

# Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke

von

**Christof Haußer**



2  
4.4.97

Bericht Nr. 21 (1996)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1996

---

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

# **Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke**

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Christof Haußer**

geboren in Ludwigsburg

Hauptberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.–Ing. K. Schweizerhof

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 1996

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1996

# Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der effizienten Formulierung von dreieckigen Finiten Elementen für lineare, elastische Platten-, Scheiben- und Schalenträgerwerke. Ziel ist die Entwicklung möglichst einfacher Elemente mit Ansatzfunktionen niedriger Ordnung, die ohne Versteifungsprobleme eine schnell konvergierende und stabile Lösung gewährleisten.

Eine effiziente Formulierung schubweicher Plattenelemente mit einer Kinematik nach Reissner-Mindlin ist nur möglich, wenn Schubversteifungen oder „Shear Locking“ vollständig ausgeschlossen werden können. Dazu werden Verfahren, wie z.B. die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS), gemischte Funktionale, das Konzept der Kirchhoff-Modes oder erweiterte Rotationen, eingesetzt, die speziell an die Erfordernisse dreieckiger Elemente angepaßt werden. Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens dreieckiger Scheibenelemente werden die Elemente um Drillfreiheitsgrade mit Ansätzen nach Allmann oder der „Freien Formulierung“ nach Bergan erweitert. Eine weitere Verbesserung dieser Elemente ist mit der Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS) möglich. Durch Kombination der leistungsfähigsten Platten- und Scheibenelemente entstehen effiziente Facettenelemente zur Berechnung von Schalenträgerwerken.

Neben den mathematischen Voraussetzungen für eine stabile und konvergente Methode stehen in dieser Arbeit die mechanischen Aspekte der angewendeten Methoden im Vordergrund. Darüberhinaus wird die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Elementformulierungen an zahlreichen Testbeispielen überprüft.

# Abstract

This thesis deals with the efficient formulation of triangular plate, membrane and shell finite elements in the linear elastic range. The aim of this study is the development of low order elements that achieve high convergence rates and a stable solution without any locking defects.

For an efficient formulation of shear –deformable plate elements with Reissner –Mindlin kinematics, the problem of shear locking needs to be completely resolved. In order to avoid locking, different methods, like the assumed natural strain method (ANS), mixed functionals, the Kirchhoff–mode concept or enhanced rotations are adapted to the special needs of triangular geometry. To improve the convergence of triangular membrane elements, drilling rotations are introduced using Allmann –interpolation or the Free Formulation by Bergan. These elements can be further improved with the enhanced assumed strain method (EAS). By combining the most powerful plate and membrane elements, efficient facet elements for the analysis of shell structures can be constructed.

Besides the mathematical conditions for stable and convergent finite element formulations, an understanding of the mechanical aspects of the applied methods is of primary interest. The performance of the different element formulations is tested by numerous numerical examples.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner fünfjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in den Jahren 1990 – 95.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. – Ing. Ekkehard Ramm für die tatkräftige Förderung dieser Arbeit. Sein reges wissenschaftliches Interesse und seine vielen Ratschläge gaben die entscheidenden Impulse für die Entstehung dieser Arbeit.

Herrn Professor Dr. – Ing. Karl Schweizerhof danke ich für das große Interesse an dieser Arbeit, für die zahlreichen, wertvollen Hinweise und für die Übernahme des Mitberichts.

Ein herzliches Dankeschön gilt den Mitarbeitern des Instituts für Baustatik für die unzähligen Diskussionen und die produktive Zusammenarbeit. Der rege Gedankenaustausch und die persönliche Atmosphäre am Institut führten zu einer idealen Arbeitsumgebung, die einen wichtigen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit leistete.

Meinen Eltern danke ich besonders für die vorbehaltlose Unterstützung, mit der sie diese Arbeit begleitet haben.

Christof Haußner

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe der Funktionalanalysis</b>	<b>15</b>
2.1	Einleitung	15
2.2	Funktionenräume	15
2.3	Funktionale	18
<b>3</b>	<b>Energiemethoden der Elastostatik</b>	<b>20</b>
3.1	Das lineare Elastizitätsproblem	20
3.2	Prinzip des Minimums der potentiellen Energie	21
3.3	Gemischte Funktionale	23
3.4	Lösbarkeit und Stabilität	25
<b>4</b>	<b>Approximation mit Finiten Elementen</b>	<b>29</b>
4.1	Einleitung	29
4.2	Diskretisierte Funktionale	29
4.3	Lösbarkeit diskretisierter Funktionale	30
4.4	Gleichungen für Plattenelemente	32
4.5	Gleichungen für Scheibenelemente	35
4.6	Dreieckige Finite Elemente	36
4.7	Vergleich von drei- und viereckigen Finiten Elementen	38
4.8	Versteifungseffekte	41
4.8.1	Schubversteifung	42
4.8.2	Volumetrische Versteifung	43
4.8.3	Membranversteifung	44
<b>5</b>	<b>Methoden der Elementverbesserung</b>	<b>46</b>
5.1	Reduzierte Integration	46
5.2	Hybride Spannungsmethode	47
5.3	Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS)	47
5.4	Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS)	49
5.5	„Freie Formulierung“	51
5.6	Funktionale mit verbesserter Spannungsapproximation	55
5.6.1	Das erweiterte Funktional von Hu	56

5.6.2	Raviart–Thomas–Räume .....	57
5.6.3	Elemente nach Raviart–Thomas .....	58
5.7	Drillfreiheitsgrade .....	59
5.8	Sonstige Verfahren .....	61
5.8.1	Erweiterte Rotationen .....	61
5.8.2	Erweiterte Verschiebungen .....	62
5.8.3	Reduktion von Variablen .....	63
5.8.4	Variationelle Schubbedingung .....	63
5.8.5	Gleichgewichtsbedingungen .....	64
<b>6</b>	<b>Dreieckige Plattenelemente .....</b>	<b>65</b>
6.1	Verschiebungselemente .....	65
6.2	Reduziert integrierte Elemente .....	68
6.3	EAS–Methode für dreiknotige Elemente .....	72
6.4	ANS–Methode für dreiknotige Elemente .....	75
6.5	Plattenelemente mit erweiterten Verschiebungen .....	77
6.6	Das XU–Element .....	79
6.7	Das DST–Element .....	81
6.8	Das TLQL–Element .....	84
6.9	Das MITC7–Element .....	88
6.10	Sonstige Elemente .....	92
6.11	Numerische Ergebnisse .....	94
6.11.1	Patchtest für reine Biegung .....	95
6.11.2	Eigenwertanalyse .....	95
6.11.3	Verhalten bei dünnen Platten .....	96
6.11.4	Verhalten bei unregelmäßiger Elementgeometrie .....	97
6.11.5	Konvergenz einer eingespannten Kreisplatte unter Gleichlast ..	98
6.11.6	Konvergenz einer eingespannten Quadratplatte unter Gleichlast	103
6.11.7	Adaptive Berechnung einer Hochbauplatte .....	105
6.12	Zusammenfassung .....	110
<b>7</b>	<b>Dreieckige Scheibenelemente .....</b>	<b>111</b>
7.1	Verschiebungselemente .....	111
7.2	Das Allmann–Element .....	114
7.3	Das FF–Element .....	116



7.3.1	Elementformulierung .....	116
7.3.2	Einfluß der Skalierungsparameter $\alpha$ und $\beta$ .....	120
7.3.3	Erweiterung des FF-Elementes mit der EAS-Methode .....	121
7.4	Numerische Ergebnisse .....	123
7.4.1	Patchtest für konstante Verzerrungen .....	123
7.4.2	Eigenwertanalyse .....	123
7.4.3	Kragarm mit reiner Biegung .....	124
7.4.4	Inkompressibler Kragarm mit reiner Biegung .....	126
7.4.5	Kragarm nach Cook .....	127
7.4.6	Adaptive Berechnung eines Zahnrades .....	130
7.5	Zusammenfassung .....	133
<b>8</b>	<b>Dreieckige Schalenelemente .....</b>	<b>134</b>
8.1	Einleitung .....	134
8.2	Ebene Facettenelemente .....	135
8.3	Kompatible Rotationen .....	136
8.4	Numerische Ergebnisse .....	137
8.4.1	Schale nach Scordelis-Lo .....	138
8.4.2	Zylinder mit Endscheiben .....	142
8.4.3	Halbkugel mit Loch .....	143
<b>9</b>	<b>Schlußfolgerungen und Ausblick .....</b>	<b>148</b>
<b>10</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>151</b>

# 1 Einleitung

Die Methode der Finiten Elemente (FEM) ist heute eines der wichtigsten Verfahren zur approximativen Lösung von Problemen der Strukturmechanik. Neben dem klassischen Anwendungsgebiet der linearen Elastizitätstheorie wird die FEM heute auch bei geometrisch und materiell nichtlinearen Problemen, in der Dynamik, in der Struktur- und Topologieoptimierung und vielen weiteren Problemen erfolgreich eingesetzt. Grundlage aller Anwendungen bildet das Finite Element, dessen Eigenschaften entscheidend für die Güte und den Aufwand einer Berechnung sind. Auch nach mehr als 30 Jahren intensiver Forschungstätigkeit ist das Gebiet der Entwicklung leistungsfähigerer Finiter Elemente keineswegs abgeschlossen, wie Fortschritte der jüngsten Zeit beweisen.

Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung von effizienten, dreieckigen Finiten Elementen für die linear elastische Berechnung von Platten-, Scheiben- und Schalentragerwerken. Für eine effiziente Lösung, bei der mit möglichst geringem Aufwand die bestmöglichen Ergebnisse erzielt werden sollen, müssen die Elemente folgende Eigenschaften aufweisen:

- schnelle Konvergenz
- einfache Elementformulierung
- keine Versteifungseffekte
- stabile Lösung
- Unempfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen

Lange Zeit lag der Schwerpunkt der Forschungstätigkeit auf der Entwicklung aufwendiger Elemente mit Ansatzfunktionen von hohem Polynomgrad. Beispiele dieser Zeit, die von Felippa (1989a) als „barocke FE-Periode“ bezeichnet wird, sind Finite Elemente nach einer Schalentheorie, die nach Harbord (1977) für eine konsistente Formulierung Ansatzfunktionen bis zu quintischer Ordnung benötigen. Auch heute wird an der Entwicklung von Elementen mit hoher Ansatzordnung gearbeitet, so z. B. im Rahmen der p-Version der Finite Elemente Methode nach Babuska (1981), die hierarchische Ansatzfunktionen bis zu Polynomgraden von acht und höher verwendet. Komplexe Anwendungen wie nichtlineare Analysen oder Dynamik stellen heute jedoch den ökonomischen Aspekt einer Elementformulierung stärker in den Vordergrund:

*„... the need for inexpensive elements, a need that has also been felt in our own experimentation with nonlinear dynamic problems, attests to the attention this [triangular] element type has received in recent years ...“*

Argyris (1994)

Eine Übersicht der umfangreichen Literatur wird für Plattenelemente von Hrabok (1984) und für Schalenelemente von Gilewski (1991) angegeben. Bei der Entwicklung effizienter Finiter Elemente mit niedriger Ansatzordnung steht bisher das vierknotige Element im Mittelpunkt des Interesses, dessen Lösungsverhalten durch die Anwendung von drei Methoden wesentlich verbessert werden konnte. Die reine Verschiebungsformulierung des vierknotigen Elementes ist aufgrund von Versteifigungseffekten für praktische Probleme unbrauchbar. Mit der Methode der angenommenen Verzerrungen ANS („Assumed Natural Strain Method“) von Hughes (1981a) und Dvorkin (1984) ist dieses Element bei Plattenproblemen effizient einsetzbar. Mit der hybriden Spannungsmethode nach Pian (1984) und der Methode der erweiterten Verzerrungen EAS („Enhanced Assumed Strain Method“) nach Simo (1990) wird das Konvergenzverhalten des Elementes auch bei Scheibenproblemen stark verbessert. Nach Andelfinger (1991) kann durch Kombination dieser Methoden ein sehr effizientes Schalenelement gebildet werden.

Eine Übertragung dieser neuen Verfahren auf dreieckige Finite Elemente ist nicht ohne weiteres möglich. Weit fortgeschritten ist die Entwicklung dreieckiger Plattenelemente nach der Kirchhoffschen Theorie dünner Platten. Das HSM–Element von Batoz (1980) verwendet ein hybrides Spannungsmodell nach dem Funktional von Hellinger–Reissner. Das Element stellt eine Weiterentwicklung des A9–Elementes von Razzaque (1973) dar und wird von Wu (1982) und Fricker (1985) durch Schubkorrekturfaktoren bzw. „Bubble“–Modes weiter modifiziert. Hansen (1979) verwendet orthogonale Modes zur Entwicklung des HBS–Elementes. Dieses Element bildet die Basis für das erste Plattenelement nach der „Freien Formulierung“ von Bergan (1984), die später auch bei Scheiben– und schubweichen Plattenelementen eingesetzt wird. Die jüngste Entwicklung dieser Elementfamilie ist das ANDES–Element von Militello (1991), welches die „Freie Formulierung“ mit der ANS–Methode kombiniert. Eines der erfolgreichsten dreiknotigen Elemente für schubstarre Platten ist nach wie vor das „Discrete Kirchhoff Triangle“ oder DKT–Element von Batoz (1980), das in seiner Leistungsfähigkeit und Einfachheit bis heute kaum übertroffen wird. Es wurden mehrere Versuche zur Verbesserung des DKT–Elementes durchgeführt, so von Jeyachandrabose (1986), der das DKT–Element um „Least Squares“–Techniken erweitert, oder von Y. Long (1988) und Z. Long (1993), die eine ganze Reihe verbesserter DKT–Elemente vorstellen.

Während für schubstarre Platten relativ früh erfolgreiche Elementkonzepte entwickelt werden konnten, bereitet die Formulierung effizienter Dreieckselemente mit einer Kinetik nach Reissner–Mindlin große Schwierigkeiten. Größtes Problem ist dabei die Vermeidung von Schubversteifungen oder „Shear Locking“. Ein erster Versuch zur Anwendung der ANS–Methode auf Dreiecke wird von Hughes (1981b) durchgeführt. Belytschko (1984) wendet eine reduzierte Integration mit anschließender Stabilisierung des dreiknotigen Plattenelementes an. Tessler (1985) versucht die Schubversteifungen

mit Hilfe des Konzeptes der Kirchhoff–Modes zu überwinden. All diese Elemente können jedoch „Shear Locking“ nicht vollständig unterbinden. Dies wurde erstmals von Xu (1986) mit einem Element erreicht, welches das Konzept der Kirchhoff–Modes mit einer variationellen Schubbedingung sowie erweiterten Rotationen kombiniert. Das XU–Element wird von Auricchio (1991), Xu (1992) und Taylor (1993) ausführlich beschrieben und analysiert.

Ein vollkommen anderer Weg wird mit den DST–Elementen von Batoz (1989), Batoz (1992) und Katili (1993) eingeschlagen, die eine Erweiterung des erfolgreichen DKT–Elementes auf schubweiche Platten vornehmen. Diese Elemente verwenden verschiedene Methoden wie „Freie Formulierung“, Gleichgewichts– und Schubbedingungen. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der Elemente besteht in einer Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade je Element. Dieser Weg wird von Zienkiewicz (1988), Bathe (1989), Papadopoulos (1990) und Ferahi (1990) eingeschlagen. Ein numerischer Vergleich verschiedener Elementformulierungen wird von Hauptmann (1995) durchgeführt.

Dreieckige Scheibenelemente waren die ersten Elemente, mit denen Berechnungen nach der Finite Elemente Methode durchgeführt worden sind. Die Elemente sind durch vollständige Ansatzfunktionen gekennzeichnet und bieten wenig Raum für Verbesserungen. Bei der Entwicklung effizienter Elemente niedriger Ansatzordnung kommt deswegen der Erweiterung dieser Elemente durch sogenannte Drillrotationen senkrecht zur Elementebene eine große Bedeutung zu, wie sie von Allmann (1984) und Bergan (1985) eingeführt wurden. Die einzige Alternative hierzu bilden einige Elementformulierungen, die in der mathematischen Literatur große Beachtung finden. Stellvertretend seien das PEERS–Element von Arnold (1984a) sowie das BDM–Element von Brezzi (1985) genannt, die beide von Rolfes (1989) ausführlich untersucht und getestet wurden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll geklärt werden, ob sich die für vierknotige Elemente entwickelten Methoden auf dreieckige Elemente übertragen lassen und ob bereits bekannte dreieckige Elemente weiter verbessert und zu einem effizienten Schalenelement kombiniert werden können.

Bei der Beurteilung von Elementformulierungen gewinnen neben der ingenieurmäßigen Vorgehensweise, die sich auf mechanische Anschauung und numerische Testrechnungen stützt, zunehmend mathematische Analysen an Bedeutung. Aus diesem Grund beginnt diese Arbeit in Kapitel 2 mit einer kurzen Einführung in die Grundbegriffe der Funktionalanalysis, die zum Verständnis von mathematischen Stabilitäts– und Konvergenzbeweisen erforderlich sind.

In Kapitel 3 werden die Energiemethoden vorgestellt, auf denen die meisten Elementformulierungen basieren. Zusätzlich werden Bedingungen eingeführt, die für eine eindeutige und stabile Lösung von den Elementen erfüllt werden müssen.

In Kapitel 4 werden Energiemethoden sowie deren Lösbarkeitsbedingungen auf das mit Finiten Elementen diskretisierte Problem übertragen. Es werden die für Platten- und Scheibenelemente erforderlichen Gleichungen angegeben sowie einige Besonderheiten der Geometrie dreieckiger Elemente im Vergleich zu viereckigen Elementen dargestellt. Am Ende des Kapitels werden die Versteifungseffekte beschrieben, die für das schlechte Konvergenzverhalten vieler Elemente verantwortlich sind.

In Kapitel 5 werden Methoden der Elementverbesserung diskutiert, die sowohl bei Platten- als auch bei Scheibenelementen eingesetzt werden können. Schwerpunkt bilden dabei die gemischten Methoden, es werden aber auch neuere Verfahren wie die „Freie Formulierung“ oder Methoden mit Spannungsansätzen aus den Raviart-Thomas-Räumen behandelt.

Diese Methoden werden in Kapitel 6 auf dreieckige Plattenelemente nach der Theorie von Reissner-Mindlin angewendet. Ausgehend vom reinen Verschiebungselement werden mehrere Versuche zur Elementverbesserung durchgeführt, wobei vor allem die Ursachen des Erfolgs oder Mißerfolgs einer Methode geklärt werden sollen. Neben dreiknotigen Plattenelementen werden auch zwei höherwertige Elemente mit 12 bzw. 20 Freiheitsgraden untersucht. Den Abschluß des Kapitels bilden numerische Testbeispiele, mit denen die Leistungsfähigkeit der Elemente geprüft wird.

In Kapitel 7 werden verbesserte Scheibenelemente vorgestellt, wobei der Schwerpunkt auf den Elementformulierungen von Allmann (1984) und Bergan (1985) liegt. Durch die Kombination des Elementes von Bergan mit der EAS-Methode wird ein neues Scheibenelement entwickelt. Es wird der Einfluß der Integrationsordnung sowie der Skalierungsparameter auf die Elemente untersucht. An numerischen Beispielen wird die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Elemente überprüft.

Die erfolgreichsten Platten- und Scheibenelemente werden in Kapitel 8 zu Schalenelementen kombiniert. Aufgrund der linearen Geometrie der dreieckigen Elemente entstehen ebene Facettenelemente, die sich durch eine sehr einfache Elementformulierung auszeichnen. Durch die Verwendung von Drillfreiheitsgraden wird ein kompatibler Ansatz der Rotationen mit sechs Freiheitsgraden je Knoten erreicht. Numerische Testbeispiele zum Vergleich der Leistungsfähigkeit der dreieckigen Schalenelemente bilden den Abschluß der Arbeit.

## 2 Grundbegriffe der Funktionalanalysis

### 2.1 Einleitung

Finite Elemente approximieren physikalische Größen wie Verschiebungen, Spannungen oder Verzerrungen durch Funktionen, die abschnittsweise innerhalb eines Elementes definiert sind. Das Verhalten eines Elementes wird wesentlich von den Eigenschaften der verwendeten Funktionen bestimmt. Die Funktionalanalysis bietet die theoretischen Grundlagen, mit denen sich diese Eigenschaften beschreiben lassen und Bedingungen für Stabilität und Konvergenz der Elemente aufgestellt werden können. Zum Verständnis dieser Zusammenhänge sind Grundkenntnisse über Funktionenräume und Funktionale erforderlich, die in diesem Kapitel zusammengefaßt werden. In den Büchern von Reddy (1986), Bronstein (1981), Hackbusch (1986), Braess (1991), Brezzi (1991a) und Johnson (1994) wird dieses Thema ausführlich behandelt.

### 2.2 Funktionenräume

Eine Menge von Elementen im mathematischen Sinn wird allgemein als Raum bezeichnet. Die Elemente eines Raumes können Zahlen, Vektoren, Tensoren, Funktionen usw. sein. Ein linearer Raum  $\mathbf{V}$  besteht aus einer Menge von Elementen  $\mathbf{v}$ , für die Addition und Produkt mit einem Skalar definiert sind. Der Raum  $\mathbf{V}$  muß bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe sein. Für die Multiplikation mit einem Skalar müssen Distributiv- und Assoziativgesetz gelten sowie für jedes  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  ein neutrales Element existieren. Beispiele für lineare Räume sind die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ .

Ein linearer Raum  $\mathbf{V}$  heißt normiert, wenn eine Abbildung  $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften existiert:

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad (2.1)$$

$$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \text{Dreiecksungleichung} \quad (2.4)$$

Beispiele von Normen  $\|\mathbf{v}\|$  für  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  sind:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \text{Betragsnorm} \quad (2.5)$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Euklidische Norm} \quad (2.6)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max |v_i| \quad \text{Maximumnorm} \quad (2.7)$$

Eine Norm ordnet den Elementen eines Raumes einen skalaren Wert zu. Damit werden die Elemente 'meßbar' und können gegen untere und obere Schranken abgeschätzt werden. Zwei Normen  $\|\cdot\|_a$  und  $\|\cdot\|_b$  sind äquivalent, falls eine Zahl  $0 < c < \infty$  existiert, für die gilt:

$$\frac{1}{c} \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c \|v\|_a \quad \forall v \in V \quad (2.8)$$

Ist ein normierter Vektorraum vollständig, so wird er als Banach–Raum bezeichnet. Die Vollständigkeit eines Raumes bedeutet, daß der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen des Raumes ebenfalls im Raum enthalten ist.

Ein Vektorraum, auf dem das Skalarprodukt  $(u, v)$  mit den folgenden Eigenschaften definiert ist, heißt innerer Produktraum:

$$\begin{aligned} (u, v) &= (v, u) \\ (\alpha \cdot u, v) &= \alpha \cdot (u, v) \\ (u + v, w) &= (u, w) + (v, w) \\ (u, u) &\geq 0 \\ (u, u) &= 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Durch das Skalarprodukt ist automatisch eine Norm definiert. Sie entspricht der Euklidischen Norm, d.h. der Länge eines Vektors:

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

Damit ist ein innerer Produktraum immer normiert. Ist er zusätzlich vollständig, so wird er als Hilbert–Raum bezeichnet.

Besteht ein Raum aus Funktionen, so können Funktionenräume definiert werden, die die Funktionen des Raumes nach Differenzierbarkeit und Integrabilität klassifizieren. Die Menge aller Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , die bis zur Ordnung  $k$  stetig differenzierbar sind, bildet den Raum  $C^k$ . Somit ist  $C^0$  die Menge aller stetigen Funktionen und  $C^\infty$  die Menge aller Funktionen, die beliebig oft stetig differenzierbar sind. Die Menge der nur stückweise stetigen Funktionen wird mit  $D$  oder  $C^{-1}$  bezeichnet. Einen weiteren Funktionenraum bildet der Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen  $H^0$ , der auch als Raum  $L_2$  bezeichnet wird. Das zugehörige innere Produkt und dessen Norm ist definiert als:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v \, d\Omega \quad \forall u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

$$\|u\|_0 = (u, u)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Die Menge aller Funktionen, die bis zur Ableitung der Ordnung  $k$  quadratintegrierbar sind, bildet den Funktionenraum  $H^k$ . Das innere Produkt und die Norm des Raumes  $H^k$  wird definiert durch:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_k = \int_{\Omega} \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}_{,i}\mathbf{v}_{,i} + \mathbf{u}_{,ij}\mathbf{v}_{,ij} + \dots + \mathbf{u}_{,ij\dots k}\mathbf{v}_{,ij\dots k} d\Omega \quad (2.13)$$

$1 \leq i, j, \dots, k$  (Summation über doppelte Indizes)

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{u}\|_k = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_k^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Dabei ist  $n$  die Dimension des Gebiets  $\Omega$ . Für den Raum  $H^1$  vereinfachen sich die Formeln:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_{\Omega} \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}_{,i}\mathbf{v}_{,i} d\Omega \quad (2.15)$$

$$\|\mathbf{u}\|_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_1^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Allgemein besteht ein Sobolev–Raum  $H^k$  aus allen Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Norm  $H^k$  endlich ist:

$$H^k(\Omega) = \{ f \in H^k \mid \|f\|_k < \infty \} \quad (2.17)$$

Sobolev–Räume erfüllen die für Hilbert–Räume geforderten Eigenschaften. Sobolev–Räume höherer Ordnung sind Teilmengen der Sobolev–Räume niedriger Ordnung:

$$H^k \in H^1 \quad k > 1 \quad (2.18)$$

$$\dots \in H^2 \in H^1 \in H^0 = L_2 \quad (2.19)$$

In Bild 2.1 sind für eine quadratische Funktion und deren Ableitungen die zugehörigen Kontinuitäts– und Sobolev–Räume angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Funktionen verwendet, die Elemente der Sobolev–Räume  $H^k$  mit  $k \geq 0$  sind.

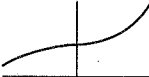
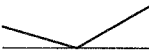
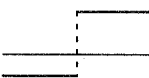

Funktion	Typ	Verlauf	Kontinuitätsraum	Sobolev–Raum
$f$	quadratisch		$C^1$	$H^2$
$f'$	linear		$C^0$	$H^1$
$f''$	Sprung–funktion		$C^{-1}$	$H^0$
$f'''$	Dirac– $\delta$		$C^{-1}$	$H^{-1}$

Bild 2.1: Zugehörige Räume einer Funktion und deren Ableitungen



## 2.3 Funktionale

Ein Operator  $A: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  bildet die Elemente des Raumes  $\mathbf{V}$  auf Elemente des Raumes  $\mathbf{W}$  ab. Ein Operator wird auch als Abbildung oder Transformation bezeichnet. Ist der Wertebereich  $\mathbf{W}$  eines Operators die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , so spricht man von einem Funktional  $F: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(\mathbf{u}) = r \quad r \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (\text{Funktionsraum}) \quad (2.20)$$

Ein Funktional  $F$  heißt linear, falls für beliebige  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$  gilt:

$$F(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 F(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 F(\mathbf{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

Ein Funktional heißt beschränkt, wenn es eine Konstante  $c$  gibt, so daß gilt:

$$|F(\mathbf{u})| \leq c \|\mathbf{u}\| \quad (2.22)$$

Der kleinste Wert, den die Konstante  $c$  für alle  $\mathbf{u}$  einnimmt, wird als Norm  $\|\cdot\|_F$  bezeichnet:

$$\|F\|_F = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}} \frac{|F(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|} = c \quad (2.23)$$

Die Norm  $\|\cdot\|_F$  eines Funktionals ist ein Maß für die maximale Vergrößerung, die ein beliebiges Element  $\mathbf{u}$  durch Anwendung des Operators  $F$  erfährt. Im Gegensatz zu einer beschränkten Funktion besitzt ein beschränktes Funktional keine obere bzw. untere Schranke, sondern eine beschränkte Norm. Das Supremum (sup) bezeichnet den höchsten Wert, gegen den die Elemente einer Menge konvergieren. Ist das Supremum selbst Element der Menge, so spricht man von einem Maximum. Eine entsprechende Definition gilt für Infimum (inf) und Minimum.

Analog zur Stetigkeit einer Funktion wird die Stetigkeit eines Funktionals so definiert, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein positives  $\delta > 0$  mit folgender Bedingung existiert:

$$\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \delta \quad (2.24)$$

Diese Bedingung kann für lineare und beschränkte Funktionale vereinfacht werden, indem Linearität und Beschränktheit des Funktionals ausgenutzt wird:

$$\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\| = \|F(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq c\delta = \varepsilon \quad (2.25)$$

Für jedes  $\varepsilon$  kann ein  $\delta$  so bestimmt werden, daß die Stetigkeitsbedingung (2.24) erfüllt wird. Damit sind alle linearen und beschränkten Funktionale auch stetig.

Die Menge aller auf  $\mathbf{W}$  definierten Funktionale bildet selbst wieder einen normierten Raum. Dieser wird Dualraum  $\mathbf{W}'$  von  $\mathbf{W}$  bezeichnet.

Bilineare Funktionale  $F(\cdot, \cdot): \mathbf{V} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$  bilden jedes Paar von Elementen aus  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  auf eine reelle Zahl ab. Wird eine der beiden Variablen festgehalten, so muß das daraus resultierende Funktional linear sein:

$$\begin{aligned} F(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) &= \alpha_1 F(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \alpha_2 F(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} & \quad (2.26) \\ & & \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \in \mathbf{W} & \end{aligned}$$

Ein bilineares Funktional ist beschränkt und damit stetig, wenn mit  $\alpha > 0$  gilt:

$$|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (2.27)$$

Die Elliptizität oder Koerzitivität einer Bilinearform spielt für die Lösbarkeit von Minimal- und Sattelpunktproblemen eine wichtige Rolle. Eine stetige Bilinearform heißt  $\mathbf{V}$ -elliptisch oder koerzitiv, wenn sie mit  $\beta > 0$  nach unten abgeschätzt werden kann:

$$|F(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (2.28)$$

oder:

$$\frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \beta \|\mathbf{u}\| \quad (2.29)$$

Dies bedeutet für den Grenzfall  $\|\mathbf{u}\| \rightarrow \infty$ , daß auch die Bilinearform  $F(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  unbeschränkt wird. Damit wird ausgeschlossen, daß die Bilinearform in diesem Fall gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert und einen Extremwert nur im Unendlichen besitzt. Eine  $\mathbf{V}$ -elliptische und stetige Bilinearform kann somit sowohl nach oben wie auch nach unten abgeschätzt werden:

$$\beta \|\mathbf{u}\|^2 \leq |F(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\|^2 \quad (2.30)$$

oder:

$$0 < \beta \leq \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq \alpha \quad (2.31)$$

Sind die beiden Argumente eines bilinearen Funktionals unterschiedlich, so kann eine Abschätzung nach unten nicht auf dieselbe Art durchgeführt werden. Eine der Bedingung (2.28) entsprechende Elliptizitätsbedingung

$$|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \geq \beta \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (2.32)$$

ist zu streng, da es durchaus Elemente  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  geben kann, die bezüglich der Abbildung  $F$  orthogonal sind. In den meisten Fällen ist eine abgeschwächte Form der Ungleichung ausreichend:

$$\sup_{\mathbf{u}} \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \beta \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (2.33)$$

Durch Umformen kann die Ungleichung in die bekannte Inf-Sup-Bedingung überführt werden:

$$\inf_{\mathbf{v}} \sup_{\mathbf{u}} \frac{|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \geq \beta \quad (2.34)$$

Dies bedeutet, daß es für ein beliebiges  $\mathbf{v}$  mindestens ein  $\mathbf{u}$  geben muß, das die Ungleichung erfüllt. Damit kann die Koerzitivität der Abbildung  $F$  bezüglich einer Variablen festgestellt werden:

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \lim_{\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty} \|F(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

### 3 Energiemethoden der Elastostatik

#### 3.1 Das lineare Elastizitätsproblem

Ein Körper mit dem Volumen  $V$  und der Oberfläche  $A$  wird durch Oberflächen- und Volumenkräfte belastet. Gesucht ist der Verformungs- und der Spannungszustand des durch die Belastung deformierten Körpers. Das lineare Elastizitätsproblem wird in vielen Lehrbüchern z.B. von Sokolnikoff (1956), Timoshenko (1970) und Green (1968) ausführlich behandelt.

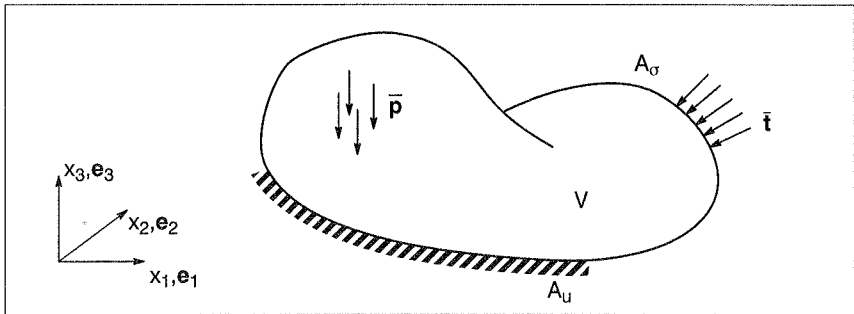


Bild 3.1: Elastischer Körper mit Belastung

Die Lage des Körpers wird im unverformten Zustand durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in der normierten kartesischen Basis  $\mathbf{e}_i$  beschrieben:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad (3.1)$$

Das Vektorfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  beschreibt die Verschiebung eines körperfesten Punktes infolge der Belastung. Für geometrisch lineare Probleme sind die Verformungen klein im Verhältnis zu den Abmessungen des Körpers, so daß für den Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die quadratischen Terme vernachlässigt werden können:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

Der Spannungstensor wird mit der konstitutiven Gleichung aus den Verzerrungen bestimmt:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

Durch Betrachtung an einem infinitesimalen Element lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen bestimmen:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \quad (3.4)$$

Dabei ist  $\bar{\mathbf{p}}$  der Vektor der angreifenden Volumenlasten. Zu einer vollständigen Beschreibung des Problems müssen noch die Randbedingungen definiert werden. Als wesentliche oder geometrische Randbedingungen werden die Verschiebungen auf einem Teil der Oberfläche  $A_u$  vorgeschrieben:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{auf } A_u \quad (3.5)$$

Als statische Randbedingung müssen auf der verbleibenden Oberfläche  $A_\sigma$  die vorgegebenen Spannungen eingehalten werden:

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{auf } A_\sigma \quad \text{mit } A_\sigma \cup A_u = A, \quad A_\sigma \cap A_u = \emptyset, \quad \mathbf{n} \dots \text{Normalenvektor} \quad (3.6)$$

Damit sind fünf Gleichungen gegeben, die zusammen die sogenannte starke Form (S) des Randwertproblems der linearen Elastostatik definieren. Unter Verwendung des Differentialoperators  $\mathbf{L}$  lautet das Problem in Vektorschreibweise:

Suche für gegebene  $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{u}}$  ein  $\mathbf{u}$ , so daß gilt:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{Gleichgewicht} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Material} \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \text{Kinematik} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{geometrische RB} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{statische RB} \quad (3.11)$$

Eine exakte Lösung dieses Problems kann nur in einfachen Fällen angegeben werden. Die am schwierigsten zu erfüllende Gleichung ist die Gleichgewichtsbedingung. Da die angreifende Volumenlast  $\bar{\mathbf{p}}$  von beliebiger Form sein kann, ist es fast unmöglich, Spannungen zu finden, die die Gleichgewichtsbedingung exakt erfüllen. Für allgemeine Probleme muß daher die starke Form (S) in eine andere Formulierung überführt werden, die auch Näherungslösungen zuläßt.

### 3.2 Prinzip des Minimums der potentiellen Energie

Das Problem kann in eine variationelle Form überführt werden, indem die Gleichgewichtsbedingung und die statische Randbedingung mit einer beliebigen Variation der Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  multipliziert und über das Volumen bzw. den Rand integriert werden:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T ( \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}} ) dV = 0 \quad (3.12)$$

$$\int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u}^T ( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} ) dA = 0 \quad (3.13)$$

Durch partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann der Differentialoperator  $\mathbf{L}$  von den Spannungen auf die Verschiebungen übertragen werden:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T ( \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} ) dV = \int_{A_\sigma + A_u} \delta \mathbf{u}^T ( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ) dA - \int_V ( \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T ) \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.14)$$

Einsetzen und Addition der Gleichungen (3.12) und (3.13) führt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, nachdem Spannungen und Verzerrungen durch Einsetzen der Material- und der Kompatibilitätsbedingung ersetzt worden sind:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA = 0 \quad (3.15)$$

Diese Gleichung wird auch als schwache Form (W) des Randwertproblems bezeichnet. Dabei ist entscheidend, daß die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  die geometrischen Randbedingungen exakt erfüllen. Existiert ein Potential, so ist das zugehörige Minimalproblem das Prinzip des Minimums der potentiellen Energie:

$$\Pi_{PE}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{A_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA \rightarrow \min. \quad (3.16)$$

Sowohl (3.15) als auch (3.16) sind insofern äquivalent zur starken Form (S), als die Gleichungen für alle, d.h. unendlich viele, zulässige Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\delta \mathbf{u}$  erfüllt sein müssen. Zulässig sind in diesem Fall alle Funktionen  $\mathbf{u} \in H^1$ , die die geometrischen Randbedingungen erfüllen und deren Ableitungen quadratintegrierbar sind. Wird aus der unendlich großen Menge zulässiger Funktionen eine beschränkte Anzahl ausgewählt, so werden die Gleichungen (3.15) und (3.16) immer noch exakt gelöst. Die starke Form wird jedoch im allgemeinen Fall nur näherungsweise erfüllt. Eine Lösung nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfüllt die Material- und Kinematikbedingungen, sowie die geometrischen Randbedingungen exakt. Approximiert werden im allgemeinen die statischen Gebietsgleichungen und die statischen Randbedingungen. Gleichungen, die von einem Funktional näherungsweise erfüllt werden können, werden Eulergleichungen genannt.

In der mathematischen Literatur ist eine Schreibweise üblich, die die innere Energie in einem bilinearen Funktional  $a(\cdot, \cdot)$  und die Arbeit der äußeren Lasten in einem linearen Funktional  $g(\cdot)$  zusammenfaßt. Damit kann für Gleichung (3.16) geschrieben werden:

$$\Pi_{PE}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{u}) \rightarrow \min. \quad (3.17)$$

oder:

$$\inf_{\mathbf{u} \in V} \Pi_{PE}(\mathbf{u}) \quad (3.18)$$

In der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  wird das Integral über die Ableitungen der Verschiebungsfunktionen gebildet. Dabei müssen die Verschiebungsfunktionen aus dem Sobolevraum  $H^1$  stammen und die Randbedingungen erfüllen:

$$V = \{ \mathbf{u} \in H^1 \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } A_u \} \quad (3.19)$$

In variiert Form lautet das Problem:

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - g(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \quad (3.20)$$

Hier bezeichnet  $\delta \mathbf{u}$  eine beliebige Variation der Verschiebungen, die jedoch auf  $A_u$  den Wert null besitzen muß:

$$\mathbf{V}_0 = \{ \delta \mathbf{u} \in H^1 \mid \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } A_u \} \quad (3.21)$$

Das Prinzip des Minimums der potentiellen Energie wurde lange Zeit ausschließlich als Basis für die Formulierung von Finiten Elementen verwendet. Da diese Elemente nur Verschiebungen als unabhängige Variable aufweisen, werden sie auch als Verschiebungselemente bezeichnet. Besonders bei der Analyse von Elementen niedriger Ansatzordnung kann festgestellt werden, daß die exakte Erfüllung der Nebenbedingungen oft zu einem zu steifen Verhalten eines Elementes führt. Werden hingegen Nebenbedingungen durch Lagrangemultiplikatoren in das Funktional mit aufgenommen, so werden auch diese nur näherungsweise erfüllt. Dadurch kann der Approximationsfehler auf mehrere Gleichungen der starken Form (S) verteilt werden, um insgesamt eine schnellere Konvergenz des Elementes zu erzielen. Die Funktionale sind dann von Unbekannten unterschiedlichen Typs abhängig und werden gemischte Funktionale genannt.

### 3.3 Gemischte Funktionale

Eine umfassende Darstellung gemischter Funktionale wird von Washizu (1968) angegeben. Da im Prinzip jede Kombination von Eulergleichungen und Nebenbedingungen möglich ist, existiert eine Vielzahl von gemischten Funktionalen. Oden (1976) gibt 14 verschiedene Funktionale für das Elastizitätsproblem an. Exemplarisch werden im Folgenden zwei Funktionale hergeleitet, die bei der Formulierung von Finiten Elementen hauptsächlich verwendet werden.

Das Funktional von Hu–Washizu enthält in seiner allgemeinen Variante alle fünf Gleichungen der starken Form. Damit jeweils ein Arbeitsausdruck entsteht, können die Lagrange–Multiplikatoren als virtuelle Verschiebungen, Verzerrungen bzw. Spannungen identifiziert werden:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T ( \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}} ) dV = 0 \quad \text{Gleichgewicht} \quad (3.22)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T ( \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} ) dV = 0 \quad \text{Material} \quad (3.23)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T ( \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L} \mathbf{u} ) dV = 0 \quad \text{Kinematik} \quad (3.24)$$

$$\int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u}^T ( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} ) dA = 0 \quad \text{statische RB} \quad (3.25)$$

$$\int_{A_u} (\delta \sigma \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA = 0 \quad \text{geometrische RB} \quad (3.26)$$

Die partielle Integration von Gleichung (3.22) und Addition von Gleichungen (3.23) – (3.26) führt auf den folgenden Arbeitsausdruck:

$$\int_V [(\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T\sigma - \delta\sigma^T\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\sigma^T\mathbf{L}\mathbf{u} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\sigma + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{p}}] dV - \int_{A_\sigma} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}} dA - \int_{A_u} (\delta\sigma\mathbf{n})^T(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})dA = 0 \quad (3.27)$$

Das zugehörige Funktional muß am Lösungspunkt nicht mehr minimal, sondern stationär werden:

$$\Pi_{\text{HuW}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \right) dV - \int_{A_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{A_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \rightarrow \text{stat.} \quad (3.28)$$

Als Unbekannte treten in diesem Funktional die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  auf. Die Eulergleichungen des Funktionals sind die fünf Gleichungen der starken Formulierung (S), die alle näherungsweise gelöst werden. Die Zahl der unbekanntenen Variablen ist im Vergleich zur reinen Verschiebungsformulierung stark angestiegen. Mit dem Ziel einer effizienteren Elementformulierung können Variable im Sinne einer sogenannten hybrid gemischten Elementformulierung bereits auf Elementebene eliminiert werden. Dennoch bleibt der numerische Aufwand zur Bestimmung der Elementmatrizen hoch. Da es außerdem nicht einfach ist, zueinander passende Ansätze für die drei Typen von Variablen zu finden, die eine stabile und schnell konvergierende Lösung garantieren, haben sich überwiegend Zweifeld–Funktionale als Basis von Finiten Elementen durchgesetzt. Wichtig ist das Funktional von Hu–Washizu als Basis für die Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS, siehe Kapitel 5.3), oder z.B. für das Plattenelement nach Xu (siehe Kapitel 6.6). Zur Unterscheidung von den unabhängig angesetzten Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  werden im weiteren Verlauf der Arbeit die durch Differentiation der Verschiebungen entstehende Verzerrungen als kompatible Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{L}\mathbf{u}$  bezeichnet.

Durch Einsetzen der Materialgleichung und Elimination der Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  kann das Funktional von Hu–Washizu in das Zweifeld–Funktional nach Hellinger–Reissner umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int_V \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \right) dV - \\ & - \int_{A_\sigma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{A_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Häufig wird aus dem Raum  $H^1$  der Verschiebungsfunktionen die Untermenge ausgewählt, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Dadurch entfällt der letzte Term in Gleichung (3.29) und es entsteht ein modifiziertes Funktional von Hellinger–Reissner mit der variierten Form:

$$\int_V \left[ -\delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} - \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T) \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \right] dV - \int_{A_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA = 0 \quad (3.30)$$

Mit Hilfe von Bilinearformen kann das Problem (3.30) wieder in allgemeiner Schreibweise aufgestellt werden:

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{u}) \rightarrow \text{stat.} \quad (3.31)$$

oder:

$$-a(\delta \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + b(\delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \quad (3.32)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \delta \mathbf{u}) = g(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \quad (3.33)$$

In diesem Fall ist  $\mathbf{W}$  der Raum  $H^0$  aller zulässigen Funktionen für die Spannungen. Die Lösungsfunktionen dieses Funktionals müssen die Materialgleichungen als Nebenbedingung exakt erfüllen, was in der Regel ohne Schwierigkeiten möglich ist. Felippa (1989b) gibt eine Parameterdarstellung an, mit der die verschiedenen Funktionale in unterschiedlicher Wichtung miteinander kombiniert werden können. Auf diese Weise sind beliebig viele Linearkombinationen von Eulergleichungen und Nebenbedingungen möglich, wobei die klassischen Funktionale als Sonderfälle in dieser Darstellung enthalten sind. Nachteilig ist jedoch, daß die Wahl eines bestimmten Parametersatzes nur schwer begründet werden kann und daß Verständnis und Analyse des gewählten Verfahrens kaum möglich ist.

### 3.4 Lösbarkeit und Stabilität

Damit der Stationärwert eines Funktionals gefunden werden kann, müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

- Zulässige Ansatzfunktionen: Die Ansatzfunktionen müssen so gewählt werden, daß die Integrale des Funktionals existieren.
- Lösbarkeit: Das Funktional muß genau einen Stationärwert aufweisen.



- c) Stabilität: Die Lösung muß stabil gegenüber Veränderungen der äußeren Belastung sein, d.h. kleine Veränderungen der Belastung dürfen nur zu endlichen Änderungen der Lösung führen.

Zuerst wird das Einfeld-Funktional der potentiellen Energie betrachtet:

$$\Pi_{PE}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - g(\mathbf{u}) \rightarrow \min. \quad (3.17)$$

Damit eine eindeutige und stabile Lösung existiert, muß ein Funktional stetig und streng konvex sein. Darüberhinaus darf der Stationärwert nicht im Unendlichen liegen. Sprünge eines Funktionals nach Bild 3.2 a) werden durch die Definition der hier ausschließlich behandelten linearen Funktionale verhindert. Stetigkeit wird durch die Beschränktheit der Funktionale gewährleistet, so daß Unendlichkeitsstellen nach Bild 3.2 b) ausgeschlossen sind. Ein Verlauf eines Funktionals nach Bild 3.2 c) wird durch Einhalten der Elliptizitätsbedingung verhindert. Da leicht gezeigt werden kann, daß elliptische Funktionale auch konvex sind, sind Funktionale mit einem Verlauf nach Bild 3.2 d) ebenfalls ausgeschlossen.

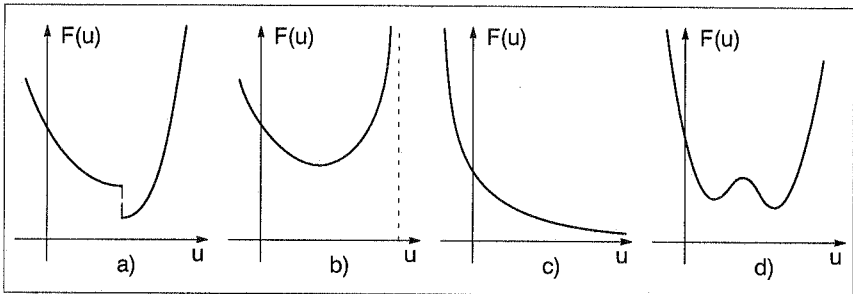


Bild 3.2: Unzulässige Funktionale

Mathematisch ist die Eindeutigkeit der Lösung des Problems durch den Satz von Lax–Milgram gewährleistet. Danach hat das Problem (3.17) genau dann eine Lösung, wenn die Bilinearform  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  die Kontinuitätsbedingung (2.27) und die Elliptizitätsbedingung (2.28) erfüllt:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})| \leq c_1 \|\mathbf{u}\| \|\delta \mathbf{u}\| \quad \text{Kontinuität} \quad (3.34)$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq c_2 \|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \text{V-Elliptizität} \quad (3.35)$$

Aus der Elliptizität von  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  und der Beschränktheit des linearen Lastfunktionals  $g$  kann die Stabilität der Lösung nachgewiesen werden:

$$c_2 \|\mathbf{u}\|^2 \leq \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) \leq \|g\|_F \|\mathbf{u}\| \quad (3.36)$$

Dies bedeutet, daß die Norm der Verschiebung in gleichem Maße beschränkt bleibt wie die Norm der Belastung. Da  $\|\mathbf{u}\|$  die integrale  $L_2$ -Norm ist, bleibt die Stabilität des Funktionals auch bei lokalen Singularitäten mit unendlich großen Verschiebungen gewährleistet.

In Reddy (1986) ist ein anschaulicher Beweis dieser Sätze angegeben. In der Regel bereitet die Erfüllung dieser Forderungen für praktische Probleme wenig Schwierigkeiten. In bestimmten Fällen werden sie jedoch verletzt. Für den Grenzfall der inkompressiblen Elastizität wird die Kontinuitätsbedingung nicht mehr erfüllt, da eine Volumenänderung zu unendlich großen Spannungen und damit zu einer unendlich großen inneren Energie führt. Entstehen infolge einer reduzierten Integration eines Finiten Elementes innere Kinematiken, sogenannte „Zero Energy Modes“, so wird die Elliptizitätsbedingung verletzt. Diese Bedingung schließt aus, daß die innere Energie für beliebig große Verschiebungen gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Genau dies ist beim Auftreten von „Zero Energy Modes“ der Fall.

Auf ähnliche Weise können die Anforderungen an gemischte Funktionale aufgestellt werden. Exemplarisch werden hier die Lösbarkeitsbedingungen für das Funktional von Hellinger–Reissner aufgestellt:

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - f(\boldsymbol{\sigma}) - g(\mathbf{u}) \rightarrow \text{stat.} \quad (3.31)$$

Um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten, müssen die Bedingungen des Einfeld–Funktionals nun für beide Variable erfüllt sein. Das gemischte Funktional muß stetig, konvex und positiv koerzitiv bezüglich der Variablen  $\boldsymbol{\sigma}$ , sowie stetig, konkav und negativ koerzitiv bezüglich der Variablen  $\mathbf{u}$  sein. Das Lastfunktional  $g(\mathbf{u})$  ist in der Regel linear und beschränkt, so daß nur die bilinearen Funktionale für die Lösbarkeit entscheidend sind. Die Stetigkeit bezüglich beider Variablen ist gewährleistet, wenn die Bilinearformen nach oben beschränkt sind:

$$|a(\boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\sigma})| \leq \alpha_1 \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\delta\boldsymbol{\sigma}\| \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \delta\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \quad (3.37)$$

$$|b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})| \leq \alpha_2 \|\boldsymbol{\sigma}\| \|\mathbf{u}\| \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}, \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad (3.38)$$

Die Koerzitivität bezüglich  $\boldsymbol{\sigma}$  wird wie für das Einfeld–Funktional sichergestellt:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \beta_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \quad (3.39)$$

Dies ist jedoch keine notwendige Bedingung, da  $b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  ebenfalls zur Koerzitivität des Funktionals bezüglich  $\boldsymbol{\sigma}$  beiträgt. Es ist ausreichend, die Bedingung nur für die Spannungen zu fordern, die in der zweiten Bilinearform keinen Beitrag leisten. Damit kann die Elliptizitätsbedingung auf den Unterraum  $\overline{\mathbf{W}} \subset \mathbf{W}$  eingeschränkt werden:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \beta_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \overline{\mathbf{W}}, \beta_1 > 0 \quad (3.40)$$

$$\overline{\mathbf{W}} = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W} \mid b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \} \quad (3.41)$$

Für die Koerzitivität der sekundären Variablen  $\mathbf{u}$  wird jetzt die Abschätzung nach Ungleichung (2.33) benötigt:

$$\sup_{\sigma} \frac{|b(\sigma, \mathbf{u})|}{\|\sigma\|} \geq \beta_2 \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \beta_2 > 0 \quad (3.42)$$

oder:

$$\inf_{\mathbf{u}} \sup_{\sigma} \frac{|b(\sigma, \mathbf{u})|}{\|\sigma\| \|\mathbf{u}\|} \geq \beta_2 > 0 \quad (3.43)$$

Mit dieser Forderung wird ausgeschlossen, daß das Funktional  $\Pi_{\text{HR}}(\sigma, \mathbf{u})$  für  $\|\mathbf{u}\| \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Ein mathematischer Beweis dieses Satzes wird von Braess (1991) angegeben. Die Bedingung (3.43) wurde erstmals 1972 von Babuska und Brezzi aufgestellt. Sie wird deshalb als Babuska–Brezzi–, oder einfacher als Inf–Sup–Bedingung bezeichnet.

Die Einhaltung der Elliptizitätsbedingung (3.39) bereitet für kompressible Elastizitätsprobleme keine Schwierigkeiten, solange eine ausreichend hohe Integrationsordnung verwendet wird, um innere Kinematiken auszuschließen. Für den Grenzfall inkompressibler Elastizität wird die Elliptizitätsbedingung jedoch verletzt, da ein hydrostatischer Spannungszustand zu keinerlei Verzerrungen und damit zu einer verschwindenden Energie führt. In diesem Fall sind nach Franca (1988) zusätzliche Überlegungen erforderlich, um die Lösbarkeit des gemischten Funktional zu gewährleisten.

Für die Formulierung stabiler, gemischter Elemente ist die Babuska–Brezzi–Bedingung von entscheidender Bedeutung. Um sie zu erfüllen müssen die Räume der gewählten Spannungs– und Verschiebungsapproximationen gut aufeinander abgestimmt sein. Wichtig ist, daß die gewählten Spannungen nicht orthogonal zu den Verschiebungen sein dürfen, d.h. für jeden Verzerrungsmodus muß es mindestens einen Spannungsmodus geben, der in der Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  eine Energie ungleich null liefert.

