

# Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken

von  
Norbert Rehle

Bericht Nr. 20 (1996)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1996

---

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

# Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
**Norbert Rehle**  
aus Türkheim

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. E. Rank  
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1995

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
1996

# ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit adaptiven Methoden im Rahmen von Finite Element Berechnungen. Gesucht werden FE-Netze, die mit vergleichsweise wenigen Freiheitsgraden ausgesprochen genaue Berechnungsergebnisse von Flächentragwerken ermöglichen. Zur Bewältigung dieser Aufgabe sind, neben den herkömmlichen Finite Element Algorithmen, Verfahren zur Ermittlung von Qualitätskriterien für FE-Diskretisierungen und Strategien zur Optimierung der FE-Netze erforderlich.

Aus der Vielzahl der in der Literatur verfügbaren unterschiedlichen adaptiven Verfahren werden einige ausgewählt und vorgestellt. Auf dieser Basis entsteht eine neue Strategie für die adaptive Generierung weitgehend idealer FE-Netze. Schwerpunkt dieser Strategie ist ein Netzgenerator nach der „Advancing Front Method“, welcher automatisch adaptive FE-Netze nach den Vorgaben aus der Fehlerabschätzung erzeugt. Das adaptive Gesamtkonzept unter Einbindung der Neuentwicklungen wird in den Kapiteln 2 - 4 dargestellt. Anschauliche Beispiele liefert Abschnitt 5.

Praxisnahe Tragwerksanalysen enthalten häufig mehrere Lastfälle. Der Einsatz eines adaptiven Konzepts ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn diese darin ausreichend berücksichtigt werden können. Deshalb werden unterschiedliche Methoden zur Integration mehrerer Lastfälle diskutiert.

# Abstract

In the present thesis adaptive methods in finite element analyses are developed and investigated. The objective is to obtain finite element meshes with a relatively low number of degrees of freedom and a high accuracy for the results of plate and shell structures. For that strategies are used calculating the quality of the finite element discretisation and optimizing the mesh, along with the standard finite element algorithms.

Out of the variety of published different adaptive strategies some were selected and are introduced. On this basis a new procedure is developed handling the adaptive generation of almost ideal finite element meshes. A mesh generator of the advancing front method type is the core of this strategy generating adaptive refined FE-meshes on results of the error estimation. Chapter 2 - 4 presents the adaptive concept including the new development. Chapter 5 displays expressive examples.

For the design of real world structures several loadcases have to be examined. This means that the acceptance of an adaptive concept is only guaranteed if all loadcases are considered. Therefore some strategies are discussed in order to integrate a variety of different loadcases.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand als Dissertation während meiner 5-jährigen Tätigkeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart. Ich bedanke mich im besonderen bei Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit, das entgegengebrachte Vertrauen und die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr. rer. nat. E. Rank danke ich für das Interesse an dieser Arbeit, die wertvollen Diskussionen und die Übernahme des Mitberichts.

Mein Dank gilt auch den Kollegen des Instituts für Baustatik für die gute Zusammenarbeit die stete Diskussionsbereitschaft und das angenehme Arbeitsklima. Ebenso gilt mein Dank den Studenten, die als wissenschaftliche Hilfskräfte oder als Diplomanden mit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Vor allem bedanke ich mich bei meiner Familie für das entgegengebrachte Verständnis und die Unterstützung, welche die notwendige Basis für die Arbeit darstellte.

Norbert Rehle

<b>1 Einleitung</b> .....	<b>13</b>
1.1 Motivation .....	13
1.2 Zielsetzung und Gliederung .....	14
<b>2 Fehlerabschätzung</b> .....	<b>19</b>
2.1 Fehlerarten .....	19
2.2 Fehlerdefinition .....	21
2.3 Räume und Normen .....	22
2.4 A priori Kriterien .....	26
2.4.1 Zulässigkeit von Elementgeometrien und Elementübergängen .....	27
2.4.2 Gestaltskriterien .....	29
2.4.3 Approximationskriterien .....	31
2.4.4 Gesamtmaß zur Beurteilung der Elementqualität .....	32
2.5 A posteriori Fehlerabschätzung .....	33
2.5.1 Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz, Zhu (Z2) .....	34
2.5.2 Fehlerestimator nach Babuska, Rheinboldt, Miller .....	37
2.5.3 Verfeinerungsindikator nach dem Knotengleichgewicht .....	38
2.5.4 Beispiele .....	43
<b>3 Netzadaption</b> .....	<b>47</b>
3.1 Allgemeiner Überblick .....	47
3.1.1 Adaptive Methoden .....	47
3.1.2 Konvergenzrate bei Netzverfeinerungen .....	48
3.1.3 Elementverfeinerungskriterium .....	49
3.2 Elementunterteilungsstrategie (h-Version) .....	51
3.2.1 Übergangselementpatche .....	51
3.2.2 Gekoppelte Freiheitsgrade .....	54
3.2.3 Vergrößerung von Elementen .....	58
3.2.4 Reduktion der Anzahl adaptiver Iterationen .....	59
3.2.5 Besonderheiten für Schalenträgerwerke .....	60

3.2.6	Folgerung .....	60
3.3	r-Version .....	61
3.4	rh-Version .....	64
3.5	Netzgenerierungsstrategie .....	67
3.6	Steuerung der Adaptivität .....	70
<b>4</b>	<b>Automatische Netzgenerierung .....</b>	<b>73</b>
4.1	Bekannte Verfahren zur Netzgenerierung .....	73
4.1.1	Die Abbildungsmethode .....	74
4.1.2	Die Triangulationsmethode .....	76
4.1.3	Die Gitternetzmethode .....	78
4.1.4	Die Dekompositionsmethode .....	82
4.2	Netzgenerator Freem .....	86
4.2.1	Ebene Dreiecksnetze .....	87
4.2.1.1	Generieren der Randknoten .....	87
4.2.1.2	Bilden der Dreiecke .....	89
4.2.1.3	Aktualisieren der aktiven Front .....	92
4.2.2	Ebene Vierecksnetze .....	96
4.2.3	Netzglättung .....	100
4.2.4	Elemente mit Ansätzen höherer Ordnung .....	103
4.2.5	FE-Netze für Schalen und Falwerke .....	105
4.2.5.1	Automatische Netzgenerierung auf Parameterflächen .....	105
4.2.5.2	Verringerung der Elementverzerrungen .....	107
4.2.6	Generierung adaptiver FE-Netze .....	117
4.2.6.1	Suche des passenden Hintergrundelements .....	119
4.2.6.2	Ermitteln der lokalen Koordinaten eines Punkts .....	122
<b>5</b>	<b>Anwendungen adaptiver Methoden .....</b>	<b>125</b>
5.1	Scheibenbeispiel .....	126
5.2	Plattenbeispiel .....	134
5.3	Schalenbeispiel .....	142
5.4	Wertung .....	146

<b>6 Adaptive Berechnungen und mehrere Lastfälle .....</b>	<b>151</b>
6.1 Allgemeines .....	151
6.2 Generieren eines maßgeschneiderten FE-Netztes für jeden Lastfall .....	153
6.3 Auswahl eines Verfeinerungsindikators aus allen Einzellastfällen .....	153
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>161</b>
<b>8 Literatur .....</b>	<b>165</b>



# Bezeichnungen, Symbole

## Bezeichnungen

- Unter der *Netzgenerierungsstrategie* wird die Generierung eines neuen adaptiven FE-Netzes in jedem adaptiven Iterationsschritt verstanden. Dies steht im Gegensatz zur *Elementunterteilungsstrategie*, bei der ein ursprüngliches FE-Netz hierarchisch adaptiv unterteilt wird.
- *CARAT* (Computer Aided Research Analysis Tool) ist ein FE-Programmsystem, das am Institut für Baustatik zur Implementierung von Algorithmen für lineare, nichtlineare und dynamische Tragwerksanalysen entwickelt wurde.

## Symbole

$A$	Kopplungsmatrix zwischen abhängigen und unabhängigen Knotenfreiheitsgraden
$B$	B-Operator
$\dot{B}$	Differentialoperator erster Ordnung
$K$	Systemsteifigkeitsmatrix
$K_e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$C$	Materialtensor
$C$	Konstante
$N$	Ansatzfunktionen
$P$	Lastvektor
$p$	Volumenkräfte
$p$	Ansatzordnung der Formfunktionen
$u$	Verschiebungen
$\epsilon$	Dehnungen
$\sigma$	Spannungen
$u_h$	Verschiebungen aus einer FE-Berechnung
$\epsilon_h$	Dehnungen aus einer FE-Berechnung
$\sigma_h$	Spannungen aus einer FE-Berechnung

$h_i$	Elementgröße, Elementdurchmesser
$\eta_i$	Elementfehler in einer gegebenen Norm
$\eta_i^o$	abgeschätzter Elementfehler in einer gegebenen Norm
$e_m$	durchschnittlicher Elementfehler in einer gegebenen Norm
$\bar{e}$	geforderter durchschnittlicher Elementfehler in einer gegebenen Norm
$\eta$	absoluter Gebietsfehler in einer gegebenen Norm
$\eta_r$	relativer Gebietsfehler
$\eta^o$	abgeschätzter Gebietsfehler in einer gegebenen Norm
$\bar{\eta}$	vorgegebener Gebietsfehler in einer gegebenen Norm
$\xi_i$	Elementverfeinerungskriterium
$\Omega$	Fläche/Volumen eines Gebiets
$\Omega_i$	Fläche/Volumen eines Elements

## Normen

$\  \mathbf{u} \ _n$	n-te Sobolev Norm
$\  \mathbf{u} \ _0$	$L_2$ Norm
$\  \mathbf{u} \ _E$	Energienorm

# 1 EINLEITUNG

## 1.1 Motivation

In den beiden letzten Jahrzehnten stieg die Leistungsfähigkeit der Computer sprunghaft an. Numerische Problemstellungen, welche noch vor wenigen Jahren teurer Großrechner bedurften, können heute bereits weitgehend auf Standard Personal Computern bearbeitet werden. Geringfügig zeitversetzt zu dieser rasanten Verbesserung der Hardware erfreut sich die leistungsfähige und anwenderfreundliche Computersoftware einer großen Nachfrage.

Parallel dazu hat sich die Finite Elemente Methode (FE-Methode) in vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften als ein häufig verwendetes Berechnungsverfahren zur effizienten Lösung strukturmechanischer Problemstellungen durchgesetzt. Plattenprogramme auf der Basis der finiten Elemente gehören für den konstruktiven Ingenieurbau längst zur Standardausrüstung. Darüberhinaus finden dort in immer komplexer werdenden Problemstellungen zunehmend Scheiben- und Faltwerkprogramme Anwendung.

Die einfache Bedienbarkeit moderner FE-Programme, kombiniert mit sicheren Benutzerführungen einerseits, sowie übersichtliche grafische Ausgabemöglichkeiten geglätteter Ergebniswerte andererseits, suggerieren dem ungeübten Anwender eine exakte Lösung seiner Problemstellungen. Tatsächlich ist die FE-Methode ein Näherungsverfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen [11,43,86]. Die Qualität der Lösung wird wesentlich durch die Art und die Beschaffenheit der verwendeten finiten Elemente beeinflusst. Selbst der geübte Benutzer gerät trotz der vielen grafischen Kontrollmöglichkeiten moderner FE-Programme in Gefahr, bei der Berechnung komplexer Systeme - beispielsweise die dreidimensionale Erfassung eines Bauwerks - mit finiten Elementen, den Überblick über die Qualität der Ergebnisse an den einzelnen Tragwerksteilen zu verlieren. Wird die Diskretisierung an entscheidenden Stellen des Tragwerks zu grob gewählt, besteht die Gefahr, wesentliche Tragwerkseinflüsse zu übersehen. Dagegen führt eine zu fein gewählte Diskretisierung zu unwirtschaftlich langen Rechenzeiten.

Im Zuge der erweiterten Anwendung von linearen FE-Methoden für komplexe Tragwerke erweist sich die manuelle Generierung geeigneter Netze, verglichen zur eigentlichen Berechnungsdauer, als sehr zeitintensiv. Neuere Entwicklungen der

grafikunterstützten Eingabe von Geometrie- und Topologiedaten stellen dem Anwender bereits viele Hilfsmittel zur Verfügung, verlangen jedoch immer noch ein hohes Maß an Anwendereingriffen. Effiziente Algorithmen zur automatischen Netzgenerierung, speziell von Viereckselementen, sind deshalb sehr gefragt.

## 1.2 Zielsetzung und Gliederung

Adaptive Methoden unterstützen den Anwender in der Suche nach einer geeigneten Diskretisierung eines Tragwerks. In Abhängigkeit von den Ergebnissen aus einer Fehlerabschätzung an einem Startnetz, spüren sie automatisch zu grob diskretisierte Stellen des Tragwerks auf und verdichten dort gezielt das FE-Netz. Fortschrittlichere adaptive Konzepte steuern gleichfalls eine Vergrößerung an zu fein diskretisierten Orten. Das Auffinden eines geeigneten adaptiven FE-Netzes stellt im wesentlichen ein Optimierungsproblem dar [26,46], mit der Zielfunktion

*„Minimiere den Diskretisierungsfehler in einer gewählten Norm“*

und der Nebenbedingung

*„Erzeuge ein FE-Netz mit möglichst wenigen Freiheitsgraden“.*

Aufgrund der Komplexizität der Aufgabenstellung findet keine direkte Lösung des Optimierungsproblems statt. Vielmehr wird eine iterative Verbesserung einer als Startnetz vorgegebenen Diskretisierung angestrebt. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit wird die Iteration unmittelbar nach dem Unterschreiten eines benutzerdefinierten Diskretisierungsfehlers abgebrochen.

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, ein weitgehend automatisiertes adaptives Gesamtkonzept für die lineare Berechnung von Flächentragwerken mit finiten Elementen auszuarbeiten. Die Ergebnisse sind in das am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entwickelte Programmsystem CARAT integriert. Bild 1.1 zeigt ein Übersichtsdiagramm der implementierten Verfahren.

Das Herz eines adaptiven Konzepts sind die Verfahren zur Fehlerabschätzung. Es existieren zwei unterschiedliche Arten der Fehlerbestimmung:

- A priori Kriterien ergeben sich aus geometrischen Überlegungen, ohne die Kenntnis der Ergebnisse einer FE-Analyse. Verzerrungskriterien definieren die Abweichung der Elementgestalt von einer Idealform. Approximationskriterien bestimmen die Qualität der Diskretisierung entlang gekrümmter Ränder und Schalenflächen.

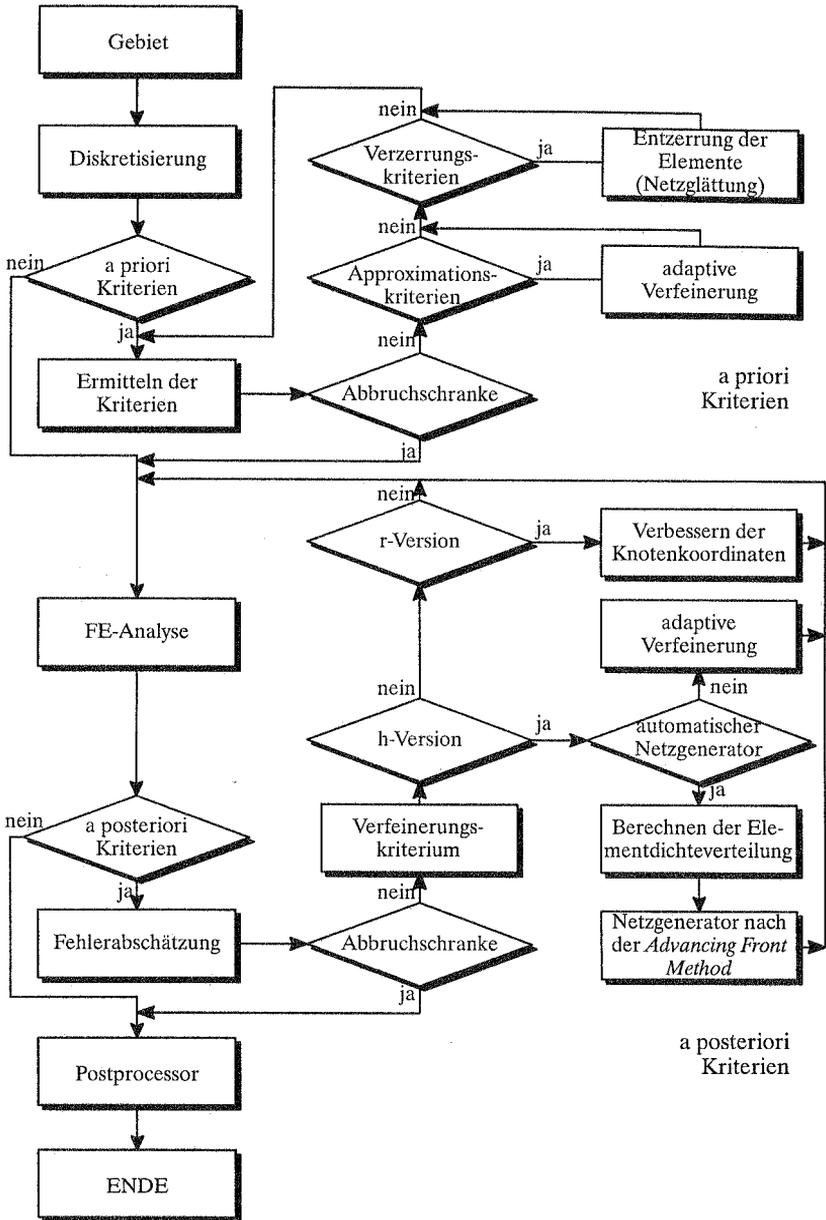


Bild 1.1 Diagramm einer adaptiven Berechnung in CARAT

- A posteriori Kriterien schätzen den Diskretisierungsfehler aus den Ergebnissen einer FE-Berechnung ab. Die Genauigkeit der Fehlerabschätzung ist dabei wesentlich höher als durch a priori Kriterien.

Die a priori Kriterien finden eine sinnvolle Anwendung in der Beurteilung einzelner Elemente. Rückschlüsse auf das Lösungsverhalten des gesamten FE-Netzes gestalten sich aufgrund fehlender Untersuchungsergebnisse als schwierig. Eine unzureichende Approximation gekrümmter Gebietsränder oder Schalenflächen läßt sich durch adaptive Verfeinerungen verbessern. Verzerrte Elemente bedürfen einer aufwendigen Netzglättung, welche die Qualität der Nachbarelemente in den Verbesserungsprozeß miteinbezieht.

Die aus der a posteriori Fehlerabschätzung resultierenden Ergebnisse dienen als Basis für eine Vielzahl unterschiedlicher Strategien zur Verbesserung der Diskretisierung. Die herkömmliche Elementunterteilungsstrategie (h-Version) unterteilt die Elemente mit den größten Fehleranteilen, während die r-Version Knotenpunkte in die Richtung großer Fehler „verschiebt“, so daß die Elemente an diesen Orten verkleinert werden. In seltenen Fällen kann auch eine Kombination der beiden Versionen (rh-Version) von Vorteil sein. In der Netzgenerierungsstrategie findet man die Vorteile der h- und der r-Version vereint, ohne deren wesentliche Nachteile zu erhalten. Als Kernstück dieser Strategie ist jedoch ein zuverlässiger automatischer Netzgenerator erforderlich.

Für diese Aufgabe wurde mit *Freem* ein leistungsfähiger Netzgenerator für Dreiecks- und Viereckselemente auf der Basis der *Advancing Front Method* [49,60] entwickelt. Er reduziert die sonst übliche aufwendige Eingabe der Geometrie-, Topologie- und Lastdaten zur Definition eines geeigneten FE-Netzes auf die Beschreibung der Geometrieberandungen und die Deklaration der Lasten. Zur Generierung von FE-Netzen für räumlich gekrümmte Tragwerke sind zusätzliche Angaben über die Geometrie der Flächen im Raum erforderlich. *Freem* erzeugt in jedem Iterationsschritt ein vollkommen neues adaptiv verfeinertes FE-Netz unter Berücksichtigung der Elementdichtefunktion, welche während der Fehlerabschätzung der aktuellen Diskretisierung hergeleitet wird.

Im Anschluß an die adaptive Verfeinerung wird eine erneute FE-Analyse durchgeführt. Der iterative Prozeß wird solange wiederholt, bis der erwünschte Diskretisierungsfehler erreicht, oder ein weiteres Abbruchkriterium, wie die maximale Anzahl an Iterationsschritten, Elementen, Freiheitsgraden u.ä., überschritten ist.

Kapitel 2 befaßt sich ausführlich mit den Methoden zur Fehlerabschätzung. Nach einer kurzen Einführung in mögliche Fehlerarten werden unterschiedliche Fehlerdefinitionen

vorge stellt. Ein Überblick über gängige a priori Kriterien beschreibt die Stärken und Schwächen der Fehlerabschätzung ohne Kenntnis der eigentlichen Lösung. Abschließend wird nach einer kurzen Einführung in bekannte Verfeinerungsindikatoren und Fehlerestimatoren ein einfacher heuristischer Verfeinerungsindikator anhand des Knotengleichgewichts vorgestellt.

Kapitel 3 beschreibt die adaptiven Methoden. Nach einem allgemeinen Überblick wird die Elementunterteilungsstrategie (h-Version) ausführlich erläutert. Ein weiterer Abschnitt widmet sich der r-Version und beschreibt mögliche Anwendungsbereiche dieses Verfahrens. Alternativ zur herkömmlichen Elementunterteilungsstrategie oder einer Kombination aus r- und h-Version wird mit der Netzgenerierungsstrategie ein leistungsfähiges Werkzeug vorgestellt, das in jedem adaptiven Iterationsschritt ein völlig neues adaptiv verfeinertes FE-Netz aus den Vorgaben der Fehlerabschätzung generiert. Die wesentliche Grundlage dieser Strategie ist ein automatischer Netzgenerator.

Kapitel 4 befaßt sich mit der automatischen Generierung von FE-Netzen. Im ersten Abschnitt werden die wichtigsten Netzgeneratoren erörtert. Neben der Vorgehensweise zeigen sich die Stärken und Schwächen der unterschiedlichen Methoden. Mit dem Netzgenerator *Freem* wird ein automatischer Generator aus der Klasse der *Advancing Front Method* vorgestellt, der sowohl homogene, als auch adaptive Dreiecks- und Vierecksnetze für ebene und räumlich gekrümmte Tragwerke erzeugt. Außerdem wird eine Strategie zur Verminderung von verzerrten Elementen auf gekrümmten Flächen erläutert.

Kapitel 5 zeigt Anwendungen der adaptiven Methoden aus den Bereichen der Scheiben, Platten und Schalen. Neben der Darstellung des Gesamtkonzepts werden die Elementunterteilungsstrategie und Netzgenerierungsstrategie kritisch erörtert. Einige grundsätzliche Bemerkungen über die Vergleichbarkeit der Methoden schließen dieses Kapitel.

Kapitel 6 beschreibt Möglichkeiten zur Behandlung mehrerer Lastfälle mit adaptiven Methoden. Neben der Definition von maßgeschneiderten FE-Netzen für jeden Lastfall wird ein Verfahren vorgestellt, das ein gemeinsames adaptives FE-Netz für alle gegebenen Lastfälle erzeugt.

Der Gedanke liegt nahe, mit dem automatischen adaptiven Konzept sei ein Werkzeug geschaffen, das eine korrekte Lösung beinahe beliebiger Problemstellungen aus dem Bereich der Strukturmechanik garantiere. Für einzelne Fälle trifft diese Annahme sicherlich zu. Es bleibt jedoch zu bedenken, daß auch dieses Werkzeug bestimmten Annahmen unterliegt. Eingabeparameter beeinflussen das Ergebnis dabei nicht

unwesentlich. Diese Methode ist also nicht als ein Expertensystem gedacht, welches Mängel im mechanischen Hintergrundwissen eines Anwenders ausgleicht, sondern es soll lediglich zur Unterstützung des erfahrenen Konstrukteurs dienen.

# 2 FEHLERABSCHÄTZUNG

## 2.1 Fehlerarten

Die Methode der finiten Elemente spiegelt nicht das exakte Verhalten eines realen Tragwerks wider. Vielmehr werden auf einem langen Weg über Modellierung und Diskretisierung, bis hin zur Lösung eines Problems, signifikante Vereinfachungen getroffen. Dabei sind im wesentlichen drei Fehlerarten zu beobachten:

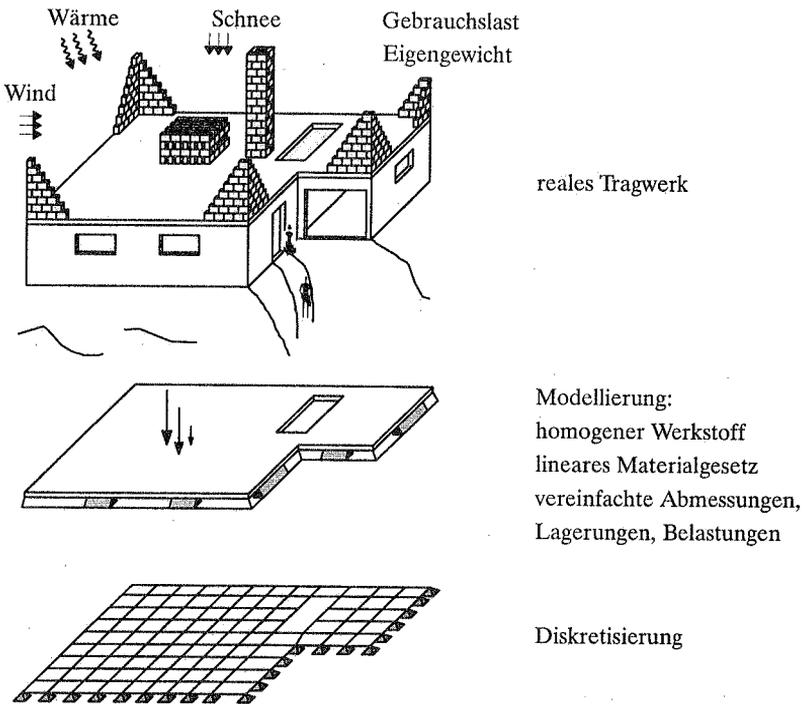


Bild 2.1: Beschreibung der Fehlereinflüsse

- **Modellierungsfehler**

Der Modellierungsfehler resultiert aus der notwendigen Vereinfachung durch die Wahl eines mechanischen Modells (Entscheidung zur Problemdimension, Wahl der Materialparameter, Definition der Lasten, Abmessungen und Lagerbedingungen) zur angenäherten Beschreibung wesentlicher physikalischer Zustände realer Tragwerke. Dabei müssen häufig aus Gründen der Berechenbarkeit des Modells deutliche Vereinfachungen gegenüber der Wirklichkeit getroffen werden. Die geeignete Modellbildung erfordert ein hohes Maß an Erfahrung und Wissen über die verwendete Methode. Rückschlüsse auf den Modellierungsfehler sind im wesentlichen nur durch Modellversuche und Beobachtung der Wirklichkeit zu erzielen, die jedoch ebenfalls fehlerbehaftet sind. In den folgenden Betrachtungen soll der Modellierungsfehler nicht weiter verfolgt werden; das gewählte mechanische Modell sei also der Startpunkt weiterer Überlegungen.

- **Diskretisierungsfehler**

Dieser Fehler ist bedingt durch eine genäherte Lösung des mechanischen Modells. Insbesondere die Wahl der Elementansätze, die Approximation der Geometrie und die Form und Anzahl der verwendeten finiten Elemente sind verantwortlich für die Größe des Diskretisierungsfehlers. Es ist das Ziel der adaptiven Methoden, diesen Fehler unter der Berücksichtigung wirtschaftlicher Überlegungen zu minimieren. Etwaige Modellierungsfehler können durch adaptive Methoden nicht korrigiert werden. Wird beispielsweise in der Modellbildung ein linear elastisches Materialverhalten angenommen, gelten Singularitäten an einspringenden Ecken als korrekt, obwohl im realen Tragwerk an diesen Stellen keine Singularitäten auftreten. Die adaptiven Methoden versuchen deshalb folgerichtig an diesen Stellen Netzverdichtungen zu bewirken, um die Singularitäten weitestgehend approximieren zu können.

- **Numerische Fehler**

In dieser Gruppe sind die Fehler zusammengefaßt, welche sich aus der endlichen Stellenanzahl zur Darstellung reeller Zahlen im Computer ergeben. Numerische Operationen ziehen sowohl Abschneide-, als auch Rundungsfehler nach sich, welche jedoch durch die Wahl geeigneter Algorithmen deutlich vermindert werden können. Mit dem Einzug der 8 Byte Wortlänge (ca. 14-16 gültige Ziffern) für reelle Zahlen in Finite Elemente Programmen ist die Bedeutung dieser Fehler etwas in den Hintergrund getreten.

## 2.2 Fehlerdefinition

Ist die exakte Lösung eines Problems bekannt, kann der *wahre Fehler*  $e$  einer Berechnung ermittelt werden:

$$e = \text{exakte Lösung} - \text{genäherte Lösung}$$

In dieser Arbeit wird die exakte Lösung des mechanischen Modells als *wahre Lösung* bezeichnet ( $u, \sigma$ ). Das Ergebnis aus einer Berechnung mit finiten Elementen ( $u_h, \sigma_h$ ) stellt eine genäherte Lösungsfunktion dar. Dieses Ergebnis beinhaltet sowohl Diskretisierungs-, als auch numerische Fehler. Damit lautet die Definition des *wahren Fehlers*:

$$e_u = u - u_h \quad \text{bzw.} \quad e_\sigma = \sigma - \sigma_h$$

Häufig ist es sinnvoll, den Fehler aus Gründen der Vergleichbarkeit mit anderen Problemen durch die wahre Lösung zu skalieren. Man spricht dann von einem *wahren relativen Fehler*:

$$\text{rel } e_u = \frac{u - u_h}{u} \quad \text{bzw.} \quad \text{rel } e_\sigma = \frac{\sigma - \sigma_h}{\sigma} \quad (2.1)$$

In den meisten praktischen Fällen ist die exakte Lösung eines Problems unbekannt, und damit auch der wahre Fehler  $e$ . Die Fehlerberechnung hat dann eine möglichst gute Abschätzung der Fehlerfunktion  $e$  aus berechenbaren Größen zum Ziel. Kann ein mathematischer Beweis erbracht werden, daß ein gefundener Fehlerwert  $\eta$  eine Norm der Fehlerfunktion beschränkt, so daß

$$C_1 \eta \leq \|e\| \leq C_2 \eta \quad (2.2)$$

ist, so bezeichnet man  $\eta$  als *Fehlerestimator*.  $C_1$  und  $C_2$  sind positive Konstanten, die unabhängig von dem gewählten FE-Netz und den Materialparametern sind. Der Fehlerestimator wird als *asymptotisch exakt* bezeichnet, falls sich  $\eta$  bei einer Verfeinerung des FE-Netzes an den exakten Fehler  $\|e\|$  annähert:

$$\theta := \frac{\eta}{\|e\|} \rightarrow 1 \quad (2.3)$$

$\theta$  heißt nach Babuška et al. [7] *efficiency index*. Ein Fehlerestimator ist eine globale Netzgröße, die aus der Summe der Quadrate der Elementanteile berechnet werden kann:

$$\eta = \sqrt{\sum_{i=1}^{NEL} \lambda_i^2} \quad (2.4)$$

$\lambda_i$  wird als *Fehlerindikator* bezeichnet. Die Fehlerindikatoren schätzen den Verlauf des ausgewählten Fehlers über das gesamte Gebiet. Sie sind die maßgebenden Faktoren zur Steuerung einer Netzverfeinerung, oder dienen als Ausgangswerte zur Berechnung der Elementdichtefunktion für die adaptive Netzgenerierung.

Für heuristische Verfahren zur Fehlerabschätzung ist es häufig nicht möglich, die Ungleichung (2.2) zu zeigen, es kann jedoch sehr wohl eine Größe  $\lambda_i$  berechnet werden, welche die Verteilung eines Fehlers beschreibt.  $\lambda_i$  wird dann als *Verfeinerungsindikator* bezeichnet, weil zwar die ermittelte Größe des Gesamtfehlers deutlich vom wirklichen Fehler abweichen, jedoch eine adaptive Netzverfeinerung gesteuert werden kann.

Der zur Abschätzung des Fehlers erforderliche Übergang auf integrale Größen verhindert im allgemeinen eine punktweise Fehlerdefinition wie in Gleichung (2.1), welche im ersten Augenblick als vorteilhaft erscheinen mag. Der Anwender ist häufig daran interessiert, wie weit beispielsweise eine ermittelte Spannungsfunktion an einer bestimmten Stelle vom wahren Spannungsverlauf abweicht. Zur automatischen Steuerung adaptiver Methoden sind lokale Fehlerkriterien jedoch ungeeignet, da die Frage nach geeigneten Orten zur Fehlerdefinition beantwortet werden muß. So ist beispielsweise der lokale Fehler an einspringenden Ecken in den Spannungen unendlich, wogegen der Gesamtfehler des Tragwerks durchaus akzeptabel sein kann. Deshalb ist es vorteilhaft, den Fehler in einer geeigneten Norm zu definieren.

Eine Diskretisierung wird als ausreichend gut erachtet, wenn der relative Gesamtfehler des Tragwerks kleiner ist als ein vorgegebener Fehlerwert  $\bar{\eta}$ . Für praxisnahe Beispiele zeigt sich im allgemeinen eine Fehlerschranke von 5% als eine akzeptable Größe. Natürlich sind noch weitere Abbruchschranken zu definieren, falls ein vorgegebener Fehlerwert nicht erreicht werden kann. So ist es oftmals zweckmäßig, die CPU-Zeit, die Anzahl an Iterationsschritten, Knoten, Elementen oder Elementunterteilungen zu beschränken, um beispielsweise zu klar definierten Kosten die bestmögliche Diskretisierung eines Problems zu erhalten. Häufig gestaltet sich eine Kombination aus mehreren Abbruchschranken als sinnvoll.

## 2.3 Räume und Normen

Die Bestimmung aussagekräftiger Punkte zur Beschreibung des Fehlers entfällt, wenn das Integral der Fehlerfunktion über das Gebiet berücksichtigt wird. Diese Betrachtungsweise führt unmittelbar zu dem Begriff von integralen Normen. Die Norm einer Funktion wird aus der jeweiligen Definition des Raumes abgeleitet, in dem die Funktion

enthalten ist (Funktionsraum). Zur Klassifizierung werden die Funktionen bezüglich ihrer Stetigkeitseigenschaften ( $C^n$ -Raum) und der Eigenschaften ihrer Ableitungen ( $H^m$ -Raum) untersucht. Über einem Gebiet  $\Omega$  stetige Funktionen bilden den Raum  $C^0(\Omega)$ . Ist eine Funktion  $u$  und deren Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  stetig, gehört die Funktion zum Raum  $C^n(\Omega)$ . Der Raum  $C^n$  ist ein Unterraum zu  $C^0$ . Allgemein kann folgende Beziehung angegeben werden:

$$C^n \subset C^{n-1} \subset \dots \subset C^0 \text{ für positive } n$$

Die meisten finiten Elemente verwenden Ansatzfunktionen der Klasse  $C^0(\Omega)$ , also stetige Funktionen.

Für die Fehlerbeschreibung ist die Kenntnis der Größe einer Funktion (bzw. eines Vektors) erforderlich.  $\| \cdot \|$  wird als *Normenfunktion* und  $\| v \|$  als *Norm des Vektors*  $v$  bezeichnet. Der Raum, in dem eine Norm definiert ist, heißt *normierter Raum*. Von einer Norm sind folgende Eigenschaften zu erfüllen:

- a)  $\| u \| \geq 0$  , und  
 $\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0$  positiv definit
- b)  $\| au \| = |a| \| u \|$
- c)  $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$  Dreiecksungleichung

### Vektornormen

Für Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  sind die folgenden Normen gebräuchlich:

$$\| u \|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad (\text{Betragsnorm})$$

$$\| u \|_2 = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2} \quad (\text{Quadratnorm})$$

$$\| u \|_\infty = \text{Max}_{k=1,\dots,n} |u_k| \quad (\text{Maximumnorm})$$

Die Indizierung obiger Normen ist nicht zufällig. Vektornormen können folgendermaßen allgemein geschrieben werden:

$$\| u \|_p = [|u_1|^p + |u_2|^p + \dots + |u_n|^p]^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

Aus dieser allgemeinen Beschreibung wird deutlich, warum die Maximumnorm mit dem Index  $\infty$  geschrieben wird. Für  $p \rightarrow \infty$  wird das Maximalglied dominant, es folgt:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \max_{k=1, \dots, n} |u_k|$$

Wie für die Vektoren, können auch in Funktionenräumen unterschiedliche Normen definiert werden. Für stetige Funktionen ist die Verwendung einer Maximumnorm denkbar, welche den Betrag des maximalen Funktionswerts wiedergibt. Diese Norm ist jedoch zur Beschreibung des Diskretisierungsfehlers von finiten Elementen wenig hilfreich, da sie selbst für zulässige Diskretisierungen von Problemen mit Singularitäten einen unendlich großen Fehlerwert widerspiegelt [65].

### **L<sub>2</sub>-Norm**

Eine brauchbare Norm für eine Funktion  $u$  ist die L<sub>2</sub>-Norm. Sie entspricht dem inneren Produkt der Funktion.

$$\|u\|_0 = \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

Alle bezüglich der L<sub>2</sub>-Norm beschränkten Funktionen bilden den Raum L<sub>2</sub>. Man bezeichnet diese Funktionen als quadratintegrierbar. Eine Funktion  $u$  in L<sub>2</sub> hat folgende Eigenschaft:

$$\left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2} < \infty$$

Der Raum L<sub>2</sub> stellt geringere Anforderungen an eine Funktion als C<sup>0</sup>. So sind über die Elementränder unstetige Dehnungsfunktionen der finiten Elemente nicht mehr in C<sup>0</sup>, jedoch quadratintegrierbar, also im Raum L<sub>2</sub> enthalten.

### **Energienorm**

Die Energienorm ist ein für finite Elemente sehr häufig verwendetes Fehlermaß.

$$\|u\|_E = \left( \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Die Energienorm erscheint den Ingenieuren als ein natürliches, da mechanisch anschauliches Fehlermaß.

**Sobolev-Norm**

Der Sobolev-Raum  $H^n$  stellt eine allgemeinere Klasse zur Definition einer Funktion dar als die  $C^n$  Klasse.  $H^n$  ist ein erweiterter linearer Funktionenraum.

*Eine Funktion  $u$  ist ein Element von  $H^n(\Omega)$ , wenn  $u$  und alle seine partiellen Ableitungen bis zu der Ordnung  $n$  ( $n \geq 0$ ) quadratintegrierbar sind ( $L_2(\Omega)$ ) [21].*

Aus obiger Definition folgt sofort die Beziehung des Sobolev-Raums zum  $L_2$ -Raum:

$$L_2(\Omega) = H^0(\Omega)$$

Für die Sobolev-Räume untereinander existiert folgende Ordnung:

$$H^n \subset H^{n-1} \subset \dots \subset H^1 \subset H^0 \text{ für positive } n$$

Der Abstand zweier Funktionen im  $H^n(\Omega)$  ist durch die  $H^n$ -Norm definiert. Folglich ist der Abstand zwischen einer Funktion  $u \in H^n$  zu einer weiteren Funktion  $v \in H^n$ :  $\|u - v\|_n$ . Für den eindimensionalen Fall schreibt sich die  $n$ -te Sobolev-Norm wie folgt:

$$\|u\|_n = \sqrt{\|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2 + \dots + \|u^{(n)}\|_0^2}$$

$|u|_n = \|u^{(n)}\|_0$  wird als die  $n$ -te Seminorm der Sobolev-Norm bezeichnet.

**Äquivalenz von Normen**

Häufig erscheint es aufgrund einer mechanischen Interpretationsmöglichkeit vorteilhaft, den Unterschied zweier Funktionen in einer anderen als der Sobolev-Norm zu messen. Dazu müssen sich die Werte der vergleichbaren Normen innerhalb vorgegebener Schranken entsprechen.

Zwei Normen werden als äquivalent bezeichnet, wenn zwei positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  existieren, so daß für alle Funktionen  $u$  des Raums gilt:

$$C_1 \| \cdot \|_a \leq \| \cdot \|_b \leq C_2 \| \cdot \|_a$$

Es kann unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt werden, daß die Sobolev-Norm zu ihrer Seminorm und zur Energienorm äquivalent ist [41,65]. Die Energienorm darf also

für viele Anwendungen der Finite Elemente Methoden als gleichwertiges Fehlermaß zur Sobolev-Norm verwendet werden.

## 2.4 A priori Kriterien

A priori Kriterien geben dem Anwender Aufschlüsse über die Qualität der verwendeten Diskretisierung, ohne eine FE-Berechnung durchzuführen. Sie stützen sich wesentlich auf geometrische Gegebenheiten, wie die Elementgestalt oder die Güte der Approximation von Gebietsrändern und -flächen. Aus der Literatur ist eine Vielzahl von a priori Kriterien bekannt [1,11,17,33,43,53,75,76]. Haufe [33] gibt eine Übersicht über die verbreitetsten Kriterien. A priori Untersuchungen können drei unterschiedliche Aufgabenbereiche zugeordnet werden:

Durch Überlegungen über theoretische Eigenschaften der verwendeten finiten Elemente können bereits im Vorfeld einer FE-Analyse unzulässige Elementgeometrien oder Elementübergänge lokalisiert und gegebenenfalls korrigiert werden, die beim Aufstellen der Elementmatrizen zu Programmabbrüchen oder zumindest zu lokal unzureichenden Ergebnissen führen würden.

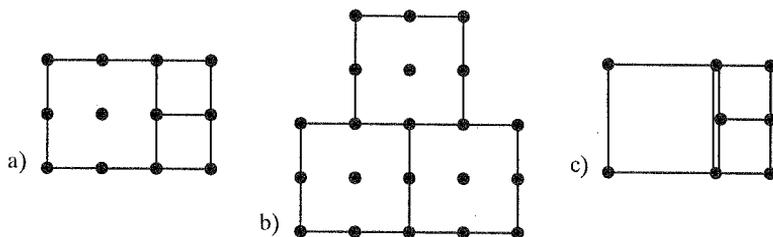
Die Qualität der Ergebnisse aus FE-Berechnungen wird wesentlich durch die Gestalt der verwendeten Elemente mitbeeinflusst. Gestaltskriterien versuchen die Berechnungsqualität anhand der Elementverzerrungen vorherzusagen. Die ermittelten Werte resultieren häufig aus einer linearen Interpolation zwischen der unbrauchbaren und der ausgezeichneten Elementgeometrie, unabhängig von den verwendeten Elementtypen.

Approximationskriterien ermitteln die Abweichungen der Elementränder von Geometrierändern und der Elementflächen von Geometrieflächen. Durch eine Skalierung dieser Beträge auf die Elementgröße erhält man normierte Approximationsmaße.

Rückschlüsse von der Geometrie auf die tatsächliche Qualität einer Diskretisierung und die zu erwartende Genauigkeit der Ergebnisse sind problemabhängig. Sie bedürfen einer großen Erfahrung mit der verwendeten Methode. In der automatischen Ermittlung von Qualitätskriterien kommen vor allem heuristische Überlegungen zum Einsatz, häufig ohne Berücksichtigung der eingesetzten Elementformulierungen. A priori Kriterien bieten deshalb lediglich eine Hilfestellung bei der Beurteilung eines FE-Netzes. Aussagen darüber, ob die gewählte Anzahl an Freiheitsgraden genügt, eine Problemstellung ausreichend genau zu beschreiben, können a priori nicht getroffen werden.

## 2.4.1 Zulässigkeit von Elementgeometrien und Elementübergängen

Die Beurteilung der Zulässigkeit von finiten Elementen bezüglich ihrer Form gestaltet sich vergleichsweise einfach. Ebenso ist die erforderliche Kompatibilitätsbedingung benachbarter Elemente an den Elementrändern (häufig  $C^0$ ) gut überprüfbar. Zwei Elemente gelten als korrekt miteinander verbunden, wenn die benachbarten Ränder durch eine identische Geometriebeschreibung definiert sind, so daß keine Überschneidungen oder klaffenden Fugen zwischen den Nachbarelementen auftreten können. In Bild 2.2 sind unzulässige Elementverbindungen dargestellt. Bild 2.2c zeigt zwar eine im allgemeinen unzulässige Elementverbindung, sie wird jedoch in Kombination mit adaptiven Methoden durch geeignete Vorschriften der Knotenkopplung bereinigt (Abschnitt 3.2.2).

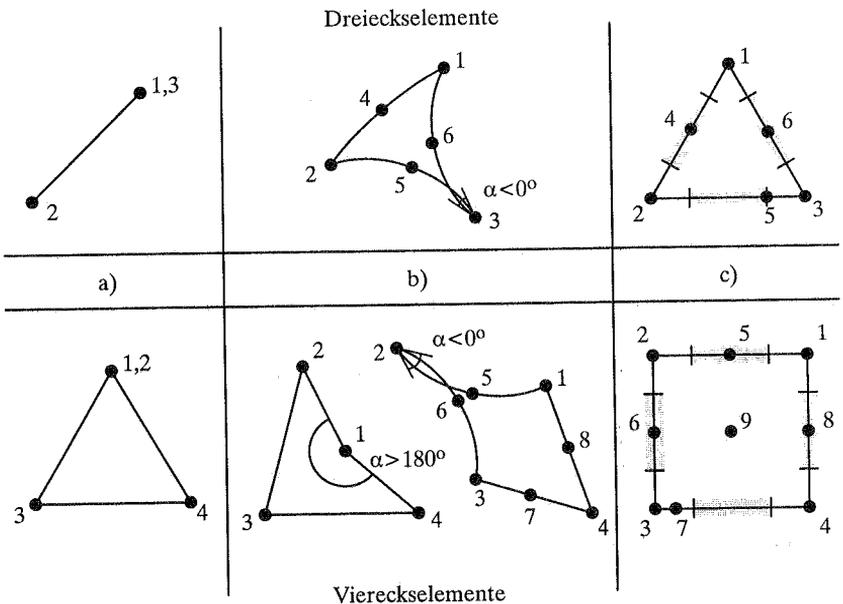


**Bild 2.2:** Unzulässige Verbindungen benachbarter Elemente

Das Aufstellen der Elementmatrizen von finiten Elementen wird im allgemeinen durch effiziente numerische Integrationstechniken begleitet, welche lediglich für vergleichsweise einfache Geometrien anwendbar sind. Für isoparametrische Elemente sind durch die Parameterräume einfache lokale Geometrien (Quadrat, gleichseitiges/rechtwinkliges Dreieck) definiert, in welchen die Ansatzfunktionen und deren Ableitungen in dimensionslosen Einheitskoordinaten vorliegen. Die Elementmatrizen werden in den Parameterräumen aufgestellt und anschließend auf die realen Elementbereiche abgebildet. Ein Element wird als unzulässig bezeichnet, wenn es so starke Verzerrungen aufweist, daß die Abbildung des Parameterraums auf das reale Element nicht eindeutig ist. Für eindeutige Abbildungen gilt das Element als zulässig.

Nachfolgend werden wesentliche Kriterien vorgestellt, welche zulässige Elemente erfüllen müssen (weitere Informationen darüber sind in [1,17,33,43,53,75] zu finden):

- Mehrere Elementknoten dürfen sich nicht an einem gemeinsamen geometrischen Ort befinden (Bild 2.3a).
- Kein Eckknoten darf auf der Geraden durch zwei weitere Eckknoten liegen.
- Die Seitenmittenknoten quadratischer Elemente müssen innerhalb des Intervalls  $[\frac{1}{4}l ; \frac{3}{4}l]$  der Elementseite plaziert sein (Bild 2.3c). Liegen die Knoten auf den Viertelpunkten, ist die Jakobi-Matrix dort singular.
- Die lokale Numerierung der Knoten muß im mathematisch positiven Umlaufsinn erfolgen. Eine Verletzung dieser Bedingung, vor allem eine willkürliche Numerierung der Knoten führt zu unzulässigen Abbildungen.
- Die wahren Elementinnenwinkel  $\alpha$  (Winkel zwischen den Tangenten an die Berandungen im Knotenpunkt) dürfen nicht kleiner als  $0^\circ$  und nicht größer als  $180^\circ$  sein (Bild 2.3b).



**Bild 2.3:** Beispiele für unzulässige Elementgeometrien

Die angeführten Kriterien stellen absolute Grenzwerte für die Zulässigkeit der Elementgeometrien dar, bei deren Überschreiten in der Regel numerische Probleme während des Aufstellens der Elementmatrizen auftreten. Bereits mit weitaus geringeren, als den oben beschriebenen Elementverzerrungen kann die Ergebnisqualität der Elemente unzureichend sein. Es ist deshalb erforderlich, heuristische Kriterien zu definieren, die einen Abriß über die zu erwartende Lösungsqualität bereits bei geringen Elementdeformationen widerspiegeln.

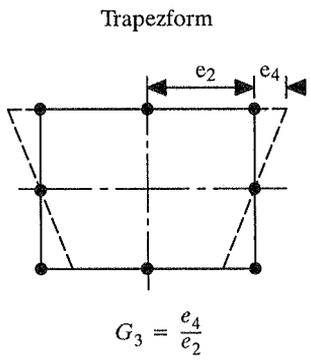
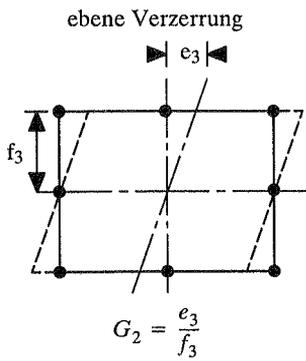
## 2.4.2 Gestaltskriterien

Aus der Literatur sind viele Qualitätskriterien für Dreiecks- und Viereckselemente bekannt, die vergleichsweise einfach in bestehende Programme implementiert werden können [17,43,53,62,75,76]. Wird ein Qualitätsmaß nur aus einem Geometrie-kriterium hergeleitet, ist der Aussagegehalt des Maßes als gering einzustufen, da unterschiedliche Elementverzerrungen, wie beispielsweise Trapez- oder Rautenformen, die ein deutlich differenziertes Elementverhalten erwarten lassen, als völlig gleichwertig wiedergegeben werden.

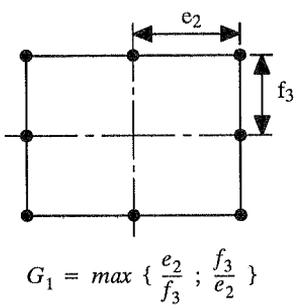
Robinson [75] beschreibt fundamentale Qualitätskriterien für Rechteckselemente, die durch lineare Überlagerung unterschiedlichste Elementdeformationen detailliert erfassen können (Bild 2.4):

- Das Seitenverhältnis (aspect ratio) benachbarter Elementkanten spiegelt wider, wie dünn ein Element ist und sollte möglichst Eins sein.
- Die ebenen Verzerrungen (skewness) ergeben bei Vierecken parallelogrammartig verformte Elemente. Diese Verzerrungen bewirken bei sehr vielen Elementtypen lediglich einen geringen Fehler.
- Trapezförmig verzerrte Elemente verhalten sich meist sehr viel schlechter als unverzerrte Elemente. Deshalb erscheint die Trapezform (taper) als ein bedeutendes Qualitätskriterium.
- Bei Schalenflächen ist die Verwindung eines Elements (warpage) ein weiteres Qualitätskriterium.
- Höherwertige Elemente (in besonderem Maße die Elemente der Serendipity-Familie) zeigen deutliche Qualitätseinbußen bei der Abweichung der Seitenmittelpunkte von der Verbindungsgeraden der zugehörigen Eckknoten (offset).

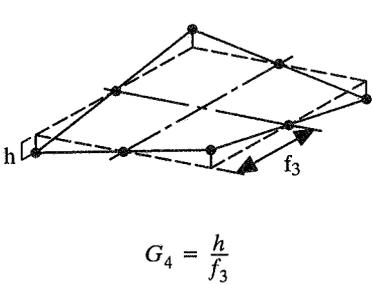
Robinson erarbeitete für viele dieser Qualitätskriterien Definitionen zur Bestimmung von Fehlerwerten. Diese Kriterien können entsprechend ihrer Bedeutung für das



Seitenverhältnis



Elementverwindung



Abweichung des Randknotens

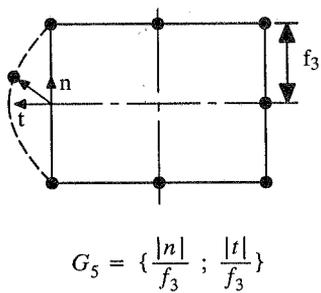


Bild 2.4: Kriterien nach Robinson [75]

Elementverhalten unterschiedlich gewichtet werden. Häufig reagieren Elemente mit linearen Ansätzen empfindlicher auf Verzerrungen als Elemente mit höherwertigen Verschiebungsansätzen. Parallelogrammartig verformte Elemente zeigen oft nur geringe Einbußen in der Ergebnisqualität, ebenso wie das Seitenverhältnis in gewissen Grenzen als unwesentlich erachtet werden darf. Auf Abweichungen der Seitenmittenknoten von der geraden Verbindung der Eckknoten reagieren Serendipity Elemente heftiger als beispielsweise Elemente mit einer Lagrangeformulierung [48].

Wird ein hoher Verzerrungsgrad einzelner Elemente signalisiert, kann durch geeignete Netzglättungsalgorithmen eine Verbesserung dieser Elemente angestrebt werden. Netzverfeinerungen sind ungeeignet eine Gestaltverbesserung zu bewirken, da die Unterteilung verzerrter Elemente ebenfalls verzerrte Elemente nach sich zieht. Ist das FE-Netz durch einen automatischen Netzgenerator erzeugt, kann eine erneute Netzgenerierung mit leicht modifizierten Elementdichteparametern ein verbessertes Gesamtnetz erzeugen.

### 2.4.3 Approximationskriterien

Neben den Qualitätskriterien für Elementdeformationen sind auch quantitative Aussagen über die Güte der Approximation gekrümmter Gebietsränder oder Schalenflächen von Bedeutung. Diese Merkmale seien hier als Approximationskriterien bezeichnet. Bis heute gibt es keine eindeutigen Regeln zur Diskretisierung von Schalenflächen oder von gekrümmten Rändern.

Baumann [11] definiert drei Approximationskriterien für vierknotige Elemente:

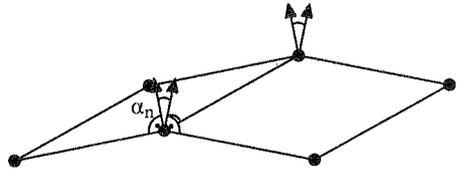
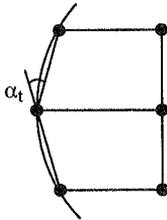
- die Abweichung des Elementmittelpunkts von der wahren Schalenfläche bezogen auf die Elementlänge
- die Differenz der Randkantenmittelpunkte zur wahren Randgeometrie bezogen auf die halbe Kantenlänge
- die Abweichung des Normalenvektors an den Elementknoten vom Normalenvektor auf die Schalenfläche

Diese Kriterien sind präzise, jedoch vergleichsweise unhandlich, da sie die exakte Geometriebeschreibung an beliebigen Stellen erfordern. Haufe [33] definiert vereinfachte Approximationskriterien, welche keine Kenntnis der tatsächlichen Geometriebeschreibung erfordern:

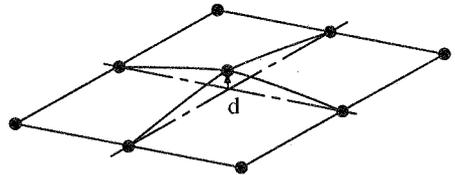
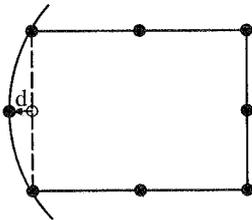
- die Abweichungen der Normalenvektoren an den Knotenpunkten zwischen benachbarten Elementen für Elemente mit linearen Ansatzfunktionen (Bild 2.5a)

- die auf die Elementgröße bezogenen normalen Abweichungen des Elementmittenknotens von einer idealisierten Elementfläche als Kriterium zur Approximation der Schalenfläche und, die auf die halben Kantenlängen bezogenen Abweichungen der Seitenmittenknoten in Richtung der lokalen Koordinaten zur Verbindungsgeraden der Eckknoten für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen (Bild 2.5b).

