

# Traglastberechnung von räumlichen Stabtragwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen

von

PETER OSTERRIEDER



Bericht Nr. 1 (1983)

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 1983

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1983

Hauptberichter: Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer  
Professor Dr.-Ing. J. Oxfort

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Gesamtherstellung: **aku** - Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

## Zusammenfassung

Zur Traglastberechnung räumlicher Stabtragwerke wird in dieser Arbeit ein finites Balkenelement für beliebig offene dünnwandige Querschnitte entwickelt. Die inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen werden auf kontinuumsmechanischer Grundlage mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen formuliert. Um die Gesamtverformungen in einen Starrkörperanteil und einen Deformations- oder Relativverformungsanteil zu zerlegen, wird eine mitgehende Koordinatendarstellung mit lokalen kartesischen elementfesten Koordinatensystemen verwandt. Bei dieser speziellen mitgehenden Lagrange - Darstellung sind alle statischen und kinematischen Variablen auf den Zustand zu Beginn eines Inkrementes bezogen. Die Formulierung gestattet die Beschreibung beliebig großer Verschiebungen und Rotationen. Die bekannten Wlassow - Hypothesen für offene dünnwandige Querschnitte werden dabei sowohl für die Verformungsinkremente als auch für die gesamten Relativverformungen verwendet. Die Ableitung der inkrementellen Tangentensteifigkeitsbeziehungen erfolgt mit kubischen Interpolationspolynomen für die Verschiebungen senkrecht zur Stabachse sowie die Torsionsverdrehung und linearen Funktionen für die Längsverschiebung. Die inneren Kräfte einer jeden Konfiguration erhält man nach einer Sekantensteifigkeitsmethode aus den gesamten Relativverformungen.

Das entwickelte Element wird zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Untersuchung von ebenen und räumlichen Rahmentragwerken eingesetzt. In der bilinearen Spannungs - Dehnungs - Beziehung für elastisch - plastischen Werkstoff ist für wiederholte Belastung eine kinematische Verfestigung vorgesehen. Der Einfluß der Schubspannungen aus St. Venantscher Torsion auf die v. Mises - Fließbedingung wird näherungsweise mit der Nadaischen Sandhügelanalogie erfaßt.

Mehrere numerische Beispiele zeigen im Vergleich mit bekannten Lösungen die Brauchbarkeit des Verfahrens.

## Summary

In the present study a nonlinear finite beam element with an arbitrary, thin-walled open cross section for ultimate load analyses of 3-D framed structures is derived. Based on a continuum mechanic's approach the incremental equilibrium equations are formulated using the principle of virtual work. In order to decompose the total deformation into the rigid body modes and a pure deformation mode a moving coordinate formulation has been adopted in which a local cartesian element frame is attached to the moving element. In this special updated Lagrangian approach all static and dynamic variables are referred to the configuration at the beginning of each increment. The formulation allows to describe arbitrarily large displacements and rotations. The pure element deformations are described by the usual Wlassow hypotheses of thin - walled open cross sections. The incremental tangent stiffness relations are derived using cubic interpolation functions for the lateral and torsional displacement and linear functions for the axial displacement. The stress resultants of each intermediate configuration are obtained by a secant stiffness approach using the total relative deformations.

The displacement beam element is applied in geometrically and materially nonlinear analyses of plane and spatial frames. A bilinear stress strain relationship is used allowing for an elasto - plastic material law with kinematic hardening for repeated loading. Shear stresses due to uniform torsion are approximately limited to the v. Mises yield condition using Nadai's sand heap analogy.

Several numerical examples are given and compared to previous results.

# Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	Seite	7
1. Einleitung und Zielsetzung	12	
2. Literaturübersicht	14	
2.1 Das Biegetorsionsproblem	15	
2.2 Große Verschiebungen und Rotationen	22	
3. Lösungskonzept der Arbeit	24	
4. Die stoff-freie Grundgleichung zur Beschreibung des inkrementellen Gleichgewichtes	26	
4.1 Begriffe, Definitionen	26	
4.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Kontinuum	27	
4.3 Mitgehende Koordinaten Darstellung	29	
4.4 Voraussetzungen, Annahmen	37	
4.4.1 Theorie der Stäbe mit offenem dünnwandigem Querschnitt	37	
4.4.2 Werkstoffannahmen	42	
4.4.3 Endliche Verformungen	43	
4.5 Querschnittskinematik	43	
4.5.1 Verformungen in der Querschnittsebene	44	
4.5.2 Verformungen senkrecht zur Querschnittsebene	45	
4.5.3 Berücksichtigung der Kinematik in der Grundgleichung	48	
4.6 Schnittgrößen	49	
4.7 Eulersche Differentialgleichungen und Randbedingungen	50	
5. Stoffbezogene Grundgleichung	53	
5.1 Werkstoffbeschreibung	53	
5.2 Linear elastisches Werkstoffverhalten	59	
5.3 Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten	60	
6. Diskretisierung mit der FE - Methode	64	

7.	Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrizen	68
7.1	Linear elastisches Werkstoffverhalten	68
7.2	Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten	71
7.3	Vergleich - Wertung	77
8.	Zusammenbau der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix	79
8.1	Transformationsbeziehungen	79
8.2	Verträglichkeit und Gleichgewicht	86
9.	Schnittgrößen am endlich verformten System	88
9.1	Relativverformungen	90
9.2	Schnittgrößen bei linear elastischem Werkstoffverhalten	95
9.3	Schnittgrößen bei elastisch - plastischem Werkstoffverhalten	99
10.	Numerisches Vorgehen	103
10.1	Last - Verformungsberechnung	103
10.1.1	Iteration mit Lastkontrolle	104
10.1.2	Iteration mit Kontrolle der Bogenlänge im Last - Verformungsraum	106
10.2	Iterationskriterien	107
10.3	Eigenwertuntersuchung	108
10.4	Beschreibung des Rechenablaufs	110
11.	Imperfektionen	115
12.	Numerische Anwendung	117
12.1	Querschnittswerte	117
12.2	Geometrisch nichtlineare Berechnung	122
12.2.1	Lineare Anfangsstabilitätsuntersuchungen zur Lösung von Verzweigungsproblemen	122
12.2.2	Endliche Verschiebungen und Rotationen in der Ebene	132
12.2.3	Endliche Verschiebungen und Rotationen im Raum	135
12.3	Physikalisch nichtlineare Berechnung	138
12.4	Geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung	144
13.	Zusammenfassung und Ausblick	150
	Schrifttum	152
	Anhang	171

# Bezeichnungen

## Indizierung

links	oben	m	Wirkungszustand
	unten	n	Bezugszustand
rechts	oben	e	elastischer Anteil
		pl	plastischer Anteil
		i,j	Elementknoten i,j
	unten	i,j,k	Komponenten der kartesischen Koordinatensysteme
		,j	Ableitung nach der j-ten Koordinate
		i,j	Ende i,j des Querschnittssegments

## Geometrie

X, Y, Z	globales raumfestes kartesisches Koordinatensystem
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	lokales kartesisches Koordinatensystem des unverformten Stabelements
$\left. \begin{array}{l} \bar{x}^1, \bar{y}^1, \bar{z}^1 \\ x, y, z \end{array} \right\}$	lokales kartesisches KOS des Stabelementes im Zustand 1
$\bar{x}^2, \bar{y}^2, \bar{z}^2$	lokales kartesisches KOS des Stabelementes im Zustand 2
$x^i, y^i, z^i$	lokales kartesisches Knotenkoordinatensystem des Elementendes i im Zustand 1
$x^j, y^j, z^j$	lokales kartesisches Knotenkoordinatensystem des Elementendes j im Zustand 1
$\bar{y}, \bar{z}$	lokales kartesisches KOS eines Querschnittssegmentes
$m_V, m_A, m_L$	Volumen, Querschnittsfläche, Länge eines Stabelementes im Zustand m
$d^{(m_v)}, d^{(m_a)}, d^{(m_l)}$	infinitesimales Volumens-, Flächen-, Längenelement im Zustand m

${}^m\rho$	Dichte im Zustand m
s	Wandkoordinate entlang der Profilmittellinie im Querschnitt
$\omega$	Wölbkoordinate

Statische und kinematische Größen

${}^m_{n^s}ij$	Kirchhoff - Piola Spannungstensor 2. Art (KP 2)
${}^m_{m^{\tau}}ij$	Cauchy Spannungstensor
${}^n_{n^s}ij$	Inkrement des Piola - Kirchhoff Spannungstensors 2. Art
$1^{\hat{s}}_{x\bar{z}}$	Inkrement der KP 2 - Schubspannung in Richtung der Profilmittellinie infolge Wölbkrafttorsion
$1^s_{x\bar{z}}$	Inkrement der KP 2 - Schubspannung in Richtung der Profilmittellinie infolge St. Venantscher Torsion
$1^R_{1^{\tau}xx}$	Cauchy Eigenspannungskomponente
$1^s$	Schnittgrößen im Zustand 1
S	Schnittgrößeninkremente
${}^m_{n^{x_i,j}} = \frac{\partial {}^m_{x_i}}{\partial {}^n_{x_j}}$	Deformationsgradient
${}^m_{n^e}ij$	Green - Lagrange Verzerrungstensor
${}^n_{n^e}ij$	Inkrement des Green - Lagrange Verzerrungstensors
${}^m_{m^e}ij$	Almansi Verzerrungstensor
${}^m_U, {}^m_V, {}^m_W$	Verschiebungen und Verdrehungen im X, Y, Z - KOS (einschließlich der Starrkörperbewegung)
${}^m_{\Phi_X}, {}^m_{\Phi_Y}, {}^m_{\Phi_Z}$	
${}^m_u, {}^m_v, {}^m_w$	Verschiebungen und Verdrehungen im x, y, z - KOS (ohne die Starrkörperbewegung)
${}^m_{\Theta_x}, {}^m_{\Theta_y}, {}^m_{\Theta_z}$	



$\bar{u}, \bar{v}$	Verschiebungsinkremente im $\bar{y}, \bar{z}$ - KOS
$m_\beta$	Elementwinkel
$U, V, W$	Verformungsinkremente im $X, Y, Z$ - KOS
$\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z$	(mit Starrkörperanteilen)
$u, v, w$	Verformungsinkremente im $x, y, z$ - KOS
$\vartheta_X, \vartheta_Y, \vartheta_Z$	(ohne Starrkörperanteile)
$\beta$	Inkrement des Elementwinkels

### Konstitutive Größen

$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$T$	Verfestigungsmodul
$E_t, G_t$	Tangentenmoduli
$\epsilon^e$	elastischer Dehnungsanteil
$\epsilon^{pl}$	plastischer Dehnungsanteil
$\epsilon_F$	einaxiale Anfangsfließdehnung
$\sigma_F, \overset{1}{\tau}_F$	einaxiale Anfangsfließspannung
$\overset{1}{C}_{ijkl}$	konstitutiver Tensor

### Arbeitsausdrücke

${}^m_\delta W(i), {}^m_\delta W(a)$	virtuelle innere bzw. äußere Arbeit im Zustand $m$
--------------------------------------	--

### Sonstige Größen

$e_{ijk}$	Permutationssymbol
$\delta_{ij}$	Kronecker Symbol
$\lambda_{ki}$	Eigenwert (Lastfaktor)

### Querschnittsgrößen

$b_k$	Segmentlänge
$t_k$	Segmentdicke
$F_{abc} = \int_A abc d(a)$	elastische Querschnittswerte

$J_T$  St. Venantsches Trägheitsmoment  
 $\tilde{F}_{ab} = \int_A E_t \, ab \, d(a)$  elastisch - plastische Querschnittswerte

### Matrizen und Vektoren

$n_1, n_3$	Vektoren der Ansatzfunktionen
$u_s$	Vektor der Stabendverschiebungen in x - Richtung
$v_M$	Vektor der Stabendverformungen in der y, x - Ebene
$w_M$	Vektor der Stabendverformungen in der z, x - Ebene
$\mathfrak{J}_{xM}$	Vektor der Stabendverformungen für Torsion
$v_l$	Vektor aller Stabendverformungen im lokalen x, y, z - KOS
$\bar{v}_l$	Vektor aller auf S bezogenen Stabendverformungen im x, y, z - KOS
$S_l$	Vektor aller Schnittgrößen im x, y, z - KOS
$\bar{S}_l$	Vektor aller auf S bezogenen Schnittgrößen im x, y, z - KOS
$k_e, k_g, k_l$	lokale Elementsteifigkeitsmatrizen
$S_G, v_G, k_G$	globale Elementgrößen
${}^1S_l, {}^1v_l$	Gesamtgrößen im x, y, z - KOS
${}^1k_s$	lokale Sekantensteifigkeitsmatrix im Zustand 1
$\Delta T$	Matrix zur Transformation der Elementgrößen auf den gemeinsamen Bezugspunkt S
${}^m T$	Transformationsmatrix zwischen dem globalen KOS und dem lokalen Elementsystem im Zustand m
$T_n$	Transformationsmatrix zwischen zwei inkrementell benachbarten Konfigurationen

$t$	Untermatrix der Transformationsmatrix
${}^m R$	Vektor der äußeren Knotenkräfte im Zustand $m$
${}^m F$	Vektor der inneren Knotenkräfte im Zustand $m$
$K$	inkrementelle Tangentensteifigkeitsmatrix des Systems im Zustand 1
${}^1 K_s$	Sekantensteifigkeitsmatrix des Systems im Zustand 1
$r$	Vektor aller inkrementellen Knotenverschiebungen und Knotenrotationen
$\delta r$	Vektor aller virtuellen Knotenverformungen

## 1. Einleitung und Zielsetzung

Räumliche Rahmentragwerke werden bei der statischen Berechnung häufig in mehrere zweidimensionale, nur in ihren Ebenen beanspruchte Systeme zerlegt. Die räumliche Belastung wird aufgeteilt und den einzelnen Ebenen anteilig zugewiesen. Eine Interaktion bei der Lastabtragung zwischen den verschiedenen Ebenen bleibt somit unberücksichtigt. Für die Bemessung der einzelnen ebenen Rahmen ist dann die einachsige Biegung in diesen Ebenen maßgebend. Es hat sich gezeigt, daß damit in den meisten Fällen eine auf der sicheren Seite liegende Dimensionierung gelingt. Die tatsächliche Beanspruchung und Lastabtragung kann so jedoch nicht erfaßt werden. Bei solchem Vorgehen führt deshalb die Bemessung nur selten zu einer optimalen Konstruktion.

Auch wenn planmäßig ein ebenes Stabtragwerk mit einer in dieser Ebene wirkenden Belastung vorliegt, zeigt sich oft ein räumliches Verformungsverhalten. Kleine geometrische oder Last-Imperfektionen können besonders bei den häufig verwendeten Stahlbauprofilen mit großer Steifigkeit in der Tragwerksebene und einer wesentlich geringeren Steifigkeit senkrecht dazu ein seitliches Ausweichen bei gleichzeitiger Querschnittsverdrehung bewirken. Dieser - als Biegedrillknicken bezeichnete - Vorgang entsteht wegen der geringen Torsionssteifigkeit, gepaart mit geringer seitlicher Biegesteifigkeit, solcher offener, dünnwandiger Profile. Das Biegedrillknicken ist deshalb gefährlich für einen Stab, weil die Traglast durch seitliches Ausweichen wesentlich herabgesetzt werden kann.

Die in dieser Arbeit untersuchten Stäbe mit offenem, dünnwandigem Querschnitt sind der numerischen Untersuchung wegen bei materieller Nichtlinearität durch abschnittsweise ebene, dünne Blechsegmente mit einfachem Zusammenhang zu modellieren. Symmetrie des Querschnittes ist nicht erforderlich. Als Beispiele seien die üblichen I-, T- oder L-Profile des Stahlbaus sowie die vielfältigen Formen des Stahlleichtbaus genannt. Die Herstellung kann durch Schweißen, Walzen oder Kaltverformen erfolgen.

Das zu lösende allgemein geometrisch und physikalisch nichtlineare dreidimensionale Stabproblem stellt nicht eine einfache Erweiterung der zweidimensionalen Lösung dar. Außer durch Biegung um eine zweite Achse werden die Profile auch durch Torsion beansprucht, wodurch der Querschnitt auch im linearen Fall nach der Verformung im allgemeinen nicht mehr eben ist. Eine weitere in der Ebene unbekannte Schwierigkeit ist die fehlende Vektoreigenschaft der großen Rotationen. Besondere Beachtung erfordert auch das Stabilitätsproblem mit Gleichgewichtsverzweigung aus einem infolge Plastizierung nichtlinearen Vorbeulbereich heraus. Zur Lösung scheidet eine im elastischen Bereich übliche lineare Stabilitätsuntersuchung zur Ermittlung der kritischen Lasten aus.

Für die Erarbeitung von Entwurfskriterien und Vorschriften ist es notwendig, das Verhalten von Tragwerken oder Tragwerkselementen bis zur Traglast und unter Umständen auch danach zu untersuchen. Die dann sich einstellenden Verformungen können so beträchtlich sein, daß nur eine Theorie endlicher Deformationen genaue Aussagen über das Last - Verformungsverhalten liefern kann. Es wird deshalb im folgenden ein finites Balkenelement zur Verwendung im Programmsystem NISA 80 [47] entwickelt, welches auf die üblichen Einschränkungen für die Verformungen verzichtet.

## 2. Literaturübersicht

Eine Analyse des zum Thema gehörenden Schrifttums führte zu der folgenden nach Stichpunkten gegliederten Übersicht.

1. Statische Systeme:  
Einfeldträger, Durchlaufträger, ebene/räumliche Rahmen.
2. Belastung:  
ebene/räumliche Beanspruchung, ohne/mit Normalkräften, Be- und Entlastung, Gesamtlast/inkrementelle Laststeigerung, richtungstreue Belastung/Folgelasten.
3. Werkstoffverhalten:  
linear elastisch / nichtlinear elastisch / elastisch - plastisch, im Querschnitt konstante / veränderliche Werte für Elastizitätsmodul und Fließspannung, ohne/mit Berücksichtigung der Schubspannung in der Fließbedingung, isotrope/kinematische Verfestigung.
4. Querschnittsform:  
doppelt- / einfach- / unsymmetrisch.
5. Kinematik:  
kleine / große Verschiebungen und Rotationen, kleine / große Verzerrungen, ohne / mit Querschnittsverzerrungen (z.B. als lokale Instabilitäten).
6. Imperfektionen:  
geometrische Imperfektionen, Lastausmittigkeiten, Eigen-  
spannungen.
7. Ziel:  
Berechnung der Last - Verformungskurve, Lösung des Eigenwertproblems.
8. Methoden:  
direkte Lösung, Übertragungsverfahren, Weggrößenverfahren, finite Element-Methode (Balken- / Platten- und Scheibenelemente, nichtlineare/lineare Elemente).

Zur detaillierten Betrachtung wird zwischen dem Schrifttum zum klassischen Biegetorsionsproblem und dem zur Thematik der großen Verformungen unterschieden.

## 2.1 Das Biegetorsionsproblem

Die Differentialgleichungen für das Problem des durch zweiachsige Biegung und Torsion beanspruchten offenen dünnwandigen Stabes aus linear elastischem Werkstoff wurden in grundlegenden Arbeiten von Wagner, Kappus, Chwalla und Wlassow entwickelt. Ein ausführlicher Literaturüberblick in historischer Reihenfolge findet sich in [30]. Eine allgemeine systematische Herleitung des Differentialgleichungssystems für die Theorie II. Ordnung wird von Steinbach in [118] mittels direkter Gleichgewichtsbetrachtungen gegeben. Eine erste Linearisierung in diesen Gleichungen führt zum Verschwinden der Produkte der Verschiebungsableitungen. Die so entstehenden, in den Verschiebungen linearen, gekoppelten Differentialgleichungen 4. Ordnung (Euler-Gleichungen) stellen die Grundlage für alle Arbeiten aus diesem Gebiet dar. Unbekannt sind die Verschiebungen  $u$  und  $v$  senkrecht zur Stabachse sowie die Verdrehung um die Achse. Steinbach [118] bezieht die Grundgleichungen alternativ auf den Schwerpunkt oder den Schubmittelpunkt. Berücksichtigt werden verteilte Lasten und Momente. Die theoretischen Grundlagen sind auch in den Lehrbüchern zu diesem Thema von Wlassow [129], Bürgermeister, Steup, Kretzschmar [30] und Roik, Carl, Lindner [105] enthalten. Die Anwendung dieser Grundlagen in zahlreichen Beiträgen zur Berechnung von Kipp- oder Biegedrillknicklasten (nach [132] werden heute beide Fälle mit Biegedrillknicken bezeichnet) wird im folgenden im Hinblick auf die benutzte Methode untersucht. In einigen Arbeiten wird dabei die Verformung in der Lastebene wegen der dort vergleichsweise großen Steifigkeit vernachlässigt. Dadurch verkleinert sich das Problem auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Verschiebung senkrecht zur Hauptebene und die Torsionsverdrehung. In Bild 1 wurden die verschiedenen Lösungswege aller erfaßten Arbeiten schematisch dargestellt.

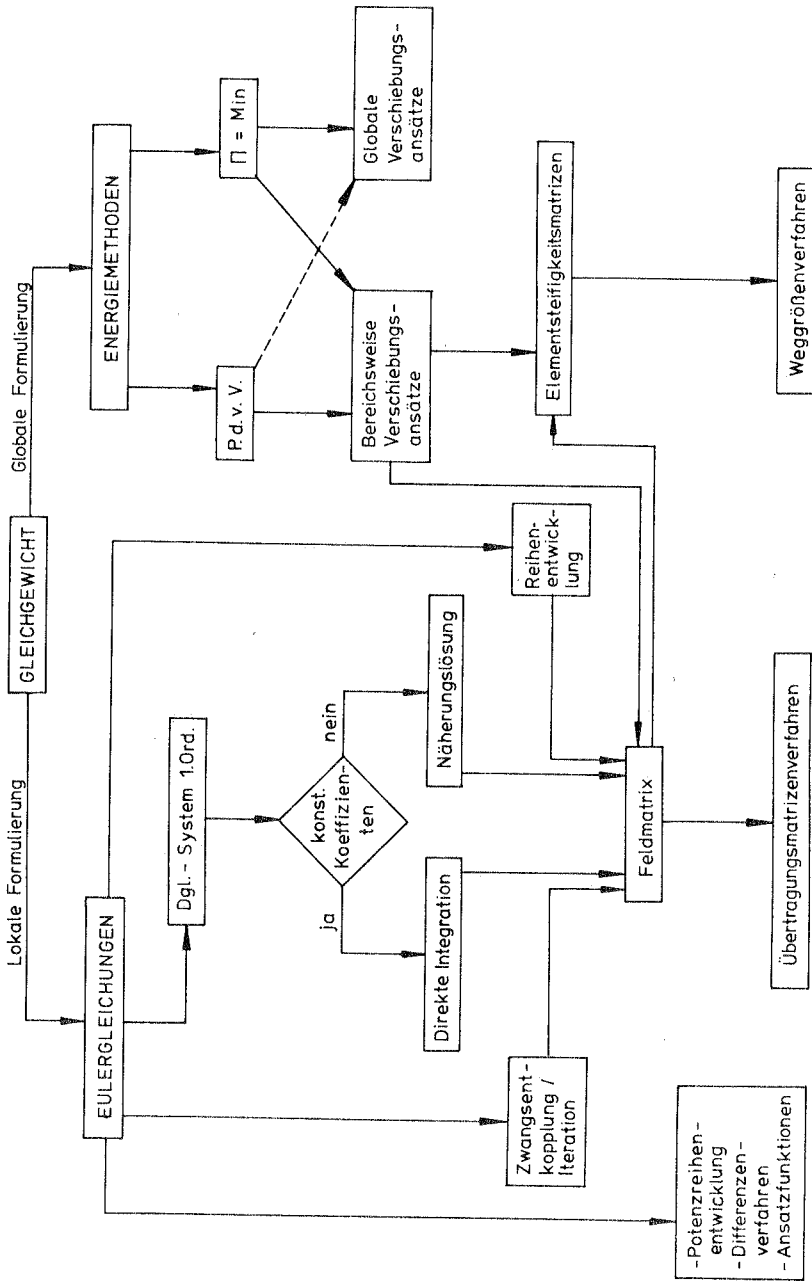


Bild 1 Lösungskonzepte für das Biegetorsionsproblem



Es zeigten sich im wesentlichen drei Vorgehensweisen:

a) Lösungen auf der Grundlage der Eulerschen  
Differentialgleichungen

Dieser gebräuchlichste Weg ermittelt zunächst entweder über direkte Gleichgewichtsbetrachtungen oder aus dem Potential durch Variation und partielle Integration die Eulerschen Differentialgleichungen und die natürlichen Randbedingungen. Diese erhält man beim Variationsproblem entweder, indem der Bereich der zugelassenen Argumentfunktionen erweitert wird, so daß diese nicht mehr an allen Rändern vorgeschriebene Werte annehmen müssen oder indem das Variationsproblem mit Nebenbedingungen mittels der Lagrange - Multiplikatoren gelöst wird [32]. Aus dem linearen Differentialgleichungssystem 4. Ordnung entsteht schließlich durch Einführen von neuen Variablen ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Eine geschlossene Lösung ist für konstante Koeffizienten der Differentialgleichung möglich. Dies gelingt nur beim statisch bestimmten Träger mit konstantem Momentenverlauf. In allen anderen Fällen ist nur eine Näherungslösung des diskretisierten Systems möglich. Ausführlich diskutiert Reuschling [103] die Methoden zur Ermittlung von Feldmatrizen aus den Differentialgleichungssystemen mit konstanten und nicht konstanten Koeffizienten. Für das letztere Problem stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung: Picard - Iteration, Potenzreihenentwicklung, Produktintegration, Exponential - Matrizenfunktion, Ritzsches Verfahren, Bildung von Produkten der Feldmatrizen einfach integrierbarer Abschnitte und die numerische Integration.

Reuschling selbst gibt der direkten numerischen Integration den Vorzug zur elastischen Berechnung von mehrfeldrigen, unsymmetrischen Stäben mit Normalkraftbelastung. Möll [77] erstellt Feldmatrizen zur Untersuchung des Kipp-Problems von beliebig gelagerten, elastischen I - Trägern sowohl über die Energiemethode mittels bereichsweiser Ritz - Ansätze als auch durch eine Reihenentwicklung für das gekoppelte

Dgl. - System. Ebenfalls aus den Differentialgleichungen erhält Unger [125] durch numerische Integration nach Runge - Kutta die Feldmatrizen zur Behandlung des elastischen Durchlaufträgers mit einfachsymmetrischem Querschnitt und veränderlicher Höhe. In seinen theoretischen Untersuchungen betrachtet Werner das Dgl. - System (Krümmung in der Lastebene wird vernachlässigt) für die Berechnung der Feldmatrizen in Biegung und Torsion als entkoppelt. Die aus der Biegebeanspruchung des teilplastizierten Stabes herrührende Änderung der Torsionsgrößen wird durch Korrekturglieder erfaßt. Labib [67] löst das Dgl. - System direkt mit Ansatzfunktionen für den räumlich imperfekten Einzelstab unter Endlasten mit nichtlinearem Werkstoffverhalten. In [127] berechnet Wagenknecht räumliche Rahmen aus linear elastischem Material nach der Theorie II. Ordnung. Aus den durch numerische Integration des Dgl. - Systems ermittelten Feldmatrizen bestimmt er die Steifigkeitsmatrizen für das Weggrößenverfahren. Eine interessante Lösung gibt Meister [75] an, der alle Kopplungsterme im Dgl. - System auf die rechte Seite bringt und diese als veränderliche Lastglieder betrachtet. Das Problem wird dadurch entkoppelt. Für jede der drei scheinbar unabhängigen Verformungen kann iterativ die Feldmatrix durch direkte Integration erstellt werden. Mit dieser Methode wird das elastisch - plastische Biegetorsionsproblem des doppelsymmetrischen Durchlaufträgers ohne Normalkraftbeanspruchung gelöst. Heil untersucht in seiner Arbeit [52] räumlich belastete Durchlaufträger mit beliebigem Werkstoffgesetz. Die für das Übertragungsmatrizenverfahren (Reduktionsverfahren) erforderlichen Feldmatrizen entstehen aus der numerischen Integration des umgewandelten Dgl.-Systems 1. Ordnung mit einem verbesserten Runge-Kutta-Verfahren. Heil vermeidet die bekannten Schwierigkeiten des Übertragungsmatrizenverfahrens bei stark abklingenden Funktionen durch Einführung von Zwischenunbekannten (s. dazu auch [27]). In der Arbeit von Bitzer [22] wird das Tragverhalten von Ein- und Zweifeldträgern mit Imperfektionen unter besonderer Berücksichtigung einer elastischen seitlichen Stützung

analysiert, wie dies bei Dachkonstruktionen häufig auftritt. Mit Annahme abschnittsweise konstanter Koeffizienten wird das Dgl.-System 1. Ordnung zur Gewinnung der Feldmatrizen direkt integriert. Hollinger und Mangelsdorf [59] entwickeln ausgehend von den Differentialgleichungen mit der Differenzenmethode ein Verfahren zur Bestimmung der Biegedrillknicklasten im elastisch - plastischen Bereich. Ähnlich wie bei Galambos [43] werden die näherungsweise errechneten Tangentenmoduli  $E_t$  und  $G_t$  zum Zeitpunkt des Verzweigens in die elastische Lösung von Timoshenko eingesetzt. Die so für den wölbfrei gelagerten Einfeldträger gefundenen kritischen Lasten stimmen gut mit einem Teil der ausgewerteten Versuchsergebnisse überein.

b 1)           Energimethode  
                  mit globalen Verschiebungsansätzen

Zur Diskretisierung des Variationsproblems stehen nach [32] die Verfahren von Euler, Ritz, Galerkin, Kantorowitsch und Trefftz zur Verfügung. Dreher [36] kontrolliert seine mit der Ritzschen Methode erhaltenen Ergebnisse für den gabelgelagerten elastischen Einfeldträger unter gleichmäßig verteilter Belastung mit einer numerischen Lösung der Differentialgleichung mit dem Mehrstellenverfahren. Hildenbrand [56] berechnet die elastischen Kipplasten von eingespannten oder gabelgelagerten Trägern mit linear veränderlicher Querschnittshöhe ebenfalls mittels Ritzscher Ansätze. Das zugrunde gelegte Potential ist dabei nur noch eine Funktion der Torsionsdrehung  $\varphi$ . In den Arbeiten von Carl [33], Lindner [68] und Bamm [13] werden systematisierte Ritz-Ansätze verwendet. Carl zeigt, daß bei Trägern, die aufgrund ihrer geringen Torsionssteifigkeit stark kippgefährdet sind, die häufig benutzte Linearisierung der im Dgl.-System als Koeffizienten auftretenden Schnittlasten zu einer beträchtlichen Unterschätzung der elastischen Biegedrillknicklast führen kann. Lindner berechnet unter der Annahme eines ideal elastischen, ideal plastischen Werkstoffes Traglasten des Einfeldträgers, indem im Rahmen einer Querschnittsiteration

elastische Restquerschnitte ermittelt und die Teilschnittgrößen der abgetrennten plastizierten Bereiche als stützende Lasten auf das Tragwerk aufgebracht werden. Bamm untersucht näherungsweise den Einfluß der Schubspannungen durch Reduzieren der für die Längsspannungen zulässigen Fließgrenze.

b 2)           Energimethode  
                 mit bereichsweisen Verschiebungsansätzen

Nahezu alle Arbeiten, welche diesen Lösungsweg verfolgen, verwenden bereichsweise Ritz-Ansätze für die unbekanntes Verformungen. Dies führt zu Verschiebungsmodellen im Sinne der Methode der finiten Elemente. Die dabei häufig benutzten Hermite-Polynome als Ansatzfunktionen sind, streng genommen, nur bei Problemen sinnvoll, bei denen an den Bereichsgrenzen keine Verschiebungs- und Kräftediskontinuitäten und keine Sprünge in den Steifigkeiten (z.B. Fließgelenke) auftreten [32], [50]. Da tatsächlich ein Querschnitt, abgesehen von reiner Normalkraftbeanspruchung bei einer linearen Dehnungsverteilung mit einer endlichen Randdehnung nie ganz durchplastizieren wird, treten auch keine Knicke, sondern nur örtliche große Krümmungen auf, die mit einer Elementverfeinerung in diesen Bereichen erfaßt werden können. In dem bislang betrachteten Schrifttum wurde die Belastung jeweils in einem Schritt auf das Tragwerk aufgebracht. Dagegen wird in den im folgenden dargestellten Arbeiten die Last inkrementell mittels Tangentensteifigkeitsmatrizen, welche sich aus der Anfangs- oder elastischen und der Anfangsspannungs- oder geometrischen Steifigkeitsmatrix zusammensetzen, gesteigert.

Krajcinovic [66] benutzt in seiner FE - Formulierung zur statischen und dynamischen Untersuchung von elastischen Stabtragwerken hyperbolische Funktionen zur Darstellung der Torsionsverdrehung. Barsoum und Gallagher [14] erhalten für das elastische Biegetorsionsproblem auch mit kubischen Ansätzen für die Verdrehung um die Stabachse ausgezeichnete Resultate. In den Fällen, in denen die reine Torsionsverdrehung dominiert, ist die Konvergenz schlechter, da die im Sinne der Methode der finiten Elemente zulässigen

Ansatzfunktionen die zugehörige Differentialgleichung nicht erfüllen. Die aus dem Potential entwickelten Steifigkeitsmatrizen enthalten auch Terme aus einer verteilten Belastung, die über dem Schubmittelpunkt angreift und bei einer Querschnittsverdrehung zusätzliche Torsionsmomente erzeugt. Powell und Klingner [91] geben Steifigkeitsmatrizen für den einfachsymmetrischen I - Träger an. Mit diesen werden Einfeld- und Durchlaufträger mit linear elastischem Werkstoff unter besonderer Beachtung einer seitlichen Stützung und der Lasthöhe über dem Schwerpunkt untersucht. In grundlegenden Arbeiten beschäftigt sich Rajasekaran in [94], [96] und [98] mit dem Biegetorsionsproblem mit linearem und nichtlinearem Werkstoff sowie mit dem Problem der Querschnittsverzerrung durch lokales elastisches Beulen der Gurte und Stege von I - Profilen. Die Steifigkeitsmatrizen werden, ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verrückungen, mit kubischen Ansätzen für die Verschiebungen in Querrichtung und die Verdrehung in Längsrichtung sowie mit Polynomen 1. bzw. 2. Grades (bei physikalischer Nichtlinearität) für die Längsverschiebung hergeleitet. Von besonderem Interesse ist die Lösung des Verzweigungsproblems bei nichtlinearem Werkstoffverhalten. Anstatt kritische Lasten aufzusuchen, ermittelt Rajasekaran im Rahmen einer linearen Eigenwertbetrachtung kritische Stablängen. Wie Krajinovic benutzen auch Argyris und Radaj [8] hyperbolische Funktionen zur Berechnung von Steifigkeitswerten für Torsions- und Wölbmomente infolge Verdrehung und Verwölbung. Die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte für Biegung und Torsion führt zu den von Bazant und Nimeiri [18] angegebenen elastischen und geometrischen Steifigkeitsmatrizen, welche aus dem Potential durch Ableitung nach den diskreten Knotenverformungen entstehen. Zum selben Ergebnis kommen Meek und Swanell [73] unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Mit einem kubischen Verschiebungsansatz in Längsrichtung und nachfolgender statischer Kondensation auf zwei Freiheitsgrade werden von Kindmann in [65] Steifigkeitsmatrizen zur inkrementellen Traglastuntersuchung ebener Stabwerke mit räumlicher Beanspruchung angegeben. In der darauf aufbauenden Arbeit [106] wird für

den Einfeldträger der Einfluß von lokalen Entlastungen auf die Traglast während einer monotonen globalen Laststeigerung untersucht. Die Berücksichtigung von Plastizierungen erfolgt über effektive Steifigkeiten im Rahmen einer Querschnittsiteration.

## 2.2 Große Verschiebungen und Rotationen

Mit dem Verlassen der Voraussetzungen der Theorie II. Ordnung (kleine Verformungen, Gleichgewicht am verformten System) und der Berücksichtigung von großen Verformungen wird es für die Tragwerksanalyse erforderlich, statt mit den sonst üblichen "Ingenieurmaßen" zur Bezeichnung von Spannungen und Dehnungen mit Größen zu operieren, welche sich auf definierte Zustände beziehen. Die dazu benötigten Grundlagen der Elastizitätstheorie können z.B. aus [62], [72], [31], [15] und [99] für ein allgemeines Kontinuum entnommen werden. Schroeder [116] entwickelt damit eine allgemeine Stabtheorie für den dünnwandigen, räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Träger mit großen Verformungen. Da in den folgenden Abschnitten teilweise ausführlich auf Arbeiten aus diesem Gebiet eingegangen wird, soll nachstehend nur ein kurzer Überblick gegeben werden.

Zweidimensionale Stabtragwerke mit linear elastischem Werkstoff mit endlichen Deformationen werden u. a. von Jennings [60], Powell [90], Oran, Kassimali [83], Scholz [112], Stern [119], Karamanlidis [63], [64] und Milner [76] untersucht. Dasselbe Problem, jedoch unter Berücksichtigung eines nichtlinearen Materialverhaltens durch die Fließgelenktheorie oder die Fließzonentheorie (teilplastizierte Zonen), bearbeiten Bilek in [21], Hartmann in [51] und Hobbs, Jowharzadeh in [58]. Räumliche oder räumlich beanspruchte Stabtragwerke wurden geometrisch nichtlinear berechnet, u.a. von Bazant, Nimeiri [18], Rajasekaran, Murray [97], Overrath [84], Schock [111], Epstein, Murray [38], Wunderlich [130], Wunderlich, Beverungen [131], Belytschko, Schwer [19], Boegershausen [23] und Bathe, Bolourchi [17]. Mit großen Verformungen und nichtlinearem Werkstoffverhalten des dreidimensionalen Stabproblems befaßten sich schließlich Epstein,

Nixon, Murray [39] und Hartmann [50]. Erst kurz vor Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erschienen die Untersuchungen von Saleh [108] zu diesem Thema.

### 3. Lösungskonzept der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Traglastberechnung räumlicher Stabtragwerke mit einem auf kontinuumsmechanischer Grundlage entwickelten finiten Balkenelement. Folgende Probleme können damit behandelt werden:

- beliebig unsymmetrische, offene, dünnwandige Querschnitte,
- endliche Verschiebungen und Rotationen,
- System-, Lastimperfectionen sowie Eigenspannungen,
- Be- und Entlastung,
- Spannungsprobleme und Eigenwertuntersuchungen,
- Verhalten im nachkritischen Bereich,
- elastisch und elastisch-plastisches Werkstoffverhalten,
- teilplastizierte Zonen,
- kinematische Verfestigung des Werkstoffes bei alternierender Belastung,
- näherungsweise Berücksichtigung der Schubspannungen aus St. Venantscher Torsion im Fließgesetz.

Verschiebungen und Verdrehungen werden im folgenden manchmal zur Vereinfachung unter dem Oberbegriff Verformungen zusammengefaßt.

Zur Erreichung des angegebenen Zieles wird zunächst für ein allgemeines Kontinuum mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die inkrementelle Gleichgewichtsbedingung formuliert. Den Bezugszustand für die Berechnung des inkrementellen Verformungszuwachses bildet der letzte bekannte Deformationszustand. Dies führt zu einer updated Lagrange (U. L.) - Formulierung des Problems. Da hierbei der Spannungszustand aus der Integration über den zu bestimmenden Verformungszustand zu ermitteln ist, wird diese Darstellung im Schrifttum auch als Euler - Formulierung bezeichnet. Nach dem Einbringen der Theorie der offenen dünnwandigen Stäbe in die inkrementellen virtuellen Arbeitsausdrücke erhält man die stoff-freien Grundgleichungen. Vor einer Diskretisierung des Tragwerks im Sinne der Verschiebungsmethode der finiten Elemente sind die Spannungsinkremente mit Hilfe eines



Werkstoffgesetzes durch die Dehnungsinkremente auszudrücken. Nach der Unterteilung in endliche gerade Stababschnitte (Elemente) werden die unbekanntes Verformungsincrementen innerhalb des Elementes mittels Verschiebungsansätzen durch diskrete Verformungen an den Stabenden dargestellt. Die Integration führt zu den inkrementellen Elementsteifigkeitsmatrizen. Die im Sinne einer mitgehenden Koordinaten - Formulierung auf ein lokales, veränderliches, für jedes Element eigenes kartesisches Koordinatensystem bezogenen Matrizen werden in ein raumfestes, globales Koordinatensystem transformiert und mit der direkten Steifigkeitsmethode in die Systemsteifigkeitsmatrix hineinaddiert. Nach der Lösung des Gleichungssystems für die globalen Knotenverformungsincrementen werden diese zu den globalen Gesamtverformungen des vorhergehenden Zustandes addiert und unter besonderer Beachtung der endlichen Rotationen in das neue lokale System transformiert. Stehen die für den neuen Deformationszustand ermittelten Stabkräfte und -momente nicht im Gleichgewicht mit den äußeren Lasten, wird die Differenz dieser Größen als neue Belastung auf das System aufgebracht. Dies ist solange fortzusetzen, bis die Ungleichgewichtskräfte keine weiteren Verformungen des Tragwerks bewirken bzw. bis diese unter einer vorzuzugenden Norm bleiben.

Das Stoffgesetz wird entweder linear elastisch oder bilinear elastisch - plastisch angenommen. Entlastungen im Spannungs - Dehnungs - Diagramm oder in Form einer Lastumkehr sind möglich. Zur näherungsweise Berücksichtigung des Bauschinger Effektes wird eine kinematische Verfestigung zugrunde gelegt. Der Einfluß von Eigenspannungen oder geometrischen Imperfektionen auf die Traglast kann erfaßt werden.

#### 4. Die stoff-freie Grundgleichung zur Beschreibung des inkrementellen Gleichgewichtes

In diesem Abschnitt werden für den Stab mit offenem dünnwandigem Querschnitt und einem mitgehenden Bezugssystem die inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen abgeleitet. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wird dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie vorgezogen, da jenes hinsichtlich des Werkstoffes keinen Einschränkungen unterworfen ist.

##### 4.1 Begriffe, Definitionen

Zur Formulierung der Grundgleichungen wird zunächst nur ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem verwendet. Später werden weitere elementbezogene lokale Systeme benötigt. Die verwendete Darstellungs- und Schreibweise folgt weitgehend den Arbeiten von Bathe, Ramm, Wilson [15] und Ramm [99]. Zur Beschreibung des Bewegungsvorganges im dreidimensionalen Raum sind die vier Verformungszustände nach Bild 2 zu unterscheiden. Dies sind:

1. der unverformte Ausgangszustand 0,
2. der bereits ermittelte bekannte Verformungszustand 1,
3. der unbekannte, inkrementell benachbarte Verformungszustand 2,
4. der gesuchte unbekannte, endlich deformierte Endzustand m.

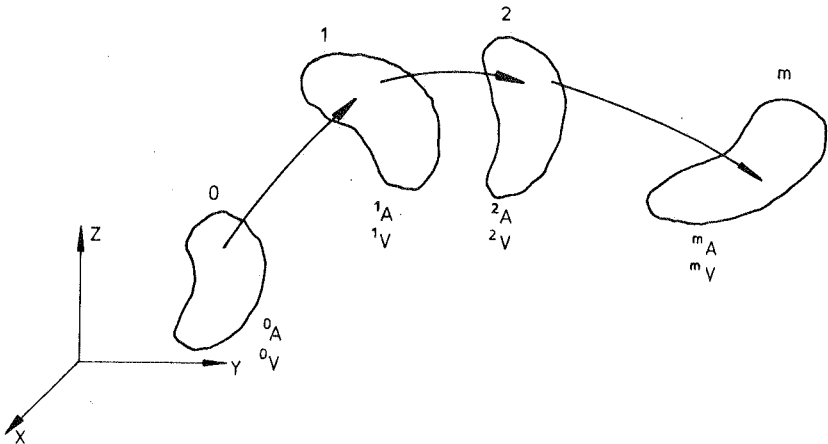


Bild 2: Bewegung eines Körpers im Raum

Der beliebige Verformungszustand  $m$  wird durch wiederholte Inkrementierung von dem jeweils letzten bekannten Zustand aus erreicht. Ergänzend zur üblichen Indizierung werden nach [15] und [99] linke Fuß- und Kopfzeiger eingeführt. Der linke Kopfzeiger gibt den Wirkungszustand, der linke Fußzeiger den Bezugszustand an. Inkremente besitzen keinen Kopfzeiger. Bei Komponentendarstellung wird im Einzelfall das Bezugssystem definiert.

Beispiel:

$m$	$n$	$m$ Wirkungszustand
$s_{ij}$	$n$	$n$ Bezugszustand
	$ij$	$ij$ kartesische Komponenten in Bezug auf das $X, Y, Z$ - KOS

Es gilt die Summationskonvention, nach der über gleiche Indizes zu summieren ist.

