

# Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder

von

**Klaus Michael Weimar**



z  
2.4.97  
(Ersatz-  
exemplar

Bericht Nr. 10 (1989)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1989

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. März 1989

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. B.-H. Kröplin

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe des Konzepts der Degeneration ein 3-dimensionales finites Balkenelement mit exzentrischem Anschluß beschrieben. Neben der kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise wird der Übergang auf eine lokale Elementformulierung vorgestellt, die den orientierten Eigenschaften des Elements Rechnung trägt und nach Durchführung einer Vorabintegration über den Elementquerschnitt auf die üblichen Balkenschnittgrößen führt.

Die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte erfolgt durch die mitgehende Lagrange-Formulierung des inkrementellen Bewegungsvorgangs im Raum, dem elastoplastischen Materialverhalten wird die inkrementelle Darstellung der Fließtheorie zugrunde gelegt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird am Beispiel der längsversteiften Kreiszylinderschale unter Axialbelastung die Verwendung des Balkenelements zur Idealisierung der Steifen diskutiert.

## Summary

This dissertation describes the formulation of a 3-dimensional beam finite element with nodal eccentricities which has been derived using the concept of degeneration. In addition to a continuum mechanics formulation, the transformation of the element to local coordinates is proposed. The transformation accounts for the orientated properties of the element and leads to a set of commonly used resultants after application of explicit integration over the cross-section.

The updated Lagrangian description of displacement is used to account for geometrically nonlinear effects and the elastoplastic material behaviour is based on the incremental description of the flow theory.

In the second part the example of a longitudinally stiffened cylinder subjected to axial load is utilized to demonstrate the application of the beam element for the idealization of the stiffeners.

# Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	1
1 Einleitung	3
<b>NICHTLINEARES BALKENELEMENT</b>	<b>5</b>
2 Annahmen	5
3 Nichtlineare Formulierung der Kontinuumsgleichungen	6
3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit	7
3.2 Linearisierung des Vektors der inneren Kräfte	8
3.3 Kinematische Operatormatrix	11
3.4 Mitgehende Lagrange-Formulierung	14
4 Herleitung der Elementmatrizen	15
4.1 Geometrie- und Verschiebungsansatz	15
4.2 Verschiebungsgradienten	22
4.3 Steifigkeitsmatrizen	24
4.4 Innere Kräfte	25
4.5 Äußere Kräfte	26
4.6 Werkstoffgesetz	28
4.7 Numerische Integration	30
5 Lokale Formulierung	33
5.1 Integration im Lokalsystem	33
5.2 Lokale Knotenkinematen	36
5.3 Transformation Element $\rightarrow$ System	37
6 Vorabintegration über den Elementquerschnitt	40
6.1 Interpolation der Normalenwinkel	40
6.2 Aufspaltung der Operatormatrix B	44
6.3 Elastisches Stoffgesetz	47
7 Verschiebungsansatz für die Querschnittsverwölbung	50
7.1 Zentrisches Element	51
7.2 Exzentrisch angeschlossenes Element	55
7.3 Statische Kondensation	59
7.4 Drillknicken bei unbehinderter Verwölbung	61

<b>8</b>	<b>Werkstoffverhalten</b>	<b>62</b>
8.1	Fließtheorie . . . . .	63
8.2	Materialmodell . . . . .	66
8.3	Einaxialer Vergleichszustand . . . . .	68
8.4	Elastisch-plastische Werkstoffmatrix des 3-dimensional degenerierten Balkenelements . . . . .	71
8.5	Graphische Darstellung der v.Mises Fließbedingung des 3-dimensional degenerierten Balkens . . . . .	72
8.6	Vereinfachtes Stoffgesetz . . . . .	74
8.6.1	Implementierung im Programm . . . . .	75
 <b>ANWENDUNG ALS LÄNGSSTEIFEN AXIAL-BELASTETER KREISZYLINDER</b>		 <b>79</b>
<b>9</b>	<b>Systemidealisierung</b>	<b>79</b>
9.1	Grundgeometrie des untersuchten Zylinders . . . . .	79
9.2	Finite-Element-Idealisierung . . . . .	80
9.3	Stabilitätsuntersuchungen . . . . .	81
9.4	Wahl eines geeigneten Zylinderausschnitts . . . . .	82
9.5	Eigenwertberechnung ohne Kopplung der Axialverschiebungen des Lastrandes . . . . .	87
9.6	FE-Netz und Lage der Symmetrieränder . . . . .	89
<b>10</b>	<b>Kritische Imperfektionsform</b>	<b>92</b>
10.1	Traglastberechnung . . . . .	94
<b>11</b>	<b>Einfluß der Exzentrizität auf die Beullast</b>	<b>97</b>
<b>12</b>	<b>Einfluß der Imperfektionsamplitude auf das Tragverhalten</b>	<b>99</b>
12.1	Lineare Beuluntersuchungen . . . . .	99
12.2	Nichtlinear elastisches Tragverhalten . . . . .	101
12.3	Traglastberechnungen . . . . .	105
<b>13</b>	<b>Zylinder mit T-Steifen</b>	<b>108</b>
13.1	Idealisierung der T-Profile . . . . .	108
13.2	Vergleich: Rechteck- mit T-Profil . . . . .	110

<b>Schlußfolgerungen</b>	<b>112</b>
<b>Schrifttum</b>	<b>115</b>
<b>A Anhang</b>	<b>121</b>
A1 Kinematische Operatormatrix . . . . .	121
A2 Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_g^{II}$ . . . . .	122
A3 Starrkörperbewegung bei Vorabintegration . . . . .	123
A3.1 Interpolation der Normalenvektoren . . . . .	123
A3.2 Interpolation der Normalenwinkel . . . . .	126
A4 Nichtlineare Dehnungen bei Vorabintegration . . . . .	131
A5 Kinematische Operatormatrix zur analytischen Vorabintegration . . . . .	133

# Bezeichnungen

## Indizierung

linker	Kopfzeiger		Wirkungszustand
	Fußzeiger		Bezugszustand
rechter	Kopfzeiger	$i$	Elementknoten $i$
		$(it)$	Iterationszyklus
		$'$	Auf Lokalsystem bezogene Größe
	Fußzeiger	$i, j, 1, 2, 3$	Komponente im kartesischen KOS
		$\xi, \eta, \zeta$	Komponente im natürlichen KOS
		$,i$	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
		$,\xi$	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \xi}$

## Werkstoff

<b>C</b>	Werkstoffmatrix
<b>E</b>	E-Modul
$\mu$	Querdehnzahl
$k$	Schubkorrekturfaktor
$\bar{\sigma}_f$	einaxiale Vergleichsfließspannung
$\bar{\varepsilon}^p$	einaxiales plastisches Vergleichsdehnungsmaß
$T^p$	plastischer Tangentenmodul des einaxialen Zugversuchs
$E_t$	Tangentenmodul
$J_2$	2. Invariante des Spannungsdeviators

## Geometrie

$\mathbf{x}$	globale kartesische Koordinaten
$\mathbf{x}'$	lokale kartesische Koordinaten
$V$	Elementvolumen
$d({}^mV)$	infinitesimales Volumenelement im Zustand ${}^mZ$
$h_\eta^i, h_\zeta^i$	Elementdicken am Knoten $i$
$\mathbf{V}_\eta^i, \mathbf{V}_\zeta^i$	Elementdirektoren am Knoten $i$
$\xi, \eta, \zeta$	natürliche Elementkoordinaten

Transformationsmatrizen global  $\rightarrow$  lokal

$\bar{\mathbf{A}}$  Verschiebungen

$\bar{\mathbf{R}}$  Rotationen

## Statische und kinematische Größen

$\sigma$	Ingenieur-Spannungsmaß
$e$	Ingenieur-Dehnungsmaß
${}^m_m\tau$	Cauchy Spannungstensor
${}^m_m\epsilon$	Euler-Almansi Verzerrungstensor
${}^m_nS$	Spannungstensor Piola Kirchhoff 2. Art
${}^m_n\epsilon$	Verzerrungstensor Green-Lagrange
$u$	Verschiebungsvektor
$d$	Vektor der Verschiebungsableitungen
$U^i$	Vektor der verallgemeinerten Verschiebungen an diskreten Knotenpunkten
$u^i$	Verschiebungsfreiheitsgrade des Knotens $i$
$r^i$	Rotationsfreiheitsgrade des Knotens $i$
$\kappa$	Krümmungsänderung
$\Gamma$	Verdrillung
$F^{(i)}, F^{(a)}$	Vektor der inneren und äußeren Kräfte
$R$	Vektor der Ungleichgewichtskräfte

## Kinematische Operatormatrizen

$B$	verknüpft $\delta\epsilon$ mit $\delta U$
$\hat{B}$	verknüpft $\delta d$ mit $\delta U$

## Steifigkeitsmatrizen

$K_t$	Tangentensteifigkeit
$K_e$	elastische Steifigkeit
$K_u$	Anfangsverschiebungen
$K_g$	Anfangsspannungen

## Sonstige Bezeichnungen

$\delta W^{(i)}, \delta W^{(a)}$	virtuelle innere und äußere Arbeit
$F^i, G^i$	Matrizen zur Beschreibung der Verschiebungsgeometrie
$N^i$	Interpolationsfunktion des Elementknotens $i$
$\lambda_1, \lambda_2$	Ansatzfunktionen für die Einheitsverwölbung
$J$	Jakobi-Matrix

Weitere verwendete Bezeichnungen sind an entsprechender Stelle im Text erläutert.



# 1 Einleitung

Mit der Vorstellung eines Schalenelements, basierend auf dem Konzept der sogenannten *Degeneration*, setzten Ahmad u.a.[5] im Jahre 1970 den Grundstein für eine neue Generation von Strukturelementen. Unter Heranziehung von kinematischen Zwangsbedingungen lassen sich die Strukturelemente direkt aus den Grundgleichungen der dreidimensionalen Theorie ableiten und stellen somit einen Sonderfall des 3D-Kontinuums dar. Seine Popularität verdankt dieses Konzept seiner einfachen Formulierung unter Umgehung der traditionellen klassischen Vorgehensweise.

Um den erhöhten numerischen Rechenaufwand infolge des Integrationsprozesses über das Elementvolumen gegenüber einer Integration über eine Referenzfläche in der Schalentheorie zu reduzieren, wurde bereits ein Jahr später von Zienkiewicz u.a.[67] für schwach gekrümmte Schalen auf die Möglichkeit einer analytischen Vorintegration über die Elementdicke hingewiesen, wodurch man sich dem klassischen Konzept annäherte [55].

Auf dieselbe Art und Weise läßt sich durch konsequente Durchführung eines weiteren Degenerationsprozesses aus dem degenerierten Schalenelement ein kompatibles degeneriertes Balkenelement ableiten [13],[24].

Inhalt des ersten Teils der vorliegenden Arbeit ist die Formulierung eines "degenerierten" nichtlinearen Balkenelements, welches in das FE-Programmsystem *NISA80* [56] implementiert wird. Dem Element liegt ein isoparametrisches Verschiebungsmodell zugrunde, bei dem Ausgangs- und Verschiebungsgeometrie in derselben Weise interpoliert werden, und es ist kompatibel mit dem *NISA80*-Schalenelement.

Neben einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise in den globalen kartesischen Koordinaten mit Kinemat, die auf das raumfeste Globalsystem bezogen sind, wird auf die Möglichkeit des Integrationsprozesses in orthonormalen lokalen Elementkoordinatensystemen eingegangen, was insbesondere aus Gründen numerischer Effizienz vorteilhaft erscheint.

Schwerpunkt des ersten Teils bildet sodann eine lokale Elementformulierung (wobei auch die Kinemat auf orthonormale Lokalsysteme an den Elementknoten bezogen sind) mit Durchführung einer Vorintegration über den Querschnitt.

Neben geometrisch nichtlinearen Effekten wird schließlich noch dem elastoplastischen Materialverhalten durch ein vereinfachtes Stoffgesetz auf der Basis einer inkrementellen Darstellung der Fließtheorie Rechnung getragen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Balkenelement zur Idealisierung der Längssteifen von Kreiszylinderschalen unter Axialbelastung herangezogen und einer Steifenidealisierung durch Schalenelemente gegenübergestellt. Die Stabilitäts- und Traglastuntersuchungen konzentrieren sich hierbei auf den globalen Versagensmodus des versteiften Zylinders, lokales Steifenversagen kann mit dem Balkenelement nicht erfaßt werden. Durch die Möglichkeit des exzentrischen Anschlusses der Elementmittellinie an die Zylinderhaut kann die Lage der Steifen (innen, zentrisch, außen) und auch das Steifenprofil (aus Einzelquerschnitten zusammengesetzte offene Profile) sehr einfach variiert werden.

# NICHTLINEARES BALKENELEMENT

## 2 Annahmen

Das hier vorgestellte Balkenelement ist mit Hilfe des Konzepts der *Degeneration* direkt aus dem 3-dimensionalen isoparametrischen Kontinuumselement hergeleitet, wobei die folgenden Annahmen vorausgesetzt sind:

- **Kinematische Annahmen**

Der Elementquerschnitt bleibt auch unter Verformungen eben und formtreu, die Normalen müssen jedoch nicht senkrecht zur Elementmittellinie bleiben, wodurch Schubverformungen zugelassen sind. Die Verformung des Elements wird nur noch durch Größen der Elementmittellinie beschrieben.

- **Statische Annahmen**

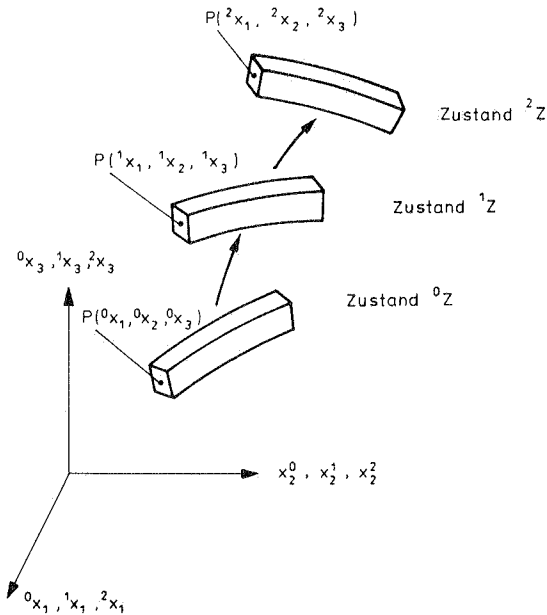
Die Normalspannungen in beide Dickenrichtungen werden vernachlässigt und leisten im Arbeitsausdruck keinen Beitrag.

Die Annahmen für die Kinematik gehen in die Definitionen des Geometrie- sowie des Verschiebungsfeldes ein, während die statischen Annahmen als Zwangsbedingungen in die Werkstoffmatrix des 3-dimensionalen Kontinuums eingesetzt werden.

Durch die Voraussetzung des Ebenbleibens des Querschnitts kann aus dem entsprechenden Verschiebungsfeld des Elements die Torsionssteifigkeit nur für den Kreisquerschnitt ermittelt werden. Zur Erfassung der Torsionssteifigkeit für Rechteckquerschnitte muß ein zusätzlicher lokaler Längsverschiebungsansatz zur Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung eingeführt werden, um die bei der Torsion nach *Saint Venant* geforderte unbehinderte Verwölbung des Querschnitts zu ermöglichen.

### 3 Nichtlineare Formulierung der Kontinuums- gleichungen

Die Herleitung der Elementmatrizen des Balkenelements basiert auf der Grundlage der in [44],[9] dargestellten Lagrange-Darstellung der nichtlinearen Kontinuumsleichungen.



**Bild 3.1** Bewegung eines Körpers im Raum

Die Beschreibung des inkrementellen Bewegungsvorganges eines Körpers im kartesischen Koordinatensystem erfolgt nach Bild 3.1 mit Hilfe von drei Zustandslagen:

- dem undeformierten Ausgangszustand  $^0Z$
- einem bekannten deformierten Gleichgewichtszustand  $^1Z$
- dem gesuchten benachbarten Deformationszustand  $^2Z$

Die einzelnen Zustände werden durch linke Kopf- bzw. Fußzeiger unterschieden. Der linke Kopfzeiger kennzeichnet in dieser Schreibweise den jeweiligen *Wirkungszustand* einer Größe. Fehlt dieser Kopfzeiger, so handelt es sich um eine inkrementelle Größe zwischen den Zustandslagen  ${}^1Z$  und  ${}^2Z$ . Durch den linken Fußzeiger ist der Bezugszustand, in dem diese Größen gemessen werden, gekennzeichnet.

### 3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Ausgangspunkt bildet das in der Zustandslage  ${}^2Z$  aufgestellte *Prinzip der virtuellen Arbeit*:

$$\delta^2 W = \delta^2 W_{(i)} + \delta^2 W_{(a)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.1)$$

Der Anteil der inneren virtuellen Arbeit

$$\delta^2 W_{(i)} = - \int_{2V} {}^2\tau^T \delta_2 \mathbf{e} \, d({}^2V) \quad (3.2)$$

kann hierbei mit dem *Cauchy-Spannungstensor*  ${}^2\tau$  und den virtuellen Verzerrungen, definiert über virtuelle Infinitesimalverschiebungen, ausgedrückt werden.

Unter der Verwendung des objektiven Spannungstensors *Piola-Kirchhoff zweiter Art* sowie des energetisch konjugierten Verzerrungstensors *Green-Lagrange* wird der unbekannte Bezugszustand  ${}^2Z$  durch einen bereits bekannten Gleichgewichtszustand  ${}^nZ$  ersetzt:

$$\delta^2 W_{(i)} = - \int_{nV} {}^n\mathbf{S}^T \delta_n^2 \boldsymbol{\epsilon} \, d({}^nV) \quad (3.3)$$

Der Verzerrungstensor nach Green-Lagrange läßt sich im weiteren als Funktion der Verschiebungsableitungen anschreiben,

$${}^2\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^2\tilde{u}_{i,j} + {}^2\tilde{u}_{j,i} + {}^2\tilde{u}_{k,i} {}^2\tilde{u}_{k,j}) \quad (3.4)$$

womit der virtuelle Greensche Verzerrungstensor über den kinematischen Operator  $\tilde{\mathbf{B}}$  mit dem virtuellen Verschiebungsfeld verknüpft werden kann.

$$\delta_n^2 \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial_n^2 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}} \delta^2 \tilde{\mathbf{u}} = {}^2\tilde{\mathbf{B}} \delta^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

An dieser Stelle erfolgt nun eine Diskretisierung nach der Methode der finiten Elemente. Unter Verwendung eines Verschiebungsmodells wird das kontinuierliche Verschiebungsfeld  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z)$  über problemgerechte Ansätze durch *verallgemeinerte Verschiebungen*  $\mathbf{U}$  an diskreten Knotenpunkten approximiert (siehe Abschnitt 4.1), und die kinematischen Beziehungen können in diskretisierter Form angeschrieben werden:

$$\delta_n^2 \epsilon = \frac{\partial_n^2 \epsilon}{\partial^2 \mathbf{U}} \delta^2 \mathbf{U} = {}^2_n \mathbf{B} \delta^2 \mathbf{U} \quad (3.6)$$

Werden die äußere und innere Arbeit in verallgemeinerten diskreten Knotenkräften ausgedrückt, so erhält man mit dem Vektor der *inneren Kräfte*

$${}^2 \mathbf{F}_{(i)} = \int_{nV} {}^2_n \mathbf{B}^T {}^2_n \mathbf{S} d(nV) \quad (3.7)$$

das Prinzip der virtuellen Arbeit in diskretisierter Form:

$${}^2 \mathbf{F}_{(i)}^T \delta^2 \mathbf{U} = {}^2 \mathbf{F}_{(a)}^T \delta^2 \mathbf{U} \quad (3.8)$$

Diese Gleichung stellt für den unbekanntem Zustand  ${}^2 Z$  eine Gleichgewichtsaussage dar, deren Lösung mittels konsistenter Linearisierung des Vektors der inneren Kräfte erfolgen kann (vergleiche auch [66] und [57], [35] [36] und [45]).

### 3.2 Linearisierung des Vektors der inneren Kräfte

Um Gleichung (3.8) in ein lineares algebraisches Gleichungssystem überzuführen, wird im weiteren ein Vektor der sogenannten *Ungleichgewichtskräfte* als Differenz der verallgemeinerten inneren und äußeren Knotenkräfte eingeführt, der im Falle eines Gleichgewichtszustandes verschwindet.

$${}^2 \mathbf{R} = {}^2 \mathbf{F}_{(a)} - {}^2 \mathbf{F}_{(i)} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Da die inneren Kräfte im Wirkungszustand  ${}^2 Z$  noch unbekannt sind, werden sie über eine *Taylorreihenentwicklung* nach den primären Variablen  $\mathbf{U}$  aus den Größen des bekannten Gleichgewichtszustandes  ${}^1 Z$  entwickelt. Durch den Abbruch dieser Taylorreihe nach dem zweiten Reihenglied wird der Vektor der inneren Kräfte im Inkrement  ${}^1 Z \rightarrow {}^2 Z$  bezüglich der Knotenvariablen  $\mathbf{U}$  sodann linearisiert.

$${}^2 \mathbf{F}_{(i)} = {}^1 \mathbf{F}_{(i)} + {}^1 \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{(i)}}{\partial \mathbf{U}} \right) \mathbf{U} + \dots \quad (3.10)$$

Werden in Gleichung ( 3.9 ) die inneren Kräfte des gesuchten Zustandes  ${}^2Z$  durch die bekannten inneren Kräfte des Gleichgewichtszustandes  ${}^1Z$  ersetzt, so verbleiben die Ungleichgewichtskräfte

$${}^2\mathbf{R} = {}^2\mathbf{F}_{(a)} - {}^1\mathbf{F}_{(i)} = {}^1_n\mathbf{K}_t \mathbf{U} \quad ( 3.11 )$$

mit der Tangentensteifigkeit

$${}^1_n\mathbf{K}_t = {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{(i)}}{\partial \mathbf{U}} \right) = \int_{nV} \left[ {}^1_n \mathbf{B}^T {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}} \right) + {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T {}^1_n \mathbf{S} \right] d(nV) \quad ( 3.12 )$$

Mit Gleichung ( 3.11 ) liegt somit ein lineares Gleichungssystem vor, aus dem das Verschiebungsinkrement  $\mathbf{U}$  und somit das gesuchte Verschiebungsfeld

$${}^2\mathbf{U} = {}^1\mathbf{U} + \mathbf{U} \quad ( 3.13 )$$

bestimmt werden kann.

In Gleichung ( 3.12 ) können in den ersten Term des Integrals auf der rechten Seite über den Spannungsgradienten die Werkstoffgleichungen eingebracht werden (vergleiche Abschnitt 4.6):

$${}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}} \right) = {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) {}^1_n \left( \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{U}} \right) = {}^1_n \mathbf{C} {}^1_n \mathbf{B} \quad ( 3.14 )$$

Zur Beschreibung des Stoffgesetzes wird der Werkstofftensor nur in inkrementeller Form benötigt, was besonders im Hinblick auf das in Kapitel 8 berücksichtigte nichtlineare Materialverhalten von Bedeutung ist.

Somit setzt sich die Tangentensteifigkeitsmatrix ( 3.12 ) zusammen aus den beiden Anteilen

$${}^1_n\mathbf{K}_t = {}^1_n\mathbf{K}_{e/u} + {}^1_n\mathbf{K}_g \quad ( 3.15 )$$

mit

$${}^1_n\mathbf{K}_{e/u} = \int_{nV} {}^1_n \mathbf{B}^T {}^1_n \mathbf{C} {}^1_n \mathbf{B} d(nV) \quad ( 3.16 )$$

$${}^1_n\mathbf{K}_g = \int_{nV} {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T {}^1_n \mathbf{S} d(nV) \quad ( 3.17 )$$

Liegt geometrisch nichtlineares Systemverhalten vor, so ist die Operatormatrix  $\mathbf{B}$  von den Verschiebungsinkrementen abhängig und der Linearisierungsfehler nach ( 3.10 ) ist durch eine Gleichgewichtsiteration zu korrigieren. Dasselbe gilt auch für nichtlineares Materialverhalten, bei dem die Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}$  eine Funktion der Dehnungsinkremente darstellt. Gleichung ( 3.13 ) beinhaltet somit nur noch eine Näherungsaussage und ist durch sukzessives Lösen der folgenden Gleichungen zu verbessern:

$${}^2\mathbf{R}^{(it)} = {}^2\mathbf{F}_{(a)} - {}^2\mathbf{F}_{(i)}^{(it-1)} \quad (3.18)$$

$${}^2\mathbf{U}^{(it)} = {}^2\mathbf{U}^{(it-1)} + \mathbf{U}^{(it)} \quad (3.19)$$

$${}^2\mathbf{F}_{(i)}^{(it)} = \int_{nV} {}^2\mathbf{B}^T ({}^2\mathbf{U}^{(it)}) {}^2\mathbf{S} ({}^2\mathbf{U}^{(it)}) d(nV) \quad (3.20)$$

mit  ${}^2\mathbf{F}_{(i)}^{(0)} = {}^1\mathbf{F}_{(i)}$

und  ${}^2\mathbf{U}^{(0)} = {}^1\mathbf{U}$

Der Iterationsprozess ist so lange zu wiederholen, bis geeignete Konvergenzkriterien wie z.B.

- Norm der Verschiebungsinkremente [12]

$$\|\mathbf{U}^{(it)}\| \leq Tol \cdot \|{}^2\mathbf{U}^{(it)}\|$$

- Norm der Ungleichgewichtskräfte

$$\|{}^2\mathbf{R}^{(it)}\| \leq Tol \cdot \|\Delta\mathbf{F}\|$$

mit  $\Delta\mathbf{F} = {}^2\mathbf{F}_{(a)} - {}^1\mathbf{F}_{(a)}$

- Absolutwert der größten Ungleichgewichtskraft

$$|{}^2R_i^{(it)}| \leq Tol \cdot \|\Delta\mathbf{F}\|$$

- Energiekriterium

$$E^{(it)} = \left[ {}^2\mathbf{R}^{(it)} \right]^T \mathbf{U}^{(it)} \leq Tol \cdot {}^2E^{(it)}$$

mit  ${}^2E^{(it)} = \left[ {}^2\mathbf{F}_{(a)} \right]^T \cdot {}^2\mathbf{U}^{(it)}$



bezüglich einer von der gewünschten Genauigkeit abhängigen Toleranzschranke 'Tol' erfüllt sind. Diese Vorgehensweise entspricht dem Iterationsverfahren nach *Newton-Raphson*.

Aus Gründen der numerischen Effizienz wird beim sogenannten *modifizierten Newton-Raphson* Verfahren die Steifigkeitsmatrix häufig nur zu Beginn eines neuen Inkrements aufgestellt und im Verlauf des Iterationsprozesses konstant beibehalten. Im Falle hoher Nichtlinearität führt dieses Vorgehen jedoch zu einer größeren Anzahl von Iterationszyklen bzw. zu einem Verlust der Konvergenz, und es sind alternative Strategien wie z.B. die *Quasi-Newton*-Verfahren [51] vorzuziehen.

### 3.3 Kinematische Operatormatrix

In diesem Abschnitt soll die kinematische Operatormatrix  $\mathbf{B}$  näher betrachtet werden, die infolge der Verwendung des Greenschen Verzerrungsmaßes eine nichtlineare Funktion der Knotenverschiebungen  $\mathbf{U}$  darstellt.

Der Verzerrungstensor nach ( 3.4 ) wird zunächst in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil bezüglich des Verschiebungsvektors aufgespaltet.

$${}^2_n\epsilon = {}^2_n\epsilon_l + {}^2_n\epsilon_{nl} \quad (3.21)$$

Mit Hilfe des Vektors der Verschiebungsableitungen

$${}^2_n\mathbf{d}^T = \left[ \mathbf{d}_1^T \ \mathbf{d}_2^T \ \mathbf{d}_3^T \right] \quad (3.22)$$

mit

$$\mathbf{d}_i^T = \langle {}^2_n u_{i,1} \quad {}^2_n u_{i,2} \quad {}^2_n u_{i,3} \rangle$$

sowie den Matrizen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

und

$${}^2_n\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & 0 & 0 & \mathbf{d}_2 & 0 & 0 & \mathbf{d}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{d}_1 & 0 & 0 & \mathbf{d}_2 & 0 & 0 & \mathbf{d}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{d}_1 & 0 & 0 & \mathbf{d}_2 & 0 & 0 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

können der lineare und der nichtlineare Anteil des Greenschen Verzerrungstensors angeschrieben werden zu:

$${}^2_n \epsilon_l = \mathbf{P} {}^2_n \mathbf{d} \quad (3.25)$$

$${}^2_n \epsilon_{nl} = \frac{1}{2} \mathbf{P} {}^2_n \mathbf{A} {}^2_n \mathbf{d} \quad (3.26)$$

Somit läßt sich unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{d} = \mathbf{P} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{U}}$$

der virtuelle Greensche Verzerrungstensor als Funktion der virtuellen Knotenverschiebungen angeben:

$$\begin{aligned} \delta_n^2 \epsilon &= \mathbf{P} \left[ {}^2_n \left( \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{U}} \right) + {}^2_n \mathbf{A} {}^2_n \left( \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{U}} \right) \right] \delta \mathbf{U} \\ &= \mathbf{P} ({}^2_n \hat{\mathbf{B}} + {}^2_n \mathbf{A} {}^2_n \hat{\mathbf{B}}) \delta \mathbf{U} \\ &= {}^2_n \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dieser kinematische Operator  $\mathbf{B}$  im gesuchten Zustand  ${}^2Z$  wird nach der Linearisierung (3.10) durch Größen im bekannten Gleichgewichtszustand  ${}^1Z$  ausgedrückt und verbindet die durch eine Differentiationsstufe getrennten virtuellen Dehnungen mit den virtuellen Knotenverschiebungen, wobei die Matrix  $\mathbf{A}$  nunmehr eine Funktion der Verschiebungen  ${}^1_n \mathbf{U}$  darstellt.

$$\delta_n^1 \epsilon = {}^1_n \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (3.28)$$

$${}^1_n \mathbf{B} = \mathbf{P} ({}^1_n \hat{\mathbf{B}} + {}^1_n \mathbf{A} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}) \quad (3.29)$$

Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, daß bei der Reihenentwicklung nach (3.10) und somit beim Übergang von Gleichung (3.27) nach Gleichung (3.28) die virtuellen Verschiebungen der Zustände  ${}^2Z$  und  ${}^1Z$  nicht unterschieden werden. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, solange sich im Inkrement  ${}^1Z \rightarrow {}^2Z$  keine Änderung der Randbedingungen (wie z.B. bei Kontaktproblemen) einstellt.

Die Operatormatrix  ${}^1_n \hat{\mathbf{B}}$  kann direkt aus der Variation eines gewählten FE-Verschiebungsansatzes  $\mathbf{u}$  (siehe Abschnitt 4.1) gewonnen werden.

$$\delta_n^1 \mathbf{d} = {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{U}} \right) \delta^1 \mathbf{U} = \frac{\partial}{\partial {}^1_n \mathbf{x}} {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{U}} \right) \delta^1 \mathbf{U} = {}^1_n \hat{\mathbf{B}} \delta^1 \mathbf{U} \quad (3.30)$$

Mit dieser Operatormatrix sowie der Beziehung

$${}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \right) = \mathbf{P} \left[ {}^1_n \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}} \right) + {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}} \right) {}^1_n \hat{\mathbf{B}} + {}^1_n \mathbf{A} {}^1_n \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}} \right) \right] \quad (3.31)$$

aus (3.29) kann die Tangentensteifigkeit (3.12) aufgestellt werden.

$${}^1_n \mathbf{K}_t = {}^1_n \mathbf{K}_e + {}^1_n \mathbf{K}_u + {}^1_n \mathbf{K}_g^I + {}^1_n \mathbf{K}_g^{II} + {}^1_n \mathbf{K}_g^{III} \quad (3.32)$$

Die einzelnen Steifigkeitsanteile beinhalten hierbei:

$$\begin{aligned} {}^1_n \mathbf{K}_e &= \int_{nV} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}^T {}^1_n \tilde{\mathbf{C}} {}^1_n \hat{\mathbf{B}} d(nV) \\ {}^1_n \mathbf{K}_u &= \int_{nV} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}^T {}^1_n \tilde{\mathbf{C}} {}^1_n \mathbf{A} {}^1_n \hat{\mathbf{B}} d(nV) \\ &+ \int_{nV} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}^T {}^1_n \mathbf{A}^T {}^1_n \tilde{\mathbf{C}} {}^1_n \hat{\mathbf{B}} d(nV) \\ &+ \int_{nV} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}^T {}^1_n \mathbf{A}^T {}^1_n \tilde{\mathbf{C}} {}^1_n \mathbf{A} {}^1_n \hat{\mathbf{B}} d(nV) \\ {}^1_n \mathbf{K}_g^I &= \int_{nV} {}^1_n \hat{\mathbf{B}}^T {}^1_n \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \mathbf{P}^T {}^1_n \mathbf{S} d(nV) \\ {}^1_n \mathbf{K}_g^{II} &= \int_{nV} {}^1_n \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \mathbf{P}^T {}^1_n \mathbf{S} d(nV) \\ {}^1_n \mathbf{K}_g^{III} &= \int_{nV} {}^1_n \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T {}^1_n \mathbf{A}^T \mathbf{P}^T {}^1_n \mathbf{S} d(nV) \end{aligned} \quad (3.33)$$

mit der Werkstoffmatrix:

$${}^1_n \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^T {}^1_n \mathbf{C} \mathbf{P} \quad (3.34)$$

In die Matrix  ${}^1_n \mathbf{K}_g^{III}$  und die beiden ersten Anteile der Matrix  ${}^1_n \mathbf{K}_u$  gehen die Anfangsverschiebungen  ${}^1_n \mathbf{u}$  linear ein, in den dritten Anteil von  ${}^1_n \mathbf{K}_u$  quadratisch.

