

# Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen unter Annahme kleiner Verzerrungen und großer Rotationen

Von der Universität Stuttgart (Technische Hochschule)

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.-Ing. JÜRGEN SEIDEL

geboren zu Schorndorf



14. 03. 2008

Z

Hauptberichter: Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. E.h. U. Wegner

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Tag der Einreichung: 15. Februar 1973

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Mai 1973



Herrn Professor Dr. phil. Dr. -Ing. E. h. U. Wegner danke ich herzlich für die wertvollen Anregungen und Hinweise zu dieser Arbeit.

Herrn Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer, der mir Gelegenheit zur Anfertigung dieser Arbeit gab, gilt mein besonderer Dank für die Förderung meiner Studien und die Übernahme des Korreferats.

Jürgen Seidel

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Schrifttum	5
Bezeichnungen	12
1. Einleitung	16
1.1 Überblick über das Schrifttum	16
1.2 Ausgangspunkt und Aufgabenstellung der Arbeit	21
2. Mathematische Grundlagen	24
2.1 Grundsätzliches zur Bezeichnung	24
2.2 Deformation und Schiften einer Tensorgröße	24
2.3 Koordinatensysteme und Geometrie des undeformierten Schalenraums	27
3. Allgemeine Elastizitätstheorie	36
3.1 Koordinatensysteme und Geometrie des deformierten Schalenraums	36
3.2 Kinematische Beziehungen	37
3.3 Statik und Materialgesetz	42
3.3.1 Gleichgewichtsbedingungen	42
3.3.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Materialgesetz	45
4. Allgemeine Schalentheorie	51
4.1 Kinematische Beziehungen	51
4.2 Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen	54
4.3 Statik und Materialgesetz	60
4.3.1 Schnittgrößen und konstitutive Gleichungen	60
4.3.2 Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen	61
4.3.3 Das elastische Potential dünner Schalen	65
4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse der allgemeinen Schalentheorie	68

5.	Spezielle Theorie dünner Schalen - Theorie großer Rotationen, aber kleiner Verzerrungen	70
5.1	Voraussetzungen und Annahmen	70
5.2	Kinematische Beziehungen und Verträglichkeits- bedingungen	72
5.3	Statik und Materialgesetz	87
5.3.1	Schnittgrößen und konstitutive Gleichungen	87
5.3.2	Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen	89
5.4	Zusammenfassung der Ergebnisse der speziellen Schalentheorie großer Rotationen, aber kleiner Verzerrungen	94
6.	Einige Sonderfälle und Grenzübergänge	97
6.1	Kinematische Sonderfälle	97
6.2	Statische Sonderfälle	105
7.	Zusammenfassung	113
	Anhang:	114
	Kovariante Raumbewertung eines Tensors erster und zweiter Stufe auf der Schalenmittelfläche ( $X^3 = 0$ ) und der Zusammenhang mit der kovarianten Flächenableitung.	

S c h r i f t t u m

(geordnet nach Jahrgang)

Bücher:

- [1] Hamel, G. : Theoretische Mechanik. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band LVII. Springer-Verlag 1949.
- [2] Reissner, E. : On Axisymmetrical Deformations of Thin Shells of Revolution. In: Proc. Symposia on Appl. Math. 3, 1950.
- [3] Sokolnikoff, I.S. : Tensor Analysis. John Wiley & Sons Inc. 1951.
- [4] Novozhilov, V. V. : Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock Press 1953.
- [5] Green, A. E., Zerna, W. : Theoretical Elasticity. Clarendon Press 1954 1. Auflage, 1968 2. Auflage.
- [6] Wlassow, W. S. : Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag 1958.
- [7] Truesdell, C., Toupin, R. A. : The Classical Field Theories. In: Handbuch der Physik III/1. Springer-Verlag 1960.
- [8] Koiter, W. T. : A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells. In: Proc. of the IUTAM Symposium, Delft 1959, The Theory of Thin Elastic Shells, Editor W. T. Koiter. North-Holland Publishing Comp. 1960.
- [9] Prager, W. : Einführung in die Kontinuumsmechanik. Birkhäuser Verlag 1961.

- [10] Mushtari, K. M., Galimov, K. Z.: Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells. Publisher: The Israel Program Scientific Translations 1961.
- [11] Eringen, A. C.: Nonlinear Theory of Continuous Media. Mc. Graw-Hill Book Company 1962.
- [12] Naghdi, P. M.: Foundations of Elastic Shell Theory. Progress in Solid Mechanics. Vol. IV. North-Holland Publishing Company 1963.
- [13] Reissner, E.: On the Equations for Finite Symmetrical Deflections of Thin Shells of Revolution. In: Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Vol. The Macmillan Comp. 1963.
- [14] Budiansky, B., Sanders, J. L.: On the 'Best' First-Order Linear Shell Theory. In: Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Vol. The Macmillan Comp. 1963.
- [15] Bolotin, V. V.: Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. English translation edited by G. Herrmann. Pergamon Press 1963.
- [16] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag 1964.
- [17] Naghdi, P. M.: On the Nonlinear Thermoelastic Theory of Shells. In: Proceedings IASS Symposium, Warsaw, 1963. Non-Classical Shell Problems, Editor W. Olsyak, A. Sawczuk. North - Holland Publishing Comp. 1964.
- [18] Naghdi, P. M.: On the Differential Equations of the Linear Theory of Elastic Shells. In: Proceedings of the 11 Int. Congress of Appl. Mechanics, Munich 1964. Applied Mechanics, Editor: H. Görstler.

- [19] Novozhilov, V. V.: Thin Shell Theory.  
P. Noordhoff Ltd. 1964.
- [20] Librescu, L.: On the Thermoelastic Problem of Shells,  
Treated by Elimination the Love-Kirchhoff  
Hypothesis.  
In: Proceedings IASS Symposium, Warsaw,  
1963; Non-Classical Shell Problems, Editor:  
W. Olszak, A. Sawczuk. North-Holland Pub-  
lishing Company 1964.
- [21] Truesdell, C.,  
Noll, W.: The Nonlinear Theories of Mechanics.  
In: Handbuch der Physik III/3. Springer -  
Verlag 1965.
- [22] Fung, Y. C.: Foundations of Solid Mechanics.  
Prentice-Hall Inc. 1965.
- [23] Biot, M. A.: Mechanics of Incremental Deformations.  
John Wiley & Sons 1965.
- [24] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure.  
B.I. Hochschultaschenbücher 197/197 a.  
Hochschultaschenbücher - Verlag 1966.
- [25 a] Koiter, W. T.: Foundations and Basic Equations of Shell Theory  
(A Survey of Recent Progress).
- [25 b] John, F.: Refined Interior Shell Equations.  
In: Proceedings 2 IUTAM Symposium, Copen-  
hagen 1967: Theory of Thin Shells. Editor:  
F. I. Niordsen. Springer-Verlag 1969.
- [26] Kraus, H.: Thin Elastic Shells.  
John Wiley & Sons Inc. 1967.
- [27] Green, A. E.,  
Adkins, J. E.: Large Elastic Deformations.  
Clarendon Press 1970, 2. Auflage.
- [28] Flügge, W.: Tensor Analysis and Continuum Mechanics.  
Springer-Verlag 1972.



Veröffentlichungen in Zeitschriften und Dissertationen

- [29] Kappus, R.: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen.  
ZAMM 19, 1939.
- [30] Chien, W. Z.: The Intrinsic Theory of Thin Shells and Plates.  
Quart. Appl. Math. 1, 1943.
- [31] Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie.  
ZAMM 29, 1949.
- [32] Seugling, W. R.: Equations of Compatibility for Finite Deformation of a Continuous Medium.  
American Math. Monthly 57, 1950.
- [33] Reissner, E.: Stress Strain Relations in the Theory of Thin Elastic Shells.  
Journal Math. & Phys. 31, 1952.
- [34] Schwarze, G.: Allgemeine Stabilitätstheorie der Schalen.  
Ingenieur-Archiv, XXV Band, 1957.
- [35] Günther, W.: Analoge Systeme von Schalengleichungen.  
Ingenieur-Archiv 30, 1961.
- [36] Rüdiger, D.: Eine geometrisch nichtlineare Schalentheorie.  
ZAMM 41, 1961.
- [37] Zerna, W.: Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen.  
ZAMM 42, 1962.
- [38] Goldenveizer, A. L.: Derivation of an Approximate Theory of Shells by Means of Asymptotic Integration of the Equation of the Theory of Elasticity.  
PMM, Vol. 27, No 4, 1963.
- [39] Klingbeil, E.: Variationsproblem der linearen Theorie elastischer Schalen.  
Dissertation TH Darmstadt, 1963.

- [40] Naghdi, P.M., Nordgren, R.P.: On the Nonlinear Theory of Elastic Shells under the Kirchhoff Hypothesis. Quart. Appl. Math. 21, 1963.
- [41] Sanders, J.L.: Nonlinear Theories of Thin Shells. Quart. Appl. Math. 21, 1963.
- [42] Basar, Y.: Eine allgemeine Schalentheorie endlicher Verformungen. Dissertation TU Hannover, 1964.
- [43] Stein, E.: Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke. Dissertation Universität Stuttgart, 1964.
- [44] Green, A.E., Naghdi, P.M.: Some Remarks on the Linear Theory of Shells. Quart. Journal Mech. and Applied Math. XVIII, 1965.
- [45] Green, A.E., Naghdi, P.M., Wainwright, W.L.: A General Theory of Cosserat Surface. Arch. Rat. Mech. Anal. 20, 1965.
- [46] Koiter, W.T.: On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells. Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B, 69, 1965.
- [47] Budiansky, B.: Notes on Nonlinear Shell Theory. Journal of Applied Mechanics, 1968.
- [48] Green, A.E., Laws, N., Naghdi, P.M.: Rods, Plates and Shells. Proceedings Camb. Phil. Soc., Vol. 64, 1968.
- [49] Kohli, J.: Beitrag zum axialsymmetrischen Ausbeulen einer einschaligen Hyperboloidschale. Dissertation TH Karlsruhe, 1968.
- [50] Mac Vean, D.B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. ZAMP 19, 1968.

- [51] Zerna, W.: A New Formulation of the Theory of Elastic Shells.  
IASS-Bulletin 36, 1968.
- [52] Horst, H.: Zur Elastizitätstheorie der Kreiszyinderschale im nichtlinearen Bereich.  
Mitteilungen des Instituts für Statik der TU Hannover, Nr. 14, 1969.
- [53] Schmieder, L.: Schalentheorie mit Schubverformungen in allgemeinen Koordinaten.  
Zeitschrift für Flugwissenschaften 17, 1969.
- [54] Wempner, G.: Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells.  
Int. Journal Solids & Structures 5, 1969.
- [55] Wempner, G.: An Invariant Multi-Couple Theory of Shells.  
1969, unpublished.
- [56] Blum, R.: Beitrag zur nichtlinearen Elastizitätstheorie in covarianter Schreibweise mit Anwendung auf die Schalentheorie.  
Dissertation Universität Stuttgart, 1970.
- [57] Green, A.E.,  
Naghdi, P.M.: Non-isothermal Theory of Rods, Plates and Shells.  
Int. Journal of Solids and Structures 6, 1970.
- [58] Luz, E.: Beitrag zur Kontinuumsmechanik endlicher Verzerrungen unter Berücksichtigung thermischer Vorgänge.  
Habilitation Universität Stuttgart, 1970.
- [59] Klinkel, H.: Durchschlaglasten elastisch eingespannter flacher Kugelschalen unter Außendruck.  
Dissertation TH Darmstadt, 1970.
- [60] Shrivastava, J.P.,  
Glockner, P.G.: A Lagrangian Formulation of the Statics of Shells.  
Proc. ASCE, J. of Eng. Mech. Div. 5, 1970.

- [61] Simmonds, J.G., Danielson, D.A.: Nonlinear Shell Theory with a Finite Rotation Vector.  
Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wet., B. 73, 1970.
- [62] Tsuboi, Y., Tosaka, N.: Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells.  
Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. 35, Nr. 2, 1970.
- [63] Bornscheuer, F.W., Seidel, J.: Static and Stability Analysis of Hydromechanically Loaded Shells.  
General Report, Technical Session V of IASS Symposium on Hydromechanically Loaded Shells, Part I, 1971.
- [64] Biricikoglu, V., Kalnins, A.: Large Elastic Deformations of Shells with the Inclusion of Transverse Normal Strain.  
Int. Journal Solids & Structures 7, 1971.
- [65] Krätzig, W.B.: Thermodynamics of Deformations and Shell Theory.  
Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Nr. 71-3, April 1971.
- [66] Reissner, E.: On Consistent First Approximations in the General Linear Theory of Thin Elastic Shells.  
Ing. Archiv 40, 1971.
- [67] Waltersdorf, K.-P.: Beitrag zur Frage konsistenter geometrisch nichtlinearer Theorien dünner elastischer Flächentragwerke.  
Werner-Verlag 1971.
- [68] Westbrook, D.R.: An Asymptotic Investigation of the Small Strain Theorie of Shells.  
Int. Journal Solids & Structures 7, 1971.

## Bezeichnungen

### Indizes und Namen von Tensoren, Ableitungen

$I, J, K$ etc.	Indizes, die die Werte 1, 2, 3 durchlaufen und den undeformierten Zustand charakterisieren.
$i, j, k$ etc.	Indizes, die die Werte 1, 2, 3 durchlaufen und den deformierten Zustand charakterisieren.
$\alpha, \beta, \gamma$	Indizes wie $i, j, k$ , durchlaufen aber nur die Werte 1, 2.
$\Pi, \Sigma, \Theta$	Indizes wie $I, J, K$ , durchlaufen aber nur die Werte 1, 2.
$\underline{T}$	Tensor beliebiger Stufe, bezogen auf undeformierten Zustand.
$\underline{t}$	Tensor beliebiger Stufe, bezogen auf deformierten Zustand.
$T^{IJ}$	Kontravariante Komponente eines zweistufigen Tensors, bezogen auf undeformierten Zustand.
$T^I_j$	Gemischte Komponente eines zweistufigen Doppeltensors; verhält sich kontravariant wie ein Tensor, bezogen auf den undeformierten und kovariant wie ein Tensor, bezogen auf den deformierten Zustand.
$\underline{V}^N _K$	Kovariante Raumableitung.
$\underline{V}^\Pi  _\Sigma$	Kovariante Flächenableitung.
$\underline{V}^\Pi, \Sigma$	Partielle Ableitung.

### Geometrie

$\underline{Z}, \underline{z}, Z^K, z^k$	Raumfeste, kartesische Koordinaten.
$\underline{X}, \underline{y}, X^K, y^k$	Krummlinige Koordinaten.
$\underline{R}, \underline{p}$	Ortsvektoren.
$\underline{C}_{-K}, \underline{g}_k, \underline{C}_{-K}$	Basisvektoren im Raum.
$\underline{A}_{-K}$	Basisvektoren auf der undeformierten Schalenmittelfläche.

$X^\Delta$	Gaußsche Parameter der undeformierten Schalenmittelfläche.
$X^3$	Koordinate normal zur undeformierten Schalenmittelfläche.
$A \cdot \bar{M}$	Koeffizienten einer Koordinatentransformation im selben Raum.
$G_M^K, g_m^k$	Euklidische Schifter im selben Raum.
$A_{KM}, G_{\bar{K}\bar{M}}, g_{\bar{k}\bar{m}}$	Metrikoeffizienten (kovariant).
$B_{\Delta\theta}, B_{\theta}^\Delta, B^{\Delta\theta}$	Krümmungskoeffizienten der Schalenmittelfläche.
$S_M^K$	Anteil des Schifters $G_M^K$ , der nur von Metrik und Krümmung der Schalenmittelfläche abhängt.
$\Gamma_{\Delta M}^R, \bar{\Gamma}_{\bar{J}\bar{K}}$	Christoffelsymbole.
$\epsilon_{LMN}, \epsilon_{\bar{L}\bar{M}\bar{N}}$	Permutationstensor.
$A, G, g$	Determinante der Metrikoeffizienten.
$H$	Mittlere Krümmung.
$K$	Gaußsche Krümmung.
$h$	Schalendicke.
$R$	Kleinster Krümmungsradius der Schalenmittelfläche.

### Kinematik

$A \cdot^k K, A \cdot^{\bar{k}} \bar{K}$	Deformationsgradienten.
$D_{\bar{M}}^{\bar{K}}, D_M^K, D_n^K$	Verschiebungsgradienten.
$J =  D_{\bar{K}}^J $	Determinante der Verschiebungsgradienten.
$U^K, U^{\bar{K}}$	Verschiebungskomponenten.
$C_{KL}, C_{\bar{K}\bar{L}}$	Cauchyscher Verzerrungstensor.
$E_{KL}, E_{\bar{K}\bar{L}}$	Lagrangescher Verzerrungstensor.
$E_{KL}^*, E_{\bar{K}\bar{L}}^*$	Biotscher Verzerrungstensor.

$F_{KL}, \bar{F}_{\bar{K}\bar{L}}$	Verzerrungstensor (ohne speziellen Namen).
$R^L_M, \bar{R}^{\bar{L}}_{\bar{M}}, \bar{R}^L_M$	Rotationstensor.
$\phi, \beta$	Rotationswinkel.
$\Delta^I_{JK}$	Differenzenchristoffelsymbol.
$R^{(C)}_{IJKL}$	Riemann - Christoffel - Tensor, bezogen auf die Metrik $\underline{C}$ .
$\epsilon_{\xi}, \epsilon_{\theta}, \kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}$	Physikalische Verzerrungsgrößen.
<u>Statik</u>	
$\underline{t}, \underline{T}, \bar{t}, \bar{T}$	Spannungsvektor.
$\underline{k}$	Eingeprägte Kraft je Masse.
$\rho, \rho_0$	Dichte.
$t^{jk}$	Eulersche Spannungstensor.
$L^{\bar{K}\bar{L}}, L^{\bar{K}\bar{L}}$	Lagrangesche Spannungstensor, auch Piolascher Spannungstensor 1. Art.
$K^{\bar{K}\bar{L}}$	Kirchhoffsche Spannungstensor, auch Piolascher Spannungstensor 2. Art.
$S^{\bar{K}\bar{L}}$	Symmetrische Spannungstensor (ohne speziellen Namen).
$\hat{T}^J, \hat{T}^J_n, \hat{N}^J, \hat{M}^J$	Vorgegebene Randkräfte.
$P^J, P^J_n, M^J$	Oberflächenlasten.
$\overset{L}{M}^{\Delta K}, \overset{L}{M}^{\Delta 3K}$	Lagrangesche Schnittkräfte oder höhere Momente.
$\overset{K}{M}^{\Delta K}, \overset{K}{M}^{\Delta 3K}$	Kirchhoffsche Schnittkräfte oder höhere Momente.
$N^{\Delta \Sigma}$	Symmetrische Membrankräfte.
$Q^{\Delta}$	Querkräfte.
$M^{\Delta \Sigma}$	Symmetrische Momente.
$L^{33}$	Querdruk.

$S^{\Delta}$  Höhere Kirchhoffsche Schnittkraft  $M^{\Delta 3}$ .

$N^E, M^E, Q$  Physikalische Schnittgrößen.

Werkstoff

$\Pi^{(i)}$  Inneres Potential.

$\Pi^{*(i)}$  auf das Volumen bezogene innere Potential.

$\Pi_{SCH}^{*(i)}$  auf die Schalenmittelfläche bezogene innere Potential der Schale.

$K^{LJKL}$  Elastizitätskoeffizienten des Potentials.

G Schubmodul.

E E - Modul.

$\nu$  Poissonsche Querkontraktionszahl.



1. Einleitung  
1.1 Überblick über das Schrifttum

Bedingt durch die Bedeutung der Schalentragerwerke im Bauwesen sowie Flugzeug- und Maschinenbau wurden Schalentheorien von vielen Autoren abgeleitet. Grundsätzlich lassen sich alle Arbeiten auf diesem Gebiet in drei Gruppen einteilen, und zwar unabhängig, ob lineare oder nichtlineare Theorien entwickelt werden.

Die erste Gruppe geht von den allgemeinen dreidimensionalen Feldgleichungen der Elastizitätstheorie aus und entwickelt diese bezüglich eines kleinen Parameters  $\epsilon$ , der in einem bestimmten Verhältnis zur Schalendicke steht, z. B.  $\epsilon = \frac{h}{R}$ . Damit ergeben sich je nach Geometrie, Randbedingungen und Oberflächenlasten die verschiedensten Möglichkeiten einer asymptotischen Entwicklung bezüglich  $\epsilon$  und somit auch unterschiedliche, asymptotische Feldgleichungen für verschiedenartige Probleme. Stellvertretend für die vielen Arbeiten auf diesem Gebiet seien nur die von Goldenweizer [38], Green, Naghdi [44] sowie Westbrook [68] genannt.

Im Gegensatz dazu wird in der zweiten Gruppe direkt eine zweidimensionale Theorie aufgestellt, wobei einem Punkt der Fläche 5 Freiheitsgrade, 3 Translations- und 2 Rotationsfreiheitsgrade, zugeordnet werden. Dies bedeutet, daß die Statik und Dynamik der Schale als die einer Cosseratschen Fläche anzusehen ist. Wird zusätzlich die Annahme getroffen, daß die Normale der Fläche auch nach der Verformung normal bleibt - in der Literatur allgemein als Kirchhoff-Lovesche Annahme bezeichnet - so ist dies als Sonderfall, jedoch ursprünglich nicht so entwickelt, in der Cosserat-Mechanik der Schale enthalten, da dann die 2 Rotationsfreiheitsgrade von den 3 Translationsfreiheitsgraden abhängig sind. U. a. trugen zur Klärung der Problematik auf diesem Gebiet Günther [35] und Green, Naghdi, Wainwright [45] bei. Allerdings stellt die Aufstellung der Materialgesetze, die sog. konstitutiven Gleichungen, ohne Bezugnahme auf die dreidimensionale Elastizitätstheorie erhebliche Schwierigkeiten dar. Weshalb Reissner [66] ein zweidimensionales Stoffgesetz aus der dreidimensionalen Theorie mit Hilfe eines dreidimensionalen Systems von Integro -

Differentialgleichungen ableitet, dessen Lösungen über asymptotische Reihenentwicklung gewonnen wird.

Aus der Tatsache, daß die Annahme der Kirchhoff-Love Hypothese direkt zu einer zweidimensionalen Theorie führt, fallen alle Arbeiten, die diese Hypothese beinhalten, unter diese zweite Gruppe. Lineare Schalentheorien dieser Kategorie wurden von vielen Autoren veröffentlicht, jedoch sollen hier nur die grundlegenden Veröffentlichungen von Koiter [8], [25], Naghdi [12] und Budiansky, Sanders [14] erwähnt werden. Mit geometrisch nichtlinearen Theorien, ausgehend von der Kirchhoff-Love Hypothese, beschäftigen sich Sanders [41], Naghdi und Nordgren [40], Rüdiger [37], Budiansky [47], Tsuboi und Tosaka [62], Novozhilov [4], Basar [42] und Koiter [46]. Für die spezielle Geometrie des Kreiszyinders geben Donnell, siehe hierzu zum Beispiel Pflüger [16] und Horst [52], für die Kugelschale u. a. Klinkel [59] die nichtlinearen Feldgleichungen an, wobei alle drei Autoren eine flache Schale und damit die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie auf der Schale voraussetzen. In diesem Zusammenhang seien auch die Veröffentlichungen von Wlassow [6] und Mushtari, Galimow [10] angeführt. In all den zitierten Arbeiten wird von der Voraussetzung, daß die Verzerrungen im gesamten Schalenbereich klein sind, ausgegangen. Damit ergeben sich die konstitutiven Gleichungen aus einem angenäherten Ausdruck für die innere Energie. Diese Verzerrungsenergie wird als quadratische Form der gewählten Verzerrungsmaße angesetzt. Da die Verformung einer Fläche eindeutig durch die Änderung des Maß- und Krümmungstensors, auch erste bzw. zweite Fundamentalform der Fläche genannt, beschrieben werden kann, werden diese geometrischen Größen als Verzerrungsmaße eingeführt. Dabei wird in der Regel bei allen Veröffentlichungen die Differenz des Maßtensors der verformten und der unverformten Referenzfläche, meist die Schalenmittelfläche, als Dehnungsmaß eingeführt, während für die Krümmungsänderung unterschiedliche Ausdrücke angesetzt werden. Diese Ausdrücke unterscheiden sich durch Terme der Form  $B_{\Pi}^{\lambda} E_{\circ \lambda \theta}$ ,  $B_{\lambda}^{\lambda} E_{\circ \Pi \theta}$  und  $B_{\Pi \theta}^{\lambda} E_{\circ \lambda}$  - also Krümmung der unverformten Fläche mal Dehnung -, die jedoch, wie Koiter in [8] und [46] nachweist, bei der Annahme der Kirchhoff - Love Hypothese keine Rolle spielen, da Fehler der selben

Größenordnung bereits in dieser Hypothese enthalten sind. Interessant sind im Zusammenhang mit der Ableitung geeigneter konstitutiver Gleichungen die Arbeiten von Naghdi, Nordgren [40] und Tsuboi, Tosaka [62], die für einen linearen Verschiebungsansatz konsequenterweise einen quadratischen Verlauf der Verzerrungsgrößen über die Schalendicke erhalten, während Sanders [41], Budiansky [47] und Koiter [46] einen linearen Verlauf der Verzerrungen voraussetzen. Mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen führen Tsuboi, Tosaka [62] den quadratischen Term für die Verzerrungsgrößen ( $E_{\frac{1}{2}\Delta\theta}$ ) auf die konstanten und linearen Terme zurück, während Naghdi, Nordgren [41] konstitutive Gleichungen angeben, die auch von  $E_{\frac{1}{2}\Delta\theta}$  abhängig sind.

Neben der Frage der kinematischen Variablen unterscheiden sich die Arbeiten noch in der Definition für die Schnittgrößen, so führt Budiansky [47] Schnittgrößen, bezogen auf die undeformierte Fläche ein, während Sanders [41] und Koiter [46] dieselben auf die deformierte Fläche beziehen. Die Gleichgewichtsbedingungen werden mit Hilfe eines zweidimensionalen Prinzips der virtuellen Verschiebungen angegeben, wobei hier häufig die auftretenden kovarianten Ableitungen auf die unbekannte, deformierte Metrik bezogen werden. Jedoch mit Hilfe der Differenzchristoffelsymbole lassen sich diese Gleichgewichtsbedingungen auf die undeformierte Metrik umschreiben, wie es Sanders [41] z. B. ausführte.

Die dritte Gruppe der Veröffentlichungen auf dem Gebiet der linearen und nichtlinearen Schalentheorie versucht den Einstieg über eine allgemeine dreidimensionale Elastizitätstheorie. Die entsprechende zweidimensionale Theorie wird mittels eines Integrationsprozesses über die Schalendicke gewonnen. Dabei ergeben sich je nach Art der Beschreibung des Schalenkontinuums zwei Möglichkeiten der Darstellung. Die erste beschreibt jeden räumlichen Punkt durch den Ortsvektor an einen Punkt einer Referenzfläche und einen mit diesem Referenzpunkt fest verbundenen, verformbaren Vektor, den sog. Direktor. Die so gewonnene 'Direktortheorie' benutzt als kinematische Variable die Differenz der Direktoren im verformten und unverformten Zustand sowie die Direktorgradienten.

Mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes und den Hauptsätzen der Thermodynamik zeigen Green, Laws, Naghdi [48], Green, Naghdi [57] und Krätzig [65], wie aus der allgemeinen dreidimensionalen Schalentheorie für beliebige Dicke und für beliebig große Verformungen gewonnen werden können. Waltersdorf [67] spezialisiert die in den eben zitierten Arbeiten angegebenen Feldgleichungen durch eine lineare Approximation für die Zählvariablen  $l$ ,  $n$  und  $m$  der Weierstraßschen Polynome in der Normalkoordinate. Außerdem vergleicht Waltersdorf [67] die so gewonnene geometrisch nichtlineare Schalentheorie mit der Cosserattheorie und Theorien anderer Autoren. Sowohl Krätzig [65] als auch Waltersdorf [67] lassen unabhängig Approximationsmöglichkeiten bezüglich der Zählvariablen  $l$ ,  $m$  und  $n$  zu, ohne ausdrücklich auf den Aspekt aufmerksam zu machen, daß aufgrund des Prinzips der virtuellen Verschiebungen bei der Annahme eines speziellen Verschiebungsansatzes die statischen Zustandsgrößen und Gleichgewichtsbedingungen direkt herleitbar sind, ohne höhere Momente der inneren Energie (Zählvariable  $l$ ) einzuführen.

Das hier eben angeschnittene Problem wird bei der zweiten Möglichkeit der Herleitung von zweidimensionalen Feldgleichungen aus der dreidimensionalen Theorie gelöst, indem nicht die Direktoren, sondern direkt der Verschiebungsvektor in eine Reihe entwickelt und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und einer Integration über die Schalen- dicke die statischen Zustandsgrößen und Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Man erhält ebensoviele Gleichgewichtsbedingungen wie einem Punkt der Referenzfläche Freiheitsgrade, d. h. Anzahl der Verschiebungsreihenglieder, zugeordnet wurden. Als kinematische Variable treten die Verschiebungen und Verschiebungsgradienten auf, wie sowohl Blum [56] und Wempner [55] gezeigt haben. Dabei gibt Wempner [55] zusätzlich die konstitutiven Gleichungen in Abhängigkeit des Verzerrungstensors an, um dadurch den Zusammenhang zwischen den unsymmetrischen und symmetrischen höheren Momenten anzugeben. Dadurch entfallen Objektivitätsbetrachtungen, wie z. B. von Blum [56]

angegeben. In diese Kategorie fallen auch die auf dem Gebiet der Schalentheorie wohl als Standardwerke zählenden Arbeiten von Green, Zerna [5], Naghdi [12], [18], Novozhilov [19], Wlassow [6] und als einführendes Werk das Buch von Kraus [26]. Ferner findet man in der Literatur Arbeiten, die auch von der dreidimensionalen Theorie ausgehen, aber von vornherein die Kirchhoff-Love Hypothese voraussetzen. Zu diesen Veröffentlichungen zählen neben den in der Gruppe zwei erwähnten auch die Arbeiten von Naghdi [17], [18] und Neuber [31]. Diese Hypothese wird in den Veröffentlichungen von Zerna [51], [38], Schmieder [53], Librescu [20], Reissner [33], Rüdiger [37], Biricikoglu, Kalnins [64] und Naghdi [12] fallengelassen, um den Einfluß der Schubverformung und/oder der Normalspannungen zu erfassen. Ebenso entwickelte Chien [30], wohl als einer der ersten, eine allgemeine geometrisch nichtlineare Theorie dünner Schalen. Alle diese Veröffentlichungen wurden schon häufig an anderer Stelle kritisch beleuchtet, so z. B. in [25 a], [53], [65], [67], weshalb hier nicht nochmals Bekanntes wiederholt werden soll. Lediglich drei Aspekte seien erwähnt: Die meisten Arbeiten betonen den Zusammenhang zwischen angenommenem Verschiebungsansatz, d. h. dem angenommenen Freiheitsgrad der Schalenmittelfläche und der Anzahl der statischen Zustandsgrößen bzw. der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen nicht, wie von Blum [56] bemerkt wird, Ferner versucht eine Reihe der Autoren, z. B. Librescu [20], Neuber [31], den Spannungstensor oder einzelne Komponenten desselben in Potenzreihen nach der Schalennormal-Koordinate zu entwickeln, ohne das Problem der Konvergenz anzusprechen. Drittens unterscheiden sich die Arbeiten durch die Wahl verschiedener Spannungstensoren, wodurch sich unterschiedliche statische Zustandsgrößen und konstitutive Gleichungen für die nichtlinearen Theorien ergeben, wie in den ausführlichen Werken von Truesdell, Toupin [7], Prager [9] und Eringen [11] beschrieben. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Veröffentlichung von Shrivastava, Glockner [60] hingewiesen, in der eine geometrisch nichtlineare Schalentheorie in Lagrangescher Schreibweise vorgestellt wird. Eine weitere Diskrepanz tritt durch die unterschiedliche Wahl von Koordinatensystemen auf, die

allerdings in unmittelbarem Zusammenhang mit der Wahl eines geeigneten Spannungstensors und Verzerrungstensors stehen.

Betont sei ausdrücklich, daß obige Einordnung der Arbeiten auf dem Gebiet der Schalentheorie in drei Gruppen nicht immer eindeutig möglich ist, da häufig 'kombinierte' Betrachtungsweisen angewendet werden. Dies trifft seit der Veröffentlichung von John [25 b] über a priori angenommene Fehler und daraus resultierenden Fehlerabschätzungen in verstärktem Maße zu.

## 1.2 Ausgangspunkt und Aufgabenstellung der Arbeit

Zwei Gründe waren im wesentlichen Ausgangspunkt dieser Arbeit.

Das günstige Tragverhalten von Schalen führt auf geringe Dicken, so daß das Beulproblem sowohl im unter- wie überkritischen Bereich eine große Rolle spielt, vgl. dazu Pflüger [16] und Bornscheuer, Seidel [63]. Dies führte schon frühzeitig auf geometrisch nichtlineare Theorien, die aber alle mehr oder weniger einschränkende Voraussetzungen beinhalten, wie die von Marguerre und Donnell, siehe hierzu Pflüger [16] und Fung [22]. So gelten beide Theorien nicht nur für infinitesimale Verzerrungen des Schalenraumes, sondern auch für kleine endliche Rotationen flacher Schalen. Reissner entwickelte in [2] und [13] demgegenüber eine Theorie dünner Schalen, die für kleine Verzerrungen, aber für beliebig große Rotationen gilt. Allerdings ist diese Theorie auf den rotationssymmetrischen Fall beschränkt. Da das axialsymmetrische Beulen häufig nicht maßgebend ist, müssen allgemeinere Theorien, wie Kohli [49] andeutet, herangezogen werden. Solche Theorien liegen von Sanders [41], Schwarze [34] und Blum [56] zwar vor, doch arbeiten alle drei Autoren mit den Verschiebungen und deren Ableitungen als unbekannte Grundgrößen. Dadurch ist es nicht möglich, die Annahme kleiner Verzerrungen konsequent auszunutzen, da vom Zusammenhang zwischen Deformationsgradient einerseits und einer Rotationsmatrix sowie einem reinen Verzerrungstensor andererseits kein Gebrauch gemacht wird. Ebensoverhält es sich für die auf der 'Direktormethode' basierenden Theorien wieder von Waltersdorf [67]. Die Feldgleichungen für

den rotationssymmetrischen Fall sind einfacher in Form einer Rotation und Spannungsfunktion auszudrücken, wie im linearen Fall bereits von H. Reissner 1912, siehe hierzu z.B. Kraus [26] und im nichtlinearen Fall von E. Reissner [13] angegeben wurde. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß Biot [23] und Wempner [54] sich auch mit dem Problem endlicher Rotationen beschäftigten, beide aber im wesentlichen kleine endliche Deformationen bzw. inkrementale Verschiebungszustände untersuchten, wodurch Teillinearisationen möglich wurden. Wempner [54] macht dies speziell im Hinblick auf die numerische Behandlung des Problems mittels finiter Elemente. Die Arbeiten von Reissner [2] und [13] sind auch Grundlage für die Veröffentlichung von Simmonds, Danielson [61], die im Gegensatz zu Reissner die Bedingung kleiner Verzerrungen in den kinematischen Grundgleichungen aufgeben - bei der Formulierung der konstitutiven Gleichungen jedoch davon wieder Gebrauch machen. Außerdem lassen sie auch nicht rotationssymmetrische Verschiebungszustände zu, setzen aber die Kirchhoff-Love Hypothese voraus, beziehen alle statischen Zustandsgrößen auf den verformten Zustand und geben die Zusammenhänge zu einer dreidimensionalen Theorie nicht an.