#### 4.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Kontinuum

Der gesuchte Zustand 2 ist ein Gleichgewichtszustand, wenn die Summe aus virtueller innerer und äußerer Arbeit für ein beliebiges virtuelles Verschiebungsfeld der Konfiguration 2, welches die geometrischen Randbedingungen und die kinematischen Gleichungen erfüllt, verschwindet.

$${}^2\delta W = {}^2\delta W_{(i)} + {}^2\delta W_{(a)} = 0 \quad (1)$$

Mit der Annahme der Existenz eines äußeren Potentials folgt daraus nach [72], [99]:

$$-{}^2\delta W_{(i)} = \int_{n_v} {}^2n s_{ij} \delta {}^2n \epsilon_{ij} d(n_v) = {}^2\delta W_{(a)} \quad (2)$$

Als Bezugszustand  $n$  des Piola - Kirchhoffschen Spannungstensors 2. Art  ${}^2n s_{ij}$  sowie des Green - Lagrangeschen Verzerrungstensors  ${}^2n \epsilon_{ij}$  kann entweder der unverformte Zustand 0 oder ein bekannter Deformationszustand 1 gewählt werden. Entsprechend sind 2 Formulierungen zu unterscheiden:

- a) die totale Lagrange - Darstellung bei Bezug auf den Zustand 0 (T.L.) - auch einfach nur Lagrange - Darstellung genannt,
- b) die mitgehende ("updated") Lagrange - Darstellung bei Bezug auf den Zustand 1 (U.L.) - auch Euler - Darstellung genannt.

In [15] wird gezeigt, daß beide Formulierungen zu denselben Resultaten führen, vorausgesetzt, es werden dieselben konstitutiven Beziehungen verwendet. Während beim Weggrößenverfahren aus der T.L. - Formulierung neben der elastischen Steifigkeitsmatrix  $K_e$  Anfangsspannungs- und Anfangsverschiebungs - Matrizen  $K_g$  und  $K_u$  hervorgehen, erhält man für die U.L. - Formulierung nur  $K_e$  und  $K_g$ . Die inkrementellen Steifigkeitsmatrizen werden in dieser Arbeit im Gegensatz zu [15], [99] ohne Indizierung angegeben. Wegen der im allgemeinen größeren numerischen Effizienz und im Hinblick auf die mitgehende Koordinaten - Darstellung wird hier der zweite Lösungsweg vorgezogen. Damit kann Gleichung (2) wie folgt geschrieben werden:

$${}^2\delta W_{(a)} = \int_V {}^2s_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} d({}^1V) \quad (3)$$

Spannungs- und Verzerrungstensor werden additiv zerlegt in einen bekannten Anteil der Konfiguration 1 und einen inkrementellen Zuwachs, der beim Übergang von 1 nach 2 entsteht.

$${}^2s_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}_1s_{ij} \quad (4a)$$

$${}^2\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij} + {}_1\varepsilon_{ij} \quad (4b)$$

In Gleichung (4 a) geht hierbei der Piola - Kirchhoff - Tensor 2. Art (KP 2) für den Fall, daß Wirkungszustand und Bezugzustand gleich sind, in den Cauchy- oder Euler - Spannungstensor  ${}^1\tau_{ij}$  über. Unter Beachtung von

$$\delta {}^2\varepsilon_{ij} = \delta \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

erhält man aus (3) mit (4):

$$\int_V {}^1s_{ij} \delta {}_1\varepsilon_{ij} d({}^1V) + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\varepsilon_{ij} d({}^1V) = {}^2\delta W_{(a)} \quad (6)$$

Mit

$${}_1\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i} + {}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j}) \quad (7a)$$

$${}_1e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i}) \quad (7b)$$

$${}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j} \quad (7c)$$

$${}_1\gamma_{ij} = {}_1e_{ij} + {}_1e_{ji} \quad (7d)$$

$${}_1g_{ij} = {}_1e_{ij} + {}_1e_{ji} \quad (7e)$$

folgt daraus

$$\int_V {}_1s_{ij} \delta {}_1\epsilon_{ij} d({}^1v) + \int_V {}_1\tau_{ij} \delta {}_1\eta_{ij} d({}^1v) = {}^2\delta W_{(a)} - \int_V {}_1\tau_{ij} \delta {}_1e_{ij} d({}^1v) \quad (8)$$

Da für den Cauchy - Tensor  ${}_1\tau_{ij}$  wegen des wechselnden Bezugszustandes keine Spannungsinkremente existieren [80], kann die exakte Berechnung für elastischen Werkstoff nur aus Gesamtverformungen bzw. Gesamtverzerrungen geschehen. Im Falle der T.L. - Formulierung tritt dagegen an die Stelle des Cauchy - Tensors  ${}_1\tau_{ij}$  der Piola - Kirchhoff - Spannungstensor 2. Art  ${}_0s_{ij}$ . Dieser kann bei elastischem Werkstoffverhalten alternativ durch Inkrementierung oder als Gesamtspannung aus den Gesamtverzerrungen ermittelt werden.

### 4.3 Mitgehende Koordinaten - Darstellung

Ziel einer üblichen Stabtheorie ist es, nur mit Normalspannungen in Stablängsrichtung sowie Schubspannungen senkrecht dazu zu operieren. Dies ist näherungsweise nur möglich, wenn lokale mitgehende Bezugskoordinatensysteme eingeführt werden. Im Sinne der Methode der finiten Elemente werden die ebenen oder räumlichen Rahmen in endliche - finite - Balkenelemente unterteilt. Gleichung (8) wird danach auf jedes Element angewandt. Die Arbeit des gesamten Systems folgt aus der Summation über alle Elemente k.

$$\sum_k \left( \int_V {}_1s_{ij} \delta {}_1\epsilon_{ij} d({}^1v) + \int_V {}_1\tau_{ij} \delta {}_1\eta_{ij} d({}^1v) \right) = \delta W_{(a)} - \sum_k \int_V {}_1\tau_{ij} \delta {}_1e_{ij} d({}^1v) \quad (8a)$$

Wie aus Bild 3 hervorgeht, setzt sich die endliche Gesamtverformung eines nur durch Biegung beanspruchten Balkenelementes aus einer großen Starrkörperbewegung und einer

vergleichsweise kleinen, Spannungen hervorrufenden Relativverformung zusammen. Verwendet man finite Elemente mit kontinuierlichen Ansätzen für die Verformungen, so enthalten diese zur Beschreibung der endlichen Gesamtverformungen große Starrkörperanteile. Dies führt zu dem allgemein bekannten, von Schrader in [114] beschriebenen Problem der Restspannungen aus Restverzerrungen infolge reiner Starrkörperbewegungen. Zur Vermeidung dieser Fehler wird häufig der endliche Verformungszustand zerlegt in einen spannungsfreien Starrkörperanteil und einen Deformationsanteil, der Verzerrungen und Spannungen bewirkt.

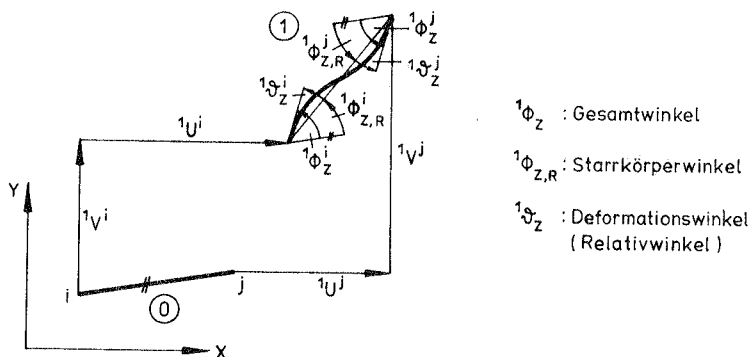


Bild 3: Endlich deformiertes ebenes Balkenelement

Auch in dem zweiten Anteil sind noch Starrkörperbewegungen enthalten, die um so geringer werden, je feiner die Elemententeilung ist. Die Diskretisierung darf um so gröber sein, je kleiner die eigentlichen Verformungen (auch Relativverformungen, Restverformungen oder Deformationen genannt) sind. Unter Beachtung dieser Überlegungen kann für die Elemente der Zusammenhang zwischen den Restverformungen und den Spannungen bei kleinen Dehnungen durch die üblichen linearen Elementbeziehungen beschrieben werden. Diese Beziehungen müssen allerdings bezüglich lokaler, elementeigener, sich mit den Elementen bewegender Koordinatensysteme formuliert werden. Die geometrische Nichtlinearität äußert sich dann lediglich in nichtlinearen Transformationsbeziehungen

zwischen dem lokalen Elementsystem und dem globalen raumfesten Koordinatensystem [60], [90], [50], [23]. Für die "Befestigung" der kartesischen lokalen Koordinatensysteme an den endlichen Balkenelementen gibt es mehrere Möglichkeiten. Dabei ist zu beachten, daß dies so zu geschehen hat, daß die verbleibenden Relativverdrehungen klein sind. Aus dieser Forderung ergeben sich für das ebene Balkenelement im wesentlichen die im Bild 4 dargestellten Möglichkeiten nach [114] zur Festlegung der lokalen x - Achse.

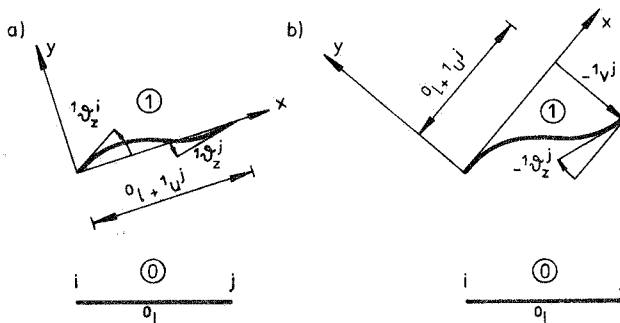


Bild 4: Lokale Koordinatensysteme und Relativverformungen

In Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall ergeben sich daraus die von Boegershausen [23] und Hartmann [50] verwendeten Darstellungen. Die Orientierung der lokalen y- und z - Achsen in der Ebene senkrecht zur x - Achse folgt aus der Forderung, daß die Relativverdrehung um die x - Achse am Elementende i zu Null wird. Es verbleiben von den 12 Knotenfreiheitsgraden (2 x 3 Translationen + 2 x 3 Rotationen) eines räumlichen Balkenelementes nach Abzug von 6 Starrkörperfreiheitsgraden 6 Relativfreiheitsgrade mit den zugehörigen Relativverformungen nach Bild 5.

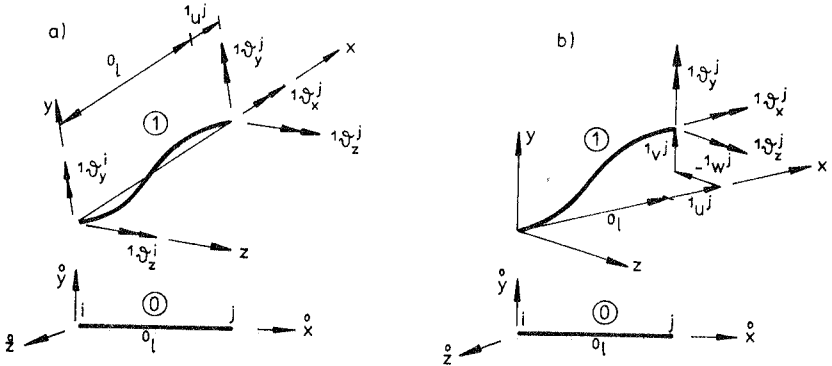


Bild 5: a) Relativverformungen nach [50]  
b) Relativverformungen nach [23]

Für die hier angestellten Untersuchungen wurde die Variante a) nach Bild 5 mit der aktuellen Stabsehne als lokale  $x$  - Achse gewählt.

Die vorgesehene Abspaltung von Starrkörperbewegungen besteht mathematisch betrachtet in der Streichung eines multiplikativen Anteils zur Beschreibung der Gesamtverformung. Dies soll an einem Beispiel gezeigt werden. Der im Bild 6 dargestellte ebene Körper erfährt zunächst eine Drehung in der  $\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2$  - bzw.  $\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2$  - Ebene um den Winkel  $\gamma$  und dann eine gleichmäßige Streckung in Richtung der  $\overset{1}{x}_1$  - Achse.

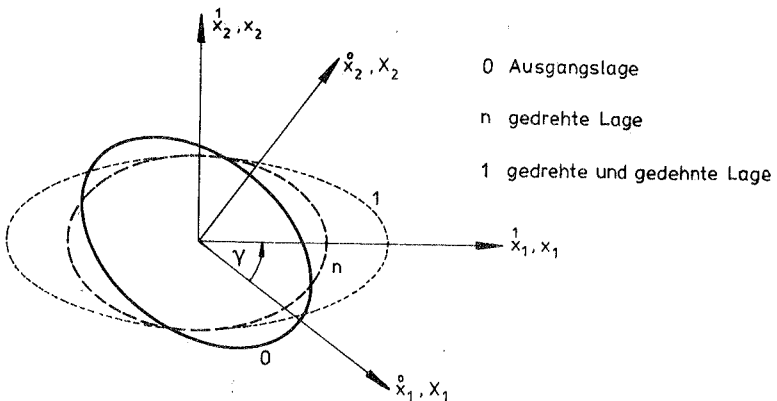


Bild 6: Verformung eines Körpers in der Ebene



Zur vereinfachten Beschreibung der Bewegungsvorgänge wird im folgenden  ${}^1x_i$  durch  $x_i$  und  $\dot{x}_i$  durch  $X_i$  ersetzt.

1. Drehung um den Winkel  $\gamma$  (Starrkörperanteil)

$$\begin{Bmatrix} {}^n x_1 \\ {}^n x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^0 x_1 \\ {}^0 x_2 \end{Bmatrix} \quad (9a)$$

2. Dehnung um  ${}^1x_1 / {}^n x_1 = (1 + k) = \text{konstant}$  (Deformationsanteil)

$$\begin{Bmatrix} {}^1 x_1 \\ {}^1 x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^n x_1 \\ {}^n x_2 \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

3. Gesamtverformung

$$\begin{Bmatrix} {}^1 x_1 \\ {}^1 x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^0 x_1 \\ {}^0 x_2 \end{Bmatrix} \quad (9c)$$

In Gleichung (9 c) ist deutlich die multiplikative Verknüpfung der beiden Verformungsanteile zu erkennen. Da bei Verwendung des Cauchy - Spannungstensors Starrkörperverformungen keine Spannungen verursachen, darf dieser Anteil zur Spannungsberechnung ohne Einfluß auf das Ergebnis entfallen. Dies wird am obigen Beispiel anhand des mit dem Cauchy - Tensor über die Stoffmatrix verknüpfbaren Almansi - Verzerrungstensors [42] gezeigt.

$${}^1 \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [ \delta_{ij} - {}^0 x_{k,i} {}^0 x_{k,j} ] \quad (10)$$

In (10) stellt  ${}^0 x_{i,j} = \partial {}^0 x_i / \partial {}^1 x_j$  den inversen Deformationsgradienten dar. Für ihn erhält man aus (9 c):

$${}^0 x_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \gamma}{1+k} & \sin \gamma \\ -\frac{\sin \gamma}{1+k} & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

Eingesetzt in (10) ergibt

$${}^1\mathbf{\epsilon} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1+k} \right)^2 \right] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12)$$

Den Almansi - Tensor nach Gleichung (12) erhält man auch, wenn man die Lage  $n$  als unverformte Ausgangslage betrachtet. In diesem Fall wird der inverse Deformationsgradient aus (9 b) in Gleichung (10) eingesetzt, nachdem dort der Zeiger 0 durch  $n$  ersetzt wurde. Damit ist gezeigt, daß der Starrkörperanteil - hier die Starrkörperdrehung - zur Dehnungs- und Spannungsberechnung unberücksichtigt bleiben kann. Der exakte Cauchy - Tensor kann für das Balkenelement allein aus den Relativverformungen nach Bild 5 berechnet werden.

Bei kleinen Dehnungen kann Gleichung (12) durch Potenzreihenentwicklung und Abbruch nach dem linearen Glied weiter vereinfacht werden.

$${}^1\mathbf{\epsilon} = \left[ \begin{array}{c|c} k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (12a)$$

Wie der Cauchy - Spannungstensor  ${}^1\tau_{ij}$  erzeugt auch der Piola - Kirchhoff - Spannungstensor 2. Art  ${}^1s_{ij}$  bei einer reinen Starrkörperbewegung keine Werte. Im Gegensatz jedoch zu der in Richtung der Achse  $j$  zeigenden Cauchy - Komponenten  ${}^m\tau_{ij}$  weist  ${}^m s_{ij}$  in Richtung der sogenannten Gittervektoren [31]. Die Gittervektoren haben immer die Richtung der Kanten des differentiellen Volumenelementes. Sie ändern deshalb während der Bewegung des Körpers ihre Orientierung in Bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem. Der Gittervektor des unverformten Körpers nach Bild 6 in Richtung der Achse  $X_1$  weist somit nach Drehung und Streckung in Richtung der  $x_1$  - Achse. Für das Balkenelement bedeutet dies, daß die im  $x, y, z$  - System berechnete Cauchy - Komponente  ${}^1\tau_{xx}$  bei kleinen Relativverformungen und kleinen Dehnungen ungefähr gleich der in Bezug auf das lokale  $\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z}$  - System des

unverformten Elementes nach Bild 5 berechneten KP 2 - Spannung  ${}^1_0 s_{xx}$  ist. In [17] wird von dieser Näherung zur Entwicklung einer U.L. - Formulierung Gebrauch gemacht. Beachtet man nun, daß die Abspaltung von Starrkörperbewegungen beim KP 2 - Tensor auch die Abspaltung der Richtungsänderung der Gittervektoren bedeutet, können auch die KP 2 - Spannungen im  $x_1, x_2$  - Koordinatensystem der Konfiguration 1 berechnet werden. Dies wird für das obige zweidimensionale Beispiel durch Ermittlung des über den Stofftensor mit den KP 2 - Spannungen verknüpften symmetrischen Green - Lagrange - Verzerrungstensors [99] gezeigt.

$${}^1_0 E_{ij} = \frac{1}{2} [ {}^1_0 x_{k,i} {}^1_0 x_{k,j} - \delta_{ij} ] \quad (13)$$

Um  ${}^1_0 E_{ij}$  (Green - Lagrange im  $X_1, X_2$  - System) zu berechnen, wird zunächst die im  $x_1, x_2$  - System beschriebene Gesamtverformung transformiert. Mit

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (14a)$$

und

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (14b)$$

folgt aus Gleichung (9 c)

$$\begin{Bmatrix} {}^1_0 X_1 \\ {}^1_0 X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k) \cos \gamma & -\sin \gamma \\ (1+k) \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^0_0 X_1 \\ {}^0_0 X_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Aus Gleichung (15) erhält man mit (13) für den Greenschen Verzerrungstensor im  $X_1, X_2$  - KOS

$${}^1_0 \mathbf{E} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} [(1+k)^2 - 1] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (16)$$

Für den Greenschen Verzerrungstensor im  $x_1, x_2$  - KOS folgt mit (9 b) und (13), wobei der Zustand n erneut als unverformte Ausgangslage betrachtet wird

$${}^1_n \mathbf{E} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} [(1+k)^2 - 1] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (17)$$

Man erkennt, daß die Komponenten der in zwei verschiedenen Koordinatensystemen berechneten Green - Lagrangeschen Verzerrungstensenoren identisch sind und für kleine Dehnungen durch Potenzreihenentwicklung und Abbruch nach dem linearen Glied auf die Ingenieurdehnungen führen. Natürlich würde man dasselbe Ergebnis erhalten für eine beliebige Starrkörperzwischenlage.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Abspaltung von Starrkörperanteilen zur Berechnung des Cauchy - wie auch des Piola - Kirchhoff - Spannungstensors 2. Art keine Näherung bezüglich der exakten Lösung darstellt. Für den KP 2 - Tensor ist jedoch zu beachten, daß die Abspaltung auch die Richtungsänderung der Gittervektoren enthält, so daß diese durch Bezug auf das mitverformte kartesische Koordinatensystem korrigiert werden muß. Bei geschickter Wahl des mitgehenden körperfesten Koordinatensystems verbleiben in den Relativverformungen nur noch geringe Starrkörperanteile, so daß bei kleinen Dehnungen mit guter Näherung die üblichen Ingenieurspannungen und -dehnungen verwendet werden können. Dies führt zu dem von Argyris [7] verwendeten Konzept der "natürlichen" Spannungen und Dehnungen. Um das Mitgehen der Koordinatensysteme zu kennzeichnen, verwenden Belytschko und Schwer in [19] auch die Begriffe "rigid - convected" - oder "corrotational" - Formulierung. Der Gedanke, Starrkörperverformungen abzuspalten, wurde auch von Schrader in [113] propagiert. Ursprünglich für Balkenelemente entwickelt, wird heute die mitgehende Koordinaten - Darstellung auch für Platten- und Schalenelemente verwendet.

Die hier angestrebte FE - Untersuchung erzeugt auf Elementebene zwei Aufgabenstellungen. Zur Berechnung der Schnittgrößen einer endlich deformierten Konfiguration aus den Gesamtverformungen wird bei nichtlinearem Verhalten, wie bei der Theorie II. Ordnung, die Sekantensteifigkeitsmatrix benötigt. Im Gegensatz dazu erfordert die Ermittlung des Verformungszuwachses für ein Lastinkrement die Bereitstellung einer inkrementellen Tangentensteifigkeit (für Standard Newton - Raphson Iteration - siehe Abschnitt 10.2).

Werden die in die Sekantensteifigkeitsmatrix einzusetzenden, in eines der oben beschriebenen körperfesten Systeme transformierten Gesamtverformungen von Starrkörperanteilen befreit, so genügen linearisierte Beziehungen zur Berechnung der Biegemomente, Querkräfte und Normalkräfte, da die Deformationen relativ zur Sehne bei genügend feiner Element-einteilung klein sind. Das nach einer geometrisch nichtlinearen Theorie veränderte Biegetragverhalten wird dabei allein durch die veränderte Lage des Stabes erfaßt. Wegen der Beschreibung des Querschnittes durch die Verformungen in einem Referenzpunkt, kann ein nichtlineares Torsionstragverhalten auch nach Elimination der Starrkörperdrehung nur durch eine nichtlineare Elementsteifigkeit erfaßt werden. Auch bei der Tangentensteifigkeitsmatrix kann zunächst für die relativen Verformungszuwächse eine lineare Steifigkeitsbeziehung angegeben werden, die anschließend durch Hinzunahme von Starrkörpertermen erweitert wird. In dieser Arbeit wird allerdings die erweiterte lokale Elementsteifigkeitsmatrix, welche auch inkrementelle Starrkörperbewegungen erfaßt, direkt erstellt.

#### 4.4 Voraussetzungen, Annahmen

In diesem Abschnitt wird die Grundgleichung (8) schrittweise den Besonderheiten des gestellten Problems angepaßt.

##### 4.4.1 Theorie der Stäbe mit offenem, dünnwandigem Querschnitt nach [129], [105], [30]

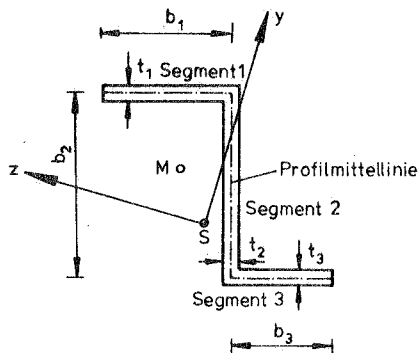


Bild 7: Offener, dünnwandiger Querschnitt

Folgende Voraussetzungen und Annahmen wurden getroffen:

1. Die räumlichen Stabsysteme besitzen einen offenen, dünnwandigen, abschnittsweise konstanten, prismatischen Querschnitt. Bei einer numerischen Querschnittsuntersuchung muß der Querschnitt bei Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität aus beliebig vielen, ebenen Segmenten (Platten) zusammengesetzt werden.
2. Die Querschnittsform bleibt bei Verformung erhalten. Lokale Instabilitäten der Querschnittssegmente (z.B. der Gurte oder Stege) sind ausgeschlossen. Dazu ist der Querschnitt insbesondere an Lasteinleitungsstellen auszustEIFen.

Gibt man diese Annahme auf, so entsteht eine Interaktion zwischen dem lokalen Versagen durch Plattenbeulen und dem globalen Versagen durch Ausweichen von Stäben infolge von Knicken oder Biegedrillknicken. Im Rahmen der finiten Elemente sind dabei zwei Vorgehensweisen zu unterscheiden. Eine Möglichkeit besteht darin, den gesamten Träger mit Scheiben-, Platten- oder Schalenelementen zu modellieren. Wegen der großen Anzahl an Unbekannten ist diese Methode auf Träger mit begrenzter Länge beschränkt. In [71] und [54] werden mit hybriden Elementen I - Träger mit linear bzw. nichtlinear elastischem Werkstoff untersucht. In [2] werden mit derselben Zielsetzung zwei- und dreidimensionale Verschiebungselemente eingesetzt. Alternativ dazu wurde in [95], [28], [49] und [41] ein Balkenelement, welches lokale Plattenfreiheitsgrade besitzt, verwendet. Durch die Kopplung des Knick- und Beulproblems entstehen dabei Balkenschnittgrößen aus der Verformung einzelner Plattensegmente und umgekehrt. Eine Übertragung dieser Methode auf die Berechnung von Rahmentragwerken ist möglich. Experimentelle Untersuchungen an Portalrahmen, deren Querschnitte sich beim Ausweichen aus der Systemebene verzerren, werden in [12] mitgeteilt.

3. In den durch die Profilmittellinie gebildeten Mittel­flächen treten infolge von Schubspannungen aus der Ände­rung der Längsnormalspannungen keine Schubverzerrungen auf.

Diese, Wagner - Hypothese genannte Forderung stellt eine Erweiterung der Bernoulli - Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte dar. Als Konsequenz daraus können die zu den Querkräften gehörigen Schubspannungen nicht über ein Stoffgesetz ermittelt werden. Die Querkräfte sind deshalb aus dem Gleichgewicht am Stabelement zu berech­nen. In [17] wird für Vollquerschnitte auf diese Ein­schränkung unter Verwendung zusätzlicher Schubfreiheits­grade verzichtet.

4. Senkrecht zu den Profilmittelflächen treten keine Ver­zerrungen auf. Diese auch für Platten und Schalen übliche Annahme ist zulässig für kleine Wanddicken der Quer­schnittssegmente.
5. Der Verlauf der Verwölbung in Dickenrichtung wird kon­stant vorausgesetzt (Querverwölbung vernachlässigt).

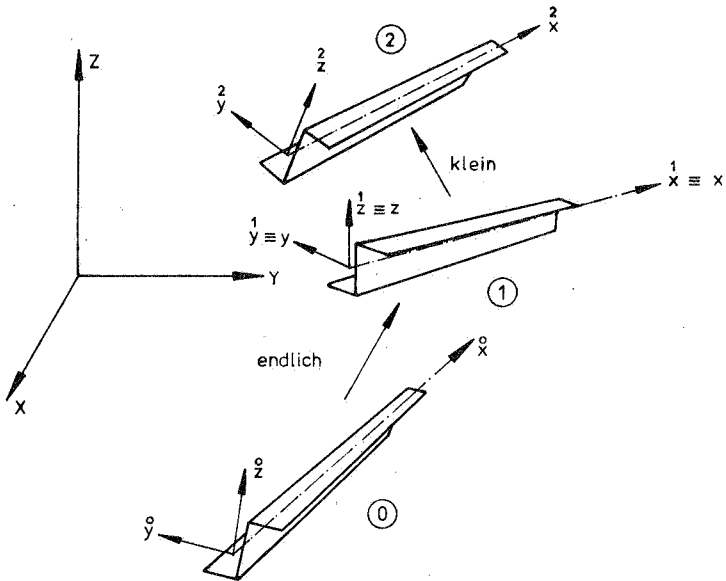


Bild 8: Starrkörperlagen und lokale Koordinatensysteme

Aus den Annahmen folgt näherungsweise für den Spannungszustand in der Konfiguration 1 sowie den inkrementellen Spannungszuwachs beim Übergang nach 2, beschrieben im lokalen x, y, z - System nach Bild 8 und unter Beachtung des Abschnittes 4.3:

$${}^1s_{yy} = {}^1s_{zz} = {}^1s_{yz} = {}^1s_{zy} = {}^1\tau_{yy} = {}^1\tau_{zz} = {}^1\tau_{yz} = {}^1\tau_{zy} = 0 \quad (18)$$

Die folgenden Ableitungen werden für ein Element durchgeführt. Für alle übrigen Elemente ist in gleicher Weise vorzugehen. Der Zusammenbau wird im Abschnitt 8 dargestellt. Mit Gleichung (18) und unter Beachtung der Symmetrieeigenschaft der verwendeten Spannungsmaße kann (8), im X, Y, Z - KOS abgeleitet, jetzt in den x, y, z - Koordinaten der Konfiguration 1 wie folgt geschrieben werden:

$$\int_V {}^1s_{xx} \delta_1 e_{xx} d(V) + \int_V {}^1s_{xy} \delta_1 g_{xy} d(V) + \int_V {}^1s_{xz} \delta_1 g_{xz} d(V) + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta_1 \eta_{xx} d(V) + \int_V {}^1\tau_{xy} \delta_1 \gamma_{xy} d(V) + \int_V {}^1\tau_{xz} \delta_1 \gamma_{xz} d(V) = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (19a)$$

Dabei stellt

$${}^1\delta W_{(i)} = \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij} d(V) \quad (19b)$$

die später genauer betrachtete virtuelle Arbeit der inneren Kräfte im Zustand 1 dar. Im Hinblick auf das zu erstellende, in den Verformungszuwächsen lineare Gleichungssystem wurde in (19 a) eine erste Linearisierung  ${}^1\epsilon_{ij} \rightarrow {}^1e_{ij}$  vorgenommen.

Da sich in den folgenden Darstellungen alle Größen auf den bekannten Zustand 1 beziehen, wird künftig auf den linken unteren Fußzeiger verzichtet.

Wegen der Beschreibung des Querschnittes in der Rechnung nur durch die Profilmittellinie, sind die in Dickenrichtung veränderlichen Spannungen gesondert zu betrachten. Aus der Änderung der Normalspannungen  $s_{xx}$  und  $\tau_{xx}$  über die Dicke ergeben sich aus der Integration über den Gesamtquerschnitt



Zusatzterme in den Biegemomenten um die  $y$ - und  $z$ - Achsen. Diese Größen werden vernachlässigt. Berücksichtigt werden jedoch die über die Dicke linear veränderlichen Schubspannungen, aus deren Aufsummation der St. Venantsche Anteil des Torsionsmomentes folgt.

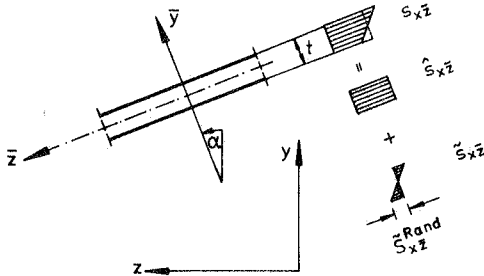


Bild 9: Zerlegung der Schubspannungen

Nach Bild 9 wird folgende Zerlegung durchgeführt:

$$s_{x\bar{z}} = \hat{s}_{x\bar{z}} + \frac{\tilde{s}_{x\bar{z}}^{\text{Rand}}}{t} 2\bar{y} = \hat{s}_{x\bar{z}} + \tilde{s}_{x\bar{z}} \quad (20)$$

Da nur Schubspannungen  $s_{x\bar{z}}$  zugelassen sind, gilt:

$$s_{xy} = -s_{x\bar{z}} \sin \alpha \quad (21a)$$

$$s_{xz} = s_{x\bar{z}} \cos \alpha \quad (21b)$$

Zwischen dem segmenteigenen  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ - Koordinatensystem und dem querschnittsfesten  $y$ ,  $z$ - KOS gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \cos \alpha \quad (22a) \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\sin \alpha \quad (22b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{y}} = \sin \alpha \quad (22c) \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \cos \alpha \quad (22d)$$

$$v = \bar{v} \cos \alpha - \bar{w} \sin \alpha \quad (23a)$$

$$w = \bar{v} \sin \alpha + \bar{w} \cos \alpha \quad (23b)$$

Dabei bezeichnen  $v$  und  $w$  die Verschiebungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung bzw.  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  die in  $\bar{y}$ - und  $\bar{z}$ -Richtung.

Mit (20) und (21) folgt aus (19):

$$\int_V s_{xx} \delta e_{xx} d(V) + \int_V (\hat{s}_{xz} + \check{s}_{xz}) (\cos \alpha \delta g_{xz} - \sin \alpha \delta g_{xy}) d(V) + \int_V \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d(V) + \int_V \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \int_V \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} d(V) = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (25)$$

Mit (22) bis (24) sowie (7) und unter Beachtung der Kettenregel erhält man aus Gleichung (25):

$$\int_V s_{xx} \delta e_{xx} d(V) + \int_V \hat{s}_{xz} \delta (g_{xz} \cos \alpha - g_{xy} \sin \alpha) d(V) + \int_V \check{s}_{xz} \delta g_{xz} d(V) + \int_V \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d(V) + \int_V \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} d(V) + \int_V \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} d(V) = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (26)$$

#### 4.4.2 Werkstoffannahmen

1. Das zwischen Spannungen und Dehnungen beschriebene Stoffgesetz wird entweder uneingeschränkt linear elastisch oder bilinear elastisch - plastisch angenommen. Die Entlastung im Stoffgesetz geschieht parallel zur Anfangssteigung. Der Rechenalgorithmus ist unabhängig von der Form des Stoffgesetzes. Das Programm kann deshalb auf jedes beliebige Stoffgesetz, welches durch einen Polygonzug darstellbar ist, erweitert werden.
2. Die Werkstoffgrößen sind innerhalb eines Elementes unveränderlich.
3. Es wird kinematische Verfestigung angenommen.
4. Der Einfluß der Schubspannungen aus den Querkräften auf den Verformungsvorgang und die Fließbedingung wird vernachlässigt. Die Arbeit von Bamm [13] rechtfertigt diese Annahme.
5. Elastizitätsmodul und Schubmodul sind verformungsunabhängig.

6. Schubspannungen aus St. Venantscher Torsion werden näherungsweise in der von Mises - Fließbedingung berücksichtigt.

#### 4.4.3 Endliche Verformungen

1. Die Dehnungen sind klein.
2. Die Relativverdrehungen der Stabenden gegen die lokalen  $x$  - Koordinaten nach Bild 5 a sind klein.
3. Die Verformungszuwächse für ein Lastinkrement sind klein.

Die Forderungen 2) und 3) stellen keine generelle Beschränkung dar. Sie können in jedem Fall durch die Wahl kleiner Lastinkremente und kurzer Elementlängen befriedigt werden. Im übrigen bestehen keine Einschränkungen, insbesondere nicht hinsichtlich der absoluten Größe der Gesamtrotationen.

#### 4.5 Querschnittskinematik

Die zunächst für die inkrementellen Verformungen dargestellte Querschnittskinematik wird später auch für die Gesamtverformungen verwendet.

Mit den Voraussetzungen des Abschnitts 4.4.1 kann der offene dünnwandige Querschnitt durch die Profilmittellinie dargestellt werden. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes ist eine Funktion der Verformungen in einem Referenzpunkt und der Querschnittskordinaten. Zur Vereinfachung für den linear elastischen Werkstoffbereich werden alle Kraft- und Verformungsgrößen auf zwei zunächst beliebige Bezugspunkte  $S$  und  $M$  bezogen. Der Ursprung für die lokalen  $y$ - und  $z$ -Koordinaten im Zustand 1 sei  $S$  und die Lage der zueinander orthogonalen Achsen beliebig (Bild 7). Die Inkremente in den Verformungen werden nach Bild 10 a auf die Punkte  $S$  bzw.  $M$  bezogen.

4.5.1 Verformungen in der Querschnittsebene

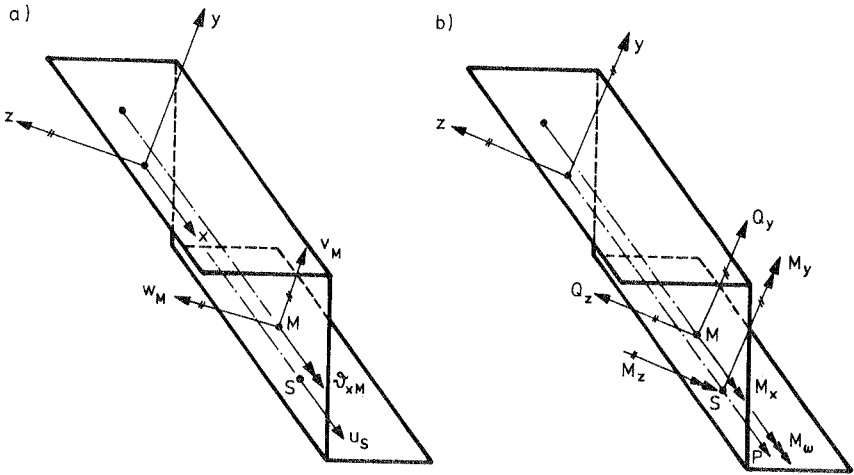


Bild 10: Zuordnung der Schnittgrößen und Verformungen zu den Bezugspunkten

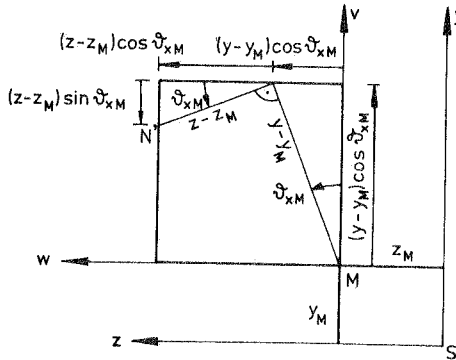


Bild 11: Drehung in der Ebene um Punkt M

Die Verschiebungen  $v$  und  $w$  eines beliebigen Punktes  $N$  auf der Profilmittellinie infolge Translation und Rotation um einen Punkt  $M$  können mit Bild 11 bezüglich der nicht verdrehten Achsen  $y$  und  $z$  wie folgt beschrieben werden:

$$v = v_M - (y - y_M)(1 - \cos \vartheta_{xM}) - (z - z_M) \sin \vartheta_{xM} \quad (27a)$$

$$w = w_M + (y - y_M) \sin \vartheta_{xM} - (z - z_M)(1 - \cos \vartheta_{xM}) \quad (27b)$$

Nach den Hypothesen 2) und 3) aus Abschnitt 4.4.3 darf durch Abbruch der Potenzreihe für die trigonometrischen Funktionen nach dem 1. Glied linearisiert werden.

$$\sin \vartheta_{xM} \approx \vartheta_{xM} \quad (28a)$$

$$\cos \vartheta_{xM} \approx 1 \quad (28b)$$

Damit erhält man aus den Beziehungen (27):

$$v = v_M - (z - z_M) \vartheta_{xM} \quad (29a)$$

$$w = w_M + (y - y_M) \vartheta_{xM} \quad (29b)$$

#### 4.5.2 Verformungen senkrecht zur Querschnittsebene

Die Verschiebung eines Punktes auf der Profilmittellinie aus der Querschnittsebene heraus in Richtung der lokalen x - Achse kann folgende Ursachen haben:

- a) eine Translationsbewegung des Querschnittes in x - Richtung,
- b) eine Rotation des Querschnittes um die y - oder z - Achse infolge Biegung in der x - z - oder x - y - Ebene,
- c) eine Verwölbung des Querschnittes infolge Torsion.

Die Verschiebungen in x - Richtung werden zunächst bezüglich eines beliebigen Punktes 0 (Bild 12) beschrieben, welcher den Ursprung der entlang der Profilmittellinie laufenden sektoriellen Koordinate s definiert. Außerdem wird ein weiteres kartesisches, lokales Koordinatensystem mit den  $\bar{y}$  - und  $\bar{z}$  - Achsen für jeden Punkt der Profilmittellinie

definiert. Die  $\bar{z}$  - Achse besteht aus der Tangente an die Profilmittellinie (siehe auch Bild 9). Für die Verschiebung  $\bar{w}$  in Richtung der  $\bar{z}$  - Achse sind die Gleichungen (29) in (24 b) einzusetzen.

$$\bar{w} = w_M \cos \alpha - v_M \sin \alpha + [(y - y_M) \cos \alpha + (z - z_M) \sin \alpha] \vartheta_{xM} \quad (30)$$

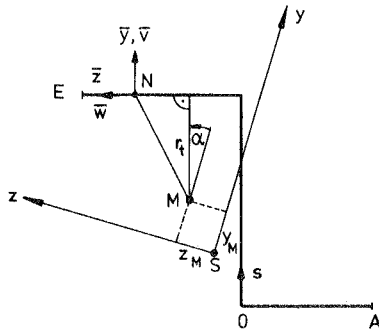


Bild 12: Querschnittsbezeichnungen

Mit

$$r_t = (y - y_M) \cos \alpha + (z - z_M) \sin \alpha \quad (31)$$

aus Bild 12 erhält man:

$$\bar{w} = w_M \cos \alpha - v_M \sin \alpha + r_t \vartheta_{xM} \quad (32)$$

Voraussetzung 3) nach Abschnitt 4.4.1 liefert:

$$g_{x\bar{z}} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (33)$$

wobei u die Verschiebung in x - Richtung darstellt.

Gleichung (32) in (33) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -w'_M \cos \alpha + v'_M \sin \alpha - r_t \vartheta'_{xM} \quad (34)$$

mit der Definition ( )' =  $\partial ( ) / \partial x$ .

Mit den Beziehungen (22) folgt daraus:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -w'_M \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} - v'_M \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} - r'_t \vartheta'_{xM} \quad (35)$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung und mit  $dz \rightarrow ds$  sowie  $s = \bar{s}$  in N ergibt sich daraus:

$$u(\bar{s}) - u(0) = -w'_M \int_{s=0}^{s=\bar{s}} dz - v'_M \int_{s=0}^{s=\bar{s}} dy - \vartheta'_{xM} \int_{s=0}^{s=\bar{s}} r'_t ds \quad (36)$$

und somit:

$$u(\bar{s}) = u(0) - w'_M (z - z_0) - v'_M (y - y_0) - \vartheta'_{xM} \omega_0 \quad (37)$$

Dabei wurde definiert:

$$\omega_0 = \int_{s=0}^{s=\bar{s}} r'_t ds \quad (38)$$

Stellt man sich den Punkt S gedanklich mit der Profilmittellinie verbunden vor, so kann dessen Längsverschiebung aus (37) bestimmt werden.

$$u_S = u(0) + w'_M z_0 + v'_M y_0 - \vartheta'_{xM} \omega_{0S} \quad (39)$$

Löst man Gleichung (39) nach  $u(0)$  auf und setzt das Ergebnis in (37) ein, so folgt:

$$u(\bar{s}) = u_S - w'_M z - v'_M y - \vartheta'_{xM} (\omega_0 - \omega_{0S}) \quad (40)$$

Die imaginäre Verbindung der Punkte 0 und S kann so gewählt werden, daß der Ausdruck  $\omega_{0S}$  verschwindet. Damit vereinfacht sich (40) zu:

$$u = u_S - w'_M z - v'_M y - \vartheta'_{xM} \omega_0 \quad (41)$$

Gleichung (41) stellt die Längsverschiebung eines beliebigen Punktes auf der Profilmittellinie dar. Die Ableitung wurde in Anlehnung an [26] vorgenommen.

Mit (41) sowie (29 a) und (29 b) kann die Verschiebung eines Punktes der Profilmittellinie durch die auf S und M bezogenen Größen  $v'_M$ ,  $w'_M$ ,  $u_S$  und  $\vartheta'_{xM}$  sowie deren Ableitungen vollständig beschrieben werden.

### 4.5.3 Berücksichtigung der Kinematik in der Grundgleichung

Zunächst wird Gleichung (26) mit den Verzerrungs-Verschiebungs-Relationen (7) umgeformt.

$$\begin{aligned} & \int_V s_{xx} \delta u_{,x} d(V) + \int_V \tilde{s}_{x\bar{z}} \delta [(u_{,z} + w_{,x}) \cos \alpha - (u_{,y} + v_{,x}) \sin \alpha] d(V) + \\ & \int_V \tilde{s}_{x\bar{z}} \delta g_{x\bar{z}} d(V) + \frac{1}{2} \int_V \tau_{xx} \delta (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) d(V) + \int_V \tau_{xy} \delta (u_{,x} u_{,y} + v_{,x} v_{,y} + \\ & + w_{,x} w_{,y}) d(V) + \int_V \tau_{xz} \delta (u_{,x} u_{,z} + v_{,x} v_{,z} + w_{,x} w_{,z}) d(V) = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (42) \end{aligned}$$

Wie üblich, werden im weiteren die Produkte der Ableitungen der Verschiebungen in x - Richtung vernachlässigt. Dies darf geschehen, da die Verschiebungen in Längsrichtung beim Stab wesentlich kleiner sind als die Verschiebungen quer zur Stabachse. Mit den kinematischen Beziehungen (29) und (41) wird aus (42):

$$\begin{aligned} & \int_V s_{xx} \delta (u'_s - w''_M z - v''_M y - \vartheta'_{xM} \omega_0) d(V) + \int_V \tilde{s}_{x\bar{z}} \delta g_{x\bar{z}} d(V) + \frac{1}{2} \int_V \tau_{xx} \delta [(v'_M - \\ & - (z - z_M) \vartheta'_{xM})^2 + (w'_M - (y - y_M) \vartheta'_{xM})^2] d(V) + \int_V \tau_{xy} \delta [w'_M + (y - y_M) \vartheta'_{xM}] \vartheta'_{xM} d(V) \\ & - \int_V \tau_{xz} \delta [v'_M - (z - z_M) \vartheta'_{xM}] \vartheta'_{xM} d(V) = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (43) \end{aligned}$$

Dabei wurde unter Verwendung der Gleichungen (22), (31) und (38) von der folgenden Beziehung Gebrauch gemacht:

$$[(y - y_M) \cos \alpha + (z - z_M) \sin \alpha] - \left[ \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \cos \alpha - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \sin \alpha \right] = r_t - r_t = 0 \quad (44)$$

wodurch der Ausdruck mit den Schubspannungen aus der Wölbkrafttorsion entfällt.



