

**BEITRAG ZUM TRAGVERHALTEN AUSGEWÄHLTER  
PLATTENTRAGWERKE UNTER BERÜCKSICHTIGUNG  
DER REISSNERSCHEN THEORIE UND DER METHODE  
DER GEMISCHTEN FINITEN ELEMENTE**

von  
**RUDOLF W. REMBOLD**



**Bericht Nr. 80-2**  
aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Direktor: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

**Stuttgart 1980**

Dieser Bericht wurde unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation vom Autor dem Fachbereich 2 "Bauingenieur- und Vermessungswesen" der Universität Stuttgart vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 9. 12. 80

Hauptberichter: Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter: Professor Dr. -Ing. G. Eisenbiegler

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

## Zusammenfassung

Die klassische Plattentheorie von Kirchhoff führt zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung für die Plattendurchbiegung, mit der nur zwei von drei Randbedingungen erfüllbar sind. Diesen Mangel vermeidet die Plattentheorie von Reissner. Die hierbei entstehenden Differentialgleichungen vierter und zweiter Ordnung werden zusammengestellt. Durch Verwendung des Funktionals von Hellinger - Reissner gelingt es, gemischte finite Elemente für alle auftretenden Freiwerte nach der Reissnerschen Theorie anzugeben. Elemente mit linearen bzw. quadratischen Ansätzen für die Verschiebungs- und Kraftgrößen werden entwickelt. Die Auswirkungen der gemischten Ansätze auf die Gleichungsauflösung und den Rechenablauf insgesamt werden diskutiert.

Auf ausgewählte Plattentragwerke wird das beschriebene Rechenmodell angewendet und den Ergebnissen nach Kirchhoff gegenübergestellt. Dabei sind aufgrund der bei Reissner genauer beschreibbaren Randbedingungen hauptsächlich in den Randzonen zum Teil erhebliche Unterschiede zur klassischen Lösung festzustellen, besonders bei Querkräften und Drillmomenten. Neben den verschiedenen Lagerungsarten (frei drehbar, eingespannt und frei) werden zwischengestützte Platten und die über Eck auskragende Platte unter konstanter Flächenlast untersucht. Außerdem wird die Wirkung von randnahen Einzellasten betrachtet.

## Summary

The classical plate theory leads to a differential equation of the fourth order for  $w$  with which only two of the three boundary conditions can be satisfied. This is avoided by Reissner's plate theory.

By using the Hellinger-Reissner functional it is possible to give mixed finite elements for all occurring variables according to Reissner's theory. Elements are developed with linear and quadratic polynomials for displacements and forces.

Special plates are analysed and compared with the classical solution. As a result there are partly considerable differences from the classical solution mainly near the boundaries especially with lateral forces and twisting moments. Plates with various boundary conditions, intermediately supported plates and a plate cantilevering out over a corner are analysed under uniform loading. In addition to this single loads near the boundaries are examined.

## Inhaltsverzeichnis

---

### Schrifttumsverzeichnis

#### Bezeichnungen

1. Einleitung
2. Gleichungen der Reissnerschen Plattentheorie
  - 2.1 Die Grundgleichungen der Platte
  - 2.2 Das Prinzip von Hellinger - Reissner
3. Das Reissner-Funktional für bereichsweise Ansätze
  - 3.1 Hellinger - Reissner für bereichsweise Ansätze
  - 3.2 Vereinfachende Annahmen beim Reissner-Funktional
  - 3.3 Formulierung in Matrixschreibweise
4. Finite Elemente mit gemischten Ansätzen
  - 4.1 Elementmatrizen
  - 4.2 Randbedingungen
  - 4.3 Genauigkeitsvergleich
  - 4.4 Vergleich mit anderen Elementmethoden
5. Auswirkungen der Reissnerschen Theorie auf ausgewählte Plattentragwerke
  - 5.1 Der frei drehbare Rand
  - 5.2 Der eingespannte Rand
  - 5.3 Der freie Rand
  - 5.4 Platten mit Zwischenunterstützung
  - 5.5 Platte mit Einzelstützung
  - 5.6 Über Eck auskragende Platte
  - 5.7 Randnahe Lasten
6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Schrifttumsverzeichnis

---

- [1] Reissner, E. On the Theory of Bending of Elastic Plates.  
J. Math. Phys. 23 (1944) S. 184/94.
- [2] Reissner, E. On a Variational Theorem in Elasticity.  
J. Math. Phys. 29 (1950) S. 90/95.
- [3] Kromm, A. Verallgemeinerte Theorie der Platten-  
statik.  
Ingenieur-Archiv 21 (1953) S. 266/86.
- [4] Kromm, A. Über die Randquerkräfte bei gestützten  
Platten.  
ZAMM 35 (1955) S. 231/41.
- [5] Schäfer, M. Über eine Verfeinerung der klassischen  
Theorie dünner schwachgebogener Platten.  
ZAMM 32 (1952) S. 161/71
- [6] Fresht, S. An Extended Reissner Thin Plate Theory.  
Israel J. Techn. 2 (1964) S. 312/17.
- [7] Bolle, L. Contribution au problème linéaire de  
flexion d'une plaque élastique.  
Bull. Techn. Suisse Romande 73 (1947)  
S. 281/85 und S. 293/98.
- [8] Hellinger, E. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik  
der Kontinua.  
Enzyklopädie der Math. Wissenschaften  
4 (Teil 4) (1914) S. 601/94.
- [9] Herrmann, L. A Bending Analysis of Plates.  
Proc. Conf. Matrix Methods in Struct.  
Mechanics.  
Wright-Patterson-Air-Force-Base (1965)  
S. 557/604.
- [10] Herrmann, L. Finite Element Bending Analysis for Plates.  
J. Eng. Mech. Div. ASCE 93 (1967) S. 13/26.

- [11] Turner, M., Clough, R., Martin, H., Topp, L. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aeronautic Science 23 (1956) S. 805/25.
- [12] Reissner, E. On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformation. J. Math. Phys. 32 (1953) S. 129.
- [13] Prager, W. Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements. Int. J. Solids and Structures 4 (1968) S. 837/44.
- [14] Washizu, K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford (1968).
- [15] Bufler, H. Die verallgemeinerten Variationsgleichungen der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Schnittkräfte und Verschiebungsgrößen. Ingenieur-Archiv 39 (1970) S. 330/40.
- [16] Wunderlich, W. Grundlagen und Anwendung eines verallgemeinerten Variationsverfahrens. Beitrag in "Finite Elemente in der Statik" K. Buck, D. Scharpf, E. Stein und W. Wunderlich Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin (1973) S. 126/44.
- [17] Wunderlich, W. Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. Ingenieur-Archiv 39 (1970) S. 230/47.

- [18] Becker, M. Beitrag zur Schalenberechnung nach einem verallgemeinerten Variationsprinzip und nach der überbestimmten Kollokation. Diss. Universität Stuttgart (1972).
- [19] Riehle, W. Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Elemente. Diss. Universität Stuttgart (1974).
- [20] Salerno, V.,  
Goldberg, M. Effect of Shear Deformation on the Bending of Rectangular Plates. J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 27 (1960) S. 54/58.
- [21] Girkmann, K. Flächentragwerke. 6. Aufl., Springer Verlag, Wien (1963).
- [22] Deshmukh, R.,  
Archer, R. Numerical Solution of Moderately Thick Plates. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE (1974) S. 903/17.
- [23] Hofbauer, E. Zur Theorie und Anwendung der erweiterten Plattenstatik. Bautechnik 2 (1979) 56. Jg. S. 66/69.
- [24] Carley, T.,  
Langhaar, H. Transverse Shearing Stress in Rectangular Plates. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE (1968) S. 137/51.
- [25] Walthelm, U. Lösungen der Reissnerschen Plattentheorie für isotrope rechteckige Platten mit Verwendung von reellen Eigenwerten, sowie Vergleiche mit der klassischen Plattentheorie und dem Balken. Diss. TU München (1978).

- [26] Visser, W. A Refined Mixed Type Plate Bending Element.  
AIAA J. 7 (1969) S. 1801/03.
- [27] Prato, C. Shell Finite Element Method via Reissner's Principle.  
Int. J. Solids Struct. 5 (1969) S. 1119/33.
- [28] Dunham, R., Pister, K. A Finite Element Application of the Hellinger-Reissner Variational Theorem.  
Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson-Air-Force-Base (1968).
- [29] Harbord, R. Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen - Gemischte finite Elemente -  
Bericht 72-7 Institut für Statik, TU Braunschweig (1973).
- [30] Lynn, P., Quillon, B. Triangular Thick Plate Bending Elements.  
Proc. 1st Struct. Mech. in Reactor Tech. Conf., Berlin (1971) paper M 6/5.
- [31] Greimann, L., Lynn, P. Finite Element Analysis of Plate Bending with Transverse Shear Deformation.  
Nucl. Eng. and Design 14 (1970) S. 223/30.
- [32] Cook, R. Eigenvalue Problems with a Mixed Plate Element.  
AIAA J. 7 (1969).
- [33] Pryor, C., Barker, R., Frederick, D. Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates.  
J. Eng. Mech. Div. ASCE 96 (1970) S. 967/83.
- [34] Chatterjee, A., Setlur, A. A Mixed Finite Element Formulation for Plate Problems.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 4 (1972) S. 67/84.

- [35] Giencke, E.                    A Simple Mixed Method for Plate and Shell Problems.  
Proc. 2nd Struc. Mech. in Reactor Tech. Conf., Berlin (1973) paper M 2/5.
- [36] Harbord, R.                    Berechnung dünner Schalentragwerke mit finiten Elementen  
Vergleichende Untersuchung unterschiedlicher Diskretisierungsvarianten.  
Bericht 77-21 Institut für Statik, TU Braunschweig (1977).
- [37] Waldner, U.                    Beiträge zur Berechnung von Flächentragwerken nach der Methode der finiten Elemente.  
Bericht 77/11.77 Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich,  
Birkhäuser Verlag, Basel.
- [38] Tahiani, C.                    Analysis of Geometrically Nonlinear Thin Shells of Mixed Elements.  
D. Sc. Thesis, Dept. Civil Eng., Laval University Quebec (1971).
- [39] Bron, J.,  
      Dhatt, G.                    Mixed Elements for Bending of Plates.  
Rep. Civil Eng., Laval University Quebec (1972).
- [40] Bron, J.,  
      Dhatt, G.                    Mixed Quadrilateral Elements for Bending.  
AIAA J. 10 (1972) S. 1359/61.
- [41] Kikucki, G.,  
      Ando, Y.                    Convergence of a Mixed Finite Element Scheme for Plate Bending.  
Nucl. Eng. and Design 24 (1973) S. 357/73.
- [42] Johnson, C.                    On the Convergence of a Mixed Finite Element for Plate Bending Problems.  
Num. Math. 21 (1973) S. 43/62.

- [43] Müller, G. Beitrag zur numerischen Behandlung der Kirchhoffschen und der Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode. Diss. Universität Stuttgart (1975).
- [44] Czerny, F. Platten. Betonkalender, W. Ernst & Sohn, Berlin (1976) S. 305/81.
- [45] Zöphel, J. Plattenstreifen mit unterbrochener Mittelstützung unter Gleichlast. Bautechnik 49 (1972) S. 169/74.
- [46] Stiglat, K.,  
Wipfel, H. Massive Platten. Betonkalender, W. Ernst & Sohn, Berlin (1977) S. 311/422.
- [47] Riehle, W.,  
Stein, E. Die Berechnung von Zustands- und Einflußflächen für die Schnittgrößen beliebiger Platten mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Fortschritts-Berichte VDI-Z Reihe 4 Nr. 14, Düsseldorf (1969).
- [48] Müller, G.,  
Eisenbiegler, G.  
u. a. Platten (Theorie, Berechnung, Bemessung). Bericht 76-1 Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1976).
- [49] Ludwig, W. Berechnung der um eine Ecke laufenden Kragplatte nach dem Differenzenverfahren. Beton- und Stahlbetonbau (1971) S. 155/57.

Bezeichnungen

---

$E$	$[ \text{kN/m}^2 ]$	Elastizitätsmodul
$\mu$	$[ 1 ]$	Querkontraktionszahl
$h$	$[ \text{m} ]$	Plattendicke
$K$	$[ \text{kNm} ]$	Plattensteifigkeit; $K = E h^3 / (12 (1 - \mu^2))$
$\hat{p}$	$[ \text{kN/m}^2 ]$	eingeprägte Oberflächenlast
$x_i$	$[ \text{m} ]$	Kartesische Koordinaten
$i, j$		Zeiger, der die Werte $i = 1, 2$ und $3$ annehmen kann. Bei doppelt vorkommenden Zeigern soll nach der Summenkonvention über $i$ summiert werden.
$\alpha, \beta$		Zeiger, der die Werte $\alpha = 1, 2$ annehmen kann.
$n, t$		Zeiger, die ein rechtwinkliges Koordinatensystem normal und tangential zu einem Rand definieren.
$\delta_{ij}$		$\begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$
$\epsilon_{ij}$		Verzerrungstensor
$w$	$[ \text{m} ]$	Plattendurchbiegung in $x_3$ -Richtung
$\beta_\alpha$	$[ 1 ]$	mittlere Neigung der ursprünglichen Mittelflächennormalen
$\kappa_{\alpha\beta}$	$[ 1/\text{m}^2 ]$	Krümmung
$\hat{\varphi}_n$	$[ 1/\text{m} ]$	mittlere Randverdrehung normal zum Rand
$\hat{\varphi}_t$	$[ 1/\text{m} ]$	mittlere Randverdrehung in Randrichtung
$\sigma_{ij}$		Spannungstensor
$m_{\alpha\beta}$	$[ \text{kNm/m} ]$	Biegemoment
$q_\alpha$	$[ \text{kN/m} ]$	Querkraft
$\hat{M}$	$[ \text{kNm/m} ]$	eingepprägtes Moment
$\hat{M}_{nt}$	$[ \text{kNm/m} ]$	eingepprägtes Drillmoment
$\hat{Q}$	$[ \text{kN/m} ]$	eingepprägte Querkraft
$p$		konstante Vollast

$\Delta$	Laplace-Operator $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$
$\Pi^{(i)}$	Potential der inneren Kräfte
$\Pi^{(a)}$	Potential der äußeren Kräfte
$\tilde{\Pi}^{(i)}$	Komplementärpotential der inneren Kräfte
$\tilde{\Pi}^{(a)}$	Komplementärpotential der äußeren Kräfte
$\mathcal{C}$	Matrix
$\mathcal{E}$	Vektor

Lagerungssymbole:

	frei verdrehbar gelagerter Rand
	eingespannter Rand
	freier Rand
	Symmetrierand
	Kraft
	Moment als Rechtsschraube



## 1. Einleitung

---

Plattentragwerke als Sonderform der Flächentragwerke lassen sich, ausgehend von der klassischen Plattentheorie nach Kirchhoff, durch eine Vielzahl numerischer Lösungsmethoden berechnen. Die klassische Plattentheorie führt zu einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung für die Durchbiegung  $w$ . Damit sind für jeden Rand nur zwei Randbedingungen vorschreibbar. Zur Befriedigung aller drei zu fordernder Randbedingungen werden vereinfachende Annahmen getroffen, die nicht immer befriedigende Aussagen erlauben. Da die klassische Theorie auch nur Aussagen für dünne Platten liefert, wurden verschärfte Theorien entwickelt. Hier ist vor allen Dingen die Theorie von Reissner [1] zu nennen. Durch Fallenlassen der Bernoulli-Hypothese II, nach der die Normale nach der Verformung senkrecht auf der Mittelfläche steht, kann die Querschubverzerrung eingeführt und damit die Querkraftverformung im Mittel besser erfaßt werden. Nun ist die Erfüllung aller Kräfte- und Randbedingungen möglich. Da die Querspannung berücksichtigt werden kann, ist diese Theorie auch auf mäßig dicke Platten anwendbar. Daneben haben Kromm [3], Fersht [6] und eine Reihe weiterer Autoren [5], [7] an verbesserten Berechnungsansätzen gearbeitet.

Zur Berechnung von Flächentragwerken sind Näherungsmethoden entstanden, die sich nach den Ausgangspunkten für verschiedene Lösungsstrategien in Gruppen zusammenfassen lassen. Die partielle Differentialgleichung, deren Randbedingungen zu befriedigen sind, wird meist in ein System von algebraischen Gleichungen umgewandelt. Die Variationsrechnung führt zu einer Extremalforderung mit Nebenbedingungen an die wählbaren Lösungsansätze. Mechanische Modelle erlauben die Diskretisierung in einfach beschreibbare Teilbereiche oder Elemente.

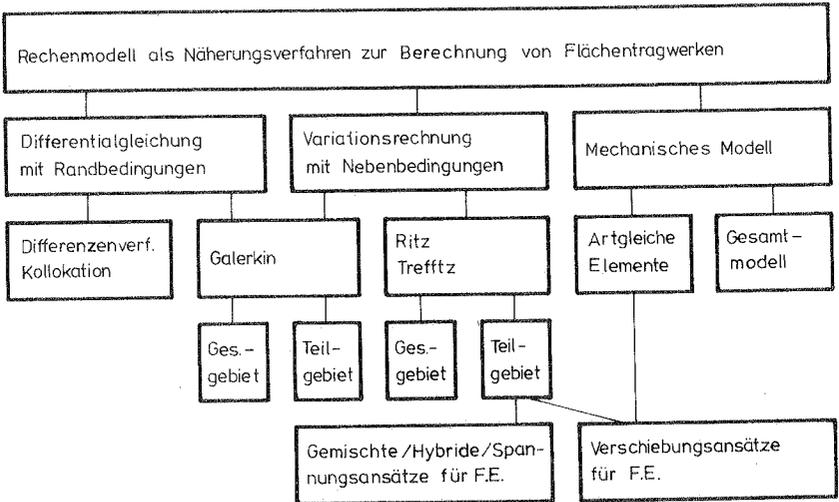


Bild 1.1 Übersicht über die Näherungsverfahren für Flächentragwerke

Unter den vielen Näherungsverfahren hat sich die Finite-Element-Methode als Untergruppe der Ritzschen Methode mit einfachen bereichsweisen Ansätzen durchgesetzt. Dies ist besonders auf die allgemeine Beschreibbarkeit unterschiedlicher Geometrien zurückzuführen (siehe Bild 1.1).

Mit der Einführung einfacher Verschiebungsansätze endlicher Teilbereiche als mechanisches Modell durch Turner u. a. [11] zur Beschreibung des Verformungsverhaltens begann die Entwicklung der Finite-Element-Methode als Verschiebungsmethode. Durch die Erweiterung des Prinzips vom Min. der pot. Energie in Form der Ritzschen Methode auf bereichsweise Ansätze konnten rein mathematische Modelle in die Finite-Element-Methode eingeführt werden. Durch Verallgemeinerung des Prinzips durch Reissner [12], Herrmann [9], Washizu [14], Prager [13] und Bufler [15] wurde es möglich, außer Verschiebungsansätzen auch Ansätze für die Spannungen als unabhängige Größen in die Variationsrechnung einzuführen. Je nach Wahl der unabhängigen

Freiwerte können hybride Elemente (Verschiebungsansätze im Feld und Spannungsansätze am Rand), gemischte Elemente (Verschiebungs- und Spannungsansätze im Feld) oder Spannungsansätze (Spannungsansätze im Feld) entwickelt werden. Hier sind die Arbeiten von Herrmann [10], Visser [25] und Wunderlich [16] zu nennen.

In dieser Arbeit werden die Ausgangsgleichungen der Reissnerschen Plattentheorie zusammengestellt; auf den Unterschied zu Kirchhoff wird hingewiesen.

Ausgehend vom Prinzip Hellinger-Reissner wird ein voll verträgliches gemischtes finites Element mit Ansätzen für die Verschiebungsgrößen  $w$ ,  $\beta_x$  und  $\beta_y$  und die Schnittgrößen  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $m_x$ ,  $m_{xy}$  und  $m_y$  angegeben. Neben linearen werden auch quadratische Polynome angewendet.

Mit diesem Lösungsalgorithmus werden ausgewählte Plattentragwerke behandelt. Dabei soll das Tragverhalten dieser Platten den Ergebnissen der Kirchhoffschen Theorie gegenübergestellt werden. Es sind besonders solche Platten interessant, deren Randbedingungen nach der klassischen Lösung unbefriedigend beschrieben werden. Außerdem wird auf das Problem der Singularität der Biegemomente an Unterstützungsrändern eingegangen.



## 2. Gleichungen der Reissnerschen Plattentheorie

---

In den folgenden Abschnitten soll bei der Herleitung der Reissnerschen Theorie die Summenkonvention gelten, nach der über gleiche Zeiger  $i, j$ , die Werte 1 bis 3 und die Zeiger  $\alpha, \beta$ , die die Werte 1 oder 2 annehmen können, zu summieren ist. Außerdem soll die Ableitung verkürzt geschrieben werden, z. B.  $\partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$ . Bei den Randgrößen auftretende Richtungen werden mit  $n_i = \cos(n, x_i)$  als Komponenten in Normalenrichtung definiert.

### 2.1 Die Grundgleichungen der Platte

---

In einer Zusammenfassung werden die Ausgangsgleichungen der Reissnerschen Plattentheorie hergeleitet. Diese verschärfte Theorie wurde von Reissner in [1] und [2] angegeben und von Girkmann [21] und anderen [5], [25] übersichtlich dargestellt. Gegenüber der klassischen Theorie für Plattentragwerke nach Kirchhoff werden hier in den Annahmen folgende Erweiterungen zugelassen:

Bei den Verformungen sind neben der Durchbiegung  $w$  die Verdrehungen der Plattennormalen  $\beta_\alpha$  zugelassen. Damit wird die Querschubsteifigkeit der Platte berücksichtigt.

Diesen Verschiebungsgrößen stehen Spannungen gegenüber, die neben der  $x$ - und  $y$ -Richtung ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yy}$ ) auch die  $z$ -Richtung ( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  und  $\sigma_{zz}$ ) erfassen. Über die Verläufe der Spannungen in  $z$ -Richtung müssen Annahmen getroffen werden.

Ausgehend von den erweiterten Annahmen für die kinematischen Zusammenhänge und den vorgegebenen Spannungsverläufen für die statischen Bedingungen wird ein lineares Werkstoffgesetz eingeführt. Damit können die Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Verschiebungsgrößen und der Schnittkräfte aufgestellt werden.

Geometrie:

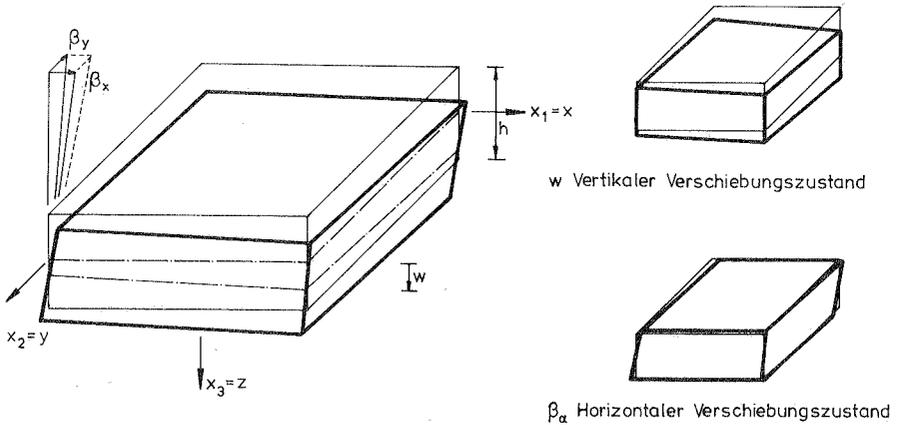


Bild 2.1 Verschiebungsgrößen

Mit den Verschiebungsgrößen der Plattenmittelfläche

$$u_\alpha(x_1, x_2, z) = z / \beta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$w(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2)$$

lauten die kinematischen Feldgleichungen

$$\kappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_{\alpha 3} - (w_{,\alpha} + \beta_\alpha) = 0$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned}w - \hat{w} &= 0 \\ \beta_x - \hat{\varphi}_x &= 0 \\ \beta_t - \hat{\varphi}_t &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Die Verschiebungsgrößen  $w$  und  $\beta_\alpha$  stellen mittlere Größen am betrachteten Elementrand dar. Werden die Größen  $\beta_\alpha$  aber als über die Querschnittshöhe linear verteilt vorgegeben (die Normale bleibt gerade), so ergeben sich die hier beschriebenen Ergebnisse.

Statik:

Die Schnittgrößen der Platte werden durch Integration der Spannungen über die Plattendicke ermittelt.

$$\begin{aligned}m_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} z \, dz \\ q_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} \, dz\end{aligned}\tag{2.4}$$

Um das Gleichgewicht am Elementrand zu erfüllen, müssen die Beziehungen für das Gleichgewicht gelten zwischen den Plattenschnittgrößen und der Belastung:

$$q_x - m_{\beta\alpha,\beta} = 0\tag{2.5}$$

$$q_{x,x} + \hat{p} = 0\tag{2.6}$$

Die Randbedingungen sind bei vorgegebenen Randkräften:

$$\begin{aligned}m_{xx} - \hat{M}_{xx} &= 0 \\ m_{xt} - \hat{M}_{xt} &= 0 \\ q_x - \hat{Q} &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

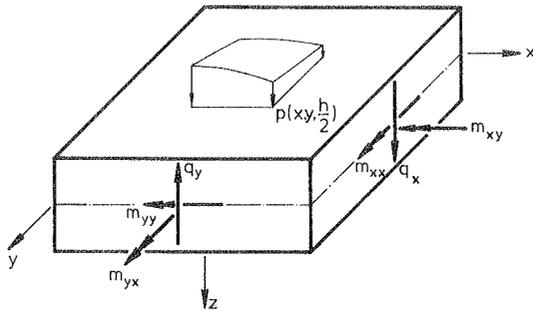


Bild 2.2 Schnittgrößen und Belastung

Spannungsverteilung:

Über die Spannungsverläufe, die die Schnittgrößen definieren, müssen Annahmen getroffen werden, um die in z-Richtung veränderlichen Größen ausdrücken zu können in den Schnittgrößen der Mittelfläche. Außer den geradlinig verlaufenden Biegespannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy}$  sind die Spannungen  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  und  $\sigma_{zz}$  festzulegen. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Schubspannungen  $\sigma_{\alpha z}$  wie beim Balken quadratisch über die Höhe verteilt sein, während die Krafteinleitung der Oberflächenlast  $p(x, y, h/2)$  für  $\sigma_{zz}$  analog zur Scheibentheorie einen kubischen Verlauf der Spannungen erfordert.

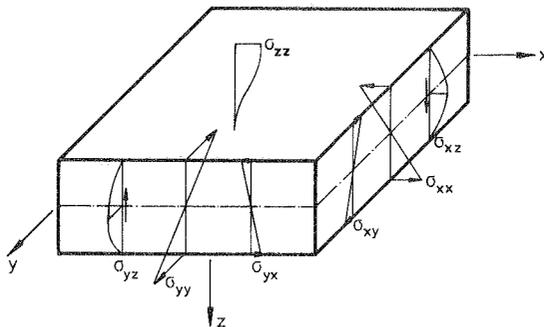


Bild 2.3 Spannungen

Durch die in (Bild 2. 3) getroffenen Annahmen werden die Spannungen in Abhängigkeit von  $z$  wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= m_{\alpha\beta} \frac{12}{h^3} z \\ \sigma_{\alpha 3} &= q_{\alpha} \frac{3}{2h^3} (h^2 - 4z^2) \\ \sigma_{33} &= p \frac{1}{2h^3} (h^3 + 3h^2z - 4z^3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Werkstoffgesetz:

Wird linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt, sind Spannungen und Verzerrungen direkt proportional. Es gilt das dreidimensionale Werkstoffgesetz:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} \sigma_{kk} \right). \quad (2.9)$$

Da beim zweidimensionalen Tragwerk Platte nur die fünf Verzerrungen  $\epsilon_{\alpha\beta}$  und  $\epsilon_{\alpha 3}$  in die Betrachtung eingehen, muß mit Hilfe des Werkstoffgesetzes ein Zusammenhang zwischen den über die Höhe verteilten Spannungen und den Schnittgrößen gefunden werden. Reissner setzt dazu unter Ausnutzung des Werkstoffgesetzes die Formänderungsarbeiten der Schnittmomente längs der gemittelten Schnittverdrehungen als äußeren Anteil gleich den Spannungen längs der Dehnungen als inneren Anteil. Dabei sind die Spannungsverläufe über  $z$  nach den Definitionsgleichungen (2. 8) einzuführen.

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} d\alpha_{\beta}^* &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dz \\ &= \frac{1+\mu}{E} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1+\mu} \sigma_{kk} \right) dz \\ &= \frac{1+\mu}{E} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma_{\alpha\beta}^2 - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1+\mu} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{kk} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1+\mu} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{33} \right\} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) \\ &= \frac{1+\mu}{E} \left\{ \frac{12}{k^3} m_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{12}{k^3} m_{\beta\beta} + \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{6}{5k} p \right) \right\} dz \quad (2.10) \end{aligned}$$

In derselben Weise läßt sich auch die Querkraft errechnen:

$$\begin{aligned} q_{x\beta}^* &= 2 \int_{-k/2}^{k/2} \sigma_{x\beta} \varepsilon_{x\beta} dz = \frac{2(1+\mu)}{E} \int_{-k/2}^{k/2} \sigma_{x\beta}^2 dz \\ q_{\alpha\beta}^* &= (\beta_{\alpha} + \omega_{,\alpha}) = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \frac{6}{5k} q_{\alpha} \quad (2.11) \end{aligned}$$

Durch Umformen der gewonnenen Beziehungen (2.10) und (2.11) können die Schnittgrößen in Abhängigkeit der eingeführten Verzerrungsgrößen angegeben werden:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= K(1-\mu) \left\{ \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) + \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1-\mu} \beta_{\beta,\beta} \right\} + \delta_{\alpha\beta} \frac{k^2}{10} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} p \\ q_{\alpha} &= K(1-\mu) \frac{5}{k^2} (\beta_{\alpha} + \omega_{,\alpha}) \quad (2.12) \end{aligned}$$

Werden diese Schnittgrößenbeziehungen (2.12) mit den Aussagen für die Verzerrungen (2.10) und (2.11) zusammengefügt, lassen sich die Momente in Abhängigkeit von  $w$  und  $q_{\alpha}$  angeben.

$$\begin{aligned} m_{xx} &= -K (\omega_{,xx} + \mu \omega_{,yy}) + \frac{k^2}{5} q_{x,x} - \frac{k^2}{10} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} p \\ m_{yy} &= -K (\omega_{,yy} + \mu \omega_{,xx}) + \frac{k^2}{5} q_{y,y} - \frac{k^2}{10} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} p \\ m_{xy} &= -K (1-\mu) \omega_{,xy} + \frac{k^2}{10} (q_{x,y} + q_{y,x}) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Werden die Schnittgrößenbeziehungen (2.12) in die statischen Gleichgewichtsbedingungen (2.7) eingesetzt, so ergibt sich eine Differentialgleichung 4. Ordnung für  $w$ . Das Ergebnis wird auch als "gebogener Plattenzustand" oder als vertikaler Verschiebungszustand bezeichnet.

$$K \Delta \Delta w = \rho^1 - \frac{\epsilon^2}{10} \frac{2-\mu}{1-\mu} \Delta \rho^1 \quad (2.14)$$

Zur Beschreibung des Zusammenhangs der Querneigungen können die Gleichungen für die Querkräfte (2. 12) in die Gleichgewichtsbedingung (2. 6) eingeführt werden. Mit dem Ansatz

$$\psi = \frac{1}{\epsilon} (\beta_{x,y} - \beta_{y,x}) \quad (2.15)$$

wird eine Differentialgleichung 2. Ordnung als weitere Bestimmungsgleichung gewonnen. Sie beschreibt den sogenannten "horizontalen Verschiebungszustand", mit dem die Querschubverzerrungen ermittelt werden.

$$\Delta \psi - \frac{10}{\epsilon^2} \psi = 0 \quad (2.16)$$

Die beiden Differentialgleichungen (2. 14) und (2. 16) ermöglichen es, an den Rändern außer den Bedingungen zur Bestimmung der drei Momentengrößen auch diejenigen der zwei Querkräfte zu befriedigen.

Werden diese Ergebnisse der Reissnerschen Theorie den Lösungen der klassischen Biegetheorie nach Kirchhoff gegenübergestellt, muß beachtet werden, daß dort die Querschubverzerrungen unberücksichtigt bleiben.

Mit der Annahme

$$\psi_{, \alpha} = \beta_{\alpha} \quad (2.17)$$

entfällt die Differentialaussage für die Normalenverdrehung (2. 15); von den sechs Randbedingungen können nur noch vier erfüllt werden, wodurch die Einführung der Ersatzquerkraft erforderlich wird. In der Ersatzquerkraft werden die Randquerkräfte und das Randdrillmoment zusammengefaßt. Außerdem vereinfacht sich die Bipotentialgleichung (2. 14) um den zweiten Summanden auf der rechten Gleichungsseite.

2.2 Das Prinzip von Hellinger - Reissner

Ausgangspunkt ist das Gesamtpotential der Kräfte am Körper. Für ein lineares Werkstoffgesetz wird das Prinzip von Hellinger - Reissner angegeben. Hier folgt die Darstellung im wesentlichen den Veröffentlichungen von Bufler [15] und Wunderlich [17]. Durch Einführung festgelegter Spannungsverläufe am betrachteten Plattentragwerk und Integration über die Plattendicke läßt sich das Prinzip von Hellinger - Reissner auf die Mittelfläche bezogen angeben. Dabei ist der Einfluß der Querkraftverformung ebenso eingeschlossen wie derjenige der Querkusammendrückung.

Daneben soll die Vereinfachung durch Vernachlässigung der Querkusammendrückung, wie sie von Bolle [7] angegeben wurde, und die Vernachlässigung der Querkraftverformung im Abschnitt 3.2 eingeführt werden. Die dabei entstehenden Beziehungen werden zusammenfassend angegeben.