Damit ist man auch am zweiten Ausgangspunkt dieser Arbeit, nämlich der hier und im vorigen Abschnitt am Schluß angedeuteten Probleme der konsistenten Ableitung einer geometrisch nichtlinearen Theorie unter einer einmal getroffenen Annahme für die Verschiebungen und Verzerrungen. Dies ist umso zwingender, da alle geometrisch nichtlinearen Theorien bei der Formulierung der konstitutiven Gleichungen vom allgemeinen Hooke'schen Gesetz und damit von der Voraussetzung Gebrauch machen, daß die Verzerrungen überall im Schalenraum klein sind. Diese Voraussetzung wird meist in den kinematischen Grundgleichungen nicht berücksichtigt. Deshalb läßt sich die Aufgabenstellung dieser Arbeit folgendermaßen formulieren:

Es soll eine konsistente geometrisch nichtlineare Schalentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie abgeleitet werden, die als unabhängige kinematische Variable die Verschiebungen und Rotationen der Schalenmittelfläche benutzt. Diese Theorie soll gelten für kleine Verzerrungen des

Schalenskontinuums, aber beliebig großer Rotationen. Letzteres bedingt jedoch, daß die Schale als dünn vorausgesetzt wird, da bei dicken Schalen und großen Rotationen die Kleinheit der Verzerrung z. B. der äußersten Faser nicht gewährleistet ist. Da dieselbe Voraussetzung bei den klassischen Schalentheorien auf die Annahme eines linearen Verschiebungsansatzes führt, kann diesbezüglich die Problemstellung umformuliert werden, daß nämlich eine 'Rotationstheorie' gesucht wird, die einem linearen Verschiebungsansatz äquivalent ist. Von der Kirchhoff-Love Hypothese soll vorerst nicht Gebrauch gemacht werden.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist es zweckmäßig, sich des Tensorkalküls zu bedienen, diesbezüglich seien auf die Bücher von Flügge [28], Klingbeil [24], Sokolnikoff [3] und Naghdi [12] verwiesen. Außerdem werden weitgehend von den elastizitätstheoretischen Grundlagen, die von Green, Zerna [5], Truesdell, Toupin [7], Truesdell, Noll [21], Eringen [11], Prager [9], Novozhilov [4], Green, Adkins [27], Kappus [29] und Fung [22] aufbereitet wurden, Gebrauch gemacht. Im einzelnen wird auf diese grundlegenden Werke kein Bezug mehr genommen, im Zusammenhang mit den statischen Feldgleichungen und dem Materialgesetz wird die Variationsmethode angewendet. Diese Methode ist schon in vielen der bereits erwähnten Arbeiten beleuchtet worden, weshalb hier nur noch auf die Veröffentlichungen von Bolotin [15], Klingbeil [39] und Stein [43] hingewiesen werden soll.



## 2. Mathematische Grundlagen

Die Grundlagen der Tensorrechnung werden als bekannt vorausgesetzt, lediglich die Dinge, die zum Verständnis dienen, nochmals kurz wiederholt.

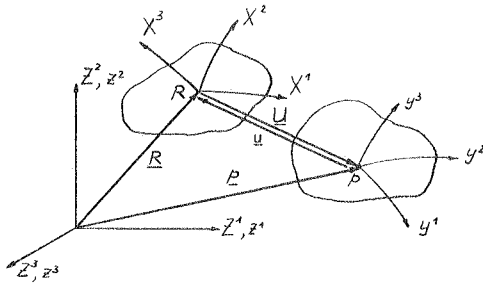
### 2.1 Grundsätzliches zur Bezeichnung

In der Kontinuumsmechanik hat man es immer mit zwei Zuständen zu tun: dem unverformten und verformten Zustand. Um diesem Sachverhalt auch im Formalen Rechnung zu tragen, ist es zweckmäßig die Namen der Zustandsgrößen und bei Komponenten derselben die Indizes je nach Bezugszustand unterschiedlich kennzuzeichnen. Deshalb wird vereinbart, daß alle Größen, die auf den unverformten Zustand bezogen sind, mit großen Buchstaben charakterisiert werden, während kleine Buchstaben Größen bezogen auf den verformten Zustand darstellen. Zusätzlich sollen griechische Indizes - groß und klein - die Werte 1 und 2 annehmen, während lateinische Indizes - ebenfalls groß und klein - die Werte 1, 2 und 3 durchlaufen sollen. Dieser Formalismus läßt sich bei sog. Doppeltensordfeldern, also Tensoren, die sich auf beide Zustände beziehen, nicht immer klar durchführen, vor allem wenn keine Komponentendarstellung angewendet wird. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit möglichst immer die Komponentendarstellung gewählt. In Fällen, wo Tensoren - also auch Vektoren - als Gesamtheit angesprochen werden, sollen diese durch Unterstreichung gekennzeichnet werden.

Aufgabe der Elastizitätstheorie ist es nun, den unverformten und verformten Zustand miteinander zu verknüpfen. Bei dieser Verknüpfung treten zwei unterschiedliche Operationen, nämlich die Deformation, häufig auch Transformation genannt und das Schiften einer Tensorgröße auf. Der unterschiedliche Charakter beider läßt sich mit obig gewählter Konvention anschaulich verdeutlichen. Außerdem spielen beide Operationen in der Arbeit eine bedeutende Rolle, weshalb ihnen ein eigenes Kurzkapitel gewidmet sein soll.

### 2.2 Deformation und Schiften einer Tensorgröße

Gegeben seien die beiden Zustände bezogen auf zwei raumfeste kartesische Koordinatensysteme -  $Z^1, Z^2, Z^3$ , kurz  $Z^K$  und  $z^1, z^2, z^3$ , kurz  $z^i$  -, deren Ursprung derselbe ist.



$\underline{R}, \underline{p}$  ORTSVEKTOREN ZU DEN PUNKTEN  $R, p$

$\underline{U}, \underline{u}$  VERSCHIEBUNGS-  
VEKTOR  $\overline{R, p}, \overline{p, R}$

ABB 1.: KOORDINATEN-SYSTEME, ORTS- UND VERSCHIEBUNGSVEKTOREN

Man betrachte einen Punkt  $R$  im unverformten Zustand, der in den Punkt  $p$  im verformten Zustand übergeht. Im unverformten Zustand in  $R$  wird ein krummliniges Koordinatensystem  $X^1, X^2, X^3$ , kurz  $X^K$ , eingeführt, im verformten Zustand in  $p$  ein davon zunächst völlig unabhängiges  $y^1, y^2, y^3$ , kurz  $y^k$ . Nun gelte der Zusammenhang:

$$X^K = X^K(Z^I) \quad (2.2.1a)$$

$$y^i = y^i(z^i) \quad (2.2.1b)$$

bzw. alternativ

$$\underline{X} = \underline{X}(\underline{Z})$$

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{z})$$

und dessen eindeutige Umkehrbarkeit

$$Z^I = Z^I(X^K) \quad (2.2.2a)$$

$$z^i = z^i(y^j) \quad (2.2.2b)$$

d. h. die Funktionaldeterminanten

$$\left| \frac{\partial Z^I}{\partial X^K} \right|$$

$$\left| \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right|$$

sind nicht gleich Null.

Der Deformationsvorgang, also der Zusammenhang zwischen den beiden Zuständen, läßt sich angeben zu

$$Z^I = Z^I(z^i) \quad (2.2.3a)$$

$$z^i = z^i(Z^I) \quad (2.2.3b)$$

Beispielsweise

$$Z^I = z^i + u^i$$

$$z^i = Z^I + U^I$$

wobei  $u^i$  und  $U^I$  die Verschiebungskomponenten des Verschiebungsvektors sind.

Durch Einsetzen von (2.2.2 b/a) in (2.2.3 a/b) und anschließend in (2.2.1 a/b) folgt, daß der Deformationsvorgang eindeutig darstellbar ist allein durch die Koordinatentransformation der krummlinigen Koordinatensysteme.

$$X^k = X^k(y^j) \quad (2.2.4a) \quad y^j = y^j(X^k) \quad (2.2.4b)$$

Die kovarianten Basisvektoren tangential an die Koordinaten  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  sind definiert als

$$\underline{G}_K = \frac{\partial \underline{R}}{\partial X^K} \quad (2.2.5a) \quad \underline{g}_k = \frac{\partial \underline{R}}{\partial y^k} \quad (2.2.5b)$$

während die kontravarianten Basisvektoren sich ergeben aus

$$\underline{G}^M \underline{G}_K = \delta^K_M \quad (2.2.6a) \quad \underline{g}^k \underline{g}_m = \delta^k_m \quad (2.2.6b)$$

mit  $\delta^K_M$  und  $\delta^k_m$ , dem Kronecker Delta.

Der Zusammenhang (2.2.4 a) und (2.2.4 b) zeigt, daß wiederum die Funktionaldeterminanten

$$\left| \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right| \quad \left| \frac{\partial y^k}{\partial X^K} \right|$$

ungleich Null sein müssen. Die Elemente dieser Determinanten stellen ein sog. Doppeltensordfeld dar und werden Deformationsgradienten genannt

$$A^K_{\cdot k} = \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \quad (2.2.7a) \quad A^k_{\cdot K} = \frac{\partial y^k}{\partial X^K} \quad (2.2.7b)$$

für die gilt

$$A^K_{\cdot k} A^k_{\cdot M} = \delta^K_M \quad (2.2.8a) \quad A^R_{\cdot k} A^k_{\cdot m} = \delta^R_m \quad (2.2.8b)$$

Durch den Punkt R sei eine beliebige Kurve C und an diese das Linienelement  $d\underline{X}$  gegeben. Zu klären ist nun, wie sich C und damit  $d\underline{X}$  durch die Deformation ändern.

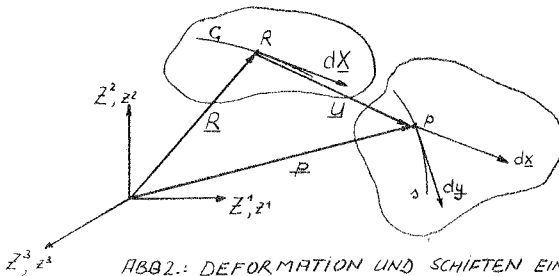


ABB.2.: DEFORMATION UND SCHIFTEN EINES VEKTORS  $d\underline{X}$

Die Kurve  $C$  geht in die deformierte Kurve  $s$  und das Linienelement  $d\underline{X}$  in das Linienelement  $d\underline{y}$  der Kurve  $s$  über. Da nun Gleichung (2.2.4 b) und (2.2.6 b) gilt, folgt

$$dy^k = A^k_{\kappa} dX^{\kappa} \quad (2.2.9)$$

Einen Zusammenhang dieser Art nennt man Deformation.

Wird dagegen  $d\underline{X}$  parallel von  $R$  nach  $p$  verschoben, so spricht man von Schiften, und es gilt

$$d\underline{X} = dX^{\kappa} \underline{G}_{\kappa} \quad d\underline{x} = dx^r \underline{g}_r$$

wobei  $\underline{G}_{\kappa}$  und  $\underline{g}_r$  durch (2.2.5 a) und (2.2.5 b) definiert sind.

Da aber 
$$d\underline{X} = d\underline{x}$$

folgt 
$$dX^{\kappa} \underline{G}_{\kappa} = dx^r \underline{g}_r \equiv dX^r \underline{g}_r$$

oder 
$$dX^r = dx^r = g^r_{\kappa} dX^{\kappa} \quad (2.2.10)$$

mit 
$$g^r_{\kappa} = g^r \underline{G}_{\kappa} \quad (2.2.11)$$

Einen Zusammenhang der Art (2.2.10) nennt man Schiften und  $g^r_{\kappa}$  den sog. Euklidischen Schifter.

Für die Schifter gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$g^r_{\kappa} g^m_{\kappa} = \delta^m_{\kappa} \quad (2.2.12a) \quad g^r_{\kappa} g^m_{\nu} = \delta^m_{\nu} \quad (2.2.12b)$$

wie aus der Definitionsgleichung (2.2.10) direkt folgt.

Daraus folgt allgemein: Bei einer Deformation muß sich der Name und die Indizierung, beim Schiften nur die Indizierung ändern.

### 2.3 Koordinatensysteme und Geometrie des undeformierten Schalenraums

Das wesentliche Merkmal einer Schalentheorie ist die Reduktion des dreidimensionalen Kontinuums auf eine zweidimensionale Referenzfläche. Damit verknüpft ist das Problem der geometrischen Beschreibung des Schalenraums in Abhängigkeit von der Geometrie der Referenzfläche. Als Referenzfläche wird die Schalenmittelfläche gewählt.

Im dreidimensionalen Raum ist die sog. kovariante Raumableitung und auf der Schalenmittelfläche die sog. kovariante Flächenableitung definiert. Im

Anhang sind Formeln zusammengestellt für die Zusammenhänge dieser beiden Ableitungsformen auf der Schalenmittelfläche, die dadurch charakterisiert ist, daß die dritte Raumkoordinate Null ist. An dieser Stelle sei lediglich vermerkt, daß kovariante Raumableitungen durch einen Längsstrich, kovariante Flächenableitungen durch zwei Längsstriche charakterisiert sein sollen, während partielle Ableitungen durch ein Komma gekennzeichnet sind.

Beispielsweise:	$T^{\Delta} _{\pi}$	Raumableitung	}	einer kovarianten Tensorkomponente
	$T^{\Delta}  _{\pi}$	Flächenableitung		
	$T^{\Delta},_{\pi}$	partielle Ableitung		

Hingewiesen sei noch darauf, daß Aussagen über die Bezugsbasis der Tensorkomponente  $T^{\Delta}$  gemacht werden müssen. Zu diesem Zweck als auch zur eindeutigen geometrischen Beschreibung werden drei verschiedene Koordinatensysteme im Schalenraum definiert:

1. Das Koordinatensystem der Mittelfläche  $X^K$ , bestehend aus den beiden Gaußparametern  $X^{\Delta}$  der Fläche und der dazu senkrechten Koordinate  $X^3$ . Man nennt derartige Koordinaten normale Koordinaten.
2. Das zum Koordinatensystem der Schalenmittelfläche parallele System  $X^{\bar{K}}$ .
3. Das außerhalb der Schalenmittelfläche in beliebiger Lage liegende Koordinatensystem  $X^{\bar{\bar{K}}}$  mit der Einschränkung, daß die Richtung von  $X^{\bar{\bar{3}}}$ ,  $X^{\bar{3}}$  und  $X^3$  übereinstimmt. Diese Einschränkung ist nicht nötig, jedoch zweckmäßig.

Somit lassen sich diese 3 Koordinatensysteme mit den 3 zugehörigen Orts- und Basisvektoren, wie in Abb. 3 gezeigt, darstellen.

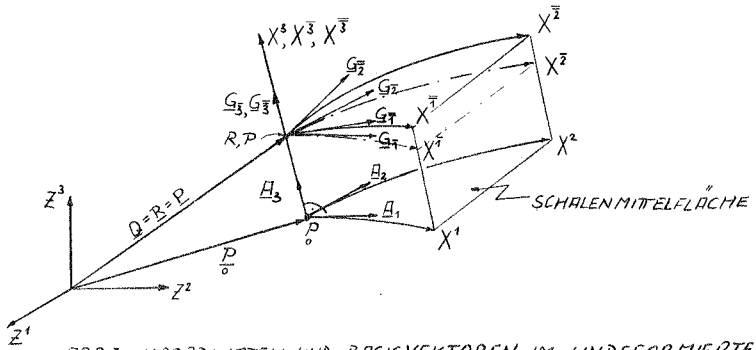


ABB.3: KOORDINATEN UND BASISVEKTOREN IM LINDEFORMIERTEN SCHALENRAUM

Der Ortsvektor  $\underline{P}$  zur Schalenmittelfläche sei als

$$\underline{P} = \frac{\partial}{\partial} (X^A) \quad (2.3.1)$$

und  $X^3$  in Richtung des Einheitsnormalvektors  $\underline{A}_3$  zur Schalenmittelfläche definiert, d. h.

$$\underline{H}_3 \cdot \underline{H}_3 = 1 \quad (2.3.2)$$

Die kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche ergeben sich gemäß (2.2.5 a)

$$\underline{H}_\Delta = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X^\Delta} = \underline{P}_{,\Delta} \quad (2.3.3)$$

die um  $\underline{A}_3$  formal zu  $\underline{A}_M$  erweitert werden, während die für die Koordinatensysteme außerhalb der Schalenmittelfläche analog definiert sind

$$\underline{G}_{\bar{M}} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial X^{\bar{M}}} = \underline{R}_{,\bar{M}} \quad (2.3.4)$$

$$\underline{G}_{\bar{M}} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial X^{\bar{M}}} = \underline{Q}_{,\bar{M}} \quad (2.3.5)$$

Nun lassen sich aus der Tatsache, daß

$$\underline{Q} = \underline{R} = \underline{P}$$

ist, unter Anwendung einerseits der Kettenregel und andererseits der Vektoraddition folgende Zusammenhänge angeben

$$\underline{G}_{\bar{M}} = \underline{R}_{,\bar{M}} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial X^{\bar{M}}} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial X^{\bar{M}}} = \underline{P}_{,M} A^M_{\bar{M}} \quad (2.3.6)$$

mit 
$$A^M_{\bar{M}} = \frac{\partial X^M}{\partial X^{\bar{M}}} \quad (2.3.7)$$

in Anlehnung an Gleichung (2.2.7), die aber hier nichts anderes als die Transformationskoeffizienten zwischen den beiden Koordinatensystemen  $X^M$  und  $X^{\bar{M}}$  darstellen.

$$\underline{R} = \underline{P} = \frac{\partial}{\partial} (X^A) + X^3 \underline{H}_3 \quad (2.3.8)$$

Unter Berücksichtigung von (2.3.3) folgt damit

$$\underline{P}_{,M} = \underline{H}_\Delta \mathcal{L}_M^\Delta + \underline{H}_3 \mathcal{L}_M^3 + X^3 \underline{H}_{3,M} = \underline{H}_K \mathcal{L}_M^K + X^3 \underline{H}_{3,M} \quad (2.3.9)$$

wobei die Vereinbarung  $\Delta = 1, 2$  und  $M = 1, 2, 3$  sowie die Summationskonvention Eingang gefunden haben, denn

$$\underline{A}_{\Delta} d_M^{\Delta} \neq \underline{A}_M \quad (2.3.10a)$$

aber  $\underline{A}_M d_{\Delta}^M = \underline{A}_{\Delta} \quad (2.3.10b)$

und  $\underline{A}_{\kappa} d_M^{\kappa} = \underline{A}_M = \underline{A}_{\Delta} d_M^{\Delta} + \underline{A}_3 d_M^3 \quad (2.3.10c)$

Ferner ist gemäß den Ableitungsformeln von Weingarten und Gauß

$$\underline{H}_{M,N} = \Gamma_{\Delta M}^R d_N^{\Delta} \underline{H}_R \quad (2.3.11a)$$

$$\Gamma_{\Delta M}^R = \Gamma_{M\Delta}^R \quad (2.3.11b)$$

wobei  $\Gamma_{\Delta M}^R$  die Christoffelsymbole bezüglich der Schalenmittelfläche darstellen. Zwischen diesen und den Krümmungstensoren besteht bekanntlich folgender Zusammenhang

$$\Gamma_{\Delta R}^3 = B_{\Delta R} \quad (2.3.12a)$$

$$\Gamma_{R3}^{\Delta} = \Gamma_{3R}^{\Delta} = -B_{R}^{\Delta} \quad (2.3.12b)$$

$$\Gamma_{3M}^R = 0 \quad \text{für } R = 3 \text{ oder/und } M = 3 \quad (2.3.12c)$$

Wird (2.3.11 a) im Zusammenhang mit (2.3.12 c) benützt, so kann auch geschrieben werden

$$\underline{H}_{3,M} = \Gamma_{\Delta 3}^{\kappa} d_M^{\Delta} \underline{H}_{\kappa} = \Gamma_{M3}^{\kappa} \underline{H}_{\kappa} \quad (2.3.13)$$

Mit (2.3.13), (2.3.12) wird (2.3.9)

$$\underline{P}_{3,M} = d_M^{\kappa} \underline{H}_{\kappa} + \chi^3 \Gamma_{M3}^{\kappa} \underline{H}_{\kappa} = (d_M^{\kappa} + \chi^3 \Gamma_{M3}^{\kappa}) \underline{H}_{\kappa} = S_M^{\kappa} \underline{H}_{\kappa} \quad (2.3.14)$$

wobei  $S_M^{\kappa} = d_M^{\kappa} + \chi^3 \Gamma_{M3}^{\kappa} = \begin{cases} S_{\Theta}^{\Delta} = d_{\Theta}^{\Delta} + \chi^3 \Gamma_{\Theta 3}^{\Delta} = d_{\Theta}^{\Delta} - \chi^3 B_{\Theta}^{\Delta} \\ S_3^3 = d_3^3 = 1 \\ S_{\Theta}^3 = S_3^{\Delta} = 0 \end{cases} \quad (2.3.15)$

In der Literatur wird  $S_{\Theta}^{\Delta}$  - z. B. bei Naghdi [12]  $\mu_{\Theta}^{\Delta} \equiv S_{\Theta}^{\Delta}$  - Schalen-schifter genannt. Diese Bezeichnung ist im Sinne der Definition der Schifter (2.2.11) nicht ganz exakt, da in Analogie zu (2.2.11) der Schifter im undefinierten Schalenraum folgendermaßen zu definieren wäre

$$G_{\bar{M}}^{\kappa} = \underline{H}^{\kappa} \underline{G}_{\bar{M}} \quad (2.3.16)$$

und sich demnach nach (2.3.6) und (2.3.14)

zu

$$G_{\bar{M}} = \underline{P}_{JM} A^M_{\cdot\bar{H}} = A^M_{\cdot\bar{H}} S^K_M H_K = G_{\bar{H}}^K H_K \quad (2.3.17a)$$

$$G_{\bar{H}}^K = A^M_{\cdot\bar{H}} S^K_M$$

ergeben würde.

Erwähnt sei auch noch, daß der Schifter  $G_{\bar{M}}^K$  kovariant konstant ist, während dies für  $S^K_M$  und damit für  $S^\Delta_\theta$  nicht zutrifft. Dies läßt sich sofort mit Riccis Lemma und der Orthogonalitätsbedingung für die Schifter beweisen. Demzufolge gilt

$$\mathcal{D}^I_\kappa |_{\bar{J}} = \bar{H}_{I\kappa} |_{\bar{J}} = G^I_{\bar{K}} |_{\bar{J}} = \bar{H}^{I\kappa} |_{\bar{J}} = G^{\bar{I}\bar{K}} |_{\bar{J}}$$

und somit auch

$$G^I_{\bar{K}} |_{\bar{J}} = G^I_{\bar{K}} |_{\bar{J}} = 0 \quad (2.3.18)$$

Analog zur Ableitung des Zusammenhangs (2.3.17) zwischen den Basisvektoren einer beliebigen Fläche außerhalb der Schalenmittelfläche ( $X^{\bar{K}}$ ) und der Schalenmittelfläche selbst ( $X^K$ ) läßt sich die Abhängigkeit zwischen den Parallellflächen  $X^{\bar{K}}$  und  $X^K$  sofort angeben zu

$$G_{\bar{M}} = \underline{Q}_{JM} A^M_{\cdot\bar{H}} = A^M_{\cdot\bar{H}} S^K_M H_K = G_{\bar{H}}^K H_K \quad (2.3.19)$$

Für die Transformationskoeffizienten  $A^M_{\cdot\bar{M}}$  zweier Parallellflächen  $X^M$  und  $X^{\bar{M}}$  gilt aber

$$A^M_{\cdot\bar{M}} = \frac{\partial X^M}{\partial X^{\bar{M}}} = \mathcal{D}^M_{\bar{M}} \quad (2.3.20)$$

und somit

$$G_{\bar{M}}^K = A^M_{\cdot\bar{M}} S^K_M = \mathcal{D}^M_{\bar{M}} S^K_M \quad (2.3.21)$$

Der Zusammenhang zwischen  $X^{\bar{K}}$  und  $X^{\bar{K}}$  ließe sich auf gleiche Weise ableiten. Im weiteren soll jedoch vorausgesetzt sein, daß die Schalendicke konstant ist und somit das Koordinatensystem  $X^{\bar{K}} \equiv X^{\bar{K}}$  wird. Um jedoch diesbezüglich Verallgemeinerungen leichter zu ermöglichen, wird Gleichung (2.3.20) noch nicht eingearbeitet, so daß für den Übergang zum allgemeinen Koordinatensystem  $X^{\bar{K}}$  alle einfach überstrichenen Indizes nur durch doppelt überstrichene ersetzt werden müßten.

Die Umkehrung zu (2.3.19) ergibt sich mit der Orthogonalitätsbedingung analog zu (2.2.12)

$$G_{\bar{H}}^K G_{\bar{M}}^{\bar{M}} = \mathcal{D}^K_{\bar{H}} \quad G_{\bar{H}}^K G_{\bar{K}}^{\bar{K}} = \mathcal{D}^{\bar{K}}_{\bar{H}} \quad (2.3.22)$$

$$\bar{H}_{I\kappa} = G_{\bar{K}}^{\bar{M}} G_{\bar{M}} \quad (2.3.23)$$



Für die kontravarianten Basisvektoren gilt

$$\underline{G}^{\bar{M}} = G^{\bar{M}}_{\bar{K}} \underline{H}^{\bar{K}} \quad , \quad \underline{H}^{\bar{K}} = G^{\bar{K}}_{\bar{M}} \underline{G}^{\bar{M}} \quad (2.3.24)$$

Ferner sei  $\overset{1}{S}^M_J$  definiert durch

$$S^{\bar{K}}_{\bar{M}} \overset{1}{S}^M_J = \delta^{\bar{K}}_J \quad (2.3.25)$$

Die  $G^{\bar{M}}_{\bar{K}}$  und damit  $\overset{1}{S}^M_K$  lassen sich in eine Reihe entwickeln.

$$G^{\bar{M}}_{\bar{K}} = A^{\bar{M}} \cdot \overset{1}{S}^M_K = A^{\bar{M}} \cdot \left( \delta^M_K - \chi^3 \Gamma^M_{3K} + (\chi^3)^2 \Gamma^L_{3K} \Gamma^M_{3L} - \dots \right) \quad (2.3.26)$$

Die Christoffelsymbole des Schalenraums  $\Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}}$  sind definiert durch

$$\underline{G}_{\bar{M},\bar{N}} = \Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} \underline{G}_{\bar{L}} \quad (2.3.27)$$

und unter Berücksichtigung von (2.3.11 a) und (2.3.18) ergibt sich der Zusammenhang zwischen  $\Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}}$  und  $\Gamma^L_{MN}$

$$\begin{aligned} \underline{G}_{\bar{M},\bar{N}} &= \left( G^{\bar{K}}_{\bar{M}} \underline{H}_{\bar{K}} \right)_{,\bar{N}} = \left( A^{\bar{L}}_{\bar{M}} S^{\bar{K}}_{\bar{L}} \underline{H}_{\bar{K}} \right)_{,\bar{N}} \\ &= \left( A^{\bar{L}}_{\bar{M},\bar{N}} S^{\bar{K}}_{\bar{L}} + A^{\bar{L}}_{\bar{M}} S^{\bar{K}}_{\bar{L},\bar{N}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \right) \underline{H}_{\bar{K}} + A^{\bar{L}}_{\bar{M}} S^{\bar{K}}_{\bar{L}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \underline{H}_{\bar{K},\bar{N}} \end{aligned}$$

mit

$$S^{\bar{K}}_{\bar{L},\bar{N}} = S^{\bar{K}}_{\bar{L}|N} - \Gamma^{\bar{K}}_{\bar{O}M} S^{\bar{M}}_{\bar{L}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} + \Gamma^{\bar{M}}_{\bar{L}\bar{O}} S^{\bar{K}}_{\bar{M}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} \quad \left. \vphantom{S^{\bar{K}}_{\bar{L},\bar{N}}} \right\} \quad (2.3.28)$$

da

$$S^{\bar{K}}_{\bar{L},\bar{3}} = S^{\bar{K}}_{\bar{L}|3}$$

wird

$$\begin{aligned} \underline{G}_{\bar{M},\bar{N}} &= \Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} \underline{G}_{\bar{L}} = \Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} A^{\bar{M}} \cdot \underline{L} S^{\bar{K}}_{\bar{M}} \underline{H}_{\bar{K}} \\ &= \left( A^{\bar{L}}_{\bar{M},\bar{N}} S^{\bar{K}}_{\bar{L}} + A^{\bar{L}}_{\bar{M}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} S^{\bar{K}}_{\bar{L}|N} - A^{\bar{L}}_{\bar{M}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \Gamma^{\bar{K}}_{\bar{O}H} S^{\bar{M}}_{\bar{L}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} \right. \\ &\quad \left. + A^{\bar{L}}_{\bar{M}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \Gamma^{\bar{M}}_{\bar{L}\bar{O}} S^{\bar{K}}_{\bar{M}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} + A^{\bar{L}}_{\bar{M}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \Gamma^{\bar{K}}_{\bar{O}H} S^{\bar{M}}_{\bar{L}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} \right) \underline{H}_{\bar{K}} \end{aligned}$$

und daraus folgt mit (2.3.25)

$$\Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} = A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{J}}_{\bar{M},\bar{N}} + A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{L}}_{\bar{M}} A^{\bar{N}}_{\bar{N}} \left( \overset{1}{S}^{\bar{J}}_{\bar{K}} S^{\bar{M}}_{\bar{L}|N} + \Gamma^{\bar{J}}_{\bar{L}\bar{O}} \delta^{\bar{O}}_{\bar{N}} \right) \quad (2.3.29)$$

Der Ausdruck  $A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{J}}_{\bar{M},\bar{N}}$  läßt sich auch umschreiben zu

$$\left( A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{J}}_{\bar{M}} \right)_{,\bar{N}} = \delta^{\bar{L}}_{\bar{M},\bar{N}} = 0 = A^{\bar{L}}_{\bar{J},N} A^{\bar{N}}_{\bar{M}} A^{\bar{J}}_{\bar{M}} + A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{J}}_{\bar{M},\bar{N}}$$

d.h.  $A^{\bar{L}}_{\bar{J}} A^{\bar{J}}_{\bar{M},\bar{N}} = -A^{\bar{L}}_{\bar{J},N} A^{\bar{N}}_{\bar{M}} A^{\bar{J}}_{\bar{M}} \quad (2.3.30)$

Für Parallellflächen gilt gemäß (2.3.20)

$$A^J_{\bar{H}, \bar{N}} = \delta^J_{\bar{H}, \bar{N}} = 0$$

wobei allerdings bemerkt sei, daß  $A^J_{\bar{H}}|_{\bar{N}} \neq 0$  ist, sondern sich aus (2.3.17) ermittelt zu

$$A^J_{\bar{H}}|_{\bar{N}} = G_{\bar{H}}^K \bar{S}^J_K|_{\bar{N}} = S^K_L \bar{S}^J_K|_{\bar{N}} A^L_{\bar{H}} A^N_{\bar{N}} \quad (2.3.31)$$

Ferner gilt für die Schalenmittelfläche

$$\Gamma^{\bar{L}}_{\bar{H}\bar{N}}(X^3=0) = \Gamma^L_{HN}$$

Ist im Schalenraum ein Vektor  $\underline{V}$  definiert, so läßt sich dieser sowohl auf die Basis  $\underline{G}_{\bar{M}}$  als auch die Basis der Schalenmittelfläche  $\underline{A}_{\bar{M}}$  beziehen

$$\underline{V} = V^{\bar{H}} \underline{G}_{\bar{H}} = V^H \underline{H}_H \quad (2.3.32a)$$

$$= V_{\bar{H}} \underline{G}^{\bar{H}} = V_M \underline{H}^M \quad (2.3.32b)$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten  $V^{\bar{M}}$  und  $V^M$  ergibt sich durch Überschieben dieser Gleichung mit  $\underline{A}^K$  und unter Beachtung von (2.3.16) zu

$$V^H = V^{\bar{H}} G^H_{\bar{H}} = V^{\bar{H}} S^H_K A^K_{\bar{H}} \quad (2.3.33a)$$

$$V_H = V_{\bar{H}} G_{\bar{H}}^H = V_{\bar{H}} \bar{S}^H_K A^{\bar{H}}_{\bar{K}} \quad (2.3.33b)$$

Der Vergleich mit (2.2.10) zeigt, daß hier ein Schiften im undeformierten Schalenraum vorliegt.

Für die kovarianten Ableitungen läßt sich angeben

$$V^{\bar{H}}|_{\bar{N}} = G^{\bar{H}}_{\bar{H}} V^H|_{\bar{N}} A^{\bar{N}}_{\bar{H}} \quad (2.3.34)$$

wobei für die auf der Schalenmittelfläche definierten, normalen Koordinaten und dem im Anhang angegebenen Zusammenhang zwischen Raum- und Flächenableitung gilt

$$V^H|_{\bar{N}} = \begin{cases} V^H|_{\Delta} \\ V^M|_{\Delta} \\ V^M|_{\Sigma} \end{cases} = \begin{cases} V^H|_{\Delta} = V^H|_{\Delta} + \Gamma^H_{\Delta 3} V^3 \\ V^3|_{\Delta} = V^3|_{\Delta} + \Gamma^3_{\Delta \Sigma} V^{\Sigma} \end{cases} \quad (2.3.35)$$

Ähnliche Beziehungen lassen sich für Tensorkomponenten höherer Ordnung angeben, sollen aber nur nach Bedarf abgeleitet werden.

Noch ein Wort zum Heraus- und Herunterziehen der Indizes - also dem Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten. Durch die Unterscheidung der Koordinatensysteme  $X^K$  und  $X^{\bar{K}}$  im selben undeformierten Raum sind auch die entsprechenden Metrikoeffizienten, mit denen diese Operation ausgeführt wird, eindeutig bestimmt, d. h. einfach überstrichene Indizes werden mit  $G_{\bar{K}\bar{L}}$  bzw.  $G^{\bar{K}\bar{L}}$  behandelt, während Tensorcomponenten mit nicht überstrichenen Indizes mit den Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche  $A_{KL}$  und  $A^{KL}$  überschoben werden können. Im folgenden sind noch einige bekannte Beziehungen zusammengestellt.

Der Permutationstensor

$$\varepsilon_{\bar{L}\bar{M}\bar{N}} = (\underline{G}_{\bar{L}} \times \underline{G}_{\bar{M}}) \underline{G}_{\bar{N}} = \begin{cases} +\sqrt{G} & \text{für (LMN) gerade Permutationen} \\ & \text{von 1, 2, 3} \\ -\sqrt{G} & \text{für (LMN) ungerade Permutationen} \\ & \text{von 1, 2, 3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.36)$$

mit  $G = \det(G_{\bar{K}\bar{L}}) \quad (2.3.37)$

$$\varepsilon_{LMN} = (\underline{A}_L \times \underline{A}_M) \underline{A}_N = \begin{cases} +\sqrt{A} & \text{für (LMN) gerade Permutationen} \\ & \text{von 1, 2, 3} \\ -\sqrt{A} & \text{für (LMN) ungerade Permutationen} \\ & \text{von 1, 2, 3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.38)$$

mit  $A = \det(A_{KL}) = \det(A_{\Delta\Theta}) \quad (2.3.39)$

da  $A_{\Theta 3} = A_{3\Theta} = 0$  ;  $A_{33} = 1$

Das Flächenelement einer Fläche des Schalenraums, deren Normale  $\underline{G}_3$  ist und das Flächenelement der Schalenmittelfläche

$$dF_{\bar{3}} = \varepsilon_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} dX^{\bar{1}} dX^{\bar{2}} = \sqrt{G} dX^{\bar{1}} dX^{\bar{2}} \quad (2.3.40a)$$

$$dF_3 = \varepsilon_{123} dX^1 dX^2 = \sqrt{A} dX^1 dX^2 \quad (2.3.40b)$$

und damit (für Parallelfächen)

$$dF_{\bar{3}}(X^{\bar{3}}) = S dF_3(X^3=0) \quad (2.3.41)$$

wobei  $S = S_{(X^3)} = \det(S_L^A) = \sqrt{\frac{G}{H}} = 1 - X^3 2H + (X^3)^2 K$  (2.3.42)

und 
$$\left. \begin{array}{ll} 2H = B_{\Delta}^A & \text{mittlere Krümmung} \\ K = \det(B_{\Theta}^{\hat{\Delta}}) & \text{Gaußsche Krümmung} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{der Schalen-} \\ \text{mittelfläche} \end{array}$$

Das Volumelement

$$dV = \sqrt{G} dX^{\bar{1}} dX^{\bar{2}} dX^{\bar{3}} = dF_{\bar{3}} dX^{\bar{3}} = S dF_{\bar{3}} dX^{\bar{3}} \quad (2.3.43)$$

### 3. Allgemeine Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel sind nur die wesentlichsten Ergebnisse der allgemeinen Elastizitätstheorie zusammengestellt im Hinblick auf die

- a) Bereitstellung der notwendigen Grundlagen,
- b) im Kapitel 2.3 speziell eingeführten Koordinaten des undeformierten Schalenraums.

