

# **Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken**

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Fehmi Cirak**

geboren in Denizli, Türkei

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. E. Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. W. Wendland
Tag der mündlichen Prüfung:	14. April 1998

2  
20.4.98



Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 1998



# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der a-posteriori Fehlerabschätzung und adaptiven Netzverfeinerungsstrategien für lineare und nichtlineare Berechnungen von Platten-, Scheiben- und Schalentragwerken. Das entwickelte Gesamtkonzept ermöglicht die Fehlerkontrolle und die Netzverfeinerung bezüglich nahezu beliebigen lokalen sowie im integralen Sinne definierten Variablen.

Typisch für die vorgestellten Fehlerschätzer ist die Einführung von Dualitätstechniken wie sie unter anderem vom klassischen Einflußflächenkonzept her bekannt sind. Im linearen Fall wird zur Fehlerabschätzung das diskretisierte Randwertproblem für einen zusätzlichen Lastfall gelöst und die herkömmlichen Energienormfehlerschätzer werden zweimal angewendet.

Für nichtlineare pfadunabhängige Randwertprobleme wird das linearisierte Problem am diskreten Gleichgewichtspunkt zur Fehlerabschätzung herangezogen. Die asymptotische Exaktheit der Fehlerschätzer wird anhand von numerischen sowie analytischen Untersuchungen gezeigt. In erster Näherung werden die vorgestellten Methoden auch auf instationäre Probleme wie die klassische  $J_2$  – Plastizität innerhalb eines jeden Zeitinkrementes angewendet.

Die Leistungsfähigkeit der verschiedenen vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzer und der zugehörigen adaptiven Netzverfeinerungsstrategien wird anhand von zahlreichen numerischen Testbeispielen verifiziert.

# Abstract

This thesis presents a-posteriori error estimators and adaptive mesh refinement techniques for the linear and nonlinear analysis of plate, membrane and shell structures. The developed framework enables the error control and mesh refinement with respect to different locally and globally defined variables.

Typical for the presented error estimators is the introduction of duality techniques as used in the classical influence surface concept. For the linear case the error estimator is evaluated solving the discretized boundary value problem for an additional right hand side and applying the classical energy norm error estimators two times.

In the nonlinear regime the linearized problem at the equilibrium point of the discretized problem is utilized for error estimation. As numerical and analytical studies indicate the error estimators based on the linearized problem are asymptotically exact. In a first step the presented methods are also applied to the instationary  $J_2$  - plasticity problem in an incremental sense.

The performance of the proposed a-posteriori error estimators and the related mesh refinement strategies is demonstrated by various examples.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1993 bis 1997 während meiner Tätigkeit im Institut für Baustatik der Universität Stuttgart. Ich bedanke mich ganz besonders bei Herrn Professor Dr.-Ing. Ekkehard Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein stets förderndes Interesse.

Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang Wendland danke ich für das große Interesse an dieser Arbeit, für die zahlreichen Hinweise und die sorgfältige Durchsicht.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts für die wertvollen wissenschaftlichen Diskussionen und die gute Zusammenarbeit. Insbesondere danke ich Frau Dipl.-Ing. E. Kuhl und Herrn Dipl.-Ing. H. Steeb für die redaktionelle Unterstützung in der Endphase der Arbeit.

Weiterhin möchte ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft bedanken, die mir in den Jahren 1993 bis 1996 ein Stipendium im Rahmen des *Graduiertenkollegs Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen* an der Universität Stuttgart gewährte.

Fehmi Cirak



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>17</b>
1.1	Motivation	17
1.2	Einführende Beispiele	18
1.3	Übersicht	23
<b>2</b>	<b>Grundgleichungen der Flächentragwerke</b>	<b>25</b>
2.1	Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums	25
2.1.1	Kinematik	25
2.1.2	Statik	26
2.1.3	Materialgesetze	29
2.1.3.1	Lineares isotropes Materialgesetz	29
2.1.3.2	Elastoplastisches Materialgesetz	29
2.2	Grundgleichungen der nichtlinearen Schalentheorie	32
2.2.1	Kinematik der nichtlinearen Schalentheorie	32
2.2.2	Statik der nichtlinearen Schalentheorie	34
2.2.3	Lineares Werkstoffgesetz für die Schale	36
<b>3</b>	<b>Klassische adaptive Methoden für lineare Elastizität</b>	<b>37</b>
3.1	Grundsätzliches über die Finite-Elemente-Methode	37
3.2	Fehlerabschätzungen für die Energienormfehler	39
3.2.1	A-Priori Fehlerabschätzung für die Energienormfehler	39
3.2.2	A-Posteriori Fehlerabschätzung für die Energienormfehler	41
3.2.2.1	Überblick	41
3.2.2.2	Fehlerabschätzung mit lokalen Dirichlet Problemen	44
3.2.2.3	Fehlerabschätzung mit lokalen Neumann Problemen	47
3.2.2.4	Explizite a-posteriori Fehlerschätzer	50
3.2.2.5	Glättungsbasierte a-posteriori Fehlerschätzer	51
3.3	Adaptive Netzverfeinerung	55
3.3.1	Eigenschaften von optimalen Diskretisierungen	56
3.3.2	Adaptive Vernetzungsstrategie	58
3.4	Beispiele	61
<b>4</b>	<b>Erweiterte adaptive Methoden für lineare Elastizität</b>	<b>64</b>
4.1	Einführung	64

4.2	Einflußflächenkonzept in der Strukturmechanik .....	65
4.2.1	Einflußflächen für Verschiebungsgrößen .....	65
4.2.2	Einflußflächen für Spannungsgrößen .....	67
4.2.3	Einflußflächen für integrale Variable .....	69
4.3	A–Priori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken .....	70
4.4	A–Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken .....	72
4.4.1	A–Posteriori Fehlerabschätzung für lokale Variable .....	73
4.4.2	A–Posteriori Fehlerabschätzung für integrale Variable .....	74
4.5	Sonstige Methoden zur lokalen a–posteriori Fehlerabschätzung .....	75
4.6	Adaptive Netzverfeinerung .....	76
4.7	Beispiele .....	78
<b>5</b>	<b>Adaptive Methoden für geometrisch nichtlineare Berechnungen .....</b>	<b>83</b>
5.1	Einführung .....	83
5.2	Lösungsverhalten von geometrisch nichtlinearen Problemen .....	83
5.3	Finite–Elemente–Approximation von geometrisch nichtlinearen Problemen ..	88
5.4	A–Posteriori Fehlerabschätzung .....	89
5.4.1	A–Posteriori Fehlerabschätzung für reguläre Punkte .....	90
5.4.1.1	A–Posteriori Fehlerabschätzung für die inneren Arbeiten .....	91
5.4.1.2	A–Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken .....	95
5.4.2	Verfeinerungsindikatoren für singuläre Punkte .....	97
5.5	Lösungsstrategien für die diskretisierten Gleichungen .....	99
5.5.1	Pfadverfolgungsverfahren .....	99
5.5.2	Direkte Berechnung kritischer Punkte .....	102
5.5.3	Pfadwechsel am Verzweigungspunkten .....	105
5.6	Adaptive Netzverfeinerung bei geometrischer Nichtlinearität .....	105
5.6.1	Transfer der Zustandsvariablen .....	106
5.6.2	Direkte adaptive Berechnung von kritischen Punkten .....	108
5.7	Beispiele .....	109
5.7.1	Schalentragwerke unter konzentrierter Belastung .....	109
5.7.2	Stabilitätsuntersuchungen an Zylinderschalen .....	112
<b>6</b>	<b>Adaptive Methoden für materiell nichtlineare Berechnungen .....</b>	<b>117</b>
6.1	Einführung .....	117
6.2	Lösungseigenschaften von elastoplastischen Problemen .....	117

6.3	Finite-Elemente-Approximation von elastoplastischen Problemen	121
6.3.1	Räumliche Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode	122
6.3.2	Zeitliche Diskretisierung mit dem impliziten Eulerverfahren	122
6.4	A-Posteriori Fehlerschätzer für die Deformationstheorie	124
6.4.1	A-Posteriori Fehlerabschätzung ohne Dualitätstechniken	125
6.4.2	A-Posteriori Fehlerabschätzung nach Johnson und Hansbo	128
6.4.3	A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken	131
6.5	A-Posteriori Fehlerabschätzung für die Fließtheorie	134
6.6	Adaptive Netzverfeinerung bei Elastoplastizität	135
6.7	Beispiele	137
6.7.1	Beispiel für die Deformationstheorie	137
6.7.2	Beispiel für die Fließtheorie	139
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>144</b>
7.1	Verallgemeinerung des vorgestellten Konzepts	144
7.2	Adaptive Methoden für Anfangswertprobleme	144
7.2.1	Diskretisierung von Anfangswertproblemen	145
7.2.2	Dualitätstechniken für Anfangswertprobleme	146
7.2.3	A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken	148
7.3	Adaptive Methoden für nicht-selbstadjungierte Randwertprobleme	150
7.3.1	Dualitätstechniken für nicht-selbstadjungierte Randwertprobleme	151
7.3.2	A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken	152
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>157</b>
A.1	Hilbert Räume	157
A.2	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	158
A.3	Interpolationsabschätzungen	159
A.4	Näherungsweise Bestimmung der Interpolationsfehler	161
A.5	Näherungsweise Bestimmung der Interpolationskonstanten	161
A.6	Elliptizität des elastoplastischen Randwertproblems	162
	<b>Literatur</b>	<b>167</b>



# Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

## Vereinbarungen

- In dieser Arbeit wird überwiegend die symbolische Schreibweise verwendet
- Bei Verwendung der Tensorschreibweise durchlaufen griechische Buchstaben grundsätzlich die Werte 1 und 2, lateinische hingegen die Werte 1,2 und 3.

## Abkürzungen

CARAT	Finite Elemente Programm – 'Computer Aided Research Analysis Tool'
RWP	Randwertproblem
AWP	Anfangswertproblem
ARWP	Anfangs–Randwertproblem

## Definitionen

$(\cdot, \cdot)$	Inneres Produkt, Skalarprodukt
$B(\cdot, \cdot)$	Bilinearprodukt bzw. virtuelle innere Arbeit
$A(\cdot, \cdot)$	Virtuelle innere Arbeit des nichtlinearen Problems
$N(\mathbf{u}, \lambda)$	Nichtlineares Randwertproblem
$N^h(\mathbf{u}^h, \lambda)$	Diskretisiertes nichtlineares Randwertproblem
$\bar{N}^h(\mathbf{u}^h)$	Innere Kräfte des diskretisierten nichtlinearen Randwertproblems
$(\cdot)^h$	Finite Elemente Approximation
$(\bar{\cdot})$	Größen der verformten Konfiguration
$(\cdot)_{\text{neu}}$	Größen der neu generierten Finite Elemente Diskretisierung
$(\cdot)_{\text{alt}}$	Größen der alten Finite Elemente Diskretisierung
$(\cdot)^{\text{pr}}$	Prädiktorwert
$\Delta(\cdot)$	Inkrement

## Symbole

$\delta(\cdot)$	Dirac Delta
$\bar{\delta}(\cdot)$	"regularisiertes" Dirac Delta
$(\cdot)_{,x}$	Partielle Ableitung nach dem Vektor $\mathbf{x}$
$(\dot{\cdot})$	Ableitung nach einer Zeit- oder Pfadvariablen
$\nabla(\cdot)$	Gradient

## Geometrie

$\mathbf{i}_i$	Basisvektoren des orthonormalen Koordinatensystems
$\mathbf{x}$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}_K$	Ortsvektor des Finite Elemente Knotens $K$
$\mathbf{r}$	Ortsvektor der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	Ko- bzw. kontravariante Vektorbasis in der Referenzkonfiguration
$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	Krummlinige, konvektive Koordinaten
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	Ko- bzw. kontravariante Vektorbasis der Schalenmittelfläche in der Referenzkonfiguration
$g_{ij}$	Metriktensor
$\mu_s$	Determinante des Schalentensors
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\Omega$	Körper in der Referenzkonfiguration
$\Gamma_N$	Neumann Rand von $\Omega$
$\Gamma_D$	Dirichlet Rand von $\Omega$
$\Gamma$	$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$
$\Omega_K$	Gebiet eines Finite Elementes $K$
$\tau$	Untergebiet von $\Omega$
$\kappa_N$	Neumann Rand von $\tau$
$\kappa_D$	Dirichlet Rand von $\tau$
$\kappa$	$\kappa = \kappa_D \cup \kappa_N$
$\Gamma_K$	Rand eines Finiten Elementes $K$
$d$	Schalendicke

## Kinematik

$\mathbf{u}$	Verallgemeinerte Verschiebungen
$\mathbf{w}$	Differenzvektor der Direktoren aus beiden Konfigurationen
$\mathbf{u}^*$	Verschiebungsvektor eines Punktes im Schalenraum
$\mathbf{G}$	Greensche Funktion
$\mathbf{e}$	Fehler in den Verschiebungen
$\mathbf{e}_i$	Fehler auf einem Knotenstern $\tau_i$
$\tilde{\mathbf{e}}$	Fehler des linearisierten Problems

$\bar{w}$	Verschiebungen des linearisierten Problems
$v$	Verallgemeinerte virtuelle Verschiebungen, Testfunktionen
$u^c$	Verschiebungen am singulären bzw. kritischen Punkt
$F$	Deformationsgradient
$E$	Green–Lagrange Verzerrungstensor
$\epsilon$	Linearisierter Green–Lagrange Verzerrungstensor
$\epsilon^e$	elastische Verzerrungen
$\epsilon^p$	plastische Verzerrungen
$\alpha_{\alpha\beta}$	Membranverzerrungstensor
$\gamma_\alpha$	Schubverzerrungstensor
$\beta_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor
$\hat{\alpha}_{\alpha\beta}$	Membranverzerrungstensor der linearen Theorie
$\hat{\gamma}_\alpha$	Schubverzerrungstensor der linearen Theorie
$\hat{\beta}_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor der linearen Theorie
$\varphi_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha 3}$	Deformationsgradient der Schale
$\epsilon^{\lambda\beta}$	Permutationstensor

### Statik

$p$	Gebietslasten
$f$	Randlasten
$\lambda$	Lastparameter
$\lambda^c$	Kritischer Lastparameter
$F^h$	Diskreter Knotenlastvektor
$\sigma$	Cauchy Spannungen
$s$	Deviatorspannungen
$\sigma^*$	geglättete Cauchy Spannungen
$\sigma_K$	Finite Elemente Spannungen am Knoten K
$\sigma_{eq}$	im Gleichgewicht befindliche Spannungen
$f^{NP}$	Randkräfte an lokalen Neumann Problemen
$t$	Pfad- oder Zeitvariable
$P$	1. Piola–Kirchhoff Spannungen

<b>S</b>	2. Piola–Kirchhoff Spannungen
<b>n</b>	Schnittkrafttensor, basierend auf 1. Piola–Kirchhoff Spannungen
<b>m</b>	Schnittmomententensor, basierend auf 1. Piola–Kirchhoff Spannungen
<b>N</b>	Schnittkrafttensor, basierend auf 2. Piola–Kirchhoff Spannungen
<b>M</b>	Schnittmomententensor, basierend auf 2. Piola–Kirchhoff Spannungen

### Materialabhängige Größen

<b>C</b>	elastischer Werkstofftensor
$\lambda, \mu$	Lamé Konstanten
<b>C<sup>ep</sup></b>	elastoplastischer Werkstofftensor
<b>C<sup>n</sup></b>	nichtlinearer Werkstofftensor
<b>F</b>	Fließbedingung
$\zeta$	interne Variable
$\gamma$	plastischer Multiplikator
<b>E<sub>0</sub></b>	Elastizitätsmodul im elastischen Bereich
<b>E<sub>T</sub></b>	elastoplastische Tangente
<b>H</b>	Verfestigungsmodul
$\sigma_Y$	einaxiale Fließspannung
<b>H<sup><math>\alpha\beta\lambda\mu</math></sup></b>	kondensierter Elastizitätstensor
<b>D<sub>n</sub><sup><math>\alpha\beta\lambda\mu</math></sup></b>	Dehnsteifigkeiten
<b>D<sub>m</sub><sup><math>\alpha\beta\lambda\mu</math></sup></b>	Biege- und Drillsteifigkeiten
<b>D<sub>q</sub><sup><math>\alpha\beta</math></sup></b>	Schubsteifigkeiten

### Steifigkeitsausdrücke

<b>K<sub>T</sub></b>	Tangentiale Steifigkeitsmatrix
<b>K<sub>E</sub></b>	Linearer Anteil von <b>K<sub>T</sub></b>
<b>K<sub>U</sub></b>	Anfangsverschiebungsmatrix
<b>K<sub>G</sub></b>	Geometrische Steifigkeitsmatrix

### Normen

$\  \mathbf{u} \ _e$	Energienorm
$\  \mathbf{u} \ _0$	$L_2$ -Norm
$\  \mathbf{u} \ _\infty$	Maximumsnorm

$\  \mathbf{u} \ _n$	n-te Sobolev Norm
$ \mathbf{u} _n$	n-te Sobolev Seminorm

### Funktionenräume

$H^1$	Sobolev Raum $H^1$
$H_0^1$	Sobolev Raum mit homogenen Neumann Randbedingungen $H_0^1 = \{u \in H^1 : u = 0 \text{ on } \Gamma_N\}$
$V$	Lösungsraum einer Differentialgleichung
$V^h$	Finite Elemente Raum

### Fehlerabschätzung und Netzadaption

$I$	Interpolierende
$\eta$	geschätzter Gesamtfehler (Fehlerestimator)
$\eta_K$	Fehlerindikator für das Element $K$
$\eta^{rel}$	geschätzter relativer Gesamtfehler
$\hat{\eta}$	vorgegebener relativer Gesamtfehler
$\theta$	Effektivitätsindex
$\xi_j$	Elementverfeinerungskriterium
$\bar{\epsilon}_m$	geforderter durchschnittlicher Elementfehler
$h_K$	charakteristische Länge eines Elementes $K$
$\phi$	Netzdichtefunktion
$\Phi$	inverse Netzdichtefunktion
$S_c$	Stabilitätskonstante
$\mathbf{R}$	Elementinnenresiduum
${}^N\mathbf{R}$	Elementinnenresiduum der Membrankräfte
${}^M\mathbf{R}$	Elementinnenresiduum der Momente
${}^Q\mathbf{R}$	Elementinnenresiduum der Querkräfte
$\mathbf{J}$	Sprungresiduum
${}^N\mathbf{J}$	Sprungresiduum der Membrankräfte
${}^M\mathbf{J}$	Sprungresiduum der Momente
${}^Q\mathbf{J}$	Sprungresiduum der Querkräfte
$\mathbf{d}$	Belastung des dualen Problems
IEL	Anzahl der Knoten eines Finiten Elementes

NP	Anzahl der Knoten des gesamten Finiten Elemente Netzes
NEL	Anzahl der Elemente des gesamten Finiten Elemente Netzes
NSP	Anzahl der "superkonvergenten" Punkte
$\lambda_{\min}$	kleinster Eigenwert des elastischen Werkstoffensors
$\lambda_L$	Lagrange Parameter
$\psi_K$	Finite Elemente Ansatzfunktion bezüglich des Knotensterns K

### Numerische Lösungsstrategien

$\hat{e}_i$	Basisvektor $(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$
$\hat{c}$	Penalty Parameter

### Sonstige Größen

A	Querschnitt eines Körpers
$c_f$	Federkonstante
$c_d$	Dämpfungskonstante
$c_k$	Strömungsgeschwindigkeit
$\Pi$	Gesamte potentielle Energie
$\Pi^c$	Komplementärpotential
$\bar{\Pi}$	Funktional
$N_K$	Formfunktion am Knoten K
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\omega$	Eigenwert
$\omega_{\max}$	größte Eigenwert
$\omega_{\min}$	kleinster Eigenwert
$\bar{\xi}, \bar{\eta}$	Lokales Koordinatensystem auf einem Finiten Element

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Die Finite-Elemente-Methode hat sich, mit Aufkommen leistungsfähiger Computer, seit ihren Anfängen in den fünfziger Jahren zu einem universellen Näherungsverfahren zum Lösen von Differentialgleichungen jeglicher Art entwickelt. Die Methode ist sehr flexibel bezüglich Unregelmäßigkeiten in der Systemgeometrie und der Komplexität der verwendeten mathematischen Modelle. Aufgrund dieser Vielseitigkeit werden in der Ingenieurpraxis zunehmend größere und aufwendigere Systeme mit der Finiten-Elemente-Methode berechnet. Die Genauigkeit und damit die Zuverlässigkeit der numerischen Berechnung kann für komplizierte Systeme nur schwer empirisch beurteilt werden. Die Abweichungen zwischen der tatsächlichen und der numerisch berechneten Strukturantwort sind vielschichtig und entstehen durch die Vereinfachungen bei der Modellbildung, Streuungen in den Tragwerkparametern (Werkstoff, Belastung, ...) und durch Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode. Die verschiedenen Fehleranteile sind von unterschiedlicher Natur und erfordern deshalb auch eine problemspezifische theoretische Vorgehensweise. Besonders schwierig systematisch zu erfassen sind die Vereinfachungen bei der Modellbildung bzw. bei der Idealisierung des Tragwerks. In der Ingenieurpraxis liegen deshalb zahlreiche Normenwerke vor, um unter anderem die Modellbildung zu systematisieren und die entstehenden Fehler zu begrenzen. Im Gegensatz dazu können die Diskretisierungsfehler anhand von Vergleichsrechnungen mit unterschiedlichen Diskretisierungen näherungsweise erfaßt werden. Es ist jedoch auch möglich die Diskretisierungsfehler mit zum Teil einfachen Methoden abzuschätzen.

Die Abschätzung der Diskretisierungsfehler für lineare Problemstellungen ist mittlerweile sehr gut ausgebaut, die ersten Ansätze zur a-priori Abschätzung gehen dabei bis zu den Anfängen der Finite-Elemente-Methode zurück. Da die a-priori Kriterien die unbekannte Lösung selbst zur Abschätzung des Fehlers verwenden, ist ihre Anwendung lediglich auf die theoretische Untersuchung der Finite-Elemente-Methode beschränkt. Für praktische Problemstellungen sind besonders die a-posteriori Fehlerschätzer interessant, da sie nur mit Hilfe der Finite-Elemente-Lösung selbst einen oberen und zum Teil auch einen unteren Grenzwert für die Diskretisierungsfehler liefern. In der Regel werden die einzelnen Elemente verschiedene Beiträge zu dem Gesamtfehler liefern. Eine interessante Fragestellung ist dabei, wie die Diskretisierung zu modifizieren ist, so daß bei gleichem Rechenaufwand die Fehler minimal oder bei minimalem Rechenaufwand die Fehler unter einer bestimmten Schranke zu liegen kommen. Dazu wird eine iterative Vorgehensweise gewählt, beginnend mit einer sehr groben Anfangsdiskretisierung werden die Elementgrößen verkleinert (h-Adaptivität), die Ordnung der Ansatzfunktionen der Elemente erhöht (p-Adaptivität) oder beides gleichzeitig modifiziert (hp-Adaptivität). Diese Möglichkeit der iterativen Optimierung der Diskretisierung war wesentlich für die

stürmische Entwicklung der a-posteriori Fehlerschätzer seit ihren Anfängen Mitte der siebziger Jahre. Während anfänglich a-posteriori Fehlerschätzer und adaptive Algorithmen lediglich bezüglich der inneren Energie des gesamten Tragwerks betrachtet wurden, werden im Augenblick hauptsächlich Methoden bezüglich beliebiger lokaler oder integraler Spannungs- und Verschiebungsgrößen entwickelt.

Die Erweiterung der ursprünglich für lineare Probleme vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzer und der zugehörigen adaptiven Algorithmen auf nichtlineare Fragestellungen ist ein weiteres aktuelles Forschungsgebiet. Aus praktischer Sicht sind adaptive Methoden bei nichtlinearen Berechnungen mit sehr stark von der Belastung und möglicherweise auch von der Belastungsgeschichte abhängigem Tragverhalten unverzichtbar. Eine zu Beginn der Berechnung manuell bzw. automatisch erstellte Diskretisierung muß während des gesamten Berechnungsvorgangs entsprechend des veränderten Tragverhaltens automatisch angepaßt werden. Weiterhin kann die Finite-Elemente-Berechnung bei linearen Problemstellungen z.T. mit einfachen Handrechnungen verifiziert werden, bei nichtlinearen Problemstellungen ist dies jedoch aufgrund der Komplexität kaum möglich. Die automatische Kontrolle der Finite-Elemente-Lösung mit a-posteriori Fehlerschätzern wird damit unverzichtbar. Die praktische Relevanz des Themas wird durch die neueren Normenwerke, die nichtlineare Berechnungen für die Bemessung von Tragwerken vorsehen, zusätzlich bestärkt.

## 1.2 Einführende Beispiele

Das grundsätzliche Konvergenzverhalten der Finite-Elemente-Methode läßt sich anhand eines eindimensionalen linearen Beispiels erklären. Die vorgestellten Eigenschaften sind im wesentlichen auch für nichtlineare Probleme wesentlich, da die Lösung von nichtlinearen Problemen auf die Lösung von mehreren linearen Problemen zurückgeführt werden kann. In Anlehnung an Babuska [4] wird ein auf der einen Seite eingespannter und auf der gegenüberliegenden Seite federnd gelagerter Stab mit veränderlichem Querschnitt näher untersucht (Bild 1.1). Der nichtlineare Querschnittsverlauf  $A(x)$  wird mit der folgenden Funktion beschrieben.

$$A(x) = x^{0.1} \cdot 1 = x^{0.1} \tag{1.1}$$

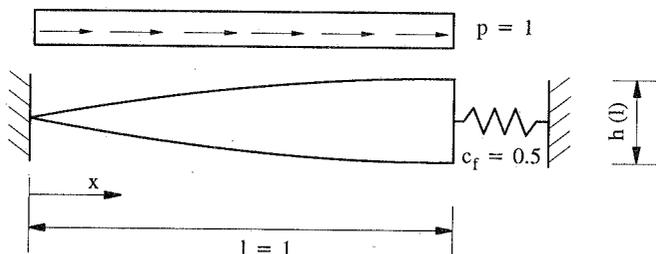


Bild 1.1: Eindimensionales Modellbeispiel

Die Verschiebungen  $u$  des Stabes werden aus den klassischen Lamé–Navierschen Differentialgleichungen bestimmt.

$$\frac{d}{dx} \left( E_0 A(x) \frac{du}{dx} \right) + p = 0 \quad (1.2)$$

Zusätzlich muß die Lösung den vorgeschriebenen Randbedingungen der Verschiebung  $u$  und der Spannung  $\sigma$  genügen.

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma(1) + c_r u(1) = 0 \quad (1.3)$$

Nachfolgend sind die Verschiebungen, Spannungen und Normalkräfte für einen Stab mit der Länge, der Belastung und dem Elastizitätsmodul eins angegeben.

$$u(x) = -\frac{x^{2-\vartheta}}{2-\vartheta} + \frac{\frac{c_r}{2-\vartheta} + 1}{1 + \frac{c_r}{1-\vartheta}} \frac{x^{1-\vartheta}}{1-\vartheta} \quad (1.4)$$

$$\sigma(x) = -x^{1-\vartheta} + \frac{\frac{c_r}{2-\vartheta} + 1}{1 + \frac{c_r}{1-\vartheta}} x^{-\vartheta} \quad (1.5)$$

$$A(x)\sigma(x) = -x + \frac{\frac{c_r}{2-\vartheta} + 1}{1 + \frac{c_r}{1-\vartheta}} \quad (1.6)$$

Die Verzerrungen  $u'$  bzw. die Spannungen  $\sigma$  weisen am linken Auflager eine Singularität auf und sind unbeschränkt, obwohl die Auflagerkräfte  $A(0)\sigma(0)$  und  $A(1)\sigma(1)$  beschränkt sind. Im Augenblick wird lediglich das Lösungsverhalten des gewählten Berechnungsmodells mit singulären Spannungen diskutiert. Die Einbeziehung von nichtlinearen konstitutiven Gleichungen würde bei deutlich höherem Rechenaufwand ein realitätsnäheres Lösungsverhalten widergeben. Es ist jedoch gängige Praxis (z.B. im Bauwesen [50]), aufgrund der Einfachheit das lineare Berechnungsmodell für die Bemessung von Tragwerken zu verwenden.

Durch die Wahl des Parameters  $\vartheta$  in Gleichung (1.1) können mit dem eindimensionalen Beispiel ähnliche Effekte, wie sie bei zweidimensionalen Problemen an den Ecken auftreten, simuliert werden. Die Lösung in der unmittelbaren Umgebung der Ecken ist durch eine asymptotischen Reihenentwicklung gegeben.

$$u(r, \theta) = Kr^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} + \dots \quad (1.7)$$

Hierbei sind  $r$  und  $\theta$  die Koordinaten bezüglich eines Polarkoordinatensystems mit dem Ursprung an der Ecke und  $K$  ist eine tragwerks- und belastungsabhängige Größe. Die Variable  $\alpha$  ist von dem Öffnungswinkel der Ecke abhängig und variiert zwischen  $2\pi$  für einen Riß und  $\pi$  für einen geraden Rand. Ein Vergleich mit der Lösung für das Modellbeispiel Gl. (1.4) zeigt, daß durch die Wahl des Parameters  $\vartheta$  zwischen den Werten 0 und 1/2 die führenden Terme in Gleichungen (1.7) und (1.4) jeweils die gleiche Potenzen aufweisen.

gerader Rand	$\alpha = \pi$	$\vartheta = 0$
Riß	$\alpha = 2\pi$	$\vartheta = \frac{1}{2}$

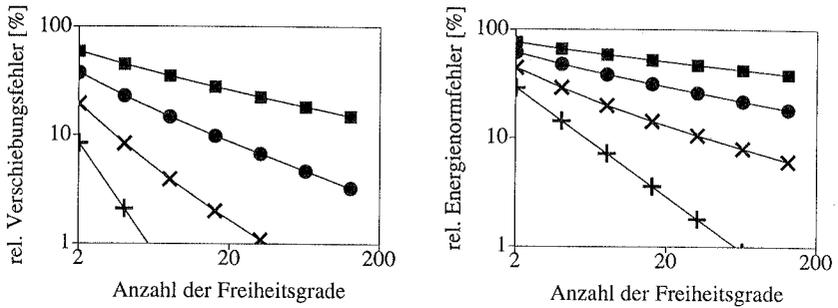


Bild 1.2: Konvergenz der relativen Fehler bei uniformer Verfeinerung  
 $+$   $\vartheta = 0.00$ ,  $\times$   $\vartheta = 0.25$ ,  $\bullet$   $\vartheta = 0.50$ ,  $\blacksquare$   $\vartheta = 0.75$

Die Finite-Elemente-Näherung wird ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. der schwachen Form der Lamé-Navierschen Differentialgleichungen bestimmt.

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dx} \left( E_0 \Lambda(x) \frac{du}{dx} \right) v \, dx + c_0 \mu(1) v(1) = \int_{\Omega} p v \, dx \quad \text{mit } v(0) = 0 \quad (1.8)$$

Für die Verschiebungen  $u$  und die virtuellen Verschiebungen  $v$  werden bei der vorliegenden Finite-Elemente-Approximation stückweise stetige und lineare Funktionen eingesetzt. Die Größe der Elemente wird in der Praxis meist nach empirischen Regeln und der Leistungsfähigkeit der vorhandenen Computerhardware gewählt. Die Diskretisierungsfehler sind von der Elementgröße, den Ansatzfunktionen und weiterhin wesentlich von den Eigenschaften der exakten Lösung abhängig. Bei unzureichender Elementanzahl und Elementgrößenverteilung ist die Zuverlässigkeit der Methode stark eingeschränkt. Im nachfolgenden werden für das eindimensionale Modellproblem die Abhängigkeiten genauer untersucht und einige wesentliche Effekte aufgezeigt. Ein wichtiges Qualitätskriterium für die Finite-Elemente-Lösung sind die integralen sowie lokalen Fehler in den Verschiebungen  $u$ . Zunächst werden die integralen Fehler in der  $L_2$ -Norm der Verschiebungen betrachtet.

$$\|u - u^h\|_0 = \left[ \int_0^1 (u - u^h)^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

Dabei ist  $u^h$  die Finite-Elemente-Lösung. Die Konvergenz der relativen  $L_2$ -Norm Fehler

$$\eta^{\text{rel}} = \frac{\|u - u^h\|_0}{\|u\|_0} \quad (1.10)$$

für gleichmäßig verfeinerte Netze mit linearen Ansatzfunktionen ist in dem doppellogarithmischen Diagramm in Bild 1.2 (links) dargestellt. Obwohl die Verschiebungen keine Singularitäten aufweisen, ist das Konvergenzverhalten sehr stark von dem Parameter  $\vartheta$  abhängig. Bei der numerischen Berechnung sind deshalb, um die gleiche Genauigkeit zu erreichen, bei singulären Problemen mit großen  $\vartheta$  bei gleichmäßiger Verfeinerung deutlich mehr Elemente als

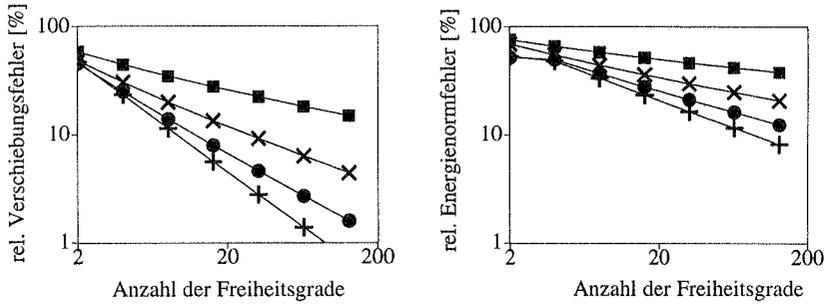


Bild 1.3: Konvergenz der Fehler bei nicht uniformer Verfeinerung für  $\vartheta = 0.75$

$$\blacksquare \beta = 1.0, \quad \times \beta = 2.0, \quad \bullet \beta = 3.0, \quad + \beta = 4.0$$

bei regulären Problemen zu verwenden. Die starke Abhängigkeit der Lösung von dem Parameter  $\vartheta$  ist in Bild 1.2 (rechts) auch für den Energienormfehler  $\|u - u^h\|_e$  mit

$$\|u - u^h\|_e = \left[ \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx} \right) E_0 A \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx} \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

dargestellt. Die Abhängigkeit der Konvergenzverhalten von dem Parameter  $\vartheta$  läßt sich durch eine geschickte Wahl der Elementgrößen vermindern bzw. ganz beseitigen. Zur Verfeinerung des Finite-Elemente-Netzes in der Umgebung der Singularität werden die Knotenkoordinaten  $x_i$  mit der folgenden Funktion bestimmt.

$$x_i = \left( \frac{i}{NEL} \right)^{\beta} \quad (1.12)$$

Dabei ist NEL die Gesamtanzahl der verwendeten Elemente und  $\beta$  ein frei wählbarer Parameter zur Steuerung der Verfeinerung. In Bild 1.3 ist die Konvergenz der Verschiebungs- und Energienormfehler für  $\vartheta = 0.75$  bei verschiedenen Verfeinerungsparametern  $\beta$  aufgetragen. Mit größer werdendem Parameter  $\beta$  wird der Einfluß der Singularität auf die Konvergenzordnung immer geringer. Optimale  $\beta$ -Werte können aus theoretischen Überlegungen für die Verschiebungen und die Energienorm hergeleitet werden [4].

Für die Dimensionierung von Tragwerken sind die relevanten Größen meist lokale Werte wie z.B. die Auflagerkräfte. In Bild 1.4 ist die Konvergenz der rechten Auflagerkräfte und -verschiebungen dargestellt. Obwohl die Singularität sehr weit vom rechten Auflager entfernt liegt, zeigt die Konvergenz der Kräfte eine starke Abhängigkeit von dem Parameter  $\vartheta$ . In der Literatur werden diese Effekte unter dem Begriff Verschmutzungsfehler (pollution error) zusammengefaßt [17],[135]. Wie in Bild 1.5 dargestellt, bringt eine stärkere Verfeinerung des Finite-Elemente-Netzes am linken Auflager erhebliche Verbesserungen für die lokale Verschiebung und die Kraft am rechten Auflager.

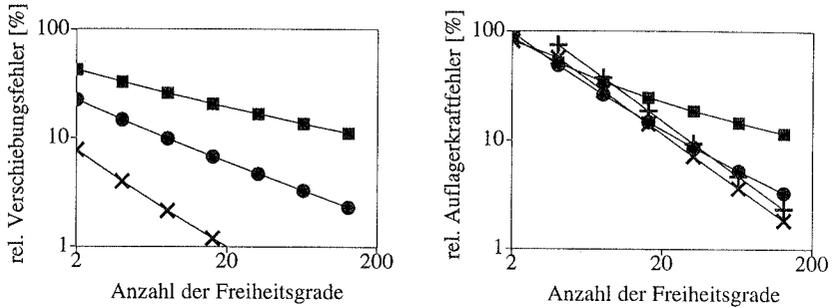


Bild 1.4: Konvergenz der Verschiebungen und Kräfte am rechten Auflager für  $\beta = 1.0$   
 $+ \vartheta = 0.00, \times \vartheta = 0.25, \bullet \vartheta = 0.50, \blacksquare \vartheta = 0.75$

Die numerischen Berechnungen für das eindimensionale Beispiel zeigen, daß für praktisch relevante Problemstellungen mit z.B. einspringenden Ecken oder Rissen auf jeden Fall lokal verfeinerte Finite-Elemente-Netze zu verwenden sind. Diese Aussage ist auch gültig, wenn die zu berechnenden Größen nicht in der unmittelbaren Umgebung der Singularitäten liegen.

Die erforderliche Verfeinerung ist jedoch für die meisten praktischen Problemstellungen a-priori nicht bekannt. Mit den in der vorliegenden Arbeit vorgestellten adaptiven Methoden und a-posteriori Fehlerschätzern kann die nahezu bestmögliche Finite-Elemente-Diskretisierung ausgehend von einer groben Anfangsdiskretisierung iterativ ermittelt werden.

Für nichtlineare Problemstellungen sind adaptive Methoden nicht nur bei Tragwerken mit einspringenden Ecken und Rissen erforderlich. In Abhängigkeit von der Größe der Belastung können grundsätzlich lokale Beulphänomene oder plastische Bereiche auftreten, die eine grundsätzlich andere Diskretisierung als bei näherungsweise linearem Verhalten für niedrige Belastungen erfordern. Die Problematik ist in Bild 1.6 anhand einer querbelasteten langen Zylinderschale aufgezeigt. Die Zylinderschale ist auf der einen Seite eingespannt und auf der

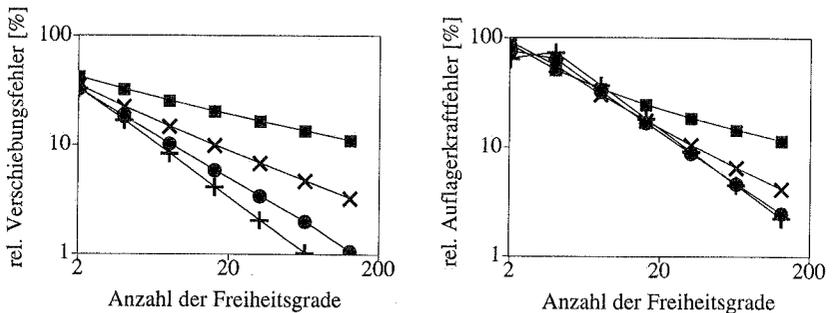
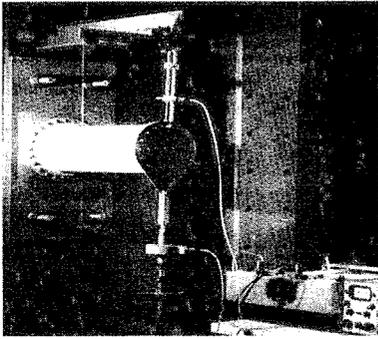
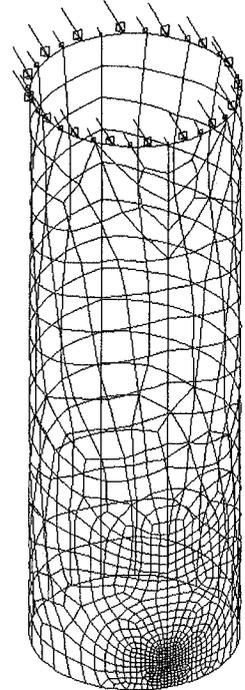
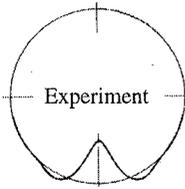


Bild 1.5: Konvergenz der Verschiebungen und Kräfte am rechten Auflager für  $\vartheta = 0.75$   
 $\blacksquare \beta = 1.0, \times \beta = 2.0, \bullet \beta = 3.0, + \beta = 4.0$



experimentelle Traglastbestimmung



adaptive Berechnung

Bild 1.6: Querbelastete Zylinderschale – Experiment und adaptive Berechnung

gegenüberliegenden Seite mit einer Querkraft belastet. Die Belastung wird mit einer starren Endscheibe gleichmäßig über den gesamten Rand verteilt. Für die Astralonschale können die materiell nichtlinearen Effekte näherungsweise vernachlässigt werden, so wird bei der numerischen Berechnung lediglich die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. Während für kleine Querbelastungen der ganze Querschnitt relativ gleichmäßig verformt wird, tritt ab einem bestimmten Lastniveau an der Einspannung lokales Beulen auf. In Bild 1.6 ist die experimentell und die mit der Finite-Elemente-Berechnung ermittelte Form der Beulen dargestellt. Die starken Spannungsgradienten in der Umgebung von Beulen erfordern bei der Finite-Elemente-Berechnung eine sehr feine Diskretisierung. Da die Lage und das Lastniveau, bei dem die Beulen auftreten, unbekannt sind, kann eine problemangepasste Diskretisierung nur automatisch mit einem adaptiven Algorithmus erstellt werden.

### 1.3 Übersicht

In Kapitel 2 wird nach einer kurzen Beschreibung der kinematischen, statischen und konstitutiven Grundgleichungen der Kontinua auf die verwendete Schalentheorie eingegangen.

In Kapitel 3 werden zunächst die aus der Literatur bekannten a-posteriori Fehlerschätzer für lineare Problemstellungen vorgestellt und klassifiziert. Die mechanische Interpretation der z.T. aus der mathematischen Literatur bekannten Methoden bildet dabei einen wesentlichen Schwerpunkt. Anschließend wird für den eindimensionalen Fall analytisch die optimale Verteilung der Elementgrößen in Abhängigkeit der Fehlerindikatoren hergeleitet. Den Abschluß des Kapitels bilden zwei Schalenbeispiele zum Vergleich von ausgewählten a-posteriori Fehlerschätzern.

Die Erweiterung der in Kapitel 3 für Energienormabschätzungen vorgestellten Methoden bezüglich nahezu beliebiger Größen wird in Kapitel 4 gegeben. Mit Dualitätstechniken, wie sie vom klassischen Einflußflächenkonzept her bekannt sind, werden die Fehlerabschätzungen bezüglich lokaler und globaler Variablen auf die zweimalige Anwendung der Energienormfehlerschätzer zurückgeführt. Die Vorteile des vorgestellten Konzepts werden anhand mehrerer Beispiele verdeutlicht.

In Kapitel 5 wird die a-posteriori Fehlerabschätzung und die adaptive Berechnung auf geometrisch nichtlineare Problemstellungen erweitert. Nach einer kurzen Diskussion des analytischen Lösungsverhaltens mit möglichen Durchschlags- und Verzweigungspunkten wird die a-posteriori Fehlerabschätzung diskutiert. Anschließend wird ein auf dem linearisierten Problem basierender Verfeinerungsindikator für lokale und globale Variablen vorgestellt. Einen weiteren Schwerpunkt des Kapitels bildet die adaptive Berechnung von Traglasten. Die Effektivität der vorgestellten adaptiven Methoden wird anhand von Schalenbeispielen näher untersucht.

Ein auf linearisierten Problemen beruhender Verfeinerungsindikator für elastoplastische Berechnungen wird im Kapitel 6 vorgestellt. Dabei werden das stark von der Verfestigung abhängige Lösungsverhalten und die a-posteriori Fehlerabschätzung näher untersucht. Die auf Dualitätstechniken basierenden Methoden stellen sich bei idealer Plastizität oder allgemein bei geringer Verfestigung als besonders vorteilhaft heraus. Abschließend werden ein adaptiver Algorithmus und mehrere numerische Beispiele vorgestellt.

Das vorgestellte Gesamtkonzept zur a-posteriori Fehlerabschätzung kann relativ einfach auf instationäre oder nicht-selbstadjungierte Randwertprobleme erweitert werden. In Kapitel 7 wird exemplarisch die Anwendung auf eine vereinfachte Problemstellung aus der Dynamik und der Konvektions-Diffusionsgleichung vorgestellt. Besonders interessant sind die zugehörigen Dualitätstechniken, da sie in der Strukturmechanik wenig verbreitet sind.

## 2 Grundgleichungen der Flächentragwerke

### 2.1 Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums

Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Einblick in die nichtlineare Kontinuumsmechanik gegeben, um die Grundlagen für die weiteren Untersuchungen bereitzustellen. Auf eine ausführliche Herleitung wird dabei verzichtet. Die Zusammenstellung orientiert sich hauptsächlich an Malvern [84], Ciarlet [37], Marsden und Hughes [83] und Green und Zerna [59]. Die Gleichungen werden im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit zum Teil in der Indexschreibweise vorgestellt. Dabei ist entsprechend der Summationskonvention über einen Index zu summieren, falls er in einem Produkt gegenständig auftritt.

#### 2.1.1 Kinematik

Ein Körper ist eine beschränkte Menge von materiellen Punkten  $\Omega$ . Die Oberfläche (bzw. der Rand) des Körpers wird mit  $\Gamma$  bezeichnet. Der Rand setzt sich aus Bereichen mit vorgegebenen Verschiebungen (Dirichlet Rand)  $\Gamma_D$  und mit vorgeschriebenen Spannungen (Neumann Rand)  $\Gamma_N$  zusammen. Eine Deformation  $\bar{x}$  ist eine Abbildung des Körpers von der Referenzkonfiguration  $\Omega$  in die Momentankonfiguration  $\bar{\Omega}$ .

$$\bar{x}: \Omega \rightarrow \bar{\Omega} \quad (2.1)$$

Die Position eines Punktes in  $\Omega$  wird mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  und in  $\bar{\Omega}$  mit  $\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  angegeben (Bild 2.1). Dabei sind  $\theta^1$ ,  $\theta^2$  und  $\theta^3$  die Koordinaten bezüglich eines mitgehenden krummlinigen Koordinatensystems. Die Differenz der Ortsvektoren in beiden Konfigurationen ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ .

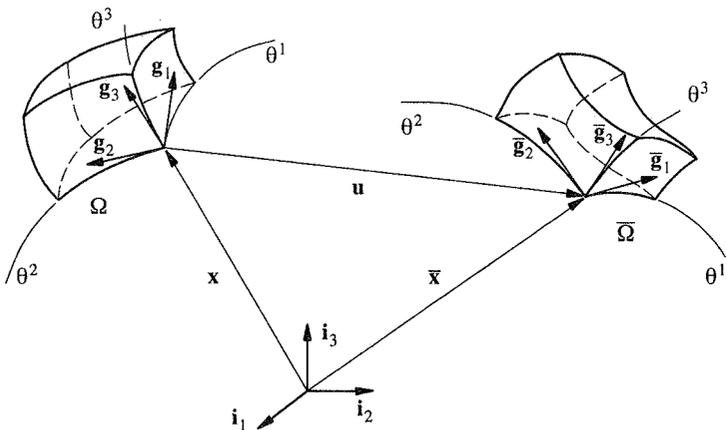


Bild 2.1: Kinematik des Kontinuums

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (2.2)$$

Die ortsabhängigen kovarianten Basisvektoren für das krummlinige Koordinatensystem der Referenzkonfiguration  $\mathbf{g}_i$  und der Momentankonfiguration  $\bar{\mathbf{g}}_i$  sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \quad (2.3)$$

Die Basisvektoren der Referenzkonfiguration  $\mathbf{g}_i$  werden mit dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in die Momentankonfiguration abgebildet.

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \mathbf{g}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{g}}_i \quad (2.4)$$

Ein für die weiteren Betrachtungen wichtiger Ausdruck ist die Differenz der Quadrate der infinitesimalen Linienelemente  $ds$  in der Referenzkonfiguration und  $d\bar{s}$  in der Momentankonfiguration.

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j d\theta^i d\theta^j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j d\theta^i d\theta^j \\ &= (\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) d\theta^i d\theta^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Terme in der Klammer werden als Metriktensoren  $\bar{\mathbf{g}}_{ij}$  und  $\mathbf{g}_{ij}$  der beiden Konfigurationen bezeichnet.

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad \bar{\mathbf{g}}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j \quad (2.6)$$

Die Differenz  $d\bar{s}^2 - ds^2$  beschreibt, wie sich die Länge der Linienelemente bei der Deformation ändert. Deshalb wird sie für die Definition des Green–Langrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  verwendet.

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= (\bar{\mathbf{g}}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}) d\theta^i d\theta^j = 2\mathbf{E} d\theta^i d\theta^j \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Gebräuchlich ist auch die Darstellung des Verzerrungstensors in Abhängigkeit der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und der Referenzbasis  $\mathbf{g}_i$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad \text{mit } (\cdot)_{,i} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial \theta^i} \quad (2.8)$$

Für kleine Verschiebungen wird der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  verwendet.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \quad (2.9)$$

Die Linearisierung wurde hierbei am undeformierten Zustand  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  durchgeführt.

### 2.1.2 Statik

Aus dem Bilanzsatz der Impulserhaltung wird das statische Kräftegleichgewicht für einen ruhenden Körper  $\bar{\Omega}$  in der Momentankonfiguration hergeleitet.

$$\int_{\bar{\tau}} \bar{\mathbf{p}} \, d\bar{x} + \int_{\bar{\kappa}} \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{o} = 0 \quad (2.10)$$

Dabei ist der Teilkörper  $\bar{\tau}$  mit dem Rand  $\bar{\kappa} = \partial\bar{\tau}$  eine beliebige Untermenge des Körpers  $\bar{\Omega}$ . Weiterhin ist  $\bar{\mathbf{p}}$  der äußere Volumenkraftvektor und  $\bar{\mathbf{t}}$  ist der auf der Oberfläche  $\bar{\kappa}$  angreifende Kraftvektor. Auf dem Neumann Rand  $\bar{\kappa}_N$  mit  $\bar{\kappa}_N \subseteq \bar{\Gamma}_N$  ist der Kraftvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  gleich dem äußeren Lastvektor  $\bar{\mathbf{f}}$ .

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{auf} \quad \bar{\kappa}_N \quad (2.11)$$

Der Kraftvektor an der Oberfläche  $\bar{\kappa}$  läßt sich auch aus dem Cauchy Spannungstensor  $\sigma$  mit der zugehörigen Flächennormale  $\bar{\mathbf{n}}$  berechnen.

$$\bar{\mathbf{t}} = \sigma \bar{\mathbf{n}} \quad \text{Cauchy Theorem} \quad (2.12)$$

Nach Einsetzen in die Impulserhaltungsgleichung (2.10) und anschließender Anwendung des Gaussischen Integralsatzes wird das Gleichgewicht mit einem Gebietsintegral in der Momentan-konfiguration beschrieben.

$$\int_{\bar{\tau}} (\bar{\mathbf{p}} + \operatorname{div} \sigma) \, d\bar{x} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Das integrale Gleichgewicht gilt für beliebige Teilkörper  $\bar{\kappa} \subset \bar{\Omega}$  und folglich muß der Integrand der folgenden differentiellen Gleichgewichtsbedingung genügen.

$$\bar{\mathbf{p}} + \operatorname{div} \sigma = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \sigma \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{auf} \quad \bar{\Gamma}_N \quad (2.14)$$

Die Symmetrie des Cauchy–Spannungsvektors

$$\sigma = \sigma^T \quad (2.15)$$

folgt aus dem Drallerhaltungssatz. In der Differentialgleichung (2.14) sind alle Größen bezüglich der unbekanntenen Momentanconfiguration definiert. Für numerische Berechnungen sind jedoch die in der Referenzkonfiguration formulierten statischen Gleichgewichtsbedingungen vorteilhafter. Wird die Impulserhaltung bezüglich der Referenzkonfiguration betrachtet,

$$\int_{\tau} \mathbf{p} \, dx + \int_{\kappa} \mathbf{t} \, do = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

so kann eine weitere differentielle Gleichgewichtsbedingung aufgestellt werden.

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \quad (2.17)$$

$\mathbf{P}$  sind die aus den Cauchy–Spannungen mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  berechneten 1. Piola–Kirchhoff Spannungen. Aus der folgenden Darstellung des 1. PK Spannungstensors  $\mathbf{P}$ , in Abhängigkeit der Cauchy Spannungen  $\sigma$  und des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , wird die Unsymmetrie ersichtlich.

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \sigma \mathbf{F}^{-T} = (\det \mathbf{F}) \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j = P^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.18)$$

Die Multiplikation mit dem inversen Deformationsgradienten transformiert den 1. PK Spannungstensor  $\mathbf{P}$  in den symmetrischen 2. PK Spannungstensor  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = (\det \mathbf{F})\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.19)$$

Damit lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen in folgender Form schreiben.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{F}\mathbf{S})\mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad (2.20)$$

Für lineare bzw. am Referenzzustand linearisierte Gleichungen sind die vorgestellten Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungsmaße identisch.

Die Differentialgleichungen (2.14), (2.17) und (2.20) werden als die starke Form der Gleichgewichtsbedingungen bezeichnet. Äquivalent dazu wird nach der Multiplikation der starken Form z.B. Gleichung (2.17) mit einer Testfunktion  $\mathbf{v}$  und anschließender Integration eine schwache Form hergeleitet.

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset H^1(\Omega) \quad (2.21)$$

Die Elemente des Funktionenraums  $\mathbf{V}$  erfüllen die Bedingung  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_D$ . Die Bezeichnungen "schwache Form" und "Prinzip der virtuellen Verschiebungen" werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit als gleichbedeutend angesehen. Mittels partieller Integration wird die schwache Form in eine gebräuchlichere Darstellung überführt.

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.22)$$

Für die numerischen Berechnungen stellt meist die schwache Form, formuliert in den symmetrischen 2.PK Spannungen und den linearisierten Green–Lagrangischen Verzerrungen, den Ausgangspunkt dar.

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.23)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die schwache Form in der gesamten Arbeit folgendermaßen dargestellt.

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.24)$$

$A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  sind dabei die inneren virtuellen Arbeiten:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.25)$$

Die äußeren virtuellen Arbeiten werden mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  berechnet.

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \quad (2.26)$$

Bei linearen Problemen wird die innere virtuelle Arbeit anstatt mit dem nichtlinearen Operator  $A$  mit der Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  bestimmt.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad (2.27)$$

### 2.1.3 Materialgesetze

Mit den konstitutiven Gleichungen werden die voneinander unabhängig vorgestellten kinematischen Gleichungen mit den statischen Gleichungen gekoppelt. Aus den Gleichungssätzen zur Beschreibung der Kinematik, der Statik und des Werkstoffverhaltens werden die drei Lamé–Navierschen Differentialgleichungen zur Berechnung der drei unbekanntenen Verschiebungen hergeleitet.

#### 2.1.3.1 Lineares isotropes Materialgesetz

Das einfachste Werkstoffmodell ist das des isotropen elastischen St. Venant–Kirchhoff Materials. Das Modell beinhaltet die zwei Lamé–Parameter  $\lambda$  und  $\mu$ , die experimentell bestimmt werden können. Der vierstufige Werkstofftensor  $\mathbf{C}$  läßt sich in der folgenden Form angeben.

$$\mathbf{C} = \left( \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2.28)$$

Anstelle der Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  werden häufig auch die Werkstoffkenngrößen  $E$ ,  $G$  und  $\nu$  verwendet.

$$\mu = G, \quad \lambda = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad E = 2G(1 + \nu) \quad (2.29)$$

Aus den Greenschen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  lassen sich mit dem Werkstofftensor  $\mathbf{C}$  die 2.Piola–Kirchhoff Spannungen  $\mathbf{S}$  bestimmen.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.30)$$

Bei Beschränkung auf kleine Verschiebungen gilt die gleiche Beziehung zwischen den Spannungsgrößen und dem linearisierten Verzerrungstensor.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.31)$$

#### 2.1.3.2 Elastoplastisches Materialgesetz

Die natürlichen Werkstoffe weisen ein mehr oder weniger ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf. Im folgenden werden die aufgrund von inelastischem (bzw. plastischem) Werkstoffverhalten entstehenden Nichtlinearitäten näher untersucht. Ein Überblick über die verschiedenen Modelle und die Grundlagen wird u.a. in den Büchern von Simo und Hughes [120], Lubliner [81] und Hill [63] vorgestellt. Bei der Plastizität sind die Spannungen außer von den augenblicklichen Verzerrungen noch von der Belastungsgeschichte des jeweiligen Punktes abhängig. Für inelastische Körper mit kleinen Verzerrungen werden die Verzerrungen additiv in einen elastischen  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  und plastischen Anteil  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  zerlegt.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (2.32)$$

Erst nach Erreichen eines von der Fließbedingung  $F$  vorgegebenen kritischen Belastungszustandes können plastische Verzerrungen entstehen.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) \leq 0 \quad (2.33)$$

Außer von den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  ist der Fließbedingung noch von einem internen Materialparameter  $\zeta$  abhängig. Für die Beschränkung auf kleine Deformationen ist die Unterscheidung zwischen den verschiedenen Spannungstensoren nicht erforderlich. Die plastischen Dehnungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  und die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  sollen im folgenden das von von Mises formulierte Postulat der maximalen plastischen Dissipation erfüllen.

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\text{symmetrische Tensoren mit } F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) \leq 0\} \quad (2.34)$$

Eine anschaulichere Form wird nach Umschreiben der Ungleichung gewonnen.

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\text{symmetrische Tensoren mit } F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) \leq 0\} \quad (2.35)$$

Danach nimmt die wirklich aufgewandte Deformationsleistung  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  ein Maximum gegenüber allen anderen möglichen Leistungsbeträgen  $\boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  an, die bei der gleichen Deformation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  erbracht würden. Die Konvexität des elastischen Bereiches sowie die Normalität der plastischen Dehnungen an der Fließfläche sind Konsequenzen des Postulates der maximalen Dissipation. Weiterhin ist eine Änderung der plastischen Dehnungen nur für die Spannungen auf der Fließfläche mit  $F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) = 0$  möglich. Die inkrementellen plastischen Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$  werden in Abhängigkeit eines noch zu bestimmenden Faktors  $\dot{\gamma}$  infolge der Normalität auf die Fließfläche folgendermaßen berechnet.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.36)$$

Es werden auch nicht assoziierte Plastizitätsmodelle diskutiert, die der Normalitätsbedingung von Gleichung (2.36) nicht genügen. Die inkrementelle interne Variable  $\dot{\zeta}$  wird für assoziierte Plastizität entsprechend den plastischen Verzerrungen bestimmt.

$$\dot{\zeta} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \quad (2.37)$$

Da plastische Verzerrungen nur für Spannungen auf der Fließfläche möglich sind, muß während der plastischen Deformation die Konsistenzbedingung mit

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = 0 \quad (2.38)$$

gelten. Die Konsistenzbedingung führt nach einigen Rechenschritten auf eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannte  $\dot{\gamma}$ .

$$\dot{\gamma} = \left\{ \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{H} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial F}{\partial \zeta} \dot{\zeta} \quad (2.39)$$

Nachdem die plastischen Verzerrungen und die internen Variablen mit den Gleichungen (2.36) und (2.37) bekannt sind, gilt die folgende inkrementelle konstitutive Beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left( \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\mathbf{H} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.40)$$

Führt die inkrementelle Deformation nicht auf plastische Verzerrungen, so gilt weiterhin das elastische Werkstoffgesetz.

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \quad (2.41)$$

Um die Gleichungen (2.39) und (2.40) auszuwerten, ist die Fließbedingung und die Verfestigungsannahme genauer zu beschreiben. Die Menge der zulässigen Spannungskombinationen wird mit der Fließbedingung vorgegeben. Die genaue Form der Fließbedingung wird anhand von experimentellen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen festgelegt (Erfüllen des Postulats der maximalen plastischen Dissipation). Das plastische Verhalten von metallischen Materialien ist zum Beispiel unabhängig vom hydrostatischen Druck  $\sigma_m$ . Daraus folgt die Unabhängigkeit der Fließbedingung von der ersten Invarianten des Spannungstensors. Bei dem von Mises Kriterium wird die zur zweiten Invarianten proportionale Gestaltsänderungsarbeit als die maßgebliche Beanspruchung für die Plastizität verwendet.

$$F(\sigma, \zeta) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_Y(\zeta) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] \mathbf{I} \quad (2.42)$$

Dabei ist  $\sigma_Y(\zeta)$  die von der internen Variablen  $\zeta$  abhängige einaxiale Fließspannung. Die interne Variable ist bei der Verzerrungsverfestigungshypothese von der Invarianten der plastischen Dehnungen abhängig.

$$\zeta = \int_0^T \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} dt \quad (2.43)$$

Der Term unter der Wurzel ist im wesentlichen die zweite Invariante der plastischen Dehnungen. Für die von Mises Plastizität und die Verfestigungsannahme nach Gl. (2.43) ist die inkrementelle interne Variable  $\zeta$  gleich dem plastischen Multiplikator  $\dot{\gamma}$ .

$$\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\gamma}^2 \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \frac{\partial F}{\partial \sigma}} = \dot{\gamma} \quad (2.44)$$

Damit gilt für den Verfestigungsmodul H in Gleichung (2.39):

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \zeta} \quad (2.45)$$

Der Verfestigungsmodul H ist eine Werkstoffeigenschaft und wird experimentell z.B. aus einem eindimensionalen Zugversuch ermittelt. Für den eindimensionalen Fall ist der Verfestigungsparameter infolge der Gleichungen (2.36) und (2.44) gleich den plastischen Verzerrungen, so daß sich H aus der Spannungsdehnungskurve mit der folgenden Beziehung ergibt.

$$H = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \epsilon^P} \quad (2.46)$$

## 2.2 Grundgleichungen der nichtlinearen Schalentheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der verwendeten Schalentheorie lediglich kurz zusammengestellt. Ausführlichere Darstellungen finden sich u.a. in Ramm [103], Büchler [34], Basar et al. [22] und Simo et al. [119].