Bei elastischem Werkstoff wird die Existenz eines Potentials vorausgesetzt. Die Verschiebungen sollen klein sein. Die Spannungen und die Dehnungen sind in kartesischen Koordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  definiert. Für die Spannungen und die Dehnungen gilt folgender Zusammenhang:

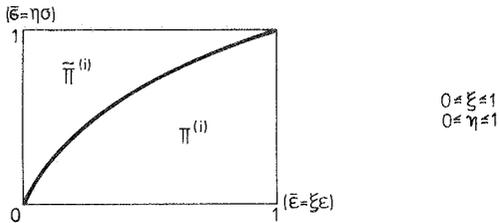


Bild 2.4 Spannungs - Dehnungsbeziehung

Wird das auf die Volumeneinheit bezogene innere Potential  $\pi^{(i)}$  angegeben, so gilt die Gleichung:

$$\bar{\pi}^{(i)} = \int_0^E \bar{G}_{ij}(\bar{E}) \delta \bar{E}_{ij} = \int_0^1 G_{ij}(\xi E) \varepsilon_{ij} d\xi \quad (2.18)$$

Bei Voraussetzung eines Werkstoffs mit linearem Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen kann aufsummiert werden zum Potential der inneren Kräfte:

$$\overline{\mathcal{T}}^{(i)} = \int_V \overline{\mathcal{T}}^{(i)} dV = \int_V E_{ij\ell c} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{\ell c} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\zeta dV = \frac{1}{2} \int_V E_{ij\ell c} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{\ell c} dV \quad (2.19)$$

In gleicher Weise läßt sich das innere bezogene Komplementärpotential  $\tilde{\pi}^{(i)}$  errechnen:

$$\tilde{\pi}^{(i)} = \int_0^{\tilde{\sigma}} \varepsilon_{ij}(\tilde{\sigma}) \delta \tilde{\sigma}_{ij} = \int_0^1 \varepsilon_{ij}(\eta \tilde{\sigma}) \tilde{\sigma}_{ij} d\eta \quad (2.20)$$

Wird auch hier ein Werkstoff mit linearer Spannungs-Dehnungsbeziehung zugrunde gelegt, ist das innere Komplementärpotential:

$$\tilde{\pi}^{(i)} = \int_V \tilde{\pi}^{(i)} dV = \int_V C_{ij\ell c} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{\ell c} \int_0^1 d\eta dV = \frac{1}{2} \int_V C_{ij\ell c} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{\ell c} dV \quad (2.21)$$

Das Potential der äußeren Kräfte  $\pi^{(a)}$  ergibt sich aus den vorgegebenen Belastungen:

$$\pi^{(a)} = - \int_0^u p_i \delta u_i \quad ; \quad p_i = p_i^1 + p_i^2 = p_i^1 + b_{ij}^R n_j \quad (2.22)$$

Sind die  $\hat{\sigma}_{ij}^R$  eingeprägte Randspannungen, die mit dem Richtungscosinus  $n_j$  multipliziert Spannungen senkrecht zur betrachteten Oberfläche ergeben, ist das Potential der äußeren Kräfte:

$$\overline{\mathcal{T}}^{(a)} = \int_V \mathcal{T}^{(a)} dV = - \int_V p_i^1 u_i dV - \int_{O_p} \hat{\sigma}_{ij}^R n_j u_i dO \quad (2.23)$$

Das Oberflächenintegral erstreckt sich über Flächen  $O_p$ , auf denen Randspannungen vorgegeben sind. In ähnlicher Weise läßt sich das bezogene äußere Komplementärpotential formulieren:

$$\tilde{\pi}^{(a)} = - \int_0^p u_i^1 \delta p_i^1 \quad (2.24)$$

Da die Variation der eingepprägten Kräfte  $p_i^1 = \hat{p}_i^1$  verschwindet, liefern nur die Randspannungen längs vorgegebener Verschiebungsgrößen Beiträge zum äußeren Ergänzungspotential. Das Oberflächenintegral erstreckt sich hier nur über Flächen  $O_u$ , auf denen die  $\hat{u}_i^1$  vorgeschrieben sind.

$$\tilde{\Pi}^{(a)} = \int_V \tilde{\pi}^{(a)} dV = 0 - \int_{\partial u} \mu_i^1 \tilde{\sigma}_{ij}^R \eta_j dO \quad (2.25)$$

Mit diesen Potentialausdrücken läßt sich das Prinzip vom Stationärwert der gesamten potentiellen Energie aus dem Prinzip der virtuellen Ver-rückungen herleiten:

$$\Pi(u, \varepsilon) = \int_V \pi^{(i)}(\varepsilon) dV + \int_V \tilde{\pi}^{(a)}(u) dV \rightarrow \text{Min.} \quad (2.26)$$

Bei diesem gebundenen Variationsproblem sind an die Freiwerte  $u$  und  $\varepsilon$  Anforderungen zu stellen. Als Nebenbedingungen müssen die Verschiebungsgrößen  $u$  die Randbedingungen erfüllen und die Verzerrungsgrößen müssen den kinematischen Feldgleichungen genügen. Um auch Spannungsgrößen als freie Parameter in den Potentialausdruck aufzunehmen, wird mit der Legendreschen Transformation das Komplementärpotential eingeführt.

$$\delta \tilde{\pi}^{(i)} + \delta \tilde{\pi}^{(a)} = \tilde{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \delta \tilde{\sigma}_{ij} = \delta \{ \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} \} \quad (2.27)$$

$$\tilde{\pi}^{(i)} + \tilde{\pi}^{(a)} = \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} + C \quad (2.28)$$

Die bei Ausführung der Integration entstehende Konstante  $C$  wird zu Null gesetzt und außerdem ist die Ableitbarkeit der Spannungen aus dem inneren Potential und der Verzerrungen aus dem inneren Komplementärpotential vorausgesetzt. Durch Einsetzen der Bedingung (2.28) in den Potentialausdruck der Gesamtenergie entsteht das Funktional:

$$P(u, \varepsilon, \tilde{\sigma}) = \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V \tilde{\pi}^{(i)}(\tilde{\sigma}) dV + \int_V \pi^{(a)}(u) dV \rightarrow \text{stat.} \quad (2.29)$$

Das aus dem Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials hergeleitete Funktional ist wie dieses den statischen Gleichungen äquivalent. Damit werden die statischen Feldgleichungen direkt erfüllt. Nebenbedingungen dieses Potentialausdrucks sind die vorgegebenen Randverschiebungen und die kinematischen Feldgleichungen. Von den Nebenbedingungen kann

das Variationsproblem nach der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode befreit werden. Durch Hinzunahme der kinematischen Feldgleichungen

$$\frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) - \varepsilon_{ij} = 0$$

und den Verschiebungsrandbedingungen

$$(u - \hat{u}^1) = 0$$

zum Funktional (2.29) mit den Spannungen als Lagrange-Faktoren entsteht das Prinzip von Hellinger-Reissner. Dieses Funktional ist frei in  $u$  und  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \sigma) &= \int_V G_{ij} \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) dV - \\ &\quad - \int_V \tilde{\pi}^{(i)}(\sigma) dV + \int_V \tilde{\pi}^{(a)}(u) dV - \\ &\quad - \int_{Q_u} (u - \hat{u}^1) u_i \sigma_{ij}^2 dO \quad \rightarrow \text{stationär} \quad (2.30) \end{aligned}$$



### 3. Das Reissner-Funktional für bereichsweise Ansätze

Funktionale für bereichsweise Ansätze wurden von verschiedenen Autoren [12] bis [18] hergeleitet. In der Arbeit von Riehle [19] findet sich dazu eine ausführliche Diskussion. Für das Funktional Hellinger-Reissner (2.30) werden in diesem Abschnitt die Erweiterungen für bereichsweise Verschiebungs- und Spannungsansätze angegeben, wie sie auch in [19] zu finden sind.

#### 3.1 Hellinger-Reissner für bereichsweise Ansätze

Die im Funktional (2.30) eingeführten Spannungsfreiwerte sind im Anteil der inneren Komplementärenergie enthalten. Diese Spannungen müssen für das zweidimensionale Tragwerkplatte ersetzt werden durch die eingeführten Schnittgrößen. Dies entspricht einer Aufsummierung der Formänderungsarbeit über die Tragwerkshöhe. Dazu wird in das Potential der inneren Ergänzungsarbeit (2.21) das Werkstoffgesetz (2.9) eingeführt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(i)} &= \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{kl} dV \\ &= \frac{1}{2} \iint_{F-h/2}^{h/2} \frac{1+\mu}{E} \left\{ \tilde{e}_{\alpha\beta}^2 - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1+\mu} \tilde{e}_{\alpha\beta} \tilde{e}_{\gamma\gamma} + \tilde{e}_{\alpha 3}^2 - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mu}{1+\mu} \tilde{e}_{\alpha\beta} \tilde{e}_{33} \right\} dz dF \end{aligned} \quad (3.1)$$

In diesen Potentialausdruck werden die Definitionsgleichungen der Spannungen (2.8) eingegeben. Wird die Integration über die Plattendicke ausgeführt, ist das Funktional nur noch abhängig von den an der Mittelfläche angreifenden Schnittgrößen  $m_{\alpha\beta}$  und  $q_\alpha$ .

$$\tilde{\Pi}^{(ii)} = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ D_{\alpha\beta\gamma\delta} m_{\alpha\beta} m_{\gamma\delta} + D_{\alpha 33\beta} q_\alpha q_\beta - J_{\alpha 3} m_{\alpha\beta} p \right\} dF \quad (3.2)$$

Der Nachgiebigkeitstensor D wird durch Integration der Gleichung (3.1) bei vorgegebenen Spannungsansätzen (2.8) bestimmt.

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{6(1+\mu)}{E h^3} \left( \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{\mu}{1+\mu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right)$$

$$D_{\alpha 33\beta} = \frac{12(1+\mu)}{5Eh} \delta_{\alpha\beta}$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{K_{\alpha\beta}}{SEl} \quad (3.3)$$

Mit dem Potential (3.2), den Verschiebungsbeziehungen (2.1), den kinematischen Feldgleichungen (2.2) und den Schnittgrößen (2.4) ergibt sich das Funktional von Hellinger-Reissner mit den Freiwerten  $w$ ,  $\beta_{\alpha}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_F u_{\alpha\beta} \frac{1}{l} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) dF + \int_F q_{\alpha} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha}) dF \\ & - \frac{1}{l} \int_F D_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta} u_{\gamma\delta} dF - \frac{1}{l} \int_F D_{\alpha\beta\gamma\delta} q_{\alpha} q_{\beta} dF - \frac{1}{l} \int_F D_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta} \dot{p}^{\gamma\delta} dF \\ & - \int_F \dot{p}^{\alpha\beta} w dF - \int_{R_p} (M_{nn}^{\alpha} q_{\alpha} + M_{nt}^{\alpha} q_t + Q^{\alpha} w) dR \\ & - \int_{R_u} \{ (\beta_{\alpha} - q_{\alpha}^{\dagger}) u_{\alpha n} + (\beta_t - q_t^{\dagger}) u_{\alpha t} + (w - \dot{w}^{\dagger}) q_n \} dR \rightarrow \text{stat.} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieses Funktionals in der Methode der gemischten finiten Elemente werden bereichsweise Ansätze für die Freiwerte  $w$ ,  $\beta_{\alpha}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha}$  gemacht. Damit entsteht ein Potentialausdruck für jedes einzelne Element. Durch Aufsummieren aller Elementanteile wird das gesamte Funktional gebildet. Neben den globalen Randbedingungen ergeben sich zwischen den einzelnen finiten Elementen Übergangsbedingungen.

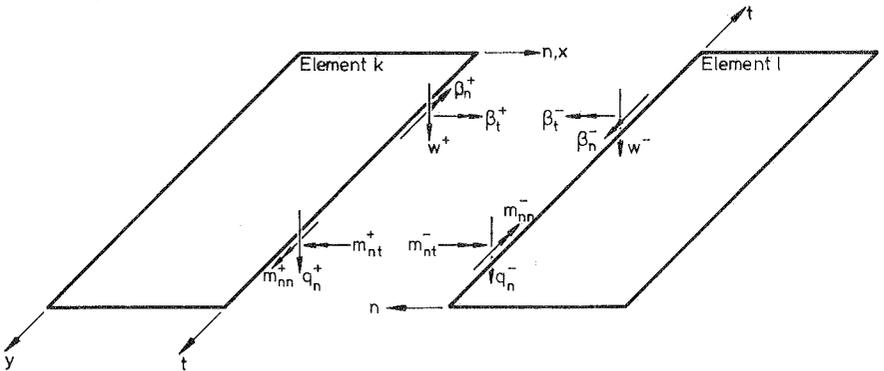


Bild 3.1 Verschiebungs- und Schnittgrößen am Elementrand

Für die kinematischen Gleichungen muß zusätzlich an jedem Elementrand gelten:

$$\begin{aligned} w^+ - w^- &= 0 \\ \beta_k^+ + \beta_k^- &= 0 \\ \beta_t^+ + \beta_t^- &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Als statische Übergangsbedingungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} u_{kk}^+ - u_{kk}^- &= 0 \\ u_{kt}^+ - u_{kt}^- &= 0 \\ q_n^+ + q_n^- &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wird das Funktional (3.4) als Summe aller k finiten Elemente formuliert, so ergeben sich außer den Nebenbedingungen des Gesamtansatzes auch die kinematischen (3.5) und die statischen (3.6) Übergangsbedingungen. Außerdem werden durch die Summenbildung über bereichsweise Ansätze die statischen Gleichungen nurmehr im Mittel erfüllt. Von diesen Nebenbedingungen kann das Variationsproblem befreit werden, wenn diese Bedingungen nach der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode mit Faktoren hinzugenommen werden. Diese Lagrange-Faktoren ergeben sich dann als die jeweilig dazugehörigen Verformungs- oder Spannungsgrößen. Wird dies mit den Übergangsbedingungen (3.5) und (3.6) durchgeführt, so entsteht das erweiterte Funktional von Hellinger-Reissner:

$$\begin{aligned} R_e = & \sum_k \left\{ \int_F u_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) dF + \int_F q_{\alpha} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha}) dF - \int_F \bar{p} w dF \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_F D_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta} u_{\gamma\delta} dF - \frac{1}{2} \int_F D_{\alpha\beta\gamma} q_{\alpha} q_{\beta} dF \\ & - \frac{1}{2} \int_F D_{\alpha\beta} u_{,\alpha\alpha} \bar{p} dF \\ & \left. - \int_{R_p} M_{nn} \varphi_n dR - \int_{R_p} M_{kt} \varphi_t dR - \int_{R_p} Q_w dR \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{R_u} (\beta_{nn} - \hat{\varphi}_{nn}) m_{nn} dR - \int_{R_u} (\beta_{nt} - \hat{\varphi}_{nt}) m_{nt} dR \\
 & - \int_{R_u} (w - \hat{w}) q_n dR \\
 & - \int_S (\beta_{nn}^+ - \beta_{nn}^-) \frac{1}{2} (m_{nn}^+ - m_{nn}^-) dS - \int_S (\beta_{nt}^+ - \beta_{nt}^-) \frac{1}{2} (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) dS \\
 & - \int_S (w^+ + w^-) \frac{1}{2} (q_n^+ + q_n^-) dS \} \rightarrow \text{stationär} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Soll das Funktional einen Stationärwert annehmen, muß die erste Variation verschwinden. Dabei ist zu beachten, daß sowohl die Verschiebungsgrößen  $w$  und  $\beta_{\alpha}$  als auch die Schnittgrößen  $m_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha}$  Freiwerte darstellen und variiert werden müssen.

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L}_c = \sum_k \{ & \int_F m_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \delta (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) dF + \int_F q_{\gamma\alpha} \delta (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha}) dF - \int_F \hat{p} \delta w dF \\
 & + \int_F \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) \delta m_{\alpha\beta} dF + \int_F (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha}) \delta q_{\gamma\alpha} dF \\
 & - \int_F \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma\delta} m_{\alpha\beta} \delta m_{\gamma\delta} dF - \int_F \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma} q_{\gamma} \delta q_{\beta} dF \\
 & - \int_F \frac{1}{2} \mathcal{D}_{\alpha\beta} p \delta m_{\alpha\beta} dF \\
 & + \int_{R_p} (m_{nn} - \hat{M}_{nn}) \delta \varphi_n dR + \int_{R_p} (m_{nt} - \hat{M}_{nt}) \delta \varphi_t dR \\
 & + \int_{R_p} (q_n - \hat{Q}) \delta w dR \\
 & + \int_{R_u} (\beta_{nn} - \hat{\varphi}_{nn}) \delta m_{nn} dR + \int_{R_u} (\beta_{nt} - \hat{\varphi}_{nt}) \delta m_{nt} dR + \int_{R_u} (w - \hat{w}) \delta q_n dR \\
 & - \int_S (\beta_{nn}^+ + \beta_{nn}^-) \frac{1}{2} \delta (m_{nn}^+ - m_{nn}^-) dS - \int_S (\beta_{nt}^+ + \beta_{nt}^-) \frac{1}{2} \delta (m_{nt}^+ - m_{nt}^-) dS \\
 & - \int_S (w^+ - w^-) \frac{1}{2} \delta (q_n^+ + q_n^-) dS.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_S (u_{nn}^+ - u_{nn}^-) \frac{1}{\ell} \delta(\beta_n^+ - \beta_n^-) dS + \int_S (u_{nt}^+ - u_{nt}^-) \frac{1}{\ell} \delta(\beta_t^+ - \beta_t^-) dS \\
 & + \int_S (q_n^+ + q_n^-) \frac{1}{\ell} \delta(w^+ + w^-) dS \} = 0 \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

### 3.2 Vereinfachende Annahmen beim Reissner-Funktional

Wird im Ansatz der Reissnerschen Theorie, wie dies von Bolle [7] angegeben wurde, der Elastizitätsmodul  $E_z = \infty$  gesetzt und damit die Querspannung vernachlässigt, verschwindet die Dehnung  $\epsilon_{zz}$ . Die vorgegebene Oberflächenlast  $\hat{p}$  muß als eine so über die Höhe  $z$  verteilte Volumenlast  $k$  eingeführt werden, daß auch die Spannung  $\sigma_{zz}$  Null wird. Nur so läßt sich das statische Gleichgewicht (2.6) erfüllen. Damit entfällt im Ausdruck der inneren Ergänzungsarbeit der Term  $k \cdot \sigma_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{zz}$  in der Gleichung (3.1), und es vereinfacht sich der Potentialausdruck (3.4) um den letzten Summanden. Im entstehenden Gleichungssystem ist die Lastspalte nur im Bereich der Verschiebungsfreiwerte besetzt.

Eine andere Möglichkeit der Vereinfachung besteht in der Einschränkung der Freiwerte. Soll die Berücksichtigung der Querkräfte und der Randneigungen vernachlässigt werden, so kann ein Funktional für die dünne Platte nach der klassischen Biegetheorie abgeleitet werden. Es gilt dann die Gleichung (2.17) für die Normalenverdrehung.

Aus Gleichgewichtsgründen wird die Einführung der Kirchhoffschen Ersatzquerkraft erforderlich:

$$V = q_n + u_{nt,t} \quad (3.9)$$

Es entsteht das Funktional für dünne Platten:

$$\begin{aligned} \bar{R} = & - \int_F u_{\alpha\beta} \hat{w}_{,\alpha\beta} dF - \frac{1}{2} \int_F \mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta} u_{\gamma\delta} dF \\ & - \int_F \hat{\beta} w dF - \int_{R_p} \{ \hat{M}_{\mu\nu} \varphi_{\mu} + \hat{V} w \} dL - \int_{R_u} (w - \hat{w}) V dL \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3 Formulierung in Matrixschreibweise

Beim Übergang von den Verschiebungs- und Schnittgrößen zu Parameteransätzen wird aus dem Variationsproblem ein einfaches Minimumproblem, das durch partielle Differentiation nach den Parametern gelöst werden kann. Ausgangspunkt ist das Funktional (3.7), wobei vereinfachend von die Übergangsbedingungen befriedigenden Ansätzen ausgegangen werden soll. Dies muß, wie Riehle [19] beschrieben hat, lediglich von einem der Ansätze der zugeordneten Verschiebungs- und Kraftgrößen erfüllt werden. Für die spätere Rechnung wird die Matrixendarstellung gewählt, wie sie auch von Wunderlich in [16] eingeführt wurde.

Mit dem Vektor der Schnittkräfte:

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} \hat{q}_x \\ \hat{q}_y \\ u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

dem Vektor der Verzerrungen:

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_{y,y} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

und der Nachgiebigkeitsmatrix, die die Werkstoffbeziehungen enthält

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 12(1+\mu)/5kE & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12(1+\mu)/5kE & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/k^3E & 0 & -12\mu/k^3E \\ 0 & 0 & 0 & 24(1+\mu)/k^3E & 0 \\ 0 & 0 & -12\mu/k^3E & 0 & 12/k^3E \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12\mu/5kE \\ 0 \\ 12\mu/5kE \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

kann das Funktional von Hellinger-Reissner in Matrixdarstellung angegeben werden.

$$\mathcal{R} = \sum_k \left[ \int_F \left\{ \mathbf{s}^T \mathbf{E} + \mathbf{s}^T \mathbf{n} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{n}_p \hat{\rho} - \mathbf{v}^T \hat{\rho} \right\} dF - \int_R \left\{ \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{j}^T \hat{\mathbf{v}} \right\} dR \right] \rightarrow \text{stationär} \quad (3.15)$$

Werden im Funktional zur Diskretisierung der Freiwerte Produktansätze gewählt, kann auf Elementebene integriert werden. Für die Verschiebungsparameter  $\mathbf{v}_e$  und die Parameter der Schnittgrößen  $\mathbf{j}_e$ , die nicht voneinander abhängen, wird:

$$\mathcal{R} = \sum_k \left[ \mathbf{j}_e^T \mathbf{L} \mathbf{v}_e - \mathbf{j}_e^T \mathbf{N} \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_e^T \hat{\mathbf{N}} - \mathbf{v}_e^T \hat{\rho} - \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{S}} - \mathbf{j}_e^T \hat{\mathbf{V}} \right] \rightarrow \text{stat.} \quad (3.16)$$

Soll das Funktional einen Stationärwert annehmen, müssen nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung bei beliebiger Variation der Freiwerte die Integrale verschwinden. Bei den gewählten Produktansätzen führt die Variation zu einer partiellen Differentiation nach den Parametern. Dabei muß R nach den Verschiebungsgrößen und den Kraftgrößen abgeleitet werden, wodurch zwei Gleichungssysteme für k Elemente entstehen.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \left\{ \sum_k \left[ \mathbf{v}_e^T \mathbf{L}^T \mathfrak{d}_e - \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{P}} - \mathbf{v}_e^T \hat{\mathbf{S}} \right] \right\} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{d}_e} \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{d}_e} \left\{ \sum_k \left[ \mathfrak{d}_e^T \mathbf{L} \mathbf{v}_e - \mathfrak{d}_e^T \mathbf{N} \mathfrak{d}_e + \mathfrak{d}_e^T \hat{\mathbf{N}} - \mathfrak{d}_e^T \hat{\mathbf{V}} \right] \right\} = 0$$

Damit lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Freiwerte  $\mathbf{v}_e$  und  $\mathfrak{d}_e$ :

$$\sum_k \left\{ \mathbf{L}^T \mathfrak{d}_e \quad - \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{S}} \right\} = 0 \quad (3.18)$$

$$\sum_k \left\{ -\mathbf{N} \mathfrak{d}_e + \mathbf{L} \mathbf{v}_e + \hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{V}} \right\} = 0$$

In Matrizenform zusammengestellt entsteht das Gleichungssystem der Elementfreiwerte:

$$\sum_k \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{L} \\ -\mathbf{L}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}_m \cdot \sum_k \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_e \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix}_m + \sum_k \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{S}} \end{bmatrix}_m = 0 \quad (3.19)$$

Durch Aufsummierung aller k Elemente, entsprechend dem vorgegebenen Zusammenhang untereinander, entsteht das globale Gleichungssystem aller Freiwerte. Dieser sogenannte Zusammenbau ist Teil eines finiten Elementprogramms, das sich von Programmen für reine Verschiebungsansätze im Aufbau nicht wesentlich unterscheidet. Der Unterschied beschränkt sich auf zwei Dinge:

Zum einen ist das nach dem Zusammenbau aller Elemente zu lösende Gleichungssystem nicht positiv definit. Da das Gesamtsystem aber symmetrisch ist, kann ein modifiziertes Cholesky-Verfahren zur Lösung angewendet werden.

Zum andern entfällt die bei den Verschiebungsansätzen notwendige Rückrechnung der Spannungen aus den jetzt bekannten Verschiebungen. Die Spannungsgrößen errechnen sich mit gemischten

Ansätzen direkt bei der Gleichungsauflösung. Da die Rückrechnung auf Elementebene oder global erfolgen kann (bei Berechnung der Spannungen an globalen Schnitten verbessert sich die Genauigkeit), entstehen unterschiedlich aufwendige Programme.

Durch die Nullmatrix auf der Diagonalen, wie aus Gleichung (3.18) zu ersehen, sind an die Parameter der zu wählenden Ansätze Forderungen zu stellen, wenn das Gleichungssystem lösbar sein soll. Danach muß die Gesamtanzahl der Ansatzparameter der Schnittgrößen nach dem Zusammenbau und der Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen größer sein als die der Verschiebungsgrößen. Damit ist aber eine Vorweglösung der ersten Gleichung in (3.18) nach den Schnittgrößen nicht möglich, da  $\mathbf{L}$  nicht invertierbar ist.

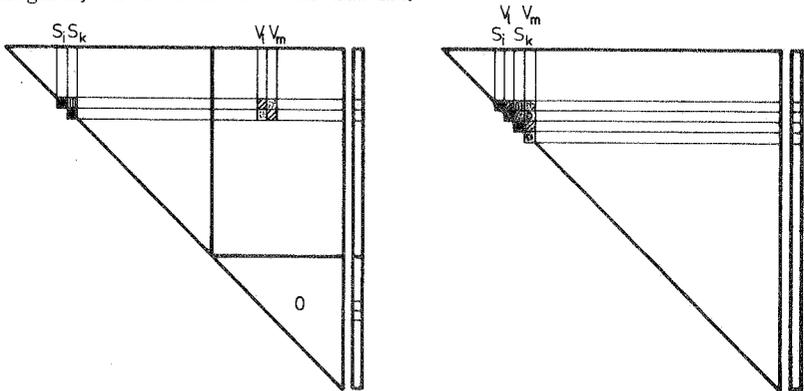


Bild 3.2 Globales Gleichungssystem

Es bieten sich daher bei der Lösung des Gleichungssystems zwei verschiedene Wege an:

1. Es werden zuerst die Schnittgrößen aller Elemente nacheinander angeordnet und danach folgen elementweise die Verschiebungsgrößen (Bild 3.2 links). Es entsteht in  $\mathbf{N}$  eine voll besetzte Diagonalmatrix mit Bandstruktur, die durch geschickte Nummerierung der Knoten bzw. Elemente beeinflusst werden kann. In  $\mathbf{L}$  jedoch wird eine zur Hauptdiagonalen parallele Nebendiagonale in Bandform erzeugt, so daß der gewonnene Vorteil zum großen Teil wieder verschwindet.

2. Die Schnittgrößen und die Verschiebungsgrößen eines Elementes werden zusammengefaßt und damit die globale Gleichungsmatrix gebildet (Bild 3.2 rechts). Es entsteht auch bei diesem Vorgehen eine Bandstruktur, wobei aber hier die Diagonale mit Nullen durchsetzt ist.

Werden beide Lösungsstrategien verglichen, so zeigt sich, daß die zweite Möglichkeit vorzuziehen ist, da die verteilt auf die Diagonalen auftretenden Nullen bei Anwendung des Cholesky-Verfahrens numerisch günstiger sind. Zudem sollte aus Gründen der Rechenzeit ein blockstrukturierter Gleichungsaflöser eingesetzt werden.

## 4. Finite Elemente mit gemischten Ansätzen

### 4.1 Elementmatrizen

---

Werden in der finiten Element-Methode Ansätze für ein Verschiebungsmodell gemacht, so sind an sie Anforderungen bei der Auswahl zu stellen. Üblicherweise werden Ansätze in Form von Polynomen gewählt, die zulässig, vollständig und voneinander unabhängig sein müssen. Neben diesen Bedingungen können die wählbaren Ansätze weiteren von den Nebenbedingungen des benutzten Funktionals her begründeten Einschränkungen unterworfen werden. Für Platten mit Schubverformung wurden Elemente für Verschiebungsansätze von verschiedenen Autoren [28], [30], [31] und [33] angegeben.

Bei gemischten Ansätzen, bei denen im Gebiet für die Verschiebungsgrößen und die Kraftgrößen voneinander unabhängige Ansätze gewählt werden, gelten die beschriebenen Bedingungen in gleicher Weise. Vom zugrunde gelegten Funktional hängt es ab, welche Freiwerte bei den Verschiebungsgrößen und welche dazugehörigen Kraftgrößen eingeführt werden können. Dabei erhöht sich die Gesamtanzahl der Freiwerte zum einen durch die Hinzunahme weiterer Verschiebungs- oder Kraftgrößen zum Funktional und zum andern durch die Ordnung der zu wählenden Polynomansätze. Außer diesen Gesichtspunkten haben die Nebenbedingungen des Ausgangsfunktionalen Einfluß auf die wählbare Ansatzordnung. Beim erweiterten Funktional von Hellinger-Reissner (3.7) beispielsweise, bei dem alle Nebenbedingungen mit Lagrange-Faktoren in das Funktional aufgenommen wurden, sind schon elementweise konstante Ansätze möglich. Dagegen fordern die kinematischen Nebenbedingungen beim Funktional (3.4) wenigstens lineare Ansätze für die Durchbiegungen und die Verdrehungen der Normalen, um die am Elementrand auftretenden Verschiebungsbedingungen erfüllen zu können. Durch die Kopplung der beiden Größengruppen treten im Funktional nur erste Ableitungen bei den Verschiebungsgrößen auf, so daß für die entsprechenden Kraftgrößen nur konstante Ansätze notwendig sind. Mitentscheidend für die Güte eines gemischten Elementes ist die entsprechende Zuordnung der Polynomordnungen der Verschiebungs- oder Kraftgrößenansätze. Dies wurde von Visser [26], Tahiani [38] und Riehle [19] ausführlich dargestellt.

Gemischte finite Elemente für die Platte mit Berücksichtigung der Schubverzerrung wurden von Visser [26] und Riehle [19] für die Freiwerte Durchbiegung und Momente sowie von Wunderlich [16], Hofbauer [23] und Chatterjee/Setlur [34] auch für die Querneigungen und die Querkräfte entwickelt. Diese Elemente benutzen alle die von Bolle [7] angegebene Näherung für die z-Richtung (siehe Abschnitt 3.2).

Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit dargestellten gemischten finiten Elemente ist das Funktional  $R$  in Gleichung (3.4) für die exakte Reissner'sche Theorie. Für alle Freiwerte werden lineare und quadratische Ansätze gemacht, um die zu erwartenden stark veränderlichen Verläufe für die Schnittgrößen befriedigend beschreiben zu können. Der übersichtlichen Darstellung wegen soll hier der lineare Ansatz dargestellt werden:

$$(w, \beta_x, u_{x\beta}, q_x) = c_1 + c_2 k + c_3 x g + c_4 y \quad (4.1)$$

Mit diesem Ansatzpolynom können die Matrixausdrücke der Ausgangsgleichung (3.19) elementweise errechnet werden. Die Integration über die Fläche wird auf Elementebene für den gewählten Ansatz ausgeführt, wodurch die Elementnachgiebigkeitsmatrix  $N$  und die "Lagrange-Matrix"  $L$  des Elementes entsteht. Die Aufsummierung aller Elemente in der globalen Gleichungsmatrix geschieht durch den Zusammenbau.

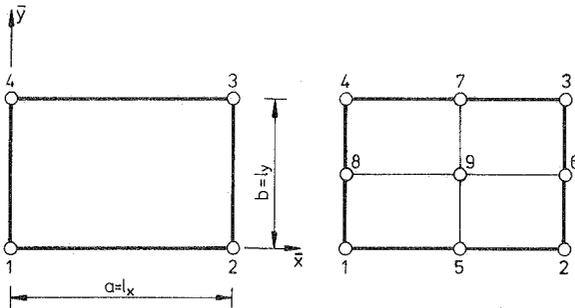


Bild 4.1 Elementgeometrie für linearen und quadratischen Ansatz

Für das Rechteckelement, wie es im (Bild 4.1) dargestellt ist, wird der Schnittkraftvektor  $\mathfrak{s}_e$  der gewählten Knotenschnittgrößen durch die Polynomkonstanten ausgedrückt.

$$\mathfrak{s}_e = C_{e3} \cdot c_3 \quad (4.2)$$

$\begin{matrix} q_{x1} \\ f_{y1} \\ m_{x1} \\ m_{xy1} \\ m_{y1} \end{matrix}$	=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 25%;">1 0 0 0</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black;">1 a 0 0</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black;">1 a b ab</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black;">1 0 b 0</td> </tr> </table>	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 a 0 0	1 a 0 0	1 a 0 0	1 a 0 0	1 a b ab	1 0 b 0	1 0 b 0	1 0 b 0	1 0 b 0	$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{15} \\ c_{16} \\ c_{17} \\ c_{18} \\ c_{19} \\ c_{20} \end{matrix}$			
1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0																
1 a 0 0	1 a 0 0	1 a 0 0	1 a 0 0																
1 a b ab	1 a b ab	1 a b ab	1 a b ab																
1 0 b 0	1 0 b 0	1 0 b 0	1 0 b 0																

Für die Schnittgrößen gilt mit dem Ansatz (4.1) der Zusammenhang

$$\mathfrak{s} = \begin{bmatrix} q_x \\ f_y \\ m_x \\ m_{xy} \\ m_y \end{bmatrix} = C_3 \cdot c_3 \quad (4.3)$$

damit können die Schnittgrößen  $\mathfrak{s}$  elementbezogen angegeben werden:

$$\mathfrak{s} = C_3 C_{e3}^{-1} \mathfrak{s}_e \quad (4.4)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix  $N$  nach Gleichung (3.19) kann durch Integration des Gleichungsterms  $\mathfrak{s}^T n \mathfrak{s}$  in (3.15) gewonnen werden.

$$N = C_{es}^{-T} \iint_{00}^{ab} C_s^T n C_s dx dy C_{es}^{-1} \quad (4.5)$$

$A_\alpha$ $B_\alpha$ $C_\alpha$ $F_\alpha$ $D_\alpha$ $E_\alpha$	$A_\beta$ $B_\beta$ $C_\beta$ $F_\beta$ $D_\beta$ $G_\beta$ $E_\beta$	$A_\gamma$ $B_\gamma$ $C_\gamma$ $F_\gamma$ $D_\gamma$ $G_\gamma$ $E_\gamma$	$A_\delta$ $B_\delta$ $C_\delta$ $F_\delta$ $D_\delta$ $G_\delta$ $E_\delta$
	$A_\alpha$ $B_\alpha$ $C_\alpha$ $F_\alpha$ $D_\alpha$ $E_\alpha$	$A_\beta$ $B_\beta$ $C_\beta$ $F_\beta$ $D_\beta$ $G_\beta$ $E_\beta$	$A_\gamma$ $B_\gamma$ $C_\gamma$ $F_\gamma$ $D_\gamma$ $G_\gamma$ $E_\gamma$
	Symmetrie bei $F=G$	$A_\alpha$ $B_\alpha$ $C_\alpha$ $F_\alpha$ $D_\alpha$ $G_\alpha$ $E_\alpha$	$A_\beta$ $B_\beta$ $C_\beta$ $F_\beta$ $D_\beta$ $G_\beta$ $E_\beta$
			$A_\alpha$ $B_\alpha$ $C_\alpha$ $F_\alpha$ $D_\alpha$ $E_\alpha$

$$\alpha = ab/9 \quad A = 12(1+\mu)/5EA = B \quad F = -12\mu/EA^3 = G$$

$$\beta = ab/18 \quad C = 12/EA^3 = E$$

$$\gamma = ab/36 \quad D = 24(1+\mu)/EA^3$$

Die Verknüpfung der Spannungen mit den Dehnungen über die innere Ergänzungsenergie durch Gleichung (2. 28) und die Einführung der Dehnungsbeziehungen mit Lagrange-Faktoren führt zur Matrix  $L$ . Mit dem Vektor der Knotenverschiebungsgrößen

$$v_c = C_{ev} \cdot v_v \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \hline w_2 \\ \beta_{x2} \\ \beta_{y2} \\ \hline w_3 \\ \beta_{x3} \\ \beta_{y3} \\ \hline w_4 \\ \beta_{x4} \\ \beta_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 & 0 & | & 1 & a & 0 & 0 & | & 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & b & ab & | & 1 & a & b & ab & | & 1 & a & b & ab \\ \hline 1 & 0 & b & 0 & | & 1 & a & b & ab & | & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ \hline c_{24} \\ c_{25} \\ c_{26} \\ \hline c_{27} \\ c_{28} \\ c_{29} \\ \hline c_{30} \\ c_{31} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

und den Verschiebungsansätzen

$$v = \begin{bmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = C_v \cdot v_v \quad (4.7)$$

ergeben sich die Verschiebungsgrößen des Potentialausdrucks, dargestellt in den Verschiebungsgrößen der Elementknoten:

$$v = C_v \cdot C_{ev}^{-1} \cdot v_c \quad (4.8)$$

Diese Verschiebungen lassen sich mit der Zuordnungsmatrix  $A_v$  als Matrix der Dehnungsgrößen darstellen:

$$E = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \\ \beta_{x,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \\ \beta_{y,y} \end{bmatrix} = A_v \cdot C_v \cdot C_{ev}^{-1} \cdot v_c \quad (4.9)$$

Die Matrix  $L$  in der Gleichung (3.19) wird in derselben Weise wie die Nachgiebigkeitsmatrix  $N$  durch Integration des entsprechenden Gleichungssummanden über die Elementfläche errechnet.

$$L = C_{cs}^{-T} \iint_{00}^{ab} C_s^T A_v C_v dx dy C_{ev}^{-1} \quad (4.9)$$

-b/6	ab/9	0	b/6	ab/8	0	b/12	ab/36	0	-b/12	ab/18	0
-a/6	0	ab/9	-a/12	0	ab/18	a/12	0	ab/36	a/6	0	ab/18
0	-b/6	0	0	b/6	0	0	b/12	0	0	-b/12	0
0	-a/6	-b/6	0	-a/12	b/6	0	a/12	b/12	0	a/6	-b/12
0	0	-a/6	0	0	-a/12	0	0	a/12	0	0	a/6
-b/6	ab/18	0	b/6	ab/9	0	b/12	ab/18	0	-b/12	ab/36	0
-a/12	0	ab/18	-a/6	0	ab/9	a/6	0	ab/18	a/12	0	ab/36
0	-b/6	0	0	b/6	0	0	b/12	0	0	-b/12	0
0	-a/12	-b/6	0	-a/6	b/6	0	a/6	b/12	0	a/12	-b/12
0	0	-a/12	0	0	-a/6	0	0	a/6	0	0	a/12
-b/12	ab/36	0	b/12	ab/18	0	b/6	ab/9	0	-b/6	ab/18	0
-a/12	0	ab/36	-a/6	0	ab/18	a/6	0	ab/9	a/12	0	ab/18
0	-b/12	0	0	b/12	0	0	b/6	0	0	-b/6	0
0	-a/12	-b/12	0	-a/6	b/12	0	a/6	b/6	0	a/12	-b/6
0	0	-a/12	0	0	-a/6	0	0	a/6	0	0	a/12
-b/12	ab/18	0	b/12	ab/36	0	b/6	ab/18	0	-b/6	ab/9	0
-a/6	0	ab/18	-a/12	0	ab/36	a/12	0	ab/18	a/6	0	ab/9
0	-b/12	0	0	b/12	0	0	b/6	0	0	-b/6	0
0	-a/6	-b/12	0	-a/12	b/12	0	a/12	b/6	0	a/6	-b/6
0	0	-a/6	0	0	-a/12	0	0	a/12	0	0	a/6

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Matrix  $\hat{N}$ , die den Einfluß der Oberflächenbelastung auf die Spannungen in x- und y-Richtung zusammenfaßt, durch Aufsummieren der Produkte der entsprechenden Schnittgrößen (4.4) mit der Last  $\hat{p}$  errechnen, wobei das Werkstoffgesetz nach Gleichung (3.14) zu berücksichtigen ist.

$$\hat{N} = C_{es}^{-T} \iint_{00}^{ab} C_s^T n_p \hat{p} \, dx \, dy \quad (4.10)$$

o	
o	
k	
o	
k	
; k = 3 abpμ / 10Eh	
o	
o	
k	
o	
é	
o	
o	
k	
o	
é	

Diese Matrix erscheint in der Lastspalte in den m Zeilen der Schnittgrößen. Wird mit der vereinfachten Reissnerschen Theorie gerechnet, wird also, wie zuvor beschrieben, die Belastung über die Querschnittshöhe verteilt angenommen, daß keine Spannung  $\sigma_{zz}$  entsteht, entfällt diese Matrix. Es erscheint auf der Lastspalte kein Wert in den m Zeilen der Schnittgrößen.

