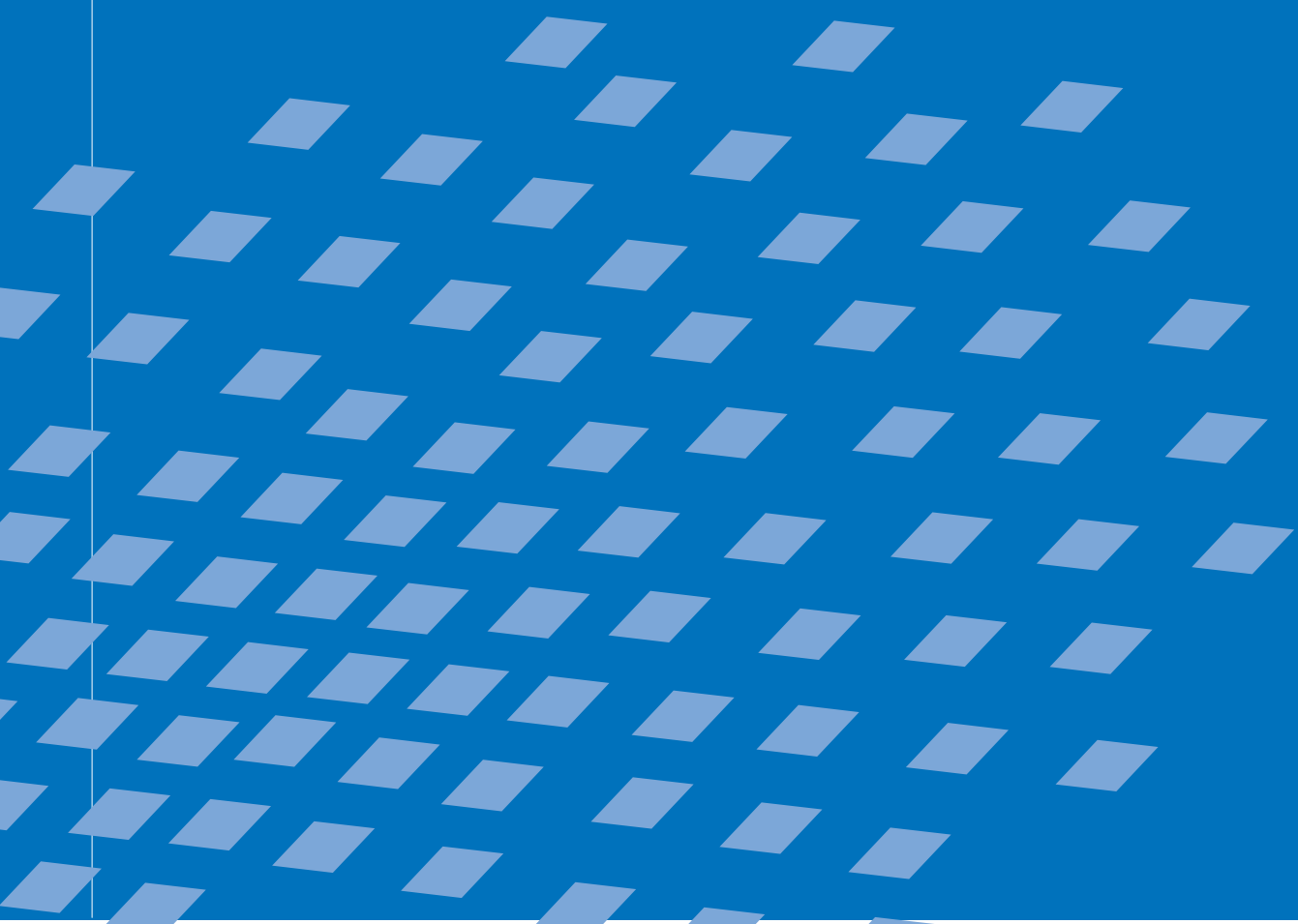




# Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton– und Stahlbetontragwerken

Frank Huber







# **Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken**

von

**Frank Huber**

Bericht Nr. 46 (2006)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff  
Stuttgart 2006



© 2006 Frank Huber

*Berichte können bezogen werden über:*

Institut für Baustatik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 7

D-70550 Stuttgart

Tel.: ++49(0)711/685 66123

Fax.: ++49(0)711/685 66130

<http://www.uni-stuttgart.de/ibs>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart

ISBN 3-00-019528-9

# Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Frank Huber**

aus Dillingen a.d. Donau

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Günter Hofstetter
Mitberichterin:	Prof. Dr.-Ing. Ulrike Kuhlmann
Tag der mündlichen Prüfung:	26. Juli 2006

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Stuttgart 2006



## Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung dreidimensionaler Effekte und nichtlinearen Materialverhaltens der Werkstoffe Beton und Betonstahl. Aufbauend auf der Diskretisierung der Betonstruktur mit Volumenelementen wird die Bewehrung mit eingebetteten Stabelementen im Rahmen des Rebar-Modells abgebildet. Gegenüber diskreten Stabelementen bzw. verschmierten Bewehrungsschichten ermöglichen eingebettete Stabelemente eine von der Bewehrungsführung unabhängige Diskretisierung der Betonstruktur. Dieser Sachverhalt erweist sich bei der Diskretisierung der untersuchten Stahlbetontragwerke als großer Vorteil. Eine realitätsnahe Traglastanalyse von Stahlbetonkonstruktionen lässt sich in bestimmten Fällen nur unter Berücksichtigung des nachgiebigen Verbunds zwischen Beton und Bewehrung erzielen. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Verbundwirkung über eine Diskontinuität zwischen den Betonverschiebungen und den Deformationen des Betonstahls durch Einführen zusätzlicher Verbundfreiheitsgrade innerhalb des Rebar-Modells abgebildet. Dabei lässt sich eine Analogie zur FE-Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung (XFEM, SDA) herstellen. Für die Berechnung einfacher Stahlbetonbalken wird alternativ ein Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt basierend auf der Arbeit von *Weimar* [113] vorgestellt, das die Modellierung eines aus beliebig vielen Einzelrechteckquerschnitten zusammengesetzten Gesamtquerschnitts ermöglicht. An dieser Stelle wird ein dreidimensionales Betonmodell durch statische Kondensation bei der Dimensionsreduktion nicht berücksichtigter Spannungskomponenten am Materialpunkt auf die Balkenformulierung reduziert. Für die Bewehrung wird eine verschmierte Modellierung verwendet. Ein großer Vorteil dieser Formulierung liegt in der Umgehung bzw. Vermeidung spezieller eindimensionaler Werkstofftheorien zur Beschreibung des Betonverhaltens.

Die phänomenologische Beschreibung der Materialantwort von Beton wird in dieser Arbeit durch zwei unterschiedliche nichtlineare Materialmodelle abgebildet. Das isotrope, elastoplastische Mehrflächenmodell nach *Menrath* [75] für ebene zweidimensionale Tragwerke basiert auf der Plastizitätstheorie und wird in dreidimensionaler Form zur Modellierung von reinem Beton eingesetzt. Das in den ersten beiden Spannungsinvarianten formulierte Mehrflächenmodell wird zur Abbildung von Entlastungsvorgängen mit einem skalaren Schädigungsansatz kombiniert. Parallel zum Mehrflächenmodell findet das vorrangig für ebene Problemstellungen eingesetzte Schädigungsmodell nach *de Vree et al.* [25] in dreidimensional erweiterter Form Eingang in der Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken. Es basiert auf der Schädigungstheorie und wird in den ersten beiden Verzerrungsinvarianten formuliert. Als Regularisierungsstrategie wählt *Menrath* [75] beim Mehrflächenmodell einen netzabhängigen Entfestigungsmodul, während *Peerlings* [87] für das Schädigungsmodell eine gradientenerweiterte Beschreibung vorschlägt. Dabei lässt sich nur mit der Gradientenerweiterung eine vollständige Unabhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung erzielen. Die Materialbeschreibung der Bewehrung erfolgt durch ein eindimensionales Plastizitätsmodell mit Verfestigung, die Verbundbeschreibung zwischen Beton und Bewehrung durch ein eindimensionales Verbundmodell.

An mehreren Beispielen zu Beton- und Stahlbetontragwerken wird die Anwendbarkeit der eingesetzten Betonmodelle in Verbindung mit der eingebetteten Bewehrungsmodellierung untersucht. Dabei werden numerische Simulationen für Tragwerke des ebenen Spannungszustands sowie des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustands durchgeführt und mit experimentellen und numerischen Ergebnissen verglichen.



# Abstract

This study is concerned with the modeling of plain and reinforced concrete structures including possible three-dimensional effects and nonlinear material behaviour of concrete and reinforcing steel. Based on the discretization of the concrete structure using three-dimensional continuum elements the reinforcement is represented by embedded bar elements within the framework of a rebar model. Compared to discrete bar elements or smeared reinforcement layers, embedded bar elements enable a discretization of the concrete structure independent of the configuration of reinforcements. This issue is of great benefit within the discretization of the tested structures. For specific cases, a realistic limit load analysis can only be done including the flexible bond between concrete and reinforcement. In this study, the bond effect is accounted for by a discontinuity between the concrete displacements and the deformations of the reinforcing steel using additional bond degrees of freedom within the rebar model. Thereby an analogy to the Finite Element Method with enhanced kinematic description (XFEM, SDA) can be established. Alternatively, a beam element with multi-part cross section based on the work of *Weimar* [113] is presented for the computation of simple reinforced concrete beams. The formulation enables to model an entire cross section composed of multiple single rectangular parts. In this context a fully three-dimensional concrete model is reduced to the beam formulation via static condensation of the stress components not considered due to the dimensional reduction process at the material point level. The reinforcement is represented by a smeared model. This formulation is very advantageous since it allows to avoid or circumvent the need for special one-dimensional constitutive laws for concrete.

In this study, the phenomenological description of the material behaviour of concrete is accomplished by two different nonlinear material models. The isotropic, multi-surface plasticity model, proposed by *Menrath* [75] for two-dimensional structures, is based on plasticity and adopted in a three-dimensional form to model plain concrete. The model is formulated in the first two stress invariants and combined with a scalar damage approach in order to reproduce local unloading actions. Parallel to the multi-surface plasticity model, a damage model proposed by *de Vree et al.* [25], prior used for plane structural problems, enters in a three-dimensional enhanced form the modeling of plain and reinforced concrete structures. It is based on damage theory and is formulated in the first two strain invariants. Regularization is achieved by *Menrath* [75] by a mesh-adaptive softening modulus for the multi-surface plasticity model, whereas *Peerlings* [87] suggests a gradient enhanced description for the damage model. Only the gradient enhancement produces fully mesh-independent results. The material description of the reinforcing steel is accomplished by a one-dimensional hardening plasticity model, the bond description between concrete and the reinforcement by a one-dimensional bond model.

The application of the used concrete models in connection with the embedded reinforcement modeling is tested and compared to experimental and numerical results for several plain concrete and reinforced concrete structures. Numerical simulations are accomplished for structures obeying the plane stress condition as well as for structures under a general three-dimensional stress state.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in der Zeit vom Mai 2001 bis März 2006.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Ekkehard Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit, für die konstruktiven wissenschaftlichen Gespräche und für die Übernahme des Hauptberichts. Seine zuvorkommende fachliche und menschliche Unterstützung trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Weiter bin ich Herrn Professor Günter Hofstetter und Frau Professor Ulrike Kuhlmann für Ihr Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme der Mitberichte sehr zu Dank verpflichtet. Ihre zügige Durchsicht und Korrektur meiner Arbeit haben entscheidend zur Beschleunigung des Promotionsverfahrens beigetragen. Darüberhinaus danke ich meinen beiden Mitberichtern für die angenehmen wissenschaftlichen Gespräche.

Mein herzlichster Dank gilt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik. Mit ihrer Hilfsbereitschaft, Freundlichkeit und wissenschaftlichem Interesse haben sie ein angenehmes Umfeld für meine wissenschaftliche Arbeit geschaffen. Besonders beeindruckt hat mich der "Team-Geist" am Institut. Neben den fachlichen Diskussionen waren für mich auch die Unterhaltungen mit der ehemaligen Mensa-Gruppe beim Mittagessen sehr wichtig.

Ich danke meinen Korrekturlesern Stefan Hartmann, Thomas Hettich und Albrecht Issler für die sorgfältige Durchsicht meiner Arbeit.

Ganz besonders bedanke ich mich bei meiner Familie, meinen lieben Eltern Monika und Hansjörg Huber und meiner Schwester Karin Huber, die mich stets mit Rücksichtnahme und Verständnis auf meinem Weg begleiteten und mich mit aufmunternden Worten unterstützten.

Von ganzem Herzen möchte ich meiner lieben Freundin Carola Issler danken, die mich während meiner Promotion besonders in schweren Stunden immer wieder mit Rat und Tat liebevoll unterstützt hat und zusammen mit ihrer Familie für die notwendige Abwechslung gesorgt hat.

Stuttgart, im Juli 2006

Frank Huber



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung . . . . .	3
1.3 Gliederung . . . . .	4
<b>2 Dreidimensionale Kontinuumsmechanik und Finite Element Methode</b>	<b>5</b>
2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	5
2.1.1 Mechanische Variablen . . . . .	5
2.1.2 Bilanzgleichungen . . . . .	5
2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik . . . . .	6
2.2 Methode der Finiten Elemente . . . . .	6
2.2.1 Die schwache Form des Randwertproblems . . . . .	7
2.2.2 FE-Diskretisierung . . . . .	7
2.2.3 Linearisierung . . . . .	8
<b>3 Klassische Materialtheorien</b>	<b>11</b>
3.1 Allgemeines . . . . .	11
3.2 Plastizitätstheorie . . . . .	12
3.2.1 Fließtheorie (Inkrementelle Plastizitätstheorie) . . . . .	12
3.3 Kontinuumsschädigungsmechanik . . . . .	14
3.3.1 Isotropes 1-Parameter Schädigungsmodell . . . . .	14
<b>4 Werkstoffcharakteristik von Beton und Betonstahl</b>	<b>19</b>
4.1 Beton . . . . .	19
4.1.1 Einführung . . . . .	19
4.1.2 Einaxiale Beanspruchung . . . . .	19
4.1.3 Biaxiale Beanspruchung . . . . .	21

4.1.4	Triaxiale Beanspruchung . . . . .	22
4.2	Betonstahl . . . . .	24
4.3	Verbund zwischen Beton und Betonstahl . . . . .	25
4.3.1	Verbundwirkung . . . . .	25
4.3.2	Rissverzahnung und Dübelwirkung der Bewehrung . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Betonmodellierung</b>	<b>29</b>
5.1	Elastoplastisches Mehrflächenmodell mit netzbezogenem Entfestigungsmodul	29
5.1.1	Beschreibung der Versagensfläche des Mehrflächenmodells . . . . .	29
5.1.2	Evolutionsgesetze für Verfestigung und Entfestigung . . . . .	32
5.1.3	Diskussion der gekoppelten Versagensfläche . . . . .	35
5.1.4	Schädigung im lokalen Entlastungszustand . . . . .	35
5.2	Dreidimensionales Schädigungsmodell mit Gradientenerweiterung . . . . .	36
5.2.1	Dreidimensionale Schädigungsfunktion . . . . .	36
5.2.2	Gradientenerweiterung . . . . .	38
5.2.3	Finite-Element Formulierung . . . . .	39
5.2.4	Isotrope skalare Gradientenschädigung . . . . .	41
5.3	Vergleich: Schädigungsmodell - Elastoplastisches Mehrflächenmodell . . . . .	42
5.3.1	Materielle Nichtlinearität . . . . .	42
5.3.2	Regularisierung und Rissmodellierung . . . . .	44
5.3.3	FE-Formulierung . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Modellierung der Bewehrung</b>	<b>47</b>
6.1	Bewehrungsmodelle . . . . .	47
6.1.1	Diskrete Modellierung . . . . .	47
6.1.2	Verschmierte Modellierung . . . . .	49
6.1.3	Eingebettete Modellierung . . . . .	50
6.2	Eingebettete Modellierung für perfekten Verbund . . . . .	51
6.2.1	Generierung eines Bewehrungsstabs . . . . .	51
6.2.2	Diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	56
6.2.3	Rebar-Modell . . . . .	57
6.2.4	Testbeispiel . . . . .	59
6.3	Erweitertes Rebar-Modell für nachgiebigen Verbund . . . . .	60
6.3.1	Dreidimensionale Verbundmodellierung . . . . .	61
6.3.2	Analogie zur FE-Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung	65
6.4	Konstitutivgesetze für die Bewehrung . . . . .	67

---

6.4.1	Eindimensionale Elastoplastizität mit isotroper Verfestigung . . . . .	68
6.4.2	Eindimensionales Verbund-Konstitutivgesetz . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt</b>	<b>73</b>
7.1	Einführung . . . . .	73
7.1.1	Analyse von Stahlbetonquerschnitten . . . . .	73
7.1.2	Wahl des Elementkoordinatensystems . . . . .	74
7.2	Lokale Formulierung im "dreidimensionalen Balkenkontinuum" . . . . .	75
7.2.1	Beschreibung der Balkenkinematik . . . . .	75
7.2.2	Modellierung mehrteiliger Querschnitte . . . . .	80
7.2.3	Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung . . . . .	82
7.2.4	Kondensation der konstitutiven Gleichungen ( $3D \Rightarrow 1D$ ) . . . . .	84
7.2.5	Beispiele . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>91</b>
8.1	Beton . . . . .	91
8.1.1	L-förmige Scheibe . . . . .	91
8.1.2	Gekerbter Biegebalken PCT-2D . . . . .	97
8.1.3	Gekerbter Torsionsbalken . . . . .	102
8.2	Stahlbeton . . . . .	107
8.2.1	Stahlbetonbalken OA1 . . . . .	107
8.2.2	Stahlbetonbalken mit nachgiebigem Verbund . . . . .	112
8.2.3	Stahlbetonstütze . . . . .	117
8.2.4	Stahlbetonkonsole . . . . .	123
8.3	Zusammenfassung der Beispiele . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	131
9.2	Ausblick . . . . .	133
<b>A</b>	<b>Notation &amp; Tensorrechnung</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Numerische Behandlung des Mehrflächenmodells</b>	<b>139</b>
<b>C</b>	<b>Transformation zwischen globalen und lokalen Koordinatensystemen</b>	<b>147</b>
<b>D</b>	<b>Ableitungsoperator des dreidimensionalen Balkenelements</b>	<b>151</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

*“Jeder Tag, an dem du nicht lächelst, ist ein verlorener Tag”*

*Charles Spencer Chaplin (1889-1977)*

### 1.1 Motivation

Bereits in der Römerzeit wurde ein Baustoff, das sogenannte *Opus Caementitium* (auch römischer Beton genannt), bestehend aus einem Gemisch von gebranntem Kalk, Wasser, Sand und Bruchsteinen, zum Bau von Äquadukten eingesetzt. Dieser römische Beton zeichnete sich durch eine sehr hohe Druckfestigkeit aus. Im 19. Jahrhundert wurden in Frankreich Stahleinlagen in den Beton eingebaut und somit der Eisenbeton bzw. Stahlbeton entwickelt. In Deutschland stellt die 1908 eingeweihte Markuskirche in Stuttgart ein frühes Stahlbetonbauwerk mit dem ersten Stahlbetonkirchturm der Welt dar (siehe Abbildung 1.1). Der Verbundwerkstoff Stahlbeton ist durch das Zusammenwirken zweier unterschiedlicher Werkstoffe, Beton und Stahl, geprägt. Dabei werden die positiven Eigenschaften beider Materialien, die hohe Druckfestigkeit des Betons und die hohe Zugfestigkeit des Stahls, miteinander kombiniert, so dass ein wirtschaftlicher Verbundwerkstoff entsteht.

Für eine wirtschaftliche Bemessung ist es erforderlich, plastische Materialreserven sowie Systemreserven auszunutzen. An dieser Stelle sind einfache Berechnungsmodelle zur Beschreibung der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit und der Tragfähigkeit nicht mehr ausreichend. Vielmehr ist es Aufgabe der heutigen Ingenieurpraxis, eine realitätsnahe und zuverlässige Abbildung komplexer Versagensmechanismen auf lokaler Ebene und am Gesamtsystem sowie entstehender Spannungsumlagerungen bei Plastizitätsvorgängen zu gewährleisten. Dabei sind Werkstoffgesetze zu verwenden, die das reale Materialverhalten ausreichend erfassen.

Zur Lösung strukturmechanischer Probleme wird aufgrund der hohen Leistungsfähigkeit der Rechensysteme vermehrt die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Sie ermöglicht die Umsetzung mathematischer Modelle zur realitätsnahen Abbildung phänomenologischer Materialeigenschaften. Für die Berechnung der Grenzzustände der Tragfähigkeit



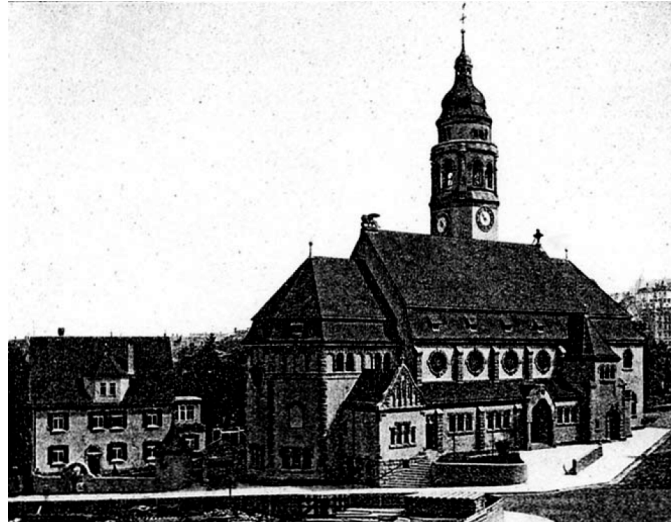


Abbildung 1.1: Die neue Markuskirche in Stuttgart im Jahre 1908

bzw. der Gebrauchstauglichkeit im Rahmen einer nichtlinearen Strukturanalyse mittels der Finite Element Methode ist in der Regel eine Materialmodellierung auf der Makro- oder Mesoebene ausreichend. Zur Übertragung der Strukturgeometrie aus CAD-basierten Werkplänen in das diskretisierte mathematische Modell bietet sich der Einsatz von dreidimensionalen Kontinuumselementen an. Für die Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken ist damit die Verwendung eines dreidimensionalen Werkstoffgesetzes für Beton verbunden. Bewehrungselemente können mit eindimensionalen Linielementen abgebildet werden, wobei häufig eindimensionale, multi-lineare Stoffgesetze für den Bewehrungsstahl gewählt werden. Bei der praktischen Ingenieurbemessung ist letztendlich ein Kompromiss zwischen der Komplexität des mathematischen Modells und dem Aspekt der Wirtschaftlichkeit zu schließen. Dabei sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

- Wahl von dreidimensionalen Materialmodellen mit einer möglichst geringen Anzahl an Material- und Modellparametern
- ausreichende numerische Stabilität in Verbindung mit tolerierbaren Rechenzeiten
- hohe Zuverlässigkeit bei der Beurteilung von Versagensmechanismen

Für die makroskopische Materialbeschreibung des Werkstoffs Beton werden vorrangig Plastizitätsmodelle, Schädigungsmodelle oder eine Kombination von Plastizitäts- und Schädigungsmodellen eingesetzt. Dabei wird die Materialverfestigung bzw. -entfestigung über entsprechende interne Variablen beschrieben. Die Materialcharakteristik des Betonstahls wird üblicherweise mit einem Plastizitätsmodell abgebildet. Bei der Modellierung des Verbunds zwischen Beton und Bewehrung ist wiederum ein Kompromiss zwischen dem Detaillierungsgrad und dem Aufwand bei der Verbunddiskretisierung zu schließen.

Die Methode der Finiten Elemente stellt insgesamt ein vielversprechendes Werkzeug zur Durchführung nichtlinearer Strukturanalysen dar. Allerdings wird bei Verschiebungsmodellen die Gleichgewichtsbedingung nur im schwachen Sinn erfüllt, die Methode ist also ein Näherungsverfahren. Deshalb sollten die Ergebnisse einer numerischen Simulation mittels der FE-Methode auf Genauigkeit überprüft und kritisch hinterfragt werden. Für eine

zuverlässige Bemessung ist die Kenntnis des theoretischen Hintergrunds der FE-Methode und der numerischen Umsetzung der eingesetzten Materialmodelle unabdingbar.

## 1.2 Zielsetzung

In dieser Arbeit soll die nichtlineare Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung dreidimensionaler Werkstoffgesetze für Beton in Verbindung mit einer Diskretisierung der Betonstruktur mit dreidimensionalen Kontinuumselementen durchgeführt werden. Dabei sollen die eingesetzten Materialmodelle für Beton in der Lage sein, physikalische Effekte des Betons phänomenologisch auf makroskopischer Ebene zu beschreiben. Bei der numerischen Umsetzung der Betonmodelle ist besonders auf Effizienz, Stabilität und Robustheit zu achten. Weiter soll das Lokalisierungsproblem durch geeignete Regularisierungsstrategien gelöst werden. Für die Betonmodellierung werden das elastoplastische Mehrflächenmodell nach *Menrath* [75] und ein Schädigungsmodell nach *de Vree et al.* [25] eingesetzt. Das erste Modell wurde zur Analyse von Tragwerken des ebenen Spannungszustands entwickelt, und findet in dieser Arbeit in dreidimensionaler Form Eingang. Zur Regularisierung wird ein netzbezogener Entfestigungsmodul eingesetzt. Das Schädigungsmodell wurde bisher ebenfalls vorrangig zur Analyse von Tragwerken des ebenen Spannungszustands verwendet. Die zugrunde liegende Schädigungsfunktion wird in der vorliegenden Arbeit im dreidimensionalen Verzerrungsraum dargestellt. Durch eine gradientenerweiterte Beschreibung wird die Regularisierung des Schädigungsmodells erreicht. Es wird analog zum Mehrflächenmodell in dreidimensionaler Form zur Betonmodellierung verwendet.

Die Bewehrungsmodellierung stellt einen Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Hier steht der Einsatz des Rebar-Modells im Vordergrund, wodurch eine von der Bewehrungsführung unabhängige Diskretisierung der Betonstruktur möglich wird. Dieser Ansatz soll die direkte Übertragung eines CAD-basierten Bewehrungsplans in die Diskretisierung einer Betonstruktur ermöglichen. Die Verbundwirkung zwischen Beton und Bewehrung wird durch eine erweiterte kinematische Beschreibung des Rebar-Modells infolge zusätzlicher Verbundfreiheitsgrade berücksichtigt. Dabei lässt sich eine Analogie zur FE-Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung (XFEM, SDA) feststellen. Die Bewehrung und der Verbund zwischen Beton und Bewehrung werden mit eindimensionalen Materialmodellen beschrieben, wobei das Verbundmodell verschiedene Verbundbedingungen abbilden soll. Zur Berechnung einfacher Stahlbetonbalken wird alternativ ein Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt basierend auf der Arbeit von *Weimar* [113] formuliert. Als Materialmodell für Beton wird ein dreidimensionales Werkstoffgesetz ohne Anwendung spezieller eindimensionaler Theorien zum Einsatz kommen. Zu diesem Zweck wird lokal am Materialpunkt eine statische Kondensation der Spannungskomponenten durchgeführt, die entsprechend einer Dimensionsreduktion nicht berücksichtigt werden. Die Bewehrung wird in der Balkenformulierung durch eine verschmierte Modellierung abgebildet.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in den durchgeführten numerischen Simulationen. An verschiedenen Beton- und Stahlbetonstrukturen soll die Anwendbarkeit der beiden Betonmodelle und der eingebetteten Bewehrungsmodellierung überprüft und bewertet werden. Dabei werden sowohl Strukturen des ebenen und des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustands untersucht.

## 1.3 Gliederung

In *Kapitel 2* werden die Grundlagen der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik sowie das zu lösende Randwertproblem im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie kurz dargestellt. Anschließend wird die numerische Lösung des materiell nichtlinearen Randwertproblems mittels der Finite-Element Methode skizziert.

*Kapitel 3* gibt einen Überblick über klassische Materialtheorien. Dabei werden die Grundlagen der Plastizitätstheorie und der Kontinuumsschädigungsmechanik erläutert.

Die Beschreibung der Charakteristik des Werkstoffs Beton unter ein- bzw. mehrdimensionalen Spannungszuständen ist Gegenstand von *Kapitel 4*. Außerdem wird kurz auf den Werkstoff Betonstahl und den Verbund zwischen Beton und Betonstahl eingegangen.

*Kapitel 5* befasst sich mit der Vorstellung zweier unterschiedlicher Betonmodelle. Dabei werden die wesentlichen Aspekte des verwendeten elastoplastischen Mehrflächenmodells nach *Menrath* [75] kurz erläutert. Anschließend wird ein dreidimensional erweitertes Schädigungsmodell mit Gradientenerweiterung vorgestellt. Ein Vergleich beider Modelle beschließt dieses Kapitel.

*Kapitel 6* beinhaltet die Modellierung der Bewehrung. Nach einer kurzen Einführung in verschiedene Bewehrungsmodelle wird die eingebettete Bewehrungsformulierung für perfekten Verbund im Rahmen des Rebar-Modells vorgestellt. Die Erweiterung auf nachgiebigen Verbund wird mittels einer erweiterten kinematischen Beschreibung innerhalb des Rebar-Modells vorgestellt. Anschließend werden die verwendeten Konstitutivgesetze für den Betonstahl und den Verbund skizziert.

Für die Berechnung einfacher Stahlbetonbalken wird in *Kapitel 7* ein Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt basierend auf der Arbeit von *Weimar* [113] vorgestellt. Es wird ein dreidimensionales Werkstoffgesetz für Beton verwendet, das durch anschließende statische Kondensation der nichtberücksichtigten Spannungskomponenten auf die Balkenformulierung reduziert wird. Das Balkenmodell wird abschließend an zwei Beispielen getestet. In *Kapitel 8* wird die Anwendbarkeit der vorgestellten Betonmodelle in Verbindung mit einer eingebetteten Bewehrungsmodellierung anhand mehrerer Beton- und Stahlbetonbeispiele aus der Literatur überprüft und bewertet. Dabei werden sowohl Tragwerke des ebenen Spannungszustands als auch Tragwerke des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustands untersucht.

In *Kapitel 9* folgt eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen und Verbesserungen der eingesetzten Modelle.

# Kapitel 2

## Dreidimensionale Kontinuumsmechanik und Finite Element Methode

### 2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In den folgenden Abschnitten wird ein Überblick über die notwendigen kontinuumsmechanischen Grundbegriffe und Grundgleichungen sowie das Randwertproblem der Kontinuumsmechanik gegeben. Für eine detaillierte Darstellung wird auf die klassischen Werke von *Betten* [12], *Haupt* [42], *Malvern* [70], *Marsden & Hughes* [72], *Stein & Barthold* [103], *Truesdell & Noll* [108] sowie auch auf *Truesdell & Toupin* [109] verwiesen.

#### 2.1.1 Mechanische Variablen

Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  wird aus einer Menge von materiellen Punkten  $\bar{\mathcal{P}}$  des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  gebildet. Die Bewegung des Körpers  $\mathcal{B}$  lässt sich in einem klassischen Kontinuum durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  beschreiben. Als Maß für die Deformation eines Körpers wird in dieser Arbeit unter Annahme einer geometrisch linearen Formulierung in Verbindung mit kleinen Verzerrungen der klassische Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  verwendet.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{Grad}^{\text{sym}} \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte erzeugen Deformationen des Körpers, die wiederum zu Spannungen im Innern des Körpers führen. Wird ein Körper  $\mathcal{B}$  an einer beliebigen Stelle freigeschnitten, so existiert nach dem Cauchy-Theorem eine Abhängigkeit zwischen dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der Schnittfläche und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  auf die Schnittfläche.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Aus (2.2) folgt die Definition des Cauchy-Spannungstensors als in der Schnittfläche wirkende Kraft bezogen auf die deformierte Schnittfläche. Aus diesem Grund wird  $\boldsymbol{\sigma}$  auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet.

#### 2.1.2 Bilanzgleichungen

In diesem Abschnitt werden wichtige Bilanzgleichungen der Mechanik dargestellt. In der klassischen Kontinuumsmechanik wird vorausgesetzt, dass die Masse eines Körpers  $\mathcal{B}$  während der Deformation des Körpers erhalten bleibt. Im Folgenden werden die Bilanz des Impulses und des Drehimpulses in lokaler Form sowie die Clausius–Duhem Ungleichung

angegeben.

Die Impulsbilanz fordert, dass die Summe aller am Kontinuum angreifenden Kräfte gleich der Änderung des Impulses ist. Da in dieser Arbeit quasi-statische Randwertprobleme behandelt werden, können die Trägheitsterme vernachlässigt werden und es ergibt sich die lokale Form der Impulsbilanz in einer materiellen Beschreibung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (2.3)$$

mit der Dichte des Körpers  $\rho$  und den Massenkräften  $\bar{\mathbf{b}}$ . Diese lokale Form der Impulsbilanz wird auch starke Form des Gleichgewichts genannt, da sie punktweise erfüllt wird. Neben der Impulsbilanz muss für das Kontinuum zu jedem Zeitpunkt die Bilanz des Drehimpulses erfüllt werden. Die lokale Form des Drehimpulses liefert die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.4)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden Temperatureinflüsse vernachlässigt, so dass von einer konstanten Temperatur im System ausgegangen werden kann. Daraus folgt die Clausius–Duhem Ungleichung isothermer Prozesse

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\Psi} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.5)$$

mit der Spannungsleistung  $\mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  und der freien Helmholtz Energie  $\Psi$ . Gleichung (2.5) sagt aus, dass die mechanische Dissipation nicht negativ sein darf. Somit muss die Spannungsleistung  $\mathcal{P}$  immer größer oder gleich der Rate der freien Helmholtz Energie sein.

### 2.1.3 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik

Ausgangspunkt zur Lösung des kontinuumsmechanischen Randwertproblems ist die Impulsbilanz aus Gleichung (2.3), die wie oben erwähnt als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet wird. Weiter werden Anfangs- bzw. Randbedingungen für das Randwertproblem benötigt. Die Oberfläche des betrachteten Körpers kann in ein Gebiet  $\Gamma_D$  mit Verschiebungsrandbedingungen  $\bar{\mathbf{u}}$  und in ein Gebiet  $\Gamma_N$  mit Spannungsrandbedingungen  $\bar{\mathbf{t}}$  unterteilt werden. Diese lauten:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (2.6)$$

Für die Lösung des Randwertproblems stehen die im vorigen Abschnitt dargestellten Bilanzgleichungen in lokaler Form zur Verfügung. Sie bilden ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen mit den unbekannt Variablen  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  zur Beschreibung des Zustands eines Körpers. Nachdem mehr unbekannte Variablen als Gleichungen vorhanden sind, ist die Einführung weiterer Gleichungen in Form von Konstitutivgesetzen erforderlich. Eine universelle Beschreibung des Materialverhaltens von Werkstoffen ist nicht möglich, da verschiedene Werkstoffe sehr unterschiedliches Materialverhalten aufweisen. Dabei muss die Einhaltung der Clausius–Duhem Ungleichung (2.5) durch die entsprechende Materialformulierung gewährleistet sein.

## 2.2 Methode der Finiten Elemente

Zur numerischen Lösung des Randwertproblems werden in der Regel variationelle Formulierungen in Verbindung mit Diskretisierungsverfahren eingesetzt. Im Rahmen dieser

Arbeit wird als Diskretisierungsverfahren die bekannte Finite-Element Methode (FEM) verwendet. Sie beruht auf der Idee, einen Körper  $\mathcal{B}$  in endliche (=finite) Teilgebiete bzw. Teilkörper  $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}$  zu zerlegen. Dabei werden die dreidimensionalen Funktionen, z.B. das Verschiebungsfeld, in diesen Teilbereichen  $\mathcal{B}^e$  diskretisiert. Somit wird das kontinuierliche Randwertproblem in ein mathematisches System mit einer endlichen Anzahl von Gleichungen überführt. Im nächsten Abschnitt wird kurz auf die Charakteristik der Finite-Element Methode eingegangen. Eine detaillierte Darstellung ist in der Literatur bei *Bathe* [5], *Belytschko et al.* [11], *Braess* [14], *Hughes* [51], *Wriggers* [117] und *Zienkiewicz & Taylor* [118] zu finden.

### 2.2.1 Die schwache Form des Randwertproblems

Die numerische Lösung des Randwertproblems in starker Form ist selten möglich, deshalb wird das Randwertproblem in die schwache Form mit Hilfe der Galerkin-Methode gebracht. Die lokale Gleichgewichtsbedingung (2.3) und die entsprechende Spannungsrandbedingung (2.6)<sub>2</sub> werden mit einer Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  gewichtet und anschließend über den Körper  $\mathcal{B}$  bzw. über den Rand des Körpers  $\Gamma$  integriert. Die Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  muss dabei stetig differenzierbar sein und die Verschiebungsrandbedingungen (2.6)<sub>1</sub> in  $\Gamma_D$  einhalten. Nach Anwendung der partiellen Integration lässt sich mit dem Gaußschen Integralsatz und unter Einbindung der kinematischen Randbedingung (2.6)<sub>1</sub> und der kinematischen Gleichung (2.1) die schwache Form des Gleichgewichts in ein Galerkin Funktional überführen.

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV}_{\delta W_{int}} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA}_{\delta W_{ext}} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Durch Interpretation der Testfunktion als virtuelle bzw. gedachte Verschiebung ergibt sich aus Gleichung (2.7) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV). Dabei wird die gesamte virtuelle Arbeit  $\delta W$  in einen Anteil aus innerer virtueller Arbeit  $\delta W_{int}$  und einen Anteil aus äußerer virtueller Arbeit  $\delta W_{ext}$  aufgeteilt. Das PvV besagt, dass im Falle des Gleichgewichts die Summe aus innerer virtueller Arbeit  $\delta W_{int}$  und äußerer virtueller Arbeit  $\delta W_{ext}$  gleich Null sein muss.

Das Gleichgewicht wird in der schwachen Form (2.7) nicht mehr punktweise, sondern nur noch im integralen Sinne erfüllt. Somit kann die Gleichgewichtsbedingung an einem bestimmten Punkt verletzt werden. Dieser Sachverhalt muss bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente berücksichtigt werden, damit eine Aussage über die Güte der Lösung gewonnen werden kann.

### 2.2.2 FE-Diskretisierung

In diesem Abschnitt wird von einer tensoriellen Darstellung zu einer Vektor- bzw. Matrixdarstellung gewechselt. Zunächst wird ein Körper  $\mathcal{B}$  in  $n_{ele}$  Finite Elemente aufgeteilt mit der Bedingung

$$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathcal{B}^e, \quad (2.8)$$

die Summe aller Finiten Elemente muss somit den gesamten Körper wiedergeben. Jedes Element kann in  $n_{iel}$  Elementknoten mit diskreten Elementknotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  unterteilt werden. Die Feldgrößen aus Gleichung (2.7) können mit den Knotenverschiebungen



$\mathbf{d}$  und den Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  elementweise approximiert werden, wie zum Beispiel das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ . Im Allgemeinen gibt der diskretisierte Verschiebungsverlauf nicht den wirklichen Verlauf der Verschiebungen wieder, sondern stellt eine Näherung dar. Unter Anwendung der kinematischen Gleichung (2.1) werden die Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  analog approximiert.

$$\mathbf{u}^h := \mathbf{N} \mathbf{d} \quad \boldsymbol{\epsilon}^h := \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \delta \mathbf{u}^h := \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \quad \delta \boldsymbol{\epsilon}^h := \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}^e \quad (2.9)$$

Der kinematische Operator  $\mathbf{B}$  setzt elementweise die Verzerrungen mit den Knotenverschiebungen in Beziehung. Die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts  $G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \approx G(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h)$  ergibt sich durch Einsetzen der Verläufe von Gleichung (2.9) in die schwache Form des Gleichgewichts (2.7).

$$G(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d}^T \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{f}_{int}^e} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \bar{\mathbf{b}} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA}_{-\mathbf{f}_{ext}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d} \quad (2.10)$$

Der Assemblierungsoperator  $\bigcup_{e=1}^{n_{ele}}$  symbolisiert den Zusammenbau aller Finiten Elemente nach der Direkten Steifigkeitsmethode. Die inneren und äußeren Elementknotenkräfte werden durch  $\mathbf{f}_{int}^e$  und  $\mathbf{f}_{ext}^e$  definiert. Durch die Assemblierung werden die globalen inneren und äußeren Systemknotenkräfte  $\mathbf{F}_{int}$  und  $\mathbf{F}_{ext}$  sowie der Vektor der globalen Systemfreiheitsgrade  $\mathbf{D}$  ermittelt.

$$\mathbf{F}_{int} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{int}^e \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{ext}^e \quad \delta \mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d} \quad (2.11)$$

Daraus folgt das algebraische Gleichungssystem

$$G(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{D} [\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}] = 0. \quad (2.12)$$

Diese Gleichung muss für beliebige  $\delta \mathbf{D}$  gelten. Dies führt schließlich auf das diskrete globale Gleichungssystem

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (2.13)$$

Dieses Gleichungssystem besagt, dass die inneren mit den äußeren Knotenkräften im Gleichgewicht stehen.

### 2.2.3 Linearisierung

Für nichtlineare Problemstellungen ist das globale Gleichungssystem (2.13) mit einem iterativen Verfahren zu lösen. Zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems wird im Allgemeinen das Newton–Raphson Verfahren verwendet. Dabei wird die diskrete Gleichgewichtsbeziehung (2.13) linearisiert. Diese muss in folgende Form gebracht werden

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) := \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

mit dem Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  als Differenz zwischen den inneren und äußeren Kräften. Das Gleichgewicht ist erreicht, wenn das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  während der Iteration verschwindet. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die externen Kräfte nicht von der

Deformation abhängen, und die Nichtlinearität in (2.14) auf den Einsatz nichtlinearer Werkstoffmodelle zurückzuführen ist. Aus einer Taylorreihenentwicklung des Residuums  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  zu einem bestimmten inkrementellen Lastschritt im Iterationsschritt  $i + 1$  folgt die linearisierte Form des Gleichgewichts.

$$\text{Lin } \mathbf{R}(\mathbf{D}_{i+1}) := \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} [\Delta \mathbf{D}_{i+1}] = \mathbf{0} \quad \text{mit } \Delta \mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_{i+1} - \mathbf{D}_i \quad (2.15)$$

Dies führt auf das linearisierte globale Gleichungssystem,

$$\mathbf{K}_i \Delta \mathbf{D}_{i+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{D}_i) \quad (2.16)$$

mit der globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i$  zum Iterationsschritt  $i$

$$\mathbf{K}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_i} \quad (2.17)$$

und dem Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_i)$  zum Iterationsschritt  $i$

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}_i) - \mathbf{F}_{ext}. \quad (2.18)$$

Durch den elementweisen Zusammenbau der Elementgrößen werden die entsprechenden globalen Größen bestimmt.

$$\mathbf{K}_i := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_i^e \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_i^e \quad \Delta \mathbf{D}_{i+1} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \quad (2.19)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen und die Elementresiduen werden folgendermaßen ermittelt:

$$\mathbf{k}_i^e = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{tan,i} \mathbf{B} dV \quad \mathbf{r}_i^e = \mathbf{f}_{int,i}^e - \mathbf{f}_{ext}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV - \mathbf{f}_{ext}^e \quad (2.20)$$

Die Ableitung der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  nach den Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  definiert die Materialmatrix  $\mathbf{C}_{tan,i}$  zu

$$\mathbf{C}_{tan,i} := [\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\epsilon}]_i. \quad (2.21)$$

In den anschließenden Kapiteln wird die erforderliche Materialbeschreibung zur Spezifizierung der Spannungen und der Materialmatrix ausführlich erläutert.





# Kapitel 3

## Klassische Materialtheorien

### 3.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden klassische Materialmodelle zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien diskutiert. Zur Beschreibung des konkreten Materialverhaltens müssen zusätzlich zu den Bilanzgleichungen aus Abschnitt 2.1.2 spezielle Konstitutivgesetze formuliert werden. Die Materialgleichungen definieren die lokale Spannungsantwort in Abhängigkeit der Geschichte der lokalen Deformation. Dabei kann entweder elastisches oder inelastisches Materialverhalten vorliegen. Im Falle inelastischen Materialverhaltens wird die lokale Belastungsgeschichte durch Einführen *interner Variablen* charakterisiert. Da die Belastungsgeschwindigkeiten in der Realität häufig sehr niedrig sind, wird in dieser Arbeit eine Ratenunabhängigkeit bei der Materialmodellierung angenommen, man spricht daher auch von einer quasi-statischen Betrachtungsweise. Prinzipiell lassen sich drei verschiedene Grundtypen der quasi-statischen Materialmodellierung unterscheiden, siehe Abbildung 3.1. Es sind dies die Elastizitätstheorie mit dem Sonderfall der linearen Elastizität, die Plastizitätstheorie und die Schädigungsmechanik. Eine realitätsnahe Beschreibung der Materialantwort kohäsiver Reibungsmaterialien wird durch Kombination von Plastizität und Schädigung erzielt. Im Rahmen dieser Arbeit wird vereinfachend davon ausgegangen, dass einer der beiden Mechanismen dominant gegenüber dem anderen Mechanismus ist. Dementsprechend werden die Plastizitätstheorie und die Schädigungsmechanik unabhängig voneinander vorgestellt. Eine zusammenfassende Beschreibung der Kopplung von Plastizität und Schädigung ist unter anderem in der Veröffentlichung von *Marotti de Sciarra* [71] zu finden. Die allgemei-

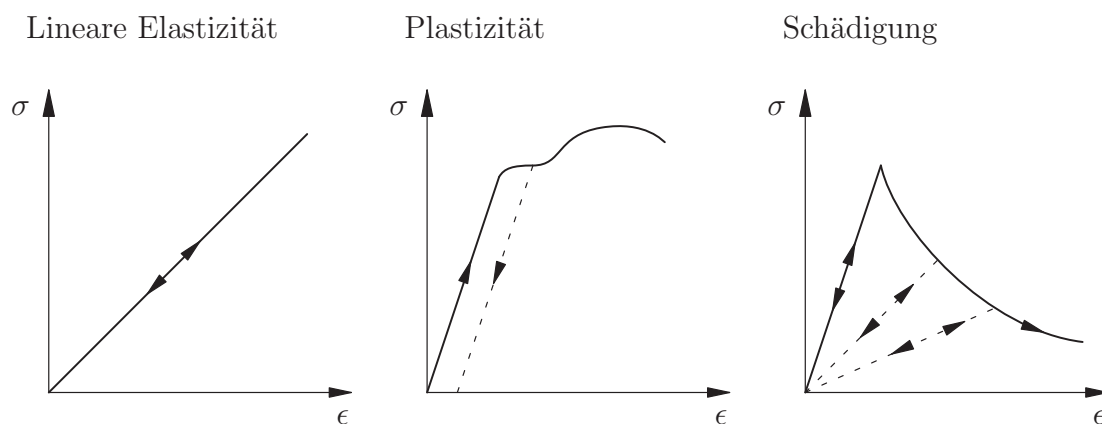


Abbildung 3.1: Eindimensionale Spannungs-Dehnungsdiagramme unterschiedlicher Materialmodelle

ne Herleitung nichtlinearer Materialmodelle beruht auf der Thermodynamik irreversibler Prozesse unter Berücksichtigung interner Variablen, vergleiche *Coleman & Gurtin* [20], *Coleman & Noll* [21], *Truesdell & Noll* [108] und *Truesdell & Toupin* [109].

## 3.2 Plastizitätstheorie

Eine Möglichkeit zur Beschreibung nichtlinearen Materialverhaltens auf makroskopischer Ebene bietet die Plastizitätstheorie. Ziel dieser Theorie ist die phänomenologische Beschreibung der Deformationsentwicklung unter mechanischer Beanspruchung. Häufig wird die Nichtlinearität durch plastische Deformationen in der Spannungs-Dehnungsbeziehung erzeugt. Bei vollständiger Entlastung bleiben irreversible Dehnungen vorhanden, die elastischen Materialparameter erfahren allerdings keine Veränderung, so dass eine elastische Entlastung vorliegt. Im Folgenden werden die Grundlagen der Plastizitätstheorie dargestellt, für eine ausführliche Beschreibung wird auf die Literatur verwiesen. In der Plastizität sind zwei Varianten zu finden, die Deformationstheorie nach *Hencky* [43] und die Fließtheorie von *Prandtl & Reuss* [95]. In den heutigen Plastizitätsformulierungen wird nahezu ausschließlich die Fließtheorie verwendet, da die Deformationstheorie lediglich einen Zusammenhang zwischen den totalen Spannungen und Verzerrungen liefert, der nicht immer eindeutig ist.

### 3.2.1 Fließtheorie (Inkrementelle Plastizitätstheorie)

Unter der Annahme kleiner Verzerrungen lässt sich der Verzerrungstensor  $\epsilon$  additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil  $\epsilon^{el}$  und  $\epsilon^{pl}$  zerlegen.

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} \quad (3.1)$$

Die freie Energie  $\Psi$  kann nach *Lubliner* [69] in der Plastizität ebenso in einen elastischen Anteil  $\Psi^{el}$  und einen plastischen Anteil  $\Psi^{pl}$  aufgeteilt werden. Dabei wird der elastische Anteil in Abhängigkeit der Gesamtverzerrungen  $\epsilon$  und der internen Variablen  $\epsilon^{pl}$  angegeben, der plastische Anteil wird in Abhängigkeit der internen Variablen  $\kappa$  formuliert.

$$\Psi(\epsilon, \epsilon^{pl}, \kappa) = \Psi^{el}(\epsilon, \epsilon^{pl}) + \Psi^{pl}(\kappa) = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon^{pl}) : \mathcal{C}^{el} : (\epsilon - \epsilon^{pl}) + \Psi^{pl}(\kappa) \quad (3.2)$$

Das Ver- bzw. Entfestigungsverhalten wird allgemein durch die Funktion  $\Psi^{pl}$  wiedergegeben. Durch Auswertung der Clausius–Duhem Ungleichung (2.5) nach *Coleman & Noll* [21] bzw. *Coleman & Gurtin* [20] erhält man die Definition der Spannungen  $\sigma$  als konjugierte Größe zu den elastischen Verzerrungen

$$\sigma := \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^{el}} = \mathcal{C}^{el} : (\epsilon - \epsilon^{pl}) \quad (3.3)$$

und die verbleibende Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl} + \mathbf{q} \cdot \dot{\kappa} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \quad (3.4)$$

Hierbei sind  $\mathbf{q}$  die im Spannungsraum und  $\kappa$  die im Verzerrungsraum definierten internen Variablen. Diese können allgemein durch (3.5) in Beziehung gesetzt werden.

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(\kappa) \quad (3.5)$$

Zur Begrenzung des elastischen Bereichs wird die Fließfunktion  $F$  definiert zu

$$F = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) - \sigma_y(\boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad (3.6)$$

mit der Vergleichsspannung  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  und der Fließspannung  $\sigma_y(\boldsymbol{\kappa})$ . Unter Anwendung des Postulats vom Maximum der Dissipation kann die Dissipationsungleichung (3.4) in ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Fließfunktion (3.6) als Nebenbedingung überführt werden. Der hierzu erforderliche Lagrange Multiplikator  $\dot{\lambda}$  wird in der Plastizitätstheorie mit dem plastischen Multiplikator identifiziert. Die Bedingung für Stationarität lautet dann

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \dot{\lambda}F = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \dot{\lambda}(f - \sigma_y) \rightarrow \text{stat.} \quad (3.7)$$

Auswerten der Stationaritätsbedingung (3.7) und Einführen des plastischen Potentials  $Q = F$  führt mit dem plastischen Fluss  $\mathbf{m}$  auf die Fließregel

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} - \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad \text{mit} \quad \mathbf{m} := \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.8)$$

und die Evolutionsgleichung der internen Variablen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{k} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} := \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.9)$$

sowie die Be- und Entlastungsvorschriften in Form der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen und die Konsistenzbedingung.

$$F \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad F \dot{\lambda} = 0; \quad \dot{F} \dot{\lambda} = 0 \quad (3.10)$$

Die Evolutionsgleichung des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}$  wird durch Auswerten der Konsistenzbedingung aus (3.10) erhalten

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathcal{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{n} : \mathcal{C}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.11)$$

mit dem Gradienten  $\mathbf{n}$  der Fließfläche. Aus der Evolutionsgleichung der internen Variablen im Spannungsraum wird der Verfestigungsmodul  $\mathbf{H}$  bestimmt.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad (3.12)$$

Allgemein unterscheidet man zwischen isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung. Aus der Ratenbeziehung zwischen den Spannungen und Verzerrungen  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}_{tan}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  folgt die Definition des vierstufigen elastoplastischen Materialtensors

$$\mathcal{C}_{tan}^{ep} = \mathcal{C}^{el} - \frac{\mathcal{C}^{el} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathcal{C}^{el}}{\mathbf{n} : \mathcal{C}^{el} : \mathbf{m} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}}. \quad (3.13)$$

Infolge der Herleitung über das Postulat der maximalen Dissipation entspricht die Fließrichtung  $\mathbf{m}$  dem Gradienten  $\mathbf{n}$  der Fließfläche. Deshalb wird eine derartige Fließregel auch als *Normalenregel* und die zugehörige Plastizitätsformulierung als *assoziiert* bezeichnet. Eine assoziierte Plastizitätsformulierung bedingt die *Konvexität* der Fließfläche und führt bei konsistenter Linearisierung zu symmetrischen elasto-plastischen vierstufigen Materialtensoren. Bei nichtassoziierten Plastizitätsformulierungen wird das plastische Potential  $Q$  unabhängig von der Fließfläche  $F$  definiert, so dass sich hier unsymmetrische Tangentenoperatoren ergeben.

### 3.3 Kontinuumsschädigungsmechanik

Die Kontinuumsschädigungsmechanik erlaubt die Beschreibung der Degradation eines Materials infolge der Entstehung und des Zusammenschlusses von Mikrorissen und anderen Mikrodefekten. Diese Veränderung der Mikrostruktur bewirkt makroskopisch eine Steifigkeitsreduktion des Materials. Im Fall der isotropen Kontinuumsschädigungsmechanik wird die Schädigungsvariable  $d := A_d/A_0$  zur Beschreibung der Materialdegradation eingeführt mit dem Wertebereich  $0 \leq d \leq 1$ . Dabei wird die ungeschädigte Fläche mit  $A_0$ , die geschädigte Fläche mit  $A_d$  gekennzeichnet. Der Fall  $d = 0$  beschreibt den ungeschädigten Ausgangszustand,  $d = 1$  den Zustand vollständiger Schädigung des Materials. Es ist zu bemerken, dass mit einer skalaren Schädigungsvariable  $d$  nur die Degradation eines Materialparameters, üblicherweise des Elastizitätsmoduls  $E$  beschrieben werden kann. Somit bleibt die Querdehnzahl  $\nu$  unverändert. Im allgemeinen Fall der isotropen Schädigung muss eine zusätzliche Schädigungsvariable eingeführt werden, um die Degradation beider Materialparameter unabhängig voneinander beschreiben zu können, vergleiche Ju [56]. Vorteile der isotropen Schädigung sind ihre Einfachheit, ihre hohe Effizienz und relativ gute Genauigkeit für eine Vielzahl praktischer Anwendungen unter proportionalen Belastungszuständen. Für komplexeres Materialverhalten wird im Allgemeinen eine anisotrope Kontinuumsschädigungsmechanik eingesetzt. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur ein isotropes Schädigungsmodell verwendet, auf weitere Ausführungen zu anisotroper Schädigung wird hier verzichtet.

In der Kontinuumsmechanik wird ein Körper trotz Schädigung als Kontinuum betrachtet. Zur Berücksichtigung der Materialschädigung wird in der vorliegenden Arbeit das *Konzept der effektiven Spannungen* nach Rabotnov [92] in Verbindung mit der *Hypothese der Verzerrungsäquivalenz* von Lemaître [68] verwendet. In diesem Fall entsprechen die Verzerrungen  $\epsilon$ , die im geschädigten Material  $\mathcal{C}^{ed}$  unter den nominalen Spannungen  $\sigma$  auftreten, denen des ungeschädigten Materials  $\mathcal{C}^{el}$  unter den effektiven Spannungen  $\hat{\sigma}$ .

$$\epsilon = \mathcal{C}^{el-1} : \hat{\sigma} = \mathcal{C}^{ed-1} : \sigma \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (3.14)$$

Durch Auswerten der Gleichung (3.14) erhält man den vierstufigen Materialtensor der Elasto-Schädigung  $\mathcal{C}^{ed}$  als Abbildung des Elastizitätstensors  $\mathcal{C}^{el}$  vom effektiven Spannungsraum in den physikalischen Raum.

$$\mathcal{C}^{ed} := (1-d) \mathcal{C}^{el} \quad (3.15)$$

Das *Konzept der effektiven Spannungen* wird bei verzerrungsbasierten Materialmodellen angewendet. Diese beruhen auf der Annahme, dass die Evolution der Schädigung direkt durch die Geschichte der totalen Verzerrungen beschrieben werden kann. Sie finden besonders Anwendung bei gesteintartigen Materialien, wie Beton. Im Vergleich zu spannungsbasierten Modellen ist die algorithmische Umsetzung sehr einfach. Analog zum Konzept der effektiven Spannungen existiert das *Konzept der effektiven Verzerrungen*, das hier nicht näher erläutert wird.

#### 3.3.1 Isotropes 1-Parameter Schädigungsmodell

Beim isotropen 1-Parameter Schädigungsmodell wird die freie Energie des geschädigten Kontinuums als Funktion der Verzerrungen  $\epsilon$  und der skalaren Schädigungsvariable  $d$

formuliert,

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = (1 - d) W(\boldsymbol{\epsilon}) = (1 - d) \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.16)$$

sie kann nach (3.16) als die um den Faktor  $d$  reduzierte gespeicherte Energie  $W$  des ungeschädigten Kontinuums interpretiert werden. Einsetzen der Definition der freien Energie aus (3.16) in die Clausius-Duhem Ungleichung nach (2.5) und Auswerten der Clausius-Duhem Ungleichung liefert die Definition der Spannungen als konjugierte Größe zu den Verzerrungen

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.17)$$

sowie die Energiefreisetzungsrate  $Y$  als konjugierte Größe zur Schädigungsvariable

$$Y := -\frac{\partial \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = W \quad (3.18)$$

und die verbleibende Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = Y \dot{d} \geq 0. \quad (3.19)$$

Analog zur Plastizitätsformulierung wird der elastische ungeschädigte Bereich durch eine Schädigungsfunktion  $F_d$  in Abhängigkeit der äquivalenten Verzerrung  $\eta$  und der Schädigungsvariablen  $d$  begrenzt.

$$F_d = f(\eta) - d \quad (3.20)$$

Unter Anwendung des Postulats vom Maximum der Dissipation kann Gleichung (3.19) auch hier als mathematisches Optimierungsproblem mit der Schädigungsfunktion  $F$  als Nebenbedingung formuliert werden. Exemplarisch wird die äquivalente Verzerrung  $\eta$  mit der Energiefreisetzungsrate  $Y$  gleichgesetzt. Die Bedingung für Stationarität lautet dann

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \dot{\kappa} F_d = -Y \dot{d} + \dot{\kappa} (f(Y) - d) \quad \rightarrow \text{stat.} \quad (3.21)$$

mit dem Lagrange Multiplikator  $\dot{\kappa}$ . Die Auswertung von (3.21) führt zur Evolutionsgleichung der Schädigungsvariable  $d$  in Abhängigkeit des Lagrange Multiplikators  $\dot{\kappa}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \dot{d} - \dot{\kappa} \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{d} = \dot{\kappa} \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (3.22)$$

sowie den Karush-Kuhn-Tucker Be- und Entlastungsbedingungen und der Konsistenzbedingung

$$F_d \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad F_d \dot{\kappa} = 0; \quad \dot{F}_d \dot{\kappa} = 0. \quad (3.23)$$

Die Evolutionsgleichung der internen Variable  $\kappa$  wird durch Auswertung der Konsistenzgleichung in (3.23) ermittelt unter Voraussetzung einer monoton steigenden Funktion  $f$ .

$$\dot{\kappa} = \dot{Y} \geq 0 \quad (3.24)$$

Analog kann die interne Variable  $\kappa$  eingeführt werden, um den in der Belastungsgeschichte maximal erreichten Verzerrungszustand zu beschreiben.  $\kappa$  wird deshalb häufig auch als Geschichtsparemeter bezeichnet.

$$d = f(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \max_{-\infty < t < \tau} (\eta(t), \kappa_0) \quad (3.25)$$

Hierin beschreibt  $\kappa_0$  den verzerrungsbasierten Schädigungsschwellenwert. Die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  werden in Abhängigkeit der Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  berechnet

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}_{sec}^{ed} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.26)$$

mit dem Sekantentensor  $\mathbf{C}_{sec}^{ed}$ . Der Tangentenoperator  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  wird durch die Beziehung der Spannungsrate und der Verzerrungsrate definiert.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{d} \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.27)$$

Die Rate für die Schädigungsvariable

$$\dot{d} = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \dot{\eta} = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.28)$$

und die Beziehung

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 & \text{für weitere Schädigung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.29)$$

führen schließlich zu der vierstufigen Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ed}$  der Elasto-Schädigung.

$$\mathbf{C}_{tan}^{ed} = \mathbf{C}_{sec}^{ed} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \mathbf{m}_d \otimes \mathbf{n}_d \quad (3.30)$$

Unter Anwendung des *Konzepts der effektiven Spannungen* ergibt sich der zweistufige Tensor  $\mathbf{m}_d$  zu

$$\mathbf{m}_d := \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.31)$$

während  $\mathbf{n}_d$  als die Normale auf die im Verzerrungsraum definierte Schädigungsfläche nach Gleichung (3.32) berechnet wird.

$$\mathbf{n}_d := \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.32)$$

Die Materialtangente ist damit abhängig von der Definition der äquivalenten Verzerrung  $\eta$  und der Evolution der Schädigung  $d = f(\kappa)$ .

### Evolution der Schädigung

Die Evolution der skalaren Schädigungsvariable  $d$  wird durch eine Schädigungsfunktion beschrieben. Nach Überschreiten eines Schädigungsschwellenwertes  $\kappa_0$  beginnt die Evolution der Schädigung. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine exponentielle Funktion nach Gleichung (3.33) für die Evolution der Schädigung gewählt, vergleiche Abbildung 3.2.

$$d(\kappa) = \begin{cases} 0 & \kappa \leq \kappa_0 \\ 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)}] & \kappa > \kappa_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Eine Grenzwertbetrachtung von (3.33) führt zu

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\overbrace{\kappa_0}^{\rightarrow 0}}{\kappa} \left[ 1 - \alpha + \alpha \overbrace{e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)}}^{\rightarrow 0} \right] \right) = 1 - 0 \cdot [1 - \alpha + 0] = 1, \quad (3.34)$$

## Schädigungsfunktion mit exponentieller Entfestigung

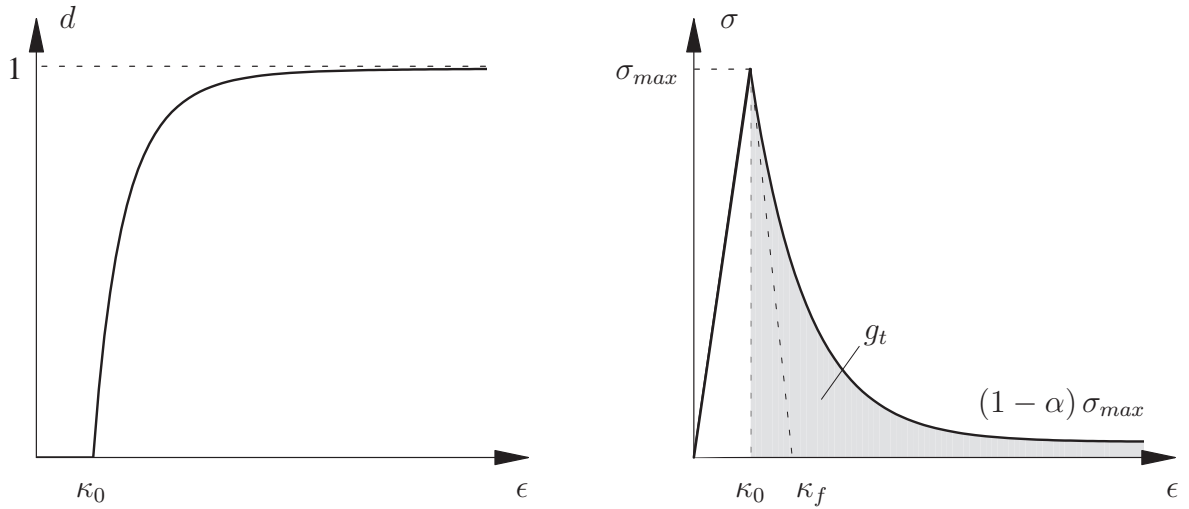


Abbildung 3.2: Evolution der Schädigung und Entfestigungsverhalten

die Schädigung  $d$  strebt im Falle  $\kappa \rightarrow \infty$  gegen den Wert 1, für endliche Werte von  $\kappa$  wird dieser Wert allerdings nicht erreicht. Das bedeutet, dass eine vollständige Schädigung des Materials  $d = 1 \rightarrow A_d = A_0$  im Sinne der Kontinuumschädigungsmechanik nicht auftreten kann. Der Parameter  $\alpha$  gibt zudem die Restfestigkeit des Materials an, zum Beispiel bleibt für einen Wert  $\alpha = 0,90$  eine Restfestigkeit von 10% bestehen, die residuelle Spannung beträgt somit 10% des Maximalwertes. In der Realität ist bei vollständiger Schädigung keine Spannungsübertragung mehr möglich, für Traglastuntersuchungen ist die Resttragfähigkeit sekundär, außerdem führt sie numerisch zu einem stabilen Materialverhalten im entfestigenden Bereich. Der zweite Parameter  $\beta$  beeinflusst die Entfestigungskurve und kann mit der Bruchenergie  $G_t$  in Beziehung gesetzt werden. Die Bruchenergie wird als freiwerdende Energie bei der Rissbildung definiert und stellt einen konstanten Materialparameter dar, vergleiche *Hillerborg et al.* [44]. Aus der Bruchenergie ergibt sich die spezifische Bruchenergie nach Gleichung (3.35)

$$g_t = \frac{G_t}{\ell} \quad (3.35)$$

mit der Breite der Lokalisierungszone bzw. der Breite des Rissbands  $\ell$ . Physikalisch bedeutet  $g_t$  die auf das Einheitsvolumen eines vollständig geschädigten Materials bezogene dissipierte Energie.

Für den Fall  $\alpha = 1$  kann eine direkte Beziehung zwischen dem Parameter  $\beta$  und der Bruchenergie  $G_t$  hergestellt werden. Dazu betrachtet man alternativ die exponentielle Schädigungsfunktion nach *Jirásek & Patzák* [55] in Gleichung (3.36).

$$d(\kappa) = \begin{cases} 0 & \kappa \leq \kappa_0 \\ 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} e^{-\frac{(\kappa - \kappa_0)}{\kappa_f - \kappa_0}} & \kappa > \kappa_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Hier wird  $\kappa_0$  als die maximale elastische Dehnung aus dem Quotienten der Zugfestigkeit  $f_t$  und des Elastizitätsmoduls  $E$  definiert.

$$\kappa_0 = \frac{f_t}{E} \quad (3.37)$$



Der Parameter  $\kappa_f$  steuert die Entfestigungskurve und stellt ein Maß für die Duktilität des Materials dar. Nach *Jirásek & Patzák* [55] wird  $g_t$  in Abhängigkeit von  $\kappa_f$  formuliert.

$$g_t = f_t \left( \kappa_f - \frac{\kappa_0}{2} \right) \Rightarrow \kappa_f = \frac{g_t}{f_t} + \frac{\kappa_0}{2} \quad (3.38)$$

Aus dem Vergleich von (3.33) und (3.36) kann für den Fall  $\alpha = 1$  der Parameter  $\beta$  in (3.39) identifiziert werden.

$$\beta = \frac{1}{\kappa_f - \kappa_0} = \left( \frac{g_t}{f_t} - \frac{f_t}{2E} \right)^{-1} = \left( \frac{G_t}{\ell f_t} - \frac{f_t}{2E} \right)^{-1} \quad (3.39)$$

Daraus lässt sich ableiten, dass  $\beta$  mit zunehmender Bruchenergie  $G_t$  kleiner wird und mit abnehmender Bruchenergie ansteigt. Bei Betrachtung des Einflusses der Rissbandbreite  $\ell$  ergibt sich eine Zunahme von  $\beta$  bei gleichzeitiger Vergrößerung von  $\ell$ . Somit führt eine Zunahme der Breite der Lokalisierungszone verständlicherweise auf ein duktileres Entfestigungsverhalten.

# Kapitel 4

## Werkstoffcharakteristik von Beton und Betonstahl

In diesem Kapitel werden die physikalischen Eigenschaften der Werkstoffe Beton und Betonstahl sowie das Verbundverhalten zwischen Beton und Betonstahl erläutert. Als Ausgangspunkt für praktische Fragestellungen bei reinem Beton ist beispielsweise der Artikel von *Hilsdorf & Reinhardt* [46] zu nennen. Theoretische Aspekte werden unter anderem in *Karihaloo* [59] und *Bažant & Planas* [10] detailliert beschrieben. *Hofstetter & Mang* [48] geben einen umfassenden Einblick in die Behandlung von Stahlbetonstrukturen hinsichtlich praktischer und theoretischer Aspekte.

