Anteil prädestiniert.

Die besten Resultate für die in Kapitel 8 getesteten Scheibenelemente brachte das Hellinger – Reissner Element HR –A. Der gegenüber dem Verschiebungsmodell zusätzliche Aufwand kann durch die Formulierung nach (5.30) gering gehalten werden, so daß dieses Konzept für den Membran – oder Biegeanteil attraktiv scheint. Ein kleiner Nachteil ist, daß die Methode auf einem komplementären Energieprinzip basiert, was die Algorithmen bei plastischen Werkstoffen äußerst kompliziert macht.

Als Alternative für den Membran – und Biegeanteil soll deshalb das EAS – Konzept studiert werden. Inwieweit dieses Konzept auch auf den Querkraftanteil angewendet werden kann, soll die Analyse eines Plattenelements aufzeigen. Nicht angewendet werden, vor allem aufgrund des zu hohen Aufwands, die diskutierten Dreifeld – Approximationen.

10 DIE SCHALENFORMULIERUNG

10.1 Einführung

Aus den Möglichkeiten, allgemeine Schalenstrukturen durch Finite Elemente darzustellen, haben sich in den letzten Jahren zwei Elementtypen herauskristallisiert:

1. Auf einer Schalentheorie basierende Elemente
2. Dreidimensional degenerierte Elemente

In dieser Arbeit sollen die dreidimensional degenerierten Elemente [Ahmad, 70] verwendet werden. Analog den Plattentheorien von [Reissner, 45] und [Mindlin, 51] sind in diesen Elementen die Querschubverzerrungen berücksichtigt. Dies ermöglicht C^0 – kontinuierliche Ansätze für die Verschiebungen und Rotationen.

Die rein verschiebungsformulierten Elemente leiden jedoch unter Versteifungseffekten, dem sogenannten "locking". Aus diesem Grund sollen die modifizierten Formulierungen aus Kapitel 4 bis 7 auf die Platten- und Schalenelemente angewendet werden. Da die Platte als Sonderfall der Schale angesehen werden kann, wird keine gesonderte Plattentheorie behandelt. Verwendet wird eine Schalenformulierung mit Spannungsergebnissen.

Die Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehungen werden für ein elementbezogenes, krummliniges (natürliches) sowie für ein orthogonales Koordinatensystem aufgestellt. Bei der Verbesserung des Querschubanteils einer Schale (oder Platte) wird das lokal-krummlinige Koordinatensystem benutzt, das lokal – orthogonale System dient bei der Approximation des Membran- und Biegeanteils als Bezugssystem.

10.2 Das degenerierte Schalenmodell

Die kinematische Beschreibung der Schale basiert auf dem in [Ahmad, 70] entwickelten Konzept. Ausgehend von einem dreidimensionalen Körper werden die dreidimensionalen Gleichungen durch die beiden folgenden Annahmen degeneriert:

1. Die auf einer Mittelfläche senkrecht stehende Normale ist auch nach der Deformation gerade und bleibt gleichlang.
2. Spannungen senkrecht zur Mittelfläche werden zu Null gesetzt, was die konstitutiven Gleichungen vereinfacht.

Die beiden Annahmen⁵ führen zum degenerierten Schalenmodell. Vorteil dieser Methode ist, daß man zum einen nicht auf analytisch beschreibbare Schalenformen beschränkt ist, und zum zweiten, daß komplizierte mathematische Formen wie kovariante

Ableitungen mit Christoffelsymbolen, wie sie das klassische Vorgehen üblicherweise erfordert, nicht explizit eingeführt werden. Mit den obigen Annahmen kann die formelmäßige Beschreibung der Schale erfolgen.

10.2.1 Schalengeometrie

Mit einer Referenzfläche, die durch zwei Koordinaten beschrieben wird, und einer in Richtung des Direktors \mathbf{p} verlaufenden Dickenkoordinate ζ kann ein beliebiger Schalenelement (Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}$) wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{\zeta}{2} \mathbf{h} \mathbf{p} \quad (10.1)$$

\mathbf{x} ist der Ortsvektor der Referenzfläche, \mathbf{p} ein normierter Vektor, ζ läuft von -1 bis $+1$ und h ist die Schalendicke (siehe Bild 10.1).

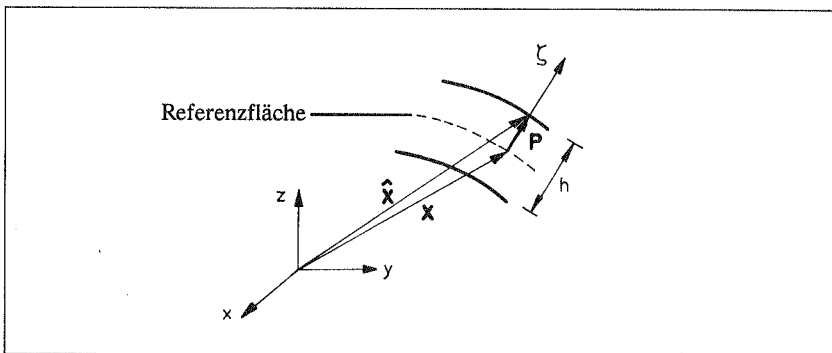


Bild 10.1: Schalengeometrie (zweidimensional)

Zur Beschreibung der Richtung des Direktors \mathbf{p} werden die in [Ramm, 76] verwendeten Richtungscosinus (Bild 10.2a) benutzt. (10.1) ergibt sich somit ausführlich zu

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} h \begin{bmatrix} \cos \psi_1 \\ \cos \psi_2 \\ \cos \psi_3 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Da zwischen den drei Richtungswinkeln noch eine Abhängigkeit besteht, wurden in [Ramm, 76] die Winkel φ und ψ_1 als Variable gewählt. Der neu eingeführte Winkel φ ist der Winkel zwischen der Projektion des Direktors in die y - z -Ebene und der y -Achse (Bild 10.2b).

Die fünf geometrischen Variable sind damit $[x, y, z, \varphi, \psi]$ (zur Vereinfachung wurde ψ_1 als ψ geschrieben) und (10.2) wird zu

5. Bei der Behandlung von Problemen mit großen Verzerrungen muß eine dritte Annahme getroffen werden, nämlich die, daß zumindest die Querschubverzerrungen klein bleiben.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{\xi}{2} h \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

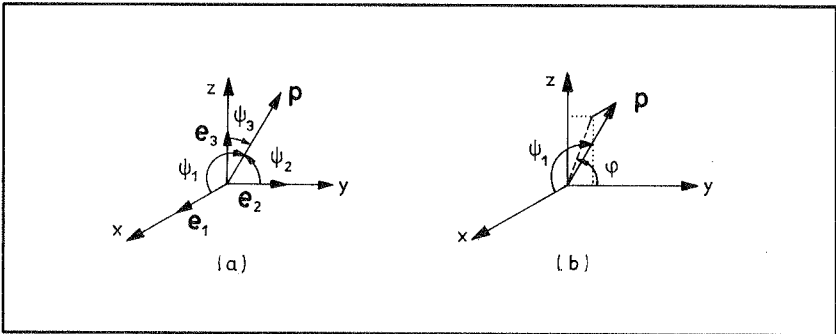


Bild 10.2: Beschreibung des Direktors \mathbf{p}

10.2.2 Elementgeometrie

Für die diskretisierte Form von (10.3) ergibt sich

$$\hat{\mathbf{x}}_h = \sum_K \mathbf{N}^K \mathbf{x}^K + \frac{\xi}{2} \sum_K \mathbf{N}^K h^K \mathbf{p}^K \quad (10.4)$$

wobei

$$\mathbf{p}^K = \begin{bmatrix} \cos \psi^K \\ \sin \psi^K \cos \varphi^K \\ \sin \psi^K \sin \varphi^K \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

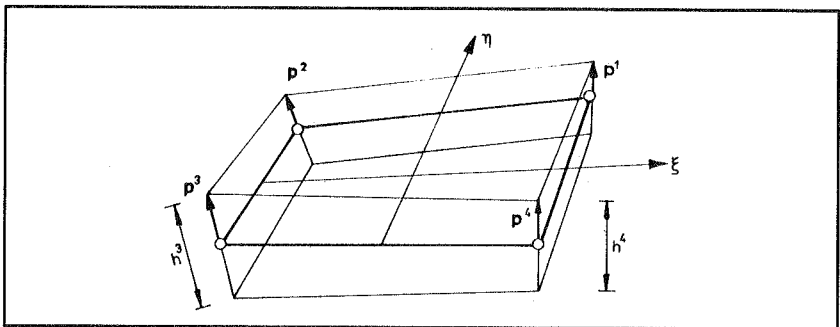


Bild 10.3: Vierknotiges Schalenelement

$N_{(\xi,\eta)}^K$ sind die zweidimensionalen Formfunktionen. x^K , h^K und p^K sind die jeweiligen Werte am Knoten K. Ein typisches vierknotiges Element ist in Bild 10.3 dargestellt.

10.2.3 Kinematik

Im Gegensatz zu einer Formulierung nach der Flächentheorie werden die Gleichungen für die Verschiebungen ebenfalls in einem globalen orthogonalen Koordinatensystem beschrieben. Die Verschiebungen eines beliebigen Schalenpunkts werden mit den Verschiebungen der Mittelfläche und den Winkeländerungen des Direktors erfaßt:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \frac{\xi}{2} h \Delta \mathbf{p} \quad (10.6)$$

beziehungsweise

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \sum_K N^K \mathbf{u}^K + \frac{\xi}{2} \sum_K N^K h^K (\mathbf{p}^{K^{neu}} - \mathbf{p}^{K^{alt}}) \quad (10.7)$$

Zur Beschreibung der Winkeländerungen werden die Änderungen der geometrischen Variable φ und ψ , also $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ benutzt (Bild 10.4).

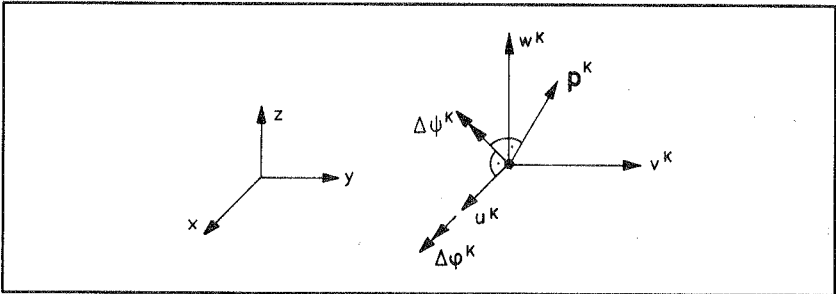


Bild 10.4: Verschiebungsfreiheitsgrade eines Knotens K

Werden die trigonometrischen Funktionen in (10.5) linearisiert, so kann analog zu [Ramm, 76] geschrieben werden:

$$\mathbf{p}^{K^{neu}} - \mathbf{p}^{K^{alt}} = \Delta \mathbf{p}^K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{bmatrix}^K \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{bmatrix}^K \quad (10.8)$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}_h = \sum_K N^K \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^K + \frac{\xi}{2} h \sum_K N^K h^K \mathbf{F}^K \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{bmatrix}^K \quad (10.9)$$

Anmerkung 1: Die gewählte Approximation zur Beschreibung des Direktors greift den Sonderfall heraus, daß die Rotationen klein sind. Die Formulierung für beliebig große Rotationen ist in [Ramm, 76] angegeben. Alternativ können die Rotationsfreiheitsgrade als verallgemeinerte Rotationen (Rodriguez – Euler) gewählt werden, wodurch beliebig große Rotationen singularitätenfrei dargestellt werden können [Büchter, 90].

Anmerkung 2: Daß der Direktor nach der Deformation nicht mehr die Länge 1 besitzt, kann für lineare Rechnungen vernachlässigt werden. Für nichtlineare Berechnungen und große Verzerrungen siehe [Simo, 89/1].

Gleichung (10.9) kann mit Hilfe von modifizierten Formfunktionen $\tilde{\mathbf{N}}^K$ abgekürzt geschrieben werden als

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \sum_K \tilde{\mathbf{N}}_{(\xi, \eta, \zeta)}^K \mathbf{d}^K \quad (10.10)$$

Die Verzerrungen ergeben sich zu

$$\boldsymbol{\epsilon}_h = \sum_K \mathbf{B}^K \mathbf{d}^K \quad (10.11)$$

Bezüglich welchem Koordinatensystem die Verzerrungskomponenten definiert werden, soll im nächsten Kapitel diskutiert werden.

10.2.4 Koordinatensysteme

Zwar werden die Geometrie und die Verschiebungen der Schale auf ein globales Koordinatensystem bezogen, doch für die Verzerrungs- und Spannungskomponenten ist es vorteilhafter, sie bezüglich eines lokalen, elementbezogenen Koordinatensystems zu definieren. Es werden zwei Koordinatensysteme diskutiert, wobei je nach Finite Element Modell das eine oder andere benutzt werden muß.

1. Krummliniges ξ - η -System

Für Verschiebungsmodelle und ANS - Modelle eignet sich ein konvexes, natürliches ξ - η Koordinatensystem, definiert durch die (im allgemeinen Fall nicht aufeinander senkrecht stehenden) Basisvektoren \mathbf{e}_ξ und \mathbf{e}_η . Zur Abspaltung des Querschubanteils muß allerdings die dritte Richtung senkrecht zu den beiden Basisvektoren sein:

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|} \quad (10.12)$$

2. Lokal-orthogonales r-s-System

Sollen spezielle Ansätze für Membran- und Biegeanteile gemacht werden

(zum Beispiel mit Hellinger–Reissner – oder EAS – Modellen), so ist ein orthogonales Koordinatensystem auch in der Tangentenebene notwendig. Unter Zuhilfenahme von (10.12) werden die Basisvektoren folgendermaßen festgelegt:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\xi \quad (10.13)$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_r \quad (10.14)$$

Angemerkt sei, daß die Orientierung der aufeinander senkrecht stehenden Achsen r und s in der Ebene beliebig ist. Der Einfachheit halber wurde \mathbf{e}_r identisch zu \mathbf{e}_ξ gewählt.

Zur eindeutigen Identifikation sollen für die Koordinatensysteme die in Tabelle 10.1 zusammengestellten Indizes benutzt werden.

System	Variable	Indizes
Global	$x \ y \ z$ oder $x_1 \ x_2 \ x_3$	$i, j, k, l = 1, 2, 3$
Natürlich	$\xi \ \eta \ t$ oder $\xi^1 \ \xi^2 \ t$	$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$
Lokal-orthogonal	$r \ s \ t$ oder $r^1 \ r^2 \ t$	$a, b, c, d = 1, 2$

Tabelle 10.1: Koordinatensysteme

10.3 Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehung bezüglich des krummlinigen Koordinatensystems

Die Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehung soll zunächst bezüglich des krummlinigen, natürlichen ξ - η -Koordinatensystems aufgestellt werden. Spaltet man die Verzerrungsanteile auf in einen Membrananteil (ϵ_{11} , ϵ_{22} , $2\epsilon_{12}$) einen Biegeanteil (κ_{11} , κ_{22} , $2\kappa_{12}$) und einen Querschubanteil (γ_1 , γ_2) so lauten die linearisierten Gleichungen [Matzenmiller, 88] [Simo, 89/1]:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} \right) \quad (10.15)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial \xi^\alpha} \right) \quad (10.16)$$

$$\gamma_\alpha = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \Delta \mathbf{p} \quad (10.17)$$

Dabei ist $\mathbf{u} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]^T$ der in (10.6) eingeführte Vektor der Mittelflächenverschiebung

und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^a} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \xi^a} & \frac{\partial y}{\partial \xi^a} & \frac{\partial z}{\partial \xi^a} \end{array} \right]$ sind die beiden Basisvektoren des ξ - η -Systems. Für die

Unbekannten $[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]^T$ und $[\Delta\varphi \ \Delta\psi]^T$ ($[\Delta\varphi \ \Delta\psi]$ ist in $\Delta\mathbf{p}$ enthalten, siehe (10.8)) ergeben sich, wiederum getrennt nach Membran-, Biege- und Querschubanteile, folgende Operatormatrizen:

$$\mathbf{B}_m^D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{array} \right] \quad (10.18)$$

$$\mathbf{B}_{bm}^D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{array} \right] \quad \mathbf{B}_{bb}^D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{array} \right] \mathbf{F} \quad (10.19)$$

$$\mathbf{B}_{sm}^D = \left[\begin{array}{c} \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \mathbf{p}^T \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right] \quad \mathbf{B}_{sb}^D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \end{array} \right] \mathbf{F} \quad (10.20)$$

10.4 Werkstoffgesetz bezüglich des krummlinigen Koordinatensystems

Die kontravarianten Komponenten des Werkstoffensors für isotropes Material erhält man über [Malvern, 69]:

$$C^{a\beta\gamma\delta} = \lambda g^{a\beta} g^{\gamma\delta} + \mu (g^{a\gamma} g^{\beta\delta} + g^{a\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (10.21)$$

λ und μ sind die Lamé - Koeffizienten und $g^{\alpha\beta}$ berechnet sich zu

$$g^{a\beta} = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (a, \beta, i, j = 1, 2, 3) \quad (10.22)$$

Aufgrund bestehender Symmetrien kann der Werkstofftensor als 6x6 - Matrix geschrieben werden; mit Hilfe der "ebenen Spannungshypothese" wird diese Matrix auf die Größe 5x5 reduziert.

Werden die Komponenten dieser 5x5 - Matrix mit C_{mn} bezeichnet, so ergeben sich, aufgespalten in Membran-, Biege- und Querschubanteil, voll besetzte Matrizen:

$$C_m = h \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

$$C_m = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

$$C_s = h \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

10.5 Verzerrungs – Verschiebungs – Beziehung bezüglich des orthogonalen Koordinatensystems

Soll das Tragverhalten auch in der Ebene in Dehnungs- und Schubverzerrungsanteile getrennt werden, so muß ein lokal – orthogonales Koordinatensystem als Bezugssystem gewählt werden. Nur mit dieser Maßnahme sind verschiedenartige Ansätze für Membrandehnungen und –schubverzerrungen (beziehungsweise Normalspannungen und Schubspannungen) möglich.

An die Stelle der im vorigen Abschnitt benutzten Basisvektoren $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}$ (\mathbf{e}_ξ und \mathbf{e}_η) treten nun die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}$ und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}$ (\mathbf{e}_r und \mathbf{e}_s). Die Transformation für partielle Differentiation ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial r^a}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial r^a} \quad (10.26)$$

Die Komponenten der Transformationsmatrix sind gegeben durch

$$A_{aa} = \mathbf{e}_{\xi^\alpha} \cdot \mathbf{e}_{r^a} \quad (10.27)$$

oder ausführlich

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10.28)$$

Die Verzerrungen im orthogonalen Koordinatensystem sind

$$\epsilon_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^b} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^a} \right) \quad (10.29)$$

$$\kappa_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial r^a} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r^b} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial r^b} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r^a} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^a} \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial r^b} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^b} \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial r^a} \right) \quad (10.30)$$

$$\gamma_a = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial r^a} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^a} \Delta \mathbf{p} \quad (10.31)$$

Da es vorteilhafter ist, den Querschubanteil mit der ANS - Methode über (10.17) zu behandeln, sollen lediglich die Operatormatrizen für den Membran- und Biegeanteil angegeben werden:

$$\mathbf{B}_m^D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

$$\mathbf{B}_{bm}^D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{bb}^D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (10.33)$$

10.6 Werkstoffgesetz bezüglich des orthogonalen Koordinatensystems

Aufgrund des orthogonalen Bezugssystems sind die Komponenten C_{13}, C_{23} beziehungsweise C_{31} und C_{32} in (10.23) und (10.24) Null und das Werkstoffgesetz hat die einfache Form

$$\mathbf{C}_m = \frac{E h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

$$\mathbf{C}_b = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

11 VIERKNOTIGE SCHALENELEMENTE

Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung von versteifungsfreien vierknotigen Schalenelementen. Vorteil der vierknotigen gegenüber höherwertigeren Elementen ist ihre Effizienz, die sich aus der 2×2 -Integration, der Verarbeitung von relativ kleinen Matrizen und einer geringen Bandbreite der Struktursteifigkeitsmatrix ergibt. Ähnlich attraktiv sind hier nur noch die biquadratischen, unterintegrierten und stabilisierten Schalenelemente [Belytschko, 89] [Rhiu, 87] [White, 90], für die ebenfalls eine 2×2 -Integration ausreicht.