#### 4.6 Schnittgrößen

Das Ziel einer Berechnung nach der Balkentheorie ist es, nicht mit Verzerrungen und Spannungen, sondern mit resultierenden integralen Größen zu operieren. Den Krümmungen und Längenänderungen werden deshalb per Definition Schnittmomente und Schnittkräfte zugeordnet. Für die nach Bild 10 b auf S bzw. M bezogenen Schnittgrößen des endlich deformierten Zustandes 1 im lokalen x, y, z - KOS gilt:

$$\int_A^1 \tau_{xx} d(a) = {}^1P \quad (45a)$$

$$\int_A^1 \tau_{xx} z d(a) = {}^1M_y \quad (45b)$$

$$\int_A^1 \tau_{xx} y d(a) = {}^1M_z \quad (45c)$$

$$\int_A^1 \tau_{xx} [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] d(a) = {}^1K \quad (45d)$$

$$\int_A^1 \tau_{xx} \omega_0 d(a) = {}^1M_w \quad (45e)$$

$$\int_A^1 \tau_{xy} d(a) = {}^1Q_y \quad (45f)$$

$$\int_A^1 \tau_{xz} d(a) = {}^1Q_z \quad (45g)$$

Das Wölbmoment  ${}^1M_w$  wird häufig auch als Bimoment bezeichnet. Für einen I - Träger ergibt es sich als das Produkt aus dem Flanschbiegemoment mit dem Schwerpunktsabstand der beiden Gurte. Die Größe  ${}^1K$  ist in der Literatur als Wagner - Koeffizient bekannt [34], [82]. Aus der Multiplikation von  ${}^1K$  mit der Ableitung der Längsverdrehung  ${}^1\vartheta_{xM}$  entsteht ein Torsionsmomentenanteil  ${}^1M_{TK}$  im Sinne eines Effektes der Theorie II. Ordnung. Anschaulich ergibt sich dieser aus der Neigung der Längsspannungen infolge einer Querschnittsverwölbung.

Da voraussetzungsgemäß der Querschnitt nicht verzerrt wird und die Dehnungen klein sind, darf in den Gleichungen (45) die Integration über die verformte Fläche  ${}^1A$  der Konfiguration 1 durch die über den unverformten Querschnitt ersetzt werden. Einsetzen von (45) in (43) liefert:

$$\begin{aligned}
& \int_V s_{xx} \delta (u'_S - w'_M z - v'_M y - \vartheta'_{xM} \omega_0) dx + \int_V \bar{s}_{xz} \delta g_{xz} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_L P \delta [v_M'^2 + w_M'^2 + 2\vartheta'_{xM} (z_M v'_M - y_M w'_M)] dx - \int_L M_y \delta (\vartheta'_{xM} v'_M) dx \\
& + \int_L M_z \delta (\vartheta'_{xM} w'_M) dx + \frac{1}{2} \int_L K \delta (\vartheta_{xM}^2) dx + \int_L Q_y \delta (w'_M \vartheta'_{xM}) dx \\
& - \int_L Q_z \delta (v'_M \vartheta'_{xM}) dx = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (46)
\end{aligned}$$

Da bisher keine Werkstoffbeziehungen verwendet wurden, stellt die Gleichung (46) den Ausgangspunkt sowohl für elastisches als auch elastisch - plastisches Materialverhalten dar. In (46) wurde, ebenso wie in [94], der folgende Ausdruck als ein Term, der von höherer Ordnung klein ist, vernachlässigt.

$$\int_V [{}^1\tau_{xy} (y - y_M) + {}^1\tau_{xz} (z - z_M)] \delta (\vartheta'_{xM} \vartheta'_{xM}) d({}^1V) \quad (47)$$

#### 4.7 Eulersche Differentialgleichungen und Randbedingungen

Aus dem durch die Grundgleichung (46) beschriebenen Variationsproblem können die Eulerschen Differentialgleichungen und die Randbedingungen des Problems gewonnen werden [79], [94], [98].

Dazu ist es nötig, die Zuwächse in den Schnittgrößen für das Inkrement von Zustand 1 nach 2 im lokalen  $x, y, z$  - KOS wie folgt zu definieren:

$$\int_A s_{xx} d({}^1a) = P \quad (48a)$$

$$\int_A s_{xx} z d({}^1a) = M_y \quad (48b)$$

$$\int_A s_{xx} y d({}^1a) = M_z \quad (48c)$$

$$\int_A s_{xx} \omega_0 d({}^1a) = M_\omega \quad (48d)$$

Ebenso wie bei der Berechnung der Gesamtschnittgrößen im Zustand 1 (Abschnitt 4.6) kann auch in (48) über die unverformte Querschnittsfläche  $^{\circ}A$  bzw.  $d(^{\circ}a)$  integriert werden. Mit (48) erhält man aus Gleichung (46):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{L}} [P \delta u'_S - M_y \delta w''_M - M_z \delta v''_M - M_w \delta \vartheta'_{xM}] dx + \int_{\mathbb{L}} M_{TS} \delta \vartheta'_{xM} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{L}} P \delta [v_M'^2 + w_M'^2 + \\ & + 2 \vartheta'_{xM} (z_M v'_M - y_M w'_M)] dx - \int_{\mathbb{L}} M_y \delta (\vartheta'_{xM} v'_M) dx + \int_{\mathbb{L}} M_z \delta (\vartheta'_{xM} w'_M) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{L}} K \delta (\vartheta'_{xM})^2 dx + \int_{\mathbb{L}} Q_y \delta (w'_M \vartheta'_{xM}) dx - \int_{\mathbb{L}} Q_z \delta (v'_M \vartheta'_{xM}) dx = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \end{aligned} \quad (49)$$

Zur Ermittlung des Zuwachses des St. Venantschen Torsionsmomentes wurde von der aus der Analogie mit dem Seifenhauthügel bekannten Verzerrungsbeziehung [26], [34], [124] Gebrauch gemacht.

$$g_{x\bar{z}} = 2 \bar{y} \vartheta'_{xM} \quad (50)$$

Damit gilt:

$$M_{TS} = \int_A 2 \bar{y} \bar{s}_{x\bar{z}} d(^1a) \quad (51)$$

Durch partielle Integration und Anwendung des Fundamental - Lemmas der Variationsrechnung [32] erhält man aus (43) die Eulerschen Differentialgleichungen für das inkrementelle Gleichgewicht und die Randterme, aus denen die natürlichen Randbedingungen folgen.

$$P' = 0 \quad (52a)$$

$$M_y'' + ({}^1P w_M')' - ({}^1P y_M \vartheta'_{xM})' + ({}^1M_z \vartheta'_{xM})'' = 0 \quad (52b)$$

$$M_z'' + ({}^1P v_M')' + ({}^1P z_M \vartheta'_{xM})' - ({}^1M_y \vartheta'_{xM})'' = 0 \quad (52c)$$

$$M_w'' + M_{TS}' + ({}^1P z_M v_M')' - ({}^1P y_M w_M')' - {}^1M_y v_M'' + {}^1M_z w_M'' + ({}^1K \vartheta'_{xM})' = 0 \quad (52d)$$

$$[P \delta u_s]_0^L = 0 \quad (53a)$$

$$[(^1Q_z + ^1Q_y \vartheta_{xM} - ^1P_{yM} \vartheta'_{xM} + ^1P_{w'_M} + ^1M_z \vartheta'_{xM}) \delta w_M]_0^L = 0 \quad (53b)$$

$$[-M_y \delta w'_M] = 0 \quad (53c)$$

$$[(^1Q_y - ^1Q_z \vartheta_{xM} + ^1P_{z_M} \vartheta'_{xM} + ^1P_{v'_M} - ^1M_y \vartheta'_{xM}) \delta v_M]_0^L = 0 \quad (53d)$$

$$[-M_z \delta v'_M] = 0 \quad (53e)$$

$$[(M_{TS} + M'_w + ^1K \vartheta'_{xM} + ^1P_{z_M} v'_M - ^1P_{y_M} w'_M - ^1M_y v'_M + ^1M_z w'_M) \delta \vartheta'_{xM}]_0^L = 0 \quad (53f)$$

$$[-M_w \delta \vartheta'_{xM}]_0^L = 0 \quad (53g)$$

In (52) wurden die Querkräfte über das Gleichgewicht durch die Momente ausgedrückt. Weder in den Differentialgleichungen noch in den Randbedingungen sind Anteile aus einer verteilten Belastung oder aus Knotenlasten enthalten. Da hier nur Knotenlasten betrachtet werden sollen, sind daraus resultierende Randterme als Ungleichgewichtskräfte der rechten Seite von (49) zusätzlich in den Gleichungen (53) zu berücksichtigen. In den Fällen, in denen an den Integrationsrändern keine erzwungenen oder geometrischen Randbedingungen vorliegen, stellen die Beziehungen (53) die statischen oder natürlichen Randbedingungen dar. Falls keine erzwungenen Randbedingungen vorliegen, muß eine Integrabilitätsbedingung erfüllt sein [32]. Unter Verwendung eines linear elastischen Materialgesetzes zur Berechnung der inkrementellen Schnittgrößen kann (52) und (53) so umgeformt werden, daß sie mit den von Wlassow angegebenen Gleichungen in [129] übereinstimmen.

## 5. Stoffbezogene Grundgleichung

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens werden kleine Verschiebungen und kleine Dehnungen vorausgesetzt. Dies ist gerechtfertigt, da einerseits, wie später im Abschnitt 9 gezeigt, die Starrkörperanteile aus den Gesamtverformungen eliminiert werden und andererseits die Verformungsinkremente voraussetzungsgemäß ohnehin klein sind. Deshalb können zur Darstellung des Werkstoffverhaltens die Ingenieurspannung  ${}^1\sigma$  und die lineare Ingenieurdehnung  ${}^1\epsilon$  bzw. deren Inkremente  $\sigma$  und  $\epsilon$  verwendet werden.

### 5.1 Werkstoffbeschreibung

Werden bereits plastizierte Fasern eines Querschnittes entlastet, so existiert für ein nichtlinear elastisch-plastisches Stoffgesetz keine Eindeutigkeit mehr zwischen Spannungen und Dehnungen (Bild 13).

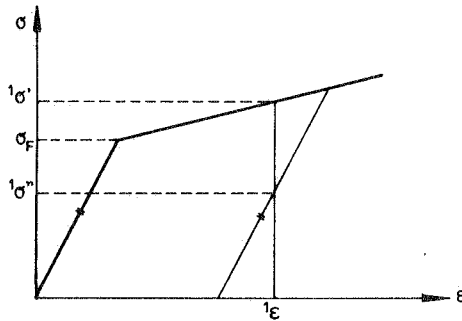


Bild 13: Mehrdeutiges Spannungsproblem

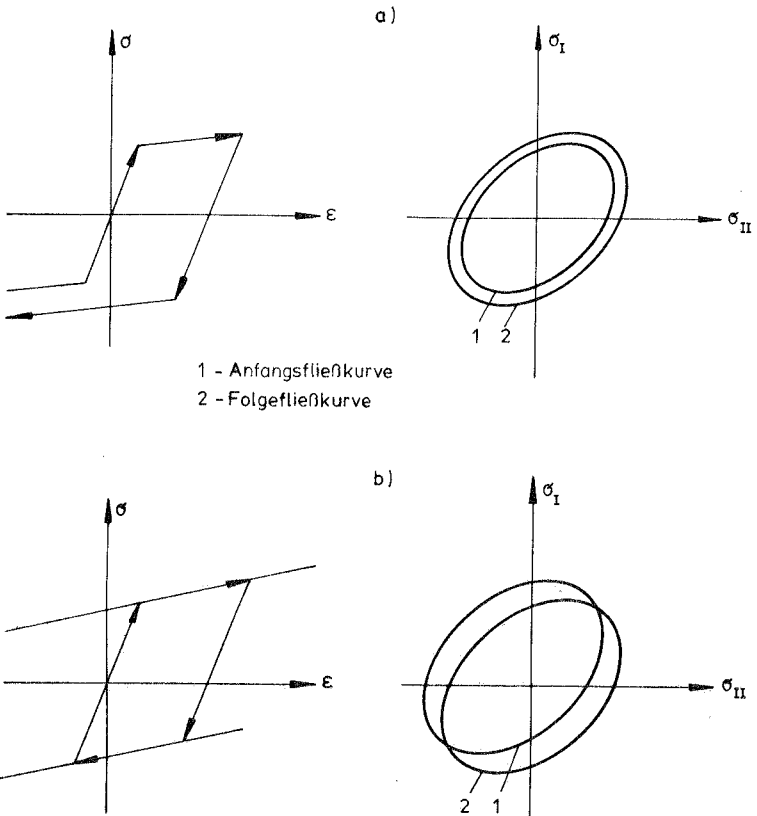
Dies erfordert die Anwendung der in [57] und [102] für mehrdimensionale Spannungszustände dargestellten Plastizitätstheorie. Innerhalb der Plastizitätstheorie sind zwei Formulierungen zu unterscheiden. Die Deformationstheorie setzt voraus, daß zwischen den Gesamtdehnungen und den Spannungen eine eindeutige Beziehung endlicher Art existiert. Dies schließt die

Entlastung einmal plastizierter Querschnittsteile aus. Die Deformationstheorie reduziert sich damit auf eine nichtlinear elastische Theorie ohne Entlastung. Die Fließtheorie stellt einen Zusammenhang zwischen den infinitesimalen Verzerrungs- und Spannungszuständen dar. Dieser läßt sich beschreiben, wenn z.B. die Gesamtdehnungen und deren plastische Anteile bekannt sind. Da in dieser Arbeit sowohl Entlastungen in den äußeren Kräften als auch im Spannungs - Dehnungs - Diagramm möglich seien, wird die Fließtheorie mit Beschränkung auf den einaxialen Spannungszustand verwendet. Für die allgemeine Fließtheorie wird eine Anfangsfließbedingung zur Festlegung des Fließbeginns, ein plastisches Vergleichsdehnungsmaß zur Verknüpfung mit dem eindimensionalen Stoffgesetz, eine Fließregel zur Bestimmung der plastischen Dehnungsanteile in den einzelnen Richtungen sowie ein Verfestigungsgesetz zur Definition der Folgefließflächen benötigt.

Es wird angenommen, daß aus dem einaxialen Zugversuch der Zusammenhang zwischen der Ingenieurspannung  $\sigma$  und der Ingenieurdehnung  $\epsilon$  bekannt sei. Die Beschränkung auf einen einaxialen Spannungszustand führt zu wesentlichen Vereinfachungen. Aus einer Anfangsfließbedingung nach von Mises oder Tresca folgt:

$$F({}^1\sigma_{xx}, {}^1\sigma_F) = {}^1\sigma_{xx} - {}^1\sigma_F = 0 \quad (54)$$

Auf ein Vergleichsdehnungsmaß, ebenso wie auf eine auf den Drucker - Postulaten basierende Fließregel kann verzichtet werden. Zusätzliche Überlegungen sind lediglich im Hinblick auf ein geeignetes Verfestigungsgesetz anzustellen. In [107] wird ein Überblick über verschiedene Modelle gegeben, die für den numerischen Rechenprozeß geeignet scheinen. Als grundlegende Arten sind die isotrope und die kinematische Verfestigung zu unterscheiden. Bei Annahme der Anfangsfließbedingung z.B. nach von Mises bedeutet dies, daß die Ellipse für ebene Spannungszustände gleichmäßig aufgeweitet (Bild 14 a) bzw. in einer Richtung verschoben wird (Bild 14 b).



**Bild 14:** Verfestigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm und in der Hauptspannungsebene  
 a) isotrope Verfestigung  
 b) kinematische Verfestigung

Bei monoton wachsender Belastung darf in Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen ein isotropes Verfestigungsgesetz verwendet werden. Dies gilt auch für schwach verfestigende Werkstoffe. Zur Berücksichtigung einer wechselnden Beanspruchung und zur näherungsweisen Erfassung des dabei sich einstellenden Bauschinger - Effektes wird in dieser Arbeit anstelle eines komplizierten Mehrschichtenmodells eine rein kinematische Verfestigung zugrunde gelegt [57]. Zur Lösung eines mehrachsigen elastisch - plastischen Problems werden in [6] zwei grundsätzliche Konzepte angegeben. Die

auch hier verwendete direkte Methode führt die nichtlineare Aufgabe auf ein bereichsweise lineares Problem zurück. Zur Beseitigung der durch die Linearisierung entstandenen Fehler in den Spannungen sind wiederum zwei Verfahren bekannt. Durch die Interpolationsmethode einerseits oder die Iterationsmethode andererseits wird die Spannungsberechnung solange korrigiert, bis im gesuchten Zustand die Fließbedingung erfüllt ist. Bei der zweiten in [6] angegebenen Methode der quadratischen Programmierung erhält man den Spannungszuwachs durch Minimierung des quadratischen Funktionals der Komplementärenergie.

Bei einem eindimensionalen Spannungszustand kann die direkte Methode ohne Korrekturmaßnahmen verwendet werden. Zu diesem Zweck sind die Gesamtverzerrungen in einen elastischen und einen rein plastischen Anteil zu zerlegen.

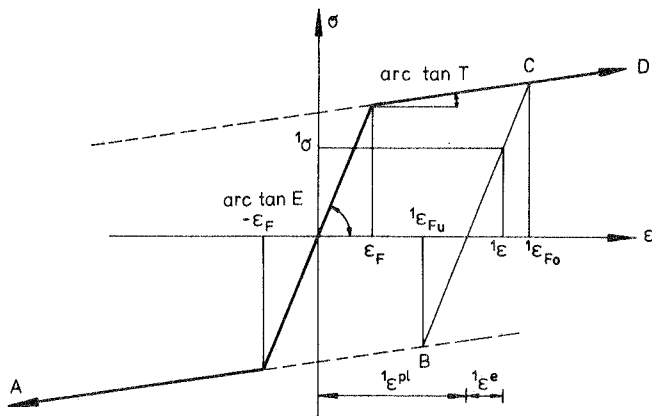


Bild 15: Dehnungsanteile im Zustand 1

Die Spannung im Zustand 1 ergibt sich nach Bild 15 allein aus dem unter Beachtung der Fließtheorie ermittelten elastischen Dehnungsanteil aus

$${}^1\epsilon = {}^1\epsilon^e + {}^1\epsilon^{pl} \quad (55)$$

$$\text{zu } {}^1\sigma = E {}^1\epsilon^e \quad (56a)$$



Bezeichnet man mit  $E_t$  den Be- oder Entlastungsmodul für das inkrementelle Stoffgesetz, so gilt:

$$\sigma = E_t \varepsilon \quad (56b)$$

Aus Bild 15 erkennt man, daß einer Gesamtdehnung  ${}^1\varepsilon$  im Zustand 1 eindeutig die Spannung  ${}^1\sigma$  zugeordnet werden kann, wenn der plastische Dehnungsanteil  ${}^1\varepsilon^{pl}$  bekannt ist. Innerhalb des Inkrementes, welches zum Zustand 2 führt, wird eine Umkehr im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ausgeschlossen. Da die Entlastung parallel zur Belastungsgeraden verläuft, gibt der Linienzug ABCD in Bild 15 das momentan gültige Stoffgesetz sowohl für das Inkrement  $1 \rightarrow 2$  als auch für den erreichten Zustand 2 an. Zur Berechnung der Spannungen in 2 und zur Bestimmung des Be- oder Entlastungsmoduls  $E_t$  (Tangentenmodul) für das folgende Inkrement aus den Gesamtdehnungen im Zustand 2 und den plastischen Dehnungsanteilen im Zustand 1 sind drei Fälle zu unterscheiden.

a)  ${}^1\varepsilon_{Fu} \leq {}^2\varepsilon \leq {}^1\varepsilon_{Fo}$  (57)

Die Zu- oder Abnahme der Dehnungen von 1 nach 2 erfolgte entlang der Geraden BC und somit rein elastisch. Damit gilt:

$${}^2\varepsilon^{pl} = {}^1\varepsilon^{pl} \quad (58a)$$

$$E_t = E \quad (58b)$$

b)  ${}^2\varepsilon > {}^1\varepsilon_{Fo}$  (59)

Die Dehnungszunahme erfolgte entweder direkt von C oder von einem Punkt auf der Geraden BC in Richtung D.

$${}^2\varepsilon^{pl} = \left(1 - \frac{T}{E}\right) ({}^2\varepsilon - \varepsilon_F) \quad (60a)$$

$$E_t = T \quad (60b)$$

c)  ${}^2\varepsilon < {}^1\varepsilon_{Fu}$  (61)

Die Dehnungsabnahme im Schritt  $1 \rightarrow 2$  erfolgte entweder direkt von B oder von einem Punkt auf der Geraden BC in Richtung A.

$${}^2\varepsilon^{pl} = \left(1 - \frac{T}{E}\right) ({}^2\varepsilon + \varepsilon_F) \quad (62a)$$

$$E_t = T \quad (62b)$$

Aus den somit bekannten plastischen Dehnungsanteilen im Zustand 2 erhält man bei sinngemäßer Anwendung der Gleichungen (55) und (56 a) die Spannung im Zustand 2. Mit  $E_t$  als Tangentenmodul für die Normalspannungen wird das inkrementelle Stoffgesetz für das folgende Lastinkrement formuliert. Der inkrementelle Schubmodul  $G_t$  wird ohne Berücksichtigung der Interaktion zwischen Schubspannungen und Normalspannungen im Fließgesetz näherungsweise entsprechend dem aktuellen Elastizitätsgesetz abgemindert.

Damit erhält man für das inkrementelle Stoffgesetz zur Verwendung in der stoff-freien Grundgleichung (46):

$$s_{xx} = E_t e_{xx} \quad (63a)$$

$$\tilde{s}_{x\bar{z}} = G_t g_{x\bar{z}} \quad (63b)$$

Wegen des angestrebten linearen Gleichungssystems in den Verformungszuwächsen wurde in den obigen Gleichungen eine zweite Linearisierung (erste Linearisierung siehe Abschnitt 4.4.1) mit  $\epsilon_{xx} \rightarrow e_{xx}$  bzw.  $\gamma_{x\bar{z}} \rightarrow g_{x\bar{z}}$  durchgeführt. Weiterhin wurde mit Voraussetzung 5 nach Abschnitt 4.4.2  $C_{xxxx} = E_t =$  konstant und  $C_{x\bar{z}x\bar{z}} = G_t =$  konstant gesetzt. Mit (7), (41) und (50) erhält man aus den Beziehungen (63):

$$s_{xx} = E_t (u'_S - w''_M z - v''_M y - \partial''_{xM} \omega_0) \quad (64a)$$

$$\tilde{s}_{x\bar{z}} = G_t 2\bar{y} \partial'_{xM} \quad (64b)$$

Eine weitere Fallunterscheidung für Lastumkehr der äußeren Belastung ist nicht erforderlich. Die Entlastung in den auf das Tragwerk wirkenden Kräften bewirkt auch eine Entlastung im Spannungs - Dehnungs - Diagramm. Dadurch wird ab dem 2. Iterationsschritt im inkrementellen Stoffgesetz der Belastungsmodul durch den Entlastungsmodul ersetzt. Bei Entlastung von einem horizontalen Bereich der Last - Verformungs - Kurve aus muß jedoch die Verwendung der elastischen Steifigkeitsmatrix bereits im 1. Iterationsschritt erzwungen werden (siehe Beispiel 3.1, Abschnitt 12.3).

## 5.2 Linear elastisches Werkstoffverhalten

Zur Vereinfachung der Rechnung im linear elastischen Bereich wird S als Schwerpunkt und M als Schubmittelpunkt gewählt. Durch zweimalige Orthogonalisierung [26] geht die Wölbkoordinate  $\omega_0$  in die normierte, vom Ursprung der Wandkoordinate s unabhängige Einheitsverwölbung  $\omega$  über. Unter Verwendung der Bezeichnungsweise nach Bornscheuer [24]

$$\int_A ab d(\cdot a) = F_{ab}$$

gilt somit:

$$F_y = F_z = F_\omega = F_{yz} = F_{zy} = F_{y\omega} = F_{\omega y} = F_{z\omega} = F_{\omega z} \equiv 0 \quad (65)$$

Mit dem inkrementellen Stoffgesetz nach (64) und unter Beachtung von (65) erhält man für die Grundgleichung (46):

$$\begin{aligned} & \int_{l_L}^1 E [ F u'_s \delta u'_s + F_{zz} w''_M \delta w''_M + F_{yy} v''_M \delta v''_M + F_{\omega\omega} \vartheta''_{xM} \delta \vartheta''_{xM} ] dx + \\ & + \int_{l_L}^1 G J_T \vartheta'_{xM} \delta \vartheta'_{xM} dx + \frac{1}{2} \int_{l_L}^1 P \delta ( v_M'^2 + w_M'^2 + 2 \vartheta'_{xM} ( z_M v'_M - y_M w'_M ) ) dx + \\ & - \int_{l_L}^1 M_y \delta ( \vartheta'_{xM} v'_M ) dx + \int_{l_L}^1 M_z \delta ( \vartheta'_{xM} w'_M ) dx + \frac{1}{2} \int_{l_L}^1 K \delta ( \vartheta_{xM}^2 ) dx + \\ & \int_{l_L}^1 Q_y \delta ( w'_M \vartheta'_{xM} ) dx - \int_{l_L}^1 Q_z \delta ( v'_M \vartheta'_{xM} ) dx = {}^2 \delta W_{(a)} - {}^1 \delta W_{(i)} \end{aligned} \quad (66)$$

Dabei wurde mit (50) und (64 b)

$$\int_V \bar{s}_{x\bar{z}} \delta g_{x\bar{z}} d(\cdot v) = \int_{l_L}^1 4G \left[ \int_A \left( \int_{-1/2}^{1/2} \bar{y}^2 d\bar{y} \right) d\bar{z} \right] \vartheta'_{xM} \delta \vartheta'_{xM} dx \quad (67)$$

und weiter

$$\int_{l_L}^1 4G \left[ \int_A \left( \int_{-1/2}^{1/2} \bar{y}^2 d\bar{y} \right) d\bar{z} \right] \vartheta'_{xM} \delta \vartheta'_{xM} dx = \int_{l_L}^1 G \left[ \frac{1}{3} \int_A t^3 d\bar{z} \right] \vartheta'_{xM} \delta \vartheta'_{xM} dx \quad (68)$$

gesetzt. Durch

$$\frac{1}{3} \int_A t^3 d\bar{z} = J_T \quad (69)$$

ist das bekannte St. Venantsche Torsionsträgheitsmoment definiert. Die in Gleichung (66) benötigten Torsionskenngrößen  $F_{\omega\omega}$  können für geläufige Querschnittsformen dem Schrifttum, z.B. aus [25], entnommen werden. Für beliebige Querschnitte wurde ein Unterprogramm entwickelt, welches als Eingabe-größen die Querschnittskordinaten, die Zuordnung der abschnittsweise geradlinigen Segmente sowie deren Dicken benötigt. Daraus werden Schwerpunkt, Schubmittelpunkt, die Hauptachsen, die Koordinaten bezüglich der Hauptachsen sowie alle in (66) benötigten Querschnittsgrößen errechnet (siehe Anhang A 1). In [53] wird ein ähnliches Programm zur auto-matischen Erzeugung dieser Größen angegeben.

### 5.3 Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten

Nach Plastizierungsbeginn sind Schubmittelpunkt und Schwerpunkt nicht länger konstante Größen. Ebenso wie die Lage der Hauptachsen, ändern sie sich entsprechend dem Plastizie-rungszustand ständig. Zur Formulierung des inkrementellen Gleichgewichts für einen elastisch - plastischen Werkstoff ergeben sich daraus zwei Möglichkeiten. Die erste Möglich-keit besteht darin, den momentanen Schwerpunkt und Schub-mittelpunkt sowie die Orientierung der Hauptachsen zu jedem Zeitpunkt neu zu bestimmen. Dies hätte eine Entkopplung von Normalkraft, Biegung und Torsion zur Folge. Der alternative, hier eingeschlagene Weg verwendet beliebige Bezugspunkte S und M sowie ein beliebig orientiertes Achsensystem. Als Konsequenz aus diesem Vorgehen erhält man, wie später zu sehen ist, "vollbesetzte" inkrementelle Steifigkeitsmatri-zen. Auch die Stoffeigenschaften sind nach Plastizierungs-beginn sowohl in Stablängsrichtung als auch über den Quer-schnitt veränderlich.

$$E_t = E_t(x, y, z) \quad (70a)$$

$$G_t = G_t(x, y, z) \quad (70b)$$

Mit

$$\bar{F}_{ab} = \int_A E_t \, ab \, d(1a) \quad (70c)$$

$$\bar{J}_T = \frac{1}{3} \frac{G}{E} \int_A E_t \, t^3 \, d\bar{z} \quad (70d)$$

erhält man durch Einsetzen von (64) in die stoff-freie Grundgleichung (46):

$$\begin{aligned}
 & \int_L [\bar{F}_u u'_S - \bar{F}_y v''_M - \bar{F}_z w''_M - \bar{F}_w \vartheta''_{xM}] \delta u'_S dx - \\
 & - \int_L [\bar{F}_y u'_S - \bar{F}_{yy} v''_M - \bar{F}_{yz} w''_M - \bar{F}_{yw} \vartheta''_{xM}] \delta v''_M dx - \\
 & - \int_L [\bar{F}_z u'_S - \bar{F}_{zy} v''_M - \bar{F}_{zz} w''_M - \bar{F}_{zw} \vartheta''_{xM}] \delta w''_M dx - \\
 & - \int_L [\bar{F}_w u'_S - \bar{F}_{wy} v''_M - \bar{F}_{wz} w''_M - \bar{F}_{ww} \vartheta''_{xM}] \delta \vartheta''_{xM} dx + \int_L \bar{J}_T \vartheta'_{xM} \delta \vartheta'_{xM} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_L P \delta (v_M'^2 + w_M'^2 + 2 \vartheta'_{xM} (z_M v'_M - y_M w'_M)) dx - \int_L M_y \delta (\vartheta'_{xM} v'_M) dx + \\
 & + \int_L M_z \delta (\vartheta'_{xM} w'_M) dx + \frac{1}{2} \int_L K \delta (\vartheta'_{xM})^2 dx + \int_L Q_y \delta (w'_M \vartheta'_{xM}) dx - \\
 & - \int_L Q_z \delta (v'_M \vartheta'_{xM}) dx = {}^2 \delta W_{(a)} - {}^1 \delta W_{(i)} \quad (71)
 \end{aligned}$$

In vielen Arbeiten zur Traglastberechnung von Stäben mit offenem dünnwandigem Querschnitt wird für den nichtlinearen Werkstoffbereich sinngemäß die Shanley - Theorie zugrunde gelegt [1], [22], [52], [68], [94]. Bei dieser Theorie wird vereinfachend angenommen, daß zu jedem Zeitpunkt für den gesamten Querschnitt ein eindeutiges Stoffgesetz existiert. Mit seiner Kenntnis kann für jedes Querschnittssegment der Spannungsverlauf über die Segmentlänge  $b_k$  allein aus den Dehnungen an den Segmentenden und der Annahme eines linearen Dehnungsverlaufs bestimmt werden. Das Segment wird in Längsrichtung in Bereiche mit konstantem Tangentenmodul  $E_t$  unterteilt. Durch die Gewichtung der Segmentdicke mit dem Verhältnis  $E_t/E$  entsteht der "transformierte Querschnitt" [94], [98] mit abschnittsweise veränderlicher Dicke

$$t = \frac{E_t}{E} t_k$$

nach Bild 16. Eine auf das Last-Verformungs-Problem übertragene Shanley - Theorie berücksichtigt nicht lokale Entlastungen infolge von Spannungsumlagerungen und schließt eine Lastumkehr aus. Es ist deshalb dabei nicht erforderlich, die Belastungsgeschichte aufzuzeichnen. Auch auf die inkrementelle Lastaufbringung kann in diesem Fall verzichtet werden.

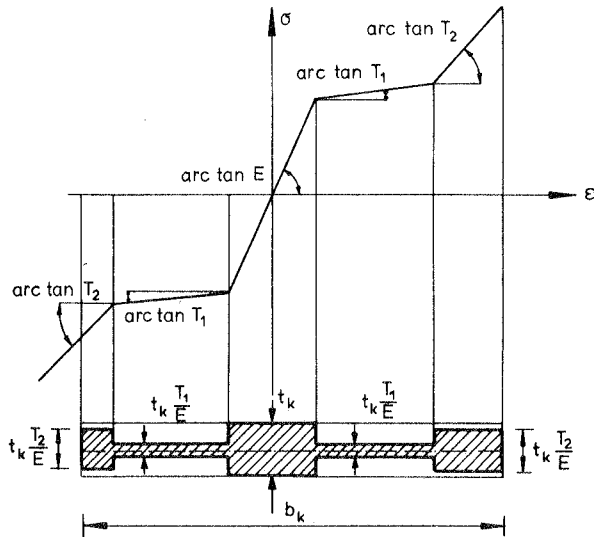


Bild 16: Transformierter Querschnitt des k-ten Segmentes

Das hier im Rahmen der Fließtheorie verwendete Vorgehen im Sinne von Engesser - Karman benötigt zur Spannungsberechnung Informationen über den Spannungs- oder Dehnungszustand vor dem aktuellen Inkrement. Dazu wird in dieser Arbeit der plastische Dehnungsanteil der vorhergehenden Konfiguration verwendet. Da dieser in Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte auch innerhalb eines Segmentes jeden beliebigen Wert annehmen kann, existiert ein eindeutiges Stoffgesetz nur noch punktwise. Eine geschlossene Berechnung von Querschnittswerten wie beim "transformierten Querschnitt" ist deshalb nicht möglich. Die Integration muß numerisch entlang der Profilmittellinie erfolgen. Da die dazu nötigen Stützstellen in gleichmäßigen Abständen angeordnet werden, geschieht die Integration sinnvoll nach der Simpson - Regel [16]. Die Stoffeigenschaften sind über die Segmentdicke hinweg nicht veränderlich. Unter Aufgabe dieser Annahme wären in Dickenrichtung für die Simpson - Integration mindestens drei Stützstellen vorzusehen. Da jedoch  $n$  Stützstellen

senkrecht zur Profilmittellinie auch n-fachen Speicherplatz bedeuten, wird hier darauf verzichtet. Zudem sind bei den üblichen Konstruktionen des Stahlbaus die Wanddicken so gering, daß ein ungleichmäßiger Spannungsverlauf für die Längsspannungen in Dickenrichtung vernachlässigt werden kann. Einzelheiten der numerischen Integration zur Ermittlung der Größen  $\tilde{F}_{ab}$  und  $\tilde{J}_T$  sind im Anhang A 2 dargestellt. Die Anzahl der Stützstellen ist vom Benutzer unter Beachtung der Segmentlänge und der zu erzielenden Genauigkeit festzulegen.

## 6. Diskretisierung mit der finiten Element-Methode

Das durch die Gleichungen (66) und (71) beschriebene Problem enthält mit den inkrementellen Größen  $u_S$ ,  $v_M$ ,  $w_M$ ,  $\delta_{xM}$  sowie deren Ableitungen für jeden Punkt der Stabachse unendlich viele Unbekannte. Durch Verwendung von Verschiebungsfunktionen als bereichsweise Ritz - Ansätze erhält man ein Problem mit endlich vielen Freiheitsgraden. Gallagher gibt in [44] die folgenden Kriterien an, welche bei der Wahl der Ansatzfunktionen zu beachten sind.

1. Die Ansatzfunktionen sollen stetig innerhalb eines Elementes und verträglich zwischen benachbarten Elementen sein. Diese Forderung entsteht auch aus der Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Für das dreidimensionale Balkenelement bedeutet dies, daß die Verschiebungen, die Verdrehungen und die Verwölbungen kompatibel sein sollten (Kompatibilitätsbedingung).

Daraus folgt, daß die Ansatzfunktionen so oft differenzierbar sein müssen, daß die höchste im Variationsfunktional (66) bzw. (71) auftretende Ableitung nicht verschwindet. Ableitungen n-ter Ordnung verlangen bei einem Polynomansatz mindestens Glieder n-ter Ordnung.

2. Infolge einer Starrkörperbewegung dürfen im Element keine Verzerrungen entstehen (siehe dazu Abschnitt 4.3).
3. Die Ansatzfunktionen müssen Glieder enthalten, welche zu einem konstanten Spannungs- und Verzerrungszustand führen.

Anhand numerischer Ergebnisse konnte gezeigt werden, daß trotz Nichtbeachtung der Kriterien 1 und 2 eine Konvergenz gegen die exakte Lösung durch Verfeinerung des Elementnetzes in vielen Fällen möglich ist. Der Verzicht auf die Forderung 3 kann dazu führen, daß die Lösung gegen einen falschen Grenzwert konvergiert.



Deshalb sollte diese Bedingung immer eingehalten werden. Bei Ansatzfunktionen, die allen genannten Kriterien genügen, kann monotone Konvergenz von unten gegen die potentielle Energie des verformten Systems bewiesen werden.

Unter Berücksichtigung dieser Regeln werden für die beiden Verschiebungen senkrecht zur Stabachse  $v_M$  und  $w_M$  sowie die Verdrehung  $\vartheta_{xM}$  um die Längsachse jeweils ein kubischer und für die Verschiebung in Richtung der Stabachse  $u_S$  ein linearer Ansatz gewählt. Mit den Vektoren der inkrementellen Knotenverformungen vom Zustand 1  $\rightarrow$  2 nach Bild 17

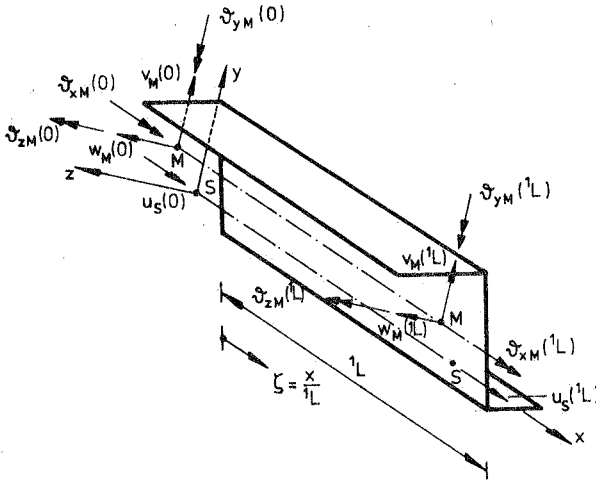


Bild 17: Inkrementelle Knotenverformungen

$$\mathbf{u}_S = [u_S(0) \quad u_S(L)]^T \quad (73a)$$

$$\mathbf{v}_M = [v_M(0) \quad {}^1L\vartheta_{z_M}(0) \quad v_M(L) \quad {}^1L\vartheta_{z_M}(L)]^T \quad (73b)$$

$$\mathbf{w}_M = [w_M(0) \quad {}^1L\vartheta_{y_M}(0) \quad w_M(L) \quad {}^1L\vartheta_{y_M}(L)]^T \quad (73c)$$

$$\mathbf{\vartheta}_{xM} = [\vartheta_{xM}(0) \quad {}^1L\vartheta'_{xM}(0) \quad \vartheta_{xM}(L) \quad {}^1L\vartheta'_{xM}(L)]^T \quad (73d)$$

und den Vektoren der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{n}_1 = [(1-\zeta) \zeta]^T \quad (74a)$$

$$\mathbf{n}_3 = [(1-3\zeta^2+3\zeta^3)(\zeta-2\zeta^2+\zeta^3)(3\zeta^2-2\zeta^3)(\zeta^3-\zeta^2)]^T \quad (74b)$$

können die Verformungen der Bezugspunkte an einer beliebigen Stelle  $\zeta = x/L$  innerhalb des Elementes wie folgt beschrieben werden:

$$u_s(\zeta) = \mathbf{n}_1^T \mathbf{u}_s \quad (75a)$$

$$v_M(\zeta) = \mathbf{n}_3^T \mathbf{v}_M \quad (75b)$$

$$w_M(\zeta) = \mathbf{n}_3^T \mathbf{w}_M \quad (75c)$$

$$\vartheta_{xM}(\zeta) = \mathbf{n}_3^T \vartheta_{xM} \quad (75d)$$

Dabei ist zu beachten

$$v'_M(0) = \vartheta_{zM}(0) \quad (76a)$$

$$v'_M(L) = \vartheta_{zM}(L) \quad (76b)$$

$$w'_M(0) = \vartheta_{yM}(0) \quad (76c)$$

$$w'_M(L) = \vartheta_{yM}(L) \quad (76d)$$

Durch die Wahl der Knotenverformungen als Ansatzparameter des kubischen Polynoms stellen die Ausdrücke in Gleichung (74 b) die bekannten Hermite - Funktionen dar. Die Gleichungen (75 b) und (75 c) geben die exakte Lösung für die Biegelinie eines Balkens nach Theorie I. Ordnung an. Anstelle der exakten von Krajcinovic in [66] verwendeten hyperbolischen Funktionen zur Darstellung der Verdrehung um die Längsachse werden in (75 d) ebenfalls Hermite - Polynome benutzt. Mei [74] hat nachgewiesen, daß selbst in Fällen, in denen das Verhältnis von St. Venantscher Torsionssteifigkeit zu Wölbsteifigkeit nicht mehr vernachlässigbar klein ist, Elemente mit kubischen Ansätzen zur exakten Lösung konvergieren. Mit den Gleichungen (75) wird die Anzahl der

unbekannten Verformungsinkremente für ein räumliches Balkenelement auf 14, durch (73 a) bis (73 d) definierte Größen reduziert.

In [61] und [94] wird festgestellt, daß für eine Berechnung mit nichtlinear elastischem Werkstoff entweder ein quadratischer Ansatz für die Längsverschiebungen oder ein auf die momentan neutrale Achse bezogener linearer Ansatz erforderlich ist, um das Gleichgewicht innerhalb des Elementes zu befriedigen. In [65] wird sogar ein kubischer Ansatz verwendet. Trotz eines quadratischen Ansatzes gelang es allerdings in dieser Arbeit für den Fall des Plastizierens nicht, die Gleichgewichtsforderung in den Normalkräften zu erfüllen. Ein Grund dafür könnte die Berechnung der Längskräfte an den Elementenden aus dem vollständigen nichtlinearen Verzerrungstensor sein. Darüber hinaus entsteht bei der nachfolgenden statischen Kondensation der zusätzlichen Freiheitsgrade bei nichtlinear elastischem Werkstoff eine Kopplung der geometrischen und der elastischen Steifigkeitsmatrix. Dies führt zu Schwierigkeiten bei der Lösung des Eigenwertproblems. Aus diesen Gründen werden hier die aus einem linearen Ansatz für die Längsverschiebungen entstehenden Kräfte an den Stabenden gemittelt, wodurch Gleichgewicht im Innern erzwungen wird.

## 7. Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrizen

Durch Einsetzen der Verformungsansätze nach Abschnitt 6 in die Gleichungen (66) bzw. (71) wird ein Zusammenhang hergestellt zwischen den diskreten Verformungsinkrementen und den Zuwächsen in den Stabendschnittgrößen. Dabei werden sowohl für die wirklichen Verformungsinkremente wie auch für die virtuellen Verformungen dieselben Ansätze verwendet.