Mit der Arbeit der äußeren Kräfte wird die Belastung erfaßt. Für den Lastfall der eingepprägten Flächenlast p entsteht mit den Verschiebungsgrößen (4.1) folgende Bestimmungsgleichung:

$$\hat{p} = C_{ev}^{-T} \iint_{00}^{ab} C_v^T \hat{p} \, dx \, dy \quad (4.11)$$

$k$
$0$
$0$
$k$
$0$
$0$
$k$
$0$
$0$
$k$
$0$
$0$

$n$

$$; k = abp/4$$

Diese Matrix ist die eigentliche Lastspalte und besetzt die  $n$  Gleichungszeilen der Verschiebungsgrößen im Gesamtgleichungssystem. In ähnlicher Weise werden auch die eingepprägten Schnittkräfte oder vorgegebenen Randbedingungen zu den Matrizen  $\hat{S}$  und  $\hat{V}$  zusammengefaßt und der Gesamtlastspalte im Bereich der Verschiebungsgrößen oder der Schnittgrößen hinzugefügt.

## 4.2 Randbedingungen

Nach der Kirchhoffschen Theorie, bei der keine Querkraftverformung berücksichtigt wird, kann das Verschwinden des Drillmomentes oder der Querkraft je für sich am Rand nicht gefordert werden. Bei der Reissnerschen Theorie dagegen können die tatsächlichen Randbedingungen direkt vorgegeben werden.

	Reissner	Kirchhoff
frei drehbare Lagerung	$w = 0$ $m_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$w = 0$ $m_n = 0$
eingespannter Rand	$w = 0$ $\varphi_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$w = 0$ $w_{,n} = 0$
freier Rand	$q_n = 0$ $m_n = 0$ $m_{nt} = 0$	$\bar{q}_n = 0$ $m_n = 0$

Für die frei drehbare Lagerung benutzen Salerno/Goldberg [20] und die Autoren [9], [28], [30], [31] und [33] für Elemente mit Verschiebungsansätzen die Randbedingungen  $w = 0$ ,  $w_{,t} = 0$ ,  $m_n = 0$  und erhalten dadurch Drillmomente am Rand, die jedoch nicht auftreten dürfen. Dies führt zu einer Unterschätzung der Durchbiegung und zu einem falschen Drillmomentenverlauf.

Als Einspannung sind senkrecht zum Rand drei Einspannzustände denkbar, die zu unterschiedlichen Durchbiegungen führen. Die Einspannung ist dadurch gekennzeichnet, daß Auflagermomente eine Randneigung behindern. Nach der klassischen Theorie hat der vertikale Verschiebungszustand  $w$  (Bild 2.1) an der Stelle der Einspannung eine horizontale Tangente.

$$W = w, u = 0$$

Diesem Zustand wird der horizontale Verschiebungszustand  $\beta_\alpha$  überlagert, der am betrachteten Rand zwei Freiwerte aufweist. Wird von einem Plattentragwerk ausgegangen, dessen Ober- und Unterseite an der Einspannstelle gegeneinander unverschieblich sind, müssen die Verdrehungen  $\beta_n$  und  $\beta_t$  zu Null gefordert werden.

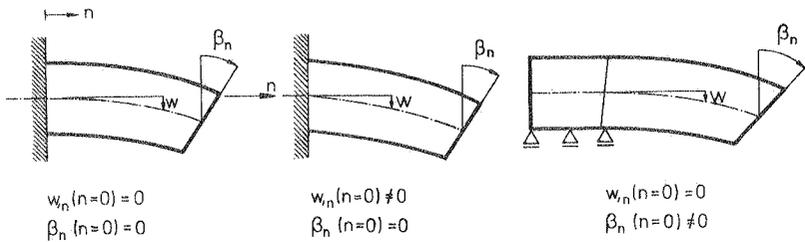


Bild 4.2 Mögliche Einspannzustände

Durch das Vorschreiben der Querneigung der ursprünglichen Normalen in Randrichtung  $\beta_t = 0$ , wie sie sich bei Kirchhoff zwangsweise ergibt, wird eine Drillmomenteneinspannung bewirkt. Bei Festlegung der Querneigung senkrecht zum Rand  $\beta_n = 0$  ergibt sich eine Auswirkung auf die Momente an einer über Eck Lagerung. Werden zum Beispiel die Randeinspannmomente  $m_n$  betrachtet, haben diese entsprechend der endlichen Krümmung  $\kappa_n$  eine endliche Größe. Direkt an einem Eckpunkt eines senkrecht dazu weiterführenden Randes ist das zugehörige  $\kappa_t = 0$ . Der Krümmungsverlauf macht einen Sprung, wodurch das Eckmoment singulär wird.

Werden jedoch die horizontalen Verschiebungen und damit die Querneigungen zugelassen (die Oberflächenverschiebungen  $u$  und  $v$  sind erheblich kleiner als  $w$ ), ergibt sich das Drillmoment  $m_{xy}$  längs des

Randes zu Null und die Eckmomente einer über Eck auskragenden Platte werden endlich. In der Momentenbestimmungsgleichung (2, 12) werden die bei der Kirchhoffschen Beschreibung enthaltenen Krümmungen  $\kappa_n$  und  $\kappa_t$  durch die Änderung der Normalenneigung  $\beta_\alpha$  ermittelt. Neben dem für diese Betrachtung unerheblichen Anteil, der mit der Belastung  $p$  verknüpft ist, sind außerdem die Querneigungen  $\beta_n$  enthalten. Werden die Querneigungen nicht behindert ( $\beta_n$  und  $\beta_t \neq 0$ ), so lassen sich die Momente als endliche Werte errechnen. Ausschlaggebend für die Einspannung wird damit aber die Größe von  $\beta_n$ , also die Beschreibung des eingespannten Plattenteils und dessen Querschubsteifigkeit.

Bei der hier verwendeten gemischten finiten Element-Methode kann nur  $\beta_n = 0$  direkt gefordert werden. Für die Beschreibung  $w_{,n} = 0$  muß eine annähernde experimentelle Lösung benutzt werden. Dies wird durch Fortführung der Platte in die Einspannung hinein erreicht.

#### 4.3 Genauigkeitsvergleich

---

Zum Vergleich der Lösungen des beschriebenen gemischten Elementes mit den Ergebnissen der Reissnerschen Plattentheorie sind nur wenige Plattenbeispiele verfügbar. Die bekannten Ergebnisse wurden meist durch Ansatz von (trigonometrischen) Reihen zur Lösung der Differentialgleichungen (2, 15) und (2, 16) gewonnen. In der Arbeit von Salerno und Goldberg [20] ist eine exakte Lösung für die Durchbiegung in Feldmitte angegeben. Diese Ergebnisse sind für  $\mu = 0$  errechnet. Für die Schnittgrößen sind bei Girkmann [21] Werte der Randquerkraft bei Annahme einer Belastung als Sinushalbwellen, und bei Kromm [4] Ergebnisse einer gegenüber Reissner etwas erweiterten Theorie vorhanden. Bei Pryor, Barker und Frederick [33] sind Ergebnisse eines Verschiebungsmodells nach Reissner für Gleichlast vorhanden. Für ein Plattenseitenverhältnis  $l_x/l_y = 3/2$ ,  $h/l_x = 0,1667$  und  $\mu = 0$  hat Hofbauer [23] Querkräfte und Drillmomente mit gemischten finiten Elementen errechnet.

Der Genauigkeitsvergleich wird in der Regel an einzelnen Verschiebungs- oder Kraftgrößen an ausgewählten Punkten durchgeführt. Dabei

ist besonders bei stark veränderlichem Verlauf der Größen von Interesse, ob sich die Knotenwerte dem exakten Ergebnis nähern oder ob vielmehr eine ausgleichende mittlere Linie genauere Werte liefert. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Knotenergebnisse in der Summe gegen die wahre Lösung streben. Einzelwerte pendeln dagegen, besonders bei den Schnittgrößen, um die wahre Lösung, so daß die Beurteilung des Gesamtverlaufs einer Größe aussagekräftiger erscheint.

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Beurteilung gemischter finiter Elemente ist die Art der Konvergenz der gewählten Freiwerte. Bei den üblicherweise verwendeten Verschiebungsansätzen stellt das verwendete Prinzip der virtuellen Arbeiten eine obere Schranke für die Steifigkeit des mechanischen Modells dar. Die Ergebnisse der Verschiebungsgrößen nähern sich bei diesen zu steifen Systemen der wahren Lösung daher bei gleichmäßiger Verdichtung des Elementnetzes von unten.

Bei nicht konformen Ansätzen, d. h. bei Elementen, deren Verschiebungsgrößenverläufe Knicke oder Sprünge zum Nachbarelement aufweisen, wird die Steifigkeit zu klein angesetzt und damit sind die daraus errechneten Verschiebungen größer als die wahre Lösung.

Bei den gemischten Elementmodellen wird von Funktionalen ausgegangen, die sich durch Verallgemeinerung aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials herleiten lassen. Das Funktional besitzt nur einen Stationärwert und über die Art der Konvergenz kann nichts Allgemeingültiges ausgesagt werden. Die Verschiebungsgrößen lassen sich im gewählten Beispiel nur in Verbindung mit den Schnittgrößen bestimmen, die Größengruppen beeinflussen sich also gegenseitig. Erfahrungen zeigen jedoch, daß sich die Verschiebungsgrößen anders verhalten als die Kraftgrößen. Während sich die Durchbiegung  $w$  der Platte monoton von oben der wahren Lösung nähert, kann eine ähnliche obere oder untere Schranke für die Schnittgrößen nicht festgestellt werden. Vielmehr nähern sich deren Ergebnisse häufig alternierend dem Endwert.

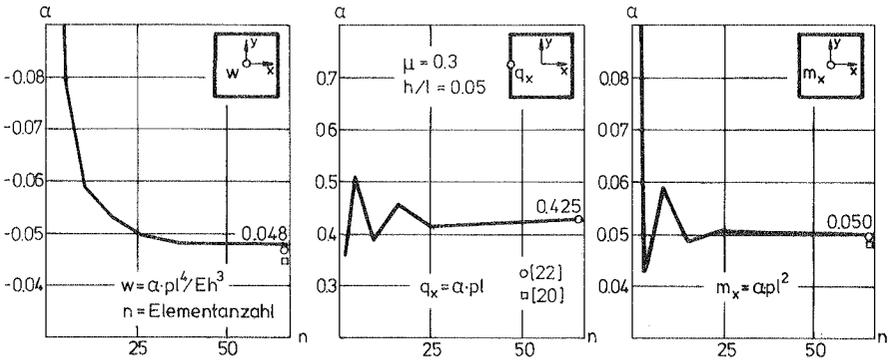


Bild 4.3 Ergebnisverbesserung durch Elementverdichtung

Dabei muß allerdings, wenn Konvergenz vorliegt, der Betrag der Differenz zweier aufeinanderfolgender Ergebnisse mit wachsender Unbekanntenzahl kleiner werden. Die Konvergenz auch dieser gemischten Elementansätze gilt als gesichert (siehe Kikucki/Ando [41], Johnson [42] u. a. ), soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Die Ergebnisse des gemischten Elements mit linearem Ansatz sollen in Bild 4.3 mit Lösungen von Deshmukh und Archer [22] (ermittelt mit der Methode der gewichteten Reste) und der Lösung von Salerno und Goldberg [20] (Ansatz trigonometrischer Reihen) verglichen werden. Die Lösung von Salerno und Goldberg ist nur bedingt vergleichbar, da hier  $\mu = 0$  für den Werkstoff und für die Randbedingungen  $w = 0$ ,  $\beta_t = 0$ ,  $m_n = 0$  gewählt wurde.

Neben der Beobachtung einzelner Ergebniswerte gibt auch die Kenntnis des Gesamtverlaufs der Größen Aufschluß über deren Genauigkeit. Da die gemischten Elementansätze im allgemeinen langsamer und damit schlechter konvergieren als vergleichbare Verschiebungsansätze, ist auf die Elementeinteilung bei Verfeinerung des Rasters besonderer Wert zu legen. Da als Ergebnis der Reissnerschen Theorie die Querkkräfte und auch die Drillmomente in einer schmalen Randzone stark

ansteigen oder abfallen, muß diese Zone besonders berücksichtigt werden.

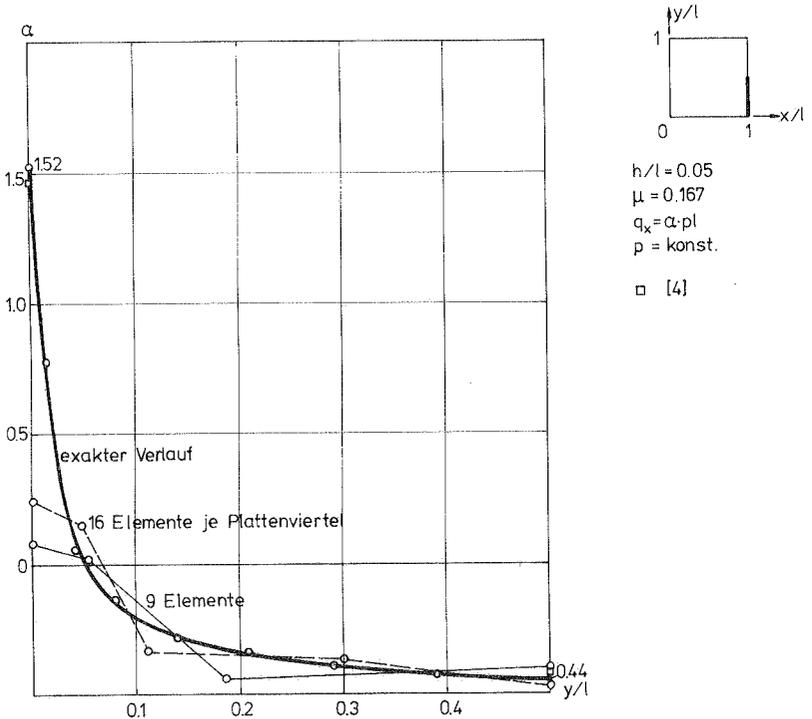


Bild 4.4 Querkraftverlauf

Es ist eine Elementverdichtung zum Rand hin unumgänglich, jedoch darf dabei kein zu großes Seitenverhältnis der Elemente (langer zu kurzer Elementseite) entstehen. Auch sollte das Verhältnis größtes zu kleinstem Element gewissen Einschränkungen unterworfen werden ( $< 5$ ), um nicht Zonen im Gesamtgebiet zu erzeugen, deren kinematische Eigenschaften mit kleinen Elementen wesentlich anders (weicher) beschrieben werden als Zonen mit großen Elementen. Werden hier grobe Fehler gemacht, so zeigt sich in den Ergebnissen eine gewisse Unruhe (Zickzackverlauf) bei den Schnittgrößen, die in der Regel um die richtigen Werte

pendeln. Bei gemischten finiten Elementen machen sich Fehler in der Elemententeilung stärker bemerkbar als bei reinen Verschiebungsansätzen.

#### 4.4 Vergleich mit anderen Elementmethoden

---

Ein Vergleich zwischen den verschiedenen Elementmethoden, also der Verschiebungs-, Spannungs- oder der gemischten Methode, ist schwer zu führen. Beim hier interessierenden Vergleich zwischen der häufig angewendeten Verschiebungsmethode und der gemischten Methode am Beispiel der Reissnerschen Plattentheorie bietet sich zuerst ein Genauigkeitsvergleich der Ergebnisse bei gleicher Unbekanntenanzahl an. Da bei der gemischten Methode durch die erforderlichen Ansätze für Verschiebungsgrößen und Spannungsgrößen schon vom Verfahren her mehr Unbekannte pro Element vorhanden sind, entsteht bei gleicher Elementzahl ein größeres Gleichungssystem. Als Ergebnis der Gleichungsauflösung können direkt nur die Verschiebungsgrößen verglichen werden, wogegen die Spannungsgrößen bei reinen Verschiebungsansätzen erst über eine Rückrechnung gewonnen werden können. Da aber die Spannungsermittlung aus einem vorgegebenen Verschiebungsfeld nach unterschiedlichen Rechenmodellen durchgeführt werden kann, die zu unterschiedlich genauen Ergebnissen führen, ist ein Vergleich der Verschiebungen allein nicht aussagekräftig.

Bei der Anwendung der Reissnerschen Theorie, bei der starke Spannungskonzentrationen in den Randzonen auftreten, muß ein Vergleich gerade dieser Randgrößen Aufschluß über die Genauigkeit geben. Da aber bei Verschiebungsmodellen Spannungsaussagen nur aus den Randverschiebungen für Elementinnenpunkte (Mitte oder Integrationspunkte) errechnet werden, ist eine Extrapolation der Randwerte notwendig. Wegen dieser Unsicherheit kann für die Kraftgrößen am Plattenrand kein exakter Vergleich geführt werden.

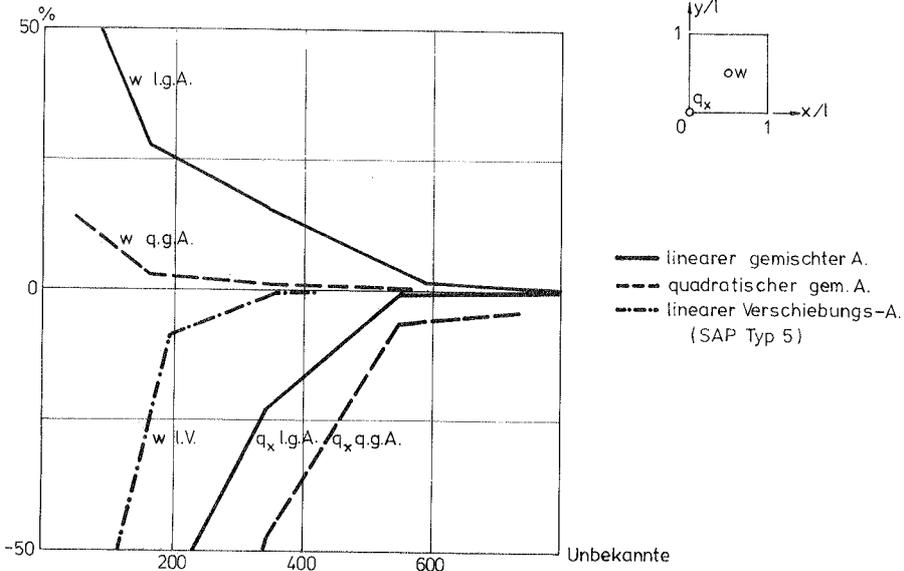


Bild 4.5 Vergleich verschiedener Elemente

Da die Rückrechnung der Spannungen aus den Verschiebungen je nach benutzter Lösungsmethode zu unterschiedlich großen Rechenprogrammen führt, müßte eine Kontrolle zum Beispiel auch der verbrauchten Rechenzeit mit durchgeführt werden. Leider wird die Rechenzeit aber wesentlich durch eine Reihe von Faktoren beeinflusst. Zum einen ist die Qualität des benutzten Rahmenprogramms mit den wesentlichen Teilen Eingabe, Zusammenbau, Gleichungsauflösung und Ausgabe zu berücksichtigen, zum andern sind die Möglichkeiten und die Ausnutzung der benutzten elektronischen Datenverarbeitungsanlage ausschlaggebend. Diese beiden Parameter sind nicht voneinander unabhängig, vielmehr durchmischt sich die Leistungsfähigkeit des Programms mit der sinnvollen Ausnutzung der Maschinenmöglichkeiten. Neben der Anlagenausnutzung ist die Meßgröße Rechenzeit durch den gebotenen Komfort des finiten Element-Programms bei der Ein- und Ausgabe beeinflusst.

Da diese Kennwerte mit den beschriebenen schwer faßbaren Parametern behaftet sind, ist ein Vergleich der Rechenzeit fragwürdig und soll nur am Rande vermerkt werden.

## 5. Auswirkungen der Reissnerschen Theorie auf ausgewählte Plattentragwerke

---

In diesem Abschnitt sollen die grundsätzlichen Auswirkungen dieser genaueren Theorie auf Verschiebungs- und Schnittgrößen an ausgewählten Plattenbeispielen untersucht und zusammengestellt werden.

Die nach der Theorie von Reissner gewonnenen Differentialgleichungen vierter und zweiter Ordnung (2. 14) und (2. 15) ermöglichen die Erfüllung aller durch die Lagerungsart vorgegebenen Randbedingungen. Im Gegensatz dazu sind nach der klassischen Theorie, die auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung führt, am Rand nur zwei Bedingungen frei. Durch die Einführung der Ersatzquerkraft  $q_e$  können die Randdrillmomente  $m_{nt}$  und die Randquerkräfte  $q_n$  zusammengefaßt werden, so daß die zwei Kräfte-Randbedingungen näherungsweise erfüllt werden können. Naturgemäß werden sich daher die Ergebnisse der Querkräfte und der mit ihnen verknüpften Drillmomente nach der klassischen Theorie am meisten von der genaueren Lösung nach Reissner unterscheiden. Dies trifft besonders auf den Randbereich der Platte zu.

An Platten mit verschiedenen Lagerungsbedingungen sollen die Unterschiede aufgezeigt werden. Belastung ist die konstante Flächenlast, jedoch sollen auch Einzellasten untersucht werden. Für ausgewählte Beispiele sind die Verläufe der Durchbiegung  $w$ , der Querkräfte  $q_x$  und  $q_y$  sowie die Momente  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  im Anhang aufgetragen. Diese Verläufe wurden als Ergebnis der finiten Elementrechnung direkt vom Rechner erstellt und gezeichnet.

### 5.1 Der frei drehbare Rand

---

Für die klassische Lösung können von den Randbedingungen (4. 12) nur die Bedingungen  $w = 0$  und  $m_n = 0$  direkt gefordert werden. Mittelbar ist jedoch auch  $w_{,t} = 0$ , da die Durchbiegung  $w$  am ganzen Rand Null ist. Demgegenüber können jetzt neben der Durchbiegung  $w$  beide aus der Gleichgewichtsbetrachtung am Rand sich ergebenden Schnittkraftbedingungen  $m_n = 0$  und  $m_{nt} = 0$  eingeführt werden. Eine Verdrehung

$\varphi_n$  der Normalen kann sich einstellen, da außer der Durchbiegungsableitung  $w_{,n}$  auch die Schiebung  $\beta_n$  eingeht.

Für Beispiel 1, der allseitig frei drehbar gelagerten Quadratplatte, sind die Durchbiegungen im Verlauf ähnlich zur Lösung nach der klassischen Theorie. Durch die genauere Beschreibung der Randbedingungen ist jedoch der Betrag der Mittendurchbiegung schon für dünne Platten ( $h/l = 0,05$ ) um etwa 10 % größer. Mit zunehmender Plattendicke macht sich die berücksichtigte Querschubverformung bemerkbar und es steigt auch der dimensionslose Vergleichswert für die Durchbiegung an (bei  $h/l = 0,3$  auf 50 %). Wird die Belastung als Oberflächenlast eingeleitet, ist eine weitere, durch die Spannungen  $\sigma_{zz}$  hervorgerufene Vergrößerung in geringem Maße zu verzeichnen.

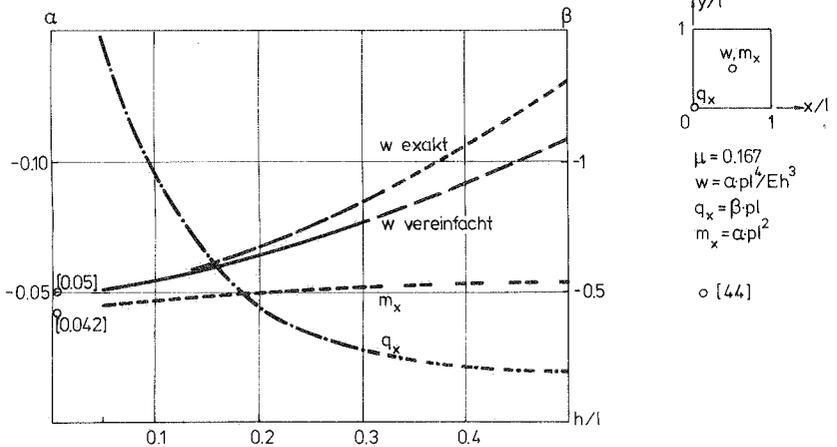


Bild 5.1 Abhängigkeit der Größen vom Verhältnis  $h/l$

Das Biegemoment, das im wesentlichen durch die Krümmung infolge der auch bei Kirchhoff gültigen Differentialgleichung für  $w$  (2. 14) beschrieben wird, hat einen der bekannten Lösung ähnlichen Verlauf. Das Mittenmoment weist aber einen um rund 5 % größeren Betrag

auf, der bei steigendem Dickenverhältnis  $h/l$  nur unwesentlich größer wird.

Auffällig an den Momenten  $m_x$  und  $m_y$  nach der Reissnerschen Theorie ist der Verlauf dieser Größen im Eckbereich. Hier tritt eine Vorzeichenumkehr und eine Momentenspitze auf. Diese Besonderheit ist darauf zurückzuführen, daß in der Momentenbeziehung außer der Krümmung noch die Querkraftableitung und die Belastung  $p$  auftreten, jeweils mit Faktoren versehen.

Nach Gleichung (2.13) gilt für das Moment  $m_x$ :

$$m_x = -k (\omega_{,xx} + \mu \omega_{,yy}) + \frac{k^2}{5} q_{,x} - \frac{k^2}{10} \frac{\alpha}{1-\alpha} \hat{p}$$

Während die Krümmungen zum Rand hin stetig kleiner werden, ändert sich die Querkraft längs  $x$  am Rand erheblich. Der Anteil aus  $\hat{p}$ , der mit  $\mu$  behaftet ist, hat keine wesentliche Auswirkung. Der Zusatz aus der Querkraftänderung wird im Eckbereich, da die Krümmung hier klein ist, für das Moment bestimmend.

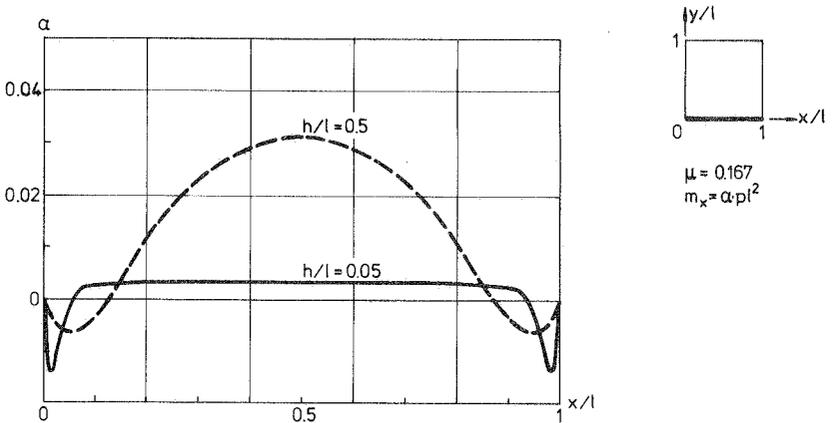


Bild 5.2 Momentenverlauf  $m_x$  am Rand

In diesem Zusammenhang muß zusätzlich festgestellt werden, daß die Momente im gesamten Randbereich bei der Kirchhoffschen Theorie falsch beschrieben werden. Dort wird aus der Durchbiegung  $w = 0$  längs des ganzen Randes die Krümmung  $\kappa = 0$  und somit verschwinden auch die Momente. Durch die Zulassung der Normalenverdrehung wird tatsächlich aber auch entlang des Lagers ein Moment  $m_t$  entstehen, das mit zunehmender Dicke größer wird. Bei Platten mit einem Dickenverhältnis von  $h/\ell = 0,3$  sind es schon 44 % des maximalen Feldmomentes.

Der Querkraftverlauf stimmt im Platteninnern weitgehend mit den klassischen Werten überein. Lediglich im Randbereich ist eine Abweichung der Ergebnisse feststellbar. Die Differentialgleichung 2. Ordnung für den horizontalen Verschiebungszustand (2.16) läßt die richtige Beschreibung auch der Krafrandbedingungen zu, wodurch der Querkraft- und der Drillmomentenverlauf genauer beschrieben werden. Die Querkraft  $q_x$  ändert im unmittelbaren Randbereich bei  $y = +0,45 \ell$  ihr Vorzeichen und erreicht bei dünnen Platten etwa den 5-fachen negativen Wert der Querkraft  $q_x$  in Randmitte bei  $x = -\ell/2$ . Die dabei am Rand  $x = -\ell/2$  entstehende aufsummierte negative Querkraft entspricht etwa der bei der Kirchhoffschen Theorie eingeführten Ersatzeckkraft. Für dicke Platten, also bei größer werdendem Verhältnis  $h/\ell$  verändert sich der Verlauf der Querkraft erheblich. Die Querkraft in der Plattenecke hat sich bei  $h/\ell = 0,3$  schon auf rund  $1/5$  der Querkraft dünner Platten verkleinert. Dagegen bleibt die Querkraft  $q_x$  in Randmitte bei  $x = \ell/2$  für alle Dicken nahezu gleich der Stützkraft nach Kirchhoff (Bild 5.3).

Durch die Krafrandbedingungen wird das Verschwinden der Drillmomente am Rand gefordert. Dies bewirkt, daß  $m_{xy}$  im Randbereich auf Null abfällt, während im Platteninnern annähernd die klassische Lösung vorliegt. Das Maximum der Drillmomente liegt bei dünnen Platten etwa  $0,07 \ell$  vom Rand entfernt und ist etwa 5 % kleiner als das Eckdrillmoment nach Kirchhoff. Für größer werdendes  $h/\ell$  wandert der Ort des Extremwerts von  $m_{xy}$  vom Rand weg und verkleinert sich (bei  $h/\ell = 0,3$  um  $1/3$  gegenüber  $h/\ell = 0,05$ ).

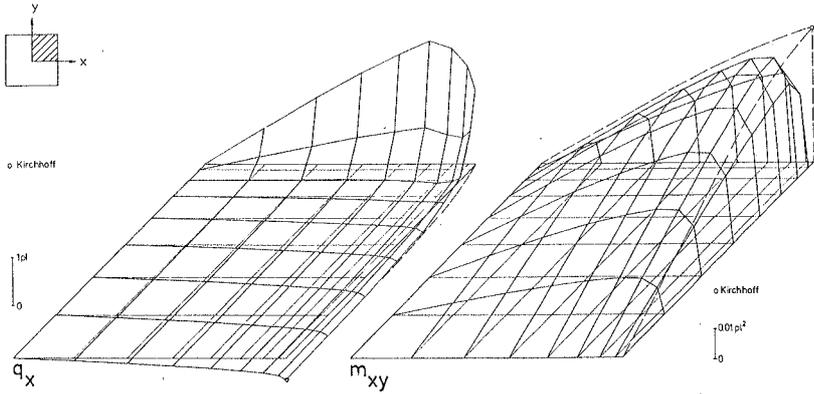


Bild 5.3 Verlauf von  $q_x$  und  $m_{xy}$  der allseitig verdrehbar gelagerten Quadratplatte

## 5.2 Der eingespannte Rand

Die eingespannte Quadratplatte (Beispiel 2) liefert nach der Reissnerschen Theorie für alle interessierenden Größen (Durchbiegung, Querkräfte und Momente) im Verlauf und Betrag annähernd die gleichen Ergebnisse, wie sie nach der klassischen Theorie bekannt sind. Für die jeweiligen Größtwerte liegen die Unterschiede unter 3 %, sind also unbedeutend. Lediglich im Randbereich sind bei den dort auftretenden geringen Beträgen größere Abweichungen vorhanden. Hierbei wurde die Einspannung durch  $w = 0$ ,  $\varphi_n = 0$  und  $m_{nt} = 0$  beschrieben.

Wird die Einspannung nur durch eine Verdrehbehinderung  $w_{,n} = 0$  (siehe Bild 4. 2) beschrieben, kann dies nur mittelbar durch die Fortführung der Platte in die Einspannung hinein erfolgen. Durch diese Beschreibung ist es möglich, Randspannungen wirklichkeitsnah über die Querschubverzerrungen in das Auflager abzuleiten. Dabei ist ein genügend breiter Plattenstreifen (Breite > Plattendicke) vertikal unverschieblich zu lagern, um die Querschubsteifigkeit richtig zu erfassen.