Aufgrund der stets geraden Ränder ist das vierknotige Element jedoch maximal linear verzerrt, was positive Auswirkungen auf das Elementverhalten und die Handhabung beim Pre- und Postprocessing hat.

Durch die verschiedenen "locking"-Probleme kann das reine Verschiebungsmodell jedoch nicht benutzt werden, es müssen zusätzliche Ansätze für Spannungen oder Verzerrungen eingeführt werden. Zunächst soll der Querschubanteil, dann der Membran- und Biegeanteil diskutiert und verbessert werden.

11.1 Der Querschubanteil

Die Problematik des Querschubanteils einer Schale soll anhand eines verschiebungsformulierten Plattenelements aufgezeigt werden. Anschließend werden verbesserte Formulierungen eingeführt.

11.1.1 Das Verschiebungsmodell einer vierknotigen Platte

Plattenberechnungen mit schubweichen vierknotigen Verschiebungselementen ergeben generell zu steife beziehungsweise für dünne Strukturen oft unbrauchbare Ergebnisse. Der Grund für das schlechte Verhalten ist ein Versteifen bestimmter Deformationsformen, "shear-locking" genannt.

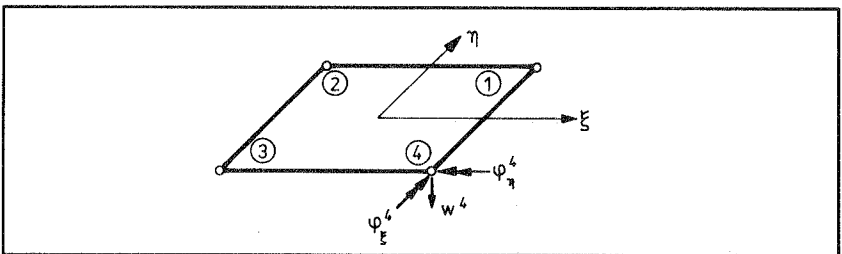


Bild 11.1: Verschiebungsfreiheitsgrade eines vierknotigen Plattenelements

Dieses Versteifungsproblem des Verschiebungsmodells soll zunächst anschaulich erläutert werden. Dazu wird wiederum eine tabellarische Untersuchung der Verzerrungen eines Plattenelements im parametrischen ξ - η -Raum durchgeführt. Das Verschiebungsfeld des in Bild 11.1 gezeigten Elements besteht aus der Querverschiebung w sowie den beiden Verdrehungen φ_ξ und φ_η .

Ausgehend von einer bilinearen Interpolation für alle drei Verschiebungskomponenten kann die Polynomverteilung der fünf Verzerrungsfelder berechnet werden (Tabelle 11.1). Da die 12 Spalten die 12 Verschiebungsmodes des Plattenelements darstellen, können die Verzerrungen eines jeden Modes überprüft werden.

w	1	ξ	η	$\xi\eta$	1	ξ	η	$\xi\eta$	1	ξ	η	$\xi\eta$
φ_ξ					1							
φ_η									1			
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \xi}$						1		η				
$\frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \eta}$										1		ξ
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \xi}$							1	ξ		1		η
$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \varphi_\xi$		1		η	-1	$-\xi$	$-\eta$	$-\xi\eta$				
$\frac{\partial w}{\partial \eta} - \varphi_\eta$			1	ξ					-1	$-\xi$	$-\eta$	$-\xi\eta$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)

Tabelle 11.1: Verzerrungsverteilung des vierknotigen Plattenelements

Mode (1) sowie die beiden Kombinationen (2) plus (5) und (3) plus (9) sind die drei Starrkörperverschiebungen, die gemäß der Tabelle keine Verzerrungen erzeugen. Überprüft man die konstanten Verzerrungsmodes, so läßt sich feststellen, daß die konstanten Querschubmodes ((2) minus (5) und (3) minus (9)) exakt sind, reine Biegemodes (Mode (6) und (11)) jedoch nicht möglich sind. Die konstanten Krümmungen in Spalte (6) und (11) sind mit linear veränderlichen Querschubverzerrungen gekoppelt, was bei dünner werdenden Elementen aufgrund der dann dominierenden Schubsteifigkeit zu einem totalen Versteifen führt. Da selbst im geometrisch unverzerrten Zustand keine konstanten Biegemodes ohne parasitäre Schubverzerrungen möglich sind, ist das Element unbrauchbar.

Es ist leicht einzusehen, daß die Modes (6) und (11) durch eine reduzierte Approximation der Querschubverzerrungen (oder -spannungen) zu reinen, exakten Biegemodes werden. Da solch eine Reduktion auch durch eine Unterintegration der Querschubanteile erreicht werden kann, erklärt sich somit der Erfolg dieser Vorgehensweise.

11.1.1.1 Selektiv-reduzierte Integration

Mit Hilfe der selektiv-reduzierten Integrationstechnik wurde in [Hughes, 77] das erste brauchbare vierknotige Plattenelement (SRI) entwickelt. Während die Biegeterme in

der herkömmlichen Weise integriert wurden, wurde für die Schubterme eine Einpunkt-Integration gewählt. Diese Unterintegration reduziert die Schubverzerrungen auf eine konstante Verteilung, wodurch das Element "locking"-frei wird.

Wie aus Tabelle 11.2 ersichtlich ist, entstehen aber zwei ZEM, nämlich Mode (4) sowie (7) minus (10). Diese ZEM treten bei linearen Berechnungen zwar selten auf, für nicht-lineare Berechnungen wie Beulanalysen ist das Element jedoch ungeeignet.

w	1	ξ	η	$\xi\eta$								
φ_ξ					1	ξ	η	$\xi\eta$				
φ_η									1	ξ	η	$\xi\eta$
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \xi}$						1		η				
$\frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \eta}$											1	ξ
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \xi}$							1	ξ		1		η
$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \varphi_\xi$		1			-1							
$\frac{\partial w}{\partial \eta} - \varphi_\eta$			1						-1			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)

Tabelle 11.2: Verzerrungsverteilung des SRI - Elements

11.1.2 Die ANS-Formulierung des Querschubanteils

Da der Raum der zulässigen Verzerrungsansätze

$$E_h = \{ \gamma_h \in [L_{2(\omega)}]^2 \} \quad (11.1)$$

diskontinuierliche Approximationen zuläßt, kann die aus den Verschiebungsableitungen herrührende bilineare Verteilung der Querschubverzerrungen auf eine konstant - lineare Verteilung reduziert werden, ohne daß Kinematiken entstehen (siehe Tabelle 11.3).

w	1	ξ	η	$\xi\eta$								
φ_ξ					1	ξ	η	$\xi\eta$				
φ_η									1	ξ	η	$\xi\eta$
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \xi}$						1		η				
$\frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \eta}$											1	ξ
$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_\eta}{\partial \xi}$							1			1		
$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \varphi_\xi$		1		η			$-\eta$					
$\frac{\partial w}{\partial \eta} - \varphi_\eta$			1	ξ					$-\xi$			
			(4)			(7)				(10)		

Tabelle 11.3: Reduzierte Verzerrungsverteilung des vierknotigen Plattenelements

Entsprechend den Konzepten von [Hughes, 81/1], [MacNeal, 82], [Dvorkin, 84], werden die Verzerrungsfelder mit "sampling-points" definiert, das heißt, an Kollokationspunkten direkt aus dem Verschiebungsfeld berechnet, was den großen Vorteil hat, daß keine zusätzlichen Unbekannten eingeführt werden müssen. Wichtig für das gute Verhalten des Elements ist, daß die Kollokationspunkte auf den Elementkanten liegen. (Bild 11.2). Es hat sich gezeigt, daß diese Lage auch für verzerrte Elementgeometrien reine Biegemodes ohne parasitäre Schubverzerrungen ermöglicht.

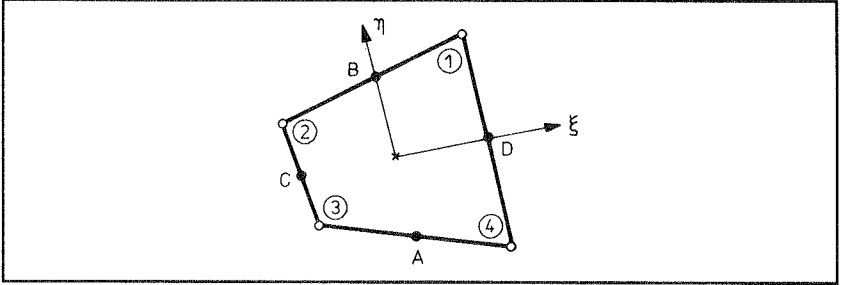


Bild 11.2: Kollokationspunkte des vierknotigen ANS – Modells

Die reduzierten Verzerrungsfelder $\bar{\gamma}_h$ sind [Dvorkin, 84]:

$$\bar{\gamma}_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta) \gamma_\xi^A + \frac{1}{2}(1+\eta) \gamma_\xi^B \quad (11.2)$$

$$\bar{\gamma}_\eta = \frac{1}{2}(1-\xi) \gamma_\eta^C + \frac{1}{2}(1+\xi) \gamma_\eta^D \quad (11.3)$$

Durch entsprechende Manipulationen der für den Querschub benötigten Matrizen \mathbf{B}_{sm} und \mathbf{B}_{sb} können (11.2) und (11.3) aus veränderten Operatormatrizen $\bar{\mathbf{B}}_{sm}$ und $\bar{\mathbf{B}}_{sb}$ gewonnen werden, ohne daß bei der numerischen Integration auf die vier Kollokationspunkte zurückgegriffen werden muß. Das Konzept soll im folgenden vorgestellt werden.

11.1.2.1 Die $\bar{\mathbf{B}}_{sb}$ – Matrix des ANS – Modells

Die ursprüngliche Matrix \mathbf{B}_{sb} des reinen Verschiebungsmodells, die sich durch Einsetzen der Formfunktionen aus (10.20) ergibt, lautet:

$$\mathbf{B}_{sb} = \begin{bmatrix} N^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \mathbf{F}^1 & N^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \mathbf{F}^2 & N^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \mathbf{F}^3 & N^4 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \mathbf{F}^4 \\ N^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \mathbf{F}^1 & N^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \mathbf{F}^2 & N^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \mathbf{F}^3 & N^4 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \mathbf{F}^4 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Wie sich die acht Terme aufgrund des reduzierten Verzerrungsansatzes (11.2) und (11.3) verändern, soll exemplarisch für den ersten Term

$$\mathbf{B}_{\text{sb}_{11}} = N^1 \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi} \mathbf{F}^1 \quad (11.5)$$

gezeigt werden. Nach (11.2) ergibt sich der neue Term aus den zu interpolierenden Termen, die an den Punkten A und B aufgestellt werden:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}_{11}} = \frac{1}{2}(1-\eta)N^1|_A \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} |_A \mathbf{F}^1 + \frac{1}{2}(1+\eta)N^1|_B \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} |_B \mathbf{F}^1 \quad (11.6)$$

Wegen

$$N^1|_A = 0 \quad (11.7)$$

$$N^1|_B = \frac{1}{2} \quad (11.8)$$

wird (11.6) zu

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}_{11}} = \frac{1}{4}(1+\eta) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} |_B \mathbf{F}^1 \quad (11.9)$$

Benutzt man

$$N^K|_{\xi=0} = \left| \frac{\partial N^K}{\partial \xi} \right| \quad (11.10)$$

(siehe Tabelle 11.4), so ergibt sich (11.9) zu

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}_{11}} = \left| \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} |_B \mathbf{F}^1 = \left| \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^B}{\partial \xi} \mathbf{F}^1 \quad (11.11)$$

K	N^K	$N^K _{\xi=0}$	$\frac{\partial N^K}{\partial \xi}$	$N^K _{\eta=0}$	$\frac{\partial N^K}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$-\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)$

Tabelle 11.4: Formfunktionen in ursprünglicher, in richtungsreduzierter und in abgeleiteter Form

Entsprechende Umformungen für die restlichen sieben Terme in (11.4) führen zur veränderten $\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}}$ - Matrix:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^B}{\partial \xi} \mathbf{F}^1 & \left| \frac{\partial N^2}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^B}{\partial \xi} \mathbf{F}^2 & \left| \frac{\partial N^3}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^A}{\partial \xi} \mathbf{F}^3 & \left| \frac{\partial N^4}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^A}{\partial \xi} \mathbf{F}^4 \\ \left| \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^D}{\partial \eta} \mathbf{F}^1 & \left| \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^C}{\partial \eta} \mathbf{F}^2 & \left| \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^C}{\partial \eta} \mathbf{F}^3 & \left| \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^D}{\partial \eta} \mathbf{F}^4 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

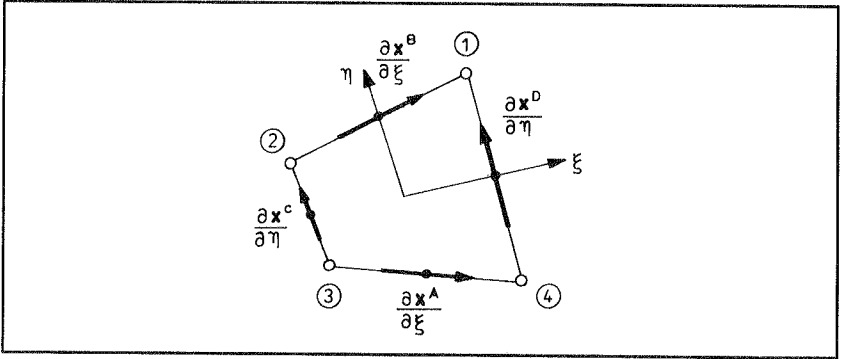


Bild 11.3: Basisvektoren an den Kollokationspunkten

Mit Hilfe von Bild 11.3 erkennt man, daß

$$\frac{\partial \mathbf{x}^A}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}^3}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}^4}{\partial \xi} \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^B}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \xi} \quad (11.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^C}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}^3}{\partial \eta} \quad (11.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^D}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}^4}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \eta} \quad (11.16)$$

Für die Basisvektoren an den Punkten A bis D können damit die Basisvektoren der entsprechenden Knoten in (11.12) eingesetzt werden.

$$\bar{\mathbf{B}}_{\text{sb}} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi} \mathbf{F}^1 & \left| \frac{\partial N^2}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \xi} \mathbf{F}^2 & \left| \frac{\partial N^3}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^3}{\partial \xi} \mathbf{F}^3 & \left| \frac{\partial N^4}{\partial \xi} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^4}{\partial \xi} \mathbf{F}^4 \\ \left| \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \eta} \mathbf{F}^1 & \left| \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \eta} \mathbf{F}^2 & \left| \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^3}{\partial \eta} \mathbf{F}^3 & \left| \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \right| \frac{\partial \mathbf{x}^4}{\partial \eta} \mathbf{F}^4 \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

11.1.2.2 Die $\bar{\mathbf{B}}_{sm}$ – Matrix des ANS – Modells

Die Operatormatrix des Verschiebungsmodells (siehe (10.20)) hat folgendes Aussehen:

$$\bar{\mathbf{B}}_{sb} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \mathbf{p} & \frac{\partial N^2}{\partial \xi} \mathbf{p} & \frac{\partial N^3}{\partial \xi} \mathbf{p} & \frac{\partial N^4}{\partial \xi} \mathbf{p} \\ \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \mathbf{p} & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \mathbf{p} & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \mathbf{p} & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

Wie sich diese Terme aufgrund der Approximation (11.2) und (11.3) verändern, soll wiederum exemplarisch am ersten Term

$$\mathbf{B}_{sm11} = \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \mathbf{p} \quad (11.19)$$

gezeigt werden. Der neue Term ergibt sich über (11.2) zu

$$\bar{\mathbf{B}}_{sm11} = \frac{1}{2}(1-\eta) \frac{\partial N^1}{\partial \xi} |_A \mathbf{p}|_A + \frac{1}{2}(1+\eta) \frac{\partial N^1}{\partial \xi} |_B \mathbf{p}|_B \quad (11.20)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial N^1}{\partial \xi} |_A = 0 \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial N^1}{\partial \xi} |_B = \frac{1}{2} \quad (11.22)$$

ergibt sich (11.20) zu

$$\bar{\mathbf{B}}_{sm11} = \frac{1}{4}(1+\eta) \mathbf{p}|_B = \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \mathbf{p}^B \quad (11.23)$$

Da die abgeleiteten Formfunktionen in (11.19) bereits konstant – lineare Felder sind, wirkt sich diese Reduktion der Verzerrungsfelder lediglich im Normalenfeld \mathbf{p} aus. Die veränderte Operatormatrix ist

$$\bar{\mathbf{B}}_{sb} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} \mathbf{p}^B & \frac{\partial N^2}{\partial \xi} \mathbf{p}^B & \frac{\partial N^3}{\partial \xi} \mathbf{p}^A & \frac{\partial N^4}{\partial \xi} \mathbf{p}^A \\ \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \mathbf{p}^D & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \mathbf{p}^C & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \mathbf{p}^C & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \mathbf{p}^D \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

Die Direktoren \mathbf{p} an den Stellen A,B,C,D können aus den an den Knoten vorliegenden \mathbf{p} -Vektoren durch Mittelung berechnet werden. So ist zum Beispiel

$$\mathbf{p}^A = \frac{\mathbf{p}^3 + \mathbf{p}^4}{\|\mathbf{p}^3 + \mathbf{p}^4\|} \quad (11.25)$$

Vergleicht man (11.24) beziehungsweise (11.17) mit den ursprünglichen, zum "locking" führenden Matrizen (11.18) beziehungsweise (11.4), so wird deutlich, daß die neuen Matrizen mit nur wenigen Änderungen im Programmcode gebildet werden können und der Mehraufwand der ANS – Formulierung nahezu vernachlässigbar ist. Angemerkt sei, daß für den Sonderfall der Platte (Normalenfeld ist konstant) gilt:

$$\mathbf{B}_{sm} = \bar{\mathbf{B}}_{sm} \quad (11.26)$$

Allein die Einführung der Operatormatrix $\bar{\mathbf{B}}_{sb}$ führt somit zu einer "locking" – freien Platte. Für ein Schalenelement ist jedoch die Manipulation beider Matrizen notwendig. Die Elementsteifigkeitsmatrix für den Anteil der Querschubverzerrungen ist mit (10.25)

$$\mathbf{k} = \int_{A_e} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{sm}^T \\ \bar{\mathbf{B}}_{sb}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}_s [\bar{\mathbf{B}}_{sm} \quad \bar{\mathbf{B}}_{sb}] dA \quad (11.27)$$

wobei A_e die Elementfläche darstellt.

11.2 Der Membran- und Biegeanteil

Im vorigen Abschnitt wurde der Querschubanteil eines Schalenelements verbessert. Diese Änderung gegenüber dem Verschiebungsmodell ergibt das Bathe/Dvorkin-Element (B/D) [Dvorkin, 84]. Um ein optimales Elementverhalten zu erreichen, soll nun auch ein verbesserter Membran- und Biegeanteil benutzt werden. Aufgrund der Ähnlichkeit der Differentialbeziehungen, können für beide Anteile dieselben Konzepte verwendet werden.