### 7.1 Linear elastisches Werkstoffverhalten

Unter Beachtung von

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{l_L} \quad (77a)$$

$$\int_{l_L} ( ) dx = l_L \int_0^1 ( ) d\zeta \quad (77b)$$

$$\text{und } \frac{\partial}{\partial \zeta} n_i = n'_i \quad (77c)$$

folgt aus Gleichung (66) mit (75 a) bis (75 d):

$$\begin{aligned} & \delta u_s^T \left[ \int_0^1 \frac{EF}{l_L} n'_1 n_1^T d\zeta \right] u_s + \\ & \delta v_M^T \left[ \left( \int_0^1 \frac{EF_{yy}}{l_L^3} n''_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1P}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta \right) v_M + \right. \\ & \quad \left. + \left( \int_0^1 \frac{1P_{zM}}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta - \int_0^1 \frac{1M_y}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta - \int_0^1 q_z n'_3 n_3^T d\zeta \right) \mathfrak{D}_{xM} \right] + \\ & \delta w_M^T \left[ \left( \int_0^1 \frac{EF_{zz}}{l_L^3} n''_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1P}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta \right) w_M + \right. \\ & \quad \left. + \left( - \int_0^1 \frac{1P_{yM}}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1M_z}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 q_y n'_3 n_3^T d\zeta \right) \mathfrak{D}_{xM} \right] + \\ & \delta \mathfrak{D}_{xM}^T \left[ \left( \int_0^1 \frac{EF_{\omega\omega}}{l_L^3} n''_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{GJ_T}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1K}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta \right) \mathfrak{D}_{xM} + \right. \\ & \quad \left. + \left( \int_0^1 \frac{1P_{zM}}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta - \int_0^1 \frac{1M_y}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta - \int_0^1 q_z n'_3 n_3^T d\zeta \right) v_M + \right. \\ & \quad \left. + \left( - \int_0^1 \frac{1P_{yM}}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1M_z}{l_L} n'_3 n_3^T d\zeta + \int_0^1 q_y n'_3 n_3^T d\zeta \right) w_M \right] \\ & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (78) \end{aligned}$$

Zur Ausführung der Integration wird von der Voraussetzung des abschnittsweise prismatischen Querschnittes mit konstanten Stoffeigenschaften (Annahme 1, Abschnitt 4.4.1 und 2 nach 4.4.2) Gebrauch gemacht. In Übereinstimmung mit den später erläuterten Verformungsansätzen für die Gesamtverformungen gilt für den Verlauf der Schnittgrößen innerhalb des Elementes:

$${}^1P = \text{konst} \quad (79a)$$

$${}^1M_y = (1-\zeta) {}^1M_y(0) + \zeta {}^1M_y({}^1L) \quad (79b)$$

$${}^1M_z = (1-\zeta) {}^1M_z(0) + \zeta {}^1M_z({}^1L) \quad (79c)$$

$${}^1K = (1-\zeta) {}^1K(0) + \zeta {}^1K({}^1L) \quad (79d)$$

Weiterhin können die konstanten Querkräfte durch die Momente an den Stabenden ersetzt werden.

$${}^1Q_y {}^1L = {}^1M_z({}^1L) - {}^1M_z(0) \quad (80a)$$

$${}^1Q_z {}^1L = {}^1M_y({}^1L) - {}^1M_y(0) \quad (80b)$$

Damit kann zwischen dem Vektor aller Verformungsinkremente im lokalen  $x, y, z$  - KOS

$$v_l = [u_s^i \quad v_m^i \quad w_m^i \quad \vartheta_{xm}^i \quad \vartheta_{ym}^i \quad \vartheta_{zm}^i \quad u_s^j \quad v_m^j \quad w_m^j \quad \vartheta_{xm}^j \quad \vartheta_{ym}^j \quad \vartheta_{zm}^j \quad (\vartheta_{xm}^i)^i (\vartheta_{xm}^j)^j]^T \quad (81a)$$

und dem Vektor aller inkrementellen Stabendschnittgrößen im  $x, y, z$  - KOS

$$S_l = [P^i \quad Q_y^i \quad Q_z^i \quad M_x^i \quad M_y^i \quad M_z^i \quad P^j \quad Q_y^j \quad Q_z^j \quad M_x^j \quad M_y^j \quad M_z^j \quad M_\omega^{*i} \quad M_\omega^{*j}]^T \quad (81b)$$

die Elementbeziehung formuliert werden:

$$S_l = (k_e + k_g) v_l = k_l v_l \quad (81c)$$

Die Größe  $M_\omega^*$  enthält wegen des kubischen Ansatzes für die Torsionsverdrehungen auch Anteile aus der St. Venantschen Torsion.

Die in Tafel 1 angegebene elastische Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_e$  wird aus den Termen in Gleichung (78) gebildet, die den Elastizitäts- oder Schubmodul enthalten. Die mit den Schnittgrößen der Konfiguration 1 verknüpften Ausdrücke in (78) führen zur geometrischen oder Anfangspannungsmatrix  $\mathbf{k}_g$  nach Tafel 2 und Tafel 3. Die Kopfzeiger  $i$  bzw.  $j$  in (81 a) und (81 b) kennzeichnen die positiv in Richtung der lokalen Koordinatenachsen zeigenden Größen an der Stelle  $x = 0$  bzw.  $x = {}^1L$ . Dabei ist insbesondere zu beachten:

$$\vartheta_{yM}^i = -\vartheta_{yM}(0) \quad (82a) \qquad \vartheta_{yM}^j = -\vartheta_{yM}({}^1L) \quad (82b)$$

$$P^i = -P(0) \quad (82c) \qquad Q_y^i = -Q_y(0) \quad (82d)$$

$$Q_z^i = -Q_z(0) \quad (82e) \qquad M_y^i = -M_y(0) \quad (82f)$$

$$M_z^j = -M_z({}^1L) \quad (82g)$$

## 7.2 Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten

Zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen für plastizierte oder teilplastizierte Elemente ist von Gleichung (71) auszugehen. Mit den Verformungsansätzen (75 a) bis (75 d) erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
 & \delta \mathbf{u}_S^T \left[ \int_0^1 \frac{\bar{F}_x}{l} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^T d\zeta \mathbf{u}_S - \int_0^1 \frac{\bar{F}_y}{l^2} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{v}_M - \int_0^1 \frac{\bar{F}_z}{l^2} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{w}_M - \right. \\
 & \left. - \int_0^1 \frac{\bar{F}_w}{l^2} \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} \right] - \delta \mathbf{v}_M^T \left[ \int_0^1 \frac{\bar{F}_y}{l^2} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1^T d\zeta \mathbf{u}_S - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{yy}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{v}_M - \right. \\
 & \left. - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{yz}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{w}_M - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{yw}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} \right] - \delta \mathbf{w}_M^T \left[ \int_0^1 \frac{\bar{F}_z}{l^2} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1^T d\zeta \mathbf{u}_S - \right. \\
 & \left. - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{yz}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{v}_M - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{zz}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{w}_M - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{zw}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} \right] \\
 & - \delta \mathfrak{D}_{xM}^T \left[ \int_0^1 \frac{\bar{F}_w}{l^2} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1^T d\zeta \mathbf{u}_S - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{wy}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{v}_M - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{wz}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{w}_M - \right. \\
 & \left. - \int_0^1 \frac{\bar{F}_{ww}}{l^3} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} - \int_0^1 \frac{J_I}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} \right] + \delta \mathbf{v}_M \left[ \int_0^1 \frac{1^P}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{v}_M + \right. \\
 & \left. \left( \int_0^1 \frac{1^{PzM}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta - \int_0^1 \frac{1^{My}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta - \int_0^1 \frac{1^{Qz}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \right) \mathfrak{D}_{xM} \right] + \\
 & + \delta \mathbf{w}_M \left[ \int_0^1 \frac{1^P}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathbf{w}_M + \left( - \int_0^1 \frac{1^{PYM}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1^{Mz}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 \frac{1^{Qy}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \right) \mathfrak{D}_{xM} \right] + \delta \mathfrak{D}_{xM} \left[ \int_0^1 \frac{1^K}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \mathfrak{D}_{xM} + \left( \int_0^1 \frac{1^{PzM}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \int_0^1 \frac{1^{My}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta - \int_0^1 \frac{1^{Qz}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \right) \mathbf{v}_M + \left( - \int_0^1 \frac{1^{PYM}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 \frac{1^{Mz}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta + \int_0^1 \frac{1^{Qy}}{l} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3^T d\zeta \right) \mathbf{w}_M \right] = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \quad (83)
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (78) und (83) stimmen in den Ausdrücken überein, welche die Kraftgrößen im Zustand 1 enthalten. Da

sich aus diesen Termen die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_g$  ergibt, ist diese identisch mit der für linear elastischen Werkstoff (siehe Tafel 2 und 3). Die "vollbesetzte" elastische Reststeifigkeitsmatrix für teilplastizierte Stäbe nach Tafel 4 erhält man mit

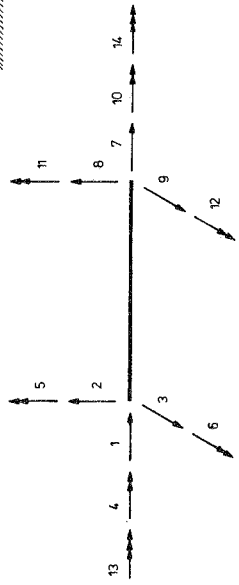
$$\tilde{\mathbf{F}}_{ab} = (1 - \zeta) \tilde{\mathbf{F}}_{ab}^i + \zeta \tilde{\mathbf{F}}_{ab}^j \quad (84)$$

Da bei einer U.L. - Formulierung die inkrementellen Steifigkeitsmatrizen auf einen erreichten Zustand zu beziehen sind, ist zu beachten, daß in den Tafeln 1 bis 4 die Größe  $L$  näherungsweise die Länge der Stabsehne im Zustand 1 bezeichnet. Zur Herleitung der Steifigkeitsmatrizen wurden die im Anhang A 3 angegebenen Beziehungen verwendet.



$S_1$	$EF/L$				$-EF/L$																		
$S_2$		$12EF_{yy}/L^3$			$6EF_{yy}/L^2$																		$6EF_{yy}/L^2$
$S_3$			$12EE_{zz}/L^3$			$-6EE_{zz}/L^2$																	$-6EE_{zz}/L^2$
$S_4$				$12EE_{\omega\omega}/L^3$ $+ (6/5)G_T/L$																			$6EE_{\omega\omega}/L^2$ $+ (1/10)G_T$
$S_5$						$4EE_{zz}/L$																	
$S_6$							$4EF_{yy}/L$																
$S_7$								$EF/L$															
$S_8$									$12EF_{yy}/L^2$														
$S_9$										$12EE_{zz}/L^2$													
$S_{10}$											$12EE_{\omega\omega}/L^3$ $+ (6/5)G_T/L$												$-6EE_{\omega\omega}/L^2$ $- (1/10)G_T$
$S_{11}$												$4EE_{zz}/L$											
$S_{12}$													$4EE_{yy}/L$										
$S_{13}$														$4EE_{\omega\omega}/L$ $+ (2/15)G_T$									$2EE_{\omega\omega}/L$ $- (1/30)G_T$
$S_{14}$																							$4EE_{\omega\omega}/L$ $+ (2/15)G_T$

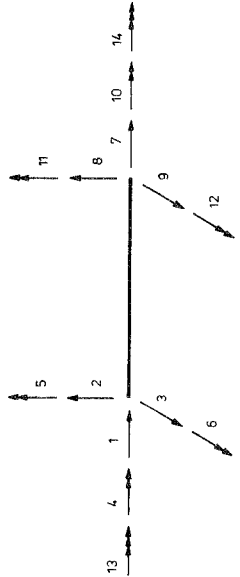
Symmetrie



Tafel 1 elastische Steifigkeitsmatrix

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$	$V_{10}$	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{14}$
$S_1$														
$S_2$		$\frac{6}{5L} P$				$\frac{1}{10} P$		$-\frac{6}{5L} P$		$-\frac{6}{5L} Pz_M$		$\frac{1}{10} P$	$\frac{1}{10} Pz_M$	$\frac{1}{10} Pz_M$
$S_3$			$\frac{6}{5L} P$	$-\frac{6}{5L} Pz_M$	$-\frac{1}{10} P$			$-\frac{6}{5L} P$	$-\frac{6}{5L} P$	$\frac{6}{5L} Pz_M$		$-\frac{1}{10} P$	$-\frac{1}{10} Pz_M$	$-\frac{1}{10} Pz_M$
$S_4$					$\frac{1}{10} Pz_M$	$\frac{1}{10} Pz_M$		$-\frac{6}{5L} Pz_M$	$\frac{6}{5L} Pz_M$		$\frac{1}{10} Pz_M$			
$S_5$					$\frac{2L}{15}$			$\frac{1}{10} P$	$\frac{1}{10} P$	$-\frac{1}{10} Pz_M$	$-\frac{L}{30} P$		$\frac{2L}{15} Pz_M$	$-\frac{L}{30} Pz_M$
$S_6$						$\frac{2L}{15}$		$-\frac{1}{10} P$		$-\frac{1}{10} Pz_M$		$-\frac{L}{30} P$	$\frac{2L}{15} Pz_M$	$-\frac{L}{30} Pz_M$
$S_7$														
$S_8$								$\frac{6}{5L} P$		$\frac{6}{5L} Pz_M$		$-\frac{1}{10} P$	$-\frac{1}{10} Pz_M$	$-\frac{1}{10} Pz_M$
$S_9$									$\frac{6}{5L} P$	$-\frac{6}{5L} Pz_M$	$\frac{1}{10} P$		$\frac{1}{10} Pz_M$	$\frac{1}{10} Pz_M$
$S_{10}$											$-\frac{1}{10} Pz_M$	$-\frac{1}{10} Pz_M$		
$S_{11}$											$\frac{2L}{15}$		$-\frac{L}{30} Pz_M$	$\frac{2L}{15} Pz_M$
$S_{12}$												$\frac{2L}{15} P$	$-\frac{L}{30} Pz_M$	$\frac{2L}{15} Pz_M$
$S_{13}$														
$S_{14}$														

Symmetrie



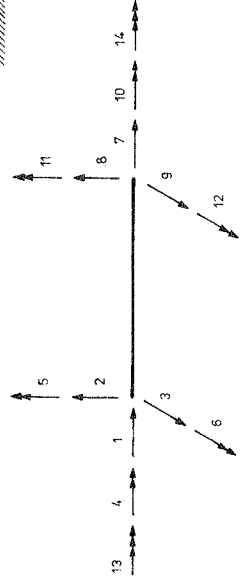
Tafel 2 geometrische Steifigkeitsmatrix (Anteile aus P)

**Symmetrie**

$S_1$															
$S_2$	$\frac{1}{10L}(11M_y^i - M_z^i)$	$\frac{1}{10L}(M_y^i - 11M_z^i)$	$\frac{1}{10}M_y^i$	$-\frac{1}{10}M_z^i$											
$S_3$	$\frac{1}{10L}(11M_y^i - M_z^i)$	$\frac{1}{10L}(M_y^i - 11M_z^i)$	$-\frac{1}{10}M_z^i$	$\frac{1}{10}M_y^i$											
$S_4$	$\frac{3}{5L}(K^i + K^j)$	$\frac{1}{10L}(M_y^i + 2M_z^i) - \frac{1}{10}(M_y^j + 2M_z^j)$	$\frac{1}{10L}(11M_y^i - M_z^i) - \frac{1}{10}(11M_y^j - M_z^j)$	$\frac{1}{10}(2M_y^i + M_z^i) - \frac{1}{10}(2M_y^j + M_z^j)$	$\frac{1}{10}K^i$	$\frac{1}{10}K^j$	$\frac{1}{10}M_y^i$	$-\frac{1}{10}M_z^i$							
$S_5$			$-\frac{1}{10}(M_y^i + 2M_z^i)$	$\frac{1}{10}(M_y^j + 2M_z^j)$	$-\frac{1}{10}(3M_z^i - M_z^j)$	$-\frac{1}{10}(3M_z^j - M_z^i)$	$-\frac{1}{30}M_z^i$	$\frac{1}{30}M_z^j$							
$S_6$			$\frac{1}{10}(M_y^i + 2M_z^i)$	$-\frac{1}{10}(M_y^j + 2M_z^j)$	$\frac{1}{30}(3M_z^i - M_z^j)$	$\frac{1}{30}(3M_z^j - M_z^i)$	$-\frac{1}{30}M_z^i$	$-\frac{1}{30}M_z^j$							
$S_7$															
$S_8$					$\frac{1}{10L}(M_y^i - 11M_z^i)$	$\frac{1}{10L}(M_y^j - 11M_z^j)$	$-\frac{1}{10}M_y^i$	$-\frac{1}{10}M_z^i$							
$S_9$					$\frac{1}{10L}(M_y^i - 11M_z^i)$	$\frac{1}{10L}(M_y^j - 11M_z^j)$	$-\frac{1}{10}M_z^i$	$\frac{1}{10}M_y^i$							
$S_{10}$			$\frac{3}{5L}(K^i + K^j)$	$\frac{1}{10}(2M_y^i + M_z^i) - \frac{1}{10}(2M_y^j + M_z^j)$	$-\frac{1}{10}(K^i + K^j)$	$-\frac{1}{10}(2M_y^i + M_z^i) - \frac{1}{10}(2M_y^j + M_z^j)$	$-\frac{1}{10}K^i$	$-\frac{1}{10}K^j$							
$S_{11}$							$-\frac{1}{30}M_z^i$	$-\frac{1}{30}M_z^j$							
$S_{12}$							$\frac{1}{30}M_z^i$	$\frac{1}{30}M_z^j$							
$S_{13}$							$\frac{1}{10}K^i$	$\frac{1}{10}K^j$							
$S_{14}$							$\frac{1}{30}K^i$	$\frac{1}{30}K^j$							

Tafel 3 geometrische Steifigkeitsmatrix (Anteile aus M und K)

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$	$V_{10}$	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{14}$
$S_1$	$\frac{1}{2L}(\bar{F}_x + \bar{F}_y)$	$\frac{1}{2L}(\bar{F}_x - \bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(\bar{F}_z - \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}\bar{F}_z$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z)$	$-\frac{1}{2L}(\bar{F}_x + \bar{F}_y)$	$-\frac{1}{2L}(\bar{F}_x + \bar{F}_y)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(\bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z)$
$S_2$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x + 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x - 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$
$S_3$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x + 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x + 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$
$S_4$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x + 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_x + 6\bar{F}_y)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(6\bar{F}_z + 6\bar{F}_z)$
$S_5$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_x + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_x + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$
$S_6$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_x + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_x + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$\frac{1}{L}(3\bar{F}_z + \bar{F}_z)$
$S_7$	$\frac{1}{2L}(\bar{F}_x + \bar{F}_y)$	$-\frac{1}{2L}(\bar{F}_x + \bar{F}_y)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$	$-\frac{1}{L}(\bar{F}_z + \bar{F}_z)$
$S_8$														
$S_9$														
$S_{10}$														
$S_{11}$														
$S_{12}$														
$S_{13}$														
$S_{14}$														



Tafel 4 elastische Reststeifigkeitsmatrix für teilplastizierte Elemente

### 7.3 Vergleich - Wertung

Im Unterschied zu der hier angegebenen üblichen elastischen Elementsteifigkeitsmatrix für linear elastisches Material berücksichtigt Przemieniecki in [93] die Schubverformung durch Reduzierung der Biegesteifigkeit. Beim Vergleich der geometrischen Steifigkeitsmatrix mit anderen aus den im Abschnitt 2.1, b 2 angegebenen Arbeiten fällt auf, daß meist nur die normalkraftbehafteten Anteile übereinstimmen. Die Unterschiede erklären sich aus der Mitnahme oder Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in den Verzerrungs - Verschiebungs - Beziehungen oder aus vereinfachenden Annahmen über den Verlauf von Schnittgrößen innerhalb des Elementes.

In [14] und [65] bzw. [106] findet sich in einzelnen Elementen der geometrischen Matrix das Produkt aus einer verteilten äußeren Belastung, die zwischen den Knoten angreift und dem Abstand in Lastrichtung zum Bezugspunkt im Querschnitt. Anders als die Laststeifigkeitswerte bei nicht richtungstreuer Belastung [117] resultieren diese Terme aus der Reduzierung des Stabes auf eine Linie mittels der Balkenhypothesen. Greifen die Lasten nur an den Knoten an, so kann das infolge der Drehung um die Längsachse entstehende Torsionsmoment aus der exzentrischen Querlast im Lastvektor als ein innerhalb des Iterationsschrittes konstantes äußeres Lastmoment betrachtet werden [91]. Eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung derartiger Torsionsbelastungen besteht in der Anordnung von zusätzlichen Elementen zwischen Lastangriffspunkt und Schwerpunkt (siehe Beispiel 2.5 und 4.2).

Die in diesem Abschnitt angegebenen inkrementellen Steifigkeitsmatrizen bilden näherungsweise eine "Tangentialebene" im Last-Verschiebungs-Raum. Neben den genannten Einschränkungen ist ferner zu beachten, daß bei der Ableitung von einem im Zustand 1 geraden Balkenelement der Länge  ${}^1L$  und dem Querschnitt  ${}^1A = {}^0A$  ausgegangen wird. Die Relativverformung in dieser Konfiguration gegenüber der Stabsehne wird vernachlässigt. Damit, ebenso wie durch die Vernachlässigung

von Gliedern höherer Ordnung in der Verzerrungs - Verformungs - Beziehung wird die effektive Steifigkeit des Elementes geringfügig überschätzt.

## 8. Zusammenbau der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix

Wie im Abschnitt 4.3 dargestellt, muß die virtuelle Arbeitsgleichung (8) wegen der Diskretisierung des Tragwerks in finite Elemente zunächst auf jedes Element angewendet werden. Die inkrementelle, im elementeigenen  $x, y, z$  - KOS erstellte Steifigkeitsmatrix ist dann in ein globales, allen Elementen gemeinsames Koordinatensystem zu transformieren. An den Stellen, an denen mehrere Elemente Steifigkeiten für denselben Verformungsfreiheitsgrad liefern, sind diese z.B. mit der direkten Steifigkeitsmethode aufzusummieren, wodurch die Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  entsteht. Die zugehörigen Unbekannten sind die im Vektor  $\mathbf{r}$  zusammengefaßten globalen Verformungsinkremente. Ebenso werden die Stabendschnittgrößen im Zustand 1 in das globale System transformiert, zum Vektor  ${}^1\mathbf{F}$  der globalen inneren Kräfte aufaddiert und vom Lastvektor  ${}^2\mathbf{R}$  der gesuchten Konfiguration 2 abgezogen. Damit ergibt sich die folgende Beziehung für das gesamte Tragwerk:

$$\delta \mathbf{r}^T (\mathbf{K} \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r}^T ({}^2\mathbf{R} - {}^1\mathbf{F}) \quad (85)$$

Für ein beliebiges virtuelles Verschiebungsfeld folgt daraus das gesuchte lineare Gleichungssystem für die unbekanntenen Verformungsinkremente.

### 8.1 Transformationsbeziehungen

Da die kinematischen und statischen Größen in der Elementbeziehung (81) teils auf den Schwerpunkt  $S$ , teils auf den Schubmittelpunkt  $M$  bezogen sind, ist zunächst eine durch die Matrix  $\Delta \mathbf{T}$  bezeichnete Transformation vorzunehmen, die Verformungen und Schnittgrößen auf die Achsen überträgt, bezüglich derer Verträglichkeit und Gleichgewicht gefordert wird. Da üblicherweise Stahlbauten so konstruiert werden, daß die Systemlinie mit der Schwerlinie zusammenfällt, wurde hier der Schwerpunkt  $S$  als gemeinsamer Bezugspunkt gewählt.

Die Verschiebungen des Schwerpunktes erhält man aus den Gleichungen (29 a) und (29 b) für  $y = z = 0$ .

$$v_S = v_M + z_M \vartheta_{xM} \quad (86a)$$

$$w_S = w_M - y_M \vartheta_{xM} \quad (86b)$$

Mit  $\vartheta_{xS} = \vartheta_{xM}$  folgt daraus für die Elementenden:

$$v_M^i = v_S^i - z_M \vartheta_{xS}^i \quad (87a)$$

$$v_M^j = v_S^j - z_M \vartheta_{xS}^j \quad (87b)$$

$$w_M^i = w_S^i + y_M \vartheta_{xS}^i \quad (87c)$$

$$w_M^j = w_S^j + y_M \vartheta_{xS}^j \quad (87d)$$

und durch Differenzieren:

$$\vartheta_{zM}^i = (v_M^i)_{x=0} = (v_S^i)_{x=0} - z_M (\vartheta_{xS}^i)_{x=0} = \vartheta_{zS}^i - z_M (\vartheta_{xS}^i)' \quad (88a)$$

$$\vartheta_{zM}^j = (v_M^j)_{x=L} = (v_S^j)_{x=L} - z_M (\vartheta_{xS}^j)_{x=L} = \vartheta_{zS}^j - z_M (\vartheta_{xS}^j)' \quad (88b)$$

$$\vartheta_{yM}^i = -(w_M^i)_{x=0} = -(w_S^i)_{x=0} - y_M (\vartheta_{xS}^i)_{x=0} = \vartheta_{yS}^i - y_M (\vartheta_{xS}^i)' \quad (88c)$$

$$\vartheta_{yM}^j = -(w_M^j)_{x=L} = -(w_S^j)_{x=L} - y_M (\vartheta_{xS}^j)_{x=L} = \vartheta_{yS}^j - y_M (\vartheta_{xS}^j)' \quad (88d)$$

Zwischen  $\mathbf{V}_l$  nach Gleichung (81a) und dem dazu analogen Vektor  $\bar{\mathbf{V}}_l$ , in dem alle kinematischen Knotengrößen auf die Schwerlinie bezogen sind, kann damit die folgende Beziehung formuliert werden:

$$\mathbf{V}_l = \Delta T \bar{\mathbf{V}}_l \quad (89)$$



mit

$$\Delta T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -z_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & y_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_M & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_M & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 & -z_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & y_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & -y_M & 0 \\ & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -z_M & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Umgekehrt gilt für den zu  $S_l$  analogen Vektor  $\bar{S}_l$ , in dem die statischen Größen auf die Schwerlinie bezogen sind:

$$\bar{S}_l = \Delta T^T S_l \quad (91)$$

Mit (89) und (91) erhält man aus (81c) die auf die Schwerlinie bezogene lokale Elementsteifigkeitsmatrix.

$$\bar{S}_l = \Delta T^T \bar{k}_l \Delta T \bar{v}_l \quad k_l \bar{v}_l \quad (92)$$

In [8] werden in der Transformationsmatrix  $\Delta T$  die Nebendiagonalglieder der Spalten 13 und 14 vernachlässigt, während Bazant, Nimeiri [18] diese Terme für einen einfachsymmetrischen Querschnitt berücksichtigen.

Mit  ${}^1T$ , definiert durch

$$\bar{v}_i = {}^1T v_G \quad (93)$$

kann (92) in das globale X, Y, Z - Koordinatensystem transformiert werden:

$$S_G = {}^1T^T \bar{k}_i {}^1T v_G = k_G v_G \quad (94)$$

Da das lokale x, y, z - System der Konfiguration 1 gegenüber dem  $\overset{\circ}{x}$ ,  $\overset{\circ}{y}$ ,  $\overset{\circ}{z}$  - KOS des undeforinierten Zustandes endlich verdreht sein kann, wird die Orientierungsänderung der elementfesten Achsen zum globalen System schrittweise durch kleine inkrementelle Änderungen erfaßt.

$${}^1T = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 {}^0T \quad (95)$$

Die durch  ${}^0T$  beschriebene Anfangsorientierung wird, wie in [111] durch die Richtungskosinus der lokalen  $\overset{\circ}{x}$  - Achse und den globalen X, Y, Z - Achsen sowie dem sogenannten Elementwinkel  $\overset{\circ}{\beta}$  zur Festlegung der  $\overset{\circ}{y}$ ,  $\overset{\circ}{z}$  - Achsen ausgedrückt. Der Winkel  $\overset{\circ}{\beta}$  wird nach Bild 18 in der Ebene 3 von der Schnittgeraden zwischen den Ebenen 2 und 3 zur lokalen  $\overset{\circ}{z}$  - Achse gemessen. Durch ihn wird entweder die Lage der Hauptachsen vorgegeben oder vom Programm errechnet. Der zugehörige Drehvektor weist in Richtung der  $\overset{\circ}{x}$  - Achse. Sind die Achsen  $\overset{\circ}{x}$  und Z parallel, wird die Ebene 2 durch die Ebene X = konstant definiert.

Nach [111] folgt mit

$$l_{\overset{\circ}{x}} = \cos(\overset{\circ}{x}, X) \quad (96a)$$

$$m_{\overset{\circ}{x}} = \cos(\overset{\circ}{x}, Y) \quad (96b)$$

$$n_{\overset{\circ}{x}} = \cos(\overset{\circ}{x}, Z) \quad (96c)$$

$$\overset{\circ}{q} = \sqrt{1 - n_{\overset{\circ}{x}}^2} \quad (97)$$

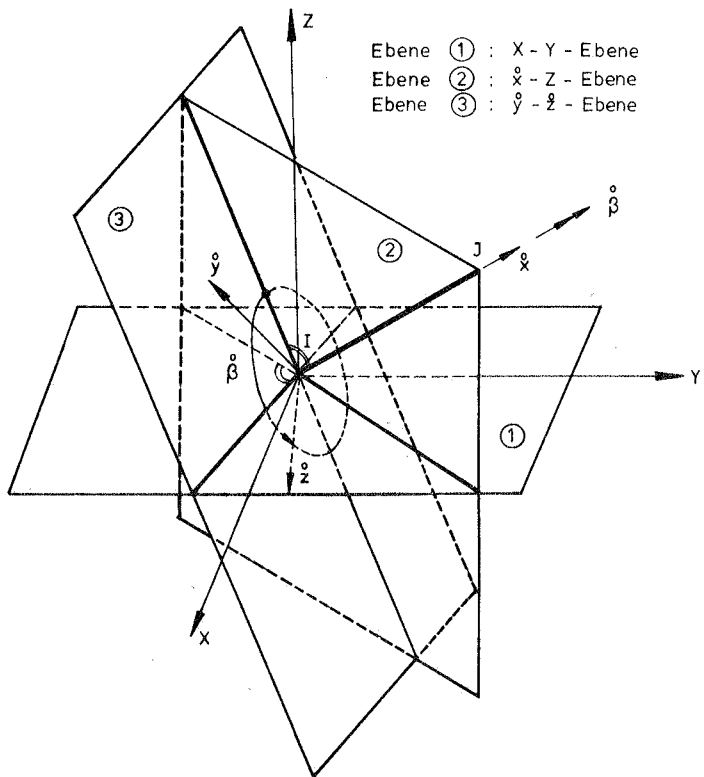


Bild 18: Orientierung des lokalen Koordinatensystems  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  der unverformten Konfiguration

$${}^0_t = \left[ \begin{array}{c|c|c} l_x^{\circ} & m_x^{\circ} & n_x^{\circ} \\ \hline -l_x^{\circ} n_x^{\circ} \sin \beta^{\circ} / \dot{q} & -m_x^{\circ} n_x^{\circ} \sin \beta^{\circ} / \dot{q} & \dot{q} \sin \beta^{\circ} \\ -m_x^{\circ} \cos \beta^{\circ} / \dot{q} & +l_x^{\circ} \cos \beta^{\circ} / \dot{q} & \dot{q} \cos \beta^{\circ} \\ \hline -l_x^{\circ} n_x^{\circ} \cos \beta^{\circ} / \dot{q} & -m_x^{\circ} n_x^{\circ} \cos \beta^{\circ} / \dot{q} & \dot{q} \cos \beta^{\circ} \\ +m_x^{\circ} \sin \beta^{\circ} / \dot{q} & -l_x^{\circ} \sin \beta^{\circ} / \dot{q} & \end{array} \right] \quad (98)$$

und daraus:

$${}^0_T = \left[ \begin{array}{cccc} {}^0_t & & & 0 \\ & {}^0_t & & \\ & & {}^0_t & \\ & & & {}^0_t \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{array} \right]_{14 \times 14} \quad (99)$$

Mit (98) ist eine Transformationsbeziehung für vektorielle Größen wie Verschiebungen und kleine Rotationen, nicht jedoch für Verwölbungen  $(\vartheta'_{xS})^i$ ,  $(\vartheta'_{xS})^j$  gegeben. Enthalten die zu diesen Freiheitsgraden gehörenden Spalten 13 und 14 von  ${}^0_T$  außerhalb der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Werte, so würde eine globale Verwölbung eine lokale Stabendverschiebung bewirken. Umgekehrt würden Werte ungleich Null in den Zeilen 13 und 14 außerhalb der Hauptdiagonalen zu einer lokalen Verwölbung infolge einer globalen Stabendverschiebung oder -verdrehung führen. Da beides auszuschließen ist, dürfen nur die Hauptdiagonalglieder 13 und 14 von Null verschieden sein. Analoge Überlegungen zur Transformation der Schnittgrößeninkremente vom X, Y, Z - in das  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  - KOS führen zu demselben Ergebnis. Die vorstehenden Plausibilitätsüberlegungen werden in [18] für gekrümmte Träger bewiesen.

Die Matrix  $T_k$  zur Beschreibung der Transformations-  
 Beziehungen zwischen den beiden inkrementell benachbarten  
 Konfigurationen k-1 und k ist prinzipiell in gleicher Weise  
 wie  ${}^0T$  darstellbar. Sie wird am Beispiel von  $T_2$ , womit  
 Kraft- und Verformungsgrößen im  $x, y, z$ -KOS in das  
 ${}^2x, {}^2y, {}^2z$ -KOS transformiert werden, erläutert.

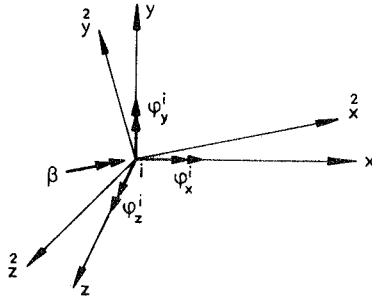


Bild 19: Rotationsinkremente in lokalen  
 Koordinaten

Die erste Zeile von  $t_2$  erhält man aus den Richtungskosinus  
 zwischen der  ${}^2x$ -Achse und den  $x, y, z$ -Achsen. Zu diesem  
 Zweck werden die in das  $x, y, z$ -KOS transformierten  
 Verschiebungs- und Rotationsinkremente benötigt. Die vierte  
 Bestimmungsgröße für  $t_2$ , die Zunahme des Elementwinkels  $\beta$   
 von 1 nach 2 ergibt sich als das Rotationsinkrement am  
 Knoten i um die  ${}^2x$ -Achse. Mit den bekannten  
 Rotationsinkrementen am Knoten i im  $x, y, z$ -KOS  $\varphi_x^i, \varphi_y^i,$   
 $\varphi_z^i$  (Bild 19) und der ersten Zeile von  $t_2$  folgt:

$$\beta = t_{21} \varphi_x^i + t_{22} \varphi_y^i + t_{23} \varphi_z^i \quad (100)$$

Damit sind alle zur Bildung von  $t_k$  nötigen  
 Bestimmungsgrößen bekannt. Analog zu (99) wird die  
 Gesamtmatrix  $T_k$  geformt. Die durch Gleichung (100) gegebene  
 vektorielle Transformation von Rotationen ist zulässig, da  
 die inkrementellen Verdrehungskomponenten  $\varphi_x^i, \varphi_y^i,$   
 $\varphi_z^i$  voraussetzungsgemäß klein sind.

Unter Verwendung der durch  ${}^0\mathbf{T}$  definierten, gegen das globale System endlich gedrehten Ausgangslage und der wiederholten Anwendung der durch  $\mathbf{T}_k$  beschriebenen Beziehung zwischen zwei mittels kleiner Drehungen und Verschiebungen verknüpften Systemen entsteht nach Gleichung (95) die gesuchte Transformationsaussage zwischen dem globalen KOS und dem lokalen, endlich gedrehten KOS im Zustand 1.

Da die Untermatrix  ${}^1\mathbf{t}$  von  ${}^1\mathbf{T}$  prinzipiell genau gleich aufgebaut ist wie  ${}^0\mathbf{t}$ , kann aus deren Komponenten der Gesamtwinkel  ${}^1\beta$  der Konfiguration 1 bestimmt werden. Aus

$$\sin {}^1\beta = \frac{{}^1t_{23}}{\sqrt{1 - {}^1t_{13}}} \quad (101a)$$

$$\cos {}^1\beta = \frac{{}^1t_{33}}{\sqrt{1 - {}^1t_{13}}} \quad (101b)$$

folgt  ${}^1\beta$  nach einer Fallunterscheidung zur Bestimmung des Quadranten aus den Umkehrfunktionen.

## 8.2 Verträglichkeit und Gleichgewicht

Der Zusammenbau der Stabelemente geschieht aus der Forderung nach der Verträglichkeit der Verformungen und nach dem Gleichgewicht der Kraftgrößen an gemeinsamen Knoten in den globalen Koordinaten. Für die Verschiebungen und Verdrehungen sowie die Kräfte und Biegemomente kann dies in der üblichen Weise [102] erfolgen. Gesonderte Überlegungen sind für Verwölbung und Wölbmoment anzustellen. Da die Verwölbung eines Stabes von der Querschnittsform und den Randbedingungen innerhalb des Querschnittes abhängt und andererseits die Bimomente als Eigenspannungszustand in sich im Gleichgewicht stehen, können dafür keine "globalen" Gleichgewichts- oder Verträglichkeitsbedingungen formuliert werden.

Wie in [18] gezeigt, besteht für gekrümmte Träger aus abschnittsweise geraden Stabelementen Gleichgewicht für die Bimomente und Verträglichkeit für die Verwölbung an

gemeinsamen Knoten, obwohl für die daraus resultierenden Spannungen und Verschiebungen beide Forderungen verletzt sind. Gleichgewicht und Verträglichkeit sowohl für den Gesamtquerschnitt als auch in Teilen existieren für Bimomente und Verwölbung beim geraden Träger ohne Aussteifung. Für beliebig gestaltete Rahmenecken besteht zur Bestimmung des Spannungsverlaufs im Knotenbereich nur die Möglichkeit, Querschnitte und Aussteifungen mit Platten- und Scheibenelementen zu modellieren. Aus solchen Untersuchungen können Werte für Wölbfedern, die die Balkenelemente miteinander verbinden, erhalten werden. Die Auswirkungen einer Wölbmomentenbeanspruchung auf einige Knotenkonstruktionen werden in [65] diskutiert.

In der vorliegenden Arbeit sind drei Möglichkeiten für einen gemeinsamen Knoten mehrerer Elemente vorgesehen:

- a) Die Verwölbungen sind gleich (unabhängig von der Orientierung der an dem Knoten anschließenden Stäbe).
- b) Die Verwölbungen sind unbehindert (Wölbgelenk).
- c) Die Verwölbungen sind vollständig behindert (Wölbbein-  
spannung).

Das Verhalten einer realen Konstruktion liegt zwischen den Alternativen b) und c) und kann, wie in [40] dargestellt, über Wölbfedern in einer FE - Formulierung erfaßt werden. Angaben über Wölbfedersteifigkeiten für Steifen und Kopfplatten findet man z.B. in [89] und [129]. In [78] werden experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Knotenausbildung auf das Torsionstragverhalten mitgeteilt.

## 9. Schnittgrößen am endlich verformten System

Die Stabendschnittgrößen im Zustand 1, definiert durch die Gleichungen (45) und analog zu (81 b) angeordnet im Vektor  ${}^1\mathbf{S}_l$ , werden benötigt zur Erstellung der inkrementellen geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix nach Abschnitt 7 sowie zur Bildung des Vektors der Ungleichgewichtskräfte. Sie ergeben sich für ein beliebiges virtuelles Verschiebungsfeld für ein Element in dessen lokalem KOS aus der rechten Seite von Gleichung (8):

$${}^1\delta W_{(i)} = \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}_1e_{ij} d({}^1v) = \delta \mathbf{v}_l^T {}^1\mathbf{S}_l = \delta \mathbf{v}_l^T {}^1\mathbf{k}_s \mathbf{v}_l \quad (102)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{v}_l$  entsprechend (81 a) den Vektor der relativen Stabendenverformungen und  ${}^1\mathbf{k}_s$  die gesuchte Sekantensteifigkeitsmatrix der Konfiguration 1. Diese ist, wie bei der Theorie II. Ordnung von den Verformungen im Zustand 1 abhängig.

Beachtet man, daß für die Cauchy - Spannung keine Inkrementierung möglich ist, stehen zu deren Berechnung folgende Möglichkeiten zur Verfügung.

- a) Existiert ein konstitutiver Tensor  ${}^1\mathbf{C}_{ijkl}$ , können die Cauchy - Spannungen  ${}^1\tau_{ij}$  durch die Almansi - Verzerrungen  ${}^1\epsilon_{kl}$  ausgedrückt werden [42]:

$${}^1\tau_{ij} = {}^1\mathbf{C}_{ijkl} {}^1\epsilon_{kl} \quad (103)$$

mit

$${}^1\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} ({}^1u_{k,l} + {}^1u_{l,k} - {}^1u_{i,k} {}^1u_{i,l}) \quad (103a)$$

- b) Mit den Überlegungen nach Abschnitt 4.3 darf  ${}^1\tau_{xx}$  näherungsweise durch  ${}^1s_{xx}$  ersetzt werden, wodurch die gesuchten Spannungen aus einem konstitutiven Tensor  ${}^1\mathbf{C}_{ijkl}$  und dem Greenschen Verzerrungstensor  ${}^1\epsilon_{kl}$  in den lokalen Koordinaten der Konfiguration 0 folgen.

$${}^1\tau_{xx} \approx {}^1s_{xx} = {}^1\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} {}^1\epsilon_{kl} \quad (104)$$



- c) Durch Elimination von Starrkörperverformungen mittels einer mitgehenden Koordinaten - Darstellung können für kleine Dehnungen Cauchy - Spannungen und Almansi - Verzerrungen näherungsweise durch die "Ingenieurspannungen" und "Ingenieurdehnungen" ersetzt werden.
- d) Ist nur ein Stoffgesetz zwischen den KP 2 - Spannungen und den Greenschen Verzerrungen bekannt, wird  ${}^1\tau_{ij}$  unter Verwendung des Deformationsgradienten  ${}^1x_{p,q}$  und der Dichte  ${}^m\rho$  im Zustand m durch  ${}^1s_{kl}$  dargestellt [72]:

$${}^1\tau_{ij} = \frac{{}^1\rho}{{}^0\rho} {}^1x_{i,k} {}^1x_{j,l} {}^1s_{kl} \quad (105)$$

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Kombination der Alternativen a) und c) gewählt. Mit den vereinfachenden Annahmen für die Verzerrungen nach Abschnitt 4.4.1 gilt für die Spannungen in Längsrichtung:

$${}^1\tau_{xx} = {}^1C_{xxxx} {}^1\varepsilon_{xx} \quad (106)$$

Für den konstanten Werkstofftensor  ${}^mC_{ijkl}$  ist der Tensor  ${}^1C_{ijkl}$  verformungsabhängig. Bei kleinen Verzerrungen kann jedoch auf eine Unterscheidung dieser Größen verzichtet werden [99]. Mit  ${}^1C_{xxxx} = E = \text{konstant}$  gilt deshalb:

$${}^1\tau_{xx} = E {}^1\varepsilon_{xx} \quad (107a)$$

und

$${}^1\tau_{xz} = G {}^1\gamma_{xz} \quad (107b)$$

Zur Berechnung des Almansi - Tensors  ${}^1\varepsilon_{xx}$  werden die Gesamtverformungen, beschrieben in den lokalen Koordinaten  $x, y, z$ , benötigt. Da hierzu nur diskrete Knotenwerte zur Verfügung stehen, werden für den Verlauf innerhalb des Elementes, wie bei den Inkrementen, Verschiebungsansätze verwendet. Mit Hilfe der mitgehenden Koordinaten - Darstellung nach Abschnitt 4.3 wird die Starrkörperbewegung abgespalten. Für die gesamten Relativverformungen werden dieselben kinematischen Querschnittsbeziehungen und dieselben Verformungsansätze wie für die inkrementellen Größen benutzt.

## 9.1 Relativverformungen

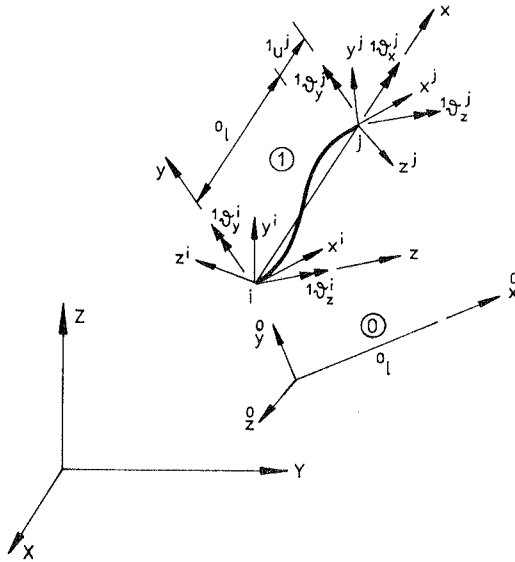


Bild 20: Knotenkoordinatensysteme, Relativverformungen

Aus den globalen Verschiebungskomponenten der Konfiguration 1 wird durch einfache Vektortransformation die Relativverschiebung  ${}^1u^j$  nach Bild 20 ermittelt. Da endliche Rotationen keine Vektoreigenschaft besitzen, können die lokalen Drehwinkel nicht direkt aus den globalen Größen bestimmt werden. Deshalb werden die gesamten Relativdrehwinkel  ${}^1\vartheta_y^i$ ,  ${}^1\vartheta_z^i$ ,  ${}^1\vartheta_y^j$ ,  ${}^1\vartheta_z^j$  gegenüber der Sehne und  ${}^1\vartheta_x^j$  gegenüber dem Querschnitt in i nach Bild 20, ähnlich wie in [23] und [50], als Komponenten der Transformationsmatrix zwischen den Knotenkoordinatensystemen an den Enden i bzw. j und dem x, y, z - KOS bestimmt. Die kartesischen Knotenkoordinatensysteme sind fest mit den Querschnitten an den Knoten i und j verbunden. Die  $x^i$  - bzw.  $x^j$  - Achse steht senkrecht auf der Schnittfläche und hat damit die Richtung der Tangente an die Biegelinie in den Knoten. Zwischen den Systemen bestehen folgende Beziehungen:

- a) Die Knotenkoordinatensysteme im Zustand 1  $x^i, y^i, z^i$  und  $x^j, y^j, z^j$  entstehen aus dem globalen KOS durch endliche Translationen und Rotationen.
- b) Auch das lokale  $x,y,z$  - KOS ist gegenüber dem globalen  $X,Y,Z$  - KOS endlich verschoben und verdreht.  
Die zugehörige Transformationsmatrix  ${}^1T$  wurde im Abschnitt 8.1 durch Inkrementierung der endlich verformten Konfiguration 1 in kleinen Lastschritten gefunden.
- c) Das Koordinatensystems  $x^i, y^i, z^i$  entsteht aus dem  $x,y,z$  - System durch kleine Drehungen um die  $y$  - Achse um den Winkel  ${}^1\theta_y^i$  sowie um die  $z$  - Achse um den Winkel  ${}^1\theta_z^i$ . Das  $x^j, y^j, z^j$  - KOS erhält man analog durch Drehung um die Winkel  ${}^1\theta_x^j, {}^1\theta_y^j$  und  ${}^1\theta_z^j$  um die in das Ende  $j$  verschobenen  $x,y,z$  - Achsen.