### 2.2.1 Kinematik der nichtlinearen Schalentheorie

Der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu einem Punkt des Schalenraums kann in Abhängigkeit des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  der Schalenmittelfläche, des dazugehörigen Direktors  $\mathbf{a}_3$  und einer weiteren Variablen  $\theta^3$  beschrieben werden (siehe Bild 2.2).

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad \text{mit } -1 \leq \theta^3 \leq 1, \quad \|\mathbf{a}_3\|_0 = \frac{d}{2} \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnet  $d$  die Dicke der Schale. Das dreidimensionale Kontinuum wird mittels geeigneter Annahmen über den Verschiebungsverlauf in Dickenrichtung auf ein zweidimensionales Flächentragwerk reduziert. Wird der Verschiebungsverlauf über die Dicke linear angenommen, so kann ein Punkt des deformierten Gebietes mit dem folgenden Ortsvektor dargestellt werden.

$$\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{r}}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \quad \text{mit } -1 \leq \theta^3 \leq 1, \quad \|\bar{\mathbf{a}}_3\|_0 = \frac{d}{2} \quad (2.48)$$

Die Verschiebungen ergeben sich aus der Differenz der Gleichungen (2.47) und (2.48).

$$\mathbf{u}^*(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{u}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (2.49)$$

Zur Beschreibung der Kinematik werden bei einem inextensiblen Direktor insgesamt fünf Variablen benötigt. Außer den drei Verschiebungen der Mittelfläche  $\mathbf{u}$  sind zwei weitere Parameter zur Beschreibung der Verschiebungen  $\mathbf{w}$  bzw. Rotationen des inextensiblen Direktors  $\mathbf{a}_3$  erforderlich (Reissner–Mindlin Kinematik).

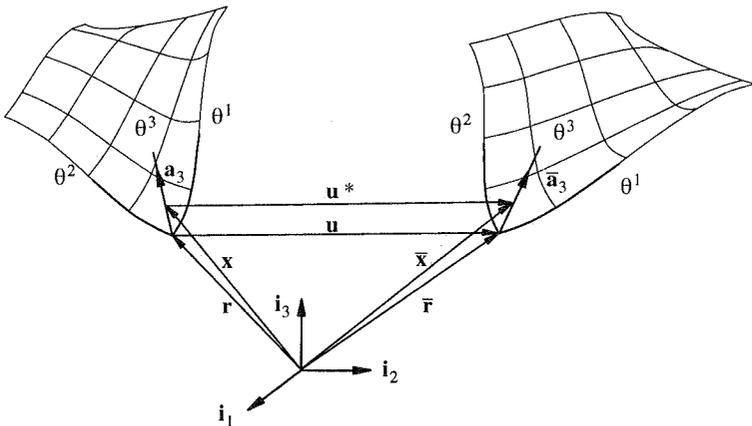


Bild 2.2: Schalenkinematik

Die Verzerrungen sind wie bei dreidimensionalen Kontinua mit der Differenz der kovarianten Metrik im Referenz- und im deformierten Zustand definiert. Dazu werden zunächst die kovarianten Basisvektoren im undeformierten und deformierten Zustand mit Hilfe der Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\bar{\mathbf{x}}$  aufgestellt.

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^3} = \mathbf{a}_3 \quad (2.50)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^3} = \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (2.51)$$

Die kovariante Basis  $\mathbf{a}_\alpha$  bildet dabei eine Tangentialebene auf die undeformierte Schalenmittelfläche. Die Basis  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$  gilt entsprechend für den verformten Zustand. Die Green-Lagrangeschen Verzerrungen bestimmen sich aus der Differenz der Metrikensoren nach Gleichung (2.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}) \\ \mathbf{E} &= \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta) \\ \alpha_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\gamma_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3) \\ \beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dabei ist  $\alpha_{\alpha\beta}$  der Membranverzerrungstensor,  $\gamma_\alpha$  ist der Schubverzerrungstensor und  $\beta_{\alpha\beta}$  ist der Krümmungstensor. Bei kleinen Verzerrungen kann der über  $\theta^3$  quadratische Anteil vernachlässigt werden. Eine genaue Diskussion dieser Vereinfachung wird u.a. von Büchter [34] gegeben.

Im weiteren werden häufig auch die linearisierten Verzerrungsgleichungen verwendet. Die am deformierten Zustand  $\bar{\mathbf{x}}$  bezüglich des Zustandes  $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$  linearisierten Gleichungen (2.53) lassen sich folgendermaßen bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \bar{\mathbf{a}}_\gamma &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta) \\ \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_3} \bar{\mathbf{a}}_3 &= (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3) \\ \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \bar{\mathbf{a}}_\gamma + \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{3,\gamma}} \bar{\mathbf{a}}_{3,\gamma} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Die linearisierten Gleichungen liefern auch die Verzerrungsgleichungen der linearen Theorie. Beispielsweise gilt für die Membranverzerrungen  $\hat{\alpha}_{\alpha\beta}$  der linearen Theorie:

$$\hat{\alpha}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma}(\bar{\mathbf{a}}_\gamma - \mathbf{a}_\gamma) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - 2\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta)$$

Der Schubverzerrungstensor  $\hat{\gamma}_\alpha$  und der Membranverzerrungstensor  $\hat{\beta}_{\alpha\beta}$  der linearen Theorie werden mit den entsprechenden Gleichungen hergeleitet.

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_\alpha &= (\mathbf{a}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3) \\ \hat{\beta}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha \\ &\quad - 2\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta - 2\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha)\end{aligned}\quad (2.55)$$

## 2.2.2 Statik der nichtlinearen Schalentheorie

Die Schnittgrößen der Schale ergeben sich durch Integration der Spannungen über die Dicke der Schale. Zum Beispiel werden die 1. Piola Kirchhoff Schnittkräfte  $\mathbf{n}^\alpha$  bzw. -momente  $\mathbf{m}^\alpha$  aus den 1.PK Spannungen an einer Schnittfläche mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}_\beta$  folgendermaßen bestimmt [34].

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_s \mathbf{P}^{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta \, d\theta^3 \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_s (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{P}^{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta) \theta^3 \, d\theta^3 \quad (2.56)$$

Die Schnittfläche mit der Normale  $\mathbf{n}_\beta$  wurde dabei zur Vereinfachung längs einer Parameterlinie  $\theta^1 = \text{const.}$  oder  $\theta^2 = \text{const.}$  gelegt. Die Krümmung der Schale geht mit dem Faktor  $\mu_s$  in die Integration ein.

$$\mu_s = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} \quad (2.57)$$

Weiterhin zerlegt man die Schnittgrößenvektoren  $\mathbf{n}^\alpha$  und  $\mathbf{m}^\alpha$  in Richtung der unverformten Basis.

$$\mathbf{n}^\alpha = n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + q^\alpha \mathbf{a}_3 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = m^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta + m^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \quad (2.59)$$

$n^{\alpha\beta}$ ,  $q^\alpha$  und  $m^{\alpha\beta}$  werden als Piola–Kirchhoff Schnittgrößen 1. Art bezeichnet. Dabei sind  $n^{\alpha\beta}$  die Komponenten des Dehnungskrafttensors,  $q^\alpha$  die des Querkrafttensors und  $m^{\alpha\beta}$  die des Momententensors. Die statischen Gleichungen für die Schalentheorie leiten sich aus den Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2.17) für das dreidimensionale Kontinuum ab.

$$\text{div } \mathbf{P} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D$$

Nach einer Integration über die Dicke und unter Verwendung der Definitionen für die 1.PK–Schnittgrößen (Gl. (2.56)) ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Schale [22]:

$$\begin{aligned}n^{\alpha\beta} |_\alpha - q^\alpha b_\alpha^\beta + p^\beta &= 0 \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha |_\alpha + p^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta} |_\alpha - q^\beta (\delta_\alpha^\beta + \varphi_\alpha^\beta) + m^{\alpha 3} \epsilon^{\lambda\beta} b_{\alpha\lambda} &= 0\end{aligned}\quad (2.60)$$

Dabei ist  $b_\alpha^\beta$  der Krümmungstensor,

$$b_{\alpha}^{\beta} = (\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{a}^{\lambda}) \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\lambda, \alpha} \quad (2.61)$$

und  $\epsilon^{\lambda\beta}$  der Permutationstensor,

$$\epsilon^{\lambda\beta} = (\mathbf{a}^{\lambda} \cdot \mathbf{a}^{\alpha})(\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{a}^{\rho}) \epsilon_{\alpha\rho} = (\mathbf{a}^{\lambda} \cdot \mathbf{a}^{\alpha})(\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{a}^{\rho}) \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$p^{\beta}$  und  $p^3$  sind die auf den Referenzzustand bezogenen äußeren Belastungen und  $\varphi_{\alpha}^{\beta}$  ist der Deformationsgradient. Mit  $\cdot l_{\alpha}$  wird die kovariante Ableitung bezüglich der Koordinate  $\theta^{\alpha}$  bezeichnet, die für ein- bzw. zweistufige Tensoren folgendermaßen lautet.

$$\begin{aligned} q^{\alpha} l_{\alpha} &= q_{, \alpha}^{\alpha} + q^{\rho} \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha} \\ n^{\alpha\beta} l_{\alpha} &= n_{, \alpha}^{\alpha\beta} + n^{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha} + n^{\alpha\rho} \Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Das Cristoffelsymbol  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  ergibt sich aus dem Produkt der Ableitungen von kovarianter Basisvektoren mit den kontravarianten Basisvektoren.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \mathbf{a}_{\alpha, \beta} \cdot \mathbf{a}^{\lambda}$$

Die ersten beiden Gleichungen in Gl.(2.60) beschreiben das Gleichgewicht in Richtung der Basisvektoren  $\mathbf{a}_{\beta}$  und der Schalennormale  $\mathbf{a}_3$ , die dritte Gleichung das Momentengleichgewicht um die Basisvektoren  $\mathbf{a}_{\beta}$ .

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. die schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen wird wie die starke Form aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Kontinua hergeleitet. Für numerische Berechnungen eignet sich auch bei Schalen besonders die Darstellung mit den 2. Piola Kirchhoff–Schnittgrößen und den Greenschen Verzerrungen.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \left[ N^{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{\gamma}} \mathbf{a}_{\gamma}(\mathbf{v}) + Q^{\alpha} \left( \frac{\partial \gamma_{\alpha}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{\beta}} \mathbf{a}_{\beta}(\mathbf{v}) + \frac{\partial \gamma_{\alpha}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_3} \mathbf{a}_3(\mathbf{v}) \right) \right. \\ &\quad \left. + M^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{\gamma}} \mathbf{a}_{\gamma}(\mathbf{v}) + \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{3, \gamma}} \mathbf{a}_{3, \gamma}(\mathbf{v}) \right) \right] dx \quad \text{mit } \mathbf{v} \in V \subset H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$N^{\alpha\beta}$ ,  $Q^{\alpha}$  und  $M^{\alpha\beta}$  sind die den 1.PK Schnittgrößen  $n^{\alpha\beta}$ ,  $q^{\alpha}$  und  $m^{\alpha\beta}$  entsprechenden 2.PK Schnittgrößen. Zwischen den beiden Schnittgrößen gelten in Abhängigkeit der Deformationsgradienten der Schale die folgenden Beziehungen (siehe z.B. Basar [22]).

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\rho} (\delta_{\rho}^{\beta} + \varphi_{\rho}^{\beta}) + Q^{\alpha} w^{\beta} \\ q^{\alpha} &= Q^{\alpha} (1 + w_3) + N^{\alpha\beta} \varphi_{\rho 3} \\ m^{\alpha\beta} &= M^{(\alpha\rho)} \left[ (1 + w_3) (\delta_{\rho}^{\beta} + \varphi_{\rho}^{\beta}) - \varphi_{\rho 3} w^{\beta} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Deformationsgradienten  $\varphi_{\rho}^{\beta}$  und  $\varphi_{\alpha 3}$  werden aus der Ableitung der Verschiebungsvektoren bestimmt.

$$\varphi_{\rho}^{\beta} = (v_{\rho} l_{\alpha} + \mathbf{a}_{\rho} \cdot \mathbf{a}_{3, \alpha} v_3) \mathbf{a}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta} \quad \varphi_{\alpha 3} = v_{3, \alpha} - (\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{a}^{\lambda}) \mathbf{a}_{\beta} \cdot \mathbf{a}_{3, \alpha} \quad (2.66)$$

Die zur Gleichung (2.64) entsprechende schwache Form der linearen Theorie ist mit den Verzerrungsgleichungen (2.55) gegeben.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( N^{\alpha\beta} \hat{\alpha}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + Q^{\alpha\gamma} \hat{\gamma}_{\alpha}(\mathbf{v}) + M^{\alpha\beta} \hat{\beta}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right) dx \quad (2.67)$$

**Bemerkung:**

- Infolge der Unsymmetrie der Cauchy Dehnungskräfte für die Schale kommt zu den Gleichgewichtsbedingungen (2.60) eine weitere Gleichung hinzu. Für die a–posteriori Fehlerabschätzung wurde die mögliche Unsymmetrie jedoch nicht weiter berücksichtigt.

**2.2.3 Lineares Werkstoffgesetz für die Schale**

Die 2. PK Spannungen werden bei kleinen Verzerrungen mit Hilfe des linearen Werkstoffensors aus den Green–Langrangesehen Verzerrungen bestimmt. Entsprechende Beziehungen gelten nach einer Dickenintegration auch für die 2.PK–Schnittgrößen. Vor der Integration müssen jedoch die Spannungen  $S^{33}$  infolge der Annahme von verschwindend kleinen Spannungen über die Dicke aus dem Werkstoffgesetz eliminiert werden. Die Komponenten des vierstufigen Werkstoffensors für den reduzierten Spannungszustand mit  $S^{33} = 0$  werden u.a. von Basar [22] wie folgt angegeben.

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1-\nu}{2} \left( a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right) \quad (2.68)$$

Daraus ergeben sich die folgenden konstitutiven Gleichungen für die Schale.

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= D_n^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\gamma\delta} & \text{mit} & & D_n^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{Ed}{1-\nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ M^{\alpha\beta} &= D_m^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} & \text{mit} & & D_m^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ Q^{\alpha} &= D_q^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\beta} & \text{mit} & & D_q^{\alpha\beta} &= \frac{Ed}{2(1+\nu)} (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

### 3 Klassische adaptive Methoden für lineare Elastizität

#### 3.1 Grundsätzliches über die Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt werden einige für die a-posteriori Abschätzung wichtige Eigenschaften der Finite-Elemente-Lösung und des zugehörigen Diskretisierungsfehlers ausgearbeitet. Ausführlichere Darstellungen finden sich u.a. in Strang und Fix [126], Ciarlet [36], Johnson [71] und Eriksson et al. [53].

In der linearen Elastizitätstheorie kann das Randwertproblem in starker und schwacher Form, wie im Abschnitt 2 vorgestellt, aus dem Impulserhaltungssatz oder aus einem Potential  $\Pi(\mathbf{v})$  hergeleitet werden.

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.1)$$

Die zulässigen Funktionen  $\mathbf{v}$  aus dem Raum  $V$  erfüllen die Dirichlet Randbedingungen mit  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_D$ . Für lineare Elastizität ist der Raum  $V$  eine Untermenge des Sobolevraums  $H^1$  (siehe Anhang A.1).

$$\mathbf{v} \in V(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in H^1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D \right\}$$

Die Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  ist für Kontinua mit Gleichung (2.27) und für Schalen mit Gleichung (2.67) gegeben. Das Verschwinden der ersten Variation des Potentials führt auf das Randwertproblem in der schwachen Form.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.2)$$

Dabei steht  $\mathbf{u}$  für die Lösung des Randwertproblems und  $\mathbf{v}$  für die virtuellen Verschiebungen bzw. Testfunktionen. Zur Bestimmung einer Finite-Elemente-Approximation wird anstelle von  $V$  ein endlich dimensionaler Raum  $V^h$  gewählt. Die Diskretisierung erfolgt im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit konformen Elementen, d.h. der Finite-Elemente-Raum  $V^h$  ist eine Teilmenge des Sobolev Raumes  $H^1$  und beinhaltet folglich nur kontinuierliche Funktionen.

$$\Pi(\mathbf{v}^h) = \frac{1}{2}B(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) - (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \subset V \quad (3.3)$$

Das Minimum des Potentials wird analog zu der nicht diskretisierten Gleichung (3.2) bestimmt.

$$B(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (3.4)$$

Allgemein läßt sich diese Gleichung auch direkt aus der Galerkin Orthogonalität mit

$$B(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (3.5)$$

herleiten. Berücksichtigt man, daß bei konformen Diskretisierungen auch  $\mathbf{v}^h \in V^h$  die schwache Form Gl. (3.2) erfüllt,

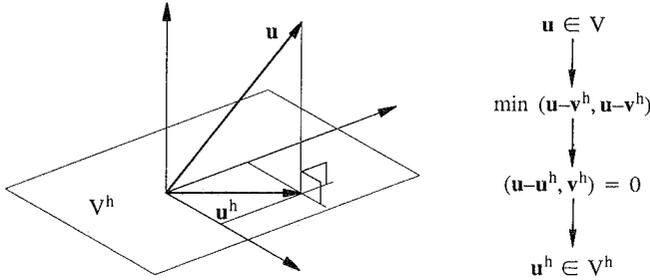


Bild 3.1:  $L_2$ -Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum  $V^h$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h$$

so folgt aus der Orthogonalitätsbedingung die Gleichung (3.4).

$$B(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h$$

Eine mechanisch anschauliche Interpretation für die Galerkin Orthogonalität läßt sich aus der Stationaritätsbedingung für das Funktional  $\bar{\Pi}$  herleiten.

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}^h) = B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \quad (3.6)$$

Das Funktional  $\bar{\Pi}$  erreicht sein Minimum für:

$$\delta \bar{\Pi} = 0 \Rightarrow -2B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = 0 \quad (3.7)$$

Folglich liefert die Finite-Elemente-Methode bezüglich der Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  die Lösung mit dem kleinsten möglichen Energiefehler.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) = \min_{\mathbf{v}^h \in V^h} B(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h) \quad (3.8)$$

Beispielsweise nimmt die Gleichung (3.8) für Kontinua die folgende Form an.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \, dx = \min_{\mathbf{v}^h \in V^h} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) \, dx$$

Die Finite-Elemente-Spannungen stellen damit eine gewichtete  $L_2$ -Projektion der exakten Spannungen dar (Bild 3.1). Die Wichtung der Spannungsanteile erfolgt mit dem inversen Werkstofftensor  $\mathbf{C}$ . Die Orthogonalitätsbedingung wird auch für Funktionen  $\mathbf{v}^h$  erfüllt, die nur in einem sehr kleinen Bereich verschieden von Null sind. Insbesondere gilt sie für die Testfunktionen, die nur an einem einzigen Finite-Elemente-Knoten verschieden von Null sind. Die Projektionseigenschaft muß damit auch näherungsweise lokal gelten. Um die Orthogonalität zu erfüllen, müssen die Spannungsfehler  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  in jedem Element bereichsweise positive und negative Werte annehmen (Bild 3.2). Treten in der exakten Lösung Singularitäten auf, z.B. infolge einspringender Ecken, geht die beschriebene Eigenschaft der Spannungsfehler verloren, obwohl die Galerkin Orthogonalität natürlich auch bei singulären Problemen gültig

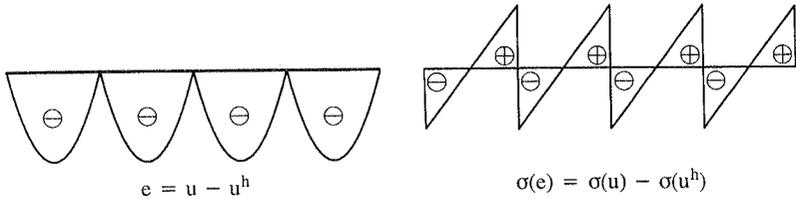


Bild 3.2: Diskretisierungsfehler für einen einseitig eingespannten Stab mit konstanter Belastung

ist. Weitere Konsequenzen der Galerkin Orthogonalität, insbesondere im Zusammenhang mit der Fehlerabschätzung, werden an den entsprechenden Stellen erläutert.

### 3.2 Fehlerabschätzung für die Energienormfehler

Die Finite-Elemente-Methode liefert bezüglich der Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  die bestmögliche Näherung an die exakte Lösung (siehe Gleichungen (3.5) und (3.8)). Die Herleitung von a-priori sowie a-posteriori Fehlerschätzern für die Fehler in der Energie ist aufgrund der Projektionseigenschaft, wie in den nachfolgenden Abschnitten näher erläutert wird, besonders einfach. Für die weitere Fehlerabschätzung wird die Energienorm als eine aus der inneren Energie abgeleitete Größe definiert.

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_e = \sqrt{B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h)} \quad (3.9)$$

Zur mechanischen Einordnung der mit Energienorm gemessenen Fehler sind die folgenden Zusammenhänge besonders hilfreich. Das Quadrat der Fehler in der Energienorm ist an den Gleichgewichtspunkten  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}^h$  identisch mit dem Fehler in der inneren Arbeit.

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_e^2 = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) - 2B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \quad (3.10)$$

Bei der Umformung wurde die Galerkin Orthogonalität mit  $B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) = B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u})$  verwendet. Weiterhin ist es möglich die Energienormfehler aus den Fehlern in den äußeren Arbeiten zu bestimmen.

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^h \|_e^2 = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h)_{\Gamma_N} \quad (3.11)$$

#### 3.2.1 A-Priori Fehlerabschätzung für die Energienormfehler

Die Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  genügt infolge der Galerkin Orthogonalität (Gl. (3.8)) für beliebige Funktionen  $\mathbf{v}^h$  der Ungleichung:

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \leq B(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h) \quad (3.12)$$

Mit einer beliebigen Funktion  $\mathbf{v}^h$  kann damit ohne Kenntnis der Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  eine obere Abschätzung für die Fehler in der Energie bestimmt werden. Für eine möglichst sinnvolle Abschätzung wird z.B. die Interpolierende  $\mathbf{I}\mathbf{u}$  von der exakten Lösung  $\mathbf{u}$  in die Ungleichung eingesetzt.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \leq B(\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{I}\mathbf{u} \in V^h \quad (3.13)$$

Die Interpolierende  $\mathbf{I}\mathbf{u}$  setzt sich aus den Ansatzfunktionen zusammen und besitzt an den Finite-Elemente-Knoten die gleichen Werte wie die exakte Lösung  $\mathbf{u}$ . Die Fehler in der Energienorm sind infolge der Galerkin-Orthogonalität für die Interpolierende auf jeden Fall größer als für die Finite-Elemente-Näherung. Die Fehlerabschätzung für die Finite-Elemente-Lösung verlagert sich damit auf die Abschätzung der Interpolationsfehler  $\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}$ . Zunächst wird die Abschätzung (3.13) weiter umgeformt.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \leq B(\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}) \leq \omega_{\max} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u})\|_0^2 \quad (3.14)$$

Dabei ist  $\omega_{\max}$  der maximale Eigenwert des Werkstoffensors  $\mathbf{C}$ . Die  $L_2$ -Norm der Verzerrungen wird weiterhin mit der  $H^1$ -Norm der Verschiebungen abgeschätzt.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \leq \omega_{\max} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u})\|_0^2 \leq \omega_{\max} \|\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}\|_1^2 \quad (3.15)$$

Die Fehler der Interpolation lassen sich, wie im Anhang A.3 beschrieben, im wesentlichen mit den höheren Ableitungen der Funktion  $\mathbf{u}$  und der Größe  $h$  eines Finiten Elementes abschätzen.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}\mathbf{u}\|_1 \leq Ch^{\min(p, r-1)} \|\mathbf{u}\|_r \quad \text{für } r \geq 2 \quad (3.16)$$

Der Polynomgrad  $p$  der Interpolationsfunktionen ist gleich dem Polynomgrad der Finite-Elemente-Ansatzfunktionen. Diese Abschätzung ist allerdings nur für quasireguläre Finite-Elemente-Netze richtig. Die hier durch den Adaptionalgorithmus nicht mehr gewährleistet sind. Ob sie auch für Netze mit geringeren Regularitätsanforderungen, wie beispielsweise mit der BLMR Eigenschaft [10], noch gültig ist, ist momentan unbekannt. Wir verwenden die Abschätzung jedoch trotzdem; gegebenenfalls ist  $h^{\min(p, r-1)}$  durch eine kleinere Potenz von  $h$  zu ersetzen. Nach Einsetzen der Abschätzung (3.16) in die Gleichung (3.15) folgt eine Abschätzung für den Fehler in der Energienorm.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_e \leq Ch^{\min(p, r-1)} \|\mathbf{u}\|_r \quad (3.17)$$

Für glatte Funktionen mit sehr großem  $r$  ist die Konvergenzordnung allein von der Polynomgrad  $p$  der Ansatzfunktionen abhängig. Ist die exakte Lösung  $\mathbf{u}$  zum Beispiel ein Polynom beliebigen Grades, so gilt  $r = \infty$  und die Konvergenzordnung wird nur vom Polynomgrad  $p$  gesteuert. Enthält die exakte Lösung Singularitäten, so daß  $r$  sehr klein ist, sind die Diskretisierungsfehler unabhängig von den gewählten Ansatzfunktionen. Einige praxisrelevante Probleme mit Singularitäten haben zum Beispiel die folgenden Konvergenzordnungen [35]:

$$\text{Scheibe mit rechtwinklig einspringender Ecke: } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_e \leq Ch^{2/3} \|\mathbf{u}\|_{5/3} \quad (3.18)$$

$$\text{Scheibe mit Riss: } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_e \leq Ch^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{3/2}$$

A-priori Fehlerabschätzungen liefern in Abhängigkeit der exakten Lösung eine Abschätzung der Diskretisierungsfehler nach oben hin. Der Fehler kann jedoch nicht quantifiziert werden, da die exakte Lösung in der Regel nicht bekannt ist. A-priori Abschätzungen eignen sich

damit lediglich zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit von h- oder p-adaptiven Methoden für eine bestimmte Problemstellung.

### 3.2.2 A-Posteriori Fehlerabschätzung für die Energienormfehler

Die Diskretisierungsfehler der Finite-Elemente-Methode lassen sich mit a-posteriori Fehlerschätzern aus den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Berechnung bestimmen. Eine Größe  $\eta$  heißt globaler a-posteriori Fehlerestimator, falls sie eine Abschätzung nach oben sowie nach unten hin ermöglicht.

$$C_1 \eta \leq \| \mathbf{e} \|_e \leq C_2 \eta \quad (3.19)$$

Dabei sind die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  nicht von der exakten Lösung oder der Vernetzung abhängig. Der Schätzer  $\eta$  setzt sich aus den elementweise berechneten Fehlerindikatoren  $\eta_K$  zusammen.

$$\eta = \sqrt{\sum_{K=1}^{NEL} \eta_K^2} \quad (3.20)$$

Der Anteil  $\eta_K$  ist lediglich ein Beitrag zum globalen Fehler innerhalb eines Elementes  $K$  und muß keine Schrankeigenschaft wie in Gl. (3.19) erfüllen. Die Qualität der Fehlerschätzer wird mit Hilfe eines Effektivitätsindex  $\theta$  beurteilt.

$$\theta = \frac{\eta}{\| \mathbf{e} \|_e} \quad (3.21)$$

Man nennt einen Fehlerschätzer effizient, wenn mit zunehmender Verfeinerung  $\eta$  gegen den Fehler  $\| \mathbf{e} \|_e$  bzw. der Effektivitätsindex  $\theta$  gegen die Eins konvergieren. Praktisch interessante adaptive Algorithmen können jedoch auch für  $0.3 \lesssim \theta \lesssim 3$  konstruiert werden. Für praktische Problemstellungen ist weiterhin der relative Fehler, d.h. das Verhältnis des Energienormfehler zu der Gesamtenergie, interessant. Ein relativer globaler Fehlerschätzer wird dann durch

$$\eta^{rel} = \frac{\eta}{\| \mathbf{u}^h \|_e} \quad (3.22)$$

definiert.

#### 3.2.2.1 Überblick

Nach den ersten mathematisch abgesicherten Arbeiten von Babuska und Rheinboldt ab 1978 [13],[14] wurden zahlreiche, zum Teil neuartige Methoden zur a-posteriori Fehlerabschätzung in der Energienorm vorgestellt. Die in der Praxis häufig verwendeten Methoden lassen sich nach Ainsworth und Oden [1] grundsätzlich folgendermaßen klassifizieren.

- Implizite residuale Fehlerschätzer: Zur Fehlerberechnung wird das diskretisierte Tragwerk in kleine Teile, bestehend aus einem oder mehreren Elementen ("Patches" oder "Knotensterne"), zerlegt. An den Teilproblemrändern werden je nach der verwendeten Methode feste Auflager oder Kräfte bzw. Momente zur Sicherstellung des lokalen Gleichgewichts angebracht. Die Teilprobleme werden dabei jeweils mit den Residuen belastet und anschließend

näherungsweise berechnet. Die Summe der inneren Energien der Teilprobleme liefert eine Abschätzung für den Energienormfehler des Tragwerks.

- Explizite residuale Fehlerschätzer: Zur Fehlerabschätzung wird die  $L_2$ -Norm der Residuen mit von der Elementgröße und von dem Elastizitätsmodul abhängigen Konstanten multipliziert. Die expliziten Fehlerschätzer leiten sich aus den impliziten Methoden ab. Als ein wesentliches Merkmal beinhalten die Abschätzungen Interpolationskonstanten, die a-priori für ein Referenzelement bestimmt werden.
- Glättungsbasierte Fehlerschätzer: Aus den diskontinuierlichen Finite-Elemente-Spannungen wird in der Regel mit einer lokalen Glättungsmethode ein kontinuierlicher Spannungsverlauf berechnet. Die Abweichungen von den geglätteten zu den Finite-Elemente-Spannungen werden anschließend zur Fehlerberechnung herangezogen.

Die aufgezählten Verfahren machen in der Regel von der Galerkin Orthogonalität der Finite-Elemente-Methode Gebrauch. Die Äquivalenz der Methoden ist, wie bereits in der Literatur oft diskutiert, sehr naheliegend [1],[132]. Eine Sonderstellung nehmen dabei aber die in der Praxis weit verbreiteten glättungsbasierten Fehlerschätzer ein.

Bei allen residualen Fehlerschätzern ist zunächst eine Differentialgleichung zur Berechnung des Fehlers herzuleiten. Die Finite-Elemente-Methode erfüllt die ursprüngliche Differentialgleichung in schwacher Form nur mit einem beschränkten Satz von Testfunktionen. Bei der Verschiebungsformulierung führt das Einsetzen der diskreten Lösung in die statischen Gleichungen auf die Residuen. Die Finite-Elemente-Lösung kann als die exakte Lösung zu einem aus der äußeren Belastung und den Residuen zusammengesetzten Lastfall interpretiert werden. Dieser Zusammenhang folgt aus elementweise partiellem Integration der von den Spannungsfehlern mit den Testfunktionen geleisteten inneren Arbeiten. Für die statischen Gleichungen der Kontinua gilt der folgende Zusammenhang:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \sum_{K=1}^{NEL} \left[ \int_{\Omega_K} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_K \subseteq \Gamma_N} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\omega - \int_{\Gamma_K \notin \Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\omega \right] \quad (3.23)$$

Dabei ist  $NEL$  die Gesamtanzahl der Elemente und  $\Gamma_K$  sind die Ränder eines Elementes  $K$  mit der Kantennormalen  $\mathbf{n}$ . Die rechte Gleichungsseite stellt die virtuelle Arbeit der Residuen dar und kann aus der Finite-Elemente-Lösung und der externen Belastung für eine Testfunktion  $\mathbf{v}$  bestimmt werden. Die Differenz der inneren Finiten Elemente Kräfte und der äußeren Belastung auf einer Elementfläche  $\Omega_K$  wird als Elementinnenresiduum  $\mathbf{R}_K$  bezeichnet.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{p} = \mathbf{R}_K \quad (3.24)$$

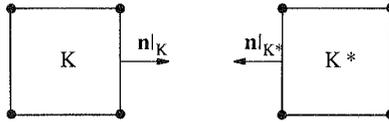


Bild 3.3: Die Normale an einer gemeinsamen Kante der Elemente  $K$  und  $K^*$

Die  $C^0$  kontinuierlichen Ansatzfunktionen führen zu Sprüngen in den Finite-Elemente-Spannungen und diese wiederum zu Belastungstermen  $\mathbf{J}_K$  auf den Kanten.

$$\frac{1}{2} \left( (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_{K^*} + (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_K \right) = \mathbf{J}_K \quad \text{auf } \Gamma_K \not\subseteq \Gamma \quad (3.25)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{n}_K$  den Normalenvektor auf eine gemeinsame Kante der Elemente  $K$  und  $K^*$  (Bild 3.3). Die Kantenbelastung wird mit dem Faktor  $1/2$  auf die beiden benachbarten Elemente  $K$  und  $K^*$  verteilt. Der Sprungterm an den belasteten Rändern ergibt sich aus der Differenz der äußeren Belastung  $\mathbf{f}$  und den inneren Kräften.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \mathbf{f} = \mathbf{J}_K \quad \text{auf } \Gamma_K \subseteq \Gamma_N \quad (3.26)$$

Im nachfolgenden werden die Summen der Residuen  $\mathbf{R}_K$  und  $\mathbf{J}_K$  über alle Elemente mit  $\bar{\mathbf{R}}$  und  $\bar{\mathbf{J}}$  bezeichnet.

$$\bar{\mathbf{R}} = \sum_{K=1}^{NEL} \mathbf{R}_K \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{J}} = \sum_{K=1}^{NEL} \mathbf{J}_K \quad (3.27)$$

Mit den obigen Definitionen und den Diskretisierungsfehlern  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  läßt sich die Gleichung (3.23) zusammenfassend wie folgt schreiben.

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\bar{\mathbf{J}}, \mathbf{v})_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.28)$$

Wie bereits erwähnt, unterscheidet sich die Fehlergleichung (3.28) vom ursprünglichen Randwertproblem (3.2) lediglich durch die äußere Belastung (siehe Bild 3.4). Die Berechnung des Fehlers erfordert somit den gleichen Aufwand wie die Lösung des ursprünglichen Problems.

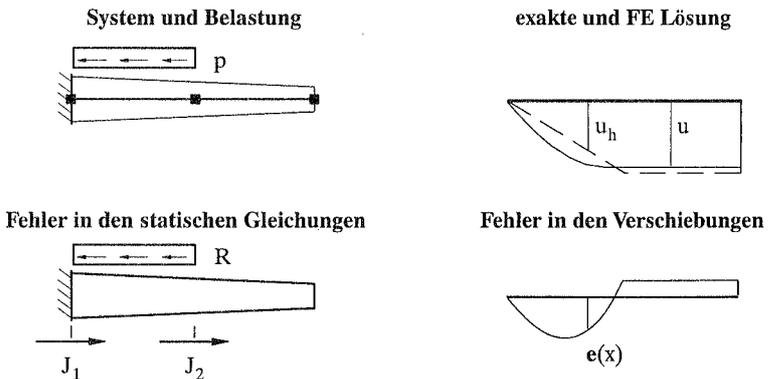


Bild 3.4: Einseitig eingespannter Stab mit linear veränderlichem Querschnitt

Die Fehler können auch mit einer Finite-Elemente-Approximation näherungsweise aus der Gleichung (3.28) bestimmt werden, wozu die Diskretisierung jedoch feiner als die ursprüngliche mit  $V^h$  zu wählen ist. Infolge der Galerkin Orthogonalität (3.5) ist die Lösung der Fehlergleichung (3.28) im Raum  $V^h$  identisch Null.

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}^h) = (\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} + (\bar{\mathbf{J}}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h$$

Bei den impliziten a-posteriori Fehlerschätzern wird die Fehlergleichung (3.28) in relativ einfach berechenbare Teilprobleme zerlegt, die jeweils aus einem oder mehreren Finiten Elementen bestehen. Zur Fehlerabschätzung werden die Randbedingungen der Teilprobleme nicht kompatibel gewählt, so daß die Kopplung der einzelnen Probleme vernachlässigt wird.

### 3.2.2.2 Fehlerabschätzung mit lokalen Dirichlet Problemen

Die Ränder der lokalen Teilprobleme werden zur Fehlerabschätzung als fest eingespannt angenommen. Trotz dieser Vereinfachung lassen sich, wie von Babuska, Rheinboldt und Miller [13],[10] gezeigt, mathematisch exakte a-posteriori Fehlerschätzer für die Energienorm herleiten. Zunächst wird die über dem gesamten Gebiet definierte Bilinearform bzw. die innere virtuelle Arbeit additiv aus lokalen Anteilen zusammengesetzt. Dazu sind verschiedene Zerlegungen möglich: Babuska und Rheinboldt fassen die an einem Knoten  $i$  angreifenden Elemente zu einem Knotenstern  $\tau_i$  zusammen. Die Finite-Elemente-Ansatzfunktionen  $N_i$  können den einzelnen Knoten  $i$  und damit dem zugehörigen Knotenstern zugeordnet werden. Die Ansatz-

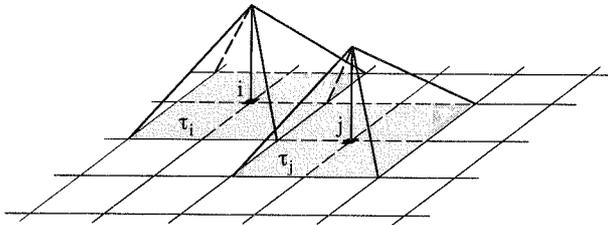


Bild 3.5: Zwei Knotensterne  $i$  und  $j$  mit den zugehörigen Ansatzfunktionen

funktion  $\psi_i$  hat an den Knoten  $i$  den Wert 1 und an den restlichen Knoten den Wert Null.

$$\psi_i(\mathbf{x}_m) = \delta_m^i \quad (3.29)$$

Die Summe der Ansatzfunktionen über alle Knoten NP ergibt damit den Wert eins.

$$\sum_{i=1}^{NP} \psi_i = 1 \quad (3.30)$$

Damit läßt sich der gesamte Fehler in den inneren Arbeiten durch aufsummieren der mit  $\psi_i$  gewichteten Anteile bestimmen.

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{NP} B(\mathbf{e}, \psi_i \mathbf{e}) \quad (3.31)$$

Infolge der Multiplikation der Testfunktionen mit den Ansatzfunktionen ist die innere Arbeit unabhängig von den Fehlerwerten an den Patchrändern  $\kappa_i$ . Die aus lokalen Dirichlet Problemen

$$\begin{aligned} \sum \{ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i) + \mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ auf } \Omega_K \subseteq \tau_i \} \\ \sum \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i) \mathbf{n} = \mathbf{J} \text{ auf } \Omega_K \subseteq \tau_i \wedge \Gamma_K \subseteq \Gamma_N \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_K \subseteq \kappa_i \} \end{aligned} \quad (3.32)$$

berechneten Fehler  $\mathbf{e}_i$  ergeben die gleichen inneren Arbeiten.

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \psi_i \mathbf{e}) = \sum (\mathbf{R}, \psi_i \mathbf{e}) + (\mathbf{J}, \psi_i \mathbf{e}) = \mathbf{B}(\mathbf{e}_i, \psi_i \mathbf{e}) \quad (3.33)$$

Damit kann der Gesamtfehler der inneren Energie Gl. (3.31) ebenso aus den Lösungen der lokalen Dirichlet Probleme zusammengesetzt werden.

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{\text{NP}} \mathbf{B}(\mathbf{e}_i, \psi_i \mathbf{e}) \quad (3.34)$$

Die Ansatzfunktionen  $\psi_i$  sind in mehreren Knotensternen ungleich Null, was zur Kopplung der Teilprobleme in Gleichung (3.32) führt. Wie im nachfolgenden gezeigt wird, kann die Kopplung näherungsweise zur Fehlerabschätzung vernachlässigt werden.

Zunächst wird infolge der Galerkin-Orthogonalität die Interpolierende  $\mathbf{Ie}$  in die Gleichung (3.34) eingeführt.

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{\text{NP}} \mathbf{B}(\mathbf{e}_i, \psi_i \mathbf{e} - \mathbf{Ie}) \quad (3.35)$$

Die Bilinearform wird danach mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung elementweise in zwei Anteile zerlegt.

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \leq \sum_{i=1}^{\text{NP}} \|\mathbf{e}_i\|_e \|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_e \quad (3.36)$$

Die für einen Knotenstern  $i$  ermittelten Energienormfehler  $\|\mathbf{e}_i\|_e$  werden als Elementfehlerindikatoren  $\eta_i$  definiert.

$$\eta_i = \|\mathbf{e}_i\|_e \quad (3.37)$$

Die Abschätzung der Indikatoren ist ein wesentlicher Ziel dieser Arbeit. Um die obere Schrankeigenschaft der Fehlerabschätzung zu beweisen, müssen die Interpolationsfehler

$$\sum_{i=1}^{\text{NP}} \|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_e \quad (3.38)$$

näher untersucht und quantifiziert werden. Die Abschätzung der Interpolationsfehler in Gl. (3.38) wird zunächst für die  $H^1$ -Norm gezeigt und anschließend auf die Energienorm erweitert.

$$\|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_1^2 = \|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_0^2 + \|\nabla \psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie}) + \psi_i \nabla(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_0^2$$

Dabei wurde nach Ausschreiben der  $H^1$ -Norm die Kettenregel verwendet. Der zweite Term auf der rechten Gleichungsseite kann weiter zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_1^2 = \|\psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_0^2 + \|\nabla \psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_0^2 + \|\psi_i \nabla(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})\|_0^2 \\ + 2 \int \cancel{\nabla \psi_i \nabla(\mathbf{e} - \mathbf{Ie}) \psi_i(\mathbf{e} - \mathbf{Ie})} \, dx \stackrel{=0}{=} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Eine einfache partielle Integration des letzten Terms zeigt, daß dieser identisch Null ist. Die restlichen Terme in Gleichung (3.39) lassen sich mit der Hölder Ungleichung abschätzen.

$$\| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_1^2 \leq \| \psi_i \|_\infty^2 \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_0^2 + \| \nabla \psi_i \|_\infty^2 \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_0^2 + \| \psi_i \|_\infty^2 \| \nabla(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_0^2 \quad (3.40)$$

Die  $L_\infty$ -Norm der Ansatzfunktionen ist infolge der Gleichung (3.30) identisch eins.

$$\| \psi_i \|_\infty = 1 \quad (3.41)$$

Weiterhin bildet der Betrag der Ableitungen  $|\nabla \psi_i(x)|$  multipliziert mit der Elementlänge  $h_K$  auf dem Knotenstern  $\tau_i$  eine Konstante. Dabei ist der Element  $K$  ein Teilfläche von  $\tau_i$ .

$$|\nabla \psi_i(x)| h_K \leq C$$

Für die  $L_\infty$ -Norm der ersten Ableitung der Ansatzfunktionen folgt daraus:

$$\| \nabla \psi_i \|_\infty \leq Ch_K^{-1} \quad (3.42)$$

Die Gleichungen (3.41) und (3.42) werden im weiteren in die Gleichung (3.40) eingesetzt und elementweise ausgewertet.

$$\begin{aligned} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_{1,\Omega_K}^2 &\leq \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_{0,\Omega_K}^2 + Ch_K^{-2} \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_{0,\Omega_K}^2 + \| \nabla(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_{0,\Omega_K}^2 \\ &\leq \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_{1,\Omega_K}^2 + Ch_K^{-2} \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_{0,\Omega_K}^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Eine Abschätzung für die Gleichung (3.43) folgt nach Einführung der Interpolationsabschätzungen nach Clément [45] mit:

$$\| \nabla(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_{0,\Omega_K}^2 + h_K^{-2} \| \mathbf{e}-\mathbf{Ie} \|_{0,\Omega_K}^2 \leq C \| \mathbf{e} \|_{1,\Omega_{\bar{K}}}^2$$

wobei  $\bar{K}$  die Vereinigung des Elementes  $K$  und dessen Nachbarn ist. Der Interpolationsfehler über alle Elemente lässt sich aus den einzelnen Knotensternen oder aus den einzelnen Elementanteilen zusammensetzen.

$$\sum_{i=1}^{NP} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_1^2 \leq C \sum_{K=1}^{NEL} \sum_{i=1}^4 \| \mathbf{e} \|_{1,\Omega_K}^2 \quad (3.44)$$

Die Anzahl der Knoten für ein Element wurde hierbei mit vier angenommen. Faßt man die Einzelanteile weiter zusammen, ergibt sich die folgende Fehlerschätzung für den Interpolationsfehler.

$$\sum_{i=1}^{NP} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_1^2 \leq C \sum_{K=1}^{NEL} \| \mathbf{e} \|_{1,\Omega_K}^2 \leq C \| \mathbf{e} \|_1^2 \quad (3.45)$$

Der Interpolationsfehler in der Energienorm kann mit der obigen Abschätzung infolge der Äquivalenz der Normen  $\| \cdot \|_e$  und  $\| \cdot \|_1$  auch wie folgt bestimmt werden.

$$\sum_{i=1}^{NP} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_e^2 \leq \sum_{i=1}^{NP} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_1^2 \leq C \| \mathbf{e} \|_1^2 \leq C \| \mathbf{e} \|_e^2 \quad (3.46)$$

Nach Einsetzen der Abschätzung Gl.(3.46) in die Gleichung (3.37) ergibt sich eine obere Fehlerabschätzung für die inneren Energie.

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \| \mathbf{e} \|_e^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{NP} \eta_i^2} \| \psi_i(\mathbf{e}-\mathbf{Ie}) \|_e^2 \leq C \eta \| \mathbf{e} \|_e \quad \Rightarrow \quad \| \mathbf{e} \|_e \leq C \eta \quad (3.47)$$

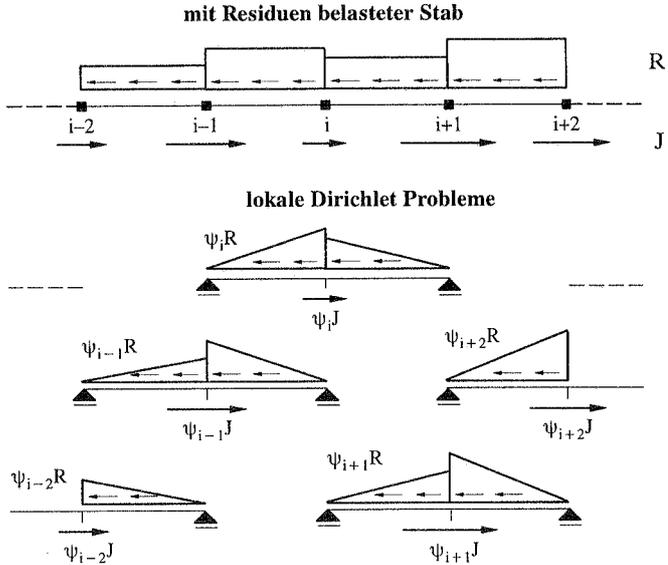


Bild 3.6: Lokale Dirichlet Probleme zur Fehlerabschätzung

Die Fehler in der Energienorm werden mit der Gleichung (3.47) aus der Summe der Energienormfehler von Teilproblemen abgeschätzt (siehe auch Bild 3.6). Mit dem geschilderten mathematischen Vorgehen wird hauptsächlich die Existenz einer Konstanten  $C$  aufgezeigt.

Die Anwendbarkeit eines Fehlerschätzers hängt auch von einer leichten Berechenbarkeit ab, weshalb noch geeignete Methoden zu entwickeln sind, um die Elementfehlerindikatoren  $\eta_i$  zu berechnen oder abzuschätzen. Die lokalen Probleme können zum Beispiel mit Elementen höherer Ansatzordnung als die ursprüngliche Diskretisierung berechnet werden [90], [141].

**Bemerkung:**

- Nach den Arbeiten von Babuska, Rheinboldt und Miller [13], [10] liefern die lokalen Dirichletprobleme auch eine untere Abschätzung in der Form:

$$\| e \|_e \geq C\eta \tag{3.48}$$

**3.2.2.3 Fehlerabschätzung mit lokalen Neumann Problemen**

Die Teilprobleme besitzen keine Auflager und werden an den Rändern mit sich im Gleichgewicht befindlichen Kräften bzw. Momenten belastet, die aus der Finite-Elemente-Lösung bestimmt werden. Das Gebiet  $\tau$  besteht in der Regel aus einem oder mehreren benachbarten Finiten Elementen. Für ein nicht auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  liegendes  $\tau$  gilt entsprechend Gleichung (3.23):

$$\int_{\tau} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \sum_{K=1}^{\text{NET}} \left[ \int_{\Omega_K} (\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_K \subseteq \kappa} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Gamma_K \not\subseteq \kappa} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \right] \quad (3.49)$$

Dabei ist NET die Anzahl der Elemente, die auf dem Gebiet  $\tau$  liegen. An den Rändern  $\kappa$  von  $\tau$  greifen als Kräfte die Fehler in den Schnittgrößen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}$  an. Ausgehend von der Gleichung (3.49) werden in der Literatur zahlreiche a-posteriori Fehlerschätzer diskutiert (u.a. in [1],[79]). Zunächst werden die unbekanntenen Kräfte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}$  durch bekannte Größen  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  ersetzt. Die Lösung des lokalen Randwertproblems  $\mathbf{e}_i$  ist nun nicht mehr identisch mit dem exakten Fehler  $\mathbf{e}$ .

$$\int_{\tau} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \sum_{K=1}^{\text{NET}} \left[ \int_{\Omega_K} (\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_K \subseteq \kappa} (\mathbf{f}^{\text{NP}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Gamma_K \not\subseteq \kappa} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \right] \quad (3.50)$$

Das Neumann Problem ist nur lösbar, wenn die äußeren Kräfte bzw. die Residuen mit  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  im Gleichgewicht sind. Daraus läßt sich bereits eine Regel für die Konstruktion der Kräfte  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  hergeleiten. Weiterhin muß die Summe der an einem gemeinsamen Rand von zwei Teilproblemrändern angreifenden Kräften  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  Null ergeben, um das globale Gleichgewicht zu erfüllen.

$$(\mathbf{f}^{\text{NP}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_{K^*} + (\mathbf{f}^{\text{NP}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_K = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_K \subseteq \kappa \quad (3.51)$$

Eine Methode zur Berechnung der Kräfte  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  für Teilprobleme, die aus einem Element bestehen, wurde von Ladeveze et al. [79] und Stein et al. [123] bereits Mitte der siebziger Jahre vorgestellt. Die Vorgehensweise von Ladeveze führt auf diskrete lokale Probleme, wobei für jeden Knoten ein kleines Gleichungssystem mehrmals zu lösen ist. Werden die lokalen Probleme nach der Bestimmung der Kräfte  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  exakt berechnet, läßt sich die obere Schrankeneigenschaft der aus den Teilproblemen zusammengesetzten Energienorm sehr leicht zeigen. Bei einer exakten Berechnung der Teilprobleme ist mit den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i)$  infolge der Konstruktionsvorschrift für  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  in jedem Punkt des Tragwerks das Gleichgewicht erfüllt. Das Komplementärpotential  $\Pi^c$  ergibt mit den im Gleichgewicht befindlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_i)$  eine obere Abschätzung für die Energienormfehler.

$$\|\mathbf{e}\|_e^2 = 2\Pi^c(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e})) \leq 2\Pi^c(\boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}) \quad (3.52)$$

Für die exakte Lösung des Gesamtproblems ist aus der klassischen Variationsrechnung folgender Zusammenhang bekannt:

$$\|\mathbf{e}\|_e^2 = B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = -2\Pi(\mathbf{e}) = 2\Pi^c(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e})) \quad (3.53)$$

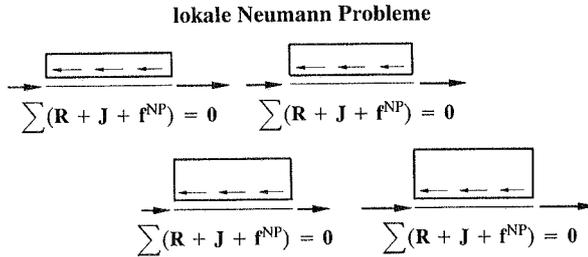
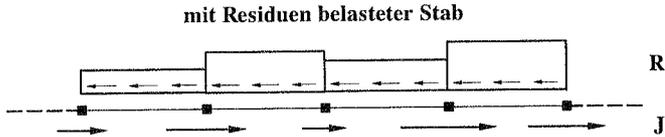


Bild 3.7: Lokale Neumann Probleme zur Fehlerabschätzung

Unter Ausnutzung der oberen Schrankeneigenschaft des Komplementärpotentials kann für den Energienormfehler des gesamten Tragwerks die folgende Abschätzung gezeigt werden [1].

$$\|\mathbf{e}\|_e^2 \leq \sum_{\tau} \int_{\tau} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_{\tau}) : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_{\tau}) \, dx \quad (3.54)$$

Obwohl die Schrankeneigenschaft immer erfüllt wird, hängt die Qualität der Abschätzung wesentlich von dem Unterschied in den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  ab. Da die Teilprobleme infolge der Galerkin Orthogonalität nur schwach gekoppelt sind, ist die Qualität der Abschätzung in der Regel ausreichend [79]. Die Teilprobleme werden bei der praktischen Auswertung des Fehlerschätzers nur näherungsweise zum Beispiel mit höherwertigen Finite-Elemente-Ansätzen berechnet. Die Finite-Elemente-Ansätze bestehen dabei zum Teil nur aus 'Bubble spaces' [1].

Neben diesem sehr mechanisch orientierten Ansatz werden in der mathematischen Literatur auch lokale Neumann Probleme betrachtet, die nicht im Gleichgewicht stehen. Die Spannungssprünge über den Rand  $\kappa$  werden dabei jeweils zur Hälfte den benachbarten Gebieten zugeteilt. Die Resultierende der Auflagerkräfte ist nicht Null und es sind geeignete Randbedingungen oder allgemein zusätzliche Zwangsbedingungen bei der Lösung von lokalen Problemen einzuführen. Trotz dieser Vereinfachung lassen sich, wie erstmals von Bank und Weiser [19] vorgestellt, Fehlerschätzer mit oberen Schrankeneigenschaften konstruieren.

Die Anwendung der beschriebenen Methoden auf gekrümmte Flächentragwerke wird in der Literatur nicht behandelt. Insbesondere bei der Berechnung der Spannungen  $\mathbf{f}^{\text{NP}}$  oder der zugehörigen Schnittgrößen ist infolge der Kopplung der unterschiedlichen Kräfte und Momente mit Schwierigkeiten zu rechnen.

### 3.2.2.4 Explizite a-posteriori Fehlerschätzer

Die expliziten a-posteriori Fehlerschätzer leiten sich aus den vorgestellten impliziten Methoden ab. Die lokalen Probleme werden dabei nicht mehr analytisch oder mit einer feineren Diskretisierung gelöst, sondern mit geeigneten Methoden für ein Referenzelement bzw. einen -patch abgeschätzt (siehe Anhang A.3). Dieses Vorgehen wurde, ausgehend von lokalen Dirichlet Problemen, von Babuska und Rheinboldt [14] zunächst für eindimensionale Probleme und später von Babuska und Miller [10] auch für zweidimensionale Probleme durchgeführt. In den Arbeiten von Babuska, Rheinboldt und Miller wird die exakte obere und untere Schrankeigenschaften der impliziten Fehlerschätzer gezeigt. Im nachfolgenden wird ein Fehlerschätzer für die Energienorm in Anlehnung an die Arbeiten von Johnson et al. [68] vorgestellt.

Die von den Residuen mit den Verschiebungsfehlern geleistete Arbeit ist nach Gleichung (3.9) und (3.28) gleich dem Fehler in der inneren Energie bzw. dem Energienormfehler im Quadrat.

$$\| \mathbf{e} \|_e^2 = \sum_{K=1}^{NEL} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{e})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{e})_{\Gamma_K} \} \quad (3.55)$$

Infolge der Galerkin Orthogonalität mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{Ie}) = \sum_{K=1}^{NEL} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{Ie})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{Ie})_{\Gamma_K} \} = 0$$

ist die von den Residuen mit der Interpolierenden  $\mathbf{Ie}$  geleistete Arbeit identisch Null.

$$\| \mathbf{e} \|_e^2 = \sum_{K=1}^{NEL} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K} \} \quad (3.56)$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung lassen sich die Skalarprodukte auf der rechten Gleichungsseite mit den  $L_2$ -Normen der Residuen und dem Interpolationsfehler abschätzen.

$$\| \mathbf{e} \|_e^2 \leq \sum_{K=1}^{NEL} \{ \| \mathbf{R} \|_{0, \Omega_K} \| \mathbf{e} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Omega_K} + \| \mathbf{J} \|_{0, \Gamma_K} \| \mathbf{e} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Gamma_K} \} \quad (3.57)$$

Zur Abschätzung der Interpolationsfehler ist nicht mehr das gesamte Problem sondern es sind nur kleine Teilprobleme zu betrachten. Aus lokalen Problemen werden, wie im Anhang A.3 vorgestellt, die folgenden Abschätzungen hergeleitet.

$$\| \mathbf{e} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Omega_K} \leq C_1 h_K \| \mathbf{e} \|_{e, \Omega_K} \quad \| \mathbf{e} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Gamma_K} \leq C_2 \sqrt{h_K} \| \mathbf{e} \|_{e, \Omega_K} \quad (3.58)$$

Dabei ist  $h_K$  eine charakteristische Elementlänge,  $C_1$  und  $C_2$  sind zwei Konstanten. Die  $L_2$  - Normfehler der Interpolation auf dem Elementgebiet und der Elementkante können mit Gl.(3.58) in Abhängigkeit der Energienorm nach oben hin abgeschätzt werden.

Nach Einsetzen der Interpolationsabschätzungen in die Gleichung (3.57) und anschließender Division durch den Energienormfehler folgt eine Fehlerabschätzung.

$$\| \mathbf{e} \|_e^2 \leq \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ \frac{h_K^2}{24E\mu} \| \mathbf{R} \|_{0, \Omega_K}^2 + \frac{h_K}{24E\mu} \| \mathbf{J} \|_{0, \Gamma_K}^2 \right\} \quad (3.59)$$

Die Konstanten wurden dabei in Anlehnung an Kelly et al. [76] in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Polynomordnung der Ansatzfunktionen  $p$  gewählt.

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{24E_p}}$$

Ist die Finite-Elemente-Lösung bekannt, so können aus dem Randwertproblem in starker Form die Residuen und anschließend daraus mit Gleichung (3.59) die Fehler abgeschätzt werden. Bei Schalen hat der zur Gleichung (3.59) entsprechende explizite Fehlerschätzer, aufgrund der Zerlegung der inneren Energie in Membran-, Biege- und Schubanteil, die folgende Form

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_e^2 \leq & \sum_{K=1}^{NEL} \frac{h_K^2}{24p} \left\{ \frac{1}{D} \|\mathbf{N}\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K}^2 + \frac{1}{B} \|\mathbf{M}\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K}^2 + \frac{1}{Gd} \|\mathbf{Q}\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K}^2 \right\} \\ & + \sum_{K=1}^{NEL} \frac{h_K}{24p} \left\{ \frac{1}{D} \|\mathbf{N}\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K}^2 + \frac{1}{B} \|\mathbf{M}\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K}^2 + \frac{1}{Gd} \|\mathbf{Q}\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Entsprechend der mechanisch unterschiedlichen Bedeutung der einzelnen Residuenanteile (Membrankräfte  $\mathbf{N}\mathbf{R}$  und  $\mathbf{N}\mathbf{J}$ , Momente  $\mathbf{M}\mathbf{R}$  und  $\mathbf{M}\mathbf{J}$ , Querkräfte  $\mathbf{Q}\mathbf{R}$  und  $\mathbf{Q}\mathbf{J}$ ) wurden unterschiedliche Vorfaktoren verwendet.

$$D = \frac{Ed}{1-\nu^2} \quad B = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dabei ist  $d$  die Dicke der Schale,  $\nu$  ist die Querdehnzahl und  $G$  der Schubmodul.

#### Bemerkungen:

- Das Elementinnenresiduum  $\mathbf{R}$  wird durch Einsetzen der Finite-Elemente-Lösung in die starke Form der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Die dabei benötigten Ableitungen der kovarianten Basisvektoren und somit die zweiten Ableitungen der Verschiebungen lassen sich über die Ansatzfunktionen und die Knotenverschiebungen analytisch berechnen.
- Bei linearen Ansatzfunktionen und nicht vorhandensein von Elementlasten sind die Elementinnenresiduen  $\mathbf{R}$  identisch Null. Deshalb werden vereinfachend bei bilinearen Elementen in den Gleichungen (3.59) und (3.60) die Terme mit  $\mathbf{R}$  nicht berücksichtigt.