Sind die primären Knotenvariablen im Verschiebungsansatz nur linear enthalten (z.B. Kontinuumsselement), so ist die Operatormatrix  $\hat{\mathbf{B}}$  von  $\mathbf{U}$  unabhängig und die Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_g^I$  und  $\mathbf{K}_g^{III}$  entfallen. Bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Balkenelement gehen die Rotationsfreiheitsgrade jedoch über trigonometrische Funktionen in den Verschiebungsansatz ein, und diese Anteile sind zu berücksichtigen.

### 3.4 Mitgehende Lagrange-Formulierung

In den bisherigen Größen steht noch der nicht näher definierte Bezugszustand  ${}^nZ$ . Von den prinzipiell allen möglichen bekannten Gleichgewichtszuständen  ${}^nZ$  werden üblicherweise die beiden Zustände  $n = 0$  (Ausgangszustand) bzw.  $n = 1$  (Gleichgewichtszustand vor dem Inkrement) gewählt und als *totale (T.L.)* bzw. *mitgehende (updated) Lagrange-Darstellung (U.L.)* bezeichnet. Wird eine U.L.-Formulierung gewählt, so entfallen die Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_g^{III}$  und  $\mathbf{K}_u$  mit den Anfangsverschiebungen  ${}^1\mathbf{u}$ .

In der vorliegenden Arbeit wird im folgenden ausschließlich die mitgehende Lagrange-Darstellung mit dem Bezugszustand  ${}^1Z$  verwendet und es gilt somit:

$${}^1\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

$${}^1\mathbf{S} \hat{=} {}^1\boldsymbol{\tau} \quad (3.36)$$

$${}^1\mathbf{B} = \mathbf{P} {}^1\hat{\mathbf{B}} \quad (3.37)$$

$${}^1\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}}\right) = \mathbf{P} \left[ {}^1\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}}\right) + {}^1\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T {}^1\hat{\mathbf{B}} \right] \quad (3.38)$$

Die weitere Berücksichtigung der Beziehung

$${}^1\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}}\right) \mathbf{P}^T {}^1\boldsymbol{\tau} = {}^1\mathbf{T} {}^1\hat{\mathbf{B}} \quad (3.39)$$

mit  $\boldsymbol{\tau}^T = \langle \tau_{11} \tau_{22} \tau_{33} \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} \rangle$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} [\hat{\boldsymbol{\tau}}] & & \\ & [\hat{\boldsymbol{\tau}}] & \\ & & [\hat{\boldsymbol{\tau}}] \end{bmatrix}$$

führt schließlich auf folgende Anteile der Tangentensteifigkeitsmatrix nach Gleichung (3.32):

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{K}_e &= \int_{{}^1V} {}^1\hat{\mathbf{B}}^T {}^1\tilde{\mathbf{C}} {}^1\hat{\mathbf{B}} d({}^1V) \\ {}^1\mathbf{K}_g^I &= \int_{{}^1V} {}^1\hat{\mathbf{B}}^T {}^1\mathbf{T} {}^1\hat{\mathbf{B}} d({}^1V) \\ {}^1\mathbf{K}_g^{II} &= \int_{{}^1V} {}^1\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T \mathbf{P}^T {}^1\boldsymbol{\tau} d({}^1V) \\ {}^1\mathbf{K}_g^{III} &= {}^1\mathbf{K}_u = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

## 4 Herleitung der Elementmatrizen

In diesem Kapitel wird die isoparametrische Formulierung des Balkenelements vorgestellt. Mit den gewählten Ansätzen für das Geometrie- und Verschiebungsfeld sowie den aus dem 3-dimensionalen Kontinuum abgeleiteten Stoffgleichungen werden die in Kapitel 3 hergeleiteten Elementmatrizen  $\mathbf{K}_t$  und  $\mathbf{F}_{(i)}$  als diskretisierte Bewegungsgleichungen der Kontinuumstheorie ermittelt.

### 4.1 Geometrie- und Verschiebungsansatz

Zur Interpolation des Geometrie- und Verschiebungsfeldes aus den Knotenrößen werden entsprechend der Knotenanzahl des Elements (siehe Bild 4.1) die in Tabelle 4.1 angegebenen Ansatzfunktionen verwendet (z.B. aus [23]).

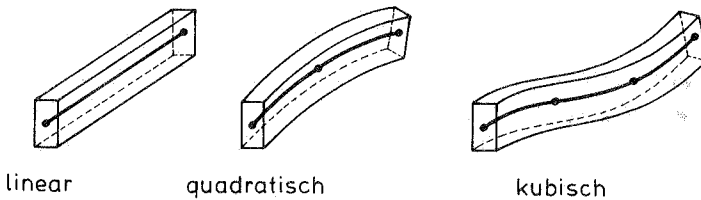


Bild 4.1 Balkenelemente

Element	linear (2 Knoten)	quadratisch (3 Knoten)	kubisch (4 Knoten)
$N^1$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$	$-\frac{1}{16}(1 - \xi)(1 - 9\xi^2)$
$N^2$	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$1 - \xi^2$	$\frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)$
$N^3$		$\frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$	$\frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)$
$N^4$			$-\frac{1}{16}(1 + \xi)(1 - 9\xi^2)$

Tabelle 4.1 Interpolationsfunktionen

Die Lage des Elements im Zustand  ${}^mZ$  ist durch folgendes Geometriefeld beschrieben:

$$\begin{aligned}
 {}^m\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i {}^m\mathbf{x}^i + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i {}^m\mathbf{V}_\eta^i \\
 & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i {}^m\mathbf{V}_\zeta^i \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten:

${}^m\mathbf{x}^i$	Ortsvektor des Elementknotens $i$
$N^i$	Interpolationsfunktion des Elementknotens $i$
$\xi, \eta, \zeta$	natürliche (lokale) Elementkoordinaten
$e_\eta, e_\zeta$	Exzentrizität der Elementmittellinie von den Elementknoten
$h_\eta^i, h_\zeta^i$	Elementdicken am Knoten $i$
$\mathbf{V}_\eta^i, \mathbf{V}_\zeta^i$	Einheitsvektoren in Richtung der natürlichen Koordinaten $\eta$ und $\zeta$ (bezogen auf das kartesische Koordinatensystem)

Die Elementmittellinie kann in diesem Ansatz exzentrisch an die Bezugslinie mit den Elementknoten angeschlossen sein (Bild 4.2), wodurch aus mehreren Einzelementen zusammengesetzte Querschnitte auf denselben Knotenpunkt bezogen werden können.

Die beiden Vektoren  ${}^m\mathbf{V}_\eta^i$  und  ${}^m\mathbf{V}_\zeta^i$  sind im Raum durch ihre Richtungskosinus definiert (Bild 4.2) und werden in Analogie zum Vorgehen in [44] durch die vier unabhängigen Winkel  $\Phi, \Psi_1, \Omega, \Theta_1$  ausgedrückt (Bild 4.3), um die erwünschte Kompatibilität zum dort hergeleiteten 3-dimensional degenerierten Schalenelement sicherzustellen.

$${}^m\mathbf{V}_\eta^i = \begin{bmatrix} \cos^m \Theta_1^i \\ \cos^m \Theta_2^i \\ \cos^m \Theta_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^m \Theta_1^i \\ \sin^m \Theta_1^i \cos^m \Omega^i \\ \sin^m \Theta_1^i \sin^m \Omega^i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$${}^m\mathbf{V}_\zeta^i = \begin{bmatrix} \cos^m \Psi_1^i \\ \cos^m \Psi_2^i \\ \cos^m \Psi_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^m \Psi_1^i \\ \sin^m \Psi_1^i \cos^m \Phi^i \\ \sin^m \Psi_1^i \sin^m \Phi^i \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Diese beiden Elementdirektoren können während des Verformungsverlaufs von der Ebene senkrecht zur Mittelachse des Elements abweichen, wodurch Schubverformungen zugelassen sind.

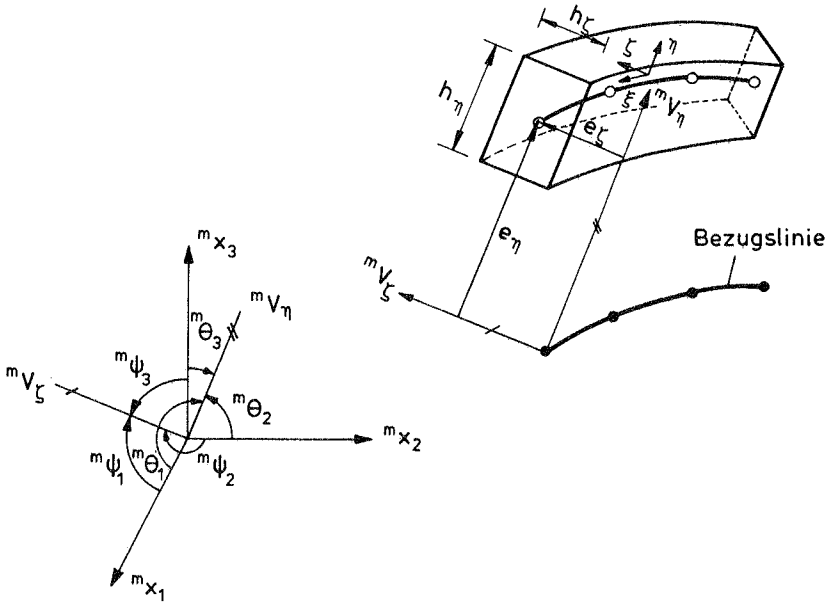


Bild 4.2 Balkenelement mit Exzentrizität

Durch die Hinzunahme der Schubverformungen ist für die Knotenvariablen im Verschiebungsansatz nur noch  $C^0$  Kontinuität erforderlich (siehe z.B. [20]).

Der Verschiebungsvektor zwischen den Zuständen  ${}^0Z$  und  ${}^mZ$  wird entsprechend dem isoparametrischen Konzept direkt aus dem Ansatz für die Geometrie gewonnen und lautet:

$$\begin{aligned}
 {}^m\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= {}^m\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) - {}^0\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) \\
 &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m\mathbf{u}^i \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i ({}^m\mathbf{v}_\eta^i - {}^0\mathbf{v}_\eta^i) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i ({}^m\mathbf{v}_\zeta^i - {}^0\mathbf{v}_\zeta^i) \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

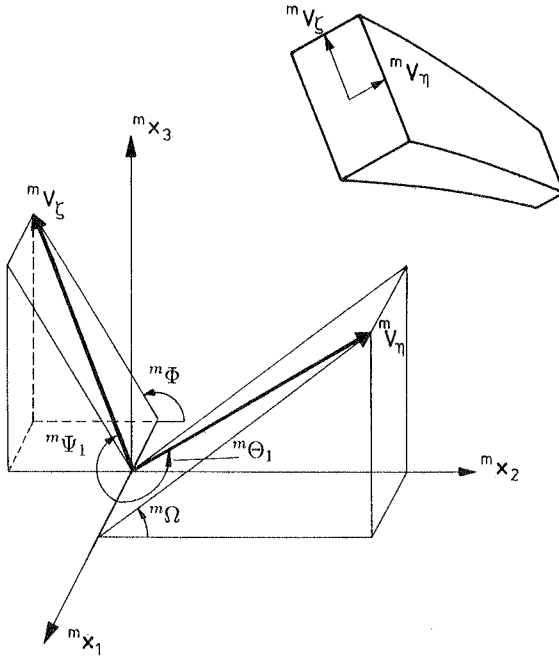


Bild 4.3 Definition der Elementdirektoren

mit den globalen Elementknotenverschiebungen

$${}^m \mathbf{u}^i = {}^m \mathbf{x}^i - {}^0 \mathbf{x}^i \quad (4.5)$$

In diesem Ansatz können die Winkel im Verformungszustand  ${}^m Z$  aus den Winkelgrößen im Ausgangszustand  ${}^0 Z$  sowie den Winkeländerungen  ${}^m \psi, {}^m \phi, {}^m \vartheta, {}^m \omega$  im Zustand  ${}^m Z$  bestimmt werden, wie es in Bild 4.4 am Beispiel des Elementdirektors  $\mathbf{V}_\zeta^i$  dargestellt ist.

$$\begin{aligned} {}^m \Psi_1^i &= {}^0 \Psi_1^i + {}^m \psi^i \\ {}^m \Phi^i &= {}^0 \Phi^i + {}^m \varphi^i \\ {}^m \Theta_1^i &= {}^0 \Theta_1^i + {}^m \vartheta^i \\ {}^m \Omega^i &= {}^0 \Omega^i + {}^m \omega^i \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es sei erwähnt, daß bei dieser Definition die Winkeländerungen (Rotationen) unabhängig von ihrer Größe kommutativen Charakter besitzen.



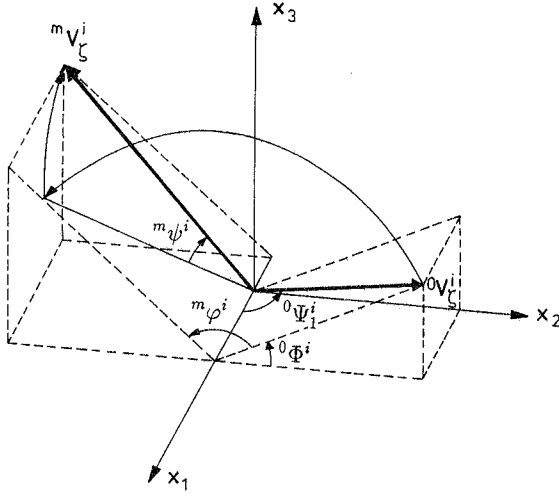


Bild 4.4 Winkeländerungen des Vektors  $\mathbf{V}_\zeta^i$

Das virtuelle Verschiebungsfeld im Zustand  ${}^mZ$  kann aus dem Verschiebungsansatz ( 4.4 ) und den Definitionen ( 4.2 ) und ( 4.3 ) abgeleitet werden:

$$\delta {}^m\mathbf{V}_\eta^i = \begin{bmatrix} m\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\eta^i}{\partial \Omega^i}\right) & m\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\eta^i}{\partial \Theta_1^i}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta {}^m\omega^i \\ \delta {}^m\vartheta^i \end{bmatrix} = {}^m\bar{\mathbf{G}}^i \delta {}^m\mathbf{r}_\eta^i \quad (4.7)$$

$$\delta {}^m\mathbf{V}_\zeta^i = \begin{bmatrix} m\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\zeta^i}{\partial \Phi^i}\right) & m\left(\frac{\partial \mathbf{V}_\zeta^i}{\partial \Psi_1^i}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta {}^m\varphi^i \\ \delta {}^m\psi^i \end{bmatrix} = {}^m\bar{\mathbf{F}}^i \delta {}^m\mathbf{r}_\zeta^i \quad (4.8)$$

mit

$${}^m\bar{\mathbf{F}}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sin^m \Psi_1^i \\ -\sin^m \Phi^i \sin^m \Psi_1^i & \cos^m \Phi^i \cos^m \Psi_1^i \\ \cos^m \Phi^i \sin^m \Psi_1^i & \sin^m \Phi^i \cos^m \Psi_1^i \end{bmatrix}$$

$${}^m\bar{\mathbf{G}}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sin^m \Theta_1^i \\ -\sin^m \Omega^i \sin^m \Theta_1^i & \cos^m \Omega^i \cos^m \Theta_1^i \\ \cos^m \Omega^i \sin^m \Theta_1^i & \sin^m \Omega^i \cos^m \Theta_1^i \end{bmatrix}$$

$${}^m \mathbf{r}_\zeta^i = \begin{bmatrix} m\varphi^i \\ m\psi^i \end{bmatrix} \quad {}^m \mathbf{r}_\eta^i = \begin{bmatrix} m\omega^i \\ m\vartheta^i \end{bmatrix}$$

Somit erhält man das virtuelle Verschiebungsfeld:

$$\begin{aligned} \delta {}^m \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i \delta {}^m \mathbf{u}^i + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i m\bar{\mathbf{G}}^i \delta {}^m \mathbf{r}_\eta^i \\ & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i m\bar{\mathbf{F}}^i \delta {}^m \mathbf{r}_\zeta^i \quad (4.9) \end{aligned}$$

Werden in dieser Beziehung die virtuellen Größen durch die inkrementellen ersetzt, so liegt das bezüglich der Knotenvariablen linearisierte Verschiebungsfeld für das Inkrement vor.

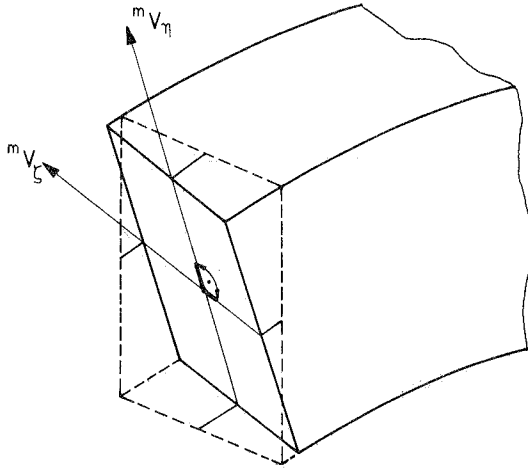


Bild 4.5 Formtreuer Querschnitt

Unter der Voraussetzung eines formtreuen Querschnitts nach Bild 4.5 läßt sich mit der Zwangsbedingung

$$\langle V_\eta^i, V_\zeta^i \rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.10)$$

von den 7 Freiheitsgraden je Elementknoten (3 Verschiebungen, 4 Winkeländerungen) ein nunmehr linear abhängiger Rotationsfreiheitsgrad eli-

minieren. Dies führt auf den endgültigen Verschiebungsansatz für das Inkrement:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{u}^i + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i {}^m \mathbf{G}^i \mathbf{r}^i \\ & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i {}^m \mathbf{F}^i \mathbf{r}^i \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit den 6 Knotenvariablen

$$\mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \varphi^i \\ \psi^i \\ \vartheta^i \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Die Matrizen  $\mathbf{F}^i$  und  $\mathbf{G}^i$  enthalten:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{F}^i &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin^m \Psi_1^i & 0 \\ -\sin^m \Phi^i \sin^m \Psi_1^i & \cos^m \Phi^i \cos^m \Psi_1^i & 0 \\ \cos^m \Phi^i \sin^m \Psi_1^i & \sin^m \Phi^i \cos^m \Psi_1^i & 0 \end{bmatrix} \\ {}^m \mathbf{G}^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin^m \Theta_1^i \\ -\sin^m \Omega^i \sin^m \Theta_1^i & m a^i \sin^m \Omega^i m b^i & m a^i \sin^m \Omega^i m c^i + \cos^m \Omega^i \cos^m \Theta_1^i \\ \cos^m \Omega^i \sin^m \Theta_1^i & -m a^i \cos^m \Omega^i m b^i & -m a^i \cos^m \Omega^i m c^i + \sin^m \Omega^i \cos^m \Theta_1^i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit den Faktoren

$$m a^i = \frac{1}{\sin^m \Psi_1^i \sin^m(\Omega^i - m \Phi^i)} \quad (4.15)$$

$$m b^i = \cos^m \Theta_1^i \sin^m \Psi_1^i - \sin^m \Theta_1^i \cos^m \Psi_1^i \cos^m(\Omega^i - m \Phi^i) \quad (4.16)$$

$$m c^i = \sin^m \Theta_1^i \cos^m \Psi_1^i - \cos^m \Theta_1^i \sin^m \Psi_1^i \cos^m(\Omega^i - m \Phi^i) \quad (4.17)$$

Bei diesem Ansatz ist jedoch darauf zu achten, daß der Nenner in Gleichung ( 4.15 ) nicht gleich *Null* wird, wodurch folgende Sonderfälle auszu-schließen sind:

1.  ${}^m\Psi_1^i = 0$ , d.h. der Vektor  $\mathbf{V}_\zeta^i$  zeigt in Richtung der x-Achse.
2.  ${}^m\Omega^i = {}^m\Phi^i$ , d.h. die Vektoren  $\mathbf{V}_\eta^i$  und  $\mathbf{V}_\zeta^i$  sowie die x-Achse liegen in derselben Ebene, was eine Identität der Rotationsinkremente  $\psi^i$  und  $\vartheta^i$  bedeutet.

Durch diese beiden Sonderfälle ist somit sicherzustellen, daß die Balkenbezugslinie weder in der Ausgangsposition noch während des Verformungsverlaufs eine Lage senkrecht zur  $x_1$ -Achse einnimmt.

In den im Verschiebungsansatz ( 4.4 ) gewählten Winkeldefinitionen besteht keine Beschränkung in der Größe sowie der Reihenfolge der Rotationen. Im folgenden wird dieser Ansatz zur Ermittlung der *verallgemeinerten inneren Kräfte* herangezogen, während der in den Rotationen linearisierte Ansatz für das Verschiebungsinkrement ( 4.11 ) bei der Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen verwendet wird.

## 4.2 Verschiebungsgradienten

Zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix sowie der inneren Kräfte werden die benötigten Verschiebungsableitungen nach den Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  mit Hilfe der Operatormatrix  $\mathbf{B}$  direkt aus den Knotenvariablen gewonnen.

Die Transformation des Differentialoperators zwischen dem kartesischen Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  und dem natürlichen krummlinigen Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  erfolgt mit der *Jakobi-Matrix*  $\mathbf{J}$ , die aus dem Geometrieansatz ( 4.1 ) ermittelt wird.

Jakobi-Transformation:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

bzw.:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Für die weiteren Beziehungen wird die inverse Jakobi-Matrix in der Form

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}]^{-1} & & \\ & [\mathbf{J}]^{-1} & \\ & & [\mathbf{J}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

benutzt, und es werden folgende Matrizen und Vektoren definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T &= \langle \mathbf{u}^{iT} \mathbf{r}^{iT} \rangle = \langle u_1^1 u_2^1 u_3^1 \varphi^1 \psi^1 \vartheta^1 \dots u_1^M u_2^M u_3^M \varphi^M \psi^M \vartheta^M \rangle \\ \bar{\mathbf{d}}^T &= \langle u_{1,\xi} u_{1,\eta} u_{1,\zeta} u_{2,\xi} u_{2,\eta} u_{2,\zeta} u_{3,\xi} u_{3,\eta} u_{3,\zeta} \rangle \\ \mathbf{d}^T &= \langle u_{1,1} u_{1,2} u_{1,3} u_{2,1} u_{2,2} u_{2,3} u_{3,1} u_{3,2} u_{3,3} \rangle \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{L}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{L}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Ableitungen der linearisierten Verschiebungen (4.11) nach den natürlichen Koordinaten liefern mit

$$\bar{\mathbf{B}}_\xi^i = N_{,\xi}^i \cdot \bar{\mathbf{L}}_1 \quad (4.20)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_\eta^i = N^i \cdot \bar{\mathbf{L}}_2 \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_\zeta^i = N^i \cdot \bar{\mathbf{L}}_3 \quad (4.22)$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{B}}_\xi^i \cdot \mathbf{u}^i \\ &+ \sum_{i=1}^M \frac{h_\eta^i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\eta^i + (\eta + e_\eta) \bar{\mathbf{B}}_\xi^i) \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^i \\ &+ \sum_{i=1}^M \frac{h_\zeta^i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\zeta^i + (\zeta + e_\zeta) \bar{\mathbf{B}}_\xi^i) \mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^i \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Verschiebungsableitungen bezüglich der Raumkoordinaten  $x_1, x_2, x_3$  können mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{L}_k = \hat{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{L}}_k = \begin{bmatrix} (J_{1k})^{-1} & 0 & 0 \\ (J_{2k})^{-1} & 0 & 0 \\ (J_{3k})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (J_{1k})^{-1} & 0 \\ 0 & (J_{2k})^{-1} & 0 \\ 0 & (J_{3k})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (J_{1k})^{-1} \\ 0 & 0 & (J_{2k})^{-1} \\ 0 & 0 & (J_{3k})^{-1} \end{bmatrix}$$

und

$$\hat{\mathbf{B}}_x^i = N^i_{,\xi} \cdot \mathbf{L}_1 \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_y^i = N^i \cdot \mathbf{L}_2 \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_z^i = N^i \cdot \mathbf{L}_3 \quad (4.26)$$

dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{d}} = & \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{B}}_x^i \cdot \mathbf{u}^i + \sum_{i=1}^M \frac{h_\eta^i}{2} (\hat{\mathbf{B}}_y^i + (\eta + e_\eta) \hat{\mathbf{B}}_x^i) \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^i \\ & + \sum_{i=1}^M \frac{h_\zeta^i}{2} (\hat{\mathbf{B}}_z^i + (\zeta + e_\zeta) \hat{\mathbf{B}}_x^i) \mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad (4.27) \end{aligned}$$

oder zusammengefaßt:

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U} \quad (4.28)$$

Die kinematische Operatormatrix  $\hat{\mathbf{B}}$  ist im Anhang A1 angegeben.

### 4.3 Steifigkeitsmatrizen

Mit der im letzten Abschnitt hergeleiteten Operatormatrix  $\hat{\mathbf{B}}$  nach Gleichung (4.28) können die Steifigkeitsmatrizen und inneren Kräfte nach Abschnitt 3.4 berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{1V} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d(1V) \\ \mathbf{K}_g^I &= \int_{1V} \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{B}} \, d(1V) \\ \mathbf{K}_g^{II} &= \int_{1V} \mathbf{P}^T \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \mathbf{r} \, d(1V) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Komponenten der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g^{II}$  sind im Anhang A2 angegeben. Werden im Gleichungssystem

$$({}_1\mathbf{K}_e + {}_1\mathbf{K}_g^I + {}_1\mathbf{K}_g^{II}) \cdot \mathbf{U} = {}^2\mathbf{F}_{(a)} - {}^1\mathbf{F}_{(i)} \quad (4.30)$$

die Steifigkeitsanteile  $\mathbf{K}_e$  und  $\mathbf{K}_g^I$  nicht gesondert benötigt, so können sie auch zusammengefaßt werden, was besonders im Hinblick auf die numerische Berechnung sehr effizient ist.

$${}_1\mathbf{K}_{eg} = {}_1\mathbf{K}_e + {}_1\mathbf{K}_g^I = \int_{1V} {}_1\hat{\mathbf{B}}^T \underbrace{(\mathbf{P}^T {}_1\mathbf{C} \mathbf{P} + {}_1\mathbf{T})}_{: \hat{\mathbf{C}}} {}_1\hat{\mathbf{B}} d(1V) \quad (4.31)$$

Die Matrix  ${}_1\hat{\mathbf{C}}$  entspricht in dieser Schreibweise einer modifizierten Werkstoffmatrix, welche die Anfangsspannungen des Systems mitberücksichtigt.

#### 4.4 Innere Kräfte

Zur Bestimmung der inneren Kräfte

$${}_1\mathbf{F}_{(i)} = \int_{1V} {}_1\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{P}^T {}_1\boldsymbol{\tau} d(1V) \quad (4.32)$$

werden die Verschiebungsgradienten aus den Gesamtverschiebungen  ${}^m\mathbf{u}$  und den Gesamtrotationen  ${}^m\mathbf{r}$  gebildet und Gleichung (4.27) wird daher ersetzt durch:

$$\begin{aligned} {}^m\mathbf{d} = & \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{B}}_x^i \cdot {}^m\mathbf{u}^i \\ & + \sum_{i=1}^M \frac{h_\eta^i}{2} (\hat{\mathbf{B}}_y^i + (\eta + e_\eta) \hat{\mathbf{B}}_x^i) ({}^m\mathbf{V}_\eta^i - {}^0\mathbf{V}_\eta^i) \\ & + \sum_{i=1}^M \frac{h_\zeta^i}{2} (\hat{\mathbf{B}}_z^i + (\zeta + e_\zeta) \hat{\mathbf{B}}_x^i) ({}^m\mathbf{V}_\zeta^i - {}^0\mathbf{V}_\zeta^i) \end{aligned} \quad (4.33)$$

## 4.5 Äußere Kräfte

Die bisher nicht näher betrachtete virtuelle äußere Arbeit  $\delta^2 W_{(a)}$  setzt sich aus den Arbeitsanteilen mehrerer äußerer Kräfte zusammen:

- Knotenkräfte  ${}^2 P^i$   
virtueller Arbeitsanteil:  $\delta^2 W_{(a1)} = {}^2 P_j^i \delta u_j^i$
- Oberflächenkräfte  $\frac{2}{2} p_j$   
Linien- bzw. Streckenlasten, bezogen auf das Linienelement  $d({}^2 s)$   
virtueller Arbeitsanteil:  $\delta^2 W_{(a2)} = \int_{{}^2 s} \frac{2}{2} p_j \delta u_j d({}^2 s)$
- Volumenkräfte  $\frac{2}{2} f_j$   
Volumenkraft, bezogen auf das Volumenelement  $d({}^2 V)$   
virtueller Arbeitsanteil:  $\delta^2 W_{(a3)} = \int_{{}^2 V} \frac{2}{2} f_j \delta u_j d({}^2 V)$

Die Oberflächen- und Volumenkräfte können im weiteren diskretisiert und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung in äquivalente Elementknotenkräfte umgerechnet werden.

Vorgehensweise am Beispiel der Linienlast:

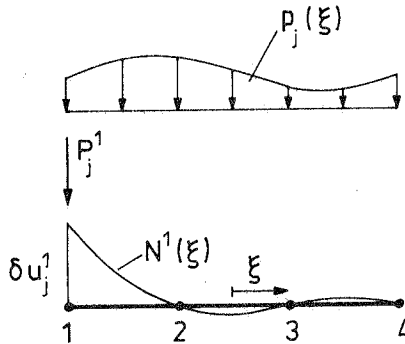


Bild 4.6 Äquivalente Knotenlast am Knoten 1

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen sei die Arbeit der gesuchten äquivalenten Knotenkraft eines Knotens  $k$  infolge der virtuellen Knotenverschiebung  $\delta u_j^k$  gleich der Arbeit der Linienlast infolge der durch  $\delta u_j^k$



ausgelösten virtuellen Verformung des Elements, approximiert durch die Interpolationsfunktion  $N^k(\xi)$  des Knotens  $k$ .

$$P_j^k \cdot \delta u_j^k = \int_{-1}^{+1} p_j(\xi) \cdot N^k(\xi) \delta u_j^k \cdot D \cdot d\xi$$

mit 
$$p_j(\xi) = \sum_{i=1}^M N^i \cdot p_j^i$$

$p_j^i \dots$  Lastordinate am Knoten  $i$

$$D = \sqrt{\left(\frac{dx_i}{d\xi}\right)^2}$$

## 4.6 Werkstoffgesetz

Im Rahmen des Konzepts der Degeneration werden die Normalspannungen in den 'Dickenrichtungen' des Balkenelements vernachlässigt sowie eine Formtreue des Querschnitts vorausgesetzt. Durch Einsetzen der entsprechenden Zwangsbedingungen

$$\tau'_{22} = \tau'_{33} = \tau'_{23} = 0$$

in die isotrope 3-dimensionale Werkstoffmatrix (z.B. aus [9])

$$\mathbf{C}' = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ergibt sich die 3-dimensional degenerierte anisotrope Werkstoffmatrix im Lokalsystem  $x'_1, x'_2, x'_3$  zu:

$$\mathbf{C}' = E \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2(1+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Auf Grund der kinematischen Annahme des Konzepts der Degeneration, daß die Normalen im Verlauf der Verformung des Elements gerade bleiben, wird bei einer Querbelastung die in Wirklichkeit parabolische Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt durch eine konstante Verteilung ersetzt. Dieses Modell wird durch den Faktor  $k = \frac{5}{6}$  zur Berechnung eines effektiven Querschubmoduls in der degenerierten Werkstoffmatrix korrigiert.

Resultieren die Schubspannungen jedoch aus einer Torsionsbeanspruchung, so ist dieser Korrekturfaktor  $k = 1$  zu setzen (vergleiche auch Abschnitt 7).

Für große Verformungen kann das Werkstoffgesetz mit dem Spannungstensor *Kirchhoff-Piola 2. Art* und dem *Green-Lagrange* Dehnungstensor beschrieben werden:

$${}^m S'_{ij} = {}^m C'_{ijkl} {}^m \epsilon'_{kl} \quad (4.36)$$

Mit Hilfe der Tensortransformation

$${}^m C_{pqrs} = \frac{{}^m \rho}{{}^m \rho} {}^m x_{p,i} {}^m x_{q,j} {}^m C_{ijkl} {}^m x_{r,k} {}^m x_{s,l} \quad (4.37)$$

ist Gleichung ( 4.36 ) auf die entsprechende Form

$${}^m \tau'_{pq} = {}^m C'_{pqrs} {}^m \epsilon'_{rs} \quad (4.38)$$

der *mitgehenden Lagrange-Formulierung* mit dem *Cauchy-Spannungstensor* und den *Euler-Almansi-Verzerrungen* überzuführen. Die Almansi-Verzerrungen werden hierbei aus den Verschiebungsableitungen der Gesamtverschiebungen im Zustand  ${}^m Z$  berechnet.

$${}^m \epsilon'_{ij} = \frac{1}{2} ({}^m u'_{i,j} + {}^m u'_{j,i} - {}^m u'_{k,i} \cdot {}^m u'_{k,j}) \quad (4.39)$$

Unter Voraussetzung kleiner Verzerrungen ist die Tensortransformation ( 4.37 ) nicht erforderlich und anstelle des konstitutiven Tensors  ${}^m C'_{ijkl}$  kann näherungsweise der Tensor  ${}^m C_{ijkl}$  mit der unverformten Ausgangslage als Bezugszustand verwendet werden. Die Komponenten der Werkstoffmatrix dürfen dann als konstant angenommen werden und stimmen mit den Komponenten aus Gleichung ( 4.35 ) überein.