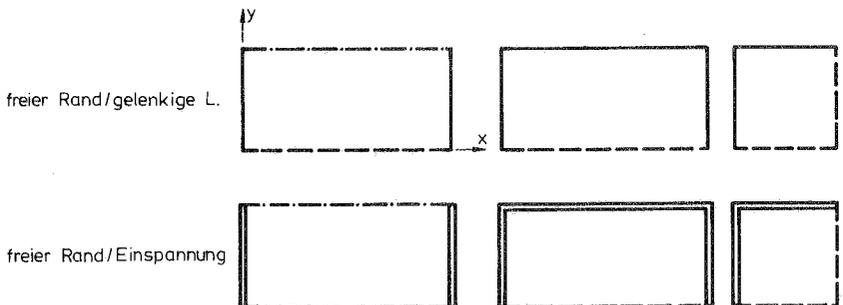
Wird die erste Lösung ( $w = 0$ ,  $\varphi_n = 0$ ,  $m_{nt} = 0$ ) mit den Ergebnissen verglichen, die bei dieser Verdrehbehinderung ( $w_{,n} = 0$ ) entstehen, sind für die Durchbiegungen  $w$ , bedingt durch die Nachgiebigkeit der Einspannung, größere Werte zu erwarten. Die Mittendurchbiegung beispielsweise ist rund 10 % größer als mit Verdrehbehinderung oder nach der Kirchhoffschen Theorie. Das Einspannmoment wird dadurch um etwa 5 % kleiner. Die durch die Verletzung der Randbedingungen begangene Ungenauigkeit wirkt sich bei dieser Lagerung nicht wesentlich aus, da die Forderung  $m_{nt} = 0$  mittelbar über  $w_{,nt} = 0$  erfüllt werden kann.

### 5.3 Der freie Rand

---

Die Bedingungen des freien Randes fordern das Verschwinden aller aus dem Rand austretenden Kraftgrößen (siehe Gleichung (4, 14)). An die Verformungsgrößen werden keine Bedingungen gestellt. Demgegenüber können nach der klassischen Theorie nur das Randmoment  $m_n$  und eine weitere Kraftgröße zu Null gefordert werden. Durch die Verknüpfung der Querkraft und des Drillmoments in der Ersatzquerkraft ist dies für  $\bar{q}_n$  möglich.

Um die Auswirkungen der genaueren Betrachtungsweise deutlich zu machen, sollen die Schnittkraftverläufe, insbesondere der Querkraft- und der Drillmomentenverlauf an freien Rändern untersucht werden. Da freie Ränder nur in Kombination mit anderen Lagerungsarten bei Platten vorkommen, werden stellvertretend folgende Plattentypen ausgewählt:



Die Auswahl wird so getroffen, daß der freie Rand an einer einachsig tragenden Platte und neben einem Zwischenzustand auch an einer symmetrisch zweiachsig spannenden Platte auftritt.

### Beispiel 3

(Gegenüberliegend frei, gegenüberliegend drehbar gelagert)

Im Innenbereich der Platte stimmen die Durchbiegungen und die Schnittgrößen mit den bekannten Lösungen gut überein. Das Tragverhalten ist dem des stellvertretenden Balkens ähnlich ( $q_x$  nahezu linear,  $m_x$  quadratisch verteilt) mit Ausnahme der Verknüpfung der Biegemomente  $m_x$  und  $m_y$  über die Querkontraktionszahl  $\mu$ .

Lediglich im Randbereich der Platte ergeben sich wesentliche Veränderungen bei den Schnittgrößen. Im Verlauf von  $q_x$  längs des Auflagers zeigt sich die zu erwartende Konzentration der Auflagerkräfte an der Ecke. Hier steigt die Auflagerkraft in einem schmalen Bereich von  $0,04 l$  auf den Faktor 6 gegenüber der Lösung des Balkens an.

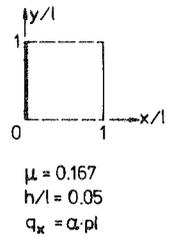
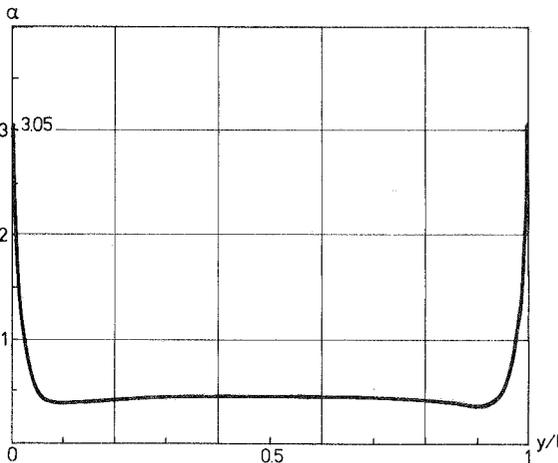


Bild 5.4 Randquerkraft  $q_x$

Die Eckquerkraft wird im Verlauf des freien Randes von der Plattenmitte aus nahezu linear ansteigend erreicht, so daß am gesamten freien Rand eine Vergrößerung der Querkraft um etwa den Faktor 6 gegenüber der linearen Verteilung des entsprechenden Balkens auftritt.

In Querrichtung dazu ist die Querkraft  $q_y$  im gesamten Plattenbereich, wie zu erwarten, sehr klein. Der Größtwert beträgt nur etwa 12 % der mittleren Randquerkraft  $q_x$ . Nur im Auflagerbereich wird der zu erwartende Anstieg des Querkraftverlaufs  $q_t$  des entsprechenden Navier-Randes wegen  $q_n = 0$  für den senkrecht dazu verlaufenden freien Rand verändert. Die Randquerkraft  $q_y$  steigt von der Plattenmitte nahezu linear bis zum Auflagerende an und springt dann auf den Wert Null. Dies wirkt sich ebenfalls nur auf eine schmale Randzone (0,04 l) aus.

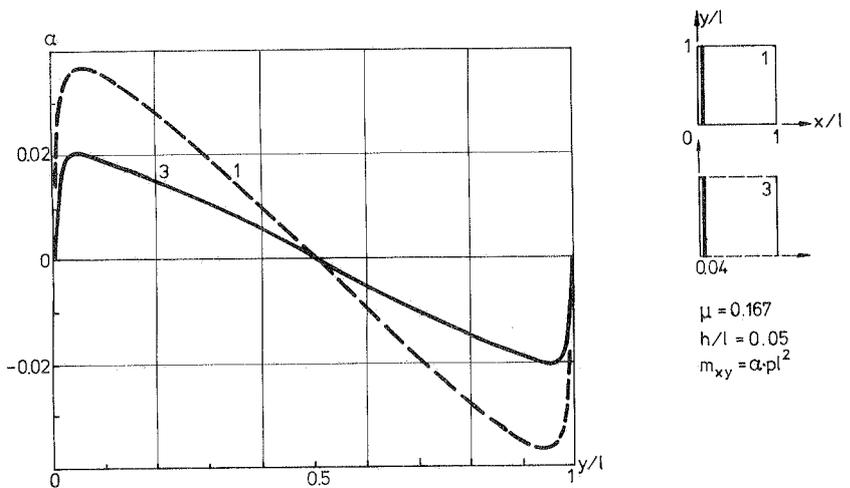


Bild 5.5 Drillmomentenverlauf  $m_{xy}$  im Schnitt  $x=0.04 l$

Beim Drillmomentenverlauf  $m_{xy}$  ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie bei der allseitig frei drehbar gelagerten Platte (Beispiel 1). Bedingt durch die geringere Verdrillung im Randbereich durch die ermöglichte Durchsenkung am freien Rand sind die Drillmomente nur etwa 56 % des

Betrages der Vergleichslösung. Der freie Rand bewirkt jedoch ein Verschieben des Maximums zum Rand hin, so daß nahezu ein Sprung auf den Wert Null erfolgt. Zum Auflager Rand hin entspricht der Verlauf dem der Vergleichslösung.

Beispiel 4

(Einseitig frei, dreiseitig drehbar gelagert)

Der Verlauf der Querkraft  $q_x$  am freien Rand entspricht dem des Beispiels 3, jedoch sind die Beträge durch den zusätzlichen Lagerrand insgesamt kleiner. Das Drillmoment  $m_{xy}$  dagegen ist, bedingt durch die stärkere Verdrillung infolge der zusätzlichen Unterstützung, um ein Drittel größer als beim Beispiel 3 und liegt somit zwischen der Lösung zweiseitige und allseitige Lagerung. Werden die Ergebnisse der Lösung nach der Kirchhoffschen Theorie gegenübergestellt, so ergeben sich einige deutliche Unterschiede.

Für die Randquerkraft  $q_x$  am frei drehbar gelagerten Rand wird die Ersatzquerkraft  $q_e$  und die Eckkraft  $R$  eingeführt, um die Randbedingungen und das Gleichgewicht befriedigen zu können. Im Vergleich dazu entstehen bei der genaueren Berechnung Randquerkräfte  $q_t$ , die vor allen Dingen entlang des freien Randes nicht erfaßt werden.

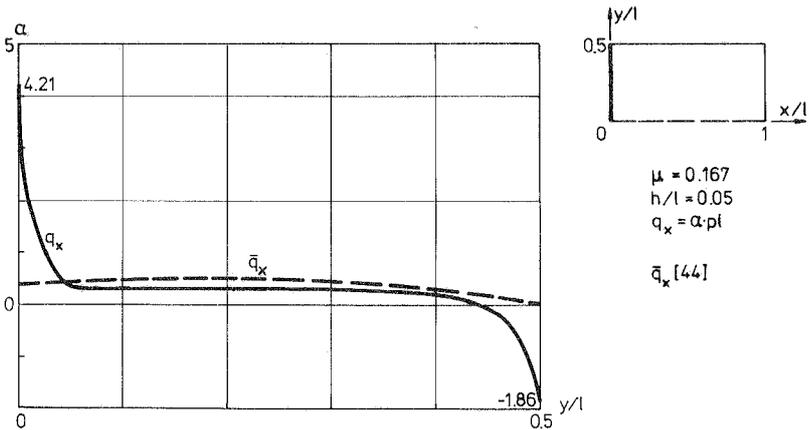


Bild 56 Randquerkraft

Diese Randquerkräfte werden annähernd linear bis zum Eckwert  $q_x = 4,21 \text{ pl}$  in einer schmalen Randzone aufgebaut. Dies führt zur falschen Beurteilung der Querkraft am gesamten freien Rand in einem Streifen der Breite  $0,02 \ell$ . Wird diese Querkraft entlang des Lagerrandes bei  $x = 0$  verfolgt (Bild 5.6), wird deutlich, daß die klassische Lösung die Querkraft im Mittelteil überschätzt (maximal bis zum 1,6-fachen Wert). Dagegen entspricht die Eckkraft  $R$  etwa der aufsummierten Querkraft im Eckbereich.

Durch die Verknüpfung der Krümmung mit dem Einfluß des Querkraftzuwachses bei Reissner ist im Bereich kleiner Neigungsänderungen die große Querkraftänderung ausschlaggebend, wogegen der zusätzlich auftretende Einfluß der Belastung von untergeordneter Bedeutung ist. Dadurch steigt das Moment zum Rand hin noch einmal an auf etwa den halben Mittelwert  $m_x$ .

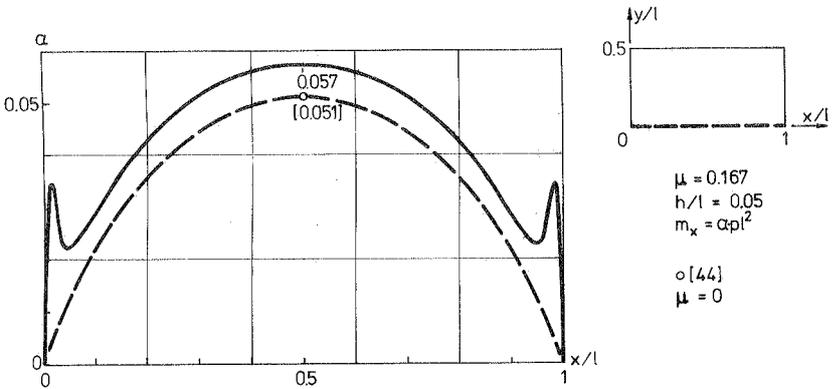


Bild 5.7 Momentenverlauf  $m_x$  am freien Rand

Beispiel 5

(Über Eck frei, über Eck drehbar gelagert)

Die bisher beobachteten Besonderheiten bei den Schnittkraftverläufen sind auch hier gültig, jedoch verstärkt sich die Konzentration der Kräfte zu den Auflagern hin. Die Eckquerkraft am Auflagerende ist mit  $q_x = 10,5 \text{ pl}$  um den Faktor 20 größer als die Querkraft im Mittelbereich des unterstützten Randes. Bei der zweiseitig gelagerten Platte Beispiel 3 ist der Vergleichswert 7. Im Verlauf des freien Randes ist die Querkraft  $q_x$  für alle betrachteten Beispiele ähnlich. Die Querkraft  $q_x$  nimmt linear zu, wogegen sie am gegenüberliegenden Auflager etwa konstant mit dem Wert  $q_x = 6,7 \text{ pl}$  verteilt ist.

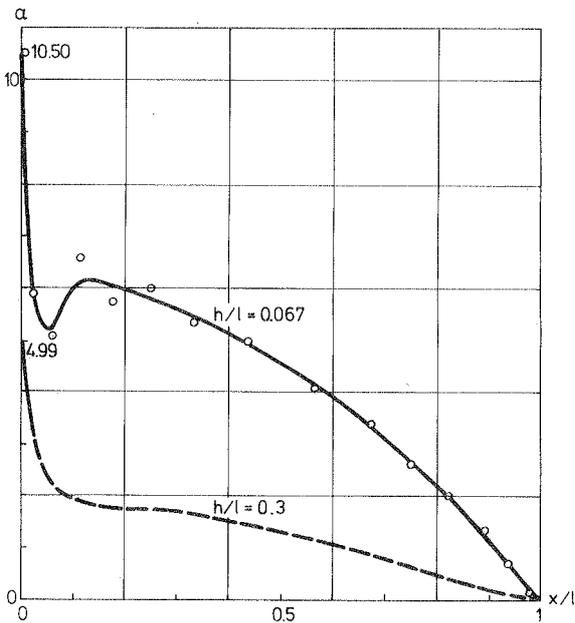


Bild 5.8 Querkraft  $q_x$  am freien Rand

Das Drillmoment  $m_{xy}$ , das für alle Ränder verschwinden muß, ist entsprechend der gleichsinnigen Verdrillung der gesamten Platte an allen Punkten negativ. Zur freien Ecke hin nimmt das Drillmoment etwa linear auf Null ab, während senkrecht zu den Rändern nahezu ein Sprung auf Null erfolgt.

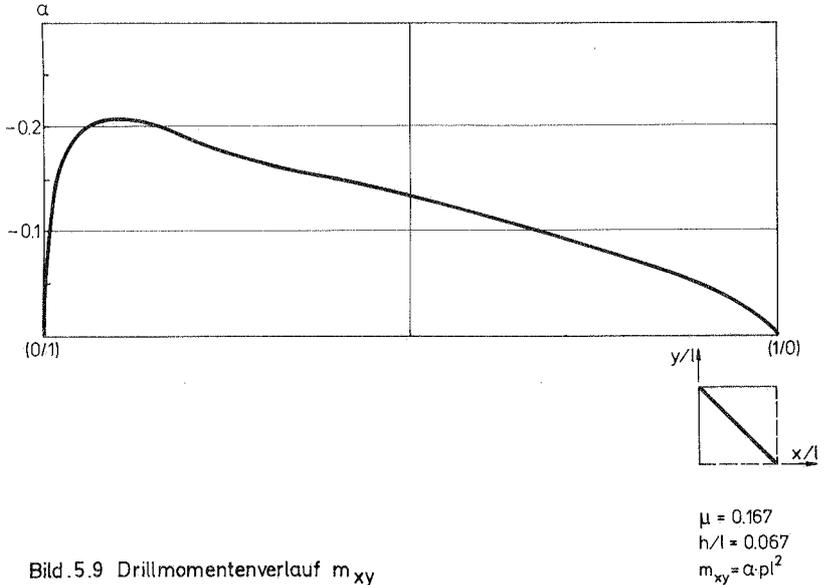


Bild.5.9 Drillmomentenverlauf  $m_{xy}$

Bei der Kombination des freien Randes mit der Einspannung soll als Randbedingung für die Einspannung die Verdrehung der Normalen behindert sein. An den selben Lagerungsfällen wie zuvor werden die sich ergebenden Unterschiede zur klassischen Lösung dargestellt.

Beispiel 6

(Gegenüberliegend frei, gegenüberliegend eingespannt)

Wie bei der entsprechenden drehbar gelagerten Platte stimmen die Durchbiegungen und die Biegemomente mit der klassischen Lösung gut überein. Nur für die Querkräfte und die Drillmomente sind Unterschiede im Bereich des freien Randes und vor allen Dingen im Eckbereich zu beobachten. In Tragrichtung verläuft die Querkraft  $q_x$  im Platteninnern wie auch beim Balken nahezu linear. An der Ecke dagegen entsteht als Lagerkraft eine Zugkraft ( $q_x = -1,48 \text{ pl}$  in der Ecke).

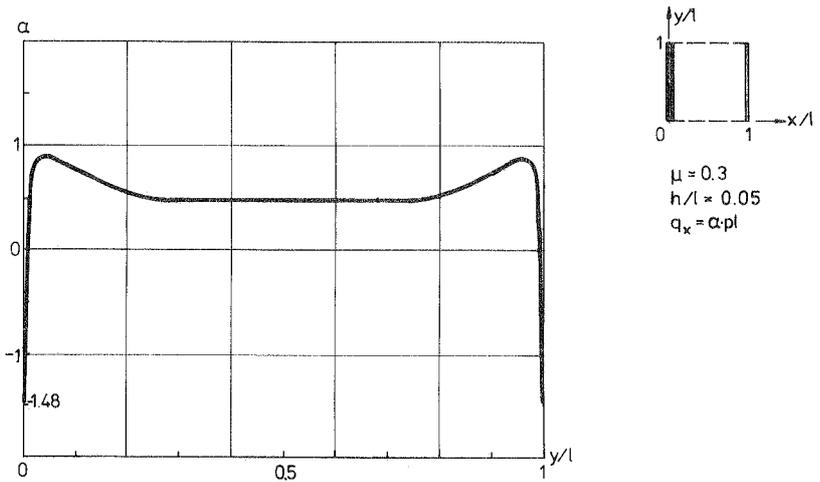


Bild 5.10 Querkraftverlauf  $q_x$

Wie auch beim Beispiel 3 sind die Querkräfte  $q_x$  am freien Rand in einem schmalen Bereich wesentlich größer als im Innenbereich. Es ergibt sich, bedingt durch die Eckzugkraft, ein anderer Verlauf in der Randzone als bei der frei aufgelagerten Platte.

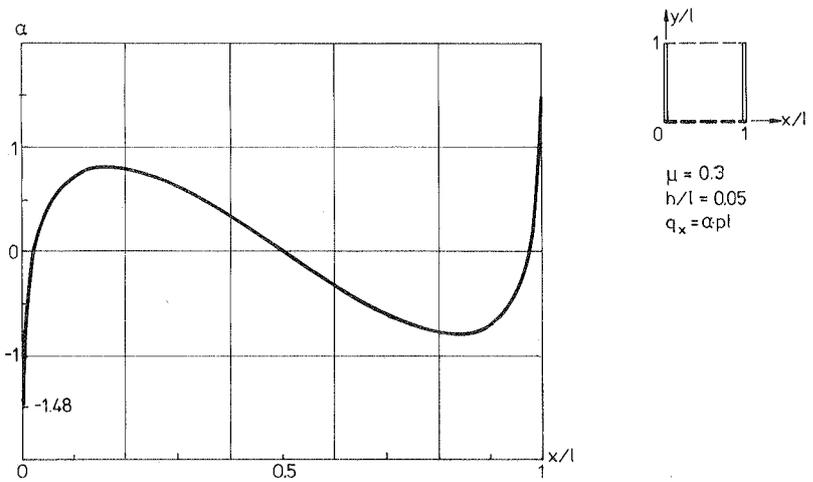


Bild 5.11 Querkraftverlauf  $q_x$  am freien Rand

Die Querkraft  $q_y$ , also die Querkraft senkrecht zum freien Rand und zur Tragrichtung hat nahezu im gesamten Plattenbereich unbedeutende kleine Werte. Lediglich im Eckbereich der Platte entsteht eine erhebliche Spitze (das etwa 2, 3-fache der durchschnittlichen Lagerkraft). Diese Größe tritt im unmittelbaren Eckbereich auf und baut sich entlang des Auflagerandes in einem Bereich von  $0,1 l$  auf Null ab.

Ähnlich wie die Querkraft  $q_y$  ist auch das Drillmoment  $m_{xy}$  klein (maximal 15 % des größten Drillmomentes der Navier-gelagerten Quadratplatte). Die Größtwerte treten nur in einer schmalen Randzone ( $0,05 l$ ) entlang des freien Randes auf. Hier bewirkt der freie Rand in seiner unmittelbaren Umgebung, daß die sonst in  $y$ -Richtung gleichbleibend gekrümmte Biegefläche eine Verdrillung erfährt.

Beispiel 7

(Einseitig frei, dreiseitig eingespannt)

Die grundsätzlichen Aussagen der eingespannten Platte (Bild 6) sind auch bei dieser Lagerungsart gültig. Die zum freien Rand parallele Einspannung als zusätzlicher Lagerung verkleinert die Beträge der Durchbiegung und der Querkräfte. Lediglich das Drillmoment wird, entsprechend der auftretenden Verdrehung, im Betrag größer (14 % größer als bei der eingespannten Quadratplatte) und ist über die gesamte Platte verteilt.

Im Vergleich zur klassischen Lösung [44] sind einige bemerkenswerte Änderungen in den Schnittgrößenverläufen festzustellen. Dies gilt im besonderen Maße für die Querkräfte, während die Biegemomente im wesentlichen dieselben Ergebnisse liefern. Die Querkräfte  $q_x$  entlang des Lagerrandes weisen nach Kirchhoff eine deutliche Spitze auf, was nach der Reissner-Lösung bei Annahme der unverdrehten Normalen ( $\varphi_n = 0$ ) nicht der Fall ist; die Querkraft nimmt im Bereich des freien Randes stark ab.

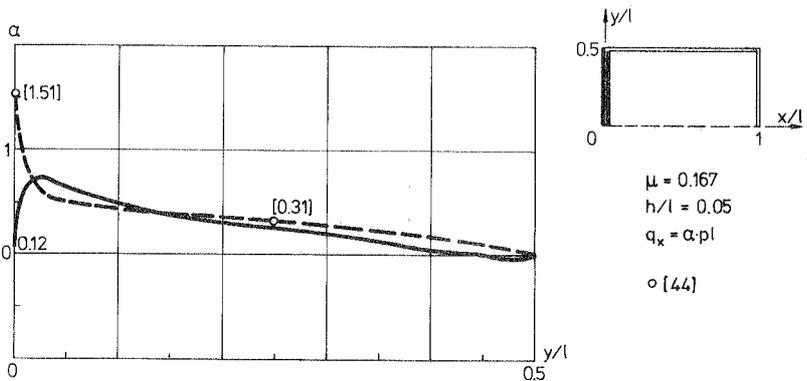


Bild 5.12 Querkraftverlauf  $q_x$

Am freien Rand ist der Größtwert der Querkraft mit  $q_x = 1,0 \text{ pl}$  etwa in den Drittelpunkten erreicht und wirkt sich, wie auch bei den vorigen Beispielen beobachtet, nur in einer schmalen Randzone aus.

Beispiel 8

(Über Eck frei, über Eck eingespannt)

Bei dieser eingespannten Kragplatte konzentrieren sich die beobachteten Besonderheiten auf den Eckbereich zwischen freiem Rand und der Einspannung sowie entlang des freien Randes selbst. An der auskragenden Ecke dagegen entstehen keine Schnittgrößen, was aus Gleichgewichtsgründen auch gefordert ist. Besonders die Querkräfte weisen einen stark veränderlichen Verlauf an den Rändern auf. Vergleicht man den Querkraftverlauf  $q_x$  am Rand und in der Mitte, so wird dies besonders deutlich.

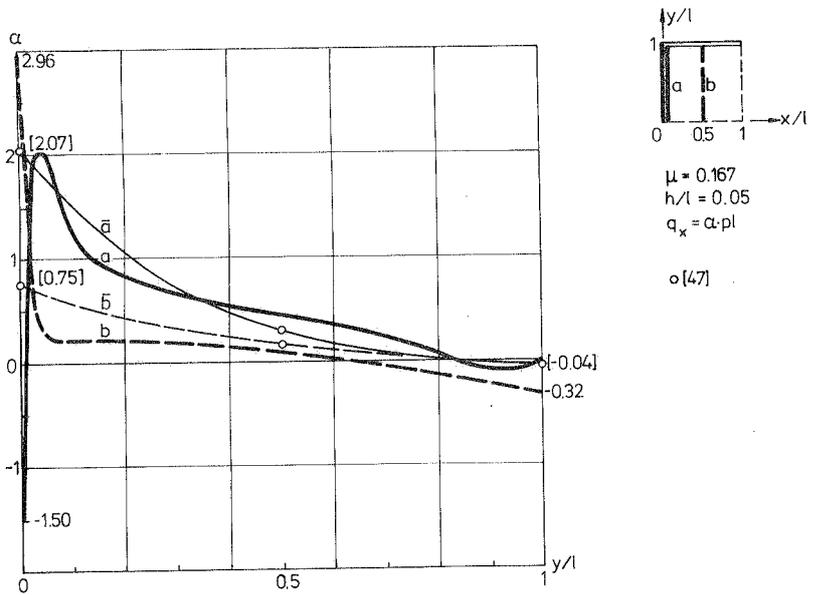


Bild 5.13 Querkraftverlauf  $q_x$  an verschiedenen Schnitten

Wird diesen Ergebnissen die Lösung nach Riehle und Stein [47] gegenübergestellt, sind deutliche Unterschiede erkennbar. Dies ist auf die falsche Beschreibung der Randbedingungen bei Kirchhoff zurückzuführen.

Die Biegemomente  $m_x$  und  $m_y$  werden nach der Kirchhoffschen Theorie im wesentlichen richtig beschrieben. Abweichungen liegen unter 5 % und sind somit in vielen praktischen Fällen vernachlässigbar. Beim Drillmoment  $m_{xy}$  ist zu beachten, daß die Gleichgewichtsforderung  $m_{nt} = 0$  am freien Rand nach der klassischen Theorie nicht berücksichtigt werden kann. Die dadurch entstehenden Drillmomente werden im gesamten Bereich um bis zu 10 % überschätzt. Dagegen fallen die Drillmomente tatsächlich am freien Rand in einer schmalen Zone (0,01 l) auf Null ab. Am Mittelschnitt soll dies gezeigt werden.

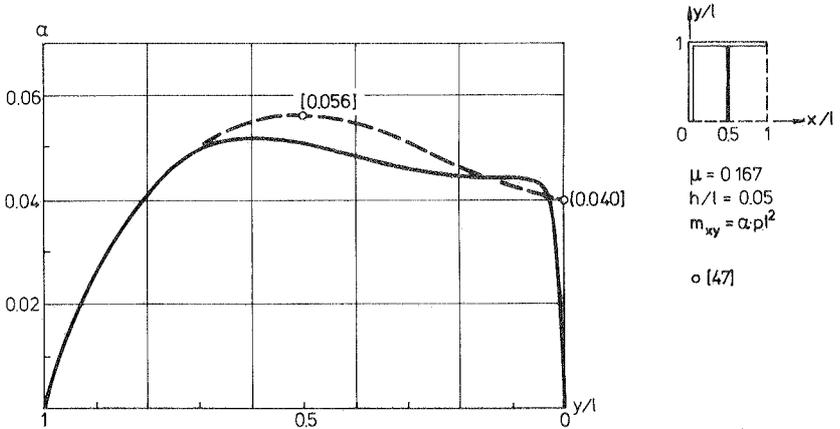


Bild 5.14 Drillmomentenverlauf  $m_{xy}$

Zusammenfassend läßt sich an den gewählten Beispielen zeigen, daß am freien Rand erhebliche Änderungen im Schnittkraftverlauf gegenüber der klassischen Lösung auftreten. Bei den Querkräften entstehen in einer schmalen Zone ( $< 0,1 \ell$ ) Spitzenwerte, die die Querkräfte im Inneren je nach Lagerungsart weit übersteigen. Jedoch klingen diese Randwerte sehr schnell ab, so daß sich im Innenbereich der Platte die Werte nach der Kirchhoffschen Lösung einstellen. Die Aufnahme der Querkräfte längs des freien Randes am Auflager führt zu einer Spannungskonzentration an der Ecke. Je nach Lagerungsart des Unterstützungsrandes entstehen hohe Druckkräfte (bei drehbarer Lagerung) oder Zugkräfte (bei der Einspannung).

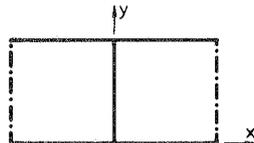
Bei den Drillmomenten  $m_{xy}$  können die geforderten Randbedingungen  $m_{xy} = 0$  nach der Reissnerschen Theorie erfüllt werden. Dies bedingt einen Drillmomentenverlauf, bei dem die Werte am Rand steil auf Null abfallen. Dagegen stimmen die Biegemomente mit der klassischen Lösung gut überein.

#### 5.4 Platten mit Zwischenunterstützung

---

Aus den Ergebnissen der zuvor betrachteten Plattentragwerke wird deutlich, daß die verfeinerte Theorie vor allen Dingen in den Randzonen der Platten von der klassischen Beschreibung abweicht. Dies rührt her aus dem Mangel dieser Theorie, die Randbedingungen und hier sind es besonders die Querkräfte, nicht exakt befriedigen zu können. Daher sollen in diesem Abschnitt über Zwischenunterstützungen durchlaufende Platten betrachtet werden im Hinblick auf die bekannten Ergebnisse der Kirchhoffschen Theorie. Dies soll exemplarisch geschehen an drei Beispielen:

einer in Tragrichtung  
verlaufenden Unterstützung,



einer senkrecht  
zur Tragrichtung  
verlaufenden  
unterbrochenen  
Unterstützung



und einer  
unterbrochenen  
Randstützung.

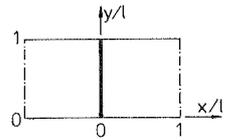
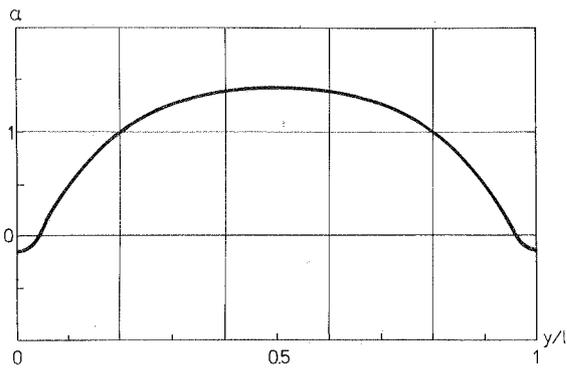


#### Beispiel 9

(Über Zwischenlager durchlaufend)

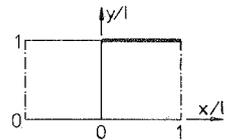
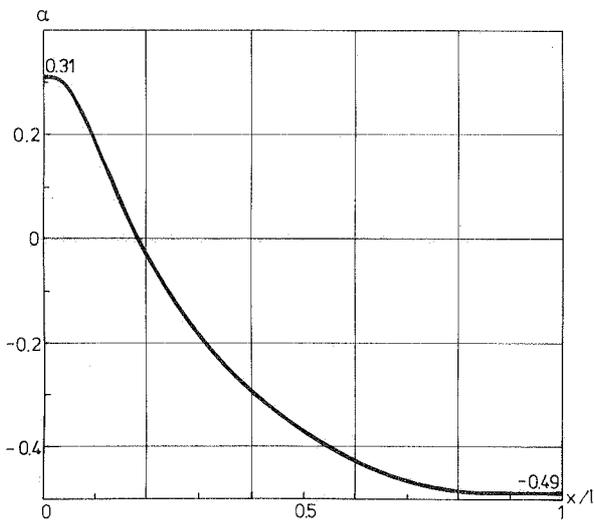
Für das darzustellende Zwischenauflager wurde eine endliche Lagerbreite ( $0,018 \ell$ ) angenommen. Die sich dabei ergebenden Durchbiegungen und Momentenverläufe sind durch die Kirchhoffsche Theorie ausreichend genau angegeben. Der begangene Fehler liegt bei 1 %. Die Auflagerlast, die sich aus dem Querkraftsprung am Lager errechnen läßt, stimmt mit der Vergleichslösung gut überein. Lediglich in der Eckzone zwischen Lager und Plattenrand treten, ähnlich wie in Beispiel 1, geringe abhebende Auflagerkräfte auf.

Für die Querkraft am Rand ergibt sich ebenfalls eine abhebende Kraft in der Umgebung des Zwischenlagers. Der Größtwert beträgt 58 % der Randquerkraft im unbeeinflussten Bereich.



$$\begin{aligned}\mu &= 0.167 \\ h/l &= 0.1 \\ q_x &= \alpha pl\end{aligned}$$

Bild 5.15 Auflagerkraft des Zwischenlagers



$$\begin{aligned}\mu &= 0.167 \\ h/l &= 0.1 \\ q_y &= \alpha pl\end{aligned}$$

Bild 5.16 Querkraft  $q_x$  am Plattenrand

Beispiel 10

(Unterbrochenes Zwischenlager)

Als Beispiel wird eine mittengestützte Platte mit einer Öffnung von  $1/3$   $l$  gewählt. Der für die Bemessung interessierende Momentenverlauf hat bei der Berechnung nach Kirchhoff am Ende des Zwischenauflagers einen singulären Wert. Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, geht beim Ansatz von Reissner über die Normalenverdrehung auch die Gleitung in die Momentenbestimmungsgleichung (2.12) ein. Dadurch bleibt der Momentenverlauf endlich.

Das Moment  $m_x$  entlang des Mittenauflegers zeigt den erwarteten kontinuierlichen Verlauf. Die am Unterstützungsende auftretende Momentenspitze, die im wesentlichen durch die Plattenkrümmung entsteht, wird entlang der Mittelstütze durch die Gleitung der Platte abgebaut. Der Endwert des Biegemomentes im ungestörten Bereich entspricht dem  $\mu$ -fachen Biegemoment in Querrichtung. Für  $\mu = 0$  muß der Endwert  $m_x = 0$  sein, da Krümmung und Gleitung Null sind.

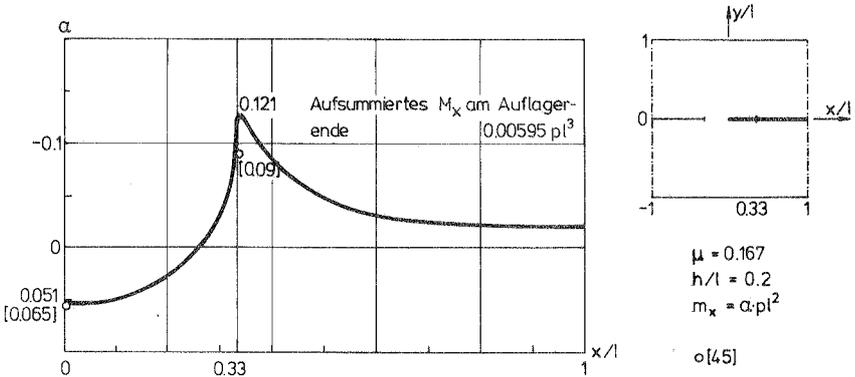


Bild 5.17 Momentenverlauf  $m_x$  über der Zwischenunterstützung

In den Vergleich dazu sollen Ergebnisse nach der Kirchhoffschen Theorie gestellt werden. Es stehen Werte von Zöphel [45] zur Verfügung, bei denen die unterbrochene Mittenstützung durch aneinander gereichte Einzelstützen dargestellt wurde. Der Öffnungsbereich ist dort allerdings  $0,4 \ell$ . Die extrapolierten Vergleichswerte stimmen in der Öffnungsmitte nahezu überein, sind am Auflagerende jedoch nur 60 % der dargestellten Lösung. Dies ist hauptsächlich in der größeren Auflagerbreite ( $0,05 \ell$  zu  $0,167 \ell$ ) und einer Ausrundung der Vergleichslösung, sowie im Materialkennwert  $\mu = 0$  begründet.