## 4 Approximation mit Finiten Elementen

### 4.1 Einleitung

Den Ausgangspunkt zur näherungsweise Lösung eines Randwertproblems bildet ein variiertes Funktional, dessen Stationärwert für eine ausgesuchte Menge von Ansatzfunktionen gesucht wird. Die Ansatzfunktionen sind stückweise auf Gebieten endlicher Größe, den Finiten Elementen, definiert. Eine bestimmte Aufteilung des gesamten Gebietes  $A$  in einzelne Elemente wird mit dem Buchstaben  $h$  gekennzeichnet, wobei  $h$  eine charakteristische Größe der verwendeten Elemente darstellt. Die verwendete Elementformulierung muß gewährleisten, daß die Näherungslösung im Grenzwert  $h \rightarrow 0$  möglichst schnell gegen die exakte Lösung konvergiert. Für eine ausführliche Behandlung der Methode der Finiten Elemente sei auf die Bücher von Hughes (1987), Zienkiewicz (1989/91) und Becker (1981) verwiesen.

### 4.2 Diskretisierte Funktionale

Für eine Lösung nach der Finite Elemente Methode werden die zur Verfügung stehenden Funktionenräume  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  auf die Unterräume  $\mathbf{V}^h$  und  $\mathbf{W}^h$  beschränkt. Die Ansatzfunktionen werden als Linearkombination von Funktionen dargestellt:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k \mathbf{d}_k = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.1)$$

Die Ordinaten  $\mathbf{d}_k$  sind konstant und können bei der Integration vor das Integral gezogen werden. Auf dieselbe Weise lassen sich Ansätze für Spannungen und Verzerrungen darstellen:

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{P} \mathbf{s} \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^h = \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (4.3)$$

Für die Variation der Variablen werden dieselben Ansätze verwendet:

$$\delta \mathbf{u}^h = \mathbf{N} \delta \mathbf{d} = \mathbf{v}_h \quad (4.4)$$

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{P} \delta \mathbf{s} = \boldsymbol{\tau}_h \quad (4.5)$$

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^h = \mathbf{M} \delta \mathbf{e} \quad (4.6)$$

Mit den Vektoren  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{e}$  werden hier die Freiwerte des Gesamtsystems bezeichnet. Durch Einsetzen von diskreten Funktionen in ein Funktional entsteht dessen diskrete Form. Das diskrete Prinzip des Minimums der potentiellen Energie lautet:

$$\Pi_{PE}(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) - \mathbf{g}(\mathbf{u}^h) \rightarrow \min. \quad (4.7)$$

In variiert Form:

$$a(\delta \mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) - g(\delta \mathbf{u}^h) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_0^h \quad (4.8)$$

$$\mathbf{V}_0^h = \{ \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \mid \delta \mathbf{u}^h = \mathbf{0} \text{ auf } A_u \} \quad (4.9)$$

Durch Integration wird die Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Lastvektor  $\mathbf{R}$  gebildet:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{R} \quad (4.10)$$

Auf dieselbe Art und Weise wird die diskrete Form des Funktional nach Hellinger–Reissner aufgestellt:

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) = -\frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) + b(\boldsymbol{\sigma}^h, \mathbf{u}^h) - g(\mathbf{u}^h) \rightarrow \text{stat.} \quad (4.11)$$

In variiert Form:

$$-a(\delta \boldsymbol{\sigma}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) + b(\delta \boldsymbol{\sigma}^h, \mathbf{u}^h) = \mathbf{0} \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^h \quad (4.12)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}^h, \delta \mathbf{u}^h) = g(\delta \mathbf{u}^h) \quad \forall \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_0^h \quad (4.13)$$

Dieses Problem lautet in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} -\mathbf{Hs} + \mathbf{Gd} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{s} &= \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit:

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, dV \quad (4.15)$$

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, dV \quad (4.16)$$

### 4.3 Lösbarkeit diskretisierter Funktionale

Die in Kapitel 2.6 erläuterten Bedingungen für die Lösbarkeit von Minimal– und Sattelpunktproblemen können direkt auf diskretisierte Probleme übertragen werden. Mathematisch gesehen bedeutet eine Diskretisierung nichts anderes als die Beschränkung des Funktionenraumes, in dem eine Lösung gefunden werden soll. Es gelten deswegen dieselben Lösbarkeitsbedingungen, eingeschränkt auf den Raum der verwendeten Funktionen. Damit ist Gleichung (4.8) lösbar, wenn gilt:

$$|a(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h)| \leq \alpha \|\mathbf{u}^h\| \|\delta \mathbf{u}^h\| \quad \forall \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h, \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}_0^h \quad (4.17)$$

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \geq \beta \|\mathbf{u}^h\|^2 \quad \forall \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \quad (4.18)$$

In Matrixform lauten diese Bedingungen:

$$|\delta \mathbf{d}^T \mathbf{Kd}| \leq \alpha \|\mathbf{d}\| \|\delta \mathbf{d}\| \quad (4.19)$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Kd} \geq \beta \|\mathbf{d}\|^2 \quad (4.20)$$

Für eine stabile Lösung reicht es jedoch nicht aus, daß die Matrix  $\mathbf{K}$  positiv definit ist. Positiv definite Matrizen haben Eigenwerte größer Null mit der Bedingung:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} > 0 \quad (4.21)$$

Für die Lösbarkeit des diskretisierten Minimalproblems wird zusätzlich gefordert, daß die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{K}$  einen unteren Grenzwert  $\beta > 0$  und einen oberen Grenzwert  $\alpha < \infty$  besitzen. Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  müssen uneingeschränkt gelten, für alle möglichen Materialparameter und für beliebige Netzzunterteilungen.

Analog ergeben sich für das diskretisierte Funktional nach Hellinger–Reissner folgende Bedingungen für Stetigkeit:

$$|\mathbf{a}(\delta\sigma^h, \sigma)| \leq \alpha_1 \|\delta\sigma^h\| \|\sigma^h\| \quad \forall \delta\sigma^h, \sigma^h \in \mathbf{W}^h \quad (4.22)$$

$$|\mathbf{b}(\sigma^h, \mathbf{u}^h)| \leq \alpha_2 \|\sigma^h\| \|\mathbf{u}^h\| \quad \forall \sigma^h \in \mathbf{W}^h, \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \quad (4.23)$$

und Elliptizität des Funktionals:

$$\mathbf{a}(\sigma^h, \sigma^h) \geq \beta_1 \|\sigma^h\|^2 \quad \forall \sigma^h \in \overline{\mathbf{W}}^h, \beta_1 > 0 \quad (4.24)$$

$$\overline{\mathbf{W}}^h = \{\sigma^h \in \mathbf{W}^h \mid \mathbf{b}(\sigma^h, \mathbf{u}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h\}$$

$$\inf_{\mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h} \sup_{\sigma^h \in \mathbf{W}^h} \frac{|\mathbf{b}(\sigma^h, \mathbf{u}^h)|}{\|\sigma^h\| \|\mathbf{u}^h\|} \geq \beta_2 > 0 \quad (4.25)$$

In Matrizenform lauten die Elliptizitäts– und die Inf–Sup–Bedingung:

$$\mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s} \geq \beta_1 \|\mathbf{s}\|^2 \quad \forall \mathbf{s} \in \left\{ \mathbb{R}^n \mid \mathbf{G}^T \mathbf{s} = 0 \right\} \quad (4.26)$$

$$\inf_{\mathbf{d}} \sup_{\mathbf{s}} \frac{|\mathbf{d}^T \mathbf{G}^T \mathbf{s}|}{\|\mathbf{d}\| \|\mathbf{s}\|} \geq \beta_2 > 0 \quad (4.27)$$

Diese Bedingungen reichen aus, um die Stabilität des gesamten Gleichungssystems (4.14) zu gewährleisten. Wie im kontinuierlichen Fall ist es hier nicht notwendig, die Elliptizität der Matrix  $\mathbf{H}$  für den ganzen Parameterraum zu fordern, da die Matrix  $\mathbf{G}$  ebenfalls zur Stabilität des Systems bezüglich der Parameter  $\mathbf{s}$  beiträgt. Deshalb kann das Gesamtsystem eine stabile Lösung besitzen, selbst wenn die Matrix  $\mathbf{H}$  singular sein sollte. Werden jedoch die Spannungsparameter vorab auf Elementebene eliminiert, so muß die Elliptizität von  $\mathbf{H}$  im ganzen Parameterraum ohne Einschränkung gelten.

Für die Formulierung gemischter Finite Elemente ist diese Unterscheidung von untergeordneter Bedeutung, da in der Regel die gewählten Spannungsansätze die Elliptizitätsbedingung uneingeschränkt erfüllen. Wichtiger ist die Inf–Sup–Bedingung, zu deren Erfüllung die gewählten Spannungs– und Verschiebungsansätze gut aufeinander abgestimmt sein müssen. In der Form

$$\sup_{\mathbf{s}} \frac{|\mathbf{d}^T \mathbf{G}^T \mathbf{s}|}{\|\mathbf{d}\|} \geq \beta_2 \|\mathbf{s}\| \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \quad (4.28)$$

kann die Inf–Sup–Bedingung anschaulich gedeutet werden: Die Elliptizität des diskretisierten Funktionals nach Hellinger–Reissner bezüglich der Verschiebungsparameter  $\mathbf{d}$  ist dann gewährleistet, wenn es zu jedem  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  einen Satz Spannungsparameter

$\mathbf{s}$  gibt, so daß das Maß der Vergrößerung von  $\mathbf{G}^T$  nach unten beschränkt ist. Für jeden Verschiebungsmode muß mindestens ein Spannungsmode zur Verfügung stehen, mit dem er Arbeit leisten kann. Ist dies nicht der Fall, kann sich der Verschiebungsmode in beliebiger Größe einstellen. Es entsteht eine innere Kinematik und die Lösung wird instabil oder existiert nicht mehr.

Ein Beweis der Stabilität einer bestimmten Elementformulierung ist sehr aufwendig, da die Stabilitätsbedingungen für das Gesamtsystem mit beliebiger Netzunterteilung erfüllt sein muß. Mathematische Stabilitätsbeweise liegen deshalb nur in wenigen Fällen vor, siehe z.B. Arnold (1988). Viele Elemente werden jedoch auch ohne mathematischen Beweis erfolgreich eingesetzt. In diesen Fällen kann die Stabilität mit Hilfe einiger notwendiger Bedingungen zwar nicht bewiesen, jedoch mit großer Wahrscheinlichkeit festgestellt werden.

Eine notwendige Bedingung sind Abzählregeln, die das Verhältnis der Anzahl der freien Variablen festlegen. Die Matrizen Schreibweise des gemischten Problems

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

macht deutlich, daß der Rang der Matrix  $\mathbf{G}$  kleiner als der Rang der Matrix  $\mathbf{H}$  sein muß, damit die Variable  $\mathbf{s}$  eliminiert werden kann. Die Zahl der Spannungsparameter muß also größer oder gleich der Zahl der Verschiebungsparameter abzüglich der Anzahl der dehnungslosen Starrkörperverformungen sein:

$$n_s \geq n_d - n_r \quad (4.30)$$

Eine weitere Unterstützung zur Wahl stabiler Elementansätze bietet eine tabellarische Untersuchung der Verzerrungsmodes nach Andelfinger (1991). Hier kann direkt geprüft werden, ob Spannungsmodes einen Arbeitspartner bei den Verschiebungen finden. Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist die Eigenwertanalyse, mit der innere Kinematiken eines Finiten Elementes festgestellt werden können. Chapelle (1993) gibt eine Methode an, mit der die Babuska–Brezzi–Bedingung näherungsweise auf numerischem Wege überprüft werden kann.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen ausschließlich durch Ansatzfunktionen beschrieben. Aus Gründen der Einfachheit wird deshalb auf den Zeiger (...)h verzichtet.

## 4.4 Gleichungen für Plattenelemente

Für die Formulierung von Finiten Plattenelementen wird heute überwiegend eine Plattentheorie mit Reissner–Mindlin Kinematik eingesetzt. Neben der Erfassung von Schubdeformationen bietet diese Theorie im Vergleich zur Theorie nach Kirchhoff vor

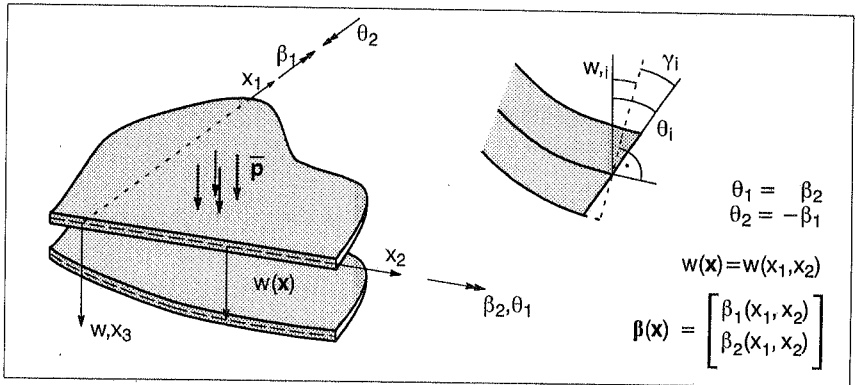


Bild 4.1: Deformation einer Platte nach Reissner–Mindlin

allem den Vorteil, daß nur Ableitungen erster Ordnung auftreten und somit  $C^0$ -kontinuierliche Ansatzfunktionen verwendet werden können. Unter der Annahme eben bleiben der Querschnitte wird die Deformation einer Platte durch Durchbiegung  $w(\mathbf{x})$  und Rotationen  $\beta(\mathbf{x})$  bzw.  $\theta(\mathbf{x})$  beschrieben. Die Rotationsvektoren  $\beta(\mathbf{x})$  und  $\theta(\mathbf{x})$  unterscheiden sich nur in der Orientierung und werden im Verlauf der Arbeit gleichwertig verwendet. Wegen der Vorzeichen und Indizes bietet sich der Vektor  $\theta$  für Betrachtungen des kontinuierlichen Problems an, während eine Darstellung in  $\beta$  aufgrund der Übereinstimmung mit dem globalen Koordinatensystem bei der Betrachtung von Elementgrößen sinnvoll ist. Der Krümmungstensor  $\kappa$  und der Schubverzerrungsvektor  $\gamma$  werden über die kinematischen Gleichungen aus den Rotationen und der Durchbiegung bestimmt:

$$\kappa_{11} = +\beta_{2,1} = \theta_{1,1} \quad (4.31)$$

$$\kappa_{22} = -\beta_{1,2} = \theta_{2,2} \quad (4.32)$$

$$\kappa_{12} = +\beta_{2,2} - \beta_{1,1} = \theta_{1,2} + \theta_{2,1} \quad (4.33)$$

$$\gamma_1 = w_{,1} + \beta_2 = w_{,1} + \theta_1 \quad (4.34)$$

$$\gamma_2 = w_{,2} - \beta_1 = w_{,2} + \theta_2 \quad (4.35)$$

oder:

$$\gamma = \nabla w + \theta \quad (4.36)$$

In Matrixschreibweise werden Krümmungen und Schubverzerrungen in einem Vektor  $\epsilon$  und die Ableitungen in dem Differentialoperator  $\mathbf{L}_B$  zusammengefaßt:

$$\epsilon = \mathbf{L}_B \mathbf{u} = \mathbf{L}_B \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B}_B \mathbf{d} \quad (4.37)$$

mit:

$$\epsilon^T = [ \kappa_{11} \quad \kappa_{22} \quad \kappa_{12} \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 ] \quad (4.38)$$

$$\mathbf{u}^T = [ w \quad \beta_1 \quad \beta_2 ] \quad (4.39)$$



$$\mathbf{L}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \\ 0 & -\partial_2 & -\partial_1 & 0 & -1 \\ \partial_1 & 0 & \partial_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.40)$$

Durch Aufintegration der Spannungen über die Plattendicke wird die konstitutive Gleichung der Platte gewonnen, die eine direkte Beziehung zwischen Krümmungen und Schnittgrößen herstellt:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Gkh \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

In Matrizenform:

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}_B \boldsymbol{\kappa} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}_S \boldsymbol{\gamma} \quad (4.44)$$

mit:

E ... E – Modul

$\nu$  ... Querdehnzahl

h ... Plattendicke

$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$  ... Schubmodul

$k = \frac{5}{6}$  ... Schubkorrekturfaktor

Es gilt die Vorzeichenkonvention nach Bild 4.2, wonach positive Momente am unteren Plattenrand Spannungen in Richtung positiver Koordinaten erzeugen. Die statischen Gebietsgleichungen werden durch die Betrachtung an einem differentiellen Flächenelement gewonnen:

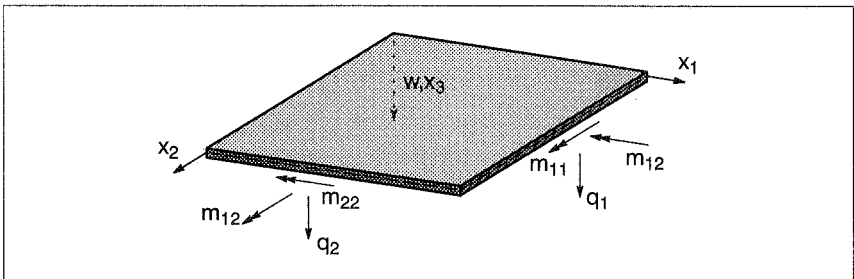


Bild 4.2: Vorzeichenkonvention der Plattenschnittgrößen

$$m_{11,1} + m_{12,2} - q_1 = 0 \quad \text{Momentengleichgewicht} \quad (4.45)$$

$$m_{12,1} + m_{22,2} - q_2 = 0$$

$$q_{1,1} + q_{2,2} + \bar{p} = 0 \quad \text{Kräftegleichgewicht} \quad (4.46)$$

## 4.5 Gleichungen für Scheibenelemente

Die ebene Deformation einer Scheibe wird durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  beschrieben. Die Verzerrungen der Scheibe ergeben sich direkt aus der räumlichen Kompatibilitätsgleichung (3.2):

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (4.49)$$

In Matrixschreibweise lauten diese Gleichungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_M \mathbf{u} = \mathbf{L}_M \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B}_M \mathbf{d} \quad (4.50)$$

mit:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12} ] \quad (4.51)$$

$$\mathbf{u}^T = [ u_1 \quad u_2 ] \quad (4.52)$$

$$\mathbf{L}_M^T = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Die allgemeine konstitutive Gleichung wird für den ebenen Fall kondensiert, indem Annahmen für die Spannung oder die Dehnung in Dickenrichtung  $x_3$  eingesetzt werden. Werden die Spannungen  $\sigma_3$  zu null angenommen, so ergibt sich die Materialgleichung des ebenen Spannungszustandes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad ; \quad \sigma_3 = 0 \quad (4.55)$$

Die Gleichung des ebenen Verzerrungszustandes wird aus der allgemeinen konstitutiven Gleichung durch Einsetzen der Bedingung  $\varepsilon_3=0$  gewonnen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad ; \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (4.57)$$

Für den Fall inkompressiblen Materialverhaltens wird ein entscheidender Unterschied der beiden Materialgesetze deutlich. Im ebenen Spannungszustand bewirkt eine Quer-

dehnzahl von  $\nu=0,5$  keine Einschränkung der Verzerrungen  $\epsilon$ , da sich die Volumenkonstanz problemlos durch die abhängige Dehnung  $\epsilon_3$  einstellen kann. Im ebenen Verzerrungszustand dagegen wird die Materialmatrix für  $\nu \rightarrow 0,5$  singulär. Eine endliche Lösung existiert nur, wenn die Verschiebungen die Bedingung der Volumenkonstanz erfüllen:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0 \quad (4.58)$$

Dadurch wird im ebenen Verzerrungszustand der zur Verfügung stehende Lösungsraum der Verschiebungen stark eingeschränkt.

Die statischen Gebietsgleichungen der Scheibe lauten:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \bar{p}_1 = 0 \quad (4.59)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \bar{p}_2 = 0 \quad (4.60)$$

## 4.6 Dreieckige Finite Elemente

Als Basis für die Formulierung dreieckiger Finiter Elemente dient in den meisten Fällen ein rechtwinkliges Einheitsdreieck. Die Ansatzfunktionen des Elementes werden in Abhängigkeit der lokalen Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$  aufgestellt. Mit der Jakobitransformation  $\mathbf{J}$  wird das Einheitsdreieck auf das wirkliche Element abgebildet. Als Ansatzfunktionen werden in der Regel vollständige Polynome verwendet. Dies ist eine entscheidende Eigenschaft dreieckiger Elemente, die sowohl Vor- als auch Nachteile mit sich zieht. Mathematisch bedeutet dies, daß z.B. der Raum der diskretisierten Verschiebungen  $\mathbf{V}^h$  eines Elementes  $n$ -ter Ordnung aus der Menge aller vollständigen Polynome  $\mathbf{P}^n$  besteht:

$$\mathbf{V}^h = \mathbf{P}^n \quad (4.61)$$

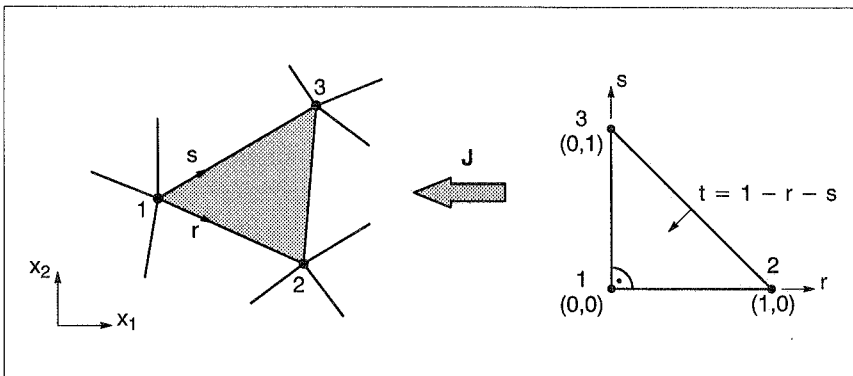


Bild 4.3: Geometrie des dreiknotigen Finite Elementes

Vollständige Räume der Ansatzfunktionen erleichtern die mathematische Analyse eines Elementes, weshalb in der mathematischen Literatur vorzugsweise dreieckige Elemente behandelt werden. Die Ansatzfunktionen linearer und quadratischer Elemente sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Bei isoparametrischen Elementen werden dieselben Ansatzfunktionen auch für die Geometriebeschreibung verwendet:

$$\begin{aligned}
 x_1(r, s) &= \sum_{i=1}^n N_i(r, s)x_i^1 \\
 x_2(r, s) &= \sum_{i=1}^n N_i(r, s)x_i^2
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

mit:

$$x_i^j \dots \text{Koordinate des Knotens } j \text{ in Richtung } i
 \tag{4.63}$$

Für globale Ableitungen und die Integration über die Fläche des Elementes wird die Jakobimatrix benötigt:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} \end{bmatrix}
 \tag{4.64}$$

Die Terme der Jakobimatrix sind bei linearen Dreiecken konstant, was eine weitere, wichtige Eigenschaft dreieckiger Elemente mit geraden Rändern darstellt. Da bei den Integralen für die Berechnung der Elementsteifigkeit die Determinante der Jakobimatrix im Nenner auftritt, wirkt sich eine Jakobideterminante niedriger Polynomordnung günstig auf die Genauigkeit der numerischen Integration aus. Eine Geometriemodellierung hoher Ansatzordnung stellt an ein Element sehr hohe Anforderungen, die oft nicht erfüllt werden können. Dies zeigt die von Lee (1993) festgestellte große Sensibilität quadratischer Elemente bezüglich gekrümmter Elementkanten. Auch die leistungsfähigsten vierknotigen Elemente nach Pian (1984) oder Simo (1990) berücksichtigen die Elementgeometrie nur näherungsweise.

Element	linear	quadratisch	Geometrie:	
$N_1$	$r$	$t(2t-1)$	<p>linear</p>	<p>quadratisch</p>
$N_2$	$s$	$r(2r-1)$		
$N_3$	$t$	$s(2s-1)$		
$N_4$		$4rt$		
$N_5$		$4rs$		
$N_6$		$4st$		

Tabelle 4.1: Lineare und quadratische Ansatzfunktionen

Das Integral eines Polynoms über ein dreieckiges Gebiet läßt sich mit der Formel

$$\int_{\Delta} r^{\alpha} s^{\beta} t^{\gamma} dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \tag{4.65}$$

exakt bestimmen. Aufgrund der zahlreichen Terme mit unterschiedlich hohen Polynomgraden ist diese Formel für Finite Elemente nur schwer anwendbar. Deswegen haben sich auch bei dreieckigen Elementen numerische Integrationsverfahren durchgesetzt. Im Gegensatz zu viereckigen Elementen ist die Bestimmung von Integrationspunkten für Dreiecke nicht direkt durchzuführen, da hierzu ein System nichtlinearer Gleichungen gelöst werden muß. In dieser Arbeit werden Integrationsformeln nach Cowper (1973) mit bis zu 13 Stützstellen verwendet. In Tabelle 4.2 sind die Integrationsregeln bis zur Ordnung vier angegeben, die jeweils Polynome bis zum Grad n exakt integrieren.

Integrations- ordnung	Koordinaten			Wichtung w	Permu- tationen	Genauigkeit n
	r	s	t			
1	1/3	1/3	1/3	1	1	1
3	1/2	0	0	1/3	3	2
3'	2/3	1/6	1/6	1/3	3	2
4	0,6	0,2	0,2	25/48	3	
	1/3	1/3	1/3	-9/16	1	

Tabelle 4.2: Integrationsregeln für Dreiecke nach Cowper (1973)

Wichtig ist die Unterscheidung der Integrationsordnungen 3 und 3'. Der kubische „Bubble“-Mode  $N_7 = 27 * r * s * t$  kann von Regel 3 nicht erfaßt werden, da alle Integrationspunkte dieser Regel auf den Elementkanten liegen. Zur exakten Integration dieses Modes müßte Regel 4 verwendet werden. Regel 3' ermöglicht in diesem Fall eine reduzierte Integration, ohne daß innere Kinematiken entstehen. Integrationsregeln, die Polynome bis zu einem Grad von  $n=20$  exakt integrieren, werden von Dunavant (1985) angegeben.

#### 4.7 Vergleich von drei- und viereckigen Finiten Elementen

Dreieckige Finite Elemente sind äußerst flexibel bei der Vernetzung von Gebieten mit komplizierter Geometrie. Sie eignen sich gleichermaßen für Gebiete mit vorherrschenden rechten oder schiefen Winkeln. Prinzipiell ist es zwar möglich, jedes beliebige Gebiet auch mit viereckigen Elementen zu vernetzen. Ein einfaches Beispiel nach Bild 4.4 zeigt jedoch, daß dabei stark verzerrte Elemente nicht zu vermeiden sind. Während es keine Probleme bereitet, ein rechteckiges Gebiet mit regelmäßigen Dreiecken zu vernetzen, entstehen im umgekehrten Fall stark verzerrte viereckige Elemente. Auch eine

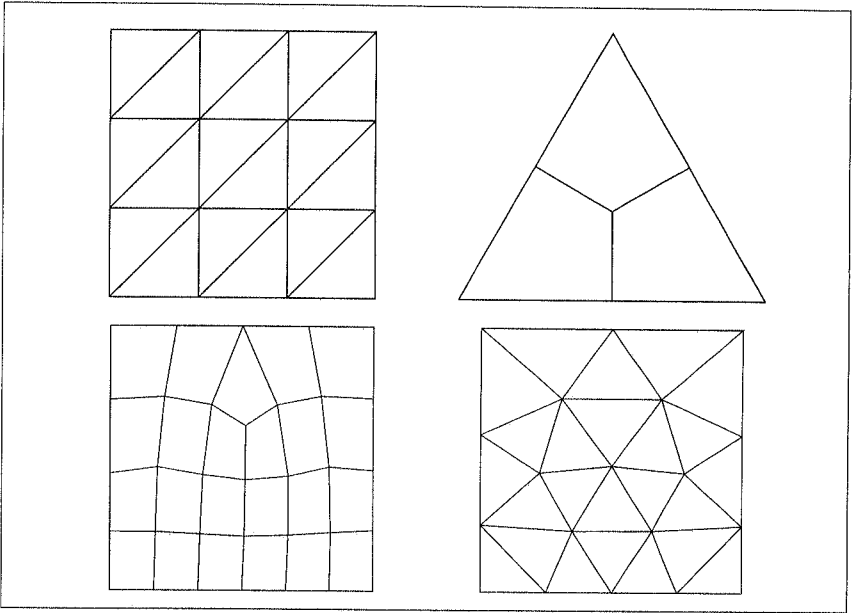


Bild 4.4: Netze mit dreieckigen und viereckigen Elementen

Veränderung der Netzdichte ist mit dreieckigen Elementen leicht durchzuführen. Mit viereckigen Elementen sind wiederum stark verzerrte Elemente unvermeidbar.

Dennoch bieten viereckige Elemente einen geometrischen Vorteil, der sich vor allem bei den im Bauwesen überwiegend vorkommenden Problemen mit rechtwinkliger Geometrie bemerkbar macht. Das Einheitsquadrat des viereckigen Elementes ist vierfach sym-

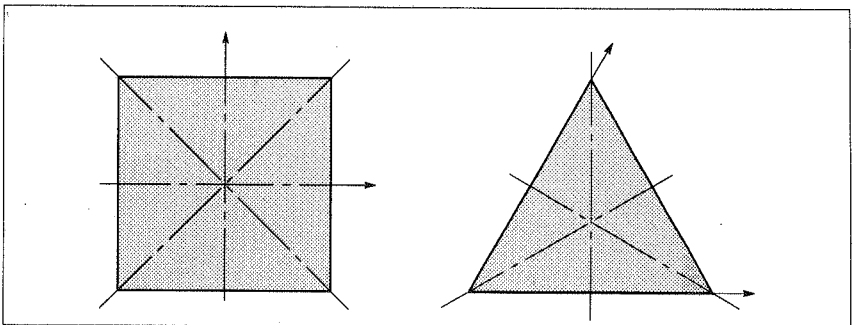


Bild 4.5: Symmetrieachsen von Drei- und Vierecken

metrisch bezüglich der Koordinatenachsen und der Diagonalen. Eine in beide Koordinatenrichtungen identische Formulierung ergibt sich beinahe zwangsläufig, und das Element kommt der in vielen Fällen sinnvollen Betrachtungsweise in orthogonalen Richtungen entgegen.

Bei der Formulierung von dreieckigen Elementen muß auf die Invarianz bezüglich einer Koordinatentransformation besonders geachtet werden. Ein Dreieck besitzt höchstens drei Symmetrieachsen, die nicht orthogonal zueinander sind. Aus diesem Grund sind die Ergebnisse von Dreieckselementen stärker von der Form des Netzes abhängig. Besonders deutlich wird dies, wenn zwei gelagerte Kanten an einer Ecke zusammenreffen. Bild 4.6 zeigt die möglichen Funktionsverläufe für zwei Dreieckselemente und ein Viereckselement. Eine doppelt gekrümmte Fläche kann mit linearen Dreieckselementen nur durch Ebenen stückweise angenähert werden. Dabei ist im Fall a) die Ansatzfunktion über der Hälfte des Gebietes identisch null. Das vierknotige Element bietet hier den Vorteil, mit derselben Anzahl von Freiheitsgraden bereits eine doppelt gekrümmte Fläche darstellen zu können.

Anhand des Pascalschen Dreiecks können die Modes miteinander verglichen werden, die bei einer dreieckigen und bei einer viereckigen Elementformulierung zur Verfügung stehen. Dreieckige Elemente besitzen vollständige Ansatzfunktionen, wodurch eine mathematische Analyse erleichtert wird. Vierknotige Elemente der Ordnung  $n$  sind bis zum Polynomgrad  $n$  ebenfalls vollständig, besitzen aber zusätzlich noch unvollständige Ansatzfunktionen bis zum Grad  $2n$ . Diese höheren Ansatzfunktionen steigern die Flexi-

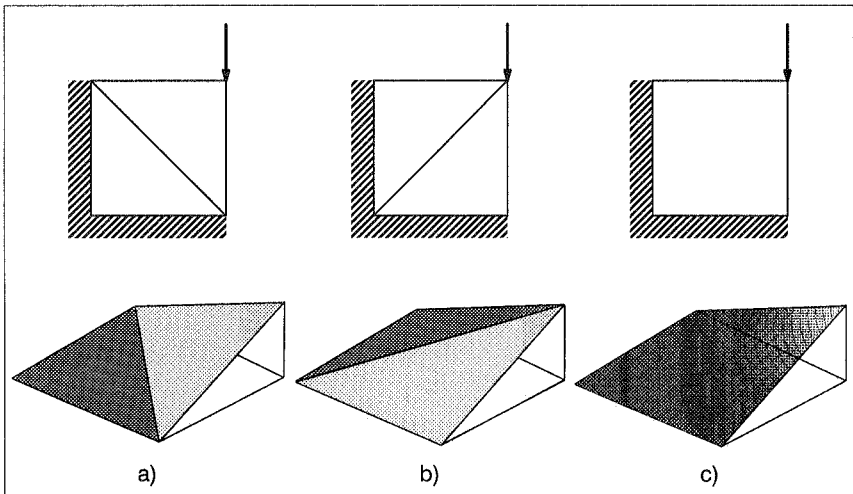


Bild 4.6: Mögliche Funktionsverläufe von drei- und viereckigen Elementen

bilität des Elementes. Sie sind aber auch für Versteifungseffekte verantwortlich, da unvollständige Verzerrungen die Elementantwort blockieren können. Methoden zur Elementverbesserung wie die „Enhanced Assumed Strain“– Methode von Simo (1990) nutzen diese Eigenschaft der vierknotigen Elemente aus, indem die Ansätze durch zusätzliche Funktionen so erweitert werden, daß sie vollständig sind. Eine ähnliche Vorgehensweise ist bei dreieckigen Scheibenelementen nicht möglich, da sie bereits über vollständige Ansätze verfügen.

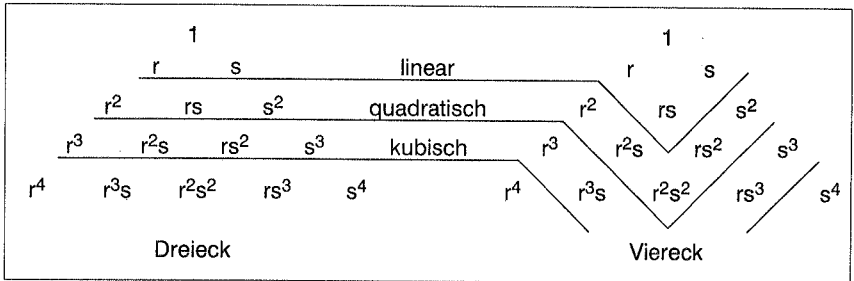


Bild 4.7: Ansatzfunktionen im Pascalschen Dreieck

## 4.8 Versteifungseffekte

Ungewollte Versteifungseffekte sind die häufigste Ursache für nicht zufriedenstellende Berechnungsergebnisse mit der Finite Elemente Methode. In der englischsprachigen Literatur wird dies als „Locking“ bezeichnet und führt dazu, daß brauchbare Ergebnisse erst mit sehr feinen Netzen erzielt werden können. Versteifungseffekte treten dann auf, wenn von der Lösung zusätzliche Nebenbedingungen wie  $\gamma = 0$  oder  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  erfüllt werden müssen, die im Raum der zur Verfügung stehenden Lösungsfunktionen nicht enthalten sind. Probleme mit Nebenbedingungen lassen sich als gemischte Methode formulieren, indem die Nebenbedingungen mit Hilfe von Lagrange–Multiplikatoren in das Funktional mit aufgenommen werden. Zur Vermeidung von Versteifungen muß diese äquivalente, gemischte Methode stabil sein, was durch die Erfüllung der Elliptizitäts– und der Babuska–Brezzi–Bedingung gewährleistet wird. Als notwendige Bedingung wird von Hughes (1987) als Maß für die Überbestimmtheit eines Problems der „Constraint Count“  $r$  eingeführt. Die Rate  $r$  bezeichnet das Verhältnis der Zahl der am System vorhandenen, globalen Freiheitsgrade  $n_{\text{DOF}}$  und der Zahl der zusätzlich zu erfüllenden Nebenbedingungen  $n_c$ :

$$r = \frac{n_{\text{DOF}}}{n_c} \quad (4.66)$$



Ist  $r$  kleiner als eins, so übersteigt die Zahl der Nebenbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade und es treten Versteifungen auf. Um „Locking“ zu vermeiden muß  $r$  deshalb unbedingt größer als eins sein. Für eine ausgeglichene Formulierung sollte  $r$  dem Verhältnis von Freiheitsgraden zu Nebenbedingungen des kontinuierlichen Problems entsprechen. Wird dieses ideale Verhältnis stark überschritten, so werden die Nebenbedingungen nur schlecht approximiert. Die Anzahl der Nebenbedingungen  $n_c$  ist bei Elementen mit numerischer Integration direkt von der verwendeten Integrationsordnung abhängig. Die Nebenbedingungen müssen diskret an jedem Integrationspunkt erfüllt sein, so daß durch eine niedrigere Integrationsordnung der „Constraint Count“ reduziert werden kann. Werden mehr Integrationspunkte verwendet als zu einer exakten Integration erforderlich, so steigt die Zahl der Nebenbedingungen nicht weiter an, da die Nebenbedingungen in diesem Fall linear abhängig werden. Auf den Elementkanten gelegene Integrationspunkte können ebenfalls zu linear abhängigen Nebenbedingungen führen, wodurch sich das Maß der Überbestimmtheit einer Elementformulierung stark reduzieren läßt. Der „Constraint Count“ ist netzabhängig und kann zur schnellen Überprüfung einer Elementformulierung verwendet werden. Die in der Strukturmechanik maßgeblichen Versteifungsmechanismen werden in den nächsten drei Kapiteln vorgestellt.

#### 4.8.1 Schubversteifung

Schubversteifungseffekte oder „Shear–Locking“ treten vor allem bei schubweichen Platten und Balken auf. Nach der Kinematik von Reissner–Mindlin setzt sich die Schubverzerrung  $\gamma$  aus Anteilen von Durchbiegung  $w$  und Rotationen  $\theta$  zusammen. Für sehr dünne Platten wird die Schubverzerrung vernachlässigbar klein. Im Grenzwert gilt für eine Plattendicke von  $h \rightarrow 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma = \lim_{h \rightarrow 0} (\nabla w + \theta) = 0 \quad (4.67)$$

Mit dieser Gleichung wird für den Grenzfall der dünnen, schubweichen Platte die Kirchhoffbedingung erzwungen, wonach Linien senkrecht zur Mittelfläche der Platte auch nach der Deformation senkrecht zu ihr bleiben. Diese Nebenbedingung kann von isoparametrischen Verschiebungselementen nicht erfüllt werden, da diese Elemente für Durchbiegung und Rotationen dieselben Ansätze verwenden. In Gleichung (4.67) treten Ableitungen unterschiedlicher Ordnung auf, so daß jeweils der höchste Polynomgrad der Rotationen blockiert wird. Bei linearen Elementen betrifft dies den Anteil linearer Rotationen. Das Element versteift vollständig, da jedes konstante Moment die Schubbedingung verletzt. Häufig wird deshalb die Fähigkeit von Elementen, konstante Momente ohne Querkräfte exakt darstellen zu können, als notwendige Bedingung für die Vermeidung von Schubversteifungen angesehen. Dieser Patchtest reiner Biegung ist in seiner Aussagekraft jedoch beschränkt, da es Elemente gibt, die trotz Erfüllung

des Patchtests ein starkes „Shear–Locking“ zeigen. Es können sogar Elemente konstruiert werden, die frei von Versteifungen sind, ohne den Patchtest zu erfüllen. Maßgebend für eine versteifungsfreie Elementformulierung ist vielmehr die Erfüllung der Elliptizitäts– und der Babuska–Brezzi–Bedingung, die als Voraussetzung einen „Constraint Count“ von  $r > 1,0$  fordert. Für das kontinuierliche Problem stehen bei Schubweichen Platten mit zwei Rotationen und einer Durchbiegung insgesamt drei unabhängige Funktionen zur Verfügung. Die Schubbedingung (4.67) schränkt die Lösung mit zwei Gleichungen ein, so daß sich als ideales Zahlenverhältnis von Freiheitsgraden zu Nebenbedingungen ein Wert von  $r = 3/2 = 1,5$  ergibt.

Schubversteifungen gefährden nicht die Konvergenz der Finite Elemente Methode. Sie führen jedoch zu einer drastischen Verschlechterung der Konvergenzrate. Der Patchtest reiner Biegung macht im Gegensatz zu Scheibenproblemen bei schubweichen Platten keine Aussage über die Konvergenz einer Elementformulierung. Seine Aussagekraft bezüglich Schubversteifungen ist begrenzt, da er keine hinreichende Bedingung für die Vermeidung von „Shear–Locking“ darstellt. Zu einer schwächeren Form der Schubversteifung kann es bei Scheibenelementen kommen, die vorwiegend auf Biegung beansprucht werden. Hier müssen als Nebenbedingung die Schubverzerrungen null werden:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \quad (4.68)$$

Elemente mit vollständigen Verzerrungsansätzen können diese Forderung problemlos erfüllen, ohne daß andere Verzerrungskomponenten beeinträchtigt werden. Im Gegensatz dazu werden bei Elementen mit unvollständigen Ansätzen  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{22}$  durch die Nebenbedingung blockiert, so daß nur der vollständige Teil der Ansätze für eine Lösung zur Verfügung steht. Bekanntes Beispiel hierfür ist das vierknotige, lineare Scheibenelement, dessen unvollständig linearen Verzerrungsanteile bei reiner Biegung blockiert werden. Die Konvergenzrate des Elementes entspricht in diesem Fall der eines Elementes mit ausschließlich konstanten Verzerrungen.

#### 4.8.2 Volumetrische Versteifung

Bei der Berechnung von Problemen mit näherungsweise inkompressiblen Materialien treten ebenfalls Versteifungseffekte auf, die als volumetrische Versteifung oder „Volumetric Locking“ bezeichnet werden. Bei Materialien mit einer Querdehnzahl von  $\nu = 0,5$  bleibt das Volumen eines elastischen Körpers unverändert. Die zugehörige Nebenbedingung für der Verschiebungen lautet:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.69)$$

Da in dieser Nebenbedingung nur Ableitungen derselben Ordnung auftreten, ist sie leichter zu erfüllen als die Schubbedingung des letzten Kapitels. Weisen die Verzerrun-

gen in allen Richtungen dieselben Ansätze auf, kann z.B. im ebenen Verzerrungszustand die Bedingung  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$  überall exakt erfüllt werden. Dies ist der Fall, wenn die Ansatzfunktionen in beiden Koordinatenrichtungen vollständig sind, wie z.B. bei dreieckigen Verschiebungselementen. Bei viereckigen Elementen werden dagegen die unvollständigen Ansätze durch Bedingung (4.69) blockiert.

Zusätzlich muß auch bei diesem Problem die Babuska–Brezzi–Bedingung eingehalten werden. Im inkompressiblen Fall kann aus der Verschiebungsmethode eine äquivalente, gemischte Methode konstruiert werden, die die Volumenkonstanz als Nebenbedingung mit dem hydrostatischen Druck als Lagrangeparameter enthält. Als leicht zu überprüfende, notwendige Bedingung dient wieder der „Constraint Count“  $r$ . In diesem Fall werden die zwei unabhängigen Verschiebungsfunktionen durch eine skalare Nebenbedingung eingeschränkt, so daß sich bei inkompressibler Elastizität für den „Constraint Count“ ein idealer Wert von  $r = 2/1 = 2,0$  ergibt.

### 4.8.3 Membranversteifung

Membranversteifungen werden in der Literatur bei weitem nicht so intensiv wie Schub- oder volumetrische Versteifungen behandelt. Das Problem wurde erstmals von Stolarski (1983) als „Membrane Locking“ bezeichnet. Der Effekt der Membranversteifung bei Schalen kann an den Verzerrungsbeziehungen einer flachen Schale nach der Theorie von Marguerre aufgezeigt werden. Die Form der flachen Schale wird durch die Funktion  $z(x_1, x_2)$ , und die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in den kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x}$  beschrieben. Für die Membranverzerrungen der flachen Schale ergeben sich nach Marguerre folgende Beziehungen:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + z_{,1}u_{3,1} \tag{4.70}$$

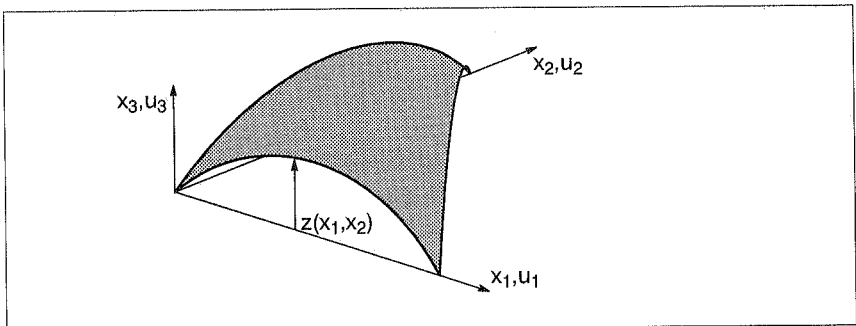


Bild 4.8: Geometrie einer flachen Schale nach Marguerre

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + z_{,2}u_{3,2} \quad (4.71)$$

$$\varepsilon_{12} = u_{2,1} + u_{1,2} + z_{,2}u_{3,1} + z_{,1}u_{3,2} \quad (4.72)$$

Schalentragwerke, die eine Belastung nur über Biegung abtragen, befinden sich in einem Zustand „dehnungsloser Verformung“. Durch die Deformation der Schale werden ausschließlich Biegemomente erzeugt, so daß die Membranverzerrungen gegen null gehen. In diesem Fall stellen die Gleichungen (4.70) – (4.72) drei Nebenbedingungen dar, die die Lösungsfunktionen stark einschränken. Stabilitätsnachweise, die dieses Problem mit Nebenbedingungen in eine gemischte Form überführen und die Einhaltung der Babuska–Brezzi–Bedingung erfüllen, sind bisher nicht bekannt. Bei diesem Problem stehen mit drei Verschiebungen und zwei Rotationen insgesamt fünf unabhängige Lösungsfunktionen zur Verfügung. Die Gleichungen (4.70) – (4.72) stellen drei Nebenbedingungen dar, so daß sich für das kontinuierliche Schalenproblem ein „Constraint Count“ von  $r = 5/3 = 1,\bar{6}$  ergibt.

Je geringer die Krümmung der Schale ist, desto geringer wird auch die Membranversteifung, d.h. mit höherer Netzauflösung wird der Versteifungseffekt reduziert. Bei Elementen mit linearer Geometrie ( $z_{,i} = \text{const.}$ ) tritt kein „Membrane Locking“ auf, da dann die Verzerrungsgleichungen aus Termen gleicher Ordnung bestehen. Schon das vierknotige, lineare Schalenelement ist jedoch wegen der bilinearen Ansätze von Membranversteifungen stark betroffen. Im Rahmen dieser Arbeit werden fast ausschließlich dreieckige Elemente mit linearer Geometrie verwendet, so daß eine Membranversteifung in der dargestellten Form ausgeschlossen werden kann.

## 5 Methoden der Elementverbesserung

Im vorherigen Kapitel wurden die Schwierigkeiten beschrieben, die bei der Formulierung von Finiten Elementen auftreten können. Sowohl Schubweiche Platten –, als auch Scheiben – und Schalenelemente sind von Versteifungseffekten betroffen, die die Konvergenz der Elemente stark beeinträchtigen. Nun sollen Verfahren erläutert werden, mit denen das Verhalten der Elemente verbessert werden kann. Viele Verfahren sind dabei gleichermaßen auf Platten – und Scheibenelemente anwendbar. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel zunächst die einzelnen Verbesserungsmethoden vorgestellt und anschließend in Kapitel 6 und 7 verschiedene Elementformulierungen behandelt.

### 5.1 Reduzierte Integration

Eine der ersten und einfachsten Methoden zur Verbesserung des Elementverhaltens ist die reduzierte Integration nach Zienkiewicz (1971). Dabei werden die Integrale zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix mit einer geringeren Integrationsordnung bestimmt, als zur exakten Integration eines unverzerrten Elementes erforderlich wäre. Dadurch können Versteifungseffekte reduziert werden, weil Teile höherer Ordnung der Steifigkeitsmatrix vernachlässigt werden.

In vielen Fällen ist dabei unvermeidbar, daß der Energieanteil eines Verzerrungsmodes völlig unberücksichtigt bleibt. Es entstehen innere Kinematiken oder „Zero Energy Modes“ (ZEM), die zu einer singulären Steifigkeitsmatrix führen und das System unlösbar machen. Da innere Kinematiken auch versteckt als sogenannte „Low Energy Modes“ oder nur bei bestimmten Randbedingungen auftreten können, müssen sie bei der Formulierung eines Elementes unbedingt ausgeschlossen werden.

Mit der selektiv reduzierten Integration nach Hughes (1977) werden nur bestimmte Verzerrungsanteile, wie z.B. Schubverzerrungen bei Plattenelementen, mit einer niedrigeren Ordnung integriert. Innere Kinematiken treten dabei seltener auf als bei voller Integration, weshalb diese Methode durchaus zu brauchbaren Lösungen führen kann.

Durch voll oder selektiv reduzierte Integration wird bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix bewußt ein Fehler begangen. Es werden Terme herausgefiltert, die das Element versteifen lassen, dabei wird die Kompatibilitätsbedingung verletzt. Die Konvergenz dieser Elemente ist im Rahmen einer Verschiebungsmethode nicht nachweisbar. Die kinematische Gebietsgleichung ist nicht als Eulergleichung in der Verschiebungsmethode enthalten, so daß ein Verschwinden des zugehörigen Fehlers bei zunehmender Netzdicke nicht gewährleistet ist. Lange Zeit wurde deswegen die reduzierte Integration als numerischer Trick angesehen, dessen Anwendung eigentlich unzulässig ist. Malkus (1978) weist nach, daß in bestimmten Fällen die reduzierte Integra-

tion äquivalent zu gemischten Methoden ist. Dann kann die variationelle Basis und die Konvergenz der Methode sichergestellt werden.

## 5.2 Hybride Spannungsmethode

Elemente nach der hybriden Spannungsmethode verwenden unabhängige Approximationen für Verschiebungen und Spannungen. Die Methode basiert auf dem modifizierten Funktional von Hellinger–Reissner und führt, wie bereits in Kapitel 3.2 erläutert, auf ein gemischtes Gleichungssystem (4.14). Um die Zahl der Unbekannten zu reduzieren werden für die Spannungen unetstetige Ansätze gewählt. Damit können die Spannungsparameter bereits auf Elementebene eliminiert werden. Diese Modifikation der Steifigkeitsmatrix kann direkt angegeben werden, indem das Gleichungssystem (4.14) für ein Element aufgestellt und nach den Spannungsparametern  $\mathbf{s}$  aufgelöst wird:

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{d} \quad (5.1)$$

$$\underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}}_{\mathbf{K}^*} \mathbf{d} = \mathbf{R} \quad (5.2)$$

Diese Gleichungen sind wie alle folgenden Gleichungen elementbezogen und bezeichnen Freiwerte, Steifigkeiten usw. eines einzelnen Finiten Elementes. An Gleichung (5.2) wird das Wesen dieser Methode deutlich. Die Steifigkeit des Systems wird über die angesetzten Spannungen (Matrix  $\mathbf{H}$ ) bestimmt, für die gezielt sinnvolle Funktionen gewählt werden. Die Matrix  $\mathbf{G}$  filtert aus den kompatiblen Verzerrungsmoden diejenigen heraus, die energieorthogonal zu den angesetzten Spannungen sind. Nur die angesetzten Spannungen leisten einen Beitrag für die Steifigkeit des Elementes, versteifende Anteile können vermieden werden. Regeln für die Wahl der Spannungsansätze werden von Andelfinger (1991) angegeben.

Im Gegensatz zu Gleichung (5.15) werden hier mit einer „Modifikation durch Multiplikation“ störende Anteile der Steifigkeitsmatrix beseitigt. Es ist jedoch nicht möglich, fehlende Anteile hinzuzufügen. Die Spannungsansätze müssen sehr sorgfältig gewählt werden, da zu viele Ansätze die Filterfunktion beeinträchtigen. Vollständige Spannungsansätze führen zu der Steifigkeitsmatrix des reinen Verschiebungselementes. Diese Tatsache wurde bereits von Fraeijs de Veubeke (1965) mit der Formulierung des „Limitation Principle“ erkannt. Die hybride Spannungsmethode wird vorwiegend bei vierknotigen Scheibenelementen, z.B. von Pian (1984) oder Di (1994), erfolgreich eingesetzt.

## 5.3 Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS)

Diese Methode wird im Englischen als „Enhanced Assumed Strain“ – Methode (EAS) bezeichnet und geht auf eine Arbeit von Simo (1990) zurück. Ausgangspunkt ist das

Funktional von Hu–Washizu, das unter Vernachlässigung der Lastterme folgende Form annimmt:

$$\Pi_{\text{HuW}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right] dV \quad (5.3)$$

Anstatt die Ansätze zu reduzieren, werden bei dieser Methode die kompatiblen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  um zusätzliche, inkompatible Anteile  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  erweitert:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_c + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} \mathbf{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.4)$$

Damit vereinfacht sich das Dreifeld–Funktional zu:

$$\Pi_{\text{HuW}}(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{L} \mathbf{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{C} (\mathbf{L} \mathbf{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \quad (5.5)$$

Um die Spannungen als dritte Variable des Funktionals zu vermeiden, werden die inkompatiblen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  so gewählt, daß sie energieorthogonal zu den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  sind:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

Wenn die Elementformulierung auf konstante Spannungen beschränkt bleibt, ist folgende Bedingung ausreichend:

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

Für eine stabile Elementformulierung müssen die erweiterten Verzerrungen linear unabhängig zu den bereits vorhandenen kompatiblen Verzerrungen sein. Ist dies nicht der Fall, so bestehen in einem Element zwei identische Verzerrungsmodes, die zu einer singulären Steifigkeitsmatrix führen. Werden in der Nachlaufberechnung die Spannungen aus den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  und  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  berechnet, so verletzen diese die Orthogonalitätsbedingung. Für eine variationell abgesicherte Spannungsberechnung kann daher eine Rückrechnung gemäß der hybriden Spannungsmethode durchgeführt werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (5.8)$$

Damit Bedingung (5.6) erfüllt ist werden die Spannungsansätze  $\mathbf{P}$  komplementär zu den Ansätzen der inkompatiblen Verzerrungen gewählt. Werden diese Forderungen von den erweiterten Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  erfüllt, so entfallen die Spannungen aus dem Funktional und es kann ein Gleichungssystem allein in Abhängigkeit der Verschiebungen und der erweiterten Verzerrungen aufgestellt werden:

$$\mathbf{D} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F}^T \mathbf{e} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{R} \quad (5.10)$$

mit:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{D} = \int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} \, dV \quad (5.12)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV \quad (5.14)$$

Wie bei der hybriden Spannungsmethode werden die Parameter  $\mathbf{e}$  bereits auf Elementebene eliminiert. Dies führt auf eine modifizierte Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F} \quad (5.15)$$

Im Unterschied zur hybriden Spannungsmethode wird hier die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix um Terme erweitert. Durch diese „Modifikation durch Addition“ werden dem Element diejenigen Modes zur Verfügung gestellt, die zu einem versteifungsfreien Verhalten fehlen. Je mehr zusätzliche Parameter gewählt werden, desto günstiger sind die Auswirkungen auf das Element, solange die oben genannten Bedingungen eingehalten sind. Allerdings steigt mit der Zahl der zusätzlichen Verzerrungsparameter auch der erforderliche Rechenaufwand, da die Matrix  $\mathbf{D}$  mit der Dimension der Anzahl der inkompatiblen Verzerrungsparameter auf Elementebene invertiert werden muß.