#### 3.1 Koordinatensysteme und Geometrie des deformierten Schalenraums

Wie bereits in Kapitel 2.2 ausgeführt, läßt sich im deformierten Zustand ein krummliniges Koordinatensystem gemäß Gleichung (2.2.4 b) definieren. Das allgemeine Koordinatensystem im deformierten Schalenraum sei  $\bar{y}^{\bar{k}}$  und das der Schalenmittelfläche  $y^k$  genannt, wobei letzteres nicht identisch mit dem der deformierten Schalenmittelfläche zu sein braucht. Damit läßt sich angeben

$$\begin{aligned} y^{\bar{k}} &= y^{\bar{k}}(X^{\bar{k}}) \\ \text{bzw.} \quad X^{\bar{k}} &= X^{\bar{k}}(y^{\bar{k}}) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Die Basisvektoren des deformierten Schalenkontinuums ergeben sich mit dem zugehörigen Ortsvektor

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{P}(y^{\bar{k}}) \quad (3.1.2) \\ \text{zu} \quad \underline{G}_{\bar{k}} &= \frac{\partial \underline{P}}{\partial y^{\bar{k}}} = \underline{P}_{,\bar{k}} \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

Nun lassen sich im deformierten Zustand genau die dualen Formeln zum undeformierten Zustand, in Kapitel 2.3 zusammengestellt, angeben; sie sind jedoch nicht von Interesse, da, wie in den weiteren Kapiteln ausgeführt, alle Zustandsgrößen auf den unverformten, also bekannten Zustand bezogen werden sollen. Aus diesem Grunde werden neue Basisvektoren - in der Literatur als Greensche Basisvektoren bezeichnet - bezogen auf die Koordinaten des undeformierten Zustandes folgendermaßen eingeführt; es sei

$$\underline{P} = \underline{P}(X^{\bar{k}}) \quad (3.1.4)$$

$$\underline{C}_{\bar{k}} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X^{\bar{k}}} = \underline{P}_{,\bar{k}} \quad (3.1.5)$$

und demnach

$$\underline{g}_{\bar{k}} = \rho_{j\bar{k}} \frac{\partial X^{\bar{k}}}{\partial y^{\bar{j}}} = \underline{C}_{\bar{k}} \cdot \underline{A}^{\bar{k}}_{\cdot \bar{r}} \quad (3.1.6a)$$

bzw. 
$$\underline{C}_{\bar{k}} = \underline{A}^{\bar{k}}_{\cdot \bar{r}} \underline{g}_{\bar{r}} \quad (3.1.6b)$$

d. h. in Analogie zu (2.2.9) läßt sich  $\underline{C}_{\bar{k}}$  als der Basisvektor im undeformierten Zustand deuten, der durch die Deformation (3.1.1) in  $\underline{g}_{\bar{k}}$  übergeht. Wird ein mitgeführtes Koordinatensystem, sog. konvektive Koordinaten, eingeführt, so gilt

$$\underline{A}^{\bar{k}}_{\cdot \bar{r}} = \underline{d}^{\bar{k}}_{\bar{r}} \quad \underline{A}^{\bar{k}}_{\cdot \bar{r}} = \underline{d}^{\bar{k}}_{\bar{r}} \quad (3.1.7)$$

demnach

$$\underline{g}_{\bar{r}} = \underline{C}_{\bar{k}} \underline{d}^{\bar{k}}_{\bar{r}} \quad \underline{C}_{\bar{k}} = \underline{g}_{\bar{r}} \underline{d}^{\bar{k}}_{\bar{r}} \quad (3.1.8)$$

d. h. im Falle konvektiver Koordinaten sind die  $\underline{C}_{\bar{k}}$  als Basisvektoren im deformierten Schalenraum zu deuten.

Der kontravariante Basisvektor  $\underline{C}^{-1\bar{i}}$  ist definiert

$$\underline{C}_{\bar{k}} \underline{C}^{-1\bar{i}} = \underline{d}^{\bar{i}}_{\bar{k}} \quad (3.1.9)$$

wobei zu beachten ist, daß

$$\underline{C}^{-1\bar{i}} \neq \underline{C}_{\bar{k}} \underline{G}^{\bar{k}\bar{i}}$$

### 3.2 Kinematische Beziehung

Der Übergang vom unverformten in den verformten Zustand läßt sich nicht nur vermittels (3.1.1) darstellen, sondern auch mit Hilfe des Verschiebungsvektors, wie in Abb. 1 dargestellt. Es interessiert der Verschiebungsvektor bezogen auf den undeformierten Zustand

$$\underline{U} = \underline{U}(\chi^{\bar{k}}) = \underline{U}^{\bar{k}} \underline{G}_{\bar{k}} = \underline{U}_{\bar{k}} \underline{G}^{\bar{k}} \quad (3.2.1)$$

womit sich der Ortsvektor  $\underline{p} = \underline{p}(\chi^{\bar{k}})$  ergibt

$$\underline{p}(\chi^{\bar{k}}) = \underline{R}(\chi^{\bar{k}}) + \underline{U}(\chi^{\bar{k}}) \quad (3.2.2)$$

und die Greenschen Basisvektoren mit (3.1.5) und (2.3.5)

$$\underline{p}_{j\bar{k}} = \underline{C}_{\bar{k}} = (\underline{R} + \underline{U})_{,\bar{k}} = \underline{G}_{\bar{k}} + \underline{U}^{\bar{M}}_{|\bar{k}} \underline{G}_{\bar{M}}$$

bzw. mit der Definition für die Verschiebungsgradienten

$$D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} = \sigma^{\bar{M}} + \mathcal{L} \bar{M} | \bar{r} \quad (3.2.3)$$

$$\underline{C}_{\bar{K}} = D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} \underline{G}_{\bar{M}} \quad (3.2.4)$$

Der Vergleich mit (3.1.6 b) zeigt, daß sich zwischen den Verschiebungsgradienten und den Deformationsgradienten der Zusammenhang angeben läßt, wobei noch (2.2.11) berücksichtigt wird

$$A \cdot \bar{r}^{\bar{K}} = D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} g^{\bar{K}}_{\bar{M}} \quad (3.2.5)$$

bzw. aufgelöst für den Euklidischen Schifter

$$g^{\bar{K}}_{\bar{M}} = A \cdot \bar{r}^{\bar{K}} \bar{D} \cdot \bar{r}^{\bar{M}} \quad (3.2.6)$$

wobei

$$D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} \bar{D} \cdot \bar{r}^{\bar{N}} = \sigma^{\bar{M}}_{\bar{N}} \quad (3.2.7)$$

Es sei vermerkt, daß selbst bei konvektiven Koordinaten, für die  $A \cdot \bar{r}^{\bar{K}} = \delta^{\bar{K}}_{\bar{K}}$  gilt, die kovariante Ableitung der Deformationsgradienten nicht Null ist, sondern mit (3.2.5) sich ermittelt zu

$$A \cdot \bar{r}^{\bar{K}} | \bar{N} = \sigma^{\bar{K}} | \bar{N} = g^{\bar{K}}_{\bar{M}} D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} | \bar{N} \quad (3.2.8)$$

Nun lassen sich auch die Christoffelsymbole  $\bar{\Gamma}^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}}$  bezogen auf die Basis  $\underline{C}_{\bar{M}}$  in Abhängigkeit von den Christoffelsymbolen des undeformierten Schalenraums angeben. Es sei

$$\bar{\Gamma}^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} = \underline{C}_{\bar{M},\bar{N}} \bar{C}^{-1 \bar{L}} \quad (3.2.9)$$

mit (3.2.4), (3.2.7) und unter Beachtung von

$$D \cdot \bar{r}^{\bar{J}}_{,\bar{N}} = D \cdot \bar{r}^{\bar{J}} | \bar{N} + \Gamma^{\bar{J}}_{\bar{M}\bar{N}} D \cdot \bar{r}^{\bar{M}} - \Gamma^{\bar{J}}_{\bar{N}\bar{I}} D \cdot \bar{r}^{\bar{I}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} &= \Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} + D \cdot \bar{r}^{\bar{J}} | \bar{N} \bar{D} \cdot \bar{r}^{\bar{J}} \\ &= \Gamma^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{N}} + \Delta \bar{L}_{\bar{M}\bar{N}} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

wobei mit

$$\Delta \bar{L}_{\bar{M}\bar{N}} = D \cdot \bar{r}^{\bar{J}} | \bar{N} \bar{D} \cdot \bar{r}^{\bar{J}} \quad (3.2.11)$$

die sog. Differenzenchristoffelsymbole definiert sind.

Der Lagrangesche Verzerrungstensor - häufig auch nach Green benannt - ergibt sich aus der Differenz des Quadrates eines Linienelementes vor und nach der Deformation

$$ds^2 = d\underline{s} d\underline{s} = \underline{G}_{\bar{K}} \underline{G}_{\bar{L}} dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}} = G_{\bar{K}\bar{L}} dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}}$$

$$ds^2 = d\underline{\sigma} d\underline{\sigma} = \underline{g}_{\bar{K}} \underline{g}_{\bar{L}} dy^{\bar{K}} dy^{\bar{L}} = \underline{C}_{\bar{K}} \underline{C}_{\bar{L}} dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}} = C_{\bar{K}\bar{L}} dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}}$$

$$ds^2 - d\underline{s}^2 = (C_{\bar{K}\bar{L}} - G_{\bar{K}\bar{L}}) dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}} = 2E_{\bar{K}\bar{L}} dX^{\bar{K}} dX^{\bar{L}}$$

d. h.

$$2E_{\bar{K}\bar{L}} = C_{\bar{K}\bar{L}} - G_{\bar{K}\bar{L}} \quad (3.2.12)$$

und läßt sich in Abhängigkeit der Verschiebungsgradienten mit (3. 2. 4) angeben

$$2E_{\bar{K}\bar{L}} = D_{\bar{K}}^{\bar{M}} D_{\bar{M}\bar{L}} - G_{\bar{K}\bar{L}} = (D_{\bar{K}}^{\bar{M}} D_{\bar{L}}^{\bar{N}} - \delta_{\bar{K}}^{\bar{M}} \delta_{\bar{L}}^{\bar{N}}) G_{\bar{M}\bar{N}} \quad (3.2.13)$$

In der Literatur wird  $C_{\bar{K}\bar{L}} = D_{\bar{K}}^{\bar{M}} D_{\bar{M}\bar{L}}$  Cauchyscher Verzerrungstensor genannt.

Ziel dieser Arbeit ist jedoch die Verformung aufzuspalten in einen Rotations- und reinen Verzerrungsanteil. Deshalb wird ein u. a. von Truesdell, Toupin [7] angeführtes Lemma - der polare Zerlegungssatz - benutzt:

Jede Verformung läßt sich darstellen als eine Rotation, Parallelverschiebung und Verzerrung.

Wird der Vektor  $d\underline{x}$  in P - siehe Abb. 2 - betrachtet, so läßt sich der deformierte Vektor  $d\underline{y}$  darstellen als

$$d\underline{y}^{\bar{K}} = \underline{g}_{\bar{L}}^{\bar{K}} R_{\bar{L}}^{\bar{M}} \underline{C}_{\bar{M}}^{\bar{K}} dX^{\bar{K}} \quad (3.2.14)$$

Darin bedeutet

$$dX_{(V)}^{\bar{M}} = \underline{C}_{\bar{K}}^{\bar{M}} dX^{\bar{K}}$$

der verzerrte Vektor, der allerdings nur für den Fall, daß  $dX^{\bar{K}}$  entlang der Hauptachsen der Verzerrung gewählt wird, keine zusätzliche Rotation beinhaltet,

weiterhin

$$dX_{(R)}^{\bar{L}} = R_{\bar{M}}^{\bar{L}} dX_{(V)}^{\bar{M}}$$

der rotierte Vektor



und 
$$dy^{\bar{k}} = g^{\bar{k}}_{\bar{l}} dX^{\bar{l}}_{(R)}$$

der verschobene Vektor.

Der Rotationstensor  $R^{\bar{L}}_{\bar{M}}$  folgt aus den Rodrigueschen Formeln, die Hamel [1] auf Seite 103 angibt. Mit der von Hamel benutzten Bezeichnungsweise geht der um einen endlichen Winkel rotierte Vektor  $\underline{a}$  in den Vektor  $\underline{r}$  über

$$\underline{r} = \underline{a} \cos \vartheta + (\varrho \times \underline{a}) \sin \vartheta + \varrho(\varrho \cdot \underline{a})(1 - \cos \vartheta) \quad (3.2.15)$$

wobei der Verdrehungsvektor  $\vartheta = \vartheta \underline{\eta}$  (3.2.16) in Richtung des Einheitsvektors  $\underline{\eta}$  zeigt und den Betrag

$$\vartheta^2 = \underline{\vartheta} \cdot \underline{\vartheta} \quad (3.2.17)$$

hat.

Die Umschreibung auf die in dieser Arbeit benutzten Notation ergibt

$$\begin{aligned} \underline{r} &= r^{\bar{i}} \underline{G}_{\bar{i}} = R^{\bar{L}}_{\bar{M}} R^{\bar{M}} \underline{G}_{\bar{L}} \\ \underline{a} &= R^{\bar{J}} \underline{G}_{\bar{J}} \\ \underline{\varrho} &= \eta^{\bar{i}} \underline{G}_{\bar{i}} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

so daß mit (2.3.36)

$$\underline{\varrho} \times \underline{a} = \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \eta^{\bar{i}} R^{\bar{j}} \underline{G}_{\bar{j}} R^{\bar{k}}$$

und

$$\varrho(\varrho \cdot \underline{a}) = \eta^{\bar{i}} \eta^{\bar{j}} R^{\bar{j}} \underline{G}_{\bar{j}} \underline{G}_{\bar{i}}$$

$$\underline{r} = R^{\bar{L}}_{\bar{M}} R^{\bar{M}} \underline{G}_{\bar{L}}$$

$$= R^{\bar{M}} \cos \vartheta \underline{G}_{\bar{M}} + \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \eta^{\bar{i}} R^{\bar{j}} \sin \vartheta \underline{G}_{\bar{M}} + \eta^{\bar{M}} \eta^{\bar{J}} R^{\bar{J}} (1 - \cos \vartheta) \underline{G}_{\bar{M}}$$

bzw. nach Überschieben mit  $\underline{G}^{\bar{L}}$

$$R^{\bar{L}}_{\bar{M}} R^{\bar{M}} = \left[ \delta^{\bar{L}}_{\bar{M}} \cos \vartheta + \varepsilon_{\bar{i}\bar{M}\bar{L}} \eta^{\bar{i}} \sin \vartheta + \eta^{\bar{L}} \eta^{\bar{M}} (1 - \cos \vartheta) \right] R^{\bar{M}}$$

und mit (3.2.16)

$$\underline{\vartheta} = \vartheta \underline{\eta} = \vartheta \eta^{\bar{i}} \underline{G}_{\bar{i}} = \vartheta^{\bar{i}} \underline{G}_{\bar{i}} \quad (3.2.19)$$

so daß

$$\vartheta^{\bar{i}} = \vartheta \eta^{\bar{i}}$$

und demnach

$$R^{\bar{L}}_{\bar{M}} = \delta^{\bar{L}}_{\bar{M}} \cos \vartheta + \frac{\vartheta^{\bar{L}} \vartheta_{\bar{M}}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \frac{\vartheta^{\bar{i}}}{\vartheta} \varepsilon_{\bar{i}\bar{M}\bar{L}} \sin \vartheta$$

bzw.

$$R^{\bar{L}}_{\bar{M}} = \delta^{\bar{L}}_{\bar{M}} \cos \vartheta + \frac{\vartheta^{\bar{L}} \vartheta_{\bar{M}}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \varepsilon^{\bar{L}}_{\bar{M}\bar{i}} \vartheta^{\bar{i}} \quad (3.2.20)$$

Der Rotationstensor ist orthogonal, d. h.

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{L} &= R \cdot \vec{L} \\ \text{bzw.} \quad R \cdot \vec{L} R \cdot \vec{M} &= R \cdot \vec{M} R \cdot \vec{L} = \mathcal{D}^{\vec{M}} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Die Form des Rotationstensors (3.2.20) stimmt mit der von Simmonds, Danielson [61] angegebenen überein, wenn berücksichtigt wird, daß diese Autoren für den Rotationsvektor im Gegensatz zu (3.2.19)  $\underline{\phi} = \sin \theta \underline{n}$  gesetzt haben.

Für den irrationalen Ausdruck  $C \frac{1}{2} \frac{\vec{M}}{\vec{K}}$  wird abkürzend eingeführt

$$F \cdot \vec{K} = C \frac{1}{2} \vec{M} \quad (3.2.22)$$

Dieser Verzerrungstensor ist symmetrisch und ermöglicht es, die unsymmetrischen Verschiebungsgradienten (3.2.3) aufzuspalten in eine Matrizenmultiplikation. Es folgt nämlich aus (2.2.9), (3.2.5), (3.2.14) und (3.2.22)

$$\begin{aligned} D \cdot \vec{K} &= R \cdot \vec{M} F \cdot \vec{K} \\ \text{bzw. mit (3.2.21)} \quad F \cdot \vec{K} &= D \cdot \vec{L} R \cdot \vec{M} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

und mit (3.2.4) für die Greenschen Basisvektoren

$$C \cdot \vec{K} = R \cdot \vec{M} F \cdot \vec{K} G \cdot \vec{L} \quad (3.2.24)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Lagrangeschen Verzerrungstensor (3.2.13) und dem mit (3.2.22) definierten ist

$$\begin{aligned} 2E_{\vec{R}\vec{L}} &= \left( R \cdot \vec{M} F \cdot \vec{L} R \cdot \vec{N} F \cdot \vec{L} - \mathcal{D}^{\vec{M}} \mathcal{D}^{\vec{N}} \right) G \cdot \vec{M} \vec{N} \\ &= \left( F \cdot \vec{K} F \cdot \vec{L} - \mathcal{D}^{\vec{M}} \mathcal{D}^{\vec{N}} \right) G \cdot \vec{M} \vec{N} \end{aligned} \quad (3.2.25a)$$

$$\text{bzw.} \quad 2E \cdot \vec{L} = F \cdot \vec{K} F \cdot \vec{L} - \mathcal{D}^{\vec{K}} \quad (3.2.25b)$$

Wird nun angesetzt

$$F \cdot \vec{K} = \mathcal{D}^{\vec{K}} + E^* \cdot \vec{K} \quad (3.2.26)$$

- wobei  $E^* \cdot \vec{K}$  in der Literatur häufig Blocher'scher Verzerrungstensor [23] genannt wird - so läßt sich angeben für den Lagrangeschen Verzerrungstensor

$$2E_{\vec{R}\vec{L}} = 2E^* \cdot \vec{K} + E^* \cdot \vec{M} E^* \cdot \vec{M} \vec{L} = C \cdot \vec{R} \vec{L} - G \cdot \vec{R} \vec{L} \quad (3.2.27)$$

und den Verschiebungsgradienten

$$D \cdot \vec{K} = R \cdot \vec{M} \left( \mathcal{D}^{\vec{M}} + E^* \cdot \vec{M} \right) \quad (3.2.28)$$

Gleichung (3.2.27) läßt sich nicht direkt nach  $E_{\bar{M}\bar{K}}^*$  auflösen, zeigt jedoch bei der Annahme kleiner Verzerrungen, daß

$$\bar{E}_{\bar{K}\bar{L}} \approx \bar{E}_{\bar{K}\bar{L}}^* \quad (3.2.29)$$

bzw. mit (3.2.26)

$$\bar{F}_{\bar{L}}^{\bar{K}} \approx \sigma_{\bar{L}}^{\bar{K}} + \bar{E}_{\bar{L}}^{\bar{K}} \quad (3.2.30)$$

### 3.3 Statik und Materialgesetz

#### 3.3.1 Gleichgewichtsbedingungen

Ausgehend vom Kräfte- und Momentensatz der Mechanik unter der Annahme, daß keine Momentenspannungen und eingepprägten Momente existieren, werden zunächst die Gleichgewichtsbedingungen in Eulerscher Form abgeleitet

$$\int_V \left[ \frac{1}{\bar{g}} (\bar{f}_g \underline{\bar{t}}^{\bar{k}})_{,\bar{k}} + S \underline{\bar{k}} \right] dv = \sigma \quad \text{Kräftesatz} \quad (3.3.11)$$

$$\int_V \left[ \bar{g}_{\bar{k}} \times \underline{\bar{t}}^{\bar{k}} + \rho \times \left\{ \frac{1}{\bar{g}} (\bar{f}_g \underline{\bar{t}}^{\bar{k}})_{,\bar{k}} + S \underline{\bar{k}} \right\} \right] dv = \sigma \quad \text{Momentensatz} \quad (3.3.12)$$

wobei sich alle Größen und Integrationen auf den verformten Zustand beziehen, d. h.

$$g = \det(g_{\bar{i}\bar{k}})$$

$$g_{\bar{k}} = \rho_{,\bar{k}}$$

mit dem Spannungsvektor

$$\underline{\bar{t}}^{\bar{k}} = \bar{t}^{\bar{k}\bar{e}} \bar{g}_{\bar{e}} \quad (3.3.13)$$

wobei  $\bar{t}^{\bar{k}\bar{e}}$  der Eulersche Spannungstensor ist

und der eingepprägten Kraft

$$\underline{\bar{k}} = k^{\bar{e}} \bar{g}_{\bar{e}} \quad (3.3.14)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{\bar{g}} (\bar{f}_g)_{,\bar{k}} = \delta_{\bar{r}\bar{k}}^{\bar{r}} \bar{f}_{\bar{r}}$$

$$g_{\bar{k}\bar{r}} = \delta_{\bar{r}\bar{k}}^{\bar{r}} g_{\bar{r}} \quad (3.3.15)$$

$$(g_{\bar{k}} \times g_{\bar{e}}) g_{\bar{m}} = \epsilon_{\bar{k}\bar{e}\bar{m}}$$

wobei  $\bar{\gamma}_{\bar{r}\bar{k}}^{\bar{n}}$  die Christoffelsymbole, bezogen auf die verformte Metrik darstellen, lassen sich die Integranden der Gleichungen (3.3.1.1) und (3.3.1.2) umschreiben in die bekannte Form der Gleichgewichts- und Randbedingungen

$$\bar{t}^{\bar{j}\bar{k}} \bar{t}_{\bar{j}} + S \bar{k}^{\bar{r}} = 0 \quad (3.3.16)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \bar{t}^{\bar{j}\bar{k}} &= 0 \\ \bar{t}^{\bar{j}\bar{k}} &= \bar{t}^{\bar{k}\bar{j}} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Der Eulersche Spannungstensor  $\underline{t}^{\bar{j}\bar{k}}$  ist bezogen auf die deformierte Fläche und gemäß (3.3.4.3) eine Funktion von  $y^{\bar{k}}$ . Da einerseits die Absicht dieser Arbeit ist, alles auf den bekannten undeformierten Zustand zu beziehen, andererseits bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten das Problem der zugeordneten - auch konjugierten - Größen zu behandeln ist, wird ein neuer Spannungsvektor und damit auch Spannungstensor bezogen auf die unverformte Fläche eingeführt mit

$$\underline{t}^{\bar{k}} d\varphi_{\bar{k}} = \underline{I}^{\bar{K}} dF_{\bar{K}} \quad (3.3.1.8)$$

wobei  $d\varphi_{\bar{k}}$  und  $dF_{\bar{K}}$  die Komponenten der Flächenvektoren  $d\underline{\varphi}$  und  $d\underline{F}$  im verformten und unverformten Zustand sind. Analog (2.3.40 a) läßt sich für die Flächenelemente angeben

$$dF_{\bar{K}} = \varepsilon_{\bar{R}\bar{L}\bar{M}} dX^{\bar{L}} dX^{\bar{M}} \quad ; \quad d\varphi_{\bar{k}} = \varepsilon_{\bar{R}\bar{L}\bar{M}} dy^{\bar{L}} dy^{\bar{M}} \quad (3.3.1.9)$$

mit (3.1.6 a) und (3.2.4)

$$\varepsilon_{\bar{R}\bar{L}\bar{M}} = (g_{\bar{R}} \times g_{\bar{L}}) g_{\bar{M}} = \det(D^{\bar{I}\bar{K}}) \varepsilon_{\bar{R}\bar{L}\bar{M}} A^{\bar{K}}_{\bar{R}} A^{\bar{L}}_{\bar{L}} A^{\bar{M}}_{\bar{M}} \quad (3.3.1.10)$$

wobei vom Entwicklungssatz für Determinanten Gebrauch gemacht wurde

$$\det(D^{\bar{I}\bar{K}}) \varepsilon_{\bar{R}\bar{L}\bar{M}} = \varepsilon_{\bar{I}\bar{J}\bar{R}} D^{\bar{I}\bar{K}} D^{\bar{J}\bar{L}} D^{\bar{K}\bar{M}} \quad (3.3.1.11)$$

womit sich (3.3.1.9 b) umschreiben läßt

$$d\varphi_{\bar{k}} = \det(D^{\bar{I}\bar{K}}) dF_{\bar{K}} A^{\bar{K}}_{\bar{k}} \quad (3.3.1.12)$$

In der Literatur wird  $\det(D^{\bar{I}\bar{K}})$  als Jakobische Determinante der Transformation  $\underline{z}^{\bar{i}} = \underline{z}^{\bar{i}}(\underline{Z}^{\bar{i}})$  bezeichnet und läßt sich auch angeben zu

$$J = \det(D^{\bar{I}\bar{K}}) = \sqrt{\det(C^{\bar{I}\bar{K}})} = \sqrt{\frac{g}{G}} \det(A^{\bar{K}}_{\bar{R}}) \quad (3.3.1.13)$$

Mit (3.3.1.12) wird (3.3.1.8)

$$\underline{I}^{\bar{K}} = J A^{\bar{K}}_{\bar{k}} \underline{t}^{\bar{k}} \quad (3.3.1.14)$$

Unter Beachtung von (3.3.1.13) läßt sich (3.3.1.1) angeben

$$\frac{1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G} \underline{I}^{\bar{K}})_{,\bar{K}} + S J \underline{k} = \sigma \quad (3.3.1.15)$$

wobei nach dem Massenerhaltungssatz

$$\int_V S_0 dV = \int_V S dv$$

mit  $dv = J dV$

$$S_0 = S J$$

$$(3.3.1.16)$$

$$(3.3.1.17)$$

folgt.

Dem Spannungsvektor  $\underline{T}^{\bar{K}}$  läßt sich ein Spannungstensor zuordnen, wobei sich je nach Basis ergibt

$$\underline{T}^{\bar{K}} = L^{\bar{K}\bar{I}} g_{\bar{I}} \quad (3.3.1.18)$$

$$\underline{T}^{\bar{K}} = K^{\bar{K}\bar{L}} \underline{e}_{\bar{L}} \quad (3.3.1.19)$$

$L^{\bar{K}\bar{L}}$  ist der nicht symmetrische Spannungstensor nach Lagrange - auch Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor 1. Art - und  $K^{\bar{K}\bar{L}}$  der symmetrische Kirchhoffsche Spannungstensor - auch Piola-Kirchhoffsche Tensor 2. Art bzw. Kappusscher Spannungstensor.

Wird der Lagrangesche Spannungstensor auf die unverformte Basis geschiftet, also

$$L^{\bar{K}\bar{L}} = L^{\bar{K}\bar{e}} g_{\bar{e}}^{\bar{L}} \quad (3.3.1.20)$$

so läßt sich (3.3.1.18) auch schreiben

$$\underline{T}^{\bar{K}} = L^{\bar{K}\bar{L}} \underline{G}_{\bar{L}} \quad (3.3.1.21)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (3.3.1.15) wird somit

entweder

oder

$$\text{mit } L^{\bar{K}\bar{L}} = K^{\bar{K}\bar{M}} D_{\bar{M}}^{\bar{L}} \quad (3.3.1.22)$$

$$L^{\bar{K}\bar{L}}|_{\bar{K}} + S_0 K^{\bar{L}} = 0 \quad (3.3.1.23a) \quad \left( K^{\bar{K}\bar{M}} D_{\bar{M}}^{\bar{L}} \right)|_{\bar{K}} + S_0 K^{\bar{L}} = 0 \quad (3.3.1.23b)$$

wobei

$$K^{\bar{L}} = K^{\bar{e}} g_{\bar{e}}^{\bar{L}}$$

während die Symmetriebedingung (3.3.1.7 b) unter Beachtung von

$$L^{\bar{K}\bar{e}} = J A_{\bar{K}}^{\bar{e}} t^{\bar{K}\bar{e}} \quad (3.3.1.24)$$

$$K^{\bar{K}\bar{L}} = L^{\bar{K}\bar{e}} A_{\bar{e}}^{\bar{L}} = J A_{\bar{K}}^{\bar{e}} A_{\bar{e}}^{\bar{L}} t^{\bar{K}\bar{e}} \quad (3.3.1.25)$$

sich angeben läßt zu

$$\underline{L}^{\bar{K}\bar{S}} D_{\bar{K}}^{\bar{I}} = \underline{L}^{\bar{K}\bar{I}} D_{\bar{K}}^{\bar{S}} \quad (3.3.1.26a) \quad K^{\bar{K}\bar{L}} = K^{\bar{L}\bar{K}} \quad (3.3.1.26b)$$

oder  $\underline{L}^{\bar{K}\bar{M}} A_{\bar{K}}^{\bar{F}} = \underline{L}^{\bar{K}\bar{F}} A_{\bar{K}}^{\bar{M}}$

Die statischen Randbedingungen sind

$$L^{\bar{k}\bar{j}} N_{\bar{k}} - \hat{T}^{\bar{j}} = 0 \quad (3.3.1.27a) \quad K^{\bar{k}\bar{l}} D_{\bar{l}} \bar{j} N_{\bar{k}} - \hat{T}^{\bar{j}} = 0 \quad (3.3.1.27b)$$

wobei  $N_{\bar{k}}$  die Komponenten des Normaleneinheitsvektors des Oberflächenteils sind, auf dem  $\hat{T}^{\bar{j}}$  vorgeschrieben ist.

### 3.3.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Materialgesetz

Wird der Einfachheit halber angenommen, daß keine eingepprägten Kräfte existieren, so läßt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen angeben

$$\delta \Pi^{(a)} = - \delta \Pi^{(i)}$$

$$\int_F \hat{T}^{\bar{j}} \delta u_{\bar{j}} dF = \int_V L^{\bar{k}\bar{j}} \delta u_{\bar{j}|\bar{k}} dV \quad (3.3.2.1)$$

denn mit

$$\left( L^{\bar{k}\bar{j}} \delta u_{\bar{j}} \right) |_{\bar{k}} = L^{\bar{k}\bar{j}} |_{\bar{k}} \delta u_{\bar{j}} + L^{\bar{k}\bar{j}} \delta u_{\bar{j}|\bar{k}}$$

$$\int_F \hat{T}^{\bar{j}} \delta u_{\bar{j}} dF = \int_V \left( L^{\bar{k}\bar{j}} \delta u_{\bar{j}} \right) |_{\bar{k}} dV - \int_V L^{\bar{k}\bar{j}} |_{\bar{k}} \delta u_{\bar{j}} dV$$

und dem Gaußschen Satz

$$\int_V \left( L^{\bar{k}\bar{j}} \delta u_{\bar{j}} \right) |_{\bar{k}} dV = \int_F L^{\bar{k}\bar{j}} N_{\bar{k}} \delta u_{\bar{j}} dF$$

wird (3.3.2.1)

$$\int_V L^{\bar{k}\bar{j}} |_{\bar{k}} \delta u_{\bar{j}} dV + \int_F \left[ \hat{T}^{\bar{j}} - L^{\bar{k}\bar{j}} N_{\bar{k}} \right] \delta u_{\bar{j}} dF = 0$$

d. h. für beliebige virtuelle Verschiebungen muß

$$L^{\bar{k}\bar{j}} |_{\bar{k}} = 0 \quad \text{im Innern}$$

$$L^{\bar{k}\bar{j}} N_{\bar{k}} = \hat{T}^{\bar{j}} \quad \text{am Rand}$$

Diese Gleichungen sind aber nichts anderes als die Gleichgewichtsbedingungen (3.3.1.23 a) und Randbedingungen (3.3.1.27 a).

Ausgehend von der Annahme, daß ein Körper bei Belastung und anschließender Entlastung seinen ursprünglichen Zustand wieder erreicht, kann mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für adiabatische Zustände geschlossen werden, daß sich die konstitutiven Gleichungen aus einer Energiefunktion - dem sogenannten inneren Potential - ableiten lassen müssen. Diese Betrachtungsweise wird Green zugeschrieben,

vgl. dazu Truesdell, Toupin [7] und Eringen [11]. Ein Werkstoff, der ein derartiges Verhalten zeigt, wird hyperelastisch genannt.

Demnach wird die Existenz eines inneren Potentials  $\Pi^{(i)}$  folgendermaßen vorausgesetzt

$$- \delta A^{(i)} = \delta \Pi^{(i)} = \delta \int_V \Pi^{*(i)} dV \quad (3.3.2.2)$$

Aus (3.3.2.1) folgen mit  $\Pi^{*(i)} = \Pi^{*(i)}(U_{\bar{J}|\bar{K}})$  (3.3.2.3)

$$- \delta A^{(i)} = \delta \Pi^{(i)} = \int_V L^{\bar{K}\bar{J}} \delta U_{\bar{J}|\bar{K}} dV = \int_V \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial U_{\bar{J}|\bar{K}}} \delta U_{\bar{J}|\bar{K}}$$

die konstitutiven Gleichungen

$$L^{\bar{K}\bar{J}} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial U_{\bar{J}|\bar{K}}} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial D_{\bar{J}\bar{K}}}$$

wobei (3.2.3) berücksichtigt wurde.

Größen, die in einem Zusammenhang der Art von Gleichung (3.3.2.4) stehen, sollen konjugierte Größen genannt werden. Daraus folgt eine für die Ableitung nichtlinearer Theorien wichtige Forderung:

Werden als kinematische Variable irgendwelche zulässigen Größen eingeführt, so ergeben sich die statischen Feldgrößen über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen automatisch als konjugierte Größen dazu.

Diese Forderung gilt streng genommen auch für die lineare Elastizitätstheorie, ist jedoch in diesem Fall bedeutungslos.

Wird das innere Potential als Funktion des Lagrangeschen Verzerrungstensors (3.2.8) angenommen, so ergibt sich

mit (3.3.1.22)

$$L^{\bar{K}\bar{L}} = K^{\bar{K}\bar{M}} D_{\bar{M}}^{\bar{L}}$$

und (3.3.1.26 b)

$$K^{\bar{K}\bar{M}} = K^{\bar{M}\bar{K}}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{(i)} &= \int_V L^{\bar{K}\bar{J}} \delta U_{\bar{J}|\bar{K}} dV = \int_V K^{\bar{K}\bar{M}} D_{\bar{M}}^{\bar{J}} \delta U_{\bar{J}|\bar{K}} dV \\ &= \int_V \frac{1}{2} K^{\bar{K}\bar{M}} (D_{\bar{M}}^{\bar{J}} \delta U_{\bar{K}}^{\bar{L}} + D_{\bar{K}}^{\bar{J}} \delta U_{\bar{M}}^{\bar{L}}) \delta U_{\bar{J}|\bar{K}} dV \end{aligned}$$

wobei aus (3.2.8) folgt

$$2 \frac{\partial E_{\bar{K}\bar{M}}}{\partial U_{\bar{J}|\bar{L}}} = D_{\bar{M}}^{\bar{J}} \delta U_{\bar{K}}^{\bar{L}} + D_{\bar{K}}^{\bar{J}} \delta U_{\bar{M}}^{\bar{L}}$$

d. h.

$$\delta \mathbb{T}^{(i)} = \int_V K^{\bar{\kappa}\bar{m}} \frac{\partial E_{\bar{\kappa}\bar{m}}}{\partial U_{\bar{j}}^{\bar{l}}} \delta U_{\bar{j}}^{\bar{l}} dV = \int_V K^{\bar{\kappa}\bar{m}} \delta E_{\bar{\kappa}\bar{m}} dV \quad (3.3.2.5)$$

und somit

$$K^{\bar{\kappa}\bar{m}} = \frac{\partial \mathbb{T}^{*(i)}}{\partial E_{\bar{\kappa}\bar{m}}} \quad (3.3.2.6)$$

Woraus folgt, daß die zum Lagrangeschen Verzerrungstensor konjugierte Größe der Kirchhoffsche Spannungstensor ist.