Eine Verbesserung der Approximation der exakten Geometrie ist, im Gegensatz zu einer schlechten Elementform, durch Verdichten der finiten Elemente einfach realisierbar.



a) lineare Elementansätze



b) quadratische Elementansätze

Bild 2.5: Approximationskriterien für finite Elemente

#### 2.4.4 Gesamtmaß zur Beurteilung der Elementqualität

Die Frage nach einem charakteristischen a priori Maß zur Beurteilung der Qualität eines finiten Elements gerät schwierig. Aus einer Auswahl unterschiedlicher Kriterien gilt es diejenigen auszufiltern, welche einen maßgebenden Einfluß auf die Elementqualität bewirken. Diese Kriterien sollten auf einen gemeinsamen Wertebereich skaliert werden (beispielsweise erhält jedes Kriterium den Wert 0 für das optimale Elementverhalten

und den Wert 1 für Unzulässigkeit). Qualitätskriterien innerhalb des Wertebereichs werden durch lineare Interpolation ermittelt.

Ein bisher ungelöstes Problem besteht in einer sinnvollen Gewichtung der unterschiedlichen Kriterien zu einem Qualitätsmaß. Dazu müssen Erfahrungen über das Elementverhalten des jeweiligen Elementtyps integriert werden.

Ein geeignetes Gesamtmaß zur Beurteilung der Elementqualität kann aus der Summe der Quadrate aller Einzelkriterien definiert werden [33]:

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

Dabei ist  $n$  die Anzahl der berücksichtigten Einzelkriterien. Weitere Gesamtmaße sind bei Baumann [11] und Jüdt [43] vorgestellt.

## 2.5 A posteriori Fehlerabschätzung

Oftmals ist der Benutzer eines FE-Programms daran interessiert, wie gut die entsprechende Differentialgleichung seiner mechanischen Problemstellung gelöst wird. Eine Antwort darauf kann nur a posteriori gegeben werden, nachdem die FE-Analyse tatsächlich durchgeführt wurde. Ist die exakte Lösung eines Problems bekannt, kann der Fehler  $e$  einer Berechnung mit finiten Elementen einfach ermittelt werden (Abschnitt 2.2):

$$e = u - u_h \quad e_\sigma = \sigma - \sigma_h$$

Dabei sind  $u/\sigma$  die exakten Verschiebungen/Spannungen und  $u_h/\sigma_h$  die aus der FE-Berechnung erhaltenen Werte. Die exakte Lösung ist jedoch in der Regel unbekannt, so daß der Fehler möglichst genau abgeschätzt werden muß. In der Literatur ist eine Vielzahl unterschiedlicher Verfahren zu diesem Themenbereich vorhanden [beispielsweise 1,7,8,11,37,45,62,88,101,102]. Hier seien nur die zwei bekanntesten beschrieben. Anschließend wird ein heuristischer Verfeinerungsindikator vorgestellt.

## 2.5.1 Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz, Zhu ( $Z^2$ )

Die Energienorm des Fehlers  $\|e\|$  für linear elastische Problemstellungen ist gegeben durch

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T C^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega.$$

Da die exakten Spannungen  $\sigma$  normalerweise unbekannt sind, werden sie durch *verbesserte Spannungen*  $\sigma^*$  aus einer Spannungsglättung ersetzt. Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Spannungsglättung sowohl auf lokaler, als auch auf globaler Basis. Neben der reinen arithmetischen Mittelbildung der Spannungswerte an den Knotenpunkten sind die  $L_2$ -Projektion und die Spannungsglättung über superkonvergente Punkte am weitesten verbreitet. Beispielhaft sei hier auf die Publikationen von Hinton, Campbell [36] und Zienkiewicz, Zhu [102] verwiesen. Der Verfeinerungsindikator ermittelt sich nun aus der Energienorm der Differenz der verbesserten Spannungen zu den Spannungen aus der FE-Lösung:

$$\lambda_i^2 = \int_{\Omega_i} (\sigma^* - \sigma_h)^T C^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega_i \quad (2.6)$$

Dieser Verfeinerungsindikator ist verhältnismäßig unproblematisch in jedes existierende FE-Programm zu implementieren. Da sich finite Elemente, die auf Verschiebungsansätzen basieren und korrekt integriert sind, zu steif verhalten, wird  $\sigma^*$  in der Regel unterschätzt, und damit ist auch  $\lambda_i$  kleiner als der wirkliche Fehler. Zur Verbesserung des Fehlerwerts ermittelten Zienkiewicz und Zhu [101] heuristische Korrekturfaktoren für unterschiedliche Verschiebungselemente. Rank et al. [70] konnten nachweisen, daß sich der Verfeinerungsindikator nach  $Z^2$  für Elemente mit linearen Ansatzfunktionen nur durch einen Faktor C vom nachfolgend vorgestellten residualen Fehlerestimator (Abschnitt 2.5.2) unterscheidet. Für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen neigt er jedoch noch deutlicher dazu, den wahren Fehler zu unterschätzen.

Bei Schalenelementen ist es empfehlenswert, die Energienorm des Fehlers aus den Schnittgrößen zu ermitteln [37], da diese ein integrales Maß der Spannungen über die Elementdicke beinhalten:

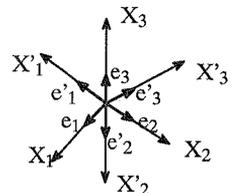
$$\lambda_i^2 = \int_{\Omega_i} [(M^* - M_h)^T C_b^{-1} (M^* - M_h) + (Q^* - Q_h)^T C_s^{-1} (Q^* - Q_h) + (N^* - N_h)^T C_m^{-1} (N^* - N_h)] d\Omega_i \quad (2.7)$$

$C_b, C_s$  und  $C_m$  sind die Materialmatrizen für Biegemoment, Querkraft und Normalkraft. Hinton et al. [37] vernachlässigen den Querkraftanteil. Auch in der vorliegenden Arbeit wird dieser Anteil aus folgenden Gründen nicht berücksichtigt:

- Finite Elemente approximieren im allgemeinen die Querkräfte schlechter als die Momente. Daraus resultiert eine Dominanz des Querkraftfehleranteils, vor allem im Auflagerbereich.
- Bei schubweichen Formulierungen treten an freien oder einfach gelagerten Rändern ("soft support") hohe Spannungsgradienten ("boundary layer effect"), vor allem in den Querkräften auf [82].
- In Bereichen von Gebietslagerkanten und Lasteinleitungen treten Querkraftsprünge auf, die nicht geglättet werden dürfen.

Die Lokalsysteme zweier benachbarter Schalenelemente sind an einem gemeinsamen Knoten im allgemeinen nicht kompatibel. Damit die Schnittgrößen an den Knotenpunkten geglättet werden können, müssen sie zuerst auf ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden. Rust [76] definiert dazu ein knotenbezogenes Koordinatensystem. In dieser Arbeit werden die Schnittgrößen auf das globale Koordinatensystem transformiert:

$$A_{ik} = e_i' e_k$$



Die Transformationsmatrix  $A_{ik}$  enthält die Richtungskosinus zwischen den Basisvektoren des lokalen und globalen Koordinatensystems.

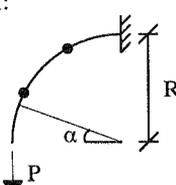
$$M_{hpq} = A_{ip}A_{jq}M'_{hij} \quad N_{hpq} = A_{ip}A_{jq}N'_{hij}$$

Die geglätteten Schnittgrößen ergeben sich in dieser Arbeit aus der Mittelwertbildung der Elementschnittgrößen an den Knotenpunkten:

$$M_{ij}^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{hij} \quad N_{ij}^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{hij}$$

Die an den Gaußpunkten berechneten Schnittgrößen müssen auf die Knotenpunkte übertragen werden. Meistens werden sie im lokalen System (also entlang der Schalenfläche) extrapoliert. In dieser Arbeit ist eine Extrapolation der an den Gaußpunkten auf das globale Koordinatensystem transformierten Schnittgrößen entlang der Schalenfläche realisiert. Für allgemeine Elementgeometrien ergeben die beiden Extrapolationen unterschiedliche Ergebnisse. Die folgenden beiden Beispiele sollen das unterschiedliche Extrapolationsverhalten veranschaulichen. Die Normal- und Querkräfte sind an den Drittelpunkten gegeben. Die lokalen und globalen Schnittkräfte werden ohne Berücksichtigung der Belastung im Lokalsystem des Elements linear auf die Elementrandpunkte extrapoliert.

Beispiel 1:



lineare Extrapolation auf die Elementränder

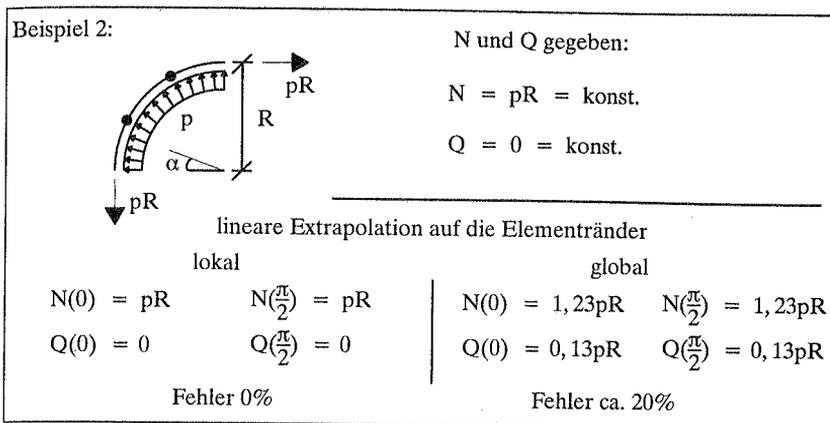
lokal		global	
$N(0) = 1,23P$	$N(\frac{\pi}{2}) = 0,13P$	$N(0) = P$	$N(\frac{\pi}{2}) = 0$
$Q(0) = -0,13P$	$Q(\frac{\pi}{2}) = -1,23P$	$Q(0) = 0$	$Q(\frac{\pi}{2}) = -P$
Fehler ca. 20%		Fehler 0%	

N und Q in den Drittelpunkten gegeben:

$$N(\alpha = \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}P \quad N(\alpha = \frac{\pi}{3}) = \frac{P}{2}$$

$$Q(\alpha = \frac{\pi}{6}) = -\frac{P}{2} \quad Q(\alpha = \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$$

In Beispiel 1 liefert die lineare Extrapolation der globalen Schnittgrößen die exakten Ergebnisse an den Knotenpunkten, da die Belastung ebenfalls global orientiert ist. Dagegen beinhaltet die Extrapolation der lokalen Schnittgrößen einen Fehler von 20%.



In Beispiel 2 ist das Resultat genau umgekehrt. Grundsätzlich enthalten beide Extrapolationstechniken Fehler, weil sie das Gleichgewicht nicht berücksichtigen. Obige Beispiele stellen jedoch Extremfälle dar, da die Krümmung von finiten Elementen im Regelfall deutlich geringer ist. Die aus der Extrapolation resultierenden Fehler sind deshalb im allgemeinen ebenfalls geringer.

### 2.5.2 Fehlerestimator nach Babuska, Rheinboldt, Miller

Babuska et al. [5,6,7] entwickelten einen Fehlerindikator, welcher ausschließlich aus bekannten Größen ermittelt wird:

$$\lambda_i^2 = h_i^2 \int_{\Omega_i} (\mathbf{L}u_h - \mathbf{p})^T (\mathbf{L}u_h - \mathbf{p}) d\Omega_i + h_i \int_{\Gamma_i} J(\sigma_h)^T J(\sigma_h) d\Gamma_i$$

Der Fehlerindikator besteht zum einen aus einem residualen Anteil  $(\mathbf{L}u_h - \mathbf{p})$  durch das nicht erfüllte statische Gleichgewicht innerhalb des Elements.  $\mathbf{L}$  ist ein linearer Differentialoperator,  $\mathbf{p}$  stellt die gegebene Volumenbelastung dar und  $u_h$  ist die Lösung aus der FE-Berechnung. Der zweite Anteil des Fehlerindikators ergibt sich durch Spannungssprünge  $J(\sigma_h)$  an den Elementkanten aus nichterfüllten Kontinuitätsansätzen der Spannungen über benachbarte Elementkanten. Der Gesamtfehler wird nach Gleichung (2.4) berechnet.

Durch eine geeignete Skalierung der Fehlerindikatoren ( $\lambda_i^{*2} = b\lambda_i^2$ ) kann unter bestimmten Voraussetzungen ein asymptotisch exakter Fehlerestimator gewonnen

werden [65]. Babuska und Rheinboldt [7] ermitteln den Skalierungsfaktor im eindimensionalen Fall für äquidistante Knotenpunktabstände aus einer Eigenwertanalyse zu  $b = \frac{1}{\pi^2 a}$ . Dabei ist  $a$  der zugehörige Wert auf der Hauptdiagonalen der Materialmatrix.

Kelly et al. [45] geben diesen Faktor näherungsweise als  $b = \frac{1}{12a}$  an. Für zweidimensionale Probleme wird der Faktor halbiert. Höherwertige Polynomansätze werden durch den Faktor  $p$  berücksichtigt ( $p$  entspricht der Ordnung der verwendeten Elementansätze), so daß sich nach Kelly et al. [45] für allgemeine zweidimensionale Problemstellungen der Faktor zu  $b = \frac{1}{24pa}$  ergibt.

Der residuale Fehlerestimator liefert einen oberen und unteren Grenzwert für den wahren Fehler in der Energienorm nach Ungleichung (2.2). Er steht damit auf mathematisch fundierten Beinen. Die Implementierung ist jedoch aufwendiger als für den Glättungsindikator nach  $Z^2$  (Abschnitt 2.5.1). Solange lineare Elementansätze verwendet werden, reicht es näherungsweise aus, nur den Spannungssprunganteil zu verwenden, da der Residuenanteil  $\mathbf{L}u_h - \mathbf{p}$  konstant ist. Für höherwertige Elementansätze dagegen liefert der Residuenanteil einen wesentlichen Beitrag zum Fehlerwert.

### 2.5.3 Verfeinerungsindikator nach dem Knotengleichgewicht

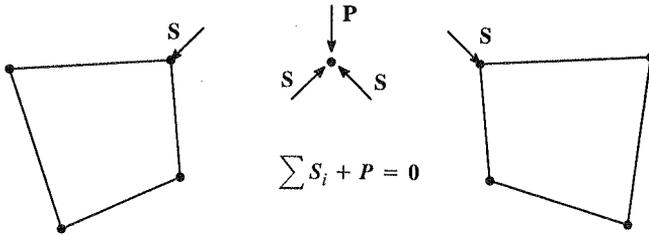
In Ergänzung zu oben vorgestellten Verfahren der a posteriori Fehlerabschätzung wird ein anschauliches „Fehlerkriterium“ vorgestellt, das ein mögliches Gleichgewicht an den Knotenpunkten überprüft. Das Verfahren wurde für rechteckige Scheibenelemente implementiert.

Die fiktiven Knotenkräfte  $\mathbf{S}$  eines Elements errechnen sich für ein linear elastisches Materialgesetz ohne Berücksichtigung von Verformungslastfällen und eingprägten Spannungen durch die Multiplikation der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_e$  mit dem Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}_e \mathbf{u} \quad (2.8)$$

$\mathbf{S}$  hat für Scheibenelemente zwei Kraftkomponenten ( $S_x, S_y$ ), für Plattenelemente eine Kraftkomponente und zwei Momentenkomponenten ( $S_x, M_x, M_y$ ) und für Schalenelemente tritt eine Kombination aus Scheiben- und Plattenkomponenten auf.

Die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  werden aus der Lösung eines globalen linearen Gleichungssystems aus generalisierten Knotengleichgewichten in Abhängigkeit von externen Lastvektoren gefunden. Die Knotenkräfte  $\mathbf{S}$  sind für die Tragwerksanalyse zunächst wenig aussagekräftig, erfüllen jedoch ein Gleichgewicht an jedem Knoten (ein



**Bild 2.6:** Gleichgewicht der Knotenkräfte

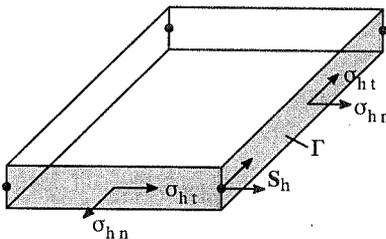
Gleichgewicht deshalb, weil sie aus genäherten Steifigkeiten ermittelt werden und nicht das Gleichgewicht der wirklichen Steifigkeiten darstellen)

$$\sum S_i + P = 0. \quad (2.9)$$

$P$  ist der Lastvektor.

### Fehlerabschätzung

Die bei einer FE-Analyse herkömmlich durch Differentiation der Verschiebungen berechneten Spannungen  $\sigma_h$  werden entlang der Elementkanten zu genäherten Knotenkräften  $S_h$  integriert (Bild 2.7).



$$S_h = \int_{\Gamma} N^T(n^T\sigma_h) d\Gamma$$

$N$  .. Formfunktionen entlang des Randes

$S_h$  .. fiktive Knotenkräfte, aus den genäherten FE-Spannungen errechnet

**Bild 2.7:** Spannungen und Knotenkräfte

$$S_h = \int_{\Gamma} N^T(n^T\sigma_h) d\Gamma. \quad (2.10)$$

Als Formfunktionen  $N$  sollen die üblichen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen gewählt werden. Die aus den genäherten FE-Spannungen ermittelten Knotenkräfte

erfüllen das Gleichgewicht nicht exakt. Es kann eine Fehlerknotenkraft  $\mathbf{R}$  an jedem ungelagerten Systemknotenpunkt errechnet werden:

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^K \mathbf{S}_{hj} + \mathbf{P} \quad (2.11)$$

$K$  sind alle an den Knoten angeschlossenen Elemente. Die Fehlerknotenkraft stellt ein lokales Fehlermaß dar. Im folgenden wird eine integrale Größe des Fehlers angestrebt, welche unabhängig von der Geometrie und der Materialbeschreibung besser vergleichbare Ergebnisse liefert. Deshalb wird die Fehlerkraft  $\mathbf{R}$  näherungsweise auf alle, an einem Knoten angeschlossenen Elemente entsprechend deren Volumenverhältnissen aufgeteilt [64]:

$$\mathbf{R}_i = \frac{V_{pi}}{V_K} \mathbf{R} \quad (2.12)$$

Dabei ist  $V_{pi}$  der Volumenanteil eines Elements und  $V_K$  die Summe aller Elementvolumenanteile des Knotens. Diese Aufteilung der Fehlerkraft  $\mathbf{R}$  wird an jedem Knoten durchgeführt. Der Verfeinerungsindikator kann nun für jedes Element  $i$  lokal ermittelt werden. Die an den Elementknoten diskret gegebenen Fehlerkräfte  $\mathbf{R}_j$  werden über das Element addiert und bezüglich der Energie normiert:

$$\lambda_i^2 = b \sum_{j=1}^{IEL} \mathbf{R}_j^2 = \frac{C}{p} \frac{C}{a} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{IEL} \mathbf{R}_j^2 \quad (2.13)$$

Der Vorfaktor  $b$  resultiert aus der Bestrebung, den Verfeinerungsindikator unabhängig von den konkreten Werten der Scheibendicke und der Materialparameter zu definieren. Dabei wird eine Anpassung der Einheiten bezüglich der Formänderungsenergie vorgenommen.

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

- $a$  Hauptdiagonalelement der Materialmatrix
- $p$  Ordnung des Elementansatzgrades zur besseren Abschätzung des wahren Fehlers in Anlehnung an Kelly et al. [45]
- $t$  Elementdicke
- $IEL$  Anzahl der Knoten pro Element
- $C$  Konstante (anhand der untersuchten Beispiele näherungsweise  $\frac{1}{2} \leq C \leq \frac{1}{3}$  für den eindimensionalen Fall und  $C = \frac{2}{3}$  für Scheibenelemente)

## Kurze Herleitung

Die statische Gleichung für die Elastizitätstheorie lautet

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{p}} = 0$$

mit den vorgegebenen Randspannungen

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} \text{ auf } \Gamma_t \quad \text{mit dem Spannungsvektor } \mathbf{t} = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}$$

$\hat{\mathbf{B}}$  ist ein Differentialoperator erster Ordnung,  $\hat{\mathbf{t}}$  sind Kanten- und  $\hat{\mathbf{p}}$  Gebietslasten. Durch die Multiplikation der gegebenen Gleichungen mit einer beliebigen Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  und der anschließenden Integration erhält man

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{p}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma = 0. \quad (2.14)$$

Dabei wird gefordert, daß jede der beiden Eulergleichungen erfüllt ist. Das Einführen von Verschiebungsformfunktionen  $N$ , welche lediglich über bestimmte Bereiche des Gebiets (Elemente) Gültigkeit besitzen, führt zur Diskretisierung des Problems:

$$\mathbf{u} = N\bar{\mathbf{u}}$$

$$\begin{aligned} \sum \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_{\Gamma_i} N^T (\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma - \sum \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_i} N^T (\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \\ \sum \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_{\Gamma_i} N^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma - \sum \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_i} N^T \hat{\mathbf{p}} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Schneidet man ein Element aus einem FE-Netz heraus, ergibt sich für den ersten Gebietsterm in Gleichung (2.14) unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma - \int_{\Omega_i} (\hat{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega.$$

Die Diskretisierung führt zu dem folgenden Gleichgewicht zwischen der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_e$  und den Element- und Randspannungen:

$$\mathbf{k}_e \bar{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma_i} N^T (\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_h) d\Gamma - \int_{\Omega_i} N^T (\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \quad (2.16)$$

Die Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen (Zusammenbau zur Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  mit der direkten Steifigkeitsmethode) steht ihrerseits mit den äußeren Lasten  $\mathbf{P}$  des gesamten Tragwerks im Gleichgewicht:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P} = \sum_{\Gamma_i} \int N^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \sum_{\Omega_i} \int N^T \hat{\mathbf{p}} d\Omega \quad (2.17)$$

Einsetzen der Gleichung (2.16) in Gleichung (2.17) führt zu einer Gleichgewichtsbedingung zwischen den Element- und Randspannungen und der äußeren Belastung eines Systems:

$$\sum_{\Gamma_i} \int N^T (\mathbf{n}^T \sigma_h) d\Gamma - \sum_{\Omega_i} \int N^T (\hat{\mathbf{B}}^T \sigma_h) d\Omega = \sum_{\Gamma_i} \int N^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \sum_{\Omega_i} \int N^T \hat{\mathbf{p}} d\Omega \quad (2.18)$$

Die Gleichung (2.18) zeigt die diskretisierte Version von Gleichung (2.15). Allerdings erfüllen die aus der Diskretisierung entstandenen Spannungen  $\sigma_h$  die Eulergleichungen nicht mehr einzeln. Nach Gleichung (2.18) stehen die gesamten Gebietsanteile ( $\Sigma\Omega$ ) mit den Knoten- und Randanteilen ( $\Sigma\Gamma$ ) im Gleichgewicht. Bezeichnet man die Residuen aus  $\sigma_h$  für die Randterme mit  $\mathbf{R}_1$  und für die Gebietsterme mit  $\mathbf{R}_2$ ,

$$\sum_{\Gamma_i} \int \overbrace{N^T (\mathbf{n}^T \sigma_h)}^{S_h} d\Gamma - \sum_{\Gamma_i} \int N^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = \mathbf{R}_1 \neq 0 \quad (2.19)$$

$$\sum_{\Omega_i} \int N^T (\hat{\mathbf{B}}^T \sigma_h) d\Omega + \sum_{\Omega_i} \int N^T \hat{\mathbf{p}} d\Omega = \mathbf{R}_2 \neq 0 \quad (2.20)$$

so folgt aus Gleichung (2.18)  $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = 0$ . Damit reicht es aus, lediglich Gleichung (2.19) zur Bestimmung der Knotenfehler  $\mathbf{R}$  auszuwerten. In dieser Gleichung sind die über Gl. (2.10) definierten fiktiven Knotenkräfte  $S_h$  erkennbar; somit ist der Zusammenhang mit dem oben vorgeschlagenen Vorgehen hergeleitet. Die Energienorm des Elementfehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  berechnet sich wie folgt:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}_\epsilon^T \mathbf{e}_\sigma d\Omega = \sum_{j=1}^{IEL} \bar{\mathbf{e}}_j^T \mathbf{R}_j$$

Da die Fehlerfunktion  $\mathbf{e}$  unbekannt ist, wird die Energienorm durch die  $L_2$ -Norm näherungsweise abgeschätzt, es ergibt sich Gleichung (2.13)

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \sum_{j=1}^{IEL} \bar{e}_j^T \mathbf{R}_j \approx \frac{C}{p a t} \sum_{j=1}^{IEL} \mathbf{R}_j^2 .$$

## 2.5.4 Beispiele

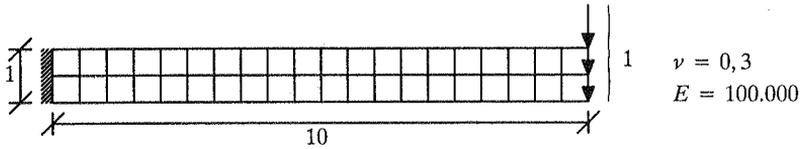
Im folgenden wird an zwei Scheibenproblemen die Leistungsfähigkeit der beschriebenen a posteriori Verfahren zur Fehlerabschätzung demonstriert. Beide Problemstellungen, aus der linearen Elastizitätstheorie stammend, werden durch achtknotige unterintegrierte Scheibenelemente diskretisiert. Für finite Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen ist im allgemeinen vom Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz-Zhu [101] keine allzu große Effizienz zu erwarten, da in den Beispielen zur Ermittlung der verbesserten Spannungen nur eine Mittelbildung aus den Spannungen an den Knotenpunkten durchgeführt wird.

### Beispiel Kragsscheibe

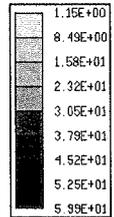
Als erstes Beispiel dient eine Kragsscheibe mit einem Seiten- Längenverhältnis von 10:1, welche am lagerabgewandten Ende durch eine vertikale Einheitslast beansprucht ist (Bild 2.8). Die Dicke der Kragsscheibe ist 1,0, der Elastizitätsmodul beträgt 100.000 und die Querdehnzahl 0,3. Am linken Ende der Scheibe wird eine starre Einspannung angenommen. Die Scheibe wird durch 40 (Fall a) und 160 (Fall b) achtknotige unterintegrierte Verschiebungselemente diskretisiert. Im Anschluß an eine FE-Berechnung wird der Fehler a posteriori in der Energienorm abgeschätzt.

Aufgrund der geometrischen Verhältnisse wäre die Balkentheorie zur Ermittlung einer Vergleichslösung zulässig. Bei den hier zu erwartenden geringen Fehlerwerten und der damit großen erforderlichen Genauigkeiten der Referenzlösung wird jedoch zur Gewährleistung identischer Randbedingungen, eine FE-Lösung mit einer sehr feinen Diskretisierung als Referenzlösung zur Berechnung der Tragwerksenergie eingesetzt. Die Energienorm der Lösung (Gleichung (2.5)) ergibt sich zu 0,2007. In Bild 2.8 sind die ermittelten Gebietsfehlerwerte der unterschiedlichen Methoden in der Energienorm ( $\eta$ , Gleichung (2.4)), und die daraus resultierenden prozentualen Fehlerwerte  $\eta_r$  entsprechend Gleichung (2.1) dargestellt. Aus dem Verhältnis des abgeschätzten zum „exakten“ Fehler folgt der Effektivitätsindex  $\Theta$  (Gleichung (2.3)).

Erwartungsgemäß unterschätzt der Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz-Zhu den Fehler bei Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen beträchtlich. Die beiden



von Mises Vergleichspannungen:



Ergebnisse für 40 Elemente (achtknotig, unterintegriert)

	„exakt“	Z <sup>2</sup>	Gleichgewicht	Babuska
$\eta_r[\%]$	4,80	1,72	3,14	3,59
$\  \mathbf{u} \ ^2$	0,040280	0,040188	0,040188	0,040188
$\eta^2$		$1,1952 \cdot 10^{-5}$	$3,9733 \cdot 10^{-5}$	$5,1941 \cdot 10^{-5}$
$\Theta$		0,36	0,65	0,75

Ergebnisse für 160 Elemente (achtknotig, unterintegriert)

	„exakt“	Z <sup>2</sup>	Gleichgewicht	Babuska
$\eta_r[\%]$	3,75	0,83	1,78	2,09
$\  \mathbf{u} \ ^2$	0,040280	0,040224	0,040224	0,040224
$\eta^2$		$0,2792 \cdot 10^{-5}$	$1,2767 \cdot 10^{-5}$	$1,7558 \cdot 10^{-5}$
$\Theta$		0,22	0,47	0,56

**Bild 2.8:** Kragträger unter Einzellast

anderen Verfahren liegen deutlich näher an der richtigen Lösung. Dennoch gibt er die Fehlerverteilung ebenso wie die beiden anderen Verfahren korrekt wieder. Der allgemeine Abfall des Effektivitätsindex für die feinere der beiden Diskretisierungen ist eher zufällig. Asymptotische Konvergenzen sind sicherlich erst bei wesentlich feineren Diskretisierungen zu beobachten.

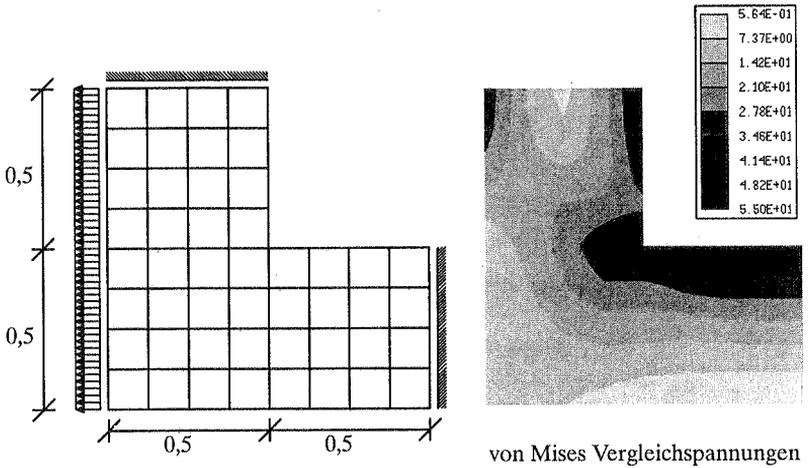
### **Beispiel L-förmige Scheibe**

Als zweites Beispiel wird der Diskretisierungsfehler einer L-förmigen Scheibe abgeschätzt. Die Scheibe ist an zwei Außenseiten verschieblich gelagert und wird an einer dritten Seite durch eine Gleichstreckenlast der Größe 1,0 beansprucht. Gago et al. [29] geben die „exakte“ Energienorm der Scheibe aus einer FE-Analyse mit einem sehr feinen Netz mit 5,58 an. Für die in Bild 2.9 dargestellte Diskretisierung mit 48 achtknotigen, unterintegrierten Verschiebungselementen resultiert ein „exakter“ relativer Gesamtfehler von 7,76%.

Alle drei Verfahren zur Fehlerabschätzung erzielen ein ähnliches Ergebnis, das in etwa bei zwei Dritteln des exakten Fehlers liegt. Die verhältnismäßig gute Abschätzung des Verfeinerungsindikators nach Zienkiewicz-Zhu überrascht etwas.

### **Bewertung**

Die beiden Beispiele verdeutlichen, daß die Verfahren zur Fehlerabschätzung im allgemeinen keine exakten Fehlerwerte wiedergeben können. Der Effektivitätsindex zwischen 0,22 und 0,77 in den beiden Beispielen veranschaulicht den großen Spielraum in der Fehlerabschätzung. Dieses Resultat sollte jedoch nicht überbewertet werden. In vielen Fällen erwartet der Anwender von der Methode der finiten Elemente, daß sie einen brauchbaren Gleichgewichtszustand als Lösung seiner Problemstellung findet. Die Verfahren zur Fehlerabschätzung geben in erster Linie einen Hinweis auf die Glattheit der erhaltenen Lösung (Diskrepanz des Übergangs des Spannungsverlaufes zwischen den Elementengrenzen zur stetigen Lösung). Resultiert also ein geringer Fehlerwert aus einer Fehlerabschätzung, so ist die erhaltene Lösung verhältnismäßig glatt und stellt für eine nicht zu grobe Diskretisierung sicherlich eine brauchbare Lösung (ein geeignetes Gleichgewicht) dar.



Elastizitätsmodul  $E = 1,0$       Querdehnzahl  $\nu = 0,0$   
 Gleichstreckenlast  $q = 1,0$       Scheibendicke  $d = 0,1$

Ergebnisse für 48 Scheibenelemente (achtkantig, unterintegriert)

	„exakt“	$Z^2$	Gleichgewicht	Babuska
$\eta_r[\%]$	7,76	5,19	4,94	5,99
$\  \mathbf{u} \ ^2$	31,1364	30,9489	30,9489	30,9489
$\eta^2$		0,08357	0,07582	0,06839
$\ominus$		0,67	0,64	0,77

**Bild 2.9:** L-förmige Scheibe

## 3 NETZADAPTION

### 3.1 Allgemeiner Überblick

Von der Netzadaption erwartet man ein an die geometrischen und lastspezifischen Besonderheiten speziell angepaßtes FE-Netz, dessen Fehler, in einer Norm ermittelt, einen benutzerdefinierten Wert unterschreitet. Die Ermittlung der Diskretisierungsfehler ist in Abschnitt 2 erläutert. Darüberhinaus sollte die Netzadaption auch Gebiete berücksichtigen, welche für den Anwender von besonderem Interesse sind. Das können zum Beispiel Detailprobleme in einer ansonsten sehr großen Struktur sein, die durch ein gleichmäßiges FE-Netz nicht erkennbar sind.

Ein entscheidender Vorteil eines adaptiven FE-Netzes gegenüber einem homogenen Netz liegt nach Rank [65] in der ausgesprochenen Wirtschaftlichkeit der Berechnungen von Detailproblemen, da lediglich an den mechanisch erforderlichen Orten zusätzliche Freiheitsgrade definiert werden. In der Regel beginnt ein adaptiver Berechnungszyklus mit einem groben Startnetz, das solange adaptiv verbessert wird, bis eine geforderte Fehlerschranke unterschritten ist. Für begrenzten Computerspeicherplatz oder begrenzte Rechenzeit kann eine bestmögliche Diskretisierung eines Problems gefunden werden.

#### 3.1.1 Adaptive Methoden

In den letzten beiden Jahrzehnten wurden mehrere adaptive Methoden entwickelt, um die Diskretisierung einer Struktur mit finiten Elementen bei ungenügenden Ergebnissen zu verbessern. Die h- und p-Verfeinerungen [z.B. 4,12,40,65,101] erreichen eine verbesserte Approximation des Berechnungsmodells durch eine Erhöhung der Freiheitsgrade. Die r-Version [24,26,58] vergleichmäßig den Diskretisierungsfehler durch Verändern der Knotenpositionen ohne die Anzahl der Freiheitsgrade zu erhöhen. Eine jüngere Entwicklung ist die d-Version [88,90], die in der Lage ist, die Dimension einer Diskretisierung (Balkenmodell  $\rightarrow$  Scheibenmodell  $\rightarrow$  Volumenmodell) zu verändern. Oftmals erscheinen auch Kombinationen unterschiedlicher adaptiver Methoden geeignet, die Vorteile der einzelnen Verfahren zu unterstreichen und Nachteile zu unterdrücken. Erwähnt sei hier die hp-Version, die ebenso wie die p-Version eine ausgezeichnete Konvergenzrate besitzt, jedoch deren Nachteil, ein Oszillieren der Spannungsergebnisse an Singularitäten bei höherwertigen Ansatzfunktionen, weitge-

hend unterdrückt. Die s-Version stellt ebenso eine Kombination aus der h- und der p-Version dar. Dabei wird entweder nach Rank [66] ein Grundgitter nach der p-Version erzeugt und an ausgewählten Bereichen ein lokales Gitter nach der h-Version hierarchisch überlagert, oder das globale Gitter ist nach der h-Version gebildet und wird durch ein p-adaptives Gitter überlagert (Fish [28]).

Im folgenden werden die h- und r-Versionen detailliert erläutert und in der Kombination eine Erweiterung der Verfahren vorgestellt. Die weiteren adaptiven Verfahren sollen unerwähnt bleiben, da sie im Rahmen dieser Arbeit nicht ausführlich untersucht wurden.

### 3.1.2 Konvergenzrate bei Netzverfeinerungen

Die Ansatzfunktionen der finiten Elemente stellen eine Approximation an den Verlauf der wahren Verschiebungsfunktionen dar. Je kleiner die finiten Elemente werden, desto kleiner wird der Approximationsbereich einer Ansatzfunktion. Die Annäherung an die wirkliche Lösung wird besser. Für eine Elementgröße  $h \rightarrow 0$  konvergiert das Ergebnis zur exakten Lösung (eventuell auftretende numerische Probleme seien hier nicht berücksichtigt). Für Spezialfälle kann die wahre Lösung bereits durch wenige Elemente beschrieben werden, falls die Formfunktionen der Elemente den wirklichen Verschiebungsverlauf beschreiben können. Die Konvergenzordnung der h-Version kann abgeschätzt werden, indem die exakte Lösung an einer beliebigen Stelle durch ein Taylor Polynom dargestellt wird [100]:

$$u(x, y) = \sum_{s,t=0}^{\infty} \frac{1}{s! t!} \frac{\partial^{s+t} u}{\partial x^s \partial y^t} (x_0, y_0) (x - x_0)^s (y - y_0)^t \quad (3.1)$$

Ein finites Element der Ansatzordnung p kann dieses Polynom bis zur Ordnung p exakt beschreiben. Der Fehler in den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ergibt sich dann für eine Elementgröße h zur Ordnung  $O(h^{p+1})$ . Der Fehler in den Spannungen, wie auch in der Energienorm, ist von der Ordnung  $O(h^p)$  [100]. Demnach würde sich der Fehler in der Energienorm für lineare Elementansätze bei einer Halbierung der Elementgröße halbieren, der Fehler in den Verschiebungen würde sogar auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes reduziert. Für praxisnahe Beispiele, deren Lösungen häufig nicht glatt sind, erscheint diese Konvergenzordnung als zu optimistisch. Nach Babuska, Szabo [8] kann das Maß der Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung aus folgender Gleichung ermittelt werden:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_E \leq C \text{DOF}^{-\frac{1}{2} \min(\beta, p)} \| \mathbf{u} \|_{H^{\beta+1}} \quad (3.2)$$

$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_E$  stellt die Energienorm des Fehlers dar. Die Sobolev-Norm  $\| \mathbf{u} \|_{H^{\beta+1}}$  ist ein Maß für die Glattheit der Lösung. C ist eine von  $\mathbf{u}$  und DOF (Anzahl der Freiheitsgrade)

unabhängige Konstante.  $\beta$  ist ein Glattheitsparameter, der von Babuska, Szabo [8] für praktische Beispiele im Bereich  $0,5 \leq \beta \leq 1,0$  angegeben wird. Zienkiewicz, Taylor [100] beziffern  $\beta$  zu 0,5 für geschlossene Risse und zu 0,71 für  $90^\circ$  Ecken bei Elastizitätsproblemen.  $p$  ist die Ordnung der Ansatzfunktionen. Aus Gleichung (3.2) folgt eine maximale Konvergenzordnung von  $O(DOF^{-\frac{1}{2}\min(\beta,p)})$  oder  $O(h^{\min(\beta,p)})$ , wenn die Anzahl der Freiheitsgrade als näherungsweise indirekt proportional zur Elementgröße  $h^2$  angesehen wird [100]. Man muß sich darüber im Klaren sein, daß die realistische Konvergenzordnung für Bereiche mit ausgeprägten Singularitäten deutlich unter der optimalen Ordnung von  $O(h^p)$  liegen kann.

### 3.1.3 Elementverfeinerungskriterium

Eine homogene Netzverdichtung kann den Diskretisierungsfehler einer FE-Analyse für glatte Lösungen deutlich vermindern. Werden jedoch sehr hohe Genauigkeiten, beispielsweise in den Spannungen gefordert, ist aufgrund oben genannter Konvergenzrate die Leistungsfähigkeit des eingesetzten Rechners schnell erreicht. Besser ist es, das FE-Netz nur an den Stellen zu verdichten, wo der Diskretisierungsfehler groß ist. An Orten geringen Diskretisierungsfehlers bedarf es in der Regel keiner weiteren Verfeinerung.

Die Entscheidung, welche Elemente verfeinert werden sollen, hängt wesentlich von der maximal erwünschten Anzahl an adaptiven Iterationszyklen und Freiheitsgraden ab. Wird beispielsweise in jedem Iterationsschritt nur das Element mit dem höchsten Fehler unterteilt, entstehen wenig unnötige Freiheitsgrade. Die Anzahl der Iterationen und damit der Rechenaufwand ist jedoch sehr groß. Ähnlich unwirtschaftlich ist es, alle Elemente zu verfeinern (homogene Verfeinerung). Eine sinnvolle Auswahl ergibt sich, wenn ein gewisser Prozentsatz aller Elemente mit den größten Fehlern in jedem adaptiven Iterationsschritt verfeinert wird [76]. Zienkiewicz et al. [100,101] entwickelten ein anschauliches Verfeinerungskriterium aus der Forderung einer gleichmäßigen Fehlerverteilung über das gesamte Gebiet: Jedes Element, dessen Fehlernorm größer ist als der durchschnittliche geforderte Elementfehler  $\bar{\epsilon}$ , wird verfeinert.

$$\lambda_i \leq \bar{\epsilon} = \frac{\bar{\eta} \|u\|}{\sqrt{NEL}} \quad (3.3)$$

Der durchschnittliche Elementfehler in Gleichung (3.3) errechnet sich aus der Annahme, daß sich ein konstanter Fehler über die Elemente einstellt. Bugada und Oñate [19] schlagen dagegen vor, bei der Berechnung von  $\bar{\epsilon}$  die Relation der Elementflächen  $\Omega_i$

zur Gesamtfläche  $\Omega$  zu berücksichtigen, um einen konstanten Fehler pro Einheitsfläche zu erhalten:

$$\lambda_i \leq \bar{e} = \bar{\eta} \|u\| \sqrt{\frac{\Omega_i}{\Omega}} \quad (3.4)$$

Die Gleichungen (3.3) und (3.4) entsprechen sich für homogene Netze. Aus dem Verhältnis des tatsächlichen zum mittleren Elementfehler ergibt sich ein Elementverfeinerungskriterium:

$$\xi_i = \frac{\lambda_i}{\bar{e}} \quad (3.5)$$

Für  $\xi_i = 1$  ist die Elementgröße optimal. Ein Element sollte für  $\xi_i > 1$  verfeinert und könnte für  $\xi_i < 1$  vergrößert werden. Je größer der Verfeinerungsindikator ist, desto größer ist auch der Elementfehler und desto stärker sollte das Element verfeinert werden. Diese Forderung führt in den ersten Iterationsschritten, bei welchen der Diskretisierungsfehler noch bedeutend größer ist als der erwünschte Fehler, zu einer großen Anzahl an verfeinerten Elementen. Mit zunehmender Iterationszahl und geringer werdender Differenz des tatsächlichen zum geforderten Fehler, wird der Anteil der verfeinerten Elemente an der Gesamtheit der Elemente reduziert.

Für praktische Beispiele erweist es sich häufig als Vorteil, die Elemente erst ab einem Faktor  $\xi_i > 1,3$  zu unterteilen, um die Anzahl der neu entstehenden Elemente zu verringern. Der Faktor begründet sich im wesentlichen darin, daß bei einer Elementunterteilungsstrategie die geforderte Elementgröße nur sehr ungenau verwirklicht werden kann. Ein Element wird entweder unterteilt und damit seine Fläche bei Vierecken geviertelt, oder es wird nicht unterteilt. Im Falle einer Verfeinerung werden Forderungen etwa nach einer geringfügigen Verkleinerung der Ausgangsfläche deutlich übererfüllt, was in einem kleineren Elementfehler resultiert. Aus der Verfeinerung aller Elemente, deren Verfeinerungskriterium größer ist als 1,0, folgt ein Gesamtfehler, der wesentlich unter dem geforderten Fehler liegen kann. Die Berechnung würde unwirtschaftlich.

Eine verbesserte Elementgröße kann aus der Annahme der in Abschnitt 3.1.2 hergeleiteten Konvergenzordnung ermittelt werden [19,100]:

$$h_i^{neu} = \xi_i^{-\frac{1}{\min(\beta, \nu)}} h_i^{alt} \quad (3.6)$$

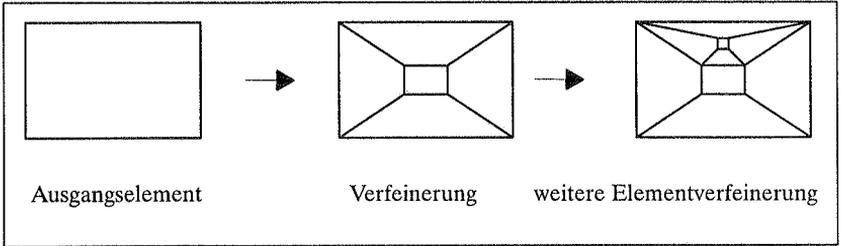
## 3.2 Elementunterteilungsstrategie (h-Version)

Die Elementunterteilungsstrategie wird gerne in adaptiven Methoden eingesetzt. Elementunterteilungen an Orten großer Fehler liefern notwendige neue Freiheitsgrade. Da die h-Verfeinerung keine Veränderungen der Elementansatzordnung vornimmt, sind keine Eingriffe in Elementunterprogramme erforderlich.

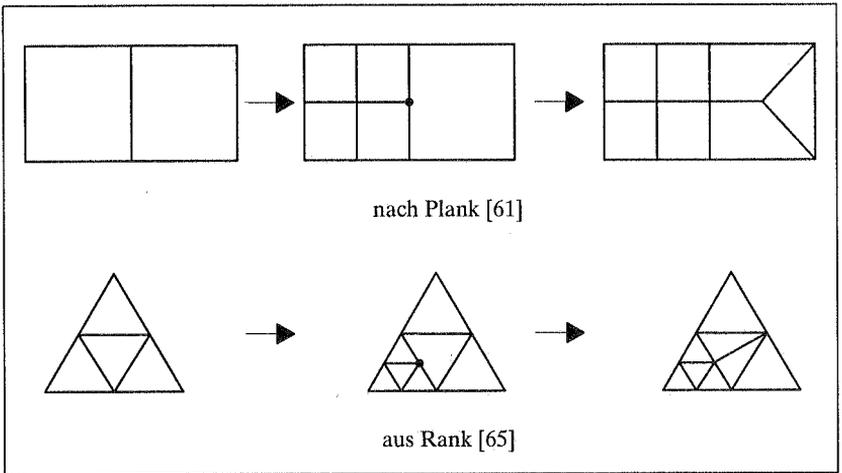
Viereckselemente, die nach Gleichung (3.5) zur Unterteilung gekennzeichnet sind, werden in vier neue Viereckselemente unterteilt (Bild 3.4). Dabei wird die erforderliche Stetigkeit der Elementübergänge (meist  $C^0$ ) zwischen verfeinerten und unverfeinerten Elementen verletzt. Wird ein Element unterteilt, dessen Nachbarelement unverfeinert bleibt, entstehen Knoten entlang der gemeinsamen Elementkante, welche nicht Teil des Nachbarelements sind. Bleibt der Effekt unberücksichtigt, werden künstliche Risse in das System eingebracht, welche die Genauigkeit der Lösung an dieser Stelle negativ beeinflussen können. Durch die Verwendung kompatibler Elementunterteilungen könnte dieser negative Effekt vermieden werden (Bild 3.1). Nachteilig ist jedoch die Halbierung der Kantenwinkel, welche zu schlechten Elementen führt. Wie in Bild 3.1 erkennbar ist, werden die Elemente bereits bei einer weiteren Unterteilung unbrauchbar (siehe auch Rank [65]). Inkompatible Elementunterteilungen liefern dagegen gute Elementformen. Es entstehen jedoch inkonsistente Knoten, die zu eliminieren sind. Das ist für Dreieckselemente lokal durch Unterteilen des entsprechenden Nachbarelements zu erreichen (Bild 3.2). Werden in einem Vierecksnetz im Anschluß an die Verfeinerung zusätzlich Dreiecke akzeptiert, können die inkonsistenten Knoten ebenfalls durch das Unterteilen nur eines Nachbarelements eliminiert werden. Plank [61] beschreibt Strategien, welche den Anteil an Dreiecken in einem Vierecksnetz reduzieren. Ist allerdings ein reines Vierecksnetz gefordert, genügt eine Unterteilung der unmittelbaren Nachbarelemente nur dann, wenn die zu verfeinernden Elemente in neun neue Elemente unterteilt werden. Eine solch starke Verfeinerung ist jedoch aufgrund der großen Anzahl an neuen Freiheitsgraden und der resultierenden Differenz der Elementgrößen an Übergangsbereichen nicht wünschenswert. Durch die Generierung geeigneter Übergangselementpatche oder die geometrische Kopplung können inkonsistente Knoten ohne Verzicht auf ein reines Vierecksnetz beseitigt werden.

### 3.2.1 Übergangselementpatche

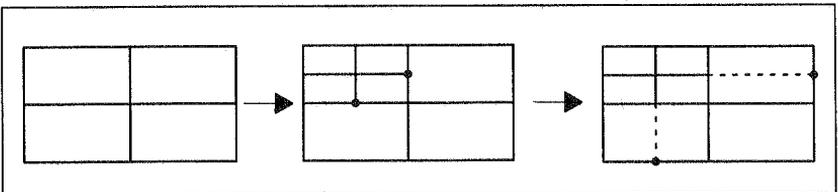
Übergangselementpatche sind geeignet, inkonsistente Knoten durch weitere Elementunterteilungen miteinander zu verbinden oder auf einen Gebietsrand zu übertragen (Bild 3.4a). Obwohl die Generierung von viereckigen Übergangselementen mittlerweile



**Bild 3.1:** Kompatible Elementunterteilung nach Rank [65]



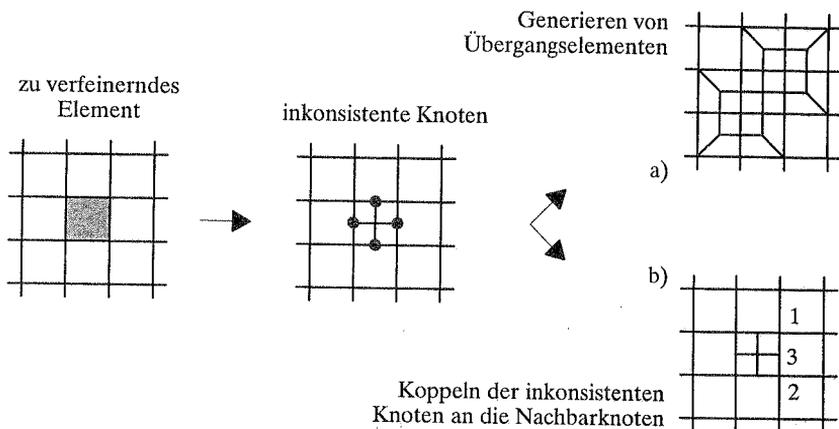
**Bild 3.2:** Stetige Elementunterteilungen



**Bild 3.3:** Unstetige Elementunterteilung nach Rust [76]

als Standard betrachtet werden kann, gestaltet sie sich nicht als trivial, da viele Fallunterscheidungen berücksichtigt werden müssen. Lösungen dazu sind in [10,23,38,61,76] beschrieben. Eine über die Forderung aus der Elementverfeinerung hinausreichende Erhöhung der Freiheitsgrade ist dabei unumgänglich. Ferner entstehen verzerrte Elemente in den Übergangsbereichen, welche negative Einflüsse auf das Lösungsverhalten erwarten lassen. Diese Vermutung kann jedoch aus folgenden Gründen nicht bestätigt werden:

- Im Verhältnis zur Gesamtzahl der Elemente sind im allgemeinen wenige Übergangselemente auf dem Gitter vorhanden.
- Das schlechte Elementverhalten wird weitgehend kompensiert, indem die Übergangselemente in Bereichen angesiedelt sind, in welchen bereits größere Elemente ein ausreichendes Lösungsverhalten zeigen würden. Diese Elemente sind also unnötigerweise klein.



**Bild 3.4:** Elementunterteilung in CARAT

Das in dieser Arbeit implementierte Verfahren zur Generierung der Übergangselemente orientiert sich an oben erwähnten Publikationen. Darüberhinaus werden die Übergangselemente eines vorangegangenen adaptiven Iterationsschritts vor einer erneuten Elementunterteilung gelöscht, da sie Bereiche bedecken, die keiner Verfeine-

nung bedurften. Die Verfeinerungsinformation der Elemente wird auf deren Mutterelemente übertragen. Im Anschluß an die Elementunterteilung werden alle entstandenen inkonsistenten Knoten durch die Bildung neuer Übergangselemente beseitigt. Dieses Vorgehen vermeidet eine automatische Umwandlung der Übergangselemente in regulär verfeinerte Elemente bei der Entstehung eines neuen Verfeinerungsbereiches in bisher unverfeinerten Zonen, oder die alternativ dazu zwangsläufig entstehende weitere Unterteilung verzerrter Übergangselemente.

Zur Veranschaulichung der Methode sind in Bild 3.5 das Startnetz und verschiedene endgültige FE-Netze eines Rohres dargestellt. Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrien am Viertelsystem. Bild 3.5a zeigt das endgültige adaptive FE-Netz der Elementunterteilungsstrategie mit Übergangselementen an den Kontaktbereichen zwischen verfeinerten und unverfeinerten Elementen. Bild 3.5b zeigt das endgültige FE-Netz aus der Eliminierung der inkonsistenten Knotenfreiheitsgrade durch eine geometrische Kopplung an deren benachbarte Knoten.

### 3.2.2 Gekoppelte Freiheitsgrade

Alternativ zur Generierung von Übergangselementen können die inkonsistenten Knotenfreiheitsgrade (Knoten 3 in Bild 3.4b) geometrisch auf die Randfunktion des unverfeinerten Nachbarlements gezwungen werden. Für lineare Elemente in Bild 3.4 ergibt sich folgende Beziehung:

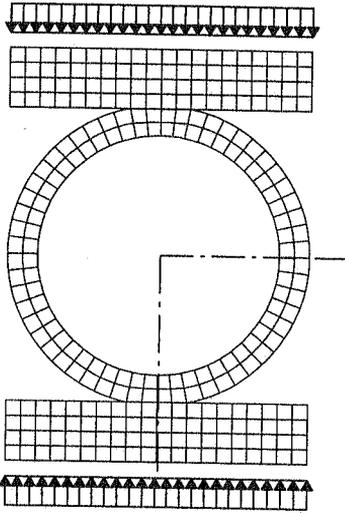
$$u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad (3.7)$$

Der Verschiebungsverlauf innerhalb des verfeinerten Elements ist zwar abschnittsweise linear, jedoch durch das unverfeinerte Nachbarlement beschränkt. Gleichung (3.7) stellt eine zusätzliche Bedingung an den Verschiebungsfreiheitsgrad  $u_3$  dar, welche vorab erfüllt werden kann, entweder an der Systemsteifigkeitsmatrix oder bereits während der Elementformulierung, alternativ direkt oder durch eine Penalty Methode.