#### 3.2.2.5 Glättungsbasierte a-posteriori Fehlerschätzer

Aus den diskontinuierlichen Finite-Elemente-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)$  lassen sich mit sehr einfachen Methoden kontinuierliche Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  bestimmen. Es ist bereits seit sehr langem bekannt, daß die geglätteten Spannungen zum Teil wesentlich besser als die ungeglätteten Finite-Elemente-Spannungen sind. Ausgehend von dieser Beobachtung stellten Zienkiewicz und Zhu 1987 einen auf den Differenzen von geglätteten und ungeglätteten Spannungen basierenden Fehlerschätzer vor [146].

Zur mathematischen Motivation der Zienkiewicz und Zhu Fehlerschätzer wird die folgende Annahme für die geglätteten Spannungen getroffen:

$$\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}^*\|_0 \leq C_{ZZ} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \quad \text{mit } C_{ZZ} < 1 \quad (3.61)$$

Weiterhin kann mit der Dreiecksungleichung der folgende Zusammenhang zwischen den Spannungsfehlern und den geglätteten Spannungen gezeigt werden.

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\|_0 + \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \quad (3.62)$$

Nach Einsetzen der Gleichung (3.61) und einigen Umformungen ergibt Gleichung (3.62) eine obere Abschätzung für den Spannungsfehler.

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \leq \frac{1}{1 - C_{ZZ}} \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \quad (3.63)$$

Besitzen die geglätteten Spannungen eine höhere Konvergenzordnung als die Finite-Elemente-Spannungen,

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*\|_0 \leq Ch^\alpha \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \quad \text{mit } \alpha > 1 \quad (3.64)$$

so läßt sich sogar die asymptotische Exaktheit der Fehlerschätzer zeigen.

$$\frac{1}{1 + Ch^\alpha} \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \leq \frac{1}{1 - Ch^\alpha} \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)\|_0 \quad (3.65)$$

Der Fehler in der Energienorm ergibt sich nach der Berechnung der geglätteten Spannungen und anschließendem Einsetzen in die Bilinearform.

$$\|\mathbf{e}\|_e^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) \, dx \quad (3.66)$$

Die Bilinearform für die Schale wurde in Abhängigkeit der Schnittgrößen mit der Gleichung (2.67) vorgestellt. Zur Fehlerberechnung sind entsprechend Gleichung (3.66) anstelle der Spannungen die Schnittgrößen  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{Q}$  auszuwerten.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_e^2 &= \int_{\Omega} (\mathbf{N}^* - \mathbf{N}(\mathbf{u}^h)) : \mathbf{D}_n^{-1} : (\mathbf{N}^* - \mathbf{N}(\mathbf{u}^h)) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{M}^* - \mathbf{M}(\mathbf{u}^h)) : \mathbf{D}_m^{-1} : (\mathbf{M}^* - \mathbf{M}(\mathbf{u}^h)) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}(\mathbf{u}^h)) : \mathbf{D}_q^{-1} : (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}(\mathbf{u}^h)) \, dx \end{aligned} \quad (3.67)$$

Da die Eigenschaften (3.61) und (3.64) für allgemeine Problemstellungen mathematisch nicht bewiesen werden können, ist die von Zienkiewicz und Zhu vorgestellte Methode im mathematischem Sinne kein Fehlerschätzer. In der Ingenieurliteratur werden die auf Spannungsglättung basierenden Methoden jedoch trotzdem als "Fehlerschätzer" bezeichnet. Von den zahlreichen Methoden zur Berechnung der verbesserten Spannungen werden einige der gebräuchlichsten Verfahren im nachfolgenden erläutert.

### Mittelwertbildung an den Knoten

Die verbesserten Schnittgrößen werden durch arithmetische Mittelwertbildung der einem Knoten zugeordneten Elementspannungsgrößen gebildet. Diese relativ einfache Methode wird bereits seit den Anfängen der Finite-Elemente-Methode verwendet.

### $L_2$ -Projektion

Die kontinuierlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  im Element werden mit den geglätteten Knotenspannungen  $\boldsymbol{\sigma}_i^*$  und den Finite-Elemente-Ansatzfunktionen  $N_i$  dargestellt.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum N_i \boldsymbol{\sigma}_i^* \quad (3.68)$$

Die geglätteten Spannungen lassen sich aus der  $L_2$ -Projektion der diskontinuierlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)$  auf die kontinuierlichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  bestimmen.

$$\int_{\Omega} N_j (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) \, dx = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

Die Projektion kann auch als die Minimierung der Fehler zwischen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  und  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)$  interpretiert werden.

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}_k^*} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h))^2 \, dx \quad \rightarrow \quad 2 \int_{\Omega} N_j (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)) = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

Ein Gleichungssystem zur Bestimmung der geglätteten Knotenspannungen folgt aus der Gleichung (3.69).

$$\int_{\Omega} N_j N_i \, dx \, \boldsymbol{\sigma}_i^* = \int_{\Omega} N_j \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \, dx \quad (3.71)$$

In der Praxis löst man das Gleichungssystem nur näherungsweise durch Diagonalisieren der Matrix  $N_j N_i$  (siehe u.a. [144]).

Die auf der Mittelwertbildung an den Knoten oder  $L_2$ -Projektion basierenden Fehlerschätzer liefern nur für lineare bzw. bilineare Ansatzfunktionen gute Ergebnisse. Für höherwertige Elemente sind sie jedoch ungeeignet. Für Elemente mit Ansatzfunktionen erster und höherer Ordnung eignet sich die folgende Methode:

### Glättung mittels superkonvergenter Punkte

Dazu wird die Existenz superkonvergenter Punkten vorausgesetzt. Diese läßt sich mit der Galerkin Orthogonalität oder der Stationaritätsbedingung des Funktionals aus Gl.(3.6) motivieren. Wie in Abschnitt 3.1 gezeigt wurde, sind die Fehler in den Spannungen gemessen mit der Bilinearform infolge der Galerkin Orthogonalität minimal.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) = \min_{\mathbf{v}^h \in \mathbf{v}^h} B(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h)$$

Wird ein beliebiger Spannungsverlauf mit diskontinuierlichen Finite-Elemente-Spannungen approximiert, so müssen die Fehler häufig das Vorzeichen wechseln, um die Orthogonalitätseigenschaft zu erfüllen. Interessant sind die Nulldurchgänge, da die Fehler an diesen Stellen identisch Null sind. Bei regulären Problemen werden die Punkte mit geringeren Spannungsfehlern aus Betrachtungen an einem einzigen Element ermittelt (siehe Bild 3.8 für den eindimensionalen Fall). Sind die exakten Spannungen von der Polynomordnung  $p$ , so sind die Finite-Elemente-Spannungen mit der Polynomordnung  $p-1$  an den Gausspunkten exakt [21],[135].

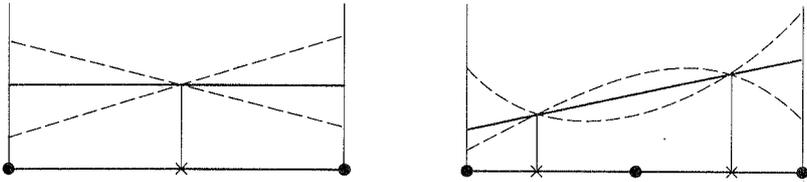


Bild 3.8: Superkonvergenz der Gauss-Legendre Punkte für lineare und quadratische Elemente

Für Spannungen mit einer Polynomordnung größer als  $p$  ist an den Gausspunkten eine höhere Konvergenzrate als in den übrigen Bereichen zu erwarten.

Die von Zienkiewicz und Zhu 1992 vorgestellte Methode zur Spannungsglättung und a-posteriori Fehlerabschätzung basiert auf der höheren Konvergenzrate der Spannungen an superkonvergenten Punkten [147],[148]. Zur Berechnung der verbesserten Spannungen an einem Knoten werden die zugehörigen Elemente zu einem "Patch" zusammengefaßt.

An dem betrachteten Knoten in einem lokalen Koordinatensystem wird für die verbesserten Schnittgrößen ein Polynomansatz gemacht. Die Ansätze haben die gleiche oder eine höhere Polynomordnung als die Finite-Elemente-Ansatzfunktionen, zum Beispiel für quadratische Ansatzfunktionen:

$$\sigma_{ij}^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5x^2 \quad (3.72)$$

Es sind meist mehr Gausspunkte als freie Parameter vorhanden und die geglätteten Spannungen können nur über Fehlerquadratminimierung bestimmt werden.

$$\sum_{k=1}^{NSP} (\sigma_{ij}^* (x_k, y_k) - \sigma_{ij}^h(x_k, y_k))^2 \rightarrow \min \quad (3.73)$$

Hierin beschreibt NSP die Anzahl der "superkonvergenten" Punkte. Die freien Variablen  $a_0, \dots, a_5$  werden anschließend aus der Stationaritätsbedingung für die Gleichung (3.73) bestimmt.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \sum_{k=1}^{NSP} (\sigma_{ij}^* (x_k, y_k) - \sigma_{ij}^h(x_k, y_k))^2 \right\} = 0 \quad (3.74)$$

Zur Bestimmung der Variablen  $a_0, \dots, a_5$  ist das folgende Gleichungssystem zu lösen.



Bild 3.9: Superkonvergente Punkte für vier und neunknotige Elemente



Bild 3.10: Elementgruppen zur Spannungsberechnung an den Knoten i und j

$$\sum_{k=1}^{\text{NSP}} \left( a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 x_k y_k + a_4 y_k^2 + a_5 x_k^2 - \sigma_{ij}^h(x_k y_k) \right) = 0 \quad (3.75)$$

$$\sum_{k=1}^{\text{NSP}} x_k^2 \left( a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 x_k y_k + a_4 y_k^2 + a_5 x_k^2 - \sigma_{ij}^h(x_k y_k) \right) = 0$$

Für kleine Elemente werden insbesondere die Diagonalglieder mit  $y_k^2$  und  $x_k^2$  sehr klein. Im Gegensatz dazu ist das erste Diagonalglied unabhängig von der Elementgröße. Dieses unterschiedliche Verhalten der Diagonalglieder verursacht bei adaptiver Verfeinerung sehr schnell Konditionierungsprobleme. Deshalb sind die Diagonalglieder durch Umskalieren der Koordinatenachsen größenordnungsmäßig anzupassen.

Die superkonvergenten Punkte sind nur bei regulären Lösungen und strukturierten Netzen bekannt. Numerische Berechnungen zeigen jedoch, daß die vorgestellten Methoden auch bei unstrukturierten Netzen eine gute Fehlerabschätzungen ergeben. Vor kurzem zeigten Babuska et al. [18], daß auch bei unstrukturierten Netzen ausgeprägte Bereiche mit geringeren Fehlern existieren. Weiterhin werden in der benannten Arbeit Methoden zur numerische Ermittlung der Bereiche mit geringeren Spannungsfehlern vorgestellt. Es ist anzunehmen, daß für superkonvergente Rekonstruktionen bei allgemeinen Finite-Elemente-Netzen eine BLMR Eigenschaft nötig sein wird.

### 3.3 Adaptive Netzverfeinerung

Bei der adaptiven Berechnung von Tragwerken wird zuerst das grundsätzliche Lösungs- bzw. Tragverhalten mit einer manuell oder automatisch generierten groben Finite-Elemente-Diskretisierung näherungsweise ermittelt. Der Diskretisierungsfehler und der Beitrag der einzelnen Elemente zu dem Gesamtfehler werden anschließend mit den a-posteriori Fehlerschätzern aus der Näherungslösung bestimmt. Die sehr grobe Startdiskretisierung erfüllt in den seltensten Fällen die gestellten Genauigkeitsanforderungen. Deshalb ist in einem weiteren Schritt die Diskretisierung möglichst geschickt zu modifizieren, so daß die vorgegebene Fehler-toleranz mit minimalem Rechenaufwand erzielt wird. Vereinfachend wird im nachfolgenden anstatt des Rechenaufwandes die Anzahl der Gesamtknoten bzw. der Elemente betrachtet. Da

die Diskretisierung im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur durch ändern der Elementgrößen verfeinert bzw. vergrößert wird (h-Adaption), ist diese Vereinfachung gerechtfertigt. Für eine vorgegebene Fehlertoleranz führt die Ermittlung einer optimalen Diskretisierung mit minimaler Anzahl von Elementen auf ein nichtlineares Optimierungsproblem [68]. Bei adaptiven Methoden wird deshalb in den gestellten Genauigkeitsanforderungen genügende Diskretisierung iterativ ermittelt. Nach jedem Iterationschritt werden die Fehlerindikatoren bestimmt, um die Gesamtfehler abzuschätzen und gegebenenfalls die zu verfeinernden Elemente auszuwählen. Die selektive Verfeinerung der Elemente mit einem großen Beitrag zum Gesamtfehler (große Fehlerindikatoren) ist dabei naheliegend. Die nachfolgenden Überlegungen für den eindimensionalen Fall zeigen, daß diese Strategie zu einem Netz mit möglichst wenigen Elementen führt [15],[93].

### 3.3.1 Eigenschaften von optimalen Diskretisierungen

Im nachfolgenden werden die Eigenschaften von Diskretisierungen, die zu einem kleinstmöglichen Fehler führen, für eindimensionale Probleme untersucht. Die Anzahl der Elemente ist dabei vorgegeben und die Größe der Elemente ist variabel (r-Adaptivität). Das Ziel der Verfeinerung ist die Minimierung des Energienormfehlers für eine feste Anzahl von Elementen. Die Unterschiede zwischen dem Interpolationsfehler und dem Finite-Elemente-Fehler werden bei zunehmender Verfeinerung kleiner und die Optimalität der Netze kann näherungsweise für die Interpolierenden untersucht werden. Mit der zweiten Ableitung der exakten Lösung lassen sich die Energienormfehler nach oben hin abschätzen.

$$\|u - Iu\|_{e,\Omega} \leq C \sum_{i=1}^{NEL} h_i \left\| \frac{d^2u}{dx^2} \right\|_{0,\Omega_i} \quad (3.76)$$

Dabei ist NEL die Gesamtanzahl der Elemente und  $h_i$  ist die Länge eines Elementes  $i$ . Für hinreichend kleine  $h_i$  sind die zweiten Ableitungen näherungsweise konstant, falls die Lösung hinreichend glatt ist. Die Ungleichung (3.76) geht damit näherungsweise in eine Gleichung über.

$$\|u - Iu\|_{e,\Omega} \approx C \sum_{i=1}^{NEL} h_i^{\frac{3}{2}} \left| \frac{d^2u}{dx^2} \right| \quad (3.77)$$

Die optimale Elementgrößenverteilung, die zu den geringst möglichen Fehlern führt, kann in Anlehnung an Babuska und Rheinboldt [15] bestimmt werden. Zunächst wird eine Netzdichtefunktion  $\phi$  zur Berechnung der Knotenkoordinaten  $x_i$  eingeführt (Bild 3.11).

$$x_i = \phi\left(\frac{i}{NEL}\right) \quad (3.78)$$

Zu der monoton steigenden Funktion  $\phi$  existiert eine inverse Funktion  $\Phi$ .

$$\frac{i}{NEL} = \Phi(x_i) \quad (3.79)$$

Die Größe der Elemente läßt sich mit der ersten Ableitung von  $\Phi$  bestimmen.

$$h_i = \frac{1}{NEL \frac{d\Phi}{dx}} \quad (3.80)$$

Setzt man die Elementgrößen in die Gleichung (3.77) ein, so folgt unmittelbar:

$$\|u - Iu\|_e^2 \approx C \sum_{i=1}^{NEL} h_i^3 \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \approx C \sum_{i=1}^{NEL} \left[ \frac{1}{NEL \frac{d\Phi}{dx}} \right]^3 \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \quad (3.81)$$

Die Summation über alle Elemente wird für kleine  $h_i$  näherungsweise in eine Integration über das Gebiet überführt.

$$\|u - Iu\|_e^2 \approx C \int_0^L \left[ \frac{1}{NEL \frac{d\Phi}{dx}} \right]^2 \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.82)$$

Gesucht sind die Funktionsverläufe von  $\Phi$ , die zu einem minimalen Fehler in der Energienorm führen. Als Nebenbedingung zur Gleichung (3.82) ist die Anzahl der Elemente mit  $NEL$  vorgegeben. Für die inverse Netzdichtefunktion  $\Phi$  gilt damit:

$$\int_0^L \frac{d\Phi}{dx} dx = \Phi(L) - \Phi(0) = NEL \quad (3.83)$$

Das neue Minimierungsproblem ergibt sich durch Addition der mit dem Lagrangeschen Parameter  $\lambda_L$  gewichteten Nebenbedingung zu Gleichung (3.82).

$$\bar{\Pi} \left( \frac{d\Phi}{dx}, \lambda_L \right) = C \int_0^L \left[ \frac{1}{NEL \frac{d\Phi}{dx}} \right]^2 \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx + \lambda_L \left[ \int_0^L \frac{d\Phi}{dx} dx - NEL \right] \quad (3.84)$$

Der Lagrangesche Parameter  $\lambda_L$  und die Ableitung der inversen Netzdichtefunktion  $\frac{d\Phi}{dx}$  werden aus der Stationaritätsbedingung für das Funktional  $\bar{\Pi}$  bestimmt.

$$\delta \bar{\Pi} \left( \frac{d\Phi}{dx}, \lambda_L \right) = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)} \delta \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \lambda_L} \delta \lambda_L = 0 \quad (3.85)$$

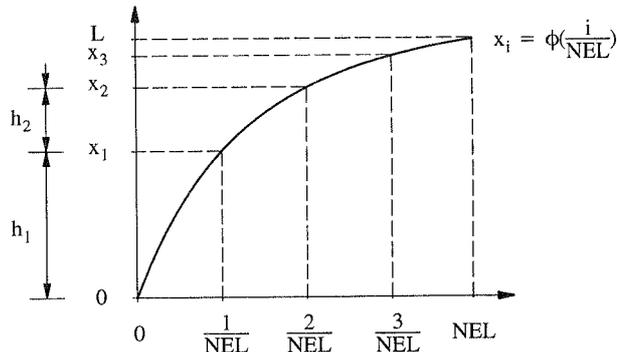


Bild 3.11: Netzdichtefunktion  $\phi$

Die obige Gleichung wird für beliebige  $\delta\Phi_{,x}$  und  $\delta\lambda_L$  nur erfüllt, wenn  $\Phi_{,x}$  und  $\lambda_L$  der folgenden Gleichungen genügen.

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \lambda_L} = 0 \quad (3.86)$$

Aus der ersten Gleichung

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)} = \int_0^L \left[ \frac{-2C}{NEL^2 \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3} \left(\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)\right)^2 + \lambda_L \right] dx = 0 \quad (3.87)$$

wird der Lagrange Parameter  $\lambda_L$  bestimmt.

$$\lambda_L = \frac{2C}{NEL^2 \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3} \left(\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)\right)^2 \quad (3.88)$$

Der Gesamtfehler in Gleichung (3.81) kann damit in Abhängigkeit des Lagrange Parameters  $\lambda_L$  dargestellt werden.

$$\|u - Iu\|_e^2 \approx \frac{1}{2NEL} \sum_{i=1}^{NEL} \lambda_L \quad (3.89)$$

Der Fehler in den einzelnen Elementen ist unabhängig von der Elementgröße gleich  $\lambda_L$ . Sind die elementweise berechneten Fehlerindikatoren bekannt, so kann mit dem Gleichverteilungsprinzip eine wesentlich effektivere Diskretisierung generiert werden. Die numerischen Untersuchungen von Ofiate et.al. [93] zeigen die Gültigkeit des Gleichverteilungsprinzips auch für mehrdimensionale Probleme.

### 3.3.2 Adaptive Vernetzungsstrategie

Die Diskretisierungsfehler werden mit den vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzern ermittelt

$$\|e\|_e \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{NEL} \eta_i^2} \quad (3.90)$$

und die zugehörigen Indikatoren  $\eta_i$  zeigen den Beitrag der verschiedenen Elemente zum Gesamtenergienormfehler. Überschreiten die geschätzten Fehler eine vorgegebene Toleranz, so kann die Finite-Elemente-Diskretisierung mit unterschiedlichen Strategien verfeinert werden. Als Endziel der adaptiven Berechnung wird ein den gestellten Genauigkeitsanforderungen genügendes Finite-Elemente-Netz angestrebt. Damit der Rechenaufwand möglichst klein ist, muß der Beitrag der einzelnen Elemente zu dem Gesamtfehler des endgültigen Finite-Elemente-Netzes nach dem Gleichverteilungsprinzip näherungsweise gleich sein. Die angestrebten absoluten Fehler werden aus den vorgegebenen relativen Fehlern  $\hat{\eta}$  bestimmt.

$$\hat{\eta} \left( (\mathbf{p}, \mathbf{u}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^h)_{\Gamma_N} \right)$$

Daraus wird der durchschnittliche geforderte Fehlerindikator  $\bar{e}_m$  ermittelt.

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{\hat{\eta}((\mathbf{p}, \mathbf{u}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^h)_{\Gamma_N})}{NEL} \quad (3.91)$$

Im weiteren wird das Verhältnis  $\xi_i$  zwischen den geschätzten und den angestrebten Fehlern bestimmt.

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\bar{\epsilon}_m} \quad (3.92)$$

Die Elemente mit  $\xi_i \geq 1$  sind zu verfeinern bzw. die Elemente mit  $\xi_i \leq 1$  zu vergrößern. Beispielsweise kann das Netz durch Unterteilen jeweils eines Elementes in vier kleinere Elemente lokal verfeinert werden (Bild 3.12).

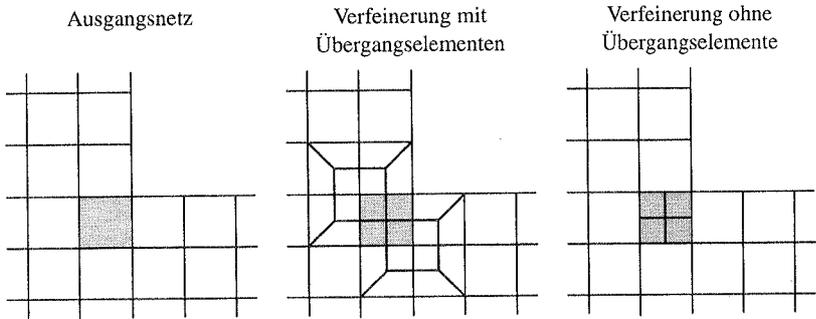


Bild 3.12: Netzverfeinerung durch Elementunterteilung

Bei Tragwerken mit einspringenden Ecken und Rissen sind starke lokale Verfeinerungen erforderlich; deshalb ist es meistens günstiger in jedem Schritt nur wenige Elemente zu verfeinern. Werden alle Elemente mit  $\xi_i \geq 1$  verfeinert, so kann möglicherweise kein optimales Netz generiert werden, da in jedem Schritt die Größe der Elemente nur halbiert wird. Werden in jedem Schritt 30%–60% der Elemente mit  $\xi_i \geq 1$  verfeinert, wird das gesamte adaptive Verfahren effektiver. Als eine alternative Strategie kann in Gleichung (3.91) der relative Fehler kontinuierlich herabgesetzt werden. Die adaptive Berechnung wird nach Erreichen des angestrebten relativen Fehlers  $\hat{\eta}$  abgebrochen.

Da die Elementgrößen bei der Elementunterteilung nicht beliebig verändert werden können, sind bei adaptiven Berechnungen viele Iterationsschritte erforderlich. Die Anzahl der Iterationen läßt sich deutlich reduzieren, wenn in jedem Schritt die Elementgrößen (nahezu) beliebig verändert werden. Die zu generierende Elementgrößen werden näherungsweise mit den aus der a-priori Abschätzungen bekannten Konvergenzraten bestimmt. Zum Beispiel ist die Konvergenzrate für die Energienormfehler und für glatte Lösungen identisch mit dem Polynomgrad der Ansatzfunktionen  $p$ .

$$\| \mathbf{e} \|_{e, \Omega_k} \leq Ch^p \quad (3.93)$$

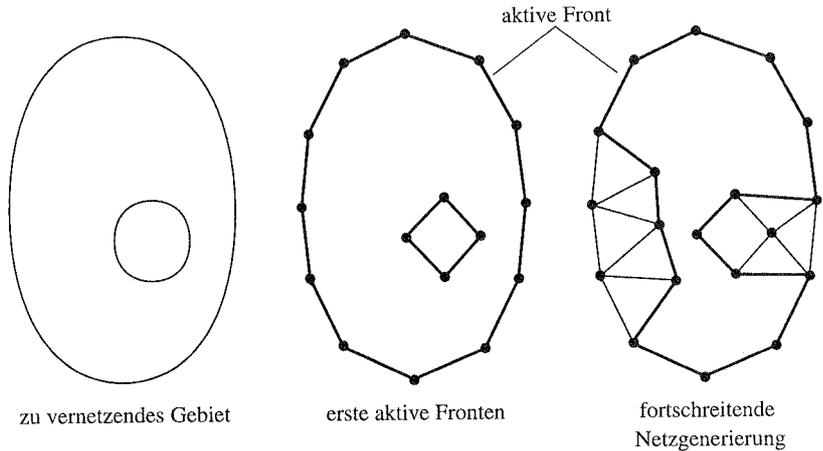


Bild 3.13: Die Advancing Front Methode nach Peraire et al. [96]

Die adaptive Verfeinerung verbessert gerade bei Problemen mit singulärem Lösungsverhalten das Konvergenzverhalten erheblich, deshalb kann die Gleichung (3.93) unabhängig von den Konvergenzraten bei gleichmäßiger Verfeinerung immer angesetzt werden. Mit dem Verhältnis des Ist- zum Sollfehler  $\xi_i$  wird die neue Elementgröße  $h_{i,\text{neu}}$  in Abhängigkeit der alten Größe  $h_{i,\text{alt}}$  bestimmt.

$$h_{i,\text{neu}} = \xi_i^{\frac{1}{p}} h_{i,\text{alt}} \quad (3.94)$$

Mit den errechneten Elementgrößen und den Ansatzfunktionen des alten Netzes ist eine kontinuierliche Elementgrößenverteilung über das gesamte Gebiet vorhanden, die auf dem aktuellen Netz abgespeichert wird. Ausgehend von der erwünschten Elementgrößenverteilung auf dem alten bzw. dem Hintergrundnetz wird ein neues Netz generiert. In der Literatur wurden mittlerweile zahlreiche Netzgeneratoren vorgestellt, die ein Netz mit vorgegebener Elementgrößenverteilung erzeugen können. Eine Zusammenstellung der Methoden wird unter anderem in den Arbeiten von Rehle [106] und George [58] gegeben. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein nach dem "advancing front" Prinzip arbeitender Netzgenerator [106] verwendet.

Der verwendete Netzgenerator generiert zunächst die Knoten an den Gebietsrändern (siehe Bild 3.13). Der Abstand der Knoten bzw. die Kantenlänge wird anhand der Information auf dem Hintergrundnetz bestimmt. Von den Kanten ausgehend werden einzelne Elemente generiert. Den gesamten Rand, von dem aus einzelne Elemente erzeugt werden können, bezeichnet man als aktive Front. Nach der Generierung einzelner Elemente wird die aktive Front entsprechend angepaßt. Dieser Vorgang wird solange durchgeführt, bis die gesamte aktive Front aus einem einzigen Element besteht. Um ein befriedigendes Netz für allgemeine Problemstellungen

zu erhalten, sind zahlreiche Details zu beachten, die u.a. in der Arbeit von Rehle [106] vorgestellt werden.

### 3.4 Beispiele

Ein einseitig eingespannter Zylinder wird am freien Ende mit zwei Lastgruppen belastet (Bild 3.14). Die konzentrierten Lasten sind jeweils auf eine endliche Länge verteilt. Werden, wie bei den meisten in der Literatur diskutierten Benchmarkbeispielen, Einzellasten aufgebracht, so treten am Lastangriffspunkt bei einer Reissner-Mindlin Kinematik unendliche Verschiebungen auf und die exakte innere Energie ist unendlich groß. Ein auf der Energienormabschätzungen basierendes adaptives Vorgehen wäre damit theoretisch zweifelhaft [5].

Zum Vergleich der unterschiedlichen vorgestellten Methoden wurde der explizite Fehler-schätzer nach Babuska, Rheinboldt und Miller (BM) und der glättungsbasierte Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz und Zhu (ZZ) auf das Zylinderbeispiel angewendet. Ein Viertel des Tragwerks wurde dabei mit neunknotigen Schalenelementen diskretisiert [34]. Die geglätteten Schnittgrößen wurden mittels Mittelwertbildung an den Knoten (ZZ-MW),

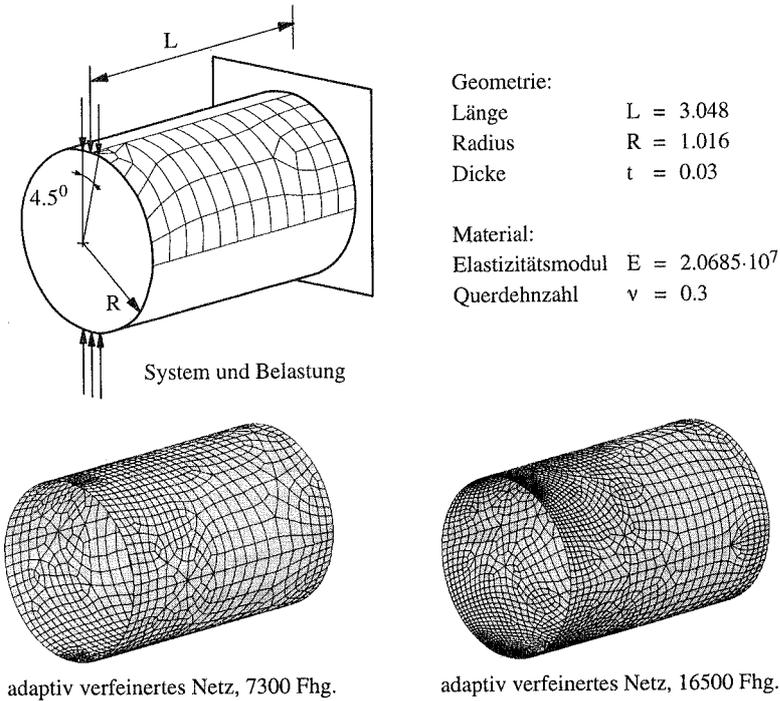


Bild 3.14: Einseitig eingespannter Zylinder

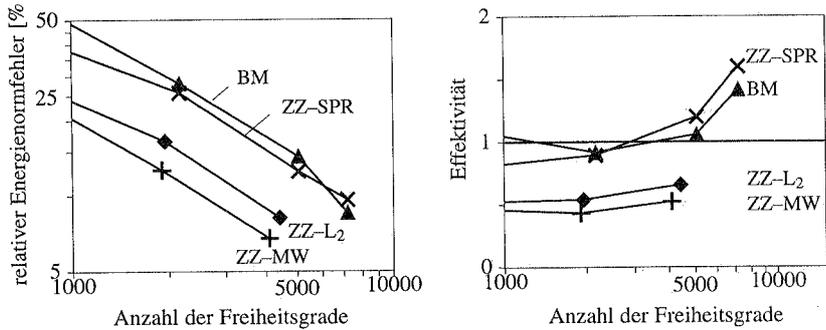


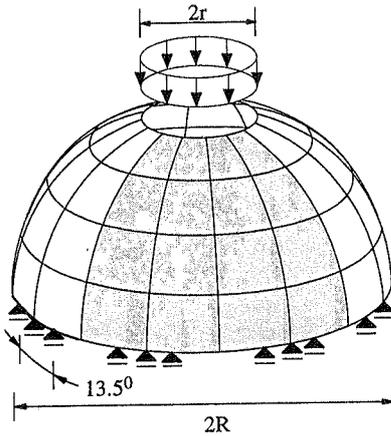
Bild 3.15: Relativer Fehler in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade

$L_2$ -Projektion (ZZ- $L_2$ ) oder "superkonvergenter" Glättung (ZZ-SPR) bestimmt. In Bild 3.15 sind die geschätzten relativen Fehler und weiterhin die numerisch ermittelten Effektivitätsindizes  $\theta$  der einzelnen Verfahren aufgetragen.

$$\theta = \frac{\eta}{\sqrt{B(\mathbf{u}_{\text{fein}}^h, \mathbf{u}_{\text{fein}}^h) - B(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h)}}$$

Die Referenzlösung  $B(\mathbf{u}_{\text{fein}}^h, \mathbf{u}_{\text{fein}}^h)$  wurde mit einem sehr feinem Netz (ca. 41 000 Freiheitsgrade) erzeugt. Der explizite residuale Fehlerschätzer nach Babuska, Rheinboldt und Miller sowie der auf superkonvergenter Spannungsglättung basierende Verfeinerungsindikator nach Zienkiewicz und Zhu liefern sehr gute Effektivitätsindizes nahe bei eins. Bei zunehmender Netzverfeinerung wird der numerisch ermittelte Effektivitätsindex in Bild 3.15 schlechter, da die Unterschiede zwischen der aktuellen und der Referenzlösung zunehmend kleiner werden. Aus dem Vergleich der unterschiedlichen Konzepte zur Fehlerabschätzung ist die Zuverlässigkeit des auf Residuen basierenden Schätzers und die gute Effektivität der Schnittgrößenglättung mittels "superkonvergenter" Punkte ersichtlich.

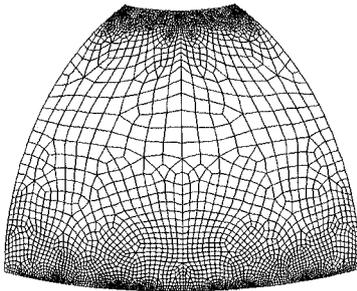
Das zweite Beispiel ist eine Halbkugel-Schale mit einer Öffnung (Bild 3.16). Der untere Rand der Schale ist nur teilweise an acht Auflagern vertikal gelagert und der freie obere Rand wird vertikal mit einer Streckenlast belastet. Aus Symmetriegründen wird ein Achtel der Schale mit neunknotigen Elementen diskretisiert. An den beiden Rändern kommt es durch die Störung infolge der Belastung und Auflagerung zu hohen Spannungsgradienten, die einen großen Energienormfehler zur Folge haben. Das adaptiv ermittelte Netz mit starken Verfeinerungen in den Störbereichen ist in Bild 3.17 dargestellt. Weiterhin ist in Bild 3.17 die Konvergenz der geschätzten Fehler für den expliziten und glättungsbasierten Fehlerschätzer aufgetragen. Beide Methoden zeigen auch für dieses Beispiel ein sehr ähnliches Verhalten.



Geometrie:  
 Radius unten  $R = 10.0$   
 Radius oben  $r = 3.0902$   
 Dicke  $t = 0.04$

Material:  
 Elastizitätsmodul  $E = 6.825 \cdot 10^7$   
 Querdehnzahl  $\nu = 0.3$

Bild 3.16: Abschnittsweise gelagerte Kugelschale – System und Belastung



adaptiv verfeinertes Netz  
 45000 Fhg.

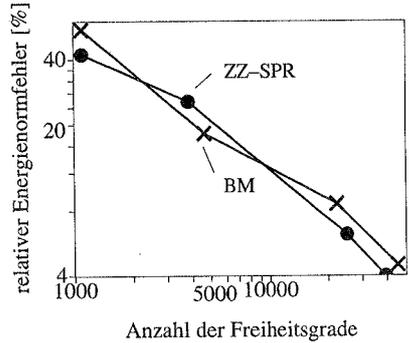


Bild 3.17: Abschnittsweise gelagerte Kugelschale – Adaptive Berechnung

# 4 Erweiterte adaptive Methoden für lineare Elastizität

## 4.1 Einführung

Die in Kapitel 3 vorgestellten Methoden eignen sich zur Abschätzung des Fehlers in der Energie bzw. in den Spannungen des gesamten Tragwerks. Für praktische Problemstellungen ist die globale Energienorm jedoch im allgemeinen nur von untergeordneter Bedeutung. Zur Verallgemeinerung der Fehlerschätzer für beliebige lokale sowie globale Größen sind Dualitäts- bzw. Reziprozitätsargumente, wie sie zum Beispiel bei dem Einflußlinien oder -flächen Konzept verwendet werden, hilfreich.

Die Fehler für beliebige lokale und globale Größen können im Unterschied zur Energienorm nicht aus der Lösung von Teilproblemen abgeschätzt werden. Bei der Fehlerabschätzung bezüglich der Energienorm und anderer Größen bestehen z.T. grundsätzliche Unterschiede, wie sie bei dem in Bild 4.1 dargestellten Beispiel deutlich werden. Die Diskretisierungsfehler in der  $L_2$ -Norm der Verschiebungen sind von der Länge des unbelasteten Teilbereiches  $l_u$  abhängig. Die Fehler in der Energienorm werden davon jedoch nicht beeinflusst. Werden mit Residuen belastete lokale Dirichletprobleme zur Berechnung der Verschiebungen verwendet, ist der berechnete  $L_2$ -Norm Verschiebungsfehler unabhängig von der Länge  $l_u$ . Im unbelasteten Bereich  $l_u$  sind keine Spannungen und Residuen vorhanden und die Lösung der Teilprobleme führt zu keinen Verschiebungen. Aus Bild 4.1 folgt jedoch, daß die Teilprobleme im unbelasteten Bereich sehr große Starrkörperverschiebungen ausführen und damit zu großen  $L_2$ -Norm Fehlern führen.

Dualitätsbeziehungen wurden bereits Ende der sechziger und Anfang der siebziger Jahre zur a-priori Abschätzung von  $L_\infty$ - [117] oder  $L_2$ -Norm Fehlern [82] verwendet. Ein Konzept

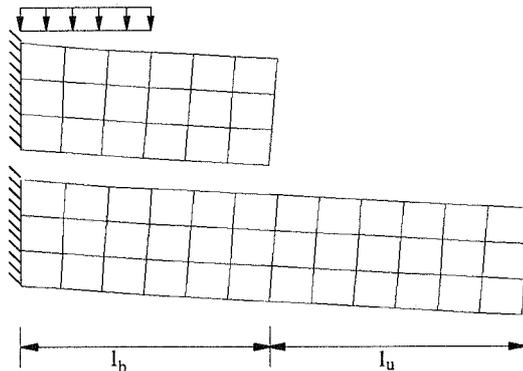


Bild 4.1: Kragarm mit variabler Länge

zur a-posteriori Fehlerabschätzung und Berechnung von verbesserten lokalen und integralen Größen stellten Babuska und Müller für Elastizitätsprobleme 1984 vor [7], [8], [9]. Die lokalen Fehlerschätzer führen auf die zweimalige Lösung des ursprünglichen Problems mit unterschiedlichen Belastungen. Aus den klassischen Energienormabschätzungen für die beiden Lastfälle wird eine a-posteriori Fehlerabschätzung für das lokale Problem berechnet. Die grundsätzliche Vorgehensweise mit Dualitätstechniken, d.h. mit zwei unterschiedlichen Lastfällen für lokale Abschätzungen, wurde von Tottenham [130] bereits Anfang der siebziger Jahre vorgestellt. Die Netzadaption bezüglich lokaler Variablen wurde in den genannten Arbeiten nicht behandelt. Adaptive Methoden bezüglich lokaler Variablen wurden in der Literatur erst vor kurzem von Babuska et al. [18] und Becker und Rannacher [24] eingeführt. Die Arbeiten von Becker und Rannacher stützen sich auf das von Johnson et al. [68], [70] und Eriksson et al. [52], [53] vorgestellte allgemeine Konzept zur a-posteriori Fehlerabschätzung und Netzadaption für elliptische, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen.

## 4.2 Einflußflächenkonzept in der Strukturmechanik

Die für die Fehlerschätzung erforderlichen Dualitätsargumente werden im nachfolgenden zunächst mit dem aus der Strukturmechanik vertrauten klassischen Einflußflächenkonzept motiviert. Im weiteren können die aus dem Einflußflächenkonzept bekannten Zusammenhänge zur Entwicklung von neuartigen Fehlerschätzern verwendet werden. Obwohl die Herleitungen im nachfolgenden nur für das Kontinuum gezeigt werden, ist die Erweiterung auf die Schalen-gleichungen relativ einfach.

Ausgangspunkt sind die Lamé–Navierschen Differentialgleichungen Gl.(2.14) zur Berechnung der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  eines Tragwerks mit veränderlicher äußerer Belastung  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{p} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

Für praktische Problemstellungen, wie zum Beispiel bei der Bemessung von Bauteilen, sind nur die Spannungen oder Verschiebungen an ausgewählten Stellen maßgebend. Nach der einmaligen Berechnung der Einflußflächen können die maßgeblichen lokalen Spannungen und Verschiebungen für beliebige Belastungen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  sehr einfach berechnet werden. Die beschriebene Vorgehensweise ist u.a. zur Bemessung von Bauwerken mit sehr vielen unterschiedlichen Lastfällen interessant. Die Einflußflächen werden aus den Lamé–Navierschen Differentialgleichungen mit modifizierten Belastungen bestimmt. Das neue Problem wird auch als das duale oder adjungierte Problem bezeichnet, da die duale Variable zu den betrachteten Größen als Belastung aufgebracht wird.

### 4.2.1 Einflußflächen für Verschiebungsgrößen

Die Einflußfläche der punktuellen Verschiebungen an der Stelle  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  in der Richtung  $i$  wird zum Beispiel aus dem folgenden dualen Randwertproblem bestimmt.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}) + \boldsymbol{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D$$

Der Lastvektor  $\boldsymbol{\delta}_i$  stellt dabei die duale Variable zu der lokalen Verschiebung an der Stelle  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  dar. Der Lastvektor  $\boldsymbol{\delta}_i$  besteht aus einer Einzellast der Größe eins bzw. einem Dirac Delta in Richtung der gesuchten Verschiebungskomponente, z.B. für  $i=2$  gilt:

$$\boldsymbol{\delta}_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \cdot \mathbf{i}_1 + \delta(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{i}_2 + 0 \cdot \mathbf{i}_3 \quad (4.2)$$

Mit den kartesischen Basisvektoren  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  und  $\mathbf{i}_3$ . Die Lösung des dualen Problems ist die Greensche Funktion  $\mathbf{G}$ . Aus dem Einflußflächenkonzept ist der folgende Zusammenhang zwischen der Belastung und der Verschiebung des ursprünglichen Gl.(2.17) und des dualen Problems Gl.(4.1) bekannt

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}) + (\mathbf{f}, \mathbf{G})_{\Gamma_N} \quad (4.3)$$

Die Multiplikation der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  des primalen Problems mit der Belastung des dualen Problems  $\boldsymbol{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})$  auf der linken Gleichungsseite ergibt die lokalen Verschiebungen an der Stelle  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ .

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))_{\Omega} = u_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.4)$$

Ist die Greensche Funktion  $\mathbf{G}$  bekannt, so kann die lokale Verschiebung  $u_i(\bar{\mathbf{x}})$  für beliebige Belastungen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  aus Gleichung (4.3) bestimmt werden. Die Greensche Funktion wird auch als die Einflußfunktion für die gesuchte lokale Verschiebung interpretiert. Der durch Gleichung (4.3) beschriebene Zusammenhang ist in der klassischen Ingenieurliteratur als Reziprozitätstheorem oder Satz von Betti Maxwell [83] allgemein bekannt und kann aus dem ursprünglichen und dem dualen Randwertproblem mittels partieller Integration hergeleitet werden.

$$u_i(\bar{\mathbf{x}}) = -(\mathbf{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G})) = (\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G})) = (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{G}) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}) + (\mathbf{f}, \mathbf{G})_{\Gamma_N} \quad (4.5)$$

In der obigen Umformung wurde die Symmetrie des Werkstoffensors  $\mathbf{C}$  ausgenutzt. Ein einfaches Stabbeispiel in Bild 4.2 zeigt die Anwendung des vorgestellten Konzepts zur Bestimmung der Verschiebungen am Stabende.

Für einige Problemstellungen mit unterschiedlicher Geometrie und unterschiedlichen Randbedingungen sind die Greenschen Funktionen bekannt. Zur Berechnung der lokalen Verschiebungen wird die Greensche Funktion in Gleichung (4.5) eingesetzt. Für viele Problemstellungen, insbesondere für Schalenträgerwerke, ist die Greensche Funktion jedoch nicht bekannt und das vorgestellte Konzept kann nicht angewendet werden. Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode ist es jedoch sehr naheliegend, das duale Problem Gl.(4.1) selbst zu diskretisieren.

$$\mathbf{B}(\mathbf{G}^h, \mathbf{v}^h) = (\boldsymbol{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \quad (4.6)$$

Hierbei beschreibt  $\mathbf{G}^h$  die Finite-Elemente-Näherung der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}$ . Die Belastung besteht entsprechend zum kontinuierlichen Problem aus einer Einzellast an den Elementknoten mit den Koordinaten  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ . Die Knotenverschiebungen für das ursprüngliche Problem

werden mit dem Satz von Betti–Maxwell oder genauer mit der folgenden Umformung bestimmt.

$$u_i^h(\bar{x}) = (\delta_i(\bar{x}), \mathbf{u}^h) = \mathbf{B}(\mathbf{G}^h, \mathbf{u}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{G}^h)_{\Gamma_N} \quad (4.7)$$

Die gleiche Verschiebung  $u_i^h(\bar{x})$  kann natürlich auch mit dem ursprünglichen Randwertproblem und der gleichen Diskretisierung wie in Gl.(4.6) berechnet werden.

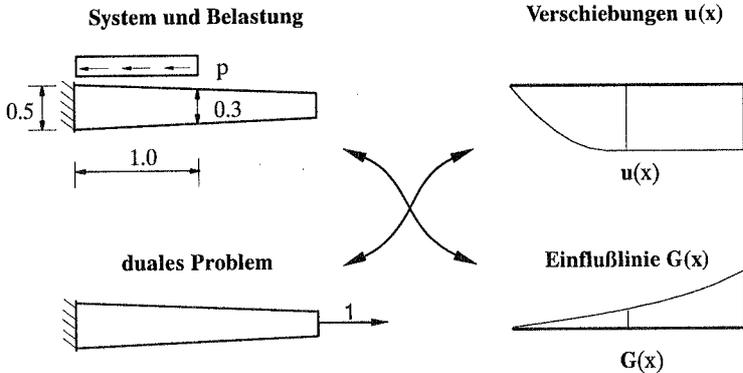


Bild 4.2: Definition des primalen und dualen Problems

#### 4.2.2 Einflußflächen für Spannungsgrößen

Die lokalen Spannungen lassen sich nach der Berechnung der zugehörigen Einflußlinien ähnlich zu den lokalen Verschiebungen bestimmen. Im nachfolgenden werden zur Vereinfachung zuerst die Einflußlinien für die Verschiebungsgradienten  $u_{,j}$  und anschließend die für Spannungen vorgestellt. Weiterhin wird die Regularität der dualen Lösung zunächst nicht diskutiert. Die Einflußlinien für die Verschiebungsgradienten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werden mit Hilfe des folgenden dualen Problems bestimmt.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_i(\bar{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})\mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei ist  $\mathbf{z}$  eine verallgemeinerte Greensche Funktion. Die Belastung des dualen Problems besteht aus einem Sprung in den Verschiebungsgradienten bzw. aus einer Diskontinuität in den zugehörigen Verschiebungen. Die Anwendung des Satzes von Betti Maxwell auf das primale und duale Problem ergibt:

$$\left( \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_i(\bar{x}) \right) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\Gamma_N} \quad (4.9)$$

Aus der linken Seite folgt nach partieller Integration der lokale Verschiebungsgradient.

$$\left( \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_i(\bar{x}) \right) = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\bar{x})$$

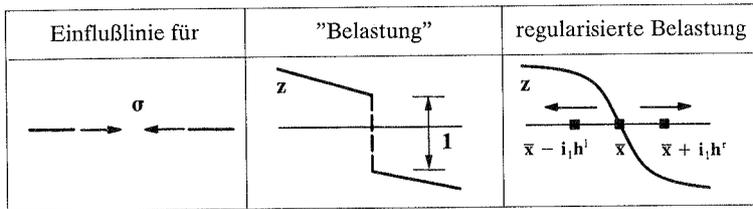


Bild 4.3: Einflußlinie für Spannungen

Die Multiplikation der Belastungen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  mit der Einflußlinie  $\mathbf{z}$  ergibt den Verschiebungsgradienten  $u_{i,j}^h(\bar{\mathbf{x}})$ .

$$\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}) = -(\mathbf{p}, \mathbf{z}) - (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\Gamma_N} \quad (4.10)$$

Die Verzerrungen lassen sich anschließend aus den Verschiebungsgradienten entsprechend Gl. (2.9) bestimmen.

$$\epsilon = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Da die verallgemeinerte Greensche Funktion unbekannt ist, wird in Gl.(4.10) wieder eine Finite-Elemente-Approximation verwendet. Der Verschiebungsgradient des diskretisierten Tragwerks wird nach Einsetzen von  $\mathbf{z}^h$  in die Gleichung (4.9) und anschließender Integration bestimmt. Die Existenz der Lösung  $\mathbf{z}$  für das duale Problem Gl.(4.8) wurde bei der bisherigen Herleitung vorausgesetzt. Die vorgeschriebenen Diskontinuitäten in den Verschiebungen liegen jedoch nicht in dem zulässigen Sobolev Raum  $H^1$  und für das duale Problem existiert folglich keine Lösung. In der mathematischen Literatur wird deshalb ein modifiziertes bzw. regularisiertes duales Problem betrachtet [18]. Die Konvergenz der regularisierten Lösung gegen die irreguläre Lösung wird anschließend analytisch gezeigt. Im nachfolgenden werden einige mechanisch sinnvolle Regularisierungen im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode vorgestellt. Ein reguläres Lösungsverhalten kann am einfachsten durch Glätten des diskontinuierlichen Verschiebungsverlaufes in der Nähe des Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  erzwungen werden. Wird die Einflußfunktion  $\mathbf{z}$  mit der Finite-Elemente-Methode approximiert, so erfolgt die Glättung am einfachsten durch zwei entgegengesetzte Kräfte in den benachbarten Knoten des Punktes mit der Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  (Bild 4.3).

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}^h, \mathbf{v}^h) = (\delta_i(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{i}_j h^r), \mathbf{v}^h) - (\delta_i(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{i}_j h^l), \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (4.11)$$

Dabei sind  $h^r$  und  $h^l$  die Größen der benachbarten Elemente und  $\mathbf{i}_j$  ist ein kartesischer Basisvektor. Das Produkt aus der Einflußfunktion  $\mathbf{z}^h$  und den äußeren Belastungen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  liefert gemäß des Satzes von Betti-Maxwell die Differenz der Verschiebungen zwischen den beiden Einzellasten.

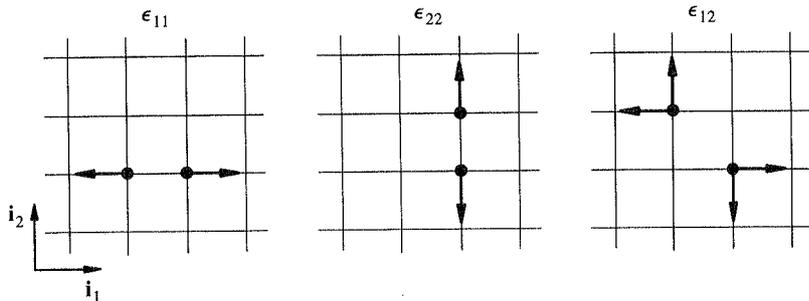


Bild 4.4: Einflußflächen für Verzerrungen

$$\begin{aligned}
 u_1^h(\bar{x} + \mathbf{i}_j h^r) - u_1^h(\bar{x} - \mathbf{i}_j h^r) &= (\delta_i(\bar{x} + \mathbf{i}_j h^r), \mathbf{u}^h) - (\delta_i(\bar{x} - \mathbf{i}_j h^r), \mathbf{u}^h) \\
 &= \mathbf{B}(\mathbf{z}^h, \mathbf{u}^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{z}^h)_{\Gamma_N}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Aus der Division durch den Abstand der Lastangriffspunkte folgt eine Näherung für die Verschiebungsgradienten.

$$\frac{\partial u_1^h}{\partial x_j}(\bar{x}) \approx \frac{u_1^h(\bar{x} + \mathbf{i}_j h^r) - u_1^h(\bar{x} - \mathbf{i}_j h^r)}{h^r + h^l}
 \tag{4.13}$$

Der Einfluß der Regularisierung ist für kleine Elementgrößen  $h^l$  und  $h^r$  sehr gering. Die regulisierten Dehnungen  $\epsilon_{11}$  und  $\epsilon_{22}$  sind identisch mit den Verschiebungsgradienten  $u_{1,1}$  und  $u_{2,2}$ . Die Schubverzerrungen werden aus den Verschiebungsgradienten  $u_{1,2}$  und  $u_{2,1}$  oder mit einer Belastung wie in Bild 4.4 rechts dargestellt bestimmt.

Die Belastung zur Ermittlung der Einflußflächen von Schnittgrößen bei Flächentragwerken ist aus der klassischen Strukturmechanik bekannt und wird deshalb nicht weiter diskutiert. Mechanisch sinnvolle Regularisierungen, wie in Bild 4.5 für die Momente dargestellt, können auch für die anderen Schnittgrößen relativ einfach konstruiert werden.

#### 4.2.3 Einflußflächen für integrale Variable

Für praktische Problemstellungen sind weiterhin die Einflußlinien integraler Größen wie beispielsweise Auflagerkräfte besonders interessant. Die zur Auflagerkraft zugehörige duale Va-

Einflußlinie für	"Belastung"	regularisierte Belastung

Bild 4.5: Einflußlinie für Momente

riable, eine Verschiebung des Auflagers, ist somit auch die Belastung des dualen Problems. Die Einflußlinien für die Auflagerkräfte werden wie bei den Spannungen auch mit regularisierten Belastungen ermittelt. Die regularisierte Finite-Elemente-Näherung wird zum Beispiel mit der in Bild 4.6 dargestellten Linienlast bestimmt. Die Auflagerkraft  $V^h$  wird anschließend mit Hilfe des Satzes von Betti-Maxwell ermittelt.

$$V^h = (\mathbf{p}, \mathbf{z}^h)_\Omega + (\mathbf{f}, \mathbf{z}^h)_{\Gamma_N} \tag{4.14}$$

Weiterhin wird zur Bemessung von Tragwerken in der Nähe von Singularitäten meist der Mittelwert der Spannungen verwendet. Dazu sind die in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten dualen Belastungen für die Spannungen in dem betrachteten Bereich verteilt anzubringen.

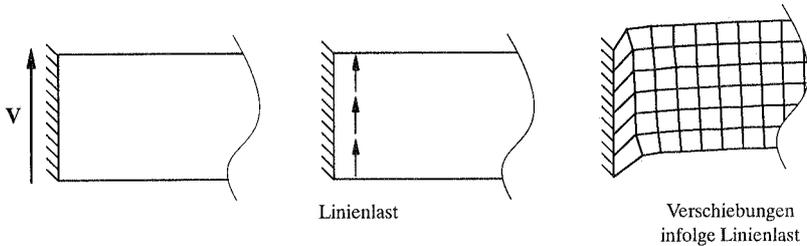


Bild 4.6: Regularisiertes duales Problem für die Auflagerkraft  $V$

### 4.3 A-Priori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Die in den letzten Abschnitten vorgestellten Dualitätstechniken werden bereits seit Mitte der siebziger Jahre zur a-priori Fehlerabschätzung verwendet (u.a. in [117], [126]). Da die Theorie zur a-priori Fehlerabschätzung im wesentlichen vollständig ist, können daraus wichtige Erkenntnisse für die a-posteriori Fehlerabschätzung abgeleitet werden. Im nachfolgenden wird kurz die Vorgehensweise zur Herleitung von a-priori Fehlerschätzern für beliebige lokale und globale Größen skizziert. Für Fehlerabschätzungen, die nicht auf Energienormen basieren, wird zusätzlich zum Randwertproblem zur Berechnung der Fehler nach Gl. (3.28)

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (\overline{\mathbf{R}}, \mathbf{v})_\Omega + (\overline{\mathbf{J}}, \mathbf{v})_\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

ein duales Problem betrachtet. Die Belastung für das duale Problem wird in Abhängigkeit der betrachteten Größe in Anlehnung an das Einflußlinienkonzept gewählt.

Zur Bestimmung der lokalen Verschiebungsfehler in der näheren Umgebung  $\tau$  des Punktes  $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$  wird eine Flächenlast  $\tilde{\delta}_i$  als Belastung angebracht.

$$B(\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{v}) = (\tilde{\delta}_i, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{4.15}$$

Der Lastvektor  $\tilde{\delta}_i$  besteht aus einer regularisierten Einzellast bzw. Dirac Delta  $\tilde{\delta}$  und setzt sich entsprechend der Gleichung (4.2) zusammen, z.B. für  $i=2$  gilt:

$$\tilde{\delta}_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \cdot \mathbf{i}_1 + \tilde{\delta}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{i}_2 + 0 \cdot \mathbf{i}_3 \quad (4.16)$$

Die lokalen Verschiebungsfehler ergeben sich aus der Fehlergleichung (3.28) und dem dualen Problem Gl. (4.15) mit Hilfe des Satzes von Betti Maxwell (siehe auch Gl.(4.5))

$$(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{B}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{G}}) = (\bar{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{G}}) + (\bar{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{G}})_\Gamma \quad (4.17)$$

mit

$$(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})) = \int_{\tau} \mathbf{e}_i \tilde{\delta} \, dx \quad (4.18)$$

Die konkrete Form der regularisierten Belastung  $\tilde{\delta}$  beeinflusst somit nur die Wichtung der Verschiebungsfehler in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ . Die a-priori Abschätzung der lokalen Fehler geht von der regularisierten Greenschen Funktion  $\tilde{\mathbf{G}}$  und der von den Fehlern  $\mathbf{e}$  geleisteten inneren Arbeit aus. Unter Ausnutzung der Galerkin Orthogonalität wird die Finite-Elemente-Approximation der Greenschen Funktion  $\tilde{\mathbf{G}}^h$  in Gleichung (4.17) eingesetzt.

$$(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{e}) = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h, \mathbf{e}) \quad (4.19)$$

Der Bilinearform läßt sich weiterhin mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung in zwei Anteile zerlegen.

$$(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))^2 = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h, \mathbf{e})^2 \leq \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h, \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h) \mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \| \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h \|^2_{\tilde{\mathbf{e}}} \mathbf{e} \|^2_{\mathbf{e}} \quad (4.20)$$

Das Produkt der Energienormfehler für das ursprüngliche und das duale Problem ergibt somit eine Abschätzung für das entsprechend Gleichung (4.18) gewichtete Mittelwert der lokalen Verschiebungsfehler  $\mathbf{e}_i(\bar{\mathbf{x}})$ . Nach Einsetzen der in Abschnitt 3.2.1 hergeleiteten a-priori Abschätzungen für die Energienorm in Gleichung (4.20) folgt eine a-priori Fehlerabschätzung für den lokalen Fehler.

$$|(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))| \leq \text{Ch}^{\min(p,r-1)} \| \tilde{\mathbf{G}} \|_r h^{\min(p,s-1)} \| \mathbf{u} \|_s \quad (4.21)$$

Darin ist  $p$  der Polynomgrad der Finite-Elemente-Ansatzfunktionen und  $h$  ist eine charakteristische Elementlänge. Das Konvergenzverhalten der lokalen Verschiebungen wird mit den Parametern  $r$  und  $s$ , der Glattheit der ursprünglichen und der dualen Lösung gesteuert. Ist die Lösung zum Beispiel infolge der Geometrie des Gebietes für das ursprüngliche und duale Problem singularär, so ist eine deutlich geringere Konvergenzrate zu erwarten, als bei Singularitäten, die ausschließlich auf die Belastung des dualen Problems zurückzuführen sind.

Theoretisch sowie historisch sind die  $L_2$ -Norm-Abschätzungen für die Verschiebungen auch unter dem Gesichtspunkt der Dualitätstechniken interessant [126]. Dazu wird das folgende duale Problem betrachtet.