Damit verbleibt die Ermittlung der konjugierten Größe zu dem in Gleichung (3.2.22) definierten Verzerrungstensor  $F_{\bar{K}}^{\bar{M}}$  bzw. dem Biotschen Verzerrungstensor  $E_{\bar{K}}^{*\bar{M}}$  der Gleichung (3.2.26). Dazu wird in Anlehnung an Gleichung (3.3.2.4) und (3.3.2.6) ein neuer, symmetrischer Spannungstensor definiert mit

$$S^{\bar{\kappa}\bar{m}} = \frac{\partial \mathbb{T}^{*(i)}}{\partial F_{\bar{\kappa}\bar{m}}} = \frac{\partial \mathbb{T}^{*(i)}}{\partial E_{\bar{\kappa}\bar{m}}^{*}} \quad (3.3.2.7)$$

und demnach

$$\delta \mathbb{T}^{(i)} = \int_V S^{\bar{\kappa}\bar{m}} \delta F_{\bar{\kappa}\bar{m}} dV \quad (3.3.2.8)$$

Nun folgt aus Gleichung (3.2.25 a)

$$2 \delta E_{\bar{\kappa}\bar{l}} = \left( F_{\bar{l}}^{\bar{m}} \delta_{\bar{\kappa}}^{\bar{j}} + F_{\bar{\kappa}}^{\bar{m}} \delta_{\bar{l}}^{\bar{j}} \right) \delta F_{\bar{m}\bar{j}}$$

Wird dies in Gleichung (3.3.2.8) eingesetzt

$$\delta \mathbb{T}^{(i)} = \int_V K^{\bar{\kappa}\bar{l}} \frac{1}{2} \left( F_{\bar{l}}^{\bar{m}} \delta_{\bar{\kappa}}^{\bar{j}} + F_{\bar{\kappa}}^{\bar{m}} \delta_{\bar{l}}^{\bar{j}} \right) \delta F_{\bar{m}\bar{j}} dV$$

und von der Symmetriebedingung für den Kirchhoffschen Spannungstensor Gebrauch gemacht

$$\delta \mathbb{T}^{(i)} = \int_V K^{\bar{j}\bar{l}} F_{\bar{l}}^{\bar{m}} \delta F_{\bar{m}\bar{j}} dV \quad (3.3.2.9)$$

Der Vergleich von (3.3.2.8) mit (3.3.2.9) liefert

$$S^{\bar{j}\bar{m}} = S^{\bar{m}\bar{j}} = K^{\bar{j}\bar{l}} F_{\bar{l}}^{\bar{m}} = K^{\bar{j}\bar{l}} \left( \delta_{\bar{l}}^{\bar{m}} + E_{\bar{l}}^{*\bar{m}} \right) \quad (3.3.2.10)$$



Damit ergibt sich für den Spannungsvektor  $\underline{T}^{\bar{\kappa}}$  folgende Darstellungsform, wenn (3.2.23 a) und (3.3.1.22) berücksichtigt werden

$$\underline{T}^{\bar{\kappa}} = L^{\bar{\kappa}\bar{\ell}} \underline{g}_{\bar{\ell}} = L^{\bar{\kappa}\bar{\ell}} \underline{G}_{\bar{\ell}} = K^{\bar{\kappa}\bar{\ell}} \underline{C}_{\bar{\ell}} = S^{\bar{\kappa}\bar{\nu}} R^{\bar{\ell}}_{\bar{\nu}} \underline{G}_{\bar{\ell}} \quad (3.3.2.11)$$

und die Gleichgewichtsbedingung (3.3.1.23 a), ausgedrückt in dem neu definierten symmetrischen Spannungsvektor, lautet

$$\left( S^{\bar{\kappa}\bar{\nu}} R^{\bar{\ell}}_{\bar{\nu}} \right) \Big|_{\bar{\kappa}} = 0 \quad (3.3.2.12)$$

mit der Randbedingung

$$S^{\bar{\kappa}\bar{\nu}} R^{\bar{\ell}}_{\bar{\nu}} N_{\bar{\kappa}} = \hat{T}^{\bar{j}} \quad (3.3.2.13)$$

Demnach liegen jetzt die Feldgleichungen für die allgemeine Elastizitätstheorie fest und sind in folgender Tabelle nochmals zusammengestellt. Zusätzlich sei vermerkt, daß sich weitere konjugierte Formen der Ausgangsgleichungen bezogen auf den unverformten Zustand und duale Feldgleichungen angeben lassen, wenn der verformte Zustand als Referenzzustand gewählt wird, vgl. hierzu Mac Ve an [50].

kinematische Variable	$U_{j k}$ oder $D_{j k}$	$E_{k l}$	$F_{k l}$
kinematische Gleichungen	entfallen	$2E_{k l} = D_{i k} D_{i l} - G_{k l}$	$\bar{F}_{k l} = D_{i k} \bar{R}_{i l}$
statische Gleichungen im Innern	$L^{k j} /_{k} = 0$	$(K^{k j} D_{i k}) /_{k} = 0$	$(S^{k j} R_{i k}) /_{k} = 0$
statische Gleichungen auf dem Rand	$L^{k j} N_k = \hat{F}^j$	$K^{k j} D_{i k} N_k = \hat{F}^j$	$S^{k j} R_{i k} N_k = \hat{F}^j$
Symmetriebedingung	$L^{k j} D_{i k} = L^{k i} D_{i k}$	$K^{k j} = K^{j k}$	$S^{k j} = S^{j k}$
Werkstoffgesetz	$L^{k j} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial U_{j k}} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial D_{j k}}$	$K^{k j} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial E_{k j}}$	$S^{k j} = \frac{\partial \Pi^{*(i)}}{\partial F_{k j}}$
inneres Potential, bezogen auf das unverformte Volumen	$\Pi^{*(i)} = \Pi^{*(i)}(U_{j k})$	$\Pi^{*(i)} = \Pi^{*(i)}(E_{k j})$	$\Pi^{*(i)} = \Pi^{*(i)}(F_{k j})$

Tab. 1: Die Feldgleichungen der Elastizitätstheorie, bezogen auf den undeformierten Zustand

Zur Vervollständigung der Feldgleichungen muß noch das bezogene innere Potential in Abhängigkeit der kinematischen Variablen angegeben werden. Über die verschiedensten Darstellungsformen existiert eine Vielzahl von Veröffentlichungen, z.B. Truesdell, Toupin [7], Prager [9] und Eringen [11]. Hier sei die einfachste Form wiedergegeben, die für isotropes, homogenes Material unter Voraussetzung kleiner Verzerrungen gilt

$$\frac{\pi^{*(i)}}{(E_{\bar{\kappa}\bar{l}})} = \frac{1}{2} K \bar{i}\bar{j}\bar{\kappa}\bar{l} E_{\bar{i}\bar{j}} E_{\bar{\kappa}\bar{l}} \quad (3.3.2.14)$$

mit

$$K \bar{i}\bar{j}\bar{\kappa}\bar{l} = G \left( G \bar{i}\bar{\kappa} G \bar{j}\bar{l} + G \bar{i}\bar{l} G \bar{j}\bar{\kappa} + \frac{2\nu}{1-2\nu} G \bar{i}\bar{j} G \bar{\kappa}\bar{l} \right) \quad (3.3.2.15)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

wobei  $G$  = Schubmodul

$\nu$  = Poissonsche Querkontraktionszahl

$E$  = Elastizitätsmodul

Durch Substitution von (3.2.28) bzw. (3.2.13) in (3.3.2.14) läßt sich das bezogene innere Potential in Abhängigkeit von  $F_{\bar{\kappa}\bar{l}}$  bzw.  $D_{\bar{j}\bar{\kappa}}$  angeben. Allerdings wird bei Benutzung der Gleichung (3.2.13) von der Annahme kleiner Verzerrungen nicht konsequent Gebrauch gemacht, wie bereits in Abschnitt 3.2 ausgeführt wurde.

#### 4. Allgemeine Schalentheorie

Blum [56] und Wempner [55] zeigen, wie aus den allgemeinen Feldgleichungen der Elastizitätstheorie unter Zugrundelegung des Lagrange-schen Spannungstensors eine allgemeine Schalentheorie beliebig hoher Approximation gewonnen werden kann. Hier soll die von beiden Autoren benutzte Methode der 'höheren Momente' auf eine Schalentheorie angewendet werden, die mit dem Kirchhoffschen Spannungstensor arbeitet, da sich dadurch einfachere Deutungen für die Schnittgrößen und Vergleichsmöglichkeiten mit der speziellen Schalentheorie des nächsten Kapitels ergeben. Ausgangspunkt für eine Schalentheorie ist die Näherungsformel für die Verschiebungen bezogen auf das Koordinatensystem  $X^K$  der Schalenmittelfläche

$$\underline{U} = U^M \underline{A}_M = \sum_{n=0}^m U_n^M (X^3)^n \underline{A}_M \quad (4.1)$$

##### 4.1 Kinematische Beziehungen

Da die Gleichung (4.1) als grundlegende Approximationsmöglichkeit gelten soll, sind alle Tensorkomponenten, die bisher auf das allgemeine Raumkoordinatensystem  $X^{\bar{K}}$  bezogen waren, auf das Koordinatensystem der Schalenmittelfläche zuschiften bzw. deren Ableitungen zu transformieren. So werden die Verschiebungsgradienten der Gleichung (3.2.3) zu

$$D_{\cdot\bar{K}}^{\mathcal{N}} = S_{\bar{K}}^{\mathcal{N}} + U|_{\bar{K}}^{\mathcal{N}} \quad (4.1.1)$$

und  $D_{\cdot\bar{K}}^{\mathcal{N}}$  ein Raumtensor auf der Schalenmittelfläche, denn analog zu (2.3.34) gilt

$$D_{\cdot\bar{K}}^{\mathcal{N}} = D_{\cdot\bar{K}}^{\mathcal{N}} G_{\bar{N}}^{\bar{N}} A_{\cdot\bar{K}}^{\bar{N}} \quad (4.1.2)$$

womit sich mit (2.3.26) (4.1.1) beweisen läßt.

Da nun (2.3.15) und (4.1) gilt, folgt mit

$$U|_{\bar{K}}^{\mathcal{N}} = \begin{cases} U|_{\Delta}^{\mathcal{N}} = \sum_{n=0}^m U_n^{\mathcal{N}}|_{\Delta} (X^3)^n \\ U|_{\bar{3}}^{\mathcal{N}} = \sum_{n=0}^m n U_n^{\mathcal{N}} (X^3)^{n-1} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

$$D_{\cdot\bar{K}}^{\mathcal{N}} = \sum_{n=0}^m D_n^{\mathcal{N}}|_{\bar{K}} (X^3)^n \quad (4.1.4\alpha)$$

wobei

$$D_0^N \cdot K = \begin{cases} D_0^N \cdot \Delta = \sigma_\Delta^N + U_0^N |_\Delta \\ D_0^N \cdot 3 = \sigma_3^N + U_1^N \end{cases} \quad (4.1.4b)$$

$$D_1^N \cdot K = \begin{cases} D_1^N \cdot \Delta = \Gamma_{3\Delta}^N + U_1^N |_\Delta \\ D_1^N \cdot 3 = 2 U_2^N \end{cases} \quad (4.1.4c)$$

$$D_n^N \cdot K = \begin{cases} D_n^N \cdot \Delta = U_n^N |_\Delta \\ D_n^N \cdot 3 = (n+1) U_{n+1}^N \end{cases} \quad \text{für } n \geq 2 \quad (4.1.4d)$$

Wird (4.1.2) und (2.3.19) in die kinematische Gleichung (3.2.8) eingesetzt, so kann jetzt der Lagrangesche Verzerrungstensor des Schalenraumes, aber bezogen auf die Metrik der Schalenmittelfläche angegeben werden

$$2E_{\bar{R}\bar{L}} = D_K^M G_M^{\bar{M}} A_{\bar{R}}^K D_{M\bar{L}} G_{\bar{H}}^N A_{\bar{L}}^L - G_{\bar{R}}^M G_{\bar{L}}^N H_{MN}$$

bzw. unter Beachtung von (2.3.21)

$$2E_{\bar{R}\bar{L}} = (D_{\cdot K}^M D_{\bar{L}}^N - S_K^M S_L^N) A_{\bar{R}}^K A_{\bar{L}}^L H_{MN} \quad (4.1.5)$$

Mit (4.1.4 a) kann (4.1.5) als Reihe geschrieben werden

$$\begin{aligned} 2E_{\bar{R}\bar{L}} &= 2 \sum_{\epsilon=0}^{2m} E_{\bar{K}\bar{L}}^{\epsilon} A_{\bar{R}}^K A_{\bar{L}}^L (X^3)^\epsilon \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^m \sum_{\ell=0}^m D_{\cdot K}^M D_{\bar{L}}^N (X^3)^{n+\ell} - S_K^M S_{ML} \right\} A_{\bar{R}}^K A_{\bar{L}}^L \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

wobei  $E_{\bar{K}\bar{L}}^{\epsilon}$  einen Raumentensor auf der Schalenmittelfläche darstellt.

Gleichung (2.3.15) lautet

$$S_K^M = \sigma_K^M + X^3 \Gamma_{K3}^M$$

und wird auch als Reihe dargestellt

$$S_K^M = \sum_{n=0}^m S_n^M (X^3)^n \quad (4.1.7a)$$

wobei

$$S_0^M = \sigma_K^M \quad (4.1.7b)$$

$$S_1^M = \Gamma_{K3}^M \quad (4.1.7c)$$

$$S_n^M = 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad (4.1.7d)$$

Der Koeffizientenvergleich von (4.1.6) führt damit auf

$$2E_{\varepsilon\kappa L} = \sum_{n=0}^m \left\{ D_{\varepsilon n}^M \cdot D_{nML} - S_{\varepsilon n}^M S_{nML} \right\} \text{ für } \varepsilon = 0, 1, \dots, 2m \quad (4.1.8)$$

wobei (4.1.4) und (4.1.7) zu beachten sind, als auch gilt

$$D_{\varepsilon n}^M = S_{\varepsilon n}^M = 0 \quad \text{für } \varepsilon < n$$

Wird (4.1) nach dem linearen Glied abgebrochen, d.h. ein linearer Verschiebungsansatz angenommen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\Delta F} &= \left( E_{\Delta F}^0 + \chi^2 E_{\Delta F}^1 + (\chi^2)^2 E_{\Delta F}^2 \right) A_{\Delta}^{\Delta} A_{F}^F \\ E_{\Delta 3} &= E_{3\Delta} = \left( E_{\Delta 3}^0 + \chi^2 E_{\Delta 3}^1 \right) A_{\Delta}^{\Delta} \\ E_{33} &= E_{33}^0 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

und aus (4.1.8) unter Beachtung von (2.3.15) und

$$\begin{aligned} D_n^N &= 0 \quad \text{für } n > 1 \\ D_n^N &= 0 \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2E_{\Delta F} &= D_{\Delta}^M D_{MF} - H_{\Delta F} = U_{\Delta}^M |_F + U_{\Delta}^M |_{\Delta} + U_{\Delta}^M |_{\Delta} U_{MF}^M \\ 2E_{\Delta F} &= D_{\Delta}^M D_{MF} + D_{\Delta}^M D_{MF} - H_{\Delta F} \Gamma_{3F}^M - H_{MF} \Gamma_{3\Delta}^M \\ &= U_{\Delta}^M |_F + U_{\Delta}^M |_{\Delta} + U_{\Delta}^M |_F \Gamma_{3\Delta}^{\pi} + U_{\Delta}^M |_{\Delta} \Gamma_{3F}^{\pi} + U_{\Delta}^M |_F U_{MF}^M |_{\Delta} + U_{\Delta}^M |_{\Delta} U_{MF}^M |_F \\ 2E_{\Delta F} &= D_{\Delta}^M D_{MF} - \Gamma_{3\Delta}^K \Gamma_{3F}^K H_{\Delta F} = U_{\Delta}^M |_{\Delta} \Gamma_{3F}^{\pi} + U_{\Delta}^M |_F \Gamma_{3\Delta}^{\pi} + U_{\Delta}^M |_{\Delta} U_{MF}^M |_F \quad (4.1.10) \\ 2E_{\Delta 3} &= D_{\Delta}^J D_{J\Delta} = U_{\Delta}^J |_{\Delta} + U_{\Delta}^J |_{\Delta} + U_{\Delta}^J |_{\Delta} U_{\Delta}^N |_{\Delta} \\ 2E_{\Delta 3} &= D_{\Delta}^J D_{J\Delta} = U_{\Delta}^J |_{\Delta} + U_{\Delta}^J |_{\Delta} \Gamma_{3\Delta}^{\pi} + U_{\Delta}^J |_{\Delta} U_{\Delta}^N |_{\Delta} \\ 2E_{33} &= D_{\Delta}^J D_{J3} - H_{33} = 2U_{\Delta}^J |_{\Delta} + U_{\Delta}^J |_{\Delta} U_{\Delta}^N |_{\Delta} \end{aligned}$$

#### 4.2 Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen

In der allgemeinen Elastizitätstheorie ergeben sich die Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen aus der Tatsache, daß im Euklidischen Raum die Reihenfolge der kovarianten Ableitung keine Rolle spielt und demnach der Riemann-Christoffel-Tensor Null sein muß. Dieser Tensor hat 81 Komponenten, von denen aber nur 6 unabhängig sind. Aufgrund dieser Tatsache ergeben sich 6 Verträglichkeitsbedingungen.

Der Riemann-Christoffel Tensor bezogen auf die Basis  $\underline{C}_{\bar{K}}$  wird u. a. von Truesdell, Toupin [7] und Seugling [32] angegeben zu

$$\begin{aligned}
 R_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}\bar{L}}^{(\underline{C})} = & E_{\bar{I}\bar{J}}|\bar{K}\bar{L} + E_{\bar{K}\bar{L}}|\bar{I}\bar{J} - E_{\bar{I}\bar{K}}|\bar{J}\bar{L} - E_{\bar{J}\bar{L}}|\bar{I}\bar{K} + \\
 & + \bar{C}^{\bar{R}\bar{S}} \left\{ (E_{\bar{K}\bar{S}}|\bar{L} + E_{\bar{L}\bar{S}}|\bar{K} - E_{\bar{K}\bar{L}}|\bar{S}) (E_{\bar{I}\bar{R}}|\bar{J} + E_{\bar{J}\bar{R}}|\bar{I} - E_{\bar{I}\bar{J}}|\bar{R}) - \right. \\
 & \left. - (E_{\bar{K}\bar{S}}|\bar{I} + E_{\bar{I}\bar{S}}|\bar{K} - E_{\bar{K}\bar{I}}|\bar{S}) (E_{\bar{J}\bar{R}}|\bar{L} + E_{\bar{L}\bar{R}}|\bar{J} - E_{\bar{J}\bar{L}}|\bar{R}) \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.2.1}$$

Die 6 unabhängigen Komponenten dieses Tensors und damit auch die 6 Verträglichkeitsbedingungen ergeben sich, wenn die Indizes folgende Werte annehmen

Gleichung	$\bar{I}$	$\bar{J}$	$\bar{K}$	$\bar{L}$
1	1	2	1	2
2	3	1	1	2
3	3	2	2	1
4	1	3	1	3
5	2	3	2	3
6	1	3	2	3

Tab. 2: Verträglichkeitsbedingungen

Wird nun  $\bar{J} = \bar{L} = 3$  und  $\bar{I} = \bar{2}$ ,  $\bar{K} = \bar{1}$  gesetzt, d.h. Gleichungen 4, 5 und 6 obiger Tabelle benutzt, so folgt aus (4.2.1), daß ein in  $X^3$  quadratischer Term nach zweimaliger kovarianter Ableitung nach  $X^3$  konstant wird und sich demnach für  $X^3 = 0$  ein Zusammenhang

$$\underline{E}_{\Delta r} = \underline{E}_{\Delta r} \left( \underline{E}_{\Delta r}, \underline{E}_{\Delta r}, \underline{E}_{\Delta s} \right) \quad (4.2.2)$$

bzw. mit Gleichungen 2 und 3 obiger Tabelle ein Zusammenhang

$$\underline{E}_{\Delta s} = \underline{E}_{\Delta s} \left( \underline{E}_{\Delta s} \right) \quad (4.2.3)$$

angeben läßt.

Diese Vorgehensweise gilt für jeden beliebigen Approximationsansatz der Verschiebung (4.1), wie Chien [30] zeigt, wobei sich die Abhängigkeiten der  $\underline{E}_{\Delta r}$  für  $\epsilon > 2$  und  $\underline{E}_{\Delta s}$  für  $\epsilon > 1$  sukzessiv ergeben, indem wiederholt nach  $X^3$  differenziert und anschließend  $X^3 = 0$  gesetzt wird. Bei der Herleitung der Beziehungen (4.2.2) und (4.2.3) bereitet die Bestimmung von  $\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}}$  für  $X^3 = 0$  gewisse Schwierigkeiten, denn  $\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}}$  folgt nach (3.1.9) und (3.2.12) aus

$$\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}} C_{\bar{R} \bar{J}} = \underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}} \left( G_{\bar{R} \bar{J}} + 2 E_{\bar{R} \bar{J}} \right) = \delta_{\bar{J}}^{\bar{S}} \quad \text{für } X^3 = 0 \quad (4.2.4)$$

und ist somit abhängig von der Metrik des unverformten Zustandes und dem Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche. Wird  $(G_{\bar{R} \bar{J}} + 2 E_{\bar{R} \bar{J}})^{-1}$  für  $X^3 = 0$  in eine Reihe entwickelt und nach dem ersten Term abgebrochen, so ist

$$\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}} \left( X^3 = 0 \right) = \underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}} A_{\bar{R}}^{\bar{R}} A_{\bar{S}}^{\bar{S}} = \left( H^{\bar{R} \bar{S}} - 2 E_{\bar{R} \bar{S}} + \dots \right) A_{\bar{R}}^{\bar{R}} A_{\bar{S}}^{\bar{S}} \quad (4.2.5)$$

Da jedoch  $\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}}$  in (4.2.1) nur im Produkt mit Verzerrungsgrößen auftritt, kann approximativ bei Voraussetzung kleiner Verzerrungen gesetzt werden

$$\underline{C}^{-1 \bar{R} \bar{S}} \left( X^3 = 0 \right) \approx H^{\bar{R} \bar{S}} A_{\bar{R}}^{\bar{R}} A_{\bar{S}}^{\bar{S}} \quad (4.2.6)$$

Hier sollen nun die Verträglichkeitsbedingungen nicht für die allgemeine Approximation (4.1), sondern nur für den speziellen Fall eines linearen Verschiebungsansatzes und demnach den Verzerrungen (4.1.9) angegeben werden. Ferner wird ein Weg gewählt, der nicht über den Riemann-Christoffel-Tensor, sondern über die Differenzchristoffelsymbole (3.2.10) geht, um eine zweifache kovariante Ableitung zu vermeiden.

Ausgangspunkt dieser Herleitung ist (3.2.12)

$$2 E_{\bar{R} \bar{L}} = C_{\bar{R} \bar{L}} - G_{\bar{R} \bar{L}}$$



wobei unter Berücksichtigung von (2.3.21) und dem angenommenen linearen Verschiebungsansatz folgt

$$C_{\bar{K}\bar{L}} = \begin{cases} C_{\bar{\Delta}\bar{r}} = \left( C_{\underset{\circ}{\Delta}r} + X^3 C_{\underset{r}{\Delta}r} + (X^3)^2 C_{\underset{\Delta}{r}r} \right) A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{r}}^r \\ C_{\bar{\Delta}3} = \left( C_{\underset{\circ}{\Delta}3} + X^3 C_{\underset{r}{\Delta}3} \right) A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} \\ C_{33} = C_{\underset{\circ}{3}3} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

und demnach

$$2E_{\bar{K}\bar{L}} = \begin{cases} 2E_{\bar{\Delta}\bar{r}} = \left\{ \left( C_{\underset{\circ}{\Delta}r} - H_{\Delta r} \right) + X^3 \left( C_{\underset{r}{\Delta}r} - H_{\pi\Delta} \Gamma_{3r}^r - H_{\pi r} \Gamma_{3\Delta}^r \right) + \right. \\ \quad \left. + (X^3)^2 \left( C_{\underset{\Delta}{r}r} - \Gamma_{3\Delta}^r \Gamma_{3r}^r H_{\pi z} \right) \right\} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{r}}^r \\ 2E_{\bar{\Delta}3} = \left( C_{\underset{\circ}{\Delta}3} + X^3 C_{\underset{r}{\Delta}3} \right) A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} \\ 2E_{33} = C_{\underset{\circ}{3}3} - H_{33} = C_{\underset{\circ}{3}3} - 1 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Mit (2.3.12) läßt sich (4.2.8a) auch schreiben

$$2E_{\bar{\Delta}\bar{r}} = \left\{ \left( C_{\underset{\circ}{\Delta}r} - H_{\Delta r} \right) + X^3 \left( C_{\underset{r}{\Delta}r} + 2B_{\Delta r} \right) + (X^3)^2 \left( C_{\underset{\Delta}{r}r} - B_{\Delta}^r B_{\pi r} \right) \right\} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{r}}^r \quad (4.2.8a')$$

Die kovarianten Komponenten  $C_{\bar{K}\bar{L}}$  errechnen sich nicht nur vermittels der Verschiebungsgradienten gemäß (3.2.4), sondern auch nach (3.1.5) aus

$$\underline{C}_{\bar{K}} = \underline{\rho}_{\bar{K}} \bar{\rho}$$

wobei in Analogie zum undeformierten Zustand (2.3.3) angesetzt werden kann

$$\underline{\rho}_{\bar{K}}(X^3) = \underline{\rho}_{\bar{K}}(X^0) + \underline{C}_3 X^3 \quad ; \quad \underline{C}_3 \equiv \underline{C}_3 \quad (4.2.9)$$

Ausdrücklich sei vermerkt, daß  $\underline{C}_3$  keinen Normaleneinheitsvektor darstellt,

$$\text{d. h.} \quad \underline{C}_{\bar{\Delta}} = \frac{\partial}{\partial X^3} \left( \underline{\rho}_{\bar{\Delta}} + \underline{C}_3 \cdot X^3 \right) = \underline{C}_{\bar{\Delta}} + X^3 \underline{C}_{3,\bar{\Delta}} = \left( \underline{C}_{\bar{\Delta}} + X^3 \underline{C}_{3,\bar{\Delta}} \right) A_{\bar{\Delta}}^{\Delta}$$

und somit

$$C_{\bar{\Delta}\bar{r}} = \underline{C}_{\bar{\Delta}} \underline{C}_{\bar{r}} = \left\{ \underline{C}_{\bar{\Delta}} \underline{C}_{\bar{r}} + X^3 \left( \underline{C}_{\bar{\Delta}} \underline{C}_{3,\bar{r}} + \underline{C}_{\bar{r}} \underline{C}_{3,\bar{\Delta}} \right) + (X^3)^2 \underline{C}_{3,\bar{\Delta}} \underline{C}_{3,\bar{r}} \right\} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{r}}^r$$

$$C_{\bar{\Delta}3} = \underline{C}_{\bar{\Delta}} \underline{C}_3 = \left( \underline{C}_{\bar{\Delta}} \underline{C}_3 + X^3 \underline{C}_{3,\bar{\Delta}} \underline{C}_3 \right) A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} \quad (4.2.10)$$

$$C_{33} = \underline{C}_3 \underline{C}_3$$

Der Vergleich von (4.2.7), (4.2.8), (4.1.9) und (4.2.10) zeigt

$$C_{\overset{\circ}{0}\Delta r} = \underline{C}_{\overset{\circ}{0}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{0}r} = 2E_{\overset{\circ}{0}\Delta r} + H_{\Delta r}$$

$$C_{\overset{\circ}{1}\Delta r} = \underline{C}_{\overset{\circ}{0}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}r} + \underline{C}_{\overset{\circ}{0}r} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} = 2E_{\overset{\circ}{1}\Delta r} - 2B_{\Delta r}$$

$$C_{\overset{\circ}{2}\Delta r} = \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}r} = 2E_{\overset{\circ}{2}\Delta r} + B_{\mathbb{N}\Delta} B_{\overset{\circ}{r}}$$

$$C_{\overset{\circ}{0}\Delta 3} = \underline{C}_{\overset{\circ}{0}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}} = 2E_{\overset{\circ}{0}\Delta 3}$$

(4.2.11)

$$C_{\overset{\circ}{1}\Delta 3} = \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}} = 2E_{\overset{\circ}{1}\Delta 3}$$

$$C_{\overset{\circ}{0}33} = \underline{C}_{\overset{\circ}{3}} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}} = 2E_{\overset{\circ}{0}33} + 1$$

Aus (4.2.11 f) folgt direkt

$$2E_{\overset{\circ}{0}33\Delta} = C_{\overset{\circ}{0}33\Delta} = (\underline{C}_{\overset{\circ}{3}} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}})_{\Delta} = 2 \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}}$$

und der Vergleich mit (4.2.11 e) liefert

$$2E_{\overset{\circ}{1}\Delta 3} = C_{\overset{\circ}{1}\Delta 3} = \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} \underline{C}_{\overset{\circ}{3}} = E_{\overset{\circ}{0}33\Delta}$$

Damit liegt bereits die Verträglichkeitsbedingung der Form (4.2.3) fest

$$E_{\overset{\circ}{1}\Delta 3} = \frac{1}{2} E_{\overset{\circ}{0}33\Delta} = \frac{1}{2} E_{\overset{\circ}{0}33\Delta} \quad (4.2.12)$$

Um den Zusammenhang der Form (4.2.2) herzuleiten, werden die Ausdrücke  $\underline{C}_{\overset{\circ}{3}\mathbb{N}}$  benötigt, die sich nach (3.2.9) ergeben zu

$$\underline{C}_{\overset{\circ}{3}\Delta} = \underline{C}_{\overset{\circ}{3}\bar{\Delta}} \overset{\bar{\Delta}}{A} \cdot \overset{\bar{\Delta}}{\Delta} (X^{\bar{\Delta}}_0) = \overset{\bar{\Delta}}{I} \overset{\bar{\Delta}}{3\bar{\Delta}} \underline{C}_{\overset{\bar{\Delta}}{I}} \overset{\bar{\Delta}}{A} \cdot \overset{\bar{\Delta}}{\Delta} (X^{\bar{\Delta}}_0) \quad (3.2.9')$$

wobei nach (3.2.10)

$$\overset{\bar{\Delta}}{I} \overset{\bar{\Delta}}{3\bar{\Delta}} (X^{\bar{\Delta}}_0) = \overset{\bar{\Delta}}{I} \overset{\bar{\Delta}}{3\Delta} = \overset{\bar{\Delta}}{I} \overset{\bar{\Delta}}{3\Delta} + \overset{\bar{\Delta}}{\Delta} \overset{\bar{\Delta}}{3\Delta} \quad (3.2.10')$$

Nach (3.2.11) und längerer Zwischenrechnung lassen sich die Differenzchristoffelsymbole allgemein darstellen

$$\overset{\bar{\Delta}}{\Delta} \overset{\bar{\Delta}}{I\bar{J}} C_{I\bar{K}} = E_{\bar{I}\bar{K}|\bar{J}} + E_{\bar{J}\bar{K}|\bar{I}} - E_{\bar{I}\bar{J}|\bar{K}} \quad (4.2.13)$$

d. h.

$$\overset{\bar{\Delta}}{\Delta} \overset{\bar{\Delta}}{3\bar{J}} (X^{\bar{\Delta}}_0) = (E_{\bar{3}\bar{K}|\bar{J}} + E_{\bar{J}\bar{K}|\bar{3}} - E_{\bar{3}\bar{J}|\bar{K}}) \overset{\bar{\Delta}}{C} \overset{\bar{\Delta}}{I\bar{K}} (X^{\bar{\Delta}}_0) \quad (4.2.14)$$

Unter Berücksichtigung von (4.1.9) und für kleine Verzerrungen von (4.2.6) gilt

$$\begin{aligned} E_{JK}|_3 (X^3=0) &= \left( E_{JK} - \Gamma_{J3}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}K} - \Gamma_{K3}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}J} \right) d_{\bar{I}}^I d_{\bar{K}}^K \\ E_{JK}|_{\bar{I}} (X^3=0) &= E_{JK}|_L d_{\bar{J}}^J d_{\bar{K}}^K d_{\bar{I}}^I \\ \bar{C}^{-1\bar{I}\bar{K}} (X^3=0) &= H^{LK} d_{\bar{L}}^{\bar{I}} d_{\bar{K}}^{\bar{K}} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Da die Transformationskoeffizienten  $A^{\cdot K}_{\cdot \bar{K}}$  für  $X^3 = 0$  zur Einheitsmatrix werden, sollen im weiteren die Querstriche weggelassen werden.

Wird mit dieser Vereinfachung (4.2.15) in (4.2.14) eingesetzt und (4.1.9) sowie die Formelzusammenstellung des Anhangs beachtet, so ergeben sich die  $\Delta_{3J}^L$  zu

$$\Delta_{3J}^L = \begin{cases} \Delta_{3\Delta}^{\bar{\Sigma}} = \left( E_{3\theta}|\Delta - E_{3\Delta}|\theta - \Gamma_{3\Delta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}\theta} - \Gamma_{3\theta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}\Delta} + E_{\Delta\theta} \right) H^{\Sigma\theta} \\ \quad = \left( E_{3\theta}||_{\Delta} - E_{3\Delta}||_{\theta} - 2\Gamma_{3\Delta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}\theta} + E_{\Delta\theta} \right) H^{\Sigma\theta} \\ \Delta_{3\Delta}^3 = E_{33}|\Delta = E_{33}||_{\Delta} - 2\Gamma_{3\Delta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}3} \\ \Delta_{33}^{\Sigma} = \left\{ 2 \left( E_{3\theta} - \Gamma_{3\theta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}3} \right) - E_{33}|\theta \right\} H^{\Sigma\theta} = \left( 2E_{3\theta} - E_{33}||_{\theta} \right) H^{\Sigma\theta} \\ \Delta_{33}^3 = 0 \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Demnach ist mit (3.2.9') und (3.2.10')

$$\begin{aligned} \underline{C}_{3,\Delta} &= \bar{F}_{3\Delta}^{\ominus} \underline{C}_{\ominus} + \bar{F}_{3\Delta}^3 \underline{C}_3 = \left( \Gamma_{3\Delta}^{\ominus} + \Delta_{3\Delta}^{\ominus} \right) \underline{C}_{\ominus} + \Delta_{3\Delta}^3 \underline{C}_3 \\ \underline{C}_{3,\Delta} &= \left\{ \Gamma_{3\Delta}^{\ominus} + \left( E_{3\Delta}||_{\Delta} - E_{3\Delta}||_{\Sigma} - 2\Gamma_{3\Delta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}\Sigma} + E_{\Sigma\Delta} \right) H^{\ominus\Sigma} \right\} \underline{C}_{\ominus} + \\ &\quad + \left( E_{33}||_{\Delta} - 2\Gamma_{3\Delta}^{\bar{\pi}} E_{\bar{\pi}3} \right) \underline{C}_3 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

und (4.2.11 c) wird mit (4.2.11 a), (4.2.11 f) und bei Vernachlässigung von quadratischen Gliedern in den Verzerrungskomponenten

$$\begin{aligned}
 C_{\Delta r} &= 2 \frac{E}{2} \Delta r + B_{\pi \Delta} B_r^{\pi} = C_{3, \Delta} C_{3, r} \\
 &= \left\{ \Gamma_{3\Delta}^{\emptyset} \Gamma_{3r}^{\Omega} + \Gamma_{3r}^{\Omega} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_{\Delta} - \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3\Delta} \parallel_{\Sigma} - 2 \Gamma_{3\Delta}^{\pi} \frac{E}{\sigma} \pi_{\Sigma} + \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{z\Delta} \right) \Pi^{\emptyset \Sigma} \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{3\Delta}^{\emptyset} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3\theta} \parallel_r - \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3r} \parallel_{\theta} - 2 \Gamma_{3r}^{\pi} \frac{E}{\sigma} \pi_{\theta} + \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{\theta r} \right) \Pi^{\theta \Omega} \right\} C_{\emptyset \Omega} \\
 &\quad + \left\{ \Gamma_{3r}^{\Omega} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_{\Delta} - 2 \Gamma_{3\Delta}^{\pi} \frac{E}{\sigma} \pi_{\Sigma} \right) + \Gamma_{3\Delta}^{\Omega} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_r - 2 \Gamma_{3r}^{\pi} \frac{E}{\sigma} \pi_{\Sigma} \right) \right\} C_{\Omega 3} \quad (4.2.18)
 \end{aligned}$$

bzw. mit (4.2.11 a und d) für  $C_{\emptyset \Omega}$  und  $C_{\Omega 3}$

$$2 \frac{E}{2} \Delta r = \Gamma_{3r}^{\Sigma} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_{\Delta} - \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3\Delta} \parallel_{\Sigma} + \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{z\Sigma} \right) + \Gamma_{3\Delta}^{\Sigma} \left( \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_r - \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3r} \parallel_{\Sigma} + \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{zr} \right) - 2 \Gamma_{3\Delta}^{\pi} \Gamma_{3r}^{\Sigma} \frac{E}{\sigma} \pi_{\Sigma} \quad (4.2.19)$$

wobei wiederum höhere Terme vernachlässigt wurden. Somit liegt auch die Verträglichkeitsbedingung der Form (4.2.2) unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen vor. Wird in (4.2.19)  $\frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} = 0$  gesetzt, d. h. die Kirchhoff-Lovesche Hypothese eingearbeitet, so geht (4.2.19) über in

$$2 \frac{E}{2} \Delta r = -B_r^{\Sigma} \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{\Delta \Sigma} - B_{\Delta}^{\Sigma} \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{r} - 2 B_{\Delta}^{\pi} B_r^{\Sigma} \frac{E}{\sigma} \pi_{\Sigma} \quad (4.2.20)$$

Diese Form geben Tsuboi, Tosaka [62] an.