Zur Abbildung der Beziehung a) stehen die Transformationsmatrix  ${}^0T$  zwischen dem  $x,y,z$  - KOS der unverformten Ausgangslage 0 und dem globalen  $X,Y,Z$  - KOS sowie die endlichen globalen Rotationskomponenten  ${}^1\phi_i$  zur Verfügung.

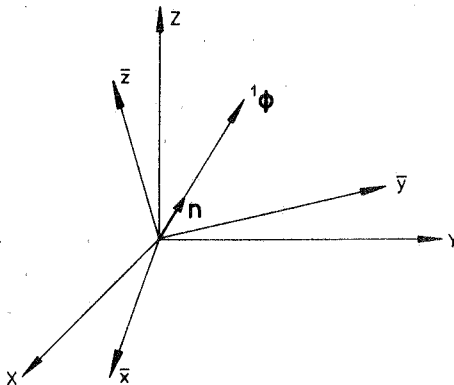


Bild 21: Drehvektor, gedrehtes System

Die mathematischen Grundlagen zur Behandlung der großen Rotationen können z.B. aus [9], [37], [48] und [122] entnommen werden. Durch Drehung des X,Y,Z - KOS im Bild 21 um die durch den Vektor  ${}^1\phi$  beschriebene raumfeste Achse entsteht das  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  - KOS. Für die Elemente der zugehörigen Transformationsmatrix gilt:

$$D_{ij} = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j) \cos {}^1\phi + \varepsilon_{lij} n_l \sin {}^1\phi \quad (108)$$

Durch  $n_i$  sind die X,Y,Z - Komponenten des Einheitsvektors  $\mathbf{n}$  in Richtung der Drehachse gegeben. Der Betrag des Drehwinkels ist  ${}^1\phi$ , und  $\varepsilon_{lik}$  sowie  $\delta_{ij}$  bezeichnen den Permutationstensor und das Kronecker - Symbol. Das X,Y,Z - KOS bildet eine kartesische, also orthonormierte Basis mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$ . Der Normalenvektor wird mit dem Drehvektor wie in [50] durch folgende Definition verknüpft:

$${}^1\phi = {}^1\phi \mathbf{n} = {}^1\phi_i \mathbf{e}_i = {}^1\phi n_i \mathbf{e}_i \quad i = X, Y, Z \quad (109)$$

Mit den daraus sich ergebenden Beziehungen

$${}^1\phi = \sqrt{{}^1\phi_x^2 + {}^1\phi_y^2 + {}^1\phi_z^2} \quad (110)$$

$$\text{und } n_i = \frac{{}^1\phi_i}{{}^1\phi} \quad (111)$$

wird (108) umgeformt.

$$D_{ij} = \frac{{}^1\phi_i {}^1\phi_j}{{}^1\phi^2} + (\delta_{ij} - \frac{{}^1\phi_i {}^1\phi_j}{{}^1\phi^2}) \cos {}^1\phi + \varepsilon_{lij} \frac{{}^1\phi_l}{{}^1\phi} \sin {}^1\phi \quad (112)$$

Die Elemente  $D_{ij}$  angeschrieben, ergeben die Transformationsmatrix  $\mathbf{D}$ , im mathematischen Schrifttum als die inversen Rodrigues - Formeln bekannt:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{{}^1\phi_x^2}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \cos {}^1\phi & \frac{{}^1\phi_x {}^1\phi_y}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \frac{{}^1\phi_z}{1\phi} \sin {}^1\phi & \frac{{}^1\phi_x {}^1\phi_z}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) - \frac{{}^1\phi_y}{1\phi} \sin {}^1\phi \\ \frac{{}^1\phi_x {}^1\phi_y}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) - \frac{{}^1\phi_z}{1\phi} \sin {}^1\phi & \frac{({}^1\phi_y)^2}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \cos {}^1\phi & \frac{{}^1\phi_y {}^1\phi_z}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \frac{{}^1\phi_x}{1\phi} \sin {}^1\phi \\ \frac{{}^1\phi_x {}^1\phi_z}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \frac{{}^1\phi_y}{1\phi} \sin {}^1\phi & \frac{{}^1\phi_y {}^1\phi_z}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) - \frac{{}^1\phi_x}{1\phi} \sin {}^1\phi & \frac{({}^1\phi_z)^2}{({}^1\phi)^2} (1 - \cos {}^1\phi) + \cos {}^1\phi \end{bmatrix} \quad (113)$$

Durch Potenzreihenentwicklung für die trigonometrischen Funktionen und Abbruch nach dem ersten Glied entsteht daraus die Transformationsmatrix für kleine Rotationen.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & {}^1\phi_z & -{}^1\phi_y \\ -{}^1\phi_z & 1 & {}^1\phi_x \\ {}^1\phi_y & -{}^1\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (114)$$

Die Transformation eines beliebigen Vektors  $\mathbf{X}$  im X,Y,Z - KOS in die Knotenkoordinatensysteme erhält man mit den Gleichungen (98) und (113) nach [50] zu:

$$\mathbf{x}^i = {}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^i \mathbf{X} \quad (115a)$$

$$\mathbf{x}^j = {}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^j \mathbf{X} \quad (115b)$$

Zur Berechnung von  $\mathbf{D}^i$  bzw.  $\mathbf{D}^j$  werden die gesamten endlichen Drehwinkel  ${}^1\phi_x^i, {}^1\phi_y^i, {}^1\phi_z^i$  bzw.  ${}^1\phi_x^j, {}^1\phi_y^j, {}^1\phi_z^j$  benötigt. Für kleine Zuwächse dürfen diese aus den Rotationsinkrementen durch einfache Summation errechnet werden. Mit  ${}^1\mathbf{t}$  nach Abschnitt 8.1 kann der Vektor  $\mathbf{X}$  auch im x,y,z - KOS beschrieben werden.

$$\mathbf{x} = {}^1\mathbf{t} \mathbf{X} \quad (116)$$

Da die Knotenkoordinatensysteme durch kleine Drehungen um die gesuchten Relativdrehwinkel aus dem  $x,y,z$  - KOS hervorgehen, gilt mit Gleichung (114):

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{d}^i \mathbf{x} \quad (117a)$$

$$\mathbf{x}^j = \mathbf{d}^j \mathbf{x} \quad (117b)$$

wobei

$$\mathbf{d}^i = \begin{bmatrix} 1 & {}^1\vartheta_z^i & -{}^1\vartheta_y^i \\ -{}^1\vartheta_z^i & 1 & 0 \\ {}^1\vartheta_y^i & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (118a)$$

$$\mathbf{d}^j = \begin{bmatrix} 1 & {}^1\vartheta_z^j & {}^1\vartheta_y^j \\ -{}^1\vartheta_z^j & 1 & {}^1\vartheta_x^j \\ {}^1\vartheta_y^j & -{}^1\vartheta_x^j & 1 \end{bmatrix} \quad (118b)$$

Gleichsetzen von (115) und (117) unter Beachtung von Gleichung (116) ergibt:

$${}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^i = \mathbf{d}^i {}^1\mathbf{t} \quad (119a)$$

$${}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^j = \mathbf{d}^j {}^1\mathbf{t} \quad (119b)$$

und daraus mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  :

$${}^1\mathbf{t} ({}^1\mathbf{t})^T = \mathbf{I} \quad (120)$$

$${}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^i ({}^1\mathbf{t})^T = \mathbf{d}^i \quad (121a)$$

$${}^0\mathbf{t} \mathbf{D}^j ({}^1\mathbf{t})^T = \mathbf{d}^j \quad (121b)$$

Aus den Gleichungen (121) können die gesuchten gesamten Relativwinkel für die Schnittgrößenberechnung als die Elemente der Transformmatrizen entnommen werden.

## 9.2 Schnittgrößen bei linear elastischem Werkstoffverhalten

Mit den Aussagen der Gleichung (18) nach Abschnitt 4.4.1 gilt ebenso wie für die Inkremente der linken Seite auch für die Gesamtspannungen der rechten Seite von (8):

$$\int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} d(V) = \int_V (\tau_{xx} \delta e_{xx} + \tau_{xz} \delta g_{xz}) d(V) \quad (122)$$

Bei Verwendung der Werkstoffbeziehungen nach (107) und Vernachlässigung der unbedeutenden nichtlinearen Verzerrungsanteile zur Berechnung der St. Venantschen Schubspannungen entsteht daraus:

$$\int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} d(V) = \int_V (E \varepsilon_{xx} \delta e_{xx} + G g_{xz} \delta g_{xz}) d(V) \quad (123)$$

Die Integration kann mit den entsprechenden Verzerrungs - Verschiebungs - Relationen und den Verformungsansätzen numerisch vorgenommen werden. Allerdings besteht auch die hier gewählte Möglichkeit, eine geschlossene Lösung mit Hilfe einer Sekantensteifigkeitsmatrix anzugeben. Dazu sind zunächst die Verzerrungen in lineare und nichtlineare Anteile aufzuspalten. Mit (103) folgt:

$$\begin{aligned} \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} d(V) &= \int_V E \tau_{u'} \delta u' d(V) + \int_V G \tau_{g_{xz}} \delta g_{xz} d(V) - \\ &- \int_V \frac{E}{2} [(u')^2 + (v')^2 + (w')^2] \delta u' d(V) \end{aligned} \quad (124)$$

Die Größen  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  beschreiben die von den Starrkörperanteilen befreiten Relativverschiebungen. Die ersten beiden Terme der rechten Seite ergeben mit Hilfe der Querschnittskinematik (41) und den Verformungsansätzen (75) die elastische Elementsteifigkeitsmatrix nach Tafel 1. Mit (29 a), (29 b) und (41) gilt für den die Verschiebungsquadrate enthaltenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& -\int_{V_L} \frac{1}{2} E [(1u')^2 + (1v)^2 + (1w')^2] \delta u' d(1v) = \\
& = -\frac{E}{2} \int_{V_L} [(F 1u_S'^2 + F_{yy} 1v_M'^2 + F_{zz} 1w_M'^2 + F_{\omega\omega} 1\vartheta_{xM}'^2) \delta u_S' - (F_{yy} 1v_M'^2 + F_{zzy} 1w_M'^2 \\
& + F_{\omega\omega y} 1\vartheta_{xM}'^2 - 2F_{yy} 1u_S' 1v_M'' + 2F_{yyz} 1v_M'' 1w_M'' + 2F_{yy\omega} 1v_M'' \vartheta_{xM}'' + \\
& + 2F_{yz\omega} 1w_M'' 1\vartheta_{xM}'' ) \delta v_M'' - (F_{yyz} 1v_M'^2 + F_{zzz} 1w_M'^2 + F_{\omega\omega z} 1\vartheta_{xM}'^2 - \\
& - 2F_{zz} 1u_S' 1w_M'' + 2F_{yzz} 1v_M'' 1w_M'' + 2F_{zz\omega} 1w_M'' 1\vartheta_{xM}'' + 2F_{yz\omega} 1v_M'' \vartheta_{xM}'' ) \delta w_M'' \\
& - (F_{yy\omega} 1v_M'^2 + F_{zz\omega} 1w_M'^2 + F_{\omega\omega\omega} 1\vartheta_{xM}'^2 - 2F_{\omega\omega} 1u_S' \vartheta_{xM}'' + 2F_{yz\omega} 1v_M'' 1w_M'' \\
& + 2F_{y\omega\omega} 1v_M'' 1\vartheta_{xM}'' + 2F_{\omega\omega z} 1w_M'' 1\vartheta_{xM}'' ) \delta \vartheta_{xM}'' ] dx - \frac{E}{2} \int_{V_L} [(F 1v_M'^2 + \\
& + 2F_{z_M} 1v_M' 1\vartheta_{xM}' + F_{zz} 1\vartheta_{xM}'^2 + F_{z_M}^2 1\vartheta_{xM}'^2) \delta u_S' - F_{yzz} 1\vartheta_{xM}'^2 \delta v_M'' + \\
& + (2F_{zz} 1v_M' \vartheta_{xM}' - F_{zzz} 1\vartheta_{xM}'^2 + 2F_{zz} z_M 1\vartheta_{xM}'^2) \delta w_M'' - F_{zz\omega} 1\vartheta_{xM}'^2 \delta \vartheta_{xM}'' ] dx - \\
& - \frac{E}{2} \int_{V_L} [(F 1w_M'^2 - 2F_{y_M} 1w_M' 1\vartheta_{xM}' + F_{yy} 1\vartheta_{xM}'^2 + F_{y_M}^2 1\vartheta_{xM}'^2) \delta u_S' - (2F_{yy} 1w_M' 1\vartheta_{xM}' + \\
& + F_{yy} 1\vartheta_{xM}'^2 - 2F_{yy} y_M 1\vartheta_{xM}'^2) \delta v_M'' - F_{yyz} 1\vartheta_{xM}'^2 \delta w_M'' - F_{yy\omega} 1\vartheta_{xM}'^2 \delta \vartheta_{xM}'' ] dx \quad (125)
\end{aligned}$$

Die mit den virtuellen Größen zu multiplizierenden Terme in Gleichung (125) enthalten außer den geometrischen Querschnittskennwerten Produkte der Verschiebungs- und Verdrehungsableitungen der Konfiguration 1. Mit den Verschiebungsansätzen (75) entstehen daraus Produkte der Stabendverformungen. Gleichung (125) kann dann in Matrizenform dargestellt werden.

$$-\int_{V_L} \frac{1}{2} E [(1u')^2 + (1v')^2 + (1w')^2] \delta u' d(1v) = -\delta \mathbf{v}_l^T \mathbf{k}_{S,g} \mathbf{1v}_l \quad (125a)$$

Die "geometrische" Sekantensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{S,g}$  der Konfiguration 1 ist eine Funktion der Verschiebungen  $\mathbf{1v}_l$  in diesem Zustand. Sie ist weder eindeutig noch symmetrisch. Je nachdem wie in Gleichung (125) die wirklichen Verschiebungen und Verdrehungen ausgeklammert werden, ergibt sich jeweils eine andere Form für  $\mathbf{k}_{S,g}$ . Im Gegensatz dazu sind sowohl die Schnittgrößen  $\mathbf{1S}_l$  als auch die virtuelle Arbeitsbilanz  $\delta W_{(i)}$  eindeutig.



Wegen der eliminierten endlichen Starrkörperbewegungen werden im weiteren nur solche nichtlinearen Sekantensteifigkeitsterme betrachtet, welche einen Einfluß auf die Torsionschnittgrößen haben. Diese Ausdrücke müssen allerdings berücksichtigt werden, da mit linearen Steifigkeiten im lokalen System und den von den Starrkörperanteilen befreiten Relativverschiebungen und -verdrehungen das nichtlineare Biegetragverhalten, nicht jedoch das nichtlineare Torsionsproblem beschrieben werden kann.

Gleichung (125) vereinfacht sich wesentlich für doppelt-symmetrische Querschnitte durch das Verschwinden eines Teiles der "höheren" Querschnittswerte:

$$F_{abc} = \int_A abc d(1a) \quad a,b,c = y,z,w \quad (126)$$

Unter Verwendung einer Koeffizientendarstellung der Hermite - Polynome mit den Definitionen nach Anhang A 4 folgt für die Torsionsmomente und die Bimomente aus Gleichung (125):

$$M_x^i = ({}^1K_4^S)^T {}^1V_l + M_{x,lin}^i \quad (127a)$$

$$M_w^{*i} = ({}^1K_{13}^S)^T {}^1V_l + M_{w,lin}^{*i} \quad (127b)$$

$$M_x^j = ({}^1K_{10}^S)^T {}^1V_l + M_{x,lin}^j \quad (127c)$$

$$M_w^{*j} = ({}^1K_{14}^S)^T {}^1V_l + M_{w,lin}^{*j} \quad (127d)$$

Die Elemente der Steifigkeitsvektoren in den obigen Gleichungen sind im Anhang A 5 angegeben.

In den inkrementellen Steifigkeitsmatrizen wird neben der Stabkraft und den Biegemomenten auch der durch Gleichung (45 d) definierte Wagner - Koeffizient  ${}^1K$  benötigt. Mit Streichung der vernachlässigbaren nichtlinearen Verzerungsanteile folgt mit dem Stoffgesetz nach (107 a):

$${}^1K = \int_A E {}^1e_{xx} [(y-y_M)^2 + (z-z_M)^2] d (1a) \quad (128)$$

und daraus mit der Verzerrungs - Verformungs - Beziehung nach Integration:

$${}^1K^i = E \{ [F_{yy} + F_{zz} + F(y_M^2 + z_M^2)] {}^1u'_S(0) - [F_{yyy} + F_{zzy} - 2F_{yy} y_M] {}^1v''_M(0) \\ - [F_{zzz} + F_{yyz} - 2F_{zz} z_M] {}^1w''_M(0) - [F_{yyw} + F_{zzw}] {}^1\vartheta''_{xM}(0) \} \quad (129a)$$

$${}^1K^j = E \{ [F_{yy} + F_{zz} + F(y_M^2 + z_M^2)] {}^1u'_S(1L) - [F_{yyy} + F_{zzy} - 2F_{yy} y_M] {}^1v''_M(1L) \\ - [F_{zzz} + F_{yyz} - 2F_{zz} z_M] {}^1w''_M(1L) - [F_{yyw} + F_{zzw}] {}^1\vartheta''_{xM}(1L) \} \quad (129b)$$

Die Verschiebungsableitungen an den Elementenden werden mit den Ansatzfunktionen (75 a) bis (75 d) durch die Stabendverschiebungen und -verdrehungen der Hermite-Polynome ausgedrückt.

$${}^1u'_S(0) = -\frac{1}{1L} [-{}^1u_S(0) + {}^1u_S(1L)] \quad (130a)$$

$${}^1v''_M(0) = \frac{1}{1L^2} [-6 {}^1v_M(0) - 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{zM}(0) + 6 {}^1v_M(1L) - 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{zM}(1L)] \quad (130b)$$

$${}^1w''_M(0) = \frac{1}{1L^2} [-6 {}^1w_M(0) - 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{yM}(0) + 6 {}^1w_M(1L) - 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{yM}(1L)] \quad (130c)$$

$${}^1\vartheta''_{xM}(0) = \frac{1}{1L^2} [-6 {}^1\vartheta'_{xM}(0) - 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{xM}(0) + 6 {}^1\vartheta'_{xM}(1L) - 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{xM}(1L)] \quad (130d)$$

$${}^1u'_S(1L) = \frac{1}{1L} [-{}^1u_S(0) + {}^1u_S(1L)] \quad (131a)$$

$${}^1v''_M(1L) = \frac{1}{1L^2} [6 {}^1v_M(0) + 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{zM}(0) - 6 {}^1v_M(1L) + 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{zM}(1L)] \quad (131b)$$

$${}^1w''_M(1L) = \frac{1}{1L^2} [6 {}^1w_M(0) + 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{yM}(0) - 6 {}^1w_M(1L) + 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{yM}(1L)] \quad (131c)$$

$${}^1\vartheta''_{xM}(1L) = \frac{1}{1L^2} [6 {}^1\vartheta'_{xM}(0) + 2 {}^1L {}^1\vartheta'_{xM}(0) - 6 {}^1\vartheta'_{xM}(1L) + 4 {}^1L {}^1\vartheta'_{xM}(1L)] \quad (131d)$$

Die Gleichungen (129 a) und (129 b) besitzen nur dann Gültigkeit, wenn die y- und die z - Achse mit den Trägheitshauptachsen übereinstimmen. Dies stellt keine Einschränkung dar, da in der Rechnung mit unbegrenzt linear elastischem Werkstoff die Schnittgrößen bezüglich der Hauptachsen definiert werden.

### 9.3 Schnittgrößen bei elastisch - plastischem Werkstoffverhalten

Ebenso wie die Erstellung der inkrementellen Elementsteifigkeitsmatrizen (Abschnitt 7.2) ist die Berechnung der Kraftgrößen nach Überschreiten des elastischen Werkstoffbereiches bei möglichen Entlastungen nur noch numerisch durchführbar. Zu diesem Zweck sind aus den Relativverformungen die Verzerungen, aus diesen mittels des Stoffgesetzes die Spannungen und schließlich durch Integration über den Querschnitt die Knotenkräfte zu bestimmen.

Zur Berechnung des vollständigen Almansi - Tensors  ${}^1\epsilon_{xx}$  sind die kinematischen Querschnittsbeziehungen (29 a), (29 b) sowie (41) in (103) einzusetzen.

$$\begin{aligned}
 {}^1\epsilon_{xx} = & \{ {}^1u_S' - {}^1v_M'' y - {}^1w_M'' z - {}^1\vartheta_{xM}'' \omega \} - \\
 & - 0,5 \{ {}^1u_S'^2 + ({}^1v_M'' y)^2 + ({}^1w_M'' z)^2 + ({}^1\vartheta_{xM}'' \omega)^2 - 2 {}^1u_S' ({}^1v_M'' y + {}^1w_M'' z + \\
 & + {}^1\vartheta_{xM}'' \omega) + 2 {}^1v_M'' y ({}^1w_M'' z + {}^1\vartheta_{xM}'' \omega) + 2 {}^1w_M'' ({}^1\vartheta_{xM}'' \omega) z + \\
 & + {}^1v_M'^2 + {}^1w_M'^2 + [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] ({}^1\vartheta_{xM}')^2 - 2 [(z - z_M) {}^1v_M' - \\
 & - (y - y_M) {}^1w_M'] ({}^1\vartheta_{xM}')^2 \} \quad (132)
 \end{aligned}$$

Bei der geometrisch linearen Untersuchung sind nur die Terme in der ersten Klammer zu berücksichtigen. Die zweite Klammer enthält alle nichtlinearen Anteile. Mit den Verformungsansätzen ist  ${}^1\epsilon_{xx}$  eine Funktion der Querschnittskordinaten

$x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\omega$  und der diskreten Knotenverformungen. Aus den Gesamtdehnungen  ${}^1\epsilon_{xx}$  an den Elementenden  $i$  und  $j$  wird nach Abschnitt 5.1 der plastische Anteil abgespalten. Aus dem verbleibenden elastischen Dehnungsanteil erhält man durch Multiplikation mit dem konstanten Elastizitätsmodul  $E$  die Spannungen und daraus durch numerische Integration längs der Profilmittellinie nach der Simpson-Regel die Längskraft, die Biegemomente um die  $y$ - und  $z$ -Achsen, die Wölbmomente und die Wagner-Koeffizienten.

Das Torsionsmoment im Zustand 1 setzt sich für den offenen dünnwandigen Querschnitt aus den Anteilen der St. Venantschen Torsion, der Wölbkrafttorsion und dem Wagner-Effekt zusammen [34]:

$${}^1M_T = {}^1M_X = {}^1M_{TS} + {}^1M_{TW} + {}^1M_{TK} \quad (133)$$

Mit der bekannten Gleichgewichtsbeziehung [26], [34], [129]

$${}^1M_{TW} = {}^1M'_\omega \quad (134)$$

können die beiden letzten Komponenten in (133) unter Verwendung eines einaxialen Stoffgesetzes für die Längsspannungen nach Abschnitt 5.1 ohne Berücksichtigung gleichzeitig wirkender Schubspannungen ermittelt werden. Für einen näherungsweise linearen Verlauf des Wölbmomentes im Element gilt:

$${}^1M_{TW} = \frac{{}^1M_\omega^*(l) - {}^1M_\omega^*(0)}{{}^1L} \quad (135)$$

In vielen Arbeiten zum nichtlinear - elastischen Biegetorsionsproblem wird das aufnehmbare St. Venantsche Torsionsmoment nicht begrenzt. Akesson und Bäcklund geben in [4] unter Verwendung vorhergehender Untersuchungen [11], [3] obere und untere Schranken für die plastische Traglast gemischt tordierter Stäbe ohne Normalkraft und Biegung an. In der von Baba und Kajita [10] angestellten Betrachtung für beliebige Querschnitte wird das elastisch - plastische Torsionsproblem durch eine zusätzliche Iteration über den in finite Flächenelemente unterteilten Querschnitt gelöst.

Das in dieser Arbeit gewählte Vorgehen in Anlehnung an Werner [128] begrenzt näherungsweise das aufnehmbare St. Venantsche Torsionsmoment unter Verwendung der v. Mises-Hypothese. Der bei Trägern der üblichen Abmessungen ohnehin geringe Einfluß der Schubspannungen aus den Querkräften [13] sowie der aus dem Gleichgewicht mit den Wölbnormalspannungen folgenden Schubspannungen wird vernachlässigt. Der Querschnitt verhält sich für die St. Venantsche Torsionsbelastung entweder völlig elastisch oder im Sinne der Nadaischen Sandhügelanalogie [11] völlig plastisch. Im plastizierten Zustand werden in allen Punkten in einem Schnitt senkrecht zur Profilmittellinie absolut gleichgroße Spannungen vorausgesetzt (Bild 22).

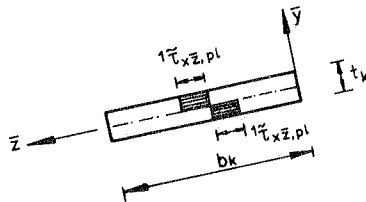


Bild 22: Idealisierte Schubspannungsverteilung am Segment k für das vollplastische St. Venantsche Torsionsmoment

Die innerhalb eines Schnittes senkrecht zur Profilmittellinie zulässige Spannung erhält man aus der v. Mises - Bedingung der konstanten Gestaltänderungsenergie:

$$\text{zul } 1\tau_{xz,pl} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(1\tau_F)^2 - (1\tau_{xx})^2} \quad (136)$$

Für  $1\tau_F$  ist die obere oder untere Fließspannung der aktuellen Fließkurve nach Abschnitt 5.1 einzusetzen, so daß zur  $1\tau_{xz,pl}$  minimal wird. Haben  $1\tau_F$  und  $1\tau_{xx}$  verschiedene Vorzeichen, so sind deren Quadrate zu addieren. Durch numerische Integration der örtlich zulässigen Spannungen über den Querschnitt erhält man die durchschnittlich zulässige plastische Schubspannung für den Gesamtquerschnitt

$$\text{zul } \tilde{t}_{xz,pl}^* = \frac{1}{i_A} \int_A \text{zul } \tilde{t}_{x\bar{z},pl} d(1a) \quad (137)$$

und daraus das bei gleichzeitiger Wirkung von Normalkräften, Biege- und Wölbmomenten aufnehmbare plastische St. Venantsche Torsionsmoment:

$${}^1M_{TS,pl} = \text{zul } \tilde{t}_{x\bar{z},pl}^* W_{T,pl} \quad (138)$$

$W_{T,pl}$  bezeichnet das vollplastische St. Venantsche Torsionswiderstandsmoment als Volumen des Nadai - Hügels. Dieser wird unter Vernachlässigung der Anschluß- und Ausrundungsbe- reiche als Produkt eines über die Segmentlänge konstanten gleichseitigen Dreiecks mit der Basis  $t_k$  und der Höhe  $t_k/2$  sowie der Länge  $b_k$  gebildet:

$$W_{T,pl} = \sum \frac{t_k^2}{4} b_k \quad n = \text{Anzahl der Segmente} \quad (139)$$

Das elastisch berechnete St. Venantsche Torsionsmoment  ${}^1M_{TS,el}$  wird auf die Größe  ${}^1M_{TS,pl}$  abgemindert, sobald es diesen Wert übersteigt. Da mit den einfachen Ansätzen für die Torsionsverdrehung und die Längsverschiebung das Gleichgewicht innerhalb des Elementes bei nichtlinearem Werkstoffverhalten nicht zu befriedigen ist, wird dies dadurch erzwungen, daß für die Torsionsmomente und die Normalkräfte der Mittelwert aus den Elementendgrößen eingesetzt wird.

## 10. Numerisches Vorgehen

Das entwickelte dreidimensionale Balkenelement für offene dünnwandige Querschnitte wurde in das Programmsystem NISA 80 implementiert. Das modulare Programmsystem NISA 80 (nicht-lineare Struktur - Analyse) enthält außerdem ein räumliches Fachwerkelement, ein Balkenelement für Vollquerschnitte, ein ebenes Flächenelement, ein lineares Körperelement sowie gekrümmte degenerierte Balken- und Schalenelemente. Zur Auflösung des algebraischen Gleichungssystems steht ein band- und blockstrukturierter Gleichungslöser zur Verfügung, der Nulloperationen durch Beachtung der "Skyline" - Struktur des Systems vermeidet. Die Speicherplatzverwaltung des Arbeitsspeichers geschieht dynamisch. Es besteht die Möglichkeit, auf inkrementellem Weg erreichte Gleichgewichtszustände abzuspeichern und vom erreichten Zustand aus eine erneute Berechnung zu starten. Zur Bearbeitung der angegebenen Beispiele wurden der angeschlossene Eigenwertlöser und das zugehörige Plotprogramm verwendet.

### 10.1 Last - Verformungsberechnung

Das Iterationsende einer nichtlinearen statischen Berechnung ist erreicht, wenn zwischen den auf die Knoten wirkenden äußeren Lasten und den Stabendschnittgrößen Gleichgewicht besteht. Die Differenz zwischen beiden, Ungleichgewichtskräfte (out-of-balance-forces) genannt,

$$\mathbf{U} = {}^2\mathbf{R} - {}^n\mathbf{F} \quad 1 \leq n \leq 2 \quad (140)$$

verschwindet in diesem Fall. Dies bedeutet jedoch, daß die Zustände  $n$  und  $2$  identisch und infolgedessen die Verformungsinkremente von  $n \rightarrow 2$  Null sind. Daraus ergibt sich das hier verwendete inkrementell - iterative Rechenschema mit dem Ziel, eine Norm der Ungleichgewichtskräfte oder der Verformungsinkremente unter einen vorgegebenen Grenzwert abzumindern. Während die Inkrementierung in der Wegabhängigkeit eines nichtlinearen Problems begründet ist (z.B.

Plastizierung), entsteht die Forderung nach Iteration aus der Überlegung, daß der Verformungszuwachs für ein Lastinkrement wegen der vorliegenden Nichtlinearität nicht exakt berechnet werden kann. Eine Diskretisierung von Gleichung (8) führt auf ein algebraisches Gleichungssystem 3. Ordnung in den Verschiebungszuwächsen. Durch eine erste Linearisierung, welche den nichtlinearen virtuellen Verzerrungstensor  $\delta_1 \epsilon_{ij}$  durch dessen linearen Anteil  $\delta_1 e_{ij}$  ersetzt und eine zweite Näherung, welche im inkrementellen Stoffgesetz nur die linearen Verzerrungsanteile mit dem Stofftensor verknüpft, entsteht das in den vorhergehenden Abschnitten erstellte, in den Verformungszuwächsen linearisierte Gleichungssystem. Modifikationen der aus der linken Seite folgenden inkrementellen Steifigkeitsmatrizen wirken sich nur auf die Iterationsgeschwindigkeit, nicht jedoch auf das Ergebnis aus. Dieses hängt allein von der Genauigkeit ab, mit welcher die Schnittgrößen der rechten Seite im Zustand 1 bzw. die Ungleichgewichtskräfte berechnet werden. Dabei sind, abgesehen von den Voraussetzungen nach Abschnitt 4.4, zwei Kriterien zu beachten:

1. Die Elementeinteilung muß so fein gewählt werden, daß anstatt über das verformte Element über die aktuelle Sehne integriert werden darf.
2. Die Lastschritte sind so klein anzunehmen, daß die Rotationsinkremente Vektorcharakter besitzen.

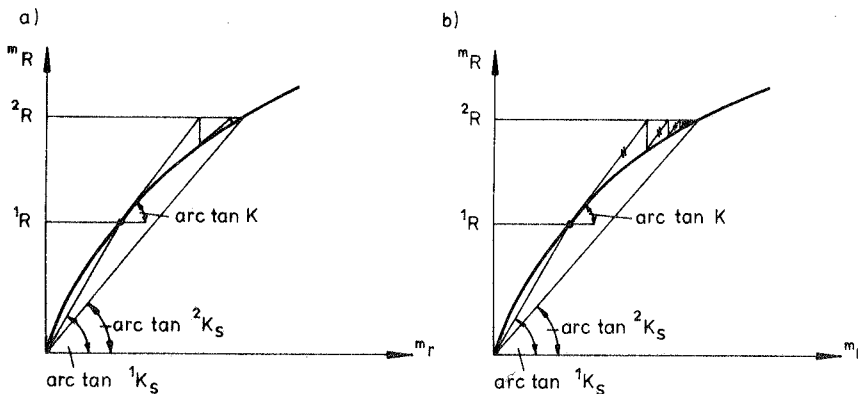
Hinsichtlich der bei der Iteration zu verfolgenden Strategie ist zu unterscheiden, ob ein Lastniveau vorgegeben oder innerhalb der Iteration zu bestimmen ist.

#### 10.1.1 Iteration mit Lastkontrolle

In [99] werden neben den rein inkrementellen Methoden, bei welchen das Ergebnis durch den Verzicht auf eine Iteration von der Größe der Lastinkremente abhängig ist, als kombinierte inkrementell - iterative Lösungsverfahren das



Mittelpunktsteifigkeits-Verfahren sowie das Standard- und das modifizierte Newton - Raphson - Verfahren angegeben. Zur Berechnung der Beispiele nach Abschnitt 12 wurden hiervon die beiden letzteren verwendet. Diese in Bild 23 schematisch dargestellten Verfahren unterscheiden sich dadurch, daß beim modifizierten Newton - Raphson - Verfahren die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nur bei Bedarf, meist am Beginn eines neuen Lastinkrementes erstellt wird (Bild 23 b), während das Standard - Newton - Raphson - Verfahren vor jedem Iterationsschritt die neue Matrix bildet (Bild 23 a).



**Bild 23:** Darstellung von Iterationsverfahren mit Laststeuerung im Last - Verformungsraum

Das Fortschreiten im Last - Verformungsraum in Richtung der jeweils aktuellen "Tangentialebene" an die Last - Verformungsfläche mit dem Standard - Verfahren führt meist zu einer geringeren Anzahl an Iterationen als das Fortschreiten in Richtung der am Inkrementanfang erstellten und dann nicht mehr veränderten "Tangentialebene". Diesem Vorteil steht der Nachteil der Neuerstellung der Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt gegenüber. Häufig ist das modifizierte Newton - Raphson - Verfahren bei schwach nichtlinearem

Verhalten des Tragwerks effektiv, während in Bereichen sich stark ändernder Steifigkeiten das Standard-Newton-Raphson-Verfahren von Vorteil ist. Es ist zu beachten, daß für das hier entwickelte Balkenelement die Tangentensteifigkeitsmatrix infolge der die Anfangsverformung gegenüber der Stabsehne außer acht lassenden Integration nur näherungsweise erstellt werden kann. Der Zusammenhang zwischen den Gesamtverformungen und den inneren Kräften wird bei beiden Verfahren durch die Sekantensteifigkeitsmatrix  $K_S$  (Abschnitt 9) hergestellt.

### 10.1.2 Iteration mit Kontrolle der Bogenlänge im Last - Verformungsraum

Bei der Berechnung einer Last - Verformungskurve zeigen sich in Bereichen geringer Systemsteifigkeiten numerische Probleme durch Konvergenzschwierigkeiten selbst bei kleinsten Lastschritten und Verwendung der Standard-Newton-Raphson-Methode. Zur Überwindung solcher kritischer Bereiche wurden spezielle Algorithmen entwickelt, z.B. [92], [100]. Ramm gibt in [100] einen Überblick über diese Methoden und entwickelt ein modifiziertes Verfahren mit konstanter Bogenlänge im Last - Verformungsraum. Dabei wird der üblicherweise entstehende Nachteil der Zerstörung der Symmetrie- und Bandstruktur des inkrementellen Gleichungssystems durch die Nebenbedingung in einfacher Weise umgangen, indem das symmetrische System für zwei rechte Seiten gelöst und daraus der inkrementelle Lastzuwachs bestimmt wird. Auch innerhalb dieser Strategie kann die Konvergenzgeschwindigkeit durch Verwendung des Standard- oder modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens gesteuert werden. Die Schnittgrößenbestimmung erfolgt wie bei reiner Laststeuerung mit der Sekantensteifigkeitsmatrix.

Im Schrifttum zum Biegetorsionsproblem wird als Traglast häufig die Last angegeben, bei der letztmalig noch Konvergenz in der Last - Verformungsberechnung möglich war. Die Beispielrechnungen zeigten, daß diese Divergenzerscheinungen häufig keine physikalischen, sondern nur numerische

Ursachen haben. Durch Verwendung des Standard - Newton - Raphson - Verfahrens, durch Verkleinerung der Lastschritte oder schließlich mit der Methode der konstanten Bogenlänge gelang es in jedem Fall, scheinbar divergente Laststufen zu überwinden.

## 10.2 Iterationskriterien

Nach jedem Iterationsschritt wird die numerische Stabilität mittels geeigneter Kriterien auf Konvergenz oder Divergenz hin überprüft. Eine Auswahl solcher Kriterien wird in [20] für inkrementell iterative Verfahren untersucht. Die Kriterien werden entweder in den Verformungen oder in den Kräften oder auch in beiden formuliert. Bei den lokalen Kriterien wird vor der Normbildung der Zuwachs der Komponenten im letzten Iterationsschritt auf eine Referenzgröße bezogen. Globale Kriterien hingegen vergleichen die Norm der Zuwächse mit der Norm entweder aus den Gesamtkomponenten aus der Summe aller Inkremente oder denen aus einem Inkrement. In NISA 80 [47] wird zur Konvergenzabfrage ein globales Verformungskriterium benutzt. Dazu wird nach dem n-ten Iterationsschritt innerhalb eines Inkrements überprüft, ob

$$\frac{\|\Delta \mathbf{r}^n\|}{\|\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}^n\|} \leq \epsilon \quad (141)$$

wobei für  $\epsilon$  in Abhängigkeit von der gewünschten Genauigkeit Werte von  $10^{-2}$  bis  $10^{-3}$  eingesetzt werden. Die Euklidische Vektornorm aus den Verformungszuwächsen im n - ten Iterationsschritt  $\Delta \mathbf{r}^n$  wird bezogen auf die Norm der Verformungen  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}^n$  im augenblicklichen Inkrement. Nach [20] kann anstelle der Euklidischen Vektornorm auch eine gleichwertige Absolut- oder Maximumnorm verwendet werden. Es ist zu beachten, daß dieses Kriterium durch den Bezug auf inkrementelle Größen durch Verkleinerung des Lastschrittes bei gleichbleibendem Wert  $\epsilon$  verschärft wird. Zur Überprüfung auf Divergenz wird nach der Hälfte der zulässigen Anzahl an

Iterationsschritten innerhalb eines Inkrementes die Norm der Ungleichgewichtskräfte mit der Norm der inkrementellen Lasten verglichen. Sind zu diesem Zeitpunkt die Ungleichgewichtskräfte noch größer als die Lasten, wird mit Divergenzmeldung abgebrochen. Nach Verkleinerung des Lastinkrementes oder Verbesserung der Iterationstechnik (siehe Abschnitt 10.1) kann die Berechnung fortgesetzt werden.

### 10.3 Eigenwertuntersuchung

Die Eigenwertuntersuchung stellt eine Maßnahme zum Auffinden der kritischen Last bei Stabilitätsproblemen dar. Das Stabilitätsproblem unterscheidet sich vom Spannungsproblem dadurch, daß zu einem Lastniveau mehrere Gleichgewichtslagen gehören. Statische Instabilitätsformen sind das Durchschlagsproblem und das Verzweigungsproblem (Bild 24).

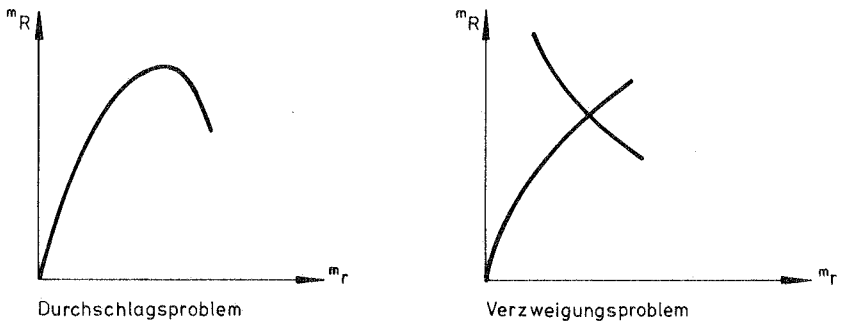


Bild 24: Statische Instabilitätsformen

Das erste Phänomen kann für Stabtragwerke z.B. am statisch bestimmten Zweibock unter Einzellast oder auch an flachen, eingespannten Bögen unter gleichmäßigem Außendruck gezeigt werden [99]. Weitaus häufiger findet man bei Stabsystemen das Versagen durch Verzweigen (Knicken, Biegedrillknicken). Oxford gibt in [85] Beispiele an für ein Verzweigen aus einem

nichtlinearen Vorbeulbereich (nichtlinearer Verlauf der Lastverformungskurve) heraus an. Im Gegensatz dazu verzweigt beispielsweise ein Euler - Stab von einem linearen Pfad der Lastverformungskurve aus. Demnach ist bei den Stabilitätsbetrachtungen zwischen solchen Systemen zu unterscheiden, die vor dem Verzweigen eine lineare Verformungscharakteristik zeigen und solchen mit nichtlinearem Vorbeulverhalten. Die Formulierung des statischen Stabilitätsproblems nach der direkten Methode folgt aus dem Indifferenzkriterium. Dieses besagt, daß neben einem sich im Gleichgewicht befindenden Grundzustand mindestens ein infinitesimal benachbarter Zustand existiert, welcher mit derselben Belastung im Gleichgewicht steht. Bei Verwendung des Verschiebungsgrößenverfahrens heißt dies:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = 0 \quad (142)$$

wobei  $\mathbf{K}$  die inkrementelle Tangentensteifigkeitsmatrix des Grundzustandes und  $\mathbf{r}$  den Vektor der infinitesimalen Verformungsinkremente vom Grund- zum Nachbarzustand darstellt. Dies führt für die hier verwendete U.L. - Formulierung auf das allgemeine Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{r} = 0 \quad (143)$$

Zur Lösung dieses in  $\lambda$  linearen Problems werden von Brendel in [29] Untersuchungen angestellt. Gesucht ist im allgemeinen der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\text{krit}}$ , welcher mit dem Lastvektor  $^1\mathbf{R}$  multipliziert, das niedrigste kritische Lastniveau ergibt. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich der Spannungszustand unter der kritischen Last durch lineare Extrapolation aus dem Spannungszustand zum Zeitpunkt der Eigenwertuntersuchung ergibt. Bei linearem Verhalten bis zum Erreichen der kritischen Last genügt es, das Eigenwertproblem ohne Berücksichtigung von Verformungen im Sinne einer Anfangsstabilitätsbetrachtung zu lösen. Das Ergebnis einer solchen Untersuchung wird im Schrifttum häufig als klassische Stabilitätslast bezeichnet. Unter einem nichtlinearen Stabilitätsproblem versteht man dagegen die Lösung des durch

(143) gegebenen linearen Problems in einem nichtlinearen Grundzustand 1. Zur Bestimmung der kritischen Laststufe als Ergebnis der Eigenwertuntersuchung bei nichtlinearem Verhalten eines Tragwerkes muß, streng genommen, begleitend zum Last-Verformungsproblem solange das Eigenwertproblem gelöst werden, bis der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\text{krit}} = 1$  wird. Ersatzweise wird häufig versucht, den kritischen Wert durch eine nichtlineare Extrapolation für den Verlauf der Determinante zu gewinnen [5], [29], [99]. Dieses Verfahren führt allerdings dann zu einer unbrauchbaren Aussage, wenn sich ein schleifender Schnitt zwischen der Determinantenkurve und der Lastfaktorachse ergibt.

Während üblicherweise zur Eigenwertsuche eine Nullstellenbestimmung der Determinante für den kritischen Lastfaktor erfolgt - im Programmsystem NISA 80 mittels einer "Subspace" - Iterationstechnik [16] -, löst Rajasekaran [94], [98] das Problem bei Materialnichtlinearität für "kritische Längen". Damit gelingt es ohne begleitende Maßnahmen für statisch bestimmte Systeme die kritische Schlankheit für das augenblickliche Lastniveau anzugeben. Da hierbei die Verformungen im Vorbeulbereich vernachlässigt werden, liefert dieses Verfahren einen unteren Grenzwert für die kritische Schlankheit und damit eine zu hohe kritische Last.

In dieser Arbeit wird zur Bestimmung des kritischen Lastfaktors am wenig deformierten System eine Eigenwertbetrachtung als Anfangsstabilitätsuntersuchung im Sinne der klassischen Stabilitätstheorie durchgeführt. Wegen der mehrfach erwähnten Vernachlässigung der Anfangsverformungen entspricht der so gefundene Wert der klassischen Stabilitätslast.

#### 10.4 Beschreibung des Rechenablaufs

Bei dem verwendeten inkrementell - iterativen Berechnungsschema bildet der letzte bekannte Gleichgewichtszustand den Bezugszustand für das folgende Inkrement.