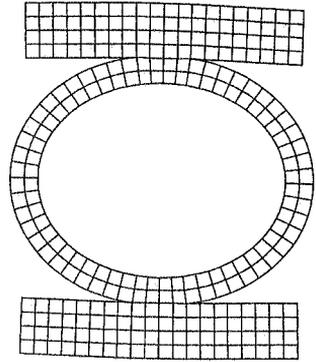
Nach Carey und Oden [21] kann eine Kopplungsmatrix  $A$  hergeleitet werden, die das Verhältnis aller Freiheitsgrade zu den unabhängigen Freiheitsgraden beschreibt. Gleichung (3.7) etwas umgeformt:

$$\left[ -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

I) Ausgangsnetz für die Elementunterteilungsstrategie

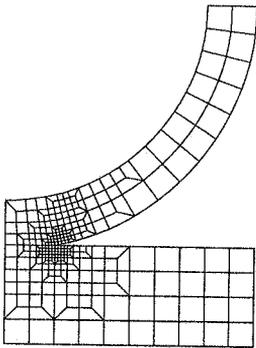


System mit Belastung  
(Berechnung am Viertelsystem)

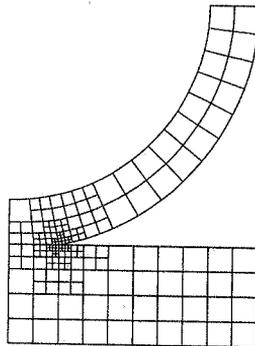


Verformte Struktur  
(überhöhte Darstellung)

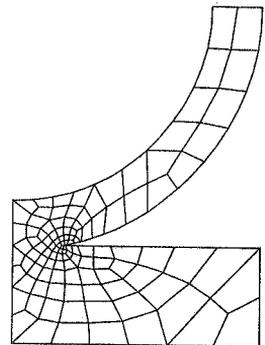
II) endgültige FE-Netze für einen geforderten Fehler kleiner 5% in der Energienorm



a) Übergangselemente  
277 Elemente



b) gekoppelte Freiheitsgrade  
170 Elemente



c) Netzgenerierung  
113 Elemente

**Bild 3.5:** Adaptive Berechnung eines Rohrs (Scheibenproblem)

Auf Systemebene wird für die Summe aller inkonsistenten Knoten aus Gleichung (3.8) die Restriktionsmatrix  $C$  definiert:

$$Cu = 0 \quad (3.9)$$

$C$  hat die Dimension  $m \times n$ ;  $m$  ist die Anzahl der abhängigen und  $n$  die Anzahl aller Freiheitsgrade. Spaltet man  $C$  auf in einen Anteil der abhängigen Freiheitsgrade ( $C_1, u_1$ ) und einen Anteil der unabhängigen Freiheitsgrade ( $C_2, u_2$ ), folgt aus Gleichung (3.9):

$$Cu = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

Nach kurzen Umformungen erhält man die Kopplungsmatrix  $A$ , die das Verhältnis aller Freiheitsgrade zu den unabhängigen Freiheitsgraden beschreibt:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1^{-1}C_2 \\ I \end{bmatrix} u_2 = Au_2 \quad (3.11)$$

$I$  ist die Einheitsmatrix. Für unser lineares Beispiel hat  $A$  folgendes Aussehen:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$u = A u_2$$

Die inkonsistenten Knotenfreiheitsgrade werden durch die Multiplikation der Kopplungsmatrix  $A$  mit der Systemsteifigkeitsmatrix  $K$  kondensiert. Die potentielle Energie sei folgendermaßen definiert:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}u^TKu - u^TP \rightarrow \min \quad (3.13)$$

Einsetzen der Gleichung (3.12) in Gleichung (3.13) führt zu einer Reduktion des Systems:

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= \frac{1}{2}u_2^T A^T K A u_2 - u_2^T A^T P \\ &= \frac{1}{2}u_2^T \bar{K} u_2 - u_2^T \bar{P} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Durch Vormultiplikation der Transponierten von  $A$  wird die Steifigkeitsmatrix wieder symmetrisiert. Allerdings muß der Lastvektor  $P$  ebenfalls mit  $A^T$  vormultipliziert werden.

$$\bar{K} = A^T K A \text{ und } \bar{P} = A^T P \quad (3.15)$$

Die Kondensation an der Systemsteifigkeitsmatrix hat den Vorteil, daß keine Eingriffe in die Elementunterprogramme nötig sind. Im Gegenzug müssen jedoch auf globaler Ebene Informationen über die Elementformulierung, insbesondere bei der Verwendung von Lokalsystemen, gegeben sein. Weitere Probleme treten in Form einer kompakten Speichertechnik, wie zum Beispiel die *Skyline Technik* der Systemsteifigkeitsmatrix auf, da durch die Kopplungsbeziehung zusätzliche Nebendiagonalwerte aktiviert werden. Das muß bereits bei der Definition der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden. Ein weiterer Nachteil, der in der erforderlichen CPU-Zeit für die Multiplikation der großen Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{K}$  liegt, kann durch die Verwendung einer zeigerorientierten Speichertechnik [15] für die Kopplungsmatrix  $\mathbf{A}$  deutlich abgeschwächt werden.

Eine weitere Verringerung des Aufwands ist durch die Verwendung von *Penalty Methoden* erreichbar. Dabei wird das Funktional (3.13) um einen zusätzlichen Term erweitert [21]:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}u^TKu - u^TP + \frac{1}{2}\lambda u^TC^TCu \quad (3.16)$$

Die Anwendung des Funktionals (3.16) auf das Stationärproblem  $\delta\Pi = 0$  führt zum erweiterten Gleichungssystem:

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{C}^T\mathbf{C})\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (3.17)$$

Für unser lineares Beispiel in Bild 3.4b ergibt sich folgende *Penalty Matrix*, welche zur Systemsteifigkeitsmatrix addiert wird. Die Matrix ist auch bei Kikuchi und Torigaki [46] beschrieben:

$$\lambda\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{u} = \frac{\lambda}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Theoretisch wird für  $\lambda \rightarrow \infty$  die Restriktion aus Gleichung (3.7) exakt erfüllt. In der Praxis sollte  $\lambda$  zur Vermeidung numerischer Probleme nicht zu groß gewählt werden. Carey [21] schlägt vor,  $\lambda = 10^d$  zu wählen, wobei  $d$  die halbe Anzahl der Stellen der Rechengenauigkeit für Real-Werte darstellt. In praktischen Anwendungen erscheint es sinnvoll,  $\lambda$  an dem jeweiligen Hauptdiagonalwert der Steifigkeitsmatrix zu orientieren. Für durchgeführte Scheibenbeispiele, die keinen repräsentativen Charakter besitzen können, reichte es aus, den Faktor mit 100 - 1000 zu wählen, um die inkonsistenten Freiheitsgrade an ihre Nachbarknoten zu koppeln. Auch für Platten wurden damit gute Ergebnisse erzielt.

Alternativ zu einer Reduktion der Systemsteifigkeitsmatrix kann es vorteilhaft sein, die inkonsistenten Knoten bereits auf Elementebene zu eliminieren. Rust [76] erläutert ausführlich zwei unterschiedliche Verfahren dazu.

Mit Hilfe der gekoppelten Freiheitsgrade wird die Anzahl der Unbekannten gegenüber einer Generierung von Übergangselementen stark vermindert. Dabei findet eine Qualitätsverminderung der verfeinerten Elemente in Übergangsbereichen statt. Das Lösungsverhalten der verfeinerten Elemente gleicht dem der unverfeinerten Nachbar-elemente entlang der gemeinsamen Kante. Meist wird jedoch gerade von Elementen in Übergangsbereichen keine allzu große Reduktion der Elementgröße gegenüber den Grundelementen erwartet. Eine Verringerung der Elementqualität kann deshalb in der Regel als unwesentlich erachtet werden. Zur gegebenenfalls nötigen Vermeidung dieses Effekts beschreibt Rust [76] ein Verfahren, welches das unverfeinerte Nachbar-element eines inkonsistenten Knotens halbiert, so daß eine kompatible Kante entsteht. Der inkonsistente Knoten tritt dann erst im Nachbar-element auf, dessen Fläche nicht reduziert werden müßte (Bild 3.3).

### 3.2.3 Vergrößerung von Elementen

Bereits verfeinerte Elemente weisen manchmal nach mehreren adaptiven Iterationsschritten ein sehr niedriges Verfeinerungskriterium nach Gleichung (3.5) aus ( $\xi_i < 1$ ). Zur Reduktion der Anzahl an Freiheitsgraden und damit zur Beschleunigung der Berechnung können diese Elemente wieder vergrößert werden. Bei linearen Analysen ist eine Elementvergrößerung im allgemeinen nicht notwendig. Im Rahmen von nichtlinearen Tragwerksanalysen, wo Spannungumlagerungen regelmäßig auftreten, können sich Verfeinerungszonen mit zunehmender Anzahl adaptiver Iterationsschritte deutlich verändern. Hier ist eine beträchtliche Rechenzeiterparnis durch Elementvergrößerungen zu erreichen.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich zwar auf lineare Tragwerksanalysen, trotzdem soll hier ein mögliches Verfahren zur Elementvergrößerung beschrieben werden:

Zur Vermeidung zyklischer Verfeinerungs-, bzw. Vergrößerungsaktivitäten eines Elements, ist es für praktische Berechnungen sinnvoll, das Element nicht bereits für ein Verfeinerungskriterium  $\xi_i < 1$  zu vergrößern, sondern erst dann, wenn im Anschluß an die Vergrößerung ein Kriterium  $\xi_i < 1$  erwartet werden kann. Bei einer Vergrößerung verdoppelt sich die charakteristische Länge eines Elements:

$$h_i^{neu} = 2h_i^{alt} \quad (3.19)$$

Setzt man Gleichung (3.19) in Gleichung (3.6) zur Ermittlung einer verbesserten Elementgröße ein, erhält man eine Bedingung für die Vergrößerung eines Elements:

$$\xi_i \leq 2^{-\min(p,\beta)} \quad (3.20)$$

Eine Vergrößerung sollte nur dann durchgeführt werden, wenn alle vier Elemente, die ursprünglich aus der Verfeinerung eines Elements entstanden waren, die Ungleichung (3.20) erfüllen. Zur Verminderung des Organisationsaufwands einer Elementvergrößerung empfiehlt es sich, die vergrößerten Elemente mit ihren Knoten nicht tatsächlich zu löschen, sondern lediglich als „nicht aktiv“ zu kennzeichnen. Das ehemals deaktivierte Mutterelement kann wieder reaktiviert werden. Dieses Vorgehen benötigt zwar etwas erhöhten Speicherplatz für die Vorhaltung nicht aktiver Knoten und Elemente. Dies erscheint jedoch vertretbar gegenüber dem Rechenaufwand, der für alternativ dazu durchgeführte Datenverlagerungen zur Freisetzung des Speicherplatzes der gelöschten Elemente und Knoten erforderlich wäre.

### 3.2.4 Reduktion der Anzahl adaptiver Iterationen

Vor allem während der ersten Iterationsschritte einer adaptiven Analyse errechnen sich große Verfeinerungsindikatoren aus einem hohen Diskretisierungsfehler. Durch eine einfache Elementunterteilung ist für lineare Elemente maximal eine Halbierung des Fehlers in der Energienorm zu erwarten. Der Gedanke liegt nahe, ein Element mit großem Fehler mehrmals zu unterteilen, ohne eine zeitaufwendige FE-Analyse und Fehlerabschätzung im Anschluß an jede Verfeinerung durchführen zu müssen. Aus Gleichung (3.6) läßt sich die Anzahl der benötigten Elementunterteilungen leicht abschätzen. Der adaptive Elementunterteilungsalgorithmus kann ohne Unterbrechung mehrmals durchlaufen werden. In jedem Schritt wird ein Element maximal einmal unterteilt und das Elementverfeinerungskriterium entsprechend der durchgeführten Verfeinerung korrigiert. Die maximale Anzahl der Verfeinerungsschritte  $n$  ergibt sich unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.6) zu

$$n = \frac{\ln(\xi)}{\min(p,\beta) \ln(2)} \quad (3.21)$$

Für praktische Beispiele ist es jedoch nicht ratsam, mehr als zwei oder drei Elementunterteilungen tatsächlich durchzuführen. Da die Fehlerabschätzung gerade in den ersten adaptiven Schritten mit grobem Startnetz ausgesprochen ungenau ist, kann das entstehende FE-Netz an unwesentlichen Stellen verfeinert werden. Aufgrund der schnellen Konvergenz dieses Verfahrens ist es häufig nicht mehr möglich, entstandene Fehler in den verbleibenden Iterationsschritten zu beheben.

Das beschriebene Vorgehen ist geeignet, die Anzahl der adaptiven Iterationsschritte und damit die Anzahl der FE-Berechnungen zu senken. Dieser Vorteil wird durch eine erhöhte Zahl an Freiheitsgraden in der Analyse erkauft, da durch die vorgestellte Methode der Mehrfachverfeinerungen in jedem adaptiven Iterationsschritt alle Elemente unterteilt werden, die ein gemeinsames Mutterelement besitzen. Die Elementunterteilung kann durch eine Interpolation der innerhalb der Elemente konstanten Verfeinerungsindikatoren gezielter gesteuert werden. Baumann [11] beschreibt dazu ein Verfahren.

### 3.2.5 Besonderheiten für Schalenträgerwerke

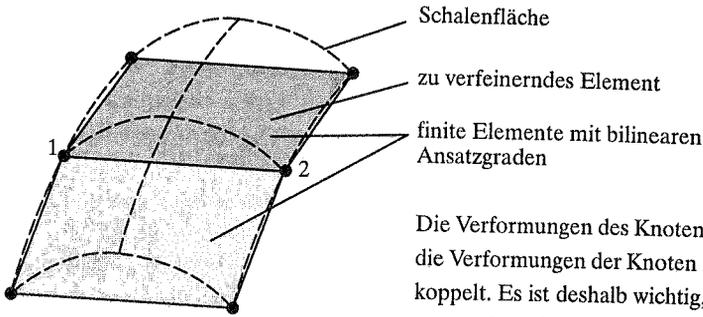
Bei der Verfeinerung gekrümmter Schalenelemente darf die Position der neu entstandenen Knoten im allgemeinen nicht aus einer einfachen Interpolation der Koordinaten der Eckknoten bestimmt werden. Vielmehr sollten die Knoten auf der tatsächlichen Schalenfläche positioniert sein. In dieser Arbeit wird die Schalenfläche mit Hilfe von *Design Elementen* approximiert (Abschnitt 4.1.1): Die Knotenpunkte werden im Parameterraum der Design Elemente definiert und anschließend auf die Schalenfläche transformiert. Dabei wird sichergestellt, daß alle neuen FE-Knoten auf der Schalenfläche zu liegen kommen. Mit zunehmender Verfeinerung wird automatisch eine verbesserte Approximation der Schalengeometrie erreicht.

Werden durch die adaptive Verfeinerung entstandene inkonsistente Knoten geometrisch an ihre Nachbarknoten gekoppelt, muß dafür Sorge getragen werden, daß diese Knoten nicht auf der Schalenfläche zu liegen kommen, damit Inkompatibilitäten der verfeinerten Elemente mit ihren unverfeinerten Nachbarelementen vermieden werden. Die Koordinaten dieser Knotenpunkte werden durch eine Interpolation der Elementeckpunkte ermittelt. Bild 3.6 verdeutlicht das Vorgehen am Beispiel linearer Elemente.

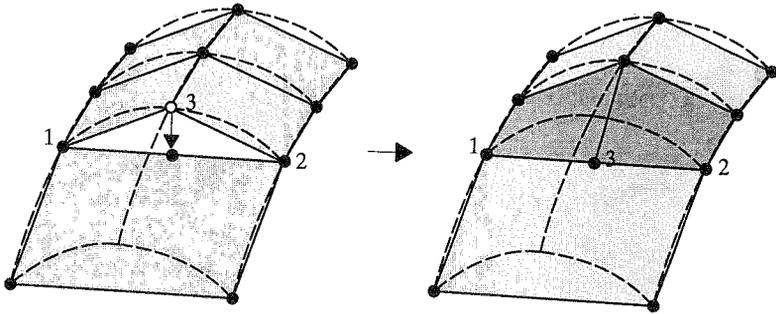
### 3.2.6 Folgerung

Ein wichtiger Grund für die weite Verbreitung der Elementunterteilungsstrategie liegt in der einfachen Implementierung dieser Methode in Standard FE-Programme. Aufgrund der relativ großen Robustheit des Algorithmus wird die Strategie, trotz einer vergleichsweise niedrigen Konvergenzgeschwindigkeit beim Auftreten von Singularitäten, gerne eingesetzt.

Sie verhält sich jedoch träge in der Realisierung geforderter Elementgrößen, da sie lediglich Elemente vierteln oder unverändert beibehalten kann. Sind nur geringfügige Elementverkleinerungen erforderlich, wird die Elementunterteilungsstrategie ein zu



Die Verformungen des Knotens 3 wird an die Verformungen der Knoten 1 und 2 gekoppelt. Es ist deshalb wichtig, daß Knoten 3 nicht auf der Schalenfläche, sondern auf der Geraden 1 - 2 positioniert wird.



**Bild 3.6:** Positionierung inkompatibler Knoten bei Schalen

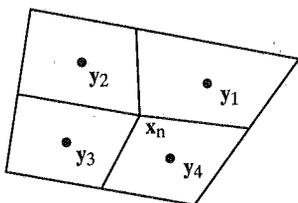
feines Netz erzeugen, falls nicht durch heuristische Verfahren, wie ein Erhöhen der Verfeinerungsschranke über den theoretischen Wert hinaus, gegengesteuert wird.

### 3.3 r-Version

Das Ziel der r-Version ist die Verbesserung der Ergebnisse aus einer FE-Analyse durch eine gute Wahl der Position aller Netzknoten. In einem Startnetz gegebene Knotenpunkte werden „verschoben“, so daß die Netzdichte in Bereichen großer Gradienten der Spannungen höher ist als in den anderen Bereichen. Dabei wird keine Erhöhung der

Anzahl an Freiheitsgraden vorgegeben. Die Wahl der Knotenpositionen kann nach Diaz et al. [26] als ein Optimierungsproblem betrachtet werden:

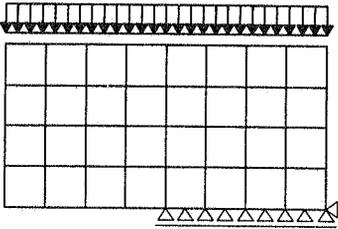
Geht man davon aus, daß das Ergebnis einer FE-Analyse eine obere Schranke der potentiellen Energie  $\Pi$  darstellt, so lautet das Optimierungsproblem unter Annahme einer konstanten Anzahl von Freiheitsgraden: Finde die Position der Knoten, so daß die potentielle Energie des Tragwerks  $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_n(\mathbf{x}))$  unter Berücksichtigung der Randbedingungen minimal wird. Der komplexe Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $\mathbf{x}$  und der FE-Lösung macht die formelle Behandlung dieses Problems eher unmöglich. Aus diesem Grund wurde eine Reihe heuristischer Ansätze erarbeitet. Diaz et al. [26] leiteten aus obigem Optimierungsproblem eine einfache Gleichung her, mit der iterativ die vorhandene Netzgeometrie verbessert wird. Oden et al. [58] wiesen nach, daß das Verhältnis der Fehlerindikatoren zu den Elementvolumen für ein optimales FE-Netz konstant sein muß. Aus dieser Voraussetzung wurde ein Verfahren zur „Verschiebung“ der Knotenpunkte entwickelt [26,58]:



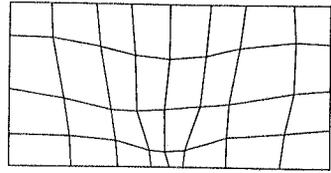
$$x_n^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{IEL} y_i^k \frac{\eta_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^{IEL} \frac{\eta_i}{A_i}} \quad (3.22)$$

Dabei sind  $x_n$  die zu bestimmenden Koordinaten des Knotens  $n$ , IEL ist die Anzahl der an den Knoten  $n$  angeschlossenen Elemente,  $y_i$  sind die Koordinaten des Elementschwerpunkts,  $\eta_i$  ist der Elementfehler und  $A_i$  die Elementfläche. Durch die Skalierung des Elementfehlers  $\eta_i$  mit dem Inversen der Elementfläche  $A_i$  bleibt die Position des Knoten  $n$  für konstante Elementfehler trotz unterschiedlicher Größe der angeschlossenen Elemente erhalten.

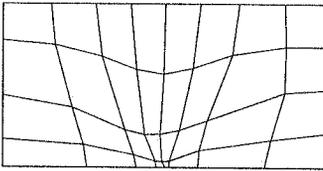
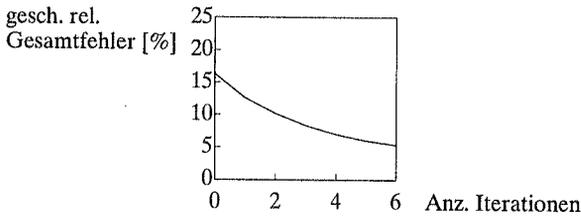
Die r-Version bewirkt im allgemeinen keine wesentliche Verringerung des Gesamtfehlers, da sie keine neuen Freiheitsgrade einführt. Problemstellungen mit ausgeprägten Singularitäten stellen kein geeignetes Einsatzgebiet der r-Version dar. Die Elemente im Einzugsbereich der Singularitäten werden rapide verkleinert. Im ungünstigen Fall, d.h. einem schlechten Verhalten der dabei entstehenden verzerrten Elemente, kann der Gesamtfehler sogar ansteigen. In Bild 3.7 sind einige Iterationsschritte einer adaptiven Berechnung nach der r-Version am Beispiel einer Scheibe mit ausgeprägter Singularität dargestellt. Der geschätzte relative Gesamtfehler in der Energienorm (aus Gleichung 3.22) ist in Bild 3.8 als Funktion der Iterationszahl dargestellt.



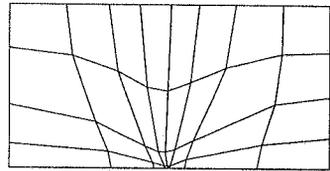
System mit Belastung  
(Berechnung am halben System)



2. Iteration



4. Iteration



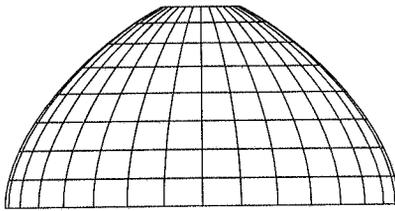
6. Iteration

**Bild 3.7:** r-Adaption einer Scheibe mit Singularität

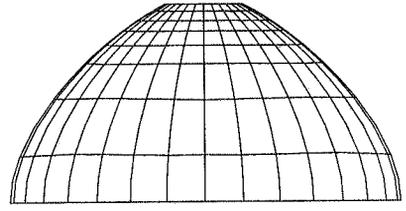
chung (2.13)) kann dabei nach sechs Iterationsschritten von 16,3% auf 5,4% gesenkt werden.

Eine elegantere Einsatzmöglichkeit der r-Adaption ist für Probleme ohne ausgeprägte Singularitäten gegeben. In Bild 3.8a ist das Startnetz einer Kuppel für den Lastfall „konzentrierte Lasteinleitung am oberen Kuppelrand“ dargestellt. Die Kuppel ist tangential gelagert. Die Diskretisierung erfolgt mit neunknotigen vollintegrierten Schalenelementen am Viertelsystem der Kuppel. Durch Umverteilung der Elementflä-

chen kann der geschätzte relative Gesamtfehler in der Energienorm, ohne Einführen zusätzlicher Freiheitsgrade, von 3,6% auf 0,9% gesenkt werden (Bild 3.8b).



a) Startnetz  
gesch. rel. Fehler 3,6%



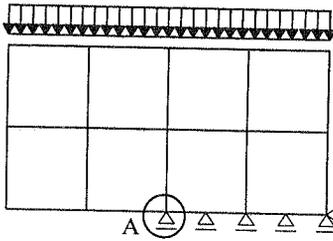
b) FE-Netz nach 6 Iterationen  
gesch. rel. Fehler 0,9%

**Bild 3.8:** r-Version an einem Schalenproblem mit glatter Lösung

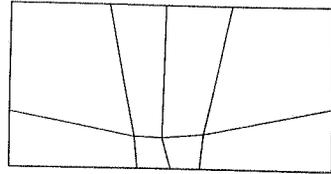
Vorteile der r-Version sind eine einfache Implementierung des Verfahrens in Computerprogramme. Da die Anzahl der Knoten und die Topologie während der Berechnung nicht verändert werden, ist der Speicherbedarf statisch. Das erleichtert ebenfalls eine Parallelisierung dieser Methode [54]. Als Nachteil kann gesehen werden, daß der Fehler durch die unveränderliche Anzahl an Freiheitsgraden häufig nicht auf ein gefordertes Maß gesenkt werden kann. Probleme ergeben sich auch an Lasteinleitungsstellen und Auflagerungen, deren Positionen nicht mit den FE-Knotenkoordinaten verändert werden dürfen. Ein weiteres Problem stellt sich durch eine aus der r-Version resultierende Verzerrung der finiten Elemente ein, die bekanntermaßen ein schlechteres Verhalten aufweisen als unverzerrte Elemente. Da bei der r-Version, im Falle auftretender Singularitäten, beinahe alle Elemente im Laufe der adaptiven Iterationen mehr oder minder stark verzerrt werden, kann sich trotz verbesserter Elementgröße eine Erhöhung des Fehlers durch ein schlechteres Elementverhalten ergeben. Dieses Problem ist durch den Einsatz verzerrungsunanfälliger Elemente zu beheben. Vor allem aufgrund der beschränkten Anzahl an Freiheitsgraden kann die r-Version für allgemeine Problemstellungen nur als Ergänzung zu einer h- oder p-Version betrachtet werden.

### 3.4 rh-Version

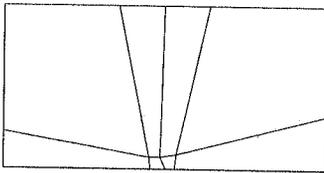
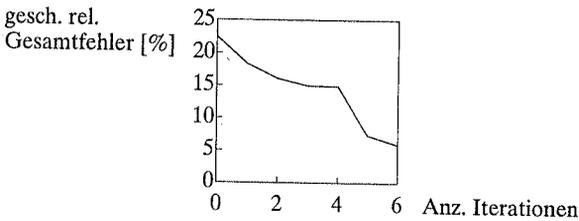
Eine detaillierte, problemangepaßte Steuerung der Adaptivität läßt sich durch die Vereinigung der h- und der r-Version finden. Zur Kombination der Vorteile aus der r- und h-Adaption, nämlich die präzise Verwirklichung einer vorgegebenen Elementgröße



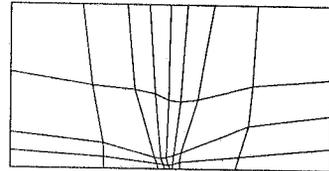
System mit Belastung  
(Berechnung am halben System)



2. Iteration



4. Iteration



6. Iteration

**Bild 3.9:** rh-Adaption einer Scheibe mit Singularität

durch die r- und eine deutliche Verringerung des Gesamtfehlers durch die h-Version, wurde ein Verfahren implementiert, das beide Versionen verknüpft (rh-Adaptivität). Es führt solange die r-Version aus, bis sich keine weitere Senkung des relativen Fehlers erzielen läßt. Anschließend werden die Elemente mit großen Fehlern unterteilt (h-Version), und obiger Prozeß beginnt von neuem. Die adaptive Iteration wird solange durchgeführt, bis der erwünschte Fehler unterschritten oder ein anderes Abbruchkriterium erreicht ist. In Bild 3.9 wird die rh-Adaption auf das in Abschnitt 3.3 beschriebene Scheibenbeispiel angewandt. Die durchgeführte h-Verfeinerung im fünften Iterationsschritt führt zu einer deutlichen Verminderung des Gesamtfehlers. Dagegen wird die

Singularität im Punkt A (Bild 3.9) durch die r-Version deutlicher herausgearbeitet als bei einer Bearbeitung mit der reinen h-Version.

Die rh-Version ermöglicht eine verhältnismäßig genau steuerbare Elementdichteverteilung über das gesamte Gebiet. Durch das gezielte Hinzufügen weiterer Freiheitsgrade wird der Gesamtfehler deutlich abgesenkt. Für Strukturen mit ausgeprägten Singularitäten resultieren aufgrund einer starken Elementverdichtung an den Singularitäten stark verzerrte Elemente, die im allgemeinen ein weit unterdurchschnittliches Lösungsverhalten zeigen [2,48]. Häufig wird eine Qualitätsverbesserung aus der Vermehrung der Freiheitsgrade durch eine Qualitätsverminderung aus der Verschlechterung der Elementgeometrien überlagert. Dieser Nachteil könnte durch den Einsatz verzerrungsunanfälliger Elemente reduziert werden. Die rh-Version benötigt für Strukturen mit Singularitäten wesentlich mehr adaptive Iterationsschritte als die h-Version, um einen vorgegebenen Gesamtfehler zu unterschreiten. Eine Reduzierung der benötigten Iterationen wäre durch eine simultane r- und h-Version in jedem adaptiven Iterationsschritt denkbar.

Folgende Besonderheiten der r- oder rh-Version sind bei einer Implementierung zu berücksichtigen:

### **Schalenprobleme**

Beim Einsatz der r- oder rh-Version für Schalenprobleme werden die Knotenkoordinaten im Parameterraum der Design Elemente definiert, welche zur geometrischen Beschreibung der Schale dienen (Abschnitt 4.1.1). Damit die wahren geometrischen Verhältnisse in die Ermittlung der Knotenkoordinaten einfließen, werden die wirklichen Elementflächen auf der Schalenfläche in Gleichung (3.22) berücksichtigt, wogegen die Elementmittenkoordinaten im Parameterraum definiert sind. Dieses Vorgehen erhöht einerseits den Arbeitsaufwand innerhalb eines Iterationszyklus, da zur Berechnung der veränderten Elementflächen des zu diesem Knoten gehörigen Patch die Knotenkoordinaten unmittelbar im Anschluß an die „Verschiebung“ auf die Schalenfläche transformiert werden müssen, vermindert jedoch andererseits durch eine zutreffendere Bestimmung der Knotenpositionen die Anzahl der Iterationsschritte. Für kleinere Abbildungsfehler der Design Elemente können die Elementflächen im Parameterraum ermittelt werden.

### **Höherwertige Elemente**

Für höherwertige Elemente werden nur die Koordinaten der Eckknoten nach Gleichung (3.22) verbessert. Die Mittelknoten im Gebietsinneren ergeben sich aus einer

linearen Interpolation der Eckknoten im Anschluß an die  $r$ -Adaption. Dieses Vorgehen beinhaltet zwei wesentliche Vorteile:

- Das Verhalten höherwertiger Elemente ist besser, wenn die Seitenmittenknoten die Verbindungsgerade ihrer Eckknoten mittig teilen [48].
- Die benötigte Rechenzeit für die  $r$ -Adaption ist deutlich geringer als bei der Berücksichtigung aller Knoten.

### **Gebietsrand-, Last- und Lagerknoten**

Randknoten dürfen nur tangential zum Gebietsrand verschoben werden, damit keine Veränderung der Strukturgeometrie auftritt. Für gekrümmte Ränder ist eine vom FE-Netz unabhängige Randbeschreibung notwendig. Durch den Einsatz der Design Elemente wird diese Voraussetzung automatisch erfüllt. Gebieteckknoten und singular gelagerte Knoten dürfen nicht verschoben werden. Ebenso darf die Position von Knotenpunkten, an die eine Einzellast angreift, oder die den End- oder Anfangspunkt einer Kantenlast beschreiben, nicht verändert werden. Das kann im allgemeinen nach mehreren Iterationsschritten zu starken Verzerrungen der an solchen Knoten angeschlossenen Elemente führen, da das FE-Netz unter diesen Knoten „hindurchwandert“. Folgender Weg wird zur Vermeidung dieses Problems am Beispiel einer Einzellast vorgeschlagen:

- Die Koordinaten des Lastangriffspunkts werden separat abgespeichert.
- Im Anschluß an die Berechnung aller Knotenkoordinaten wird der Knoten ermittelt, der dem Lastangriffspunkt am nächsten liegt.
- Die Knotenkoordinaten werden durch die Koordinaten des Lastangriffspunkts überschrieben. Bei großen Abweichungen müssen gegebenenfalls auch die Nachbarknoten geringfügig korrigiert werden, um die Elementverzerrungen zu verringern.
- Der Lastvektor wird angepaßt.

## **3.5 Netzgenerierungsstrategie**

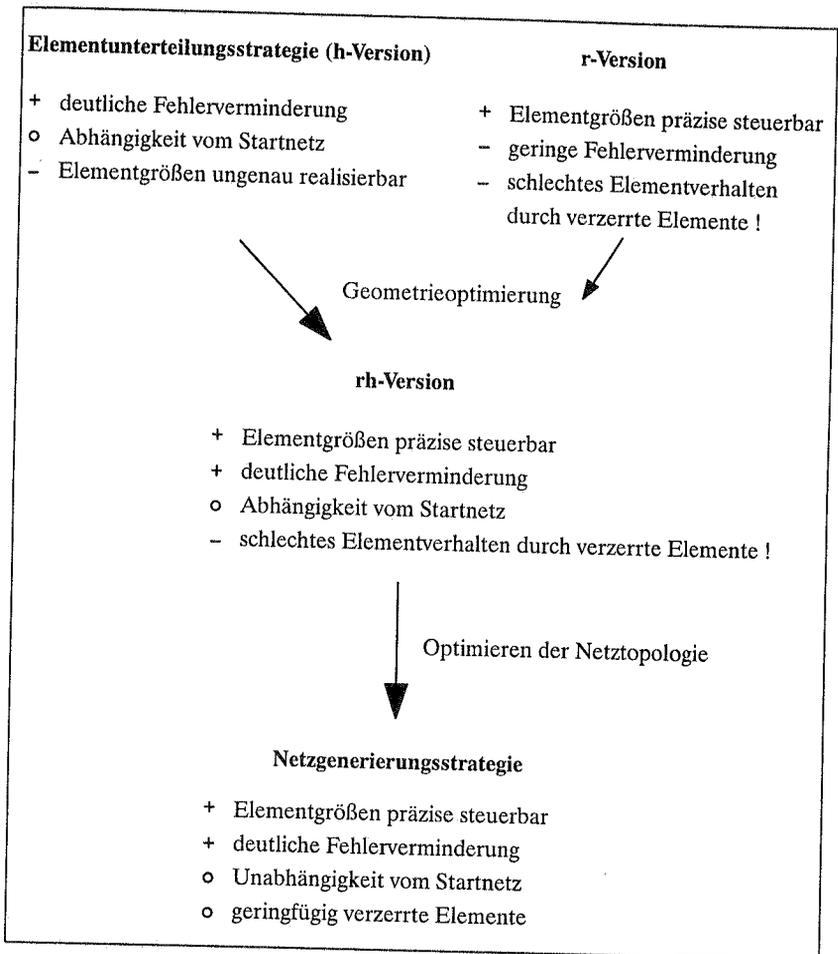
Faßt man die wesentlichen Vor- und Nachteile der bisher beschriebenen Strategien zusammen, ergibt sich die Darstellung in Bild 3.10: Die  $rh$ -Version vereinigt die Vorteile der Elementunterteilungsstrategie, nämlich eine deutliche Fehlerverminderung, mit den

Vorteilen der *r*-Version, einer präzisen Steuerung der Elementgrößen in Abhängigkeit der Ergebnisse aus der Fehlerabschätzung. Die Kombination der beiden Verfahren entspricht im wesentlichen einer Geometrieoptimierung im Anschluß an einen adaptiven Elementunterteilungsschritt. Leider entpuppt sich der wesentliche Nachteil der *r*-Version, ein schlechtes Elementverhalten aufgrund der entstehenden verzerrten Elemente, auch bei der *rh*-Version für Strukturen mit ausgeprägten Singularitäten als dominierend. Dieser Nachteil ist durch geeignete Maßnahmen zur Optimierung der Netztopologie zu vermeiden.

Eine gezielte Netzgenerierung in jedem adaptiven Iterationsschritt beinhaltet die Vorteile der *rh*-Version ohne deren wesentlichen Nachteil aufzuweisen. Die Netzgenerierungsstrategie erzeugt das neue FE-Netz unter dem Aspekt möglichst verzerrungsarmer Elemente. Das maßgebende Werkzeug dafür ist ein effizienter vollautomatischer Netzgenerator, welcher adaptive FE-Netze präzise nach den Vorstellungen aus der Fehlerabschätzung bildet. Dazu muß ihm neben den Eingabedaten zur Beschreibung der Geometrie, Lagerung und Belastung an jeder Stelle der Struktur die gewünschte Elementdichte bereitgestellt werden. Sie wird am momentan aktuellen FE-Netz aus Gleichung (3.6) berechnet und an den Knotenpunkten als diskrete Elementdichtefunktion gespeichert. Diese Daten werden dem verwendeten Netzgenerator *Freem* (Abschnitt 4.2) als Hintergrundnetz (Abschnitt 4.2.6) zur Verfügung gestellt.

Das Startnetz einer adaptiven Berechnung besteht in der Regel aus einem groben homogenen FE-Netz. In jedem Iterationsschritt wird im Anschluß an die Strukturanalyse und der darauf folgenden Fehlerermittlung am FE-Netz des aktuellen Iterationsschritts die gewünschte Elementdichteinformation für ein verbessertes Netz ermittelt. Der Netzgenerator *Freem* erzeugt ein neues Netz, inklusive Last- und Lagerbedingungen, unabhängig von der Topologie des aktuellen FE-Netzes. Im Anschluß daran können Daten des aktuellen FE-Netzes, welche für die weitere Berechnung der Struktur notwendig sind, auf das neue Netz übertragen werden. In Bild 3.5c ist das Ergebnis der Netzgenerierungsstrategie für ein belastetes Rohr dargestellt. Die adaptive Netzgenerierung bietet eine Anzahl von Vorteilen gegenüber der adaptiven Netzverfeinerung:

- genaue Realisierung der gewünschten Elementdichteverteilung in jedem Iterationsschritt und damit schnelle Konvergenz (bei den meisten Beispielrechnungen sind drei Iterationsschritte ausreichend)
- topologische Unabhängigkeit des FE-Netzes vom vorangegangenen Netz; mögliche schlechte Elementformen eines adaptiven Iterationsschritts sind in den folgenden Schritten in der Regel nicht mehr vorhanden



**Bild 3.10:** Adaptive Strategien

- in jedes FE-Programm einfach zu implementieren, da keine inkonsistenten Knoten entstehen können (gegebenenfalls ist nur ein einfacher Datenaustausch über eine Schnittstelle durchzuführen)
- im allgemeinen Vermeiden stark verzerrter Übergangselemente

- breites Einsatzspektrum, vor allem in Verbindung von Aufgabenstellungen mit sich ändernden Strukturrändern, wie Formgebungsprozesse, Formoptimierung oder Strukturoptimierung

Als wesentliche Nachteile dieses Verfahrens sind folgende Punkte anzuzeigen:

- aufgrund der zufälligen Netzbildung ist im allgemeinen keine Vorhersage über den Konvergenzverlauf einer adaptiven Berechnung möglich
- die Netzgenerierung nimmt häufig mehr CPU-Zeit in Anspruch als eine Elementunterteilung

Erste vergleichende Untersuchungen der Netzgenerierungs- und der Elementunterteilungsstrategie wurden 1993 von Zhu et al. [97] an einem Scheibenproblem (kurzer Kragträger) durchgeführt. Das Ergebnis zeigte einen leichten Vorteil der Netzgenerierungsstrategie bezüglich der Anzahl an Iterationsschritten, es wurde jedoch eine größere Anzahl an Elementen generiert. Da bei einer a posteriori Fehleranalyse für jeden einzelnen Iterationsschritt eine FE-Berechnung nötig ist, ergab sich bei diesem Beispiel ein Vorsprung der Netzgenerierungsstrategie. Dagegen beansprucht diese Strategie einen erhöhten Rechenaufwand bei der Erzeugung eines neuen FE-Netzes in jedem adaptiven Iterationsschritt, verglichen mit der verhältnismäßig einfachen Elementunterteilung. Werden allerdings bei der Elementunterteilung Übergangselemente verwendet, steigt der Aufwand auch dort an. CPU-Vergleiche erschienen in der Publikation von Zhu et al. [97] aufgrund erheblich unterschiedlicher Daten- und Programmstrukturen der beiden Strategien als nicht sinnvoll.

Vergleiche, insbesondere zwischen der Elementunterteilungs- und der Netzgenerierungsstrategie, können auch in dieser Arbeit aufgrund der Vielzahl an Steuerparametern beider Strategien keinem absoluten Anspruch genügen. Deshalb werden beide Strategien im wesentlichen vorgestellt und deren Vor- bzw. Nachteile dargelegt.

### **3.6 Steuerung der Adaptivität**

Alle beschriebenen Strategien lassen sich vergleichsweise einfach in herkömmliche Finite Element Programme integrieren. Bild 3.11 zeigt eine schematische Darstellung der Implementierung adaptiver Strategien in das Programmsystem CARAT in Verbindung mit a posteriori Fehlerabschätzungen.

Ist die Adaptivität während eines Programmlaufs aktiviert, wird im Anschluß an die FE-Analyse auf die Unterprogramme zur Bestimmung des Diskretisierungsfehlers

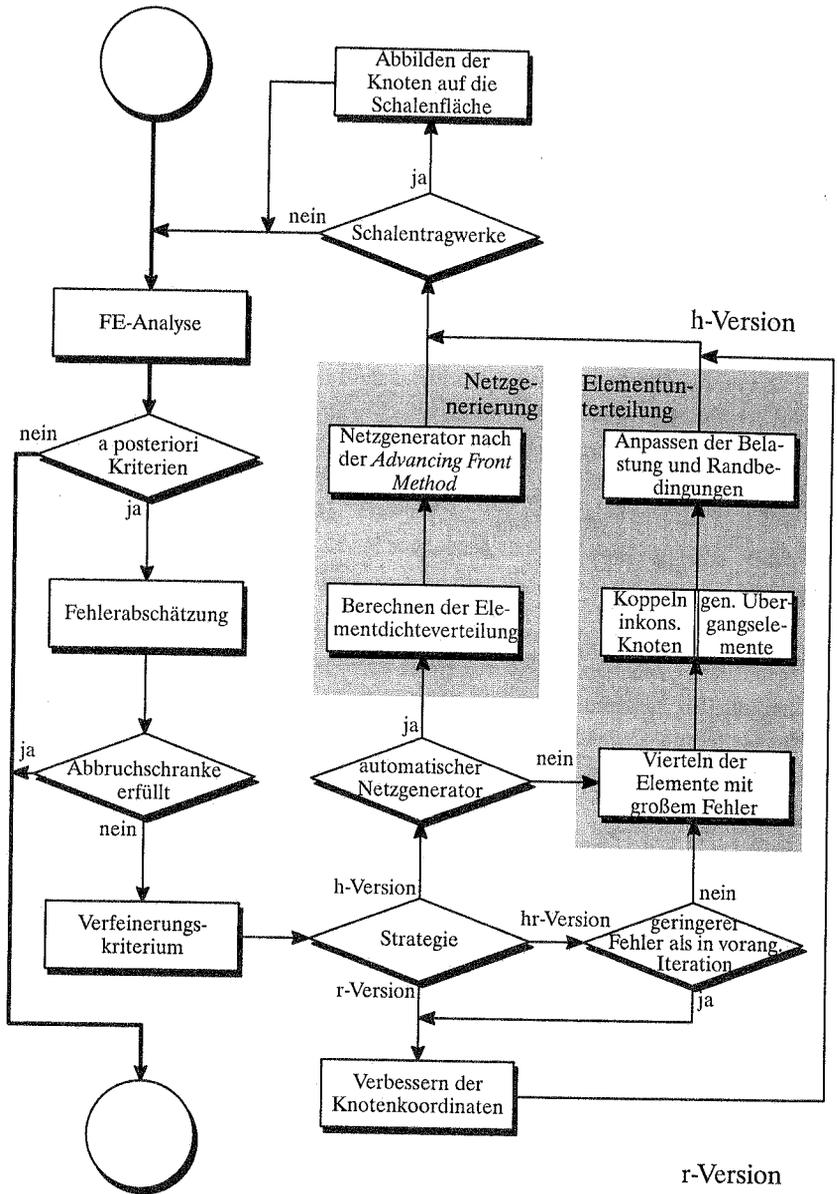


Bild 3.11: Diagramm der adaptiven Strategien in CARAT

verzweigt (Abschnitt 2.5). Falls der ermittelte Fehlerwert in einer vorgegebenen Norm, meist die Energienorm, kleiner ist als ein benutzerdefinierter Wert, sind keine adaptiven Netzverfeinerungen erforderlich. Das Programm wird regulär zu Ende geführt. Die adaptiven Unterprogramme werden ebenfalls verlassen, sofern ein weiteres Abbruchkriterium, wie beispielsweise das Überschreiten der maximal möglichen adaptiven Iterationen, Knoten, Elemente oder der CPU-Zeit, erfüllt ist.

Andernfalls werden die Verfeinerungskriterien nach Gleichung (3.5) berechnet und Elemente mit zu großen Fehlerwerten gekennzeichnet. Diese Elemente müssen verkleinert werden. Der Benutzer kann bei der Eingabe definieren, welche der oben beschriebenen adaptiven Strategien ausgeführt werden sollen. Dabei kann er bestimmen, ob nur eine Strategie über alle Iterationsschritte ausgeführt werden soll, oder er erlaubt den Wechsel zwischen den unterschiedlichen Strategien. Beispielsweise kann der Benutzer für ein paar Iterationsschritte die r-Version und die übrigen Iterationen die h-Version für die laufende adaptive Berechnung auswählen. Beliebige Vorgaben sind möglich. Allerdings ist bei der Netzgenerierungsstrategie eine Kombination mit anderen Strategien, aufgrund ihrer Unabhängigkeit vom FE-Netz des vorangegangenen Iterationsschritts, wenig sinnvoll und wird deshalb dem Benutzer untersagt.

Die Fläche von Schalenträgwerken ist in CARAT durch Makroelemente definiert (Abschnitt 4.1.1). Alle Netzveränderungen der adaptiven Unterprogramme für Schalen werden auf den Parameterflächen der Makroelemente durchgeführt. Anschließend werden alle neu gebildeten Knoten, oder Knoten, deren Koordinaten durch die r-Version verändert wurden, auf die Schalenfläche projiziert.

Im Anschluß an die adaptiven Strategien wird die FE-Analyse mit dem verbesserten Netz erneut gestartet. Der adaptive Iterationszyklus wird so oft wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

## 4 AUTOMATISCHE NETZGENERIERUNG

Die erweiterte Anwendung der FE-Methoden für immer komplexere Tragwerkstrukturen erfordert Verfahren zur automatischen Netzgenerierung, da eine manuelle Eingabe der FE-Netze sehr zeitintensiv ist. Eine weitere Motivation für den Einsatz eines automatischen Netzgenerators ist in der Verwendung der Netzgenerierungsstrategie (Abschnitt 3.5) zu sehen. Diese leistungsfähige adaptive Strategie benötigt einen Netzgenerator, der neben homogenen FE-Netzen auch spezielle adaptive Netze aus den Vorgaben der Fehlerabschätzung erzeugen kann. Die gewünschte Elementdichteverteilung wird diskret an den Knotenpunkten eines unabhängigen Hintergrundnetzes (Abschnitt 4.2.6) definiert.

Effiziente Algorithmen, speziell zur Generierung reiner Vierecksnetze, sind dünn gesät. In den folgenden Abschnitten werden häufig verwendete Netzgeneratoren eingeführt und auf ihre Eignung bezüglich oben genannter Problemstellung untersucht. Anschließend wird mit *Freem* ein speziell auf die Netzgenerierungsstrategie zugeschnittener automatischer Netzgenerator vorgestellt.

### 4.1 Bekannte Verfahren zur Netzgenerierung

Ho-Le [39] gibt einen detaillierteren Überblick über die vor 1988 entwickelten Netzgenerierungsverfahren, sowohl für ebene, als auch für räumliche Strukturen. Gerade in den letzten Jahren wurden jedoch auf dem Gebiet der Netzgenerierung große Fortschritte erzielt, wengleich viele ältere Methoden auch heute noch eine Daseinsberechtigung besitzen. Aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher Netzgenerierungsverfahren, würde eine Erörterung aller verfügbaren Methoden den hier gesteckten Rahmen sprengen. Aus der Menge werden nachfolgend nur ein paar ausgewählte Verfahren zur Netzgenerierung von Flächentragwerken vorgestellt, die einen unmittelbaren Einfluß auf diese Arbeit haben. Netzgenerierungstechniken für Volumenelemente bleiben im folgenden unerwähnt.

Die meisten Verfahren lassen sich nach Jüdt [43] in vier Gruppen einordnen: Die *Abbildungs-* und *Triangulationsmethoden* sind frühe Vertreter der Netzgenerierungsverfahren und werden bis zum heutigen Tag sehr häufig eingesetzt. Die *Gitternetzmethoden*, die ein vorgegebenes Gitter als Schablone über das Gebiet legen, welches an den Gebietsrändern angepaßt werden muß, werden aufgrund einer überschaubaren Daten- und Programmstruktur mittlerweile in kommerziellen Programmen verwendet. Die

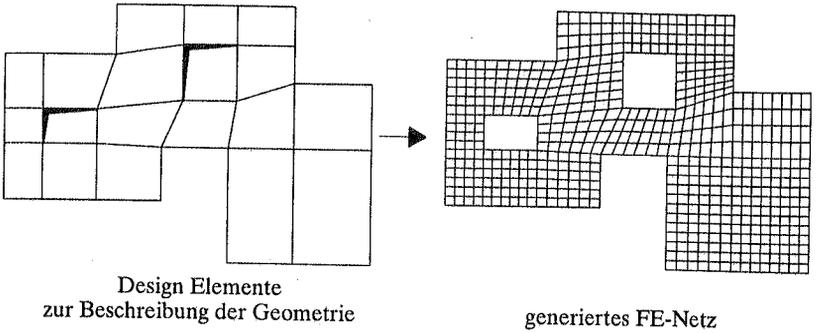
*Dekompositionsmethoden*, welche ein gegebenes Gebiet schrittweise unterteilen, sind sehr leistungsfähig und sicherlich sehr zukunftssträftig.

#### 4.1.1 Die Abbildungsmethode

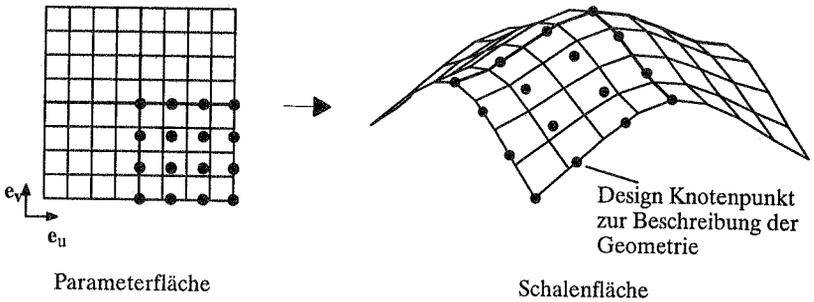
Die Entwicklung der Abbildungsmethode findet ihren Ursprung bei Zienkiewicz und Phillips [99]. Sie verwendeten die aus dem isoparametrischen Elementkonzept abgeleiteten biquadratischen Serendipity-Formfunktionen als formbeschreibende Funktionen zur Interpolation der Netzknotenpunkte. Später folgten noch viele Erweiterungen [15]. Die Abbildungsmethode findet einen weiten kommerziellen Einsatz in der Generierung von FE-Netzen. Die zu vernetzende Struktur wird durch einfach zusammenhängende, konvexe Untergebiete, wie z.B. Dreiecke oder Vierecke, approximiert. In Abgrenzung zu Verfahren der finiten Elemente erhalten diese parametrisierten Untergebiete Bezeichnungen wie z.B. *Design Elemente* [15] oder *Super Elemente* [17]. Das FE-Netz wird auf den Parameterebenen der Design Elemente durch vorgegebene Unterteilungen entlang der Gebietsränder generiert. Eine anschließende Transformation der Netzknotenpunkte auf die Strukturoberfläche schließt den Generierungsprozeß ab (Bild 4.1b).

Da die Generierung der Knoten und Elemente nicht auf der wahren Fläche, sondern auf der Parameterebene der Design Elemente stattfindet, können beinahe beliebige gekrümmte Flächen mit sehr geringem Aufwand vernetzt werden, sofern die Geometrie durch die Design Elemente ausreichend genau beschrieben werden kann. In den letzten Jahren entstanden viele unterschiedliche Typen von Design Elementen zur Erfüllung verschiedenartigster Geometrieanforderungen (wie z.B. Lagrange-, Coons- und Bézier-Elemente), die hier nicht im einzelnen beschrieben werden sollen. Jüdt [43] und Bletzinger [15] geben in ihren Publikationen einen ausführlichen Überblick darüber. Die Approximationseigenschaften der Design Elemente an die wahre Geometrie sind im wesentlichen von der Art und Anzahl der verwendeten Stützstellen abhängig.

Die Abbildungsmethode sicherte sich ihre weite kommerzielle Verbreitung vor allem durch ihre hohe Robustheit und eine beinahe unbeschränkte Einsatzmöglichkeit, besonders für räumlich gekrümmte Flächen. Die Genauigkeit der Approximation kann durch eine Verkleinerung der Design Elemente beliebig gesteigert werden, was jedoch einen erhöhten Eingabeaufwand nach sich zieht. Ein wesentlicher Nachteil der Methode liegt in der manuellen Unterteilung des zu vernetzenden Gebiets in einfache Untergebiete. Die Abbildungsmethode ist in ihrer momentanen Verbreitung für die Generierung beliebiger adaptiver FE-Netze ungeeignet, da in der Regel gegenüberliegende Design Kanten durch eine gleiche Anzahl von Knotenpunkten unterteilt werden müssen.



a) ebenes Plattenbeispiel



b) räumliches Schalenbeispiel

$$x(u, v) = \sum_{i=1}^n N_i(u, v) x_i$$

- $u, v$  .. lokale Koordinaten (Parameterraum)
- $n$  .. Anzahl der Kontrollknoten
- $N_i$  .. Formfunktionen
- $x_i$  .. Koordinaten der Makroelementknoten

c) Transformationsvorschrift

**Bild 4.1:** Netzgenerierung durch die Abbildungsmethode

### 4.1.2 Die Triangulationsmethode

Die Triangulationsmethode zählt zu den ältesten Netzgenerierungsverfahren. Sie wurde noch bis vor wenigen Jahren häufig eingesetzt. Die Netzgenerierung besteht aus zwei unabhängigen Schritten: Erzeugen der Knotenpunkte und Generieren der Elementtopologie.

#### Schritt 1: Erzeugen der Knoten

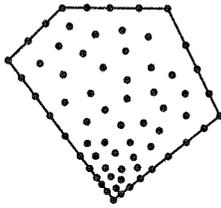
Die ersten Netzgeneratoren erforderten eine manuelle Eingabe der Knotenpunkte. Cavendish [22] veröffentlichte 1974 ein Verfahren, das die Knotenpunkte nach einem Zufallsprinzip generiert. Das Gebiet wird in mehrere Bereiche unterschiedlicher Netzdichteanforderungen unterteilt. Jeder Bereich wird in ein Quadratraster aufgeteilt. In jedem Quadrat wird ein Knotenpunkt zufällig generiert. Ist der Knoten nicht zulässig, das bedeutet, ist der Abstand des Knotens zum Rand oder zu einem Nachbarknoten kleiner als ein Rasterquadrat, wird er verworfen und ein neuer Knoten generiert. Nach einer vorgegebenen Anzahl unzulässiger Versuche in einem Rasterquadrat wird die Generierung abgebrochen und im nächsten Quadrat fortgesetzt.