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (4.22)$$

Die Belastung ist der unbekannte Fehler  $\mathbf{e}$  selbst. Die Anwendung des Satzes von Betti-Maxwell auf das Randwertproblem zur Berechnung der Fehler Gl. (3.28) und das duale Problem (4.23) ergibt.

$$\| \mathbf{e} \|_0^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = B(\mathbf{z}, \mathbf{e}) \quad (4.24)$$

den  $L_2$ -Norm Fehler im Quadrat. In die linke Gleichungsseite wird wieder die Finite-Elemente-Lösung des dualen Problems  $\mathbf{z}^h$  eingesetzt (Galerkin Orthogonalität).

$$\| \mathbf{e} \|_0^2 = B(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e}) \quad (4.25)$$

Das Produkt der Fehler wird mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in zwei Anteile zerlegt.

$$\| \mathbf{e} \|_0^2 = |B(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e})| \leq \sqrt{B(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)} \sqrt{B(\mathbf{e}, \mathbf{e})} = \| \mathbf{z} - \mathbf{z}^h \|_e \| \mathbf{e} \|_e \quad (4.26)$$

Zur Abschätzung der Diskretisierungsfehler werden wiederum die in Abschnitt 3.2.1 hergeleiteten Energienormabschätzungen verwendet (Gl.(3.17)):

$$\| \mathbf{e} \|_0^2 \leq C h^{\min(p,r-1)} \| \mathbf{z} \|_r h^{\min(p,s-1)} \| \mathbf{u} \|_s \quad (4.27)$$

Die Lösung des dualen Problems  $\| \mathbf{z} \|_r$  wird mit einer Stabilitätsabschätzung aus der Belastung des dualen Problems abgeschätzt.

$$\| \mathbf{e} \|_0 \leq C h^{\min(p,r-1)} \frac{\| \mathbf{z} \|_r}{\| \mathbf{e} \|_0} h^{\min(p,s-1)} \| \mathbf{u} \|_s = S_c C h^{\min(p,r-1)} h^{\min(p,s-1)} \| \mathbf{u} \|_s \quad (4.28)$$

Die Stabilitätskonstante  $S_c$  ist eine vom Tragwerk abhängige und von der Diskretisierung unabhängige Konstante, die das Verhältnis der Verschiebungen  $\mathbf{z}$  zu der Belastung  $\mathbf{e}$  des dualen Problems beschreibt.

$$S_c \leq \frac{\| \mathbf{z} \|_r}{\| \mathbf{e} \|_0} \quad (4.29)$$

Die Konstante  $S_c$  ist sehr groß, wenn der Verschiebungsverlauf  $\mathbf{z}$ , gemessen in der  $H^1$ -Norm, für die gegebene Belastung  $\mathbf{e}$  sehr groß ist.

Der Konvergenzordnung der Verschiebungen wird, wie bei den lokalen Fehlern, mit der Konvergenzordnung der Energienormfehler des ursprünglichen und des dualen Problems gesteuert. Existieren die Lösungen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}$  in der  $\| \cdot \|_2$  Norm, so wird die maximale quadratische Konvergenzordnung für die Verschiebungen für bilineare Elemente

$$\| \mathbf{e} \|_0 \leq S_c C h^2 \| \mathbf{u} \|_2 \quad (4.30)$$

erreicht. Die vorgestellte  $L_2$ -Fehlerabschätzung unter Ausnutzung von Dualitätsprinzipien wird in der mathematischen Literatur als Aubin-Nitsche Trick bezeichnet [126].

#### 4.4 A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Die Herleitung von a-posteriori Fehlerschätzern für lokale und globale Größen orientiert sich sehr stark an der Vorgehensweise der a-priori Abschätzungen. Das ursprünglich von Tottenham [130] vorgestellte und von Babuska et al. [7], [8], [9] ausgearbeitete Vorgehen basiert auf a-posteriori Energienormabschätzungen für das ursprüngliche und das duale Problem.

#### 4.4.1 A-Posteriori Fehlerabschätzung für lokale Variable

Für die lokalen Verschiebungsfehler in der näheren Umgebung eines bestimmten Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  wird wie bei der a-priori Abschätzung (Gl.(4.20)) von der folgenden Gleichung ausgegangen:

$$|(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))| \leq \| \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h \|_{\mathbf{e}} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{e}} \quad (4.31)$$

Einsetzen der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzer für die Energienorm ergibt die entsprechenden Fehlerschätzer für den lokalen Fehler. Für die spätere Netzadaption eignet sich besonders die elementweise Berechnung der Gleichung (4.31).

$$|(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))| = \sum_{k=1}^{\text{NEL}} |B(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h, \mathbf{e})_{\Omega_k}| \leq \sum_{k=1}^{\text{NEL}} \| \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h \|_{\mathbf{e}, \Omega_k} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{e}, \Omega_k} \quad (4.32)$$

In dieser Form wird der Beitrag der verschiedenen Elemente zu den lokalen Fehlern von den zugehörigen Indikatoren beschrieben.

$$\eta_k = \| \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h \|_{\mathbf{e}, \Omega_k} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{e}, \Omega_k} \quad (4.33)$$

Wie aus der Gleichung (4.32) ersichtlich ist, beschreiben die Energienormfehler des dualen Problems  $\| \tilde{\mathbf{G}} \|_{\mathbf{e}, \Omega_k}$  den Einfluß der Elementfehler  $\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{e}, \Omega_k}$  auf den lokalen Fehler  $(\mathbf{e}, \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}))$ . Wie bereits erwähnt beeinflusst die konkrete Form der regularisierten Einzellast  $\tilde{\delta}$  nur die Wichtung der Verschiebungen in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ . Wird die Belastung  $\tilde{\delta}$  zum Beispiel wie in Bild 4.7 gewählt, so ist bei dem diskretisierten Tragwerk nur der Finite-Elemente-Knoten mit den Koordinaten  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  mit einer Einzellast zu belasten. Zur Abschätzung der Fehler im Mittelwert der Verschiebungen ist die Belastung des dualen Problems in dem betrachteten Teibereich als konstant zu wählen. Im Rahmen der Adaptivität sind besonders die relativen Fehler  $\eta^{\text{rel}}$  interessant.

$$\eta^{\text{rel}} = \frac{\sum_{k=1}^{\text{NEL}} \| \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h \|_{\mathbf{e}, \Omega_k} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{e}, \Omega_k}}{(\mathbf{u}^h, \tilde{\delta}_i)} \quad (4.34)$$

Die relativen Fehler sind von der integralen Größe der Belastung unabhängig, so daß die Belastung bei der numerischen Berechnung nicht skaliert werden muß. Die Fehler in den lokalen

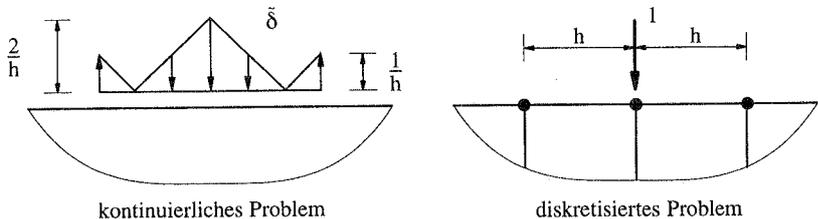


Bild 4.7: Last auf einen FE Knoten und die zugehörige kontinuierliche Belastung [46]

Spannungen werden, wie bei dem Einflußflächenkonzept vorgestellt, mit dem entsprechend regularisierten dualen Problemen bestimmt.

#### 4.4.2 A-Posteriori Fehlerabschätzung für integrale Variable

Ist für eine integrale Variable, wie zum Beispiel die Auflagerkraft, die Belastung des dualen Problems bekannt, so kann der Fehler a-posteriori auch für lokale Variablen abgeschätzt werden (siehe Gl. (4.32)).

$$|V| = |\mathbf{B}(\mathbf{z}-\mathbf{z}^h, \mathbf{e})| \leq \sum_{k=1}^{NEL} \|\mathbf{z}-\mathbf{z}^h\|_{e, \Omega_k} \|\mathbf{e}\|_{e, \Omega_k}$$

Dabei sind  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}^h$  die zum dualen Problem zugehörigen Lösungen. In der Strukturmechanik werden häufig aus der Finite-Elemente-Lösung integrale Werte folgender Form benötigt.

$$\int_{\tau} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}}, \dots) dx \quad (4.35)$$

$\mathbf{F}$  stellt hierin eine beliebige, von der Lösung  $\mathbf{u}$  und deren Ableitungen abhängige Funktion dar. Integrale dieser Form treten zum Beispiel bei der Sensitivitätsanalyse von Tragwerken oder bei der Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren auf. Die Fehler der betrachteten integralen Variablen

$$\int_{\tau} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}}, \dots) dx$$

können auch näherungsweise mit Dualitätstechniken abgeschätzt werden. Die Belastung des dualen Problems wird dazu folgendermaßen gewählt.

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{u}^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}}, \dots) & \text{auf } \tau \\ 0 & \text{auf } \overline{\tau} \cap \Omega \end{cases} \quad (4.36)$$

Nach Anwendung des Satzes von Betti Maxwell folgt für den Fehler in der integralen Variablen:

$$\int_{\tau} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}}, \dots) dx = \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = (\overline{\mathbf{R}}, \mathbf{z})_{\Omega} + (\overline{\mathbf{J}}, \mathbf{z})_{\tau} \quad (4.37)$$

Die Lösung des dualen Problems infolge der Belastung mit der Funktional  $\mathbf{F}$  wurde dabei mit  $\mathbf{z}$  bezeichnet. Daraus wird mit der gleichen Argumentation wie bei den lokalen Fehlern der folgende a-posteriori Fehlerschätzer abgeleitet.

$$\left| \int_{\tau} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}}, \dots) dx \right| \leq \sum_{k=1}^{NEL} \|\mathbf{z}-\mathbf{z}^h\|_{e, \Omega_k} \|\mathbf{e}\|_{e, \Omega_k} \quad (4.38)$$

Dabei dienen die Fehler des dualen Problems wieder als eine Wichtungsfunktion für die Energienormfehler des ursprünglichen Problems.

#### 4.5 Sonstige Methoden zur lokalen a-posteriori Fehlerabschätzung

Unabhängig von der bereits diskutierten Methoden wurden von Eriksson et al. [53], [54] und Johnson et al. [68] weitere a-posteriori Fehlerschätzer für die  $L_\infty$ - und  $L_2$ -Normen vorgestellt. Die im nachfolgenden vorgestellten Methoden basieren auch auf Dualitätsargumenten und sind sehr stark an die a-priori Abschätzungen angelehnt. Zur Abschätzung der  $L_2$ -Norm Fehler wurde in Abschnitt 4.3 bereits die folgende Beziehung verwendet (Gl.(4.22)).

$$(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{e})$$

Dabei ist  $\mathbf{z}$  die Lösung und  $\mathbf{e}$  die Belastung des dualen Problems. Ausgehend von den Residuen geleisteten äußeren Arbeit wird ein expliziter residualer Fehlerschätzer hergeleitet.

$$\|\mathbf{e}\|_0^2 = \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \sum_{K=1}^{NEL} \{(\mathbf{R}, \mathbf{z})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{z})_{\Gamma_K}\} \quad (4.39)$$

Die äußere Arbeit kann unter Ausnutzung der Galerkin-Orthogonalität und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung weiter umgeformt werden.

$$\|\mathbf{e}\|_0^2 \leq \sum_{K=1}^{NEL} \{ \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} \|\mathbf{z} - \mathbf{Iz}\|_{0,\Omega_K} + \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \|\mathbf{z} - \mathbf{Iz}\|_{0,\Gamma_K} \} \quad (4.40)$$

Die Interpolationsfehler  $\mathbf{z} - \mathbf{Iz}$  der dualen Lösung sind mit den bekannten Abschätzungen nach oben hin beschränkt.

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{Iz}\|_{0,\Omega_K} \leq C_1 h_K^2 |\mathbf{z}|_{2,\Omega_K} \quad \|\mathbf{z} - \mathbf{Iz}\|_{0,\Gamma_K} \leq C_2 \sqrt{h_K^3} |\mathbf{z}|_{2,\Omega_K} \quad (4.41)$$

Zur Fehlerabschätzung in den  $L_2$ -Norm steht damit die folgende Ungleichung zur Verfügung.

$$\|\mathbf{e}\|_0^2 \leq \sum_{K=1}^{NEL} \{ C_1 h_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} |\mathbf{z}|_{2,\Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K^3} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} |\mathbf{z}|_{2,\Omega_K} \} \quad (4.42)$$

In der von Johnson et al. und Eriksson et al. vorgestellten Vorgehensweise wird in Anlehnung an die a-priori Abschätzungen eine Stabilitätskonstante eingeführt.

$$S_c \leq \frac{|\mathbf{z}|_2}{\|\mathbf{e}\|_0} \quad (4.43)$$

Die Konstante  $S_c$  wird aus der zweiten Ableitung der dualen Lösung und der  $L_2$ -Normen der Verschiebungen bestimmt. Die Abschätzung Gl.(4.42) führt mit der Stabilitätskonstanten auf die folgende explizite Fehlerabschätzung.

$$\|\mathbf{e}\|_0^2 \leq S_c \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ C_1 h_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K^3} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \right\}^2 \quad (4.44)$$

Die Stabilitätskonstante zur Fehlerabschätzung wird näherungsweise wie folgt bestimmt.

$$S_c \approx \frac{|\mathbf{z}_{\text{fein}}^h|_2}{\|\mathbf{u}_{\text{fein}}^h - \mathbf{u}_{\text{grob}}^h\|_0} \quad (4.45)$$

Der unbekannte Fehler  $\mathbf{e}$  bzw. die Belastung des dualen Problems wurde dabei aus der Differenz der Lösungen für eine feine  $\mathbf{u}_{\text{fein}}^h$  und eine gröbere Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}_{\text{grob}}^h$  angenähert. Nach Einsetzen der Stabilitätskonstanten in die Ungleichung (4.44) kann die  $L_2$ -Norm der Verschiebungsfehler mit der  $L_2$ -Norm der Residuen abgeschätzt werden. Im Unterschied zu den im Abschnitt 3.2.2.4 vorgestellten expliziten Energienormabschätzungen werden die Elementinnenresiduen mit  $h_K^2$  anstatt mit  $h_K$  und die Sprungterme mit  $\sqrt{h_K^3}$  anstatt  $\sqrt{h_K}$  multipliziert. Die bekannte, um eine  $h$  Potenz höhere Konvergenzrate für die Verschiebungen wird damit von der a-posteriori Abschätzung Gl. (4.44) richtig wiedergegeben. Für allgemeine Tragwerke zum Beispiel mit bereichsweise unterschiedlichen Steifigkeitseigenschaften liefert die Fehlerabschätzung mit der globalen Stabilitätskonstante  $S_c$  schlechte Ergebnisse, da die Residuen im gesamten Gebiet mit einer einzigen Konstanten gewichtet werden. Das gleiche Verhalten ist auch bei dem Einflußflächenkonzept zu erwarten, falls die gesamte Belastung mit einer einzigen "Einflußzahl" multipliziert wird. Die globale Stabilitätskonstante  $S_c$  kann die unterschiedliche Wichtung der einzelnen Elementanteile nicht berücksichtigen. Um diese Nachteile zu vermeiden, müssen die Residuen, wie bereits im letzten Abschnitt erläutert, mit den Fehlern des dualen Problems gewichtet werden.

Ausgehend von der Abschätzung Gl.(4.42) werden von Becker und Rannacher [24] die zweiten Ableitungen der diskreten dualen Lösung  $\mathbf{z}^h$  als Wichtungsfaktoren verwendet.

$$\|\mathbf{e}\|_0^2 \approx \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ C_1 h_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} |\mathbf{z}^h|_{2,\Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K^3} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} |\mathbf{z}^h|_{2,\Omega_K} \right\} \quad (4.46)$$

Die zweiten Ableitungen der Finite-Elemente-Lösung lassen sich mit geeigneten Differenzenformeln approximieren (siehe Anhang A.4). Werden die dualen Belastungen gemäß des Einflußflächenkonzeptes geeignet gewählt, so folgt aus der Gleichung (4.46) ein Fehler-schätzer für nahezu beliebige Größen.

## 4.6 Adaptive Netzverfeinerung

Im nachfolgenden wird der in Abschnitt 3.3 vorgestellte adaptive Algorithmus zur Netzverfeinerung bezüglich beliebiger Variablen erweitert. Die Diskretisierungsfehler werden mit den a-posteriori Fehlerschätzern (u.a. mit (4.32)) ermittelt. Die zugehörigen Indikatoren

$$\eta_K = \left( \mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\Omega_K} \mathbf{B}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_{\Omega_K} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

zeigen den Beitrag der verschiedenen Elemente zu dem betrachteten Fehler. Der Einfluß der einzelnen Elemente setzt sich dabei multiplikativ aus den Energienormfehlern für das ursprüngliche und das duale Problem zusammen. Die Energienormfehler des dualen Problems haben, wie bereits diskutiert, eine ähnliche Funktion wie die Einflußflächen bzw. -linien in der klassischen Mechanik.

Überschreiten die geschätzten Fehler eine vorgegebene relative Toleranz, so ist die Finite-Elemente-Diskretisierung zu verfeinern. Wie in Abschnitt 3.3.1 für den Energienormfehler gezeigt

wurde, müssen die einzelnen Elemente bei einem nahezu optimalen Finite-Elemente-Netz den gleichen Beitrag  $\bar{\epsilon}_m$  zu dem Gesamtfehler leisten. Ein ähnliches Optimalitätskriterium läßt sich mit den in Abschnitt 3.3.1 verwendeten Techniken auch für beliebige Variable zeigen. Zur Verfeinerung des Netzes eignen sich die Elementunterteilungs- und Neuvernetzungsstrategien. Beide Vorgehensweisen werden im wesentlichen wie bei den klassischen, auf der Energienorm basierenden Algorithmen verwendet. Es ergeben sich lediglich für die Neuvernetzungsstrategie einige wenige Modifikationen.

Die angestrebten Fehlerindikatoren pro Element werden aus den vorgegebenen relativen Fehler  $\hat{\eta}$ , der Belastung des dualen Problems  $\mathbf{d}$  und der diskreten Lösung  $\mathbf{u}^h$  bestimmt.

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{\hat{\eta}(\mathbf{d}, \mathbf{u}^h)}{NEL} \quad (4.48)$$

Das Verhältniss der Ist- zu Sollfehler ergibt ein Kriterium für die Verfeinerung.

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\bar{\epsilon}_m} \quad (4.49)$$

Mit den bekannten Konvergenzordnungen für die Verschiebungsgrößen mit

$$\| \mathbf{e} \|_0 \leq Ch^{p+1} \quad (4.50)$$

und für die Spannungsgrößen mit

$$\| \mathbf{e} \|_c \leq Ch^p \quad (4.51)$$

bei regulären Problemen können ideale Elementgrößen für die Netzverfeinerung bestimmt werden. In den Gleichungen (4.50) und (4.51) ist  $p$  die Polynomgrad der Ansatzfunktionen. Auch für lokale Verschiebungen und Spannungen können die gleichen Konvergenzordnungen wie in Gl.(4.50) bzw. Gl.(4.51) angenommen werden. Mit  $\xi_i$  läßt sich die neue Elementgröße  $h_{i,neu}$  in Abhängigkeit der alten Größe  $h_{i,alt}$  für die Verschiebungsgrößen mit

$$h_{i,neu} = \xi_i^{-\frac{1}{p}} h_{i,alt} \quad (4.52)$$

und für die Spannungsgrößen mit

$$h_{i,neu} = \xi_i^{-\frac{1}{p+1}} h_{i,alt} \quad (4.53)$$

bestimmen. Ausgehend von den so ermittelten Elementgrößen  $h_{i,neu}$  wird mit einem Netzgenerator eine neue Diskretisierung generiert.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte adaptive Konzept bezüglich nahezu beliebiger lokaler sowie globaler Variablen ist in Bild 4.8 dargestellt. Zusätzlich zu den klassischen Methoden ist für das duale Problem lediglich eine weitere rechte Seite zu lösen, um die Fehler abzuschätzen. Wird zur Gleichungslösung ein direkter Löser verwendet, so ist der Mehraufwand im Vergleich zu klassischen adaptiven Algorithmen verschwindend klein. Wie die nachfolgenden Beispiele zeigen, kann das vorgestellte Konzept je nach Problemstellung deutlich bessere Ergebnisse als vergleichbare Methoden liefern.

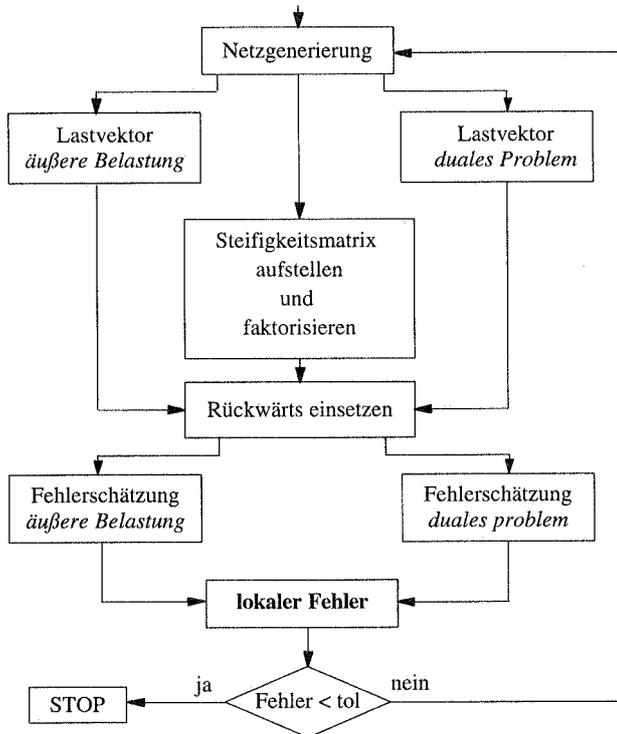


Bild 4.8: Vereinfachtes Schema eines adaptiven Berechnungsablaufs

## 4.7 Beispiele

Das erste Beispiel ist ein beidseitig eingespannter Träger unter gleichmäßiger Belastung. Anhand dieses einfachen Beispiels können die Vorteile des vorgestellten adaptiven Konzepts besonders deutlich gezeigt werden. Zur Bemessung des Trägers sind hauptsächlich die Spannungszustände an den Auflagern und in der Feldmitte maßgebend. In Bild 4.9 sind beispielsweise die verfeinerten Netze bezüglich der Spannungen in der Feldmitte und der Auflagerkraft dargestellt. Weiterhin zeigt Bild 4.9 das bezüglich der Energienorm verfeinerte Netz. Um die Energienormfehler zu begrenzen, werden erwartungsgemäß alle Bereiche mit starken Spannungsgradienten verfeinert. Für die lokalen Fehler werden lediglich die Bereiche mit einem großen Einfluß auf die betrachtete Größe verfeinert. Der Einfluß der unterschiedlichen Bereiche wird mit Hilfe der Energienormfehler des dualen Problems ermittelt. Um die Effektivität der beiden Vorgehensweisen mit und ohne Dualitätstechniken zu vergleichen, wurde für

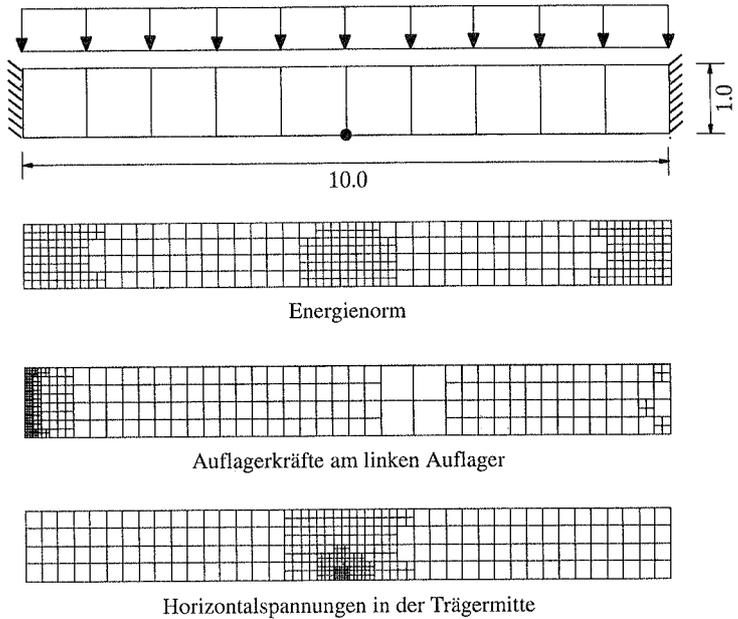


Bild 4.9: Beidseitig eingespannter Träger

eine vorgegebene Anzahl von Elementen (ca. 750) der Fehler in den lokalen Größen verglichen Bild 4.10.

Die exakten Fehler in den beiden verglichenen Größen sind für die Netzadaption bezüglich der Energienorm ca. dreimal so groß, wie bei der auf Dualitätstechniken basierenden Vorgehensweise. Werden zum Beispiel zur Bemessung nur lokale Größen benötigt, so führen die klassischen auf Energienormabschätzungen basierenden adaptiven Algorithmen zu unnötig vielen Freiheitsgraden. Bei der adaptiven Berechnung wurde die Auflagerkraft und die Horizontalspannung jeweils getrennt betrachtet. Es ist jedoch auch grundsätzlich möglich, für beide Größen ein einziges Netz zu generieren. Das Vorgehen verläuft analog zu der Netzadaption für

	Energienormkontrolle	lokale Fehlerkontrolle
Auflagerkraft	64.4 %	18.25 %
Spannungen in der Trägermitte	10.1 %	3.0 %

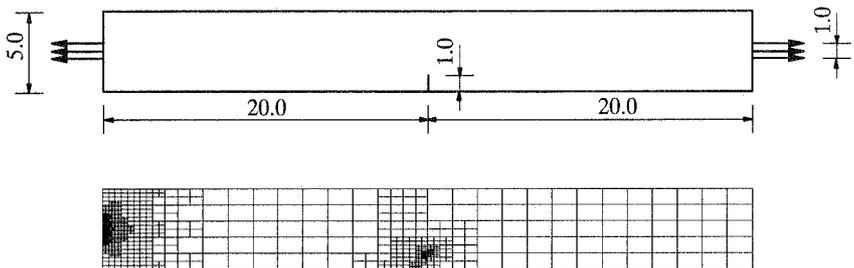
Bild 4.10: Relativer Fehler der Auflagerkraft und der Horizontalspannung in Trägermitte

mehrere Lastfälle bei der Energienormkontrolle. Dazu ist bei der Netzadaption in jedem Element nur der größte Fehlerindikator aus den einzelnen Lastfällen zu berücksichtigen [6],[106].

Anhand des Beispiels wird auch deutlich, daß die dualen Probleme ein besseres Verständnis für die Fehlerausbreitungsvorgänge bei der Finite-Elemente-Approximation liefern. Während weit entfernte Teile des Tragwerks einen Einfluß auf die Auflagerkräfte besitzen, werden z.B. die Spannungen in der Feldmitte hauptsächlich von der unmittelbaren Umgebung beeinflusst. Die Erklärung für diese Beobachtung ist von mechanischer Natur: Die regularisierten dualen Probleme für die Spannungsgrößen werden mit den sich im Gleichgewicht befindlichen Kräftepaaren berechnet. Falls das Prinzip von St. Venant gilt, führen die Belastungen nur in der Umgebung der Lastangriffspunkte zu Spannungen. Damit sind die lokalen Spannungsfehler hauptsächlich von den Energienormfehlern der umliegenden Elemente abhängig. Im Gegensatz dazu führen die zur Berechnung der Verschiebungen und Auflagerkräfte eingeführten Kräfte im ganzen Tragwerk zu Spannungen und Energienormfehlern.

Das vorgestellte Konzept kann auch besonders vorteilhaft zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren verwendet werden. In der linearen Bruchmechanik wird die Tragfähigkeit von spröden Materialien mit Rissen durch den Vergleich der berechneten Spannungsintensitätsfaktoren mit maximal zulässigen Werten (Bruchzähigkeit) beurteilt. Es gibt zahlreiche Methoden zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren mit der Finite-Elemente-Methode [60]. Einfache Methoden können aus der Betrachtung des exakten Spannungs- und Verschiebungszustandes in der Nähe der Rißspitze konstruiert werden. Die Horizontalspannungen in der unmittelbaren Umgebung des Risses können zum Beispiel für eine gerissene Scheibe unter axialer Belastung (siehe Bild 4.11) folgendermaßen dargestellt werden.

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left\{ 1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right\} + \dots \quad (4.54)$$



**Energienormkontrolle    Spannungskontrolle an der Rißspitze**

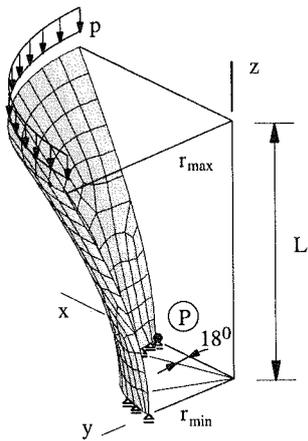
Bild 4.11: Gerissene Scheibe mit konzentrierter Belastung

Dabei ist  $r$  der Radiusvektor und  $\varphi$  die Richtungswinkel eines Polarkoordinatensystems an der Rißspitze. Aus der Gleichung (4.54) wird eine einfache Formel zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$  hergeleitet.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xx} \quad (4.55)$$

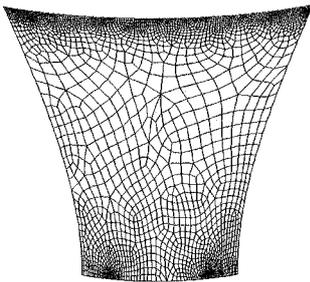
Wird für die gerissene Scheibe in Bild 4.11 das Netz bezüglich der Spannung  $\sigma_{xx}$  in dem der Rißspitze nächst gelegenen Knoten verfeinert, so wird mit Gleichung (4.55)  $K_I = 2.66$  bestimmt. Die analytische Lösung für eine unendlich lange Scheibe beträgt  $K_I = 2.42$ . Als Belastung für das regularisierte duale Problem wurden zwei horizontale Einzellasten an dem zur Rißspitze benachbarten Finite-Elemente-Knoten angebracht. In Bild 4.11 sind die adaptiv ermittelten Netze für die Energienorm- und der Spannungskontrolle an der Rißspitze dargestellt. Bei der Netzverfeinerung bezüglich der Energienorm wurde an der Rißspitze und in der Umgebung der Lastangriffsstellen verfeinert. Da die Entfernung der konzentrierten Belastung zu der Rißspitze sehr groß ist, ist mit einem sehr geringen Einfluß auf den Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  zu rechnen. Zudem besitzt das duale Problem an den Lastangriffspunkten keine Singularität, so daß der Verfeinerungsindikator bzw. der Fehler in den Spannungen oder der Energie für das duale Problem nahezu Null ist. Das bezüglich der lokalen Spannungen adaptierte Netz weist deshalb nur Verfeinerungen in der Nähe der Rißspitze auf. Um die Spannungsintensitätsfaktoren zu berechnen, führt das Vorgehen mit Dualitätstechniken zu einer wesentlich effektiveren Finite-Elemente-Berechnung.

Das vorgestellte Konzept bietet auch bei komplizierten Schalentragwerken Vorteile gegenüber den klassischen adaptiven Algorithmen. Als Anwendungsbeispiel wurde eine teilweise gelagerte Hyperboloidschale unter Axiallast ausgewählt (Bild 4.12). Aufgrund der Symmetrie wurde nur ein Viertel des Tragwerks mit neunknotigen Elementen diskretisiert. Die Finite-Elemente-Netze wurden bezüglich der Energienorm und der Auflagerkraft am Punkt P verfeinert. Als Fehlerschätzer wurde der auf superkonvergenter Spannungsglättung basierenden Zienkiewicz und Zhu Fehlerschätzer verwendet. Die Belastung für das duale Problem besteht aus einer am Punkt P angreifenden vertikale Linienlast mit einer Größe von eins. Die Belastung des dualen Problems führt bei der nichtversteiften Schale zu Spannungen und damit zu Energienormfehlern über das gesamte Tragwerk. Obwohl der Grad der Verfeinerung unterschiedlich ist, sind die beiden Netze deshalb an gleichen Stellen verfeinert. In Bild 4.12 ist weiterhin die Konvergenz der geschätzten und der exakten Auflagerkraft bei Netzverfeinerung dargestellt. Da mit den vorgestellten Methoden nur eine obere Schranke für den Absolutwert der Fehler berechnet werden kann (siehe Gl.(4.32)), sind im Konvergenzdiagramm zwei Kurven für die geschätzte Auflagerkraft aufgetragen. Die Abschätzung konvergiert bei Netzverfeinerung sehr schnell gegen die richtige Auflagerkraft. Interessant bei diesem Beispiel ist auch, daß die geschätzte Auflagerkraft und die Energie unterschiedliche Konvergenzordnungen besitzen. Die globale Energienorm ist damit nicht zur Beurteilung der Genauigkeit von lokalen Auflagerkräften geeignet.

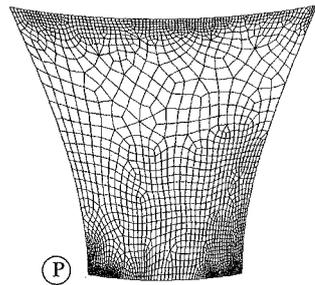


Länge	$L = 20.00$
Radius	$r_{\max} = 15.00$
Radius	$r_{\min} = 7.50$
Dicke	$t = 0.04$
Elastizitätsmodul	$E = 6.825 \cdot 10^7$
Querdehnzahl	$\nu = 0.3$
Belastung	$p = 1.0$

teilweise gelagert



**Energienorm**



**lokale Auflagerkraft**

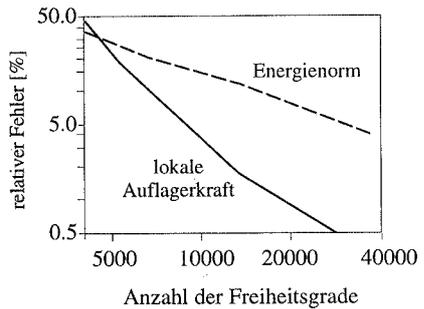
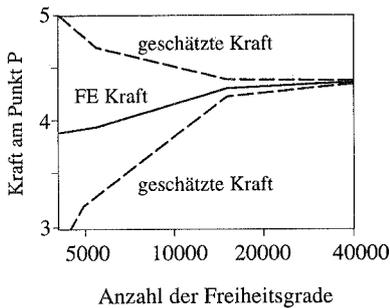


Bild 4.12: Axial belastete Hyperboloidschale

# 5 Adaptive Methoden für geometrisch nichtlineare Berechnungen

## 5.1 Einführung

Insbesondere bei dünnen Flächentragwerken treten unter Belastung (sehr) große Verschiebungen auf. Die lineare Elastizitätstheorie beruht bekanntlich auf der Annahme kleiner Verschiebungen und ist damit zur Berechnung von dünnen Flächentragwerken meist unzureichend. Vielmehr können die für die Bemessung von dünnen Flächentragwerken charakteristischen Beulphänomene nur durch nichtlineare Probleme erfaßt werden. Die Nichtlinearität des zugrundeliegenden Randwertproblems überträgt sich mit der Diskretisierung auf das zugehörige Gleichungssystem. Die Lösung von nichtlinearen Gleichungen, beispielsweise mit dem Newton Verfahren, führt auf die iterative Lösung von mehreren linearen Gleichungssystemen und ist damit numerisch sehr aufwendig. Wie bereits für lineare Probleme in den letzten beiden Abschnitten diskutiert, sind zur Steuerung der Netzadaption Verfeinerungsindikatoren und zur Beurteilung der Genauigkeit Fehlerschätzer erforderlich. In diesen Kapitel werden leicht berechenbare Fehlerindikatoren und –schätzer für geometrisch nichtlineare Probleme vorgestellt.

## 5.2 Lösungsverhalten von geometrisch nichtlinearen Problemen

Die nichtlinearen Randwertprobleme für die Elastizitätstheorie und für Flächentragwerke wurden bereits in den Abschnitten 2.1 und 2.2 vorgestellt. Im nachfolgenden werden einige grundsätzliche Lösungseigenschaften von geometrisch nichtlinearen Randwertproblemen ausgearbeitet. Ausführlichere Darstellungen finden sich u.a. in Brezzi et al. [29], [30], [31], Crouzeix

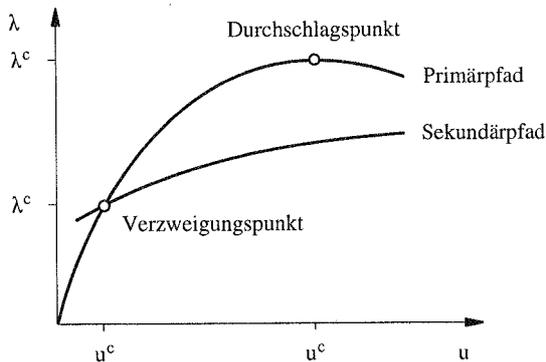


Bild 5.1: Lastverschiebungskurve  $u(\lambda)$

et al. [47], Fujii et al. [56], Keller [75], Reitinger [107] und Rheinboldt [110]. Unabhängig von der genauen Ursache der Nichtlinearität läßt sich das Randwertproblem in der folgenden abstrakten Form darstellen.

$$N(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad + \text{R.B.} \quad (5.1)$$

Dabei sind  $\mathbf{u}$  die Verschiebungen und  $\lambda$  ist ein skalarer Lastparameter. Die Differentialgleichung  $N(\mathbf{u}, \lambda)$  ist vom Belastungsparameter  $\lambda$  linear und von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nichtlinear abhängig. Für geometrisch nichtlineare Kontinua hat  $N(\mathbf{u}, \lambda)$  die bereits in Gleichung (2.17) angegebene Form:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{p} &= 0 \quad \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \mathbf{Pn} = \lambda \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  auf den undeformierten Zustand bezogene Lasten. Daraus wurde in Abschnitt 2.2.2 mit geeigneten Annahmen das Randwertproblem für die Schale Gl.(2.60) hergeleitet. Die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  lassen sich in Abhängigkeit des Lastparameters  $\lambda$  aus dem nichtlinearen Randwertproblem nach Gleichung (2.17) oder (2.60) bestimmen. Die Lösung  $\mathbf{u}(\lambda)$  der nichtlinearen Gleichungen ist im allgemeinen sehr komplex. Die Projektion einer unendlich dimensionalen Lastverformungskurve  $\mathbf{u}(\lambda)$  auf die zweidimensionale Ebene ist beispielsweise in Bild 5.1 dargestellt. Die analytische und numerische Lösung von nichtlinearen Problemen beschränkt sich auf lokale Betrachtungen, die auf geeigneten Reihenentwicklungen basieren. Ist zum Beispiel ein Punkt  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\lambda})$  auf der Lastverformungskurve bekannt, so kann die Lösungsverhalten in der Umgebung des bekannten Punktes mittels einer Taylorreihenentwicklung untersucht werden.

$$\mathbf{u}(\lambda) = \bar{\mathbf{u}} + \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}(\lambda - \bar{\lambda}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2}(\lambda - \bar{\lambda})^2 + \dots \quad (5.2)$$

Die unbekanntenen Verschiebungsableitungen nach dem Belastungsparameter  $\lambda$  werden aus dem Randwertproblem bestimmt. In der Umgebung von einigen singulären (bzw. kritischen) Punkten  $\lambda^c$  ist die Reihenentwicklung Gl.(5.2) nicht möglich bzw. nicht eindeutig (siehe Bild 5.1). Nach dem impliziten Funktionentheorem muß die Fréchet Ableitung des Operators  $N$  in den nicht regulären bzw. singulären Punkten die folgende Bedingung erfüllen.

$$N_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (5.3)$$

wobei  $(\cdot)_{,\mathbf{u}}$  die Fréchet Ableitung bezeichnet. Der Funktion  $\boldsymbol{\phi}$  wird in der Mechanik häufig auch als Beulform bezeichnet. Grundsätzlich sind an den singulären Punkten mehrere Beulformen möglich, im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch nur Probleme mit einer Beulform betrachtet.

Die mit dem impliziten Funktionentheorem getroffene Unterscheidung der Gleichgewichtspunkte ist eng mit den klassischen Stabilitätsbetrachtungen verknüpft. Bei elastischen Problemen kann die Stabilität mit dem Energiekriterium von Lagrange und Dirichlet beurteilt werden [23]. Danach ist ein Tragwerk mit konservativer Belastung stabil, wenn das Gesamtpotential

an dem betrachteten Gleichgewichtszustand ein Minimum annimmt (bzw. positiv definit ist). Dieses Kriterium wird allgemein für Tragwerksberechnungen verwendet, obwohl es für kontinuierliche Systeme nur eine hinreichende Bedingung für Stabilität darstellt. Weiterhin ist der Gleichgewichtszustand instabil, falls das Gesamtpotential indefinit oder negativ definit ist. Für praktische Berechnungen sind besonders die kritischen (bzw. singulären) Gleichgewichtszustände  $\mathbf{u}^c(\lambda^c)$  interessant, die zwischen dem stabilen und instabilen Bereich liegen. Nach einer klassischen Argumentation, wie sie z.B. von Koiter [77] verwendet wurde, müssen bei einem kritischen Lastniveau  $\lambda^c$  zwei infinitesimal benachbarte Gleichgewichtszustände  $\mathbf{u}^c$  und  $\mathbf{u}^c + \Delta \mathbf{u}$  existieren.

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}^c + \Delta \mathbf{u}, \lambda^c) = \mathbf{N}(\mathbf{u}^c, \lambda^c) + \mathbf{N}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^c, \lambda^c) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.4)$$

Die zwei benachbarten Punkte erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen und der letzte Term muß identisch Null sein.

$$\mathbf{N}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^c, \lambda^c) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}$$

Diese Bedingung für kritische Punkte ist identisch mit der Bedingung Gl. (5.3) aus dem impliziten Funktionentheorem. Dabei ist  $\mathbf{N}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^c, \lambda^c) \cdot \boldsymbol{\phi}$  die Änderung der von den inneren und äußeren Kräften geleisteten Arbeit. Beim Aufbringen einer Störung in Richtung der Beulform  $\boldsymbol{\phi}$  ist keine Arbeit erforderlich und das Gesamtpotential ist dabei konstant bzw. indefinit. Damit ist das Tragwerk nach dem klassischen Energiekriterium in der unmittelbaren Umgebung von kritischen Punkten mehrdeutig.

Für die Beurteilung der Tragwerkseigenschaften, wie zum Beispiel der Imperfektionsempfindlichkeit, ist das Lösungsverhalten in der Umgebung des kritischen Punktes besonders hilfreich. Um die bereits erwähnten Schwierigkeiten bei der Reihenentwicklung Gl. (5.2) zu vermeiden, wird im nachfolgenden eine Parametrisierung in der Variablen  $t$  eingeführt.

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}(t), \lambda(t)) = 0 \quad (5.5)$$

Der Pfadparameter  $t$  kann relativ frei gewählt werden. Für die Verschiebungen und den Belastungsparameter muß lediglich am kritischen Punkt eine Reihenentwicklung folgender Form existieren.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t^c) + \dot{\mathbf{u}}(t - t^c) + \frac{1}{2} \dots \quad \lambda(t) = \lambda(t^c) + \dot{\lambda}(t - t^c) + \frac{1}{2} \dots \quad (5.6)$$

Zur Berechnung der Tangenten  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\dot{\lambda}$  wird die erste Gateaux Ableitung der Gleichung (5.5) betrachtet.

$$\mathbf{N}_{,\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}_{,\lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (5.7)$$

Die Ableitung ergibt nach der Multiplikation mit der Beulform  $\boldsymbol{\phi}$  und unter Berücksichtigung der Bedingung (5.3) für kritische Punkte:

$$(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{N}_{,\lambda}) \dot{\lambda} = 0 \quad \text{mit} \quad (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{N}_{,\lambda}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \mathbf{N}_{,\lambda} \, dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\phi} \mathbf{N}_{,\lambda} \, do \quad (5.8)$$

Für die weitere Untersuchung ist die Unterscheidung der kritischen Punkte in zwei Gruppen hilfreich.

$$\text{Durchschlagspunkte} \quad \dot{\lambda} = 0 \wedge (\phi, N_{\lambda}) \neq 0 \quad (5.9)$$

$$\text{Verzweigungspunkte} \quad \dot{\lambda} \neq 0 \wedge (\phi, N_{\lambda}) = 0 \quad (5.10)$$

An den Durchschlagspunkten ist die Tangente  $\dot{\lambda}$  an den Gleichgewichtspfad identisch Null bzw. die Tangente ist orthogonal zur  $\lambda$ -Achse. Die Ableitung der Verschiebungen nach den Belastungsparametern ist nicht beschränkt und damit existiert keine Reihenentwicklung für die Verschiebungen in Abhängigkeit der Belastungsparameter.

$$\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{u}^c(\lambda^c) + \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}(\lambda - \lambda^c) + \frac{1}{2} \dots = \mathbf{u}^c(\lambda^c) + \infty \cdot (\lambda - \lambda^c) + \frac{1}{2} \dots$$

An Verzweigungspunkten ist die von  $N_{\lambda}$  mit der Beulform  $\phi$  geleistete Arbeit identisch Null. Die Orthogonalität sichert die Lösbarkeit des am kritischen Punkt linearisierten Problems.

$$N_{,u} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 = -N_{,\lambda} \quad \text{mit} \quad (\dot{\mathbf{u}}_0, \phi) = 0 \quad (5.11)$$

In Bild 5.2 ist dieser Zusammenhang für ein diskretes System dargestellt. In dem Beispiel ist der Singulärvektor  $\phi$  identisch mit der Koordinatenachse  $\mathbf{i}_1$  und steht senkrecht auf dem Lastvektor  $N_{,\lambda}$ . Aufgrund der Orthogonalität kann das gesamte Problem in der  $\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$  Ebene betrachtet werden und es existiert ein Lösungsvektor  $\dot{\mathbf{u}}_0$ . Die wirklichen Tragwerksverschiebungen müssen die Gleichung (5.7) erfüllen und setzen sich aus den Verschiebungen  $\dot{\lambda}\dot{\mathbf{u}}_0$  und der Beulform  $\phi$  zusammen.

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda}\dot{\mathbf{u}}_0 + \alpha\phi \quad (5.12)$$

Dabei ist  $\alpha$  zunächst ein freier Parameter, der im nachfolgenden bestimmt wird. Zur Bestimmung von  $\alpha$  wird die zweite Ableitung der Gleichung (5.5) nach dem Pfadparameter  $t$  betrachtet.

$$(N_{,uu}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + 2N_{,u\lambda} \cdot \dot{\mathbf{u}}\dot{\lambda} + N_{,u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + N_{,\lambda}\ddot{\lambda} = 0 \quad (5.13)$$

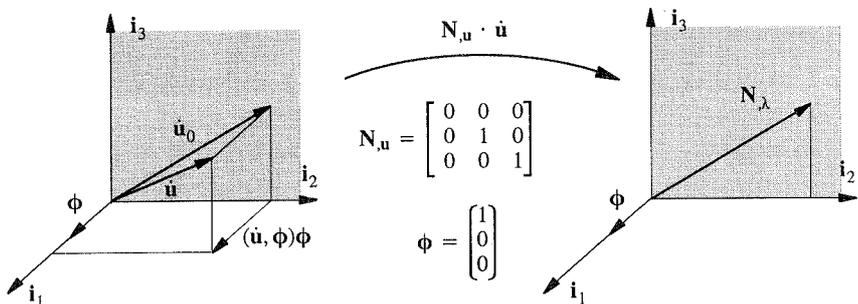


Bild 5.2: Lineare Abbildung eines Vektors  $\mathbf{u}$  mit der Matrix  $N_{,u}$

Die Ableitungen  $N_{,\lambda}$  und  $N_{,u} \cdot \dot{\mathbf{u}}$  sind infolge der Gleichungen (5.3) und (5.10) orthogonal zu der Beulform  $\Phi$  und die restlichen Terme in Gl.(5.13) müssen der folgenden Orthogonalitätsbedingung genügen.

$$\left( (N_{,uu}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + 2N_{,u\lambda} \cdot \dot{\mathbf{u}}\dot{\lambda}, \Phi \right) = 0$$

Nach Einsetzen des Ansatzes Gl. (5.12), ergibt sich daraus eine Bestimmungsgleichung für den freien Parameter  $\alpha$ .

$$a_0\alpha^2 + 2a_1\dot{\lambda}\alpha + a_2\dot{\lambda}^2 = 0 \quad (5.14)$$

mit

$$a_0 = \left( (N_{,uu}\Phi) \cdot \Phi, \Phi \right)$$

$$a_1 = (N_{,u\lambda} \cdot \Phi + (N_{,uu}\Phi) \cdot \dot{\mathbf{u}}_0, \Phi)$$

$$a_2 = (2N_{,u\lambda} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 + (N_{,uu}\dot{\mathbf{u}}_0) \cdot \dot{\mathbf{u}}_0, \Phi)$$

Die Beulform  $\Phi$  und der Lösungsvektor  $\dot{\mathbf{u}}_0$  am kritischen Punkt sind mit den Gleichungen (5.3) und (5.11) gegeben. Damit können aus der skalaren quadratischen Gleichung (5.14) mit den bekannten Variablen  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  zwei verschiedene Werte für  $\alpha$  bestimmt werden

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1\dot{\lambda}}{a_0} \pm \frac{\dot{\lambda}}{a_0} \sqrt{a_1^2 - a_2a_0} \quad (5.15)$$

Aus dem Ansatz Gl. (5.12) folgen nach Einsetzen von  $\alpha_{1,2}$  die Tangenten an die beiden Gleichgewichtspfade.

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda}\dot{\mathbf{u}}_0 + \left( -\frac{a_1\dot{\lambda}}{a_0} \pm \frac{\dot{\lambda}}{a_0} \sqrt{a_1^2 - a_2a_0} \right) \Phi \quad (5.16)$$

Wird für den Pfadparameter  $\lambda = t$  gewählt, so läßt sich die Gleichung sehr leicht graphisch interpretieren. Infolge der Parametrisierung mit  $\lambda = t$  sind die Ableitungen  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\dot{\lambda}$  folgendermaßen zu ersetzen.

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 1 \quad \text{für } \lambda = t \quad (5.17)$$

Nach Einsetzen in die Gleichung (5.16) folgen die Tangenten an die beiden Gleichgewichtspfade im Lastverschiebungsdiagramm.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \lambda} + \left( -\frac{a_1}{a_0} \pm \frac{1}{a_0} \sqrt{a_1^2 - a_2a_0} \right) \Phi$$

Bei Tragwerksberechnungen treten häufig symmetrische Verzweigungspunkte auf, für die  $a_0 = 0$  gilt (Bild 5.3). Die Gleichung (5.14) wird damit für die folgenden Wertepaare von  $\alpha$  und  $\dot{\lambda}$  erfüllt.

$$\alpha = -\frac{a_2 \dot{\lambda}}{2a_1} \quad \text{und} \quad \dot{\lambda} \neq 0$$

sowie

$$\alpha \neq 0 \quad \text{und} \quad \dot{\lambda} = 0$$

Aus Gleichung (5.12) können für beide Fälle die Tangenten an den Primär- und Sekundärpfad bestimmt werden.

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda} \dot{\mathbf{u}}_0 - \frac{a_2 \dot{\lambda}}{2a_1} \phi \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{u}} = \alpha \phi \quad (5.18)$$

In Abhängigkeit von  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  sind auch kritische Punkte möglich, an denen keine oder nur eine einzige Tangente existiert. Bei der Stabilitätsuntersuchung von praktisch relevanten Tragwerken existieren jedoch fast ausschließlich zwei Tangenten am kritischen Punkt.

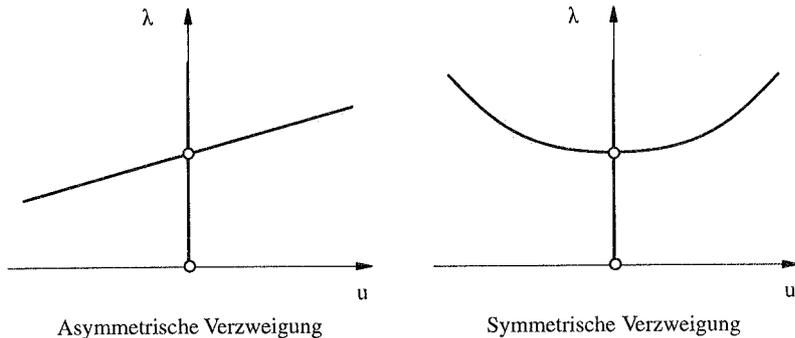


Bild 5.3: Graphische Darstellung von Verzweigungsproblemen (2D-Projektion)

### 5.3 Finite-Elemente-Approximation von geometrisch nichtlinearen Problemen

Die analytische Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen ist sehr schwierig und ist in den wenigsten Fällen mit vertretbarem Aufwand möglich. Die Approximation des nichtlinearen Randwertproblems mit der Methode der Finiten Elemente ist erheblich einfacher, obwohl die Nichtlinearitäten auch bei diskreten Problemen numerisch aufwendige Lösungsverfahren erfordern. Die Finite-Elemente-Approximation für elastische Probleme läßt sich grundsätzlich aus dem Gesamtpotential oder der schwachen Form des Randwertproblems herleiten. Die schwache Form des geometrisch nichtlinearen Randwertproblems für das Kontinuum wurde in Abschnitt 2.1 mit der Gleichung (2.22) angegeben:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Die entsprechenden Gleichungen für die Schale sind mit der Gleichung (2.64) gegeben. Im weiteren wird für das Randwertproblem in schwacher Form die folgende formale Schreibweise verwendet.

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \left\{ (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (5.19)$$

Im Gegensatz zu der Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  ist die nichtlineare Form  $A(\cdot, \cdot)$  von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  abhängig. Zur Approximation mit der Finite-Element-Methode wird eine konforme Diskretisierung mit der Eigenschaft  $V^h \subseteq V$  gewählt. Für die betrachteten geometrisch nichtlinearen Probleme liegt die Lösung in dem Sobolevraum  $H^1$ , d.h.  $V^h \subseteq V = H^1$ , [56].

$$A(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \lambda \left\{ (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_N} \right\} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (5.20)$$

Die für die Fehlerabschätzung grundlegende Galerkin Orthogonalitätseigenschaft ergibt sich aus der Differenz der Gleichungen (5.19) und (5.20).

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - A(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{v}^h \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (5.21)$$

Infolge der Orthogonalität leisten die Fehler in den 1. PK Spannungen mit dem virtuellen Verschiebungsgradienten  $\nabla \mathbf{v}^h$  aus dem Finite-Elemente-Ansatzraum keine Arbeit. Ähnlich zu linearen Problemen beschreibt die Galerkin Orthogonalität die Optimalität der Finite-Element-Lösung bezüglich der inneren Arbeit.

Die Konvergenzeigenschaften der Finite-Elemente-Diskretisierung für geometrisch nichtlineare Probleme wurden in der Literatur u.a. von Brezzi et al. [29], [30], [31], Crouzeix et al. [47] und Fujii et al. [56] diskutiert. Dabei wird zunächst die Lösung des nichtlinearen Problems auf die Lösung von linearisierten Problemen zurückgeführt. Anschließend können die Diskretisierungsfehler für das linearisierte Problem und damit auch für das nichtlineare Problem abgeschätzt werden. Diese ursprünglich für a-priori Abschätzungen entwickelte Vorgehensweise wurde mittlerweile auch u.a. von Baranger et al. [20], Pousin et al. [98] und Verfürth [132] für die a-posteriori Fehlerabschätzung angewendet.

## 5.4 A-Posteriori Fehlerabschätzung

Die für lineare Randwertprobleme vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzer wurden bereits sehr früh von Babuska und Rheinboldt [12] auf nichtlineare Problemstellungen erweitert. Zur Fehlerabschätzung wurden ähnlich wie bei linearen Problemen, mit Residuen belastete linearisierte Teilprobleme mit Dirichlet Randbedingungen betrachtet. Werden die Fehler für das linearisierte Randwertproblem abgeschätzt, so ist es grundsätzlich möglich, alle in den Kapiteln

3 und 4 für lineare Probleme vorgestellten Methoden auf nichtlineare Probleme zu erweitern. Beispielsweise wendeten Brink und Stein [32] und weiterhin Bussy und Mosbah [33] die auf lokalen Neumann–Problemen basierenden Fehlerschätzer auf geometrisch nichtlineare Probleme an. Die Erweiterung der expliziten residualen Fehlerschätzer und der glättungsbasierten Verfeinerungsindikatoren auf nichtlineare Probleme wird im nachfolgenden vorgestellt.

Für eine mathematisch abgesicherte Fehlerabschätzung mit exakten oberen und unteren Schranken sind auch die Fehler infolge der Linearisierung der Teilprobleme abzuschätzen. Im allgemeinen werden jedoch bei numerischen Berechnungen die Fehler der Linearisierung nicht berücksichtigt. Die Arbeiten von Rheinboldt [111], Pousin et al. [98] und Verfürth [132] zeigen, daß die Linearisierungsfehler bei einer Netzverfeinerung um eine Ordnung schneller als die Diskretisierungsfehler konvergieren, so daß die Fehler der Linearisierung für feine Netze vernachlässigt werden können.

In Abschnitt 5.2 wurde bereits auf die Singularität des linearisierten Problems an kritischen Punkten hingewiesen. Damit können die Diskretisierungsfehler an Durchschlags- und Verzweigungspunkten nicht mit dem linearisierten Problem abgeschätzt werden. Verfürth [132] stellte jedoch erweiterte Methoden vor, die die singulären Punkte in reguläre Punkte überführen, um anschließend die Fehler mit dem linearisierten Problem abzuschätzen.

#### 5.4.1 A–Posteriori Fehlerabschätzung für reguläre Punkte

Wie bei den linearen Problemen können für die Diskretisierungsfehler  $e(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda) - \mathbf{u}^h(\lambda)$  von nichtlinearen Randwertproblemen a–posteriori Fehlerschätzer mit einer exakten oberen sowie unteren Schrankeneigenschaft bestimmt werden [132].

$$C_1(\mathbf{u})\eta \leq \|e(\lambda)\| \leq C_2(\mathbf{u})\eta \quad (5.22)$$

Dabei sind  $C_1$  und  $C_2$  bei den gebräuchlichen Fehlerschätzern zwei von der exakten Lösung abhängige positive Konstanten [132]. Damit ist es im allgemeinen nicht mehr möglich, die Diskretisierungsfehler während einer numerischen Berechnung mit dem Estimator  $\eta$  exakt abzuschätzen. Falls die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sehr schnell mit zunehmender Netzverfeinerung gegen eins konvergieren liefert der Estimator  $\eta$  jedoch trotzdem eine brauchbare Abschätzung. Darüberhinaus eignen sich die elementweise berechneten Fehler– bzw. Verfeinerungsindikatoren  $\eta_K$

$$\eta = \sqrt{\sum_{K=1}^{NEL} \eta_K^2}$$

auch bei sehr ungenauen Abschätzungen zur adaptiven Netzverfeinerung. Für die a–posteriori Fehlerabschätzung ist zunächst ein Randwertproblem zur Berechnung der Fehler in Abhängigkeit der Residuen herzuleiten. Dazu wird die folgende Differenz der virtuellen inneren Arbeiten

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - A(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) : \nabla \mathbf{v} \, dx$$

elementweise partiell integriert.

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - A(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}) &= \sum_{K=1}^{NEL} \left[ \int_{\Omega_K} (\nabla \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) + \lambda \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx \right] \\
&\quad + \int_{\Gamma_K \subseteq \Gamma_N} (\lambda \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, do - \int_{\Gamma_K \not\subseteq \Gamma} (\mathbf{P}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, do
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Hierbei ist  $NEL$  die Gesamtanzahl der Elemente und  $\Gamma_K$  sind die Ränder eines Elementes  $K$  mit der Normalen  $\mathbf{n}$ . Die Integrale auf der rechten Gleichungsseite beschreiben die virtuellen Arbeiten der Elementinnenresiduen  $\mathbf{R}_K$  und der Sprungterme  $\mathbf{J}_K$ .

$$\nabla \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) + \lambda \mathbf{p} = \mathbf{R}_K \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{P}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} |_{K^*} + \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} |_{K^*}) = \mathbf{J}_K \text{ auf } \Gamma_K \not\subseteq \Gamma \tag{5.25}$$

$$\lambda \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} = \mathbf{J}_K \text{ auf } \Gamma_K \subseteq \Gamma_N \tag{5.26}$$

Für eine bestimmte Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  und die zugehörigen Residuen kann die exakte Lösung bzw. der Fehler aus der folgendermaßen zusammengefaßten Gleichung (5.23) bestimmt werden.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum_{K=1}^{NEL} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_K} \} \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{5.27}$$

Da die Gleichung (5.27) nichtlinear ist und die gleiche Komplexität wie das ursprüngliche Problem besitzt, eignet sie sich somit nicht für praktische Fehlerberechnungen. Die Diskretisierungsfehler können jedoch infolge der Galerkin Orthogonalität aus entkoppelten, mit Residuen belasteten Teilproblemen näherungsweise bestimmt werden. Ohne zusätzliche Dualitätstechniken sind die auf lokalen Teilproblemen basierenden Methoden nur für die Abschätzung der Fehler in den inneren Arbeiten geeignet.