Mögliche Membranapproximationen wurden im ersten Teil dieser Arbeit ausführlich diskutiert. Zwei Konzepte, die die besten Ergebnisse versprechen, sollen angewendet werden:

1. Das hybrid – gemischte Hellinger – Reissner Modell (Element HR-A)
2. Das EAS – Modell (Element EAS-4)

11.2.1 Die Hellinger – Reissner Formulierung des Membrananteils

Bei der Untersuchung der Scheibenelemente hat sich das Element HR-A [Pian, 84] als äußerst zuverlässig erwiesen. Aus diesem Grund soll diese Approximation als Membrananteil einer Schale eingesetzt werden. Die Formulierung entspricht der in Kapitel 5; einzige Änderung ist das Bezugssystem. Statt dem globalen muß für die Schale das orthogonale r-s-t System benutzt werden (siehe auch [Simo, 89/1]). Der Raum der Approximation für die Membranschnittkräfte \mathbf{n}_h ist entsprechend zu (5.9)

$$\mathbf{W}_h = \left\{ \mathbf{n}_h \in [L_{2(\varphi)}]^3 \mid \mathbf{n}_h|_{a_c} = \begin{bmatrix} \Pi^{rr} \\ \Pi^{ss} \\ \Pi^{rs} \end{bmatrix}_h = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} ; \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^5 \right\} \quad (11.28)$$

Die Interpolationsmatrix \mathbf{P} ergibt sich wiederum zu

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_0 \mathbf{P}_\xi = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{\xi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

mit \mathbf{P}_ξ aus (5.30). Da die isoparametrischen Ansätze nun nicht wie in (5.26) auf das globale x - y -System, sondern auf das lokale r - s -System transformiert werden müssen, enthält \mathbf{T}_0 die Terme A_{ij} aus (10.28):

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{21}^2 & 2A_{11}A_{21} \\ A_{12}^2 & A_{22}^2 & 2A_{12}A_{22} \\ A_{11}A_{12} & A_{21}A_{22} & A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21} \end{bmatrix}_{\xi=\eta=0} \quad (11.30)$$

Damit \mathbf{T}_0 lediglich konstante Terme enthält, wird die Matrix wie (5.26) vor der Integrationschleife am Mittelpunkt $\xi=\eta=0$ aufgestellt. Die Multiplikation (11.29) wirkt sich nur in den nicht konstanten Anteilen von \mathbf{P}_ξ , das heißt in der vierten und fünften Spalte der Matrix \mathbf{P}_ξ aus. \mathbf{P} hat damit folgende Struktur:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_L = [\mathbf{I} \mathbf{P}_L] \quad (11.31)$$

Mit den Ableitungen der Formfunktionen,

$$\mathbf{N}_{,a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}_{,\alpha} \quad (11.32)$$

die in (10.32) einzusetzen sind, und dem inversen Werkstoffgesetz

$$\mathbf{C}_m^{-1} = \frac{1}{E h} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

können die Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{G} gebildet werden:

$$\mathbf{H} = \int_{A_c} \mathbf{P}^T \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{P} \, dA \quad (11.34)$$

$$\mathbf{G} = \int_{A_c} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, dA \quad (11.35)$$

Aufgrund der geschickt gewählten Ansätze in (11.29) erhält die Flexibilitätsmatrix eine besonders einfache Struktur:

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{A}_e & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{h} \end{array} \right] \quad (11.36)$$

Die 2x2-Matrix \mathbf{h} berechnet sich aus

$$\mathbf{h} = \int_{A_e} \mathbf{P}_L^T \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{P}_L \, dA \quad (11.37)$$

Mit einer entsprechenden Gliederung von \mathbf{G}

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{1x1} \mathbf{A}_e \\ \hline \mathbf{g} \end{array} \right] \quad (11.38)$$

wobei \mathbf{B}_{1x1} die 1x1 - integrierte Operatormatrix darstellt, und

$$\mathbf{g} = \int_{A_e} \mathbf{P}_L^T \mathbf{B} \, dA \quad (11.39)$$

zerfällt die Formulierung in eine Einpunkt - Integration, die die konstanten Spannungsfelder erfaßt, und eine Rang-2 Stabilisierung. Die Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{1x1} + \mathbf{g}^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \quad (11.40)$$

Die Einpunkt - Integration sorgt auch dafür, daß die konstanten Anteile auf ein einheitliches, am Mittelpunkt aufgestelltes Basissystem bezogen werden, was den Patch Test, also exakte konstante Anteile garantiert. Die Schnittgrößenermittlung

$$\mathbf{n}_h = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{I} \, \mathbf{P}_L] \boldsymbol{\beta} \quad (11.41)$$

vereinfacht sich durch die Aufspaltung zu

$$\mathbf{n}_h = (\mathbf{C}_m \mathbf{B}_{1x1} + \mathbf{P}_L \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{d} \quad (11.42)$$

11.2.2 Die Hellinger – Reissner Formulierung des Biegeanteils

Die Approximation des Biegeanteils mit $\mathbf{m}_h = \begin{bmatrix} m^{rr} \\ m^{ss} \\ m^{rs} \end{bmatrix}_h$ soll in derselben Weise erfolgen.

Ein rein verschiebungsformulierter Biegeanteil verursacht zwar keine "locking"-Probleme, so daß die zusätzlichen Spannungsansätze nur geringfügig verbesserte Ergebnisse ergeben. Sind Membran- und Biegeanteil aber durch exzentrisch angebrachte Steifen oder durch ein bezüglich der Mittelfläche unsymmetrisches Materialgesetz gekoppelt, so ist eine für beide Anteile gleichartige Formulierung notwendig.

Die Implementierung des Biegeanteils ist mit (10.33) und (10.35) identisch der des Membrananteils und soll deshalb nicht mehr ausgeführt werden.

11.2.3 Die EAS-Formulierung des Membrananteils

Der im vorhergehenden Abschnitt benutzte Spannungs-Verschiebungs-Ansatz basiert auf der komplementären Energie. Insbesondere für materiell nichtlineare Probleme sind jedoch Formulierungen, die auf der potentiellen Energie beruhen, einfacher zu handhaben. Aus diesem Grund soll die EAS-Formulierung verwendet werden. Mit Ausnahme des nicht mehr globalen sondern lokal – orthogonalen Bezugssystems entspricht die Formulierung jener in Kapitel 7.

Die Membranapproximationen sind festgelegt durch den Raum

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h \in [L_{2(\omega)}]^3 \Big|_{\alpha_e} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{rr} \\ \tilde{\epsilon}_{ss} \\ 2\tilde{\epsilon}_{rs,h} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha} ; \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^4 \right\} \quad (11.43)$$

wobei analog zu (7.9)

$$\mathbf{M} = \frac{\det J_0}{\det J} \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}_{\xi} \quad (11.44)$$

mit \mathbf{T}_0^{-T} aus (11.30) und

$$\mathbf{M}_{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (11.45)$$

Gewählt wurde die vierparametrische Approximation (11.45), da die Fünf-Parameter-Approximation (7.20) nur unwesentlich bessere Ergebnisse ergibt und sich somit der zusätzliche Aufwand nicht lohnt.

Mit den in (10.32) einzusetzenden, abgeleiteten Formfunktionen (11.32) sowie (10.34) können die Untermatrizen (7.13) bis (7.15) und damit über (7.16) die Elementsteifigkeitsmatrix gebildet werden.

$$\mathbf{k} = \mathbf{K} - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad (11.46)$$

Das Element kommt in dieser Form aber nicht durch den Patch Test, da die Basisvektoren in (10.32) von Integrationspunkt zu Integrationspunkt variieren und somit die konstanten Verzerrungsanteile zerstören. Eine Aufspaltung in eine Einpunkt-Integration und höherwertige Anteile (analog zu (11.40)), die ermöglicht, daß die konstanten Anteile auf ein einziges Basissystem bezogen werden und damit exakt sind, ist für (11.46) nicht möglich.

Ist das Element eben, das heißt unverdrillt, so kann jedoch ein nicht variierendes orthogonales Bezugssystem gewählt werden. Mit am Mittelpunkt berechneten Basisvektoren⁶

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial r^a} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^a} \Big|_{\xi=\eta=0} \quad (11.47)$$

schreibt sich die Operatormatrix als

$$\mathbf{B}_m^D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

Ein einziges Bezugssystem kann jedoch eine verdrillte Elementgeometrie nicht erfassen. Für diesen Fall muß die Operatormatrix nach (10.32) berechnet werden.

11.2.4 Die EAS – Formulierung des Biegeanteils

Eine entsprechende Interpolation der Krümmungen κ_h (Vierparameter – Approximation analog zu (11.43) bis (11.45)) ergibt mit den \mathbf{B} -Matrizen und dem Werkstoffgesetz (10.35) die Steifigkeitsmatrix des Biegeanteils. Dabei ergibt sich \mathbf{B}_{bm}^D nach (10.33a); \mathbf{B}_{bb}^D berechnet sich für verdrillte Elemente nach (10.33b), für ebene Elemente analog zu (11.48) mit konstanten Basisvektoren.

6. Die Basisvektoren könnten auch an irgend einem anderen Punkt aufgestellt werden.

11.3 Zusammenstellung der Schalenelemente

In Tabelle 11.5 sind die Formulierungen der diskutierten Schalenelemente in einer Übersicht dargestellt. Zu Vergleichszwecken bei den numerischen Beispielen soll das in Spalte 1 aufgeführte selektiv reduzierte Verschiebungsmodell (SRI) dienen. Dabei steht DISP für die herkömmliche 2×2 -integrierte Verschiebungsformulierung.

Das auf [Dvorkin, 84] zurückgehende Bathe-Dvorkin-Element (B/D) hat einen ANS-formulierten Querschubanteil; Membran- und Biegeanteil entsprechen jedoch dem reinen Verschiebungsmodell.

Anteile	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
Membran	DISP	DISP	HR-A	EAS-4
Biegung	DISP	DISP	HR-A	EAS-4
Querschub	1x1	ANS	ANS	ANS

Tabelle 11.5: Zusammenstellung der Schalenelemente

In der dritten Spalte ist das Element HR-ANS aufgelistet, das für Membran- und Biegeanteil den Hellinger-Reissner Ansatz (11.29) besitzt. Der Querschubanteil entspricht der für das Bathe-Dvorkin Element benutzten ANS-Formulierung.

Für das Element EAS-ANS wurde wiederum die ANS-Formulierung für den Querschub benutzt; die Interpolation des Membran- und Biegeanteils erfolgt mit dem vierparametrischen EAS-Ansatz.

Anmerkung: Elemente mit einer Hellinger – Reissner Formulierung für den Querschubanteil (oder auch einer modifizierten HR – Formulierung mit Verzerrungen anstatt Spannungen) erfüllen nur mit Hilfe besonderer Projektionsoperatoren [Wang, 89] den Patch Test; aus diesem Grund und aus Gründen der Effizienz scheint die ANS-Formulierung für den Querschubanteil konkurrenzlos.

Die ANS-Methode kann in der gezeigten Weise jedoch nur auf den Querschubanteil, nicht aber auf den Membran- oder Biegeanteil angewendet werden. Aufgrund des bei der Membran und bei der Biegung möglichen Querdehneffekts können die Verzerrungsfelder nämlich nicht einfach reduziert werden, sondern sie müssen bei vierknotigen Elementen vollständig linear sein.

12 NUMERISCHE BEISPIELE DER SCHALENELEMENTE

Untersucht wurden die in Tabelle 11.5 zusammengestellten Elemente:

SRI

B/D

HR-ANS

EAS-ANS

Zu Vergleichszwecken wurden die vier-, neun- und sechzehnknotigen isoparametrischen Verschiebungsmodelle, das neunknotige Pinsky - Element [Pinsky, 87] sowie die Simo - Platte [Simo,90] eingesetzt.

Das neunknotige Pinsky - Element ist ein ANS - formuliertes Schalelement, wobei die beim Verschiebungsmodell biquadratischen Membran-, Biege- und Schubverzerrungsfelder durch eine Berechnung an jeweils sechs Kollokationspunkten reduziert werden. Das Element ist "locking" - frei, passiert aber nicht den Patch - Test, da für die Biege- und Membranverzerrungen aus Gründen der Effizienz kein orthogonales Bezugssystem benutzt wird.

Die vierknotige Simo - Platte hat einen EAS - formulierten Querschubanteil, während der Biegeanteil unverändert ist, also dem reinen Verschiebungsmodell entspricht. (Entsprechend der obigen Namensgebung würde das Element DISP - EAS heißen).

12.1 Patch Test der vierknotigen Plattenelemente

Für den Patch Test der vierknotigen Plattenelemente wird wiederum die in Bild 8.1 gezeigte Netzkonfiguration benutzt. Mit den in Bild 12.1 dargestellten Lastfällen wird überprüft, ob die Zustände konstanter Momente möglich sind. Exakte Ergebnisse können sich nur dann ergeben, wenn keinerlei Schubverzerrungen aufgebaut werden.

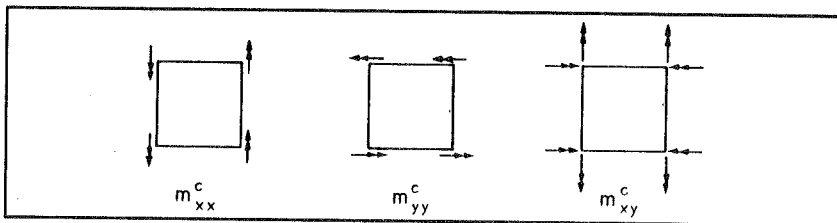


Bild 12.1: Lastfälle des Platten - Patch Tests

Passiert wird der Test von den Elementen B/D, HR-ANS und EAS-ANS. Nicht bestanden wird er vom reinen vierknotigen Verschiebungsmodell, der Simo - Platte (exakte

konstante Momente sind nur für Parallelogrammelemente möglich) sowie, aufgrund der ZEM, von dem selektiv unterintegrierten Verschiebungsmodell SRI und dem vollständig unterintegrierten Element URI.

12.2 Eigenwertanalyse verschiedener Plattenmodelle

Die Eigenwertanalyse eines Elements mit quadratischer Form (Seitenlängen 1,0; Dicke 0,1; E-Modul 1,0 und $\nu=0,0$) soll die Steifigkeiten der Deformationsmodes des 2x2 – integrierten Verschiebungsmodells, der selektiv und reduziert integrierten Modelle SRI und URI sowie der Elemente B/D und HR-ANS verdeutlichen. (Aufgrund der unverzerrten Elementgeometrie ist das Element EAS-ANS mit HR-ANS identisch).

URI (1 x 1)	DISP (2 x 2)	SRI	B/D	HR-ANS
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0.0347222 γ_{ξ}^{lin} , γ_{η}^{lin}	0	0.0347222 γ_{ξ}^{lin} , γ_{η}^{lin}	0.027777 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$
0	0.0532407 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$, $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$	0	0.0416667 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$	0.027777 $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$
0	0.0532407 $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$, $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$	0.0416667 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$	0.0416667 $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$, $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$	0.0347222 $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$
0	0.0713352 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, ($\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$)	0.0416667 $\kappa_{\eta\eta}^{lin}$, $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$	0.0713352 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, ($\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$)	0.0713352 $\kappa_{\xi\xi}^{lin}$, ($\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$)
0.083333 $\kappa_{\xi\xi}^c$	0.118056 $\kappa_{\xi\xi}^c$, $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$	0.083333 $\kappa_{\xi\xi}^c$	0.083333 $\kappa_{\xi\xi}^c$	0.083333 $\kappa_{\xi\xi}^c$
0.083333 $\kappa_{\eta\eta}^c$	0.118056 $\kappa_{\eta\eta}^c$, $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$	0.083333 $\kappa_{\eta\eta}^c$	0.083333 $\kappa_{\eta\eta}^c$	0.083333 $\kappa_{\eta\eta}^c$
0.083333 $\kappa_{\xi\eta}^c$	0.324498 $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$, ($\kappa_{\xi\xi}^c$)	0.083333 $\kappa_{\xi\eta}^c$	0.324498 $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$, ($\kappa_{\xi\xi}^c$)	0.324498 $\gamma_{\xi\eta}^{lin}$, $\gamma_{\eta\xi}^{lin}$, ($\kappa_{\xi\xi}^c$)
0.520833 $\gamma_{\xi\xi}^c$	0.520833 $\gamma_{\xi\xi}^c$	0.520833 $\gamma_{\xi\xi}^c$	0.520833 $\gamma_{\xi\xi}^c$	0.520833 $\gamma_{\xi\xi}^c$
0.520833 $\gamma_{\eta\eta}^c$	0.520833 $\gamma_{\eta\eta}^c$	0.520833 $\gamma_{\eta\eta}^c$	0.520833 $\gamma_{\eta\eta}^c$	0.520833 $\gamma_{\eta\eta}^c$

Tabelle 12.1: *Eigenwerte und zugehörige Verzerrungsverteilung verschiedener vierknotiger Plattenmodelle*

In Tabelle 12.1 sind die 12 Eigenwerte der fünf Elementmodelle mit den in den jeweiligen Eigenmodes enthaltenen Verzerrungen angegeben. Die zweite Spalte zeigt die Ergebnisse des vollintegrierten Verschiebungsmodells. Aufgrund der parasitären linearen Schubverzerrungen $\gamma_{\xi\xi}^{lin}$ und $\gamma_{\eta\eta}^{lin}$ haben die Krümmungsmodes $\kappa_{\xi\xi}^c$ und $\kappa_{\eta\eta}^c$ zu hohe Eigenwerte. Krümmungsmodes ohne parasitäre Schubverzerrungen bekommt man mit den Modellen URI und SRI. Durch die Unterintegration treten jedoch vier beziehungsweise zwei zusätzliche Nulleigenwerte auf.

B/D passiert den Patch Test, da aufgrund der ANS – Formulierung des Querschubanteils die Modes $\kappa_{\xi\xi}^c$ und $\kappa_{\eta\eta}^c$ exakt sind. Das Element HR-ANS hat neben den exakten kon-

stanten Modes $\kappa_{\xi\xi}^c$ und $\kappa_{\eta\eta}^c$ auch verbesserte lineare Krümmungsmodes, da $\kappa_{\xi\eta}$ als konstantes Feld angesetzt wurde. Die Kopplung zwischen den linearen Schubmodes und der Drillung $\kappa_{\xi\eta}^c$ bleibt bestehen. Diese Kopplung, die die unterintegrierten Elemente URI und SRI nicht zeigen, wirkt sich aber erst dann negativ aus, wenn die Elemente als verdrehte Schalenelemente eingesetzt werden (siehe Kapitel 12.10).

12.3 "Locking" – Tests

12.3.1 Vierknotige Elemente

Um das "locking" – Verhalten der vierknotigen Plattenelemente zu untersuchen, wurde eine naviergelagerte Quadratplatte ($L = 1$; $E = 1$; $\nu = 0,3$) unter Einzellast berechnet, wobei die Plattendicke h sukzessive verringert wurde (Bild 12.2). Die Ergebnisse wurden mit der Kirchhoff – Lösung w_{ex} einer dünnen Platte verglichen.

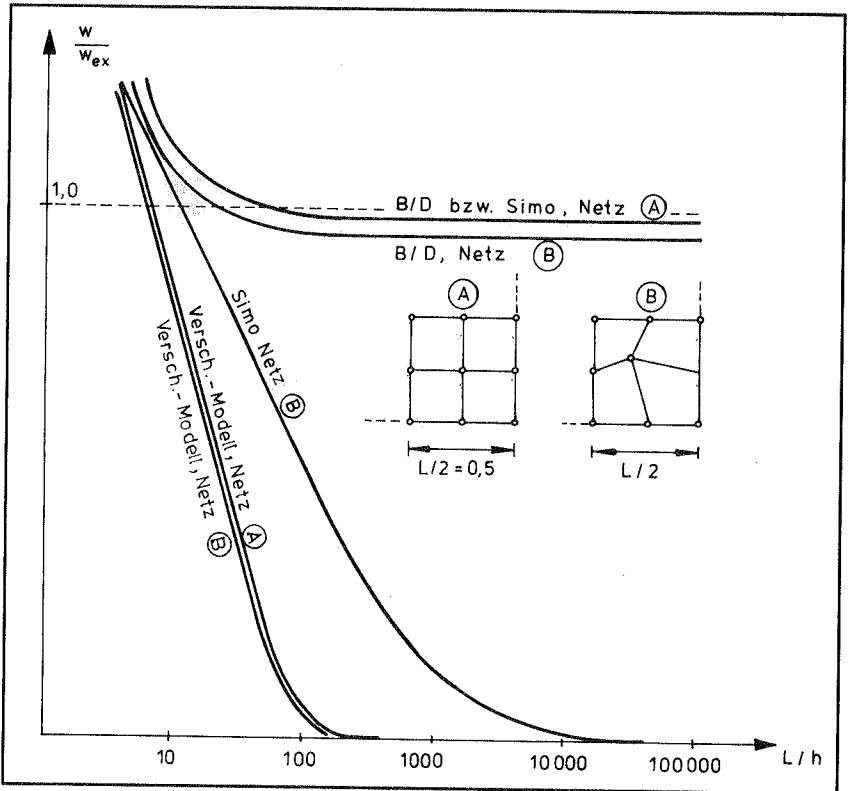


Bild 12.2: "Locking" – Test für vierknotige Elemente

Idealisiert wurde ein Viertel der Struktur, wobei ein unverzerrtes und ein verzerrtes Elementnetz benutzt wurde. Bekannt ist das "locking" des vollintegrierten Verschiebungsmodells, das selbst bei Rechteckelementen auftritt. Das Simo - Plattenelement [Simo, 90] ist ein Beispiel für all die Elemente, die bei Rechteckgeometrien kein "locking", für verzerrte Elemente jedoch "locking" zeigen. Die Ergebnisse dieses Elements sollen verdeutlichen, daß für ein "locking" - Test die Netzkonfiguration so allgemein wie möglich verzerrt sein muß. Ein "locking" - Test nur für Rechteckelemente ist ohne Aussagekraft. "Locking" - frei ist das Element B/D sowie die nicht dargestellten Elemente HR-ANS, EAS-ANS, SRI und URI.