Lo [49] zieht imaginäre parallele Linien durch das Gebiet. Der Abstand der Linien entspricht der gewünschten Elementgröße. Auf diesen Linien werden die Knotenpunkte ebenfalls im Abstand der gewünschten Elementgröße generiert. Knotenpunkte, die zu nahe am Gebietsrand liegen, werden ausgerichtet oder eliminiert. Auch dieses Verfahren eignet sich zur Generierung von Knotenpunkten mit unterschiedlichen Abständen zueinander, also zur Erzeugung adaptiver FE-Netze.

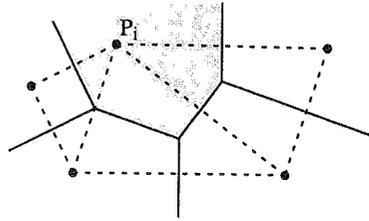
#### Schritt 2: Generieren der Topologie

Im zweiten Schritt werden die Knoten zu Dreiecken verbunden. Die Generierung der Elementtopologie ist nicht trivial, da sich die Elemente weder überschneiden dürfen, noch Löcher entstehen dürfen. Ferner sollten die Dreiecke möglichst gleichseitig sein. In der Literatur sind mehrere Methoden zur Topologiegenerierung beschrieben. Ho-Le [39] gibt einen guten Überblick über die unterschiedlichen Methoden. Das am häufigsten verwendete Verfahren zur Erzeugung der Elementtopologie ist die *Delaunay Triangulation* (Bild 4.2).

Die Delaunay Triangulation [16,31,50,85,92,93] maximiert die Summe der kleinsten Winkel der Dreiecke, das bedeutet, daß schmale Dreiecke weitgehend vermieden werden. Das Verfahren bildet die Elemente unter der Voraussetzung, daß sich innerhalb des Umkreises eines Elements keine weiteren, als die Elementknoten befinden dürfen.



Generieren der Knoten



Delaunay Triangulation mit Voronoi Polygonen

**Bild 4.2:** Die Triangulationsmethode

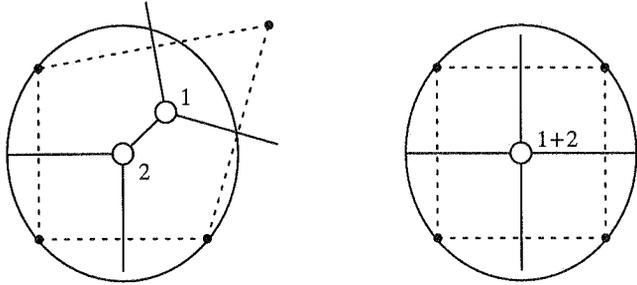
Zuerst wird ein Voronoi Diagramm für die gegebenen Knoten erstellt. Jedem Knoten  $P_i$  wird ein Gebiet zugewiesen, innerhalb dessen jeder Punkt zum Knoten  $P_i$  einen geringeren Abstand besitzt als zu jedem anderen Knoten  $P_j$  (graue Fläche in Bild 4.2). Die Zerlegung des gesamten Gebiets führt zu nicht überlappenden, das gesamte Gebiet bedeckenden Flächen (auch Dirichlet Gebiete), deren Ränder durch konvexe Polygone beschrieben werden. Die Gesamtheit der Polygone  $V_i$  nennt man auch Voronoi Diagramm. Die mathematische Definition lautet:

$$V = \{V_i, i = 1, N\}, \text{ wobei } V_i = \{x \in \mathbb{R} : |x - P_i| < |x - P_j| \forall j \neq i\}.$$

Im Zweidimensionalen trennt jede Polygonkante zwei unmittelbar benachbarte Knoten mittig, orthogonal zu deren Verbindungslinie.

Im Anschluß an die Erstellung des Voronoi Diagramms werden alle Knotenpaare, die sich ein Polygonsegment teilen, durch eine Gerade verbunden (gestrichelte Linie in Bild 4.2). Das Resultat ist ein vollständiges Dreiecksnetz über das gesamte Gebiet.

Bei der Implementierung der Delaunay Triangulation sind auch einzelne Problemfälle zu berücksichtigen. Liegen beispielsweise vier oder mehr Knoten auf einem Kreis, so überlappen sich zwei oder mehr Eckpunkte des Voronoi Polygons. Die Länge der Polygonkante ist Null. Es kann keine Aussage über deren Senkrechte, also der Verbindung von zwei Knoten gemacht werden (Bild 4.3). Einspringende Ecken stellen eine weitere Schwierigkeit für die Delaunay Triangulation dar. Ist der Abstand dreier Randknoten minimal, muß darauf geachtet werden, daß Elemente ausschließlich innerhalb des Gebiets gebildet werden dürfen.



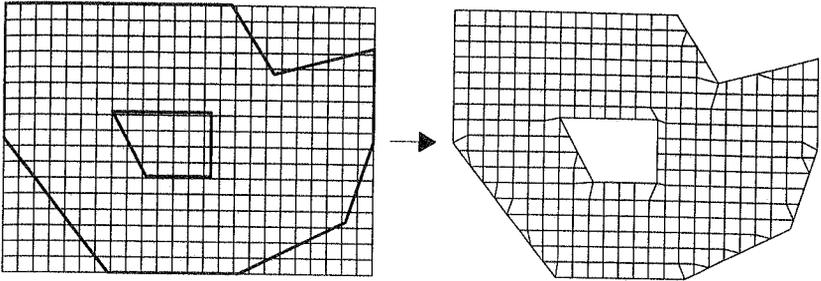
**Bild 4.3:** eindeutige und nicht eindeutige Voronoi Polygone

Die Delaunay Triangulation ist eine schnelle und effiziente Methode, um für gegebene Knotenpunkte ein bestmögliches Dreiecksgitter zu erzeugen. Sie ist auf  $n$  Dimensionen erweiterbar. Für nähere Informationen zu effizienten Algorithmen siehe [92,16,31]. Interessante Erweiterungen des Verfahrens sind bei Sloan [85] und Lo [50] beschrieben. Bis heute gibt es jedoch keine Verfahren zur unmittelbaren Generierung von Vierecksnetzen nach dieser Strategie.

Lo [49] publizierte 1985 ein alternatives Verfahren zur Delaunay Triangulation, welches im Anschluß an die Generierung der Knotenpunkte aus den Verbindungskanten aller Randknoten eine Generierungsfrent bildet, die als *aktive Front* bezeichnet wird. Zu jeder Kante auf der Generierungsfrent wird nach einem geeigneten Knoten innerhalb des Gebiets gesucht, um das bestmögliche Dreieck zu bilden. Ist ein Dreieck generiert, wird die dazugehörige Kante aus der Generierungsfrent entfernt. Die beiden anderen Kanten des neu gebildeten Elements werden in die aktive Front aufgenommen, sofern ein weiteres Dreieck daran angeschlossen werden darf. Die Vernetzung des Gebiets ist dann abgeschlossen, wenn keine freien Knoten mehr existieren und die Generierungsfrent leer ist. Dieses Verfahren dient als eine Basis für den in Abschnitt 4.2 besprochenen Netzgenerator *Freem* nach der Advancing Front Method.

### 4.1.3 Die Gitternetzmethode

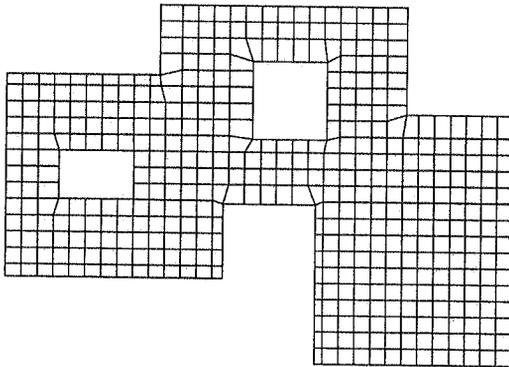
Die Gitternetzmethode zeichnet sich durch ihre Einfachheit und die Qualität der Elemente über weite Bereiche des Gebiets aus. Vor allem in der Generierung von Viereckselementen wird die Gitternetzmethode gerne eingesetzt. Beispielhaft seien hier Veröffentlichungen von Lo und Lau [52], Schneiders et al. [79] und Jüdt [43] genannt.



Schablone aus Viereckselementen

resultierendes FE-Netz

a) gemischtes Netz für eine schiefwinklige Platte



b) Platte mit orthogonalen Berandungen

**Bild 4.4:** Plattenbeispiele mit der Gitternetzmethode

Über das gesamte zu vernetzende Gebiet wird die Schablone eines Dreiecks- oder Vierecksnetzes gelegt. Elemente, die außerhalb des Gebiets liegen, werden eliminiert. Von einem Gebietsrand durchfahrene Elemente werden so ausgerichtet oder verändert, daß zulässige Elemente entstehen. Wie in Bild 4.4a erkennbar, ist es sehr aufwendig, in den Randbereichen reine Viereckselemente zu generieren. Deshalb erzeugen Lo und

Lau [52] grundsätzlich Dreiecke als Randlelemente, während Schneiders et al. [79] dort ebenfalls Viereckselemente generieren.

Die Gitternetzmethod ist ein schnelles Verfahren und liefert sehr gute Ergebnisse im Gebietsinneren (Bild 4.4). Aufgrund der erforderlichen Randanpassungen sind gerade die Randlelemente, welche im allgemeinen zur Bestimmung von Lagerkräften eine große Bedeutung haben, meist von geringer Qualität (Netzglättungsmethoden führen zu einer unwesentlichen Verbesserung). Ein weiterer Nachteil der Gitternetzmethod besteht in der starren Unterteilung des Elementrasters. Adaptive Netze können nur sehr beschränkt generiert werden. Diesen Nachteil beseitigten Yerry und Shephard [96] mit der *Modified Quadtree Method*.

Das Verfahren wurde bereits 1983 von Yerry und Shephard [96] eingeführt und 1987 grundlegend verbessert [9]. Es erzeugt Dreiecksnetze, gemischte Netze oder reine Vierecksnetze. Lokale Elementverdichtungen sind ebenfalls möglich. Ein großer Vorteil dieser Method besteht in einer verhältnismäßig einfachen Erweiterung für räumliche FE-Netze (*Octree Method*).

Die *Modified Quadtree Method* ist von dem aus der Informatik bekannten *Quadtree* zur Organisation von Daten abgeleitet (Bild 4.5). Der PR-Quadtree (P=Point, R=Region) nach Samet [77] ist eine geeignete Method zur Verwaltung von Netz- und Flächenelementen in ebenen Gebieten: Zur Verwaltung einzelner Knotenpunkte wird ein Quadrat gebildet, welches das gesamte Suchgebiet beinhaltet. Befinden sich mehrere Knotenpunkte innerhalb dieses Quadrats, wird es in vier gleich große Quadrate unterteilt. Die Unterteilung setzt sich rekursiv so lange fort, bis sich in jedem Quadrat nur noch ein Knotenpunkt befindet. Das kann bei kleinen Abständen benachbarter Punkte zu vielen Unterteilungen führen.

Die *Modified Quadtree Method* von Shephard et al. [9,96] dient nicht zur Verwaltung von Knotenpunkten, sondern zur Unterteilung eines beliebigen Gebiets in ein geordnetes Raster aus Quadraten unterschiedlicher Größe. Dieses Raster kann mit relativ geringem Aufwand in ein Dreiecks- oder Vierecksnetz umgewandelt werden. Der Benutzer definiert die Tiefe des Baums, und damit die Größe der Elemente, durch Elementdichteangaben auf den Randsegmenten und durch Verfeinerungspunkte im Gebietsinneren. Die Netzgenerierung durchläuft folgende Phasen (Bild 4.6): Zuerst werden Quadrate, welche ein Randsegment enthalten, bis zur gewünschten Feinheit unterteilt. Anschließend werden die Quadrate im Inneren des Gebiets so lange geviertelt, bis sich zwei benachbarte Quadrate maximal um eine Unterteilungsstufe unterscheiden. An benutzerdefinierten Verfeinerungspunkten wird bis zum gewünschten Grad verfeinert (weitere Unterteilung der Quadrate). Die Teile der Randquadrate, die über den

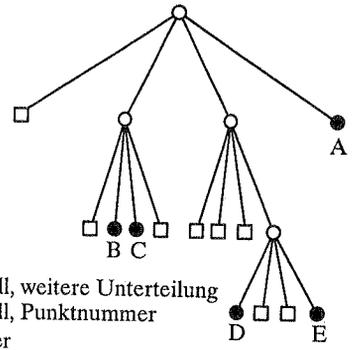
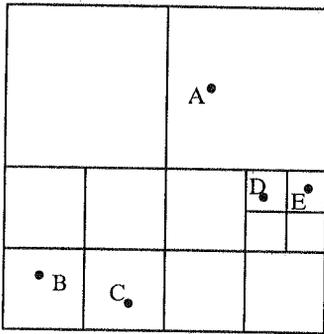
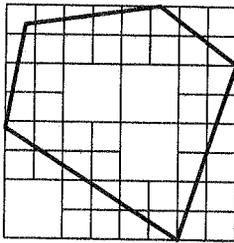
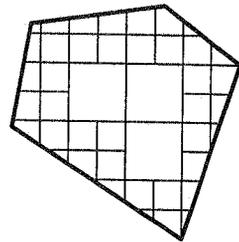


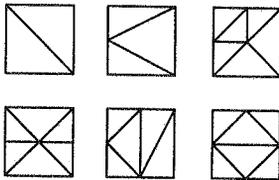
Bild 4.5: Quadtreeunterteilung mit Diagramm



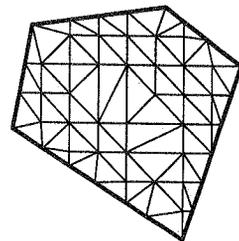
a) Gebietsrand mit Quadtreeunterteilung



b) Abschneiden der Elemente an den Gebietsrändern



Elementunterteilungsmuster für Dreiecke, aus [9]



c) Dreiecksvernetzung

Bild 4.6: Vom Quadtree zum Dreiecksnetz (schematisch)

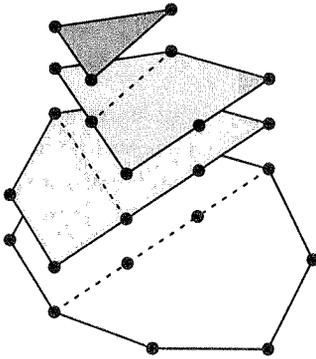
Gebietsrand reichen, werden abgeschnitten (Bild 4.6b). Die Knotenpunkte des FE-Netzes ergeben sich aus den Eckknoten der Quadrate und aus den Schnittpunkten der Gebietsränder mit den Quadratanten. Nach dem Glätten des Quadrees und der Elimination kleiner Segmente im Randbereich, welche zu unverhältnismäßig kleinen Elementen führen würden, wird die Topologie erstellt (Bild 4.6c). Die Übergangsquadrate werden nach einem vorgegebenen Elementmuster unterteilt. Die restlichen Quadrate werden bestmöglich in die geforderten Elemente umgewandelt. Um ein reines Vierecksnetz zu erhalten, werden vor allem im Randbereich vereinzelt auftretende Dreiecke mit Vierecken zu Fünfecken verknüpft und anschließend in fünf Vierecke unterteilt. Ist das nicht möglich, wird ein Dreieck in drei Vierecke unterteilt. Aus Kompatibilitätsgründen ist in beiden Fällen ein anschließendes Viertel aller Vierecke erforderlich.

Die *Modified Quadtree Method* von Shephard et al. [96,9] eignet sich hervorragend zur automatischen Vernetzung beliebiger Gebiete. Ihre Stärke liegt im Erstellen von homogenen Dreiecks- oder Vierecksnetzen. Sollen benachbarte Gebiete stark unterschiedlich große Elemente enthalten (starke Graduierung des FE-Netzes), erscheint diese Methode als schwerfällig, da sich benachbarte Quadrate aufgrund der Topologiegenerierungsvorschrift maximal um eine Unterteilungsstufe unterscheiden dürfen. Ramakrishnan et al. [63] erlauben einen beliebig großen Übergang zwischen benachbarten Quadraten. Allerdings können für diese Übergangselemente keine starren Elementunterteilungsraster vorgegeben werden, sondern jedes Übergangselement wird mit Hilfe der Delaunay Triangulation in Dreieckselemente unterteilt.

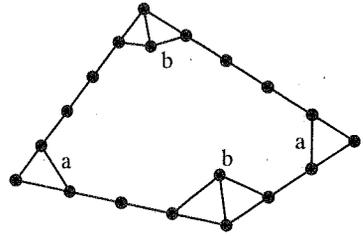
#### 4.1.4 Die Dekompositionsmethode

Unter dieser Überschrift sind im Detail sehr unterschiedliche Verfahren zusammengefaßt. In der Grundstruktur ist jedoch allen Verfahren gemeinsam, daß sie ein gegebenes Gebiet schrittweise zerlegen.

Eine frühe Entwicklung dieses Verfahrens ist die *Fortlaufende Gebietsunterteilung* [20] (Bild 4.7): Das Gebiet wird zuerst manuell oder automatisch in konvexe Untergebiete unterteilt. Nachdem die Knotenpunkte entlang der Ränder generiert sind, wird das Gebiet ungefähr in der Mitte der längsten Achse unterteilt. Dadurch entsteht ein neuer Gebietsrand, auf dem ebenfalls Knoten generiert werden. Die Gebietsunterteilung und Knotengenerierung entlang der neu entstandenen Ränder werden solange rekursiv fortgesetzt, bis nur noch dreiknotige Dreiecke vorhanden sind. Rank et al. [69,81] griffen diesen Gedanken auf und entwickelten einen Netzgenerator für adaptive Dreiecks- und Vierecksnetze.



**Bild 4.7:** Gebietszerlegung nach Bykat [20] und Rank [69,81]



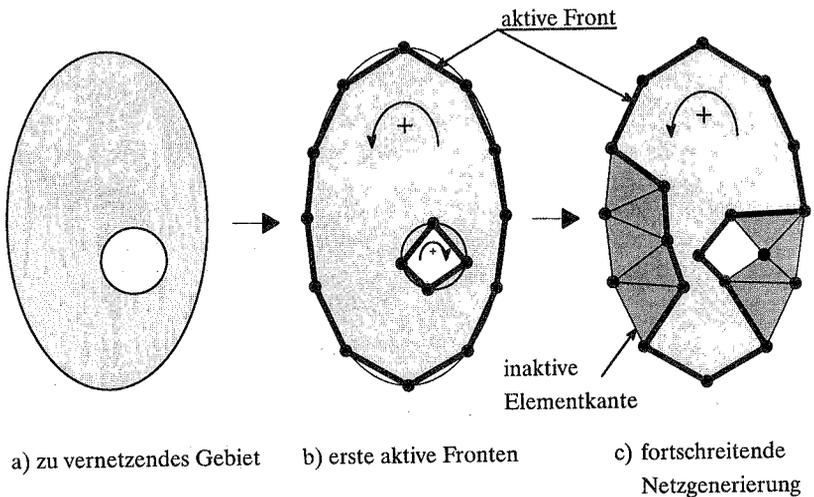
**Bild 4.8:** Advancing Front Method nach Tracy [91]

Eine jüngere Entwicklung ist die *Advancing Front Method*, die eine simultane Bildung der Knoten und Elemente erlaubt. Dabei kann jedes neu entstehende Element sofort auf Qualitätskriterien (Abschnitt 2.4) überprüft werden. Ist die Qualität des Elements ungenügend, wird es zusammen mit einem eventuell gleichzeitig generierten Knoten verworfen. Ein neuer Versuch, ein ausreichend gutes Element zu erzeugen, kann unternommen werden. Die meisten Vertreter dieser Gruppe generieren zuerst die Knotenpunkte entlang der Gebietsränder. Die Verbindungskanten benachbarter Knoten bilden ein geschlossenes Polygon, häufig als *aktive Front* bezeichnet. Die Elementbildung wird entlang der *aktiven Front* in das Gebietsinnere verlagert. Nach jedem generierten Element wird die *aktive Front* so angepaßt, daß sich darauf nur solche Elementkanten befinden, an welche ein weiteres Element angeschlossen werden darf. Die *aktive Front* wandert also während der Netzgenerierung in das Gebietsinnere.

Tracy [91] ist ein früher Vertreter dieser Methode. Nachdem die erste *aktive Front* gebildet ist, werden alle Scheitelwinkel der *aktiven Front*, welche kleiner als  $90^\circ$  sind, durch Dreiecksbildung entfernt (Fall a in Bild 4.8). Scheitelwinkel kleiner als  $180^\circ$  werden dann durch Bilden von zwei Dreiecken unter Einfügen eines neuen Knotens entfernt (Fall b in Bild 4.8). Die beiden Schritte werden so lange wiederholt, bis nur noch drei Knoten auf der *aktiven Front* existieren, die zu einem letzten Dreieck führen. Im Anschluß an die Netzgenerierung kann eine Relaxation des Elementnetzes (Netzglättung) durchgeführt werden. Nichtkonvexe Gebiete müssen vorab in konvexe Gebiete

unterteilt werden. Deljouie-Rakhshandeh [25] führte eine Netzglättung, zur Steigerung der Qualität der Dreiecke, bereits während der eigentlichen Netzgenerierung entlang der *aktiven Front* durch. Xie und Ramaekers [95] erweiterten die Methode auf nichtkonvexe Gebiete und Viereckselemente.

Obige Verfahren liefern zufriedenstellende Ergebnisse. Die Elementgröße im Gebietsinneren ist durch die Unterteilung der Randkanten definiert. Als ein Nachteil erscheint die große Anzahl an Winkelberechnungen entlang der *aktiven Front*. Die oft starren Winkelgrenzwerte führen zu einer geringen Flexibilität in den Entscheidungen über die Gebietsunterteilungen.



**Bild 4.9:** Die Advancing Front Method nach Peraire et al. [60].

Peraire et al. [60] entwickelten einen Netzgenerator für Dreieckselemente, der Elemente an beliebigen Elementkanten der *aktiven Front* generieren kann (Bild 4.9). Ein Dreieck ist durch ein aktives Frontelement und einen Knoten im Gebietsinneren definiert. Dieser Knoten wird entweder neu erzeugt, oder er befindet sich bereits auf der aktiven Front, so daß die Dreiecksbildung zu einem bestmöglichen Element führt. Eine weitere wesentliche Neuentwicklung ist die Verwendung eines Hintergrundnetzes, welches das gesamte Gebiet überdeckt und als Träger der Elementdichteinformation dient. Mit einem Hintergrundnetz ist es möglich, die Generierung adaptiv verfeinerter Netze

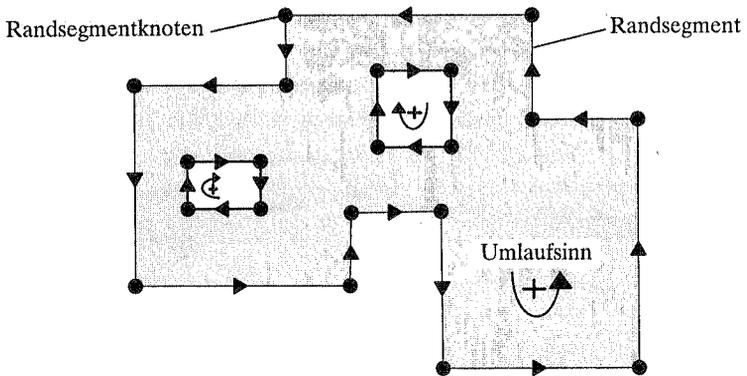
detailliert zu steuern, da die Elementdichteinformation an jeder Stelle des Gebiets (auch auf den Rändern) durch eine lineare Interpolation aus den Knotenwerten des Hintergrundnetzes ermittelt werden kann.

Zhu und Zienkiewicz [98] erweiterten 1991 diese Methode auf ein Verfahren zur Generierung von Viereckselementen. Sie setzten voraus, daß ein reines Vierecksnetz gebildet werden kann, sofern der randbeschreibende Polygonzug in eine gerade Anzahl Elemente unterteilbar ist. Ein ähnliches Verfahren wurde von Blacker [14] 1991 zur Erzeugung von reinen Vierecksnetzen publiziert.

Netzgeneratoren auf der Grundlage der *Advancing Front Method* zeigen eine große Flexibilität in der Anwendung. Besonders die Methoden nach Peraire [60] haben aufgrund weniger Fallunterscheidungen und der Verwendung eines Hintergrundnetzes zur Elementdichtesteuerung ein breites Einsatzspektrum. Sie eignen sich ausgezeichnet zur automatischen Vernetzung beliebiger ebener Strukturen. Zur Generierung ausschließlich homogener Netze, für die kein Hintergrundnetz erforderlich ist, sind diese Methoden allerdings etwas aufwendig. Adaptiv verfeinerte Netze können jedoch detailliert an die Wünsche des Anwenders oder an die Vorgaben aus Geometrie und Belastung angepaßt werden.

## 4.2 Netzgenerator *Freem*

Von den beschriebenen Methoden zur Generierung von FE-Netzen erscheint die Advancing Front Method am geeignetsten für einen Einsatz in der Netzgenerierungsstrategie (Abschnitt 3.5). Insbesondere die Methode nach Peraire et al. [60] stellt ein modernes, flexibles Werkzeug, speziell zur Generierung adaptiver Dreiecksnetze, dar. Eine Erweiterung der Advancing Front Method auf dreidimensionale Tragwerke erscheint durchführbar.



**Bild 4.10:** Definition der Gebietsränder

Der im folgenden vorgestellte Netzgenerator *Freem* nach der Advancing Front Method basiert auf den Arbeiten von Peraire et al. [60] und Lo [49]. Er ist geeignet, homogene und adaptiv verfeinerte FE-Netze für beliebige Gebiete zu generieren. Zusammen mit der Abbildungsmethode (Abschnitt 4.1.1) können auch Falwerke und Schalen vernetzt werden. Die zu vernetzende Struktur ist durch eine geschlossene, im Gegenuhrzeigersinn orientierte Umrandung definiert, die beispielsweise aus linearen, quadratischen und kubischen Segmenten besteht. Aussparungen und Lagerkanten innerhalb des Gebiets werden durch weitere unabhängige Segmentketten, welche im Uhrzeigersinn orientiert sind, vorgegeben (Bild 4.10). Alternativ dazu kann der Anwender vorhandene Aussparungen in den randbeschreibenden Segmentzug integrieren. In einem solchen Fall ergibt sich eine Verringerung der Rechenzeit, denn sofern nur ein einziger Segmentzug zu Beginn der Netzgenerierung definiert ist, muß während der gesamten Bearbeitungsphase immer nur die eine aktive Front nach geeigneten Knotenpunkten durchsucht werden, von welcher aus ein Element gebildet werden soll. Sind Aussparungen und

Lagerkanten unabhängig vom Gebietsrand definiert, müssen während des Generierungsprozesses zusätzlich alle anderen aktiven Fronten auf erlaubte verwendbare Knoten untersucht werden. Die benutzerdefinierten Verbindungskanten zwischen den Aussparungen und dem Gebietsrand sind allerdings im endgültigen Netz sichtbar, da sie als zu erhaltende Ränder interpretiert werden, auf denen gegebenenfalls Lasten oder Lagerbedingungen definiert werden können.

Neben den Gebietsberandungen sollte der Benutzer zusätzliche Angaben über die Größe und die Art der finiten Elemente machen. Ferner kann er den Gebieten unterschiedliche Material- und Querschnittseigenschaften zuweisen, welche auf die generierten finiten Elemente übertragen werden. Die Beschreibung belasteter oder gelagerter Teilgebiete und Gebietskanten runden die Eingabedaten für den Netzgenerator ab.

## 4.2.1 Ebene Dreiecksnetze

### 4.2.1.1 Generieren der Randknoten

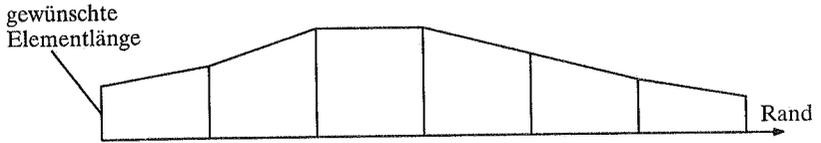
Vor der Generierung der Elemente werden die Randknoten auf den Gebietsrändern erzeugt. Zunächst wird jeweils ein Knoten an jedem Randsegmentende definiert. Anschließend werden die Randsegmente durch weitere Knotenpunkte unterteilt. Die Anzahl der generierten Knotenpunkte ist abhängig von der gewünschten Elementgröße, welche durch eine Elementdichtefunktion definiert ist (Abschnitt 4.2.6).

Für homogene FE-Netze (konstante Elementdichtefunktion) ist es leicht, die endgültige Position der Randknoten zu bestimmen. Aus der bekannten Kantenlänge und der gewünschten Elementgröße wird die Anzahl der zu generierenden Knoten durch eine einfache Division bestimmt. Dabei ist zu beachten, daß die resultierende Anzahl ganzzahlig sein muß:

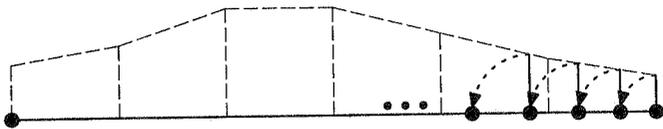
$$\text{Anz. Randknoten} := \text{MAX} \left[ 2 ; \text{RUNDE} \left( \frac{\text{Kantenlänge}}{\text{gew. Elementlänge}} \right) + 1 \right] \quad (4.1)$$

Damit die Knoten am Ende des Generierungsprozesses gleichmäßig über die Randkanten verteilt sind, wird die gewünschte Elementgröße korrigiert. Die wahre Elementlänge ergibt sich zu

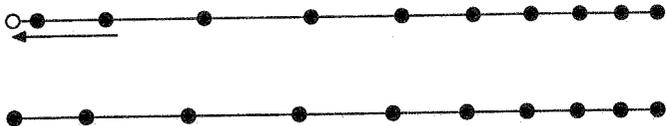
$$\text{wahre Elementlänge} := \frac{\text{Kantenlänge}}{\text{Anz. Randknoten} - 1} \quad (4.2)$$



- a) Schnitt durch ein Hintergrundnetz mit Elementdichtefunktion entlang einer Randkante; Stützstellen der diskreten Funktion an den Knotenpunkten



- b) Positionieren der Randknoten nach den Vorgaben der Elementdichtefunktion



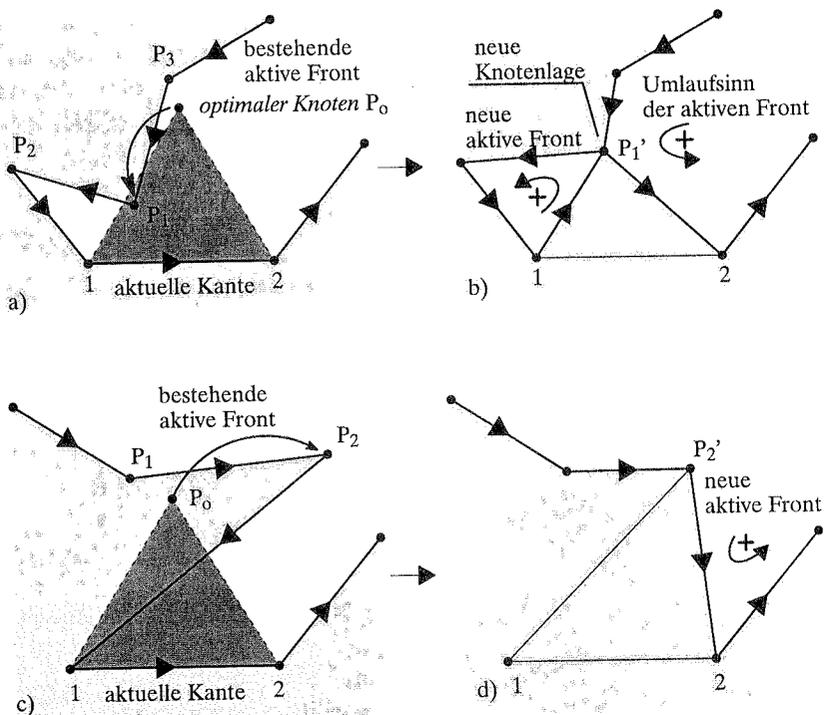
- c) Korrektur der Randknotenposition durch Skalierung der Elementkantenlänge

**Bild 4.11:** Positionieren der Randknoten für adaptive Netze

Für adaptive Netze gestaltet sich die Generierung der Randknoten aufwendiger (Bild 4.11). Damit die Elementdichtefunktion bei der Knotendefinition ausreichend genau berücksichtigt werden kann, wird ein iteratives Vorgehen zur Positionierung der Randknoten eingeführt. Ausgehend von der Kantenseite, an welcher das kleinste Element gebildet werden soll, werden sukzessive Randknoten definiert. Der Abstand eines Knotens zu seinem Nachbarn ergibt sich aus dem Wert der Elementdichtefunktion an der Position des Nachbarknotens (Bild 4.11b). Damit der letzte Randknoten exakt auf



optimaler Punkt bezeichnet. Das aktive Frontelement wird für ein homogenes Dreiecksnetz meist willkürlich aus allen Fronten bestimmt. Für adaptive Netze erhält das kürzeste aktive Frontelement den Vorzug. Dazu wird die lineare aktive Kantenliste vollständig durchsucht (linearer Zeitaufwand). Die Suche ist notwendig, damit die kleinsten Dreiecke zuerst entstehen. Werden die großen Elemente zuerst gebildet, würden diese, aufgrund der größeren Flächentoleranzen, für kleine Dreiecke vorgesehene Bereiche ganz oder teilweise in Besitz nehmen. Das Resultat wären schlecht proportionierte FE-Netze. Ehe das Dreieck tatsächlich erzeugt wird, muß seine Zulässigkeit überprüft



**Bild 4.13:** Bestimmung des geeignetsten Dreiecks

werden. Treten keine Überschneidungen der Dreieckskanten mit bereits generierten Dreiecken auf und ist der Abstand des optimalen Knotens zu jedem Knoten aller aktiven Fronten ausreichend groß, ist das neue Dreieck zulässig und wird gebildet. Dieser

benutzerdefinierbare Mindestabstand zu den aktiven Fronten ist notwendig, damit auch ein anschließendes Element, welches in diesem Bereich gebildet wird, gute Proportionen aufweist. Ist das Dreieck jedoch nach obigen Kriterien unzulässig (z. B. die Überschneidung in Bild 4.13a und Bild 4.13c, oder ein geringer Abstand des optimalen Knotens zu einem existierenden Knotenpunkt auf einer aktiven Front in Bild 4.15a), wird der „optimale Knoten“ verworfen und der Knoten auf der aktiven Front ermittelt, der die Bildung des bestmöglichen Dreiecks erlaubt (Bild 4.13b,d und Bild 4.15b). Als geeignete Knoten P kommen nur diejenigen in Betracht, die sich innerhalb eines Suchkreises  $\Omega_1$  um den optimalen Knoten befinden. Der Radius  $r_1$  des Kreises wird beispielsweise mit dem 1,5-fachen Wert der Kantenlänge  $l_{1-3}$  des Dreiecks gewählt. Die Menge der möglichen Punkte P wird weiter eingeschränkt, indem sie zugleich innerhalb eines Kreises  $\Omega_2$  um den Mittelpunkt der aktuellen Kante liegen sollen. Hierdurch werden zu langgestreckte Elemente vermieden. Zusätzlich werden rechts von der aktuellen Kante gelegene Knoten nicht berücksichtigt. Mathematisch muß ein Knoten demnach folgende Bedingung nach Bild 4.12 erfüllen:

$$P \in \{\Omega_1 \cap \Omega_2 \wedge (v_{12} \times v_{1P})e_z > 0\} \quad (4.3)$$

Erfüllen mehrere Knoten die Bedingung (4.3), wird in der Regel der Knoten ausgewählt, der am nächsten zur aktuellen Kante liegt (Bild 4.13b). In seltenen Fällen führt der Punkt  $P_1$  aufgrund ungünstiger Geometrieverhältnisse zu einem unbrauchbaren Element (Bild 4.13c). Dann ist der Knoten  $P_2$  der Nachbarkante zur aktuellen Kante auszuwählen (Bild 4.13d). Dieser Fall wird durch die Kontrolle des Umlaufsinn eines Dreiecks aus den beiden Knoten der Nachbarkante und dem optimalen Punkt erkannt (Dreieck  $P_2, 1, P_0$  in Bild 4.13c). Ist der Umlaufsinn mathematisch positiv ( $[v_{P_2,1} \times v_{P_2,P_0}]e_z > 0$ ), so liegt der Punkt  $P_0$  innerhalb des zulässigen Gebiets. Andernfalls treten Überschneidungen auf.

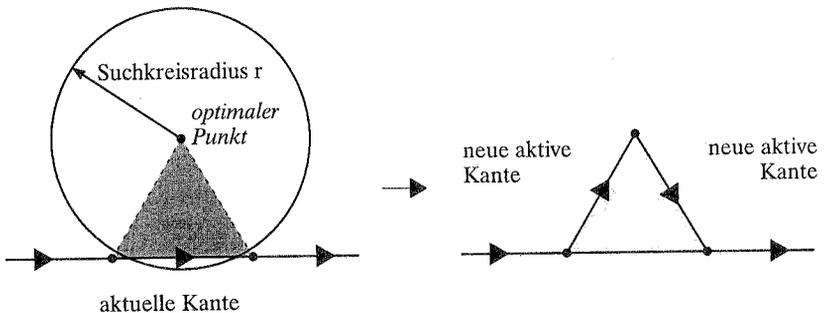
Zur Verbesserung der Elementqualität wird die Lage des gefundenen Knotens durch eine gewichtete Mittelbildung mit dem optimalen Knoten  $P_0$  modifiziert (z. B. Bild 4.13b,  $P_1 \rightarrow P_1'$ ):

$$P_1' = P_1 + \frac{P_0 - P_1}{n} \quad (4.4)$$

$P_0$  sind die Koordinaten des optimalen Knotens und n die Anzahl der an den Knoten  $P_1$  angeschlossenen Elemente, einschließlich des neuen Elements. Aus diesem Knoten  $P_1'$  und der aktuellen Kante wird das Dreieck gebildet.

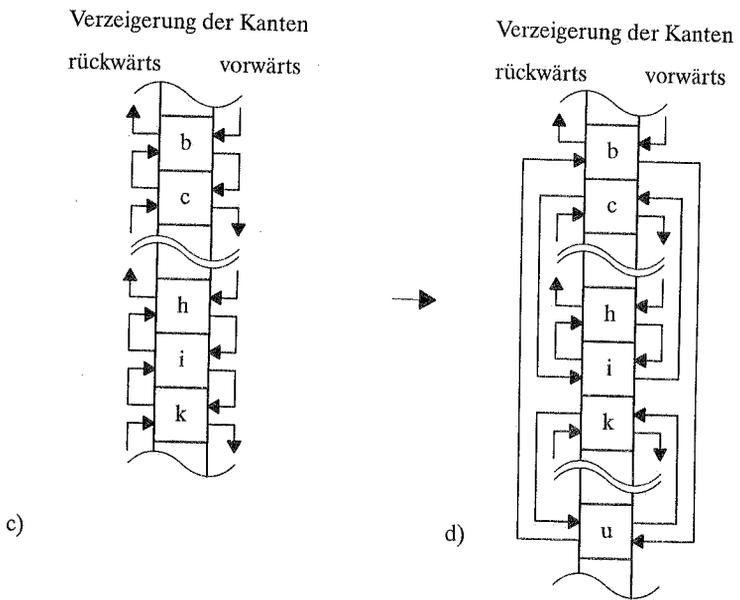
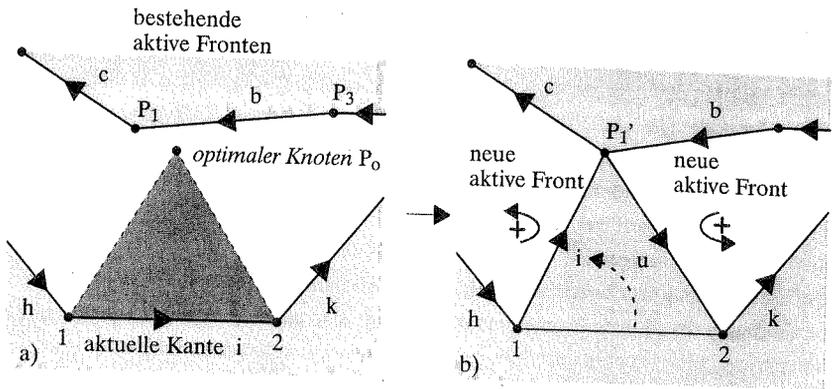
### 4.2.1.3 Aktualisieren der aktiven Front

Die aktive Front wird an die veränderte Geometrie angepaßt, indem die Kanten des neuen Dreiecks, an welche ein weiteres Dreieck angefügt werden darf, in die aktive Liste aufgenommen und die anderen Kanten des Dreiecks gegebenenfalls aus der aktiven Liste eliminiert werden. Für den Fall, daß während der Dreiecksbildung keine Alternative zum optimalen Knoten gefunden wird, erhöht sich die Anzahl der aktiven Frontelemente um Eins (Bild 4.14). Die momentan aktuelle Kante wird aus der Front eliminiert, dagegen entstehen durch die Dreiecksbildung zwei neue Frontelemente. Werden geeignete Knotenpunkte auf einer aktiven Front zur Bildung des Dreiecks gefunden, erhöht sich ebenfalls häufig die Anzahl der Frontelemente (Bild 4.13a). Einzig der Fall, daß der ausgewählte Knotenpunkt  $P_2$  zu einer Nachbarkante der aktiven Kante gehört, führt zu einer Reduktion der aktiven Frontelemente (Bild 4.13c). Ist ein Knotenpunkt auf der aktiven Front ausgewählt, der nicht durch ein bereits bestehendes Frontelement an den Knoten 1 oder 2 angeschlossen ist, verbindet das neue Element zwei ehemals geometrisch getrennte Elementbereiche (Brückenbildung in Bild 4.15). Daraus resultiert eine Aufspaltung der einen aktiven Front in zwei neue Fronten, welche getrennt verwaltet werden müssen.



**Bild 4.14:** Erzeugen eines Dreiecks aus der aktuellen Kante und dem optimalen Knoten

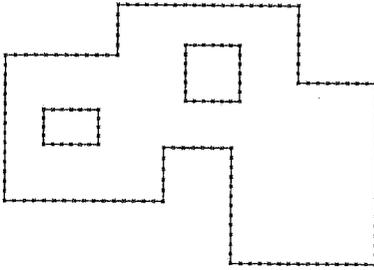
Mit voranschreitender Netzgenerierung können durch Brückenbildung eine Vielzahl unabhängiger Fronten neu entstehen. Auch die Anzahl der Frontelemente verändert sich ständig. Der gesamte Datenbestand der aktiven Frontelemente ist einer starken Änderungsdynamik aus Einfügen und Löschen unterworfen. Programmtechnisch können die Frontelemente deshalb nicht in starr dimensionierten Feldern vorgehalten



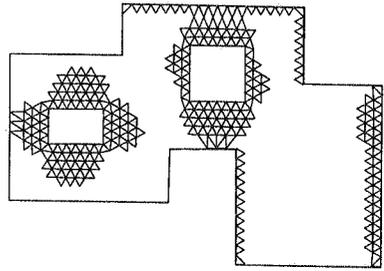
**Bild 4.15:** Zeigertechnik zur Verwaltung der aktiven Front

werden, und die Elementdaten sollten aufgrund des großen Rechenzeitbedarfs für Datenshifts im allgemeinen nicht sequentiell (physikalische Nachbarschaft der Daten) abgespeichert werden. Zur Erlangung einer großen Flexibilität werden die Daten für die aktive Front in einer *doppelt verketteten zirkularen Liste* [57] vorgehalten. Dabei sind für jedes Frontelement zusätzlich zu den Kantendaten in zwei Zeigerelementen die Positionen der Daten der Nachbarkanten gespeichert. Ist ein bestimmtes Element einer aktiven Front gefunden, können mit Hilfe der Zeiger beide Nachbarlemente unmittelbar lokalisiert werden. In Bild 4.15c,d ist die Speichertechnik für das Beispiel aus Bild 4.15a,b dargestellt. Die betroffenen Kanten der aktiven Front sind durch Buchstaben von a bis u bezeichnet. In Bild 4.15c und d deuten Pfeile die Nachbarschaftsbeziehungen der aktiven Frontelemente an. Wird eine aktive Front durch Brückenbildung in zwei neue Fronten unterteilt (Bild 4.15b), muß lediglich der Speicherplatz für ein neues Frontelement bereitgestellt werden (Element u in Bild 4.15b und d). Die Aufspaltung der aktiven Front in zwei unabhängige Fronten erfordert nur eine Änderung der Verweise auf die Nachbarschaftsbeziehungen. Physikalische Datenshifts sind nicht erforderlich. Die aktuelle Kante i wird aus der aktiven Front eliminiert, da an sie kein weiteres Dreieck angelagert werden darf. Der Listenplatz der aktuellen Kante wird dem zweiten neu entstehenden Frontelement zugewiesen. Die beiden neuen Frontelemente werden durch Veränderungen der Nachbarschaftsbeziehungen (Zeiger) logistisch in ihre jeweilige aktive Front eingefügt. Die Kanten k und b werden durch die neu entstandene Kante u nachbarschaftlich verbunden, ebenso die Kanten c und h durch die veränderte Kante i. Physikalische Datenshifts sind nicht erforderlich. Da keine Anker für die verketteten Listen verwendet werden, welche auf ein Startelement zeigen, ist die mögliche Anzahl der aktiven Fronten unbegrenzt.

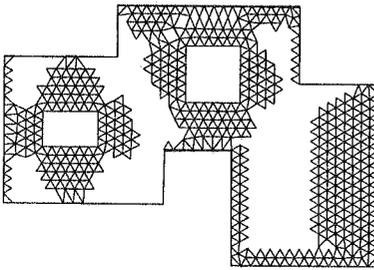
In Bild 4.16 wird ein Dreiecksnetz für die in Bild 4.10 definierte Deckenplatte generiert. Die Gebiete sind durch drei geschlossene Polygonzüge definiert. Nach der Bildung der Randknoten (a) werden die Elemente vom Rand aus in das Innere des Gebiets vorangetrieben (b). Dabei wird jeweils das Element mit der kürzesten Basislänge  $l_{1,2}$  erzeugt, so daß sich die Neubildung von Elementen meistens in gewissen Bereichen konzentriert. Während der Netzgenerierung entstehen eine Vielzahl neuer Fronten (c,d). Nachdem alle Fronten leer sind, ist das endgültige FE-Netz erzeugt (e).



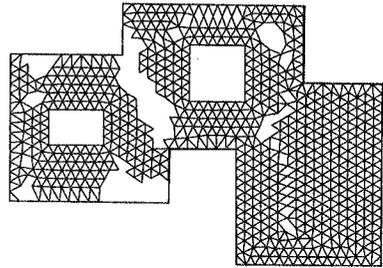
a) Geometriebeschreibung  
mit Randknoten



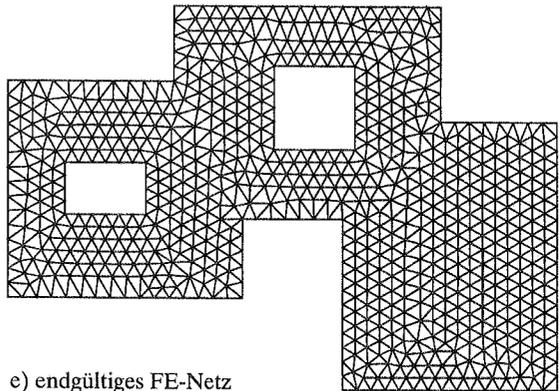
b) 400 Elemente



c) 800 Elemente



d) 1200 Elemente



e) endgültiges FE-Netz

**Bild 4.16:** Generieren von Dreieckselementen

## 4.2.2 Ebene Vierecksnetze

Vierecksnetze werden Dreiecksnetzen zur Berechnung von strukturmechanischen Problemen aufgrund des besseren Lösungsverhaltens der finiten Elemente vorgezogen. Allerdings ist die Generierung reiner Vierecksnetze problematischer, da Vierecke wesentlich schwieriger an beliebige Geometrien angepaßt werden können als Dreiecke.

Das folgende Vorgehen basiert auf der Dreiecksnetzgenerierung nach der Advancing Front Method aus Abschnitt 4.2.1. Dabei wird ein Viereck aus zwei sukzessiv generierten Dreiecken gebildet. Diese Dreiecke sind im Gegensatz zu Abschnitt 4.2.1 nicht gleichseitig, sondern möglichst rechtwinklig. Im Idealfall ergeben zwei rechtwinklige Dreiecke ein Quadrat, zwei gleichseitige Dreiecke dagegen ergeben immer ein verzerrtes Viereck.

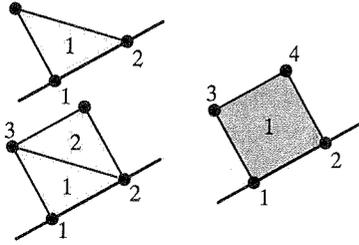
Folgende Teilschritte werden bei der Generierung eines Vierecks durchgeführt (siehe auch Bild 4.18a; die Generierungsvorschriften für die beiden Dreiecke sind in Bild 4.17 dargestellt):

- Erzeugen eines ersten rechtwinkligen Dreiecks
- Generieren eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks an der längsten freien Kante des 1. Dreiecks
- Verknüpfen der beiden Dreiecke zu einem Viereck

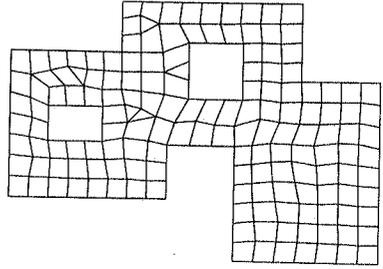
1. Element:	$x_3 = x_1 - h \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}$ $y_3 = y_1 + h \frac{x_2 - x_1}{l_{12}}$
2. Element:	$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} - h \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{y_2 - y_3}{l_{23}}$ $y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2} + h \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x_2 - x_3}{l_{23}}$
	h.. gewünschte Elementlänge

**Bild 4.17:** Generierungsvorschriften für Viereckselemente

Unglücklicherweise ist die Generierung zweier zusammenhängender Dreiecke nicht immer möglich. Bei einspringenden Ecken, oder dem Anschluß an bereits vorhandene

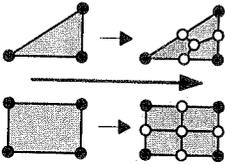


Zusammenfassen von zwei sukzessiv generierten Dreiecken zu einem Viereck

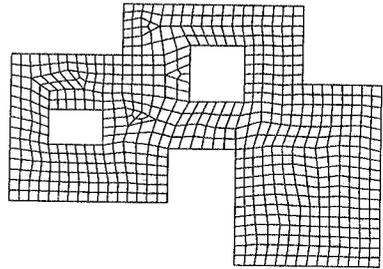


a) Vierecksnetz mit Dreiecksinseln

Unterteilen von  
Dreiecken in 3 Vierecke

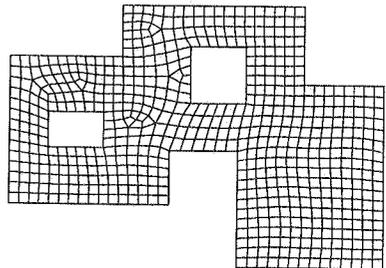


Unterteilen von  
Vierecken in 4 Vierecke



b) reines Vierecksnetz

Netzglättung und  
Topologieverbesserung

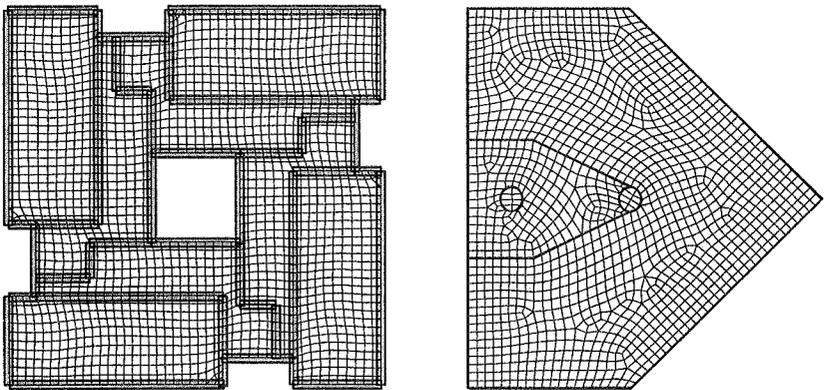


c) endgültiges FE-Netz

**Bild 4.18:** Generieren von Viereckselementen

Elemente, kann möglicherweise das zweite Dreieck nicht generiert werden. Deshalb bleiben vereinzelte Dreiecke übrig (Bild 4.18a).

Um ein reines Vierecksnetz zu erhalten, werden nach Bachmann et al. [9] und Rank et al. [69] alle Dreiecke in drei Vierecke unterteilt. Aus Kompatibilitätsgründen müssen dann alle generierten Vierecke in vier Vierecke unterteilt werden. Es entsteht ein Netz, das ausschließlich aus Viereckselementen besteht (Bild 4.18b). Eine Verbesserung der Elementqualität ist nach Bachmann et al. [9] zu erwarten, wenn ein einzelnes Dreieck mit einem Viereck zu einem Fünfeck zusammengefaßt wird, welches anschließend, sofern es konvex berandet ist, in fünf Vierecke unterteilt wird. Dieses Verfahren ergibt im allgemeinen bessere Viereckselemente als eine getrennte Unterteilung der Vierecke und Dreiecke. Damit alle Elemente im Anschluß an die Elementunterteilung die gewünschte Größe besitzen, werden die Vierecke im ersten Schritt entsprechend größer generiert, was den positiven Nebeneffekt hat, daß zunächst nur ungefähr ein Viertel der benötigten Elemente gebildet werden müssen.



**Bild 4.19:** Beispiele von Deckenplatten

Zu oben erläuterten Unterteilungsmethode seien Alternativen erwähnt, deren Einsatzbreite jedoch im allgemeinen beschränkter und deren Anwendung teilweise wesentlich komplizierter ist. Johnston et al. [42] versuchen isolierte Dreiecke zu eliminieren, indem sie auf einer Dreiecksseite einen zusätzlichen Knoten erzeugen, welcher nach außen gezogen wird. Der inkonsistente Knoten wird über benachbarte Vierecke bis zum

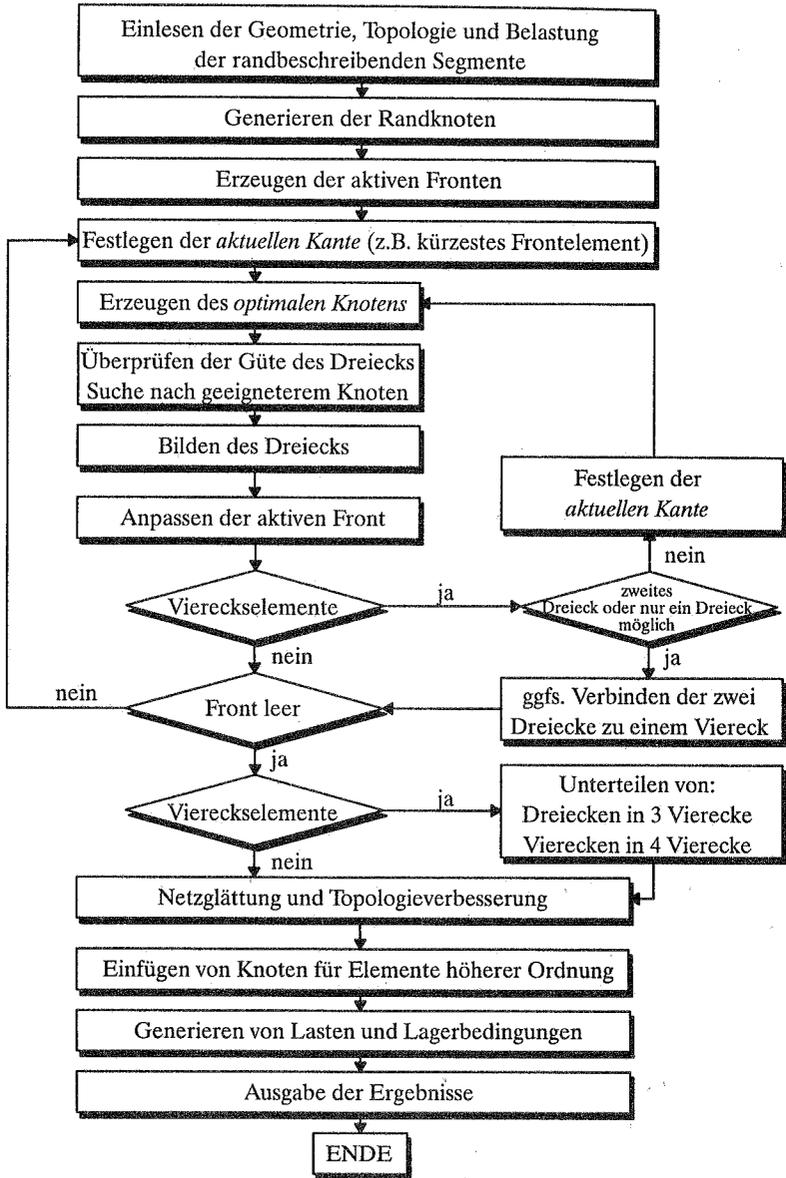


Bild 4.20: Netzgenerierung nach der *Advancing Front Method* in CARAT

nächstgelegenen Dreieck (oder Rand) geführt, welches dadurch ebenfalls zum Viereck wird. Schreiber [80] geht ähnlich vor. Durch einen Optimierungsprozeß strebt er eine Minimierung der zu durchfahrenden Vierecke an. Zhu et al. [98] versuchen sicherzustellen, daß im ersten Schritt keine Dreiecke entstehen. Theoretisch ist das immer dann möglich, wenn die Gebietskanten in eine gerade Anzahl von Elementkanten unterteilt werden.