Aus (4.2.16 c) folgt nochmals (4.2.12), denn für einen linearen Verschiebungsansatz muß

$$\begin{aligned}
 C_{3,3} = 0 &= \bar{\Gamma}_{33}^{\kappa} C_{\sigma \kappa} = \Delta_{33}^{\Sigma} C_{\sigma \Sigma} + \Delta_{33}^3 C_{33} = \Delta_{33}^{\Sigma} C_{\sigma \Sigma} \\
 &= \left( 2 \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{3\theta} - \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_{\theta} \right) \Pi^{\Sigma \theta} C_{\sigma \Sigma}
 \end{aligned}$$

d. h.

$$2 \frac{E}{\gamma} \varepsilon_{3\theta} = \frac{E}{\sigma} \varepsilon_{3z} \parallel_{\theta}$$

sein.

Mit (4.2.12) und (4.2.19) liegen die gewünschten Verträglichkeitsbedingungen vor. Allerdings ist dies noch nicht der vollständige Satz von Bedingungsgleichungen, denn nach Tab. 2 fehlt noch Gleichung 1, d. h. ein Zusammenhang zwischen  $\frac{E}{\sigma} \Delta r$ ,  $\frac{E}{\gamma} \Delta r$  und  $\frac{E}{\sigma} \Delta 3$ . Dieser wird hier nicht angegeben, sondern erst für die spezielle Schalentheorie im Kapitel 5 abgeleitet.

### 4.3 Statik und Materialgesetz

#### 4.3.1 Schnittgrößen und konstitutive Gleichungen

Die virtuelle innere potentielle Energie ist nach (3.3.25)

$$\delta \bar{\Pi}^{(i)} = \int_V \delta \bar{\Pi}^{*(i)} dV = \int_V K^{\bar{\kappa}\bar{m}} \delta E_{\bar{\kappa}\bar{m}} dV$$

Wird dieser Ausdruck auf das Koordinatensystem der Schalenmittelfläche transformiert, so folgt aus (2.3.43)

$$\delta \bar{\Pi}^{(i)} = \iiint_{F_h} \delta \bar{\Pi}^{*(i)} S dX^3 dF_3^- = \iiint_{F_h} K^{\bar{\kappa}\bar{m}} \delta E_{\bar{\kappa}\bar{m}} S dX^3 dF_3^- \quad (4.3.11)$$

wobei abkürzend

$$\bar{\Pi}_{SCH}^{*(i)} = \int_h \bar{\Pi}^{*(i)} S dX^3 \quad (4.3.1.2)$$

die Energiedichte pro Einheitsfläche der unverformten Schalenmittelfläche, kurz das elastische Potential dünner Schalen, eingeführt wird. Ferner folgt für einen Verschiebungsansatz (4.1) aus (4.1.6)

$$\delta E_{\bar{\kappa}\bar{m}} = \sum_{\epsilon=0}^{2m} \delta E_{\epsilon}^{KM} A_{\cdot\bar{\kappa}}^{\epsilon} A_{\cdot\bar{m}}^{\epsilon} (X^3)^{\epsilon} \quad (4.3.1.3)$$

und damit wird (4.3.11)

$$\delta \bar{\Pi}^{(i)} = \iiint_{F_h} \delta \bar{\Pi}_{SCH}^{*(i)} dF_3^- = \iiint_{F_h} \bar{K}^{*KM} \sum_{\epsilon} \delta E_{\epsilon}^{KM} (X^3)^{\epsilon} dX^3 dF_3^- \quad (4.3.1.4)$$

mit

$$\bar{K}^{*KM} = K^{\bar{\kappa}\bar{m}} A_{\cdot\bar{\kappa}}^{\epsilon} A_{\cdot\bar{m}}^{\epsilon} S = \bar{K}^{*MK} \quad (4.3.1.5)$$

In Analogie zu (3.3.2.6) ergeben sich somit die Schnittgrößen bezogen auf den Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\bar{M}_{\epsilon}^{KM} = \int_h \bar{K}^{*KM} (X^3)^{\epsilon} dX^3 \quad (4.3.1.6)$$

und demnach das Materialgesetz mit

$$\delta \bar{\Pi}_{SCH}^{*(i)} = \sum_{\epsilon=0}^{2m} \bar{M}_{\epsilon}^{KM} \delta E_{\epsilon}^{KM} = \sum_{\epsilon} \frac{\partial \bar{\Pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{\epsilon}^{KM}} \delta E_{\epsilon}^{KM}$$

zu

$$\bar{M}_{\epsilon}^{KM} = \frac{\partial \bar{\Pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{\epsilon}^{KM}} \quad (4.3.1.7)$$

Da die Lagrangeschen Verzerrungskomponenten nicht unabhängig vom gewählten Verschiebungsansatz (4.1) sind, folgt aus (4.1.6) und unter Beachtung von

$$\delta U_J|_K = \begin{cases} \delta U_J|_\Delta = \sum_{n=0}^m \delta U_n|_\Delta (X^3)^n \\ \delta U_J|_3 = \sum_{n=0}^m n \delta U_n (X^3)^{n-1} \end{cases} \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\partial E_{KM}}{\partial U_n|_\Delta} = \frac{\partial E_{KM}}{\partial D_n^\Delta} = \frac{1}{2} \left( D_{\varepsilon-n}^J \cdot K \cdot d_n^\Delta + D_{\varepsilon-n}^J \cdot n \cdot d_K^\Delta \right) \quad \text{für } \begin{matrix} 0 \leq \varepsilon \leq 2m \\ 0 \leq n \leq m \end{matrix} \quad (4.3.19)$$

$$\frac{\partial E_{KM}}{\partial U_n^J} = \frac{\partial E_{KM}}{\partial D_n^J} = \frac{1}{2} \left( D_{\varepsilon-n}^J \cdot K \cdot d_n^J + D_{\varepsilon-n}^J \cdot n \cdot d_K^J \right) \quad \text{für } \begin{matrix} 0 \leq \varepsilon \leq 2m \\ 0 \leq n \leq m \end{matrix} \quad (4.3.1.10)$$

und somit unter Ausnutzung der Symmetrie der  $E_{KM}$  und (4.3.1.7)

$$\frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial U_n|_\Delta} = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} \frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{KM}} \frac{\partial E_{KM}}{\partial U_n|_\Delta} = \sum_{\varepsilon} \frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{KM}} D_{\varepsilon-n}^J \cdot K = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^{JK} D_{\varepsilon-n}^J \quad (4.3.1.11)$$

$$\frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial U_n^J} = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} \frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{KM}} D_{\varepsilon-n}^J \cdot K = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^{JK} D_{\varepsilon-n}^J$$

Die Beziehungen (4.3.1.11) werden bei der Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen benötigt.

#### 4.3.2 Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen

In Kapitel 3.3.2 wurde gezeigt, daß das Prinzip der virtuellen Verschiebender Form (3.3.2.1) auf die Gleichgewichtsbedingung ausgedrückt in dem Lagrangeschen Spannungstensor führt. Blum [56] zeigt, wie ausgehend von dieser Form bei Definition von sog. Lagrangeschen Schnittgrößen und Voraussetzung des Potenzreihenansatzes für die Verschiebungen (4.1) folgende Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen abgeleitet werden können

im Innern 
$$\overset{L}{M}_n^{\Delta J} |_\Delta - n \overset{L}{M}_{n-1}^{3J} + \overset{P}{P}_n^J = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (4.3.2.1)$$

statische Randbedingungen 
$$\hat{M}_n^{\Delta J} N_\Delta = \hat{T}_n^J \quad n=0,1,\dots,m \quad (4.3.2.2)$$

mit  $N_\Delta$ , der Komponente des Einheitsvektors der Randkurve auf der Schalenmittelfläche

wobei die unsymmetrischen Lagrangeschen Schnittgrößen ähnlich wie (4.3.1.6) definiert sind zu

$$\begin{aligned} \hat{M}_n^{\Delta J} &= \int_h L^{\Delta J} \bar{A}^{\bar{J}} G_{\bar{J}}^J A_{\bar{\Delta}}^\Delta S(X^3)^n dX^3 \\ \hat{M}_n^{3J} &= \int_h L^{\bar{3}J} G_{\bar{J}}^J d_{\bar{3}}^3 S(X^3)^n dX^3 \end{aligned} \quad (4.3.2.3)$$

während die Belastungsterme und Randgrößen definiert sind

$$P_n^J = \hat{P}_+^J S\left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^n + \hat{P}_-^J S\left(-\frac{h}{2}\right) \left(-\frac{h}{2}\right)^n \quad (4.3.2.4)$$

$$\hat{T}_n^J = \int_h \hat{T}^J (X^3)^n dX^3 \quad (4.3.2.5)$$

wobei  $P_+^J$  die Belastung pro Flächeneinheit der undefor mierten Schalenmittelfläche an der positiven Schalenlaubung

$P_-^J$  die Belastung pro Flächeneinheit der undefor mierten Schalenmittelfläche an der negativen Schalenlaubung

$T_{(XN)}^J$  vorgeschriebene Kraft pro undefor mierte Flächeneinheit am Rand der Schale bezogen auf Koordinatensystem der Schalenmittelfläche

Die konstitutiven Gleichungen für die Lagrangeschen Schnittgrößen ergeben sich nach (3.3.2.4) zu

$$\hat{M}_n^{\Delta J} = \frac{\partial \pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial U_n^{\Delta J}} \quad (4.3.2.6a)$$

$$n \hat{M}_n^{3J} = \frac{\partial \pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial U_n^J} \quad (4.3.2.6b)$$

oder

$$(n+1) \hat{M}_n^{3J} = \frac{\partial \pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial U_{n+1}^J} \quad (4.3.2.6c)$$

wobei wiederum (4.3.1.8) zu beachten ist.

Da jedoch Ziel dieses Kapitels ist, Gleichgewichtsbedingungen auszudrücken in den Kirchhoffschen Schnittgrößen (4.3.1.6), können diese mit Hilfe von (4.3.1.11), (4.3.2.6) und (4.3.2.1) angegeben werden. Aus (4.3.2.6) und (4.3.1.11) folgt zunächst

$$M_n^L \Delta^J = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^K \Delta^K D_{\varepsilon-n}^J$$

$$(n+1) M_n^L \Delta^J = \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^K \Delta^K D_{\varepsilon-n}^J \quad \text{für } 0 \leq n \leq m \quad (4.3.2.7)$$

wobei  $D_{\varepsilon-n}^J = 0$  für  $\varepsilon < n$

Dies in (4.3.2.1) und (4.3.2.2) eingesetzt, liefert die gewünschten Gleichgewichts- und Randbedingungen

$$\left\{ \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^K \Delta^K D_{\varepsilon-n}^J \right\} \Big|_{\Delta} - n \sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^K \Delta^K D_{\varepsilon-n+1}^J + P_n^J = 0 \quad (4.3.2.8)$$

für  $0 \leq n \leq m$

$$\sum_{\varepsilon=0}^{2m} M_{\varepsilon}^K \Delta^K D_{\varepsilon-n}^J N_{\Delta} = \hat{T}_n^J \quad (4.3.2.9)$$

Für einen linearen Verschiebungsansatz, d. h.  $m = 1$  bei Berücksichtigung von (4.1.4 b bis d) lauten diese Gleichungen ausführlich

$$n=0: \left( M_0^K \Delta^{\Sigma} D_0^J + M_0^K \Delta^3 D_0^J + M_1^K \Delta^{\Sigma} D_1^J \right) \Big|_{\Delta} + P_0^J = 0 \quad (4.3.2.10a)$$

dies sind die 3 Kräftegleichgewichtsbedingungen

$$n=1: \left( M_1^K \Delta^{\Sigma} D_1^J + M_1^K \Delta^3 D_1^J + M_2^K \Delta^{\Sigma} D_2^J \right) \Big|_{\Delta} - \left( M_0^K \Delta^{\Sigma} D_0^J + M_0^K \Delta^3 D_0^J + M_1^K \Delta^{\Sigma} D_1^J \right) + P_1^J = 0 \quad (4.3.2.10b)$$

dies sind 2 Momentengleichgewichtsbedingungen um  $\underline{A}_{\Delta}$  und eine 'höhere' Gleichgewichtsbedingung für  $J = 3$ , die nicht der Momentengleichgewichtsbedingung um die Normale entspricht



mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 n=0: \quad & \left( \overset{K}{M}_0^{\Delta \Sigma} \overset{D}{D}_0^{\cdot \Sigma} + \overset{K}{M}_0^{\Delta 3} \overset{D}{D}_0^{\cdot 3} + \overset{K}{M}_1^{\Delta \Sigma} \overset{D}{D}_1^{\cdot \Sigma} \right) N_{\Delta} = \overset{\widehat{T}}{T}^{\cdot \Sigma} \\
 n=1: \quad & \left( \overset{K}{M}_1^{\Delta \Sigma} \overset{D}{D}_0^{\cdot \Sigma} + \overset{K}{M}_1^{\Delta 3} \overset{D}{D}_0^{\cdot 3} + \overset{K}{M}_2^{\Delta \Sigma} \overset{D}{D}_1^{\cdot \Sigma} \right) N_{\Delta} = \overset{\widehat{T}}{T}^{\cdot \Sigma}
 \end{aligned} \tag{4.3.2.11}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (4.3.2.10) haben einen komplizierteren Aufbau als dieselben entweder ausgedrückt in den Lagrangeschen Schnittgrößen (4.3.2.1) oder den häufig in der Literatur benutzten Gleichgewichtsbedingungen bezogen auf den verformten Zustand. Sie haben jedoch folgende Vorteile:

1. die darin auftretenden Schnittgrößen sind symmetrisch,
2. bringen die geometrische Nichtlinearität durch die Verschiebungsgradienten deutlich zum Ausdruck,
3. lassen physikalische Deutung der Schnittgrößen zu,
4. sind im Sinne des Kapitels 3.3.2 konsistent,
5. sind objektiv und erfüllen demnach die Symmetriebedingung automatisch.

Die im Punkt 3 aufgeführte Deutung der Kirchhoffschen Schnittgrößen ergibt sich aus der Definitionsgleichung (4.3.1.6), wie dies Fung [22] für die Theorie großer Verschiebungen bei Platten ebenfalls zeigt. Es ist nämlich

Schnittgröße	Komponente des
$\overset{K}{M}_0^{\Delta \Sigma} = \int_h^* K^{\Delta \Sigma} dX^3 = N^{\Delta \Sigma}$	sym. Membrankrafttensors
$\overset{K}{M}_0^{\Delta 3} = \overset{K}{M}_0^{3\Delta} = \int_h^* K^{\Delta 3} dX^3 = Q^{\Delta}$	Querkrafttensors
$\overset{K}{M}_1^{\Delta \Sigma} = \int_h^* K^{\Delta \Sigma} X^3 dX^3 = M^{\Delta \Sigma}$	sym. Momententensors
$\overset{K}{M}_0^{33} = \int_h^* K^{33} dX^3 = L^{33}$	Querdrucktensors

Tab. 3: Physikalische Deutung der Kirchhoffschen Schnittgrößen

Die restlichen Schnittgrößen lassen sich nicht physikalisch deuten. In der Literatur wird

$$\overset{\kappa}{M}_1^{\Delta 3} = \overset{\kappa}{M}_1^{3\Delta} = \int_h^{\kappa} K^{\Delta 3} X^3 dX^3 = S^{\Delta} \quad (4.3.2.12)$$

u. a. von Reissner [33] im Falle der linearen Theorie eingeführt, während  $\overset{\kappa}{M}_2^{\Delta 3}$  in der Regel nicht auftaucht, was aber im Falle eines linearen Verzerrungsansatzes für  $E_{\Delta 3}$  auch konsequent ist, denn nun lassen sich auch in der Schalentheorie unter Voraussetzung eines linearen Verschiebungsansatzes die konjugierten Größen eindeutig angeben

$$\begin{array}{lcl} E_{0 \Delta 3} & \longleftrightarrow & N^{\Delta 3} \\ E_{1 \Delta 3} & \longleftrightarrow & M^{\Delta 3} \\ E_{2 \Delta 3} & \longleftrightarrow & \overset{\kappa}{M}_2^{\Delta 3} \\ E_{0 \Delta 3} & \longleftrightarrow & Q^{\Delta} \\ E_{1 \Delta 3} & \longleftrightarrow & S^{\Delta} \\ E_{0 33} & \longleftrightarrow & L^{33} \end{array}$$

#### 4.3.3 Das elastische Potential dünner Schalen

Um die konstitutiven Gleichungen (4.3.1.7) angeben zu können, ist die Kenntnis der Funktion

$$\pi_{SCH}^{*(i)} = \pi_{SCH}^{*(i)} \left( \frac{E}{\epsilon} \kappa \right) \quad (4.3.3.1)$$

also des elastischen Potentials dünner Schalen erforderlich. Ausgehend vom dreidimensionalen elastischen Potential (3.3.2.14), das für homogenen isotropen Werkstoff unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen gilt, läßt sich das Potential der Schale nach (4.3.1.2) ermitteln

$$\pi_{SCH}^{*(i)} = \int_h^{\kappa} \pi^{*(i)} S dX^3 \quad (4.3.3.2)$$

Werden alle im Integranden von (4.3.3.2) vorkommenden Terme in Potenzreihen von  $X^3$  entwickelt, aufgrund der Annahme einer dünnen Schale Glieder nur bis  $(X^3)^2$  berücksichtigt und anschließend integriert, so erhält man die

gewünschte Funktion. Sowohl Krätzig [65] als auch Waltersdorf [67] geben diese Herleitung in detaillierter Form an, weshalb hier der Vollständigkeit wegen nur die endgültige Darstellung unter Berücksichtigung der in dieser Arbeit eingeführten Definitionen wiederholt wird.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_{SCH}^{*(i)} = \frac{Gh}{2} & \left\{ K_0^{\Delta\theta r\pi} E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + 2K_0^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + 4K_0^{\Delta 3r3} E_{\Delta 3} E_{r3} + \right. \\
 & + K_0^{3333} E_{\Delta 33} E_{\Delta 33} + \frac{h^2}{12} \left[ K_0^{\Delta\theta r\pi} \left( E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + \right. \right. \\
 & + E_{\Delta\theta} E_{r\pi} \left. \right) + K_1^{\Delta\theta r\pi} \left( E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + E_{\Delta\theta} E_{r\pi} \right) + \\
 & + K_2^{\Delta\theta r\pi} E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + 2K_0^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + 2K_1^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + \\
 & + 2K_2^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + 4K_0^{\Delta 3r3} E_{\Delta 3} E_{r3} + 4K_1^{\Delta 3r3} E_{\Delta 3} E_{r3} + \\
 & + 4K_2^{\Delta 3r3} \left( E_{\Delta 3} E_{r3} + E_{\Delta 3} E_{r3} \right) - 2H \left( K_0^{\Delta\theta r\pi} \left( E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + \right. \right. \\
 & + E_{\Delta\theta} E_{r\pi} \left. \right) + K_1^{\Delta\theta r\pi} E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + 2K_0^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + \\
 & + 2K_1^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + 4K_1^{\Delta 3r3} E_{\Delta 3} E_{r3} + \\
 & + 4K_0^{\Delta 3r3} \left( E_{\Delta 3} E_{r3} + E_{\Delta 3} E_{r3} \right) \left. \right\} + K \left( K_0^{\Delta\theta r\pi} E_{\Delta\theta} E_{r\pi} + \right. \\
 & \left. + 2K_0^{\Delta\theta 33} E_{\Delta\theta} E_{\Delta 33} + 4K_0^{\Delta 3r3} E_{\Delta 3} E_{r3} + K_0^{3333} E_{\Delta 33} E_{\Delta 33} \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(4.3.3.3)

wobei die Koeffizienten  $K_{\epsilon}^{ijkl}$  sind

$$K_0^{\Delta\theta\Gamma\pi} = H^{\Delta\Gamma} H^{\theta\pi} + H^{\Delta\pi} H^{\theta\Gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu} H^{\Delta\theta} H^{\Gamma\pi}$$

$$K_1^{\Delta\theta\Gamma\pi} = 2 \left[ B^{\Delta\Gamma} H^{\theta\pi} + H^{\Delta\Gamma} B^{\theta\pi} + B^{\Delta\pi} H^{\theta\Gamma} + H^{\Delta\pi} B^{\theta\Gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu} (H^{\Delta\theta} B^{\Gamma\pi} + B^{\Delta\theta} H^{\Gamma\pi}) \right]$$

$$K_2^{\Delta\theta\Gamma\pi} = 3 B^{\Delta\pi} B_{\Sigma}^{\Gamma} H^{\theta\pi} + 4 B^{\Delta\Gamma} B^{\theta\pi} + 3 H^{\Delta\Gamma} B^{\theta\Sigma} B_{\Sigma}^{\pi} + 3 B^{\Delta\Sigma} B_{\Sigma}^{\pi} H^{\theta\Gamma} + 4 B^{\Delta\pi} B^{\theta\Gamma} + 3 H^{\Delta\pi} B^{\theta\Sigma} B_{\Sigma}^{\Gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu} (3 B^{\Delta\Sigma} B_{\Sigma}^{\theta} H^{\Gamma\pi} + 4 B^{\Delta\theta} B^{\Gamma\pi} + 3 H^{\Delta\theta} B^{\Gamma\Sigma} B_{\Sigma}^{\pi})$$

$$K_0^{\Delta\theta 33} = \frac{2\nu}{1-2\nu} H^{\Delta\theta}$$

$$K_1^{\Delta\theta 33} = \frac{4\nu}{1-2\nu} B^{\Delta\theta} \quad (4.3.3.4)$$

$$K_2^{\Delta\theta 33} = \frac{6\nu}{1-2\nu} B^{\Delta\Sigma} B_{\Sigma}^{\theta}$$

$$K_0^{\Delta 3\Gamma 3} = H^{\Delta\Gamma}$$

$$K_1^{\Delta 3\Gamma 3} = 2 B^{\Delta\Gamma}$$

$$K_2^{\Delta 3\Gamma 3} = 3 B^{\Delta\Sigma} B_{\Sigma}^{\Gamma}$$

$$K_0^{3333} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$$

4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse der allgemeinen Schalentheorie

Bei den bisherigen Ableitungen wurde von der allgemeinen Approximationsform für die Verschiebungen (4.1) ausgegangen. Werden jedoch nur dünne Schalen in Betracht gezogen, wie dies bereits bei der Herleitung des Potentials unterstellt wurde, so erscheint der lineare Verschiebungsansatz ausreichend. Aus diesem Grunde soll nur dieser weiterverfolgt und hier nochmals zusammenfassend dargestellt werden.

	34 Unbekannte	34 Gleichungen	Bemerkung
Statik	14 Schnittgrößen $\overset{K}{M}_0^{\Delta\theta}, \overset{K}{M}_1^{\Delta\theta}, \overset{K}{M}_2^{\Delta\theta},$ $\overset{K}{M}_0^{\Delta\beta}, \overset{K}{M}_1^{\Delta\beta}, \overset{K}{M}_0^{\beta\beta}$	6 Gleichgewichtsbedingungen (4.3.2.10 a) (4.3.2.10 b)	exakt
Werkstoff	14 Verzerrungsgrößen $\overset{E}{\epsilon}_0^{\Delta\theta}, \overset{E}{\epsilon}_1^{\Delta\theta}, \overset{E}{\epsilon}_2^{\Delta\theta}$ $\overset{E}{\epsilon}_0^{\Delta\beta}, \overset{E}{\epsilon}_1^{\Delta\beta}, \overset{E}{\epsilon}_0^{\beta\beta}$	14 konstitutive Gleichungen (4.3.1.7)	wenn vom Potential der Form (4.3.3.3) ausgegangen wird, approximativ, da kleine Verzerrungen vorausgesetzt werden
Kinematik	6 Verschiebungsgrößen $\overset{U}{U}_0^N, \overset{U}{U}_1^N$	14 kinematische Gleichungen (4.1.10)	exakt

Tab. 4: Bilanz für allgemeine Theorie dünner Schalen

Die weitere Reduktion der in Tab. 4 zusammengestellten Gleichungen erfolgt nach der üblichen Verschiebungsmethode, deren Ergebnis die 6 Gleichgewichtsbedingungen ausgedrückt in den 6 Verschiebungsgrößen ist. Dual dazu läßt sich auch die Kraftmethode unter Verwendung der 6 Verträglichkeitsbedingungen, von denen 5 mit (4.2.12) und (4.2.19) gegeben sind sowie 6 einzuführenden

Spannungsfunktionen ableiten. Dies soll im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen, lediglich einige Grundgleichungen werden dazu angegeben. Auf die Herleitung der gemischten Methode, bei der die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen gleichberechtigt behandelt werden, sei ebenfalls verzichtet.

Wie in Tabelle 4 angedeutet, gilt das Werkstoffgesetz nur für kleine Verzerrungen, während die in den anderen beiden Gruppen auftretenden Gleichungen exakt sind. Diese Diskrepanz war ein Grund für die Ableitung einer Theorie großer Rotationen, aber kleiner Verzerrungen und damit auch kleiner Rotationsgradienten, die in allen 3 Gruppen dieselbe Approximationsstufe enthält.

5. Spezielle Theorie dünner Schalen - Theorie großer Rotationen,  
aber kleiner Verzerrungen

5.1 Voraussetzungen und Annahmen

Gemäß der Grundannahme, daß im gesamten Schalenkontinuum nur kleine Verzerrungen, jedoch gleichzeitig große Rotationen auftreten sollen, folgt

1. die Schale muß dünn,
2. die Rotationsgradienten müssen klein sein.

Dies läßt sich mit den später angegebenen Gleichungen beweisen, jedoch auch ingenieurmäßig anhand folgender Skizze zeigen.

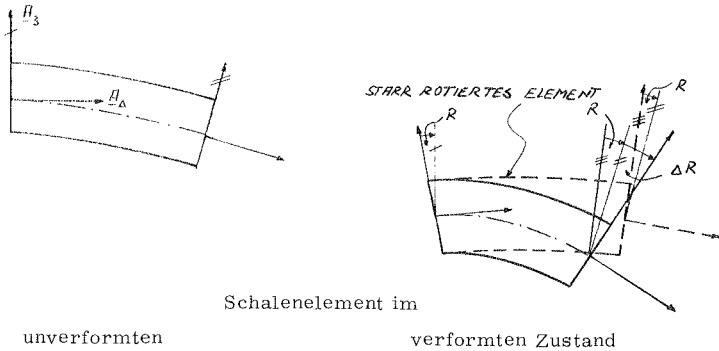


Abb. 4: Schematische Darstellung der Rotationen am Element

Ist  $\Delta R$  - im limes der Rotationsgradient - groß, so läßt sich aus Abb. 4 sofort ablesen, daß selbst bei dehnungsloser Verschiebung der Schalenmittelfläche die äußeren Fasern große Verzerrungen erleiden, wenn nicht die Schale sehr dünn, d. h. eine Membran ist. Somit ist streng genommen die Voraussetzung beider Punkte nicht notwendig, wenn unterschiedliche Größenordnungen von Dehn- und Biegeverzerrungen auftreten. Sind diese jedoch von der selben Größenordnung, müssen beide Annahmen getroffen werden.

3. Des weiteren soll angenommen werden, daß zwar aufgrund des linearen Verschiebungsansatzes eine symmetrische Dickenänderung eintreten kann, aber die Dicke im verformten Zustand konstant bleiben soll, d. h.

der Gradient der Normalverzerrung verschwindet

$$\frac{E}{\sigma}{}_{33,\Delta} = \frac{E}{\sigma}{}_{33} \parallel_{\Delta} = \sigma \quad (5.1.1)$$

und demnach gemäß (4. 2. 12) auch

$$\frac{E}{\tau}{}_{\Delta 3} = 0 \quad (5.1.2)$$

womit die zu  $E_{\tau\Delta 3}$  konjugierte Schnittgröße  $S^{\Delta}$  Reaktionsgröße wird und damit sich nur über die Definitionsgleichung (4. 3. 2. 12) ermitteln läßt.

4. Außerdem sollen die Verzerrungen linear über die Höhe angenommen werden, denn aufgrund der Verträglichkeitsbedingung (4. 2. 19) folgt, daß

$$O\left(\frac{E}{\tau}{}_{\Delta 3}\right) = O\left(\frac{E}{R}\right) \ll O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (5.1.3)$$

wenn vorausgesetzt wird, daß die Biege- und Dehnverzerrungen die selbe Größenordnung  $\epsilon$ , der Krümmungstensor  $B_{\Sigma}^{\Delta}$  die Größenordnung  $\frac{1}{R}$  haben und der Gradient der normalen Schubverzerrung ebenfalls die Größenordnung der Dehnverzerrungen nicht überschreitet. Solche Größenordnungsabschätzungen wurden von John [25 b] eingeführt und von Koiter [25 a] nochmals diskutiert.

Damit wird auch  $M_2^{\kappa\Delta\theta}$  Reaktionsgröße und kann, da sie eine Gleichgewichtsgruppe darstellt, auch nur über die Definitionsgleichung (4. 3. 1. 6) ermittelt werden.

Die Annahmen 3 und 4 sind nicht zwingend; eine Verschärfung der Theorie in dieser Richtung ist ohne Schwierigkeiten möglich, würde jedoch keine neuen theoretischen Erkenntnisse liefern. Außerdem scheinen die Annahmen 3 und 4 im Sinne einer späteren numerischen Behandlung gerechtfertigt.

5. Zusätzlich soll der Fall untersucht werden

$$a) \frac{E}{\sigma}{}_{33} \approx 0 \quad (5.1.4)$$

$$b) \frac{E}{\sigma}{}_{\Delta 3} \approx 0 \quad (5.1.5)$$

Zusammen bedeuten a) und b) die Voraussetzung der Kirchhoff-Loveschen Hypothese. In dieser Arbeit wird der Schwerpunkt mehr auf der Annahme a) liegen.



Zusammenfassend kann gesagt werden:

Es soll eine Theorie dünner Schalen mit kleinen Verzerrungen und großen Rotationen aufgestellt werden, die der allgemeinen Schalentheorie des vorigen Kapitels unter Annahme der Gültigkeit des linearen Verschiebungsansatzes entspricht.

## 5.2 Kinematische Beziehungen und Verträglichkeitsbedingungen

Ausgehend vom linearen Verschiebungsansatz (4.1)

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U^N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U^N \\ 1 \end{pmatrix} \underline{H}_N \quad (5.2.1)$$

lassen sich die Basisvektoren  $\underline{C}_{\bar{K}}$  (3.2.4) mit (4.1.4) ermitteln

$$\underline{C}_{\bar{K}} = D_{\bar{K}}^{\bar{M}} \underline{G}_{\bar{M}} = D_{\bar{K}}^N \underline{H}_N \underline{A}^{\bar{K}} = \underline{C}_{\bar{K}}^N \underline{A}^{\bar{K}} \quad (5.2.2)$$

d. h.

$$\underline{C}_{\bar{K}} = \begin{cases} \underline{C}_{\Delta} = \left( D_{\Delta}^N + D_{1\Delta}^N X^3 \right) \underline{H}_N \\ \underline{C}_{\bar{3}} = D_{\bar{3}}^N \underline{H}_N \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Nach (4.2.9) gilt aber auch

$$\underline{C}_{\bar{K}} = \begin{cases} \underline{C}_{\Delta} = \frac{\partial}{\partial X^{\Delta}} \left( \underline{P}_{\Delta} + \underline{C}_{\bar{3}} X^3 \right) = \underline{C}_{\Delta}^N + \underline{C}_{\bar{3},\Delta} X^3 \\ \underline{C}_{\bar{3}} = \underline{C}_{\bar{3}} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Der Vergleich von (5.2.3) und (5.2.4) liefert

$$\begin{aligned} \underline{C}_{\Delta}^N &= D_{\Delta}^N \underline{H}_N \\ \underline{C}_{\bar{3}} &= D_{\bar{3}}^N \underline{H}_N \\ \underline{C}_{\bar{3},\Delta} &= D_{1\Delta}^N \underline{H}_N \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Aus (4.1.4 b) und (4.1.4 c) folgt jedoch

$$\begin{aligned} D_{1\Delta}^N &= \Gamma_{\bar{3}\Delta}^N + U_{1\Delta}^N \\ D_{\bar{3}}^N &= \mathcal{D}_{\bar{3}}^N + U_{\bar{3}}^N \end{aligned}$$

d. h.

$$D_{1\Delta}^N = D_{\bar{3}}^N |_{\Delta} + \Gamma_{\bar{3}\Delta}^N \quad (5.2.6)$$

und damit auch

$$\underline{C}_{3,\Delta} = \left( D_{\circ}^N |_{\Delta} + \Gamma_{3\Delta}^N \right) H_N \quad (5.2.7)$$

(5.2.4) wird mit (5.2.5 a/c) und (5.2.7)

$$\underline{C}_K = \begin{cases} \underline{C}_{\Delta} = \left\{ D_{\circ}^N |_{\Delta} + \left( D_{\circ}^N |_{3} + \Gamma_{3\Delta}^N \right) X^3 \right\} H_N \\ \underline{C}_3 = D_{\circ}^N |_{3} H_N \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Nach dem polaren Zerlegungssatz lassen sich die Verschiebungsgradienten  $D_{\bar{K}}^i$  mit (3.2.23 a) auch darstellen

$$D_{\bar{K}}^i = R_{\bar{M}}^i F_{\bar{K}}^{\bar{M}} \quad (5.2.9)$$

Werden alle darin auftretenden Tensorkomponenten auf das Koordinatensystem der Schalenmittelfläche bezogen, so ergibt sich mit (4.1.2)

$$D_{\bar{K}}^i = D_{\bar{K}}^L G_L^i A_{\bar{K}}^K = R_{\bar{M}}^L G_L^i G_{\bar{M}}^M F_{\bar{K}}^{\bar{M}}$$

bzw. mit (2.3.21)

$$D_{\bar{K}}^L = R_{\bar{M}}^L S_N^M F_{\bar{K}}^N \quad (5.2.10)$$

mit

$$F_{\bar{K}}^N = F_{\bar{K}}^{\bar{M}} A_{\bar{K}}^{\bar{R}} A_{\bar{M}}^N \quad (5.2.11)$$

wobei  $R_{\bar{M}}^L = R_{\bar{M}}^L G_L^i G_{\bar{M}}^{\bar{M}}$  der auf die Schalenmittelfläche geschiftete Rotationstensor ist, der für lineare Verschiebungsgradienten  $D_{\bar{K}}^L$  als unabhängig von  $X^3$  vorausgesetzt sei, so daß

$$R_{\bar{M}}^L R_{L\bar{K}} = R_{KL} R_{\bar{M}}^L = A_{M\bar{K}} \quad (5.2.12)$$

Aus (5.2.10) und (5.2.11) folgen die Verzerrungskomponenten unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingung (5.2.12) für den Rotationstensor

$$F_{\bar{K}\bar{L}} = F_{KL} A_{\bar{L}}^L A_{\bar{K}}^K = R_{NM} S_L^M D_{\bar{K}}^N A_{\bar{L}}^L A_{\bar{K}}^K$$

bzw. wenn die Symmetriebedingung gemäß (3.2.22) für  $F_{\bar{K}\bar{L}}$  und damit auch für  $F_{KL}$  eingearbeitet wird

$$2F_{KL} = R_{NM} \left( S_L^M D_{\bar{K}}^N + S_K^M D_{\bar{L}}^N \right) = 2F_{\bar{K}\bar{L}} A_{\bar{K}}^K A_{\bar{L}}^L \quad (5.2.13)$$

Mit (2.3.15) und (4.1.4) bei linearem Verschiebungsansatz lassen sich die kinematischen Gleichungen nun angeben

$$\begin{aligned}
 F_{\Delta\Theta} &= F_{0\Delta\Theta} + \chi^3 F_{1\Delta\Theta} + (\chi^3)^2 F_{2\Delta\Theta} \\
 F_{\Delta 3} &= F_{0\Delta 3} + \chi^3 F_{1\Delta 3} \\
 F_{33} &= F_{033}
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 2F_{0\Delta\Theta} &= \left( D_{0\Delta}^N \mathcal{J}_{\Theta}^M + D_{0\Theta}^N \mathcal{J}_{\Delta}^M \right) R_{NM} \\
 2F_{1\Delta\Theta} &= \left( D_{1\Delta}^N \mathcal{J}_{\Theta}^M + D_{0\Delta}^N \Gamma_{3\Theta}^M + D_{1\Theta}^N \mathcal{J}_{\Delta}^M + D_{0\Theta}^N \Gamma_{3\Delta}^M \right) R_{NM} \\
 2F_{2\Delta\Theta} &= \left( D_{1\Delta}^N \Gamma_{3\Theta}^M + D_{1\Theta}^N \Gamma_{3\Delta}^M \right) R_{NM} \\
 2F_{0\Delta 3} &= \left( D_{0\Delta}^N \mathcal{J}_3^M + D_{03}^N \mathcal{J}_{\Delta}^M \right) R_{NM} \\
 2F_{1\Delta 3} &= \left( D_{1\Delta}^N \mathcal{J}_3^M + D_{03}^N \Gamma_{3\Delta}^M \right) R_{NM} \\
 2F_{033} &= 2 D_{03}^N \mathcal{J}_3^M R_{NM}
 \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Aus (5.2.15) folgt, daß die  $D_{\Delta}^N$  bzw. nach (4.1.4) die Verschiebungen  $U_{\Delta}^N$  der Schalenmittelfläche und  $R_{NM}$  bzw. nach (3.2.20) die Rotationswinkel  $\phi^{\Delta}$  des Dreibeins der Schalenmittelfläche als unabhängige kinematische Grundvariable zu betrachten sind, während die restlichen Größen davon abhängig sind, z. B. (5.2.6) und für  $D_3^3$  bzw. der Rotation um die Schalennormale  $\phi^3$  Sonderbetrachtungen anzustellen sind. Diese sollen gleichzeitig mit der Voraussetzung kleiner Verzerrungen und der Annahme eines linearen Verzerrungsverlaufes über die Höhe (Annahme 3 und 4) erfolgen.