12.3.2 Höherwertigere Elemente

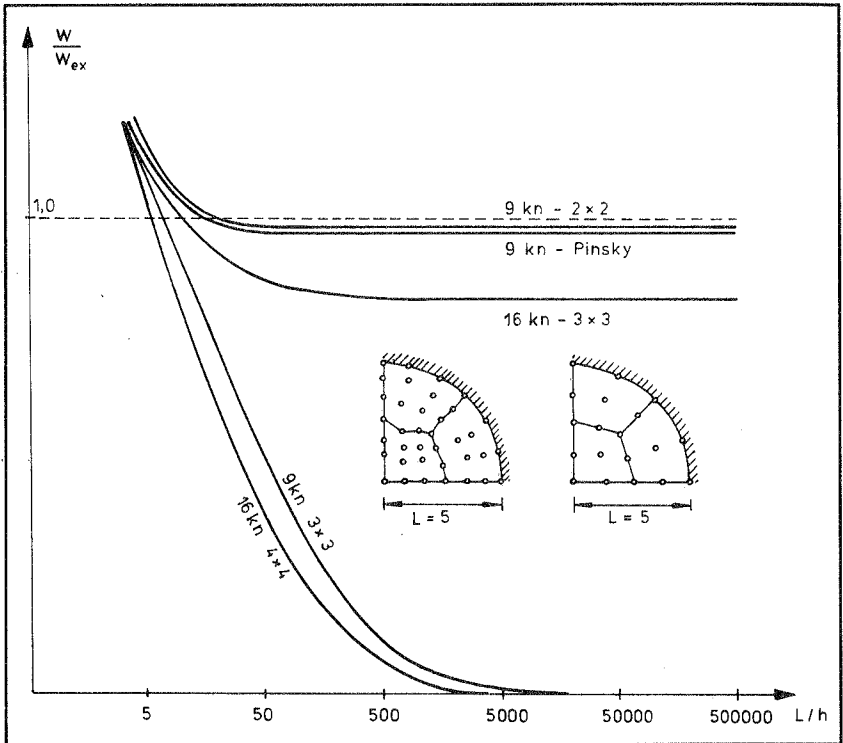


Bild 12.3: "Locking" - Test für höherwertige Elemente

Für den "locking" - Test höherwertiger Elemente (getestet wurden die voll und reduziert integrierten neun- und sechzehnknötigen Verschiebungsmodelle sowie das neunknötige Pinsky - Element [Pinsky, 87]) wurde eine eingespannte, mit einer Einzellast belastete

Kreisplatte ($R = 5$; $E = 1$; $\nu = 0,3$) gewählt (Bild 12.3). Durch die krumme Berandung sind die Elemente automatisch quadratisch verzerrt; für das sechzehnknötige Element wurden die Innenränder zusätzlich kubisch verzerrt.

Die Ergebnisse zeigen, daß die vollintegrierten Verschiebungsmodelle keinesfalls "locking" – frei sind. Erst eine Unterintegration oder eine ANS – Formulierung befreien die Elemente vom "shear – locking". Angemerkt sei, daß das gegenüber dem neunknötigen Element schlechtere Abschneiden des sechzehnknötigen Elements daran liegt, daß die kubischen Elemente stärker verzerrt sind (siehe Bild 12.3).

12.4 Einfluß der Netzverzerrung

Ein Viertel einer naviergelagerten Platte (Einzellast in Systemmitte) wurde mit vier Elementen idealisiert (Bild 12.4). Um den Einfluß einer Netzverzerrung zu studieren, wurde der Mittelknoten entlang der Diagonalen verschoben.

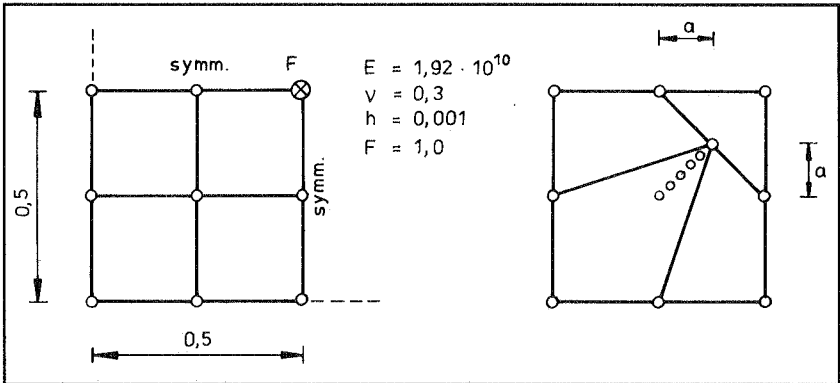


Bild 12.4: Viertelplatte mit unverzerrtem und verzerrtem Elementnetz

a	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS	Simo
0	0,987	0,987	1,002	1,002	0,987
0,025	1,002	0,982	0,997	0,997	0,169
0,050	1,008	0,972	0,986	0,986	0,056
0,075	1,005	0,956	0,969	0,968	0,028
0,100	0,989	0,933	0,943	0,942	0,017
0,125	0,954	0,900	0,909	0,908	0,012

Tabelle 12.2: Normierte Verschiebung der Viertelplatte bei zunehmender Netzverzerrung

In Tabelle 12.2 ist die Verschiebung unter der Einzellast, normiert bezüglich einer konvergierten Lösung, für sechs verschiedene Verzerrungsstufen angegeben. Analog zu

den Scheibenberechnungen (Kapitel 8.3) schneidet das Hellinger – Reissner Modell HR-ANS geringfügig besser ab, als das EAS-ANS – beziehungsweise das B/D – Element.

Deutlich wird nochmals das "shear – locking" des Simo – Plattenelements, so daß diese EAS – Formulierung für den Querschubanteil einer Schale nicht in Frage kommt.

12.5 Naviergelagerte Kreisplatte

Eine naviergelagerte Kreisplatte (SS1 – Lagerung) mit Radius = 5, Dicke = 0,1, $E = 10,92 \cdot 10^4$ und $\nu = 0,3$ wird mit einer Gleichlast $q = 1$ belastet. Für die Viertelplatte wurden drei verschieden feine Netze gewählt (Bild 12.5).

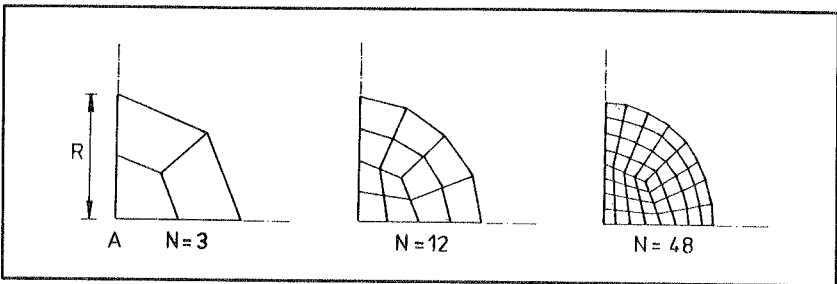


Bild 12.5: Viertelanschnitt der Kreisplatte

Elemente	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS	Simo
N = 3	3,0773	3,6430	3,6642	3,6642	2,2363
N = 12	3,7050	3,9037	3,9086	3,9086	3,7106
N = 48	3,9119	3,9628	3,9640	3,9640	3,9128

Tabelle 12.3: *Mittenverschiebung der naviergelagerten Kreisplatte*
(Reihenlösung ergibt 3,9831 [Simo,90])

In Tabelle 12.3 ist jeweils die Mittenverschiebung für fünf verschiedene Elemente angegeben. Vor allem bei dem groben Netz mit stark verzerrten Elementen zeigt sich das exzellente Verhalten der Elemente B/D, HR-ANS und EAS-ANS.

12.6 Schräge Platte

Die in Bild 12.6 dargestellte schräge Platte (naviergelagert) mit Längen $L = 100$, Dicke $= 1$, $E = 10^5$ und $\nu = 0,3$ ist durch eine Gleichlast $q = 1$ belastet. Da eine SS2 – Lagerung eine zu hohe Einspannwirkung an den stumpfen Ecken erzeugt, wurde die Navierlagerung als "soft support" (SS1) idealisiert, das heißt, lediglich die Querverschiebung w ist behindert.

In Tabelle 12.4 ist die Mittendurchbiegung für verschieden feine Elementnetze angegeben. Aufgrund der in jedem Element konstanten Jakobimatrix ist auch das Simo – Element "locking" – frei. Nicht überbewertet werden sollten die Ergebnisse des SRI – Elements; hier scheint sich das zu weiche Verhalten des unterintegrierten Querschubanteils mit dem versteifenden Verhalten des Biegeanteils zu kompensieren.

Auffällig ist das gegenüber den Elementen B/D und Simo verbesserte Verhalten von HR –ANS und EAS – ANS. Wegen der komplizierten Momentenverläufe (mit Singularitäten in den Ecken) wirkt sich der veränderte Biegeanteil bei diesem Beispiel besonders deutlich aus.

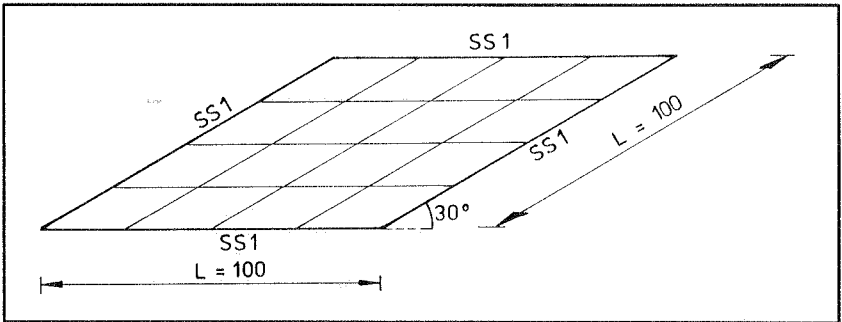


Bild 12.6: Schräge Platte

Netz	URI	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS	Simo
4x4	4,8568	4,5085	3,9182	4,2122	4,2122	3,9303
6x6	4,9492	4,4853	3,8873	4,2234	4,2234	3,9326
8x8	4,8542	4,4378	3,8991	4,2239	4,2239	3,9840
10x10	4,7776	4,4387	3,9752	4,2591	4,2591	4,0761
12x12	4,7293	4,4511	4,0589	4,3032	4,3032	4,1575
14x14	4,6996	4,4665	4,1299	4,3424	4,3424	4,2217
16x16	4,6812	4,4820	4,1875	4,3738	4,3738	4,2726

Tabelle 12.4: Mittenverschiebung der naviergelagerten, schrägen Platte (Reihenlösung ergibt 4,455 [Simo, 90])

12.7 Quadratplatte unter Gleichlast

Ein Viertel einer durch eine Gleichlast q belasteten, dünnen Quadratplatte (naviergelagert) wird mit einem 2×2 – beziehungsweise 4×4 – Netz idealisiert (Bild 12.7). Für jeweils ein unverzerrtes und verzerrtes Elementnetz sollen die Querverschiebungen w und Querkräfte q_x entlang der Mittellinie A – B verglichen werden (Bild 12.8 und 12.9).

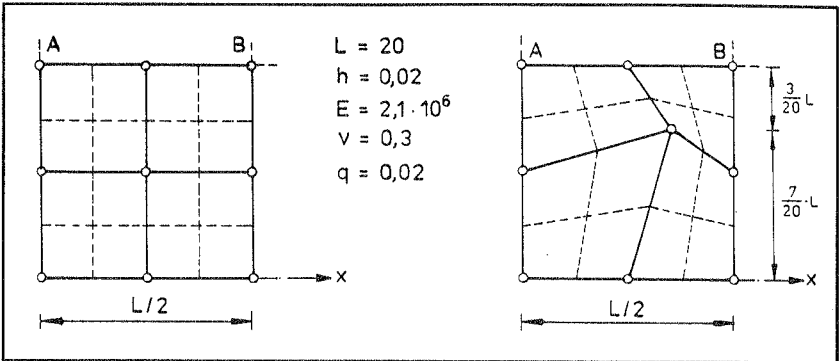


Bild 12.7: Viertelanschnitt einer Quadratplatte

Da die Ergebnisse der Elemente B/D, HR-ANS und EAS-ANS dicht beieinander lagen, sind lediglich die Resultate des Elements HR-ANS aufgetragen. Als Vergleichslösung dienen die mit einem regelmäßigen 8×8 – Netz berechneten Verläufe des Pinsky – Elements, wobei die geringen Querkraftsprünge noch geglättet wurden.

Um die Fähigkeiten des Elements HR-ANS klar aufzuzeigen, sind die Querkraftverläufe dieses Elements ungeglättet dargestellt. Herausgestrichen werden muß der nur geringe Qualitätsverlust beim Übergang vom unverzerrten zum verzerrten Elementnetz, sowohl bei den Verschiebungsverläufen als auch bei den Querkraftverläufen.

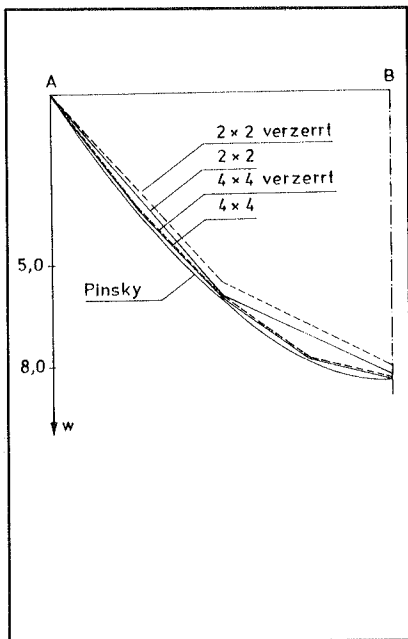


Bild 12.8: Querverschiebung w des Elements HR-ANS entlang der Mittellinie einer Quadratplatte

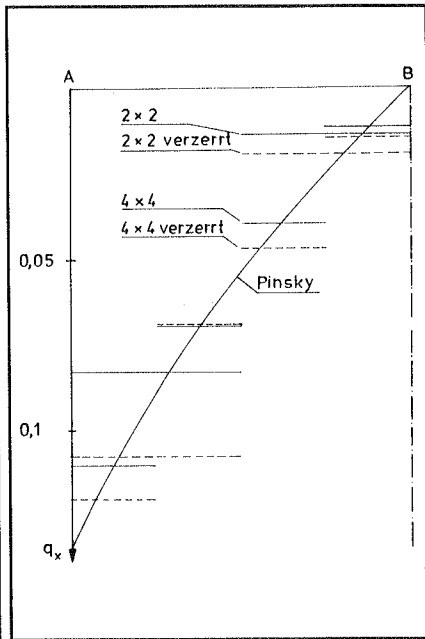


Bild 12.9: Querkräfte q_x des Elements HR-ANS entlang der Mittellinie einer Quadratplatte

12.8 Halbkugel mit Loch

Bild 12.10 zeigt einen Viertelausschnitt einer Halbkugel mit Loch mit der punktweisen Belastung. Das Beispiel ist in der Literatur vielzitiert, da bei einer unkorrekten Schalenformulierung die vierknotigen Elemente "shear - locking" aufweisen.

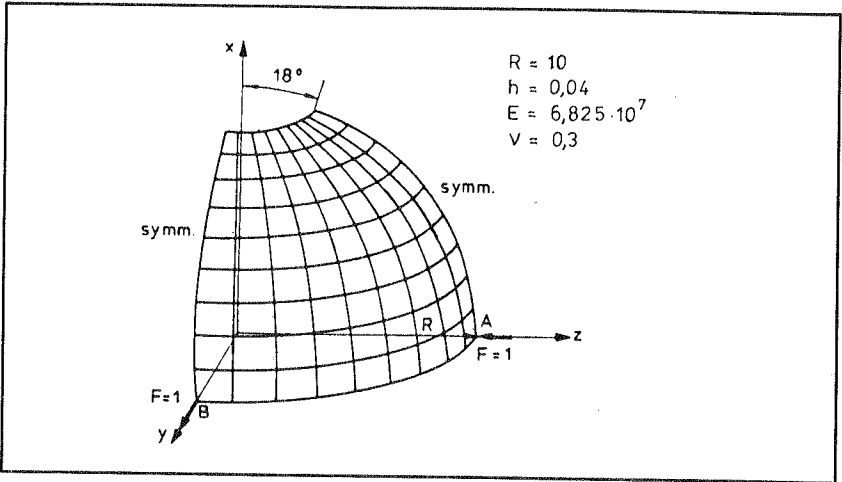


Bild 12.10: Halbkugel mit Loch

Tabelle 12.5 gibt die Querverschiebung w_A des Punktes A bei zunehmender Netzverdichtung wieder. In [MacNeal, 85] wurde ein Vergleichswert von 0.094 angegeben; neuere asymptotische Berechnungen [Simo, 89/1] weisen jedoch auf einen Wert von 0.093 hin.

Da die getesteten Elemente von oben konvergieren, hat das gegenüber HR-ANS oder EAS-ANS etwas steifere Element B/D für grobe Netze die besseren Werte.

Netz	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
2x2	0,11064	0,10953	0,11127	0,11126
4x4	0,10212	0,09912	0,09985	0,09985
8x8	0,09502	0,09410	0,09455	0,09455
16x16	0,09419	0,09324	0,09352	0,09352

Tabelle 12.5: Radialverschiebungen der Halbkugel mit Loch

12.9 Scordelis – Lo – Schale

Die Geometrie des Scordelis – Lo – Dachs, eine Zylinderschale unter Eigengewicht (spezifisches Gewicht ρ), ist in Bild 12.11 gegeben. Die Schale ist an den Endscheiben gelenkig gelagert, die Endscheiben sind jedoch in Richtung der Schalenachse flexibel. Aus Symmetriegründen wurde wiederum nur ein Viertel der Struktur idealisiert.

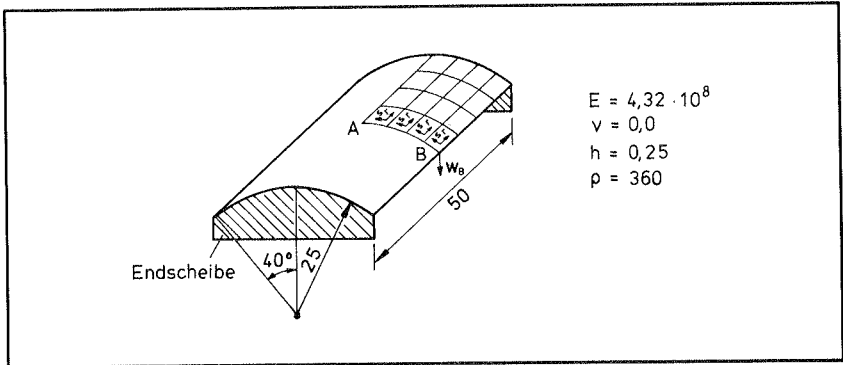


Bild 12.11: Scordelis – Lo Schale

Für vier verschieden feine Netzeinteilungen wurde die Durchbiegung des Mittelpunkts der freien Kante w_B verglichen. In Tabelle 12.6 beziehungsweise 12.7 sind die berechneten Werte sowie die auf den Vergleichswert 0.3008 ("deep shell solution" [Saleeb, 87]) bezogenen Abweichungen in Prozent angegeben.