#### 5.4.1.1 A-Posteriori Fehlerabschätzung für die inneren Arbeiten

Die Fehler in den inneren Arbeiten setzen sich nach Gleichung (5.21) multiplikativ aus den Fehlern in den 1. PK Spannungen und den Verschiebungsgradienten zusammen.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{e} \, dx$$

Im nachfolgenden wird mit der gleichen Argumentation wie bei linearen Problemen ein expliziter Fehlerschätzer für nichtlineare Probleme hergeleitet. Zunächst läßt sich die Interpolierende der Fehler  $\mathbf{Ie}$  unter Ausnutzung der Galerkin Orthogonalität Gl. (5.21) in die Gleichung (5.27) einführen.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{e} \, dx = \sum_{K=1}^{NEL} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K} \} \tag{5.28}$$

Weiterhin werden die äußeren Arbeiten auf der rechten Gleichungsseite mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung in die  $L_2$ -Normen der Residuen und der Interpolationsfehler aufgeteilt.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{e} \, dx \leq \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} \|\mathbf{e} - \mathbf{Ie}\|_{0,\Omega_K} + \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \|\mathbf{e} - \mathbf{Ie}\|_{0,\Gamma_K} \right\} \quad (5.29)$$

Wie bereits mehrfach angewendet, werden die Interpolationsfehler unabhängig von den mechanischen Zusammenhängen mit den ersten Ableitungen der Fehler nach oben hin beschränkt.

$$\|\mathbf{e} - \mathbf{Ie}\|_{0,\Omega_K} \leq Ch_K \|\nabla \mathbf{e}\|_{0,\Omega_K} \quad \|\mathbf{e} - \mathbf{Ie}\|_{0,\Gamma_K} \leq C \sqrt{h_K} \|\nabla \mathbf{e}\|_{0,\Omega_K} \quad (5.30)$$

Dabei ist  $C$  eine von den Fehlern  $\mathbf{e}$  unabhängige Konstante und  $h_K$  ist die charakteristische Länge eines Elementes  $K$  mit dem Gebiet  $\Omega_K$  und dem Rand  $\Gamma_K$ . Das Gebiet  $\Omega_K$  ist die Vereinigung von  $\Omega_K$  und dessen Nachbarn. Nach Einsetzen der Abschätzungen in die Gleichung (5.29) läßt sich die  $H^1$ -Seminorm der Fehler auf der rechten Gleichungsseite ausklammern.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{e} \, dx \leq \sqrt{\sum_{K=1}^{NEL} \left\{ Ch_K \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} + C \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \right\}^2} \|\nabla \mathbf{e}\|_0 \quad (5.31)$$

Ausgehend von dieser Gleichung werden in der Literatur verschiedene Methoden zur a-posteriori Fehlerabschätzung diskutiert. Zum Beispiel können die Fehler in den Verschiebungsgradienten näherungsweise durch die Differenz der Finite-Elemente-Lösung  $\nabla \mathbf{u}^h$  und einer superkonvergenter Näherung  $(\nabla \mathbf{u}^h)^*$  beschrieben werden.

$$\|\nabla \mathbf{e}\|_0 = \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^h\| \approx \|(\nabla \mathbf{u}^h)^* - \nabla \mathbf{u}^h\|$$

Eine ähnliche auf Extrapolationstechniken und auf der Abschätzung (5.31) beruhende Methode stellten Mücke und Whiteman [88] vor. Obwohl die Glättungstechniken, wie bei linearen Problemen diskutiert, numerisch gute Ergebnisse liefern, sind sie nur für spezielle Problemstellungen mathematisch abgesichert. Dazu wird man zumindest die BLMR Eigenschaft der Gitterfamilie verwenden. Bislang werden auf Glättungstechniken basierende Abschätzungen in der mathematischen Literatur kaum diskutiert.

Der nichtlineare Arbeitsausdruck auf der linken Gleichungsseite von Gl.(5.31) führt bei der weiteren Umformung zu einem ausschließlich residualen Fehlerschätzer zu Schwierigkeiten. Deshalb ist es sehr naheliegend, den inneren Arbeitsausdruck zunächst an der bekannten Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  in einer Taylorreihe zu entwickeln.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \right) : \nabla \mathbf{v} \, dx + o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}) \quad (5.32)$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial(\nabla \mathbf{u})} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(\nabla \mathbf{u})} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}}$$

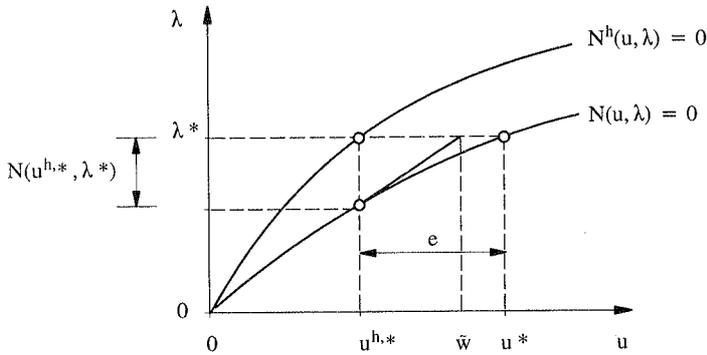


Bild 5.4: Fehlerabschätzung mit dem linearisierten Randwertproblem

Die Terme von höherer Ordnung sind im letzten Summanden  $o(\cdot)$  enthalten. In der mathematischen Literatur wird die Reihenentwicklung auch häufig mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung angegeben.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \left[ \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))}{\partial \mathbf{F}} dt \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \right] : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad (5.33)$$

In erster Näherung lassen sich die Fehler ausschließlich aus dem linearisierten Problem bestimmen. Damit geht die Fehlerabschätzung anstelle der nichtlinearen Gleichung (5.27) näherungsweise von der folgenden linearen Gleichung aus (siehe Bild 5.4).

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u}^h) \right) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum_{k=1}^{\text{NEL}} \{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_k} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_k} \} \quad (5.34)$$

Die vernachlässigten Terme sind von höherer Ordnung und die Unterschiede zwischen dem exakten und dem aus der linearisierten Gleichung berechneten Fehler konvergieren bei Netzverfeinerung schneller als die Diskretisierungsfehler. Für das linearisierte Problem gilt entsprechend Gleichung (5.31) die folgende Abschätzung.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{e}} \, dx \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\text{NEL}} \{ C h_K \|\mathbf{R}\|_{0, \Omega_k} + C \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{0, \Gamma_k} \}^2} \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}\|_0 \quad (5.35)$$

Mit  $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u}^h$  werden die Diskretisierungsfehler für das linearisierte Problem bezeichnet. Der Gradient des Fehlers  $\nabla \tilde{\mathbf{e}}$  auf der rechten Gleichungsseite ist infolge der Koerzitivität des linearisierten Randwertproblems nach unten hin mit den inneren Arbeiten abschätzbar.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{e}} \, dx \geq C \|\nabla \tilde{\mathbf{e}}\|_0^2 \quad (5.36)$$

Einsetzen der Abschätzung in die Gleichung (5.35) liefert einen expliziten Fehlerschätzer für die inneren Arbeiten.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{e}} \, dx \leq \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ \text{Ch}_K \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} + C \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \right\}^2 \quad (5.37)$$

Da die Konstanten unbekannt sind, kann die Abschätzung vorerst nur als ein Verfeinerungsindikator verwendet werden. Der Beitrag jedes einzelnen Elementes zu dem Gesamtfehler ist bis auf einen multiplikativen Faktor  $C$  mit der Gleichung (5.37) gegeben.

Die Konstanten, insbesondere der Koerzitivität in Gleichung (5.36), sind für allgemeine geometrisch nichtlineare Problemstellungen unbekannt. Die näherungsweise Berechnung der Koerzitivitätskonstanten führt auf Eigenwertprobleme und ist damit numerisch sehr aufwendig. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurden von Stein et al. [122] die für lineare Probleme entwickelten Fehlerschätzer direkt auf das linearisierte Problem angewendet. Ausgehend von einer bekannten Finite-Elemente-Verschiebung  $\mathbf{u}^h$  können mit dem linearisierten Problem die zu einer Änderung des Lastniveaus  $\Delta\lambda$  zugehörigen Verschiebungen  $\Delta\tilde{\mathbf{w}}$  bestimmt werden.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{w}} \right) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \Delta\lambda \{ (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma} \} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (5.38)$$

Zur Berechnung der entsprechenden diskreten Lösung werden die Testfunktionen  $\mathbf{v}$  aus dem Finite-Elemente-Raum  $V^h$  gewählt.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{w}}^h \right) : \nabla \mathbf{v}^h \, dx = \Delta\lambda \{ (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma} \} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (5.39)$$

Die Fehler in der linearisierten Lösungen  $\Delta\tilde{\mathbf{w}} - \Delta\tilde{\mathbf{w}}^h$  lassen sich mit den für lineare Probleme in Kapitel 3 vorgestellten Methoden abschätzen. Dazu sind lediglich in den Abschätzungen die Residuen durch die mit der zu  $\Delta\tilde{\mathbf{w}}^h$  zugehörigen Residuen  $\Delta\mathbf{R}$  und  $\Delta\mathbf{J}$  zu ersetzen. Die Residuen können einfach aus der Differenz der zu den Verschiebungen  $\mathbf{u}^h$  und  $\mathbf{u}^h + \Delta\tilde{\mathbf{w}}^h$  zugehörigen Residuen bestimmt werden.

**Bemerkung:**

- Nur unter geeigneten zusätzlichen Bedingungen an die Größe der höheren Ableitungen in der Taylorreihenentwicklung (5.32) sind auch mathematisch exakte obere und untere Abschätzungen ableitbar. Auch die Modellierung als Variationsproblem erfordert solche Bedingungen. In den Arbeiten von Pousin et al. [98] und Verfürth [132] wird zum Beispiel die Existenz einer Konstanten  $C$  mit der folgenden Eigenschaft vorausgesetzt.

$$\frac{\left\| \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{F}} - \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \right\|}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_1} \leq C$$

Da die Konstante  $C$  unbekannt ist, führen die resultierenden mathematisch exakten Abschätzungen bei numerischen Berechnungen auf die gleichen Ergebnisse wie die Gl. (5.37).

- Werden die Verfeinerungsindikatoren mit der von Stein et al. [122] vorgeschlagenen Methode berechnet, so können die glättungsbasierten Methoden nach Zienkiewicz und Zhu [146] direkt auf das linearisierte Problem angewendet werden.

#### 5.4.1.2 A–Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Die Netzadaption bezüglich der inneren Arbeiten führt insbesondere bei komplexen Tragwerken auf Finite–Elemente–Diskretisierungen mit sehr vielen Freiheitsgraden. Insbesondere bei numerisch zeitaufwendigen nichtlinearen Problemen ist es wesentlich effektiver, das Finite–Elemente–Netz bezüglich einiger vorgegebener lokaler sowie integraler Größen zu verfeinern. Wird die Fehlerabschätzung ausschließlich auf das linearisierte Problem beschränkt, so lassen sich die im Kapitel 4 für lineare Probleme vorgestellten Dualitätstechniken auch auf nichtlineare Probleme erweitern. Im nachfolgenden wird exemplarisch die Fehlerabschätzung für eine lokale Verschiebung bei geometrisch nichtlinearen Randwertproblemen vorgestellt. Zusätzlich zu der ursprünglichen linearisierten Gleichung (5.34) zur Fehlerberechnung

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_k} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_k} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

wird ein duales bzw. adjungiertes Problem mit einer modifizierten Belastung betrachtet. Zur Bestimmung der lokalen Verschiebungsfehler in der näheren Umgebung  $\tau$  des Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  wird das duale Problem mit einer Lastvektor  $\tilde{\delta}_i$  belastet.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{G}} \right) : \nabla \mathbf{v} \, dx = (\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{v}) \quad (5.40)$$

Der Lastvektor  $\tilde{\delta}_i$  besteht aus einer regularisierten Einzellast bzw. Çirac Delta in Richtung der gesuchten Verschiebungskomponente, z.B. für  $i=2$  gilt:

$$\tilde{\delta}_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \cdot \mathbf{i}_1 + \tilde{\delta}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{i}_2 + 0 \cdot \mathbf{i}_3$$

Dabei sind  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  und  $\mathbf{i}_3$  die kartesischen Basisvektoren. Das ursprüngliche und das duale Problem Gl. (5.34) und Gl. (5.40) sind beide linear, so daß der Satz von Betti–Maxwell angewendet werden kann.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{e}}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{G}} \, dx = \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ (\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{G}})_{\Omega_k} + (\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{G}})_{\Gamma_k} \right\} \quad (5.41)$$

Die Multiplikation der kontinuierlichen Fehlerfunktion mit dem regularisiertem Dirac–Delta ergibt die lokalen Verschiebungsfehler in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ . Die Gleichung (5.41) liefert für den lokalen Fehler unter Verwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und Ausnutzung der Galerkin–Orthogonalität die folgende Abschätzung.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{e}}) \leq \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_k} \|\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{I}\tilde{\mathbf{G}}\|_{0,\Omega_k} + \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_k} \|\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{I}\tilde{\mathbf{G}}\|_{0,\Gamma_k} \right\} \quad (5.42)$$

Die zweite Ableitung der regularisierten Greenschen Funktion ergibt mit den klassischen Abschätzungen eine obere Schranke für die Interpolationsfehler auf dem Gebiet  $\Omega_K$  und dem Rand  $\Gamma_K$  eines Elementes  $K$  (siehe Anhang A.3).

$$\|\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{G}}\|_{0,\Omega_K} \leq \text{Ch}_K^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\|_{0,\Omega_K} \quad \|\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{G}}\|_{0,\Gamma_K} \leq C \sqrt{h_K^3} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\|_{0,\Omega_K}$$

Die Greensche Funktion bzw. die Einflußfläche für eine lokale Verschiebung ist insbesondere bei nichtlinearen Problemstellungen in der Regel unbekannt. Eine Finite-Elemente-Näherung für die regularisierte Greensche Funktion kann ausgehend von der linearisierten Gleichung (5.40) bestimmt werden. Die aus der Finite-Elemente-Lösung  $\tilde{\mathbf{G}}^h$  mit geeigneten Differenzenquotienten bestimmten zweiten Ableitungen ergeben in der Regel auch sehr gute Abschätzungen für die Interpolationsfehler. Ein mögliches Differenzenschema zur Berechnung der zweiten Ableitungen ist in Anhang A.4 angegeben. Nach Einsetzen der näherungsweise berechneten zweiten Ableitungen in Gleichung (5.42) folgt ein a-posteriori Fehlerschätzer für die lokalen Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit der regularisierten Greenschen Funktion, der Residuen und der Elementgrößen.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{e}}) \approx \sum_{K=1}^{\text{NEL}} C \left\{ h_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{G}}^h}{\partial \mathbf{x}^2} \right\|_{0,\Omega_K} + \sqrt{h_K^3} \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{G}}^h}{\partial \mathbf{x}^2} \right\|_{0,\Omega_K} \right\} \quad (5.43)$$

Die einzelnen Elementfehleranteile werden wie bei linearen Problemen mit der zweiten Ableitung der regularisierten Greenschen Funktion gewichtet. Die Änderung der Tragwirkung infolge nichtlinearer Effekte wird somit hauptsächlich mit dem linearisierten dualen Problem berücksichtigt. Die Ermittlung der lokalen Fehler ist besonders einfach, da die regularisierte Greensche Funktion aus den linearisierten Gleichungen, d.h. mit der bereits bekannten Steifigkeitsmatrix am diskreten Lösungspunkt  $\mathbf{u}^h$ , bestimmt wird.

Der vorgestellte lokale a-posteriori Fehlerschätzer nach Gl.(5.43) ist im mathematischen Sinne kein Fehlerschätzer, da die zweite Ableitung der regularisierten Greenschen Funktion mit der Finite-Element-Lösung approximiert wurde. Die Bestimmung der zweiten Ableitungen aus der diskontinuierlichen Finite-Elemente-Lösung mit einer Differenzenformel kann auch als ein Glättungsvorgang interpretiert werden. Deshalb ist es naheliegend, die lokalen Fehler ohne Residuen ausschließlich mit der Differenz von geglätteten zu diskontinuierlichen Größen zu bestimmen. Die Fehler in den 1. PK Spannungen des linearisierten Problems multipliziert mit den Fehlern in den Verschiebungsgradienten der regularisierten Greenschen Funktion sind nach Gleichung (5.41) identisch mit den lokalen Verschiebungsfehlern.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{e}}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{e}} \right) : \nabla \tilde{\mathbf{G}} \, d\mathbf{x} \quad (5.44)$$

Die rechte Gleichungsseite wird unter Verwendung der Galerkin-Orthogonalität folgendermaßen umgeformt.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \tilde{e}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{F}} \nabla \tilde{e} \right) : \nabla (\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h) \, dx \quad (5.45)$$

Zur näherungsweise Abschätzung der lokalen Fehler sind anstelle der exakten Spannungen  $\mathbf{P}$  und der Verschiebungsgradienten  $\nabla \tilde{\mathbf{G}}$  die geglätteten Größen  $\mathbf{P}^*$  und  $\nabla \tilde{\mathbf{G}}^*$  zu verwenden.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \tilde{e}) \approx \int_{\Omega} (\mathbf{P}^*(\mathbf{u}^h) - \mathbf{P}(\mathbf{u}^h)) : (\nabla \tilde{\mathbf{G}}^h - \nabla \tilde{\mathbf{G}}^h) \, dx \quad (5.46)$$

Die Spannungen und Verschiebungsgradienten können mit den bereits in Abschnitt 3.2.2.5 für lineare Probleme vorgestellten Methoden geglättet werden. In den Finite-Elemente-Programmen werden meist nur die symmetrischen 2. PK Spannungen und Cauchy Spannungen vorgehalten. Deshalb ist es für die Implementierung günstiger, die lokalen Fehler in Abhängigkeit der 2. PK Spannungen und der linearisierten Greenschen Verzerrungen auszudrücken. Die innere Arbeit in Gleichung (5.46) lässt sich unter Beachtung der folgenden Umformung

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{u}^h) : \nabla \tilde{\mathbf{G}}^h \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}^h) : \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}}^h \, dx$$

aus den 2. PK Spannungen und den Greenschen Verzerrungen bestimmen.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \tilde{e}) \approx \int_{\Omega} (\mathbf{S}^*(\mathbf{u}^h) - \mathbf{S}(\mathbf{u}^h)) : \left( \left( \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}}^h \right)^* - \left( \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^h)}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{G}}^h \right) \right) \, dx \quad (5.47)$$

Der lokale Fehlerschätzer hat wieder eine ähnliche Struktur wie bei linearen Problemen und kann auch anschaulich mechanisch interpretiert werden. Die Fehler in den linearisierten Greenschen Verzerrungen beschreiben den Einfluß der Spannungsfehler auf die lokalen Verschiebungsfehler.

#### Bemerkung:

- Zur Abschätzung der Fehler in weiteren lokalen und integralen Größen ist jeweils nur die Belastung für das duale Problem zu modifizieren. Da die lokale Fehlerabschätzung auf dem linearisierten Problem basiert, sind die Belastungen für duale Probleme, wie für lineare Probleme in Kapitel 4 vorgestellt, zu wählen.

#### 5.4.2 Verfeinerungsindikatoren für singuläre Punkte

Es gibt in der Literatur bis heute nur wenige Ansätze zur a-posteriori Fehlerabschätzung und zur adaptiven Berechnung von singulären Punkten. Im Gegensatz dazu wurden erste a-priori Fehlerschätzer bereits Anfang der achtziger Jahre für geometrisch nichtlineare Probleme mit Durchschlags- und Verzweigungspunkten in der Arbeit von Fujii et al. [56] vorgestellt. Das Vorgehen von Fujii et al. für konforme Diskretisierungen wurde später von Brezzi et al. [29], [30], [31] auf nichtkonforme Diskretisierungen erweitert. A-priori Fehlerschätzer für reguläre Gleichgewichtspunkte und Durchschlagspunkte lassen sich, ausgehend von dem linearisierten

Problem, relativ einfach herleiten. Dagegen ist die Situation bei Verzweigungspunkten aus theoretischer Sicht wesentlich komplexer. Eine symmetrische Verzweigung kann zum Beispiel nur mit einer entsprechend symmetrischen Diskretisierung reproduziert werden [56]. Die Arbeiten von Brezzi et al. [31] zeigen jedoch, daß unabhängig von der Approximierbarkeit der exakten Beulform die Fehler zwischen der exakten und der Finite-Elemente-Lösung in der Beulform und der Verzweigungslast bei Netzverfeinerung optimal konvergieren. Bei der numerischen Berechnung von symmetrischen Verzweigungspunkten mit nicht symmetrischen Netzen folgt daraus, daß die numerisch berechneten Beulformen zwar nicht symmetrisch sind, aber mit zunehmender Verfeinerung gegen die richtige symmetrische Beulform konvergieren.

Aufbauend auf den Arbeiten über die a-priori Fehlerabschätzung wurde von Verfürth [132] ein erster Ansatz zur a-posteriori Fehlerabschätzung vorgestellt. Die Fehler werden für die Kombination von

$$|\lambda^c - \lambda^h| + \|\phi^c - \phi^h\|_1 \quad (5.48)$$

Normen abgeschätzt und liefern nicht optimale Abschätzungen, da die beiden Terme von verschiedenen Ordnungen konvergieren. Dabei ist  $\phi$  der kritische Eigenmode und  $\lambda$  ist der Lastparameter am Verzweigungspunkt. Zur Herleitung des Fehlerschätzers wird das am Verzweigungspunkt singuläre Problem zunächst durch Hinzunahme von zusätzlichen Gleichungen in ein reguläres Problem überführt.

$$\left\{ \begin{array}{l} N(\mathbf{u}^c, \lambda^c) \\ N_{,u}(\mathbf{u}^c, \lambda^c)\phi \\ \int (\phi^h - 1) \, dx \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.49)$$

Die Orthogonalität von  $N_{,u}$  zu der Beulform  $\phi$  in der zweiten Gleichung ist die Bedingung für den kritischen Punkt und wurde bereits in Abschnitt 5.2 vorgestellt (siehe auch Bild 5.2). Da die Größe der Beulform bis auf einen skalaren Parameter unbestimmt ist, wird die Länge mit der letzten Gleichung vorgegeben. Ausgehend von einer Reihenentwicklung des erweiterten nichtlinearen Gleichungssystems geben Brezzi et al. [31] die folgende Abschätzung an.

$$|\lambda^h - \lambda^l| + \|\phi^h - \phi\|_1 \leq C(\phi) \left\{ \int_{\Omega} (\phi^h - 1) \, dx + \frac{1}{t} \|N(t\phi^h, \lambda^h)\|_{-1} \right\} \quad (5.50)$$

$C$  ist eine von der Beulform abhängige Konstante und  $t$  ein kleiner skalarer Parameter. Der zweite Term auf der rechten Gleichungsseite ist die folgendermaßen definierte Dualnorm der Residuen.

$$\|N(t\phi^h, \lambda^h)\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{(N(t\phi^h, \lambda^h), \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \quad (5.51)$$

Dabei sind  $\mathbf{v}$  beliebige Testfunktionen aus dem Raum  $H^1$ . Die Abschätzung der Dualnorm führt im wesentlichen auf die Lösung von lokalen Teilproblemen. Deshalb besitzt die resultierende Abschätzung eine ähnliche Form wie der implizite Energienormfehlerschätzer.

$$\|N(\mathbf{t}\phi^h, \lambda^h)\|_{-1}^2 \leq \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ Ch_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0,\Omega_K}^2 + Ch_K \|\mathbf{J}\|_{0,\Gamma_K}^2 \right\} \quad (5.52)$$

Nach Einsetzen der Dualnormabschätzung in die Gleichung (5.50) folgt ein Fehlerschätzer bzw. Verfeinerungsindikator für die Verzweigungspunkte. Der Fehlerschätzer nach Gleichung (5.50) kann jedoch mit der von der Beulform abhängigen Konstanten kaum für eine effektive Fehlerabschätzung verwendet werden. Die Anteile der einzelnen Elemente zum Gesamtfehler sind, bis auf den Faktor  $C(\phi)$ , durch die Gleichung (5.50) gegeben. Somit eignen sich die Fehlerindikatoren zur Steuerung eines adaptiven Algorithmus.

Zur Bestimmung der Fehlerindikatoren nach Gleichung (5.50) ist das Residuum für einen mit der Beulform  $\phi^h$  gestörten Zustand zu ermitteln. Anschließend werden die zugehörigen Verfeinerungsindikatoren aus Gleichung (5.52) bestimmt. Aus den Spannungen des gestörten Zustandes kann auch der zur Gleichung (5.52) entsprechende glättungsbasierte Indikator ermittelt werden.

## 5.5 Lösungsstrategien für die diskretisierten Gleichungen

Die diskretisierte schwache Form des Randwertproblems Gl.(5.20) führt auf nichtlineare Gleichungssysteme. Zur Bestimmung der  $N$  diskreten unbekanntenen Knotenverschiebungen (und -rotationen) des Gesamttragwerks und weiterhin des unbekanntenen Lastparameters  $\lambda$  stehen zunächst  $N$  nichtlineare Gleichungen zur Verfügung. Die diskreten nichtlinearen Gleichungen beschreiben damit eine einparametrische Kurve im  $(N+1)$  dimensionalen Vektorraum. Für eine vorgegebene Variable können die restlichen  $N$  Variablen aus den nichtlinearen Gleichungen ermittelt werden. Das diskretisierte Tragwerk besitzt ein ähnlich komplexes Lösungsverhalten mit Durchschlags- und Verzweigungspunkten wie das in Abschnitt 5.2 diskutierte kontinuierliche System. Deshalb existiert nicht für jede vorgegebene Variable eine eindeutige Lösung. Falls eine Lösung existiert, ist meist für ungünstige Ausgangswerte die Konvergenz der anschließenden Gleichgewichtssiterationen nicht gewährleistet. Um die genannten Schwierigkeiten zu umgehen, wird im allgemeinen eine inkrementelle Vorgehensweise gewählt. Weiterhin sind meist zur Beurteilung des Tragwerksverhaltens, vom unbelasteten Zustand ausgehend, mehrere Punkte auf der Lastverformungskurve zu bestimmen. Bei dem pfadunabhängigen geometrisch nichtlinearen Problem ist die Lage der iterativ ermittelten Gleichgewichtspunkte nicht von der Inkrementierung abhängig.

### 5.5.1 Pfadverfolgungsverfahren

Ausgehend vom Nullzustand oder von einem bekannten Gleichgewichtszustand  $(\bar{\mathbf{u}}^h, \bar{\lambda})$  wird zunächst mit der Tangente an die Lastverschiebungskurve die Verschiebungen  $\Delta \mathbf{u}^{h,pr}$  für ein beliebi-

ges Lastinkrement  $\Delta\lambda^{\text{pr}}$  berechnet. Die Tangente ist mit dem am Gleichgewichtspunkt  $(\bar{\mathbf{u}}^h, \bar{\lambda})$  linearisierten Randwertproblem gegeben.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}^h} A(\Delta \mathbf{u}^{\text{h,pr}}, \mathbf{v}^h) \Big|_{\mathbf{u}^{\text{h,i}}} = \Delta \lambda^{\text{pr}} \left\{ (\mathbf{p}, \mathbf{v}^h)_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_N} \right\} \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \quad (5.53)$$

In der Finite-Elemente-Literatur wird die obige Gleichung meist ohne die diskreten Testvektoren  $\mathbf{v}^h$  in der folgenden Form angegeben.

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}^{\text{h,pr}} = \Delta \lambda^{\text{pr}} \mathbf{F}^h \quad (5.54)$$

$\mathbf{K}_T$  ist die Tangentensteifigkeitsmatrix und  $\mathbf{F}^h$  ist der äußere Lastvektor. Die inkrementellen Verschiebungen  $\Delta \mathbf{u}^{\text{h,pr}}$  und der Lastvektor  $\Delta \lambda$  werden anschließend bezüglich einer vorgegebenen Variablen skaliert. Daraus ergibt sich der Ausgangszustand für die nachfolgende Gleichgewichtssiteration mit  $\mathbf{u}^{\text{h,pr}} = \bar{\mathbf{u}}^h + \Delta \mathbf{u}^{\text{h,pr}}$  und  $\lambda^{\text{pr}} = \bar{\lambda} + \Delta \lambda^{\text{pr}}$ . Der gesamte Vorgang zur Bestimmung eines Startwertes für die Iteration wird in der Literatur meist als der Prädiktorschritt bezeichnet. Der neue Gleichgewichtspunkt wird, ausgehend von den Startwerten, im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausschließlich mit der Newton-Raphson Methode iterativ ermittelt.

Bei der Gleichgewichtssiteration sind  $N$  nichtlineare Gleichungen und  $N+1$  Variable vorhanden, deshalb ist eine Variable vorzugeben oder eine zusätzliche Nebenbedingung  $f(\mathbf{u}^h, \lambda)$  hinzuzunehmen.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h \\ f(\mathbf{u}^h, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Die erste Zeile beschreibt das diskrete Gleichgewicht zwischen den inneren Kräften  $\bar{\mathbf{N}}^h$  und den äußeren Kräften  $\lambda \mathbf{F}^h$ . Für die bis auf einige Einschränkungen frei wählbare Nebenbedingung  $f$  in der zweiten Zeile schlagen u.a. Wempner [136] und Ramm [102] die folgende Form vor.

$$f = \sqrt{\|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2} - s = 0 \quad (5.56)$$

Dabei ist  $\psi$  ein frei wählbarer Skalierungsparameter, um den Einfluß der Verschiebungsvariablen und des Lastparameters zu wichten. Mit der Gleichung (5.55) wird der Schnittpunkt eines Ellipsoids mit der Lastverformungskurve beschrieben (Bild 5.5). Der gewünschte Lösungspunkt ist mit dem freien Bogenlängenparameter  $s$  bestimmt. Die sehr häufig verwendete Nebenbedingung (5.56) ist für adaptive Berechnungen nur beschränkt geeignet. Die diskrete Verschiebungsnorm  $\|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|$  ist maßgeblich von der Dimension des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}^h$  und damit von der Diskretisierung abhängig. Der Bogenlängenparameter  $s$  muß folglich bei gleicher Problemstellung in Abhängigkeit von der Feinheit der Diskretisierung unterschiedlich gewählt werden.

Deshalb ist für adaptive Berechnungen das Gauß-Newton Verfahren (Bild 5.5), das ohne einen Pfadparameter  $s$  auskommt, besser geeignet. Zur Bestimmung der Verschiebungs- und Lastinkremente mit der Newton-Raphson Methode werden die diskreten Gleichgewichtsbedingungen

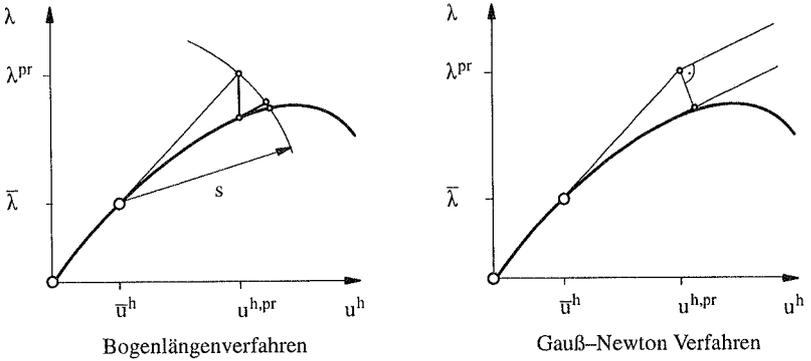


Bild 5.5: Nebenbedingungen für die Pfadverfolgung (Projektion auf 2-D)

(erste Zeile von Gl.(5.55)) am bekannten aktuellen Zustand linearisiert. Beispielsweise lassen sich die ersten Inkremente  $\Delta \mathbf{u}^{h,1}$  und  $\Delta \lambda^1$  aus der folgenden Gleichung bestimmen.

$$\bar{\mathbf{N}}^h(\mathbf{u}^{h,pr}, \lambda^{pr}) - \lambda^{pr} \mathbf{F}^h + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{h,pr}) \Delta \mathbf{u}^{h,1} - \mathbf{F}^h \Delta \lambda^1 = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

Es ist wieder eine zusätzliche Bedingung hinzuzufügen, da N lineare Gleichungen und N+1 Unbekannte vorhanden sind. An dem bekannten Zustand ist eine genäherte Tangente an die Lastverformungskurve mit dem folgenden Vektor gegeben (siehe auch Bild 5.5 rechts).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.58)$$

Die Tangente ist nur angenähert, da die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  für den aktuellen, nicht im Gleichgewicht befindlichen Zustand aufgestellt wird. Als zusätzliche Bedingung wird die Orthogonalität des Lösungsincrementes zu der genäherten Tangente hinzugenommen.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^{h,1} \\ \Delta \lambda^1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.59)$$

Nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung von Gl.(5.57) ergibt sich daraus eine Bestimmungsgleichung für  $\Delta \lambda^1$ .

$$\Delta \lambda^1 = - \frac{(\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h) \cdot \left( -\mathbf{K}_T^{-1} \left( \bar{\mathbf{N}}^h(\mathbf{u}^{h,pr}, \lambda^{pr}) - \lambda^{pr} \mathbf{F}^h \right) \right)}{(\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h) \cdot (\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h) + 1} \quad (5.60)$$

Anschließend lassen sich die Verschiebungsinkremente  $\Delta \mathbf{u}^{h,1}$  aus Gleichung (5.57) bestimmen. Für die weitere Iteration wird ausgehend von den Ergebnissen des letzten Iterationschrittes entsprechend vorgegangen. Die Genauigkeit der Lösung wird indirekt über  $L_2$ -Norm der Verschiebungsinkremente und der Ungleichgewichtskräfte kontrolliert. Die entsprechenden Tole-

ranzwerte sind je nach Problemstellung zwischen  $10^{-8}$  und  $10^{-4}$  zu wählen. Weitere algorithmische Details des vorgestellten Vefahrens werden in der Arbeit von Reitinger [107] diskutiert.

### 5.5.2 Direkte Berechnung kritischer Punkte

Zur Bemessung von Tragwerken sind aufgrund der möglichen Stabilitätsprobleme die Last- und Verschiebungszustände an kritischen Punkten besonders interessant. Die Durchschlags- und Verzweigungspunkte können mit direkten Methoden, wie sie im nachfolgenden vorgestellt werden, iterativ ermittelt werden.

Wie bereits für das kontinuierliche Randwertproblem vorgestellt, sind die kritischen Punkte durch das Singulärwerden der Tangentensteifigkeitsmatrix gekennzeichnet.

$$\mathbf{K}_T \phi^h = \mathbf{0}$$

Die Singularität der Steifigkeitsmatrix kann auch mit einem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \phi^h = \mathbf{0} \tag{5.61}$$

durch das zu Null werden des kleinsten Eigenwertes festgestellt werden. Wird von dem unbelasteten stabilen Zustand aus durch Steigern der Belastung ein kritischer Punkt erreicht, so wechselt das Vorzeichen des kleinsten Eigenwertes vom Positivem ins Negative und das Tragwerk wird instabil. Die Lösung des Eigenwertproblems (5.61) zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens während der Pfadverfolgung ist numerisch sehr aufwendig. Die kritischen Punkte lassen sich wesentlich einfacher entdecken, falls zur Gleichungslösung die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  in die Form  $\mathbf{LDL}^T$  zerlegt wird. Die Diagonalglieder der unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  besitzen dabei den Wert eins und  $\mathbf{D}$  ist eine Diagonalmatrix. Dann ist bekannt, daß die Anzahl der negativen Diagonalglieder identisch mit der Anzahl der negativen Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  ist. Ändert sich während der Pfadverfolgung die Anzahl der negativen Diagonalglieder, so werden die kritischen Punkten ausgehend vom folgenden Gleichungssystem direkt berechnet.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h \\ \mathbf{K}_T \phi^h \\ l(\phi^h) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.62}$$

Die erste Gleichung beschreibt das Gleichgewicht und die zweite die Singularität der Steifigkeitsmatrix am kritischen Punkt. Mit der dritten Gleichung wird die Länge der Beulform  $\phi^h$  zum Beispiel folgendermaßen vorgegeben.

$$l(\phi^h) = \|\phi^h\|^2 - 1 = 0 \tag{5.63}$$

Das nichtlineare Gleichungssystem (5.62) wird entsprechend der Pfadverfolgung nach der Linearisierung mit einer Newton-Raphson Iteration gelöst.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{F}^h \\ (\mathbf{K}_T\phi^h)_{,u} & \mathbf{K}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1_{,\phi^h} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^h \\ \Delta \phi^h \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h \\ \mathbf{K}_T \phi^h \\ l(\phi^h) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach den Verschiebungen ist in der Regel nicht bekannt. Deshalb wird sie mit einem Differenzenquotienten näherungsweise berechnet.

$$(\mathbf{K}_T\phi)_{,u} \Delta \mathbf{u} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon\phi)\Delta \mathbf{u} - \mathbf{K}_T(\mathbf{u})\Delta \mathbf{u}) \quad (5.65)$$

Das Gleichungssystem (5.64) ist ungefähr doppelt so groß wie die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ . Deshalb führt die Lösung durch invertieren der Gesamtmatrix bei praktischen Problemstellungen auf ineffiziente Algorithmen. Wird eine Partitionierungsmethode für die Gesamtlösung eingesetzt, so ist die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  nur einmal zu invertieren. Die diskreten Verschiebungen ergeben sich dabei zum Beispiel aus den folgenden Teillösungen.

$$\Delta \mathbf{u}^h = \Delta \mathbf{u}_p^h \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G^h \quad \Delta \mathbf{u}_p^h = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}^h \quad \Delta \mathbf{u}_G^h = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{N}^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h) \quad (5.66)$$

Die weiteren Schritte bei der Gleichungslösung werden u.a. von Reitinger [107] angegeben. Es ist weiterhin zu beachten, daß die Lösung des linearisierten Gleichungssystems mit der Partitionierungsmethode bei numerischen Berechnungen auf Konvergenzprobleme führen kann. Unter anderem ist, um die einzelnen Verschiebungsanteile in Gleichung (5.66) zu bestimmen, jeweils die am kritischen Punkt singuläre Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  zu invertieren. Der Konvergenzradius der Newton Iteration hängt von der Konditionierung der Steifigkeitsmatrix ab und geht für singuläre Matrizen gegen Null. Mit Penalty-Methoden werden diese grundsätzlichen Mängel des linearisierten erweiterten Gleichungssystems (5.64) abgemindert. Zum Beispiel schlagen Wriggers und Simo [140] aufbauend auf einem Penalty-Funktional das folgende erweiterte Gleichungssystem vor.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h + \hat{c}(\hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{u}^h - \hat{\mu}) \hat{\mathbf{e}}_i \\ \mathbf{K}_T \phi^h + \hat{c}(\hat{\mathbf{e}}_i^T \phi^h - \hat{\phi}) \hat{\mathbf{e}}_i \\ \hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{u}^h - \hat{\mu} \\ \hat{\mathbf{e}}_i^T \phi^h - \hat{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.67)$$

Nur eine Komponente des Vektors  $\hat{\mathbf{e}}_i$  an der Stelle  $i$  ist eins, die restlichen Komponenten sind jeweils Null.

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \{ 0, 0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0, 0 \} \quad (5.68)$$

Der Penalty Parameter  $\hat{c}$  (bzw. Strafterm) ist frei wählbar, er sollte jedoch im Bereich  $10^{-8} \leq \hat{c} \leq 10^{-1}$  gewählt werden. Mit dem Vektor  $\hat{\mathbf{e}}_i$  wird jeweils die Komponente  $i$  des Lösungsvektors  $\mathbf{u}^h$  ausgewählt. Die Länge des Eigenvektors ist mit der frei wählbaren Variablen  $\phi$  beschränkt. Aus dem Gleichungssystem (5.67) lassen sich die Verschiebungen  $\mathbf{u}^h$ , der

Eigenvektor  $\phi^h$  und die Variable  $\hat{\mu}$  berechnen. Für die exakten Verschiebungen ist  $\hat{\mu}$  identisch mit der  $i$ -ten Komponente des Verschiebungsvektors und das Gleichungssystem (5.67) ist gleich dem nicht modifizierten Gleichungssystem (5.62). Bei der Lösung des linearisierten Problems ist nicht mehr die singuläre Tangentensteifigkeitsmatrix sondern eine modifizierte nichtsinguläre Matrix

$$\mathbf{K}_T + \hat{c}\hat{e}_i\hat{e}_i^T \quad (5.69)$$

zu invertieren. Während der numerischen Berechnung wird der Penalty Parameter  $\hat{c}$  mit dem Vektor  $\hat{e}_i$  an einer geeigneten Stelle der Steifigkeitsmatrixdiagonalen aufaddiert, um das Singulärwerden von  $\mathbf{K}_T$  zu verhindern. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde  $\hat{c}$  an die Stelle der Maximalkomponente des Eigenvektors aufaddiert. Der Penalty Parameter  $\hat{c}$  kann relativ frei gewählt werden, es ist jedoch zu beachten, daß die Iteration für kleine Werte nicht konvergiert. Für große Werte kann die Lösung stark verfälscht werden.

Als Startwert für die iterative Lösung der erweiterten Gleichungssysteme (5.62) oder (5.67) wird ein Gleichgewichtspunkt in der Nähe des kritischen Punktes gewählt. Weiterhin ist ein geeigneter Startwert für den Eigenvektor  $\phi^h$  zu bestimmen. Liegen mehrere kritische Punkte  $\mathbf{K}_T$  dicht zusammen, so wird die Konvergenz der Iteration zu einem bestimmten Punkt hauptsächlich durch die Wahl des Startvektors bestimmt. Deshalb sind die Startvektoren besonders sorgfältig auszuwählen und gegebenenfalls sind probeweise mehrere kritische Punkte mit dem erweiterten Gleichungssystem zu bestimmen. Bei adaptiven Berechnungen mit unstrukturierten Finite-Elemente-Netzen eignen sich besonders die folgenden Eigenwertprobleme zur Bestimmung der Startvektoren  $\phi^h$ .

$$((\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_U) + \omega\mathbf{K}_G)\phi = \mathbf{0} \quad (5.70)$$

$$(\mathbf{K}_L + \omega(\mathbf{K}_U + \mathbf{K}_G))\phi = \mathbf{0} \quad (5.71)$$

$\mathbf{K}_L$  ist die lineare Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{K}_U$  ist die Anfangsverschiebungsmatrix und  $\mathbf{K}_G$  ist die Anfangsspannungsmatrix.  $\mathbf{K}_L$  ist belastungsunabhängig und  $\mathbf{K}_U$  und  $\mathbf{K}_G$  sind jeweils von der Belastung abhängig. Die bereits aus der klassischen Beulanalyse zur Berechnung der Traglasten bekannten Eigenwertprobleme (5.70) und (5.71) entstehen aus der folgenden Zerlegung der Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ , wie es u.a. in [145] beschrieben wird.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_U + \mathbf{K}_G \quad (5.72)$$

Das aktuelle Lastniveau multipliziert mit dem Eigenwert  $\omega$  ergibt eine Abschätzung für den kritischen Lastfaktor. Die Eigenwertprobleme (5.70) und (5.71) liefern bei unstrukturierten Netzen bessere Ergebnisse, als das nicht mechanisch motivierte Eigenwertproblem nach Gleichung (5.61).

$$(\mathbf{K}_T - \omega\mathbf{D})\phi^h = \mathbf{0}$$

Nach der iterativen Lösung kann die Art der kritischen Punkte entsprechend dem kontinuierlichen Problem bestimmt werden (siehe Gl.(5.9) und Gl.(5.10)).

### 5.5.3 Pfadwechsel am Verzweigungspunkten

An Verzweigungspunkten ist es grundsätzlich möglich, den Primär- oder den Sekundärpfad weiterzuverfolgen. Es sind verschiedene Verfahren vorhanden, um gezielt auf einem der Pfade weiterzurechnen [107]. Wie in Abschnitt 5.2 bereits diskutiert wurde, folgen die Verschiebungen im Anfangszustand der Verzweigung hauptsächlich der Richtung der Beulform  $\phi^h$ . Daher ist es naheliegend, den Verschiebungsvektor in der Nähe der kritischen Punkt ( $\mathbf{u}^{h,c}$  und  $\lambda^c$ ) mit der Beulform  $\phi^h$  zu modifizieren, um auf den Sekundärpfad zu gelangen.

$$\mathbf{u}^{h,pr} = \mathbf{u}^{h,c} + \epsilon \frac{\|\phi^h\|}{\|\bar{\mathbf{u}}^h\|} \phi^h \quad \text{und} \quad \lambda^{pr} = \lambda^c \quad (5.73)$$

Zu den Verschiebungen am kritischen Punkt wird der normierte Beulvektor mit einem Skalierungsfaktor  $\epsilon$  aufaddiert. Da die Länge des Eigenvektors unbestimmt ist, wird weiterhin das Verhältnis von  $\|\phi^h\|$  zu  $\|\bar{\mathbf{u}}^h\|$  bei der Skalierung mitberücksichtigt. Mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}^{h,pr}$  und dem Lastparameter  $\lambda^{pr}$  als Startwert liefert eine anschließende Newton-Raphson Iteration einen Gleichgewichtspunkt auf dem Sekundärpfad. Nachdem ein Punkt auf dem Sekundärpfad bekannt ist, wird dieser auf die gleiche Weise wie der Primärpfad weiterverfolgt. Verbesserte auf asymptotischen Reihenentwicklungen basierende Prädiktoren zum Pfadwechsel werden u.a. von Reitinger [107] vorgestellt. Weiterhin ist es möglich, die Verzweigungsgleichung (5.14) am kritischen Punkt zu lösen und die Tangente an den Primär- oder Sekundärpfad zu bestimmen [75].

## 5.6 Adaptive Netzverfeinerung bei geometrischer Nichtlinearität

Der Gleichgewichtspfad wird mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Prädiktor-Korrektor Algorithmus und der Newton Raphson Iteration bestimmt. Der Fehlerschätzer wird jeweils an den Gleichgewichtspunkten begleitend eingesetzt. Falls die Genauigkeit der numerischen Berechnung nicht ausreichend ist, wird mit den berechneten Verfeinerungsindikatoren  $\eta_i$  ein neues Netz generiert. Für nichtlineare Probleme mit stark wechselndem Tragverhalten hat sich dabei die Neuvernetzungsstrategie als besonders flexibel erwiesen. Wie bereits diskutiert führt die Lösung von nichtlinearen Problemen auf die Betrachtung von linearen Problemen im Tangentenraum. Deshalb werden die neuen Elementgrößen mit den gleichen Konvergenzraten wie bei linearen Problemen ermittelt (siehe Abschnitt 4.6). Nach der Generierung des Finite-Elemente-Netzes sind die Verschiebungen (und zusätzlich die Rotationen bei Schalen) von dem alten auf das neue Netz abzubilden, um die Pfadverfolgung fortzusetzen. Das nicht im Gleichgewicht befindliche Netz wird anschließend mit einer Korrekturiteration ins Gleichgewicht gebracht. Die Effektivität des adaptiven Algorithmus hängt wesentlich von der Konvergenz der Korrekturiteration ab. Um Divergenz zu vermeiden, sollte die Anzahl der verfeinerten Elemente in jedem adaptiven Schritt begrenzt werden. Die gesamte Lösungsdauer wird damit in der Regel nicht länger, da die Lösungen aus größeren Netzen einen guten Startwert für

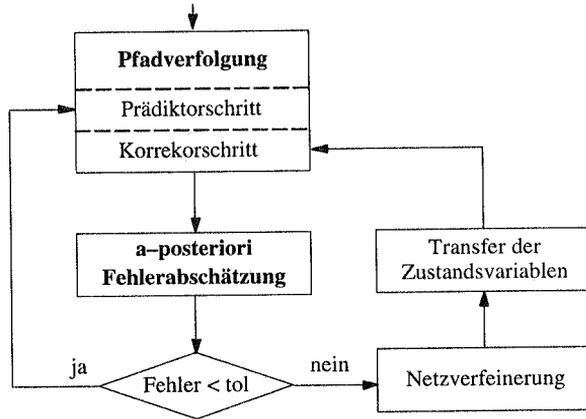


Bild 5.6: Adaptive geometrisch nichtlineare Berechnung

die Iteration auf dem feinen Netz ergeben und dadurch nur wenige Iterationen auf dem feinen Netz erforderlich sind. Das beschriebene Vorgehen wird in der mathematischen Literatur in Zusammenhang mit dem "mesh independence principle" diskutiert [3]. In dem implementierten Algorithmus werden weiterhin während der Iteration die Ungleichgewichtskräfte

$$\bar{N}^h(\mathbf{u}^h) - \lambda \mathbf{F}^h$$

kontrolliert und die Schrittlängen werden jeweils so angepaßt, daß die  $L_2$ -Norm der Ungleichgewichtskräfte nicht größer wird. Durchgeführte numerische Berechnungen zeigen, daß allgemeine Schalentragwerke ohne die vorgeschlagenen Modifikationen nicht berechenbar sind. Nach der Bestimmung eines Gleichgewichtspunktes werden die Fehler nochmals überprüft und falls die Fehler hinreichend klein sind, so kann der Gleichgewichtspfad weiter verfolgt werden. Bild 5.6 zeigt ein Ablaufdiagramm des implementierten Verfahrens.

### 5.6.1 Transfer der Zustandsvariablen

Die Zuverlässigkeit der gesamten adaptiven Vorgehensweise ist stark von dem Abbildungsprozess der Zustandsvariablen abhängig. Im nachfolgenden wird in Anlehnung an Okstad [91] eine effiziente und robuste Methode für beliebig gekrümmte Schalentragwerke vorgestellt. Als erster Schritt sind für die neu generierten Knoten alle zugehörigen Elemente auf dem alten Netz zu identifizieren. Bei sehr vielen Elementen ist der einfache Vergleich der Koordinaten des neu generierten Punktes mit den Elementkoordinaten zu zeitaufwendig und nicht praktikabel. Deshalb wird die Suche mit der nachfolgenden Methode systematisiert und der gesamte Abbildungsprozess wird damit insgesamt wesentlich effizienter.

Vorab werden für jedes Element die maximalen und minimalen Knotenkoordinaten  $x_K$ ,  $y_K$  und  $z_K$  ermittelt und in einem Feld abgespeichert.

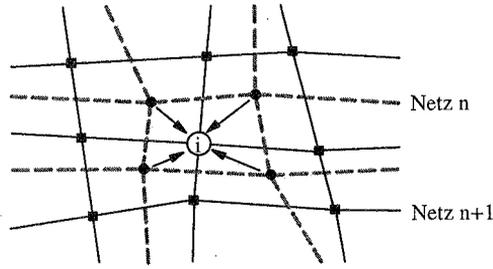


Bild 5.7: Abbilden der Zustandsvariablen auf den Knoten i

$$[\min x_K, \max x_K] \times [\min y_K, \max y_K] \times [\min z_K, \max z_K]$$

Bei gekrümmten Schalenträgwerken liegen die neu generierten Punkte  $\mathbf{x}^{\text{neu}}$  auf der Schalenoberfläche und nicht auf den Elementoberflächen, deshalb sollte die Differenz zwischen minimalen und maximalen Koordinaten zusätzlich vergrößert werden.

$$\min x_K := \min x_K - (\max x_K - \min x_K) \cdot \epsilon$$

$$\max x_K := \max x_K + (\max x_K - \min x_K) \cdot \epsilon$$

Der Toleranzfaktor wird je nach Beispiel zu  $1.1 \leq \epsilon \leq 1.3$  gewählt. Das erzeugte Feld vereinfacht den Suchprozess wesentlich. Für einen neuen Punkt mit der Koordinaten  $(x^{\text{neu}}, y^{\text{neu}}, z^{\text{neu}})$  sind zuerst alle Elemente mit der Eigenschaft

$$\min x_K \leq x^{\text{neu}} \leq \max x_K$$

zu ermitteln. Wird dieser Prozess mit den y und z Koordinaten entsprechend fortgeführt, bleiben schließlich sehr wenige Elemente, in der Regel nur ein Element, übrig. Um die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_K^{\text{h,alt}}$  (und die Rotationswinkel des Schalendirektors) vom vorherigen Netz auf den neuen Knoten mit der Finite-Elemente-Ansatzfunktionen  $N_K$

$$\mathbf{u}^{\text{h,neu}} = \sum_{K=1}^{\text{IEL}} N_K(\bar{\xi}^{\text{neu}}, \bar{\eta}^{\text{neu}}) \mathbf{u}_K^{\text{h,alt}} \quad (5.74)$$

abzubilden, werden die lokalen Koordinaten  $\bar{\xi}^{\text{neu}}$  und  $\bar{\eta}^{\text{neu}}$  benötigt. Die lokalen Koordinaten können erst nach einer orthogonalen Projektion des neuen Punktes von der Schalenoberfläche auf einen Punkt der Elementfläche bestimmt werden. Dazu ist der Abstand zwischen dem Punkt  $\mathbf{x}^{\text{neu}}$  und der Elementoberfläche zu minimieren.

$$\bar{\Pi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = (\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^{\text{neu}})(\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^{\text{neu}}) \rightarrow \min. \quad (5.75)$$

Die Elementoberfläche ist mit den Ansatzfunktionen  $\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  und den Knotenkoordinaten  $\mathbf{x}_K$  gegeben.

$$\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{K=1}^{\text{IEL}} N_K(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \mathbf{x}_K \quad (5.76)$$

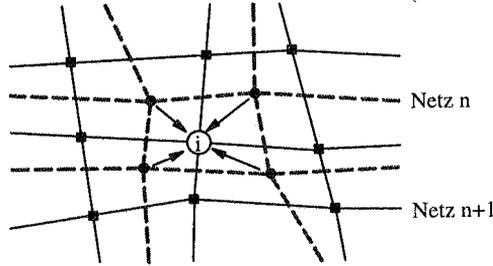


Bild 5.7: Abbilden der Zustandsvariablen auf den Knoten i

$$[\min x_K, \max x_K] \times [\min y_K, \max y_K] \times [\min z_K, \max z_K]$$

Bei gekrümmten Schalentragwerken liegen die neu generierten Punkte  $\mathbf{x}^{\text{neu}}$  auf der Schalenoberfläche und nicht auf den Elementoberflächen, deshalb sollte die Differenz zwischen minimalen und maximalen Koordinaten zusätzlich vergrößert werden.

$$\min x_K := \min x_K - (\max x_K - \min x_K) \cdot \epsilon$$

$$\max x_K := \max x_K + (\max x_K - \min x_K) \cdot \epsilon$$

Der Toleranzfaktor wird je nach Beispiel zu  $1.1 \leq \epsilon \leq 1.3$  gewählt. Das erzeugte Feld vereinfaht den Suchprozess wesentlich. Für einen neuen Punkt mit der Koordinaten  $(x^{\text{neu}}, y^{\text{neu}}, z^{\text{neu}})$  sind zuerst alle Elemente mit der Eigenschaft

$$\min x_K \leq x^{\text{neu}} \leq \max x_K$$

zu ermitteln. Wird dieser Prozess mit den y und z Koordinaten entsprechend fortgeführt, bleiben schließlich sehr wenige Elemente, in der Regel nur ein Element, übrig. Um die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_K^{\text{h,alt}}$  (und die Rotationswinkel des Schalendirektors) vom vorherigen Netz auf den neuen Knoten mit der Finite-Elemente-Ansatzfunktionen  $N_K$

$$\mathbf{u}^{\text{h,neu}} = \sum_{K=1}^{\text{IEL}} N_K(\bar{\xi}^{\text{neu}}, \bar{\eta}^{\text{neu}}) \mathbf{u}_K^{\text{h,alt}} \quad (5.74)$$

abzubilden, werden die lokalen Koordinaten  $\bar{\xi}^{\text{neu}}$  und  $\bar{\eta}^{\text{neu}}$  benötigt. Die lokalen Koordinaten können erst nach einer orthogonalen Projektion des neuen Punktes von der Schalenoberfläche auf einen Punkt der Elementfläche bestimmt werden. Dazu ist der Abstand zwischen dem Punkt  $\mathbf{x}^{\text{neu}}$  und der Elementoberfläche zu minimieren.

$$\bar{\Pi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = (\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^{\text{neu}})(\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) - \mathbf{x}^{\text{neu}}) \rightarrow \min. \quad (5.75)$$

Die Elementoberfläche ist mit den Ansatzfunktionen  $\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  und den Knotenkoordinaten  $\mathbf{x}_K$  gegeben.

$$\mathbf{x}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{K=1}^{\text{IEL}} N_K(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \mathbf{x}_K \quad (5.76)$$

(5.67) direkt bestimmt. Zur Berechnung des Verfeinerungsindikators werden die Verschiebungen am kritischen Punkt mit der Beulform überlagert. Die Residuen oder die Differenz zwischen den geglätteten und ungeglätteten Spannungen am gestörten Zustand werden, wie im Abschnitt 5.4.2 vorgestellt, zur Berechnung der Verfeinerungsindikatoren verwendet. Ausgehend von den berechneten Indikatoren wird ein neues Finite-Elemente-Netz generiert. Anschließend sind die Zustandsvariablen von dem alten auf das neue Netz abzubilden und das Tragwerk ist mit einer Korrekturiteration ins Gleichgewicht zu bringen. Für die neue Diskretisierung kann nach Berechnung der Eigenformen mit den direkten Methoden ein neuer Verzweigungspunkt ermittelt werden.

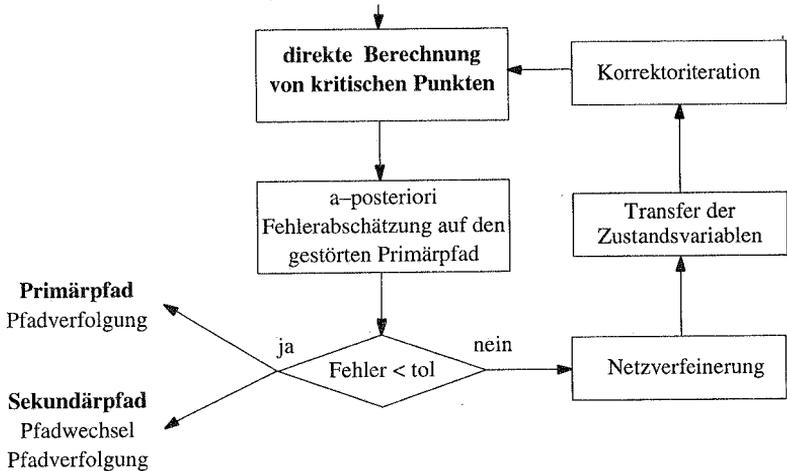


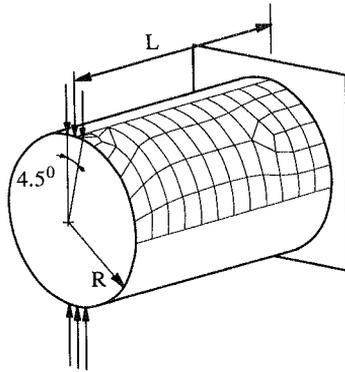
Bild 5.9: Adaptive Berechnung von Verzweigungs- und Durchschlagspunkten

## 5.7 Beispiele

Die Anwendung der vorgestellten Verfeinerungsindikatoren und des adaptiven Netzverfeinerungsalgorithmus wird im nachfolgenden anhand mehrerer Schalenbeispiele diskutiert. Im ersten Teil werden zwei in der Literatur häufig verwendete Benchmarkbeispiele mit konzentrierter Belastung nachgerechnet. Anschließend werden Stabilitätsprobleme von Zylinderschalen untersucht, für die analytische oder experimentelle Ergebnisse vorliegen. Als Finite-Elemente kommen durchweg neunknotige degenerierte Schalenelemente zum Einsatz (siehe [34]).

### 5.7.1 Schalentragwerke unter konzentrierter Belastung

Das erste Beispiel ist ein einseitig eingespannter Zylinder, der im Abschnitt 3.4 bereits schon linear untersucht wurde. Der berechnete Ausschnitt des Tragwerks und die grobe Startdiskreti-



Geometrie:

Länge  $L = 3.048$

Radius  $R = 1.016$

Dicke  $t = 0.03$

Material:

Elastizitätsmodul  $E = 2.0685 \cdot 10^7$

Querdehnzahl  $\nu = 0.3$

Bild 5.10: Einseitig eingespannter Zylinder

sierung sind in Bild 5.10 dargestellt. Bei niedriger Belastung liegen die kritischen Bereiche mit großen Spannungsgradienten in der Umgebung der Lasteinleitung. Mit steigender Belastung wird der Zylinder über die ganze Länge deformiert. Bei einer nicht adaptiven Berechnung ist für das gesamte Tragwerk eine sehr feine Diskretisierung zu wählen. Drei der vier adaptiv ermittelten Netze zu unterschiedlichen Lastniveaus im verformten Zustand sind Bild 5.11 gebildet. Mit dem adaptiven Algorithmus wird die Ausbreitung der Deformation ausgehend vom Lastangriffspunkt sehr gut wiedergegeben. Für die adaptive Berechnung lag eine Fehlertoleranz von 7.5% zugrunde, die Evolution des Fehlers ist in Bild 5.12 dargestellt. Die Fehler wurden basierend auf dem linearisierten Problem mit dem residualen Indikator nach Babuska und Miller und dem glättungsbasierten Indikator nach Zienkiewicz und Zhu ermittelt. Für dieses Beispiel zeigen die beiden Verfahren ein ähnliches Verhalten, wie es bei linearen Problemen auch der Fall ist. Wie bereits bei linearen Problemen diskutiert, eignet sich nur die "Superconvergent Patch Recovery" Methode zur Fehlerermittlung bei höherwertigen Elementen.

Die mechanischen Eigenschaften von Schalen sind wesentlich von ihrer Krümmung abhängig. In Abhängigkeit der Krümmungsverhältnisse können sich zum Teil ganz unterschiedliche Trag-

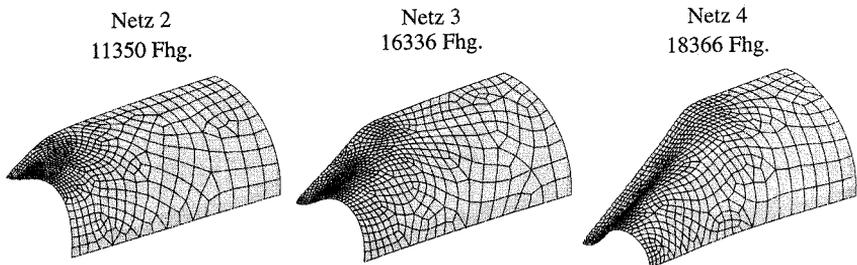


Bild 5.11: Adaptiv verfeinerte Netze mit steigender Belastung (Skalierungsfaktor 1:1)

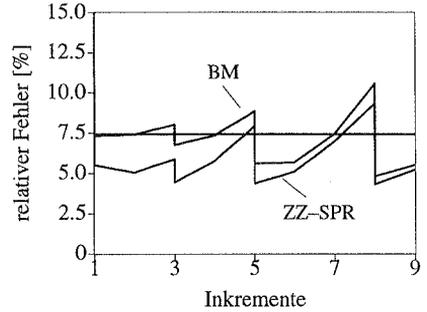
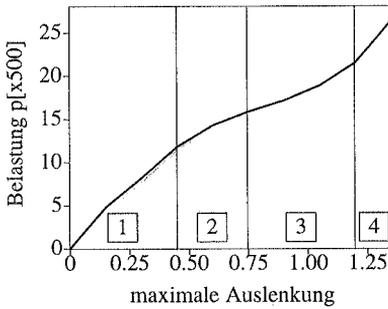
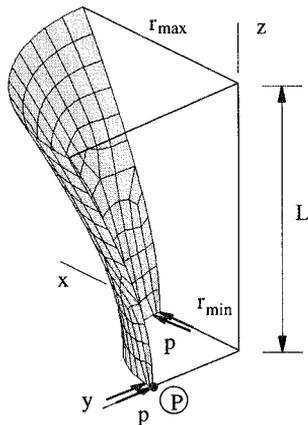


Bild 5.12: Lastverschiebungskurve und die Entwicklung der geschätzten Fehler

wirkungen einstellen. Diese mechanischen Eigenschaften spiegeln sich auch in den Differentialgleichungen der Membrantheorie wider. Beispielsweise sind die Gleichungen für Zylinderschalen vom parabolischen Typ und für Hyperboloidschalen vom hyperbolischen Typ. Da zur Fehlerabschätzung und Netzverfeinerung das mit den Residuen belastete Tragwerk betrachtet wird, ist auch ein Einfluß der Krümmungsparameter auf die Adaptivität zu erwarten.

Die genannten Effekte treten tatsächlich bei der adaptiven Berechnung einer Hyperboloidschale auf. In Bild 5.13 ist ein Achtel der Struktur sowie die Belastung der berechneten Schale dargestellt. Bei kleinen Verformungen weist das adaptiv ermittelte Netz Verfeinerungen über das gesamte Gebiet auf (Netz 1, Bild 5.14). Die verfeinerten Zonen liegen nicht mehr wie bei der Zylinderschale in der unmittelbaren Umgebung der konzentrierten Belastung. Lokale Verfeinerungen, wie bei Netz 3 und Netz 4 in Bild 5.14 dargestellt, treten erst bei größeren Verschiebungen auf. Der Verfeinerungsindikator wurde bei diesem Beispiel mit der "Superconver-



Länge	L	=	20.00
Radius	$r_{\max}$	=	15.00
Radius	$r_{\min}$	=	7.50
Dicke	t	=	0.04
Elastizitätsmodul	E	=	$6.825 \cdot 10^7$
Querdehnzahl	$\nu$	=	0.3

$$r(z) = \frac{r_{\min}}{b} \sqrt{b^2 + z^2}$$

Bild 5.13: Hyperboloidschale

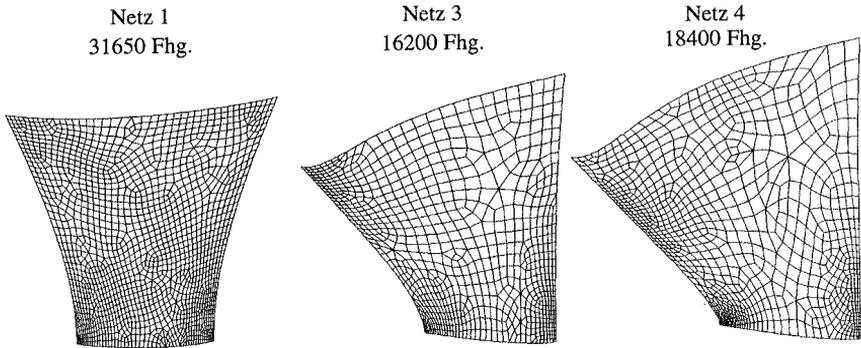


Bild 5.14: Adaptiv verfeinerte Netze mit steigender Belastung (Skalierungsfaktor 1:1)

gent Patch Recovery" Methode nach Zienkiewicz und Zhu ermittelt. Die Entwicklung des geschätzten relativen Fehlers ist in Bild 5.15 aufgetragen. Es zeigt sich, daß nach einem anfänglichen Abnehmen der relativen Fehler ab dem neunten Inkrement bzw. ab einer Auslenkung von 3.6 am Punkt P wieder ein Zunehmen der Fehler stattfindet. Um die numerische Effizienz des Algorithmus zu steigern, wurde bei diesem Beispiel auch ein unterer Grenzwert für die geschätzten relativen Fehler von 5.0% vorgegeben.

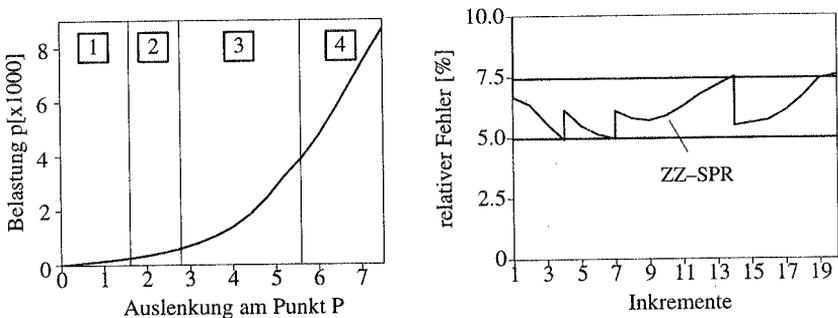


Bild 5.15: Adaptive geometrisch nichtlineare Berechnung

### 5.7.2 Stabilitätsuntersuchungen an Zylinderschalen

Numerische Beulanalysen von axial gedrückten Zylinderschalen sind aufgrund der starken Imperfektionsempfindlichkeit im allgemeinen sehr schwierig. Insbesondere bei groben unstrukturierten Netzen kann die numerische Berechnung auf falsche Beulformen führen. Bei Verfeinerung des Finite-Elemente-Netzes konvergieren die Beulformen und die Traglasten gegen die richtigen Formen und Werte. Die adaptive Berechnung von Verzweigungspunkten

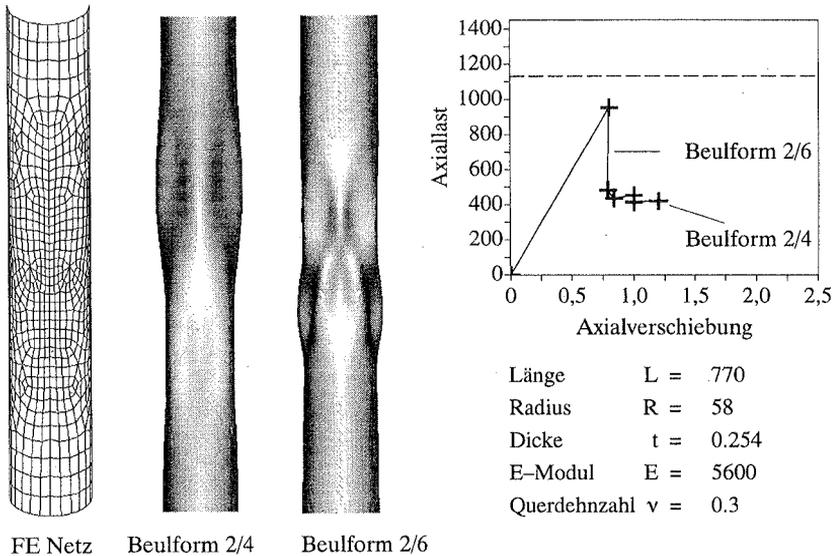


Bild 5.16: Zylinder unter Axiallast

wird für einen axial gedrückten Zylinder mit starren Endscheiben in Bild 5.16 gezeigt. Nur eine Hälfte des Zylinders wurde mit neunknotigen Schalelementen diskretisiert. Die adaptive Berechnung stützt sich auf einen Algorithmus zur direkten Ermittlung von kritischen Punkten. Der Verzweigungspunkt wird für ein anfänglich grobes Startnetz mit Pfadverfolgung und anschließend mit einem erweiterten Gleichungssystem direkt berechnet. Die Verfeinerungsindikatoren lassen sich, wie in Abschnitt 5.4.2 beschrieben, mit dem zugehörigen Verzweigungsmodus bestimmen. Falls mehrere Verzweigungspunkte dicht beieinander liegen, kann die Netzadaption bezüglich des kleinsten Eigenwertes unter Umständen zu falschen Ergebnissen führen. Deshalb wurden für den Zylinder die Verfeinerungsindikatoren bezüglich der zwei kleinsten Eigenwerte bestimmt. Als Verfeinerungsindikator für die Netzadaption dient der Maximalwert der Indikatoren aus den beiden Eigenmoden. Nach der Netzverfeinerung und Projektion der Zustandsvariablen wird der Verzweigungspunkt erneut bestimmt. Nach mehrmaliger Netzverfeinerung liefert das adaptive Vorgehen bei ca. 9150 Freiheitsgraden eine Traglast von 953. Die berechnete Traglast ist in guter Übereinstimmung mit der aus folgender Gleichung bestimmten analytischen Näherung von 1120.

$$\sigma_{ki} = 0.83 \frac{Et}{(3(1-\nu^2))^{0.5} R}$$

Die Spannung  $\sigma_{ki}$  ohne den Faktor 0.83 ist die ideale Beulspannung der klassischen Beultheorie. Der Faktor 0.83 berücksichtigt den Einfluß der Randbedingungen auf die Traglast [113]. Nach der Ermittlung des kritischen Punktes wird auf dem Sekundärpfad weitergerechnet. Auf-

Mylarzylinder		Astralonzylinder	
Dicke	$t = 0.254 \text{ mm}$	Dicke	$t = 1.000 \text{ mm}$
E-Modul	$E = 5600 \text{ N/mm}^2$	E-Modul	$E = 3700 \text{ N/mm}^2$
Querdehnzahl	$\nu = 0.3$	Querdehnzahl	$\nu = 0.3$
Länge/Radius	1, 2, 3, 4	Länge/Radius	6

Bild 5.17: Querkraftbeanspruchter Zylinder, Werkstoff- und Geometriedaten

grund des sehr komplexen Strukturverhaltens ist es jedoch nicht mehr möglich, einen bestimmten Gleichgewichtspfad weiterzuverfolgen.

Um das verwendete numerische Berechnungsmodell zu validieren und gleichzeitig die Effektivität der adaptiven Vorgehensweise zu untersuchen, wurde eine von Schröder [116] durchgeführte Versuchsreihe mit fünf querbelasteten Zylindern nachgerechnet [80]. Die Versuchszylinder aus Mylar- oder Astralonwerkstoffen sind auf der einen Seite eingespannt und auf der gegenüberliegenden Seite über eine Stahlmanschette gleichmäßig mit einer Querlast belastet (Bild 5.18).

Die Stahlmanschette wird bei der numerischen Berechnung durch Koppeln der Knotenverschiebungen in der Ebene simuliert. Infolge der Symmetrie der Belastung und Geometrie wird nur die Hälfte der Zylinder diskretisiert. Die numerischen Berechnungen wurden mit dem

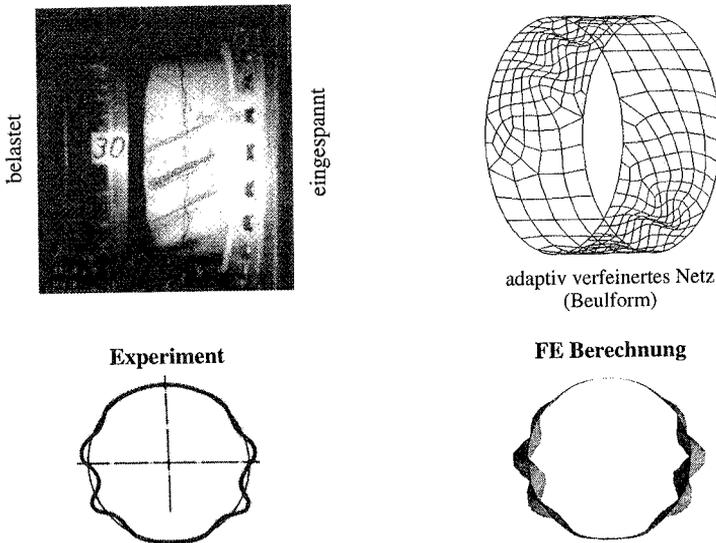


Bild 5.18: Eingespannter Mylarzylinder unter Querbeanspruchung ( $L/R=1$ )

in Abschnitt 5.6.2 beschriebenen und bereits auf axial belastete Zylinder angewendeten Algorithmus durchgeführt. Beispielsweise sind die experimentell und adaptiv ermittelten Beulfiguren für einen Zylinder mit  $L/R=1$  in Bild 5.18 dargestellt. Weiterhin ist in Bild 5.19 die Beulform für den Astralonzylinder mit  $L/R=6.0$  und das zugehörige adaptiv ermittelte Finite-Elemente-Netz abgebildet. Für alle Zylinder stellt das kritische Lastniveau einen Verzweigungspunkt dar. Die Konvergenz der adaptiv ermittelten Traglasten ist in den Diagrammen in Bild 5.20 dargestellt. Als Referenzwert zur Berechnung der relativen Fehler wurden jeweils die adaptiv berechneten Traglasten auf einem feineren Netz verwendet. In Bild 5.20 sind die Referenztraglasten  $\lambda^{c,h}$  und die experimentell ermittelten Werte  $\lambda^{ex}$  angegeben. Trotz einiger Abweichungen, insbesondere bei kürzeren Zylindern, stimmen die experimentell und numerisch ermittelten Traglasten gut überein. Im allgemeinen sind die Abweichungen auf Imperfektionen der Geometrie, des Werkstoffes und der Lastaufbringung zurückzuführen. Aus den Konvergenzdiagrammen ist ersichtlich, daß das adaptive Vorgehen, insbesondere bei langen Zylindern mit lokalen Beulen in der Nähe der Einspannung, zu deutlich besseren Ergebnissen führt.

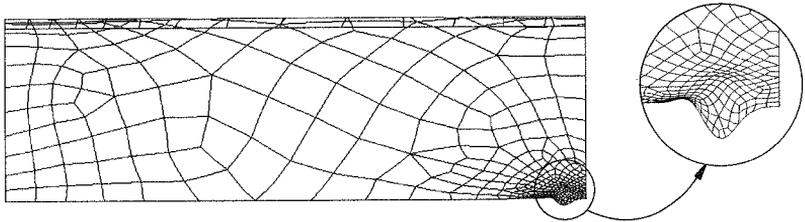
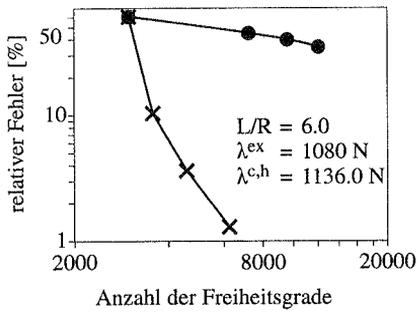
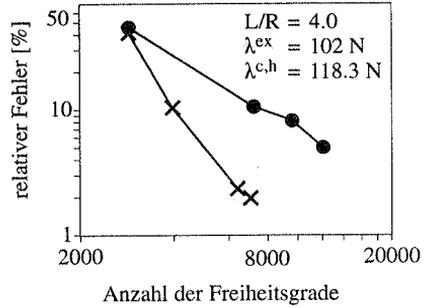
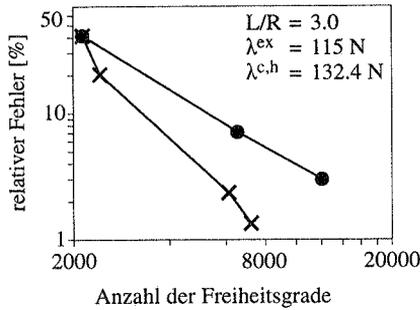
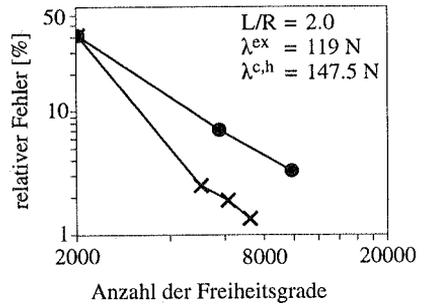
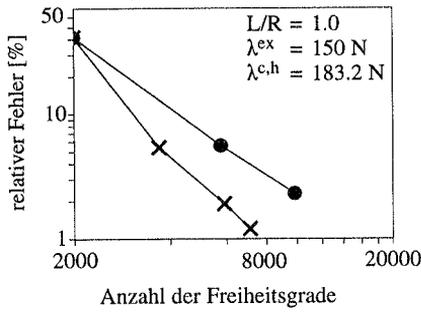


Bild 5.19: Beulform der eingespannten Astralonzylinder unter Querbeanspruchung ( $L/R=6$ )



- gleichmäßige Verfeinerung  
(mit unstrukturierten Netzen)
- x adaptive Verfeinerung
- $\lambda^{ex}$  Traglast Experiment
- $\lambda^{c,h}$  Traglast FE Berechnung

Bild 5.20: Konvergenz der relativen Fehler in Traglasten für die verschiedenen Zylinder

# 6 Adaptive Methoden für materiell nichtlineare Berechnungen

## 6.1 Einführung

Die in der bisherigen Arbeit getroffene Annahme einer linearen Abhängigkeit der Spannungen von den Verzerrungen ist für viele praxisrelevante Werkstoffe nicht zutreffend. Darüberhinaus sind für pfadabhängige elastoplastische Materialien die konstitutiven Gleichungen nur in inkrementeller Form gegeben. In diesem Kapitel werden die sich daraus ergebenden neuen Aspekte für die a-posteriori Fehlerabschätzung der Diskretisierungsfehler und für die Netzadaption diskutiert. Als konstitutive Modelle kommen die relativ einfache Hencky- und die Prandtl-Reuss Plastizität zur Anwendung. In der Ingenieurliteratur werden die beiden Modelle häufig als Deformations- und Fließtheorie bezeichnet. Die Deformationstheorie ist ein nichtlineares Werkstoffmodell mit gleichen Eigenschaften für Be- und Entlastung. Die a-posteriori Fehlerabschätzung und die anschließende Netzadaption gestalten sich damit entsprechend zu geometrisch nichtlinearen Problemen. Bei der Fließtheorie ist das Werkstoffverhalten lokal von der Belastungsgeschichte abhängig und folglich ist die Zuordnung von Spannungen zu Verzerrungen nicht eindeutig. Die inkrementell formulierte Fließtheorie lässt sich nach einer Diskretisierung der Zeitvariablen in die Deformationstheorie überführen. Die entwickelten Abschätzungen können damit im inkrementellen Sinne auf die Fließtheorie angewendet werden.

## 6.2 Lösungseigenschaften von elastoplastischen Problemen

Die grundsätzlichen Lösungseigenschaften von elastoplastischen Anfangs-Randwertproblemen können anhand der Deformationstheorie der Plastizität untersucht werden. Bereits sehr einfache Beispiele zeigen die starke Abhängigkeit der Lösung von dem Verfestigungsverhalten des Werkstoffes. Um die nachfolgende theoretische Herleitung zu motivieren, wird zunächst in Anlehnung an Duvaut und Lions [51] der in Bild 6.1 dargestellte Stab näher untersucht. Der beidseitig eingespannte Stab ist mit einer linear veränderlichen Streckenlast belastet. Mit der

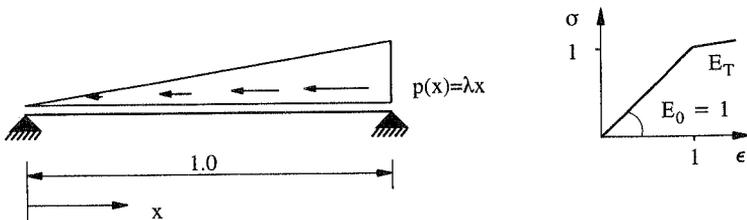


Bild 6.1: Eindimensionales Beispiel

Wahl des Tangentenmoduls  $E_T$  wird die Verfestigung vorgegeben. Bei einer Belastung von  $\lambda = 3.0$  tritt Fließen ein und die Lösung im plastischen Bereich ist sehr stark von der Steigung des Spannungsdehnungsdiagramms  $E_T$  abhängig. Die axialen Verschiebungen und die Spannungen des Stabes bei einem Lastniveau von  $\lambda = 4.0$  sind für  $E_T = 0$  und  $E_T = 0.001$  in Bild 6.2 dargestellt. Besonders interessant ist die Lösung für  $E_T = 0$  mit diskontinuierlichen Verschiebungen  $[u(1)]$  am rechten Auflager.

$$u = \lambda \frac{x^3}{6} - \frac{\lambda}{2} x + x \quad \text{und} \quad [u(1)] = -\frac{\lambda}{3} + 1 \quad \text{für} \quad \lambda \geq 3 \quad (6.1)$$

Der diskontinuierliche Verschiebungsverlauf kann bei einem Experiment in dieser extremen Form nicht beobachtet werden und ist damit eine Schwäche des Rechenmodells. Bereits bei einer sehr geringen Verfestigung verteilen sich die plastischen Verzerrungen in einem endlichen Bereich und die Verschiebungen sind kontinuierlich (Bild 6.2).

Dieses einfache eindimensionale Beispiel zeigt bereits, daß die Verschiebungen bei idealer Plastizität grundsätzlich Sprünge aufweisen können [129]. Diese Eigenschaft war bereits sehr früh bekannt und wurde in den zwanziger Jahren von Ingenieuren zur Entwicklung der klassischen Gleitlinientheorie verwendet. Aufgrund der diskontinuierlichen Funktionsverläufe ist die mathematische Untersuchung des idealplastischen Randwertproblems sehr schwierig und wurde erst relativ spät durchgeführt. Der erste mathematische Existenzbeweis für die Deformationstheorie geht auf eine Arbeit von Johnson im Jahre 1976 zurück [74]. In den nachfolgenden Arbeiten führten Matthies et al. [85] und Temam [129] den BD Raum ("space of bounded deformation") zur Untersuchung der diskontinuierlichen Lösung ein. Der BD Raum erlaubt im Gegensatz zum Sobolev Raum  $H^1$  diskontinuierliche Verschiebungen und ist für ideale oder entfestigende Plastizität besser geeignet [118]. In der Ingenieurliteratur wurde das Lösungsverhalten des elastoplastischen Randwertproblems bereits sehr früh u.a. von Hill diskutiert [64]. Während die mathematischen Arbeiten das globale Lösungsverhalten untersuchen, beschränken sich die Untersuchungen in der Ingenieurliteratur meist auf das lokale Verhalten. Dabei wird beispielsweise für das linearisierte dynamische Problem die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von kleinen Störungen untersucht [65]. In Abhängigkeit des Verfestigungsparameters treten reelle oder imaginäre Wellengeschwindigkeiten auf. Falls imaginäre Geschwindigkeiten

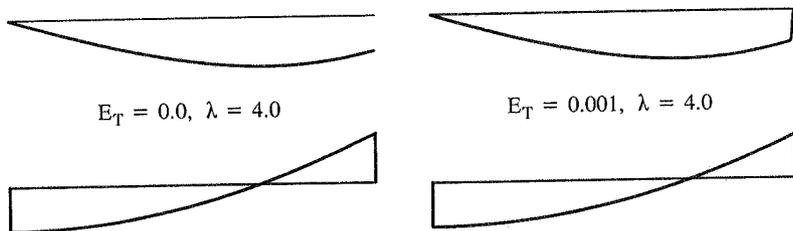


Bild 6.2: Verschiebungen (oben) und Spannungen (unten) in Abhängigkeit von  $E_T$

auftreten, so können sich kleine Störungen entlang den Charakteristiken ausbreiten [112]. Für das stationäre Problem folgt daraus der Verlust der Elliptizität. Bei nicht elliptischen stationären Problemen führen im Gleichgewicht befindliche Kräftegruppen zu Beanspruchungen in weit entfernten Tragwerksteilen und klingen sehr langsam bzw. überhaupt nicht ab.

Im weiteren wird für das Kontinuum der Einfluß des Verfestigungsparameters auf das elastoplastische inkrementelle Problem diskutiert. Die lokalen Eigenschaften des inkrementellen Problems lassen sich mit Hilfe des elastoplastischen Werkstoffensors untersuchen. Zuerst wird die Existenz einer Gleitkurve bzw. eines Scherbandes vorausgesetzt und anschließend werden die Eigenschaften des zugehörigen elastoplastischen Werkstoffensors untersucht. Entlang eines Scherbandes sind die Verschiebungen der beiden angrenzenden Gleitkörper unterschiedlich groß. An der Gleitkurve besitzen die inkrementellen Verschiebungen eine Diskontinuität  $[\dot{\mathbf{u}}]$ . Weiterhin ist die Tangentialkomponente der inkrementellen Verschiebungssprünge entlang der Gleitlinie konstant. Der Sprung im Verschiebungsgradienten muß damit folgendermaßen darstellbar sein (Maxwells Kompatibilitäts-Theorem):

$$\frac{\partial[\dot{\mathbf{u}}]}{\partial \mathbf{x}} = \xi \mathbf{n} \quad (6.2)$$

Dabei ist  $\mathbf{n}$  die Flächennormale auf die Gleitkurve und  $\xi$  ist ein freier Vektor. Aus der Gleichung (6.2) ergeben sich die Sprünge in den Verzerrungen.

$$[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}] = \frac{1}{2}([\nabla \dot{\mathbf{u}}] + [\nabla \dot{\mathbf{u}}]^T) = \frac{1}{2}(\xi \mathbf{n} + \mathbf{n} \xi) \quad (6.3)$$

Weiterhin sind die Normalspannungen infolge der statischen Gleichgewichtsbedingungen entlang der Gleitlinie kontinuierlich.

$$[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Nach Einsetzen der im Abschnitt 2.1.3.2 vorgestellten inkrementellen konstitutiven Gleichung (2.40)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

in Gleichung (6.4) und unter Berücksichtigung von Gleichung (6.3) folgt eine Bedingung für das Entstehen von Scherbändern.

$$\mathbf{Q}^c \xi = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}^c = [\mathbf{n} \mathbf{C}^{\text{ep}} \mathbf{n}] \quad (6.5)$$

In der Literatur wird  $\mathbf{Q}^c$  als der akustische Tensor bezeichnet. Die Singularität des akustischen Tensors kann mit einer Eigenwertanalyse oder einfacher mit der Determinante festgestellt werden.

$$\det \mathbf{Q}^c = 0 \quad (6.6)$$

Wird die Determinante für einige Richtungen Null bzw. Negativ, so ist das lokale Problem nicht mehr stark elliptisch. Die lokale Elliptizität der konstitutiven Gleichungen läßt sich für einige elastoplastische Materialgesetze auch direkt nachweisen. Zum Beispiel wurde eine ent-

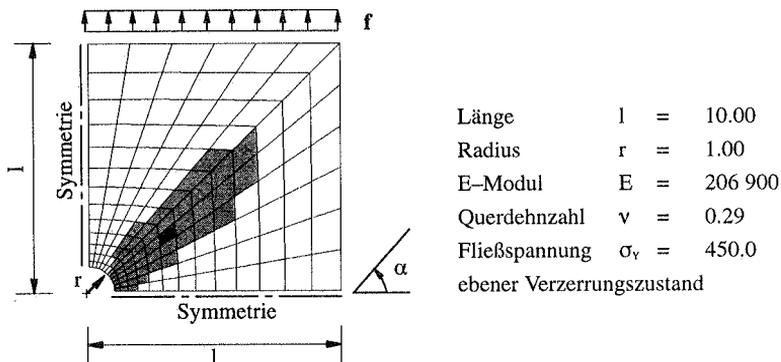


Bild 6.3 Scheibe mit Loch

sprechende Abschätzung von Korneev und Langer [78] für die Von-Mises Plastizität mit assoziierter Fließregel hergeleitet (siehe Anhang A.6).

Die Abhängigkeit der lokalen Werkstoffeigenschaften von den Verfestigungsparametern wurde für die in Bild 6.3 dargestellte Scheibe beispielsweise in dem dunkel schattierten Element untersucht. Das Tragwerk wurde mit  $f = 450$  belastet, so daß in den schattiert eingezeichneten Elementen plastische Verzerrungen auftreten. Für die verschiedenen elastoplastischen Tangenten sind die berechneten Determinanten des akustischen Tensors in Abhängigkeit des Richtungswinkels  $\alpha$  in Bild 6.4 aufgetragen. Vergleichend ist in Bild 6.4 weiterhin die Determinante auch für den elastischen Werkstofftensor dargestellt. Erwartungsgemäß ist das elastoplastische Material nicht mehr isotrop und besitzt insbesondere für kleine Verfestigungsparameter ein sehr stark anisotropes Tragverhalten. Weiterhin ergeben sich aus Bild 6.4 die möglichen Lokalisierungsrichtungen mit ca.  $45^\circ$  und  $135^\circ$ . Der lokale Verlust der Elliptizität führt, wie an diesem Beispiel deutlich wird, nicht immer zu einer lokalisierten Versagensform. Eine Gleitfläche stellt sich erst bei einem höheren Lastniveau ein, wenn ein ganzer Tragwerksbereich durch

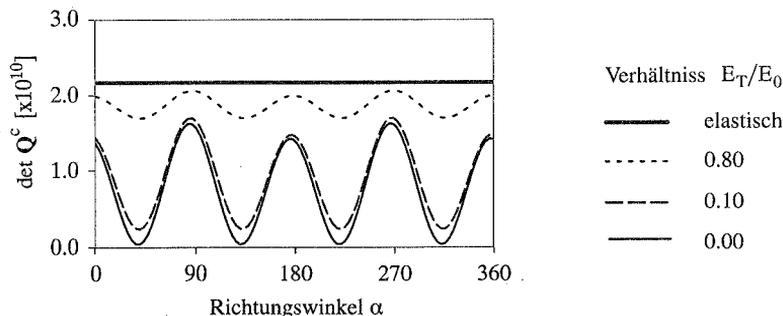
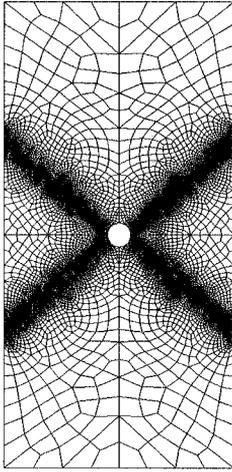
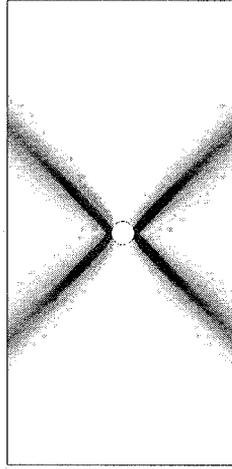


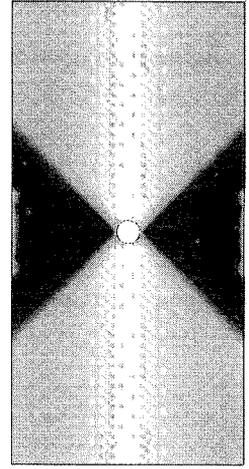
Bild 6.4 Einfluß der Verfestigung auf den akustischen Tensor



adaptiv verfeinertes Netz  
10500 Fhg.



plastische Vergleichsdehnungen



horizontal Verschiebungen

Bild 6.5 Scheibe mit Loch (ebener Verzerrungszustand, ideal plastisch)

eine Scherzone durchlaufen wird. Die plastischen Verzerrungen und die horizontalen Verschiebungen nach Erreichen der Traglast sind in Bild 6.5 für eine längere Scheibe aufgetragen. Der plastische Bereich lokalisiert sich in einem dünnen Streifen, der bei numerischen Berechnungen mit besonders kleinen Elementen zu diskretisieren ist. Ein möglicher diskontinuierlicher Verschiebungsverlauf kann jedoch mit den verwendeten kontinuierlichen Ansatzfunktionen nicht abgebildet werden.

### 6.3 Finite-Elemente-Approximation von elastoplastischen Problemen

Das Anfangsrandwertproblem der Fließtheorie wird sowohl räumlich als auch zeitlich diskretisiert. Ausgehend von der schwachen Form der statischen Gleichungen bzw. dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfolgt die räumliche Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode. Die räumliche Diskretisierung führt auf gewöhnliche Anfangswertprobleme für die einzelnen Integrationspunkte. Anschließend werden die resultierenden lokalen Anfangswertprobleme meist mit einem impliziten Eulerverfahren integriert. Innerhalb eines Zeitinkrements ergeben sich die Verschiebungen, die plastischen Verzerrungen und die internen Variablen aus einem nichtlinearen Gleichungssystem. Bei der numerisch wesentlich einfacheren Deformationstheorie ist keine zeitliche Diskretisierung erforderlich und die Gesamtverschiebungen lassen sich direkt aus einem einzigen nichtlinearen Gleichungssystem bestimmen.

### 6.3.1 Räumliche Diskretisierung mit der Finiten Elemente Methode

Die statische Gleichgewichtsbedingung für geometrisch lineare Probleme ist in schwacher Form entsprechend zur Gleichung (2.23) folgendermaßen gegeben:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \lambda \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (6.7)$$

Bei den betrachteten elastoplastischen Problemen sind die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  nichtlinear von den Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  abhängig. Die Beschränkung der Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  auf einen Finite-Elemente-Raum  $V^h$  führt auf die diskrete Finite-Elemente-Lösung.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx = \lambda \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}^h \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h \, do \right\} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (6.8)$$

Obwohl wie im Abschnitt 6.2 diskutiert bei Plastizität durchaus diskontinuierliche Verschiebungen auftreten können, besteht der Finite-Elemente-Raum  $V^h$  zur Vereinfachung aus  $C^0$  stetigen Ansatzfunktionen. Die Finite-Elemente-Approximation mit diskontinuierlichen Elementen wird in der Literatur u.a. von Stephan et al. [125] diskutiert.

Aus der Differenz der Gleichungen (6.8) und (6.7) ergibt sich die für Fehlerabschätzung sehr wichtige Galerkin Orthogonalitätseigenschaft.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx = 0 \quad (6.9)$$

Die Finite-Elemente-Lösung wird ausgehend von einem bekannten Zustand  $\bar{\mathbf{u}}^h$  und  $\bar{\lambda}$  aus einer Newton-Raphson Iteration bestimmt. Dazu ist die nichtlineare innere Arbeit in Gleichung (6.8) folgendermaßen zu linearisieren:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}^h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{u}}^h)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}^h) \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dots \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen kann erst nach einer Diskretisierung bezüglich der Zeit bestimmt werden.

### 6.3.2 Zeitliche Diskretisierung mit dem impliziten Eulerverfahren

Für die inkrementellen plastischen Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  und den Verfestigungsparameter  $\dot{\zeta}$  der Fließtheorie der Plastizität wurden in Abschnitt 2.1.3.2 bereits die folgenden Beziehungen vorgestellt.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \dot{\zeta} = \dot{\gamma} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} \quad (6.11)$$

F ist dabei die Fließbedingung. Der plastische Multiplikator  $\dot{\gamma}$  ist von den Verzerrungen  $\dot{\epsilon}$  abhängig und wird aus der Konsistenzbedingung

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \dot{\zeta} = 0 \quad (6.12)$$

hergeleitet [120],[148].

$$\dot{\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \\ \mathbf{H} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \sigma} \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

Dabei ist C der elastische Werkstofftensor und H ist der Verfestigungsmodul (siehe Gl. (2.45)). Ist der Zustand des materiellen Punktes zu einem Zeitpunkt  $t^n$  bekannt, so kann der Zustand zu einem Zeitpunkt  $t^n + \Delta t$  mit der impliziten Eulerverfahren aus den inkrementellen Gleichungen (6.11) und dem plastischen Multiplikator bestimmt werden.

$$\epsilon^{p,n+1} = \epsilon^{p,n} + \Delta\gamma(t^{n+1}) \frac{\partial F(t^{n+1})}{\partial \sigma} \quad \text{mit} \quad \Delta\gamma = \gamma(t^{n+1}) - \gamma(t^n) \quad (6.14)$$

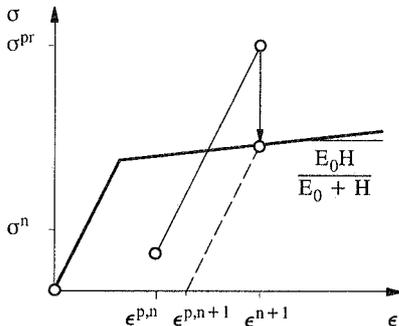
$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \Delta\gamma(t^{n+1}) \frac{\partial F(t^{n+1})}{\partial \zeta} \quad (6.15)$$

Das implizite Eulerverfahren ist ein unbedingt stabiles und von erster Ordnung genaues Integrationsverfahren für Anfangswertprobleme. Bei elastoplastischen Problemen wird die Integration mit Gleichungen (6.14) und (6.15) nur für Punkte auf der Fließfläche d.h. für plastische Punkte durchgeführt. Deshalb wird zunächst, ausgehend von den bekannten Spannungen  $\sigma^n$ , für die Verzerrungen  $\epsilon^{n+1}$  eine elastische Prädiktorspannung  $\sigma^{pr}$  bestimmt.

$$\sigma^{pr} = \mathbf{C} : (\epsilon^{n+1} - \epsilon^{p,n}) \quad (6.16)$$

Falls der betrachtete Punkt für die Prädiktorspannungen elastisch ist, so ist die Integration mit den Gleichungen (6.14) und (6.15) nicht erforderlich. Liegen die Spannungen im unzulässigen Bereich d.h.

$$F(\sigma^{pr}, \zeta^n) > 0$$



inkrementelles Werkstoffgesetz

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad \text{für} \quad \dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E_0 H}{E_0 + H} \dot{\epsilon} \quad \text{für} \quad \dot{\gamma} \neq 0$$

Bild 6.6: Projektion der Spannungen auf die Fließfläche (ein dimensionaler Fall)

so wird mit der folgenden Gleichung eine Korrektur berechnet.

$$\sigma^{n+1} = \sigma^{pr-\Delta\gamma(t^{n+1})C} : \frac{\partial F(t^{n+1})}{\partial \sigma} \quad (6.17)$$

Zur Bestimmung der sechs unbekanntenen Spannungskomponenten und des einen plastischen Multiplikators wird zu den sechs Gleichungen in Gl.(6.17) eine zusätzliche Bedingung hinzugenommen.

$$F(\sigma^{n+1}, \zeta^{n+1}) = 0 \quad (6.18)$$

Die Fließbedingung wird damit auch zum Zeitschritt  $t+1$  erfüllt. Aus den nun sieben nichtlinearen Gleichungen lassen sich die sieben Unbekannten ( $\sigma^{n+1}$  und  $\zeta^{n+1}$ ) bestimmen. Für den Spezialfall der von Mises Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung ergeben sich die plastischen Verzerrungen wesentlich einfacher aus einer geschlossenen Formel ("Radial Return") [120]. Da die weiteren Besonderheiten von Integrationsalgorithmen im Rahmen von adaptiven Methoden für die räumliche Diskretisierung nicht mehr relevant sind, wird die Diskussion an dieser Stelle abgebrochen.

Innerhalb eines Zeitschrittes  $\Delta t$  beschreiben die inkrementellen Gleichungen (6.14), (6.15) und (6.17) eine nicht pfadabhängige Beziehung. Das resultierende Werkstoffmodell innerhalb eines Zeitschrittes ist damit identisch mit der Deformationstheorie der Plastizität. Die Gleichungen für die Deformationstheorie folgen aus den vorgestellten Gleichungssätzen, falls für  $\epsilon^{p,n} = \mathbf{0}$  und  $\zeta^n = 0$  gewählt und anschließend die gesamte Belastung in einem Schritt aufgebracht wird.

## 6.4 A-Posteriori Fehlerschätzer für die Deformationstheorie

Ein Ansatz zur residualen a-posteriori Fehlerabschätzung für die Deformationstheorie wurde von Johnson und Hansbo erstmals 1991 vorgestellt [69]. Trotz der mathematischen Fundierung liefert die Methode für praktische Problemstellungen, wie im Abschnitt 6.4.2 noch gezeigt wird, sehr ungünstige Abschätzungen. Weiterhin wurden auf lokalen Neumann Problemen basierende Fehlerschätzer erst kürzlich von Gallimard, Ladevéze und Pelle [57] auf die Plastizität angewendet. Dieses Vorgehen, das auf der Lösung von Teilproblemen basiert, ist jedoch bei Plastizität nur bedingt anwendbar, da die lokalen Probleme zum Teil nicht elliptisch sind. Liegt zum Beispiel ein Element im plastischen Bereich, so ist die Lösung des lokalen Problems bei idealer Plastizität infolge des nicht positiv definiten elastoplastischen Werkstoffensors nicht eindeutig. Deshalb beschränken sich auch die von Schulz [115] und Repin et al. [109] vorgestellten mathematisch exakten Fehlerabschätzungen auf verfestigende Werkstoffe. Beide Autoren verwenden die Residuen des nichtlinearen Problems und die Lösung eines weiteren linearen Hilfsproblems zur Fehlerabschätzung. Weitere hauptsächlich als Verfeinerungsindikatoren für Lokalisierungsprobleme konzipierte, auf Glättungstechniken oder Interpolationsabschätzungen beruhende Methoden wurden unter anderem von Ortiz et al. [94], Peric et al. [95] und Zienkiewicz et al. [142] vorgestellt.

Das Randwertproblem zur Berechnung der Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit der Residuen bildet erneut den Ausgangspunkt zur Herleitung von a-posteriori Fehlerschätzern. Die elementweise Integration der Fehler in den Spannungen ergibt das folgende Randwertproblem.

$$\left( \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \right) = \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_K} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.19)$$

Der erste Term auf der rechten Gleichungsseite ist die äußere virtuelle Arbeit der Elementinnenresiduen auf einem Element  $\Omega_K$ .

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) + \mathbf{p} = \mathbf{R}_K \quad (6.20)$$

Die virtuelle Arbeit der Sprungterme über die Elementkanten  $\Gamma_K$  und die Neumann Ränder  $\Gamma_N$  wird mit dem zweiten Term dargestellt.

$$\frac{1}{2} \left( (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_{K^*} + (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n})|_K \right) = \mathbf{J}_K \text{ auf } \Gamma_K \not\subseteq \Gamma \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \mathbf{f} = \mathbf{J}_K \text{ auf } \Gamma_K \subseteq \Gamma_N \quad (6.22)$$

Da die exakte Lösung des Randwertproblems Gl. (6.19) zur Berechnung der Spannungsfehler nicht praktikabel ist, werden im nächsten Abschnitt geeignete Abschätzungen vorgestellt.

#### 6.4.1 A-Posteriori Fehlerabschätzung ohne Dualitätstechniken

Um die grundsätzlichen Schwierigkeiten bei der a-posteriori Fehlerabschätzung mit lokalen Teilproblemen aufzuzeigen, wird im nachfolgenden ein expliziter Fehlerschätzer hergeleitet. Wie bei geometrisch nichtlinearen Problemen diskutiert, werden zur Fehlerabschätzung nur linearisierte Gleichungen betrachtet. Dazu sind die nichtlinear von den Verzerrungen abhängigen Spannungen in Gleichung (6.19) in einer Taylorreihe zu entwickeln. Die Reihenentwicklung geht von der bekannten Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  aus.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)^2 + \dots \quad (6.23)$$

Es ist zu beachten, daß die Reihenentwicklung die Glattheit der Spannungsdehnungskurve voraussetzt. Bei den numerischen Berechnungen wird die Reihenentwicklung auch für die üblichen nicht glatten Beziehungen in der Plastizität angewendet. Die berechneten Verfeinerungsindikatoren und a-posteriori Fehlerabschätzungen sind jedoch trotz dieser Vereinfachung von hoher Qualität. Das Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung bei der Reihenentwicklung führt auf das linearisierte Randwertproblem zur Fehlerabschätzung.

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \right) = \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_K} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.24)$$

Dabei ist  $\tilde{\mathbf{w}}$  die exakte Lösung des linearisierten Problems. Die Differenz der Verschiebungen  $\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u}^h$  ist der Diskretisierungsfehler und wird im nachfolgenden mit  $\tilde{\mathbf{e}}$  bezeichnet. Die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen liefert den Werkstofftensor  $\mathbf{C}^n$ . In Abhängigkeit des Zustandes der betrachteten Punkte entspricht  $\mathbf{C}^n$  entweder dem elastischen oder dem konsistenten elastoplastischen konstitutiven Tensor.

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{u}^h)}{\partial \epsilon} = \mathbf{C}^n = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{für elastische Punkte} \\ \mathbf{C}^{\text{ep}}(\mathbf{u}^h) & \text{für plastische Punkte} \end{cases} \quad (6.25)$$

Der konsistente elastoplastische Tensor wird aus Gleichung (6.17) bestimmt.

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \left( \bar{\mathbf{C}} - \frac{\bar{\mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma} : \bar{\mathbf{C}}}{\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma}} \right) \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} + \Delta \gamma \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \sigma^2}$$

Ist die Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{u}^h$  bekannt, so ist auch der Materialtensor  $\mathbf{C}^n$  für alle Punkte des Tragwerks bekannt. Nach Einsetzen der Definition (6.25) in Gleichung (6.24) folgt das linearisierte Randwertproblem zur Fehlerabschätzung.

$$(\mathbf{C}^n : \epsilon(\tilde{\mathbf{e}}), \epsilon(\mathbf{v})) = \sum_{k=1}^{\text{NEL}} \left\{ (\mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_k} + (\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_k} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (6.26)$$

Bei der Umformung wurde auch die Definition  $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{u}^h$  benutzt. Die Herleitungen sind für einen eindimensionalen Stab in Bild 6.7 graphisch dargestellt. Der beidseitig eingespannte Stab mit linear veränderlichem Querschnitt und einer konstanten Linienlast wurde mit sechs linearen Finiten Elementen diskretisiert. Bei dem betrachteten Lastniveau sind jeweils das erste und letzte Element plastisch. Die Elementinnenresiduen und Sprungterme über die Kanten werden über die statischen Gleichgewichts- bzw. Kompatibilitätsbedingungen berechnet und sind in Bild 6.7 links dargestellt. Durch Einfrieren der mit Finiten Elementen berechneten elastischen und plastischen Bereiche wird das eindimensionale Randwertproblem linearisiert. Die Lösung des mit Residuen belasteten linearen Problems ist in Bild 6.7 rechts aufgetragen. Die linearisierte Lösung stellt in weiten Bereichen des Stabes eine gute Näherung für die

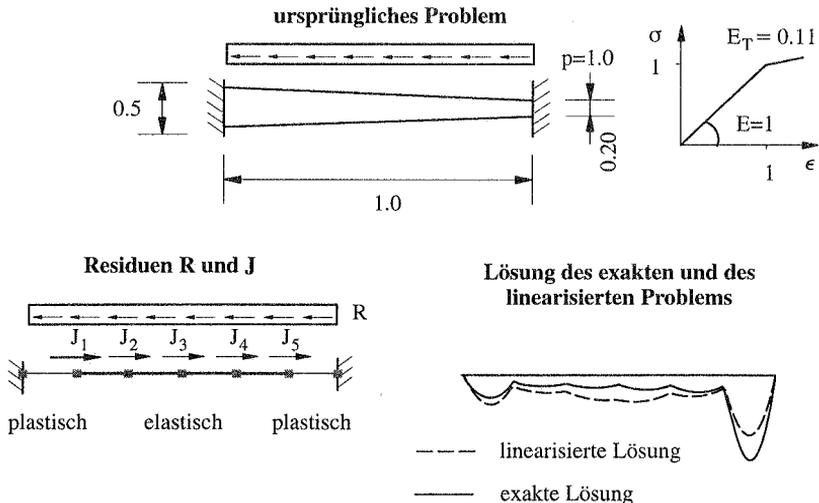


Bild 6.7: Berechnung der lokalen Fehler aus dem ursprünglichen und dem dualen Problem

exakten Fehler dar. Da die vernachlässigten Terme in der Reihenentwicklung (6.23) von höherer Ordnung sind, wird die Abweichung zwischen der exakten und der Finite-Elemente-Lösung bei Netzverfeinerung zunehmend kleiner. Für den eindimensionalen Stab wurde das mit Residuen belastete lineare Problem exakt gelöst. Bei der Fehlerabschätzung wird die Lösung des globalen Problems entsprechend zum linearen Problem aus der Lösung nicht gekoppelter Teilprobleme zusammengesetzt. Wie im weiteren noch deutlich wird, lassen sich nur die Fehler in den inneren Arbeiten

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) \quad (6.27)$$

ohne Dualitätstechniken aus dem lokalen Problem abschätzen. Ein entsprechender expliziter Fehlerschätzer kann, ausgehend von Gleichung (6.26), mit der klassischen Standardargumentation hergeleitet werden. Zunächst wird in die Gleichung (6.26) unter Ausnutzung der Galerkin-Orthogonalität die Interpolierende  $\mathbf{Ie}$  eingeführt

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) = \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ (\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K} \right\} \quad (6.28)$$

und anschließend die Cauchy-Schwarz Ungleichung angewendet.

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) \leq \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ C_1 h_K \| \mathbf{R} \|_{\Omega_K} \| \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K} \| \mathbf{J} \|_{\Gamma_K} \| \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Gamma_K} \right\} \quad (6.29)$$

Die Interpolationsfehler sind mit den bereits im Abschnitt 3.2.2.2 vorgestellten Energienormabschätzungen nach oben hin beschränkt.

$$\| \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Omega_K} \leq C_1 h_K \| \tilde{\mathbf{e}} \|_{e, \Omega_K} \quad \| \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Gamma_K} \leq C_2 \sqrt{h_K} \| \tilde{\mathbf{e}} \|_{e, \Omega_K}$$

Die Energienorm auf der rechten Gleichungsseite ist bezüglich des elastischen Werkstoffensors definiert.

$$\| \tilde{\mathbf{e}} \|_{\tilde{\mathbf{e}}}^2 = (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}))$$

Die innere Arbeit nach Gleichung (6.27) ist infolge der folgenden Elliptizitätsabschätzung mit der Energienorm nach oben hin beschränkt.

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) \geq (1 - \nu_0) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) = (1 - \nu_0) \| \tilde{\mathbf{e}} \|_{\tilde{\mathbf{e}}}^2 \quad (6.30)$$

Dabei ist  $\nu_0$  ein von der Verfestigung abhängiger Parameter. Für elastische Materialpunkte sind die beiden inneren Arbeitsausdrücke auf der linken und rechten Gleichungsseite gleich und  $\nu_0$  ist identisch eins. Von Koornev und Langer [78] wird für die von Mises Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung der folgende Wert für  $\nu_0$  angegeben (siehe auch Anhang A.6).

$$\nu_0 = \frac{3G}{3G + \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_0}}} \quad (6.31)$$

Dabei ist  $G$  der Schubmodul,  $E_0$  der Elastizitätsmodul im elastischen Bereich und  $E_T$  der elastoplastische Tangentenmodul. Die Interpolationsabschätzungen werden mit der Abschätzung (6.30) bei Elementen im plastischen Bereich z.B. für  $\| \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie} \|_{0, \Omega_K}$  folgendermaßen modifiziert.

$$\|\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{Ie}\|_{0, \Omega_K} \leq C_1 h_K \frac{\sqrt{(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}))_{\Omega_K}}}{\sqrt{1 - \nu_0}}$$

Für die Randterme gilt die entsprechende Modifikation mit  $\sqrt{h}$  anstatt  $h$  auf der rechten Gleichungsseite. Die modifizierten Interpolationsabschätzungen in die Gleichung (6.29) eingesetzt und anschließend durch die Fehler in den inneren Arbeiten dividiert ergeben einen expliziten a-posteriori Fehlerschätzer.

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{e}})) \leq \frac{1}{(1 - \nu_0)} \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ C_1 h_K \|\mathbf{R}\|_{\Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{\Gamma_K} \right\}^2 \quad (6.32)$$

Bei idealplastischen Werkstoffen mit  $\nu_0 = 1$  werden die Fehleranteile der plastischen Elemente unendlich groß. Diese Abschätzung ist zwar richtig, jedoch praktisch nicht verwertbar. Damit können die auf der Lösung von Teilproblemen beruhenden Fehlerschätzer auf ideale Plastizität nicht angewendet werden. In der Literatur wurde u.a. von Ortiz et al. [94] bereits auf diese Problematik hingewiesen. Darüberhinaus ist die Kopplung der Teilprobleme auch bei kleinen Verfestigungsparametern in der Regel nicht mehr vernachlässigbar. Werden jedoch trotzdem entkoppelte lokale Teilprobleme betrachtet, so ist die Qualität der Abschätzungen und der zugehörigen Verfeinerungsindikatoren meist nicht ausreichend.

#### 6.4.2 A-Posteriori Fehlerabschätzung nach Johnson und Hansbo

Im nachfolgenden wird der von Johnson und Hansbo [69] eingeführte Fehlerschätzer aufbauend auf der Vorgehensweise des letzten Abschnittes vorgestellt. Anschließend werden die Unzulänglichkeiten anhand eines eindimensionalen Beispiels aufgezeigt. Wie bei dem im letzten Abschnitt vorgestellten Fehlerschätzer geht die Herleitung vom Fehlerrandwertproblem Gl. (6.19) und den zugehörigen Galerkin-Gleichungen aus.

$$\left( \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e}) \right) = \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ (\mathbf{R}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K} + (\mathbf{J}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K} \right\} \quad (6.33)$$

Die rechte Seite wird nun je nach Zustand der Elemente (ob elastisch oder plastisch) mit der Hölderschen Ungleichung unterschiedlich in die einzelnen Anteile zerlegt, um die Fehler anschließend mit den Verzerrungen abschätzen zu können.

$$\begin{aligned} |(\mathbf{R}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K}| &\leq C_1 h_K \|\mathbf{R}\|_{0, \Omega_K} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{0, \Omega_K} && \text{elastische Elemente} \\ |(\mathbf{R}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Omega_K}| &\leq C_3 h_K \|\mathbf{R}\|_{\infty, \Omega_K} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{L^1, \Omega_K^p} && \text{plastische Elemente} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Für die Sprungterme gelten entsprechende Abschätzungen.

$$\begin{aligned} |(\mathbf{J}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K^e}| &\leq C_2 \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{0, \Gamma_K^e} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{0, \Omega_K^e} \\ |(\mathbf{J}, \mathbf{e} - \mathbf{Ie})_{\Gamma_K^p}| &\leq C_4 \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{\infty, \Gamma_K^p} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{L^1, \Omega_K^p} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Wie in Abschnitt 6.2 diskutiert, können bei idealer Plastizität diskontinuierliche Verschiebungen auftreten. Damit sind die Verzerrungen nur in einem distributionellen Sinn gegeben. Da

die Verzerrungen für plastische Elemente damit nicht mehr quadratintegrierbar sind bzw. nicht in dem Raum  $L_2$  liegen, wurden in den obigen Abschätzungen unterschiedliche Normen für die elastischen und plastischen Bereiche gewählt. Mit den Abschätzungen (6.34) und (6.35) ergibt sich aus der Gleichung (6.19) die folgende Abschätzung für die Fehler der inneren Arbeiten.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})) \leq & \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ C_1 h_K \|\mathbf{R}\|_{0, \Omega_K^e} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{0, \Omega_K^e} \right. \\ & + C_2 \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{0, \Gamma_K^e} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{0, \Omega_K^e} + C_3 h_K \|\mathbf{R}\|_{\infty, \Omega_K^e} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{L_1, \Omega_K^e} \\ & \left. + C_4 \sqrt{h_K} \|\mathbf{J}\|_{\infty, \Gamma_K^e} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{L_1, \Omega_K^e} \right\} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Im weiteren werden die Fehler im elastischen Bereich auf die gleiche Weise wie bei den linearen Problemen behandelt. Abschätzen der Fehler im plastischen Bereich mit der Dreiecksungleichung ergibt:

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})\|_{L_1} \leq \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{L_1} + \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h)\|_{L_1} \quad (6.37)$$

Einsetzen der Abschätzung für die Verzerrungen in die Gleichung (6.36) liefert nach einigen Umformungen den von Johnson et al. [68] angegebenen Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})) \leq & \sum_{K=1}^{\text{NEL}} \left\{ C_1^2 h_K^2 \|\mathbf{R}\|_{0, \Omega_K^e}^2 dx + C_2^2 h_K \|\mathbf{J}\|_{0, \Gamma_K^e}^2 \right. \\ & + S_c C_3 h_K \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h)\|_{L_1, \Omega_K^e} \|\mathbf{R}\|_{\infty, \Omega_K^e} \\ & \left. + S_c C_4 \sqrt{h_K} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h)\|_{L_1, \Omega_K^e} \|\mathbf{J}\|_{\infty, \Gamma_K^e} \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

mit der Stabilitätskonstante:

$$S_c = \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{L_1} + \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h)\|_{L_1}$$

Bei der numerischen Berechnung werden die exakten Verzerrungen zur Berechnung der Stabilitätskonstanten  $S_c$  durch die Finite-Elemente-Verzerrungen ersetzt. Die Fehlerabschätzung nach Gl.(6.38) zeigt eine um eine  $h$ -Potenz schlechtere Konvergenzrate für die Spannungen im plastischen Bereich. Einfache numerische Konvergenzstudien für den bereits im Bild 6.1 vorgestellten eindimensionalen Stab zeigen, daß im elastischen und plastischen Bereich die gleichen Konvergenzraten erreicht werden (Bild 6.8). Die Untersuchungen wurden bei einem Lastniveau von  $\lambda = 4.0$  und einem Tangentenmodul von  $E_T = 0.11$  durchgeführt. In Bild 6.9 (links) ist die Konvergenz der geschätzten  $L_2$ -Norm Spannungsfehler für den gesamten Stab und weiterhin für den elastischen und plastischen Teilbereich aufgetragen. Die erwartete lineare Konvergenzrate im elastischen Bereich wird von dem verwendeten Fehlerschätzer richtig wiedergegeben. Obwohl die gleiche Konvergenzrate auch für den plastischen Bereich gilt, liefert der Fehlerschätzer falsche Werte, so daß die Fehlerabschätzung insgesamt für dieses Beispiel zu pessimistisch ist. Genauere Untersuchungen zeigen, daß die falsche Konvergenzrate für die plastischen Bereiche auf die Abschätzung Gl.(6.37) für die Stabilitätskonstanten  $S_c$  zurück-

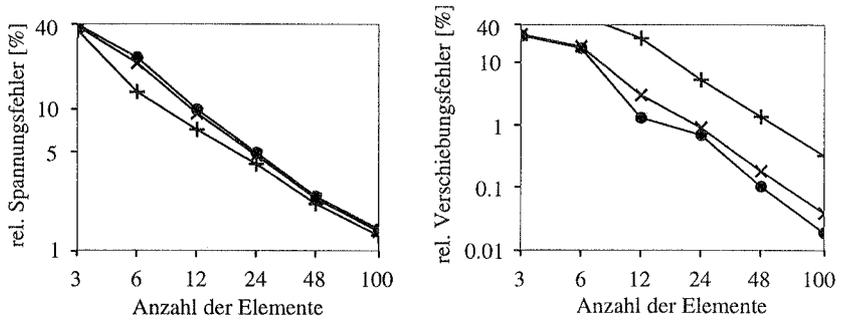


Bild 6.8: relativer Fehler in den Spannungen und Verschiebungen  
 x gesamter Bereich, + plastischer Bereich, • elastischer Bereich

zuführen ist. Anstelle der Abschätzung Gl.(6.37) kann die Stabilitätskonstante  $S_c$  nach Suttmeier [127] näherungsweise mit verbesserten Spannungen bestimmt werden.

$$\| \epsilon(\mathbf{e}) \|_{L_1} \leq \| \epsilon^*(\mathbf{u}^h) - \epsilon(\mathbf{u}^h) \|_{L_1} \quad (6.39)$$

Die geglätteten Verzerrungen  $\epsilon^*(\mathbf{u}^h)$  ergeben sich zum Beispiel durch Mittelwertbildung an den Knoten. Mit dem angenäherten Verzerrungsfehler folgt aus Gleichung (6.38) eine wesentlich bessere Abschätzung.

$$\begin{aligned} ((\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{u}^h), \epsilon(\mathbf{e})) \leq & \sum_{k=1}^{NEL} \left[ C_1^2 h_k^2 \| \mathbf{R} \|_{0, \Omega_k^e}^2 dx + C_2^2 h_k \| \mathbf{J} \|_{0, \Gamma_k^e}^2 \right. \\ & + C_3 h_k \| \epsilon(\mathbf{u}^h) - \epsilon^*(\mathbf{u}^h) \|_{L_1, \Omega_k^e} \| \mathbf{R} \|_{\infty, \Omega_k^e} \\ & \left. + C_4 \sqrt{h_k} \| \epsilon(\mathbf{u}^h) - \epsilon^*(\mathbf{u}^h) \|_{L_1, \Omega_k^e} \| \mathbf{J} \|_{\infty, \Gamma_k^e} \right] \quad (6.40) \end{aligned}$$

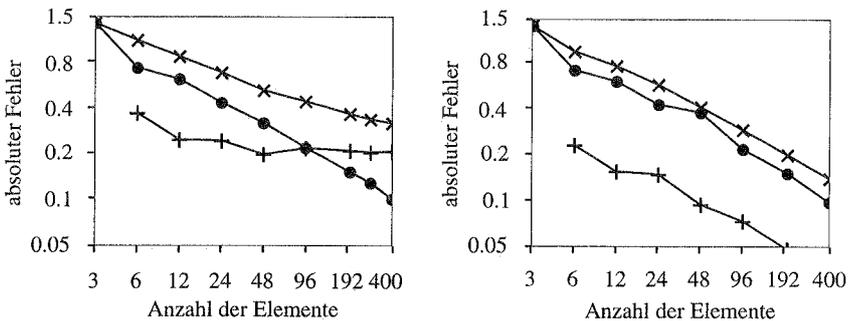


Bild 6.9 Geschätzter absoluter Fehler nach Gleichung (6.38) (rechts) und (6.40) (links)  
 x gesamter Bereich, + plastischer Bereich, • elastischer Bereich

Die Anwendung des Fehlerschätzers auf das eindimensionale Beispiel ergibt die richtige Konvergenzrate für die  $L_2$ -Norm der Spannungen im gesamten Gebiet (Bild 6.9). Aufgrund der verwendeten Näherungen ist der Fehlerschätzer jedoch nicht mathematisch abgesichert. Deshalb können die Fehler, wie von Wriggers et al. [139] vorgestellt, auch ausschließlich aus geglätteten Spannungen und Verzerrungen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e})) &\approx \left( \boldsymbol{\epsilon}^{p*} - \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \right) \\ &\quad + \left( \boldsymbol{\epsilon}^{e*} - \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h) \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Der erste plastische Anteil des Verfeinerungsindikators, der Fehler in der Dissipation, wurde bereits früher von Peric et al. [95] zur Netzverfeinerung bei Lokalisierungsproblemen angewendet.