Dazu wird Gleichung (3.2.30) herangezogen, die für kleine Verzerrungen gilt

$$F_{\bar{L}}^{\bar{K}} = C_{\bar{L}}^{\bar{K}} \approx \mathcal{J}_{\bar{L}}^{\bar{K}} + E_{\bar{L}}^{\bar{K}} \quad (5.2.16)$$

bzw.

$$F_{K_L} = F_{\bar{K}\bar{L}} A_{\cdot K}^{\bar{K}} A_{\cdot L}^{\bar{L}} = G_{KL} + E_{KL} \quad (5.2.17)$$

wobei nach (2.3.19) und (2.3.15)

$$G_{KL} = H_{IJ} S_K^I S_L^J = H_{KL} + \chi^2 (\Gamma_{3K}^I H_{IL} + \Gamma_{3L}^J H_{JK}) + (\chi^3)^2 \Gamma_{3K}^I \Gamma_{3L}^J H_{IJ} \quad (5.2.18)$$

und demnach

$$\begin{aligned} F_{\circ \Delta \theta} &= H_{\Delta \theta} + E_{\circ \Delta \theta} \\ F_{1 \Delta \theta} &= E_{1 \Delta \theta} - 2B_{\Delta \theta} \\ F_{2 \Delta \theta} &= E_{2 \Delta \theta} + B_{\Delta}^{\bar{\pi}} B_{\bar{\pi} \theta} \\ F_{\circ \Delta 3} &= E_{\circ \Delta 3} \\ F_{1 \Delta 3} &= E_{1 \Delta 3} \\ F_{\circ 33} &= E_{\circ 33} + 1 \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Mit Annahme 3 und 4 sowie den Verträglichkeitsbedingungen (4.2.12) und (4.2.19) läßt sich (5.2.19) vereinfachen zu

$$F_{1 \Delta 3} = F_{2 \Delta \theta} \approx 0 \quad (5.2.20)$$

womit (5.2.14) wird

$$F_{KL} = \begin{cases} F_{\Delta \theta} = E_{\circ \Delta \theta} + \chi^2 F_{1 \Delta \theta} \\ F_{\Delta 3} = E_{\circ \Delta 3} \\ F_{33} = E_{\circ 33} \end{cases} \quad (5.2.21)$$

und der Zusammenhang zwischen dem Verzerrungstensor  $\underline{F}$  und  $\underline{E}$  für kleine Verzerrungen mit (5.2.19) und (5.2.20) gegeben ist.

Nun sind auch die  $\underline{F}_{\epsilon \text{KL}}$  der Gleichung (5.2.15) und die Verschiebungsgradienten (5.2.10) im Sinne der Voraussetzung kleiner Verzerrungen zu modifizieren. Aus (5.2.10) folgt

$$\underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}} = \begin{cases} \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} = R_{\circ 5}^{\mathcal{N}} F_{\circ \Delta}^{\mathcal{S}} \\ \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{3} = R_{\circ 3}^{\mathcal{N}} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}} \end{cases} \quad (5.2.22)$$

und aus (5.2.6) mit (5.2.22 b)

$$\begin{aligned} \underline{D}_{\Gamma}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} &= \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{3}|_{\Delta} + \Gamma_{3\Delta}^{\mathcal{N}} = (R_{\circ 5}^{\mathcal{N}} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}})|_{\Delta} + \Gamma_{3\Delta}^{\mathcal{N}} \\ &= R_{\circ 5}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}} + R_{\circ 5}^{\mathcal{N}} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}}|_{\Delta} + \Gamma_{3\Delta}^{\mathcal{N}} \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Unter Berücksichtigung von (5.2.16) und Vernachlässigung kleiner Terme sowie mit Annahme 3 wird (5.2.23)

$$\underline{D}_{\Gamma}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} \approx R_{3\Delta}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} + R_{\circ 3}^{\mathcal{N}} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}}|_{\Delta} + \Gamma_{3\Delta}^{\mathcal{N}} \quad (5.2.24)$$

Mit (5.2.22) und (5.2.24) ließen sich die Komponenten des Verzerrungstensors  $\underline{F}$  in Abhängigkeit von  $\underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta}$  - und damit von  $\underline{U}_{\circ}^{\mathcal{N}}$  - sowie von  $R_{\circ 5}^{\mathcal{N}}$  - und damit von  $\vartheta^{\mathcal{N}}$  - darstellen. Beachtenswert ist, daß in diesen Gleichungen gemäß (5.2.24) nur der Gradient  $R_{3\Delta}^{\mathcal{N}}|_{\Delta}$  und nicht der Gradient des gesamten Rotationstensors auftaucht. Allerdings wäre bei diesem Vorgehen nur in den Termen  $F_{n\Delta\theta}^{\mathcal{N}}$  für  $n \geq 1$  die Kleinheit der Verzerrungen berücksichtigt. Diese muß jedoch auch in den Verzerrungsgrößen der Schalenmittelfläche selbst eingearbeitet werden. Diese lauten mit (5.2.23) und (5.2.15)

$$\begin{aligned} 2 F_{\circ \Delta \theta}^{\mathcal{N}} &= \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} R_{\mathcal{N}\theta} + \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\theta} R_{\mathcal{N}\Delta} \\ 2 F_{\circ \Delta 3}^{\mathcal{N}} &= \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} R_{\mathcal{N}3} + \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{3} R_{\mathcal{N}\Delta} \\ &\quad - \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} R_{\mathcal{N}3} + R_{\circ 5}^{\mathcal{N}} R_{\mathcal{N}\Delta} F_{\circ 3}^{\mathcal{S}} \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

d. h.  $F_{\circ \Delta 3}^{\mathcal{N}} = \underline{D}_{\circ}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} R_{\mathcal{N}3}$

und der Identitätsgleichung

$$\begin{aligned} F_{\sigma 33} &= D_{\sigma 3}^N R_{N3} \\ &= R_{\sigma 3}^N R_{N3} F_{\sigma 3}^S = F_{\sigma 33} \end{aligned}$$

Demnach sind nach (5.2.9) und (5.2.22) die  $\underline{C}_{\sigma K}$  für die Schalenmittelfläche

$$\underline{C}_{\sigma K} = \begin{cases} \underline{C}_{\sigma \Delta} = D_{\sigma \Delta}^N \underline{H}_N = R_{\sigma 3}^N F_{\sigma \Delta}^S \underline{H}_N \\ \underline{C}_{\sigma 3} = D_{\sigma 3}^N \underline{H}_N = R_{\sigma 3}^N F_{\sigma 3}^S \underline{H}_N \approx (R_{\sigma \Delta}^N F_{\sigma 3}^{\Delta} + R_{\sigma 3}^N) \underline{H}_N \end{cases} \quad (5.2.26)$$

Die in (5.2.26) angegebene Transformation der Basisvektoren der undeformierten Schalenmittelfläche läßt sich im Sinne des polaren Zerlegungssatzes aufspalten in

1. reine Rotation

$$\begin{aligned} \underline{C}_{\sigma \Delta}^* &= R_{\sigma \Delta}^N \underline{H}_N \\ \underline{C}_{\sigma 3}^* &= R_{\sigma 3}^N \underline{H}_N \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

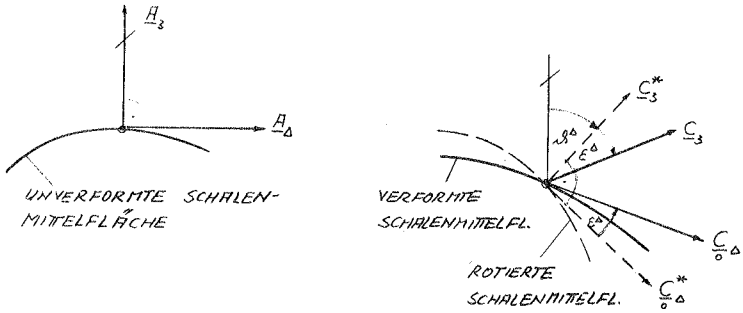
die mit einer Krümmungsänderung, aber keiner Metrikänderung der Schalenmittelfläche verbunden sein kann

2. reine Verzerrung

$$\begin{aligned} \underline{C}_{\sigma \Delta} &= \underline{C}_{\sigma \Delta}^* F_{\sigma \Delta}^T + \underline{C}_{\sigma 3}^* F_{\sigma \Delta}^S \\ \underline{C}_{\sigma 3} &= \underline{C}_{\sigma 3}^* F_{\sigma 3}^T + \underline{C}_{\sigma 3}^* F_{\sigma 3}^S \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

wobei hier noch keine Einschränkung bezüglich der Größenordnung der Verzerrungen gemacht wird.

Diese Aufspaltung ist in Abbildung 5 skizziert.



$\underline{\underline{C}}_K^*$ ,  $\underline{\underline{C}}_K$ ,  $\hat{\underline{\underline{C}}}_K$     ROTIERTE BASIS VEKTOREN  
 $\underline{\underline{C}}_K$     VERZERRTE BASIS VEKTOREN

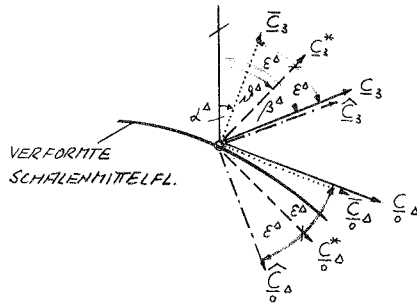


Abb. 5: Schematische Darstellung der Verformung der Schalenmittelfläche

Aus Abb. 5 läßt sich ablesen

$$\underline{C}_3 = F_3^j \underline{\bar{C}}_3 = (1 + E_j^j) \underline{\bar{C}}_3 = F_3^j \left( \cos \varepsilon^\Delta \underline{C}_3^* + \sin \varepsilon^\Delta \underline{C}_0^\Delta \right) \quad (5.2.29)$$

Da jedoch angenommen wird, daß der Übergang vom rotierten zum deformierten Dreibein durch einen kleinen Verzerrungszustand beschrieben sei, d. h.

$$\varepsilon^\Delta \ll 1$$

folgt aus (5.2.29)

$$\underline{C}_3 \approx F_3^j \left( \underline{C}_3^* + \varepsilon^\Delta \underline{C}_0^\Delta \right) \quad (5.2.30)$$

und der Vergleich mit (5.2.28) zeigt, daß

$$\sin \varepsilon^\Delta \approx \varepsilon^\Delta = \frac{F_0^\Delta}{F_3^\Delta} = \frac{F_0^\Delta}{F_3^\Delta} \quad (5.2.31)$$

Ferner wird aus Abb. 5 deutlich, daß der Rotationstensor  $R_{\text{M}}^{\text{N}}$  eine Funktion des Winkels  $\vartheta^\Delta$  zwischen undeformierter und rotierter Normale und damit unabhängig ist von dem als klein vorausgesetzten Winkel  $\varepsilon^\Delta$  bzw. der Schubverzerrung  $\frac{E_0^\Delta}{F_3^\Delta}$ . In Analogie zur linearen Theorie ist es jedoch zweckmäßig, den Verformungsvorgang zu beschreiben durch die 3 Verschiebungskomponenten  $U_0^{\text{N}}$  der Schalenmittelfläche und einem Rotationstensor bzw. Rotationswinkel  $\beta^\Delta$ , der direkt den Zusammenhang zwischen undeformiertem und deformiertem Normalen- bzw. Tangentenvektor herstellt. Aus diesen Gründen werden folgende Transformationen der unabhängigen Rotationsvariablen durchgeführt

$$\begin{aligned} \alpha^{\text{N}} &= \mathcal{R}^{\text{N}} - \varepsilon^\Delta \mathcal{J}_\Delta^{\text{N}} = \mathcal{R}^{\text{N}} - F_3^\Delta \mathcal{J}_\Delta^{\text{N}} \\ \beta^{\text{N}} &= \mathcal{R}^{\text{N}} + \varepsilon^\Delta \mathcal{J}_\Delta^{\text{N}} = \mathcal{R}^{\text{N}} + F_3^\Delta \mathcal{J}_\Delta^{\text{N}} \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Mit diesen lassen sich modifizierte Rotationstensoren angeben, mit deren Hilfe folgende rotierte Basisvektoren, ebenfalls in Abb. 5 skizziert, angegeben werden können:

1. das in  $\frac{C}{0K}$  rotierte Dreibein, so definiert, daß  $\bar{\underline{C}}_3 \equiv \underline{\bar{C}}_3$  in Richtung des verzerrten Normalenvektors  $\underline{C}_3$  zeigt,

$$\bar{\underline{C}}_{0K} = \bar{\underline{R}}^{\text{R}} \cdot \kappa (\beta^{\text{N}}) \underline{E}_{\text{R}} \quad (5.2.33)$$



2. das in  $\hat{C}_{\sigma K}$  rotierte Dreibein, so definiert, daß  $\hat{C}_{\sigma \Delta}$  in der Tangentialebene der verformten Schalenmittelfläche zu liegen kommt,

$$\hat{C}_{\sigma \kappa} = \hat{R}_{\kappa}^R (\alpha^N) \underline{H}_R \quad (5.2.34)$$

Mit (5.2.32) und (3.2.15) ließen sich  $\bar{R}_{\kappa}^R$  und  $\hat{R}_{\kappa}^R$  ermitteln, da jedoch  $\epsilon^{\Delta}$  bzw.  $F_{\sigma 3}^{\Delta}$  klein sind, lassen sie sich direkt angeben. Aus (5.2.26), (5.2.27) und Abb. 5 liest man ab

$$\underline{C}_3 = F_3^{\Delta} \bar{C}_3 = (R_{\Delta}^N F_3^{\Delta} + R_{\Delta}^N) \underline{H}_N \quad (5.2.35)$$

$$\hat{C}_{\sigma \Delta} = \underline{C}_{\sigma \Delta}^* + F_{\sigma \Delta}^{\Delta} \underline{C}_3^* = (R_{\Delta}^N + F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta}^N) \underline{H}_N \quad (5.2.36)$$

und der Vergleich von (5.2.33) mit (5.2.35) und (5.2.34) mit (5.2.36) liefert

$$F_3^{\Delta} \bar{R}_{\Delta 3}^R = R_{\Delta 3}^R F_3^{\Delta} + R_{\Delta 3}^R$$

bzw. da

$$\bar{F}_3^{\Delta} \approx 1 - F_{\sigma 3}^{\Delta} \approx 1$$

$$\bar{R}_{\Delta 3}^R = R_{\Delta 3}^R F_3^{\Delta} + R_{\Delta 3}^R \quad (5.2.37)$$

und

$$\hat{R}_{\Delta}^N = R_{\Delta}^N + F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta}^N \quad (5.2.38)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\hat{R}_{\Delta(\alpha N)}^N$  und  $\bar{R}_{\Delta(\beta N)}^N$  folgt wiederum aus Abb. 5, denn es gilt auch

$$\hat{C}_{\sigma \Delta} = \bar{C}_{\sigma \Delta} + 2F_{\sigma \Delta}^{\Delta} \bar{C}_3$$

und mit (5.2.33)

$$\hat{C}_{\sigma \Delta} = (\bar{R}_{\Delta}^N + 2F_{\sigma \Delta}^{\Delta} \bar{R}_{\Delta 3}^N) \underline{H}_N \quad (5.2.39)$$

Demnach gilt

$$\hat{R}_{\Delta}^N = R_{\Delta}^N + F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta 3}^N = \bar{R}_{\Delta}^N + 2F_{\sigma \Delta}^{\Delta} \bar{R}_{\Delta 3}^N \quad (5.2.40)$$

(5.2.37) in (5.2.40) eingesetzt, ergibt die endgültige Form

$$\bar{R}_{\Delta}^N = R_{\Delta}^N - F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta 3}^N$$

Zusammenfassend gilt also

$$\bar{R}_{\kappa}^N \Big|_{(\beta^N)} = \begin{cases} \bar{R}_{\Delta}^N = R_{\Delta}^N - F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta 3}^N \\ \bar{R}_{\Delta 3}^N = R_{\Delta 3}^N + F_{\sigma \Delta}^{\Delta} R_{\Delta}^N \end{cases} \quad (5.2.41)$$

bzw.

$$R^N_{\kappa(\lambda^N)} = \begin{cases} R^N_{\Delta} = \bar{R}^N_{\Delta} + F^3_{\Delta} \bar{R}^N_3 \\ R^N_3 = \bar{R}^N_3 - F^3_{\Delta} \bar{R}^N_{\Delta} \end{cases} \quad (5.2.42)$$

wobei für beide Rotationstensoren die Orthogonalitätsbedingung gilt

$$\bar{R}^N_{\kappa} \bar{R}^N_{NL} = R^N_{\kappa} R^N_{NL} = H_{\kappa L} \quad (5.2.43)$$

Mit (5.2.42) und (5.2.22) lassen sich die Verschiebungsgradienten angeben

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^N_{\Delta} &= R^N_{\eta} F^{\eta}_{\Delta} + R^N_3 F^3_{\Delta} = \bar{R}^N_{\eta} F^{\eta}_{\Delta} + 2F^3_{\Delta} \bar{R}^N_3 \\ \text{bzw.} \quad \mathcal{D}^N_{\Delta} &\approx \bar{R}^N_{\Delta} \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

wenn  $\mathcal{D}^N_{\Delta}$  oder  $\bar{R}^N_{\Delta}$  mit anderen kinematischen Größen in Produktform auftritt bzw. im Falle dehnungsloser Verformungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^N_{\Delta} &= R^N_{\Delta} F^{\Delta}_{\Delta} + R^N_3 F^3_{\Delta} \\ \mathcal{D}^N_{\Delta} &= \bar{R}^N_{\Delta} F^{\Delta}_{\Delta} = \bar{R}^N_{\Delta} \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

und die Verzerrungsgrößen der Schalenmittelfläche (5.2.25) ermitteln sich mit (5.2.44) und (5.2.45) unter Annahme kleiner Verzerrungen endgültig zu

$$2F_{\Delta\Delta\theta} = \mathcal{D}^N_{\Delta} \bar{R}^N_{N\theta} + \mathcal{D}^N_{\theta} \bar{R}^N_{N\Delta} \quad (5.2.46a)$$

$$F_{\Delta 3} = \mathcal{D}^N_{\Delta} R^N_{N3} = \mathcal{D}^N_{\Delta} \bar{R}^N_{N3} - F^{\eta}_{\Delta} H_{\eta 3}$$

$$\text{d. h.} \quad 2F_{\Delta\Delta 3} = \mathcal{D}^N_{\Delta} \bar{R}^N_{N3} \quad (5.2.46b)$$

$$F_{33} = \bar{F}_{33} \quad (5.2.46c)$$

während sich die Verzerrungen außerhalb der Schalenmittelfläche mit (5.2.15), (5.2.17) und (5.2.24) berechnen lassen.

Zunächst wird (5.2.29) und (5.2.22) in (5.2.15 b) eingesetzt

$$2F_{1\Delta\Theta} = \left\{ (R_{\cdot 3|\Delta}^N + R_{\cdot s}^N F_{\cdot 3|\Delta}^s) \sigma_{\Theta}^M + R_{\cdot s}^N F_{\cdot \Delta}^s \Gamma_{3\Theta}^M + \Gamma_{3\Delta}^{-N} \sigma_{\Theta}^M + \Gamma_{3\Theta}^{-N} \sigma_{\Delta}^M + (R_{\cdot 3|\Theta}^N + R_{\cdot s}^N F_{\cdot 3|\Theta}^s) \sigma_{\Delta}^M + R_{\cdot s}^N F_{\cdot \Theta}^s \Gamma_{3\Delta}^M \right\} R_{NM}$$

unter Vernachlässigung kleiner Terme, d.h.  $F_{\cdot \Delta}^s \approx \sigma_{\Delta}^s$ , mit (5.2.43) und (2.3.12) lautet diese Gleichung dann

$$2F_{1\Delta\Theta} = R_{N\Theta} R_{\cdot 3|\Delta}^N + R_{N\Delta} R_{\cdot 3|\Theta}^N + F_{\cdot 3\Theta|\Delta} + F_{\cdot 3\Delta|\Theta} - 2B_{\Delta\Theta} - B_{\Delta}^{\Pi} R_{\Pi\Theta} - B_{\Theta}^{\Pi} R_{\Pi\Delta} \quad (5.2.47)$$

bzw. unter Beachtung von (5.2.42)

$$2F_{1\Delta\Theta} = \bar{R}_{N\Theta} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^N + \bar{R}_{N\Delta} \bar{R}_{\cdot 3|\Theta}^N - 2B_{\Delta\Theta} - B_{\Delta}^{\Pi} \bar{R}_{\Pi\Theta} - B_{\Theta}^{\Pi} \bar{R}_{\Pi\Delta} \quad (5.2.48)$$

In (5.2.48) kommt der Vorteil der Definition von  $\bar{R}_{N\kappa}^N$  zur Geltung, da damit die Verzerrungsgradienten  $F_{\cdot 3\Theta|\Delta}$  entfallen. Die restlichen Verzerrungsterme sind laut Voraussetzung

$$F_{2\Delta\Theta} = F_{1\Delta 3} = 0 \quad (5.2.49a)$$

Wird jedoch Annahme 3 und 4 nicht getroffen, so würde sich (5.2.49 a), ohne auf die Berechnung im einzelnen einzugehen, ändern zu

$$2F_{2\Delta\Theta} = -\bar{R}_{Nz} \left( \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^N B_{\Theta}^z + \bar{R}_{\cdot 3|\Theta}^N B_{\Delta}^z \right) + \left( B_{\Delta}^{\Pi} B_{\Theta}^z + B_{\Theta}^{\Pi} B_{\Delta}^z \right) \bar{R}_{\Pi z} \quad (5.2.49b)$$

$$2F_{1\Delta 3} = F_{\cdot 3|\Delta}^3 = F_{\cdot 3\Delta}^3$$

Der Vergleich von (5.2.46 b) und (5.2.45) zeigt wiederum, daß

$$O(|F_{2\Delta\Theta}|) = O\left(\frac{|F_{2\Delta\Theta}|}{R}\right) = O\left(\frac{\epsilon}{R}\right)$$

und demnach  $F_{2\Delta\Theta}$  für Schalen, die im Aufgangszustand nicht allzu stark gekrümmt sind bzw. da  $F_{2\Delta\Theta}$  mit  $\max\left(\frac{h}{2}\right)^2$  multipliziert wird, auch für dünne Schalen vernachlässigt werden kann.

Mit (5.2.46) und (5.2.48) liegen die 'Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen' unter Annahme beliebig großer Verschiebungen, aber kleiner Verzerrungen der Schalenmittelfläche und beliebig großer Rotationen vor. Dabei sind nach (4.1.46)

$$\underline{D}_{\Delta}^N = \underline{\sigma}_{\Delta}^N + \underline{U}_{\Delta}^N \quad (5.2.50)$$

und der vom Rotationswinkel  $\underline{\beta}$  abhängige, jedoch auf die Schalenmittelfläche geschiftete Rotationstensor (3.2.15)

$$\bar{R}_{\kappa}^N = \underline{\sigma}_{\kappa}^N \cos \beta + \frac{\beta \underline{\sigma}_{\kappa}^N}{\beta^2} (1 - \cos \beta) + \frac{\sin \beta}{\beta} \varepsilon_{\kappa M}^N \beta^M \quad (5.2.51)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{\beta} &= \beta^N \underline{H}_N \\ \beta^2 &= \beta^N \beta_N \end{aligned} \quad (5.2.52)$$

Nach (5.2.50) und (5.2.52) ließe sich vermuten, daß die 6 unabhängigen, kinematischen Grundvariablen eines linearen Verschiebungsansatzes und die der 'Rotationstheorie' folgendermaßen zusammenhängen

	linearer Verschiebungsansatz	↔	Rotationstheorie
a)	$\underline{U}_{\Delta}^N$	↔	$\underline{U}_{\Delta}^N$
b)	$\underline{U}_1^N$	↔	$\beta^N$

Diese Zuordnung ist jedoch für b) und  $N = 3$  nicht richtig, denn die Rotation um die Normale ( $\beta^3$ ) und  $\underline{U}_1^3$  sind grundsätzlich verschiedenartige Verschiebungsgrößen und demnach muß  $\beta^3$  eine abhängige Variable sein. Diese Abhängigkeit folgt aus der Symmetriebedingung für  $F_{\Delta\theta}^N = F_{\theta\Delta}^N$  und demnach aus (5.2.46 a) zu

$$\underline{D}_{\Delta}^N \bar{R}_{N\theta} - \underline{D}_{\theta}^N \bar{R}_{N\Delta} = 0 \quad (5.2.53)$$

mit

$$\bar{R}_{N\Delta} = \underline{H}_{N\Delta} \cos \beta + \frac{\beta \underline{H}_{N\Delta}}{\beta^2} (1 - \cos \beta) + \frac{\sin \beta}{\beta} \varepsilon_{\pi\Delta 3} (\beta^3 \underline{\sigma}_N^{\pi} - \beta^{\pi} \underline{\sigma}_N^3)$$

$$\underline{D}_{\Delta}^N = \underline{\sigma}_{\Delta}^N + \underline{U}_{\Delta}^N$$

(5.2.53) stellt eine Bestimmungsgleichung für  $\beta^3$  dar, wenn  $\beta^{\Pi}$  und  $U_0^N$  gegeben sind. Im Falle infinitesimaler Rotationen und Verzerrungen geht diese in die bekannte Form über

$$\text{mit } \cos \beta \approx 1 \rightarrow \bar{R}_{N\Delta} \approx F_{N\Delta} + \varepsilon_{T\Delta} (\beta^3 d_N^{\bar{\pi}} - \beta^{\bar{\pi}} d_N^3)$$

wird (5.2.53)

$$D_{\theta\Delta} - D_{\Delta\theta} + \beta^3 (\varepsilon_{T\theta} D_{\Delta}^{\bar{\pi}} - \varepsilon_{T\Delta} D_{\theta}^{\bar{\pi}}) + \beta^{\bar{\pi}} (\varepsilon_{T\theta} D_{\Delta}^3 - \varepsilon_{T\Delta} D_{\theta}^3) = 0$$

unter Vernachlässigung von quadratischen Termen in den Verschiebungsgrößen, z. B.

$$\beta^3 \varepsilon_{T\theta} D_{\Delta}^{\bar{\pi}} = \beta^3 \varepsilon_{T\theta} (d_{\Delta}^{\bar{\pi}} + U_{\Delta}^{\bar{\pi}}) \approx \beta^3 \varepsilon_{\Delta\theta}$$

$$\beta^{\bar{\pi}} \varepsilon_{T\theta} D_{\Delta}^3 = \beta^{\bar{\pi}} \varepsilon_{T\theta} U_{\Delta}^3 \approx 0$$

folgt daraus

$$2\beta^3 \varepsilon_{\Delta\theta} = D_{\Delta\theta} - D_{\theta\Delta} = 2\omega_{\Delta\theta}$$

bzw. nach Multiplikation mit  $\varepsilon^{\Delta\theta}$

$$\beta^3 = \frac{1}{4} \varepsilon^{\Delta\theta} (D_{\Delta\theta} - D_{\theta\Delta}) = \frac{1}{4} \varepsilon^{\Delta\theta} (U_{\Delta}^{\theta} - U_{\theta}^{\Delta}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\Delta\theta} U_{\theta}^{\Delta} \quad (5.2.54)$$

Dies ist die in der üblichen Schalentheorie kleiner Verschiebungen benutzte Relation für die Rotation um die Normale, z. B. Koiter [8].

Die unabhängigen kinematischen Variablen sind also neben  $U_0^N$  und  $\beta^{\Delta}$ ,  $U_1^3$  oder  $F_{03}^3$ , denn nach (5.2.45) und (4.1.46) gilt

$$D_{\circ 3}^N = d_3^N + U_1^N = \bar{R}_{\circ 3}^N F_{\circ 3}^3$$

und für  $N = 3$

$$1 + U_1^3 = \bar{R}_{\circ 3}^3 F_{\circ 3}^3 \quad (5.2.55)$$

d. h. da  $\bar{R}_{\circ 3}^3$  nur von  $\beta^{\Delta}$  und mit (5.2.53) von  $U_0^N$  abhängt, kann nach (5.2.55) entweder  $U_1^3$  oder  $F_{\circ 3}^3$  als 6. kinematische Variable gewählt werden.

Für den Rotationstensor gilt, unabhängig über die Annahme bezüglich der Größenordnung von  $U_1^3$  bzw.  $F_{\circ 3}^3$ , die Orthogonalitätsbedingung (5.2.43),

aus der speziell für  $K = L = 3$  folgt

$$1 = \bar{R}_{\cdot 3}^N \bar{R}_{N3} = \bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} \bar{R}_{\ominus 3} + \bar{R}_{\cdot 3}^{\Delta} \bar{R}_{\Delta 3}$$

$$\leadsto \bar{R}_{\cdot 3}^{\Delta} = \bar{R}_{\Delta 3} = \sqrt{1 - \bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} \bar{R}_{\ominus 3}} \quad (5.2.56)$$

Bisher wurde von der Annahme 5

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{E}_{\ominus 33} &= 0 \quad \xrightarrow{(5.2.16)} \bar{F}_{\ominus 33} = 1 \\ \text{b) } \bar{E}_{\Delta 3} &= 0 \quad \leadsto \bar{F}_{\Delta 3} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

noch kein Gebrauch gemacht. Demnach sind 6 Gleichgewichtsbedingungen zugeordnet den 6 unabhängigen kinematischen Variablen zu erwarten. Wird (5.2.57 a) zusätzlich als geometrische Zwangsbedingung eingebaut, so ist nach (5.2.55)  $U_1^3$  keine unabhängige Variable und demnach sind nur 5 Gleichgewichtsbedingungen abzuleiten. Dies soll im folgenden Kapitel geschehen; während im Falle von (5.2.57 b)  $\beta^{\Delta} = \beta^{\Delta} (U_0^N)$  aus (5.2.46 b) und somit nur 3 Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln wären.

Im Kapitel 4.2 wurde gezeigt, daß 6 Verträglichkeitsbeziehungen für die Verzerrungen existieren. 5 dieser Gleichungen, nämlich (4.2.12) und (4.2.19), wurden in den bisherigen Ableitungen der kinematischen Beziehungen benutzt und sind demnach nicht mehr von Interesse. Es verbleibt somit nur noch eine Verträglichkeitsbedingung - die in Tabelle 2 mit Gleichung 1 bezeichnete. Diese soll hier abgeleitet werden, jedoch nicht über den in Kapitel 4.2 beschriebenen Weg.

Aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitung für den Ortsvektor zur deformierten Schalenmittelfläche folgt

$$\bar{P}_{\ominus, \Delta \ominus} - \bar{P}_{\ominus, \ominus \Delta} = \varepsilon^{\Delta \ominus} \bar{P}_{\ominus, \Delta \ominus} = 0 \quad (5.2.58)$$

nach (4.2.9) ist

$$\bar{P}_{\ominus, \Delta} = \bar{C}_{\ominus \Delta}$$

so daß (5.2.58) wird

$$\varepsilon^{\Delta \ominus} \bar{C}_{\ominus \Delta, \ominus} = 0$$

mit (5.2.5 a) und (5.2.22)

$$\underline{C}_{\sigma\Delta} = \underline{D}_{\sigma\Delta}^N \underline{H}_N = R_{\sigma s}^N F_{\sigma\Delta}^S \underline{H}_N$$

so daß

$$\underline{C}_{\sigma\Delta,\theta} = \left( R_{\sigma s,\theta}^N F_{\sigma\Delta}^S + R_{\sigma s}^N F_{\sigma\Delta,\theta}^S \right) \underline{H}_N + R_{\sigma s,\theta}^N F_{\sigma\Delta}^S \underline{H}_{N,\theta}$$

mit

$$R_{\sigma s,\theta}^N = R_{\sigma s}^N |_{\theta} - \Gamma_{\theta M}^N R_{\sigma s}^M + \Gamma_{\theta S}^M R_{\sigma M}^N$$

$$F_{\sigma\Delta,\theta}^S = F_{\sigma\Delta}^S |_{\theta} - \Gamma_{\theta M}^S F_{\sigma\Delta}^M + \Gamma_{\theta\Delta}^M F_{\sigma M}^S$$

$$\underline{H}_{R,\theta} = \Gamma_{R\theta}^N \underline{H}_N$$

und demnach unter Beachten von

$$\varepsilon^{\Delta\theta} \Gamma_{\theta\Delta}^M = 0$$

die Verträglichkeitsbedingung lautet

$$\varepsilon^{\Delta\theta} \underline{C}_{\sigma\Delta,\theta} = \varepsilon^{\Delta\theta} \left( R_{\sigma s}^N |_{\theta} F_{\sigma\Delta}^S + R_{\sigma s}^N F_{\sigma\Delta,\theta}^S \right) = 0 \quad (5.2.59)$$

Wird in (5.2.59) die Voraussetzung kleiner Verzerrungen eingearbeitet, so ergibt sich mit (5.2.42)

entweder

$$\varepsilon^{\Delta\theta} \left( R_{\sigma\Delta}^N |_{\theta} + R_{\sigma s}^N F_{\sigma\Delta}^S |_{\theta} + R_{\sigma s}^N |_{\theta} F_{\sigma\Delta}^S \right) = 0 \quad (5.2.60)$$

oder

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\Delta\theta} \left( \bar{R}_{\sigma\Delta}^N |_{\theta} + 2 F_{\sigma\Delta}^3 |_{\theta} \bar{R}_{\sigma s}^N + 2 F_{\sigma\Delta}^3 \bar{R}_{\sigma s}^N |_{\theta} + \bar{R}_{\sigma\pi}^N F_{\sigma\Delta}^{\pi} |_{\theta} \right) &= 0 \\ \varepsilon^{\Delta\theta} \left( \bar{R}_{\sigma\Delta}^N |_{\theta} + 2 E_{\sigma\Delta}^3 |_{\theta} \bar{R}_{\sigma s}^N + 2 E_{\sigma\Delta}^3 \bar{R}_{\sigma s}^N |_{\theta} + \bar{R}_{\sigma\pi}^N E_{\sigma\Delta}^{\pi} |_{\theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

Beachtenswert ist, daß in der Verträglichkeitsbedingung (5.2.61) explizit die Verzerrungen der Schalenmittelfläche vorkommen, während die Biegeverzerrungen  $F_{\sigma\Delta}^{\pi}$  nur implizit über die Rotationsgradienten enthalten sind und somit (5.2.61) nicht nur eine, sondern 3 Verträglichkeitsbedingungen darstellt.

5.3 Statik und Materialgesetz

Die Vorgehensweise hier ist analog zu Kapitel 4.3 unter Berücksichtigung von konjugierten Größen und den speziellen Voraussetzungen in 5.1. Zusätzlich sei (5.2.57 a) angenommen.