Das Moment  $m_y$  senkrecht zur Zwischenunterstützung vergrößert sich im Verlauf der Mittelstütze zum Lagerungsende hin um 60 %, baut sich aber senkrecht dazu in Tragrichtung schnell wieder ab. Dies entspricht annähernd dem in [45] angegebenen Verlauf, jedoch ist die Tragwirkung des Plattenteils zwischen den Lagerenden bei Berücksichtigung der Schubverformung kleiner. Das negative Moment ist in Öffnungsmitte nur 38 % des Stützmomentes der durchlaufenden Mittelstütze und damit rund 20 % kleiner als nach [45].

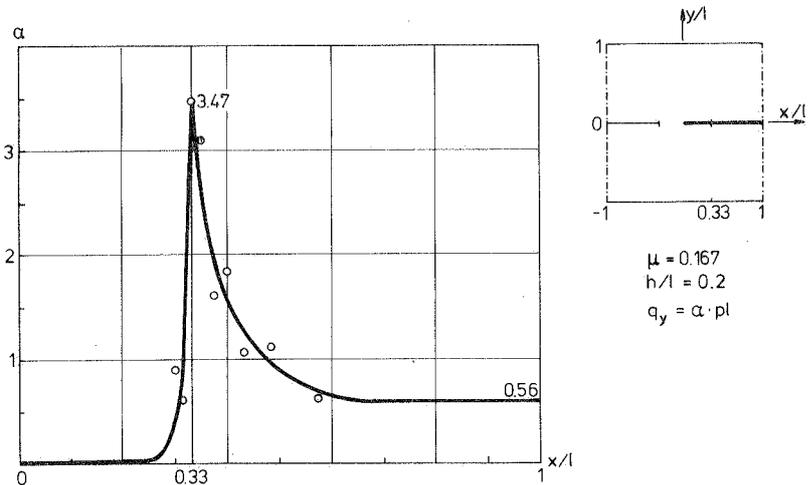


Bild 5.18 Querkraft  $q_y$  am Unterstützungsrand

Für die Bemessung sind neben den Momenten auch die Querkräfte im Bereich des Auflagerendes für den Nachweis gegen Durchstanzen von Bedeutung. An den Querkraftverläufen ist zu erkennen, daß sich die Kräfte am Ende des Zwischenlagers konzentrieren. Die Auflagerkräfte der Plattenränder sind nur unwesentlich von der Öffnung des Mittenlagers beeinflusst. Die Lagerkraft vergrößert sich lediglich um 9 %. Dagegen wird entlang der Mittenunterstützung eine Querkraftspitze für  $q_y$  ermittelt, die am Auflagerende den 6,2-fachen Wert der mittleren Querkraft aufweist (siehe Bild 5.18).

Entsprechendes gilt auch für die Querkraft  $q_x$  im Bereich der Öffnung. Hier konzentrieren sich die Kräfte auf einen Bereich am Auflagerende mit dem Radius  $0,1 \ell$ . Der sonstige Plattenbereich bis auf die Öffnung selbst ist in seinem Querkraftverlauf durch die Öffnung kaum gestört.

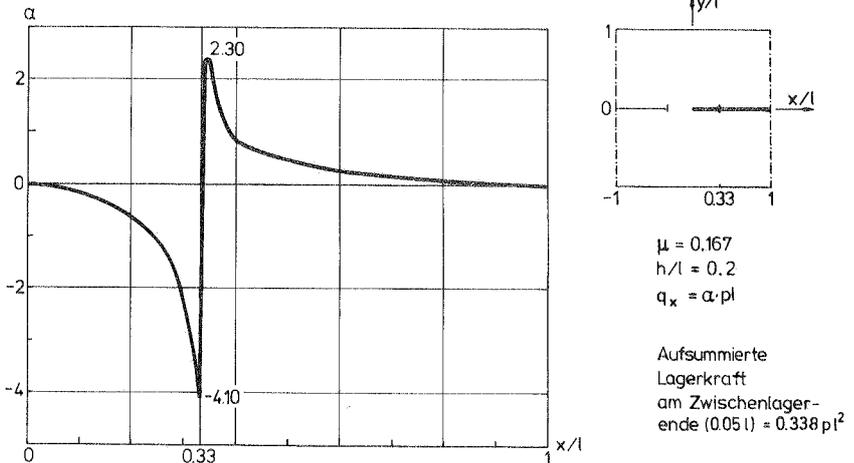


Bild 5.19 Querkraft  $q_x$

Beispiel 11

(Unterbrochene Randstützung)

Dieses Plattentragwerk unterscheidet sich vom Beispiel 10 nur in der Formulierung der Randbedingungen längs des unterbrochenen Lagers. Für den freien Rand gilt, das Moment  $m_n$  sowie die Querkraft  $q_n$  müssen verschwinden, dagegen gelten beim Zwischenlager die Symmetriebedingungen  $\varphi_n = 0$  und die Querkraft  $q_n$  springt durch Null. Der wesentliche Unterschied liegt also in der Verdrehbehinderung der Platte am Zwischenaufleger. Die fehlende Randunterstützung wird durch einen randträgerartigen Plattenstreifen in Randrichtung abgefangen.

Der Verlauf der Querkräfte  $q_x$  und  $q_y$  entspricht annähernd dem der Platte mit unterbrochener Zwischenstützung, jedoch klingt die Störung am Auflagerende schneller ab. Der Größtwert der Querkraft  $q_x$  ist 50 % und für  $q_y$  38 % größer als beim Beispiel 10 der durchlaufenden Platte. Die Werte werden durch Annahme einer realistischen Auflagerbreite anstelle der Schneidenlagerung wesentlich verkleinert.

Werden die Momente mit den Lösungen von Stiglat und Wippel in [46] verglichen, ist im Platteninneren eine befriedigende Übereinstimmung festzustellen. Nur im Bereich des Auflagerendes sind die hier für Schneidenlagerung errechneten Werte nur ca. 25 % der Lösung nach der Kirchhoffschen Theorie. Hier trägt die Platte parallel zum Lager mit.

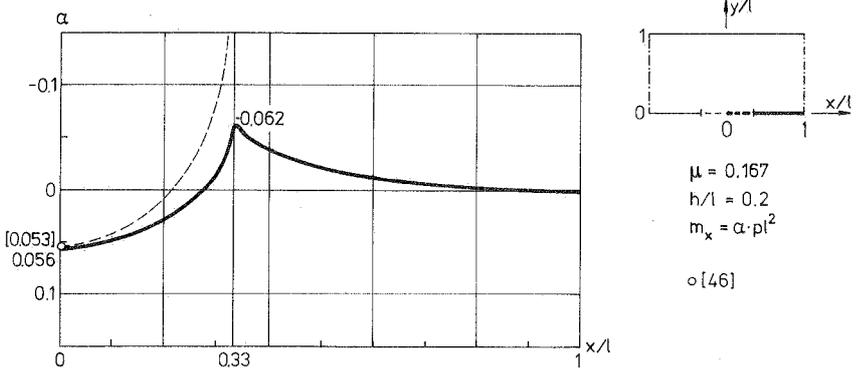


Bild 5.20 Momentenverlauf  $m_x$

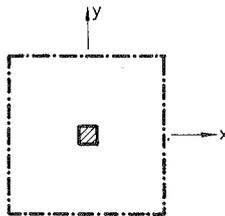
Zusammenfassend läßt sich für die Beispiele 9 bis 11 feststellen, daß für den gesamten Platteninnenbereich, mit Ausnahme der Umgebung des Unterstützungsendes, eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach der klassischen Theorie gegeben ist. Das Moment am Unterstützungsende läßt sich, wie gezeigt, nach Reissner als endlichen Wert errechnen, ist jedoch wesentlich von den vorgegebenen Auflagerbreiten abhängig. Das Einspannmoment in Öffnungsrichtung, über dessen Verlauf bei Kirchhoff nichts ausgesagt werden kann, baut sich in Lagerrichtung über die Änderung der Normalenneigung bis in eine Entfernung von etwa  $0,3 \ell$  vom Auflagerende ab.

Der Einfluß der unterbrochenen Stützung konzentriert sich im Verlauf der Querkräfte wesentlich stärker als bei den Momenten auf einen engen Bereich um das Lagerende. Dieser etwa kreisförmige Bereich hat einen Radius von  $0,1 \ell$ . Die Größtwerte der Querkräfte sind von der Auflagerbreite wesentlich abhängig.

#### 5.5 Platte mit Einzelstützung

---

Das in der Praxis häufig vorkommende System der auf Einzelstützen gelagerten Pilzdecke soll im Hinblick auf die Schnittgrößenkonzentration am Stützenrand untersucht werden. Als System wird das Innenfeld dieses Plattentyps mit einer Stützenbreite  $b$  von  $0,125 \ell$  gewählt.



Die nach der Theorie nach Kirchhoff unendlich großen Momente an der Stützenecke ergeben sich bei dem hier gewählten Rechenmodell nicht. Für den Querkraftverlauf  $q_x$  im Stützenbereich zeigt sich deutlich eine Konzentration der Kräfte an der Ecke. Der Querkraftsprung am Stützenrand ist an der Ecke um den Faktor 3 größer als in Stützenmitte.

Aus dem Querkraftsprung ergibt sich eine Lagerkraft und damit eine Auflagerung am Stützenrand. Die Stütze könnte demnach näherungsweise durch ein Linienlager entlang des Stützenrandes ersetzt werden. Der Innenbereich der Stütze beteiligt sich an der Lagerkraft nur unwesentlich. Dieses Ergebnis wird durch modellstatische Untersuchungen für Pilzdecken aus Beton bestätigt. Hiernach erfolgt eine Abstützung der Platte im wesentlichen nur am Stützenrand, während sich die innere Stützfläche durch die Nachgiebigkeit des Plattenquerschnitts auf Schub der Kraftaufnahme entzieht. Am Beispiel des Schnittes in der Stützenmitte und am Stützenrand wird dieses Tragverhalten deutlich.

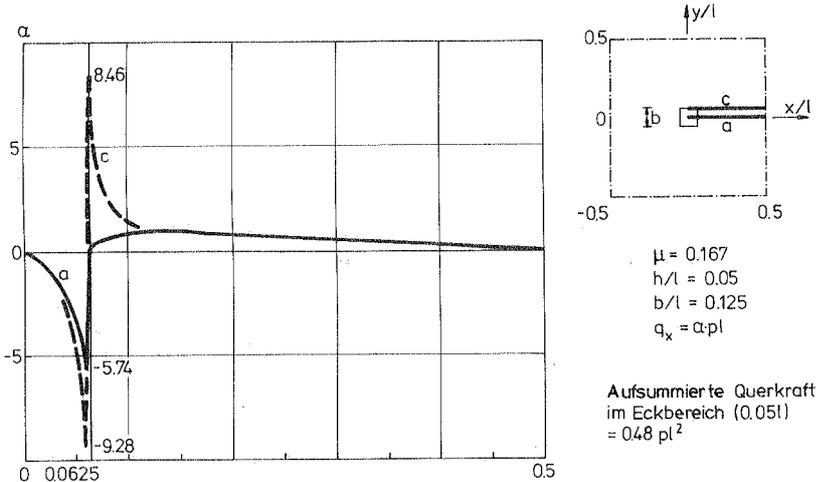


Bild 5.21 Querkraft  $q_x$

Die an den Plattenbeispielen des Abschnitts 5.4 gemachten Beobachtungen bei den Momentenverläufen sind auch bei dieser auf einer Quadratstütze lagernden Pilzdecke festzustellen. Die Momente an der Stützenecke haben endliche Werte und werden im Stützenbereich in der Platte fortgeleitet. Dies wird durch die Querschubsteifigkeit

der Platte ermöglicht. Es baut sich die Randneigung an der Stütze, ausgehend von den Symmetrielinien in der Stützenmitte ( $\varphi_n = 0$ ), linear zunehmend auf. Aus diesem Neigungszuwachs errechnet sich die Krümmung am Rand. Damit ist der Krümmungsverlauf der gesamten Platte stetig und die Momentenwerte endlich.

Die Berücksichtigung der Gleitung bewirkt außerdem einen Ausgleich der Momente am Stützenrand. Durch den Abbau des Spitzenwertes für das Eckmoment steigt das Moment in der Stützenmitte an. Das in Tragrichtung wirkende Stützmoment ist an der Ecke um 40 % größer als in Stützenmitte. Im Vergleich zur Lösung nach Kirchhoff, wie sie in der Arbeit von Riehle und Stein [47] angegeben ist, weichen die Momentenbeträge nur im Stützenbereich ab. Die Spitzenwerte an der Stützecke werden auf Kosten der Momente am inneren Stützenrand verkleinert.

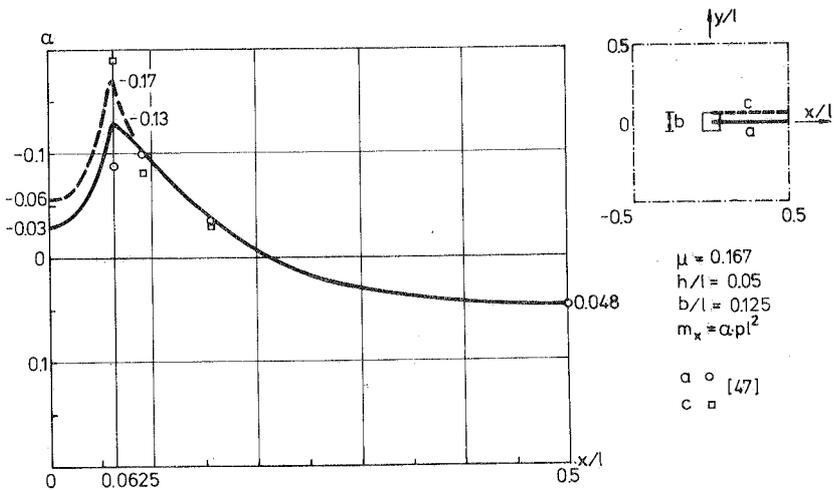


Bild 5.22 Momentenverlauf  $m_x$

Zur Stützecke hin weicht die Richtung der Hauptmomente stark von den gewählten Koordinatenrichtungen ab. Dadurch müssen die Drillmomente ihre Größtwerte auf der Diagonalen haben. Im Verlauf der

Diagonalen wechseln die im Feld an der Unterseite der Platte Zug erzeugenden Hauptmomente durch die Einspannwirkung im Stützenbereich ihr Vorzeichen. Das Drillmoment  $m_{xy}$  ändert das Vorzeichen und ein weiterer Extremwert wird über der Stütze erreicht. Am Stützenrand entsteht durch die weiterführende Platte eine gewisse Verdrehbehinderung der Querschnittsnormalen und dadurch Drillmomente. Diese werden bis zur Stützenmitte (Symmetrielinie) abgebaut. Am Verlauf des Drillmomentes längs der Diagonalen lassen sich diese Größtwerte ablesen.

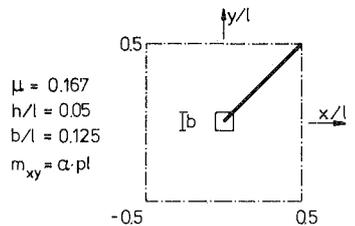
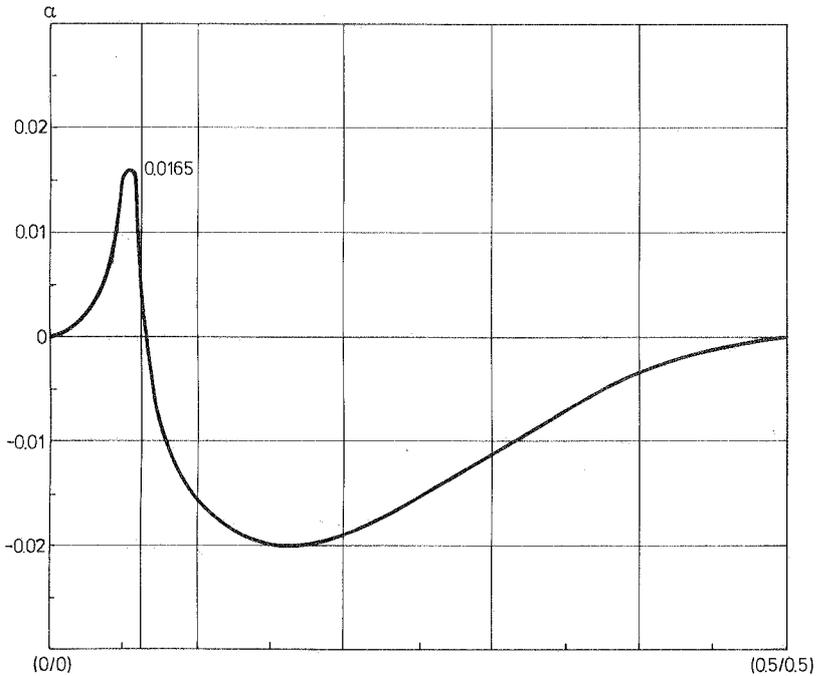


Bild 5.23 Drillmoment  $m_{xy}$

Das zur Beschreibung dieser Lagerung ebenfalls denkbare System einer Platte, die längs des Stützenrandes eingespannt gehalten wird, liefert unbefriedigende Ergebnisse. Für die Einspannung muß die Behinderung der Verdrehung der Querschnittsnormalen  $\beta_n = 0$  gefordert werden. Dies bewirkt am senkrecht dazu verlaufenden Stützenrand einen sprunghaften Anstieg für  $\beta_n$  an der Ecke. Dadurch entsteht ein Krümmungssprung, wie dies bei der klassischen Theorie ebenfalls der Fall ist. Die ECKmomente werden singulär. Nur wenn die Verdrehung der Querschnittsnormalen ermöglicht wird, kann die Gleitfähigkeit der Platte aktiviert und eine Berechnung nach der Reissnerschen Theorie wirklichkeitsnah durchgeführt werden.

## 5.6 Über Eck auskragende Platte

---

Ähnlich wie bei der Platte auf Einzelstützen werden die Momente bei der über Eck auskragenden Platte nach der klassischen Theorie an der Ecke unendlich groß.

Diese Singularität ist bedingt durch den Krümmungsverlauf an der Ecke des einspannenden Randes. Nach Kirchhoff wird das Biegemoment für  $\mu = 0$  errechnet:

$$m_n = K \cdot \kappa_n$$

Die Krümmung  $\kappa_n$  in Tragrichtung hat entlang des ungestörten Einspannrandes, bedingt durch die Kragwirkung, einen endlichen Wert. Durch die Konzentration der Spannungen im Eckbereich durch den zweiachsig auskragenden Plattenteil steigt die Krümmung zur Ecke hin an und hat unmittelbar neben der Ecke ihren Größtwert. Für die Ecke selbst muß, wegen des senkrecht dazu weiterführenden unterstützten Randes (die Durchbiegung  $w$  ist in  $n$ -Richtung gleich Null), die Durchbiegungsänderung und damit auch die Krümmung  $\kappa_n$  verschwinden. Dies führt bei Flächentragwerken zur Singularität für die Momente.

Nach der Reissnerschen Theorie wird die Krümmung entsprechend der Gleichung (2.2) aus der Änderung der Normalenneigung  $\beta_n$  ermittelt.

Damit lautet die entsprechende Bestimmungsgleichung für das Moment vereinfacht:

$$u_x = K \cdot \beta_{x,x} + L \cdot \hat{p}$$

Neben der aus der Normalenneigung berechneten Krümmung tritt der für diese Betrachtung unerhebliche Term  $L \cdot \hat{p}$  auf, der die Einleitung der Belastung als Oberflächenlast berücksichtigt. Die Berücksichtigung der Gleitfähigkeit des Plattenquerschnitts ergibt im gesamten Randbereich eine stetig verteilte Neigungsänderung  $\beta_{n,n}$  und damit stetig verteilte Krümmungen. Daraus errechnen sich an allen Punkten endliche Momente.

Bei Annahme einer Randeinspannung, die eine Verdrehung der ursprünglichen Querschnittsnormalen zuläßt (siehe Bild 4.2 rechts), wird das endliche Randeinspannmoment durch die Querschubverzerrung der Platte in die Einspannung fortgeleitet. Wird die Normalenneigung  $\beta_n$  längs der Einspannung behindert ( $\varphi_n = 0$ ), tritt bei diesem Ansatz ebenfalls ein singuläres Eckmoment auf.

Durch die verdrehte Querschnittsnormale wird eine Anfangsverdrehung an der Einspannstelle bewirkt. Dadurch werden die Durchbiegungen rund 17 % größer als bei unverdrehbarem Rand. Die maximale Durchbiegung an der auskragenden Ecke beträgt  $w = 5 \rho l^4 / Eh^3$ .

Den mit der Randbedingung  $w_{,n} = 0$  ermittelten Ergebnissen soll der Momentenverlauf gegenübergestellt werden, wie er von Ludwig [49] nach der Kirchhoffschen Theorie bei näherungsweise Berücksichtigung der Schubverzerrung ermittelt wurde. Zur Lösung wurde ein modifiziertes Differenzenverfahren mit der Rasterweite von  $\lambda = l/6$  gewählt. Der Momentenverlauf nach Reissner stimmt im gesamten Bereich der über Eck auskragenden Platte gut mit den Werten nach Ludwig überein. Lediglich an der Ecke sind hier um 18 % größere Einspannmomente als bei der Vergleichslösung vorhanden. Dies ist auf das dort benutzte relativ grobe Raster beim Differenzenverfahren zurückzuführen, womit solche Spitzenwerte schlechter dargestellt werden können.

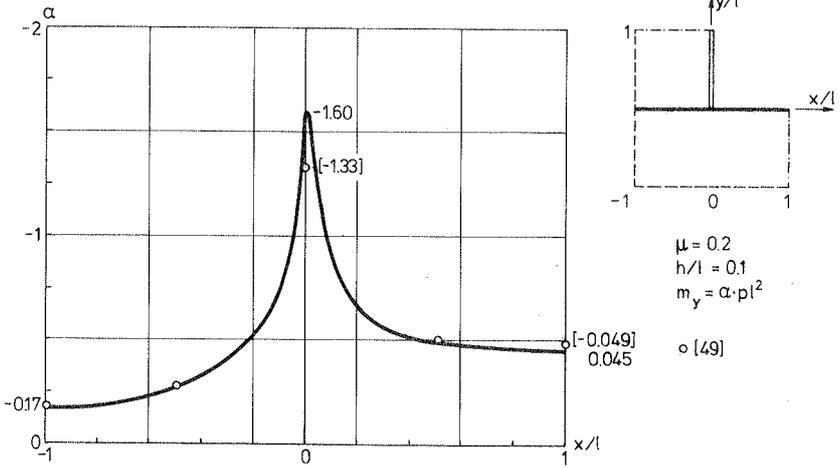


Bild 5.24 Moment  $m_y$

Die Querkräfte, die im Kragbereich der Platte linear ansteigen, konzentrierensich an der Einspannecke. Hier verursacht die Auflagerkraft

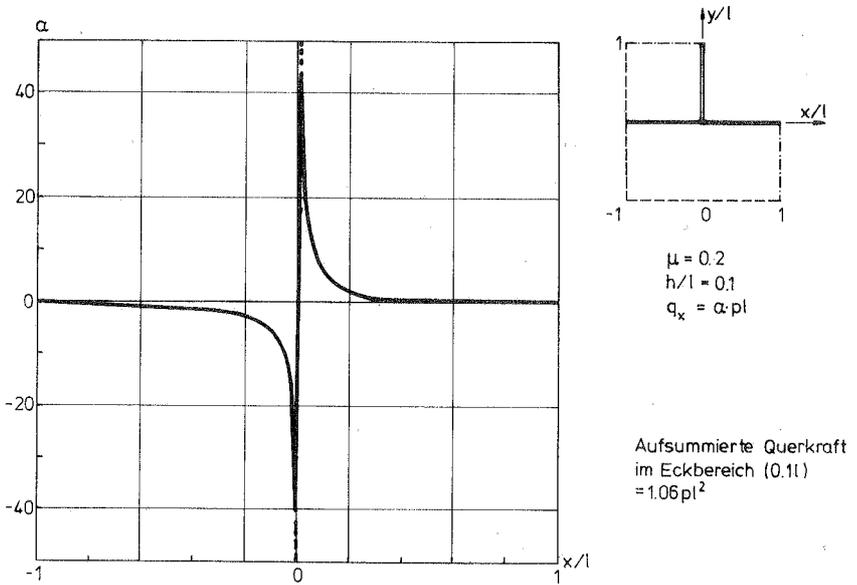


Bild 5.25 Querkraft  $q_x$

der Ecke einen Sprung im Querkraftverlauf. Entlang des Randes wird diese Eckquerkraft in einer Entfernung von  $x = 0,15 \ell$  wieder auf Null abgebaut. Am Schnitt  $y = 0$  wird dies deutlich.

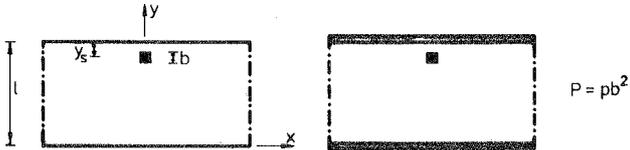
Für diese Plattentragwerke muß zusammenfassend festgestellt werden, daß die Querschubverzerrung der Platte für den Kraftverlauf von Bedeutung ist. Wird die elastische Eigenschaft des dreidimensionalen Tragwerks Platte auf ein zweidimensionales Ersatztragwerk reduziert, wie dies zur Entwicklung einer vereinfachenden Theorie notwendig ist, entstehen naturgemäß Näherungslösungen. Bedingt durch die Abmessungen der Plattentragwerke ist die Reduktion auf ein zweidimensionales Tragwerk (Mittelfläche) gerechtfertigt. Kirchhoff hat nur die Durchbiegung der Plattenmittelfläche, als der wesentlichen elastischen Verformungsfähigkeit der Platte, erfaßt. Jedoch machen sich Vernachlässigungen von elastischen Eigenschaften in der Plattenebene je nach der Verformungsfähigkeit des Tragwerks in den Ergebnissen bemerkbar. Reissner hat nun, ausgehend von den möglichen Verformungen in der Plattenebene, eine Erweiterung zugelassen. Dies wurde mit den horizontalen Verschiebungen, ausgedrückt durch die Rotation der ursprünglichen Querschnittsnormalen, eingeführt. So zeigt sich, daß Spannungskonzentrationen über die ermöglichte Querschubverformung abgebaut werden. Der Querschnitt entzieht sich durch Nachgiebigkeit an der Kraftaufnahme. In Bereichen verteilter Spannungen, wie dies im Innenbereich von Platten der Fall ist, spielt die gegenüber der Biegeverformung wesentlich kleinere Querschubverformung eine untergeordnete Rolle. Hier sind die Ergebnisse der Kirchhoffschen Theorie zutreffend.

## 5.6 Randnahe Lasten

---

Die zuvor untersuchten Plattentragwerke wurden durch konstante Flächenlast beansprucht. Um auch den Einfluß von Einzelkräften auf die Schnittgrößen, insbesondere auf die Querkkräfte, zu erfassen, sollen randnah aufgebraachte Lasten betrachtet werden. Hier sind besonders die Randquerkräfte und damit die Verteilung der Auflagerkräfte von Interesse. Da beim Reissnerschen Ansatz keine Punktlasten möglich

und diese auch nicht wirklichkeitsnah sind, soll die Belastung durch eine quadratische Lastfläche mit konstanter Verteilung und der Ausdehnung  $b = 0,1 \ell$  dargestellt werden. Diese Last wirkt mit veränderlichem Abstand  $y_s$  auf den Plattenstreifen, um Beeinflussungen durch die quer zur Lasttrichtung verlaufenden Plattenränder auszuschließen. Folgende Randbedingungen sollen angenommen werden:



An der Lastabtragung dieser konzentrierten Last beteiligt sich nur ein schmaler Plattenstreifen. In Randrichtung ist die Querkraft  $q_y$ , also die Querkraft in Tragrichtung, in einem Abstand  $x/\ell = 0,1$  für eine Last mit dem Randabstand  $y_s/\ell = 0,05$  nur noch rund 20 % der maximalen Randkraft. Die Beeinflussung quer zur Tragrichtung ist gering. Auch hier beteiligt sich nur ein schmaler Plattenstreifen an der Lastabtragung. Bei größer werdendem Randabstand der Last wird der Größtwert der Randquerkraft und damit der Lagerkraft kleiner. Demgegenüber beteiligt

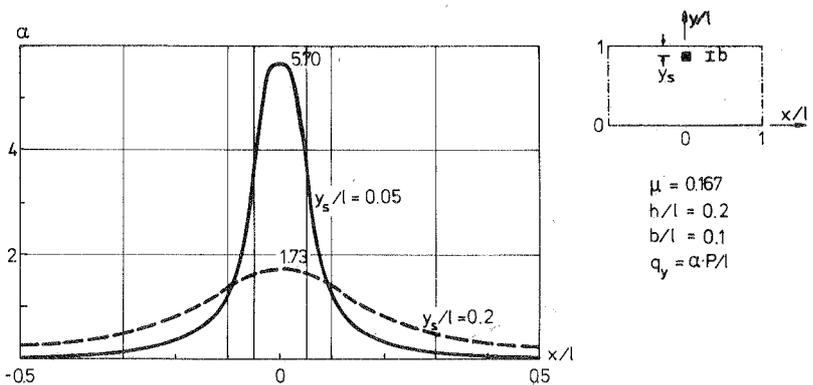


Bild 5.26 Verteilung der Randkraft

sich ein breiterer Streifen an der Lastabtragung. Bei einem Randabstand der Last von  $y_s/l = 0,2$  beträgt die Lagerkraft im Abstand  $x/l = 0,3$  noch 20 % der maximalen Auflagerkraft. Am Verlauf der Randquerkraft  $q_y$  läßt sich die Einflußbreite einer konzentrierten Last abhängig vom Randabstand deutlich ablesen.

Für veränderliche Lastabstände vom Lagerrand sind die Größtwerte der Lagerdrücke im (Bild 5.27) angegeben. Als Lagerung wurde der frei verdrehbare Rand und die Einspannung gewählt. Hier ergibt ein Vergleich mit der Lösung nach der Kirchhoffschen Theorie eine teilweise befriedigende Übereinstimmung. Eisenbiegler hat in [48] Querkräfte randnaher Lasten angegeben. Diese Lösung wurde mit Hilfe der Operatorenrechnung ermittelt. Bei der frei drehbaren Lagerung konzentriert sich durch die berücksichtigte Schubweichheit der Platte bei Reissner die Lagerkraft in Lastmitte stärker als in der zum Vergleich herangezogenen Lösung. Beim eingespannten Beispiel dagegen weist die Vergleichslösung 18 bis 30 % größere Werte auf. Dies ist auf die falsche Beschreibung der Randbedingung zurückzuführen. Durch die teilweise Drilleinspannung der Kirchhoffschen Platte zieht der lastnahe Rand die Kräfte auf sich und damit werden die Lagerkräfte zu groß ermittelt.

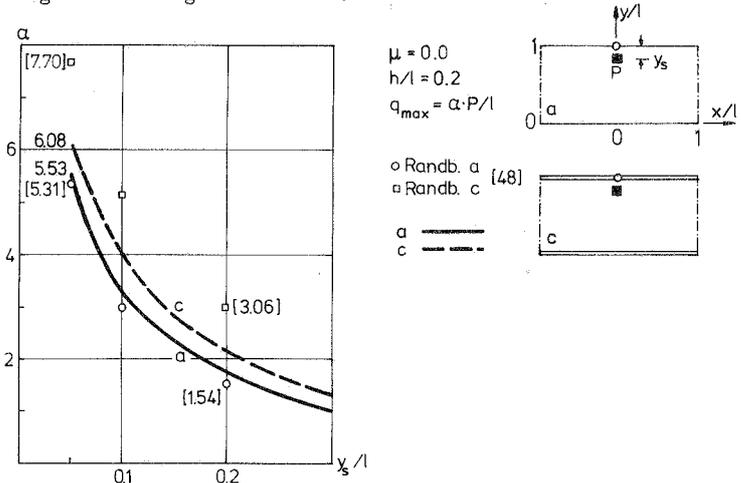


Bild 5.27 Maximale Randquerkraft  $q_y$

Die randnahen Lasten verursachen auf der gegenüberliegenden Lagerseite nur sehr geringe Kräfte. Bei einem Lastabstand von  $y_s/l = 0,05$ , die Last grenzt direkt an den Rand, beträgt der Größtwert der Randquerkraft nur 1 % derjenigen der belasteten Seite. Bei  $y_s/l = 0,2$  vergrößert sich der Einfluß wesentlich. Hier beträgt der Größtwert der abliegenden Lagerkraft 13 % der Kraft des lastnahen Randes. Am Verlauf der Querkräfte  $q_x$  in Lastmitte für einen Randabstand  $y_s/l = 0,1$  soll dies dargestellt werden.

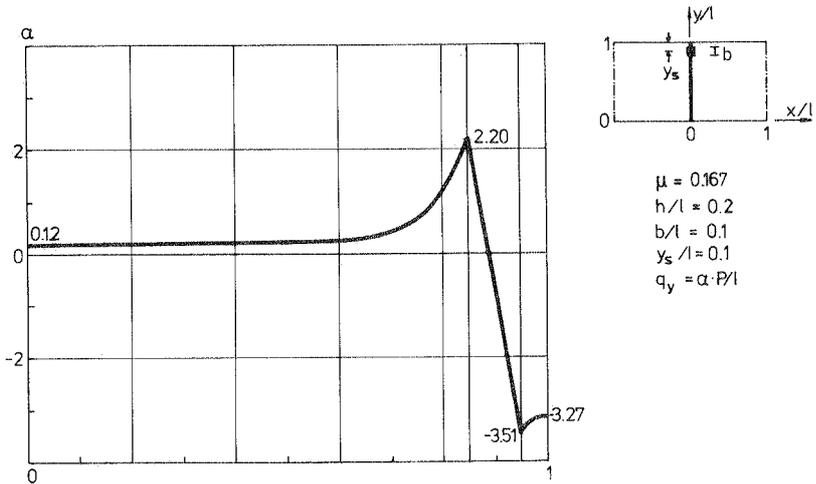


Bild 5.28 Querkraft  $q_y$

Diese Auflagerkräfte wurden am Beispiel einer mäßig dicken Platte  $h/l = 0,2$  errechnet. Bei dünneren Platten mit dem Dickenverhältnis  $h/l = 0,05$  bewirkt die größere Verformbarkeit der Platte eine Konzentration der Auflagerkraft im Bereich der randnahen Last. Bei der freidrehbaren Lagerung steigt der Größtwert maximal um 11 % und bei der Einspannung maximal um 20 %.

Auch auf die anderen Schnittgrößen hat die Änderung des Dickenverhältnisses keinen wesentlichen Einfluß. Nur die bezogene Durchbiegung  $\bar{w} = w E h^3 / p l^4$  wird kleiner, entsprechend der im Abschnitt 5.1 gemachten Erfahrungen. Für den frei drehbaren Rand sind es für  $h/l = 0,05$  rund 40 % gegenüber der mäßig dicken Platte.

## 6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

---

Die zur Berechnung von Plattenverformungen und Schnittgrößen angewandte klassische Theorie von Kirchhoff führt auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung für die Durchbiegung  $w$ . Zur Beschreibung der Randbedingungen stehend demnach zwei Freiwerte zur Verfügung. Damit lassen sich aber die je drei zu fordernden Randbedingungen nicht befriedigen. Die Einführung der Ersatzquerkraft am Rand wird erforderlich, in der die Querkraft und das Drillmoment zusammengefaßt werden.

Diesen Mangel vermeidet die Theorie von Reissner. Neben der Durchbiegung  $w$  werden auch die Verdrehungen der ursprünglichen Mittelflächennormalen als Verschiebungsfreiwerte zugelassen. Damit werden die elastischen Eigenschaften in  $x$ - und  $y$ -Richtung als Querschubverformung in die Schnittkraftermittlung eingeführt. Der Einfluß der  $z$ -Richtung wird nur insoweit berücksichtigt, als zu den zugelassenen Verformungen konsistente Spannungsverläufe vorgegeben werden. Die mathematische Behandlung der dabei entstehenden Differentialgleichungen 4. und 2. Ordnung ist aufwendig.