### 4.1 Beton

#### 4.1.1 Einführung

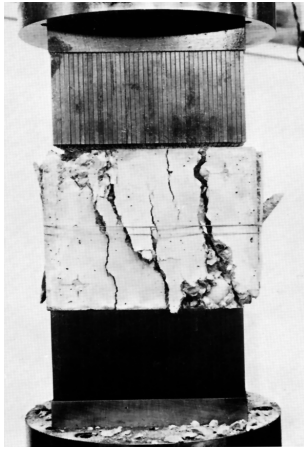
Beton setzt sich aus zwei Phasen, dem Zementstein und dem Betonzuschlag, zusammen. Die beiden Phasen des Betons unterscheiden sich sehr deutlich in ihrer Struktur sowie in ihren Festigkeits- und Verformungseigenschaften. Dieser Sachverhalt führt sowohl makroskopisch als auch auf Ebene der Mikrostruktur zu einer Heterogenität des Materials. Bereits im unbelasteten Zustand sind im Normalbeton Mikrorisse in den Kontaktzonen zwischen Zementstein und Zuschlag vorhanden. Ursache dieser Mikrorisse sind zum einen die geringe Festigkeit der Kontaktzone und andererseits die Behinderung von plastischen Schwindvorgängen sowie Austrocknungsschwindvorgängen im Zementstein durch die steiferen Zuschlagskörner. Diese Mikrorisse stellen den Ausgangspunkt für die Rissentwicklung bei Druck- oder Zugbelastung dar und beeinflussen die mechanischen Eigenschaften und das Verformungsverhalten des Betons.

#### 4.1.2 Einaxiale Beanspruchung

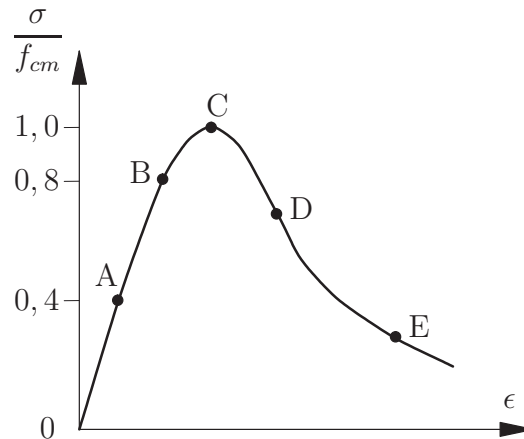
Die Betondruckfestigkeit wird aus einaxialen Druckversuchen ermittelt. Demgegenüber wird die Bestimmung der Betonzugfestigkeit in der Regel indirekt über Biegezug- bzw. Spaltzugversuche durchgeführt.

##### Druckbeanspruchung

Unter einaxialer Druckbeanspruchung verhält sich Beton zunächst nahezu linear-elastisch. Bei etwa 40% der Betondruckfestigkeit  $f_{cm}$  (Abbildung 4.1, Punkt A) beginnen die in der Kontaktzone vorhandenen Mikrorisse parallel zur Belastungsrichtung zu wachsen und breiten sich mit ansteigender Belastung entlang der Grenzschichten, allerdings auch durch



Rissbild nach dem Versagen  
(Nelissen [80])



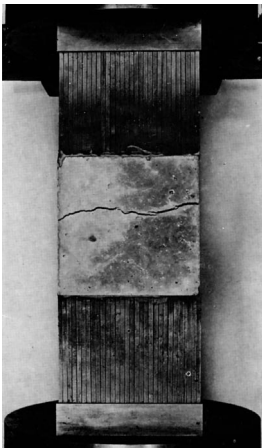
Normiertes Spannungs-Dehnungsdiagramm  
(nach Vonk [112])

Abbildung 4.1: Einaxialer Druckversuch

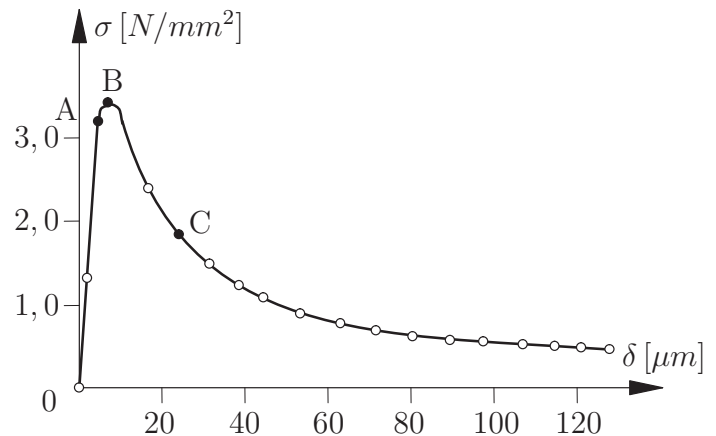
die Zementmatrix aus. Erreicht die Spannung 80% der Betondruckfestigkeit (Abbildung 4.1, Punkt B) vereinigen sich die Mikrorisse, das Gefüge wird dabei kontinuierlich zerstört. Der Beton ist damit vor Erreichen der Druckfestigkeit von feinen Mikrorissen durchzogen, was zu einer Nichtlinearität im Spannungs-Dehnungs-Diagramm im Vorbruchbereich führt. Sobald in einem lokal begrenzten Bereich die Mikrorisse bis auf eine kritische Länge gewachsen sind (Abbildung 4.1, Punkt C) wird die Druckfestigkeit erreicht. Bei lastgesteuerter Beanspruchung kommt es zum schlagartigen Bruch, wohingegen bei verformungsgesteuerter Beanspruchung durch Reduktion der Spannung der entfestigende Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms durchlaufen werden kann (Abbildung 4.1, Punkte C-E).

### Zugbeanspruchung

Analog zur einaxialen Druckbeanspruchung ist der Beton bei Zugbeanspruchung bereits vor der Belastung von Mikrorissen in der Kontaktzone zwischen Betonzuschlag und Zementstein durchzogen. Bei äußerer gleichmäßig verteilter Zugbeanspruchung erfahren diese Risse bis zu ca. 70% der Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  kein großes Wachstum, so dass die Spannungs-Dehnungs-Linie bis zu diesem Punkt einen nahezu linearen Verlauf hat. Bei ansteigender Belastung beginnen die Risse vorrangig in eine Richtung orthogonal zur Belastungsrichtung zu wachsen (Abbildung 4.2, Punkt A). An einer Schwachstelle des Querschnitts, beispielsweise einer Kerbe, entsteht bei Erreichen der Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  an der Kerbwurzel die Prozesszone, ein System sehr feiner parallel verlaufender Mikrorisse (Abbildung 4.2, Punkt B). Es ist zwar noch eine Spannungsübertragung in der Prozesszone möglich, allerdings werden die Spannungen kontinuierlich reduziert (Abbildung 4.2, Punkt C), bis ein ausgeprägter Makroriss entstanden ist. Das Versagen ist auf den geschwächten Querschnitt begrenzt, d.h. es liegt ein diskretes, lokal begrenztes Versagen vor. Außerhalb der Versagenszone findet eine Entlastung der Probe statt. Wie beim Druckversuch kann der entfestigende Bereich nur durch verformungskontrollierte Beanspruchung erreicht werden. Zur Beschreibung des Materialverhaltens von Beton unter Zugbelastung sind somit Spannungskonzentrationen an lokalen Fehlstellen zu berücksichtigen. Bei numerischen



Rissbild nach dem Versagen  
(*Nelissen* [80])



Spannungs-Verschiebungsdiagramm  
(nach *Reinhardt* [94])

Abbildung 4.2: Einaxialer Zugversuch

Traglastanalysen von Betonkörpern wird die Bruchenergie  $G_t$  als Parameter für den Betonwiderstand gegen Zugbeanspruchung eingeführt. Für Biegeversuche schlägt *RILEM* [97] (Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions) folgende Prüfmethode vor: ein gekerbter Biegebalken (siehe Abbildung 4.3 rechts) wird mit einer Einzellast beansprucht, wobei die Last-Verformungskurve bis zum Versagen aufgetragen wird. Die Bruchenergie wird als Fläche unter dem Last-Verformungs-Diagramm bezogen auf die Betonfläche im gekerbten Querschnitt definiert. Sie ist abhängig von der Betondruckfestigkeit und des Größtkorndurchmessers des Betonzuschlags. Es sei zu bemerken, dass *Vonk* [112] analog der Bruchenergie für Zugversagen eine entsprechende Bruchenergie  $G_c$  für Druckversagen motivierte, die das 100-500fache der Zugbruchenergie beträgt. Die Bruchenergiewerte  $G_t$  und  $G_c$  finden als Materialparameter in dem verwendeten Mehrflächenmodell nach *Menrath* [75] Eingang.

### 4.1.3 Biaxiale Beanspruchung

Der einaxiale Spannungszustand aus dem vorigen Abschnitt ist nur als stark idealisierter Zustand möglich. Bei Tragwerken tritt häufig ein mehraxialer Spannungszustand auf. Für zweiaxiale Beanspruchung haben *Kupfer & Gerstle* [66] ausführliche Versuche unter Variation der Spannungsverhältnisse durchgeführt. Das Ergebnis ihrer Arbeit war unter



Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des Biegezugversuchs

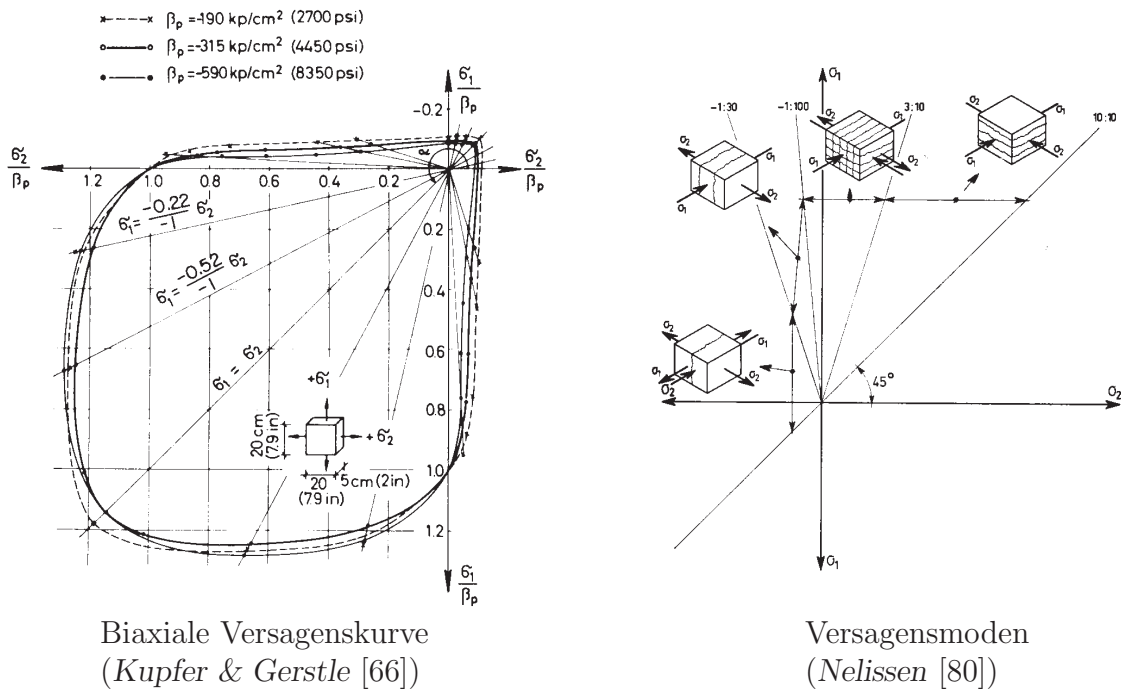


Abbildung 4.4: Biaxialversuche mit Variation des Spannungsverhältnisses  $\sigma_1/\sigma_2$

anderem die einschlägig bekannte Versagenskurve für den zwei axialen Spannungszustand (siehe Abbildung 4.4). Die Festigkeit bei zwei axialer Druckbeanspruchung ist um bis zu 25% größer als die einaxiale Druckfestigkeit. Für den biaxialen Zugspannungszustand ist die Zugfestigkeit mit der Zugfestigkeit der einaxialen Beanspruchung identisch und unabhängig vom Hauptspannungsverhältnis. Bei einem gemischten Spannungszustand wird die aufnehmbare Druckspannung bereits bei geringer Zugspannung maßgeblich reduziert. In Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses ergeben sich unterschiedliche Versagensarten, dargestellt in Abbildung 4.4. Bei biaxialer Zugbeanspruchung entsteht ein Riss orthogonal zur größten Zugspannungsrichtung und zur unbelasteten Oberfläche. Diese Versagensart ändert sich auch bei kombinierter Beanspruchung bis zum Verhältnis Druckspannung : Zugspannung  $< 30$  nicht. Bei weiterer Reduktion der Zugspannung wurden mehrere Risse orthogonal zur Zugspannungsrichtung beobachtet. Im Falle biaxialer Druckbeanspruchung treten vermehrt Risse parallel zur größten Druckspannungsrichtung und parallel zur unbelasteten Oberfläche auf. Ab einem Druckspannungsverhältnis  $\sigma_1 : \sigma_2 = 10 : 3$  ist das Versagen durch Risse parallel zur unbelasteten Fläche des Versuchskörpers charakterisiert.

#### 4.1.4 Triaxiale Beanspruchung

Das Verhalten von Beton unter einem räumlichen Spannungszustand wird anhand von Triaxialversuchen an Betonprobekörpern untersucht. Experimente zur Untersuchung des Verhaltens von Beton unter triaxialer Beanspruchung wurden unter anderem von *van Mier et al.* [110] und *Kotsovos & Newman* [61] durchgeführt. Die Ergebnisse aus Druckversuchen ergaben einen Anstieg der maximalen Druckspannung mit zunehmendem Umschnürungsdruck. Die Bruchart und die Spannungsdehnungslinien eines Triaxialversuchs sind von der Spannungscombination abhängig, *van Mier et al.* [110]. Bei reiner Zugbelastung tritt ein Trennbruch auf, mit steigendem Querdruck geht der Trennbruch in einen

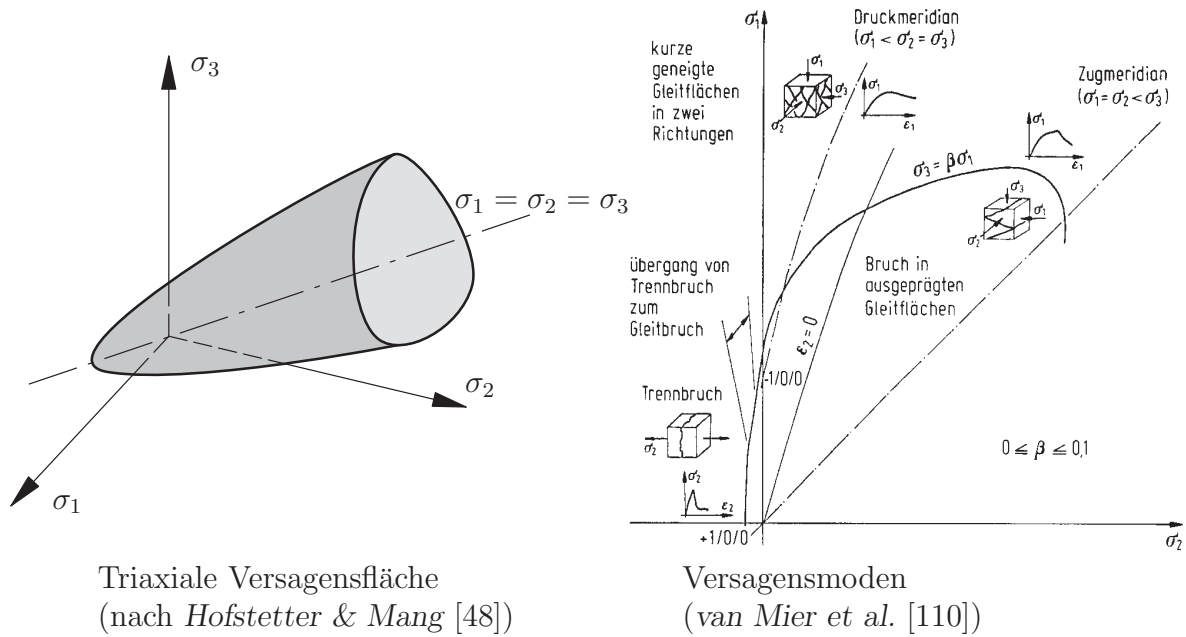


Abbildung 4.5: Versagen in Abhängigkeit des triaxialen Spannungszustands

Gleitbruch mit einem Einzelriss über, bis bei dreiaxialer Druckbeanspruchung Gleitbrüche mit ausgeprägten Gleitflächen entstehen (siehe Abbildung 4.5 rechts).

### Triaxiale Versagensfläche

Ähnlich zur biaxialen Versagenskurve von *Kupfer & Gerstle* [66] wird für triaxiale Beanspruchung eine Versagensfläche im Hauptspannungsraum  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  angegeben, vergleiche beispielsweise *Hofstetter & Mang* [48]. Die Versagensfläche, dargestellt in Abbildung 4.5 links, ist charakterisiert durch konvexe, glatte und nichtlinear verlaufende Meridiane. Bei hydrostatischem Zug nimmt die Versagensfläche in der Deviatorebene einen dreiecksförmigen Verlauf an und geht mit zunehmendem hydrostatischem Druck in eine Kreisform über. Mit den Haigh-Westergaard-Koordinaten  $\xi, \rho, \theta$  kann die Beschreibung eines Punktes auf der Versagensfläche erfolgen. Dabei ist  $\xi$  die Projektion des Einheitsvektors  $\mathbf{e} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$  auf die hydrostatische Achse und  $\rho, \theta$  stellen die Polarkoordinaten in Deviatorebene orthogonal zu  $\xi$  dar.

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \\ \rho &= \sqrt{2 J_2} = |\mathbf{s}| \\ \theta &= \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Versagenspunkte des Zugmeridians sind gekennzeichnet durch einen Lode-Winkel  $\theta = 0^\circ$ , Versagenspunkte des Druckmeridians durch einen Lode-Winkel  $\theta = 60^\circ$ . Nach *Ottosen* [85] gilt für das Verhältnis zwischen Zugmeridian und Druckmeridian in Deviatorebene  $\rho_t/\rho_c$  mit steigendem hydrostatischen Druck:

$$\frac{1}{2} < \frac{\rho_t}{\rho_c} < 1. \quad (4.2)$$

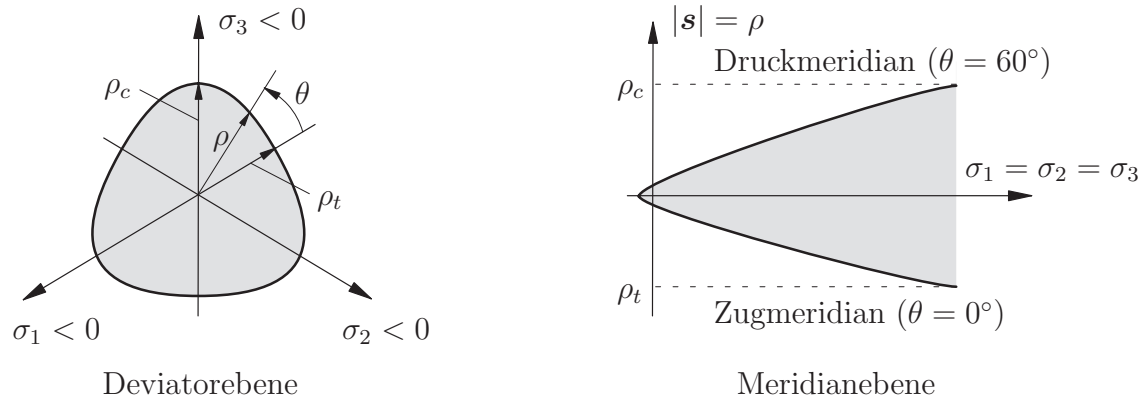
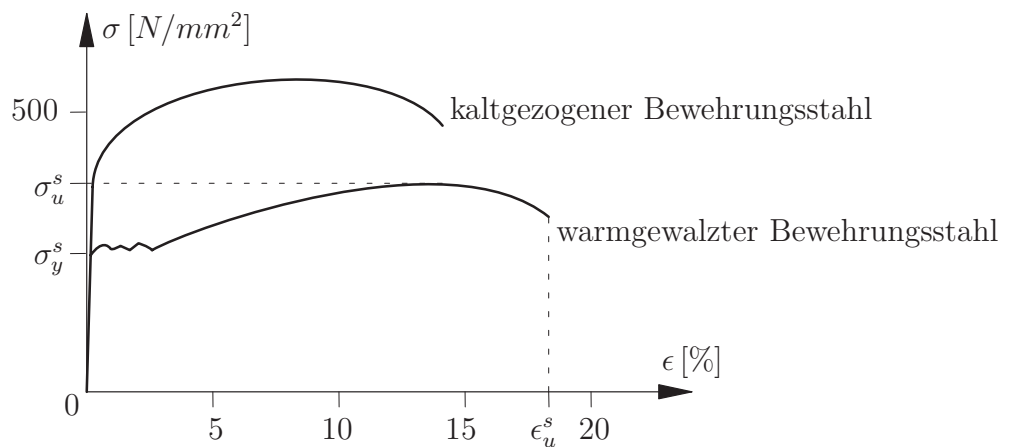


Abbildung 4.6: Triaxiale Versagensfläche in Deviator- und Meridianebene

Zur Berücksichtigung des Versagens unter einem hydrostatischen Druckspannungszustand kommen bei der Betonmodellierung sogenannte *Kappenmodelle* zum Einsatz, vergleiche beispielsweise *Hofstetter et al.* [49] und *Erhart* [34]. Dabei wird die Versagensfläche im hydrostatischen Druckbereich durch eine sich ausdehnende elliptische Kappe begrenzt.

## 4.2 Betonstahl

Betonstahl wird als klassisches Material für die Bewehrung von Betonbauteilen eingesetzt, wobei man zwischen schlaffer Bewehrung und vorgespannter Bewehrung unterscheidet. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Experimente mit schlaffer Bewehrung untersucht, deshalb beschränkt sich Abschnitt 4.2 auf das Materialverhalten von nicht vorgespanntem Stahl. Charakteristisch für das Materialverhalten von Bewehrungsstahl ist der linear elastische Verlauf mit einem Elastizitätsmodul von ca.  $200\,000\text{ N/mm}^2$  im Spannungs-Dehnungsdiagramm bis zur Fließgrenze  $\sigma_y^s$ . Bei warmgewalzten Stählen folgt ein ausgeprägtes Fließplateau mit einer anschließenden Verfestigung bis zur Bruchspannung  $\sigma_u^s$  mit einer hohen Bruchdehnung  $\epsilon_u^s$ , siehe Abbildung 4.7. Die Spannungs-Dehnungslinie ist durch nahezu identische Verläufe im Zug- und Druckbereich charakterisiert. Die Fließ-

Abbildung 4.7: Spannungs-Dehnungslinien für Bewehrungsstahl im Zugbereich (nach *Hofstetter & Mang* [48])



spannungen liegen im Bereich von  $220 - 420 \text{ N/mm}^2$ , die Bruchspannung nimmt Werte zwischen  $340$  und  $500 \text{ N/mm}^2$  an (Hofstetter & Mang [48]). Bei kaltgezogenen Stählen tritt der *Bauschinger Effekt* auf: der Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich erfolgt nach Umkehr der Belastungsrichtung bei einer betragsmäßig geringeren Fließspannung als nach einer Wiederbelastung in der ursprünglichen Belastungsrichtung. Der Bauschinger Effekt ist daher bei zyklischer Belastung zu berücksichtigen. Weiter ist kein ausgeprägtes Fließplateau zu erkennen, die Fließspannung wird hier in entsprechenden Normenwerken abhängig von der Dehnung definiert. Fließspannung und Bruchspannung sind im Vergleich zu warmgewalzten Stählen höher und liegen im Bereich zwischen  $420$  und  $520 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $500$  und  $690 \text{ N/mm}^2$ . Für die Bruchdehnung ergeben sich allgemein Werte zwischen  $8$  und  $16\%$  (Hofstetter & Mang [48]). Zur Verbesserung der Verbundeigenschaften eines Bewehrungsstahls sind bevorzugt Rippenstähle anstelle von Rundstählen einzusetzen.

## 4.3 Verbund zwischen Beton und Betonstahl

Das mechanische Verhalten des Kompositwerkstoffs Stahlbeton unterscheidet sich beträchtlich vom Werkstoffverhalten der Einzelkomponenten. Somit spielt der Verbund zwischen Beton und Stahl für die Materialantwort des Gesamtwerkstoffs eine wichtige Rolle. Eine Spannungsübertragung zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton kann durch Verbundwirkung (Übertragung von Längskräften) sowie Dübelwirkung der Bewehrung (*dowel action* = Übertragung von Schubkräften) erfolgen. Die Rissverzahnung (*aggregate interlock*) ist ein weiterer Mechanismus zur Verstärkung der Tragfähigkeit von gerissenem Beton. Dabei werden Schubspannungen über unebene Risse hinweg übertragen. Die drei Arten der Spannungsübertragung werden in den nächsten Abschnitten erläutert.

### 4.3.1 Verbundwirkung

Das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstrukturen hängt sehr stark vom Verbund zwischen Beton und Stahl ab. Die Verbundmechanismen treten in der Reihenfolge Haftverbund, Scherverbund und Reibungsverbund an der Grenzfläche zwischen Beton und Stahl auf. In Abbildung 4.8 sind die Verbundarten in Abhängigkeit der Relativverschiebungen zwischen Beton und Stahl exemplarisch für einen Rippenstahl und einen walzrauen Rundstahl dargestellt.

#### Haftverbund

Aufgrund chemischer Haftung zwischen Zementgel und Stahloberfläche ist eine Verbundwirkung zwischen Beton und Stahl gegeben. Der Haftverbund wird bereits bei geringen Relativverschiebungen zerstört.

#### Scherverbund

Nach Zerstörung des Haftverbunds ist die mechanische Verkeilung der Stahlrippen mit den dazwischenliegenden Betonkonsolen für die Kraftübertragung verantwortlich. Im Beton entstehen hierbei radiale Zugspannungen. Bei einer zu geringen Betondeckung können diese Ringzugspannungen bei Überschreiten der Betonzugfestigkeit zu Rissen parallel zur



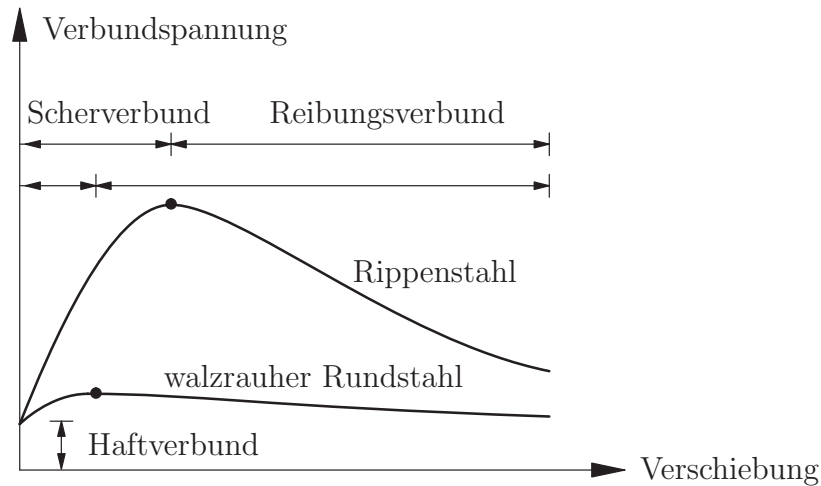


Abbildung 4.8: Einteilung des Verbunds nach *Rehm* [93]

Bewehrung und dem Versagen durch Aufspalten der Betondeckung führen. Für den Fall einer ausreichenden Betondeckung wird zunächst die Porenstruktur zerstört, eine weitere Belastung führt schließlich zum Abscheren der Betonkonsolen zwischen den Stahlrippen.

### Reibungsverbund

Nach dem vollständigen Abscheren der Betonkonsolen ist Verbund nur noch infolge Reibung in der Grenzschicht zwischen Beton und Stahl möglich. Die Intensität der Kraftübertragung wird durch die Beschaffenheit der Stahloberfläche und die Höhe des anliegenden Querdrucks beeinflusst.

### Versagensmechanismen des Verbunds

Beim Scherverbund stützen sich die Stahlrippen gegen den Beton ab. Infolge der konzentrierten Stützkkräfte vor den Rippen entstehen ausgehend von den Rippenspitzen kegelförmige Mikrorisse im Beton. Die Stützkkräfte sind gegen die Stabachse geneigt und können in Komponenten parallel und orthogonal zur Stabachse zerlegt werden. Durch den parallelen Kraftanteil wird die Verbundkraft erzeugt, der orthogonale Teil induziert Zugspannungen in Umfangsrichtung im umliegenden Beton. Diese können zu radialen Rissen führen. Abhängig von der Umschnürung des Betons sind zwei Versagensmechanismen möglich. Bei geringer Betonumschnürung wachsen die radialen Risse kontinuierlich in Richtung der Betonoberfläche an. Beim Erreichen der Betonoberfläche nehmen die Radialspannung und die Verbundspannung schlagartig ab, das Versagen wird als Verbundversagen infolge Spalten bezeichnet.

Eine ausreichende Betonumschnürung verhindert das Spaltversagen. Dies wird erzielt durch genügend große Betondeckung oder durch Einlegen entsprechender transversaler Bewehrung. In diesem Fall entsteht um den Bewehrungsstab eine Gleitebene infolge Abscheren der Betonkonsolen, die weitere Spannungsübertragung erfolgt durch Reibungsverbund. Infolge der weniger rauhen Betongleitebene gegenüber dem Rippenstahl ergibt sich eine deutliche Abnahme der radialen Betondruckspannung und der Verbundspannung. Bei zunehmender Relativverschiebung werden die Betonkonsolen vollständig abgeschert, wodurch es zu einer Glättung der Gleitebene kommt. In Abbildung 4.9 sind die beiden

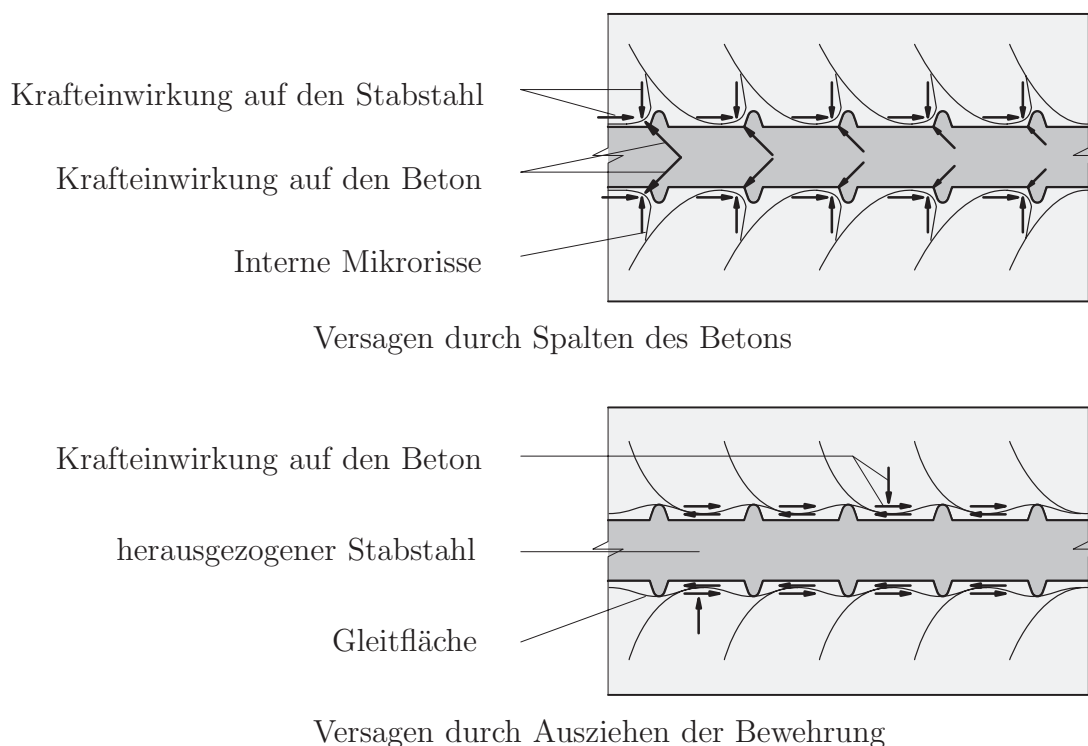


Abbildung 4.9: Versagensarten des Verbunds (*den Uijl & Bigaj* [26])

Versagensmechanismen graphisch dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit soll der Verbund zwischen Beton und Stahl phänomenologisch wiedergegeben werden. Die Berücksichtigung der genauen Versagensmechanismen wird nicht als Ziel verfolgt. Durch geeignete Wahl der Parameter für das Verbundmodell in Abschnitt 6.4.2 wird das Verbundversagen in der numerischen Simulation berücksichtigt.

### 4.3.2 Rissverzahnung und Dübelwirkung der Bewehrung

Ein beträchtlicher Anteil der Schubkräfte wird durch das Verkeilen uneben gebrochener Rissoberflächen, die Rissverzahnung (*aggregate interlock*), übertragen. Die Unebenheit der Risse ist dabei auf die Lage und Größe der hervorstehenden Zuschlagskörner und auf sehr kleine scharfkantige vorstehende Partikel zurückzuführen. Aufgrund der Schubdeformationen parallel zur Rissoberfläche bilden sich Kontaktzonen zwischen überstehenden Zuschlagskörnern, die sich auf gegenüberliegenden Seiten der Rissfläche befinden. Folglich sind in den Kontaktzonen große Kontaktspannungen vorhanden, deren Folge irreversible Deformationen der Zementmatrix sind. Die Schubverformungen führen bei uneben gebrochenen Rissflächen zu einer Vergrößerung der Rissbreite, man spricht daher auch von einer *Rissdilatanz*. Ein anliegender Querdruck behindert die Aufweitung des Risses und führt zu einer besseren Schubkraftübertragung zwischen den gerissenen Betonteilen. Bei einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise ist die Abbildung der Rissverzahnung indirekt über Verwendung einer variablen Schubsteifigkeit abhängig vom Bewehrungsgrad und einer fiktiven Rissdehnung möglich. Zur Berücksichtigung dieses Effekts in lokaler Form ist daher eine Auflösung der Struktur in unterschiedlichen Skalen notwendig.

Ein Teil der Schubkräfte zwischen Rissen kann durch die Bewehrung übertragen werden. Dabei wirkt der Bewehrungsstab wie ein Dübel, der Schubverformungen an Rissflächen

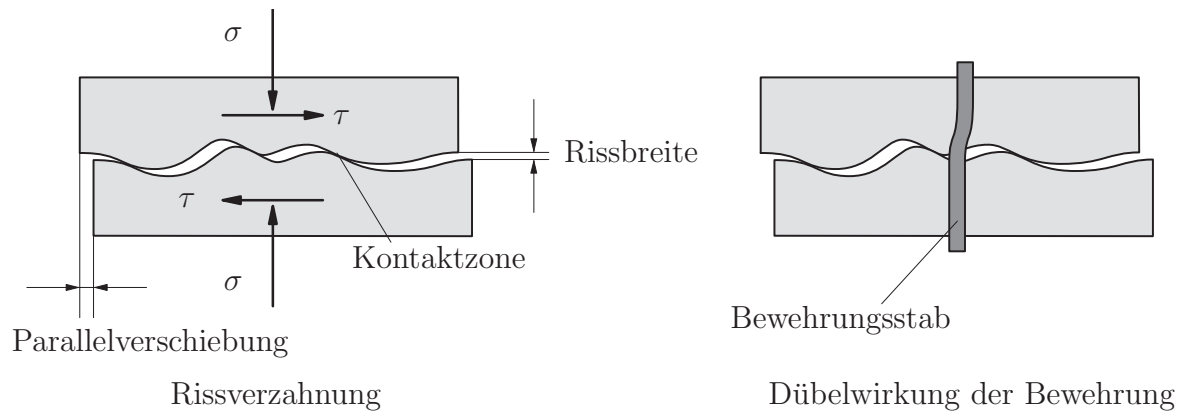


Abbildung 4.10: Rissverzahnung und Dübelwirkung der Bewehrung

behindert. Die Dübelwirkung der Bewehrung (*dowel action*) wird durch lokale Biegung und Scherbeanspruchung des Bewehrungsstabs charakterisiert. Sie ist abhängig von der Höhe der Betondeckung, der Bügelanordnung und dem Durchmesser des Bewehrungsstabs. Die Dübelwirkung der Bewehrung kann in einer numerischen Simulation nur abgebildet werden, wenn Schubdeformationen des Bewehrungsstabs berücksichtigt werden, beispielsweise bei der Modellierung eines Bewehrungsstabs als Biegebalken. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Bewehrungsmodellierung durch Dehnstäbe, eine Berücksichtigung der Dübelwirkung ist hier nicht vorgesehen.

# Kapitel 5

## Betonmodellierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Modellierung des Materialverhaltens von Beton. In den Abschnitten 5.1 und 5.2 werden zwei Materialmodelle mit unterschiedlichen Regularisierungsstrategien vorgestellt: ein elastoplastisches Mehrflächenmodell mit netzbezogenem Entfestigungsmodul und ein Schädigungsmodell mit Gradientenerweiterung. Ein Vergleich beider Materialmodelle beschließt Kapitel 5.

### 5.1 Elastoplastisches Mehrflächenmodell mit netzbezogenem Entfestigungsmodul

Das dreidimensional orientierte Mehrflächenmodell nach *Menrath* [75] wurde als Betonmodell zur Berechnung von ebenen Stahlverbundträgern vorgeschlagen. Ein großer Vorteil des Modells ist die geringe Anzahl an Material- und Modellparametern. Neben dem Elastizitätsmodul  $E_{cm}$  und der Querdehnzahl  $\nu$  sind die Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  und die Druckfestigkeit  $f_{cm}$  des Betons sowie die Zugbruchenergie  $G_t$  und die Druckbruchenergie  $G_c$  zu bestimmen. Zwei zusätzliche Modellparameter  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  steuern die Geometrie der Versagensfläche. *Haufe* [41] hat zur Anwendung des Mehrflächenmodells auf hochfesten Beton zwei weitere Modellparameter  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  als Formbeiwerte des Verfestigungsgesetzes im Druckbereich eingeführt. Während das Mehrflächenmodell in der Arbeit von *Menrath* [75] für ebene Spannungs- und Verzerrungszustände verwendet wurde, geht das Werkstoffmodell analog zu *Haufe* [41] in dieser Arbeit als dreidimensionales Werkstoffgesetz in die Kontinuumsformulierung ein. Dem Mehrflächenmodell liegt die ratenunabhängige Formulierung eines isotropen, elastoplastischen Materialverhaltens mit Ver- bzw. Entfestigung und eine netzbezogene Regularisierung zugrunde. Für eine ausführliche Darstellung des Mehrflächenmodells wird auf die Arbeiten von *Menrath* [75] und *Haufe* [41] verwiesen.

#### 5.1.1 Beschreibung der Versagensfläche des Mehrflächenmodells

Der elastische Bereich wird bei dem verwendeten Mehrflächenmodell durch eine gekoppelte, im Spannungsraum formulierte Versagensfläche begrenzt. Diese Versagensfläche setzt sich aus zwei regulären Drucker-Prager-Kegelflächen  $F_1$  und  $F_2$ , einer Kugelfläche  $F_4$  und einer Hilfsfläche  $F_3$  zusammen (siehe Abbildung 5.1 und 5.2). Im Apexbereich der Fließfläche  $F_1$  tritt eine Singularität des Gradienten der Fließfläche bezüglich der Spannungen auf. Zur numerischen Behandlung dieser Singularitätsstelle wird die Hilfsfläche  $F_3$ , der sogenannte *Inverted cone*, eingeführt.

### Versagensfläche $F_1$

Durch die Drucker-Prager-Teilfläche  $F_1$  wird die Versagensfläche unter reiner Zugbeanspruchung (Z/Z/Z) sowie unter kombinierter Zug- und Druckbeanspruchung (Z/Z/D, Z/D/Z, usw.) definiert.

$$F_1(\mathbf{s}, I_1, \kappa_1) = |\mathbf{s}| + \alpha_1 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{y1}(\kappa_1) \quad (5.1)$$

Dabei stellen  $\mathbf{s}$  den deviatorischen Spannungstensor und  $I_1$  die erste Spannungsinvariante dar. Der Reibungskoeffizient  $\alpha_1$  und die Fließspannung  $\sigma_{y1}$  werden in Abhängigkeit der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_1$  nach Gleichung (5.2) bestimmt.

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_1 f_{cm} - f_{ctm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad \sigma_{y1}(\kappa_1) = \beta_1 \bar{\sigma}(\kappa_1) = \frac{2\gamma_1 f_{cm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \bar{\sigma}(\kappa_1) \quad \kappa_1 = \kappa_t \quad (5.2)$$

Durch die Evolution der Fließspannung  $\sigma_{y1}$  in Anlehnung an die Charakteristik des einaxialen Zugversuchs wird das isotrope Entfestigungsverhalten der Teilfläche  $F_1$  gesteuert, siehe Abschnitt 5.1.2.

### Versagensfläche $F_2$

Der dreiaxiale Druckspannungszustand (D/D/D) wird durch die Drucker-Prager-Teilfläche  $F_2$  charakterisiert

$$F_2(\mathbf{s}, I_1, \kappa_2) = |\mathbf{s}| + \alpha_2 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{y2}(\kappa_2) \quad (5.3)$$

mit den Definitionen von  $\alpha_2$  und  $\sigma_{y2}$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2 - 1} \quad \sigma_{y2}(\kappa_2) = \beta_2 \bar{\sigma}(\kappa_2) = \frac{2\gamma_2}{2\gamma_2 - 1} \bar{\sigma}(\kappa_2) \quad \kappa_2 = \kappa_c \quad (5.4)$$

Aus dem Schnitt dieser Versagensfläche mit der Hauptspannungsebene  $\sigma_1/\sigma_2$  ergibt sich die Versagenskurve unter biaxialer Druckbeanspruchung (D/D) aus Abbildung 4.4. Analog

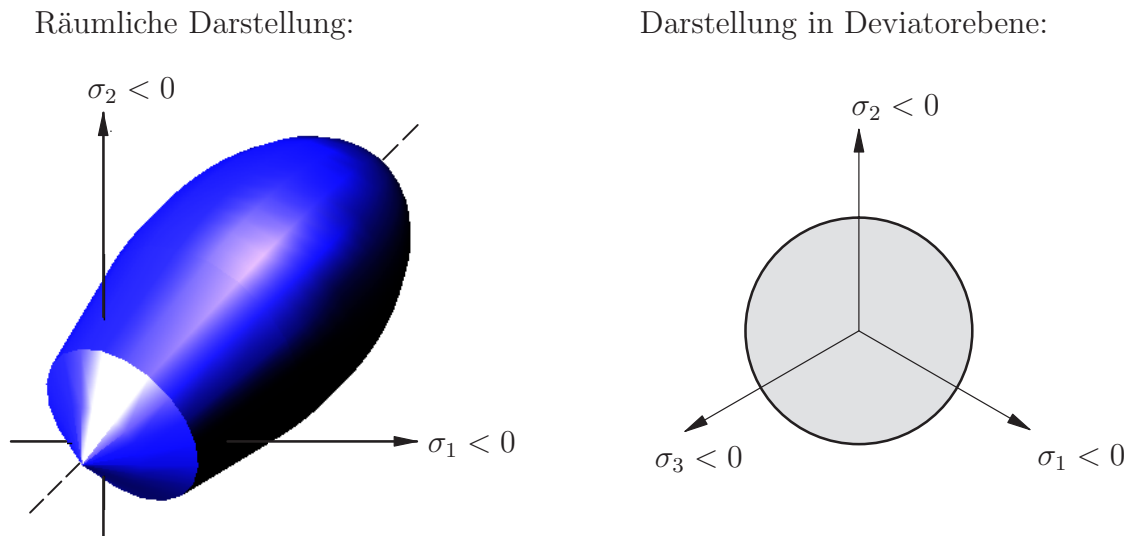
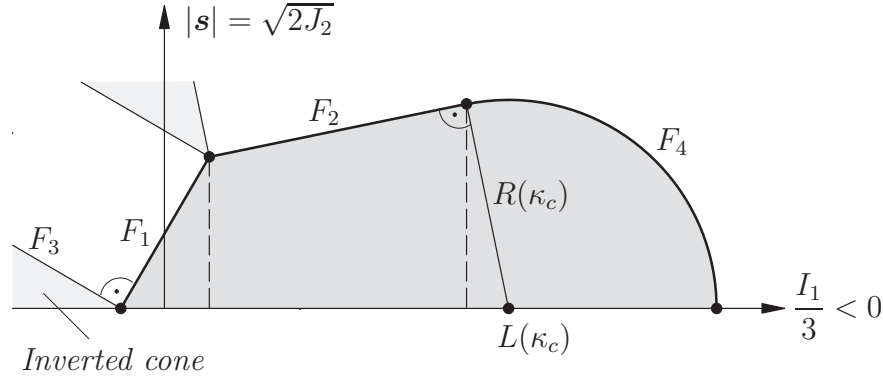


Abbildung 5.1: Darstellung des Mehrflächenmodells im Hauptspannungsraum


 Abbildung 5.2: Darstellung des Mehrflächenmodells im  $I_1$ - $J_2$ -Invariantenraum

zur Versagensfläche  $F_1$  wird die isotrope Verfestigung/Entfestigung durch die Charakteristik des einaxialen Druckversuchs abgebildet. In Abschnitt 5.1.2 wird die erforderliche Evolutionsgleichung der Fließspannung  $\sigma_{y2}$  behandelt.

### Versagensfläche $F_4$

Zur Begrenzung der Versagensfläche für den hydrostatischen Druckspannungszustand wird die Drucker-Prager-Teilfläche  $F_2$  mit einer kugelförmigen Teilfläche  $F_4$  ähnlich der Kapfenmodelle von *Hofstetter et al.* [49] gekoppelt. Die Kopplung erfolgt zum einen durch einen  $C_1$ -kontinuierlichen geometrischen Übergang zwischen den Teilflächen  $F_2$  und  $F_4$ , zum anderen durch die Anwendung des einaxialen Druckversagensmechanismus auf die Evolution der Entfestigung bzw. Verfestigung. Die Versagensfläche  $F_4$  lautet somit

$$F_4(\mathbf{s}, I_1, \kappa_c) = \sqrt{|\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{9} (I_1 - L(\kappa_c))^2} - R(\kappa_c) \quad (5.5)$$

mit dem Kugelmittelpunkt  $L(\kappa_c)$  und dem Kugelradius  $R(\kappa_c)$ . Aus den Übergangsbedingungen zwischen den Teilflächen  $F_2$  und  $F_4$  können der Kugelmittelpunkt und der Kugelradius ermittelt werden.

$$L(\kappa_c) = - \left( \sqrt{54\alpha_2 + 2} \right) \gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_c) \quad R(\kappa_c) = \left( \sqrt{\frac{2}{3} + 6\alpha_2^2} \right) \gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_c) \quad (5.6)$$

### Versagensfläche $F_3$ (*Inverted cone*)

Für die numerische Behandlung des Apexbereichs wurde von *Pankaj & Bicanic* [86] eine invertierte Pyramide auf die Drucker-Prager-Fließbedingung eingeführt. In dem verwendeten Mehrflächenmodell beschreibt die Hilfsfläche  $F_3$  einen Kegel, der orthogonal zum Gradienten der Teilfläche  $F_1$  an deren Spitze verläuft, siehe Abbildung 5.2.

$$F_3(\mathbf{s}, I_1, \kappa_1) = |\mathbf{s}| + \alpha_3 I_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{y3}(\kappa_1) \quad (5.7)$$

Der Reibungskoeffizient  $\alpha_3$  und die Fließspannung  $\sigma_{y3}$  werden durch Auswerten der Orthogonalitätsbedingung zwischen  $F_1$  und  $F_3$  am Apexpunkt und der geometrischen Übereinstimmung des Apexpunktes für beide Teilflächen bestimmt.

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3\alpha_1} \quad \sigma_{y3}(\kappa_1) = -\frac{1}{3\alpha_1^2} \sigma_{y1}(\kappa_1) \quad (5.8)$$

Das Entfestigungsverhalten der Fließfläche  $F_3$  ist mit dem Entfestigungsverhalten der Fließfläche  $F_1$  gekoppelt, es ist somit keine weitere Evolutionsgleichung erforderlich. Es soll bemerkt werden, dass die Fließfläche  $F_3$  im elastischen Bereich einen positiven Wert annimmt, daraus folgt die Modifikation der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen aus (3.10) für diesen Teilbereich.

$$F_3 \geq 0 \quad \dot{\lambda} \leq 0 \quad F_3 \dot{\lambda} = 0; \quad \dot{F}_3 \dot{\lambda} = 0 \quad (5.9)$$

### 5.1.2 Evolutionsgesetze für Verfestigung und Entfestigung

In diesem Abschnitt werden die notwendigen Evolutionsgesetze zur Steuerung des Ver- und Entfestigungsverhaltens der einzelnen Teilflächen erläutert. Die isotrope Entfestigung der Teilfläche  $F_1$  sowie der Hilfsfläche  $F_3$  wird durch das einaxiale Zugversagen abgebildet, die isotrope Ver- bzw. Entfestigung der Teilflächen  $F_2$  und  $F_4$  spiegeln den einaxialen Druckversagensmechanismus wieder. Dabei liegt eine vollständige Entkopplung der Evolutionsgleichung für den Zugbereich und für den Druckbereich vor: die Entfestigung im Zugbereich wird durch die äquivalente Vergleichsdehnung  $\kappa_t$ , die Verfestigung sowie Entfestigung im Druckbereich werden durch die äquivalente Vergleichsdehnung  $\kappa_c$  gesteuert. Das Mehrflächenmodell nach *Menrath* [75] basiert auf der Arbeitsverfestigungshypothese. Somit steuert die Rate der plastischen Arbeit die Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnungen. Die Rate der plastischen Arbeit wird beim Mehrflächenmodell durch Gleichung (5.10) bestimmt.

$$\dot{W}^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \bar{\sigma}(\kappa) \dot{\kappa} \quad (5.10)$$

#### Regularisierung

Zur Vermeidung einer Netzabhängigkeit der numerischen Lösung wird im Rahmen dieser Arbeit der Entfestigungsmodul in Abhängigkeit der Netzgröße nach *Bazant & Oh* [8] und *Willam* [114] formuliert. Dabei wird die in Abschnitt 3.3.1 eingeführte Bruchenergie als konstanter Materialparameter herangezogen. Diese ist als Fläche unter der Entfestigungskurve definiert. Um netzunabhängige Ergebnisse im entfestigenden Bereich zu gewährleisten, wird die Bruchenergie in Abhängigkeit der Elementgröße  $\ell$  des FE-Netzes postuliert.

$$G_t = \ell \int \bar{\sigma} d\kappa \quad \longrightarrow \quad \int \bar{\sigma} d\kappa = \frac{G_t}{\ell} \quad (5.11)$$

Es ist zwar eine Objektivität hinsichtlich einer Netzverfeinerung vorhanden, jedoch sind die Ergebnisse noch immer abhängig von der Netzorientierung, vergleiche beispielsweise *Sluys* [101]. Eine ausführliche Diskussion des Längenparameters  $\ell$  ist in *Oliver* [82] zu finden. Für Volumenelemente schlagen *Bicanic et al.* [13] die dritte Wurzel aus dem Elementvolumen  $V_e$  bezogen auf einen gegebenen Integrationspunkt mit der Anzahl der Integrationspunkte  $n_{IP}$  vor.

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{V_e}{n_{IP}}} \quad (5.12)$$

#### Zugbeanspruchung

Zur Beschreibung des Entfestigungsverhaltens von unbewehrtem Beton wird im Zugbereich ein exponentielles Entfestigungsgesetz nach *Feenstra* [36] und *Sluys* [101] verwendet,

siehe Abbildung 5.3 links.

$$\bar{\sigma}(\kappa_t) = f_{ctm} \exp\left(-\frac{\kappa_t}{\kappa_{tu}}\right) \quad \text{mit } \kappa_{tu} = \frac{G_t}{\ell f_{ctm}} \quad (5.13)$$

In den charakteristischen Schädigungsparameter  $\kappa_{tu}$  gehen die Bruchenergie  $G_t$  und die Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  ein. Im Rahmen der Regularisierung durch einen netzangepassten Entfestigungsmodul wird der netzabhängige Längenparameter  $\ell$  aus (5.12) bestimmt und in die Formulierung eingebracht. Der Entfestigungsmodul kann als Tangente der Entfestigungskurve aus (5.13) berechnet werden.

$$H(\kappa_t) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\kappa_t} = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} \exp\left(-\frac{\kappa_t}{\kappa_{tu}}\right) \quad (5.14)$$

Die numerische Stabilität wird sehr stark durch die Größe des Entfestigungsmoduls  $H$  beeinflusst, im eindimensionalen Fall kann ein kritischer Entfestigungsmodul für den Verlust der materiellen Stabilität durch Auswerten der materiellen Stabilitätsbedingung angegeben werden.

$$C^{ep} = \frac{E H}{E + H} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{crit} = -E \quad (5.15)$$

Damit die materielle Stabilität erfüllt ist, muss also stets gelten,

$$E_{cm} > -H_{extr} \quad (5.16)$$

wobei der Entfestigungsmodul für  $\kappa_t = 0$  extremal wird.

$$H_{extr} = H(\kappa_t = 0) = -\frac{f_{ctm}}{\kappa_{tu}} = -\frac{\ell f_{ctm}^2}{G_t} \quad (5.17)$$

Einsetzen von (5.17) in (5.16) und Auflösen nach  $\ell$  liefert die Bedingung zur Einhaltung der Objektivität.

$$\ell < \frac{E_{cm} G_t}{f_{ctm}^2} \quad (5.18)$$

Wird diese Bedingung verletzt, so ist eine Diskretisierung mit einer kleineren Elementgröße vorzunehmen.

## Druckbeanspruchung

Das Versagen von Beton unter mehraxialer Druckbeanspruchung ist sehr stark an den vorhandenen Umschnürungsdruck und damit an die hydrostatische Spannungskomponente gekoppelt, vergleiche Abbildung 4.5. Diese wird jedoch in den Evolutionsgleichungen dieses Mehrflächenmodells nicht berücksichtigt. Analog zur Evolution der Entfestigung im Zugbereich wird die Entfestigung im Druckbereich durch ein einaxiales Evolutionsgesetz gesteuert. Allerdings sind hier zwei getrennte Funktionen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens und des Entfestigungsverhaltens zu definieren. Für das Mehrflächenmodell wird ein linear elastisches Verhalten bis zu etwa 30% der Druckfestigkeit  $f_{cm}$  angenommen, danach findet eine nichtlineare Verfestigung bis zum Erreichen der Betondruckfestigkeit statt. Der entfestigende Bereich wird entsprechend dem Zugversagen über die Druckbruchenergie  $G_c$  kontrolliert. Der vollständige nichtlineare Verlauf wird durch die biparabolische Funktion in Gleichung (5.19) beschrieben und ist in Abbildung



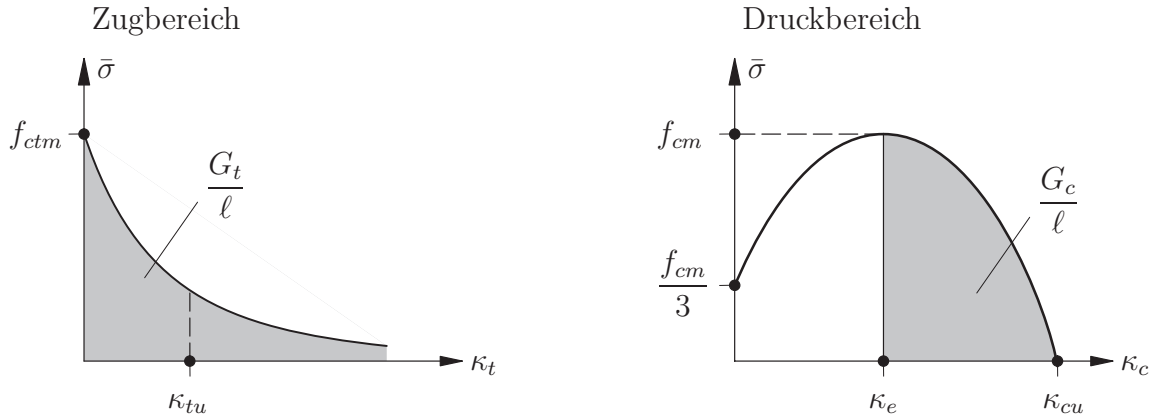


Abbildung 5.3: Entfestigungsfunktion für den Zugbereich und den Druckbereich im Mehrflächenmodell

5.3 rechts dargestellt. Die Regularisierung wird wieder durch Einführen eines netzabhängigen Längenparameters erreicht.

$$\bar{\sigma}(\kappa_c) = \begin{cases} \frac{f_{cm}}{3} \left[ 1 + 4 \frac{\kappa_c}{\kappa_e} - 2 \left( \frac{\kappa_c}{\kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \kappa_c \leq \kappa_e \\ f_{cm} \left[ 1 - \left( \frac{\kappa_c - \kappa_e}{\kappa_{cu} - \kappa_e} \right)^2 \right] & \text{für } \kappa_e \leq \kappa_c \leq \kappa_{cu} \end{cases} \quad (5.19)$$

Die charakteristischen Dehnungen bei Erreichen der Druckfestigkeit und bei Druckversagen werden berechnet zu

$$\kappa_e = \frac{4 f_{cm}}{3 E_{cm}} \quad \text{und} \quad \kappa_{cu} = \frac{3 G_c}{2 \ell f_{cm}} + \kappa_e \quad (5.20)$$

Der Entfestigungsmodul lautet damit für Druckbeanspruchung

$$H(\kappa_c) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\kappa_c} = -2 f_{cm} \frac{\kappa_c - \kappa_e}{(\kappa_{cu} - \kappa_e)^2} \quad (5.21)$$

und nimmt für  $\kappa_c = \kappa_{cu}$  den Extremwert  $H_{extr}$  an.

$$H_{extr} = H(\kappa_c = \kappa_{cu}) = -2 \frac{f_{cm}}{\kappa_{cu} - \kappa_e} = -\frac{4 h f_{cm}^2}{3 G_c} \quad (5.22)$$

Um auch im Druckfall die materielle Stabilität und die Objektivität zu gewährleisten, muss folgende Bedingung erfüllt sein.

$$\ell < \frac{3 E_{cm} G_c}{4 f_{cm}^2} \quad (5.23)$$

Wird diese Bedingung verletzt, ist die für den Zugfall beschriebene Maßnahme durchzuführen.

### 5.1.3 Diskussion der gekoppelten Versagensfläche

Beim Mehrflächenmodell wird von einem mit der Fließfläche assoziierten plastischen Potential  $Q_i = F_i$  für  $i = 1..4$  ausgegangen, dadurch ergeben sich für die regulären Teilflächen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_4$  symmetrische Tangentenoperatoren. Im Apexbereich führt die nichtreguläre Projektionsrichtung zu unsymmetrischen Tangentenoperatoren, so dass zur Lösung des globalen Gleichungssystems ein unsymmetrischer Gleichungslöser erforderlich ist.

In Deviatorebene nehmen alle Teilflächen eine Kreisform an. Dieser Sachverhalt ist konträr zum realen Werkstoffverhalten von Beton, bei dem in Deviatorebene ein Übergang der Kreisform für hydrostatischen Druck zur Dreiecksform für hydrostatischen Zug (*Out-of-roundness*) auftritt. Die veränderliche deviatorische Fließflächengeometrie wird bei vielen Materialmodellen durch Einführen der dritten Spannungsinvariante  $J_3$  in der Fließfunktion berücksichtigt, vergleiche beispielsweise *Willam & Warnke* [115]. In dieser Arbeit bleibt die dritte Invariante unberücksichtigt. Deshalb weicht bei reinem Beton das Materialmodell für Beton im vorwiegenden Zugbereich vom realen Werkstoffverhalten ab, im Fall von Stahlbetonstrukturen wird das Tragverhalten im Zugbereich maßgeblich von den Stahleinlagen beeinflusst, die Betontragfähigkeit bei Zugbeanspruchung ist hier nur sekundär.

### Numerische Behandlung des Mehrflächenmodells

Da im Rahmen der Finite-Element Methode endliche Last- bzw. Zeitschritte verwendet werden, müssen die Ratengleichungen der Plastizität aus Abschnitt 3.2 numerisch integriert werden. Nach *Menrath* [75] wird für die Drucker-Prager Fließfunktion ein erweiterter *Radial Return Algorithmus* gemäß dem Vorschlag von *Hofstetter et al.* [50] und für die Kugelfläche der *Closest Point Projection Algorithmus* verwendet. Den genannten Rückprojektionsverfahren liegt das implizite *Rückwärts-Euler Schema* zugrunde. Dabei wird über ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren der Spannungszustand zum aktuellen Zeitpunkt ausgehend vom letzten konvergierten Lastschritt ermittelt. Aufgrund der endlichen Lastinkremente weicht der algorithmische elastoplastische Materialtensor  $\mathbf{C}_{tan}^{ep,alg}$  vom elastoplastischen Materialtensor der Kontinuumsmechanik  $\mathbf{C}_{tan}^{ep}$  ab. Für infinitesimal kleine Last- bzw. Zeitschritte geht  $\mathbf{C}_{tan}^{ep,alg}$  in  $\mathbf{C}_{tan}^{ep}$  über. Die numerische Behandlung des Mehrflächenmodells ist ausführlich in *Menrath* [75] erläutert und wird in dieser Arbeit in Anhang B beschrieben.

### 5.1.4 Schädigung im lokalen Entlastungszustand

Das reale Werkstoffverhalten von Beton setzt sich aus einer Kombination von plastischen Verformungen und der Degradation der elastischen Parameter zusammen. In einer reinen Plastizitätsformulierung ist die Degradation nicht enthalten. Allgemein besteht die Möglichkeit einer Kopplung zwischen Plastizität und Schädigung, eine detaillierte Beschreibung der Kopplungsmöglichkeiten ist unter anderem in *Jirásek* [53] zu finden. *Menrath* [75] verwendet zur Berücksichtigung der Schädigung einen vereinfachten Ansatz, vergleiche beispielsweise *Crisfield & Wills* [22]. Dabei wird die Schädigungsevolution am Materialpunkt durch die äquivalente Verzerrung  $\bar{\epsilon}$  gesteuert, die sich aus einem elastischen Anteil und der äquivalenten Vergleichsdehnung zusammensetzt.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^{el} + \bar{\epsilon}^{pl} \quad \text{mit } \bar{\epsilon}^{pl} = \kappa_t \text{ bzw. } \kappa_c \quad (5.24)$$

Innerhalb des isotropen Plastizitätsmodells wird auch die Schädigung in isotroper Form abgebildet, so dass eine skalare Variable zur Beschreibung der Degradation als ausreichend angesehen wird. Die Gleichsetzung der freien Helmholtz-Energie  $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d)$  mit der "äquivalenten freien Energie"  $\Psi(\bar{\epsilon}, d)$  führt auf die Beziehung

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = (1 - d) W(\boldsymbol{\epsilon}) \approx \Psi(\bar{\epsilon}, d) = (1 - d) W(\bar{\epsilon}). \quad (5.25)$$

Zum Zeitpunkt  $n$  gilt mit dem Elastizitätsmodul von Beton  $E_0 = E_{cm}$

$$W(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_n E_0 \bar{\epsilon}_n. \quad (5.26)$$

Einsetzen von (5.26) in (5.25) und Ableiten nach der äquivalenten Verzerrung  $\bar{\epsilon}_n$  liefert die Definition der äquivalenten Spannung des geschädigten Materials

$$\bar{\sigma}_n = (1 - d) E_0 \bar{\epsilon}_n. \quad (5.27)$$

Unter der Annahme, dass die Entlastung am Materialpunkt linear elastisch erfolgt, kann die skalare Schädigungsvariable nach Gleichung (5.28) berechnet werden.

$$d = 1 - \frac{\bar{\sigma}_n \bar{\epsilon}_n}{\bar{\epsilon}_n E_0 \bar{\epsilon}_n} \quad \text{für } 0 \leq d \leq 1 \quad (5.28)$$

Der degradierte Elastizitätsmodul des geschädigten Materials berechnet sich zu  $E_n = (1 - d) E_0$ . Eine lokale Entlastung innerhalb eines Lastschrittes  $n + 1$  liegt dann vor, wenn Bedingung (5.29) erfüllt ist.

$$\frac{\partial F_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}_n} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} < 0 \quad (5.29)$$

Zur Definition der Prädiktorspannung  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}$  wird auf Anhang B verwiesen.

## 5.2 Dreidimensionales Schädigungsmodell mit Gradientenerweiterung

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Betonmodellierung alternativ ein gradientenerweitertes isotropes Schädigungsmodell mit einer skalaren Schädigungsvariable verwendet. Eine ausführliche Darstellung dieses Modells ist unter anderem in *Peerlings* [87] und *Kuhl* [65] zu finden. Zu Beginn dieses Abschnitts wird eine vorrangig im zweidimensionalen Verzerrungsraum eingesetzte Schädigungsfunktion nach *de Vree et al.* [25] vorgestellt und unter Einbeziehung der dritten Hauptverzerrung  $\epsilon_3$  dreidimensional erweitert. Danach folgt die Beschreibung der Regularisierung durch gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle. Anschließend wird die Finite-Element Formulierung der Gradientenschädigung in Verbindung mit der veränderten Schädigungsformulierung erläutert.

### 5.2.1 Dreidimensionale Schädigungsfunktion

Mit dem modifizierten von Mises Modell nach *de Vree et al.* [25] kann die biaxiale Versagensfläche von *Kupfer & Gerstle* [66] ausreichend genau abgebildet werden.

$$\eta = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} = \kappa_0 \quad (5.30)$$

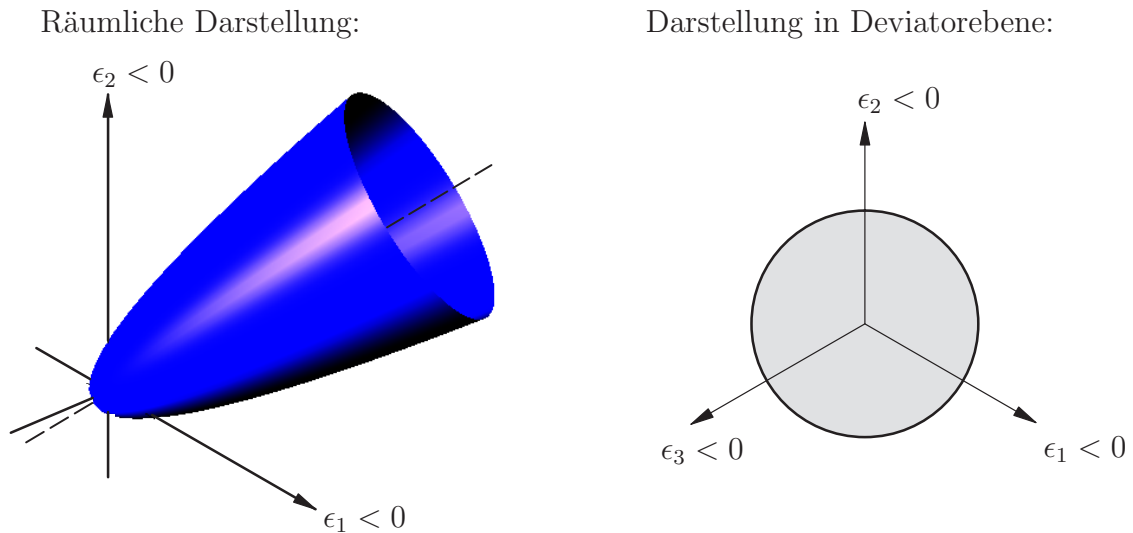


Abbildung 5.4: Darstellung der Schädigungsfunktion im Hauptverzerrungsraum

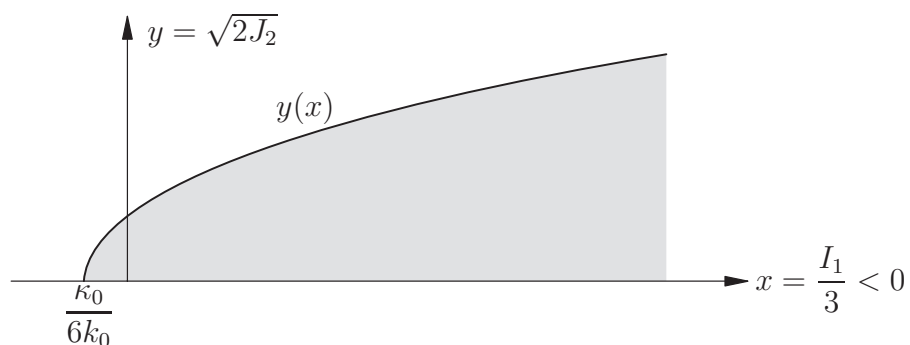
Hier ist die äquivalente Verzerrung  $\eta$  in der ersten Invariante  $I_1$  des Verzerrungstensors sowie der zweiten Invariante  $J_2$  des Verzerrungsdeviators formuliert mit einem zusätzlichen Wichtungsparemeter  $k$  zur Berücksichtigung des Verhältnisses zwischen Druck- und Zugfestigkeit des Betons. Generell werden für  $k$  Werte zwischen 10 und 20 für Normalbeton angenommen. Die Konstanten  $k_0$ ,  $k_1$  und  $k_2$  sind in Abhängigkeit des Wichtungsparemters  $k$  und der Querdehnzahl  $\nu$  formuliert.

$$k_0 = k_1 = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} \quad ; \quad k_2 = \frac{3}{k(1+\nu)^2} \quad (5.31)$$

Die dreidimensionale Formulierung erfolgt durch Einbeziehung der dritten Hauptverzerrung  $\epsilon_3$  in Gleichung (5.30) und ist im Hauptverzerrungsraum als Schädigungsfläche in Abbildung 5.4 dargestellt. Dabei ist die Schädigungsfläche durch einen  $C_1$ -kontinuierlichen Verlauf charakterisiert. Für hydrostatische Verzerrungszustände gilt  $J_2 = 0$ , dadurch vereinfacht sich (5.30) zu

$$\eta = k_0 I_1 + |k_1 I_1| = k_0 I_1 + |k_0 I_1| = k_0 (I_1 + |I_1|) \quad (5.32)$$

Somit ist für einen hydrostatischen Druckzustand  $I_1 < 0$  die äquivalente Verzerrung  $\eta = 0$ , es kann damit kein Versagen im hydrostatischen Druckbereich auftreten. Die in Kapitel 8

Abbildung 5.5: Darstellung der Schädigungsfunktion im  $I_1$ - $J_2$ -Invariantenraum

untersuchten Experimente weisen vorrangig Zugversagen auf, deshalb wird die Abweichung vom realen Werkstoffverhalten im hydrostatischen Druckbereich dabei nicht von Bedeutung sein. Bei hydrostatischem Zug nimmt die äquivalente Verzerrung den Wert  $\eta = 2 k_0 I_1$  an, das elastische Gebiet wird im hydrostatischen Zugbereich durch die Bedingung  $I_1 \leq \kappa_0 / k_0$  begrenzt. In Deviatorebene ergibt sich analog zum Mehrflächenmodell eine Kreisform unabhängig vom hydrostatischen Verzerrungszustand, da die dritte Verzerrungsinvariante nicht berücksichtigt wird. Im  $I_1$ - $J_2$ -Invariantenraum erhält man durch die Substitution  $x := I_1/3$ ,  $y := \sqrt{2 J_2}$  die modifizierte Schädigungsfunktion

$$\eta = 3 k_0 x + \sqrt{9 k_0^2 x^2 + \frac{k_2}{2} y^2} = \kappa_0. \quad (5.33)$$

Nach einigen mathematischen Umformungen lässt sich diese als Wurzelfunktion

$$y = \pm \sqrt{\frac{2\kappa_0^2 - 12 \kappa_0 k_0 x}{k_2}} \quad (5.34)$$

angeben, siehe Abbildung 5.5. Im Vergleich zur Darstellung des Mehrflächenmodells im  $I_1$ - $J_2$ -Spannungsinvariantenraum aus Abbildung 5.2 tritt bei der Darstellung des Schädigungsmodells im  $I_1$ - $J_2$ -Verzerrungsinvariantenraum keine Singularität im hydrostatischen Zugbereich auf.