5.3.1 Schnittgrößen und konstitutive Gleichungen

Die virtuelle innere potentielle Energie ist nach (3.3.2.9) mit (3.3.2.10)

$$\delta \Pi^{(i)} = \int_V \delta \Pi^{*(i)} dV = \int_V S^{\bar{J}\bar{M}} \delta F_{\bar{J}\bar{M}} dV$$

bzw. auf das Koordinatensystem der Schalenmittelfläche transformiert

$$\delta \Pi^{(i)} = \iiint_{F_h} \delta \Pi^{*(i)} S dX^3 dF_3 = \iint_F \delta \Pi_{SCH}^{*(i)} dF \quad (5.3.1.1)$$

mit

$$\delta \Pi_{SCH}^{*(i)} = \int_h S^{\bar{J}\bar{M}} \delta F_{\bar{J}\bar{M}} S dX^3 \quad (5.3.1.2)$$

Mit (5.2.13), (5.2.21) ergeben sich entsprechend (4.3.1.5) und (4.3.1.6) die Schnittgrößen zu

$$\begin{aligned} \overset{F}{M}_0^{\Delta\theta} &= \int_h S^{\bar{\Delta}\bar{\theta}} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{\theta}}^{\theta} S dX^3 \\ \overset{F}{M}_1^{\Delta\theta} &= \int_h S^{\bar{\Delta}\bar{\theta}} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} A_{\bar{\theta}}^{\theta} S X^3 dX^3 \\ \overset{F}{M}_0^{2\Delta} &= \overset{F}{M}_0^{\Delta\Delta} = \int_h S^{\bar{\Delta}\bar{\Delta}} A_{\bar{\Delta}}^{\Delta} S dX^3 \\ \overset{F}{M}_0^{33} &= \int_h S^{33} S dX^3 \end{aligned} \quad (5.3.1.3)$$

und die konstitutiven Gleichungen entsprechend (4.3.1.7)

$$\overset{F}{M}_{\varepsilon}^{KM} = \frac{\partial \Pi_{SCH}^{*(i)}}{\partial F_{KM}} \quad (5.3.1.4)$$



Nun gilt

$$\frac{\partial \bar{\pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial F_{\varepsilon KM}} = \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{\partial \bar{\pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{IJ}} \frac{\partial F_{IJ}}{\partial F_{\varepsilon KM}} = \sum_{\nu=0}^{2m} M_{\nu}^{K IJ} \frac{\partial F_{IJ}}{\partial F_{\varepsilon KM}} \quad (5.3.1.5)$$

Für den gewählten linearen Verschiebungsansatz und der Voraussetzung kleiner Verzerrungen folgt jedoch nach (5.2.19) und (5.2.20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu \Delta \theta}}{\partial F_{\varepsilon \Delta \theta}} &= \delta_{\nu}^{\varepsilon} \quad \text{für } \nu, \varepsilon = 0, 1 \\ \frac{\partial F_{\nu I 3}}{\partial F_{\varepsilon K 3}} &= \delta_{\nu}^{\varepsilon} \delta_{I}^K \end{aligned} \quad (5.3.1.6)$$

so daß nach Tab. 3 und (5.3.1.5), (5.3.1.4)

$$\begin{aligned} \overset{F}{M}_0^{\Delta \theta} &= \overset{K}{M}_0^{\Delta \theta} = N^{\Delta \theta} = \frac{\partial \bar{\pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{\Delta \theta}} \\ \overset{F}{M}_1^{\Delta \theta} &= \overset{K}{M}_1^{\Delta \theta} = M^{\Delta \theta} = \frac{\partial \bar{\pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_1^{\Delta \theta}} \\ \overset{F}{M}_0^{\Delta 3} &= \overset{K}{M}_0^{\Delta 3} = Q^{\Delta} = \frac{\partial \bar{\pi}_{SCH}^{*(i)}}{\partial E_{\Delta 3}} \\ \overset{F}{M}_0^{33} &= \overset{K}{M}_0^{33} = L^{33} \end{aligned} \quad (5.3.1.7)$$

für  $L^{33}$  entfällt die konstitutive Gleichung (5.3.1.4) wegen (5.2.54 a). Mit den Annahmen  $E_{\nu 33} = E_{\nu \Delta \theta} \approx 0$  vereinfacht sich das Potential (4.3.3.3) um einige wenige Terme, eine Abhängigkeit der Membrankräfte von den Biegedeformationen bzw. der Biegemomente von den Dehnungen bleibt jedoch bestehen. Wird jedoch die Annahme getroffen, daß  $\frac{h}{R} \ll 1$ , so läßt sich das Potential für sehr dünne oder im Ausgangszustand schwach gekrümmte Schalen vereinfacht darstellen als

$$\bar{\pi}_{SCH}^{*(i)} = \frac{Gh}{2} \left\{ K_0^{\Delta \theta r \tau} E_{\Delta \theta} E_{r \tau} + 4 K_0^{\Delta 3 r 3} E_{\Delta 3} E_{r 3} + \frac{h^2}{12} K_0^{\Delta \theta r \tau} E_{\Delta \theta} E_{r \tau} \right\} \quad (5.3.1.8)$$

eine Form, die in der Literatur häufig zugrunde gelegt wird. Naghdi [12], Koiter [46], Krätzig [65] und Waltersdorf [67] beschäftigen sich mit

dem Problem der Approximation der konstitutiven Gleichungen ausführlich.

### 5.3.2 Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen

Für den gewählten linearen Verschiebungs- und Verzerrungsansatz (5.2.21) wird mit (5.3.1.1) und (5.3.1.7) die virtuelle innere potentielle Energie

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{(i)} &= \iint_F \delta \Pi_{SCH}^{*(i)} dF_3 = \iint_F \hat{M}_\varepsilon^{\kappa\mu} \delta F_{\kappa\mu} dF_3 \\ \delta \Pi^{(i)} &= \iint_F \left\{ N^{\Delta\Theta} \delta F_{\Delta\Theta} + 2 Q^{\Delta} \delta F_{\Delta 3} + M^{\Delta\Theta} \delta F_{\Delta\Theta} \right\} dF_3 \quad (5.3.2.1) \end{aligned}$$

Das virtuelle Potential der äußeren Kräfte folgt aus (4.3.2.4), (4.3.2.5) und (3.3.2.1) mit folgenden Abkürzungen

$$P^j = \hat{P}_0^j = \hat{P}_+^j S\left(\frac{h}{2}\right) + \hat{P}_-^j S\left(-\frac{h}{2}\right)$$

$$M^j = \hat{P}_1^j = \left( \hat{P}_+^j S\left(\frac{h}{2}\right) - \hat{P}_-^j S\left(-\frac{h}{2}\right) \right) \frac{h}{2}$$

$$\hat{N}^j = \hat{T}_0^j = \int_h \hat{T}^j dX^3$$

$$\hat{M}^j = \hat{T}_1^j = \int_h \hat{T}^j X^3 dX^3$$

$$-\delta H^{(a)} = \delta \Pi^{(a)} = - \iint_F \left\{ P^j \delta u_{0j} + M^j \delta u_{1j} \right\} dF_3 - \int_S \left\{ \hat{N}^j \delta u_{0j} + \hat{M}^j \delta u_{1j} \right\} dS \quad (5.3.2.1)$$

Die in (5.3.2.1) und (5.3.2.3) virtuellen Verzerrungs- und Verschiebungsgrößen lassen sich auf die unabhängigen kinematischen Variablen transformieren. Da die virtuellen Größen

1. klein,
2. gedacht,
3. kinematisch möglich

sein sollen, folgt zunächst aus (5.2.51) für  $N = \Theta$ ,  $K = 3$

$$\bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} = \frac{\beta^{\ominus} \beta_3}{\beta^2} (1 - \cos \beta) + \frac{\sin \beta}{\beta} \varepsilon_{3\pi}^{\ominus} \beta^{\pi}$$

und für virtuelle Rotationen

$$d\bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} = -\varepsilon_{\cdot \pi}^{\ominus} d\beta^{\pi} = d(\varepsilon^{\pi \ominus} \beta_{\pi})$$

bzw.

$$d\beta^{\pi} = \varepsilon_{\cdot \ominus}^{\pi} d\bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} = d(\varepsilon^{\pi \ominus} \bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus}) \quad (5.3.2.4)$$

d. h. die virtuellen Rotationen  $d\beta^{\pi}$  können durch einen Anteil des virtuellen Rotationstensors  $d\bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus}$  ersetzt werden.

Aus (5.2.45) und (4.1.43) ergibt sich für  $F_{\circ 3}^3 = 1$

$$D_{\circ N_3} = A_{N_3} + U_{\cdot N} = \bar{R}_{N_3}$$

und damit

$$dU_{\cdot N} = d\bar{R}_{N_3} \quad (5.3.2.5)$$

Da jedoch die Orthogonalitätsbedingung für den Rotationstensor zu beachten ist, läßt sich aus (5.2.56) berechnen

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{33})^2 &= 1 - \bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus} \bar{R}_{\ominus 3} \\ d\bar{R}_{33} &= -\frac{\bar{R}_{\cdot 3}^{\ominus}}{\bar{R}_{33}} d\bar{R}_{\ominus 3} \end{aligned} \quad (5.3.2.6)$$

Die virtuellen Verzerrungsgrößen in (5.3.2.1) lauten mit (5.2.46) und (5.2.48)

$$2 dF_{\circ \Delta \ominus}^{\cdot} = (\bar{R}_{N\ominus} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\ominus}^{\pi}) d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot \pi}^{\cdot} \quad (5.3.2.7a)$$

da nach (5.2.44)

$$d\bar{R}_{N\ominus} d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot \Delta}^{\cdot} + d\bar{R}_{N\Delta} d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot \ominus}^{\cdot} \approx d\bar{R}_{N\ominus} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\cdot} + d\bar{R}_{N\Delta} \bar{R}_{\cdot \ominus}^{\cdot} = d(\bar{R}_{N\ominus} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\cdot}) = 0$$

$$2 dF_{\circ \Delta 3}^{\cdot} = \bar{R}_{N_3} d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot \Delta}^{\cdot} + d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot N_3}^{\cdot} \approx \bar{R}_{N_3} d_{\circ}^{\cdot} D_{\cdot \Delta}^{\cdot} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\circ}^{\cdot} \bar{R}_{\cdot 3}^{\cdot} \quad (5.3.2.7b)$$

$$\begin{aligned}
 dF_{\Delta\Theta} &= (\bar{R}_{N\Theta} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\Theta}^{\pi}) d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\pi} + \bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\Delta} d\bar{R}_{N\Theta} + \bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\Theta} d\bar{R}_{N\Delta} \\
 &\quad - B_{\Delta}^{\pi} d\bar{R}_{\pi\Theta} - B_{\Theta}^{\pi} d\bar{R}_{\pi\Delta} \\
 dF_{\Delta\Theta} &= (\bar{R}_{N\Theta} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\Theta}^{\pi}) d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\pi} + (\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\Delta} d_{\Theta}^{\pi} + \bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\Theta} d_{\Delta}^{\pi}) dD_{\Theta}^{\pi} \\
 &\quad - (B_{\Delta}^{\pi} d_{\Theta}^{\pi} + B_{\Theta}^{\pi} d_{\Delta}^{\pi}) dD_{\pi\Sigma} \quad (5.3.2.7c)
 \end{aligned}$$

Somit läßt sich die gesamte virtuelle potentielle Energie (5.3.2.1) und (5.3.2.3) angeben.

$$\begin{aligned}
 d^{\circ}\pi &= d^{\circ}\pi^{(i)} + d^{\circ}\pi^{(a)} \\
 &= \iint_F \left\{ N^{\Delta\Theta} \frac{1}{2} (\bar{R}_{N\Theta} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\Theta}^{\pi}) dD_{\Theta}^{\pi} + Q^{\Delta} \bar{R}_{N3} dD_{\Theta}^{\pi} + \right. \\
 &\quad + Q^{\Delta} \bar{R}_{N\Delta} d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} + M^{\Delta\Theta} \frac{1}{2} (\bar{R}_{N\Theta} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\Theta}^{\pi}) d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\pi} + \\
 &\quad + M^{\Delta\Theta} \frac{1}{2} \left[ (\bar{R}_{N3|\Delta} d_{\Theta}^{\pi} + \bar{R}_{N3|\Theta} d_{\Delta}^{\pi}) dD_{\Theta}^{\pi} - (B_{\Delta}^{\pi} d_{\Theta}^{\pi} + \right. \\
 &\quad \left. + B_{\Theta}^{\pi} d_{\Delta}^{\pi}) dD_{\pi\Sigma} \right] \left. \right\} dF_3 - \\
 &= \iint_F \left\{ P^2 dU_{\Theta} + M^2 d\bar{R}_{33} \right\} dF_3 - \int_S \left\{ \hat{N}^2 dU_{\Theta} + \hat{M}^2 d\bar{R}_{33} \right\} dS = 0 \quad (5.3.2.8)
 \end{aligned}$$

Für das mit  $d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\pi}$  behaftete Integral wird eine partielle Integration durchgeführt, wobei gleichzeitig die Symmetriebedingung für die Schnittgrößen eingearbeitet wird.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_F M^{\Delta\Theta} \frac{1}{2} (\bar{R}_{N\Theta} d_{\Delta}^{\pi} + \bar{R}_{N\Delta} d_{\Theta}^{\pi}) d\bar{R}_{\cdot 3}^{\pi} |_{\pi} dF_3 = \iint_F M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\pi} d\bar{R}_{N3} |_{\pi} dF_3 \\
 &= \iint_F (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\pi} d\bar{R}_{N3}) |_{\pi} dF_3 - \iint_F (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\pi}) |_{\pi} d\bar{R}_{N3} dF_3
 \end{aligned}$$

und mit dem Gaußschen Satz

$$I_1 = \int_S M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\pi} N_{\pi} d\bar{R}_{N3} dS - \iint_F (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\cdot \Delta}^{\pi}) |_{\pi} d\bar{R}_{N3} dF_3$$

Damit und mit der Symmetriebedingung für die Schnittgrößen sowie (4.1.4 b) und (5.3.2.6) wird (5.3.2.8)

$$\begin{aligned} d\mathcal{T} = & \iint_F \left\{ \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right] \sigma_{\theta}^N \right|_{\Pi} \\ & + \left[ Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N) \right|_{\Pi} - M^N \right] \sigma_{R_{N3}} - P^N \sigma_{U_N} \Big\} dF_3 \\ & + \int_S \left\{ -\hat{N}^N \sigma_{U_N} + \left[ M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N N_{\Pi} - \hat{M}^N \right] \sigma_{R_{N3}} \right\} dS = 0 \quad (5.3.2.9) \end{aligned}$$

Abermalige partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Satzes für

$$\begin{aligned} I_2 = & \iint_F \left\{ \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right] \sigma_{\theta}^N \right|_{\Pi} dF_3 \\ = & \iint_F \left\{ \left[ \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right) \sigma_{\theta}^N \right] \right|_{\Pi} - \\ & - \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right] \Big|_{\Pi} \sigma_{U_N} \Big\} dF_3 \\ = & \int_S \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right] N_{\Pi} \sigma_{U_N} dS - \\ & - \iint_F \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right] \Big|_{\Pi} \sigma_{U_N} dF_3 \end{aligned}$$

und mit (5.3.2.6) wird (5.3.2.9) endgültig

$$\begin{aligned} d\mathcal{T} = & \iint_F \left\{ - \left[ \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right) \right] \Big|_{\Pi} + P^N \right\} \sigma_{U_N} + \\ & + \left[ Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^{\theta} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\theta}) \right] \Big|_{\Pi} - M^{\theta} - \frac{\bar{R}_{\Delta}^{\theta}}{\bar{R}_{33}} \left\langle Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^3 - \right. \\ & \left. - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^3) \right|_{\Pi} - M^3 \Big\rangle \sigma_{\bar{R}_{\theta 3}} \Big\} dF_3 + \\ & + \int_S \left\{ \left[ \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^N + Q^{\pi} \bar{R}_{\Delta}^N + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\Delta}^N |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\varepsilon} \sigma_{\varepsilon}^N) \right) N_{\Pi} - \hat{N}^N \right] \sigma_{U_N} \right. \\ & \left. + \left[ M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\theta} N_{\Pi} - \hat{M}^{\theta} - \frac{\bar{R}_{\Delta}^{\theta}}{\bar{R}_{33}} \left( M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^3 N_{\Pi} - \hat{M}^3 \right) \right] \sigma_{\bar{R}_{\theta 3}} \right\} dS = 0 \end{aligned} \quad (5.3.2.10)$$

Nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung folgen die statischen Feldgleichungen und Randbedingungen aus (5.3.2.10), da (5.3.2.4) gilt.

Dies sind demnach die

3 Kräftegleichgewichtsbedingungen

$$\left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{N}} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}} + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \mathcal{J}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}}) \right] \Big|_{\pi} + \rho^{\mathcal{N}} = 0 \quad (5.3.2.11)$$

zugehörige Randbedingung

$$\left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{N}} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}} + M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}}|_{\Delta} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \mathcal{J}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N}}) \right] N_{\pi} = \hat{N}^{\mathcal{N}} \quad (5.3.2.12)$$

2 Momentengleichgewichtsbedingungen

$$\bar{R}_{33} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\Theta} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\Theta}) \Big|_{\pi} - M^{\Theta} \right] - \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}}) \Big|_{\pi} - M^{\mathcal{Z}} \right] = 0 \quad (5.3.2.13)$$

zugehörige Randbedingungen

$$M^{\pi\Delta} (\bar{R}_{33} \bar{R}_{\Delta}^{\Theta} - \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}}) N_{\pi} = \hat{M}^{\Theta} \bar{R}_{33} - \hat{M}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta} \quad (5.3.2.14)$$

Werden die kovarianten Raumableitungen in (5.3.2.11) und (5.3.2.14) mit Hilfe der im Anhang aufgeführten Formeln in kovariante Flächenableitungen umgeschrieben, so lauten die

2 Kräftegleichgewichtsbedingungen in der Tangentialebene der Schalenmittelfläche, d.h.  $N = \Theta$

$$\left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\Theta} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta} + (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta}|_{\Delta} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\Theta} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\Theta} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\Theta}) M^{\pi\Delta} \right] \Big|_{\pi} - \\ - \mathcal{B}_{\pi}^{\Theta} \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}|_{\Delta} + \mathcal{B}_{\mathcal{Z}\Delta} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}) M^{\pi\Delta} \right] + \rho^{\Theta} = 0 \quad (5.3.2.11a)$$

1 Kräftegleichgewichtsbedingung normal zur Schalenmittelfläche, d.h.  $N = \mathcal{Z}$

$$\left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}|_{\Delta} + \mathcal{B}_{\mathcal{Z}\Delta} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}) M^{\pi\Delta} \right] \Big|_{\pi} + \\ + \mathcal{B}_{\pi\mathcal{Z}} \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} + Q^{\pi} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + (\bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}|_{\Delta} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} + \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}} \bar{R}_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} - \mathcal{B}_{\Delta}^{\mathcal{Z}}) M^{\pi\Delta} \right] + \rho^{\mathcal{Z}} = 0 \quad (5.3.2.11b)$$

2 Momentengleichgewichtsbedingungen um Basisvektoren der Schalenmittelfläche

$$\begin{aligned} & \bar{R}_{33} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta}) \right]_{\parallel \pi} + B_{\pi}^{\ominus} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta} M^{\pi\Delta} - M^{\ominus} \Big] - \\ & - \bar{R}^{\ominus}_{\Delta} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta}) \right]_{\parallel \pi} - B_{\pi\Delta} \bar{R}^{\ominus}_{\Delta} M^{\pi\Delta} - M^{\ominus} \Big] = 0 \quad (5.3.2.13 a) \end{aligned}$$

Die 5 Gleichgewichtsbedingungen (5.3.2.11 und 13) sind

1. nichtlinear,
2. unabhängig von den Verschiebungen der Schalenmittelfläche,
3. nur abhängig von den Rotationen und damit den Verschiebungsgradienten, da der Einfluß der Verzerrungen der Schalenmittelfläche vernachlässigt wurde.

5.4 Zusammenfassung der Ergebnisse der speziellen Schalentheorie großer Rotationen, aber kleiner Verzerrungen

Die Bilanz für die spezielle Schalentheorie, die im wesentlichen der allgemeinen Schalentheorie bei linearem Verschiebungsansatz (4.1) mit der zusätzlichen Voraussetzung  $E_{33} \approx 0$  entspricht, ist in Tabelle 5 angegeben.

	34 Unbekannte	34 Gleichungen	Bemerkung
Statik	9 Schnittgrößen $N^{\Delta\ominus}, Q^{\Delta}, M^{\Delta\ominus}$	5 Gleichgewichtsbedingungen (5.3.2.11) o. (5.3.2.11 a/b) (5.3.2.13) o. (5.3.2.13 a)	gelten bei Voraussetzung kleiner
Werkstoff	9 Verzerrungsgrößen $\bar{F}_{\Delta\ominus}, F_{\Delta\ominus}, F_{\Delta\ominus}$	9 konstitutive Gleichungen (5.3.1.7)	
Kinematik	7 Verschiebungsgrößen $U^{\Delta}, U^{\ominus}, \beta^{\Delta}, \beta^{\ominus}$	9 kinematische Gleichungen (5.2.46 a/b), (5.2.48)	Verzerrungen im Schalenraum
	9 Rotationsgrößen $\bar{R}^{\Delta}, R^{\ominus}$	9 Rotationsgleichungen (5.2.51) 2 Nebenbedingungen für $\beta^{\Delta}$ u. $U^{\ominus}$ (5.2.53), (5.2.55)	

Tabelle 5 a: Bilanz für spezielle Theorie dünner Schalen

Die weitere Reduktion der in Tabelle 5 zusammengestellten Gleichungen nach der Verschiebungsmethode, deren Ergebnis die 5 Gleichgewichtsbedingungen, ausgedrückt in den 5 unabhängigen kinematischen Variablen ( $U_0^{\sim}, \beta^{\Delta}$ ) wären, ist, bedingt durch die Erfüllung der Nebenbedingung (5. 2. 53), schwierig. Aus diesem Grunde dürfte eine andere Methode (Kraft- oder gemischte Methode) sinnvoller sein, weshalb in dieser Arbeit auch die Verträglichkeitsbedingung (5. 2. 58) angegeben wurde, die bei Anwendung der Kraftmethode zur Anwendung kommt. In diesen Fällen würde sich die Bilanz der Tabelle 5 bei der Kinematik ändern zu

Statik und Werkstoff	18 Unbekannte	14 Gleichungen
Kinematik	4 Verschiebungsgrößen $U_1^3, \beta^{\Delta}, \beta^3$ 9 Rotationsgrößen $\vec{R}_{\cdot K}^{\sim}$	3 kinematische Gleichungen ( 5. 2. 48) 9 Rotationsgleichungen (5. 2. 51) 3 Verträglichkeitsbedingungen (5. 2. 61) 2 Nebenbedingungen für $U_4^3$ und $\beta^3$ (5. 2. 53), (5. 2. 55)
$\Sigma$	31 Unbekannte	31 Gleichungen

Tabelle 5 b: Bilanz bei Benützung der Verträglichkeitsbedingung

Andere Reduktions- und Lösungsmethoden sind denkbar.

Neben der praktischen Anwendung der speziellen Schalentheorie, z. B. im Rahmen von Beuluntersuchungen im überkritischen Bereich bei Annahme nicht rotationssymmetrischer Beulfiguren, sollten folgende Probleme noch weiter untersucht werden;

1. Weitere Näherungen im Sinne von Koiter [46], d. h. Einfluß der Terme Moment mal Krümmung in den Kräftegleichgewichtsbedingungen.



2. In diesem Zusammenhang ist auch der Übergang zur nichtlinearen Membrantheorie sowie der Theorie des dehnungslosen Verschiebungszustandes von Interesse.
3. Näherungen im Sinne der flachen Schalentheorie und Übergang zu den Donnell'schen Gleichungen [16].
4. Neben den allgemeinen Lösungsmöglichkeiten ist vor allem die Lösung über Spannungsfunktionen, wie sie von Reissner [13] für den rotationssymmetrischen Fall angegeben wurde, von Bedeutung.
5. Im Zusammenhang mit der Voraussetzung der Kirchhoff-Loveschen Hypothese ( $F_{\Delta 3} = E_{\Delta 3} = 0$ ) sind Untersuchungen im Sinne einer geometrisch-statischen Analogie zu führen.
6. Bei der speziellen Schalentheorie ist das Problem der Randbedingungen ausführlicher zu diskutieren.
7. Statt der Annahme  $E_{33} = 0$ , sollte der Einfluß untersucht werden, wenn ein ebener Spannungszustand ( $K^{33} = 0$ ) angenommen wird.

6. Einige Sonderfälle und Grenzübergänge

6.1 Kinematische Sonderfälle

Die kinematischen Gleichungen waren

$$2F_{\Delta\theta} = D_{\Delta}^N \bar{R}_{N\theta} + D_{\theta}^N \bar{R}_{N\Delta} = 2E_{\Delta\theta} + 2H_{\Delta\theta}$$

$$2F_{\Delta\theta} = \bar{R}_{N\theta} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta} + \bar{R}_{N\Delta} \bar{R}_{\cdot 3|\theta} - 2B_{\Delta\theta} - B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{T\theta} - B_{\theta}^{\bar{r}} \bar{R}_{T\Delta} = 2E_{\Delta\theta} - 4B_{\Delta\theta}$$

$$2F_{\Delta 3} = D_{\Delta}^N \bar{R}_{N3} = 2E_{\Delta 3} \quad (6.1.1)$$

$$F_{\theta 33} = 1 \quad \text{bzw.} \quad E_{\theta 33} = 0$$

wobei

$$\bar{R}_{\cdot k}^N = d_k^N \cos \beta + \frac{(1 - \cos \beta)}{\beta^2} \beta^N \beta_k + \frac{\sin \beta}{\beta} \varepsilon_{\cdot kR}^N \beta^R \quad (6.1.2)$$

a) Übergang zur Theorie I. Ordnung, Theorie kleiner Verzerrungen und kleiner Rotationen

$$\beta \ll 1 \rightsquigarrow \cos \beta = 1; \sin \beta = \beta$$

$$\bar{R}_{\cdot k}^N = d_k^N + \varepsilon_{\cdot kR}^N \beta^R$$

Zusammen mit (4.1.4 a) wird demnach (6.1.1) unter Vernachlässigung von Produkten der Verschiebungsgrößen

$$\begin{aligned} 2E_{\Delta\theta} &= (d_{\Delta}^N + u_{\Delta}^N) (A_{N\theta} + \varepsilon_{N\theta R} \beta^R) + (d_{\theta}^N + u_{\theta}^N) (A_{N\Delta} + \varepsilon_{N\Delta R} \beta^R) \\ &= E_{\Delta\theta} \beta^3 + u_{\Delta}^N \beta^3 + \varepsilon_{\theta\Delta} \beta^3 + u_{\Delta}^N \beta^3 = u_{\Delta}^N \beta^3 + u_{\theta}^N \beta^3 \end{aligned}$$

Ausgedrückt in kovarianten Flächenableitungen

$$2E_{\Delta\theta} = u_{\Delta}^N \beta^3 + u_{\theta}^N \beta^3 - 2B_{\Delta\theta} u_{\cdot 3} \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{\Delta\Theta} &= 2 B_{\Delta\Theta} - B_{\Delta}^{\pi} (H_{\pi\Theta} + \varepsilon_{\pi\Theta}/\beta^3) - B_{\Theta}^{\pi} (H_{\pi\Delta} + \varepsilon_{\pi\Delta}/\beta^3) + \\
 &\quad + (H_{N\Theta} + \varepsilon_{N\Theta R}/\beta^R) \varepsilon_{\cdot 3\pi}^N / \beta^{\pi} |_{\Delta} + (H_{N\Delta} + \varepsilon_{N\Delta R}/\beta^R) \varepsilon_{\cdot 3\pi}^N / \beta^{\pi} |_{\Theta} \\
 &= -B_{\Delta}^{\pi} \varepsilon_{\pi\Theta} / \beta^3 - B_{\Theta}^{\pi} \varepsilon_{\pi\Delta} / \beta^3 - \varepsilon_{\Theta\pi} / \beta^{\pi} |_{\Delta} - \varepsilon_{\Delta\pi} / \beta^{\pi} |_{\Theta}
 \end{aligned}$$

mit

$$\beta^{\pi} |_{\Delta} = \beta^{\pi} |_{\Delta} - B_{\Delta}^{\pi} \beta^3$$

$$2 E_{\Delta\Theta} = \varepsilon_{\pi\Theta} / \beta^{\pi} |_{\Delta} + \varepsilon_{\pi\Delta} / \beta^{\pi} |_{\Theta} - 2 B_{\Delta}^{\pi} \varepsilon_{\pi\Theta} / \beta^3 - 2 B_{\Theta}^{\pi} \varepsilon_{\pi\Delta} / \beta^3$$

mit

$$D_{\cdot 3}^N = \bar{R}_{\cdot 3}^N$$

$$d_{\cdot 3}^N + U_{\cdot 3}^N = d_{\cdot 3}^N + \varepsilon_{\cdot 3\pi}^N / \beta^{\pi}$$

bzw.

$$U_{\cdot 3}^N = \varepsilon_{\pi\Delta} / \beta^{\pi}$$

und

$$2 / \beta^3 \varepsilon_{\Delta\Theta} = D_{\Delta\Theta} - D_{\Theta\Delta} = U_{\Delta} |_{\Theta} - U_{\Theta} |_{\Delta} = U_{\Delta} |_{\Theta} - U_{\Theta} |_{\Delta} = 2 \omega_{\Delta\Theta}$$

wird

$$2 E_{\Delta\Theta} = U_{\Theta} |_{\Delta} + U_{\Delta} |_{\Theta} + B_{\Delta}^{\pi} \omega_{\Theta\pi} + B_{\Theta}^{\pi} \omega_{\Delta\pi} \quad (6.14)$$

(6.1.3) und (6.1.4) sind dieselben kinematischen Beziehungen wie Koiter [8] sie angibt, wenn die unterschiedliche Definition bezüglich des Vorzeichens bei der Rotation  $\omega_{\Delta\Theta}$  um die Normale berücksichtigt wird.

Die Schubverzerrung wird

$$2 E_{\Theta\Delta 3} = (d_{\Delta}^N + U_{\Delta}^N |_{\Theta}) (\varepsilon_{N 3\pi} / \beta^{\pi} + H_{N3}) = -\varepsilon_{\Delta\pi} / \beta^{\pi} + U_{\Delta}^N |_{\Theta}$$

$$2 E_{\Theta\Delta 3} = U_{\Delta}^N + U_{\Theta 3, \Delta} + B_{\Delta}^{\pi} U_{\Theta}^N |_{\pi} \quad (6.15)$$

eine Beziehung, die von Naghdi [12] benutzt wird.

b) Übergang zur rotations-symmetrischen Verformung bei Rotations-schalen und damit zu den von Reissner [13] angegebenen Gleichungen

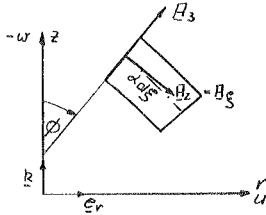
Der Ortsvektor der undeformierten Schalenmittelfläche sei beschrieben mit

$$\underline{R} = r(\xi) \underline{e}_r(\theta) + z(\xi) \underline{k}(\theta) \quad (6.1.6)$$

wobei  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{e}_\theta$ ,  $\underline{k}$  die Einheitsvektoren im Fall der Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  sind.