In Bild 4.19 sind FE-Netze praxisnaher Plattenbeispiele dargestellt. Bild 4.20 zeigt schematisch die Vorgehensweise von *Freem* zur Generierung von Dreiecks- und Vierecksnetzen in der Implementierung des Programmsystems CARAT.

Obwohl der beschriebene Netzgenerator in der Regel gute Vierecksnetze liefert, ist es dennoch möglich, daß selbst für orthogonal berandete Gebiete keine strukturierten Gitter erzeugt werden können. Die Länge der Ausgangskante 1-2 in Bild 4.12 kann während der Generierung eines Vierecks nicht immer gewahrt bleiben, weil die bereits vorhandenen Knotenabstände auf den Rändern nicht exakt der gewünschten Elementgröße entsprechen. Das ist jedoch für die Erzeugung quadratischer Elemente unabdingbar. Die Anzahl der generierten Randknoten ist vorab gut bestimmbar. Die Abstände zwischen diesen Knoten werden so angepaßt, daß auf jedes Kantenende ein Knoten zu liegen kommt (Bild 4.11). Da jedoch die Geometrieverhältnisse im Inneren des Gebiets während der Netzgenerierung, also die Form und Ausbreitungsrichtung der aktiven Fronten, nicht vorab bestimmt werden kann, ist eine konkrete Vorhersage über die Positionierung der innenliegenden Knoten nicht möglich. Das schließt eine Elementgrößenkorrektur im Inneren des Gebiets aus. Als Folge daraus kann die Elementgröße entlang des Randes und im Gebietsinneren, selbst bei einer homogenen Elementdichteverteilung, inkompatibel sein. Somit entstehen in diesen Zonen verzerrte Übergangselemente. Allerdings ist durch die geeignete Wahl des Elementdichtefaktors bei der Generierung homogener FE-Netze meist ein Gitter ohne Übergangselemente zu erreichen. Die erwähnte Korrektur entlang des Randes entfällt dabei. Hierauf ausgerichtete Automatismen wären grundsätzlich denkbar, sie sind jedoch wegen der vorrangigen Anwendung von *Freem* für adaptiv verfeinerte FE-Netze nicht implementiert.

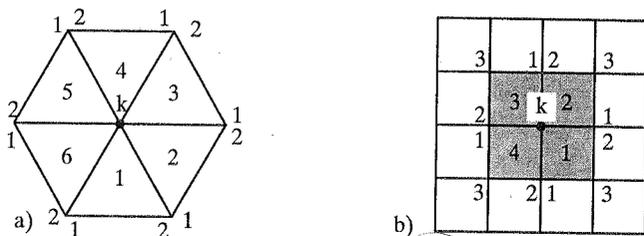
### 4.2.3 Netzglättung

Unter dem Begriff Netzglättung versteht man eine Verbesserung der Elementgestalt durch eine geeignete Korrektur der Koordinaten einzelner Knotenpunkte. Meist werden iterative Netzglättungsverfahren eingesetzt, vereinzelt existieren auch Optimierungsverfahren. Im allgemeinen liefert der Netzgenerator *Freem* FE-Netze mit wohlproportio-

nierten Elementen. Vor allem bei Viereckselementen läßt sich jedoch durch eine Nachbehandlung eine weitere Verbesserung der Elementform erreichen. In *Freem* kommen nachfolgend beschriebene Glättungsverfahren zum Einsatz.

### Laplace-Glättung und isoparametrische Glättung

Die Laplace-Glättung ist eines der Glättungsverfahren mit der größten Verbreitung. Das Verfahren ist bei Herrmann [34], Cavendish [22] und vielen weiteren beschrieben. Die Laplace-Glättung „rückt“ einen Knoten  $k$  in den Mittelpunkt aller unmittelbar angeschlossenen Elemente (Bild 4.21a).



**Bild 4.21:** Laplace- und isoparametrische Glättung für Drei- und Vierecke

Die klassische Gleichung der Laplace-Glättung lautet:

$$x_k = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (x_{j1} + x_{j2}) \quad (4.5)$$

$n$  ist die Anzahl der unmittelbar an den Knoten  $k$  angeschlossenen Elemente. Gleichung (4.5) wird sukzessive für alle Gebietsinnenknoten angewandt. Durch eine mehrmalige Wiederholung wird eine Verbesserung der Elementformen angestrebt.

Die isoparametrische Glättung, ebenfalls ein iteratives Verfahren, zielt auf eine Verbesserung von Viereckselementen (Bild 4.21b).

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{j1} + x_{j2} - x_{j3}) \quad (4.6)$$

Gleichung (4.6) resultiert aus der Interpretation der vier grau unterlegten Elemente in Bild 4.21b als ein achtknotiges Serendipity Element. Die verbesserten Koordinaten für

den Knoten  $k$  ergeben sich durch die Interpolation der Elementknotenkoordinaten für die Stelle  $u=v=0$ . Durch explizites Ausschreiben der Formfunktionen und die Änderung der Summation über die an  $k$  angrenzenden Elemente (streng genommen  $n=4$ ) folgt Gleichung (4.6). Für Dreiecke entspricht die isoparametrische Glättung der Laplace-Glättung.

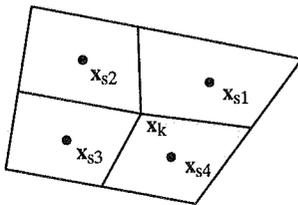
Herrmann [34] entwickelte folgende Gleichung (4.7), um ein gewichtetes Mittel aus der Laplace-Glättung und der isoparametrischen Glättung zu erreichen:

$$x_k = \frac{1}{n(2-w)} \sum_{j=1}^n (x_{j1} + x_{j2} - wx_{j3}) \quad (4.7)$$

$w$  ist ein Wichtungsfaktor, der beliebige Werte zwischen 0 und 1 ( $0 \leq w \leq 1$ ) annehmen darf. Für  $w = 1$  wird die isoparametrische Netzglättung durchgeführt, für  $w = 0$  dagegen die Laplaceglättung. Für Werte zwischen 0 und 1 ( $0 < w < 1$ ) kann ein beliebiges Mittel aus beiden Netzglättungsverfahren erreicht werden.

### Modifizierte Laplace-Glättung

Dieses Verfahren, publiziert von Sezer und Zeid [83] (ähnlich bei Bremer [17]), beinhaltet geringfügige Veränderungen gegenüber der herkömmlichen Laplace-Glättung. Der aktuelle Knoten  $k$  wird in das Zentrum der Mittelpunkte der angeschlossenen Elemente „gerückt“. Zusätzlich finden die unterschiedlichen Elementflächen eine Berücksichtigung. Die Iteration erzeugt Elemente mit ähnlichen Flächeninhalten.



$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^n x_{sj} A_j}{\sum_{j=1}^n A_j} \quad (4.8)$$

Dabei sind  $x_k$  die verbesserten Koordinaten des Knoten  $k$ ,  $x_{sj}$  sind die Elementschwerpunkte,  $A_j$  sind die Flächen der Elemente und  $n$  ist die Anzahl der unmittelbar an den Knoten  $k$  angeschlossenen Elemente.

### Modifizierte Laplace-Glättung unter Berücksichtigung der Elementdichteverteilung

Die bisher vorgestellten Netzglättungsverfahren führen zu einer Vergleichmäßigung der Elementflächen. Das ist jedoch für adaptive FE-Netze nicht gewollt. Vielmehr sollen die

gewünschten Elementgrößenunterschiede beibehalten werden. Die Berücksichtigung der angestrebten Elementgrößen  $h_j$  während der Netzglättung führt zum Erhalt der adaptiven Netzstruktur.

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^n x_{sj} \frac{A_j}{h_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{h_j}} \quad (4.9)$$

### Anwendung der Verfahren

Die Laplace- und die isoparametrische Glättung liefern meist brauchbare Ergebnisse für Dreiecke und Vierecke. Allerdings „verschieben“ beide Verfahren die Knoten, ohne die resultierenden Elementformen zu berücksichtigen. An einspringenden Ecken können dadurch unbrauchbare Elemente erst entstehen. Eine Verbesserung der Elementformen ist bei diesen Verfahren eher zufällig. Ausführlichere Informationen darüber können bei Bremer [17] und Jüdt [43] nachgelesen werden.

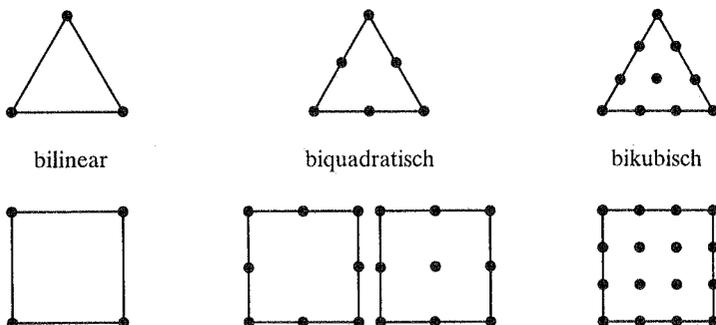
Die modifizierte Laplace-Glättung ist für Drei- und Viereckselemente gleichermaßen geeignet. Auch sie berücksichtigt die entstehenden Elementformen nicht. Allerdings erzielt sie häufig bessere Ergebnisse als die Laplace- oder isoparametrische Glättung. Die Miteinbeziehung der gewünschten Elementgrößen ist zur Glättung adaptiver FE-Netze unumgänglich.

In der Anwendung der modifizierten Laplace-Glättung wird, ähnlich zu Bremer [17], die Qualität des Elementpatches aus allen, an den Knoten  $k$  unmittelbar angeschlossenen Elementen nach a priori Kriterien (Abschnitt 2.4) vor und im Anschluß an die Knotenverschiebung ermittelt. Würde das Verfahren zu einer Verschlechterung der Patchqualität führen, so wird die ursprüngliche Knotenposition beibehalten.

#### 4.2.4 Elemente mit Ansätzen höherer Ordnung

Elemente mit höherwertigen Ansatzfunktionen zeichnen sich durch ein verbessertes Elementverhalten gegenüber solchen mit linearen Ansatzfunktionen aus. Häufig werden Elemente mit quadratischen, selten Elemente mit kubischen Ansatzfunktionen eingesetzt. Mit zunehmender Polynomordnung der Formfunktionen erhöht sich die erforderliche Rechenzeit zum Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrizen, da bei der Integration mehr Gaußpunkte ausgewertet werden müssen als bei gleich großen Elementen mit

niederwertigen Ansätzen. Auch die Rechenzeit zum Lösen der Systemsteifigkeitsmatrix steigt aufgrund der größeren Bandbreite durch höherwertige Ansatzfunktionen an. Allerdings sind wesentlich weniger höherwertige Elemente erforderlich, um ein Problem mit der entsprechenden Genauigkeit von Elementen mit linearen Ansatzfunktionen zu lösen.



**Bild 4.22:** Verfügbare Elementtypen in *Freem*

Sind einmal Elemente mit linearen Ansatzordnungen generiert, ist die Umwandlung in Elemente höherer Ordnung vergleichsweise einfach. In Bild 4.22 ist die Palette der vom Netzgenerator *Freem* zur Verfügung gestellten Elemente dargestellt. Höherwertige Elemente ergeben sich durch Einfügen von Zwischenknoten entlang der Elementränder. Gegebenenfalls müssen zusätzlich Knotenpunkte im Inneren eines Elements generiert werden. Die genauen Positionen dieser Innenknoten erhält man für Vierecke durch Transformationen der entsprechenden Koordinaten aus den Lokalsystemen gleichwertiger Serendipity Elemente auf die Elementflächen. Beispielsweise ergibt sich die Position des Elementmittenknotens eines neunknotigen Lagrange Elements aus den Koordinaten des Mittelpunkts ( $u=v=0$ ) des zugehörigen achtknotigen Serendipity Elements.

Elementrandknotenpunkte entlang gekrümmter Gebietsränder werden nicht auf die Gerade aus den benachbarten Eckknotenpunkten positioniert, sondern auf den zugehörigen Gebietsrand projiziert. Zwar verringert sich dadurch die Qualität dieses Elements, die Approximation der Gebietsränder, und damit des mechanischen Modells, wird jedoch deutlich verbessert.

## 4.2.5 FE-Netze für Schalen und Faltwerke

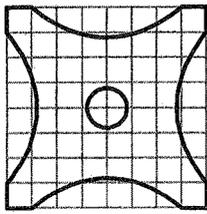
Finite Element Netze für räumliche Flächentragwerke erfordern einen größeren Eingabeaufwand als für ebene Strukturen. Zusätzlich zu den Daten für die Gebietsränder sind Informationen über die Flächengeometrie des Tragwerks erforderlich. Zur Beschreibung einer möglichst breiten Vielfalt von Tragwerken eignen sich explizit beschreibbare Schalengeometrien, wie beispielsweise Kugel, Kegel und Zylinder nur ungenügend. Allgemeine räumliche Flächentragwerke können jedoch gut durch die Werkzeuge der Abbildungsmethode (Abschnitt 4.1.1) beschrieben werden. Lagrange-, Bézier- und Coonsflächen stehen dafür in CARAT zur Verfügung [15]. Die FE-Netze werden in den Parameterräumen der Design Elemente generiert und anschließend mit Hilfe deren Transformationsvorschriften auf die Schalenfläche projiziert.

Als Parameterflächen sind Einheitsquadrate oder Einheitsdreiecke üblich [15,17]. Für diese einfachen geometrischen Flächen können ohne größeren Aufwand strukturierte Gitter generiert werden. Durch eine Transformation der Knotenkoordinaten auf die Schalenfläche ist im allgemeinen eine homogene Diskretisierung erreichbar. Zur Generierung beliebiger adaptiver FE-Netze ist die Abbildungsmethode jedoch aufgrund der starr vorgegebenen Elementunterteilungsraster ungeeignet. Dieser Nachteil kann durch ein Zusammenwirken der Abbildungsmethode mit einem automatischen Netzgenerator für ebene Tragwerke, welcher geeignet ist adaptiv verfeinerte Netze zu erzeugen, aufgehoben werden.

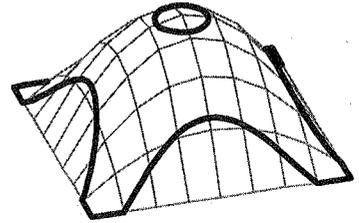
### 4.2.5.1 Automatische Netzgenerierung auf Parameterflächen

In dieser Arbeit wird die Abbildungsmethode mit dem automatischen Netzgenerator *Freem* (Abschnitt 4.2.1) zur Generierung adaptiv verfeinerter FE-Netze für Schalen kombiniert. *Freem* generiert im ebenen Parameterraum eines Design Elements ein homogenes oder adaptives FE-Netz. Anschließend werden die generierten Knotenpunkte mit Hilfe der Transformationsvorschrift des Design Elements auf die Schalenfläche abgebildet.

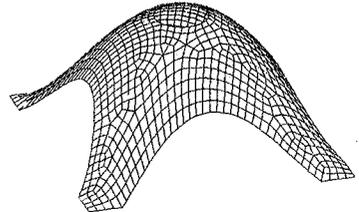
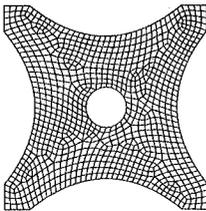
*Freem* bietet jedoch zusammen mit der Abbildungsmethode noch weitere Möglichkeiten. Im Gegensatz zur reinen Abbildungsmethode ist es nicht mehr erforderlich, die gesamte Parameterfläche zu vernetzen. Der automatische Netzgenerator kann ein FE-Netz für beliebige Ausschnitte der Parameterfläche erzeugen. In Bild 4.23 ist das Vorgehen dargestellt. In diesem Beispiel ist ein Design Element zur Beschreibung der Schalengeometrie ausreichend. Im Parameterraum können Gebietsaussparungen und -ränder durch Beschreiben von Randsegmenten in die Netzgenerierung integriert



Parameterraum



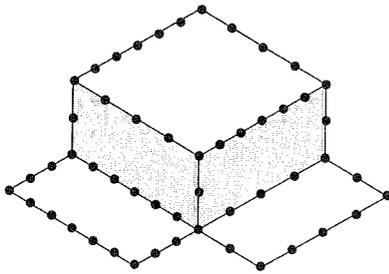
Schalenfläche



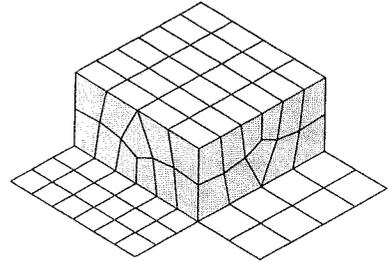
**Bild 4.23:** Netzgenerierung auf der Parameterfläche einer Schale

werden. Der automatische Netzgenerator erzeugt ein Netz im Parameterraum unter Berücksichtigung der zusätzlich definierten Ränder und Aussparungen, welches anschließend auf die Schalenfläche transformiert wird. Es entsteht eine freie, automatisch vernetzte Schale, deren Oberfläche nur durch ein, die gesamte Geometrie beschreibendes Design Element definiert ist. Für anspruchsvollere Geometrien sind auch mehrere zusammenhängende flächenbeschreibende Design Elemente vorstellbar. Ist die Oberflächegeometrie jedoch durch mehrere Design Elemente zu approximieren, bleiben die Ränder der Design Elemente auch im endgültigen FE-Netz erhalten, da der Netzgenerator FE-Netze nur lokal auf der Parameterfläche der Design Elemente erzeugt und keine elementübergreifenden Zusammenhänge erkennen kann. Eine Beseitigung dieser Einschränkung wird von Rank et al. [68] vorgeschlagen. Durch ein abschließendes Glätten des FE-Netzes auf der Schalenfläche werden die Design Elementränder verwischt.

Neben der Generierung allgemeiner adaptiver FE-Netze für Schalen, kann *Freem* eingesetzt werden, um Netze für Design Übergangselemente zu erzeugen. Damit entfällt



Design Elemente mit gewünschten Kantenunterteilungen



generiertes FE-Netz

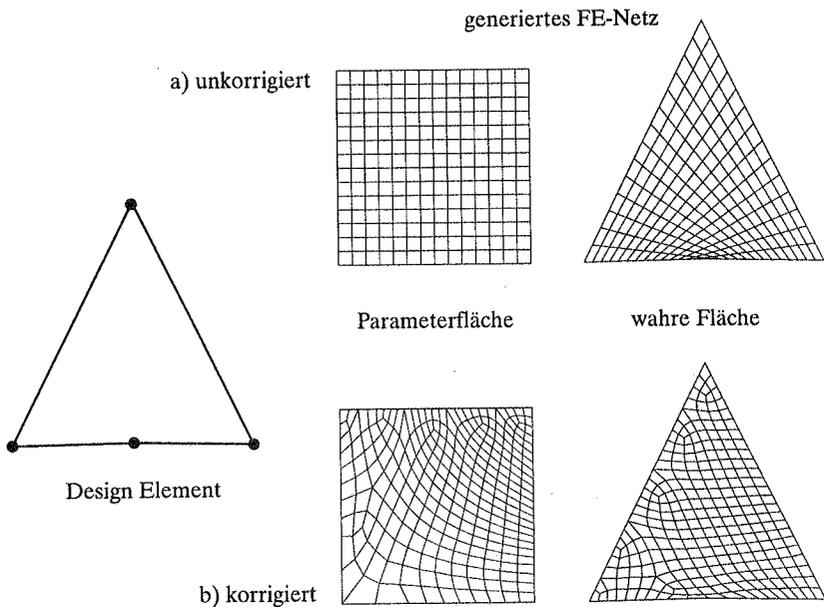
**Bild 4.24:** Freivernetzte Elemente als Design Übergangselemente

die strenge Beschränkung der Abbildungsmethode, daß gegenüberliegende Kanten gleich unterteilt werden müssen. Bei der Verfeinerung eines Design Elements müssen somit nicht mehr alle benachbarten Elemente mitverfeinert werden. Der Netzgenerator erzeugt ein möglichst homogenes unstrukturiertes Gitter aufgrund vorgegebener Randknoten zur Schaffung eines Übergangsbereiches zwischen feinen und groben Design Elementen (Bild 4.24). Design Elemente, für die ein strukturiertes Gitter generiert werden kann (gleiche Unterteilung gegenüberliegender Kanten, weiße Elemente in Bild 4.24), werden herkömmlich unterteilt. Für alle anderen Design Elemente (grau hinterlegte Elemente in Bild 4.24) wird mit Hilfe des Netzgenerators für ebene Gebiete ein unstrukturiertes FE-Netz in deren Parameterräumen erzeugt.

#### 4.2.5.2 Verringerung der Elementverzerrungen

Die Abbildungsmethode liefert im allgemeinen sehr gute Ergebnisse, falls die tatsächliche Form der Design Elemente mit der Geometrie der Parameterfläche weitgehend übereinstimmt.

Die Netzgenerierung im Parameterraum darf jedoch nicht, zumindest für deutlich deformierte Design Elemente, unabhängig von der Abbildung der Elemente auf die Schalenfläche durchgeführt werden, da optimale Elemente in der Ebene durch die Transformation auf die Schalenfläche unerwünscht verzerrt werden können. Eine Netzgenerierung ohne Information der tatsächlichen Schalengeometrie liefert design-ähnliche finite Elemente, welche für stark verzerrte Design Elemente sogar unbrauchbar



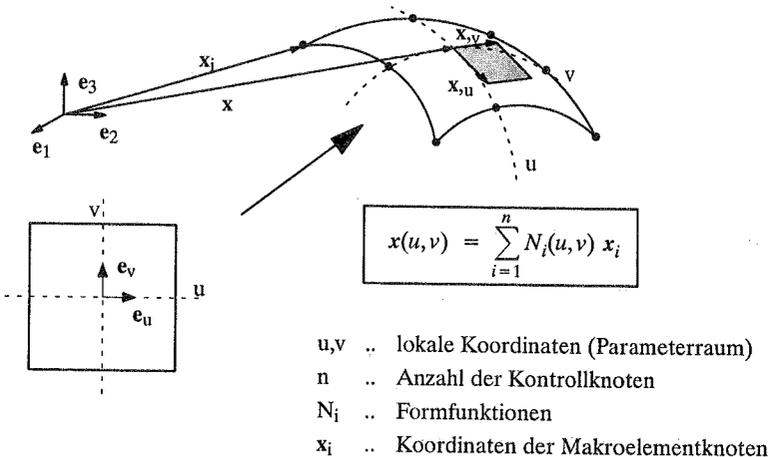
**Bild 4.25:** Generieren unzulässiger FE-Elemente durch verzerrtes Design Element (ebenes Beispiel)

sein können (Bild 4.25a). Auch eine starke räumliche Überhöhung der Design Elemente kann zu verzerrten finiten Elementen führen. Die unerwünschten Elementverzerrungen können jedoch bereits während der Netzgenerierung berücksichtigt und gegebenenfalls korrigiert werden (Bild 4.25b). Die Elemente werden dann im Parameterraum unter dem Aspekt generiert, daß auf der Schalenfläche weitgehend optimale Dreiecks- und Viereckselemente entstehen. Zur Korrektur der Verzerrungen ist es jedoch notwendig, im Parameterraum Informationen der Schalengeometrie zu besitzen.

Grundsätzlich sind zwei gestaltsändernde Anteile, nämlich die Verzerrung und die Dehnung zu unterscheiden, welche nach einer Transformation der Elemente auf die Schalenfläche auftreten. Will man während der Netzgenerierung die spätere Elementform optimieren, muß man beide Anteile berücksichtigen. Die angestrebte lokale Elementkorrektur im Parameterraum läßt sich nur mit einem Netzgenerator für

unstrukturierte FE-Netze verwirklichen. Deshalb wird der in Abschnitt 4.2.1 beschriebene Netzgenerator *Freem* als ein geeignetes Werkzeug dafür angesehen. *Freem* erfordert zulässige Elemente nach Abschnitt 2.4, sowohl im Parameterraum, als auch auf der Schalenfläche. Deshalb können nur kleine Abbildungsverzerrungen der Design Elemente korrigiert werden. Es bleibt noch zu betonen, daß nicht für alle Geometrien völlig verzerrungsfreie FE-Netze erzeugt werden können. Die Elementkorrektur ist für abwickelbare Flächen vergleichsweise einfach zu steuern. Für nichtabwickelbare Flächen dagegen kann im allgemeinen kein unverzerrtes Gitter gefunden werden. Es wird deshalb lediglich angestrebt, ein weitgehend verzerrungsfreies FE-Netz zu generieren.

Nachfolgend wird eine konkret auf den Netzgenerator *Freem* zugeschnittene Problemlösung vorgestellt [71]. Ein weiteres Verfahren wurde von Rank et al. [68] publiziert. Die Autoren schneiden verzerrte Elementpatche auf, fügen zusätzliche Knoten ein und generieren anschließend mit Hilfe der Delaunay Triangulation (Abschnitt 4.1.2) lokal verbesserte Elementtopologien. Dagegen führt Hansbo [32] im Parameterraum eine Laplaceglättung unter Berücksichtigung der tatsächlichen Schalengeometrie durch.



**Bild 4.26:** Parameterfläche und Schale

## Grundlagen zur Differentialgeometrie

In Bild 4.26 ist die Abbildung eines Punktes mit den lokalen Koordinaten  $u, v$  auf die Schalenfläche dargestellt. Die Koordinaten  $u$  und  $v$  sind krummlinig. An jedem Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$  können die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{x}_u$  und  $\mathbf{x}_v$  errechnet werden, welche eine Tangentialebene an die gekrümmte Fläche definieren.

Gleichung (4.10) stellt die Transformationsgleichung eines im Parameterraum gegebenen Punktes auf die Schalenfläche dar.

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum N_i(u, v) \mathbf{x}_i \quad (4.10)$$

Die Tangentenrichtungsvektoren (kovarianten Basen) ergeben sich zu

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = \sum \frac{\partial N_i(u, v)}{\partial u} \mathbf{x}_i =: \mathbf{x}_{,u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = \sum \frac{\partial N_i(u, v)}{\partial v} \mathbf{x}_i =: \mathbf{x}_{,v}$$

Die kovarianten Basisvektoren bilden die Spalten der Funktionalmatrix  $\mathbf{J}$  (bei finiten Elementen auch Jakobi-Matrix genannt):

$$\mathbf{J}(u, v) = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right] = [\mathbf{x}_{,u}, \mathbf{x}_{,v}] \quad (4.11)$$

Ein Normalenvektor auf diese Tangentialebene in  $\mathbf{x}(u, v)$  ist durch das Vektorprodukt definiert.

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{x}_{,u}(u, v) \times \mathbf{x}_{,v}(u, v)$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von  $u$  und  $v$  ist an jeder Stelle der Fläche ein Normalenvektor definiert. Der Einheitsnormalenvektor wird auch als *Flächennormalenvektor* oder *Normalenvektor der Fläche* bezeichnet:

$$\mathbf{n}^+(u, v) := \frac{\mathbf{x}_{,u}(u, v) \times \mathbf{x}_{,v}(u, v)}{|\mathbf{x}_{,u}(u, v) \times \mathbf{x}_{,v}(u, v)|}$$

Die *erste Grundform der Flächentheorie* folgt aus oben angegebener Funktionalmatrix  $\mathbf{J}(u, v)$ :

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T(u, v) \mathbf{J}(u, v) \quad (4.12)$$

Der Metriktenor ist symmetrisch und hat für die Längen- und Winkelbestimmungen eine große Bedeutung.

Die Einheitsbasisvektoren  $\frac{\mathbf{x},u}{|\mathbf{x},u|}$  und  $\frac{\mathbf{x},v}{|\mathbf{x},v|}$  lassen sich mit dieser Beschreibung einfach ermitteln, da die Länge der Basisvektoren in der *ersten Grundform* direkt gegeben sind:

$$|\mathbf{x},u| = \sqrt{g_{11}} \text{ und } |\mathbf{x},v| = \sqrt{g_{22}}$$

Der zwischen den Basisvektoren eingeschlossene Winkel  $\alpha$  kann aus folgenden Beziehungen ermittelt werden:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{g_{12} g_{21}}{g_{11} g_{22}}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \text{ und } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{g_{12} g_{21}}{g_{11} g_{22}}}$$

Der Inhalt eines Flächenstücks  $O = \iint dA$  ergibt sich mit Hilfe des Flächendifferentials zu

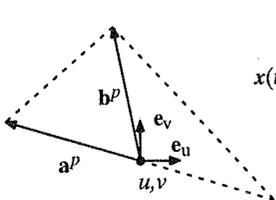
$$O = \iint \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{21} g_{12}} du dv = \iint (|G|)^{\frac{1}{2}} du dv$$

Aus Gründen der Vollständigkeit sei noch erwähnt, daß mit der *zweiten Grundform der Flächentheorie*  $D(u,v)$  Aussagen über die Krümmungseigenschaften der Schalenfläche getroffen werden können:

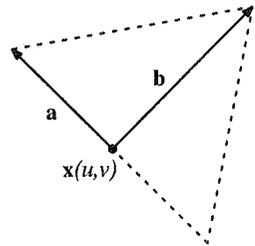
$$D(u,v) = \begin{bmatrix} n^+(u,v) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}(u,v) & n^+(u,v) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v}(u,v) \\ n^+(u,v) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v \partial u}(u,v) & n^+(u,v) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2}(u,v) \end{bmatrix}$$

### Korrektur der Elementgeometrie

Durch die Transformation der Knotenpunkte vom Parameterraum auf die Schalenfläche verändert sich in der Regel der Abstand der Punkte zueinander. Ein beliebiger, im Parameterraum definierter Vektor  $\mathbf{a}^p(u,v)$  geht in einen Vektor  $\mathbf{a}(u,v)$  auf der Tangentialebene an die Schalenfläche im Punkt  $\mathbf{x}(u,v)$  über. Ebenso wird ein Vektor  $\mathbf{b}^p(u,v)$  durch die Transformation in den Vektor  $\mathbf{b}(u,v)$  überführt. Ein beliebiges Dreieck ist durch die Angabe der beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eindeutig definiert (Bild 4.27). Bild 4.28 zeigt die Definition eines Vierecks aus den beiden Vektoren entsprechend der Elementgenerierung von *Freem* (Abschnitt 4.2.2)



$$x(u, v) = \sum_{i=1}^n N_i(u, v) x_i$$

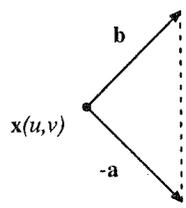
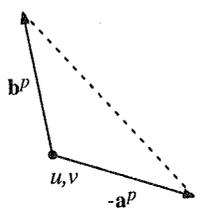


Dreieck im Parameterraum

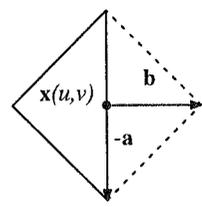
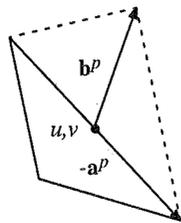
Dreieck auf der Schalenfläche

**Bild 4.27:** Definition eines Dreiecks aus zwei Vektoren,  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

1. Schritt



2. Schritt



Dreieck im Parameterraum

Dreieck auf der Schalenfläche

**Bild 4.28:** Definition eines Vierecks aus den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

Die Problemstellung der Elementkorrektur lässt sich auf die Frage reduzieren, wie müssen die Vektoren  $\mathbf{a}^p$  und  $\mathbf{b}^p$  beschaffen sein, damit sich auf der Tangentialebene an die Schalenfläche ein gleichschenkliges Dreieck (für allgemeine adaptive FE-Netze) mit einer definierten Höhe ergibt. Aufgrund der Netzgenerierungstechnik von *Freem* ist der

Vektor  $\mathbf{a}^p$  bereits vorgegeben. (Abschnitt 4.2.1: *Freem* generiert die Elemente sukzessive, dabei werden neue Elemente an aktiven Frontelementen, d.h. freie Kanten bereits vorhandener Elemente, erzeugt.  $\mathbf{a}^p$  ist ein solches aktives Frontelement.) Die Aufgabe lautet also  $\mathbf{b}^p$  so zu definieren, daß ein gleichschenkliges Dreieck auf der Tangentialebene an die Schalenfläche entsteht. Die Höhe des Dreiecks ist durch eine Konstante  $k$  gegeben, die aus der Netzdichteverteilung ermittelt wird. Folgende zwei Bedingungen lassen sich formulieren:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0 \quad (4.13)$$

$$|\mathbf{b}| = k|\mathbf{a}| \quad (4.14)$$

Die Vektoren  $\mathbf{a}^p$  und  $\mathbf{b}^p$  mit dem Ursprung  $u, v$  lassen sich im Parameterraum in je zwei achsenparallele Vektoren zerlegen

$$\mathbf{a}^p = a_u \mathbf{e}_u + a_v \mathbf{e}_v$$

$$\mathbf{b}^p = b_u \mathbf{e}_u + b_v \mathbf{e}_v$$

$\mathbf{e}_u$  und  $\mathbf{e}_v$  sind die Einheitsnormalenvektoren in Richtung  $u$  und  $v$ .

Eine Transformation der Vektoren  $\mathbf{a}^p$  und  $\mathbf{b}^p$  auf die Tangentialfläche im Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$  der Schalenfläche ergibt:

$$\mathbf{a}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} a_u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} a_v = a_u \mathbf{x}_{,u} + a_v \mathbf{x}_{,v} = [a_u ; a_v] \mathbf{J}$$

$$\mathbf{b}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} b_u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} b_v = b_u \mathbf{x}_{,u} + b_v \mathbf{x}_{,v} = [b_u ; b_v] \mathbf{J}$$

Der Vektor  $\mathbf{a}$  ist aus oben genannten Gründen vorgegeben, somit bleiben als Unbekannte  $b_u$  und  $b_v$  übrig. Setzt man  $\mathbf{b}$  in Gleichung (4.13) ein, so folgt:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,u} b_u + \mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,v} b_v = 0 \quad (4.15)$$

Für die Lösung lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

**Fall 1,**  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,u} \neq 0$ :

Gleichung (4.15) ergibt umgeformt

$$b_u = - b_v \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,v}}{\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,u}} \quad (4.16)$$

Einsetzen der Gleichung (4.16) in die Gleichung (4.14) führt zu:

$$b_v = \pm \frac{k|\mathbf{a}|}{|\mathbf{x}_{,v} - \mathbf{x}_{,u} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,v}}{\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,u}}|}$$

Für  $\mathbf{b}$  erhält man zwei Lösungen. Da für den Netzgenerator *Freem* ein mathematisch positiver Umlaufsinn vorgegeben ist, ergibt sich die passende Lösung aus der zusätzlichen Bedingung  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} > 0$ .

**Fall 2,  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,u} = 0$ :**

In diesem Fall folgt aus Gleichung (4.13):

$$b_v = 0 \quad \text{für } \mathbf{a}^T \mathbf{x}_{,v} \neq 0$$

Das ist jedoch immer erfüllt, da  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}_{,u}$  und  $\mathbf{x}_{,v}$  koplanar sind. Eingesetzt in Gleichung (4.14) ergibt sich  $b_u$ :

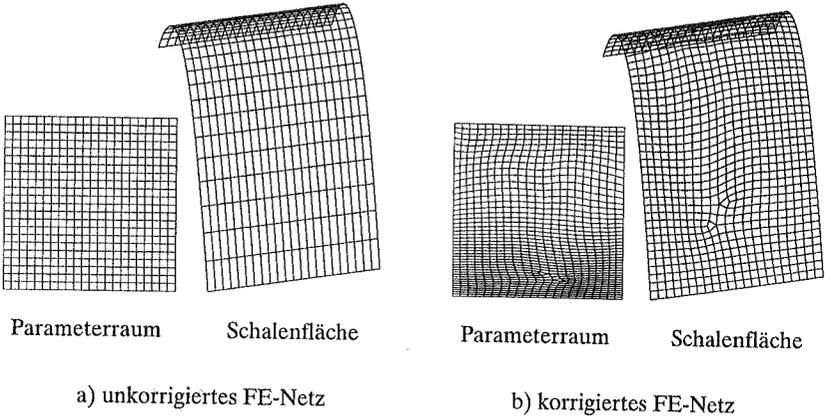
$$b_u = \pm \frac{k|\mathbf{a}|}{|\mathbf{x}_{,u}|}$$

Für einen vorgegebenen Vektor  $\mathbf{a}$  kann damit an jeder Stelle der zugehörige Vektor  $\mathbf{b}$  gefunden werden, so daß sich auf der Schale ein gleichschenkliges (für  $k = \sqrt{0,75}$  ein gleichseitiges) Dreieck ergibt. Da jedoch die Tangentialebene an die Schalenfläche als Grundlage für obige Herleitung verwendet wird, stellt das Ergebnis lediglich eine Näherungslösung dar. Verglichen mit den Toleranzen der Netzgenerierung, sind die Abweichungen hier im allgemeinen gering.

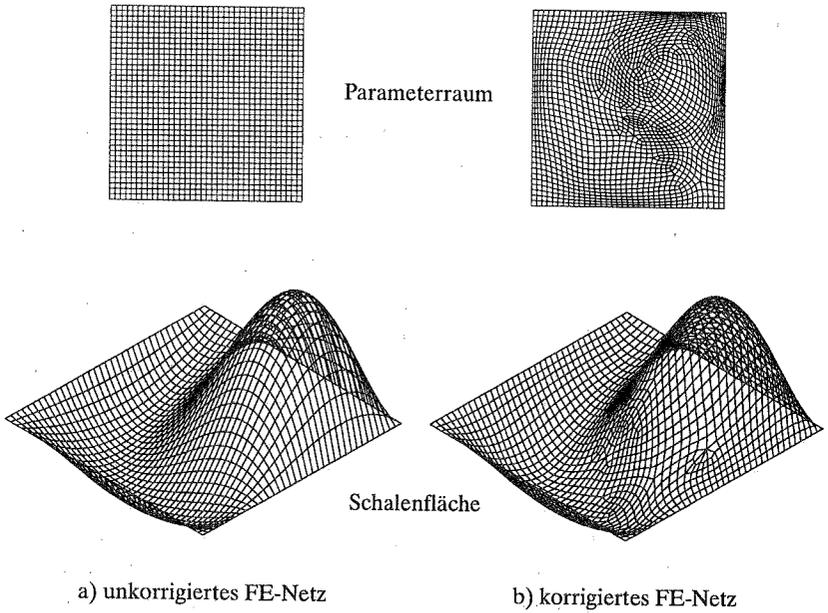
Bild 4.29 und Bild 4.30 zeigen mit Viereckselementen vernetzte Schalen. Im Fall a (unkorrigiertes FE-Netz) werden in den Parameterräumen optimale FE-Netze generiert. Bei der Abbildung auf die Schalenfläche entstehen verzerrte Elemente. Im Fall b (korrigiertes FE-Netz) werden die FE-Netze im Parameterraum korrigiert, so daß auf den Schalenflächen wohlproportionierte Elemente entstehen.

Der Bogen in Bild 4.29 ist eine abwickelbare Fläche. Hier treten keine verzerrten Elemente im eigentlichen Sinn auf, sondern lediglich gedehnte Elemente. Ein Erzielen optimaler Elementgeometrien ist deshalb grundsätzlich möglich. Die vorhandenen Unregelmäßigkeiten im Netz (Bild 4.29b) erklären sich aus der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen lokalen Elementbildung des Netzgenerators. Dagegen handelt es sich bei der allgemeinen Schale in Bild 4.30 um eine nicht abwickelbare Fläche. Deshalb sind einzelne verzerrte Übergangselemente unvermeidlich.

Der *optimale Punkt* in der Dreiecksbildung (Abschnitt 4.2.1) errechnet sich im Parameterraum aus  $(u, v)^T + b^p$ . Oft befinden sich in unmittelbarer Nachbarschaft dieses Punkts bereits generierte Knotenpunkte. Aus Gründen der Elementtopologie muß der Algorithmus entscheiden, ob das Dreieck anstatt mit dem *optimalen Punkt*

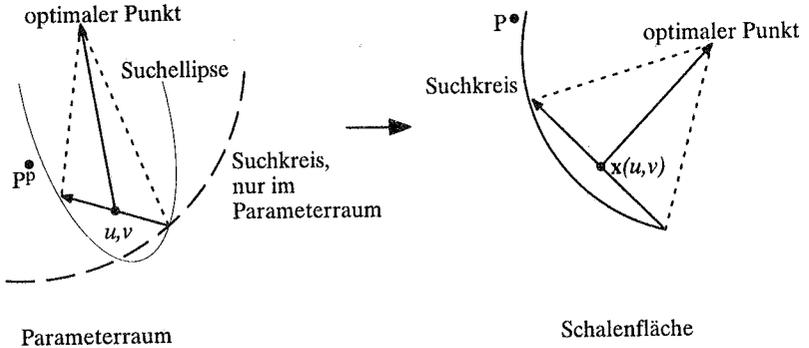


**Bild 4.29:** Parabolische Bogenschale



**Bild 4.30:** Allgemeine Schale

besser mit einem dieser bereits existierenden Knoten gebildet werden soll. Wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben, werden dazu alle, in einem Suchkreis mit dem Radius  $r$  um den *optimalen Punkt* liegenden Knotenpunkte als geeignete Ersatzknoten in Betracht gezogen.



**Bild 4.31:** Suche der Nachbarpunkte mittels Suchkreis

Bei der Netzerzeugung auf der Parameterebene darf im allgemeinen kein Suchkreis verwendet werden, da das Verhältnis der Knotenabstände im Parameterraum sehr unterschiedlich zu dem wirklichen Verhältnis der Abstände der einzelnen Knoten ist. Das Bild 4.31 zeigt ein Dreieck, einmal im Parameterraum und auf der Schalenfläche. Benachbart befindet sich ein Punkt  $PP \rightarrow P$ . Es steht die Entscheidung an, ob Punkt  $P$  anstelle des *optimalen Punkts* zur Dreiecksbildung verwendet werden soll. Ein auf der Schale um den *optimalen Punkt* gelegter Suchkreis beinhaltet Punkt  $P$  nicht mehr. Punkt  $P$  käme nicht als Alternative zum *optimalen Punkt* in Betracht. Im Parameterraum jedoch, wo die Entscheidung tatsächlich getroffen wird, kann sich der Punkt  $PP$  sehr wohl innerhalb des Suchkreises befinden und würde deshalb als Auswahlmöglichkeit für den *optimalen Punkt* in Erwägung gezogen. Aufgrund der unterschiedlichen Längenabbildungen eines Vektors im Parameterraum und auf der Schalenfläche muß aus diesem Grund eine Suchellipse zum Auffinden benachbarter Knotenpunkte verwendet werden. Dazu wird eine Transformationsmatrix  $T_D$  im Punkt  $u, v$  generiert, die den Suchkreis auf der Tangentialebene näherungsweise auf eine Suchellipse im Parameterraum abbildet.  $T_D$  beinhaltet die Komponenten der kovarianten Basisvektoren  $x_u$  und  $x_v$ . Jeder Richtungsvektor  $f^p$ , ausgehend vom *optimalen Punkt* zu einem Knotenpunkt  $PP$  wird mit

der Transformationsmatrix  $T_D$  multipliziert. Der wirkliche Abstand zwischen dem *optimalen Punkt* und dem Knotenpunkt  $P$  wird aus der Länge des transformierten Vektors  $f$  näherungsweise ermittelt und für die weiteren Untersuchungen betrachtet.

Die genäherte Transformationsmatrix  $T_D$  leitet sich von der *ersten Grundform der Flächentheorie*  $G$  aus Gleichung (4.12) ab [55]:

$$T_D = G(u, v)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{uG + 2\sqrt{|G|}}} (G + (\sqrt{|G|}) I)$$

$I$  ist die Einheitsmatrix. Die Transformationsvorschrift lautet:

$$f = T_D f^p$$

Die oben beschriebene Transformationsvorschrift berücksichtigt die Dehnungsänderungen und die Verzerrungen lediglich am Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$ . Es handelt sich daher für gekrümmte Flächen um eine Näherung.

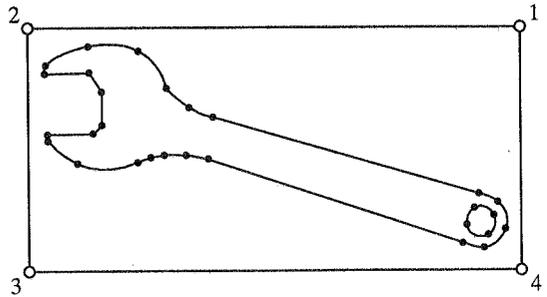
#### 4.2.6 Generierung adaptiver FE-Netze

Der Netzgenerator *Freem* nach der Advancing Front Method ist aufgrund der auf lokale Gegebenheiten konzipierten Elementbildung gut geeignet, adaptive FE-Netze zu erzeugen. Elementdichtefunktionen, die aus der Fehlerabschätzung abgeleitet werden (Abschnitt 3.1.3), definieren die erforderlichen Elementgrößen im gesamten Gebiet. Als Träger dieser Information dient ein Hintergrundnetz, ähnlich einem FE-Netz, auf dessen Knotenpunkten die Werte der Elementdichtefunktion diskret vorliegen. Durch lineare Interpolationen der Knotenwerte ist die Elementdichteinformation an jeder Stelle verfügbar. Zur Steuerung der Elementgröße bei der Generierung homogener FE-Netze genügt ein einziges, das gesamte Gebiet überdeckendes Hintergrundelement. Für adaptive Netze kann eine Vielzahl der bilinearen Hintergrundelemente erforderlich sein. Es ist dabei wesentlich, daß das Hintergrundnetz alle Teile des Gebiets überdeckt. Als Hintergrundelemente sind Dreiecke und Vierecke gleichermaßen geeignet, wenngleich die Unterschiede in der Interpolation der Stützstelleninformation dieser Elemente zu berücksichtigen sind. Die Interpolationsvorschrift der Hintergrundelemente entspricht der Vorschrift finiter Elemente. Die erforderliche Elementgröße  $h$  ergibt sich am Punkt  $\mathbf{P}(u, v)$  als

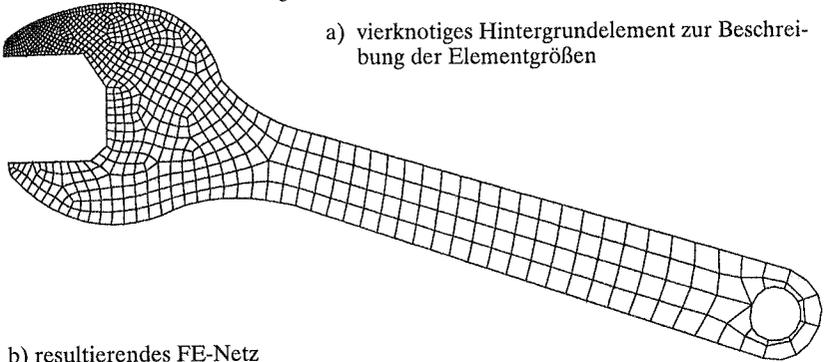
$$h(u, v) = \sum N_i(u, v) h_i$$

Bild 4.32a zeigt die gegebenen Randsegmente für einen Schraubenschlüssel und das zugehörige Hintergrundnetz, bestehend aus einem vierknotigen Element, welches die

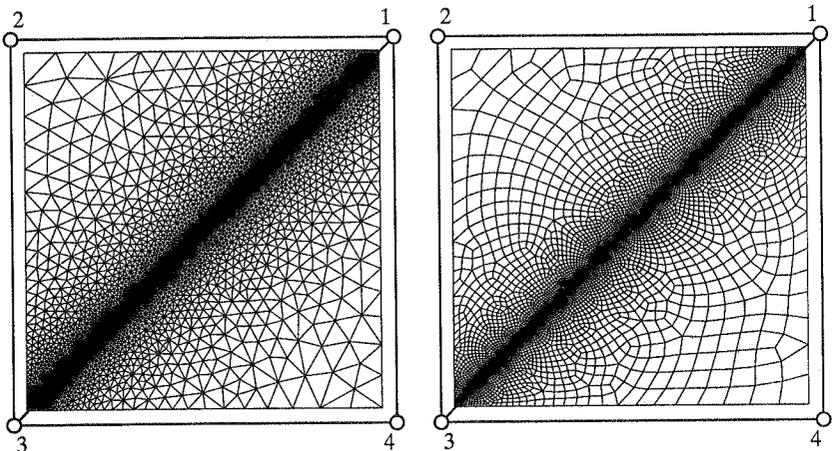
- Kantenstützpunkte
- Knotenpunkte des Hintergrundnetzes



a) vierknotiges Hintergrundelement zur Beschreibung der Elementgrößen



b) resultierendes FE-Netz



c) zwei dreieckige Hintergrundelemente zur Beschreibung der Elementgrößen

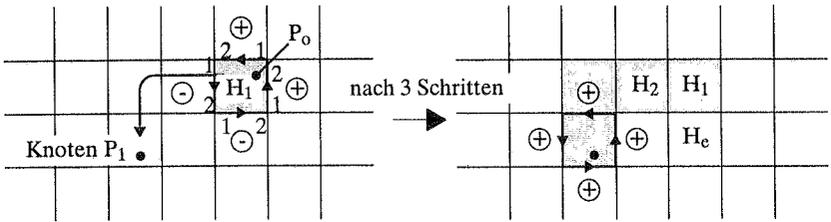
**Bild 4.32:** Hintergrundnetz zur Steuerung der Elementdichte

gesamte Struktur bedeckt. Die Elementdichte kann an jedem beliebigen Punkt des Gebiets durch eine lineare Interpolation der Knotenwerte des Hintergrundelements ermittelt werden, falls die lokalen Koordinaten des Punkts auf dem Hintergrundelement bekannt sind. Bild 4.32b zeigt das adaptive Vierecksnetz des Schraubenschlüssels, zu dessen Generierung lediglich das eine Hintergrundelement aus Bild 4.32a erforderlich ist. Der Knoten 2 des Hintergrundelements beinhaltet dabei einen wesentlich größeren Elementdichtewert als die anderen Knoten. In Bild 4.32c sind zwei stark abgestufte adaptive FE-Netze dargestellt. Zur Steuerung der Elementgrößen sind lediglich zwei Dreiecke als Hintergrundelemente erforderlich. Die Elementdichte ist an den vier Knotenpunkten definiert. Dabei sind die Elementdichtewerte der Knoten 1 und 3 wesentlich größer als die Werte der beiden anderen Knoten. Würde man für das Hintergrundnetz anstatt der beiden Dreieckselemente ein Viereckselement zur Interpolation derselben Knotenwerte verwenden, erhielte man, aufgrund der unterschiedlichen Definition der Interpolationsfunktion entlang der Diagonalen von Vierecken, völlig unterschiedliche FE-Netze.

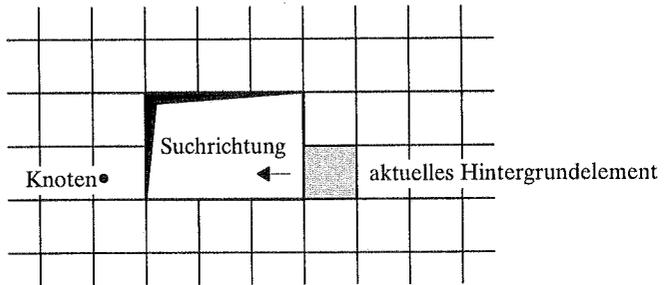
#### 4.2.6.1 Suche des passenden Hintergrundelements

Adaptive Rechenprogramme erfordern präzise abgestufte FE-Netze. Deshalb stellen sie detaillierte Elementdichteinformationen auf feinen unstrukturierten Hintergrundnetzen mit vielen Elementen zur Verfügung. In der Regel wird die Elementdichteinformation auf den Knotenpunkten des FE-Netzes des vorangegangenen Iterationsschritts gespeichert. Während der Netzgenerierung wird die Elementdichte für jeden neu erzeugten Knotenpunkt  $P$  ermittelt. Dazu muß bestimmt werden, auf welchem Hintergrundelement dieser Punkt liegt. Eine große Anzahl Hintergrundelemente führt jedoch zu einem zeitraubenden Auffinden des für den Punkt  $P$  zuständigen Hintergrundelements. Zur Beschleunigung der Suche erscheint der Einsatz hierarchischer Speichertechniken, wie die *Quadtree-Method* [77] oder *k-d-Baumstruktur* [13] möglich. Sie arbeiten sehr effizient, bergen jedoch den Nachteil, daß zu Beginn der Netzgenerierung ein Datenbaum aus allen Knotenpunkten des Hintergrundnetzes erstellt werden muß. Die *gerichtete Suche* [60] dagegen benötigt keine Sortierung der Daten vorab. Sie erfordert lediglich ein Feld zur Speicherung der Knoten-Elementbeziehung des Hintergrundnetzes.

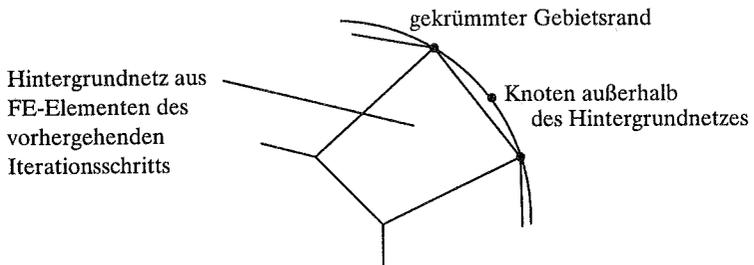
Der Name *gerichtete Suche* resultiert aus der Methodik dieses Verfahrens. Ausgehend von einem beliebigen Hintergrundelement wählt es zielgerichtet diejenigen Hintergrundelemente zur weiteren Untersuchung aus, welche in Richtung des Knotens  $P$  liegen (Bild 4.33). Folgende Bearbeitungsschritte werden durchgeführt: Die *gerichtete Suche* ermittelt, ob sich der Knoten  $P_1$  innerhalb eines ausgewählten Hintergrundelements  $H_1$



**Bild 4.33:** *gerichtete Suche* nach dem passenden Hintergrundelement



**Bild 4.34:** Grenzen bei der *gerichteten Suche*



**Bild 4.35:** Punkte außerhalb des Hintergrundnetzes

befindet. Als erstes Hintergrundelement  $H_1$  wird das ausgewählt, welches den zuvor generierten Knotenpunkt  $P_0$  enthält. Liegt der Knoten  $P_1$  innerhalb des Hintergrundelements  $H_1$ , ist das zuständige Element bereits gefunden. Liegt er jedoch außerhalb, wird das in Richtung des Knoten  $P_1$  liegende Nachbarelement  $H_2$  als neues temporäres Hintergrundelement ausgewählt. Nun beginnt die Überprüfung von neuem, bis das zum Knoten  $P_1$  passende Hintergrundelement gefunden ist. Die gerichtete Suche benötigt in der Regel nur wenige Iterationen, da die neuen Knoten  $P_1$  oftmals in unmittelbarer Nachbarschaft zu den zuvor generierten Knoten  $P_0$  und somit auf dem ausgewählten oder einem benachbarten Hintergrundelement liegen.