In der globalen Formulierung der Elementmatrizen muß die Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}'$  mittels einer Tensortransformation 4. Ordnung

$${}^m C_{pqrs} = {}^m A_{pi} {}^m A_{qj} {}^m A_{rk} {}^m A_{sl} {}^m C'_{ijkl} \quad (4.40)$$

schließlich noch auf das globale Koordinatensystem transformiert werden (vergleiche [44]).

## 4.7 Numerische Integration

Zur Berechnung der Steifigkeitsausdrücke  $\frac{1}{1}\mathbf{K}_e$  und  $\frac{1}{1}\mathbf{K}_g$  sowie der inneren Kräfte  $\frac{1}{1}\mathbf{F}$  ist eine Integration über das Elementvolumen notwendig. Unter Verwendung der Transformationsbeziehung ( 4.18 ) kann das Volumendifferential in den natürlichen Koordinaten ausgedrückt werden zu

$$d^mV = \det |{}^m\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad ( 4.41 )$$

und die Integration kann im natürlichen Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  erfolgen.

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}\mathbf{k}_e(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{1}\mathbf{B}^T(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{1}{1}\mathbf{C}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{1}{1}\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{1}{1}\mathbf{k}_g(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{1}\hat{\mathbf{B}}^T(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{1}{1}\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{1}{1}\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{1}{1}\mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{1}\mathbf{B}^T(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{1}{1}\boldsymbol{\tau}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

in ( 4.29 ) sind im allgemeinen gebrochen rationale Funktionen, die nicht explizit integrierbar sind. Aus diesem Grunde erfolgt die Integration über das Elementvolumen numerisch, z.B. mit Hilfe der *Gaußschen Quadraturformel* (vergleiche z.B. [6],[23],[50]).

$$\begin{aligned} \int_V \mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) dV &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) \det |\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{r_\xi} \sum_{j=1}^{r_\eta} \sum_{k=1}^{r_\zeta} w_\xi(i) w_\eta(j) w_\zeta(k) \mathcal{F}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \det |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)| \end{aligned}$$

mit

- |                          |     |                                                                                         |
|--------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $r_\xi, r_\eta, r_\zeta$ | ... | Anzahl der Integrationspunkte entlang<br>der natürlichen Koordinaten $\xi, \eta, \zeta$ |
| $w_\xi, w_\eta, w_\zeta$ | ... | Wichtungsfaktoren                                                                       |
| $\xi_i, \eta_j, \zeta_k$ | ... | natürliche Koordinaten der Integrationspunkte                                           |

Mit der Quadraturformel nach Gauß können mit  $r$  Integrationspunkten Polynome bis zur Ordnung  $2r - 1$  exakt integriert werden.

Für ein gerades Element und konstanter Jakobi-Matrix läßt sich aus den Interpolationsfunktionen nach Tabelle 4.1 auf Seite 15 die erforderliche Anzahl der Integrationspunkte ermitteln.

Liegt eine beliebige (gekrümmte) Elementgeometrie vor, so stellen die Integranden in ( 4.29 ) gebrochene rationale Funktionen dar, die numerisch

Integrand	Element	max. Ordnung			Integrationspunkte		
		$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$r_\xi$	$r_\eta$	$r_\zeta$
$\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$	linear	2	2	2	2	2	2
	quadratisch	4	2	2	3	2	2
	kubisch	6	2	2	4	2	2

Tabelle 4.2 Anzahl der Integrationspunkte für geradlinige Elemente

nicht mehr exakt integrierbar sind. Im Regelfall liefern die in Tabelle 4.2 angegebenen Integrationsordnungen jedoch auch hierfür zufriedenstellende Ergebnisse.

Werden weniger Integrationspunkte als für eine exakte Integration der Matrizenfunktionen erforderlich verwendet, so spricht man von einer *reduzierten* bzw. *Unterintegration*, die besonders zur Beseitigung von *Locking*-Phänomenen beim linearen und quadratischen Element eine große Rolle spielt.

Diese Reduktion der Integrationsordnung kann jedoch begleitet sein von einem unerwünschten Rangabfall der Elementsteifigkeitsmatrix, wobei sich unechte kinematische Mechanismen des Elements einstellen (*zero-energy modes*).

Für die Integration in Dickenrichtung sind immer 2 Integrationspunkte ausreichend, solange von linearem Werkstoffverhalten ausgegangen wird. Wird materielle Nichtlinearität berücksichtigt, so ist eine Quadratur mittels der Simpson-Regel zu bevorzugen, um auch die Randspannungen zu erfassen.

Ein zusätzlicher Aspekt der Integrationsordnung kommt schließlich noch der Spannungsberechnung des Elements zu, da diese in der Regel an den selben Integrationspunkten durchgeführt wird. Innerhalb eines Elements ist die Güte der Spannungsgrößen nicht konstant, sondern an Punkten mit bestimmter Lage besonders ausgeprägt (*Barlow-Punkte* [8], Tabelle 5.11.1 in [18]). Dies ist besonders im Hinblick auf die Erstellung einer korrekten elastoplastischen Werkstoffmatrix von Bedeutung. Für das quadratische (kubische) Element stimmen diese Punkte entlang der Elementlängsachse mit den Stützstellen einer 2-Punkt (3-Punkt) Gauß-Integration überein.

Um bei zunehmender Elementverfeinerung für den Grenzfall konstanter Dehnungen innerhalb eines Elements noch Konvergenz zu erreichen, muß jedoch eine Mindestanzahl der erforderlichen Integrationspunkte so gewählt werden, daß die Determinante der Jakobi-Matrix und somit das Elementvolumen

$$\int_V dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$$

bei beliebiger Elementgeometrie noch exakt erfaßt wird.

## 5 Lokale Formulierung

Die in Kapitel 4 dargestellte Herleitung der Elementformulierung basiert auf den Gleichgewichtsbedingungen sowie den kinematischen und konstitutiven Beziehungen des 3-dimensionalen Kontinuums. Hierbei werden die strukturmekanischen Eigenschaften der äußeren kinematischen Variablen (Verschiebungen haben über den Querschnitt nur konstante und linear veränderliche Anteile) in die Ansätze für die Geometrie- und Verschiebungsfelder eingebracht, andere Annahmen (keine Normalspannungen in Dickenrichtung) gehen in das Werkstoffgesetz ein. Weiterhin sind alle Kraft- und Weggrößen auf ein globales Koordinatensystem bezogen.

Diese Vorgehensweise erlaubt somit eine Beschreibung des mechanischen Verhaltens dünnwandiger Tragwerke (z.B. Schale, Balken) unter Umgehung spezieller zwei- bzw. eindimensionaler Modelltheorien.

Als Nachteil dieser kontinuumsmechanischen Betrachtung ist besonders bei dem hier vorgestellten Balkenelement die Tatsache anzusehen, daß die mit nur drei Werten auf der Hauptdiagonalen äußerst schwach besetzte lokale Werkstoffmatrix ( 4.35 ) durch die Transformation ( 4.40 ) im allgemeinen Fall in eine vollbesetzte  $6 \times 6$ -Matrix übergeht, was z.B. bei der Berechnung des Steifigkeitsanteils

$$\int_{1V} {}_1\mathbf{B}^T {}_1\mathbf{C} {}_1\mathbf{B} d(1V)$$

einen erheblichen numerischen Rechenaufwand darstellt.

Die im folgenden skizzierte Einführung lokaler orthonormaler Elementkoordinatensysteme trägt den orientierten Eigenschaften des Linienelements Rechnung und bereitet gleichzeitig den Weg für die in Kapitel 6 behandelte analytische Vorabintegration über den Elementquerschnitt.

### 5.1 Integration im Lokalsystem

Eine Elementformulierung auf dem Fundament der klassischen Kontinuumsmechanik muß nicht zwingend in einem einheitlichen Koordinatensystem erfolgen. Alle auftretenden Größen können in beliebigen Bezugssystemen ausgedrückt werden, ohne die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen zu verletzen. So werden in diesem Abschnitt neben dem globalen Koordinatensystem zusätzliche orthonormale Elementkoordinatensysteme an den Integrationspunkten des Elements eingeführt, auf die alle im Verlauf der

numerischen Integration über das Elementvolumen benötigten Größen zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen bezogen werden (Bild 5.1).

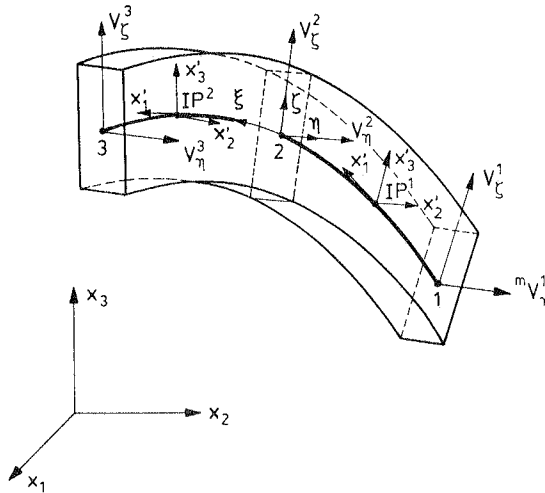


Bild 5.1 Lokales Elementkoordinatensystem am Integrationspunkt

In der Zustandslage  ${}^mZ$  wird an der Stelle  ${}^m\mathbf{x}(\xi)$  der Balken-Bezugslinie dieses lokale Elementkoordinatensystem folgendermaßen definiert:

- Der Einheitsvektor  ${}^m\mathbf{e}_1(\xi)$  der lokalen  ${}^m\mathbf{x}'_1$ -Achse zeigt in Richtung der Element-Bezugslinie (fällt mit der natürlichen Koordinate  $\xi$  zusammen) und kann somit direkt aus der ersten Zeile der Jakobi-Matrix nach Gleichung ( 4.18 ) bestimmt werden.
- Zur Ermittlung der beiden zu  ${}^m\mathbf{e}_1(\xi)$  orthogonalen Einheitsvektoren  ${}^m\mathbf{e}_2(\xi)$  und  ${}^m\mathbf{e}_3(\xi)$  der lokalen Achsen  ${}^m\mathbf{x}'_2$  und  ${}^m\mathbf{x}'_3$  wird einer der beiden bekannten interpolierten Elementdirektoren  ${}^m\mathbf{V}_\eta(\xi)$  oder  ${}^m\mathbf{V}_\zeta(\xi)$  herangezogen, z.B.:

$${}^m\mathbf{e}_2(\xi) = {}^m\mathbf{V}_\zeta(\xi) \times {}^m\mathbf{e}_1(\xi) \quad ( 5.1 )$$

$${}^m\mathbf{e}_3(\xi) = {}^m\mathbf{e}_1(\xi) \times {}^m\mathbf{e}_2(\xi) \quad ( 5.2 )$$

Für den Sonderfall, daß keine Schubverformung vorliegt, sind  ${}^m\mathbf{e}_2(\xi)$  und  ${}^m\mathbf{V}_\eta(\xi)$  bzw.  ${}^m\mathbf{e}_3(\xi)$  und  ${}^m\mathbf{V}_\zeta(\xi)$  identisch.



Im Verlauf der numerischen Integration über das Elementvolumen wird an jedem Integrationspunkt ein lokales Elementsystem aufgestellt. Unter Verwendung der Transformationsbeziehung

$${}^m \mathbf{u}'(\xi) = {}^m \bar{\mathbf{A}} \cdot {}^m \mathbf{u}(\xi) \quad (5.3)$$

zwischen dem Globalsystem  $x_1, x_2, x_3$  sowie dem Elementsystem  $x'_1, x'_2, x'_3$  läßt sich der Verschiebungsansatz (4.11) in diesem Lokalsystem ausdrücken durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i {}^m \bar{\mathbf{A}} \mathbf{u}^i \\ & + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i {}^m \bar{\mathbf{A}} {}^m \mathbf{G}^i \mathbf{r}^i \\ & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i {}^m \bar{\mathbf{A}} {}^m \mathbf{F}^i \mathbf{r}^i \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zur Ermittlung der lokal orientierten Verzerrungen bzw. Verschiebungsgradienten ist außerdem die *Jakobi-Matrix* entweder auf das Lokalsystem zu transformieren

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (5.5)$$

oder aber direkt im Lokalsystem des jeweiligen Integrationspunktes aufzustellen.

Die lokalen Verschiebungsableitungen sind gegeben durch die Beziehung:

$$u'_{i,j} = \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} u_k \right)_{,j} = \underbrace{\frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x'_j}}_{=0} u_k + \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x'_j} \quad (5.6)$$

Die Transformationskoeffizienten  $\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$  bzw. die Transformationsmatrix  ${}^m \bar{\mathbf{A}}^i$  in Gleichung (5.4) sind in kartesischen oder affinen Koordinatensystemen konstant und ihre Differentiation nach den lokalen Koordinaten verschwindet.

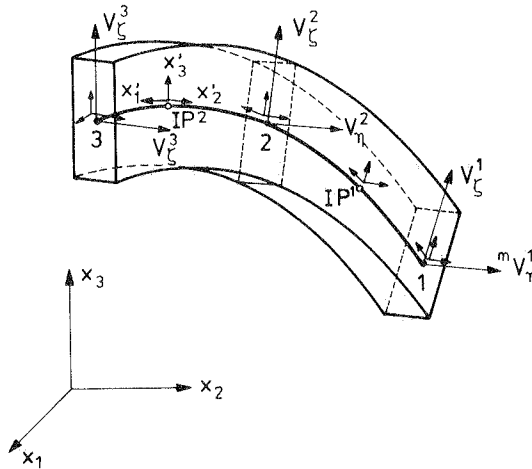
## 5.2 Lokale Knotenkinematiken

In den bisherigen Formulierungen waren die Knotenfreiheitsgrade immer im einheitlichen globalen Koordinatensystem definiert, wodurch vor dem Zusammenbau der Systemsteifigkeit eine Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen entfällt.

Werden jedoch zur Behandlung von Spezialproblemen wie z.B.

- Querschnittsverwölbung oder
- lokales Plattenbeulen

zu den Ansatzfunktionen weitere *lokale Knotenfreiwerte* hinzugefügt, so erscheint ein gänzlicher Umstieg auf lokale Elementkoordinaten vorteilhaft. Bei gekrümmten Elementen besitzt jeder materielle Punkt der Bezugslinie ein eigenes Lokalsystem, im Verlauf der numerischen Integration werden diese Lokalsysteme jedoch nur an den Elementknoten sowie Integrationspunkten benötigt (Bild 5.2).



**Bild 5.2** Lokalsysteme an den Knoten und Integrationspunkten

Die Elementformulierung in den lokalen Koordinatensystemen erfolgt analog der Herleitung in Abschnitt 5.1, nur daß anstelle der im Verschiebungsansatz nach Gleichung ( 5.4 ) auf das raumfeste globale Koordinaten-

system bezogenen Größen  $\mathbf{u}^i, \mathbf{r}^i, \mathbf{G}^i$  und  $\mathbf{F}^i$  jetzt solche Größen verwendet werden, die sich auf das lokale Elementkoordinatensystem des jeweiligen Knotens  $i$  beziehen. Die Matrix  ${}^m\bar{\mathbf{A}}^i$  beinhaltet nunmehr eine Transformationsbeziehung zwischen einem Lokalsystem am Knoten  $i$  und einem Lokalsystem an der Stelle  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i {}^m\bar{\mathbf{A}}^i \mathbf{u}^i \\ & + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i {}^m\bar{\mathbf{A}}^i {}^m\mathbf{G}^i \mathbf{r}^i \\ & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i {}^m\bar{\mathbf{A}}^i {}^m\mathbf{F}^i \mathbf{r}^i \quad (5.7) \end{aligned}$$

Im Falle eines gekrümmten Elements ist zu beachten, daß die Transformationsmatrix an der Stelle  $\xi$  jetzt dem Knoten  $i$  zugeordnet ist und gegenüber Gleichung ( 5.4 ) nicht mehr für alle Knoten konstant bleibt.

Die Jakobi-Matrix muß im Verlauf der numerischen Integration über das Elementvolumen im lokalen Elementkoordinatensystem des jeweiligen Integrationspunktes aufgestellt werden.

### 5.3 Transformation Element $\rightarrow$ System

In der lokalen Formulierung des Balkenelements nach Abschnitt 5.2 sind die inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix sowie der Vektor mit den verallgemeinerten inneren Kräften auf das lokale Elementkoordinatensystem  $\mathbf{x}'$  bezogen. Vor der Addition dieser Elementanteile auf die entsprechenden Systemwerte müssen sie auf das raumfeste globale Systemkoordinatensystem  $\mathbf{x}$  transformiert werden.

Die Anteile der Verschiebungskomponenten in der Elementsteifigkeitsmatrix und die Kraftgrößen der verallgemeinerten inneren Kräfte lassen sich durch einfache Vektortransformationen auf das globale KOS transformieren. Zur Transformation der inkrementellen Rotationskomponenten sowie der Momentengrößen der inneren Kräfte ist eine weitere Transformationsbeziehung notwendig.

Hinweis:

Anders als bei den Verschiebungsinkrementen  $\mathbf{u}^i$ , die vom kartesischen Lokalsystem  $\mathbf{x}^i$  auf das kartesische Globalsystem  $\mathbf{x}$

transformiert werden, ist bei den Rotationsinkrementen und den Momentengrößen trotz ihres Vektorcharakters eine andere Transformation erforderlich. Infolge der Definition der Elementdirektoren sind die Rotationsinkremente  $\mathbf{r}^{i}$  zwar in  $\mathbf{x}^{i}$  definiert,  $\mathbf{r}^{i}$  jedoch nicht in  $\mathbf{x}$  (vergleiche Bild 4.3).

Gegeben sei die Transformationsmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  der Verschiebungen nach Gleichung ( 5.3 ). Weiterhin betrachten wir die Relativverschiebung eines Punktes auf dem Elementquerschnitt am Knoten  $i$  in Richtung der lokalen  $x_1^i$  Achse gegenüber der Verschiebung der Mittellinie:

$$\Delta \mathbf{u}_{\eta}^{i} = \frac{1}{2}(\eta + e_{\eta}) \cdot h_{\eta}^i \cdot \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^{i} \quad ( 5.8 )$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\zeta}^{i} = \frac{1}{2}(\zeta + e_{\zeta}) \cdot h_{\zeta}^i \cdot \mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^{i} \quad ( 5.9 )$$

mit den lokalen Rotationsinkrementen

$$\mathbf{r}^{i} = \begin{bmatrix} \varphi^{i} \\ \psi^{i} \\ \vartheta^{i} \end{bmatrix}$$

Diese lokalen Relativverschiebungen lassen sich nach ( 5.4 ) als transformierte globale Größen ausdrücken:

$$\Delta \mathbf{u}_{\eta}^{i} = \frac{1}{2}(\eta + e_{\eta}) \cdot h_{\eta}^i \cdot \bar{\mathbf{A}}^i \cdot \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad ( 5.10 )$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\zeta}^{i} = \frac{1}{2}(\zeta + e_{\zeta}) \cdot h_{\zeta}^i \cdot \bar{\mathbf{A}}^i \cdot \mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad ( 5.11 )$$

Aus der Identität der Gleichungen ( 5.8 ) und ( 5.9 ) mit den Gleichungen ( 5.10 ) und ( 5.11 ) erhält man nunmehr zwei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Transformationsmatrix für die Rotationsgrößen:

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^{i} = \bar{\mathbf{A}}^i \cdot \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}^i = \tilde{\mathbf{G}}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad ( 5.12 )$$

$$\mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^{i} = \bar{\mathbf{A}}^i \cdot \mathbf{F}^i \cdot \mathbf{r}^i = \tilde{\mathbf{F}}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad ( 5.13 )$$

Aus den Gleichungen ( 5.12 ) und ( 5.13 ) lassen sich schließlich die gesuchten Transformationsbeziehungen für die Rotationsfreiheitsgrade gewinnen:

$$r_3^i = \vartheta^{i} = \frac{1}{G_{13}^i} \cdot \tilde{G}_{1k}^i \cdot r_k^i = \bar{R}_{3k}^i \cdot r_k^i \quad ( 5.14 )$$

$$r_2^i = \psi^{i} = \frac{1}{F_{12}^i} \cdot \tilde{F}_{1k}^i \cdot r_k^i = \bar{R}_{2k}^i \cdot r_k^i \quad ( 5.15 )$$

$$r_1^i = \varphi^{i} = \frac{1}{F_{21}^i} (\tilde{F}_{2k}^i - F_{22}^i \cdot \bar{R}_{2k}^i) \cdot r_k^i = \bar{R}_{1k}^i \cdot r_k^i \quad ( 5.16 )$$

Falls  $F'_{21}{}^i = 0$ , so ist Gleichung ( 5.16 ) zu ersetzen durch:

$$r'_1{}^i = \varphi'^i = \frac{1}{F'_{31}{}^i}(\tilde{F}'_{3k}{}^i - F'_{32}{}^i \cdot \bar{R}'_{2k}{}^i) \cdot r'_k{}^i = \bar{R}'_{1k}{}^i \cdot r'_k{}^i \quad ( 5.17 )$$

Laut Definition der Normalenwinkel (Seite 21) müssen  $G'^i{}_{13}$  und  $F'^i{}_{12}$  immer verschieden von Null sein und von  $F'^i{}_{21}$  und  $F'^i{}_{31}$  ist mindestens ein Wert ungleich Null, so daß die Matrix  $\bar{\mathbf{R}}^i$  zur Transformation der Rotationsinkremente  $\mathbf{r}^i$  eindeutig bestimmt werden kann.

## 6 Vorabintegration über den Elementquerschnitt

Schon kurz nach der Vorstellung des Konzepts der *Degeneration* von Schalenelementen [5] wurde in [67] die Möglichkeit vorgestellt, durch eine analytische Vorabintegration über die Schalendicke den numerischen Rechenaufwand zur Erstellung der Steifigkeitsmatrizen deutlich zu reduzieren. Es wurde hierbei schon auf mögliche Fehler bei Anwendung dieser Technik auf Schalenprobleme mit großer Elementdicke hingewiesen. Einen weiteren Defekt dieses 'Standard'-Verfahrens stellt die Verletzung der Bedingung einer verzerrungslosen Starrkörperrotation gekrümmter Elemente dar, was Irons in seiner *isoparametrischen Schalentheorie* in [30],[32] und [31] berücksichtigt. Weitere Korrekturmöglichkeiten dieses Sachverhalts werden auch in [19], [20] und [38] vorgestellt. Im Anhang A3 wird das Auftreten solcher parasitärer Verzerrungen bei Starrkörperrotationen am Beispiel des 2-dimensional degenerierten Balkenelements aufgezeigt, was sinngemäß auf das 3-dimensional degenerierte Schalen- bzw. Balkenelement übertragen werden kann.

### 6.1 Interpolation der Normalenwinkel

Zur Berechnung der Steifigkeitsausdrücke des Balkenelements nach (4.29) ist eine Integration über das Elementvolumen erforderlich. Unter Annahme gewisser zusätzlicher Näherungen kann hierbei die Integration über die Querschnittsfläche vorab erfolgen, wobei das Element nur noch durch Größen der Elementmittellinie beschrieben wird. Es verbleibt somit nur noch eine Integration über die Längsrichtung des Elements (Linielement).

$$\int_V F_1(\xi) \cdot F_2(\eta, \zeta) dV = \int_\xi F_1(\xi) \underbrace{\int_\zeta \int_\eta F_2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta}_{\text{Vorabintegration}} \det |\mathbf{J}| \cdot d\xi \quad (6.1)$$

Die angesprochenen zusätzlichen Näherungen sind im Einzelnen:

1. Die Jakobi-Matrix wird auf der Mittellinie erstellt und sei über den Querschnitt konstant.
2. Das Konzept der Degeneration setzt das Geradebleiben der Elementnormalen voraus, was bei gekrümmten Elementen eine nichtlineare Dehnungsverteilung über den Querschnitt bewirkt. Bei der Vorabintegration wird nun der Verlauf dieser Dehnungsverteilung infolge Annahme 1 als höchstens linear angenommen.

Diese beiden Näherungen entsprechen der in der Schalentheorie gebrau-  
chlichen 1.Approximation nach *Love* und werden auch als *technische Schalen-*  
*theorie* nach *Love/Kirchhoff* bezeichnet.

Der 'Defekt' bei der Standard-Vorabintegration kann durch die Anwen-  
dung einer eindimensionalen Theorie behoben werden, wobei im Verschie-  
bungsansatz nur noch Größen der Elementmittellinie interpoliert werden.  
Im Ansatz für das lokale Geometriefeld werden anstelle der Normalen selbst  
jetzt die Winkel der Normalen interpoliert:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{x}'(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i {}^m \bar{\mathbf{A}}^i {}^m \mathbf{x}'^i + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) h_\eta {}^m \mathbf{V}'_\eta \\ & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) h_\zeta {}^m \mathbf{V}'_\zeta \quad (6.2) \end{aligned}$$

Die Ausdrücke

$$\frac{1}{2} \eta h_\eta = \frac{1}{2} \eta \sum_{i=1}^M N^i h_\eta^i \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} \zeta h_\zeta = \frac{1}{2} \zeta \sum_{i=1}^M N^i h_\zeta^i \quad (6.4)$$

werden in den Ansätzen für die Geometrie und die Verschiebungen gesondert  
interpoliert. Im Verlauf der Integration über das Elementvolumen werden  
sie an den jeweiligen Integrationspunkten ermittelt und analytisch über die  
Elementdicken integriert. Die Elementnormalen, ausgedrückt durch die in-  
terpolierten Winkel, lauten:

$${}^m \mathbf{V}'_\eta = \begin{bmatrix} \cos {}^m \Theta'_1 \\ \sin {}^m \Theta'_1 \cdot \cos {}^m \Omega' \\ \sin {}^m \Theta'_1 \cdot \sin {}^m \Omega' \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$${}^m \mathbf{V}'_\zeta = \begin{bmatrix} \cos {}^m \Psi'_1 \\ \sin {}^m \Psi'_1 \cdot \cos {}^m \Phi' \\ \sin {}^m \Psi'_1 \cdot \sin {}^m \Phi' \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

mit den interpolierten Winkeln

$$\begin{aligned} {}^m \Phi' &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \Phi'^i & {}^m \Omega' &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \Omega'^i \\ {}^m \Psi'_1 &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \Psi'_1{}^i & {}^m \Theta'_1 &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \Theta'_1{}^i \end{aligned} \quad (6.7)$$

Das Verschiebungsfeld wird direkt durch Differenzbildung der Geometriefelder in den Zustandslagen  ${}^m Z$  und  ${}^0 Z$  aus dem Geometrieansatz ( 6.2 ) gebildet.

$$\begin{aligned}
 {}^m \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \bar{\mathbf{A}}'^i {}^m \mathbf{u}'^i \\
 &+ \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) h_\eta ({}^m \mathbf{V}'_\eta - {}^0 \mathbf{V}'_\eta) \\
 &+ \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) h_\zeta ({}^m \mathbf{V}'_\zeta - {}^0 \mathbf{V}'_\zeta) \quad ( 6.8 )
 \end{aligned}$$

Durch Linearisierung bezüglich der Rotationen ergibt sich das inkrementelle Verschiebungsfeld zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^M N^i {}^m \bar{\mathbf{A}}'^i \mathbf{u}'^i \\
 &+ \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) h_\eta {}^m \mathbf{G}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}'^i \\
 &+ \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) h_\zeta {}^m \mathbf{F}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}'^i \quad ( 6.9 )
 \end{aligned}$$

Gegenüber dem Verschiebungsansatz ( 5.7 ) werden anstelle der Randverschiebungen hier die Rotationen interpoliert, eine Transformation der Rotationsanteile mit der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}'$  entfällt.

Die Matrizen  ${}^m \mathbf{F}'$  und  ${}^m \mathbf{G}'$  werden entsprechend den Gleichungen ( 4.13 ) und ( 4.14 ) gebildet, jetzt aber mit den interpolierten Winkeln ( 6.7 ) an der Stelle  $\xi$ . Als Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten werden ferner benötigt:

$${}^m \mathbf{x}'_{,\xi} = \sum_{i=1}^M N^i_{,\xi} {}^m \bar{\mathbf{A}}'^i {}^m \mathbf{x}'^i \quad ( 6.10 )$$

$${}^m \mathbf{x}'_{,\eta} = \frac{1}{2} h_\eta {}^m \mathbf{V}'_\eta \quad ( 6.11 )$$

$${}^m \mathbf{x}'_{,\zeta} = \frac{1}{2} h_\zeta {}^m \mathbf{V}'_\zeta \quad ( 6.12 )$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'_{,\xi} &= \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \bar{\mathbf{A}}^i \mathbf{u}^i \\
&\quad + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) h_\eta \mathbf{G}' \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \mathbf{r}^i \\
&\quad + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) h_\zeta \mathbf{F}' \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \mathbf{r}^i \quad (6.13)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}'_{,\eta} = \frac{1}{2} h_\eta \mathbf{G}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}^i \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u}'_{,\zeta} = \frac{1}{2} h_\zeta \mathbf{F}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}^i \quad (6.15)$$

Zur Berechnung der Verschiebungsableitungen werden somit Krümmungsänderungen  $\kappa(\xi)$  und die Verdrellung  $\Gamma(\xi)$  der Mittellinie herangezogen.

$$\sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \Gamma(\xi) \\ \kappa_\zeta(\xi) \\ \kappa_\eta(\xi) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

mit

$$\Gamma(\xi) = \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \varphi'^i \quad (6.17)$$

$$\kappa_\zeta(\xi) = \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \psi'^i \quad (6.18)$$

$$\kappa_\eta(\xi) = \frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^M N_{,\xi}^i \vartheta'^i \quad (6.19)$$

## 6.2 Aufspaltung der Operatormatrix $\mathbf{B}$

Die Operatormatrix  $\mathbf{B}$  wird im weiteren in zwei 'Membrananteile'  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  sowie zwei 'Biegeanteile'  $\mathbf{B}_3$  und  $\mathbf{B}_4$  aufgespalten, damit die von  $\eta$  und  $\zeta$  abhängigen Anteile separat vorliegen und die Dickenintegration explizit erfolgen kann.

$$\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_1(\xi) + \mathbf{B}_2(\xi) + (\zeta + e_\zeta)\mathbf{B}_3(\xi) + (\eta + e_\eta)\mathbf{B}_4(\xi) \quad (6.20)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi' & \psi' & \vartheta' \end{array} \\
 \boxed{\mathbf{B}} \\
 \\
 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{array} \\ \boxed{\mathbf{B}_1} \quad \boxed{\mathbf{0}} \\
 \\
 + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi' & \psi' & \vartheta' \end{array} \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_2} \\
 \\
 + (\zeta + e_\zeta) \frac{h_\zeta}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi' & \psi' & \vartheta' \end{array} \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_3} \\
 \\
 + (\eta + e_\eta) \frac{h_\eta}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi' & \psi' & \vartheta' \end{array} \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_4}
 \end{array}
 \end{array}$$

Die Anteile  $\mathbf{B}_1$  bis  $\mathbf{B}_4$  des kinematischen Operators sind in Anhang A5 angegeben.

Im weiteren werden die Matrix  $\mathbf{B}_2$  und die von den Exzentrizitäten abhängigen Anteile der Matrizen  $\mathbf{B}_3$  und  $\mathbf{B}_4$  zur Matrix  $\bar{\mathbf{B}}$  zusammengefaßt.