## 5.2.2 Gradientenerweiterung

Im Sinne der klassischen Kontinuumstheorien ist die Materialantwort eines Punktes nur von seiner eigenen Belastungsgeschichte abhängig. Der heterogene Aufbau der Mikrostruktur eines Materials lässt auf Wechselwirkungen zwischen benachbarten Punkten der Mikrostruktur schließen. Deswegen wurde von *Kröner* [64] und *Eringen & Edelen* [35] alternativ ein nichtlokales Kontinuum für elastisches Materialverhalten eingeführt, bei dem die Materialantwort eines Punktes zusätzlich von der Belastungsgeschichte benachbarter Punkte kontrolliert wird. In den 80er Jahren fand die Übertragung dieser Methode auf inelastisches Materialverhalten statt, vergleiche *Bažant* [7] und *Pijaudier-Cabot & Bažant* [89]. Die Nichtlokalität wird dabei auf eine, die Entfestigung charakterisierende Größe, begrenzt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Nichtlokalität in der Schädigungsmechanik auf die äquivalente Verzerrung  $\eta$  angesetzt.

Das nichtlokale Kontinuum ist aufgrund der Verletzung des lokalen Charakters der FE-Methode nicht vorteilhaft für die numerische Umsetzung. Alternativ kann die Nichtlokalität durch Anreicherung bestimmter Größen mit räumlichen Gradienten erhalten werden. Die heutigen gradientenerweiterten Kontinuumsmodelle basieren auf den grundlegenden Arbeiten von *Toupin* [107] und *Mindlin* [77] Anfang der 60er Jahre. Dabei werden zur Beschreibung eines elastischen Materialverhaltens höherwertige Gradienten der Verzerrungen in der freien Energiefunktion berücksichtigt. Demgegenüber werden in den heutigen Gradientenmodellen analog zum nichtlokalen Kontinuum höherwertige Gradienten einer die Materialentfestigung charakterisierenden skalaren Größe verwendet. In dieser Arbeit ergibt sich die nichtlokale äquivalente Verzerrung  $\tilde{\eta}$  aus einer Taylorreihenentwicklung der lokalen äquivalenten Verzerrung  $\eta$  und einiger mathematischer Umformungen zu

$$\tilde{\eta} = \eta + c \nabla^2 \eta \quad \text{mit} \quad c = c(\ell^2), \quad (5.35)$$

vergleiche beispielsweise *Peerlings* [87]. Durch den Gradientenparameter  $c$  wird in diese Formulierung indirekt der interne Längenparameter  $\ell$  eingebracht. In Gleichung (5.35) wird die nichtlokale äquivalente Verzerrung  $\tilde{\eta}$  explizit aus den lokalen äquivalenten Verzerrungen  $\eta$  und ihrer Ableitungen bestimmt. Für eine Umsetzung im Rahmen der Finiten Element Methode ist eine implizite Form von Vorteil, deswegen wird alternativ folgende Gradientenform verwendet (*Peerlings* [87]):

$$\tilde{\eta} - c \nabla^2 \tilde{\eta} = \eta. \quad (5.36)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Gradientenparameter durch  $c \approx \ell^2$  berechnet, wobei der interne Längenparameter  $\ell$  mit dem charakteristischen Längenparameter  $\ell_c$  identifiziert wird, der bei makroskopischen Stoffgesetzen einen zusätzlichen Materialparameter darstellt. Der charakteristische Längenparameter wird für Beton nach *Bazant & Pijaudier-Cabot* [9] in Abhängigkeit des Größtkorndurchmessers  $d_{max}$  zu  $\ell_c \approx 3 d_{max}$  gewählt.

### 5.2.3 Finite-Element Formulierung

Im Folgenden wird die Finite-Element Formulierung des dreidimensionalen gradientenerweiterten Schädigungsmodells erläutert. Zur Berechnung von dreidimensionalen Strukturen wurde die dreidimensionale Form des Schädigungsmodells mit Gradientenerweiterung im Rahmen dieser Arbeit in den bestehenden FE-Code implementiert. Ausgangspunkt für die Finite Element Formulierung ist die starke Form des Gleichgewichts

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (5.37)$$

mit den Randbedingungen aus Abschnitt 2.1.3. Durch Einführen des Spannungsvektors  $\boldsymbol{\tau} = c \nabla \tilde{\eta}$  und Einsetzen in (5.36) kann die Bilanzgleichung für die nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen  $\tilde{\eta}$  als unabhängige Variablen in starker Form angegeben werden.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \tilde{\eta} = -\eta \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (5.38)$$

Als Spannungsrandbedingung der starken Form der nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen wird  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  angenommen. Diese Wahl der Spannungsrandbedingung garantiert bei homogenen Deformationen identische lokale und nichtlokale Verzerrungen, vergleiche *Peerlings et al.* [88]. Mit den beiden Bilanzgleichungen ergibt sich somit eine Zwei-Feld-Formulierung des klassischen Randwertproblems und des nichtlokalen Verzerrungsproblems. Die schwache Form des nichtlokalen Verzerrungsproblems kann unter Anwendung der partiellen Integration und des Gauß'schen Integralsatzes unter Einbeziehung der oben beschriebenen Spannungsrandbedingung angegeben werden.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \tilde{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \tilde{\eta} [\tilde{\eta} - \eta] \, dV = 0 \quad \forall \delta \tilde{\eta} \quad (5.39)$$

### Diskretisierung

Für die Diskretisierung der Zweifeld-Formulierung wird, wie in Abschnitt 2.2.2, die Matrixschreibweise verwendet. Ausgehend von der schwachen Form aus (2.7) und (5.39) erfolgt die räumliche Diskretisierung im Rahmen der Methode der Finiten Elemente. Neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  werden die nichtlokalen Verzerrungen  $\tilde{\eta}$  als zusätzliche Freiheitsgrade in die Finite Element Formulierung eingebracht. Für die räumliche Diskretisierung

wird der Körper  $\mathcal{B}$  in  $n_{ele}$  Finite Elemente zerlegt, wobei  $\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathcal{B}^e$  gilt. Die Verläufe der lokalen und nichtlokalen Feldgrößen  $\mathbf{u}$  und  $\tilde{\eta}$  können mit den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  und den nichtlokalen Knotenverzerrungen  $\mathbf{e}$  über die Ansatzfunktionen der Verschiebungen  $\mathbf{N}$  bzw. der nichtlokalen Verzerrungen  $\bar{\mathbf{N}}$  approximiert werden. Analog werden die lokalen Verzerrungen über den Ableitungsoperator  $\mathbf{B}$  und die Ableitung der nichtlokalen Verzerrungen über den Ableitungsoperator  $\bar{\mathbf{B}}$  aus den Knotengrößen bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h &:= \mathbf{N} \mathbf{d} & \boldsymbol{\epsilon}^h &:= \mathbf{B} \mathbf{d} & \delta \mathbf{u}^h &:= \mathbf{N} \delta \mathbf{d} & \delta \boldsymbol{\epsilon}^h &:= \mathbf{B} \delta \mathbf{d} & \text{in } \mathcal{B}^e \\ \tilde{\eta}^h &:= \bar{\mathbf{N}} \mathbf{e} & \nabla \tilde{\eta}^h &:= \bar{\mathbf{B}} \mathbf{e} & \delta \tilde{\eta}^h &:= \bar{\mathbf{N}} \delta \mathbf{e} & \delta \nabla \tilde{\eta}^h &:= \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{e} & \text{in } \mathcal{B}^e \end{aligned} \quad (5.40)$$

Peerlings [87] berichtet von auftretenden Spannungszillationen bei gleicher Interpolationsordnung für  $\mathbf{N}$  und  $\bar{\mathbf{N}}$ . Die Verwendung von quadratischen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen in Verbindung mit linearen Ansatzfunktionen für die nichtlokalen Verzerrungen und einer reduzierten Integration hat sich als erfolgreich erwiesen. Damit ist die Interpolationsordnung der abhängigen lokalen und unabhängigen nichtlokalen Verzerrungen identisch. Unter Anwendung des Bubnov-Galerkin-Verfahrens ergibt sich folgende diskretisierte schwache Form.

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{d}^T & \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathbf{f}_{int,d}^e} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA}_{-\mathbf{f}_{ext,d}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d} \\ \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta \mathbf{e}^T & \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\tau} dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T [\bar{\mathbf{N}} \mathbf{e} - \mathbf{B} \mathbf{d}] dV}_{\mathbf{f}_{int,e}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Hierbei definieren  $\mathbf{f}_{int,d}^e$  und  $\mathbf{f}_{ext,d}^e$  die inneren und äußeren Elementknotenkräfte zu den Verschiebungsfreiheitsgraden und  $\mathbf{f}_{int,e}^e$  die inneren Elementknotenkräfte zu den nichtlokalen Verzerrungsfreiheitsgraden. Die Assemblierung der Elementknotenkräfte und der Elementfreiheitsgrade zu den entsprechenden globalen Feldgrößen

$$\mathbf{F}_{int} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int,d}^e \\ \mathbf{f}_{int,e}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext,d}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d} \\ \delta \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

führt schließlich zu dem globalen Gleichungssystem (5.43), das nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung für beliebige  $\delta \mathbf{D}$  gelten muss.

$$\delta \mathbf{D} [\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}] = 0 \quad (5.43)$$

## Linearisierung

Die Kopplung der schwachen Form des Gleichgewichts und der Differentialbeziehung der nichtlokalen Verzerrungen führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem (5.43). Zur Lösung des gekoppelten Randwertproblems wird daher ein inkrementell iteratives Verfahren, üblicherweise das Newton-Rahpson-Verfahren, verwendet, welches die Linearisierung von (5.43) bedingt. Das Prinzip der Linearisierung wurde ausführlich in Abschnitt 2.2.3 behandelt, deshalb wird hier nur kurz auf die besonderen Terme dieser Formulierung



eingegangen. Im Zuge der Linearisierung müssen die globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i$  und die globalen Elementresiduen  $\mathbf{R}(\mathbf{D}_i)$  im Iterationsschritt  $i$  zur Berechnung der inkrementellen Änderung des globalen Freiheitsgradvektors  $\Delta \mathbf{D}_i$  ermittelt werden. Diese folgen aus der Assemblierung der entsprechenden Elementgrößen. Bei der vorhandenen Zweifeld-Formulierung ist dafür die Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e$  sowie die Bestimmung der Elementresiduen  $\mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e$  und  $\mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e$  erforderlich.

$$\mathbf{K}_i := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_i) := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{D}_{i+1} := \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Auf Elementebene ergibt sich daraus das zu lösende Gleichungssystem für die inkrementelle Änderung der Elementfreiheitsgrade  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}$  und  $\Delta \mathbf{e}_{i+1}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e & \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{e}_{i+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen und die Elementresiduen werden dabei folgendermaßen ermittelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \mathcal{C}_i^{ed} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathcal{C}}_i^{ed} \bar{\mathbf{N}} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{e}}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_i} = - \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathcal{F}}_i^{ed} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{e},i}^e &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{e}}^e}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}_i} = \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T c \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} dV \\ \mathbf{r}_{\mathbf{d},i}^e &= \mathbf{f}_{int,\mathbf{d},i}^e - \mathbf{f}_{ext,\mathbf{d}}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV - \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \\ \mathbf{r}_{\mathbf{e},i}^e &= \mathbf{f}_{int,\mathbf{e},i}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\tau}_i dV + \int_{\mathcal{B}^e} \bar{\mathbf{N}}^T [\tilde{\eta}_i - \eta_i] dV \end{aligned} \quad (5.46)$$

Die gradientenerweiterte Formulierung führt zu unterschiedlichen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{e},i}^e \neq \mathbf{k}_{\mathbf{e}\mathbf{d},i}^e{}^T$ , dadurch wird die globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_i$  unsymmetrisch und erfordert den Einsatz unsymmetrischer Gleichungslöser. In Gleichung (5.46) wurden mehrere Bezeichnungen eingeführt, sie werden folgendermaßen definiert.

$$\mathcal{C}_i^{ed} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right|_{\boldsymbol{\epsilon}_i} \quad \bar{\mathcal{C}}_i^{ed} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tilde{\eta}} \right|_{\tilde{\eta}_i} \quad \bar{\mathcal{F}}_i^{ed} := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right|_{\boldsymbol{\epsilon}_i} = \mathcal{I} \quad (5.47)$$

Die genaue Festlegung der Matrizen  $\mathcal{C}_i^{ed}$  und  $\bar{\mathcal{C}}_i^{ed}$  wird in Abhängigkeit des verwendeten Konstitutivgesetzes durchgeführt.

#### 5.2.4 Isotrope skalare Gradientenschädigung

In der Gradientenschädigung wird die Schädigungsfunktion  $F_d$  nicht mehr in Abhängigkeit der lokalen äquivalenten Verzerrung  $\eta$ , sondern in Abhängigkeit der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung  $\tilde{\eta}$  formuliert.

$$F_d = f(\tilde{\eta}) - d \quad (5.48)$$



Die Karush-Kuhn-Tucker Be- und Entlastungsbedingungen (3.23) bleiben unverändert, ebenso die Berechnung der Spannungen (3.26). Die skalare Schädigungsvariable  $d$  ist nun von der nichtlokalen Verzerrung  $\tilde{\eta}$  abhängig, so dass ihre Rate folgendermaßen modifiziert wird.

$$\dot{d} = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \tilde{\eta}} \dot{\tilde{\eta}} \quad (5.49)$$

Die Rate der Schädigungsvariable ist nur abhängig von der Rate der nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen. Einsetzen von (5.49) in die Ratenform der Spannungs-Dehnungs-Beziehung (3.27) führt schließlich zum modifizierten vierstufigen Materialtensor in Form der Sekante  $\mathbf{C}_{sec}^{ed}$ .

$$\mathbf{C}^{ed} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d) \mathbf{C}^{el} = \mathbf{C}_{sec}^{ed} \quad (5.50)$$

Weiter ergibt sich der Tensor  $\bar{\mathbf{C}}^{ed}$  aus der Ableitung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  nach der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung  $\tilde{\eta}$  zu

$$\bar{\mathbf{C}}^{ed} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tilde{\eta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \tilde{\eta}} = -\frac{\partial d}{\partial \tilde{\eta}} \mathbf{C}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\partial d}{\partial \tilde{\eta}} \mathbf{m}_d = \begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \mathbf{m}_d & \text{für weitere Schädigung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.51)$$

mit dem Tensor  $\mathbf{m}_d$  aus Gleichung (3.31). Damit sind sämtliche Terme zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Elementresiduen bekannt.

## 5.3 Vergleich: Schädigungsmodell - Elastoplastisches Mehrflächenmodell

Zum Abschluss von Kapitel 5 wird ein Vergleich der verwendeten Betonmodelle bezüglich der Aspekte nichtlineare Materialformulierung, Regularisierung und Rissbildung sowie FE-Formulierung vorgenommen. Für eine vereinfachte Schreibweise wird die gradientenerweiterte Schädigungsformulierung mit GD-Modell und das elastoplastische Mehrflächenmodell mit EP-Modell abgekürzt. Beiden Modellen gemein ist eine isotrope Formulierung, somit ergibt sich keine Richtungsabhängigkeit in der Materialantwort.

### 5.3.1 Materielle Nichtlinearität

Die materielle Nichtlinearität wird bei beiden Modellen unterschiedlich induziert. Sie entsteht beim EP-Modell durch das Auftreten irreversibler plastischer Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$  in Verbindung mit einem vereinfachten Schädigungsansatz und beim GD-Modell infolge der Degradation der elastischen Parameter durch die skalare Schädigungsvariable  $d$ . Bei einer Entlastung ergibt sich damit ein unterschiedliches Verhalten im Spannungs-Dehnungs-Diagramm: die Entlastung des EP-Modells ist durch irreversible plastische Verzerrungen und einem degradierten Elastizitätsmodul von Beton charakterisiert, das GD-Modell entlastet zum Spannungsnullpunkt hin mit einer bleibenden Degradation des Materials.

## Berechnung der Spannungen

Das GD-Modell erlaubt die direkte Berechnung der Spannungen durch Multiplikation des degradierten konstitutiven Tensors mit den Verzerrungen. Bei der numerischen Umsetzung des EP-Modells ist zur Spannungsberechnung ein lokaler Newton-Algorithmus innerhalb des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens erforderlich, das EP-Modell ist hier gegenüber dem GD-Modell algorithmisch aufwendiger.

## Begrenzung des elastischen Bereichs

In beiden Modellen wird eine Funktion zur Begrenzung des elastischen Bereichs eingeführt. Beim EP-Modell sind mehrere Teilflächen zur Beschreibung der Gesamtversagensfläche im Spannungsraum vorhanden, diese haben einen ähnlichen Aufbau: jede Fließfläche ist in Abhängigkeit des Spannungszustands eines materiellen Punktes und einer Fließspannung formuliert. Die Evolution der Fließspannung wird dabei durch interne Variablen im Verzerrungsraum kontrolliert. Das GD-Modell enthält analog zur Fließfunktion des EP-Modells eine Schädigungsfunktion zur Beschreibung der Versagensfläche im Verzerrungsraum und eine interne Variable zur Beschreibung der Schädigungsevolution. Beide hier eingesetzten Modelle vernachlässigen allerdings den dreiecksförmigen Verlauf der Versagensfläche in Deviatorebene im Zugbereich, mit dem GD-Modell kann zudem kein Versagen im hydrostatischen Druckbereich abgebildet werden.

## Evolutionsgleichungen

Die Evolutionsgleichungen der Fließspannungen des EP-Modells werden im Zug- und im Druckbereich durch skalare Gleichungen charakterisiert. Dies steht in Analogie zu der skalaren Evolutionsgleichung des GD-Modells. Beim EP-Modell werden für den Zug- und Druckbereich unterschiedliche Formulierungen in Abhängigkeit zweier unabhängiger interner Variablen eingesetzt, im Zugbereich wird bis zum Erreichen der maximalen Zugspannung linear elastisches Verhalten vorausgesetzt, danach erfolgt eine exponentiell verlaufende Entfestigung. Im Druckbereich ergibt sich bei einem Drittel der maximalen Druckspannung ein parabolisch verfestigender Verlauf, nach Erreichen der maximalen Druckspannung wird die Entfestigung ebenfalls durch eine Parabel abgebildet. Im Gegensatz dazu werden beim GD-Modell sowohl die Entfestigung im Zugbereich und im Druckbereich durch eine exponentielle Funktion abgebildet. Bei der Betrachtung des qualitativen Spannungs-Dehnungs-Verlaufs des einaxialen Druckversuchs weisen beide Formulierungen gewisse Defizite auf. Die parabolische Entfestigung des EP-Modells geht in der Realität in eine exponentiell verlaufende Entfestigung über, diese kann mit dem EP-Modell nicht abgebildet werden. Das GD-Modell ist zwar in der Lage, den stark entfestigenden Bereich mit einer exponentiellen Funktion zu beschreiben, jedoch bleiben hier die Nichtlinearität im Vorbruchbereich sowie der glatte Übergang beim Erreichen der maximalen Druckspannung unberücksichtigt. Bei vielen Anwendungen kommt dieser Sachverhalt allerdings nicht zum Tragen. Beim GD-Modell ist durch den Parameter  $\alpha$  zusätzlich eine Resttragfähigkeit vorhanden. Physikalisch kann die Resttragfähigkeit nicht unbedingt motiviert werden, aufgrund ihrer numerisch stabilisierenden Wirkung im stark entfestigenden Bereich wird sie in der Schädigungsevolution trotzdem berücksichtigt.

## Algorithmische Materialtangente

Bei der Berechnung der algorithmischen Materialtangente tritt ein deutlicher Unterschied zwischen dem GD-Modell und dem EP-Modell auf. Beim GD-Modell ist die algorithmische Materialtangente mit dem konstitutiven Tensor der Kontinuumsmechanik identisch und geht, bedingt durch die Gradientenerweiterung, in den Sekantentensor aus (5.50) über. Somit kann dieser durch Multiplikation des Elastizitätstensors  $\mathbf{C}^{el}$  mit der Schädigungsvariable  $d$  sehr einfach ermittelt werden. Unter Verwendung eines exponentiellen Entfestigungsgesetzes mit einer Resttragfähigkeit  $\alpha$  gilt  $d < 1$ . Dadurch bleibt der Sekantentensor stets positiv definit. Auch dieser Sachverhalt trägt zu einem numerisch stabilen Algorithmus bei. Die Berechnung der algorithmischen Materialtangente des EP-Modells ist deutlich aufwendiger, da die konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen einerseits eine Abweichung vom konstitutiven Tensor der kontinuumsmechanischen Plastizitätstheorie bedingt. Andererseits ist bei diskontinuierlichen Übergängen zwischen einzelnen Teilflächen ein modifizierter Algorithmus gegenüber einteiligen Fließflächen zu verwenden. Außerdem kann der Verlust der positiven Definitheit der algorithmischen Materialtangente zu numerischen Problemen führen. Durch die assoziierte Formulierung ist die Symmetrie der algorithmischen Materialtangente gewährleistet, im Apex-Bereich kann diese bei Aktivierung des *Inverted cone* nicht mehr aufrechterhalten werden.

### 5.3.2 Regularisierung und Rissmodellierung

Die verwendeten Betonmodelle beruhen auf der Annahme, dass die Rissbildung nicht diskret, sondern verschmiert über ein Rissband erfasst wird. Somit bleibt der Betonkörper ein Kontinuum ohne Defekte. Dabei findet beim EP-Modell eine fiktive Rissbildung statt. In diesem Fall wird die Rissentwicklung durch äquivalente Vergleichsdehnungen gesteuert. Zur Gewährleistung netzunabhängiger Ergebnisse wird die Breite des Rissbands in Abhängigkeit der Elementgröße formuliert. Allerdings sind die Ergebnisse noch immer abhängig von der Netzorientierung. Beim GD-Modell wird das geschädigte bzw. gerissene Material durch die Schädigungsvariable  $d$  charakterisiert, vollständige Schädigung ist für  $d = 1$  erreicht. Hier steuert der Gradientenparameter  $\sqrt{c}$  die Breite des Rissbands bzw. der Lokalisierungszone. Mit dem Gradientenparameter wird ein "echter" interner Längensparameter in die Formulierung eingebracht, so dass die Gutgestellttheit des Problems und damit die Objektivität der Formulierung gegenüber der Diskretisierung gewährleistet ist.

### 5.3.3 FE-Formulierung

Das EP-Modell kann im Rahmen einer Standard-FE-Formulierung verwendet werden. Beim GD-Modell sind zusätzliche Knotenfreiheitsgrade für die nichtlokalen äquivalenten Verzerrungen einzuführen. Zur Gewährleistung von äquivalenten Verzerrungen gleicher Interpolationsordnung sind für die zusätzlichen Verzerrungsfreiheitsgrade  $C_0$ -kontinuierliche Ansatzfunktionen und für die Standardverschiebungsfreiheitsgrade  $C_1$ -kontinuierliche Ansatzfunktionen innerhalb eines Elements zu wählen. Im dreidimensionalen Fall werden daher 20-knotige Volumenelemente eingesetzt. Gegenüber dem EP-Modell mit klassischen Volumenelementen ergeben sich beim GD-Modell für die Eckknoten eines 20-knotigen Volumenelements 8 zusätzliche Freiheitsgrade, das globale Gleichungssystem wird somit

vergrößert. Der Einflussradius der nichtlokalen Verzerrungen wird durch den Gradientenparameter kontrolliert: je kleiner dieser gewählt wird, d.h. je größer die Gradienten sind, desto kleiner muss die Elementgröße im Bereich der Lokalisierung sein, und umgekehrt. Der Gradientenparameter ist dabei als Materialparameter in Verbindung mit den Materialparametern des Schädigungsmodells zu sehen, d.h. eine Modifikation des Gradientenparameters bedingt veränderte Schädigungsmaterialparameter. Beide Betonmodelle erfordern den Einsatz unsymmetrischer Gleichungslöser. Beim EP-Modell ist dies auf die unsymmetrische algorithmische Materialtangente zurückzuführen, das GD-Modell führt aufgrund der Gradientenerweiterung zu einem unsymmetrischen globalen Gleichungssystem.



# Kapitel 6

## Modellierung der Bewehrung

Der Verbundwerkstoff Stahlbeton ist charakterisiert durch das Zusammenwirken zweier unterschiedlicher Werkstoffe. Der Werkstoff Beton weist im Allgemeinen ein sprödes Materialverhalten auf, während der Betonstahl bzw. die Bewehrung sehr duktil ist. Im Verbund ergeben diese unterschiedlichen Werkstoffe einen Kompositwerkstoff, der vorwiegend durch ein duktileres Materialverhalten charakterisiert ist. Das Versagen einer Stahlbetonstruktur ist von dem vorhandenen Bewehrungsgrad abhängig. Bei einem unterbewehrten Stahlbetontragwerk kommt es zum Fließen der Bewehrung, wobei das Versagen durch große Deformationen angekündigt wird. Demgegenüber führt ein überbewehrtes Stahlbetontragwerk zum plötzlichen Versagen des Betons. Aus Sicherheitsgründen sind daher überbewehrte Stahlbetontragwerke zu vermeiden.

Zur realitätsnahen Abbildung des Tragverhaltens von Stahlbetonkonstruktionen reicht es im Allgemeinen nicht aus, adäquate Stoffgesetze für den Beton zu entwickeln, die Bewehrung muss ebenfalls angemessen modelliert werden. Dabei kann die Berücksichtigung des Verbunds zwischen Beton und Bewehrung abhängig von der Problemstellung bedeutend für das Tragverhalten einer Stahlbetonkonstruktion sein.

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Bewehrungsmodelle für perfekten und nachgiebigen Verbund beschrieben. Das in der vorliegenden Arbeit eingesetzte Rebar-Modell für perfekten Verbund ist Gegenstand von Abschnitt 6.2. Eine erweiterte kinematische Beschreibung des Rebar-Modells für die Verbundmodellierung wird in Abschnitt 6.3 vorgestellt. Die Aufstellung der verwendeten Konstitutivgesetze für den Bewehrungsstahl und den Verbund beschließen Kapitel 6.

### 6.1 Bewehrungsmodelle

#### 6.1.1 Diskrete Modellierung

Bei der diskreten Modellierung wird die Bewehrung mit eigenständigen Elementen, üblicherweise Fachwerkstab- oder Seilelementen, abgebildet, siehe Abbildung 6.1 links. Diese können nur axiale Kräfte aufnehmen und besitzen somit nur eine Dehnsteifigkeit. Zur Gewährleistung der vollständigen Kompatibilität zwischen den Verschiebungen des Betons und der Bewehrung sind die diskreten Bewehrungselemente auf den Elementrändern der Betonelemente zu plazieren. Dabei sind die Knoten der Bewehrungselemente (Bewehrungsknoten) mit den gleichpositionierten Knoten der Volumenelemente (Betonknoten) gekoppelt. Den diskreten Bewehrungselementen wird ein einaxiales Konstitutivgesetz für Betonstahl zugewiesen. Der Vorteil dieses Verfahrens ist die Verwendung eines Standard-FE-Programms. Mit dieser Methode können diverse Bewehrungsformen wie Längsbewehrung, Schubbewehrung oder Torsionsbewehrung mit diskreten Stab- bzw. Seilelementen abgebildet werden. Nachteile der Methode sind die Abhängigkeit der FE-Diskretisierung

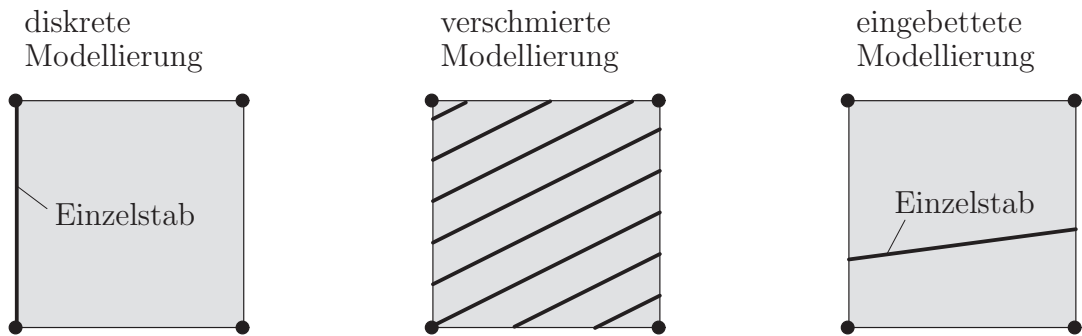


Abbildung 6.1: Bewehrungsmodelle

von der Bewehrungsführung und der Mehraufwand bei der Diskretisierung, da jeder einzelne Bewehrungsstab mit Finiten Elementen abgebildet werden muss. Im Bereich der Bewehrung ist eine Diskretisierung mit sehr feinem FE-Netz erforderlich, um einerseits die Betondeckung zwischen dem Bewehrungsstahl und dem Betonrand zu berücksichtigen und andererseits das Auftreten stark verzerrter Elemente zu verhindern. Alternativ werden die Bewehrungselemente häufig auf dem Betonrand positioniert; dies führt jedoch zu einer Vergrößerung des inneren Hebelarms und zur Überschätzung der Traglast. *El-Mezaini & Citipitioglu* [30] entwickelten eine Methode zur Umgehung dieses Problems, indem sie die Mittelknoten bei Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen in Richtung der Bewehrungsachse verschieben. Der Ansatz der diskreten Modellierung wird aus oben genannten Gründen in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

### Verbundmodellierung

Zur diskreten Modellierung einer Bewehrung mit nachgiebigem Verbund wird das diskrete Bewehrungselement durch ein Verbundelement ergänzt. Bis heute werden zwei unterschiedliche Verbundelemente in der Literatur vorgeschlagen.

Das *Verbund-Knoten-Element (Bond Link Element)* wurde von *Ngo & Scordelis* [81] entwickelt. Es besteht aus orthogonalen Federn zur Verbindung und Übertragung von Schub- und Normalkräften zwischen einem Bewehrungsknoten und einem angeschlossenen Betonknoten. Das Feder-Element weist keine physikalische Dimension auf, so dass

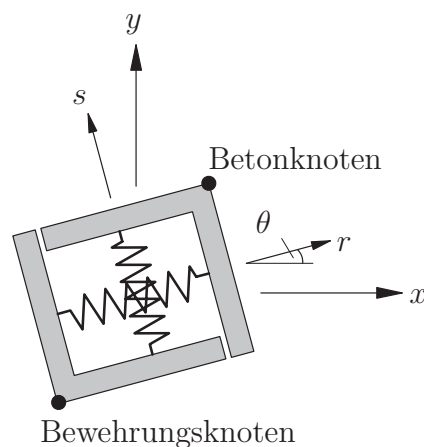


Abbildung 6.2: Verbund-Knoten-Element

die verbundenen Knoten eine geometrisch identische Position im undeformierten FE-Netz haben. In Abbildung 6.2 ist ein Verbund-Knoten-Element für den zweidimensionalen Fall dargestellt. Den beiden orthogonalen Federelementen werden entsprechende Verbund-Konstitutivgesetze zugewiesen. Nachteilig an dieser Modellierungsart ist die Diskontinuität des Verbunds, da dieser nur knotenweise abgebildet wird. Außerdem ist die FE-Diskretisierung von der Bewehrungsführung abhängig.

Das zweite Verbund-Element wird *Verbund-Zonen-Element (Bond Zone Element)* genannt. Der bedeutende Unterschied zum *Verbund-Knoten-Element* ist die endliche Dimension des Verbund-Zonen-Elements. Hier wird die Kontaktfläche zwischen dem Betonstahl und dem Beton in unmittelbarer Nachbarschaft des Bewehrungsstabs über ein Materialgesetz formuliert, das die besonderen Eigenschaften der Verbundzone wiedergeben soll. Dieses Kontaktelement beschreibt eine kontinuierliche Verbundmodellierung. Nachteilig ist erneut die Abhängigkeit der Diskretisierung von der Bewehrungsführung.

### 6.1.2 Verschmierte Modellierung

Die verschmierte Modellierung der Bewehrung wird vorrangig bei der Berechnung von Flächentragwerken wie Schalen, Platten oder Scheiben mit unterschiedlichen Bewehrungslagen bzw. Bewehrungsschichten (z.B. Membran) angewendet, siehe Abbildung 6.1 mitte. Ferner ist auch die Abbildung einzelner Bewehrungsstäbe in verschmierter Form möglich. Bei der verschmierten Modellierung wird die Bewehrung gleichmäßig im Betonelement (Volumenelement, Schalenelement, Scheibenelement) verteilt. Der Integrationsprozess innerhalb eines Betonelements muss deshalb folgendermaßen ergänzt werden: der konstitutive Tensor des Betonelements wird an jedem Integrationspunkt durch Berücksichtigung des Bewehrungsgrades additiv modifiziert. Das Konzept der verschmierten Bewehrung lässt die Modellierung  $n$  richtungsunabhängiger Bewehrungslagen im isoparametrischen Elementraum zu (siehe Abbildung 6.3). Die konstitutive Beziehung jeder  $i$ -ten Bewehrungslage lautet in Matrixschreibweise

$$\Delta\sigma_L^{R,i} = C_L^{R,i} \Delta\epsilon_L^{R,i} \quad \text{für } i = 1 \dots n, \quad (6.1)$$

wobei die inkrementelle Verzerrung  $\Delta\epsilon_L^{R,i}$  aus der Transformation des globalen Verzerrungstensors  $\Delta\epsilon_G$  des Betonelements in das lokale Koordinatensystem der Bewehrung

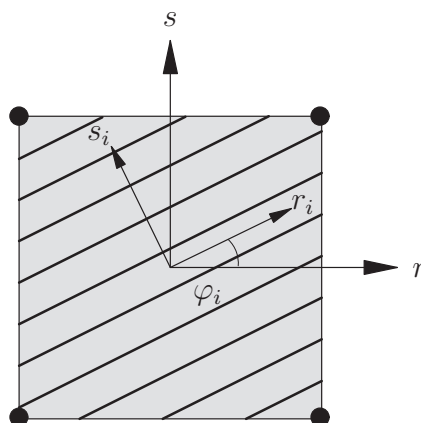


Abbildung 6.3: 2D-Betonelement mit verschmierter Bewehrung



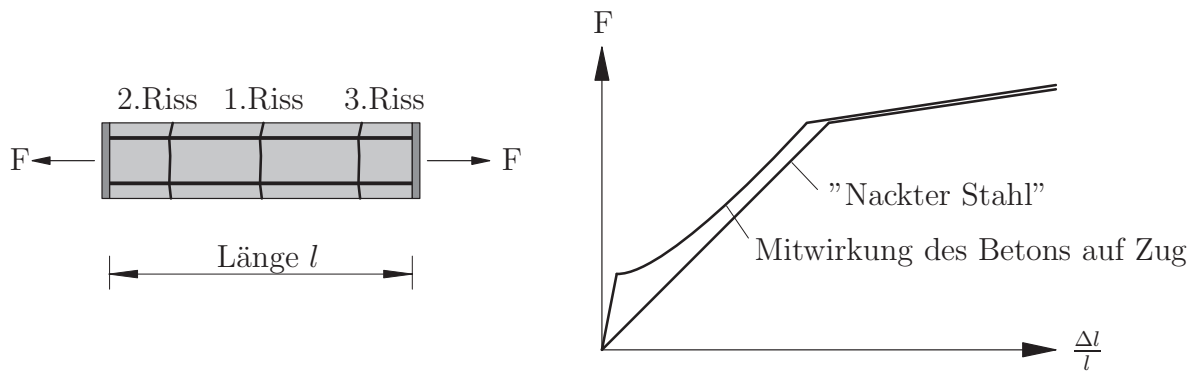


Abbildung 6.4: Tension-stiffening bei einem Stahlbetonzugstab

folgt. In Matrixschreibweise lautet diese Transformation

$$\Delta \epsilon_L^{R,i} = \mathbf{T}_1^{\epsilon,i} \cdot \Delta \epsilon_G . \quad (6.2)$$

Eine ausführliche Beschreibung der Berechnung der anteiligen internen Kräfte und der Elementsteifigkeitsmatrizen ist in den Arbeiten von *Feenstra* [36] und *Brendler* [15] zu finden. Da in dieser Arbeit Volumenelemente zur Diskretisierung der Betonstruktur eingesetzt werden, erscheint eine verschmierte Modellierung der Bewehrung nicht sinnvoll.

### Verbundmodellierung

Bei verschmierter Bewehrungsmodellierung wird als Interaktion zwischen Beton und Stahl der Effekt des *Tension-Stiffening*, das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen, berücksichtigt, vergleiche unter anderem *Menrath* [75]. Bei einem unter Zugkraft belasteten Stahlbetonstab entsteht an der schwächsten Querschnittsstelle der erste Riss. Bis zur Rissbildung wird die Kraft vorrangig durch den Beton getragen, danach wird die Kraft zwischen den beiden Betonteilen durch den Bewehrungsstahl übertragen. Mit zunehmendem Abstand zum Riss wird die Kraft anteilig über Verbundwirkung wieder zurück in den Beton übertragen, so dass die Stahlspannung abnimmt. Bei einer Weiterbelastung des Zugstabs bilden sich weitere Risse, bis das abschließende Rissbild entstanden ist. Mit dem *Tension-Stiffening* ergeben sich bei gleicher Kraft deutlich geringere Dehnungen gegenüber einem "nackten" Stahl.

### 6.1.3 Eingebettete Modellierung

Bei der eingebetteten Modellierung wird die Bewehrung mit eigenständigen Elementen abgebildet. Im Unterschied zur diskreten Modellierung eines Bewehrungsstabs werden für die Abbildung des Betons und der Bewehrung Elemente mit gleicher Knoten- und Freiheitsgradanzahl sowie gleichen Ansatzfunktionen verwendet, vergleiche Abbildung 6.5. Somit wird bei der eingebetteten Modellierung ein eindimensionaler Bewehrungsstab in zwei- oder dreidimensionale Bewehrungselemente eingelagert. Durch Integration entlang eines Stabsegments innerhalb des mehrdimensionalen Bewehrungselements erhält man die Anteile der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der internen Kräfte dieses Stabsegments. Anschließend werden die Bewehrungselemente den Betonelementen überlagert und die Gesamtsteifigkeiten bzw. -knotenkräfte durch Addition der Anteile aus Bewehrungselement und Betonelement berechnet. Ein großer Vorteil der eingebetteten Modellierung

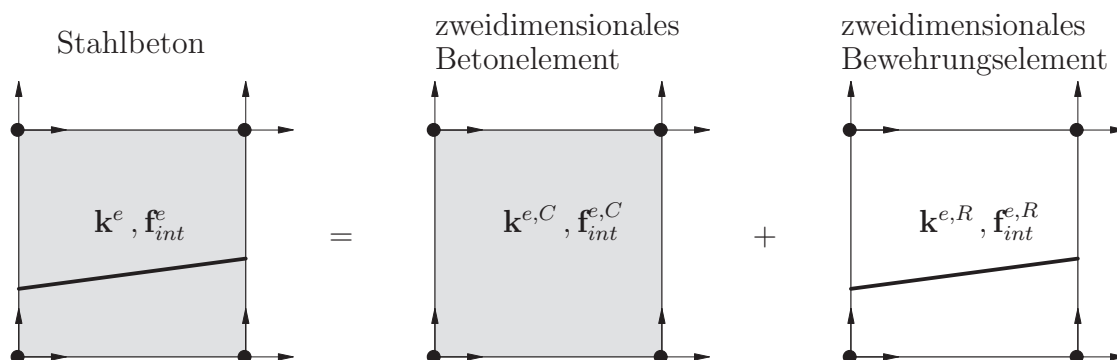


Abbildung 6.5: Eingebettete Bewehrungsmodellierung

gegenüber der verschmierten und diskreten Modellierung ist die beliebige Lage eines Bewehrungsstabs innerhalb der FE-Diskretisierung und somit die Unabhängigkeit der diskretisierten Betonstruktur von der Bewehrungsführung, siehe Abbildung 6.1 rechts. Im Rahmen dieser Arbeit wird anstelle der Modellierung separater Bewehrungselemente eine Erfassung der Stabsegmente in den Betonelementen vorgenommen, die von einzelnen Bewehrungsstäben durchlaufen werden. Die Elementsteifigkeitsmatrix und der Vektor der internen Kräfte werden durch den Anteil entsprechender Bewehrungssegmente additiv modifiziert. Im folgenden Abschnitt wird ein eingebettetes Bewehrungsmodell für perfekten Verbund vorgestellt.

## 6.2 Eingebettete Modellierung für perfekten Verbund

In einer vereinfachten Analyse von Stahlbetonkonstruktionen wird häufig vollständige Kompatibilität zwischen Beton- und Stahldehnungen angenommen. Dieser Sachverhalt wird als perfekter Verbund bezeichnet. Für realistische Traglastberechnungen zahlreicher Stahlbetonbalken ist diese Annahme ausreichend und führt zu vernünftigen Ergebnissen.

### 6.2.1 Generierung eines Bewehrungsstabs

Ein Konzept zur exakten geometrischen Abbildung gekrümmter Spannglieder innerhalb der eingebetteten Bewehrungsmodellierung bei vorgespannten Betonflächentragwerken wird in Hofstetter [47] vorgestellt. Dabei ermöglicht die Beschreibung der Spannglieder durch Flächen- oder Raumkurven eine exakte Erfassung der Spanngliedführung. In der vorliegenden Arbeit wurde für jeden Bewehrungsstab eine gerade Form innerhalb der eingebetteten Modellierung angenommen. Somit werden keine gekrümmten Stäbe erzeugt. Die Lage jedes Stabs wird im globalen Koordinatensystem durch den Startpunkt  $P_S$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x}_S$  und den Endpunkt  $P_E$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x}_E$  beschrieben. Ein zusätzlicher Referenzpunkt  $P_R$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x}_R$  wird benötigt, um das lokale Stabkoordinatensystem  $(x_L, y_L, z_L)$  zu definieren, vergleiche Abbildung 6.6. Die Stabgenerierung und die Berechnung der globalen Steifigkeits- und Kraftanteile im Rahmen der eingebetteten Modellierung erfordern die elementweise Abbildung globaler Koordinaten  $(x, y, z)$  in entsprechende isoparametrische Koordinaten  $(r, s, t)$ . Im folgenden Unterpunkt wird ein Verfahren zur Lösung dieses Problems vorgestellt.

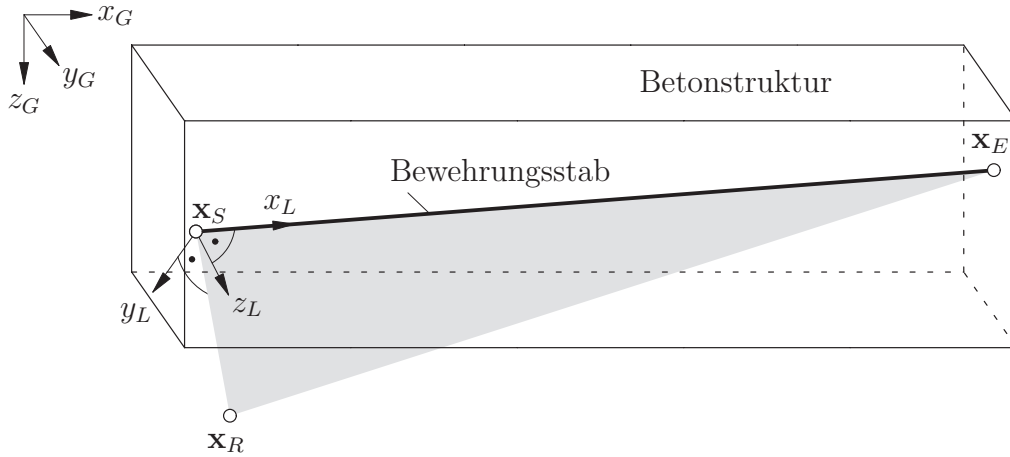


Abbildung 6.6: Lage eines Bewehrungsstabs in der Betonstruktur

### Inverse Mapping

Elwi & Hrudey [33] verwenden zur Lösung des dargestellten Problems das *Inverse Mapping* für 2D-Elemente, eine Erweiterung auf 3D-Elemente wird in Barzegar & Maddipudi [4] erläutert. Ausgangspunkt des *Inverse Mapping* ist das isoparametrische Konzept, bei dem das Geometrie- und das Verschiebungsfeld gleichermaßen über die Elementansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  interpoliert werden. Dadurch ist die eindeutige lineare Abbildung  $f: (r, s, t)_P \rightarrow (x, y, z)_P$  an einem Punkt  $P$  möglich:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(r, s, t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(r, s, t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}(r, s, t) \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

mit den Elementknotenkoordinaten  $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k$ .

Die inverse Abbildung  $f^{-1}: (x, y, z)_P \rightarrow (r, s, t)_P$  ist dagegen nichtlinear. Zur Lösung dieses nichtlinearen Problems wird als Näherungsverfahren das *Inverse Mapping* eingesetzt. Durch Umstellen von Gleichung (6.3) erhält man die Vektorfunktion  $\mathbf{F}(r, s, t)_P$

$$\mathbf{F}(r, s, t)_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_P - \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Die gesuchten isoparametrischen Koordinaten  $(r, s, t)_P$  stellen die Nullstellen der Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  dar. Ausgehend von einem Startwerte-Tripel  $(r^0, s^0, t^0)_P$  wird über ein lokales Newton-Iterationsschema die Nullstellensuche durchgeführt, wobei eine schnelle Konvergenz gegeben ist (Barzegar & Maddipudi [4]). In Abbildung 6.7 ist der Algorithmus des *Inverse Mapping* dargestellt.

Vektorfunktion:

$$\mathbf{F}(r, s, t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_P - \begin{bmatrix} \mathbf{N}(r, s, t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(r, s, t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}(r, s, t) \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung nach  $i+1$  Iterationen:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}_P^{i+1} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}_P^i - \left\{ -1 \cdot (\mathbf{DF}^i)^{-1} \cdot \mathbf{F}^i \right\} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}_P^i + (\mathbf{DF}^i)^{-1} \cdot \mathbf{F}^i$$

mit der Ableitung: 
$$\mathbf{DF}^i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial r} \cdot x_k & f_{12} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial s} \cdot x_k & f_{13} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial t} \cdot x_k \\ f_{21} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial r} \cdot y_k & f_{22} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial s} \cdot y_k & f_{23} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial t} \cdot y_k \\ f_{31} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial r} \cdot z_k & f_{32} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial s} \cdot z_k & f_{33} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial t} \cdot z_k \end{aligned}$$

Abbruchkriterium:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r, s, t)_P^{i+1} \leq \text{TOL} &\Rightarrow (r, s, t)_P = (r, s, t)_P^{i+1} \\ \mathbf{F}(r, s, t)_P^{i+1} > \text{TOL} &\Rightarrow \text{nächster Iterationsschritt} \end{aligned}$$

Abbildung 6.7: Algorithmus für *Inverse Mapping*

## Ermittlung der Bewehrungsknoten-Koordinaten

Die Ermittlung der Steifigkeits- und Kraftanteile aus einem Bewehrungsstab erfordert die Bestimmung der Schnittpunkte (Bewehrungsknoten  $\hat{=}$  Segmentknoten) jedes Stabes mit den Seitenflächen der Betonelemente, die von den einzelnen Bewehrungsstäben durchlaufen werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur systematischen Bestimmung der Segmentknotenkoordinaten verbunden mit der Generierung aufeinanderfolgender Stabsegmente entwickelt, siehe Abbildung 6.8. Als Annahme für die Generierung der Stabsegmente werden die Seitenflächen der dreidimensionalen Betonelemente als Ebenen angesehen. Nach *Barzegar & Maddipudi* [4] erfüllen strukturierte 8-knotige Hexaeder-Elemente diese Bedingung exakt, bei höherwertigen Elementen mit gekrümmten Seitenflächen wird eine Näherung eingeführt.

Zu Beginn jeder Stabgenerierung wird durch einen einfachen Suchalgorithmus mit Hilfe

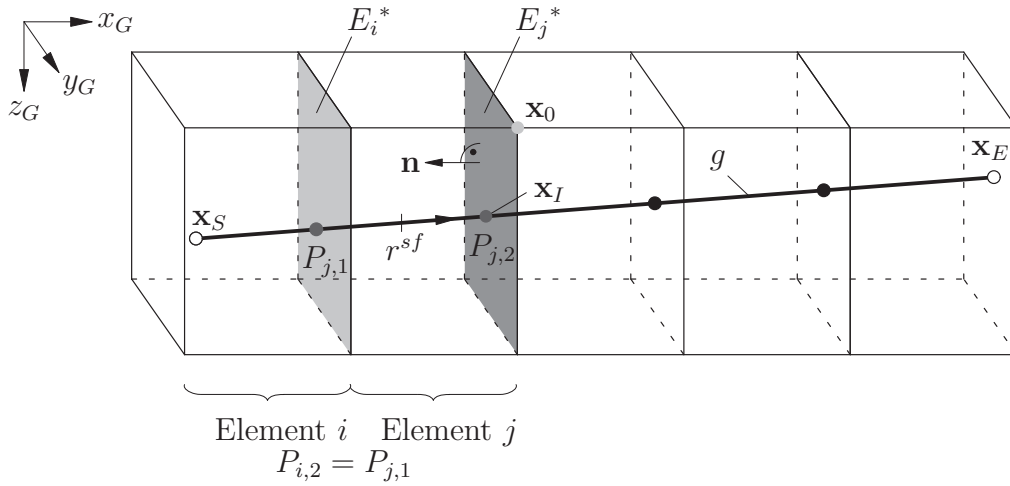


Abbildung 6.8: Generierung der Stabsegmente

des *Inverse Mapping* das Betonelement  $i$  ermittelt, das den Startpunkt  $P_S$  enthält. Als Bedingung für das Startelement muss dabei gelten

$$-1 \leq (r, s, t)_S \leq 1. \quad (6.5)$$

Alternativ wäre die Vorgabe eines Startelements denkbar. Der zweite Segmentknoten  $P_{i,2}$  im Element  $i$  wird aus der Menge der potentiellen Schnittpunkte des Einzelstabs mit den Seitenflächen des Betonelements  $i$  wiederum durch Überprüfen der Bedingung  $-1 \leq (r, s, t)_I \leq 1$  für jeden potentiellen Schnittpunkt  $P_I$  ermittelt. Zur Bestimmung eines potentiellen Schnittpunkts  $P_I$  wird der Bewehrungsstab  $g$  in Parameterform dargestellt

$$g : \mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \alpha \cdot (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S) \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.6)$$

und die entsprechende Seitenfläche des Betonelements als Ebene in Koordinatendarstellung definiert.

$$E : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.7)$$

$\mathbf{x}_0$  ist ein Eckknoten,  $\mathbf{x}$  ein beliebiger Punkt auf der Seitenfläche  $E$  und  $\mathbf{n}$  die Normale auf diese Seitenfläche. Der Schnittpunkt  $\mathbf{x}_I$  des Bewehrungsstabs  $g$  mit der Seitenfläche  $E$  ergibt sich dann zu

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_S + \alpha_I \cdot (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S) \quad \text{mit} \quad \alpha_I = \frac{(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S) \cdot \mathbf{n}}. \quad (6.8)$$

Mit der Ermittlung des Segmentknotens  $P_{i,2}$  sind dessen globale und isoparametrische Koordinaten sowie die Seitenfläche  $E_i^*$ , die  $P_{i,2}$  enthält, bekannt. Mit den beiden Segmentknoten  $P_{i,1}$  und  $P_{i,2}$  wird ein neues Stabsegment im Element  $i$  erzeugt. Die gemeinsame Seitenfläche  $E_i^*$  definiert das Nachbarelement  $j$ . Der erste Segmentknoten  $P_{j,1}$  im Element  $j$  ist identisch mit dem zweiten Segmentknoten  $P_{i,2}$  im Element  $i$ . Für Element  $j$  wird wiederum der zweite Segmentknoten entsprechend Gleichung (6.8) und mit Überprüfung der Bedingung  $-1 \leq (r, s, t)_I \leq 1$  bestimmt. Somit werden die Segmentknoten und Stabsegmente elementweise generiert. Durch eine interne Abfrage wird für jeden gefundenen Segmentknoten die geometrische Übereinstimmung mit dem Endknoten  $P_E$  überprüft, und gegebenenfalls die Generierung beendet.

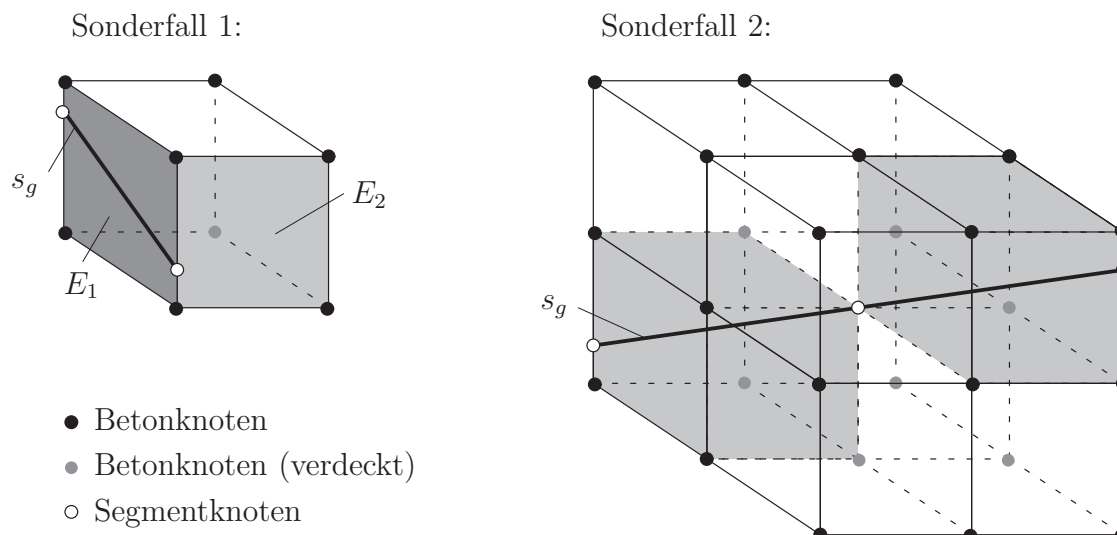


Abbildung 6.9: Sonderfälle bei der Generierung der Stabsegmente

In Abbildung 6.9 sind zwei Sonderfälle dargestellt, die bei der Generierung untersucht werden müssen. Liegt ein Stabsegment  $s_g$  in einer Seitenfläche  $E_1$ , gibt es innerhalb eines Betonelements zwei benachbarte Seitenflächen  $E_1$  und  $E_2$ , die einen Segmentknoten enthalten. Dabei wird diejenige Seitenfläche ausgeschlossen, die parallel zum Stabsegment ist. Verläuft ein Stabsegment durch einen Betonknoten, können mehrere Betonelemente existieren, die diesen Segmentknoten enthalten. In jedem potentiellen Betonelement wird der mögliche neue Segmentknoten ermittelt und Bedingung (6.5) überprüft. Für den tatsächlichen neuen Segmentknoten ist diese Bedingung erfüllt, und somit das Element gefunden, welches das neu generierte Stabsegment enthält.

### Mapping der Integrationspunkte

Für den Integrationsprozess entlang eines Bewehrungsstabsegments im isoparametrischen Elementraum des Betonelements werden die isoparametrischen Koordinaten  $r, s, t$  an den Integrationspunkten des Bewehrungsstabs benötigt. Der Bewehrungsstab wird als Linienelement betrachtet, die dimensionslose Koordinate  $r^{sf}$  zur Kennzeichnung eines Stabsegments liegt im Wertebereich  $[-1; 1]$ . Um an einer Stelle  $r^{sf}$  die zugehörigen Koordinaten  $r, s, t$  zu erhalten, wird die Geradengleichung des aktuellen Stabsegments im isoparametrischen Elementraum aufgestellt

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + \frac{r^{sf} + 1}{2} \begin{bmatrix} r_2 - r_1 \\ s_2 - s_1 \\ t_2 - t_1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

mit den bekannten isoparametrischen Koordinaten  $r_1, s_1, t_1$  und  $r_2, s_2, t_2$  der Knoten des Stabsegments. Somit können die isoparametrischen Koordinaten  $r, s, t$  des Betonelements jedem Integrationspunkt  $r^{sf}$  des Stabsegments zugeordnet werden.

### 6.2.2 Diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts

Für die eingebettete Modellierung mit perfektem Verbund wird die Annahme getroffen, dass nur die Normalspannung  $\sigma_L^R$  eines Bewehrungsstabs in der schwachen Form des Gleichgewichts berücksichtigt wird. Dabei bezeichnet  $R$  den Bewehrungsstab (Rebar) und  $L$  die lokale Ausrichtung des Bewehrungsstabs. Somit geht allein der virtuelle Arbeitsanteil aus Normalspannung des Bewehrungsstabs und virtueller Verzerrung des Bewehrungsstabs  $\delta\epsilon_L^R$  in die schwache Form des Gleichgewichts ein.

$$G^R(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}^R} \delta\epsilon_L^R \sigma_L^R dV^R \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (6.10)$$

Analog zu Abschnitt 2.2.2 wird der Verlauf der Verzerrungen bzw. der virtuellen Verzerrungen des Bewehrungsstabs mit Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  der Matrixelemente und dem kinematischen Operator  $\mathbf{B}$  elementweise approximiert, wobei für die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts eine Transformation vom globalen Koordinatensystem in das lokale Bewehrungskoordinatensystem erforderlich ist.

$$\epsilon_L^R = \mathbf{T}_1^\epsilon \epsilon_G^R = \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \delta\epsilon_L^R = \mathbf{T}_1^\epsilon \delta\epsilon_G^R = \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} \delta\mathbf{d} \quad (6.11)$$

$\mathbf{T}_1^\epsilon$  ist der erste Zeilenvektor der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^\epsilon$  und ist Anhang C zu entnehmen. Damit lautet die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts des Bewehrungsanteils

$$G^R(\mathbf{u}^h, \delta\mathbf{u}^h) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}^R} \delta\mathbf{d}^T \underbrace{\left[ \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R \right]}_{\mathbf{f}_{int}^{e,R}} \quad \forall \delta\mathbf{d}. \quad (6.12)$$

Die Linearisierung kann analog zu Abschnitt 2.2.3 durchgeführt werden. Vereinfachend wird der Index zur Kennzeichnung der globalen Newton-Iteration weggelassen. Unter Anwendung der Kettenregel wird die Ableitung der lokalen Spannung  $\sigma_L^R$  nach den globalen Elementverschiebungen  $\mathbf{d}$  zu

$$\frac{\partial\sigma_L^R}{\partial\mathbf{d}} = \frac{\partial\sigma_L^R}{\partial\epsilon_L^R} \frac{\partial\epsilon_L^R}{\partial\epsilon_G^R} \frac{\partial\epsilon_G^R}{\partial\mathbf{d}} = C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B}. \quad (6.13)$$

Aus Gleichung (6.13) ergeben sich die Bewehrungsanteile der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^{e,R}$  und des Vektors der internen Kräfte  $\mathbf{f}_{int}^{e,R}$ .

$$\mathbf{k}^{e,R} = \frac{\partial\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d})}{\partial\mathbf{d}} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_G^R \mathbf{B} dV^R \quad (6.14)$$

$$\mathbf{f}_{int}^{e,R} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \sigma_G^R dV^R \quad (6.15)$$

Hierbei ist  $C_L^R$  die lokale Materialtangente des Bewehrungsstabs. Der globale Tangentenoperator  $\mathbf{C}_G^R$  und der globale Spannungsvektor können mit Hilfe des Transformationsvektors  $\mathbf{T}_1^\epsilon$  aus den lokalen Werten berechnet werden. Die Integration der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der internen Kräfte über das Elementvolumen wird generell mittels einer numerischen Integration im isoparametrischen Elementraum durchgeführt.



### 6.2.3 Rebar-Modell

Bei der eingebetteten Bewehrungsmodellierung wird eine Superposition der Betonstruktur mit der vorhandenen Bewehrung vorgenommen. Dabei wird in der Regel die Abminderung des Betonvolumens infolge der vorhandenen Bewehrung nicht berücksichtigt. Bei einem niedrigen Bewehrungsgrad ist dieser vereinfachte Ansatz gerechtfertigt, liegt hingegen ein hoher Bewehrungsanteil vor, muss der Abminderung des Betonvolumens durch die vorhandene Bewehrung Rechnung getragen werden. Zu diesem Zweck wird das Rebar-Modell, basierend auf der eingebetteten Bewehrungsmodellierung, vorgestellt. Es reicht in die 70er Jahre zurück und beinhaltet ursprünglich das Aufaddieren oder Überlagern von Steifigkeiten unterschiedlicher Materialien. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet sich in *Gebekken* [38]. Das Einsatzgebiet des Rebar-Konzepts ist breit gefächert, beispielsweise wird es in der Geotechnik zur Simulation von Pfahlgründungen verwendet (*Sadek & Shahrour* [98]). Im Folgenden wird das allgemeine Vorgehen bei der Anwendung von Rebar-Modellen für Bewehrungsfasern sowie Faserschichten erläutert.

Im Rahmen einer nichtlinearen Strukturanalyse mit dem inkrementell-iterativen Newton-Raphson-Verfahren müssen die globale tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^e$  und der Vektor der internen Kräfte  $\mathbf{f}_{int}^e$  für jedes Element berechnet werden (siehe Abschnitt 2.2.3 und Abschnitt 6.2.2). Diese setzen sich bei Verbundwerkstoffen aus Anteilen des Matrixmaterials (Index  $m$ ) und des Fasermaterials (Index  $sf$ =single fiber bzw. Einzelfaser, Index  $fl$ =fiber layer bzw. Faserschicht) zusammen. Der Integrationsprozess des Matrixmaterials erfolgt an den Integrationspunkten im isoparametrischen Elementraum, die Integration des Faseranteils erfordert zusätzliche Integrationspunkte entlang der Einzelfaser bzw. innerhalb Faserschichten. In dieser Arbeit werden Hexaeder-Volumenelemente für das Matrixmaterial verwendet, die Vorgehensweise bei Scheiben- oder Schalenelementen ist analog. Zur Vereinfachung der folgenden Gleichungen wird der Elementindex  $e$  weggelassen.

#### Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix

Der Integrationsprozess über das Elementvolumen  $\mathcal{B}$  wird im isoparametrischen Elementraum  $(r,s,t)$  durchgeführt. Somit ergibt sich der Steifigkeitsanteil aus dem Matrixmaterial  $\mathbf{k}_m$  zu

$$\mathbf{k}_m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr ds dt. \quad (6.16)$$

Dabei ist  $\mathbf{B}$  der Ableitungsoperator und  $\mathbf{C}_m$  der globale Tangentenoperator des Matrixmaterials. Die Integration über das Volumen einer Einzelfaser  $V^{sf}$  wird entlang der Einzelfaser im Fasergebiet  $(r^{sf})$  durchgeführt, wobei die Querschnittsfläche einer Einzelfaser  $A^{sf}$  als konstant angenommen wird. Bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix ist der Steifigkeitsanteil des Matrixmaterials aus der Integration über das Faservolumen vom Steifigkeitsanteil des Matrixmaterials aus der Integration über das Gesamtvolumen zu subtrahieren, da sonst das Faservolumen im Integrationsprozess doppelt berücksichtigt würde. Aus diesem Grund muss entlang der Faser neben dem Steifigkeitsanteil des Fasermaterials  $\mathbf{k}_f^{sf}$  zusätzlich der Steifigkeitsanteil des Matrixmaterials  $\mathbf{k}_m^{sf}$  bestimmt werden,



$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_m^{sf} &= \int_{\mathcal{B}^{sf}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} dV^{sf} = A^{sf} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr^{sf} \\
\mathbf{k}_f^{sf} &= \int_{\mathcal{B}^{sf}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_f^{sf} \mathbf{B} dV^{sf} = A^{sf} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_f^{sf} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr^{sf}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$\mathbf{C}_f^{sf}$  stellt den globalen Tangentenoperator der Einzelfaser dar. Analog erfolgt die Integration über das Volumen einer Faserschicht  $V^{fl}$  in der Faserebene  $(r^{fl}, s^{fl})$  mit konstanter Faserschichtdicke  $h^{fl}$ . Die Steifigkeitsanteile aus dem Matrixmaterial  $\mathbf{k}_m^{fl}$  und dem Fasermaterial  $\mathbf{k}_f^{fl}$  werden ermittelt über

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_m^{fl} &= \int_{\mathcal{B}^{fl}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} dV^{fl} = h^{fl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_m \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr^{fl} ds^{fl} \\
\mathbf{k}_f^{fl} &= \int_{\mathcal{B}^{fl}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_f^{fl} \mathbf{B} dV^{fl} = h^{fl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C}_f^{fl} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr^{fl} ds^{fl}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Die resultierende Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}$  wird für  $n^{sf}$  Einzelfasern und  $n^{fl}$  Faserschichten nach Gleichung (6.19) ermittelt.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_m + \sum_{i=1}^{n^{sf}} \left( \mathbf{k}_f^{sf,i} - \mathbf{k}_m^{sf,i} \right) + \sum_{j=1}^{n^{fl}} \left( \mathbf{k}_f^{fl,j} - \mathbf{k}_m^{fl,j} \right) \tag{6.19}$$

## Berechnung der internen Kräfte

Der Kraftanteil aus dem Matrixmaterial ergibt sich durch Integration über das Elementvolumen im isoparametrischen Raum  $(r, s, t)$  mit dem globalen Spannungsvektor des Matrixmaterials  $\boldsymbol{\sigma}_m$  zu

$$\mathbf{f}_m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m \det \mathbf{J} dr ds dt. \tag{6.20}$$

Die Integration über das Volumen einer Einzelfaser  $V^{sf}$  wird entlang der Einzelfaser im Fasergebiet  $(r^{sf})$  mit konstanter Querschnittsfläche  $A^{sf}$  durchgeführt. Bei der Berechnung der internen Kräfte ist wiederum die doppelte Berücksichtigung des Matrixmaterials zu vermeiden. Damit berechnen sich die Kraftanteile aus dem Matrixmaterial  $\mathbf{f}_m^{sf}$  und dem Fasermaterial  $\mathbf{f}_f^{sf}$  zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_m^{sf} &= \int_{\mathcal{B}^{sf}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m dV^{sf} = A^{sf} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m \det \mathbf{J} dr^{sf} \\
\mathbf{f}_f^{sf} &= \int_{\mathcal{B}^{sf}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_f^{sf} dV^{sf} = A^{sf} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_f^{sf} \det \mathbf{J} dr^{sf}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

mit dem globalen Spannungsvektor der Einzelfaser  $\boldsymbol{\sigma}_f^{sf}$ . Analog folgen die Kraftanteile  $\mathbf{f}_m^{fl}$  und  $\mathbf{f}_f^{fl}$  aus der Integration über das Volumen einer Faserschicht  $V^{fl}$  in der Faserebene  $(r^{fl}, s^{fl})$  mit konstanter Faserschichthöhe  $h^{fl}$  und dem globalen Spannungsvektor der Faserschicht  $\boldsymbol{\sigma}_f^{fl}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_m^{fl} &= \int_{\mathcal{B}^{fl}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m^{fl} dV^{fl} = h^{fl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m^{fl} dr^{fl} ds^{fl} \\
\mathbf{f}_f^{fl} &= \int_{\mathcal{B}^{fl}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_f^{fl} dV^{fl} = h^{fl} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_f^{fl} dr^{fl} ds^{fl}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Der resultierende Vektor der internen Kräfte  $\mathbf{f}$  wird für  $n^{sf}$  Einzelfasern und  $n^{fl}$  Faserschichten nach Gleichung (6.23) berechnet.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_m + \sum_{i=1}^{n^{sf}} \left( \mathbf{f}_f^{sf,i} - \mathbf{f}_m^{sf,i} \right) + \sum_{j=1}^{n^{fl}} \left( \mathbf{f}_f^{fl,j} - \mathbf{f}_m^{fl,j} \right) \tag{6.23}$$

#### 6.2.4 Testbeispiel

Die vorgestellten Rebar-Elemente sollen am Beispiel eines 8-knotigen Volumenelements für unterschiedliche Faserverstärkungen getestet werden, vergleiche *Gebekken* [38]. In Abbildung 6.10 sind das statische System, die verwendete FE-Diskretisierung sowie die unterschiedlichen Faserlagen dargestellt. Die Belastung wird als Flächenlast aufgebracht, um für ein isotropes Material einen homogenen Spannungszustand zu erzeugen. Vereinfachend wird die Querdehnzahl zu  $\nu = 0$  gesetzt. Der Fasergehalt beträgt konstant 10% des Gesamtvolumens. In diesem Testbeispiel werden fiktive Materialkennwerte nach *Gebekken* [38] verwendet.