Für diesen Zustand 1 sind bekannt:

- die Transformationsmatrix  ${}^1\mathbf{T}$ , welche die Beziehungen zwischen den Kraft- und Verschiebungsgrößen im globalen  $X, Y, Z$  - KOS und dem lokalen  $x, y, z$  - KOS der Konfiguration 1 angibt (Abschnitt 8.1),
- der Vektor der plastischen Dehnungsanteile  ${}^1\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  in allen Integrationspunkten (Abschnitt 5.1),
- die globalen Knotenverformungen  ${}^1\boldsymbol{r}$ .

Für den gesuchten, um ein Inkrement benachbarten Zustand 2 ist zunächst nur der globale Lastvektor  ${}^2\mathbf{R}$  bekannt, der bei der Iteration mit Laststeuerung unverändert bleibt, bei der Bogenlängenmethode jedoch angepaßt wird. Das Ziel der Iteration besteht darin, einen Zwischenzustand  $n$  solange zu verändern, bis er in den Zustand 2 übergeht. Die dazu erforderlichen Schritte werden anhand des Ablaufdiagramms nach Bild 25 erläutert.

1. Jeder Iterationsschritt innerhalb eines Inkrementes beginnt mit der Erstellung des Vektors der globalen Knotenverformungsinkremente  $\boldsymbol{r}$ .
2. Unter Verwendung der bekannten Transformationsmatrix  ${}^1\mathbf{T}$  werden aus  $\boldsymbol{r}$  mit der näherungsweise Annahme der Vektoreigenschaft auch für die Rotationsinkremente die Stabendverformungsinkremente  $\mathbf{V}_i$  im  $x, y, z$  - KOS ermittelt.
3. Aus  $\mathbf{V}_i$  erhält man nach Abschnitt 8.1 die vier Bestimmungsstücke (drei Richtungskosinus sowie das Inkrement des Elementwinkels  $\beta$ ) zur Erstellung der Zwischentransformationsmatrix  $\mathbf{T}_n$  zwischen dem  $x, y, z$  - KOS und dem mitgehenden lokalen  $\overset{n}{x}, \overset{n}{y}, \overset{n}{z}$  - KOS der Konfiguration  $n$  und daraus schließlich  ${}^n\mathbf{T}$ .
4. Die Berechnung der Relativverformungen im  $\overset{n}{x}, \overset{n}{y}, \overset{n}{z}$  - System wird im Abschnitt 9.1 erläutert. Bei der hier gewählten Form der mitgehenden Koordinatendarstellung

verbleiben nach Abzug der Starrkörperbewegung des ursprünglich geraden Balkenelementes sechs Relativverformungen. Dies sind die Relativverschiebung in Längsrichtung sowie die beiden Biegeverdrehungen an den Stabenden gegenüber der Sehne und die relative Torsionsverdrehung.

5. Mit den Querschnittsbeziehungen nach Abschnitt 4.5 können aus den Relativverformungen die linearen und nichtlinearen Gesamtdehnungen der aktuellen Konfiguration berechnet werden. Mit Hilfe der plastischen Dehnungen aus dem Zustand  ${}^1 \epsilon^{pl}$  wird sodann festgestellt, ob im Stoffgesetz der linear elastische Bereich überschritten ist. Trifft dies zu, sind für den neuen Zustand die elastischen und die plastischen Dehnungsanteile sowie der Tangentenmodul für das folgende Inkrement zu bestimmen.
6. In Abhängigkeit vom Ergebnis der Werkstoffüberprüfung im 5. Schritt werden die gesamten Stabendschnittgrößen im  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  - KOS  ${}^n S_i$  entweder nach Abschnitt 9.2 oder Abschnitt 9.3 berechnet. Während für elastischen Werkstoff durch Verwendung der Sekantensteifigkeitsmatrix von der Vorabintegration über den Querschnitt Gebrauch gemacht wird, erhält man die elastisch - plastischen Schnittgrößen durch numerische Integration. Wegen der Elimination der Starrkörperbewegungen haben die verbleibenden nichtlinearen Verzerrungsanteile bei der geometrisch nichtlinearen Untersuchung nur einen geringen Einfluß auf die Stabkräfte.
7. Zur Ermittlung des Vektors der Ungleichgewichtskräfte  $U$  werden die Stabendschnittgrößen  ${}^n S_i$  mit Hilfe der im 3. Schritt berechneten Matrix  ${}^n T$  vektoriell in das globale  $X, Y, Z$  - KOS transformiert und vom Lastvektor  ${}^2 R$  abgezogen.
8. Für den folgenden Iterationsschritt ist zu entscheiden, ob die inkrementelle Steifigkeitsmatrix neu zu erstellen



oder diejenige aus dem vorhergehenden Schritt zu verwenden ist. Die Matrix wird beim Standard - Newton - Raphson - Verfahren in jedem Schritt erneuert. Beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren ist der Zeitpunkt der Neuerstellung dem Benutzer überlassen.

9. Je nach Werkstoffbereich erzeugen verschiedene Unterprogramme die inkrementellen Steifigkeitsmatrizen für elastischen Werkstoff nach Tafel 1, Abschnitt 7 bzw. für elastisch - plastischen Werkstoff nach Tafel 4. Die geometrischen Matrizen nach Tafel 2 und 3 sind werkstoffunabhängig.
10. Die inkrementelle Systemsteifigkeitsmatrix  $K$  erhält man durch Aufsummieren nach der direkten Steifigkeitsmethode der in das globale System transformierten Elementmatrizen aus Schritt 9.
11. Das Gleichungssystem wird für die globalen Zuwächse in den Verformungsinkrementen  $\Delta r^n$  gelöst.
12. Aus den bisher erreichten Verformungen und den neu errechneten Inkrementen wird der Vektor der aktuellen Gesamtverformungen im X, Y, Z - KOS  ${}^{n+1}r$  durch einfache Addition errechnet.
13. Unter Verwendung des im Abschnitt 10.2 beschriebenen globalen Konvergenzkriteriums ist zu entscheiden, ob ein weiterer Iterationsschritt erforderlich ist oder mit der Berechnung des nächsten Inkrementes begonnen werden kann.

Die hier nicht näher erläuterte Rechnung mit konstanter Bogenlänge verläuft sinngemäß gleich. Durch die Nebenbedingung wird lediglich der globale Lastvektor  ${}^2R$  innerhalb der Iteration verändert.

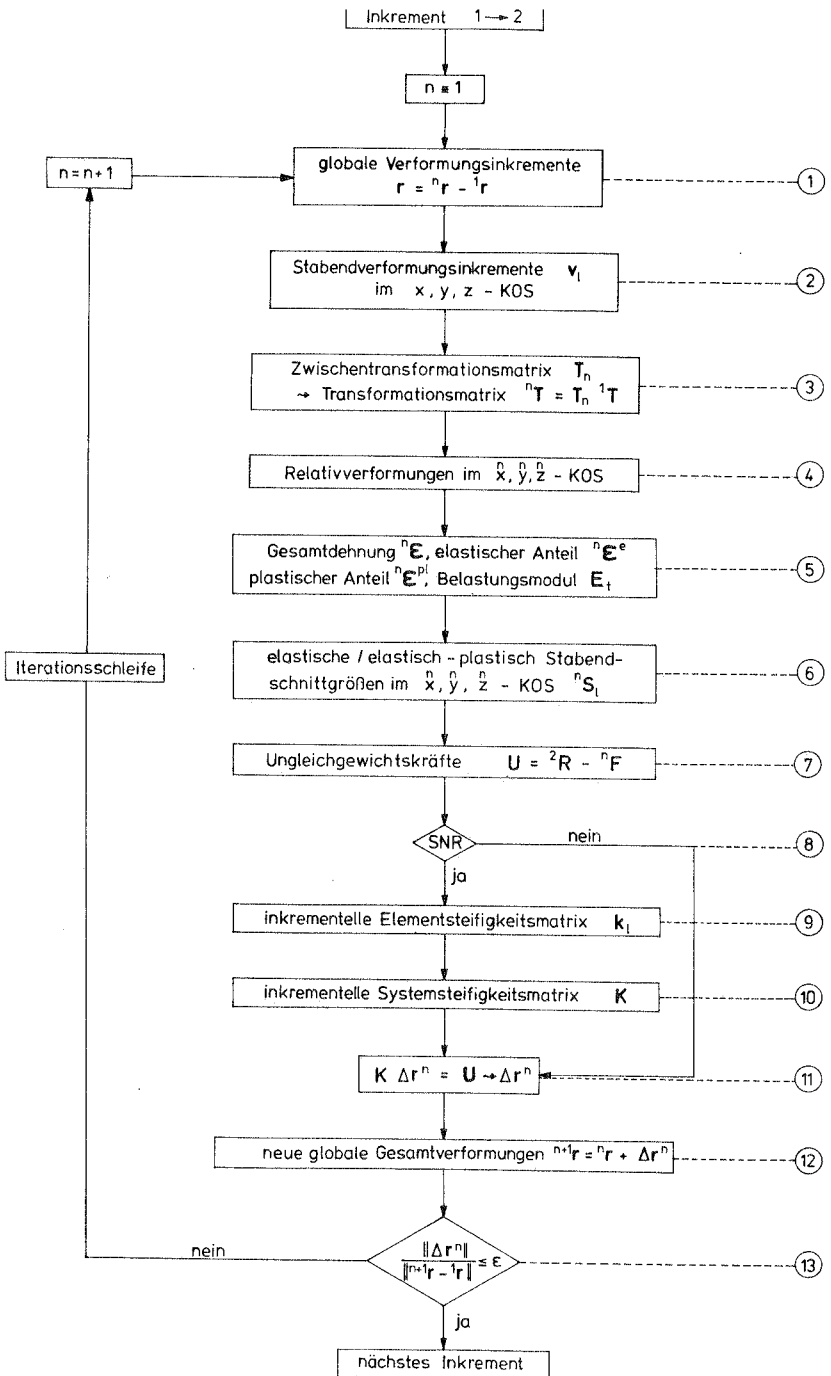


Bild 25: Algorithmus zur Bestimmung der globalen Gesamtverformungen

## 11. Imperfektionen

Die neue Stabilitätsnorm für den Stahlbau [132] fordert zur Erfassung geometrischer und struktureller Imperfektionen die Berücksichtigung von geometrischen Ersatzimperfektionen bei nichtlinearen Untersuchungen von Tragwerken. Damit sind traglastmindernde Einflüsse aus ungewollter Lastausmittigkeit und Systemabweichung (geometrische Imperfektionen) sowie infolge Eigenspannungen und Streuung der Werkstoffkennwerte (strukturelle Imperfektionen) durch eine parabelförmige Vorverkrümmungen und / oder eine Stützenschiefstellung zu erfassen. Dies kann bei kleinen Verformungen nach [126] am perfekten System durch Berücksichtigung von Ersatzlasten geschehen.

Abweichend davon, wird hier die getrennte Wirkung beider Imperfektionsarten bei großen Verformungen untersucht. Die imperfekte Ausgangsgeometrie wird in einfacher Weise durch die abschnittsweise geraden Elemente erfaßt. Aus einer Lastausmittigkeit folgen planmäßige Zusatzlasten und Zusatzmomente. Die Streuung der Werkstoffkennwerte könnte einfach durch Vorgabe unterschiedlicher Stoffgesetze für jeden Integrationspunkt eines Querschnittes beachtet werden. Davon wird jedoch abgesehen, da einerseits entsprechende Informationen für beliebige Querschnitte nicht vorliegen und andererseits ein beträchtlicher zusätzlicher Speicherplatz erforderlich ist. Der Einfluß von Eigenspannungen als Folge von Wärmebehandlungen (Walzen, Schneiden, Schweißen, Warmrichten) oder als Restspannungen infolge plastischer Formänderungen aus einer Vorbelastung wird in zahlreichen Arbeiten, z.B. [1], [5], [22], [52], [65], [69], [94] erfaßt.

Für Träger mit dem Verhältnis von Spannweite zu Balkenhöhe  $L/h > 2,5$  stimmt der Eigenspannungsverlauf, unabhängig von der Form, im Abstand  $h$  vom Ende mit dem am unendlich langen Balken überein. Nur in den St. Venantschen Störbereichen an den Stabenden, die wie Anker für die Eigenspannungen im Mittelbereich wirken, treten auch Eigenschubspannungen auf

[110]. Zur weiteren Untersuchung wird deshalb vereinfachend angenommen, daß nur über die Elementlänge konstante Eigenspannungen in lokaler x - Richtung wirken.

Durch Eigenspannungszustände beanspruchte Systeme stehen ohne äußere Lasten für sich im Gleichgewicht. Damit müssen sich alle resultierenden, unabhängigen Schnittgrößen, außer dem Wölbmoment, welches selbst eine Gleichgewichtsgruppe bildet, zu Null ergeben. Nach [88] gilt für den unbelasteten Zustand 1:

$${}^1P = \int_A {}^1\tau_{xx}^R d({}^1a) = 0 \quad (144a)$$

$${}^1M_y = \int_A {}^1\tau_{xx}^R z d({}^1a) = 0 \quad (144b)$$

$${}^1M_z = \int_A {}^1\tau_{xx}^R y d({}^1a) = 0 \quad (144c)$$

$${}^1M_T = {}^1M_{TW} + {}^1M_{TS} + {}^1M_{TK} = 0 \quad (144d)$$

Da nach Voraussetzung Eigenschubspannungen ausgeschlossen sind, existiert kein St. Venantsches Eigentorsionsmoment. Mit (45 d), (45 e) und (134) folgt aus Gleichung (144 d):

$$\left( \int_A {}^1\tau_{xx}^R \omega d({}^1a) \right)' + \int_A {}^1\tau_{xx}^R [(z - z_M)^2 + (y - y_M)^2] d({}^1a) {}^1\vartheta_{xM}' = 0 \quad (145)$$

Größe und Verlauf der Eigenspannungen über den Querschnitt sind im wesentlichen von der Art der Wärmebehandlung, von der Querschnittsform und den Querschnittsabmessungen abhängig. Die von Herzog in [55] vorgenommene Auswertung von Eigenspannungsmessungen an zahlreichen Walz- und Schweißprofilen hat darüber hinaus auch eine Abhängigkeit der Größe der Eigenspannungen von der Stahlgüte ergeben. Unter Verwendung der Meßergebnisse werden in [55] Mittelwerte und obere Schranken der Eigenspannungen für die kennzeichnenden Punkte von I - Querschnitten und Kastenprofilen angegeben.

## 12. Numerische Anwendung

Die folgenden Beispiele wurden vorrangig unter dem Aspekt der numerischen Überprüfung der in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten theoretischen Konzepte ausgewählt. Zu diesem Zweck werden zunächst die Probleme der geometrischen und der physikalischen Nichtlinearität getrennt betrachtet.

Besondere Beachtung erfordert die Festlegung der Randbedingungen und die Angabe der Belastungskomponenten. Sowohl die geometrischen als auch die statischen Randbedingungen sind bezüglich des Schwerpunktes des elastischen Querschnittes vorzugeben. Dabei ist zu beachten, daß bei unsymmetrischen Profilen aus den im Schwerpunkt angreifenden Kräften und Momenten zusätzliche äußere Torsionsmomente und Wölbmomente entstehen. Nach Gleichung (91) gilt auch für äußere Knotenlasten im lokalen KOS:

$$M_{xS} = M_{xM} - z_M Q_{yM} + y_M Q_{zM} \quad (146a)$$

$$M_{\omega S} = M_{\omega M} - y_M M_{yM} - z_M M_{zM} \quad (146b)$$

### 12.1 Querschnittswerte

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen und der Schnittgrößen für linear elastisches Material sowie zur Begrenzung der St. Venantschen Torsionstragfähigkeit für elastisch - plastischen Werkstoff werden Querschnittswerte benötigt, die vorweg durch Integration über den offenen dünnwandigen Querschnitt zu ermitteln sind. Aus den Informationen über die Lage der Querschnittsknoten in einem beliebigen Querschnittskoordinatensystem, der Angabe der die Knoten verbindenden Segmente sowie deren Abmessungen in Dickenrichtung werden - wie im Anhang A 1 dargestellt - folgende Größen berechnet:

- Lage des Schwerpunktes S
- Orientierung der Trägheitshauptachsen

- Querschnittskordinaten bezüglich des Schwerpunktes und der Trägheitshauptachsen
- Lage des Schubmittelpunktes M ( $y_M, z_M$ ) im Hauptachsensystem
- normierte Wölbkoordinaten  $\omega$
- Querschnittsfläche F
- Hauptträgheitsmomente  $F_{YY}, F_{ZZ}$
- Wölbträgheitsmoment  $F_{\omega\omega}$
- St. Venantsches Torsionsträgheitsmoment  $J_T$
- vollplastisches St. Venantsches Torsionswiderstandsmoment  $W_{T,pl}$  nach der Nadaischen Sandhügelanalogie
- "höhere" Querschnittswerte (siehe Anhang A 1)
- Vorwerte zur Bestimmung der Wagner - Koeffizienten

$$W_x = \frac{F_{yy} + F_{zz}}{F} + (y_M^2 + z_M^2) \quad (147a)$$

$$W_z = \frac{F_{yy} + F_{yzz}}{F_{yy}} - 2 y_M \quad (147b)$$

$$W_y = \frac{F_{zz} + F_{yyz}}{F_{zz}} - 2 z_M \quad (147c)$$

$$W_\omega = \frac{F_{yy\omega} + F_{zz\omega}}{F_{\omega\omega}} \quad (147d)$$

Dabei werden Ausrundungen an den Segmentübergängen, wie sie insbesondere bei den Walzprofilen vorkommen, vernachlässigt. Dies kann bei den für die St. Venantsche Torsion benötigten Größen zu beträchtlichen Abweichungen führen.

In den folgenden Beispielen sind diese Querschnittsintegrale für drei verschiedene Querschnitte angegeben.

Beispiel 1.1:

Doppelsymmetrischer I - Querschnitt

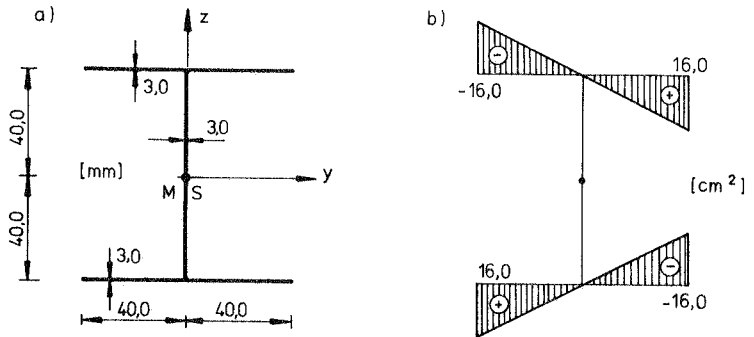


Bild 26: a) Querschnittsabmessungen und Hauptachsen  
b) normierter Wölbkoordinatenverlauf

Ergebnis:

$F$ [cm <sup>2</sup> ]	$J_T$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{zz}$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{yy}$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{\omega\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]
7,20	0,216	89,636	25,618	409,6
$y_M$ [cm]	$z_M$ [cm]	$W_x$ [cm <sup>2</sup> ]	$W_y$ [cm]	$W_z$ [cm]
0,0	0,0	16,008	0,0	0,0
$W_\omega$ [1]	$W_{T,pl}$ [cm <sup>3</sup> ]	$F_{yyy}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{zzz}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{\omega\omega\omega}$ [cm <sup>8</sup> ]
0,0	0,54	0,0	0,0	0,0
$F_{yyz}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{zzy}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{yy\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]	$F_{zz\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]	$F_{\omega\omega y}$ [cm <sup>7</sup> ]
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$F_{\omega\omega z}$ [cm <sup>7</sup> ]	$F_{y z \omega}$ [cm <sup>6</sup> ]			
0,0	409,6			

Beispiel 1.2:

Einfachsymmetrischer Querschnitt

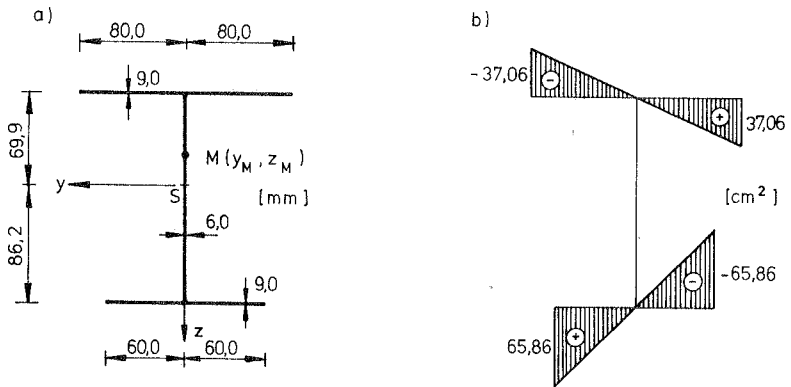


Bild 27: a) Querschnittsabmessungen und Hauptachsen  
b) normierter Wölbkoordinatenverlauf

Ergebnis:

$F [cm^2]$	$J_T [cm^4]$	$F_{zz} [cm^4]$	$F_{yy} [cm^4]$	$F_{\omega\omega} [cm^6]$
34,57	7,93	1704,2	437,1	22210,0
$y_M [cm]$	$z_M [cm]$	$F_{yyy} [cm^5]$	$F_{zzz} [cm^5]$	$F_{\omega\omega\omega} [cm^8]$
0,0	-2,36	0,0	2457,1	0,0
$F_{yyz} [cm^5]$	$F_{zzy} [cm^5]$	$F_{yy\omega} [cm^6]$	$F_{zz\omega} [cm^6]$	$F_{\omega\omega y} [cm^7]$
-1030,9	0,0	0,0	0,0	0,0
$F_{\omega\omega z} [cm^7]$	$F_{yzy} [cm^6]$	$W_x [cm^2]$	$W_y [cm]$	$W_z [cm]$
88469,0	22212,0	67,51	5,56	0,0
$W_\omega [1]$	$W_{T,pl} [cm^3]$			
0,0	7,07			



Beispiel 1.3:

Unsymmetrischer Querschnitt

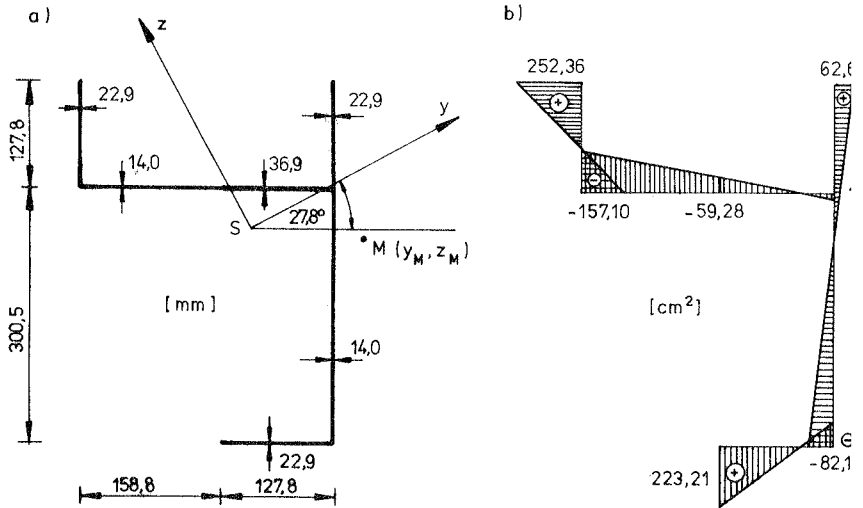


Bild 28: a) Querschnittsabmessungen und Hauptachsen  
b) normierter Wölbkoordinatenverlauf

Ergebnis:

$F$ [cm <sup>2</sup> ]	$J_T$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{zz}$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{yy}$ [cm <sup>4</sup> ]	$F_{\omega\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]
199,1	407,8	41088,5	16961,8	1300500,0
$y_M$ [cm]	$z_M$ [cm]	$F_{yyy}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{zzz}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{\omega\omega\omega}$ [cm <sup>8</sup> ]
10,72	-6,15	-303,20	-226550,0	82144 · 10 <sup>3</sup>
$F_{yyz}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{zzy}$ [cm <sup>5</sup> ]	$F_{yy\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]	$F_{zz\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]	$F_{\omega\omega y}$ [cm <sup>7</sup> ]
79027,0	-262500,0	420100,0	11133 · 10 <sup>2</sup>	37100 · 10 <sup>3</sup>
$F_{\omega\omega z}$ [cm <sup>7</sup> ]	$F_{yz\omega}$ [cm <sup>6</sup> ]	$W_x$ [cm <sup>2</sup> ]	$W_y$ [cm]	$W_z$ [cm]
14166 · 10 <sup>3</sup>	600110,0	444,30	8,71	-36,94
$W_\omega$ [1]	$W_{T,pl}$ [cm <sup>3</sup> ]			
1,18	116,04			

## 12.2 Geometrisch nichtlineare Berechnungen

Die geometrisch nichtlineare Formulierung kann zwei Problemstellungen erfassen. Mittels einer Anfangseigenwertuntersuchung erhält man kritische Lasten im Sinne einer linearen Stabilitätsanalyse, welche kleine Verformungen voraussetzt. Durch ein inkrementell - iteratives Vorgehen werden Probleme mit endlichen Verformungen mit und ohne Einschluß von Instabilitäten gelöst.

### 12.2.1 Lineare Anfangsstabilitätsuntersuchungen zur Lösung von Verzweigungsproblemen

Wie im Abschnitt 10.3 beschrieben, genügt es bei linearem Vorbeulverhalten, das Eigenwertproblem ohne Berücksichtigung der Verformungen vor dem Verzweigen zu lösen. Dieser Sachverhalt wurde bei einigen Beispielen bestätigt, bei denen Eigenwertanalysen zu verschiedenen Lastniveaus durchgeführt und jeweils dieselben kritischen Lasten ermittelt wurden.

#### 1. Drillknicken

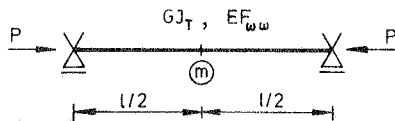


Bild 29: Gabelgelagerter Stab mit Axiallast

Timoshenko gibt in [123] kritische Drillknicklasten an für den im Bild 29 dargestellten, gegen Ausweichen von der Stabachse gesicherten Träger unter konstanter Axialbelastung. Bei fehlender Stützung im Feld tritt reines Drillknicken nur bei Stäben mit breiten Flanschen und kurzen Längen auf. Die analytische Lösung [123] ergibt bei unbehinderter Verwölbung an den Stabenden:

$$P_{ki}^0 = \frac{GJ_T + \frac{\pi^2}{12} E F_{w\omega}}{F_{yy} + F_{zz}} F \quad (148a)$$

und bei Wölbeinspannung an den Enden:

$$P_{ki}^1 = \frac{GJ_T + \frac{4\pi^2}{12} E F_{w\omega}}{F_{yy} + F_{zz}} F \quad (148b)$$

Beispiel 2.1: Drillknicken eines Stabes mit doppelt-symmetrischem I - Querschnitt

An diesem Beispiel soll das Konvergenzverhalten der numerischen FE - Lösung bei Elementverfeinerung dargestellt werden. Dazu wird für das statische System nach Bild 29 der Querschnitt nach Beispiel 1.1 verwendet. Für  $l = 60 \text{ cm}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$  und  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$  erhält man aus (148 a) und (148 b)

$$P_{ki}^0 = 1581,1 \text{ kN} ; \quad P_{ki}^1 = 6000,6 \text{ kN}$$

Die in Tabelle 1 dargestellten Resultate der Konvergenzbeobachtungen wurden aus Berechnungen am halben System mit jeweils konstanten Elementlängen gewonnen. Es zeigt sich, daß bereits eine Idealisierung mit zwei Elementen für den ganzen Träger ausreichende Ergebnisse liefert.

Anzahl der Elemente am gesamten Träger	ohne Wölbeinspannung		mit Wölbeinspannung	
	$P_{ki}^0$ [kN]	$\Delta$ [%]	$P_{ki}^1$ [kN]	$\Delta$ [%]
2	1592,2	0,702	6078,5	1,298
4	1581,9	0,051	6044,9	0,738
6	1581,3	0,013	6009,9	0,155
8	1581,2	0,006	6003,6	0,050
10	1581,1	0,0	6001,9	0,022

Tabelle 1: Vergleich FE - Lösung mit analytischer Lösung nach [123] für Beispiel 2.1

Bringt man in Stabmitte  $m$  zusätzlich ein betragsmäßig kleines Einzeltorsionsmoment auf, so entsteht das im Bild 30 dargestellte Spannungsproblem.

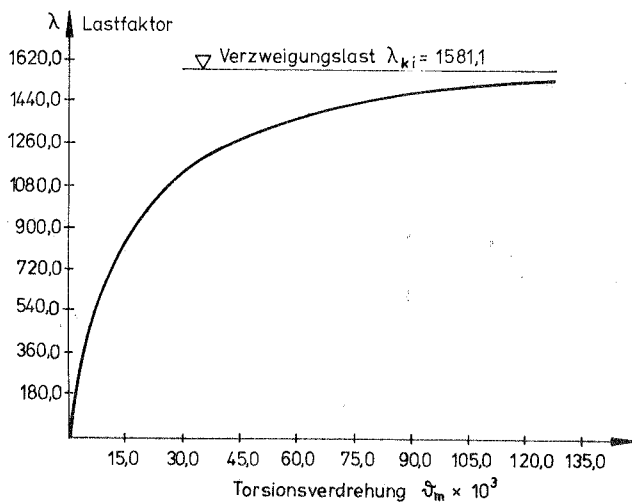


Bild 30: Drillknicken als Spannungsproblem

Die Rechnung wurde mit 5 Elementen am halben System für die Grundlasten  $P = 1 \text{ kN}$  und  $M_T = 0,01 \text{ kNm}$  durchgeführt. Bei proportionaler Laststeigerung mit dem Lastfaktor  $\lambda$  nähert sich die Lastverformungskurve für die Verdrehung  $\Theta_m$  in Feldmitte asymptotisch dem Wert  $\lambda_{ki} = 1581,1$ .

## 2. Biegedrillknicken

Beim Biegedrillknicken weicht der Querschnitt bei Erreichen der kritischen Last aus der Beanspruchungsebene aus und verdreht sich dabei.

Beispiel 2.2: Einfeldträger mit doppeltsymmetrischem I - Querschnitt

Für Träger des hier betrachteten Typs nach Bild 31 werden in [70] rechnerisch bestimmte elastische Biegedrillknicklasten und experimentell ermittelte Versagenslasten bei Belastung mit einer Einzellast in Feldmitte und mit gegengleichen Randmomenten angegeben.

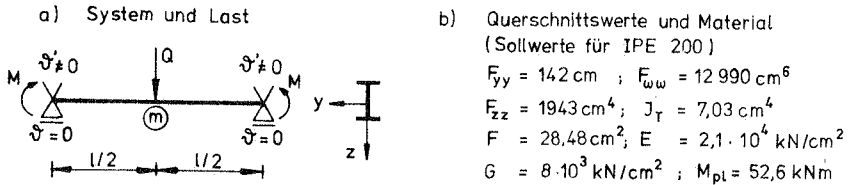


Bild 31: Angaben zu Beispiel 2.2

Bild 32 zeigt den Verlauf der mit jeweils 4 bzw. 5 Elementen je Träger errechneten idealen Biegedrillknickmomente  $M_{ki}^M$  und

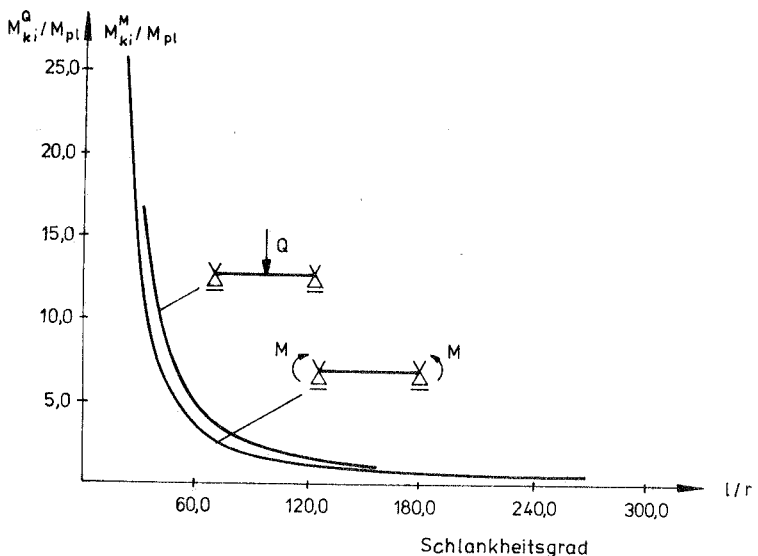


Bild 32: Ideale Biegedrillknickmomente für Beispiel 2.2

$M_{ki}^Q$  bezogen auf das vollplastische Moment  $M_{pl}$  in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad  $l/r$ . Dabei ist  $M_{ki}^Q$  das Moment im Punkt  $m$  unter der kritischen Last  $Q_{ki}$  und der Trägheitsradius  $r = \sqrt{I_{yy}/F}$ . In Übereinstimmung mit den Werten in [70] und nach [123] ergeben sich die bekannten Euler - Hyperbeln. Wegen der dreiecksförmigen Momentenbeanspruchung gegenüber dem konstanten Verlauf ist bei gleicher Schlankheit  $M_{ki}^Q$  des durch die Querlast  $Q$  belasteten Trägers größer als  $M_{ki}^M$  des durch Randmomente beanspruchten Balkens.

Beispiel 2.3: Einfeldträger mit einfachsymmetrischem Querschnitt nach Beispiel 1.2

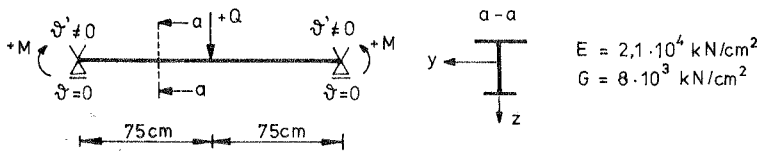


Bild 33: Angaben zu Beispiel 2.3  
(6 Elemente für den gesamten Träger)

Während bei doppelsymmetrischen Profilen das Biegedrillknickmoment unabhängig von der Richtung der äußeren Lasten  $M$  und  $Q$  ist, ergeben sich bei dem hier betrachteten Querschnitt infolge Biegung in der Symmetrieebene unterschiedliche Werte. Sind Einzellast und Randmomente nach Bild 33 positiv, bedeutet dies Druck im starken Obergurt. Da der untere Gurt eine geringere Steifigkeit gegen seitliches Ausweichen besitzt, erhält man für negative  $M$ - und  $Q$ -Werte die in Tabelle 2 angegebenen kleineren Eigenwerte.

	Einzellast $Q$		Randmomente $M$	
	$Q > 0$	$Q < 0$	$M > 0$	$M < 0$
$M_{ki} [\text{kNm}]$	500,2	378,91	444,38	230,25

Tabelle 2: Vergleich von  $M_{ki}$  für unterschiedliche Vorzeichen

Die hier angegebenen Werte stimmen exakt mit den Ergebnissen nach [23] und von Trahair in [34] überein.

Beispiel 2.4: Einfeldträger mit unsymmetrischem Querschnitt nach Beispiel 1.3

Timoshenko gibt für derartige Querschnitte, die durch ein konstantes Moment um eine Achse durch den Schubmittelpunkt beansprucht werden, in [123] eine analytische Lösung an. Um damit vergleichen zu können, wurde der im Bild 34 dargestellte Einfeldträger an den Gabelagern mit Biegemomenten  $M_S$  und Wölbmomenten  $M_{\omega S}$  im Schwerpunkt belastet. Das im Schwerpunkt anzusetzende Wölbmoment erhält man aus Gleichung (146 b) mit der Forderung, daß das resultierende Wölbmoment im Schubmittelpunkt Null ist.

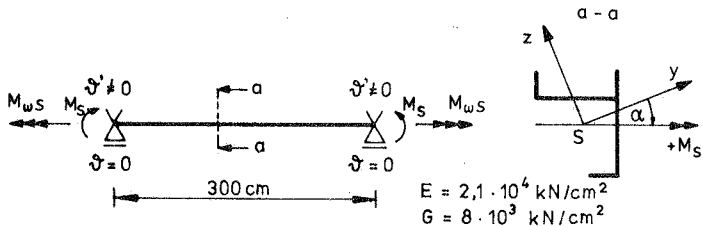


Bild 34: Angaben zu Beispiel 2.4  
(6 Elemente für den gesamten Träger)

In der Tabelle 3 werden die Biegedrillknickmomente  $M_{ki,S}$  für die Winkel  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 27,8^\circ$  zwischen der Hauptachse  $y$  und der Momentenwirkungslinie angegeben. Der Vergleich mit [123] konnte nur für den Fall der Biegung um die Hauptachse  $y$  vorgenommen werden. Die Vergleichswerte sind in Klammern angegeben.

	$\alpha = 27,8^\circ$		$\alpha = 0$	
	$M_S > 0$	$M_S < 0$	$M_S > 0$	$M_S < 0$
$M_{ki,S}$ [kNm]	7835,55	3576,70	3527,76 (3527,51)	6929,85 (6928,98)

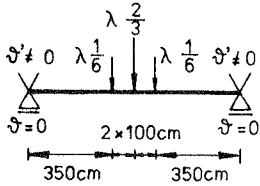
Tabelle 3: Vergleich von  $M_{ki,S}$  für verschiedene Winkel  $\alpha$

Für die zweiachsige Biegung bei  $\alpha = 27,8^\circ$  liegt ein Spannungsproblem vor mit asymptotischer Annäherung der Lastverformungskurve an  $M_{ki,S}$ . In der analytischen Lösung von Timoshenko [123] wird auch bei unsymmetrischen Querschnitten der den Einfluß der Wölbmomente erfassende, letzte Term der Wagner-Koeffizienten nach Gleichung (129 a) und (129 b) vernachlässigt. Da damit lediglich der geometrische Einfluß des Wölbmomentes auf die Torsionssteifigkeit erfaßt wird, bleibt dies bei den hier untersuchten Beispielen mit reiner Biegebeanspruchung ohne Wirkung.



Beispiel 2.5: I - Träger mit Querlasten auf dem Obergurt

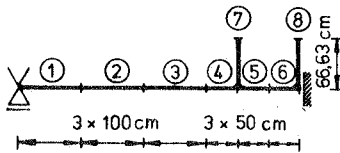
a) System und Belastung



b) Querschnitt und Material



c) FE Idealisierung mit Balkenelementen



d) FE - Idealisierung mit Platten- / Scheibenelementen

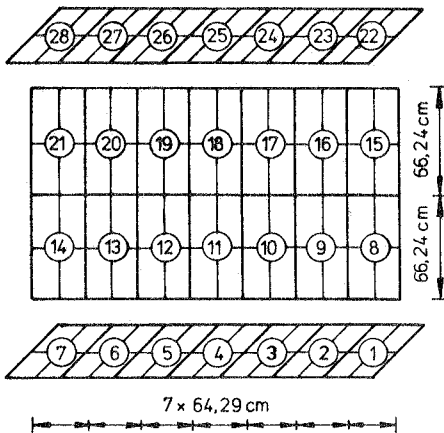
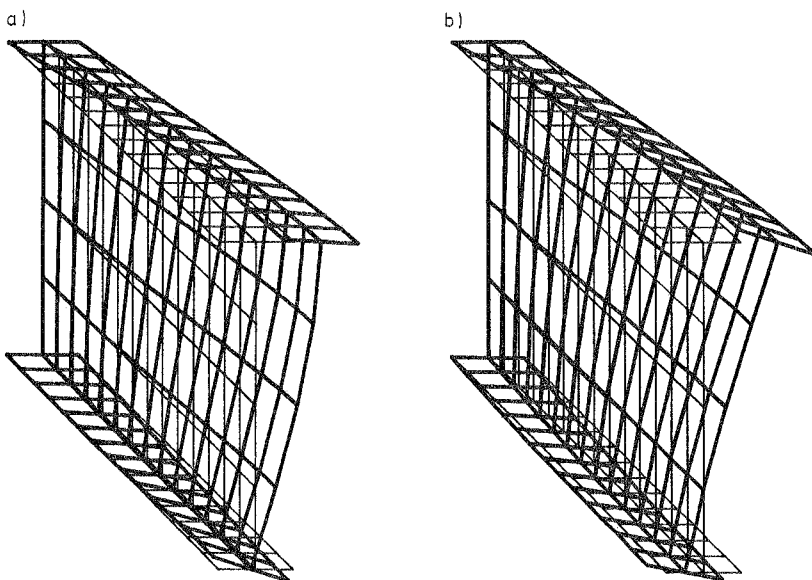


Bild 35: Angaben zu Beispiel 2.5

Der hohe, seitlich ungestützte Einfeldträger nach Bild 35 a, b wurde zur Eigenwertuntersuchung am halben System zunächst mit 6 bzw. 8 Balkenelementen (Bild 35 c) und sodann mit 28 neun-knotigen Lagrangeschen Platten-/Scheibenelementen (Bild 35 d) idealisiert.

Die vergleichende Betrachtung sollte zeigen, inwieweit die Hypothese von der Erhaltung der Querschnittsform bei derartigen Trägern noch Gültigkeit besitzt. Die Frage ist besonders dann von Interesse, wenn die Belastung nicht länger im Schwerpunkt angreift.

Um mit dem FE - Modell aus Balkenelementen die Lasteintragung auf dem Obergurt erfassen zu können, wurden zusätzlich zu den sechs Balkenelementen in Längsrichtung zwei vertikale Elemente angeordnet. Die Länge dieser Elemente ist gleich dem Abstand des Schwerpunktes vom Obergurt. In den Bildern 36 a und 36 b



Last im Schwerpunkt

Last auf dem Obergurt

Bild 36: Beulfiguren des Platten-/Scheibensystems

sind zunächst die sich aus der Platten-/Scheibenrechnung ergebenden Beulformen für Last im Schwerpunkt und Last auf dem Obergurt dargestellt.

Der Vergleich der Eigenwerte aus der Platten-/Scheibenuntersuchung einerseits und der Balkenberechnung andererseits nach Tabelle 4 weist unabhängig von der Laststellung nur geringe Unterschiede auf.

	Last im Schwerpunkt		Last auf dem Obergurt	
	Balken	Platte/Scheibe	Balken	Platte/Scheibe
$\lambda_{ki}$	1176	1134,7	802,9	781,3

Tabelle 4: Vergleich Balken- mit Platten-/Scheibenlösung

Kleine Querschnittsverzerrungen, wie sie in den überhöhten Beulfiguren, insbesondere bei Lastangriff im Schwerpunkt zu erkennen sind, bleiben ohne wesentlichen Einfluß auf die Eigenwerte. Auch wird kein lokales Beulen der Gurte oder des Steges als niedrigste Versagensform angezeigt. Bei zentrischer Belastung weicht der Druckgurt seitlich aus, ohne sich zu verdrehen. Für den Steg wirkt dabei der Obergurt wie eine starre und der Untergurt wie eine elastische Einspannung. Im Vergleich zu der daraus folgenden im Bild 36 a deutlich zu erkennenden Querschnittsverzerrung bleibt die Querschnittsform bei Lasteintragung auf dem Obergurt fast vollständig erhalten (Bild 36 b).

Im Gegensatz zum Platten-/Scheibenmodell bleiben bei den Balkenelementen Lasteinleitungsspannungen in Richtung der Querschnittsachse  $z$  unberücksichtigt. Demzufolge können bei der Balkenberechnung lokale Stabilitätsprobleme oder örtliches Fließen infolge des zweiachsigen Spannungszustandes nicht erfaßt werden.

## 12.2.2 Endliche Rotationen und Verschiebungen in der Ebene

### Beispiel 2.6: Unverschieblicher Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

Für das folgende Beispiel existieren übereinstimmende Ergebnisse nach Karamanlidis in [63] mit der analytischen Lösung von Szilard in [120]. Die Berechnung mit dem hier entwickelten Element erfolgte am halben System mit 10 Elementen. Unter Verwendung der im Abschnitt 10.1.2 beschriebenen Iteration mit konstanter Bogenlänge im Last - Verschiebungsraum waren bis zum Erreichen der im Bild 37 angegebenen größten

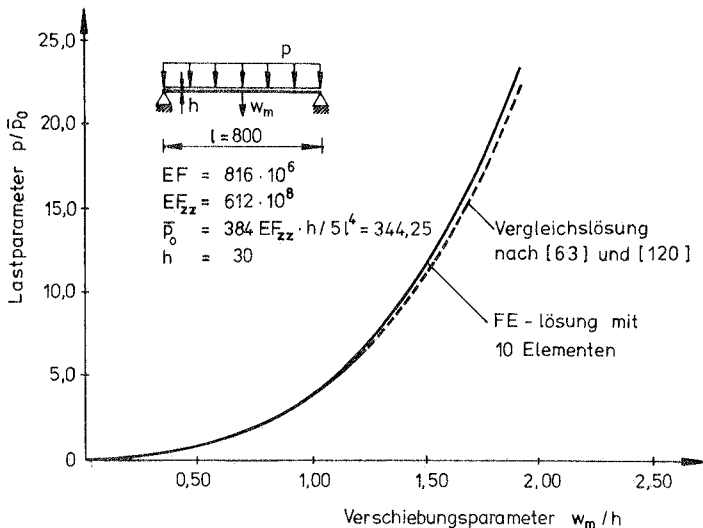


Bild 37: Unverschieblicher Einfeldträger mit Gleichstreckenlast

Durchbiegung in Feldmitte  $w_m$  22 Lastschritte erforderlich. Aus der Last-Verschiebungs-Kurve erkennt man, daß das System mit wachsender Verformung infolge des daraus entstehenden Zugspannungszustandes steifer wird.

Auf die Angabe von Dimensionen wurde bei den Beispielen verzichtet, bei denen auch die Vergleichslösungen ohne Einheiten angegeben wurden.

Beispiel 2.7: Flacher eingespannter Bogen unter Einzellast

Der im Bild 38 gezeigte flache, an den Enden eingespannte Kreisbogen unter einer Einzellast im Scheitelpunkt wurde von Ramm in [99] mit Scheibenelementen berechnet und mit der analytischen Lösung nach [115] verglichen. Die Rechnung mit geraden Balkenelementen erfolgte wiederum am halben System mit 10 Elementen und der Iterationstechnik nach Abschnitt 11.1.2 (konstante Bogenlänge).

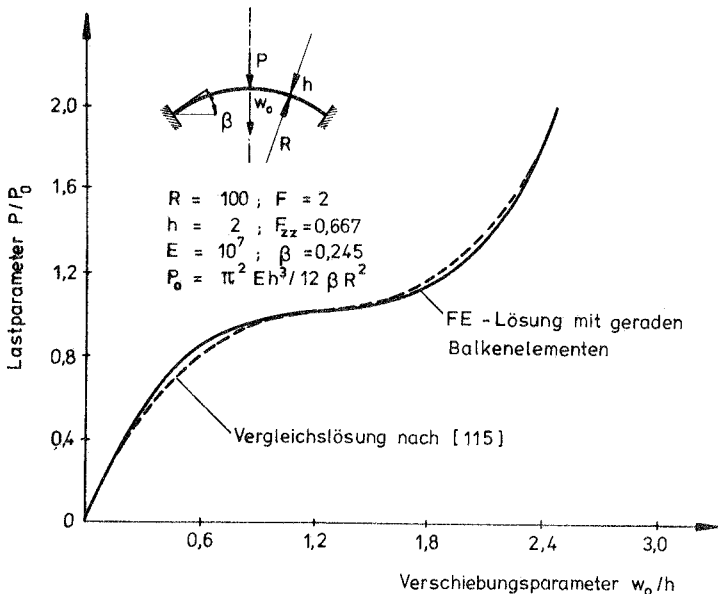


Bild 38: Last-Verschiebungs-Diagramm des flachen eingespannten Bogens unter Einzellast

Beispiel 2.8: Flacher gelenkig gelagerter Bogen unter Einzellast

Im Gegensatz zum Spannungsproblem der beiden vorhergehenden Beispiele stellt der flache, an den Enden gelenkig gelagerte Kreisbogen mit einer Einzellast im Scheitelpunkt ein Stabilitätsproblem mit Durchschlagscharakteristik dar.

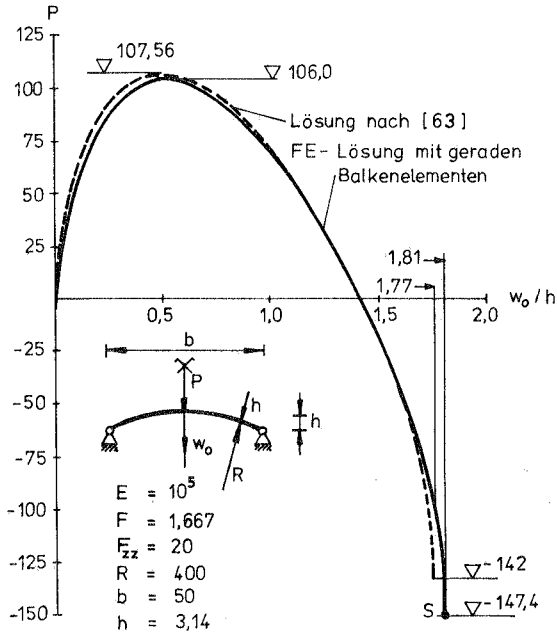


Bild 39: Last-Verschiebungs-Diagramm des flachen gelenkig gelagerten Bogens unter Einzellast

Das u.a. in [63] und [109] untersuchte Tragwerk nach Bild 39 schlägt bei reiner Laststeuerung bei Erreichen der Maximallast der Last-Verformungs-Kurve in einen nicht dargestellten endlich entfernten sekundären Gleichgewichtsast (siehe [109]) durch. Mittels der verschiebungskontrollierten Iterationstechnik gelang es, den dargestellten instabilen

Gleichgewichtspfad bis zum Singularitätspunkt S der Systemsteifigkeitsmatrix zu verfolgen. Bei einer Verschiebungskontrolle für einzelne Verschiebungsfreiheitsgrade erhält man in S einen zweiten Durchschlag in einen benachbarten Gleichgewichtszustand, der dieselbe Scheitelpunktverschiebung aufweist [109]. Die Berechnung wurde wiederum mit 10 geraden Balkenelementen am halben System durchgeführt und mit der Lösung nach [63] verglichen.

### 12.2.3 Endliche Rotationen und Verschiebungen im Raum

Anhand des folgenden bekannten Beispiels soll das hier entwickelte Konzept zur Erfassung beliebig großer Rotationen im Raum überprüft werden.

Beispiel 2.9: Räumlich belasteter Kragträger  
(Querschnitt nach Beispiel 1.1,  
Steg in der Ebene ABC)

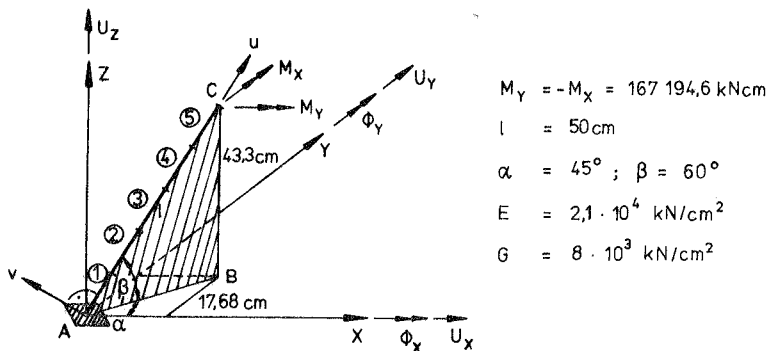


Bild 40: System und Belastung für Beispiel 2.9

Wegen  $M_X = -M_Y$  verformt sich der in Bild 40 dargestellte Kragarm in der Ebene ABC. Die Verschiebungen in dieser Ebene in Richtung der Stabachse und senkrecht dazu seien  $u$  und  $v$ . Sie ergeben sich aus den globalen Verschiebungen  $U_X$ ,  $U_Y$ ,  $U_Z$  zu:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} \quad (149a)$$

Die Verdrehung  $\varphi$  am Ende des Kragarmes in der Ebene ABC erhält man im vorliegenden Fall aus:

$$\varphi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (149b)$$

Die Auftragung von  $\varphi$ ,  $u$  und  $v$  über dem Lastparameter  $\lambda = M l / 2 \pi E F_{ZZ}$  mit  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  liefert das bekannte Last-Verformungs-Bild (Bild 41). Der Verformungszustand der Stabsehne in der Lastebene ist im Bild 42 bei verschiedenen Lastniveaus dargestellt. Die analytische Lösung  $M = \varphi E F_{ZZ} / l$  führt zu einer kreisförmigen Biegelinie in der Last-Verschiebungsebene. Die Idealisierung erfolgte mit 5 Elementen konstanter Länge. Die Last wurde bis zum Endwert  $M_0 = 2 \pi E F_{ZZ} / l$  in 40 Schritten aufgebracht. Unter Verwendung der Iterationstechnik mit Laststeuerung und Neuerstellung der Steifigkeitsmatrix für jeden Iterationsschritt betrug die maximale Anzahl an Iterationen innerhalb eines Lastinkrementes 4. Das Konvergenzmaß nach Gleichung (141) betrug  $\varepsilon = 0,001$ . Abweichungen gegenüber der analytischen Lösung sind unterhalb der Darstellungsgrenze. Bei ständig sich verringender Systemsteifigkeit konnte ein Ausweichen aus der Belastungsebene nur vermieden werden, indem die numerisch bedingten, sehr kleinen Verschiebungen aus dieser Ebene heraus unterdrückt wurden.



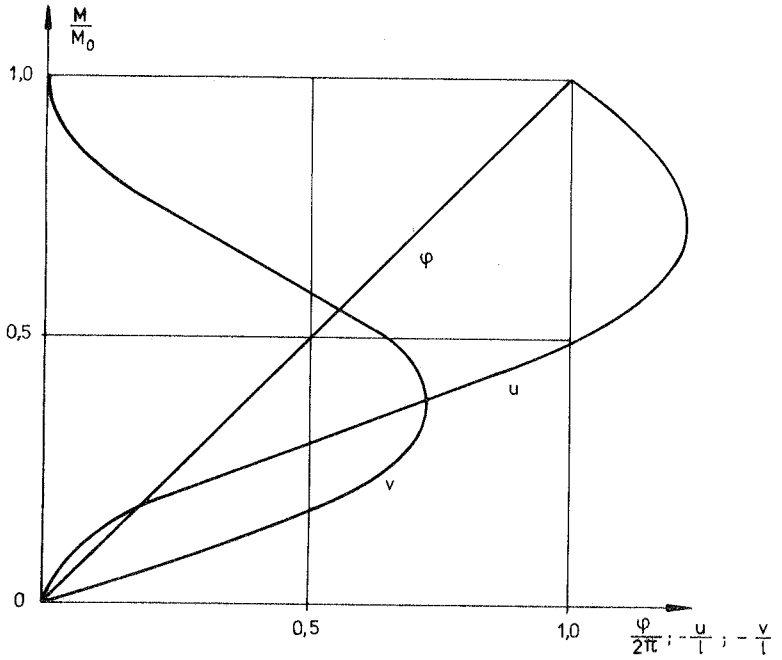


Bild 41: Last-Verschiebungs-Diagramm zu Beispiel 2.9

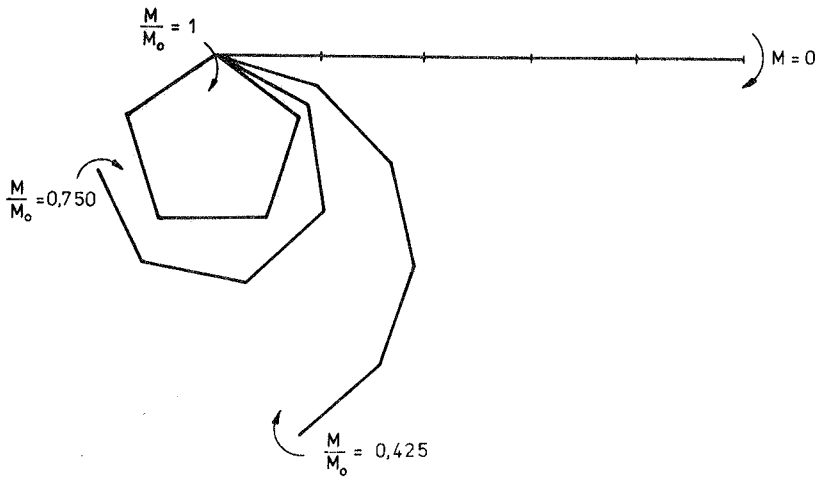


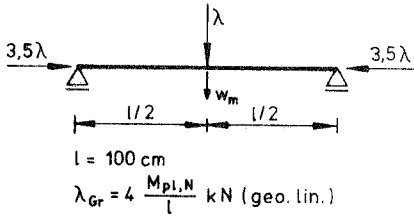
Bild 42: Verformungsfigur zu Beispiel 2.9

### 12.3 Physikalisch nichtlineare Berechnung

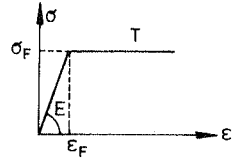
Beim rein physikalisch nichtlinearen Problem verringert sich entsprechend dem Plastizierungsfortschritt die Steifigkeit des Tragwerks. Anders als bei der Fließgelenktheorie erfolgt diese Abnahme bei Biegebeanspruchung stetig und ohne Sprünge. Der Plastizierungsfortschritt im Querschnitt geschieht um so gleichmäßiger, je mehr Integrationspunkte je Segment vorgesehen werden. Die inkrementelle Reststeifigkeit nach Tafel 4 erreicht bei fehlender Verfestigung den Wert Null. Für eine weitere Laststeigerung steht danach keine Steifigkeit mehr zur Verfügung. Abrupte Steifigkeitsänderungen, wie sie zum Beispiel bei überwiegend durch Normalkräfte beanspruchten Stäben entstehen können, ergeben häufig Schwierigkeiten für den numerischen Rechenprozeß. In solchen Fällen kann es sinnvoll sein, nach Erreichen der Fließgrenze eine vergleichsweise geringe Verfestigung zuzulassen. Die numerischen Probleme sind dabei um so größer, je weniger Elemente das Tragwerk besitzt, d.h. je weniger Veränderungen im System möglich sind. Auch statisch bestimmte Systeme können wegen der fehlenden Umlagerungsmöglichkeiten nach Plastizierungsbeginn den Rechenprozeß ungünstig beeinflussen. Weiterhin ist zu beachten, daß bei physikalisch nichtlinearen Berechnungen symmetrische Querschnitte durch teilweise Plastizierung unsymmetrisch werden können. Durch eine daraus folgende Verschiebung des Schwerpunktes und des Schubmittelpunktes sowie durch eine Verdrehung der Hauptachsen entfällt die Entkopplung in den Schnittgrößen hinsichtlich der ursprünglichen Bezugspunkte und -achsen. Deshalb ist die nur wenig Elemente enthaltende elastische Steifigkeitsmatrix nach Tafel 1 nach Plastizierungsbeginn "voll" besetzt (vgl. Tafel 4).

Beispiel 3.1: Einfeldträger aus ideal-elastischem, ideal-plastischem Werkstoff mit Normalkraft und Biegebeanspruchung (Querschnitt nach Beispiel 1.1)

a) System und Last

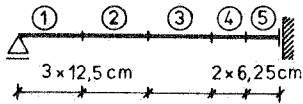


b) Material

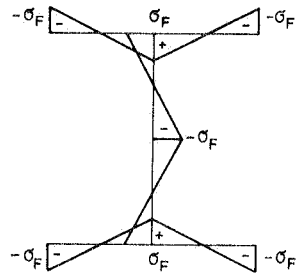


$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$   
 $T = 0$ ;  $\sigma_F = 1,0 \text{ kN/cm}^2$ ;  $M_{pl} = 24 \text{ kNcm}$   
 $M_{pl,N} = 18,53 \text{ kNcm}$  nach [86]

c) Idealisierung



d) Eigenspannungsverteilung  
(ungünstige Annahme)



e) Plastische Bereiche

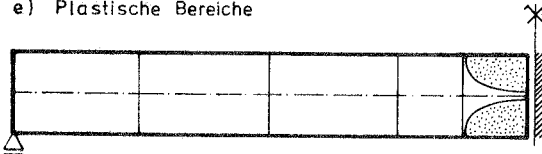


Bild 43: Angaben zu Beispiel 3.1

Das Tragwerk nach Bild 43 wurde zunächst allein unter Biegebeanspruchung infolge der mittig angreifenden Querlast  $Q = \lambda$  untersucht. Wie aus der Last-Verschiebungs-Kurve im Bild 44 zu sehen ist, nimmt nach Erreichen des vollplastischen Momentes in Feldmitte die Durchbiegung  $w_m$  zu, ohne daß die Last noch weiter gesteigert werden kann. Die aus dem horizontalen Bereich der Last-Verschiebungs-Kurve heraus vorgenommene Entlastung geschieht rein elastisch. Nach vollständiger Entlastung verbleiben plastische Dehnungen und damit ein Eigenspannungszustand. Bei Entlastung aus Bereichen, in denen die Steifigkeit des Gesamtsystems nahezu oder gleich Null ist, muß entweder im ersten Schritt eine sehr kleine Lastreduktion vorgenommen werden oder mittels eines Eingabeparameters die Verwendung der elastischen Steifigkeitsmatrix für das nächste Inkrement erzwungen werden. Bei der erneuten Belastung verhält sich der Träger bis zum Erreichen des vollplastischen Momentes elastisch. Es zeigt sich, daß die verwendeten Hermite-Polynome bei entsprechend feiner Diskretisierung in der Lage sind, den Verformungszustand auch nach dem Auftreten eines "Fließgelenkes" zu beschreiben. Für die numerische Integration wurden jeweils neun Stützstellen in den Gurten und im Steg gewählt.

Bei der hier durchgeführten geometrisch linearen Berechnung ergibt sich für die Dehnungen in Längsrichtung ein linearer Verlauf innerhalb eines Elementes. Aus diesem Grund genügt es auch, die Fließbedingung an den Elementenden abzufragen. Unter Beachtung der aus der alleinigen Biegebeanspruchung folgenden linearen Dehnungsverteilung auch über die Querschnittshöhe folgt die im Bild 43 e gezeigte hyperbelförmige Begrenzung der plastischen Zonen im Traglastzustand. Eine weitere Berechnung mit einer Elementverfeinerung durch Unterteilung des Elementes 5 führte zu einer Ausbreitung der plastischen Bereiche, die besser mit der exakten Lösung, z.B. in [102] übereinstimmte. Allerdings zeigte sich für dieses Modell ein wesentlich schlechteres Konvergenzverhalten. Die Ursache dafür sind die Ungleichgewichtskräfte an den kurzen Elementen. Sie bilden zusammen eine Gleichgewichtsgruppe,

welche nur noch Spannungsumlagerungen, aber nicht mehr das Verschwinden der Kräfte selbst bewirkt.

Die numerischen Ergebnisse weisen Diskontinuitäten der plastischen Dehnungsanteile an benachbarten Elementrändern aus. Dies ist damit zu erklären, daß die gewählten Verschiebungsansätze die Verträglichkeit in den Verschiebungen und Verdrehungen, nicht jedoch in den Dehnungen garantieren. Diese kann nur näherungsweise durch eine Elementverfeinerung verbessert werden.

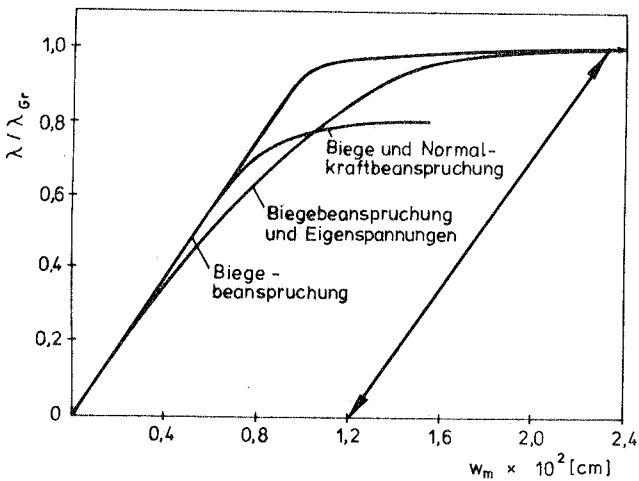


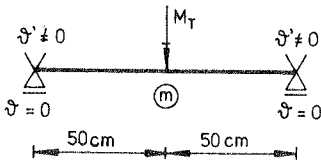
Bild 44: Last-Verformungs-Kurven zu Beispiel 3.1

Bei Vorgabe der im Bild 43 d skizzierten Eigenspannungsverteilung zeigt das querbelastete Tragwerk von Beginn der Belastung an eine nichtlineare Last-Verformungs-Charakteristik und erreicht erst bei größeren Verschiebungen das vollplastische Momente  $M_{p1}$ . Die Entlastung vom selben Verschiebungszustand aus wie beim Träger ohne Eigenspannungen führt zu denselben Restverformungen.

Wirkt auf den Träger neben der Querlast noch eine Axiallast  $P = 3,5 \lambda$ , so sinkt das aufnehmbare plastische Moment auf den Wert  $M_{pl,N} = 18,53 \text{ kNm}$  ab. Aus den oben dargestellten Gründen mußte bei der numerischen Rechnung trotz Verwendung der verschiebungskontrollierten Iterationstechnik mit sehr kleinen Schritten im Last-Verschiebungsraum vorgegangen werden.

Beispiel 3.2: Einfeldträger aus ideal-elastischem, ideal-plastischem Werkstoff mit Torsionsbelastung (Querschnitt nach Beispiel 1.1)

a) System und Last



b) Spannungsverteilung für das vollplastische Wölbmoment

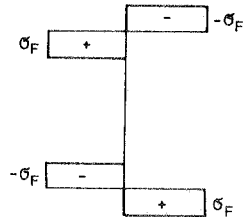


Bild 45: Angaben zu Beispiel 3.2

Das in Feldmitte angreifende Einzeltorsionsmoment  $M_T$  verursacht zu den Gabellagern hin abklingende Wölbmomente, so daß die Torsionsabtragung im Mittelbereich hauptsächlich über Wölbkrafttorsion geschieht. Infolge der Wölbnormalspannungen entsteht ein vollplastisches Wölbmoment

$$M_{\omega, pl} = \int_A \sigma_F \omega \, da \quad (150)$$

mit der in Bild 45 dargestellten Spannungsverteilung. Anders als beim Biegefließgelenk ist hier jedoch die Tragfähigkeit noch nicht erschöpft. Der im Bild 46 zu erkennende weitere Anstieg nach Erreichen des vollplastischen Wölbmomentes in Feldmitte bei  $M_T = 1,876 \text{ kNcm}$  entsteht aus einer Wölbmomentenumlagerung, durch die der Gradient  $M'_\omega$  als Komponente des Torsionsmomentes zunimmt sowie der Aktivierung der St. Venant'schen Torsionstragfähigkeit in m.

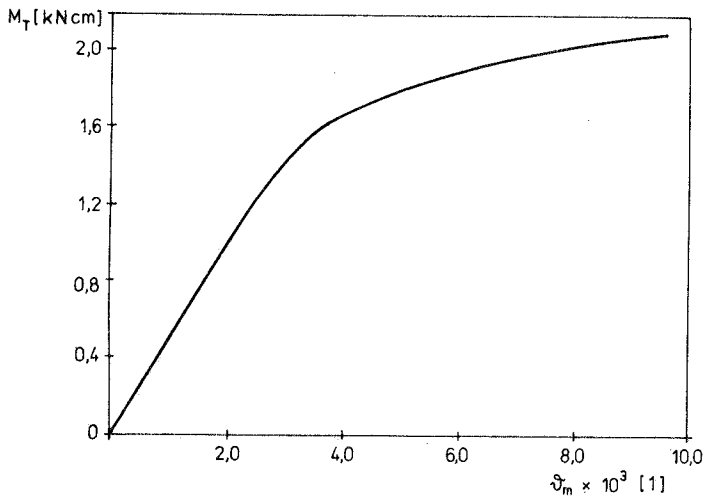


Bild 46: Last-Verformungs-Kurve zu Beispiel 3.2

## 12.4 Geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung

Beispiel 4.1: Fachwerk mit elastisch-plastischem Werkstoff für die Diagonalen nach Powell/Simons [92]

Der im Bild 47 dargestellte schlanke Fachwerkurm wurde zunächst für unbegrenzt linear elastischen Werkstoff für alle Stäbe sowohl mit dem entwickelten Balkenelement als auch mit dem in der Programmbibliothek zu NISA 80 [47] vorhandenen Fachwerkelement "TRUSS" berechnet. Für die daraus erhaltenen identischen Ergebnisse zeigt sich im Bild 47 eine gute

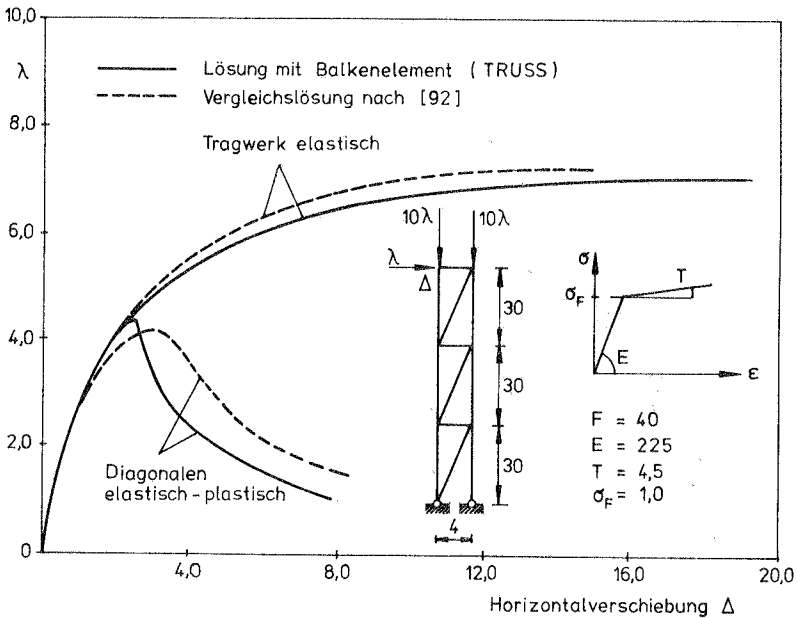


Bild 47: System und Last - Verformungs - Kurve zu Beispiel 4.1

Übereinstimmung mit den in [92] angegebenen Werten. Anders als in [92] fällt jedoch bei der Berücksichtigung des elastisch - plastischen Werkstoffes für die Diagonalen die Last



nach Erreichen der vollplastischen Normalkraft in der obersten Diagonalen bei einem Lastniveau  $\lambda \approx 4,5$  stark ab. Die dann negative Determinante der Systemsteifigkeitsmatrix verringert sich weiter infolge des geometrischen Effektes durch die starke Zunahme der Horizontalverschiebung, ohne daß dabei weitere Diagonalen plastizieren. Der plötzliche Abfall nach Überschreiten der Fließgrenze erfolgt umso abrupter, je geringer der Verfestigungsmodul  $T$  ist. Für  $T = 0$  erhält man schließlich ein Verzweigungsproblem.

Beispiel 4.2: Räumlich belasteter Durchlaufträger

Für den gabelgelagerten Zweifeldträger nach Bild 48 errechnete Heil [52] eine um 33 % höhere Traglast als Meister in

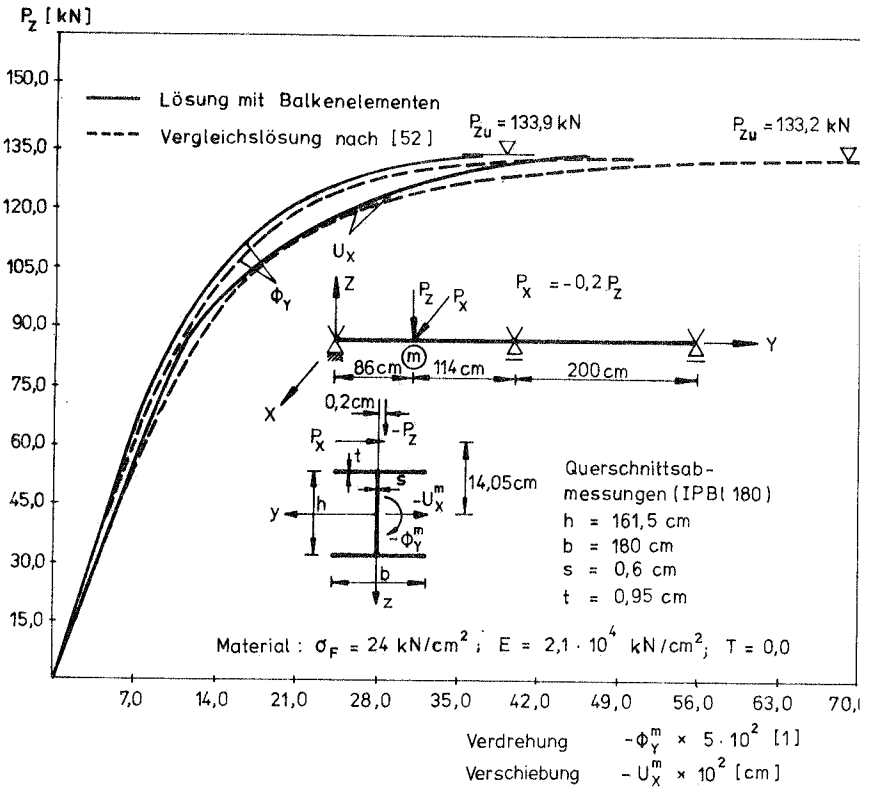


Bild 48: System und Last - Verformungs - Kurven zu Beispiel 4.2

[75] . Die FE - Berechnung wurde mit 13 Elementen in Längsrichtung und Elementverfeinerung an der Lasteinleitungsstelle  $m$  und am Mittelaufleger durchgeführt. Über ein senkrecht zur Stabachse angeordnetes, sehr steifes Element erfolgt die exzentrische Lasteinleitung. Unter Vernachlässigung der Ausrundungen an den Segmentübergängen wurden die im Bild 48 angegebenen Querschnittsabmessungen zugrunde gelegt. Das Ergebnis der Berechnung bestätigt das Resultat von Heil [52] . Die nahezu exakt gleich große Traglast des Systems von 133,9 kN wird allerdings bei einer kleineren seitlichen Verschiebung und einer geringeren Verdrehung um die Stabachse erreicht. Dies erklärt sich aus der größeren Steifigkeit des finiten Verschiebungsmodells, insbesondere bei fortschreitender Plastizierung, gegenüber der von Heil verwendeten Lösungsmethode. Infolge der kombinierten Biege- und Torsionsbeanspruchung ist der Querschnitt an der Lasteinleitungsstelle im Traglastzustand nahezu völlig durchplastiziert. Auch über dem Mittelaufleger überschreiten die Dehnungen in einem Teil des Untergurtes die vorhandene Fließdehnung.

An diesem Beispiel zeigte sich, daß eine Integration der Segmente in Dickenrichtung keinen Einfluß auf die Größe der Traglast hat und deshalb unterbleiben kann.

Beispiel 4.3:      Räumlicher Rahmen mit Normalkraft-,  
Biege- und Torsionsbelastung

Das Tragwerk nach Bild 49 wurde von Ackermann in [1] unter der Wirkung der eingetragenen Belastung bis zum Erreichen der Traglast berechnet. Die elastisch - plastische Untersuchung mit der Übertragungsmatrizenmethode im Rahmen des Verschiebungsgrößenverfahrens führte unter der Annahme kleiner Verformungen zu einem Traglastfaktor  $\lambda_u = 2,963$ . Die durchgeführte FE - Berechnung sollte zwei Fragestellungen beantworten:

- Unterschied in der Traglast bei Berücksichtigung endlicher Verformungen.
- Verhalten des Tragwerks nach Erreichen der Traglast.

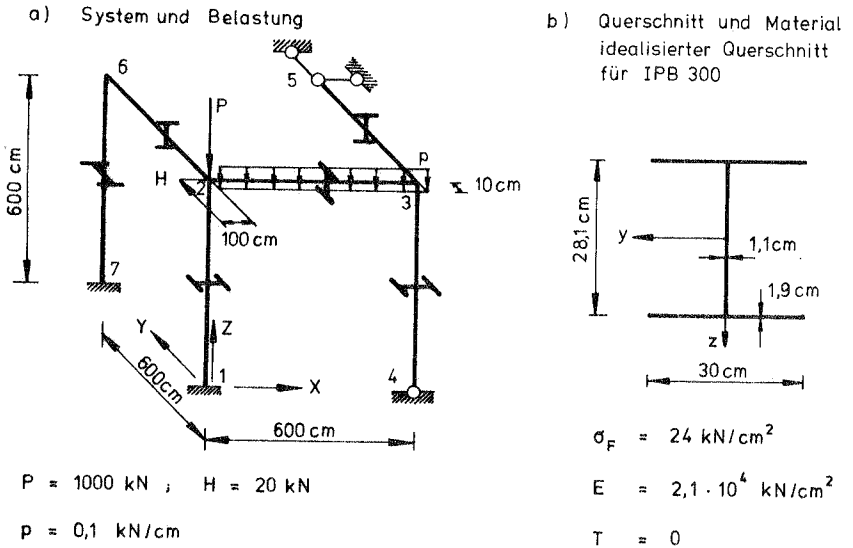


Bild 49: Angaben zum Beispiel 4.3

Zur Diskretisierung wurde das System in insgesamt 36 Balkenelemente gleicher Länge mit 25 Integrationspunkten je Querschnitt unterteilt. Wie in [1] sind die Stäbe an den Knoten 2, 3 und 6 mit Wölb gelenken und ansonsten biegesteif verbunden. Die Lage der nach Bild 49 b idealisierten IPB 300 - Profile im Tragwerk ist in 49 a angegeben.

Die oben gestellten Fragen sollen anhand eines Last-Verschiebungs-Diagrammes für die Verschiebung des Punktes 2 in X - Richtung  $\delta_{2X}$  beantwortet werden. Aus Bild 50 erkennt man, daß die FE - Lösung vor Erreichen der Traglast etwas kleinere Verformungen aufweist, das Tragwerk also steifer ist als nach

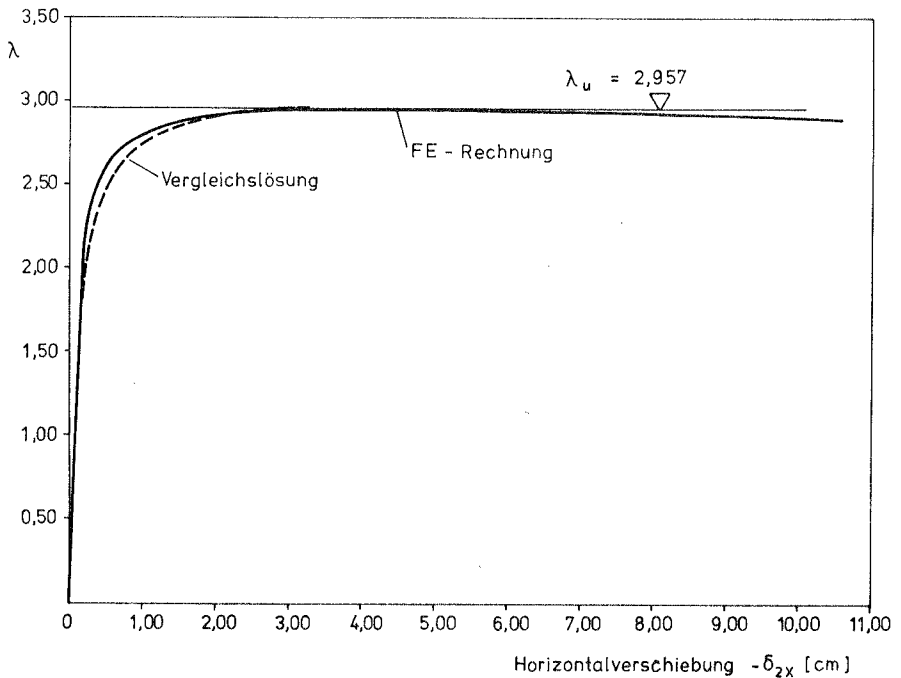


Bild 50: Last - Verschiebungs - Diagramm zu Beispiel 4.3

der Rechnung in [1]. Die Traglast  $\lambda_u = 2,957$  ist nahezu identisch mit der Vergleichslösung. Sie wird allerdings erst bei der Verschiebung  $-\delta_{2X} = 4,687$  cm erreicht. Wegen des Wölbgelenkes am Knoten 2 des elastischen Tragwerkes kommt es in diesem Punkt zu einer rechnerischen Überschreitung des näherungsweise ermittelten vollplastischen St. Venantschen Torsionsmomentes  $M_{TS,pl} = 62,65$  kNcm. Aus einer FE-Rechnung ohne die Reduktion auf diesen Wert kann deshalb eine etwas höhere, über der Lösung in [1] liegende Traglast erwartet werden. Das Tragwerk zeigt ein duktileres Verhalten. Es stellt sich ein ausgedehntes Traglastplateau mit gering fallender Tendenz nach Erreichen der maximal aufnehmbaren Last ein. Plastizierungsvorgänge finden bis zur Verschiebung  $-\delta_{2X} = 9,196$  cm ausschließlich in der Stütze 1 - 2 statt. Mit dem

Beginn des Plastizierens auch an der Stützeinspannung 7 wird das Tragwerk noch weicher. Die abfallende Tendenz in der Last - Verformungs - Kurve verstärkt sich. Im Bild 51 ist die

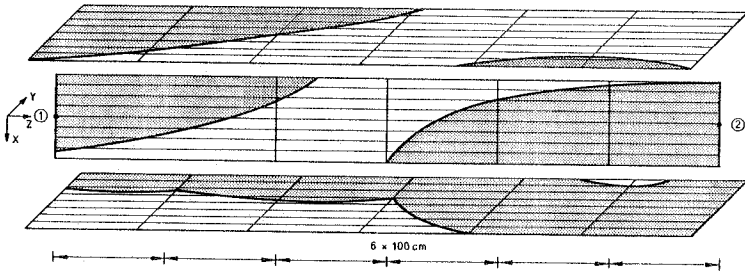


Bild 51: Ausbreitung der plastischen Zonen

Verteilung der plastischen Zonen in der Stütze 1 - 2 dargestellt. Das fast vollständig plastische Tragwerksteil zeigt beim letzten untersuchten Verschiebungszustand eine bleibende plastische Dehnung von 13,7‰. Da bei Baustahl die Verfestigung im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm etwa bei 30 - 35 ‰ beginnt, ist die Rechnung mit dem Verfestigungsmodul  $T = 0$  gerechtfertigt.

Wegen der überwiegenden Normalkraftbeanspruchung konnte im Traglastbereich ein schlechtes Konvergenzverhalten beobachtet werden. Bei dem in diesem Bereich verwendeten Iterationsverfahren mit konstanter Bogenlänge wurde dabei anstelle der elastischen Reststeifigkeitsmatrix die elastische Anfangsmatrix benutzt.

### 13. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden Stabsysteme mit offenen, dünnwandigen Querschnitten bei physikalisch und geometrisch nichtlinearem Verhalten untersucht. Um die im Abschnitt 3 genannten Fragestellungen beantworten zu können, wurde ein finites Balkenelement entwickelt. Die Grundlage dafür bildet die mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen erstellte inkrementelle Gleichgewichtsbedingung für ein allgemeines Kontinuum. Indem der letzte bekannte Gleichgewichtszustand als Bezugszustand für das folgende Inkrement gewählt wird, entsteht eine mitgehende ("updated") Lagrange - Formulierung. Die Elimination der Starrkörperbewegungen erfolgt mittels der im Abschnitt 4.3 beschriebenen mitgehenden Koordinaten - Darstellung. Als Stoffgesetz kann jeder bekannte nichtlinear elastische oder elastisch - plastische Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen verwendet werden. Für die Berechnung der Beispiele wurde eine bilineare elastisch - plastische Beziehung eingebracht. Die Diskretisierung des Problems im Sinne der finiten Element - Methode geschieht mit bereichsweisen Verschiebungsansätzen. Der Ablauf der inkrementell - iterativen Berechnung für ein Lastinkrement wird im Abschnitt 10.4 anhand eines Ablaufdiagramms erläutert. Zur numerischen Überprüfung des theoretischen Konzepts wurden einige ausgewählte Beispiele berechnet (Abschnitt 12) und Übereinstimmung mit bekannten Vergleichslösungen erzielt.

Im Hinblick auf die Anwendung in der Praxis wäre es wünschenswert, das Element auf einige zusätzliche Möglichkeiten zu erweitern. Nach Vorliegen ausreichender Ergebnisse von experimentellen Untersuchungen an verschiedenen, im Stahlbau üblichen Knotenausbildungen könnte mittels eines Translations-, Dreh- und Wölbfeder-elementes das tatsächliche Tragverhalten räumlicher Rahmenkonstruktionen vor allem im Knotenbereich besser erfaßt werden. Weitere Traglastkriterien, wie z.B. die Bruchdehnung des Materials, sollten entweder als automatische Abfrage oder als Nebenbedingung berücksichtigt werden. Von praktischem Interesse bei Stäben mit großen

Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Stablänge ist es, die lokale Stabilität einzelner Querschnittsteile und die Interaktion mit dem Stabilitätsproblem des gesamten Tragwerkes zu erfassen. Dabei ist die Berücksichtigung eines nicht elastischen Werkstoffverhaltens von besonderer Bedeutung.

## S c h r i f t t u m

- [1] Ackermann, Th.: Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten.  
Heft 5 der Schriftenreihe des Instituts für Baustatik und Meßtechnik der Universität Fridericiana Karlsruhe (TH), 1981.
- [2] Akay, H.V.,  
Johnson, C.P.,  
Will, K.M.: Lateral and Local Buckling of Beams and Frames.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 103 (1977) 1821/1832.
- [3] Akesson, B.,  
Bäcklund, J.: Plastisches Wlassowsches Wölbwiderstandsmoment offener Walzprofile.  
Der Stahlbau 1 (1973) 13/19.
- [4] Akesson, B.,  
Bäcklund, J.: Plastische Traglast gemischt tordierter Stäbe mit offenem Profil.  
Der Stahlbau 3 (1973) 77/80.
- [5] Akkoush, E.A.,  
Toridis, T.G.,  
Khozeimeh, K.,  
Huang, H.K.: Bifurcation, Pre- and Postbuckling Analysis of Frame Structures.  
Computers & Structures 8 (1978) 667/678.
- [6] Anand, S.C.: Constitutive Relations and Solution Schemes in Plastic Analysis.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 106 (1980) 21/36.
- [7] Argyris, J.H.: Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis.  
In: Progress in Aeronautical Sciences. Vol. 4. Pergamon Press, Oxford, 1964.



- [8] Argyris, J.H.,  
Radaaj, D.: Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger  
Stäbe und Stabsysteme.  
Ingenieur-Archiv 40 (1971) 198/  
210.
- [9] Argyris, J.H.: An Excursion into Large Rotation.  
Computer Methods in Applied Me-  
chanics and Engineering 32 (1982)  
85/155.
- [10] Baba, S.,  
Kajita, T.: Plastic Analysis of Torsion of a  
Prismatic Beam.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 18 (1982)  
927/944.
- [11] Bäcklund, J.,  
Akesson, B.: Plastisches Saint Venantsches  
Torsionswiderstandsmoment offener  
Walzprofile.  
Der Stahlbau 10 (1972) 302/306.
- [12] Baigent, A.H.,  
Hancock, G.J.: The Behaviour of Portal Frames  
Composed of Cold - Formed Members.  
In: [104] 209/222.
- [13] Bamm, D.: Näherungsweise Berücksichtigung  
der Schubspannungen bei der Er-  
mittlung von Traglasten gerader  
dünnwandiger offener Profile.  
Dissertation, Techn. Universität  
Berlin, 1974.
- [14] Barsoum, R.S.,  
Gallagher, R.H.: Finite Element Analysis of Tor-  
sional and Torsional - Flexural  
Stability Problems.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 2 (1970)  
333/352.
- [15] Bathe, K.-J.,  
Ramm, E.,  
Wilson, E.L.: Finite Element Formulations for  
Large Deformation Dynamic Analy-  
sis.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 9 (1975)  
353/386.

- [16] Bathe, K.-J.,  
Wilson, E.: Numerical Methods in Finite Element Analysis.  
Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [17] Bathe, K.-J.,  
Bolourchi, S.: Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 14 (1979) 961/986.
- [18] Bazant, Z.P.,  
Nimeiri, M.E.: Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 99 (1973) 1259/1281.
- [19] Belytschko, T.,  
Schwer, L.: Large Displacement, Transient Analysis of Space Frames.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 11 (1977) 65/84.
- [20] Bergan, P.G.,  
Clough, R.W.: Convergence Criteria for Iterative Processes.  
AIAA - J. 10 (1972) 1107/1108.
- [21] Bilek, H.-U.: Die Berücksichtigung des nichtlinearen Krümmungsausdruckes bei der Berechnung von Traglast und Gleichgewichtslagen idealelastisch-idealplastischer Stäbe mit Rechteckquerschnitt.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1973.
- [22] Bitzer, H.-A.: Traglastberechnung von I-Trägern mit Imperfektionen unter besonderer Berücksichtigung einer elastischen seitlichen Stützung.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1981.
- [23] Boegershausen, H.: Kinematische Untersuchung geometrisch nichtlinearer Stabtragwerke.  
Ingenieur-Archiv 47 (1978) 339/348.

- [24] Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion.  
Der Stahlbau 1 (1952) 1/9.
- [25] Bornscheuer, F.W.,  
Anheuser, L.: Tafeln der Torsionskenngrößen für die Walzprofile der DIN 1025 - 1027.  
Der Stahlbau 3 (1961) 81/82.
- [26] Bornscheuer, F.W.: Torsion und Profilverformung dünnwandiger Stäbe.  
Vorlesungsumdruck des Instituts für Baustatik, Uni. Stuttgart, 1978.
- [27] Bornscheuer, F.W.: Übertragungsmatrizenverfahren.  
Vorlesungsumdruck Teil K des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart, 1981.
- [28] Bradford, M.A.,  
Trahair, N.S.: Distortional Buckling of Thin-Web Beam - Columns.  
Engineering Structures 4 (1982) 2/9.
- [29] Brendel, B.: Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1979.
- [30] Bürgermeister, G.,  
Steup, H.,  
Kretschmar, H.: Stabilitätstheorie I.  
3. Auflage.  
Akademie-Verlag, Berlin, 1966.
- [31] Bufler, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie.  
Vorlesungsumdruck des Instituts für Mechanik, Uni. Stuttgart, 1977.

- [32] Bufler, H.: Energiemethoden.  
Vorlesungsumdruck des Instituts  
für Mechanik, Uni. Stuttgart.
- [33] Carl, J.: Näherungslösung des nichtlinearen  
Biege-Torsionsproblems für dünn-  
wandige Stäbe mit offenem Profil.  
Dissertation, Techn. Universität  
Berlin, 1969.
- [34] Chen, W.F.,  
Atsuta, T.: Theory of Beam - Columns.  
Vol. 2: Space Behaviour and Design.  
McGraw-Hill, New York, 1976.
- [35] Dabrowski, R.: Zum Problem der gleichzeitigen  
Biegung und Torsion dünnwandiger  
Balken.  
Der Stahlbau 4 (1960) 104/111.
- [36] Dreher, W.: Ein Beitrag zur Berechnung des auf  
Biegung und Torsion beanspruchten  
Balkens mit I-Querschnitt.  
Dissertation, Universität Stuttgart,  
1963.
- [37] Duschek, A.,  
Hochreiner, A.: Tensorrechnung in analytischer Dar-  
stellung.  
Teil I, 4. Aufl., Springer, Wien,  
1960.
- [38] Epstein, M.,  
Murray, D.W.: Three-Dimensional Large Deforma-  
tion Analysis of Thin Walled  
Beams.  
Int. J. Sol. Structures 12 (1976)  
867/876.
- [39] Epstein, M.,  
Nixon, D.,  
Murray, D.W.: Large Displacement Inelastic Ana-  
lysis of Beam - Columns.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 104  
(1978) 841/853.

- [40] Ettouney, M.M., Kirby, J.B.: Warping Restraint in Three-Dimensional Frames.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 107 (1981) 1643/1656.
- [41] Fukumoto, Y., Kubo, M.: Buckling in Steel U-Shaped Beams.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 108 (1982) 1174/1190.
- [42] Fung, Y.C.: Foundation of Solid Mechanics.  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [43] Galambos, T.V.: Inelastic Lateral Buckling of Frames.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 89 (1963) 3683/3687.
- [44] Gallagher, R.H.: Finite - Element - Analysis.  
Springer, Berlin, Heidelberg, 1976.
- [45] Grengg, H., Pelikan, W., Reinitzhuber, F.: (Herausgeber) Stahlbau und Baustatik.  
Aktuelle Probleme.  
Beer - Sattler - Festschrift.  
Springer, Wien, New York, 1965.
- [46] Gunnlaugsson, G.A., Pedersen, P.T.: A Finite Element Formulation for Beams with Thin Walled Cross Sections.  
Computers & Structures 15 (1982) 691/699.
- [47] Häfner, L., Ramm, E., Sättele, J.M., Stegmüller, H.: NISA 80 - Programmdokumentation - Programmsystem.  
Bericht des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart, 1981.
- [48] Hamel, G.: Theoretische Mechanik.  
Springer, Berlin, 1967.

- [49] Hancock, G.,  
Bradford, M.A.,  
Trahair, N.S.: Web Distortion and Flexural - Torsional Buckling.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 106  
(1980) 1557/1571.
- [50] Hartmann, B.: Traglasten von Stabwerken.  
In: [87], 256/270.
- [51] Hartmann, B.: Traglastermittlung ebener Stabwerke.  
Bericht aus dem Institut für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum, Heft 28, 1977.
- [52] Heil, W.: Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz. Heft 3 der Schriftenreihe des Instituts für Baustatik und Meßtechnik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH), 1979.
- [53] Heinst, C.P.,  
Wang, R.C.: Torsional Properties of Open Cross Sections.  
Computers & Structures 9 (1978) 495/500.
- [54] Henckel, F.-O.: Ein Beitrag zum plastischen Kippen von I - Trägern mit Hilfe der Finiten-Element-Methode.  
Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1977.
- [55] Herzog, M.: Die Größe der Eigenspannungen in Walz- und Schweißprofilen nach Messungen.  
Der Stahlbau 46 (1977) 283/287.

- [56] Hildenbrand, P.: Die Kippstabilität auf Biegung beanspruchter einfach- oder doppelsymmetrischer, eingespannter oder gabelgelagerter Träger mit linear veränderlicher Querschnittshöhe.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1970.
- [57] Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity.  
Oxford University Press, New York, 1950.
- [58] Hobbs, R.E.,  
Jowharzadeh, A.M.: An Incremental Analysis of Beam - Column and Frames Including Finite Deformations and Bilinear Elasticity.  
Computers & Structures 9 (1978) 323/330.
- [59] Hollinger, B.A.,  
Mangelsdorf, C.P.: Inelastic Lateral Torsional Buckling of Beams.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 107 (1981) 1551/1567.
- [60] Jennings, A.: Frame Analysis Including Change of Geometry.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 94 (1968) 627/644.
- [61] Kamat, M.P.,  
Swift, G.W.,  
Killian, D.E.: Beam - Column Element for Inelastic Analysis.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 10 (1976) 1177/1178.
- [62] Kappus, R.: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen.  
ZAMM 19 (1939) 271/285 und 344/361.

- [63] Karamanlidis, D., Knothe, K.: Geometrisch nichtlineare Berechnung von ebenen Stabwerken auf der Grundlage eines gemischt-hybriden Finite-Element-Verfahrens. Ingenieur-Archiv 50 (1981) 377/392.
- [64] Karamanlidis, D.: Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie des schwach gekrümmten Timoshenko - Balkens. Der Stahlbau 8 (1981) 244/249.
- [65] Kindmann, R.: Traglastermittlung ebener Stabwerke mit räumlicher Beanspruchung. Mitteilung Nr. 81-3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr - Universität Bochum, 1981.
- [66] Krajcinovic, D.: A Consistent Discrete Elements Technique for Thinwalled Assemblages. Int. J. Sol. Struct. 5 (1969) 639/662.
- [67] Labib, F.F.: Knicken und Biegedrillknicken von Druckstäben mit einfachsymmetrischem Querschnitt und nichtlinearem Werkstoffgesetz. Dissertation, Uni. Karlsruhe (TH), 1975.
- [68] Lindner, J.: Näherungsweise Ermittlung der Traglasten von auf Biegung und Torsion beanspruchten I - Trägern. Dissertation, Techn. Universität Berlin, 1970.



- [69] Lindner, J.: Der Einfluß von Eigenspannungen auf die Traglast von I - Trägern. Habilitationsschrift Techn. Uni. Berlin, 1972. Kurzfassung in: Der Stahlbau 43 (1974) 39/45 und 86/91.
- [70] Lindner, J.,  
Gietzelt, R.: Biegedrillknicken - Erläuterungen, Versuche, Beispiele.  
DAST-Bericht 10 (1980).
- [71] Link, M.: Zur Berechnung einfach-symmetrischer I-Träger nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung mit Hilfe hybrider finiter Elemente. Der Stahlbau 5 (1975) 140/146.
- [72] Malvern, L.E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [73] Meek, J.L.,  
Swanell, P.: Stiffness Matrices for Members Including Warping Torsion Effects. Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 102 (1976) 193/197.
- [74] Mei, C.: Reply to Krajcinovicz's Discussion.  
Int. J. Mech. Science 13 (1971) 739/740.
- [75] Meister, J.: Zur Berechnung der elastisch-plastischen Traglast von auf Biegung und Torsion beanspruchten Durchlaufträgern.  
Dissertation, Uni. Karlsruhe, 1977.
- [76] Milner, H.R.: Accurate Finite Element Analysis of Large Displacements.  
Computers & Structures 14 (1981) 205/210.

- [77] Möll, R.: Kippen von querbelasteten und gedrückten Durchlaufträgern mit I-Querschnitt als Stabilitätsproblem und als Spannungsproblem II. Ordnung behandelt.  
Dissertation, Techn. Hochschule Darmstadt, 1966.
- [78] Morell, P.J.B.: The Influence of Joint Detail on the Torsional Behaviour of Thin - Walled Structures Having an Axial Discontinuity.  
In: [104] 539/552.
- [79] Murray, D.W.,  
Rajasekaran, S.: Technique for Formulating Beam Equations.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 101 (1975) 561/573.
- [80] Nemat-Nasser, S.: Continuum Bases for Consistent Numerical Formulations of Finite Strain in Elastic and Inelastic Structures.  
In: Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Structural Behaviour, AMD - Vol. 14, New York, 1975.
- [81] Obrecht, H.,  
Wunderlich, W.,  
Schrödter, V.: Large Deflections and Stability of Thin-Walled Beam Structures.  
In: F.H. Schröder (Ed.): Stability in the Mechanics of Continua. Springer, Berlin, 1982.
- [82] Ojalvo, M.: Wagner Hypothesis in Beam and Column Theory.  
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 107 (1981) 669/677. Discussions: 108 (1982) 570/578.

- [83] Oran, C.,  
Kassimali, A.: Large Deformations of Framed Structures under Static and Dynamic Load.  
Computers & Structures 6 (1976) 539/547.
- [84] Overrath, J.: Große Stabverformungen und kinetische Stabilität nach der Elementmethode von Szabo.  
Dissertation, Techn. Universität Braunschweig, 1975.
- [85] Oxfort, J.: Zum Verzweigungspunkt des elastischen Gleichgewichts bei Rahmentragwerken mit Biege- und Druckbeanspruchung, berechnet nach der Formänderungsgrößenmethode.  
Der Stahlbau 46 (1977) 129/132.
- [86] Oxfort, J.: Traglastverfahren im Stahlbau.  
Vorlesungsumdruck des Lehrstuhls für Stahlbau und Holzbau, Uni. Stuttgart.
- [87] Pahl, J.,  
Stein, E.,  
Wunderlich, W.:  
(Herausgeber) Finite Elemente in der Baupraxis. Aufstellung und Prüfung elektronischer Standsicherheitsberechnungen in der Baupraxis auf der Grundlage finiter Berechnungsmethoden.  
Ernst & Sohn, 1978.
- [88] Parkus, H.,  
Tungl, E.: Der Einfluß von Eigenspannungen auf die Torsion dünnwandiger offener Profile.  
In: [45] 135/143.
- [89] Peterson, Ch.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen.  
Vieweg & Sohn, 1980.

- [90] Powell, G.H.: Theory of Nonlinear Elastic Structures.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 95  
(1969) 2687/2701.
- [91] Powell, G., Klingner, R.: Elastic Lateral Buckling of Steel Beams.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 96  
(1970) 1919/1932.
- [92] Powell, G., Simons, J.: Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures.  
Int. J. Num. Meth. Eng. 17 (1981)  
1455/1467.
- [93] Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis.  
McGraw-Hill, New York, 1968.
- [94] Rajasekaran, S.: Finite Element Analysis of Thin-Walled Members of Open Cross Sections.  
Structural Engineering Report No. 34, Depart. of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada, Sept. 1971.
- [95] Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam - Columns.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 99  
(1973) 1003/1023.
- [96] Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations.  
Proc. ASCE, J. Struct. Div. 99  
(1973) 1025/1041.

- [97] Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Finite Element Large Deflection Analysis of Thin-Walled Beams of Open Section.  
Proc. 1st Int. Conference Finite Element Methods in Engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia, Aug. 28-30, 1974.
- [98] Rajasekaran, S.: Finite Element Method for Plastic Beam - Columns.  
In: [34] 539/608.
- [99] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.  
Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik der Uni. Stuttgart, 1976.
- [100] Ramm, E.: Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points.  
Europe-U.S. Workshop: Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Bochum, July 1980.
- [101] Ramm, E.: Computerstatik.  
Vorlesungsumdruck des Instituts für Baustatik, Uni. Stuttgart, 1982.
- [102] Reckling, K.-A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme.  
Springer, Berlin, 1967.
- [103] Reuschling, D.: Beitrag zur Berechnung mehrfeldriger, beliebig gelagerter dünnwandiger Stäbe mit einfach- oder unsymmetrischem offenem Querschnitt unter Normalkraft- und Querbelastung als Verzweigungsproblem oder Spannungsproblem II. Ordnung nach dem Übertragungsmatrizen - Verfahren.  
Dissertation, Techn. Hochschule Darmstadt, 1969.

- [104] Rhodes, J., Walker, A.C.: (Editors) Thin Walled Structures - Recent Technical Advances and Trends in Design, Research and Construction. Granada, London, 1980.
- [105] Roik, K., Carl, J., Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe. Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf, 1972.
- [106] Roik, K., Kindmann, R.: Berechnung stabilitätsgefährdeter Stabwerke mit Berücksichtigung von Entlastungsbereichen. Der Stahlbau 10 (1982) 310/318.
- [107] Sättele, J.M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen mit stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. Dissertation, Universität Stuttgart, 1980.
- [108] Saleh, A.: Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken mit großen Verformungen und Plastizierung. Heft 4 der Schriftenreihe Stahlbau an der RWTH Aachen, 1982.
- [109] Schelkle, E.: Zur Berechnung des Stabilitäts- und Nachbeulverhaltens dünner Schalentragwerke nach der Methode der finiten Elemente. Dissertation, Universität Stuttgart, 1980.
- [110] Schilling, Ch.: End Effects for Residual Stresses in Bars. Proc. ASCE, J. Eng. Mech Div. 107 (1981) 813/826.

- [111] Schock, H.-J.: Untersuchungen zur Tragfähigkeit von seilverspannten Druckstäben. Forschungsbericht Nr. 4 aus dem Inst. für Tragkonstruktionen und konstruktives Entwerfen, Universität Stuttgart, 1976.
- [112] Scholz, H.: Verfahren zur iterativen Berechnung von ebenen Stabwerken unter Berücksichtigung großer Verformungen und der Dehnsteifigkeit. Der Stahlbau 10 (1979) 306/311.
- [113] Schrader, K.H.: Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierten Sprache. B.I. - Hochschulsript, Bibliographisches Inst., Mannheim/Zürich, 1969.
- [114] Schrader, K.H.: Genauigkeitsprobleme bei Ansätzen mit Starrkörperverschiebungen. In: [87] 231/245.
- [115] Schreyer, H., Masur, E.: Buckling of Shallow Arches. Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 92 (1966) 1/19.
- [116] Schröder, F.H.: Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Trägers mit großen Verformungen. Ingenieur-Archiv 39 (1970) 87/103.
- [117] Schweizerhof, K.: Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen. Dissertation, Universität Stuttgart, 1982.

- [118] Steinbach, W.: Die Theorie 2. Ordnung für den räumlich belasteten Stab mit dünnwandigem, offenem Querschnitt. In: [45] 292/335.
- [119] Stern, J.: Der Gelenkstab bei großen elastischen Verformungen. Ingenieur-Archiv 48 (1979) 173/184.
- [120] Szilard, R.: A Hybrid, Finite Element - Finite Difference Approach to Simplified Large Deflection Analysis of Structures. Int. J. Computers & Structures 9 (1978) 341/350.
- [121] Tebedge, N., Tall, L.: Linear Stability Analysis of Beam-Columns. Proc. ASCE, J. Struct. Div. 99 (1973) 2439/2457.
- [122] Teichmann, H.: Vektor- und Tensorrechnung. Hochschultaschenbuch 39/39 a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1964.
- [123] Timoshenko, S.P., Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [124] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York, 1951.
- [125] Unger, B.: Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfachsymmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt und einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1969.



- [126] Vogel, U.: Praktische Berücksichtigung von Imperfektionen.  
Der Stahlbau 7 (1981) 201/205.
- [127] Wagenknecht, G.: Beitrag zur Berechnung von Systemen aus geraden dünnwandigen Stäben mit offenem veränderlichem Querschnitt nach Spannungstheorie 2. Ordnung.  
Mitteilung Nr. 74-8, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1974.
- [128] Werner, G.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I - Querschnitt.  
Bericht 74-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1974.
- [129] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe.  
Band 1. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964.
- [130] Wunderlich, W.: Zur computerorientierten Formulierung von Stabilitätsproblemen.  
In: Festzeitschrift Zerna - KIB, Werner-Verlag, 1976.
- [131] Wunderlich, W.,  
Beverungen, G.: Geometrisch nichtlineare Theorie und Berechnung eben gekrümmter Stäbe.  
Baingenieur 52 (1977) 225/237.

Normen und Vorschriften:

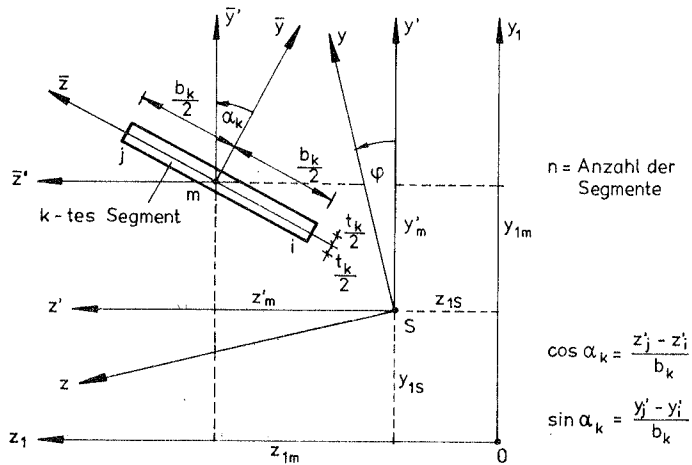
- [132] DIN 18 800, Teil 2 -  
Entwurf Dezember 1980.
- [133] DIN 18 800, Teil 2, Beiblatt -  
Entwurf Dezember 1980.

## A N H A N G

### I n h a l t

- A 1            Elastische Querschnittswerte,  
              Schwerpunkt, Schubmittelpunkt, Hauptachsen,  
              Trägheitsmomente, Wölbgrößen, "höhere" Quer-  
              schnittswerte
- A 2            Elastisch - plastische Querschnittswerte
- A 3            Integrale der Ansatzfunktionen
- A 4            Koeffizientendarstellung der  
              Hermite - Polynome
- A 5            Sekantensteifigkeitsterme für die nicht-  
              lineare Torsionsuntersuchung

# A 1 - Numerische Berechnung elastischer Querschnittswerte



## 1. Schwerpunktlage

$$y_{1s} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{1m} b_k t_k}{\sum_{k=1}^n b_k t_k} \quad ; \quad z_{1s} = \frac{\sum_{k=1}^n z_{1m} b_k t_k}{\sum_{k=1}^n b_k t_k}$$

## 2. Koordinaten $y'$ , $z'$ bezogen auf den Schwerpunkt

$$y' = y_1 - y_{1s}$$

$$z' = z_1 - z_{1s}$$

## 3. Trägheitshauptachsen, Hauptträgheitsmomente

$$F_{\bar{y}\bar{y}}^k = \int \bar{y}^2 dF = \frac{b_k t_k^3}{12}$$

$$F_{\bar{z}\bar{z}}^k = \int \bar{z}^2 dF = \frac{t_k b_k^3}{12}$$

mit

$$\bar{y}' = \bar{y} \cos \alpha_k + \bar{z} \sin \alpha_k$$

$$\bar{z}' = -\bar{y} \sin \alpha_k + \bar{z} \cos \alpha_k$$

und

$$y' = \bar{y}' + y'_m$$

$$z' = \bar{z}' + z'_m$$

folgt

$$y' = \bar{y} \cos \alpha_k + \bar{z} \sin \alpha_k + y'_m$$

$$z' = -\bar{y} \sin \alpha_k + \bar{z} \cos \alpha_k + z'_m$$

$$F_{y'y'} = \sum_k \int y'^2 dF = \sum_k \int (\bar{y}^2 \cos^2 \alpha_k + \bar{z}^2 \sin^2 \alpha_k + y_m'^2 + 2 \bar{y} \bar{z} \cos \alpha_k \sin \alpha_k + 2 \bar{y} \cos \alpha_k y'_m + 2 \bar{z} \sin \alpha_k z'_m) dF$$

$$F_{y'y'} = \sum_k (\cos^2 \alpha_k \int \bar{y}^2 dF + \sin^2 \alpha_k \int \bar{z}^2 dF + y_m'^2 b_k + t_k)$$

$$F_{y'y'} = \sum_k (F_{\bar{y}\bar{y}}^k \cos^2 \alpha_k + F_{\bar{z}\bar{z}}^k \sin^2 \alpha_k + y_m'^2 F^k)$$

$$F_{z'z'} = \sum_k (F_{\bar{y}\bar{y}}^k \sin^2 \alpha_k + F_{\bar{z}\bar{z}}^k \cos^2 \alpha_k + z_m'^2 F^k)$$

$$F_{y'z'} = \sum_k (-F_{\bar{y}\bar{y}}^k + F_{\bar{z}\bar{z}}^k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k + y'_m z'_m F^k$$

$$F_{zz} = \frac{F_{z'z'} + F_{y'y'}}{2} + \sqrt{\frac{(F_{z'z'} - F_{y'y'})^2}{4} + F_{y'z'}^2} = \int z^2 dF$$

$$F_{yy} = \frac{F_{z'z'} + F_{y'y'}}{2} - \sqrt{\frac{(F_{z'z'} - F_{y'y'})^2}{4} + F_{y'z'}^2} = \int y^2 dF$$

$$F_{yz} = 0$$

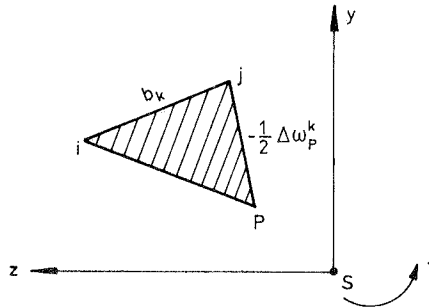
$$\varphi = \arctan \frac{F_{zz} - F_{z'z'}}{F_{y'z'}}$$

4. Koordinaten  $x, y$ , bezogen auf den Schwerpunkt und die Hauptträgheitsachsen

$$y = y' \cos \varphi + z' \sin \varphi$$

$$z = -y' \sin \varphi + z' \cos \varphi$$

5. Schubmittelpunkt, normierte Wölbkoordinaten, Torsionsgrößen



- a) Wölbinkremente der Segmente und Wölbkoordinaten der Segmentenden, bezogen auf den Schwerpunkt

Allgemein gilt:

$$-0.5 \Delta \omega_P = 0.5 \{ y_P (z_j - z_i) + y_j (z_i - z_P) + y_i (z_P - z_j) \}$$

daraus folgt für  $P \rightarrow S$

$$\Delta \omega_S^k = -y_j z_i + y_i z_j$$

und

$$\omega_{Sj} = \omega_{Si} + \Delta \omega_S^k$$

Integrationsanfangspunkt ist der Knoten  $i$  des ersten Segmentes. Die Segmente sind so zu bezeichnen, daß für alle Segmente  $k > 1$  der Knoten  $i$  gleichzeitig der Knoten  $j$  eines Segmentes  $k < 1$  ist.

- b) Schubmittelpunkt - 1. Orthogonalisierung

$$F_{y\omega} = \int y \omega dF = \sum_{k=1}^n (2y_i \omega_{Si} + \omega_{Si} y_j + \omega_{Sj} y_i + 2y_j \omega_{Sj}) \frac{t_k b_k}{6}$$

$$F_{z\omega} = \int z \omega dF = \sum_{k=1}^n (2z_i \omega_{Si} + \omega_{Si} z_j + \omega_{Sj} z_i + 2z_j \omega_{Sj}) \frac{t_k b_k}{6}$$

$$y_M = \frac{F_{z\omega}}{F_{zz}} \quad ; \quad z = - \frac{F_{y\omega}}{F_{yy}} \quad ;$$

- c) Wölbinkremente der Segmente und Wölbkoordinaten der Segmentenden, bezogen auf den Schubmittelpunkt

$$\Delta\omega_M^k = y_M(z_i - z_j) + y_j(z_M - z_i) + y_i(z_j - z_M)$$

$$\omega_{Mj} = \omega_{Mi} + \Delta\omega_M^k$$

- d) 2. Orthogonalisierung

$$F_\omega = \sum_{k=1}^n 0.5 b_k t_k (\omega_{Mi} + \omega_{Mj})$$

$$\omega_i = -\omega_{Mi} + \frac{F_\omega}{F}$$

- e) Torsionskenngrößen

$$F_{\omega\omega} = \int \omega^2 dF = \sum_k \frac{1}{3} b_k t_k (\omega_i^2 + \omega_j^2 + \omega_j \omega_i)$$

$$J_T = F_t = \sum_k \frac{1}{3} b_k t_k^3$$

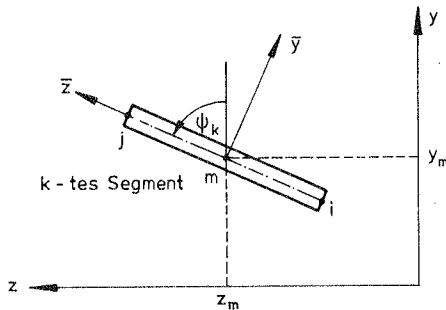
St. Venantsches  
Torsionsträgheitsmoment

$$W_{T,pl} = \sum_k \frac{1}{4} b_k t_k^2$$

≈

Volumen des  
Nadaischen Sandhügels

6. "Höhere" Querschnittswerte



$$y = \bar{y} \sin\psi + \bar{z} \cos\psi + y_m$$

$$z = -\bar{y} \cos\psi + \bar{z} \sin\psi + z_m$$

$$F_{yyy} = \int y^3 dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{4} y_m (b_k^2 \cos^2 \psi_k + t_k^2 \sin^2 \psi_k + 4 y_m^2)$$

$$F_{zzz} = \int z^3 dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{4} z_m (b_k^2 \sin^2 \psi_k + t_k^2 \cos^2 \psi_k + 4 z_m^2)$$

$$F_{\omega\omega\omega} = \int \omega^3 dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{4} (\omega_i + \omega_j) (\omega_i^2 + \omega_j^2)$$

$$F_{yyz} = \int y^2 z dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{12} [2 y_m \sin \psi_k \cos \psi_k (b_k^2 - t_k^2) + z_m (b_k^2 \cos^2 \psi_k + t_k^2 \sin^2 \psi_k) + 12 y_m^2 z_m]$$

$$F_{zzy} = \int z^2 y dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{12} [2 z_m \sin \psi_k \cos \psi_k (b_k^2 - t_k^2) + y_m (b_k^2 \sin^2 \psi_k + t_k^2 \cos^2 \psi_k) + 12 z_m^2 y_m]$$

$$F_{yy\omega} = \int y^2 \omega dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{24} (\omega_i + \omega_j) [b_k^2 \cos^2 \psi_k + t_k^2 \sin^2 \psi_k + 4 y_m b_k \cos \psi_k \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_j + \omega_i} + 12 y_m^2]$$

$$F_{z\omega\omega} = \int z^2 \omega dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{24} (\omega_i + \omega_j) [b_k^2 \sin^2 \psi_k + t_k^2 \cos^2 \psi_k + 4 z_m b_k \sin \psi_k \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_j + \omega_i} + 12 z_m^2]$$

$$F_{\omega\omega y} = \int \omega^2 y dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{12} [b_k^2 \cos^2 \psi_k (\omega_j^2 - \omega_i^2) + 4 y_m (\omega_i^2 + \omega_i \omega_j + \omega_j^2)]$$

$$F_{\omega\omega z} = \int \omega^2 z dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{12} [b_k^2 \sin^2 \psi_k (\omega_j^2 - \omega_i^2) + 4 z_m (\omega_i^2 + \omega_i \omega_j + \omega_j^2)]$$

$$F_{yz\omega} = \int yz \omega dF = \sum_k \frac{t_k b_k}{24} (\omega_i + \omega_j) [\sin \psi_k \cos \psi_k (b_k^2 - t_k^2) + 12 y_m z_m] + \frac{t_k b_k^2}{12} (\omega_j - \omega_i) (y_m \sin \psi_k + z_m \cos \psi_k)$$

## 7. Wagnerkoeffizienten

$$W_x = \frac{F_{yy} + F_{zz}}{F} + (y_M^2 + z_M^2)$$

$$W_y = \frac{F_{zzz} + F_{yyz}}{F_{zz}} - 2 z_m$$

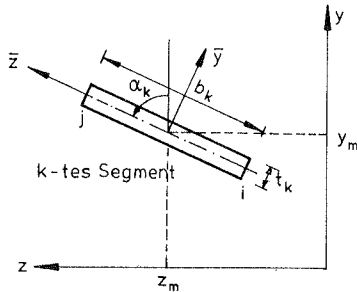
$$W_z = \frac{F_{yyy} + F_{zzy}}{F_{yy}} - 2 y_m$$

$$W_\omega = \frac{F_{yy\omega} + F_{z\omega\omega}}{F_{\omega\omega}}$$



Anhang A 2

Elastisch - plastische Querschnittsgrößen  $\tilde{F}_{ab}$



Anzahl der Segmente : n

Anzahl der Stützstellen  
des Segments k :  $p_k + 1$

$$\tilde{F} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_y = \sum_{k=1}^n \left( t_k \cos \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z} d\bar{z} + y_m t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_z = \sum_{k=1}^n \left( t_k \sin \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z} d\bar{z} + z_m t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_w = \sum_{k=1}^n \left( t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t w d\bar{z} \right)$$

$w = w(\bar{z})$  d.h. Querverwölbung wird vernachlässigt

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{yy} = & \sum_{k=1}^n \left( t_k \cos^2 \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z}^2 dz + \frac{3}{12} \sin^2 \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t dz + \right. \\ & \left. + 2 y_m t_k \cos \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z} d\bar{z} + y_m^2 t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{zz} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \sin^2 \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z}^2 d\bar{z} + \frac{t_k^3}{12} \cos^2 \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} + 2 z_m t_k \sin \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z} d\bar{z} + z_m^2 t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_{yz} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z}^2 d\bar{z} - \frac{t_k^3}{12} \sin \alpha_k \cos \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} + t_k (z_m \cos \alpha_k + y_m \sin \alpha_k) \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \bar{z} d\bar{z} + y_m z_m t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_{yw} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \cos \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \omega \bar{z} d\bar{z} + t_k y_m \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \omega d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_{zw} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \sin \alpha_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \omega \bar{z} d\bar{z} + t_k z_m \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \omega d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{F}_{\omega\omega} = \sum_{k=1}^n \left( t_k \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t \omega^2 d\bar{z} \right)$$

$$\tilde{J}_T = \frac{G}{E} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3} t_k^3 \int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t d\bar{z} \right)$$

Die Integrale  $\int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t a b d\bar{z}$  werden numerisch unter Verwendung der Simpson - Regel berechnet.

Es gilt :

$$\int_{-\frac{b_k}{2}}^{\frac{b_k}{2}} E_t a b d\bar{z} = \frac{1}{3} \frac{b_k}{p_k} ( E_{t,0} a_0 b_0 + 4 E_{t,1} a_1 b_1 + 2 E_{t,2} a_2 b_2 +$$

$$+ 2 E_{t,p_k-2} a_{p_k-2} b_{p_k-2} + 4 E_{t,p_k-1} a_{p_k-1} b_{p_k-1} + E_{t,p_k} a_{p_k} b_{p_k} )$$

Anhang A3

Integrale der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{n}_1 = ((1-\zeta)\zeta)^T$$

$$\mathbf{n}_3 = ((1-3\zeta^2+3\zeta^3)(\zeta-2\zeta^2+\zeta^3)(3\zeta^2-2\zeta^3)(\zeta^3-\zeta^2))^T$$

$$\mathbf{n}'_1 = [-1 \ 1]^T$$

$$\mathbf{n}'_3 = ((-6\zeta+9\zeta^2)(-4\zeta+3\zeta^2)(6\zeta-6\zeta^2)(3\zeta^2-2\zeta))^T$$

$$\mathbf{n}''_3 = ((-6+18\zeta)(-4+6\zeta)(6-12\zeta)(6\zeta-2))^T$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}'_1 \mathbf{n}'_1{}^T d\zeta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}''_3 \mathbf{n}''_3{}^T d\zeta = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}'_3 \mathbf{n}'_3{}^T d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 (1-\zeta) \mathbf{n}'_3 \mathbf{n}'_3{}^T d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{60} \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_3' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{60} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{60} & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}_3' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 (1-\zeta) \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_1' \mathbf{n}_3'^T d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta^2 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3^T d\zeta = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{15} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{15} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \mathbf{n}_3'' \mathbf{n}_3^T d\zeta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -0,5 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_3'' \mathbf{n}_3^T d\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{30} & \frac{4}{5} & \frac{13}{30} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta^2 \mathbf{n}_3'' \mathbf{n}_3^T d\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \zeta \mathbf{n}_3''' \mathbf{n}_3^T d\zeta = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \\ 4 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Anhang A 4

Koeffizientendarstellung der Hermite - Polynome

$$u_S = \mathbf{n}_1^T u_S = (1 - \zeta) u_S(0) + \zeta u_S(1L)$$

$$u_S = u_S(0) + \zeta [u_S(1L) - u_S(0)] = c_{u0} + \zeta c_{u1}$$

$$u_S' = 1/1L c_{u1}$$

$$w_M = \mathbf{n}_3^T w_M = (1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3) w_M(0) + (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) {}^1L \vartheta_{yM}(0) + \\ + (3\zeta^2 - 2\zeta^3) w_M(1L) + (\zeta^3 - \zeta^2) {}^1L \vartheta_{yM}(1L)$$

$$w_M = \zeta^3 [2w_M(0) + {}^1L \vartheta_{yM}(0) - 2w_M(1L) + {}^1L \vartheta_{yM}(1L)] + \\ + \zeta^2 [-3w_M(0) - 2 {}^1L \vartheta_{yM}(0) + 3w_M(1L) - {}^1L \vartheta_{yM}(1L)] + \\ + \zeta [{}^1L \vartheta_{yM}(0)] + \\ + 1 [w_M(0)] = \zeta^3 c_{w3} + \zeta^2 c_{w2} + \zeta c_{w1} + c_{w0}$$

$$w_M' = 1/1L (3\zeta^2 c_{w3} + 2\zeta c_{w2} + c_{w1})$$

$$w_M'' = 1/1L^2 (6\zeta c_{w3} + 2c_{w2})$$

$$v_M = \zeta^3 [2v_M(0) + {}^1L \vartheta_{zM}(0) - 2v_M(1L) + {}^1L \vartheta_{zM}(1L)] + \\ + \zeta^2 [-3v_M(0) - 2 {}^1L \vartheta_{zM}(0) + 3v_M(1L) - {}^1L \vartheta_{zM}(1L)] + \\ + \zeta [{}^1L \vartheta_{zM}(0)] + \\ + 1 [v_M(0)] = \zeta^3 c_{v3} + \zeta^2 c_{v2} + \zeta c_{v1} + c_{v0}$$

$$v_M' = 1/1L (3\zeta^2 c_{v3} + 2\zeta c_{v2} + c_{v1})$$

$$v_M'' = 1/1L^2 (6\zeta c_{v3} + 2c_{v2})$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{xM} &= \zeta^3 [ 2\vartheta'_{xM}(0) + {}^1L\vartheta'_{xM}(0) - 2\vartheta_{xM}({}^1L) + {}^1L\vartheta'_{xM}({}^1L) ] + \\
&+ \zeta^2 [ -3\vartheta_{xM}(0) - 2{}^1L\vartheta'_{xM}(0) + 3\vartheta_{xM}({}^1L) - {}^1L\vartheta'_{xM}({}^1L) ] + \\
&+ \zeta [ {}^1L\vartheta'_{xM}(0) ] + \\
&+ 1 [ \vartheta_{xM}(0) ] = \zeta^3 c_{\vartheta 3} + \zeta^2 c_{\vartheta 2} + \zeta c_{\vartheta 1} + c_{\vartheta 0}
\end{aligned}$$

$$\vartheta'_{xM} = 1/{}^1L (3\zeta^2 c_{\vartheta 3} + 2\zeta c_{\vartheta 2} + c_{\vartheta 1})$$

$$\vartheta''_{xM} = 1/{}^1L^2 (6\zeta c_{\vartheta 3} + 2c_{\vartheta 2})$$

## Anhang A5

Sekantensteifigkeiten für Torsion

$${}^1k_{41}^S = 0$$

$${}^1k_{42}^S = 1/L^5 F_{yyw} (24 c_{v2} + 36 c_{v3})$$

$${}^1k_{43}^S = 1/L^5 [F_{zzw} (24 c_{w2} + 36 c_{w3}) + 2 F_{yzw} (24 c_{v2} + 36 c_{v3})]$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{44}^S &= 1/L^5 F_{www} (24 c_{\vartheta2} + 36 c_{\vartheta3}) + 2/L^5 F_{yww} (24 c_{v2} + 36 c_{v3}) + \\ &+ 2/L^5 F_{zww} (24 c_{w2} + 36 c_{w3}) - 24/L^4 F_{ww} c_{u1} - 1/L^3 F_{zzw} (6/5 c_{\vartheta2} + 9/5 c_{\vartheta3}) - \\ &- 1/L^3 F_{yyw} (6/5 c_{\vartheta2} + 9/5 c_{\vartheta3}) \end{aligned}$$

$${}^1k_{45}^S = -1/L^4 F_{zzw} (12 c_{w2} + 12 c_{w3}) - 2/L^4 F_{yzw} (12 c_{v2} + 12 c_{v3})$$

$${}^1k_{46}^S = 1/L^4 F_{yyw} (12 c_{v2} + 12 c_{v3})$$

$${}^1k_{47}^S = 0$$

$${}^1k_{48}^S = -{}^1k_{42}^S$$

$${}^1k_{49}^S = -{}^1k_{43}^S$$

$${}^1k_{410}^S = -{}^1k_{44}^S$$

$${}^1k_{411}^S = -1/L^4 F_{zzw} (12 c_{w2} + 24 c_{w3}) - 2/L^4 (12 c_{v2} + 24 c_{v3}) F_{yzw}$$

$${}^1k_{412}^S = 1/L^4 F_{yyw} (12 c_{v2} + 24 c_{v3})$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{413}^S &= 1/L^4 F_{www} (12 c_{\vartheta2} + 12 c_{\vartheta3}) + 2/L^4 F_{yww} (12 c_{v2} + 12 c_{v3}) + \\ &+ 2/L^4 F_{zww} (12 c_{w2} + 12 c_{w3}) - 12/L^3 F_{ww} c_{u1} - 1/L^2 F_{zzw} (c_{\vartheta1} + 3/5 c_{\vartheta2} + \\ &+ 3/5 c_{\vartheta3}) - 1/L^2 F_{yyw} (c_{\vartheta1} + 3/5 c_{\vartheta2} + 3/5 c_{\vartheta3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{414}^S &= 1/L^4 F_{www} (12 c_{\vartheta2} + 24 c_{\vartheta3}) + 2/L^4 F_{yww} (12 c_{v2} + 24 c_{v3}) + \\ &+ 2/L^4 F_{zww} (12 c_{w2} + 24 c_{w3}) - 12/L^3 F_{ww} c_{u1} + 1/L^2 F_{zzw} (c_{\vartheta1} + \\ &+ 7/5 c_{\vartheta2} + 9/5 c_{\vartheta3}) + 1/L^2 F_{yyw} (c_{\vartheta1} + 7/5 c_{\vartheta2} + 9/5 c_{\vartheta3}) \end{aligned}$$



$${}^1k_{10}^S = {}^1k_4^S$$

$${}^1k_{131}^S = 0$$

$${}^1k_{132}^S = {}^1k_{46}^S$$

$${}^1k_{133}^S = -{}^1k_{45}^S$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{134}^S &= 1/L^4 F_{\omega\omega\omega} (12c_{\phi 2} + 12c_{\phi 3}) + 2/L^4 F_{y\omega\omega} (12c_{v 2} + 12c_{v 3}) + \\ &+ 2/L^4 F_{z\omega\omega} (12c_{w 2} + 12c_{w 3}) - 12/L^3 F_{\omega\omega} c_{u 1} + 1/L^2 F_{zz\omega} (c_{\phi 1} + \\ &+ 2/5c_{\phi 2}) + 1/L^2 (c_{\phi 1} + 2/5c_{\phi 2}) F_{yy\omega} \end{aligned}$$

$${}^1k_{135}^S = -1/L^3 F_{zz\omega} (8c_{w 2} + 6c_{w 3}) - 2/L^3 F_{yz\omega} (8c_{v 2} + 6c_{v 3})$$

$${}^1k_{136}^S = 1/L^3 F_{yy\omega} (8c_{v 2} + 6c_{v 3})$$

$${}^1k_{137}^S = 0$$

$${}^1k_{138}^S = -{}^1k_{132}^S$$

$${}^1k_{139}^S = -{}^1k_{133}^S$$

$${}^1k_{1310}^S = -{}^1k_{134}^S$$

$${}^1k_{1311}^S = -1/L^3 F_{zz\omega} (4c_{w 2} + 6c_{w 3}) - 2/L^3 F_{yz\omega} (4c_{v 2} + 6c_{v 3})$$

$${}^1k_{1312}^S = 1/L^3 F_{yy\omega} (4c_{v 2} + 6c_{v 3})$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{1313}^S &= 1/L^3 F_{\omega\omega\omega} (8c_{\phi 2} + 6c_{\phi 3}) + 2/L^3 F_{y\omega\omega} (8c_{v 2} + 6c_{v 3}) + \\ &+ 2/L^3 F_{z\omega\omega} (8c_{w 2} + 6c_{w 3}) - 8/L^2 F_{\omega\omega} c_{u 1} - \\ &- 1/L F_{zz\omega} (1/2c_{\phi 1} + 2/15c_{\phi 2} + 1/10c_{\phi 3}) - 1/L F_{yy\omega} (1/2c_{\phi 1} + \\ &+ 2/15c_{\phi 2} + 1/10c_{\phi 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{1314}^S &= 1/L^3 F_{\omega\omega\omega} (4c_{\phi 2} + 6c_{\phi 3}) + 2/L^3 F_{y\omega\omega} (4c_{v 2} + 6c_{v 3}) + \\ &+ 2/L^3 F_{z\omega\omega} (4c_{w 3} + 6c_{w 3}) - 4/L^2 F_{\omega\omega} c_{u 1} + \\ &+ 1/L F_{zz\omega} (1/2c_{\phi 1} + 8/15c_{\phi 2} + 3/5c_{\phi 3}) + 1/L F_{yy\omega} (1/2c_{\phi 1} + \\ &+ 8/15c_{\phi 2} + 3/5c_{\phi 3}) \end{aligned}$$

$${}^1k_{14\ 1}^S = 0$$

$${}^1k_{14\ 2}^S = {}^1k_{4\ 12}$$

$${}^1k_{14\ 3}^S = -{}^1k_{14\ 11}$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{14\ 4}^S &= 1/L^4 F_{ww} (12c_{\varphi 2} + 24c_{\varphi 3}) + 2/L^4 F_{yww} (12c_{v2} + 24c_{v3}) + \\ &+ 2/L^4 F_{zww} (12c_{w2} + 24c_{w3}) - 12/L^3 F_{ww} c_{u1} - \\ &- 1/L^2 F_{zzw} (c_{\varphi 1} + 8/5c_{\varphi 2} + 9/5c_{\varphi 3}) - 1/L^2 F_{yyw} (c_{\varphi 1} + 8/5c_{\varphi 2} + 9/5c_{\varphi 3}) \end{aligned}$$

$${}^1k_{14\ 5}^S = {}^1k_{13\ 11}^S$$

$${}^1k_{14\ 6}^S = {}^1k_{13\ 12}^S$$

$${}^1k_{14\ 7}^S = 0$$

$${}^1k_{14\ 8}^S = -{}^1k_{14\ 2}^S$$

$${}^1k_{14\ 9}^S = -{}^1k_{14\ 3}^S$$

$${}^1k_{14\ 10}^S = -{}^1k_{14\ 4}^S$$

$${}^1k_{14\ 11}^S = -1/L^3 F_{zzw} (8c_{w2} + 18c_{w3}) - 2/L^3 F_{yzw} (8c_{v2} + 18c_{v3})$$

$${}^1k_{14\ 12}^S = 1/L^3 F_{yyw} (8c_{v2} + 18c_{v3})$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{14\ 13}^S &= 1/L^3 F_{ww} (4c_{\varphi 2} + 6c_{\varphi 3}) + 2/L^3 F_{yww} (4c_{v2} + 6c_{v3}) + \\ &+ 2/L^3 F_{zww} (4c_{w2} + 6c_{w3}) - 4/L^2 F_{ww} c_{u1} - \\ &- 1/L F_{zzw} (1/2c_{\varphi 1} + 7/15c_{\varphi 2} + 1/2c_{\varphi 3}) - 1/L F_{yyw} (1/2c_{\varphi 1} + \\ &+ 7/15c_{\varphi 2} + 1/2c_{\varphi 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1k_{14\ 14}^S &= 1/L^3 F_{ww} (8c_{\varphi 2} + 18c_{\varphi 3}) + 2/L^3 F_{yww} (8c_{v2} + 18c_{v3}) + \\ &+ 2/L^3 F_{zww} (8c_{w2} + 18c_{w3}) - 8/L^2 F_{ww} c_{u1} + \\ &+ 1/L F_{zzw} (1/2c_{\varphi 1} + 13/21c_{\varphi 2} + 6/5c_{\varphi 3}) + 1/L F_{yyw} (1/2c_{\varphi 1} + \\ &+ 13/25c_{\varphi 2} + 6/5c_{\varphi 3}) \end{aligned}$$

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74 - 1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74 - 2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74 - 3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74 - 4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75 - 1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75 - 2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75 - 3 E. A. Castrillón O. :  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76 - 1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,  
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,  
K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76 - 2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77 - 1 B. -M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78 - 1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79 - 1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79 - 2 H. -G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79 - 3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,  
E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80 - 1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80 - 2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80 - 3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82 - 1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.

Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.