Netz	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
2x2	0,37778	0,35728	0,41952	0,41952
4x4	0,28894	0,28320	0,31469	0,31470
8x8	0,29678	0,29428	0,30428	0,30429
16x16	0,30164	0,30040	0,30308	0,30308

Tabelle 12.6: Randverschiebung w_B der Scordelis – Lo Schale

Netz	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
2x2	+25,6%	+18,8%	+39,5%	+39,5%
4x4	-4,0%	-5,9%	+4,6%	+4,6%
8x8	-1,3%	-2,2%	+1,2%	+1,2%
16x16	+0,3%	-0,2%	+0,8%	+0,8%

Tabelle 12.7: Abweichungen in % für die Randverschiebung w_B der Scordelis – Lo Schale

Daß die Elemente SRI und B/D für das 2x2 – Netz die besseren Ergebnisse ergeben, liegt daran, daß wie im vorigen Beispiel die Elemente von der weichen Seite her konvergieren. Die aufgrund der reinen Verschiebungsformulierung zu steifen Membran- und Biegeanteile der Elemente SRI und B/D wirken sich deshalb positiv aus. Für feiner werdendere Netze zeigen die Elemente HR-ANS und EAS-ANS jedoch das bessere Konvergenzverhalten.

In Bild 12.12 und 12.14 sind die Membranlängskräfte n_{rr} und die Momente m_{rr} des Elements HR-ANS für die rechte Hälfte der Struktur gezeigt. (Die Berechnung erfolgte am Viertelsystem mit 8x8 Elementen.)

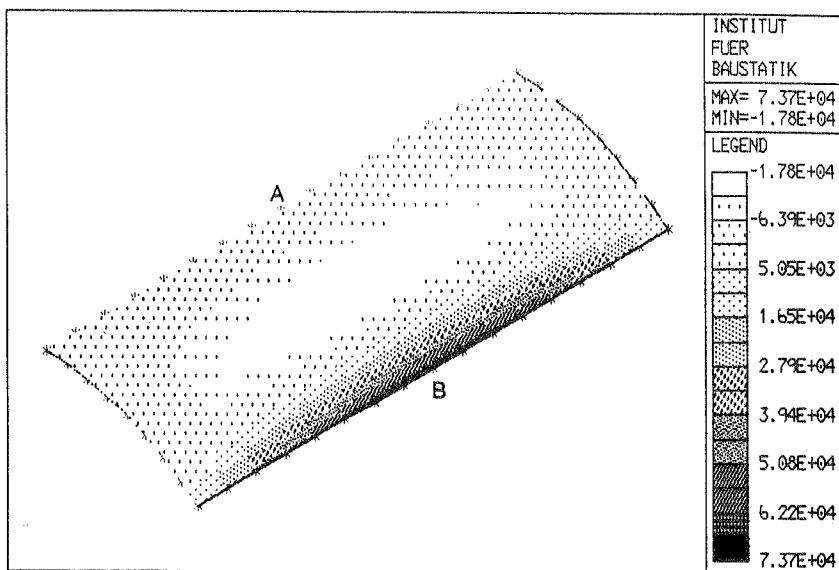


Bild 12.12: Membranlängskräfte n_{rr} für die Scordelis-Lo Schale, berechnet mit dem Element HR-ANS (gezeigt ist das halbe System).

Die Verläufe entlang der Linie A—B sind nochmals in den Bildern 12.13 beziehungsweise 12.15 gegeben. Zum Vergleich sind die Ergebnisse des Elements B/D sowie die exakten Verläufe [Scordelis, 69] eingetragen. Bemerkenswert ist, daß bei beiden Elementen praktisch keine Sprünge für die Schnittgrößen n_{rr} und m_{rr} auftreten (die Verläufe sind nicht geglättet). Die Ergebnisse des Elements HR—ANS liegen durch die verbesserte Approximation der Membranschubkräfte und Drillmomente etwas näher an der exakten Lösung.

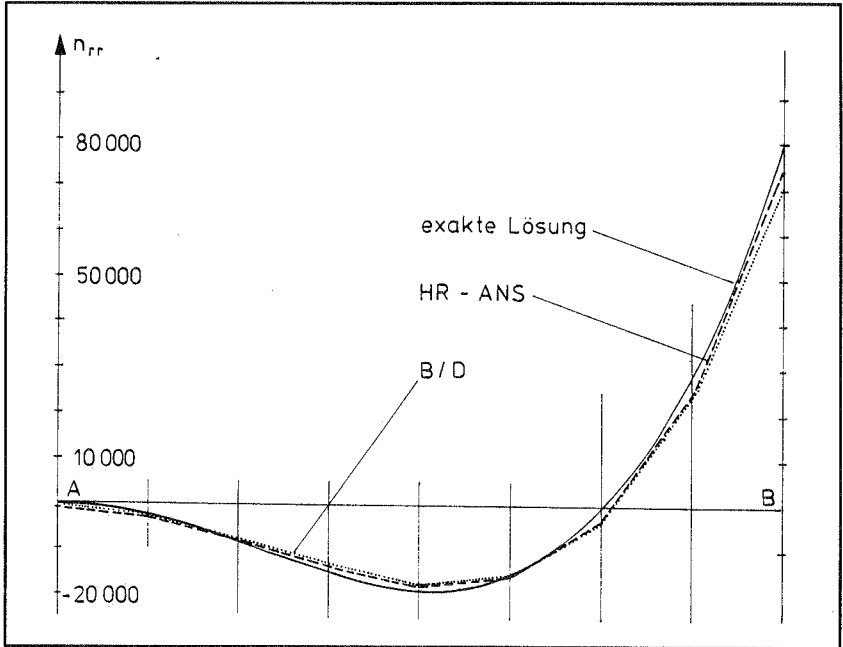


Bild 12.13: Membranlängskräfte n_{rr} der Elemente B/D und HR—ANS entlang der Linie A—B der Scordelis—Lo Schale (8x8 - Netz für das Viertelsystem); exakte Lösung aus [Scordelis, 69].

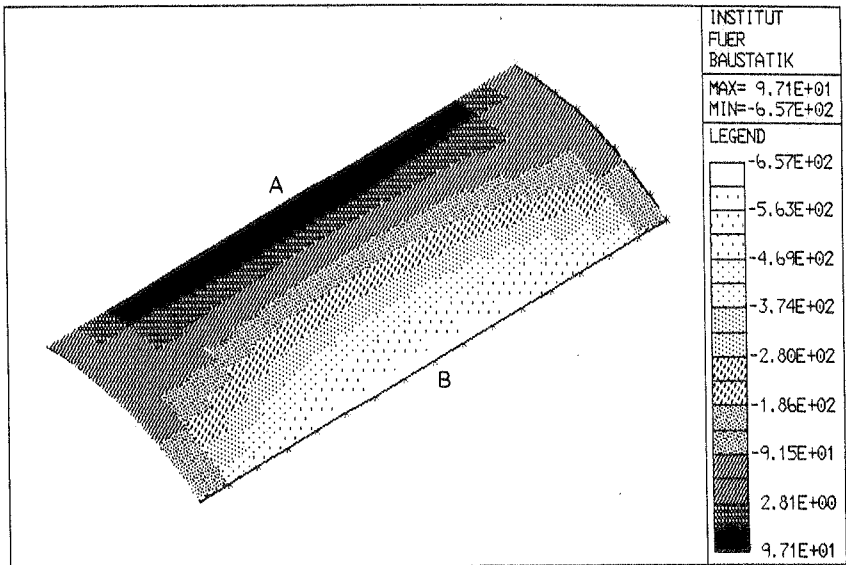


Bild 12.14: Momente m_{rr} für die Scordelis-Lo Schale, berechnet mit dem Element HR-ANS (gezeigt ist das halbe System).

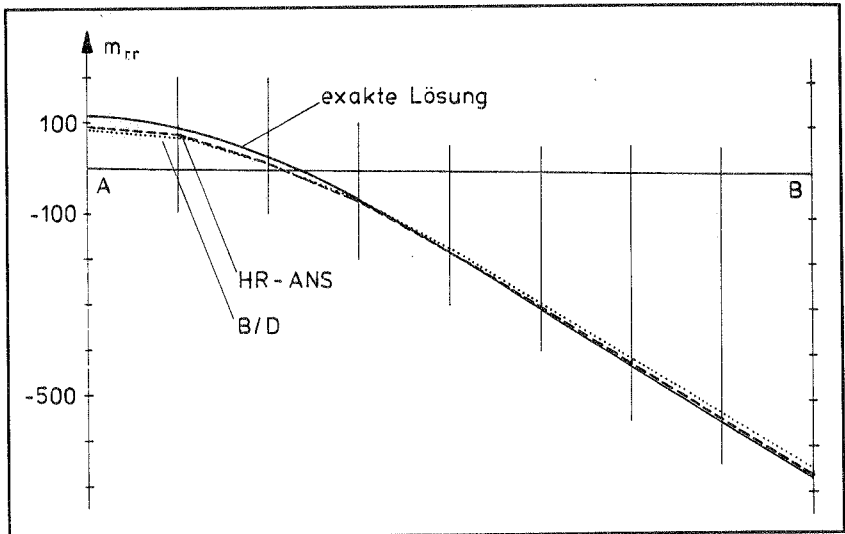


Bild 12.15: Momente m_{rr} der Elemente B/D und HR-ANS entlang der Linie A—B der Scordelis-Lo Schale (8x8 - Netz für das Viertelsystem); exakte Lösung aus [Scordelis, 69].

Die Membranschubkräfte n_{rs} zeigen, wenn man das Element B/D benutzt (Bild 12.16) große Oszillationen, vor allem um den Punkt B herum (die Werte oszillieren in den dortigen Elementen von -17400 bis $+17400$). Diese oszillierenden Verläufe schlucken Energie, und aus diesem Grund hat das Element B/D die etwas geringeren Verschiebungen und Schnittgrößen. Die Berechnung mit HR-ANS Elementen (Bild 12.17) zeigt die quantitativ korrekten Membranschubkräfte (entsprechend dem Ansatz sind die Verläufe in den Elementen abschnittsweise konstant).

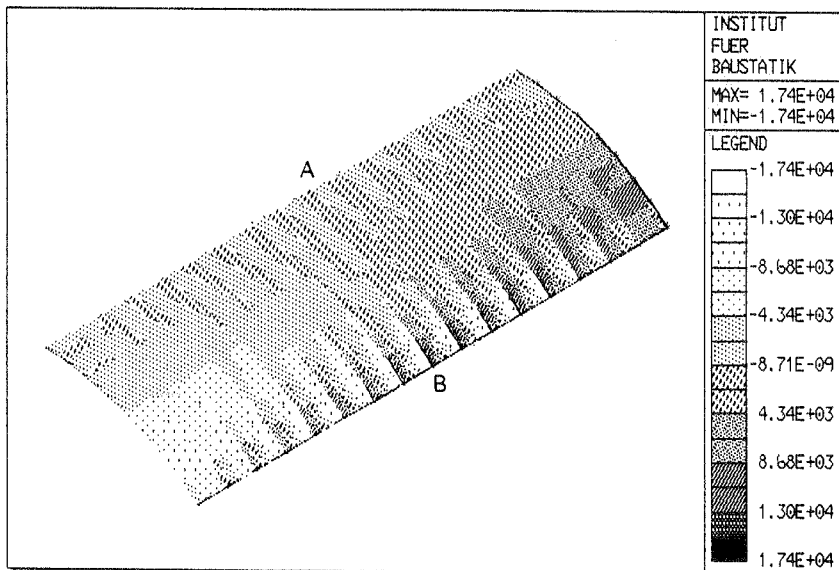


Bild 12.16: Membranschubkräfte n_{rs} für die Scordelis-Lo Schale, berechnet mit dem Element B/D (gezeigt ist das halbe System).

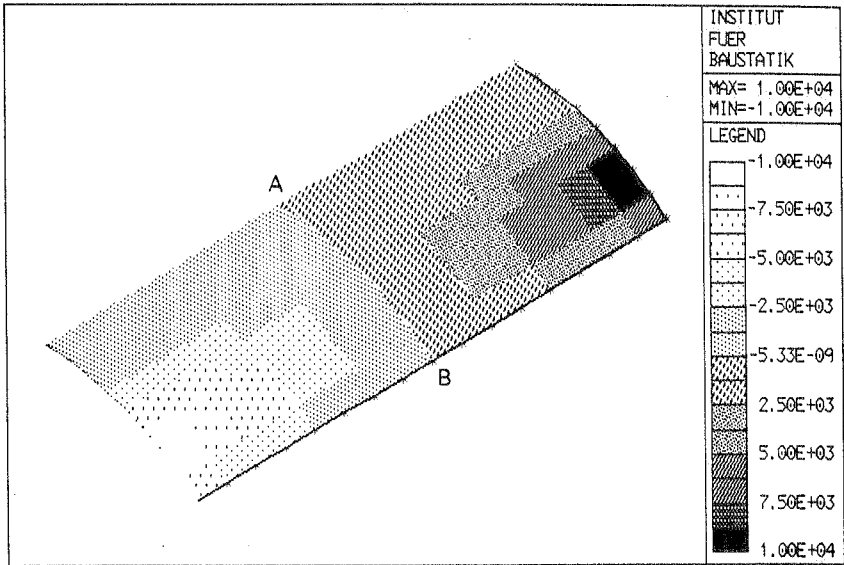


Bild 12.17: Membranschubkräfte n_r für die Scordelis-Lo Schale, berechnet mit dem Element HR-ANS (gezeigt ist das halbe System).

12.10 "Locking" – Test für Schalen

"Locking" – Tests werden meist nur für Platten durchgeführt. In diesem Beispiel zeigt sich jedoch, daß "locking" – freie Plattenanteile bei Anwendungen auf Schalen durchaus zu "locking" führen können.

Untersucht wurden die Verschiebungen und Spannungen eines 90° – Zylinderausschnitts (Bild 12.18), der am oberen Rand eingespannt und am unteren Rand durch ein konstantes Moment belastet ist, wobei die Schalendicke jeweils um den Faktor 10 verringert wurde. Aufgrund des reinen Biegezustands müssen die Verformungen damit um den Faktor 1000 zunehmen.

Für das regelmäßige Elementnetz (Bild 12.19) bringen alle Elemente die gewünschten Verschiebungen und exakten Spannungen (Momente sind konstant, Normal- und Querkkräfte sind Null). Ist das Netz aber derart verzerrt, daß verdrehte Elemente entstehen, so zeigen die Elemente HR-ANS, EAS-ANS und B/D ein deutliches "shear-locking" (Verformungszunahme nur um den Faktor 10) mit hohen Spannungsszillationen.

Um ein "membrane-locking" auszuschließen, wurde zusätzlich das Element 1x1-ANS (Membran- und Biegeanteil sind 1x1 – integriert, der Querschubanteil wurde gemäß der ANS – Formulierung interpoliert) untersucht. Da auch dieses Element versteift,

nicht jedoch das SRI – Element, kann das Versteifen als "shear-locking" der linear verlaufenden Querschubanteile identifiziert werden. Die linearen Querschübe versteifen die konstante Drillung $\kappa_{\xi\eta}$, was bereits in Kapitel 12.2 angesprochen wurde.

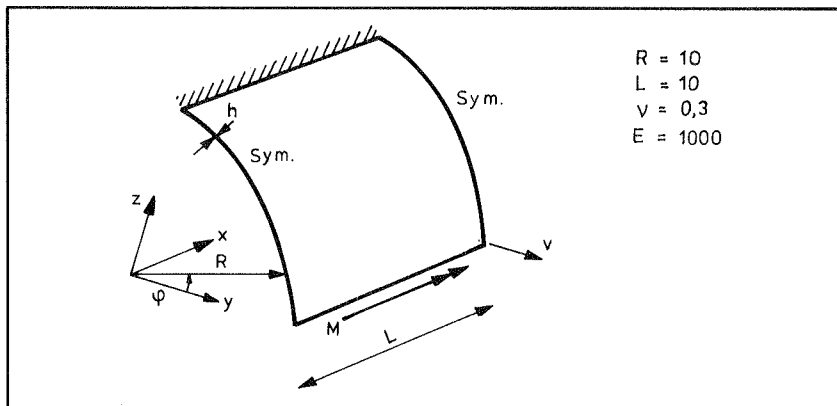


Bild 12.18: 90° – Zylinderausschnitt unter konstantem Moment

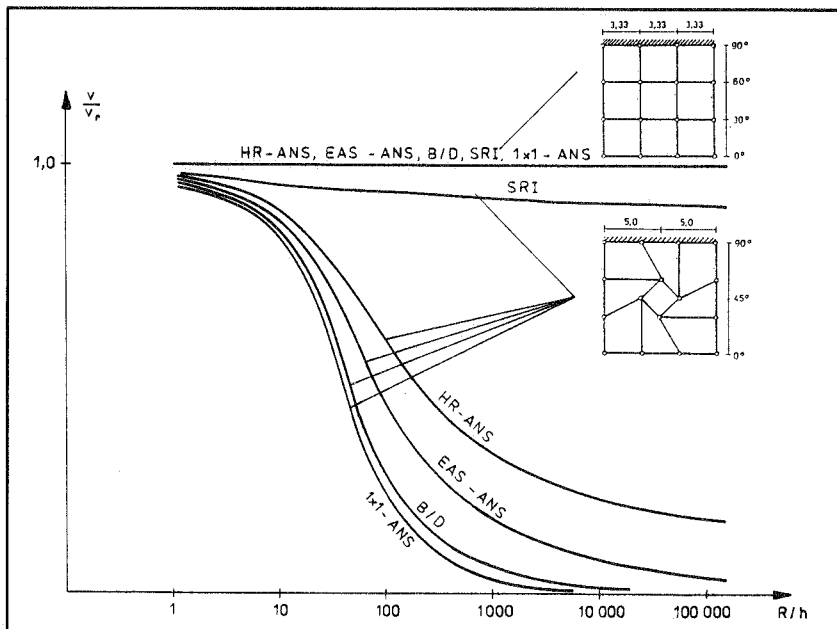


Bild 12.19: "Locking" – Test für vierknotige Schalelemente

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß das "locking" – Problem dann auftritt, wenn die Elemente verdrillt sind und die Drilling $\kappa_{\xi\eta}$ eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt.

12.11 Vorverdrillter Kragarm

Um das Verhalten verdrillter Elemente zu testen, wurde der in Bild 12.20 gezeigte Kragarm ("pretwisted beam") berechnet. Gewählt wurde eine regelmäßige Netzverfeinerung. Die zu dem Wert 0,001754 [MacNeal, 85] normierten Endverschiebungen sind in Tabelle 12.8 aufgelistet.

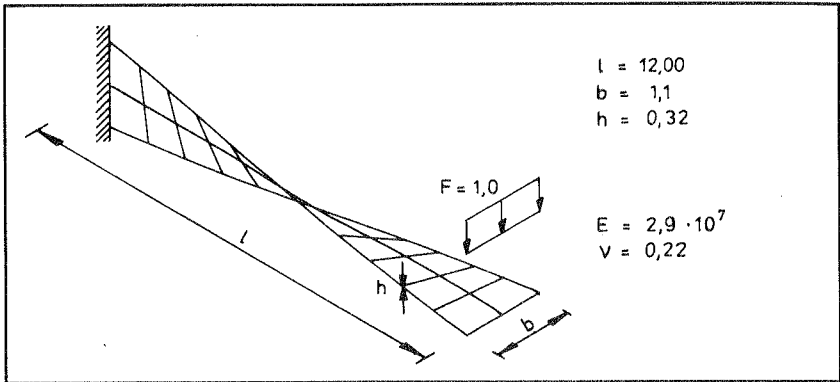


Bild 12.20: Vorverdrillter Kragarm

Die Elemente HR-ANS und EAS-ANS bringen die deutlich besseren Ergebnisse, was die Wichtigkeit einer verbesserten Membranapproximation zeigt. Daß der Querschub trotz der verdrillten Elementgeometrie keine versteifende Wirkung hat, zeigt das fast identische Verhalten der Elemente SRI und B/D. Dies liegt weniger an der Dicke des Kragarms, sondern hauptsächlich daran, daß bei diesem Lastfall die zum "locking" führende Drilling $\kappa_{\xi\eta}$ kaum aktiviert wird. Erst wenn die Elemente auch in der Strukturebene verzerrt werden und damit die Drilling $\kappa_{\xi\eta}$ zur Momentenabtragung aktiviert wird, tritt das im vorigen Beispiel diskutierte "shear - locking" auf.