### 6.4.3 A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Die starke Anisotropie und Inhomogenität des elastoplastischen Randwertproblems wurde bereits in Abschnitt 6.2 diskutiert. Wie aus der Strukturmechanik bekannt, können bei solchen Problemstellungen lokal im Gleichgewicht befindliche Residuen zu Spannungen über das gesamte Tragwerk führen. Damit sind die auf der Lösung von entkoppelten Teilproblemen beruhenden Fehlerschätzer sowohl bei idealer wie auch bei verfestigender Plastizität im allgemeinen unzureichend. Weiterhin sind die Spannungsverhältnisse im plastischen Bereich für die meisten ingenieurmäßigen Problemstellungen nicht interessant, so daß lokale Fehlerschätzer besonders bei der Elastoplastizität an Wichtigkeit gewinnen. Die im nachfolgenden in Anlehnung an Suttmeier [127] hergeleiteten lokalen a-posteriori Fehlerschätzer bzw. Verfeinerungsindikatoren beschränken sich wieder auf das linearisierte Problem. Zur Abschätzung der Fehler in den lokalen Verschiebungen in der Umgebung der Stelle  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  wird das folgende duale Problem betrachtet.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{G}}) \right) + \tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{G}})\mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D \end{aligned} \quad (6.42)$$

Dabei ist  $\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}})$  entsprechend dem Einflußflächenkonzept eine regularisierte Einzellast an der Stelle  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  (siehe Abschnitt 4.4). Die regularisierte Greensche Funktion  $\tilde{\mathbf{G}}$  ist die Lösung des aktuellen linearen Problems. Das globale Tragverhalten bzw. die Einflußfläche für die lokalen Verschiebungen wird hauptsächlich durch den ortsabhängigen Werkstofftensor  $\mathbf{C}^n$  berücksichtigt. Das ursprüngliche mit Residuen belastete Problem und das duale Problem (6.42) sind beide linear. Damit ist der Satz von Betti-Maxwell anwendbar.

$$\begin{aligned} (\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{e}}) &= \left( \bar{\mathbf{e}}, \operatorname{div} \left( \mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{G}}) \right) \right) = \left( \operatorname{div}(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{e}}), \tilde{\mathbf{G}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\text{NEL}} \left\{ (\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{G}})_{\Omega_k} + (\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{G}})_{\Gamma_k} \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

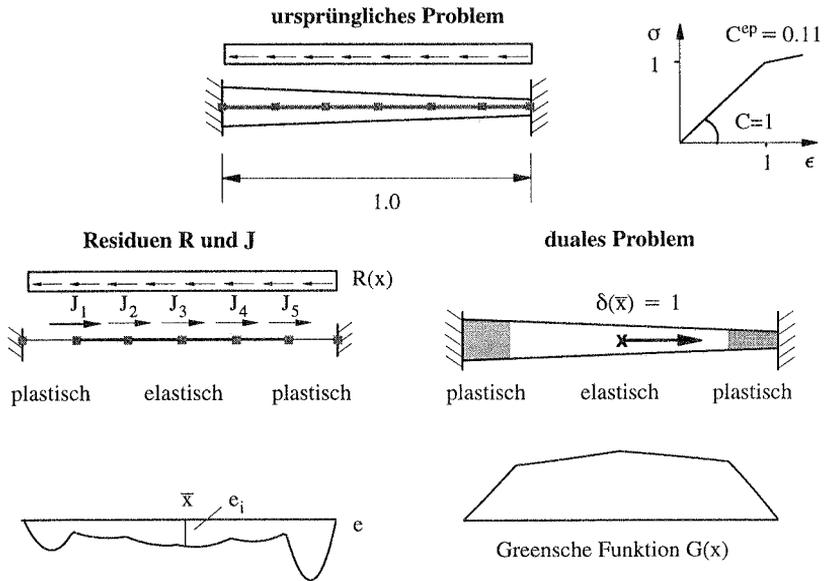


Bild 6.10: Berechnung der lokalen Fehler aus dem ursprünglichen und dualen Problem

Die Vorgehensweise für den eindimensionalen Stab mit veränderlicher Dicke ist in Bild 6.10 graphisch aufbereitet. Aus der Gleichung (6.43) läßt sich wie bereits für geometrisch lineare Probleme vorgestellt, ein expliziter Fehlerschätzer herleiten (siehe Gleichung (4.46)).

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \bar{\epsilon}) \approx \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ C_1 h_K^2 \| \mathbf{R} \|_{0, \Omega_K} |\tilde{\mathbf{G}}^h|_{2, \Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K^3} \| \mathbf{J} \|_{0, \Gamma_K} |\tilde{\mathbf{G}}^h|_{2, \Omega_K} \right\} \quad (6.44)$$

Die zweiten Ableitungen der Greenschen Funktion sind dabei mit den zweiten Ableitungen der Finite-Elemente-Lösung des dualen Problems zu approximieren. Aus der Gleichung (6.43) können auch glättungs-basierte Verfeinerungsindikatoren entwickelt werden, die wesentlich einfacher zu implementieren sind. Dazu wird die Finite-Elemente-Approximation der regularisierten Greenschen Funktion  $\tilde{\mathbf{G}}^h$  unter Ausnutzung der Galerkin Orthogonalität auf der rechten Seite von Gleichung (6.43) eingeführt.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \bar{\epsilon}) = \left( \text{div}(\mathbf{C}^n : \epsilon(\mathbf{w} - \mathbf{u}^h), \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^h) \right) = \left( \sigma(\mathbf{w}) - \sigma(\mathbf{u}^h), \epsilon(\tilde{\mathbf{G}}) - \epsilon(\tilde{\mathbf{G}}^h) \right) \quad (6.45)$$

Der Verfeinerungsindikator wird anschließend elementweise anstatt mit den exakten Spannungen und Verzerrungen mit den geglätteten Größen bestimmt.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{x}), \bar{\epsilon}) \approx \sum_{K=1}^{NEL} \left( \sigma * (\mathbf{u}^h) - \sigma(\mathbf{u}^h), \epsilon * (\tilde{\mathbf{G}}^h) - \epsilon(\tilde{\mathbf{G}}^h) \right)_{\Omega_K} \quad (6.46)$$

Die geglätteten Spannungen  $\sigma^*$  und Verzerrungen  $\epsilon^*$  ergeben sich aus den diskontinuierlichen Finite-Elemente-Größen durch Mittelwertbildung an den Knoten. Aufgrund der Galerkin Orthogonalität bzw. der lokalen Optimalitätseigenschaft der Finite-Elemente-Methode bezüglich der inneren Arbeiten sind die geglätteten Spannungen und Verzerrungen eine gute Näherung für die exakte Funktion. In Bild 6.11 ist die Anwendung des Fehlerschätzers nach Gleichung (6.46) auf eine Scheibe mit Loch dargestellt. Die Verzerrungsfehler des dualen Problems zeigen einen großen Einfluß der Übergangszone vom elastischen zum plastischen Bereich auf die lokalen Vertikalverschiebungen.

Zur Fehlerabschätzung für andere lokale sowie globale Größen ist lediglich die Belastung des dualen Problems entsprechend zu modifizieren. Die Belastung des dualen Problems wird dabei entsprechend zum linearen Problemen gewählt (siehe Abschnitt 4.2).

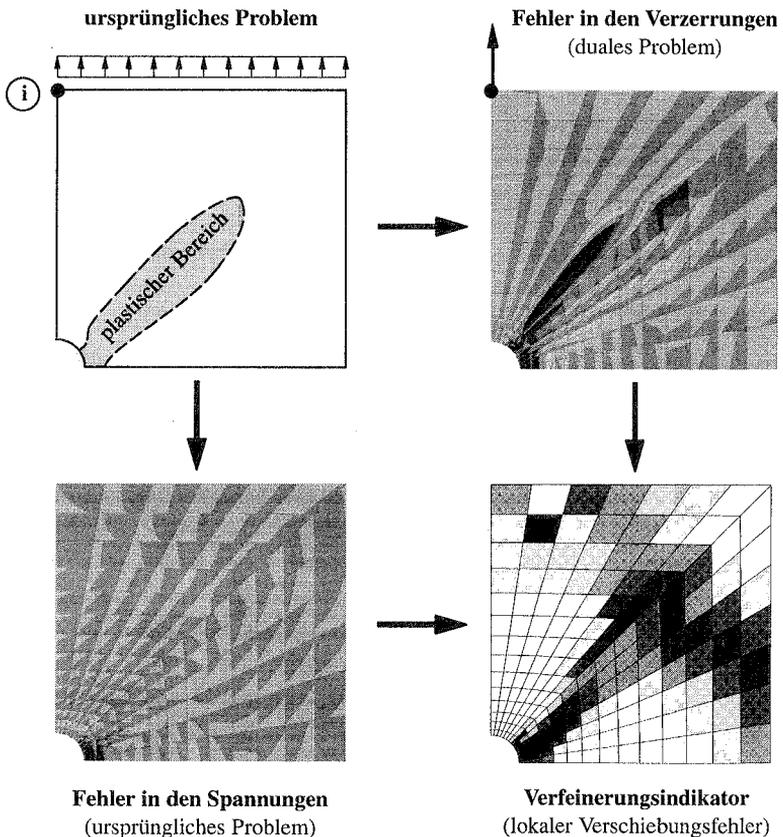


Bild 6.11: Bestimmung der lokalen Fehler für Längsverschiebung am Punkt  $i$  aus dem ursprünglichen und dualen Problem

## 6.5 A-Posteriori Fehlerabschätzung für die Fließtheorie

In Abschnitt 6.3 wurde gezeigt, daß die Fließtheorie der Plastizität nach der Diskretisierung der Zeitvariablen in jedem Inkrement auf eine Darstellung entsprechend der Deformationstheorie führt. Innerhalb eines Zeitschrittes können damit die Diskretisierungsfehler mit den für die Deformationstheorie vorgestellten globalen sowie lokalen Fehlerschätzern bestimmt werden. Die aufgrund kleiner Zeitschritte in der Regel kleinen Fehler infolge der Zeitdiskretisierung werden mit dieser Vorgehensweise allerdings nicht erfaßt. Die Abschätzung der gesamten Fehler für instationäre Probleme ist numerisch sehr aufwendig und wird im Rahmen der Elastoplastizität nicht weiter verfolgt. Das nichtlineare Randwertproblem der Fließtheorie in schwacher Form ist innerhalb eines Zeitschrittes  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$  folgendermaßen gegeben.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (6.47)$$

Die inkrementellen Größen berechnen sich dabei wie folgt:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$$

Die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}^n$ ,  $\mathbf{p}^n$  und  $\mathbf{f}^n$  sind als die Lösung des vorherigen Zeitschrittes gegeben. Aus der partiellen Integration der inkrementellen inneren Arbeit wird für die Fließtheorie ein von den Residuen abhängiges Randwertproblem für die Fehlerabschätzung hergeleitet.

$$(\boldsymbol{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\Delta \mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) = \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ (\Delta \mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_K} + (\Delta \mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_K} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (6.48)$$

Mit der bereits für die Deformationstheorie verwendeten Argumentation beschränken sich die weiteren Betrachtungen auf das linearisierte Problem.

$$(\mathbf{C}^n : \boldsymbol{\epsilon}(\Delta \tilde{\mathbf{e}}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) = \sum_{K=1}^{NEL} \left\{ (\Delta \mathbf{R}, \mathbf{v})_{\Omega_K} + (\Delta \mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Gamma_K} \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (6.49)$$

Die Gleichung (6.49) hat die gleiche Struktur wie die Ausgangsgleichung (6.26) zur Fehlerabschätzung bei der Deformationstheorie. Die bereits im Abschnitt 6.4 entwickelten Fehlerschätzer können folglich auch auf das inkrementelle Problem der Fließtheorie angewendet werden. Beispielsweise ist der lokale residuale Fehlerschätzer aus Gleichung (6.44) folgendermaßen zu bestimmen.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \Delta \tilde{\mathbf{e}}^n) \approx \sum_{K=1}^{NEL} \left[ C_1 h_K^2 \|\Delta \mathbf{R}\|_{0, \Omega_K} |\tilde{\mathbf{G}}^h|_{2, \Omega_K} + C_2 \sqrt{h_K^3} \|\Delta \mathbf{J}\|_{0, \Gamma_K} |\tilde{\mathbf{G}}^h|_{2, \Omega} \right] \quad (6.50)$$

Für die glättungsbasierte Methode gilt entsprechend:

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \Delta \tilde{\mathbf{e}}^n) \approx \sum_{K=1}^{NEL} (\Delta \boldsymbol{\sigma} * -\Delta \boldsymbol{\sigma}^h, \boldsymbol{\epsilon} * -\boldsymbol{\epsilon}^h)_{\Omega_K} \quad (6.51)$$

Der Gesamtfehler ergibt sich anschließend aus der Summe der inkrementellen Fehler.

$$(\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \Delta \tilde{\mathbf{e}}) = \sum_{n=1}^N (\tilde{\delta}_i(\bar{\mathbf{x}}), \Delta \tilde{\mathbf{e}}^n) \quad (6.52)$$

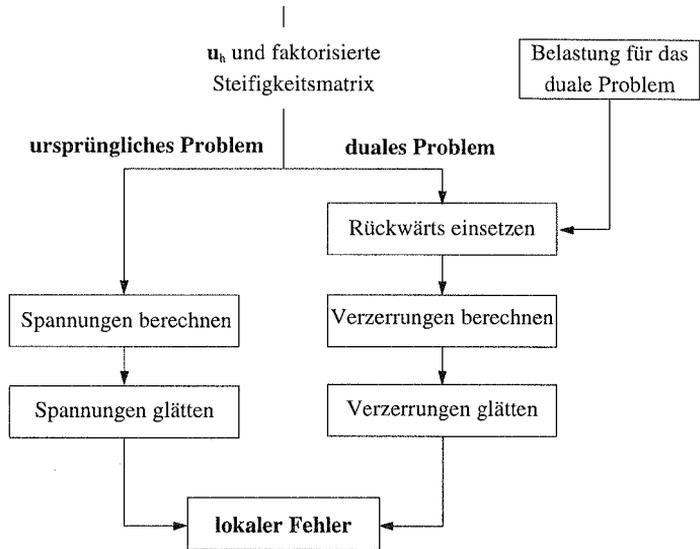


Bild 6.12: Berechnung der lokalen Fehler aus dem ursprünglichen und dualen Problem

Zur Auswertung der Verfeinerungsindikatoren (6.50) und (6.51) werden jeweils die Spannungsdifferenzen am Anfang und Ende eines Zeitschrittes zugrundegelegt. Das duale Problem ist von der inkrementellen Vorgehensweise unabhängig und die zweiten Ableitungen bzw. die Verzerrungen werden direkt aus der regularisierten Greenschen Funktion bestimmt.

## 6.6 Adaptive Netzverfeinerung bei Elastoplastizität

Die Fehler in nahezu beliebigen lokalen sowie integral definierten Variablen können bei Elastoplastizität näherungsweise mit den vorgestellten Methoden ermittelt werden (siehe auch Bild 6.12). Da die Fehlerabschätzung ausschließlich auf dem linearisierten Problem basiert, ist die Qualität der Abschätzungen für sehr grobe Diskretisierungen natürlich nicht optimal. Numerische Untersuchungen zeigen jedoch, daß die vorgestellten Methoden auch für sehr grobe Netze gute Verfeinerungsindikatoren liefern. Damit läßt sich der numerische Rechenaufwand auf jeden Fall für die meisten praktischen Problemstellungen deutlich vermindern. Das adaptive Vorgehen bei elastoplastischen Problemen ist im wesentlichen gleich wie bei geometrisch nichtlinearen Problemstellungen (siehe Abschnitt 5.6). Nach einer Neuvernetzung sind bei der pfadabhängigen Fließtheorie lediglich zusätzlich zu den Verschiebungen noch die plastischen Verzerrungen  $\epsilon^P$  und weitere interne Variable  $\zeta$  mit abzubilden. Im Gegensatz zum pfadunabhängigen, geometrisch nichtlinearen Problem können die Abbildungsfehler in  $\epsilon^P$  und  $\zeta$  nicht mehr nachträglich zum Beispiel mit einer Korrekturiteration eliminiert werden. Die Ak-

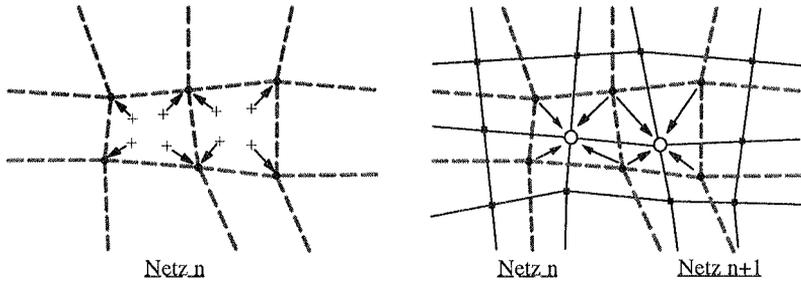


Bild 6.13: Extrapolation und anschließende Interpolation der plastischen Zustandsvariablen

kumulation der Abbildungsfehler kann durch die im nachfolgenden beschriebenen besonderen Transfermethoden vermindert werden.

Die plastischen Dehnungen und weitere interne Variable werden bei der Finite-Elemente-Berechnung nur an den Gausspunkten vorgehalten. Die plastischen Zustandsvariablen werden deshalb zuerst auf die Knotenpunkte des alten Netzes extrapoliert (Bild 6.13). Im Rahmen dieser Arbeit werden die Gausspunktwerte mit Hilfe der klassischen Extrapolationsmethoden für die Spannungen auf die Knotenwerte des Einheitslements abgebildet. Die diskontinuierlichen Knotenwerte werden anschließend mit einfacher Mittelwertbildung geglättet. Numerische Berechnungen zeigen, daß diese Glättung unbedingt erforderlich ist, um die numerischen Verschmutzungseffekte so klein wie möglich zu halten. Die Knotenwerte können auch, wie von Hochard et al. [67] vorgestellt, mit einer  $L_2$ -Projektion der Gausspunktwerte durch die Finite-Elemente-Ansatzfunktionen  $N_K$  bestimmt werden.

$$\int_{\tau} N_K(\epsilon^* - \epsilon^p) dx = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon^* = \sum_{K=1}^{IEL} N_K \epsilon_K^p \quad (6.53)$$

Das Gebiet  $\tau$  beschreibt entweder eine Teilmenge oder das gesamte Gebiet  $\Omega$  selbst. Die Lösung von Gleichung (6.53) führt auf große Gleichungssysteme, die numerisch aufwendig zu lösen sind. Deshalb wurde dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt. Nachdem die Zustandsvariablen an den Knoten des alten Netzes vorliegen, werden sie auf die gleiche Weise wie die Verschiebungsvariablen auf die Knoten des neuen Netzes abgebildet. Anschließend werden die Gausspunktwerte auf dem neuen Netz mit den Ansatzfunktionen aus den Knotenwerten bestimmt. Der gesamte Transfervorgang für die plastischen Verzerrungen und internen Variablen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden.

- Extrapolation der internen plastischen Verzerrungen und internen Variablen von den Gausspunkten auf die Knotenpunkte des alten Finite-Elemente-Netzes
- Glätten der diskontinuierlichen Verzerrungen und internen Variablen
- Abbilden der Knotenwerte vom alten auf das neue Netz

- Interpolation der Knotenwerte auf die neuen Gausspunkte

Nach dem Transfer der Zustandsvariablen wird für das neue Netz mit einer Korrekturiteration ein Gleichgewichtspunkt ermittelt. Damit ist für das neue Netz die Kinematik und die Fließbedingung exakt und das Gleichgewicht im schwachen Sinne erfüllt. An dem neuen Gleichgewichtspunkt werden die Fehler nochmals abgeschätzt, bleiben die geschätzten Fehler unterhalb der zulässigen Toleranzen, wird die Pfadverfolgung fortgesetzt. Falls die Fehler zu groß sind, wird das Netz mit den berechneten Indikatoren verfeinert. Um die Abbildungsfehler klein zu halten, sollten die Geschichtsvariablen jedoch nicht von dem vorherigen Netz abgebildet werden (siehe Bild 6.14).

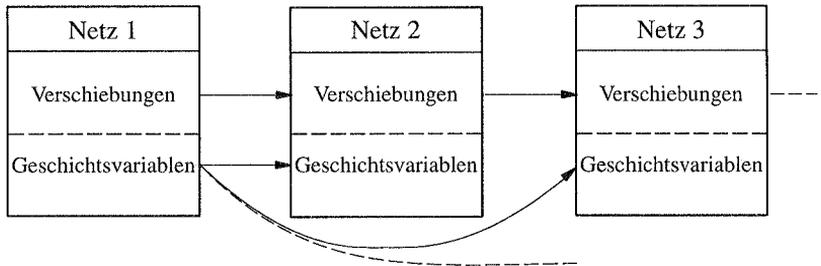


Bild 6.14: Abbilden der Verschiebungen und Geschichtsvariablen

**Bemerkung:**

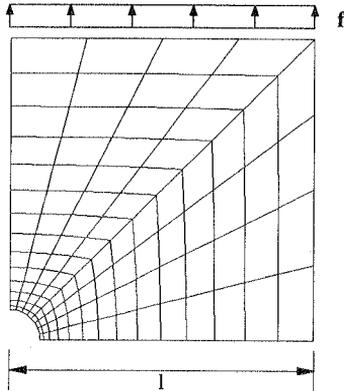
- Es ist zu beachten, daß sich die Abbildungsfehler nicht mit den bekannten Fehlerschätzern bestimmen lassen. Deshalb ist eine mathematisch exakte Fehlerabschätzung für praktische Berechnungen mit verschiedenen Netzen bei pfadabhängigen Problemen nicht möglich.

## 6.7 Beispiele

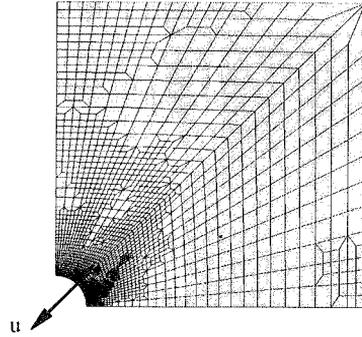
In diesem Abschnitt werden die beschriebenen Verfeinerungsindikatoren und die darauf aufbauende adaptive Methode exemplarisch an zwei ausgewählten Beispielen untersucht. Obwohl die theoretische Herleitung der Verfeinerungsindikatoren für beliebige Fließfunktionen gilt, beschränken sich die hier untersuchten Beispiele auf die klassische  $J_2$ -Plastizität. Die Verschiebungen werden als klein angenommen, so daß eine geometrisch lineare Theorie zur Anwendung kommt.

### 6.7.1 Beispiel für die Deformationstheorie

Mit der beschriebenen, auf Dualitätstechniken basierenden Vorgehensweise können die Fehler der verschiedenen lokalen und im integralen Sinne definierten Variablen abgeschätzt werden. Die einzige Voraussetzung ist, daß das grobe Startnetz näherungsweise die Größe des plasti-

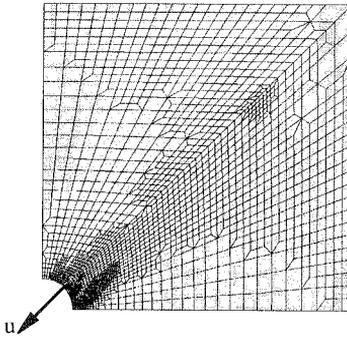


Länge  $l = 10.00$   
 E-Modul  $E = 206900$   
 Querdehnzahl  $\nu = 0.29$   
 Verfestigung  $H = 0.0$   
 Fließgrenze  $\sigma_y = 450.0$   
 ebener Verzerrungszustand



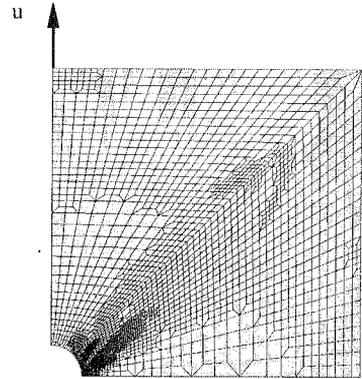
**f = 375**

NDOF	u	$\eta$	$\eta^{ex}$
360	$4.21 \cdot 10^{-3}$	3.50	5.70
1222	$4.41 \cdot 10^{-3}$	0.60	0.90
2426	$4.43 \cdot 10^{-3}$	0.33	0.45
7995	$4.45 \cdot 10^{-3}$	0.1	



**f = 450**

NDOF	u	$\eta$	$\eta^{ex}$
360	$7.90 \cdot 10^{-3}$	9.19	15.8
1333	$8.88 \cdot 10^{-3}$	3.31	3.04
2397	$8.99 \cdot 10^{-3}$	2.05	1.80
8918	$9.15 \cdot 10^{-3}$		



**f = 450**

NDOF	u	$\eta$	$\eta^{ex}$
360	$2.37 \cdot 10^{-2}$	2.62	4.20
744	$2.42 \cdot 10^{-2}$	1.72	2.07
1224	$4.44 \cdot 10^{-2}$	1.08	0.82
2159	$2.46 \cdot 10^{-2}$	0.65	0.40
17038	$2.47 \cdot 10^{-2}$		

Bild 6.15: Fehlerkontrolle für eine Scheibe mit Loch (Deformationstheorie)

schen Bereichs wiedergeben kann. Das erste Beispiel ist eine Lochscheibe mit ebenem Verformungszustand und ideal plastischem Materialverhalten (Bild 6.15). Wegen der Symmetrie wurde nur ein Viertel des Tragwerks mit vier-knotigen Verschiebungselementen diskretisiert. Die Belastung von  $f=375$  und  $f=450$  wurde, um die Pfadunabhängigkeit mit den klassischen Algorithmen für die  $J_2$ -Plastizität zu simulieren, in einem Schritt aufgebracht. Der lokale Verschiebungsfehler wurde exemplarisch an einigen Finite-Elemente-Knoten kontrolliert. Als Belastung für das duale Problem wurden einzelne Knotenlasten an den jeweiligen Knoten aufgebracht. Die Referenzlösung auf einem sehr feinen Netz wird als die *quasi exakte* Lösung bezeichnet. Die glättungsbasierten Fehlerschätzer  $\eta$  zeigen verglichen mit dem *quasi exakten* Fehler  $\eta^{ex}$  eine erstaunlich gute Übereinstimmung. Die in Bild 6.15 dargestellten Netze weisen alle eine Verfeinerung in der Umgebung der kontrollierten Knoten, im plastischen Bereich und zum Teil in der Übergangszone auf.

### 6.7.2 Beispiel für die Fließtheorie

Das gleiche Beispiel wurde auch mit der Prandtl-Reuss Theorie berechnet. Die Fehler wurden in jedem Inkrement mit der auf Residuen basierenden Methode (siehe Gl. (6.50)) abgeschätzt. Um die maximalen Vertikalverschiebungen und die Horizontalspannungen am Punkt P (siehe Bild 6.16) zu bestimmen, werden zwei unabhängige Finite-Elemente-Berechnungen durchgeführt.

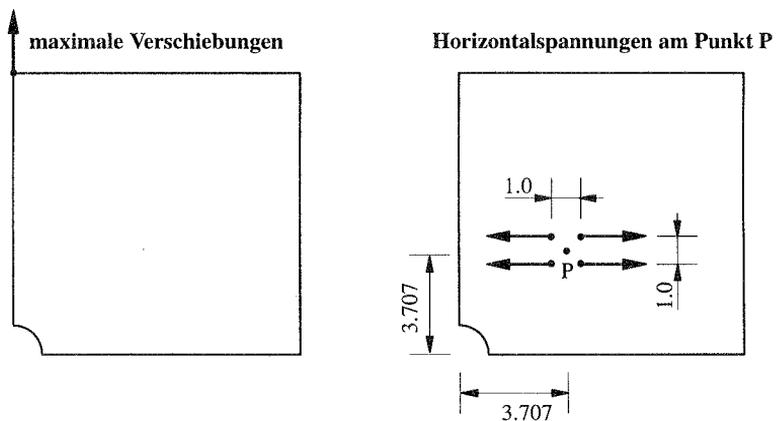
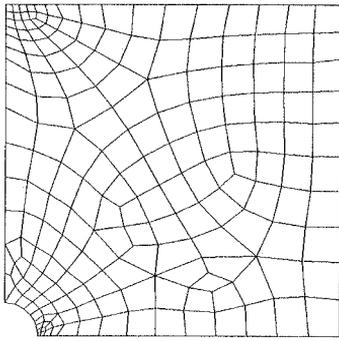
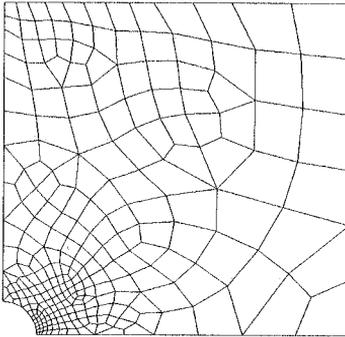


Bild 6.16 Scheibe mit Loch – Belastungen des dualen Problems

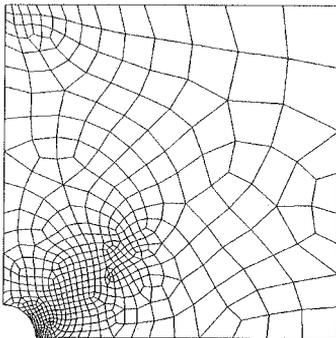
Für die Netzadaption bezüglich der Vertikalverschiebungen in der Mitte des Scheibenendes wird, wie in Bild 6.16 dargestellt, eine Einzellast als Belastung für das duale Problem gewählt. Die vorgeschriebene Fehlerschranke beträgt in jedem Inkrement 0.5%. Die Belastung wird in Form einer Verschiebungskontrolle in Inkrementen von 0.001 in der Mitte des Scheibenendes aufgebracht. In Bild 6.17 sind das Startnetz ( $\lambda=215,13$ ), einige weitere ausgewählte Zwischen-



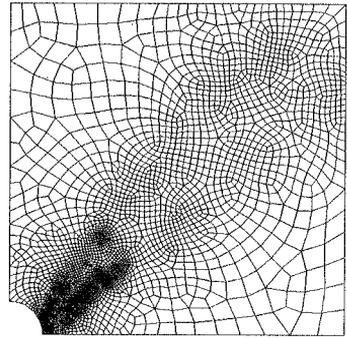
400 Fhg.



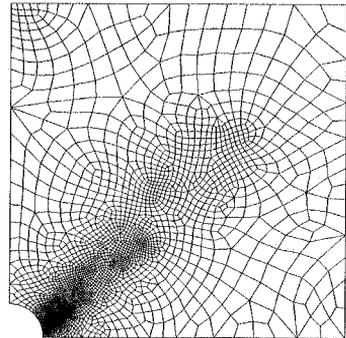
514 Fhg.



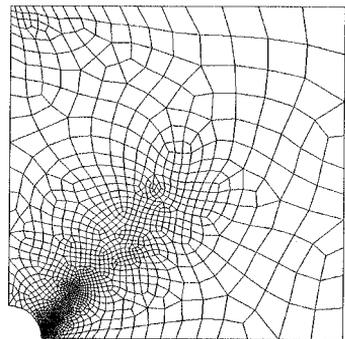
1074 Fhg.



7200 Fhg.



6188 Fhg.



3070 Fhg.

Bild 6.17: Adaptiv generierte Netze zu unterschiedlichen Lastniveaus – maximale Verschiebungen

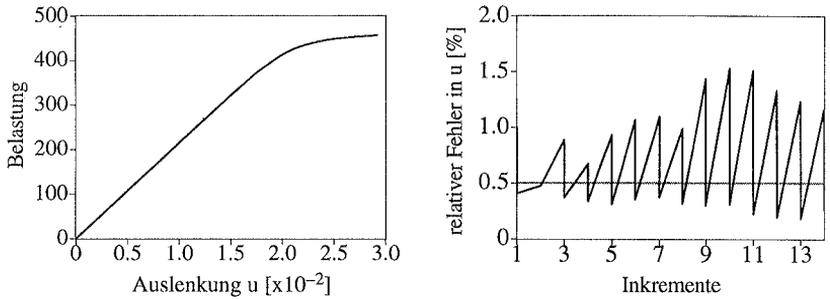
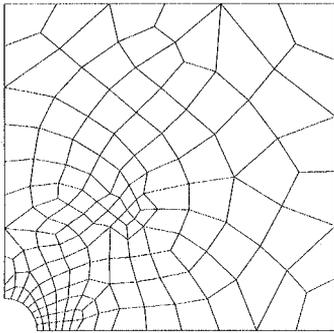


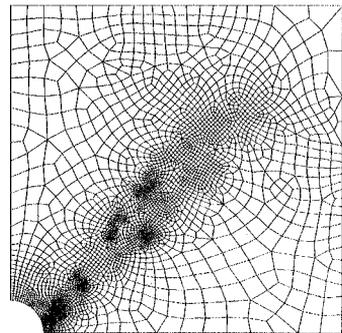
Bild 6.18: Lastverschiebungskurve und Entwicklung des geschätzten Fehlers in den Vertikalverschiebungen

netze und das Endnetz ( $\lambda=457,1$ ) zu sehen. Die Ausbreitung des plastischen Bereiches wird mit dem implementierten Algorithmus über mehrmalige Neuvernetzung sehr gut erfaßt. Erwartungsgemäß wird das Finite-Elemente-Netz hauptsächlich in der Umgebung der plastischen Bereiche verfeinert. Weiterhin ist in Bild 6.18 die Entwicklung des Fehlers in Abhängigkeit der Anzahl der Inkremente aufgetragen. Falls die relativen Fehler die Schranke von 0.5% überschreiten, wird die Diskretisierung, wie in Abschnitt 6.6 beschrieben, neu angepaßt.

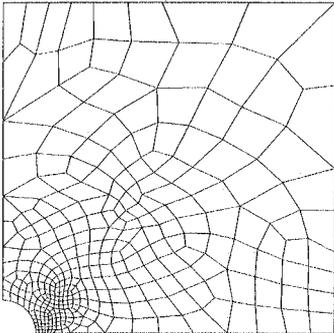
Wie bereits erwähnt, ist es grundsätzlich möglich das Finite-Elemente-Netz sowohl bezüglich der Vertikalverschiebungen, wie auch bezüglich der Spannungen am Punkt P zu verfeinern. Zu Testzwecken wird im folgenden ausschließlich die Horizontalspannung am Punkt P bezüglich der Netzadaption berücksichtigt. Als Belastung für das duale Problem werden vereinfachend unabhängig von der jeweiligen Diskretisierung die in Bild 6.16 dargestellten vier Einzellasten gewählt. Um tatsächlich eine Abschätzung für die lokale Spannung zu bestimmen, sollte die Belastung des dualen Problems während der adaptiven Berechnung an das aktuelle Finite-Elemente-Netz angepaßt werden. Wie die numerischen Berechnungen zeigen, ist die gewählte, von der Diskretisierung unabhängige Belastung ausreichend, um einen Verfeinerungsindikator für die betrachteten Spannungen zu bestimmen. Das Startnetz und einige weitere adaptiv verfeinerte Netze sind in Bild 6.19 dargestellt. Im wesentlichen wird wieder hauptsächlich in der Umgebung der plastischen Bereiche und zusätzlich in der Nähe des betrachteten Punktes P verfeinert. Die Entwicklung des Indikators in Abhängigkeit der Anzahl der Inkremente ist in Bild 6.20 aufgetragen. Anfangs wird in jedem Inkrement in der Mitte des Scheibenendes eine Verschiebung von 0.0015 vorgegeben. Ab dem sechsten Inkrement werden die vorgegebenen Verschiebungen auf 0.0005 gekürzt, um den in Bild 6.20 dargestellten Spannungsverlauf besser zu approximieren. Es ist bemerkenswert, daß die betrachteten Horizontalspannungen ab einem Lastniveau von ca. 430 bei Weiterbelastung kleiner werden. Die mögliche lokale Entlastung ist eine Eigenart der Fließtheorie und kann von der Deformationstheorie nicht abgebildet werden.



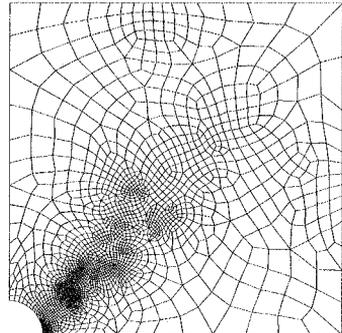
312 Fhg.



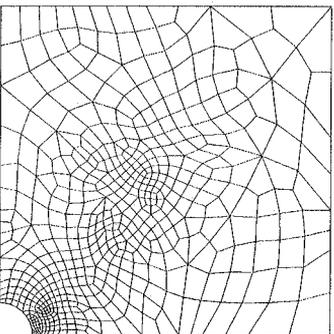
6896 Fhg.



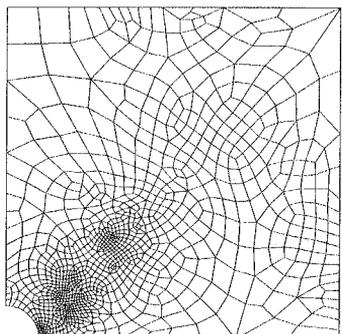
660 Fhg.



4262 Fhg.



1066 Fhg.



2208 Fhg.

Bild 6.19: Adaptiv generierte Netze zu unterschiedlichen Lastniveaus – Horizontalspannungen

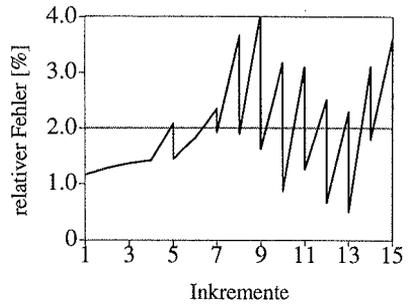
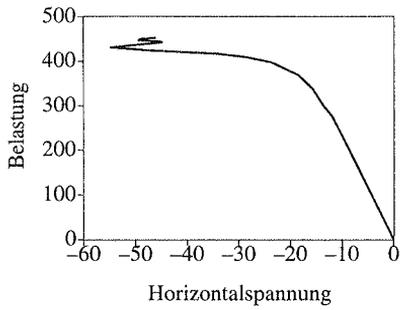


Bild 6.20: Lastverschiebungskurve und Entwicklung des geschätzten Fehlers in den Horizontalspannungen

## 7 Ausblick

### 7.1 Verallgemeinerung des vorgestellten Konzepts

Das vorgestellte, an die Arbeiten von Johnson [69], [70], Eriksson [53], [54], Becker [24] und Rannacher [105] angelehnte und im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelte Konzept zur a-posteriori Fehlerabschätzung kann mit kleinen Modifikationen auf andere Problemstellungen übertragen werden. Auf Dualitätstechniken basierende Fehlerschätzer wurden bereits von Johnson und Eriksson für die Konvektions–Diffusionsgleichungen, für die Dynamik und die Navier–Stokesgleichungen entwickelt. Die vorgestellten Abschätzungen beruhen alle auf einer globalen Stabilitätskonstanten und somit können die berechneten Verfeinerungsindikatoren den Einfluß der unterschiedlichen Elementfehler nicht wiedergeben. Erst mit der von Becker und Rannacher vorgestellten Wichtung der einzelnen Elementanteile mit dem dualen Problem wird die Qualität der Fehlerabschätzungen und Verfeinerungsindikatoren deutlich verbessert. Mit Hilfe des aus der Strukturmechanik bekannten und bereits sehr weit entwickelten Einflußflächenkonzeptes ist die Aufstellung von geeigneten dualen Problemen relativ einfach. In diesem Kapitel wird das vorgestellte Konzept exemplarisch auf die Anfangswertprobleme und die Konvektions–Diffusionsgleichung angewendet. Dabei werden die dem Satz von Betti–Maxwell entsprechenden Reziprozitätsbeziehungen vorgestellt. Fehlerschätzer für lokale und globale Größen werden anschließend mit einer Standardargumentation entwickelt. Aufbauend auf den residualen Fehlerschätzern werden weiterhin glättungsbasierte Verfeinerungsindikatoren vorgestellt. Die zukünftigen Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet werden mit einfachen numerischen Beispielen motiviert.

### 7.2 Adaptive Methoden für Anfangswertprobleme

Die Finite–Elemente–Methode ist auch für die Diskretisierung von Anfangswertproblemen geeignet. Wie im nachfolgenden gezeigt wird, stellt sie eine Verallgemeinerung des klassischen auf der Finite–Differenzen–Methoden basierenden Vorgehens dar (siehe u.a. Zienkiewicz und Taylor [145]). Aufgrund der größeren Verbreitung sind klassische Fehlerschätzer und adaptive Methoden für Anfangswertprobleme hauptsächlich an dem Finite–Differenzen–Konzept orientiert. Die gängigsten Methoden schätzen den Fehler durch Vergleich von Zeitintegrationsverfahren mit unterschiedlicher Genauigkeitsordnung ab. Damit kann die für Anfangswertprobleme typische Akkumulation der Diskretisierungsfehler nicht berücksichtigt werden. Der Diskretisierungsfehler zu einem Zeitpunkt  $t^n$  beeinflußt, wie auch die Belastung, die Lösung zu jedem späteren Zeitpunkt  $t > t^n$ . Das Abklingverhalten von Störungen hängt stark vom Dämpfungsverhalten des Problems bzw. des Tragwerks ab. Die Akkumulation der Diskretisierungsfehler kann mit den in Abschnitt 7.2.2 vorgestellten Dualitätstechniken berücksichtigt werden.

Zur Vereinfachung der Notation werden im nachfolgenden die diskontinuierliche Finite-Elemente-Diskretisierung, die Dualitätstechniken für Anfangswertprobleme und die a-posteriori Fehlerabschätzung anhand der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\ddot{u} + c_d\dot{u} + c_f u = p \quad \text{mit} \quad u(0) = u^0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(0) = \dot{u}^0 \quad (7.1)$$

für einen Einmassenschwinger vorgestellt. Die Herleitung orientiert sich im wesentlichen an Eriksson et.al. [52]. Zunächst wird das Anfangswertproblem zweiter Ordnung für die weiteren Betrachtungen in ein Gleichungssystem erster Ordnung umgewandelt

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & c_f \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} u_1 = \dot{u} \\ \dot{u}_2 - u_1 = 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} u_1(0) = \dot{u}^0 \\ u_2(0) = u^0 \end{matrix} \quad (7.2)$$

und symbolisch folgendermaßen bezeichnet.

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 \quad (7.3)$$

Die obige Gleichung wird durch eine Multiplikation mit einer Testfunktion  $\mathbf{v}$  und Integration über die Zeit  $t^e$  in die zugehörige schwache Form überführt.

$$\int_0^{t^e} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u})\mathbf{v} \, dt = \int_0^{t^e} \mathbf{p}\mathbf{v} \, dt \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (7.4)$$

Die zulässigen Funktionen  $\mathbf{v}$  aus dem Raum  $V$  erfüllen die wesentlichen Anfangsbedingungen mit  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{v} \in V(\Omega) := \{ \mathbf{v} \in H^1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D \}$$

## 7.2.1 Diskretisierung von Anfangswertproblemen

Entsprechend zu den Randwertproblemen wird die schwache Form (Gl.(7.4)) mit der Finite-Elemente-Methode diskretisiert.

$$\int_0^{t^e} (\dot{\mathbf{u}}^h + \mathbf{A}\mathbf{u}^h)\mathbf{v}^h \, dt + \alpha(\mathbf{u}^h(0) - \mathbf{u}^0)\mathbf{v}^h(0) = \int_0^{t^e} \mathbf{p}\mathbf{v}^h \, dt \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \subset V \quad (7.5)$$

Die Anfangsbedingungen werden hierbei auch nur im schwachen Sinne erfüllt, da die gewählten Testfunktionen nicht der Bedingung  $\mathbf{v}^h(0) = \mathbf{0}$  genügen. Obwohl der Parameter  $\alpha$  physikalisch motiviert ist (Lagrange Parameter) wird er im weiteren zu  $\alpha = 1$  gesetzt. Die Konsistenz der schwachen Form Gl.(7.5) mit der starken Form Gl.(7.3) wird davon nicht beeinflusst. Bei sehr großen  $t^e$  ergibt die Diskretisierung nach Gleichung (7.5) mit kontinuierlichen Ansatzfunktionen sehr große Gleichungssysteme, die numerisch aufwendig zu lösen sind. Werden diskontinuierliche Ansatzfunktionen gewählt, so beschränken sich die zu lösenden Gleichungen auf einen Zeitschritt und die Methode wird deutlich effizienter. Die diskretisierte schwache Form Gl.(7.5) wird dann in jedem Zeitschritt  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ , mit den Ergebnissen des letzten Schrittes als Anfangsbedingungen betrachtet (Bild 7.1).

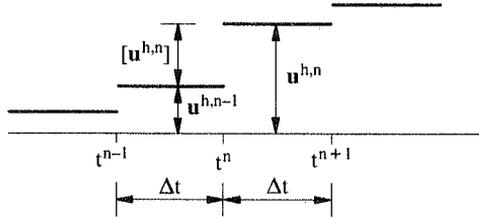


Bild 7.1: Finite-Elemente-Diskretisierung mit diskontinuierlichen, konstanten Ansätzen

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\dot{\mathbf{u}}^{h,n} + \mathbf{A}\mathbf{u}^{h,n}) \mathbf{v}^{h,n} dt + \mathbf{u}^{h,n}(t^n) \mathbf{v}^{h,n}(t^n) - \mathbf{u}^{h,n-1}(t^n) \mathbf{v}^{h,n}(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{p} \mathbf{v}^{h,n} dt \quad (7.6)$$

Die Ansatzfunktionen werden in jedem Schritt konstant und die Testfunktionen zu  $\mathbf{v}^{h,n} = 1$  gewählt.

$$\mathbf{u}^{h,n} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{A}\mathbf{u}^{h,n} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{p} dt + \mathbf{u}^{h,n-1} \quad (7.7)$$

Für allgemeine Problemstellungen sind die Integrale für jeden Zeitschritt von  $t^{n+1}$  bis  $t^n$  numerisch auszuwerten. Dazu wird zum Beispiel die folgende einfache Integrationsregel verwendet.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{A}(t) \mathbf{u}^{h,n} dt = \mathbf{A}(t^n) \mathbf{u}^{h,n} \Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta t = t^{n+1} - t^n \quad (7.8)$$

Die Integrationsregel in die Gleichung (7.7) eingesetzt, ergibt eine Gleichung zur Bestimmung der Verschiebungen  $\mathbf{u}^{h,n}$  im Zeitintervall  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ .

$$\mathbf{u}^{h,n} + \mathbf{A}(t^n) \mathbf{u}^{h,n} \Delta t = \mathbf{p}(t^n) \Delta t + \mathbf{u}^{h,n-1} \quad (7.9)$$

Es ist bemerkenswert, daß das implizite Eulerverfahren auch auf die gleiche Bestimmungsgleichung für  $\mathbf{u}^{h,n}$  führt. Durch Abändern der Integrationsregel in Gleichung (7.8) folgt aus der Finite-Elemente-Diskretisierung das explizite Euler Vorwärts- oder das Crank-Nicolson Verfahren. Die in dem nächsten Abschnitt vorgestellten a-posteriori Fehlerschätzer für die Finite-Elemente-Methode sind folglich auch auf die klassischen Integrationsalgorithmen anwendbar.

## 7.2.2 Dualitätstechniken für Anfangswertprobleme

Zur Abschätzung der Fehler ist zunächst das zum Satz von Betti Maxwell äquivalente Theorem für die Anfangswertprobleme herzuleiten. In Bild 7.2 ist der Zusammenhang zwischen der Belastung und der Lösung des ursprünglichen und des dualen Problems dargestellt. Im Gegensatz zu der Elastizitätstheorie sind das ursprüngliche und das duale Anfangswertproblem nicht mehr identisch und damit ist die zugrundeliegende Differentialgleichung nicht selbstadjungiert.

**ursprüngliches Problem**

Belastung  
 $\mathbf{p}(t), \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0$

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{p}$$

Lösung  
 $\mathbf{u}(t)$

$$\int_0^{t^e} \mathbf{p}(t)\mathbf{z}(t) dt + \mathbf{u}(0)\mathbf{z}(0) = \int_0^{t^e} \mathbf{u}(t)\mathbf{d}(t) dt + \mathbf{u}(t^e)\mathbf{z}(t^e)$$

**duales Problem**

Belastung  
 $\mathbf{d}(t), \mathbf{z}(t^e) = \mathbf{z}^{t^e}$

$$-\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{A}^T\mathbf{z} = \mathbf{d}$$

duale Lösung  
 $\mathbf{z}(t)$

Bild 7.2: Dualitätsargument für Anfangswertprobleme

Weiterhin werden bei dem dualen Problem die "Anfangsbedingungen" zum Zeitpunkt  $t^e$  vorgegeben. Gesucht ist die Lösung  $\mathbf{z}$  im Intervall  $0 \leq t \leq t^e$ .

$$-\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{A}^T\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}(t^e) = \mathbf{z}^{t^e} \quad (7.10)$$

Die Gleichheit der von dem ursprünglichen und dualen Problem (Gleichungen (7.3) und (7.10)) im Zeitraum 0 bis  $t^e$  geleisteten Arbeiten  $\mathbf{p}\mathbf{z}$  und  $\mathbf{u}\mathbf{d}$  wird mit Hilfe der partiellen Integration gezeigt.

$$\begin{aligned} \int_0^{t^e} \mathbf{p}(t)\mathbf{z}(t) dt + \mathbf{u}(0)\mathbf{z}(0) &= \int_0^{t^e} (\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t))\mathbf{z}(t) dt + \mathbf{u}(0)\mathbf{z}(0) \\ &= \int_0^{t^e} (-\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{z}(t))\mathbf{u}(t) dt + \mathbf{u}(t^e)\mathbf{z}(t^e) = \int_0^{t^e} \mathbf{u}(t)\mathbf{d}(t) dt + \mathbf{u}(t^e)\mathbf{z}(t^e) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Wird das duale Problem folgendermaßen gewählt,

$$-\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{A}^T\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad G_1(t^e) = 1 \quad \text{und} \quad G_2(t^e) = 0 \quad (7.12)$$

so ist die mechanische Interpretation der Gleichung (7.11) relativ einfach. Die Lösung wurde in Anlehnung an die Greensche Funktion bei Randwertproblemen mit  $\mathbf{G}$  bezeichnet. Das duale Problem (7.12) beschreibt die Einflußlinie für die Geschwindigkeit  $u_1$  zum Zeitpunkt  $t^e$ .

$$\int_0^{t^e} \mathbf{p}(t)\mathbf{G}(t) dt + \mathbf{u}(0)\mathbf{G}(0) = u_1(t^e) \quad (7.13)$$

Für beliebige Lasten  $\mathbf{p}(t)$  und Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}(0)$  liefert die Gleichung (7.13) die Geschwindigkeit  $u_1(t^e)$ .

### 7.2.3 A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Ausgehend von den Dualitätsbeziehungen nach Gleichung (7.11) werden a-posteriori Fehler-schätzer für die Diskretisierungsfehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  entwickelt. Beispielsweise ist zur Abschätzung der Geschwindigkeitsfehler  $e_1(t^e)$  das duale Problem Gl.(7.12) zu betrachten. Damit gilt zwischen den Fehlern  $e_1(t^e)$  und der Belastung bzw. der Anfangsbedingung des dualen Problems der folgende Zusammenhang.

$$e_1(t^e) = \int_0^{t^e} \mathbf{e}(-\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{A}^T \mathbf{G}) dt + \mathbf{e}(t^e) \mathbf{G}(t^e) \quad (7.14)$$

Aus der partiellen Integration der rechten Gleichungsseite folgt eine Bestimmungsgleichung für die Fehler in Abhängigkeit der Residuen.

$$e_1(t^e) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}(t^{n+1}) \mathbf{G}(t^n + 1) - \mathbf{e}(t^n) \mathbf{G}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A} \mathbf{e}) \mathbf{G} dt \right\} + \mathbf{e}(t^e) \mathbf{G}(t^e) \quad (7.15)$$

Für die diskontinuierliche Finite-Element-Diskretisierung mit konstanten Ansatzfunktionen entsprechend (7.7) läßt sich die Gleichung (7.15) wie folgt weiter umformen. Die ersten beiden Summanden stellen die Randterme dar, die nach Zusammenfassen der angrenzenden Elementanteile die Arbeiten infolge der Sprungresiduen ergeben.

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}(t^{n+1}) \mathbf{G}(t^n + 1) - \mathbf{e}(t^n) \mathbf{G}(t^n) \right\} = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ [\mathbf{u}^h] \mathbf{G} \right\}$$

Der letzte integrale Term in Gleichung (7.15) liefert unter Berücksichtigung des Anfangswertproblems (7.3) die Arbeiten infolge der Elementinnenresiduen.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A} \mathbf{e}) \mathbf{G} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\dot{\mathbf{u}} - \overset{=0}{\dot{\mathbf{u}}^h} + \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{u}^h) \mathbf{G} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{p} - \mathbf{A} \mathbf{u}^h) \mathbf{G} dt$$

Für die Gleichung (7.15) ergibt sich damit zusammenfassend die folgende Darstellung.

$$e_1(t^e) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ [\mathbf{u}^h] \mathbf{G} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{p} - \mathbf{A} \mathbf{u}^h) \mathbf{G} dt \right\} \quad (7.16)$$

Wird die Näherungslösung  $\mathbf{G}^h$  zum dualen Problem mit der gleichen oder einer größeren Diskretisierung als das ursprüngliche Problem berechnet, so läßt sich die Lösung  $\mathbf{G}^h$  infolge der Galerkin-Orthogonalität in die Gleichung (7.16) einführen.

$$e_1(t^e) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ [\mathbf{u}^h] (\mathbf{G} - \mathbf{G}^h) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{p} - \mathbf{A} \mathbf{u}^h) (\mathbf{G} - \mathbf{G}^h) dt \right\} \quad (7.17)$$

Bereits diese Gleichung liefert einen sehr einfachen glättungsbasierten Fehlerschätzer. Die exakte Lösung des dualen Problems  $\mathbf{G}$  wird dabei durch die geglätteten Größen  $\mathbf{G}^*$  ersetzt.

$$e_1(t^c) = \sum_{n=1}^N \left\{ [\mathbf{u}^h](\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^h) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{p} - \mathbf{A}\mathbf{u}^h)(\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^h) dt \right\} \quad (7.18)$$

Die geglätteten Größen  $\mathbf{G}^*$  werden aus der diskontinuierlichen Finite-Elemente-Lösung  $\mathbf{G}^h$  durch einfache Mittelwertbildung an den Knoten bestimmt. Aus Gleichung (7.18) kann wie bei dem Randwertproblem nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ein auf Interpolationsabschätzungen beruhender Fehlerschätzer entwickelt werden (siehe auch Abschnitt 4.5). Entsprechende auf globale Stabilitätsabschätzungen basierende residuale Fehlerschätzer wurden von Eriksson et al. [54] und Estep [55] vorgestellt.

Zur numerischen Verifikation der Herleitungen wird ein Einmassenschwinger mit den folgenden Daten

$$\begin{aligned} m &= 1.0 & c_d &= 0.25 & c_f &= 1.0 & p &= 0 \\ u(0) &= 1 & \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit dem impliziten Eulerverfahren berechnet. Der exakte Verschiebungs- und Geschwindigkeitsverlauf für  $0 \leq t \leq 30$  ist in Bild 7.3 aufgetragen. Weiterhin ist die Lösung des in der Zeit rückwärtsgerichteten dualen Problems mit den Anfangsdaten  $G_1(t^c) = 1$  und  $G_2(t^c) = 0$  zum Zeitpunkt  $t^c = 20$  dargestellt. Die duale Lösung eignet sich damit zur Abschätzung der Fehler in den Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t^c = 20$ . In dem vorliegenden Fall wird das duale Problem nur ein einziges Mal mit der gleichen Diskretisierung wie das ursprüngliche Problem bestimmt und die Ergebnisse werden für weitere Fehlerbetrachtungen vorgehalten. Anschließend wird zur Fehlerermittlung mit Gleichung (7.18) für beliebige Zeitpunkte lediglich die Zeitachse des dualen Problems verschoben. Die aus der Gleichung (7.18) ermittelten und die tatsächlichen Fehler sind in Bild 7.4 für zwei verschiedene Schrittweiten  $\Delta t = 0.3333$  und  $\Delta t = 0.1667$  aufgetragen. Es ist bemerkenswert, daß die maximalen Fehler (von ca. 30%) schon für die sehr grobe Diskretisierung mit  $\Delta t = 0.3333$  sehr gut abgeschätzt werden. Weiterhin gibt der Fehlerschätzer den zeitlichen Verlauf des Fehlers im gesamten Zeitintervall richtig wieder. Für die etwas feinere Diskretisierung mit  $\Delta t = 0.1667$  stimmen die geschätzten und

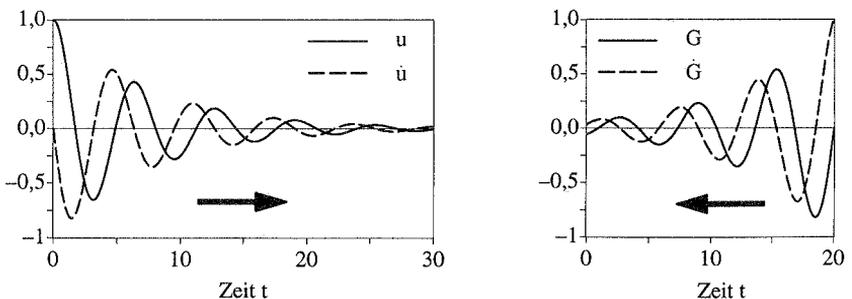


Bild 7.3: Lösung des ursprünglichen und dualen Anfangswertproblems

tatsächlichen Fehler wesentlich besser überein. Daraus kann man auf die asymptotische Exaktheit der Abschätzung nach Gleichung (7.18) schließen.