Für den unverstärkten Faserblock liefern die analytische und numerische Berechnung eine konstante Verschiebung der Lastangriffspunkte um 1.0 mm in Belastungsrichtung. In einer zweiten Berechnung wird der Block mit Faserschichten bzw. Einzelfasern in verschiedenen Lagen verstärkt. Für eine zentrische Faseranordnung existiert eine analytische Lösung, der Querschnitt bestehend aus Matrix und Faser wird durch einen ideellen Querschnitt der Form

$$A_{id} = 0.9 A_m + \frac{E_f}{E_m} A_f = 0.9 \cdot 10000 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 1000 \text{ mm}^2 = 11000 \text{ mm}^2 \tag{6.24}$$

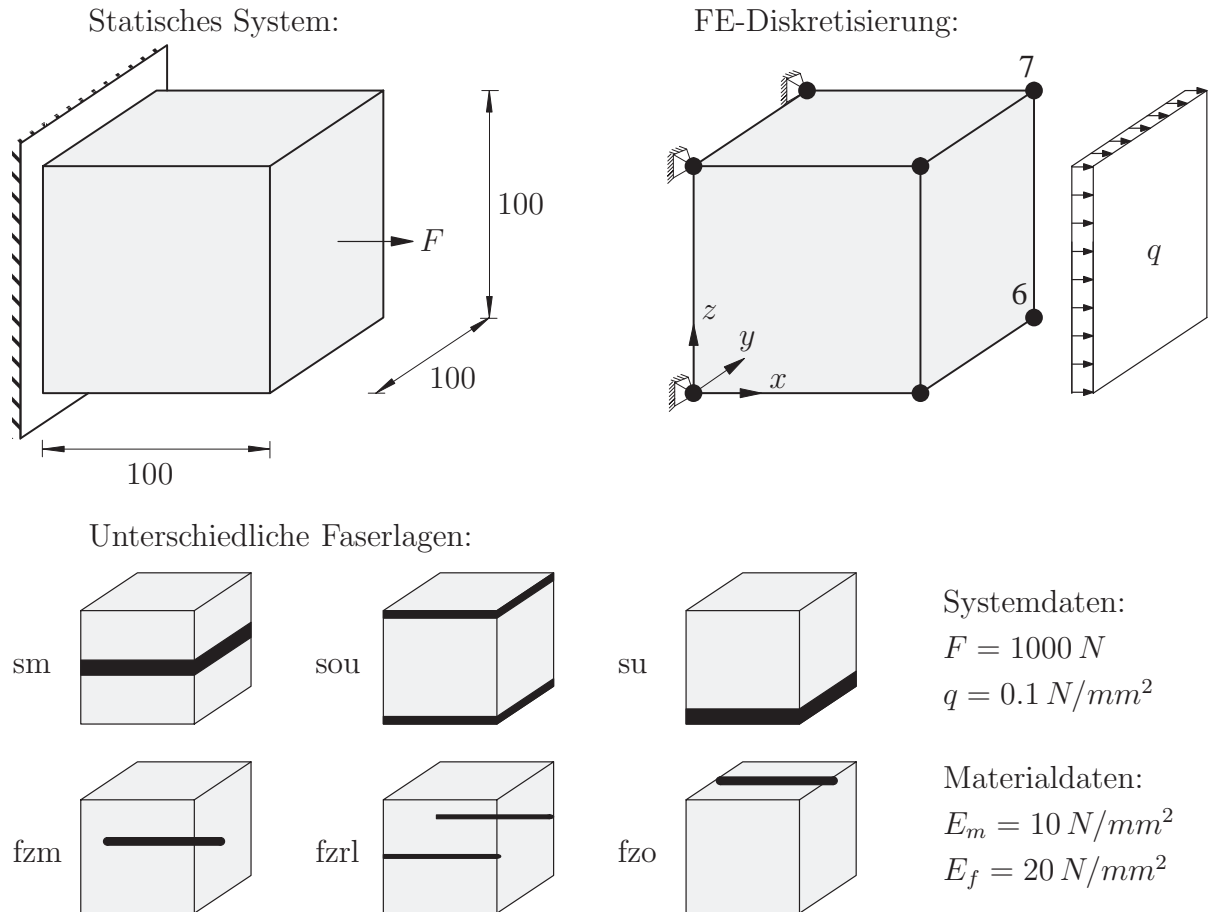


Abbildung 6.10: Ein-Element-Test für Rebarelemente

ersetzt. Somit ergibt sich die analytische Verschiebung der Lastangriffsebene zu

$$u_{ref} = \frac{F \ell}{E_m A_{id}} = \frac{1000 \cdot 100}{10 \cdot 11000} \text{ mm} = 0.9091 \text{ mm} \quad (6.25)$$

und wird als Referenzlösung betrachtet. In Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse der numerischen Berechnung für zwei ausgewählte Lastangriffspunkte zusammengefasst. Die numerische Berechnung mit einer zentralen Faserschicht (sm) bzw. einer zentralen Einzelfaser (fzm) mit gleichem Volumen liefert die analytische Lösung. Auch bei einer Aufteilung in zwei symmetrisch zur Mittelachse angeordneten Faserschichten (sou) bzw. Einzelfasern (fzrl) wird die analytische Lösung erreicht. Gebekken [38] hat zusätzlich eine Berechnung mit einer außenliegenden Faserschicht bzw. Einzelfaser durchgeführt, die Ergebnisse aus dem Elementtest (su, fzo) weichen von der Lösung nach Gebekken [38] um maximal 0.5% ab. Das entwickelte Rebar-Element gibt somit sowohl die analytische Lösung als auch die numerische Lösung von Gebekken sehr gut wieder.

### 6.3 Erweitertes Rebar-Modell für nachgiebigen Verbund

Die Annahme der vollständigen Kompatibilität zwischen Beton und Stahl ist nur in Bereichen mit geringer Spannungsübertragung gültig. An Stellen mit hohen Übertragungs-

Tabelle 6.1: Knotenverschiebungen aus den Elementtests in mm für 8-knotige Volumenelemente

Knoten	7			6		
Test	x	y	z	x	y	z
sm	0.9091	0.0	0.0	0.9091	0.0	0.0
sou	0.9091	0.0	0.0	0.9091	0.0	0.0
su	1.0818	0.0	-0.1583	0.7652	0.0	-0.1583
fzm	0.9091	0.0	0.0	0.9091	0.0	0.0
fzrl	0.9091	0.0	0.0	0.9091	0.0	0.0
fzo	0.7652	0.0	0.1583	1.0818	0.0	0.1583

spannungen entlang der Grenzfläche zwischen Bewehrungsstahl und umgebendem Beton, z.B. in der Nähe von Auflagerpunkten, wird die Verbundspannung mit der Relativverschiebung zwischen Bewehrungsstahl und dem Beton in Beziehung gesetzt. Der häufig verwendete Begriff *Verbundschlupf* ist für diese Relativverschiebung nicht sehr geeignet, da der Schlupf gerade die Deformationen bezeichnet, die beim Gleiten der Bewehrung entstehen, nicht jedoch die Deformationen zwischen Beton und Bewehrung während der gesamten Belastungsgeschichte. In dieser Arbeit wird der Begriff *Verbundverschiebung* für die Relativverschiebung zwischen Beton und Stahl eingeführt. Im folgenden Abschnitt wird die Verbundmodellierung für ein Volumenelement mit einem eingebetteten Bewehrungsstab beschrieben.

### 6.3.1 Dreidimensionale Verbundmodellierung

Bereits in den 80er Jahren verwendeten *Balakrishnan & Murray* [2] eine erweiterte Kinematik bei der Verbundmodellierung. Das Ziel war die Beschreibung der Diskontinuität infolge der Relativverschiebungen zwischen Beton und eingebettetem Bewehrungsstab mit Beschränkung auf gerade Bewehrungsstäbe. Diese Beschränkung wurde von *Elwi & Hruday* [33] auf gekrümmte Stäbe erweitert. In der vorliegenden Arbeit wird die Diskontinuität in Richtung des Bewehrungsstabs durch Einführen einer Verbundverschiebung beschrieben. Es wird angenommen, dass orthogonal zur Stabachse keine Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung vorhanden ist. In Abbildung 6.11 ist schematisch die FE-Diskretisierung eines 8-knotigen Volumenelements mit kinematischer Erweiterung durch zusätzliche Interfaceknoten dargestellt.

Bei der eingebetteten Verbundmodellierung wird die virtuelle Arbeit des Bewehrungsstabs (6.10) um einen Verbundspannungsanteil  $\tau_L^B$  erweitert.

$$G^{R+B}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{B^R} \delta\epsilon_L^R \sigma_L^R dV^R + \int_{O^R} \delta u_L^B \tau_L^B dS^R \quad \forall \delta\mathbf{u}. \quad (6.26)$$

Dabei stellt  $O^R$  die Oberfläche des Bewehrungsstabs und  $dS^R$  einen infinitesimal kleinen Teil der Oberfläche des Bewehrungsstabs dar. Beim Rebar-Modell für perfekten Verbund ist die Dehnung des Bewehrungsstabs mit der zugehörigen Betondehnung identisch, im Fall nachgiebigen Verbunds ergibt sich die Gesamtdehnung des Bewehrungsstabs aus der Addition der Verzerrungsanteile des Betons  $\epsilon_L^C$  (C=concrete) und des Verbunds  $\epsilon_L^B$

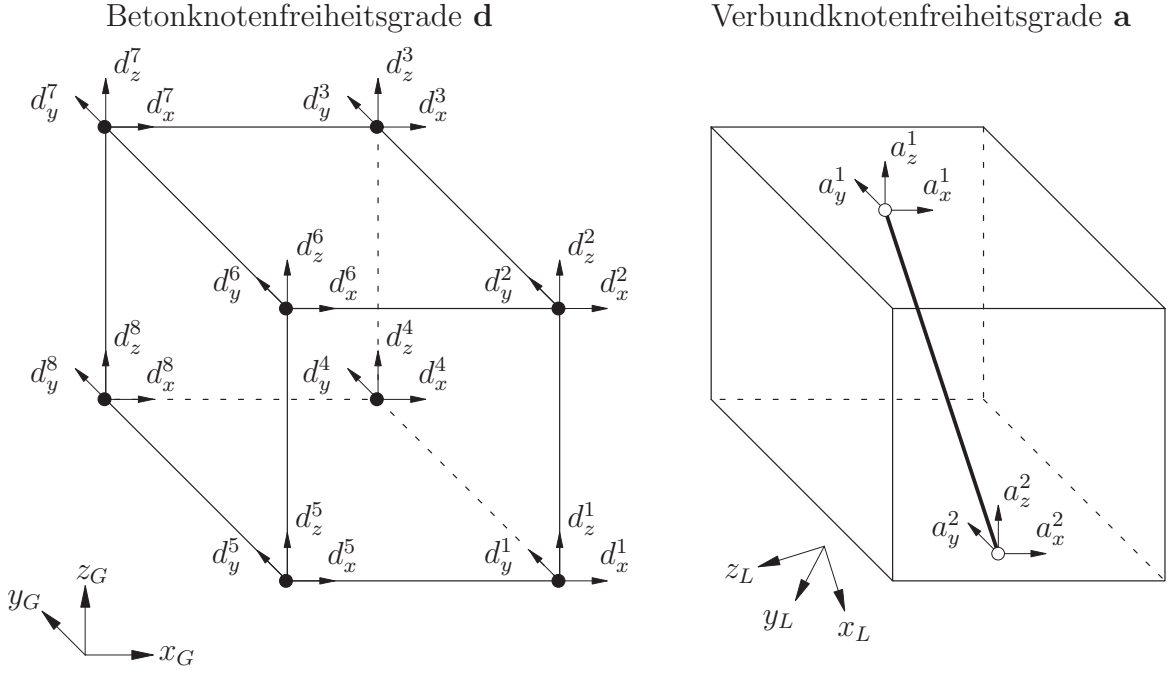


Abbildung 6.11: Volumenelement mit einem Bewehrungsstab

(B=bond) zu

$$\epsilon_L^R = \epsilon_L^C + \epsilon_L^B \quad \rightarrow \quad \delta \epsilon_L^R = \delta \epsilon_L^C + \delta \epsilon_L^B. \quad (6.27)$$

Analog setzt sich die Längsverschiebung des Bewehrungsstabs aus den lokalen Verschiebungsanteilen des Betons  $u_L^C$  und des Verbunds  $u_L^B$  zusammen.

$$u_L^R = u_L^C + u_L^B \quad (6.28)$$

Für die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts werden die Verzerrungen des Bewehrungsstabs sowie die Verbundverschiebungen über Knotenverschiebungen und entsprechende Ansatzfunktionen approximiert. Die lokalen Betonverzerrungen können nach (6.11) mit den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  formuliert werden.

$$\epsilon_L^{C,h} = \mathbf{T}_1^\epsilon \epsilon_G^{C,h} = \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \delta \epsilon_L^{C,h} = \mathbf{T}_1^\epsilon \delta \epsilon_G^{C,h} = \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (6.29)$$

Zur Bestimmung der Verbundverzerrungen ist die Transformation der globalen Verschiebungen an den Verbundknoten  $i$  in das lokale Bewehrungskoordinatensystem erforderlich. Nachdem nur die Verschiebung in lokaler Stabrichtung  $x_L$  betrachtet wird, ergibt sich die lokale Verbundknotenverschiebung  $b_L^i$  aus der Multiplikation des ersten Zeilenvektors  $\mathbf{T}_1^d$  der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^d$  mit der globalen Verbundknotenverschiebung  $\mathbf{a}^i$ .

$$b_L^i = \mathbf{T}_1^d \mathbf{a}^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b}_L = \mathbf{T}^b \mathbf{a} \quad (6.30)$$

Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}^d$  und  $\mathbf{T}^b$  sind zusammen mit  $\mathbf{T}_1^d$  in Anhang C aufgeführt. Das lokale Verschiebungsfeld  $u_L^B$  und das virtuelle Verschiebungsfeld  $\delta u_L^B$  werden durch Interpolation der lokalen Verbundknotenverschiebungen  $b_L^i$  bzw.  $\delta b_L^i$  mit den Ansatzfunktionen eines Stabelements  $\mathbf{N}_L$  gebildet.

$$u_L^{B,h} = \sum_{i=1}^{iel_b} N_L^i b_L^i = \mathbf{N}_L \mathbf{b}_L \quad \rightarrow \quad \delta u_L^{B,h} = \sum_{i=1}^{iel_b} N_L^i \delta b_L^i = \mathbf{N}_L \delta \mathbf{b}_L \quad (6.31)$$

Für die diskretisierte schwache Form wird das Verbundverschiebungsfeld  $u_L^{B,h}$  in Abhängigkeit der globalen Verbundknotenverschiebungen  $\mathbf{a}$  benötigt. Einsetzen von (6.30) in (6.31) führt zu

$$u^{B,h} = \mathbf{N}_L \mathbf{T}^b \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \delta u^{B,h} = \mathbf{N}_L \mathbf{T}^b \delta \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{N}} \delta \mathbf{a}. \quad (6.32)$$

Durch Multiplikation der lokalen Verbundknotenverschiebungen  $\mathbf{b}_L$  mit dem Ableitungsoperator eines Stabelements  $\mathbf{B}_L$  wird die lokale Verbundverzerrung  $\epsilon_L^{B,h}$  berechnet.

$$\epsilon_L^{B,h} = \mathbf{B}_L \mathbf{b}_L \quad (6.33)$$

Mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^\epsilon$  erfolgt die Transformation der Verzerrungen zwischen dem globalen Koordinatensystem und dem lokalen Koordinatensystem, wobei  $(\mathbf{T}_1^\epsilon)^{-1}$  den ersten Spaltenvektor der Inversen Transformationsmatrix  $(\mathbf{T}^\epsilon)^{-1}$  bezeichnet.

$$\epsilon_L^{B,h} = \mathbf{T}^\epsilon \epsilon_G^{B,h}, \quad \epsilon_G^{B,h} = (\mathbf{T}^\epsilon)^{-1} \epsilon_L^{B,h} \rightarrow \epsilon_G^{B,h} = (\mathbf{T}_1^\epsilon)^{-1} \epsilon_L^{B,h} \quad (6.34)$$

Mit (6.30)-(6.34) lauten die globalen Verbundverzerrungen  $\epsilon_G^B$  in Abhängigkeit der globalen Verbundverschiebungen  $\mathbf{a}$

$$\epsilon_G^{B,h} = (\mathbf{T}_1^\epsilon)^{-1} \mathbf{B}_L \mathbf{b}_L = (\mathbf{T}_1^\epsilon)^{-1} \mathbf{B}_L \mathbf{T}^d \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{a} \quad (6.35)$$

$\tilde{\mathbf{B}}$  stellt den neu definierten Ableitungsoperator der Verbundverschiebungen dar. Einsetzen von (6.27)-(6.35) in (6.26) liefert den Bewehrungsanteil  $G^R$  und den Verbundanteil  $G^B$  der diskretisierten schwachen Form

$$G^R(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}^R} \delta \mathbf{d}^T \underbrace{\left[ \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R \right]}_{\mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^{e,R}} \quad \forall \delta \mathbf{d}. \quad (6.36)$$

$$G^B(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}^R} \delta \mathbf{a}^T \underbrace{\left[ \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R + \int_{\mathcal{O}^{e,R}} \tilde{\mathbf{N}}^T \tau_L^B dS^R \right]}_{\mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^{e,R}} \quad \forall \delta \mathbf{a}.$$

### Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der internen Kräfte

Die Linearisierung von  $G^R$  und  $G^B$  erfolgt analog zu Abschnitt 2.2.3, der Index zur Kennzeichnung der globalen Newton-Iteration wird erneut unterdrückt. Die Ableitung der lokalen Spannung  $\sigma_L^R$  nach den globalen Elementverschiebungen  $\mathbf{d}$  wird zu

$$\frac{\partial \sigma_L^R}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \sigma_L^R}{\partial \epsilon_L^R} \frac{\partial \epsilon_L^R}{\partial \epsilon_L^C} \frac{\partial \epsilon_L^C}{\partial \epsilon_G^C} \frac{\partial \epsilon_G^C}{\partial \mathbf{d}} = C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B}. \quad (6.37)$$

Die erforderlichen Ableitungen nach den globalen Verbundverschiebungen  $\mathbf{a}$  werden über Gleichung (6.38) ermittelt.

$$\frac{\partial \sigma_L^R}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \sigma_L^R}{\partial \epsilon_L^R} \frac{\partial \epsilon_L^R}{\partial \epsilon_L^B} \frac{\partial \epsilon_L^B}{\partial \epsilon_G^B} \frac{\partial \epsilon_G^B}{\partial \mathbf{a}} = C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \tilde{\mathbf{B}}, \quad \frac{\partial \tau_L^B}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \tau_L^B}{\partial u_L^B} \frac{\partial u_L^B}{\partial \mathbf{a}} = k_L^B \tilde{\mathbf{N}} \quad (6.38)$$

Durch Linearisierung von  $G^R$  und  $G^B$  können die Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^{e,R}$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{a}}^{e,R}$ ,  $\mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{d}}^{e,R}$  und  $\mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a}}^{e,R}$  berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^{e,R} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{d}} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_G^R \mathbf{B} dV^R \\
\mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{a}}^{e,R} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \tilde{\mathbf{B}} dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_G^R \tilde{\mathbf{B}} dV^R \\
\mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{d}}^{e,R} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^e(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{d}} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \mathbf{B} dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_G^R \mathbf{B} dV^R \\
\mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a}}^{e,R} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^e(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} C_L^R \mathbf{T}_1^\epsilon \tilde{\mathbf{B}} dV^R + \int_{\mathcal{O}^{e,R}} \tilde{\mathbf{N}}^T k_L^B \tilde{\mathbf{N}} dS^R \\
&= \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_G^R \tilde{\mathbf{B}} dV^R + \int_{\mathcal{O}^{e,R}} \tilde{\mathbf{N}}^T k_L^B \tilde{\mathbf{N}} dS^R
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Hierbei sind  $C_L^R$  die lokale Materialtangente der Bewehrung und  $k_L^B$  die lokale Verbundsteifigkeit. Der globale Tangentenoperator  $\mathbf{C}_G^R$  kann mit Hilfe des Transformationsvektors  $\mathbf{T}_1^\epsilon$  berechnet werden. Somit ergeben sich die Vektoren der internen Kräfte  $\mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^{e,R}$  und  $\mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^{e,R}$  zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^{e,R} &= \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R = \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \mathbf{B}^T \sigma_G^R dV^R \\
\mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^{e,R} &= \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L^R dV^R + \int_{\mathcal{O}^{e,R}} \tilde{\mathbf{N}}^T \tau_L^B dS^R \\
&= \int_{\mathcal{B}^{e,R}} \tilde{\mathbf{B}}^T \sigma_G^R dV^R + \int_{\mathcal{O}^{e,R}} \tilde{\mathbf{N}}^T \tau_L^B dS^R.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

$\sigma_G^R$  stellt den globalen Spannungsvektor der Bewehrung dar, der aus der Transformation der lokalen Spannung  $\sigma_L^R$  in das globale Koordinatensystem folgt. Die Assemblierung aller Elemente führt auf die globalen Steifigkeitsmatrizen und Kraftvektoren.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{D}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^e & \mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{A}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_{\mathbf{d}\mathbf{a}}^e \\
\mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{D}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{d}}^e & \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_{\mathbf{a}\mathbf{a}}^e \\
\mathbf{F}_{int,\mathbf{D}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{int,\mathbf{d}}^e & \mathbf{F}_{int,\mathbf{A}} &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{f}_{int,\mathbf{a}}^e
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Aus Gleichung (6.41) ergibt sich das inkrementelle globale Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{D}} & \mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{A}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{D}} & \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \mathbf{A} \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext,\mathbf{D}} - \mathbf{F}_{int,\mathbf{D}} \\ -\mathbf{F}_{int,\mathbf{A}} \end{bmatrix}^i \tag{6.42}$$

mit den globalen Verschiebungskrementen  $\Delta \mathbf{D}$  und  $\Delta \mathbf{A}$ . Durch Einführen lokaler Koordinatensysteme an den Verbundknoten reduziert sich die Anzahl der Verbundknotenfreiheitsgrade auf einen Freiheitsgrad in Stablängsrichtung, da orthogonal zum Bewehrungsstab perfekter Verbund vorausgesetzt wird.

### 6.3.2 Analogie zur FE-Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung

Zwischen der eingebetteten Verbundmodellierung und der FE-Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung besteht eine Analogie: in beiden Fällen erfolgt die Abbildung einer Diskontinuität mittels einer erweiterter kinematischer Beschreibung. Im Folgenden werden eine erweiterte knotenorientierte Beschreibung (*Extended Finite Element Method*) und eine erweiterte elementorientierte Beschreibung (*Strong Discontinuity Approach*) kurz erläutert. Eine Gegenüberstellung dieser beiden Methoden ist in *Jirásek & Belytschko* [54] zu finden. Anschließend wird die Analogie zur Verbundmodellierung dargestellt.

#### Extended Finite Element Method (XFEM)

Zur Modellierung der Rissbildung in einer FE-Diskretisierung wird die verschiebungsbaasierte Standard-FE-Approximation durch Anreicherung mit diskontinuierlichen Feldern in der Rissumgebung über die *Partition of Unity Method* (PUM) erweitert (*Moës et al.* [79]). Ziel ist eine korrekte Beschreibung der Lokalisierungszone bzw. eines Risses unabhängig von der verwendeten FE-Diskretisierung. An einem einfachen 2D-Beispiel wird die Rissmodellierung gezeigt, siehe Abbildung 6.12 links. Durch den entstehenden Riss wird der diskretisierte Körper  $\mathcal{B}$  in zwei Teilkörper  $\mathcal{B}^-$  und  $\mathcal{B}^+$  aufgeteilt. Das diskretisierte Verschiebungsfeld in der Rissumgebung ergibt sich zu

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{d}_i + \sum_{j \in J} N_j H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j \quad (6.43)$$

mit den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}_i$  und den Ansatzfunktionen  $N_i$  des Knoten  $i$  und den erweiterten Freiheitsgraden  $\mathbf{a}_j$  des Knoten  $j$ , wobei  $I$  die Anzahl aller Knoten und  $J$  die Anzahl der angereicherten Knoten repräsentiert. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (6.43) stellt die klassische FE-Diskretisierung dar, der zweite Term drückt die erweiterte geometrische Beschreibung durch die diskontinuierliche Anreicherung aus. Dabei nimmt die Sprungfunktion  $H(\mathbf{x})$  folgende Werte an:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{B}^- \\ 1 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{B}^+ \end{cases} \quad (6.44)$$

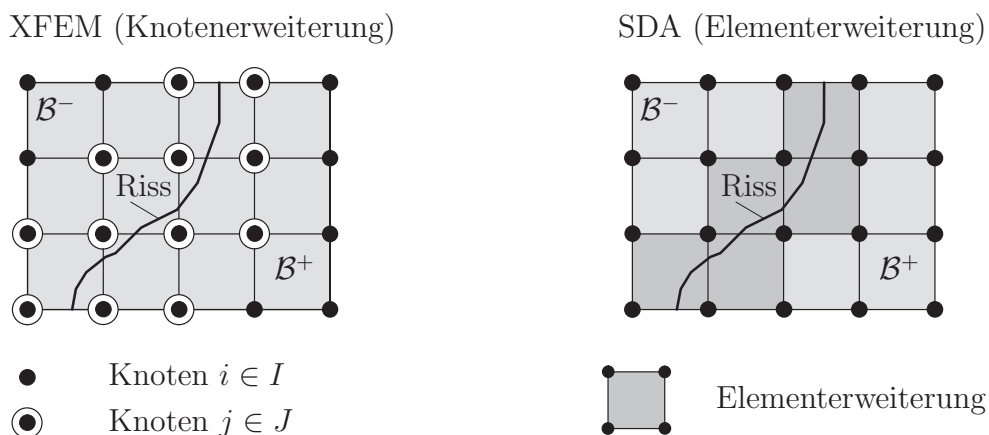


Abbildung 6.12: Geometrische Beschreibung der Rissbildung



Somit erfolgt die Beschreibung einer Diskontinuität im Verschiebungsverlauf durch Anreicherung bestehender Knoten mit zusätzlichen Freiheitsgraden in Verbindung mit Standardansatzfunktionen und einer Sprungfunktion. Es wird bemerkt, dass die angereicherten Freiheitsgrade  $\mathbf{a}$  globale Freiheitsgrade darstellen, so dass eine Vergrößerung der globalen Systemsteifigkeitsmatrix sowie des globalen Kraftvektors erforderlich ist.

### Strong Discontinuity Approach (SDA)

Im Vergleich zur *Extended Finite Element Method* findet beim *Strong Discontinuity Approach* eine erweiterte kinematische Beschreibung nur innerhalb der Elemente statt, die von einem Riss durchquert werden, vergleiche beispielsweise *Oliver et al.* [84]. Die zusätzlichen Freiheitsgrade sind nicht knotenorientiert und können durch statische Kondensation auf Elementebene eliminiert werden, so dass die Anzahl der globalen Freiheitsgrade unverändert bleibt. Durch den entstehenden Riss wird ein diskretes Element  $\mathcal{B}_e$  in die Teilgebiete  $\mathcal{B}_e^-$  und  $\mathcal{B}_e^+$  aufgeteilt, siehe Abbildung 6.12 rechts. Hier ergibt sich das diskretisierte Verschiebungsfeld innerhalb eines Elements zu

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in iel} N_i \mathbf{d}_i + M(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \sum_{i \in iel} N_i \mathbf{d}_i + [H(\mathbf{x}) - \varphi] \mathbf{a} \quad (6.45)$$

mit der Elementknotenanzahl  $iel$ , den Elementknotenverschiebungen  $\mathbf{d}_i$  und dem konstanten Elementverschiebungssprung  $\mathbf{a} = [a_x, a_y]^T$  in globalen Koordinaten. Weiter wird die Sprungfunktion  $M(\mathbf{x})$  aus

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{B}_e^- \\ 1 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{B}_e^+ \end{cases} \quad ; \quad \varphi = \sum N_j \quad \forall j | \mathbf{x}_j \in \mathcal{B}_e^+ \quad (6.46)$$

bestimmt. Der erste Term auf der rechten Seite von (6.45) stellt wiederum die klassische FE-Diskretisierung dar, während der zweite Term die Diskontinuität abbildet.

### Verbundmodellierung mit erweiterter kinematischer Beschreibung

Zwischen der vorgestellten Verbundmodellierung und der erweiterten kinematischen Beschreibung (*XFEM*, *SDA*) existieren gewisse Parallelen, vergleiche Abbildung 6.13. Bei

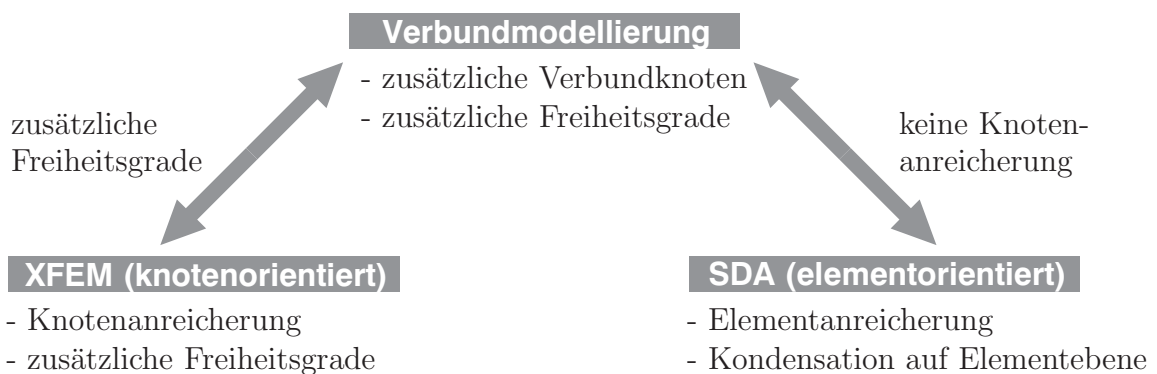


Abbildung 6.13: Vergleich: Verbundmodell - erweiterte kinematische Beschreibung (XFEM, SDA)

Allgemeine Lage der Bewehrung

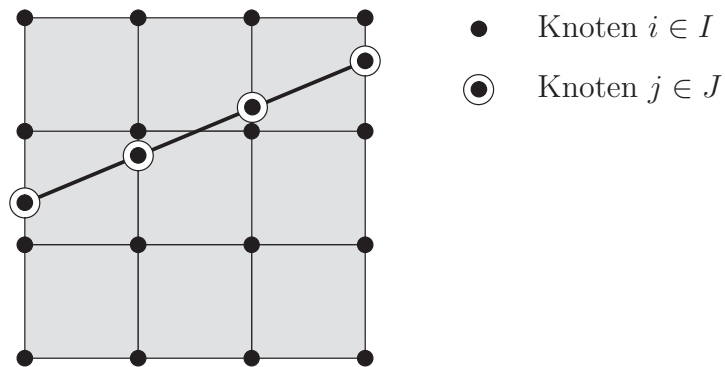


Abbildung 6.14: Bewehrungsstab in 2D-Elementen

der Verbundmodellierung werden analog zu *XFEM* zusätzliche globale Freiheitsgrade eingeführt. Im Unterschied zu *XFEM* wird das Verschiebungsfeld mit Freiheitsgraden angereichert, die nicht auf bestehende Knoten bezogen sind. Hier besteht wiederum eine Parallele zur elementorientierten kinematischen Beschreibung des *SDA*. Zusammenfassend sind bei dem vorliegenden Verbundmodell Eigenschaften von *XFEM* und *SDA* zu finden. In einer nichtlinearen Analyse von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen sind der Zeitpunkt der Rissbildung sowie die Lage des Risses zunächst unbekannt und ergeben sich aus dem Fortgang der FE-Berechnung. Somit müssen bei der knotenorientierten *XFEM* zur Rissbeschreibung adaptiv die Größe der Systemsteifigkeit und des Vektors der internen Kräfte angepasst werden. Bei der Verbundmodellierung sind die angeführten Probleme nicht vorhanden. Die Lage der Diskontinuität infolge Verbund ist durch die Lage eines Bewehrungsstabs eindeutig beschrieben. Außerdem ist die Diskontinuität bei der Verbundmodellierung von Anfang an existent, es ist nur eine anfängliche Vergrößerung der Systemsteifigkeitsmatrix und des Vektors der internen Kräfte infolge der zusätzlichen Verbundfreiheitsgrade vorab der eigentlichen Strukturanalyse erforderlich. Die numerische Umsetzung der kinematischen Erweiterung bei der Verbundmodellierung wird an einem einfachen 2D-Beispiel gezeigt. In Abbildung 6.14 ist der Verlauf eines Bewehrungsstabs innerhalb einer vorgegeben FE-Diskretisierung dargestellt. Dabei kennzeichnen die umrandeten Knoten zusätzlich eingeführte Verbundknoten. Analog zu Gleichung (6.43) kann das Verschiebungsfeld einer FE-Diskretisierung mit Verbund angegeben werden

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{d}_i + \sum_{j \in J} \tilde{N}_j \mathbf{a}_j \quad (6.47)$$

mit dem Vektor der Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$ , dem Vektor der angereicherten Knotenverschiebungen  $\mathbf{a}$  und den Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  für die Knoten sowie  $\tilde{\mathbf{N}}$  für die angereicherten Knoten.

## 6.4 Konstitutivgesetze für die Bewehrung

In den Abschnitten 6.2 und 6.3 erfolgte die Linearisierung der schwachen Form, wobei die lokale Tangente  $C_L^R$  und die lokale Verbundsteifigkeit  $k^B$  eingeführt wurden. Für diesen Abschnitt wird folgende verkürzte Schreibweise verwendet:

$$\sigma = \sigma_L^R \quad \epsilon = \epsilon_L^R \quad \tau = \tau^B \quad s = u^B \quad (6.48)$$

### 6.4.1 Eindimensionale Elastoplastizität mit isotroper Verfestigung

Zur Modellierung der Bewehrung wird für den Betonstahl üblicherweise ein eindimensionales Konstitutivgesetz eingesetzt. In dieser Arbeit soll zudem der Verfestigung des Stahls Rechnung getragen werden. Die Stahldehnung  $\epsilon$  lässt sich in einen elastischen und plastischen Anteil aufspalten.

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} \quad \rightarrow \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (6.49)$$

Die Stahlspannung ergibt sich aus der Multiplikation der elastischen Stahldehnung  $\epsilon_{el}$  mit dem Elastizitätsmodul des Stahls  $E$ .

$$\sigma = E \epsilon^{el} = E (\epsilon - \epsilon^{pl}) \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma} = E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl}) \quad (6.50)$$

Die Grenze des elastischen Bereichs wird durch die Fließbedingung  $F$  festgelegt

$$F = |\sigma| - (\sigma_y^s + H \kappa) \leq 0 \quad (6.51)$$

mit dem Verfestigungsmodul  $H$ , der Fließspannung  $\sigma_y^s$  und der internen Variable  $\kappa$  zur Steuerung der Verfestigung. Das Verfestigungsgesetz definiert die Abhängigkeit der internen Variable  $\kappa$  von der Rate der plastischen Verzerrungen  $\dot{\epsilon}^{pl}$ . Dadurch vereinfacht sich der vierstufige elastoplastische Materialtensor aus Gleichung (3.13) zu dem skalaren Wert

$$C_L^R = \frac{EH}{E+H}. \quad (6.52)$$

Im elastischen Fall ist die Tangente  $C_L^R$  mit dem Elastizitätsmodul identisch. Das eindimensionale elastoplastische Konstitutivgesetz mit isotroper Verfestigung ist graphisch in Abbildung 6.15 dargestellt.

### 6.4.2 Eindimensionales Verbund-Konstitutivgesetz

Um das Verbundverhalten ausreichend numerisch erfassen zu können, müssen die Aspekte aus Abschnitt 4.3 berücksichtigt werden: einerseits der Mechanismus der Kraftübertragung zwischen der Bewehrung und dem umliegenden Beton, und andererseits die Fähigkeit

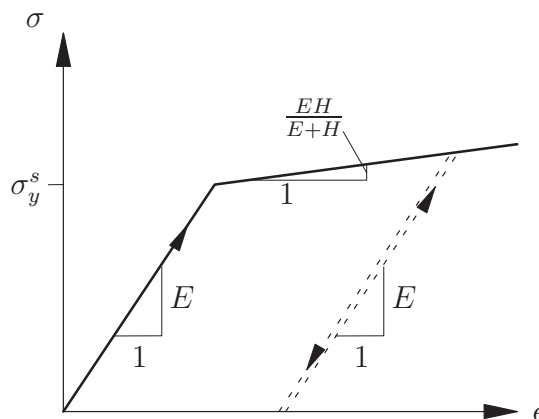


Abbildung 6.15: Eindimensionale Elastoplastizität mit isotroper Verfestigung

des Betons, diesen Kräften standzuhalten. Abhängig von der Umschnürung des Betons ist einer dieser beiden Komponenten für das Verbundversagen verantwortlich. Durch Anpassung bestimmter Modellparameter berücksichtigen viele Verbundmodelle beide Effekte in einem Modell. In Abbildung 6.16 wird die allgemeine Form dieser Modelle dargestellt.

### Verbundmodell nach CEB-FIP model code 1990 [18]

Zu Beginn der Verbundwirkung liegt Haftverbund zwischen dem Zementstein und der Stahloberfläche vor. Bereits bei geringen Verbundverschiebungen geht der Haftverbund in einen Scherverbund über. Dieser Zustand wird durch den ansteigenden nichtlinearen Ast bis zur Verbundverschiebung  $s_1$  abgebildet. Der nichtlineare Zusammenhang zwischen Verbundspannung  $\tau$  und Verbundverschiebung  $s$  führt zu Gleichung (6.53)

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{s}{s_1} \right)^{\bar{\alpha}} \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (6.53)$$

mit der maximalen Verbundspannung  $\tau_{max}$  und dem Parameter  $\bar{\alpha}$  zur Beschreibung der Krümmung der Verbundspannungs-Verbundverschiebungs-Beziehung. Die Verbundsteifigkeit  $k^B$  wird aus der Ableitung von  $\tau$  nach  $s$  berechnet und ergibt sich zu

$$k^B = \frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\tau_{max}}{s_1^{\bar{\alpha}}} \bar{\alpha} s^{\bar{\alpha}-1}. \quad (6.54)$$

Aus (6.54) ist erkennbar, dass die Verbundsteifigkeit  $k^B$  für  $s = 0$  gegen  $\infty$  geht, deshalb muss ein Startwert  $k_{ini}^B$  vorgegeben werden. Nach Erreichen der maximalen Verbundspannung  $\tau_{max}$  ist eine Kraftübertragung zwischen Beton und Stahl nur noch durch Reibverbund möglich. Bei umschnürtem Beton erfolgt die Abnahme der Verbundspannung nicht schlagartig, dies wird durch das horizontale Plateau im Bereich der Verbundverschiebungen  $s_1$  und  $s_2$  abgebildet. Im absteigenden linearen Ast wird die Widerstandskraft des Verbunds durch Spaltrisse entlang des Bewehrungsstabs herabgesetzt, der Verbund wird durch Gleitreibung hergestellt. Der horizontale Bereich rechts von  $s_3$  stellt die Restverbundtragfähigkeit  $\tau_f$  dar. In umschnürten Bereichen wird diese Restfestigkeit durch Reibung zwischen Bewehrung und Beton erreicht, nachdem das innere Betongefüge vollständig aufgelockert wurde. In nichtumschnürten Bereichen bleibt bei einwirkender

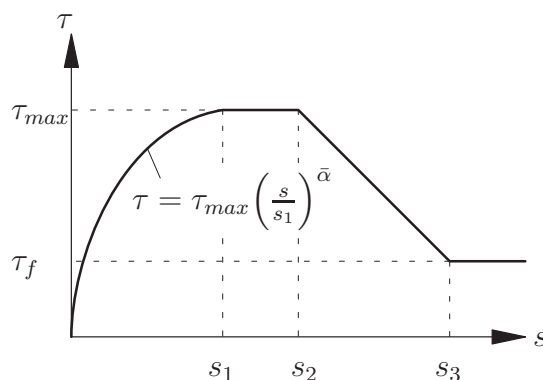


Abbildung 6.16: Verbundspannungs-Interfaceverschiebungs-Diagramm für monotone Belastung

transversaler Bewehrung eine minimale Restfestigkeit bestehen.

Ein in umschnürten Beton eingebetteter Bewehrungsstab weist eine andere Versagensart auf, als ein Bewehrungsstab, der in nichtumschnürten Beton eingebettet wird. Trotzdem wird häufig ein Verbundmodell für beide Fälle verwendet, allerdings mit angepassten Materialparametern. Das reale Verbundverhalten liegt zwischen diesen beiden Grenzfällen. In Tabelle 6.2 sind Verbundparameter aus dem *CEB-FIP model code 1990* [18] aufgelistet.

### Umschnürung des Betons

Die Parameter des Verbundmodells sind abhängig von der Betonumschnürung. Nach *CEB-FIP model code 1990* [18] ist der Beton nicht umschnürt, wenn die minimale Betondeckung ( $1 \cdot \phi$  mit  $\phi$  = Durchmesser des Bewehrungsstabs) und die minimale transversale Bewehrung ( $A_{st,min} > 0,25 \cdot n \cdot A_s$ ) verwendet werden. Dabei ist  $A_s$  die Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabs,  $n$  die Anzahl der Stäbe, die von der transversalen Bewehrung  $A_{st}$  umschlossen sind. Beton wird als umschnürt definiert, wenn die Betondeckung größer  $5 \cdot \phi$  und der lichte Rippenabstand größer als  $10 \cdot \phi$  ist. Ist eine transversale Bewehrung mit sehr geringem Stababstand ( $A_{st} > n \cdot A_s$  oder ein hoher Transversaldruck ( $p \geq 7.5 \text{ N/mm}^2$ ) vorhanden, wird der Beton ebenfalls als umschnürt betrachtet.

### Verbundbedingungen

Ein weiteres Kriterium für die Wahl der Verbundparameter bilden die Verbundbedingungen eines Bewehrungsstabs mit dem umgebenden Beton. Diese sind abhängig von der Bewehrungsrichtung  $\alpha$ , der Querschnittshöhe  $h$  und der Richtung des Betoniervorgangs. Die Definition von guten und schlechten Verbundbedingungen ist schematisch in Abbildung 6.17 dargestellt.

Tabelle 6.2: Verbundparameter aus [18]

Bewehrungsart	Betonumschnürung	Verbund	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\bar{\alpha}$	$\tau_{max}$	$\tau_f$
gerippt	nein	gut	0,6	0,6	1,0	0,4	$2,0\sqrt{f_{ck}}$	$0,3\sqrt{f_{ck}}$
gerippt	nein	schlecht	0,6	0,6	2,5	0,4	$1,0\sqrt{f_{ck}}$	$0,15\sqrt{f_{ck}}$
gerippt	ja	gut	1,0	3,0	lichter Rippen- abstand	0,4	$2,5\sqrt{f_{ck}}$	$1,0\sqrt{f_{ck}}$
gerippt	ja	schlecht	1,0	3,0	lichter Rippen- abstand	0,4	$1,25\sqrt{f_{ck}}$	$0,5\sqrt{f_{ck}}$
glatt kalt- gezogen	-	gut	0,01	0,01	0,01	0,5	$0,1\sqrt{f_{ck}}$	$0,1\sqrt{f_{ck}}$
glatt kalt- gezogen	-	schlecht	0,01	0,01	0,01	0,5	$0,05\sqrt{f_{ck}}$	$0,05\sqrt{f_{ck}}$
glatt warm- gewalzt	-	gut	0,01	0,01	0,01	0,5	$0,3\sqrt{f_{ck}}$	$0,3\sqrt{f_{ck}}$
glatt warm- gewalzt	-	schlecht	0,01	0,01	0,01	0,5	$0,15\sqrt{f_{ck}}$	$0,15\sqrt{f_{ck}}$

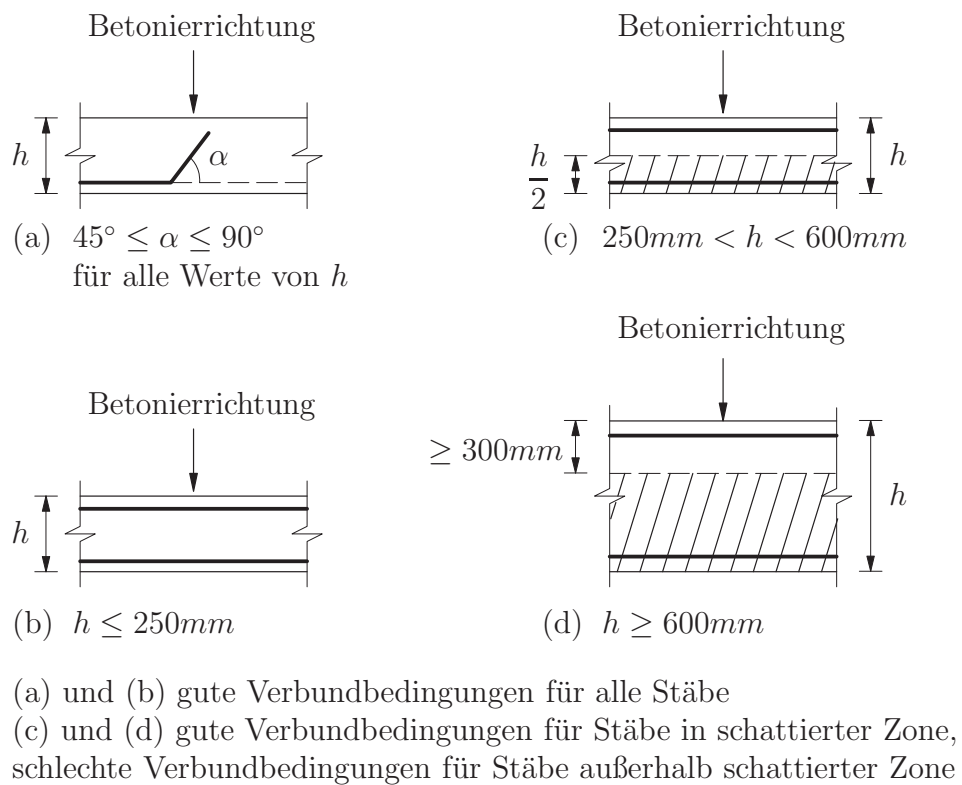


Abbildung 6.17: Gute und schlechte Verbundbedingungen nach [18]



# Kapitel 7

## Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt

### 7.1 Einführung

Für die Traglastuntersuchung einfacher Balkentragwerke ist die Diskretisierung der Balkenstruktur mit dreidimensionalen Kontinuums-elementen häufig aufwendig. Deshalb wird zur Berechnung einfacher Balkenstrukturen alternativ in diesem Kapitel ein Balkenelement präsentiert. Balkenelemente stellen im Bauwesen einfache und effiziente Tragwerkelemente für lineare und nichtlineare Strukturberechnungen dar. Das mechanische Verhalten eines Balkenelements wird auf die Balkenachse projiziert und mittels resultierender Schnittgrößen (Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment) durch Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche beschrieben. Als Grundlage für die Balkenkinematik wird häufig die Bernoulli-Theorie verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Balkenmodell mit Berücksichtigung der Querschubverzerrungen basierend auf der Timoshenko-Theorie vorgestellt. Dabei wird eine lineare Kinematik über die Querschnittsbreiten- und dickenrichtung angenommen. Es sei angemerkt, dass der Balken hier als Balkenkontinuum betrachtet wird, so dass der Integrationsprozess im "dreidimensionalen Balkenraum" erfolgt. Somit wird auf eine Vorabintegration der Spannungen und der Werkstoffmatrix über den Querschnitt, wie beispielsweise bei Schalenformulierungen gebräuchlich, verzichtet.

#### 7.1.1 Analyse von Stahlbetonquerschnitten

*Spacone & El-Tawil* [102] geben einen zusammenfassenden Überblick verschiedener nichtlinearer Strukturanalysen von Stahlbetonstrukturen, wobei vor allem Balken- bzw. Rahmenelemente diskutiert werden.

#### Stahlbetonquerschnitte

Bei der Analyse von Stahlbetonquerschnitten sind zwei Vorgehensweisen gebräuchlich. Die Schnittgrößenmodelle (*Resultant Section Models*) definieren explizit die Materialantwort eines Querschnitts über Momenten-Krümmungs-Beziehungen oder Normalkraft-Dehnungs-Beziehungen. Im einfachsten Fall werden Längskraft und Biegung entkoppelt, vergleiche beispielsweise *Takeda et al.* [105]. Schnittgrößenmodelle mit Berücksichtigung der Interaktion zwischen Biegemomenten und Normalkraft sind unter anderem bei *Hilmy & Abel* [45], *Hajjar & Gourley* [39] und *El-Tawil & Deierlein* [32] zu finden. Auf die Schnittgrößenmodelle wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Bei den Fasermodellen (*Fiber Section Models*) werden zu einem gegebenen Deformationszustand eines



Querschnitts die zugehörigen Spannungen an einzelnen Querschnittspunkten berechnet. Anwendungen des Fasermodells auf Verbundquerschnitte werden zum Beispiel in *Mirza et al.* [78], *El-Tawil & Deierlein* [31] und *Lee & Pan* [67] beschrieben. Fasermodellen liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Ebenbleiben der Querschnitte nach Deformation
- Vernachlässigung der Schubspannungen aus Querkraft und Torsion im Stoffgesetz
- Berücksichtigung der Betonumschnürung durch Modifikation der Betonparameter
- Rissrichtung orthogonal zur Balkenlängsachse

Das sehr einfache Konzept der Fasermodelle unterteilt den Gesamtquerschnitt in  $n$  Einzelfasern, welche die Materialpunkte des Querschnitts repräsentieren. An diesen Materialpunkten wird ein eindimensionales Werkstoffgesetz ausgewertet. Die Schnittgrößen werden durch Integration der Spannungen über alle Einzelfasern ermittelt. Für das Fasermodell gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_A \sigma(\epsilon) z \, dA = \sum_{i=1}^n \sigma(\epsilon_i) z_i A_i \\
 EA &= \int_A E_t(\epsilon) \, dA = \sum_{i=1}^n E_t(\epsilon_i) A_i \\
 EI_y &= \int_A z^2 E_t(\epsilon) \, dA = \sum_{i=1}^n z_i^2 E_t(\epsilon_i) A_i
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit der Fläche einer Einzelfaser  $A_i$ , dem Abstand  $z_i$  des Fasermittelpunkts vom Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts in  $z$ -Richtung des Querschnitts und dem Tangentenmodul  $E_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_i}$ , der sich aus einer skalaren Spannungs-Dehnungsbeziehung (beispielsweise nicht-lineare Elastizität, vergleiche *Chen* [19]) ergibt.

### 7.1.2 Wahl des Elementkoordinatensystems

#### Globale Formulierung

Bei der globalen Formulierung werden alle kinematischen und konstitutiven Gleichungen im globalen Koordinatensystem formuliert, sämtliche Deformationen und Kräfte sind auf das globale Koordinatensystem bezogen. Damit kann das mechanische Verhalten dünnwandiger Tragwerke unter Umgehung spezieller zwei- bzw. eindimensionaler Modelltheorien beschrieben werden, vergleiche *Weimar* [113]. Nachdem die Konstitutivgesetze im lokalen Balkenelementkoordinatensystem auszuwerten sind, muss die lokale Werkstoffmatrix an jedem materiellen Punkt in das globale Koordinatensystem transformiert werden. Für den Fall erforderlicher statischer Kondensation bestimmter lokaler Elementfreiheitsgrade, beispielsweise Rotationsfreiheitsgrade bei vorhandenem Gelenk an einem Balkenende, erweist sich die globale Formulierung nachteilig, da die Elementfreiheitsgrade im globalen Koordinatensystem definiert sind.

## Lokale Formulierung

Im Gegensatz zur globalen Formulierung wird bei der lokalen Formulierung den orientierten Eigenschaften des linienförmigen Balkenelements Rechnung getragen. Das lokale Koordinatensystem wird dabei durch die Balkenlängsachse (lokale x-Achse) und einen Referenzpunkt zur Festlegung der lokalen z-Achse definiert. Die vorhandenen Deformationen und Kräfte werden im lokalen Koordinatensystem definiert und die Konstitutivgesetze lokal ausgewertet. Nach der Berechnung der lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementkraftvektoren werden diese schließlich in das globale Koordinatensystem transformiert. In diesem Fall besteht die Möglichkeit einer statischen Kondensation bestimmter lokaler Freiheitsgrade vor der Rücktransformation. Gekrümmte Balkenelemente können durch Einführen eines lokalen Koordinatensystems an jedem Elementknoten beschrieben werden. Aufgrund der höheren Flexibilität der lokalen Formulierung gegenüber der globalen Formulierung wird die lokale Formulierung für das im Folgenden vorgestellte Balkenelement verwendet.

## 7.2 Lokale Formulierung im "dreidimensionalen Balkenkontinuum"

In diesem Kapitel wird ein gerades lokales Balkenelement vorgestellt. Zunächst wird der einfache Fall eines in Balkenlängsrichtung konstanten rechteckförmigen Balkenquerschnitts betrachtet. Später folgt eine Erweiterung auf zusammengesetzte Querschnitte.

### 7.2.1 Beschreibung der Balkenkinematik

Den Ausgangspunkt für die Balkenformulierung stellt die Bezugslinie dar. Häufig wird die Schwerlinie als Bezugslinie verwendet. Sie enthält die Elementknoten mit den zugehörigen lokalen Elementknotenfreiheitsgraden. Ein Punkt innerhalb des Balkenelements wird mit den lokalen isoparametrischen Koordinaten  $(r, s, t)$  im lokalen Koordinatensystem  $(x_L, y_L, z_L)$  und den Knotenansatzfunktionen für Linienelemente  $\mathbf{N}(r)$  eindeutig beschrie-

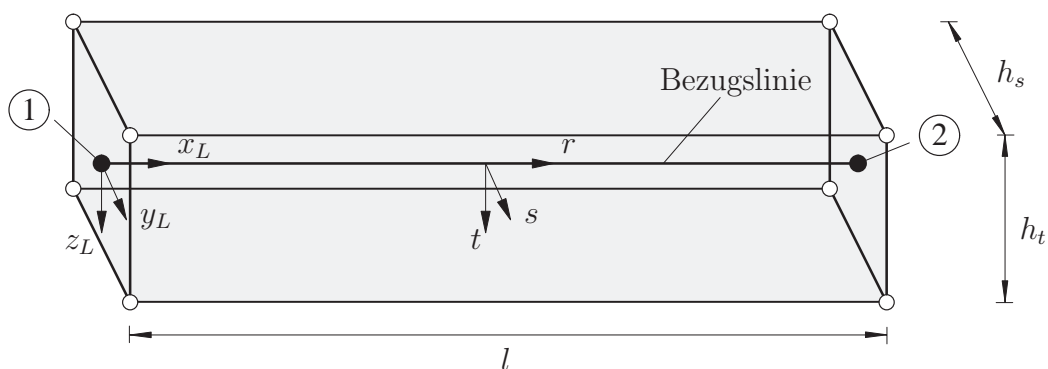


Abbildung 7.1: Geometrie des dreidimensionalen Balkenelements

ben, siehe Abbildung 7.1.

$$\begin{aligned}
 x_L &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) x_L^i & r &= \frac{2}{l} \left( x_L - \frac{l}{2} \right) \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_L} = \frac{2}{l} \\
 y_L &= \frac{h_s}{2} s & s &= \frac{2}{h_s} y_L \rightarrow \frac{\partial s}{\partial y_L} = \frac{2}{h_s} \\
 z_L &= \frac{h_t}{2} t & t &= \frac{2}{h_t} z_L \rightarrow \frac{\partial t}{\partial z_L} = \frac{2}{h_t}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Hier sind  $h_s$  und  $h_t$  die Querschnittsmaße in Dickenrichtungen und  $x_L^i$  die Knotenkoordinaten der Bezugslinie in lokaler  $x_L$ -Richtung. Bei einer Balkenformulierung ist zwischen den Knotenfreiheitsgraden der Bezugslinie (Translationen und Rotationen) und den Verschiebungen eines beliebigen Punktes des "dreidimensionalen Balkenkontinuums" (Translationen) zu unterscheiden. Der Index  $L$  für die lokale Beschreibung wird im Folgenden für eine übersichtlichere Darstellung vernachlässigt. Die lokalen Knotenfreiheitsgrade bestehen aus Knotenverschiebungen  $u_x, u_y, u_z$  sowie den zugehörigen Knotenverdrehungen  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Die Balkenverschiebungen sind nun in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade zu formulieren.

### Ableitung der Balkenkinematik aus dem 8-knotigen Volumenelement

Für das verwendete Balkenelement werden die Annahmen des Ebenbleiben sowie der Formtreue des Querschnitts nach erfolgter Deformation getroffen. Der Querschnitt wird somit als wölbfrei betrachtet, so dass die Torsion in Form der *Primärtorsion* abgebildet wird, da keine Normalspannungen infolge einer Torsionsbeanspruchung entstehen können. Die Berücksichtigung einer Verwölbung in der Balkenformulierung ist Gegenstand von Abschnitt 7.2.3.

Der Balkenquerschnitt am Knoten 1 aus Abbildung 7.1 wird als Randfläche eines 8-knotigen Kontinuumselements gleicher Abmessungen betrachtet. Die Knotenverschiebungen des Kontinuumselements  $v_x^a, v_x^b, v_x^c, v_x^d$  in Balkenlängsrichtung ergeben sich aus der Superposition der Balkenverformungen infolge der Knotenfreiheitsgrade  $u_x^1, \varphi_y^1, \varphi_z^1$ , vergleiche Abbildung 7.2.

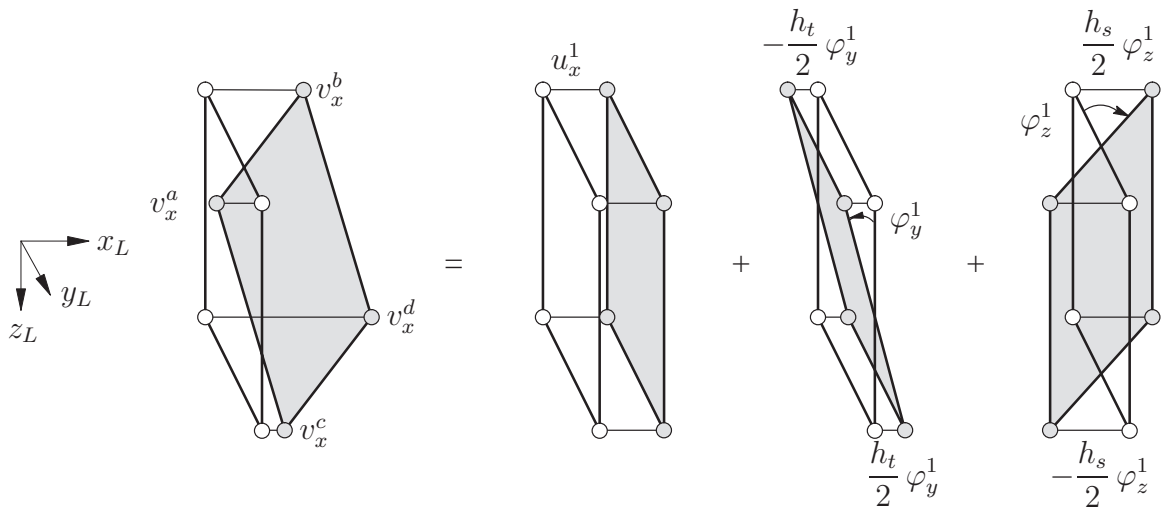


Abbildung 7.2: Superposition der Verformungen parallel zur Balkenachse

$$\begin{aligned}
v_x^a &= u_x^1 - \frac{h_s}{2} \varphi_z^1 - \frac{h_t}{2} \varphi_y^1 & \iff & v_x^e &= u_x^2 - \frac{h_s}{2} \varphi_z^2 - \frac{h_t}{2} \varphi_y^2 \\
v_x^b &= u_x^1 + \frac{h_s}{2} \varphi_z^1 - \frac{h_t}{2} \varphi_y^1 & \iff & v_x^f &= u_x^2 + \frac{h_s}{2} \varphi_z^2 - \frac{h_t}{2} \varphi_y^2 \\
v_x^c &= u_x^1 - \frac{h_s}{2} \varphi_z^1 + \frac{h_t}{2} \varphi_y^1 & \iff & v_x^g &= u_x^2 - \frac{h_s}{2} \varphi_z^2 + \frac{h_t}{2} \varphi_y^2 \\
v_x^d &= u_x^1 + \frac{h_s}{2} \varphi_z^1 + \frac{h_t}{2} \varphi_y^1 & \iff & v_x^h &= u_x^2 + \frac{h_s}{2} \varphi_z^2 + \frac{h_t}{2} \varphi_y^2
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Analog zu den Längsverschiebungen folgen die Querverschiebungen  $v_y^a, v_y^b, v_y^c, v_y^d, v_y^e, v_y^f, v_y^g, v_y^h$  und  $v_z^a, v_z^b, v_z^c, v_z^d, v_z^e, v_z^f, v_z^g, v_z^h$  aus den Balkenfreiheitsgraden  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z, \varphi_x$ .

$$\begin{aligned}
v_y^a &= u_y^1 + \frac{h_t}{2} \varphi_x^1 & v_y^e &= u_y^2 + \frac{h_t}{2} \varphi_x^2 & \iff & v_z^a &= u_z^1 + \frac{h_s}{2} \varphi_x^1 & v_z^e &= u_z^2 + \frac{h_s}{2} \varphi_x^2 \\
v_y^b &= u_y^1 + \frac{h_t}{2} \varphi_x^1 & v_y^f &= u_y^2 + \frac{h_t}{2} \varphi_x^2 & \iff & v_z^b &= u_z^1 - \frac{h_s}{2} \varphi_x^1 & v_z^f &= u_z^2 - \frac{h_s}{2} \varphi_x^2 \\
v_y^c &= u_y^1 - \frac{h_t}{2} \varphi_x^1 & v_y^g &= u_y^2 - \frac{h_t}{2} \varphi_x^2 & \iff & v_z^c &= u_z^1 + \frac{h_s}{2} \varphi_x^1 & v_z^g &= u_z^2 + \frac{h_s}{2} \varphi_x^2 \\
v_y^d &= u_y^1 - \frac{h_t}{2} \varphi_x^1 & v_y^h &= u_y^2 - \frac{h_t}{2} \varphi_x^2 & \iff & v_z^d &= u_z^1 - \frac{h_s}{2} \varphi_x^1 & v_z^h &= u_z^2 - \frac{h_s}{2} \varphi_x^2
\end{aligned} \tag{7.4}$$

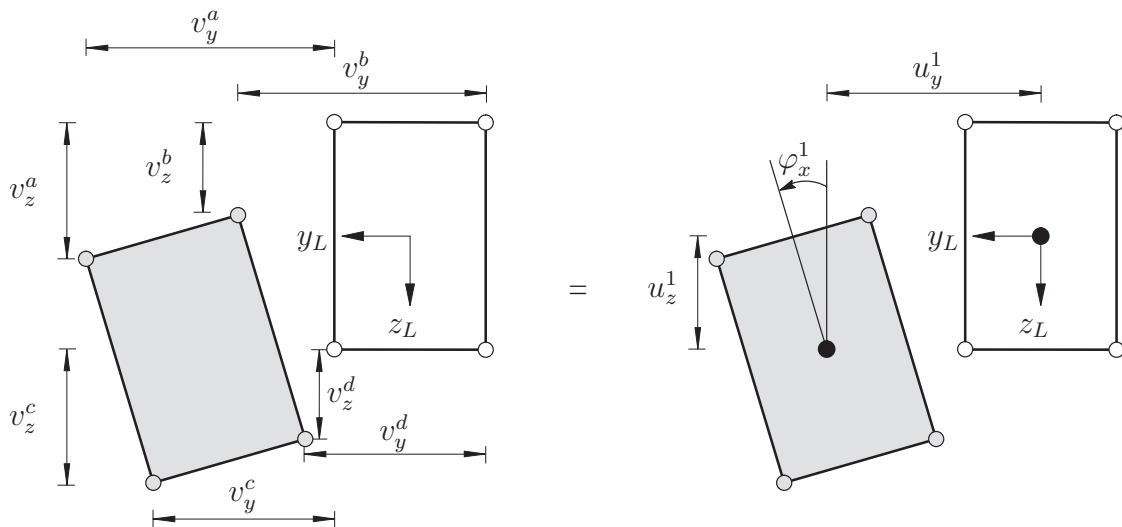


Abbildung 7.3: Superposition der Verformungen orthogonal zur Balkenachse

Aus (7.3) und (7.4) lassen sich die lokalen Balkenverschiebungen in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade ableiten.

$$\begin{aligned}
 u_x &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_x^i + \frac{h_t}{2} t \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_y^i - \frac{h_s}{2} s \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_z^i \\
 u_y &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_y^i - \frac{h_t}{2} t \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_x^i \\
 u_z &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_z^i + \frac{h_s}{2} s \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_x^i
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

### Exzentrizitäten in Dickenrichtung

Für die Herleitung der Balkenkinematik wurde die Annahme getroffen, dass die Balkenbezugslinie mit der Schwerachse zusammenfällt. Dieser Sachverhalt ist nicht zwingend notwendig, als Balkenbezugslinie kann jede Linie parallel zur Balkenachse gewählt werden. Somit kann die Schwerachse des Balkenquerschnitts exzentrisch an die Bezugslinie mit den Elementknoten angeschlossen sein, vergleiche Abbildung 7.4. Unter Berücksichtigung von Exzentrizitäten  $e_y, e_z$  in den Querschnittsdickenrichtungen  $y, z$  wird Gleichung (7.5) in modifizierter Form angegeben

$$\begin{aligned}
 u_x &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_x^i + \frac{h_t}{2} (t + e_t) \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_y^i - \frac{h_s}{2} (s + e_s) \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_z^i \\
 u_y &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_y^i - \frac{h_t}{2} (t + e_t) \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_x^i \\
 u_z &= \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) u_z^i + \frac{h_s}{2} (s + e_s) \sum_{i=1}^{iel} N^i(r) \varphi_x^i
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

mit den normierten Exzentrizitäten

$$\begin{aligned}
 e_s &= \frac{2}{h_s} e_y & \longrightarrow & e_y = \frac{h_s}{2} e_s \\
 e_t &= \frac{2}{h_t} e_z & \longrightarrow & e_z = \frac{h_t}{2} e_t
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

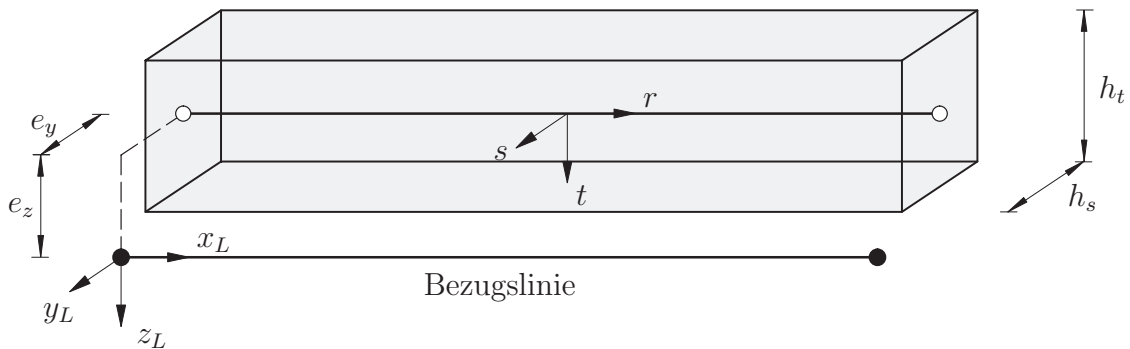


Abbildung 7.4: Exzentrizitäten in Dickenrichtungen

Aus (7.6) lassen sich die Verschiebungsableitungen nach den lokalen Koordinaten  $x, y, z$  und damit die Verzerrungen des Balkenelements bestimmen.

### Beschreibung der Verschiebungsableitungen

In diesem Abschnitt werden die Verschiebungsableitungen in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade des Balkenelements formuliert. Aus den Verschiebungsableitungen werden die Verzerrungen des Balkenquerschnitts berechnet. Zunächst wird untersucht, welche Verzerrungskomponenten in die Berechnung der Werkstoffmatrix und der Spannungen eingehen. Bei Balkentragwerken ist die Abmessung in Balkenlängsrichtung dominant gegenüber den Querschnittsabmessungen. Aus diesem Grund werden die Normalspannungen in Dickenrichtungen vernachlässigt.

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (7.8)$$

Die Einhaltung der Querschnittstreue nach erfolgter Deformation führt zu

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{yz} = 0 \quad (7.9)$$

Die zu diesen Spannungen energetisch konjugierten Verzerrungen  $\epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}$  werden in der Balkenformulierung herauskondensiert. Als notwendige Ableitungen der Verschiebungen nach den lokalen Koordinaten ergeben sich unter Einbeziehung von Gleichung (7.2)

$$\begin{aligned} u_{x,x} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{iel} N_r^i u_x^i + \frac{h_t}{l} t \sum_{i=1}^{iel} N_r^i \varphi_y^i - \frac{h_s}{l} s \sum_{i=1}^{iel} N_r^i \varphi_z^i \\ u_{x,y} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = - \sum_{i=1}^{iel} N^i \varphi_z^i \\ u_{x,z} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \sum_{i=1}^{iel} N^i \varphi_y^i \\ u_{y,x} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{iel} N_r^i u_y^i - \frac{h_t}{l} t \sum_{i=1}^{iel} N_r^i \varphi_x^i \\ u_{z,x} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{iel} N_r^i u_z^i + \frac{h_s}{l} s \sum_{i=1}^{iel} N_r^i \varphi_x^i \end{aligned} \quad (7.10)$$

mit der Ableitung der Knotenansatzfunktionen  $N_r^i = \frac{\partial N^i}{\partial r}$ . Aus den Verschiebungsableitungen werden die Verzerrungen im Querschnitt ermittelt.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{x,x} \\ \gamma_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} \\ \gamma_{xz} &= u_{x,z} + u_{z,x} \end{aligned} \quad (7.11)$$

In Matrixschreibweise lautet (7.11) mit (7.10)

$$\epsilon_L = \hat{B} \mathbf{d}_L \quad (7.12)$$

mit dem lokalen Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\epsilon}_L$ , dem Vektor der lokalen Knotenfreiheitsgrade  $\mathbf{d}_L$  und dem lokalen Ableitungsoperator  $\hat{\mathbf{B}}$ , der in Anhang (D.1) angegeben ist. Es sei bemerkt, dass eine Querschubverzerrung infolge Torsion in (7.11) über die Torsionsverdrehung  $\varphi_x$  aus (7.10) berücksichtigt wird.

### Elementsteifigkeitsmatrix und Vektor der internen Kräfte

Mit dem lokalen Ableitungsoperator  $\hat{\mathbf{B}}$  können die lokale Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_L^e$  und der lokale Vektor der internen Kräfte  $\mathbf{f}_{int,L}^e$  analog zu (2.20) durch Integration über das Balkenvolumen berechnet werden.

$$\mathbf{k}_{tan,L}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{C}}_{tan} \hat{\mathbf{B}} dV \quad \mathbf{f}_{int,L}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (7.13)$$

Durch Auswerten des Konstitutivgesetzes an den entsprechenden Integrationspunkten erhält man die Konstitutivmatrix  $\hat{\mathbf{C}}_{tan}$  und den Spannungsvektor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Liegt in einer Querschnittsrichtung ein konstanter Spannungszustand vor, so ist in dieser Richtung eine 1-Punkt-Integration ausreichend. Im Falle einer nichtlinearen Berechnung ergeben sich in der zweiten Querschnittsrichtung nichtlineare Spannungsverteilungen. Um den nichtlinearen Spannungsverlauf ausreichend abbilden zu können, muss die Anzahl der Integrationspunkte in dieser Richtung erhöht werden. Neben den konventionellen Gauss-Quadraturformeln können zur numerischen Integration auch die Lobatto-Quadraturformeln verwendet werden. Erstere enthalten  $n$  Stützstellen innerhalb des Integrationsgebietes und integrieren Polynome bis zum Grad  $2n - 1$  exakt. Bei letzteren werden die Randpunkte des Integrationsgebiets berücksichtigt, die Genauigkeit der Integration ist ebenfalls bis zum Grad  $2n - 1$  exakt, vergleiche *Bronstein et al.* [17].

Durch den Vektor der internen Kräfte  $\mathbf{f}_{int,L}^e$  in (7.13) werden die Balkenschnittgrößen (Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment) an den Balkenknoten repräsentiert. Die globale Elementsteifigkeitsmatrix und der globale Elementkraftvektor folgen aus der Transformation der lokalen Größen in das globale Koordinatensystem.

$$\mathbf{k}_{tan,G}^e = \mathbf{T}^{BT} \mathbf{k}_{tan,L}^e \mathbf{T}^B \quad \mathbf{f}_{int,G}^e = \mathbf{T}^{BT} \mathbf{f}_{int,L}^e \quad (7.14)$$

Dabei sind die Komponenten der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^B$  Anhang (C.18) zu entnehmen. Es sei angemerkt, dass (7.14) nur für gerade Balkenelemente gilt. Im Fall einer gekrümmten Balkengeometrie ist die veränderliche Richtung der Stabachse bei der Integration über das Elementvolumen zu berücksichtigen, vergleiche *Weimar* [113].

### 7.2.2 Modellierung mehrteiliger Querschnitte

Die Berücksichtigung von Exzentrizitäten in den Querschnittsrichtungen ermöglicht einen exzentrischen Anschluss der Elementmittellinie an die Bezugslinie. Somit können mehrere Einzelbalkenelemente auf eine Basislinie bezogen werden. Die Integration über exzentrisch angeschlossene Querschnitte berücksichtigt sowohl die Einzelquerschnittswerte als auch die Exzentrizitäten bezüglich der Basislinie ("Steiner-Anteile"). Dieser Ansatz erlaubt die Modellierung eines aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzten Gesamtquerschnitts, wobei die Einzelquerschnitte eine Rechteckform und gleichgerichtete lokale Koordinatenachsen  $y, z$  aufweisen müssen (siehe Abbildung 7.5). Im Vergleich

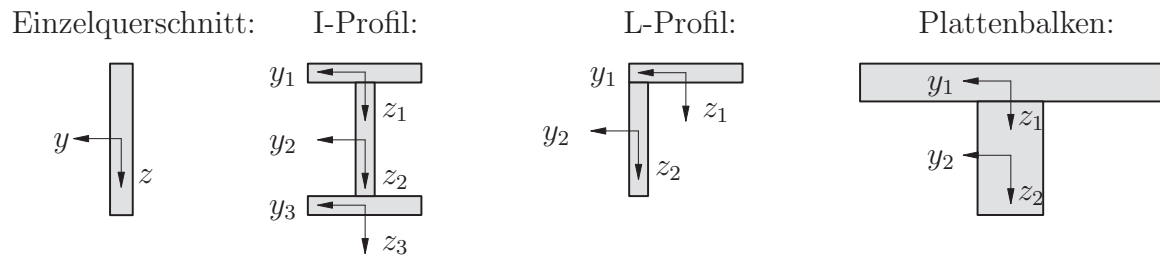


Abbildung 7.5: Mehrteilig zusammengesetzte Querschnitte

zu einem geschichteten Balkenmodell unterliegen die Einzelquerschnitte einer gemeinsamen Kinematik infolge des Bezugs auf eine Basislinie, d.h. die Verschiebungen über den Gesamtquerschnitt verlaufen linear.

### Analogie zum Fasermodell

Die Methode der mehrteilig zusammengesetzten Querschnitte weist eine Verbindung zu dem anfangs erläuterten Fasermodell auf. Dazu wird ein rechteckiger Gesamtquerschnitt betrachtet, der sich gemäß Abbildung 7.6 aus  $n$  exzentrisch an den Schwerpunkt angeschlossenen Einzelrechteckquerschnitten zusammensetzt. In Analogie zum Fasermodell können die  $n$  Einzelquerschnitte als Fasern betrachtet werden. Während beim Fasermodell ein Integrationspunkt jede Einzelfaser repräsentiert, wird bei jedem Einzelquerschnitt das Konstitutivgesetz an allen Integrationspunkten des Querschnitts ausgewertet. Außerdem wird an jedem Integrationspunkt ein dreidimensionales Werkstoffgesetz ausgewertet und durch anschließende statische Kondensation der nichtberücksichtigten Spannungskomponenten auf die Balkenformulierung reduziert.

### Stahlbetonmodellierung

In der vorliegenden Arbeit wird das Balkenelement zur Modellierung von Stahlbetonbalken eingesetzt. An einem einfachen Stahlbetonrechteckquerschnitt soll die Vorgehensweise erläutert werden. In Abbildung 7.7 links ist ein Stahlbetonquerschnitt mit der Querschnittshöhe  $h_t$ , der Querschnittsbreite  $h_s$  und der Stahlfläche  $A_s$  im Abstand  $d_1$  von der Unterkante des Querschnitts dargestellt. Für dieses Beispiel soll ein homogener Spannungszustand in Breitenrichtung  $h_s$  angenommen werden, d.h. in dieser Richtung erfolgt

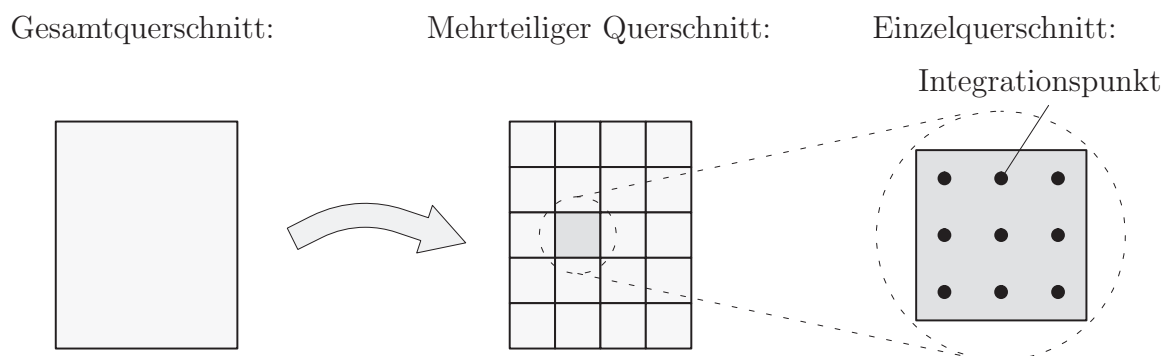


Abbildung 7.6: Analogie zum Fasermodell



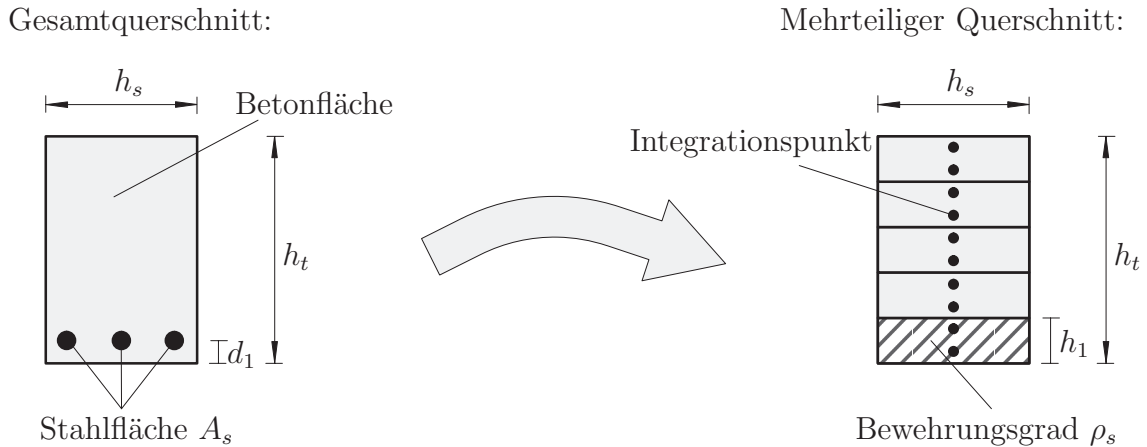


Abbildung 7.7: Stahlbetonmodellierung beim dreidimensionalen Balkenelement

keine Unterteilung des Gesamtquerschnitts. Aufgrund des homogenen Spannungszustands ist ein Integrationspunkt in Breitenrichtung ausreichend. Um den nichtlinearen Normalspannungsverlauf über die Querschnittshöhe  $h_t$  adäquat wiederzugeben, muss man den Gesamtquerschnitt in vertikaler Richtung in mehrere Einzelquerschnitte unterteilen, die aber einer gemeinsamen Kinematik unterliegen. Im vorliegenden Beispiel werden 5 Einzelquerschnitte verwendet, wobei die Bewehrung zentrisch im unteren Querschnitt liegen soll (siehe Abbildung 7.7 rechts). Daraus ergibt sich die Querschnittshöhe  $h_1 = 2d_1$ . Für den Beton wird das elastoplastische Mehrflächenmodell aus Abschnitt 5.1 verwendet. In diesem Querschnitt wird der Bewehrungsstahl als verschmierte Bewehrung mit dem Bewehrungsgrad  $\rho_s$  berücksichtigt.

$$\rho_s = \frac{A_s}{h_1 b} \quad (7.15)$$

An jedem Integrationspunkt wird das Konstitutivgesetz des Betons aus dem Mehrflächenmodell anteilig durch das Konstitutivgesetz des Bewehrungsstahls additiv ergänzt. Aufgrund der Vernachlässigung der Normalspannungen und Schubspannungen in den Querschnittsrichtungen kann nur Bewehrung parallel zur Balkenachse modelliert werden. Einer vorhandenen Schubbewehrung wird durch Multiplikation der Betonfestigkeit mit einem Umschnürungsfaktor Rechnung getragen. Dabei wird die Umschnürungswirkung unter anderem durch den Bügelbewehrungsgrad, die Fließgrenze der Bügelbewehrung, die Betondruckfestigkeit, den Bügelabstand in Längsrichtung, die Bügelform und die Anordnung der Längsbewehrung beeinflusst, vergleiche *Kreller* [63].

Die dreidimensionale Formulierung des Betonwerkstoffgesetzes beinhaltet alle Spannungs- und Verzerrungskomponenten. Die Reduktion der konstitutiven Gleichungen auf die Balkenformulierung ist Gegenstand von Abschnitt 7.2.4.

### 7.2.3 Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung

Die Kinematik des dreidimensionalen Balkenelements basiert unter anderem auf der Annahme des Ebenbleibens des Querschnitts während der Verformung. Als Torsionswiderstand ergibt sich daraus das polare Trägheitsmoment eines wölbfreien Kreisquerschnitts. Um diesen Fehler zu beheben, wird über den Balkenquerschnitt lokal ein zusätzlicher Längsverschiebungsanteil infolge Verwölbung eingeführt. Dabei versteht man unter Ver-

wölbung die Längsverschiebung infolge einer Torsionsbeanspruchung. In einem vereinfachten Ansatz werden die Steifigkeitsanteile aus den zusätzlichen Verwölbungsfreiheitsgraden durch statische Kondensation auf Elementebene wieder eliminiert, die Anzahl der globalen Elementfreiheitsgrade wird dadurch nicht verändert. In diesem Fall ist keine Berücksichtigung der Wölbeffekte möglich. Zur Erfassung der Wölbeffekte muss sich jeder exzentrisch angeschlossene Einzelquerschnitt um den Normalenvektor in Richtung der Exzentrizität frei verdrehen können. Dies wird durch Verwendung von Koppelknoten erreicht, wobei zusätzliche Freiheitsgrade für die freien Rotationen einzuführen sind, vergleiche *Weimar* [113]. Dabei werden die Steifigkeitsmatrizen der Einzelquerschnitte separat aufgestellt und kondensiert.

### Verwölbung eines zentrischen Querschnitts

Zunächst wird ein zentrischer Querschnitt betrachtet, d.h. Verwölbungen infolge von Exzentrizitäten bezüglich des Schwerpunktes sind nicht vorhanden. Bei einem zentrischen Rechteckquerschnitt wird für die Verwölbung  $u_x^w$  ein Produktansatz nach Gleichung (7.16) gewählt. Dieser besteht aus der Verdrillung  $\Gamma_x$ , die als Ableitung der Torsionsverdrehung  $\varphi_x$  bezüglich der Balkenlängsachse  $x$  definiert wird und der Einheitsverwölbung  $v$  für  $\Gamma_x = 1$ .

$$u_x^w = v(y, z) \Gamma_x = qyz \Gamma_x = q \frac{h_s h_t}{4} st \Gamma_x \quad \text{mit} \quad q = \begin{cases} +1 & \text{für } h_t \geq h_s \\ -1 & \text{für } h_t < h_s \end{cases} \quad (7.16)$$

Mit (7.16) wird die Verwölbung in einem bilinearen Ansatz  $yz$  berücksichtigt, es besteht die Möglichkeit, diese durch einen zusätzlichen kubischen Ansatz besser zu approximieren. Bei sehr gedrunenen Querschnitten ist der kubische Ansatz sinnvoll, bei großen Querschnittsseitenverhältnissen beträgt die Abweichung des linearen Ansatzes gegenüber der Kombination aus linearem und kubischem Ansatz weniger als 2%, vergleiche *Weimar* [113]. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der lineare Ansatz verfolgt.

### Verwölbung eines exzentrisch angeschlossenen Querschnitts

Bei exzentrisch angeschlossenen Querschnitten sind der Drehpunkt des Querschnitts (Bezugspunkt) und der Querschnittsschwerpunkt nicht identisch, damit wird der Ansatz für die Verwölbung durch die Gleichung

$$\bar{u}_x^w = u_x^w + \frac{h_s h_t}{4} (-e_s t + e_t s) \quad (7.17)$$

beschrieben. Der Verlauf der Verdrillung in Balkenlängsrichtung wird über den Ansatz

$$\Gamma_x = \sum_{i=1}^{iel} N^i \Gamma_x^i \quad (7.18)$$

mit den Knotenverdrillungen  $\Gamma_x^i$  abgebildet. In diesem Fall ergeben sich die zusätzlichen Verschiebungsableitungen

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{x,x}^w &= \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{h_s h_t}{4l} (q s t + e_t s - e_s t) \sum_{i=1}^{iel} N_r^i \Gamma_x^i \\
\bar{u}_{x,y}^w &= \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = \left( q \frac{h_t}{2} t + \frac{h_t}{2} e_t \right) \sum_{i=1}^{iel} N^i \Gamma_x^i \\
\bar{u}_{x,z}^w &= \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \left( q \frac{h_s}{2} s - \frac{h_s}{2} e_s \right) \sum_{i=1}^{iel} N^i \Gamma_x^i
\end{aligned} \tag{7.19}$$

und zusätzliche Terme im Ableitungsoperator  $\hat{\mathbf{B}}$ , vergleiche Anhang (D.2). Der Ansatz der Verwölbung führt außerdem zu weiteren Verzerrungsanteilen in Gleichung (7.11). Diese gehen zusammen mit den Verzerrungsanteilen infolge Normalkraft, Querkraft und Biegung in die Konstitutivbeziehung an jedem Integrationspunkt ein. Die Konstitutivmatrix  $\hat{\mathbf{C}}_{tan}$  und der Spannungsvektor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  enthalten somit Anteile aus Normalkraft, Querkraft, Biegung und Torsion. Die Steifigkeitsmatrix eines Einzelbalkenelements wird nach Gleichung (7.13) berechnet, wobei zusätzliche Steifigkeitskomponenten infolge der Wölbfreiheitsgrade vorhanden sind. Für die statische Kondensation der Wölbfreiheitsgrade sind die Steifigkeitsmatrizen des Einzelbalkenelements zunächst zu addieren und in die Untermatrizen  $\mathbf{k}_{dd}$ ,  $\mathbf{k}_{d\Gamma}$ ,  $\mathbf{k}_{\Gamma d}$ ,  $\mathbf{k}_{\Gamma\Gamma}$  zu zerlegen. Mit der unterteilten lokalen Steifigkeitsmatrix wird das inkrementelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{dd} & \mathbf{k}_{d\Gamma} \\ \mathbf{k}_{\Gamma d} & \mathbf{k}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \Gamma \end{bmatrix}_{tan} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_d \\ \mathbf{r}_\Gamma \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

aufgestellt. Mit der Bedingung  $\mathbf{r}_\Gamma = \mathbf{0}$  für unbehinderte Verwölbung folgen die inkrementellen Knotenverdrillungen

$$\Delta \Gamma = -\mathbf{k}_{\Gamma\Gamma}^{-1} \mathbf{k}_{\Gamma d} \Delta \mathbf{d} \tag{7.21}$$

und schließlich das kondensierte Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{k}}_{dd} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{r}_d \tag{7.22}$$

mit der kondensierten Steifigkeitsmatrix

$$\tilde{\mathbf{k}}_{dd} = \mathbf{k}_{dd} - \mathbf{k}_{d\Gamma} \mathbf{k}_{\Gamma\Gamma}^{-1} \mathbf{k}_{\Gamma d}. \tag{7.23}$$

#### 7.2.4 Kondensation der konstitutiven Gleichungen (3D $\Rightarrow$ 1D)

Unter Verwendung eines dreidimensionalen Werkstoffgesetzes für Beton weisen der Spannungsvektor  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\epsilon}$  sechs Komponenten auf. Bei der Balkenmodellierung werden nur drei Komponenten des Spannungsvektors bzw. Verzerrungsvektors berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\sigma}} &= [\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}] \\
\hat{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\epsilon_{xx} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz}]
\end{aligned} \tag{7.24}$$

In der Balkenformulierung wird in der vorliegenden Arbeit die dreidimensionale Form des Werkstoffensors beibehalten. Für die globale Gleichgewichtssiteration ist eine Kondensation des Spannungs- und Werkstoffensors lokal am Materialpunkt erforderlich, vergleiche *de Borst* [24]. Dabei wird ausgehend vom Zustand

$$\epsilon_{yy} = 0 \quad \epsilon_{zz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \tag{7.25}$$

hin zum Zustand

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (7.26)$$

iteriert. Am Anfang jeder Gleichgewichtsiteration ist der Verzerrungstensor aus (7.24) um die Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$  und  $\gamma_{yz}$  zu erweitern. Im Rahmen des globalen inkrementell-iterativen Verfahrens ist der Spannungsvektor zum Zeitpunkt  $i+1$  ausgehend vom Iterationsschritt  $i$  zu linearisieren.

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1} \approx \boldsymbol{\sigma}^i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^i} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{i+1} = \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{C}_{tan}^i : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{i+1} \quad (7.27)$$

Gleichung (7.27) lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_A \\ \boldsymbol{\sigma}_B \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_A \\ \boldsymbol{\sigma}_B \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AA} & \mathbf{C}_{AB} \\ \mathbf{C}_{BA} & \mathbf{C}_{BB} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_A \\ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_B \end{bmatrix}^{i+1} \quad (7.28)$$

mit den Untervektoren

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \Delta \boldsymbol{\epsilon}_A = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \Delta \boldsymbol{\epsilon}_B = \begin{bmatrix} \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

und den Untermatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{AA} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{14} & C_{16} \\ C_{41} & C_{44} & C_{46} \\ C_{61} & C_{64} & C_{66} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_{AB} &= \begin{bmatrix} C_{12} & C_{13} & C_{15} \\ C_{42} & C_{43} & C_{45} \\ C_{62} & C_{63} & C_{65} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{BA} &= \begin{bmatrix} C_{21} & C_{24} & C_{26} \\ C_{31} & C_{34} & C_{36} \\ C_{51} & C_{54} & C_{56} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_{BB} &= \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & C_{25} \\ C_{32} & C_{33} & C_{35} \\ C_{52} & C_{53} & C_{55} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.30)$$

der Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}_{tan}$  für dreidimensionales Materialverhalten. Die Untervektoren  $\boldsymbol{\sigma}_A$  und  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_A$  enthalten die Balkenspannungen und die veränderlichen inkrementellen Balkenverzerrungen. Mit der Nullspannungsbedingung  $\boldsymbol{\sigma}_B^{i+1} = \mathbf{0}$  werden die Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}_B^{i+1}$  des nachfolgenden Iterationsschritts  $i+1$  berechnet.

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_B^{i+1} = -(\mathbf{C}_{BB}^i)^{-1} [\mathbf{C}_{BA}^i \Delta \boldsymbol{\epsilon}_A^i + \boldsymbol{\sigma}_B^i] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}_B^{i+1} = \boldsymbol{\epsilon}_B^i + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_B^{i+1} \quad (7.31)$$

Einsetzen von (7.31) in (7.28) liefert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_A^{i+1} &= \left[ \mathbf{C}_{AA}^i - \mathbf{C}_{AB}^i (\mathbf{C}_{BB}^i)^{-1} \mathbf{C}_{BA}^i \right] \Delta \boldsymbol{\epsilon}_A^{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_A^i - \mathbf{C}_{AB}^i (\mathbf{C}_{BB}^i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_B^i \\ &= \hat{\mathbf{C}}_{tan}^i \Delta \boldsymbol{\epsilon}_A^{i+1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i \end{aligned} \quad (7.32)$$

mit der kondensierten konsistenten Materialtangente

$$\hat{\mathbf{C}}_{tan}^i = \mathbf{C}_{AA}^i - \mathbf{C}_{AB}^i (\mathbf{C}_{BB}^i)^{-1} \mathbf{C}_{BA}^i \quad (7.33)$$

und dem kondensierten Spannungsvektor

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i = \boldsymbol{\sigma}_A^i - \mathbf{C}_{AB}^i (\mathbf{C}_{BB}^i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_B^i. \quad (7.34)$$

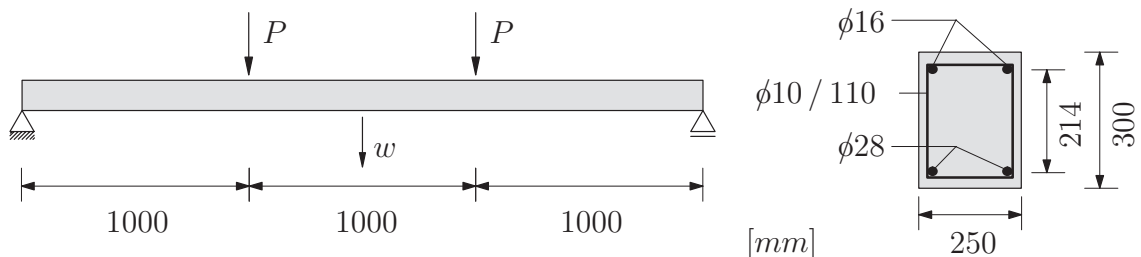
Bei dem vorgestellten Balkenelement werden zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der internen Kräfte auf Elementebene die kondensierte Materialtangente  $\hat{\mathbf{C}}_{tan}^i$  und der kondensierte Spannungsvektor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i$  verwendet.

### 7.2.5 Beispiele

Das vorgestellte Balkenelement wird zur Berechnung eines statisch bestimmten Balkens und eines Rahmens verwendet. *Chen* [19] untersuchte diese beiden Beispiele, wobei die Stahlbetonquerschnitte mit Fasernmodellen abgebildet wurden. Eine vorhandene Schubbewehrung wurde bei *Chen* durch eine erhöhte Betondruckfestigkeit berücksichtigt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz übernommen. Es sei bemerkt, dass *Chen* [19] als einzigen Materialparameter für Beton die Betondruckfestigkeit angibt. In den beiden Beispielen werden die restlichen erforderlichen Betonparameter mit Hilfe der Normenwerke abgeschätzt. Die Bewehrungsparameter  $E_s$  und  $\sigma_y^s$  sind wiederum *Chen* [19] entnommen, während die Verfestigungsparameter aus  $H \approx (\sigma_u^s - \sigma_y^s) / (\varepsilon_u^s - \varepsilon_y^s)$  berechnet werden. Die Fließgrenze  $\sigma_y^s$  bzw. die Fließdehnung  $\varepsilon_y^s$  sowie die Bruchspannung  $\sigma_u^s$  und die Bruchdehnung  $\varepsilon_u^s$  werden von *Chen* [19] übernommen.

#### Stahlbetonbalken

Als erstes Beispiel wird ein statisch bestimmt gelagerter Stahlbetonbalken nach *Bausch* [6] untersucht. Als Belastung werden zwei Einzellasten in den Drittelpunkten aufgebracht. Die Bewehrung besteht aus einer Druckbewehrung auf der Balkenoberseite, einer Zugbewehrung auf der Balkenunterseite und einer transversalen Schubbewehrung entlang des Stahlbetonbalkens. Die Betondeckung beträgt auf der Oberseite 45 mm und auf der Unterseite 41 mm. In Abbildung 7.8 sind die erforderlichen System- und Materialdaten dargestellt. Unter Ausnutzung der Symmetrie wird nur das halbe System mit 32 Balkenelementen diskretisiert, wobei zwischen dem Auflager und dem Drittelpunkt sowie zwischen dem Drittelpunkt und der Balkenmitte jeweils 16 Elemente angeordnet werden. Der Stahlbetonquerschnitt wird in 10 Einzelquerschnitte über die Balkendicke mit drei Integrationspunkten je Einzelquerschnitt unterteilt. In Richtung der Balkenbreite erfolgt aufgrund des ebenen Spannungszustands keine Unterteilung des Querschnitts, wobei in Breitenrichtung nur 1 Integrationspunkt verwendet wird. Die Zug- und Druck-



Beton:

$$E = 20000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.2$$

$$f_{ctm} = 1.6 \text{ N/mm}^2 \quad f_{cm} = 28.0 \text{ N/mm}^2 \quad G_t = 0.12 \text{ N/mm} \quad G_c = 50.0 \text{ N/mm}$$

Bewehrung:

$$\phi 16 : \quad E_s = 205000 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_y^s = 505 \text{ N/mm}^2 \quad H = 2278 \text{ N/mm}^2$$

$$\phi 28 : \quad E_s = 205000 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_y^s = 450 \text{ N/mm}^2 \quad H = 1358 \text{ N/mm}^2$$

Abbildung 7.8: System- und Materialdaten des Stahlbetonbalkens

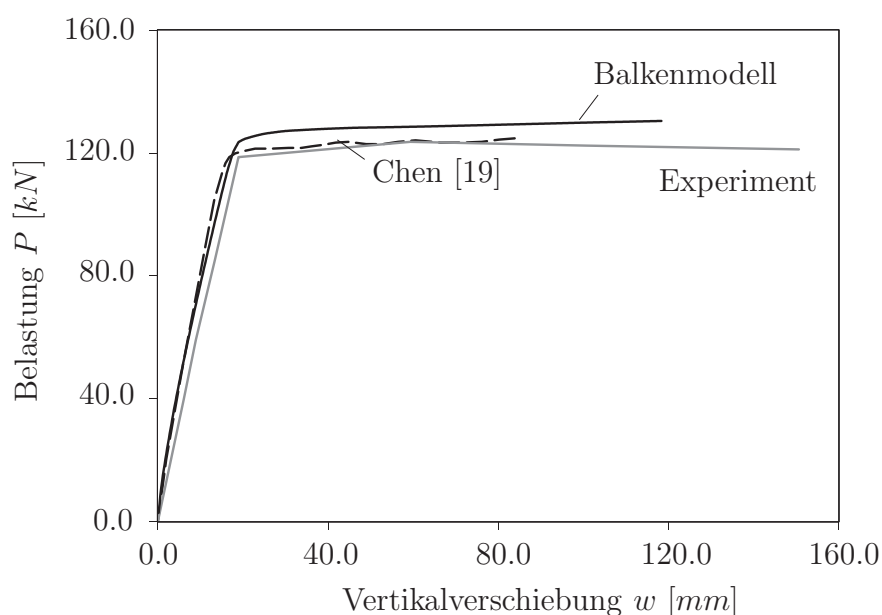
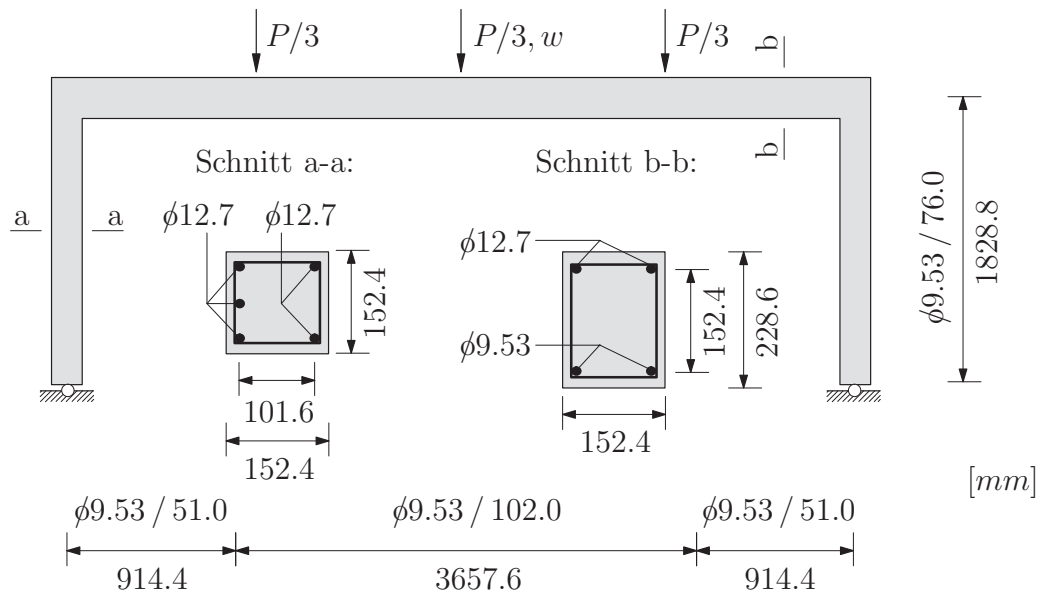


Abbildung 7.9: Last-Verschiebungskurven des Stahlbetonbalkens

bewehrung wird mit verschmierter Bewehrungsmodellierung abgebildet. In Abbildung 7.9 ist die Last-Verschiebungskurve aus einer Berechnung mit dem Balkenelement den Last-Verschiebungskurven des Experiments von *Bausch* [6] und der Berechnung von *Chen* [19] gegenübergestellt. Im Experiment wird die Traglast  $P_T = 124 \text{ kN}$  mit dem Fließbeginn der Zugbewehrung erreicht, das Versagen ist schließlich auf ein plastisches Ausweichen der Druckbewehrung zurückzuführen, vergleiche *Bausch* [6]. Die experimentelle Traglast wird mit dem Balkenmodell um ungefähr 5% überschätzt. Dies kann auf die Tatsache zurückgeführt werden, dass die Bewehrung über eine bestimmte Querschnittshöhe verschmiert wird. Außerdem sind die Materialdaten Schätzwerte und keine experimentell bestimmten Werte. Insgesamt wird die experimentelle Last-Verschiebungskurve mit dem Balkenmodell gut abgebildet.

### Stahlbetonrahmen

Als Beispiel für ein statisch unbestimmtes Tragwerk wird ein gelenkig gelagerter Stahlbetonrahmen mit biegesteifen Rahmenecken untersucht. Die Belastung wird symmetrisch mit drei Einzelasten in den Viertelpunkten des Rahmenriegels aufgebracht. Als Bewehrung werden wiederum Längsbewehrung im Zug- und Druckbereich und eine transversale Schubbewehrung angeordnet. In den Stahlbetonstützen (Schnitt a-a) beträgt die Betondeckung auf der Außen- und Innenseite jeweils  $25.4 \text{ mm}$ , im Stahlbetonriegel (Schnitt b-b) auf der Ober- und Unterseite jeweils  $38.1 \text{ mm}$ . In Abbildung 7.10 sind das statische System und die erforderlichen Materialdaten aufgeführt. Zur Berechnung des Stahlbetonrahmens wird unter Ausnutzung der Symmetrie das halbe System mit 32 Balkenelementen diskretisiert, je 16 Elemente für die Stütze und den Riegel. Stützen- und Riegelquerschnitt werden mit je 7 Einzelquerschnitten über die Balkendicke und jeweils 3 Integrationspunkten je Einzelquerschnitt abgebildet. In Breitenrichtung wird ein Integrationspunkt angeordnet. Die Bewehrung wird wiederum in verschmierter Form berücksichtigt. In Abbildung 7.11 sind die Last-Verschiebungskurven aufgeführt. Das Fließen der Bewehrung im Experiment



Beton:

$$E = 20000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.2$$

$$f_{ctm} = 1.7 \text{ N/mm}^2 \quad f_{cm} = 40.82 \text{ N/mm}^2 \quad G_t = 0.15 \text{ N/mm} \quad G_c = 25.0 \text{ N/mm}$$

Bewehrung:

$$\phi 9.53 : \quad E_s = 209000 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_y^s = 472.3 \text{ N/mm}^2 \quad H = 4880 \text{ N/mm}^2$$

$$\phi 12.7 : \quad E_s = 209000 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_y^s = 455.0 \text{ N/mm}^2 \quad H = 2456 \text{ N/mm}^2$$

Abbildung 7.10: System- und Materialdaten des Stahlbetonrahmens

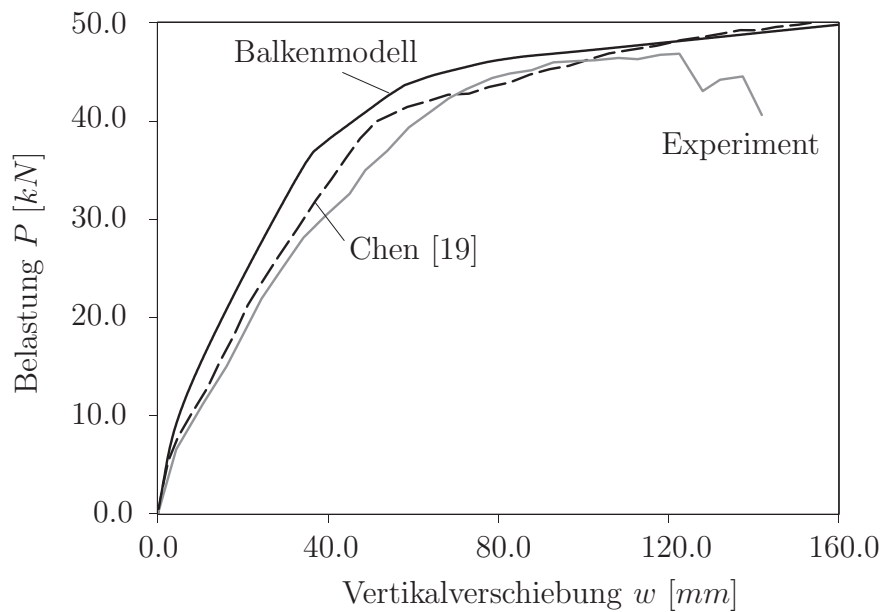


Abbildung 7.11: Last-Verschiebungskurven des Stahlbetonrahmens

bei einer Last von etwa  $40\text{ kN}$  wird mit dem Balkenmodell gut erfasst. Nach dem Fließen ergibt sich aufgrund der Stahlverfestigung ein Ansteigen der Last-Verschiebungskurve. Dies ist ebenfalls bei Chen und ansatzweise im Experiment zu beobachten. Mit dem vorgestellten Balkenmodell ist die Durchführung numerischer Simulationen für einfache Stahlbetontragwerke möglich, wobei besonders die Bewehrungsmodellierung einen Einfluss auf die Ergebnisse hat.





# Kapitel 8

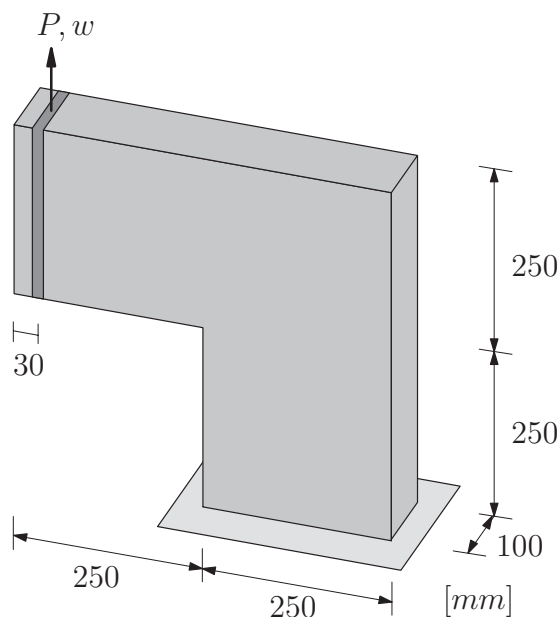
## Numerische Beispiele

In Kapitel 5 wurden mit dem elastoplastischen Mehrflächenmodell (abgekürzt EP-Modell) und dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell (abgekürzt GD-Modell) zwei unterschiedliche Formulierungen zur Beschreibung des Materialverhaltens von Betonstrukturen vorgestellt. Als Regularisierungsmaßnahme wird beim EP-Modell ein netzbezogener Entfestigungsmodul und beim GD-Modell eine Gradientenerweiterung eingesetzt. Mit den genannten Modellen werden als Beispiele für unbewehrten Beton in Abschnitt 8.1 ein scheibenartiger Probekörper, ein gekerbter Biegebalken und ein gekerbter Torsionsbalken untersucht. Die Modellierung der Bewehrung wurde in Kapitel 6 erläutert. Für die Berechnung von Stahlbetontragwerken wird im Rahmen dieser Arbeit ein eingebettetes Bewehrungsmodell nach dem Rebar-Konzept mit perfektem bzw. nachgiebigem Verbund verwendet. Im Unterschied zu Abschnitt 6.2.3 bleibt die Abminderung der Betonfläche infolge der vorhandenen Bewehrung bei der numerischen Simulation von Stahlbetontragwerken unberücksichtigt, da der Bewehrungsgrad der untersuchten Stahlbetonstrukturen sehr gering ist. Mit der Annahme perfekten Verbundes werden in Abschnitt 8.2 Berechnungen für einen Stahlbetonbalken, eine Stahlbetonstütze und eine Stahlbetonkonsole durchgeführt. Bei einem weiteren Stahlbetonbalken wird der nachgiebige Verbund zwischen Beton und Bewehrung berücksichtigt. Zur Diskretisierung der numerischen Beispiele werden dreidimensionale Kontinuumselemente mit quadratischem Verschiebungsansatz verwendet. Im Fall des gradientenerweiterten Schädigungsmodells wird der quadratische Verschiebungsansatz mit einem linearen Ansatz zur Beschreibung des nichtlokalen Verzerrungsfeldes in Verbindung mit einer 2x2x2 Gauß-Punkt Integration kombiniert. Es sei bemerkt, dass in den vorgestellten Beispielen die Schädigungsparameter  $\kappa_0$  und  $k$  aus  $\kappa_0 \approx f_{ctm}/E$  bzw.  $k \approx f_{cm}/f_{ctm}$  berechnet werden mit der Betonzug- und Druckfestigkeit  $f_{ctm}$ ,  $f_{cm}$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  für Beton. Außerdem wird der Gradientenparameter zu  $\sqrt{c} \approx 3 d_{max}$  gewählt.

### 8.1 Beton

#### 8.1.1 L-förmige Scheibe

Als erstes Beispiel wird die L-förmige Betonscheibe nach *Winkler* [116] untersucht. Aufgrund der komplexen Versagensform (kombiniertes Zug- und Schubversagen) und der Entstehung eines einzelnen makroskopischen Risses entwickelte sich das Beispiel der L-förmigen Scheibe in letzter Zeit zu einem Standardbeispiel für die Überprüfung verschiedener Betonmodelle. Die zugrundeliegenden Experimente wurden an unbewehrten und bewehrten Betonwinkeln am Institut für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre der Universität Innsbruck durchgeführt. In Abbildung 8.1 links sind die Geometrie und das statische System der L-förmigen Scheibe dargestellt. Die Materialparameter der Ela-



Materialdaten:

Elastizität

$$E = 25850 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.18$$

Plastizität

$$f_{ctm} = 2.7 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cm} = 31.0 \text{ N/mm}^2$$

$$G_t = 0.065 \text{ N/mm}$$

$$G_c = 10.8 \text{ N/mm}$$

Schädigung

$$\alpha = 0.96$$

$$\beta = 350$$

$$\kappa_0 = 0.0001$$

$$k = 11.5$$

Gradientenerweiterung

$$\sqrt{c} = 25 \text{ mm}$$

Abbildung 8.1: System- und Materialdaten

stizität und der Plastizität sind der Arbeit von *Winkler* [116] entnommen, während der Schädigungsparameter  $\beta = 350$  sowie  $\alpha = 0.96$  zur Gewährleistung numerischer Stabilität im stark entfestigenden Bereich gewählt werden. Die beiden Schenkel des Betonwinkels weisen eine Länge von  $500 \text{ mm}$  und eine Höhe von  $250 \text{ mm}$  auf, die Dicke des Betonwinkels beträgt  $100 \text{ mm}$ . Während der vertikale Schenkel am horizontalen Rand unverschieblich gelagert ist, erfährt der horizontale Schenkel am vertikalen Rand eine gleichförmige vertikale Verschiebung. In der numerischen Simulation werden dabei die vertikalen Freiheitsgrade gekoppelt. Die Last wird im Versuch mittels eines Stahlstabes (Durchmesser  $20 \text{ mm}$ ), der am unteren Rand des horizontalen Schenkels in einer halbkreisförmigen Aussparung gelagert wird, eingeleitet. Um die Aussagekraft der experimentellen Untersuchungen sicherzustellen, wurden im Versuch drei identische Betonwinkel untersucht. Für die numerischen Simulationen dienen die Versuchsergebnisse als Referenzwerte, welche sehr ausführlich in *Winkler* [116] dokumentiert sind. Im Folgenden wird die Tauglichkeit zur Simulation des Zugversagens des GD-Modells und des EP-Modells anhand der L-förmigen Scheibe überprüft.

### Gradientenerweitertes Schädigungsmodell

Zunächst wird für die numerische Simulation des Tragverhaltens der Betonwinkel mittels der Methode der Finiten Elemente das gradientenerweiterte Schädigungsmodell (GD-Modell) verwendet. Unter Ausnutzung der Symmetrie und Einführen entsprechender Symmetrierandbedingungen wird in Dickenrichtung nur das halbe System diskretisiert. Zur Überprüfung der Objektivität der Ergebnisse hinsichtlich der Diskretisierung werden für die Netze I-III für eine Hälfte zwei Lagen mit 300, 2480 und 3280 Elementen verwendet. In Abbildung 8.2 sind die unterschiedlichen Diskretisierungen für den gesamten Scheibenkörper dargestellt. In der Nähe der Risswurzel ist hier eine sehr feine Diskretisierung zu wählen, um das komplexe Rissverhalten ausreichend abbilden zu können. Die Last-Verschiebungskurven aus den numerischen Simulationen und den Versuchen sind in Ab-

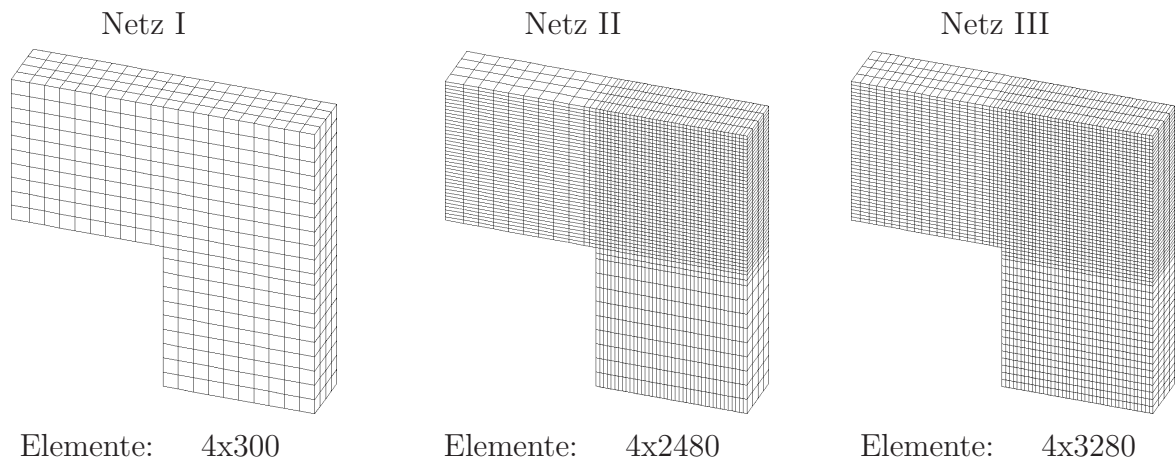


Abbildung 8.2: Diskretisierung mit unterschiedlichen FE-Netzen

bildung 8.3 gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die numerischen Traglasten im Bereich der Versuchstraglasten liegen. Außerdem wird das experimentelle Nachbruchverhalten in allen Simulationen sehr gut wiedergegeben. Die Diskretisierung mit dem sehr groben Netz I führt im Vergleich zu den sehr feinen Diskretisierungen II,III zu einer geringfügig höheren Traglast, allerdings beträgt die Abweichung in der Traglast nur ca. 7%. Damit ist die Objektivität der Ergebnisse sichergestellt. Auffällig ist die Abweichung der berechneten Kurven von den experimentellen Ergebnissen im Vorbruchbereich. Dieses Phänomen tritt auch bei *Oliver et al.* [83] auf, der die Abweichung auf Messfehler bei der Versuchsdurchführung zurückführt, welche sich aus einer ungewollten Starrkörperdrehung des Probekörpers ergeben. Diese Starrkörperrotation folgt aus dem Schlupf der im Winkelfuß zur Gewährleistung der Einspannwirkung eingebrachten Stahlplatte. Dieser Sachverhalt hat jedoch keine Auswirkung auf die Traglast und das Nachbruchverhalten und wird deshalb nicht weiter untersucht.

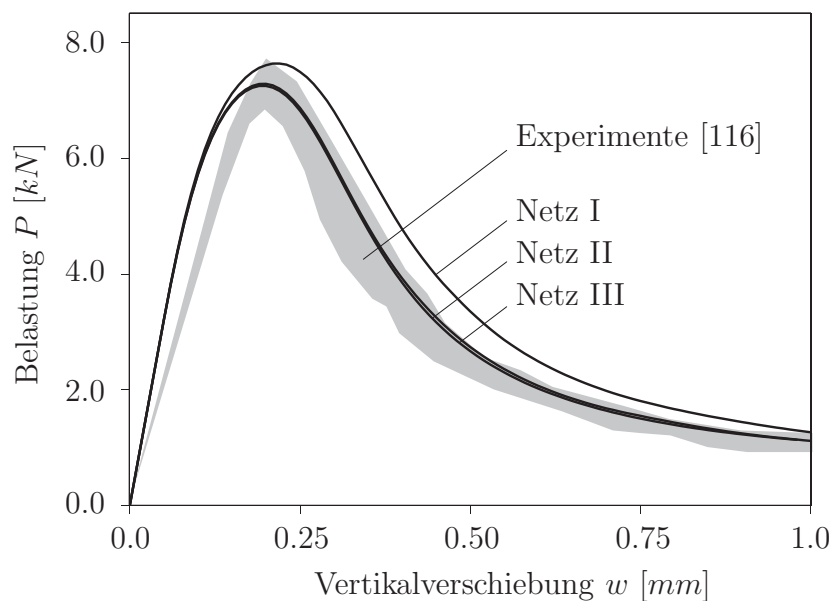


Abbildung 8.3: Last-Verschiebungskurven (GD-Modell)

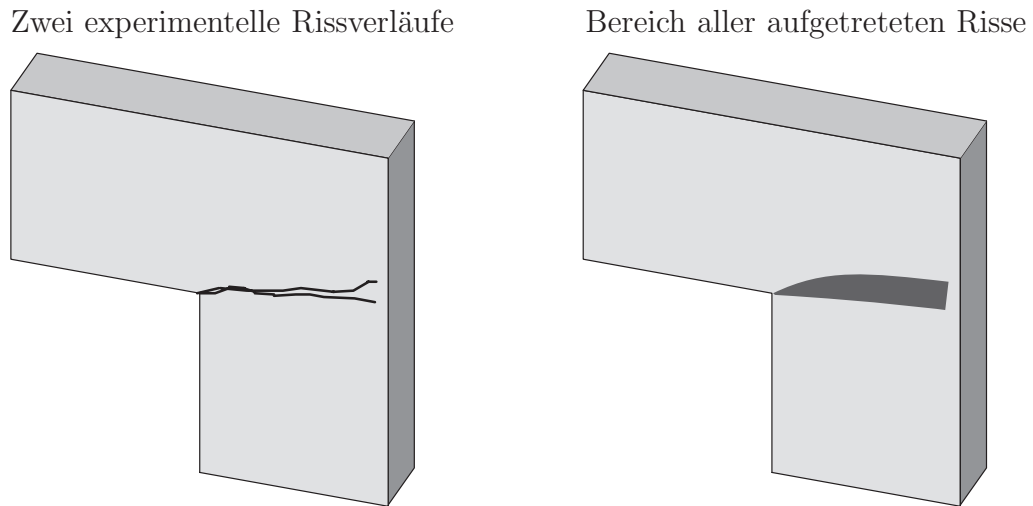


Abbildung 8.4: Experimentelle Rissverläufe nach *Winkler* [116]

In Abbildung 8.4 sind die experimentellen Rissverläufe dargestellt. Das experimentelle Versagen ist charakterisiert durch einen Einzelriss, der an der Risswurzel eine Neigung von ca.  $20^\circ$  aufweist, und mit zunehmendem Abstand von der einspringenden Ecke einen horizontalen Verlauf mit möglichem Wiederanstieg annimmt. Zur Überprüfung der numerischen Versagensform wird zunächst die deformierte Struktur am Ende der Belastungsgeschichte bei  $w = 1.0\text{ mm}$  für die verwendeten Diskretisierungen in Abbildung 8.5 betrachtet. Dabei wird die Rissbildung aus der Lokalisierung der Verzerrungen in einem schmalen Band ersichtlich. Bei dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell kann das Materialversagen infolge einer Rissbildung mit der Schädigungsvariable  $d$  abgebildet werden. Daneben lässt sich der Rissverlauf qualitativ mit der Verteilung der positiven Hauptverzerrungen beschreiben. Abbildung 8.6 zeigt die Schädigungsverteilung und die Verteilung der ersten Hauptverzerrungen zum Ende der Belastungsgeschichte für die Diskretisierungen II und III. Die Schädigung beginnt in den Elementen an der einspringenden Ecke mit einer Neigung gegen die Horizontale. Mit zunehmendem Abstand zur Risswurzel

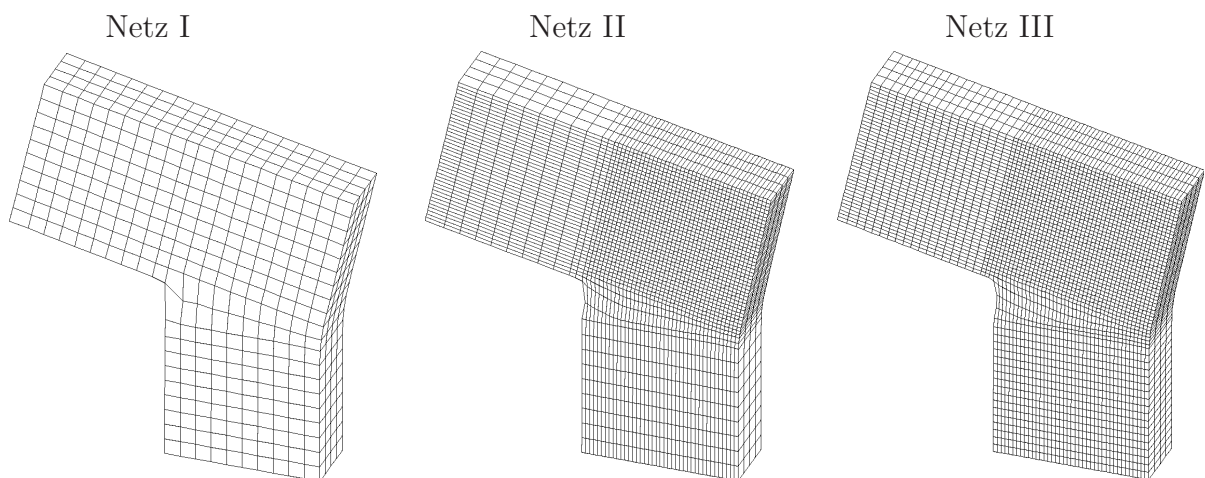
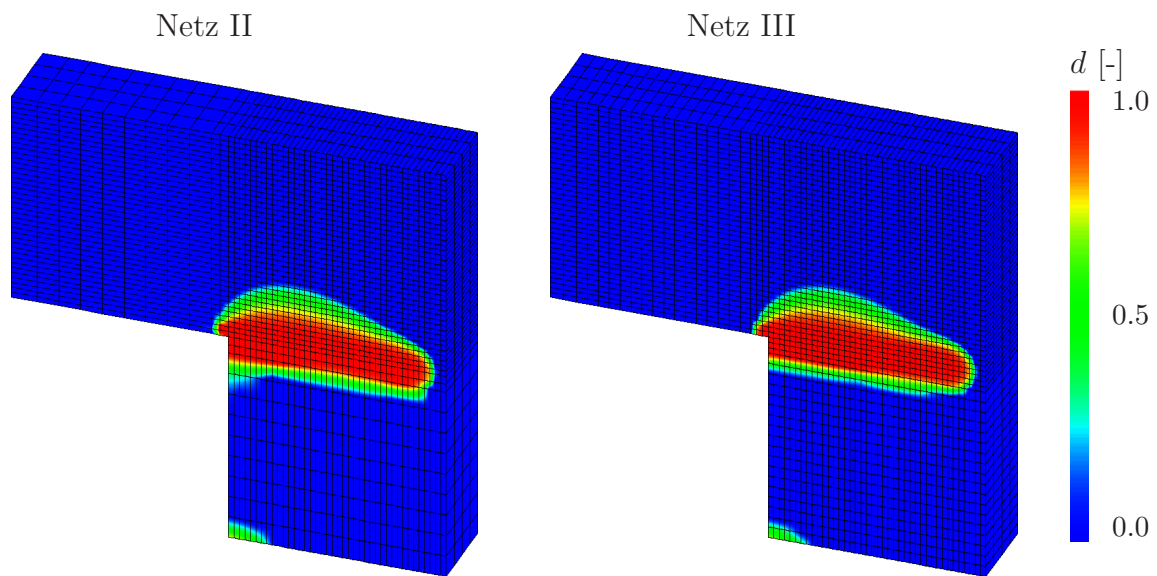


Abbildung 8.5: Deformationsfigur für unterschiedliche FE-Netze bei  $w = 1.0\text{ mm}$  (GD-Modell mit 100-facher Überhöhung)

Verteilung der Schädigungsvariable  $d$ :



Verteilung der ersten Hauptverzerrung  $\epsilon_1$ :

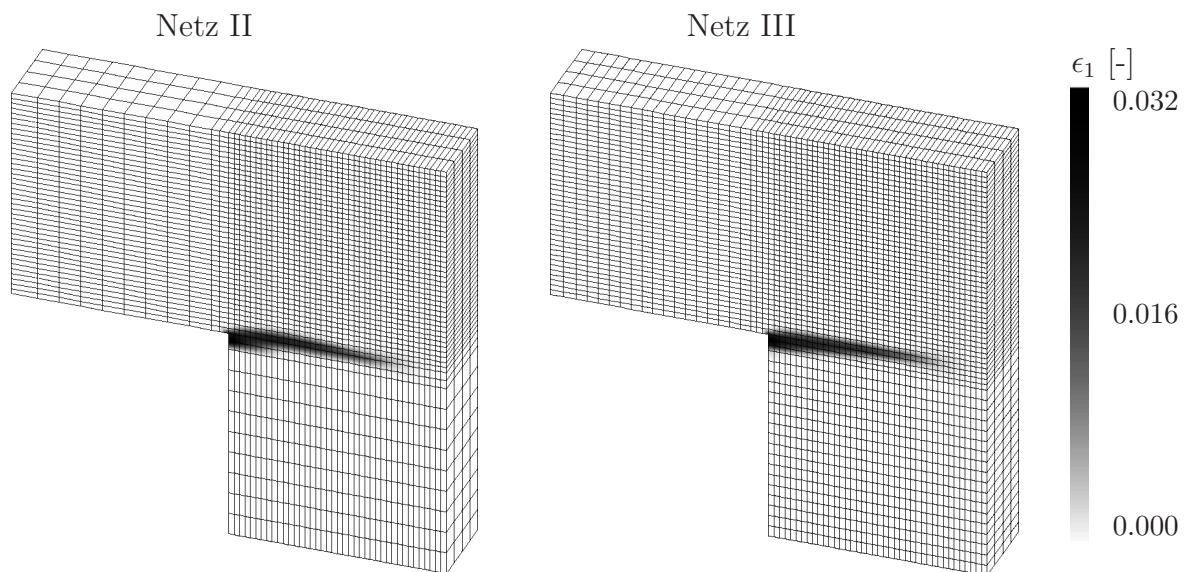


Abbildung 8.6: Verteilung der Schädigungsvariable und der ersten Hauptverzerrung bei  $w = 1.0 \text{ mm}$  (GD-Modell)

ergibt sich ein horizontaler Verlauf. Diese Rissgeometrie wird ebenfalls aus der Verteilung der ersten Hauptverzerrung ersichtlich. Somit kann bei entsprechend feiner Diskretisierung der experimentelle Rissverlauf mit dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell ausreichend genau erfasst werden.

### Elastoplastisches Mehrflächenmodell

In diesem Abschnitt wird als Betonmodell das elastoplastische Mehrflächenmodell aus Kapitel 5 eingesetzt. Auch hier wird aus Symmetriegründen nur das halbe System in Dickenrichtung diskretisiert, wobei die Netze I und II untersucht werden. Die Last-Verschiebungskurven aus den numerischen Simulationen und den Experimenten werden in Abbildung 8.7 dargestellt. Hier zeigt sich eine große Diskrepanz zwischen Experiment und numerischer Simulation. In diesem Fall sind zwei Aspekte zu betrachten: die Last-Verschiebungskurven für die Diskretisierungen I und II weisen deutlich höhere Traglasten im Vergleich zu den Experimenten auf, wobei eine Netzverfeinerung zum Anstieg der Traglast führt. Weiter wird die Duktilität der numerischen Ergebnisse im Nachbruchverhalten gegenüber den Versuchsergebnissen deutlich überschätzt. Dieser Sachverhalt ist auch bei *Hartmann et al.* [40] zu finden, wobei die L-förmige Scheibe mit dreidimensionalen Schalenelementen diskretisiert wird und als Betonmodell das vorgestellte Mehrflächenmodell zum Einsatz kommt. Die Autoren geben als Grund für die Überschätzung der Traglast und der Duktilität unter anderem parasitäre Normalspannungen in Dickenrichtung an der einspringenden Ecke an. Dabei wird eine Ähnlichkeit zu volumetrischen Versteifungseffekten festgestellt, die vor allem bei FE-Analysen von nahezu inkompressiblen Materialien auftreten. Im Folgenden wird das Verformungsverhalten in Rissnähe unter Einsatz des EP-Modells der Verformungsfigur aus dem GD-Modell gegenübergestellt. Für die Diskretisierung II ergeben sich im Bereich der einspringenden Ecke die in Abbildung 8.8 gezeigten Deformationsfiguren. Während beim GD-Modell eine Kontraktanz (Einschnürung) in Dickenrichtung zu erkennen ist, tritt beim EP-Modell eine Dilatanz (Aufweitung) in Dickenrichtung auf. Physikalisch ist bei einer Zugbeanspruchung die Bildung einer Einschnürung orthogonal zur Beanspruchung zu erwarten. Zwar kann durch die Rissverzahnung (siehe Abschnitt 4.3.2) eine gewisse Dilatanz entstehen, allerdings tritt diese vorrangig in Scheibenebene auf. Durch die Dilatanz in Dickenrichtung wird die physikalisch vorhandene Kontraktanz behindert, somit ergibt sich ähnlich zu *Hartmann et al.* [40] ein Versteifungseffekt durch

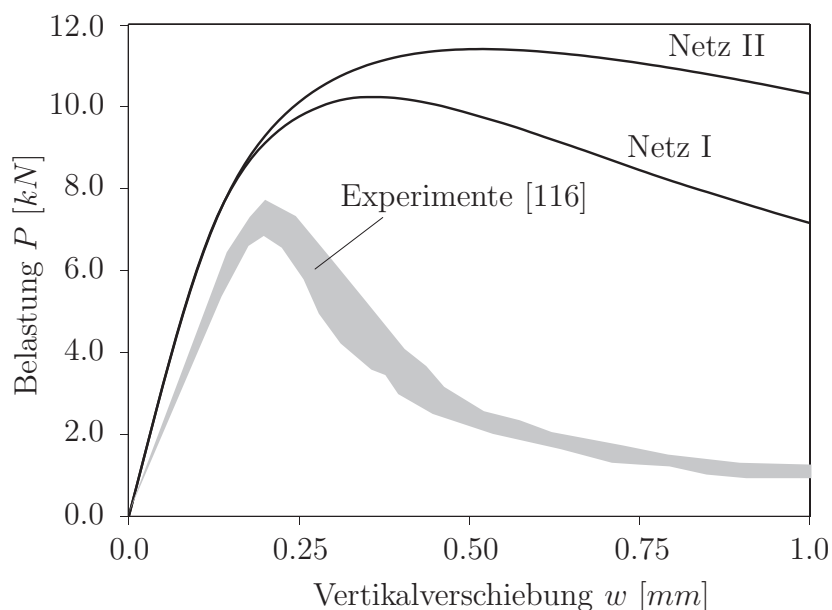


Abbildung 8.7: Last-Verschiebungskurven (EP-Modell)



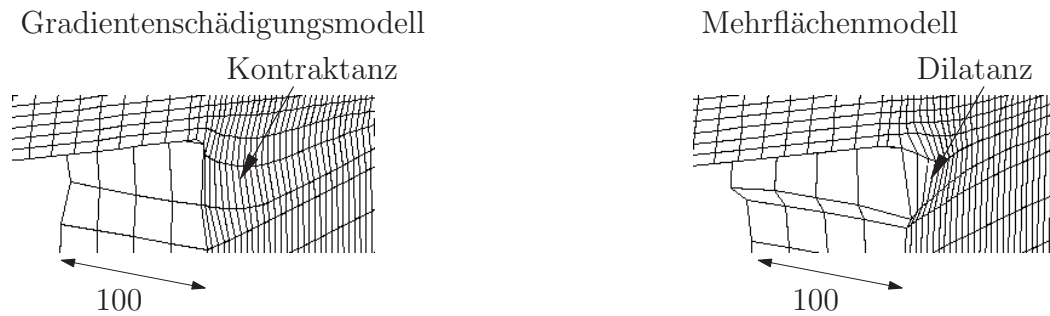


Abbildung 8.8: Verformungsverhalten in Rissnähe für Diskretisierung II (100-fache Überhöhung)

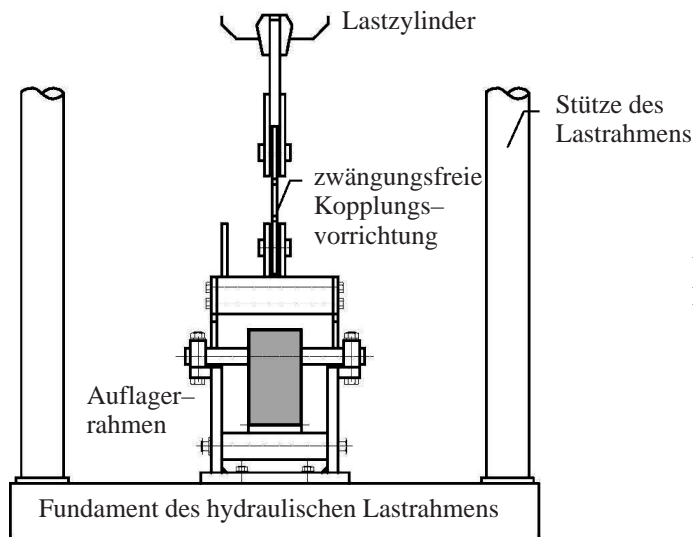
die Volumenzunahme in Dickenrichtung. Als Ursache für diesen Effekt sind zwei Punkte zu nennen. Das elastoplastische Mehrflächenmodell verwendet eine assoziierte Fließregel, somit wird das plastische Potential  $Q$  mit der Fließfläche  $F$  gleichgesetzt. Bei der Rückprojektion der Prädiktorspannung auf die Fließfläche ergibt sich daraus ein zu hoher hydrostatischer Spannungsanteil, der eine Überschätzung der vorhandenen Dilatanz zur Folge hat, vergleiche *Jirásek* [53]. Außerdem kann das Betonmodell das Versagen im vorwiegenden mehraxialen Zugzustand nicht adäquat abbilden, da die Dreiecksform in Deviatorebene nicht berücksichtigt wird. Bei Strukturanalysen mit zweidimensionalen Scheibenelementen werden Spannungen in Dickenrichtung vernachlässigt, so dass keine Dilatanz orthogonal zur Scheibenebene auftreten kann. In diesem Fall liefert das Mehrflächenmodell gute Ergebnisse, vergleiche *Menrath* [75]. Für Berechnungen von Scheibentragwerken, wie beispielsweise der L-förmigen Scheibe, mit Volumenelementen ist das Mehrflächenmodell in der dargestellten Form jedoch nicht geeignet und bedarf einer Modifikation.

### 8.1.2 Gekerbter Biegebalken PCT-2D

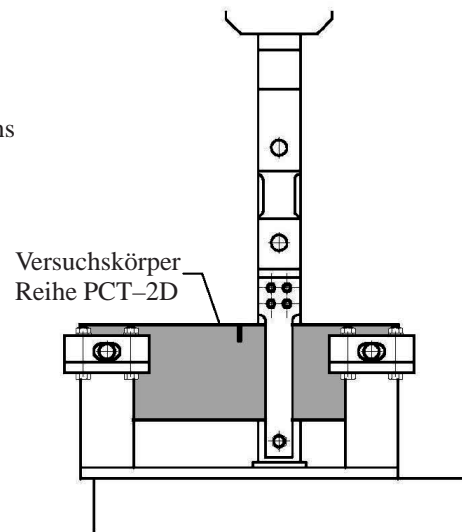
Als zweites Beispiel wird ein gekerbter Biegebalken nach *Feist* [37] untersucht. Im Labor des Instituts für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre der Universität Innsbruck wurden zahlreiche Experimente an Betonprobekörpern durchgeführt. Das Ziel dieser Experimente war unter anderem die Untersuchung des Verhaltens von Betonstrukturen unter zweidimensionalen Spannungszuständen. Insbesondere die Versagensform, der Rissverlauf, die Ausbildung von Rissflächen sowie die Last-Verschiebungskurven der einzelnen Versuchskörper waren dabei von Interesse. Alle Balken weisen eine Gesamtlänge von  $600\text{ mm}$ , eine Stützweite von  $500\text{ mm}$  sowie einen Rechteckquerschnitt mit einer Höhe von  $180\text{ mm}$  auf. Im Rahmen dieser Arbeit wird die erste Versuchsreihe PCT-2D (*Plain Concrete Test 2D*) numerisch untersucht. Charakteristisch für diese Versuchsreihe ist die Wiedergabe eines ebenen Spannungszustandes. Dazu wird die Balkendicke zu  $100\text{ mm}$  gewählt. Die Versuchskörper werden in Balkenmitte an der Zugseite mit einer  $30\text{ mm}$  tiefen und  $5\text{ mm}$  breiten Kerbe versehen, um die Position des Rissbeginns für alle Probekörper gleichermaßen festzulegen. In Abbildung 8.9 ist der Versuchsaufbau für die Reihe PCT-2D in verschiedenen Ansichten dargestellt. Eine ausführliche Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Versuchsdurchführung wird in *Feist* [37] gegeben. Die Belastung wird im Abstand von  $75\text{ mm}$  zur Balkenmitte exzentrisch an der Druckseite über einen hydraulischen Lastrahmen aufgebracht. Dieser setzt sich aus einem Fundament, zwei Stützen und einem Lastzylinder zusammen. Über einen Zylinderhub wird die Kraft erzeugt und



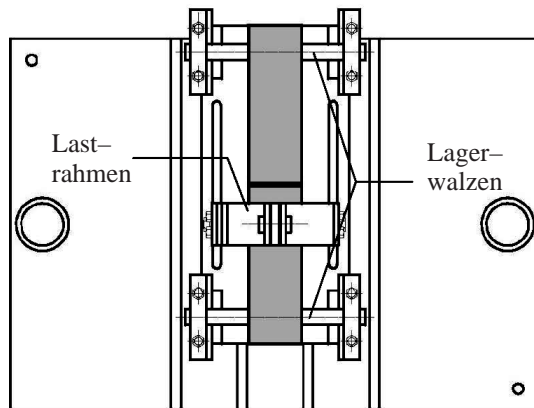
## Vorderansicht:



## Seitenansicht:



## Aufsicht:



## Geometrie des Versuchsbalkens PCT2D

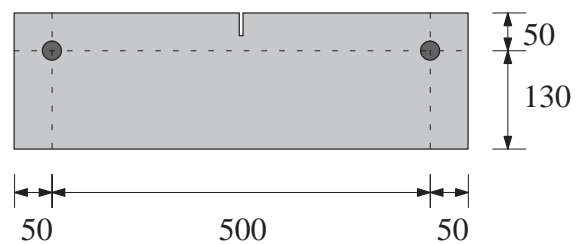
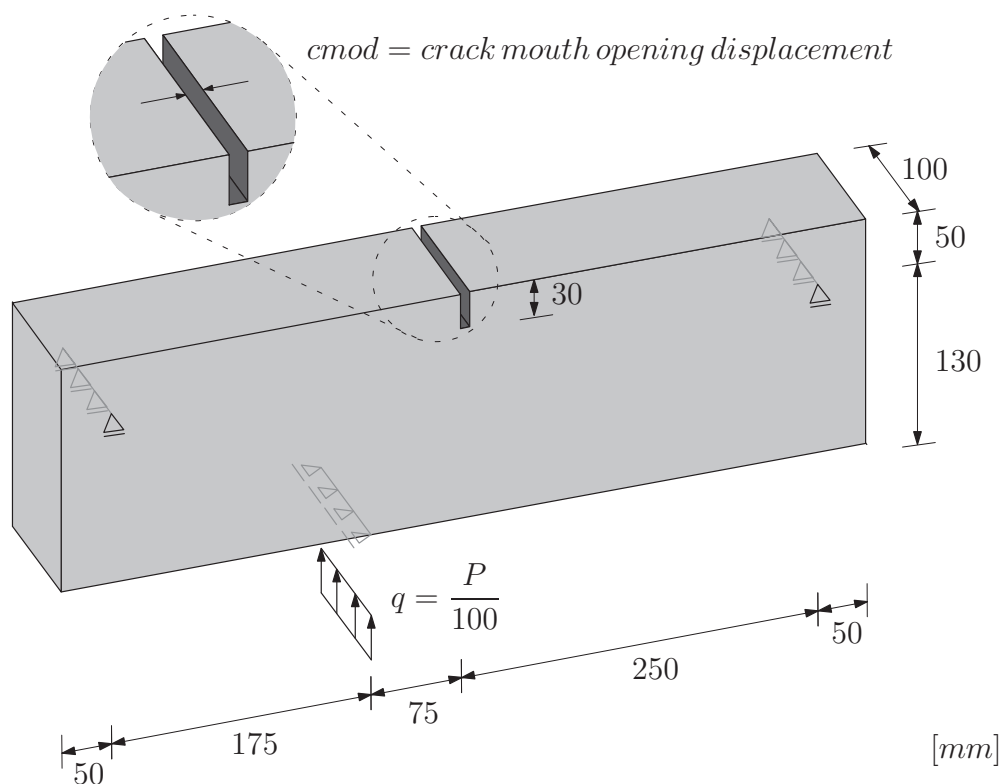


Abbildung 8.9: Versuchsaufbau nach Feist [37]

mittels einer zwängungsfreien Kopplungsvorrichtung in das untere Ende des Lastrahmens übertragen. Von dort aus wird die Kraft über eine Lastwalze ( $30\text{ mm}$  Durchmesser) auf den Versuchskörper als Linienlast aufgebracht. Als Lagerung kommt ein spezieller Auflagerrahmen zum Einsatz. Dieser besteht aus einer Grundplatte, vier Lagerstützen und zwängungsfreien Lagerblöcken. Letztere dienen als vertikale Lagerung für zwei Stahlwalzen ( $30\text{ mm}$  Durchmesser), welche die Auflagerkräfte der Betonkörper übernehmen. Dabei wird eine Verschieblichkeit der Stahlwalzen in Balkenlängsrichtung zugelassen. Die Schwerachsen der Stahlwalzen sind im Abstand von  $50\text{ mm}$  zum Zugrand und jeweils zu den Seitenrändern positioniert. Für die numerische Analyse wurden die Balkengeometrie und das statische System aus Abbildung 8.10 gewählt. Im Bereich der Lasteinleitung wurde die Horizontalverschiebung in Balkenlängsrichtung gehalten, während die Linienlager eine vertikale Verschiebung verhindern. Als experimentelle Referenzlösung wird der Probekörper 2 der ersten Versuchsreihe PCT-2D herangezogen. Aufgrund des Defizits des elastoplastischen Mehrflächenmodells bei der Berechnung von Tragwerken des ebenen Spannungszustands mit Volumenelementen wird dieses Beispiel nur mit dem gradienten-



Materialdaten:

$$\begin{aligned}
 E &= 34165 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0.2274 \\
 \alpha &= 0.92 & \beta &= 650 & \kappa_0 &= 0.0000775 & k &= 11.7 \\
 \sqrt{c} &= 25 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Abbildung 8.10: System- und Materialdaten

erweiterten Schädigungsmodell untersucht. In der numerischen Simulation werden für das gradientenerweiterte Schädigungsmodell die Materialdaten aus Abbildung 8.10 verwendet. Die elastischen Materialparameter sowie die notwendigen Betonfestigkeiten zur Berechnung der Schädigungsparameter  $\kappa_0, k$  sind Feist [37] entnommen. Weiter wurden  $\alpha$  zu 0.92 und  $\beta$  zu 650 gewählt, um den entfestigenden Bereich adäquat abbilden zu können. Unter Ausnutzung der Symmetrie erfolgt die Diskretisierung des halben Systems in Dickenrichtung mit drei unterschiedlichen Netzen (I= 1x843, II= 3x843 = 2529 und III= 6x843 = 5058 Elemente), die sich nur durch die Elementanzahl in Dickenrichtung unterscheiden. Exemplarisch ist in Abbildung 8.11 die Diskretisierung III für das gesamte System dargestellt.

Mit den gewählten Diskretisierungen soll die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Elementanzahl in Dickenrichtung untersucht werden. Der Vergleich der Last-Rissöffnungs-Beziehung aus den numerischen Simulationen mit der experimentellen Kurve ist in Abbildung 8.12 dargestellt. Es zeigt sich eine geringfügige Überschätzung der Traglast um ca. 6%. Im Nachbruchbereich liefert die numerische Simulation eine geringere Duktilität im Vergleich zum Experiment, jedoch wird die experimentelle Resttragfähigkeit ausreichend genau approximiert. Die Kurven der Diskretisierungen II und III sind nahezu identisch, die Traglast aus Diskretisierung I unterscheidet sich von den Traglasten der feineren Diskre-

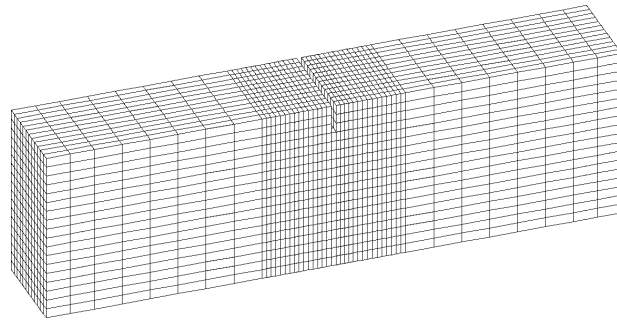


Abbildung 8.11: Diskretisierung des gekerbten Biegebalkens mit  $2 \times 6 \times 843$  Elementen

tisierungen um weniger als 2%. Wie erwartet, sind die numerischen Ergebnisse aufgrund des vorliegenden ebenen Spannungszustands nahezu unabhängig von der Elementanzahl in Dickenrichtung. Im Folgenden werden nur die Ergebnisse der numerischen Simulation mit Diskretisierung III betrachtet. Der experimentelle Rissverlauf stimmt auf Vorder- und Rückseite des Balkens nahezu überein, so dass im Experiment die Bedingung des ebenen Spannungszustandes erfüllt wird, vergleiche *Feist* [37]. In allen Experimenten tritt die gleiche Risscharakteristik auf. An der Kerbe startet ein vertikaler Riss, dessen Verlauf mit zunehmender Belastungsgeschichte eine leichte Neigung in Richtung der Belastung aufweist. In der Deformationsfigur aus Abbildung 8.13 wird der geneigte Rissverlauf aus den stark verzerrten Elementen ersichtlich. Analog zum ersten Beispiel wird das numerische Rissverhalten am Ende der Belastungsgeschichte durch die Verteilung der Schädigung und der ersten Hauptverzerrung in Abbildung 8.14 beschrieben. Ausgehend von der Kerbe verläuft die Schädigungsverteilung mit einer leichten Neigung gegenüber der vertikalen Achse in Richtung der Belastung. Für die erste Hauptverzerrung ergibt sich eine ähnliche Verteilung. Eine direkte Gegenüberstellung des experimentellen Rissverlaufs mit dem Verlauf der ersten Hauptverzerrungen liefert die gute Übereinstimmung zwischen Experiment

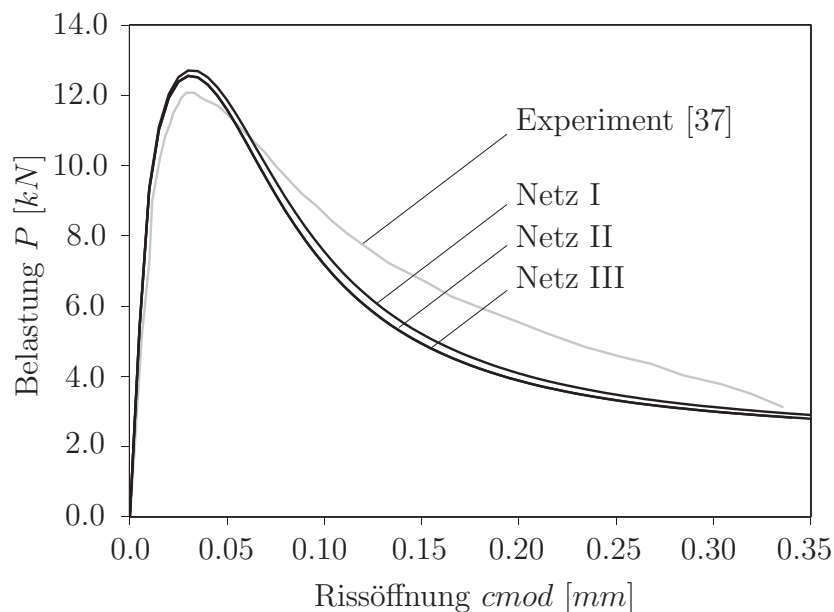


Abbildung 8.12: Last-Verschiebungskurven

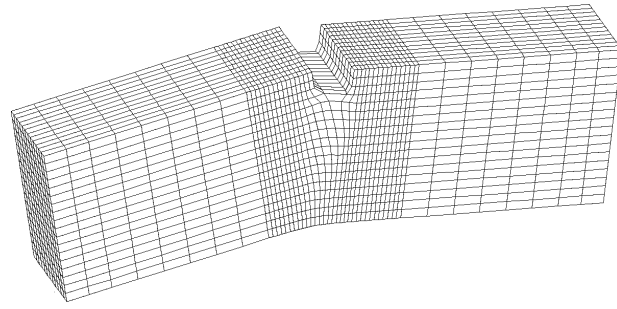
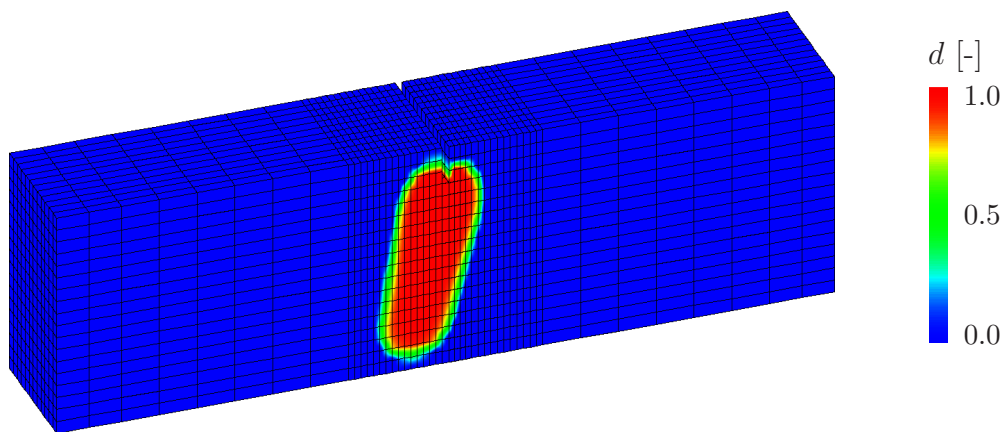


Abbildung 8.13: Deformationsfigur bei  $c_{mod} = 0.34 \text{ mm}$  (150-fache Überhöhung)

und Simulation, siehe Abbildung 8.15. Somit ist das gradientenerweiterte Schädigungsmodell in der Lage, das Strukturverhalten des gekerbten Biegebalkens PCT-2D ausreichend genau abzubilden.

Verteilung der Schädigungsvariable  $d$ :



Verteilung der ersten Hauptverzerrung  $\epsilon_1$ :

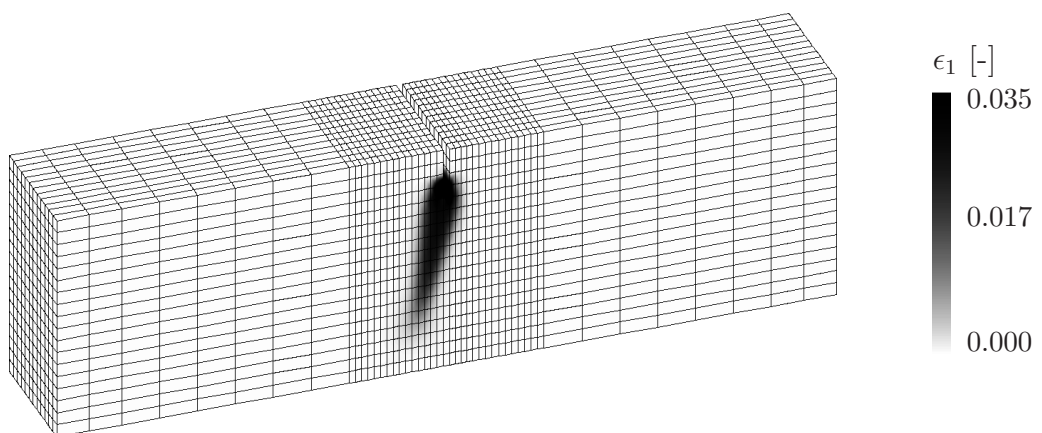


Abbildung 8.14: Verteilung der Schädigungsvariable und der ersten Hauptverzerrung bei  $c_{mod} = 0.34 \text{ mm}$

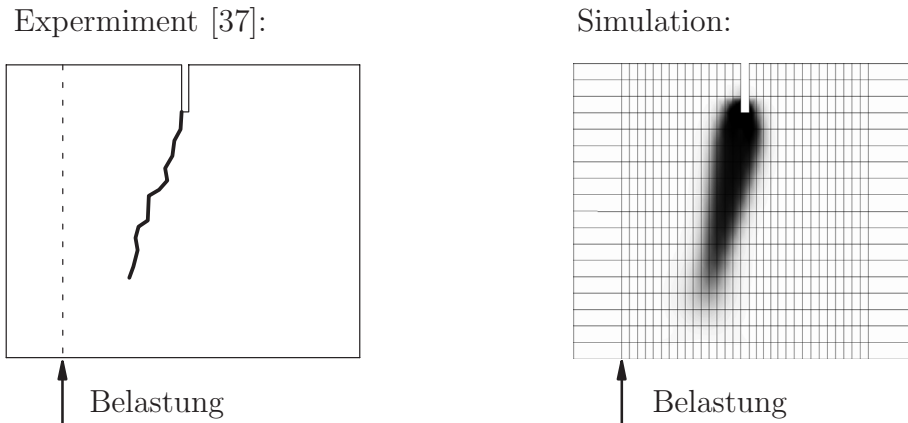
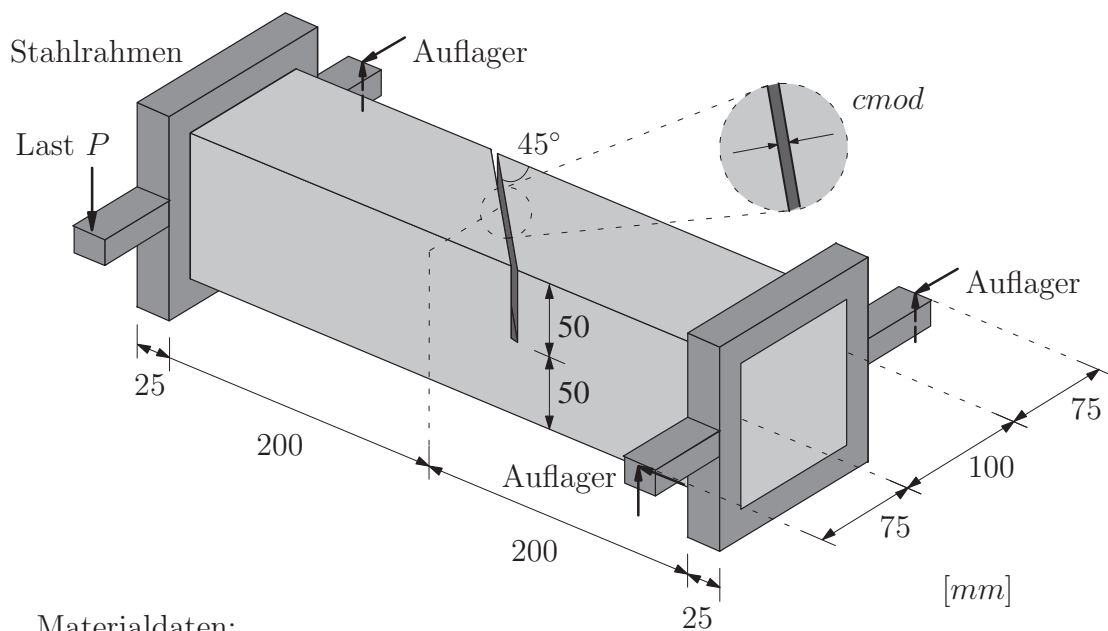


Abbildung 8.15: Vergleich Rissverlauf aus Experiment und numerischer Simulation

### 8.1.3 Gekerbter Torsionsbalken

In den 90er Jahren führten *Barr & Brokenshire* [3] eine Reihe von Torsionsbruchversuchen an der Universität Cardiff durch mit dem Ziel, Standardversuche für das Torsionsversagen von nachgebildeten Betonkernen bestehender Strukturen zu entwickeln. Als Versuchskörper wurden gekerbte Balken (Kerbenbreite = 5 mm) mit quadratischen und



Materialdaten:

$$\begin{aligned}
 E &= 35000 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0.2 \\
 f_{ctm} &= 2.3 \text{ N/mm}^2 & f_{cm} &= 32.0 \text{ N/mm}^2 & G_t &= 0.08 \text{ N/mm} & G_c &= 8.0 \text{ N/mm} \\
 \alpha &= 0.99 & \beta &= 360 & \kappa_0 &= 0.000072 & k &= 13.0 \\
 \sqrt{c} &= 30 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Abbildung 8.16: System- und Materialdaten

kreisförmigen Querschnitten verwendet. Im Vergleich zum gekerbten Biegebalken verläuft die Kerbe bei den Torsionsbalken im Winkel von  $45^\circ$  zur Balkenlängsachse. Die Tests erfolgten mit einer Variation der Betonfestigkeit bzw. der Kerbtiefe. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Torsionsbalken mit quadratischem Querschnitt, einer nominalen Betonfestigkeit von  $40 \text{ N/mm}^2$  und einer Kerbtiefe von  $50 \text{ mm}$  untersucht. Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung 8.16 dargestellt. Zur Aufbringung der Last sowie für die Lagerung des Probekörpers wird dieser an den Balkenenden von einem Stahlrahmen mit seitlichen Armen umschlossen. Zur Kraftübertragung zwischen Stahlrahmen und Betonkörper wird der Rahmen mit dem Betonkörper verschraubt, wobei zwischen dem Stahlrahmen und dem Betonbalken zusätzlich Hartfaserplattenstreifen angebracht werden. Die Belastung wird über einen Laststempel aufgebracht, an dessen Ende eine Stahlkugel montiert ist. Diese wird in eine halbkugelförmige Aussparung eines Seitenarms des Lastrahmens eingesetzt und überträgt so die Last auf den Probekörper. Am gegenüberliegenden Arm des Lastrahmens wird eine vertikale Lagerung angebracht, so dass aus dem vorhandenen Kräftepaar zwischen Lagerkraft und Belastung ein Torsionsmoment entsteht. Die Torsionsbelastung wird wiederum durch ein Kräftepaar am Endrahmen aufgenommen. Dabei wird die Aufnahme der Druckkräfte durch Stahlstäbe mit abgerundeten Enden realisiert, die in die Seitenarme der Stahlrahmen eingepasst werden. Zur Aufnahme der Zugkraft wird die Oberseite des entsprechenden Seitenarms mittels einer Gewindestange und einer Mutter fixiert, so dass ein Abheben des Seitenarms verhindert wird. In der numerischen Simulation wird die statische Bestimmtheit des Systems durch zusätzliche horizontale Lagerbedingungen sichergestellt. In Anlehnung an *Jefferson* [52] wird die numerische Simulation mit einem modifizierten System durchgeführt. Die Stahlrahmen werden derart modelliert, dass die Seitenarme direkt an den Betonkörper angeschlossen sind und gleichzeitig der im Versuch vom Stahlrahmen umschlossene Beton mit einer sehr hohen Steifigkeit versehen wird. Diese Annahme scheint gerechtfertigt, da sich das Versagen aller Probekörper auf die Balkenmitte konzentriert. Im Gegensatz zu den ersten zwei Beispielen tritt im Torsionsversuch ein dreidimensionaler Spannungszustand auf, der eine räumliche Versagensfläche zur Folge hat. Daher werden für dieses Beispiel sowohl Simulationen mit dem GD-Modell als auch mit dem EP-Modell durchgeführt. Für beide Modelle werden die Diskretisierungen aus Abbildung 8.17 verwendet. Die Materialdaten für das EP-Modell sind *Jefferson* [52] entnommen, die Schädigungsparameter  $\kappa_0, k$  ergeben sich aus den Betonfestigkeiten  $f_{ctm}, f_{cm}$ . Zur Abbildung der Entfestigungskurve im GD-Modell werden  $\alpha = 0.99$  und  $\beta = 360$  gewählt.

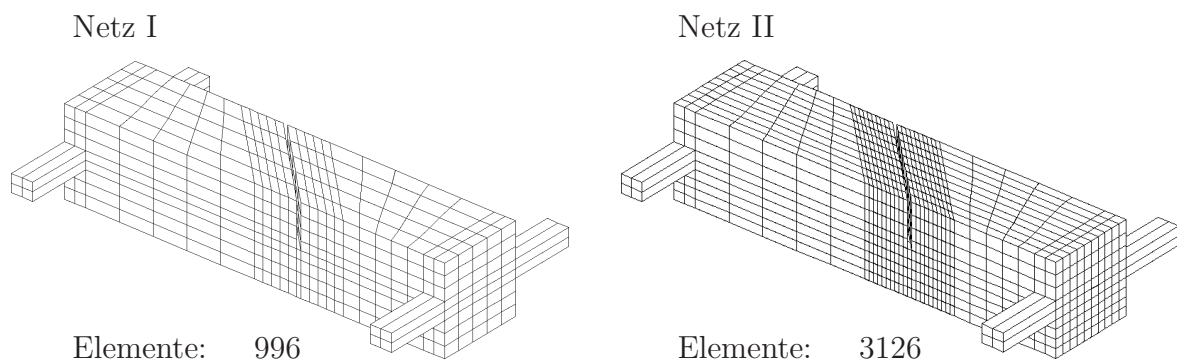


Abbildung 8.17: Diskretisierung mit unterschiedlichen FE-Netzen

### Gradientenerweitertes Schädigungsmodell

Zunächst wird die numerische Simulation des gekerbten Torsionsbalkens mit dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell (GD-Modell) durchgeführt. Die quantitative Beurteilung des GD-Modells erfolgt durch den Vergleich der Last-Rissöffnungs-Beziehung aus den Experimenten mit den berechneten Kurven, siehe Abbildung 8.18. Trotz einer geringen Unterschätzung der experimentellen Traglast stimmen die numerischen Ergebnisse gut mit den experimentellen Werten überein. Weiter ist die Abweichung innerhalb der Diskretisierungen I und II sehr gering, so dass die Objektivität der Last-Verschiebungskurven hinsichtlich der Diskretisierung gewährleistet ist. Zur qualitativen Beurteilung des GD-Modells wird vorab die Versagensform aus den Experimenten erläutert. Hierzu sind der Torsionsbalken nach dem Versagen sowie die beiden Teilbruchstücke in Abbildung 8.19 dargestellt. Ausgehend von der Kerbe ergibt sich an einer Betonseitenfläche ein diagonaler Rissverlauf, der zudem gegen die Seitenfläche geneigt ist. Auf der gegenüberliegenden

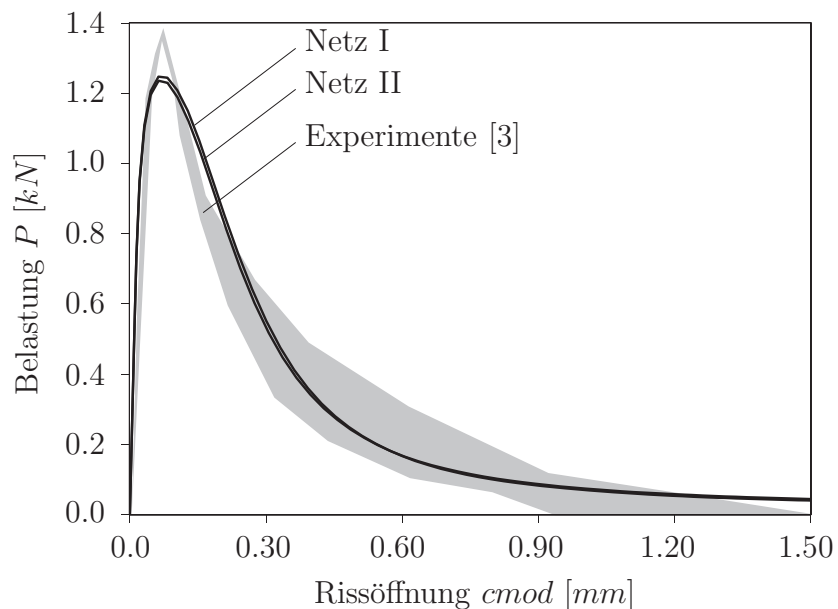
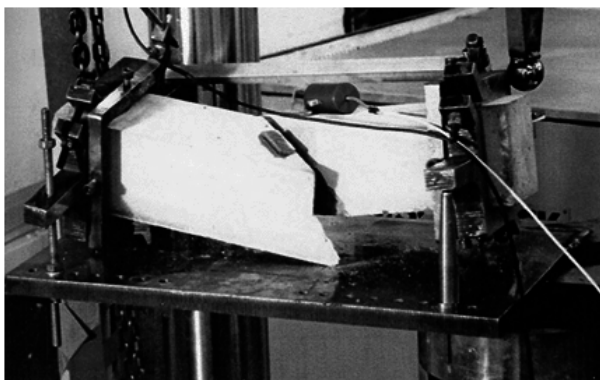


Abbildung 8.18: Last-Verschiebungskurven (GD-Modell)

Torsionsbalken nach dem Versagen



Teilbruchstücke

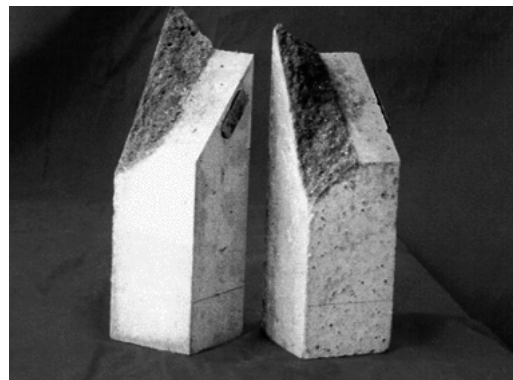


Abbildung 8.19: Torsionsbalken nach dem Versagen [3]



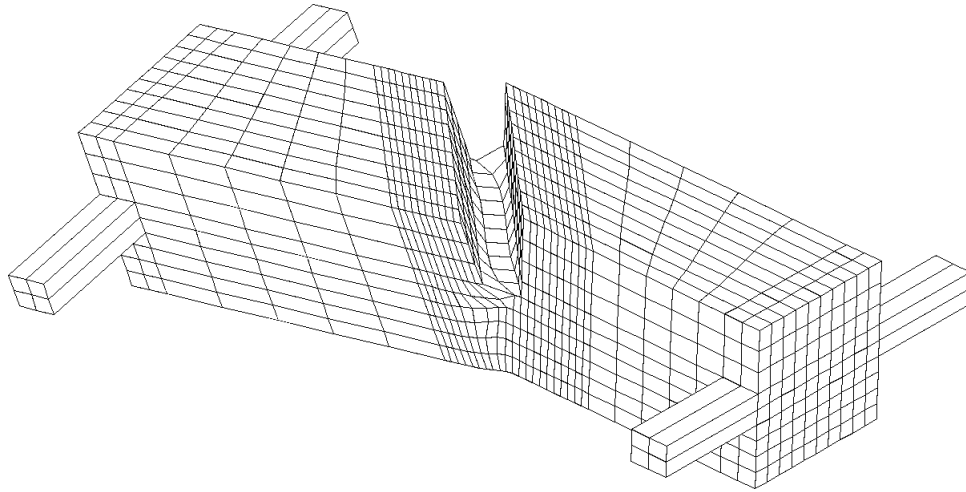


Abbildung 8.20: Deformationsfigur für Diskretisierung II bei  $c_{mod} = 1.5 \text{ mm}$  (GD-Modell mit 20-facher Überhöhung)

Seitenfläche verläuft die Rissbildung entgegengesetzt. Somit entsteht eine komplexe, gekrümmte, dreidimensionale Bruchfläche. Dieser Sachverhalt wird durch die Geometrie der Einzelbruchstücke bestätigt. Der Vergleich der experimentellen Versagensform mit dem Versagen aus der numerischen Simulation wird exemplarisch für die Diskretisierung II durchgeführt. Aus der Deformationsfigur zum Ende der Belastungsgeschichte in Abbildung 8.20 lassen sich das Aufreißen der Kerbe und die keilförmige Ausbildung der Einzelbruchstücke erkennen. Nachdem der geschädigte Körper weiter als Kontinuum betrachtet wird, ist es nicht möglich, das trennbruchartige Versagen aus dem Versuch zu modellieren. Die Schädigungsverteilung wird in diesem Beispiel nicht angeführt, da sie aufgrund der komplexen Bruchgeometrie keinen eindeutigen Rissverlauf erkennen lässt. Demgegenüber bestätigt die Verteilung der ersten Hauptverzerrung in Abbildung 8.21 den gegensätzlichen diagonalen Rissverlauf an den Betonseitenflächen. Das GD-Modell ist somit in der Lage, die experimentellen Last-Verschiebungskurven ausreichend genau abzubilden und

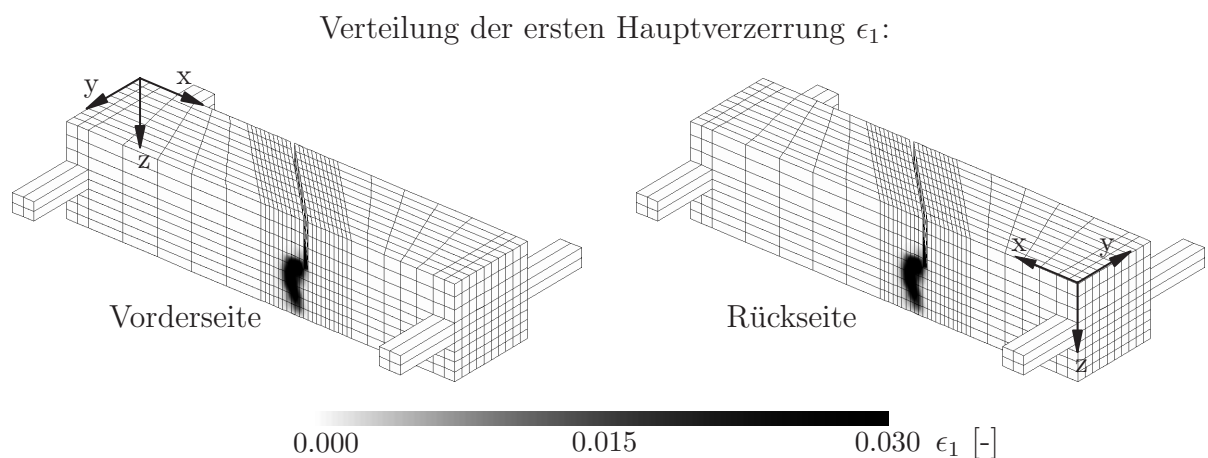


Abbildung 8.21: Verteilung der ersten Hauptverzerrung bei  $c_{mod} = 1.5 \text{ mm}$  (GD-Modell)



die qualitative Versagensform ansatzweise wiederzugeben.

### Elastoplastisches Mehrflächenmodell

Im Folgenden wird die Verwendbarkeit des EP-Modells zur Abbildung des Torsionsversuchs überprüft. Der Vergleich der Last-Rissöffnungskurven in Abbildung 8.22 zeigt analog zur L-förmigen Scheibe eine deutliche Überschätzung der experimentellen Traglast und ein zu duktiles Entfestigungsverhalten gegenüber den experimentellen Ergebnissen. Außerdem führt die Diskretisierung mit einem feinerem Netz erneut zu einer Erhöhung der Traglast, so dass die materielle Objektivität nicht gewährleistet werden kann. Bei

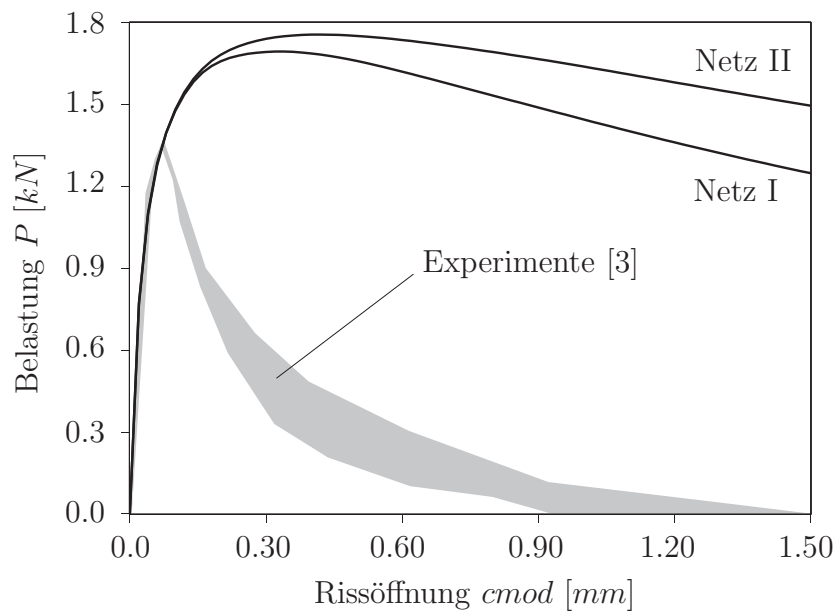


Abbildung 8.22: Last-Verschiebungskurven (EP-Modell)

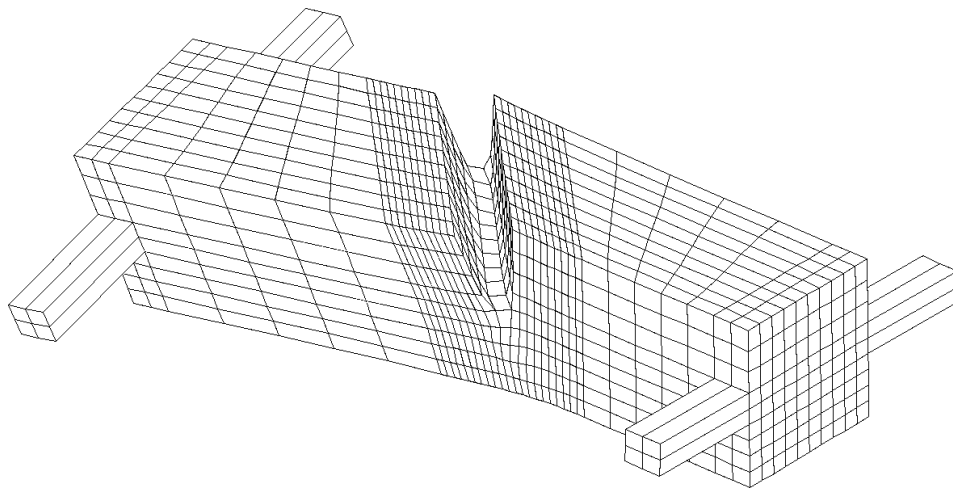


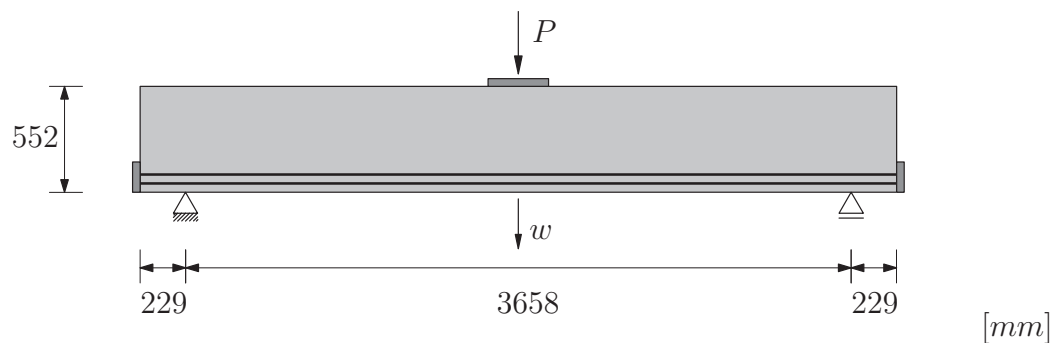
Abbildung 8.23: Deformationsfigur für Diskretisierung II bei  $c_{mod} = 1.5 \text{ mm}$  (EP-Modell mit 20-facher Überhöhung)

Betrachtung der Deformationsfigur von Diskretisierung II zum Ende der Belastungsgeschichte in Abbildung 8.23 ist die Ausprägung der Keilform an den Betonseitenflächen kaum erkennbar. Dieser Sachverhalt steht im Einklang mit der hohen Duktilität der Last-Verschiebungskurve im entfestigenden Bereich. Somit ist das EP-Modell nicht in der Lage, den Versuch des gekerbten Torsionsbalkens adäquat abzubilden. Als Ursachen für die Überschätzung der Tragfähigkeit sind wiederum die Überschätzung der Dilatanz sowie die Vernachlässigung der dreiecksförmigen Versagensfläche im Zugbereich zu nennen.

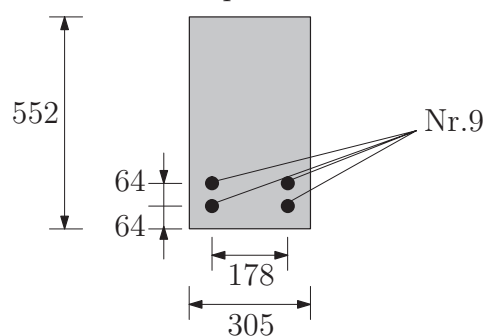
## 8.2 Stahlbeton

### 8.2.1 Stahlbetonbalken OA1

Anfang der sechziger Jahre führten *Bresler & Scordelis* [16] experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Schubfestigkeit von Stahlbetonträgern durch. Mit einer Versuchsreihe von 12 Einzelbalken sollte die Schubsteifigkeit von Balken in Abhängigkeit des Schubbewehrungsgrades bzw. des Verhältnisses Balkenhöhe zu Balkenlänge untersucht werden. Dabei wurden Aussagen zum Tragverhalten, zur Bruchlast und zu den Festigkeiten gemacht. Um ein Schubversagen der Balken sicherzustellen, kamen Bewehrungsstäbe mit einer hohen Zugfestigkeit zum Einsatz. Gleichzeitig wurde ein Verbundversagen im Auf-



Balkenquerschnitt OA1:



Bewehrung Nr.9:

$$\begin{aligned} A_s &= 660 \text{ mm}^2 \\ E_s &= 207000 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y^s &= 550 \text{ N/mm}^2 \\ H &= 3264 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Beton:

$$\begin{aligned} E &= 27500 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0.18 \\ f_{ctm} &= 1.95 \text{ N/mm}^2 & f_{cm} &= 31.3 \text{ N/mm}^2 & G_t &= 0.06 \text{ N/mm} & G_c &= 10.0 \text{ N/mm} \\ \alpha &= 1.0 & \beta &= 200 & \kappa_0 &= 0.000071 & k &= 11.95 \\ \sqrt{c} &= 60 \text{ mm} \end{aligned}$$

Abbildung 8.24: System- und Materialdaten

lagerbereich durch Anbringen von Ankerplatten an den Balkenenden verhindert. In den Experimenten wurden die Balken statisch bestimmt gelagert und mit einer Einzelkraft in Balkenmitte belastet. Eine zu den Bresler-Scordelis-Balken identische Versuchsreihe wurde an der Universität Toronto von *Vecchio & Shim* [111] untersucht und mit den ursprünglichen Versuchen verglichen, wobei eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von *Bresler & Scordelis* [16] zu beobachten war. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Balken OA1 (Bezeichnung nach *Bresler & Scordelis* [16]) für die numerische Simulation verwendet, siehe Abbildung 8.24. Zur Lasteinleitung wird im Versuch eine Stahlplatte angebracht. Für die hier durchgeführte numerische Simulation werden die Materialparameter aus *Winkler* [116] entnommen, der eine Berechnung mit Scheibenelementen und eingebetteter Bewehrung durchführte. In der numerischen Simulation wird die verteilte Lasteinleitung durch eine gleichförmige Linienlast in Balkenmitte berücksichtigt. Die Bewehrung an der Trägerunterseite besteht aus 4 Bewehrungsstäben (Nr.9) mit einem Stahlquerschnitt von jeweils  $660 \text{ mm}^2$ . Zur Abbildung der Bewehrung in der numerischen Simulation wird die eingebettete Modellierung aus Abschnitt 6.2.3 verwendet. Für die Modellierung des Betons wurden das GD-Modell sowie das EP-Modell mit den Materialdaten aus Abbildung 8.24 herangezogen. Beim GD-Modell wurden die Schädigungsparameter  $\kappa_0, k$  aus  $f_{ctm}, f_{cm}$  berechnet, die restlichen Schädigungswerte zu  $\alpha = 1.0$  und  $\beta = 200$  gewählt. Der Verfestigungsparameter der Bewehrung wird aus  $H \approx (\sigma_u^s - \sigma_y^s)/(\varepsilon_u^s - \varepsilon_y^s)$  berechnet. Die Fließgrenze  $\sigma_y^s$  bzw. die Fließdehnung  $\varepsilon_y^s$  sowie die Bruchspannung  $\sigma_u^s$  und die Bruchdehnung  $\varepsilon_u^s$  werden dabei von *Winkler* [116] übernommen. Unter Ausnutzung der Doppelsymmetrie wird nur ein Viertel des Gesamtsystems diskretisiert. Für das FE-Netz werden drei Lagen in Dickenrichtung mit jeweils 440 Elementen verwendet. In Abbildung 8.25 ist die Diskretisierung der linken Trägerhälfte dargestellt. Zum Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen werden die Last-Verschiebungskurven in Abbildung 8.26 betrachtet. Nachdem die Versuchsdurchführung lastgesteuert erfolgte, wird die experimentelle Kurve nach Erreichen der Maximallast abgebrochen. Die Verschiebungssteuerung der numerischen Simulationen ermöglicht die Weiterführung der Last-Verschiebungskurven nach Erreichen der Traglast. Das Versagen tritt in den numerischen Simulationen bei einer Vertikalverschiebung von  $w = 8.0 \text{ mm}$  auf. Während das EP-Modell sehr gute Ergebnisse liefert, weicht die Kurve aus dem GD-Modell von der experimentellen Kurve ab, wobei die experimentelle Traglast von  $P_T = 334 \text{ kN}$  in beiden Fällen ausreichend genau erfasst wird. Bei ungefähr  $70 \text{ kN}$  findet ein Steifigkeitsabfall im Last-Verschiebungsdiagramm statt, der auf die Bildung von Biegezugrissen an der Balkenunterseite zurückzuführen ist. Zur qualitativen Beurteilung der numerischen Ergebnisse werden die Versagensfor-

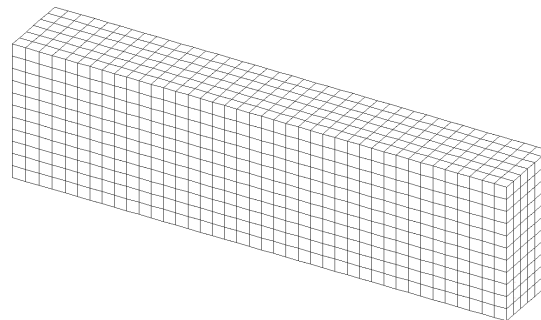


Abbildung 8.25: Diskretisierung der linken Trägerhälfte mit  $2 \times 3 \times 440$  Elementen

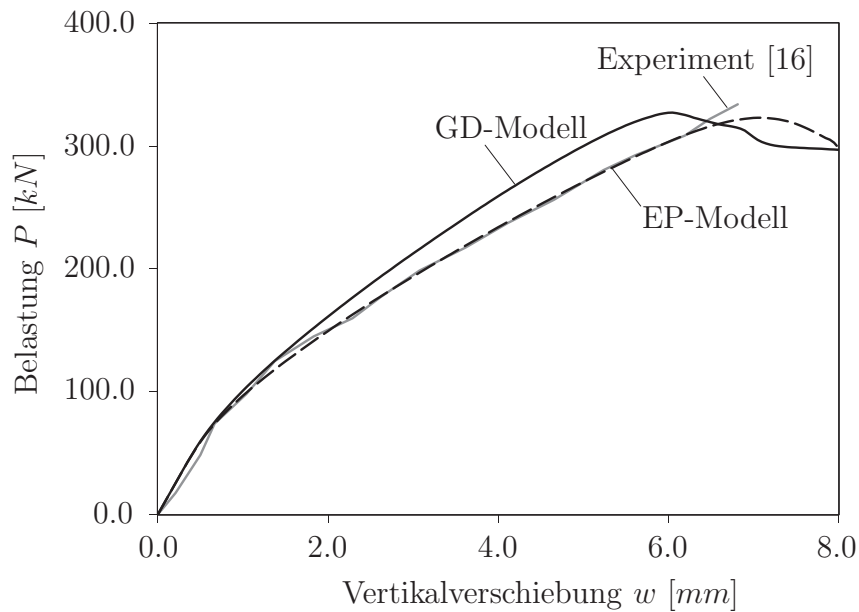


Abbildung 8.26: Last-Verschiebungskurven

men aus den Berechnungen mit dem experimentellen Versagen verglichen. Im Experiment bilden sich zunächst an der Balkenunterseite Biegezugrisse. Bei weiterer Laststeigerung entstehen im mittleren Drittel der Balkenhöhe zusätzliche Schubrisse, die sich zunehmend über die Trägerhöhe ausbreiten. Unmittelbar nach Ausbildung des maßgeblichen Schubrisses findet das Versagen statt, das auf die Rissbildung im Lasteinleitungsbereich infolge sehr hoher Druckspannungen sowie auf die Schubrissbildung entlang der unteren Bewehrungslage zurückzuführen ist. Exemplarisch ist das Versagen der rechten Trägerhälfte des Versuchsbalkens OA3 nach *Vecchio & Shim* [111] in Abbildung 8.27 dargestellt, wobei der Versuchsbalken OA3 gegenüber dem Balken OA1 eine größere Stützweite sowie zusätzliche Zugbewehrung aufweist. Aufgrund der hohen Zugfestigkeit des Bewehrungsstahls findet während der Belastungsgeschichte kein Fließen der Bewehrung statt. Im Folgenden werden die Versagensformen der Berechnungen mit dem GD-Modell und dem EP-Modell überprüft.

### Gradientenerweitertes Schädigungsmodell

Beim GD-Modell wird zunächst die Deformationsfigur zum Zeitpunkt des numerischen Versagens der Balkenstruktur in Abbildung 8.28 betrachtet. Es zeigt sich die Ausbildung eines diagonalen, kombinierten Schub-Zug-Risses. Im Experiment entsteht ein Schubriss

Abbildung 8.27: Experimentelles Versagen des Balkens OA3 nach *Vecchio & Shim* [111]

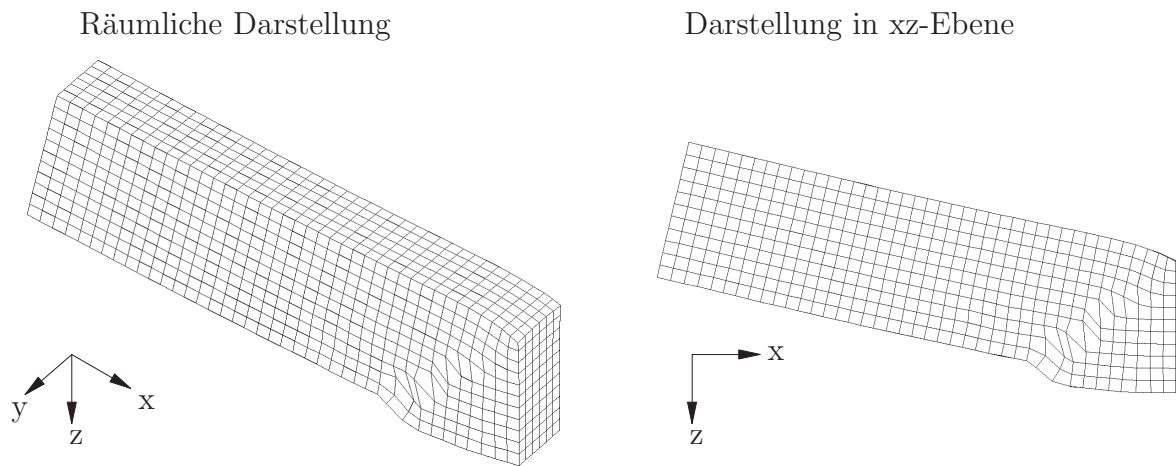


Abbildung 8.28: Deformationsfigur bei  $w = 8.0 \text{ mm}$ , linke Trägerhälfte (GD-Modell mit 50-facher Überhöhung)

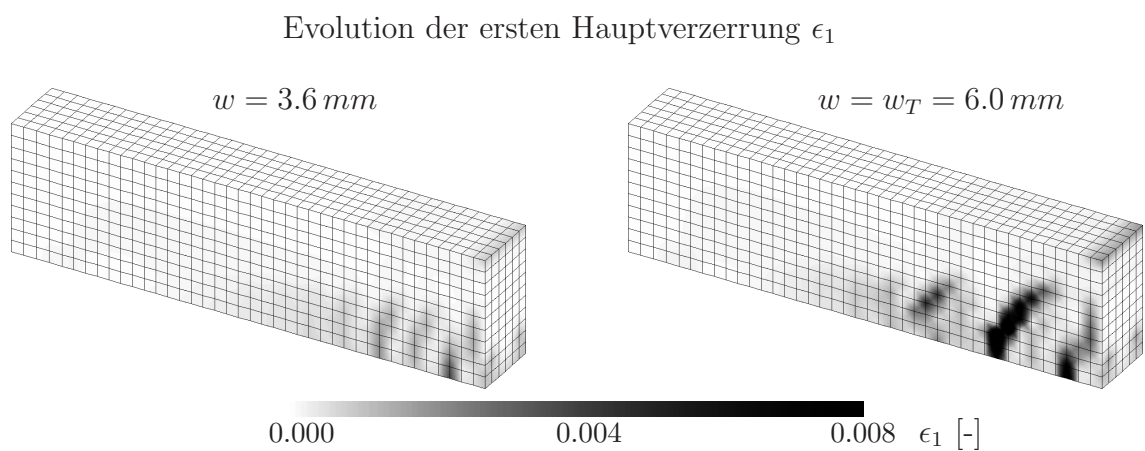
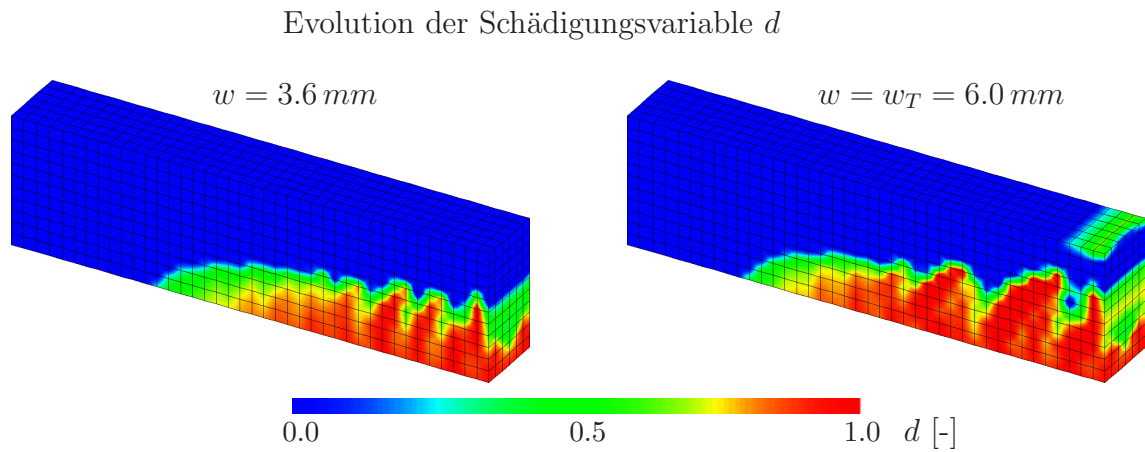


Abbildung 8.29: Evolution der Schädigung und der ersten Hauptverzerrung, linke Trägerhälfte (GD-Modell)

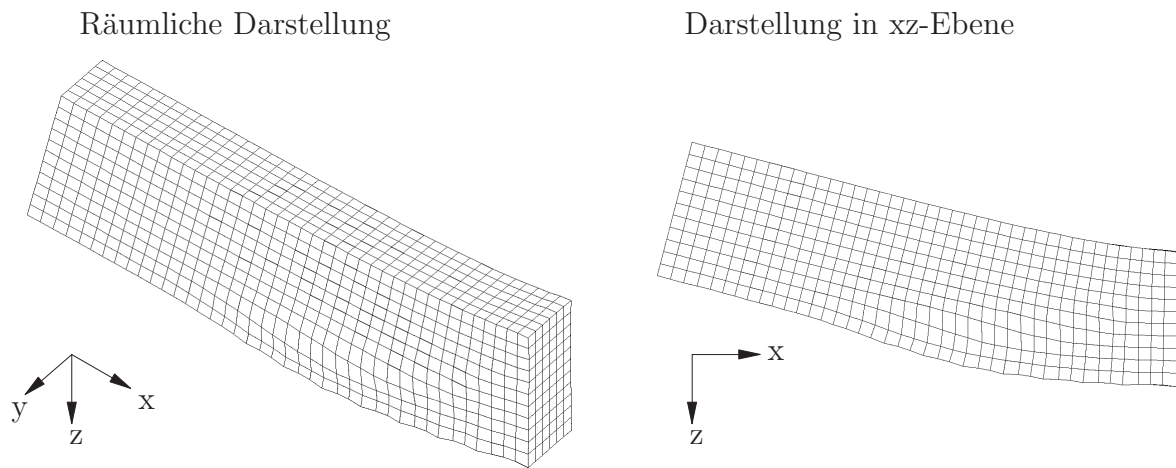


Abbildung 8.30: Deformationsfigur bei  $w = 8.0 \text{ mm}$ , linke Trägerhälfte (EP-Modell mit 50-facher Überhöhung)

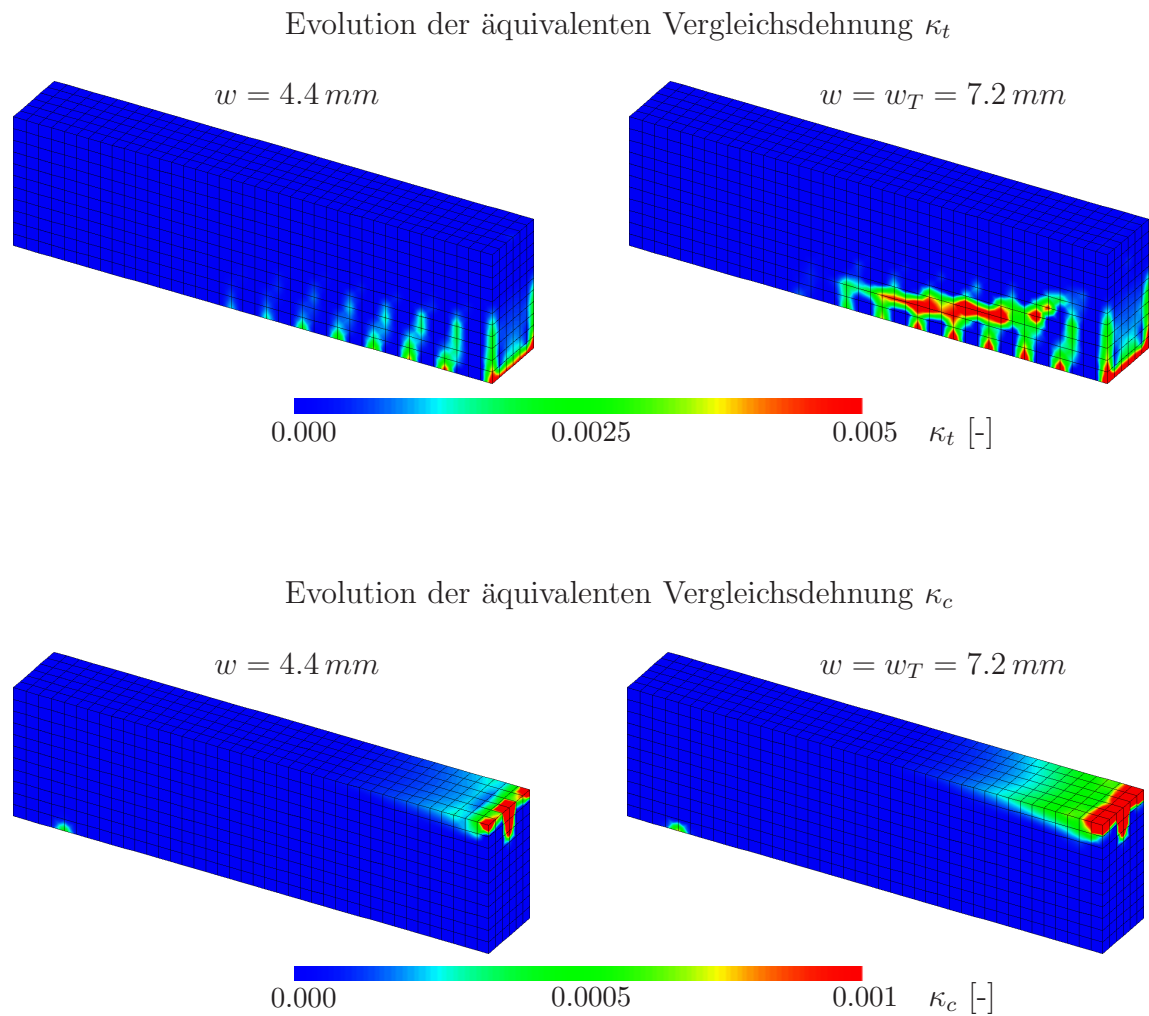


Abbildung 8.31: Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnungen, linke Trägerhälfte (EP-Modell)



entlang der unteren Bewehrungslage, so dass die Bewehrung nahezu keinen Widerstand gegen den Schubriss leisten kann. In der numerischen Simulation wirkt die Bewehrung aufgrund der diagonalen Ausrichtung des Risses anteilig gegen die Schubrissbildung. Dies führt gegenüber dem Experiment zu einem steiferen Tragverhalten in Abbildung 8.26. Aus der Evolution der Schädigung in Abbildung 8.29 wird bei einer Vertikalverschiebung von  $w = 3.6 \text{ mm}$  die primäre Bildung von Biegezugrissen ersichtlich. Allerdings weisen die stark geschädigten Bereiche bereits eine leichte Neigung auf, was auf eine beginnende Schubrissbildung schließen lässt. Bei Erreichen der Traglast bilden sich verstärkt diagonale Risse, außerdem ist eine Schädigung im Lasteinleitungsbereich vorhanden. Die Verteilungen der ersten Hauptverzerrungen bei den Durchbiegungen  $w = 3.6 \text{ mm}$  und  $w_T = 6.0 \text{ mm}$  bestätigen die Aussagen zur Evolution der Schädigungsverteilung. Analog zum Experiment findet bei der numerischen Simulation bis zum Versagen kein Fließen der Bewehrung statt. Das GD-Modell ist somit in der Lage, die experimentelle Traglast und das Versagen im Lasteinleitungsbereich wiederzugeben, während der experimentelle Schubriss entlang der Bewehrung nicht abgebildet werden kann.

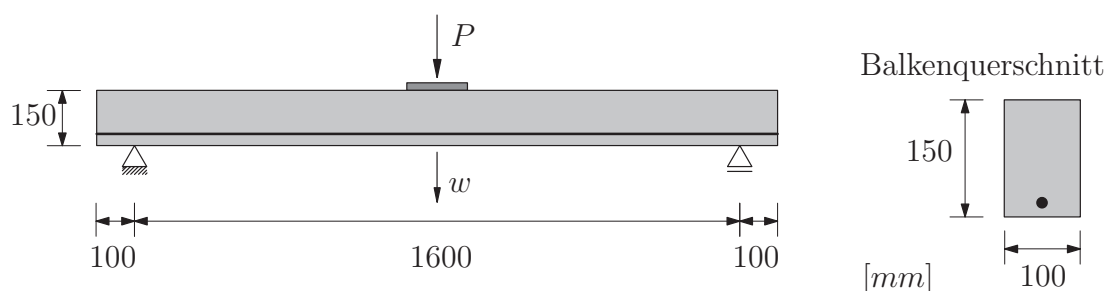
### Elastoplastisches Mehrflächenmodell

Zur Beurteilung der Versagensform aus der Berechnung mit dem EP-Modell wird vorab die Deformationsfigur zum Versagenszeitpunkt in Abbildung 8.30 betrachtet. Hier ist die Ausbildung eines Schubrisses auf Höhe der unteren Bewehrungslage in Richtung der Bewehrung deutlich zu erkennen. Zur Überprüfung des Rissverlaufs wird die Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_t$  in Abbildung 8.31 dargestellt. Bei einer Vertikalverschiebung von  $w = 4.4 \text{ mm}$  sind bereits Biegezugrisse vorhanden, die an der Spitze einen geringen Versatz als Anzeichen einer Schubrissbildung aufweisen. Eine weitere Laststeigerung bis zum Erreichen der Traglast führt auf die Ausbildung eines zusätzlichen Schubrisses entlang der Bewehrung. Durch die Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_c$  wird die Rissbildung im Druckbereich abgebildet. Der Lasteinleitungsbereich weist bei  $w = 4.4 \text{ mm}$  bereits eine Materialentfestigung auf, die sich mit Erreichen der Traglast über die gesamte Balkenbreite erstreckt. Wiederum tritt kein Fließen der Bewehrung auf. Insgesamt wird mit dem EP-Modell sowohl das quantitative als auch das qualitative Tragverhalten ausreichend genau abgebildet.

## 8.2.2 Stahlbetonbalken mit nachgiebigem Verbund

In diesem Beispiel werden experimentelle Untersuchungen an einem zugbewehrten Stahlbetonbalken nach *Karihaloo* [58] für eine numerische Simulation verwendet. Im Versuch wurden zwei Einfeldbalken betrachtet, von denen hier nur der schwächer bewehrte Balken von Interesse ist. Als Bewehrung wurde dabei ein Bewehrungsstab mit  $12 \text{ mm}$  Durchmesser verwendet. Aufgrund der einfachen Balkengeometrie ist dieses System in einigen Forschungsarbeiten als numerisches Beispiel zu finden, wobei eine Diskrepanz bei der Wahl der Materialparameter besteht. Während beispielsweise *Schütt* [99] die Materialdaten von *Karihaloo* [58] verwendet, nutzt *Suanno* [104] die experimentellen Ergebnisse zur Kalibrierung der Materialparameter des von ihm eingesetzten elastoplastischen *Cap-Modells*. Weiter führt *Menrath* [75] mit diesem Beispiel eine Parameterstudie der Zugbruchenergie  $G_t$  für die Bestimmung der Traglast durch. Im Rahmen dieser Arbeit werden für das elastoplastische Mehrflächenmodell die Materialdaten von *Menrath* [75] mit einer Bruchenergie von  $G_t = 0.20 \text{ N/mm}$  verwendet. Weiter wird der Verfestigungsmodul der Bewehrung

nach Schütt [99] zu  $H = 1.3 \text{ N/mm}^2$  angenommen. Die Schädigungsparameter  $\kappa_0, k$  werden aus  $f_{ctm}, f_{cm}$  berechnet und  $\alpha = 0.85$  sowie  $\beta = 50$  gewählt. Oben genannte Arbeiten basieren auf der Annahme eines perfekten Verbundes zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl. In dieser Arbeit soll die Auswirkung eines nachgiebigen Verbundes auf das Tragverhalten des Einfeldbalkens untersucht werden. Zu diesem Zweck werden für das GD-Modell sowie für das EP-Modell numerische Simulationen unter Annahme eines perfekten bzw. nachgiebigen Verbundes durchgeführt. Dabei werden beim nachgiebigen Verbund sowohl gute als auch schlechte Verbundbedingungen simuliert. Die notwendigen Verbundparameter können Tabelle 6.2 entnommen werden. Die Einleitung der Einzelkraft über eine Lasteinleitungsplatte wird durch eine verteilte Belastung berücksichtigt. Zudem soll eine flächige Verteilung der Auflagerkraft mit der Modellierung einer Lagerplatte im Auflagerbereich gewährleistet werden, siehe Menrath [75]. Zusammenfassend sind in Abbildung 8.32 alle erforderlichen System- und Materialdaten aufgeführt. Sämtliche Berechnungen werden unter Ausnutzung der Doppelsymmetrie am Viertelsystem durchgeführt. Für das verwendete FE-Netz werden zwei Lagen in Dickenrichtung für eine Hälfte mit jeweils 220 Elementen angeordnet. In Abbildung 8.33 ist die Diskretisierung der linken Trägerhälfte dargestellt. Unter Annahme des perfekten Verbundes werden die berechneten Last-Verschiebungskurven der experimentellen Kurve und anderen numerischen Lösungen in Abbildung 8.34 gegenübergestellt. Menrath [75] führte Berechnungen mit zweidimensionalen Scheibenelementen und einer verschmierten Bewehrungsmodellie-



Beton:

$$\begin{array}{llll}
 E = 30000 \text{ N/mm}^2 & \nu = 0.2 & & \\
 f_{ctm} = 3.4 \text{ N/mm}^2 & f_{cm} = 46.0 \text{ N/mm}^2 & G_t = 0.20 \text{ N/mm} & G_c = 50.0 \text{ N/mm} \\
 \alpha = 0.85 & \beta = 50 & \kappa_0 = 0.000113 & k = 13.6 \\
 \sqrt{c} = 25 \text{ mm} & & & 
 \end{array}$$

Bewehrung:

$$E_s = 200000 \text{ N/mm}^2 \quad A_s = 113 \text{ mm}^2 \quad \sigma_y^s = 463 \text{ N/mm}^2 \quad H = 1.3 \text{ N/mm}^2$$

Gute Verbundbedingungen:

$$\tau_{max} = 12.3 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_f = 1.9 \text{ N/mm}^2 \quad s_1 = s_2 = 0.6 \text{ mm} \quad s_3 = 1.0 \text{ mm} \quad \bar{\alpha} = 0.4$$

Schlechte Verbundbedingungen:

$$\tau_{max} = 6.2 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_f = 0.9 \text{ N/mm}^2 \quad s_1 = s_2 = 0.6 \text{ mm} \quad s_3 = 2.5 \text{ mm} \quad \bar{\alpha} = 0.4$$

Abbildung 8.32: System- und Materialdaten



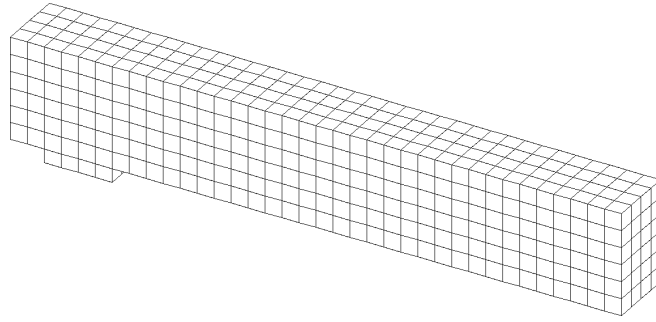


Abbildung 8.33: Diskretisierung der linken Trägerhälfte mit 4x220 Elementen

rung durch, während *Suanno* [104] eine Diskretisierung mit Volumenelementen und eine eingebettete Bewehrungsmodellierung wählte. Die Berechnung mit dem GD-Modell liefert eine Traglast von 95%, mit dem EP-Modell werden 89% der Versuchstraglast erreicht. Für die Bruchenergie  $G_t = 0.20 \text{ N/mm}$  liegt die Traglast mit dem EP-Modell im Vergleich zum Ergebnis von *Menrath* [75] wesentlich näher an der Versuchstraglast. Dies kann auf die hier verwendete eingebettete Bewehrungsmodellierung gegenüber der verschmierten Bewehrungsmodellierung bei *Menrath* [75] zurückgeführt werden. Das im Versuch festgestellte Versagen infolge Fließens der Bewehrung tritt auch in den numerischen Simulationen auf. Da die Dübelwirkung der Bewehrung in der Bewehrungsmodellierung nicht berücksichtigt wird, ergibt sich beim Aufreißen des Zugbereiches eine etwas geringere Balkensteifigkeit als im Versuch. Das Abweichen der berechneten Kurven von der experimentellen Kurve im Vorbruchbereich spiegelt diesen Sachverhalt wieder. Insgesamt wird das quantitative Tragverhalten ausreichend mit beiden verwendeten Modellen abgebildet.

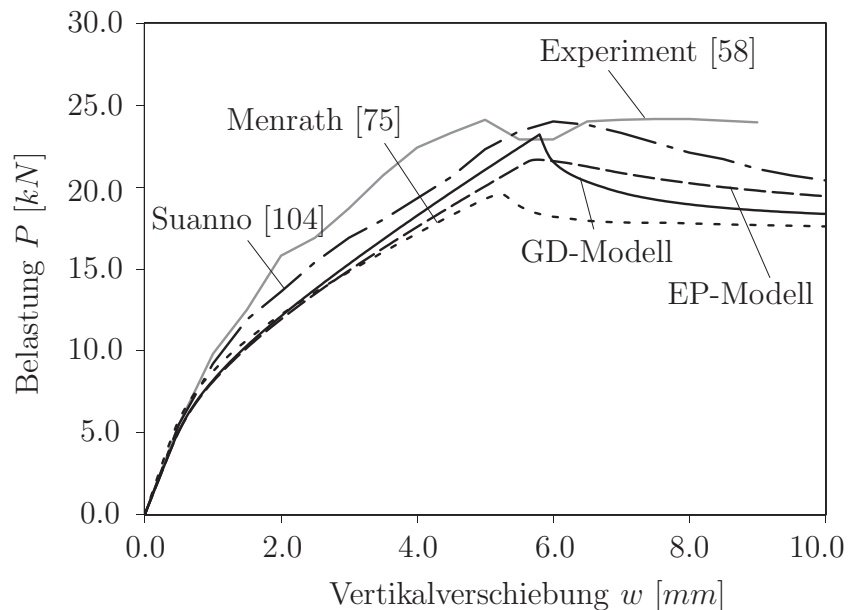


Abbildung 8.34: Last-Verschiebungskurven für perfekten Verbund

### Gradientenerweitertes Schädigungsmodell mit nachgiebigem Verbund

Zur Untersuchung der Verbundwirkung werden neben einer Simulation mit perfektem Verbund Berechnungen mit nachgiebigem Verbund durchgeführt. Durch geeignete Wahl der Verbundparameter in Abbildung 8.32 können gute bzw. schlechte Verbundbedingungen in der numerischen Simulation berücksichtigt werden, vergleiche Abschnitt 6.4.2. Perfekter Verbund ist durch eine kontinuierliche Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung im gerissenen sowie im ungerissenen Bereich charakterisiert. Bei nachgiebigem Verbund erfolgt die Kraftübertragung im Rissquerschnitt allein durch den Bewehrungsstab. Zwischen den Rissen wird die Kraft durch die Verbundspannung entlang der Oberfläche des Bewehrungsstabes anteilig vom Beton getragen. Zur Gewährleistung der vollen Kraftübertragung ist bei gegebener maximaler Verbundspannung ein ausreichender Abstand zwischen entstehenden Rissen erforderlich. Da bei nachgiebigem Verbund eine Relativverschiebung zwischen dem Beton und der Bewehrung auftritt, ergeben sich gegenüber dem perfekten Verbund größere Verformungen, vergleiche Abbildung 8.35. Bis zur Bildung von Biegezugrissen sind die Last-Verschiebungskurven für perfekten und nachgiebigen Verbund gleich. Danach führt der nachgiebige Verbund zu einer Steifigkeitsreduktion. Außerdem wird die Traglast durch den nachgiebigen Verbund etwas reduziert. Nach dem Stahlfließen leistet die Bewehrung nahezu keinen Steifigkeitsanteil mehr, so dass sich die Kurven gegen Ende der Belastungsgeschichte wieder annähern. Das qualitative Tragverhalten lässt sich durch die Schädigungsverteilung beim Erreichen der Traglast in Abbildung 8.36 darstellen. Für perfekten Verbund weist der vollständig geschädigte Bereich ausgehend von der Balkenmitte einen nahezu glatten Verlauf auf, der im Viertelpunkt endet. Bereits bei guten Verbundbedingungen ist kurz nach der Balkenmitte eine Abstufung im Verlauf des vollständig geschädigten Bereichs erkennbar, die bei schlechten Verbundbedingungen noch ausgeprägter ist. Der plötzliche Abfall in der Schädigungsverteilung deutet die Diskontinuität in der Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung infolge nachgiebigen Ver-

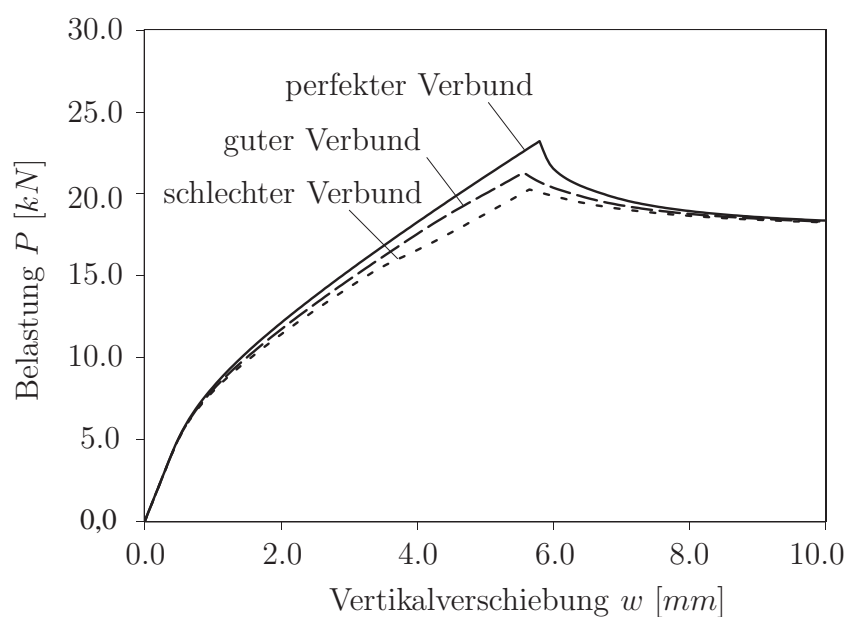


Abbildung 8.35: Last-Verschiebungskurven mit unterschiedlichen Verbundbedingungen (GD-Modell)

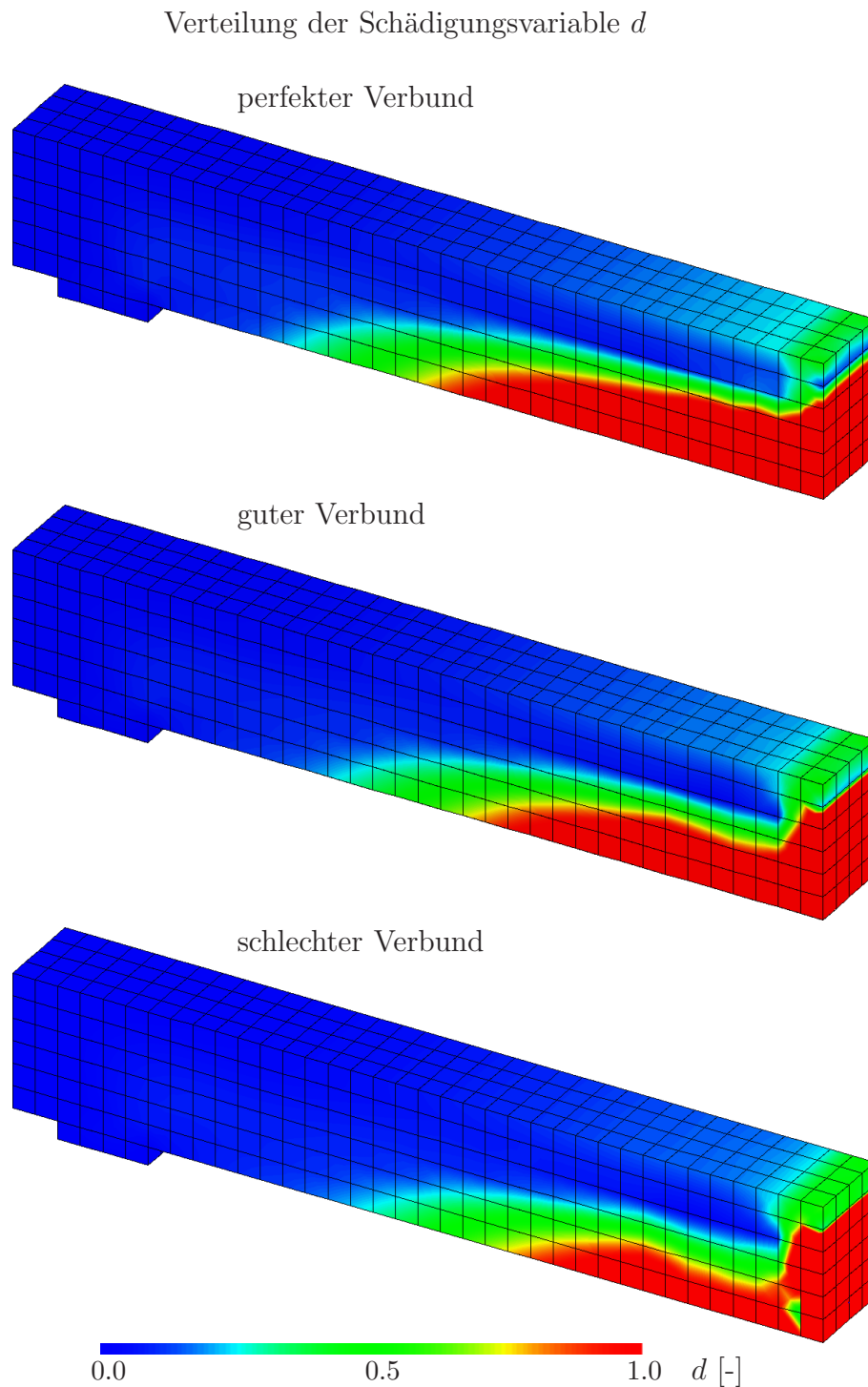


Abbildung 8.36: Verteilung der Schädigung bei Erreichen der Traglast, linke Trägerhälfte (GD-Modell)

bunds an. Anhand der Schädigungsverteilung im Mittelquerschnitt kann die Abminderung der Traglast bei nachgiebigem Verbund erklärt werden: mit abnehmender Verbundspannung erstreckt sich der geschädigte Bereich zunehmend über den gesamten Querschnitt, so dass die ungeschädigte Druckzone kleiner wird. Insgesamt wird die Tragfähigkeit des Stahlbetonbalkens durch die Wirkung des nachgiebigen Verbunds vermindert, indem größere

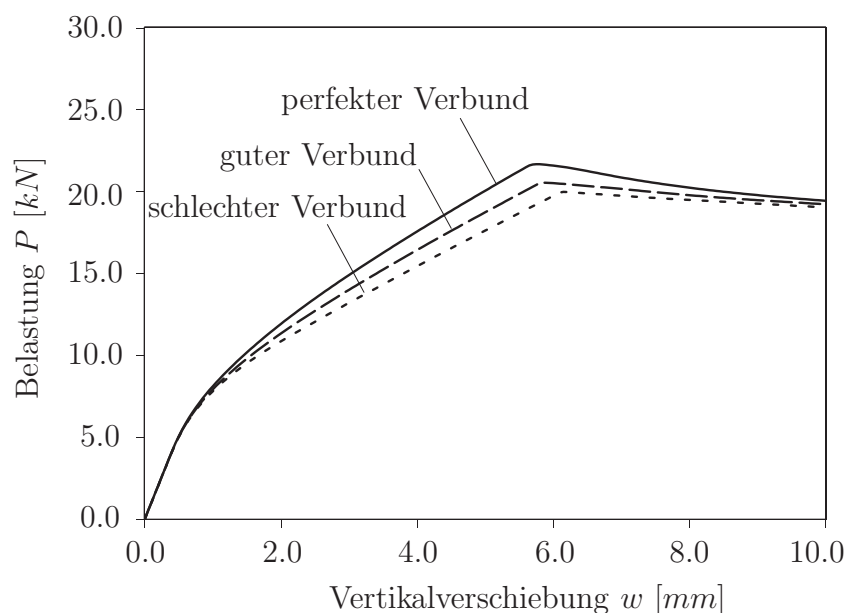


Abbildung 8.37: Last-Verschiebungskurven mit unterschiedlichen Verbundbedingungen (EP-Modell)

Verformungen in Verbindung mit einer reduzierten Traglast auftreten.

### Elastoplastisches Mehrflächenmodell mit nachgiebigem Verbund

Analog zum GD-Modell werden für das EP-Modell Berechnungen mit nachgiebigem Verbund durchgeführt. Abbildung 8.37 zeigt erneut den Steifigkeitsabfall bei nachgiebigem Verbund nach der Bildung der ersten Zugrisse, wobei sich geringere Traglasten im Vergleich zum perfekten Verbund ergeben. Nach dem Fließen findet ein Annähern der einzelnen Kurven statt. Zur qualitativen Beurteilung des Tragvermögens mit nachgiebigem Verbund wird die Verteilung der äquivalenten Vergleichsdehnung im Zugbereich  $\kappa_t$  aus Abbildung 8.38 betrachtet. Für perfekten Verbund ergibt sich wiederum eine glatte Verteilung von  $\kappa_t$ . Bereits bei guten Verbundbedingungen ist die Entstehung mehrerer Bereiche konzentrierter Materialentfestigung zu erkennen, welche als Einzelrisse gedeutet werden können. Bei schlechten Verbundbedingungen wird der Abstand zwischen den geschädigten Bereichen und somit der Rissabstand zunehmend größer, wodurch größere Deformationen entstehen. Weiter ist eine Ausbreitung der geschädigten Zone im Mittelquerschnitt analog zum GD-Modell vorhanden, die zur Reduktion der Traglast führt.

### 8.2.3 Stahlbetonstütze

Zur Untersuchung der Schubtragfähigkeit eines Brückenpfeilers im Erdbebenfall wurden 1993 an der University of California von San Diego Versuche an Modellstützen aus Stahlbeton mit Längsbewehrung  $A_{sl}$  und Bügelbewehrung  $A_{st}$  im Maßstab 1 : 3 durchgeführt. Dabei sollte eine zyklische Horizontalverschiebung des Stützenkopfes kombiniert mit einer konstanten vertikalen Druckkraft die Beanspruchung im Erdbebenfall simulieren. Im Experiment wurde die Längsbewehrung am Stützenfuß im Fundament und am Stützenkopf in der Kopfplatte verankert. Kang *et al.* [57] führten numerische Simulationen zu

Verteilung der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_t$

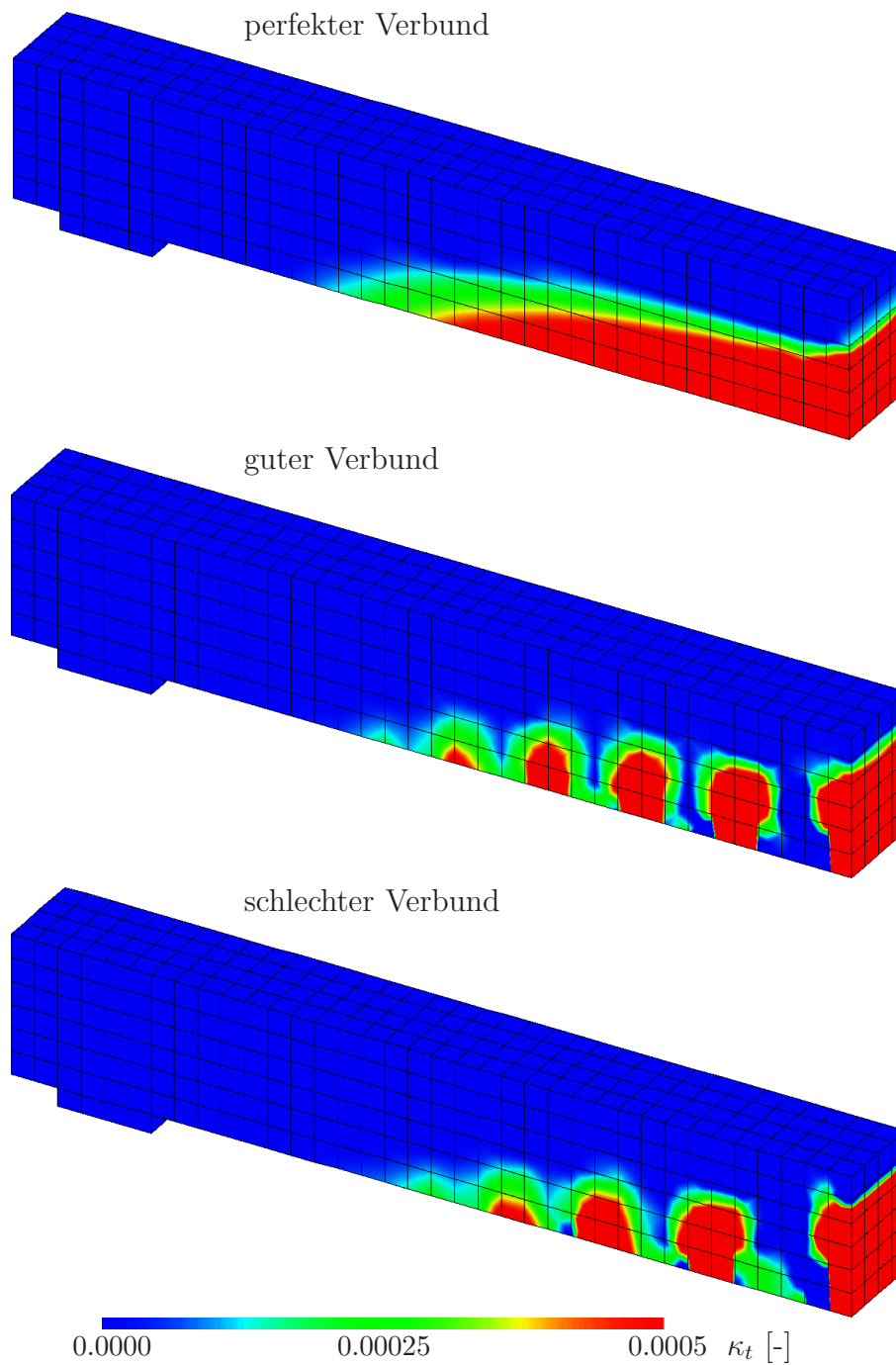


Abbildung 8.38: Verteilung der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_t$  bei Erreichen der Traglast, linke Trägerhälfte (EP-Modell)

den Versuchen unter Annahme einer monoton steigenden Horizontalverschiebung kombiniert mit einer konstanten Normalkraftbelastung der Stahlbetonstütze durch. Für den Beton wurde dabei ein triaxiales Einflächenmodell mit Berücksichtigung der dritten Spannungsinvariante eingesetzt. In dieser Arbeit wird die Stahlbetonstütze für unterschiedliche Beanspruchungen mit dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell und einer eingebet-

teten Bewehrung numerisch untersucht. Die erforderlichen System- und Materialdaten sowie die verwendete Finite-Element-Diskretisierung sind in Abbildung 8.39 aufgeführt, wobei die Schädigungsparameter  $\kappa_0, k$  aus den Betonparametern von Kang *et al.* [57] berechnet wurden, während  $\alpha = 0.96$  und  $\beta = 150$  gewählt wurden. Mit dem Ansatz von Symmetrierandbedingungen ist es ausreichend nur die Hälfte des Systems in Dickenrichtung zu diskretisieren. Für das FE-Netz werden zwei Lagen in Breitenrichtung mit jeweils 400 Elementen verwendet. Die Bewehrungsanordnung wird von Kang *et al.* [57] übernommen: abweichend von der realen Stahlbetonstütze wird in der numerischen Simulation nur der umschnürte Betonkern erfasst.

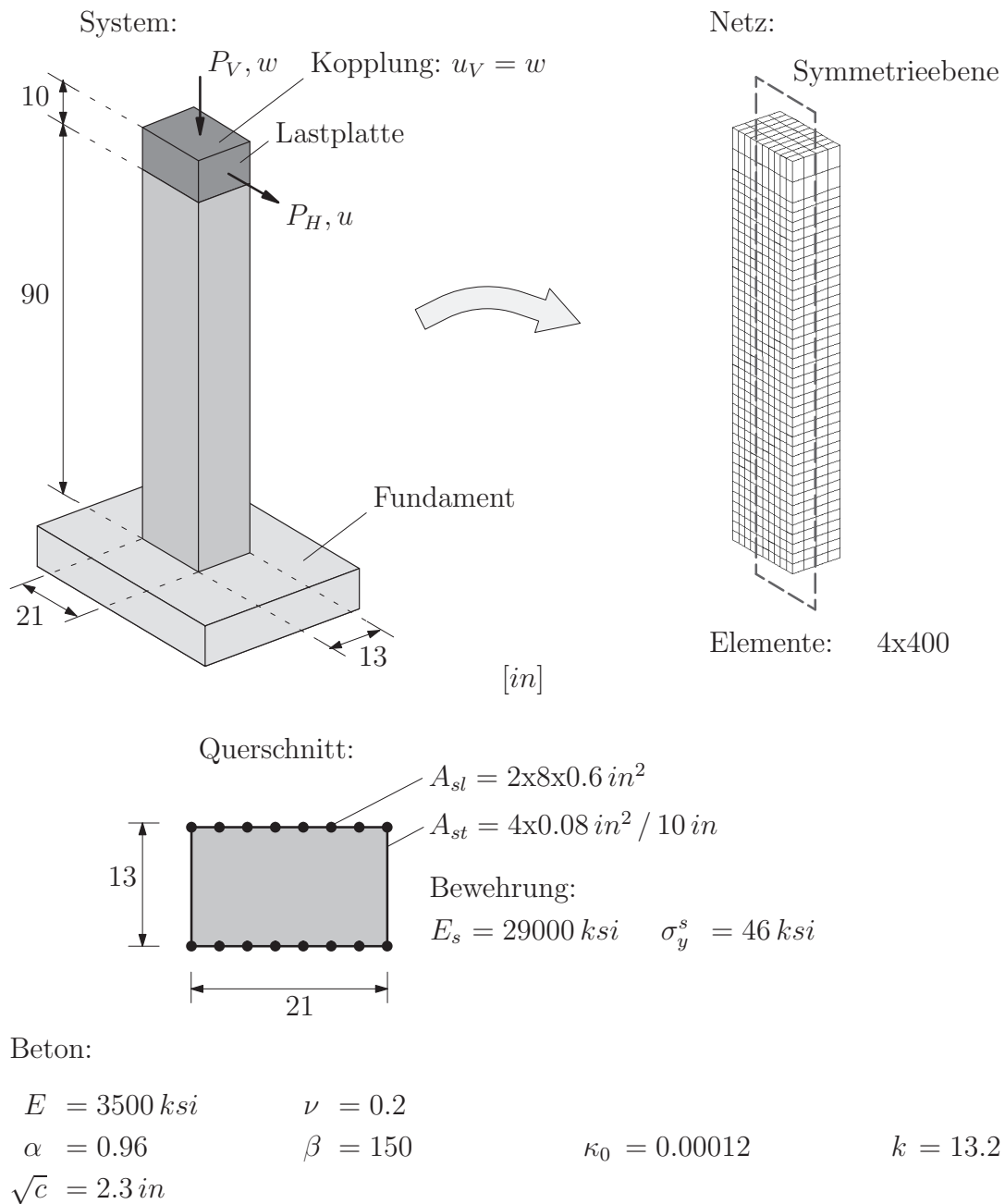


Abbildung 8.39: System- und Materialdaten

### Axiale Druckbeanspruchung

Zur Untersuchung der Wirkung der Bewehrung bei reiner Normalkraftbeanspruchung wird eine numerische Simulation mit bzw. ohne Berücksichtigung der Bewehrung durchgeführt. Abbildung 8.40 zeigt ein Ansteigen der Traglast und der Duktilität der Betonstütze durch die Bewehrung. Die Traglasten aus den hier durchgeführten Berechnungen liegen im Bereich der Traglasten nach *Kang et al.* [57], sie werden jedoch früher als bei Kang erreicht. Weiter weisen die Kurven nach *Kang et al.* [57] beim Erreichen der Traglast einen glatten Verlauf auf, während bei den Berechnungen mit dem GD-Modell ein Abknicken der Last-Verschiebungskurven zu beobachten ist. Zur qualitativen Beurteilung der Ergebnisse mit dem GD-Modell wird die Deformationsfigur bei einer Vertikalverschiebung  $w = 0.9 \text{ in}$  betrachtet. Abbildung 8.41 zeigt ein sprödes, lokalisiertes Versagen entgegen den Aussagen von Kang, der ein diffuses Versagen infolge axialer Spaltrisse angibt. Aufgrund der steifen Kopfplatte tritt die Lokalisierung nicht auf halber Stützhöhe, sondern in der oberen Stützhälfte auf. Die Lokalisierung kann auf die exponentielle Schädigungsfunktion zurückgeführt werden, die im Zug- und im Druckbereich einen Knick in der Spannungs-Dehnungsbeziehung beim Erreichen der Maximalspannung zur Folge hat, vergleiche Abbildung 3.2. Daraus ergibt sich ebenfalls ein Knick im Verlauf der Verzerrungen. In der experimentellen Spannungs-Dehnungskurve des einaxialen Druckversuch liegt dagegen ein glatter Übergang beim Erreichen der Maximalspannung vor, siehe Abbildung 4.1. Trotz der Abweichung der numerischen Versagensform vom realen Versagen ist die Lokalisierung bei der Stahlbetonstütze erwartungsgemäß weniger ausgeprägt als bei der Betonstütze. Dieser Sachverhalt ist vorrangig auf die Umschnürungswirkung der transversalen Bewehrung zurückzuführen.

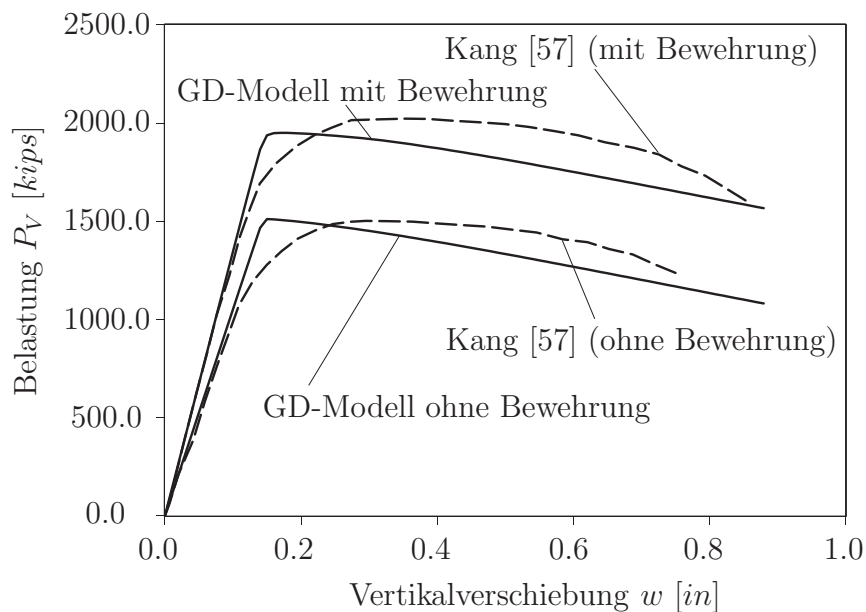


Abbildung 8.40: Last-Verschiebungskurven infolge Vertikalbelastung



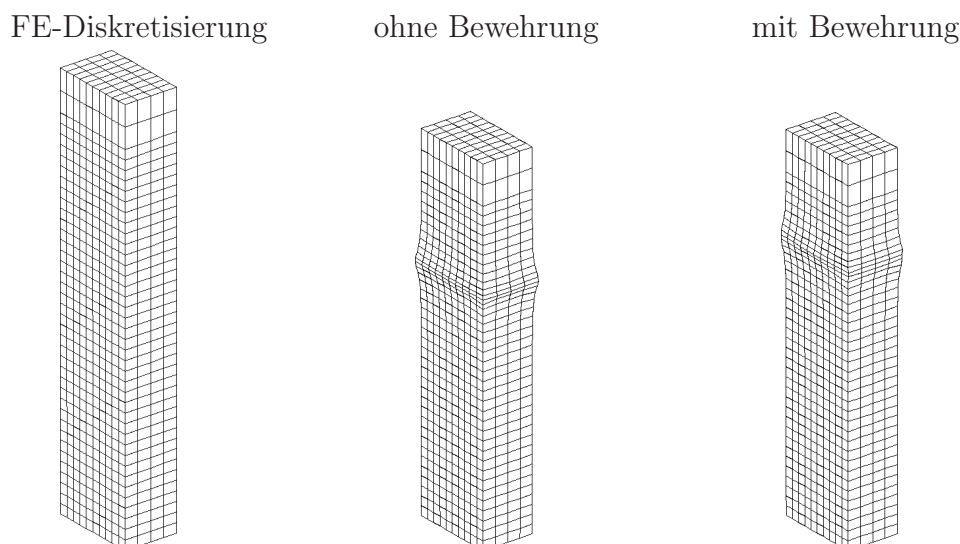


Abbildung 8.41: Deformationsfigur infolge Vertikalbelastung bei  $w = 0.9 \text{ in}$  (GD-Modell mit 10-facher Überhöhung)

### Kombination aus axialer Druckbeanspruchung und horizontaler Verschiebung

Die Stahlbetonstütze unter Erdbebenbeanspruchung wird in der numerischen Simulation nach *Kang et al.* [57] als quasi-statisches Randwertproblem behandelt. Dieser vereinfachte Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit übernommen. Die Belastung besteht dabei aus einer monoton ansteigenden horizontalen Auslenkung  $u$  und einer konstanten Normalkraft  $P_V = 113 \text{ kips}$ . Aufgrund der Einspannung der Modellstütze in das Fundament bzw. in der Kopfplatte, werden die Rotationen des Stützenfußes und des Stützenkopfes unterdrückt. Zu diesem Zweck sind die Verschiebungen am Stützenfuß vollständig gehalten und die Vertikalverschiebungen am oberen Ende der Stütze gekoppelt. Die Punkte der experimentellen Last-Verschiebungskurve ergeben sich aus der Maximalkraft der einzelnen Belastungszyklen und der zugehörigen maximalen Auslenkung. Sie ist zusammen mit der Kurve nach *Kang et al.* [57] und den Ergebnissen der hier durchgeführten Berechnungen in Abbildung 8.42 dargestellt. Im Experiment ergibt sich eine Traglast von  $120 \text{ kips}$ , die Berechnung nach *Kang et al.* [57] liefert eine Maximallast von  $125 \text{ kips}$ . In *Kang et al.* [57] ist eine Diskrepanz zwischen den dargestellten Last-Verschiebungskurven und den im Text aufgeführten Punkten der Last-Verschiebungskurven beim Fließen der Bewehrung und beim Erreichen der Traglast zu erkennen, die von den Autoren allerdings nicht erwähnt wird. Die in dieser Arbeit durchgeführte numerische Simulation mit dem GD-Modell ergibt eine Traglast von  $111 \text{ kips}$  und liegt somit im Bereich der Versuchstraglast. Bei Vernachlässigung der konstanten Vertikalkraft ergibt sich eine verminderte Traglast: infolge der günstigen Wirkung der konstanten Normalkraft durch Überdrückung des Querschnitts wird die Betonzugfestigkeit bei einer größeren Horizontallast erreicht als bei reiner Horizontalbeanspruchung. Das Fließen der Längsbewehrung tritt im Versuch bei einer Horizontalkraft  $P_H = 90 \text{ kips}$  und einer horizontalen Auslenkung  $u = 0.3 \text{ in}$  auf. Bei *Kang et al.* [57] wird die Fließspannung der Bewehrung mit  $P_H = 97 \text{ kips}$  und  $u = 0.2 \text{ in}$  erreicht, während die hier durchgeführte Berechnung zum Eintreten des Stahlfließens bei  $P_H = 98.5 \text{ kips}$  und  $u = 0.28 \text{ in}$  führt. Die Abweichung der numerischen Simulation mit dem GD-Modell vom Versuch ist somit relativ gering. Aus der Deformationsfigur bei un-



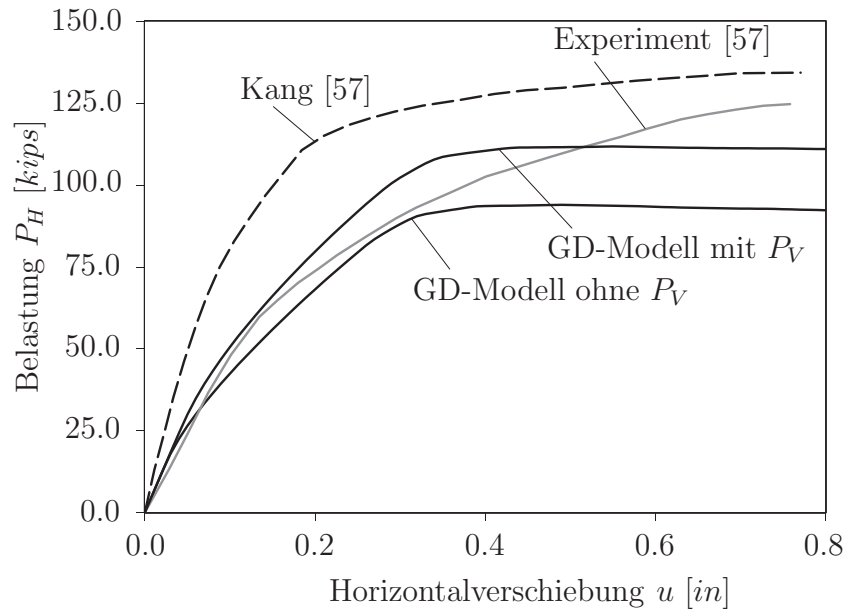


Abbildung 8.42: Last-Verschiebungskurven infolge Vertikal- und Horizontalbelastung

terschiedlichen Kopfauslenkungen in Abbildung 8.43 ist die kombinierte Beanspruchung infolge Biegung und Schub zu erkennen. Zu Belastungsbeginn liegt eine Biegebeanspruchung vor, die mit zunehmender Kopfauslenkung in eine schubdominante Beanspruchung übergeht. Dabei findet am Stützenkopf und am Stützenfuß ein lokales Versagen statt. Durch die Einspannung an den Stützenenden entsteht eine zur Stützenmitte antisymmetrische Deformationsfigur. Zur Untersuchung der Rissbildung wird die Verteilung der Schädigung  $d$  und der ersten Hauptverzerrung  $\epsilon_1$  in Abbildung 8.44 am Belastungsende betrachtet. Die Schädigungsverteilung lässt auf ein kombiniertes Schub-Zug-Versagen schließen. Aus der Verteilung der ersten Hauptverzerrung wird die Entstehung von Zug- und Schubrisen am Stützenkopf und an der Einspannung ersichtlich. Das Tragverhalten wird somit ausreichend mit dem GD-Modell und eingebetteter Bewehrung wiedergegeben.

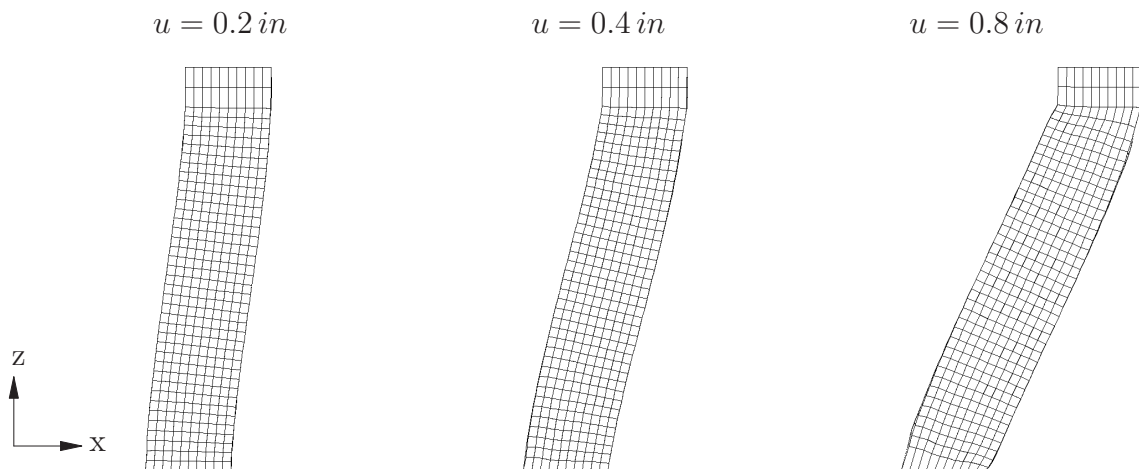


Abbildung 8.43: Deformationsfigur infolge Vertikal- und Horizontalbelastung (GD-Modell mit 50-facher Überhöhung)

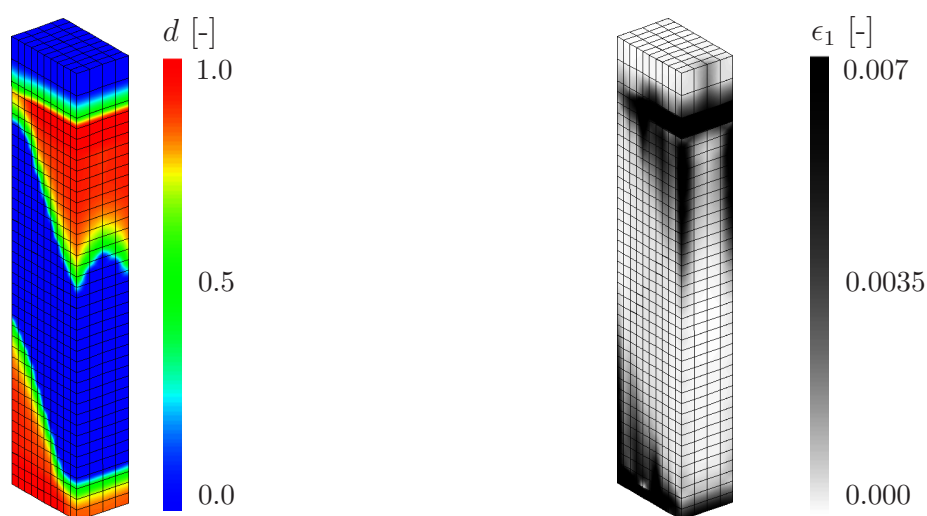
Verteilung der Schädigungsvariable  $d$ :Verteilung der ersten Hauptverzerrung  $\epsilon_1$ :

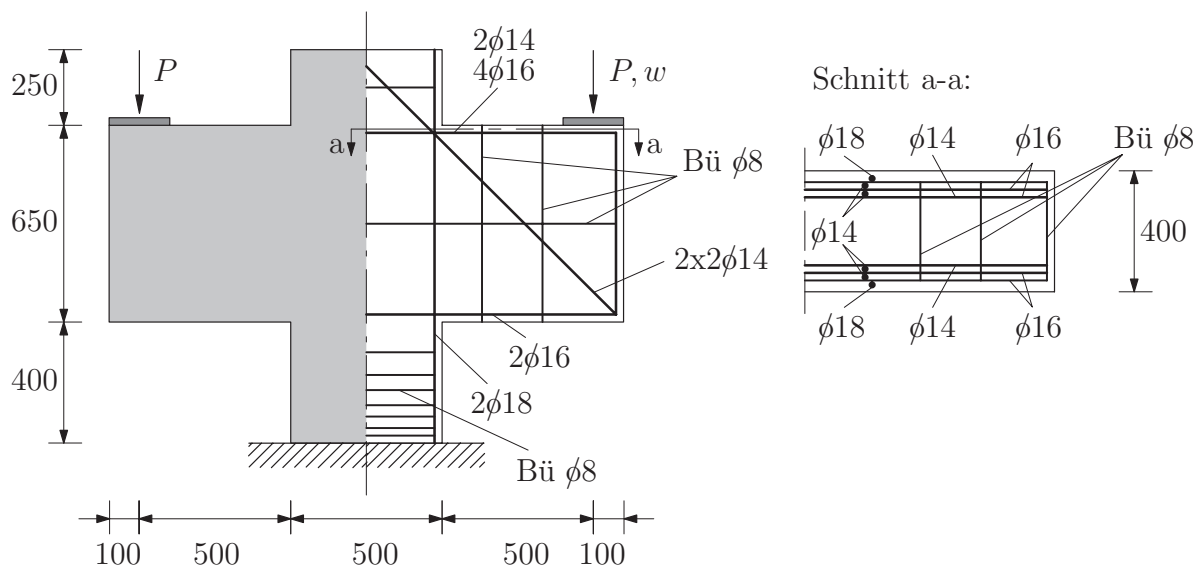
Abbildung 8.44: Verteilung der Schädigung und der ersten Hauptverzerrung infolge Vertikal- und Horizontalbelastung (GD-Modell)

### 8.2.4 Stahlbetonkonsole

Als Beispiel für einen allgemeinen Spannungszustand wird das Tragverhalten einer Stützenskonsole aus Stahlbeton numerisch untersucht. Ende der 60er Jahre führten *Mehmel & Freitag* [74] Versuche an Stahlbetonkonsolen durch, um drei Bemessungsverfahren zur Schubbemessung eines kurzen Kragarms hinsichtlich ihrer Sicherheit und Wirtschaftlichkeit zu überprüfen. Insgesamt wurden 12 Versuchskörper ausgewählt: je drei für Rechteck- und Trapezkonsolen sowie für direkte und mittelbare Lasteinleitung. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Versuchsanordnung nach *Mehmel & Becker* [73] für eine Rechteckkonsole mit direktem Lastangriff verwendet. Die Konsolengeometrie sowie die Belastung sind in Abbildung 8.45 dargestellt. Im Versuch erfolgte die Einleitung der Einzelkraft an der Konsolenoberseite über Stahlplatten. Aus versuchstechnischen Gründen wurde der Versuchskörper um  $180^\circ$  gedreht, so dass die Konsolen von unten her belastet wurden. Die Bewehrungsanordnung nach *Mehmel & Becker* [73] ist in leicht vereinfachter Form in Abbildung 8.45 angegeben, wobei Einzelstäbe, Stabbügel und Schlaufen mit unterschiedlichem Stabdurchmesser eingesetzt wurden. In der vorliegenden Arbeit wird die Bewehrung mittels einer eingebetteten Modellierung abgebildet. Nachdem *Mehmel & Freitag* [74] nur eine Versuchstraglast ohne entsprechende Last-Verschiebungskurve angeben, werden als Referenzlösung verschiedene Finite Element Analysen aus der Literatur herangezogen. *Meschke* [76], *Eberhardsteiner* [27] und *Eberhardsteiner et al.* [29] führten zum Vergleich unterschiedlicher bekannter nichtlinearelastischer und elastoplastischer Werkstoffmodelle für Beton Analysen mit dreidimensionalen Finiten Elementen für räumliche Spannungszustände, unter anderem die vorgestellte Stahlbetonkonsole, durch. Die Ergebnisse dieser Analysen der Stahlbetonkonsole sind in *Eberhardsteiner et al.* [28] sowie *Hofstetter & Mang* [48] zusammengefasst. Exemplarisch wird ein linearelastisches Bruchmodell aus *Hofstetter & Mang* [48] als Referenzlösung in dieser Arbeit verwendet. *Suanno* [104] führt

Berechnungen mit kombinierten Stab- und Rebarelementen durch basierend auf einem elastoplastischen Cap-Modell mit skalarer Schädigung. *Tikhomirov & Stein* [106] verwenden ein mesoskopisches, anisotropes Betonmodell mit einer Beschreibung des Bewehrungsverbands nach der Microplane Theorie. Allen numerischen Berechnungen gemein ist die dreidimensionale Finite Element Diskretisierung, da Berechnungen mit Scheiben- oder Schalenelementen zu einer Unterschätzung der Traglast führen, vergleiche beispielsweise *Krejčí & Mang* [62]. Aufgrund der Doppelsymmetrie der Konsole ist es ausreichend, nur ein Viertel des Systems mit Finiten Elementen zu diskretisieren. Für zwei unterschiedliche FE-Netze werden in Dickenrichtung vier Lagen mit je 244 bzw. 920 Elementen pro Lage verwendet. Abbildung 8.46 zeigt die beiden Netzgeometrien der rechten Konsolenhälfte. Als Materialmodell für den Beton werden das GD-Modell und das EP-Modell verwendet. Die erforderlichen Materialdaten für das EP-Modell und für die Bewehrung werden von *Schütt* [99] übernommen, während für das GD-Modell die Schädigungsparameter  $\alpha = 0.90$  und  $\beta = 50$  gewählt werden, siehe Abbildung 8.45.

Abbildung 8.47 zeigt die gute Approximation der Versuchstraglast  $P_T = 933 \text{ kN}$  mit dem GD-Modell für die Netze I und II (GD I, GD II) und dem EP-Modell für die Netze I und II (EP I, EP II). Beim EP-Modell führt eine Netzverdichtung zum Anstieg der Traglast; damit ist die Regularisierung durch einen netzbezogenen Entfestigungsmodul in diesem



Beton:

$$\begin{aligned}
 E &= 21870 \text{ N/mm}^2 & \nu &= 0.2 \\
 f_{ctm} &= 2.3 \text{ N/mm}^2 & f_{cm} &= 22.6 \text{ N/mm}^2 & G_t &= 0.43 \text{ N/mm} & G_c &= 50.0 \text{ N/mm} \\
 \alpha &= 0.90 & \beta &= 50 & \kappa_0 &= 0.00011 & k &= 10.0 \\
 \sqrt{c} &= 25 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Bewehrung:

$$E_s = 206000 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_y^s = 430 \text{ N/mm}^2 \quad H = 1.3 \text{ N/mm}^2$$

Abbildung 8.45: System- und Materialdaten

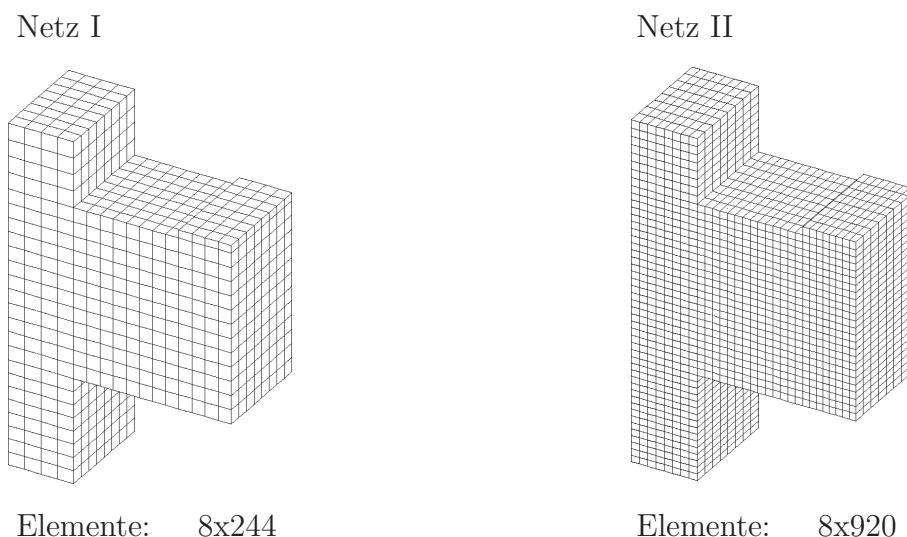


Abbildung 8.46: Diskretisierung der rechten Konsolenhälfte mit unterschiedlichen FE-Netzen

Fall nicht ausreichend. Mit Ausnahme der Kurven von *Tikhomirov & Stein* [106] und *Hofstetter & Mang* [48] stellt sich nach Erreichen der Traglast bei allen numerischen Simulationen eine Reduktion der Konsolensteifigkeit mit zunehmender Vertikalverschiebung ein. Bei *Tikhomirov & Stein* [106] ist zwar eine Steifigkeitsreduktion jedoch keine eindeutige Maximallast erkennbar. Dagegen tritt bei *Hofstetter & Mang* [48] ein annähernd idealplastisches Fließen der Konsole auf. Im Vorbruchbereich weist die Kurve von *Suanno* [104] bis zum Erreichen der Traglast einen nahezu linearen Verlauf auf, während die restlichen Kurven wesentlich früher eine Steifigkeitsreduktion erfahren. Das duktile Tragverhalten infolge der Bewehrung wird in allen Kurven abgebildet.

Im Weiteren werden die Versagensmechanismen aus den hier durchgeführten numerischen

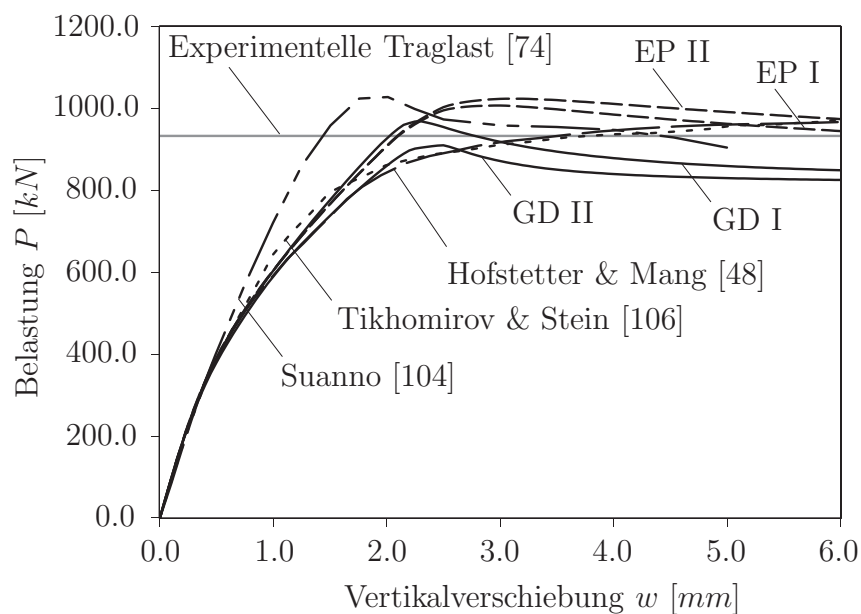


Abbildung 8.47: Last-Verschiebungskurven

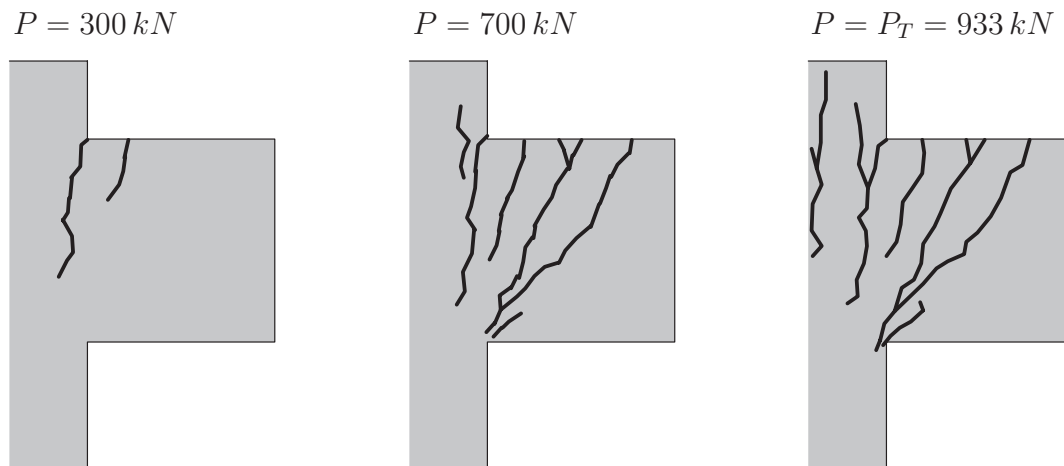
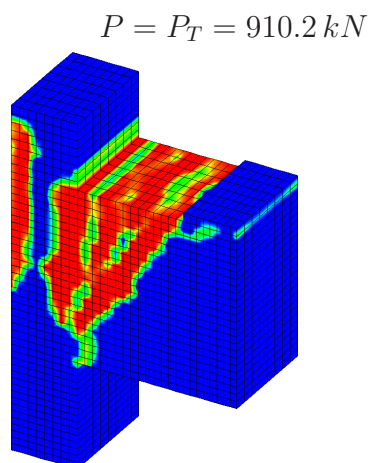
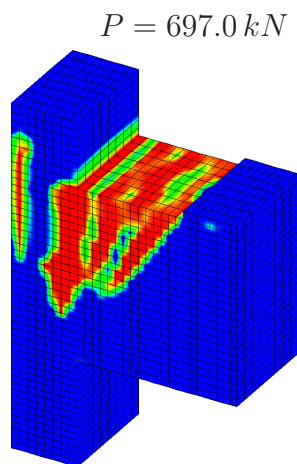
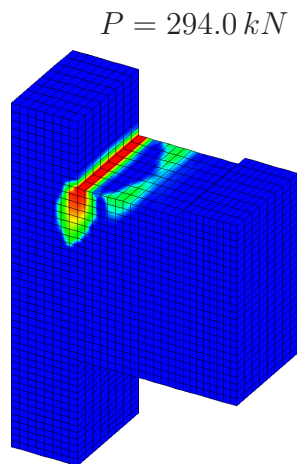


Abbildung 8.48: Experimentelle Rissverläufe, rechte Konsolenhälfte

Simulationen überprüft. Dazu ist in Abbildung 8.48 die experimentelle Rissverteilung zu drei unterschiedlichen Lastzuständen abgebildet. Bei einer Last von  $P = 300 \text{ kN}$  wurden am oberen Anschlussbereich der Konsole an die Stütze erste Zugrisse beobachtet. Eine Laststeigerung auf  $P = 700 \text{ kN}$  führte zum Entstehen eines diagonalen Risses ausgehend vom Lasteinleitungspunkt zur lastabgewandten einspringenden Ecke infolge der Spaltzugkraft in den diagonalen Bewehrungsstäben. Nach dem Fließen der schrägen Bewehrung fand ein Aufklaffen des Risses statt. Durch zusätzliche Zerstörung des Betons im Druckbereich erfolgte ein Gleitbruch längs des klaffenden Risses, der letztendlich zum Erreichen der Grenztragfähigkeit bei  $P_T = 933 \text{ kN}$  führte. Zur Modellierung der Rissbildung werden die Berechnungsergebnisse des GD-Modells und des EP-Modells für die Diskretisierung II betrachtet. Die Versagensform des Versuchs kann durch die Schädigungsverteilung bzw. die Verteilung der ersten Hauptverzerrungen in Abbildung 8.49 mit dem GD-Modell abgebildet werden. Bei einer Last  $P = 294.0 \text{ kN}$  sind erste Risse an der oberen Konsolenecke erkennbar, gefolgt von der Ausbildung des Spaltrisses bei  $P = 697.0 \text{ kN}$ , der beim Erreichen der Traglast  $P_T = 910.2 \text{ kN}$  zusammen mit der entstehenden Schädigung im Druckbereich der einspringenden Ecke die Grenze der Tragfähigkeit darstellt. An dieser Stelle wird auf die ungleichmäßige Verteilung der Schädigung und der ersten Hauptverzerrung in Dickenrichtung der Konsole hingewiesen. Dieser Sachverhalt lässt auf einen dreidimensionalen Effekt infolge transversaler Bewehrung in Dickenrichtung schließen und bestätigt den Einsatz dreidimensionaler Kontinuumelemente anstelle von zweidimensionalen Scheibenelementen unter Annahme eines ebenen Spannungszustands. Im EP-Modell wird das Zugversagen durch die Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_t$  und das Druckversagen durch die Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnung  $\kappa_c$  in Abbildung 8.50 dargestellt. Auch hier ist die Entstehung des diagonalen Spaltrisses bzw. die Zerstörung des Betons im Druckbereich der einspringenden Ecke sehr gut zu erkennen. Analog zum GD-Modell ist eine ungleichmäßige Verteilung der äquivalenten Vergleichsdehnungen in Dickenrichtung der Konsole zu erkennen. Beide verwendeten Betonmodelle sind insgesamt in der Lage, die experimentelle Traglast und das qualitative Versagen ausreichend genau abzubilden.

Evolution der Schädigungsvariable  $d$ :



Evolution der ersten Hauptverzerrung  $\epsilon_1$ :

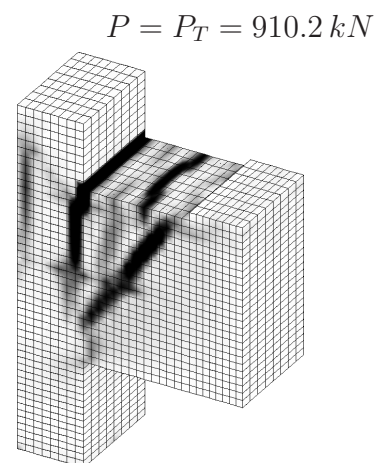
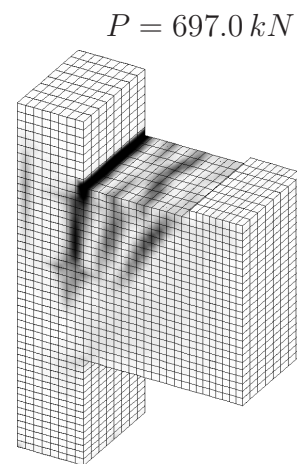
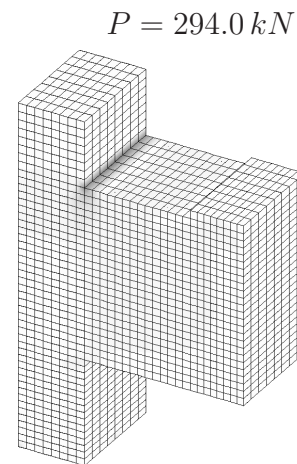


Abbildung 8.49: Evolution der Schädigung und der ersten Hauptverzerrung, rechte Konsolenhälfte (GD-Modell)



Evolution der Vergleichsdehnung  $\kappa_t$

Evolution der Vergleichsdehnung  $\kappa_c$

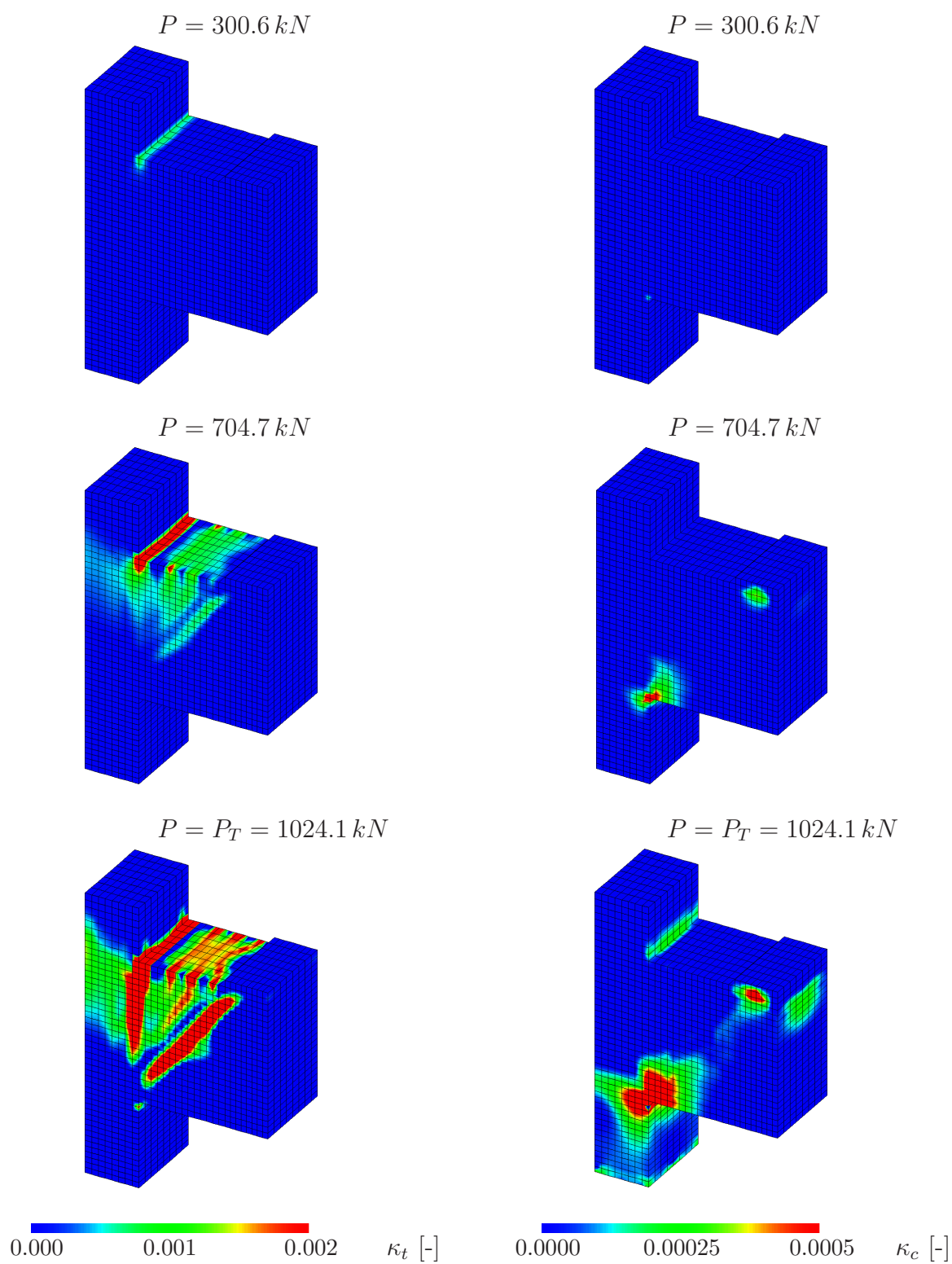


Abbildung 8.50: Evolution der äquivalenten Vergleichsdehnungen, rechte Konsolenhälfte (EP-Modell)

## 8.3 Zusammenfassung der Beispiele

Nachfolgend werden die in diesem Kapitel vorgestellten Beispiele kurz zusammengefasst. Als Konstitutivgesetz für den Beton werden das gradientenerweiterte Schädigungsmodell und das elastoplastische Mehrflächenmodell eingesetzt. Bei den untersuchten Stahlbetontragwerken wird eine eingebettete Bewehrungsmodellierung nach dem Rebar-Modell gewählt.

### Beispiele zu unbewehrtem Beton

Die Auswertung der Beispiele für unbewehrten Beton liefert:

- Numerische Simulationen an der L-förmigen Scheibe zeigen die Fähigkeit des gradientenerweiterten Schädigungsmodells, das Tragverhalten unter Zugbeanspruchung für einen ebenen Spannungszustand quantitativ und qualitativ ausreichend genau abbilden zu können. Die Objektivität der Ergebnisse von der Diskretisierung wird dabei gewährleistet. Mit dem Mehrflächenmodell wird das Tragverhalten deutlich überschätzt. Dieser Sachverhalt kann auf die Vernachlässigung der dritten Spannungsinvariante und die Verwendung einer assoziierten Fließregel zurückgeführt werden.
- Am Beispiel eines gekerbten Biegebalkens lässt sich erwartungsgemäß zeigen, dass das gradientenerweiterte Schädigungsmodell unabhängig von der Elementanzahl in Balkendickenrichtung den ebenen Spannungszustand im Versuch und das Tragverhalten quantitativ und qualitativ gut abbilden kann.
- Anhand eines gekerbten Torsionsbalkens wird ein dreidimensionaler Spannungszustand mit den vorgestellten Betonmodellen untersucht. Mit dem gradientenerweiterten Schädigungsmodell kann das quantitative Tragverhalten gut wiedergegeben werden, wobei das komplexe Versagen des Versuchs ansatzweise abgebildet wird. Analog zur L-förmigen Scheibe ergibt sich mit dem Mehrflächenmodell erneut eine deutliche Überschätzung der Traglast.

### Beispiele zu bewehrtem Beton

Die Auswertung der Beispiele für Stahlbeton lässt sich zusammenfassen:

- An einem Einfeldbalken wird die Fähigkeit der Betonmodelle in Kombination mit der eingebetteten Bewehrung überprüft, das Schubversagen eines Stahlbetonbalkens ausreichend abzubilden. Eine Berechnung mit dem Mehrflächenmodell liefert sowohl quantitativ als auch qualitativ gute Ergebnisse, beim gradientenerweiterten Schädigungsmodell lässt sich eine Abweichung des numerischen Rissverlaufs vom Experiment beobachten.
- Ein weiterer Einfeldbalken wird zur Untersuchung des Tragverhaltens in Abhängigkeit des Verbunds zwischen Beton und Bewehrung verwendet. Für den Fall des perfekten Verbunds kann das Tragverhalten mit beiden Modellen und der eingebetteten Bewehrung gut wiedergegeben werden. Unter Annahme eines nachgiebigen Verbunds ergeben sich aus den Berechnungen mit beiden Betonmodellen größere Deformationen kombiniert mit einer minimalen Reduktion der Traglast.



- Am Beispiel einer Stahlbetonstütze wird unter Anwendung des gradientenerweiterten Schädigungsmodells eine kombinierte Horizontal- und Vertikalbeanspruchung untersucht, wobei sich eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer Simulation und dem zugrunde liegenden Experiment feststellen lässt. Bei reiner Vertikalbelastung kann das duktile Versagen nicht abgebildet werden. Dieser Sachverhalt kann auf den Knick in der Spannungs-Dehnungskurve im Schädigungsmodell beim Erreichen der maximalen Spannung zurückgeführt werden.
- Schließlich wird eine Stahlbetonkonsole als Beispiel für einen allgemeinen Spannungszustand untersucht. Beide Betonmodelle liefern in Kombination mit einer eingebetteten Bewehrungsmodellierung eine gute Approximation der Versuchstraglast, beim EP-Modell tritt allerdings keine ausreichende regularisierende Wirkung infolge des netzbezogenen Entfestigungsmoduls ein. Der experimentelle Rissverlauf wird in beiden Fällen gut wiedergegeben.

# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

### 9.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken unter Einsatz nichtlinearer, vollständig dreidimensionaler Werkstoffgesetze für Beton in Verbindung mit eindimensionalen Werkstoffgesetzen für den Bewehrungsstahl und den Verbund zwischen Beton und Bewehrung. Zur Berücksichtigung möglicher dreidimensionaler Effekte erfolgt die Diskretisierung der Betonstruktur mit dreidimensionalen Kontinuumsselementen, während für die Bewehrung eingebettete Stabelemente verwendet werden. Zu Beginn der Arbeit werden die Grundlagen der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik sowie der Finite Element Methode kurz erläutert. Als Grundlage für die verwendeten Betonmodelle wird eine Einführung in die Plastizitätstheorie bzw. die Schädigungstheorie gegeben und vorhandene Materialmodelle aus der Literatur vorgestellt. Anschließend wird auf die Charakteristik der Werkstoffe Beton, Betonstahl und die Verbundwirkung zwischen Beton und Betonstahl eingegangen.

Für die Betonmodellierung in dieser Arbeit kommt jeweils ein Materialmodell nach der Plastizitätstheorie und nach der Schädigungstheorie zum Einsatz. Zum einen wird das von *Menrath* [75] für Scheibenprobleme vorgeschlagene Mehrflächenmodell für die Elastoplastizität mit netzangepasstem Entfestigungsmodul in dreidimensionaler Form verwendet, und zum anderen ein modifiziertes von Mises Schädigungsmodell mit Gradientenerweiterung dreidimensional erweitert. Zur Abbildung von Entlastungsvorgängen wird das Mehrflächenmodell mit einem skalaren, ingenieurmäßigen Schädigungsansatz kombiniert.

Das *isotrope, elastoplastische Mehrflächenmodell* ist in den ersten beiden Spannungsinvarianten formuliert. Die Nichtberücksichtigung der dritten Spannungsinvariante stellt eine Unzulänglichkeit dar, da die dreiecksförmige Gestalt der Fließfläche in der Deviatorebene im Zugbereich nicht abgebildet werden kann. Dieser Nachteil ist bei der numerischen Simulation von Stahlbetontragwerken nicht so bedeutend, da das Tragverhalten im Zugbereich maßgeblich von den Stahleinlagen beeinflusst wird. Außerdem führt die Kreisform in Deviatorebene in Verbindung mit einer assoziierten Fließregel zu einem unbedingt stabilen Projektionsalgorithmus im Rahmen des impliziten *Rückwärts-Euler-Verfahrens*. Ein großer Vorteil des Mehrflächenmodells ist die geringe Anzahl an Material- und Modellparametern. Zur Regularisierung wird ein netzangepasster Entfestigungsmodul verwendet, allerdings besteht weiterhin eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzorientierung. Als zweites Materialmodell für Beton wird ein *isotropes, modifiziertes von Mises Schädigungsmodell* mit skalarem Schädigungsparameter verwendet. Die zugehörige Schädigungsfunktion ist in den ersten beiden Verzerrungsinvarianten formuliert und wurde bisher vorrangig für ebene Problemstellungen eingesetzt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt eine Erweiterung auf den dreidimensionalen Hauptverzerrungsraum, wobei die Schädigungsfläche in Deviatorebene analog zur Fließfläche des Mehrflächenmodells eine Kreisform aufweist.

Als Regularisierungsstrategie wird für das Schädigungsmodell eine gradientenerweiterte Beschreibung herangezogen: durch Einführen eines "echten" internen Längenparameters lässt sich die Gutgestellttheit des zugrunde liegenden Randwertproblems sicherstellen und somit eine Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Diskretisierung erzielen. Zur numerischen Simulation der Beispiele in Kapitel 8 wurde das gradientenerweiterte Schädigungsmodell in dreidimensionaler Form in das Finite Element Programm CCARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert. Die Gradientenerweiterung erfordert zusätzliche Freiheitsgrade, dieser Nachteil wird jedoch durch die numerische Stabilität der Formulierung wieder aufgehoben.

Die *Modellierung der Bewehrung* stellt einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Insbesondere die Diskretisierung eines Bewehrungsstabs im Kontext mit einer Diskretisierung der Betonstruktur mittels Kontinuums-elementen ist bedeutend für diese Arbeit. Dabei wird mit dem Rebar-Modell ein Verfahren gewählt, das eine Unabhängigkeit der Diskretisierung der Betonstruktur von der Bewehrungsführung ermöglicht. Unter Annahme eines perfekten Verbunds zwischen Matrix- und Fasermaterial wird das Rebar-Modell zunächst allgemein vorgestellt. Besonderes Interesse gilt dabei der Fasergenerierung innerhalb der Matrixstruktur im Rahmen der Methode der Finiten Elemente. In einem weiteren Schritt wird konkret für den Verbundwerkstoff Stahlbeton der nachgiebige Verbund zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl durch eine erweiterte kinematische Beschreibung in Form zusätzlicher Interfacefreiheitsgrade modelliert. Dabei kann eine Analogie zwischen der Verbundmodellierung und der Finite Element Methode mit erweiterter kinematischer Beschreibung (XFEM, SDA) festgestellt werden. Abschließend werden das eindimensionale Plastizitätsmodell für Bewehrungsstahl mit Verfestigung und das eindimensionale Verbundmodell erläutert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden das Rebar-Modell für perfekten und nachgiebigen Verbund sowie die eindimensionalen Konstitutivgesetze für die Bewehrung und den Verbund in das Finite Element Programm CCARAT implementiert.

Für die Berechnung einfacher Balkentragwerke wird alternativ ein Balkenelement mit mehrteiligem Querschnitt, basierend auf der Arbeit von *Weimar* [113], vorgestellt. Die Modellierung eines aus beliebig vielen Einzelrechteckquerschnitten zusammengesetzten Gesamtquerschnitts ermöglicht in Kombination mit einer verschmierten Bewehrungsmodellierung die Berechnung einfacher Stahlbetonbalken. Dabei lässt sich eine Analogie zu dem in der Literatur etablierten Fasermaterialmodell aufstellen. Durch die statische Kondensation der in der Balkentheorie nicht berücksichtigten Spannungskomponenten am Materialpunkt kann ein vollständig dreidimensionales Konstitutivgesetz auf die Balkenformulierung reduziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Balkenelement zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen mit dem Mehrflächenmodell und einer verschmierten Bewehrungsmodellierung in das Finite Element Programm CCARAT implementiert. An zwei Beispielen kann die Anwendbarkeit des vorgestellten Balkenelements gezeigt werden.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der numerischen Simulation ausgewählter Beispiele. Anhand verschiedener Experimente aus der Literatur wird die Anwendbarkeit der verwendeten Betonmodelle und der eingebetteten Bewehrungsmodellierung überprüft. Bei unbewehrten Betonstrukturen wird die Tauglichkeit des gradientenerweiterten Schädigungsmodells gezeigt; dagegen hat sich gezeigt, dass das Mehrflächenmodell modifiziert werden muss. Beide Betonmodelle eignen sich zur numerischen Simulation von Stahlbetonkonstruktionen, wobei das gradientenerweiterte Schädigungsmodell in zwei Fällen zu einer vom Versuch abweichenden Versagensform führt. Mit der eingebetteten Bewehrungs-

formulierung kann die Tragwirkung der Bewehrung gut wiedergegeben werden. Besonders bei der aufwendigen Bewehrungsführung der Stahlbetonkonsole ist die Unabhängigkeit der Diskretisierung von der Bewehrungsführung infolge einer eingebetteten Modellierung von großem Vorteil.

## 9.2 Ausblick

Die Auswertung der numerischen Beispiele zeigt gewisse Defizite der verwendeten Betonmodelle. Zur Beschreibung von unbewehrten Betonstrukturen mit dreidimensionalen Kontinuums-elementen muss das Mehrflächenmodell modifiziert werden: durch Einführen einer nichtassozierten Fließregel wird beispielsweise die übermäßige volumetrische Dilatanz und somit der volumetrische Versteifungseffekt reduziert. *Jirásek* [53] schlägt vor, für das plastische Potential  $Q$  den Reibungskoeffizienten  $\alpha$  abzumindern. Außerdem kann durch Berücksichtigung der dritten Spannungsinvariante in der Fließfunktion die Dreiecksform in Deviatorebene abgebildet werden.

Das Schädigungsmodell zeigt gewisse Schwächen bei der Abbildung von Versagenszuständen im Druckbereich. Als Verbesserung ist eine Begrenzung der Schädigungsfläche im hydrostatischen Druckbereich analog zu den Kappenmodellen der Plastizität denkbar. Zur Erfassung des duktilen Tragverhaltens bei Druckbeanspruchung ist die Kopplung mit einem Plastizitätsmodell zu nennen. Weiter ist der Einsatz eines Schädigungsmodells mit unterschiedlichen Schädigungsfunktionen für Druck- und Zugbeanspruchung in Kombination mit einer Gradientenerweiterung möglich.

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewehrung als Stab modelliert. Zur Abbildung der Dübelwirkung der Bewehrung sind zusätzlich Schubdeformationen zu berücksichtigen. Dies kann beispielsweise über eine Balkenformulierung erreicht werden, wobei besonderes Interesse der Kopplung der Balkenrotationen mit den Verschiebungen des Volumenelements gilt. Außerdem ist der Einsatz komplexer Materialmodelle für den Betonstahl und den Verbund zwischen Beton und Bewehrung in Erwägung zu ziehen.



# Anhang A

## Notation & Tensorrechnung

Im Folgenden wird auf die verwendete Notation im Rahmen der Darlegung von Grundlagen zur Tensorrechnung eingegangen. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser und weiterer Rechenregeln zur Tensorrechnung findet sich beispielsweise in *de Boer* [23]. Alle Darstellungen beziehen sich auf den eigentlich Euklidischen Vektorraum  $\mathcal{V}^3$  und den zugehörigen dyadischen Produktraum  $\mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3$  ( $n$ -mal) der Ordnung  $n$ .

### Notation

In dieser Arbeit wird ausschließlich die direkte Tensorschreibweise benutzt. Die Indexnotation wird nur zur Verdeutlichung in diesem Abschnitt herangezogen. Es gilt folgende Notation,

$$\begin{aligned} a &= a & \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a} &= a_i \mathbf{e}_i & \mathcal{A} &= A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wobei ein Skalar  $a$  mit Kleinbuchstaben, ein Vektor  $\mathbf{a}$  mit fetten Kleinbuchstaben, ein zweistufiger Tensor  $\mathbf{A}$  mit fetten Großbuchstaben und höherwertige Tensoren  $\mathcal{A}$  mit kalligrafischen Großbuchstaben bezeichnet werden. Im Folgenden wird auf eine Darstellung der zugehörigen Basen  $\mathbf{e}_{i,\dots,l}$  verzichtet.

### Skalare Produkte

Skalare Produkte von Tensoren werden durch die Operatoren  $\cdot, :, \dot{}$  und  $::$  gekennzeichnet. Die Anzahl der Punkte  $k$  bestimmt die Stufe der Verjüngung. Ein Skalarprodukt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  führt auf einen Tensor der Ordnung  $n+m-2k$ , vergleiche die folgenden Beispiele.

$$\begin{aligned} c &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ij} b_j \\ c &= \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} & c_i &= \mathbf{c} = \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ijk} B_{jk} \\ c &= \mathbf{A} \dot{:} \mathbf{B} = A_{ijk} B_{ijk} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A_{ijk} b_k \\ c &= \mathcal{A} :: \mathcal{B} = A_{ijkl} B_{ijkl} & C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathcal{A} : \mathbf{B} = A_{ijkl} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### Dyadische Produkte

Ein dyadisches Produkt zweier Tensoren der Ordnung  $n$  und  $m$  wird durch das Symbol  $\otimes$  gekennzeichnet und erzeugt neue (höherwertige) Tensoren der Ordnung  $n+m$ .

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ijk} b_l \\ C_{ijk} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = A_{ijk} b_k & C_{ijkl} &= \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### Fundamentaltensoren

Der zweistufige Einheitstensor  $\mathbf{1}$  und der vierstufige Einheitstensor  $\mathcal{I}$  lassen sich mit Hilfe des Kronecker Deltas  $\delta_{ij}$  folgendermaßen angeben,

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \qquad \mathcal{I} = \mathcal{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \qquad (\text{A.4})$$

wobei  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  gilt.

### Spezielle Tensoren

Die Transponierte eines Tensors lässt sich durch Vertauschen der Indizes bestimmen. In dieser Arbeit wird die Transponierte eines Tensors wie folgt eingeführt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{ji} \\ \mathbf{A} &= A_{ijk} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{kij} \\ \mathcal{A} &= A_{ijkl} \quad \rightarrow \quad \mathcal{A}^T = A_{iljk} \end{aligned} \qquad (\text{A.5})$$

In diesem Zusammenhang kann zwischen symmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^{sym} = \mathbf{A}^{sym,T}$  und schiefssymmetrischen Tensoren  $\mathbf{A}^{skw} = -\mathbf{A}^{skw,T}$  unterschieden werden.

$$\mathbf{A}^{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \qquad \mathbf{A}^{skw} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \qquad (\text{A.6})$$

Existiert die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  eines beliebigen Tensors  $\mathbf{A}$ , so ergibt deren skalares Produkt den zweistufigen Einheitstensor. Dies gilt in entsprechender Weise für die Inverse  $\mathcal{A}^{-1}$  eines vierstufigen Tensors  $\mathcal{A}$ .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \qquad \mathcal{A} : \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I} \qquad (\text{A.7})$$

Des Weiteren lässt sich jeder zweistufige Tensor  $\mathbf{A}$  eindeutig additiv in einen volumetrischen Anteil  $\mathbf{A}^{vol}$  und einen deviatorischen Anteil  $\mathbf{A}^{dev}$  zerlegen. Diese Zerlegung lässt sich auf den vierstufigen Tensor  $\mathcal{A}$  übertragen.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{vol} + \mathbf{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{vol} := \frac{1}{3} [\mathbf{A} : \mathbf{1}] \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{dev} := \mathbf{A} - \mathbf{A}^{vol} \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}^{vol} + \mathcal{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^{vol} := \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}^{dev} := \mathcal{A} - \mathcal{A}^{vol} \end{aligned} \qquad (\text{A.8})$$

Damit kann der deviatorische Anteil eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{A}^{dev}$  aus dem skalaren Produkt des jeweiligen Tensors  $\mathbf{A}$  mit dem vierstufigen deviatorischen Einheitstensor  $\mathcal{I}^{dev}$  gewonnen werden.

$$\mathbf{A}^{dev} = \mathcal{I}^{dev} : \mathbf{A} \qquad (\text{A.9})$$

### Norm eines Tensors

In dieser Arbeit wird ausschließlich die  $L_2$  Norm verwendet.

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \qquad \|\mathbf{A}\| := \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} \qquad (\text{A.10})$$

## Invarianten

Assoziiert mit einem zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  werden drei Hauptinvarianten  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  definiert. Zusätzlich sind die Ableitungen dieser Hauptinvarianten nach dem Tensor  $\mathbf{A}$  angegeben.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \mathbf{A}:\mathbf{1} & \text{mit} & \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1} \\ I_2 &:= [(\mathbf{A}:\mathbf{1})^2 - \mathbf{A}^2:\mathbf{1}] / 2 & \text{mit} & \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1 \mathbf{1} - \mathbf{A} \\ I_3 &:= \det \mathbf{A} & \text{mit} & \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = I_3 \mathbf{A}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Somit ergibt sich die erste Invariante  $I_1$  als Spur des Tensors  $\mathbf{A}$  und die dritte Invariante  $I_3$  als Determinante des Tensors  $\mathbf{A}$ . Des Weiteren ergibt sich die negative zweite Invariante des Deviators  $\mathbf{A}^{dev}$ , die mit  $J_2$  bezeichnet wird, aus folgender Beziehung.

$$J_2 := - [ (\mathbf{A}^{dev} : \mathbf{1})^2 - \mathbf{A}^{dev 2} : \mathbf{1} ] / 2 = 1 / 2 \mathbf{A}^{dev} : \mathbf{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^{dev} \quad (\text{A.12})$$

Die drei Hauptachsenrichtungen  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_{II}$  und  $\mathbf{n}_{III}$  und die drei Eigenwerte  $A_I$ ,  $A_{II}$  und  $A_{III}$  eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{A}$  erhält man aus einem Eigenwertproblem. Dies führt auf folgendes charakteristische Polynom dessen Nullstellen die Eigenwerte des Tensors  $\mathbf{A}$  darstellen.

$$\det(\mathbf{A} - A \mathbf{1}) = A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 = 0 \quad (\text{A.13})$$

Das folgende homogene Gleichungssystem liefert als Lösung die drei Hauptachsenrichtungen.

$$[\mathbf{A} - A_i \mathbf{1}] \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = I, II, III \quad (\text{A.14})$$

Das Cayley–Hamilton–Theorem besagt, dass jeder Tensor seiner charakteristischen Gleichung genügen muss.

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

Damit lässt sich die Inverse eines Tensors wie folgt angeben.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3} [\mathbf{A}^2 - I_1 \mathbf{A} + I_2 \mathbf{1}] \quad (\text{A.16})$$

## Tensoranalysis

Funktionen, die in Abhängigkeit des Ortsvektors aufgestellt werden, nennt man Feldfunktionen. Die Ableitung dieser Feldfunktionen nach dem Ortsvektor wird als Gradient bezeichnet. Dabei wird im Folgenden zwischen skalarwertigen  $f(\mathbf{x})$ , vektorwertigen  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  oder tensorwertigen  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  Funktionen unterschieden.

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \text{grad } f(\mathbf{x}) := \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_{,i} \\ \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_{i,j} \\ \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \text{grad } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \frac{\partial F_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = F_{ij,k} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$



Der Gradient einer skalarwertigen Funktion liefert eine vektorwertige Feldfunktion, der Gradient einer vektorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld zweiter Stufe und der Gradient einer tensorwertigen Funktion liefert ein Tensorfeld dritter Stufe, d. h. die Gradientenbildung  $\nabla(\bullet) = \text{grad}(\bullet)$  hebt den Rang eines Tensors an. Im Kontext der Erhaltungssätze wird noch ein weiterer Differentialoperator benötigt. Dazu wird der Divergenzoperator  $\text{div}(\bullet)$  eingeführt. Die Divergenz eines Vektor- bzw. eines Tensorfeldes ergibt sich wie folgt.

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: f(\mathbf{x}) \qquad \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := [\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})] : \mathbf{1} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.18})$$

Im Gegensatz zur Gradientenbildung senkt die Divergenzbildung  $\text{div}(\bullet) = \nabla \cdot (\bullet)$  den Rang eines Tensors.

### Integralsätze

Mit Hilfe der Gaußschen Integralsätze lassen sich folgende Zusammenhänge zwischen Oberflächen- und Volumenintegrale angeben.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, da \\ \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

# Anhang B

## Numerische Behandlung des Mehrflächenmodells

### Integrationsalgorithmus

Das Projektionsverfahren wird in zwei Schritte unterteilt. Im sogenannten elastischen Prädiktor wird basierend auf elastischem Materialverhalten die elastische Prädiktorspannung bestimmt und die Erfüllung der Fließbedingung überprüft. Wird die Fließbedingung verletzt, so ist im zweiten Schritt, dem plastischen Korrektor, die elastische Prädiktorspannung auf die Fließfläche zu projizieren. Zunächst wird der Return Mapping Algorithmus für eine aktive Fließfläche erläutert, später folgt eine Erweiterung auf das gekoppelte Mehrflächenmodell. Zum Zeitpunkt  $t_n$  des letzten Lastschritts sind die Spannungen, die totalen bzw. plastischen Verzerrungen und die internen Variablen bekannt. Dagegen ist zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  nur das Verzerrungssinkrement  $\Delta\epsilon_{n+1}$  bekannt, die restlichen Zustandsgrößen sind für den momentanen Zustand zu aktualisieren.

$$(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\epsilon}_n^{pl}, \mathbf{q}_n, \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}) \longrightarrow (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (\text{B.1})$$

#### Elastischer Prädiktor

Zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  können die Spannungen aus der konstitutiven Beziehung (B.2) ermittelt werden, die Gesamtverzerrungen folgen aus (B.3).

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^{el} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}) \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (\text{B.3})$$

Die plastischen Verzerrungen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  sind unbekannt, deshalb wird in einem ersten Schritt die elastische Prädiktorspannung  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}$  aus den plastischen Verzerrungen zum Zeitpunkt  $t_n$  berechnet.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} = \mathbf{C}^{el} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{pl}) = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^{el} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (\text{B.4})$$

Für die Berechnung der elastischen Prädiktorspannung werden die gespeicherten Werte der internen Variablen  $\mathbf{q}_n$  zum konvergierten Zeitpunkt  $t_n$  verwendet.

$$\mathbf{q}_{n+1}^{tr} = \mathbf{q}_n \quad (\text{B.5})$$

Mit den internen Variablen und der elastischen Prädiktorspannung ist die Erfüllung der Fließbedingung  $F_{n+1}^{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n)$  zu prüfen. Wird die Fließbedingung  $F_{n+1}^{tr}$  verletzt, so ist

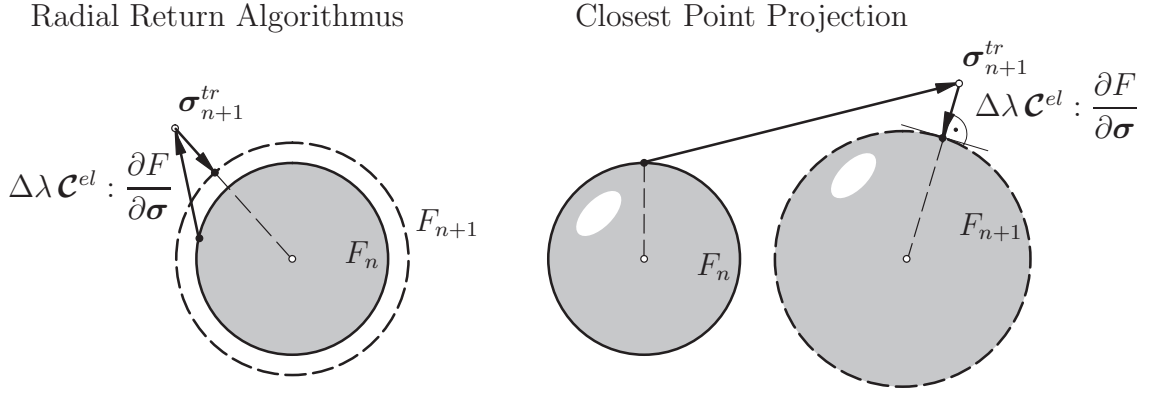


Abbildung B.1: Unterschiedliche Rückprojektionsverfahren

die Fließbedingung durch Rückprojektion der Prädiktorspannung  $\sigma_{n+1}^{tr}$  auf die Fließfläche zu erfüllen. Bei einer assoziierten Plastizitätsformulierung wird bei dem Return-Algorithmus eine Projektion auf den geometrisch nächstliegenden Spannungspunkt der Fließfläche vorgenommen (Closest point projection). Im Falle einer idealen  $J_2$ -Plastizität wird die Prädiktorspannung radial zum Spannungsnulldpunkt der Fließfläche rückprojiziert (Radial return). Die geometrische Bedeutung der beiden genannten Projektionsverfahren ist aus Abbildung B.1 ersichtlich.

### Plastischer Korrektor (Return Mapping Algorithmus)

Die plastischen Verzerrungen können im Rahmen der Plastizitätstheorie durch numerische Integration unter Anwendung des impliziten *Rückwärts-Euler*-Verfahrens in Abhängigkeit des inkrementellen plastischen Multiplikators unter Voraussetzung einer assoziierten Plastizitätsformulierung nach (B.6) berechnet werden.

$$\Delta \epsilon_{n+1}^{pl} = \epsilon_{n+1}^{pl} - \epsilon_n^{pl} = \Delta \lambda_{n+1} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (\text{B.6})$$

Entsprechend ergibt sich das Inkrement der internen Variablen im Verzerrungsraum bzw. im Spannungsraum zu

$$\begin{aligned} \Delta \kappa_{n+1} &= \Delta \lambda_{n+1} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} = \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{k}_{n+1} & \longrightarrow & \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta \kappa_{n+1} \\ \Delta \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{H}_{n+1} \cdot \Delta \kappa_{n+1} = \mathbf{H}_{n+1} \cdot \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{k}_{n+1} & \longrightarrow & \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Die Definitionen für  $\mathbf{k}_{n+1}$ ,  $\mathbf{n}_{n+1}$  und  $\mathbf{H}_{n+1}$  sind Gleichungen (3.9), (3.11) und (3.12) zu entnehmen. Die Prädiktorspannung  $\sigma_{n+1}^{tr}$  wird durch Einsetzen von (B.6) in (B.4) in Abhängigkeit des Spannungstensors  $\sigma_{n+1}$  formuliert.

$$\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + \mathbf{C}^{el} : \left( \Delta \epsilon_{n+1}^{el} + \Delta \epsilon_{n+1}^{pl} \right) = \sigma_{n+1} + \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{el} : \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \quad (\text{B.8})$$

Durch Umformen von Gleichung (B.8) erhält man den Spannungstensor zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  aus der Rückprojektion der elastischen Prädiktorspannung entlang des Gradienten der Fließfläche.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{C}^{el} : \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \quad (\text{B.9})$$

Einsetzen von (B.9) in die verletzte Fließbedingung

$$F_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = F_{n+1}(\Delta\lambda_{n+1}) = 0 \quad (\text{B.10})$$

liefert das unbekannte Inkrement des plastischen Multiplikators. Im Falle einer linearen Verfestigung kann  $\Delta\lambda_{n+1}$  direkt aus (B.10) ermittelt werden. Allgemein wird durch die Fließbedingung (B.10) eine in  $\Delta\lambda_{n+1}$  nichtlineare Gleichung definiert, die für jeden Integrationspunkt mit einem lokalen Newton-Verfahren iterativ gelöst wird.

$$\Delta\lambda_{n+1}^{j+1} = \Delta\lambda_{n+1}^j - \frac{F_{n+1}^j}{\frac{dF_{n+1}^j}{d\Delta\lambda}} \quad (\text{B.11})$$

Dabei stellt  $\Delta\lambda_{n+1}$  die Nullstelle der Fließbedingung (B.10) dar.

### Algorithmische elastoplastische Materialtangente

Der algorithmische elastoplastische Materialtensor weicht infolge des Übergangs von differentiellen zu endlichen Last- bzw. Zeitinkrementen von dem elastoplastischen Materialtensor des Kontinuums aus Gleichung (3.13) ab. Im Folgenden wird die algorithmische elastoplastische Materialtangente unter Voraussetzung einer assoziierten Fließregel in Verbindung mit einem assoziierten Verfestigungsgesetz hergeleitet. Zur Bestimmung der algorithmischen Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan}^{ep,alg}$  wird das totale Differential der Größen  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}$ ,  $d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  und  $d\Delta\lambda_{n+1}$  benötigt.

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{C}^{el} : (d\boldsymbol{\epsilon} - d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}) \Big|_{n+1} \\ d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl} &= d\Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) \Big|_{n+1} \\ d\boldsymbol{\kappa}_{n+1} &= d\Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right) \Big|_{n+1} \\ dF_{n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \Big|_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Einsetzen von (B.12)<sub>2</sub> in (B.12)<sub>1</sub> liefert das totale Differential der Spannungen

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} : \left( d\boldsymbol{\epsilon} - d\Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right) \Big|_{n+1} \quad (\text{B.13})$$

mit der Definition des algorithmischen Moduls

$$\boldsymbol{\Theta}_{n+1} = \left( \mathbf{C}^{el-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \Big|_{n+1} . \quad (\text{B.14})$$

Wird Gleichung (B.13) wiederum in das totale Differential der Konsistenzbedingung (B.12)<sub>4</sub> eingesetzt, so ergibt sich Gleichung (B.15).

$$d\Delta\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \Delta\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) d\mathbf{q} \Big|_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : d\boldsymbol{\epsilon} \Big|_{n+1} \quad (\text{B.15})$$

Einsetzen des totalen Spannungsdifferentials aus (B.13) in (B.12<sub>3</sub>) ergibt unter Einbeziehung von (B.7<sub>2</sub>)

$$\begin{aligned} & d\Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) + \Delta\lambda \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} + \frac{\mathbf{H}^{-1}}{\Delta\lambda^2} \right) d\mathbf{q} \Big|_{n+1} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : d\boldsymbol{\epsilon} \Big|_{n+1} . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Auflösen von (B.15) und (B.16) nach den Unbekannten  $d\Delta\lambda_{n+1}$  und  $\Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1}$  liefert das folgende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} d\Delta\lambda_{n+1} \\ \Delta\lambda_{n+1} d\mathbf{q}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : d\boldsymbol{\epsilon} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : d\boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}_{n+1} \quad (\text{B.17})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} z_{11,n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \\ z_{12,n+1} &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) \Big|_{n+1} = z_{21,n+1} \\ z_{22,n+1} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\Delta\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} + \frac{\mathbf{H}^{-1}}{\Delta\lambda^2} \right) \Big|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Der algorithmische elastoplastische Materialtensor ergibt sich schließlich durch Einsetzen von (B.17) in (B.13).

$$\mathbf{c}_{tan,n+1}^{ep,alg} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \boldsymbol{\Theta} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \Big|_{n+1} \quad (\text{B.19})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{1,n+1} &= \boldsymbol{\Theta}_{n+1} : \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \mathbf{N}_{2,n+1} &= \boldsymbol{\Theta}_{n+1} : \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial \mathbf{q}_{n+1} \partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Für die Drucker-Prager-Teilfläche vereinfacht sich der algorithmische elastoplastische Materialtensor zu

$$\mathbf{c}_{tan,n+1}^{ep,alg} = \boldsymbol{\Theta} - \frac{\left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left( \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Theta} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa}} \Big|_{n+1} \quad (\text{B.21})$$

## Diskontinuierliche Fließflächen

Bei mehrteiligen Fließflächen mit  $C_0$ -kontinuierlichen Übergängen ist die Rückprojektion der Spannungen nicht mehr eindeutig, da die Gradienten der zu koppelnden Fließflächen bezüglich der Spannungen an diesen Stellen eine Singularität aufweisen. Bei dem verwendeten Mehrflächenmodell tritt eine Singularität beim Übergang zwischen den regulären Drucker-Prager-Teilflächen  $F_1$  und  $F_2$  sowie zwischen dem regulären Drucker-Prager-Kegel  $F_1$  und dem "Inverted cone"  $F_3$  auf. Im Folgenden wird deshalb ein Algorithmus zur Kopplung der Teilflächen  $F_1$  und  $F_2$  sowie zur Kopplung der Teilflächen  $F_1$  und  $F_3$  erläutert. Wird bei einer einfachen Fließfläche die Fließbedingung durch die Prädiktorspannung verletzt, bleibt die Fließfläche während der Rückprojektion aktiv. Werden dagegen bei der Mehrflächenplastizität die Fließbedingungen mehrerer Fließflächen verletzt, müssen nicht alle verletzten Fließflächen nach der Rückprojektion aktiv sein. Dieser Unterschied muss bei der numerischen Behandlung gekoppelter Fließflächen in geeigneter Form berücksichtigt werden. Ein Algorithmus für mehrteilige Fließflächen ist in *Simo et al.* [100] für eine beliebige Anzahl von Fließflächen mit nichtglatten Übergängen beschrieben, bei dem nach erfolgter Rückprojektion die Anzahl der aktiven Fließflächen kleiner oder gleich der Anzahl der verletzten Fließbedingungen ist. Das Kriterium zur Deaktivierung einer Fließfläche  $F_j$  stellt dabei der inkrementelle plastische Multiplikator  $\Delta\lambda_j$  dar: sobald  $\Delta\lambda_j$  einen negativen Wert annimmt, wird die zugehörige Fließfläche  $F_j$  für die Rückprojektion eliminiert. Nach der Rückprojektion müssen die beiden zu koppelnden Fließflächen die diskreten Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} F_{j,n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) \leq 0 \quad \Delta\lambda_{j,n+1} \geq 0 \quad F_{j,n+1} \Delta\lambda_{j,n+1} = 0 \\ \text{für } j = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Die Rate der plastischen Verzerrungen kann nach *Koiter* [60] aus der modifizierten Fließregel (B.23) berechnet werden.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \sum_{i=1}^z \dot{\lambda}_i \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{mit } z = 2 \quad (\text{B.23})$$

### Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Für das Prädiktor-Korrektor-Verfahren diskontinuierlicher Fließflächen ist die Koiter'sche Regel (B.23) in (B.3) zu berücksichtigen. Im Gegensatz zu einfachen Fließflächen werden die inkrementellen plastischen Multiplikatoren nicht aus einer nichtlinearen skalaren Gleichung (B.11) ermittelt, sondern aus der Bedingung, dass alle aktiven Fließflächen die zugehörige Fließbedingung erfüllen. Zur Berücksichtigung der aktiven Fließflächen wird in dem Algorithmus für jede der beiden Fließbedingungen  $F_1$  und  $F_2$  ein skalarer Wert  $c_j$  eingeführt, der für eine aktive Fließfläche  $\Delta\lambda_{j,n+1}$  den Wert  $c_j = 1$  annimmt, andernfalls wird er zu Null gesetzt. *Feenstra* [36] gibt jede Fließfläche in Abhängigkeit von  $c_j$  an,

$$\bar{F}_{j,n+1} = c_j F_j(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots, \Delta\lambda_m) + (1 - c_j) \Delta\lambda_j \big|_{n+1} \quad \text{für } j = 1, 2 \quad (\text{B.24})$$

dadurch ergibt sich das nichtlineare Gleichungssystem

$$\bar{\mathbf{F}}_{j,n+1} = \mathbf{c}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1} + \bar{\mathbf{c}}_{n+1} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{B.25})$$

mit den Diagonalmatrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \text{diag}[c_1, c_2] \\ \bar{\mathbf{c}} &= \text{diag}[1 - c_1, 1 - c_2].\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

Das Gleichungssystem (B.25) enthält als Unbekannte zwei Konsistenzparameter  $\Delta\lambda_{j,n+1}$  und zwei interne Variablen  $\kappa_{j,n+1}$ . Werden die internen Variablen über die Rate der plastischen Arbeit definiert, so ergibt sich folgende Beziehung

$$\Delta\kappa_{j,n+1} = \sum_{k=1}^2 c_{k,n+1} \Delta\lambda_{k,n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}. \quad (\text{B.27})$$

In der lokalen Newton-Iteration wird zunächst der unbekannte Vektor der Konsistenzparameter  $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$  über das Gleichungssystem (B.25) berechnet. Ausgehend vom lokalen Iterationsschritt  $i$  wird die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_{n+1}^i$  bestimmt und invertiert.

$$\mathbf{J}_{n+1}^i = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial (\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots, \Delta\lambda_m)} \Bigg|_{n+1}^i = \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{F}(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial (\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \dots, \Delta\lambda_m)} + \bar{\mathbf{c}} \Bigg|_{n+1}^i \quad (\text{B.28})$$

Der Vektor der Konsistenzparameter  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{i+1}$  im lokalen Iterationsschritt  $i + 1$  wird dann aus (B.29) ermittelt.

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{i+1} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i - \mathbf{J}_{n+1}^{i-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^i \quad (\text{B.29})$$

Anschließend wird in einem zweiten Schritt der Vektor der internen Variablen  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$  mit Hilfe von Gleichung (B.27) aktualisiert.

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{c}_{n+1}^{i+1} \Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{i+1} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{i+1} &= \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^i + \Delta\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{i+1}\end{aligned}\quad (\text{B.30})$$

Aufgrund der Deaktivierung einer Fließfläche während der lokalen Iteration erfolgt ein Verschieben des Konvergenzradius. Erst bei Erreichen der minimalen Anzahl aktiver Fließflächen liegt eine quadratische Konvergenz vor.

### Algorithmische elastoplastische Materialtangente

Wird die Koiter'sche Regel in Gleichung (B.8) berücksichtigt ergibt sich nach einigen mathematischen Umformungen das totale Differential der Spannungen für die Kopplung mehrerer Drucker-Prager-Teilflächen

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\Theta}} : \left( d\boldsymbol{\epsilon} - \sum_{i=1}^2 c_i d\Delta\lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \Bigg|_{n+1} \quad (\text{B.31})$$

mit dem modifizierten algorithmischen Modul

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{n+1} = \left( \mathbf{c}^{el-1} + \sum_{i=1}^2 c_i \Delta\lambda_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \Bigg|_{n+1}. \quad (\text{B.32})$$

In einer allgemeinen Schreibweise nach *Riggs & Powell* [96] wird (B.31) folgendermaßen beschrieben

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\Theta}} : (d\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{U} d\Delta\boldsymbol{\lambda}) \Big|_{n+1}. \quad (\text{B.33})$$

Bei einer assoziierten Fließregel setzt sich die Matrix  $\mathbf{U}$  aus den Vektoren der Fließrichtungen zusammen,

$$\mathbf{U}_{n+1} = \left[ c_1 \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, c_2 \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1} \quad (\text{B.34})$$

der Vektor des totalen Differentials der Konsistenzparameter  $d\Delta\boldsymbol{\lambda}$  wird aus (B.35) bestimmt.

$$d\Delta\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \left[ d\Delta\lambda_1, d\Delta\lambda_2, \dots, d\Delta\lambda_m, \right]_{n+1} \quad (\text{B.35})$$

Das totale Differential einer Fließfläche  $F_j$  kann dabei aus (B.24) abgeleitet werden

$$dF_{j,n+1} = c_j \left( \frac{\partial F_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F_j}{\partial \kappa} d\kappa \right) + (1 - c_j) d\Delta\lambda \Big|_{n+1} = 0. \quad (\text{B.36})$$

Daraus folgt das Gleichungssystem der Konsistenzbedingungen der zwei Teilflächen

$$d\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{U}^T d\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{V}_{\boldsymbol{\kappa}}^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}}) d\Delta\lambda \Big|_{n+1} \quad (\text{B.37})$$

mit

$$\mathbf{V}_{\boldsymbol{\kappa},n+1} = \left[ c_1 \frac{\partial F_1}{\partial \kappa}, c_2 \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} \right]_{n+1} \quad (\text{B.38})$$

Mit der Matrix der plastischen Moduln

$$\mathbf{E}_{n+1} = - [\mathbf{V}_{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}}]_{n+1} \quad (\text{B.39})$$

erhält man nach einigen mathematischen Umformungen schließlich die algorithmische elastoplastische Materialtangente.

$$\mathbf{c}_{tan,n+1}^{ep,alg} = \frac{\partial d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \bar{\boldsymbol{\Theta}} - \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U} (\mathbf{E} + \mathbf{U}^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \bar{\boldsymbol{\Theta}} \Big|_{n+1} \quad (\text{B.40})$$

Die Kopplung der Teilflächen  $F_1$  und  $F_2$  führt zu einer symmetrischen Matrix der plastischen Moduln bzw. zu einer symmetrischen Materialtangente.

### Algorithmische elastoplastische Materialtangente im Apexbereich

Im Apexbereich erfolgt die Rückprojektion mit der zusätzlichen Hilfsfläche  $F_3$  (*Inverted cone*), numerisch wird dieser Bereich durch die gekoppelten Fließflächen  $F_1$  und  $F_3$  behandelt. *Pontes et al.* [90] verwenden den *Inverted cone* für ideale Plastizität, in der Arbeit von *Menrath* [75] wird eine Erweiterung auf allgemein verfestigendes Materialverhalten vorgenommen. Für den invertierten Kegel bleibt zwar die Koiter'sche Regel weiterhin gültig, die diskreten Kuhn-Tucker-Bedingungen müssen dagegen umgekehrt werden.

$$F_{3,n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) > 0 \quad \Delta\lambda_{3,n+1} \leq 0 \quad F_{3,n+1} \Delta\lambda_{3,n+1} = 0 \quad (\text{B.41})$$

*Hofstetter & Taylor* [50] schlagen eine alternative Methode zur Behandlung des Apex-Bereichs vor. Im Vergleich zu *Menrath* [75] wird eine zusätzliche Hilfsfläche eingeführt,



um den Prädiktorspannungszustand zunächst auf die hydrostatische Achse zu projizieren. In einem zweiten Schritt wird entlang der hydrostatischen Achse zur Kegelspitze hin projiziert. Nachteilig an dieser Methode sind die Einführung zusätzlicher Fließflächentypen und eine instabile Lösung bei mehreren Materialpunkten mit  $\mathbf{C}_{tan}^{ep,alg} = \mathbf{0}$ , andererseits liefert das Verfahren einen symmetrischen konsistenten Materialtensor.

Für den Apexbereich wird die Annahme getroffen, dass das nichtlineare Materialverhalten durch die Drucker-Prager-Fließfläche  $F_1$  gesteuert wird, der invertierte Kegel dient lediglich der Stabilisierung des Rückprojektionsalgorithmus. Daraus folgen die Bedingung

$$\kappa_1 = \kappa \quad \kappa_2 = 0 \quad , \quad (\text{B.42})$$

und

$$\Delta\kappa_{1,n+1} = c_{1,n+1}\Delta\lambda_{1,n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\kappa_{3,n+1} = 0 \quad . \quad (\text{B.43})$$

Die Matrix  $\mathbf{U}$  aus den Vektoren der Fließrichtungen wird dann zu

$$\mathbf{V}_\kappa = \begin{bmatrix} c_1 \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} & c_3 \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.44})$$

Mit den Matrizen  $\mathbf{c}$  und  $\bar{\mathbf{c}}$  aus (B.26)

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \text{diag}[c_1, c_3] \\ \bar{\mathbf{c}} &= \text{diag}[1 - c_1, 1 - c_3] \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

ergibt sich die Matrix der plastischen Moduln

$$\mathbf{E}_{n+1} = - \begin{bmatrix} c_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} + 1 - c_1 & 0 \\ c_1 c_3 \frac{\partial F_3}{\partial \kappa} & 1 - c_3 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.46})$$

Aus Gleichung (B.46) ist die Unsymmetrie der Matrix der plastischen Moduln  $\mathbf{E}_{n+1}$  ersichtlich, dadurch wird auch die algorithmische elasto-plastische Materialtangente  $\mathbf{C}_{tan,n+1}^{ep,alg}$  unsymmetrisch. Dies bedingt den Einsatz von nichtsymmetrischen Gleichungslösern.

### Sonderfall: Übergang Drucker-Prager-Kegel / Kugelkappe

Für den  $C_1$ -kontinuierlichen Übergang zwischen der Drucker-Prager-Fließfläche  $F_2$  und der Kugelkappe  $F_4$  wird im Rahmen des Mehrflächenmodells alternativ zum Algorithmus von *Simo et al.* [100] der Algorithmus von *Pramono & Willam* [91] vorgeschlagen. Beim Mehrflächenmodell wird dabei zuerst auf die Drucker-Prager-Teilfläche  $F_2$  projiziert, ist danach die Kugelkappe noch aktiv, erfolgt ausgehend vom Prädiktorzustand eine zusätzliche Rückprojektion auf die Kugelkappe.

# Anhang C

## Transformation zwischen globalen und lokalen Koordinatensystemen

In diesem Abschnitt werden die Transformationsmatrizen zur Umwandlung globaler in lokaler Größen und umgekehrt angegeben.

### Transformation der Verschiebungen

Die Transformation eines kartesischen globalen Koordinatensystems  $\mathbf{x}_G$  in ein entsprechendes lokales Koordinatensystem  $\mathbf{x}_L$  wird über die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^d$  durchgeführt:

$$\mathbf{T}^d = \begin{bmatrix} \cos \angle(x_G, x_L) & \cos \angle(y_G, x_L) & \cos \angle(z_G, x_L) \\ \cos \angle(x_G, y_L) & \cos \angle(y_G, y_L) & \cos \angle(z_G, y_L) \\ \cos \angle(x_G, z_L) & \cos \angle(y_G, z_L) & \cos \angle(z_G, z_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Aus der Orthonormalität der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^d$  folgt

$$\mathbf{T}^{d^{-1}} = \mathbf{T}^{dT}. \quad (\text{C.2})$$

Damit kann ein beliebiger Punkt zwischen dem globalen und dem lokalen Koordinatensystem transformiert werden:

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{T}^d \mathbf{x}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}_G = \mathbf{T}^{dT} \mathbf{x}_L \quad (\text{C.3})$$

Nachdem bei der Verbundmodellierung nur die Interfaceverschiebung in Stabrichtung  $x_L$  betrachtet wird, kann Gleichung (C.3) modifiziert werden

$$x_L = \mathbf{T}_1^d \mathbf{x}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}_G = \mathbf{T}_1^{dT} x_L \quad (\text{C.4})$$

mit dem ersten Zeilenvektor der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^d$

$$\mathbf{T}_1^d = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

### Transformation der Spannungen und Verzerrungen

Die Spannungen und Verzerrungen in einem beliebigen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  können

nach *Altenbach et al.* [1] definiert werden zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Die Transformationsmatrix für eine Transformation globaler Spannungen in ein lokales Koordinatensystem ist definiert zu

$$\mathbf{T}^\sigma = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & l_2n_3 + l_3n_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & l_3n_1 + l_1n_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Für die Transformation globaler Verzerrungen in ein lokales Koordinatensystem wird die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^\epsilon$  benötigt.

$$\mathbf{T}^\epsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & l_2n_3 + l_3n_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & l_3n_1 + l_1n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Mit Gültigkeit der Beziehung

$$\mathbf{T}^{\sigma^{-1}} = \mathbf{T}^{\epsilon T} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}^{\epsilon^{-1}} = \mathbf{T}^{\sigma T} \quad (\text{C.9})$$

können die Spannungen und Verzerrungen folgendermaßen transformiert werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_L &= \mathbf{T}^\sigma \boldsymbol{\sigma}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_G = \mathbf{T}^{\epsilon T} \boldsymbol{\sigma}_L \\ \boldsymbol{\epsilon}_L &= \mathbf{T}^\epsilon \boldsymbol{\epsilon}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}_G = \mathbf{T}^{\sigma T} \boldsymbol{\epsilon}_L \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Bei einem Bewehrungsstab sind nur die Normalspannung und die Normalverzerrung in Stabrichtung zu berücksichtigen. Gleichung (C.10) kann daher vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \mathbf{T}_1^\sigma \sigma_G \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_G = \mathbf{T}_1^{\epsilon T} \sigma_L \\ \epsilon_L &= \mathbf{T}_1^\epsilon \epsilon_G \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon_G = \mathbf{T}_1^{\sigma T} \epsilon_L \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

mit den Zeilenvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1^\sigma &= \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_1^\epsilon &= \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \end{bmatrix} .\end{aligned}\tag{C.12}$$

### Definition neu eingeführter Matrizen

In Abschnitt 6.3.2 wurde die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^b$  eingeführt zur Transformation der globalen Interfaceknotenverschiebungen  $\mathbf{a}$  in lokale Interfaceknotenverschiebungen  $\mathbf{b}_L$ .

$$\mathbf{b}_L = \mathbf{T}^b \mathbf{a}\tag{C.13}$$

In Komponentenschreibweise lautet (C.13)

$$\begin{bmatrix} b_L^1 \\ b_L^2 \\ \vdots \\ b_L^{iel_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x^1 \\ a_y^1 \\ a_z^1 \\ a_x^2 \\ a_y^2 \\ a_z^2 \\ \vdots \\ a_x^{iel_b} \\ a_y^{iel_b} \\ a_z^{iel_b} \end{bmatrix}\tag{C.14}$$

Dabei ist  $iel_b$  die Anzahl der Interfaceknoten. Aus (6.32) ergibt sich  $\tilde{\mathbf{N}}$  zu

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_L \mathbf{T}^b = \begin{bmatrix} N_1 l_1 & N_1 m_1 & N_1 n_1 & N_2 l_1 & N_2 m_1 & N_2 n_1 & \dots & N_{iel_b} l_1 & N_{iel_b} m_1 & N_{iel_b} n_1 \end{bmatrix}\tag{C.15}$$

mit den Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_L$  und der Anzahl der Interfaceknoten  $iel_b$  eines Stabelements. Außerdem wurde in Gleichung (6.35) die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}$  definiert:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_1^{\epsilon^{-1}} \mathbf{B}_L \mathbf{T}^b = \mathbf{T}_1^{\sigma^T} \mathbf{B}_L \mathbf{T}^b\tag{C.16}$$

mit dem Ableitungsoperator  $\mathbf{B}_L = [B_1 \dots B_{iel_b}]$  eines Stabelements. Einsetzen von (C.5) und (C.14) führt zu

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} l_1^3 B_1 & l_1^2 m_1 B_1 & l_1^2 n_1 B_1 & \dots & l_1^3 B_{iel_b} & l_1^2 m_1 B_{iel_b} & l_1^2 n_1 B_{iel_b} \\ m_1^2 l_1 B_1 & m_1^3 B_1 & m_1^2 n_1 B_1 & \dots & m_1^2 l_1 B_{iel_b} & m_1^3 B_{iel_b} & m_1^2 n_1 B_{iel_b} \\ n_1^2 l_1 B_1 & n_1^2 m_1 B_1 & n_1^3 B_1 & \dots & n_1^2 l_1 B_{iel_b} & n_1^2 m_1 B_{iel_b} & n_1^3 B_{iel_b} \\ 2l_1^2 m_1 B_1 & 2m_1^2 l_1 B_1 & 2l_1 m_1 n_1 B_1 & \dots & 2l_1^2 m_1 B_{iel_b} & 2m_1^2 l_1 B_{iel_b} & 2l_1 m_1 n_1 B_{iel_b} \\ 2l_1 m_1 n_1 B_1 & 2m_1^2 n_1 B_1 & 2n_1^2 m_1 B_1 & \dots & 2l_1 m_1 n_1 B_{iel_b} & 2m_1^2 n_1 B_{iel_b} & 2n_1^2 m_1 B_{iel_b} \\ 2l_1^2 n_1 B_1 & 2l_1 m_1 n_1 B_1 & 2n_1^2 l_1 B_1 & \dots & 2l_1^2 n_1 B_{iel_b} & 2l_1 m_1 n_1 B_{iel_b} & 2n_1^2 l_1 B_{iel_b} \end{bmatrix}\tag{C.17}$$

**Transformation der Knotengrößen des dreidimensionalen Balkenelements**

Die Transformation lokaler Balkenknotengrößen in das globale Koordinatensystem wird mittels der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_2^B$  für ein zweiknotiges Balkenelement und  $\mathbf{T}_3^B$  für ein dreiknotiges Balkenelement mit der Matrix  $\mathbf{T}^d$  aus (C.1) durchgeführt.

$$\mathbf{T}_2^B = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_3^B = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^d \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

# Anhang D

## Ableitungsoperator des dreidimensionalen Balkenelements

In diesem Abschnitt werden die Einträge des Ableitungsoperators  $\hat{\mathbf{B}}$  des dreidimensionalen Balkenelements aufgestellt.

### Ableitungsoperator ohne Wölbanteile

Zunächst werden die Wölbfreiheitsgrade im Ableitungsoperator vernachlässigt. In (D.1) sind die Einträge in  $\hat{\mathbf{B}}$  für die Freiheitsgrade  $[u_x^i \ u_y^i \ u_z^i \ \varphi_x^i \ \varphi_y^i \ \varphi_z^i]$  am Elementknoten  $i$  dargestellt.

$$\hat{\mathbf{B}}^i = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} N_r^i & 0 & 0 & 0 & \frac{h_t}{\ell} t N_r^i & \frac{h_s}{\ell} s N_r^i \\ 0 & \frac{2}{\ell} N_r^i & 0 & -\frac{h_t}{\ell} t N_r^i & 0 & -N^i \\ 0 & 0 & \frac{2}{\ell} N_r^i & \frac{h_s}{\ell} s N_r^i & N^i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

### Ableitungsoperator mit Wölbanteilen

Werden Längsverschiebungen infolge Verwölbung berücksichtigt, so ergibt sich der modifizierte Ableitungsoperator des Balkenelements für die Freiheitsgrade  $[u_x^i \ u_y^i \ u_z^i \ \varphi_x^i \ \varphi_y^i \ \varphi_z^i \ \Gamma_x^i]$  am Elementknoten  $i$  zu

$$\hat{\mathbf{B}}^i = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} N_r^i & 0 & 0 & 0 & \frac{h_t}{\ell} t N_r^i & \frac{h_s}{\ell} s N_r^i & \frac{h_s h_t}{4\ell} (q s t + e_t s - e_s t) N_r^i \\ 0 & \frac{2}{\ell} N_r^i & 0 & -\frac{h_t}{\ell} t N_r^i & 0 & -N^i & \frac{h_t}{2} (q t + e_t) N^i \\ 0 & 0 & \frac{2}{\ell} N_r^i & \frac{h_s}{\ell} s N_r^i & N^i & 0 & \frac{h_s}{2} (q s - e_s) N^i \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$



# Literaturverzeichnis

- [1] **Altenbach, H., Altenbach, J., Rikards, R. (1996):** *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart.
- [2] **Balakrishnan, S., Murray, D. W. (1986):** *Finite element prediction of reinforced concrete behaviour*, Structural Engineering Report 138, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
- [3] **Barr, B. I. G., Brokenshire, D. R. (1996):** ‘Torsion fracture tests’, *BRE Digest*.
- [4] **Barzegar, F., Maddipudi, S. (1994):** ‘Generating reinforcement in FE modeling of concrete structures’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 120, pp. 1656–1662.
- [5] **Bathe, K. J. (1995):** *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] **Bausch, S. (1984):** *Experimentelle und rechnerische Untersuchungen zur Grenzverformungsfähigkeit von Stahlbetonbalken*, Dissertation, Institut für Statik, TU Braunschweig.
- [7] **Bažant, Z. P. (1984):** ‘Imbricate Continuum and its Variational Derivation’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 110, pp. 1693–1712.
- [8] **Bažant, Z. P., Oh, B. H. (1983):** ‘Crack band theory for fracture of concrete’, *RILEM Materials & Structures*, Vol. 16, pp. 155–177.
- [9] **Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G. (1989):** ‘Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, pp. 755–767.
- [10] **Bažant, Z. P., Planas, J. (1998):** *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*, CRC Press.
- [11] **Belytschko, T., Liu, W., Moran, B. (2001):** *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons.
- [12] **Betten, J. (1993):** *Kontinuumsmechanik, Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
- [13] **Bicanic, N., Pearce, C. J., Owen, D. R. J. (1994):** ‘Failure predictions of concrete like materials using softening Hoffman plasticity model’, in: **Mang, H., Bicanic, N., de Borst, R.** (eds.), *Proceedings of EURO-C 1994 International Conference; Computer Modelling of Concrete Structures 1*, Innsbruck, Austria, pp. 185–198.
- [14] **Braess, D. (1997):** *Finite Elemente*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 2. Auflage.
- [15] **Brendler, S. (1996):** *Elastoplastische Materialmodelle für zweidimensionale Finite Elemente*, Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [16] **Bresler, B., Scordelis, A. C. (1963):** ‘Shear strength of reinforced concrete beams’, *ACI Journal*, Vol. 60, pp. 51–74.
- [17] **Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. (1993):** *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main.
- [18] **CEB-FIP Comité Euro-International du Béton, . (1993):** *CEB-FIP model code 1990*, Thomas Telford.
- [19] **Chen, F. (2001):** *Numerische Simulation des nichtlinearen Trag- und Schädigungsverhaltens von Stahlbeton-Stabtragwerken bei monotoner und zyklischer Beanspruchung*, Dissertation, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum.



- [20] **Coleman, B. D., Gurtin, M. E. (1967)**: ‘Thermodynamics with internal state variables’, *J. Chem. Phys.*, Vol. 47(2), pp. 597–613.
- [21] **Coleman, B. D., Noll, W. (1963)**: ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity’, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 13, pp. 167–178.
- [22] **Crisfield, M. A., Wills, J. (1989)**: ‘Analysis of R/C panels using different concrete models’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115(3), pp. 578–597.
- [23] **de Boer, R. (1982)**: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [24] **de Borst, R. (1991)**: ‘The zero-normal-stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity’, *Comm. Appl. Num. Meth.*, Vol. 7, pp. 29–33.
- [25] **de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M., van Gils, M. A. J. (1995)**: ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’, *Computers & Structures*, Vol. 55, pp. 581–588.
- [26] **den Uijl, J. A., Bigaj, A. J. (1996)**: ‘A bond model for ribbed bars based on concrete confinement’, *Heron*, Vol. 41(3).
- [27] **Eberhardsteiner, J. (1991)**: *Synthese aus konstitutivem Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, nichtlinear-elastischer Werkstoffgesetze und Finite-Elemente-Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*, Dissertation, Technische Universität Wien.
- [28] **Eberhardsteiner, J., Hofstetter, G., Mang, H. A., Meschke, G., Walter, H. (1989)**: ‘Traglastanalyse von a) schlaff bewehrten, dickwandigen Konstruktionselementen und b) vorgespannten dünnwandigen Schalen aus Beton’, in: **Stein, E.** (ed.), *Nichtlineare Berechnungen im konstruktiven Ingenieurbau*, Springer, Berlin, pp. 303–323.
- [29] **Eberhardsteiner, J., Meschke, G., Mang, H. A. (1987)**: *Triaxiales konstitutives Modellieren von Beton*, Institut für Festigkeitslehre, TU Wien.
- [30] **El-Mezaini, N., Citipitioglu, E. (1991)**: ‘Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 117, pp. 2851–2864.
- [31] **El-Tawil, S., Deierlein, G. G. (1999)**: ‘Strength and ductility of concrete encased composite columns’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 125, pp. 1009–1019.
- [32] **El-Tawil, S., Deierlein, G. G. (2001)**: ‘Nonlinear analysis of mixed steel-concrete moment frames. Part I: Beam-column element formulation’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 127, pp. 647–655.
- [33] **Elwi, A. E., Hruday, T. M. (1989)**: ‘Finite element model for curved embedded reinforcement’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, pp. 740–753.
- [34] **Erhart, T. (2004)**: *Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nicht-linearem Materialverhalten*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 44, Universität Stuttgart.
- [35] **Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. (1972)**: ‘On nonlocal elasticity’, *Int. J. Eng. Science*, Vol. 10, pp. 233–248.
- [36] **Feenstra, P. H. (1993)**: *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [37] **Feist, C. (2004)**: *A Numerical Model for Cracking of Plain Concrete Based on the Strong Discontinuity Approach*, Dissertation, Institut für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre, Universität Innsbruck.
- [38] **Gebekken, N. (1996)**: *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Verbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*, Habilitationsschrift, Institut für Mechanik und Statik, Universität der Bundeswehr München, Bericht-Nr. 96/1.
- [39] **Hajjar, J. F., Gourley, B. C. (1997)**: ‘A cyclic nonlinear model for concrete-filled tubes. I: Formulation’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 123, pp. 736–744.

- [40] **Hartmann, S., Bischoff, M., Ramm, E. (2005)**: ‘On the performance of 3D elements for shell analysis with non-linear softening plasticity models’, in: **Owen, D. R. J., Oñate, E., Suárez, B.** (eds.), *Proceedings of Computational Plasticity VIII; Fundamentals and Applications 1*, CIMNE, Barcelona, Spain, pp. 649–652.
- [41] **Haufe, A. (2001)**: *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 35, Universität Stuttgart.
- [42] **Haupt, P. (2000)**: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer Verlag.
- [43] **Hencky, H. (1924)**: ‘Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen’, *ZAMM*, Vol. 4, pp. 323–334.
- [44] **Hillerborg, A., Modéer, M., P.-E., P. (1976)**: ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’, *Cement & Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773–782.
- [45] **Hilmy, S. I., Abel, J. F. (1985)**: ‘A strain-hardening concentrated plasticity model for nonlinear dynamic analysis of steel buildings’, *Proc., NUMETA85, Numerical Methods in Engineering, Theory and Applications*, Vol. 1, pp. 303–314.
- [46] **Hilsdorf, H. K., Reinhardt, H.-W. (2001)**: ‘Beton’, in: *Betonkalender 2001, Teil 1*, Ernst & Sohn-Verlag, Berlin, pp. 1–144.
- [47] **Hofstetter, G. (1990)**: *Physikalisch und geometrisch nichtlineare Traglastanalysen von Spannbetonscheiben, -platten und -schalen mittels der Methode der Finiten Elemente*, Dissertation, Technische Universität Wien.
- [48] **Hofstetter, G., Mang, H. A. (1995)**: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- [49] **Hofstetter, G., Simo, J. C., Taylor, R. L. (1993)**: ‘A Modified Cap Model: Closest Point Solution Algorithms’, *Computers & Structures*, Vol. 46, pp. 203–214.
- [50] **Hofstetter, G., Taylor, R. L. (1991)**: ‘Treatment of the Corner Region for Drucker-Prager Type Plasticity’, *ZAMM*, Vol. 71, pp. 589–591.
- [51] **Hughes, T. J. R. (2000)**: *The Finite Element Method*, Dover Publications, Inc.
- [52] **Jefferson, A. D. (2004)**: ‘Contribution to WP2/TG2, Test No. 5: 3D Torsion Test’, <http://nwalad.wibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss5/>.
- [53] **Jirásek, M. (2000)**: *Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*, Courses on Damage and Fracture Mechanics, München, Lectures reads.
- [54] **Jirásek, M., Belytschko, T. (2002)**: ‘Computational Resolution of Strong Discontinuities’, in: **Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J.** (eds.), *Proc. World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*, Vienna University of Technology, Vienna.
- [55] **Jirásek, M., Patzák, B. (2002)**: ‘Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models’, *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1279–1293.
- [56] **Ju, J. W. (1990)**: ‘Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 116, pp. 2764–2770.
- [57] **Kang, H. D., Willam, K., Shing, B., Spacone, E. (2000)**: ‘Failure analysis of R/C columns using a triaxial concrete model’, *Computers & Structures*, Vol. 77, pp. 423–440.
- [58] **Karihaloo, B. L. (1992)**: ‘Failure modes of longitudinally reinforced beams’, in: **Carpinteri, A.** (ed.), *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, Elsevier Applied Science, Amsterdam, pp. 523–546.
- [59] **Karihaloo, B. L. (1995)**: *Fracture Mechanics & Structural Concrete*, Longman Scientific & Technical, Essex, England.
- [60] **Koiter, W. T. (1953)**: ‘Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface’, *Quart. of Appl. Math.*, Vol. 11, pp. 350–354.

- [61] **Kotsovos, M. D., Newman, J. B. (1978)**: ‘Generalized Stress-Strain Relations for Concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 104, pp. 845–856.
- [62] **Krejčí, H., Mang, H. A. (1986)**: ‘Zur Traglastberechnung von Stahlbetonkonstruktionen nach der Methode der Finiten Elemente’, *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 81, pp. 15–21.
- [63] **Kreller, H. (1989)**: *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangeinwirkung*, Dissertation, Mitteilung des Instituts für Werkstoffe im Bauwesen Nr. 4, Universität Stuttgart.
- [64] **Kröner, E. (1967)**: ‘Elasticity theory of materials with long range cohesive forces’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 3, pp. 731–742.
- [65] **Kuhl, E. (2000)**: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 32, Universität Stuttgart.
- [66] **Kupfer, H. B., Gerstle, K. H. (1973)**: ‘Behavior of concrete under biaxial stresses’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 99, pp. 853–866.
- [67] **Lee, T., Pan, A. D. E. (2001)**: ‘Analysis of composite beam-columns under lateral cyclic loading’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 127, pp. 186–193.
- [68] **Lemaître, J. (1983)**: ‘A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture’, *J. Eng. Mat. & Techn.*, Vol. 107, pp. 83–89.
- [69] **Lubliner, J. (1995)**: *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- [70] **Malvern, L. E. (1969)**: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [71] **Marotti de Sciarra, F. (1997)**: ‘General theory of damage elastoplastic models’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 123, pp. 1003–1011.
- [72] **Marsden, J. E., Hughes, T. J. R. (1983)**: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [73] **Mehmel, A., Becker, G. (1965)**: ‘Zur Schubbemessung des kurzen Kragarms’, *Bauingenieur*, Vol. 40, p. 224.
- [74] **Mehmel, A., Freitag, W. (1967)**: ‘Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen’, *Bauingenieur*, Vol. 42, pp. 362–369.
- [75] **Menrath, H. (1999)**: *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 29, Universität Stuttgart.
- [76] **Meschke, G. (1991)**: *Synthese aus konstitutivem Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, elasto-plastischer Werkstoffmodelle und Finite Elemente Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*, Dissertation, Technische Universität Wien.
- [77] **Mindlin, R. D. (1965)**: ‘Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 1, pp. 417–438.
- [78] **Mirza, S. A., Hyttinen, V., Hyttinen, E. (1996)**: ‘Physical tests and analysis of composite steel-concrete beam-columns’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 122, pp. 1317–1326.
- [79] **Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999)**: ‘A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 46, pp. 131–150.
- [80] **Nelissen, L. J. M. (1972)**: ‘Biaxial testing of normal concrete’, *Heron*, Vol. 18(1).
- [81] **Ngo, D., Scordelis, A. (1967)**: ‘Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams’, *Journal of ACI*, Vol. 64, pp. 152–163.
- [82] **Oliver, J. (1989)**: ‘A consistent characteristic length for smeared cracking models’, *J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 461–474.
- [83] **Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. (2002)**: ‘Contribution to WP2/TG2, Test No.1: L-shaped panel’, <http://nw-ialad.wibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss1/>.

- [84] **Oliver, J., Huespe, A. E., Samaniego, E., Chaves, E. W. V. (2004):** ‘Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 28, pp. 609–632.
- [85] **Ottosen, N. S. (1977):** ‘A Failure Criterion For Concrete’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 103, pp. 527–535.
- [86] **Pankaj, Bicanic, N. (1997):** ‘Detection of Multiple Active Yield Conditions for Mohr-Coulomb Elasto-Plasticity’, *Computers & Structures*, Vol. 62, pp. 51–61.
- [87] **Peerlings, R. H. J. (1999):** *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Netherlands.
- [88] **Peerlings, R. H. J., Geers, M. G. D., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M. (2001):** ‘A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua’, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 38, pp. 7723–7746.
- [89] **Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z. P. (1987):** ‘Nonlocal Damage Theory’, *J. Eng. Mech.*, Vol. 113, pp. 1512–1533.
- [90] **Pontes, I. D. S., Borges, L. A., Zouain, N., Lopes, F. R. (1997):** ‘An approach to limit analysis with cone-shaped yield surfaces’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 4011–4032.
- [91] **Pramono, E., Willam, K. J. (1989):** ‘Implicit integration of composite yield surfaces with corners’, *Eng. Comp.*, Vol. 7, pp. 186–197.
- [92] **Rabotnov, I. N. (1963):** ‘On the equations of state for creep’, in: *Progress in applied mechanics – The Prager anniversary volume*, Mac Millan, New York, pp. 307–315.
- [93] **Rehm, G. (1961):** ‘Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton’, *Schriftenreihe des DafStb Heft 138. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin*.
- [94] **Reinhardt, H. W. (1984):** ‘Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete’, *Heron*, Vol. 29(2).
- [95] **Reuss, A. (1929):** ‘Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie’, *ZAMM*, Vol. 10, pp. 266–274.
- [96] **Riggs, H. R., Powell, G. H. (1990):** ‘Tangent constitutive matrices for inelastic finite element analysis’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp. 1193–1203.
- [97] **RILEM Commitee FMC 50, . (1985):** ‘Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of the three-point bend tests on notched beams’, *Mater. Struct.*, Vol. 18, pp. 285–290.
- [98] **Sadek, M., Shahrour, I. (2004):** ‘A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials’, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 28, pp. 931–946.
- [99] **Schütt, J. (2005):** *Ein 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung*, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.
- [100] **Simo, J. C., Kennedy, J. G., Govindjee, S. (1988):** ‘Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity; Loading/unloading conditions and numerical algorithms’, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2161–2185.
- [101] **Sluys, L. J. (1992):** *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [102] **Spacone, E., El-Tawil, S. (2004):** ‘Nonlinear analysis of steel-concrete composite structures: State of the Art’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 130, pp. 159–168.
- [103] **Stein, E., Barthold, F.-J. (1992):** *Elastizitätstheorie*, Unterlagen zur Vorlesung ”Elastizitätstheorie”, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [104] **Suanno, R. L. M. (1995):** *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 18, Universität Stuttgart.
- [105] **Takeda, T., Sozen, M. A., Nielsen, N. (1970):** ‘Reinforced concrete response to simulated earthquakes’, *J. Struct. Div.*, Vol. 96, pp. 2557–2573.

- [106] **Tikhomirov, D., Stein, E. (1999)**: ‘Anisotrope Schädigungskonzepte für nichtlineare Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen’, *Bauingenieur*, Vol. 74, pp. 36–44.
- [107] **Toupin, R. A. (1962)**: ‘Elastic materials with couple–stresses’, *Arch. Ration. Mech. Analysis*, Vol. 11, pp. 385–414.
- [108] **Truesdell, C., Noll, W. (1965)**: ‘The Non–Linear Field Theories of mechanics’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer Verlag, Berlin.
- [109] **Truesdell, C., Toupin, R. (1960)**: ‘The Classical Field Theories’, in: **Flügge, S.** (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Springer Verlag, Berlin.
- [110] **van Mier, J. G. M., Reinhardt, H. W., van der Vlugt, B. W. (1987)**: ‘Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton’, *Bauingenieur*, Vol. 62, pp. 353–361.
- [111] **Vecchio, F. J., Shim, W. (2004)**: ‘Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests’, *J. Struct. Eng.*, Vol. 130, pp. 461–469.
- [112] **Vonk, R. A. (1992)**: *Softening of Concrete Loaded in Compression*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- [113] **Weimar, K. (1989)**: *Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder*, Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 10, Universität Stuttgart.
- [114] **Willam, K. J. (1984)**: ‘Experimental and computational aspects of concrete fracture’, in: **Damjanović, F., Hinton, E., Owen, D. R. J., Bićanić, N., Simović, V.** (eds.), *Computer–Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, pp. 33–69.
- [115] **Willam, K. J., Warnke, E. (1975)**: ‘Constitutive Model for Triaxial Behaviour of Concrete’, in: *Proc. Concrete Structures Subjected to Triaxial Stress*, Int. Assoc. for Bridge and Struc. Eng., Section III, Zürich, pp. 1–30.
- [116] **Winkler, B. J. (2001)**: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*, Dissertation, Innsbruck University Press, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck.
- [117] **Wriggers, P. (2001)**: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag.
- [118] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1989)**: *The Finite Element Method, Volume I & II*, McGraw–Hill, New York – London.

# Lebenslauf

Name: Frank Huber  
Geburtstag: 06.01.1976  
Geburtsort: Dillingen  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Eltern: Hansjörg und Monika Huber, geb. Urban

Familienstand: ledig

1982 – 1986 Grundschule Dillingen

1986 – 1995 Johann-Michael-Sailer-Gymnasium, Dillingen  
Abschluss: Abitur

10/1996 – 02/2001 Studium Bauingenieurwesen an der  
Universität Stuttgart

02/2001 Abschluss: Dipl.-Ing.

03/2001 – 04/2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Institut für Geotechnik  
der Universität Stuttgart

05/2001 – 03/2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Institut für Baustatik  
der Universität Stuttgart





## Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.



- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.

- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.

- 43 (2004) M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien







Universität Stuttgart

ISBN 3-00-019528-9