Netz	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
1x6	0,802	0,801	0,961	0,926
2x12	0,921	0,920	0,987	0,961
4x24	0,975	0,974	0,995	0,982

Tabelle 12.8: Normierte Verschiebung des verdrillten Kragarms
(Vergleichswert: 0,001754 [MacNeal, 85])

Die Überbewertung der Membran- und Querschubsteifigkeiten liegt nicht an der schlechten Abbildung der Geometrie, die eine Art Faltenwirkung hervorrufen könnte, denn auch Berechnungen mit Elementen, die die Geometrie exakt abbilden (siehe zum Beispiel [Gruttmann, 88]), zeigen das gleiche, langsame Konvergenzverhalten. Daß für ein verfeinertes Netz die Schnittkraftverläufe dennoch zufriedenstellend sind (vor allem die Querkraftverläufe fallen bei vielen schubelastischen Platten- und Schalelementen schlecht aus), zeigen die Bilder 12.23 und 12.24.

Netz	URI	SRI	B/D	HR-ANS	EAS-ANS
4x4	0,87738	0,67961	0,66699	0,70027	0,70027
8x8	1,48978	1,36264	1,35055	1,38016	1,38016
16x16	1,76456	1,69427	1,69140	1,70541	1,70541

Tabelle 12.9: Verschiebung $w_B \cdot 10^{-5}$ des Zylinders mit Endscheiben;
(Exakte Lösung: $1,82488 \cdot 10^{-5}$ [Huang, 85])

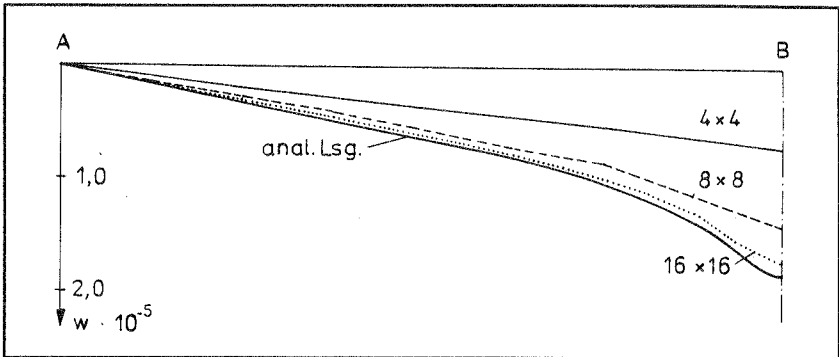


Bild 12.22: Querverschiebung w des Elements HR-ANS entlang der Linie A—B

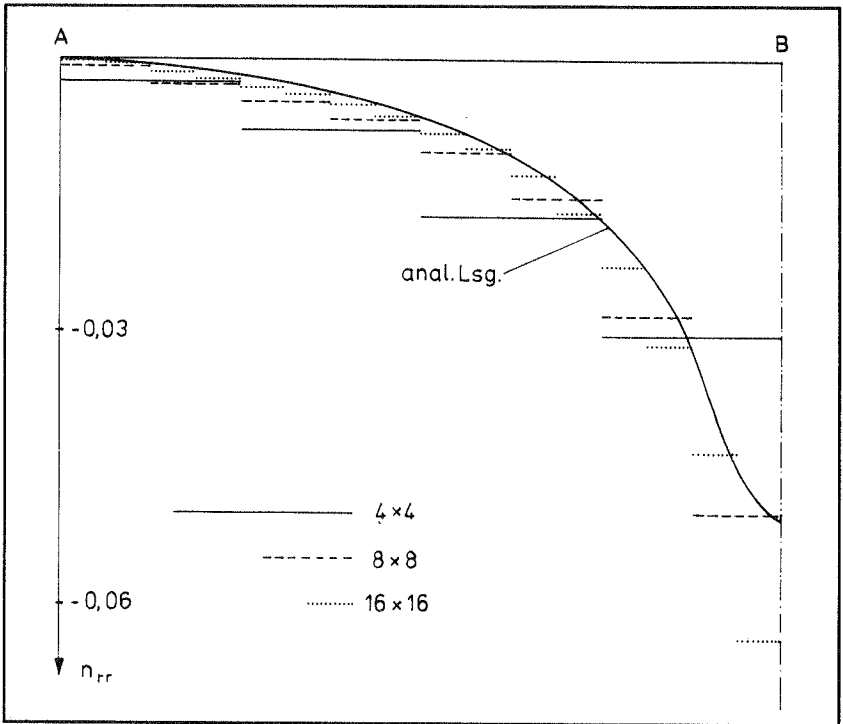


Bild 12.23: Membrankräfte n_{rr} des kurzen Zylinders entlang der Linie A—B, berechnet mit dem Element HR-ANS.

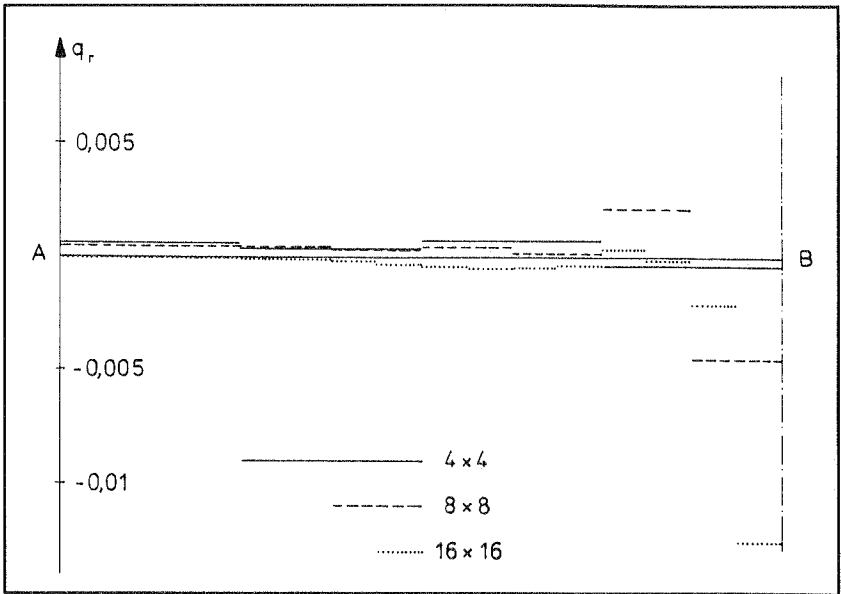


Bild 12.24: Querkräfte q_r des kurzen Zylinders entlang der Linie A--B, berechnet mit dem Element HR-ANS.

12.13 Wassergefüllter Stahlbehälter

In einem abschließenden Beispiel sollen zwei Entwürfe eines wassergefüllten Stahlbehälters analysiert werden (Bilder 12.25 und 12.26). Im ersten Entwurf besteht der Behälter aus einem 8000mm hohen Zylinder und einem unten angesetzten 1500mm hohen Kegelabschnitt, im zweiten Entwurf ist der Übergang vom Zylinder zum Kegel mit einem Rundungsradius $a=2800$ mm ausgerundet. Der 20mm dicke Behälter hat im oberen Teil einen Durchmesser von 8000mm und unten eine kreisrunde Öffnung mit 400mm Durchmesser.

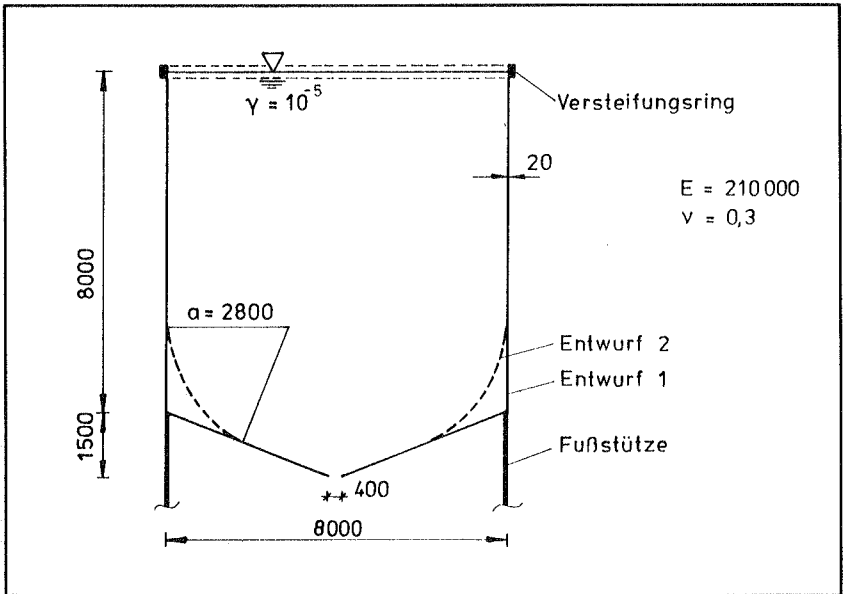


Bild 12.25: Wassergefüllter Stahlbehälter; der Entwurf 2 (ausgerundeter Zylinder-Kegel-Übergang) ist gestrichelt dargestellt.

Der Tank ist vertikal auf vier breiten Fußstützen gelagert, die, wie in Bild 12.26 zu sehen, durch jeweils drei horizontal verschiebbliche Lager idealisiert wurden. Der obere Rand wurde aufgrund des steifen Randträgers als horizontal unverschieblich angenommen.

Aufgrund bestehender Symmetrien kann die Berechnung am Viertelsystem erfolgen. Benutzt wurden für das Viertelsystem acht Elemente in Umfangsrichtung und 31 Elemente in Meridianrichtung. Im Vordergrund der Diskussion steht ein Vergleich der Elemente B/D und HR-ANS, weswegen sämtliche Spannungsbilder ungeglättet dargestellt sind. Die Ergebnisse des Elements EAS-ANS sind nicht gezeigt; sie stimmen mit denen des Elements HR-ANS praktisch überein. Zunächst soll der Entwurf 1, dann der Entwurf 2 diskutiert werden.

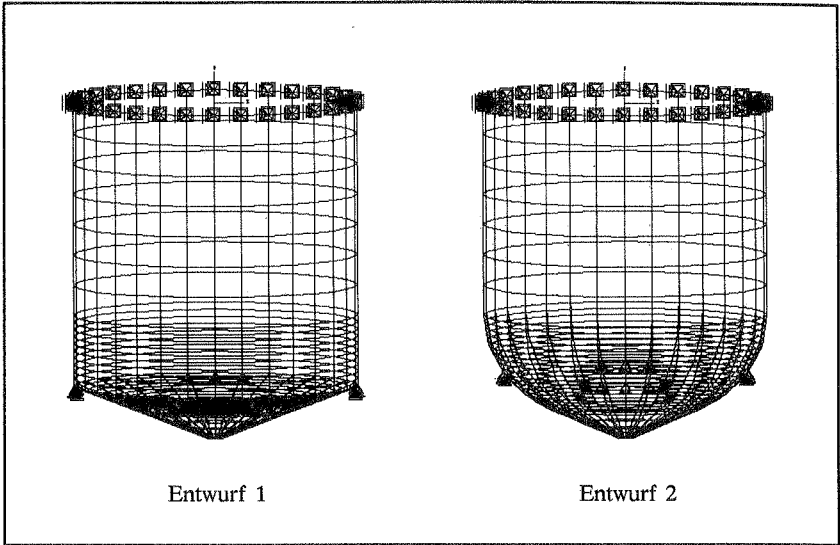


Bild 12.26: Finite Elementmodelle der Entwürfe 1 und 2

12.13.1 Entwurf 1

In den Bildern 12.27 bis 12.30 sind die Meridian- und Ringkräfte n_{ss} und n_{rr} sowie die Meridian- und Ringmomente m_{ss} und m_{rr} für den Entwurf 1 dargestellt, links jeweils für das Element B/D, rechts für das Element HR-ANS.

Bei den Meridiankräften n_{ss} (Druckspannungen über den Vertikallagerungen, Zugspannungen im unteren Bereich und zwischen den Vertikallagern) ergibt sich ein nur geringer Unterschied zwischen den Elementen B/D und HR-ANS. Da sich die Vertikallager nach innen verschieben, entstehen in diesem Bereich bei den Ringkräften n_{rr} hohe Druckkräfte; hier unterscheiden sich die Resultate der beiden Elemente um fast 14%.

Aufgrund dieser Einschnürung entstehen im Übergangsbereich Zylinder-Kegel hohe Meridianmomente. Die Verteilung der Ringmomente m_{rr} ist qualitativ der Verteilung der Meridianmomente ähnlich, da die Ringmomente hauptsächlich durch den Querdehneffekt entstehen. Das Element HR-ANS bringt für die Meridian- als auch für die Ringmomente bis zu 18% höhere Werte. Bei Netzverfeinerung in Meridianrichtung nehmen die Momentenspitzen aufgrund der konzentrierten Lagerung weiter zu, so daß die maximalen Werte mit Vorsicht zu genießen sind.

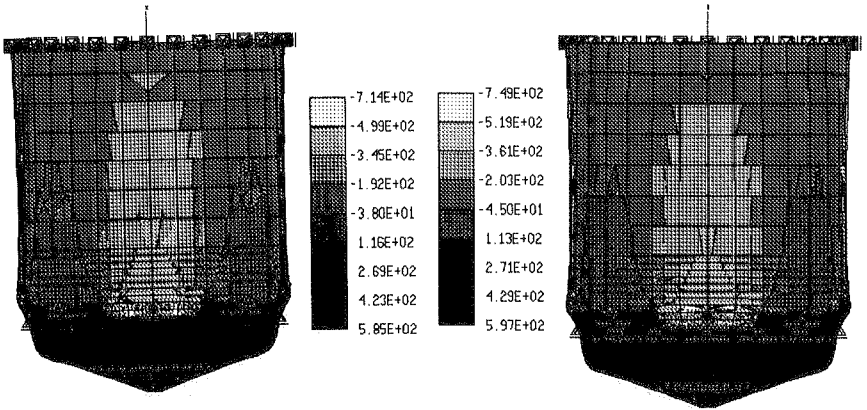


Bild 12.27: Meridiankräfte n_{ss} des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

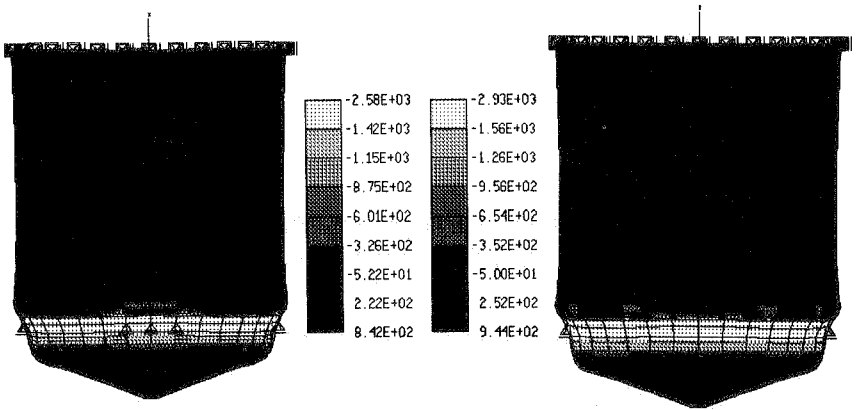


Bild 12.28: Ringkräfte n_{rr} des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

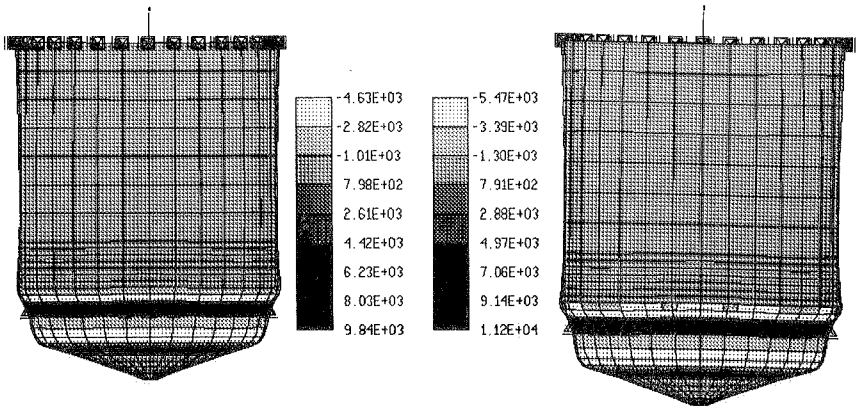


Bild 12.29: Meridianmomente m_{ss} des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

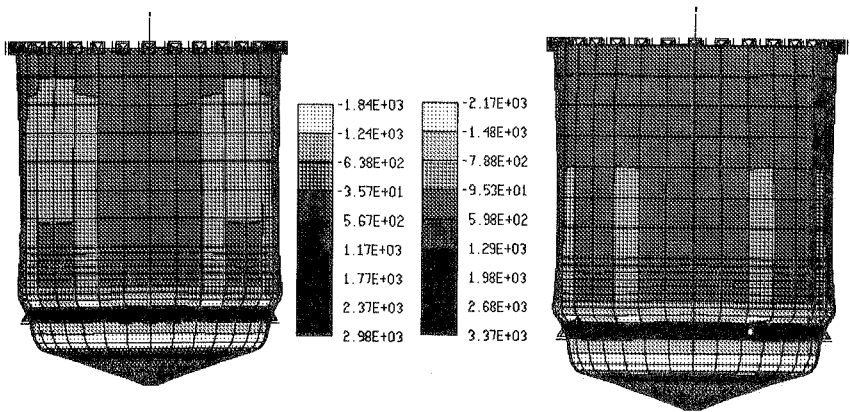


Bild 12.30: Ringmomente m_{rr} des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

Einen Überblick über den Beanspruchungsgrad der Struktur geben die Bilder 12.31 und 12.32 mit den von Mises – Spannungen am Außen- beziehungsweise Innenrand. Deutlich wird die maximale Beanspruchung im Übergangsbereich Zylinder-Kegel, wobei die Resultate des Elements HR-ANS um 10% höher liegen. Zur Bewertung der Ergebnisse wurde eine verfeinerte Berechnung mit der vierfachen Elementanzahl durchgeführt. Für beide Elemente ergaben sich Spannungswerte, die bei den Spitzenwerten bis zu 18% und im Schnitt 6% bis 8% über den jeweiligen, hier gezeigten Werten lagen,

so daß die prinzipiell höheren Ergebnisse des Elements HR-ANS als die genaueren betrachtet werden können.