Die Entscheidung, ob ein Knoten innerhalb eines Hintergrundelements liegt, wird folgendermaßen gefällt: Für jede Kante des untersuchten Hintergrundelements wird der Umlaufsinn des Dreiecks ermittelt, welches sich aus der Kante 1, 2 und dem Knoten  $P$  in Bild 4.33 ergibt:

$$u = (v_{12} \times v_{1P})e_z$$

Ist der Umlaufsinn mit auch nur einer Elementkante mathematisch negativ, liegt der Knoten außerhalb des Hintergrundelements. Das dieser Kante benachbarte Element wird als neues aktives Hintergrundelement ausgewählt. Ist der Umlaufsinn mit allen Kanten positiv, liegt der Knoten innerhalb des Elements. In Bild 4.33 wird für den 2. Schritt zufällig das linke Nachbarelement  $H_2$  des schraffiert dargestellten Elements ausgewählt, da die linke Kante mit dem Knoten  $P_1$  ein Dreieck mit negativem Umlaufsinn bildet. Ebensogut könnte das darunterliegende Element  $H_c$  als nächstes Element ausgewählt werden.

In seltenen Fällen führt dieses Verfahren nicht zum richtigen Hintergrundelement. Wie in Bild 4.34 dargestellt, kann bei Aussparungen innerhalb des Hintergrundnetzes der Fall auftreten, daß das aktuell gewählte Hintergrundelement kein Nachbarelement in Richtung des Knotens besitzt. Dann muß die gerichtete Suche abgebrochen und ein anderes Startelement gewählt werden, oder es werden alle Elemente des Hintergrundnetzes untersucht. Dieser Fall tritt bei der Generierung eines adaptiv verfeinerten FE-Netzes für ein Gebiet mit Aussparungen auf, wenn das FE-Netz des vorangegangenen adaptiven Iterationsschritts, welches diese Aussparungen aufweist, zum Hintergrundnetz wird.

Eine weitere zu berücksichtigende Besonderheit in Verbindung mit der Netzgenerierungsstrategie ergibt sich durch eine verbesserte Approximation gekrümmter Ränder. Dabei kann der Fall auftreten, daß ein neu generierter Knoten geringfügig außerhalb des

Startnetz. Die nach der Elastizitätstheorie an den Singularitäten vorliegenden unendlich großen Momente werden mittels der verfeinerten Elemente besser angenähert. Ein Effekt, der in der Baupraxis aufgrund eines plastischen Verhaltens realer Werkstoffe in diesen Zonen häufig als nachteilig bewertet wird. Tatsächlich resultiert jedoch durch die verbesserte Diskretisierung eine Annäherung der Ergebnisse an die Erfordernisse der Elastizitätstheorie. Für eine realitätsnähere Ermittlung des Strukturverhaltens ist ein Wechsel des Modells, nämlich der Einsatz einer materiell nichtlinearen Werkstoffbeschreibung, erforderlich.

### 5.3 Schalenbeispiel

Schalentragwerke stellen eine besondere Art von Bauwerken dar. Gut geplant, verbinden sie ein minimales Konstruktionsgewicht mit der Fähigkeit, große Lasten abzutragen. Kann dabei ein reiner Membranzustand erreicht werden, entstehen äußerst grazile Schalenbauwerke mit großen Spannweiten. Schalen sind jedoch kaum geeignet, konzentrierte Lasten aufzunehmen, da sie aufgrund der großen Schlankheit nur ein geringes Widerstandsmoment besitzen. Deshalb ist bei der Konstruktion von Schalen darauf zu achten, die Form und Lagerung so zu wählen, daß Biegezustände weitgehend vermieden werden.

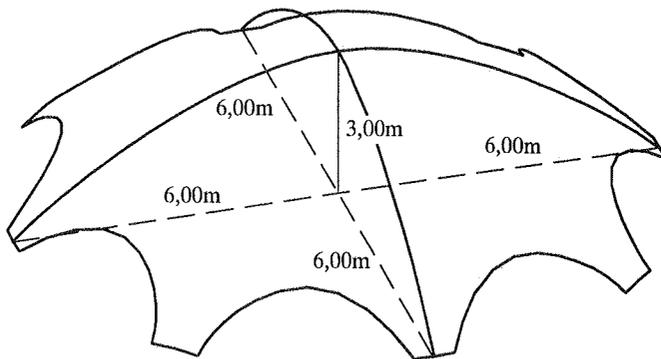
In Bild 5.18a ist das Drahtmodell einer Schale dargestellt. Die 0,04m dicke Schale hat an ihrem Mittelpunkt einen maximalen Stich von 3,00m. Ihre größte Spannweite beträgt 12,00m. Die Lagerung erfolgt tangential an den Schalenfüßen. Alle weiteren Schalenränder sind frei verschieblich.

Für die adaptive Vergleichsberechnung wird das Eigengewicht der Schale als maßgebender Lastfall ausgewählt. Das spezifische Gewicht beträgt  $24\text{kN/m}^3$ , der Elastizitätsmodul  $34.000\text{MN/m}^2$ , und die Querdehnzahl wird mit 0,20 angenommen.

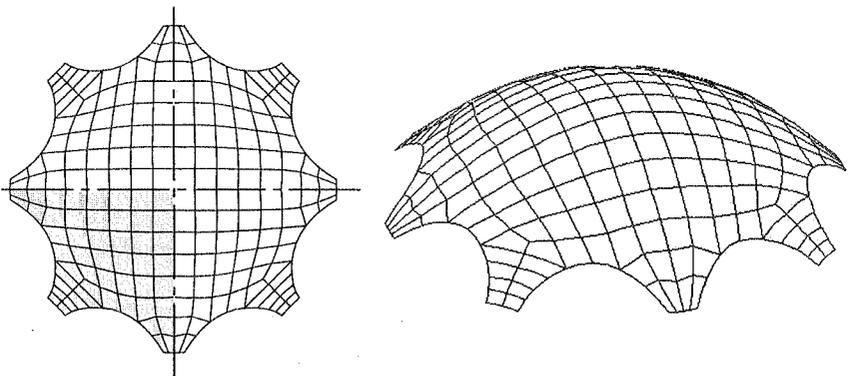
Die Berechnung erfolgt mit neunknotigen vollintegrierten Schalenelementen am Viertelsystem der Schale. Die Ergebnisqualität wird nach Gleichung (2.7) abgeschätzt. Die adaptive Berechnung ist beendet, sobald der relative Gesamtfehler den Wert von 5% unterschreitet.

In Bild 5.18b ist das beiden Strategien gemeinsame symmetrisch ergänzte Startnetz dargestellt. Die Diskretisierung wird mit 51 Elementen für ein Schalenviertel grob gewählt. Dementsprechend verwundert der abgeschätzte relative Gesamtfehler von 19,34% in der Energienorm kaum.

a) Geometriemodell der Schale

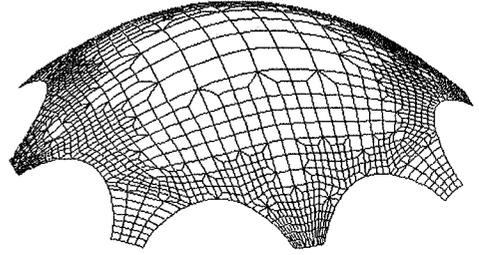
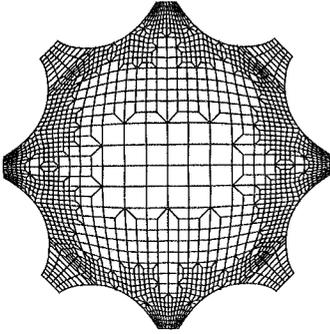


b) Startnetz der Schale

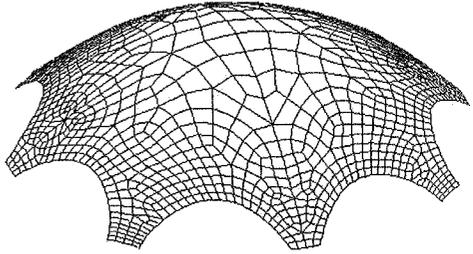
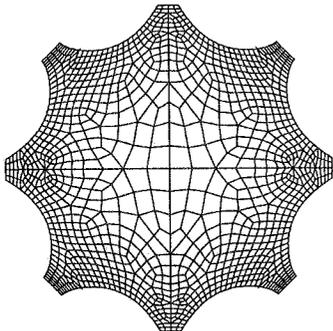
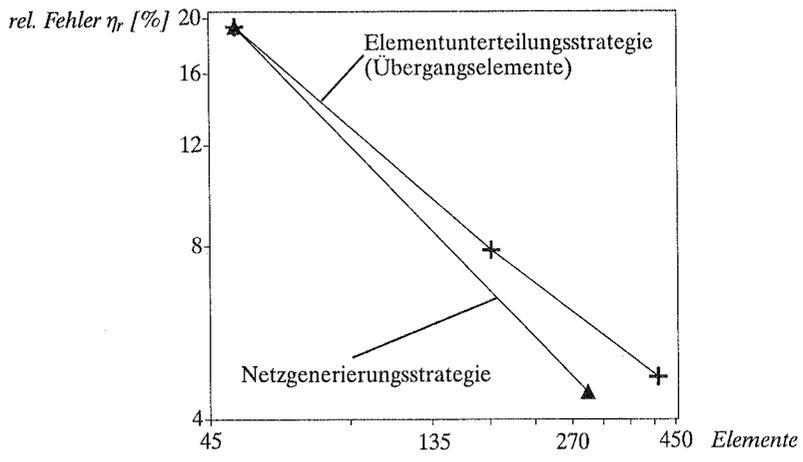


**Bild 5.18:** Geometriemodell und Startnetz der Schale für beide Strategien

Die Netzgenerierungsstrategie erreicht nach nur einem weiteren Netzgenerierungsschritt mit insgesamt 291 Elementen bereits einen geschätzten relativen Fehler von 4,46%. Lediglich einen Iterationsschritt später, also nach insgesamt drei Iterationen unterschreitet der Diskretisierungsfehler der Elementunterteilungsstrategie mit 412 Elementen und einem Fehler von 4,71% die geforderte 5% Fehlerhürde. Die



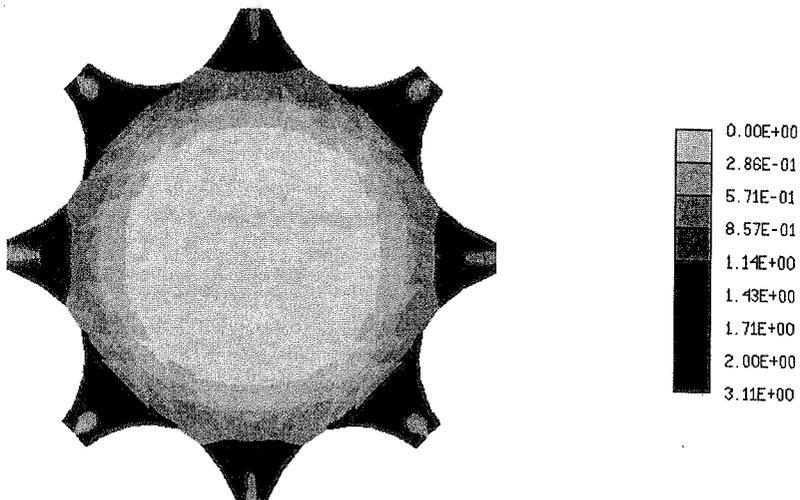
a) Elementunterteilungsstrategie



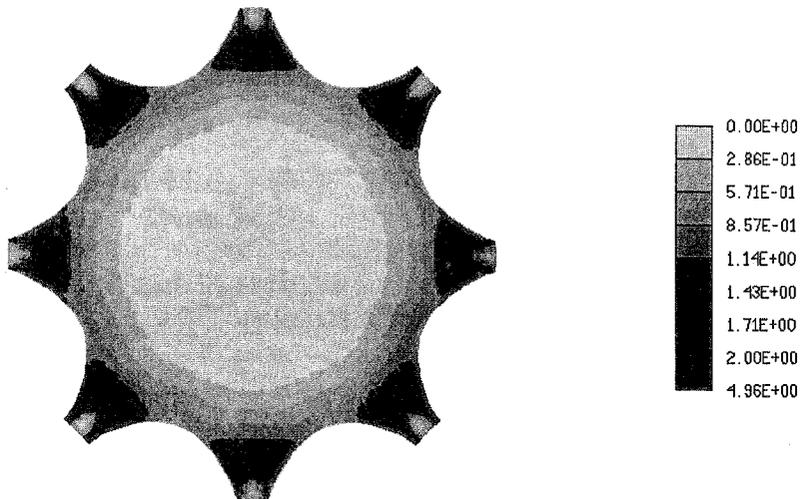
b) Netzgenerierungsstrategie

**Bild 5.19:** Iterationsverläufe und endgültige FE-Netze

a) Startnetz [MN/m<sup>2</sup>]



b) Endgültiges FE-Netz [MN/m<sup>2</sup>]



**Bild 5.20:** Von Mises Vergleichspannungen an der Schalenoberseite (ungeglättet)

Iterationsverläufe beider Strategien sind in Bild 5.19 zu sehen. Die verhältnismäßig große Anzahl an Elementen bei der Elementunterteilungsstrategie folgt, ebenso wie in den beiden vorangegangenen Beispielen, aus dem Einsatz von Übergangselementen zur Elimination inkonsistenter Knoten.

Beide Strategien zeigen im Scheitelbereich der Schale keine Verfeinerung. Die Netzgenerierungsstrategie (Bild 5.19b) realisiert sogar eine geringe Elementvergrößerung im Scheitelbereich der Schale. Von dort verringert sich die Elementgröße kontinuierlich bis zum Sockelbereich. Beide Strategien (Bild 5.19a,b) diskretisieren benachbarte Schalenbeine unterschiedlich. Dies resultiert zum einen aus der bereits im Startnetz unterschiedlichen Diskretisierung der benachbarten Beine (beeinflusst vor allem das Ergebnis der Elementunterteilungsstrategie). Zum anderen ist die Geometrie der benachbarten Schalenbeine leicht voneinander verschieden, so daß die Lasten ungleich auf die einzelnen Beine verteilt werden.

In Bild 5.20 sind die ungeglätteten von Mises Vergleichsspannungen an der Schalenoberseite, sowohl des Startnetzes (Bild 5.20a), als auch des endgültigen FE-Netzes der Elementunterteilungsstrategie (Bild 5.20b) dargestellt. Deutlich sind Spannungskonzentrationen im Sockelbereich der Schale zu erkennen. Die beiden Bilder sind zwar qualitativ im wesentlichen vergleichbar, die Spannungsverläufe geben jedoch für den Fall des endgültigen FE-Netzes ein deutlich glatteres und teilweise detaillierteres Bild des Spannungsverlaufs, vor allem im Sockelbereich der Schale, wieder.

## 5.4 Wertung

Die vorangegangenen Beispiele zeigen Anwendungen für adaptive Methoden aus dem Scheiben-, Platten- und Schalenbereich. Zum Einsatz kommen sowohl die weitverbreitete Elementunterteilungsstrategie mit Übergangselementen oder gekoppelten Knotenfreiheitsgraden zur Beseitigung inkonsistenter Knoten, wie auch die erst in jüngerer Zeit entwickelte Netzgenerierungsstrategie, die mit Hilfe eines automatischen Netzgenerators in jedem Iterationsschritt ein neues adaptives FE-Netz nach den Vorgaben aus der Fehlerabschätzung erzeugt.

Als wesentliche Vergleichsmaßstäbe dienen die Anzahl der Elemente und die Anzahl der adaptiven Iterationsschritte, welche die Strategien benötigen, um einen vorgegebenen relativen Diskretisierungsfehler zu unterschreiten. Benötigte Computerrechenzeiten bleiben dabei ebenso unberücksichtigt, wie der unterschiedliche Eingabeaufwand zur Erstellung des Startnetzes. Die Computerzeit wird wesentlich durch die Effizienz des

Programmcodes beeinflußt und ist deshalb nicht objektiv vergleichbar. Dem geringen Eingabeaufwand des automatischen Netzgenerators *Freem* für ebene Tragwerke steht mit *Design* ein komplexes Werkzeug zur Generierung von FE-Netzen vor allem für Schalen gegenüber, das den Anwendungsfall der ebenen Tragwerke lediglich als einen Spezialfall betrachtet. Für räumlich gekrümmte Tragwerke greift *Freem* auf die Abbildungsmethode zur Darstellung der Schalenfläche zurück (Abschnitt 4.2.5).

Die Resultate der beiden Strategien lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Netzgenerierungsstrategie benötigt in der Regel eine geringere Anzahl an adaptiven Iterationsschritten als die Elementunterteilungsstrategie um einen vorgegebenen Diskretisierungsfehler zu unterschreiten. Eine während der Fehlerabschätzung ermittelte „optimale“ Elementgröße wird detailgenau realisiert. Im Gegensatz dazu beinhaltet die Elementunterteilungsstrategie lediglich die Möglichkeit, ein Element zu unterteilen oder die Elementfläche unverändert beizubehalten. Ermittelte „optimale“ Elementgrößen können nur grob angenähert werden, was eine größere Anzahl adaptiver Iterationsschritte nach sich zieht.
- Sind die verwendeten finiten Elemente verzerrungsanfällig, ergeben sich in der Netzgenerierungsstrategie mehr Freiheitsgrade als in der Elementunterteilungsstrategie (insbesondere bei gekoppelten Knotenfreiheitsgraden). In der Regel ist eine große Anzahl von Elementen eines adaptiven FE-Netzes nach der Netzgenerierungsstrategie schwach verzerrt. Dagegen produziert die Elementunterteilungsstrategie im allgemeinen lediglich verzerrte Übergangselemente, welche den Diskretisierungsfehler kaum nachteilig beeinflussen, da sie nur dort auftreten, wo ursprünglich keine Verfeinerung gewünscht ist.
- Zwischen der Qualität des endgültigen FE-Netzes der Elementunterteilungsstrategie und der Qualität des Startnetzes besteht ein unmittelbarer Zusammenhang. Vorhandene Elementgeometrien können während der adaptiven Iteration nicht verändert werden. Bei der Netzgenerierungsstrategie ist die Netztopologie unabhängig vom FE-Netz des vorangegangenen Iterationsschritts.
- Übergangselemente zur Beseitigung inkonsistenter Knoten bei der Elementunterteilungsstrategie reduzieren den Diskretisierungsfehler nur unwesentlich. Die Anzahl an Freiheitsgraden steigt dagegen beträchtlich gegenüber einer Knotenkopplung.

Beide Strategien liefern bei obigen Beispielen brauchbare Ergebnisse. Welcher der beiden letztendlich der Vorzug gebührt, hängt von der konkreten Anwendung, dem eingesetzten FE-Programm und den subjektiven Wünschen des Anwenders ab. Die

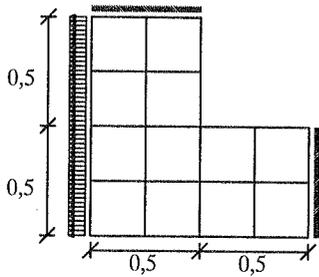
Ergebnisse der beiden Strategien differieren bei keinem der vorgestellten Beispiele wesentlich voneinander. Das Konvergenzverhalten sowohl der Elementunterteilungsstrategie, als auch der Netzgenerierungsstrategie, basieren auf einer Fehlerverminderung durch das Einbringen zusätzlicher Freiheitsgrade in das System. Die Konvergenzordnung beider Strategien wird nach Gleichung (3.2) bestimmt. Lediglich die Konvergenzgeschwindigkeit kann im Einzelfall variieren.

Wesentlicher, als die Wahl der Strategie ist es, die grundsätzliche Bedeutung des Einsatzes von adaptiven Methoden zu betonen. In Bild 5.21 sind drei FE-Netze dargestellt, deren geschätzter relativer Fehler nach Gleichung (2.6) bei etwa 2% liegt. Das homogen verfeinerte FE-Netz benötigt 768 Elemente (6336 Freiheitsgrade), während das adaptive FE-Netz mit einer Verfeinerungsschranke von  $\xi_i=1,0$  nach Gleichung (3.5) lediglich 136 Elemente (1154 Freiheitsgrade) enthält. Die geschätzten relativen Fehler sind mit 1,98% für das homogene Netz und 2,01% für das adaptiv verfeinerte FE-Netz annähernd gleich.

Setzt man die Rechenzeit überschlagsweise nur in Abhängigkeit der Freiheitsgrade  $n$  mit dem Faktor  $n^{(7/3)}$  für durchschnittliche direkte Gleichungslöser an, so ergibt sich eine 53-fach größere Rechenzeit des homogenen FE-Netzes zum gleichwertigen adaptiven Netz. Selbstverständlich muß davon die Zeit abgezogen werden, welche durch die adaptive Iterationsschleife und die mehrmalige Berechnung des adaptiven FE-Netzes hinzukommt. Dennoch ist ein deutlicher Rechenzeitgewinn der adaptiven Methoden zu verzeichnen.

Adaptive Methoden erreichen, aufgrund der vergleichsweise wenigen Freiheitsgrade, speicherplatzbedingte Beschränkungen der Programme weit weniger häufig als homogene Verfeinerungsmethoden. Sie ermöglichen deshalb für komplexe Strukturen oftmals als einziges Verfahren eine Lösung mit großer Genauigkeit.

Das dritte Netz in Bild 5.21c verdeutlicht den natürlichen Spielraum, welcher in den adaptiven Methoden enthalten ist. Mit nur 88 Elementen erzielt dieses FE-Netz einen relativen Fehler von 1,80%. Dieses Netz ergibt sich für eine Verfeinerungsschranke von  $\xi_i=7,0$  nach Gleichung (3.5). Der Unterschied von 48 Elementen zwischen dem ausgefeilten Ergebnis und dem Standardfall der Elementunterteilungsstrategie ist zwar deutlich, jedoch verglichen zu oben beschriebenem homogenen FE-Netz für dieses Beispiel bedeutungslos.



Startnetz:

Elastizitätsmodul  $E = 1,0$

Gleichstreckenlast  $q = 1,0$

Querdehnzahl  $\nu = 0,0$

Scheibendicke  $d = 0,1$

gesch. rel. Fehler  $\eta_r$

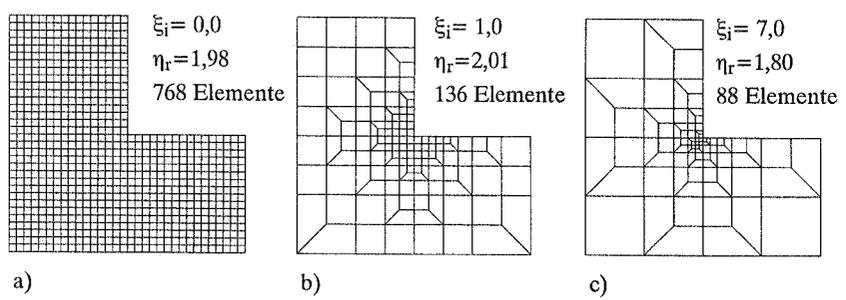
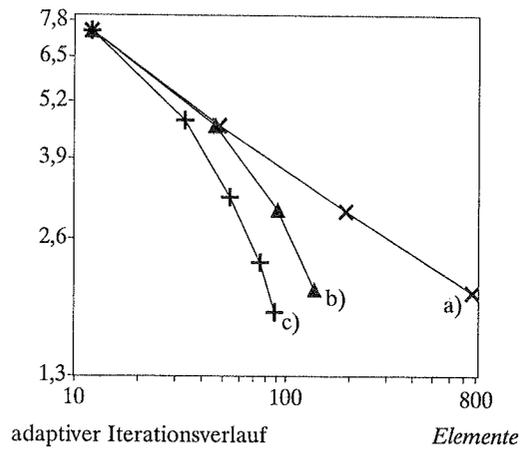


Bild 5.21: Vergleich eines homogen verfeinerten Netzes mit adaptiven FE-Netzen



## 6 ADAPTIVE BERECHNUNGEN UND MEHRERE LASTFÄLLE

### 6.1 Allgemeines

Adaptiven Methoden gebührt zur Berechnung von Tragwerken mit finiten Elementen für große Genauigkeiten in der Lösung der Vorzug gegenüber Berechnungen mit sehr feinen homogenen Netzen. Ein Grund für den zögerlichen Einzug dieser Methoden zur Analyse baupraktischer Problemstellungen ist sicherlich die bis dato fehlende Option zur Behandlung der allgemein üblichen Vielzahl unterschiedlicher Lastfälle. Ein fertiges, adaptiv generiertes FE-Netz ist spezialisiert auf die jeweilige Lastfallkombination unter der es ermittelt wird. Für andere Lastfallkombinationen an abweichenden Lastangriffsorten fällt die Ergebnisqualität des Netzes im allgemeinen deutlich ab.

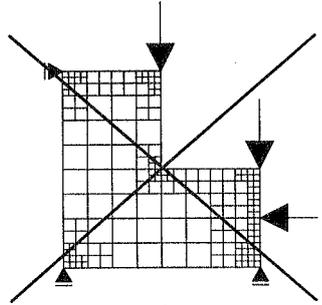
Die Lösung dieses Problems liegt jedoch nahe: Warum nicht alle Einzellastfälle bereits bei der Generierung eines adaptiven FE-Netzes berücksichtigen? Sind die adaptiven Netze optimal für jeden einzelnen Lastfall, so ist ebenfalls die Qualität der Lastfallkombinationen aufgrund der Möglichkeit zur Superposition der Schnittgrößen in der linearen Elastizitätstheorie ausreichend [73,78].

In Bild 6.1 sind drei Möglichkeiten dargestellt, eine Anzahl von Einzellastfällen bereits bei der iterativen Generierung des adaptiven FE-Netzes zu berücksichtigen. Definiert man ein äußerst feines homogenes FE-Netz (Bild 6.1a), muß kein Gedanke an adaptive Methoden verschwendet werden. Für kleine Probleme ist diese Vorgehensweise durchaus sinnvoll. Die Kapazitätsgrenze eines Computers ist jedoch mit feinen homogenen Diskretisierungen schnell erreicht. Abhilfe schaffen die adaptiven Methoden. Eine Verringerung des Rechenzeitbedarfs und eine Erweiterung der berechenbaren Problemgröße ist zu erreichen, indem für jeden Lastfall ein maßgeschneidertes adaptives FE-Netz generiert wird (Bild 6.1b). Die Ergebnisse können auf ein, allen Lastfällen gemeinsames Gitter zur Weiterverarbeitung übertragen werden. Der Rechenzeitbedarf wird noch weiter reduziert, wenn ein gemeinsames adaptives FE-Netz für alle Lastfälle generiert wird. Dabei ist jedoch zu beachten, daß jeder Lastfall explizit bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden muß (Bild 6.1c).

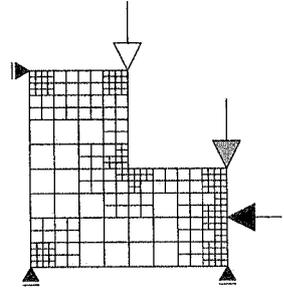
Werden dagegen alle Lastfälle zu einem „Netzdimensionierungslastfall“ superponiert, entstehen häufig FE-Netze, die für einzelne Lastfälle nur geringe Qualitäten besitzen



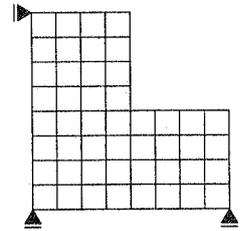
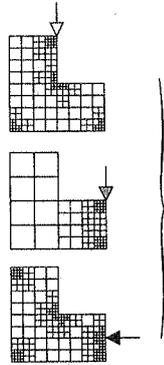
d) Einheitliches Netz aus superponiertem Lastfall (im allgemeinen nicht zulässig)



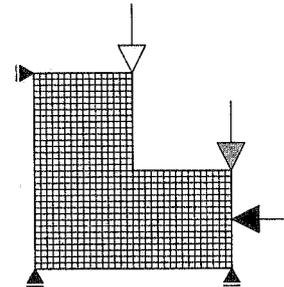
c) Auswahl eines Verfeinerungsindikators aus allen Einzellastfällen.



b) Jedem Lastfall ein eigenes Netz. Übergabe der Ergebnisse an ein gemeinsames Grundgitter.



a) Sehr feines homogenes Netz.



Rechenzeit

Bild 6.1: Behandlung mehrerer Lastfälle

(Bild 6.1d). Diese Vorgehensweise liefert ausschließlich dann brauchbare Ergebnisse, wenn sich die einzelnen Lastfälle in ihrer Wirkung unterstützen. Beliebige Lastfallkombinationen können sich gegenseitig aufheben, oder zumindest in ihrer Wirkung beeinträchtigen. Dies führt zu einem veränderten Tragverhalten der Struktur gegenüber dem Auftreten einzelner Lastfälle.

## **6.2 Generieren eines maßgeschneiderten FE-Netzes für jeden Lastfall**

Für jeden Lastfall wird ein maßgeschneidertes FE-Netz erzeugt. Die Ergebnisse aus der adaptiven Berechnung werden auf ein, allen Lastfällen gemeinsames Grundgitter übertragen. Dort können sie ausgewertet und weiterverarbeitet werden (Bild 6.1b). Das Verfahren ist verhältnismäßig einfach in ein bestehendes Finite Element Programm zu implementieren, sofern die Lastfälle sukzessive abgearbeitet werden. Innerhalb einer großen Lastfallschleife laufen die bekannten adaptiven Methoden für nur einen Lastfall ab. Am Ende jedes adaptiven Iterationszykluses müssen die Ergebnisse auf ein benutzerdefiniertes homogenes Referenzgitter durch geeignete Interpolationen der Ergebnisse übertragen werden (Abschnitt 4.2.6).

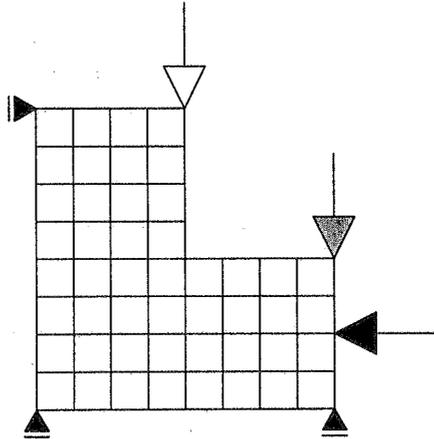
Das Vorgehen garantiert für jeden Lastfall die geforderte Ergebnisqualität. Jedes einzelne Netz besitzt wesentlich weniger Freiheitsgrade als ein gleichwertiges homogenes FE-Netz. Das kann, insbesondere bei komplexen Tragwerken, für die Berechenbarkeit eines Systems entscheidend sein.

Als nachteilig erweist sich die Abhängigkeit des Rechenzeitbedarfs von der Anzahl der Lastfälle, da für jeden Lastfall in jedem adaptiven Iterationsschritt die Systemsteifigkeitsmatrix erstellt und invertiert werden muß. Ein zusätzlicher Invertierungsaufwand fällt nur bei der Verwendung von direkten Gleichungslösern an, da iterative Gleichungslöser grundsätzlich die Steifigkeitsmatrix für jeden Lastfall invertieren. Hinzu kommt ein organisatorischer Aufwand in der Bereithaltung mehrerer FE-Netze. Für kleinere Systeme und viele Lastfälle wird dieses Vorgehen deshalb keine wesentliche Zeitersparnis gegenüber der Berechnung mit einem gleichwertigen homogenen FE-Netz erzielen.

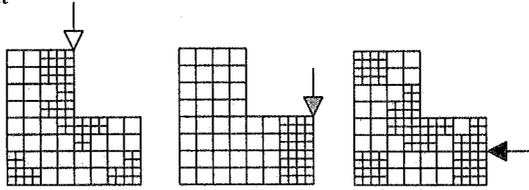
## **6.3 Auswahl eines Verfeinerungsindikators aus allen Einzellastfällen**

Erzeugt man nur ein gemeinsames adaptives FE-Netz, berücksichtigt jedoch jeden einzelnen Lastfall, so erhält man ein für alle Lastfälle gleichermaßen zulässiges FE-Netz

Ausgangsnetz

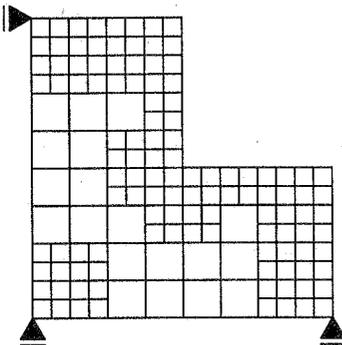


Berechnen der Verfeinerungsindikatoren aller Lastfälle für den aktuellen Iterationsschritt



Maximalwert

Durchschnittswert



resultierendes  
FE-Netz

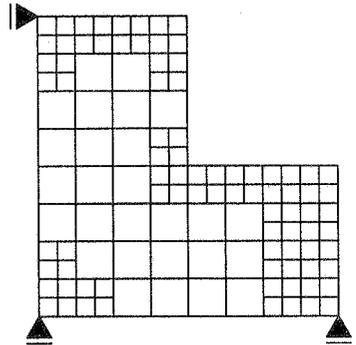


Bild 6.2: Erzeugen eines gemeinsamen FE-Netzes

(Bild 6.1c). Dazu wird in jedem adaptiven Iterationsschritt an dem gemeinsamen FE-Netz eine Fehlerabschätzung für jeden Lastfall durchgeführt. Das endgültige Netz ist gefunden, wenn die Ergebnisqualität für jeden Lastfall ausreicht. Andernfalls muß ein feineres FE-Netz gebildet werden (Bild 6.2). Es ist naheliegend, zur Ermittlung des maßgebenden Verfeinerungsindikators eines Elements den Maximalwert der Verfeinerungsindikatoren aller Lastfälle aus Gleichung (3.5) zu definieren:

$$\xi_i := \text{MAX}(\xi_{i,L1}; \xi_{i,L2}; \dots; \xi_{i,Ln}) \quad (6.1)$$

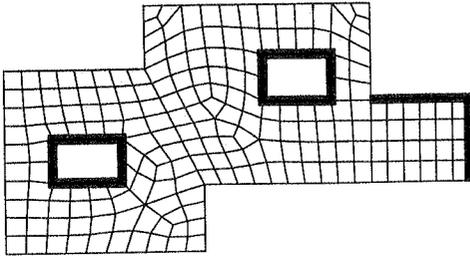
Der Maximalwert der Verfeinerungsindikatoren garantiert die Berücksichtigung jedes Lastfalls, da der Indikator immer dann den Grenzwert zur Verfeinerung übersteigt, wenn auch nur ein Lastfall dies fordert. Sind für ein Tragwerk mehrere Lastfälle definiert, reicht es häufig aus, besonders beim Einsatz der Elementunterteilungsstrategie, den Mittelwert der Verfeinerungsindikatoren als maßgebenden Indikator zu bestimmen:

$$\xi_i := \frac{\sum_{j=1}^n \xi_{i,Lj}}{n} \quad (6.2)$$

Die Berechnung nach Gleichung (6.2) kann folgendermaßen begründet werden:

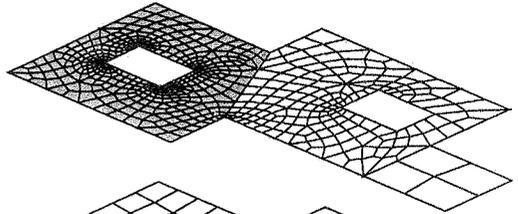
- Ein FE-Netz mit einer gewissen Ergebnisqualität für einen Lastfall ist nicht das einzig mögliche, sondern lediglich ein mögliches Netz dieser Qualität. Wird also ein FE-Netz an einer Stelle aufgrund der Forderung des Lastfalls x verdichtet, erhöht sich häufig die Qualität des Ergebnisses für einen Lastfall y, der an jener Stelle keine Verdichtung fordert.
- Die Elementunterteilungsstrategie reduziert die Fläche der verfeinerten Elemente genau auf ein Viertel der ursprünglichen Elementfläche. Meist genügt jedoch eine kleinere Flächenverringernug, um den Elementfehler auf das gewünschte Maß zu vermindern. Ist das bei vielen Elementen eines FE-Netzes der Fall, führt die herkömmliche Verfeinerung zu einer unwirtschaftlichen Unterschreitung des geforderten Gesamtfehlers. Die Mittelwertbildung der Verfeinerungsindikatoren bei mehreren Lastfällen mindert diesen negativen Effekt.

Meist benötigt das Vorgehen nach Gleichung (6.2) eine größere Anzahl an adaptiven Iterationsschritten. Das endgültige FE-Netz beinhaltet jedoch häufig weniger Elemente als beim Vorgehen nach Gleichung (6.1). Für die Elementunterteilungsstrategie stellt es eine ernst zu nehmende Alternative zur Maximalwertbildung dar. Beim Einsatz der Netzgenerierungsstrategie, welche geforderte Elementgrößen ausgesprochen flexibel

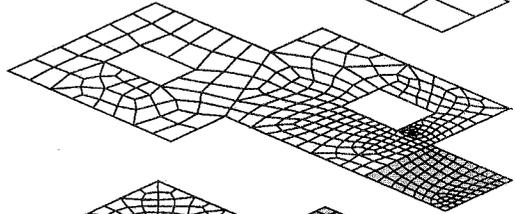


Startnetz mit Lagerung

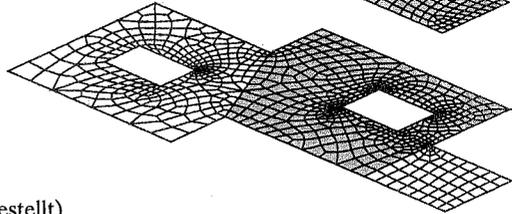
654 Elemente



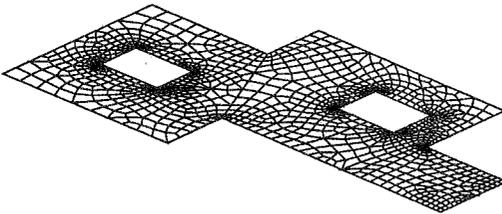
331 Elemente



816 Elemente



Maßgeschneiderte FE-Netze  
für die einzelnen Lastfälle  
(belastetes Gebiet schattiert dargestellt)



Ein FE-Netz, gleichermaßen geeignet für alle drei Lastfälle  
(1212 Elemente)

**Bild 6.3:** Adaptive Berechnung einer Deckenplatte

realisiert, empfiehlt sich jedoch die theoretisch fundiertere Methode der Maximalwertbildung.

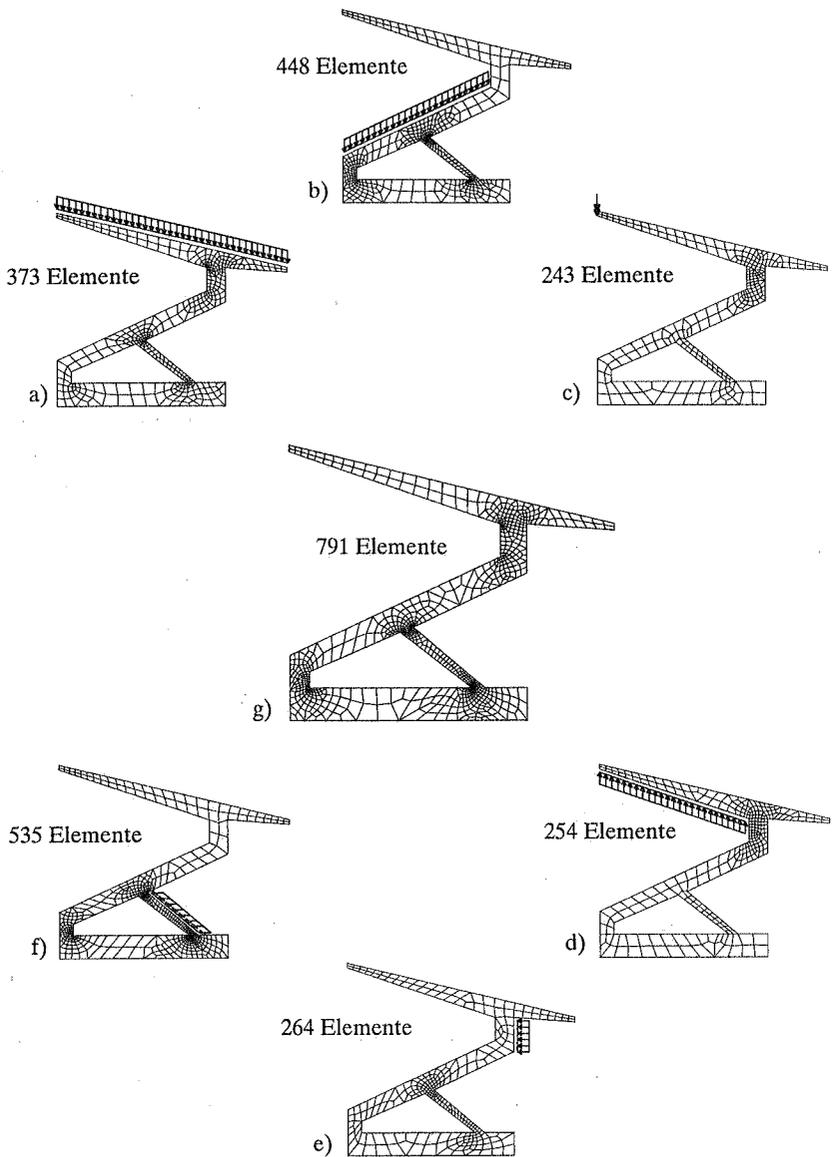
Im allgemeinen darf davon ausgegangen werden, daß ein für alle Lastfälle geeignetes FE-Netz mehr Elemente beinhaltet als spezielle, für jeweils einen Lastfall zugeschnittene Netze (Abschnitt 6.2). Elementverfeinerungszonen werden jedoch nicht nur von der Last, sondern auch wesentlich von der Geometrie der Struktur und den Lagerbedingungen beeinflusst. Deshalb ergeben sich für unterschiedliche Lastfälle oftmals ähnliche FE-Netze. Ein kombiniertes FE-Netz aus allen Lastfällen enthält in vielen der untersuchten Beispielen häufig nur eine unwesentlich höhere Anzahl an Elementen, als die auf lediglich einen Lastfall spezialisierten Netze (Bild 6.3 und Bild 6.4).

Für die Deckenplatte in Bild 6.3 sind drei Lastfälle definiert. Im oberen Teil der Abbildung wird für jeden Lastfall (das belastete Gebiet ist schattiert dargestellt) ein separates FE-Netz erzeugt. Das im unteren Teil von Bild 6.3 dargestellte FE-Netz ist für alle drei Lastfälle gleichermaßen geeignet. Es wird unter der Auswahl des maximalen Verfeinerungsindikators in jedem Iterationsschritt erzeugt. Trotzdem enthält es mit 1212 Elementen nicht allzu viele Elemente mehr, als das dichteste der maßgeschneiderten Netze für jeden einzelnen Lastfall (654, 331 und 816 Elemente). Werden alle Lastfälle simultan auf das System aufgebracht (homogene Belastung), entstehen für dieses Beispiel etwa gleich viele Elemente, wie im kombinierten FE-Netz (Bild 6.3).

In Bild 6.4 ist der Rahmen einer Zuschauertribüne zu erkennen. Das Gesamttragwerk ist an der Unterseite gleichmäßig gelagert. Exemplarisch sind sechs mögliche Lastfälle definiert. Die Tribüne ist durch neunknotige, vollintegrierte Scheibenelemente diskretisiert und wird adaptiv mit Hilfe der Netzgenerierungsstrategie berechnet. Auch in diesem Beispiel enthält das für alle Lastfälle gültige FE-Netz (Bild 6.4g) nicht wesentlich mehr Elemente, als das feinste Netz für nur einen Lastfall (Bild 6.4f).

Die entscheidenden Vorteile dieses Verfahrens lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Es muß nur ein FE-Netz erzeugt und damit in jedem adaptiven Iterationsschritt für alle Lastfälle nur eine Steifigkeitsmatrix erstellt und dreieckszerlegt werden (direkter Gleichungslöser). Lediglich bei der Rückrechnung sind alle Lastfälle einzubeziehen. Da das gemeinsame Netz nur unwesentlich mehr Elemente enthält als FE-Netze für einzelne Lastfälle, ergibt sich im allgemeinen ein Rechenzeitgewinn gegenüber der Verwendung von mehreren adaptiven FE-Netzen.
- Die nicht zu unterschätzende Gefahr einer Verwechslung der Netze ist ausgeschlossen, weil das FE-Netz für alle Lastfälle gleichermaßen zulässig ist. Die Ergebnisqualität ist trotzdem für jeden einzelnen Lastfall sichergestellt.



**Bild 6.4:** Adaptive Berechnung einer Tribüne unter sechs Lastfällen a) - f).  
Gemeinsames Netz für alle Lastfälle g).

Für Lastfallkombinationen, die sich in ihrer Wirkung aufheben, werden vereinzelt höhere prozentuale Fehlerwerte festgestellt als für die einzelnen Lastfälle. Bei der Kombination sich in ihrer Wirkung aufhebender Lastfälle, kann das Tragverhalten eines Systems deutlich unterschiedlich zum Tragverhalten bei einzelnen Lastfällen sein. Die Kräfte der kombinierten Lastfälle „schließen sich kurz“, großteils ohne über die Auflager abgetragen zu werden. Tragwerksteile, die auf der Wirkungslinie der Lastfälle liegen und bei der Berücksichtigung der einzelnen Lastfälle von geringer Bedeutung sind, können einen relativen Anstieg des Fehlers verzeichnen. Im gesamten Tragwerk wird dagegen aufgrund des „Kräftekurzschlusses“ eine vergleichsweise geringe Tragwerksenergie aktiviert, so daß das Verhältnis aus Fehlerenergie und Tragwerksenergie groß werden kann. Absolut betrachtet, sind jedoch bei allen untersuchten Beispielen sowohl die Fehlerenergie, als auch die Tragwerksenergie klein gegenüber den aktivierten Energien der Einzellastfälle. Ebenso sind die zugehörigen Spannungen, absolut gesehen, sehr gering, so daß der größere relative Fehler als bedeutungslos erscheint.



## 7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Aus mehreren Bausteinen, welche in den einzelnen Abschnitten beschrieben werden, wird ein weitgehend automatisiertes Gesamtkonzept der h- und r-Version zur Berechnung von Flächentragwerken zusammengefügt. Es läßt sich in der vorliegenden Form mit geringem Aufwand in bestehende Finite Element Programme integrieren.

Fehlerkriterien stellen ein Standbein adaptiver Methoden dar. Man unterscheidet a priori Kriterien, welche auf geometrischen Überlegungen basieren, und a posteriori Kriterien, die aus Informationen über die Berechnungsergebnisse gewonnen werden. A priori Kriterien vermitteln ein unscharfes Bild von der Qualität einer Diskretisierung. Quantitative Aussagen über die Auswirkungen einzelner verzerrter Elemente auf das Lösungsverhalten des gesamten FE-Netzes können aufgrund fehlender Untersuchungsergebnisse nur ungenau getroffen werden. Dasselbe gilt für Aussagen über die Güte einer Approximation gekrümmter Ränder und Flächen mit finiten Elementen. Vor einem sinnvollen Einsatz von a priori Kriterien in praxisorientierten Anwendungen sind deshalb weitere Untersuchungen bezüglich des tatsächlichen Lösungsverhaltens von FE-Netzen für unterschiedliche Strukturen erforderlich. A posteriori Fehlerkriterien beinhalten eine wesentlich detailliertere Aussagekraft. Der erforderliche numerische Aufwand zur Gewinnung dieser Kriterien ist jedoch größer als für a priori Kriterien. An zwei Beispielen werden drei unterschiedliche Verfahren zur a posteriori Fehlerabschätzung untersucht. Dabei zeigt der residuale Fehlerestimator erwartungsgemäß die besten Ergebnisse. Dennoch eignet sich der wesentlich einfacher zu implementierende Glättungsindikator gut zur Steuerung adaptiver Verfeinerungen. Auch er zeigt in den beschriebenen Beispielen brauchbare Leistungen. Ein heuristischer Verfeinerungsindikator nach dem Knotengleichgewicht liefert ebenfalls gute Ergebnisse in den Testbeispielen. Sie liegen in der Regel zwischen den Ergebnissen der beiden anderen Verfahren.

Strategien zur Netzverdichtung stellen das zweite Standbein adaptiver Methoden dar. Neben der üblichen hierarchischen adaptiven Netzverfeinerung (Elementunterteilungsstrategie), steht mit der Netzgenerierungsstrategie ein leistungsfähiges Werkzeug für adaptive Methoden zur Verfügung. Dabei wird in jedem adaptiven Iterationsschritt ein völlig neues FE-Netz generiert. Der erforderliche automatische Netzgenerator ist aus der Klasse der Advancing Front Method. Er benötigt nur wenige Eingabeparameter zur Generierung von homogenen Dreiecks- oder Vierecksnetzen. Adaptive Netze werden detailgenau aus den Elementdichteinformationen eines Hintergrundnetzes generiert. Im allgemeinen dient das FE-Netz des vorangegangenen adaptiven Iterationsschritts als aktuelles Hintergrundnetz. Die Netzgenerierungsstrategie erzeugt nach nur wenigen

Hintergrundnetzes liegt (Bild 4.35). Er wird dem am nächsten liegenden Hintergrundelement zugeordnet. Die Elementdichtewerte werden zu dem Knoten extrapoliert.

#### 4.2.6.2 Ermitteln der lokalen Koordinaten eines Punkts

Ist das passende Hintergrundelement gefunden, müssen die lokalen Koordinaten  $(u, v)$  des Knotens  $P$  in diesem Element ermittelt werden (inverse Parametrisierung). Für die Hintergrundelemente ist die Interpolationsfunktion durch folgende Beschreibung gegeben:

$$x(u, v) = \sum N_i(u, v)x_i \quad (4.17)$$

Leider ist die Gleichung (4.17) im allgemeinen nicht umkehrbar, so daß für gegebene globale Koordinaten  $x$  die lokalen Koordinaten mit Ausnahme der linearen Elemente nicht direkt ermittelt werden können. Im allgemeinen müssen Näherungsmethoden eingesetzt werden, um die gewünschten Koordinaten zu erhalten.

Im folgenden wird die inverse Parametrisierung für das dreiknotige Dreieck und das vierknotige Viereck ausführlich beschrieben. Für höherwertige Elemente werden aus Gründen der Vollständigkeit einige in der Literatur veröffentlichte Näherungsmethoden angeführt.

#### Lineares Dreieck

Für das lineare Dreieck mit drei Knotenstützwerten läßt sich Gleichung (4.17) ausführlich schreiben:

$$x(u, v) = (1 - u - v)x_1 + ux_2 + vx_3$$

Zusammengefaßt nach  $u$  und  $v$  erhält man

$$(x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v = x - x_1 \quad (4.18)$$

Das Gleichungssystem (4.18) kann im Zweidimensionalen  $(x=(x,y))$  eindeutig gelöst werden:

$$u = \frac{-y_3x + x_1y_3 + y_1x + x_3y - x_3y_1 - x_1y}{-x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2}$$

$$v = \frac{-y_2x + x_1y_2 + y_1x + x_2y - x_3y_1 - x_1y}{-x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2}$$

## Lineares Viereck

Für das ebene bilineare Viereck ist eine Invertierung der Gleichung (4.17) ebenfalls analytisch möglich. Wenn man Gleichung (4.17) ausführlich schreibt und nach  $u$  und  $v$  sortiert, erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$D_{11} + D_{21}v + D_{31}u + D_{41}uv = 0 \quad (4.19)$$

$$D_{12} + D_{22}v + D_{32}u + D_{42}uv = 0 \quad (4.20)$$

wobei

$$\begin{aligned} D_{11} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x, & D_{12} &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4y \\ D_{21} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, & D_{22} &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \\ D_{31} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, & D_{32} &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ D_{41} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, & D_{42} &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \end{aligned}$$

Das Auflösen der Gleichung (4.20) nach  $u$  und Einsetzen in die Gleichung (4.19) führt zu einem quadratischen Gleichungssystem

$$Av^2 + Bv + C = 0 \quad \text{für } D_{32} + D_{42}v \neq 0$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= D_{22}D_{41} - D_{21}D_{42} \\ B &= D_{12}D_{41} + D_{22}D_{31} - D_{32}D_{21} - D_{42}D_{11} \\ C &= D_{22}D_{31} - D_{11}D_{32} \end{aligned}$$

Von den möglichen Lösungen  $v_{1,2}$  ist diejenige zutreffend, welche im zulässigen Bereich ( $-1 \leq v \leq 1$ ) liegt.

## Höherwertige ebene Elemente

Die lokalen Koordinaten ( $u, v$ ) sind bei höherwertigen Elementansätzen nur numerisch bestimmbar. Eine iterative Lösung nach Newton-Raphson werden von Elwi et al. [27] und Werkle et al. [94] vorgeschlagen. Als Startwert für die lokalen Koordinaten kann das Ergebnis des linearen Elements eingesetzt werden. Die verbesserten Koordinaten ergeben sich zu

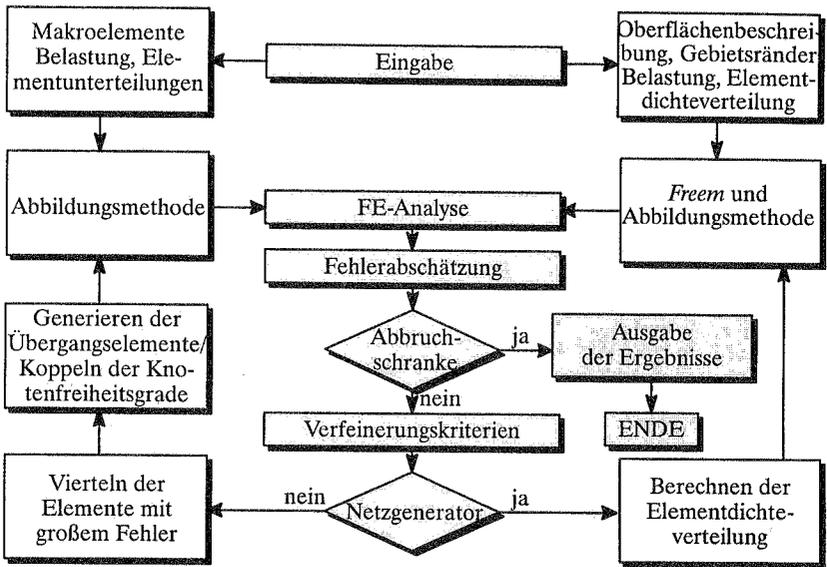
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^{[n+1]} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^{[n]} - [J^{[n]}]^{-T} \left( \mathbf{x} - \sum N_i^{[n]} \mathbf{x}_i \right).$$

Murti und Valliappan [56] beschreiben ein eindimensionales Iterationsverfahren für ebene Elemente mit bilinearen bis biquadratischen Ansatzfunktionen. Bei dem Verfahren wird eine Gerade auf der kartesischen Fläche von einem Eckknoten zur gegenüberliegenden Seite durch den Punkt  $P$  gelegt. Die Gerade wird für biquadratische Elemente im Parameterraum als eine Parabel abgebildet, welche ebenfalls durch den Punkt  $P$  gehen muß. Die lokalen Koordinaten des Punkts  $P$  werden mit Hilfe der Bisektionsmethode entlang der Geraden ermittelt.