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_2 + e_\zeta \frac{h_\zeta}{2} \mathbf{B}_3 + e_\eta \frac{h_\eta}{2} \mathbf{B}_4 \quad (6.21)$$

Somit kann das Volumenintegral des Steifigkeitsausdruckes folgendermaßen umgeformt werden:

$$K_{11} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 \det|\mathbf{J}| d\xi \quad (6.22)$$

$$K_{12} = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}_1^T \mathbf{Q}_\zeta \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{Q}_\eta \mathbf{B}_4) \det|\mathbf{J}| d\xi \quad (6.23)$$

$$K_{21} = \int_{-1}^{+1} (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{Q}_\zeta \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{Q}_\eta \mathbf{B}_1) \det|\mathbf{J}| d\xi \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} K_{22} = & \int_{-1}^{+1} (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}_3^T \mathbf{R}_\zeta \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{R}_\eta \mathbf{B}_4 \\ & + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q}_\zeta \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{Q}_\zeta \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q}_\eta \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{Q}_\eta \bar{\mathbf{B}} \\ & + \mathbf{B}_3^T \mathbf{Q}_\eta \zeta \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{Q}_\eta \zeta \mathbf{B}_3) \det|\mathbf{J}| d\xi \end{aligned} \quad (6.25)$$

Die über die natürlichen Koordinaten des Elements am jeweiligen Integrationspunkt vorabintegrierten Materialmatrizen lauten hierbei:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \, d\eta d\zeta \\ \mathbf{Q}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \frac{h_\eta}{2} \eta \, d\eta d\zeta \\ \mathbf{Q}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \frac{h_\zeta}{2} \zeta \, d\eta d\zeta \\ \mathbf{Q}_{\eta\zeta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \frac{h_\eta h_\zeta}{4} \eta \zeta \, d\eta d\zeta \\ \mathbf{R}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \frac{h_\eta^2}{4} \eta^2 \, d\eta d\zeta \\ \mathbf{R}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{C}' \frac{h_\zeta^2}{4} \zeta^2 \, d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (6.26)$$

Mit diesen Beziehungen führt die Vorabintegration der Spannungen auf die integralen Größen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \, d\eta d\zeta \\ \hat{\mathbf{M}}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\eta}{2} \eta \, d\eta d\zeta \\ \hat{\mathbf{M}}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\zeta}{2} \zeta \, d\eta d\zeta \\ \hat{\mathbf{M}}_{\eta\zeta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\eta h_\zeta}{4} \eta \zeta \, d\eta d\zeta \\ \hat{\mathbf{M}}_{\eta\eta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\eta^2}{4} \eta^2 \, d\eta d\zeta \\ \hat{\mathbf{M}}_{\zeta\zeta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\zeta^2}{4} \zeta^2 \, d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Anfangsspannungsmatrix lautet somit:

$$\begin{aligned}
 K_{g11}^I &= \int_{-1}^{+1} \hat{B}_1^T \hat{\mathbf{F}} \hat{B}_1 \det|\mathbf{J}| d\xi \\
 K_{g12}^I &= \int_{-1}^{+1} (\hat{B}_1^T \hat{\mathbf{F}} \hat{B} + \hat{B}_1^T \hat{\mathbf{M}}_\zeta \hat{B}_3 + \hat{B}_1^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_4) \det|\mathbf{J}| d\xi \\
 K_{g21}^I &= \int_{-1}^{+1} (\hat{B}^T \hat{\mathbf{F}} \hat{B}_1 + \hat{B}_3^T \hat{\mathbf{M}}_\zeta \hat{B}_1 + \hat{B}_4^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_1) \det|\mathbf{J}| d\xi \\
 K_{g22}^I &= \int_{-1}^{+1} (\hat{B}^T \hat{\mathbf{F}} \hat{B} + \hat{B}^T \hat{\mathbf{M}}_\zeta \hat{B}_3 + \hat{B}^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_4 + \\
 &\quad \hat{B}_3^T \hat{\mathbf{M}}_\zeta \hat{B} + \hat{B}_3^T \hat{\mathbf{M}}_\zeta \hat{B}_3 + \hat{B}_3^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_4 + \\
 &\quad \hat{B}_4^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B} + \hat{B}_4^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_4 + \hat{B}_4^T \hat{\mathbf{M}}_\eta \hat{B}_3) \det|\mathbf{J}| d\xi
 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Zur Berechnung der inneren Kräfte werden entsprechend die Spannungsintegrale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tau d\eta d\zeta \\
 \mathbf{M}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{h_\eta}{2} \eta \tau d\eta d\zeta \\
 \mathbf{M}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{h_\zeta}{2} \zeta \tau d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.29)$$

herangezogen, womit das Integral der inneren Kräfte umgeformt werden kann zu:

$$\int_V \mathbf{B}^T \tau dV = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{F} + \mathbf{B}_3^T \mathbf{M}_\zeta + \mathbf{B}_4^T \mathbf{M}_\eta) d\xi \quad (6.30)$$

Liegt nichtlineares Werkstoffverhalten vor, so sind die integralen Querschnittsgrößen ( 6.26 ), ( 6.27 ) und ( 6.29 ) im Verlauf der Integration über die Balkenlängsachse am jeweiligen Integrationspunkt  $\xi_i$  mittels Simpsonintegration vorab numerisch über den Querschnitt aufzuintegrieren. Unter Voraussetzung elastischen Werkstoffverhaltens läßt sich diese Vorabintegration über den Elementquerschnitt explizit analytisch durchführen und führt, wie im nächsten Abschnitt dargestellt, auf die in der Balkentheorie gebräuchlichen Querschnittsgrößen.

### 6.3 Elastisches Stoffgesetz

Auch unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität wird als Näherung ein linearer Dehnungsverlauf über den Querschnitt angenommen (vergleiche Anhang A4). Wird zudem elastisches Werkstoffverhalten zugrunde gelegt, so können nach Bild 6.1 die Spannungen über den Querschnitt in einen konstanten sowie zwei lineare Anteile aufgespalten werden.

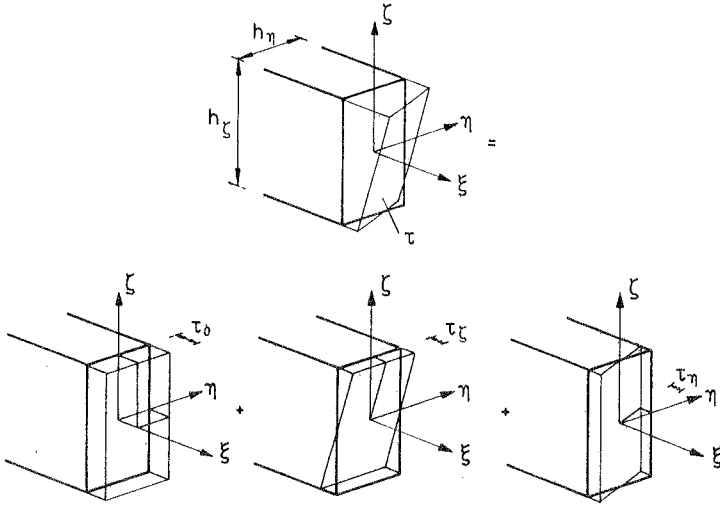


Bild 6.1 Aufspaltung der Spannungen

$$\tau(\eta, \zeta) = \tau(0, 0) + \eta \frac{h_\eta}{2} \tau(1, 0) + \zeta \frac{h_\zeta}{2} \tau(0, 1) = \tau_0 + \eta \tau_\eta + \zeta \tau_\zeta \quad (6.31)$$

$$\mathbf{T}(\eta, \zeta) = \mathbf{T}_0 + \eta \mathbf{T}_\eta + \zeta \mathbf{T}_\zeta \quad (6.32)$$

Die Spannungsgrößen  $\tau_\eta$  und  $\tau_\zeta$  bzw.  $\mathbf{T}_\eta$  und  $\mathbf{T}_\zeta$  sind hierbei die jeweiligen Randspannungen der natürlichen Koordinaten  $\eta = 1$  und  $\zeta = 1$ .

Aus den vorabintegrierten Materialmatrizen (6.26) erhält man jetzt die vorabintegrierten elastischen Materialmatrizen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\mathbf{C}'^e \\ \mathbf{Q}_\eta &= \mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{Q}_{\eta\zeta} = 0 \\ \mathbf{R}_\eta &= \frac{1}{3} h_\eta^2 \mathbf{C}'^e \\ \mathbf{R}_\zeta &= \frac{1}{3} h_\zeta^2 \mathbf{C}'^e \end{aligned} \quad (6.33)$$

Die aus den Spannungen resultierenden integralen Größen nach den Gleichungen ( 6.27 ) und ( 6.29 ) gehen über in die vereinfachten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{F}} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_0 \, d\eta d\zeta = 4\mathbf{T}_0 \\
 \hat{\mathbf{M}}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_\eta \frac{h_\eta}{2} \eta^2 \, d\eta d\zeta = \frac{2}{3} h_\eta \mathbf{T}_\eta \\
 \hat{\mathbf{M}}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} \frac{h_\zeta}{2} \zeta^2 \, d\eta d\zeta = \frac{2}{3} h_\zeta \mathbf{T}_\zeta \\
 \hat{\mathbf{M}}_{\eta\zeta} &= 0 \\
 \hat{\mathbf{M}}_{\eta\eta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_0 \frac{h_\eta^2}{4} \eta^2 \, d\eta d\zeta = \frac{1}{3} h_\eta^2 \mathbf{T}_0 \\
 \hat{\mathbf{M}}_{\zeta\zeta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_0 \frac{h_\zeta^2}{4} \zeta^2 \, d\eta d\zeta = \frac{1}{3} h_\zeta^2 \mathbf{T}_0
 \end{aligned} \tag{ 6.34 }$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tau_0 \, d\eta d\zeta = 4\tau_0 \\
 \mathbf{M}_\eta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{h_\eta}{2} \eta^2 \tau_\eta \, d\eta d\zeta = \frac{2}{3} h_\eta \tau_\eta \\
 \mathbf{M}_\zeta &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{h_\zeta}{2} \zeta^2 \tau_\zeta \, d\eta d\zeta = \frac{2}{3} h_\zeta \tau_\zeta
 \end{aligned} \tag{ 6.35 }$$

Nach der in dieser Arbeit eingeschlagenen Vorgehensweise behält die Jakobi-Matrix auch bei analytischer Vorabintegration unverändert die Dimension  $3 \times 3$  wie in der numerischen Dickenintegration . Die Jakobi-Determinante enthält somit noch den Querschnittsanteil

$$A = \frac{1}{4} h_\eta h_\zeta \tag{ 6.36 }$$

des Elements. Alternativ könnte dieser Querschnittsanteil mit in die vorabintegrierten Materialmatrizen eingebracht werden, die sodann in die gebräuchlichen Querschnittswerte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= h_\eta h_\zeta \mathbf{C}'^e \\
 \mathbf{R}_\eta &= \frac{1}{12} h_\eta^3 h_\zeta \mathbf{C}'^e \\
 \mathbf{R}_\zeta &= \frac{1}{12} h_\eta h_\zeta^3 \mathbf{C}'^e
 \end{aligned} \tag{ 6.37 }$$

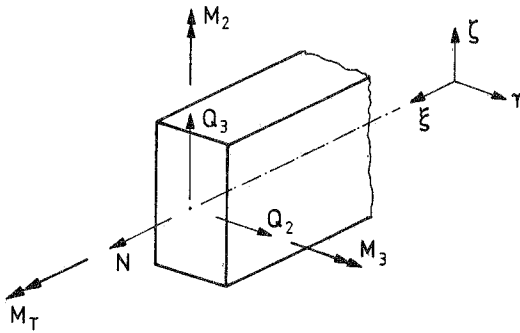
der Balkentheorie übergehen würden.

Aus den Vektoren  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}_\eta$  und  $\mathbf{M}_\zeta$  nach Gleichung ( 6.35 ) ergeben sich jetzt die üblichen Balkenquerschnittsgrößen nach Bild 6.2 :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{11} dA \\ 0 \\ 0 \\ \int_A \tau_{12} dA \\ \int_A \tau_{13} dA \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_\eta = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{11} x_2 dA \\ 0 \\ 0 \\ \int_A \tau_{12} x_2 dA \\ \int_A \tau_{13} x_2 dA \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{T1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_\zeta = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{11} x_3 dA \\ 0 \\ 0 \\ \int_A \tau_{12} x_3 dA \\ \int_A \tau_{13} x_3 dA \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_3 \\ 0 \\ 0 \\ M_{T2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit dem Torsionsmoment  $M_T = M_{T1} + M_{T2}$



**Bild 6.2** Schnittgrößen des Balkenelements

Infolge der Annahme des Geradebleibens der Normalen haben die Schubspannungen  $\tau_{12}$  in  $\eta$ -Richtung und die Schubspannungen  $\tau_{13}$  in  $\zeta$ -Richtung einen konstanten Verlauf und die Integrale  $\int_A \tau_{12} x_2 dA$  und  $\int_A \tau_{13} x_3 dA$  verschwinden.

## 7 Verschiebungsansatz für die Querschnittsverwölbung

Das Konzept der Degeneration basiert u.a. auf der Annahme, daß die Balkennormalen während der Verformung gerade bleiben. Das Verschiebungsfeld nach Gleichung ( 4.11 ) bzw. nach ( 6.9 ) bei lokaler Formulierung beinhaltet somit ein Ebenbleiben des Querschnitts und als Torsionswiderstand stellt sich, wie bei einem Kreisquerschnitt ohne Querschnittsverwölbung, das polare Trägheitsmoment ein.

In [26] wird darauf hingewiesen, daß für einen Quadratquerschnitt durch den Schubkorrekturfaktor  $k = \frac{5}{6}$  in der Werkstoffmatrix (vergleiche Abschnitt 4.6) die Torsionssteifigkeit ebenfalls korrigiert wird. Das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \frac{1}{6}a^4$$

ergibt sich für einen Quadratquerschnitt mit der Seitenlänge  $a$  zu

$$\bar{J}_p = J_p \cdot k = \frac{1}{7.2}a^4$$

gegenüber dem analytischen Wert des Torsionswiderstandsmoments

$$J_t = \frac{1}{7.11}a^4$$

Diese ausschließlich bei einem Quadratquerschnitt auftretende Zufälligkeit wird in den nachfolgenden Ausführungen jedoch nicht berücksichtigt, und der Schubkorrekturfaktor in der Werkstoffmatrix wird zur Berechnung der Schubspannungen infolge Torsionsbeanspruchung zu  $k = 1$  gesetzt.

Um die für Torsion nach *St. Venant* notwendige Bedingung der unbehinderten Querschnittsverwölbung zu erfüllen, wird über den Elementquerschnitt ein lokaler Verschiebungsansatz mit einem zusätzlichen Wölbfreiheitsgrad an jedem Knoten eingeführt. Diese Wölbfreiheitsgrade werden nach Aufstellung der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix mittels statischer Kondensation auf Elementebene herauskondensiert, wodurch sich die Verwölbung frei einstellen kann.



## 7.1 Zentrisches Element

Um die Torsionssteifigkeit nach *St. Venant* zu erfassen, muß der Verschiebungsansatz eine Querschnittsverwölbung zulassen, die im weiteren nicht behindert ist. Zur Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung wird ein Verschiebungsansatz in der lokalen Balken-Längsrichtung eingeführt, der durch die Funktion  $\lambda$  definiert ist.

$$u'_1(\eta, \zeta) = \lambda(\eta, \zeta)\Gamma \quad (7.1)$$

mit

$\lambda$  ... Einheitsverwölbung

$\Gamma = d\varphi'/dx'_1$  ... Verdrillung bzw. Verwindung

Die Funktion  $\lambda$  definiert die Verwölbung des Querschnitts und muß zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen und der Bedingungen am Querschnittsrand  $s$  den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x'^2_2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x'^2_3} = 0 \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'_2} - x'_3\right) \frac{dx'_3}{ds} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'_3} + x'_2\right) \frac{dx'_2}{ds} = 0 \quad (7.3)$$

genügen [60].

Geeignete Ansätze für die Einheitsverwölbung, die diese Bedingungen erfüllen, finden sich z.B. in [10].

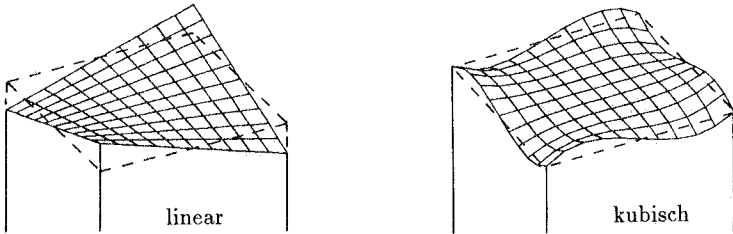
$$\lambda_1(\eta, \zeta) = q \frac{h_\eta h_\zeta}{4} \eta \zeta \quad (7.4)$$

$$\lambda_2(\eta, \zeta) = \frac{h_\eta h_\zeta}{16} \eta \zeta (h_\eta^2 \eta^2 - h_\zeta^2 \zeta^2) \quad (7.5)$$

mit

$$q = \begin{cases} +1 & \text{für } h_\zeta \geq h_\eta \\ -1 & \text{für } h_\zeta < h_\eta \end{cases}$$

Der in  $\eta$  und  $\zeta$  lineare Ansatz  $\lambda_1$  beschreibt die Querschnittsverwölbung eines Rechteckquerschnitts mit sehr großem Seitenverhältnis, der kubische Ansatz  $\lambda_2$  hingegen entspricht dem Verlauf der Querschnittsverwölbung eines Quadratquerschnitts. Die Verläufe sind in Bild 7.1 dargestellt.



**Bild 7.1** Querschnittsverwölbungen infolge  $\lambda_1$  (links) und  $\lambda_2$  (rechts)

Für Rechteckquerschnitte mit einem beliebigen Seitenverhältnis  $h_\eta/h_\zeta$  liefern die Gleichungen ( 7.4 ) und ( 7.5 ) den Verschiebungsansatz

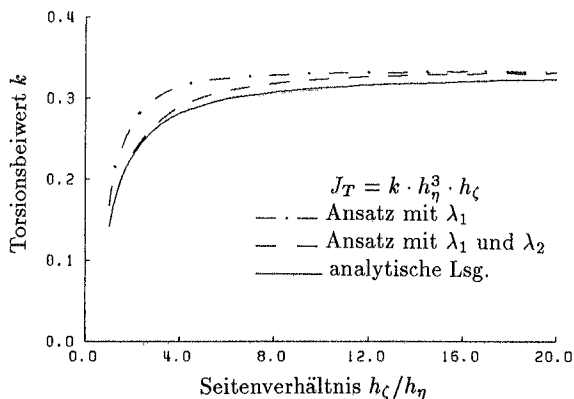
$$w'_1(\eta, \zeta) = \Gamma_1 \lambda_1(\eta, \zeta) + \Gamma_2 \lambda_2(\eta, \zeta) \quad (7.6)$$

mit zwei weiteren (Element-) Freiheitsgraden  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Bei unbehinderter Querschnittsverwölbung können diese zusätzlichen Freiheitsgrade mittels statischer Kondensation aus der Elementsteifigkeitsmatrix eliminiert werden und es stellt sich das Torsionswiderstandsmoment  $J_T$  nach *St. Venant* ein.

Im Bild 7.2 ist der Einfluß von  $\Gamma_1$  alleine und  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  auf  $J_T$  in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses  $h_\zeta/h_\eta$  aufgetragen.

Für Seitenverhältnisse  $h_\zeta/h_\eta > 10$  beträgt die Abweichung des Verschiebungsansatzes mit der Verwölbung  $\Gamma_1$  gegenüber dem Ansatz mit  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  weniger als 2%.

Im Hinblick auf den Anwendungsbereich des Elements als Steifenelement mit entsprechend großem Seitenverhältnis wird nur der Ansatz  $\lambda_1$  in das lokale Verschiebungsfeld eingebracht. Der zusätzliche kubische Ansatz  $\lambda_2$  würde zudem bei numerischer Integration über den Elementquerschnitt  $4 \times 4$  Integrationspunkte erfordern.



**Bild 7.2** Torsionswiderstandsmomente in Abhängigkeit des Längsverschiebungsansatzes

Der lokale Verschiebungsansatz mit der Verwölbung nach Ansatz (7.4) kann nunmehr angegeben werden zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{A}^i \mathbf{u}^i + \frac{1}{2}(\eta + e_\eta) h_\eta \mathbf{G}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}^i \\
 & + \frac{1}{2}(\zeta + e_\zeta) h_\zeta \mathbf{F}' \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{r}^i \\
 & + \frac{1}{4} q \eta \zeta h_\eta h_\zeta \mathbf{P} \sum_{i=1}^M N^i \Gamma_i^i \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Wird auch hier über die Dicke vorab analytisch integriert, so erhält man folgende Aufspaltung der kinematischen Operatormatrix (Anteile in Anhang A5):

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ \varphi' \ \psi' \ \vartheta' \ \Gamma_1 \\ \boxed{\mathbf{B}} \end{array} \\
= \\
\begin{array}{c} u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \\ \boxed{\mathbf{B}_1} \quad \boxed{\mathbf{0}} \end{array} + \begin{array}{c} \varphi' \ \psi' \ \vartheta' \ \Gamma_1 \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_2} \end{array} \\
+ (\zeta + e_\zeta) \frac{h_\zeta}{2} \begin{array}{c} \varphi' \ \psi' \ \vartheta' \ \Gamma_1 \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_3} \end{array} + (\eta + e_\eta) \frac{h_\eta}{2} \begin{array}{c} \varphi' \ \psi' \ \vartheta' \ \Gamma_1 \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_4} \end{array} \\
+ q \cdot \eta \zeta \frac{h_\eta h_\zeta}{4} \begin{array}{c} \varphi' \ \psi' \ \vartheta' \ \Gamma_1 \\ \boxed{\mathbf{0}} \quad \boxed{\mathbf{B}_5} \end{array}
\end{array}$$

## 7.2 Exzentrisch angeschlossenes Element

Fallen Drehachse und Elementschwerachse nicht zusammen, so wird die Einheitsverwölbung durch die Gleichung

$$\bar{\lambda}(\eta, \zeta) = \lambda(\eta, \zeta) + \frac{1}{4} h_\eta h_\zeta (-e_\eta \zeta + e_\zeta \eta) \quad (7.9)$$

beschrieben [4]. Die Verwölbung eines Punktes  $P$  entspricht hierbei dem Flächeninhalt der in Bild 7.3 markierten Rechtecke.

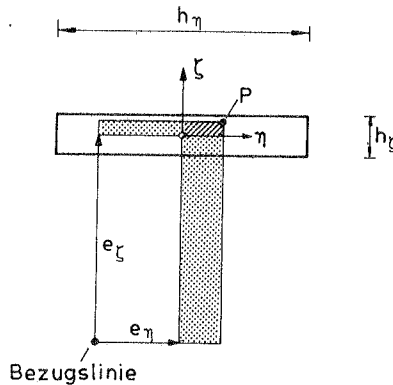


Bild 7.3 Verwölbung bei Exzentrizität

Zur Erfassung des Torsionswiderstandsmomentes nach *St. Venant* eines aus mehreren Einzelementen mit gemeinsamer Bezugslinie zusammengesetzten Querschnittes sind zwei Vorgehensweisen möglich:

1. Wird der Wölbansatz nach (7.4) bzw. (7.5) des zentrischen Elements verwendet, so ist ausschließlich eine unbehinderte Querverwölbung der Einzelquerschnitte sichergestellt. Um den aus der Exzentrizität herrührenden zusätzlichen Verwölbungsverlauf zu ermöglichen, muß sich jedes exzentrisch angeschlossene Element um seinen Normalenvektor, in dessen Richtung eine Exzentrizität vorhanden ist, frei verdrehen können. Dies kann durch Verwendung von Koppelknoten nach Bild 7.4 bewirkt werden, wo alle Freiheitsgrade bis auf die Rotationen  $\psi_I^i, \psi_{II}^i, \psi_{III}^i$  der Einzelemente gekoppelt und somit identisch sind. Die Steifigkeitsmatrizen der Einzelemente werden jeweils gesondert aufgestellt und kondensiert.



## Beispiel: Torsion eines Kragträgers mit I-Profil

Profil: IPB 200

$h = b = 200\text{mm}$ ,  $t_f = 15\text{mm}$ ,  $t_s = 9\text{mm}$ ,  $l = 3000\text{mm}$

$M_T = 1\text{Nm}$ ,  $E = 210000\text{N/mm}^2$ ,  $\mu = 0$

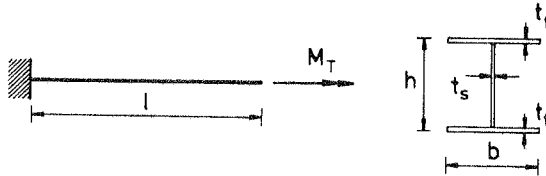


Bild 7.5 Kragträger unter Torsionsbeanspruchung

Der Kragträger wird mit den beiden Idealisierungen

- Modell 1: 1 kubisches Element in Längsrichtung

- Modell 2: 3 kubische Elemente in Längsrichtung

nach Bild 7.6 approximiert. An der Einspannstelle besteht jeweils eine Wölbbehinderung, indem die gegenseitige Verdrehung der drei Querschnittsteile unterdrückt wird.

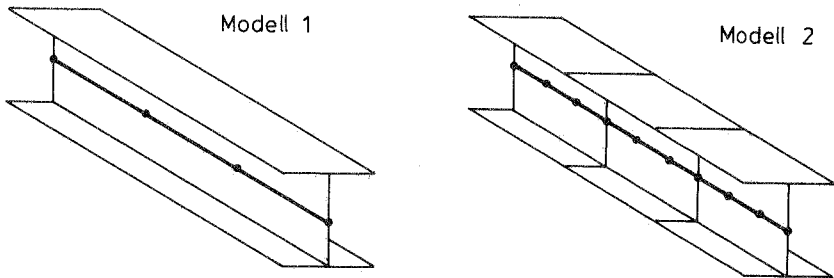


Bild 7.6 FE-Modelle des Kragträgers mit I-Profil

Als Vergleichslösung für den Verlauf der Verdrehung entlang der Balkenachse mit Behinderung der Verwölbung an der Einspannstelle wird in Bild 7.7 die Lösung der Differentialgleichung

$$EJ_y \frac{h^2}{4} \varphi^{IV} - GJ_T \varphi^{II} = m_t$$

herangezogen, die von beiden Modellen sehr gut approximiert wird. In der vorliegenden Elementformulierung wird der Verlauf der Querschnittsverwölbung innerhalb des Elements nicht als konstant angenommen, sondern er entspricht nach Gleichung ( 7.7 ) der Ordnung der Interpolationsfunktionen, woraus sich im Gegensatz zu ähnlichen Untersuchungen in [11] das gute Verhalten schon der einfachen Idealisierung mit *Modell 1* erklärt.

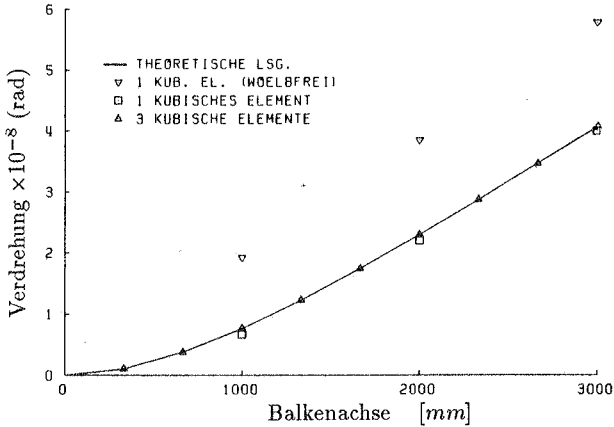
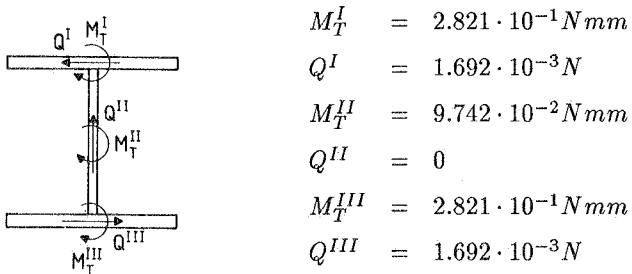


Bild 7.7 Verlauf der Verdrehung entlang der Balkenachse

**Hinweis:** Auch für zusammengesetzte Querschnitte liegen keine integralen Schnittgrößen vor, sondern weiterhin 'Einzerteil'-Schnittgrößen.



$$M_T = M_T^I + M_T^{II} + M_T^{III} + Q^I \cdot h = 1.0 Nmm$$



### 7.3 Statische Kondensation

Zur Elimination der Verdrillungsfreiheitsgrade  $\Gamma^i$  werden diese in der Elementsteifigkeitsmatrix als erste Anteile angeordnet. Nachfolgend wird dies am Beispiel eines 2-Knoten-Elements verdeutlicht.

$$\Gamma^1 \ \Gamma^2 \ u_1^1 \ u_2^1 \ u_3^1 \ \varphi^1 \ \psi^1 \ \vartheta^1 \ u_1^2 \ u_2^2 \ u_3^2 \ \varphi^2 \ \psi^2 \ \vartheta^2$$

$K_{\Gamma\Gamma}$	$K_{\Gamma U}^1$	$K_{\Gamma U}^2$	K n o t e n  1
$K_{U\Gamma}^1$	$K_{UU}^{11}$	$K_{UU}^{12}$	
$K_{U\Gamma}^2$	$K_{UU}^{21}$	$K_{UU}^{22}$	K n o t e n  2
Knoten 1		Knoten 2	

Mittels dieser Steifigkeitsmatrix kann nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} & \mathbf{K}_{\Gamma U} \\ \mathbf{K}_{U\Gamma} & \mathbf{K}_{UU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Gamma \\ \mathbf{R}_U \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

angeschrieben werden. Auf der rechten Seite stehen die verallgemeinerten Knotenkräfte  $\mathbf{R}$  mit

$$\mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{0}$$

für unbehinderte Verwölbung.

Aus der ersten Zeile dieses Gleichungssystems ergeben sich sodann die Knotenverdrillungen zu:

$$\Gamma = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{-1}(\mathbf{R}_{\Gamma} - \mathbf{K}_{\Gamma U} \mathbf{U}) = -\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{-1} \mathbf{K}_{\Gamma U} \mathbf{U} \quad (7.11)$$

Einsetzen dieser Knotenverdrillungen in die zweite Zeile des Gleichungssystems liefert schließlich das um die Verdrillungsfreiheitsgrade reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{UU}^* \mathbf{U} = \mathbf{R}_U \quad (7.12)$$

mit

$$\mathbf{K}_{UU}^* = \mathbf{K}_{UU} - \mathbf{K}_{U\Gamma} \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{-1} \mathbf{K}_{\Gamma U} \quad (7.13)$$

Diese als *statische Kondensation* bezeichnete formale Vorgehensweise, bei der die Inverse der Untermatrix  $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}$  gebildet werden muß, ist für die praktische Durchführung unzuweckmäßig. Als effizienter Kondensationsprozeß erweist sich eine sukzessive Elimination der einzelnen Verdrillungsvariablen  $\Gamma^i$ , was einer vorgezogenen Zerlegung der Elementsteifigkeitsmatrix entspricht (vergleiche [6], [50], [63]).

## 7.4 Drillknicken bei unbehinderter Verwölbung

Für ein lineares Balkenelement der Länge  $l$  und dem Seitenverhältnis  $h_\eta/h_\zeta \leq 1$  lassen sich mit dem Wölbansatz nach Gleichung ( 7.4 ) die Steifigkeitsanteile eines Knotens bezüglich der Rotation  $\varphi$  und der Verwölbung  $\Gamma = \Gamma_1$  bestimmen zu:

$$\begin{aligned} K_{\varphi\varphi} &= \frac{G}{l} \cdot \frac{1}{12} h_\eta h_\zeta (h_\eta^2 + h_\zeta^2) = \frac{G}{l} \cdot J_p \\ K_{\Gamma\Gamma} &= \frac{G}{l} \cdot \frac{1}{12} h_\eta h_\zeta (h_\eta^2 + h_\zeta^2) \\ K_{\varphi\Gamma} &= \frac{G}{l} \cdot \frac{1}{12} h_\eta h_\zeta (h_\eta^2 - h_\zeta^2) \end{aligned}$$

Durch den Prozess der statischen Kondensation geht der Steifigkeitsterm  $K_{\varphi\varphi}$  über in:

$$K_e = K_{\varphi\varphi} - \frac{K_{\varphi\Gamma} K_{\Gamma\varphi}}{K_{\Gamma\Gamma}} = \frac{G}{l} \cdot \frac{1}{3} h_\eta h_\zeta \frac{h_\eta^2 h_\zeta^2}{h_\eta^2 + h_\zeta^2} = \frac{G}{l} \cdot \frac{1}{3} h_\eta^3 h_\zeta \frac{1}{\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\right)^2 + 1}$$

Für Seitenverhältnisse  $h_\eta/h_\zeta \ll 1$  erhält man aus dieser Gleichung die Beziehung für das Torsionsträgheitsmoment dünnwandiger Querschnitte  $J_t$  nach *St. Venant*. Die Anfangsspannungsmatrix bleibt vom lokalen Wölbansatz unbeeinflusst, und mit dem Anteil

$$K_g = \frac{\sigma_{11}}{l} \cdot \frac{1}{12} h_\eta h_\zeta (h_\eta^2 + h_\zeta^2) = \frac{\sigma_{11}}{l} \cdot J_p$$

lässt sich das Eigenwertproblem für das Drillknicken des Stabes [59] anschreiben zu:

$$\begin{aligned} K_e + \Lambda K_g &= 0 \quad \text{bzw.} \\ G J_t + \Lambda \sigma_{11} J_p &= 0 \end{aligned}$$

## 8 Werkstoffverhalten

Für eine zuverlässige Beschreibung des Elementverhaltens ist neben der Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität in den kinematischen Beziehungen auch eine zutreffende Formulierung der Werkstoffgleichungen bei nichtlinearem Materialverhalten unerlässlich.

Das Verhalten der verschiedenen Materialien im plastischen Bereich läßt sich jedoch nicht mit einem allgemeingültigen Gesetz beschreiben. Jedes Modell baut auf hypothetischen Grundlagen auf und stellt somit den Versuch dar, experimentelle Ergebnisse mathematisch mit vertretbarem Aufwand zu beschreiben.

Ziel dieses Kapitels ist die Aufstellung eines speziell für das 3-dimensional degenerierte Balkenelement zugeschnittenen konstitutiven Tensors  $C^{ep}$  für elastisch-plastisches Materialverhalten, wobei die inkrementelle Formulierung der *Fließtheorie* zugrunde gelegt wird. Die Formulierung erfolgt unter der Annahme infinitesimal kleiner Verschiebungen und Rotationen, wobei zur Beschreibung des Materials die Ingenieurspannungen  $\sigma$  und die Ingenieurdehnungen  $e$  herangezogen werden.

In Abschnitt 8.1 wird unter Zugrundelegung verschiedener Annahmen (Normalenregel und isotrope Verfestigung) kurz auf die Herleitung im 3-dimensionalen Spannungsraum eingegangen, wonach in Abschnitt 8.2 die spezielle Fließfläche nach *Huber-von Mises* eingebracht wird. Gebrauchsformeln zur einaxialen Materialbeschreibung finden sich in Abschnitt 8.3. In Abschnitt 8.4 wird die elastisch-plastische Matrix für das degenerierte Balkenelement hergeleitet und in Abschnitt 8.6 wird dann schließlich noch ein vereinfachtes einaxiales Modell ohne Interaktion zwischen Normal- und Schubspannungen vorgestellt. Weitere spezielle Stoffgesetze für unterschiedliche Belastungskombinationen finden sich z.B. in [49].

Zur Beschreibung großer Verschiebungen und Rotationen bei weiterhin kleinen Verzerrungen kann dieses Materialmodell direkt in die bisherige U. L. -Formulierung mit lokalen Elementkoordinatensystemen eingebracht werden. Es sind lediglich die Ingenieurmaße  $\sigma$  und  $e$  durch die Cauchyspannungen  $\tau$  und die Euler-Almansi Dehnungen  $\epsilon$  zu ersetzen.

## 8.1 Fließtheorie

Zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens werden in der Fließtheorie neben den elastischen konstitutiven Gleichungen drei weitere Beziehungen herangezogen:

1. Eine *Fließbedingung* als skalare Funktion zur Beschreibung der Fließgrenze.
2. Ein *Fließgesetz*, wodurch nach Fließbeginn die plastischen Dehnungsinkremente mit den aktuellen Spannungen und Spannungsincrementen in Bezug gebracht werden.
3. Ein *Verfestigungsgesetz*, welches die Änderung der Fließbedingung im Verlauf der Plastizierung definiert.

Die Fließbedingung

$$F(\sigma, \kappa) = 0 \quad (8.1)$$

ist eine skalare Funktion zur Beschreibung der Fließfläche im Spannungsraum und ist abhängig von den aktuellen Spannungen und dem Parameter  $\kappa$  zur Erfassung der Materialverfestigung im einaxialen Zugversuch. Sie zeigt an, ob bei einem bestimmten Spannungszustand Fließen eintritt oder nicht.

$F < 0$  elastisches Materialverhalten

$F = 0$  Fließen

$F > 0$  unzulässig

Aus den Postulaten von *Drucker* über ein stabiles Werkstoffverhalten läßt sich das assoziierte Fließgesetz

$$de^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (8.2)$$

ableiten, wonach die plastischen Dehnungsinkremente im Hauptspannungsraum normal zur Fließfläche stehen (Normalenregel). Der Skalar  $\lambda$  ist im folgenden noch zu bestimmen.

Schreitet nach Fließbeginn die Plastizierung fort, so ist nur noch eine Bewegung auf der Fließfläche  $F = 0$  möglich, und es gilt die Beziehung:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (8.3)$$

Der senkrecht zur Fließoberfläche stehende Vektor

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (8.4)$$

wird auch als *Fließvektor* bezeichnet. Infolge der als klein vorausgesetzten Verzerrungen lassen sich die Dehnungsinkremente als Summe elastischer und plastischer Anteile darstellen:

$$d\mathbf{e} = d\mathbf{e}^e + d\mathbf{e}^p \quad (8.5)$$

Das Spannungsinkrement kann über die konstitutive Beziehung

$$d\sigma = \mathbf{C}^e(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) \quad (8.6)$$

ermittelt und unter Einbeziehung von (8.2) in (8.3) eingebracht werden, wodurch der Skalar  $\lambda$  in (8.2) angegeben werden kann zu:

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C}^e d\mathbf{e}}{A + \mathbf{a}^T \mathbf{C}^e \mathbf{a}} \quad (8.7)$$

mit

$$A = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (8.8)$$

Wird nun schließlich noch das Fließgesetz (8.2) mit  $\lambda$  nach (8.7) in die konstitutive Gleichung (8.6) eingesetzt, so läßt sich diese Gleichung umformen zu:

$$d\sigma = \mathbf{C}^{ep} d\mathbf{e} \quad (8.9)$$

mit der gesuchten elastisch-plastischen Werkstoffmatrix

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}^e}{A + \mathbf{a}^T \mathbf{C}^e \mathbf{a}} \quad (8.10)$$

Über den Parameter  $A$  findet die im einaxialen Zugversuch beobachtete Materialverfestigung Eingang in die Matrix  $\mathbf{C}^{ep}$ . Der Verfestigungsparameter  $\kappa$  ist vom einaxialen plastischen Vergleichsdehnungsmaß  $\bar{e}^p$  abhängig, das sich unter der Annahme gleicher Dissipationsarbeit des mehraxialen und des Vergleichszustandes zu

$$\bar{e}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p} \quad (8.11)$$

ergibt.

Er kann mit einer der folgenden Hypothesen ([37],[40]) bestimmt werden:

- Arbeitsverfestigung (*work hardening*)

*Hypothese:* Der Verfestigungsparameter  $\kappa$  entspricht der Dissipationsarbeit.

$$\kappa = \bar{W}^p = \int_0^{\bar{e}^p} \bar{\sigma} d\bar{e}^p = \int_0^{e_{ij}^p} \sigma_{ij} de_{ij}^p \quad (8.12)$$

$$d\kappa = d\bar{W}^p = \bar{\sigma}_f d\bar{e}^p = \sigma_{ij} de_{ij}^p \quad (8.13)$$

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \sigma^T \mathbf{a} \quad (8.14)$$

- Dehnungsverfestigung (*strain hardening*)

*Hypothese:* Der Verfestigungsparameter  $\kappa$  entspricht dem plastischen Dehnungsanteil.

$$\kappa = \bar{e}^p = \int_0^{\bar{e}^p} d\bar{e}^p \quad (8.15)$$

$$d\kappa = d\bar{e}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} de_{ij}^p de_{ij}^p \quad (8.16)$$

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad (8.17)$$

In Gleichung ( 8.9 ) ist die Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}^{ep}$  vom augenblicklichen Zustand der Spannungen und Dehnungen und deren Geschichte abhängig. Zur Ermittlung der Spannungen ist Gleichung ( 8.9 ) daher innerhalb der Gleichgewichtssiteration nach ( 3.18 ) bis ( 3.20 ) über die Beziehung

$${}^2\sigma^{(it)} = {}^1\sigma + \sum_{k=1}^N k \mathbf{C}^{ep} \frac{\Delta \mathbf{e}^{(it)}}{N} \quad (8.18)$$

im Iterationsschritt (*it*) über eine Anzahl genügend kleiner Subinkremente entweder explizit (z.B. Euler Vorwärts Methode) [56] oder in einem Iterationszyklus implizit zu lösen (vergleiche auch [17] mit einer vertauschten Reihenfolge der Iterationsschleifen).

## 8.2 Materialmodell

In der vorliegenden Arbeit wird die Fließbedingung nach *Huber-von Mises* verwendet, die für Metalle eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen aufweist. Aufgrund der Beobachtung, daß hydrostatischer Druck das Plastizierungsverhalten von Metallen nicht beeinflusst, wird die Fließbedingung hypothetisch als Funktion der zweiten Invarianten  $J_2$  des Spannungsdeviators sowie der Fließspannung  $\bar{\sigma}_f$  aus einem einaxialen Zugversuch dargestellt.

Unter Annahme einer *isotropen Verfestigung* kann die Fließbedingung angegeben werden zu:

$$F(\sigma'_{ij}, \kappa) \equiv f(\sigma'_{ij}) - Y(\kappa) = 0 \quad (8.19)$$

mit

$$\begin{aligned} f(\sigma'_{ij}) &= J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \\ Y(\kappa) &= \frac{1}{3} \bar{\sigma}_f^2 \end{aligned}$$

sowie den Deviatorspannungen

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{ij}$$

Geometrisch kann diese Fließfläche im Hauptspannungsraum als Kreiszyylinder mit Achse auf den Hauptspannungen  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  interpretiert werden (entspricht dem hydrostatischen Spannungszustand).

Die aus einem einaxialen Versuch stammende Vergleichsfließspannung  $\bar{\sigma}_f$  ist bei Berücksichtigung von Materialverfestigung vom einaxialen plastischen Vergleichsdehnungsmaß  $\bar{\epsilon}^p$  abhängig.

Aus der Fließbedingung kann der Fließvektor abgeleitet werden zu:

$$\mathbf{a}^T = \langle a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ 2a_{12} \ 2a_{13} \ 2a_{23} \rangle \quad (8.20)$$

$$a_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} \quad (8.21)$$



Um die elastisch-plastische Werkstoffmatrix ( 8.10 ) aufzustellen, verbleibt noch die Bestimmung des Parameters  $A$  nach ( 8.8 ) zur Berücksichtigung der Materialverfestigung. Infolge ( 8.19 ) wird:

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -\frac{dY}{dk} = -\frac{2}{3}\bar{\sigma}_f \frac{d\bar{\sigma}_f}{dk} \quad (8.22)$$

Je nach Verfestigungshypothese erhält man schließlich:

- bei Arbeitsverfestigung

$$dk = \bar{\sigma}_f d\bar{e}^p \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -\frac{2}{3}\bar{\sigma}_f \frac{d\bar{\sigma}_f}{d\bar{e}^p} = -\frac{2}{3}T^p \quad (8.24)$$

$$\sigma^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \sigma = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \sigma$$

$$*) = 2f = 2Y = \frac{2}{3}\bar{\sigma}_f^2 \quad (8.25)$$

$$A = \frac{4}{9}T^p \bar{\sigma}_f^2 \quad (8.26)$$

\*) nach dem *Theorem von Euler* [33]

- bei Dehnungsverfestigung

$$dk = d\bar{e}^p \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -\frac{2}{3}\bar{\sigma}_f \frac{d\bar{\sigma}_f}{d\bar{e}^p} = -\frac{2}{3}\bar{\sigma}_f T^p \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}T^p \bar{\sigma}_f \sqrt{\frac{2}{3}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \\ &= \frac{4}{9}T^p \bar{\sigma}_f^2 \end{aligned} \quad (8.29)$$

mit dem plastischen Tangentenmodul des einachsigen Zugversuchs

$$T^p = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}^p} = \left( \frac{E \cdot T}{E - T} \right) \quad (8.30)$$

### 8.3 Einaxialer Vergleichszustand

Das Materialverhalten des mehraxialen Spannungszustandes wird über die Fließbedingung aus einem einaxialen Vergleichszustand abgeleitet. Zur phänomenologischen Beschreibung der aus Zugversuchen gewonnenen einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind verschiedene mathematische Modelle entwickelt worden, von denen an dieser Stelle zwei vorgestellt werden sollen (aus [65]).

1. Bilineares Stoffgesetz (Bild 8.1)

- elastisch  $\bar{\sigma}_v^2 \leq \bar{\sigma}_0^2$

$$E_t = E \quad (8.31)$$

$$\bar{\sigma} = E_t \bar{e} \quad (8.32)$$

- plastisch  $\bar{\sigma}_v^2 > \bar{\sigma}_0^2$

$$\frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} = n \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} - 1 \right) + 1 \quad (8.33)$$

$$\frac{d\bar{e}}{\bar{e}_0} = n \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \quad (8.34)$$

$$E_t = T = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{e}} = \frac{1}{n} \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{e}_0} = \frac{E}{n} \quad (8.35)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + E_t (\bar{e} - \bar{e}_0) \quad (8.36)$$

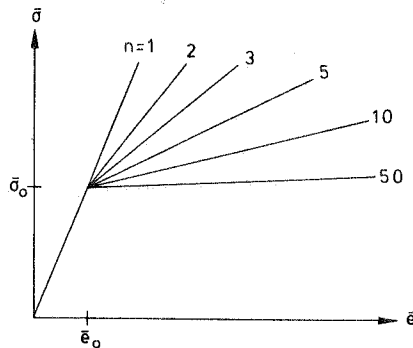


Bild 8.1 Bilineares Stoffgesetz

## 2. Stückweises Potenzgesetz (Bild 8.2)

- elastisch  $\bar{\sigma}_v^2 \leq \bar{\sigma}_0^2$

$$E_t = E \quad (8.37)$$

$$\bar{\sigma} = E_t \bar{e} \quad (8.38)$$

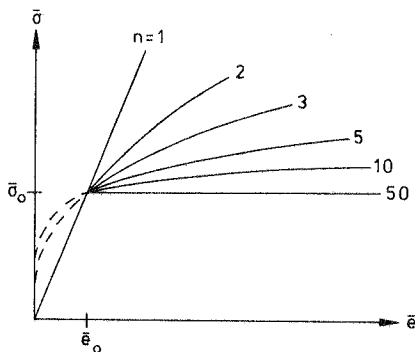
- plastisch  $\bar{\sigma}_v^2 > \bar{\sigma}_0^2$

$$\frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} = \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^n \quad (8.39)$$

$$\frac{d\bar{e}}{\bar{e}_0} = n \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{n-1} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \quad (8.40)$$

$$E_t = T = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{e}} = \frac{E}{n} \left( \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{e}_0} \right)^{1-n} \quad (8.41)$$

$$\bar{\sigma} = \left( \frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} \right)^{1/n} \bar{\sigma}_0 \quad (8.42)$$



**Bild 8.2** Stückweises Potenzgesetz

Falls  $\bar{\sigma}_v^2 > \bar{\sigma}_0^2$ , so lautet das Inkrement der Fließspannung in beiden Fällen:

$$d\bar{\sigma} = E_t d\bar{e} = T^p d\bar{e}^p \quad (8.43)$$

Weitere Gebrauchsformeln für einaxiale Stoffgesetze wie

- Ramberg-Osgood Potenzgesetz
- Stoffgesetz nach DIN 4114

finden sich z.B. in [65].

Erfolgt eine monoton zunehmende Beanspruchung mit einmaliger plastischer Belastung (plastischer Werkstoff bleibt nach Entlastung elastisch), so liefert die meist verwendete isotrope Verfestigung eine gute Materialbeschreibung. Der bei zyklischer Belastung in Zugversuchen zu beobachtende Bauschinger Effekt ist durch ein kinematisches Verfestigungsmodell oder aber durch Modelle mit mehreren Schichten [42] bzw. mehreren Fließflächen [34] (Konzept nach Mróz) zu erfassen. Diese Mehrschichtmodelle (Overlays) und Modelle mit mehreren Fließflächen sind besonders bei Programmen mit bereits implementiertem bilinearem elastisch-ideal plastischem mehrachsigen Stoffgesetz geeignet, sowohl die kinematischen Verfestigungs- als auch Entfestigungseigenschaften mit zu berücksichtigen. Zyklusabhängige Änderungen der Materialeigenschaften sind jedoch auch von diesen Modellen nicht zu erfassen.

## 8.4 Elastisch-plastische Werkstoffmatrix des 3-dimensional degenerierten Balkenelements

Unter Berücksichtigung der Bedingungen  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$  sowie  $\gamma_{23} = 0$  läßt sich die Fließbedingung ( 8.1 ) anschreiben zu:

$$F = \frac{3}{4}\sigma'_{11}{}^2 + \sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2 - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_f^2 \quad ( 8.44 )$$

Mit den Vektoren

$$\mathbf{a}^T = [\sigma'_{11}, 0, 0, 2\sigma'_{12}, 2\sigma'_{13}, 0]$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left[ \frac{3}{2}\sigma'_{11}, 0, 0, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}, 0 \right]$$

und der elastischen Matrix  $\mathbf{C}^e$  nach ( 4.35 ) erhält man folgende elastisch-plastische Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}^{ep}$  ( 8.10 ):

$$\mathbf{C}^{ep} = E \cdot \begin{bmatrix} 1 - \alpha\sigma'_{11}{}^2 & 0 & 0 & -\alpha\sigma'_{11}\sigma'_{12} & -\alpha\sigma'_{11}\sigma'_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\sigma'_{11}\sigma'_{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \alpha\sigma'_{12}{}^2 & -\alpha\sigma'_{12}\sigma'_{13} & 0 \\ -\alpha\sigma'_{11}\sigma'_{13} & 0 & 0 & -\alpha\sigma'_{12}\sigma'_{13} & \frac{1}{2} - \sigma'_{13}{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ( 8.45 )$$

Der Faktor  $\alpha$  beinhaltet:

$$\alpha = \left[ \frac{2}{3}\bar{\sigma}_f^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{T}{E-T} \right) - \frac{1}{2}\sigma'_{11}{}^2 \right]^{-1}$$

(für die Querdehnzahl  $\mu = 0$ )

Alternativ läßt sich diese Matrix  $\mathbf{C}^{ep}$  auch durch Kondensation entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 4.6 aus der in [9] oder [48] angegebenen 3-dimensionalen elastisch-plastischen Werkstoffmatrix herleiten, was bei dem hier verwendeten Plastizitätsmodell auf ein identisches Resultat führt.

## 8.5 Graphische Darstellung der v.Mises Fließbedingung des 3-dimensional degenerierten Balkens

Aus dem Spannungstensor des 3-dimensional degenerierten Balkenelements

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

lassen sich durch Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \Lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & -\Lambda & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (8.47)$$

die Hauptspannungen ermitteln zu:

$$\sigma_1 = \Lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{11} + \sqrt{\sigma_{11}^2 + 4(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)} \right) \quad (8.48)$$

$$\sigma_2 = \Lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{11} - \sqrt{\sigma_{11}^2 + 4(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)} \right) \quad (8.49)$$

$$\sigma_3 = \Lambda_3 = 0 \quad (8.50)$$

Die v.Mises Fließbedingung, ausgedrückt in den Hauptspannungen

$$F \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\bar{\sigma}_f^2 = 0 \quad (8.51)$$

führt hiermit auf die Gleichung einer Ellipse in der von den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  aufgespannten Ebene (Bild 8.3).

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \bar{\sigma}_f^2 = 0 \quad (8.52)$$

Der 6-dimensionale Spannungsraum kann jedoch infolge der Bedingung

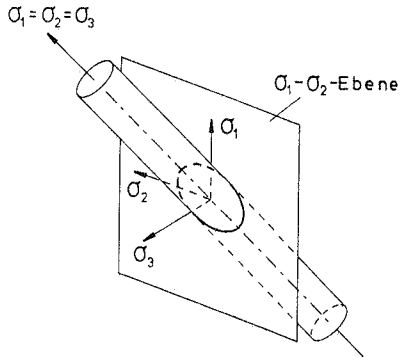
$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0 \quad (8.53)$$

auch direkt im Spannungsraum  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  dargestellt werden.

Mit der Invarianten des Spannungsdeviators

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (8.54)$$

geht die Fließbedingung

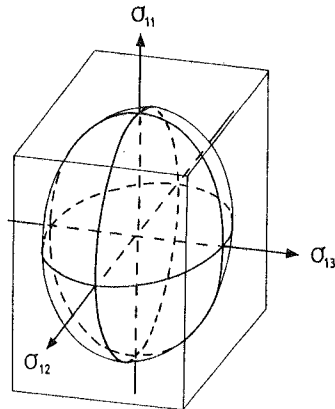


**Bild 8.3** Fließ-Ellipse in der  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ -Ebene

$$F \equiv \frac{1}{3}\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_f^2 = 0 \quad (8.55)$$

über in die Gleichung eines Ellipsoiden nach Bild 8.4 .

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\bar{\sigma}_f^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\frac{1}{3}\bar{\sigma}_f^2} + \frac{\sigma_{13}^2}{\frac{1}{3}\bar{\sigma}_f^2} = 1 \quad (8.56)$$



**Bild 8.4** Fließ-Ellipsoid

## 8.6 Vereinfachtes Stoffgesetz

Zur Formulierung der Stoffgesetze kann bei dem vorliegenden Balkenelement vereinfachend von einem einachsigen Spannungszustand ausgegangen werden, bei dem eine Interaktion zwischen den Normal- und Schubspannungen unberücksichtigt bleibt.

Durch diese Annahmen erfolgt die Ermittlung des elastoplastischen Spannungszustandes sowie des elastoplastischen konstitutiven Tensors  $\mathbf{C}^{ep}$  jeweils direkt aus der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials ohne weitere Korrekturmaßnahmen. Auch kann das vom einaxialen Zugversuch her bekannte Verfestigungsverhalten ohne weitere Verfestigungshypothesen über Gebrauchsformeln nach Abschnitt 8.3 eingebracht werden.

Bei dem hier verwendeten Modell mit voneinander entkoppelten einaxialen Spannungszuständen ist die Fließbedingung jeweils direkt durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} F(\sigma_{11}, \bar{\sigma}_f) &= \sigma_{11} - \bar{\sigma}_f = 0 \\ F(\sigma_{12}, \bar{\sigma}_f) &= 3\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}_f^2 = 0 \\ F(\sigma_{13}, \bar{\sigma}_f) &= 3\sigma_{13}^2 - \bar{\sigma}_f^2 = 0 \end{aligned} \quad (8.57)$$

gegeben, eine Fließregel wie bei den mehraxialen Spannungszuständen entfällt. Diese vereinfachten Beziehungen entsprechen im 3D-Spannungsraum  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  dem in Bild 8.4 eingezeichneten Quader um den Fließ-Ellipsoiden.



### 8.6.1 Implementierung im Programm

Die Behandlung der physikalischen Nichtlinearität erfolgt durch eine inkrementelle/iterative Vorgehensweise nach folgendem Schema (vergleiche auch [41]):

1. Aus den ausiterierten Verschiebungen  ${}^1\mathbf{u}$  des Gleichgewichtszustandes  ${}^1Z$  sowie den vom Lastinkrement  $\mathbf{R}$  hervorgerufenen Verschiebungsincrementen  $\mathbf{u}$  werden das neue Verschiebungsfeld  ${}^2\mathbf{u} = {}^1\mathbf{u} + \mathbf{u}$  und daraus die Gesamtdehnungen  ${}^2\bar{\epsilon}$  berechnet.
2. Die Gesamtdehnungen setzen sich additiv aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen (vergleiche Bild 8.5 , dargestellt für kinematische Verfestigung).

$${}^2\bar{\epsilon} = {}^2\bar{\epsilon}^{el} + {}^2\bar{\epsilon}^{pl} \quad (8.58)$$

Es ist hierbei zwischen folgenden Fällen zu unterscheiden:

- $\bar{\epsilon}_{fu} \leq {}^2\bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_{fo}$   
Die untere und obere Fließdehnung wird nicht überschritten, d.h. das Materialverhalten bleibt elastisch.  
 ${}^2\bar{\epsilon}^{pl} = {}^1\bar{\epsilon}^{pl} \quad , \quad E_t = E$
- ${}^2\bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_{fo}$   
Die obere Fließdehnung wird überschritten, d.h. die Plastizierung tritt ein oder schreitet fort.  
 ${}^2\bar{\epsilon}^{pl} = (1 - \frac{T}{E})({}^2\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_0) \quad , \quad E_t = T$
- ${}^2\bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_{fu}$   
Die untere Fließdehnung wird unterschritten, d.h. die Plastizierung tritt ein oder wird fortgesetzt.  
 ${}^2\bar{\epsilon}^{pl} = (1 - \frac{T}{E})({}^2\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_0) \quad , \quad E_t = T$

Die Werkstoffgröße  $E_t$  wird zur Berechnung des neuen elastoplastischen konstitutiven Tensors  $\mathbf{C}^{ep}$  verwendet.

3. Mit dem elastischen Dehnungsanteil  ${}^2\bar{\epsilon}^{el}$  werden die Spannungen in diesem Iterationsschritt ermittelt, aus denen die zur Kontrolle des Gleichgewichtszustandes erforderlichen inneren Kräfte  $\mathbf{F}_{(i)}$  berechnet werden.

Die Ungleichgewichtskräfte  ${}^2\mathbf{R}^{(it)} = {}^2\mathbf{F}_{(\alpha)} - {}^2\mathbf{F}_{(i)}^{(it-1)}$  im Iterationsschritt  $it$  werden durch Gleichgewichtsiteration entfernt.

Im Verlauf der Iteration zwischen Zustand  ${}^1Z$  und Zustand  ${}^2Z$  wird immer vom bereits ausiterierten Gleichgewichtszustand  ${}^1Z$  ausgegangen, so daß keine Wegabhängigkeit innerhalb der Inkrementiteration vorliegt. Der Iterationsprozess kann mit konstanter oder in jedem Iterationsschritt neu aufgestellter Steifigkeitsmatrix erfolgen.

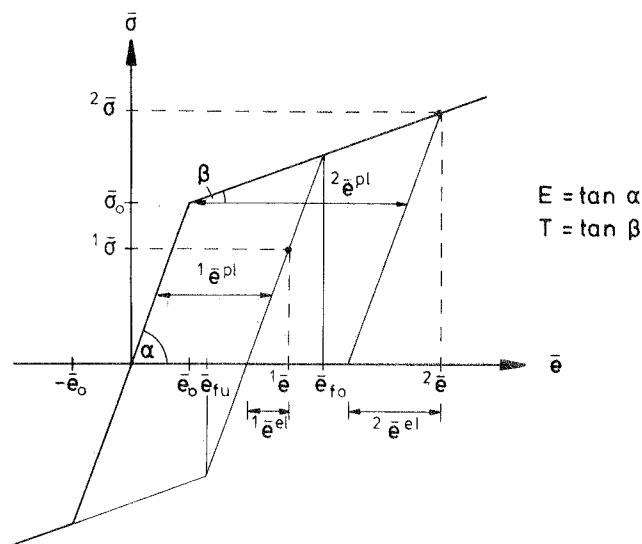


Bild 8.5 Elastische und plastische Dehnungsanteile

## Beispiel: Kragträger mit I-Profil

Profil: IPB 200

$h = b = 200\text{mm}$ ,  $t_f = 15\text{mm}$ ,  $t_s = 9\text{mm}$ ,  $l = 3000\text{mm}$

$E = 210000\text{N/mm}^2$ ,  $\mu = 0$

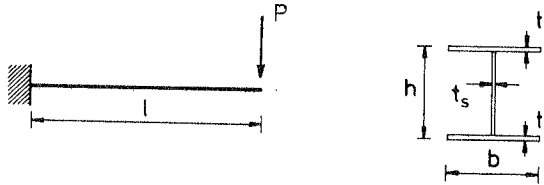
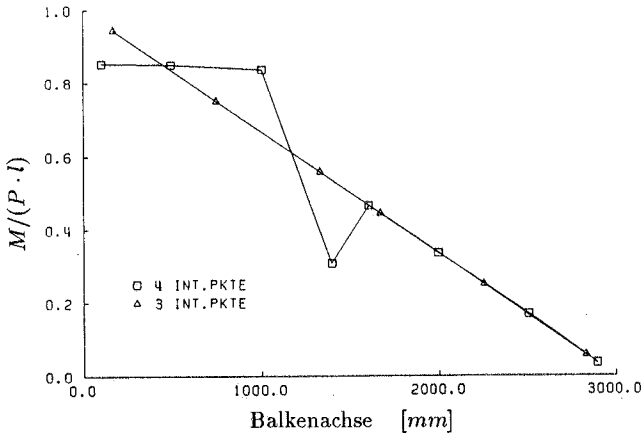
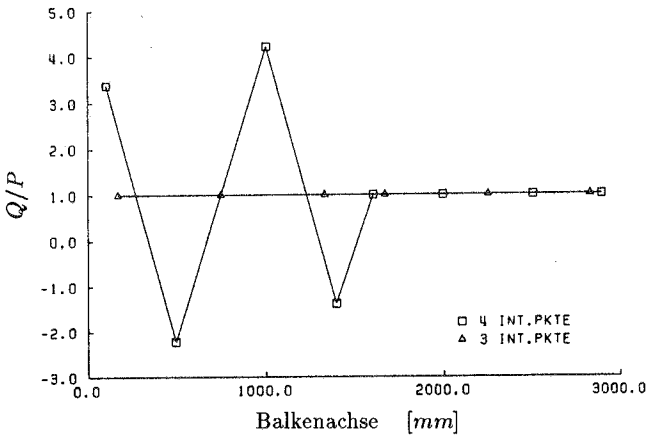


Bild 8.6 Kragträger mit I-Profil

Der Träger nach Bild 8.6 wird in Längsrichtung mit zwei kubischen Elementen idealisiert. Die Anzahl der Simpsonintegrationspunkte über den Querschnitt beträgt in den Flanschteilen  $3 \times 3$ , im Steg  $3 \times 11$ . In den Bildern 8.7 und 8.8 sind die Verläufe der Momente und Querkräfte im Traglastzustand für die Integrationsordnungen mit 3 bzw. 4 Integrationspunkten über die Elementachse aufgetragen. An der Einspannstelle bildet sich jeweils ein Fließgelenk, jedoch sind die Spannungsgrößen im plastizierten Element an den Stützstellen der 4-Punkt Integration unbrauchbar. (Dasselbe Verhalten trifft auch für eine hier nicht dargestellte Idealisierung mit quadratischen Elementen zu, die im plastischen Bereich nur an den Stützstellen einer 2-Punkt Integration brauchbare Spannungswerte aufweisen.)



**Bild 8.7** Momentenverlauf in Abhängigkeit der Integrationsordnung

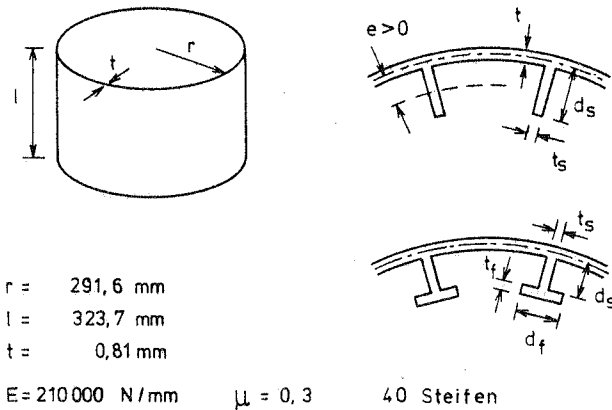


**Bild 8.8** Querkraftverlauf in Abhängigkeit der Integrationsordnung

# ANWENDUNG ALS LÄNGSSTEIFEN AXIAL-BELASTETER KREISZYLINDER

## 9 Systemidealisierung

### 9.1 Grundgeometrie des untersuchten Zylinders



**Bild 9.1** Grundgeometrie des untersuchten Zylinders

Der in Bild 9.1 dargestellte Zylinder entspricht bei einer breiten Versteifung mit 20 Rechteck-Innensteifen ( $d_s/t_s = 16$ ,  $t_s = t$ ) dem Versuchszyylinder UC8 aus [62]. Dieser Zylinder weist ein lokales Beulverhalten auf und wurde in [24] ausführlich mittels Stabilitäts- und Traglastberechnungen untersucht.

Inhalt der folgenden Kapitel ist das in [24] nur noch kurz angedeutete globale Beulverhalten von Zylindern mit dieser Geometrie bei enger Aussteifung durch Längssteifen.

## 9.2 Finite-Element-Idealisierung

Die Elementbibliothek des FE-Programms NISA80 [56] stellt folgende 3-dimensional degenerierten Schalenelemente mit isoparametrischem Verschiebungsansatz zur Verfügung:

- Dreieckselemente mit 3, 6 oder 10 Knoten
- Viereckselemente mit 4, 8, 9 oder 16 Knoten

Eine Diskussion des Elementverhaltens dieser Schalenelemente findet sich z.B. in [55].

In der vorliegenden Arbeit wird das 8-Knoten Schalenelement der Serendipity-Klasse mit  $2 \times 2$  Gauß-Integrationspunkten über die Elementfläche zur Idealisierung des Zylinders eingesetzt.

Zur Idealisierung der Längssteifen mit Schalenelementen werden ebenfalls die 8-Knoten Elemente herangezogen, die im Falle einer Versteifung mittels T-Steifen in Abschnitt 13 noch durch zusätzliche 9-Knoten Lagrange-Elementen für den Flansch ergänzt werden. Diese reine Schalendiskretisierung dient sodann als Referenzlösung gegenüber einer Idealisierung der Steifen mit dem im ersten Teil dieser Arbeit hergeleiteten 3-dimensional degenerierten Balkenelement, dessen Anwendung als Steifenelement anhand der untersuchten Beispiele diskutiert wird.

In Längsrichtung gestattet eine Ausnutzung der Symmetrie die Betrachtung des halben Systems. In Umfangsrichtung ist die Wahl des Zylinderausschnitts von der Anzahl der Längssteifen und der Anzahl der zu erwartenden Umfangsbeulwellen abhängig und von Fall zu Fall gesondert zu untersuchen.

Die Ränder des Zylinders werden in Umfangs- und Radialrichtung in den Verschiebungen festgehalten, die Verdrehungen bleiben unbehindert. Um eine verformungsgesteuerte Lastaufbringung zu simulieren, werden die Axialverschiebungen der belasteten Ränder einschließlich der Steifen gekoppelt und haben somit stets dieselbe Größe. Dieses Vorgehen bewirkt an den Aussteifungen eine Einspannung des Zylinderrandes bezüglich seiner Tangente.

### 9.3 Stabilitätsuntersuchungen

In der Beurteilung des Tragverhaltens eines Systems kommt dem Auffinden der kritischen Lasten mittels einer Stabilitätsuntersuchung eine zentrale Bedeutung zu. Die inkrementell/iterativen Lösungstechniken unter Verwendung der Methode der finiten Elemente liefern hierzu ein bedeutendes numerisches Hilfsmittel zum Auffinden von Verzweigungs- und Durchschlagpunkten der Last-Verformungs-Diagramme, wobei den unterschiedlichen Einflußfaktoren wie

- geometrische und physikalische Imperfektionen
- Abweichungen von den Randbedingungen des idealen Systems
- Lastexzentrizitäten

gesondert Rechnung getragen werden kann.

Zum Überblick der numerischen Möglichkeiten zur Behandlung von Instabilitätserscheinungen wird auf das Schrifttum [15], [16], [44] und [64] verwiesen.

Das hier verwendete statische Stabilitätskriterium für indifferentes Gleichgewicht führt im Falle proportionaler Laststeigerung

$${}^m \mathbf{P} = {}^m \lambda {}^r \mathbf{P}$$

mit dem Referenzlastvektor  ${}^r \mathbf{P}$  und dem Lastfaktor  ${}^m \lambda$  auf ein nichtlineares Eigenwertproblem der Form:

$$\left[ {}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \left( {}^m \mathbf{K}_g^l + {}^m \mathbf{K}_u^l \right) + {}^m \lambda^2 \left( {}^m \mathbf{K}_g^{nl} + {}^m \mathbf{K}_u^{nl} \right) \right] \cdot {}^m \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (9.1)$$

In den Berechnungen der vorliegenden Arbeit wird ein linearer Verformungszustand als Grundzustand herangezogen, aus dem durch Variation des Verschiebungsfeldes ein infinitesimal benachbarter Nachbarzustand entwickelt wird. Weiterhin bleiben infolge der verwendeten U. L. -Formulierung die Vorbeulverschiebungen unberücksichtigt. Gleichung ( 9.1 ) geht somit über in das lineare Eigenwertproblem der klassischen Stabilitätsuntersuchung:

$$\left[ {}^m \mathbf{K}_e + {}^m \lambda {}^m \mathbf{K}_g^l \right] \cdot {}^m \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (9.2)$$

Die den Eigenwerten zugeordneten Eigenvektoren werden in den nachfolgenden nichtlinearen Berechnungen zur Bestimmung der aufnehmbaren Grenzlasten als Imperfektionsbeulmuster der Ausgangsgeometrie überlagert.

Ausschnitt	Steifen- elemente	NDOF	BAND	$\sigma_{ki}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	UVW	LHW
180°	Schale	6554	963	461	14	3
	Balken	4479	656	461	14	3
90°	Schale	3264	493	461	14	3
	Balken	2239	336	461	14	3
18°	Schale	632	117	515	10	1
	Balken	447	80	514	10	1
klassische Beulspannung (unversteift)				353	*	

**Tabelle 9.1** Eigenwertberechnungen. Aussteifung:  
40 Rechteckinnensteifen,  $d_s = 4.86\text{mm}$ ,  $t_s = 0.81\text{mm}$

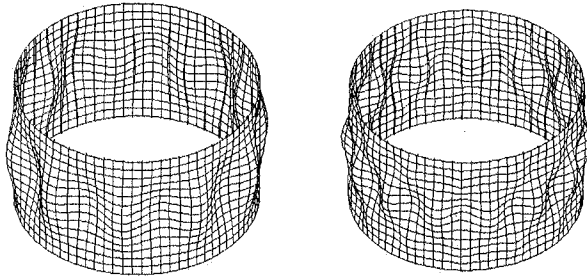
Während sich in den beiden Ausschnitten von 90° und 180° die Knotenlinien der Beulfigur unabhängig von der Lage der Steifen einstellen, wird die Beulfigur des 18°-Ausschnitts in erster Linie von der Idealisierung geprägt. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 9.6 nochmals aufgegriffen und näher diskutiert.

Im weiteren werden der Geometrie der Ausschnitte von 18° und 90° Imperfektionen affin zur jeweiligen ersten Eigenform mit einer maximalen Amplitude von der Größe der Wanddicke überlagert und geometrisch nicht-lineare Berechnungen mit elastischem sowie elastoplastischem Werkstoffverhalten durchgeführt. Das Last-Verschiebungsverhalten der beiden unterschiedlichen Idealisierungen kann Bild 9.5 entnommen werden.

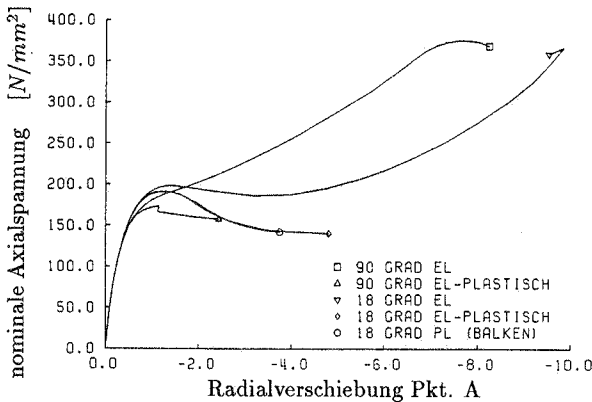
---

\*weiter Bereich, vergleiche Bild 10.1





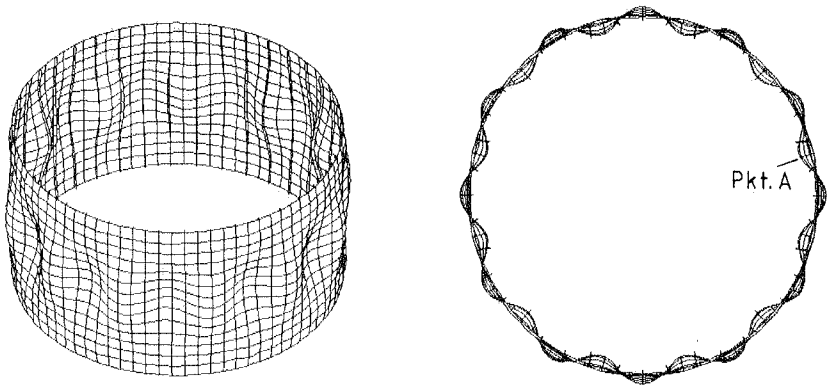
**Bild 9.4** Globale Beulformen der Zylinderausschnitte 18° und 180°



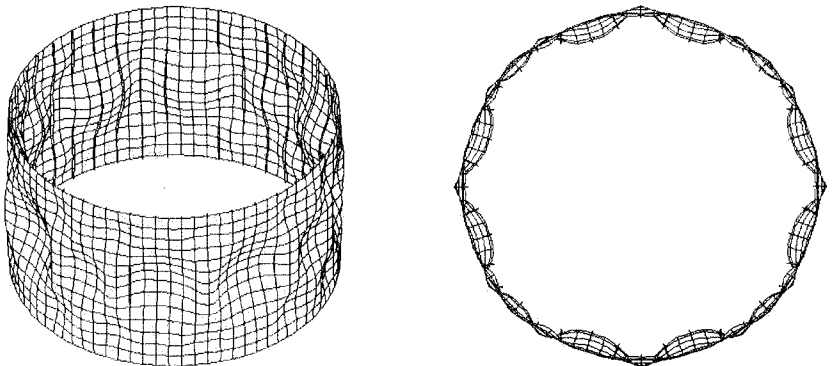
**Bild 9.5** Last-Verschiebungsverhalten der 18°- und 90°-Ausschnitte

Unter Annahme elastischen Materialverhaltens unterscheiden sich die beiden Modelle durch das Auftreten eines ausgeprägten Primärbeulens des 18°-Ausschnitts, dessen Lastniveau oberhalb des Wertes des 90°-Ausschnitts bei entsprechender Radialverschiebung einer Innenbeule liegt. Wird zusätzlich nichtlineares Werkstoffverhalten berücksichtigt, so ist zu erkennen, daß die maximal aufnehmbaren Tragspannungen eng gekoppelt sind mit dem geometrisch nichtlinearen Tragverhalten und eine Traglaststeigerung in erster Linie erreicht werden kann durch Maßnahmen, die eine Erhöhung der primären Beulspannungen zur Folge haben. Eine Traglastberechnung des mit Balkenelementen versteiften 18°-Zylinderausschnitts weist gegenüber der Lösung mit Schalenelementen keine Unterschiede auf.

In den Bildern 9.6 und 9.7 sind die Verformungsfiguren des 90°-Ausschnitts zu Belastungsbeginn (Axialspannung  $\sigma = 46\text{N/mm}^2$ ) und unter der Maximalbelastung (Axialspannung  $\sigma = 375\text{N/mm}^2$ ) mit jetzt deutlich ausgeprägten Innenbeulen dargestellt.



**Bild 9.6** Verformungsfigur des 90°-Ausschnitts unter  $\sigma = 46\text{N/mm}^2$



**Bild 9.7** Verformungsfigur des 90°-Ausschnitts unter  $\sigma = 375\text{N/mm}^2$

## 9.5 Eigenwertberechnung ohne Kopplung der Axialverschiebungen des Lastrandes

Das Stabilitäts- und Tragverhalten der Kreiszylinderschale wird in großem Maße von der Art der Lastaufbringung beeinflusst (vergleiche [24]). Die Simulation einer verformungskontrollierten Lastaufbringung kann numerisch auf unterschiedliche Weisen erfolgen wie z.B.:

- Kopplung von Freiheitsgraden, wobei die entsprechenden Freiheitsgrade in der Systemsteifigkeitsmatrix zu einer Gleichung zusammengefaßt werden.
- Zusätzliche Zwangsbedingungen über Lagrange-Multiplikatoren.
- Modifikation des Gleichungslösers zur Berücksichtigung vorgeschriebener Verformungen.

Die erste Möglichkeit der Kopplung ist im Programmsystem NISA80 vorgesehen, beinhaltet jedoch folgende Nachteile:

- Werden sehr viele Freiheitsgrade gekoppelt, so verschlechtert sich die Konditionierung des Gleichungssystems.
- Aus den gekoppelten Freiheitsgraden resultieren häufig große Bandbreiten, die insbesondere wie in NISA80 bei Gleichungslösern mit konstanter Bandbreite zu unwirtschaftlichen Speicherplatzbelegungen führen.

In diesem Abschnitt wird daher zur Eigenwertberechnung verschiedener Zylinderausschnitte mit konstanter Axialverschiebung über den Lastrand als Alternative zur Kopplung folgendes Konzept verfolgt:

1. Der Blocklöser in NISA80 wird ersetzt durch den modifizierten Gleichungslöser nach [14] mit Hüllenstruktur-Technik und eingebauter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen.
2. Zunächst erfolgt ein linearer Rechenschritt, wobei als Beanspruchung allen Knoten des Lastrandes eine konstante axiale Verschiebung vorgegeben wird. Nach der Gleichungslösung stehen an den Knoten mit vorgeschriebener Verformung die aus dem Verformungslastfall resultierenden Lagerreaktionen zur Verfügung.

3. Als zweiter Rechenschritt folgt die Eigenwertberechnung. Die konstanten Axialverschiebungen des Lastrandes werden zur Berechnung des Spannungszustandes im Zylinder herangezogen. Die entsprechenden Freiheitsgrade werden sodann festgehalten und gehen nicht mehr in das zu lösende Eigenwertproblem ein. Durch diese Maßnahme ist eine Behinderung der Querschnittsverwölbung am Lastrand sichergestellt.

Wie aus Tabelle 9.2 ersichtlich, reduziert sich in der Eigenwertberechnung durch diese Vorgehensweise gegenüber der Kopplung von Freiheitsgraden die Bandbreite des 180°-Zylinderausschnitts um 75%, die des 90°-Ausschnitts um 52%. Werden die Axialverschiebungen des Lastrandes gekoppelt, so erfolgt die Knotennumerierung in Umfangsrichtung des Zylinders, um die konstante Bandbreite des NISA80-Blocklösers möglichst klein zu halten. Die Berechnungen mit den Zwangsbedingungen am Lastrand erfolgten für alle Ausschnitte einheitlich mit einer Knotennumerierung in Längsrichtung des Zylinders. Hieraus resultiert die vom Ausschnittswinkel unabhängige Bandbreite, die im Falle des 18° Ausschnitts selbstverständlich durch Umnumerierung in Längsrichtung auf die Größe des Wertes bei Kopplung vermindert werden könnte.

Ausschnitt	Zwangsbedingungen			Kopplung	
	lin. Schritt	Eigenwert		Eigenwert	
	NEQ	NEQ	BAND	NEQ	BAND
180°	6697	6553	239	6554	963
90°	3337	3263	239	3264	493
18°	649	631	239	632	117

**Tabelle 9.2** Vergleich zwischen Kopplung und Zwangsbedingungen.  
(Aussteifung: Schalenelemente)

Infolge der Verwendung einer konstanten Bandbreite im Programm NISA80 wirkt sich die Bandbreitenreduzierung der Ausschnitte von 90° und 180° direkt auf den erforderlichen Speicherbereich aus. In der Eigenwertberechnung des 180°-Ausschnitts wäre somit allein für die elastische Steifigkeitsmatrix und die Anfangsspannungsmatrix zusammen ein Speicherbereich von 96 MByte (Kopplung) gegenüber 24 MByte (Zwangsbedingungen) erforderlich.

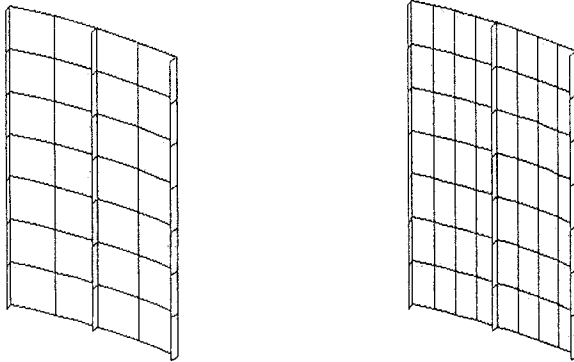
Für lineare Berechnungen können im Gleichungslöser nach [14] die Reaktionskräfte  $\mathbf{f}_i$  an den Freiheitsgraden  $i$  mit vorgeschriebenen Verformungen direkt aus der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  ermittelt werden, da die Zeilen  $i$  bei der Faktorisierung übersprungen werden.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{K}_{ij} \mathbf{x}_j \quad (9.3)$$

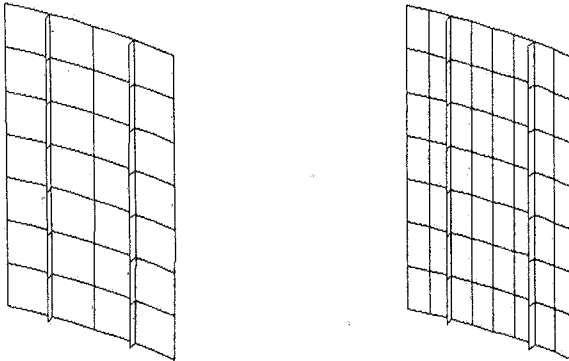
Wird jedoch nichtlineares Systemverhalten berücksichtigt, so sind die Reaktionskräfte über die inneren Kräfte der Elemente an den entsprechenden Knoten zu berechnen.

## 9.6 FE-Netz und Lage der Symmetrieränder

In den Zylinderausschnitten des vorhergehenden Abschnitts fielen die Symmetrieränder in Umfangsrichtung mit den Steifen zusammen. Die beiden Randsteifen sind somit bezüglich einer Rotation um die Längsachse (Torsion) festgehalten, was insbesondere beim 180°-Ausschnitt von Bedeutung sein kann. Dieser Sachverhalt, sowie die Frage des Einflusses der FE-Netzverfeinerung soll am Beispiel des 180°-Ausschnitts in diesem Abschnitt diskutiert werden. Zu diesem Zweck werden in einem weiteren Idealisierungsmodell die Symmetrieränder jetzt zwischen den Steifen angeordnet (vergleiche die Bilder 9.8 und 9.9) und das FE-Netz des Zylinderfeldes zwischen zwei benachbarten Steifen wird für beide Modelle in Umfangsrichtung von  $2 \times 7$  Elementen auf  $4 \times 7$  Elemente verdichtet.



**Bild 9.8** 18°-Idealisierungen *Modell 1a* (links) und *Modell 1b* (rechts)

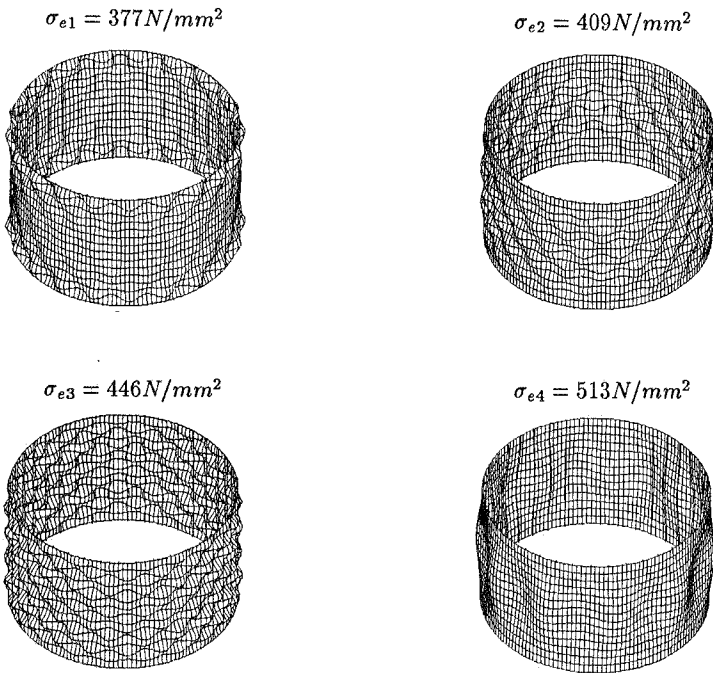


**Bild 9.9** 18°-Idealisierungen *Modell 2a* (links) und *Modell 2b* (rechts)

Wie aus den in Tabelle 9.3 zusammengefaßten Resultaten der Eigenwertberechnungen ersichtlich, wird das globale Versagen von allen Modellen gleichermaßen gut erfaßt, lokale Versagensmodi treten nur bei den *Modellen 2* auf. In *Modell 2a* stellt sich infolge der jetzt möglichen Verdrehungen aller Steifen um ihre Längsachse neben dem globalen Versagensmodus ein zusätzlicher lokaler Versagensmodus ein. Zur genaueren Berücksichtigung des höherwelligen Lokalbeulens (siehe Bild 9.10) ist jedoch das verfeinerte FE-Netz nach *Modell 2b* erforderlich, dessen niedrigste nominale Beulspannung jetzt deutlich unterhalb des Wertes für globales Versagen liegt. Für die weiteren Studien werden daher nur noch die beiden Idealisierungen *Modell 2a* und *Modell 2b* herangezogen.

Steife	Schale		Schale		Balken	
Zylinder	2 × 7 Elemente		4 × 7 Elemente		4 × 7 Elemente	
Beulen	lokal	global	lokal	global	lokal	global
Modell 1	-	515	-	515	nicht gerechnet	
Modell 2	465	514	377	513	375	512
			409		406	
			446		443	

**Tabelle 9.3** FE-Modelle 18°-Ausschnitt: Beulspannungen [ $N/mm^2$ ]



**Bild 9.10** Beulformen *Modell 2b* mit 4 × 7 Elementen

## 10 Kritische Imperfektionsform

Kennzeichnend für das Beulverhalten der perfekten isotropen Kreiszylinderschale unter Axialbelastung ist die Vielfalt der möglichen Beulmuster bezüglich eines vorhandenen Lastniveaus. So liefert die analytische Lösung der Beulbedingung nach Flügge (z.B. aus [27] oder [43]) für die unversteifte Schale mit den Abmessungen nach Bild 9.1 einen weiten Bereich von Längshalbwellen mit nahezu derselben kritischen Beullast (Bild 10.1).

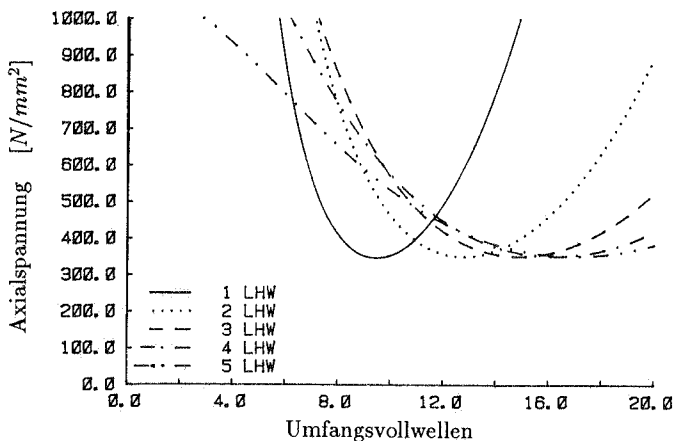


Bild 10.1 Beulbedingung nach Flügge

Im Gegensatz hierzu ist die klassische kritische Last längsversteifter Zylinder im allgemeinen mit einem eindeutig definierten Beulmodus verbunden, bei dem das Auftreten einer einzigen Längshalbwelle dominant wird (vergleiche auch [7] und [22]). Die Größe der zu dieser Beulform zugehörigen kritischen Last kann nun durch den Anteil des Steifenquerschnitts am Gesamtquerschnitt des versteiften Zylinders entscheidend beeinflusst werden.

Für zwei Zylinder mit 40 und 80 Längssteifen sind hierzu die Ergebnisse von linearen Eigenwertanalysen in Bild 10.2 aufgetragen. Beide Zylinder haben dieselbe Gesamtquerschnittsfläche, die bei Variation der Steifenbreite  $d_s$  durch entsprechende Anpassung der Zylinder- und Steifendicken (mit  $t = t_s$ ) konstant gehalten wird.



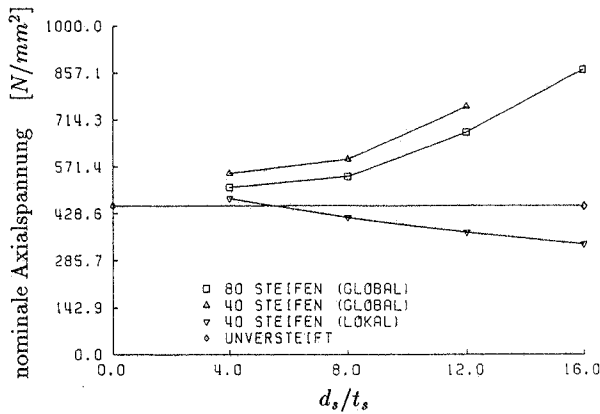


Bild 10.2 Beulspannungen in Abhängigkeit des Aussteifungsgrades

Die den globalen Versagensmodi zugehörigen nominalen Beulspannungen wachsen wie erwartet mit zunehmendem Anteil des Steifenquerschnitts am Gesamtquerschnitt in starkem Maße an. Infolge der fortschreitenden Reduktion der Wanddicke stellen sich jedoch gleichzeitig lokale Versagensmodi ein, deren Spannungsgrößen unter den klassischen Wert des unverteiften Zylinders fallen können. Weiterhin droht mit zunehmender Steifenschlankheit auch ein zusätzliches Steifenbeulen, was hier mit den zur Steifenidealisierung verwendeten Balkenelementen jedoch nicht erfaßt werden kann.

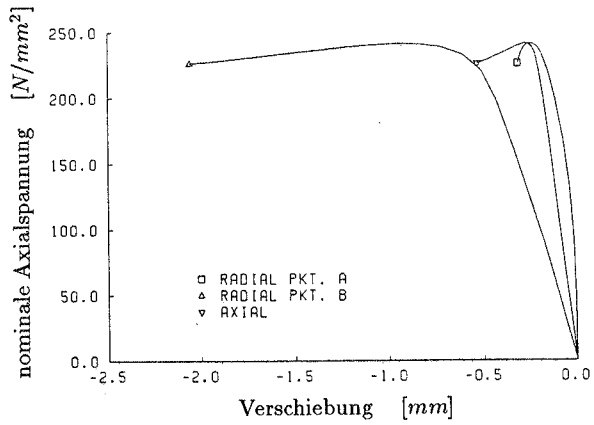
## 10.1 Traglastberechnung

Zur Klärung des Einflusses der Beulmodi lokal/global auf die aufnehmbare Traglast des Zylinders werden der Geometrie von Modell 2 (Bild 9.9) die zur niedrigsten Beulspannung (lokal) zugehörige Beulform und die zur globalen Beulspannung zugehörige Beulform als Imperfektion mit einer jeweils maximalen Amplitude von der Größe der Wanddicke überlagert. Die in Tabelle 10.1 zusammengefaßten Ergebnisse der geometrisch und materiell nichtlinearen Traglastberechnungen machen deutlich, daß sich die zur hochwelligen lokalen Beulform affine Imperfektion versteifend auswirkt und die zur höheren Beulspannung zugehörige globale Beulform maßgebend wird. Dies steht in Übereinstimmung mit den Untersuchungen in [61], nach denen für Globalbeulen eine halbe Sinuswelle als dominierende Imperfektion angegeben wird. In den weiteren Berechnungen werden deshalb ausschließlich Imperfektionen affin zu einer globalen Beulform herangezogen. Weiterhin erweist sich zur Traglastberechnung mit Imperfektionen affin zur globalen Beulform das Netz mit  $2 \times 7$  Elementen als ausreichend.

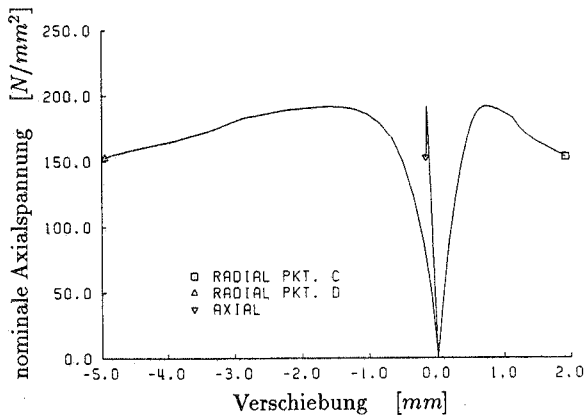
Die Last-Verschiebungskurven der Idealisierung mit  $4 \times 7$  Elementen zwischen den Steifen mit Imperfektionen affin zur lokalen und globalen Beulform sind in den Bildern 10.3 und 10.4 aufgetragen, die Verformungsbilder in den Traglast- sowie den Endzuständen (Zustände bei Abbruch der Berechnungen) können den Bildern 10.5 und 10.6 entnommen werden.

Imperfektion affin zur	$2 \times 7$ Elemente [ $N/mm^2$ ]	$4 \times 7$ Elemente [ $N/mm^2$ ]
lokalen Beulform	nicht gerechnet	241
globalen Beulform	194	191

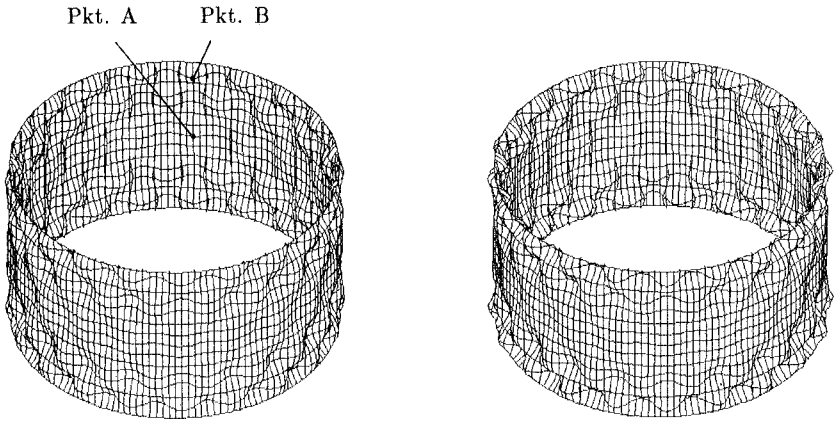
**Tabelle 10.1** Tragspannungen von Modell 2. Fließspannung  $\sigma_f = 340 N/mm^2$



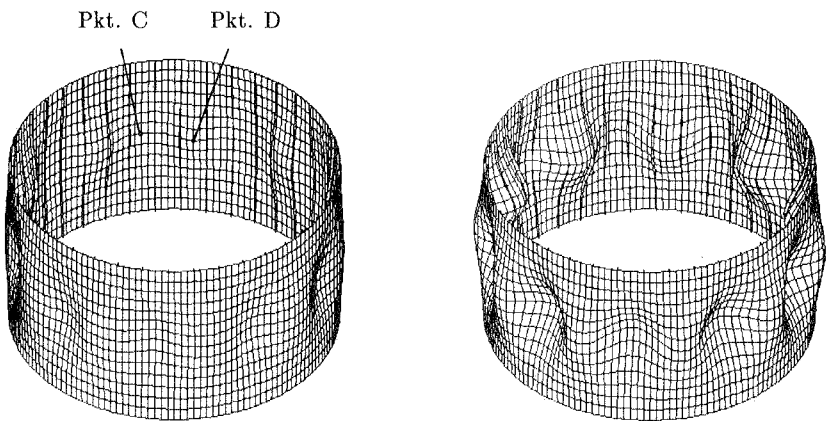
**Bild 10.3** Last-Verschiebungskurven unter lokaler Imperfektion



**Bild 10.4** Last-Verschiebungskurven unter globaler Imperfektion



**Bild 10.5** Lokale Imperfektion. Laststufe  $\sigma = 241N/mm^2$  und Endzustand



**Bild 10.6** Globale Imperfektion. Laststufe  $\sigma = 191N/mm^2$  und Endzustand

## 11 Einfluß der Exzentrizität auf die Beullast

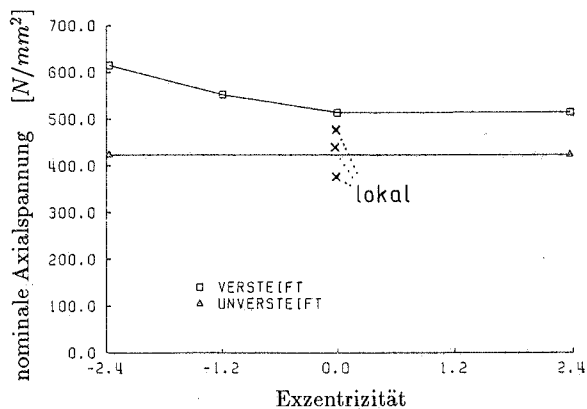
Infolge der Vorkrümmung des Zylinders treten beim Beulen zusätzliche Membranspannungen auf, die im Falle des Globalbeulens in exzentrisch angeordneten Steifen Biegemomente hervorrufen. Diese Biegemomente verstärken bei innen angeordneten Steifen die Beuldeformationen bzw. wirken diesen bei Außensteifen entgegen [29]. Eine anschauliche Erklärung dieses Phänomens findet sich in [58].

In [52] werden die Differentialgleichungen für das Beulen exzentrisch versteifter Zylinder für verschiedene Randbedingungen gelöst, und anhand von Rechenbeispielen mit systematisch variierten Parametern wird der Einfluß der Exzentrizität von Ring- und Längsversteifung sowie der Randbedingungen auf die Beullasten untersucht.

Diesem primären Exzentrizitätseffekt der günstigen Außenversteifung wirkt jedoch ein sekundärer Effekt entgegen, nach dem innen angeordnete Längssteifen die Dehnsteifigkeit in Umfangsrichtung stärker vergrößern als Außensteifen (siehe [53], [54]). Liegt nämlich eine Innenbeule vor, so erfährt die innenversteifte Zylinderhaut zusätzliche Längsdruckspannungen, die außenversteifte dagegen zusätzliche Längszugspannungen. Diese zusätzlichen Spannungen vergrößern (Innensteifen) bzw. vermindern (Außensteifen) entsprechend der Querdehnzahl des Materials die Membrandruckspannungen in Umfangsrichtung und erhöhen somit bei Innensteifen die Beullast bzw. bauen diese bei Außensteifen ab. Analog werden bei einer Außenbeule die Membranzugspannungen in Umfangsrichtung vergrößert (Innensteife) bzw. verkleinert (Außensteife).

Dieser Sekundäreffekt spielt für mittellange Zylinder eine nur untergeordnete Rolle, kann jedoch für sehr kurze Zylinder überwiegen.

Lineare Stabilitätsuntersuchungen an der perfekten Schale unter Verwendung des exzentrisch anschließbaren 3D-Balkenelements lassen nach Bild 11.1 den oben angesprochenen Exzentrizitätseffekt für das globale Beulen ebenfalls erkennen. Die unterhalb der globalen Beulspannungen auftretenden lokalen Beulspannungen bleiben hingegen von der Exzentrizität unbeeinflusst. (Wie schon in Abschnitt 10 gezeigt, können auch hier von dem verwendeten FE-Netz mit  $2 \times 7$  Elementen in Umfangsrichtung die hochwelligen lokalen Beulmodi nicht exakt erfaßt werden, wie die ebenfalls in Bild 11.1 eingetragenen zusätzlichen lokalen Werte einer Eigenwertberechnung am verfeinerten Netz mit zentrischer Versteifung  $e = 0$  deutlich machen.)



**Bild 11.1** Einfluß der Exzentrizität auf das Globalbeulen.  
 40 Rechteckinnensteifen,  $d_s = 4.86\text{mm}$ ,  $t_s = 0.81\text{mm}$

In experimentellen Untersuchungen hingegen tritt der Einfluß der Exzentrizität auf die Beullast infolge geometrischer Imperfektionen erheblich vermindert auf [25], was auch die Untersuchungen im nächsten Abschnitt zeigen werden.

## 12 Einfluß der Imperfektionsamplitude auf das Tragverhalten

Der in Abschnitt 11 am perfekten Zylinder aufgezeigte Einfluß der Exzentrizität auf die Beulspannung konnte in experimentellen Untersuchungen nicht in diesem Maße beobachtet werden (vergleiche [25]). Verantwortlich hierfür sind unvermeidliche geometrische Abweichungen von der idealen Zylindergeometrie, wodurch die zusätzlichen Membrankräfte in der Zylinderhaut abgebaut werden.

In diesem Abschnitt soll der Einfluß der Imperfektionsamplitude auf das globale Stabilitäts- und Traglastverhalten des exzentrisch längsversteiften Zylinders mit 40 Rechtecksteifen ( $d_s = 4.86\text{mm}$ ,  $t_s = t = 0.81\text{mm}$ ) durch nachfolgende Studie am *Modell 2a* (siehe Bild 9.9) näher beleuchtet werden. Die Imperfektionsform wird einheitlich für alle Berechnungen affin zur globalen Beulform des zentrisch versteiften Zylinders ( $e = 0$ ) aus Abschnitt 11 angenommen, variiert wird die maximale Amplitude.

### 12.1 Lineare Beuluntersuchungen

Das Ergebnis einer Beulstudie mit linearen Stabilitätsanalysen ist in Bild 12.1 zusammengefaßt. Mit zunehmender Imperfektionsamplitude reduziert sich der günstige Einfluß der Außenversteifung und für die Imperfektionsamplitude  $w_0 = 4t$  kehrt sich der positive Exzentrizitätseffekt der Außensteifen gegenüber der Innenversteifung sogar um.

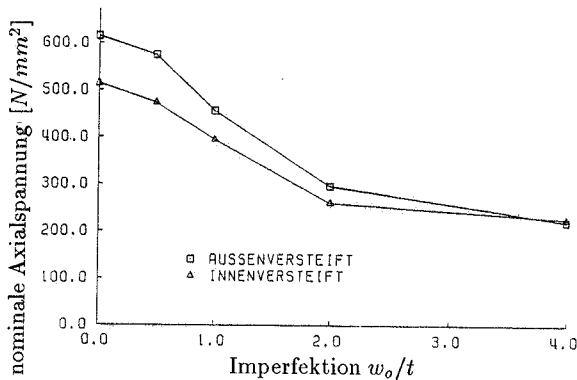
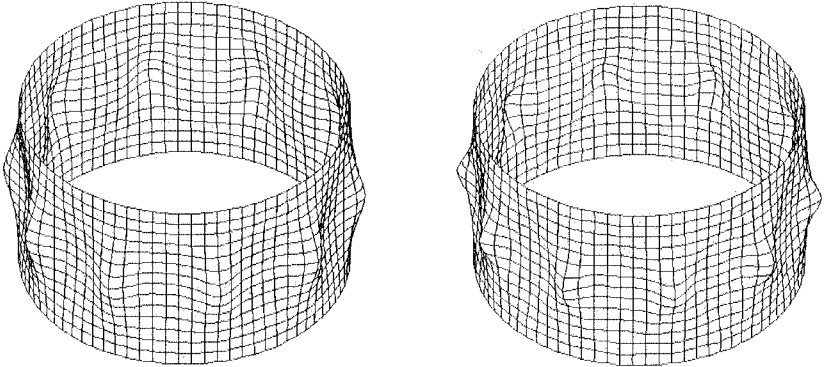
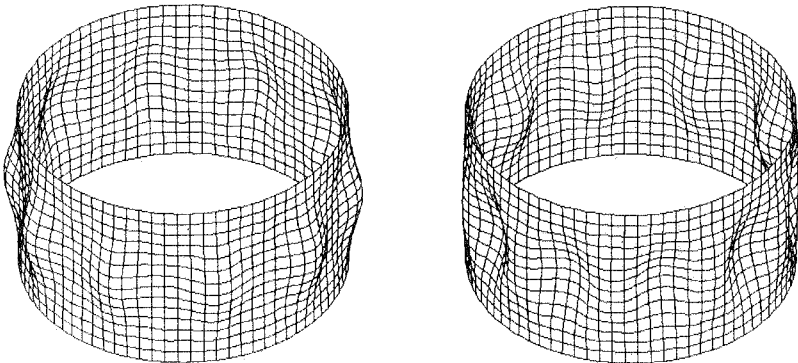


Bild 12.1 Exzentrizitätseinfluß bei imperfekter Geometrie

In den Bildern 12.2 und 12.3 sind die globalen Eigenformen der beiden Zylinder mit Imperfektionsamplituden  $w_0 = t$  und  $w_0 = 4t$  abgebildet.



**Bild 12.2** Beulverformungen unter Imperfektion  $w_0 = t$ ,  
links: Innensteifen, rechts: Außensteifen



**Bild 12.3** Beulverformungen unter Imperfektion  $w_0 = 4t$ ,  
links: Innensteifen, rechts: Außensteifen



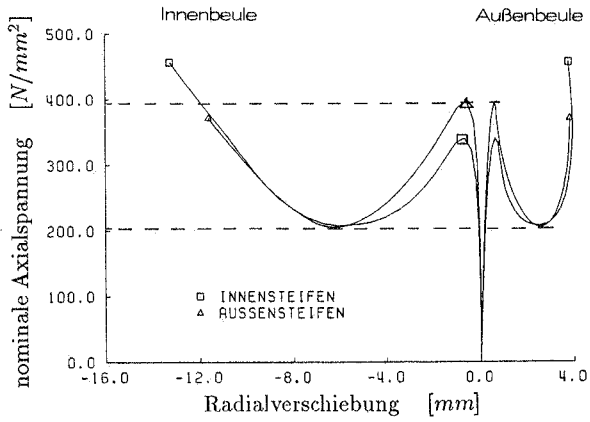
## 12.2 Nichtlinear elastisches Tragverhalten

Die Last-Verschiebungsdiagramme der geometrisch nichtlinearen Berechnungen mit elastischem Materialverhalten sind in den Bildern 12.4 bis 12.8 zusammengefaßt und lassen folgende Einflüsse der Imperfektionsamplitude auf das Tragverhalten des Zylinders erkennen:

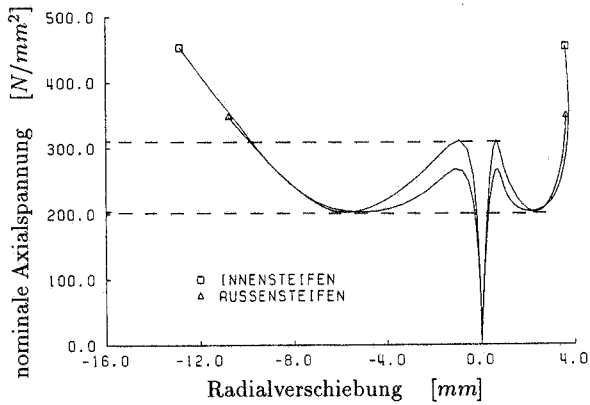
- Die Zylindergeometrien mit kleiner Anfangsimperfektion weisen ein ausgeprägtes Primärbeulverhalten auf, das mit zunehmender Imperfektionsamplitude reduziert wird und schließlich vollkommen verschwindet.
- Die Lage der Steifen hat nur einen Einfluß auf die Größe der primären Beulspannung. Die im Nachbeulbereich beim Minimum auftretenden nominalen Spannungen (Nachbeulspannungen) besitzen annähernd dasselbe Niveau.
- Mit wachsender Verformung nimmt der günstige Einfluß der Außenversteifung ab und die Last-Verformungskurven der Zylinder mit Innen- und Außensteifen gehen ineinander über.
- Bis zum Auftreten des Primärbeulens nehmen die Außen- und Innenbeulen gleichermaßen zu. Mit zunehmender Verformung im Nachbeulbereich dominieren jedoch die Innenbeulen, und die Außenbeulen werden kleiner (vergleiche Bild 12.9).

Diese Ergebnisse verdeutlichen die große Imperfektions-Sensitivität des Zylinders, die einem wachsenden Abbau des Membranlastanteils zuzuschreiben ist. In den Regelwerken wird diesem Phänomen durch Hinweise auf Einhaltung bestimmter Vorbeulmaße Rechnung getragen.

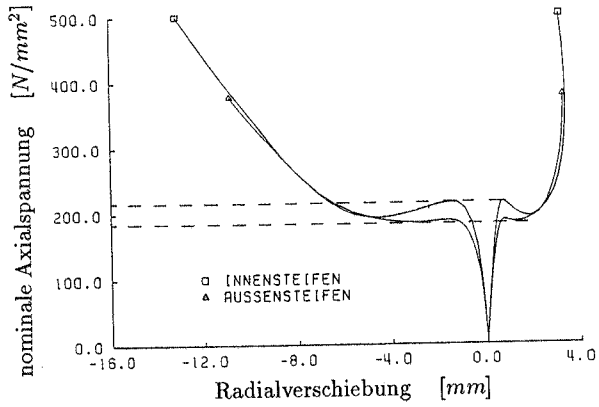
Als oberer Grenzwert für die aufnehmbare Spannung bietet sich die Nachbeulspannung an, die infolge ihres nahezu konstant verlaufenden Niveaus als charakteristische Größe des Zylinders angesehen werden kann. Zur Bestimmung der unteren Grenze der Stabilitätslast sei auf das Konzept der verzerrungsfreien Verbiegungen [21] [22] [28] beziehungsweise der reduzierten Membranbeulung [64] hingewiesen.



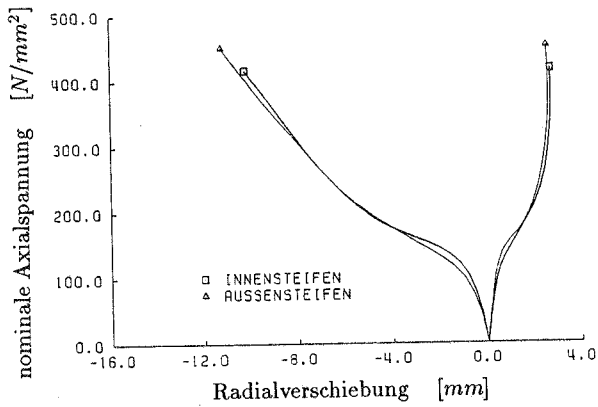
**Bild 12.4** Nichtlinear elastisches Tragverhalten unter  $w_0 = 0.25t$



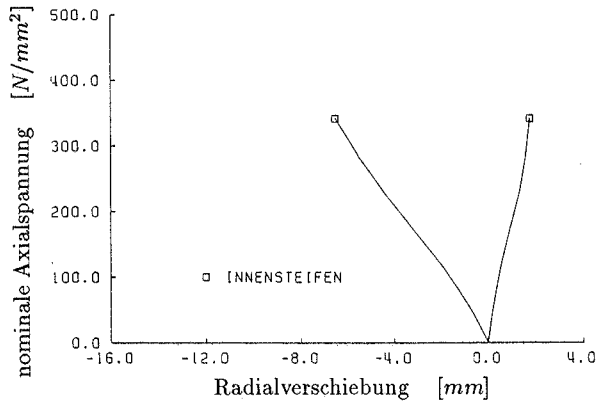
**Bild 12.5** Nichtlinear elastisches Tragverhalten unter  $w_0 = 0.5t$



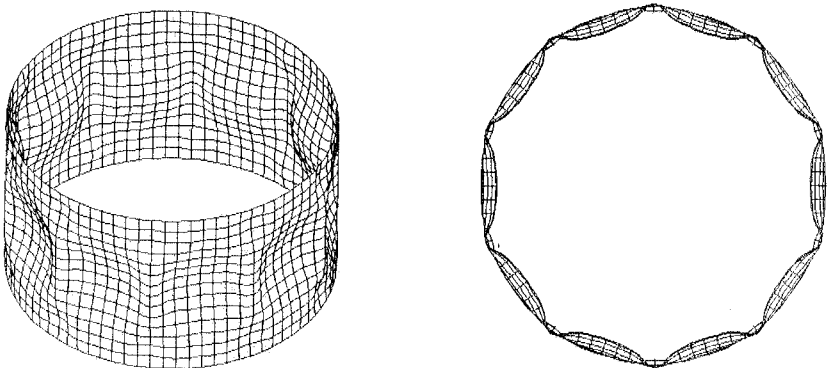
**Bild 12.6** Nichtlinear elastisches Tragverhalten unter  $w_o = t$



**Bild 12.7** Nichtlinear elastisches Tragverhalten unter  $w_o = 2t$



**Bild 12.8** Nichtlinear elastisches Tragverhalten unter  $w_o = 4t$



**Bild 12.9** Verformungsfigur: Laststufe  $\sigma = 501N/mm^2$ , Innensteifen,  $w_o = t$

### 12.3 Traglastberechnungen

In den geometrisch nichtlinearen Untersuchungen des vorhergehenden Abschnitts blieb ein Überschreiten des elastischen Bereichs der Spannungen unberücksichtigt. Weitergehende Berechnungen an den Zylindern mit Imperfektionsamplituden  $w_o = 0.25t$  und  $w_o = t$  unter Einbeziehung elastoplastischen Werkstoffverhaltens sollen daher diesen zusätzlichen Einfluß erfassen.

Die Ergebnisse der Traglastberechnungen unter Zugrundelegung einer Fließspannung von  $\sigma_f = 340\text{N/mm}^2$  sind in den Bildern 12.10 bis 12.13 als Last-Verformungskurven aufgetragen und lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Imperfektionsamplitude  $w_o = 0.25t$

Die primären Beulspannungen sind infolge Plastizierung des Werkstoffs von der Lage der Steifen unabhängig.

2. Imperfektionsamplitude  $w_o = t$

Die Nachbeulspannungen des Zylinders mit elastischem Materialverhalten eignen sich als oberer Grenzwert der aufnehmbaren Spannungen.

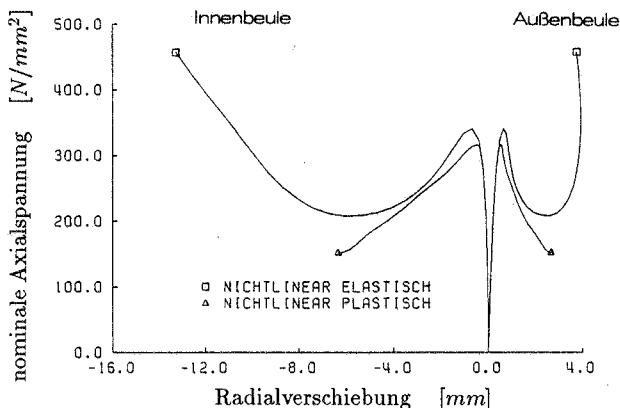
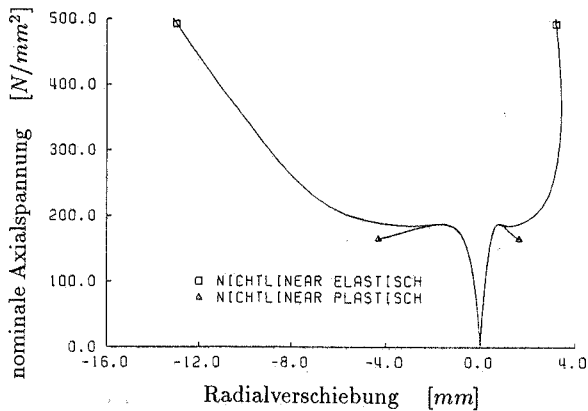


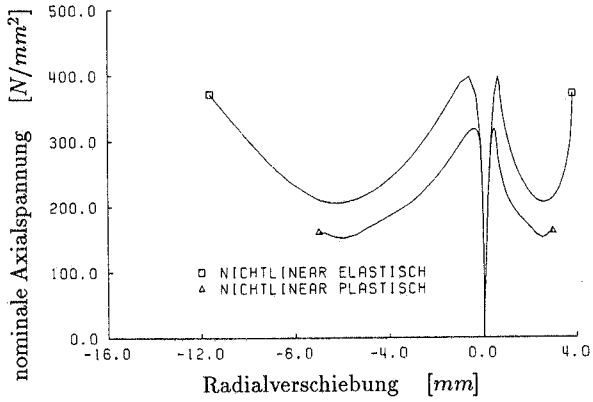
Bild 12.10 Traglastberechnung. Innensteifen,  $w_o = 0.25t$



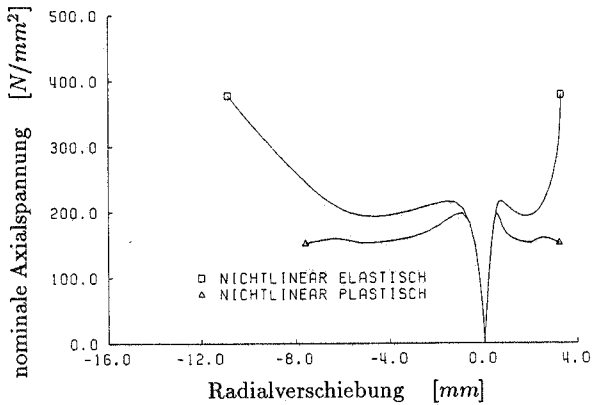
**Bild 12.11** Traglastberechnung. Innensteifen,  $w_o = t$

Gegenüber den Berechnungen mit elastischem Werkstoffverhalten hat sich der günstige Einfluß der Außenversteifung infolge Plastizierung des Materials erheblich reduziert (vergleiche auch [46]). Im Falle der Zylinder mit kleiner Anfangsimperfektion ( $w_o = 0.25t$ ) liegen die primären Beulspannungen sowohl für Innenversteifung als auch für Außenversteifung weit oberhalb des Lastniveaus, bei dem Fließen des Materials eintritt, und beide Tragspannungen werden in erster Linie durch das nichtlineare Werkstoffverhalten bestimmt.

Im Falle der größeren Anfangsimperfektion ( $w_o = t$ ) fällt die Tragspannung des innenversteiften Zylinders mit der jetzt niedrigeren primären elastischen Beulspannung zusammen und ist somit von der geometrischen Nichtlinearität abhängig. Die nominale Tragspannung unter Außenversteifung könnte hier durch eine höhere Fließspannung weiter gesteigert werden.



**Bild 12.12** Traglastberechnung. Außensteifen,  $w_o = 0.25t$



**Bild 12.13** Traglastberechnung. Außensteifen,  $w_o = t$

### 13 Zylinder mit T-Steifen

Bei den bisher betrachteten Rechtecksteifen ist zu berücksichtigen, daß mit zunehmender Steifenbreite  $d_s$  die Erhöhung der Biegesteifigkeit begleitet wird von einer gleichzeitigen Destabilisierung der Steife infolge Zunahme der Schlankheit.

In Tabelle 13.1 sind die nominalen Beulspannungen der Zylinderidealisierung nach *Modell 2b* mit Rechtecksteifen der Breite  $d_s = 4.86\text{mm}$  und  $d_s = 9.72\text{mm}$  gegenübergestellt.

Die Beulspannung unter globalem Versagen erhöht sich infolge der Querschnittsverdopplung der Steifen um 28%, jedoch ist gleichzeitig ein Absinken der niedrigsten Beulspannung infolge Lokalbeulens auf die Größe des klassischen Wertes des unversteiften Zylinders festzustellen.

Steifenbreite $d_s$ [mm]	Beulmodus	Beulspannung [N/mm <sup>2</sup> ]	Beullast [kN]
4.86	lokal	375	616
	global	512	840
9.72	lokal	354	637
	global	655	1178
klass. Beulwerte (unversteift)		353	524

**Tabelle 13.1** Zylinder mit 40 Rechteck-Innensteifen.  $t_s = t = 0.81\text{mm}$

Ein Überschreiten der in [24] oder in den Regelwerken [2] und [3] angegebenen Grenzschlankheiten der Rechtecksteifen kann durch den Übergang auf andere Steifenprofile umgangen werden, wobei häufig offene L- oder T-Profile Anwendung finden.

#### 13.1 Idealisierung der T-Profile

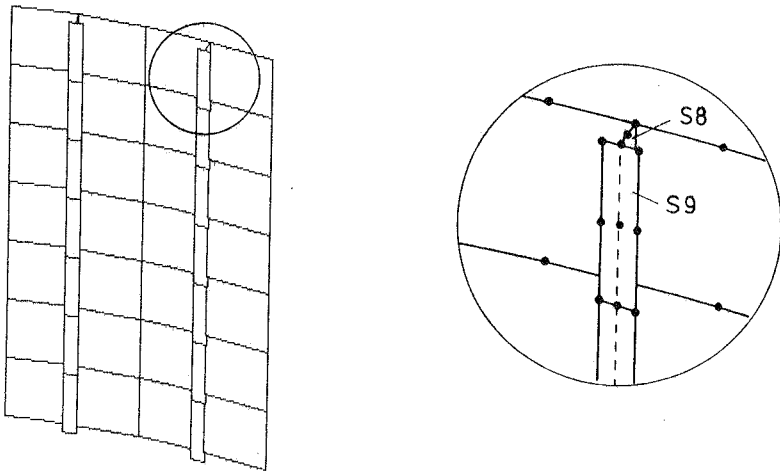
Zur Idealisierung zusammengesetzter offener Profile ist die Effizienz des Balkenelements gegenüber Schalenelementen noch ausgeprägter als bei den einfachen Rechtecksteifen.



In Tabelle 13.2 sind die beiden FE-Idealisierungen nach *Modell 2a* des innenversteiften Zylinders mit Balken- und Schalensteifen gegenübergestellt, wobei im Falle der Steifenidealisierung mittels Schalenelementen neben den 8-Knoten Elementen des Stegs für den Flansch 9-Knoten Elemente verwendet werden, um auch die Zwischenknoten der Elemente des Stegs am Übergang zum Flansch anschließen zu können (siehe Bild 13.1).

Steifen- elemente	NDOF	BAND	$\sigma_{ki}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
Schale	979	177	493
Balken	459	82	495

**Tabelle 13.2** Eigenwertberechnungen. Aussteifung: 40 T-Innensteifen  
 $d_s = d_f = 2.43\text{mm}, t_s = t_f = 0.81\text{mm}$



**Bild 13.1** Idealisierung der T-Steifen mit Schalenelementen

Demgegenüber können bei der Steifenidealisierung mit Balkenelementen die Elemente des Flansches ohne zusätzliche Knoten einfach den vorhandenen Stegelementen überlagert werden. Die Anzahl der Freiheitsgrade sowie die Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix bleiben hiervon unbeeinflusst. Der Vergleich der globalen Beulspannungen aus beiden Modellen zeigt wie bei den bisherigen Rechtecksteifen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

### 13.2 Vergleich: Rechteck- mit T-Profil

Der Rechteckquerschnitt mit der Breite  $d_s = 9.72\text{mm}$  nach Tabelle 13.1 wird ersetzt durch ein flächengleiches T-Profil mit Steg- und Flanschbreite  $d_s = d_f = 4.86\text{mm}$ , die Dicke bleibt unverändert  $t_s = t_f = t = 0.81\text{mm}$ . Diese Änderung des Steifenprofils ist gekennzeichnet durch zwei gegenläufige Einflüsse auf das lokale und globale Beulverhalten des Zylinders (vergleiche Tabelle 13.3):

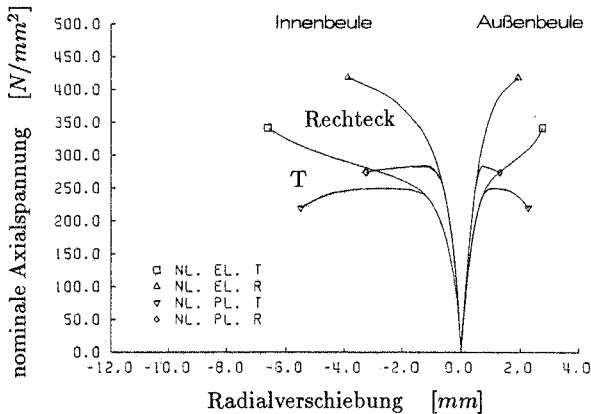
1. Die niedrigste lokale Beulspannung wird mit ca. 35% deutlich erhöht.
2. Bedingt durch die Reduktion der Biegesteifigkeit bezüglich der Schalenhaut reduziert sich die globale Beulspannung um ca. 14%.

Weiterhin treten beim Zylinder mit T-Steifen unterhalb des globalen Beulens nur noch zwei lokale Beulmodi gegenüber zehn des Zylinders mit Rechtecksteifen auf, was auf den stabilisierenden Einfluß des T-Profils hinweist.

Steifenprofil	Beulmodus	Beulspannung [N/mm <sup>2</sup> ]
Rechteck	lokal	354
	global	655
<b>T</b>	lokal	479
	global	562

**Tabelle 13.3** Vergleich zwischen flächengleichem Rechteck- und T-Profil

In Bild 13.2 sind schließlich die Last-Verformungs-Diagramme der geometrisch nichtlinearen Berechnungen des Zylinders mit Rechteck- und T-Steifen für elastisches und elastoplastisches Materialverhalten dargestellt. Auch hier ist das Tragverhalten des Zylinders mit T-Steifen durch die reduzierte Biegesteifigkeit der Versteifung gekennzeichnet. Die Traglast des Zylinders mit Rechtecksteifen wird in erster Linie durch ein Materialversagen bestimmt, während im Falle des mit T-Profilen versteiften Zylinders die Last-Verformungskurven schon bei einem niedrigeren Lastniveau in den stark nichtlinearen Bereich übergehen und die aufnehmbare Grenzlast somit in weit stärkerem Maße auch von der geometrischen Nichtlinearität geprägt wird.



**Bild 13.2** Last-Verschiebungsverhalten der mit Rechteck- und T-Profilen versteiften Zylinder

Die Vergleichsrechnung mit einer Schalenidealisierung der T-Steifen führt auf eine nominale Tragspannung von  $\sigma_{tr} = 253 N/mm^2$  und steht mit dem Wert  $\sigma_{tr} = 249 N/mm^2$  bei Balkenidealisierung in bester Übereinstimmung, so daß auf eine gesonderte Darstellung dieser Diagramme verzichtet wird.

## Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe des Konzepts der Degeneration ein 3-dimensionales nichtlineares Balkenelement mit linearem, quadratischem oder kubischem Verschiebungsansatz beschrieben. Das Element ist kompatibel zu dem in [44] entwickelten Schalelement, und durch die Möglichkeit des exzentrischen Anschlusses lassen sich auch aus mehreren rechteckigen Teilprofilen zusammengesetzte Querschnittsformen modellieren.

Die Formulierung basiert auf der materiellen Beschreibung des Bewegungsvorgangs und führt über das Prinzip der virtuellen Verrückungen auf eine inkrementelle Gleichgewichtsbedingung, deren Lösung nach konsistenter Linearisierung auf iterative Weise erfolgt.

Neben einer Formulierung in raumfesten kartesischen Koordinaten wird auch der Übergang auf eine Formulierung in lokalen orthonormalen Elementkoordinaten mit lokalen Knotenkinematen aufgezeigt. Diese Vorgehensweise erweist sich insbesondere im Hinblick auf die Integration der Steifigkeitsmatrix mit einer sehr schwach besetzten lokalen Werkstoffmatrix, sowie auch hinsichtlich der Einführung zusätzlicher lokaler Verschiebungsansätze zur Erfassung der Querschnittsverwölbung bei Torsionsbeanspruchung als vorteilhaft.

Durch eine Trennung der Integrationen über den Querschnitt und in Richtung der Balkenlängsachse kann die Querschnittsintegration vorab erfolgen und führt auf die in der Balkentheorie üblichen Querschnittswerte und Schnittgrößen. Zur fehlerfreien Beschreibung verzerrungsloser Starrkörperrotationen gekrümmter Elemente sind in der verbleibenden Integration über die Balkenlängsachse jedoch anstelle der Randverschiebungen die Rotationen zu interpolieren.

Nichtlineares Materialverhalten wird durch einen einachsigen Spannungszustand ohne Interaktion zwischen Normal- und Schubspannungen mit Hilfe eines Schichtenmodells berücksichtigt. Durch diese Vereinfachung kann die Ermittlung des elastoplastischen Spannungszustandes und der elastoplastischen Werkstoffmatrix auf direkte Weise erfolgen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Balkenelement zur Modellierung der Längssteifen axialbelasteter Zylinder herangezogen. Die Ergebnisse dieser Studie lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- **Vergleich: Balkensteifen - Schalensteifen**

Die Idealisierung der Steifen durch Balkenelemente erweist sich gegenüber einer Idealisierung durch Schalenelemente hinsichtlich der Resultate als ebenbürtig, solange lokales Steifenversagen ausgeschlossen werden kann. Die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert sich bei einer Idealisierung durch Balkenelemente um 30% (Rechtecksteifen) bis ca. 50% (T-Steifen). Die Balkensteifen erfordern zudem gegenüber dem unversteiften Zylinder keine zusätzlichen Knotenpunkte.

- **Berechnung an einem Ausschnitt**

Ausschnittsberechnungen von  $180^\circ$  und  $90^\circ$  liefern identische Ergebnisse, und die Knotenlinien der Beulfigur bilden sich unabhängig von der Lage der Steifen ab. Am weiter reduzierten Ausschnitt von  $18^\circ$  hat die Lage der Symmetrieränder (auf den Steifen / zwischen den Steifen) einen Einfluß auf das Auftreten lokaler Beulmodi.

- **Verformungskontrollierte Belastung**

Die modifizierte Gleichungslösung nach [14] mit Berücksichtigung vorgeschriebener Verformungen ist der Kopplung von Freiheitsgraden vorzuziehen, da sie keine Vergrößerung der Bandbreite bewirkt.

- **Imperfektionsform**

Eine Imperfektion affin zur globalen Beulform mit einer Längshalbwelle erweist sich für die Traglastberechnung als maßgebend.

- **Aussteifungsgrad**

Mit zunehmendem Aussteifungsgrad steigen die den globalen Eigenformen zugehörigen nominalen Beulspannungen stark an, jedoch treten zusätzliche lokale Versagensmodi auf.

- **Exzentrizität der Steifen**

Der günstige Exzentrizitätseffekt der Außenversteifung bei Eigenwertberechnungen reduziert sich mit zunehmender Imperfektionsamplitude. In den geometrisch nichtlinearen Untersuchungen gehen die Last-Verschiebungsverläufe der außen- und innenversteiften Zylinder im Nachbeulbereich ineinander über. Die primären Beulspannungen nähern sich mit zunehmender Imperfektionsamplitude.

Wird zusätzlich nichtlineares Materialverhalten berücksichtigt, so prägt bei kleinen Imperfektionsamplituden in erster Linie der Werkstoff das Tragverhalten.

- **T-Steifenprofil**

Infolge der reduzierten Biegesteifigkeit des T-Profiles gegenüber einem flächengleichen Rechteckquerschnitt bei unveränderter Blechdicke vermindert sich auch die nominale Beulspannung mit globaler Eigenform. Weiterhin hat die geometrische Nichtlinearität einen stärkeren Einfluß auf die Traglast als bei Rechtecksteifen.

## Schrifttum

- [1] *ASME - CASE N-284. Metal Containment Shell Buckling Design Methods.* August 1980.
- [2] *DnV - Rules for the Design Construction and Inspection of Off-shore Structures.* DET NORSE VERITAS, P.O.BOX: 300,1322 HØVIK,NORWAY, 1977. Reprint with Corrections 1979.
- [3] *ECCS - European Recommendations for Steel Constructions. Section 4.6: Buckling of Shells.* Avenue Louise 326 - Bte 52, B-1050 BRUSSELS (Belgium), 3 edition, September 1984.
- [4] Vorlesungen in Baustatik, Teil T: Einführung in die Torsion. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [5] S. Ahmad, B.M. Irons und O.C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2:419-451, 1970.
- [6] J.E. Akin. *Application and Implementation of Finite Element Methods.* Academic Press Inc.(London) Ltd, 1982.
- [7] J. Árbocz und C.D. Babcock. The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 28-38, March 1969.
- [8] J. Barlow. Optimal stress locations in finite element models. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10:243-251, 1976.
- [9] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* Prentice-Hall, 1982.
- [10] K.-J. Bathe und A. Chaudhary. On the displacement formulation of torsion of shafts with rectangular cross-sections. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18:1565-1580, 1982.
- [11] K.-J. Bathe und P.M. Wiener. On elastic-plastic analysis of I-beams in bending and torsion. *Comp. & Structures*, 17:711-718, 1983.
- [12] P.G. Bergan und R.W. Clough. Convergence criteria for iterative processes. *AIAA Journal*, 10:1107-1108, 1972.

- [13] O. Bernhardi. *Eine geometrisch nichtlineare Finite-Elemente-Formulierung für die Idealisierung exzentrischer Aussteifungen*. Dissertation, Lehrstuhl für Schiffbau, Konstruktion und Statik, RWTH Aachen, 1985.
- [14] P. Bettess und J.A. Bettess. A profile matrix solver with built-in constraint facility. *Eng. Comput.*, 3:209–216, September 1986.
- [15] B. Brendel. *Zur geometrisch nichtlinearen Elastostabilität*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [16] B. Brendel und E. Ramm. Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der Finiten Elemente. *Ingenieur-Archiv*, 337–362, 1982.
- [17] D. Bushnell. A strategy for the solution of problems involving large deflections, plasticity and creep. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11:683–708, 1977.
- [18] R.D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1981.
- [19] M.A. Crisfield. Explicit integration and the isoparametric arch and shell elements. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 2:181–187, 1986.
- [20] M.A. Crisfield. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*. Volume I: Linear Analysis, Pineridge Press, 1986.
- [21] J.G.A. Croll und R.C. Batista. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders. *Int. J. Mech. Sci.*, 23(6):331–343, 1981.
- [22] J.G.A. Croll und C.P. Ellinas. Reduced stiffness axial load buckling of cylinders. *Int. J. Solids Structures*, 19(5):461–477, 1983.
- [23] G. Dhatt und G. Touzot. *The Finite Element Method Displayed*. John Wiley & Sons, 1985.
- [24] A. Diack. *Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyklinderschalen unter Axialdruck*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [25] M. Esslinger. Versteifte und abgesetzte Schalen. *Chemie-Ingenieur-Technik*, (11):770–776, 1973.



- [26] G.H. Ferguson und R.D. Clark. A variable thickness, curved beam and shell stiffening element with shear deformations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14:581–592, 1979.
- [27] W. Flügge. *Stresses in Shells*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [28] H. Fritz und U. Wittek. Die Bedeutung dehnungsloser Beulzustände bei der Stabilitätsberechnung von Schalen. *Der Stahlbau*, 46(2):40–45, 1977.
- [29] E. Hampe. *Stabilität rotationssymmetrischer Flächentragwerke*. Wilhelm Ernst & Sohn Berlin München, 1983.
- [30] Irons und Ahmad. *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1983.
- [31] B.M. Irons. *The semiloof shell element*. Lecture notes, Int. Research Seminar on the Theory and Application of Finite Elements, University of Calgary, Canada, 1973.
- [32] B.M. Irons. The semiloof shell element. In Ashwell/Gallagher, editor, *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Seiten 197–222, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [33] J. Irvin und N. Mullineux. *Mathematics in Physics and Engineering*. Academic Press, New York and London, 1959.
- [34] I. Kalev und J. Gluck. Cyclic elastic-plastic dynamic analysis by the finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 10:63–74, 1977.
- [35] W. Kanok-Nukulchai, A. Hasegawa und F. Nishino. Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements. *Structural Eng./Earthquake Eng.*, 3(1):53s–61s, April 1986.
- [36] W. Kanok-Nukulchai, R.L. Taylor und T.J.R. Hughes. A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method. *Comp. & Structures*, 13:19–27, 1981.
- [37] J.M.M.C. Marques. Stress computation in elastoplasticity. *Eng. Comput.*, 1:42–51, March 1984.

- [38] R.V. Milford und W.C. Schnobrich. Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23:133–154, 1986.
- [39] C.D. Miller. Buckling stresses of ring and stringer stiffened cylindrical shells under axial compressive load. 1977.
- [40] G.C. Nayak und O.C. Zienkiewicz. Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 5:113–135, 1972.
- [41] P. Osterrieder. *Traglastberechnung von räumlichen Stabtragwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [42] D.R.J. Owen, A. Prakash und O.C. Zienkiewicz. Finite element analysis of non-linear composite materials by use of overlay systems. *Comp. & Structures*, 4:1251–1267, 1974.
- [43] C. Petersen. *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- [44] E. Ramm. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [45] E. Ramm und A. Matzenmiller. Large deformation shell analyses based on the degeneration concept. In Hughes/Hinton, editor, *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Seiten 365–393, Pineridge Press, Swansea, UK, 1986. Vol.1, Element Technology.
- [46] B.D. Reddy. Buckling of elastic-plastic discretely stiffened cylinders in axial compression. *Int.J.Solids Structures*, 16:313–328, 1980.
- [47] L.A. Samuelson. *Practical analysis methods for design of circular cylinders with longitudinal stiffeners and subjected to axial compression*, Seiten 621–644. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982.
- [48] J.M. Sättele. *Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1980.
- [49] V. Schrödter. *Große Verschiebungen und elastoplastisches Tragverhalten von ebenen und räumlichen Stabtragwerken*. Bericht Nr. 84-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1984.

- [50] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner (Stuttgart), 1984.
- [51] K. Schweizerhof und E. Ramm. Combining quasi-Newton and arc-length methods for the analysis of nonlinear problems into the postlimit range. *Paper presented at IACM, First World Congress on Computational Mechanics. The University of Texas at Austin, 22–26, 1986*.
- [52] P. Seggelke und B. Geier. Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen. *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, (12):477–490, 1967.
- [53] J. Singer, M. Baruch und O. Harari. Inversion of the eccentricity effect in stiffened cylindrical shells buckling under external pressure. *J. Mech. Eng. Sci.*, 8(4):363–373, 1966.
- [54] J. Singer, M. Baruch und O. Harari. On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression. *Int. J. Solids Structures*, 3:445–470, 1967.
- [55] H. Stegmüller. *Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1985.
- [56] H. Stegmüller, L. Häfner, E. Ramm und J.M. Sättele. *Theoretische Grundlagen zum FE-Programmsystem NISA 80*. Bericht Nr. 1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [57] Karan S. Surana. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19:581–615, 1983.
- [58] W. Thielemann und M. Esslinger. Über den Einfluß der Exzentrizität von Längssteifen auf die axiale Beullast dünnwandiger Kreiszyklinderschalen. *Der Stahlbau*, (11):332–333, 1965.
- [59] S.P. Timoshenko und J.M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. McCraw-Hill International Book Company, 1961.
- [60] S.P. Timoshenko und J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McCraw-Hill International Book Company, 1982.

- [61] A.C. Walker, A. Andronicou und S. Sridharan. Experimental investigation of the buckling of stiffened shells using small scale models. In J.E. Harding, P.J. Dowling und N. Agelidis, editors, *Buckling of Shells in Offshore Structures*, Seiten 45–71, GRANADA London Toronto Sydney New York, 1982.
- [62] A.C. Walker und S. Sridharan. Analysis of the behaviour of axially compressed stringer-stiffened cylindrical shells. *Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2*, 69:447–472, June 1980.
- [63] E.L. Wilson und H.H. Dovey. Solution or reduction of equilibrium equations for large complex structural systems. *Advances in Engineering Software*, 1(1):19–25, 1978.
- [64] U. Wittek. Bemerkungen zur Anwendung der DAST-Richtlinie 013 in der Konstruktionspraxis. In *Baustatik-Baupraxis 2*, Seiten 7.1–7.26, 1984.
- [65] W. Wunderlich. Plastizitätstheorie im Konstruktiven Ingenieurbau. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Lehrstuhl IV, Ruhr-Universität Bochum.
- [66] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McCraw-Hill Book Company, 3 edition, 1977.
- [67] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor und J.M. Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 3:275–290, 1971.

# A Anhang

## A1 Kinematische Operatormatrix

(Seite 24)

${}^m_B$ ${}^n$	Knoten $i$				$\psi^i$	$\vartheta^i$
	$w_1^i$	$w_2^i$	$w_3^i$	$\varphi^i$		
${}^n u_{1,1}$	${}^n N_{,1}^i$	0	0	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{11}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{11}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{12}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{12}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{13}^i$
${}^n u_{1,2}$	${}^n N_{,2}^i$	0	0	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{11}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{11}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{12}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{12}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{13}^i$
${}^n u_{1,3}$	${}^n N_{,3}^i$	0	0	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{11}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{11}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{12}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{12}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{13}^i$
${}^n u_{2,1}$	0	${}^n N_{,1}^i$	0	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{21}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{21}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{22}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{22}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{23}^i$
${}^n u_{2,2}$	0	${}^n N_{,2}^i$	0	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{21}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{21}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{22}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{22}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{23}^i$
${}^n u_{2,3}$	0	${}^n N_{,3}^i$	0	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{21}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{21}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{22}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{22}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{23}^i$
${}^n u_{3,1}$	0	0	${}^n N_{,1}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{31}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{31}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m F_{32}^i + {}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{32}^i$	${}^n \bar{N}_{,1}^i \cdot {}^m G_{33}^i$
${}^n u_{3,2}$	0	0	${}^n N_{,2}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{31}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{31}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m F_{32}^i + {}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{32}^i$	${}^n \bar{N}_{,2}^i \cdot {}^m G_{33}^i$
${}^n u_{3,3}$	0	0	${}^n N_{,3}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{31}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{31}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m F_{32}^i + {}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{32}^i$	${}^n \bar{N}_{,3}^i \cdot {}^m G_{33}^i$

$${}^n N_{,ij}^i = {}^n J_{j1}^{-1} \cdot N_{,i\xi}^i$$

$${}^n \bar{N}_{,ij}^i = \frac{1}{2} (\zeta + e_\zeta) {}^n N_{,ij}^i h_\zeta^i + {}^n J_{j3}^{-1} \cdot \frac{1}{2} N_{,i}^i h_\zeta^i$$

$${}^n \bar{N}_{,ij}^i = \frac{1}{2} (\eta + e_\eta) {}^n N_{,ij}^i h_\eta^i + {}^n J_{j2}^{-1} \cdot \frac{1}{2} N_{,i}^i h_\eta^i$$

## A2 Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_g^{II}$

(Seite 25)

Infolge der im Verschiebungsansatz nichtlinear enthaltenen Rotationsvariablen entsteht nach Linearisierung der diskretisierten virtuellen Arbeitsgleichung ein zusätzlicher Steifigkeitsanteil  $\mathbf{K}_g^{II}$ . Die Komponenten dieser Steifigkeitsmatrix lassen sich mit Hilfe der Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^i &= \langle u_1^i \ u_2^i \ u_3^i \ \varphi^i \ \psi^i \ \vartheta^i \rangle^T \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{P}^T \boldsymbol{\tau} = \langle \tau_{11} \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{21} \ \tau_{22} \ \tau_{23} \ \tau_{31} \ \tau_{32} \ \tau_{33} \rangle^T \end{aligned}$$

wie folgt bestimmen: ( $k, l = 4, 5, 6$  und  $p = k - 3$ )

$$[{}_1\mathbf{K}_{kl}^{ii}]^{II} = \int_{1V} \left[ {}_1\bar{N}_{,s}^i \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \left( \frac{\partial F_{rp}^i}{\partial U_l^i} \right) + {}_1\tilde{N}_{,s}^i \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \left( \frac{\partial G_{rp}^i}{\partial U_l^i} \right) \right] \frac{1}{V} r_s \, d(1V)$$

Weiterhin gilt:

$$[{}_1\mathbf{K}_{kl}^{ij}]^{II} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{da} \quad \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \left( \frac{\partial F_{rp}^i}{\partial U_l^j} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \left( \frac{\partial G_{rp}^i}{\partial U_l^j} \right) = 0$$

	$u_1^i$	$u_2^i$	$u_3^i$	$\varphi^i$	$\psi^i$	$\vartheta^i$	
	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	$K_{44}^{ii}$	$K_{45}^{ii}$	$K_{46}^{ii}$	
	0	0	0	$K_{54}^{ii}$	$K_{55}^{ii}$	$K_{56}^{ii}$	
	0	0	0	$K_{64}^{ii}$	$K_{65}^{ii}$	$K_{66}^{ii}$	

K  
n  
o  
t  
e  
n  
  
i

Knoten i

### A3 Starrkörperbewegung bei Vorabintegration

Am Beispiel des 2-dimensional degenerierten Balkenelements mit globaler Formulierung wird zur Beschreibung des Geometriefeldes der Interpolation der Normalenvektoren eine Interpolation der Normalenwinkel gegenübergestellt. Anhand einer infinitesimalen Starrkörperrotation bezüglich des Koordinatenursprungs wird das unterschiedliche Elementverhalten beider Formulierungen bei analytischer Vorabintegration über die Elementdicke aufgezeigt. Die Balkendicke wird als konstant angenommen.

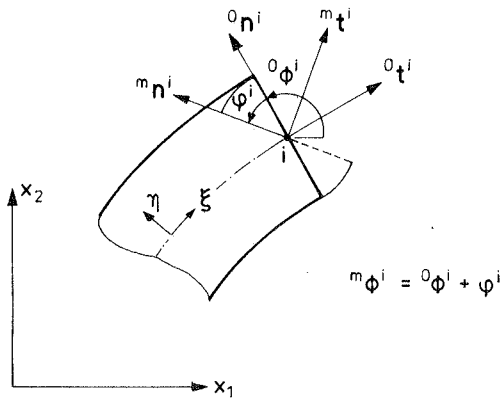


Bild A3.1 2-dimensional degeneriertes Balkenelement

#### A3.1 Interpolation der Normalenvektoren

Die Vektoren der Normalen und Tangente am Knoten  $i$  in Bild A3.1 sind definiert als:

$${}^m \mathbf{n}^i = \begin{bmatrix} \cos^m \Phi^i \\ \sin^m \Phi^i \end{bmatrix} \quad {}^m \mathbf{t}^i = \begin{bmatrix} \sin^m \Phi^i \\ -\cos^m \Phi^i \end{bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

Für das Balkenelement lautet der Ansatz für das Geometriefeld:

$${}^m \mathbf{x} = \sum_{i=1}^M N^i {}^m \mathbf{x}^i + \eta \frac{h}{2} \sum_{i=1}^M N^i {}^m \mathbf{n}^i \quad (\text{A3.2})$$

Durch Differenzbildung der Geometriefelder in den Zuständen  ${}^m Z$  und  ${}^0 Z$  kann das Verschiebungsfeld abgeleitet werden zu:

$${}^m \mathbf{u} = \sum_{i=1}^M N^i {}^m \mathbf{u}^i + \eta \frac{h}{2} \sum_{i=1}^M N^i ({}^m \mathbf{n}^i - {}^0 \mathbf{n}^i) \quad (\text{A3.3})$$

Für das Verschiebungsinkrement gilt ferner:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M N^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} \sum_{i=1}^M N^i {}^m \mathbf{t}^i \varphi^i \quad (\text{A3.4})$$

Die Jakobi-Matrix ist definiert als:

$${}^m \mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^m x_{1,\xi} & {}^m x_{2,\xi} \\ {}^m x_{1,\eta} & {}^m x_{2,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.5})$$

bzw. in inverser Form:

$$[{}^m \mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{\det |{}^m \mathbf{J}|} \begin{bmatrix} {}^m x_{2,\eta} & -{}^m x_{2,\xi} \\ -{}^m x_{1,\eta} & {}^m x_{1,\xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.6})$$

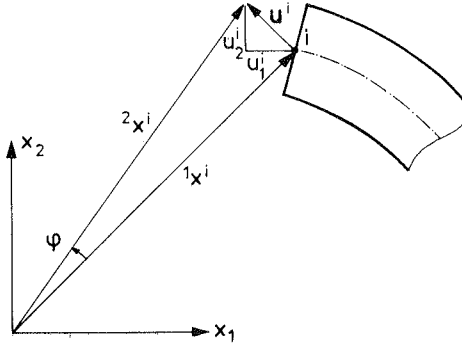
(Zur Vereinfachung der Notation wird in den weiteren Ausführungen das Summationssymbol unterdrückt.)

Die Ableitungen des Geometrie- sowie des inkrementellen Verschiebungsfeldes nach den natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  folgen als:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{x}_{,\xi} &= N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{x}^i + \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{n}^i \\ {}^m \mathbf{x}_{,\eta} &= \frac{h}{2} N^i {}^m \mathbf{n}^i \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\xi} &= N_{,\xi}^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{t}^i \varphi^i \\ \mathbf{u}_{,\eta} &= -\frac{h}{2} N^i {}^m \mathbf{t}^i \varphi^i \end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$





**Bild A3.2** Starrkörperrotation um den Koordinatenursprung

Für eine Starrkörperrotation nach Bild A3.2 mit

$$\begin{aligned} \varphi^i &= \varphi = \text{konstant} \\ u_1^i &= -x_2^i \varphi \end{aligned} \quad (\text{A3.9})$$

wird im folgenden exemplarisch die Komponente  $u_{1,1}$  der Verschiebungsableitung mit und ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit der Jakobi-Matrix von  $\eta$  dargestellt.

$$u_{1,1} = {}^m J_{11}^{-1} u_{1,\xi} + {}^m J_{12}^{-1} u_{1,\eta} \quad (\text{A3.10})$$

$$\begin{aligned} \det |{}^m \mathbf{J}| u_{1,1} &= \left( \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i \right) \cdot \left( N_{,\xi}^i u_1^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \sin^m \Phi^i \varphi^i \right) \\ &+ \left( N_{,\xi}^i {}^m x_2^i + \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \sin^m \Phi^i \right) \cdot \left( \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i \varphi^i \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.11})$$

Mit den Bedingungen der Starrkörperrotation nach (A3.9) folgt hieraus:

$$\det |{}^m \mathbf{J}| u_{1,1} = \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i (N_{,\xi}^i u_1^i + N_{,\xi}^i x_2^i \varphi) = 0$$

**Vorabintegration :  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(\eta=0)} = \mathbf{J}_0$**

Durch die Annahme einer über den Elementquerschnitt konstanten Jakobi-Matrix wird Gleichung (A3.11) ersetzt durch:

$$\begin{aligned} \det |{}^m \mathbf{J}_0| u_{1,1} &= \left( \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i \right) \cdot (N_{,\xi}^i u_1^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \sin^m \Phi^i \varphi^i) \\ &\quad + (N_{,\xi}^i x_2^i) \cdot \left( \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i \varphi^i \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

Infolge der Starrkörperrotation geht dieser Ausdruck über in:

$$\det |{}^m \mathbf{J}_0| u_{1,1} = \frac{h}{2} N^i \sin^m \Phi^i \left( \underbrace{N_{,\xi}^i u_1^i + N_{,\xi}^i x_2^i \varphi^i}_{\substack{\text{Membrananteil} \\ = 0}} - \underbrace{\eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \sin^m \Phi^i \varphi^i}_{\substack{\text{Biegeanteil} \\ \neq 0}} \right) \quad (\text{A3.13})$$

Die Verschiebungsableitung enthält einen von  $\eta$  abhängigen Biegeanteil, der nur im Sonderfall eines geraden Elements ( ${}^m \Phi^i = \text{konstant}$ ) verschwindet.

### A3.2 Interpolation der Normalenwinkel

Anstelle der Normalen- und der Tangentenvektoren werden in dieser alternativen Formulierung die Winkel interpoliert:

$${}^m \mathbf{n}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(N^i {}^m \Phi^i) \\ \sin(N^i {}^m \Phi^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^m \Phi \\ \sin {}^m \Phi \end{bmatrix} \quad (\text{A3.14})$$

$${}^m \mathbf{t}(\xi) = \begin{bmatrix} \sin(N^i {}^m \Phi^i) \\ -\cos(N^i {}^m \Phi^i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin {}^m \Phi \\ -\cos {}^m \Phi \end{bmatrix} \quad (\text{A3.15})$$

Geometriefeld:

$${}^m \mathbf{x} = N^i {}^m \mathbf{x}^i + \eta \frac{h}{2} {}^m \mathbf{n} \quad (\text{A3.16})$$

Verschiebungsfeld:

$${}^m \mathbf{u} = N^i {}^m \mathbf{u}^i + \eta \frac{h}{2} ({}^m \mathbf{n} - {}^0 \mathbf{n}) \quad (\text{A3.17})$$

Verschiebungsinkrement:

$$\mathbf{u} = N^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} {}^m \mathbf{t} N^i \varphi^i \quad (\text{A3.18})$$

Ableitungen nach  $\xi$  und  $\eta$ :

$${}^m \mathbf{x}_{,\xi} = N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{x}^i + \eta \frac{h}{2} {}^m \mathbf{t} N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i \quad (\text{A3.19})$$

$${}^m \mathbf{x}_{,\eta} = -\frac{h}{2} {}^m \mathbf{n} \quad (\text{A3.20})$$

$$\mathbf{u}_{,\xi} = N_{,\xi}^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} {}^m \mathbf{t} N_{,\xi}^i \varphi^i - \eta \frac{h}{2} {}^m \mathbf{n} N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i N^j \varphi^j \quad (\text{A3.21})$$

$$\mathbf{u}_{,\eta} = \frac{h}{2} {}^m \mathbf{t} N^i \varphi^i \quad (\text{A3.22})$$

Die Komponente  $u_{1,1}$  des Vektors der Verschiebungsableitungen folgt jetzt zu:

$$\begin{aligned} \det |{}^m \mathbf{J}| u_{1,1} &= \left( \frac{h}{2} \sin^m \Phi \right) \cdot \left( N_{,\xi}^i u_1^i - \eta \frac{h}{2} \sin^m \Phi N_{,\xi}^i \varphi^i - \right. \\ &\quad \left. \eta \frac{h}{2} \cos^m \Phi N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i N^j \varphi^j \right) \\ &\quad + \left( N_{,\xi}^i {}^m x_2^i + \eta \frac{h}{2} \cos^m \Phi N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i \right) \cdot \left( \frac{h}{2} \sin^m \Phi N^j \varphi^j \right) \\ &= \left( \frac{h}{2} \sin^m \Phi \right) \cdot \left( N_{,\xi}^i u_1^i - \eta \frac{h}{2} \sin^m \Phi N_{,\xi}^i \varphi^i \right) \\ &\quad + \left( N_{,\xi}^i {}^m x_2^i \right) \cdot \left( \frac{h}{2} \sin^m \Phi N^j \varphi^j \right) \quad (\text{A3.23}) \end{aligned}$$

mit der Elementkrümmung

$${}^m K = \frac{d {}^m \Phi}{d \xi} = N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i \quad (\text{A3.24})$$

sowie der Krümmungsänderung

$$\kappa = N_{,\xi}^i \varphi^i \quad (\text{A3.25})$$

Infolge der Starrkörperrotation nach (A3.9) geht (A3.23) über in:

$$\det |{}^m\mathbf{J}| u_{1,1} = \frac{h}{2} \sin^m \Phi \underbrace{\left( N_{,\xi}^i u_1^i + N_{,\xi}^i x_2^i \varphi \right)}_{\substack{\text{Membrananteil} \\ =0}} - \eta \frac{h}{2} \sin^m \Phi \underbrace{N_{,\xi}^i \varphi}_{\substack{\kappa \\ =0}} \quad (\text{A3.26})$$

In Gleichung (A3.23) ist festzustellen, daß sich die Terme mit der Elementkrümmung gegenseitig aufheben. Dieser Sachverhalt ist insbesondere bei Durchführung der Vorabintegration mit konstanter Jakobi-Matrix über die Dicke von Bedeutung und soll durch eine Transformation auf lokale Größen verdeutlicht werden.

Wird die Zustandslage  ${}^m Z$  als schubverzerrungsfrei angenommen, so fallen die Vektoren der Normalen und Tangente mit den lokalen kartesischen Koordinaten zusammen und können zur Transformation auf lokale Größen herangezogen werden. Die lokalen inkrementellen Verschiebungskomponenten ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned} u'_1 &= {}^m \mathbf{t}^T \mathbf{u} \\ u'_2 &= {}^m \mathbf{n}^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{A3.27})$$

Durch dieselbe Transformation erhält man weiterhin aus den Gleichungen (A3.19) bis (A3.22) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} u'_{1,\xi} &= {}^m \mathbf{t}^T \mathbf{u}_{,\xi} = {}^m \mathbf{t}^T N_{,\xi}^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \varphi^i \\ u'_{2,\xi} &= {}^m \mathbf{n}^T \mathbf{u}_{,\xi} = {}^m \mathbf{n}^T N_{,\xi}^i \mathbf{u}^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i N^j \varphi^j \\ u'_{1,\eta} &= {}^m \mathbf{t}^T \mathbf{u}_{,\eta} = -\frac{h}{2} N^i \varphi^i \\ u'_{2,\eta} &= {}^m \mathbf{n}^T \mathbf{u}_{,\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.28})$$

und

$$\begin{aligned} x'_{1,\xi} &= {}^m \mathbf{t}^T N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{x}^i - \eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i {}^m \Phi^i \\ x'_{2,\xi} &= {}^m \mathbf{n}^T N_{,\xi}^i {}^m \mathbf{x}^i \\ x'_{1,\eta} &= 0 \\ x'_{2,\eta} &= \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (\text{A3.29})$$

Die Terme mit der Elementkrümmung gehen nur in die Verschiebungsableitungen

$$\det |{}^m\mathbf{J}| u'_{1,2} = ({}^m\mathbf{t}^T N_{,\xi}^i \, {}^m\mathbf{x}^i - \underbrace{\eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \, {}^m\Phi^i}_{\text{Elementkrümmung}}) \cdot \underbrace{\left(-\frac{h}{2} N^j \varphi^j\right)}_{\text{Verschiebung}} \quad (\text{A3.30})$$

$$\det |{}^m\mathbf{J}| u'_{2,1} = \left(\frac{h}{2}\right) \cdot ({}^m\mathbf{n}^T N_{,\xi}^i \, {}^m\mathbf{u}^i - \underbrace{\eta \frac{h}{2} N_{,\xi}^i \, {}^m\Phi^i}_{\text{Elementkrümmung}} N^j \varphi^j) \quad (\text{A3.31})$$

ein (unterstrichene Terme), leisten jedoch wegen ihres unterschiedlichen Vorzeichens keinen Beitrag zur Schubverzerrung. Weiterhin erfüllt der über die Elementdicke konstante Verlauf der Schubverzerrungen auch die kinematische Annahme des Geradebleibens der Normalen.

Wird die Jakobi-Matrix über die Elementdicke als konstant angenommen, so entfällt der von  $\eta$  abhängige Term aus Gleichung (A3.30), und die Verschiebungsableitung  $u'_{1,2}$  nimmt über die Elementdicke einen konstanten Wert an. Um auch jetzt der Forderung eines konstanten Verlaufs der Schubverzerrungen über die Elementdicke zu genügen, ist in  $u'_{2,1}$  der von  $\eta$  abhängige Anteil zu eliminieren, wodurch die Darstellung verzerrungsfreier Starrkörperrotationen auch für gekrümmte Elemente gewährleistet ist.

### Beispiel: 90° Kreisbogen

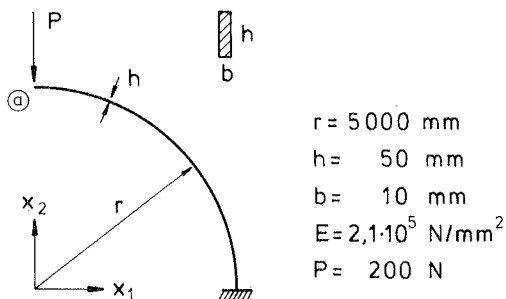


Bild A3.3 Kreisbogen unter Vertikallast

Der Kreisbogen nach Bild A3.3 wird mit vier quadratischen Balkenelementen idealisiert, die Gauß-Integration erfolgt mit  $2 \times 2 \times 2$  Stützstellen. In Tabelle A3.1 sind die Ergebnisse linearer Berechnungen mit Interpolation der Normalenwinkel den Ergebnissen mit Interpolation der Normalenvektoren gegenübergestellt. Die Lastabtragung erfolgt in diesem Beispiel fast ausschließlich über Biegebeanspruchung, und der Defekt bei einer analytischen Vorabintegration über die Dicke mit Interpolation der Normalenvektoren macht sich mit 30% Abweichung der Verformungen am Lastangriffspunkt deutlich bemerkbar.

Dickenintegration: Jakobi-Matrix	Inter- polation	u [mm]	v [mm]	$\varphi$ [rad]
$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\eta)$	Normale	-571.2827	-897.1504	-0.2285197
	Winkel	-571.2115	-897.3425	-0.2285315
$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\eta=0) = \mathbf{J}_0$	Normale	-405.5309	-636.8644	-0.1622197
	Winkel	-571.2117	-897.3427	-0.2285315
Analytische Lösung		-571.4	-897.6	-0.2286

Tabelle A3.1 Interpolation der Normalenwinkel und der Normalenvektoren

## A4 Nichtlineare Dehnungen bei Vorabintegration

(Seite 47)

Bei Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität werden bei der *U.L.-Formulierung* die Dehnungen durch den *Euler-Almansi Verzerrungstensor* beschrieben, der hier in den Verschiebungsableitungen ausgedrückt wird:

$${}^m \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} [{}^m u_{j,k} + {}^m u_{k,j} - \frac{m}{m} u_{i,j} \cdot \frac{m}{m} u_{i,k}] \quad (\text{A4.1})$$

mit einem linearen Verschiebungsverlauf über den Elementquerschnitt (*Bernoulli*)

$$u_i(\xi, \eta, \zeta) = u_i^0 + \eta \cdot u_i^\eta + \zeta \cdot u_i^\zeta \quad (\text{A4.2})$$

$$u_i^0 = u_i(\xi, 0, 0)$$

$$u_i^\eta = u_i^\eta(\xi) = u_i(\xi, 1, 0) - u_i^0$$

$$u_i^\zeta = u_i^\zeta(\xi) = u_i(\xi, 0, 1) - u_i^0$$

Die Verschiebungsableitungen sind gegeben durch die Gleichung

$${}^m u_{i,j} = \frac{\partial {}^m u_i}{\partial {}^m x_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} {}^m u_i \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial {}^m x_j} \quad (\text{A4.3})$$

mit

$$\alpha^T = [\xi \ \eta \ \zeta]$$

$$x_j(\xi, \eta, \zeta) = x_j^0 + \underbrace{\eta \cdot x_j^\eta + \zeta \cdot x_j^\zeta}_{\text{vernachlässigt}}$$

$$x_j^0 = x_j(\xi, 0, 0)$$

$$x_j^\eta = x_j^\eta(\xi) = x_j(\xi, 1, 0) - x_j^0$$

$$x_j^\zeta = x_j^\zeta(\xi) = x_j(\xi, 0, 1) - x_j^0$$

Die hierbei angedeutete Vernachlässigung der von den Koordinaten  $\eta$  und  $\zeta$  abhängigen Anteile des Geometrievektors  $\mathbf{x}$  führt auf einen linearen Verlauf der Verschiebungsableitungen über den Elementquerschnitt.

Im weiteren werden diese Verschiebungsableitungen in drei Komponenten zerlegt:

$$m u_{i,j} = m u_{i,j}^0 + \eta \frac{m u_{i,j}^\eta}{m u_{i,j}} + \zeta \frac{m u_{i,j}^\zeta}{m u_{i,j}} \quad (\text{A4.4})$$

$\frac{m u_{i,j}^0}{m u_{i,j}}$  ... Verschiebungsableitung der Mittellinie

$\frac{m u_{i,j}^\eta}{m u_{i,j}}$  ... Verschiebungsableitung der Randfaser  $\eta = 1$  (A4.5)

$\frac{m u_{i,j}^\zeta}{m u_{i,j}}$  ... Verschiebungsableitung der Randfaser  $\zeta = 1$

Die Dehnungen nach Gleichung (A4.1) ergeben sich somit zu:

$$\begin{aligned} \frac{m \varepsilon_{jk}}{n \varepsilon_{jk}} = & \frac{1}{2} (m u_{j,k}^0 + m u_{k,j}^0 - m u_{i,j}^0 \cdot m u_{i,k}^0) \\ & + \frac{1}{2} \eta (m u_{j,k}^\eta + m u_{k,j}^\eta - m u_{i,j}^0 \cdot m u_{i,k}^\eta - m u_{i,j}^\eta \cdot m u_{i,k}^0) \\ & + \frac{1}{2} \zeta (m u_{j,k}^\zeta + m u_{k,j}^\zeta - m u_{i,j}^0 \cdot m u_{i,k}^\zeta - m u_{i,j}^\zeta \cdot m u_{i,k}^0) \\ & - \frac{1}{2} \eta \zeta (m u_{i,j}^\eta \cdot m u_{i,k}^\zeta + m u_{i,j}^\zeta \cdot m u_{i,k}^\eta) \\ & - \frac{1}{2} \eta^2 (m u_{i,j}^\eta \cdot m u_{i,k}^\eta) \\ & - \frac{1}{2} \zeta^2 (m u_{i,j}^\zeta \cdot m u_{i,k}^\zeta) \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

Die Dickenkoordinaten  $\eta$  und  $\zeta$  gehen quadratisch in den Dehnungsverlauf nach Gleichung (A4.6) ein. Als Näherung wird ein linearer Verlauf zwischen den entsprechenden Randwerten angenommen.



## A5 Kinematische Operatormatrix zur analytischen Vorabintegration

(Seite 44)

$$\mathbf{B}_k^i = \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}_k^i$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1^i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline {}_nN_{,1}^i & 0 & 0 \\ \hline {}_nN_{,2}^i & 0 & 0 \\ \hline {}_nN_{,3}^i & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}_nN_{,1}^i & 0 \\ \hline 0 & {}_nN_{,2}^i & 0 \\ \hline 0 & {}_nN_{,3}^i & 0 \\ \hline 0 & 0 & {}_nN_{,1}^i \\ \hline 0 & 0 & {}_nN_{,2}^i \\ \hline 0 & 0 & {}_nN_{,3}^i \\ \hline \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_2^i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & {}_n\hat{N}_{,1}^i \cdot {}^mF'_{12} & {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{13} \\ \hline 0 & {}_n\hat{N}_{,2}^i \cdot {}^mF'_{12} & {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{13} \\ \hline 0 & {}_n\hat{N}_{,3}^i \cdot {}^mF'_{12} & {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{13} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,1}^i \cdot {}^mF'_{21} + {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{21} & {}_n\hat{N}_{,1}^i \cdot {}^mF'_{22} + {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{22} & {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{23} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,2}^i \cdot {}^mF'_{21} + {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{21} & {}_n\hat{N}_{,2}^i \cdot {}^mF'_{22} + {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{22} & {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{23} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,3}^i \cdot {}^mF'_{21} + {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{21} & {}_n\hat{N}_{,3}^i \cdot {}^mF'_{22} + {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{22} & {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{23} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,1}^i \cdot {}^mF'_{31} + {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{31} & {}_n\hat{N}_{,1}^i \cdot {}^mF'_{32} + {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{32} & {}_n\check{N}_{,1}^i \cdot {}^mG'_{33} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,2}^i \cdot {}^mF'_{31} + {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{31} & {}_n\hat{N}_{,2}^i \cdot {}^mF'_{32} + {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{32} & {}_n\check{N}_{,2}^i \cdot {}^mG'_{33} \\ \hline {}_n\hat{N}_{,3}^i \cdot {}^mF'_{31} + {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{31} & {}_n\hat{N}_{,3}^i \cdot {}^mF'_{32} + {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{32} & {}_n\check{N}_{,3}^i \cdot {}^mG'_{33} \\ \hline \end{array}$$

$$\hat{B}_3^i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m F'_{12} & 0 \\ \hline 0 & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m F'_{12} & 0 \\ \hline 0 & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m F'_{12} & 0 \\ \hline {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m F'_{21} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m F'_{22} & 0 \\ \hline {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m F'_{21} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m F'_{22} & 0 \\ \hline {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m F'_{21} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m F'_{22} & 0 \\ \hline {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m F'_{31} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m F'_{32} & 0 \\ \hline {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m F'_{31} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m F'_{32} & 0 \\ \hline {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m F'_{31} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m F'_{32} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\hat{B}_4^i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{13} \\ \hline 0 & 0 & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{13} \\ \hline 0 & 0 & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{13} \\ \hline {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{21} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{22} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{23} \\ \hline {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{21} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{22} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{23} \\ \hline {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{21} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{22} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{23} \\ \hline {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{31} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{32} & {}_n N_{,1}^i \cdot {}^m G'_{33} \\ \hline {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{31} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{32} & {}_n N_{,2}^i \cdot {}^m G'_{33} \\ \hline {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{31} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{32} & {}_n N_{,3}^i \cdot {}^m G'_{33} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} {}_n N_{,j}^i &= {}_n J_{j1}^{-1} \cdot N_{,j}^i \\ {}_n \hat{N}_{,j}^i &= {}_n J_{j2}^{-1} \cdot N_{,j}^i \\ {}_n \hat{\hat{N}}_{,j}^i &= {}_n J_{j3}^{-1} \cdot N_{,j}^i \end{aligned}$$

Erweiterungen für Verdrillungsfreiheitsgrade (Seite 53)

$\hat{\mathbf{B}}_2^i$	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0

$\hat{\mathbf{B}}_3^i$	0
	$n\hat{N}_{,2}^i \cdot \frac{h_\eta}{2}$
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0

$\hat{\mathbf{B}}_4^i$	0
	0
	$n\hat{N}_{,3}^i \cdot \frac{h_\zeta}{2}$
	0
	0
	0
	0
	0
	0

$\hat{\mathbf{B}}_5^i =$	0	0	0	$n\hat{N}_{,1}^i$
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-  
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei  
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten – Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Platten-  
theorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizehler Träger unter Be-  
rücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller,  
J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten – Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-  
zelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahl-  
betonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-  
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.

- 80-2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrá:  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.