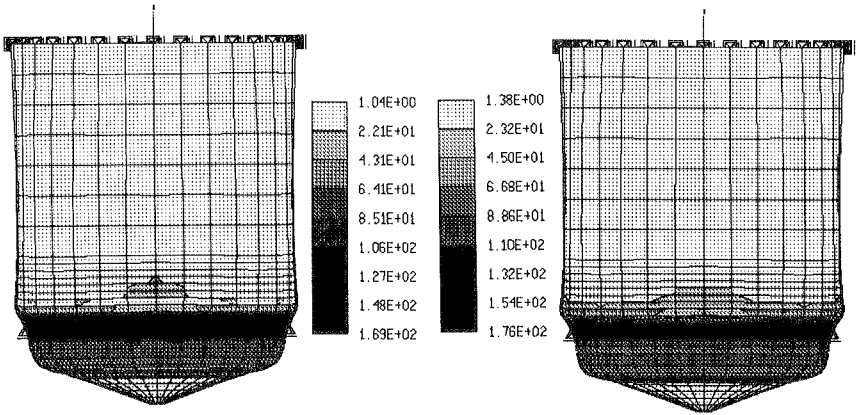


Bild 12.31: Von Mises – Spannungen am Außenrand des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

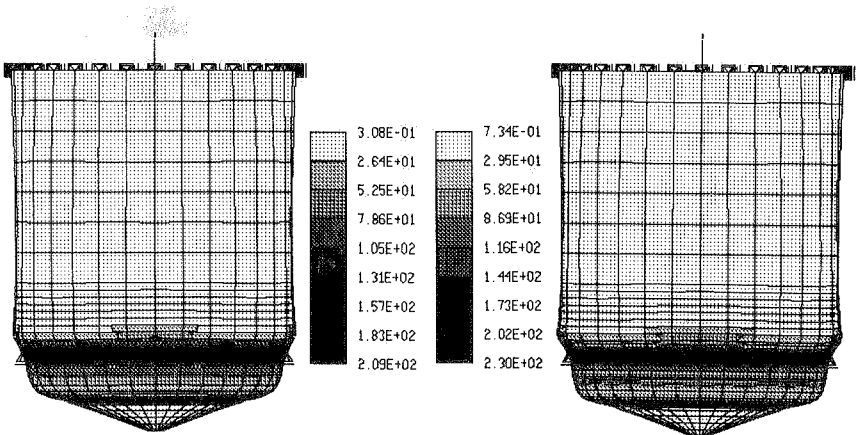


Bild 12.32: Von Mises – Spannungen am Innenrand des Entwurfs 1
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

12.13.2 Entwurf 2

Im Entwurf 2 wurde der Knick im Übergangsbereich Zylinder–Kegel durch eine Ausrundung vermieden. Während sich die Spannungsgrößen im ersten Entwurf in Umfangsrichtung kaum änderten, das heißt sich eher eine axialsymmetrische Spannungsverteilung einstellt, zeigen die sechs Spannungsbilder nun eine hauptsächlich lokale Beanspruchung im Bereich der Vertikallager, allerdings auf einem geringeren Niveau. Die lokale Stützwirkung wurde im Entwurf 1 in gewisser Weise durch die Kraftumlenkung mit hoher Spannungskonzentration im Knick "überspielt".

Die im ersten Modell noch so hohen Momente m_{ss} konnten durch die Ausrundung reduziert werden, was sich letztendlich in deutlich geringeren von Mises – Vergleichsspannungen ausdrückt.

Wie im ersten Entwurf ergibt das Element HR–ANS die deutlich höheren Werte (meist ca. 15%) und liegt damit näher an der exakten Lösung.

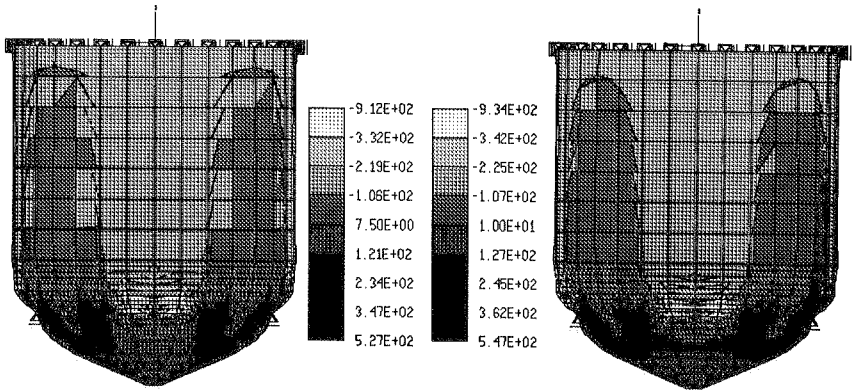


Bild 12.33: Meridiankräfte n_{ss} des Entwurfs 2
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

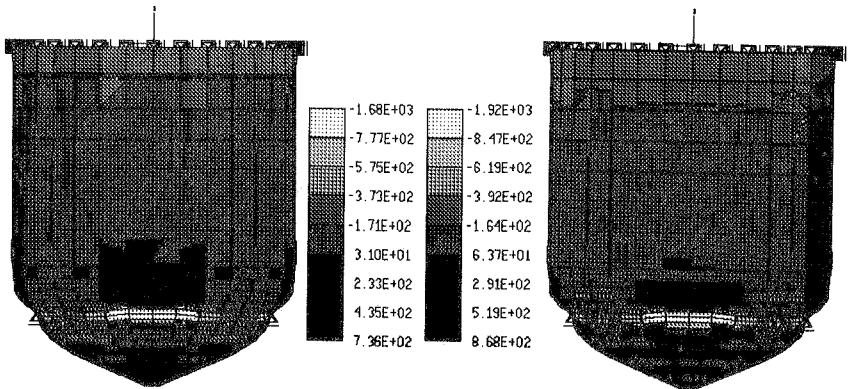


Bild 12.34: Ringkräfte n_{rr} des Entwurfs 2
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

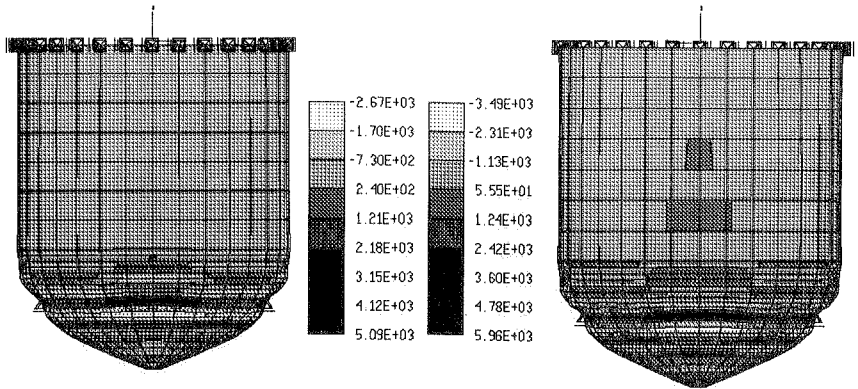


Bild 12.35: Meridianmomente m_{ss} des Entwurfs 2
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

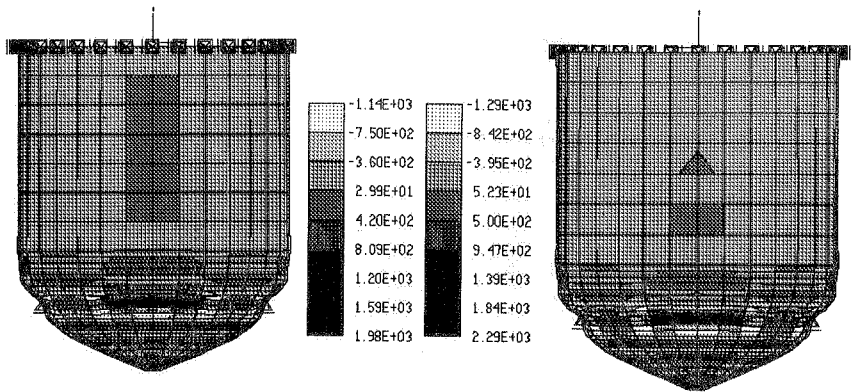


Bild 12.36: Ringmomente m_{rr} des Entwurfs 2
(links Element B/D, rechts Element HR-ANS)

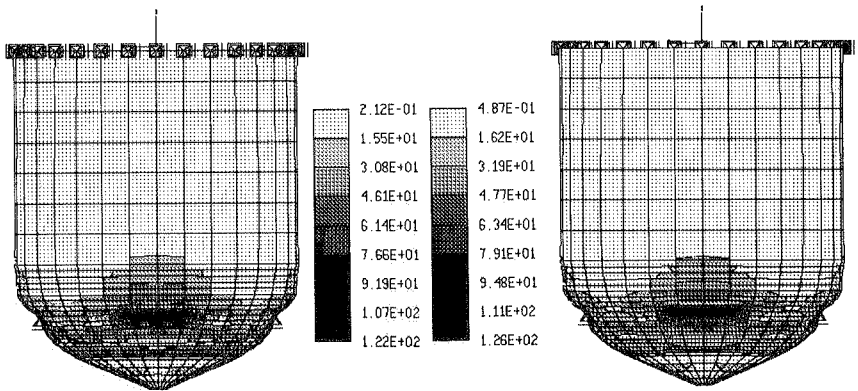


Bild 12.37: Von Mises – Spannungen am Außenrand des Entwurfs 2
(links Element BID, rechts Element HR-ANS)

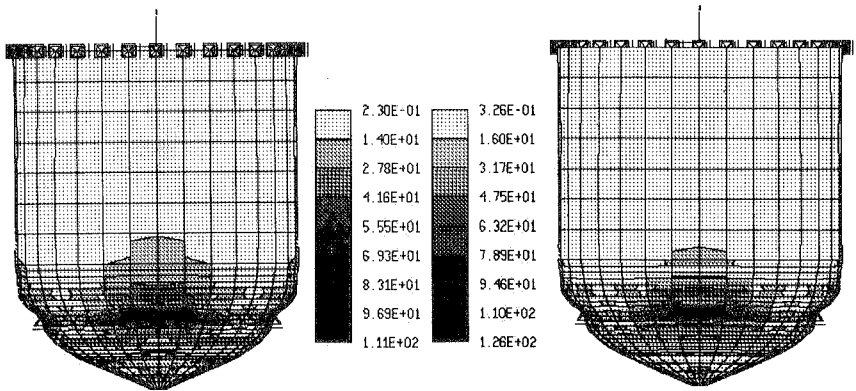


Bild 12.38: Von Mises – Spannungen am Innenrand des Entwurfs 2
(links Element BID, rechts Element HR-ANS)

13 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Ziel dieser Arbeit war die Formulierung robuster vierknotiger Schalenelemente, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- "locking" – frei
- mathematisch stabil
- geringe Empfindlichkeit bei geometrischer Verzerrung

Die Ursache für die verschiedenen "locking"-Arten der Finiten Elemente liegt an einem nicht ausbalancierten Verhältnis zwischen der Anzahl der Verschiebungsformen auf der einen Seite und der Anzahl der Spannungs- oder Verzerrungsformen auf der anderen Seite. Durch dieses unausgeglichene Verhältnis sind reine Biegemodes beziehungsweise reine deviatorische Modes nicht möglich.

Die gewünschte Balance kann mit hybrid-gemischten Formulierungen erreicht werden. Ein zentraler Punkt ist jedoch die Erfüllung der Stabilitätsbedingung, die sich in zwei Teile, die Elliptizitäts- und die Babuska-Brezzi-Bedingung, gliedert. Diese zwei Bedingungen, die eigentlich globale Bedingungen darstellen, können bei hybrid-gemischten Methoden, wo die Spannungs- oder Verzerrungsansätze nicht stetig über die Elementengrenzen hinweg angesetzt werden, auf Elementebene überprüft werden.

Die Erfüllung der Elliptizitätsbedingung bei kompressibler Elastizität macht keine Schwierigkeiten; die Spannungs- oder Verzerrungsansätze müssen lediglich linear unabhängig sein. Die Babuska-Brezzi-Bedingung fordert, daß für die Verschiebungsmodes die entsprechenden "Partner" bei den Spannungen beziehungsweise Verzerrungen vorhanden sind. Durch eine mechanische Deutung konnte eine Hilfe in Form einer tabellarischen Untersuchung zur Konstruktion von stabilen, aber auch versteifungsfreien Elementen gegeben werden. In der tabellarischen Untersuchung wird – allerdings nur für den ξ - η -Parameterraum – überprüft, ob für jeden Verschiebungsmode (Starrkörperverschiebungen ausgeschlossen) ein entsprechender "Arbeitspartner" bei den Spannungen oder Verzerrungen vorhanden ist.

Als Alternativen zur Verschiebungsmethode wurden vier hybrid-gemischte Formulierungen diskutiert, die allesamt trotz des gemischten Ansatzes zu einer Elementsteifigkeitsmatrix führen:

1. Die "assumed natural strain" – Formulierung

Grundidee ist eine Reduktion der Verzerrungsfelder des Verschiebungsmodells, wobei das Ziel die Elimination der versteifenden Anteile ist. Da die neuen Verzerrungsfelder an Kollokationspunkten direkt aus den Feldern der Verschiebungsab-

leitungen berechnet werden, benötigen die Verzerrungsfelder keine eigenen Freiwerte; der Charakter des Verschiebungsmodells bleibt erhalten. Daß der Methode das Prinzip von Hu-Washizu zugrundeliegt, konnte in einfacher Form gezeigt werden.

2. Die Hellinger-Reissner – Formulierung

Ausgangspunkt dieser Formulierung ist das Prinzip von Hellinger-Reissner. Eingeführt werden neben den Verschiebungsansätzen Spannungsansätze. Aufgrund der diskontinuierlichen Spannungsansätze können die Spannungsfreiwerte auf Elementebene herauskondensiert werden, was zu einer Elementsteifigkeitsmatrix führt.

3. Die "enhanced assumed strain" – Formulierung

Das "enhanced assumed strain" – Konzept ist, was den Ansatz betrifft, dem "assumed natural strain" – Konzept sehr ähnlich; die sich aus den Verschiebungsableitungen ergebenden Verzerrungsfelder werden allerdings nicht reduziert, sondern durch zusätzliche Felder erweitert. Zu einer Elementsteifigkeitsmatrix gelangt man wiederum durch Elimination der Verzerrungsfreiwerte.

Daß die Formulierung die Methode der inkompatiblen Verschiebungsmodes als Sonderfall enthält, wird deutlich, wenn man die erweiterten Verzerrungsfelder mit den Verzerrungsfeldern identifiziert, die sich aus den abgeleiteten inkompatiblen Verschiebungsmodes ergeben.

4. Die Hu-Washizu – Formulierung

Anhand der echten Dreifeldformulierung wurde zum einen das Problem der "zero-energy-modes" diskutiert. Es konnte gezeigt werden, daß "zero-energy-modes" nicht nur für die Verschiebungen ($ZEM_{(u)}$) sondern – wenn die entsprechenden Arbeitspartner fehlen – auch für die Verzerrungen ($ZEM_{(\epsilon)}$) oder für die Spannungen ($ZEM_{(\sigma)}$) entstehen können. Zum anderen wurden bei den Dreifeldformulierungen die Einflüsse der Felder aufeinander diskutiert. Für eine praktische Anwendung ist die Dreifeldapproximation aber zu aufwendig.

Die numerischen Beispiele in Kapitel 8 und 12 haben gezeigt, daß es nicht *eine beste* Formulierung gibt, sondern daß je nach Art des Finiten Elements das eine oder andere Konzept günstiger ist. Bei der Formulierung eines vierknotigen Schalenelements können – getrennt für Membran-, Biege- und Querschubanteil – die folgenden Formulierungen vorteilhaft eingesetzt werden:

Membran- und Biegeanteil: Die beiden Anteile können aufgrund der ähnlichen Differentialbeziehungen gleichartig formuliert werden. Die Hellinger-Reissner-

und die "enhanced assumed strain"-Formulierung eignen sich hervorragend. Die "assumed natural strain"-Formulierung ist weniger geeignet, da die Verzerrungsfelder des Membran- oder Biegeanteils nicht einfach reduziert werden können. Zum Beispiel sind für ein optimales Vierknotenelement vollständig lineare Membranverzerrungsfelder notwendig.

Querschubanteil: Für den Querschubanteil kann die "assumed natural strain"-Formulierung eingesetzt werden. Die Reduktion der Querschubverzerrungen zu konstant-linearen Feldern führt zu "locking"-freien Elementen. Es wurde gezeigt, daß das Konzept einer B-bar-Methode entspricht, so daß der Aufwand dem der reinen Verschiebungsformulierung entspricht. Weniger geeignet sind die Hellinger-Reissner - beziehungsweise die "enhanced assumed strain"-Formulierung, da beliebig verzerrbare "locking"-freie Elemente nur mit Hilfe besonderer Projektionsoperatoren [Wang, 89] formuliert werden können.

Aufbauend auf den obigen Ausführungen wurden zwei Schalenelemente formuliert, die eine Verbesserung des Bathe-Dvorkin-Elements darstellen. Für das Element HR-ANS wurde der in [Pian, 84] gewählte Ansatz für den Membran- und Biegeanteil gewählt. Geringfügig bessere Resultate könnten mit höherwertigeren Spannungsansätzen und zusätzlichen inkompatiblen Verschiebungsansätzen erzielt werden, der zusätzliche Aufwand ist jedoch nicht vertretbar. Das Element EAS-ANS hat einen jeweils vierparametrischen Ansatz für die erweiterten Verzerrungsfelder des Membran- und Biegeanteils, was zu vollständig linearen Verzerrungsfeldern führt. Für den Querschubanteil wurde - analog zu dem Element von Bathe und Dvorkin - jeweils das "assumed natural strain"-Konzept benutzt.

Die Verbesserung der beiden Elemente gegenüber dem Bathe-Dvorkin-Element wird vor allem bei groben Diskretisierungen deutlich (siehe zum Beispiel die Ergebnisse der Morley-Platte oder des vorverdrillten Kragarms), bei feiner werdendem Netz ist der Unterschied meist gering. Der eigentliche Vorteil der Elemente HR-ANS beziehungsweise EAS-ANS steckt jedoch in nicht oszillierenden Schnittkraftverläufen (siehe Scordelis-Lo-Schale).

Da für materiell nichtlineare Probleme "assumed stress"-Prinzipien eher ungeeignet sind (Werkstoffgesetze sind meist in der Form $\sigma = C\epsilon$ gegeben, oder in der Plastizität werden die Algorithmen über Verzerrungen gesteuert), scheint das Element EAS-ANS am attraktivsten.

Einziges Problem bleibt das "shear-locking", das bei verdrillten Elementen auftritt. Dieses "locking" liegt an einer Kopplung zwischen der konstanten Drillung und den linear veränderlichen Querschüben. Ein "locking"-freies Verhalten konnte hier nur

durch eine Unterintegration der Querschubanteile (Reduktion auf konstante Felder) erreicht werden. Abhilfe könnte aber auch das Benutzen eines modifizierten Schubkorrekturfaktors schaffen (siehe [Tessler, 85]), der die zu hohen Querschubsteifigkeiten verdrehter Elemente korrigiert.

14 LITERATUR

- [Ahmad, 70] Ahmad, S., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 419-451.
- [Andelfinger, 89] Andelfinger, U., Matzenmiller, A. and Ramm, E., "Hybrid-Mixed Four-Node Shell Elements, Different Two-Field Assumptions and a Stability Test", in: *Analytical and Computational Models of Shells* (A.K. Noor et al., eds.), ASME Special Publication, 1989.
- [Andelfinger, 90] Andelfinger, U. and Ramm, E., "Assumed Strain Elements with Optimal Interpolation", *Proceedings of the IUTAM/IACM Symposium on Discretization Methods in Structural Mechanics* (G. Kuhn, H. Mang, eds.), Springer-Verlag, 1990.
- [Arantes, 77] de Arantes Oliveira, E. R., "The Patch Test and the General Convergence Criteria of the Finite Element Method", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13 (1977), pp. 159-178.
- [Arnold, 88] Arnold, D. N. and Falk, R. S., "A Uniformly Accurate Finite Element Method for the Mindlin-Reissner Plate", *SIAM J. Numer. Anal.*, special issue for Jim Douglas, 1988.
- [Atluri, 83] Atluri, S. N., Tong, P. and Murakawa, H., "Recent Studies in Hybrid and Mixed Finite Element Methods in Mechanics", in: "Hybrid and Mixed Finite Element Methods" (S. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, eds.), Wiley, New York, 1983.
- [Babuska, 73] Babuska, I., "The Finite Element Method with Lagrange Multipliers", *Numerische Mathematik*, Vol. 20, 1973, pp. 179-192.
- [Barlow, 76] Barlow, J., "Optimal Stress Locations in Finite Element Models", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 10, 1976, pp. 243-251.
- [Bathe, 82] Bathe, K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., 1982.
- [Bathe, 83] Bathe, K. J., Dvorkin, E. and Ho, L. W., "Our Discrete Kirchhoff and Isoparametric Elements for Nonlinear Analysis - An Assessment", *Computers & Structures*, Vol. 16, 1983, pp. 89-98.
- [Bathe, 85/1] Bathe, K. J. and Brezzi, F., "On the Convergence of a Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", *Proceedings Conf. on Mathematics of Finite Elements and Applications V* (J. R. Whiteman, ed.), Academic Press, pp. 99.491-503, 1985.
- [Bathe, 85/2] Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N., "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation",

- Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1985, pp. 367-383.
- [Bathe, 86] Bathe, K. J. and Dvorkin, E., "A Formulation of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, 1986, pp. 697-722.
- [Batoz, 80] Batoz, J. L., Bathe, K. J. and Ho, L. W., "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1980, pp. 1771-1812.
- [Belytschko, 83] Belytschko, T. and Tsay, C. S., "A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1983, pp. 405-420.
- [Belytschko, 85] Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N. and Ong, J. S.-J., "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 51, 1985, pp. 221-258.
- [Belytschko, 86] Belytschko, T. and Bachrach, W. E., "Efficient Implementation of Quadrilaterals with High Coarse-Mesh Accuracy", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 54, 1986, pp. 279-301.
- [Belytschko, 89] Belytschko, T., Wong, B. L. and Stolarski, H., "Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-Node Lagrange Shell Element", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 1989, pp. 385-414.
- [Bergan, 81] Bergan, P. G., "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 1981, pp. 154-155.
- [Bicanic, 79] Bicanic, N. and Hinton, E., "Spurious Modes in Two Dimensional Isoparametric Elements", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 1979, pp. 1545-1557.
- [Brezzi, 74] Brezzi, F., "On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrange Multipliers", RAIRO, 8 (r-2), 1974, pp. 129-151.
- [Brezzi, 86] Brezzi, F. and Bathe, K. J., "Studies of Finite Element Procedures - The Inf-Sup Condition, Equivalent Forms and Applications", in: "Reliability of Methods for Engineering Analysis" (K. J. Bathe and D. R. J. Owen, eds.), Pineridge Press, Swansea, 1986.
- [Brezzi, 89] Brezzi, F., Bathe, K. J. and Fortin, M., "Mixed-Interpolated Elements for Reissner-Mindlin Plates", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 1989, pp. 1787-1801.