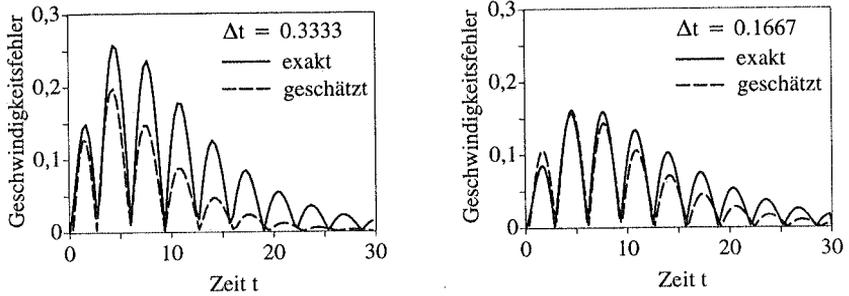


Bild 7.4: Evolution der exakten und geschätzten Geschwindigkeitsfehler

### 7.3 Adaptive Methoden für nicht-selbstadjungierte Randwertprobleme

In diesem Abschnitt wird die Erweiterung der vorgestellten Methoden auf Randwertprobleme mit nicht-selbstadjungierten Differentialoperatoren, wie zum Beispiel die Konvektions-Diffusionsgleichung, motiviert. Zur Darstellung der wesentlichen Aspekte beschränken sich die Herleitungen im nachfolgenden auf den eindimensionalen Fall. Die Konzentrationsverteilung  $u$  eines Stoffes in einem mit der Geschwindigkeit  $c_k$  fließenden Gewässer ist für den stationären Fall mit folgendem Randwertproblem gegeben.

$$E_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - c_k \frac{du}{dx} + p = 0 \quad \text{mit } u = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (7.19)$$

Der erste Term beschreibt mit dem Parameter  $E_0$  die Konzentrationsverteilung infolge Diffusion. Die schwache Form der Gleichung (7.19) wird nach der Multiplikation mit einer Testfunktion  $v$  aufgestellt und eine anschließende partielle Integration ergibt:

$$E_0 \left( \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) + c_k \left( \frac{du}{dx}, v \right) = (p, v) \quad \forall v \in V \quad (7.20)$$

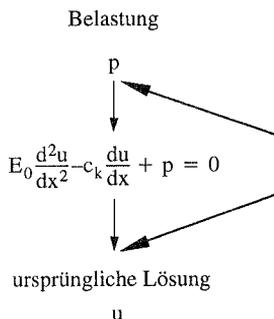
Die zulässigen Testfunktionen  $v$  aus dem Sobolev Raum  $H^1$  erfüllen die wesentlichen Randbedingungen mit  $v = 0$  auf  $\Gamma$ .

$$v \in V(\Omega) := \{v \in H^1 : v = 0 \text{ auf } \Gamma\}$$

Das Ersetzen der kontinuierlichen Funktionen  $u$  und  $v$  in Gleichung (7.20) durch diskrete Funktionen führt nicht immer zu einer stabilen Finite-Elemente-Approximation. Falls die, von der Elementgröße  $h$  abhängige, Netz-Pécletzahl

$$Pe = \frac{|c_k| h}{E_0}$$

**ursprüngliches Problem**



$$(p, z) = (u, d)$$

**duales Problem**

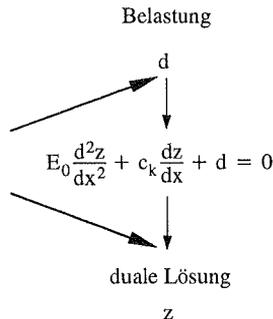


Bild 7.5: Dualitätsargument für die Konvektions–Diffusionsgleichung

zu hoch ist, besitzt die exakte Lösung bereichsweise sehr große Gradienten (Grenzschichten) und die diskrete Lösung zeigt physikalisch nicht motivierte Oszillationen. Deshalb wird im nachfolgenden für die Finite–Elemente–Diskretisierung mit linearen Ansatzfunktionen das folgende modifizierte (bzw. stabilisierte) Randwertproblem betrachtet [52].

$$E_0 \left( \frac{du^h}{dx}, \frac{dv^h}{dx} \right) + c_k \left( \frac{du^h}{dx}, v^h + \delta_{st} \frac{dv^h}{dx} \right) = (p, v^h) \quad \forall v^h \in V^h \subset V \quad (7.21)$$

Dabei ist  $\delta_{st}$  ein von der Elementgröße  $h$  abhängiger Parameter.

$$\delta_{st} = \frac{h}{2|c_k|} \min \left( \frac{|c_k| h}{E_0}, 1 \right) \quad (7.22)$$

Geht die Elementgröße  $h$  gegen Null, so ist die Gleichung (7.21) identisch mit dem kontinuierlichen Randwertproblem und die Methode ist konsistent. Der Einfluß von  $\delta_{st}$  auf die diskrete Lösung wird mit zunehmender Netzverfeinerung kleiner, so daß für a–posteriori Fehlerabschätzungen die nicht–modifizierte schwache Form betrachtet wird.

$$E_0 \left( \frac{du^h}{dx}, \frac{dv^h}{dx} \right) + c_k \left( \frac{du^h}{dx}, v^h \right) = (p, v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad (7.23)$$

Die für die Fehlerabschätzung fundamentale Galerkin Orthogonalität, ergibt sich damit aus der Differenz der Gleichungen (7.20) und (7.23).

$$E_0 \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx}, \frac{dv^h}{dx} \right) + c_k \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^h}{dx}, v^h \right) = (p, v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad (7.24)$$

**7.3.1 Dualitätstechniken für nicht–selbstadjungierte Randwertprobleme**

Das zum Satz von Betti–Maxwell äquivalente Dualitätsbeziehung für nicht–selbstadjungierte Randwertprobleme ist in Bild 7.5 dargestellt. Das für die nachfolgende a–posteriori Fehlerabschätzung sehr wichtige Resultat

$$(p, z) = (u, d) \quad (7.25)$$

läßt sich mittels partieller Integration zeigen.

$$\begin{aligned} (p, z) &= -\left(E_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - c_k \frac{du}{dx}, z\right) = \left(\frac{du}{dx}, E_0 \frac{dz}{dx}\right) - \left(u, c_k \frac{dz}{dx}\right) \\ &= \left(u, -E_0 \frac{d^2 z}{dx^2} - c_k \frac{dz}{dx}\right) = (u, d) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Die Gleichung (7.25) wird erfüllt, falls  $z$  aus dem folgenden Randwertproblem bestimmt wird.

$$E_0 \frac{d^2 z}{dx^2} + c_k \frac{dz}{dx} + d = 0 \quad \text{mit } z = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (7.27)$$

Die Strömungsrichtung  $c_k$  des dualen Problems ist damit entgegengesetzt zu der des ursprünglichen Problems (Gl. (7.19)). Interpretiert man das duale Problem im Sinne des Einflußflächenkonzepts, so ergeben sich daraus wichtige neue Aspekte für die a-posteriori Fehlerabschätzung, die im nachfolgenden Abschnitt diskutiert werden.

### 7.3.2 A-Posteriori Fehlerabschätzung mit Dualitätstechniken

Als erster Schritt ist ein Randwertproblem zur Berechnung der Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit der Residuen zu bestimmen. Das Randwertproblem ergibt sich entsprechend zu den selbstadjungierten Randwertproblemen durch elementweise partielles Integrieren des folgenden Terms

$$\begin{aligned} E_0 \left( \frac{de}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) + c_k \left( \frac{de}{dx}, v \right) &= \sum_{k=1}^{NEL} \left[ \int_{\Omega_k} \left( E_0 \frac{d^2 u^h}{dx^2} - c_k \frac{du^h}{dx} + p \right) v \, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_k \notin \Gamma} E_0 \frac{du^h}{dx} v \, do \right] \end{aligned} \quad (7.28)$$

Im weiteren werden die Elementinnenresiduen und die Sprungterme auf der rechten Gleichungsseite wie gewöhnlich mit  $R$  und  $J$  abgekürzt.

$$E_0 \left( \frac{de}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) + c_k \left( \frac{de}{dx}, v \right) = \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ (R, v)_{\Omega_k} + (J, v)_{\Gamma_k} \right\} \quad (7.29)$$

Zur Fehlerabschätzung bezüglich einer beliebigen lokalen oder im integralen Sinne definierten Variablen ist zunächst das zugehörige duale Problem aufzustellen. Beispielsweise wird zur Abschätzung der Fehler in den lokalen Verschiebungen  $u(\bar{x}) - u^h(\bar{x})$  das folgende duale Problem eingeführt.

$$E_0 \frac{d^2 G}{dx^2} + c_k \frac{dG}{dx} + \delta(\bar{x}) = 0 \quad \text{mit } G = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (7.30)$$

Die Belastung besteht entsprechend des Einflußlinienkonzepts aus einer Einzellast. Die lokalen Verschiebungsfehler lassen sich anschließend mit Hilfe des Reziprozitätstheorems (Gl.(7.25)) aus dem Randwertproblem (7.29) und dem dualen Problem (7.30) bestimmen.

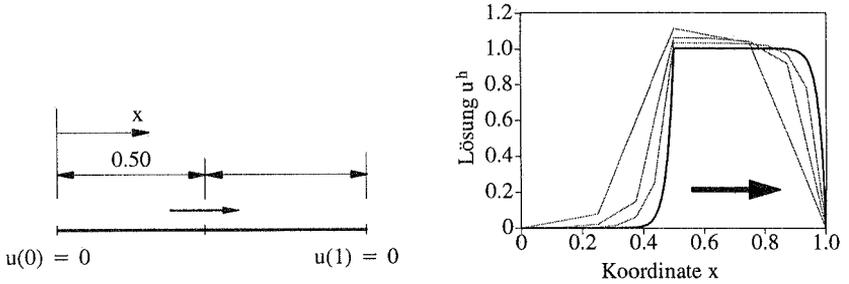


Bild 7.6: Eindimensionales Konvektions-Diffusionsproblem

$$(e, \delta(\bar{x})) = \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ (R, G)_{\Omega_k} + (J, G)_{\Gamma_k} \right\} \quad (7.31)$$

Ausgehend von Gleichung (7.31) ergibt sich mit der bereits mehrfach angewendeten Standardargumentation ein expliziter Fehlerschätzer (siehe Abschnitt 4.5).

$$|e(\bar{x})| \leq \sum_{k=1}^{NEL} \left\{ C_1 h_K^2 \|R\|_{0, \Omega_k} |G^h|_{2, \Omega_k} + C_2 \sqrt{h_K^3} \|J\|_{0, \Gamma_k} |G^h|_{2, \Omega_k} \right\} \quad (7.32)$$

Dabei werden die zweiten Ableitungen der Finite-Elemente-Lösung mit geeigneten Differenzenformeln approximiert (siehe Anhang A.4). Zur numerischen Verifikation wurde der Verfeinerungsindikator nach Gleichung (7.32) auf ein eindimensionales Randwertproblem mit den folgenden Daten angewendet (Bild 7.6).

$$E_0 = 0.02 \quad c_k = 1.0 \quad p(0.5) = 1.0 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

In Bild 7.6 ist die zugehörige Finite-Elemente-Lösung  $u^h$  für ein sehr feines Netz und einige größere Netze dargestellt. Infolge der kleinen Diffusionskoeffizienten  $E_0$  entstehen sowohl am Lastangriffspunkt ( $x = 0.5$ ) als auch am Rand ( $x = 1.0$ ) die für Konvektions-Diffusionsgleichungen typischen Grenzschichten mit sehr großen Gradienten. Zur Abschätzung des lokalen Fehlers  $e(0.8)$  wurde die in Bild 7.7 dargestellte Einflußlinie mit dem dualen Problem

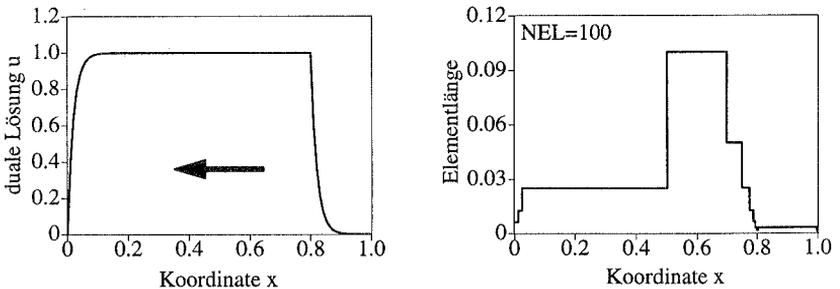


Bild 7.7: Lösung des dualen Problems und das adaptiv verfeinerte Netz für  $u^h(0.8)$

nach Gleichung (7.30) bestimmt. Die Einflußlinie zeigt deutlich, daß die lokalen Fehler  $e(0.8)$  hauptsächlich von den stromaufwärts liegenden Gebieten beeinflusst werden. Aus der Finite-Element-Approximation der Einflußlinie und der Residuen des ursprünglichen Problems läßt sich mit Gl.(7.32) ein Verfeinerungsindikator für die lokalen Fehler bestimmen. Mit einer darauf aufbauenden h-adaptiven Methode wurde die in Bild 7.7 dargestellte Finite-Elemente-Diskretisierung ermittelt. Das Netz weist hauptsächlich Verfeinerungen in der Umgebung der Grenzschichten der dualen und der ursprünglichen Lösung auf.

Eine zum Teil grundsätzlich andere Finite-Elemente-Diskretisierung ergibt sich, falls die Netzadaption bezüglich der lokalen Lösung  $u^h(0.2)$  erfolgt (Bild 7.8). Erwartungsgemäß wird die Lösung  $u^h(0.2)$  kaum von der Grenzschicht am Rand des ursprünglichen Problems beeinflusst. Der Verfeinerungsindikator führt dementsprechend nur zu einer geringen Netzverfeinerung an dieser Stelle. Bereits anhand des eindimensionalen Problems wird deutlich, daß Dualitätstechniken für die a-posteriori Fehlerabschätzung und Netzadaption bei nicht-selbstadjungierten Randwertproblemen unbedingt erforderlich sind.

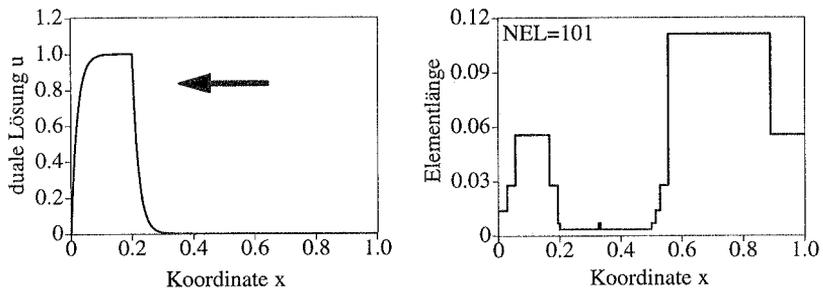


Bild 7.8: Lösung des dualen Problems und das adaptiv verfeinerte Netz für  $u^h(0.2)$

## 8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit adaptiven Methoden für lineare und nichtlineare Berechnungen von Flächentragwerken. Neben den klassischen an der Energienorm orientierten Methoden wurden weitere zum Teil neuartige a-posteriori Fehlerschätzer und Netzverfeinerungsalgorithmen für lokale sowie im integralen Sinne definierte Variablen vorgestellt.

Einführend wurden die Rand- bzw. Anfangswertprobleme für Flächentragwerke in starker und schwacher Form hergeleitet. Die anschließende umfangreiche Aufbereitung und mechanische Interpretation der in der Literatur diskutierten klassischen a-posteriori Energienormfehlerschätzer bildet die Grundlage des im weiteren entwickelten Gesamtkonzepts. Weiterhin wurden die aus der Literatur hauptsächlich für ebene Flächentragwerke bekannten expliziten residualen Fehlerschätzer und glättungsbasierten Verfeinerungsindikatoren auf Schalentragwerke übertragen und vergleichend gegenübergestellt.

Um die Fehler in beliebigen lokalen sowie integralen Größen abzuschätzen, wurden Dualitätstechniken eingeführt. Die Anwendung und Weiterentwicklung der vorgestellten Methoden wird durch die Einbettung in das klassische, aus der Strukturmechanik bekannte Einflußflächenkonzept erheblich vereinfacht. Anhand numerischer Beispiele, aber auch anschaulich, läßt sich die Überlegenheit der auf Dualitätsargumenten basierenden Fehlerschätzer gegenüber den weit verbreiteten Energienormfehlerschätzern zeigen. Die vorgestellten Fehlerschätzer und Verfeinerungsindikatoren sind sehr vielversprechend, da sie leicht in bestehende adaptive Finite-Elemente-Programme implementiert werden können. Die vorgestellte Methodik erweist sich als besonders effizient, weil die Lösung des dualen Problems mit der gleichen Diskretisierung wie das ursprünglichen Problem erfolgen kann.

Zur adaptiven Berechnung von Flächentragwerken unter Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten wurden Verfeinerungsindikatoren und ein darauf aufbauender adaptiver Algorithmus vorgestellt. Wird zur Bestimmung der Verfeinerungsindikatoren das linearisierte Problem betrachtet, so sind die für lineare Probleme vorgestellten Methoden auf nichtlineare Problemstellungen erweiterbar. Lediglich an Durchschlags- und Verzweigungspunkten ergeben sich infolge der Nicht-Beschränktheit des Tangentialoperators Schwierigkeiten, die jedoch mit geeigneten Nebenbedingungen vermieden werden können. Für Verzweigungspunkte wurden die Verfeinerungsindikatoren ausgehend von der zugehörigen Beulform mit residualen oder glättungsbasierten Indikatoren ermittelt. Infolge der Komplexität von nichtlinearen Berechnungen spielen auch die algorithmischen Aspekte bei der Netzadaption eine wesentliche Rolle. Beispielsweise wurden Methoden vorgestellt, um nach jeder Neuvernetzung den augenblicklichen Zustand auf das neue Netz abzubilden. Damit wird es möglich, die Pfadverfolgung nach jeder Neuvernetzung auf dem gleichen Lastniveau bzw. Verschiebungszustand fortzuführen. Mehrere repräsentative geometrisch nichtlinear berechnete Testbeispiele dokumentieren die Überlegenheit des adaptiven Vorgehens.

Unabhängig von der genauen Ursache der Nichtlinearität können die Verfeinerungsindikatoren immer anhand des linearisierten Problems bestimmt werden. Deshalb ist die Netzadaption bei elastoplastischem Werkstoffverhalten bzw. bei allgemeiner materieller Nichtlinearität im wesentlichen mit der geometrischen Nichtlinearität vergleichbar. Lediglich Lösungen, die stark von der Verfestigungseigenschaft des elastoplastischen Materials beeinflusst werden, bereiten zusätzliche Schwierigkeiten. Anhand von theoretischen Untersuchungen wird gezeigt, daß klassische, auf der Lösung von lokalen Teilproblemen basierende Fehlerschätzer infolge des teilweisen oder gänzlichen Verlustes der Elliptizität auf allgemeine elastoplastische Problemstellungen nicht anwendbar sind. Zur Vermeidung der benannten Schwierigkeiten wird das globale Tragverhalten durch die Einführung von Dualitätstechniken mitberücksichtigt. Weiterhin kann damit das Finite-Elemente-Netz bezüglich praktisch relevanter, lokaler sowie im integralen Sinne definierter Größen, verfeinert werden. Die Netzadaption bei Elastoplastizität erfordert infolge der Pfadabhängigkeit von elastoplastischen Problemen besondere Transfermethoden. Die Anwendbarkeit und Effizienz der vorgestellten Methoden wird anhand von numerischen Beispielen demonstriert. Darüberhinaus zeigte auch das vergleichende Benchmarkbeispiel, Scheibe mit Loch, an dem mehrere Forschergruppen teilnahmen, die Vorteile der entwickelten Methoden [138].

Die große Vielseitigkeit des vorgestellten Konzeptes zur Fehlerabschätzung wurde im letzten Kapitel mit der Anwendung auf Anfangswertprobleme sowie nicht-selbstadjungierte Randwertprobleme gezeigt. Insbesondere die dem Einflußflächenkonzept entsprechenden Dualitätstechniken ergeben wichtige, zum Teil neue wesentliche Einblicke in die Gesamtproblematik. Erste numerische Ergebnisse motivieren die weitere Forschung auf diesem Gebiet.

## A Anhang

### A.1 Hilberträume

Im folgenden werden die benötigten Grundkonzepte der Funktionalanalysis und einige häufig verwendete Funktionenräume vorgestellt. Die zur mathematischen Untersuchung der Finite-Elemente-Methode erforderlichen Grundlagen der Funktionalanalysis werden auszugsweise u.a. in den Büchern von Brenner und Scott [26], Braess [25], Johnson [71] und Strang und Fix [126] vorgestellt.

Das Vorhandensein eines Skalarproduktes ist eine wesentliche Eigenschaft der im Rahmen der Arbeit verwendeten Funktionenräume. Ein Skalarprodukt ist eine bilineare und symmetrische Abbildung  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und erfüllt für alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{A.3})$$

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{A.4})$$

Mit der Definition eines inneren- oder Skalarproduktes auf  $V$  wird eine kanonische (oder induzierte) Norm definiert.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (\text{A.5})$$

Jeder vollständige Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist, wird als ein Hilbertraum bezeichnet. Die Vollständigkeit ist über die Konvergenz der Cauchy-Folgen bezüglich dieser Norm definiert. Eine Norm ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  und muß für alle  $\mathbf{u} \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften besitzen.

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

$$\|\alpha \mathbf{u}\| \leq |\alpha| \|\mathbf{u}\| \quad (\text{A.8})$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad (\text{A.9})$$

Die letzte Gleichung ist die Dreiecksungleichung. Durch den Verzicht auf die Forderung (A.7) ist eine Halb- oder Seminorm  $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert.

$$|\mathbf{u}| = 0 \nRightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

Zwei Normen  $\|\mathbf{u}\|_1$  und  $\|\mathbf{u}\|_2$  auf einem Funktionenraum  $V$  sind äquivalent, falls eine Abschätzung folgender Art gilt.

$$C_1 \|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}\|_2 \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad \text{mit } C_1 \text{ und } C_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.11})$$

Bei Existenzbeweisen und numerischen Konvergenzuntersuchungen spielen Sobolev Räume und die zugehörigen Normen eine wichtige Rolle. Die Sobolev Räume folgen aus der Verallgemeinerung der Definition für die Lebesgue-Räume. Der spezielle Lebesgue-Raum  $L_2$  ist beispielsweise folgendermaßen definiert.

$$L_2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} : \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 \, dx < \infty \right\} \quad (\text{A.12})$$

Für die zugehörige Norm  $\|\cdot\|_0$  gilt entsprechend:

$$\|\mathbf{u}\|_0 = \left[ \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.13})$$

Damit bilden die Äquivalenzklassen fast überall übereinstimmender Funktionen, deren  $L_2$ -Norm beschränkt ist, die Elemente des Lebesgue Raumes  $L_2$ . Für die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie ist insbesondere der Sobolevraum  $H^1$  und die zugehörigen Norm  $\|\mathbf{u}\|_1$  von Bedeutung. Die Sobolev Norm  $\|\mathbf{u}\|_1$  wird aus den  $L_2$ -Normen der Funktion  $\mathbf{u}$  und deren erster Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$  zusammengesetzt.

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \left( \|\mathbf{u}\|_0^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_{\Omega} \left( \mathbf{u}^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.14})$$

Ist die Norm  $\|\cdot\|_1$  für eine Funktion  $\mathbf{u}$  beschränkt, so ist die der Funktion  $\mathbf{u}$  zugeordnete Äquivalenzklasse ein Element des Sobolevraumes  $H^1$ .

$$H^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^1 : \|\mathbf{u}\|_1 < \infty \right\} \quad (\text{A.15})$$

Zur Einbeziehung von Randbedingungen wird häufig der Unterraum  $H_0^1 \subset H^1$  definiert.

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma \right\} \quad (\text{A.16})$$

Die in (A.14) und (A.15) gegebenen Definitionen können ohne Einschränkungen auf die Sobolevnormen

$$\|\mathbf{u}\|_n = \left( \|\mathbf{u}\|_0^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\|_0^2 + \dots + \left\| \frac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^n} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

und auf die Sobolevräume  $H^n$  verallgemeinert werden.

$$H^n(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^n : \|\mathbf{u}\|_n < \infty \right\} \quad (\text{A.18})$$

Zwischen den Sobolevräumen gilt die folgende Beziehung:

$$\dots \subset H^2 \subseteq H^1 \subseteq H^0 = L_2 \quad (\text{A.19})$$

## A.2 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für alle Hilbert Räume bzw. für Funktionenräume, auf denen ein inneres Produkt definiert ist. Nachfolgend seien  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  zwei beliebige Funktio-

nen zum Beispiel zwei Verschiebungsverläufe eines statischen Systems. Falls die aus den Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  bestimmten inneren Arbeiten beschränkt sind,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dx \leq \infty \quad B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) dx \leq \infty \quad (\text{A.20})$$

wird bezüglich des durch die Bilinearform  $B(\cdot, \cdot)$  definierten Skalarprodukts ein Hilbertraum definiert. Dann gilt zwischen den inneren Arbeiten  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ,  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  und  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  die folgende Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \sqrt{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \sqrt{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad (\text{A.21})$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, wird die innere Energie an einem aus den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  zusammengesetzten Zustand betrachtet.

$$B(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad (\text{A.22})$$

Dabei ist  $\lambda$  eine skalare Variable. Da  $B(\cdot, \cdot)$  eine Energie beschreibt, ist die Ungleichung immer erfüllt, deshalb darf die quadratische Gleichung maximal eine Nullstelle haben, bzw. die Diskriminante muß gleich oder kleiner als Null sein.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - B(\mathbf{u}, \mathbf{u})B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad (\text{A.23})$$

Daraus folgt unmittelbar die Cauchy–Schwarz Ungleichung (A.21). Die hier bezüglich der inneren Energie gezeigte Ungleichung kann auf beliebige Hilbert–Räume verallgemeinert werden.

### A.3 Interpolationsabschätzungen

Interpolationsabschätzungen sind zur Herleitung von a–priori und impliziten a–posteriori Fehlerschätzern erforderlich und werden u.a. in den Lehrbüchern von Ciarlet [36], Braess [25], Eriksson et al. [52] und Brenner et al. [26] ausführlich diskutiert. Zur Darstellung der wesentlichen Ergebnisse wird im nachfolgenden der eindimensionale Fall näher untersucht. Entsprechend der Definition besitzen die Funktion  $u$  und ihre Interpolierende  $Iu$  an den  $k+1$  Stützstellen die gleichen Werte. Folglich ist die Interpolierende  $Iu$  ein Polynom des Grades  $k$ , das zum Beispiel auf einem Finiten Element aus den bekannten Ansatzfunktionen entwickelt werden kann.

$$Iu = \sum_{K=1}^{NT} N_K(\bar{\xi}, \bar{\eta}) u_K \quad (\text{A.24})$$

Dabei sind  $u_K$  sind die Funktionswerte an den  $NT$  Finite–Elemente–Knoten. In Bild 8.1 ist die lineare Interpolierende für eine Funktion mit einer Variablen dargestellt. Die Fehler  $u - Iu$  der Interpolation sind rein geometrischer Natur und unabhängig von der mechanischen Problemstellung. Die Interpolationsfehler lassen sich ausgehend von einer Taylorreihenentwicklung abschätzen (siehe Brenner et.al. [26]).

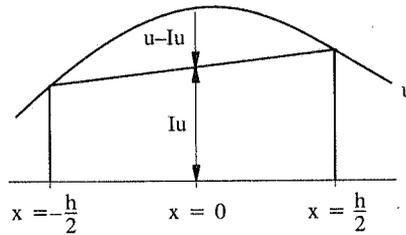


Bild 8.1: Lineare Interpolation in einer Dimension

$$u(x) = u(\bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x-\bar{x}) + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x-\bar{x})^n + \frac{1}{n!} \int_{\bar{x}}^x \left\{ (x-t)^n \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \right\} dt \quad (\text{A.25})$$

Daraus können beispielsweise die bei lokalen a-posteriori Fehlerabschätzungen sehr häufig verwendeten Abschätzungen für die Interpolationsfehler auf einem Finiten Element mit der charakteristischen Länge  $h$  hergeleitet werden.

$$\|u - Iu\|_0 \leq Ch^2 |u|_2 \quad (\text{A.26})$$

Die Konstante  $C$  ist eine von der Länge  $h$  und der exakten Lösung  $u$  unabhängige Größe. Bei mehrdimensionalen Problemen ist  $C$  von den geometrischen Verzerrungen der Elemente abhängig. Die Abschätzung (A.26) läßt sich sehr leicht für das eindimensionale Beispiel in Bild 8.1 verifizieren. Für kleine Elemente können die Terme höherer Ordnung in der Taylorreihenentwicklung (A.25) vernachlässigt werden bzw. die Funktion  $u$  ist in erster Näherung quadratisch.

$$u = ax^2 + bx + c \quad (\text{A.27})$$

Nach Integration der Interpolationsfehler

$$u - Iu = a\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right) \quad (\text{A.28})$$

läßt sich die folgende Gleichung mit einer ähnlichen Struktur wie die Abschätzung (A.26) herleiten.

$$\|u - Iu\|_0 \approx 0.0912h^2 \left\| \frac{d^2 u}{dx^2} \right\|_0 \quad (\text{A.29})$$

Obwohl die richtige Konstante  $C$  kleiner als 0.0912 ist, wird bei den numerischen Berechnungen von diesem Wert ausgegangen. Nach entsprechender Modifikation der Reihenentwicklung (A.25) können auch Fehlerabschätzungen für den mehrdimensionalen Fall, andere Normen und Interpolationsordnungen entwickelt werden [36].

$$\|u - Iu\|_s \leq Ch^{p+1-s} |u|_{k+1} \quad (\text{A.30})$$

Dabei ist  $p$  die Polynomordnung der Interpolierenden  $Iu$  und die Variable  $s$  erfüllt die Bedingung  $0 \leq s \leq p + 1$ .

## A.4 Näherungsweise Bestimmung der Interpolationsfehler

Mit Hilfe von Interpolationsabschätzungen können die Fehler nur in Abhängigkeit der exakten höheren Ableitungen nach oben hin abgeschätzt werden. Zum Beispiel gilt für die  $L_2$ -Norm der Fehler in Abhängigkeit der zweiten Ableitungen nach Gleichung (A.26) die folgende Abschätzung.

$$\|u - Iu\|_0 \leq Ch^2 \left\| \frac{d^2u}{dx^2} \right\|_0 \quad (\text{A.31})$$

Die zweite Ableitung ist ebenso wie die Lösung unbekannt und die Abschätzung kann für praktische Fehlerberechnungen nicht ausgewertet werden. Die exakte Ableitung kann jedoch näherungsweise aus der Finite-Elemente-Lösung bestimmt werden. Da die ersten Ableitungen bei  $C^0$  stetigen Finite-Elemente-Ansatzfunktionen jedoch diskontinuierlich sind, ist zur Bestimmung der zweiten Ableitungen eine geeignete Finite-Differenzen-Approximation zu verwenden. Für den eindimensionalen Fall wählt man statt der Ableitung beispielsweise (siehe auch Bild 8.2).

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{1}{h} \left( \frac{du^h}{dx} \Big|_2 - \frac{du^h}{dx} \Big|_1 \right) \quad (\text{A.32})$$

Für den mehrdimensionalen Fall wurden entsprechende Approximationen u.a. von Demkowicz et al. [48], Diaz et al. [49] und Eriksson et al. [53] vorgestellt. Von Eriksson et al. [52] wird entsprechend dem eindimensionalen Fall beispielsweise der folgende Ausdruck für zweidimensionale Probleme verwendet

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_0 \approx \frac{1}{h\sqrt{h}} \left\{ \left\| \frac{\partial u^h}{\partial x} \right\|_K - \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{K^*} \right\} \quad (\text{A.33})$$

Dabei sind  $K$  und  $K^*$  die an der Kante  $\Gamma_K$  angrenzenden Elemente.

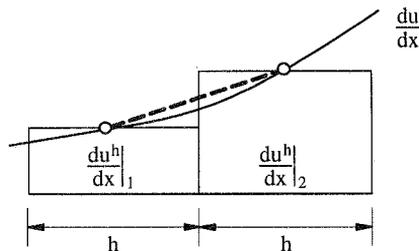


Bild 8.2: Berechnung der zweiten Ableitungen einer FE Lösung

## A.5 Näherungsweise Bestimmung der Interpolationskonstanten

Bei a-posteriori Fehlerabschätzungen wird häufig die  $L_2$ -Norm der Residuen mit der Energienorm abgeschätzt.

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{Iu} \|_0 \leq Ch \| \mathbf{u} \|_e \quad (\text{A.34})$$

Die Bestimmungsgleichung für eine optimale Konstante C kann folgendermaßen umgeschrieben werden.

$$C^2 h^2 = \sup \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu})}{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (\text{A.35})$$

Unter Berücksichtigung von  $B(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu}) \geq B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  wird zunächst in den Nenner die interpolierende eingeführt

$$C^2 h^2 \geq \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu})}{B(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu})} \quad (\text{A.36})$$

Die obige Gleichung hat eine sehr starke Ähnlichkeit mit dem folgenden Eigenwertproblem in der schwachen Form.

$$B(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu}) + \omega(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu}) = 0 \quad (\text{A.37})$$

Der kleinste Eigenwert kann mit dem Rayleigh Quotienten sehr einfach nach oben hin abgeschätzt werden.

$$\omega \leq \frac{B(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu})}{(\mathbf{u} - \mathbf{Iu}, \mathbf{u} - \mathbf{Iu})} \quad (\text{A.38})$$

Aus einem Vergleich der Gleichungen (A.36) und (A.38) folgt für die Interpolationskonstante und den Eigenwert.

$$C^2 h^2 \geq \frac{1}{\omega} \quad (\text{A.39})$$

Der kleinste Eigenwert kann für den eindimensionalen Fall mit  $\omega = \pi^2 EA/h^2$  bestimmt werden, somit gilt für die Interpolationskonstante.

$$C^2 h^2 \geq \frac{h^2}{\pi^2 EA} \rightarrow C \geq \sqrt{\frac{1}{\pi^2 EA}} \quad (\text{A.40})$$

Für mehrdimensionale Probleme können mit den beschriebenen Methoden ähnliche Interpolationskonstanten hergeleitet werden. Von Kelly et al.[76] wird für zweidimensionale Probleme die Konstante näherungsweise mit

$$C \geq \sqrt{\frac{1}{2\pi^2 EA}}$$

angegeben.

## A.6 Elliptizität des elastoplastischen Randwertproblems

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für elastoplastische Randwertprobleme wird unter anderem in dem Buch von Korneev und Langer [78] nachgewiesen. Im nachfolgenden wird für den speziellen Fall der von Mises Plastizität mit isotroper Verfestigung die Elliptizität des elastoplastischen Werkstoffensors bewiesen. Zunächst wird die  $H^1$  - Elliptizität der elastischen Energie vorausgesetzt.

$$\| \mathbf{u} \|_e^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \, dx \geq \omega_{\min} \| \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \|_0^2 \geq \omega_{\min} \mathbf{C} \| \mathbf{u} \|_1^2 \quad (\text{A.41})$$

Die Elliptizität ist wesentlich von dem kleinsten Eigenwert  $\omega_{\min}$  des elastischen Werkstoffensors  $\mathbf{C}$  abhängig. Weiterhin wurde in (A.41) die zweite Kornsche Ungleichung zur Abschätzung der  $L_2$ -Norm der Verzerrungen in Abhängigkeit der  $H^1$ -Norm verwendet. Ist die innere Energie  $H^1$ -elliptisch, so können u.a. bei endlicher Belastung und nicht kinematischer Lagerung keine unendlich großen Verschiebungen oder Verzerrungen auftreten. Existiert für die inkrementellen inneren Arbeiten des elastoplastischen Randwertproblems eine Ungleichung folgender Art,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\dot{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\epsilon}(\dot{\mathbf{u}}) \, dx = \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dx \geq (1-\nu_0) \| \dot{\mathbf{u}} \|_e^2 \quad (\text{A.42})$$

so ist das inkrementelle elastoplastische Problem elliptisch. Dabei ist  $\nu_0$ , wie im weiteren noch gezeigt wird, ein von der Verfestigung abhängiger Parameter. Der Werkstofftensor  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  für das inkrementelle Problem ist von dem Zustand, elastisch oder plastisch, der betrachteten Punkte abhängig und nimmt für plastische Punkte bei Belastung folgende Form an (siehe Gleichung (2.40) in Abschnitt 2.1.3.2):

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C} \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{A.43})$$

Die Ableitung der Fließfunktion nach den Spannungen ist für die von Mises Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_Y(\zeta) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{I} \quad (\text{A.44})$$

folgendermaßen gegeben:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}} \quad (\text{A.45})$$

Der zweite Summand des Nenners des elastoplastischen Tensors  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  ergibt sich somit zu:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\mathbf{s} : \mathbf{s}} \mathbf{s} : \mathbf{C} : \mathbf{s} \quad (\text{A.46})$$

Die Multiplikation der Deviatorspannungen mit dem elastischen Werkstofftensor  $\mathbf{C}$  hat für isotrope Werkstoffe eine besonders einfache Form.

$$\mathbf{s} : \mathbf{C} : \mathbf{s} = 2\mu(\mathbf{s} : \mathbf{s}) \quad (\text{A.47})$$

Die von den Deviatorspannungen geleistete Arbeit wird ausschließlich mit der einen Lamé Konstanten  $\mu$  bestimmt [84]. Damit ist der zweite Anteil im Nenner des elastoplastischen Tensors dreimal so groß wie die Materialkonstante  $\mu$ .

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\mu \quad (\text{A.48})$$

Für isotrope Verfestigung wurde bereits in Abschnitt 2.1.3.2 die folgende Gleichung (2.45) für den skalaren Verfestigungsmodul  $\mathbf{H}$  angegeben.

$$H = \frac{d\sigma_Y(\epsilon^P)}{d\epsilon^P}$$

Dabei ist  $\sigma_Y(\epsilon^P)$  die von den plastischen Verzerrungen  $\epsilon^P$  abhängige Fließspannung des eindimensionalen Zugversuchs (Bild 8.3). Für eine bilineare Spannungsdehnungslinie mit den Tangenten  $E_0$  im elastischen und  $E_T$  im plastischen Bereich gilt für  $H$  die folgende Bestimmungsgleichung.

$$H = \frac{d\sigma_Y(\epsilon^P)}{d\epsilon^P} = \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \quad (\text{A.49})$$

Die Gleichungen (A.45), (A.48) und (A.49) werden nun in die Gleichung (A.43) für den elasto-plastischen Werkstofftensor eingesetzt.

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C} \frac{3}{2s \left( 3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \right)} \mathbf{C} : \mathbf{s} : \mathbf{C} \quad (\text{A.50})$$

Die inkrementellen inneren Arbeiten für belastete plastische Punkte lassen sich in Abhängigkeit des Werkstoffensors  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  aus den inkrementellen Verzerrungen bestimmen.

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} : \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\epsilon} = \left[ \dot{\epsilon} - \frac{3\dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \mathbf{s}}{2s \left( 3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \right)} \mathbf{s} \right] : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \quad (\text{A.51})$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung werden die Produkte mit dem elastischen Werkstofftensor folgendermaßen aufgespalten.

$$s : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \leq \sqrt{s : \mathbf{C} : s} \sqrt{\dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon}} \quad (\text{A.52})$$

Einsetzen der Abschätzung in die Gleichung (A.51) ergibt:

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} = \left[ \dot{\epsilon} - \frac{3\dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \mathbf{s}}{2s \left( 3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \right)} \mathbf{s} \right] : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \geq \left[ 1 - \frac{3s : \mathbf{C} : s}{2s \left( 3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \right)} \right] \dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \quad (\text{A.53})$$

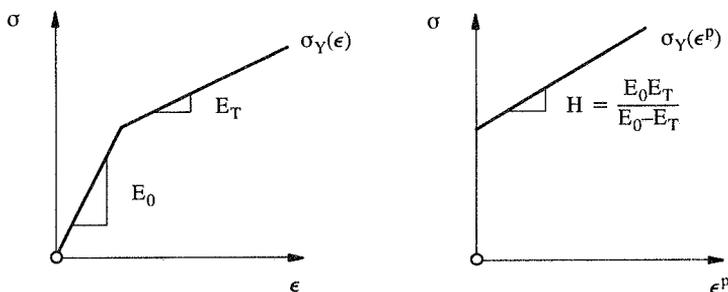


Bild 8.3: Spannungsdehnungslinie eines elastoplastischen Werkstoffs

Unter Berücksichtigung der Gleichung (A.47) wird die Abschätzung weiter umgeformt.

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} \geq \left[ 1 - \frac{3\mu}{\left( 3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T} \right)} \right] \dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \quad (\text{A.54})$$

Nach Vergleich der Gleichungen (A.42) und (A.54) gilt für den Parameter  $\nu_0$  die folgende Bestimmungsgleichung.

$$\nu_0 = \frac{3\mu}{3\mu + \frac{E_T E_0}{E_0 - E_T}} \quad (\text{A.55})$$

Damit ist der Parameter  $\nu_0$  eine von den Werkstoffkengrößen  $E_T$ ,  $E_0$  und  $\mu$  abgeleitete Größe und kann einfach bestimmt werden. In Abhängigkeit der Tangente  $E_T$  im plastischen Bereich gelten für den Parameter  $\nu_0$  die folgenden Grenzwerte.

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 1 & \text{für} & \quad E_T = 0 \\ \nu_0 &\rightarrow 0 & \text{für} & \quad E_T \rightarrow E_0 \end{aligned}$$

Für ideale Plastizität mit  $\nu_0 = 1$  folgt aus der Gleichung (A.42) der Verlust der Elliptizität.

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma} \dot{\epsilon} \, dx \geq 0$$



# Literatur

- [1] **Ainsworth, M., Oden, J.T. (1997):** A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **142**, 1–88.
- [2] **Ainsworth, M., Zhu, J.Z., Craig, A.W., Zienkiewicz, O.C. (1989):** Analysis of the Zienkiewicz–Zhu A–Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 2161–2174.
- [3] **Allgower, E.L., Böhrer, K. (1987):** Application of the Mesh Independence Principle to Meshrefinement Strategies, *SIAM J. Numer. Anal.*, **24**, 1335–1351.
- [4] **Babuska, I. (1997):** Pollution Error in the Finite Element Method. *Ticam Forum Notes No.4*, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, The University of Texas at Austin.
- [5] **Babuska, I. (1990):** The Problem of Modelling the Elastomechanics in Engineering. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **82**, 155–182.
- [6] **Babuska, I. (1986):** Feedback, Adaptivity and A Posteriori Estimates in Finite Elements: Aims, Theory and Experience. In: "Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations", eds. Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J., de Oliveira, E.R., John Wiley & Sons, Chichester, 3–23.
- [7] **Babuska, I., Miller, A. (1984):** The Post–Processing Approach in the Finite Element Method–Part 1: Calculation of Displacements, Stresses and other Higher Derivatives of the Displacements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1085–1109.
- [8] **Babuska, I., Miller, A. (1984):** The Post–Processing Approach in the Finite Element Method–Part 2: The Calculation of Stress Intensity Factors. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1111–1129.
- [9] **Babuska, I., Miller, A. (1984):** The Post–Processing Approach in the Finite Element Method–Part 3: A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 2311–2324.
- [10] **Babuska, I., Miller, A. (1987):** A Feedback Finite Element Method with A Posteriori Error Estimation: Part I. The Finite Element Method and Some Basic Properties of The A Posteriori Error Estimator. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 1–40.
- [11] **Babuska, I., Planck, L., Rodriguez, R. (1992):** Basic Problems of A Posteriori Error Estimation. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 97–112.

- [12] **Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1982):** Computational Error Estimates and Adaptive Processes for Some Nonlinear Structural Problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **34**, 895–937.
- [13] **Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1978):** Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**, 736–754.
- [14] **Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1978):** A–Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **11**, 1597–1615.
- [15] **Babuska, I., Rheinboldt, W.C. (1979):** Analysis of Optimal Finite–Element Meshes in  $R^1$ . *Math. Comp.*, **33**, 435–463.
- [16] **Babuska, I., Strouboulis, T., Gangaraj, S.K., Upadhyay, C.S. (1995):**  $\eta$ –Superconvergence of Finite Element Approximations in the Interior of General Meshes of Triangles. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **122**, 273–305.
- [17] **Babuska, I., Strouboulis, T., Gangaraj, S.K., Upadhyay, C.S. (1997):** Pollution Error in the  $h$ –Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **140**, 1–37.
- [18] **Babuska, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S., Gangaraj, S.K. (1995):** A Posteriori Estimation and Adaptive Control of the Pollution Error in the  $h$ –Version of the Finite Element Method. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, **38**, 4207–4235.
- [19] **Bank, R.E., Weiser A. (1985):** Some a posteriori error estimates for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, **44**, 283–301.
- [20] **Baranger, J., El Amri H. (1991):** Estimateurs a posteriori d’erreur pour le calcul adaptatif d’écoulements quasi–Newtoniens. *RAIRO Anal. Numér.*, **25**, 31–48.
- [21] **Barlow, J., (1976):** Optimal Stress Locations in Finite Element Models. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, **10**, 243–251.
- [22] **Basar, Y., Krätzig, W.B. (1985):** *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- [23] **Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991):** *Stability of Structures*. Oxford University Press, Oxford.
- [24] **Becker, R., Rannacher, R. (1996):** A Feed–Back Approach to Error Control in Finite Element Methods: Basic Analysis and Examples. *EAST–WEST J. Numer. Math.*, **4**, 237–264.
- [25] **Braess, D. (1992):** *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

- [26] **Brenner, S.C., Scott, R.L. (1994):** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [27] **Brezzi, F. (1981):** Behavior of Finite Element Solutions Near a Bifurcation Point. In: "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", eds. Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.J., Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 109–121.
- [28] **Brezzi, F., Fujii, H. (1982):** Numerical Imperfections and Perturbations in the Approximation of Nonlinear Problems. In: "The Mathematics of Finite Elements and Applications IV", ed. Whiteman, J.R., Academic Press, London, 431–452.
- [29] **Brezzi, F., Rappaz, J., Raviart, P.A. (1980):** Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems, Part I: Branches of Nonsingular Solutions. Numer. Math., **36**, 1–25.
- [30] **Brezzi, F., Rappaz, J., Raviart, P.A. (1980):** Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems, Part II: Limit Points. Numer. Math., **37**, 1–28.
- [31] **Brezzi, F., Rappaz, J., Raviart, P.A. (1980):** Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems, Part III: Simple Bifurcation Points. Numer. Math., **38**, 1–30.
- [32] **Brink, U., Stein, E. (1997):** A-Posteriori Error Estimation in Large-Strain Elasticity Using Equilibrated Local Neumann Problems. Institute of Structural and Computational Mechanics, Universität Hannover, Preprint.
- [33] **Bussy, P., Mosbah, Y. (1995):** Optimization of Finite Element Calculations in Non-Linear Geometry. In: "Computational Plasticity, Fundamentals and Applications", eds. Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 383–394.
- [34] **Büchter, N. (1992):** Zusammenführung von Degenarationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [35] **Carey, G.F., Oden, J.T. (1983):** Finite Elements, A Second Course. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- [36] **Ciarlet, P.G. (1978):** The Finite Element Method for Elliptic Problems. North–Holland, Amsterdam.
- [37] **Ciarlet, P.G. (1988):** Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity. North–Holland, Amsterdam.
- [38] **Cirak, F., Ramm, E. (1998):** A-Posteriori Error Estimation and Adaptivity for Elastoplasticity Using the Reciprocal Theorem. Submitted to Int. J. Numer. Methods Eng..
- [39] **Cirak, F., Ramm, E. (1998):** A-Posteriori Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method Using Duality Principles. ZAMM, (to be published).

- [40] **Cirak, F., Ramm, E. (1998):** A-Posteriori Error Estimation and Adaptivity for Linear Elasticity Using the Reciprocal Theorem. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **156**, 351–362.
- [41] **Cirak, F., Schleupen, A., Ramm, E. (1998):** Error Estimates for Local and Global Variables Using Duality Principles. In: *Proceeding of 4th World Congress on Computational Mechanics*, eds. Idelsohn, S.R., Oñate, E., Dvorkin, E.N., Buenos Aires, Argentina.
- [42] **Cirak, F., Ramm, E. (1997):** Adaptive Methods for Nonlinear FE Analysis of Thin-Walled Structures. In: *Proceedings of the IUTAM /IACM Symposium on Discretization Methods in Structural Mechanics II*, eds. Mang, H.A., Rammerstorfer, F.G., (to be published)
- [43] **Cirak, F., Ramm, E. (1997):** Adaptive Methods for the Nonlinear FE Analysis of Shell Structures. In: *Proceedings of the Nafems World Congress 1997*, pp. 1074–1086, Stuttgart, Germany.
- [44] **Cirak, F. (1993):** Koiter'sche Anfangsnachbeulanalyse und Abschätzung der Imperfektionsempfindlichkeit mit der Methode der finiten Elemente. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [45] **Clemént, P. (1975):** Approximation by Finite Element Functions Using Local Regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, **2**, 77–84.
- [46] **Cook, R.D. (1995):** *Finite Element Modelling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- [47] **Crouzeix, M., Rappaz, J. (1990):** *On Numerical Approximation in Bifurcation Theory*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [48] **Demkowicz, L., Devloo, P., Oden, J.T. (1985):** On a h-Type Mesh–Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **53**, 67–89.
- [49] **Diaz, A.R., Kikuchi, N., Taylor, J.E. (1983):** A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **41**, 29–45.
- [50] **DIN 1045:** *Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung*. Ausgabe Juli 1988.
- [51] **Duvaut, G., Lions, J.L. (1976):** *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [52] **Eriksson, K., Estep, D., Hansbo, P., Johnson, C. (1996):** *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [53] **Eriksson, K., Johnson, C. (1988)**: An Adaptive Finite Element Method for Linear Elliptic Problems. *Math. Comput.*, **50**, 361–383.
- [54] **Eriksson, K., Johnson, C. (1991)**: Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems I: A Linear Model Problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 43–77.
- [55] **Estep, D. (1995)**: A Posteriori Error Bounds and Global Error Control for Approximation of Ordinary Differential Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**, 1–48.
- [56] **Fujii, H., Yamaguti, M. (1980)**: Structure of Singularities and its Numerical Realization in Nonlinear Elasticity. *J. Math. Kyoto Univ.*, **20–3**, 489–590.
- [57] **Gallimard, L., Ladevèze, P., Pelle, J.P. (1996)**: Error Estimation and Adaptivity in Elastoplasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 189–217.
- [58] **George, P.L. (1996)**: Automatic Mesh Generation and Finite Element Computation. In: "Handbook of Numerical Analysis", Volume IV, eds. Ciarlet, P.G., Lions, J.L., Elsevier Science B.V., Amsterdam, 69–190.
- [59] **Green, A.E., Zerna, W. (1954)**: Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford.
- [60] **Gross, D. (1996)**: Bruchmechanik. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [61] **Großmann, C., Roos, H.G. (1992)**: Numerik partieller Differentialgleichungen. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [62] **Hackbusch, W. (1996)**: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [63] **Hill, R., (1950)**: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford.
- [64] **Hill, R., (1958)**: A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic–Plastic Solids. *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, 236–249.
- [65] **Hill, R., (1962)**: Acceleration Waves in Solids. *J. Mech. Phys. Solids*, **10**, 1–16.
- [66] **Hinton, E., Campbell, J.S. (1974)**: Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **8**, 461–480.
- [67] **Hochard, C., Peric, D., Dutko, M., Owen, D.R.J. (1995)**: Transfer Operators for Evolving Meshes in Elasto–Plasticity. In: "Computational Plasticity, Fundamentals and Applications", eds. Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 2331–2339.
- [68] **Johnson, C., Hansbo, P. (1992)**: Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 143–181.

- [69] **Johnson, C., Hansbo, P. (1991):** Adaptive Finite Element Methods for Small Strain Elast–Plasticity. In: "Finite Inelastic Deformations – Theory and Applications", eds. Besdo, D., Stein, E., Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 273–288.
- [70] **Johnson, C., (1990):** Adaptive Finite Element Methods for Diffusion and Convection Problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **82**, 301–322.
- [71] **Johnson, C. (1987):** Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press, Cambridge.
- [72] **Johnson, C. (1978):** On Plasticity with Hardening. *J. Math. Anal. Appl.* **62**, 325–336.
- [73] **Johnson, C. (1976):** On Finite Element Methods for Plasticity Problems. *Numer. Math.*, **26**, 79–84.
- [74] **Johnson, C. (1976):** Existence Theorems for Plasticity Problems. *J. Math. Pure et. Appl.*, **55**, 431–444.
- [75] **Keller, H.B. (1992):** Numerical Methods for Two–Point Boundary Value Problems. Dover Publications, New York.
- [76] **Kelly, D.W., Gago, J.P. de S.R., Zienkiewicz, O.C., Babuska, I. (1983):** A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I–Error Analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1593–1619.
- [77] **Koiter, W.T. (1945):** Over de Stabiliteit von het Elastisch Evenwicht. Polytechnic Institute Delft, H.J. Paris Publisher, Amsterdam, Englische Übersetzung: On the Stability of Elastic Equilibrium. NASA TT F–10, 833, 1967.
- [78] **Korneev, V.G., Langer, U. (1984):** Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [79] **Ladèveze, P., Leguillon, D. (1983):** Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Application, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**, 485–509.
- [80] **Lorch, J. (1996):** Stabilitätsuntersuchungen an Zylinderschalen mit adaptiven Finite Elemente Methoden. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [81] **Lubliner, J. (1990):** Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, New York.
- [82] **Nitsche, J.A. (1968):** Ein Kriterium für die Quasioptimalität des Ritzschen Verfahrens. *Numer. Math.*, **11**, 346–348.
- [83] **Marsden, J.E., Hughes, T.J.R. (1983):** Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- [84] **Malvern, L.E. (1969):** Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [85] **Matthies, H., Strang, G., Christiansen E. (1979):** The Saddle Point of a Differential Program., In: Energy Methods in Finite Element Analysis, eds. Glowinski, R., Rodin, E.Y., Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, Chichester, 309–318.
- [86] **Matzenmiller, A. (1988):** Ein Rationales Lösungskonzept für Geometrisch und Physikalisch Nichtlineare Strukturberechnungen. Dissertation, Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [87] **Moore, G., Spence, A. (1980):** The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **17**, 567–576.
- [88] **Mücke, R., Whiteman, J.R. (1995):** A Posteriori Error Estimates and Adaptivity for Finite Element Solutions in Finite Elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **38**, 775–795.
- [89] **Oden, J.T., Feng, Y. (1989):** Local and Pollution Error Estimation for Finite Element Approximations of Elliptic Boundary Value Problems. *J. Comp. Appl. Math.*, **74**, 245–293.
- [90] **Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W., Westermann, T.A. (1989):** Toward a Universal h–p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **77**, 113–180.
- [91] **Okstad, K.M., Mathisen, K.M. (1994):** Towards Automatic Adaptive Geometrically Non-Linear Shell Analysis. Part I: Implementation of an h-Adaptive Mesh Refinement Procedure. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, **37**, 2657–2678.
- [92] **Oliveira, E.R. de A. (1968):** Theoretical Foundations of the finite Element Method. *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 929–952.
- [93] **Oñate, E., Bugeda, G. (1993):** A Study of Mesh Optimality Criteria in Adaptive Finite Element Analysis. *Engineering Computations*, **10**, 307–321.
- [94] **Ortiz, M., Quigley, J.J. (1991):** Adaptive Mesh Refinement in Strain Localization Problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **90**, 781–804.
- [95] **Peric, D., Yu, J., Owen, D.R.J. (1994):** On Error Estimates and Adaptivity in Elastoplastic Solids: Applications to the Numerical Simulation of Strain Localization in Classical and Cosserat Continua. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 1351–1379.
- [96] **Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., Zienkiewicz, O.C. (1987):** Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *J. Comp. Phys.*, **72**, 449–466.

- [97] **Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. (1991)**: Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures. Elsevier, Amsterdam–London–New York.
- [98] **Pousin, J., Rappaz, J. (1994)**: Consistency, Stability, A Priori and A Posteriori Errors for Petrov–Galerkin Methods Applied to Nonlinear Problems. *Numer. Math.*, **69**, 213–231.
- [99] **Prager, W. (1975)**: A Note on the Optimal Choice of Finite Element Grids. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **6**, 363–366.
- [100] **Ramm, E., Cirak, F. (1997)**: Adaptivity for Nonlinear Thin–Walled Structures. In: "Computational Plasticity, Fundamentals and Applications", eds. Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E., CIMNE, Barcelona, 145–163.
- [101] **Ramm, E., Matzenmiller, A. (1988)**: Consistent Linearization in Elasto–Plastic Shell Analysis. *Eng. Comput*, **5**, 289–299.
- [102] **Ramm, E. (1981)**: Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. In: "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", eds. Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K.J., Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 63–89.
- [103] **Ramm, E. (1976)**: Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Habilitation, Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [104] **Rank, E., Zienkiewicz, O.C. (1987)**: A Simple Error Estimator in the Finite Element Method. *Comm. Appl. Numer. Meth.*, **3**, 243–249.
- [105] **Rannacher, R., Suttmeier, F.–T. (1997)**: A Feed–Back Approach to Error Control in Finite Element Methods: Application in Linear Elasticity. *Comp. Mech.*, **19**, 434–446.
- [106] **Rehle, N. (1996)**: Adaptive Finite Elemente Verfahren bei der Analyse von Flächen-tragwerken. Dissertation, Bericht Nr. 20, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [107] **Reitinger, R. (1994)**: Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke. Dissertation, Bericht Nr. 17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [108] **Repin, S.I. (1996)**: Errors of Finite Element Method for Perfectly Elasto–Plastic Problems. *Math. Mod. Meths. Appl. Sci.*, **6**, 587–604.
- [109] **Repin, S.I., Xanthis, L.S. (1996)**: A Posteriori Error Estimation for Elasto–Plastic Problems Based on Duality Theory. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **138**, 317–339.
- [110] **Rheinboldt, W.C. (1986)**: Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations. John Wiley & Sons, New York.

- [111] **Rheinboldt, W.C. (1985):** Error Estimates for Nonlinear Finite Element Computations. *Comp. & Struct.*, **20**, 91–98.
- [112] **Rice, J.R. (1976):** The Localization of Plastic Deformation. In: "Theoretical and Applied Mechanics", ed. Koiter, W.T., North Holland Publishing Company, 207–220.
- [113] **Samuelson, L.A., Eggwertz, S. (1992):** Shell Stability Handbook. Elsevier Science Publishers Ltd., Essex.
- [114] **Santos, F.G. (1995):** Numerical Analysis of Parametrized Partial Differential Equations. Ph.D. Thesis, Institute of Physical Science and Technology, University of Maryland.
- [115] **Schulz, M. (1997):** A-Posteriori-Fehlerschätzer für mittels Finiter Elemente modellierte elasto-plastische Verformungsvorgänge. Dissertation, Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart.
- [116] **Schröder, P. (1973):** Über das Beulverhalten querbelasteter Zylinder. Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR), Institut für Flugzeugbau, Braunschweig.
- [117] **Scott, R. (1976):** Optimal  $L_\infty$  Estimates for the Finite Element Method on Irregular Meshes. *Math. Comp.*, **30**, 681–697.
- [118] **Simo, J.C., Oliver, J., Armero, F. (1993):** An Analysis of Strong Discontinuities Induced by Strain-Softening in Rate-Independent Inelastic Solids. *Comp. Mech.*, **12**, 277–296.
- [119] **Simo, J.C., Fox, D.D. (1989):** On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model, Part I: Formulation and Optimal Parametrization. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **72**, 267–304.
- [120] **Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1988):** Computational Inelasticity. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [121] **Sluys, L.J., (1992):** Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids. Ph.D.-Dissertation, Delft University of Technology, Delft.
- [122] **Stein, E., Seifert, B., Rust, W. (1994):** Adaptive Verfeinerung von Finite-Elemente Netzen für Stabilitätsprobleme von Flächentragwerken. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Habilitation, Bericht-Nr. F94/1.
- [123] **Stein, E., Ahmad, R. (1977):** An Equilibrium Method for Stress Calculations Using Finite Element Displacements. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **10**, 175–198.

- [124] **Stein, E., Seifert, B., Ohnimus, S., Carstensen, C. (1994):** Adaptive Finite Element Analysis of Geometrically Non-Linear Plates and Shells, Especially Buckling. *Int. j. numer. methods eng.*, **37**, 2631–2655.
- [125] **Stephan, Y., Temam, R. (1987):** Finite Element Computation of Discontinuous Solutions in the Perfect Plasticity Theory. In: "Computational Plasticity, Fundamentals and Applications", eds. Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 243–257.
- [126] **Strang, J.E., Fix, G.J. (1973):** An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [127] **Suttmeier, F.-T. (1997):** Adaptive Finite Element Approximations of Problems in Elasto-Plasticity Theory. Ph.D.-Dissertation, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg.
- [128] **Szabó, B., Babuska, I. (1991):** Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [129] **Temam, R. (1985):** Mathematical Problems in Plasticity, Gauthier-Villars, Paris.
- [130] **Tottenham, H. (1970):** Basic Principles. In: "Finite Element Techniques in Structural Mechanics", eds. Tottenham, H., Brebbia, C., Southampton University Press, Southampton.
- [131] **Troger, H., Steindl, A. (1991):** Nonlinear Stability and Bifurcation Theory. Springer Verlag, Wien-New York.
- [132] **Verfürth, R. (1996):** A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. John Wiley & Sons, Chichester, B.G. Teubner, Stuttgart.
- [133] **Verfürth, R. (1994):** A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems, Finite Element Discretizations of Elliptic Equations. *Math. Comp.*, **62**, 445–475.
- [134] **Wagner, W. (1991):** Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Habilitation, Bericht-Nr. F91/1.
- [135] **Wahlbin, L.B. (1995):** Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [136] **Wempner, G.A. (1971):** Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 1581–1599.
- [137] **Wiberg, N.E., Abdulwahab, F. (1993):** Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2703–2724.

- [138] **Wriggers, P. (1997):** Benchmarking in Elastoplasticity. Workshop on Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics in University of Stuttgart, March 10.–11.
- [139] **Wriggers, P., Scherf, O. (1995):** Adaptive Finite Element Methods for Contact Problems in Plasticity. In: "Computational Plasticity, Fundamentals and Applications", eds. Owen, D.R.J., Oñate, E., Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 787–807.
- [140] **Wriggers, P., Simo, J.C. (1990):** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **30**, 155–176.
- [141] **Zienkiewicz, O.C., Gago, J.P. de S.R., Kelly, D.W. (1983):** The hierarchical concept in finite element analysis. *Comp. and Struct.*, **16**, 63–65.
- [142] **Zienkiewicz, O.C., Huang, M. (1990):** A Note on Localization Phenomena and Adaptive Finite–Element Analysis in Forming Processes. *Commun. Appl. Num. Meth.*, **6**, 71–76.
- [143] **Zienkiewicz, O.C., Pastor, M., Huang, M. (1995):** Softening, Localisation and Adaptive Remeshing. Capture of Discontinuous Solutions. *Comp. Mech.*, **17**, 98–106.
- [144] **Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1989):** *The Finite Element Method, Volume 1.* McGraw–Hill, Berkshire.
- [145] **Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991):** *The Finite Element Method, Volume 2.* McGraw–Hill, Berkshire.
- [146] **Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1987):** A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 337–357.
- [147] **Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992):** The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1331–1364.
- [148] **Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992):** The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1365–1382.