Elwi und Hrudehy [27] beschreiben ein Integrationsverfahren im Parameterraum entlang einer Verbindungslinie zwischen einem Punkt mit bekannten Koordinaten (z.B.  $u=v=0$ ) und dem Punkt  $P$ , für den die lokalen Koordinaten unbekannt sind. Es ergibt sich ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, welches, als Anfangswertproblem behandelt, mit Hilfe eines auf dem Runge-Kutta-Verfahren basierenden Standardalgorithmus gelöst werden kann.

## 5 ANWENDUNGEN ADAPTIVER METHODEN

Im folgenden werden die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten adaptiven Verfahren an drei ausgewählten Beispielen vorgeführt und besprochen. Bild 5.1 verdeutlicht anhand eines vereinfachten Schemas die Iterationsfolge der eingesetzten adaptiven Strategien. In allen Beispielen gilt das Interesse der Untersuchungen nicht dem Modellierungsfehler. Das Ziel der vorgestellten adaptiven Verfahren ist die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers zusammen mit den numerischen Fehlern einer Berechnung mit finiten Elementen.



**Bild 5.1:** Vereinfachtes Schema eines adaptiven Berechnungsablaufs

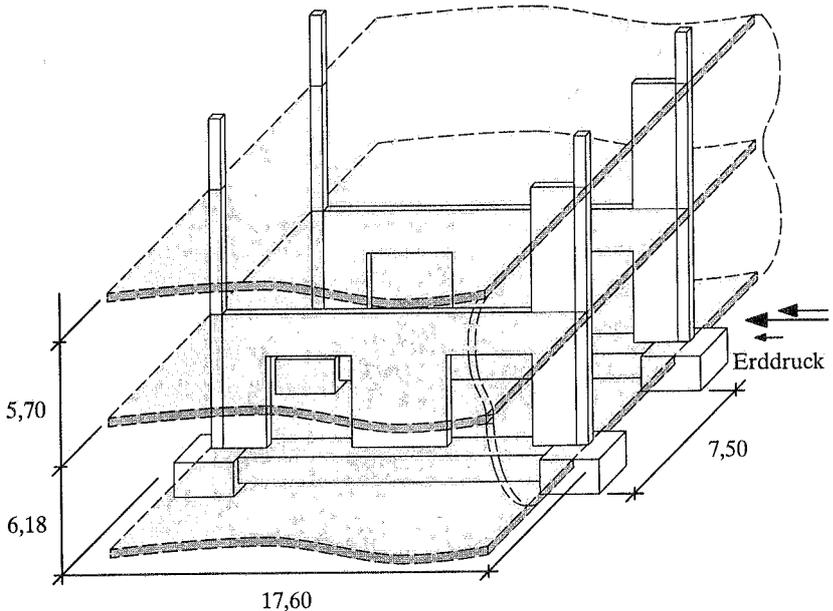
Die erste Berechnung erfolgt jeweils an einem grob diskretisierten Startnetz. Ist der Fehler, beispielsweise in der Energienorm nach Zienkiewicz - Zhu (Gleichung (2.6)), geringer als ein geforderter Fehler von 5%, so ist der Rechenlauf nach Ausgabe der Ergebnisse beendet. Andernfalls werden Verfeinerungskriterien berechnet. Sie definieren, welche Elemente zu verfeinern oder zu vergrößern sind. In Abhängigkeit von der

gewählten Strategie werden entweder die vorhandenen Elemente mit zu großem Fehler unterteilt (Elementunterteilungsstrategie, Bild 5.1 linke Seite und Abschnitt 3.2), oder ein völlig neues FE-Netz automatisch nach den Vorgaben aus der Fehlerermittlung generiert (Netzgenerierungsstrategie, Bild 5.1 rechte Seite und Abschnitt 3.5).

## 5.1 Scheibenbeispiel

### Situation

In Bild 5.2 ist ein Ausschnitt eines mehrstöckigen, in eine Böschung eingefügten Lagergebäudes dargestellt. Zur Aussteifung des Gebäudes gegen große Horizontallasten aus der bis zu 14m hohen Böschung dienen Wandscheiben.



**Bild 5.2:** Ausschnittsskizze eines mehrstöckigen Lagergebäudes

Nach der Fertigstellung des Gebäudes werden die Erddrucklasten durch die seitliche Hallenwand gesammelt und über die Decken auf die aussteifenden Scheiben aufge-

bracht. Ein großer Anteil der Erddrucklast wird durch den auskragenden Teil der Scheibe aufgenommen. Einen weiteren Teil leitet die Untergeschoßdecke als verteilte Horizontalbelastung in die Oberkanten der Scheiben ein. Zwei große Öffnungen, die Gabelstaplern einen uneingeschränkten Bewegungsspielraum sichern sollen, beeinträchtigen den Kraftfluß in das Fundament. Der untere Teil der Erddrucklast wird durch die Bodenplatte direkt über die Fundamente abgetragen. Für detailliertere Informationen siehe Gerlinger [30].

Die aussteifenden Wandscheiben, deren Tragsicherheit im Rahmen der baustatischen Berechnungen von besonderem Interesse war, erscheinen als geeignetes Beispiel, die in Abschnitt 3 vorgestellten adaptiven Strategien näher zu untersuchen.

### Modellierung

Für die adaptiven Untersuchungen wird eine Wandscheibe der Hallenkonstruktion isoliert betrachtet (Bild 5.3). Die Dicke wird für die Scheibe, wie auch für die Fundamente und Stützen konstant mit 0,4m angenommen. Die Lagerung erfolgt unverschieblich über die gesamte Länge des Fundaments.

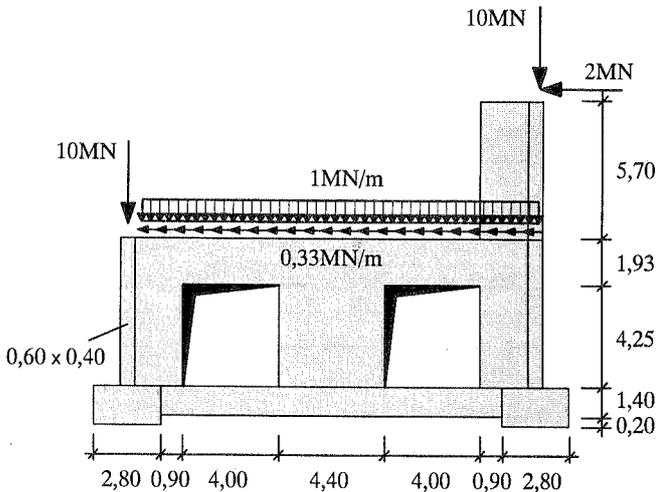
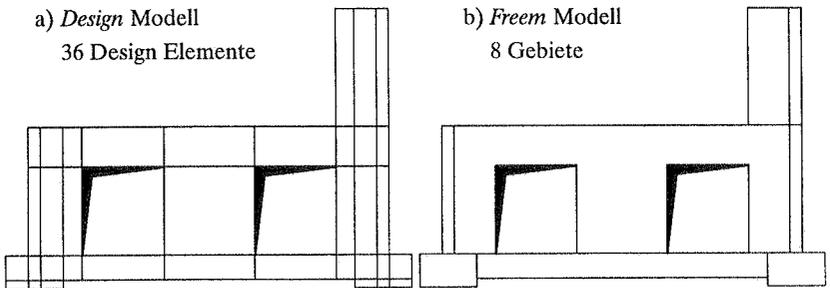


Bild 5.3: System und Belastung der aussteifenden Scheibe

In Bild 5.4 sind die Geometriemodelle für *CARAT Design* und *CARAT Freem* dargestellt. Das Modell des Netzgenerators *Freem* (Bild 5.4b) erfordert lediglich die

Beschreibung der Geometrievänder. Die starr mit der Hallenscheibe verbundenen Stützen und Fundamente werden getrennt modelliert, um unterschiedliche Bauteildicken realisieren zu können. Das Design Modell (Bild 5.4a) erfordert darüber hinaus die Definition von vierseitigen Untergebieten (Design Elemente), in denen finite Elemente durch Unterteilen der Randkanten generiert werden.



**Bild 5.4:** Geometriemodelle der aussteifenden Scheibe

Die Berechnung der Wand erfolgt nach der Scheibentheorie. Da für diese Untersuchungen das Verhalten der adaptiven Strategien primär ist, wird ein lineares Materialgesetz verwendet. Der Elastizitätsmodul beträgt  $30.000 \text{ MN/m}^2$ , die Querdehnzahl wird mit 0,2 angenommen.

Als Lastfall für die Untersuchungen werden die Vertikallasten aus den oberen Stockwerken konzentriert in die Stützen übertragen. Ein Teil der Erddruckbelastung wird durch die Kellerdecke als gleichmäßig verteilte Last an der Oberseite der Scheibe, zusammen mit den vertikalen Lasten dieses Stockwerks, eingeleitet. Am auskragenden Teil der Scheibe werden die Horizontallasten aus dem Erddruck konzentriert aufgebracht (Bild 5.3). Einfachheitshalber sind alle Lasten bereits bei der Berechnung mit einem Sicherheitswert beaufschlagt.

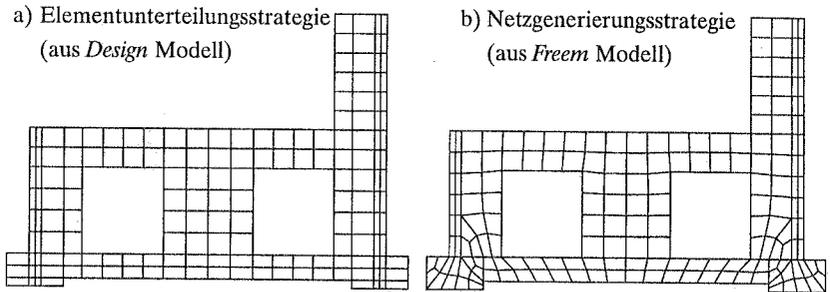
### Diskretisierung

Die Berechnung der Struktur erfolgt mit achtknotigen unterintegrierten Verschiebungselementen. Die Ergebnisqualität wird nach Zienkiewicz, Zhu (Gleichung (2.6)) abgeschätzt. Die verbesserten Spannungen ergeben sich aus einer einfachen Mittelbildung der Spannungen an den Knoten. Dieses Verfahren ist gut geeignet, den adaptiven

Algorithmus zu steuern, wenngleich erwartet werden darf, daß der wahre Fehler vor allem für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen unterschätzt wird (Abschnitt 2.5.4).

Als Abbruchschranke ist ein maximaler relativer Gebietsfehler in der Energienorm von 5% vorgegeben. Wird dieser Wert unterschritten, ist der Programmlauf beendet. Andernfalls muß das FE-Netz adaptiv verfeinert oder anhand der ermittelten Daten neu generiert werden.

Das Startnetz der Scheibe (Bild 5.5) enthält für die Elementunterteilungsstrategie 164 und für die Netzgenerierungsstrategie 178 Elemente. Die verzerrten Elemente im Fundamentbereich sind unvermeidlich, da die Eckknoten eines Gebietes im benachbarten, größeren Gebiet als Festknoten beachtet werden müssen. Im Anschluß an die obligatorische Elementunterteilung zur Sicherstellung reiner Vierecksnetze (Abschnitt 4.2.2) entstehen selbst an den kürzesten Gebietskanten grundsätzlich zwei Elemente.

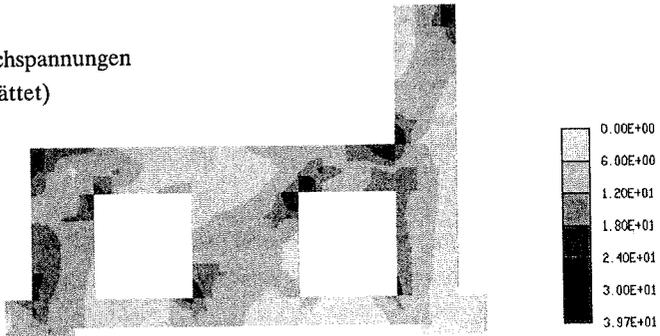


**Bild 5.5:** Startnetz der Elementunterteilungs- und Netzgenerierungsstrategie

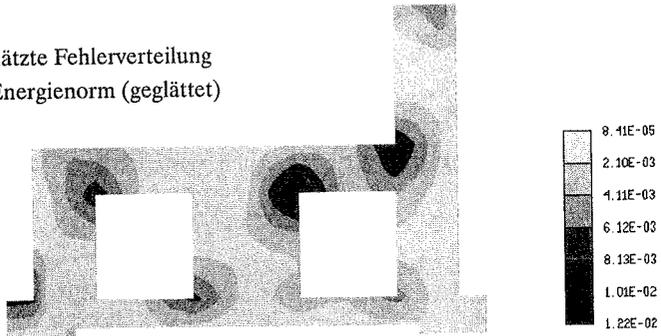
## Ergebnisse

Für die beiden Startnetze ergibt sich ein, verglichen mit der Elementanzahl, äquivalenter prozentualer Fehler von etwa 12%, gemessen in der Energienorm. Hohe Elementfehlerwerte resultieren vor allem an den Orten der Spannungsspitzen, nämlich an den linken oberen Ecken der Scheibenaussparungen und an der Übergangszone des Kragträgers in die Scheibe (Bild 5.6b)

a) Vergleichsspannungen  
(ungeglättet)



b) abgeschätzte Fehlerverteilung  
in der Energienorm (geglättet)



**Bild 5.6:** Vergleichsspannungen und abgeschätzte Fehlerverteilung des Startnetzes

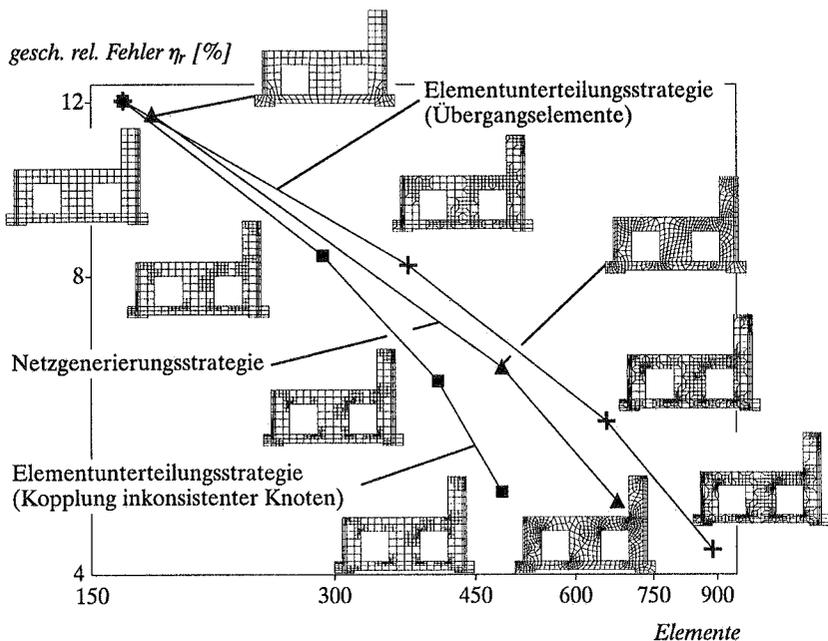
Die Vergleichsspannungen sind für beide Diskretisierungen gleichwertig. Repräsentativ ist in Bild 5.6a ein Spannungsplot der Elementunterteilungsstrategie dargestellt. Die Spannungen werden verhältnismäßig grob wiedergegeben. Vor allem in der Nähe der Singularitäten sind große Unterschiede in den Spannungswerten benachbarter Elemente zu erkennen. Der Schluß auf die größeren Elementfehler an diesen Orten fällt leicht. Die maximalen Vergleichsspannungen liegen bei  $39,7 \text{ MN/m}^2$ . Bereiche mit Spannungswerten größer als  $30 \text{ MN/m}^2$  sind nur lokal zu finden.

Da der abgeschätzte Gesamtfehler mit 12% deutlich größer ist als die geforderten 5%, müssen beide Strategien lokale Netzverdichtungen durchführen. Die Elementunterteilungsstrategie viertelt dazu Elemente mit zu großem Fehler. Werden an den Übergängen zwischen verfeinerten und unverfeinerten Elementen Übergangselementpatche generiert, konvergiert der Algorithmus nach insgesamt vier Iterationsschritten mit einem Fehlerwert von 4,24% (Bild 5.7). Das endgültige FE-Netz besteht aus 887 Elementen. Koppelt man dagegen die inkonsistenten Knoten an die unverfeinerten Nachbarelemente, so sind keine Übergangselemente erforderlich (Abschnitt 3.2.2). In diesem Fall benötigt die Elementunterteilungsstrategie lediglich 485 Elemente um einen geschätzten Fehler von 4,85% zu erlangen. Die Anzahl der adaptiven Iterationsschritte bleibt jedoch gleich. Sie wird unter anderem dadurch bestimmt, wie exakt die aus der Fehlerabschätzung ermittelten Sollelementgrößen tatsächlich erreicht werden können. Wird ein Element unterteilt, so ist die entsprechende Elementfläche genau ein Viertel der Ursprungsfläche. Davon abweichende Größen sind mit der Elementunterteilungsstrategie nicht realisierbar.

Wie in Bild 5.7 deutlich erkennbar ist, benötigt die Elementunterteilungsstrategie mit gekoppelten Knoten die wenigsten Elemente um einen geforderten Gesamtfehler von 5% zu unterschreiten. Das ist zum einen darin begründet, daß hier ausschließlich rechteckige Elemente vorliegen, die ein optimales Elementverhalten zeigen. Zum anderen werden viele Elemente dadurch eingespart, daß die erforderliche Kontinuität der Verschiebungen an den Übergangsbereichen von verfeinerten zu unverfeinerten Elementen durch Kopplungsbedingungen künstlich sichergestellt sind. Diese sind allerdings, aufgrund benötigter Elementinformationen für die Kondensation der globalen Steifigkeitsmatrix, nicht ganz unproblematisch in jedes Programm zu implementieren (Abschnitt 3.2.2).

Die Elementunterteilungsstrategie mit Übergangselementen zeigt durchaus das gleiche Verhalten wie obiges Verfahren. Sie benötigt lediglich eine größere Anzahl an Elementen in jedem adaptiven Iterationsschritt. Dabei liegen die Fehlerniveaus der beiden Verfahren ungefähr auf gleicher Höhe. Es ist leicht zu erkennen, daß die Übergangselemente, die bekanntermaßen nur dazu dienen, die Kontinuität zwischen verfeinerten und unverfeinerten Elementen sicherzustellen, kaum einen Einfluß auf den Gesamtfehler ausüben, da dabei nur jene Elemente unterteilt werden, welche nach den Ergebnissen aus der Fehlerabschätzung nicht zu unterteilen wären.

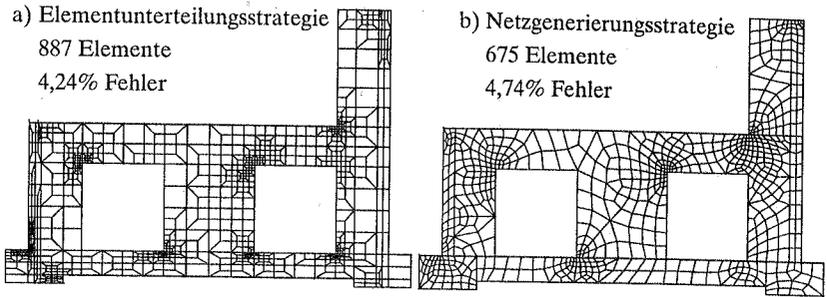
Der Konvergenzverlauf der Netzgenerierungsstrategie liegt zwischen den beiden anderen. Sie benötigt lediglich drei adaptive Iterationsschritte, um mit 675 Elementen einen geschätzten Fehler von 4,74% zu erreichen. Die verhältnismäßig große Anzahl an



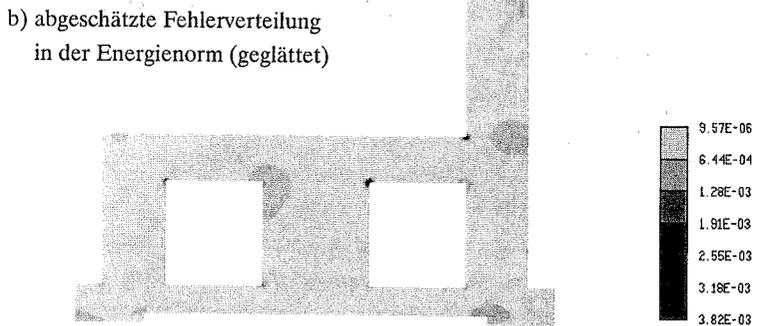
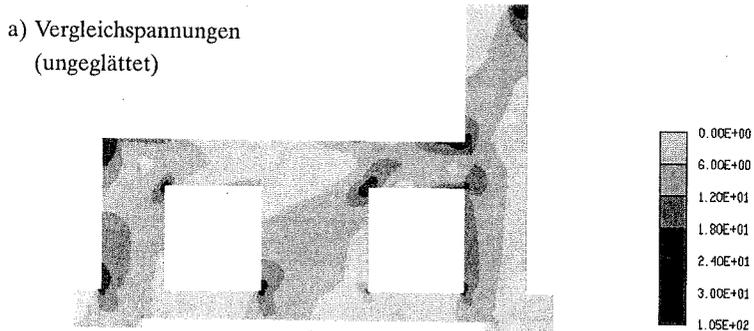
**Bild 5.7:** Konvergenzdiagramm der adaptiven Berechnungen

Elementen läßt sich durch die Anfälligkeit achtknotiger Verschiebungselemente gegen Elementverzerrungen erklären [48]. Es ist nicht eindeutig feststellbar, ob die Reduktion der Iterationsschritte den Mehrbedarf an Rechenzeit durch die größere Anzahl an Elementen gegenüber der Elementunterteilungsstrategie mit gekoppelten Knoten ganz zu kompensieren vermag. Die Netzgenerierungsstrategie ist jedoch durch ihre Flexibilität in der Lage, geforderte Elementgrößen sehr detailliert zu realisieren. Hinzu kommt eine Korrekturmöglichkeit vorangegangener Iterationsschritte: Werden in einem adaptiven Iterationsschritt Elemente kleiner als erforderlich generiert, wird dieser Fehler bereits im darauf folgenden Iterationsschritt beseitigt.

Das Bild 5.8 zeigt die endgültigen FE-Netze der Elementunterteilungs- und der Netzgenerierungsstrategie. In Bild 5.9a sind die Vergleichsspannungen und die Fehlerverteilung des letzten Iterationsschritts der Elementunterteilungsstrategie dargestellt. Der Spannungsverlauf über die Scheibe ist wesentlich glatter als im ersten Iterations-



**Bild 5.8:** Endgültige Netze der Elementunterteilungs- und Netzgenerierungsstrategie



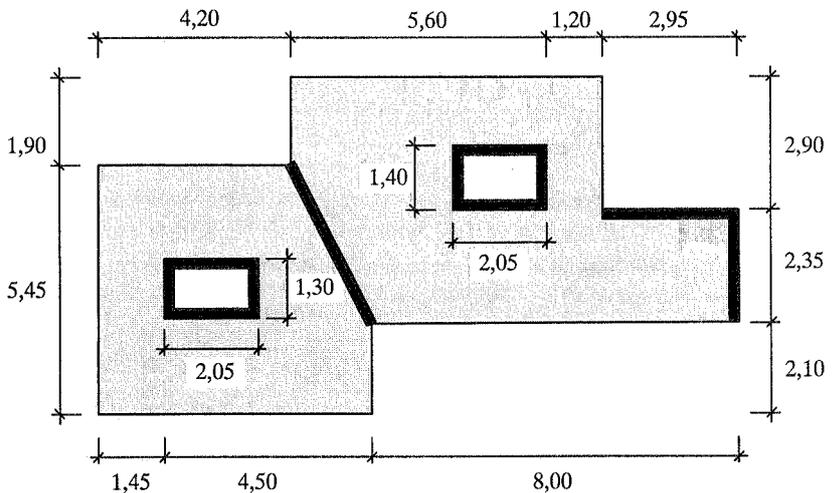
**Bild 5.9:** Vergleichsspannungen und gesch. Fehlerverteilung des endgültigen FE-Netzes

schritt (Bild 5.6a). Die Bereiche mit hohen Spannungen sind vergleichsweise kleiner, wemngleich die maximale Vergleichspannung deutlich ansteigt. Dieser Effekt erklärt sich aus der wesentlich feineren Diskretisierung an den Singularitäten.

Die Verteilung des Fehlers über die Scheibe (Bild 5.9b) ist im endgültigen FE-Netz außerordentlich homogen. Lediglich an den Singularitäten sind äußerst lokal Spitzenwerte des Fehlers erkennbar. Doch selbst diese Maximalwerte sind kleiner als die Maximalwerte des Ausgangsnetzes (Bild 5.6b), was in den kleineren Elementflächen des endgültigen FE-Netzes begründet ist.

## 5.2 Plattenbeispiel

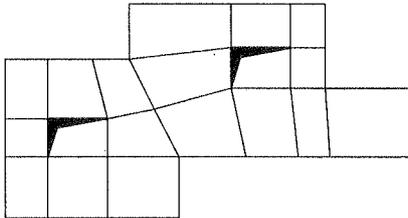
Als zweites Beispiel wird eine einfache Deckenplatte untersucht. In Bild 5.10 ist das statische System der Platte dargestellt. Die Lagerung erfolgt über die dick eingezeichneten Wände. Die Dicke der Platte beträgt 0,20m. Als Belastung für die nachfolgenden Vergleichsberechnungen wird das Eigengewicht der Platte ( $25\text{kN/m}^3$ ) und eine gleichmäßig verteilte Verkehrslast von  $5\text{kN/m}^2$  angenommen.



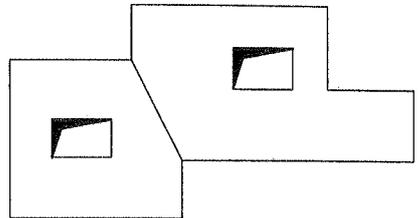
**Bild 5.10:** Statisches System der Platte

Die lineare Elastizitätstheorie dient als Grundlage für die Untersuchungen. Der Elastizitätsmodul beträgt  $34.000 \text{ MN/m}^2$ , die Querdehnzahl wird mit  $0,2$  angenommen.

a) Geometriemodelle der Platte

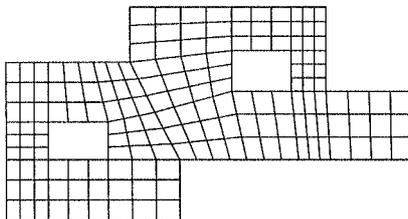


*Design* Modell (17 Design Elemente)

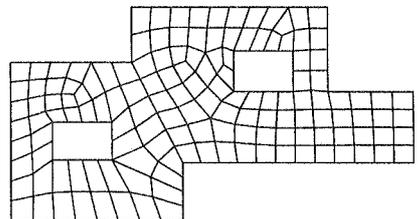


*Freeform* Modell (4 Gebiete)

b) Startnetze der Platte



Elementunterteilungsstrategie



Netzgenerierungsstrategie

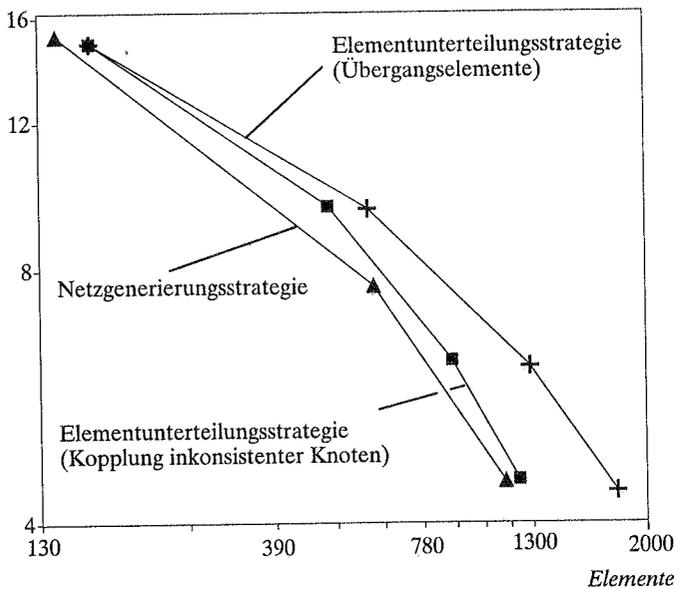
**Bild 5.11:** Geometriemodelle und Startnetze der Platte

Die Berechnung der Platte erfolgt mit neunknotigen vollintegrierten Schalenelementen, deren Freiheitsgrade in der Plattenebene unterdrückt sind. Nach Untersuchungen, z.B. von Lee und Bathe [48], zeigen neunknotige Verschiebungselemente ein besseres Elementverhalten bei verzerrten Elementgeometrien, als die im vorhergehenden Beispiel verwendeten achtknotigen Elemente. Es darf deshalb ein geringerer negativer Einfluß des Elementverhaltens auf die Wahl der verwendeten adaptiven Generierungsstrategie erwartet werden.

Die Ergebnisqualität wird nach Gleichung (2.7) ohne Berücksichtigung der Querkräfte abgeschätzt. Die verbesserten Schnittkräfte werden durch eine einfache Mittelbildung an den Knotenpunkten gewonnen. Der Rechenlauf ist beendet, sobald der relative Gesamtfehler den Wert von 5% unterschreitet.

In Bild 5.11 sind die Geometriemodelle und die Startnetze für die Elementunterteilungsstrategie mit 165 und die Netzgenerierungsstrategie mit 141 Elementen dargestellt. Entsprechend der verhältnismäßig groben Diskretisierung der Netzgenerierungsstrategie ergibt sich für das Startnetz mit 15,23% ein geringfügig höherer relativer Fehler, gemessen in der Energienorm, als für die Elementunterteilungsstrategie (14,93%). Da der abgeschätzte Fehler bei allen Strategien deutlich über den geforderten 5% liegt, sind adaptive Iterationen erforderlich.

gesch. rel. Fehler  $\eta_r$  [%]



**Bild 5.12:** Konvergenzdiagramm der adaptiven Plattenberechnungen

In Bild 5.12 sind die Konvergenzverläufe im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt. Die Netzgenerierungsstrategie erzielt nach insgesamt drei Iterationsschritten mit

1139 Elementen einen geschätzten relativen Fehler von 4,48%. Nur wenig mehr Elemente (1215 Elemente) benötigt die Elementunterteilungsstrategie mit gekoppelten Freiheitsgraden, um einen geschätzten relativen Fehler von 4,51% zu erzielen. Allerdings sind dafür insgesamt vier adaptive Iterationsschritte erforderlich. Betrachtlich mehr Elemente (1917 Elemente) sind erforderlich, wenn die bei der adaptiven Elementunterteilung entstehenden inkonsistenten Knoten durch Übergangselemente eliminiert werden.

Wie bereits im vorangegangenen Scheibenbeispiel, ist auch hier im Plattenbeispiel anhand der gleichen Fehlerniveaus der beiden Elementunterteilungsstrategien in jedem Iterationsschritt deutlich zu erkennen, daß die Übergangselemente nur einen geringfügigen Einfluß auf die Verringerung des Fehlers ausüben. Sie bewirken jedoch eine wesentliche Erhöhung der Anzahl an Freiheitsgraden. In Bild 5.13 sind die endgültigen FE-Netze gegenübergestellt. Die Verfeinerungszonen in den Bereichen der Singularitäten sind bei allen Strategien in etwa gleich gut realisiert. Bei der Netzgenerierungsstrategie kann die kontinuierliche Vergrößerung der Elemente ausgehend von den Singularitäten zu den Außenbereichen der Platte hin gut wahrgenommen werden. Die Elementunterteilungsstrategie beinhaltet diese Möglichkeit nicht. Hier sind Sprünge in der Elementgröße unvermeidlich.

In Bild 5.14 ist die verformte Platte gezeigt. Es ist gut zu erkennen, wie sich die Platte auf den als starr angenommenen Wänden entlang der Aussparungen abstützt. In den Bereichen der Auskragungen treten große Verformungen auf. Die maximale Durchbiegung der Platte beträgt 3,65mm.

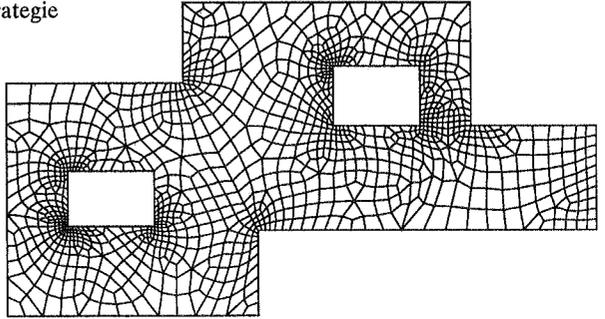
In Bild 5.15 ist der absolute Fehler in der Energienorm des Startnetzes und des endgültigen FE-Netzes der Elementunterteilungsstrategie dargestellt. Auch in diesem Beispiel ist der maximale Fehler des endgültigen FE-Netzes beträchtlich geringer als der maximale Fehler des Startnetzes. Der Fehlerverlauf des endgültigen Netzes ist sehr homogen. Die größten Fehlerwerte liegen in den Bereichen der Singularitäten, also an den Stellen, an denen auch die größten Momente auftreten.

In Bild 5.16 sind die ungeglätteten Momentenverläufe des Ausgangsnetzes der Elementunterteilungsstrategie dargestellt. In den Bereichen der Singularitäten treten aufgrund der groben Diskretisierung große Momentensprünge auf. Völlig unterschiedlich dazu zeigen sich die Momentenverläufe des endgültigen FE-Netzes als außerordentlich glatt (Bild 5.17), wengleich sich der prinzipielle Verlauf der Momente im Startnetz nicht außerordentlich vom endgültigen Verlauf unterscheidet. Die Schnittkraftsprünge an den Elementkanten sind aufgrund kleiner Elemente in diesen Bereichen vernachlässigbar gering. Die Momente erreichen dagegen wesentlich größere Maximalwerte als im

a) Netzgenerierungsstrategie

1139 Elemente

4,48% Fehler

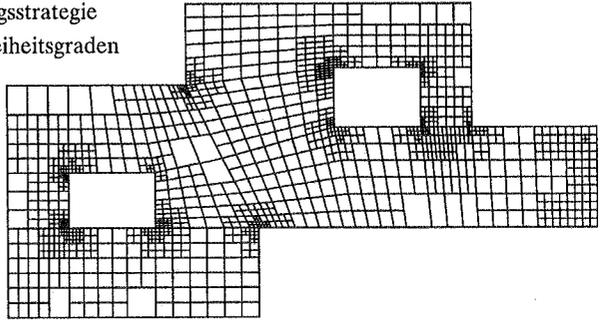


b) Elementunterteilungsstrategie  
mit gekoppelten Freiheitsgraden

mit gekoppelten Freiheitsgraden

1215 Elemente

4,51% Fehler

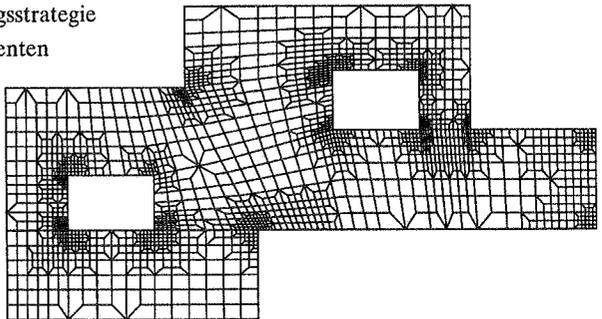


c) Elementunterteilungsstrategie  
mit Übergangselementen

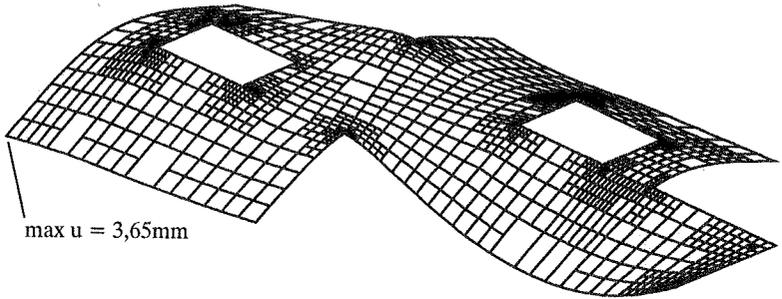
mit Übergangselementen

1917 Elemente

4,36% Fehler

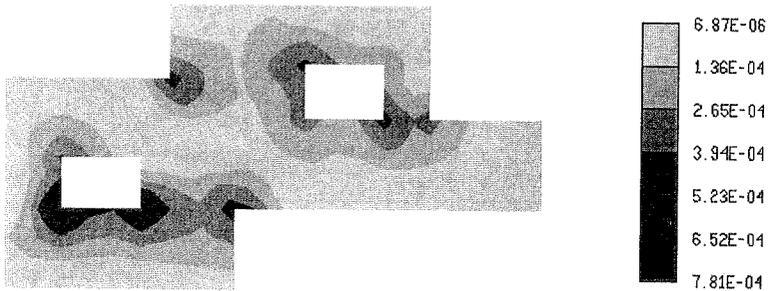


**Bild 5.13:** Endgültige Netze der Elementunterteilungs- und Netzgenerierungsstrategie

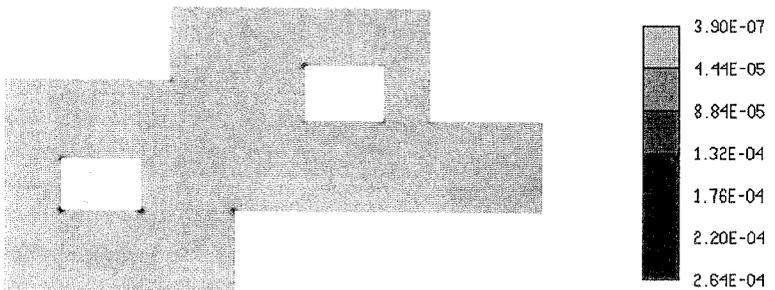


**Bild 5.14:** Verformte Platte (400-fach überhöhte Darstellung)

a) Startnetz der Elementunterteilungsstrategie

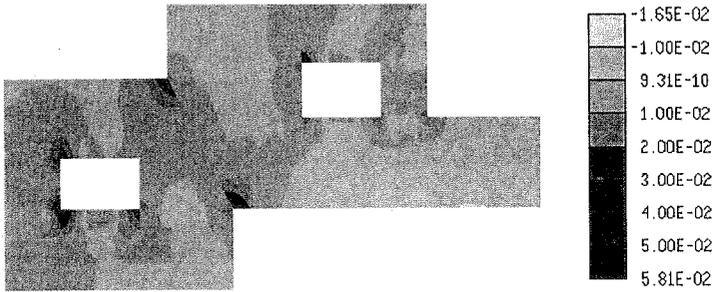


b) endgültiges FE-Netz

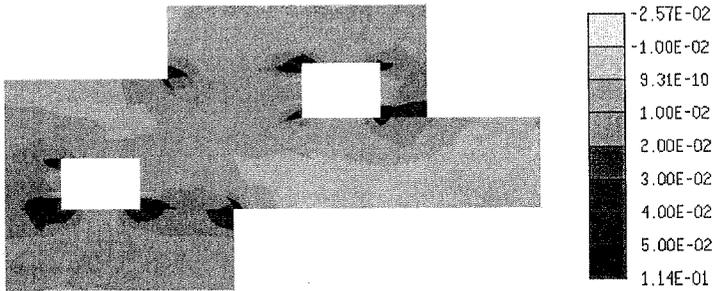


**Bild 5.15:** Geschätzte absolute Fehlerwerte in der Energienorm (geglättet)

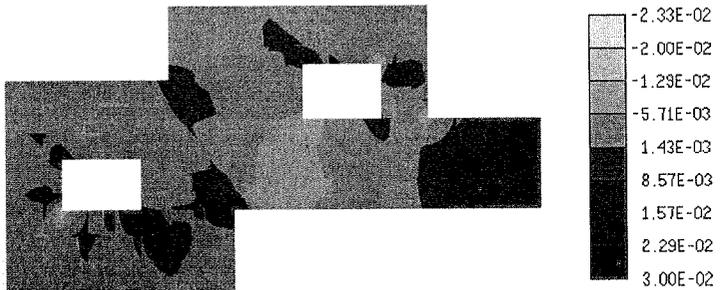
a)  $M_{xx}$  [MNm/m]



b)  $M_{yy}$  [MNm/m]

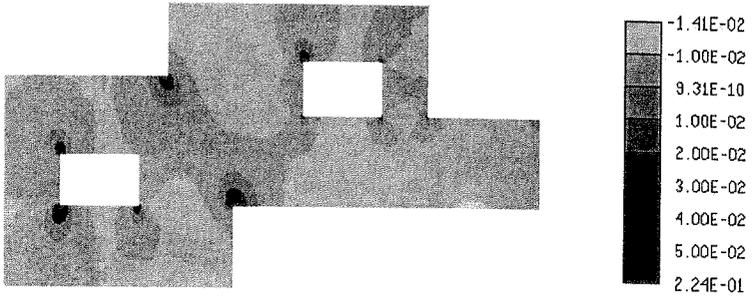


c)  $M_{xy}$  [MNm/m]

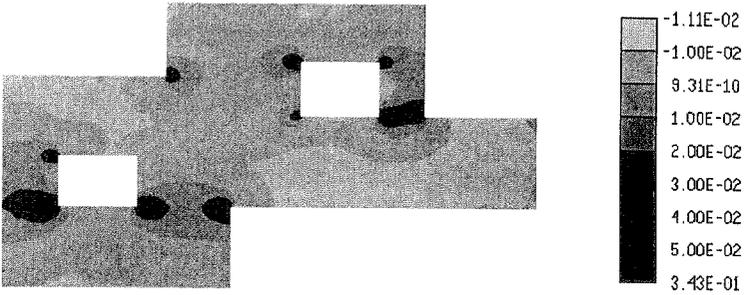


**Bild 5.16:** Momentenverläufe am Startnetz der Elementunterteilungsstrategie (ungeglättet)

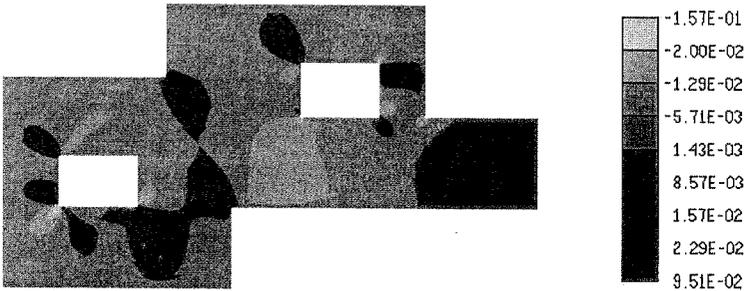
a)  $M_{xx}$  [MNm/m]



b)  $M_{yy}$  [MNm/m]



c)  $M_{xy}$  [MNm/m]



**Bild 5.17:** Momentenverläufe am endgültigen Netz der Elementunterteilungsstrategie (ungeglättet)

Startnetz. Die nach der Elastizitätstheorie an den Singularitäten vorliegenden unendlich großen Momente werden mittels der verfeinerten Elemente besser angenähert. Ein Effekt, der in der Baupraxis aufgrund eines plastischen Verhaltens realer Werkstoffe in diesen Zonen häufig als nachteilig bewertet wird. Tatsächlich resultiert jedoch durch die verbesserte Diskretisierung eine Annäherung der Ergebnisse an die Erfordernisse der Elastizitätstheorie. Für eine realitätsnähere Ermittlung des Strukturverhaltens ist ein Wechsel des Modells, nämlich der Einsatz einer materiell nichtlinearen Werkstoffbeschreibung, erforderlich.

### 5.3 Schalenbeispiel

Schalentragwerke stellen eine besondere Art von Bauwerken dar. Gut geplant, verbinden sie ein minimales Konstruktionsgewicht mit der Fähigkeit, große Lasten abzutragen. Kann dabei ein reiner Membranzustand erreicht werden, entstehen äußerst grazile Schalenbauwerke mit großen Spannweiten. Schalen sind jedoch kaum geeignet, konzentrierte Lasten aufzunehmen, da sie aufgrund der großen Schlankheit nur ein geringes Widerstandsmoment besitzen. Deshalb ist bei der Konstruktion von Schalen darauf zu achten, die Form und Lagerung so zu wählen, daß Biegezustände weitgehend vermieden werden.

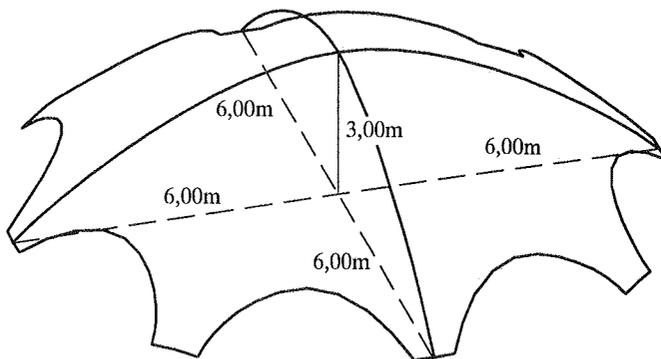
In Bild 5.18a ist das Drahtmodell einer Schale dargestellt. Die 0,04m dicke Schale hat an ihrem Mittelpunkt einen maximalen Stich von 3,00m. Ihre größte Spannweite beträgt 12,00m. Die Lagerung erfolgt tangential an den Schalenfüßen. Alle weiteren Schalenränder sind frei verschieblich.

Für die adaptive Vergleichsberechnung wird das Eigengewicht der Schale als maßgebender Lastfall ausgewählt. Das spezifische Gewicht beträgt  $24\text{kN/m}^3$ , der Elastizitätsmodul  $34.000\text{MN/m}^2$ , und die Querdehnzahl wird mit 0,20 angenommen.

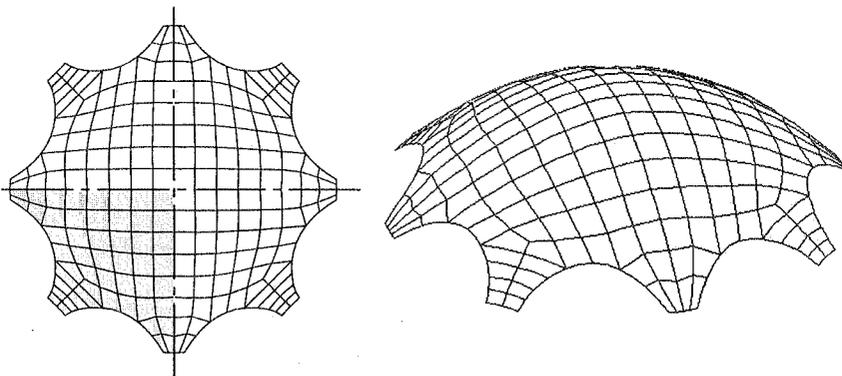
Die Berechnung erfolgt mit neunknotigen vollintegrierten Schalenelementen am Viertelsystem der Schale. Die Ergebnisqualität wird nach Gleichung (2.7) abgeschätzt. Die adaptive Berechnung ist beendet, sobald der relative Gesamtfehler den Wert von 5% unterschreitet.

In Bild 5.18b ist das beiden Strategien gemeinsame symmetrisch ergänzte Startnetz dargestellt. Die Diskretisierung wird mit 51 Elementen für ein Schalenviertel grob gewählt. Dementsprechend verwundert der abgeschätzte relative Gesamtfehler von 19,34% in der Energienorm kaum.

a) Geometriemodell der Schale

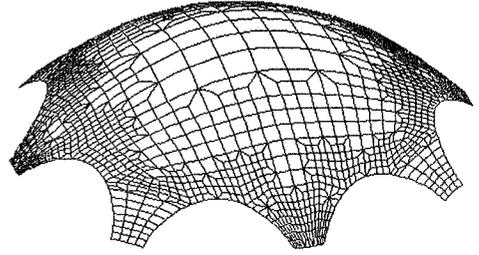
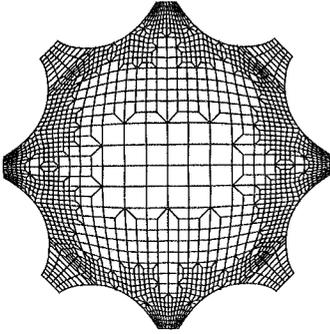


b) Startnetz der Schale

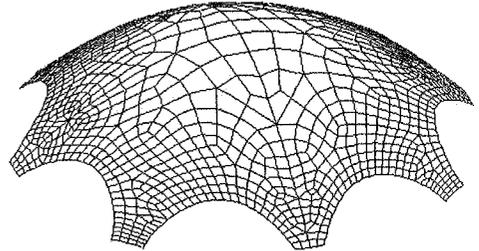
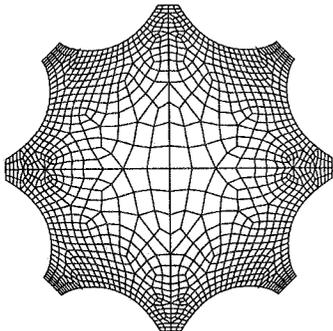
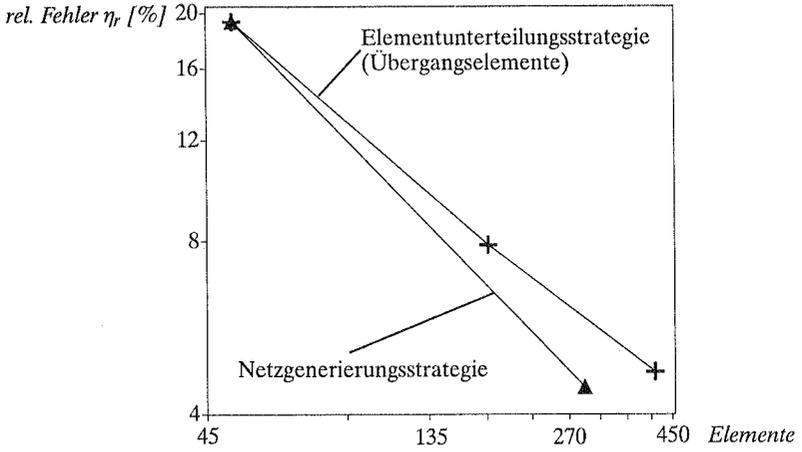


**Bild 5.18:** Geometriemodell und Startnetz der Schale für beide Strategien

Die Netzgenerierungsstrategie erreicht nach nur einem weiteren Netzgenerierungsschritt mit insgesamt 291 Elementen bereits einen geschätzten relativen Fehler von 4,46%. Lediglich einen Iterationsschritt später, also nach insgesamt drei Iterationen unterschreitet der Diskretisierungsfehler der Elementunterteilungsstrategie mit 412 Elementen und einem Fehler von 4,71% die geforderte 5% Fehlerhürde. Die



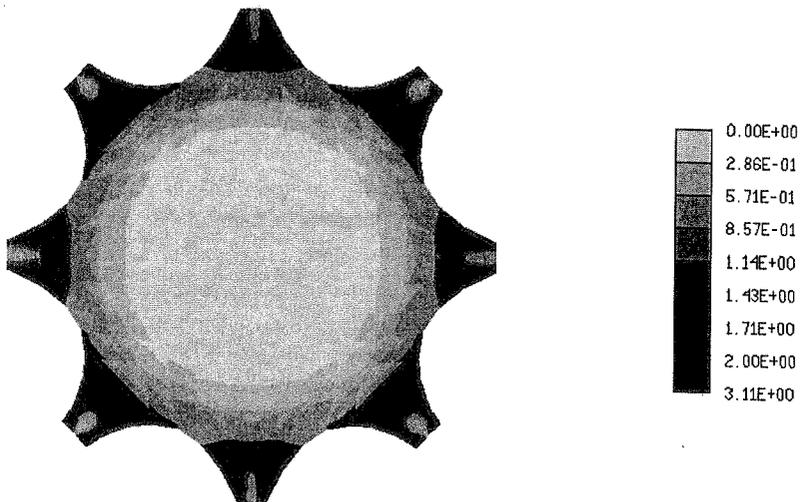
a) Elementunterteilungsstrategie



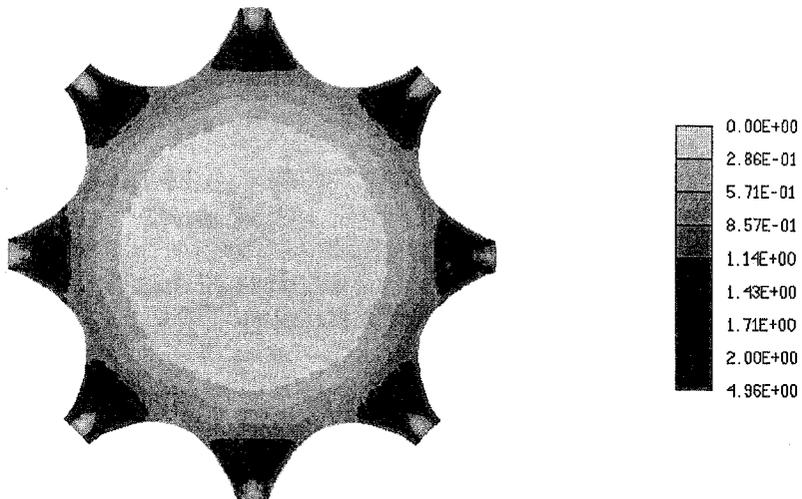
b) Netzgenerierungsstrategie

**Bild 5.19:** Iterationsverläufe und endgültige FE-Netze

a) Startnetz [MN/m<sup>2</sup>]



b) Endgültiges FE-Netz [MN/m<sup>2</sup>]



**Bild 5.20:** Von Mises Vergleichsspannungen an der Schalenoberseite (ungeglättet)

Iterationsverläufe beider Strategien sind in Bild 5.19 zu sehen. Die verhältnismäßig große Anzahl an Elementen bei der Elementunterteilungsstrategie folgt, ebenso wie in den beiden vorangegangenen Beispielen, aus dem Einsatz von Übergangselementen zur Elimination inkonsistenter Knoten.

Beide Strategien zeigen im Scheitelbereich der Schale keine Verfeinerung. Die Netzgenerierungsstrategie (Bild 5.19b) realisiert sogar eine geringe Elementvergrößerung im Scheitelbereich der Schale. Von dort verringert sich die Elementgröße kontinuierlich bis zum Sockelbereich. Beide Strategien (Bild 5.19a,b) diskretisieren benachbarte Schalenbeine unterschiedlich. Dies resultiert zum einen aus der bereits im Startnetz unterschiedlichen Diskretisierung der benachbarten Beine (beeinflusst vor allem das Ergebnis der Elementunterteilungsstrategie). Zum anderen ist die Geometrie der benachbarten Schalenbeine leicht voneinander verschieden, so daß die Lasten ungleich auf die einzelnen Beine verteilt werden.

In Bild 5.20 sind die ungeglätteten von Mises Vergleichsspannungen an der Schalenoberseite, sowohl des Startnetzes (Bild 5.20a), als auch des endgültigen FE-Netzes der Elementunterteilungsstrategie (Bild 5.20b) dargestellt. Deutlich sind Spannungskonzentrationen im Sockelbereich der Schale zu erkennen. Die beiden Bilder sind zwar qualitativ im wesentlichen vergleichbar, die Spannungsverläufe geben jedoch für den Fall des endgültigen FE-Netzes ein deutlich glatteres und teilweise detaillierteres Bild des Spannungsverlaufs, vor allem im Sockelbereich der Schale, wieder.

## 5.4 Wertung

Die vorangegangenen Beispiele zeigen Anwendungen für adaptive Methoden aus dem Scheiben-, Platten- und Schalenbereich. Zum Einsatz kommen sowohl die weitverbreitete Elementunterteilungsstrategie mit Übergangselementen oder gekoppelten Knotenfreiheitsgraden zur Beseitigung inkonsistenter Knoten, wie auch die erst in jüngerer Zeit entwickelte Netzgenerierungsstrategie, die mit Hilfe eines automatischen Netzgenerators in jedem Iterationsschritt ein neues adaptives FE-Netz nach den Vorgaben aus der Fehlerabschätzung erzeugt.

Als wesentliche Vergleichsmaßstäbe dienen die Anzahl der Elemente und die Anzahl der adaptiven Iterationsschritte, welche die Strategien benötigen, um einen vorgegebenen relativen Diskretisierungsfehler zu unterschreiten. Benötigte Computerrechenzeiten bleiben dabei ebenso unberücksichtigt, wie der unterschiedliche Eingabeaufwand zur Erstellung des Startnetzes. Die Computerzeit wird wesentlich durch die Effizienz des

Programmcodes beeinflußt und ist deshalb nicht objektiv vergleichbar. Dem geringen Eingabeaufwand des automatischen Netzgenerators *Freem* für ebene Tragwerke steht mit *Design* ein komplexes Werkzeug zur Generierung von FE-Netzen vor allem für Schalen gegenüber, das den Anwendungsfall der ebenen Tragwerke lediglich als einen Spezialfall betrachtet. Für räumlich gekrümmte Tragwerke greift *Freem* auf die Abbildungsmethode zur Darstellung der Schalenfläche zurück (Abschnitt 4.2.5).

Die Resultate der beiden Strategien lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Netzgenerierungsstrategie benötigt in der Regel eine geringere Anzahl an adaptiven Iterationsschritten als die Elementunterteilungsstrategie um einen vorgegebenen Diskretisierungsfehler zu unterschreiten. Eine während der Fehlerabschätzung ermittelte „optimale“ Elementgröße wird detailgenau realisiert. Im Gegensatz dazu beinhaltet die Elementunterteilungsstrategie lediglich die Möglichkeit, ein Element zu unterteilen oder die Elementfläche unverändert beizubehalten. Ermittelte „optimale“ Elementgrößen können nur grob angenähert werden, was eine größere Anzahl adaptiver Iterationsschritte nach sich zieht.
- Sind die verwendeten finiten Elemente verzerrungsanfällig, ergeben sich in der Netzgenerierungsstrategie mehr Freiheitsgrade als in der Elementunterteilungsstrategie (insbesondere bei gekoppelten Knotenfreiheitsgraden). In der Regel ist eine große Anzahl von Elementen eines adaptiven FE-Netzes nach der Netzgenerierungsstrategie schwach verzerrt. Dagegen produziert die Elementunterteilungsstrategie im allgemeinen lediglich verzerrte Übergangselemente, welche den Diskretisierungsfehler kaum nachteilig beeinflussen, da sie nur dort auftreten, wo ursprünglich keine Verfeinerung gewünscht ist.
- Zwischen der Qualität des endgültigen FE-Netzes der Elementunterteilungsstrategie und der Qualität des Startnetzes besteht ein unmittelbarer Zusammenhang. Vorhandene Elementgeometrien können während der adaptiven Iteration nicht verändert werden. Bei der Netzgenerierungsstrategie ist die Netztopologie unabhängig vom FE-Netz des vorangegangenen Iterationsschritts.
- Übergangselemente zur Beseitigung inkonsistenter Knoten bei der Elementunterteilungsstrategie reduzieren den Diskretisierungsfehler nur unwesentlich. Die Anzahl an Freiheitsgraden steigt dagegen beträchtlich gegenüber einer Knotenkopplung.

Beide Strategien liefern bei obigen Beispielen brauchbare Ergebnisse. Welcher der beiden letztendlich der Vorzug gebührt, hängt von der konkreten Anwendung, dem eingesetzten FE-Programm und den subjektiven Wünschen des Anwenders ab. Die

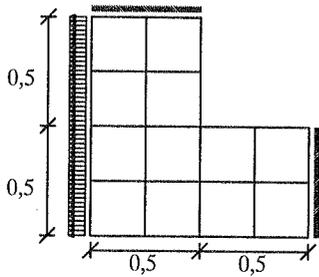
Ergebnisse der beiden Strategien differieren bei keinem der vorgestellten Beispiele wesentlich voneinander. Das Konvergenzverhalten sowohl der Elementunterteilungsstrategie, als auch der Netzgenerierungsstrategie, basieren auf einer Fehlerverminderung durch das Einbringen zusätzlicher Freiheitsgrade in das System. Die Konvergenzordnung beider Strategien wird nach Gleichung (3.2) bestimmt. Lediglich die Konvergenzgeschwindigkeit kann im Einzelfall variieren.

Wesentlicher, als die Wahl der Strategie ist es, die grundsätzliche Bedeutung des Einsatzes von adaptiven Methoden zu betonen. In Bild 5.21 sind drei FE-Netze dargestellt, deren geschätzter relativer Fehler nach Gleichung (2.6) bei etwa 2% liegt. Das homogen verfeinerte FE-Netz benötigt 768 Elemente (6336 Freiheitsgrade), während das adaptive FE-Netz mit einer Verfeinerungsschranke von  $\xi_i=1,0$  nach Gleichung (3.5) lediglich 136 Elemente (1154 Freiheitsgrade) enthält. Die geschätzten relativen Fehler sind mit 1,98% für das homogene Netz und 2,01% für das adaptiv verfeinerte FE-Netz annähernd gleich.

Setzt man die Rechenzeit überschlagsweise nur in Abhängigkeit der Freiheitsgrade  $n$  mit dem Faktor  $n^{(7/3)}$  für durchschnittliche direkte Gleichungslöser an, so ergibt sich eine 53-fach größere Rechenzeit des homogenen FE-Netzes zum gleichwertigen adaptiven Netz. Selbstverständlich muß davon die Zeit abgezogen werden, welche durch die adaptive Iterationsschleife und die mehrmalige Berechnung des adaptiven FE-Netzes hinzukommt. Dennoch ist ein deutlicher Rechenzeitgewinn der adaptiven Methoden zu verzeichnen.

Adaptive Methoden erreichen, aufgrund der vergleichsweise wenigen Freiheitsgrade, speicherplatzbedingte Beschränkungen der Programme weit weniger häufig als homogene Verfeinerungsmethoden. Sie ermöglichen deshalb für komplexe Strukturen oftmals als einziges Verfahren eine Lösung mit großer Genauigkeit.

Das dritte Netz in Bild 5.21c verdeutlicht den natürlichen Spielraum, welcher in den adaptiven Methoden enthalten ist. Mit nur 88 Elementen erzielt dieses FE-Netz einen relativen Fehler von 1,80%. Dieses Netz ergibt sich für eine Verfeinerungsschranke von  $\xi_i=7,0$  nach Gleichung (3.5). Der Unterschied von 48 Elementen zwischen dem ausgefeilten Ergebnis und dem Standardfall der Elementunterteilungsstrategie ist zwar deutlich, jedoch verglichen zu oben beschriebenem homogenen FE-Netz für dieses Beispiel bedeutungslos.



Startnetz:

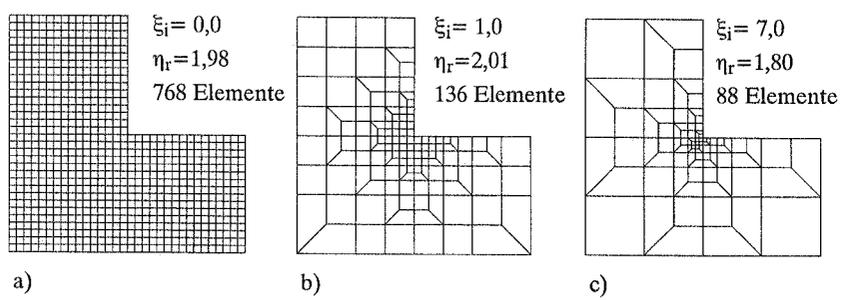
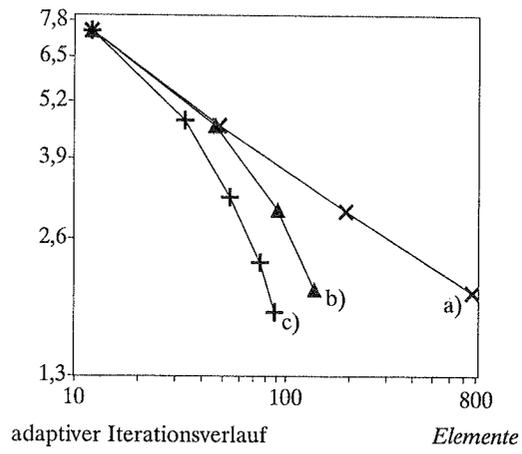
Elastizitätsmodul  $E = 1,0$

Gleichstreckenlast  $q = 1,0$

Querdehnzahl  $\nu = 0,0$

Scheibendicke  $d = 0,1$

gesch. rel. Fehler  $\eta_r$



**Bild 5.21:** Vergleich eines homogen verfeinerten Netzes mit adaptiven FE-Netzen



## 6 ADAPTIVE BERECHNUNGEN UND MEHRERE LASTFÄLLE

### 6.1 Allgemeines

Adaptiven Methoden gebührt zur Berechnung von Tragwerken mit finiten Elementen für große Genauigkeiten in der Lösung der Vorzug gegenüber Berechnungen mit sehr feinen homogenen Netzen. Ein Grund für den zögerlichen Einzug dieser Methoden zur Analyse baupraktischer Problemstellungen ist sicherlich die bis dato fehlende Option zur Behandlung der allgemein üblichen Vielzahl unterschiedlicher Lastfälle. Ein fertiges, adaptiv generiertes FE-Netz ist spezialisiert auf die jeweilige Lastfallkombination unter der es ermittelt wird. Für andere Lastfallkombinationen an abweichenden Lastangriffsorten fällt die Ergebnisqualität des Netzes im allgemeinen deutlich ab.

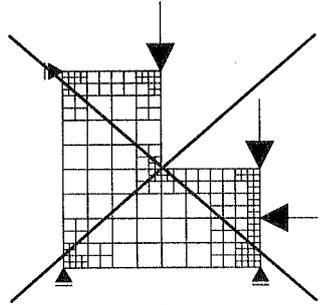
Die Lösung dieses Problems liegt jedoch nahe: Warum nicht alle Einzellastfälle bereits bei der Generierung eines adaptiven FE-Netzes berücksichtigen? Sind die adaptiven Netze optimal für jeden einzelnen Lastfall, so ist ebenfalls die Qualität der Lastfallkombinationen aufgrund der Möglichkeit zur Superposition der Schnittgrößen in der linearen Elastizitätstheorie ausreichend [73,78].

In Bild 6.1 sind drei Möglichkeiten dargestellt, eine Anzahl von Einzellastfällen bereits bei der iterativen Generierung des adaptiven FE-Netzes zu berücksichtigen. Definiert man ein äußerst feines homogenes FE-Netz (Bild 6.1a), muß kein Gedanke an adaptive Methoden verschwendet werden. Für kleine Probleme ist diese Vorgehensweise durchaus sinnvoll. Die Kapazitätsgrenze eines Computers ist jedoch mit feinen homogenen Diskretisierungen schnell erreicht. Abhilfe schaffen die adaptiven Methoden. Eine Verringerung des Rechenzeitbedarfs und eine Erweiterung der berechenbaren Problemgröße ist zu erreichen, indem für jeden Lastfall ein maßgeschneidertes adaptives FE-Netz generiert wird (Bild 6.1b). Die Ergebnisse können auf ein, allen Lastfällen gemeinsames Gitter zur Weiterverarbeitung übertragen werden. Der Rechenzeitbedarf wird noch weiter reduziert, wenn ein gemeinsames adaptives FE-Netz für alle Lastfälle generiert wird. Dabei ist jedoch zu beachten, daß jeder Lastfall explizit bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden muß (Bild 6.1c).

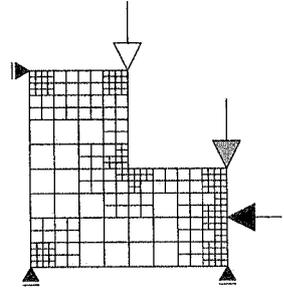
Werden dagegen alle Lastfälle zu einem „Netzdimensionierungslastfall“ superponiert, entstehen häufig FE-Netze, die für einzelne Lastfälle nur geringe Qualitäten besitzen



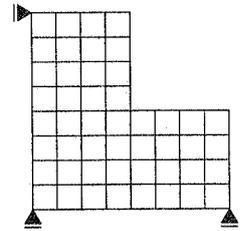
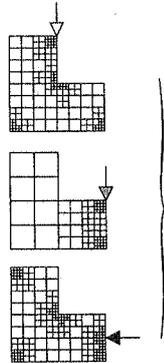
d) Einheitliches Netz aus superponiertem Lastfall (im allgemeinen nicht zulässig)



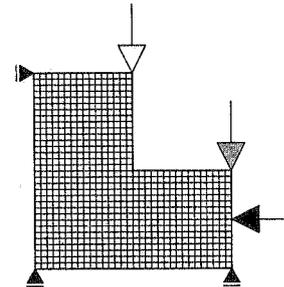
c) Auswahl eines Verfeinerungsindikators aus allen Einzellastfällen.



b) Jedem Lastfall ein eigenes Netz. Übergabe der Ergebnisse an ein gemeinsames Grundgitter.



a) Sehr feines homogenes Netz.



Rechenzeit

Bild 6.1: Behandlung mehrerer Lastfälle

(Bild 6.1d). Diese Vorgehensweise liefert ausschließlich dann brauchbare Ergebnisse, wenn sich die einzelnen Lastfälle in ihrer Wirkung unterstützen. Beliebige Lastfallkombinationen können sich gegenseitig aufheben, oder zumindest in ihrer Wirkung beeinträchtigen. Dies führt zu einem veränderten Tragverhalten der Struktur gegenüber dem Auftreten einzelner Lastfälle.

## **6.2 Generieren eines maßgeschneiderten FE-Netzes für jeden Lastfall**

Für jeden Lastfall wird ein maßgeschneidertes FE-Netz erzeugt. Die Ergebnisse aus der adaptiven Berechnung werden auf ein, allen Lastfällen gemeinsames Grundgitter übertragen. Dort können sie ausgewertet und weiterverarbeitet werden (Bild 6.1b). Das Verfahren ist verhältnismäßig einfach in ein bestehendes Finite Element Programm zu implementieren, sofern die Lastfälle sukzessive abgearbeitet werden. Innerhalb einer großen Lastfallschleife laufen die bekannten adaptiven Methoden für nur einen Lastfall ab. Am Ende jedes adaptiven Iterationszykluses müssen die Ergebnisse auf ein benutzerdefiniertes homogenes Referenzgitter durch geeignete Interpolationen der Ergebnisse übertragen werden (Abschnitt 4.2.6).

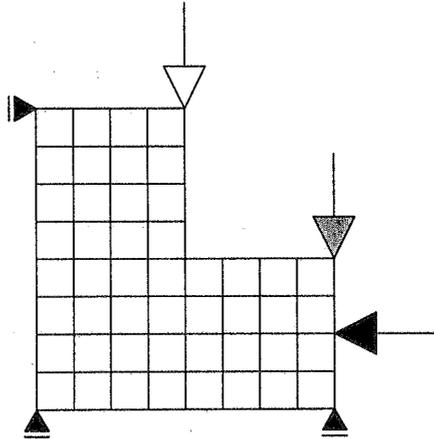
Das Vorgehen garantiert für jeden Lastfall die geforderte Ergebnisqualität. Jedes einzelne Netz besitzt wesentlich weniger Freiheitsgrade als ein gleichwertiges homogenes FE-Netz. Das kann, insbesondere bei komplexen Tragwerken, für die Berechenbarkeit eines Systems entscheidend sein.

Als nachteilig erweist sich die Abhängigkeit des Rechenzeitbedarfs von der Anzahl der Lastfälle, da für jeden Lastfall in jedem adaptiven Iterationsschritt die Systemsteifigkeitsmatrix erstellt und invertiert werden muß. Ein zusätzlicher Invertierungsaufwand fällt nur bei der Verwendung von direkten Gleichungslösern an, da iterative Gleichungslöser grundsätzlich die Steifigkeitsmatrix für jeden Lastfall invertieren. Hinzu kommt ein organisatorischer Aufwand in der Bereithaltung mehrerer FE-Netze. Für kleinere Systeme und viele Lastfälle wird dieses Vorgehen deshalb keine wesentliche Zeitersparnis gegenüber der Berechnung mit einem gleichwertigen homogenen FE-Netz erzielen.

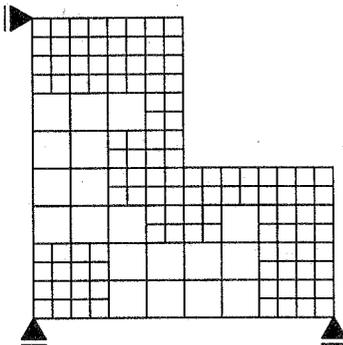
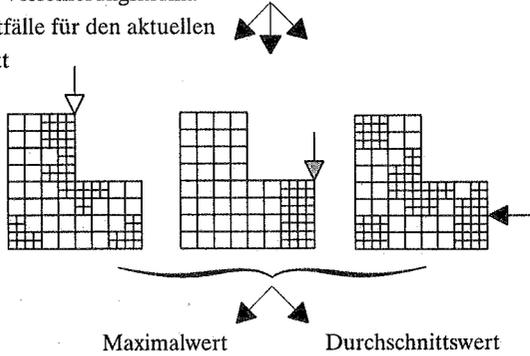
## **6.3 Auswahl eines Verfeinerungsindikators aus allen Einzellastfällen**

Erzeugt man nur ein gemeinsames adaptives FE-Netz, berücksichtigt jedoch jeden einzelnen Lastfall, so erhält man ein für alle Lastfälle gleichermaßen zulässiges FE-Netz

Ausgangsnetz



Berechnen der Verfeinerungsindikatoren aller Lastfälle für den aktuellen Iterationsschritt



resultierendes  
FE-Netz

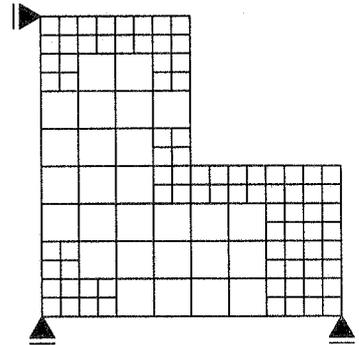


Bild 6.2: Erzeugen eines gemeinsamen FE-Netzes

(Bild 6.1c). Dazu wird in jedem adaptiven Iterationsschritt an dem gemeinsamen FE-Netz eine Fehlerabschätzung für jeden Lastfall durchgeführt. Das endgültige Netz ist gefunden, wenn die Ergebnisqualität für jeden Lastfall ausreicht. Andernfalls muß ein feineres FE-Netz gebildet werden (Bild 6.2). Es ist naheliegend, zur Ermittlung des maßgebenden Verfeinerungsindikators eines Elements den Maximalwert der Verfeinerungsindikatoren aller Lastfälle aus Gleichung (3.5) zu definieren:

$$\xi_i := \text{MAX}(\xi_{i,L1}; \xi_{i,L2}; \dots; \xi_{i,Ln}) \quad (6.1)$$

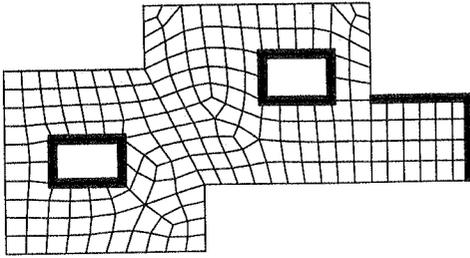
Der Maximalwert der Verfeinerungsindikatoren garantiert die Berücksichtigung jedes Lastfalls, da der Indikator immer dann den Grenzwert zur Verfeinerung übersteigt, wenn auch nur ein Lastfall dies fordert. Sind für ein Tragwerk mehrere Lastfälle definiert, reicht es häufig aus, besonders beim Einsatz der Elementunterteilungsstrategie, den Mittelwert der Verfeinerungsindikatoren als maßgebenden Indikator zu bestimmen:

$$\xi_i := \frac{\sum_{j=1}^n \xi_{i,Lj}}{n} \quad (6.2)$$

Die Berechnung nach Gleichung (6.2) kann folgendermaßen begründet werden:

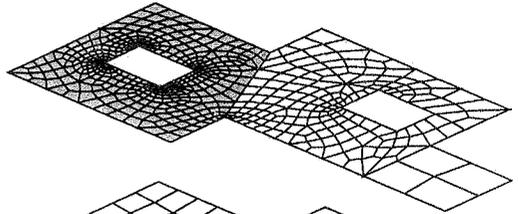
- Ein FE-Netz mit einer gewissen Ergebnisqualität für einen Lastfall ist nicht das einzig mögliche, sondern lediglich ein mögliches Netz dieser Qualität. Wird also ein FE-Netz an einer Stelle aufgrund der Forderung des Lastfalls x verdichtet, erhöht sich häufig die Qualität des Ergebnisses für einen Lastfall y, der an jener Stelle keine Verdichtung fordert.
- Die Elementunterteilungsstrategie reduziert die Fläche der verfeinerten Elemente genau auf ein Viertel der ursprünglichen Elementfläche. Meist genügt jedoch eine kleinere Flächenverringern, um den Elementfehler auf das gewünschte Maß zu vermindern. Ist das bei vielen Elementen eines FE-Netzes der Fall, führt die herkömmliche Verfeinerung zu einer unwirtschaftlichen Unterschreitung des geforderten Gesamtfehlers. Die Mittelwertbildung der Verfeinerungsindikatoren bei mehreren Lastfällen mindert diesen negativen Effekt.

Meist benötigt das Vorgehen nach Gleichung (6.2) eine größere Anzahl an adaptiven Iterationsschritten. Das endgültige FE-Netz beinhaltet jedoch häufig weniger Elemente als beim Vorgehen nach Gleichung (6.1). Für die Elementunterteilungsstrategie stellt es eine ernst zu nehmende Alternative zur Maximalwertbildung dar. Beim Einsatz der Netzgenerierungsstrategie, welche geforderte Elementgrößen ausgesprochen flexibel

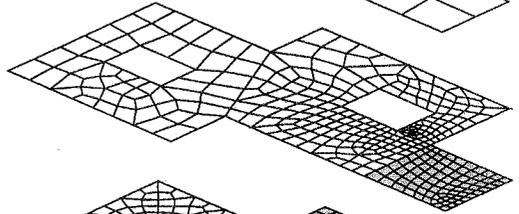


Startnetz mit Lagerung

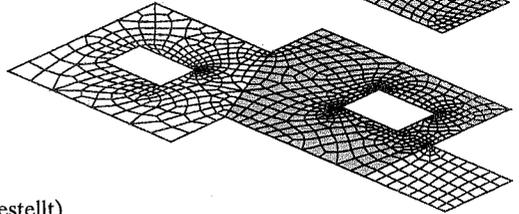
654 Elemente



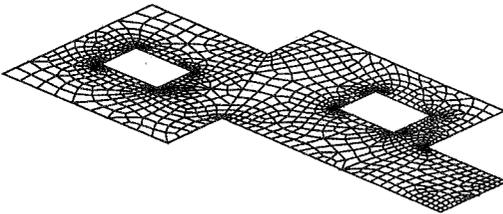
331 Elemente



816 Elemente



Maßgeschneiderte FE-Netze  
für die einzelnen Lastfälle  
(belastetes Gebiet schattiert dargestellt)



Ein FE-Netz, gleichermaßen geeignet für alle drei Lastfälle  
(1212 Elemente)

**Bild 6.3:** Adaptive Berechnung einer Deckenplatte

realisiert, empfiehlt sich jedoch die theoretisch fundiertere Methode der Maximalwertbildung.

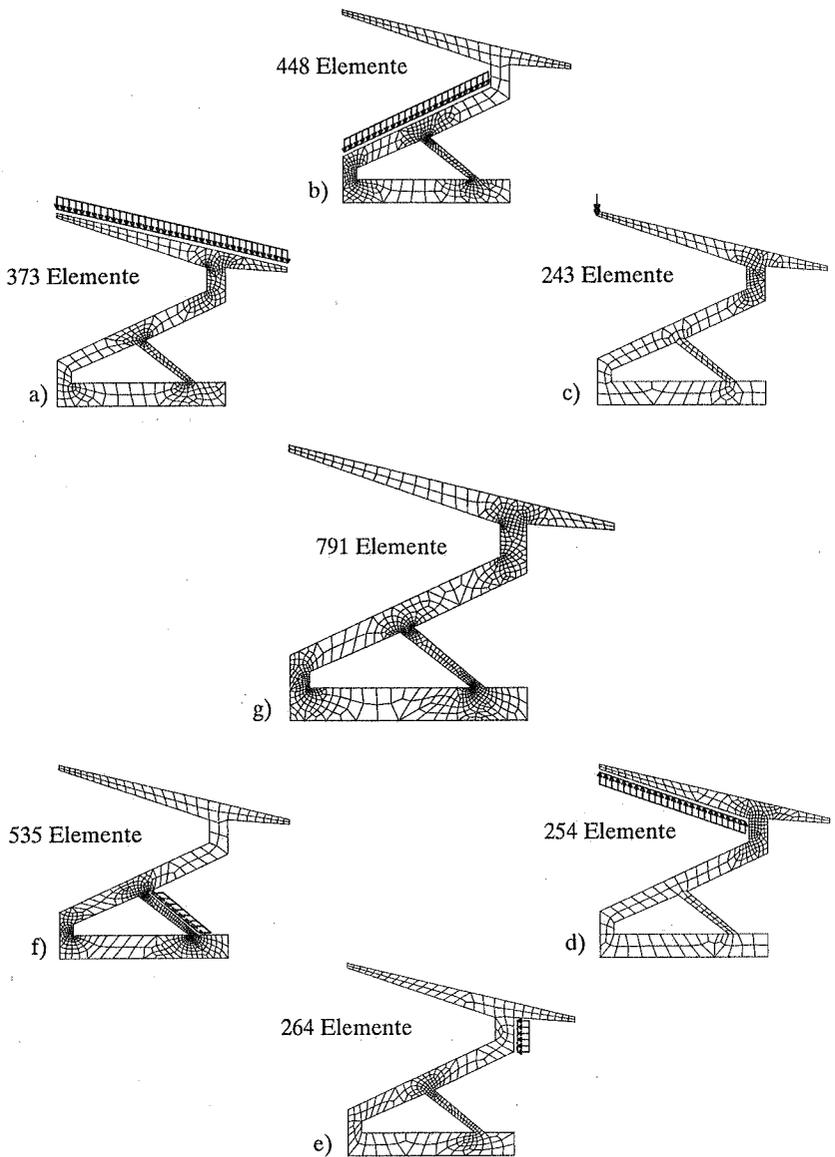
Im allgemeinen darf davon ausgegangen werden, daß ein für alle Lastfälle geeignetes FE-Netz mehr Elemente beinhaltet als spezielle, für jeweils einen Lastfall zugeschnittene Netze (Abschnitt 6.2). Elementverfeinerungszonen werden jedoch nicht nur von der Last, sondern auch wesentlich von der Geometrie der Struktur und den Lagerbedingungen beeinflusst. Deshalb ergeben sich für unterschiedliche Lastfälle oftmals ähnliche FE-Netze. Ein kombiniertes FE-Netz aus allen Lastfällen enthält in vielen der untersuchten Beispielen häufig nur eine unwesentlich höhere Anzahl an Elementen, als die auf lediglich einen Lastfall spezialisierten Netze (Bild 6.3 und Bild 6.4).

Für die Deckenplatte in Bild 6.3 sind drei Lastfälle definiert. Im oberen Teil der Abbildung wird für jeden Lastfall (das belastete Gebiet ist schattiert dargestellt) ein separates FE-Netz erzeugt. Das im unteren Teil von Bild 6.3 dargestellte FE-Netz ist für alle drei Lastfälle gleichermaßen geeignet. Es wird unter der Auswahl des maximalen Verfeinerungsindikators in jedem Iterationsschritt erzeugt. Trotzdem enthält es mit 1212 Elementen nicht allzu viele Elemente mehr, als das dichteste der maßgeschneiderten Netze für jeden einzelnen Lastfall (654, 331 und 816 Elemente). Werden alle Lastfälle simultan auf das System aufgebracht (homogene Belastung), entstehen für dieses Beispiel etwa gleich viele Elemente, wie im kombinierten FE-Netz (Bild 6.3).

In Bild 6.4 ist der Rahmen einer Zuschauertribüne zu erkennen. Das Gesamttragwerk ist an der Unterseite gleichmäßig gelagert. Exemplarisch sind sechs mögliche Lastfälle definiert. Die Tribüne ist durch neunknotige, vollintegrierte Scheibenelemente diskretisiert und wird adaptiv mit Hilfe der Netzgenerierungsstrategie berechnet. Auch in diesem Beispiel enthält das für alle Lastfälle gültige FE-Netz (Bild 6.4g) nicht wesentlich mehr Elemente, als das feinste Netz für nur einen Lastfall (Bild 6.4f).

Die entscheidenden Vorteile dieses Verfahrens lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Es muß nur ein FE-Netz erzeugt und damit in jedem adaptiven Iterationsschritt für alle Lastfälle nur eine Steifigkeitsmatrix erstellt und dreieckszerlegt werden (direkter Gleichungslöser). Lediglich bei der Rückrechnung sind alle Lastfälle einzubeziehen. Da das gemeinsame Netz nur unwesentlich mehr Elemente enthält als FE-Netze für einzelne Lastfälle, ergibt sich im allgemeinen ein Rechenzeitgewinn gegenüber der Verwendung von mehreren adaptiven FE-Netzen.
- Die nicht zu unterschätzende Gefahr einer Verwechslung der Netze ist ausgeschlossen, weil das FE-Netz für alle Lastfälle gleichermaßen zulässig ist. Die Ergebnisqualität ist trotzdem für jeden einzelnen Lastfall sichergestellt.



**Bild 6.4:** Adaptive Berechnung einer Tribüne unter sechs Lastfällen a) - f).  
Gemeinsames Netz für alle Lastfälle g).

Für Lastfallkombinationen, die sich in ihrer Wirkung aufheben, werden vereinzelt höhere prozentuale Fehlerwerte festgestellt als für die einzelnen Lastfälle. Bei der Kombination sich in ihrer Wirkung aufhebender Lastfälle, kann das Tragverhalten eines Systems deutlich unterschiedlich zum Tragverhalten bei einzelnen Lastfällen sein. Die Kräfte der kombinierten Lastfälle „schließen sich kurz“, großteils ohne über die Auflager abgetragen zu werden. Tragwerksteile, die auf der Wirkungslinie der Lastfälle liegen und bei der Berücksichtigung der einzelnen Lastfälle von geringer Bedeutung sind, können einen relativen Anstieg des Fehlers verzeichnen. Im gesamten Tragwerk wird dagegen aufgrund des „Kräftekurzschlusses“ eine vergleichsweise geringe Tragwerksenergie aktiviert, so daß das Verhältnis aus Fehlerenergie und Tragwerksenergie groß werden kann. Absolut betrachtet, sind jedoch bei allen untersuchten Beispielen sowohl die Fehlerenergie, als auch die Tragwerksenergie klein gegenüber den aktivierten Energien der Einzellastfälle. Ebenso sind die zugehörigen Spannungen, absolut gesehen, sehr gering, so daß der größere relative Fehler als bedeutungslos erscheint.



## 7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Aus mehreren Bausteinen, welche in den einzelnen Abschnitten beschrieben werden, wird ein weitgehend automatisiertes Gesamtkonzept der h- und r-Version zur Berechnung von Flächentragwerken zusammengefügt. Es läßt sich in der vorliegenden Form mit geringem Aufwand in bestehende Finite Element Programme integrieren.

Fehlerkriterien stellen ein Standbein adaptiver Methoden dar. Man unterscheidet a priori Kriterien, welche auf geometrischen Überlegungen basieren, und a posteriori Kriterien, die aus Informationen über die Berechnungsergebnisse gewonnen werden. A priori Kriterien vermitteln ein unscharfes Bild von der Qualität einer Diskretisierung. Quantitative Aussagen über die Auswirkungen einzelner verzerrter Elemente auf das Lösungsverhalten des gesamten FE-Netzes können aufgrund fehlender Untersuchungsergebnisse nur ungenau getroffen werden. Dasselbe gilt für Aussagen über die Güte einer Approximation gekrümmter Ränder und Flächen mit finiten Elementen. Vor einem sinnvollen Einsatz von a priori Kriterien in praxisorientierten Anwendungen sind deshalb weitere Untersuchungen bezüglich des tatsächlichen Lösungsverhaltens von FE-Netzen für unterschiedliche Strukturen erforderlich. A posteriori Fehlerkriterien beinhalten eine wesentlich detailliertere Aussagekraft. Der erforderliche numerische Aufwand zur Gewinnung dieser Kriterien ist jedoch größer als für a priori Kriterien. An zwei Beispielen werden drei unterschiedliche Verfahren zur a posteriori Fehlerabschätzung untersucht. Dabei zeigt der residuale Fehlerestimator erwartungsgemäß die besten Ergebnisse. Dennoch eignet sich der wesentlich einfacher zu implementierende Glättungsindikator gut zur Steuerung adaptiver Verfeinerungen. Auch er zeigt in den beschriebenen Beispielen brauchbare Leistungen. Ein heuristischer Verfeinerungsindikator nach dem Knotengleichgewicht liefert ebenfalls gute Ergebnisse in den Testbeispielen. Sie liegen in der Regel zwischen den Ergebnissen der beiden anderen Verfahren.

Strategien zur Netzverdichtung stellen das zweite Standbein adaptiver Methoden dar. Neben der üblichen hierarchischen adaptiven Netzverfeinerung (Elementunterteilungsstrategie), steht mit der Netzgenerierungsstrategie ein leistungsfähiges Werkzeug für adaptive Methoden zur Verfügung. Dabei wird in jedem adaptiven Iterationsschritt ein völlig neues FE-Netz generiert. Der erforderliche automatische Netzgenerator ist aus der Klasse der Advancing Front Method. Er benötigt nur wenige Eingabeparameter zur Generierung von homogenen Dreiecks- oder Vierecksnetzen. Adaptive Netze werden detailgenau aus den Elementdichteinformationen eines Hintergrundnetzes generiert. Im allgemeinen dient das FE-Netz des vorangegangenen adaptiven Iterationsschritts als aktuelles Hintergrundnetz. Die Netzgenerierungsstrategie erzeugt nach nur wenigen

Iterationsschritten ein adaptives FE-Netz mit einem gewünschten Diskretisierungsfehler. Durchschnittlich konvergiert sie einen Iterationsschritt früher als die Elementunterteilungsstrategie.

Der Einsatz adaptiver Methoden in der Baupraxis erfordert die Integration mehrerer Lastfälle in das beschriebene Konzept. In Abhängigkeit von der Anzahl der Lastfälle und der Art des verwendeten Gleichungslösers, ist die Verwendung unterschiedlicher Strategien sinnvoll. Maßgeschneiderte FE-Netze können ohne zusätzliche Überlegungen für jeden Lastfall generiert werden. Die Resultate werden auf ein gemeinsames Referenzgitter übertragen. Von dort sind sie verhältnismäßig einfach zu superponieren und weiter zu verarbeiten. Der Einsatz dieses Verfahrens ist sinnvoll, wenn nur wenige Lastfälle auf ein System aufgebracht werden, da für jeden Lastfall in jedem adaptiven Iterationsschritt eine Steifigkeitsmatrix erstellt und invertiert werden muß. Allgemeiner in der Anwendung, ist die Generierung eines adaptiven FE-Netzes, welches für jeden Lastfall zuverlässige Ergebnisqualitäten garantiert. Dies wird durch eine Auswahl der Verfeinerungsindikatoren aus allen Lastfällen erreicht. Wie die Beispiele zeigen, enthält das adaptive FE-Netz, nach dieser Strategie erzeugt, nicht wesentlich mehr Elemente als maßgeschneiderte FE-Netze. Die beschriebenen Ergebnisse beziehen sich auf den üblichen Einsatz von direkten Gleichungslösern. Die Verwendung iterativer Lösungsverfahren könnte eine Verschiebung der Resultate zu Gunsten maßgeschneiderter FE-Netze bewirken, da diese generell für jeden Lastfall die Steifigkeitsmatrix invertieren.

Das vorgestellte adaptive Konzept ist geeignet, FE-Diskretisierungen einer gewünschten Genauigkeit zu erstellen, ohne einen über die Erstellung der Eingabedaten hinausreichenden Anwendereingriff zu bedingen. Dennoch sei vor dem Glauben gewarnt, mit diesem Konzept liege ein Expertensystem vor, welches den konstruktiven Ingenieur ersetze. Gerade die Wahl eines geeigneten mechanischen Modells für die Analyse mit finiten Elementen und die korrekte Interpretation der gewonnenen Resultate, sind die Crux in der Beurteilung einer Tragwerksanalyse. Diese Entscheidungen kann von einem adaptiven Konzept nur vorbereitet, aber nicht getroffen werden. Darüberhinaus bedürfen für zukünftige Arbeiten folgende Problembereiche genauerer Untersuchungen:

- Die Genauigkeit der Fehlervorhersage aus a priori Kriterien sollte verbessert werden. Insbesondere die Fragestellung des Verhaltens willkürlich verzerrter Elemente in unstrukturierten FE-Netzen ist bis heute nicht erforscht.
- Die durchgeführte Verfeinerung an Singularitäten erscheint aus praxisnaher Sichtweise als unsinnig, da sie tatsächlich durch plastische Umlagerungen

vermieden werden. Die verwendete Elastizitätstheorie beinhaltet jedoch Singularitäten. Eine Verbesserung der Ergebnisse zieht deshalb das „Herausarbeiten“ dieser Singularitäten folgerichtig nach sich. Es wäre zu prüfen, inwieweit heuristische Methoden, welche eine Verfeinerung bei Überschreiten vorgegebener Spannungswerte unterbinden, sinnvoll eingesetzt werden können.

- Eine Erweiterung der vorgestellten Methoden, insbesondere der Fehlerabschätzung, auf geometrische sowie materielle Nichtlinearität ist wünschenswert.



## 8 LITERATUR

- [1] AKIN J. E., (1994) "Finite Elements for Analysis and Design", *Academic Press, Harcourt Brace & Company, Publishers.*
- [2] ANDEFINGER U., (1991) „Untersuchung zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke“, *Bericht Nr. 13 am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.*
- [3] ARGYRIS J. H., WILLAM K. J., (1974) "Some considerations for the evaluation of finite element models", *Nuclear Eng. Design*, Vol. 28, S. 76-96.
- [4] BABUSKA I., ELMAN H. C., (1993) "Performance of the h-p version of the finite element method with various elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 36 S. 2503-2523.
- [5] BABUSKA I., MILLER A., (1981) "A posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method", *University of Maryland, Inst. for Physics, Sci. and Tech.*, Tech. Note BN-968.
- [6] BABUSKA I., MILLER A., (1984) "The post processing approach in the finite element method: Part III a-posteriori error estimates and adaptive mesh selection", *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 20, S. 2311-2324.
- [7] BABUSKA I., RHEINBOLDT W. C., (1978) "A-posteriori error estimates for the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, S. 1597-1615.
- [8] BABUSKA I., SZABO B., (1982) "On the rates of convergence of the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, S. 323-341.
- [9] BAEHMANN P. L., WITTCHEN S. L., SHEPHARD M. S., GRICE K. R., YERRY M. A., (1987) "Robust, geometrically based, automatic two dimensional mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, S. 1043-1078.
- [10] BAUMANN M., (1989) „Adaptive Verbesserung von Finite Element Netzen unter Verwendung von Fehlerindikatoren“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.*
- [11] BAUMANN M., (1994) „Adaptive Finite Elemente Konzepte zur Analyse von Schalenträgwerken“, *Schriftenreihe Heft 13 am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.*
- [12] BELLMANN J., (1987) „Hierarchische Finite-Element-Ansätze und adaptive Methoden für Scheiben- und Plattenprobleme“, *Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I der TU München, Heft 21.*
- [13] BENTLEY J. L. (1979) "Multidimensional Binary Search Trees in Database Applications", *IEEE Transactions on Software Engng.*, Vol. SE-5, Nr. 4 S. 333-340.

- [14] BLACKER T. D., STEPHENSON M. B. (1991) "Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 32, S. 811-847.
- [15] BLETZINGER K.-U., (1990) „Formoptimierung von Flächentragwerken“, *Bericht Nr. 11 am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*.
- [16] BOWYER A., (1981) "Computing Dirichlet tessellations", *Comput. J.*, Vol. 24 Nr.2, S. 162-166.
- [17] BREMER C., (1986) „Algorithmen zum effizienten Einsatz der Finite-Element-Methode“, *Bericht Nr. 86-48 am Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig*.
- [18] BRONSTEIN I. N., SEMENDJAJEW K. A., (1979) „Taschenbuch der Mathematik“, *Nachdruck der 20. Auflage*, Verlag Harri Deutsch.
- [19] BUGEDA G., OÑATE E., (1994) "Adaptive techniques for elliptic problems", *CIVIL-COMP Ltd, Edinburgh, Scotland*, S. 77-84.
- [20] BYKAT A., (1983) "Design of recursive, shape controlling mesh generator", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, S. 1375-1390.
- [21] CAREY G. F., ODEN J. T., (1984) "Finite elements computational aspects", *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*, III.
- [22] CAVENDISH J. C., (1974) "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the FE-Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 8, S. 679-696.
- [23] CHENG F., JAROMCZYK J. W., LIN J.-R., CHANG S.-S., LU J.-Y., (1989) "A parallel mesh generation algorithm based on the vertex label assignment scheme", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, S. 1429-1448.
- [24] COOK R. D., AVRASHI J., (1992) "Error estimation and adaptive meshing for vibration problems", *Computers & Structures*, Vol. 44 Nr. 3, S. 619-626.
- [25] DELJOUIE-RAKHSANDEH K., (1990) "An Approach to the Generation of Triangular Grids possessing few Obtuse Triangles", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 29, S. 1299-1321.
- [26] DIAZ A. R., KIKUCHI N., TAYLOR J. E., (1983) "A method of grid optimization for finite element methods", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 41, S. 29-45.
- [27] ELWI A. E., HRUDEY T. M., (1989) "Finite element method for curved embedded reinforcement", *J. Engng. Mech.*, Vol. 115, Nr. 4, S. 740-754.
- [28] FISH J., (1992) "The s-version of the finite element method", *Computers & Structures*, Vol. 43, Nr. 3, S. 539-547.
- [29] GAGO J. P. DE S. R., KELLY D. W., ZIENKIEWICZ O. C., (1983) "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II - adaptive mesh refinement", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, S. 1621-1656.

- [30] GERLINGER T., (1993) „Tragverhalten einer hochbeanspruchten Wandscheibe aus Stahlbeton“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*.
- [31] GREEN P. J., SIBSON R., (1978) “Computing Dirichlet tessellations in the plane”, *Comput J.*, Vol. 21 Nr.2, S. 168-173.
- [32] HANSBO P., (1995) “Generalized Lapacian smoothing of unstructured grids”, *Com. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, S. 455-464.
- [33] HAUFE A., (1995) „A-priori Fehlerabschätzung bei finiten Elementen“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*.
- [34] HERRMANN L. R., (1976) “Lapacian-isoparametric grid generation scheme”, *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, Vol. 102, Nr. EM5, S. 749-756.
- [35] HERRMANN L. R., (1976) “Improved Stress Calculation for Simple Quadrilateral Elements”, *Computers & Structures*, Vol. 6, S. 141-148.
- [36] HINTON E., CAMPBELL J. S., (1974) “Local and global smoothing of discontinuous Finite Element functions using a least squares method”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 8, S. 461-480.
- [37] HINTON E., ÖZAKCA M., RAO N. V. R., (1990) “Adaptive analysis of thin shells using facet elements”, *University College of Swansea, CR/950/90*.
- [38] HODOROABA L., (1992) „Adaptive Verfeinerung von FE-Netzen nach der h-Methode“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*.
- [39] HO-LE K., (1988) “Finite element mesh generation methodes: a review and classification”, *Computer Aided Design*, Vol. 20, S. 27-38.
- [40] HOLZER S., RANK E., WERNER H., (1990) “An implementation of the hp-Version of the Finite-Element method for Reissner-Mindlin plate problems”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, S. 459-471.
- [41] HUGHES T. J. R., (1992) “The finite element method”, *Prentice-Hall International, Inc.*
- [42] JOHNSTON B. P., SULLIVAN J., M. KWASNIK A., (1991) “Automatic conversion of triangular element meshes to quadrilateral elements”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 31, S. 67-84.
- [43] JÜDT B., (1992) „Geometrische und topologische Modellierung für Finite-Elemente-Analysen“, *Dissertation im Fachbereich Bauwesen der Universität - Gesamthochschule - Essen*.
- [44] KALIAKIN V. N., (1992) “A simple Coordinate Determination Scheme for two-dimensional Mesh Generation”, *Computers & Structures*, Vol. 43, S. 505-516.

- [45] KELLY D. W., DE J. P., GAGO S. R., ZIENKIEWICZ O. C., BABUSKA I., (1983) "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - error analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, S. 1593-1619.
- [46] KIKUCHI N., TORIGAKI T., (1993) "Adaptive finite element Methods in computer aided engineering", in *Advanced Techniques in the Optimum Design of Structures*, Computational Mechanics Publications, S. 55-107.
- [47] KLÖHN C., (1982) „Alternative Spannungsberechnung in Finite-Element Verschiebungsmodellen“, *Bericht Nr. F 82/2 am Institut der Mechanik der Universität Hannover*.
- [48] LEE N.-S., BATHE K.-J., (1993) "Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 36, S. 3553-3576.
- [49] LO S. H., (1985) "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, S. 1403-1426.
- [50] LO S. H., (1989) "Delaunay triangulation of non-convex planar domains", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, S. 2695-2707.
- [51] LO S. H., (1989) "Generation quadrilateral elements on plane and over curved surfaces", *Computers & Structures*, Vol. 31, Nr. 3, S. 421-426.
- [52] LO S. H., LAU T. S., (1991) "Generation of quadrilateral elements over irregular domains", *Computational Mechanics*, Cheung, Lee & Leung (eds), S. 1309-1314.
- [53] LO S. H., LEE C. K., (1994) "Generation of gradation meshes by the background grid technique", *Computers & Structures*, Vol. 50, Nr.1, S. 21-32.
- [54] MILITELLO C., (1991) "Application of parametrized variational principles in the finite element method", *Ph. D. Thesis, College of Engineering, University of Colorado*.
- [55] MÖLLER P., HANSBO P., (1995) "On Advancing Front Mesh Generation in three dimensions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 38, S. 3551-3569.
- [56] MURTI V., VALLIAPPAN S., (1986) "Numerical inverse isoparametric mapping in remeshing and nodal quantity contouring", *Computers & Structures*, Vol. 22, Nr. 6, S. 1011-1021.
- [57] NEUREITHER M., (1990) „Modellierung geometrisch-topologischer Daten zur Beschreibung und Berechnung netzartiger und flächenhafter Strukturen“, *Diss. am Inst. für Anwend. der Geod. im Bauw., Universität Stuttgart*.
- [58] ODEN J. T., STROUBOULIS T., DEVLOO P., (1986) "Adaptive finite element methods for the analysis of inviscid compressible flow: Part I. Fast refinement/ unrefinement and moving mesh methods for unstructured meshes", *Comp. Meth. appl. Mech. Engng.*, Vol. 59, S. 327-362.

- [59] PARTHASARATHY V.N., KODIYALAM S., (1991) "A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing", *Finite Elements in Analysis and Design.*, Vol. 9, S. 309-320.
- [60] PERAIRE J., VAHDATI M., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O. Z., (1987) "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", *J. Comp. Phys.*, Vol. 72, S. 449-466.
- [61] PLANK L., (1990) „Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken“, *Forschungs- und Seminarbericht aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Bericht-Nr. F 90/3.
- [62] PLANK L., STEIN E., BISHOFF D., (1990) "Accuracy and adaptivity in the numerical analysis of thin-walled structures", *Comp. Meth. appl. Mech. Engng.*, Vol. 82, S. 223-256.
- [63] RAMAKRISHNAN C. V., RAMAKRISHNAN S., KUMAR A., BHATTACHARYA M., (1992) "An integrated approach for automated generation of two/three dimensional finite element grids using spatial occupancy enumeration and Delaunay triangulation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 34, S. 1035-1050.
- [64] RAMM E., REHLE N., (1994) „Verfeinerungsindikator aus dem Ungleichgewicht der Knotenkräfte“, *Mitteilung des Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*, II/94.
- [65] RANK E., (1985) „A-posteriori-Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralelement-Methoden“, *Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I der TU München*, Heft 16.
- [66] RANK E., KRAUSE R., (1994) "A multiscale finite-element-method", *CIVIL-COMP Ltd. Edinburgh, Scotland*, S. 69-75.
- [67] RANK E., RÜCKER M., SCHWEINGRUBER M., (1994) „Automatische Generierung von Finite-Element-Netzen“, *Bauingenieur* 69, S. 373-379.
- [68] RANK E., RÜCKER M., SCHWEINGRUBER M., (1995) "Automatic mesh generation for plates and shells", Tagungsbeitrag zu *VI. International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, S. 617-622.
- [69] RANK E., SCHWEINGRUBER M., SOMMER M., (1993) "Adaptive Mesh Generation and Transformation of Triangular to Quadrilateral Meshes", *Com. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, S. 121-129.
- [70] RANK E., ZIENKIEWICZ O. C., (1987) "A simple error estimator in the finite element method", *Com. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, S. 243-249.
- [71] REHLE N., RAMM E., (1994) „Netzgenerierung auf Parameterflächen“, *Mitteilung des Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*, I/94.

- [72] REHLE N., RAMM E., (1995) „Generieren von FE-Netzen für ebene und gekrümmte Flächentragwerke“, *Bauingenieur* 70, S. 357-364.
- [73] REHLE N., RAMM E., (1995) „Adaptive Vernetzung bei mehreren Lastfällen“, Tagungsbeitrag zu Finite Elemente in der Baupraxis, *Ernst & Sohn*, S. 337-347.
- [74] REHLE N., RAMM E., (1995) „Is Adaptivity applicable for several Loadcases“, Tagungsbeitrag zu *VI. International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, A. A. Balkema, S. 595-602.
- [75] ROBINSON J., (1988) „Distortion measures for quadrilaterals with curved boundaries“, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 4, S. 115-131.
- [76] RUST W., (1991) „Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken“, *Forschungs- und Seminarbericht aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Bericht-Nr. F 91/2.
- [77] SAMET H., (1984) „The Quadtree and related hierarchical data structures“, *Computing Surveys*, Vol. 16 Nr. 2, S. 187-260.
- [78] SCHLEUPEN A., (1995) „Tragwerksanalyse mit adaptiven FE-Netzen für mehrere Lastfälle“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*.
- [79] SCHNEIDERS R., OBERSCHELP W., KOPP R., BECKER M., (1992) „New and Effective Remeshing Scheme for the Simulation of Metal Forming Processes“, *Engineering with Computers*, Vol. 8, S. 163-176.
- [80] SCHREIBER R., (1995) „Kombinatorisch optimierte Konstruktion fast-regulärer Polygonnetze“, *Dissertation Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart*.
- [81] SCHWEINGRUBER M., RANK E., (1992) „Adaptive Mesh Generation for Triangular or Quadrilateral Elements“, *Numerical Methods in Engineering '92 Ch. Hirsch et al.*, Elsevier Science Publishers B. V., S. 9-15.
- [82] SELMAN A., HINTON E., ATAMAZ-SIBAI W., (1990) „Edge effects in Mindlin-Reissner plates using adaptive mesh refinement“, *Eng. Comput.*, Vol. 7, S. 217-226.
- [83] SEZER L., ZEID I., (1991) „Automatic quadrilateral/ triangular freeform mesh Generation for planar Regions“, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 32, S. 1441-1483.
- [84] SIENZ J. (1992) „NeGe“, *Reference Manual, University of Swansea*, Version 1.58
- [85] SLOAN S. W., (1993) „A fast algorithm for generating constrained Delaunay triangulations“, *Computers & Structures*, Vol. 47 Nr. 3, S. 441-450.
- [86] STEIN E., (1978) „Kriterien für Finite-Element-Programme aus der Sicht prüffähiger statischer Berechnungen“, *Finite Elemente in der Baupraxis, Verlag Ernst & Sohn, Berlin*, 139-148.

- [87] STEIN E., AHMAD R., (1974) "On the stress computation in finite element models based upon displacement approximations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 4, S. 81-96.
- [88] STEIN E., OHNIMUS S., SEIFERT B., MAHNKEN R., (1994) „Adaptive Finite-Element Diskretisierungen von Flächentragwerken“, *Bauingenieur* 69, 53-62.
- [89] STEIN E., RUST W., (1991) "Mesh adaptations for linear 2D finite-element diskretizations in structural mechanics, especially in thin shell analysis", *J. Comp. appl. Math.*, Vol. 36, S. 107-129.
- [90] STEIN E., RUST W., OHNIMUS S., (1992) "h- and d-adaptive FE methods for two-dimensional structural problems including post-buckling of shells", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 101, S. 315-354.
- [91] TRACY F. T., (1977) "Graphical pre- and post-processor for two-dimensional finite element method programs", *Proc. SIGGRAPH'77*, Vol. 11 Nr. 2, S. 8-12.
- [92] WATSON D. F., (1981) "Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polygons", *Comput. J.*, Vol. 24 Nr. 2, S. 167-172.
- [93] WEATHERILL N. P., (1988) "A method for generating irregular computational grids in multiply connected planar domains", *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, Vol. 8, S. 181-197.
- [94] WERKLE H., GONG D., (1993) „CAD-unterstützte Generierung ebener Finite-Element-Netze auf der Grundlage von Makroelementen“, *Bauingenieur*, Vol. 68, S. 351-358.
- [95] XIE G., RAMAEKERS J. A. H., (1994) "Graded mesh generation and transformation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 29, S. 1299-1321.
- [96] YERRY M. A., SHEPHARD M. S., (1983) "A modified Quadtree Approach to finite element mesh generation", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 3 Nr. 1, S. 39-46.
- [97] ZHU J. Z., HINTON E., ZIENKIEWICZ O. C., (1993) "Mesh enrichment against mesh regeneration using quadrilateral elements", *Com. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, S. 547-554.
- [98] ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., HINTON E., WU J., (1991) "A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 32, S. 849-866.
- [99] ZIENKIEWICZ O. C., PHILLIPS D. V., (1971) "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' coordinates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, S. 519-528.
- [100] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., (1989) "The finite element method", *Mc Graw Hill*, I, II.

- [101] ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., (1987) "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, S. 337-357.
- [102] ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., (1992) "The superconvergent patch recovery and a-posteriori error estimates. Part I: the recovery technique", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 33, S. 1331-1364.
- [103] ZIMMERMANN F., (1993) „A-posteriori Fehlerabschätzung von Berechnungen mit finiten Elementen“, *Diplomarbeit, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.*

## Lebenslauf von Norbert Rehle

26. September 1962	geboren in Türkheim (Unterallgäu), als Sohn von Alois Rehle und dessen Ehefrau Ingeburg Rehle geb. Schmeckenbecher
1968 - 1973	Grundschule Türkheim
1973 - 1982	Besuch des Johann-Michael-Sailer Gymnasiums in Dillingen/Donau
26. Juni 1982	Abitur
1982 - 1984	zweijähriger Wehrdienst bei der Bundeswehr
1984 - 1990	Studium des Fachs Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
1988 - 1989	zweisemestriges Auslandsstudium an der University of Calgary in Kanada
26. September 1990	Abschluß Diplom-Ingenieur
Nov. 1990 - Dez. 1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 **F. W. Borscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 **R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der

sichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.

- 80-3 **J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 **L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyinders.
- 82-2 **K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 **H.-P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyinder.

- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.