Nach Simo (1990) basiert die EAS–Methode auf dem Funktional von Hu–Washizu. Um Stabilität und Konvergenz der Methode mathematisch zu beweisen, greift Reddy (1992) auf Methoden zurück, die für Konvergenzbeweise von Elementen mit inkompatiblen Modes verwendet werden. Das Funktional von Hu–Washizu ist deswegen als variationelle Basis der EAS–Methode im streng mathematischen Sinn noch nicht gesichert.

Die EAS–Methode wird vor allem bei Scheiben– und Volumenelementen eingesetzt. Für die Beseitigung des Schubversteifens von Platten konnte bisher noch keine befriedigende Lösung mit der EAS–Methode gefunden werden. Das vierknotige EAS–Plattenelement von Simo (1990) versteift nach Andelfinger (1991) bei verzerter Elementgeometrie und ist deswegen nicht vollständig frei von „Shear Locking“.

## 5.4 Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS)

Die im Englischen als „Assumed Natural Strain“ (ANS) bezeichnete Methode hat sich besonders bei Platten zur Vermeidung von Schubversteifungseffekten durchgesetzt. Die Methode wurde von Hughes (1981) und Dvorkin (1984) erstmals auf vierknotige Plattenelemente angewendet. Das Wesen der Methode besteht darin, daß für die Verzerrungen ein besonderer Ansatz gewählt wird, der keine versteifende Terme enthält. Im Gegensatz zu hybriden Spannungsmethoden werden die Parameter dieses Ansatzes nicht integral mit einem Funktional bestimmt, sondern direkt durch Auswertung der



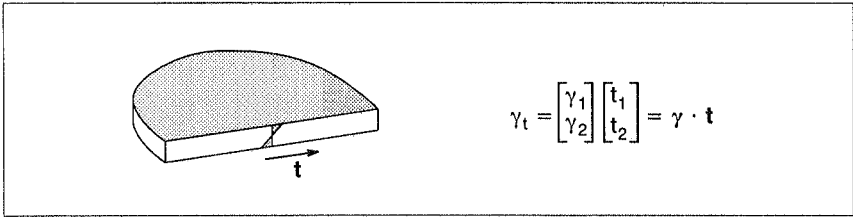


Bild 5.1: Tangentiale Schubverzerrung

Verzerrungen an Kollokationspunkten oder „Sampling Points“ gewonnen. Entscheidend ist dabei, daß mindestens ein Teil der Kollokationspunkte auf den Elementkanten zu liegen kommt. Dadurch werden die tangentialen Schubbedingungen von benachbarten Elementen entlang der gemeinsamen Kante linear abhängig und die Zahl der Nebenbedingungen des Systems wird stark reduziert. Außerdem wird auf diese Weise ein stetiger Ansatz der tangentialen Schubverzerrungen erreicht. Als tangentielle Schubverzerrung wird eine Neigung der Plattennormalen in Richtung der Elementkante bezeichnet. Sie wird durch Multiplikation des Schubverzerrungsvektors  $\gamma$  mit einem Vektor  $\mathbf{t}$  tangential zur Kante bestimmt.

Eine variationelle Basis der Methode wurde von Simo (1986) aufgestellt. Danach läßt sich auch dieses Verfahren auf das Funktional von Hu–Washizu (5.3) zurückführen. Die Verzerrungen werden nicht erweitert, sondern in einen erwünschten und in einen versteifenden Verzerrungsanteil  $\epsilon_a$  und  $\epsilon_s$  aufgeteilt:

$$\epsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} = \epsilon_a + \epsilon_s \quad (5.16)$$

Nur die erwünschten Verzerrungen  $\epsilon_a$  werden für die Bestimmung der inneren Energie eingesetzt. Damit ergibt sich ein der EAS–Methode ähnliches Funktional:

$$\Pi_{\text{HuW}}(\mathbf{u}, \epsilon, \sigma) = \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon_a^T \mathbf{C} \epsilon_a + \sigma^T \mathbf{L}\mathbf{u} - \sigma^T \epsilon_a \right) dV \quad (5.17)$$

$$= \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon_a^T \mathbf{C} \epsilon_a - \sigma^T \epsilon_s \right) dV \quad (5.18)$$

Auch hier entfallen die Spannungen, sofern sie orthogonal zu den versteifenden Verzerrungsanteilen  $\epsilon_s$  sind. Das verbleibende Funktional ist nur noch von den angenommenen Verzerrungen  $\epsilon_a$  abhängig:

$$\Pi_{\text{ANS}}(\mathbf{u}) = \int_V \epsilon_a^T \mathbf{C} \epsilon_a dV \quad (5.19)$$

Für die Verzerrungen  $\epsilon_a$  wird ein extra Ansatz  $\mathbf{A}(r,s)$  gewählt, dessen Parameter  $\alpha$  direkt über „Sampling Points“ oder Kollokationspunkte bestimmt werden:

$$\epsilon_a = \mathbf{A} \alpha \quad (5.20)$$

Der große Vorteil der Methode liegt darin, daß keine zusätzlichen Integrale berechnet werden müssen. Auch der Aufwand für die Inversion einer Matrix auf Elementebene entfällt, wodurch das Verfahren sehr effizient wird. Bei der Wahl der Ansätze der angenommenen Verzerrungen  $\epsilon_a$  müssen zwei Regeln beachtet werden. Einmal müssen konstante Verzerrungen vollständig vorhanden sein, um die Konvergenz des Elementes zu gewährleisten. Zweitens müssen die Ansätze höherer Ordnung energieorthogonal zu den konstanten Verzerrungsmodes sein, da sonst die konstanten Verzerrungszustände gestört werden und nicht mehr exakt darstellbar sind.

Variationell abgesichert ist die Methode nur, wenn die Spannungen auch wirklich orthogonal zu den versteifenden Verzerrungsanteilen sind. Nach Simo (1986) ist dies mit Hilfe einer Gram–Schmidt–Orthogonalisierung jederzeit möglich. In der Praxis wird der damit verbundene Rechenaufwand jedoch meist vermieden und die Spannungen direkt aus den angenommenen Verzerrungen bestimmt. Bei Elementen höherer Ordnung, die das ANS–Konzept zur Vermeidung von Schubversteifungen einsetzen, ist die Bestimmung der angenommenen Verzerrungsverläufe nicht mehr so einfach möglich. In diesem Fall werden aufwendige Umformungen und Matrixinversionen durchgeführt, die die Effizienz des Verfahrens herabsetzen.

## 5.5 „Freie Formulierung“

Die „Freie Formulierung“ oder „Free Formulation“ (FF) wurde von Bergan (1984) entwickelt und bisher auf Schubsteife Platten– und vor allem Scheibenelemente angewendet. Ausgangspunkt der „Freien Formulierung“ ist eine Reparametrisierung der Verschiebungen. Anstatt der Knotenwerte  $\mathbf{d}$  werden die Verschiebungen durch Modes und deren Ordinaten  $\mathbf{p}$  dargestellt. Dabei wird zwischen den Modes  $\mathbf{N}_{rc}$ , die Starrkörperbewegungen und konstante Verzerrungen enthalten, sowie den Modes  $\mathbf{N}_h$  höherer Ordnung unterschieden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{N}_{rc}\mathbf{p}_{rc} + \mathbf{N}_h\mathbf{p}_h \quad (5.21)$$

$$\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{B}_{rc}\mathbf{p}_{rc} + \mathbf{B}_h\mathbf{p}_h \quad (5.22)$$

Die Transformation von den Knotenparametern  $\mathbf{d}$  auf die modalen Parameter  $\mathbf{p}$  ist von der jeweiligen Elementformulierung abhängig und wird mit Hilfe der Transformationsmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  durchgeführt. Auch hier wird eine Unterscheidung in Modes niedriger und höherer Ordnung getroffen:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{G}_{rc}\mathbf{p}_{rc} + \mathbf{G}_h\mathbf{p}_h = \mathbf{d}_{rc} + \mathbf{d}_h \quad (5.23)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{rc} \\ \mathbf{p}_h \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{H}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{rc} \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (5.24)$$

Es bestehen folgende Beziehungen zwischen den Transformationsmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{rc}\mathbf{H}_{rc} &= \mathbf{I} & \mathbf{G}_{rc}\mathbf{H}_h &= \mathbf{0} \\
\mathbf{G}_h\mathbf{H}_h &= \mathbf{I} & \mathbf{G}_h\mathbf{H}_{rc} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{G}_{rc}\mathbf{H}_{rc} + \mathbf{G}_h\mathbf{H}_h &= \mathbf{I}
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

Diese Aufteilung ermöglicht eine getrennte Behandlung von rc- und h-Moden. Als Ziel soll die Konvergenz eines Elementes a priori gewährleistet werden, indem eine mathematische Bedingung für die Steifigkeitsmatrix aufgestellt wird. Dieser sogenannte individuelle Element Test (IET) orientiert sich an dem bekannten Patchtest nach Taylor (1986), nachdem die Konvergenz eines Elementes dann gewährleistet ist, wenn Starrkörperbewegungen und konstante Verzerrungen exakt darstellbar sind. Um eine analytische Form des Patchtests zu erhalten, betrachtet Bergan (1984) die zu den Spannungen einer Elementkante konsistenten Knotenkräfte. In einem Verschiebungszustand  $\mathbf{d}_{rc}$  konstanter Spannungen ist sowohl das globale, als auch das lokale Gleichgewicht an den Elementkanten erfüllt. Werden die Kantenspannungen durch „Lumping“ in Knotenkräfte umgerechnet, so müssen diese gleich den Knotenkräften sein, die sich direkt aus der Steifigkeitsmatrix ergeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\mathbf{d}_{rc} &= \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{B}_{rc}\mathbf{p}_{rc} \\
\mathbf{L} \dots &\text{Lumping-Matrix}
\end{aligned}
\tag{5.26}$$

Diese Gleichung entspricht einer Gleichgewichtsbedingung fiktiver Knotenkräfte, wobei die durch „Lumping“ entstehenden Knotenkräfte dem konsistenten Lastvektor einer äußeren Last  $\mathbf{C}\mathbf{B}_{rc}\mathbf{p}_{rc}$  am Elementrand entsprechen. Da diese Gleichung für jedes beliebige  $\mathbf{d}_{rc} = \mathbf{G}_{rc}\mathbf{p}_{rc}$  erfüllt sein muß, gilt:

$$\mathbf{K}\mathbf{G}_{rc} = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{B}_{rc} = \mathbf{R}_{rc}
\tag{5.27}$$

Gleichung (5.27) bildet den individuellen Element Test (IET). Ein Element, das diese Gleichung erfüllt, besteht auch den Patchtest und ist damit konvergent. Die Steifigkeitsmatrix der „Freien Formulierung“ wird nach der Verschiebungsmethode aus den kinematisch konsistenten Verzerrungen nach Gleichung (5.22) bestimmt. Damit wird auch die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_p$  in Anteile niedriger und höherer Ordnung aufgeteilt:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{prc} & \mathbf{K}_{prch} \\ \mathbf{K}_{prch}^T & \mathbf{K}_{ph} \end{bmatrix}
\tag{5.28}$$

mit:

$$\mathbf{K}_{prc} = \int_V \mathbf{B}_{rc}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{rc} \, dV = \mathbf{V} \mathbf{B}_{rc}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{rc}
\tag{5.29}$$

$$\mathbf{K}_{prch} = \int_V \mathbf{B}_{rc}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h \, dV
\tag{5.30}$$

$$\mathbf{K}_{ph} = \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h \, dV
\tag{5.31}$$

Die Steifigkeitsmatrix der rc–Modes  $\mathbf{K}_{prc}$  kann auch in Abhängigkeit von der „Lumping“–Matrix  $\mathbf{L}$  aufgestellt werden. Dies ist möglich, wenn die innere Arbeit mit Gleichung (5.26) über die Knotenkräfte bestimmt wird:

$$\begin{aligned}\Pi_{rc} &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_{rc}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{B}_{rc} \mathbf{p}_{rc} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}_{rc}^T \mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{B}_{rc} \mathbf{p}_{rc} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}_{rc}^T \mathbf{K}_{prc} \mathbf{p}_{rc}\end{aligned}\quad (5.32)$$

Aus dem Vergleich mit Gleichung (5.29) läßt sich  $\mathbf{B}_{rc}$  bestimmen:

$$\mathbf{B}_{rc}^T = \frac{1}{V} \mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{L} \quad (5.33)$$

und damit:

$$\mathbf{K}_{prc} = \frac{1}{V} \mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{L}^T \mathbf{G}_{rc} \quad (5.34)$$

Außerdem gilt:

$$\mathbf{K}_{prc} = \mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{R}_{rc} \quad (5.35)$$

Bezogen auf die Knotenparameter  $\mathbf{d}$  lautet die Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}_p \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{rc}^T & \mathbf{H}_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{prc} & \mathbf{K}_{prch} \\ \mathbf{K}_{prch}^T & \mathbf{K}_{ph} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{rc} \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Mit dieser Matrix kann durch Einsetzen in Gleichung (5.27) der individuelle Element Test durchgeführt werden. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (5.25) und (5.35) folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \mathbf{G}_{rc} &= \mathbf{H}_{rc}^T \mathbf{K}_{prc} \mathbf{H}_{rc} \mathbf{G}_{rc} + \mathbf{H}_{rc}^T \mathbf{K}_{prch} \mathbf{H}_h \mathbf{G}_{rc} + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{prch} \mathbf{H}_{rc} \mathbf{G}_{rc} + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{ph} \mathbf{H}_h \mathbf{G}_{rc} \\ &= \mathbf{H}_{rc}^T \mathbf{G}_{rc}^T \mathbf{R}_{rc} + \mathbf{0} + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{prch} + \mathbf{0} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_h^T \mathbf{G}_h^T) \mathbf{R}_{rc} + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{prch} \\ &= \mathbf{R}_{rc} + \mathbf{H}_h^T (\mathbf{K}_{prch} - \mathbf{G}_h^T \mathbf{R}_{rc})\end{aligned}\quad (5.37)$$

Ein Vergleich mit der rechten Seite des IET führt zu der Forderung, daß der Ausdruck in Klammern zu null werden muß:

$$\mathbf{K}_{prch} = \mathbf{G}_h^T \mathbf{R}_{rc} \quad (5.38)$$

Mit dieser Bedingung können geeignete h–Modes jedoch nur schwer ausgewählt werden. Besser einsetzbar sind folgende zwei Bedingungen, die ebenfalls eine Erfüllung des individuellen Element Tests gewährleisten:

$$\mathbf{K}_{prch} = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{G}_h^T \mathbf{R}_{rc} = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

Die erste Gleichung bedeutet, daß die Modes höherer und niedriger Ordnung voneinander entkoppelt sein müssen. Dies ist der Fall, wenn die beiden Modes energieortho-

nal zueinander sind, eine Forderung, die auch an die erweiterten Verzerrungen der EAS–Methode gestellt werden. Die zweite Gleichung bedeutet, daß die durch „Lumping“ entstehenden konsistenten Knotenkräfte  $\mathbf{R}_{rc} \mathbf{p}_{rc}$  orthogonal zu den Ansätzen höherer Ordnung  $\mathbf{p}_h^T \mathbf{G}_h^T$  sein müssen. Diese beiden Bedingungen sind für die Konvergenz der Methode ausreichend. Es bestehen keine weiteren Anforderungen an die Ansätze höherer Ordnung, so daß auch inkompatible Funktionen gewählt werden können.

Die „Freie Formulierung“ geht noch einen Schritt weiter, indem die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_p$  so modifiziert wird, daß an die Ansätze höherer Ordnung keinerlei Anforderungen gestellt werden müssen, und dennoch die Konvergenz der Methode durch den individuellen Element Test gewährleistet bleibt. Dazu wird die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_p$  modifiziert, ohne daß Symmetrie und Regularität der Matrix beeinträchtigt wird:

$$\bar{\mathbf{K}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{prc} & \mathbf{R}_{rc}^T \mathbf{G}_h \\ \mathbf{G}_h^T \mathbf{R}_{rc} & \mathbf{K}_{ph} + \frac{1}{V} \mathbf{G}_h^T \mathbf{LCL}^T \mathbf{G}_h \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Die Transformation auf Knotenvariable führt unter Verwendung der Gleichungen (5.34) und (5.25) auf folgende einfache Steifigkeitsmatrix:

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{V} \mathbf{LCL}^T + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{ph} \mathbf{H}_h \quad (5.42)$$

Der Übergang von Gleichung (5.41) auf (5.42) kann leicht nachvollzogen werden, indem die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}$  auf modale Parameter transformiert wird:

$$\bar{\mathbf{K}}_p = [\mathbf{G}_{rc} \ \mathbf{G}_h] \bar{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{rc} \\ \mathbf{G}_h \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Die auf Gleichung (5.42) führenden Modifikationen der Steifigkeitsmatrix erscheinen zunächst willkürlich. Sie wurden jedoch genau so gewählt, daß der individuelle Element Test von Gleichung (5.27) ohne zusätzliche Bedingung erfüllt wird:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} \mathbf{G}_{rc} &= \frac{1}{V} \mathbf{LCL}^T \mathbf{G}_{rc} + \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{ph} \mathbf{H}_h \mathbf{G}_{rc} \\ &= \mathbf{LCB}_{rc} + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{R}_{rc} \quad \checkmark \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ein Element mit einer Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (5.42) ist a priori konvergent, da es ohne weitere Bedingungen den individuellen Element Test (IET) und damit den Patchtest besteht. Die „Lumping“-Matrix muß so gebildet werden, daß die rc–Modes exakt dargestellt werden können. In der Wahl der höheren Ansatzfunktionen besteht weitgehend Freiheit, die Transformationsmatrix  $\mathbf{G}^{-1}$  muß jedoch gebildet werden können. Außerdem sollten die gewählten Ansätze invariant bezüglich einer Transformation des Koordinatensystems sein. Abgesehen davon gibt es keine Einschränkungen z.B. in Form von Orthogonalitätsbedingungen, weshalb diese Methode als „Free Formulierung“ bezeichnet wird.

Eine variationelle Basis der Methode wird von Felippa (1989b) angegeben. Danach kann die „Freie Formulierung“ als Spezialfall eines Mehrfeldfunktionals angesehen werden, das neben Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen ein zusätzliches Randverschiebungsfeld enthält. Durch Elimination von Spannungen und Verzerrungen kommt Felippa zu einer Steifigkeitsmatrix der Form:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_b + (1 - \alpha)\mathbf{K}_h \quad (5.45)$$

Die Matrizen  $\mathbf{K}_b$  und  $\mathbf{K}_h$  können leicht mit den Matrizen aus Gleichung (5.42) identifiziert werden. Der skalare Parameter  $\alpha$  ist frei wählbar und kann anhand maßgebender Testprobleme eingestellt werden. Die Existenz eines Skalierungsparameters ist immer mit Vorsicht zu betrachten, da er die Eindeutigkeit der Lösung in Frage stellt. Seine Einführung wird hier einmal damit begründet, daß die Konvergenz der Formulierung unabhängig von der höheren Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_h$  sei, und deshalb auch eine Skalierung dieser Matrix zulässig sei. Im Rahmen der Herleitung nach Felippa kann außerdem  $\alpha$  als Faktor eines parametrisierten Funktionals angesehen werden, wobei  $\alpha=1$  einem verallgemeinerten Hellinger–Reissner–Funktional, und  $\alpha=0$  einem verallgemeinerten Verschiebungsfunktional entspricht. Der Skalierungsparameter hat großen Einfluß auf das Elementverhalten. Die guten Ergebnisse der „Freien Formulierung“ sind nur erreichbar, wenn  $\alpha$  optimal eingestellt wird.

## 5.6 Funktionale mit verbesserter Spannungsapproximation

Die bisher vorgestellten Methoden haben den Nachteil, daß die Konvergenzrate der Spannungen jeweils eine Ordnung niedriger als die der Verschiebungen ist. Besonders deutlich wird dies bei der Verschiebungsmethode, bei der die Spannungen direkt durch Differentiation der Verschiebungen bestimmt werden und dadurch an Genauigkeit verlieren. Aber auch beim Hellinger–Reissner–Funktional

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int_V \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \right) dV - \\ & - \int_{A_v} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{A_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (3.29)$$

werden die Verschiebungen genauer approximiert, da sie im Funktional in abgeleiteter Form auftreten. In der Praxis sind jedoch meistens die Spannungen von größerem Interesse als die Verschiebungen. Seit 1984 ist eine ganze Reihe von Elementen für das ebene Elastizitätsproblem vorgestellt worden, die Funktionale mit einer verbesserten Spannungsapproximation verwenden. Die Elemente gehen auf Arbeiten von Arnold (1984b) und Brezzi (1985) zurück und werden in dem Buch von Brezzi (1991a) eingehend analysiert. Weitere Elementformulierungen wurden von Arnold (1984a), Stenberg (1988) und Stenberg (1993a) veröffentlicht. Diese Elemente werden überwiegend in der

mathematischen Literatur behandelt und sind deswegen in Ingenieurkreisen wenig bekannt. Rolfes (1989) untersuchte neben mathematischen Aspekten auch praktische Fragen der Implementierung und Leistungsfähigkeit von zwei Elementen dieses Typs.

### 5.6.1 Das erweiterte Funktional von Hu

Der Differentialoperator  $\mathbf{L}$  kann im Funktional von Hellinger–Reissner durch partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes von den Verschiebungen auf die Spannungen verschoben werden. Dadurch entsteht das Funktional von Hu:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Hu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int_V \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^T - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \right) dV + \\ & + \int_{A_\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}})^T \mathbf{u} dA - \int_{A_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T \bar{\mathbf{u}} dA \end{aligned} \quad (5.46)$$

Obwohl die Funktionale von Hellinger–Reissner und Hu dieselben Eulergleichungen besitzen, unterscheiden sie sich in zwei wesentlichen Punkten. Die Approximationseigenschaften von Spannungen und Verschiebungen werden ausgetauscht, da bei Hu die Spannungen in abgeleiteter Form im Funktional auftreten und die Verschiebungen unverändert bleiben. Dadurch sinken außerdem die Anforderungen an die Verschiebungsansätze. Bei Verwendung des Funktionals von Hu sind  $\mathbf{C}^{-1}$ –stetige, d.h. diskontinuierliche Verschiebungsansätze möglich. Dafür steigen die Anforderungen an die Spannungsapproximationen. Stetige Ansätze aus dem Raum  $H^1$  sind jedoch nicht erforderlich, da für ein reguläres Funktional nur die Divergenz der Spannungen quadratintegrierbar sein muß. Dieser Raum wird als  $H_{\text{div}}$  bezeichnet:

$$H_{\text{div}} = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_2 \mid \text{div } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_2 \} \quad (5.47)$$

Nach Brezzi (1991) ist es äußerst schwer, für das Funktional (5.46) Elementansätze zu finden, die die Stabilitätskriterien erfüllen. Aus diesem Grund wird das Funktional um eine zusätzliche Nebenbedingung erweitert. Die Symmetrie des Spannungstensors wurde bisher stets vorausgesetzt. Diese Bedingung, die dem Momentengleichgewicht eines differentiellen Volumens entspricht, soll nun mit einem Lagrangeparameter in das Funktional mit aufgenommen werden. Die Bedingung lautet:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5.48)$$

Als Lagrangeparameter dient die Matrix  $\boldsymbol{\omega}$ , die dem asymmetrischen Teil des Verschiebungsgradienten, d.h. den Rotationen entspricht:

$$\bar{\Pi}_{\text{Hu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}) = \Pi_{\text{Hu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \int_V \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5.49)$$

mit:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Es wird ein zusätzlicher Ansatz für  $\omega$  erforderlich, für den quadratintegrierbare Funktionen ausreichen. Neben der Gewährleistung der Stabilität bietet diese Vorgehensweise zwei weitere Vorteile. Für eine Elementformulierung ist es günstig, wenn eine gute Balance zwischen näherungsweise und exakt zu erfüllenden Gleichungen besteht. Bei Elementen mit symmetrischem Spannungstensor ist dies nicht der Fall, da das Momentengleichgewicht exakt eingehalten wird, während das Kräftegleichgewicht approximiert wird. Außerdem können aufgrund der unsymmetrischen Spannungen Ansätze aus den Raviart–Thomas–Räumen verwendet werden.

### 5.6.2 Raviart–Thomas–Räume

Wird ein Spannungsansatz aus  $H^1$  gewählt, so sind alle vier Komponenten des ebenen Spannungstensors entlang einer Elementkante stetig. Erforderlich für die Regularität des Funktionals  $\bar{\Pi}_{Hu}$  (5.49) ist jedoch nur, daß die Divergenz der Spannungen quadratintegrierbar ist, was der Definition des Raumes  $H_{div}$  entspricht. Dies bedeutet anschaulich, daß der resultierende Spannungsvektor  $\sigma n$  entlang einer Elementkante stetig ist. Damit erfüllen Spannungsansätze aus  $H_{div}$  das aus der Mechanik bekannte Schnittprinzip, nachdem die Kräfte zweier gegenüberliegender Schnittufer entgegengesetzt gleich groß sind. Die Funktionen der Raviart–Thomas–Räume sind nun genau so konstruiert, daß sie diese Bedingung mit einer möglichst geringen Zahl von Parametern erfüllen. Für einen Vektor  $\mathbf{a}$  der Dimension  $n$  ist der Raviart–Thomas–Raum der Ordnung  $k$  für dreieckige Elemente in der Form von Nedelec (1980) wie folgt definiert:

$$RT_k^n = (P_k)^n + \mathbf{x}P_k \quad (5.51)$$

mit:

$$\mathbf{x} = r\bar{\mathbf{e}}_1 + s\bar{\mathbf{e}}_2 \quad (5.52)$$

$r, s$  ... lokale Elementkoordinaten

$\bar{\mathbf{e}}_i$  ... lokale, schiefwinklige Basis

$P_k$  ... Menge aller Polynome bis zur Ordnung  $k$

Als Beispiel sind in Tabelle 5.1 die Ansätze nach Raviart–Thomas für  $n=2$  aufgeführt:

$k$	0	1
$\mathbf{a}_1$	$c_1 + c_2 r$	$c_1 + c_2 r + c_3 s + c_4 r s + c_5 r^2$
$\mathbf{a}_2$	$c_3 + c_2 s$	$c_6 + c_7 r + c_8 s + c_5 r s + c_4 s^2$

Tabelle 5.1 Ansatzfunktionen eines Vektors  $\mathbf{a}$  nach Raviart–Thomas



Diese Ansätze können auf Tensoren übertragen werden, wenn ein Vektoransatz in eine Zeile des Tensors übertragen wird. Damit ergeben sich die Spannungstensoren der Raviart–Thomas–Räume der Ordnung 0 und 1:

$$k = 0 : \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 r & c_3 + c_2 s \\ c_4 + c_5 r & c_6 + c_5 s \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$k = 1 : \sigma = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 r + c_3 s + c_4 r s + c_5 r^2 & c_6 + c_7 r + c_8 s + c_9 r s + c_4 s^2 \\ d_1 + d_2 r + d_3 s + d_4 r s + d_5 r^2 & d_6 + d_7 r + d_8 s + d_9 r s + d_4 s^2 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß mit diesen Ansätzen der Spannungsvektor an den Kanten für  $k=0$  konstant und für  $k=1$  linear verläuft. Der Spannungsverlauf im Element ist eindeutig durch die Kantenwerte festgelegt. Ein entsprechendes Vorgehen ist bei symmetrischen Spannungsansätzen mit  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  nicht möglich.

Eine weitere Möglichkeit zur Wahl unsymmetrischer Spannungsansätze bieten die nach einer Arbeit von Brezzi (1985) benannten BDM–Räume. Diese Räume setzen für jeden Spannungsterm ein vollständiges Polynom an, wodurch die Zahl der freien Parameter stark ansteigt. Zu den RT– und BDM–Räumen existiert eine umfangreiche mathematische Theorie, die in Brezzi (1991a) ausführlich behandelt wird.

### 5.6.3 Elemente nach Raviart–Thomas

Elemente nach Raviart–Thomas wurden bisher vor allem für das ebene Elastizitätsproblem entwickelt. Für die Formulierung von Elementen auf der Basis des erweiterten Funktionals von Hu und den RT–Räumen sind jedoch noch weitere Ergänzungen notwendig. Anhand des PEERS–Elementes (Plane Elasticity Element with Reduced Symmetry) soll die grundsätzliche Vorgehensweise dargestellt werden. Das Element wurde von Arnold (1984a) vorgestellt und von Stenberg (1988) eingehend untersucht.

Das Element verwendet lineare Spannungsansätze aus dem Raum  $RT_0$ . Zur Gewährleistung der Stabilität des Elementes werden die Spannungen um quadratische Ansätze erweitert, die einem „Bubble“–Mode der Verschiebungen entsprechen. Für die Rotationen wird ein stetiger, linearer Ansatz gewählt. Diese Vorgehensweise führt nach Rolfes (1989) auf ein Elementgleichungssystem der Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G}^T & -\mathbf{A} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

mit:

- $\mathbf{s}$  ... Spannungsparameter
- $\mathbf{d}$  ... Verschiebungsparameter
- $\mathbf{a}$  ... Rotationsparameter

Eine Auflösung dieses indefiniten Gleichungssystems nach den Spannungsparametern  $\mathbf{s}$  ist in der Regel nicht möglich, da die Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{A}$  nicht invertierbar sind. Statt dessen wird die Kontinuität der Spannungen aufgegeben und über einen weiteren Lagrangeparameter in das Funktional mit aufgenommen. Dieser Lagrangeparameter kann als Randverschiebung identifiziert werden und ist stetig über die Elementränder anzusetzen. Es existieren somit zwei voneinander unabhängige Verschiebungsansätze: jeweils im Innern und am Rand eines Elementes. Damit lassen sich die Parameter  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{d}$  aus dem Elementgleichungssystem eliminieren und es verbleibt ein Gleichungssystem mit den Randverschiebungen und den Rotationen als globale Unbekannte. Werden für die Rotationen diskontinuierliche Ansätze gewählt, so können auch die Rotationsparameter eliminiert werden. Übrig bleibt dann eine Steifigkeitsmatrix mit den Randverschiebungen als Unbekannte. Diese Vorgehensweise wird bei dem von Brezzi (1985) vorgeschlagenen Element angewendet, das lineare Spannungen des BDM–Raumes verwendet.

Numerische Ergebnisse, die die Leistungsfähigkeit der Elemente bei praktischen Anwendungen beweisen, werden in der mathematischen Literatur nicht angegeben. Rolles (1989) untersuchte das PEERS– sowie das oben erwähnte BDM–Element. Weitere Untersuchungen wurden von Stein (1990) und Klaas (1995) durchgeführt. Danach kann das höherwertige BDM–Element in der Leistungsfähigkeit mit dem sechsknotigen, quadratischen Verschiebungselement verglichen werden. Das PEERS–Element bietet bessere Konvergenzeigenschaften als das dreiknotige, lineare Verschiebungselement, kann jedoch die Leistung des quadratischen Elementes nicht erreichen. Angesichts des erheblichen numerischen Aufwandes ist es daher fraglich, ob die vorgestellte Formulierung eine attraktive Alternative zu herkömmlichen Methoden darstellt. Es bleibt unbefriedigend, daß die zunächst kontinuierlich eingeführten Spannungen dann doch unstetig approximiert werden, um eine Verschiebungsformulierung zu erhalten. Es werden eine ganze Reihe neuer Möglichkeiten zur Verbesserung von Elementen eingeführt, deren Auswirkungen im einzelnen noch nicht untersucht wurden. Da andere Verfahren mit geringerem Aufwand zumindest vergleichbare Ergebnisse erzielen, werden Raviart–Thomas–Elemente im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

## 5.7 Drillfreiheitsgrade

Wie in Kapitel 4.7 angedeutet, gibt es nur wenige Möglichkeiten, das Konvergenzverhalten von dreieckigen Scheibenelementen zu verbessern. Eine entscheidende Rolle kommt deswegen der Erweiterung des Elementes durch sogenannte Drillfreiheitsgrade mit einer Rotationsachse senkrecht zur Scheibenebene zu. Diese Rotation ist keine unabhängige Variable, da sie aus den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  bestimmt werden kann:

$$\beta_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) \quad (5.56)$$

Eine Möglichkeit, wie die Rotation  $\beta_3$  in ein Funktional mit aufgenommen werden kann, wurde bereits in Kapitel 5.6.1 vorgestellt. Soll ein Ansatz für die Spannungen vermieden werden, kann nach Hughes (1989) folgendes Funktional verwendet werden:

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \int_V \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\nabla^a \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega})^T \bar{\mathbf{C}}_s (\nabla^a \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \right] dV \quad (5.57)$$

mit:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_3 \\ -\beta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$\nabla^a \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (5.59)$$

Dazu wurde eine konstitutive Gleichung eingeführt, die die asymmetrischen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^a$  mit den Verschiebungen und Rotation verbindet:

$$\boldsymbol{\sigma}^a = \bar{\mathbf{C}}_s (\nabla^a \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \quad (5.60)$$

Die Verschiebungsinterpolation nach Allmann (1984) bietet eine mehr intuitiv begründete Möglichkeit, Rotationen als Freiheitsgrade von Scheibenelementen einzusetzen. Danach wird für die zu einer Elementkante normalen Verschiebungskomponente ein quadratischer oder kubischer Verlauf angenommen. Die Rotation eines Knotens wird dann aus dem Mittelwert der Neigungen der zwei angrenzenden Elementkanten bestimmt. Da die Verschiebungen höherer Ordnung nur normal zur Elementkante angesetzt werden, stehen Elemente mit Allmann-Interpolation zwischen Elementen mit linearen und quadratischen Ansätzen. Bei dreieckigen Elementen bleiben die Ansätze höherer Ordnung unvollständig, so daß mit Versteifungen zu rechnen ist.

Eine Kombination von Allmann-Interpolation und erweitertem Funktional (5.57) wurde von Ibrahimbegovic (1990) eingeführt. Eine Schlüsselrolle kommt dabei den Materialparametern der Matrix  $\bar{\mathbf{C}}_s$  zu. Hughes (1989) empfiehlt eine mit der Querdehnzahl  $\nu$  skalierte Einheitsmatrix  $\nu \mathbf{I}$ . Da die Beziehung zwischen schiefssymmetrischen Spannungen

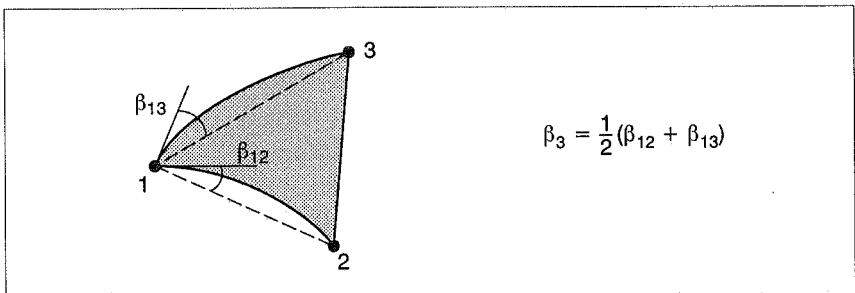


Bild 5.2: Rotation eines Eckknotens nach Allmann

und Rotationen in Gleichung (5.60) nicht eindeutig ist, kann  $\bar{\mathbf{C}}_s$  auch als Penalty–Faktor interpretiert werden, der den Einfluß der Nebenbedingung

$$\nabla^a \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

steuert. Für  $\bar{\mathbf{C}}_s = \mathbf{0}$  ergibt sich eine reine Allmann–Formulierung. Kipf (1991) untersuchte drei– bis achtknotige Elemente, die das erweiterte Funktional, die Allmann–Interpolation bzw. eine Kombination beider Verfahren verwenden. Da sich bei dreiknotigen Elementen keine Verbesserungen gegenüber der Allmann–Interpolation ergaben, wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine Erweiterung des Funktionals nach Gleichung (5.57) verzichtet.

Besonders einfach lassen sich Drillfreiheitsgrade in Elemente nach der „Freien Formulierung“ integrieren. Sie können direkt über Gleichung (5.56) an die Verschiebungen höherer Ordnung  $\mathbf{u}_h$  gekoppelt werden und erhöhen damit die Zahl der zur Verfügung stehenden Verzerrungsmodes.

## 5.8 Sonstige Verfahren

Neben den bisher vorgestellten Methoden gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, die nicht zu einer eigenständigen Methode zusammengefaßt werden können, aber dennoch eine wichtige Rolle bei der Verbesserung von Elementen spielen.

### 5.8.1 Erweiterte Rotationen

Plattenelemente werden häufig zusätzlich zu den Standardinterpolationsfunktionen um weitere Ansätze für die Rotationen erweitert. Durch die zusätzlichen Freiheitsgrade wird der Wert des „Constraint Count“ verbessert und die Neigung zu Schubversteifungen reduziert. Es können Rotationen sowohl in lokalen als auch in globalen Koordinaten verwendet werden. Insgesamt lassen sich drei verschiedene Arten des Verfahrens unterscheiden.

Vollständige Ansätze erhöhen den Polynomgrad der zur Verfügung stehenden Rotationen um eine Ordnung. Sie werden meist als Zwischenstufe bei der Herleitung eines Elementes verwendet. Die Zahl der Unbekannten wird anschließend durch Zwangsbedingungen (s. Kapitel 5.8.3) wieder reduziert.

Unvollständige Ansätze geben einem Element mehr Möglichkeiten, die verschiedenen Verzerrungszustände einander anzupassen. Die zusätzlichen Freiheitsgrade können ebenfalls durch Zwangsbedingungen eliminiert werden oder aber als globale Unbekannte die Systemgleichungen erweitern. Im zweiten Fall steigt die Zahl der Unbekannten je Element und es stehen zusätzliche Modes zur Verfügung.

Häufig werden die Rotationen um einen zusätzlichen Knoten im Zentrum des Elementes erweitert. Dieser sogenannte „Bubble“–Mode kann auf Elementebene eliminiert werden und ergänzt die Krümmungen um lineare und quadratische Anteile.

### 5.8.2 Erweiterte Verschiebungen

Genau wie die Rotationen können auch die Verschiebungen von Plattenelementen um vollständige, unvollständige oder Ansätze in Form eines „Bubble“-Modes erweitert werden. Da die Verschiebungen keinen Einfluß auf die Krümmungen haben, können sie nur zur Vermeidung von Schubversteifungen eingesetzt werden. Dazu werden die Verschiebungsansätze einen Polynomgrad höher als die Rotationen gewählt, so daß sich die Schubverzerrungen aus Termen gleicher Ordnung zusammensetzen.

Dieses Verfahren steht in engem Zusammenhang mit dem Konzept der Kirchhoff-Moden, das auf Fraeijis de Veubeke (1965) zurückgeht und von Crisfield (1986), Hughes (1981) und Tessler (1985) weiterentwickelt wurde. Danach werden die Verschiebungen genau um die Terme erweitert, die zu einer exakten Darstellung von schubfreier Biegung erforderlich sind. Weiterhin ist es möglich, diese zusätzlichen Verschiebungsmodes nicht als freie Parameter zu belassen, sondern die Verschiebungen direkt an die Rotationen zu koppeln. Dies kann leicht an einem linearen, schubweichen Balkenelement der Länge  $l=1,0$  nachvollzogen werden. Ein modifizierter Verschiebungsansatz der Form

$$\tilde{w} = w + \Delta w = w_1(1 - \xi) + w_2\xi + \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)(\xi - \xi^2) \quad (5.62)$$

$$\beta = \beta_1(1 - \xi) + \beta_2\xi \quad (5.63)$$

führt zu einer Schubverformung

$$\gamma = \tilde{w}_{,\xi} + \beta = w_2 - w_1 + \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \quad (5.64)$$

die keine linearen Anteile mehr enthält. Der zusätzliche Verschiebungsanteil  $\Delta w$  entspricht genau dem quadratischen Verlauf der Durchbiegung bei reiner Biegung:

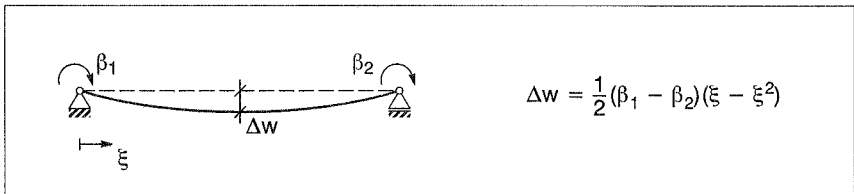


Bild 5.3: Kopplung von Durchbiegung und Rotationen

Dadurch ist der Kirchhoff-Mode exakt darstellbar, ohne daß zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden müssen. Eine derartige Kopplung von Rotationen und Verschiebungen widerspricht im Prinzip den Annahmen der Kinematik nach Reissner-Mindlin. Sie kann jedoch als Verschiebungsmethode mit quadratischem Ansatz für die Durchbiegung gedeutet werden, der durch die Bedingung  $\gamma = \text{const.}$  eliminiert wird.

### 5.8.3 Reduktion von Variablen

Im letzten Abschnitt wurde bereits eine Methode angesprochen, die meist dann angewendet wird, wenn zusätzliche Ansatzfunktionen eingeführt worden sind. Um die Zahl der Freiheitsgrade zu reduzieren oder um eine einheitliche Anzahl von Freiheitsgraden an allen Knoten zu erzielen, können diese durch Zwangsbedingungen direkt bestimmt und damit auf Elementebene eliminiert werden. Ein Beispiel hierfür ist die bereits erwähnt Schubbedingung:

$$\gamma = \text{const.} \quad (5.65)$$

Wird das Verschwinden der Schubverzerrung gefordert:

$$\gamma = \mathbf{0} \quad (5.66)$$

so kann eine ursprünglich schubweiche Reissner–Mindlin Kinematik auf eine Kinematik nach Kirchhoff ohne Schubverformungen reduziert werden. Im Prinzip stellt die Reduktion von Variablen einen wichtigen Teil der ANS–Methode dar, da die angenommenen Verzerrungen aus den kompatiblen Verzerrungen durch Gleichheitsbedingungen punktweise bestimmt werden.

### 5.8.4 Variationelle Schubbedingung

Neben punktuell zu erfüllenden Bedingungen besteht auch die Möglichkeit, Bedingungen variationell, d.h. im Mittel über das Element zu erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist die variationelle Schubbedingung, die vom Hu–Washizu–Funktional für die Schubenergie ausgeht:

$$\Pi_{S,HuW}(\mathbf{u}, \gamma, \mathbf{q}) = \int_A \left( \frac{1}{2} \gamma^T \mathbf{C}_s \gamma - \mathbf{q}^T \gamma + \mathbf{q}^T \mathbf{L}_S \mathbf{u} \right) dA \quad (5.67)$$

Das Funktional wird bezüglich der Querkräfte  $\mathbf{q}$  variiert:

$$\int_A \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{L}_S \mathbf{u} - \gamma) dA = 0 \quad (5.68)$$

Gleichung (5.68) ist die variationelle Form der kinematischen Gleichung für die Schubverzerrungen:

$$\gamma = \nabla \mathbf{w} + \boldsymbol{\theta} \quad (5.69)$$

Der  $\mathbf{B}$ –Operator der Schubverzerrungen wird in Anteile für die Durchbiegung  $\mathbf{w}$  und die Rotationen  $\boldsymbol{\beta}$  aufgeteilt. Für die vorhandenen Variablen werden die folgenden Ansätze gewählt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{N}_w \mathbf{d}_w & \mathbf{q} &= \mathbf{P} \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{N}_\beta \mathbf{d}_\beta & \gamma &= \mathbf{M} \epsilon \end{aligned} \quad (5.70)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (5.68)

$$\delta \mathbf{s}^T \int_A \mathbf{P}^T (\mathbf{M} \epsilon - \mathbf{B}_s^w \mathbf{d}_w - \mathbf{B}_s^\beta \mathbf{d}_\beta) dA = 0 \quad (5.71)$$

lassen sich die Parameter  $\mathbf{e}$  der Schubverzerrungen direkt bestimmen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{d}_w + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{d}_\beta \quad (5.72)$$

mit:

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{P}^T \mathbf{M} \, dA \quad (5.73)$$

$$\mathbf{G} = \int_A \mathbf{P}^T \mathbf{B}_s^w \, dA \quad (5.74)$$

$$\mathbf{H} = \int_A \mathbf{P}^T \mathbf{B}_s^\beta \, dA \quad (5.75)$$

Die Matrizen vereinfachen sich stark, wenn für die Schubverzerrungen und Querkräfte nur konstante Ansätze gewählt werden:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{B}_s^w \mathbf{d}_w + \mathbf{B}_s^\beta \mathbf{d}_\beta) \, dA \quad (5.76)$$

In diesem Fall werden die Schubverzerrungen im Element gemittelt und die Methode ist identisch zu einer reduzierten Integration der Schubenergie.

### 5.8.5 Gleichgewichtsbedingungen

Werden die Biegemomente eines Plattenelementes mindestens linear interpoliert, so können die Querkräfte direkt über das Momentengleichgewicht bestimmt werden:

$$\begin{aligned} q_1 &= m_{11,1} + m_{12,2} \\ q_2 &= m_{12,1} + m_{22,2} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Auf diese Weise lassen sich auch bei schubstarrten Platten Querkräfte berechnen. Diese Kräfte beruhen auf einer zweifachen Differentiation der Rotationen, was eine schlechte Konvergenz der Schubkräfte zur Folge hat. Die Methode kann auch auf schubweiche Platten angewendet werden, indem über die inverse Materialbeziehung

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{q} \quad (5.78)$$

Schubverzerrungen bestimmt werden, die einen Beitrag zur inneren Energie des Systems leisten. Schubversteifungen können damit vollständig vermieden werden, da die Schubbedingung der Reissner–Mindlin–Kinematik

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{w} + \boldsymbol{\theta} \quad (5.79)$$

nicht explizit verwendet wird. Das Problem dieses Vorgehens liegt jedoch darin, daß die Durchbiegungen  $\mathbf{w}$  keinen Anteil mehr zu der inneren Energie des Elementes liefern. Deswegen kann sie nur im Zusammenhang mit anderen Methoden, wie z.B. der „Freien Formulierung“ verwendet werden.

## 6 Dreieckige Plattenelemente

### 6.1 Verschiebungselemente

Für schubweiche Platten nach der Verschiebungsmethode werden in der Regel isoparametrische Ansatzfunktionen für die Durchbiegung  $w$  und die Rotationen  $\beta$  bzw.  $\theta$  eingesetzt. Weit verbreitet ist die Verwendung von Lagrange-Interpolationsfunktionen, mit denen leicht lineare, quadratische oder kubische Elemente mit drei, sechs bzw. zehn Knoten gebildet werden können.

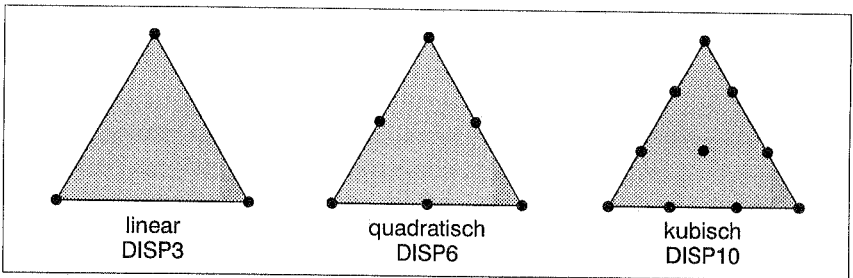


Bild 6.1: Dreieckige Elementfamilie mit Lagrangefunktionen

Die zugehörigen Ansatzfunktionen können der Literatur, z.B. Hughes (1987) entnommen werden. Die einfachste Formulierung bietet das lineare, dreiknotige Element. Die von Andelfinger (1991) eingeführte tabellarische Aufstellung der Verzerrungsmodes macht jedoch die Problematik dieses Elementes deutlich. In Tabelle 6.1 sind die zur Verfügung stehenden Verzerrungsmodes eines rechtwinkligen Dreieckselementes aufgeführt, dessen lokale  $r,s$ -Koordinaten mit den globalen  $x_1, x_2$ -Koordinaten übereinstimmen. Das Element besitzt insgesamt neun Freiheitsgrade, damit sind neun verschiedene Starrkörper- und Verzerrungsmodes darstellbar. Eine konstante Durchbiegung des Elementes nach Mode (1) erzeugt wie eine reine Verdrehung nach Mode (2)–(4) oder (3)–(7) keine Verzerrungen. Die Starrkörperbewegungen sind demnach exakt vorhanden. Konstante Schubverzerrungen können ebenfalls exakt über die Modes (2)+(4) bzw. (3)+(7) dargestellt werden. Schwierigkeiten bereiten jedoch die konstanten Biegemodes (5), (9) und (6)+(8), die jeweils mit linearen Schubverzerrungen gekoppelt sind. Ein reiner Biegezustand ohne Schubverzerrungen ist deshalb von diesem Element nicht darstellbar. Auch der „Constraint Count“  $r$  als Maß für die Überbestimmtheit macht deutlich, daß dieses Element zu starken Schubversteifungen führt. Bei einer exakten Integration mit drei Stützstellen nimmt  $r$  für ein unendlich ausgedehntes Netz nach Bild 6.2 den Wert von  $1/3$  ein und liegt damit weit unter dem zulässigen Wert von  $1,0$ .



w	1	r	s						
$\theta_1$				1	r	s			
$\theta_2$							1	r	s
$\theta_{1,1}$					1				
$\theta_{2,2}$									1
$\theta_{1,2}+\theta_{2,1}$						1		1	
$w_{,1}+\theta_1$		1		1	r	s			
$w_{,2}+\theta_2$			1				1	r	s
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

Tabelle 6.1: Verzerrungsmodes des dreiknotigen Plattenelementes

Das nächsthöhere Element der Lagrangefamilie, das sechsknotige Plattenelement, ist in der Lage, konstante Biegemomente exakt darzustellen und erfüllt damit den Patchtest reiner Biegung. Das Element verfügt über vollständig quadratische Polynome. In den insgesamt 18 Modes sind wiederum die Starrkörperbewegungen von Mode (1), (2)–(7) und (3)–(13) sowie die konstanten Schubverzerrungen (2)+(7) und (3)+(13) exakt enthalten. Die konstanten Biegemodes (8)–(4), (15)–(6) und (9)+(14)–(5) liegen exakt vor. Dies wird durch die entkoppelten Modes (4) bis (6) der Schubverzerrungen ermöglicht, die die störenden Schubanteile der Biegemodes kompensieren. Dabei ist es unwesentlich, daß die Modes (4) bis (6) nicht vollständig linear sind, da bei einem konstanten Drillmoment die Modes (9) und (14) dieselbe Größe haben, und der gekoppelte Mode (5) zur Kompensation ausreicht.

w	1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$												
$\theta_1$							1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$						
$\theta_2$													1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$
$\theta_{1,1}$								1	r	s								
$\theta_{2,2}$														1	r	s		
$\theta_{1,2}+\theta_{2,1}$									1	r	s				1	r	s	
$w_{,1}+\theta_1$		1		r	s		1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$						
$w_{,2}+\theta_2$			1		r	s							1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)

Tabelle 6.2: Verzerrungsmodes des sechsknotigen Plattenelementes

Obwohl die konstanten Biegemodes frei von Schubverzerrungen sind, treten auch bei diesem Element Schubversteifungen auf, wie leicht durch den „Constraint Count“ nachgeprüft werden kann. Zu einer exakten Integration sind mindestens sechs Stützstellen erforderlich, die zu einer hohen Zahl von Nebenbedingungen führen. Für das Netz nach Bild 6.2 ergibt sich ein „Constraint Count“  $r$  von  $1/2$ , was auf starke Versteifungseffekte schließen läßt. Dies macht deutlich, daß der Patchtest eine nur geringe Aussagekraft über das Auftreten von Schubversteifungen besitzt. Auch wenn Zustände reiner Biegung exakt dargestellt werden können, ist mit „Locking“ zu rechnen, wenn die Zahl der Nebenbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade übertrifft.

Auch durch eine weitere Erhöhung des Ansatzgrades kann bei voller Integration „Shear Locking“ nicht verhindert werden. Unter Verwendung der Integrationsregeln nach Duvant (1985) wird in Tabelle 6.3 der Wert des „Constraint Count“  $r$  für drei- und viereckige Plattenelemente bis zu einem Ansatzgrad von  $p=10$  angegeben. Trotz der hohen Zahl von Freiheitsgraden pro Element bleibt bei Dreiecken der „Constraint Count“ kleiner als eins, so daß mit Schubversteifungen zu rechnen ist. Im Gegensatz dazu erreichen Vierecke ab einem Ansatzgrad von  $p=5$  einen Wert von  $r$  größer als eins. Damit sind voll integrierte, viereckige Plattenelemente mit quintischen oder höheren Ansätzen frei von Schubversteifungen. Dieser Unterschied macht deutlich, weshalb „Shear Locking“ bei viereckigen Elementen leichter überwunden werden kann. Bei Netzen mit gleich vielen Freiheitsgraden enthält ein Dreiecksnetz doppelt so viele Elemente als ein Vierecksnetz. Da zwei Dreieckselemente zu einer exakten Integration mehr Stützstellen als ein Viereckselement benötigen, fällt der „Constraint Count“ bei Dreiecken grundsätzlich schlechter aus. Der Verlauf des „Constraint Count“ ist in Bild 6.2 für Dreiecke und Vierecke in Abhängigkeit des Elementansatzgrades  $p$  angegeben.