Zur numerischen Behandlung bieten sich verschiedene, auch bei der klassischen Theorie angewandte Verfahren an. Besonders wegen der Anwendbarkeit für wechselnde Geometrien wird in dieser Arbeit das Verfahren der finiten Elemente gewählt. Die üblicherweise bevorzugten Verschiebungsansätze liefern für ausgewählte Rasterpunkte Verschiebungsgrößen. Mit diesen werden in einem weiteren Rechenschritt, der sogenannten Rückrechnung, die Schnittgrößen ermittelt. Die so berechneten Schnittgrößen sind wesentlich ungenauer als die Verschiebungsgrößen. Als weiterer Nachteil zeigt sich, daß die Randbedingungen nur für die Verschiebungsgrößen, nicht aber für die Schnittgrößen gefordert werden können.

In dieser Arbeit werden daher finite Elemente mit gemischten Ansätzen verwendet. Ausgehend vom Funktional Hellinger - Reissner werden gleichzeitig für die Verschiebungsgrößen und die Schnittgrößen Ansätze gemacht. Damit ist die Möglichkeit gegeben, alle Randbedingungen direkt

in die Rechnung aufzunehmen. Als Ansätze werden im Element linear oder quadratisch verteilte Freiwerte gewählt.

Die Vergleichbarkeit von Elementen mit Verschiebungsansätzen und solchen mit gemischten Freiwerten ist nur bedingt gegeben. Neben der zu fordernden Genauigkeit spielt der Aufwandsvergleich eine wichtige Rolle. Wesentliche Parameter sind die unterschiedliche Unbekanntenzahl sowie die bei Verschiebungsansätzen erforderliche Rückrechnung.

Mit den gewählten gemischten finiten Elementen wird eine Reihe ausgewählter Plattentragwerke untersucht. Es werden hierfür, ausgehend von der Kenntnis des Tragverhaltens nach der genaueren Theorie von Reissner, Vergleiche zu Ergebnissen nach der Theorie von Kirchhoff angestellt. Neben den verschiedenen Lagerungsarten (frei drehbar, eingespannt und frei) werden die zwischengestützten Platten und die über Eck auskragende Platte unter konstanter Flächenlast untersucht. Außerdem wird die Wirkung von randnahen Einzellasten betrachtet.

Die Reissnersche Theorie ermöglicht im Gegensatz zur klassischen Lösung die Erfüllung aller Kräfte- und Momentenrandbedingungen. Beim frei drehbaren Rand entstehen als wesentlicher Unterschied in einer Randzone der Breite  $0,1 \ell$  in Randrichtung wirkende Querkräfte, die bei dünnen Platten bis zum fünffachen Wert der Querkraft senkrecht zum Rand ansteigen. Ähnliches gilt auch für den freien Rand, wogegen sich beim eingespannten Rand keine wesentlichen Unterschiede zur klassischen Theorie ergeben. Die Kombination des freien Randes mit dem frei drehbaren Rand führt zur Konzentration der Querkraft auf den Eckbereich. Die Auflagerkraft erhöht sich, je nach Art der übrigen Lagerung, auf das 7- bis 20-fache der Lagerkraft im Mittelbereich. Das bedingt eine, entlang des freien Randes zunehmende, in Randrichtung wirkende Querkraft, die in einem Streifen der Breite  $0,1 \ell$  wirkt. Tritt der freie Rand zusammen mit der Einspannung auf, entsteht im Eckbereich eine Zugkraft, die sich entlang der Ränder schnell abbaut. Die Querkräfte sind dadurch entlang des freien Randes nur etwa halb so groß wie bei den entsprechenden verdrehbar gelagerten Platten. Entlang des freien Randes und des verdrehbar gelagerten Randes sind somit, besonders bei hochbelasteten Betonplatten,

die Schubspannungen zu beachten. Im Platteninnern ist die Übereinstimmung, abgesehen von der durch die Schubverformung herrührenden größeren Nachgiebigkeit, mit den klassischen Ergebnissen befriedigend. (Abweichungen bei den Momenten und Durchbiegungen bleiben unter 10 %.)

Das Problem der Zwischenunterstützung mit Wänden oder Einzelstützen führt bei Kirchhoff durch die sprunghafte Änderung der Krümmung am Unterstützungsrand zu Singularitäten. Dies ist dadurch bedingt, daß in dieser Theorie nur die Querverschiebung  $w$  und die daraus abgeleitete Krümmung  $\kappa$  zur Abtragung der Kräfte zugelassen sind. Durch die Einführung der Querschnittsverdrehung wird die Verformungsmöglichkeit in der Plattenebene mit zur Kraftfortleitung herangezogen. Aus der Querverschiebung (Krümmung) der Platte entstehende Spannungskonzentrationen an Unterstützungsändern werden nach der genaueren Theorie über die Verdrehung der ursprünglichen Querschnittsnormalen (Schiebung) abgebaut. Es entstehen am Unterstützungsrand stetige Krümmungen und somit überall endliche Momente. Hier ermöglicht die Reissner'sche Theorie eine wirklichkeitsnähere Berechnung der Plattenschnittgrößen.

Bei der über Eck auskragenden Platte ist nach Kirchhoff eine ähnliche Konzentration der Spannungen an der Ecke zu beobachten. Dabei kennzeichnen festgelegte Randverschiebungsgrößen die Einspannung. Wird die Einspannung jedoch wirklichkeitsnah beschrieben durch Fortführung der Platte in den Auflagerbereich hinein, können bei Anwendung der genaueren Betrachtungsweise Randspannungen durch die Schubverzerrungen der Platte weitergeleitet werden. Die jetzt endlichen Einspannmomente bauen sich im Einspannbereich auf kurzer Entfernung ( $\sim$  Plattendicke) ab.

Für diese Plattentragwerke über Zwischenunterstützungen oder über Ecklagerung zeigen sich die Grenzen der klassischen Theorie. Die durch Beschränkung der tatsächlichen Plattenverzerrungen nur auf die Querverschiebung entstehenden Spannungsspitzen sind nicht wirklichkeitsnah. Hier kann der Kraftverlauf nur unter Einschluß auch der Verschiebungsmöglichkeiten in der Plattenebene genauer beschrieben werden.

Abweichungen von der klassischen Lösung treten bei den Schnittgrößen im Bereich der Unterstützung auf, während für den Innenbereich etwa die klassischen Werte ermittelt werden.

Im Hinblick auf die bei der klassischen Theorie gemachte Näherung bei den Randquerkräften wird, neben der Wirkung von Flächenlasten, auch der Einfluß randnaher Einzellasten (Rechtecklast) auf die Lagerkräfte untersucht. Für die frei drehbare Lagerung bewirkt die erweiterte Nachgiebigkeit der Platte eine Konzentration der Randquerkraft auf den Lasteinleitungsbereich. Es entstehen größere maximale Randquerkräfte als nach der klassischen Theorie. Dagegen breitet sich die Einzellast entlang des eingespannten Randes durch die zugelassene Schubverzerrung weiter aus, wogegen ohne zugelassene Schubverzerrung Drillmomente entlang des Einspannrandes entstehen. Die maximale Auflagerkraft ist rund  $1/4$  kleiner als nach Kirchhoff und nahezu unabhängig vom Dickenverhältnis der Platte.

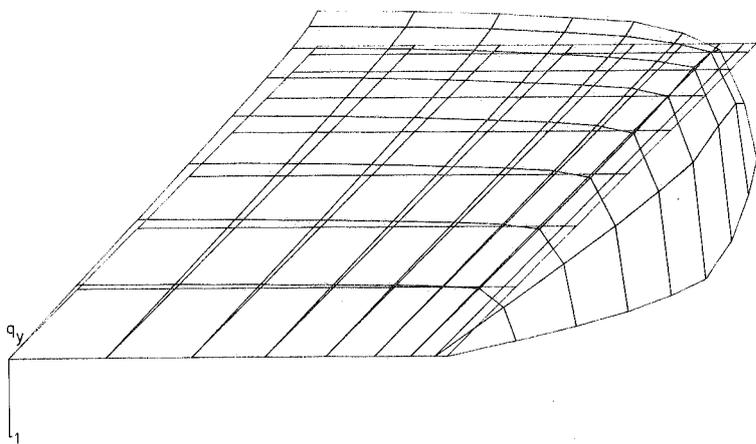
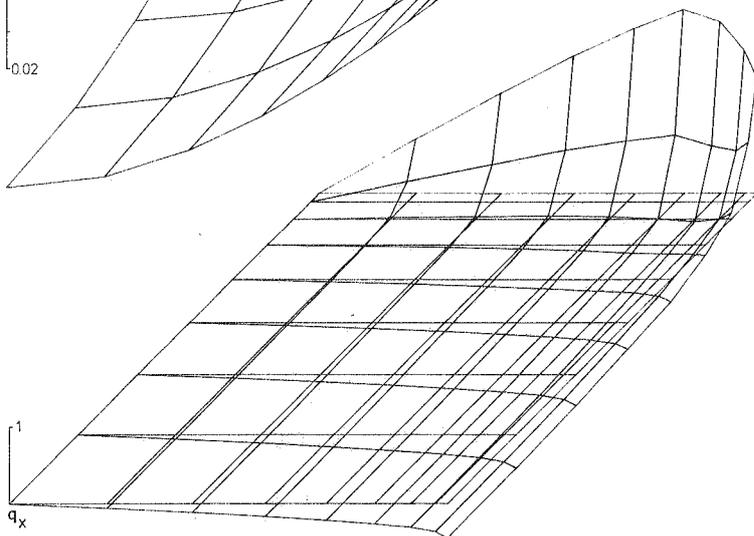
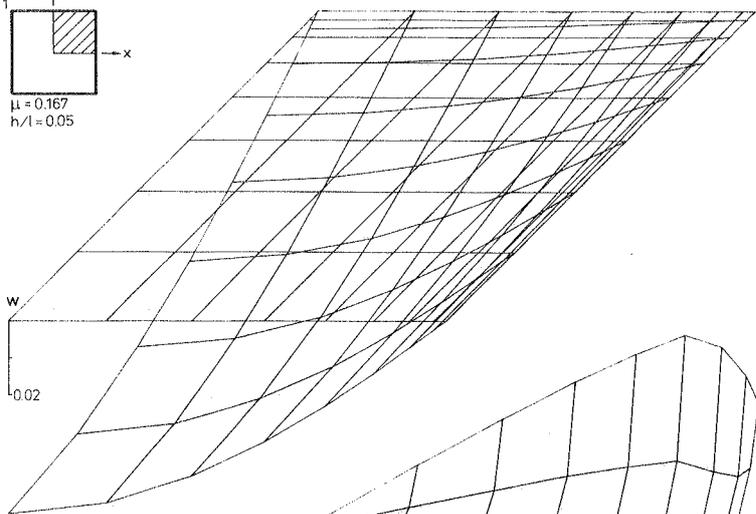
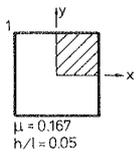
Für ausgewählte Plattentragwerke unter den vorgegebenen Lasten zeigt die genauere Beschreibung des Verformungsverhaltens vor allen Dingen für die Querkräfte und die Drillmomente Unterschiede zu den klassischen Ergebnissen. Dies gilt in besonderem Maße in der Umgebung von Rändern, Unstetigkeiten in der Lagerung oder bei konzentrierten Lasten, während im Platteninnenbereich eine befriedigende Übereinstimmung mit Kirchhoffschen Werten vorliegt. Zur Ermittlung dieser genaueren Schnittkraftverläufe stellen die benutzten gemischten finiten Elemente einen gut einsetzbaren Lösungsalgorithmus dar.

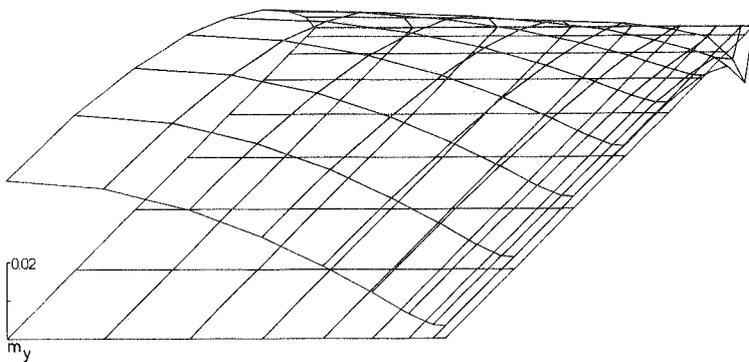
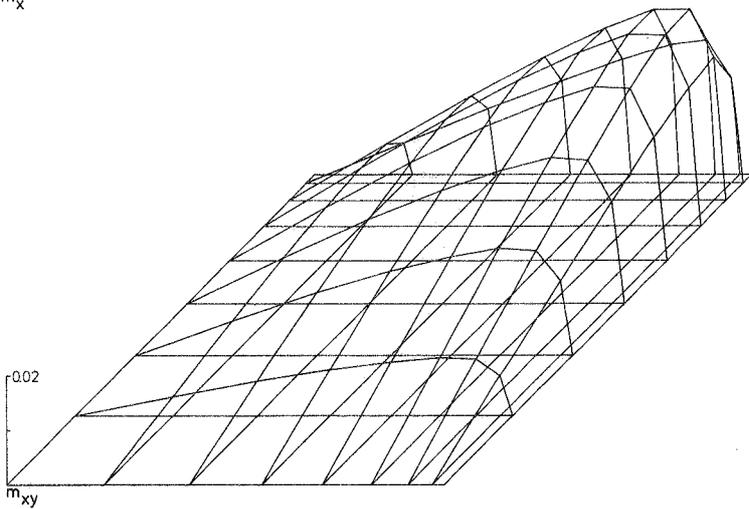
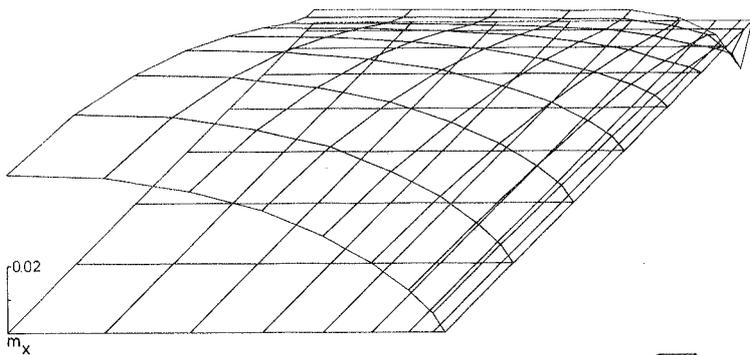
## Anhang

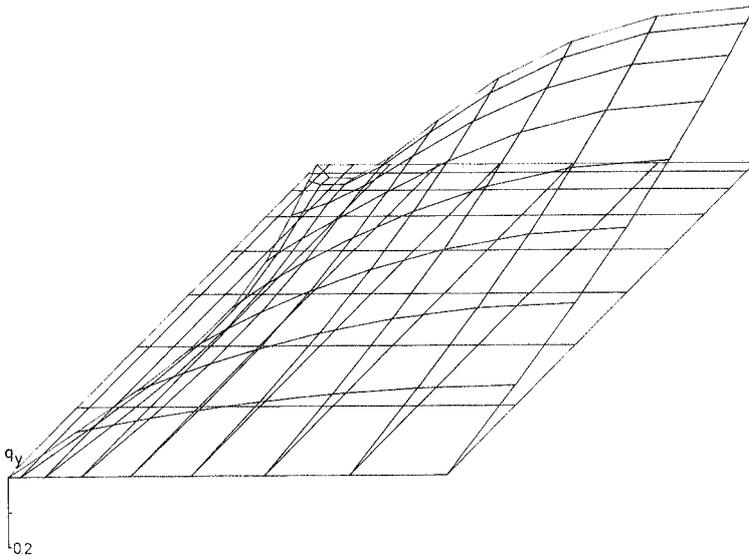
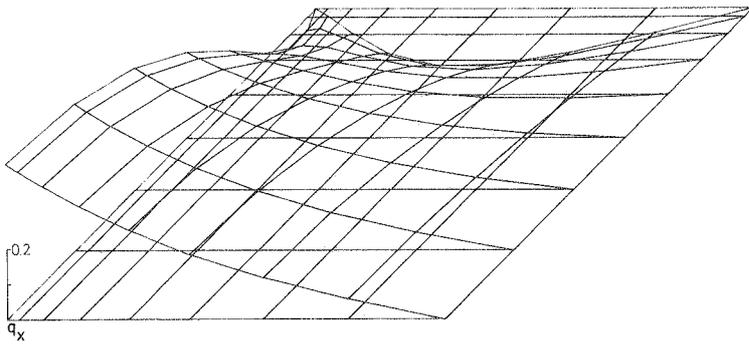
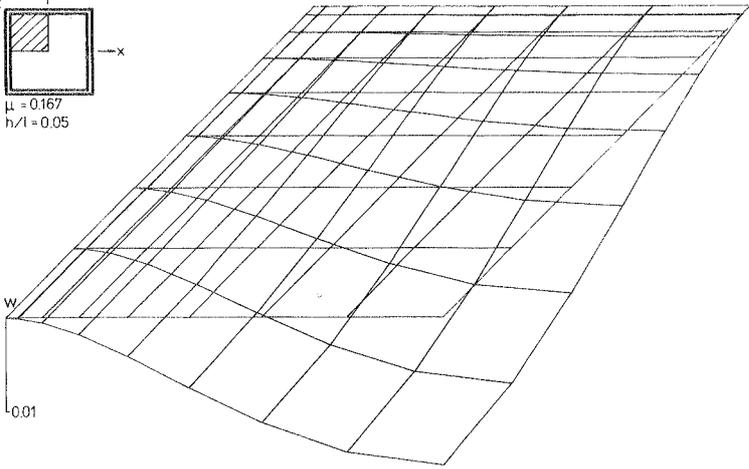
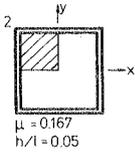
---

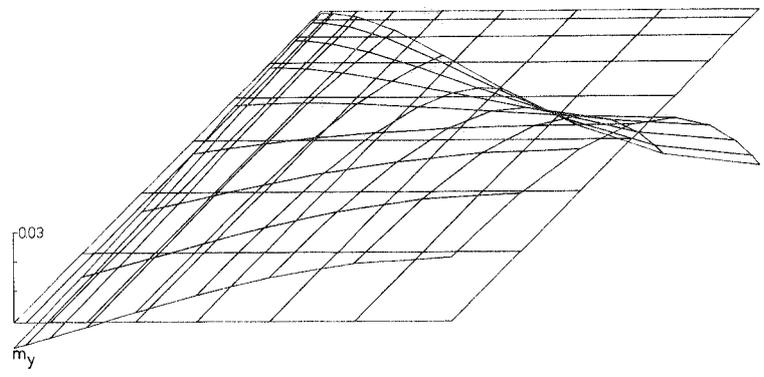
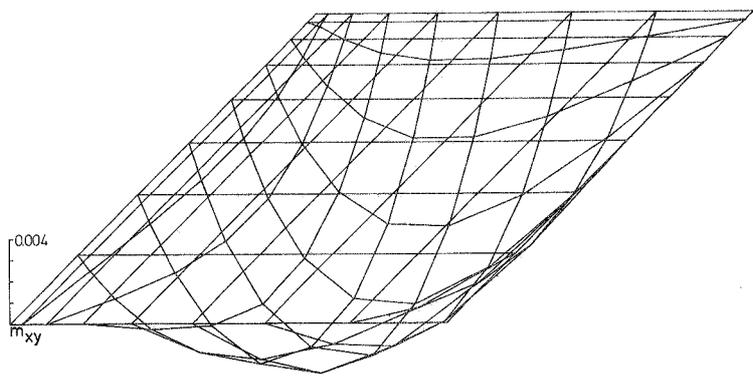
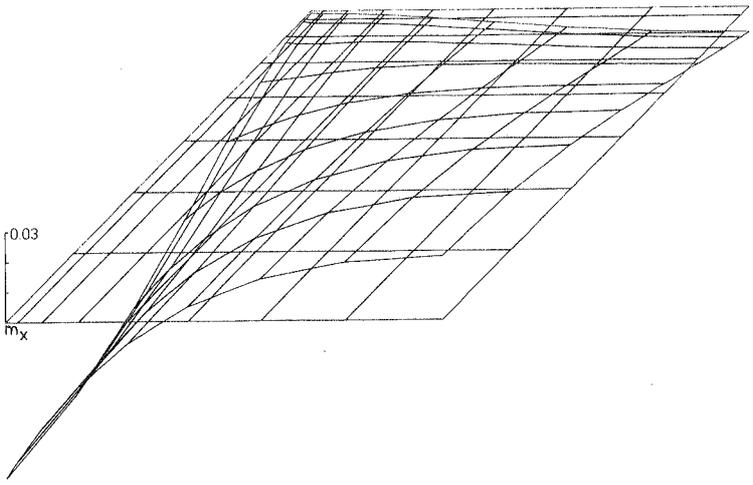
Die hier zusammengestellten ausgewählten Plattenbeispiele zeigen die Ergebnisse der Reissnerschen Theorie. Für den Lastfall Gleichflächenlast  $p$  und bei den letzten beiden Platten für den Lastfall Einzellast  $P = pb^2$  sind die Ergebnisverläufe in Abhängigkeit von  $\alpha$  in folgender Zusammenstellung aufgetragen:

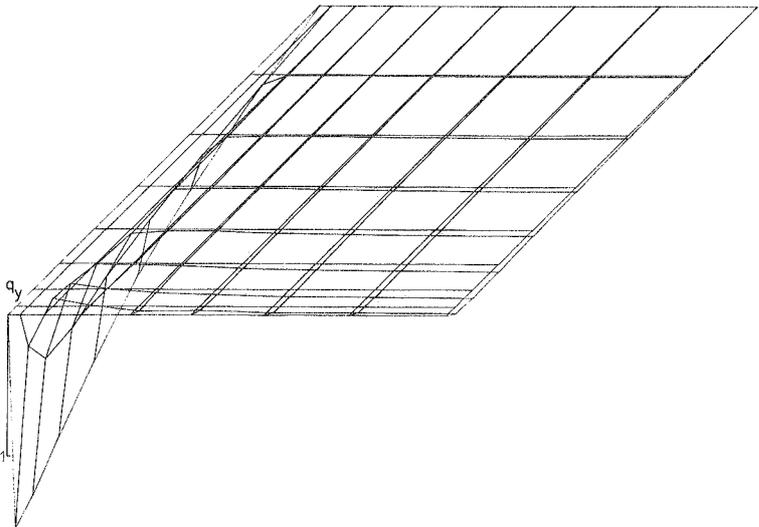
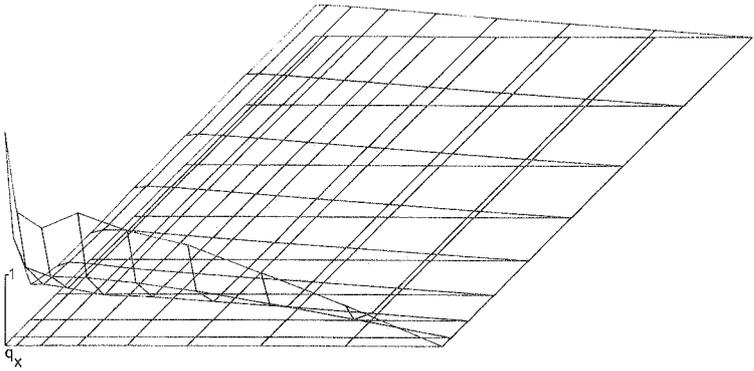
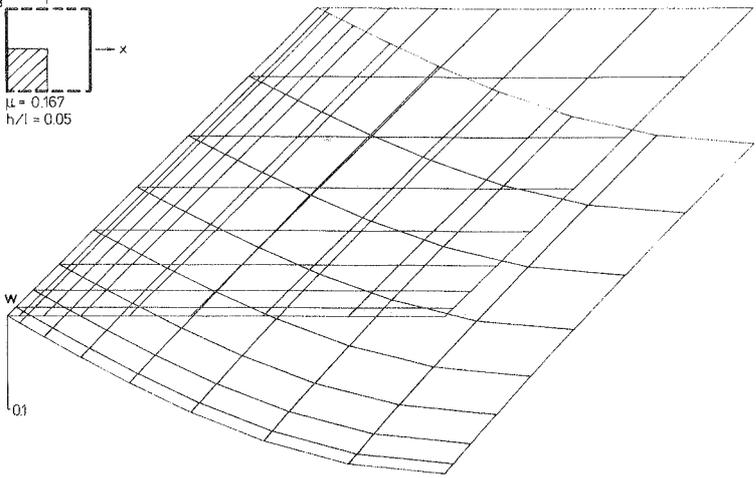
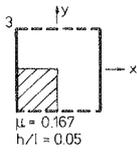
Durchbiegung $w$	=	$\alpha \cdot pl^4 / Eh^3$	$(\alpha \cdot Pl^2 / Eh^3)$
Querkraft $q_x$	=	$\alpha \cdot pl$	$(\alpha \cdot P/l)$
Querkraft $q_y$	=	$\alpha \cdot pl$	$(\alpha \cdot P/l)$
Biegemoment $m_x$	=	$\alpha \cdot pl^2$	$(\alpha \cdot P)$
Drillmoment $m_{xy}$	=	$\alpha \cdot pl^2$	$(\alpha \cdot P)$
Biegemoment $m_y$	=	$\alpha \cdot pl^2$	$(\alpha \cdot P)$

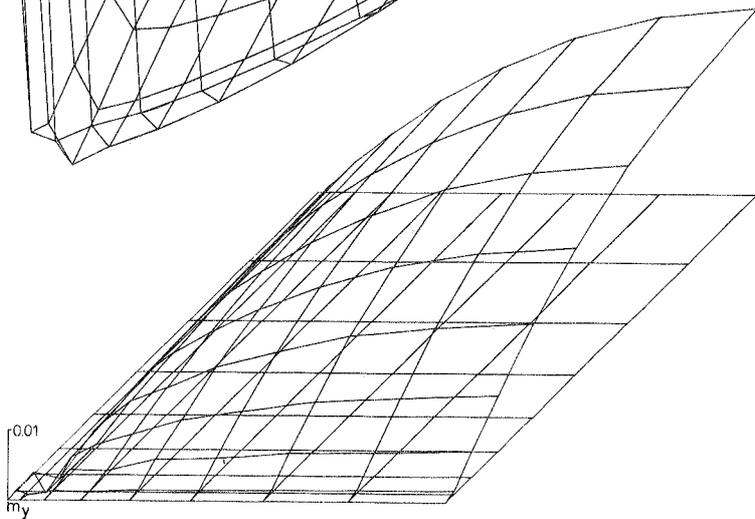
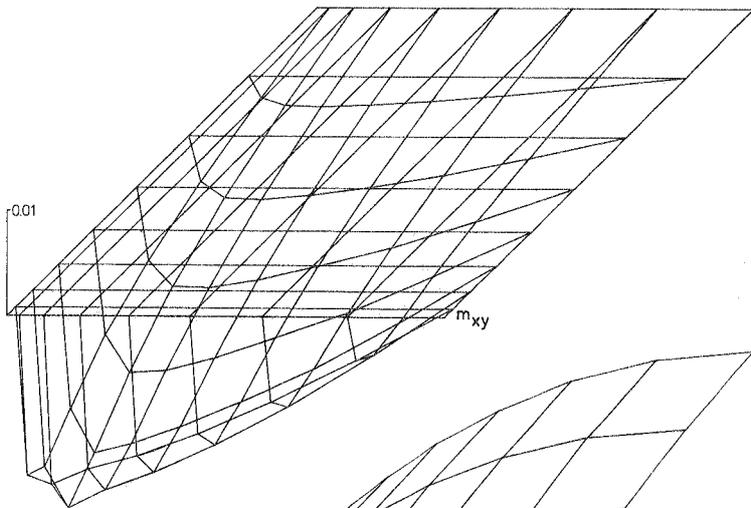
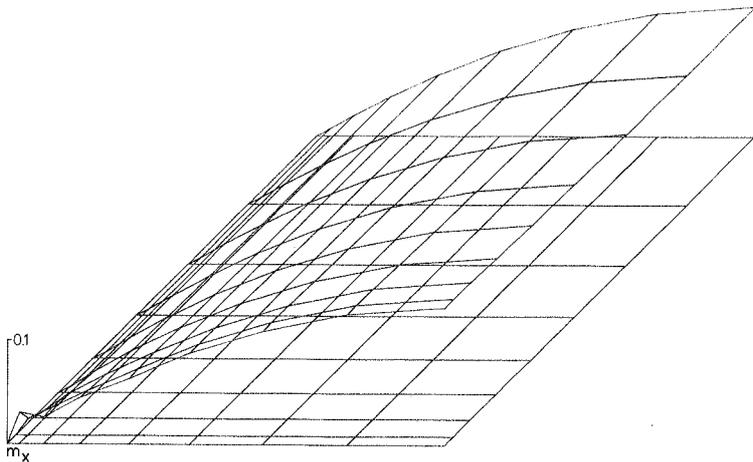


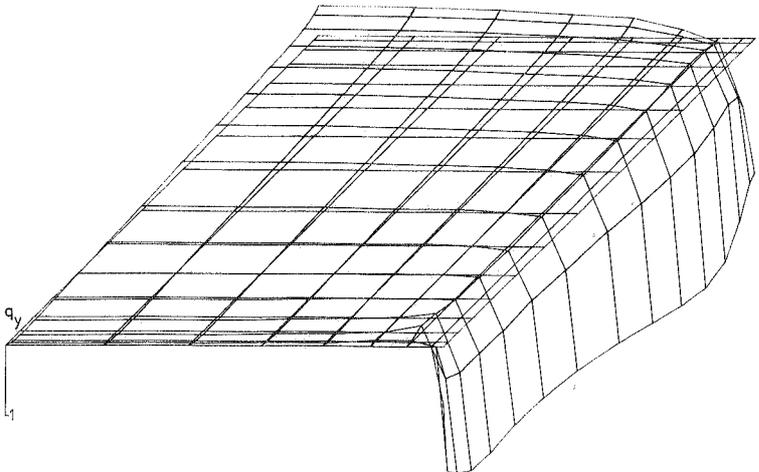
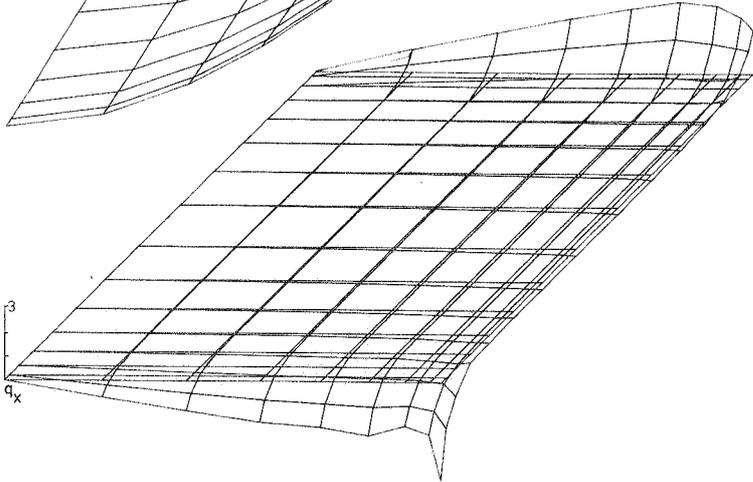
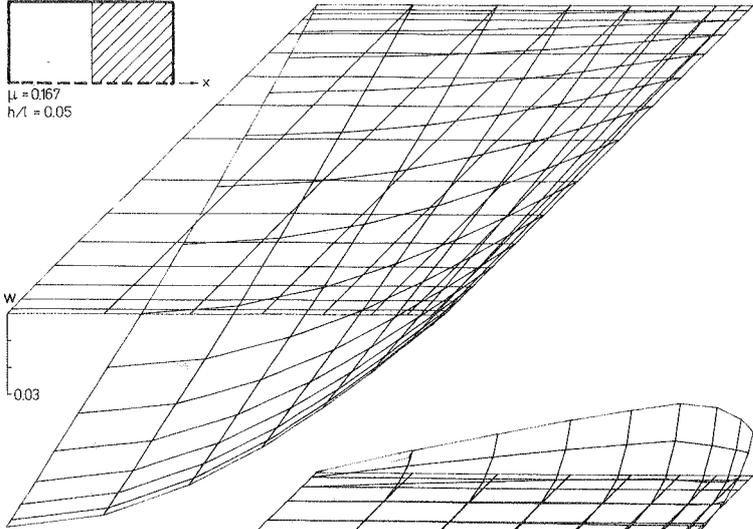
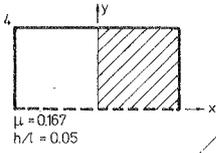


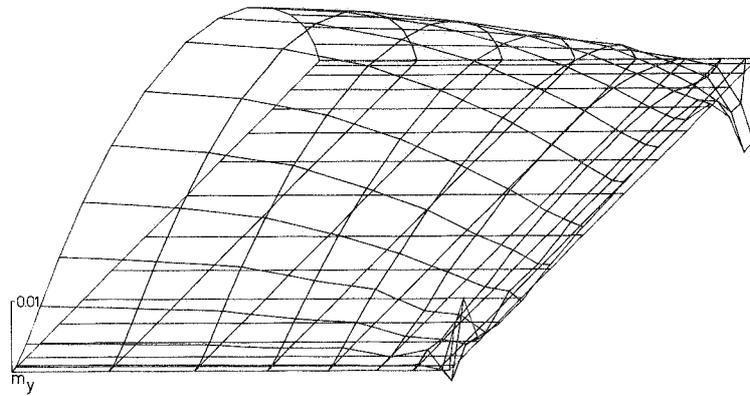
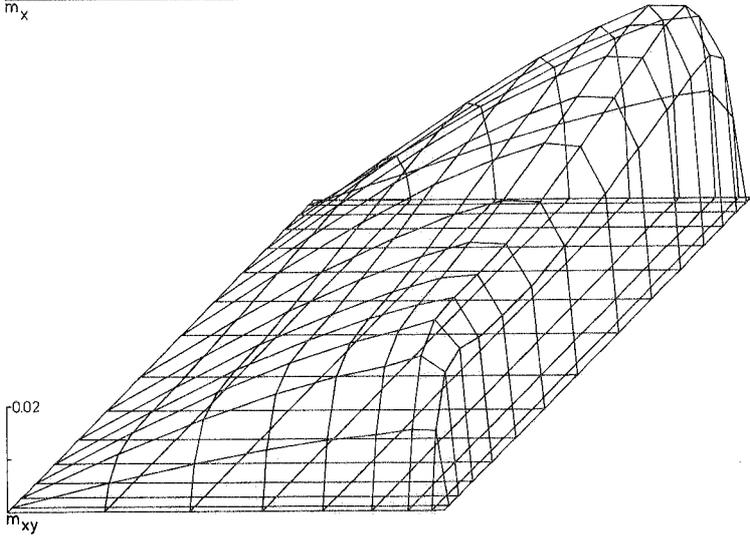
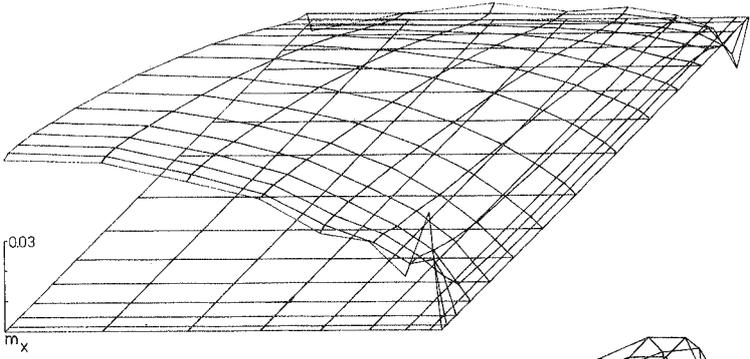


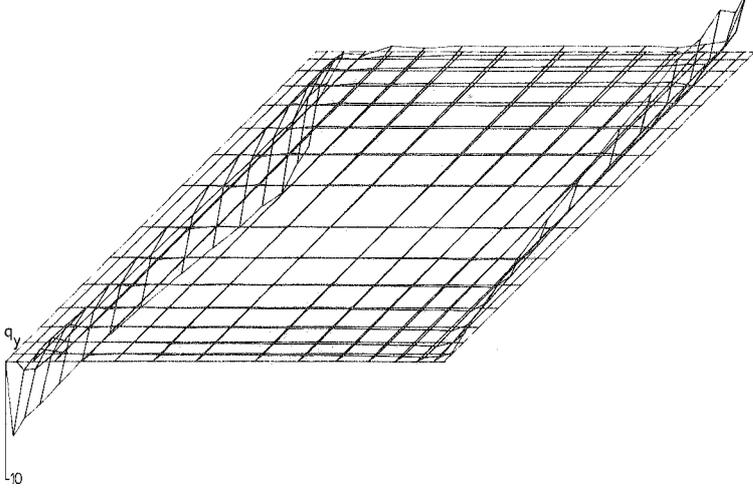
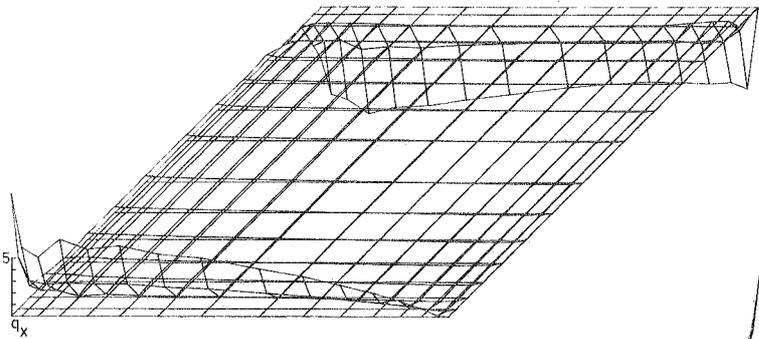
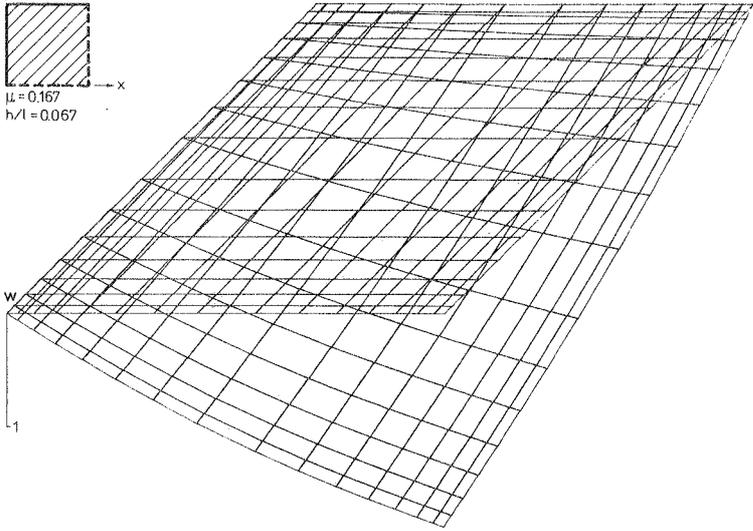
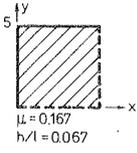


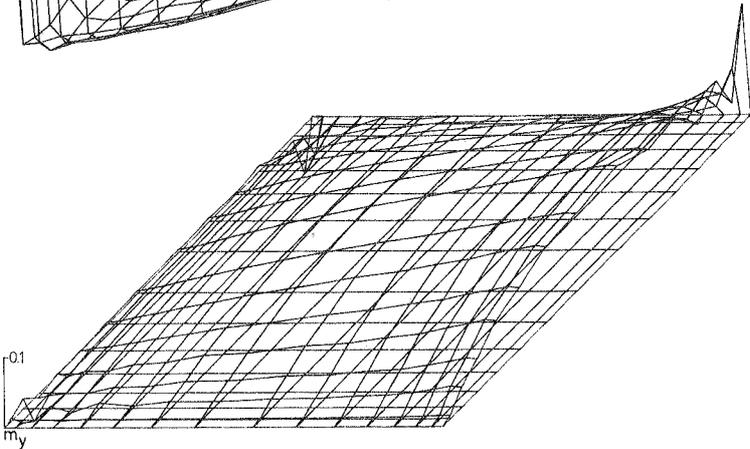
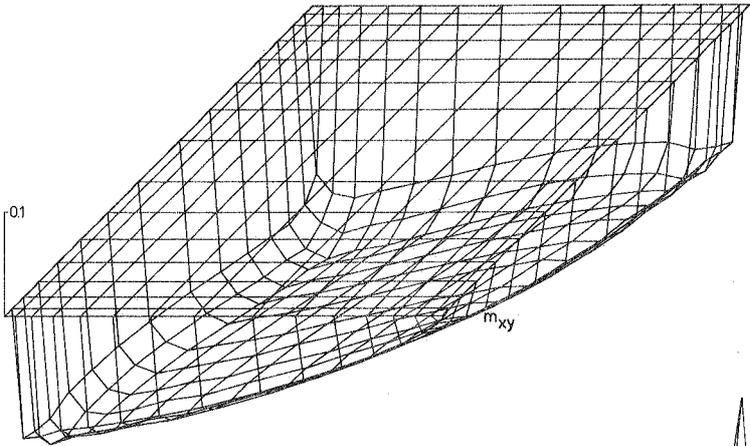
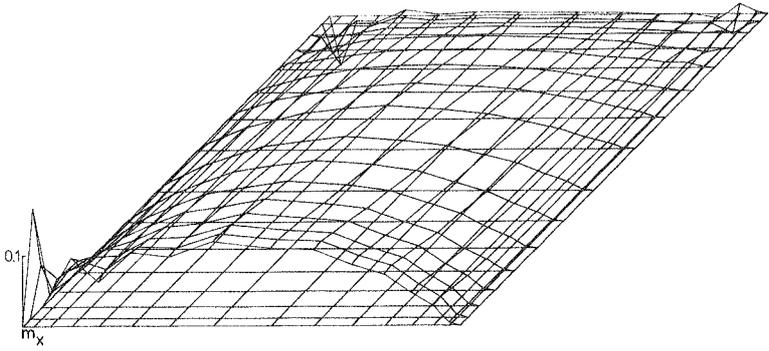


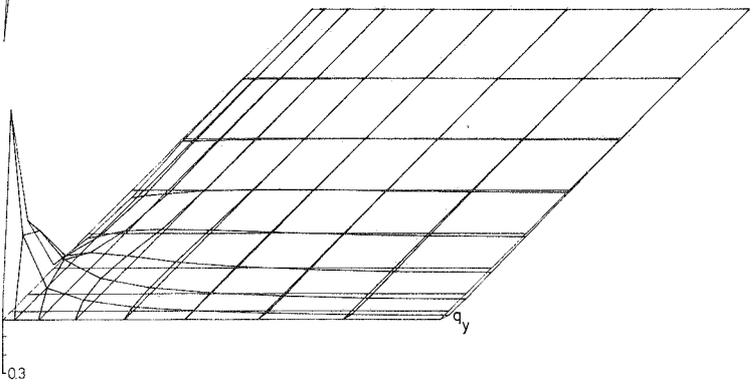
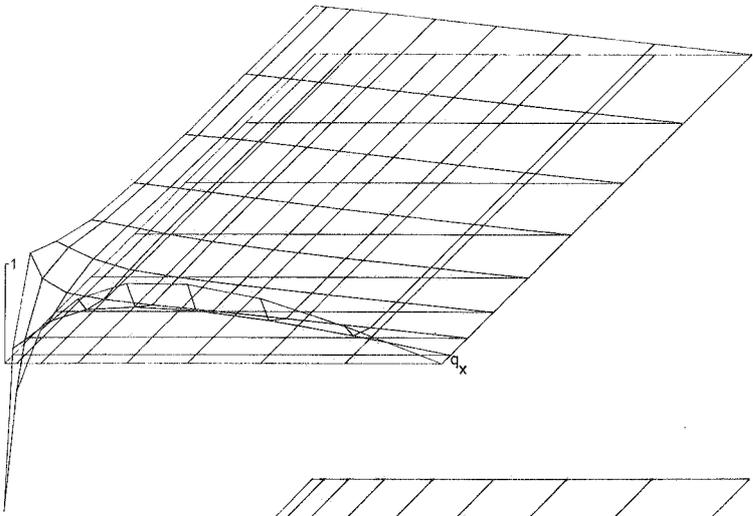
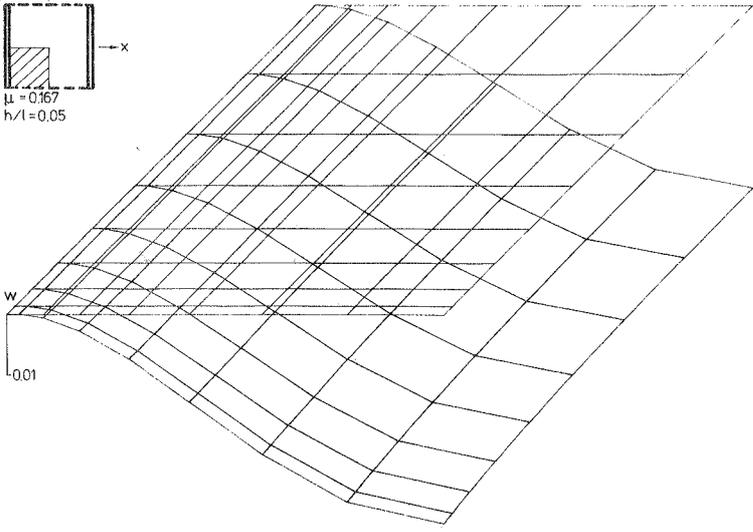
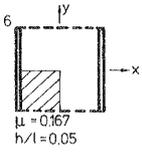


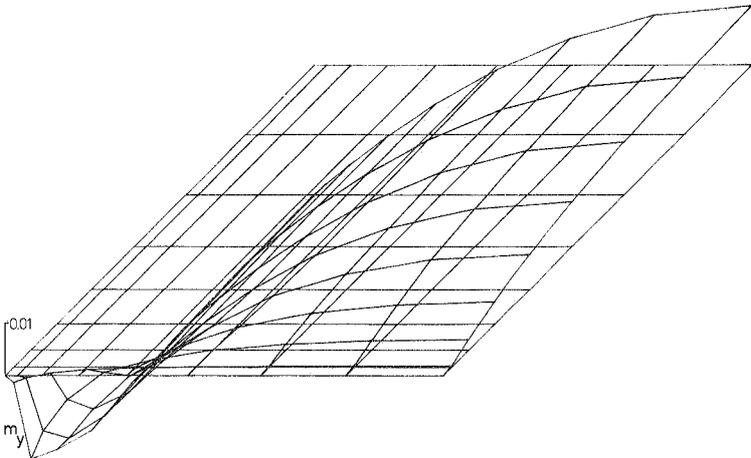
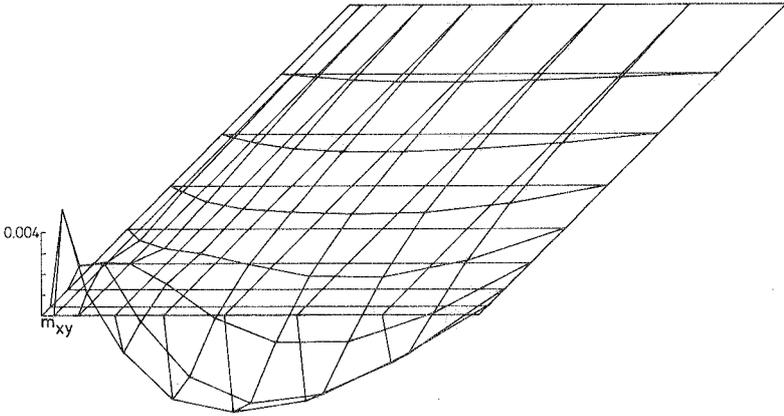
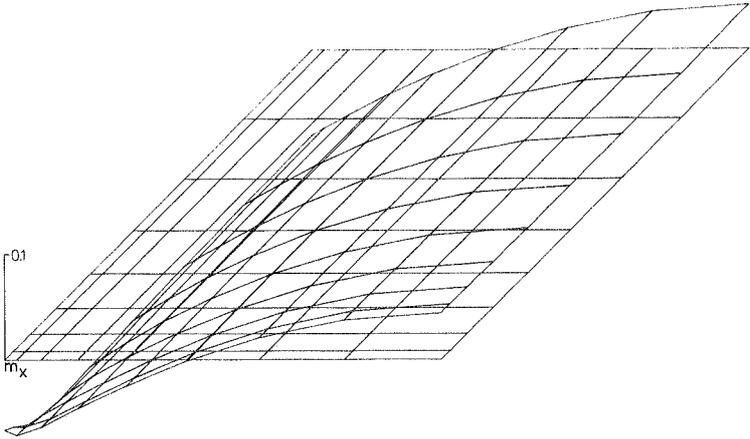


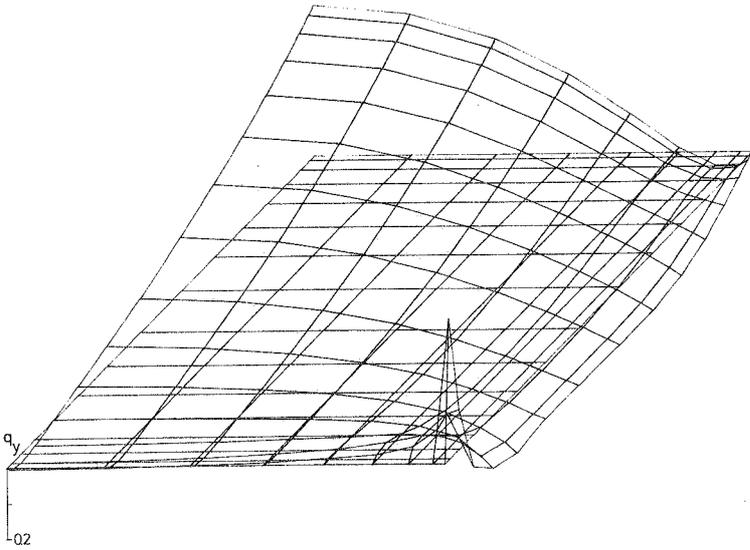
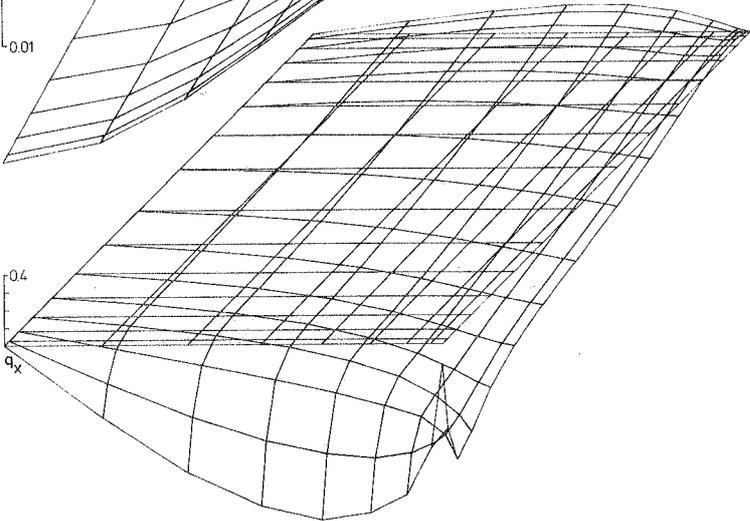
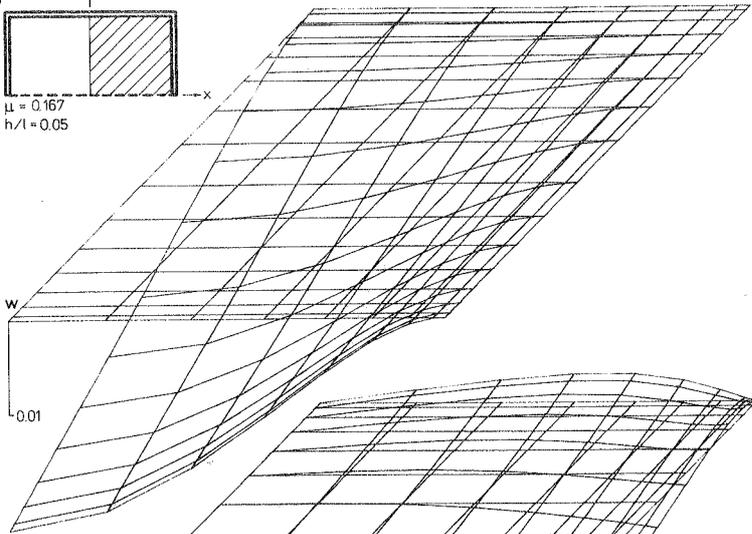
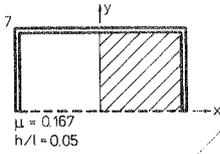


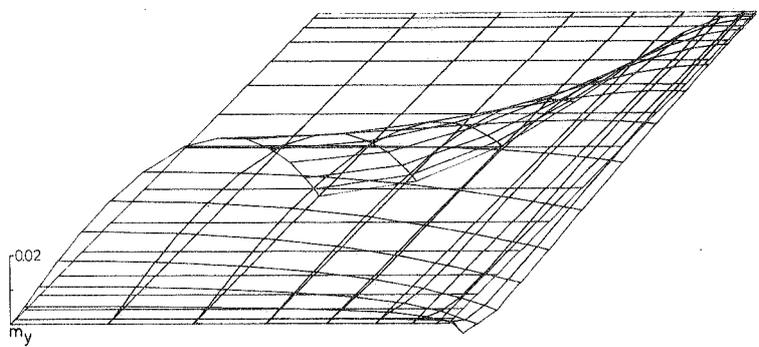
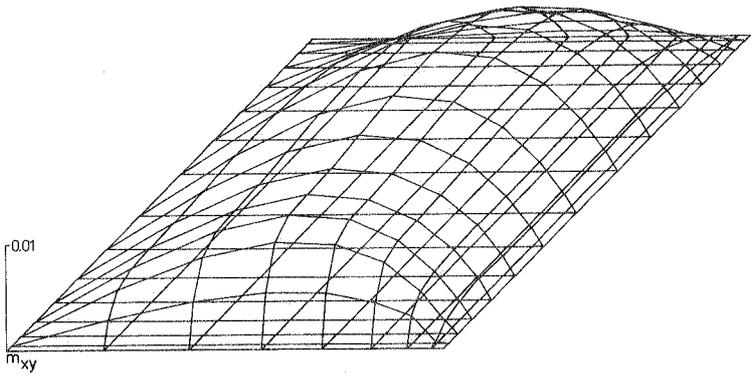
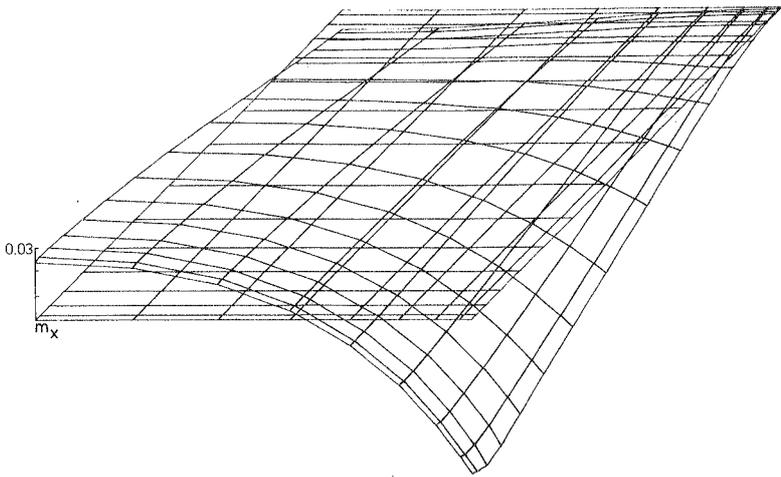


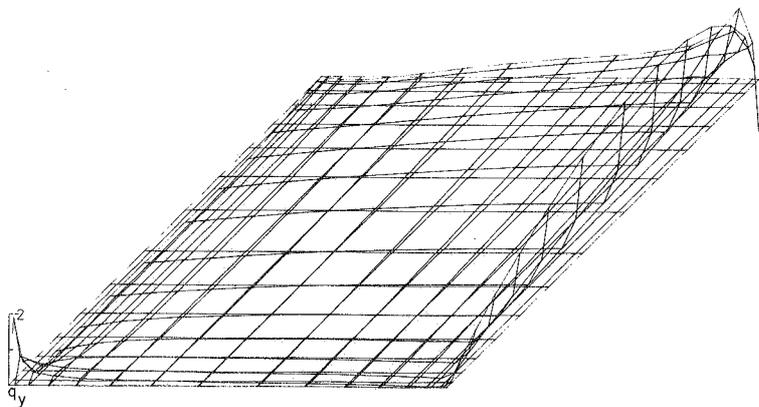
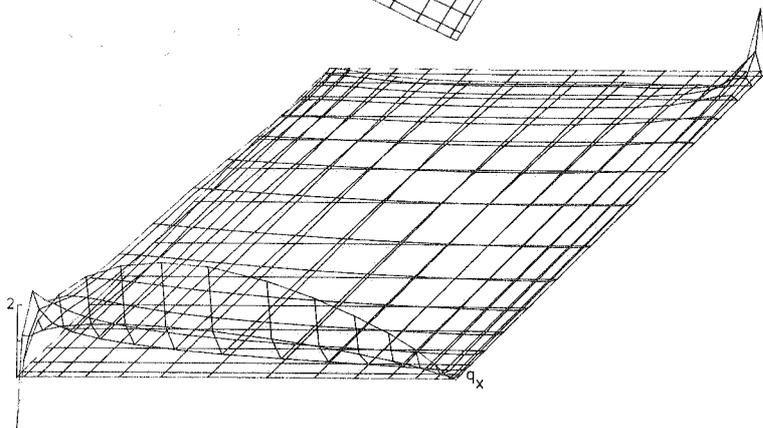
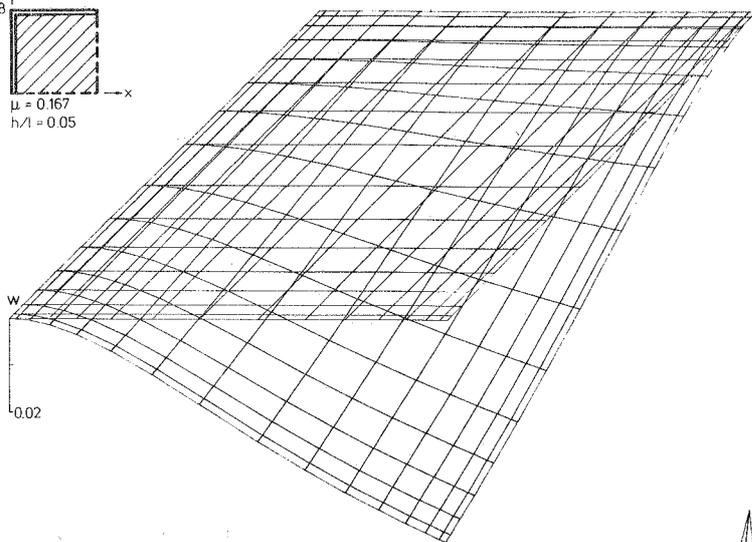
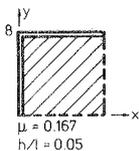


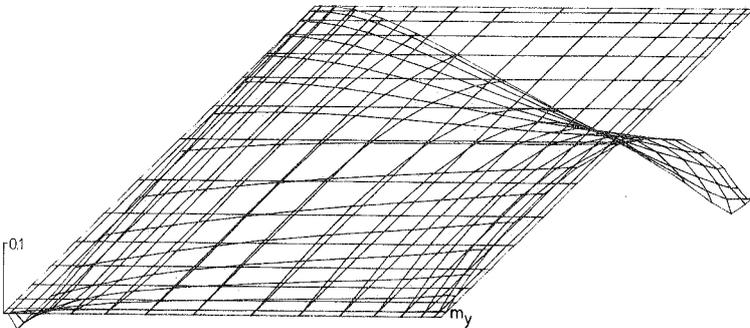
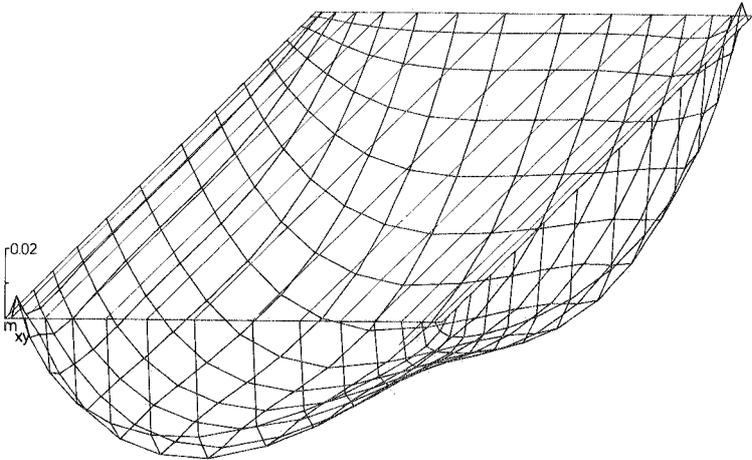
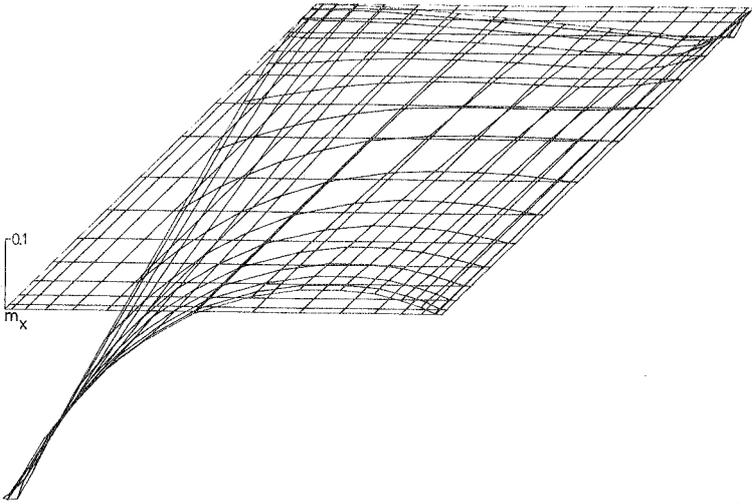


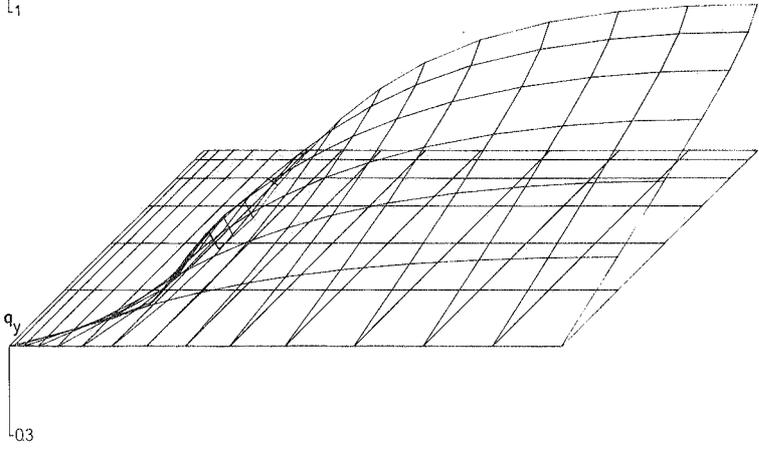
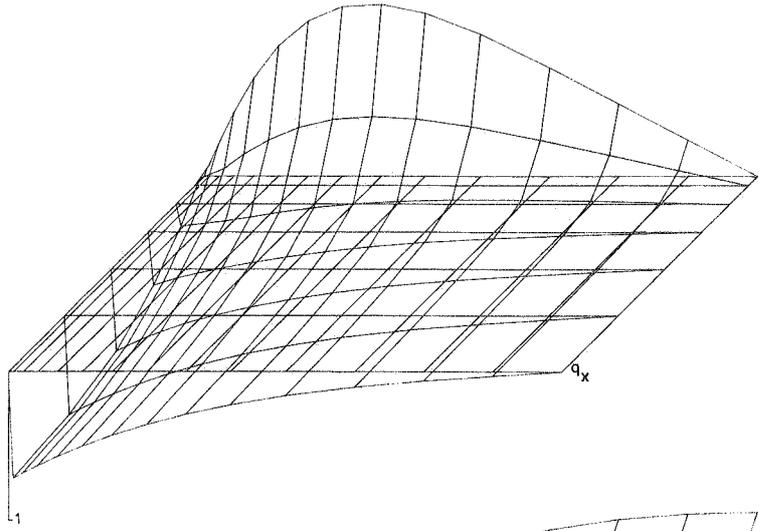
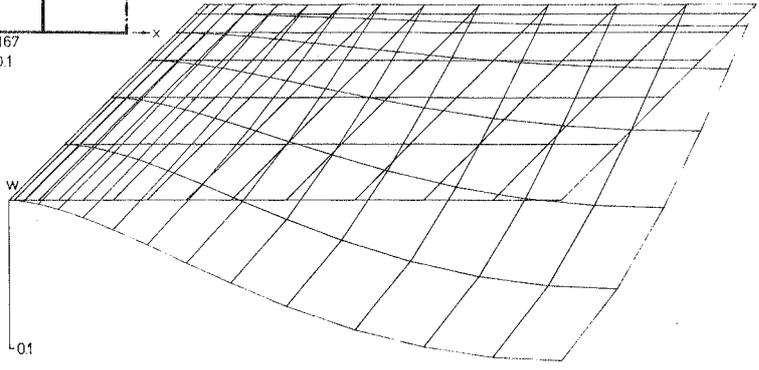
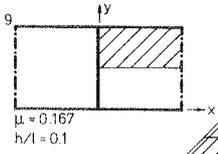


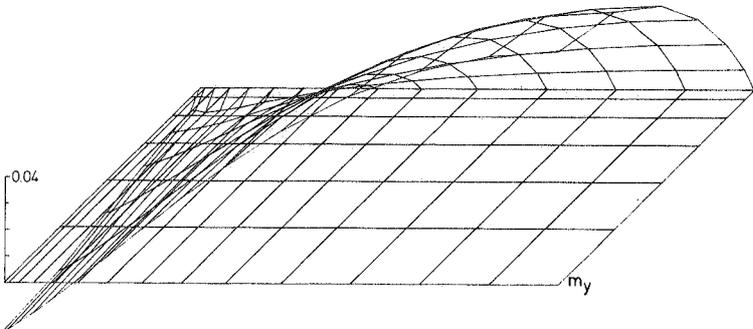
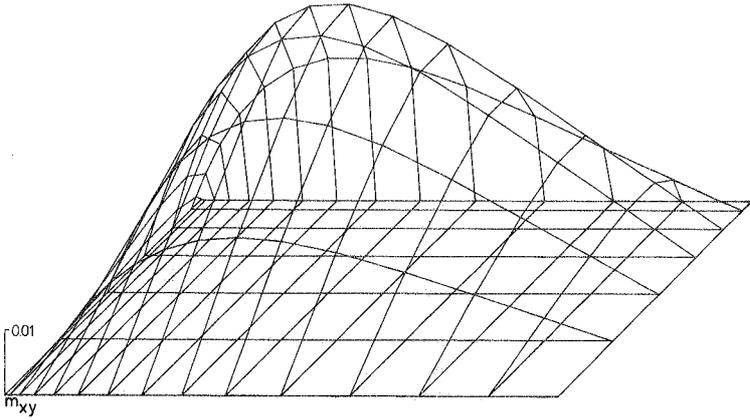
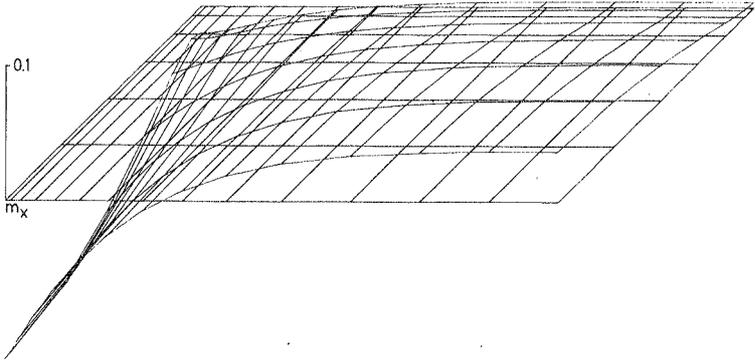


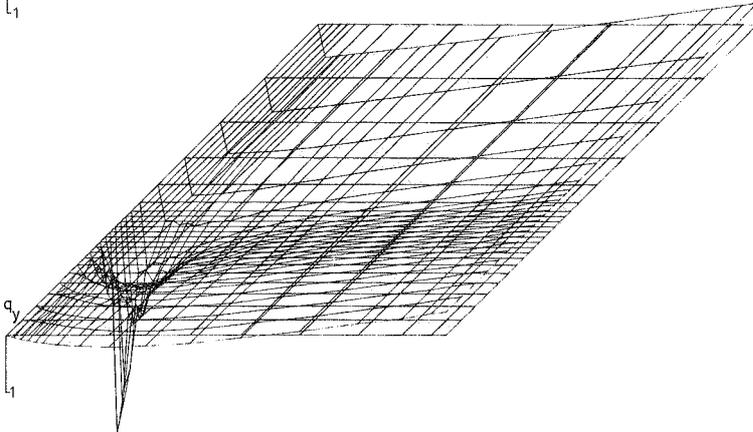
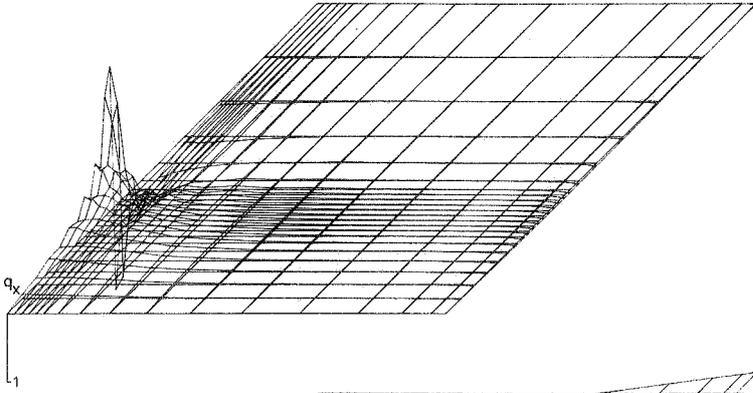
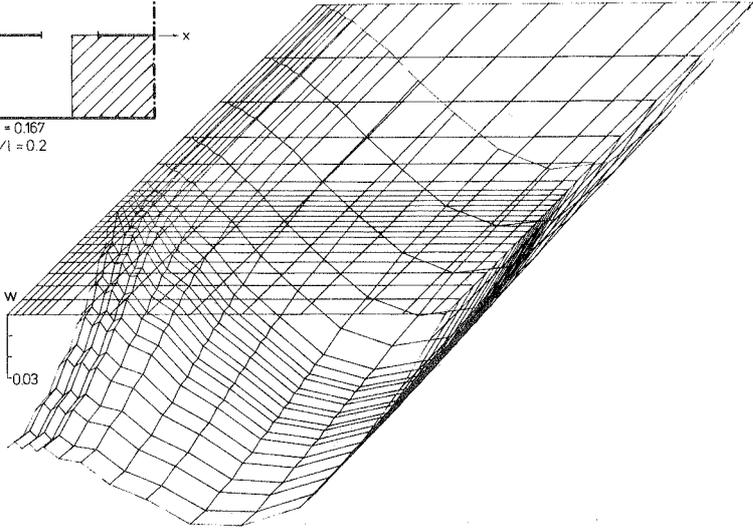
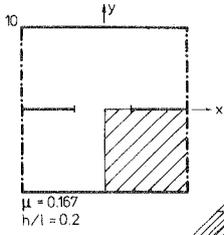