- [Brezzi, 90] Brezzi, F. and Bathe, K. J., "A Discourse on the Stability Conditions for Mixed Finite Element Formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (im Druck).
- [Briassoulis, 89] Briassoulis, D., "The C^0 Shell, Plate and Beam Elements Freed from their Deficiencies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, 1989, pp. 243-266.
- [Büchter, 90] Büchter, N. and Ramm, E., "Shell Theory versus Degeneration – A Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis", submitted to *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 1990.
- [Bufler, 83] Bufler, H., "On the Work Theorems for Finite and Incremental Elastic Deformations with Discontinuous Fields: A Unified Treatment of Different Versions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 36, 1983, pp. 95-124.
- [Carey, 83] Carey, G. F. and Oden, J. T., "Finite Elements: A Second Course", Vol. II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [Chen, 87] Chen, W. and Cheung, Y. K., "A New Approach for the Hybrid Element Method", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp. 1697-1709.
- [Cook, 77] Cook, R. D., "Ways to Improve the Bending Response of Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 1029-1039.
- [Crisfield, 83] Crisfield, M. A., "A Four-Noded Thin-Plate Element Using Shear Constraints – A Modified Version of Lyons' Element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 38, 1983, pp. 93-120.
- [Crisfield, 84] Crisfield, M. A., "A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 18, 1984, pp. 833-852.
- [Dvorkin, 84] Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J., "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", *Engineering Computations*, No. 1, 1984, pp. 77-88.
- [Dvorkin, 89] Dvorkin, E. N. and Vassolo, S. I., "A Quadrilateral 2-D Finite Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components", *Engineering Computations*, Vol. 6, 1989, pp. 217-224.
- [Eisele, 89] Eisele, S., "Eigenwertuntersuchungen von hybrid – gemischten Finiten Elementen", Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- [Felippa, 89] Felippa, C. A. and Militello, C., "Developments in Variational Methods for High Performance Plate and Shell Elements", in: "Ana-

- lytical and Computational Models of Shells" (A. K. Noor et al. eds.), ASME Special Publication, 1989.
- [Fraeijs, 65] Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method", in: "Stress Analysis" (O. C. Zienkiewicz, G. C. Holister, eds.), Wiley, London, 1965.
- [Fraeijs, 74] Fraeijs de Veubeke, B., "Variational Principles and the Patch Test", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 8, 1974, pp. 783-801.
- [Franca, 88] Franca, L. P. and Hughes, T. J. R., "Two Classes of Mixed Finite Element Methods", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, 1988, pp. 89-129.
- [Franca, 90] Franca, L. P., "On the Superconvergence of the Satisfying Babuska - Brezzi Method", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 1990, p. 1715-1726.
- [Frey, 89] Frey, F., "Shell Finite Elements with Six Degrees of Freedom per Node", in: Analytical and Computational Models of Shells (A.K. Noor et al., eds.), ASME Special Publication, 1989.
- [Fried, 73] Fried, I., "Shear in $C(0)$ and $C(1)$ Bending Finite Elements", J. Solids & Structures, Vol. 9, 1973, pp. 449-460.
- [Gruttmann, 88] Gruttmann, F., "Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen", Dissertation, Bericht-Nr. F 88/1, IBNM, Universität Hannover, 1988.
- [Hackbusch, 86] Hackbusch, W., "Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen", Teubner Studienbücher, Teubner Verlag, 1986.
- [Hartmann, 86] Hartmann, F., "The Discrete Babuska - Brezzi Condition", Ingenieur-Archiv 56, 1986, pp. 221-228.
- [Hinton, 74] Hinton, E. and Campbell, J. S., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, 1974, pp. 461-480.
- [Huang, 84] Huang, H. C. and Hinton, E., "A Nine-Node Lagrange Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation", Engineering Computations, Vol. 1, 1984, pp. 369-379.
- [Huang, 85] Huang, H. C., "Defect-Free Shell Elements", Ph.D. Dissertation, Dept. of Civil Engineering, University College of Swansea, 1985.
- [Huang, 86] Huang, H. C. and Hinton, E., "A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, 1986, pp. 73-92.

- [Hughes, 77] Hughes, T. J. R., Taylor, R. C. and Kanoknukulchai, W., "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 1529-1547.
- [Hughes, 78/1] Hughes, T. J. R. and Cohen, M., "The Heterosis Finite Element for Plate Bending", *Computers & Structures*, Vol. 9, 1978, pp. 445-450.
- [Hughes, 78/2] Hughes, T. J. R., Cohen, M. and Haroun, M., "Reduced and Selective Integration Techniques in Finite Element Analysis of Plates", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 46, 1978, pp. 203-222.
- [Hughes, 80] Hughes, T. J. R., "Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 1413-1418.
- [Hughes, 81/1] Hughes, T. J. R. and Tezduyar, T. E., "Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Isoparametric Element", *J. Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, pp. 587-596.
- [Hughes, 81/2] Hughes, T. J. R. and Liu, W. K., "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I: Three-Dimensional Shells", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 26, 1981, pp. 331-362.
- [Hughes, 81/3] Hughes, T. J. R. and Liu, W. K., "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part II: Two-Dimensional Shells", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 27, 1981, pp. 167-182.
- [Hughes, 87] Hughes, T. J. R., "The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [Irons, 72] Irons, B. M. and Razzaque, A., "Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Element Method", in: "Mathematical Foundations of the Finite Element Method" (A. K. Aziz, ed.), Academic Press, pp. 557-587, 1972.
- [Irons, 76] Irons, B. M., "The Semiloof Shell Element", in: "Finite Elements for Thin Shells and Curved Membranes" (D. G. Ashwell, R. H. Gallagher, eds.), Wiley, New York, 1976, pp. 197-222.
- [Irons, 80] Irons, B. M. and Ahmad, S., "Techniques of Finite Elements", Horwood, Chichester, 1980.
- [Jacquotte, 86] Jacquotte, O. P. and Oden J. T., "An Accurate and Efficient a Posteriori Control of Hourglass Instabilities in Underintegrated Linear and Nonlinear Elasticity", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, 1986, pp. 105-128.
- [Lee, 78] Lee, S. W. and Pian, T. H. H., "Improvement of Plate and Shell Finite Element by Mixed Formulations", *AIAA Journal*, Vol. 16, 1978, pp. 29-34.

- [Liu, 86] Liu, W. K., Law, S. E., Lam, D. and Belytschko, T., "Resultant-Stress Degenerated-Shell Element", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, 1986, pp. 259-300.
- [MacNeal, 78] MacNeal, R. H., "A Simple Quadrilateral Shell Element", *Computers & Structures*, No. 8, 1978, pp. 175-183.
- [MacNeal, 82] MacNeal, R. H., "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strain Distributions", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 70, 1982, pp. 3-12.
- [MacNeal, 85] MacNeal, R. H. and Harder, R. L., "A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy", *Finite Elements Anal. Des.*, Vol. 11, 1985, pp. 3-20.
- [Malkus, 78] Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., "Mixed Finite Element Methods. Reduced and Selective Integration Techniques; A Unification of Concepts", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 15, 1978, pp. 63-81.
- [Malvern, 69] Malvern, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [Mang, 77] Mang, H. A. and Gallagher, R. H., "A Critical Assessment of the Simplified Hybrid Displacement Method", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 145-167.
- [Matzenmiller, 88] Matzenmiller, A., "Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen", Dissertation, Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- [Militello, 90] Militello, C. and Felippa, C. A., "A Variational Justification of the Assumed Natural Strain Formulation of Finite Elements - Part II: The C^0 Four-Node Plate Element", *Computers and Structures*, Vol. 34, No. 3, 1990, pp. 439-444.
- [Mindlin, 51] Mindlin, R. D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", *J. Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, pp. 31-38.
- [Nagtegaal, 74] Nagtegaal, J. C., Parks, D. M. and Rice, J. R., "On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 4, 1974, pp. 153-177.
- [Oden, 83] Oden, J. T. and Reddy, J. N., "Variational Methods in Theoretical Mechanics", 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Parisch, 79] Parisch, H., "A Critical Survey of the 9-Node Degenerated Shell Element with Special Emphasis on Thin Shell Application and Reduced Integration", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 20, 1979, pp. 323-350.

- [Parks, 86] Parks, K. C. and Stanley, G. M., "A Curved C^0 Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains", *J. Appl. Mech.*, Vol. 53, 1986, No. 2, pp. 278-290.
- [Pawsey, 71] Pawsey, S. F. and Clough, R. W., "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1971, pp. 575-586.
- [Pian, 64] Pian, T. H. H., "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions", *AIAA J.*, Vol. 2, 1964, pp. 1333-1336.
- [Pian, 82] Pian, T. H. H. and Chen, D. P., "Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1982, pp. 1679-1684.
- [Pian, 83] Pian, T. H. H. and Chen, D. P., "On the Suppression of Zero Energy Deformation Modes", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 1741-1752.
- [Pian, 84] Pian, T. H. H. and Sumihara, K., "Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 1685-1695.
- [Pian, 88/1] Pian, T. H. H. and Wu, C.C., "A Rational Approach for Choosing Stress Terms for Hybrid Finite Element Formulations", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 2331-2343.
- [Pian, 88/2] Pian, T. H. H., "Overview of Hybrid Finite Element Methods for Solid Mechanics", *Proceedings of the Int. Conf. on Comp. Eng. Science* (S. N. Atluri, G. Yagawa, eds.), Springer-Verlag, 1988.
- [Pinsky, 87] Pinsky, P. M. and Jang, J., "A C^0 -Elastoplastic Shell Element Based on Assumed Covariant Strain Interpolations", *Proceedings of the Int. Conference NUMETA '87* (G. N. Pande, J. Middleton, eds.), Swansea, 1987.
- [Prathap, 88] Prathap, G. and Somashekar, B. R., "Field- and Edge-Consistency Synthesis of a 4-Noded Quadrilateral Plate Bending Element", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 1693-1708.
- [Pugh, 78] Pugh, E. D. L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C., "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced Integration' ", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1978, pp. 1059-1079.
- [Punch, 84] Punch, E. F. and Atluri, S. N., "Applications of Isoparametric Three-Dimensional Hybrid Stress Finite Elements with Least Order Stress Fields", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 3, 1984, pp. 409-430.

- [Ramm, 76] Ramm, E., "Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente", Habilitation, Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [Ramm, 77] Ramm, E., "A Plate/Shell Element for Large Deflections and Rotations", US-Germany Symposium on "Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis", (K. J. Bathe, J. T. Oden and W. Wunderlich, eds.), MIT-Press, Cambridge, Massachusetts, 1977, pp. 264-293.
- [Reissner, 45] Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", J. Applied Mechanics, Vol. 12, 1945, pp. 69-76.
- [Rhu, 87] Rhu, J. J. and Lee, S. W., "A New Efficient Mixed Formulation for Thin Shell Finite Element Models", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, pp. 581-604.
- [Rubinstein, 83] Rubinstein, R., Punch, E. F. and Atluri, S. N., "An Analysis of, and Remedies for, Kinematic Modes in Hybrid Stress Finite Elements: Selection of Stable, Invariant Stress Fields", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 38, 1983, pp. 63-92.
- [Saleeb, 87] Saleeb, A. F., Chang, T. Y. and Graf, W., "A Quadrilateral Shell Element Using a Mixed Formulation", Computers & Structures, Vol. 26, No. 5, 1987, pp. 787-803.
- [Scordelis, 69] Scordelis, A.C., Lo, K.S., "Computer Analysis of Cylindrical Shells", J. Amer. Concr. Inst. 61, 1969, 539-561.
- [Simo, 86] Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., "On Variational Foundations of Assumed Strain Methods", J. Applied Mechanics, Vol. 53, 1986, pp. 51-54.
- [Simo, 89/1] Simo, J. C., Fox, D. D. and Rifai, M. S., "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model, Part II: The Linear Theory; Computational Aspects", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 73, 1989, pp. 53-92.
- [Simo, 89/2] Simo, J. C., Kennedy, J. G. and Taylor, R. L., "Complementary Mixed Finite Element Formulations of Elastoplasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 74, 1989, pp. 177-206.
- [Simo, 90] Simo, J. C. and Rifai, M.S., "A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 1990, pp. 1595-1638.
- [Specht, 88] Specht, B., "Modified Shape Functions for the Three-Node Plate Bending Element Passing the Patch Test", Int. J. Num. Mech. Eng., Vol. 26, 1988, pp. 705-715.

- [Stander, 89] Stander, N., Matzenmiller, A. and Ramm, E., "An Assessment of Assumed Strain Methods in Finite Rotation Shell Analysis", *Engineering Computations*, Vol. 6, No. 1, 1989, pp. 58-66.
- [Stanley, 86] Stanley, G. M., "Continuum-Based Shell Elements", Ph. D. Thesis, Stanford University, Palo Alto, California, 1986.
- [Stolarski, 82] Stolarski, H. and Belytschko, T., "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 49, 1982, pp. 172-176.
- [Stolarski, 85] Stolarski, H. and Belytschko, T., "Limitation Principles for Mixed Finite Elements Based on the Hu-Washizu Variational Formulation", in: "Mixed and Hybrid Finite Element Methods" (R. L. Spilker and K. W. Reed, eds.), The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1985, pp. 123-132.
- [Stolarski, 86] Stolarski, H. and Belytschko, T., "On the Equivalence of Mode Decomposition and Mixed Finite Elements Based on the Hellinger-Reissner Principle; Part I: Theory" *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, 1986, pp. 249-265.
- [Stummel, 80] Stummel, F., "The Limitations of the Patch Test", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 177-188.
- [Taylor, 76] Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., "A Non-Conforming Element for Stress Analysis", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 1211-1220.
- [Taylor, 86] Taylor, R.L., Simo, J.C., Zienkiewicz, O.C. and Chan, A.C.H., "The Patch Test - a Condition for Assessing FEM Convergence", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, 1986, pp. 39-62.
- [Tessler, 85] Tessler, A. and Hughes, T.J.R., "A Three Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, 1985, pp. 71-101.
- [Tong, 86] Tong, L. Y., "An Optimally Controlled Four-Node Quadrilateral Element for Reissner-Mindlin Plate", *Proceedings of the Int. Conf. on Computational Mechanics*, May 25-29, 1986, Tokyo, P.I-157-I-162.
- [Tong, 88] Tong, L. Y., "On Variational Principles of Elastic Mechanics", *Proceedings of the Int. Conf. on Comp. Eng. Science* (S. N. Atluri, G. Yagawa, eds.), Springer Verlag, 1988.
- [Tong, 69] Tong, P. and Pian, T. H. H., "A Variational Principle and the Convergence of a Finite-Element Method Based on Assumed Stress Distribution", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 5, 1969, pp. 463-472.

- [Verhegghe, 86] Verhegghe, B. and Powell, G. H., "Control of Zero-Energy Modes in 9-Node Plane Element", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp. 863-870.
- [Wachspress, 81] Wachspress, E. L., "High-Order Curved Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp. 735-745.
- [Wang, 89] Wang, X. J. and Belytschko, T., "A Study of Stabilization and Projection in the 4-Node Mindlin Plate Element", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 2223-2238.
- [Washizu, 82] Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", 3rd edition, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [White, 89] White, D. W. and Abel, J. F., "Testing of Shell Finite Element Accuracy and Robustness", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 6, 1989, pp. 129-151.
- [White, 90] White, D. W. and Abel, J. F., "Accurate and Efficient Nonlinear Formulation of a Nine-Node Shell Element with Spurious Mode Control", *Computers and Structures*, Vol. 35, No. 6, 1990, pp. 621-641.
- [Wilson, 73] Wilson, E. L., Taylor, R. L. Doherty, W. P. and Ghaboussi, J., "Incompatible Displacement Models", in: "Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics" (S. T. Fenves et al., eds.), Academic Press, pp. 43-57, 1973.
- [Wong, 87] Wong, B. L. and Belytschko, T., "Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-Node Lagrange Plane and Plate Elements", *Eng. Comp.*, Vol 4, 1987, pp. 229-239.
- [Wu, 87] Wu, Ch.-Ch., Huang, M.-G. and Pian, T. H. H., "Consistency Condition and Convergence Criteria of Incompatible Elements - General Formulation of Incompatible Functions and its Application", *Computers and Structures*, Vol. 27, 1987, pp. 639-644.
- [Wu, 88] Wu, Ch.-Ch., "Numerical Stability of Mixed/Hybrid Elements and the Control of Zero Energy Modes", *Proceedings of the GAMM Workshop* (D. Braess, W. Wunderlich), Bad Honnef, 1988.
- [Xue, 85] Xue, W.-M. and Atluri, S. N., "Existence and Stability, and Discrete BB and Rank Conditions for General Mixed-Hybrid Finite Elements in Elasticity", in: "Hybrid and Mixed Finite Elements Methods" (R.L. Spilker, K.W. Reed, eds.). ASME, AMD-Vol. 73, 1985, pp. 91-112.
- [Zienkiewicz, 71] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", *Int. J. Numerical Methods Engineering*, Vol. 3, 1971, pp. 275-290.

- [Zienkiewicz, 86] Zienkiewicz, O. C., Qu, S., Taylor, R. L. and Nakazawa, S., "The Patch Test for Mixed Formulations", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp. 1873–1883.
- [Zienkiewicz, 89] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The Finite Element Method", 4th Edition, Vol. 1, McGraw Hill Book Company, London, 1989, pp. 333–334.
- [Zienkiewicz, 90] Zienkiewicz, O.C. Taylor, R.L., Papadopoulos, P. and Oñate, E., "Plate Bending Elements with Discrete Constraints: New Triangular Elements", *Computers and Structures*, Vol. 35, No. 4, 1990, pp. 505–522.

Lebenslauf von Ulrich Andelfinger

15. November 1959 geboren in Oberhausen
Sohn des Dipl.-Ing. Johannes Andelfinger
und dessen Ehefrau Anna, geb. von Briel
- 1966 – 1969 Grundschule in Filderstadt-Bernhausen
- 1969 – 1978 Besuch des Eduard-Spranger-Gymnasiums
in Bernhausen
14. Mai 1978 Abitur
- 1978 – 1979 15-monatiger Grundwehrdienst in Calw
- 1979 – 1985 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität
Stuttgart
- 1982 – 1983 zwei Semester Auslandsstudium an der University
of Calgary in Kanada
13. Juli 1985 Abschluß als Diplom-Ingenieur
- seit Oktober 1985 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Baustatik der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten – Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Platten-
theorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Be-
rücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller,
J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten – Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-
zelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahl-
betonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragerwerke unter Berücksich-
tigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten
Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrá:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.