Ansatzgrad $p$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vorh. Polynom		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\Delta$	Gaußpunkte	3	6	12	16	24	33	42	52	70	79
	Nebenbed. $\cdot n^2$	12	24	48	64	96	132	168	208	280	316
	Freiheitsgrade $\cdot n^2$	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300
	„Constraint Count“	0,33	0,50	0,56	0,75	0,78	0,82	0,88	0,92	0,86	0,95
$\square$	Gaußpunkte	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
	Nebenbed. $\cdot n^2$	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242
	Freiheitsgrade $\cdot n^2$	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300
	„Constraint Count“	0,38	0,67	0,84	0,96	1,04	1,10	1,15	1,18	1,21	1,24

Tabelle 6.3 „Constraint Count“ für drei- und viereckige Plattenelemente bis zu einem Ansatzgrad von  $p=10$  (Netz nach Bild 6.5)

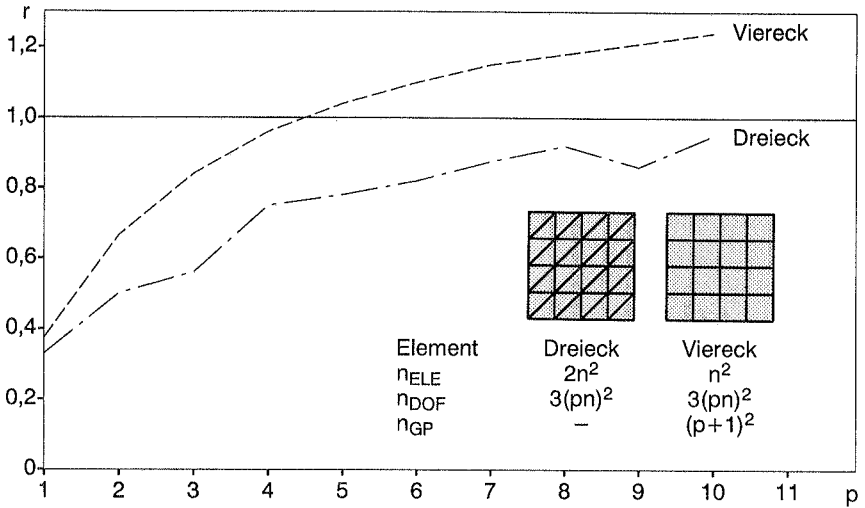


Bild 6.2: Verlauf des „Constraint Count“  $r$  in Abhängigkeit des Ansatzgrades  $p$  ( $n$  ... Anzahl der Elemente je Seite)

## 6.2 Reduziert integrierte Elemente

Die Versteifungsprobleme der Plattenelemente können durch reduzierte Integration vermindert werden. Um innere Kinematiken auszuschließen, soll zunächst überprüft werden, welche Integrationsordnungen für lineare, quadratische und kubische Verschiebungselemente zulässig sind. Ein Anhaltspunkt ist die notwendige, aber nicht hinreichende Abzählregel

$$n_{ZEM} = n_{DOF} - n_{DIM} * n_{IP} - n_R \quad (6.1)$$

mit:

- $n_{ZEM}$  ... Anzahl der inneren Kinematiken
- $n_{DOF}$  ... Anzahl der Freiheitsgrade
- $n_{DIM}$  ... Anzahl der konstitutiven Gleichungen (5)
- $n_{IP}$  ... Anzahl der Integrationspunkte
- $n_R$  ... Anzahl der Starrkörperbewegungen

Die Anzahl der zu einer exakten Integration erforderlichen Stützpunkte ergibt sich aus der höchsten vorkommenden Polynomordnung  $n_{poly}$  der Steifigkeitsmatrix. Diese Werte sind zusammen mit der durch eine Eigenwertanalyse bestimmten Anzahl der Null-Eigenwerte in Tabelle 6.4 aufgeführt. Für das kubische Dreieck sind zu einer exakten Integration von Polynomen sechster Ordnung zwölf Stützstellen erforderlich. Eine Integrationsregel mit sechs Punkten kann jedoch ebenfalls verwendet werden,

Element	$n_{\text{DOF}}$	$n_{\text{poly}}$	$n_{\text{IP,exakt}}$	$n_{\text{IP}}$	$n_{\text{ZEM}}$	Null-EW
DISP3	9	2	3	1 3	1 -9	1 0
DISP6	18	4	6	3 4	0 -5	0 0
DISP10	30	6	12	4 6 7	7 -3 -8	7 0 0

Tabelle 6.4 Integrationsordnung und Null-Eigenwerte der Verschiebungselemente

ohne daß innere Kinematiken auftreten. Für das quadratische Element sind sieben Stützstellen erforderlich, schon eine Dreipunkt-Regel führt jedoch zu einer regulären Steifigkeitsmatrix. Bei Anwendung der selektiv reduzierten Integration sind viele weitere Kombinationen möglich, deren Stabilität im Einzelfall überprüft werden muß.

Das reduziert integrierte, lineare Element ist für die Entwicklung von Elementen mit möglichst niedriger Ansatzordnung von besonderer Bedeutung. Dieses Element wurde von Batoz (1980) getestet und wegen seiner schlechten Konvergenzeigenschaften verworfen. Die vorhandenen Verzerrungsmodes des Elementes sind in Tabelle 6.5 angegeben. Die Krümmungen liegen bereits beim voll integrierten Element nur konstant vor, so daß sie durch eine reduzierte Integration unbeeinflusst bleiben. Bei den Schubverzerrungen entfallen die linearen Terme. Dadurch leistet der Mode (6)–(8) keinen Energieanteil mehr und wird zum „Zero Energy Mode“. Das Element besitzt also eine innere Kinematik, die jedoch schon bei Systemen aus zwei Elementen nicht mehr auftritt. Schwerwiegender als dieser Defekt ist die Tatsache, daß das Element trotz der nach Tabelle 6.5 ungestörten konstanten Krümmungen einen Zustand reiner Biegung nicht

w	1	r	s					
$\theta_1$				1	r	s		
$\theta_2$							1	r s
$\theta_{1,1}$					1			
$\theta_{2,2}$								1
$\theta_{1,2} + \theta_{2,1}$						1		1
$w_{,1} + \theta_1$		1		1				
$w_{,2} + \theta_2$			1				1	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8) (9)

Tabelle 6.5 Verzerrungsmodes des reduziert integrierten, dreiknotigen Elementes

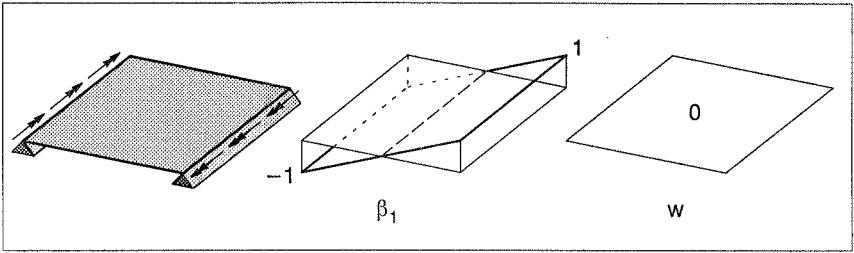


Bild 6.3: Erwartete Lösung linearer Plattenelemente bei reiner Biegung  
 ( $\kappa = \text{const.}, \gamma = 0$ )

exakt darstellen kann, da der Integrationspunkt nicht im Nulldurchgang eines linearen Rotationsmodes liegt. Die Tabellen der Verzerrungsmodes wurden von Andelfinger (1991) für viereckige Elemente aufgestellt und gelten nur, solange die Elemente unverzerrt sind. Sie sind auf Dreiecke nur eingeschränkt anwendbar, wie am Beispiel einer gelenkig gelagerten Platte unter reiner Biegebelastung anschaulich dargestellt werden kann. In Bild 6.3 ist das System und die für ein lineares Plattenelement erwartete Lösung angegeben.

Beim vierknotigen Element geht die Nulllinie der Rotationen genau durch den Schwerpunkt des Elementes, so daß durch eine Einpunkt-Integration die linearen Anteile der Rotationen entfallen und die Biege- von den Schubverzerrungen entkoppelt werden. Bei dreieckigen Elementen ist dies jedoch nicht der Fall, da nach Bild 6.4 der Schwerpunkt eines Dreiecks in der Regel nicht auf der Nulllinie der Rotationen zu liegen kommt. Allgemein kann das reduziert integrierte, lineare Dreieck nur die Momente exakt darstellen, deren Richtung parallel zu einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks verläuft. Das Beispiel einer quadratischen Platte in Bild 6.4 zeigt, daß dies nur in Ausnahmen der Fall ist. Da die Seitenhalbierenden eines Dreiecks praktisch nie orthogonal zueinander sind, ist die exakte Darstellung eines biaxialen Krümmungszustandes mit zwei zueinander orthogonalen Hauptdehnungsrichtungen prinzipiell ausgeschlossen. Diese Überlegungen sind für beliebige Plattensysteme gültig, da sich bei reiner Biegung durch Abzug der Starrkörperbewegungen immer ein Verlauf der Rotationen nach Bild 6.3 konstruieren läßt. Mit einem Wert von 0,75 deutet auch der „Constraint Count“ darauf hin, daß das reduziert integrierte, lineare Element nicht frei von „Shear Locking“ ist.

Die reduzierte Integration der Schubenergie, die bei viereckigen Elementen zu einer entscheidenden Verbesserung führt, kann deshalb bei dreieckigen, linearen Elementen nicht mit vergleichbarem Erfolg eingesetzt werden. Die Methode führt zu einer inneren Kinematik, außerdem können Schubversteifungen nicht vermieden werden. Eine hybride Spannungsmethode mit einem konstanten Ansatz für die Querkräfte filtert aus den

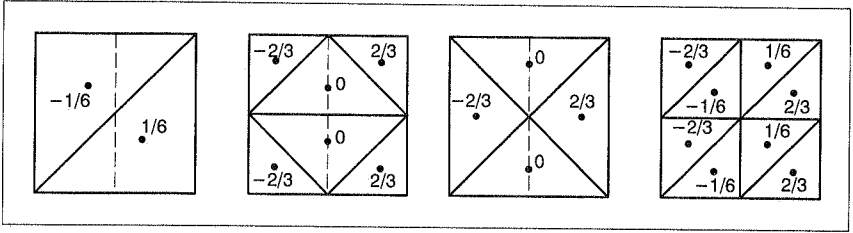


Bild 6.4: Werte der Schubverzerrungen des reduziert integrierten Dreiecks bei verschiedenen Netzeinteilungen

kompatiblen Verzerrungen genau dieselben Anteile wie eine reduzierte Integration heraus. Das Schubversteifen des dreiknotigen Elementes läßt sich deswegen auch mit einer hybriden Spannungsmethode dieser Art nicht verhindern.

Beim sechsknotigen Plattenelement kann dagegen das Problem der Schubversteifungen durch reduzierte Integration vollständig gelöst werden. Eine Integrationsregel mit drei Stützstellen reduziert die Zahl der Nebenbedingungen soweit, daß der „Constraint Count“  $r$  einen Wert von  $1,3$  einnimmt. Damit ist die Zahl der Freiheitsgrade größer als die Zahl der Nebenbedingungen und es kann sich eine sinnvolle Lösung einstellen. Wichtig ist dabei, daß die Integrationsregel 3 mit Stützstellen in den Seitenmitten verwendet wird. Dadurch werden die Schubbedingungen zweier benachbarter Elemente linear abhängig und die Zahl der Nebenbedingungen wird weiter reduziert. Schon eine Integration nach Regel 3' mit Stützstellen im Innern des Elementes führt zu einer Rate von  $r = 1,0$  und damit zu Schubversteifungen. In Bild 6.5 ist der „Constraint Count“  $r$  für Verschiebungselemente mit unterschiedlicher Integrationsordnung zusammengefaßt. Zur Bestimmung von  $r$  wird ein Netz mit rechtwinkligen Elementen verwendet, das zu denselben Werten wie ein regelmäßiges Netz aus gleichseitigen Dreiecken führt.

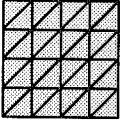
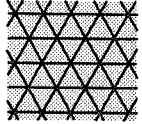
Element	Integration	$n_{\text{DOF}}$	$n_c$	$r$	
DISP3	1	$3n^2$	$4n^2$	0,75	 
DISP3	3	$3n^2$	$9n^2$	0,33	
DISP3	3'	$3n^2$	$12n^2$	0,25	
DISP6	3	$12n^2$	$9n^2$	1,33	$n_{\text{ele}} = 2n^2 \rightarrow 2n^2$ $n_{\text{eck}} = (n + 1)^2 \rightarrow n^2$ $n_{\text{kant}} = 3n^2 + 2n \rightarrow 3n^2$
DISP6	3'	$12n^2$	$12n^2$	1,00	
DISP6	4	$12n^2$	$16n^2$	0,75	
DISP6	6	$12n^2$	$24n^2$	0,50	

Bild 6.5: „Constraint Count“  $r$  für Verschiebungselemente mit unterschiedlicher Integrationsordnung nach Tabelle 4.2 ( $n$  ... Anzahl der Element je Seite)

### 6.3 EAS–Methode für dreiknotige Elemente

Die Modifikation des Querschubanteils von vierknotigen Plattenelementen mit der EAS–Methode wurde von Simo (1990) durchgeführt. Schubversteifungen können damit nach Andelfinger (1991) jedoch nur bei unverzerrter Geometrie vermieden werden. Die Anwendung der EAS–Methode auf dreieckige Plattenelemente erscheint zunächst vielversprechend, da im Gegensatz zu vierknotigen Elementen die lokalen, erweiterten Verzerrungen exakt auf globale Koordinaten transformiert werden können:

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}_r \mathbf{e} \quad (6.2)$$

mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{21}^2 & 2J_{11}J_{21} \\ J_{12}^2 & J_{22}^2 & 2J_{12}J_{22} \\ J_{11}J_{12} & J_{21}J_{22} & J_{21}J_{12} + J_{11}J_{22} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Die Terme  $J_{ij}$  der Jakobimatrix werden nach Gleichung (4.64) bestimmt und sind konstant. Bei vierknotigen Elementen wird ebenfalls eine konstante Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_0$  verwendet, die im Elementschwerpunkt bestimmt wird. Dies ist erforderlich, um konstante Verzerrungszustände exakt darstellen zu können. Die wirkliche Geometrie des Elementes wird damit jedoch nur näherungsweise berücksichtigt.

Da sowohl Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  als auch die Parameter  $\mathbf{e}$  konstant sind, lautet die Orthogonalitätsbedingung (5.6):

$$\int_{\Delta} \mathbf{M}_r \, dr ds = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, müssen die einzelnen Verzerrungsansätze jeweils für sich den Mittelwert null aufweisen. Für eine Erweiterung der Schubverzerrungen wird zunächst ein vollständig linearer Ansatz so gewählt, daß sich analog zur EAS–Formulierung des vierknotigen Scheibenelementes reine Verzerrungsmodes einstellen können:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} r & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & s \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Diese Funktionen sind beim voll integrierten, linearen Verschiebungselement bereits vorhanden, jedoch mit Krümmungen gekoppelt. Da sie nun dem Element auch entkoppelt zur Verfügung gestellt werden, können sich theoretisch nach Tabelle 6.6 zusammen mit den Modes (5)+(10) und (9)+(13) reine Biegezustände einstellen.

Die gewählten Ansätze sind linear unabhängig zu den kompatiblen Verzerrungsmodes und erfüllen damit eine notwendige Bedingung für die Stabilität der EAS–Methode. Die Orthogonalitätsbedingung wird jedoch verletzt, da im Gegensatz zu viereckigen Ele-

w	1	r	s										
$\theta_1$				1	r	s							
$\theta_2$							1	r	s				
$\theta_{1,1}$					1								
$\theta_{2,2}$									1				
$\theta_{1,2} + \theta_{2,1}$						1		1					
$w_{,1} + \theta_1$		1		1	r	s				r	s		
$w_{,2} + \theta_2$			1				1	r	s			r	s
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)

Tabelle 6.6 Verzerrungsmodes des dreiknotigen Plattenelementes mit erweiterten Verzerrungen (10) – (13)

menten lineare Funktionen über einem Dreieck im Mittel nicht den Wert null haben. Aus diesem Grund wird ein modifizierter Verzerrungsansatz gewählt:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} r - 1/3 & s - 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r - 1/3 & s - 1/3 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Orthogonalitätsbedingung (6.4). Die Ergebnisse dieses EAS4-Plattenelementes sind jedoch enttäuschend. Auch dieses Element ist nicht in der Lage, einen reinen Biegezustand exakt darzustellen. Im Beispiel nach Bild 6.3 erzielt das Element genau dieselben Ergebnisse wie das reduziert integrierte, lineare Verschiebungselement. Sowohl reduzierte Integration als auch EAS-Methode führen zu einer über das Element gemittelten Schubverzerrung, die im Fall reiner Biegung falsche Ergebnisse liefert. Der ursprüngliche Ansatz (6.5) ist variationell inkonsistent und führt darüberhinaus zu schlechteren Ergebnissen als (6.6). Als weitere Möglichkeit bietet sich ein quadratischer Ansatz für die inkompatiblen Verzerrungen an:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} r - \frac{1}{3} & s - \frac{1}{3} & r^2 - \frac{1}{6} & rs - \frac{1}{12} & s^2 - \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r - \frac{1}{3} & s - \frac{1}{3} & r^2 - \frac{1}{6} & rs - \frac{1}{12} & s^2 - \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Zur Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung wurden hier die quadratischen Terme bereits modifiziert. Trotz des hohen Aufwandes mit zehn zusätzlichen Unbekannten ist auch mit diesem Ansatz keine wesentliche Verbesserung feststellbar. Theoretisch käme auch eine Modifikation der Krümmungen mit der EAS-Methode in Betracht. Dies ist jedoch nicht sinnvoll, da die kompatiblen Krümmungen nur konstant vorliegen und die Orthogonalitätsbedingung (5.6) automatisch zu einer Entkopplung von kompatiblen und erweiterten Verzerrungen ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  in Gleichung (5.15)) führt. Damit bleibt die Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes unverändert. Außerdem wären von quadratischen Ansätzen keine bessere Lösung eines Problems mit konstanter Krümmung zu erwarten.



i	$N_i$	$N_{i,r}$	$N_{i,s}$
4	rt	t-r	-r
5	rs	s	r
6	st	-s	t-s

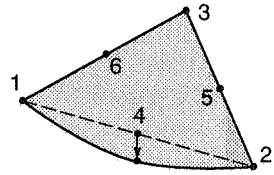


Tabelle 6.7 Ansatzfunktionen der Seitenmitten

Nach reduzierter Integration und hybrider Spannungsmethode scheint auch die EAS-Methode bei der Lösung des „Shear-Locking“-Problems von Dreiecken zu versagen. In Anlehnung an die in Kapitel 6.5 behandelten Elemente mit erweiterten Verschiebungen läßt sich jedoch ein EAS-Element konstruieren, das reine Biegezustände exakt darstellen kann, dabei jedoch variationell inkonsistent bleibt. Elemente mit erweiterten Verschiebungen verwenden häufig quadratische Modes der Seitenmitten, die mit Ableitungen in Tabelle 6.7 dargestellt sind. Daraus kann ein EAS-Ansatz für die Schubverzerrungen konstruiert werden:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} t-r & s & -s \\ -r & r & t-s \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Dieser Ansatz mit drei freien Parametern ist nur unvollständig linear und variationell inkonsistent, da die Verzerrungsmodes die Orthogonalitätsbedingung nicht erfüllen. Die Schubverzerrungen in r- und s-Richtung sind miteinander gekoppelt, der Ansatz ist jedoch invariant bezüglich einer Drehung des Koordinatensystems. Die Verzerrungsansätze bieten dem Element genau die Modes an, die zu einer Darstellung reiner Biegung benötigt werden. Das Element EAS3 mit den Ansätzen (6.8) erfüllt deswegen als einziges Plattenelement nach der EAS-Methode den Patchtest für reine Biegung. Da die Orthogonalitätsbedingung nicht erfüllt wird, ist die Konvergenz des Elementes jedoch nicht nachweisbar. Ein modifizierter Ansatz

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} t-r & s-1/3 & 1/3-s \\ 1/3-r & r-1/3 & t-s \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

erfüllt zwar die Orthogonalitätsbedingung, führt jedoch zu einem Element, das wiederum keine reine Biegezustände darstellen kann. Auch Schubversteifungen können von dem Element EAS3 nicht vermieden werden. Durch die EAS-Modes erhöht sich zwar die Zahl der Freiheitsgrade je Element um drei, insgesamt erreicht der „Constraint Count“ dieses Elementes aber nur den Wert 1,0. Die Lösungen der in diesem Kapitel behandelten Elemente sind für einen Kragarm mit Randmoment in Bild 6.6 zusammengestellt.

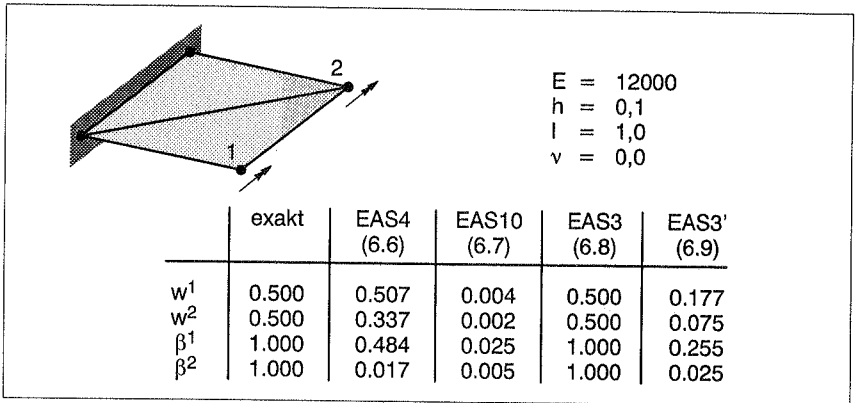


Bild 6.6: Kragarm mit Randmoment, Ergebnisse der EAS-Elemente

## 6.4 ANS-Methode für dreiknotige Elemente

Zur Vermeidung des „Shear-Locking“ von viereckigen Plattenelementen wird fast ausschließlich die ANS-Methode eingesetzt. In der Implementierung von Dvorkin (1984) werden die Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  in lokalen Koordinaten unvollständig linear angesetzt:

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_r \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-s & 1+s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-r & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

mit:

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_r \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \gamma \quad (6.11)$$

Zur Bestimmung der Parameter  $\alpha_i$  werden die tangentialen Komponenten der aus der Kinematikbedingung (4.36) gewonnenen Schubverzerrungen mit den angenommenen Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  in den vier „Sampling“- oder Kollokationspunkten A–D gleichgesetzt. Auf diese Weise werden versteifende Schubterme vollständig vermieden und vor allem die Zahl der Nebenbedingungen wesentlich reduziert. Da nur die tangentialen Komponenten der Schubverzerrungen berücksichtigt werden, verringert sich die Zahl der Schubbedingungen von acht auf vier. Außerdem sind die Schubbedingungen benachbarter Elemente linear abhängig, so daß insgesamt nur eine Nebenbedingung je Kante besteht und der „Constraint Count“ des vierknotigen ANS-Elementes den idealen Wert von  $r = 1,5$  einnimmt.

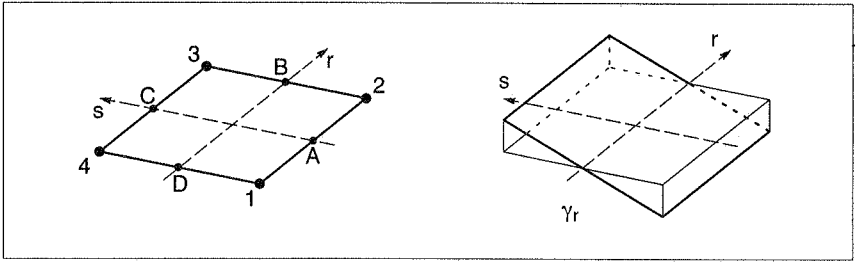


Bild 6.7: Kollokationspunkte und Ansatzfunktion des vierknotigen ANS-Elementes

Eine Übertragung dieser Methode auf dreieckige Elemente ist nicht direkt möglich. Bei drei Kollokationspunkten in den Seitenmitten steht neben zwei konstanten Verzerrungsmoden ein linearer Mode zur Verfügung, so daß unvollständig lineare Ansätze entstehen. Eine dem viereckigen Element ähnlicher Ansatz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - s & -(r + s) & 0 \\ 0 & r + s & 1 - r \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

führt zu Schubverzerrungen, deren tangentiale Komponente an jeweils einer Elementkante konstant, an den anderen Kanten jedoch gleich null wird. Konstante Verzerrungszustände sind damit jedoch nicht darstellbar. Zu besseren Ergebnissen führt ein Schubverzerrungsansatz, der auch für das TLQL-Element nach Kapitel 6.8 verwendet wird:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & -r & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Dieser Ansatz enthält die beiden konstanten Moden exakt. Der lineare Mode ist so gewählt, daß die tangentialen Schubverzerrungen an jeder Elementkante konstant und außerdem stetig zwischen zwei benachbarten Elementen sind. Durch diese Eigenschaft sind Raviart-Thomas-Räume definiert. Im Vergleich zu dem Vektoransatz nach Raviart-Thomas in Kapitel 5.6.2 sind hier jedoch die tangentialen und nicht die normalen Vektorkomponenten kontinuierlich, so daß es sich bei dem Ansatz nach Gleichung (6.13) um ein Element des rotierten Raviart-Thomas-Raumes  $RT_0^2$  der Ordnung null handelt. Mit diesem Ansatz ist das ANS-Element in der Lage, konstante Momente exakt darzustellen. Damit besteht das Element den Patchtest für reine Biegung. Auch dieses Element ist jedoch nicht vollständig frei von Schubversteifungen. Durch die größere Anzahl von Elementkanten bei dreieckigen Netzen verschlechtert sich im Vergleich zum vierknotigen ANS-Element der „Constraint Count“, der hier nur einen Wert von  $r = 1,0$  erreicht. Eine vergleichbare Elementformulierung wurde von Boisse (1992) vorgestellt, die ebenfalls Schubversteifungen zeigt.

## 6.5 Plattenelemente mit erweiterten Verschiebungen

Ansätze gleicher Polynomordnung für Verschiebungen und Rotationen führen zwangsläufig zu Schubversteifungen, da sich die Schubverzerrungen aus Funktionen unterschiedlichen Polynomgrades zusammensetzen und die Bedingung

$$\gamma = \nabla w + \theta = 0 \quad (6.14)$$

nicht mehr erfüllt werden kann. Wenn jedoch der Ansatzgrad der Durchbiegung  $w$  um einen Polynomgrad höher als der der Rotationen gewählt wird, treten in Gleichung (6.14) nur Polynome derselben Ordnung auf. Dies entspricht der Vorgehensweise des Kirchhoffmode-Konzeptes (KM), auf dessen Basis Hughes (1981b) eine Familie anisoparametrischer Elemente vorstellt. Das KM-Element niedrigster Ordnung dieser Familie verwendet lineare Ansätze für die Rotationen und quadratische Ansätze für die Verschiebungen. Durch Differentiation der Verschiebungsansätze entstehen vollständig lineare Terme, die in Gleichung (6.14) die linearen Funktionen der Rotationen kompensieren. Das Element besteht deswegen ohne weitere Maßnahmen den Patchtest reiner Biegung. Die drei zusätzlichen Freiheitsgrade sind jedoch nicht in der Lage, den Grad der Überbestimmtheit entscheidend zu verbessern. Die Schubbedingungen der drei Integrationspunkte sind weiterhin dominierend, so daß das KM-Element nur einen „Constraint Count“ von  $r = 2/3$  erreicht.

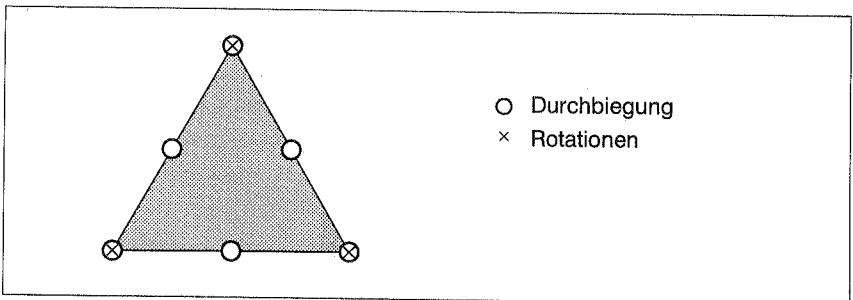


Bild 6.8: Freiheitsgrade des KM-Elementes (Kirchhoff-Mode)

Ein weiterer Nachteil des KM-Elementes ist die unterschiedliche Anzahl von Freiheitsgraden je Knoten. Es kann schlecht mit anderen Elementen gekoppelt werden und die Implementierung in bestehende Programme ist aufwendig, da Lagerbedingungen und Belastung angepaßt werden müssen. Daher gibt es verschiedene Versuche, die Verschiebungsfreiheitsgrade der Seitenmitten zu kondensieren, um ein Element mit nur drei Knoten zu erhalten.

Die Verschiebungen des KM-Elementes werden mit quadratischen Funktionen  $C^0$ -kontinuierlich approximiert. Wird die Kopplung der Mittelknoten zweier benachbarter Elemente gelöst, so können diese Freiheitsgrade auf Elementebene eliminiert werden. Die Verschiebungen werden dann nur noch  $C^{-1}$ -kontinuierlich, d.h. unstetig angesetzt. Die zugehörigen Verzerrungsmodes wurden in Gleichung (6.8) bereits angegeben, das Element wird damit identisch zu dem in Kapitel 6.3 vorgestellten EAS3-Element. Diskontinuierliche Verschiebungsansätze sind aber variationell nicht abgesichert, werden jedoch z.B. beim viereckigen Scheibenelement von Taylor (1976) erfolgreich eingesetzt. Eine variationelle Basis des inkompatiblen Scheibenelementes konnte von Simo (1990) über die Identität mit der EAS-Methode aufgestellt werden. Ein vergleichbares Vorgehen ist hier nicht möglich, da das EAS3-Element ebenfalls variationell inkonsistent ist, wie in Kapitel 6.3 gezeigt wurde.

Eine andere Möglichkeit zur Elimination des Mittelknotens stellt eine Kopplung mit den Rotationen in den Eckknoten dar, wie sie in Kapitel 5.8.2 am Beispiel des schubweichen Balkens vorgestellt wurde. Das Verfahren läßt sich direkt auf Plattenelemente übertragen, indem die Mittendurchbiegung mit der zur Elementkante normalen Rotationskomponente verknüpft wird. Diese Methode wird in Kapitel 6.6 am Beispiel des XU-Elementes erläutert und wurde für dreieckige Plattenelemente erstmals von Tessler (1985) eingesetzt. Die Verschiebungsansätze bleiben dabei kompatibel, da die Rotationen  $C^0$ -kontinuierlich sind und für zwei benachbarte Elemente zu denselben Kopplungstermen entlang der gemeinsamen Elementkante führen. Nach Kapitel 5.8.2 wird die Eliminierung der Mittelknoten durch die Bedingung konstanter, tangentialer Schubverzerrungen erreicht. Dieselbe Bedingung erfüllt auch der Schubansatz des ANS-Elementes, weshalb das ANS-Element und das Element nach Tessler (1985) zu einer identischen Elementformulierung führen. Es sei erwähnt, daß Verwoerd (1990) dasselbe Vorgehen zur Verbesserung des sechsknotigen Plattenelementes einsetzt. Dabei werden die Verschiebungen durch kubische Terme erweitert, um einen rein linearen Verlauf der tangentialen Schubverzerrungen zu erreichen.

Die vorgestellten Elemente EAS3 bzw. KM und ANS bzw. Tessler erfüllen jeweils den Patchtest reiner Biegung, zeigen bei dünnen Platten jedoch noch starkes „Shear-Locking“. Ursache ist die Überbestimmtheit der Elemente, die sich in einem „Constraint Count“ von  $r < 1,0$  ausdrückt. Für eine versteifungsfreie Elementformulierung ist es deswegen erforderlich, die Zahl der Freiheitsgrade weiter zu erhöhen oder die Zahl der Nebenbedingungen zu reduzieren. Beide Möglichkeiten werden von dem im nächsten Kapitel vorgestellten XU-Element genutzt.

## 6.6 Das XU–Element

Das erste schubweiche, dreieckige Plattenelement mit neun Freiheitsgraden, das keine Versteifungseffekte aufweist, wurde von Xu (1986) vorgestellt. Seitdem wurde das Element von Auricchio (1991), Xu (1992) und Taylor (1993) erneut aufgegriffen und analysiert. Ausgangspunkt des Elementes ist das anisoparametrische KM–Element. Wie bei Tessler werden die Seitenmittenknoten eliminiert und zusätzlich eine variationelle Schubbedingung nach Kapitel 5.8.4 eingeführt. Außerdem wird das Element um zwei Rotationsfreiheitsgrade im Schwerpunkt erweitert.

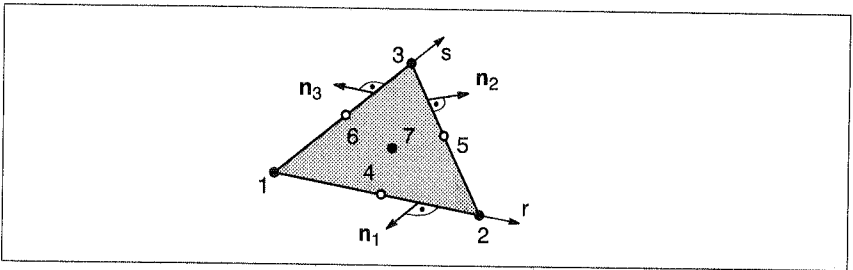


Bild 6.9: Geometrie des XU–Elementes

Der Ansatz der Durchbiegung  $w(r,s)$  enthält neben der linearen Standardinterpolation Anteile der Rotationen, so daß sich insgesamt folgende Ansätze ergeben:

$$w(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i w^i - \sum_{k=1}^3 N_{k+3} \bar{\beta}_n^k l^k \quad (6.15)$$

$$\beta(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i \beta^i + N_7 \beta^7 \quad (6.16)$$

mit:

$$l^k \dots \text{Länge der Kante mit dem Startknoten } k \quad (6.17)$$

Der Mittelwert der Rotationen  $\bar{\beta}_n^k$  um den Normalenvektor  $\mathbf{n}_k$  beträgt:

$$\bar{\beta}_n^k = \frac{1}{2} \mathbf{n}_k (\beta^k - \beta^{k-1}) \quad \text{mit: } k = 1 \dots 3, \quad \beta^0 = \beta^3 \quad (6.18)$$

Die Ansatzfunktionen  $N_{1-3}$  sind die üblichen linearen Funktionen, während es sich bei den Funktionen  $N_{4-6}$  um quadratische Lagrangefunktionen der Seitenmittenknoten und bei  $N_7$  um einen Anteil eines kubischen Ansatzes für den Mittelknotens handelt:

$$\begin{array}{lll} N_1 = 1 - r - s = t & N_4 = tr & N_7 = rst \\ N_2 = r & N_5 = rs & \\ N_3 = s & N_6 = ts & \end{array}$$

Durch den kubischen „Bubble“-Mode der Rotationen werden dem bisher konstanten Momentenverlauf lineare und quadratische Terme hinzugefügt, während die Schubverzerrungen um einen kubischen Anteil erweitert werden. Eine systematische Ergänzung der Verzerrungsmodes wird damit jedoch nicht erreicht. Mit diesen Ansätzen kann auf herkömmliche Weise der B-Operator der Krümmungen  $\mathbf{B}_M$  aufgestellt werden. Es wird eine variationelle Schubbedingung mit konstanten Ansätzen für Schubverzerrungen und Querkräfte so gewählt, daß sich  $\gamma$  nach Gleichung (5.68) bestimmen läßt:

$$\gamma = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{B}_S \mathbf{d} \, dA = \bar{\mathbf{B}}_S \mathbf{d} \quad (6.19)$$

Dabei ist  $\mathbf{d}$  der Vektor der unbekanntenen Knotenvariablen des Elementes:

$$\mathbf{d}^T = \left[ w^1 \quad \beta_1^1 \quad \beta_2^1 \quad w^2 \quad \beta_1^2 \quad \beta_2^2 \quad w^3 \quad \beta_1^3 \quad \beta_2^3 \quad \beta_1^7 \quad \beta_2^7 \right] \quad (6.20)$$

Für Gleichung (6.19) wird der B-Operator der Schubverzerrungen  $\mathbf{B}_S$  auf herkömmliche Weise aufgestellt, wobei jedoch die zusätzlichen Rotationsanteile zu berücksichtigen sind. Da die Rotationen des siebten Modes entlang der Elementkanten gleich null sind, können sie auf Elementebene kondensiert werden, um die Zahl der globalen Freiheitsgrade zu reduzieren.

Aufgrund der kubischen Ansätze für die Rotationen treten im Integral der Steifigkeitsmatrix Polynome vierter Ordnung auf. Zur exakten Integration wären damit mindestens sechs Stützstellen erforderlich. Aus Gründen der Effizienz können jedoch Integrationsregeln mit drei oder vier Stützstellen verwendet werden. Der Verlust an Rechengenauigkeit betrifft nur die kubischen „Bubble“-Modes, da alle anderen Energieanteile bereits mit einer Dreipunkt-Regel exakt integriert werden. Die besten Ergebnisse werden mit den Integrationsregeln 3' und 4 nach Tabelle 4.2 erzielt.

Nur durch das Zusammenwirken von erweiterten Rotationen und variationeller Schubbedingung kann das XU-Element die Schubversteifungen des KM-Elementes überwinden. Für ein Netz nach Bild 6.5 fällt die Zahl der Nebenbedingungen von  $9n^2$  auf  $4n^2$ , dagegen steigt die Zahl der Freiheitsgrade von  $6n^2$  auf  $7n^2$ . Damit steigt der „Constraint Count“ des XU-Elementes auf den Wert von 1,75 an, der ideale Wert von 1,5 wird damit leicht übertroffen. Ohne die zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade entsteht aus dem XU-Element das Element  $XU^-$ , welches einen „Constraint Count“ von  $r = 0,75$  besitzt und damit Schubversteifungen zeigt. Das  $XU^-$ -Element ist identisch zu dem Element ANS/SRI, welches durch selektiv reduzierte Integration aus dem ANS-Element entsteht.

Eine interessante Kombination stellt das Element DISP4/SRI dar, welches aus dem reduziert integrierten, linearen Dreieck durch Hinzufügung von „Bubble“-Modes für die Rotationen gebildet wird. Dieses Element besteht zwar den Patchtest reiner Biegung nicht, es weist jedoch einen „Constraint Count“ von  $r = 1,75$  auf und zeigt in den Verformungen sowie in den Momenten keine „Locking“-Effekte. Der Patchtest ist deshalb

keine notwendige Bedingung für die Vermeidung von Schubversteifungen. Allerdings treten bei dem Element DISP4/SRI zu hohe Querkräfte auf, die mit zunehmender Schlankheit der Platte immer größer werden. Die Konvergenz der Querkräfte entspricht damit der Konvergenz der Verformungen eines versteifenden Elementes und kann deshalb für praktische Anwendungen nicht empfohlen werden.

In Tabelle 6.8 wird der Zusammenhang zwischen den in diesem Kapitel erläuterten Methoden und Elementen aufgestellt. Am Beispiel einer eingespannten quadratischen Platte unter Gleichlast wird deutlich, daß nur das XU-Element versteifungsfreie Ergebnisse liefert und gleichzeitig den Patchtest besteht.

	SRI	DISP4/SRI	ANS	ANS/SRI	XU-	XU
red. Integration	x	x		x	x	x
w-β-Kopplung			x	x	x	x
„Bubble“-Mode		x				x
Patchtest			✓	✓	✓	✓
„Constraint Count“	0,75	1,75	1,00	0,75	0,75	1,75
„Locking“-frei		✓				✓
l/h = 100	0,056	0,92	0,57	0,80	0,80	0,98
l/h = 10000	6,0·10 <sup>-6</sup>	0,91	1,5·10 <sup>-4</sup>	5,5·10 <sup>-4</sup>	5,5·10 <sup>-4</sup>	0,98

Tabelle 6.8 Vergleich von Plattenelementen und deren normierter Durchbiegungen am Beispiel einer eingespannten, quadratischen Platte unter Gleichlast

## 6.7 Das DST-Element

Ein vollständig anderes Vorgehen schlägt Batoz (1989) mit dem DST-Element vor. Dieses „Discrete Shear Triangle“ stellt eine Weiterentwicklung des erfolgreichen „Discrete Kirchhoff Triangle“ (DKT) von Batoz (1980) dar, das zur Anwendung auf schubweiche Platten erweitert wurde. Die erste Formulierung aus dem Jahr 1989 erfüllt den Patchtest nicht vollständig, was mit einer neuen Version des DST-Elementes von Batoz (1992) verbessert werden konnte.

Für das DST-Element werden als Basis lineare Interpolationsfunktionen für die neun unbekanntenen Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade verwendet. Die Durchbiegung werden nicht direkt interpoliert sondern gehen indirekt über die Kopplungsbeziehung (6.31) in die Elementformulierung ein. Zusätzlich werden die Rotationen um drei inkompatible Ansätze erweitert:

$$\beta(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i \beta^i + \sum_{k=1}^3 P_k \mathbf{n}_k \alpha_k \quad (6.21)$$



Aus den inkompatiblen Ansätzen  $P_k$  werden über die Normalenvektoren  $\mathbf{n}_k$  Komponenten in globalen Richtungen gebildet. Da die linearen Rotationsfunktionen  $N_i$  zu konstanten Momenten führen, entspricht der Ansatz (6.21) einer Aufteilung der Rotationen in rc- und h-Modes nach der „Freien Formulierung“:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{N}_{rc}\mathbf{p}_{rc} + \mathbf{N}_h\mathbf{p}_h \quad (6.22)$$

mit:

$$\mathbf{N}_{rc} = [N_1 \ N_2 \ N_3] \quad (6.23)$$

$$\mathbf{N}_h = [P_1\mathbf{n}_1 \ P_2\mathbf{n}_2 \ P_3\mathbf{n}_3] \quad (6.24)$$

$$\mathbf{p}_{rc}^T = [\boldsymbol{\beta}^{1T} \ \boldsymbol{\beta}^{2T} \ \boldsymbol{\beta}^{3T}] \quad (6.25)$$

$$\mathbf{p}_h^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] \quad (6.26)$$

Die Krümmungen lassen sich mit den gewählten Ansätzen auf herkömmliche Weise bestimmen:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_{rc}\mathbf{p}_{rc} + \mathbf{B}_h\mathbf{p}_h \quad (6.27)$$

Die erweiterten Ansatzfunktionen  $P_k$  setzt Batoz (1992) aus den bekannten quadratischen Termen der Mittelknoten und einer linearen Funktion zusammen. Diese Funktionen sind zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in Tabelle 6.9 angegeben.

k	1	2	3
$P_k$	$4rt + \frac{4}{3}s - \frac{1}{2}$	$4rs + \frac{4}{3}t - \frac{1}{2}$	$4st + \frac{4}{3}t - \frac{1}{2}$
$P_{k,r}$	$4 - 8r - 4s$	$4s - \frac{4}{3}$	$-4s + \frac{4}{3}$
$P_{k,s}$	$-4r + \frac{4}{3}$	$4r - \frac{4}{3}$	$4 - 8s - 4r$
$P_{k,rr}$	$-8$	$0$	$0$
$P_{k,rs}$	$0$	$4$	$0$
$P_{k,ss}$	$0$	$0$	$-8$

Tabelle 6.9 Erweiterte Ansatzfunktionen  $P_k$  mit Ableitungen

Die Schubverzerrungen des Elementes werden über die Querkräfte der Gleichgewichtsbedingungen direkt aus den Momenten ermittelt:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}_B\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11,1} + m_{12,2} \\ m_{12,1} + m_{22,2} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\bar{\gamma} = \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{L}_B \mathbf{C}_B \mathbf{B}_h \mathbf{p}_h = \bar{\mathbf{B}}_S \mathbf{p}_h \quad (6.29)$$

Die konstanten Krümmungen leisten dabei keinen Beitrag für die Schubverzerrungen, so daß diese nur von den erweiterten Modes  $P_k$  abhängig sind. Durch die zweimalige Ableitung entstehen aus den ursprünglich quadratischen Funktionen konstante Schubverzerrungen. Zur Bestimmung der Parameter  $\alpha_k$  werden diskrete Schubbedingungen eingeführt, die die aus Gleichung (6.29) ermittelten Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  an den drei Seitenmitten mit den kompatiblen Schubverzerrungen  $\gamma$  gleichsetzen:

$$\gamma = \mathbf{B}_S \mathbf{d} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{t}_k \bar{\gamma} = \mathbf{t}_k \gamma \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.31)$$

Diese Bedingungen werden für die tangentialen Komponenten des Schubverzerrungsvektors aufgestellt. Daraus ergeben sich drei Gleichungen, die die Parameter  $\alpha_k$  in Abhängigkeit der Knotenvariablen ausdrücken. Durch Einsetzen der Ansatzfunktionen und der Elementgeometrie läßt sich Gleichung (6.31) in Matrizenform aufstellen:

$$\alpha = \mathbf{T}_n \mathbf{d} \quad (6.32)$$

Zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{T}_n$  sind eine Reihe von Umformungen erforderlich, die Batoz (1992) entnommen werden können. Damit setzt sich die Steifigkeitsmatrix aus drei verschiedenen Anteilen zusammen: der Biegesteifigkeit  $\mathbf{K}_c$  der konstanten Biegemodes, der Biegesteifigkeit  $\mathbf{K}_h$  der Biegemodes höherer Ordnung und der Schubsteifigkeit  $\mathbf{K}_s$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_s \quad (6.33)$$

mit:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{A} \mathbf{B}_{rc}^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_{rc} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{T}_n^T \int_A \mathbf{B}_h^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_h dA \mathbf{T}_n \quad (6.35)$$

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{A} \mathbf{T}_n^T \bar{\mathbf{B}}_S^T \mathbf{C}_S \bar{\mathbf{B}}_S \mathbf{T}_n \quad (6.36)$$

Die von Batoz gewählten Ansätze für die Rotationen nach Tabelle 6.9 sind energieorthogonal zu den Krümmungen der kompatiblen Ansätze. Damit werden die Möglichkeiten der „Freien Formulierung“ nicht vollständig ausgenutzt, die auch nichtorthogonale Ansätze ermöglicht. Die Formfunktionen  $P_k$  führen auf Krümmungsansätze, die bis auf den Faktor 4 identisch zu den Schubverzerrungsansätzen des Elementes EAS3 nach Gleichung (6.9) sind. In ihrer Funktion sind jedoch die Ansätze aufgrund der unterschiedlichen Vorgehensweise beider Elemente nicht vergleichbar. Der konstante Term der Funktionen  $P_k$  von  $-1/2$  wurde so gewählt, daß das Element bei quadratischen Platten unter Einzel- und gleichmäßiger Flächenlast optimale Ergebnisse erzielt. Es bleibt zu prüfen, wie gut sich das Element bei anderen Problemen verhält.

Entscheidend für die Formulierung des DST-Elementes ist die Verwendung des Momentengleichgewichts zur Bestimmung der Schubverzerrungen. Diese Gleichgewichtsbedingung wird dadurch exakt und nicht variationell erfüllt. Es entstehen keine Nebenbedingungen und Schubversteifungen können vollständig ausgeschlossen werden. Die Konvergenz der Querkräfte verschlechtert sich jedoch durch die zweifache Ableitung, was von den Beispielen in Kapitel 6.11 bestätigt wird. Die Erweiterung der Rotationen um inkompatible Funktionen im Rahmen der „Freien Formulierung“ ist im Fall des DST-Elementes problemlos möglich, da die kompatiblen Rotationen konstante Verzerrungsmodes exakt darstellen. Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht auf den Querschubanteil übertragbar, weil die kompatiblen Schubverzerrungen keine rein konstanten Modes enthalten.

Für dünne Platten geht das vorgestellte Element nicht in die Formulierung des DKT-Elementes über. Dies ist bei dem von Katili (1993) veröffentlichten DKMT-Element der Fall. Dieses Element ist dem DST-Element sehr ähnlich, es werden jedoch kompatible Ansatzfunktionen

$$\mathbf{P}^T = [ 4r_t \quad 4r_s \quad 4s_t ] \quad (6.37)$$

sowie eine modifizierte Schubbedingung verwendet. Da das DKMT-Element nach Katili (1993) im Vergleich zum DST-Element eine langsamere Konvergenz zeigt, wird nur letzteres weiter untersucht.

Das DST- und das XU-Element stellen die bisher erfolgreichsten Formulierungen von schubweichen Plattenelementen mit neun Freiheitsgraden dar. In Kapitel 6.10 werden noch andere dreiknotige Elemente kurz vorgestellt, die jedoch in der Genauigkeit zurückfallen oder andere Nachteile mit sich bringen. Zu einer weiteren Verbesserung des Elementverhaltens ist daher nach heutigem Stand des Wissens eine Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade je Element erforderlich.

## 6.8 Das TLQL-Element

Dieses Element wurde zuerst von Papadopoulos (1990) und Zienkiewicz (1990) unter dem Namen DRM („Discrete Reissner–Mindlin Element“) eingeführt. Für das Element werden unvollständig quadratische Ansätze für die Rotationen, die nicht auf Elementebene eliminiert werden, sowie einen ANS-Ansatz für die Schubverzerrungen verwendet. Oñate (1992) gibt eine allgemeine Methode zur Formulierung von ANS-Elementen an, mit der sich sowohl vier- als auch dreieckige Elemente herleiten lassen. In dieser Veröffentlichung wird das Element in TLQL umbenannt, was für „Triangle with Linear Displacements, Quadratic Rotations and Linear Shear Strains“ steht.

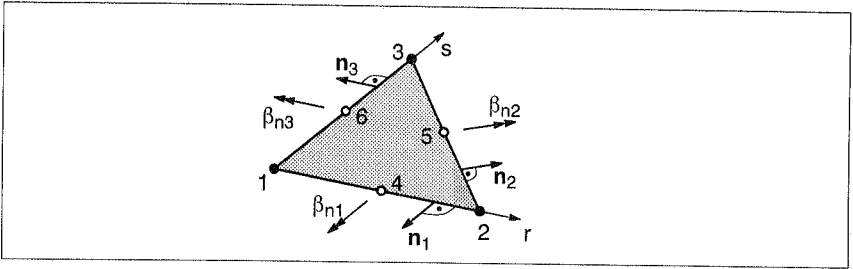


Bild 6.10: Zusätzliche Freiheitsgrade des TLQL-Elementes

Das TLQL-Element besitzt 12 Freiheitsgrade. Die üblichen linearen Interpolationsfunktionen werden um drei quadratische Ansätze für die normalen Komponenten der Rotationen erweitert. Der Vektor der Knotenfreiheitsgrade lautet damit:

$$\mathbf{d}^T = \left[ w^1 \quad \beta_1^1 \quad \beta_2^1 \quad w^2 \quad \beta_1^2 \quad \beta_2^2 \quad w^3 \quad \beta_1^3 \quad \beta_2^3 \quad \beta_n^1 \quad \beta_n^2 \quad \beta_n^3 \right] \quad (6.38)$$

mit den Ansatzfunktionen für die normalen Rotationen:

$$N_4 = rt \quad N_5 = rs \quad N_6 = st \quad (6.39)$$

Die Normalenvektoren  $\mathbf{n}_i$  projizieren die lokalen Rotationskomponenten in globale Richtungen, wodurch sich folgende Interpolation für Verschiebung und Rotationen ergibt:

$$w(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i w^i \quad (6.40)$$

$$\beta(r, s) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \beta^i + \sum_{k=1}^3 \mathbf{n}_k N_{k+3} \beta_n^k \quad (6.41)$$

Durch Differentiation wird der B-Operator der Krümmungen direkt gewonnen. Es entsteht ein unvollständig linearer Verlauf für Krümmungen bzw. Momente. Für die Schubverzerrungen wird ein Ansatz nach der ANS-Methode gewählt, der bereits in Kapitel 6.4 verwendet wurde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & -r & 1 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Dieser kann aus einem vollständig linearen Ansatz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & r & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & s \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

hergeleitet werden, indem mit der Bedingung konstanter tangentialer Schubverzerrungen die Zahl der Modes um drei reduziert wird. Mit dem Ansatz (6.42) werden die Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  des lokalen  $r, s$ -Koordinatensystems interpoliert:

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_r \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\alpha \quad (6.44)$$

Die Kopplung zwischen angesetzt und kompatiblen Schubverzerrungen erfolgt über die tangentialen Schubverzerrungen der Elementkanten  $\gamma_{ti}$ . Mit der Projektionsmatrix  $\mathbf{P}$  werden die Komponenten  $\gamma_{ti}$  in Abhängigkeit der Parameter  $\alpha$  ausgedrückt:

$$\gamma_t = \mathbf{P}\alpha \quad \alpha = \mathbf{P}^{-1}\gamma_t \quad (6.45)$$

mit:

$$\gamma_t = [ \gamma_{t1} \quad \gamma_{t2} \quad \gamma_{t3} ] \quad (6.46)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & -c & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$c = 1/\sqrt{2} \quad (6.48)$$

Zur Bestimmung der tangentialen Schubverzerrungen aus den kompatiblen Verschiebungen und Rotationen wird die Elementkante  $i$  betrachtet, die mit demselben Index wie der Anfangsknoten der Kante bezeichnet wird. Die tangentiale Schubverzerrung der Kante  $i$  wird mit Hilfe einer variationellen Schubbedingung bestimmt:

$$\int_{l_i} \lambda (\gamma_{ti} - w_{,\xi} + \mathbf{n}_i \beta(\xi)) d\xi = 0 \quad (6.49)$$

Sowohl der Wichtungsfaktor  $\lambda$  als auch  $\gamma_{ti}$  werden konstant angesetzt. Dadurch entspricht das Integral einer Mittelwertbildung und führt auf folgende Gleichung für die tangentialen Schubverzerrungen:

$$\gamma_{ti} = \frac{1}{l_i'} (w^j - w^i) - \frac{1}{2} \mathbf{n}_i (\beta^j - \beta^i) \frac{l_i}{l_i'} - \frac{2}{3} \beta_n^i \frac{l_i}{l_i'} \quad (6.50)$$

Mit  $l_i$  wird die wahre Länge und mit  $l_i'$  die Länge der Kante  $i$  im Einheitsdreieck bezeichnet ( $l_1 = l_3 = 1, l_2 = \sqrt{2}$ ). Aus den Bedingungen für die drei Kanten läßt sich eine Matrix

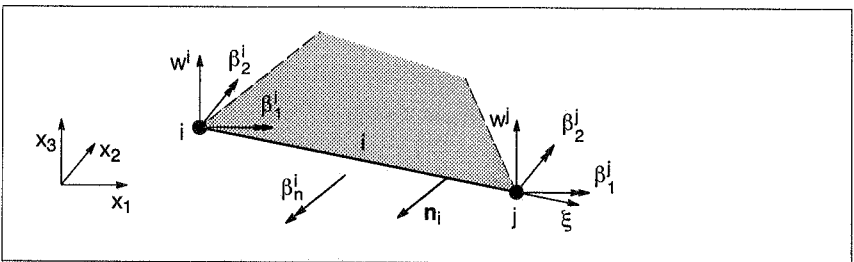


Bild 6.11: Freiheitsgrade und Geometrie einer Elementkante

**T** aufstellen, die die tangentialen Schubverzerrungen aus den Knotenfreiheitsgraden bestimmt:

$$\gamma_t = \mathbf{Td} \quad (6.51)$$

Durch Zusammenfassung der aufgestellten Beziehungen lassen sich die angenommenen Schubverzerrungen direkt aus den Knotenfreiheitsgraden gewinnen:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{AP}^{-1}\mathbf{Td} = \mathbf{B}_s\mathbf{d} \quad (6.52)$$

Die inverse Jakobimatrix  $\mathbf{J}^{-1}$  transformiert die lokalen Schubverzerrungen in das globale Koordinatensystem. Damit sind die B-Operatoren für Biegung und Schub bekannt, und die Steifigkeitsmatrix des Elementes kann auf herkömmliche Weise bestimmt werden. Schubverzerrungen und Krümmungen enthalten lineare Terme, so daß für die Integration eine Dreipunkt-Regel ausreichend ist. Das Element besteht den Patchtest und liefert auch bei dünnen Platten versteifungsfreie Ergebnisse. Aufgrund der zusätzlichen Rotationen und der Schubbedingungen in tangentialen Komponenten erreicht das Element einen hohen Wert des „Constraint Count“ von 2,0. Nachteilig ist die unterschiedliche Anzahl von Freiheitsgraden je Knoten. Wie beim KM-Element hat dies ungünstige Auswirkungen auf die Implementierung des Elementes.

Sowohl die erweiterten Rotationen als auch der ANS-Ansatz sind entscheidend für das gute Verhalten des TLQL-Elementes. Ohne die erweiterten Rotationen reduziert sich das TLQL-Element auf das in Kapitel 6.4 vorgestellte ANS-Element und wäre damit nicht frei von Schubversteifungen. Nur mit den erweiterten Rotationen und ohne den ANS-Ansatz könnte das Element keine reine Biegemodes darstellen und der „Constraint Count“ würde auf einen Wert von  $r = 2/3$  sinken. Da die erweiterten Rotationen als globale Variable geführt werden müssen, steigt auch die Anzahl der Freiheitsgrade pro Element und damit der numerische Aufwand. Eine Elimination der erweiterten Freiheitsgrade ist möglich, wenn in Gleichung (6.50) die Schubverzerrungen  $\gamma_{ti}$  gleich null gesetzt werden. Dadurch entfallen die Schubverzerrungen vollständig und es entsteht ein Kirchhoff-Element, das identisch zu dem bekannten DKT-Element von Batoz (1980) ist.

Oñate (1992) gibt mit dem TQQL-Element ein weiteres schubweiches Plattenelement derselben Familie an. Dieses Element weist neben quadratischen Rotationen auch quadratische Verschiebungen auf, führt aber trotz einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden zu schlechteren Ergebnissen als das TLQL-Element. Eine andere interessante Entwicklung stellt das TLLL-Element von Oñate (1993b) dar. Dies ist das bisher einzig bekannte, schubweiche Plattenelement, das vollständig ohne quadratische Ansatzfunktionen auskommt. Während für die Verschiebungen die üblichen linearen Ansatzfunktionen verwendet werden, kommen für die Rotationen inkompatible Funktionen mit Stützstellen in den Seitenmitten zum Einsatz. Die Schubverzerrungen werden wie beim

TLQL–Element über einen ANS–Ansatz nach Gleichung (6.44) bestimmt. Durch den Ansatz der Rotationen in den Seitenmitten steigt die Zahl der globalen Freiheitsgrade stark an, so daß der „Constraint Count“ den hohen Wert von  $2,3$  einnimmt. Das Element liefert für Schnittgrößen gute Ergebnisse, die Verformungen werden jedoch meist überschätzt und nur bei feinen Netzen ausreichend genau berechnet, siehe Graf (1993). Die unterschiedliche Behandlung der Knoten stellt auch bei diesem Element einen Nachteil dar. Dennoch ist das TLLL–Element vor allem wegen seiner einfachen Formulierung attraktiv.

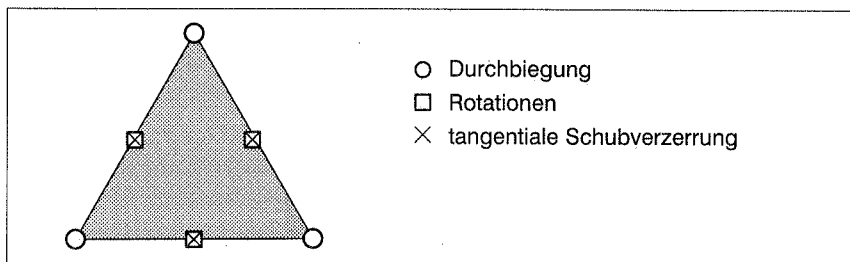


Bild 6.12: Freiheitsgrade des TLLL–Elementes

## 6.9 Das MITC7–Element

Das MITC7–Element von Bathe (1989) stellt eine Weiterentwicklung des vierknotigen Plattenelementes von Dvorkin (1984) dar. Kern dieses Elementes ist die ANS–Methode, die in diesem Fall auf ein Element mit quadratischen bis kubischen Ansatzfunktionen angewendet wird.

Das Element basiert auf dem sechsknotigen Verschiebungselement mit Lagrange–Interpolationsfunktionen. Zusätzlich werden die Rotationen mit einem siebten Knoten um kubische „Bubble“–Modes erweitert. Damit besteht der Vektor der Knotenfreiheitsgrade aus 20 Freiwerten:

$$\mathbf{d}^T = \left[ w^1 \quad \beta_1^1 \quad \beta_2^1 \quad w^2 \quad \beta_1^2 \quad \beta_2^2 \quad \dots \quad w^6 \quad \beta_1^6 \quad \beta_2^6 \quad \beta_1^7 \quad \beta_2^7 \right] \quad (6.53)$$

Durchbiegung und Rotationen werden durch Linearkombination der sieben Ansatzfunktionen interpoliert:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{N}_7 \mathbf{d}_7 \quad (6.54)$$

mit:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_7 & 0 \\ 0 & N_7 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} w^i \\ \beta_1^i \\ \beta_2^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_7 = \begin{bmatrix} \beta_1^7 \\ \beta_2^7 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Die Krümmungen des Elementes werden auf herkömmliche Weise bestimmt. Für die angenommenen Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  wird ein Ansatz in lokalen Koordinaten mit acht unabhängigen Parametern gewählt:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_r \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r & s & 0 & 0 & 0 & rs & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & s & -r^2 & -rs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Mit diesem Ansatz wird ein Vektorfeld dargestellt, dessen tangentielle Komponente an den Elementrändern linear und über die Elementgrenzen hinweg stetig ist. Wie beim ANS-Element erfüllt auch dieser Ansatz die Bedingungen, die an Funktionen der Raviart-Thomas Räume gestellt werden. Die Ordnung des Raumes wurde um eine Stufe erhöht, so daß ein Ansatz nach Gleichung (6.57) Element des rotierten Raviart-Thomas-Raumes  $RT_1^2$  der Ordnung eins ist. Zur Bestimmung der acht Parameter  $\alpha_i$  werden die tangentialen Komponenten der angesetzten und der kompatiblen Schubverzerrungen an sechs Punkten entlang der Elementkanten gleichgesetzt:

$$\mathbf{t}_i \mathbf{J}^{-1} \bar{\gamma}(r_i, s_i) = \mathbf{t}_i \gamma(r_i, s_i) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (6.58)$$

oder:

$$\mathbf{t}_i \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A}(r_i, s_i) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{t}_i \mathbf{B}_S(r_i, s_i) \mathbf{d} \quad (6.59)$$

Die Gleichsetzung der Schubverzerrungen muß in einem einheitlichen Koordinatensystem erfolgen. Hier wurden die globalen Koordinaten als Referenzsystem gewählt, so daß die lokalen Schubverzerrungen mit  $\mathbf{J}^{-1}$  transformiert werden müssen. Dabei ist  $\mathbf{B}_S$  der B-Operator der kompatiblen Verzerrungen und  $\mathbf{t}_i$  sind die Tangentenvektoren der drei Elementkanten. Die Koordinaten der Kollokationspunkte 1 bis 6 entsprechen einer eindimensionalen Gauß-Integration entlang der Elementkanten mit je zwei Stützstellen. Zusätzlich werden zwei weitere Bedingungen eingeführt, die die beiden Schubverzerrungsfelder im Innern des Elementes miteinander verknüpfen:

$$\frac{1}{3} \sum_{i=7}^9 \gamma(r_i, s_i) = \mathbf{J}^{-1} \bar{\gamma}(r_{10}, s_{10}) \quad (6.60)$$

Die Kollokationspunkte 7 bis 9 entsprechen den Koordinaten der Integrationsregel 3', während Punkt 10 im Schwerpunkt des Elementes liegt. Formal entspricht der Über-



gang von den kompatiblen Schubverzerrungen  $\gamma$  auf die angenommenen Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  einem Reduktionsoperator  $\mathbf{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$\bar{\gamma} = \mathbf{R}(\gamma) = \mathbf{R}(\nabla w + \theta) = \nabla w + \mathbf{R}(\theta) \quad (6.61)$$

$$\int_{I_i} \mathbf{n}_i(\theta - \mathbf{R}(\theta)) p_1(\xi) d\xi = 0 \quad \forall p_1(\xi) \in P_1 \quad (6.62)$$

$$\int_A (\theta - \mathbf{R}(\theta)) dA = 0 \quad (6.63)$$

Bedingung (6.61) bedeutet, daß die Anteile der Durchbiegung  $w$  nicht beeinflußt werden. Dies ist für den gewählten Ansatz der Durchbiegung der Fall, da die Durchbiegung nur linear vorliegt und sowohl von den Randpunkten (6.58) als auch von den Mittelungsbedingungen (6.60) exakt erfaßt wird. Gleichung (6.62) entspricht einer variationellen Schubbedingung (6.49) mit einer beliebigen linearen Wichtungsfunktion  $p_1(\xi)$ . Damit werden aus der Normalkomponente der kompatiblen Schubverzerrungen die Anteile quadratischer Ordnung herausgefiltert. Mit Bedingung (6.63) sollen kompatible und angenommene Schubverzerrungen im Mittel denselben Wert aufweisen. Um eine Integration über das Element zu vermeiden, wird diese Bedingung durch Gleichung (6.60) ersetzt. Die Bedingungen (6.58) und (6.60) können mit Hilfe der Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{T}$  aufgestellt werden:

$$\mathbf{P}\alpha = \mathbf{T}d \quad (6.64)$$

mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \mathbf{B}_S^1 \\ \mathbf{t}_1 \mathbf{B}_S^2 \\ \mathbf{t}_2 \mathbf{B}_S^3 \\ \mathbf{t}_2 \mathbf{B}_S^4 \\ \mathbf{t}_3 \mathbf{B}_S^5 \\ \mathbf{t}_3 \mathbf{B}_S^6 \\ \frac{1}{3} \sum_{i=7}^9 \mathbf{B}_S^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \bar{\mathbf{B}}_S^1 \\ \mathbf{t}_1 \bar{\mathbf{B}}_S^2 \\ \mathbf{t}_2 \bar{\mathbf{B}}_S^3 \\ \mathbf{t}_2 \bar{\mathbf{B}}_S^4 \\ \mathbf{t}_3 \bar{\mathbf{B}}_S^5 \\ \mathbf{t}_3 \bar{\mathbf{B}}_S^6 \\ \bar{\mathbf{B}}_S(1/3, 1/3) \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

$$\mathbf{B}_S^i = \mathbf{B}_S(r_i, s_i)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_S^i = \bar{\mathbf{B}}_S(r_i, s_i) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A}(r_i, s_i)$$

Damit können die Parameter  $\alpha$  der angenommenen Schubverzerrungen und der endgültige  $\mathbf{B}$ -Operator  $\mathbf{B}_S^*$  bestimmt werden:

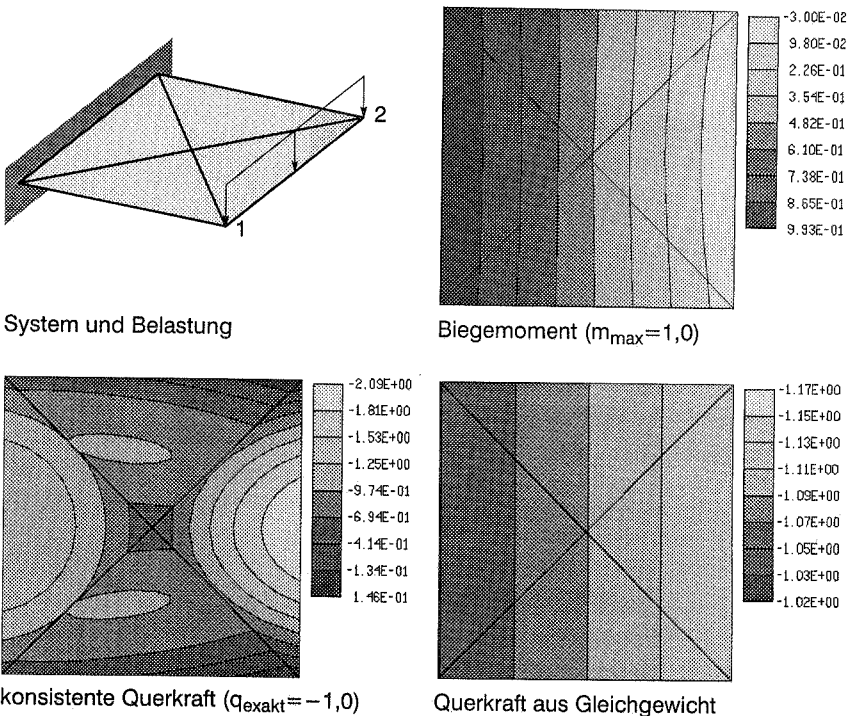
$$\alpha = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}d \quad (6.66)$$

$$\gamma = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T}d = \mathbf{B}_S^* d \quad (6.67)$$

Der hierzu erforderliche numerische Aufwand ist nicht unerheblich. Die Matrix  $\mathbf{T}$  der Dimension  $8 \times 20$  muß komplett aufgestellt werden, hinzu kommt die Invertierung der Matrix  $\mathbf{P}$  mit der Dimension  $8 \times 8$ . Im Integral der Steifigkeitsmatrix treten quartische Terme

auf, so daß eine Integrationsregel mit sechs Stützstellen verwendet werden sollte. Eine Eigenwertuntersuchung zeigt jedoch, daß auch bei vier Stützstellen noch keine inneren Kinematiken auftreten. Die Formulierung der Schubverzerrungen ist auf gerade Elementkanten abgestimmt. Inwieweit dies auf gekrümmte Elementkanten übertragen werden kann, ist bisher noch nicht untersucht worden.

Das MITC7–Element besteht den Patchtest für reine Biegung und ist auch bei dünnen Platten frei von Versteifungen. Da ein Teil der Schubbedingungen in tangentialen Komponenten entlang der Kanten aufgestellt werden, sind die Nebenbedingungen von benachbarten Elementen linear abhängig. Für ein System nach Bild 6.5 ergeben sich damit  $16n^2$  Freiheitsgrade,  $10n^2$  Nebenbedingungen und damit ein sehr guter Wert für den „Constraint Count“ von 1,6. Selbst lineare Momentenverläufe werden von dem Element sehr gut approximiert. Probleme treten jedoch bei der Berechnung der Querkräfte aus den angenommenen Schubverzerrungen  $\bar{\gamma}$  auf. Obwohl mit dem Ansatz nach Gleichung (6.57) lineare Momentenverläufe versteifungsfrei dargestellt werden können,



System und Belastung

Biegemoment ( $m_{\max}=1,0$ )

konsistente Querkraft ( $q_{\text{exakt}}=-1,0$ )

Querkraft aus Gleichgewicht

Bild 6.13: Kragarm mit linearem Moment, Schnittgrößen des MITC7–Elementes

sind die zugehörigen Querkräfte nicht konstant. Die quadratischen Terme der angenommenen Schubverzerrungen führen zu Oszillationen, die die Querkräfte unbrauchbar machen. In Bild 6.13 sind die geglätteten Schnittgrößen für einen Kragarm mit einem linearen Momentenverlauf dargestellt. Während die Biegemomente mit einem Fehler von 7% sehr gut approximiert werden, treten bei den Querkräften Abweichungen von über 100% auf. Um sinnvolle Ergebnisse zu erzielen, können die Querkräfte wie beim DST-Element aus den Gleichgewichtsbeziehungen ermittelt werden. Dies führt am Beispiel des Kragarms zu einer Abweichung von der exakten Lösung von 17%. Bathe (1989) macht keine Angaben über Querkraftverläufe des MITC7-Elementes. Deswegen konnte nicht geklärt werden, ob es sich dabei um ein prinzipielles Problem des Elementes handelt. Die vorgeschlagene Berechnung der Querkräfte ist variationell nicht konsistent. Hier sind weitere Untersuchungen erforderlich, um die Ursachen der Oszillationen zu klären und mögliche Abhilfen zu entwickeln.

## 6.10 Sonstige Elemente

In der Literatur werden noch zahlreiche weitere dreieckige Plattenelemente beschrieben. Zur Vollständigkeit seien hier die wichtigsten Neuentwicklungen kurz vorgestellt.

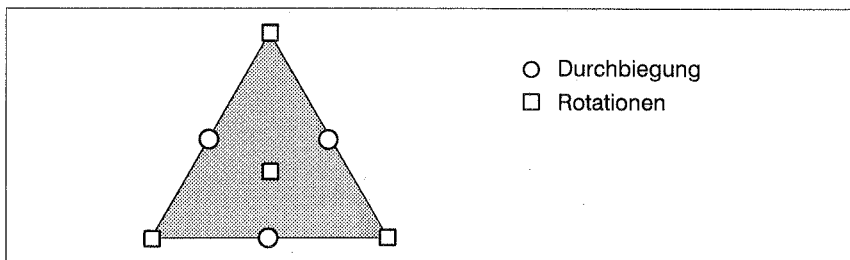


Bild 6.14: Freiheitsgrade des Arnold/Falk-Elementes

Das Arnold/Falk-Plattenelement nach Arnold (1989) ist eines der wenigen Elemente, für die ein mathematischer Konvergenz- und Stabilitätsbeweis vorliegt. Das Element verwendet lineare Ansätze für die Rotationen, die um einen kubischen „Bubble“-Mode erweitert werden. Als Besonderheit wird ein linearer Ansatz für die Verschiebungen mit Stützstellen in den Seitenmitten verwendet. Dieser Ansatz führt zu einer inkompatiblen Interpolation der Durchbiegung, die nur in den Seitenmittelpunkten stetig zu den Nachbarelementen ist. Die Vorgehensweise ist dem TLLL-Element vergleichbar, bei dem der inkompatible Ansatz für die Rotationen verwendet wird. Die Schubverzerrungen des Arnold/Falk-Elementes werden über gemittelte Rotationen bestimmt:

$$\gamma = \nabla w + \bar{\theta} \quad (6.68)$$

mit:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{A} \int_A \theta \, dA \quad (6.69)$$

Dill (1990) testete das Element für eine Reihe von Standardproblemen und stellte gute Resultate für Durchbiegungen und Schnittgrößen fest. Der „Constraint Count“ des Arnold/Falk–Elementes liegt mit 2,25 sehr hoch. Auch ohne die „Bubble“–Modes würde das Element bereits einen Wert von  $r = 1,25$  erreichen. Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung der Elementknoten ist eine Implementierung des Elementes in bestehende Programme schwierig. Kräfte können nur in den Seitenmitten aufgetragen werden und die Verformungen an Eckknoten müssen durch Extrapolation und Glättung ermittelt werden. Besonders ungeeignet erscheint das Arnold/Falk–Element für die Erweiterung auf Schalentragwerke. Ein passendes Membranelement müßte ebenfalls Verschiebungen in den Seitenmitten als Freiheitsgrade verwenden.

Zienkiewicz (1988) stellt ein schubweiches, dreieckiges Plattenelement mit quadratischen Ansatzfunktionen vor. Durchbiegungen und Rotationen werden durch die üblichen Lagrange–Funktionen quadratisch angesetzt, wobei die Rotationen durch drei „Bubble“–Modes mit quartischen Ansätzen erweitert werden. Das Element verwendet eine hybrid–gemischte Spannungsformulierung für die Schubkräfte, die diskontinuierlich linear angesetzt werden. Zu einer exakten Integration des Elementes wären 12 Stützstellen erforderlich, es wird allerdings eine reduzierte Integration mit sieben Integrationspunkten empfohlen. Das Element erzielt sehr gute Ergebnisse, erfordert jedoch einen erheblichen numerischen Aufwand, sowohl hinsichtlich der Integration, als auch der Zahl der Freiheitsgrade.

Eine Gruppe von schubweichen Dreieckselementen stellt van Keulen (1993) vor. Die Elemente besitzen 9, 15 und 18 Freiheitsgrade je Element. Die tangentialen Schubverzerrungen werden als globale Variable eingeführt und von den Rotationen nur die normalen Komponenten als Freiheitsgrade angesetzt. Das einfachste Element der Familie besitzt mit neun Freiheitsgraden jeweils drei Freiwerte für Durchbiegung, normale Rotationen und tangentiale Schubverzerrungen. Die Elemente weisen kaum bessere Ergebnisse auf als die bisher vorgestellten Elemente und werden deshalb nicht weiter behandelt.

Wenig erfolgreiche Entwicklungen stellen die Elemente von Belytschko (1984), Saleeb (1988), Ferahi (1990) und Argyris (1994) dar. Diese Elemente weisen jeweils mindestens einen Defekt auf wie Schubversteifungen bei dünnen Platten, kinematische Modes oder schlechte Konvergenz.

Auch auf dem Gebiet schubstarrer Plattenelemente wurden mehrere neue Elementformulierungen veröffentlicht. Da jedoch bereits das DKT–Element von Batoz (1980) sehr gute Ergebnisse liefert, konnten nur unwesentliche Verbesserungen erzielt werden. Zu

erwähnen sind die Arbeiten von Jeyachandrabose (1986), Y. Long (1988), Z. Long (1993) und Cheung (1995), die eine ganze Reihe verbesserter DKT-Elemente vorstellen. Auch das von Batoz (1980) eingeführte HSM-Element wurde weiter entwickelt. Dieses auf der hybriden Spannungsmethode basierende Element bleibt jedoch auch nach den Modifikationen von Wu (1982) und Fricker (1985) hinter den Leistungen des DKT-Elementes zurück. Das HBS-Element von Hansen (1979) war der Wegbereiter, der zum ersten Element nach der „Freien Formulierung“ von Bergan (1984) führte. Eine Weiterentwicklung stellt das Element von Felippa (1987), sowie das ANDES-Element von Milittleo (1991) dar, welches die „Freie Formulierung“ mit der ANS-Methode kombiniert. Das ANDES-Element führt in bestimmten Fällen zu geringfügig besseren Ergebnissen als das DKT-Element, siehe Weiss (1993).

Plattenelemente mit weniger als neun Freiheitsgraden sind seit langem bekannt. Das Element von Morley (1971) kommt mit drei Verschiebungen in den Ecken und drei normalen Rotationen aus. Eine neue Herleitung dieses Elementes gibt Oñate (1993b) an, der das TLLL-Element durch Einführung der Kirchhoffbedingung in das Morley-Element überführt. In einer weiteren Arbeit von Oñate (1993a) wird ein Plattenelement mit ausschließlich drei Verschiebungsfreiheitsgraden vorgestellt. Bei diesem Element können Randbedingungen bezüglich der Rotationen nicht direkt berücksichtigt werden. Vielmehr wird die Elementsteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit der Randbedingungen und der Geometrie des Nachbar-elementes modifiziert. In der Leistungsfähigkeit sind derartige Elemente nicht mit herkömmlichen Elementen vergleichbar, da sie eine niedrigere Konvergenzrate aufweisen.

Das Problem der Formulierung schubweicher Plattenelemente findet auch in der mathematischen Literatur zunehmende Beachtung. Beispielhaft seien hier die Arbeiten von Pitkäranta (1988), Brezzi (1991b), Stenberg (1992) und Stenberg (1993b) genannt. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Theorie der SBB- und CBB-Methoden von Hughes (1988) und Franca (1988), wobei modifizierte Funktionale die Babuska-Brezzi-Bedingung entweder erfüllen („Satisfying“ BB) oder nicht erfüllen („Circumventing“ BB). Erste vielversprechende, numerische Ergebnisse wurden von Stenberg (1991) vorgelegt, ein umfassender Vergleich der Elemente liegt jedoch noch nicht vor.

## 6.11 Numerische Ergebnisse

Zu einem Vergleich der Leistungsfähigkeit werden mit folgenden Elementen eine Reihe von Testproblemen berechnet:

- |       |  |
|-------|--|
| DISP3 | reduziert integriertes, lineares Verschiebungselement nach Kapitel 6.2                                   |
| DISP6 | reduziert integriertes, quadratisches Verschiebungselement nach Kapitel 6.2 (Integrationsregel 3 bzw 3') |

EAS3	EAS–Element nach Kapitel 6.3, Gleichung (6.8)
ANS	ANS–Element nach Kapitel 6.4, Gleichung (6.13)
ANS/SRI	ANS–Element mit reduzierter Integration des Schubanteiles
XU3'/4	XU–Element nach Kapitel 6.6 mit Integrationsregel 3' bzw. 4
DST	DST–Element nach Kapitel 6.7
TLQL	TLQL–Element nach Kapitel 6.8
MITC7	MITC7–Element nach Kapitel 6.9
DKT	DKT–Element nach Batoz (1980)
B/D	vierknotiges ANS–Element nach Dvorkin (1984)

In den folgenden Abschnitten sollen die Elemente vor allem bezüglich ihrer Effizienz miteinander verglichen werden. Ein objektiver Maßstab ist hierfür schwer zu finden, da die Effizienz von verschiedenen Einflüssen abhängig ist, die je nach Art des Problems und der zur Verfügung stehenden Rechnerleistung unterschiedlich gewichtet werden müssen. Die wichtigsten Faktoren, die die Effizienz beeinflussen sind Aufwand der Elementformulierung, Anzahl der Systemfreiheitsgrade, Bandbreite der Steifigkeitsmatrix, verwendeter Gleichungslöser sowie Schnelligkeit des Programms. Im folgenden wird als Maß für den erforderlichen Aufwand die Anzahl der Systemfreiheitsgrade (DOF) gewählt, da dies bei großen Systemen der entscheidende Faktor ist.

### 6.11.1 Patchtest für reine Biegung

Im Patchtest nach Taylor (1986) wird ein System aus verzerrten Elemente so belastet, daß im Tragwerk konstante Momente entstehen. Dabei muß mindestens ein Element vollständig von anderen Elementen umgeben sein, um eine verzerrungsfreie Darstellung der Starrkörperbewegungen sicherzustellen. Für die dreieckigen Elemente wurde ein System nach Bild 6.15 mit den angegebenen Lastvektoren gewählt. Bis auf das Element DISP3 sind alle getesteten Elemente in der Lage, konstante Momente exakt darzustellen und erfüllen damit den Patchtest.

### 6.11.2 Eigenwertanalyse

Um innere Kinematiken der Elemente auszuschließen, werden die Eigenwerte eines einzelnen Elementes untersucht. Die Elemente DISP3, ANS/SRI und XU weisen jeweils einen „Zero Energy Mode“ auf, der durch die reduzierte Integration der Schubbedingung entsteht. Dieser Mode ist nicht kommunikativ, d. h. bei Systemen mit mehr als zwei Elementen treten keine Null–Eigenwerte mehr auf. Dies ist keine Garantie dafür, daß nicht auch bei größeren Systemen kinematische Modes auftreten, insbesondere wenn im System stark unterschiedliche Steifigkeiten vorliegen. Ein Auftreten bei praktischen

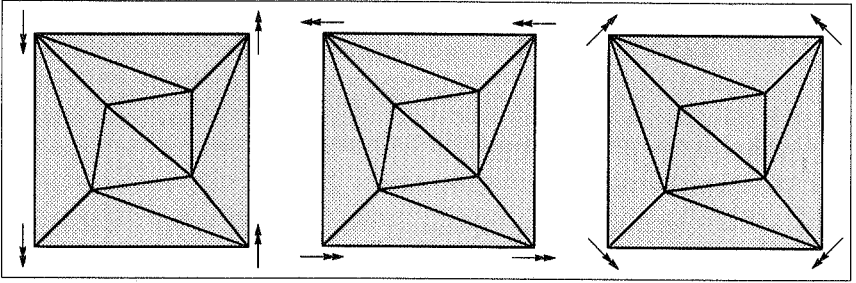


Bild 6.15: Patchtest für dreieckige Plattenelemente

Problemen ist jedoch sehr unwahrscheinlich und wurde bei keiner der eigenen Untersuchungen festgestellt. Die übrigen Elemente sind frei von inneren Kinematiken.

### 6.11.3 Verhalten bei dünnen Platten

Die Anfälligkeit der Elemente gegenüber Schubversteifungen, wird an einer Platte mit abnehmender Dicke, bzw. zunehmender Schlankheit überprüft. Um ein möglichst ungünstiges Verhältnis von Freiheitsgraden zu Nebenbedingungen zu erhalten, wird der Rand der Platte voll eingespannt. Die Form der Elemente sollte außerdem unregelmäßig sein, da bei manchen Elementen „Shear-Locking“ nur bei verzerrter Elementgeometrie auftritt. Aus diesen Gründen wurde eine voll eingespannte Kreisplatte unter

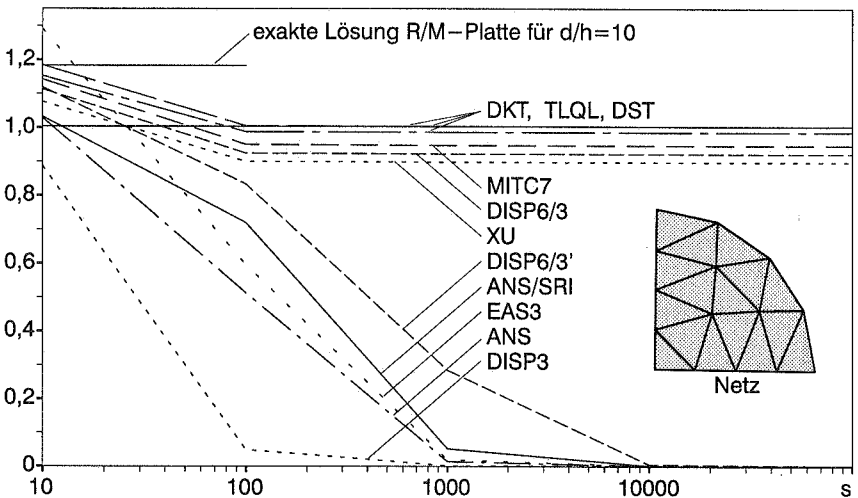


Bild 6.16: Normierte Durchbiegung einer eingespannten Kreisplatte (Referenzlösung Kirchhoffplatte, Schlankheit  $s = \text{Durchmesser } d / \text{Plattendicke } h$ )

Gleichlast als Testbeispiel gewählt. Bild 6.16 zeigt die an der Kirchhofflösung normierte, maximale Durchbiegung in Abhängigkeit von der Schlankheit.

Trotz reduzierter Integration versteift das Element DISP3 schon bei mäßigen Schlankheiten vollkommen. Das Schubversteifen des ANS-Elementes kann durch reduzierte Integration etwas verbessert werden. Ab einer Schlankheit von 100 fallen die Durchbiegungen des Elementes so stark ab, daß es für den allgemeinen Einsatz nicht empfohlen werden kann. Dies gilt auch für das EAS3-Element, das ebenfalls ein starkes „Shear Locking“ zeigt. Versteifungsfrei sind das XU-, und das DST-Element, sowie die Elemente höherer Ordnung TLQL und MITC7. Das DISP6-Element mit der Integrationsregel 3 besteht ebenfalls diesen „Locking“-Test, schon die Integrationsregel 3' führt jedoch zu einem Versteifen des Elementes. Im folgenden werden nur die Elemente weiter untersucht, die frei von Schubversteifungen sind.

#### 6.11.4 Verhalten bei unregelmäßiger Elementgeometrie

Um die Empfindlichkeit der Elemente bezüglich unregelmäßiger Elementgeometrie zu überprüfen, wird ein Kragarm mit linearem Momentenverlauf nach Bild 6.17 berechnet. Die Abweichung von der exakten Lösung ist in Bild 6.18 normiert in Abhängigkeit von der Ausmittigkeit  $a$  des Mittelknotens dargestellt.

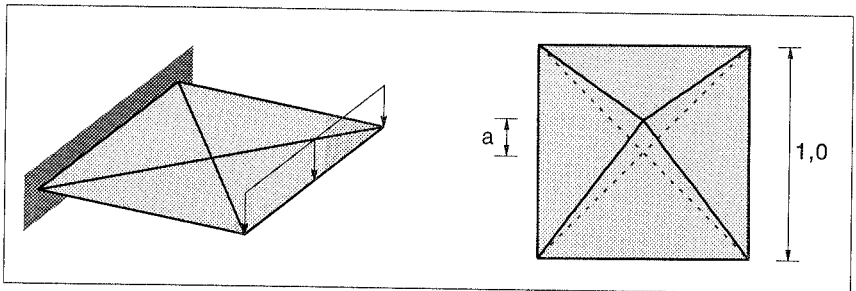


Bild 6.17: Kragarm zur Ermittlung der Netzempfindlichkeit

Das DST-Element weist mit 15 % die stärkste Veränderung der Durchbiegung auf und ist damit empfindlicher gegenüber Geometrieänderungen als das DKT-Element, welches völlig gleichbleibende Ergebnisse liefert. Ein leichter Abfall der Durchbiegung tritt auch bei den XU-Elementen auf. Das Element XU3' zeigt eine stärkere Veränderung als das Element XU4. Das Ergebnis des DISP6-Element ändert sich kaum bei unregelmäßiger Geometrie, hat jedoch von allen Elementen den größten Abstand von der Soll-Lösung. Insgesamt zeigen die Elemente eine nur geringe Abhängigkeit von der Elementgeometrie.



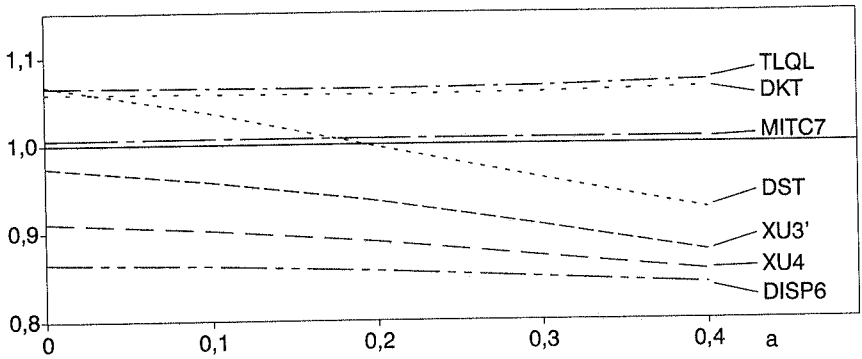


Bild 6.18: Normierte Durchbiegung in Abhängigkeit der Ausmittigkeit a

### 6.11.5 Konvergenz einer eingespannten Kreisplatte unter Gleichlast

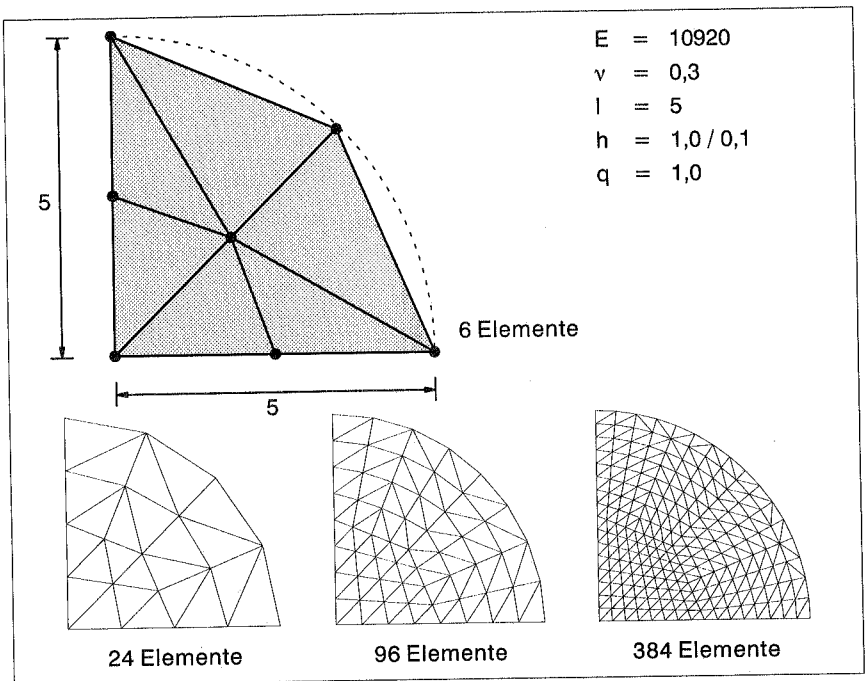


Bild 6.19: Eingespannte Kreisplatte, System und FE-Netze

Zum Vergleich des Konvergenzverhaltens der Elemente wird eine voll eingespannte Kreisplatte unter Gleichlast berechnet. Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie am Viertelsystem. Die Systemdaten und die verwendeten Netze sind in Bild 6.19 aufgeführt. Es wurde die in der Literatur übliche Netzunterteilung gewählt, damit die Berechnungsergebnisse vergleichbar sind. Für das angegebene System ergibt sich nach Batoz (1992) bei einer Dicke von  $h=1,0$  eine maximale Durchbiegung von  $w_{ref}=0,01155$  in Plattenmitte, wobei die Schubverformung einen Anteil von 15,5% ausmacht. Die normierten Durchbiegungen der verschiedenen Elemente sind in Tabelle 6.10 aufgeführt und die Konvergenzverläufe in Bild 6.20 dargestellt.

Netz	DST	XU3'	XU4	TLQL	MITC7	DKT	DISP6	B/D
6	0,979	0,843	0,763	1,038	0,838	0,891	0,714	0,931
24	0,997	0,962	0,939	1,016	0,961	0,860	0,943	0,989
96	0,999	0,991	0,985	1,006	0,990	0,850	0,987	0,997
384	1,000	0,997	0,996	1,002	0,997	0,846	0,997	0,999

Tabelle 6.10 Normierte Durchbiegungen in Plattenmitte (Referenzwert  $w_{ref}=0,01155$ )

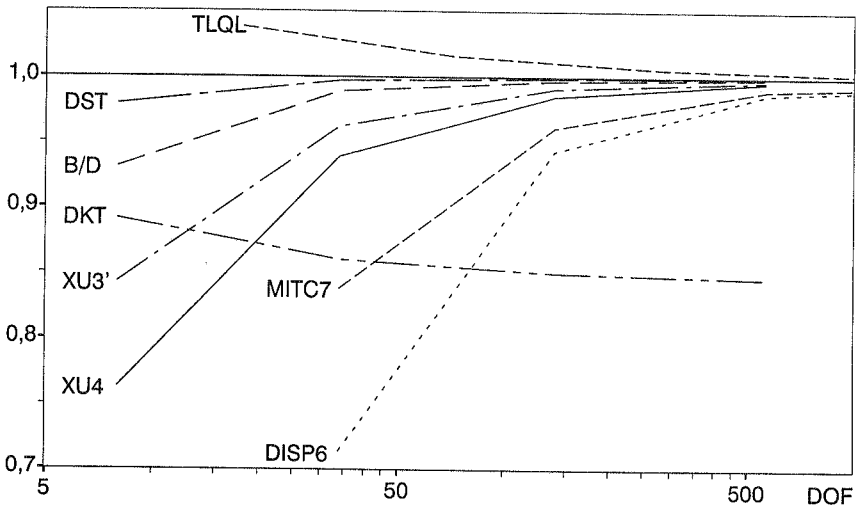


Bild 6.20: Normierte Durchbiegung einer dicken eingespannten Kreisplatte (Referenzlösung 0,01155)

Alle Schubweichen Elemente konvergieren sehr schnell gegen die exakte Lösung. Eine Abweichung von weniger als 10% wird von allen Elementen bereits mit einem Netz aus 24 Elementen erreicht. Besonders gut schneidet das DST-Element ab, das schneller

konvergiert als das vierknotige ANS-Element von Bathe/Dvorkin. Eine langsamere Konvergenz weisen die XU-Elemente auf, wobei die Unterintegration des XU3'-Elementes zu etwas besseren Ergebnissen führt. Die Elemente TLQL und MITC7 benötigen zu einer ähnlich genauen Lösung mehr Freiheitsgrade als die dreiknotigen Elemente. Dabei darf der Aufwand für Freiwerte in den Seitenmitten nicht unterschätzt werden. Allein der zusätzliche Rotationsfreiheitsgrad des TLQL-Elementes verdoppelt die Zahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems. Am langsamsten konvergiert das reduzierte integrierte, sechsknotige Verschiebungselement. Das DKT-Element konvergiert gegen eine Lösung, die die Schubverformung nicht berücksichtigt und ist deswegen für dieses Problem nicht geeignet.

Dieselbe Platte wird nun mit einer Dicke von  $h=0,1$  berechnet. Damit wird der Einfluß der Schubverformung vernachlässigbar, und es ergibt sich nach Timoshenko (1970) eine maximale Durchbiegung in Plattenmitte von  $w_{ref}=9,78$ . Die Werte der Durchbiegungen sind in absoluten Werten in Tabelle 6.11 und in Bild 6.21 dargestellt.

Netz	DST	XU3'	XU4	TLQL	MITC7	DKT	DISP6	B/D
6	9,84	7,96	6,95	10,31	7,65	10,29	6,22	9,07
24	9,83	9,35	9,06	9,96	9,28	9,94	8,92	9,96
96	9,79	9,68	9,61	9,84	9,66	9,82	9,57	9,84
384	9,78	9,76	9,74	9,80	9,76	9,80	9,74	9,80

Tabelle 6.11 Durchbiegungen in Plattenmitte (Referenzwert  $w_{ref}=9,78$ )

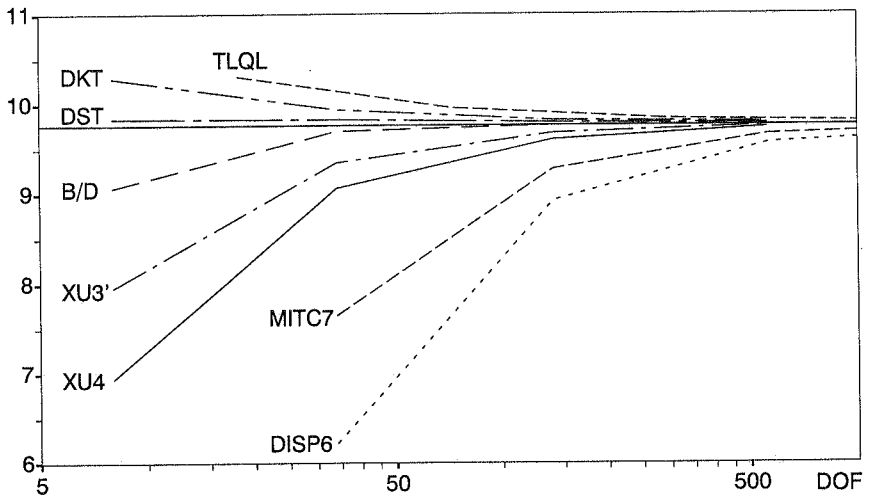


Bild 6.21: Durchbiegung einer dünnen eingespannten Kreisplatte (Referenzlösung  $w_{ref}=9,78$ )

Wieder weist das DST-Element die schnellste Konvergenz auf. Auch das DKT-Element konvergiert bei diesem Problem gegen die exakte Lösung. Ansonsten zeigen die Elemente ein ähnliches Konvergenzverhalten wie bei der dicken Platte.

Der Konvergenzverlauf des Biegemomentes in Plattenmitte ist in Bild 6.22 dargestellt. Nach Timoshenko (1970) beträgt der Referenzwert  $m_{\text{ref}}=2,03$ . Hier liefern die XU-Elemente die besten Ergebnisse. Die reduzierte Integration des XU3'-Elements führt auch hier zu etwas genaueren Werten, die sogar besser sind als die des B/D-Elementes. Dagegen fallen die Ergebnisse des DST-Elementes etwas ab. Das Element ist nicht in der Lage, Biegemomente mit ähnlich hoher Genauigkeit wie die Durchbiegungen darzustellen. Offenbar wurden die freien Parameter des Elementes (siehe Kapitel 6.7) hinsichtlich der Verschiebungen optimal gewählt, weshalb die Biegemomente weniger gut approximiert werden. Einen etwas besseren Verlauf zeigt das DKT-Element. Sehr gute Ergebnisse liefert das Element MITC7, das in der Effizienz mit dem XU4-Element vergleichbar ist. Eine etwas langsamere Konvergenz als das DST-Element weist das TLQL-Element auf. Auch hier wirkt sich der hohe Aufwand für die zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade aus. Die mit Abstand schlechtesten Werte werden wiederum vom DISP6-Element erzielt.

Die Approximation von Querkräften bereitet allen Elementformulierungen größere Schwierigkeiten. Dies wird in Bild 6.23 deutlich, in dem die maximale Querkraft am Plattenrand in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade aufgetragen ist. Zufriedenstellende Ergebnisse liefern die XU-Elemente sowie das vierknotige B/D-Element. Allerdings ist die Konvergenz wesentlich langsamer als bei den Biegemomenten. Die XU-Elemente bleiben nur beim feinsten Netz unter einem Fehler von 10%. Selbst mit einer hohen Zahl von Elementen konvergieren dagegen die anderen Ele-

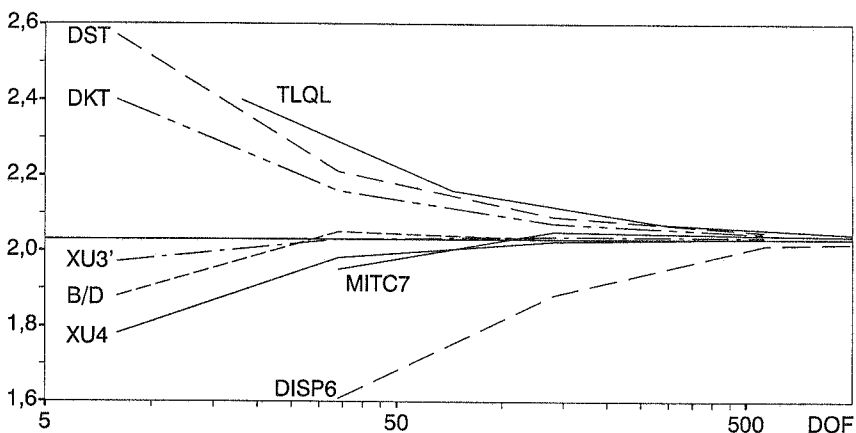


Bild 6.22: Biegemoment in Plattenmitte (Referenzwert  $m_{\text{ref}}=2,03$ )

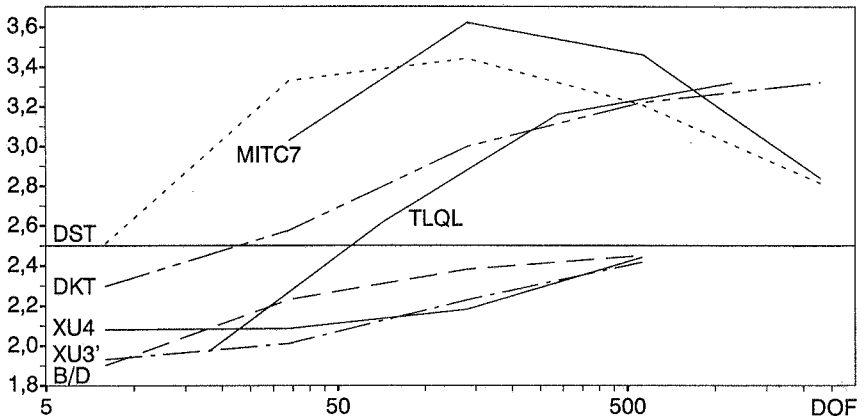


Bild 6.23: Querkraft am Plattenrand (Referenzlösung  $q_{ref}=2,50$ )

mente nicht gegen den exakten Wert von  $q_{ref}=2,50$ . Während das DST- und MITC7-Element zunächst die vorhandene Querkraft um mehr als 40% überschätzen, um sich dann doch dem exakten Wert zu nähern, konvergieren das DKT- und TLQL-Element gegen einen falschen Wert. Die Ursache für dieses schlechte Abschneiden der Elemente liegt in der Berechnung der Querkräfte aus dem Momentengleichgewicht nach Gleichung (4.45), wie es bei den Elementen DST, DKT und MITC7 durchgeführt wird. Auch bei starker Netzverfeinerung haben die Biegemomente einen leicht sägezahnähnlichen Verlauf. Selbst wenn die absoluten Werte der Biegemomente beinahe exakt sind, werden die Querkräfte aufgrund dieses un stetigen Verlaufs überschätzt, da sie durch Differentiation der Momente gewonnen werden. Damit sind diese Elemente zur Berechnung von Querkräften weniger gut geeignet. Zu einer Verbesserung der Querkräfte könnten die Ableitungen der Biegemomente nicht von ungeglätteten, sondern von geglätteten Werten gebildet werden, wodurch sich der störende Einfluß des Sägezahnverlaufs vermeiden ließe. Ein solches Vorgehen ist von einem theoretischen Standpunkt aus jedoch mit Vorsicht zu betrachten, da das lokale Elementverhalten von globalen Ergebnissen abhängig gemacht wird. Erstaunlich ist auch das schlechte Verhalten des TLQL-Elementes. Offensichtlich führt die lineare Querschubinterpolation zu einer schlechten Approximation der Querkräfte. Die Methode der integralen Schubbedingung, die bei den XU-Elementen eingesetzt wird und zu einer konstanten Schubverzerrung im Element führt, scheint hier konkurrenzlos zu sein. Auch das DISP6-Element zeigt starke Oszillationen der Querkräfte und wurde deswegen im Diagramm nicht mit aufgeführt.

Als Beispiele für den Schnittkraftverlauf der dünnen Kreisplatte sind für das Element XU4 die geglätteten Momente und Querkräfte in Bild 6.24 angegeben. Die Schnittgrö-

Ben sind in globalen Koordinaten angegeben und deswegen nicht rotationssymmetrisch. Auf diese Weise sind entlang der Symmetrieachsen jeweils die Schnittgrößen in Richtung des Radius bzw. des Umfanges dargestellt.

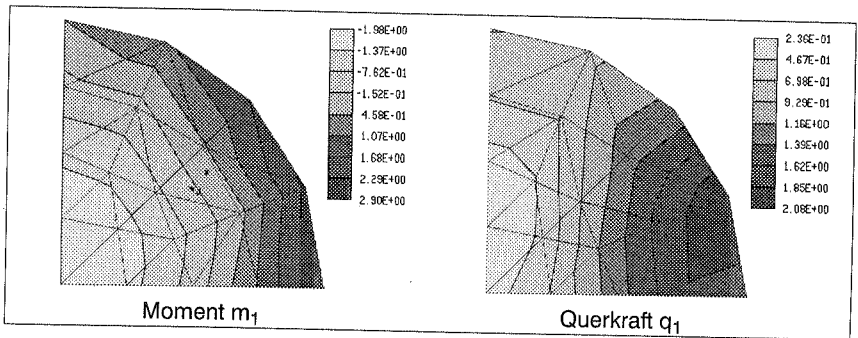


Bild 6.24: Schnittgrößen der Kreisplatte (Element XU4)

### 6.11.6 Konvergenz einer eingespannten Quadratplatte unter Gleichlast

Häufig wird das Konvergenzverhalten von Elementen an einer eingespannten, quadratischen Platte unter Gleichlast untersucht. Die Berechnung erfolgt wiederum unter Ausnutzung der Symmetrie am Viertelsystem. In Bild 6.25 sind die Systemdaten und die verwendeten Netze aufgeführt. Bei einer Dicke von  $h=0,1$  sind die Schubverformungen dieser Platte vernachlässigbar und es ergibt sich nach Timoshenko (1970) eine Durchbiegung in Plattenmitte von  $w_{ref}=12,6$ . Die Ergebnisse der Elemente sind in Tabelle 6.12 und in Bild 6.26 dargestellt.

Netz	DST	XU3'	XU4	TLQL	MITC7	DKT	DISP6	B/D
2x2	14,54	13,04	11,31	15,50	12,39	15,47	7,12	12,13
4x4	13,11	12,80	12,38	13,50	12,68	13,47	12,09	12,53
8x8	12,78	12,72	12,62	12,89	12,69	12,87	12,58	12,64
16x16	12,70	12,69	12,67	12,73	12,68	12,71	12,66	12,67

Tabelle 6.12 Durchbiegungen in Plattenmitte (Referenzwert  $w_{ref}=12,6$ )

Bei diesem System liefern die XU-Elemente bessere Ergebnisse als das DST-Element. Das MITC7-Element konvergiert schneller als bei der Kreisplatte, so daß das Element bei vergleichbarem Aufwand ähnlich gute Ergebnisse wie das XU4-Element liefert. Dagegen fällt das TLQL-Element auch bei diesem Beispiel im Vergleich zu den anderen Elementen zurück. Bei einer quadratischen Platte sind vierknotige Elemente natürlich im Vorteil, das B/D-Element liefert hier die besten Ergebnisse.

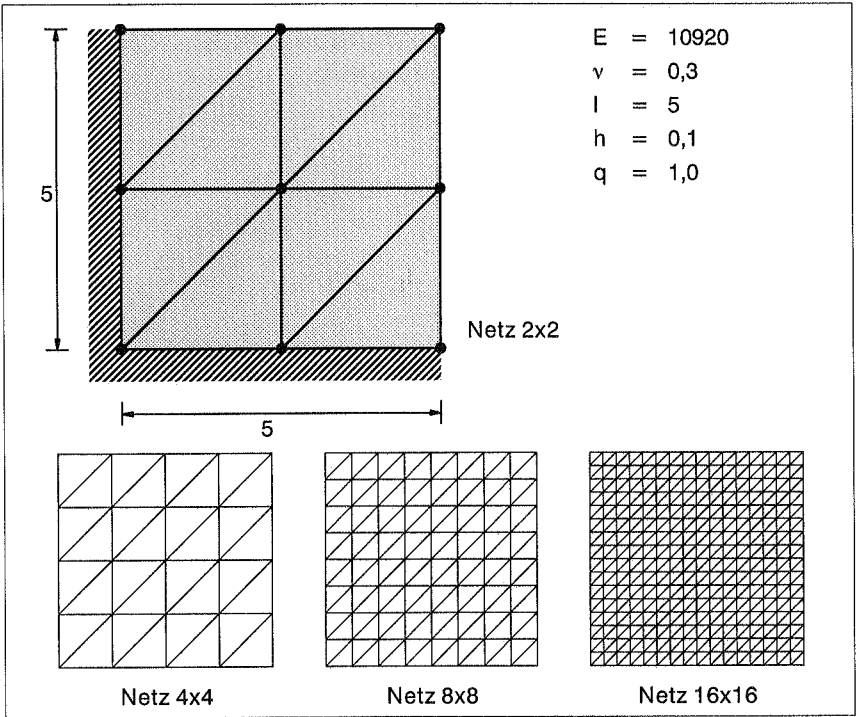


Bild 6.25: Eingespannte quadratische Platte, System und FE-Netze

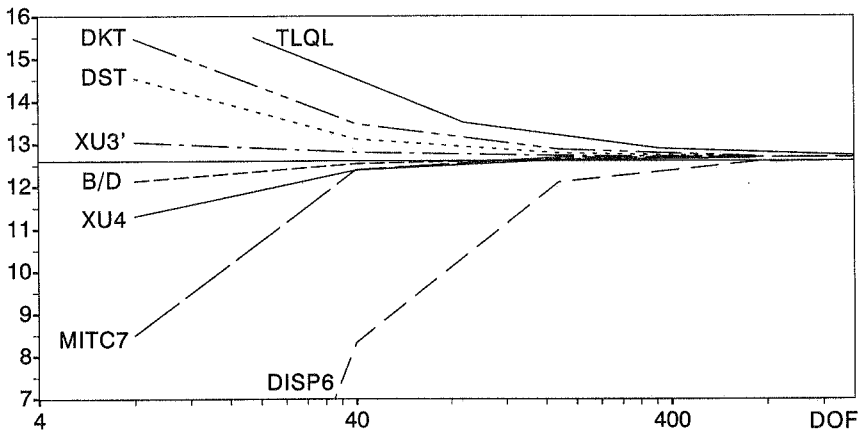


Bild 6.26: Durchbiegung der eingespannten Quadratplatte  
(Referenzlösung  $w_{ref}=12,6$ )

### 6.11.7 Adaptive Berechnung einer Hochbauplatte

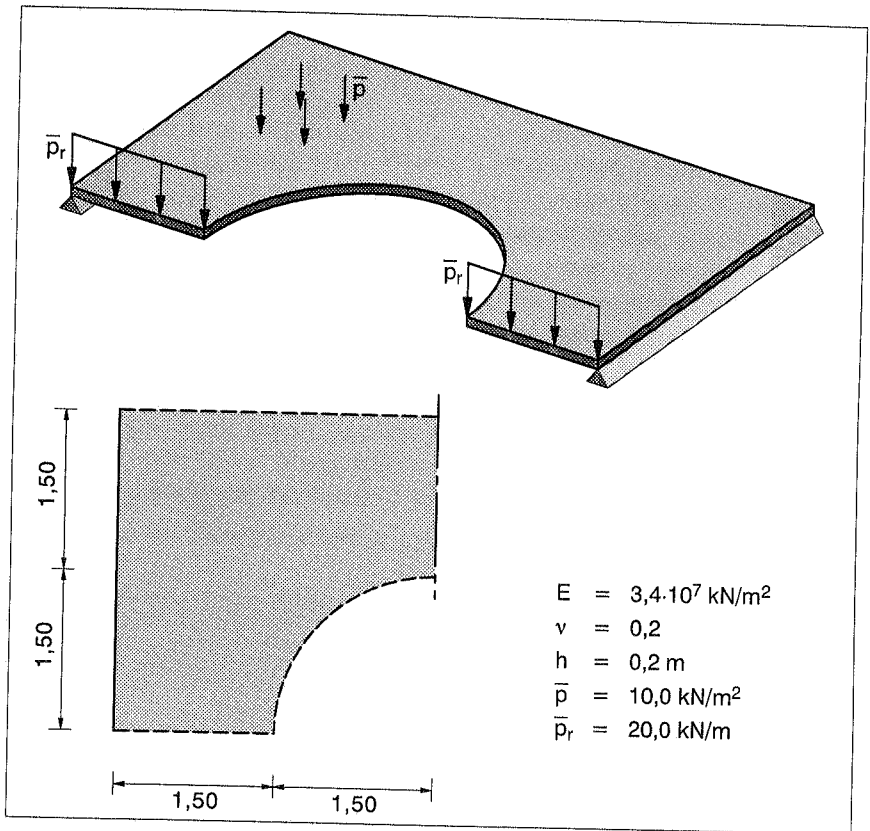


Bild 6.27: Treppenpodest, System und Belastung

Als Beispiel aus der Baupraxis soll das Podest eines Treppenhauses berechnet werden. Die in Bild 6.27 dargestellte rechteckige Platte ist in der Mitte halbkreisförmig ausgespart. Die Platte ist nur an den Stirnseiten gelenkig gelagert, die anderen Ränder sind frei. Als Belastung wird eine konstante Streckenlast  $\bar{p}$ , sowie eine aus den Treppenläufen resultierende konstante Linienlast  $\bar{p}_r$  aufgebracht. Die Materialeigenschaften entsprechen nach DIN 1045 einem Beton B25. Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen am halben System. Die Berechnung wurde adaptiv unter Verwendung eines automatischen Netzgenerators nach Rehle (1996) durchgeführt. In den Konvergenzdiagrammen von Bild 6.28 ist der Fehler  $\eta$  der inneren Energie aufgetragen. Dieser Fehler ist definiert durch:



$$\eta = \left( \frac{\| \mathbf{u} \|_E^2 - \| \mathbf{u}_{ref} \|_E^2}{\| \mathbf{u}_{ref} \|_E^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.70)$$

$$\| \mathbf{u} \|_E^2 = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dA \quad (6.71)$$

Dabei werden die Energieanteile der Querkräfte vernachlässigt. Selbst wenn für  $\mathbf{u}_{ref}$  eine exakte Lösung bekannt ist, wird mit Gleichung (6.70) der wirkliche Fehler nur abgeschätzt, da die Energien im Integral verglichen werden. Zu hohe Spannungen in einem Bereich können durch zu niedrige Spannungen in einem anderen Teil der Struktur ausgeglichen werden. Andererseits stellt der Fehler  $\eta$  ein sehr strenges Maß zur Beurteilung von Berechnungsergebnissen dar. Auch wenn die maximalen Werte der Verformungen und Schnittgrößen bereits gut approximiert werden, ist häufig noch ein signifikanter Fehler in der Energie vorhanden. Dies betrifft vor allem Elemente niedriger Ordnung, die zu größeren Spannungssprüngen an den Elementkanten neigen. Als Referenzlösung wurde eine Berechnung des Systems mit dem neunknotigen Plattenelement nach Pinsky (1987) und einem Netz mit über 13 000 Freiheitsgraden verwendet.

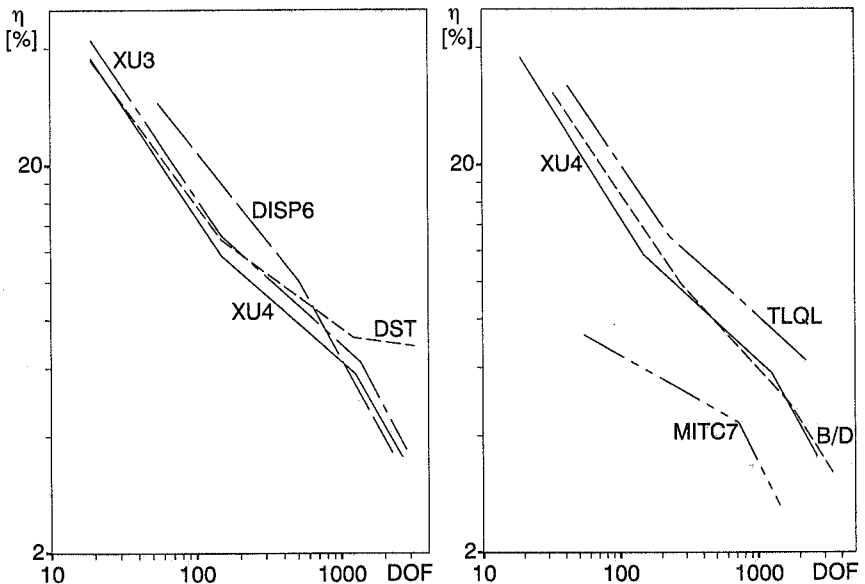


Bild 6.28: Fehler  $\eta$  in % der adaptiven Rechnung in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade

Die Konvergenzverläufe des Fehlers  $\eta$  Bild 6.28 zeigen wiederum das sehr gute Verhalten der XU–Elemente. Die Unterschiede in der Integrationsordnung zwischen XU3<sup>+</sup>– und XU4–Element wirken sich nur geringfügig aus, das XU4–Element liefert dabei einen etwas geringeren Fehler. Beide Elemente erzielen bei groben Netzen bessere Ergebnisse als das DISP6–Element, welches erst bei hoher Netzauflösung gleichwertig zu den XU–Elementen ist. Die Leistungsfähigkeit des XU4–Elementes ist mit dem viereckigen B/D–Element vergleichbar, das bei gleicher Zahl von Freiheitsgraden praktisch dieselbe Genauigkeit erreicht. Das DST–Element zeigt zunächst ein sehr gutes Verhalten, konvergiert dann jedoch gegen einen anderen Grenzwert. Die Ursache hierfür sind leichte Oszillationen der Biegemomente. An der Stelle des maximalen Biegemomentes werden Schwankungen von bis zu 20 % des Größtwertes festgestellt. Die geglätteten Werte konvergieren gegen den Sollwert, dennoch sind die Schnittgrößen des DST–Elementes kritisch zu bewerten. Das TLQL–Element zeigt ein gutes Konvergenzverhalten, es werden jedoch durchweg schlechtere Ergebnisse als bei den dreiknotigen Elementen festgestellt. Die geringsten Fehler werden mit dem MITC7–Element erreicht. Die Ansatzfunktionen höherer Ordnung des Elementes führen zu einer sehr guten Approximation der Schnittgrößen. Es wäre jedoch voreilig, dem MITC7–Element generell den Vorzug zu geben, wie ein Vergleich der Schnittkraftverläufe zeigt.

In Bild 6.29 ist der Verlauf der Biegemomente  $m_1$  mit den zugehörigen Netzen für das XU4–Element dargestellt. Ein zufriedenstellendes Ergebnis wird mit Netz 3 bei einem Fehler von 5,8 % erreicht. Für praktische Belange wäre nach einer Spannungsglättung jedoch auch schon Netz 2 mit 149 Freiheitsgraden ausreichend, welches den exakten Spitzenwert des Biegemomentes  $m_x=93,0$  kNm/m bereits sehr gut approximiert. Nach dem Fehler zu urteilen müßte das Startnetz des MITC7–Elementes bereits eine bessere Näherung liefern. Die Schnittkraftverläufe in Bild 6.30 zeigen jedoch, daß der Spitzenwert des Momentes stark überschätzt wird. Erst das Netz 2 mit 298 Freiheitsgraden kann die Kreisöffnung angemessen erfassen und liefert eine bessere Approximation der Schnittgrößen.

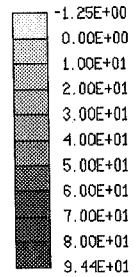
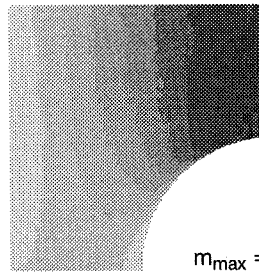
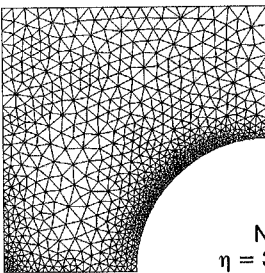
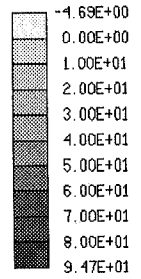
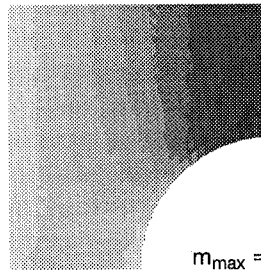
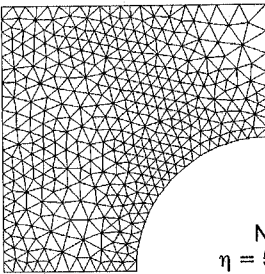
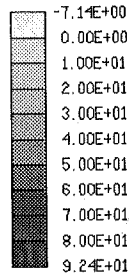
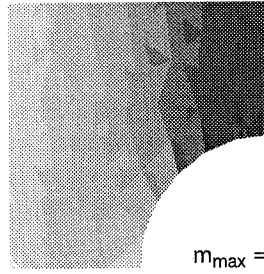
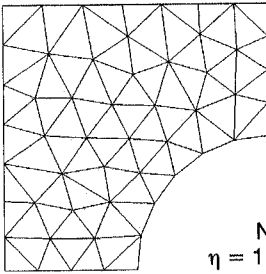
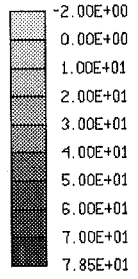
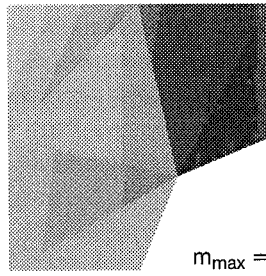
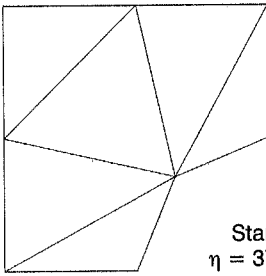
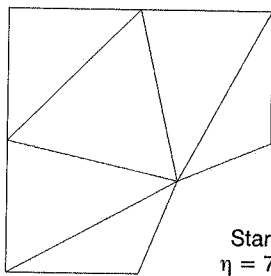
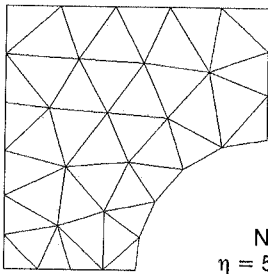
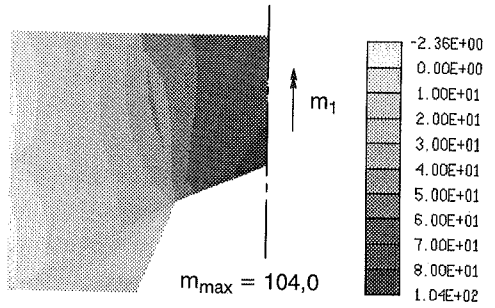


Bild 6.29: Adaptiv verfeinerte Netze und Biegemomente in kNm/m (Element XU4)



Startnetz  
 $\eta = 7,3 \%$



Netz 2  
 $\eta = 5,2 \%$

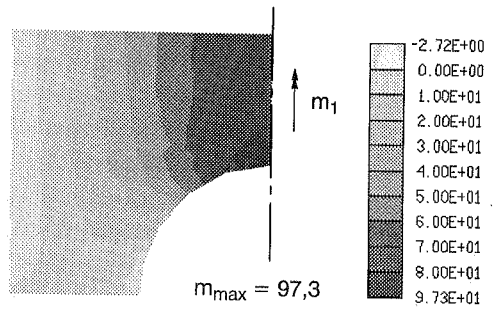


Bild 6.30: Adaptiv verfeinerte Netze und Biegemomente in kNm/m (Element MITC7)

## 6.12 Zusammenfassung

Eine Formulierung von versteifungsfreien, dreieckigen Plattenelementen kann nur durch eine Kombination mehrerer Maßnahmen erreicht werden. Die Verbesserungsverfahren der viereckigen Elemente reichen nicht aus, um auch bei dreieckigen Elementen Schubversteifungen auszuschließen. Mit der ANS- und der Kirchhoffmode-Methode können dreiknotige Elemente formuliert werden, die den Patchtest reiner Biegung bestehen. Die Erfüllung des Patchtests bietet jedoch noch keine Gewähr für die Vermeidung von Schubversteifungen. Das XU-Element überwindet „Shear Locking“ durch die Kombination von Kirchhoffmode-Methode mit erweiterten Rotationen und einer variationellen Schubbedingung. Beim DST-Element werden Schubversteifungen dadurch vermieden, daß die Querkräfte direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Der Rechenaufwand auf Elementebene ist beim DST-Element im Vergleich zum XU-Element etwas höher, da hier mehrere Transformationen durchgeführt werden müssen. Ein geringfügig höherer Rechenaufwand entsteht beim XU-Element, wenn der vierte Knoten für die Rotationen bereits auf Elementebene eliminiert wird. Obwohl die Durchbiegungen des XU-Elementes etwas langsamer als die des DST-Elementes konvergieren, stellt das XU-Element die erfolgreichste Formulierung der hier untersuchten, schubweichen Plattenelemente mit neun Freiheitsgraden dar, da das DST-Element bei der Berechnung der Querkräfte sowie bei der Konvergenz der inneren Energie gewisse Schwächen zeigt. Das XU-Element zeichnet sich besonders durch eine schnelle Konvergenz der Schnittgrößen aus und kann in der Effizienz mit dem viereckigen ANS-Element verglichen werden.

Auch durch eine Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade je Element können Schubversteifungen vermieden werden. Wird wie beim TLQL-Element dabei die Konvergenzrate nicht verbessert, fällt das Element in der Effizienz hinter Elemente mit neun Freiheitsgraden zurück. Eine echte Alternative stellt das MITC7-Element dar, bei dem die zusätzlichen Freiheitsgrade auch zu einer deutlich besseren Konvergenz führen. Bei diesem Element steigt jedoch auch der Aufwand auf Elementebene stark an, da ein Gleichungssystem mit zehn Unbekannten gelöst werden muß.

Ob Elemente niedriger oder höherer Ordnung besser für Finite Elemente Berechnungen geeignet sind, läßt sich auch nach diesen Untersuchungen nicht generell beantworten. Das MITC7-Element scheint konkurrenzlos zu sein, was die Konvergenz der inneren Energie angeht. Andererseits liefert das XU-Element bereits bei groben Netzen bessere Approximationen der maximalen Durchbiegungen und Schnittgrößen.

## 7 Dreieckige Scheibenelemente

### 7.1 Verschiebungselemente

Das dreiknotige Scheibenelement mit linearen Verschiebungsansätzen ist das erste Element, mit dem überhaupt Berechnungen nach der Finite Elemente Methode durchgeführt wurden. Das Element besitzt sechs Freiheitsgrade und die in Tabelle 7.1 aufgeführten Verzerrungsmodes. Die Tabelle bezieht sich wiederum auf ein rechteckiges Element, dessen lokale Koordinaten mit den globalen Koordinaten übereinstimmen.

$u_1$	1	r	s			
$u_2$				1	r	s
$u_{1,1}$		1				
$u_{2,2}$						1
$u_{1,2}+u_{2,1}$			1		1	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Tabelle 7.1 Verzerrungsmodes des dreiknotigen Scheibenelementes (CST)

Die Tabelle zeigt, daß sowohl die Starrkörperbewegungen (1), (4) und (3)–(5), als auch die drei konstanten Verzerrungsmodes (2), (6) und (3)+(5) exakt enthalten sind. Deswegen wird das Element auch als CST–Element („Constant Strain Triangle“) bezeichnet. Zur exakten Integration des Elementes reicht eine Einpunkt–Integration aus. Da das Element keine linearen Verzerrungen besitzt, ist seine Konvergenzrate sehr niedrig. Es wäre jedoch falsch, in diesem Falle von „Locking“ zu sprechen, da keine Verzerrungsmodes behindert oder blockiert werden. Bei inkompressiblem Materialverhalten treten im ebenen Verzerrungszustand starke volumetrischen Versteifungen auf, obwohl das Element über vollständige Ansätze verfügt. Ursache ist die Überbestimmtheit des CST–Elementes im inkompressiblen Fall. Für beliebig große Netze geht der „Constraint Count“  $r$  des Kapitels 4.8.2 gegen eins. Damit gibt es genau so viele Nebenbedingungen wie Unbekannte, so daß das Element vollständig blockiert.

Das sechsknotige Verschiebungselement mit quadratischen Ansätzen wurde erstmals von Fraeijs de Veubeke (1965) eingeführt. Das Element wird als LST–Element („Linear Strain Triangle“) bezeichnet, da es über vollständig lineare Ansätze für die drei Verzerrungskomponenten verfügt. Zusätzlich zu den Modes des CST–Elementes sind hier die linearen Verzerrungszustände (4), (5)–(10), (12), (11)–(6), (6) und (10) ohne versteifende Terme vorhanden. Probleme mit linearen Verzerrungsverläufen können damit

$u_1$	1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$						
$u_2$							1	r	s	$r^2$	rs	$s^2$
$u_{1,1}$		1		r	s							
$u_{2,2}$								1		r	s	
$u_{1,2}+u_{2,1}$			1		r	s		1		r	s	

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12)

Tabelle 7.2 Verzerrungsmodes des sechsknotigen Scheibenelementes (LST)

exakt dargestellt werden. Eine Integrationsregel mit drei Punkten ist zur exakten Bestimmung der Steifigkeitsmatrix ausreichend.

Diese Eigenschaften des LST–Elementes sind nur gegeben, wenn die Elementkanten gerade sind. Bei Elementen mit gekrümmten Kanten können konstante Verzerrungszustände noch exakt dargestellt werden, die linearen Modes werden jedoch durch Terme höherer Ordnung der Jakobimatrix gestört. Aus diesem Grund kann das subparametrische LST–Element mit linearer Geometrie– und quadratischer Verschiebungsinterpolation als optimales Element für kompressible Elastizitätsprobleme angesehen werden.

Auch bei inkompressiblem Material zeigt das LST–Element im ebenen Verzerrungszustand ein besseres Verhalten als das CST–Element. Die Verzerrungen liegen vollständig linear vor und der „Constraint Count“ nimmt den günstigeren Wert von 4/3 ein. Bei Problemen mit wenigen Randbedingungen werden damit gute Ergebnisse erzielt (siehe Kapitel 7.4.4). Allgemein können jedoch auch für dieses Element volumetrische Versteifungen nicht vollständig ausgeschlossen werden, da nach Hughes (1987) das Element im inkompressiblen Fall die Babuska–Brezzi–Bedingung nicht erfüllt.

Im Gegensatz zu den viereckigen Scheibenelementen sind das CST– und das LST–Element nicht ohne weiteres verbesserbar. Die Elemente bilden jeweils konstante bzw. lineare Verzerrungen exakt ab, so daß keine Maßnahmen zur Entkopplung oder Filterung von Modes erforderlich sind. Für weitere Verzerrungszustände stehen keine Freiheitsgrade zur Verfügung, da die Zahl der exakten Modes genau der Anzahl der Freiheitsgrade eines Elementes entspricht:

$$n_{\text{DOF}} = n_e \cdot n_{\text{poly}} + n_r$$

$6 = 3 \cdot 1 + 3$	CST
$12 = 3 \cdot 3 + 3$	LST

Ein zusätzlicher Mode kann damit ohne Beeinflussung der bereits vorhandenen Modes nicht eingeführt werden. Auch mit gemischten Methoden ist keine Verbesserung der Elemente möglich. Eine hybriden Spannungsmethode mit konstanten Spannungsan-

sätzen für das CST–Element führt zu keiner Veränderung der Steifigkeitsmatrix des Elementes. Unvollständig lineare Spannungsansätze für das LST–Element würden die vorhandenen Modes unnötig verschlechtern. Die EAS–Methode scheitert an den Bedingungen, die von den zusätzlich angenommen Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$  einzuhalten sind. Die erweiterten Ansätze  $\bar{\epsilon}$  müssen energieorthogonal zu konstanten Spannungen, sowie linear unabhängig und nicht energieorthogonal zu den kompatiblen Verzerrungen  $\epsilon_C$  sein:

$$\int \bar{\epsilon} \, dA = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$$\int \bar{\epsilon} \mathbf{C} \epsilon_C \, dA \neq \mathbf{0} \quad (7.2)$$

$$\mathbf{E} \cap \bar{\mathbf{E}} = \emptyset \quad \text{mit } \epsilon \in \mathbf{E}, \bar{\epsilon} \in \bar{\mathbf{E}} \quad (7.3)$$

Wenn Bedingung (7.2) verletzt wird, sind die erweiterten Verzerrungen von den kompatiblen Verzerrungen entkoppelt und es entsteht die Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes. Für das CST–Element ist damit keine Modifikation möglich, da sich die Bedingungen (7.1) und (7.2) gegenseitig ausschließen. Auch eine Erweiterung des CST–Elementes um einen vierten Knoten in Elementmitte ist wirkungslos, da die zugehörigen Verzerrungen ebenfalls die Bedingung (7.2) nicht erfüllen. Eine Erweiterung des LST–Elementes um quadratische Modes ist im Prinzip möglich. Eine Verbesserung dieses leistungsfähigen Elementes ist jedoch nicht zu erwarten. Auch theoretisch wäre dieses Vorgehen problematisch, da die erweiterten Verzerrungen dann auch zu linearen Spannungen orthogonal sein müßten. Reddy (1992) kommt deswegen zu dem Schluß, daß dreieckige Scheibenelemente prinzipiell nicht mit der EAS–Methode verbessert werden können. Der große Erfolg der EAS–Methode bei viereckigen Elementen basiert auf der Unvollständigkeit bilinearer Verzerrungsansätze. Unvollständige Ansätze sind einerseits für Versteifungseffekte verantwortlich, andererseits bieten sie jedoch auch die Möglichkeit zur Vermeidung dieser Effekte. Verfahren wie die EAS–Methode können demnach Elemente nicht prinzipiell verbessern, sondern nur bestehende Defekte vermeiden.

Für Plattenelemente höherer Ordnung ist das LST–Element ein adäquater Partner zur Kopplung in einem Schalenelement. Das CST–Element bietet jedoch für die verbesserten dreiknotigen Plattenelemente eine ungenügende Approximation der Membrankräfte. Eine Verbesserung des CST–Elementes ist nur möglich, wenn dem Element zusätzliche Freiheitsgrade zur Verfügung gestellt werden. Um Knoten in den Seitenmitten zu vermeiden, kann das CST–Element um Rotationsfreiheitsgrade in den Elementecken erweitert werden.



## 7.2 Das Allmann–Element

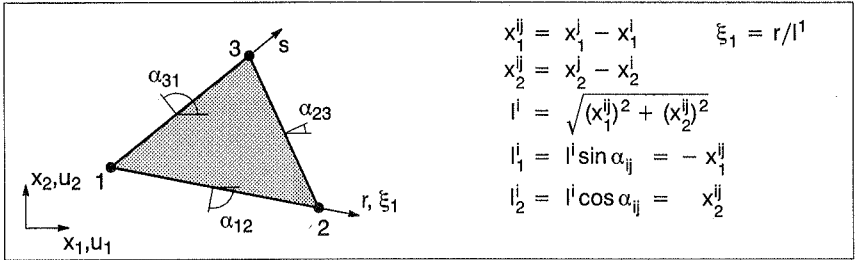


Bild 7.1: Geometrie des Allmann–Elementes

Irons (1980) warnte nachdrücklich vor dem Einsatz von Drillfreiheitsgraden in Scheibenelementen. Die Problematik, daß Scheibenelemente mit Drillfreiheitsgraden den Patchtest nicht bestehen, wurde erstmals von Allmann (1984) gelöst. Im Gegensatz zu schubweichen Plattenelementen, die auch bei Nichtbestehen des Patchtests konvergieren können, ist bei Scheibenelementen die Erfüllung des Patchtests eine notwendige Bedingung für die Konvergenz. Für die Formulierung des Allmann–Elementes werden die in Bild 7.1 dargestellten Größen verwendet. Das Element besitzt neben den sechs Verschiebungsfreiheitsgraden des CST–Elementes drei Freiwerte für die Rotationen  $\omega^i$  in den Elementknoten. In der ursprünglichen Form von 1984 wird für die Verschiebungen normal zur Elementkante  $i$  ein quadratischer, tangential dagegen nur ein linearer Ansatz gewählt:

$$u_n = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 \quad (7.4)$$

$$u_t = a_4 + a_5 \xi \quad (7.5)$$

mit:

$$u_n = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha \quad (7.6)$$

$$u_t = -u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha \quad (7.7)$$

Die fünf Parameter  $a_i$  werden auf die gleiche Weise wie die erweiterten Verschiebungen in Kapitel 5.8.2 definiert, so daß sich die folgenden Verschiebungsansätze ergeben:

$$u_n(\xi) = (1 - \xi)u_n^i + \xi u_n^j + \frac{1}{2}(\xi - l^i \xi^2)(\omega^j - \omega^i) \quad (7.8)$$

$$u_t(\xi) = (1 - \xi)u_t^i + \xi u_t^j \quad (7.9)$$

Diese Art der Interpolation führt zu einem Element mit inneren Kinematiken. Außerdem ist die Rotation des Verschiebungsfeldes  $\Omega$  nach Gleichung (7.13) an den Knotenpunkten nicht zu den Rotationswerten  $\omega^i$  identisch. In der verbesserten Formulierung des Elementes von Allmann (1988) wird deshalb der Ansatz für die normalen Verschiebungen um kubische Anteile erweitert:

$$\bar{u}_n(\xi) = u_n(\xi) + A_{ij}(\xi - |\xi|^2)(2\xi - 1) \quad (7.10)$$

mit:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\omega^i + \omega^j) - \Omega_0 \quad (7.11)$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{4A}(l_1^{23}u_1^1 + l_1^{31}u_1^2 + l_1^{12}u_1^3 - l_2^{23}u_2^1 - l_2^{31}u_2^2 - l_2^{12}u_2^3) \quad (7.12)$$

Die Faktoren  $A_{ij}$  setzen sich aus der Starrkörperrotation der Kante  $ij$  abzüglich der Rotation  $\Omega_0$  des CST-Elementes zusammen. Diese Erweiterung des Verschiebungsansatzes wurde genau so gewählt, daß an den Elementknoten die Rotationen  $\omega^i$  mit den kompatiblen Rotationen  $\Omega$  übereinstimmen:

$$\omega^i = \Omega(x_1^i, x_2^i) = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})|_{x_1^i, x_2^i} \quad (7.13)$$

Die kubischen Terme führen zu einer inkompatiblen Interpolation der Verschiebungen, da die Rotation  $\Omega_0$  von Element zu Element unterschiedlich ist. Dennoch konnte Allmann (1993) eine variationelle Basis des Elementes angeben. Durch Koordinatentransformation ergeben sich aus Gleichung (7.8) bis (7.12) die globalen Verschiebungen in Abhängigkeit der Knotenvariablen. Durch Differentiation entsteht ein B-Operator, so daß die Steifigkeitsmatrix wie bei einer Verschiebungsmethode gebildet werden kann. Der gewählte Verschiebungsansatz führt zu quadratischen Verzerrungen, schon eine Integration mit drei Stützstellen führt jedoch zu einer regulären Elementmatrix. Allmann (1988) macht selbst keine Angaben, welche Integrationsordnung verwendet werden sollte. Außerdem wird eine Auswertung der Spannungen in den Ecken des Elementes empfohlen, was zu konstanten Verzerrungs- und Spannungsverläufen führt. Sinnvoller erscheint eine Bestimmung der Verzerrungen an denselben Stellen, die auch für die Integration der Steifigkeitsmatrix verwendet werden. Das Beispiel eines Kragarms unter reiner Biegung nach Bild 7.2 zeigt, daß die Ergebnisse des Elementes stark von der gewählten Integrationsordnung abhängig sind. Die normierte Durchbiegung am Kragarmende ist für verschiedene Integrationsordnungen in Abhängigkeit des Parameters  $e$  angegeben. Dieser Test kann nur von Elementen mit vollständig linearen Ansätzen exakt gelöst werden. Es zeigen sich deutliche Unterschiede, wobei mit einer Integration mit vier Stützstellen die mit Abstand besten Ergebnisse erzielt werden. Unabhängig von der Integrationsordnung erfüllt das Allmann-Dreieck den Patchtest konstanter Verzerrungen, so daß die Konvergenz des Elementes gewährleistet ist.

Bei der Umrechnung von Streckenlasten in konsistente Knotenlasten müssen die Drillfreiheitsgrade besonders berücksichtigt werden. Bei konstanten Streckenlasten normal zur Elementkante entfallen die kubischen Terme der erweiterten Verschiebungen und die äußere Arbeit kann über das Integral der Verschiebungen nach Ansatz (7.8) gebildet werden. Für eine Streckenlast  $q_n$  ergeben sich neben den üblichen Faktoren für die Knotenkräfte auch Knotenmomente mit dem Wert  $\pm q_n \cdot l^2/12$ . Zur Erfüllung des

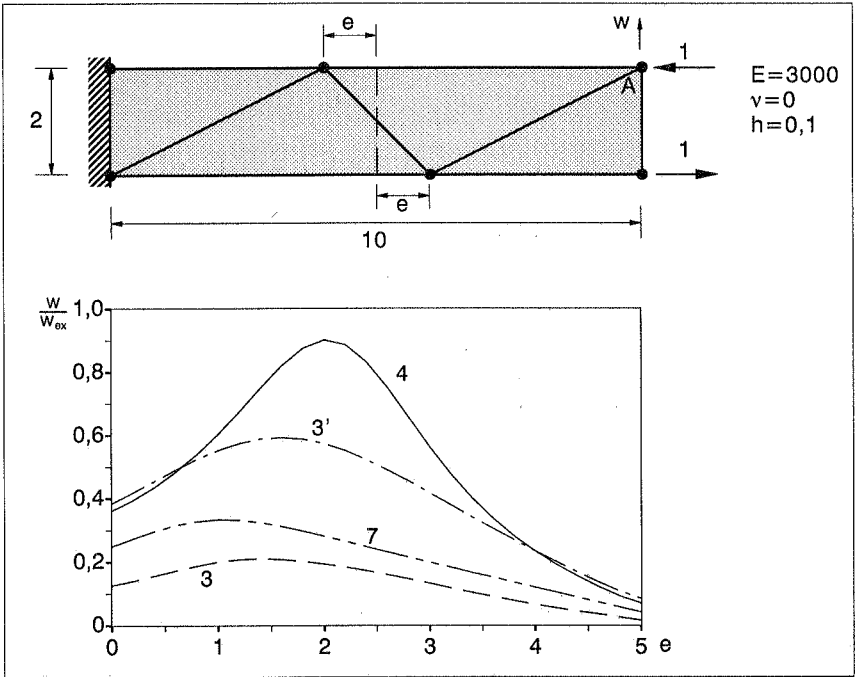


Bild 7.2: Biegepatchtest mit Integrationsregeln 3, 3', 4 und 7 des Allmann-Elementes

Patchtests ist eine korrekte Belastung mit diesen Knotenmomenten unbedingt erforderlich. Wegen der inkompatiblen kubischen Verschiebungsanteile empfiehlt Allmann (1988), auf eine lineare Verteilung der Belastung zu verzichten, damit die Konvergenz des Elementes gewährleistet bleibt.

Das Allmann-Element leistet einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung des CST-Elementes. Die scheinbar willkürlich gewählten inkompatiblen Verschiebungsansätze, der hohe Polynomgrad der Verzerrungen im Element, die starke Abhängigkeit von der Integrationsordnung sowie die Berechnung der Lastvektoren lassen jedoch gewisse Zweifel an der Stimmigkeit dieses Elementkonzeptes aufkommen. Dies betrifft auch das ungünstige Verhalten des Elementes bei inkompressiblem Material (siehe Kapitel 7.4.4).

## 7.3 Das FF-Element

### 7.3.1 Elementformulierung

Eine andere Möglichkeit zur Berücksichtigung von Drillfreiheitsgraden bei Scheibenelementen wurde von Bergan (1985) eingeführt. Dieses Element basiert auf der „Freien Formulierung“ (siehe Kapitel 5.5) und wird im folgenden als FF-Element bezeichnet.

Das FF–Element besitzt wie das Allmann–Element neun Freiheitsgrade: sechs Verschiebungen und drei Rotationen, die jeweils durch Werte in den Ecken des Elementes angesetzt werden. Das Element erhält im Vergleich zu dem CST–Element drei zusätzliche Freiheitsgrade, die für einen unvollständig linearen Ansatz der Verzerrungen verwendet werden. Eine Aufteilung der Verschiebungen in rc– und h–Modes wird mit den folgenden Ansätzen durchgeführt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_h$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 1 & \eta \end{bmatrix} \mathbf{p}_r + \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} \mathbf{p}_c + \begin{bmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 \\ -\frac{1}{2} \xi_1^2 & -\frac{1}{2} \xi_2^2 & -\frac{1}{2} \xi_3^2 \end{bmatrix} \mathbf{p}_h \quad (7.14)$$

Dabei werden mit  $\xi$  und  $\eta$  die Koordinaten eines auf die Elementgröße normierten, globalen Koordinatensystems bezeichnet. Die Koordinaten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  stehen für drei lokale, orthogonale Koordinatensysteme. Die Ansätze für  $\mathbf{u}_r$  und  $\mathbf{u}_c$  entsprechen den Standardmodes des CST–Elementes. Entscheidend ist die Wahl der Ansätze höherer Ordnung. Sie stellen jeweils einen reinen Biegemode bezüglich der lokalen Koordinaten  $\xi_i, \eta_i$  dar:

$$\varepsilon_{\xi_i} = (\xi_i \eta_i)_{,\xi_i} = \eta_i \quad (7.15)$$

$$\varepsilon_{\eta_i} = \left(-\frac{1}{2} \xi_i^2\right)_{,\eta_i} = 0 \quad (7.16)$$

$$\varepsilon_{\xi_i \eta_i} = (\xi_i \eta_i)_{,\eta_i} + \left(-\frac{1}{2} \xi_i^2\right)_{,\xi_i} = 0 \quad (7.17)$$

Als  $\xi_i$ –Richtungen für die lokalen Koordinatensysteme wählt Bergan (1985) die drei Seitenhalbierenden des Elementes. Damit kann jeweils ein Biegemode mit linearen Dehnungen in  $\xi_i$ –Richtung ohne Schubverzerrungen dargestellt werden. Eine andere Wahl der lokalen Koordinatenrichtungen führt nach Bergan zu einer singulären Transformationsmatrix  $\mathbf{G}$ . Durch Transformation in das normierte, globale  $\xi, \eta$ –Koordinatensystem mit

$$\xi_i = \xi \cos \alpha_i + \eta \sin \alpha_i \quad (7.18)$$

$$\eta_i = -\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i \quad (7.19)$$

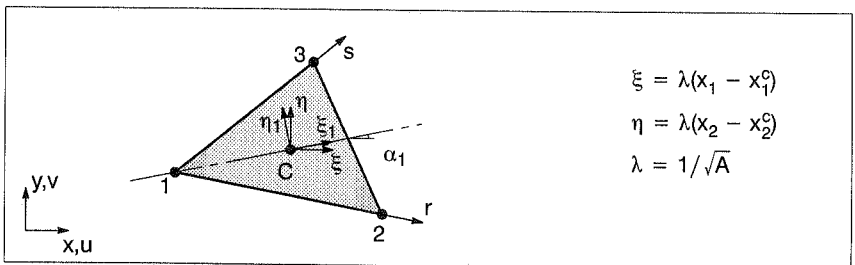


Bild 7.3: Orthogonale Koordinatensysteme des FF–Elementes

können die Verschiebungen höherer Ordnung

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_{hi} \mathbf{p}_{hi} \quad (7.20)$$

in Abhängigkeit der globalen Variablen  $\xi$  und  $\eta$  dargestellt werden:

$$\mathbf{u}_h^i = \begin{bmatrix} u_{1h}^i \\ u_{2h}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \xi\eta \\ \eta^2 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.21)$$

mit:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= -\frac{1}{2}s_i c_i^2 & a_{2i} &= c_i^3 & a_{3i} &= \frac{1}{2}s_i^3 + s_i c_i^2 \\ b_{1i} &= -s_i^2 c_i - \frac{1}{2}c_i^3 & b_{2i} &= -s_i^3 & a_{3i} &= \frac{1}{2}s_i^2 c_i \\ s_i &= \sin \alpha_i & c_i &= \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (7.22)$$

Die Verzerrungen werden direkt durch Differentiation der Verschiebungen gewonnen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}_M(\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_h) \\ &= \mathbf{B}_{rc} \mathbf{p}_{rc} + \mathbf{B}_h \mathbf{p}_h \end{aligned} \quad (7.23)$$

mit:

$$\mathbf{B}_{rc} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{B}_h = \lambda \begin{bmatrix} -s_1 c_1^2 \xi + c_1^3 \eta & -s_2 c_2^2 \xi + c_2^3 \eta & -s_3 c_3^2 \xi + c_3^3 \eta \\ -s_1^3 \xi + s_1^2 c_1 \eta & -s_2^3 \xi + s_2^2 c_2 \eta & -s_3^3 \xi + s_3^2 c_3 \eta \\ -2s_1^2 c_1 \xi + 2s_1 c_1^2 \eta & -2s_2^2 c_2 \xi + 2s_2 c_2^2 \eta & -2s_3^2 c_3 \xi + 2s_3 c_3^2 \eta \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Zur Bestimmung der Transformationsmatrix  $\mathbf{G}$  werden die Knotenfreiheitsgrade  $\mathbf{d}$  mit den Werten der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in den drei Eckpunkten des Elementes gleich gesetzt:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ \omega^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \text{rot } \mathbf{u} \end{bmatrix}^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.26)$$

mit:

$$\text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) = \omega \quad (7.27)$$

Da genau gleich viele Verschiebungsmodes angesetzt werden, wie Knotenfreiheitsgrade zur Verfügung stehen, entsteht ein invertierbares Gleichungssystem mit neun Unbekannten, welches Bergan (1985) entnommen werden kann:

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gp} \quad (7.28)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{Hd} \quad (7.29)$$

Wie in Kapitel 5.5 dargestellt, wird die Steifigkeitsmatrix niedriger Ordnung  $\mathbf{K}_b$  nicht über den B–Operator, sondern mit Hilfe der „Lumping“–Matrix  $\mathbf{L}$  bestimmt:

$$\mathbf{K}_b = \frac{1}{A} \mathbf{LCL}^T \quad (7.30)$$

Mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{L}$  werden konstante Spannungen in konsistente Knotenlasten umgewandelt:

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{L}\sigma_c \quad (7.31)$$

mit:

$$\mathbf{t}_c = [t_1^1 \quad t_2^1 \quad m^1 \quad t_1^2 \quad t_2^2 \quad m^2 \quad t_1^3 \quad t_2^3 \quad m^3] \quad (7.32)$$

$$\sigma_c^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}] \quad (7.33)$$

Die Matrix  $\mathbf{L}$  wird auf dieselbe Art und Weise wie die Lastvektoren bei einer Verschiebungsmethode ermittelt. Für die Knotenkräfte ergeben sich damit die bekannten Faktoren  $i!/2$  linearer Elemente, so daß dieser Teil der „Lumping“–Matrix identisch zum B–Operator des CST–Elementes ist. Die Zuordnung von Knotenmomenten zu einer konstanten Kantenbelastung ist nicht eindeutig. Bergan (1985) wählt normal zur Kante einen kubischen Verschiebungsansatz mit Hermite–Polynomen. Dies ergibt mit  $(i!)^2/12$  denselben Kopplungsterm wie beim Allmann–Element. Unter Berücksichtigung der Koordinatentransformation entsteht die  $\mathbf{L}$ –Matrix, indem für jeden Knoten die Einflüsse der angrenzenden Knoten berücksichtigt werden:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2^{23} & 0 & x_1^{32} \\ 0 & x_1^{32} & x_2^{23} \\ \alpha x_2^{23}(x_2^{13} - x_2^{21})/6 & \alpha x_1^{32}(x_1^{31} - x_1^{12})/6 & \alpha(x_1^{31}x_1^{13} - x_1^{12}x_2^{21})/3 \\ x_2^{31} & 0 & x_1^{13} \\ 0 & x_1^{13} & x_2^{31} \\ \alpha x_2^{31}(x_2^{21} - x_2^{32})/6 & \alpha x_1^{13}(x_1^{12} - x_1^{23})/6 & \alpha(x_1^{12}x_2^{21} - x_1^{23}x_2^{32})/3 \\ x_2^{12} & 0 & x_1^{21} \\ 0 & x_1^{21} & x_2^{12} \\ \alpha x_2^{12}(x_2^{32} - x_2^{13})/6 & \alpha x_1^{21}(x_1^{23} - x_1^{31})/6 & \alpha(x_1^{23}x_2^{32} - x_1^{31}x_2^{13})/3 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Die „Lumping“–Matrix gewährleistet, daß konstante Verzerrungszustände exakt darstellbar sind. Der Einfluß der Knotenmomente kann dabei mit einem Faktor  $\alpha$  skaliert werden. Zur exakten Erfüllung des Patchtests müssen dann auch die zur Aufbringung einer konstanten Randlast erforderlichen Momente mit diesem Faktor multipliziert werden.

Die Steifigkeitsmatrix höherer Ordnung  $\mathbf{K}_h$  wird nach Gleichung (5.31) und (5.42) direkt über den B–Operator  $\mathbf{B}_h$  bestimmt:

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{H}_h^T \int_A \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h dA \mathbf{H}_h \quad (7.35)$$

Dabei besteht die Matrix  $\mathbf{H}_h$  aus den unteren drei Zeilen der Transformationsmatrix  $\mathbf{H}$  nach Gleichung (7.29), mit der die Knotenfreiheitsgrade auf die Parameter höherer Ordnung  $\mathbf{p}_h$  abgebildet werden.

Bei der Berechnung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_b + \beta \mathbf{K}_h \quad (7.36)$$

wird der Einfluß der höheren Verzerrungsmodes mit einem weiteren Faktor  $\beta$  skaliert. Der Einfluß der beiden Skalierungsparameter auf das Elementverhalten wird im nächsten Kapitel näher untersucht. Das FF-Element wurde von Felippa (1991) eingehend analysiert und um zwei Varianten erweitert. Da diese Varianten jedoch nur unwesentliche Verbesserungen gegenüber der ursprünglichen Formulierung bieten, werden sie hier nicht weiter behandelt.

### 7.3.2 Einfluß der Skalierungsparameter $\alpha$ und $\beta$

Sowohl Bergan (1985) als auch Felippa (1991) beschäftigen sich ausführlich mit der optimalen Wahl der Skalierungsparameter  $\alpha$  und  $\beta$ , die großen Einfluß auf das Konvergenzverhalten des Elementes haben.

Mit dem Parameter  $\alpha$  wird der Einfluß der Rotationen auf die Steifigkeitsmatrix niedriger Ordnung  $\mathbf{K}_b$  gesteuert. Bergan schlägt zwei Methoden zur Bestimmung von  $\alpha$  vor. Einmal wird die innere Energie eines Elementes bei einer Biegeverformung bezüglich  $\alpha$  minimiert, wobei eine Seitenhalbierende mit der neutralen Faser übereinstimmt. Das Ergebnis ist abhängig von der Elementgeometrie und liefert Ergebnisse zwischen 1,0 und 2,0. Als zweite Methode werden die Verzerrungen im Schwerpunkt des Elementes bei einem reinen Biegezustand überprüft. Mit  $\alpha$  kann gesteuert werden, welche Verzerrungskomponente dabei den exakten Wert null einnimmt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0 & \text{für } \alpha &= 2,0 \\ \varepsilon_{22} &= 0 & \text{für } \alpha &= 1,0 \\ \varepsilon_{12} &= 0 & \text{für } \alpha &= 1,5 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist für beliebige Elementgeometrien gültig. Bergan schlägt  $\alpha=1,5$  als sinnvolle Wahl vor. Dies ist der Mittelwert aus der Energieminimierung und führt zu einer Entkopplung der Schubverzerrungen von reinen Biegezuständen.

Eine optimale Wahl des Parameters  $\beta$  ist aufgrund der Komplexität der höheren Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_h$  schwerer zu treffen. Mit  $\beta$  wird der Einfluß der quadratischen Verschiebungsmodes  $\mathbf{q}_h$  auf das Element geregelt. Bergan eicht den Parameter  $\beta$  an einem Rechteck nach Bild 7.4 a), welches unter reiner Biegung mit zwei Dreiecken diskretisiert wird.

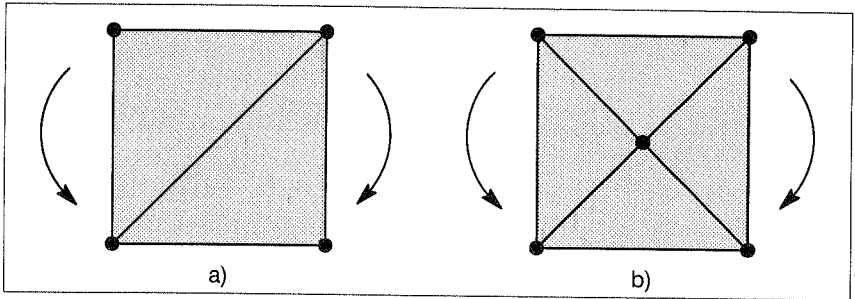


Bild 7.4: Systeme zur Bestimmung des Faktors  $\beta$

Für verschiedene Seitenverhältnisse und Querdehnzahlen zwischen 0,0 und 0,5 nimmt der Faktor  $\beta$  Werte zwischen 0,375 und 0,529 ein. Bergan empfiehlt  $\beta=0,5$  als mittleren Wert. Für eine Netzeinteilung nach Bild 7.4 b) ergeben sich Werte für  $\beta$  zwischen 0,927 und 1,726. Dies zeigt, wie stark die gewählten Parameter von dem verwendeten Netz abhängig sind. In einer Parameterstudie wird deshalb überprüft, ob für nicht rechtwinklige Dreiecke bessere Faktoren gefunden werden können. Der in Bild 7.5 dargestellte Kragarm wird mit einer Einzellast belastet. Unter Berücksichtigung der Schubverformung beträgt die maximale Durchbiegung nach der Balkentheorie  $w=0,35587$ . Die Berechnung erfolgt mit acht dreieckigen Elementen, die vorwiegend rechtwinklig bzw. gleichseitig sind. In den Schaubildern ist die Abweichung von der normierten Lösung für  $0,5 \leq \alpha \leq 3,0$  und  $0,1 \leq \beta \leq 1,5$  angegeben.

Jede Kombination von  $\alpha$  und  $\beta$  entlang der Höhenlinie 1,0 führt zu einer exakten Lösung für das jeweilige Netz. Da sich die 1,0-Höhenlinie für rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke nicht überschneiden, ist keine Kombination möglich, die für beide Netze zu einem exakten Ergebnis führt. Bei den rechtwinkligen Elementen liegen die vorgeschlagenen Werte 1,5/0,5 sehr nahe an der exakten Lösung. Eine Elementformulierung ohne Skalierungsparameter entspricht dem Punkt 1,0/1,0, an dem die erzielte Lösung weniger als 60% der exakten Lösung beträgt.

Bei gleichseitigen Dreiecken bietet sich die Kombination 2,0/0,5 an. Auch hier führt ein Verzicht auf Skalierungsparameter auf etwas mehr als 50 % der exakten Lösung. Da vor allem bei der Verwendung von Freivernetzern häufig gleichseitige Dreiecke auftreten, soll auch die Kombination 2,0/0,5 bei den Testproblemen untersucht werden.

### 7.3.3 Erweiterung des FF-Elementes mit der EAS-Methode

Das FF-Element verfügt über drei konstante und drei lineare Verzerrungsmoden, so daß zu einem vollständig linearen Verzerrungsansatz noch drei Moden fehlen. Im Gegensatz zum CST- oder LST-Element besteht deswegen die Möglichkeit, dieses Element mit der EAS-Methode um drei Verzerrungsmoden zu erweitern. Aus der unendli-



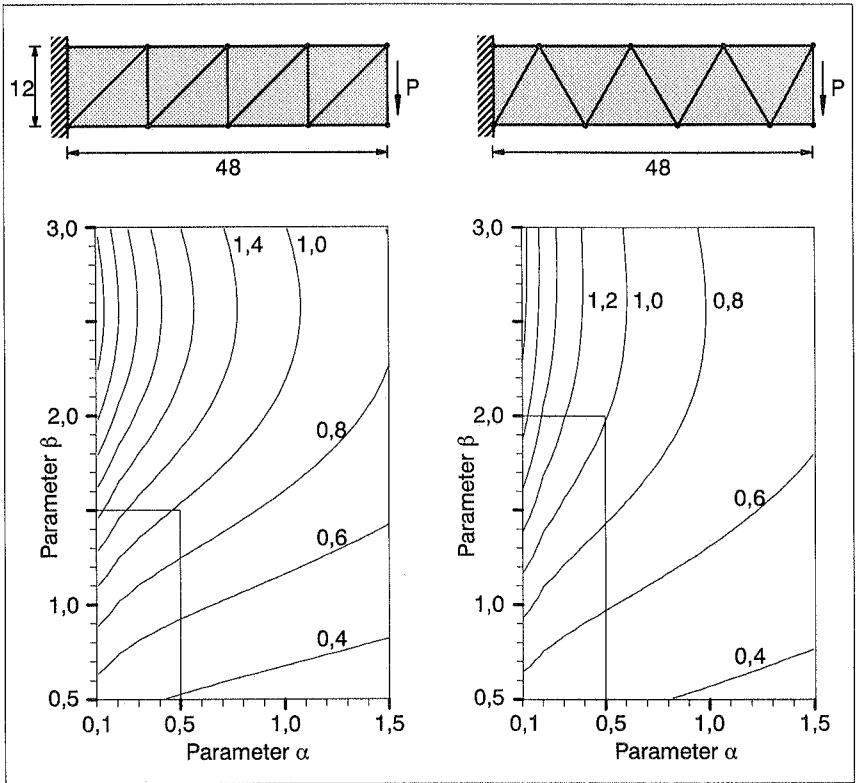


Bild 7.5: Normierte Durchbiegung in Abhängigkeit der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$

chen Menge linear unabhängiger Verzerrungsmoden müssen dazu drei zulässige Ansätze ausgewählt werden. Die bereits vorhandenen linearen Verzerrungen nach Gleichung (7.25) sind reine Biegemodes in den drei Lokalsystemen des Elementes. Zu einer vollständigen Interpolation von  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  in  $\xi$  und  $\eta$  fehlt noch ein Mode  $\bar{\varepsilon}_1$ , der mit einer Orthogonalitätsbedingung bestimmt wird:

$$\mathbf{B}_h \bar{\varepsilon}_1 = \mathbf{0} \quad (7.37)$$

mit:

$$\bar{\varepsilon}_1^T = [d_1 \xi + d_2 \eta \quad d_3 \xi + d_4 \eta \quad 0] \quad (7.38)$$

Einer der Parameter  $d_i$  kann frei gewählt werden. Damit ergibt sich aus Gleichung (7.37) ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten, das problemlos gelöst werden kann. Als weitere Verzerrungsmoden wurden zwei lineare Terme für die Schubverzerrungen gewählt. Dadurch ist die Interpolationsmatrix  $\mathbf{M}_r$  der erweiterten Verzerrungen festgelegt:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} (s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 s_3) \xi + s_1 s_2 s_3 \eta & 0 & 0 \\ (c_1 c_2 s_3 + s_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 c_3) \eta + c_1 c_2 c_3 \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

Dieser Ansatz ist linear unabhängig zu den bereits vorhandenen Verzerrungsmoden und energieorthogonal zu konstanten Spannungen, da die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ihren Ursprung im Schwerpunkt des Elementes haben. Der Ansatz führt zu einem Element ohne innere Kinematiken und wird mit dem Namen FFEAS bezeichnet. Im Prinzip ist auch eine Erweiterung des Allmann-Elementes mit der EAS-Methode möglich. Aufgrund der kubischen Verschiebungen des Elementes ist eine Bestimmung von zulässigen Verzerrungsmoden, die zu vollständig linearen Verzerrungsmoden führen, jedoch wesentlich aufwendiger.

## 7.4 Numerische Ergebnisse

Die vorgestellten Scheibenelemente sollen in ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen werden, dazu wird eine Reihe von Testproblemen mit den folgenden Elementen

ALL	Allmann Dreieck mit Integration 4 nach Kapitel 7.2
FF	Element nach der „Freien Formulierung“ nach Kapitel 7.3.1 (Parameter $\alpha/\beta$ : 1,5/0,5 2,0/0,5 1,0/1,0)
FFEAS	FF-Element mit orthogonalen EAS-Modes nach Kapitel 7.3.3 (Parameter $\alpha/\beta$ : 1,5/0,5)

Zum Vergleich werden folgende Elemente verwendet:

CST	„Constant Strain Triangle“ nach Kapitel 7.1
LST	„Linear Strain Triangle“ nach Kapitel 7.1
EAS4	vierknotiges EAS-Element nach Simo (1990)

### 7.4.1 Patchtest für konstante Verzerrungen

Wie bei den Plattenelementen gewährleistet auch hier der Patchtest für konstante Verzerrungen die Konvergenz der Elemente. Bild 7.6 zeigt die verwendeten Netzeinteilungen und Lastvektoren des Patchtests. Bei den Elementen mit Rotationsfreiheitsgraden müssen Drillmomente aufgebracht werden, wobei bei den FF-Elementen die Abhängigkeit von dem Parameter  $\alpha$  zu berücksichtigen ist. Der Patchtest wird von allen Elementen exakt erfüllt.

### 7.4.2 Eigenwertanalyse

Um innere Kinematiken der getesteten Elemente mit Sicherheit ausschließen zu können, wurde jeweils eine Eigenwertanalyse durchgeführt. Bei allen Elementen wurden außer den Starrkörperbewegungen keine Null-Eigenwerte festgestellt.

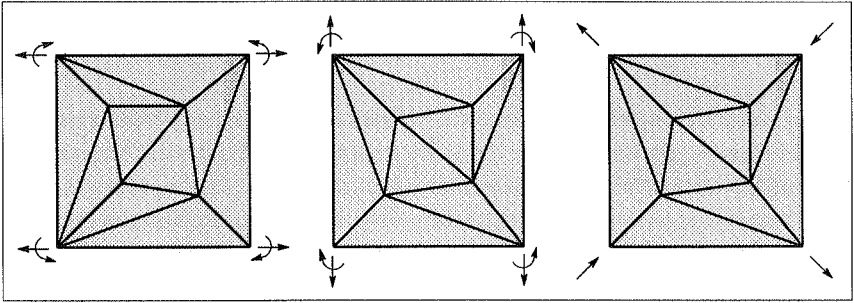


Bild 7.6: Patchtest für dreieckige Scheibenelemente mit Rotationsfreiheitsgraden

### 7.4.3 Kragarm mit reiner Biegung

An einem Kragarm unter reiner Momentenbelastung kann festgestellt werden, wie gut die Elemente lineare Verzerrungsverläufe approximieren. Dieser Kragarm wurde bereits in Kapitel 7.2 verwendet, das System ist hier nochmals in Bild 7.7 angegeben, dazu die normierten Durchbiegungen in Abhängigkeit des Parameters  $e$ .

Dieses System stellt für dreiknotige Elemente ein sehr schwieriges Problem dar, da zu einer exakten Lösung vollständig lineare Verzerrungsmodes erforderlich sind. Das LST-Element erzielt deswegen fehlerfreie Ergebnisse. Aufgrund der speziellen Abstimmung des FF-Elementes (1,5/0,5) auf Netze mit rechtwinkligen Dreiecken führt das Element sowohl für  $e=0,0$  als auch für  $e=5,0$  auf eine beinahe exakte Lösung. Bei nicht rechtwinkligen Netzen fällt das Ergebnis dagegen auf weniger als 45% ab. Durch die Erweiterung des Elementes mit der EAS-Methode kann das Verhalten des Elementes etwas verbessert werden. Ohne Skalierung verschlechtern sich die Ergebnisse des FF-Elementes stark. Mit den Parametern 1,0/1,0 werden zwar wesentlich bessere Ergebnisse als mit dem CST-Element erreicht, von einer exakten Lösung bleibt das unskalierte Element jedoch weit entfernt. Auch mit den Parametern 2,0/0,5 werden durchweg schlechtere Ergebnisse als mit den von Bergan (1985) vorgeschlagenen Parametern erzielt. Das Allmann-Element erreicht bei  $e=2,0$  einen sehr guten Wert, fällt jedoch bei zunehmender Netzverzerrung wieder stark ab. Es zeigt sich, daß dieses Element lineare Verzerrungen nur sehr eingeschränkt darstellen kann.

Der Vergleich mit dem vierknotigen EAS4-Element nach Simo (1990) zeigt, daß zumindest das FFEAS-Element in der Genauigkeit mit einem der derzeit besten vierknotigen Elemente vergleichbar ist. Insgesamt ist jedoch das Ergebnis der Elemente nicht vollständig zufriedenstellend. Alle Elemente stellen zwar eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem CST-Element dar, liefern in weiten Bereichen aber sehr ungenaue Ergebnisse. Es ist fraglich, ob eine weitere, wesentliche Verbesserung der Elemente

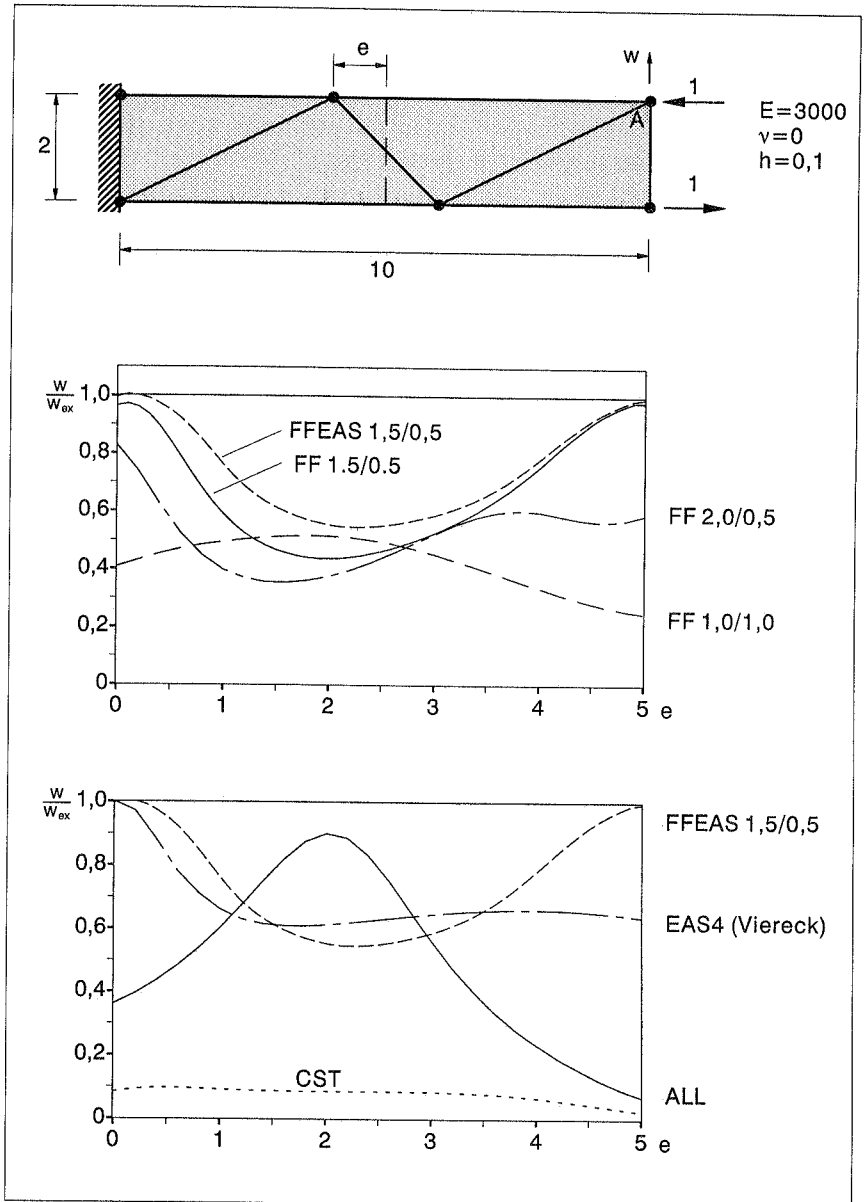


Bild 7.7: Kragarm mit reiner Biegung, System und normierte Verschiebung in Abhängigkeit des Parameters  $e$

FFEAS und EAS4 möglich ist. Für das vierknotige Scheibenelement weist MacNeal (1987 / 1992) nach, daß eine vollständige Verzerrungsunempfindlichkeit nur auf Kosten des Patchtests, und damit der Konvergenz erreicht werden kann.

#### 7.4.4 Inkompressibler Kragarm mit reiner Biegung

Dasselbe System wird nun im ebenen Verzerrungszustand für eine veränderliche Querdehnzahl untersucht. Die Ergebnisse sind in Bild 7.8 für  $e=0,0$  und  $e=2,0$  angegeben. Die Diagramme sind mit dem Wert der Durchbiegung für  $\nu=0,0$  normiert, so daß sich als exakte Lösung für  $\nu \rightarrow 0,5$  ein Wert von 0,75 ergibt. Dieses Testbeispiel ist nicht streng genug, um volumetrische Versteifungen allgemein ausschließen zu können. Das zeigt das Beispiel des LST-Elementes, mit dem dieses Problem exakt gelöst werden kann.

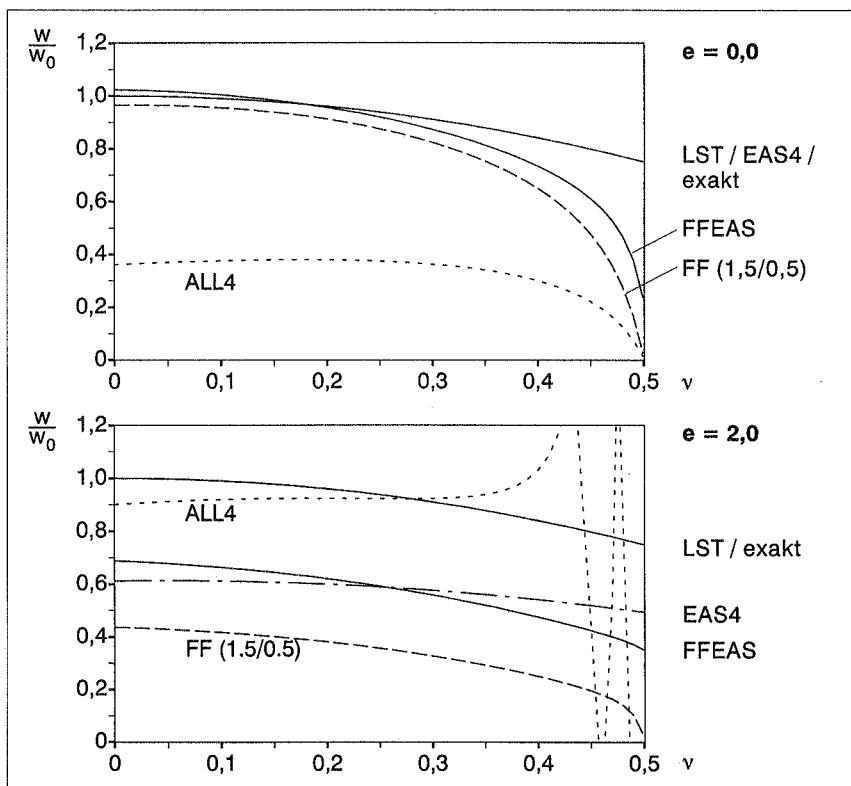


Bild 7.8: Inkompressibler Kragarm mit reiner Biegung, normierte Verschiebung in Abhängigkeit der Querdehnzahl  $\nu$  für  $e=0,0$  und  $e=2,0$

Die geringe Anzahl von geometrischen Randbedingungen, die zu einem sehr günstigen Wert des „Constraint Count“ führt, verhindert hier volumetrische Versteifungen.

Das FF-Element konvergiert bei beiden Netzen für  $\nu \rightarrow 0,5$  gegen null. Dies ist darauf zurückzuführen, daß dieses Element nur über unvollständig lineare Verzerrungsansätze verfügt. Auch mit dem FFEAS-Element läßt sich ein Abfall der Durchbiegung über den Wert 0,75 hinaus nicht vollständig vermeiden, es bleibt jedoch auch bei  $\nu = 0,499$  eine sinnvolle Durchbiegung erhalten. Das gute Ergebnis des vierknotigen EAS4-Elementes wird jedoch nicht erreicht. Völlig unbrauchbar wird das Allmann-Element für Querdehnzahlen  $\nu > 0,35$ . Je nach Elementgeometrie versteift das Element vollständig oder es führt zu Oszillationen wie im Fall  $e=2,0$ .

#### 7.4.5 Kragarm nach Cook

Der Kragarm nach Cook (1977) wird häufig als Testbeispiel für unregelmäßige Elementformen verwendet. Aufgrund der großen Höhe des Kragarms spielt bei diesem Problem auch die Schubverformung eine wichtige Rolle. Deswegen wird hier mehr das Tragverhalten insgesamt getestet, als die Fähigkeit, Biegung ohne Schubverzerrungen darstellen zu können. Das verwendete System ist in Bild 7.9, die normierten Verformungen sind in Bild 7.10 und Tabelle 7.3 angegeben. Als Referenzwert der Verschiebungen wird ein Wert von  $w_{ref} = 23,91$  angenommen.

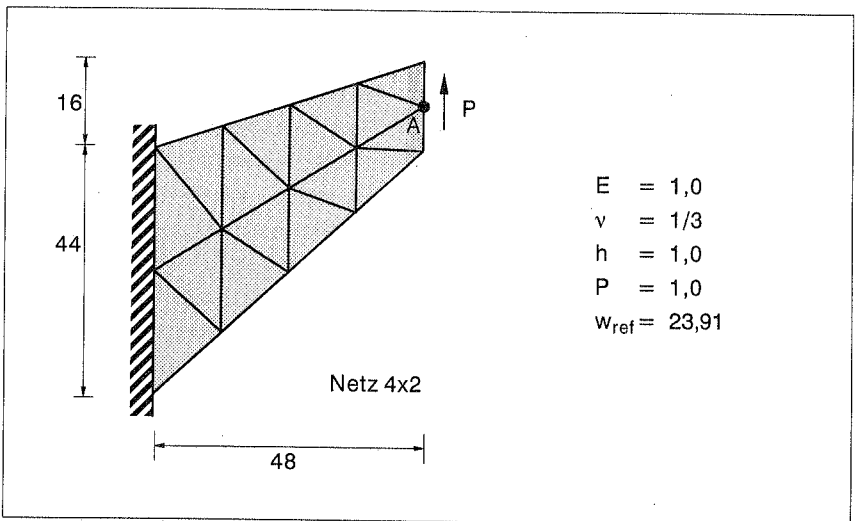


Bild 7.9: Kragarm nach Cook, System und Belastung

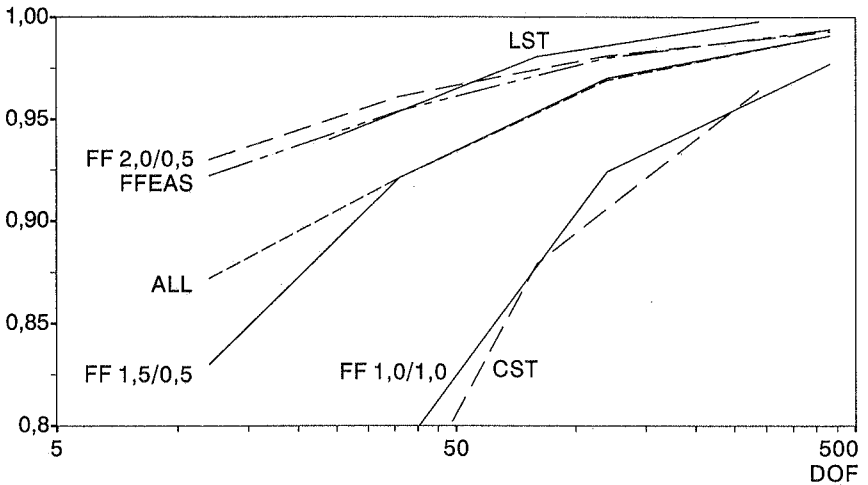


Bild 7.10: Kragarm nach Cook, Konvergenzdiagramm

Netz	FFEAS	FF 1,5/0,5	FF 2,0/0,5	FF 1,0/1,0	ALL	LST	CST
2x1	0,922	0,830	0,930	0,571	0,872	0,940	0,487
4x2	0,954	0,921	0,961	0,787	0,921	0,981	0,691
8x4	0,980	0,970	0,981	0,924	0,969	0,998	0,879
16x8	0,994	0,991	0,993	0,977	0,991		0,964

Tabelle 7.3 Normierte Durchbiegungen des Kragarms nach Cook  
(Referenzwert  $w_c=23,91$ )

Bei diesem Problem erzielen das FF-Element mit den Parametern 2,0/0,5 sowie das FFEAS-Element die besten Ergebnisse. In der Effizienz sind diese Elemente mit dem LST-Element vergleichbar, das bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden nur unwesentlich bessere Ergebnisse liefert. Etwas schlechter verhält sich das FF-Element mit den Parametern 1,5/0,5, welches ab dem Netz 4x2 praktische denselben Konvergenzverlauf wie das Allmann-Element aufweist. Die starke Abhängigkeit der FF-Elemente von den Skalierungsparametern zeigt das unskalierte FF-Element mit den Parametern 1,0/1,0, welches kaum bessere Ergebnisse als das CST-Element liefert. Insgesamt zeigen die Elemente ein gutes bis sehr gutes Konvergenzverhalten. Auch bei den Spannungen werden die guten Konvergenzeigenschaften der Elemente deutlich. In Bild 7.11 sind die Verläufe der maximalen Hauptspannung für die Lösung von drei verschiedenen Elementtypen dargestellt. Als Referenz dient das sechsknotige LST-Element mit einem feinen Netz von 8x4 Elementen.

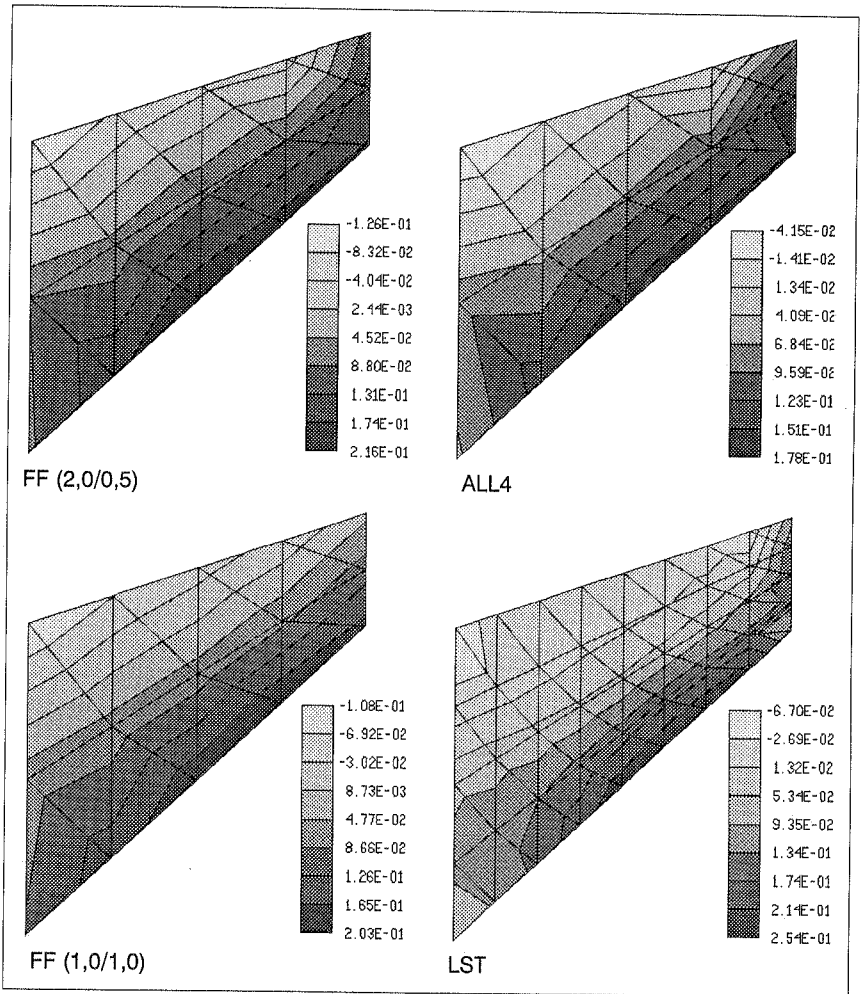


Bild 7.11: Geglätteter Verlauf der maximalen Hauptspannung, Netz 4x2



## 7.4.6 Adaptive Berechnung eines Zahnrades

Als praktisches Anwendungsbeispiel soll der Spannungszustand eines Zahnrades berechnet werden. Dieses Beispiel wurde von Holzer (1990) als Testproblem verwendet, die Systemdaten und die Belastung sind in Bild 7.12 dargestellt.

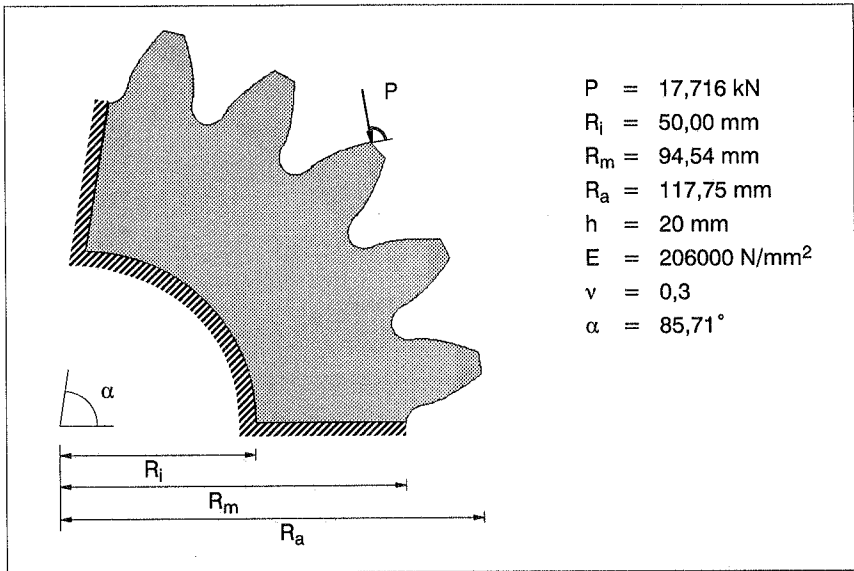


Bild 7.12: Adaptive Berechnung eines Zahnrades, System und Abmessungen

Die Berechnung wurde adaptiv unter Verwendung des automatischen Netzgenerators von Rehle (1996) durchgeführt. Die geometrisch komplizierte Form der Zahnflanken wird durch kubische Lagrange-Polynome näherungsweise dargestellt. Die Punktlast an der Zahnschneide wird auf einer Strecke von 1,0 mm als Linienlast verteilt, um eine Singularität der Verschiebungen zu vermeiden. Die Berechnung erfolgt im Zustand ebener Spannungen, die Wirkung des restlichen Teils des Zahnrades wird durch eine Volleinspannung dargestellt. Die Elemente werden anhand des Fehlers der inneren Energie für die verschiedenen adaptiv entwickelten Netze verglichen. Als Referenzlösung dient eine Berechnung mit dem dreieckigen, kubischen Verschiebungselement bei einem Netz mit über 4500 Freiheitsgraden. Die Entwicklung des Energiefehlers nach Gleichung (6.71) bei zunehmender Netzverfeinerung ist in Bild 7.13 dargestellt.

Alle getestete Elemente konvergieren gegen den Wert der Referenzlösung. Größere Unterschiede treten beim Startnetz auf, für welches das FF-Element mit den Parametern 2,0/0,5 den geringsten Fehler liefert. Da das Startnetz die komplizierte Geometrie

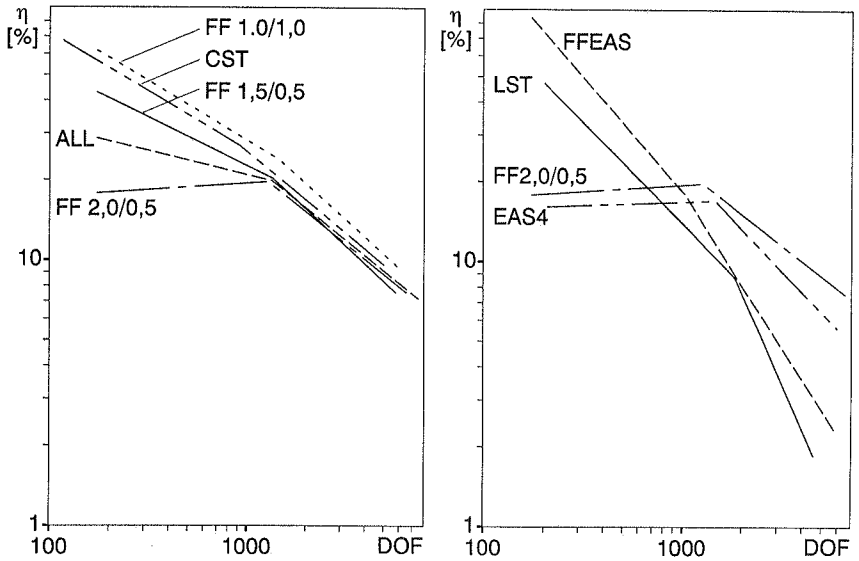


Bild 7.13: Prozentualer Fehler  $\eta$  der inneren Energie in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade (DOF)

des Systems noch viel zu grob beschreibt, ist eine sinnvolle Bewertung erst ab dem zweiten Netzverfeinerungsschritt möglich. Hier gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den Elementen, wobei das FF-Element mit den Parametern 1,5/0,5 für sehr feine Netze geringfügig bessere Ergebnisse liefert. Erstaunlich ist das gute Abschneiden des CST-Elementes, das schneller als das FF-Element ohne Skalierung (1,0/1,0) konvergiert. Die beste Konvergenzrate zeigt das FFEAS-Element, das in der Effizienz mit dem LST-Element vergleichbar ist. Nachteilig ist jedoch der große Fehler dieses Elementes beim Startnetz, was auf eine Überschätzung der Spannungen zurückzuführen ist. Der Vergleich mit dem vierknotigen EAS4-Element zeigt, daß die dreieckigen Elemente durchaus konkurrenzfähig sind und zum Teil sogar bessere Ergebnisse liefern. In Bild 7.14 sind die Netze sowie die ungeglätteten Verläufe der v. Mises Vergleichsspannungen der adaptiven Berechnung mit dem Element FFEAS angegeben.

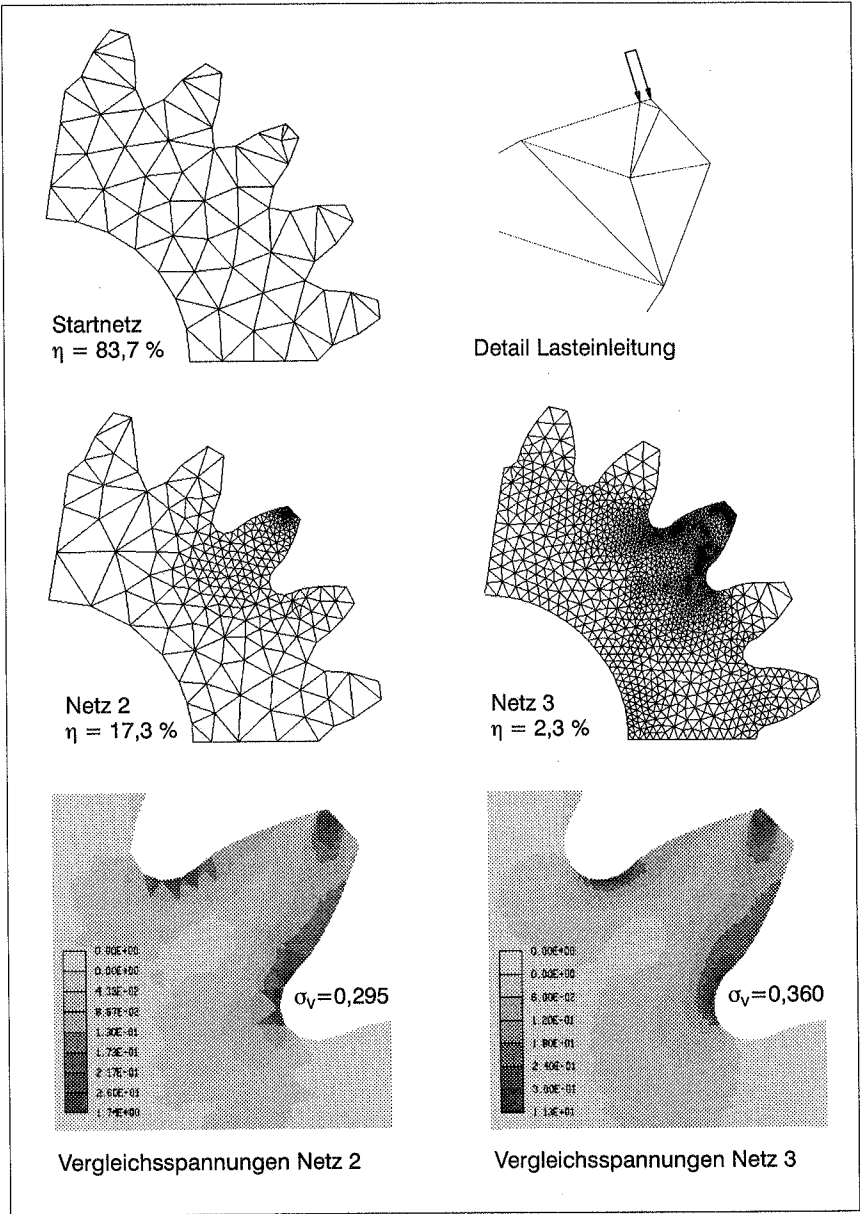


Bild 7.14: Adaptive Berechnung eines Zahnrades, Netze und ungeglättete v. Mises Vergleichsspannungen  $\sigma_v$  in  $\text{kN/mm}^2$  (Element FFEAS)

## 7.5 Zusammenfassung

Zur Verbesserung von dreiknotigen Scheibenelementen wurden zwei Konzepte angewendet, die die übliche Verschiebungsformulierung um Drillrotationen senkrecht zur Elementebene erweitern. Vor allem bei groben Netzen und in biegedominanten Fällen wird damit eine wesentliche Verbesserung der Elemente erreicht. Für das Elementkonzept nach Allmann werden mit einer Vierpunkt-Integration die besten Ergebnisse erzielt. Da das Element bei höheren Querdehnzahlen nicht unbedingt konvergiert, sollte es bei inkompressiblem Materialverhalten nicht verwendet werden.

Durchweg bessere Ergebnisse werden mit den Elementen nach der „Freien Formulierung“ erreicht. Die Eigenschaften der Elemente nach dieser Methode sind jedoch stark von den gewählten Skalierungsparametern abhängig. Das unskalierte FF-Element zeigt ein kaum besseres Konvergenzverhalten als das einfache CST-Element, so daß das elegante und schlüssige Konzept der „Freien Formulierung“ allein nur zu einer geringen Verbesserung führt. Die Skalierungsparameter können nur für jeweils ein Problem optimal eingestellt werden. Dabei werden bei den hier berechneten Testbeispielen mit der Parameterkombination 2,0/0,5 zum Teil bessere Ergebnisse erzielt, als mit der von Bergan empfohlenen Kombination von 1,5/0,5. Bei inkompressiblem Materialverhalten zeigen die FF-Elemente starke volumetrische Versteifungen, die durch eine Erweiterung der Verzerrungen nach der EAS-Methode reduziert werden können. Das FFEAS-Element liefert bei allen Testproblemen die besten Ergebnisse und übertrifft zum Teil die Effizienz des vierknotigen EAS4-Elementes.

Insgesamt konnten bei der Verbesserung dreiknotiger Scheibenelemente große Fortschritte gemacht werden. Unbefriedigend aber bleibt neben Schwierigkeiten bei inkompressiblem Material vor allem die große Abhängigkeit von heuristisch ermittelten Skalierungsparametern, die die theoretische Grundlage der Elemente in Frage stellen.

## 8 Dreieckige Schalenelemente

### 8.1 Einleitung

Für die Berechnung von Schalentragwerken mit der Finite Elemente Methode gibt es verschiedene Vorgehensweisen, die sich in ihren Möglichkeiten und Anforderungen stark voneinander unterscheiden:

- Elemente nach einer Schalentheorie
- Elemente nach der Theorie für schwach gekrümmte Schalen
- Schalenelemente als 3D–Kontinua
- Schalenelemente nach dem Degenerationskonzept
- Schale aus ebenen Facettenelementen

Elemente einer Schalentheorie mit einer Kinematik nach Kirchhoff–Love führen zu sehr aufwendigen Elementformulierungen, wie z.B. dem Sheba–Element von Argyris (1987) mit Polynomen fünften Grades als Ansatzfunktionen. Geringere Anforderungen stellen Elemente, die nur eine Theorie schwach gekrümmter Schalen berücksichtigen. Nach Harbord (1977) sind jedoch auch hier mindestens kubische Ansatzfunktionen erforderlich. Die Anforderungen können weiter reduziert werden, wenn anstatt einer schubstarreren eine schubweiche Schalenkinematik nach Reissner–Mindlin verwendet wird. Unter Umgehung einer Schalentheorie kann auch eine Berechnung als dreidimensionales Kontinuum mit Volumenelementen erfolgen. Volumenelemente stellen eine attraktive Alternative dar, besonders wenn Versteifungsprobleme wie von Andelfinger (1993) mit der EAS–Methode vermieden werden. Auch diese Vorgehensweise erfordert einen hohen Aufwand, vor allem hinsichtlich Diskretisierung, numerischer Integration und Zahl der Freiheitsgrade. Zur Vermeidung dieser Nachteile wurden von Ahmad (1970) durch Kondensation von Freiheitsgraden aus Volumenelementen sogenannte degenerierte Schalenelemente entwickelt. Büchter (1992) zeigte, daß degenerierte Elemente gleichwertig zu Elementen nach einer Schalentheorie sind. Degenerierte Elemente werden heute zur Berechnung von Schalentragwerken vorwiegend eingesetzt. Sie besitzen in der Regel fünf Freiheitsgrade und sind vor allem bei analytischer Integration über die Schalendicke sehr effizient.

Eine weitere Vereinfachung stellt die Diskretisierung von Schalentragwerken mit ebenen Facettenelementen dar. Dies ist für beliebig geformte Schalen nur mit dreieckigen Elementen möglich, deren gerade Berandung automatisch zu einer Facettierung führen. Auch bei Elementen höherer Ordnung kann eine Facettierung in Betracht gezogen werden, da diese Elemente häufig sehr empfindlich auf gekrümmte Kanten reagieren. Kennzeichnend für Facettenelemente ist die Entkopplung von Biege– und Membran–

tragwirkung auf Elementebene, wodurch sich die Elementformulierung stark vereinfacht. Eine Schalentragwirkung kommt erst durch das Zusammenwirken mehrerer Elemente zustande.

## 8.2 Ebene Facettenelemente

Allgemein können Schalenelemente durch Kombination eines Plattenelementes mit einem passenden Membranelement entwickelt werden. Bei gekrümmter Elementgeometrie sind beide Anteile bereits auf Elementebene miteinander gekoppelt, da aufgrund der Richtungsänderung der Normalkräfte auch Biegemomente entstehen. Bei Facettenelementen ist diese geometrische Kopplung nicht vorhanden, so daß Biege- und MembranstEIFigkeiten unabhängig voneinander aufgestellt werden können. Verschiedene Platten- und Scheibenelemente sind leicht miteinander kombinierbar, sofern die Knotenfreiheitsgrade der Elemente zueinander passen. Die Steifigkeiten werden in einem lokalen, orthogonalen Koordinatensystem gebildet.

Die Vektoren  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  der lokalen, orthogonalen Basis  $\bar{e}_i$  liegen in der Ebene des Elementes, wobei  $\bar{e}_1$  in Richtung der lokalen  $r$ -Koordinate gewählt wurde. Die Transformation der Komponenten  $a_i$  eines Vektors  $\mathbf{a}$  in die lokalen Koordinaten  $\bar{a}_i$  wird mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  durchgeführt:

$$a_i = R_{ij}\bar{a}_j \quad \bar{a}_i = R_{ji}a_j \quad (8.1)$$

mit:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Damit können die Koordinaten der Elementknoten im lokalen System bestimmt werden. Für die Transformation des Vektors  $\mathbf{d}$  der Knotenfreiheitsgrade wird die Matrix  $\mathbf{T}$  gebildet:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{T}\mathbf{d} \quad (8.3)$$

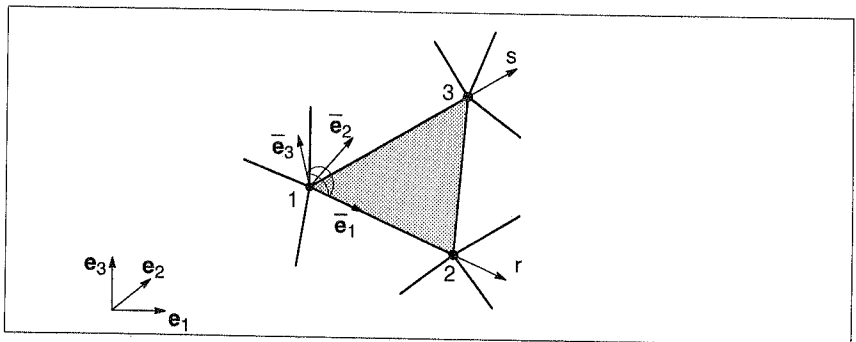


Bild 8.1: Koordinatensysteme des Facettenelementes

mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Der B–Operator und die Steifigkeitsmatrix werden zunächst im lokalen Koordinatensystem aufgestellt und dann auf globale Koordinaten transformiert:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{T} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (8.6)$$

Damit sind alle für ein ebenes Schalenelement notwendige Transformationen dargestellt. Es wird der geringe Aufwand zur Formulierung von Elementen dieses Typs deutlich.

### 8.3 Kompatible Rotationen

Degenerierte Schalenelemente verwenden in der Regel fünf Freiheitsgrade je Elementknoten: drei Verschiebungen und zwei Rotationen. Dadurch entsteht eine Inkompatibilität der Rotationen, sobald zwei benachbarte Elemente nicht in einer Ebene liegen. Zur Beseitigung dieses Problems werden mehrere Lösungen vorgeschlagen. Ramm (1976) verwendet zwei globale Rotationsfreiheitsgrade, Büchler (1992) führt einen gemittelten Schalendirektor ein, und Zienkiewicz (1989) versieht den dritten Rotationsparameter mit einer fiktiven Steifigkeit.

Dieses Problem kann umgangen werden, wenn auch die Scheibenelemente einen Rotationsfreiheitsgrad normal zur Elementebene besitzen. Dadurch liegen an jedem Knoten drei unabhängige Rotationsfreiheitsgrade mit eigenen Steifigkeiten vor, die direkt miteinander gekoppelt werden können.

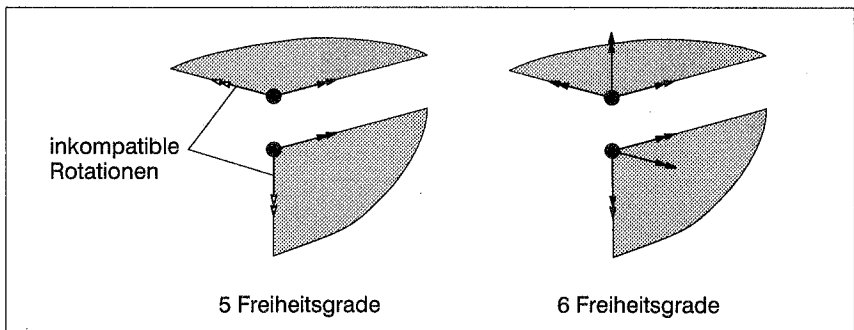


Bild 8.2: Kopplung der Rotationen bei Elementen mit fünf bzw. sechs Freiheitsgraden

## 8.4 Numerische Ergebnisse

Zur Berechnung verschiedener Schalenprobleme werden die erfolgreichsten Platten- und Scheibenelemente zu Schalenelementen kombiniert. Die getesteten Elementkombinationen sind in Tabelle 8.1 angegeben:

Schalenelement	Biegung		Membran	
XU-ALL	XU	4	Allmann	4
XU-FFEAS	XU	4	FFEAS	3
DST-ALL	DST	3	Allmann	4
DST-FFEAS	DST	3	FFEAS	3
MITC7-DISP6	MITC7	6	DISP6	3

Tabelle 8.1 Getestete Schalenelemente mit Integrationsordnung

Auch das höherwertige Element MITC7-DISP6 wird nur als Facettenelement eingesetzt. Die quadratischen Verschiebungsansätze des Elementes ermöglichen im Prinzip auch eine gekrümmte Elementgeometrie. Dazu müßte jedoch die Formulierung des MITC7-Elementes auf gekrümmte Kanten erweitert, und zusätzlich Maßnahmen zur Vermeidung von Membranversteifungen getroffen werden. Auf eine Erweiterung des TLQL-Elementes auf Schalenanwendungen wurde verzichtet, da die zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade in den Seitenmitten eine kompatible Formulierung erschweren. Außerdem fällt das Element in der Effizienz hinter die Elemente mit neun Freiheitsgraden zurück. Zum Vergleich der Leistungsfähigkeit werden die Ergebnisse folgender bekannter Schalenelemente verwendet:

- DISP6      sechsknotiges Verschiebungselement, Integration 3
- DISP10    zehnknotiges Verschiebungselement, Integration 6
- PINSKY    neunknotiges ANS-Element nach Pinsky (1987)
- B/D        vierknotiges ANS-Element nach Dvorkin (1984)
- EAS/ANS   vierknotiges Schalenelement nach Andelfinger (1991)
- DKT-CST   dreiknotiges Facettenelement mit Biegeanteil nach Batoz (1980)

Bis auf das Element DKT-CST sind alle Vergleichselemente gekrümmte Schalenelemente, bei denen eine Kopplung von Biege- und Membrankräften bereits auf Elementebene stattfindet. Das EAS/ANS-Element stellt eine Kombination des ANS-Plattenelementes nach Dvorkin (1984) mit der Membransteifigkeit des Elementes EAS4 dar.



### 8.4.1 Schale nach Scordelis–Lo

Bei der Schale nach Scordelis–Lo handelt es sich um eine zylindrische Schale, deren Stirnwände gelenkig gelagert sind, so daß dort nur Verschiebungen in Längsrichtung sowie Rotationen auftreten können. Das System der Schale wurde MacNeal (1985) entnommen und ist in Bild 8.3 dargestellt.

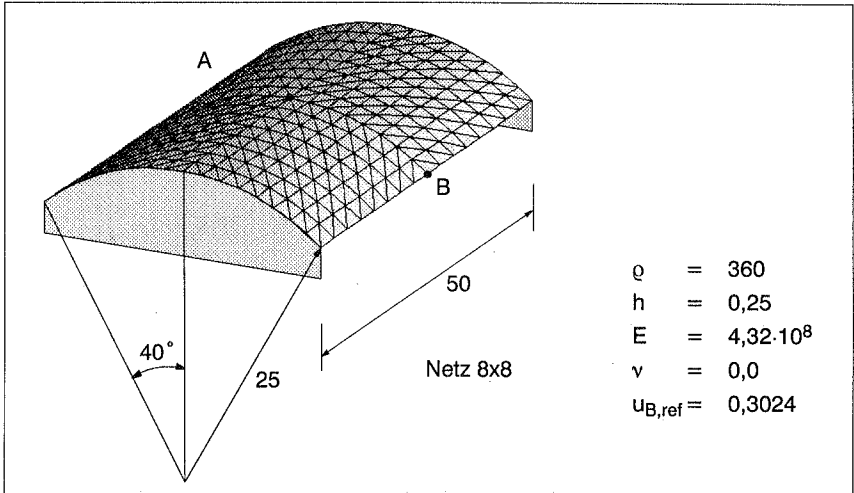


Bild 8.3: Schale nach Scordelis–Lo

Die Schale wird durch ihr Eigengewicht belastet. Unter Ausnutzung der Symmetrie wird ein Viertel der Schale mit Netzen aus 8, 32, 128 und 512 dreieckigen Elementen berechnet. Die normierte vertikale Verformung des Punktes B ist in Tabelle 8.2 und in Bild 8.4 dargestellt, wobei als Referenz nach MacNeal (1985) eine maximale Durchbiegung von 0,3024 verwendet wird.

Netz	XU– ALL	DST– ALL	XU– FFEAS	DST– FFEAS	MITC7– DISP6	DKT– CST	DISP6
2x2	0,999	1,056	1,073	1,134	1,175	0,799	0,186
4x4	0,932	0,952	0,988	1,009	1,008	0,671	0,631
8x8	0,974	0,984	0,993	1,003	1,002	0,856	0,924
16x16	0,990	0,994	0,996	0,999	1,020	0,953	0,959

Tabelle 8.2 Normierte maximale Verschiebung in B (Referenzwert  $u_{B,ref}=0,3024$ )

Alle dreieckigen Schalenelemente mit Drillfreiheitsgraden zeigen ein ausgezeichnetes Konvergenzverhalten. Bis auf das Element XU–ALL liegen alle Elemente schon bei

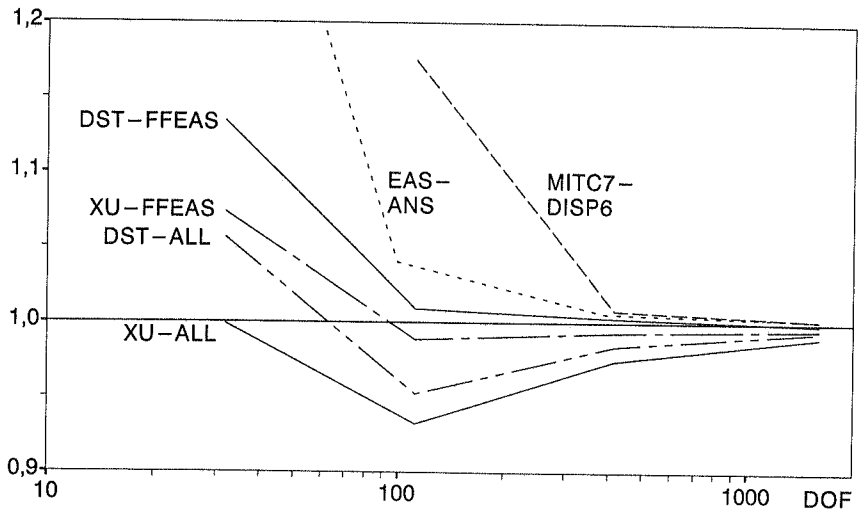


Bild 8.4: Konvergenzdiagramm der Schale nach Scordelis-Lo

einem Netz mit vier Unterteilungen je Seite innerhalb einer Abweichung von 5 % in den Verschiebungen. Die Elemente mit FFEAS-Membrananteil zeigen eine schnellere Konvergenz als das vierknotige Element EAS/ANS. Beim DKT-CST-Element, dessen Konvergenzverlauf in Bild 8.4 nicht dargestellt wurde, macht sich die schlechte Approximation des Membrananteils bemerkbar, so daß das Element nur bei feineren Netzen verlässliche Ergebnisse liefert. Das Element MITC7-DISP6 konvergiert ebenfalls sehr schnell gegen die Referenzlösung, benötigt jedoch für eine vergleichbare Genauigkeit mehr Freiheitsgrade als die dreiknotigen Elemente. Die schlechteste Konvergenz zeigt das quadratische DISP6-Element, das nur sehr langsam Membranversteifungen überwindet. Durch eine Facettierung des DISP6-Elementes wird ein dem Element MITC7-DISP6 ähnliches Konvergenzverhalten erreicht. Die Schnittgrößen werden von allen dreieckigen Elementen mit Drillfreiheitsgraden ähnlich gut angenähert. Exemplarisch sind in Bild 8.5 für das Element XU-FFEAS die Längskraft und das Längsmoment entlang des Schnittes A-B aufgetragen. Beide Schnittgrößen erzeugen Spannungen in Richtung der Längsachse der Schale. Der Vergleich der durch Mittelung in den Knoten geglätteten Schnittgrößen mit der exakten Lösung nach Scordelis (1969) zeigt die guten Approximationseigenschaften des Elementes.

In Bild 8.6 ist der gesamte Verlauf dieser Schnittgrößen dargestellt. Während mit geglätteten Werten sehr gute Ergebnisse erreicht werden, treten bei ungeglätteten Längsmomenten am freien Rand starke Oszillationen auf. Ursache dieser Oszillationen sind die Rotationen des Mittelknotens des XU-Elementes. Die zugehörigen kubischen Modes

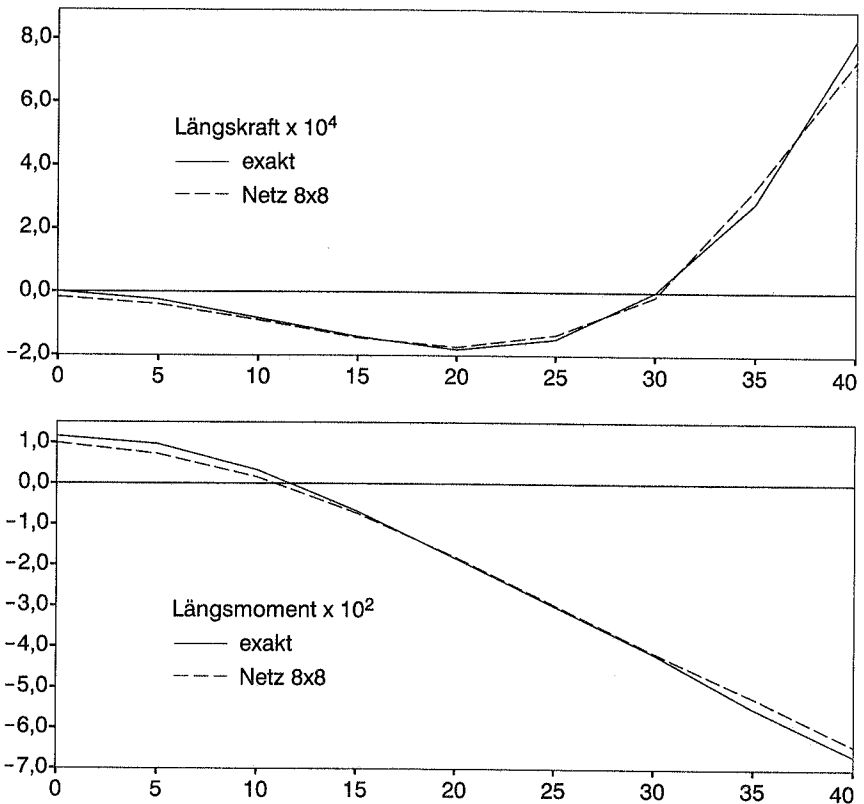


Bild 8.5: Schnittgrößenverlauf entlang der Kante A–B, Element XU–FFEAS, Netz 8x8

werden zur Vermeidung des „Shear–Locking“ benötigt und es bleibt unklar, weshalb sie hier zu Oszillationen führen. Auch eine höhere Integrationsordnung des Biegeanteils führt zu keiner Verbesserung, da es sich nicht um innere Kinematiken handelt. Die Oszillationen könnten vermieden werden, wenn bei der Spannungsrückrechnung der Einfluß des Mittelknotens unberücksichtigt bleibt. Auch die Elemente mit DST–Plattenanteil zeigen derartige Spannungssprünge. Worauf sie zurückzuführen sind, konnte nicht geklärt werden. Das Element MITC7–DISP6 zeigt keine störenden Oszillationen der Momente, so daß es zur Bestimmung von Schnittgrößen besser geeignet ist.

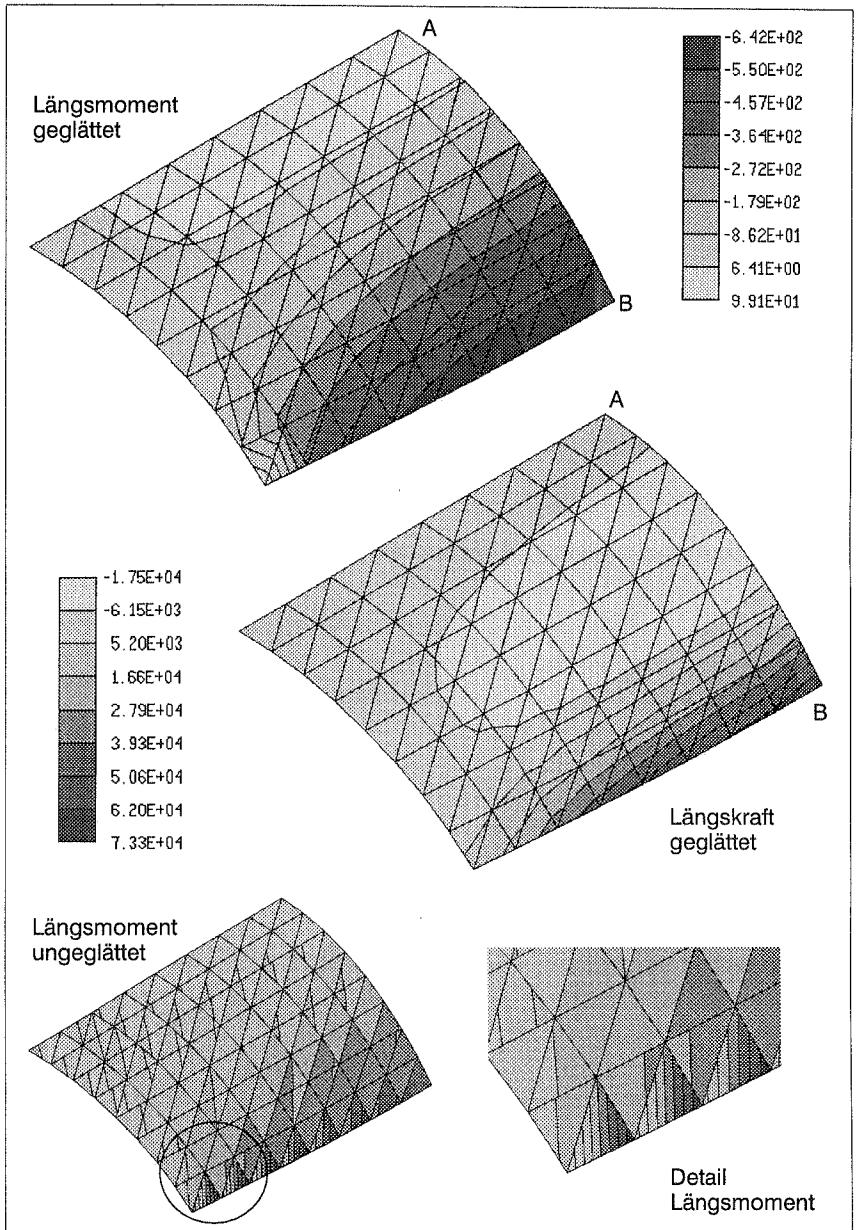


Bild 8.6: Verlauf von Längsmoment und Längskraft, Element XU-FFEAS, Netz 8x8

## 8.4.2 Zylinder mit Endscheiben

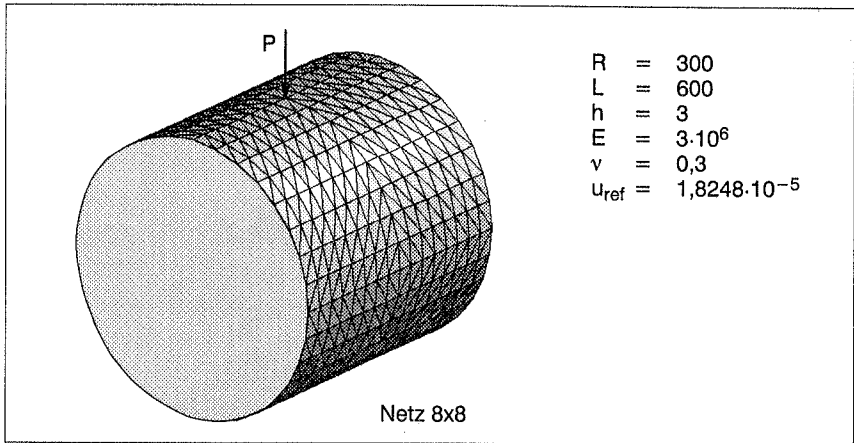


Bild 8.7: Zylinder mit Endscheiben, System und Belastung

Ein Zylinder wird durch zwei entgegengesetzt wirkende Einzellasten belastet. Die Ränder des Zylinders sind durch Scheiben ausgesteift, so daß radiale und tangentielle Verschiebungen blockiert sind. Verschiebungen in Längsrichtung des Zylinders sowie Rotationen sind jedoch möglich. Das System und die Materialdaten sind in Bild 8.7 dargestellt. Unter Ausnutzung der Symmetrie erfolgt die Berechnung am Achtersystem mit einer gleichmäßigen Netzeinteilung. Der Referenzwert der maximalen Verformung am Lastangriffspunkt wurde Belytschko (1985) entnommen. Dieses in der Literatur häufig verwendete Testbeispiel ist theoretisch nicht zulässig, da sich bei schubweichen Platten und Schalen unter einer Einzellast unendlich große Verschiebungen einstellen. Mit den hier verwendeten Netzeinteilungen ist eine sinnvolle Lösung des Problems dennoch möglich, da die Elemente ausreichend groß sind und somit die Singularität der Verschiebungen nicht erfaßt wird. Die normierten Verformungen sind für verschiedene Netzfeinheiten in Tabelle 8.3 und Bild 8.8 dargestellt.

Netz	XU- ALL	DST- ALL	XU- FFEAS	DST- FFEAS	MITC7- DISP6	DKT- CST	DISP6
2x2	0,095	0,100	0,097	0,104	0,104	0,065	0,061
4x4	0,446	0,625	0,448	0,642	0,639	0,493	0,214
8x8	0,755	0,932	0,745	0,926	0,914	0,863	0,605
16x16	0,911	1,004	0,907	1,000	0,993	0,974	0,921

Tabelle 8.3 Normierte maximale Verschiebung (Referenzwert  $u_{ref}=1,8248 \cdot 10^{-5}$ )

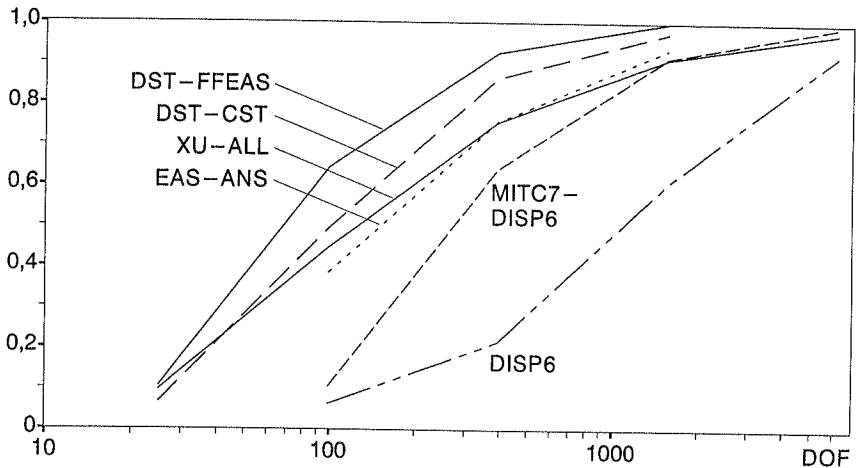


Bild 8.8: Konvergenzdiagramm des Zylinders mit Endscheiben

Bei diesem Testbeispiel treten die größten Deformationen als Biegeverformung im Bereich der Lasteinleitung auf. Die Konvergenz der Elemente ist deswegen stark von der verwendeten Plattenformulierung abhängig, der Membrananteil ist dagegen von geringer Bedeutung. Das beste Ergebnis liefern die Elemente mit der DST-Formulierung, unabhängig davon, ob zur Membraninterpolation das Allmann- oder das FFEAS-Element verwendet wird. Doch auch die Elemente mit dem XU-Plattenelement konvergieren sehr gut und sind in der Leistungsfähigkeit mit dem viereckigen Element EAS-ANS nach Andelfinger (1991) vergleichbar. Weniger überzeugend ist das Element MITC7-DISP6, das zwar eine gute Konvergenz zeigt, in der Effizienz aber hinter den dreiknotigen Elementen zurückbleibt. Das DISP6-Element konvergiert aufgrund von Membranversteifungen wesentlich langsamer. Das gute Abschneiden des Elementes DKT-CST zeigt, daß bei diesem Beispiel die Formulierung der Membransteifigkeit keine große Bedeutung hat. Obwohl dieses Element nur über konstante Membrankräfte verfügt, liefert es bereits bei groben Netzen ein sehr gutes Ergebnis.

### 8.4.3 Halbkugel mit Loch

Ein weiteres Testbeispiel für Schalenelemente ist die Halbkugel mit Loch nach MacNeal (1985). Die Halbkugel mit einer Öffnung von  $18^\circ$  am Pol wird durch vier entgegengesetzte Einzellasten belastet, die Systemdaten sind in Bild 8.9 dargestellt. Aus Symmetriegründen erfolgt die Berechnung am Viertelsystem, die Ergebnisse werden mit dem Sollwert der Verschiebungen nach MacNeal (1985) von 0,094 normiert. In Tabelle 8.4 und Bild 8.10 sind die Ergebnisse der getesteten Elemente aufgeführt.

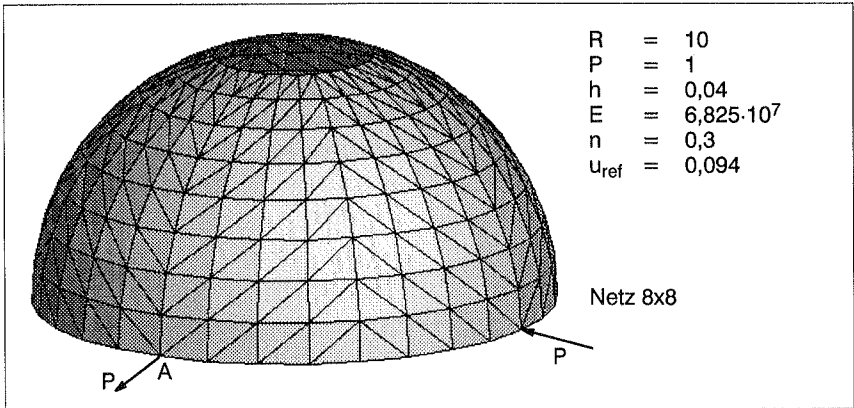


Bild 8.9: Halbkugel mit Loch, System und Belastung

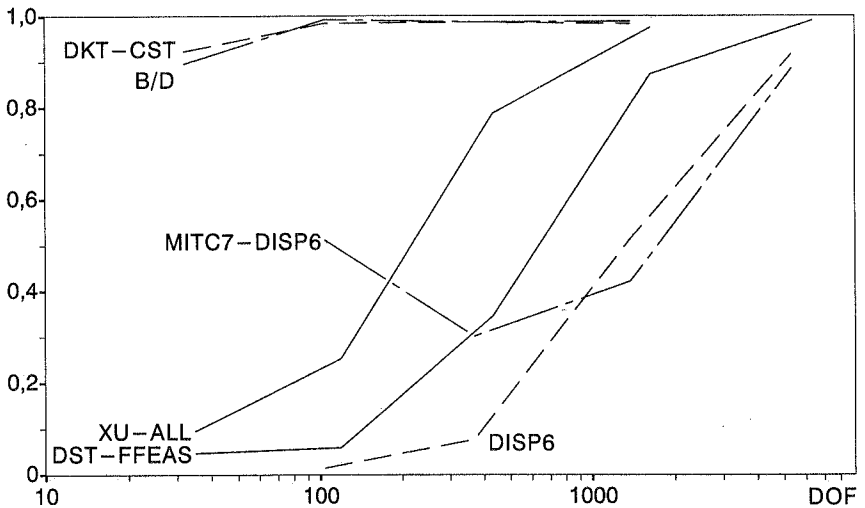


Bild 8.10: Konvergenzdiagramm der Halbkugel mit Loch

Netz	XU-ALL	DST-ALL	XU-FFEAS	DST-FFEAS	MITC7-DISP6	DKT-CST	DISP6 (IR 4)
2x2	0,095	0,065	0,081	0,046	0,512	0,923	0,014
4x4	0,253	0,266	0,058	0,059	0,301	0,984	0,076
8x8	0,787	0,824	0,329	0,345	0,421	0,986	0,514
16x16	0,974	0,987	0,859	0,873	0,884	0,983	0,916

Tabelle 8.4 Normierte maximale Verschiebung (Referenzwert  $u_{ref}=0,094$ )

Es zeigt sich, daß fast alle Elemente große Schwierigkeiten mit diesem System haben und erst bei sehr feinen Netzen eine akzeptable Genauigkeit liefern. Das Verhalten der dreiknotigen Elemente wird weitgehend von der Formulierung des Membrananteils bestimmt, so daß die Konvergenzverläufe der Elemente DST-ALL und XU-ALL bzw. DST-FFEAS und XU-FFEAS beinahe identisch sind. Deutlich überlegen sind die Elemente mit Allmann-Interpolation, die schneller gegen die exakte Lösung konvergieren. Die Elemente mit FFEAS-Membrananteil konvergieren etwas langsamer, liegen aber noch deutlich über den Ergebnissen des sechsknotigen Elementes DISP6, welches bei diesem Beispiel mit vier Stützstellen integriert wurde. Auch das höherwertige Element MITC7-DISP6 enttäuscht, da es nur bei groben Netzen bessere Ergebnisse als das DISP6-Element liefert. Frappierend ist das exzellente Abschneiden des Elementes DKT-CST, das ähnlich wie das B/D-Element schon bei groben Netzen zu einem sehr guten Ergebnis führt.

Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse sind vor allem zwei Aspekte maßgebend. Einerseits handelt es sich bei der Halbkugel mit Loch um ein biegedominantes Problem, bei dem die Normalkräfte nur eine untergeordnete Rolle spielen. Das Problem wird als Standardtest für dehnungslose Verformungen, sogenanntes „Inextensional Bending“, verwendet. Entscheidend für das Elementverhalten ist daher nicht die Güte der Membraninterpolation, sondern inwiefern reine Biegezustände durch Membrankräfte gestört werden. Dies ist offensichtlich bei den Elementen B/D und DKT-CST nicht der Fall, da sie keine Drillfreiheitsgrade besitzen und eine Kopplung zwischen Biege- und Membrankräften nur über die Verschiebungen zustande kommt. Zusätzlich stellt sich bei der Halbkugel bei groben Netzen ein erheblicher Diskretisierungsfehler ein, da die Kugelfläche mit wenigen Facettenelementen nur sehr schlecht dargestellt werden kann. Die numerische Diskretisierung führt zu einer Falterstruktur mit einem anderen Tragverhalten als dem der Kugelschale. Dieser Unterschied wird am folgenden Beispiel eines Falterwerks deutlich.

Das Falterwerkssystem nach Bild 8.11 entspricht genau der Diskretisierung der Halbkugel mit Netz  $2 \times 2$ , besitzt jedoch ein völlig anderes Tragverhalten. Damit werden zwei unterschiedliche Systeme bei grober Netzeinteilung mit demselben numerischen Modell berechnet. Die Konvergenzverläufe in Bild 8.12 zeigen, daß hier die Elemente mit Drillfreiheitsgraden sehr gut konvergieren. Die Elemente B/D und DKT-CST führen dagegen bei groben Netzen zu einer starken Überschätzung der exakten Verformung. Die schwache Kopplung von Biege- und Membrankräften der Elemente B/D und DKT-CST scheint den großen geometrischen Diskretisierungsfehler der Halbkugel zu kompensieren und so zu einem sehr guten Ergebnis zu führen. Die langsame Konvergenz der Elemente mit Drillfreiheitsgraden bei der Halbkugel kann daher weniger als Folge eines „Membrane Locking“ der Elementformulierung gesehen werden, sondern



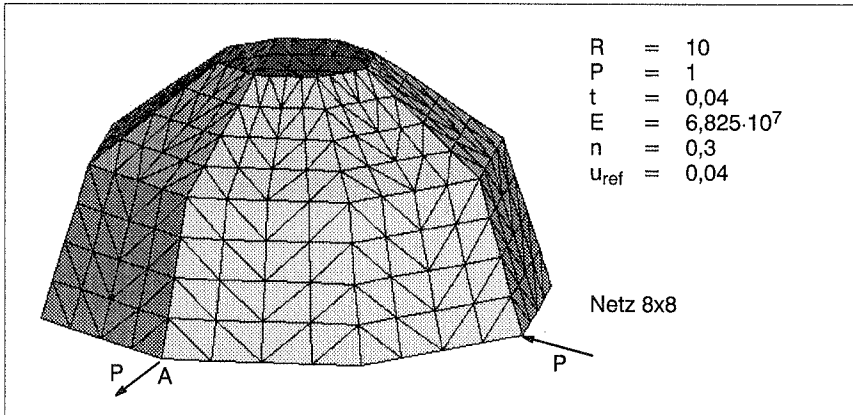


Bild 8.11: Faltwerk, System und Belastung

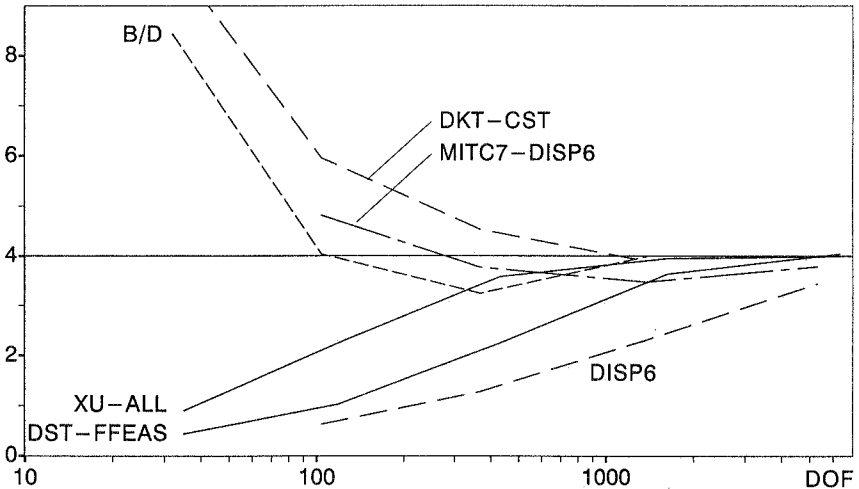


Bild 8.12: Konvergenzdiagramm des Faltwerkes (Verschiebung  $u_{ref} \cdot 10^{-2}$ )

scheint ein Problem des Diskretisierungsfehlers zu sein. Das Tragverhalten eines Faltwerkes nähert sich sehr langsam dem einer doppelt gekrümmten Schale an, da die geknickten Kanten des Faltwerkes Kräfte anziehen, und eine Lastabtragung über Normalkräfte bevorzugt wird.

Die schlechten Approximationseigenschaften der dreiknotigen Facettenelemente in biegedominanten Fällen wurden bereits mehrfach von Carpenter (1985), Chen (1992) und Allmann (1994) festgestellt. Es werden verschiedene Möglichkeiten vorgeschla-

gen, wie dreieckige Schalenelemente mit Drillfreiheitsgraden verbessert werden können. Carpenter (1985) verwendet eine reduzierte Integration der Membransteifigkeiten, die jedoch zu inneren Kinematiken führt. Diese Kinematiken werden von Fish (1992) durch eine Stabilisierung der Membransteifigkeiten vermieden. Als weitere Möglichkeit wird die Kopplung von Biege- und Membrankräften auf Elementebene vorgeschlagen. Dies wird erstmals von Carpenter (1986) auf der Basis der Verzerrungsbeziehungen einer flachen Schale für das CST-Element durchgeführt. Cook (1993) und Allmann (1995) schlagen dieses Verfahren auch für Elemente mit Allmann-Interpolation vor. Bessere Ergebnisse werden von Cook (1993) jedoch nur erreicht, wenn gleichzeitig die Kopplung von Biege- und Drillrotationen zwischen den Elementen mit Hilfe eines Faktors aufgeweicht wird, der von der Krümmung der Elemente abhängig ist. All diese Maßnahmen verbessern das Elementverhalten für das Problem der Halbkugel, indem die Membransteifigkeit dem CST-Element angeglichen wird. Die besseren Approximationseigenschaften der Elemente mit Drillfreiheitsgraden, z.B. bei Faltwerks- oder Scheibenproblemen gehen dadurch jedoch verloren.

Eine entscheidende Verbesserung des Konvergenzverhaltens kann bei der Halbkugel nur mit gekrümmten Schalenelementen erreicht werden, bei denen besondere Maßnahmen zur Vermeidung des „Membrane Locking“ getroffen werden. Wie ein Vergleich in Bild 8.13 mit anderen Verschiebungselementen zeigt, sind die dreiknotigen Elemente mit Allmann-Interpolation durchaus in der Effizienz mit gekrümmten Schalenelementen nach der Verschiebungsformulierung vergleichbar. Nur das neunknotige Schalenelement nach Pinsky (1987), das auch für die Membranverzerrungen die ANS-Methode einsetzt, zeigt eine deutlich schnellere Konvergenz.

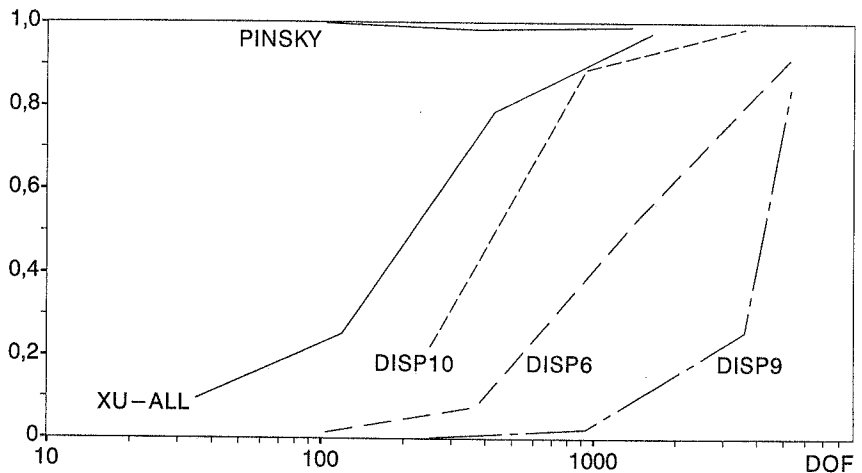


Bild 8.13: Konvergenzdiagramm Halbkugel, Vergleich mit Verschiebungselementen

## 9 Schlußfolgerungen und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollten dreieckige Finite Elemente für Platten-, Scheiben- und Schalentragerwerke entwickelt werden, die sich durch eine möglichst effiziente Elementformulierung auszeichnen. Aufgrund der besonderen Eigenschaften dreieckiger Elemente ist eine direkte Übertragung der bei Vierecken erfolgreich angewendeten Methoden nicht möglich. Durch Kombination verschiedener Verfahren und Anpassung an die speziellen Eigenschaften dreieckiger Elemente können diese jedoch soweit verbessert werden, daß sie in der Effizienz mit vierknotigen Elementen vergleichbar sind.

Die Vermeidung von Schubversteifungen stellt das größte Problem bei der Formulierung schubweicher Plattenelemente dar. Ursache dieser Versteifungen ist eine zu große Zahl von Nebenbedingungen, die die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade blockieren. Der „Constraint Count“ stellt ein Maß für die Überbestimmtheit einer Elementformulierung dar. Die Fähigkeit von Elementen, konstante Biegemomente exakt darstellen zu können, ist nicht ausreichend, um „Shear Locking“ generell zu verhindern. Mit Hilfe des Konzeptes der Kirchhoff-Modes (KM) oder der Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS) können Elemente gebildet werden, die den Patchtest reiner Biegung bestehen, jedoch weiterhin Schubversteifungen zeigen.

Erst durch Einführung einer variationellen Schubbedingung und Erweiterung der Rotationen um kubische Anteile kann die Überbestimmtheit vermieden und eine versteifungsfreie Elementformulierung erreicht werden. Das durch diese Maßnahmen entstehende XU-Element für mäßig dicke bis dünne Platten ist das derzeit leistungsfähigste, schubweiche Plattenelement mit neun Freiheitsgraden, und kann in der Effizienz mit dem vierknotigen ANS-Element von Dvorkin (1984) verglichen werden.

Einen vollständig anderen Weg zur Vermeidung des „Shear Locking“ wird beim DST-Element eingeschlagen. Hier werden die Schubkräfte direkt über die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt, zusätzlich werden inkompatible Rotationen im Rahmen einer „Freien Formulierung“ eingesetzt. Das Element zeigt eine gute Konvergenz der Verschiebungen. Querkräfte und innere Energie konvergieren jedoch nicht unbedingt gegen die exakte Lösung.

Eine weitere Verbesserung der Elemente ist nach heutigem Stand des Wissens nur mit einer Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade je Element möglich. Das TLQL-Element vermeidet Schubversteifungen durch eine Kombination der ANS-Methode mit zusätzlichen Rotationen in den Seitenmitten. Aufgrund der höheren Zahl der Unbekannten fällt dieses Element jedoch in der Effizienz hinter die Elemente mit neun Freiheitsgraden erheblich zurück. Im Gegensatz dazu führen die zusätzlichen Freiwerte des MITC7-Elementes auch zu einer deutlichen Steigerung der Konvergenzrate. Dieses Element be-

sitzt unvollständig kubische Ansatzfunktionen, zur Vermeidung von Schubversteifungen wird die ANS–Methode eingesetzt. Durch den quadratischen Ansatz der Schubverzerrungen entstehen Querkräfte, die deutlich von der exakten Lösung abweichen. Sinnvolle Ergebnisse werden durch eine Berechnung der Querkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen möglich.

Das MITC7–Element weist die mit Abstand schnellste Konvergenz der inneren Energie auf. Dennoch stellen die Elemente niedriger Ordnung eine effiziente Alternative dar, da sie häufig bereits bei groben Netzen eine sehr gute Approximation der Verformungen und Schnittgrößen liefern. Besonders das XU–Element kann wegen seiner schnellen Konvergenz vor allem für Probleme mit unregelmäßiger Geometrie sowie bei adaptiven Verfahren empfohlen werden.

Dreieckige Scheibenelemente verfügen bereits über abgesicherte Konvergenzeigenschaften, so daß eine Verbesserung der Elemente nur durch zusätzliche Freiheitsgrade möglich ist. Eine effizientere Formulierung des dreiknotigen Scheibenelementes wird durch die Einführung von Rotationsfreiheitsgraden erreicht, die in Form von Allmann–Interpolationen oder im Rahmen der „Freien Formulierung“ eingesetzt werden. Zu einer weiteren Verbesserung können die Verzerrungsansätze des FF–Elementes mit Hilfe der EAS–Methode auf vollständig lineare Polynome erweitert werden. Das durch diese Kombination entstehende Element FFEAS erzielt die besten Ergebnisse der untersuchten dreiknotigen Scheibenelemente und übertrifft in der Effizienz zum Teil das vierknotige EAS4–Element. Unbefriedigend bleibt jedoch die starke Abhängigkeit des Allmann–Elementes von der Integrationsordnung, bzw. der FF–Elemente von den Skalierungsparametern. Außerdem treten bei inkompressiblem Material volumetrische Versteifungen auf, die auch beim FFEAS–Element nicht vollständig vermieden werden können.

Die Kombination von ebenen Platten– und Scheibenelementen ermöglicht eine sehr einfache Formulierung dreieckiger Schalenelemente. Durch die Drillfreiheitsgrade der Scheibenelemente wird ein kompatibler Ansatz der Rotationen mit insgesamt sechs Freiheitsgraden je Knoten erreicht. Alle getesteten Elemente zeigen ein sehr gutes Konvergenzverhalten in den Verschiebungen. Zum Teil wird eine höhere Effizienz als bei vierknotigen Schalenelementen erreicht. Aufgrund der Ergebnisse bei Platten– und Scheibenproblemen bietet sich das Element XU–FFEAS als bestmögliche Kombination an. Je nach Testproblem wird jedoch mit anderen Kombinationen eine schnellere Konvergenz erreicht. Einen Nachteil stellen oszillierenden Momente dar, die bei einem Testproblem an einem freien Rand festgestellt wurden. Diese Oszillationen treten bei allen Schalenelementen mit Drillrotationen auf, eine Ursache konnte nicht gefunden werden.

Höherwertige Facettenelemente wie das Element MITC7–DISP6 führen zu keiner weiteren Steigerung der Effizienz. Bei diesem Element überwiegt der bei der Beschreibung doppelt gekrümmter Schalen entstehende Diskretisierungsfehler gegenüber dem Zu-  
gewinn an Genauigkeit durch höhere Ansatzfunktionen. Facettenelemente mit Drillfreiheitsgraden zeigen bei vorwiegend auf Biegung beanspruchten, doppelt gekrümmten Schalen eine langsame Konvergenz. Dies wird in der Literatur häufig auf volumetrische Versteifungen zurückgeführt. Vergleichsrechnungen an einem Falwerk haben jedoch gezeigt, daß die Ursache der langsamen Konvergenz in dem nicht zu vermeidenden geometrischen Diskretisierungsfehler liegt. Die Elemente sind demnach frei von Membranversteifungen.

Bei der Entwicklung dreieckiger Finiter Elemente bleiben nach wie vor mehrere Fragen offen. Eine Ursache für die schlechte Approximation der Schubverzerrungen der Elemente TLQL und MITC7 konnte nicht gefunden werden. Die Anwendbarkeit des MITC7–Elementes auf Gebiete mit gekrümmter Berandung ist ebenfalls offen. Schwerwiegender sind jedoch die verbleibenden Fragen bei dreieckigen Scheibenelementen wie starke Abhängigkeit von heuristischen Parametern oder volumetrische Versteifungen. Ein weiteres Problem stellen Oszillationen der Momente an freien Schalenrändern dar. Diese Fragen müssen noch geklärt werden, bevor die Elemente für den allgemeinen Einsatz uneingeschränkt empfohlen werden können.

Die Leistungsfähigkeit von dreieckigen Elementen kann mit den dargestellten Methoden entscheidend verbessert werden. In vielen Fällen wird die Effizienz von viereckigen Elementen erreicht oder sogar übertroffen. Für die Berechnung von Tragwerken mit der Finite Elemente Methode bieten dreieckige Elementen deshalb eine attraktive Alternative.

Ein gutes Konvergenzverhalten im linearen Bereich stellt eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für einen problemlosen Einsatz der vorgestellten Elemente bei geometrisch und materiell nichtlinearen Problemen dar. Hierzu sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, die den Einfluß der Elementmodifikationen auf die nichtlinearen Steifigkeiten berücksichtigen. Bei Elementen, die wie das DST–Element ein inverses Werkstoffgesetz verwenden, ist eine Erweiterung auf materiell nichtlineare Probleme praktisch ausgeschlossen, da nichtlineare Stoffgesetze überwiegend in Abhängigkeit der Verzerrungen aufgestellt werden und nicht ohne weiteres invertierbar sind.

## 10 Literatur

- Ahmad (1970) Ahmad, S., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 419–451.
- Allmann (1984) Allmann, D. J., "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1/2, 1984, pp. 1–8.
- Allmann (1988) Allmann, D. J., "Evaluation of the Constant Strain Triangle with Drilling Rotations", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 2645–2655.
- Allmann (1993) Allmann, D. J., "Variational Validation of a Membrane Finite Element with Drilling Rotations", *Comm. Num. Methods in Engineering*, Vol. 9, 1993, pp. 345–351.
- Allmann (1994) Allmann, D. J., "A Basic Flat Facet Finite Element for the Analysis of General Shells", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 19–35.
- Allmann (1995) Allmann, D. J., "On the Assumed Displacement Fields of a Shallow Curved Shell Finite Element", *Comm. Num. Methods in Engineering*, Vol. 11, 1995, pp. 159–166.
- Andelfinger (1991) Andelfinger, U., "Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke", Dissertation, Bericht Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991.
- Andelfinger (1993) Andelfinger, U. and Ramm, E., "EAS-Elements for Two Dimensional, Three Dimensional, Plate- and Shell Structures and their Equivalence to HR-Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 1993, pp. 1311–1337.
- Argyris (1987) Argyris, J., Mljenek, H.-P., "Die Methode der Finiten Elemente, Band II", Vieweg, Braunschweig, 1987.
- Argyris (1994) Argyris, J. and Tenek, L., "Efficient and Locking Free Anisotropic Plate and Shell Triangular Elements", in: "Advances in Computational Mechanics" (M. Papadrakakis and B. H. V. Topping, eds.), Civil-Comp Press, Edinburgh, 1994.
- Arnold (1984a) Arnold, D. N., Brezzi, F. and Douglas, J., "PEERS: A New Mixed Finite Element for Plane Elasticity", *Japan J. of Applied Mathematics*, Vol. 1, 1984, pp. 347–367.
- Arnold (1984b) Arnold, D. N., Douglas, J. and Gupta, C. P., "A Family of Higher Order Mixed Finite Element Methods for Plane Elasticity", *Numerische Mathematik*, Vol. 45, 1984, pp. 1–22.

- Arnold (1989) Arnold, D. N. and Falk, R. S., "A Uniformly Accurate Finite Element Method for the Mindlin–Reissner Plate", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 26, No. 6, pp. 1276–1290, 1989.
- Auricchio (1991) Auricchio, F. and Taylor, R. L., "3–Node Triangular Elements Based on Reissner–Mindlin Plate Theory", Report UCB/SEMM–91/04, Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1991.
- Babuska (1981) Babuska, I., Szabó, B. and Katz, I. N., "The p–Version of the Finite Element Method", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 18, 1981, pp. 515–545.
- Bathe (1989) Bathe, K. J., Brezzi, F. and Cho, S. W., "The MITC7 and MITC9 Plate Bending Elements", *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 3/4, 1989, pp. 797–814.
- Batoz (1980) Batoz, J. L., Bathe, K. J. and Ho, L. W., "A Study of Three–Node Triangular Plate Bending Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 1771–1812.
- Batoz (1989) Batoz, J. L. and Lardeur, P., "A Discrete Shear Triangular Nine D.O.F. Element for the Analysis of Thick to Very Thin Plates", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 533–560.
- Batoz (1992) Batoz, J. L. and Katili, I., "On a Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete Constraints", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1992, pp. 1603–1632.
- Becker (1981) Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., "Finite Elements", Vol. I–VI, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- Belytschko (1984) Belytschko, T., Stolarski, H. and Carpenter, N., "A  $C^0$  Triangular Plate Element with One–Point Quadrature", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 787–802.
- Belytschko (1985) Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N. and Ong, J. S. J., "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, 1985, pp. 221–258.
- Bergan (1984) Bergan, P. G. and Nygård, M. K., "Finite Elements with Increased Freedom in Choosing Shape Functions", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 643–663.
- Bergan (1985) Bergan, P. G. and Felippa, C. A., "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, 1985, pp. 25–69.
- Boisse (1992) Boisse, P., Daniel, J. L. and Gelin, J.C., "A Simple Isoparametric Three–Node Shell Finite Element", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 6, 1992, pp. 1263–1273.

- Braess (1991) Braess, D., "Finite Elemente", Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Brezzi (1985) Brezzi, F., Douglas, J. and Marini, L. D., "Two Families of Mixed Finite Elements for Second Order Elliptic Problems", Numerische Mathematik, Vol. 47, 1985, pp. 217–235.
- Brezzi (1991a) Brezzi, F. and Fortin, M., "Mixed and Hybrid Finite Element Methods", Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Brezzi (1991b) Brezzi, F. and Fortin, M., "Error Analysis of Mixed-Interpolated Elements for Reissner-Mindlin Plates", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 1, No. 2, 1991, pp. 125–151.
- Bronstein (1981) Bronstein, I. N. and Semendjajew, K. A., "Ergänzende Kapitel zu Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.
- Büchter (1992) Büchter, N. "Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen", Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1992.
- Carpenter (1985) Carpenter, N., Stolarski, H. and Belytschko, T., "A Flat Triangular Shell Element with Improved Membrane Interpolation", Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 1, 1985, pp. 161–168.
- Carpenter (1986) Carpenter, N., Stolarski, H. and Belytschko, T., "Improvements in 3-Node Triangular Shell Elements", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, 1986, pp. 1643–1667.
- Chapelle (1993) Chapelle, D. and Bathe, K. J., "The Inf-Sup Test", Computers & Structures, Vol. 47, No. 4/5, 1993, pp. 537–545.
- Chen (1992) Chen, H. C., "Evaluation of Allmann Triangular Membrane Element Used in General Shell Analyses", Computers & Structures, Vol. 43, No. 5, 1992, pp. 881–887.
- Cheung (1995) Cheung, Y. K. and Wanji, C., "Refined Nine-Parameter Triangular Thin Plate Bending Element by Using Refined Direct Stiffness Method", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 1995, pp. 283–298.
- Cook (1977) Cook, R. D., "Ways to Improve the Bending Response of Finite Elements", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1977, pp. 1029–1039.
- Cook (1993) Cook, R. D., "Further Development of a Three-Node Triangular Shell Element", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1993, pp. 1413–1425.
- Cowper (1973) Cowper, G. R., "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 7, 1973, pp. 405–408.



- Crisfield (1986) Crisfield, M. A., "Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis", Vol. I, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1986.
- Di (1994) Di, S. and Ramm, E., "On Alternative Hybrid Stress 2D and 3D Elements", Engineering Computations, Vol. 11, 1994, pp. 49–68.
- Dill (1990) Dill, E. H., "A Triangular Finite Element for Thick and Thin Plates", Computers & Structures, Vol. 35, No. 4, 1990, pp. 301–308.
- Dunavant (1985) Dunavant, D. A., "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1985, pp. 1129–1148.
- Dvorkin (1984) Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J., "A Continuum Mechanics Based Four–Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", Engineering Computations, No. 1, 1984, pp. 77–88.
- Felippa (1987) Felippa, C. A. and Bergan, P. G., "A Triangular Bending Element Based on an Energy–Orthogonal Free Formulation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 61, 1987, pp. 129–160.
- Felippa (1989a) Felippa, C. A. and Militello, C., "Developments in Variational Methods for High–Performance Plate and Shell Elements", in: "Analytical and Computational Methods for Shells", CAD Vol. 3 (A. K. Norr et. al., eds.), American Society of Mechanical Engineers, ASME, New York, 1989.
- Felippa (1989b) Felippa, C. A., "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: Part I+II", Comm. Appl. Num. Methods, Vol. 5, 1989, pp. 79–98.
- Felippa (1991) Alexander, S., Alvin, K., de la Fuente, H. M., Felippa, C. A., Haugen, B., and Militello, C., "Membrane Triangles with Corner Drilling Freedoms, Part I–III", Report No. CU–CSSC–91–24, Center for Space Structures and Controls, University of Colorado, Boulder, USA, 1991.
- Ferahi (1990) Ferahi, M., Tabarrok, B. and Cleghorn, W. L., "A Selective Reduced Integration Triangular Plate Element", Comm. Appl. Num. Methods, Vol. 6, 1990, pp. 525–533.
- Fish (1992) Fish, J. and Belytschko, T., "Stabilized Rapidly Convergent 18–Degrees–of–Freedom Flat Shell Element", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, 1992, pp. 149–162.
- Fraeijs (1965) Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method", in: "Stress Analysis" (O. C. Zienkiewicz, G. C. Holister, eds.), Wiley, London, 1965.
- Franca (1988) Franca, L. P. and Hughes, T. J. R., "Two Classes of Mixed Finite Element Methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, 1988, pp. 89–129.

- Fricker (1985) Fricker, A. J., "An Improved Three–Noded Triangular Element for Plate Bending", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1985, pp. 105–114.
- Gilewski (1991) Gilewski, W. and Radwanska, M., "A Survey of Finite Element Models for the Analysis of Moderately Thick Shells", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, 1991, pp. 1–21.
- Graf (1993) Graf, P., "Finite–Elemente–Analyse von Hochbauplatten mit dreieckigen Elementen", Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1993.
- Green (1968) Green, A. E. and Zerna, W., "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, 1968.
- Hackbusch (1986) Hackbusch, W., "Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen", Teubner Studienbücher, Teubner Verlag, 1986.
- Hansen (1979) Hansen, T. G., Syvertsen, T. G. and Bergan, P. G., "Stiffness Derivation Based on Element Convergence", in: "The Mathematics of Finite Elements and Applications" (J. R. Whiteman, ed.), Vol. III, Academic Press, London, 1979.
- Harbord (1977) Harbord, R., "Berechnung dünner Schalentragwerke mit finiten Elementen – Vergleichende Untersuchung unterschiedlicher Diskretisierungsvarianten", Dissertation, Bericht Nr. 77–21, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1977.
- Hauptmann (1995) Hauptmann, R. und Schweizerhof, K., "Aktuelle Finite Elemente für lineare Plattenberechnungen mit Interpolationsfunktionen niedriger Ansatzordnung", in: "Finite Element in der Baupraxis" (E. Ramm, E. Stein, W. Wunderlich, eds.), Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- Holzer (1990) Holzer, S. und Haußner, C., "Ergebnisverbesserung von Finite–Element–Berechnungen durch exakte Geometriemodellierung", *VDI Forschung im Ingenieurwesen* Bd. 56, Nr. 3, 1990.
- Hrabok (1984) Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M., "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 3, 1984, pp. 479–495.
- Hughes (1977) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Kanoknukulchai, W., "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 1529–1547.
- Hughes (1981a) Hughes, T. J. R. and Tezduyar, T. E., "Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four–Node Isoparametric Element", *J. Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, pp. 587–596.

- Hughes (1981b) Hughes, T. J. R. and Taylor, R. L., "The Linear Triangular Bending Element", in: "The Mathematics of Finite Elements and Applications" (J. R. Whiteman, ed.), Vol. IV, Academic Press, London, 1981, pp.127–142.
- Hughes (1987) Hughes, T. J. R., "The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- Hughes (1988) Hughes, T. J. R. and Franca, L. P., "A Mixed Finite Element Formulation for Reissner–Mindlin Plate Theory: Uniform Convergence of all Higher–Order Spaces", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 67, 1988, pp. 223–240.
- Hughes (1989) Hughes, T. J. R. and Brezzi, F., "On Drilling Degrees of Freedom", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 72, 1989, pp. 105–121.
- Ibrahimbegovic (1990) Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L. and Wilson, E. L., "A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, 1990, pp. 447–457.
- Irons (1980) Irons, B. M. and Ahmad, S., "Techniques of Finite Elements", Horwood, Chichester, 1980.
- Jeyachandrabose (1986) Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., "Construction of New Efficient Three–Node Triangular Thin Plate Bending Elements", Computers & Structures, Vol. 23, No. 5, 1986, pp. 587–603.
- Johnson (1994) Johnson, C., "Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method", Cambridge University Press, 1994.
- Katili (1993) Katili, I., "A New Discrete Kirchhoff–Mindlin Element Based on Mindlin–Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields, Part I+II", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1993, pp. 1859–1908.
- v. Keulen (1993) van Keulen, F., "On Refined Triangular Plate and Shell Elements", Ph. D. Dissertation, TU Delft, 1993.
- Kipf (1991) Kipf, T., "Scheibenelemente mit Drillfreiheitsgraden", Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991.
- Klaas (1995) Klaas, O., Schröder, J., Stein, E. and Miehe, R., "A Regularized Dual Mixed Element for Plane Elasticity. Implementation and Performance of the BDM–Element.", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 121, 1995, pp. 201–209.
- Lee (1993) Lee, N. S. and Bathe, K. J., "Effects of Element Distortions on the Performance of Isoparametric Elements", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1993, pp. 3553–3576.

- Long (1988) Long, Y. and Zhao, J., "A New Generalized Conforming Triangular Element for Thin Plates", *Comm. Appl. Num. Methods*, Vol. 4, 1988, pp. 781–792.
- Long (1993) Long, Z., "Generalized Conforming Triangular Elements", *Comm. Appl. Num. Methods*, Vol. 9, 1993, pp. 53–65.
- MacNeal (1985) MacNeal, R. H. and Harder, R. L., "A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy", *Finite Elements Anal. Des.*, Vol. 11, 1985, pp. 3–20.
- MacNeal (1987) MacNeal, R. H., "A Theorem Regarding the Locking of Tapered Four-Noded Membrane Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp. 1793–1799.
- MacNeal (1992) MacNeal, R. H., "On the Limits of Finite Element Perfectability", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1992, pp. 1589–1601.
- Malkus (1978) Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., "Mixed Finite Element Methods. Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 15, 1978, pp. 63–81.
- Militello (1991) Militello, C. and Felippa, A., "The First ANDES Elements: 9-dof Plate Bending Triangles", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1991, pp. 217–246.
- Morley (1971) Morley, L. S. D., "On the Constant Momentum Plate Bending Element", *J. Strain Analysis*, Vol. 6, 1971, pp. 20–24.
- Nedelec (1980) Nedelec, J. C., "Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$ ", *Numerische Mathematik*, Vol. 35, 1980, pp. 315–341.
- Oden (1976) Oden, J. T. and Reddy, J. N., "Variational Methods in Theoretical Mechanics", Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- Oñate (1992) Oñate, E., Zienkiewicz, O. C., Suarez, B. and Taylor, R. L., "A General Methodology for Deriving Shear Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 1992, pp. 345–367.
- Oñate (1993a) Oñate, E. and Cervera, M., "Derivation of Thin Plate Bending Elements with One Degree of Freedom per Node: a Simple Three Node Triangle", *Engineering Computations*, Vol. 10, 1993, pp. 543–561.
- Oñate (1993b) Oñate, E., Zarate, F. and Flores, F., "A Simple Triangular Element for Thick and Thin Plate and Shell Analysis", Research Report, CIMNE, Barcelona, 1993.

- Papadopoulos (1990) Papadopoulos, P. and Taylor, R. L., "A Triangular Element Based on Reissner–Mindlin Plate Theory", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, 1990, pp. 1029–1049.
- Pian (1984) Pian, T. H. H. and Sumihara, K., "Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 1685–1695.
- Pinsky (1987) Pinsky, P. M. and Jang, J., "A  $C^0$ –Elastoplastic Shell Element Based on Assumed Covariant Strain Interpolations", *Proceedings of the Int. Conference NUMETA '87* (G. N. Pande, J. Middleton, eds.), Swansea, 1987.
- Pitkäranta (1988) Pitkäranta, J., "Analysis of Some Low–Order Finite Element Schemes for Mindlin–Reissner and Kirchhoff Plates", *Numerische Mathematik*, Vol. 53, 1988, pp. 237–254.
- Ramm (1976) Ramm, E., "Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente", *Habilitation, Bericht Nr. 76–2*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- Razzaque (1973) Razzaque, A., "Program for Triangular Bending Elements with Derivative Smoothing", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, 1973, pp. 333–343.
- Reddy (1986) Reddy, B. D., "Functional Analysis and Boundary–Value Problems: An Introductory Treatment", Longman, London and Wiley, New York, 1986.
- Reddy (1992) Reddy, B. D. and Simo, J. C., "Stability and Convergence of a Class of Enhanced Strain Methods", *Report No. 174*, Centre for Research in Computational and Applied Mechanics, University of Cape Town, South Africa, 1992.
- Rehle (1996) Rehle, N. "Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken", *Dissertation, Bericht Nr. 20*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1996.
- Rolfes (1989) Rolfes, R., "Zur Stabilität und Konvergenz gemischter Finiter Elemente in der linearen Elastizitätstheorie", *Dissertation, Bericht Nr. F 89/1*, Institut für Baumechanik und Nemerische Mechanik, Universität Hannover, 1989.
- Saleeb (1988) Saleeb, A. F., Chang, T. Y. and Yingyeunyoung, S., "A mixed Formulation of  $C^0$ –Linear Triangular Plate/Shell Element", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 1101–1128.
- Scordelis (1969) Scordelis, A.C. and Lo, K.S., "Computer Analysis of Cylindrical Shells", *J. Amer. Concr. Inst.* 61, 1969, 539–561.
- Simo (1986) Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., "On the Variational Foundations of Assumed Strain Methods", *J. Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 51–54.

- Simo (1990) Simo, J. C. and Rifai, M.S., "A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, 1990, pp. 1595–1638.
- Sokolnikoff (1956) Sokolnikoff, I. S., "Mathematical Theory of Elasticity", Second Edition, McGraw Hill, New York, 1956.
- Stein (1990) Stein, E. and Rolfes, R., "Mechanical Conditions for Stability and Optimal Convergence of Mixed Finite Elements for Linear Plane Elasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 84, 1990, pp. 77–95.
- Stenberg (1988) Stenberg, R., "A Family of Mixed Finite Elements for the Elasticity Problem", *Numerische Mathematik*, Vol. 53, 1988, pp. 513–538.
- Stenberg (1991) Stenberg, R. and Vihinen, T., "Calculations with some Linear Elements for Reissner–Mindlin Plates", in: "Proc. European Conf. on New Advances in Computational Structural Mechanics", (P. Ladeveze, ed.), Giens, Frankreich, 1991.
- Stenberg (1992) Stenberg, R., "A Stable Finite Element Formulation for Reissner–Mindlin Plates", in: "Numerical Methods in Engineering '92", (C. Hirsch et. al., eds.), Elsevier, 1992.
- Stenberg (1993a) Stenberg, R., "A Linear Nonconforming Finite Element Method for Nearly Incompressible Elasticity and Stokes Flow", Research Report No. 14, Faculty of Mechanical Engineering, Helsinki University of Technology, 1993.
- Stenberg (1993b) Stenberg, R., "A New Finite Element Formulation for the Plate Bending Problem", Research Report No. 17, Faculty of Mechanical Engineering, Helsinki University of Technology, 1993.
- Stolarski (1983) Stolarski, H. and Belytschko, T., "Shear and Membrane Locking in Curved  $C^0$  Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 41, 1983, pp. 279–296.
- Taylor (1976) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., "A Non-Conforming Element for Stress Analysis", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 1211–1220.
- Taylor (1986) Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C. and Chan, A. C. H., "The Patch Test – a Condition for Assessing FEM Convergence", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, 1986, pp. 39–62.
- Taylor (1993) Taylor, R. L. and Auricchio, F., "Linked Interpolation for Reissner–Mindlin Plate Elements: Part II – A Simple Triangle", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 1993, pp. 3057–3066.
- Tessler (1985) Tessler, A. and Hughes, T. J. R., "A Three Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, 1985, pp. 71–101.

- Timoshenko (1970) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", Third Edition, McGraw Hill, New York, 1970.
- Verwoerd (1990) Verwoerd, M. H. and Kok, A. W. M., "A Shear Locking Free Six–Node Mindlin Plate Bending Element", *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 3, 1990, pp. 547–551.
- Washizu (1968) Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, Oxford, 1968.
- Weiss (1993) Weiss, I., "Ein 3–knotiges Hochleistungselement für Platten nach der Kirchhofftheorie", Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1993.
- Wu (1982) Wu, C. C., "Some Problems of a Plate Bending Hybrid Model with Shear Effect", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1982, pp. 755–764.
- Xu (1986) Xu, Z., "A Simple and Efficient Triangular Finite Element for Plate Bending", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 2, 1986, pp. 185–192.
- Xu (1992) Xu, Z., "A Thick–Thin Triangular Plate Element", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 1992, pp. 963–973.
- Zienkiewicz (1971) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1971, pp. 275–290.
- Zienkiewicz (1988) Zienkiewicz, O. C. and Lefebvre, D., "A Robust Triangular Plate Bending Element of the Reissner–Mindlin Type", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 1169–1184.
- Zienkiewicz (1989) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The Finite Elements Method", Volume 1, Fourth Edition, Mc Graw Hill, London, 1989.
- Zienkiewicz (1990) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Papadopoulos, P. and Oñate, E., "Plate Bending Elements with Discrete Constraints: New Triangular Elements", *Computers & Structures*, Vol. 35, 1990, pp. 505–522.
- Zienkiewicz (1991) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The Finite Elements Method", Volume 2, Fourth Edition, Mc Graw Hill, London, 1991.

## Lebenslauf

Name:	Christof Haußer
Geburtsdatum:	25.10.1962 in Ludwigsburg
Eltern:	Heinrich und Renate Haußer, geb. Sommer
1969 – 1973	Besuch der Anton–Bruckner–Grundschule in Ludwigsburg
1973 – 1982	Besuch des Mörike–Gymnasiums in Ludwigsburg
Mai 1982	Abitur
1982 – 1983	Wehrdienst
1983 – 1985	Studium des Bauingenieurwesens an der RWTH Aachen Abschluß Vordiplom
1985 – 1989	Studium des Bauingenieurwesens an der TU München
1985 – 1988	wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Massivbau der TU München
1986 – 1989	Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes
März 1989	Abschluß Diplom–Ingenieur
März – August 1989	wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet elektronisches Rechnen im konstruktiven Ingenieurbau der TU München
1989 – 1990	Studium „Civil Engineering“ an der Stanford University, USA Abschluß Master of Science
1990 – 1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
seit 1996	Mitarbeiter im Ingenieurbüro Dipl.–Ing. H. Haußer, Ludwigs- burg



Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74–1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang–Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74–2 **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege– und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I–Querschnitt.
- 74–3 **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74–4 **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75–1 **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten–Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75–2 **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz–Methode.
- 75–3 **E. A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizehler Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76–1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.–H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten–Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76–2 **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77–1 **B.–M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78–1 **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79–1 **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79–2 **H. G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79–3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragswerken (in englischer Sprache).
- 80–1 **R. I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80–2 **R. W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragswerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyllinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.

- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid–gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.