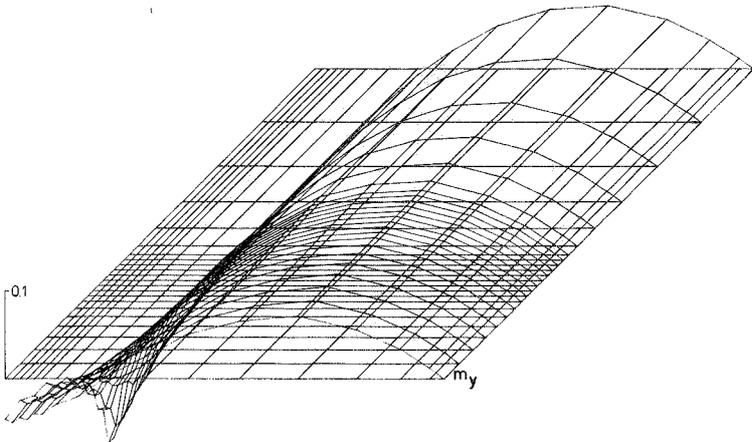
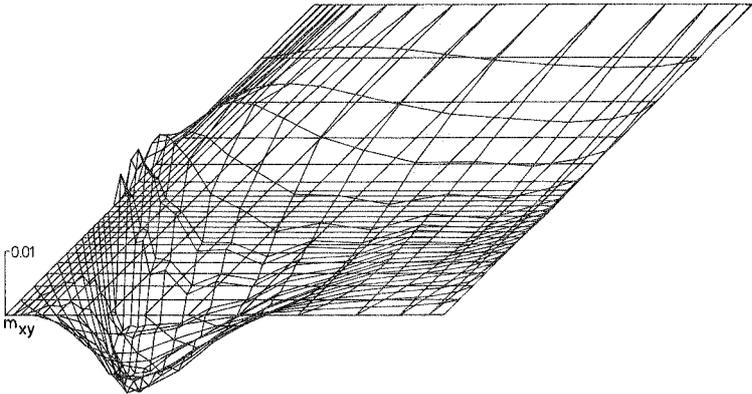
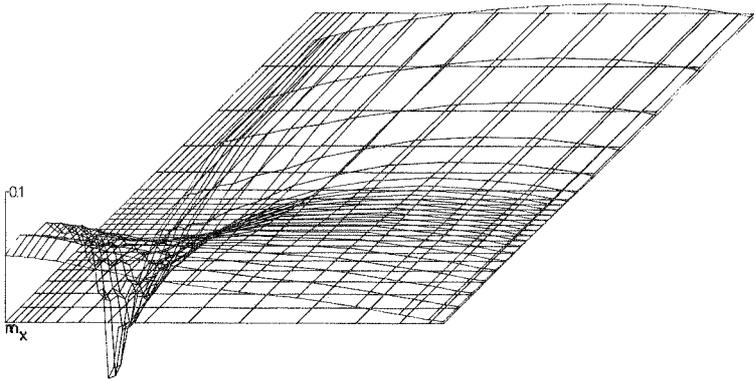


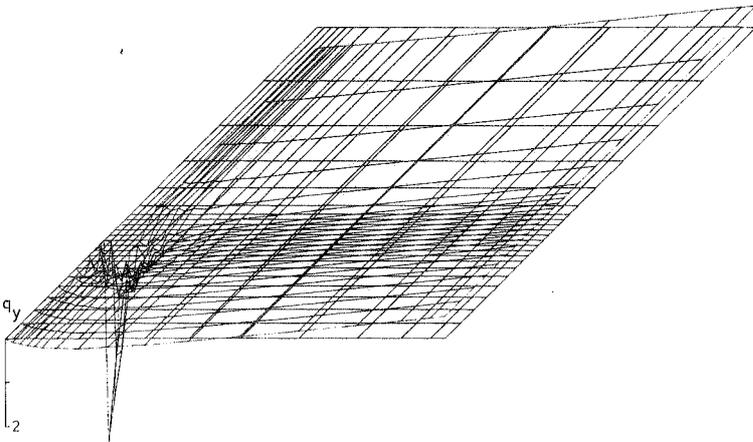
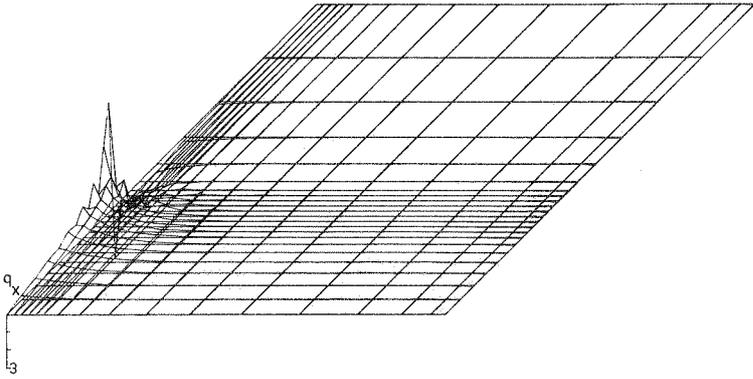
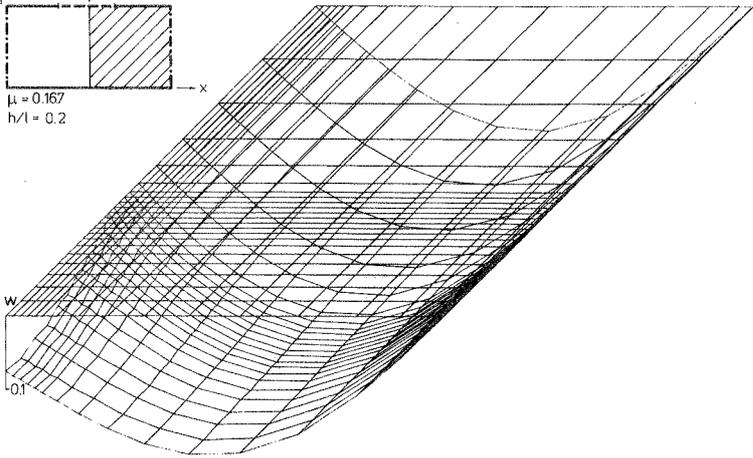
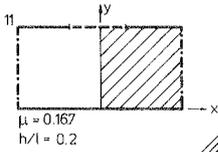


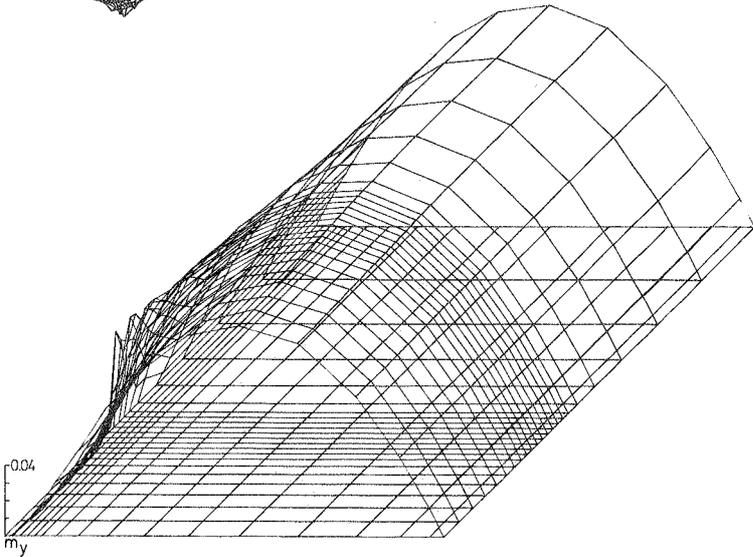
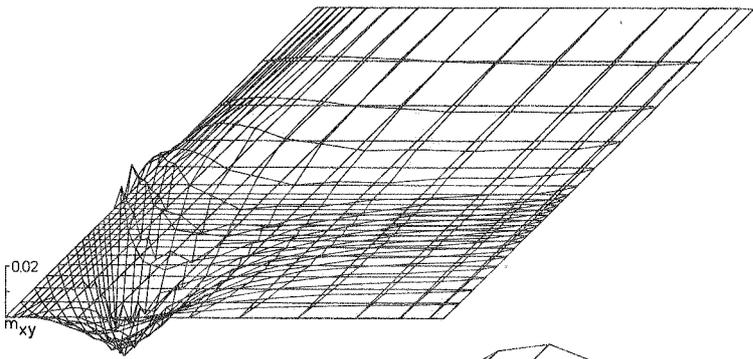
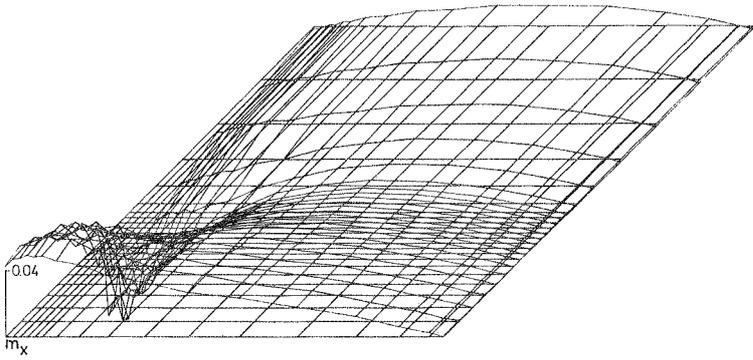


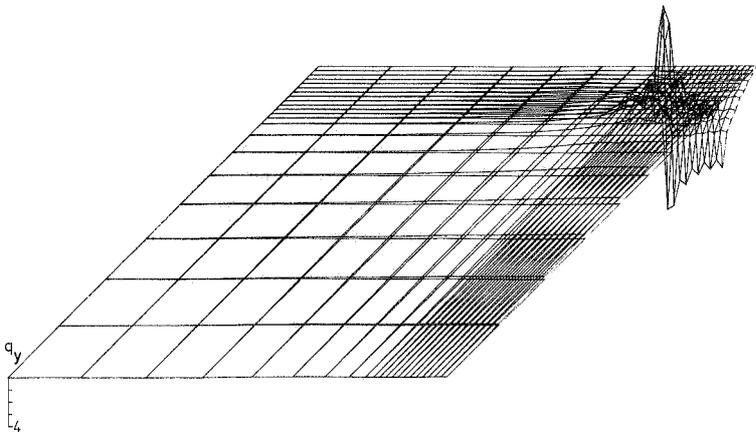
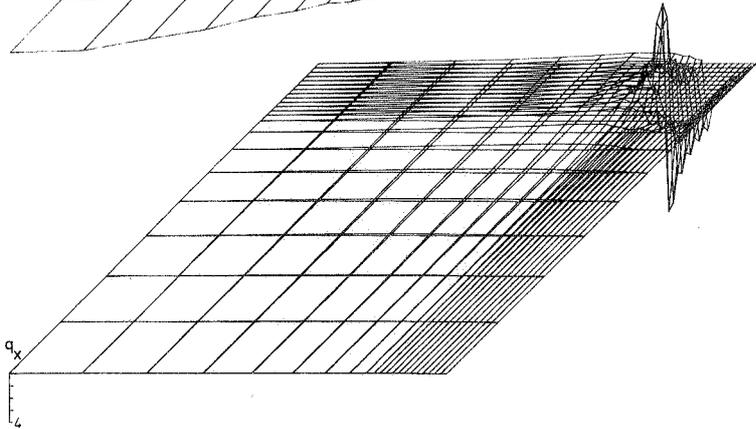
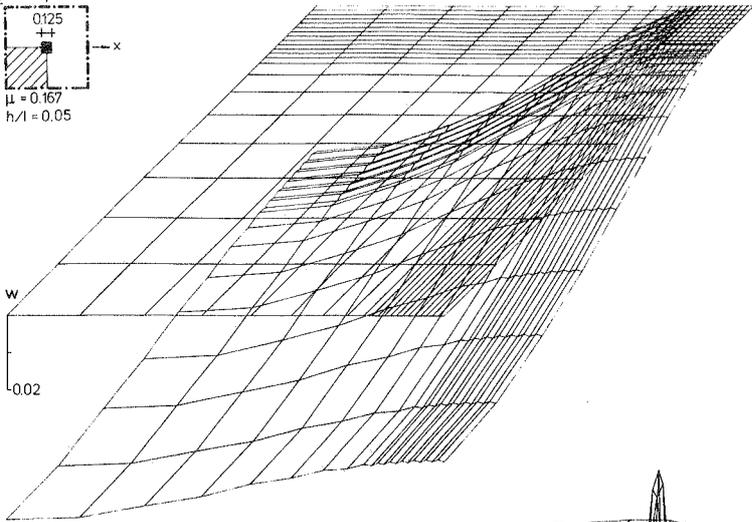
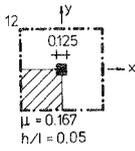


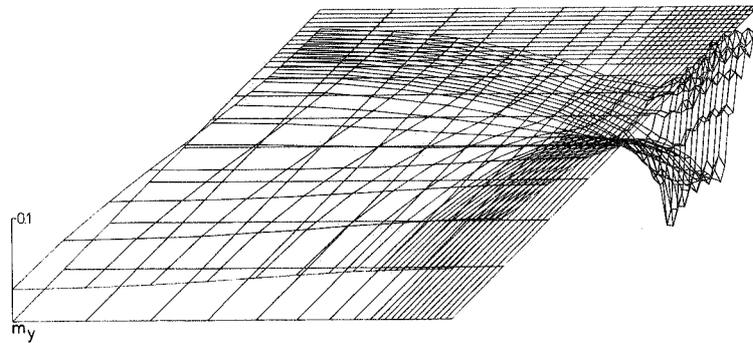
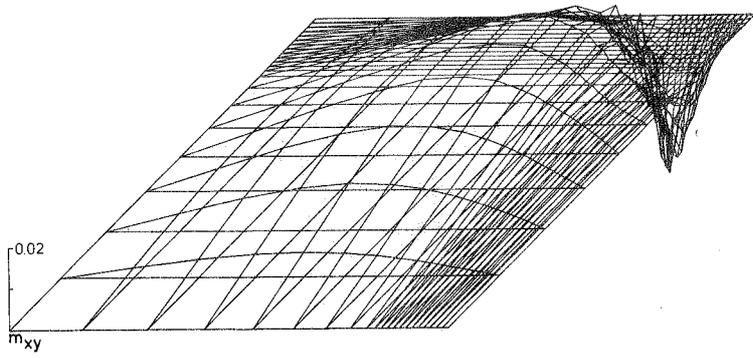
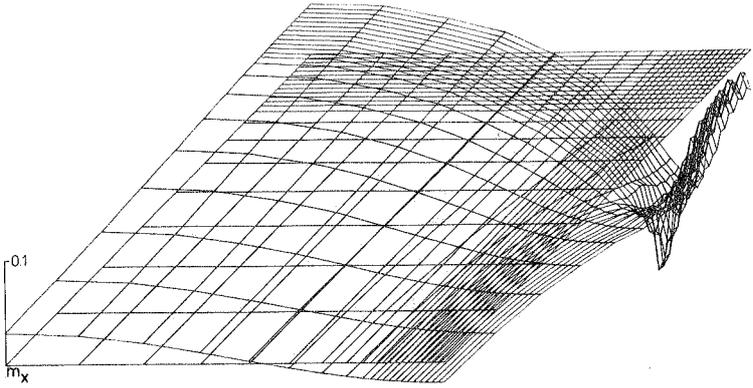


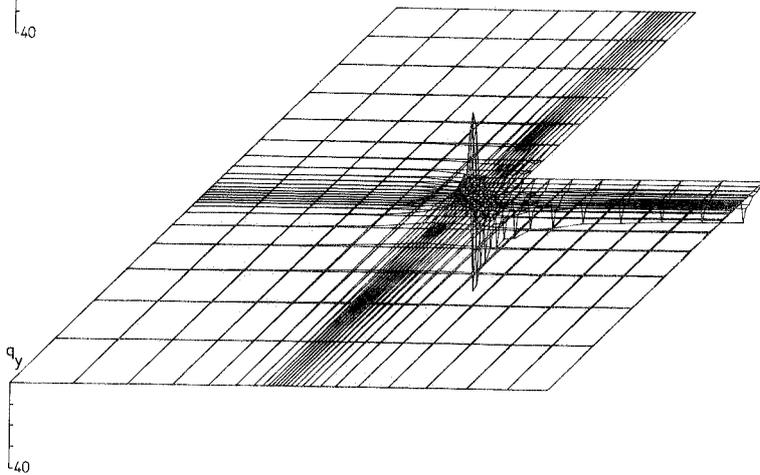
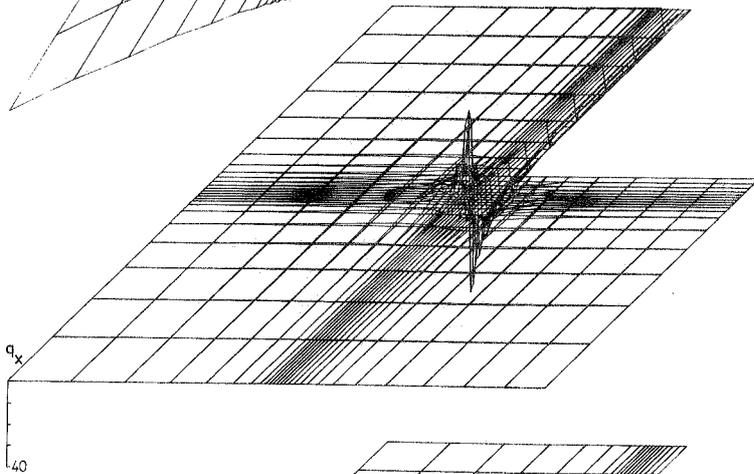
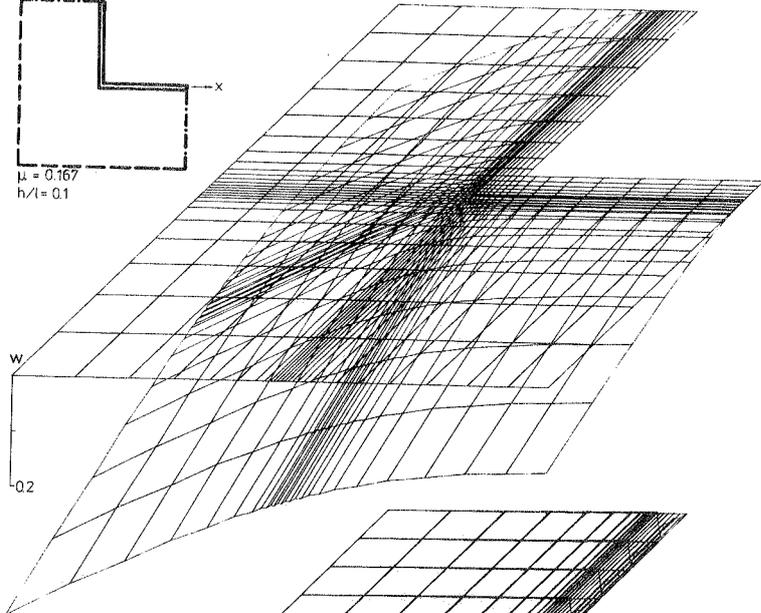
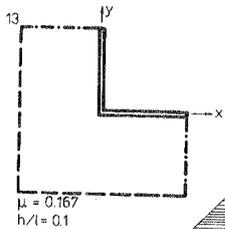


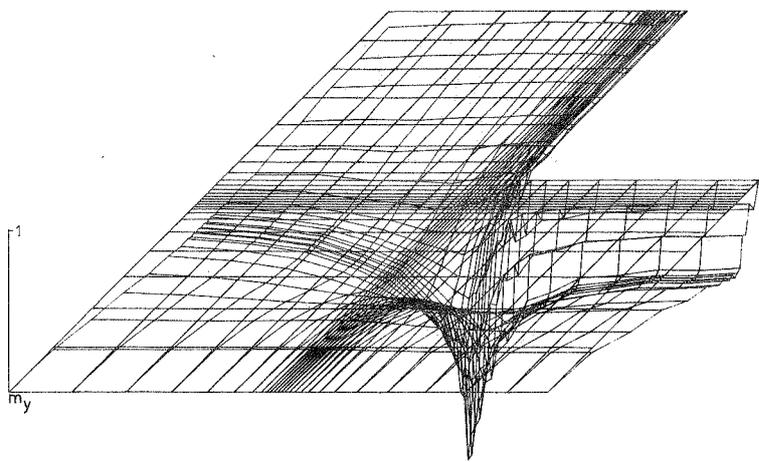
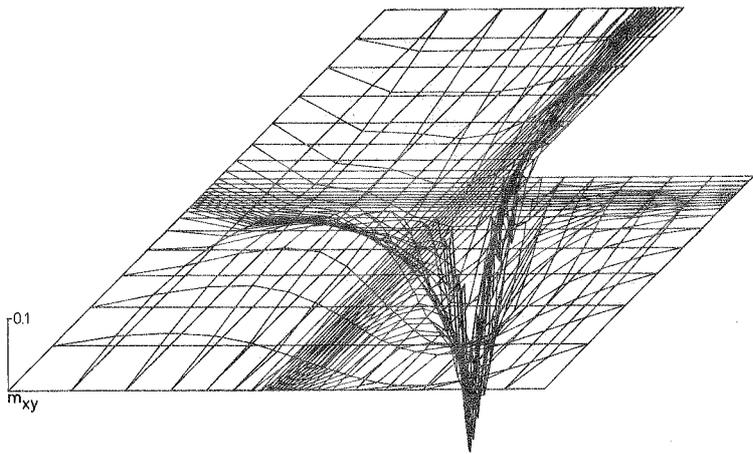
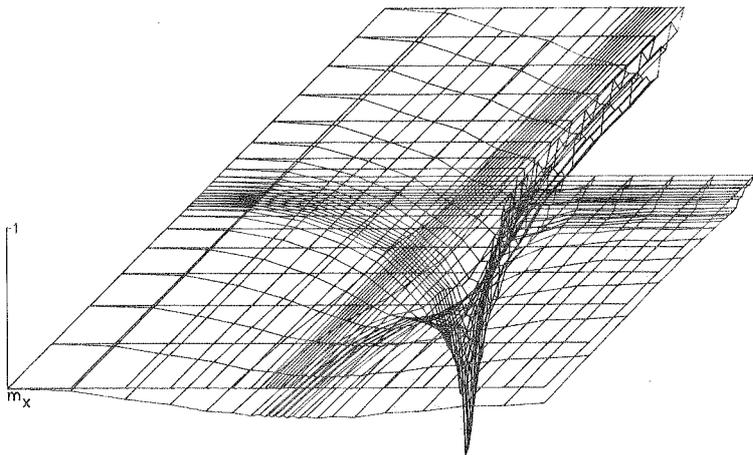


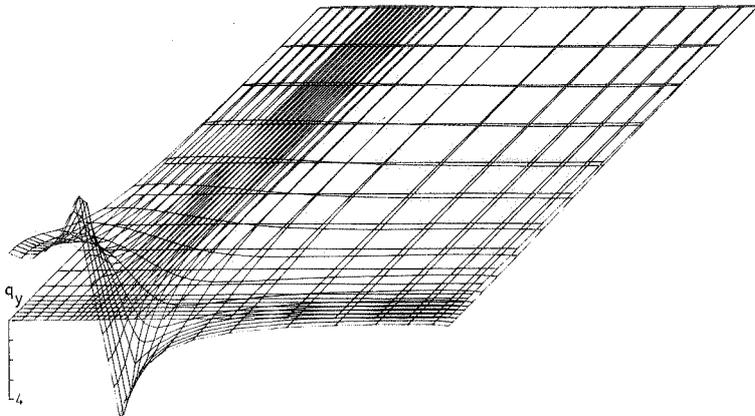
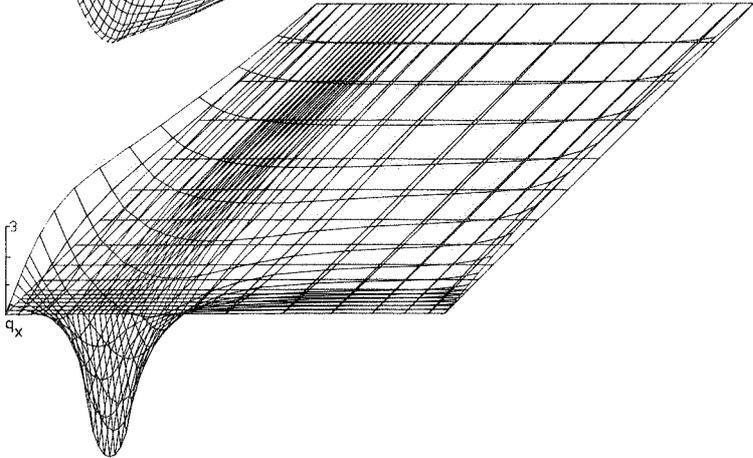
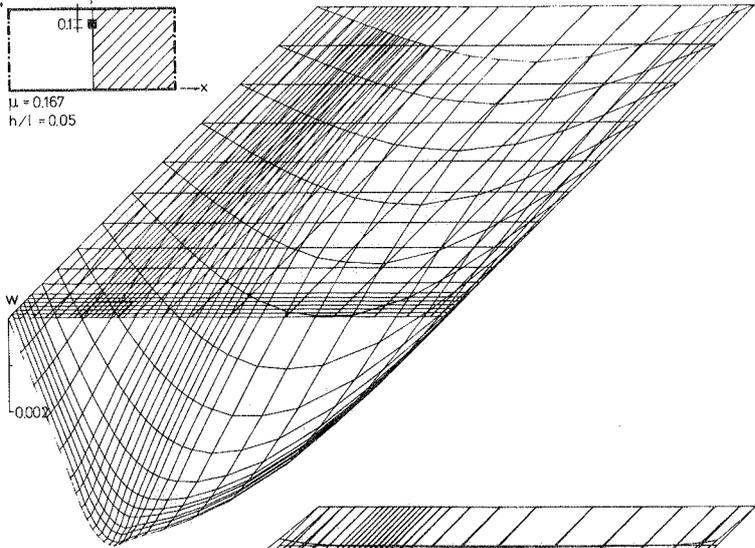
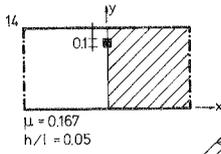


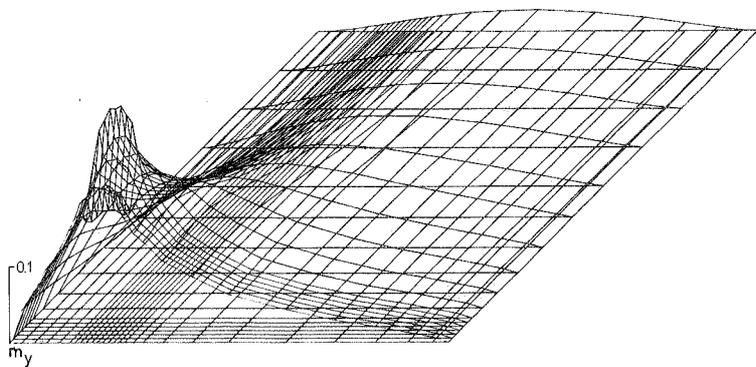
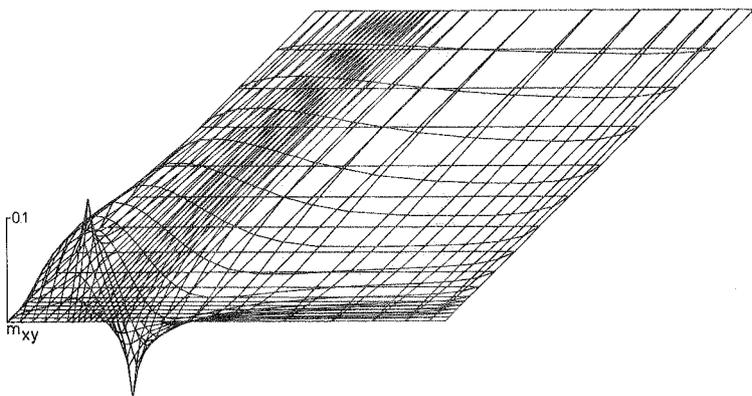
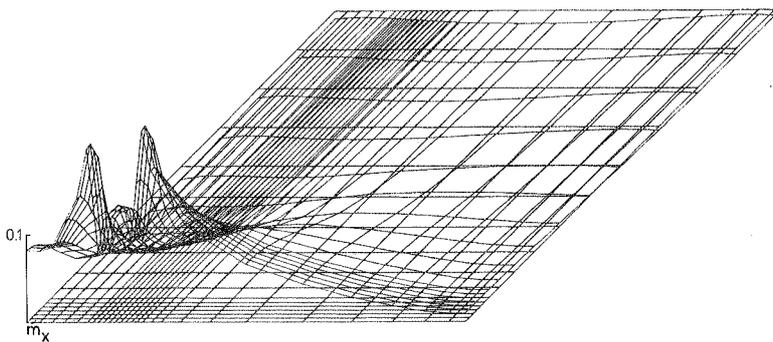


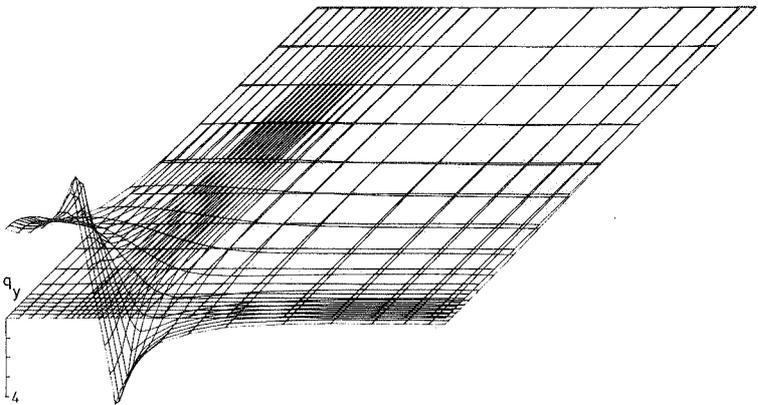
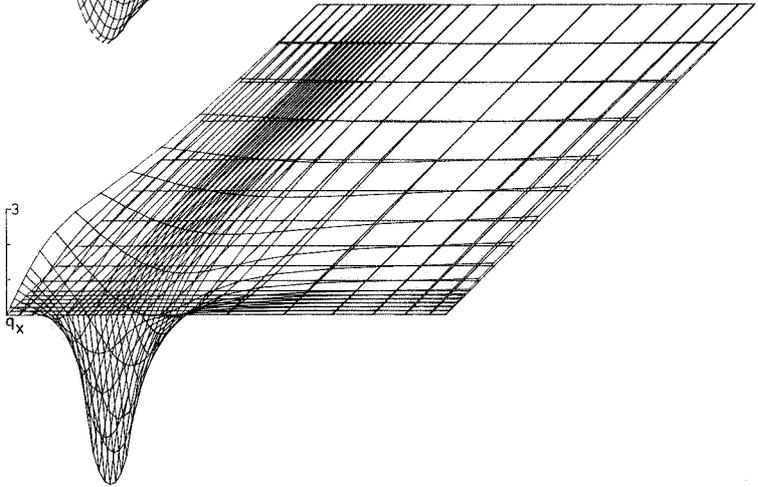
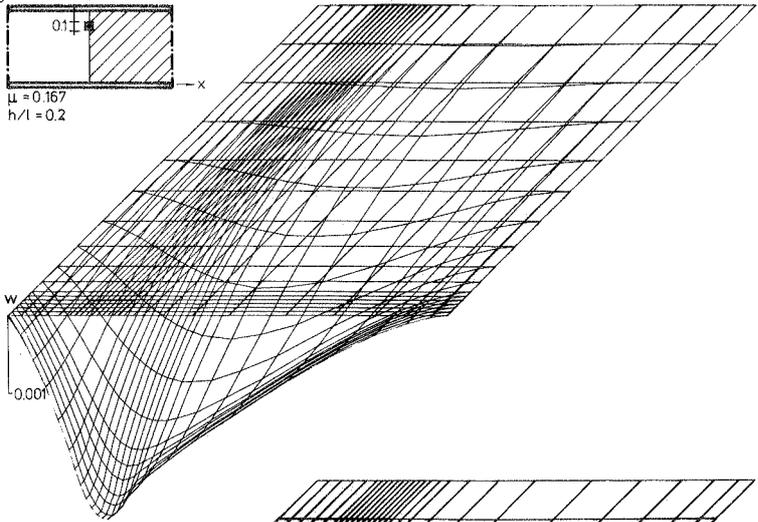
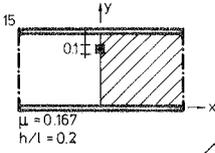


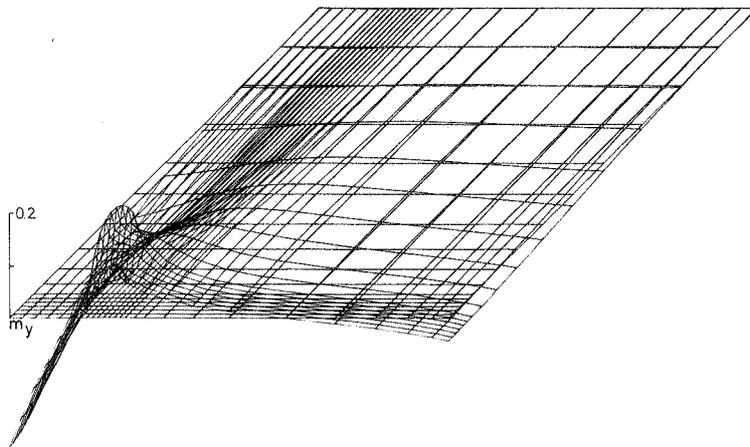
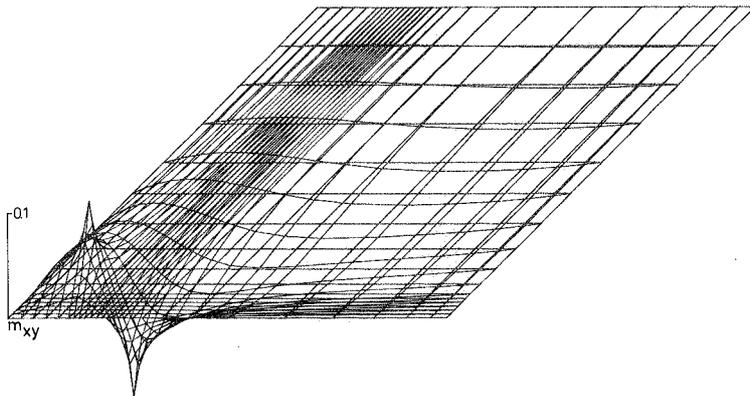
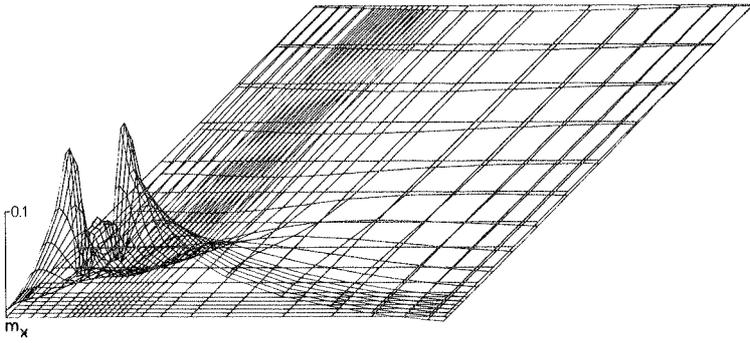












Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-  
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-  
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszyklindrischer Silos auf elastischer Un-  
terlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und  
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-  
mente.
- 75-1 G. Müller, R.W. Rembold, J.M. Sättele,  
K.H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-  
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-  
weiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizeiliger  
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R.D. Kugler, H. Lieb,  
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,  
K.H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B. -M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. -G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,  
E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.