Es sei  $X^1 \equiv \theta$ ;  $X^2 \equiv \xi$ ;  $X^3 \equiv z$

womit die Basisvektoren werden



$$\begin{aligned} \underline{H}_1 &= r \underline{e}_\theta \\ \underline{H}_2 &= \alpha (\underline{e}_r \cos \phi + \underline{k} \sin \phi) \\ \underline{H}_3 &= \underline{e}_r \sin \phi - \underline{k} \cos \phi \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

mit  $\phi$ , dem Winkel zwischen der Rotationsachse und der Schalennormalen im undeformierten Zustand und

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{d\xi} = \alpha \cos \phi && \alpha \dots \text{der Koeffizient} \\ z' &= \frac{dz}{d\xi} = \alpha \sin \phi && \text{der Bogenlänge in} \\ &&& \text{Meridianrichtung} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

$$\alpha = \sqrt{(r')^2 + (z')^2}$$

Die nicht verschwindenden Metrik- und Krümmungskoeffizienten sowie Christoffelsymbole sind

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= r^2 & \Gamma_{12}^3 &= B_{12} = 0 \\
 A_{22} &= \alpha^2 & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{r}{\alpha} \cos \phi \\
 A_{33} &= 0 & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\alpha}{r} \cos \phi & (6.1.9) \\
 \sqrt{A} &= r \alpha & \Gamma_{22}^2 &= \frac{d\alpha}{\alpha d\xi} = \frac{\alpha'}{\alpha} \\
 \Gamma_{11}^3 &= B_{11} = -r \sin \phi & & & \\
 \Gamma_{12}^3 &= B_{22} = -\alpha \frac{d\phi}{d\xi} = -\alpha \phi' & & & 
 \end{aligned}$$

Bei rotationssymmetrischer Verformung ist der Rotationsvektor

$$\underline{\beta} = \beta^i \underline{E}_i = \beta^{(n)} \underline{e}_n$$

so daß der Betrag

$$\beta = \sqrt{\beta^i \beta^i A_{ii}} = \beta^i r$$

und die physikalische Komponente  $\beta^{(n)} = \beta^i \sqrt{A_{ii}} = \beta^i r = \beta$

und damit der Winkel zwischen Rotationsachse und verformter Normalen wird

$$\Phi = \phi + \beta$$

Die Komponenten des Rotationstensors lassen sich angeben zu

$$\bar{R}_{N1}^N = \delta_{N1}^N \cos \beta + \frac{(1 - \cos \beta)}{\beta^2} \beta^N \beta_{N1} + \frac{\sin \beta}{\beta} \varepsilon^N_{12} \beta^2$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{11}^1 &= 1 & \bar{R}_{22}^2 &= 0 & \bar{R}_{33}^3 &= 0 \\
 \bar{R}_{21}^2 &= 0 & \bar{R}_{12}^1 &= \cos \beta & \bar{R}_{23}^2 &= \frac{\sin \beta}{\alpha} & (6.1.10) \\
 \bar{R}_{31}^3 &= 0 & \bar{R}_{13}^1 &= -\alpha \sin \beta & \bar{R}_{32}^3 &= \cos \beta
 \end{aligned}$$

Bei Rotationssymmetrie ist

$$U_{\theta}^1 = 0$$

$$F_{\Delta\theta} = 0 \quad \text{für } \Delta \neq \theta$$

und

$$( \quad )_{,1} = ( \quad )_{,0} = 0$$

Demnach wird

$$\begin{aligned}
 2F_{\theta 11} &= 2F_{\theta 00} = 2D_{\theta 1}^N \bar{R}_{N1}^N = 2D_{\theta 1}^1 \bar{R}_{11}^1 A_{11} \\
 D_{\theta 1}^1 &= 1 + U_{\theta 1}^1 = 1 + U_{\theta 1}^1 - B_{11}^1 U_{\theta 0}^0 = 1 + \Gamma_{12}^1 U_{\theta 0}^2 - B_{11}^1 U_{\theta 0}^3
 \end{aligned}$$

d. h.

$$\bar{E}_{\theta 11} = \bar{E}_{\theta 11} - A_{11} = (1 + \Gamma_{12}^{-1} U_0^2 - B_1' U_0^3) A_{11} - A_{11} = (\Gamma_{12}^{-1} U_0^2 - B_1' U_0^3) A_{11}$$

$$\bar{E}_{\theta 11} = \left( \frac{\alpha}{r} \cos \phi U_0^2 + \frac{r \sin \phi}{r^2} U_0^3 \right) A_{11} \quad (6.1.11)$$

Mit den physikalischen Komponenten

$$U_0^{(2)} = \alpha U_0^2 ; U_0^{(3)} = U_0^3 ; \bar{E}_{\theta(11)} = \xi_{\theta} = \frac{\bar{E}_{\theta 11}}{A_{11}}$$

und den von Reissner eingeführten horizontalen und vertikalen Verschiebungsgrößen

$$\begin{aligned} u &= U_0^{(2)} \cos \phi + U_0^{(3)} \sin \phi \\ w &= U_0^{(2)} \sin \phi - U_0^{(3)} \cos \phi \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

$$\xi_{\theta} = \frac{\alpha}{r} \cos \phi \frac{U_0^{(2)}}{\alpha} + \frac{\sin \phi}{r} U_0^{(3)} = \frac{u}{r} \quad (6.1.13)$$

$$2F_{\theta 22} = 2D_{\theta 2}'' \bar{R}_{N2} = 2(D_{\theta 2}^2 \bar{R}_{22} + D_{\theta 2}^3 \bar{R}_{32})$$

$$F_{\theta 22} = (1 + U_{\theta 2}^2 - B_2' U_0^3 + \Gamma_{22}^{-1} U_0^2) \bar{R}_{22} + (U_{\theta 2}^3 + B_{22} U_0^2) \bar{R}_{32}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ 1 + \left( \frac{U_0^{(2)}}{\alpha} \right)^2 + \frac{\phi^2}{\alpha} U_0^{(3)} + \frac{\alpha^2}{\alpha} \frac{U_0^{(2)}}{\alpha} \right] \alpha^2 \cos \beta + \\ &+ \left[ U_0^{(3)^2} - \alpha \phi^2 \frac{U_0^{(2)}}{\alpha} \right] (-\alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

$$F_{\theta 22} = \alpha^2 \cos \beta + \alpha \cos \beta (U_0^{(2)^2} + \phi^2 U_0^{(3)}) - \alpha \sin \beta (U_0^{(3)^2} - \phi^2 U_0^{(2)})$$

Aus

$$\begin{aligned} U_0^{(3)} &= u \sin \phi - \omega \cos \phi \\ U_0^{(2)} &= u \cos \phi + \omega \sin \phi \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

folgt

$$\begin{aligned} U_0^{(2)'} &= u' \cos \phi - u \sin \phi \phi' + \omega' \sin \phi + \omega \cos \phi \phi' \\ U_0^{(3)'} &= u' \sin \phi + u \cos \phi \phi' - \omega' \cos \phi + \omega \sin \phi \phi' \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} U_0^{(2)'} + \phi' U_0^{(3)} &= u' \cos \phi + \omega' \sin \phi \\ U_0^{(3)'} - \phi' U_0^{(2)} &= u' \sin \phi - \omega' \cos \phi \end{aligned}$$

und demnach

$$E_{\phi 22} = F_{\phi 22} - A_{22} = \alpha^2 \cos \beta + \alpha \cos \beta (u' \cos \phi + \omega' \sin \phi) - \alpha \sin \beta (u' \sin \phi - \omega' \cos \phi) - \alpha^2$$

Mit den Additionstheoremen wird

$$\begin{aligned} u' (\cos \beta \cos \phi - \sin \phi \sin \beta) &= u' \cos (\beta + \phi) = u' \cos \Phi \\ \omega' (\sin \phi \cos \beta + \cos \phi \sin \beta) &= \omega' \sin (\beta + \phi) = \omega' \sin \Phi \end{aligned}$$

$$E_{\phi(22)} = \xi_{\phi 5} = \frac{E_{\phi 22}}{A_{22}} = \cos (\Phi - \phi) + \frac{1}{\alpha} [u' \cos \Phi + \omega' \sin \Phi] - 1 \quad (6.1.15)$$

da

$$\begin{aligned} 2 E_{\phi 13} &= D_{\phi 1}^N \bar{R}_{N3} = D_{\phi 1}^2 \bar{R}_{23} + D_{\phi 1}^3 \bar{R}_{33} = 0 \\ D_{\phi 1}^2 &= U_{\phi 1}^2 |_1 = U_{\phi 11}^2 + \Gamma_{11}^2 U_{\phi 1}^1 + \Gamma_{12}^2 U_{\phi 1}^2 + \dots = 0 \\ D_{\phi 1}^3 &= U_{\phi 1}^3 |_1 = 0 \end{aligned}$$

$$2 E_{\phi 23} = D_{\phi 2}^N \bar{R}_{N3} = D_{\phi 2}^2 \bar{R}_{23} + D_{\phi 2}^3 \bar{R}_{33}$$

$$D_{\phi 2}^2 = 1 + U_{\phi 2}^2 |_2 = 1 + \frac{1}{\alpha} (U_{\phi 2}^{(2)'} + \phi' U_{\phi 2}^{(3)}) = 1 + \frac{1}{\alpha} (u' \cos \phi + \omega' \sin \phi)$$

$$D_{\phi 2}^3 = U_{\phi 2}^3 |_2 = (U_{\phi 2}^{(3)'} - \phi' U_{\phi 2}^{(2)}) = u' \sin \phi - \omega' \cos \phi$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{\circ 23} &= \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} (\omega' \cos \phi + \omega' \sin \phi) \right] \alpha \sin \beta + (\omega' \sin \phi - \omega' \cos \phi) \cos \beta \\
 &= \alpha \sin \beta + \omega' (\cos \phi \sin \beta + \sin \phi \cos \beta) - \omega' (\cos \phi \cos \beta - \sin \phi \sin \beta) \\
 &= \alpha \sin (\Phi - \phi) + \omega' \sin \Phi - \omega' \cos \Phi
 \end{aligned}$$

nach Reissner  $\delta_m = -2 E_{\circ(23)} = -2 \frac{E_{23}}{\alpha}$

$$= \frac{1}{\alpha} (-\alpha \sin (\Phi - \phi) - \omega' \sin \Phi + \omega' \cos \Phi) \quad (6.116)$$

Die Krümmungsänderungen ergeben sich nach (6.1.1)

$$2 E_{\Delta \theta} = \bar{R}_{N\theta} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^N + \bar{R}_{N\Delta} \bar{R}_{\cdot 3|\theta}^N + 2 B_{\Delta \theta} - B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\pi \theta} - B_{\theta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\pi \Delta}$$

speziell

$$E_{\eta} = \bar{R}_{N\eta} \bar{R}_{\cdot 3|\eta}^N + B_{\eta} - B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\pi \eta} = \bar{R}_{\eta} \bar{R}_{\cdot 3|\eta}^1 + B_{\eta} - B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\eta}$$

$$\bar{R}_{\cdot 3|\eta}^1 = \Gamma_{12}^1 \bar{R}_{\cdot 3}^2 - B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 3}^3 + B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 1}^1$$

$$E_{\eta} = \Gamma_{12}^1 \bar{R}_{\cdot 3}^2 \bar{R}_{\eta} - B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 3}^3 \bar{R}_{\eta} + B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 1}^1 \bar{R}_{\eta} + B_{\eta} - B_{\eta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\eta}$$

$$= r (\cos \phi \sin \beta + \sin \phi \cos \beta) - r \sin \phi$$

$$= r \sin \Phi - r \sin \phi$$

$$\mathcal{E}_{\theta} = -\frac{E_{\eta}}{A_{\eta}} = -\frac{1}{r} (\sin \Phi - \sin \phi) \quad (6.117)$$

Die Gleichungen (6.1.13), (6.1.15) bis (6.1.17) stimmen mit denen von Reissner [13] exakt überein.

$$E_{\Delta 2} = \bar{R}_{N2} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^N + B_{22} - B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\pi 2} = \bar{R}_{22} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^2 + \bar{R}_{32} \bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^3 + B_{22} - B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{22}$$

$$\bar{R}_{\cdot 3|\Delta}^2 = \bar{R}_{\cdot 3,2}^2 + \Gamma_{22}^2 \bar{R}_{\cdot 3}^2 - B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 3}^3 + B_{\Delta}^{\bar{r}} \bar{R}_{\cdot 2}^2$$

$$= \left( \frac{\sin \beta}{\alpha} \right)' + \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\alpha} + \frac{\phi'}{\alpha} \cos \beta - \frac{\phi'}{\alpha} \cos \beta$$

$$= \frac{\cos \beta}{\alpha} \beta'$$



$$\begin{aligned}\bar{R}_3^3|_2 &= \bar{R}_{3,2}^3 + B_{22} \bar{R}_3^2 + B_2^2 \bar{R}_2^3 \\ &= (\cos \beta)' \\ &= -\sin \beta / \beta'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{22} &= \frac{\cos \beta}{\alpha} \beta' \cos \beta \alpha^2 + \sin \beta / \beta' \alpha \sin \beta - \alpha \phi' + \phi' \cos \beta \alpha^2 \\ &= \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) / \beta' - \alpha \phi' + \alpha \phi' \cos \beta \\ &= \alpha \beta' + \alpha \phi' (\cos \beta - 1)\end{aligned}$$

$$\partial \epsilon_{\xi} = -\frac{E_{22}}{H_{22}} = -\frac{1}{\alpha} (\Phi' - \phi') - \frac{\phi'}{\alpha} (\cos \beta - 1) \quad (6.1.10)$$

mit

$$\begin{aligned}D_0^3 &= 1 + U_1^3 = \bar{R}_3^3 = \cos \beta \\ U_1^3 &= \cos \beta - 1\end{aligned}$$

d. h.

$$\partial \epsilon_{\xi} = -\frac{1}{\alpha} (\Phi' - \phi') - \frac{\phi'}{\alpha} U_1^3$$

In dieser Formel ergibt sich ein Unterschied im zweiten Term zu der von Reissner angegebenen. Wird jedoch in Analogie zur linearen Schalentheorie nicht nur angenommen

$$\frac{E_{33}}{\sigma} = \sigma$$

sondern auch

$$U_1^3 \equiv U_0^3$$

$$\text{d.h. } U_1^3 = 0$$

so stimmen beide wiederum überein.

Für die Verträglichkeitsbedingungen wurde ebenfalls der Grenzübergang gemacht. Dieser führt wiederum auf die von Reissner [13] angegebene Form, soll aber hier nicht mehr ausgeführt werden.

## 6.2 Statische Sonderfälle

Die Gleichgewichtsbedingungen waren

$$\begin{aligned} & \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} + Q^{\pi} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + (\bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \parallel_{\Delta} - B_{\Delta}^{\circ} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + B_{\Delta}^{\Sigma} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ} - B_{\Delta}^{\circ}) M^{\pi\Delta} \right] \parallel_{\pi} - \\ & - B_{\pi}^{\circ} \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} + Q^{\pi} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + (\bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \parallel_{\Delta} + B_{\Sigma\Delta} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ} + B_{\Delta}^{\Sigma} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ}) M^{\pi\Delta} \right] + P^{\circ} = 0 \quad (6.2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} + Q^{\pi} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + (\bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \parallel_{\Delta} + B_{\Sigma\Delta} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ} + B_{\Delta}^{\Sigma} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ}) M^{\pi\Delta} \right] \parallel_{\pi} + \\ & + B_{\pi\Sigma}^{\circ} \left[ N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} + Q^{\pi} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + (\bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \parallel_{\Delta} - B_{\Delta}^{\circ} \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} + B_{\Delta}^{\Sigma} \bar{R}_{,\cdot \Sigma}^{\circ} - B_{\Delta}^{\circ}) M^{\pi\Delta} \right] + P^{\circ} = 0 \quad (6.2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ}) \parallel_{\pi} + B_{\pi}^{\circ} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} M^{\pi\Delta} - M^{\circ} \right] - \\ & - \bar{R}_{,\cdot 3}^{\circ} \left[ Q^{\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ}) \parallel_{\pi} - B_{\pi\Sigma}^{\circ} \bar{R}_{,\Delta}^{\circ} M^{\pi\Delta} - M^{\circ} \right] = 0 \quad (6.2.3) \end{aligned}$$

### a) Grenzübergang aus der allgemeinen Schalentheorie des Kapitels 4.

Werden (5.2.41), (5.2.42) und (5.2.21) in (4.3.2.10) eingesetzt und die Einflüsse der Verzerrungen auf das Gleichgewicht vernachlässigt, so ergeben sich (5.3.2.12) und (5.3.2.14) und damit obige Gleichgewichtsbedingungen, wenn noch berücksichtigt wird, daß  $E_{33} = 0$ .

### b) Grenzübergang zur Theorie I. Ordnung, d.h. Gleichgewicht am un- verformten Element.

In den Gleichgewichtsbedingungen kann gesetzt werden

$$\bar{R}_{,\cdot \kappa}^{\circ} = d_{\kappa}^{\circ} \quad (6.2.4)$$

Damit wird (6.2.1) - (6.2.3)

$$\begin{aligned} [N^{\tau\theta} - B_{\Delta}^{\theta} M^{\tau\Delta}]_{\tau} - B_{\tau}^{\theta} Q^{\tau} + P^{\theta} &= 0 \\ Q^{\tau} \parallel_{\tau} + B_{\tau z} [N^{\tau z} - B_{\Delta}^z M^{\tau\Delta}] + P^z &= 0 \\ Q^{\theta} - M^{\tau\theta} \parallel_{\tau} - M^{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Dies sind die Gleichgewichtsbedingungen der linearen Theorie, wenn berücksichtigt wird, daß dort üblicherweise die unsymmetrischen Membranschnittgrößen eingeführt werden, vgl. Naghdi [12]:

$$\bar{N}^{\tau\theta} = N^{\tau\theta} - B_{\Delta}^{\theta} M^{\tau\Delta}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \bar{N}^{\tau\theta} \parallel_{\tau} - B_{\tau}^{\theta} Q^{\tau} + P^{\theta} &= 0 \\ Q^{\tau} \parallel_{\tau} + B_{\tau z} \bar{N}^{\tau z} + P^z &= 0 \\ M^{\tau\theta} \parallel_{\tau} - Q^{\theta} + M^{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

An dieser Stelle sei vermerkt, daß Koiter [46] zeigte, warum in den Kräftegleichgewichtsbedingungen im Falle gleich großer Größenordnungen der Membran- und Biegeverzerrungskomponenten Terme  $B_{\Delta}^{\theta} M^{\tau\Delta}$  (Krümmung mal Moment) vernachlässigt werden können.

- c) Übergang zu den Gleichgewichtsbedingungen für Rotationsschalen bei rotationssymmetrischer Belastung und  $P^1 = 0$  (keine äußere Last in Richtung des Breitenkreises). Dies ist wiederum der von Reissner [13] behandelte Fall.

Für diesen Fall sind mit (6.1.6) - (6.1.9) die differential-geometrischen Grundgrößen und mit (6.1.10) der Rotationstensor gegeben.

Die Gleichgewichtsbedingung (6.2.1) ist für  $X^1 = \theta$  identisch erfüllt (Gleichgewicht in Breitenkreisrichtung).

Die Gleichgewichtsbedingung in Meridianrichtung ( $X^2 = \xi$ ) wird unter Beachtung von

$$N^{\tau 2} = N^{\tau 1} = M^{\tau 2} = M^{\tau 1} = Q^{\tau} = 0 \quad (6.2.7)$$

und der Vernachlässigung von Terme Krümmung mal Moment

$$\left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^2 + Q^{\pi} \bar{R}_{,\Delta}^2 \right) \Big|_{\pi} - B_{\pi}^2 \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^3 + Q^{\pi} \bar{R}_{,\Delta}^3 \right) + P^2 = 0 \quad (6.2.8)$$

mit

$$\begin{aligned} \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^2 \right) \Big|_{\pi} &= \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^2 \right)_{,\pi} + \Gamma_{\pi\Sigma}^{\pi} N^{\Sigma\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^2 + \Gamma_{\pi\Sigma}^{-2} N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^{\Sigma} \\ &= \left( N^{22} \bar{R}_{,2}^2 \right)' + N^{22} \bar{R}_{,2}^2 \left( \Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2 \right) + \Gamma_{11}^{-2} N^{11} \bar{R}_{,1}^2 \end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned} \left( Q^{\pi} \bar{R}_{,\Delta}^2 \right) \Big|_{\pi} &= \left( Q^2 \bar{R}_{,3}^2 \right)' + Q^2 \bar{R}_{,3}^2 \left( \Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2 \right) \\ - B_{\pi}^2 N^{\pi\Delta} \bar{R}_{,\Delta}^3 &= - B_2^2 N^{22} \bar{R}_{,2}^3 \\ - B_2^2 Q^{\pi} \bar{R}_{,\Delta}^3 &= - B_2^2 Q^2 \bar{R}_{,3}^3 \end{aligned}$$

lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Meridianrichtung

$$\begin{aligned} \left( N^{22} \bar{R}_{,2}^2 \right)' + \left( Q^2 \bar{R}_{,3}^2 \right)' + N^{22} \bar{R}_{,2}^2 \left( \Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2 \right) + Q^2 \bar{R}_{,3}^2 \left( \Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2 \right) + \\ + \Gamma_{11}^{-2} N^{11} \bar{R}_{,1}^2 - N^{22} \bar{R}_{,2}^3 B_2^2 - Q^2 B_2^2 \bar{R}_{,3}^3 + P^2 = 0 \end{aligned}$$

Mit den physikalischen Schnittgrößen

$$\begin{aligned} N^{\Theta} &= N^{11} A_{11} = N^{11} r^2 & M^{\xi} &= M^{22} d^2 \\ N^{\xi} &= N^{22} A_{22} = N^{22} d^2 & M^{\Theta} &= M^{11} r^2 \\ Q &= Q^2 / A_{22} = Q^2 d & P^{\xi} &= P^2 d \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

und dem Rotationstensor (6.1.10) wird diese Gleichung

$$\begin{aligned} \left( \frac{N^{\xi}}{d^2} \cos \beta \right)' + \left( \frac{Q}{d^2} \sin \beta \right)' + \frac{N^{\xi}}{d^2} \left( \frac{d}{r} \cos \beta + 2 \frac{d'}{d} \right) - \frac{r}{d} \cos \beta \frac{N^{\Theta}}{r^2} + \\ + \left( \frac{d}{r} \cos \beta + 2 \frac{d'}{d} \right) \frac{Q}{d^2} \sin \beta - \frac{N^{\xi}}{d^2} d \sin \beta \frac{d \phi'}{d^2} + \frac{Q}{d} \frac{d \phi'}{d} \cos \beta + \frac{P^{\xi}}{d} = 0 \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit  $r \alpha$  und Differentiation wird dies

$$\begin{aligned} r \left( N^{\xi} \cos \beta \right)' + N^{\xi} d \cos \beta \cos \phi - N^{\xi} r \sin \beta \phi' + r \left( Q \sin \beta \right)' + \\ + Q d \sin \beta \cos \phi + Q r \cos \beta \phi' - N^{\Theta} d \cos \phi + r \alpha P^{\xi} = 0 \end{aligned}$$

Nun ist

$$r' = \alpha \cos \phi$$

und

$$(r N^{\xi} \cos \beta)' = N^{\xi} \alpha \cos \phi \cos \beta + r (N^{\xi} \cos \beta)' \quad (6.2.10)$$

d. h. diese Gleichgewichtsbedingung geht über in

$$(r N^{\xi} \cos \beta)' - N^{\xi} r \sin \beta \phi' + (r Q \sin \beta)' + Q r \cos \beta \phi' - N^{\Theta} \alpha \cos \phi + r \alpha \mathcal{P}^{\xi} = 0 \quad (6.2.11)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in Normalenrichtung unter Vernachlässigung der Terme Krümmung mal Moment wird

$$(N^{\pi \Delta} \bar{R}_{\Delta}^3 + Q^{\pi} \bar{R}_{\cdot 3}^3) \Big|_{\pi} + B_{\pi \xi} (N^{\pi \Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\xi} + Q^{\pi} \bar{R}_{\cdot 3}^{\xi}) + \mathcal{P}^3 = 0$$

mit

$$(N^{\pi \Delta} \bar{R}_{\Delta}^3) \Big|_{\pi} = (N^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3)' + \Gamma_{12}^1 N^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3 + \Gamma_{22}^2 N^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3$$

$$(Q^{\pi} \bar{R}_{\cdot 3}^3) \Big|_{\pi} = (Q^2 \bar{R}_{\cdot 3}^3)' + Q^2 \bar{R}_{\cdot 3}^3 (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)$$

$$B_{\pi \xi} (N^{\pi \Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\xi} + Q^{\pi} \bar{R}_{\cdot 3}^{\xi}) = B_{11} N'' \bar{R}_{\cdot 1}^{\xi} + B_{22} (N^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^{\xi} + Q^2 \bar{R}_{\cdot 3}^{\xi})$$

Ausgedrückt in physikalischen Schnittgrößen und dem Rotationstensor (6. 1. 10) lautet diese nun

$$-\left(\frac{N^{\xi}}{\alpha} \sin \beta\right)' - \frac{N^{\xi}}{\alpha} \sin \beta \left(\frac{\alpha}{r} \cos \phi + \frac{\alpha'}{\alpha}\right) - \frac{N^{\Theta}}{r} \sin \phi - \alpha \phi' \left(\frac{N^{\xi}}{\alpha^2} \cos \beta + \frac{Q}{\alpha^2} \sin \beta\right) + \left(\frac{Q}{\alpha} \cos \beta\right)' + \frac{Q}{\alpha} \cos \beta \left(\frac{\alpha}{r} \cos \phi + \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \mathcal{P}^3 = 0$$

Nach Multiplikation mit  $r \alpha$ , ausdifferenzieren und Anwendung von (6. 2. 10) wird dies

$$-(r N^{\xi} \sin \beta)' - N^{\xi} r \cos \beta \phi' + (r Q \cos \beta)' - Q r \sin \beta \phi' - N^{\Theta} \alpha \sin \phi + \mathcal{P}^3 r \alpha = 0 \quad (6.2.12)$$

Unter Berücksichtigung der Additionstheoreme und

$$\Phi = \varphi + \beta$$

wird (6.2.11)

$$\begin{aligned} & (rN^{\xi})' [\cos \Phi \cos \varphi + \sin \Phi \sin \varphi] - rN^{\xi} [\sin \Phi \cos \varphi - \\ & - \cos \Phi \sin \varphi] \Phi' + (rQ)' [\sin \Phi \cos \varphi - \cos \Phi \sin \varphi] + \\ & + rQ [\cos \Phi \cos \varphi + \sin \Phi \sin \varphi] \Phi' - N^{\theta} \alpha \cos \varphi + r d P^{\xi} = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (rN^{\xi})' \cos \Phi - rN^{\xi} \sin \Phi \Phi' &= (rN^{\xi} \cos \Phi)' \\ (rN^{\xi})' \sin \Phi + rN^{\xi} \cos \Phi \Phi' &= (rN^{\xi} \sin \Phi)' \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

lautet diese nun

$$\begin{aligned} & \cos \varphi (rN^{\xi} \cos \Phi)' + \sin \varphi (rN^{\xi} \sin \Phi)' - \sin \varphi (rQ \cos \Phi)' + \\ & + \cos \varphi (rQ \sin \Phi)' - N^{\theta} \alpha \cos \varphi + r d P^{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

und (6.2.12) wird

$$\begin{aligned} & - (rN^{\xi})' [\sin \Phi \cos \varphi - \cos \Phi \sin \varphi] - (rN^{\xi})' [\cos \Phi \cos \varphi + \\ & + \sin \Phi \sin \varphi] \Phi' + (rQ)' [\cos \Phi \cos \varphi + \sin \Phi \sin \varphi] - \\ & - (rQ)' [\sin \Phi \cos \varphi - \cos \Phi \sin \varphi] \Phi' - N^{\theta} \alpha \sin \varphi + r d P^{\beta} = 0 \end{aligned}$$

mit (6.2.13) lautet diese nun

$$\begin{aligned} & - \cos \varphi (rN^{\xi} \sin \Phi)' + \sin \varphi (rN^{\xi} \cos \Phi)' + \cos \varphi (rQ \cos \Phi)' + \\ & + \sin \varphi (rQ \sin \Phi)' - N^{\theta} \alpha \sin \varphi + r d P^{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

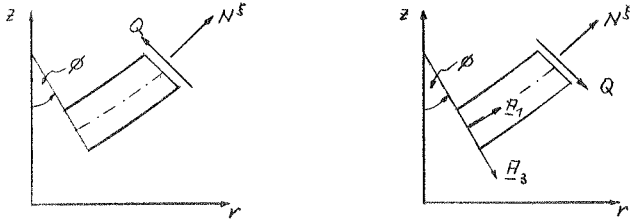
(6.2.14) und (6.2.15) verknüpft mit (6.2.14)  $\times \cos \phi$  + (6.2.15)  $\times \sin \phi$  liefert

$$(r N^{\xi} \cos \Phi)' + (r Q \cos \Phi)' - N^{\Theta} \alpha + r \alpha (\rho^{\xi} \cos \phi + \rho^{\beta} \sin \phi) = 0 \quad (6.2.16)$$

und (6.2.14)  $\times \sin \phi$  - (6.2.15)  $\times \cos \phi$  liefert

$$(r N^{\xi} \sin \Phi)' - (r Q \cos \Phi)' + r \alpha (\rho^{\xi} \sin \phi - \rho^{\beta} \cos \phi) = 0 \quad (6.2.17)$$

(6.2.16) und (6.2.17) sind genau die selben Gleichgewichtsbedingungen, wie von Reissner [13] angegeben, wenn die unterschiedliche Definition der Querkraft  $Q$  berücksichtigt wird.



Definition der Schnittkräfte  $Q$ ,  $N^{\xi}$

Reissner [13]

in dieser Arbeit

Aufgrund der Ableitung der Gleichungen (6.2.16) und (6.2.17) folgt:

Die von Reissner [13] angegebenen Kräftegleichgewichtsbedingungen unterscheiden sich von den in dieser Arbeit abgeleiteten durch Terme Moment mal Krümmung, die jedoch nach Koiter [46] sicherlich vernachlässigbar sind, wenn die Biege- und Dehnverzerrungen die selbe Größenordnung aufweisen. Aus diesem Grund sollen die bei Reissner [13] nicht auftretenden Terme hier nicht in ausführlicher physikalischer Form angegeben werden, der Hinweis auf (6.2.1) und (6.2.2) mag genügen.

Die Momentengleichgewichtsbedingung (6.2.3) ist für  $\theta = 1$  (Moment um Meridiantangente) erfüllt und liefert  $M^{\theta} = M^{\theta}(\xi)$ . Für  $\theta = 2$  (Moment um Breitenkreistangente) ergibt sich

$$\bar{R}_{33} [Q^{\Delta} \bar{R}_{\Delta}^2 - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^2) \parallel_{\pi} + B_{\pi}^2 \bar{R}_{\Delta}^3 M^{\pi\Delta} - M^2] -$$

$$- \bar{R}_{\Delta}^2 [Q^{\Delta} \bar{R}_{\Delta}^3 - (M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^3) \parallel_{\pi} - B_{\pi\Sigma} \bar{R}_{\Delta}^{\Sigma} M^{\pi\Delta} - M^3] = 0$$

mit

$$-(M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^2) \parallel_{\pi} = -(M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^2)_{,\pi} - \Gamma_{\pi\Sigma}^{\pi} M^{\Sigma\Delta} \bar{R}_{\Delta}^2 - \Gamma_{\pi\Sigma}^{\Delta} M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^{\Sigma}$$

$$= -(M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2)' - \Gamma_{12}^1 M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2 - 2\Gamma_{22}^2 M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2 - \Gamma_{11}^2 M^{11} \bar{R}_{\cdot 1}^1$$

$$-(M^{\pi\Delta} \bar{R}_{\Delta}^3) \parallel_{\pi} = -(M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3)' - M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3 (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)$$

lautet die Momentengleichgewichtsbedingung

$$\bar{R}_{33} [Q^2 \bar{R}_{\cdot 2}^2 - (M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2)' - M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2 (\Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2) - M^{11} \bar{R}_{\cdot 1}^1 \Gamma_{11}^2 +$$

$$+ B_{\cdot 2}^2 \bar{R}_{\cdot 2}^3 M^{22} - M^2] - \bar{R}_{\cdot 3}^2 [Q^2 \bar{R}_{\cdot 2}^3 - (M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3)' - M^{22} \bar{R}_{\cdot 2}^3 (\Gamma_{12}^1 +$$

$$+ \Gamma_{22}^2) - B_{11} \bar{R}_{\cdot 1}^1 M^{11} - B_{22} \bar{R}_{\cdot 2}^2 M^{22} - M^3] = 0$$

und ausgedrückt in physikalischen Schnittgrößen und mit (6.1.10)

$$\cos\beta \left[ \frac{Q}{\alpha} \cos\beta - \left( \frac{M^{\xi} \cos\beta}{\alpha^2} \right)' - \frac{M^{\xi} \cos\beta}{\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{r} \cos\phi + 2 \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \frac{M^{\theta}}{r\alpha} \cos\phi + \right.$$

$$\left. + \frac{\phi'}{\alpha^2} \sin\beta M^{\xi} - \frac{M^{(2)}}{\alpha} \right] - \frac{\sin\beta}{\alpha} \left[ -Q \sin\beta + \left( \frac{M^{\xi} \sin\beta}{\alpha} \right)' + \frac{M^{\xi} \sin\beta}{\alpha} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\alpha}{r} \cos\phi \right) + \sin\phi \frac{M^{\theta}}{r} + \frac{\phi'}{\alpha} \cos\beta M^{\xi} - M^{(3)} \right] = 0$$

$$\leadsto \cos\beta \left[ \frac{Q}{\alpha} \cos\beta - \left( \frac{M^{\xi} \cos\beta}{\alpha^2} \right)' - \frac{M^{\xi} \cos\beta}{r\alpha} \cos\phi + \frac{M^{\theta}}{r\alpha} \cos\phi + \right.$$

$$\left. + \frac{M^{\xi}}{\alpha^2} \phi' \sin\beta - \frac{M^{(2)}}{\alpha} \right] - \frac{\sin\beta}{\alpha} \left[ -Q \sin\beta + \left( \frac{M^{\xi} \sin\beta}{\alpha} \right)' + \right.$$

$$\left. + \frac{M^{\xi}}{r} \sin\beta \cos\phi + \frac{M^{\theta}}{r} \sin\phi + \frac{M^{\xi}}{\alpha} \phi' \cos\beta - M^{(3)} \right] = 0$$



$$\begin{aligned} \leadsto \frac{Q}{\alpha} - (M^{\xi} \cos \beta)' \frac{\cos \beta}{\alpha^2} - \frac{M^{\xi}}{rd} \cos \phi - (M^{\xi} \sin \beta)' \frac{\sin \beta}{\alpha^2} + \\ + \frac{M^{\theta}}{rd} \cos \phi \cos \beta - \frac{M^{\theta}}{rd} \sin \phi \sin \beta - \frac{M^{(2)}}{\alpha} \cos \beta + \frac{M^{(3)}}{\alpha} \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

mit  $r' = \alpha \cos \phi$

$$\begin{aligned} Qrd - M^{\xi'} r - M^{\xi} r' + M^{\theta} \alpha \cos(\phi + \beta) - rd(M^{(2)} \cos \beta - \\ - M^{(3)} \sin \beta) = 0 \end{aligned}$$

oder  $(r M^{\xi})' - Qrd - M^{\theta} \alpha \cos \phi + rd \tilde{M} = 0 \quad (6.2.18)$

wobei  $\tilde{M} = M^{(2)} \cos \beta - M^{(3)} \sin \beta$

Dies ist wiederum die von Reissner [13] angegebene Momentengleichgewichtsbedingung, wenn der Einfluß der Verzerrungen sowie die äußere Momentenbelastung  $\tilde{M}$  vernachlässigt wird.

## 7. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zwei geometrisch nichtlineare Schalentheorien aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie kleiner Verzerrungen abgeleitet. Wobei die allgemeine Schalentheorie des Kapitels 4 für beliebig dicke Schalen gilt und mit dem Kirchhoffschen Schnittkrafttensor sowie den Verschiebungsgradienten als unabhängige kinematische Variable arbeitet. Demgegenüber wurde in Kapitel 5 eine spezielle Theorie dünner Schalen angegeben, die neben dem Kirchhoffschen Schnittkrafttensor im wesentlichen mit den Rotationen des auf der Schalenmittelfläche definierten Dreibeins arbeitet. Besonderer Augenmerk wurde neben der konsistenten Ableitung der Theorien auf eindeutige differential-geometrische Beschreibung der Zustände vor und nach der Deformation gelegt. Alle Feldgleichungen und die in ihnen auftretenden Tensorkomponenten sind auf den bekannten undeformierten Zustand bezogen.

Anhang

Kovariante Raumableitung eines Tensors erster und zweiter Stufe auf der Schalenmittelfläche ( $X^3 = 0$ ) und der Zusammenhang mit der kovarianten Flächenableitung

A Tensor erster Stufe

$$\begin{aligned} T^\Delta|_\Sigma &= T^\Delta||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma 3}^\Delta T^3 & \text{mit } T^\Delta||_\Sigma &= T^\Delta_{,3\Sigma} + \Gamma_{\Sigma\pi}^\Delta T^\pi \\ T^3|_\Sigma &= T^3||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma\pi}^3 T^\pi & T^3||_\Sigma &= T^3_{,3\Sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_\Delta|_\Sigma &= \bar{T}_\Delta||_\Sigma - \Gamma_{\Delta\Sigma}^3 \bar{T}_3 \\ \bar{T}_3|_\Sigma &= \bar{T}_3||_\Sigma - \Gamma_{3\Sigma}^\pi \bar{T}_\pi \end{aligned}$$

B Tensor zweiter Stufe

$$\begin{aligned} T^{\Delta\Theta}|_\Sigma &= T^{\Delta\Theta}||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma 3}^\Delta T^{3\Theta} + \Gamma_{\Sigma 3}^\Theta T^{\Delta 3} & \text{mit } T^{\Delta\Theta}||_\Sigma &= \dots \text{ FLÄCHENABLEITUNG} \\ T^{3\Theta}|_\Sigma &= T^{3\Theta}||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma\pi}^3 T^{\pi\Theta} + \Gamma_{\Sigma 3}^\Theta T^{33} & T^{3\Theta}||_\Sigma &= T^{(3)\Theta}||_\Sigma \\ T^{\Delta 3}|_\Sigma &= T^{\Delta 3}||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma 3}^\Delta T^{33} + \Gamma_{\Sigma\pi}^3 T^{\Delta\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\Delta\Theta}|_\Sigma &= \bar{T}_{\Delta\Theta}||_\Sigma - \Gamma_{\Delta\Sigma}^3 \bar{T}_{3\Theta} - \Gamma_{\Theta\Sigma}^3 \bar{T}_{\Delta 3} \\ \bar{T}_{3\Theta}|_\Sigma &= \bar{T}_{3\Theta}||_\Sigma - \Gamma_{3\Sigma}^\pi \bar{T}_{\pi\Theta} - \Gamma_{\Theta\Sigma}^3 \bar{T}_{33} \\ \bar{T}_{\Delta 3}|_\Sigma &= \bar{T}_{\Delta 3}||_\Sigma - \Gamma_{\Delta\Sigma}^3 \bar{T}_{33} - \Gamma_{3\Sigma}^\pi \bar{T}_{\Delta\pi} \end{aligned}$$

für gemischte Tensorkomponenten lassen sich analoge Formeln angeben, z. B.

$$T^3_{,3\Sigma}|_\Sigma = T^3_{,3\Sigma}||_\Sigma + \Gamma_{\Sigma\pi}^3 T^{\pi 3} - \Gamma_{3\Sigma}^\pi T^3_{,\pi} \quad \text{mit } T^3_{,3\Sigma}||_\Sigma = T^3_{,3\Sigma}$$

Ausdrücklich sei vermerkt, wenn nicht alle 9 Komponenten eines zweistufigen Tensors definiert sind, z. B. Schnittkrafttensoren, so sind diese Formeln entsprechend anzuwenden, z. B.

$$\left( N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot\Delta} \right)_{,\pi} = \begin{cases} \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot\Delta} \right)_{,\pi} = \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot\Delta} \right)_{,\pi} + \Gamma_{\pi 3}^\Delta N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot 3} \\ \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot 3} \right)_{,\pi} = \left( N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\cdot 3} \right)_{,\pi} + \Gamma_{\pi\Sigma}^3 N^{\pi\Delta} \bar{R}^{\Sigma\Delta} \end{cases}$$

da  $N^{3\Delta}$  nicht definiert, weil  $N^{\pi\Delta}$  ein Flächentensor ist.

## Lebenslauf

22. Juni 1941 geboren in Schorndorf (Württ.) als Sohn des Bundesbahn - Betriebsingenieurs Maximilian Seidel und seiner Ehefrau, geb. Brillinger.
- Herbst 1947 - Frühjahr 1960 Schulzeit, davon 4 Jahre in der Volksschule in Aalen und 9 Jahre im Schubart-Gymnasium, Aalen (Württ.)
- Frühjahr 1960 - Herbst 1960 Baupraktikum bei Firma Heinrich Aißlinger, Aalen.
- Herbst 1960 - Frühjahr 1966 Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart, Fachrichtung 'Konstruktiver Ingenieurbau'.
27. Mai 1966 Hauptdiplom.
- Herbst 1966 - Sommer 1967 Aufbaustudium an der Stanford University, California, USA, als Stipendiat des DAAD.
18. Juni 1967 Master of Science (M. S.) in Structural Engineering.
- Sommer 1967 - Herbst 1968 Structural Engineer bei Chicago Bridge and Iron Company, Oak Brook, Illinois, USA.
- Seit 1. Oktober 1968 wissenschaftlicher Assistent am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer.