

Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken

von

Helmut Schmidts



z
22.4.98

Bericht Nr. 23
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1998

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Helmut Schmidts

geboren in Lahr/Schw.

Hauptberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Luz

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Januar 1998

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1998

Kurzfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Modellierung und Berechnung von abschnittsweise regelmäßigen Hochhausstragwerken. Ziel ist die Entwicklung von effizienten Makroelementen, die insbesondere im Bereich der Tragwerksplanung eine der Aufgabenstellung gerechtwerdende, numerische Berechnung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode und eine praxisorientierte Ergebnisauswertung erlauben.

Die Regelmäßigkeit im Tragwerksaufbau ermöglicht hierfür die Berechnung an Ersatzsystemen, so daß sich das Hochhausstragwerk aus kontinuierlichen Scheiben zusammensetzt. Durch sinnvolle, d.h. wirklichkeitsnahe Ansätze bezüglich der Verschiebungsverläufe im Tragwerksquerschnitt werden "Verallgemeinerte Querschnittswerte" hergeleitet, so daß sich das räumliche Problem auf eine eindimensionale Betrachtungsweise reduzieren läßt. Eine Diskretisierung der Verformungen entlang der "Stabachse" führt schließlich auf die Steifigkeitsmatrix von entsprechenden Verallgemeinerten Balkenelementen (Makroelemente).

Im Vergleich zu klassischen Balken- und Scheibenelementen ist so eine wesentlich effizientere Modellierung und Berechnung möglich, da spezielle, für Hochhausstragwerke charakteristische Eigenschaften bereits im Ansatz berücksichtigt werden.

Insbesondere die einfache Ergebnisauswertung ermöglicht eine Beurteilung der Tragwerksqualität und eine sinnvolle Variation der Systemparameter. Hierzu werden auch Einflüsse aus Theorie II. Ordnung im Sinne der DIN 1045 in Form von Abtriebskräften näherungsweise berücksichtigt. Aussagen bezüglich des Schwingungsverhaltens bzw. der Schwingungsanfälligkeit im Rahmen der DIN 1055 sind ebenfalls möglich.

Die erarbeitete Lösungsstrategie wurde in dem Computerprogramm HIGH-RISE realisiert.

Abstract

This paper deals with the modeling and the calculation of sectionally regular high-rise structures. The aim is to develop efficient macro-elements. Especially in structural design these will allow for a numerical calculation which, by using the finite-element-method, will meet the requirements and permit a practice-orientated evaluation of the results.

Due to the structure's regularity substitute systems may be used for the calculation and therefore the high-rise structure consists of continuous wall panels. Reasonable, i. e. realistic approaches with respect to the course of deformation in the structure's cross-section "generalized cross-section values" are derived, reducing the three-dimensional problem to a one-dimensional reflection. The discretization of the deformation along the "bar center line" finally leads to the stiffness-matrix of the respective generalized beam element (macro-element).

This permits a more efficient modeling and calculation compared to the classical beam- and wall-elements, because the special characteristics for the high-rise structures were taken into consideration from the beginning.

Especially the simple interpretation of the results allows a review of the structure's quality and sensible variation of the system parameters. This also considers the influence of second-order effects according to DIN 1045 approximately with horizontal forces. Statements for the vibration behaviour resp. the vibration sensitivity according to DIN 1055 are possible.

The described solution method is realized in the computer program HIGH-RISE.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.–Ing. E. Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts.

Herrn Professor Dr.–Ing. E. Luz danke ich für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Helmut Schmidts

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Motivation	9
1.2 Zielsetzung und Grundgedanke der Arbeit	10
1.3 Literaturschau	12
1.4 Übersicht über die vorliegende Arbeit	15

2. Grundlagen

2.1 Trag- und Verformungsverhalten von Rahmensystemen	17
2.2 Normalkraftverteilung in den Stielen von mehrfeldrigen Stockwerkrahmen	22
2.3 Tragverhalten von Hohlkästen aus Stockwerkrahmen	25

3. Modellbildung

3.1 Der Berechnung zugrunde gelegte Annahmen	28
3.2 Riegelwirkung der Deckenplatte	31
3.3 Das kontinuierliche Ersatzsystem	33

4. Analytische Berechnung von allgemeinen Systemen durch Zusammenfassen aller aussteifenden Bauteile (Einzelstäbe) zu einem Gesamtstab

4.1 Tragverhalten und Mechanik der aussteifenden Bauteile (Einzelstäbe)	43
4.2 Zusammenfassen der Einzelstäbe zum Gesamtstab	45
4.3 Belastung des Gesamtstabes	48
4.4 Sonderfall: Systeme mit affinem Verformungsverhalten der Einzelstäbe	50
4.5 Sonderfall: Symmetrische Systeme	53

5. Finite Balkenelemente mit verallgemeinerten Querschnittswerten ("Verallgemeinerte-Finite-Balkenelemente")

5.1 Reduktion durch Reihenentwicklung	60
5.2 Wahl der Ansatzfunktionen	65
5.3 Die Matrizen der Verallgemeinerten Querschnittswerte	69
5.4 Scheiben mit gekrümmten Querschnitten	73
5.5 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix des Verallgemeinerten Finiten Balkenelementes	76

5.6 Der konsistente Lastvektor	
5.6.1 Allgemeine Herleitung	80
5.6.2 (Statische) Windlasten	84
5.6.3 Erweiterung der Modellgleichungen für Temperaturbelastung	85
5.7 Elastische Lagerung der aussteifenden Bauteile im Fußpunkt	87
5.8 Diskontinuitäten im Tragwerksaufbau	90
6. Berechnung der Abtriebskräfte nach Theorie II. Ordnung	
6.1 Biegebeanspruchung	91
6.2 Torsionsbeanspruchung	98
6.3 Diskretisierung der Abtriebskräfte	101
7. Erweiterung der Modellgleichungen für Eigenwert– untersuchung und dynamische Strukturanalyse mittels Ersatzkraftverfahren	
7.1 Allgemeine Herleitung der Grundgleichungen	103
7.2 Grundschrwingungen symmetrischer Systeme	110
8. Berechnungsbeispiele	
B–01 Symmetrisches Tragwerk, analytische Berechnung	116
B–02 Symmetrisches Tragwerk, numerische Berechnung	122
B–03 Nicht–symmetrisches Tragwerk, analytische Berechnung	132
B–04 Nicht–symmetrisches Tragwerk, numerische Berechnung	137
B–05 Gegliederter Hohlkasten, numerische Berechnung	141
9. Schlußbemerkung	145
Literatur	147
Anhang	155
Funktionsverläufe $K_1(\alpha H, \xi)$, $K_2(\alpha H, \xi)$, $K_3(\alpha H, \xi)$ zur Ermittlung der Biegelinie und Schnittgrößenverläufe bei Biegung und Torsion von gemischten Scheibe–Rahmen Systemen.	

1. Einleitung

1.1 Motivation

Bei Hochhaus­trag­wer­ken set­zen sich dünn­wan­di­ge, schlan­ke Flä­che­ne­le­men­te und aus Sta­be­le­men­ten zu­sam­men­ge­set­zte, in ih­rer Struk­tur je­doch eben­falls flä­che­nar­ti­ge Stock­wer­krah­men, zu drei­dimen­sio­na­len und i. d. R. hoch­gra­dig sta­tisch un­be­stimm­ten Sys­te­men zu­sam­men. Die Erar­bei­tung ei­ner wirt­schaft­li­chen, zweck­mä­ßi­gen, si­che­ren und äs­the­tisch be­friedi­gen­den Kon­struk­tion ist Haupt­auf­ga­be des plan­en­den In­ge­nieu­rs, der in­ner­halb der Ent­wurf­pha­se ein hin­sicht­lich der Ent­wurf­pa­ra­me­ter opti­mi­er­tes Trag­wer­ks­kon­zept fest­legt. Wich­tig ist da­her, ein für den Ent­wurf­pro­zeß ge­eig­ne­tes Werk­zeug berei­tzus­tel­len, mit dem eine glo­ba­le Struk­tu­ran­aly­se und die Ab­schät­zung der Aus­wir­kun­gen von Ent­wurf­ent­schei­dun­gen in kur­zer Zeit mög­lich sind. Die aus ei­ner Struk­tu­ran­aly­se her­vor­ge­hen­den Bere­ch­nung­ser­geb­nis­se er­mög­li­chen Rück­schlüs­se auf die Trag­wer­ks­qua­li­tät und ge­ben An­satz­mög­lich­kei­ten für ein event­uell ver­bes­se­r­tes Trag­wer­ks­kon­zept. Da sich mit zu­neh­men­der Bau­wer­ks­hö­he die Ho­ri­zontal­be­las­tung als kon­zept­be­stim­men­de Ein­wir­kung er­weist, ist die Bere­ch­nung des aus­stei­fen­den Sys­tems Sch­wer­punkt die­ser Ar­beit.

Die sta­tische und dy­na­mische An­aly­se von Hoch­haus­trag­wer­ken wird (heute) sinn­vol­ler­wei­se mit Re­chen­an­la­gen bei An­wen­dung von ge­eig­ne­ten, nu­me­ri­schen Me­tho­den, bei­spie­ls­wei­se der Fi­nite–Ele­men­te–Me­tho­de (FEM), durch­ge­führt. Da­bei ist der Disk­re­ti­si­erungs– und Bere­ch­nungs­auf­wand, selbst bei Aus­nut­zung von oft­mals vor­han­de­nen Sym­me­tri­en im Trag­wer­ks­auf­bau, i.d.R. sehr groß. Eine me­tho­disch ver­ein­fac­hte Lö­sun­gs­stra­te­gie, ins­be­son­de­re für ab­sch­nit­ts­wei­se re­gel­mä­ßi­ge Struk­tu­ren, ist mit Hil­fe der Sub­struk­tu­r­tech­nik (Prze­mie­niecki (1968), Song (1993), Wil­son (1974)) mög­lich, die durch "sta­tische Kon­den­sa­tion" von in­ner­en Sys­tem­frei­heits­gra­den so­ge­nannte "Makro–" oder "Su­pe­re­le­men­te" er­zeugt. Eine für die Auf­ga­ben­stel­lung im Be­reich der Trag­wer­ks­pla­nung er­for­der­liche ein­fac­he Va­ri­a­tion der Sys­tem­pa­ra­me­ter wird auf die­se Wei­se al­ler­dings er­sch­wert, da nach je­der Än­de­rung im Sys­tem die Makro­e­le­men­te neu er­zeugt wer­den müs­sen. Ein wei­te­rer Nach­teil die­ser Lö­sun­gs­stra­te­gie ist, daß wei­tere mög­liche und das Re­chen­mo­dell ver­ein­fac­hen­de An­nah­men im Lö­sun­gs­an­satz nicht aus­ge­nutzt wer­den. Zum Bei­spiel könn­en die bei der Ab­tra­gung ho­ri­zontaler Lasten üb­li­cher­wei­se als dehn­starr und bie­ge­we­ich an­ge­se­he­nen, die Querschnitts­form er­hal­ten­den Deckenscheiben nur durch eine ent­sp­rech­end auf­wen­di­ge Mo­dell­ie­rung bzw. durch eine Kop­plung von geo­me­trisch ab­hän­gi­gen Frei­heits­gra­den er­faßt wer­den.

Durch eine "geo­me­trische Kon­den­sa­tion" von geo­me­trisch ab­hän­gi­gen Sys­tem­frei­heits­gra­den kann bei der Bere­ch­nung von Hoch­haus­trag­wer­ken die Zahl der zu be­stim­men­den, un­be­kann­ten Ver­sie­bungs­grö­ßen wesent­lich re­du­ziert wer­den. Die

nichtlineare Verteilung der Stielnormalkräfte im Querschnitt von querbelasteten einzelnen Stockwerkrahmen oder aus Stockwerkrahmen zusammengesetzten Hohlkästen und der in diesem Zusammenhang auftretende "Shear-Lag-Effekt" sind bekannt (Kristek (1991) und (1993), Rovnak (1996), Singh (1994)). Die daraus abgeleitete "Wölbfunktion" wird beispielsweise bei der "Finite-Story-Method" (Pekau (1995), (1996)) zur Reduzierung des zu lösenden Gleichungssystems herangezogen, wobei abhängige Freiheitsgrade durch geometrische Kondensation eliminiert werden. Nachteil dabei ist jedoch, daß die Systemsteifigkeitsmatrix zunächst in vollem Umfang vorliegen muß. Eine Diskretisierung des Systems entlang der Gebäudelängsachse ist durch die Anzahl der Geschosse außerdem vorgegeben. Damit erweist sich auch diese Methode als wenig effizient, da sie lediglich für die Berechnung, jedoch nicht für die Modellierung der Struktur, eine Vereinfachung darstellt.

1.2 Zielsetzung und Grundgedanke der Arbeit

Eine Modellierung und numerische Berechnung der Struktur mit klassischen Finiten Elementen (Stab- und Flächenelemente) erweist sich i.d.R. als sehr aufwendig, so daß eine Strukturanalyse mit entsprechend effizienteren Elementen angestrebt wird. Ziel dieser Arbeit ist daher die Erarbeitung eines leistungsfähigen Konzepts für die Modellierung und computerunterstützte Berechnung von abschnittsweise regelmäßig aufgebauten Hochhaustragwerken auf der Basis der Finite-Elemente-Methode, das die speziellen, u. a. auch die oben genannten Eigenschaften von Hochhaustragwerken bereits im Ansatz berücksichtigt.

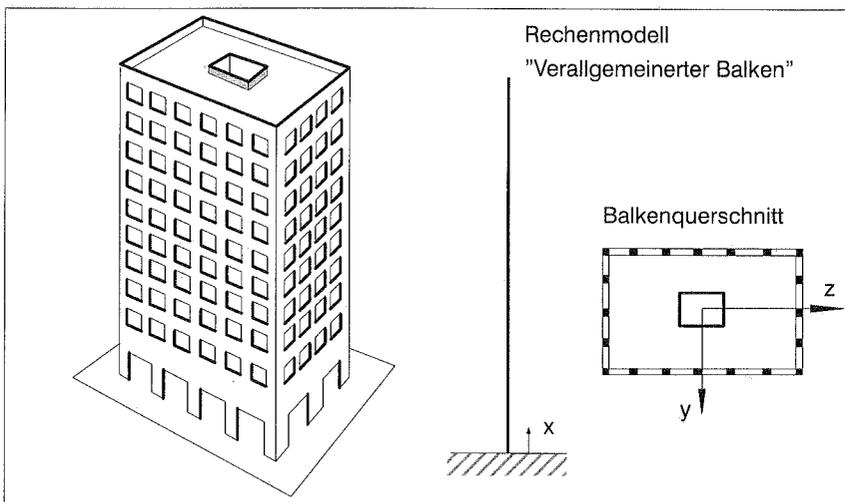


Bild 1.1: Beispiel eines Hochhaustragwerks und Rechenmodell

Ausgehend von einem kontinuierlichen Ersatzsystem wird das Tragwerk aufgrund seiner Schlankheit durch Zusammenfassen aller aussteifenden Bauteile makroskopisch als Balken betrachtet (Bild 1.1), der allerdings, entsprechend der "Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie" von Schardt (1989), "Verallgemeinerte Querschnittswerte" besitzt, aus denen sich im Sonderfall auch die Querschnittswerte (Querschnittsfläche A , Flächenträgheitsmomente I_y und I_z , Deviationsmoment I_{yz} , Torsionsträgheitsmoment I_T , Wölbwiderstand I_W) der klassischen Biegetheorie herleiten lassen. Das Trag- und Verformungsverhalten der aussteifenden Bauteile und die Kopplung der Freiheitsgrade in der Ebene der dehnstarken Deckenscheiben wird hierbei durch entsprechende "Koordinatenfunktionen" bereits im Lösungsansatz berücksichtigt.

Die Berechnung am kontinuierlichen Ersatzsystem setzt allerdings voraus, daß regelmäßige, sich aus Stielen und Riegeln zusammensetzende Stockwerkrahmen makroskopisch als kontinuierliche Scheiben mit mechanisch äquivalenten Eigenschaften betrachtet werden. Die eine Biegung oder Torsion begleitende Querschnittsverwölbung (Bild 1.2) kann so durch den kontinuierlichen Verlauf der Vertikalverschiebungen aller Querschnittspunkte mit Hilfe von entsprechenden Wölbfunktionen beschrieben werden.

Der Verallgemeinerte Balken wird schließlich für eine numerische Berechnung im Sinne der FEM mit (Verallgemeinerten-) Finiten-Balkenelementen diskretisiert, mit deren Hilfe eine effizientere, der Problemstellung gerechtfertigte Modellierung und Strukturanalyse durchgeführt werden kann.

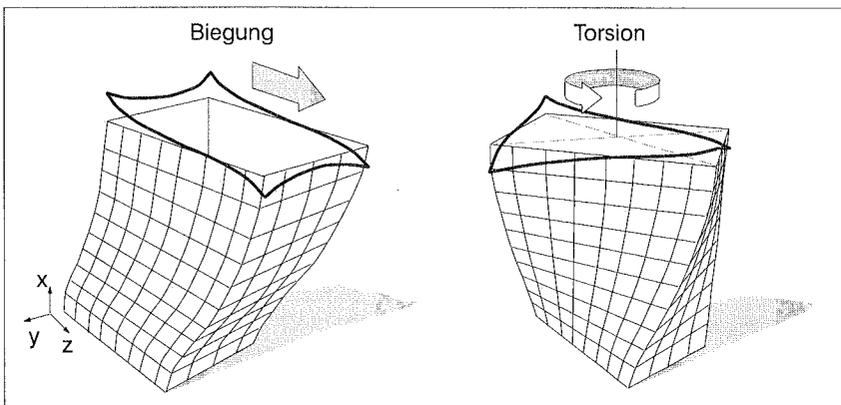


Bild 1.2: Querschnittsverwölbung eines Hohlkastens aus Stockwerkrahmen (nichtquadratische Querschnittsform)

Entsprechend dieser offensichtlich naheliegenden Betrachtungsweise, läßt sich das Verformungsverhalten der Struktur mit relativ wenigen, die Biegung (um die globale y- bzw. z-Achse) und die Torsion (um die x-Achse) erfassenden Freiheitsgraden global

beschreiben. Sie sind Ausgangspunkt für die Festlegung der Hauptentwurfparameter (z.B. Querschnitte der Riegel und Stiele, Dicke der Wandscheiben, Anordnung der aussteifenden Bauteile im Grundriß) einschließlich ihrer Optimierung.

Im Hinblick auf die Aufgabenstellung im Rahmen der Tragwerksplanung soll die vorliegende Arbeit auch dazu beitragen, ein Verständnis für Hochhaustragwerke, insbesondere für die aussteifenden Tragwerkselemente hinsichtlich ihres wesentlichen Trag- und Verformungsverhaltens, zu ermöglichen.

1.3 Literaturschau

Im folgenden wird auf Veröffentlichungen, die einen Beitrag zum Verständnis des Tragverhaltens von Hochhausstrukturen bzw. der tragenden Bauteile liefern und damit in direktem Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen, kurz eingegangen. Aus der Vielzahl der erschienenen Arbeiten kann dabei jedoch nur ein kleiner Teil herausgegriffen werden.

Für die erste Auswahl geeigneter, aussteifender Bauteile für Stahlbetonhochhäuser werden beispielsweise von Büttner und Hampe (1985) und König (1990) Entwurfshilfen bereitgestellt. Für eine Vordimensionierung der Bauteile lassen sich Verformungs- und Schnittgrößen näherungsweise auch analytisch berechnen. Der regelmäßige Aufbau von Hochhaustragwerken ermöglicht hierfür vereinfachte Modellbetrachtungen an kontinuierlichen Ersatzsystemen. Hochhaustragwerke werden dann vereinfacht als im Fundament oder Kellerkasten eingespannte Kragbalken betrachtet.

Berechnungsmethoden auf der Basis eines linear-elastischen Werkstoffes für reine Scheibensysteme bieten u. a. Stiller (1961 und 1965), Beck und Schäfer (1967), Rosman (1967 und 1968) und Schrefler (1971) an. Grundidee dieser Berechnungsmethoden ist, alle Einzeltragglieder zu einem "Gesamtstab" zusammenzufassen. Rosman betrachtet die Einzelstäbe dabei als Gelenkfaltwerke, während seine Kollegen dem Einzelstab die üblichen Querschnittswerte des räumlichen Balkens zuweisen. Aufgrund des affinen Verformungsverhaltens der Einzelstäbe ergeben sich daraus einfach verständliche Gleichungen für Biegung und Torsion zur Ermittlung des Lastverteilungsschlüssels im Querschnitt. Um geschlossene Lösungen, beispielsweise in Form von Differentialgleichungen zu erhalten, sind allerdings auch hier eine Reihe von idealisierenden Annahmen erforderlich, wodurch die Anwendungsmöglichkeiten dieser Berechnungsmethoden zwangsläufig stark eingeschränkt sind. Änderungen im Querschnittsaufbau oder der Querschnittswerte entlang der Gebäude längsachse, können i.d.R. nicht erfaßt werden. Die "Einzelstäbe" zeigen dann bei gleichartiger Lasteinwirkung affines Verformungsverhalten.

Ein vereinfachtes nichtlinear-elastisches Werkstoffverhalten wird für Scheibensysteme von Obst (1974) und Ambos (1977) bei der Ermittlung der Lastverteilung im Tragwerks-

querschnitt berücksichtigt. Da sich die schlanken Scheiben vereinfacht wie Balken behandeln lassen, kann für den bemessenen Scheibenquerschnitt eine bilineare Momenten–Krümmungs–Beziehung hergeleitet werden. Das System wird in Längsrichtung diskretisiert, und die sich während der Belastung ändernden Querschnittswerte werden elementweise berücksichtigt. Bei der auf Matrizenoperationen basierenden, iterativen Lösungsmethoden werden auch Einflüsse aus Theorie II. Ordnung in Form einer gleichmäßig verteilten, fiktiven Abtriebskraft näherungsweise berücksichtigt.

Eine analytische Berechnung aussteifender Bauteile von Scheibensystemen nach Theorie II. Ordnung führen u. a. Beck und König (1967, 1968) an ebenen Systemen durch. Der Einfluß der "gehaltenen Bauteile" auf die Beanspruchung der "haltenden Bauteile" wird hierbei in Form von horizontalen Haltekraften berücksichtigt. Diese lassen sich durch ein aus den einwirkenden Vertikallasten bei horizontaler Ausbiegung entstehendes Zusatzmoment ermitteln. Fey (1966) berücksichtigt bei ebenen Rahmensystemen die Einflüsse aus Theorie II. Ordnung ebenfalls durch eine entsprechende Querbelastung. Vereinfachend setzt auch er dabei eine linear verlaufende Biegelinie an.

Die analytische Lösung des, für einen allgemeinen räumlichen Belastungs– und Verformungszustand von Scheibensystemen, entstehenden Systems gekoppelter Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten (Stabkräfte) beschreiben Reeh (1970) und Brandt (1976). Eine Entkopplung von Biegung und Torsion ist bei reinen Scheibensystemen grundsätzlich möglich, wenn als Bezugspunkt der Schubmittelpunkt des Systems gewählt wird. Brandt leitet in diesem Zusammenhang auch eine Labilitätszahl zur Beurteilung der Gebäudestabilität für Torsionsbeanspruchung nach DIN 1045 her.

Allgemeine aus Rahmen und Scheiben zusammengesetzte Aussteifungssysteme lassen sich beispielsweise mit den Methoden von Schäfer (1969), Coull und Wahab (1993), Sternik und Gluck (1993) sowie Hönderkamp (1995) analytisch berechnen. Um eine geschlossene Formulierung in Form einer Differentialgleichung zu erhalten, wird der Berechnung ein kontinuierliches Ersatzsystem bei unveränderlichen Querschnittswerten zugrunde gelegt.

Anhand eines Biege–Torsionsstabes, bei dem alle aussteifenden Bauteile zusammengefaßt werden, führt Luz (1981) dynamische Berechnungen an Hochhausragwerken durch. Die Querverschiebungen und die Querschnittsverdrehung für den räumlichen Balken werden dabei durch ein Differentialgleichungssystem beschrieben. Die Qualität seiner Rechenmodelle, bei denen Wandscheiben und Rahmensysteme erfaßt werden können, vergleicht er mit Meßwerten, die für ein bestimmtes Bauwerk (MPA–Hochhaus der Universität Stuttgart) experimentell ermittelt wurden.

Eine analytische Berechnung von gegliederten Scheiben beschreibt Beck bereits (1962). Zur Berechnung mehrfeldriger Windrahmen eignet sich die von Eisert (1967) und Beck (1971) erarbeitete Methode. Besonders zu erwähnen sind die zahlreichen Arbeiten von Rosman (z.B. (1964) bis (1993)), die wesentlich zum Verständnis für das Trag- und Verformungsverhalten verschiedener Tragwerkselemente beitragen.

Die auf Matrizenoperationen basierende Methode von Becker (1974) befaßt sich mit der Berechnung von gegliederten Hochhauskernen, wobei er "Verallgemeinerte Querschnittswerte" analog zur "Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie" (VTB) von Schardt (1989) herleitet. Er zeigt an einem Berechnungsbeispiel, daß für allgemeine Hochhauskerne der Schubmittelpunkt als Querschnittswert nicht vorliegt, da Wandscheiben und gegliederte Scheiben bzw. Rahmensysteme bei gleicher Lasteinwirkung ein anderes Trag- und Verformungsverhalten aufweisen. Eine Entkopplung von Biegung und Torsion ist deshalb auch nicht ohne weiteres möglich. Den Grundgedanken der VTB greift auch Liphardt (1977) für seine Berechnungsmethode von symmetrischen, aus Wandscheiben und Hohlkästen aus Rahmen zusammengesetzten Tragwerken auf und leitet für die Biegebeanspruchung die Differentialgleichung des ebenen Erstsatzsystems her.

Schardt (1989) bemerkt, daß seine Verallgemeinerte Biegetheorie auf die gleichen Ansätze zurückgeht wie das "Stabschalenmodell" von Vlasov (1964). Die Stabschalenmodelle zur Berechnung dünnwandiger, prismatischer Stäbe aus dem Bereich des Schiffbaus, Brückenbaus und allgemeinen Stahlbaus werden ausführlich von Altenbach und Kissing (1994) beschrieben. Durch Annahmen über Verformungsverläufe innerhalb des Tragwerkquerschnitts läßt sich das räumliche Problem in eine eindimensionale Betrachtung an einem "Verallgemeinerten Balken" überführen. Um zu einer der Balkentheorie analogen Darstellung zu kommen, werden alle Zustandsgrößen durch einen Produktansatz ausgedrückt. Basierend auf diesem wesentlichen Ansatzpunkt entwickelten Liphardt und Franzmann (1989) das Computerprogramm HHAUS zur Berechnung von Hochhaustragwerken. Die Diskretisierung wird allerdings nur innerhalb des Tragwerkquerschnitts, nicht aber entlang der Balkenachse durchgeführt (semi-diskret). Die Verschiebungsverläufe in Längsrichtung werden für das allgemeine räumliche Problem durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen beschrieben. Deshalb besteht auch hier die einschränkende Annahme, daß sich das Tragwerk ausschließlich aus prismatischen Stabwerken zusammensetzt.

Die Berechnung von stabartigen Strukturen prismatischer Stabwerke, insbesondere aus dem Bereich des Brückenbaus, wird bei der "Finite-Strip-Method" durch Unterteilung in einzelne, systemlange Streifen ermöglicht. Cheung (1976) wählt für die einzelnen Streifen an bestimmte Randbedingungen gebundene Ansatzfunktionen für die Verschiebungsverläufe in Richtung der Stabachse. Für die Verschiebungsverläufe inner-

halb der Randquerschnitte werden Ansatzfunktionen im Sinne der Finiten Elemente gewählt und die kontinuierlichen Verschiebungsverläufe so in Abhängigkeit diskreter Knotenverschiebungen und gewählter Interpolationsfunktionen ausgedrückt. Die Auswertung des aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhaltenen Volumenintegrals führt schließlich auf die Steifigkeitsmatrix des Systems. Damit sind allerdings ebenfalls nur spezielle, an bestimmte Randbedingungen gebundene Probleme lösbar.

Durch die Einarbeitung von allgemeinen Rand- bzw. Übergangsbedingungen (Einheitsverformungszustände) in die Lösung eines Differentialgleichungssystems gelingt es du Preez (1972), die Steifigkeitsmatrix eines "Finiten Streifenelements" herzuleiten, so daß auch über mehrere Felder durchlaufende Tragwerke berechnet werden können. Zur Reduktion der partiellen Differentialgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen greift er dabei auf das Verfahren von Kantorovich (1956) für die Lösung von allgemeinen Variationproblemen bei Funktionalen mit mehreren unabhängigen Variablen zurück. Auf dem dabei zugrundegelegten Produktansatz für die Verschiebungsverläufe im Tragwerksquerschnitt basieren auch die "Verallgemeinerte Biegetheorie" von Schardt (1989) und das Stabschalenmodell von Vlasov (1964).

1.4 Übersicht über die vorliegende Arbeit

Aufgrund der genannten Einschränkungen bezüglich der Anwendungsmöglichkeiten der bestehenden analytischen und numerischen Methoden für die Berechnung allgemeiner Hochhaustragwerke, wird eine Lösungsstrategie auf der Basis der Finite-Elemente-Methode erarbeitet, die zur Berechnung von abschnittsweise kontinuierlichen Tragwerken geeignet ist. Die Grundidee, viele Einzelstäbe zu einem Gesamtstab zusammenzufassen, wird hier beibehalten. Die Rosman'sche Betrachtungsweise der Einzelstäbe als Gelenkfaltwerke wird hier aufgegriffen und analog zur Verallgemeinerten Biegetheorie von Schardt in Form von entsprechenden Koordinatenfunktionen erfaßt. Als Erweiterung der Methode werden auch ebene Rahmensysteme, aufgrund ihrer flächenartigen Struktur, als kontinuierliche Scheiben mit entsprechenden mechanischen Eigenschaften betrachtet. Eine Diskretisierung des Verallgemeinerten Balkens in Längsrichtung erlaubt eine Tragwerksberechnung im Sinne der FEM.

In Abschnitt 2 dieses Beitrags werden zunächst Grundlagen erarbeitet, die für eine wirklichkeitsnahe Modellbildung und die Interpretation der Berechnungsergebnisse erforderlich sind. Dabei wird insbesondere auf das Trag- und Verformungsverhalten von Rahmensystemen und gemischten Scheibe-Rahmen-Systemen eingegangen. Der in diesem Zusammenhang auftretende "Shear-Lag-Effekt" wird erläutert.

Da sich die Berechnung von abschnittsweise regelmäßigen Systemen auf der Grundlage von abschnittsweise kontinuierlichen Ersatzsystemen als zweckmäßig erweist,

wird dieses mechanisch äquivalente Ersatzsystem in Abschnitt 3 hergeleitet. Außerdem wird in diesem Zusammenhang auch die Riegelwirkung der Deckenplatten untersucht. Die analytische Berechnung von gemischten Scheiben–Rahmen–Systemen wird in Abschnitt 4 beschrieben. Analytische Berechnungsmethoden obliegen zwar den bekannten Einschränkungen bezüglich ihrer Anwendungsmöglichkeit, sie leisten jedoch in der Entwurfsphase, bei der näherungsweise Berechnung der Verformungs– und Schnittgrößen, oftmals wertvolle Dienste.

In Abschnitt 5 werden die mechanischen Beziehungen für eindimensionale "Verallgemeinerte–Finite–Balkenelemente" d.h. Balkenelemente mit "Verallgemeinerten Querschnittswerten" hergeleitet.

Insbesondere bei hohen und weichen Tragwerken ist die Berücksichtigung der Einflüsse aus Theorie II. Ordnung auf das Trag– und Verformungsverhalten des Systems aus Sicherheitsgründen oftmals erforderlich. Für eine entsprechende Berechnung werden in Abschnitt 6 die aus der Vertikallast resultierenden, fiktiven "Abtriebskräfte" in Form einer Horizontalbelastung erfaßt.

Bei der statischen Analyse von Hochhaustragwerken werden Windlasten auf nicht schwingungsanfällige Bauwerke (nach DIN 1055/4) i. d. R. als statische Lasten angesetzt. Die dynamische Wirkung des Windes ist bekannt (z.B. König (1970) und (1972)) und läßt sich nach Schlaich (1966) mit Hilfe eines dynamischen Vergrößerungsfaktors berücksichtigen. Dafür ist zunächst eine Abschätzung des Schwingungsverhaltens erforderlich. Die sich für den Verallgemeinerten Balken ergebenden mechanischen Zusammenhänge werden in Abschnitt 7 hergeleitet. Mit den aus der analytischen Berechnung gemischter Scheiben–Rahmen–Systeme gewonnenen Erkenntnissen ist eine Berechnung der ersten Eigenfrequenz möglich.

In Abschnitt 8 erläuterte Berechnungsbeispiele bilden den Abschluß der Arbeit.

2. Grundlagen

2.1 Trag- und Verformungsverhalten von Rahmensystemen

Die aus der äußeren Belastung resultierenden Schnittgrößen im gesamten Rahmenquerschnitt, eine Querkraft $Q(x)$ und ein Biegemoment $M(x)$, lassen sich durch einfache Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmen. Unter der Annahme einer nahezu starren "Verdübelung" der Stiele durch die biegesteifen Riegel, bewirkt der Abtrag der Querkraft durch seitliches Ausbiegen der flexiblen Stiele eine "Schubverformung" des Systems, während das Biegemoment eine "Biegeverformung" infolge Dehnung und Stauchung der Stiele hervorruft (Bild 2.1). In der Verformungsfigur eines Rahmens finden sich damit grundsätzlich beide Anteile, wobei sich entweder der Biege- oder der Schubanteil stärker bemerkbar machen kann. Dies trifft grundsätzlich auch auf das Verformungsverhalten von gegliederten Scheiben zu. Es kann das kontinuierliche Ersatzmodell eines biege- und schubweichen Balkens (bzw. Scheibe) hergeleitet werden (z.B. Stafford Smith (1981) oder Schmidts (1996)), der das Trag- und Verformungsverhalten des regelmäßigen Stockwerkrahmens beschreibt. Die Systemverformung wird dann durch die mittlere Biegelinie der Stiele beschrieben, wenn man von den leicht oszillierenden Stielen absieht.

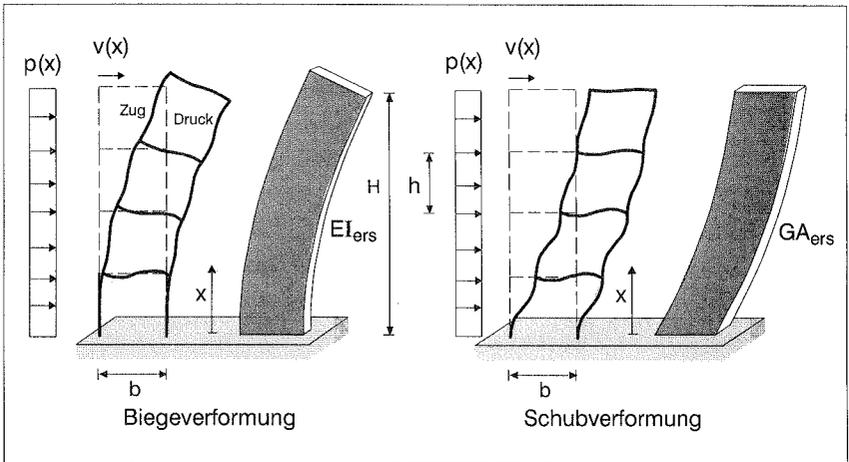


Bild 2.1: Verformungsanteile eines Stockwerkrahmens
und des entsprechenden kontinuierlichen Ersatzsystems

Einige Berechnungsbeispiele sollen das Trag- und Verformungsverhalten von Stockwerkrahmen anhand der Verformungsfiguren infolge einer Gleichlast p veranschaulichen (Bild 2.2). Die Berechnungen wurden mit Hilfe eines Finite-Elemente-Programms durchgeführt.

Die Trägheitsmomente von Stiel (I_S) und Riegel (I_R) sind bei den berechneten Beispielen gleich groß gewählt worden (Stahlprofil HE–M240). Die Rahmen sind $H=90$ m hoch, und die Höhe eines Geschosses beträgt $h=3$ m. Die Breite eines Feldes beträgt $b=3$ m bzw. $b=9$ m, n ist die Anzahl der Felder. Die Stiele sind an den Lagerknoten im Fußpunkt starr eingespannt.

Bei Variation des Stielabstandes bzw. der Riegeellänge b , zeigt sich beim einfeldrigen Stockwerkrahmen ein Übergang von der reinen Biegeverformung zur reinen Schubverformung. Bei einer Feldbreite von $b=3,0$ m stellt sich eine Biegelinie ein, die wesentlich durch die Dehnung bzw. Stauchung der Stiele geprägt wird (Bild 2.2a), der Biegeanteil dominiert. Bei zunehmender Riegeellänge wird der Einfluß der Riegel aufgrund deren abnehmender Steifigkeit geringer, eine starre Verdübelung der Stiele durch die Riegel kann deshalb nicht mehr angenommen werden. Die Biegelinie gleicht dann derjenigen eines drehfedergelagerten oder schubweichen Balkens (Bild 2.2b).

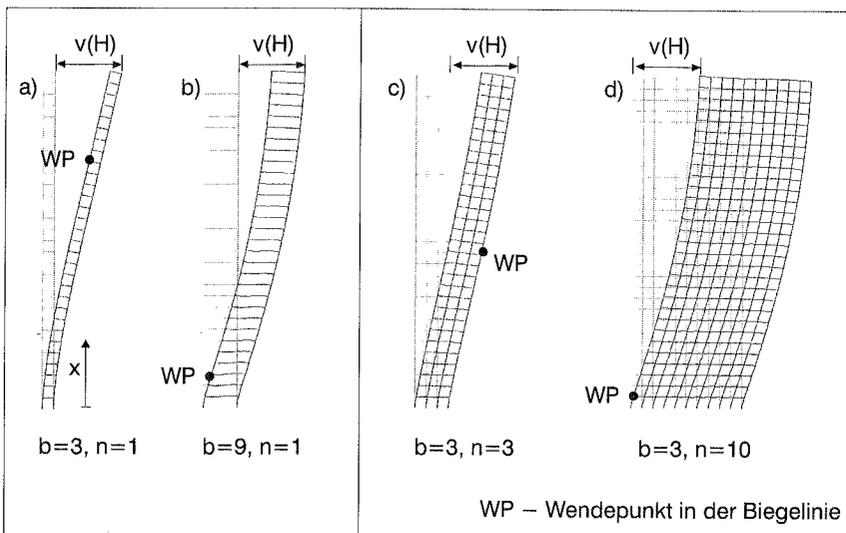


Bild 2.2: Biegelinien verschiedener regelmäßiger Stockwerkrahmen

Dieser Übergang von Biege- zu Schubverformung zeigt sich auch bei mehrfeldrigen Stockwerkrahmen mit einer größer werdenden Anzahl von Feldern. Dargestellt sind die sich einstellenden Systemverformungen bei $n=3$ (Bild 2.2c) und $n=10$ (Bild 2.2d) Feldern. Mit zunehmendem Abstand $n \cdot b$ der äußeren Randstiele erhöht sich die Biegesteifigkeit EI_{ers} des Systems wesentlich. Bei der Schubsteifigkeit GA_{ers} hingegen werden die Anteile aus den einzelnen Stielen lediglich aufaddiert (vgl. Bild 2.1).

Die Biegelinien von Stockwerkrahmen (und gegliederten Scheiben) weisen in ihrem Verlauf grundsätzlich einen Wendepunkt (WP, maximale Querschnittsverdrehung) auf. Dieser liegt bei dominierender Biegeverformung im oberen Systembereich und bei dominierender Schubverformung in der Nähe des Fußpunktes.

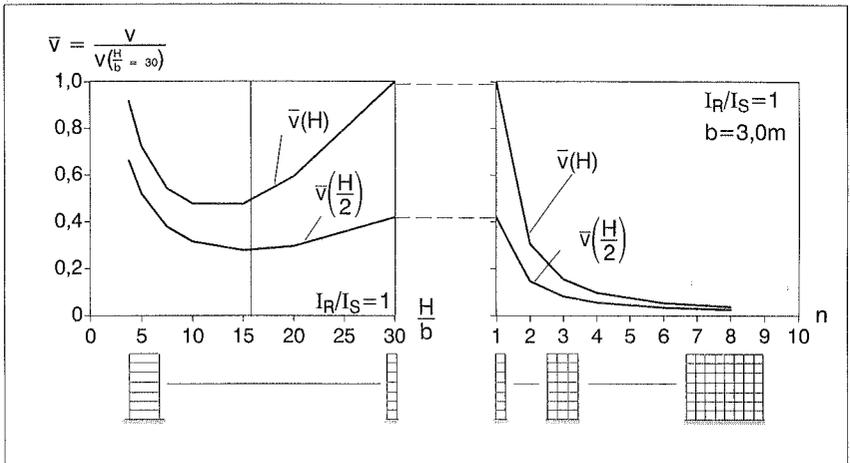


Bild 2.3: Ergebnisse einer Rahmenserie

Es soll gezeigt werden, daß bereits einfache Überlegungen an Ersatzmodellen eine qualitative Aussage für einen Tragwerksentwurf zulassen:

Betrachtet man beispielsweise den Verlauf der bezogenen Kopfverschiebung $\bar{v}(H)$ bei Veränderung der Schlankeheit H/b (Bild 2.3), so ergibt sich für dieses (!) Beispiel eine maximale Systemsteifigkeit (kleinste Verschiebung) bei einer Schlankeheit $H/b \approx 15$. Dies kann durch eine Berechnung am kontinuierlichen Ersatzsystem einfach nachgewiesen werden.

In der Literatur (z.B. Stafford Smith und Coull (1991)) wird die Ersatzschubsteifigkeit des Rahmens mit:

$$GA_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{h} \cdot \frac{n(n+1) \frac{I_R}{b} \frac{I_S}{h}}{(n+1) \frac{I_S}{h} + n \frac{I_R}{b}} \quad (2.1)$$

angegeben (Herleitung in Abschnitt 3.3). Für einen einfeldrigen Rahmen ($n=1$) ergibt sich daraus die Bestimmungsgleichung:

$$GA_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{h} \cdot \frac{2 I_R I_S}{2 I_S b + I_R h} \quad (2.2)$$

Die Ersatzbiegesteifigkeit (Näherung):

$$EI_{\text{ers}} = EA_S \frac{b^2}{2} \quad (2.3)$$

des einfeldrigen Stockwerkrahmens, die sich unter der Annahme einer starren Verdübelung aus den Stielquerschnittsflächen A_S und deren Abstand b bestimmt, steigt dagegen mit dem Stielabstand b quadratisch an. Die sich aus Biege- und Schubanteile zusammensetzende Kopfauslenkung ist:

$$v(H) = v_S(H) + v_B(H) = \frac{p}{2} \frac{H^2}{EI_{\text{ers}}} \left(\frac{1}{GA_{\text{ers}}} + \frac{H^2}{4 EI_{\text{ers}}} \right) \quad (2.4)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (2.2) und (2.3) in (2.4) ergibt sich mit $I_R = I_S = I$ und aus der Forderung für einen Minimalwert:

$$\frac{\partial v(H)}{\partial b} = 0 = \frac{h p}{24 EI} \frac{H^2}{EI} - \frac{p H}{4 EA_S} \left(\frac{H}{b} \right)^3 \quad (2.5)$$

eine Systemschlankheit:

$$\frac{H}{b} = \sqrt{\frac{h H}{6} \cdot \frac{EA_S}{EI}} = \underline{15.47} \quad (\text{vgl. Bild 2.3})$$

Erhöht man dagegen ausgehend von einem Einfeldrahmen die Anzahl der Felder (Bild 2.3) bei gleichbleibender Feldbreite b , so kann man erkennen, daß die größte Steifigkeitserhöhung (Steigung der Kurve) durch Hinzufügen von lediglich einem weiteren Feld ($n=1 \rightarrow n=2$) erzielt wird. Dies ist im wesentlichen auf die nunmehr 4-fach höhere Biegesteifigkeit und der damit geringen Biegeverformung zurückzuführen. Die Steifigkeitserhöhungen durch Hinzufügen weiterer Felder sind weitaus geringer, da sich, wie bereits erwähnt, die Anteile aus den Stielen bei der Schubsteifigkeit des Systems lediglich aufaddieren. Die aus (2.1) abgeleitete Beziehung:

$$GA_{\text{ers}} = 12 \frac{EI_S}{h^2} \cdot k \quad \text{mit: } k = \frac{n(n+1)\eta}{(n+1) + n\eta} \quad \text{und: } \frac{I_R}{b} = \eta \frac{I_S}{h} \quad (2.6)$$

zeigt für $\eta > 5$ näherungsweise einen linearen Zusammenhang zwischen dem Verhältniswert η und dem Steifigkeitsfaktor k (Bild 2.4). Außerdem ist es offensichtlich sinnvoll, die Riegelsteifigkeit I_R/b größer zu wählen als die Steifigkeit I_S/h der Stiele ($\eta > 1$), um eine höhere Schubsteifigkeit zu erreichen.

Gleichung (2.6) läßt jedoch erkennen, daß mit größeren η -Werten nicht mehr viel zu erreichen ist. Insbesondere beim Entwurf von Rahmensystemen ist eine Abschätzung des Verformungsverhaltens durch die Ermittlung der Kopfauslenkung mit Hilfe des Ersatzsystems sicherlich sinnvoll.

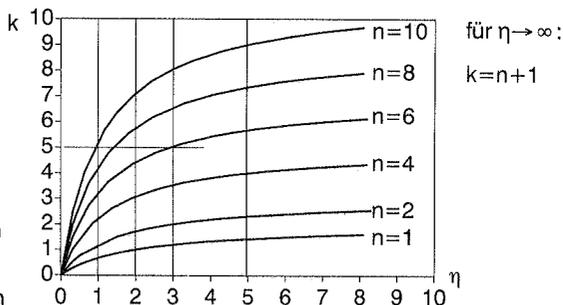


Bild 2.4:
Steifigkeitsfaktor k in
Abhängigkeit von
dem Verhältniswert η

Anwendungsbeispiel:

Nach Bild 2.4 ergibt sich für ein Stockwerkrahmen mit 10 Feldern (Bild 2.5) und einem Systemwert $\eta = 1,0$ ein Steifigkeitsfaktor $k = 5$ für die Ermittlung der Ersatzschubsteifigkeit nach Gleichung (2.6). Bei gleicher Steifigkeit I_S/h der Stiele erhält man den gleichen Steifigkeitsfaktor k für einen Stockwerkrahmen mit nur 6 Feldern und einem Systemwert $\eta^* \approx 3,0$. Soll zusätzlich die Gesamtbreite B des Systems in beiden Fällen gleich sein, so ist nach Beziehung (2.6) für den größeren Systemwert η^* ein 5-mal größeres Flächenträgheitsmoment I_R erforderlich. Entscheidend für die Wahl des "besseren" Systems wird hier, abgesehen von architektonischen und nutzungsbedingten Rahmenbedingungen, auch eine Gegenüberstellung der Material- und Montagekosten sein.

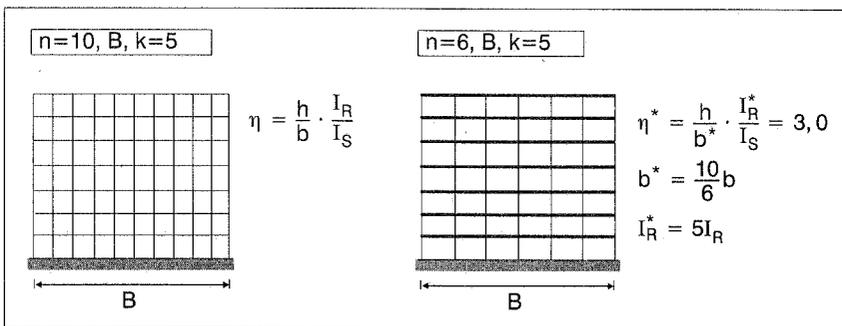


Bild 2.5: Entwurfsbeispiele für Stockwerkrahmen

2.2 Normalkraftverteilung in den Stielen von mehrfeldrigen Stockwerkrahmen

Bei der Untersuchung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stockwerkrahmen im vorangegangenen Abschnitt hat sich gezeigt, daß die "Verwölbung" des Rahmenquerschnitts (kontinuierlich verlaufende Längsdehnungen der Rahmenstiele) nicht-linear verläuft (Bild 2.2d). Dieser Sachverhalt ist auch bei der Balkenbiegung bekannt und widerspricht der Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte; er war Motivation für eine verfeinerte Balkentheorie von Hofmann (1992). Die Ursache wird für mehrfeldrige Stockwerkrahmen im folgenden erläutert.

Die Normalkräfte in den $(n + 1)$ Stielen eines n -feldrigen Stockwerkrahmens sind offensichtlich auf entsprechende Querkräfte in den Riegeln zurückzuführen. Das Tragverhalten hinsichtlich des aus der äußeren Belastung resultierenden Moments (Biegeanteil) kann deshalb anschaulich am Modell eines regelmäßigen Durchlaufträgers (Biegelinie) gezeigt werden, der die Riegelreihe im Stockwerk j repräsentiert (Bild 2.6).

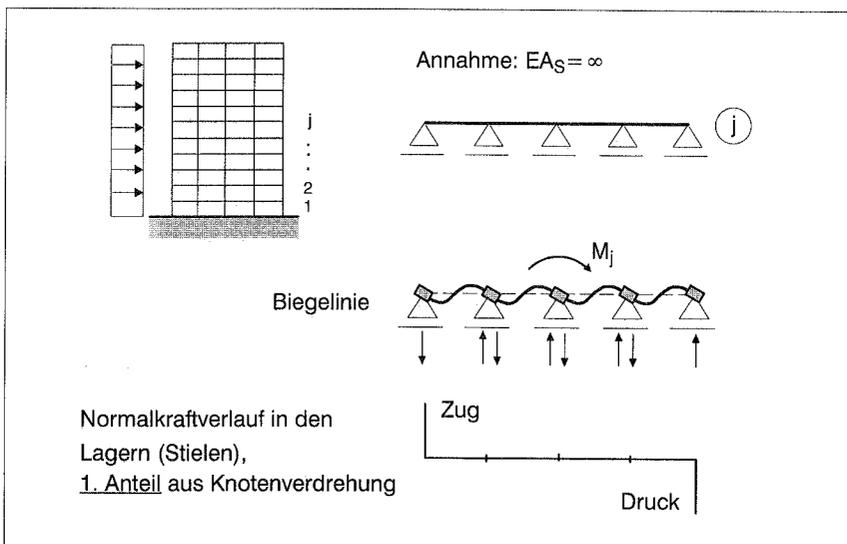


Bild 2.6: Riegelreihe als Durchlaufträger ($EA_S = \infty$)

Nimmt man an, daß sich alle Stiel-Riegel Knoten gleich verdrehen, so sind die dadurch entstehenden Querkräfte in allen Riegeln gleich groß. Die Stiele lassen sich unter der Annahme unendlich großer Dehnsteifigkeiten EA_S durch vertikal unverschiebliche Lager ersetzen. Bei gleicher Verdrehung der Knoten entfallen dann auf die inneren Stiele (Lager) keine Kraftgrößen, und das durch die äußere Belastung entstehende Biegemoment im Rahmenquerschnitt wird lediglich von einem Kräftepaar, d.h. einer Zug- bzw.

Druckkraft in den Randstielen, aufgenommen. Zur Erfassung des Biegeanteils an der Gesamtverformung kann in diesem Fall eine Ersatzbiegesteifigkeit:

$$EI_{\text{ers}} = EA_S \frac{(nb)^2}{2} \quad (2.7)$$

(vgl. (2.3)) ermittelt werden.

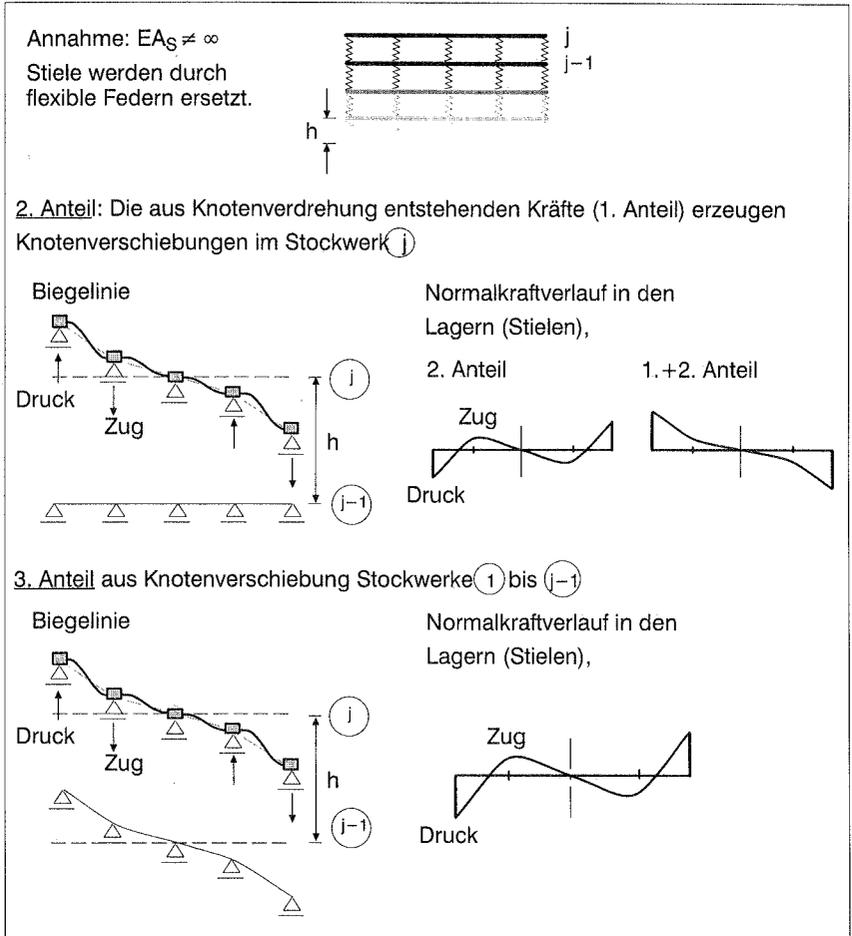


Bild 2.7: Riegelreihen als flexibel gelagerte Durchlaufträger ($EA_S \neq \infty$)

Ein die Wirklichkeit besser abbildendes Modell ist der Durchlaufträger mit flexibler Lagerung der Knoten (Bild 2.7). Die Randstiele "entziehen sich" dann teilweise der Last, und durch die nun auftretenden Längsdehnung werden auch die benachbarten Lager

beansprucht, so daß sich der dargestellte nichtlineare Normalkraftverlauf in den Stielen des Rahmenquerschnitts einstellt. Dieser zweite Anteil wird mit dem ersten überlagert. Insgesamt stellt sich dann eine Normalkraftverteilung im Rahmenquerschnitt ein, bei der die Randstiele am stärksten beansprucht werden, so daß die Beziehung (2.7) für eine Näherungsbetrachtung ihre Gültigkeit behält, da die Lagerkräfte (Normalkräfte in den Stielen) von außen nach innen sehr schnell abklingen.

Durch die Verformung der unter der j -ten liegenden, insgesamt $j-1$ Riegelreihen stellt sich noch ein weiterer Effekt ein, der durch die Vertikalverschiebung der Knoten einen zusätzlichen Einfluß auf die Normalkräfte in den Lagern ausübt (Bild 2.7). Dieser dritte Anteil ist in der untersten Riegelreihe nicht vorhanden und nimmt nach oben mit der Entfernung von der Einspannung zu. Er kann unter Umständen insgesamt so groß werden, daß sich bei hohen Rahmensystemen im oberen Bereich das Vorzeichen und auch der qualitative Verlauf der Normalkräfte in den Randstielen ändern.

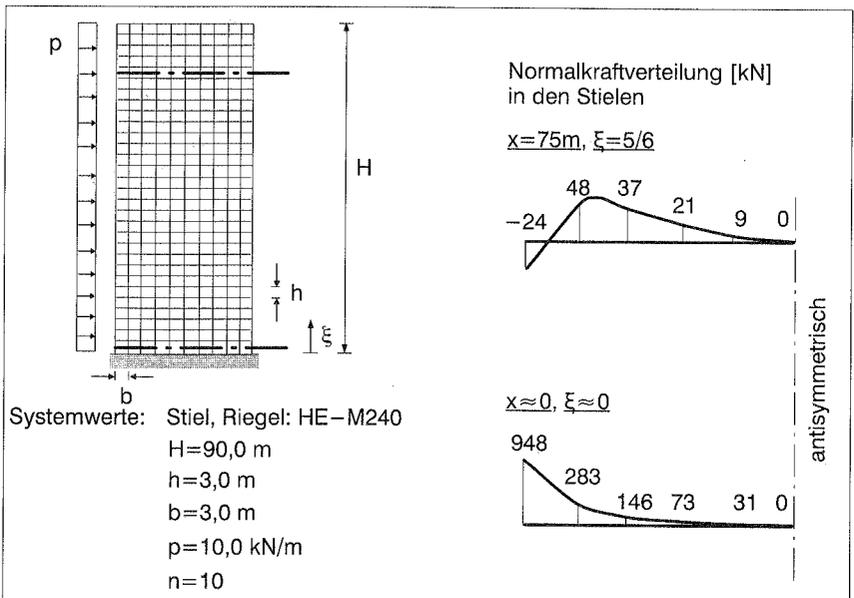


Bild 2.8: Berechnungsbeispiel eines mehrfeldrigen Stockwerkrahmens unter Gleichlast

Die durch die Knotenverschiebung hervorgerufene Biegelinie (Bild 2.7) zeigt jedoch, daß der zweite und dritte Anteil nur in den äußeren Randstielen zu anderen Vorzeichen führt. Die relativen Vertikalverschiebungen der Riegelendknoten und damit auch die Querkräfte in den Riegeln nehmen von außen nach innen ab. Da an den gemeinsamen

Knoten lediglich die Differenz der Riegelquerkräfte von den Lagern aufgenommen wird, muß damit bereits im zweiten Stiel eine, im Vergleich zum Randstiel, im Vorzeichen unterschiedliche Normalkraft (Zug +, Druck -) vorhanden sein.

Der beschriebene Sachverhalt zeigt sich für ein Berechnungsbeispiel eines Stockwerkrahmens bei der Normalkraftverteilung in den Stielen (Bild 2.8).

Es sei ergänzend darauf hingewiesen, daß die maximale Riegelbeanspruchung nicht in dem Querschnitt mit maximaler Knotenverdrehung (WP in Bild 2.2) sondern ein bis zwei Stockwerke darunter zu finden ist, da durch die Relativverschiebung der Riegelendknoten infolge Stieldehnungen bzw. -stauchungen die Schnittgrößen in den Riegeln abgebaut werden.

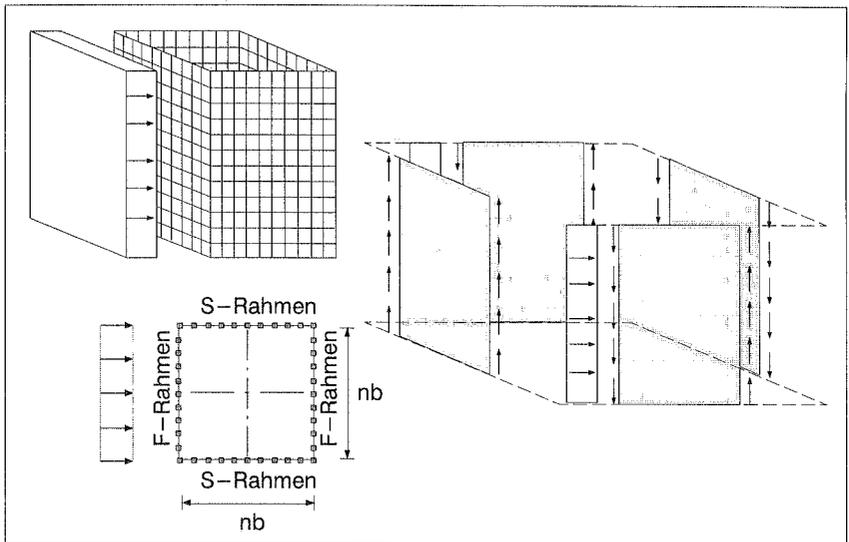


Bild 2.9:
Tragwirkung der F- und S-Rahmen beim Hohlkasten aus Stockwerkrahmen

2.3 Tragverhalten von Hohlkästen aus Stockwerkrahmen

Perforierte Hohlkästen setzen sich aus mehreren, miteinander "schubsteif" verbundenen Stockwerkrahmen zusammen. Dabei werden die in Lastrichtung wirkenden Rahmen als S-Rahmen ("Steg"-Rahmen) und die rechtwinklig zur Lastrichtung angeordneten Rahmen, entsprechend ihrer Wirkungsweise, als F-Rahmen ("Flansch"-Rahmen) bezeichnet (Bild 2.9). Nur die Dehnungen der äußeren Stiele bewirken, daß sich aus Kontinuitätsgründen auch die F-Rahmen an der Lastabtragung des aus der äußeren Belastung resultierenden Biegemoments beteiligen. Die F-Rah-

men erhöhen aufgrund ihrer "Flanschwirkung" die Biegesteifigkeit des Systems erheblich. Zwischen S- und F-Rahmen werden Schubkräfte in Form von Riegelquerkräften übertragen, die zu einer "Entlastung" der S-Rahmen führen (Bild 2.9). Ein Berechnungsbeispiel soll die Tragwirkung von Hohlkästen aus Stockwerkrahmen verdeutlichen.

Ein symmetrischer Hohlkasten setzt sich aus regelmäßigen Stockwerkrahmen nach Bild 2.8 zusammen. Die verhältnismäßig geringe Torsionssteifigkeit der Riegel und die "Plattentragwirkung" der F-Rahmen haben einen unwesentlichen Einfluß auf das Tragverhalten und werden vernachlässigt. Die auf die Fläche der F-Rahmen wirkende Last wird deshalb jeweils zur Hälfte ($p = 10 \text{ kN/m}$) auf die beiden S-Rahmen verteilt (vgl. Bild 2.8). Die mit einem Finite-Elemente-Programm ermittelten Berechnungsergebnisse zeigen, daß bei den resultierenden Querverschiebungen kein entscheidender Einfluß aus den F-Rahmen zu erwarten ist (Bild 2.10), da nur der ohnehin geringere Biegeanteil reduziert wird. Der Schubanteil der Biegelinie kann dabei auch mit dem Ersatzmodell eines schubweichen Balkens mit der Ersatzschubsteifigkeit GA_{ers} nach Gleichung (2.1) mit großer Genauigkeit ermittelt werden.

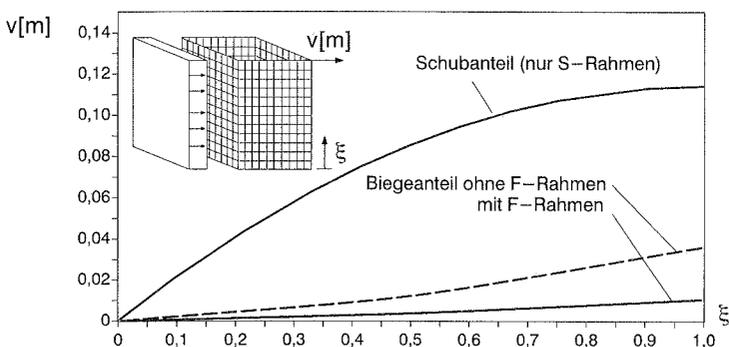


Bild 2.10: Biegelinie eines Hohlkastens aus Stockwerkrahmen

Die Verteilung der Stielnormalkräfte (Bild 2.11) im Hohlkastenquerschnitt weicht, wie bereits bei einem einzelnen, mehrfeldrigen Stockwerkrahmen gezeigt, von den Ergebnissen der Technischen Biegelehre ab. Die Ursache hierfür wurde erläutert.

Im Querschnitt $\xi=0$ zeigen die Normalkräfte im Eckbereich einen starken Anstieg und sind damit dort wesentlich größer als im Innenbereich. Im Querschnitt $\xi=5/6$ hat sich der Einfluß aus den Knotenverformungen (Längsdehnungen der Stiele) der darunterliegenden Stockwerke bereits so stark ausgewirkt, daß sich die qualitative Beanspruchung der Eckstiele geändert hat (Zug \rightarrow Druck). In Abhängigkeit von dem

qualitativen Verlauf der Normalspannungen in den F–Rahmen werden "positive shear lag" \smile (dieser stellt sich aufgrund der Wölbbehinderung insbesondere im Fußpunktbereich ein) und "negative shear lag" \frown unterschieden. Der (positive) Shear–Lag–Effekt ist auch bei Plattenbalken oder Stahlprofilen aus dem Problem der "mittragenden Breite" bekannt.

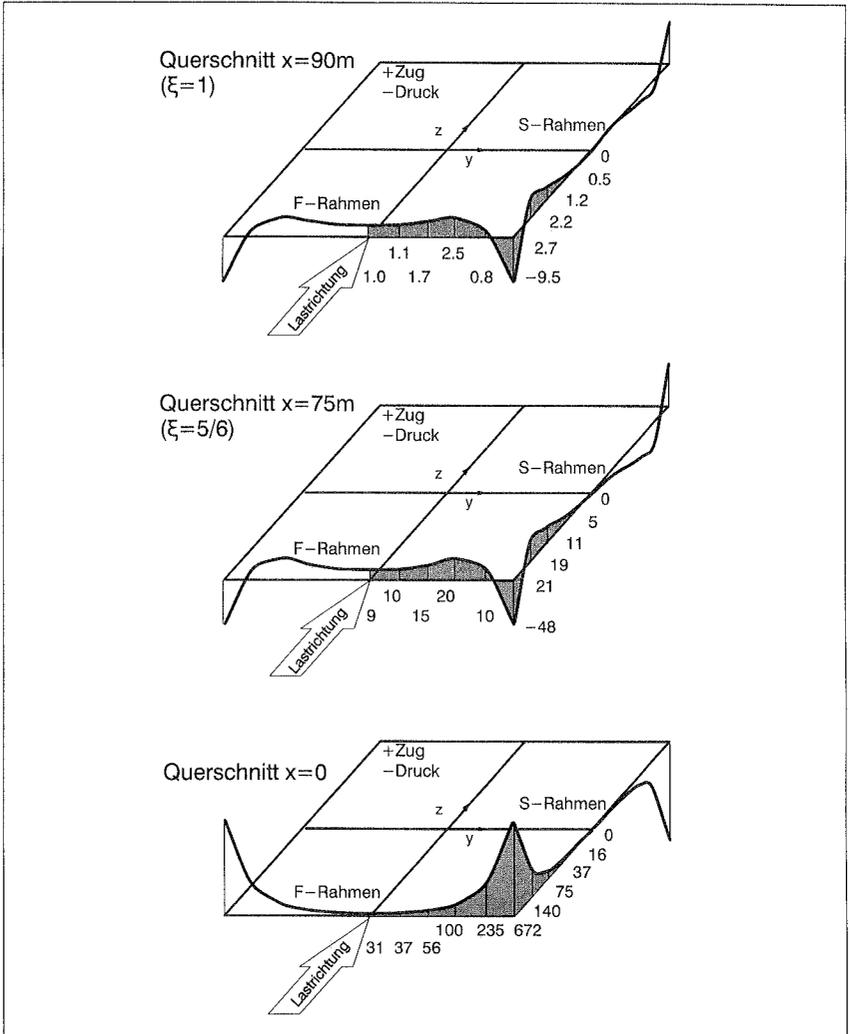


Bild 2.11:
Normalkraftverteilung [kN] in den Stielen der S– und F–Rahmen

3. Modellbildung

3.1 Der Berechnung zugrunde gelegte Annahmen

Bezüglich des Berechnungsziels, die Dimensionierung und Bemessung der aussteifenden und tragenden Bauteile, unterscheiden sich die zugrundegelegten Rechenmodelle für Tragwerksberechnungen bei einwirkenden Horizontallasten und Vertikallasten unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen (Theorie I. Ordnung). So wird beispielsweise die Plattenwirkung der Geschoßdecken beim Abtrag horizontaler Windlasten, unter der Annahme eines vernachlässigbaren Einflusses auf das Tragverhalten der Struktur, häufig nicht berücksichtigt. Für symmetrische Tragwerke kann dann ein ebenes Ersatzsystem zugrunde gelegt werden, bei dem die Deckenscheiben durch dehnstarre, gelenkig angeschlossene Stäbe ersetzt werden (Bild 3.1). Hingegen werden bei der Abtragung der Vertikallasten aus Eigengewicht und Verkehr die vertikalen Tragglieder als vertikal unverschiebliche Lager idealisiert. Einflüsse aus den Längsdehnungen der Stiele werden damit vernachlässigt.

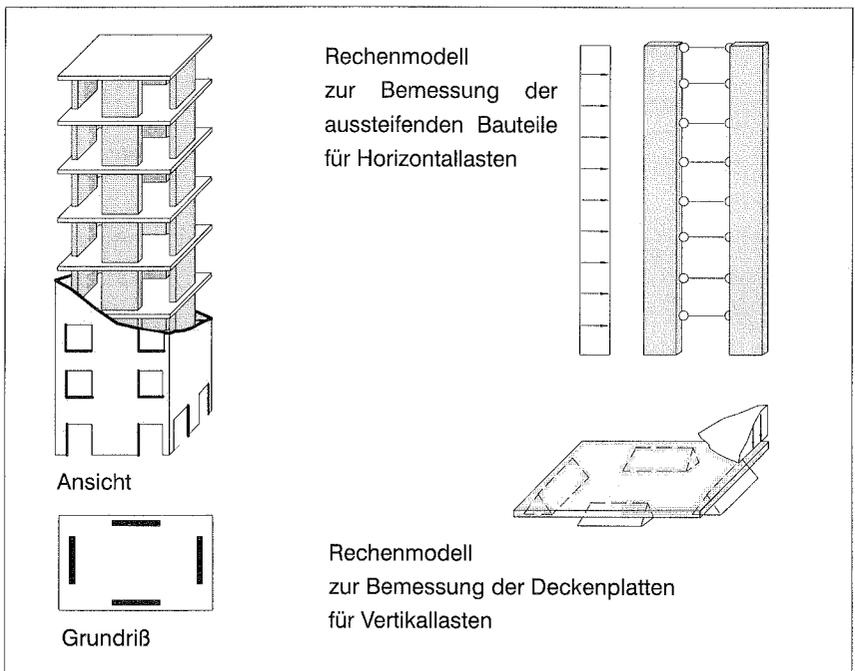


Bild 3.1: Beispiel eines symmetrischen Tragwerks und der Berechnung zugrundegelegte Rechenmodelle

Der vorliegende Beitrag befaßt sich schwerpunktmäßig mit der Aussteifung von Hochhäusern gegen horizontale Lasten aus Wind und Erdbeben, da sich diese Einflüsse für die Tragwerke von hohen Bauwerken als konzeptbestimmend erweisen. Der Strukturanalyse von Hochhaustragwerken werden dabei die nachfolgend aufgeführten Annahmen zugrunde gelegt. Ihre Berechtigung ist jedoch im Einzelfall kritisch zu bewerten.

Annahmen:

1.

Das Tragwerk setzt sich aus beliebig angeordneten, dünnen Scheiben zusammen. Dabei werden aufgrund ihrer flächenhaften und regelmäßigen Struktur auch Stockwerkrahmen als kontinuierliche, schubweiche Scheiben betrachtet.

2.

Die Geschoßhöhe ist abschnittsweise konstant.

3.

I.d.R. wird von einem starren Gründungskörper ausgegangen, so daß alle aussteifenden Bauteile als starr eingespannt betrachtet werden. Näherungsweise wird der Einfluß aus einer flexiblen Lagerung in Form von Federn erfaßt.

4.

Die Deckenscheiben haben beim Abtrag horizontaler Lasten im wesentlichen eine lastverteilende Funktion und werden deshalb als dehnstarr angenommen. Damit werden auch alle in der Ebene der Deckenscheibe angeordneten horizontalen Tragglieder (z.B. Riegel bei Rahmen und gegliederten Scheiben) als dehnstarr angesehen. Die Querschnittskontur des Tragwerks bleibt so erhalten, eine Profilverformung findet nicht statt.

5.

Eine Plattentragwirkung bzw. Riegelwirkung der Deckenplatten wird beim Abtrag horizontaler Lasten i.d.R. vernachlässigt. Die Deckenplatten sind gelenkig an den aussteifenden Bauteilen angeschlossen. Eine Riegelwirkung der Deckenplatte kann im Einzelfall, beispielsweise bei kleinem Stützenraster, berücksichtigt werden.

6.

Die aussteifenden Bauteile, Rahmen und Scheiben, haben ihre wesentliche Tragwirkung in der "Scheibenebene". Die Plattentragwirkung und die Eigentorsionsteifigkeit G_{IT} werden bei Einzelscheiben vernachlässigt.

7.

Die Schubverformungen werden bei einzelnen Rahmenstielen und Riegeln vernachlässigt.

8.

Die Tragwerke sind nicht schwingungsanfällig. Der Wind wird als statische Last angesetzt. Die dynamische Wirkung des Windes wird in Form eines dynamischen Lastfaktors berücksichtigt.

9.

Die auftretenden Verformungen sind klein. Das Gleichgewicht wird am unverformten System formuliert (Theorie I. Ordnung). Einflüsse aus Theorie II. Ordnung werden in Form einer zusätzlichen, aus der Querbiegung resultierenden Abtriebskraft näherungsweise berücksichtigt.

10.

Der Werkstoff verhält sich linear elastisch. Das Superpositionsprinzip ist gültig.

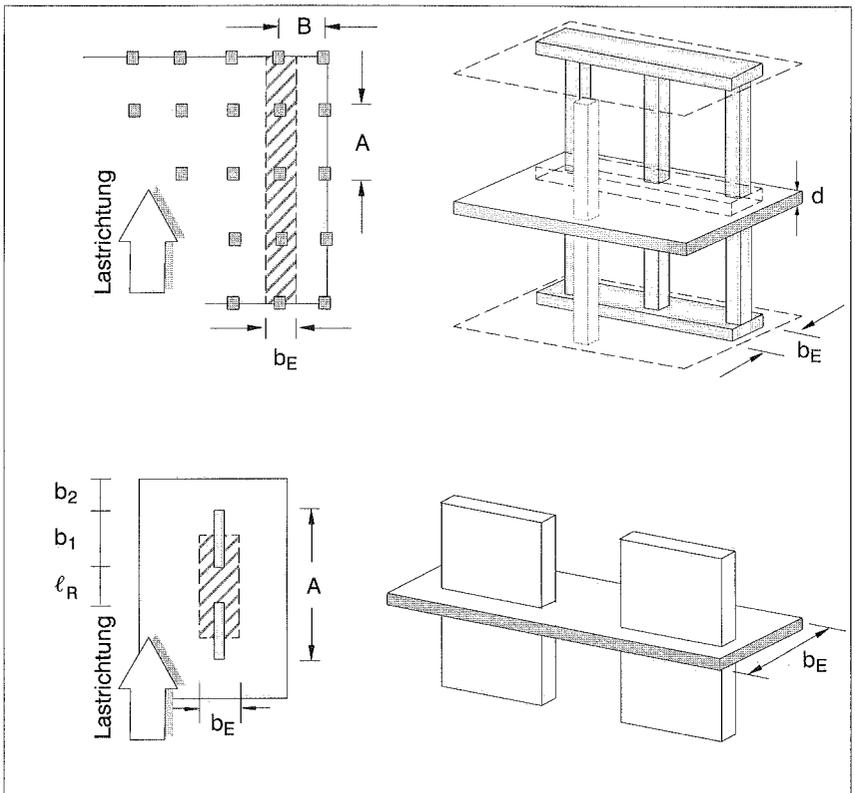


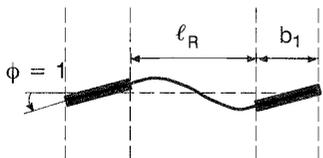
Bild 3.2: Beispiele zur Riegelwirkung der Deckenplatte

3.2 Riegelwirkung der Deckenplatte

Beim Abtrag horizontaler Lasten werden die Deckenplatten i.d.R. als biegeweich angesehen, ihre vergleichsweise geringe Biegesteifigkeit damit vernachlässigt (Annahme 5 Abschnitt 3.1). Bei geringen Spannweiten, z.B. bei Flachdecken oder hintereinanderliegenden Wandscheiben können sich bei konstruktiv biegesteif ausgebildeten Anschlüssen von Stielen und Riegeln, aufgrund der entstehenden Riegelwirkung, in Lastrichtung wirkende Rahmensysteme bzw. gegliederte Scheiben ausbilden (Bild 3.2). Die Riegelwirkung der Deckenplatte wird durch einen Ersatzriegel der Breite b_E (mitwirkende Breite) und der Höhe d erfaßt. Eine Abschätzung der Größenordnung dieser Riegelwirkung kann mit dem Systemwert k nach Bild 2.4 und der Beziehung (2.6) durchgeführt werden. Bei der Modellbildung muß dieser Sachverhalt dann gegebenenfalls berücksichtigt werden, um das Trag- und Verformungsverhalten des Tragwerks wirklichkeitsnah abzubilden.

Experimentelle Untersuchungen bezüglich der Riegelwirkung von Deckenplatten wurden von Barnard/Schwaighofer (1967) und Schwaighofer/Collins (1977) durchgeführt. Die Ergebnisse von numerischen Berechnungen der wirksamen Riegelbreite wurden darüberhinaus von Qadeer (1969) und Coull (1983) in Form einer Parameterstudie durchgeführt und in Form von Diagrammen aufbereitet.

Die wirksame Riegelbreite b_E (mitwirkende Breite der Deckenplatte) wird für den Fall ermittelt, daß sich die Querschnitte der Einzelscheiben (Stiele) gleich verdrehen. Es wird weiterhin angenommen, daß die Scheibenquerschnitte eben bleiben. Infolge einer Verdrehung der Scheibenquerschnitte um den Betrag $\Phi=1$ entsteht im Querschnitt ein resultierendes Moment:



$$M = \frac{6 EI_R}{(\ell_R)^3} (\ell_R + b_1)^2 \quad (3.1)$$

Dabei ist EI_R die unbekannte Biegesteifigkeit des Ersatzriegels. Die Biegesteifigkeit der Deckenplatte (Breite 1) ist:

$$K = \frac{E d^3}{12 (1-\nu^2)} \quad (3.2)$$

Es wird das dimensionslose Maß für die Riegelwirkung der Deckenplatte:

$$\kappa = \frac{M}{K} \quad (3.3)$$

eingeführt. Eine mit Hilfe eines Finite-Elemente-Programms durchgeführte Parameterstudie ist in Form eines Diagramms aufbereitet (Bild 3.3), aus dem der Steifigkeitswert κ in Abhängigkeit von dem Systemwert ℓ_R/A abgelesen werden kann. Dieser wurde für verschiedene Systemparameter ℓ_R , b_1 und Plattendicken d ermittelt. Mit (3.3) wird durch Einsetzen der Beziehungen (3.1) und (3.2) sowie einem wirksamen Flächenträgheitsmoment:

$$I_R = \frac{b_E d^3}{12} \quad (3.4)$$

des äquivalenten Ersatzriegels ein Verhältniswert:

$$\frac{b_E}{B} = \frac{\kappa \ell_R^3}{6 B (\ell_R + b_1)^2 (1 - \nu^2)} \quad (3.5)$$

ermittelt (Bild 3.3). Aus diesem wird in Abhängigkeit von ℓ_R/A für verschiedene B/A die wirksame Plattenbreite b_E bestimmt. Der Verlauf von b_E/B zeigt, daß sich ab einem Verhältnis $\ell_R/b_1 > 2$ (d.h. $\ell_R/A > 0,5$) nicht mehr viel ändert, die wirksame Breite b_E der Deckenplatte damit begrenzt ist. Die Werte für den Verhältniswert b_E/B und das Steifigkeitsverhältnis κ verändern sich außerdem bei variablem Systemparameter b_2 nur geringfügig. Das Diagramm ist damit allgemein anwendbar.

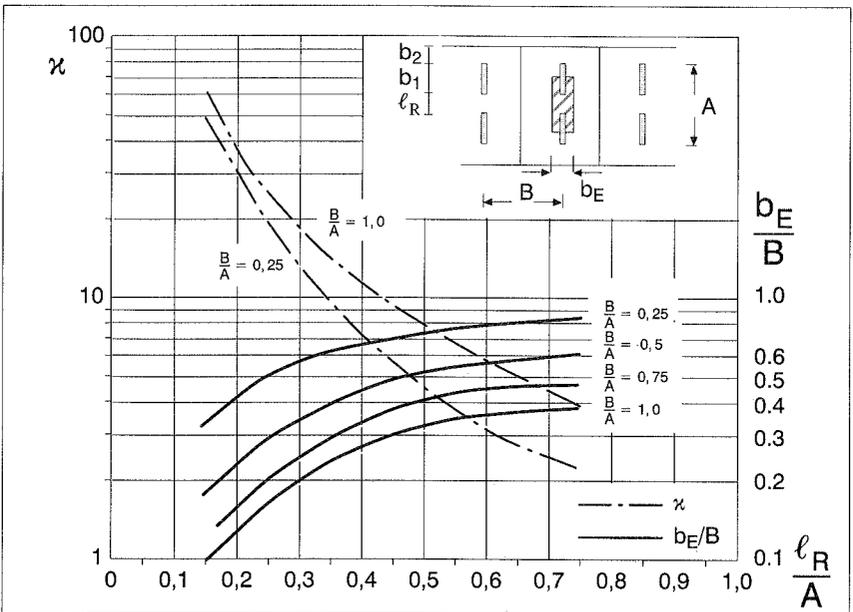


Bild 3.3: Verhältniswert b_E/B , ($\nu=0,2$, $b_2=0$)

3.3 Das kontinuierliche Ersatzsystem

Das Tragwerk eines Hochhauses setzt sich im wesentlichen aus Einzelscheiben, zu Faltenwerken zusammengeführten Scheiben und in ihrer Struktur scheibenartigen Rahmensystemen zusammen. Die Betrachtung als kontinuierliche Scheibe setzt bei gegliederten Scheiben und Stockwerkrahmen allerdings eine Regelmäßigkeit in deren Aufbau voraus, die in der Regel auch gegeben ist.

Durch die Vielzahl horizontaler Verbindungselemente (Riegel, Deckenscheiben) mit abschnittsweise gleichen Querschnittswerten werden diese bei gegliederten Scheiben, hinsichtlich ihrer Wirkungsweise, in Form von mechanisch äquivalenten Lamellen über die Höhe h eines Geschosses "verschmiert" (Bild 3.4). Die diskreten Riegelquerkräfte werden infolgedessen durch kontinuierliche Querkraftverläufe $q(x)$ in den Lamellen bzw. einen entsprechenden Schubspannungsverlauf $\tau = q(x)/t_{\text{ers}}$ in einer schubweichen Scheibe ersetzt, d.h. einer Scheibe, die nur Schubspannungen übertragen kann. Eine Übertragung von Normalspannungen quer zu den Lamellenlängsachsen ist offensichtlich nicht möglich. Dieses Ersatzsystem wurde bereits von Vlasov (1965) zur analytischen Berechnung von offenen, mit regelmäßig angeordneten Bindeblechen zusätzlich versteiften Stahlprofilen angesetzt.

Darüberhinaus werden bei Stockwerkrahmen bei einer größeren Anzahl von Feldern (z.B. $n > 5$) auch die Stielquerschnittsflächen A_S in Form von vertikalen Lamellen über die Breite der Scheibe verschmiert (Bild 3.4). Diese Lamellen können im Rahmenquerschnitt wiederum nur Normalspannungen σ_x , jedoch keine Schubspannungen übertragen. Es wird angenommen, daß bei regelmäßigen Stockwerkrahmen die Feldbreite b und die Stielquerschnitte A_S über die gesamte Rahmenbreite konstant sind. Die kontinuierlichen Ersatzsysteme haben eine Scheibendicke t für die Erfassung der Biegeverformung aus der Abtragung des resultierenden Biegemoments und eine Dicke t_{ers} für die Erfassung des Schubanteils aus der Abtragung der resultierenden Querkraft.

Die aussteifenden Bauteile und ihre entsprechenden kontinuierlichen Ersatzsysteme sind in Bild 3.4 dargestellt. Es lassen sich somit drei (kontinuierliche-) Scheibentypen unterscheiden:

- ① Wandscheiben
- ② schubweiche Scheiben
- ③ schubweiche Scheiben mit regelmäßig angeordneten Punktquerschnitten

Das Ersatzsystem für den einfeldrigen Stockwerkrahmen ist eigentlich ein gemischtes, kontinuierlich-diskretes System. Allerdings wird sich zeigen (Abschn. 5), daß diese "Störung" in der Kontinuität in der vorgeschlagenen Berechnungsmethode einfach berücksichtigt werden kann.

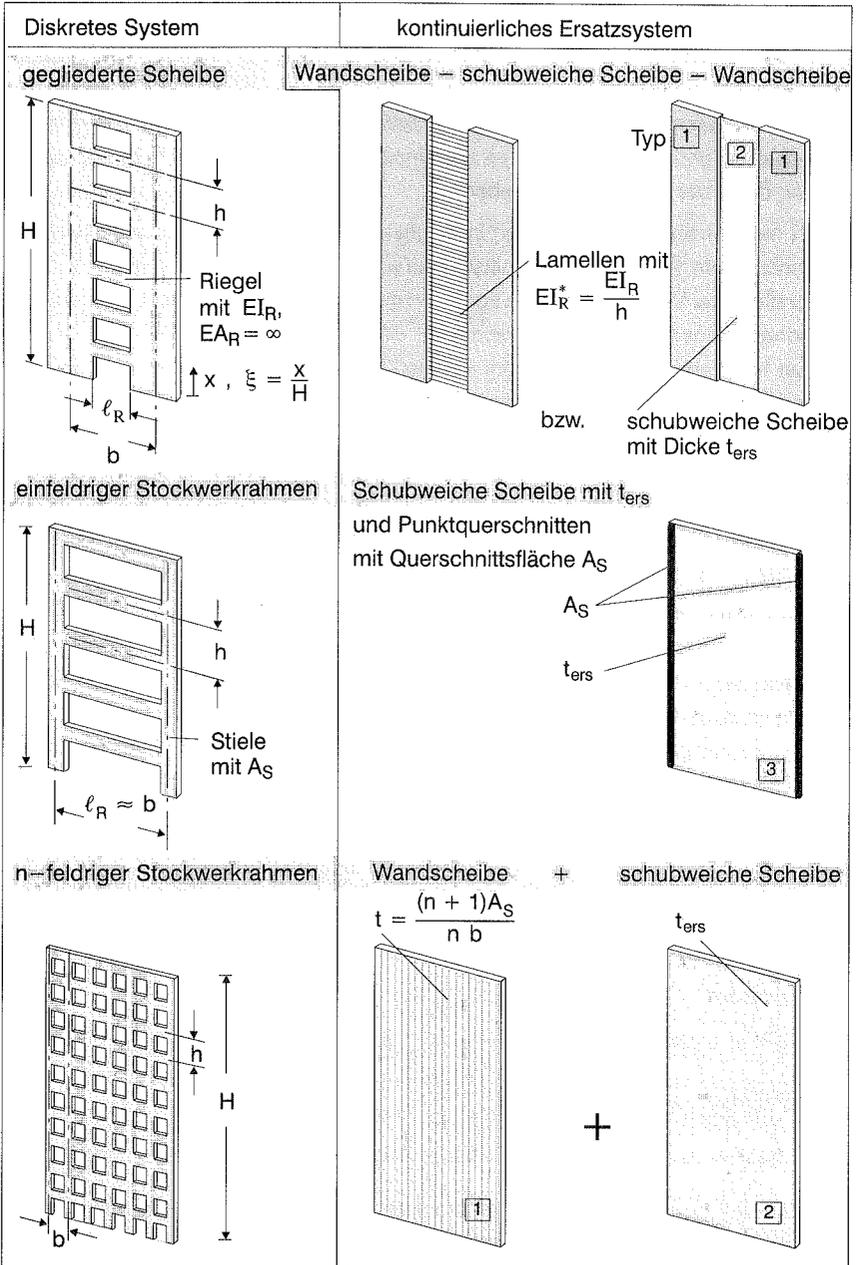


Bild 3.4: Diskretes System und kontinuierliches Ersatzsystem

Für den n -feldrigen Stockwerkrahmen ist bei einer kleineren Anzahl von Feldern (beispielsweise $n \leq 5$) ebenfalls eine Modellierung als schubweiche Scheibe mit Punktquerschnitten möglich (Bild 3.5). Bei einer größeren Anzahl von Feldern (beispielsweise $n > 5$) werden die Stiele sinnvollerweise, wie bereits beschrieben, in Form von Stiellamellen über die gesamte Breite des Rahmens verschmiert (Bild 3.4).

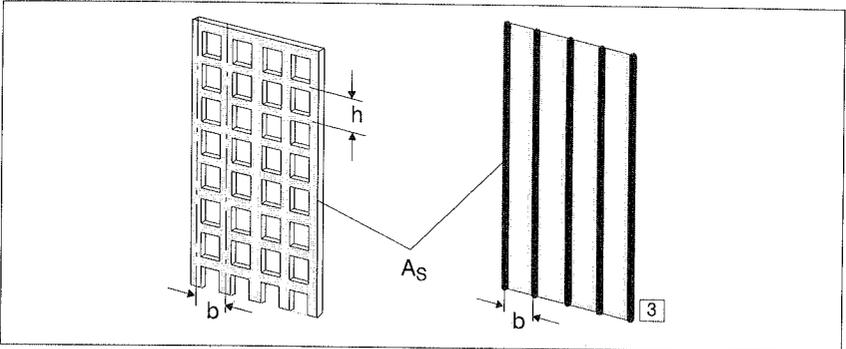


Bild 3.5: Stockwerkrahmen ($n=4$) als kontinuierliche, schubweiche Scheibe mit Punktquerschnitten (Typ 3)

Ermittlung der Dicke t_{ers} der mechanisch äquivalenten, schubweichen Scheibe:

Die Biegelinie des Systems soll, unter Vernachlässigung der oszillierenden Stiele, durch die Verschiebungen der Stiel-Riegel-Knoten global erfaßt werden (vgl. Bild 2.1, 2.2). Für die Ermittlung der Scheibendicke t_{ers} wird angenommen, daß die oszillierenden Biegelinien der Stiele einen Wendepunkt in halber Geschoßhöhe aufweisen. Im diskreten System A (Bild 3.6) ist ein Riegel durch die Nachgiebigkeit der Stiele flexibel eingespannt, während im kontinuierlichen Ersatzsystem B diese Flexibilität nicht erfaßt wird. Die Lamellen müssen offensichtlich über Drehfedern an den Scheiben flexibel angeschlossen werden; das Ersatzsystem wäre sonst zu steif.

Dabei besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen gegliederten Scheiben und Stockwerkrahmen (Bild 3.7) in Bezug auf die Lage des Anschlußpunktes. Bei gegliederten Scheiben erfolgt der flexible Anschluß der stabförmigen Riegel an den Rändern der Scheiben, bei Stockwerkrahmen hingegen werden die Stiele ebenfalls als stabförmige Bauteile betrachtet; der Anschluß erfolgt hier in "Scheibenmitte".

Die Berechnung der Federsteifigkeiten c_a , c_b wird an einem vereinfachten statischen Hilfssystem durchgeführt. Betrachtet wird dazu ein Abschnitt der Länge h (Bild 3.6). Für den allgemeinen Fall werden starre Bereiche an den Riegelendknoten mit β_{11} , β_{12} und eine reduzierte Stiellänge $h(1 - \beta_2)$ berücksichtigt. Biegemoment und Querkraft infolge

einer relativen Lagerverschiebung $\Delta v = 1$ müssen in den diskreten Riegeln des Systems A bzw. in den über die Abschnittslänge h aufsummierten Lamellen des Systems B gleich groß sein. Der Einfluß aus den Stieldehnungen wird vernachlässigt. Das System wird mit dem Kraftgrößenverfahren der Baustatik (siehe z.B. Hees (1988)) berechnet, wobei die Randmomente (Schnittmomente) M_1 und M_2 als unbekannte Größen angesetzt werden.

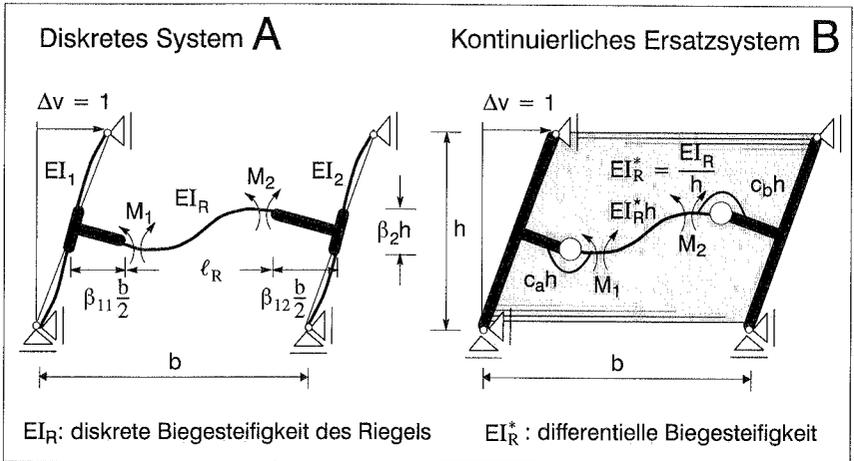


Bild 3.6: Statisches Hilfssystem einer gegliederten Scheibe im Verformungslastfall $\Delta v = 1$

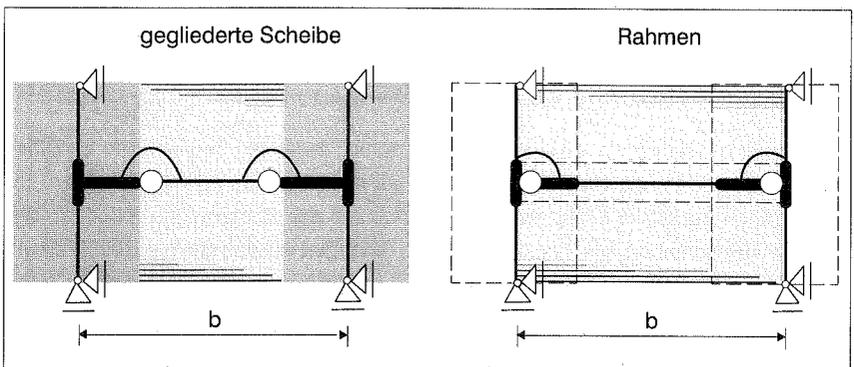


Bild 3.7: Anschluß der Lamellen

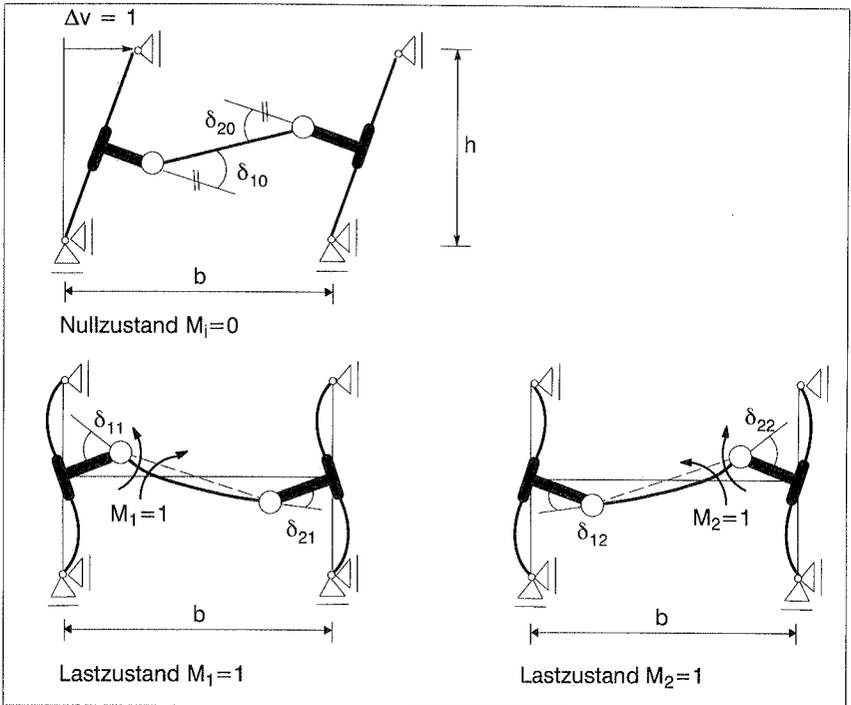


Bild 3.8: Diskontinuitäten δ_i im Nullzustand und in den Einheitslastzuständen

Die im wirklichen Verformungszustand und in den einzelnen Lastzuständen entstehenden Diskontinuitäten δ_i sind in Bild 3.8 dargestellt. Das zu lösende Gleichungssystem für das System A hat die Form:

$$\mathbf{F}_A \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \mathbf{X} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

mit den Abkürzungen:

$$\delta_{10} = -\delta_{20} = \delta_0 = -\frac{1}{h} \cdot \left[1 + \frac{\beta_1}{(2 - \beta_1)} \right] \cdot \Delta v \quad (3.7)$$

wobei: $\beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$

sowie:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{11} &= \frac{b}{6EI_R} \cdot (2-\beta_1) + \frac{h}{12} \cdot (1-\beta_2)^3 \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta_{11}}{(2-\beta_1)}\right)^2}{EI_1} + \frac{\left(\frac{\beta_{12}}{(2-\beta_1)}\right)^2}{EI_2} \right] \\
 \delta_{22} &= \frac{b}{6EI_R} \cdot (2-\beta_1) + \frac{h}{12} \cdot (1-\beta_2)^3 \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta_{12}}{(2-\beta_1)}\right)^2}{EI_2} + \frac{\left(\frac{\beta_{11}}{(2-\beta_1)}\right)^2}{EI_1} \right] \\
 \delta_{12} &= \frac{b}{12EI_R} \cdot (2-\beta_1) - \frac{h}{12} \cdot (1-\beta_2)^3 \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta_{11}}{(2-\beta_1)}\right) \left(\frac{\beta_{11}}{(2-\beta_1)}\right)}{EI_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\left(1 + \frac{\beta_{12}}{(2-\beta_1)}\right) \left(\frac{\beta_{12}}{(2-\beta_1)}\right)}{EI_2} \right]
 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

Aus der Bedingungsgleichung (3.6) ergibt sich für die unbekanntenen Biegemomente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{F}_A^{-1} \cdot \mathbf{F}_0 = \frac{1}{\det \mathbf{F}_A} \begin{bmatrix} -\delta_0 (\delta_{12} + \delta_{22}) \\ \delta_0 (\delta_{12} + \delta_{11}) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Analog zu (3.8) werden die Flexibilitäten δ für das Ersatzsystem B ermittelt. Einsetzen von M_1, M_2 nach (3.9) für System A in die Bedingungsgleichung für System B:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \frac{b}{6 EI_R} \cdot (2-\beta_1) + \frac{1}{c_a h} & \frac{b}{12 EI_R} \cdot (2-\beta_1) \\ \frac{b}{12 EI_R} \cdot (2-\beta_1) & \frac{b}{6 EI_R} \cdot (2-\beta_1) + \frac{1}{c_b h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_0 \\ -\delta_0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

liefert die entsprechenden Federsteifigkeiten für den Anschluß der Lamellen:

$$c_a = - \frac{M_1}{h \delta_0 + \frac{bh}{6EI_R} (2-\beta_1) (M_1 + \frac{1}{2}M_2)} \left[\frac{\text{kNm}}{\text{m}} \right] \quad (3.11a)$$

bzw.:

$$c_b = - \frac{M_2}{h \delta_0 + \frac{bh}{6EI_R} (2-\beta_1) (M_2 + \frac{1}{2}M_1)} \left[\frac{\text{kNm}}{\text{m}} \right] \quad (3.11b)$$

Bei der Berechnung gegliederter Scheiben ist mit $EI_{1,2}/h \gg EI_R/(l_R)$ jedoch die vereinfachende Annahme eines biegesteifen Anschlusses ($c_a=c_b=\infty$) zwischen Scheiben und Riegel oftmals gerechtfertigt.

Für den einfeldrigen Stockwerkrahmen ist mit $\beta_{11}=\beta_{12}=0$ (Anschluß nach Bild 3.7):

$$c_a = \frac{12 EI_1}{h^2} \cdot \frac{1}{(1-\beta_2)^3} \quad \text{bzw.:} \quad c_b = \frac{12 EI_2}{h^2} \cdot \frac{1}{(1-\beta_2)^3} \quad (3.12)$$

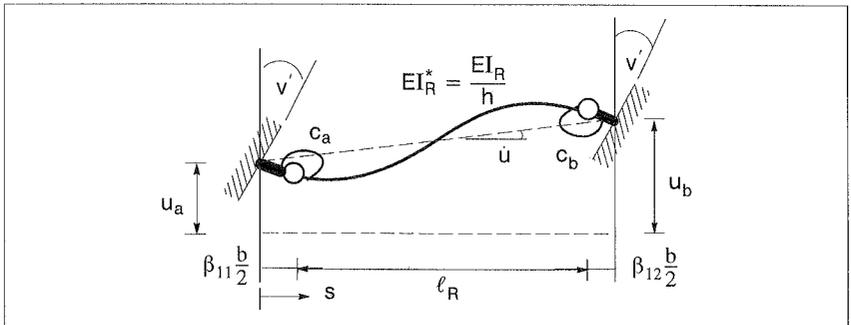


Bild 3.9: Lamelle im Verformungszustand \dot{u} und v'

Betrachtet wird nun eine einzelne Lamelle (Bild 3.9) im dargestellten Verformungszustand. Bei der Ausbiegung gegliederter Scheiben und Stockwerkrahmen werden die einzelnen Lamellen durch die differentielle Verdrehung v' der Endknoten sowie einer differentiellen relativen Längsverschiebung u beansprucht. Für die Differentiation wird dabei folgende Vereinbarung getroffen:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \dot{u} \quad \text{und:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v' \quad (3.13)$$

Die in einer einzelnen Lamelle entstehende Querkraft q bzw. die über eine Dicke t_{ers} konstant verlaufende Schubspannung ist:

$$\tau = \frac{q}{t_{\text{ers}}} = \frac{m_b - m_a}{\ell_R} \cdot \frac{1}{t_{\text{ers}}} \quad (3.14)$$

Hingegen gilt mit Hooke'schem Material allgemein für die Schubspannung τ in einer Scheibe die Beziehung:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \cdot \left(\dot{u}(s, x) + v'(s, x) \right) \quad (3.15)$$

Nach (3.14) müssen lediglich die unbekanntenen Momente m_a und m_b an den Randknoten einer einzelnen Lamelle im dargestellten Verformungszustand ermittelt werden. Gleichsetzen der Beziehungen (3.14) und (3.15) liefert die Scheibendicke t_{ers} . Eine Berechnung des statisch unbestimmten Systems mit dem Kraftgrößenverfahren der Baustatik liefert die Bedingungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\dot{u} - v' \\ \dot{u} + v' \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Mit den Abkürzungen:

$$\delta_{11} = \frac{h b}{6 EI_R} (2 - \beta_1) + \frac{1}{c_a}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{h b}{12 EI_R} (2 - \beta_1)$$

und:

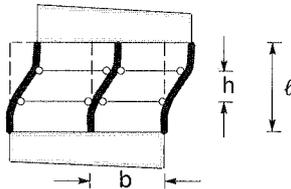
$$\delta_{22} = \frac{h b}{6 EI_R} (2 - \beta_1) + \frac{1}{c_b} \quad \text{vgl. (3.10)}$$

} (3.17)

Mit Hilfe der Beziehung (3.16) und Gleichsetzen von (3.14) und (3.15) ergibt sich dann für die Dicke t_{ers} die Bestimmungsgleichung:

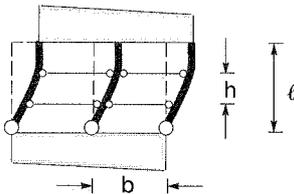
$$t_{\text{ers}} = \frac{1}{G \cdot \ell_R} \cdot \frac{\delta_{11} + \delta_{22} + 2 \delta_{12}}{\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2} \quad (3.18)$$

Die Bestimmungsgleichung (3.18) ist allgemein für einfeldrige Rahmen anwendbar. Ein gelenkiger Anschluß von Riegel und Stielen würde allerdings eine Scheibendicke $t_{\text{ers}}=0$ ergeben. Das Modell der schubweichen Scheibe wird für diesen Sonderfall trotzdem herangezogen, wenn mindestens ein Endknoten der Stiele an einer starren Scheibe biegesteif angeschlossen ist. Die äquivalente Scheibendicke ergibt sich dann aus den Querbiegungen der Stiele. Die Länge der Stiele ℓ ist dabei ein Vielfaches von der Geschoßhöhe h . Es gilt:



$$t_{\text{ers}} = \frac{(n+1)}{G \cdot nb} \frac{12 EI_S}{\ell^2} \quad (3.19)$$

bzw.:



$$t_{\text{ers}} = \frac{(n+1)}{G \cdot nb} \frac{3 EI_S}{\ell^2} \quad (3.20)$$

Dabei ist n die Anzahl der Felder. Die Gleichungen (3.19) und (3.20) lassen sich einfach dadurch herleiten, indem die durch die relative Querverschiebung entstehenden Querkräfte in den Stielen und im Ersatzsystem einer schubweichen Scheibe gleichgesetzt werden.

Wird für gegliederte Scheiben näherungsweise $c_a=c_b=\infty$ und $\beta_1=\beta_2=0$ ($b = \ell_R$) gesetzt, so erhält man dadurch anstelle von (3.18) die Beziehung:

$$t_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{G} \cdot \frac{I_R}{h \ell_R^2} \quad \text{mit: } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.21)$$

Für regelmäßige Stockwerkrahmen mit konstanter Feldbreite b soll $EI_1=EI_2=EI_S$ sein. Aus der Bestimmungsgleichung (3.18) ergibt sich dann, unter der zusätzlichen Annahme, daß sich alle Stiel-Riegel-Knoten einer Riegelreihe gleich verdrehen, nach einigen Umformungen eine äquivalente Scheibendicke:

$$t_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{G} \cdot \frac{1}{h n b} \cdot \frac{n(n+1) I_R^* I_S^*}{(n+1) b I_S^* + n h I_R^*} \quad (3.22)$$

Der Einfluß aus den Stieldehnungen ist dabei vernachlässigt ($\dot{u} = 0$). Das effektive Trägheitsmoment I_S^* läßt sich aus der Beziehung (3.12) herleiten. Da der Anschlußpunkt Riegel und Stiel bei den Stockwerkrahmen in "Scheibenmitte" gelegt wird (vgl. Bild 3.7), muß analog dazu auch ein effektives Trägheitsmoment I_R^* ermittelt werden, das die starren Bereiche im Riegel berücksichtigt.

Damit gilt:

$$I_R^* = \frac{I_R}{\left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right)^3} \quad \text{und:} \quad I_S^* = \frac{I_S}{\left(1 - \beta_2\right)^3} \quad (3.23)$$

Zur Erfassung der Biegeverformung von mehrfeldrigen Stockwerkrahmen werden die Stiele in ihrer Wirkungsweise ebenfalls durch eine kontinuierliche Scheibe ersetzt (vgl. Bild 3.4). Die Dicke dieser Wandscheibe ist:

$$t = \frac{(n+1) A_{\text{St}}}{n b} \quad (3.24)$$

Dabei ist A_{St} die Querschnittsfläche der Stiele unter der Annahme, daß diese bei allen Stielen gleich ist.

Für bewehrte Scheibenquerschnitte wird in Abhängigkeit von einem angenommenen, über die Breite b konstanten geometrischen Bewehrungsgrades:

$$\mu = \frac{A_{\text{Stahl}}}{A_{\text{Beton}}} \quad (3.25)$$

und unter der Annahme eines starren Verbunds zwischen Stahl und Beton die verschmierte Bewehrung in eine äquivalente Betonfläche umgerechnet werden. Für die effektive Scheibendicke ergibt sich dann die Beziehung:

$$t_{\text{eff}} = t \cdot \frac{\left(1 + \mu \frac{E_{\text{Stahl}}}{E_{\text{Beton}}}\right)}{(1 + \mu)} \quad (3.26)$$

Für den gerissenen Beton wird im Zustand II mit einem abgeminderten Elastizitätsmodul E_{eff} gerechnet. Vom Zustand I kann ausgegangen werden, wenn in Stahlbetonwandscheiben unter Gebrauchslasten die größte Biegezugspannung $\sigma_{\text{vorh}} \leq \beta_{\text{WS}}/10$ bleibt (nach DIN 1045). Dabei ist jedoch zu beachten, daß im Gebrauchszustand Biegezugspannungen aufgrund des Eigengewichts und der Verkehrslasten i.d.R. überdrückt werden.

4 Analytische Berechnung von allgemeinen Systemen durch Zusammenfassen aller aussteifenden Bauteile (Einzelstäbe) zu einem Gesamtstab

4.1 Tragverhalten und Mechanik der aussteifenden Bauteile (Einzelstäbe)

Für eine analytische Berechnung von Hochhaustragwerken wird die vereinfachende Annahme getroffen, daß sich das System ausschließlich aus schlanken, biegeweichen Scheiben und schubweichen Stockwerkrahmen zusammensetzt. Bei gegliederten Scheiben, die aufgrund ihres Trag- und Verformungsverhaltens als "Mittelding" von Scheibe und Rahmen zu verstehen sind, dominiert aufgrund der Schlankheit des Bauteils i.d.R. die Biegeverformung, so daß sie ebenfalls als biegeweiche Stäbe behandelt werden.

Die wesentlichen Trag- und Verformungseigenschaften von Scheiben (bzw. Biegebalken) und Rahmen unterscheiden sich grundsätzlich voneinander (Bild 4.1). Das Tragverhalten der schlanken Scheiben bedarf keiner weiteren Erklärung, da sie sich wie Biegebalken behandeln lassen. Bei Stockwerkrahmen zeigt sich bei vernachlässigtem Einfluß aus den Stieldehnungen ein Verformungsverhalten, das wesentlich durch das seitliche Ausbiegen der Stiele geprägt ist (vgl. Abschnitt 2.1). Das aus der äußeren Belastung resultierende Biegemoment wird näherungsweise einem entsprechenden Kräftepaar in den Querschnitten der Randstiele zugewiesen (vgl. Abschnitt. 2.2).

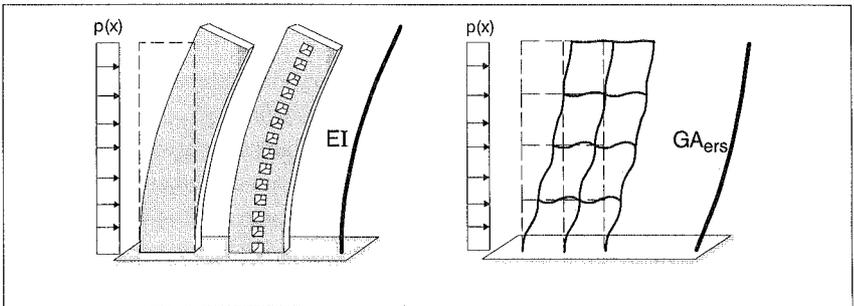


Bild 4.1: Verformungsverhalten von Scheibe und Rahmen, Ersatzsysteme

Für n -feldrige Stockwerkrahmen wird ein schubweicher (ebener) Ersatzstab mit der aus (3.22) abgeleiteten Schubsteifigkeit:

$$GA_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{h} \cdot \frac{n(n+1) \frac{I_R^*}{b} \frac{I_S^*}{h}}{(n+1) \frac{I_S^*}{h} + n \frac{I_R^*}{b}} \quad (4.1)$$

gewählt.

Für den räumlichen, biegeweichen Einzelstab (Index b) mit beliebigem Querschnitt gelten die bekannten Beziehungen zwischen Schnittkräften und Verschiebungen:

$$\begin{bmatrix} Q_{b,z,i} \\ Q_{b,y,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} EI_{yz,i} & EI_{y,i} \\ EI_{z,i} & EI_{yz,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{y,i}''' \\ v_{z,i}''' \end{bmatrix} \quad (a)$$

(4.2)

$$\begin{bmatrix} M_{b,x,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GI_{T,i} & -EI_{W,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{x,i}' \\ \Theta_{x,i}''' \end{bmatrix} \quad (b)$$

Dabei sind Biegung und Torsion entkoppelt, wenn für die Belastung der Schubmittelpunkt des Einzelstabes als Bezugspunkt vorliegt. In (4.2) sind $EI_{y,i}$, $EI_{z,i}$, $EI_{yz,i}$, $GI_{T,i}$, $EI_{W,i}$ die globalen Querschnittswerte des Einzelstabes i (Bild 4.2).

Für einen schubweichen Einzelstab (Index S) gelten die Beziehungen:

$$\begin{bmatrix} Q_{s,z,i} \\ Q_{s,y,i} \end{bmatrix} = GA_{ers,i} \begin{bmatrix} \sin \psi_i \cos \psi_i & \cos^2 \psi_i \\ \sin^2 \psi_i & \sin \psi_i \cos \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{y,i}' \\ v_{z,i}' \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$M_{s,x,i} = 0$$

Dabei ist $\psi_i (< \pi/2)$ der Neigungswinkel der Wirkungslinie des Rahmens gegenüber der globalen z -Achse (Bild 4.2). Stockwerkrahmen wirken unabhängig voneinander, da sie im Vergleich zu Faltwerken aus Wandscheiben keine Schubkräfte bzw. Biegemomente an gemeinsamen Kanten übertragen können. Werden mehrere Rahmen zusammengefaßt, so ergeben sich die Beziehungen analog zu (4.3) durch additive Überlagerung.

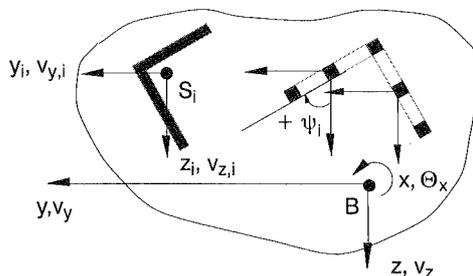


Bild 4.2: Lage der Einzelstäbe bzgl. des globalen Koordinatensystems

4.2 Zusammenfassen der Einzelstäbe zum Gesamtstab

Aufgrund der dehnstarrten Deckenscheiben sind die Querverschiebungen der Einzelquerschnitte miteinander gekoppelt. Bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes B gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Verschiebungen des Einzelstabes und den Verschiebungen des Gesamtstabes:

$$\left. \begin{aligned} v_{y,i} &= v_y - \Theta_x \cdot z_i \\ v_{z,i} &= v_z + \Theta_x \cdot y_i \\ \Theta_{x,i} &= \Theta_x \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Setzt man die Beziehung (4.4) in (4.2) bzw. (4.3) ein, so erhält man mit den Gleichgewichtsbeziehungen:

$$Q_y = \sum Q_{y,i} \quad ; \quad Q_z = \sum Q_{z,i} \quad \text{und:} \quad M_x = \sum (M_{x,i} + Q_{z,i} y_i - Q_{y,i} z_i) \quad (4.5)$$

für den Querschnitt des Gesamtstabes den resultierenden Schnittgrößenanteil in allen biegeweichen Einzelstäben des Gesamtstabes in Form eines Systems gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\begin{bmatrix} Q_{b,z} \\ Q_{b,y} \\ M_{b,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum EI_{yz,i} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -\sum EI_{y,i} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & \sum (EI_{yz,i} z_i) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ -\sum EI_{z,i} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -\sum EI_{yz,i} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -\sum (EI_{y,i} y_i) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ -\sum EI_{yz,i} y_i \frac{\partial^3}{\partial x^3} & -\sum EI_{y,i} y_i \frac{\partial^3}{\partial x^3} & \sum GI_{b,T,i} \frac{\partial}{\partial x} \\ + \sum EI_{z,i} z_i \frac{\partial^3}{\partial x^3} & + \sum EI_{yz,i} z_i \frac{\partial^3}{\partial x^3} & - EI_W \frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \\ \Theta_x \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Die Wölbsteifigkeit dieses Teilsystems ist dabei:

$$EI_W = \sum (EI_{W,i} + EI_{y,i} y_i^2 + EI_{z,i} z_i^2 - 2 EI_{yz,i} y_i z_i) \quad (4.7)$$

Für den Anteil in allen schubweichen Einzelstäben ergibt sich analog dazu:

$$\begin{bmatrix} Q_{s,z} \\ Q_{s,y} \\ M_{s,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum GA_i \sin \psi_i \cos \psi_i \frac{\partial}{\partial x} & \sum GA_i \cos^2 \psi_i \frac{\partial}{\partial x} & \sum GA_i (y_i \cos^2 \psi_i - z_i \sin \psi_i \cos \psi_i) \frac{\partial}{\partial x} \\ \sum GA_i \sin^2 \psi_i \frac{\partial}{\partial x} & \sum GA_i \sin \psi_i \cos \psi_i \frac{\partial}{\partial x} & \sum GA_i (y_i \sin \psi_i \cos \psi_i - z_i \sin^2 \psi_i) \frac{\partial}{\partial x} \\ \sum GA_i (y_i \sin \psi_i \cos \psi_i - z_i \sin^2 \psi_i) \frac{\partial}{\partial x} & \sum GA_i (y_i \cos^2 \psi_i - z_i \sin \psi_i \cos \psi_i) \frac{\partial}{\partial x} & GI_{s,T} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \\ \Theta_x \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

mit der Torsionssteifigkeit der schubweichen Einzelstäbe:

$$GI_{s,T} = \sum GA_{ers,i} \cdot (y_i^2 \cos^2 \psi_i + z_i^2 \sin^2 \psi_i - 2 y_i z_i \sin \psi_i \cos \psi_i) \quad (4.9)$$

Für die St–Venantsche Torsionssteifigkeit des Gesamtquerschnitts ergibt sich die Beziehung:

$$GI_T = \sum GI_{b,T,i} + GI_{s,T} \quad (4.10)$$

Nach Differentiation und additivem Überlagern der Beziehungen (4.6) und (4.8) erhält man das in den Verschiebungen gekoppelte Differentialgleichungssystem für allgemeine räumliche Systeme in der Form:

$$\mathbf{T}_B \mathbf{V}'''' - \mathbf{T}_S \mathbf{V}'' = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Das Differentialgleichungssystem (4.11) läßt sich entkoppeln, indem die Eigenwerte der homogenen Form bestimmt werden (siehe z.B. Zurmühl (1984)). Mit deren Hilfe lassen sich die Eigenvektoren ermitteln, die in der (3x3) Matrix Φ zusammengefaßt werden. Mit der Transformation:

$$\mathbf{V} = \Phi \cdot \hat{\mathbf{V}} \quad (4.12)$$

auf die neuen, dem System eigenen Hauptachsen und Linksmultiplikation mit Φ^T ergibt sich für das System gekoppelter Differentialgleichungen nunmehr ein System entkoppelter Gleichungen:

$$\Phi^T \mathbf{T}_B \Phi \hat{\mathbf{V}}'''' - \Phi^T \mathbf{T}_S \Phi \hat{\mathbf{V}}'' = \Phi^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

mit den Forderungen:

$$\Phi^T \mathbf{T}_B \Phi = \mathbf{1} = \mathbf{Diag} (1) \quad (4.14)$$

und:

$$\Phi^T \mathbf{T}_S \Phi = \lambda^2 = \mathbf{Diag} (\lambda_i^2) \quad (4.15)$$

Mit (4.14) und (4.15) kann die Beziehung:

$$\Phi^T \mathbf{T}_S \Phi = \mathbf{1} \cdot \lambda^2 = \Phi^T \mathbf{T}_B \Phi \lambda^2 \quad (4.16)$$

bzw. das allgemeine Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{T}_B \lambda^2 - \mathbf{T}_S) \Phi = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

hergeleitet werden. Als nichttriviale Lösungen erhält man aus der Bedingung:

$$\det (\mathbf{T}_B \lambda^2 - \mathbf{T}_S) = 0 \quad (4.18)$$

die drei Eigenwerte λ_i bzw. durch Einsetzen der Eigenwerte in (4.17) die Matrix Φ der Eigenvektoren Φ_i .

Mit den Lösungen der entkoppelten Differentialgleichungen (4.13) sind mit Hilfe der Beziehung (4.12) auch die Verschiebungsverläufe \mathbf{V} bekannt.

Ein Berechnungsbeispiel ist in Abschnitt 8 dieses Beitrags gegeben.

4.3 Belastung des Gesamtstabes

Als Bezugspunkt (Längsachse x des Gesamtstabes) wird ein beliebiger Querschnittspunkt B festgelegt (Bild 4.3). Die auf die Gebäudehülle wirkende äußere Horizontalbelastung $p_z(x,y)$ [kN/m^2], und $p_y(x,z)$ [kN/m^2] wird umgeformt, in eine Belastung $p_{B,z}(x)$ [kN/m] und $p_{B,y}(x)$ [kN/m] durch den Bezugspunkt und eine zusätzliche Beanspruchung durch ein Torsionsmoment $m_{B,x}(x)$ [kNm/m] :

$$\left. \begin{aligned} p_{B,y}(x) &= \int_{(B_z)} p_y(x,z) dz \\ p_{B,z}(x) &= \int_{(B_y)} p_z(x,y) dy \\ m_T(x) &= \int_{(B_y)} p_z(x,y) y dy - \int_{(B_z)} p_y(x,z) z dz \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Windlasten w_y, w_z werden i.d.R. als konstant über die Querschnittsbreite angesetzt. In diesem Fall ergibt sich anstelle von (4.19) der Belastungsvektor:

$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} B_z w_y \\ B_y w_z \\ m_T \end{bmatrix} \quad \text{mit: } m_T = \frac{1}{2} (w_z B_y^2 - w_y B_z^2) \quad (4.20)$$

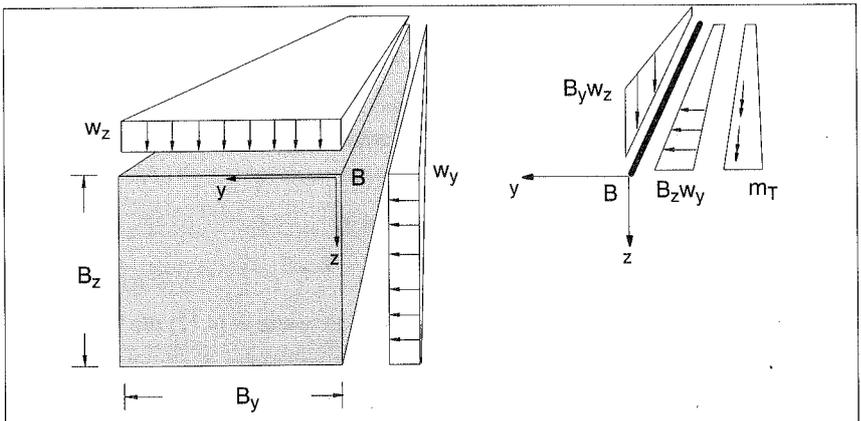


Bild 4.3: Windlasten auf die äußere Fassade eines Hochhauses und Belastung des Gesamtstabes

Nach DIN 1055 dürfen Windlasten nur bei nicht schwingungsanfälligen Bauwerken als statische Lasten angesetzt werden. Dazu muß das Schwingungsverhalten anhand der Eigenfrequenz f der ersten Eigenschwingung beurteilt werden (Bild 4.4). Eine Näherungsberechnung dazu wird in Abschnitt 7 dieses Beitrags beschrieben.

Es stellt sich die Frage nach der alternativen Vorgehensweise für den Fall, daß das Bauwerk nach DIN 1055 als schwingungsanfällig einzustufen ist. Nach Schlaich (1966) wird der Staudruck in einen statischen Anteil und einen dynamischen Anteil im Verhältnis 0,4/0,6 aufgespalten. Für den statischen Ersatzstaudruck wird in Abhängigkeit von dem Logarithmischen Dämpfungsdekrement δ (Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden) und der Schwingungsdauer T der ersten Eigenschwingung ein Vergrößerungsfaktor $\eta = (0,4 + 0,6 \cdot \eta')$ ermittelt, der die dynamische Wirkung des Windes berücksichtigt. Dazu wird aus Bild 4.5 ein Faktor η' abgelesen.

Für die Stadt Frankfurt liegt ersatzweise ein Ergänzungserlaß zur DIN 1055 "Windlasten bei hohen Hochhäusern in Frankfurt am Main" vor. Die Staudruckverteilung wird dabei mit einem Böenreaktionsfaktor beaufschlagt, der zusätzlich von einem Geländefaktor, einem Böengrundanteil und einem Böenenergiefaktor abhängt. Beispielsweise wurde für das Commerzbank-Hochhaus in Frankfurt/Main ein Böenreaktionsfaktor von 1,97 ermittelt (Ladberg (1996)), der die stat. Windlasten nach DIN praktisch verdoppelt.

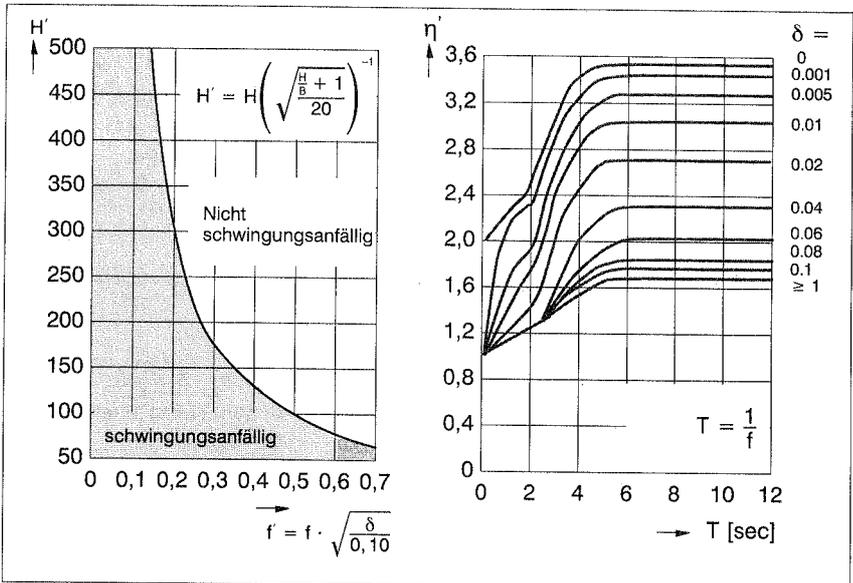


Bild 4.4:
Kriterium für die Schwingungsanfälligkeit
von Bauwerken (aus DIN 1055 T.4)

Bild 4.5:
Faktor η' zur Ermittlung der statischen
Ersatzlast (nach Schlaich (1966))

4.4 Sonderfall:

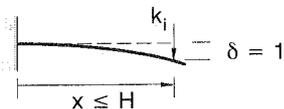
Systeme mit affinem Verformungsverhalten der Einzelstäbe

Allgemein sind räumliche Probleme dadurch charakterisiert, daß Gleichgewicht in drei, voneinander unabhängigen Ebenen zu erfüllen ist. Betrachtet man einen beliebigen Querschnitt x in der $y-z$ -Ebene des Tragwerks, so lassen sich die aussteifenden Bauteile durch elastische Federn der Steifigkeit $k_i(x)$ ersetzen (Bild 4.6). Dabei ist es unerheblich, ob das so entstandene System statisch bestimmt ist. Setzt sich das System aus Einzelstäben zusammen, die sich bei gleichartiger Last affin zueinander verformen (d.h. nur biege- oder nur schubweiche Einzelstäbe), so hat nur die Deckenscheibe im Querschnitt der angreifenden Einzellasten P_y und P_z die Aufgabe, diese Kräfte zu den aussteifenden Bauteilen weiterzuleiten. Die anderen Deckenscheiben beteiligen sich nicht an der Lastabtragung; eine "Lastumlagerung" findet nicht statt.

Aufgrund des affinen Verformungsverhaltens der Einzelscheiben gilt in jedem Querschnitt des Gesamtstabes die Beziehung:

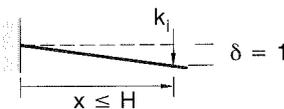
$$\frac{k_{y,i}(x)}{\sum_{(i)} k_{y,i}(x)} = \text{konst.} \quad \text{und:} \quad \frac{k_{z,i}(x)}{\sum_{(i)} k_{z,i}(x)} = \text{konst.} \quad (4.21)$$

mit der Steifigkeit k_i des biege- oder schubweichen Einzelstabes:



$$k_{y,i} = \frac{3 EI_{z,i}}{x^3} \quad \text{bzw.} \quad k_{z,i} = \frac{3 EI_{y,i}}{x^3} \quad (4.22)$$

bzw. des schubweichen Einzelstabes:



$$k_{y,i} = \frac{GA_{y,i}}{x} \quad \text{bzw.} \quad k_{z,i} = \frac{GA_{z,i}}{x} \quad (4.23)$$

Eine Entkopplung von Biegung und Torsion ist aufgrund der Beziehung (4.21) (und nur deshalb) möglich, da als Bezugspunkt der Schubmittelpunkt (Drillruhepunkt) D als Querschnittswert herangezogen werden kann; eine Kraft, deren Wirkungslinie durch diesen Punkt geht, erzeugt nach Definition keine Querschnittsverdrehung (bzw.: bei reiner Torsion verdreht sich der Querschnitt um diesen Punkt)

Lage des Schubmittelpunktes D (Drillruhepunkt):

Eine Last P_z durch D im Querschnitt x erzeugt lt. Definition nur eine Translation $v_z(x)$ in z -Richtung. Da sich damit auch alle Einzelstäbe um $v_z(x)$ verschieben, kann dieses System mit einer Parallelschaltung von Federn verglichen werden. Die Last verteilt sich damit auf die Einzelscheiben im Verhältnis der Einzelsteifigkeiten zur Gesamtsteifigkeit:

$$P_{z,i} = \frac{k_{z,i}}{\sum k_{z,i}} P_z \quad (4.24)$$

Momentengleichgewicht bezüglich eines beliebigen Querschnittspunktes B liefert die Beziehung für die \bar{y} -Koordinate des Drillruhepunktes:

$$\bar{y}_D = \frac{\sum P_{z,i} \bar{y}_i}{P_z} = \frac{\sum k_{z,i} \bar{y}_i}{\sum k_{z,i}} = \frac{\sum I_{y,i} \bar{y}_i}{\sum I_{y,i}} \quad (4.25)$$

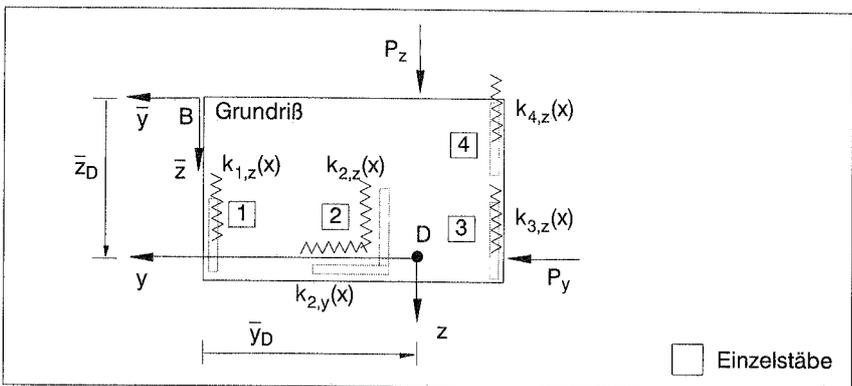


Bild 4.6 : Lage des Drillruhepunktes im Querschnitt

Dabei ist y_i bzw. z_i die Lage des Schwerpunktes des Einzelstabes. Analog hierzu erhält man für eine Last P_y :

$$\bar{z}_D = \frac{\sum P_{y,i} \bar{z}_i}{P_y} = \frac{\sum k_{y,i} \bar{z}_i}{\sum k_{y,i}} = \frac{\sum I_{z,i} \bar{z}_i}{\sum I_{z,i}} \quad (4.26)$$

Setzt sich ein Tragwerk hingegen ausschließlich aus schubweichen Einzelstäben zusammen, so erhält man analog zu (4.25) und (4.26) die Beziehungen:

$$\bar{y}_D = \frac{\sum GA_{z,i} \bar{y}_i}{\sum GA_{z,i}} \quad (4.27) \quad \text{und:} \quad \bar{z}_D = \frac{\sum GA_{y,i} \bar{z}_i}{\sum GA_{y,i}} \quad (4.28)$$

Entkopplung von Biegung und Torsion:

Wird als Bezugspunkt der Drillruhepunkt D festgelegt, gelten für die einzelnen Koeffizienten in (4.6) und (4.8) die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum (EI_{yz,i} z_i) - \sum (EI_{y,i} y_i) &= 0 \\ -\sum (EI_{z,i} z_i) + \sum (EI_{yz,i} y_i) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.29)$$

bzw.:

$$\sum GA_i (y_i \cos^2 \psi_i - z_i \sin \psi_i \cos \psi_i) = 0$$

$$\sum GA_i (y_i \sin \psi_i \cos \psi_i - z_i \sin^2 \psi_i) = 0$$

Dadurch entkoppelt sich das Differentialgleichungssystem (4.6) bzw. (4.8) bezüglich Biegung und Torsion. Für die reine Biegebeanspruchung ergeben sich beispielsweise für den biegeweichen Einzelstab die aus (4.2) abgeleiteten Beziehungen zwischen Verschiebungen und Biegemomenten:

$$\begin{bmatrix} v''_{y,i} \\ v''_{z,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{E (I_{y,i} I_{z,i} - I_{yz,i}^2)} \begin{bmatrix} I_{yz,i} & I_{y,i} \\ -I_{z,i} & -I_{yz,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y,i} \\ M_{z,i} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

bzw. für den aus biegeweichen Einzelstäben zusammengesetzten Gesamtstab:

$$\begin{bmatrix} v''_y \\ v''_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E (I_y I_z - I_{yz}^2)} \begin{bmatrix} I_{yz} & I_y \\ -I_z & -I_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

wobei:

$$I_y = \sum I_{y,i} \quad ; \quad I_z = \sum I_{z,i} \quad ; \quad I_{yz} = \sum I_{yz,i} \quad (4.32)$$

M_y bzw. M_z ist das aus der äußeren Belastung resultierende Biegemoment im Tragwerksquerschnitt. Analog hierzu erhält man die Beziehungen für den aus schubweichen Einzelstäben zusammengesetzten Gesamtstab.

Für die Verteilung des resultierenden Biegemoments auf die Querschnitte der Einzelstäbe erhält man aus den Beziehungen (4.2), (4.30) und (4.31) die Bestimmungsgleichungen für die Momentenverteilung:

$$\begin{bmatrix} M_{y,i} \\ M_{z,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \begin{bmatrix} -EI_{yz,i} & -EI_{y,i} \\ EI_{z,i} & EI_{yz,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{yz} & I_y \\ -I_z & -I_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Ist diese bekannt, so kann über die Beziehung (4.30) oder (4.31) der Verlauf der Krümmungen, bzw. durch Integration von (4.30) oder (4.31), der Verlauf der Verschiebungen v_y und v_z ermittelt werden.

4.5 Sonderfall: Symmetrische Systeme

Biegebeanspruchung symmetrischer Systeme:

Für symmetrische Systeme kann bei symmetrischer Lasteinwirkung ein ebenes Ersatzsystem zugrunde gelegt werden (Bild 4.7), da sich Biegung und Torsion voneinander entkoppeln. Eine analytische Betrachtung des Problems wird am kontinuierlichen Ersatzsystem durchgeführt. Dabei werden alle biegeweichen Einzelstäbe durch Addition der Einzelsteifigkeiten zusammengefaßt. Ebenso werden auch alle schubweichen Einzelstäbe zusammengefaßt.

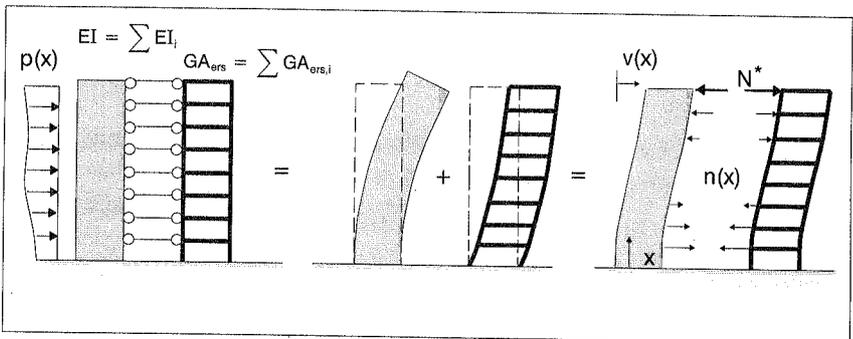


Bild 4.7: Wechselwirkung beim ebenen Wandscheibe-Rahmen-System

Durch eine Gleichgewichtsbetrachtung im Systemquerschnitt ergibt sich mit Hilfe der Differentialgleichungen für den biegeweichen Balken:

$$EI \cdot v^{IV} = p(x) - n(x) \quad (4.34)$$

bzw. für das schubweiche Ersatzsystem des Rahmens:

$$-GA_{\text{ers}} \cdot v'' = n(x) \quad (4.35)$$

durch deren Addition, die Differentialgleichung für die Biegelinie des Gesamtsystems:

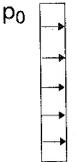
$$v^{IV} - \alpha_V^2 \cdot v'' = \frac{p(x)}{EI} \quad \text{mit: } \alpha_V^2 = \frac{GA_{\text{ers}}}{EI} \quad (4.36)$$

Diese hat prinzipiell den gleichen Aufbau wie die eines drehfedergelagerten Balkens. Die Lösung der Differentialgleichung (4.36) hat die allgemeine Form:

$$v(x) = v_p + C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\alpha_V x) + C_4 \sinh(\alpha_V x) \quad (4.37)$$

mit dem lastabhängigen Partikularanteil v_p . Dieser ist:

bei einer Gleichlast



$$v_p = -\frac{p_0}{2 EI \alpha_V^2} \cdot x^2 \quad (4.38)$$

bei einer Dreieckslast



$$v_p = -\frac{p_0}{6 EI \alpha_V^2 H} \cdot x^3 \quad (4.39)$$

Die Werte für die Konstanten C_i lassen sich mit den statischen und geometrischen Randbedingungen des Kragbalkens bestimmen:

1. An der Stelle $x=H$ ist keine resultierende Querkraft vorhanden:

$$v'''(H) - \alpha_V^2 v'(H) = 0 \quad \rightarrow C_2 = \frac{v_p'''(H)}{\alpha_V^2} - v_p'(H) \quad (4.40)$$

2. An der Stelle $x=0$ ist keine Querschnittsverdrehung möglich:

$$v'(0) = 0 \quad \rightarrow C_4 = -\frac{v_p'''(H)}{\alpha_V^3} + \frac{v_p'(H)}{\alpha_V} \quad (4.41)$$

3. In der Wandscheibe ist an der Stelle $x=H$ kein Biegemoment vorhanden:

$$EI v''(H) = 0 \quad \rightarrow C_3 = -\frac{v_p''(H)}{\alpha_V^2 \cosh(\alpha_V H)} - C_4 \tanh(\alpha_V H) \quad (4.42)$$

4. An der Stelle $x=0$ ist keine Horizontalverschiebung möglich:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow C_1 = \frac{v_p''(H)}{\alpha_V^2 \cosh(\alpha_V H)} + C_4 \tanh(\alpha_V H) \quad (4.43)$$

Analog hierzu erhält man für eine am Kopfende angreifende Einzellast mit den entsprechenden Randbedingungen die Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{EI \alpha_V^3} \tanh(\alpha_V H) & , & & C_2 &= \frac{P}{EI \alpha_V^2} \\ C_3 &= -C_1 & \text{und:} & & C_4 &= -\frac{P}{EI \alpha_V^3} \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Die Funktion für den Normalkraftverlauf $n(x)$ in den Koppelstäben kann mit Hilfe von (4.35) und (4.37) bestimmt werden. Damit ist:

$$n(x) = -GA_{\text{ers}} \left(v_p''(x) + C_3 \alpha_V^2 \cosh(\alpha_V x) + C_4 \alpha_V^2 \sinh(\alpha_V x) \right) \quad (4.45)$$

Die resultierende Querkraft wird an der Einspannung ($x=0$) vollständig von der Wandscheibe aufgenommen, da dort $v'(0)=\gamma(0)=0$. Am Kopfende (Querschnitt $x=H$) wirkt deshalb eine singuläre Normalkraft:

$$\begin{aligned} N^* &= -\int_0^H n(x) dx \\ &= GA_{\text{ers}} \left(v_p'(H) - v_p'(0) + C_3 \alpha_V (\cosh(\alpha_V H) - 1) + C_4 \alpha_V \sinh(\alpha_V H) \right) \quad (4.46) \end{aligned}$$

Setzt man die Beziehungen (4.40) bis (4.43) für die Konstanten C_i in Gleichung (4.37) ein, so erhält man im Falle einer Gleichlast p_0 und nach einigen Umformungen die Beziehung für die horizontale Ausbiegung des Systems:

$$v(\xi) = \frac{p_0 H^4}{8 EI} \cdot K_{1,p_0}(\alpha_V H, \xi) \quad (4.47)$$

mit der Abkürzung:

$$K_{1,p_0} = \frac{8}{(\alpha_V H)^4} \left[\left(\frac{(\alpha_V H) \sinh(\alpha_V H) + 1}{\cosh(\alpha_V H)} \right) (\cosh(\alpha_V H \xi) - 1) - \right. \\ \left. - (\alpha_V H) \sinh(\alpha_V H \xi) + (\alpha_V H)^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \right] \quad (4.48)$$

wobei: $\xi = \frac{x}{H}$

Nach Differentiation des Ausdrucks (4.47) wird für den Querkraftverlauf:

$$Q_b(\xi) = p_0 H \cdot K_{2,p_0}(\alpha_V H, \xi) \quad (4.49)$$

und den Momentenverlauf:

$$M_b(\xi) = \frac{p_0 H^2}{2} \cdot K_{3,p_0}(\alpha_V H, \xi) \quad (4.50)$$

eine Funktion:

$$K_{2,p_0} = -\frac{1}{(\alpha_V H)} \left[\left(\frac{(\alpha_V H) \sinh(\alpha_V H) + 1}{\cosh(\alpha_V H)} \right) \sinh(\alpha_V H \xi) - (\alpha_V H) \cosh(\alpha_V H \xi) \right] \quad (4.51)$$

bzw.:

$$K_{3,p_0} = -\frac{2}{(\alpha_V H)^2} \left[\left(\frac{(\alpha_V H) \sinh(\alpha_V H) + 1}{\cosh(\alpha_V H)} \right) \cosh(\alpha_V H \xi) - (\alpha_V H) \sinh(\alpha_V H \xi) - 1 \right] \quad (4.52)$$

ermittelt. Analog dazu werden die Funktionen für eine Dreieckslast hergeleitet. Die Verläufe von $K_1(\xi)$, $K_2(\xi)$ und $K_3(\xi)$ für Gleichlast und Dreieckslast sind in den Bildern A-01 bis A-04 im Anhang dargestellt. Die Verläufe von $K_1(H)$, $K_2(H)$ und $K_3(0)$ zeigt Bild A-05. Dabei zeigt sich $K_1(\alpha H, H)$ als "lastunabhängiger Systemwert". Dieser Sachverhalt ist einfach zu erklären:

Die Funktion K_1 spiegelt den qualitativen Verlauf der Biegelinie wieder. Bei einem biegeweichen Balken wäre dies nach analytischer Lösung für eine Gleichlast eine Parabel 4-ter Ordnung, bzw. eine Parabel 5-ter Ordnung für eine Dreiecklast. Bei einem schubweichen Balken dagegen entspricht die Biegelinie einer quadratischen Parabel für eine Gleichlast, bzw. einer kubischen Parabel für eine Dreiecklast. Größere Unterschiede im Funktionsverlauf zeigen sich deshalb erst bei der dritten Ableitung von K_1 , bei den Querkraftverläufen.

Für überwiegend durch Schub geprägtes Verformungsverhalten wird anstelle von (4.47) sinnvollerweise die Beziehung:

$$v(\xi) = \frac{p}{2} \frac{H^2}{GA_{\text{ers}}} \cdot \left[\frac{(\alpha_V H)^2}{4} K_{1,p_0}(\alpha_V H, \xi) \right] = \frac{p}{2} \frac{H^2}{GA_{\text{ers}}} \cdot \bar{K}_{1,p_0}(\alpha_V H, \xi) \quad (4.53)$$

angesetzt, da die Funktionswerte von K_1 sehr klein werden. Die Verläufe der entsprechenden Funktionen \bar{K}_1 sind ebenfalls im Anhang dargestellt.

Zusammenfassend kann das Tragverhalten des Scheibe-Rahmen Systems vereinfacht so beschrieben werden, daß der Rahmen die Scheibe im oberen Bereich stützt und diese Stützkkräfte im unteren Bereich an die dort steifere biegeeweiche Scheibe abgibt (vgl. Verlauf von K_2).

Torsionsbeanspruchung symmetrischer Systeme:

Auch bei symmetrischen Systemen ist eine Torsionsbeanspruchung des Tragwerks, beispielsweise durch ausmittige Windlasten, zu untersuchen. Die Differentialgleichung:

$$EI_W \Theta^{IV} - GI_T \Theta'' = m_T \quad (4.54)$$

hat prinzipiell den gleichen Aufbau wie die Differentialgleichung (4.36) für den Fall der Biegebeanspruchung. In (4.54) ist EI_W die auf den Drillruhepunkt bezogene Wölbsteifigkeit des Tragwerkquerschnitts nach Gleichung (4.7) und GI_T die St. Venantsche Torsionssteifigkeit nach (4.10).

Für die Differentialgleichung (4.54) ergibt sich die Lösung analog zu (4.36):

$$\Theta(x) = \Theta_p(x) + C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\alpha_\Theta x) + C_4 \sinh(\alpha_\Theta x) \quad (4.55)$$

$$\text{mit: } \alpha_\Theta^2 = \frac{GI_T}{EI_W}$$

Die Partikularlösung ist abhängig von der Torsionsbelastung $m_T(x)$. Sie kann analog zu den Beziehungen (4.37) und (4.38) ermittelt werden. Für ein Torsionsmoment $m_T = \text{konst.}$ ergibt sich beispielsweise der Partikularanteil:

$$\Theta_p = - \frac{m_T}{2 GI_T} x^2 \quad (4.56)$$

(vgl. (4.38)) Mit den Randbedingungen für den Kragträger:

$$\left. \begin{aligned} 1. EI_W \Theta'''(H) - GI_T \Theta'(H) &= 0, \\ 2. \Theta(0) &= 0, \\ 3. \Theta'(0) &= 0 \text{ und :} \\ 4. \Theta''(H) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.57)$$

erhält man für die Konstanten C_i bei einer gleichmäßigen Torsionsbeanspruchung $m_T = \text{konst.}$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= - \frac{m_T}{GI_T \alpha_\Theta^2 \cosh(\alpha H)} + C_4 \tanh(\alpha_\Theta H) \\ C_2 &= \frac{m_T H}{GI_T} \\ C_3 &= - C_1 \\ C_4 &= - \frac{C_2}{\alpha_\Theta} \end{aligned} \right\} (4.58)$$

Eingesetzt in (4.55) ergibt sich nach einigen Umformungen für den Verlauf der Querschnittsverdrehung:

$$\Theta(\xi) = \frac{m_T H^4}{8 EI_W} \cdot K_1(\alpha_\Theta H, \xi) \quad (4.59)$$

Der Faktor K_1 kann für eine Gleichlast $m_T = \text{konst.}$ (mit $\alpha = \alpha_\Theta$) ebenfalls Bild A-01 im Anhang entnommen werden. Für eine Dreieckslast gilt analog die Beziehung aus Bild A-03. Entsprechend gelten die Funktion \bar{K}_i bei Schubweichen Systemen.

Bei der Lastabtragung infolge Torsionsbeanspruchung entsteht am freien Ende, analog zur singulären Normalkraft N^* bei Biegebeanspruchung, ein singuläres Torsionsmoment M_T^* . Bei der Wölbkrafttorsion (allgemeiner Fall) spaltet sich das Torsionsmoment in einen Primäranteil M_{Tp} und einen Sekundäranteil M_{Ts} auf. So ergibt sich für den Verlauf des sekundären Torsionsmoments:

$$M_{Ts} = m_T \cdot H \cdot K_2(\alpha_{\Theta} H, \xi) \quad (4.60)$$

Der Systemparameter K_2 kann (mit $\alpha = \alpha_{\Theta}$) Bild A-02 bzw. A-04 entnommen werden. Das primäre Torsionsmoment ist:

$$M_{Tp} = m_T \cdot H \cdot (1 - \xi - K_2) \quad (4.61)$$

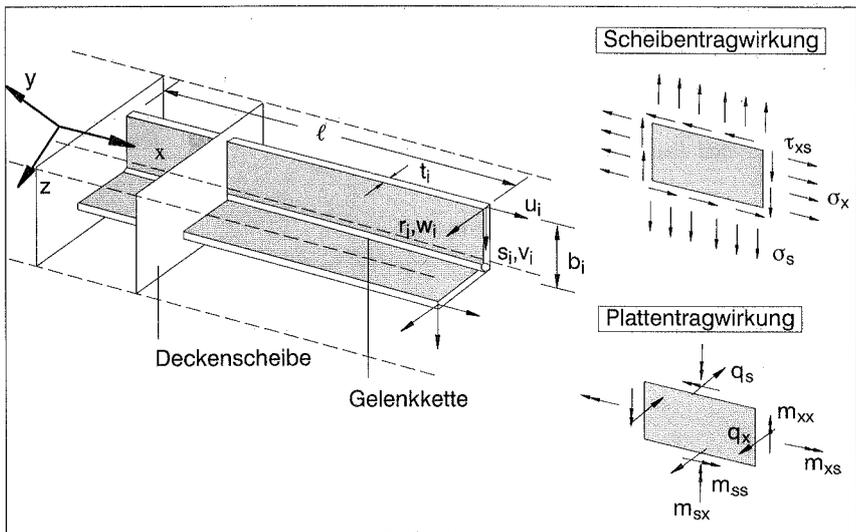


Bild 5.1: Prismatisches Falwerk

5. Finite Balkenelemente mit verallgemeinerten Querschnittswerten ("Verallgemeinerte-Finite-Balkenelemente")

5.1 Reduktion durch Reihenentwicklung

Das in Abschnitt 3 aufgestellte, kontinuierliche Ersatzsystem eines Hochhaustragwerks setzt sich aus einzelnen und zu Falwerken zusammengeschlossenen Scheiben mit abschnittsweise konstanten Querschnittswerten zusammen. Das Tragwerk wird allerdings nicht kontinuierlich dargestellt, sondern entsprechend der Finite-Elemente-Methode in einzelne Bereiche endlicher Größe unterteilt. Die Einzelscheiben haben dann eine Länge $\ell \leq H$, eine Breite b_i und eine Dicke t_i (Bild 5.1). An den gemeinsamen Kanten können analog zur *Rosman'schen* Betrachtungsweise (Rosman (1967)) eines Gelenkfaltwerks nur Schubkräfte zwischen den Scheiben übertragen werden. Die Plattentragwirkung wird vernachlässigt ($m_{xx}=0$), bzw. aufgrund der dehnstarken Deckenscheiben nicht aktiviert ($m_{xs}=0$). Neben dem globalen Koordinatensystem (x, y, z) wird ein lokales Elementkoordinatensystem (x, s_i, r_i) eingeführt, die lokalen Verschiebungen der Mittelflächen sind $u_i(x, s_i)$, $v_i(x, s_i)$ und $w_i(x, s_i)$. Aufgrund ihrer Schlankheit werden derartige Falwerke auch als "Stabschalen" bezeichnet, da sie Querlasten analog zur Balkentheorie in Form von Biegemomenten (über den Querschnitt aufintegrierte Normalspannungen σ) und Querkräften (über den Querschnitt aufintegrierte Schubspannungen τ) abtragen.

Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.v.V.) ist die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte eines aus insgesamt M Einzelscheiben zusammengesetzten Systems:

$$\delta W^{\text{int}} = - \sum_{i=1}^M \int_{(V_i)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV_i = - \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (5.1)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\sigma}$ der Spannungsvektor und $\boldsymbol{\epsilon}$ der Vektor der Verzerrungen mit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_x \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_x \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Mit der Werkstoffbeziehung für Hooke'sches Material $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ ergibt sich für (5.1):

$$\delta W^{\text{int}} = - \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \, dV \quad (5.3)$$

Die Scheiben sind dünn, so daß ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt werden kann. Bei isotropem Materialverhalten hat die Materialmatrix dann die Form:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E \nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E \nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{mit:} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.4)$$

Aufgrund der dehnstarren Deckscheiben ist eine Verzerrung in Querrichtung nicht möglich ($\epsilon_s = 0$). Dies ist zwar nur in diskreten Querschnitten der Fall (Bild 5.1); aufgrund der Vielzahl der vorhandenen Deckscheiben wird diese Annahme jedoch in allen Querschnitten zugrundegelegt. Damit reduzieren sich die Matrizen zu:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ \dot{u} + v' \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Spannungen in Querrichtung werden über die Beziehung $\sigma_s = \nu \sigma_x$ ermittelt und näherungsweise entlang der gesamten Gebäudelängsachse, d.h. auch in Bereichen ohne Querdehnungsbehinderung (zwischen den Geschößdecken), angesetzt.

Grundgedanke bei der Verallgemeinerten Biegetheorie von Schardt für die Ableitung eines eindimensionalen Balkenmodells ist die Methode von Kantorovich (1956) für die Lösung von allgemeinen Variationproblemen bei Funktionalen mit mehreren, unabhängigen Variablen. Der qualitative Verlauf der Verschiebungen $u(x,s)$, $v(x,s)$ und $w(x,s)$ im Querschnitt einer Einzelscheibe oder des gesamten Tragwerks wird durch einen Produktansatz mit Hilfe gewählter Interpolationsfunktionen $f_j(s)$, $g_k(s)$ und $\hat{g}_k(s)$ mit: $0 \leq j \leq J$ bzw.: $0 \leq k \leq K$ näherungsweise beschrieben. Dadurch wird hier über einen Reihenansatz eine Variablentrennung bei den Verschiebungen in s und x vorgenommen. Es sind:

$$u(x, s) = \sum_{(J)} f_j(s) \cdot U_j(x) ; \quad v(x, s) = \sum_{(K)} g_k(s) \cdot V_k(x) ; \quad w(x, s) = \sum_{(K)} \hat{g}_k(s) \cdot V_k(x)$$

bzw.:

$$u(x, s) = \mathbf{f}^T(s) \cdot \mathbf{U}(x) ; \quad v(x, s) = \mathbf{g}^T(s) \cdot \mathbf{V}(x) ; \quad w(x, s) = \hat{\mathbf{g}}^T(s) \cdot \mathbf{V}(x) \quad (5.6)$$

mit den Vektoren:

$$\mathbf{f}^T(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) & f_2(s) & \dots & f_J(s) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{g}^T(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & g_2(s) & \dots & g_K(s) \end{bmatrix} ; \quad \hat{\mathbf{g}}^T(s) = \begin{bmatrix} \hat{g}_1(s) & \hat{g}_2(s) & \dots & \hat{g}_K(s) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{U}^T(x) = \begin{bmatrix} U_1(x) & U_2(x) & \dots & U_J(x) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{V}^T(x) = \begin{bmatrix} V_1(x) & V_2(x) & \dots & V_K(x) \end{bmatrix}$$

Dabei werden die Funktionen $U_j(x)$, $V_k(x)$ als "Verallgemeinerte Verschiebungen" bezeichnet. Die Funktionen $f_j(s)$, $g_k(s)$ und $\hat{g}_k(s)$ sind "Verallgemeinerte Koordinatenfunktionen". Die Verallgemeinerten Verschiebungen $V_k(x)$ gelten dabei für die Reihenentwicklung der Verschiebungsfelder $v(x,s)$ und $w(x,s)$, da diese für den allgemeinen

räumlichen Verformungszustand, aufgrund der anfangs getroffenen Annahme dehnstarrer Deckenscheiben, miteinander gekoppelt sind.

Für die Spannungsverläufe im Querschnitt erhält man mit den Ansätzen (5.6) die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(s) \cdot \mathbf{U}'(x) \\ \dot{\mathbf{f}}^T(s) \cdot \mathbf{U}(x) + \mathbf{g}^T(s) \cdot \mathbf{V}'(x) \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \dot{\mathbf{f}} = \frac{d\mathbf{f}}{ds}; \quad \mathbf{U}' = \frac{d\mathbf{U}}{dx} \quad (5.7)$$

Für (5.3) ergibt sich durch Einsetzen von (5.5) und den Verschiebungsansätzen (5.6) die Beziehung:

$$\begin{aligned} -\delta W^{\text{int}} &= \int_{(H)} \int_{(A)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \, dA \, dx = \\ &= \int_{(H)} \frac{E}{1-\nu^2} \delta \mathbf{U}^T \left[\int_{(A)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T \, dA \right] \mathbf{U}' \, dx + \int_{(H)} G \delta \mathbf{U}^T \left[\int_{(A)} \dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}}^T \, dA \right] \mathbf{U} \, dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(H)} G \delta \mathbf{U}^T \left[\int_{(A)} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}^T \, dA \right] \mathbf{V}' \, dx + \frac{1}{2} \int_{(H)} G \delta \mathbf{V}^T \left[\int_{(A)} \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{f}}^T \, dA \right] \mathbf{U} \, dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{(H)} G \delta \mathbf{V}^T \left[\int_{(A)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T \, dA \right] \mathbf{V}' \, dx \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dabei ist A die Querschnittsfläche des Tragwerkquerschnitts in der globalen y-z Ebene, die sich aus der Summation der Querschnittsflächen A_i der Einzelscheiben ergibt. Es werden folgende Abkürzungen für die in den eckigen Klammern stehenden Integrale eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \left[\int_{(A)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T dA \right] ; & \mathbf{B} &= \left[\int_{(A)} \dot{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{f}}^T dA \right] ; \\
 \mathbf{C} &= \left[\int_{(A)} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{g}^T dA \right] ; & \mathbf{D} &= \left[\int_{(A)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T dA \right]
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{aligned}} \right\} (5.9)$$

Für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte des nunmehr "Verallgemeinerten Balkens" ergibt sich für (5.8) nach Einsetzen der Abkürzungen (5.9):

$$\begin{aligned}
 -\delta W^{\text{int}} &= \left[\int_{(H)} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \delta \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}' dx + \int_{(H)} \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} dx + \int_{(H)} \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{V}' dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{(H)} \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \mathbf{U} dx + \int_{(H)} \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}' dx \right]
 \end{aligned}
 \quad (5.10)$$

Die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} sind die Matrizen der Verallgemeinerten Querschnittswerte. Für den einfachen Sonderfall eines auf Biegung beanspruchten, ebenen Balkens mit Rechteckquerschnitt werden die in Bild 5.2 dargestellten lokalen (d.h. auf das lokale Koordinatensystem bezogene) Ansatzfunktion \bar{f}_j und \bar{g}_k für den Verlauf der sich einstellenden Querschnittsverschiebung gewählt. Als Verallgemeinerte Verschiebungen werden hier die Querschnittsverdrehung \bar{U} um die lokale r -Achse des Balkenquerschnitts und die Verschiebung \bar{V} in die lokale s -Richtung gewählt. Außerdem wird vereinfachend die Bernoulli-Hypothese der ebenbleibenden Querschnitte zugrundegelegt. Durch Auswertung der Integrale (5.9) erhält man mit:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\int_{(A)} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{f}}^T dA \right] = \frac{t b^3}{12} = I_{rr} \quad \text{und:} \quad \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{D}} = b t = A$$

für die (lokalen) Verallgemeinerten Querschnittswerte mechanisch deutbare Querschnittswerte (Flächenträgheitsmoment I_{rr} , Querschnittsfläche A) für die Biegung und den Schub eines ebenen Balkens.

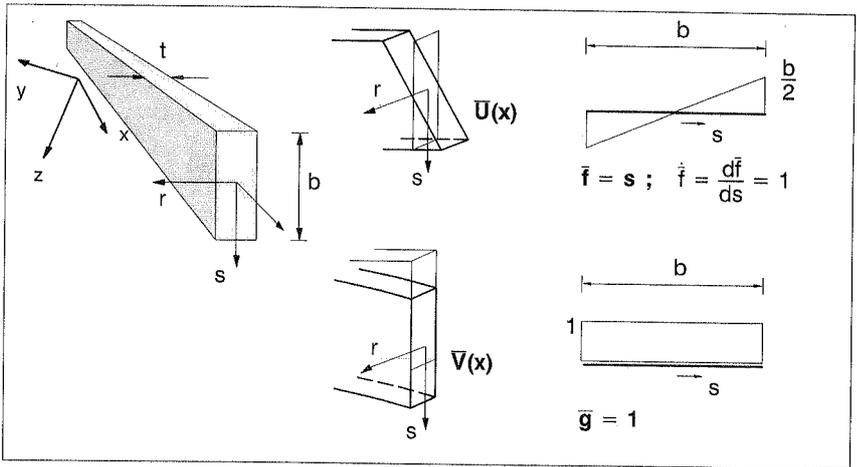


Bild 5.2: Verallgemeinerte Koordinatenfunktionen \bar{f} und \bar{g} (lokal) für die Biegung eines ebenen Balkens

5.2 Wahl der Ansatzfunktionen

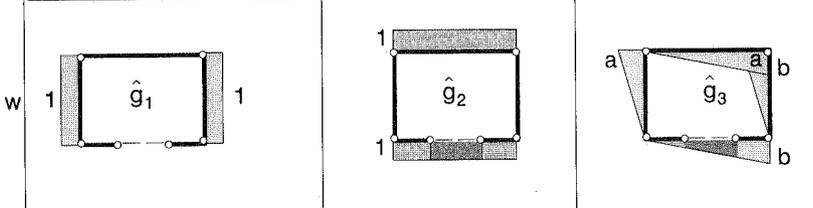
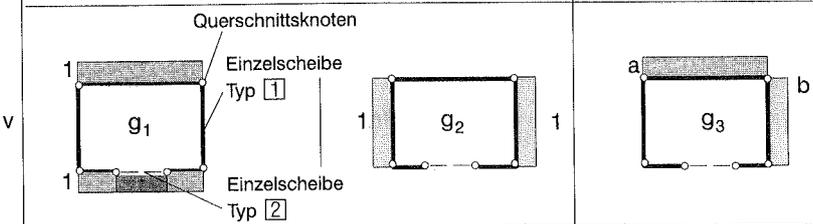
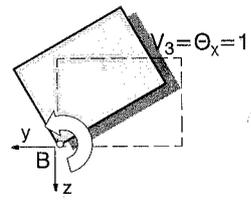
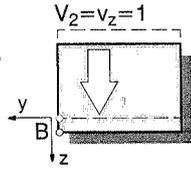
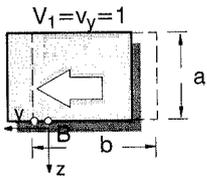
Von den gewählten Ansatzfunktionen wird lediglich gefordert, daß sie

- geometrisch verträglich sind,
- linear unabhängig sind,
- den Verformungszustand (lastfallabhängig) vollständig beschreiben können.

Darüberhinaus sind die Ansatzfunktionen prinzipiell frei wählbar. Mit der Bernoulli-Annahme ebenbleibender Querschnitte können beispielsweise für einen einfachsymmetrischen, gegliederten Hochhauskern die in Bild 5.3 dargestellten Querschnittsfunktionen für Verschiebungen *in* bzw. *aus* der Querschnittsebene aufgestellt werden.

Die Einzelscheiben sind dabei durch zwei Querschnittsknoten \circ begrenzt. Die diskreten Riegel werden durch eine kontinuierliche schubweiche Scheibe mit der Dicke t_{ers} ersetzt. Die Verschiebungsfunktionen $g_k(s)$ und $\hat{g}_k(s)$ beschreiben für den allgemeinen räumlichen Verschiebungszustand die drei Bewegungsmöglichkeiten ($\rightarrow K=3$) einer starren Deckenscheibe in ihrer Ebene. Für die Verdrehung $\Theta=1$ um die Stabachse wird ein beliebiger Bezugspunkt B gewählt. Nur für den Sonderfall eines doppelt-symmetrischen Systems kann als Bezugspunkt der Schubmittelpunkt bzw. Drillruhepunkt des Systemquerschnitts gewählt werden, so daß sich Biege- und Torsionsbeanspruchung voneinander entkoppeln lassen.

Verschiebungen v und w in der Querschnittsebene



Verschiebung u aus der Querschnittsebene

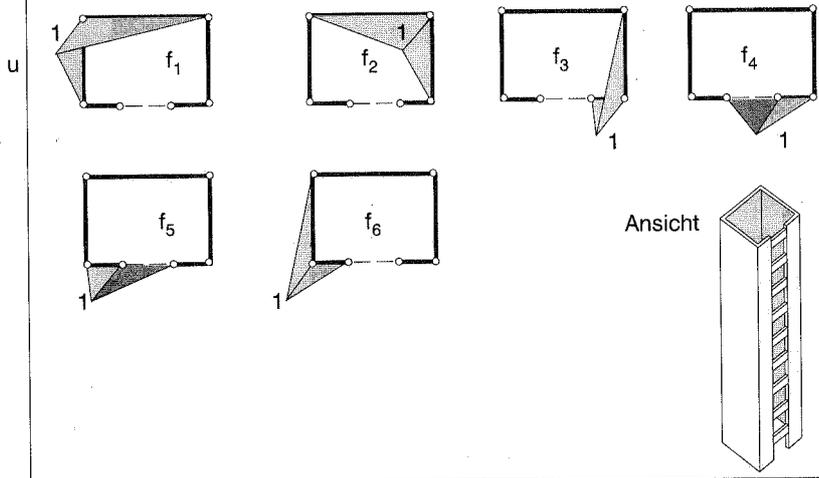


Bild 5.3: Einheitsverschiebungszustände am Beispiel eines gegliederten Hohlkastenquerschnitts

Mit den Funktionen f_j werden mögliche Längsverschiebungszustände vorgegeben. Sie beschreiben die sich einstellende Querschnittsverwölbung, wenn ein oder mehrere Querschnittsknoten um den Betrag $U=1$ verrückt werden. Insgesamt müssen sie die durch Biegung oder Torsion hervorgerufene Querschnittsverwölbung beschreiben können. Durch eine Linearkombination $U=U_1+U_2-U_3-U_4-U_5-U_6$ wird beispielsweise die Biegung um eine durch den Flächenschwerpunkt gehende Parallele zur globalen y -Achse dargestellt. Bei einfachen Querschnittsformen lassen sich durch solche Kombinationen von Einheitsverrückungszuständen mechanisch deutbare Verformungszustände ansetzen (vgl. Bild 5.2).

Für eine numerische Umsetzung der beschriebenen Methode ist es erforderlich, die Ansatzfunktionen eindeutig festzulegen. Um allgemeingültige, für beliebige Systeme anwendbare, mechanische Beziehungen herzuleiten, werden die Ansatzfunktionen für die Einzelscheiben deshalb zunächst auf lokaler Ebene gewählt. Der Zusammenbau zum System erfolgt dann nach einer Koordinatentransformation im Sinne der Finite-Elemente-Methode über eine logische Zuordnung von Freiheitsgraden.

Für die Einzelscheibe werden einheitlich, d.h. für alle Scheibentypen die in Bild 5.4 angegebenen (lokalen) Verallgemeinerten Koordinatenfunktionen über die Breite b bzw. nb der Scheibe angesetzt. Durch eine Linearkombination von \bar{f}_1 und \bar{f}_2 ist damit die Balkenlösung darstellbar. Mit \bar{f}_3 wird für querbeanspruchte Wandscheiben der aus dem nichtlinearen Verlauf der Schubspannungen resultierende, kubische Anteil der Querschnittsverwölbung erfaßt (Hofmann (1992)). Insbesondere für Stockwerkrahmen sind mit den Funktionen \bar{f}_3 und \bar{f}_4 die zusätzlichen, nichtlinearen Wölbanteile berücksichtigt (vgl. Abschn. 2.3).

Da sich die Wirkung einer Einzelscheibe auf die Scheibenwirkung beschränkt, wird als Verallgemeinerte Verschiebung \bar{v} die Verschiebung in Scheibenebene (lokale s -Richtung) gewählt. Es genügt deshalb der Ansatz von nur einer Verallgemeinerten Koordinatenfunktion \bar{g} . Bei gegliederten Scheiben werden für die kontinuierliche schubweiche Scheibe (Typ [2]) die Funktionen \bar{f}_3 und \bar{f}_4 jedoch nicht angesetzt, da diese Form der Querschnittsverwölbung bei fehlender Übertragungsmöglichkeit von Normalspannungen nicht möglich ist.

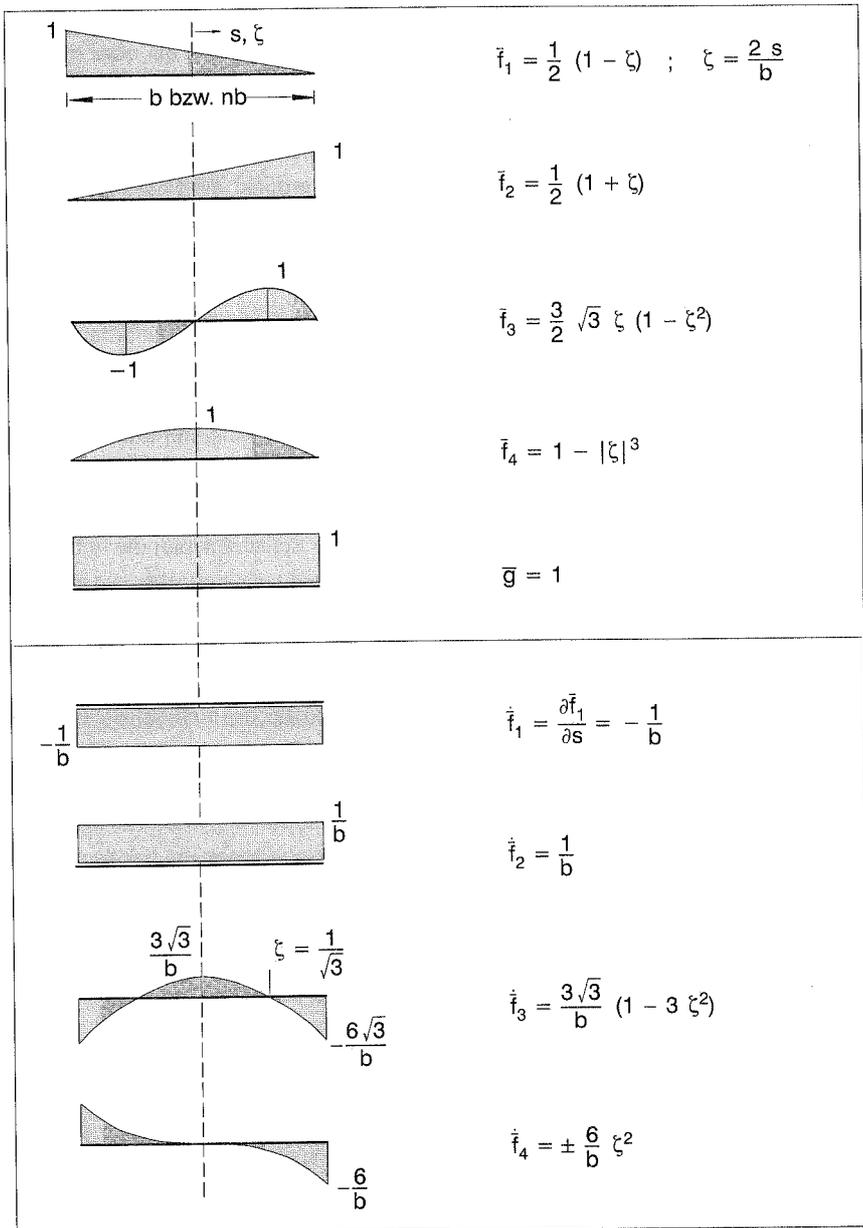


Bild 5.4: Lokale Koordinatenfunktionen \bar{f}_j und \bar{g} (lokal) für Wand- und Rahmenscheiben

5.3 Die Matrizen der Verallgemeinerten Querschnittswerte

Die Integrale in (5.9) werden mit den gewählten Ansatzfunktionen vorab ausgewertet. Die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}_i$, $\bar{\mathbf{B}}_i$, $\bar{\mathbf{C}}_i$ und $\bar{\mathbf{D}}_i$ der lokalen Verallgemeinerten Querschnittswerte der Einzelscheiben (vgl. Bild 3.4) haben dann für Wandscheiben (Typ 1) die Form:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & & \frac{18}{35} & 0 \\ & & & \frac{9}{14} \end{bmatrix} b t \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \frac{108}{5} & 0 \\ & & & \frac{36}{5} \end{bmatrix} \frac{t}{b}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \bar{\mathbf{D}}_i = b t$$

Wandscheibe (Typ 1)

Für den Scheibentyp 2 (Ersatzsystem für die Riegelreihe bei einer gegliederten Scheibe) gilt die Einschränkung, daß keine Normalspannungen übertragen werden können. Aus den Bestimmungsgleichungen (5.7) für die Spannungen und den Beziehungen (5.9) wird ersichtlich, daß damit auch keine Verallgemeinerten Querschnittswerte $\bar{\mathbf{A}}_{ij}$ vorhanden sind. Zusätzlich werden die Funktionen f_3, f_4 nicht angesetzt. Die Matrizen der Verallgemeinerten Querschnittswerte haben dann die Form:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix} \frac{t_{\text{ers}}}{\ell_R}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t_{\text{ers}} \quad \bar{\mathbf{D}}_i = \ell_R t_{\text{ers}}$$

schubweiche Scheibe für gegl. Scheibe

Allgemein lassen sich über die Scheibenbreite regelmäßig angeordnete Punktquerschnitte für den Scheibentyp [3] einfach berücksichtigen. Die Funktionswerte der Stützstellen sind Tabelle 5.1 zu entnehmen. Durch einen Vergleich der einzelnen Komponenten für die Matrix \bar{A}_i kann gezeigt werden, daß bei $n > 5$ die Stielquerschnittsflächen näherungsweise über die Breite der Scheibe verschmiert werden können (Vergleich für $n=6$: $A_{11}=2,527 \cdot A_{St}$ (punktweise) \leftrightarrow $A_{11}=2,333 \cdot A_{St}$ (verschmiert)).

Für einen n -feldrigen Stockwerkrahmen ergeben sich die Matrizen der Querschnittswerte in der Form:

$$\bar{A}_i = \sum_{(n+1)} A_S \bar{f} \bar{f}^T \quad \text{für } n \leq 5 \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & & \frac{18}{35} & 0 \\ & & & \frac{9}{14} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (n+1) A_S \\ \text{für } n > 5 \end{array}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \frac{108}{5} & 0 \\ & & & \frac{36}{5} \end{bmatrix} \quad \frac{t_{ers}}{n \cdot b} \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t_{ers} \quad \bar{D}_i = n \cdot b \cdot t_{ers}$$

n -feldriger Stockwerkrahmen (Typ [3] bzw. [1] + [2])

Die Matrizen der Einzelscheiben werden zu den symmetrischen Systemmatrizen **A**, **B**, **D** und der nicht-symmetrischen Matrix **C** zusammengebaut und beinhalten dann alle Informationen (Verallgemeinerte Querschnittswerte), die den Querschnittsaufbau, d.h. die Anordnung und Ausrichtung der Einzelscheiben betreffen. Beim Zusammenbau werden geometrische Abhängigkeiten (Identitäten) von Verallgemeinerten Verschiebungen \bar{U}_i in Form einer Zuordnungsmatrix **Z_U** berücksichtigt. Da diese Matrix i.a. mit sehr vielen Nullen belegt ist, ist es einfacher die einzelnen Anteile analog zur Direkten Steifigkeitsmethode direkt in die Matrix hinein zu addieren. Es gilt:

$$\bar{U}(\xi) = Z_U \cdot U(\xi) \quad (5.11)$$

$$\text{mit: } \bar{U}^T(\xi) = [\bar{U}_{1,1} \ \bar{U}_{2,1} \ \bar{U}_{3,1} \ \bar{U}_{4,1} \mid \bar{U}_{1,2} \ \bar{U}_{2,2} \ \bar{U}_{3,2} \ \bar{U}_{4,2} \mid \dots \mid \bar{U}_{1,M} \ \bar{U}_{2,M} \ \bar{U}_{3,M} \ \bar{U}_{4,M}]$$

und dem durch die Identitäten reduzierten Vektor **U(ξ)**.

		\bar{f}_1	\bar{f}_2	\bar{f}_3	\bar{f}_4
	n=1	1	0	–	–
		0	1	–	–
	n=2	1	0	0	0
		0.5	0.5	0	1
		0	1	0	0
	n=3	1	0	0	0
		0.667	0.333	-0.7698	0.963
		0.333	0.667	0.7698	0.963
		0	1	0	0
	n=4	1	0	0	0
		0.75	0.25	-0.9743	0.875
		0.5	0.5	0	1
		0.25	0.75	0.9743	0.875
		0	1	0	0
	n=5	1	0	0	0
		0.8	0.2	-0.9977	0.784
		0.6	0.4	-0.4988	0.992
		0.4	0.6	0.4988	0.992
		0.2	0.8	0.9977	0.784
		0	1	0	0
	n=6	1	0	0	0
		0.833	0.167	-0.9623	0.7037
		0.667	0.333	-0.7698	0.9630
		0.5	0.5	0	1
		0.333	0.667	0.7698	0.9630
		0.167	0.833	0.9623	0.7037
		0	1	0	0

Tabelle 5.1: Funktionswerte bei variabler Anzahl von Feldern

Da die Querverschiebung \bar{V} der Scheibenquerschnitte in der lokalen s -Richtung ausgedrückt werden, wird eine Transformation in die globalen Richtungen durchgeführt. Die Wirkungsrichtung einer Einzelscheibe ist gegenüber der globalen z -Richtung um den Winkel ψ_i geneigt (Bild 5.5). Für die Beziehung zwischen der lokalen Verschiebung \bar{V}_i und den globalen Verallgemeinerten Verschiebungen V_1, V_2 und V_3 gilt die Beziehung:

$$\bar{V}_i(\xi) = \mathbf{R}_i^T \cdot \mathbf{V}(\xi) \quad (5.12)$$

mit:
$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} -\sin \psi_i \\ \cos \psi_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(\xi) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Dabei ist c_i der senkrechte Abstand des Drehpunktes B zur Wirkungsrichtung der Scheibe. Mit:

$$\bar{\mathbf{g}}_i \bar{V}_i(\xi) = \underbrace{\bar{\mathbf{g}}_i \mathbf{R}_i^T}_{\mathbf{g}_i^T} \cdot \mathbf{V}(\xi) \quad \text{wobei:} \quad \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

erhält man die globalen Ansatzfunktionen $g_{k,i}$ für die Verschiebung einer Scheibe in ihrer Ebene. Sie beschreiben die Verschiebungsverläufe im Querschnitt infolge einer Einheitsverschiebung $V_1=v_y=1$ bzw. $V_2=v_z=1$ bzw. einer Einheitsverdrehung des Tragwerkquerschnitts $V_3=\Theta_x=1$.

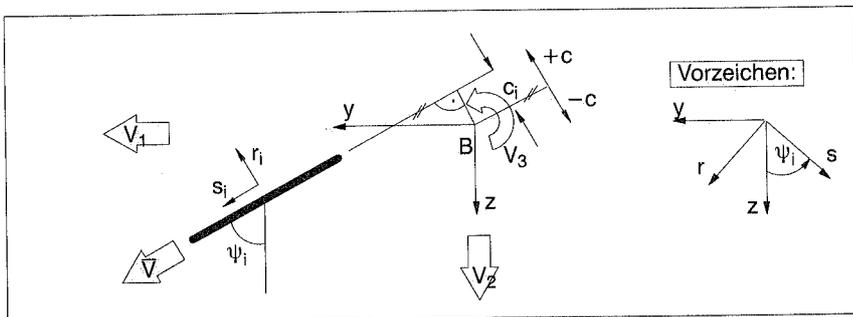


Bild 5.5: Lage einer Einzelscheibe im globalen Koordinatensystem

Für die Matrizen der globalen Verallgemeinerten Querschnittswerte eines M-Scheibensystems erhält man so die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{Z}_U^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Z}_U ; & \mathbf{B} &= \mathbf{Z}_U^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{Z}_U ; \\ \mathbf{C} &= \mathbf{Z}_U^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{R}^T ; & \mathbf{D} &= \sum \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{D}}_i \mathbf{R}_i^T \end{aligned} \right\} (5.14)$$

mit: $\bar{\mathbf{A}} = \text{Diag} [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_M] ;$

$\bar{\mathbf{B}} = \text{Diag} [\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2 \dots \bar{\mathbf{B}}_M] ;$

$\bar{\mathbf{C}} = \text{Diag} [\bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{C}}_2 \dots \bar{\mathbf{C}}_M] ;$

und: $\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^T \\ \mathbf{R}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{R}_M^T \end{bmatrix}$

Dabei sind $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$ Diagonalmatrizen und \mathbf{R} die Transformationsmatrix vom Format (M, 3).

5.4 Scheiben mit gekrümmten Querschnitten

Für Einzelstäbe mit gerader Stabachse und gekrümmten Querschnitten (Bild 5.6) werden für die Verläufe der Verallgemeinerten Verschiebungen $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ ebenfalls die Ansatzfunktionen nach Bild 5.4 gewählt. Die Krümmung des Querschnitts wird dabei als konstant angenommen (Kreisringstück). Der Winkel Ψ^* (Bogenmaß) entspricht dem Öffnungswinkel des Kreisringstücks, mit ψ^* wird die Orientierung festgelegt.

Setzt man näherungsweise ebenbleibende Querschnitte voraus, so muß auch für eine Wandscheibe mit Kreisringquerschnitt die globale Biegung um eine beliebige Achse unter dieser Voraussetzung darstellbar sein (Bild 5.7). Mit den gewählten, lokalen Verallgemeinerten Koordinatenfunktionen ist dies allerdings nicht möglich, so daß eine entsprechende, feine Elementierung im Querschnitt erforderlich ist. Es gilt:

$$\xi = \frac{2 s_i}{R_i \Psi_i^*} = \frac{2 \Psi_j}{\Psi_i^*} \quad (5.15)$$

Da die Plattentragwirkung d.h. die Biegesteifigkeit EI_{ss} der Einzelscheiben um die "schwache Achse" außerdem vernachlässigt wurde, ist es erforderlich, den Winkel Ψ^*

so zu begrenzen, daß diese Annahme noch gerechtfertigt ist. Der Winkel wird aus diesem Grund auf $\Psi^*_{\max} = \pi/4$ begrenzt, da der Flächenschwerpunkt bei den üblichen Scheibendicken dann innerhalb der Querschnittsfläche liegt.

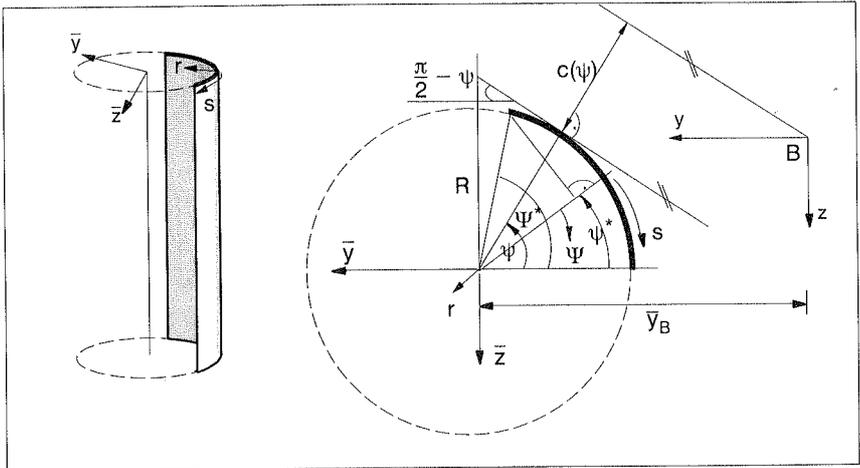
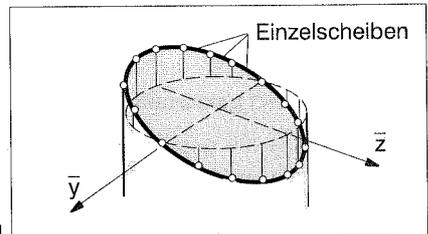


Bild 5.6: Einzelscheibe mit gerader Stabachse und gekrümmtem Querschnitt

Bild 5.7:

Querschnittsverwölbung eines dünnwandigen Kreisringprofils infolge Biegung



Zwischen den Winkeln besteht nach Bild 5.6 die Beziehung:

$$\psi = \psi^* - \Psi \quad (5.16)$$

Die Ansatzfunktionen \bar{r}_i (lokal) und g_i (global) werden mit (5.15) in Abhängigkeit von dem Winkel Ψ ausgedrückt. Dabei kann der zur Beschreibung des Verdrehfreiheitsgrades V_3 erforderliche, senkrechte Abstand c_i eines beliebigen Bezugspunktes B von der Tangente, ausgehend von der Tangentengleichung in der Hesse'schen Normalform:

$$\bar{y} \cos \psi_i + \bar{z} \sin \psi_i + R_i = 0 \quad (5.17)$$

durch Einsetzen der Koordinaten \bar{y}_B und \bar{z}_B des Bezugspunktes ermittelt werden. Damit ist:

$$c_i(\psi) = \left| \bar{y}_{B,i} \cos \psi_i + \bar{z}_{B,i} \sin \psi_i + R_i \right| \quad (5.18)$$

Nach (5.15) gilt außerdem:

$$ds_i = R_i \cdot d\Psi = \frac{R \Psi_i^*}{2} d\zeta$$

Damit ergeben sich für die Ansatzfunktionen nach Bild 5.4 bzw. deren Ableitungen folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{1,i} &= \frac{1}{2} (1 - \zeta) \quad ; & \dot{\bar{f}}_1 &= \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \zeta} \cdot \frac{2}{R_i \Psi_i^*} = -\frac{1}{R_i \Psi_i^*} \\ \bar{f}_{2,i} &= \frac{1}{2} (1 + \zeta) \quad ; & \dot{\bar{f}}_2 &= \frac{1}{R_i \Psi_i^*} \\ \bar{f}_{3,i} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \zeta (1 - \zeta^2) \quad ; & \dot{\bar{f}}_3 &= \frac{3\sqrt{3}}{R_i \Psi_i^*} (1 - 3\zeta^2) \\ \bar{f}_{4,i} &= 1 - |\zeta|^3 \quad ; & \dot{\bar{f}}_4 &= \pm \frac{6}{R_i \Psi_i^*} \zeta^2 \end{aligned} \right\} (5.19a)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} g_{1,i}(\zeta) &= -\sin\left(\psi^* - \frac{\Psi_i^*}{2} \zeta\right) \\ g_{2,i}(\zeta) &= \cos\left(\psi^* - \frac{\Psi_i^*}{2} \zeta\right) \\ g_{3,i}(\zeta) &= c_i(\zeta) = \left| \bar{y}_{B,i} \cos\left(\psi^* - \frac{\Psi_i^*}{2} \zeta\right) + \bar{z}_{B,i} \sin\left(\psi^* - \frac{\Psi_i^*}{2} \zeta\right) + R_i \right| \end{aligned} \right\} (5.19b)$$

Die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ der Verallgemeinerten Querschnittswerte haben dann die dem Scheibentyp entsprechende Form nach Abschnitt 5.3 mit:

$$\begin{aligned} & \text{b bzw. } \ell_R = R \Psi^* \quad \text{für Scheibentyp } \textcircled{1} \text{ und } \textcircled{2} \quad (\text{gegl. Scheibe}) \\ \text{bzw.: } & \text{n b} = R \Psi^* \quad \text{für Scheibentyp } \textcircled{3} \text{ und } \textcircled{2} \quad (\text{Stockwerkrahmen}) \end{aligned}$$

Die Integralauswertung für die Matrizen $\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{\mathbf{D}}$ ist etwas aufwendiger und wird sinnvollerweise rechnerunterstützt durchgeführt.

5.5 Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix des Verallgemeinerten Finiten Balkenelements

Entsprechend der Finite-Elemente-Methode werden Geometrie und Verformungen an diskreten Punkten definiert, der Verlauf mit Interpolationsfunktionen angenähert. Ausgehend von Beziehung (5.10) wird ein Ansatz für die Verallgemeinerten Verschiebungen $\mathbf{U}(x)$ und $\mathbf{V}(x)$ in Richtung der Stabachse gewählt. Dabei werden für die Längs- und die Querverschiebungen die gleichen Interpolationsfunktionen $\mathbf{L}(\xi)$ gewählt, die das kontinuierliche Verschiebungsfeld \mathbf{u} damit elementweise (N =Anzahl der Elementknoten) durch diskrete Knotenwerte \mathbf{v}_E annähern. In allgemeiner Form ist:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{v}_E \quad (5.20)$$

Dabei ist \mathbf{u} der Vektor der Verallgemeinerten Verschiebungen:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\xi) \\ \mathbf{V}(\xi) \end{bmatrix}$$

und \mathbf{v}_E der Vektor der diskreten Knotenverschiebungen:

$$\mathbf{v}_E^T = \left[\mathbf{U}_1^T \ \mathbf{V}_1^T \ \mathbf{U}_2^T \ \mathbf{V}_2^T \ \dots \ \mathbf{U}_N^T \ \mathbf{V}_N^T \right]$$

Die Matrix der Interpolationsfunktionen hat den Aufbau:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_U \\ \mathbf{L}_V \end{bmatrix}$$

$$\text{mit: } \mathbf{L}_U = \left[\mathbf{L}_1 \ 0 \mid \mathbf{L}_2 \ 0 \mid \dots \mid \mathbf{L}_N \ 0 \right] \quad ; \quad \mathbf{L}_1 = \text{Diag} [\mathbf{L}_1]$$

$$\text{und: } \mathbf{L}_V = \left[0 \ \mathbf{L}_1 \mid 0 \ \mathbf{L}_2 \mid \dots \mid 0 \ \mathbf{L}_N \right]$$

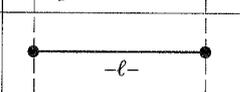
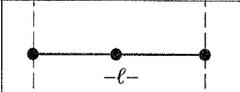
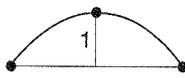
Verschiebungsverlauf	$\xi = 0$	$\xi = 1$	$r = 1 \dots N$	$\eta_r = \frac{x}{\ell}$
linear (N=2)			$L_r = a_{1,r} + a_{2,r} \cdot \xi$	
quadratisch (N=3)			$L_r = a_{1,r} + a_{2,r} \cdot \xi + a_{3,r} \cdot \xi^2$	
kubisch (N=4)			$L_r = a_{1,r} + a_{2,r} \cdot \xi + a_{3,r} \cdot \xi^2 + a_{4,r} \cdot \xi^3$	

Tabelle 5.2: Ansatzfunktionen L_r für Verschiebungsverläufe $U(\xi)$ bzw. $V(\xi)$

Da die Verschiebungsfunktionen (vgl. (5.8)) nur in ihrer ersten Ableitung berücksichtigt werden, ist für die Verschiebungen selbst nur ein linearer Ansatz erforderlich. An den Elementgrenzen ist damit ein stetiger Übergang für die Verschiebungen gewährleistet (C^0 -Stetigkeit). Die allgemeinen Ansatzfunktionen sind der Tabelle 5.2 zu entnehmen. Die Werte für $a_{j,r}$ mit $1 \leq j, r \leq N$ bestimmen sich aus der Bedingung, daß nur der Funktionswert von L_j den Wert 1 annimmt und sich für die anderen Funktionen der Wert 0 ergibt. Beispielsweise erhält man so für einen quadratischen Ansatz (N=3) die Lagrange'schen-Interpolationspolynome:



$$L_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2$$



$$L_2(\xi) = 4\xi - 4\xi^2$$



$$L_3(\xi) = -\xi + 2\xi^2 \quad (5.21)$$

Setzt man die Verschiebungsansätze (5.20) in (5.10) ein, so erhält man für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 -\delta W^{\text{int}} = & \delta \mathbf{v}_E^T \left[\frac{E}{\ell(1-\nu^2)} \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{A} \mathbf{L}'_U d\xi + G\ell \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{B} \mathbf{L}_U d\xi \right] \mathbf{v}_E + \delta \mathbf{v}_E^T \left[G \int_0^1 \mathbf{L}_V^T \mathbf{C}^T \mathbf{L}_U d\xi \right] \mathbf{v}_E + \\
 & + \delta \mathbf{v}_E^T \left[G \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{C} \mathbf{L}'_V d\xi \right] \mathbf{v}_E + \delta \mathbf{v}_E^T \left[\frac{G}{\ell} \int_0^1 \mathbf{L}_V^T \mathbf{D} \mathbf{L}'_V d\xi \right] \mathbf{v}_E \quad \text{mit } \mathbf{L}' = \frac{d\mathbf{L}}{d\xi} \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Das einer Gleichgewichtsaussage äquivalente Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = 0 \quad (5.23)$$

mit der virtuellen Arbeit der inneren (δW^{int}) bzw. der äußeren Kräfte (δW^{ext}) führt mit $\delta \mathbf{v}_E \neq 0$ auf das System der statischen Gleichungen:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_E = \mathbf{p} \quad (5.24)$$

Dabei ist \mathbf{p} der sich aus der äußeren Belastung mit dem gewählten Verschiebungsansatz ergebende globale konsistente Lastvektor (\rightarrow Abschn. 5.6). Die aus (5.22) abgeleitete Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k} für ein N -knotiges Element hat die allgemeine Form:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \dots & \mathbf{k}_{1N} \\ \mathbf{k}_{12}^T & \mathbf{k}_{22} & & \\ \vdots & & & \\ \mathbf{k}_{1N}^T & & & \mathbf{k}_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

mit den Untermatrizen:

$$\mathbf{k}_{rs} = \begin{bmatrix} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} \mathbf{A} \int_0^1 L_r' L_s' d\xi + G\ell \mathbf{B} \int_0^1 L_r L_s d\xi & G\mathbf{C} \int_0^1 L_r L_s' d\xi \\ G\mathbf{C}^T \int_0^1 L_r' L_s d\xi & \frac{G}{\ell} \mathbf{D} \int_0^1 L_r' L_s' d\xi \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Die in (5.26) enthaltenen Integrale werden ausgewertet und können Tabelle 5.3 entnommen werden. Die Elementierung in Richtung der Stabachse hängt im wesentlichen ab von der "Qualität" der Balkenelemente. Im Bereich von Querschnittsprüngen muß bei Verwendung zweiknotiger Elemente, um den Effekt der "Lastumlagerung" zu erfassen, entsprechend fein diskretisiert werden (siehe Berechnungsbeispiele in Abschn. 10).

Zweiknotenelement

N = 2

$$\int_0^1 L_r L_s d\xi$$

r	1	2
s		
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$\int_0^1 L_r L'_s d\xi$$

r	1	2
s		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 L'_r L'_s d\xi$$

r	1	2
s		
1	1	-1
2	-1	1

Dreiknotenelement

N = 3

$$\int_0^1 L_r L_s d\xi$$

r	1	2	3
s			
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$\int_0^1 L_r L'_s d\xi$$

r	1	2	3
s			
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
3	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 L'_r L'_s d\xi$$

r	1	2	3
s			
1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$-\frac{8}{3}$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$

Vierknotenelement

N = 4

$$\int_0^1 L_r L_s d\xi \cdot 100$$

r	1	2	3	4
s				
1	7,62	5,89	-2,14	1,13
2	5,89	38,6	-4,82	-2,14
3	-2,14	-4,82	38,6	5,89
4	1,13	-2,14	5,89	7,62

$$\int_0^1 L_r L'_s d\xi$$

r	1	2	3	4
s				
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{57}{80}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{80}$
2	$\frac{57}{80}$	0	$-\frac{81}{80}$	$\frac{3}{10}$
3	$-\frac{3}{10}$	$\frac{81}{80}$	0	$-\frac{57}{80}$
4	$\frac{7}{80}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{57}{80}$	$\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 L'_r L'_s d\xi$$

r	1	2	3	4
s				
1	$\frac{37}{10}$	$-\frac{189}{40}$	$\frac{27}{20}$	$-\frac{13}{40}$
2	$-\frac{189}{40}$	$\frac{54}{5}$	$-\frac{297}{40}$	$\frac{27}{20}$
3	$\frac{27}{20}$	$-\frac{297}{40}$	$\frac{54}{5}$	$-\frac{189}{40}$
4	$-\frac{13}{40}$	$\frac{27}{20}$	$-\frac{189}{40}$	$\frac{37}{10}$

Tabelle 5.3: Integrale der Ansatzfunktionen

Die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{k} werden nach der Direkten Steifigkeitsmethode mit Hilfe einer logischen Zuordnung der Freiheitsgrade zur Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} zusammengesetzt. Das zu lösende Gleichungssystem:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P} \quad (5.27)$$

liefert die unbekanntenen Knotenverschiebungen \mathbf{v} und damit auch die Verallgemeinerten Verschiebungen \mathbf{U} und \mathbf{V} in den diskreten Elementquerschnitten. Bei der Lösung von (5.27) ist es sinnvoll, die für eine Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens des Balkens unwesentlichen Freiheitsgrade \mathbf{U} durch statische Kondensation (z.B. Wilson (1974)) vorab zu eliminieren.

Durch Rückrechnung lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (5.7), (5.11), (5.12) und (5.20) die Spannungsverläufe in den diskreten Scheibenquerschnitten ermitteln:

$$\sigma_x(\xi, s_i) = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \cdot \mathbf{f}^T \mathbf{Z}_{U,i} \mathbf{L}'_U(\xi) \mathbf{v}_E \quad (5.28)$$

$$\tau_{xs}(\xi, s_i) = G_i \cdot \left[\mathbf{f}^T \mathbf{Z}_U \mathbf{L}_U + \mathbf{g}^T \mathbf{R}^T \mathbf{L}'_V \right] \mathbf{v}_E$$

Dabei ist allerdings zu beachten, daß bei Rahmensystemen, bei denen die Stiele in Form vertikaler Lamellen über die Breite des Rahmens verschmiert wurden, zwischen den einzelnen Lamellen keine Schubspannungen übertragen werden können. Damit entfällt der unterstrichene Anteil bei den Schubspannungen.

5.6 Der konsistente Lastvektor

5.6.1 Allgemeine Herleitung

Der Elementlastvektor \mathbf{p} soll zunächst allgemein, d.h für eine beliebige Belastung, hergeleitet werden. Die Einzelscheiben werden dabei, wie in Bild 5.8 dargestellt, in ihrer Wirkungsebene und auch senkrecht dazu belastet. Die Verteilung der über die Deckenplatten in die vertikalen, aussteifenden Bauteile eingeleiteten Vertikallasten $\bar{p}_x(x, s_i)$ aus Verkehr und Eigengewicht ist vorab durch eine entsprechende Plattenberechnung (vgl. Bild 3.1) zu ermitteln.

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte eines M-Scheiben-Systems ist:

$$\delta W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^M \delta W_i^{\text{ext}} = \int_{(H, \sum b_i)} \bar{p}_x \delta u \, dx \, ds + \int_{(H, \sum b_i)} \bar{p}_s \delta v \, dx \, ds + \int_{(H, \sum b_i)} \bar{q} \delta w \, dx \, ds \quad (5.29)$$

Da die Einzelscheibe auch quer zu ihrer Wirkungsrichtung belastet sein kann, müssen neben den Ansatzfunktionen g_i für die Verschiebungen in der Scheibenebene auch Verallgemeinerte Koordinatenfunktionen für die Querverschiebungen angesetzt werden. Mit den auf das globale Koordinatensystem bezogenen Verallgemeinerten Verschiebungen V_1, V_2 und V_3 ergeben sich die in Bild (5.9) angegebenen, globalen Ansatzfunktionen für den Verlauf der Querverschiebungen.

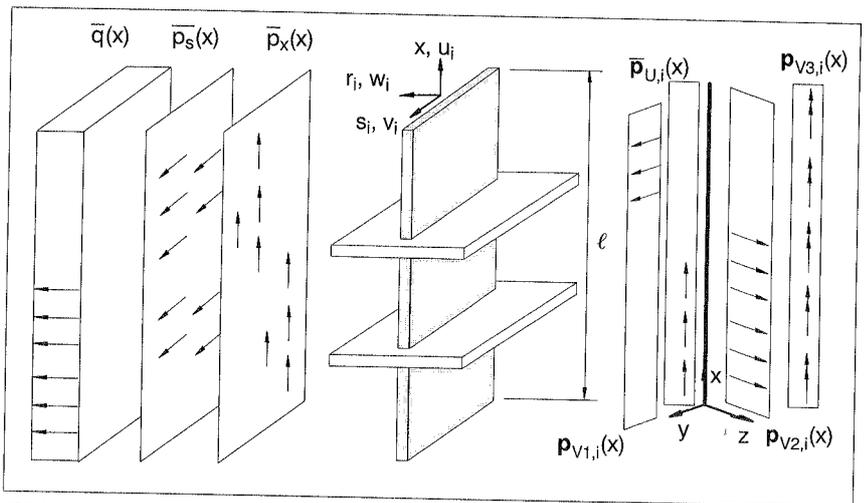


Bild 5.8: Einzelscheibe mit Belastung und äquivalente Belastung des Verallgemeinerten Balkens

Mit den Verschiebungsansätzen nach (5.6) und den Beziehungen (5.11) und (5.12) erhält man durch Einsetzen für (5.29) den Ausdruck:

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{(H)} (\bar{\mathbf{p}}_U^T \mathbf{z}_U \delta \mathbf{U}) \, dx + \int_{(H)} (\mathbf{p}_V^T \delta \mathbf{V}) \, dx \quad (5.30)$$

mit den Verallgemeinerten Belastungen der Einzelscheiben:

$$\bar{\mathbf{p}}_U^T = [\bar{\mathbf{p}}_{U,1}^T \bar{\mathbf{p}}_{U,2}^T \cdots \bar{\mathbf{p}}_{U,M}^T]$$

$$\mathbf{p}_V^T = \sum_{(M)} \mathbf{p}_{V,i}^T$$

wobei:

$$\bar{\mathbf{p}}_{U,i}(x) = \int_{(b)} \mathbf{f}_i(s_i) \bar{\mathbf{p}}_{x,i}(x, s_i) ds \quad (5.31)$$

und:

$$\mathbf{p}_{V,i}(x) = \int_{(b)} \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{g}}_i \bar{\mathbf{p}}_{s,i}(x, s_i) ds + \int_{(b)} \hat{\mathbf{g}}_i(s_i) \bar{\mathbf{q}}_{r,i}(x, s_i) ds = \begin{bmatrix} p_{V1,i}(x) \\ p_{V2,i}(x) \\ p_{V3,i}(x) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\text{mit: } \hat{\mathbf{g}}_i^T = [\hat{g}_{1,i} \hat{g}_{2,i} \hat{g}_{3,i}]$$

Dabei ist \mathbf{g}_i der Vektor der globalen Verallgemeinerten Koordinatenfunktionen für die Querverschiebungen nach Bild 5.9.

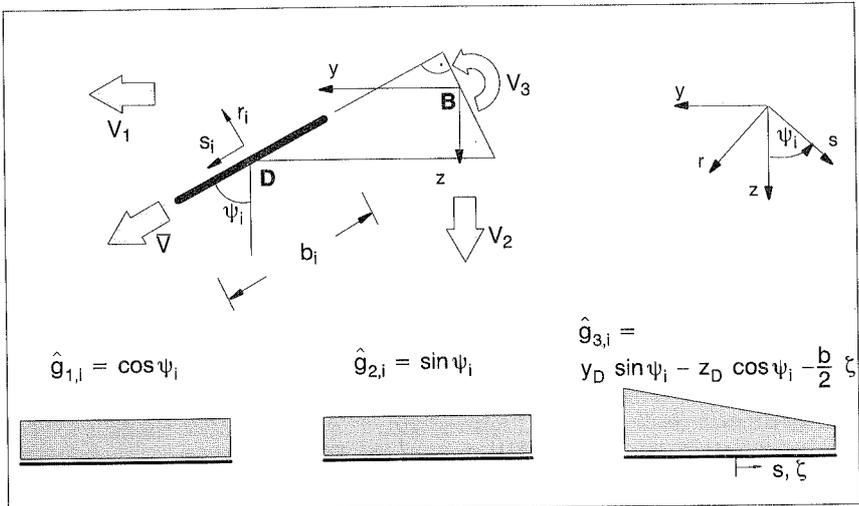
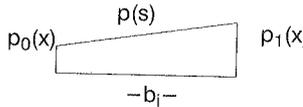


Bild 5.9: Verallgemeinerte Koordinatenfunktionen $\hat{g}_{k,i}$ (global) für eine Einzelscheibe

Für ebene Scheiben werden die Integrale in (5.31) und (5.32) für eine allgemeine Trapezlast:



$$p(s) = p_0 + (p_1 - p_0) \zeta \quad (5.34)$$

und den globalen Ansatzfunktionen g_i (nach 5.13) bzw. \hat{g}_i nach Bild 5.9 vorab ausgewertet:

$$\int_{(b)} \mathbf{f}_i(s_i) \bar{p}_{x,i}(x, s_i) ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} b_i (2p_0 + p_1) \\ \frac{1}{6} b_i (p_0 + 2p_1) \\ \frac{\sqrt{3}}{10} b_i (p_1 - p_0) \\ \frac{3}{8} b_i (p_1 + p_0) \end{bmatrix} ; \quad (5.35)$$

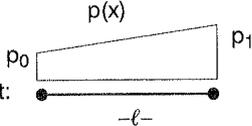
$$\int_{(b)} \mathbf{R}_i \bar{g}_i \bar{p}_{s,i}(x, s_i) ds = \frac{1}{2} b_i (p_0 + p_1) \begin{bmatrix} -\sin \psi_i \\ \cos \psi_i \\ c_i \end{bmatrix} ; \quad (5.36)$$

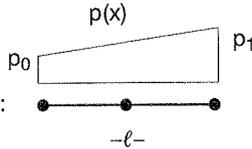
$$\int_{(b)} \hat{\mathbf{g}}_i(s_i) \bar{q}_{r,i}(x, s_i) ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_i (p_0 + p_1) \cos \psi_i \\ \frac{1}{2} b_i (p_0 + p_1) \sin \psi_i \\ \frac{b_i}{6} \left[y_{D,i} \sin \psi_i - z_{D,i} \cos \psi_i - \frac{b_i}{2} \right] (2 p_0 + p_1) + \\ + \frac{b_i}{6} \left[y_{D,i} \sin \psi_i - z_{D,i} \cos \psi_i + \frac{b_i}{2} \right] (p_0 + 2 p_1) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

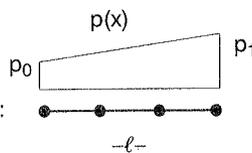
Für den aus (5.30) abgeleiteten konsistenten Lastvektor eines Verallgemeinerten Balkenelements ergibt sich mit dem Verschiebungsansatz (5.20):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_U + \mathbf{P}_V = \ell \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{p}_U d\xi + \ell \int_0^1 \mathbf{L}_V^T \mathbf{p}_V d\xi \quad (5.38)$$

Die Integrale werden für eine allgemeine Trapezlast $p(x)$ ausgewertet. Es ergibt sich für das

Zweiknotenelement:  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} p_0 \frac{l}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (p_1 - p_0) \frac{l}{3}$ (5.39)

Dreiknotenelement:  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} p_0 \frac{l}{6} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} (p_1 - p_0) \frac{l}{6}$ (5.40)

Vierknotenelement:  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} p_0 \frac{l}{8} + \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 36 \\ 13 \end{bmatrix} (p_1 - p_0) \frac{l}{120}$ (5.41)

5.6.2 (statische) Windlasten

Für eine Tragwerksberechnung infolge horizontaler Windlasten w_y und w_z , die i. d. R. als konstant über die Querschnittsbreite angesetzt werden, gestaltet sich die Ermittlung der Verallgemeinerten Belastungsfunktionen wesentlich einfacher. Belastungsfunktionen für die Beanspruchung der Einzelscheiben liegen außerdem nicht vor, sondern sind vielmehr Berechnungsziel einer statischen Analyse. Die Lasten wirken dabei auf die Gebäudehülle und werden über die Deckenscheiben zu den Tragwerkelementen geleitet. Wird diese Gebäudehülle außerdem nichttragend ausgebildet, so können die Integrale (5.32) in dieser Form nicht ausgewertet werden, da diese Bauteile nicht Bestandteil des Tragwerks sind. Die Belastungsfunktionen \mathbf{p}_V haben für den Fall konstanter Windlasten die nach Abschn. 4.3 (vgl. (4.20)) hergeleitete Form.

$$\mathbf{p}_V(x) = \begin{bmatrix} p_{V1}(x) \\ p_{V2}(x) \\ p_{V3}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_z w_y \\ B_y w_z \\ m_T \end{bmatrix} \quad \text{mit: } m_T = \frac{1}{2} (w_z B_y^2 - w_y B_z^2) \quad (5.42)$$

Der Lastvektor wird dann analog zu Gleichung (5.39), (5.40) oder (5.41) aufgestellt.

5.6.3 Erweiterung der Modellgleichungen für Temperaturbelastung

Nach DIN 1045 müssen Temperaturlasten berücksichtigt werden, "wenn dadurch die Schnittgrößen wesentlich und ungünstig beeinflusst werden". Eine entsprechende Quantifizierung der zusätzlich entstehenden Schnittgrößen ist verständlicherweise erst nach einer statischen Analyse möglich.

Hohe Temperaturänderungen entstehen beispielsweise durch einen Brand in einem begrenzten Abschnitt innerhalb des Gebäudes. Die Auswirkungen auf die Gebrauchsfähigkeit und die Veränderung des Tragverhaltens bei Ausfall einzelner Bauteile infolge Temperaturlasten müssen untersucht und gegebenenfalls bei der Wahl des Tragwerkskonzepts oder durch konstruktive Maßnahmen (Brandschutz) berücksichtigt werden. Temperaturunterschiede bestehen grundsätzlich auch zwischen außenliegenden, der Witterung ausgesetzten Randelementen und Bauteilen in den klimatisierten Innenräumen. Insbesondere in den oberen Geschossen sind die auftretenden Verformungen bei der konstruktiven Ausbildung der Trennwände und der Deckenlagerung zu berücksichtigen (siehe z.B. Hock (1986)).

Im einfachsten Fall soll ein stationäres Temperaturfeld $\vartheta(x, s_i)$ in die Strukturanalyse einbezogen werden. Es soll außerdem angenommen werden, daß sich die Temperaturen gleichmäßig über die Wanddicke t_i verteilen. Die thermischen Anfangsdehnungen (Membranzustand) ergeben sich dann zu:

$$\epsilon_x^{\text{therm}} = \epsilon_s^{\text{therm}} = \alpha_T \vartheta(x, s_i) \quad (5.43)$$

Sie werden mit den elastischen Anteilen überlagert. Dabei ist α_T ein konstanter und richtungsunabhängiger Temperatureausdehnungskoeffizient (Wärmedehnzahl). Für die Verzerrung in x-Richtung gilt dann mit (5.43) die Beziehung:

$$\epsilon_x = \epsilon_x^{\text{el}} + \epsilon_x^{\text{therm}} = \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x \right) + \alpha_T \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.44)$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist nach Beziehung (5.1):

$$\delta W^{\text{int}} = - \sum_{i=1}^M \int_{(V_i)} \delta \epsilon^T \sigma \, dV_i = - \int_{(V)} \delta \epsilon^T \sigma \, dV = - \int_{(V)} (\delta \epsilon_x \sigma_x + \delta \gamma \tau_{xs}) \, dV \quad (5.45)$$

Für die Längsnormalspannungen ergibt sich aus (5.44) die Bestimmungsgleichung:

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x - \frac{E}{1-\nu^2} \alpha_T \vartheta \right) \quad (5.46)$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$-\delta W^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}} \quad (5.47)$$

und Einsetzen von (5.46) in (5.45) kann der zusätzliche Anteil aus der Temperaturbelastung auch auf die Lastseite gebracht werden. Danach ergibt sich der Arbeitsanteil der Längsbelastung (vgl. (5.29)) in erweiterter Form zu:

$$\delta W_U^{\text{ext}} = \int_{(H, \sum b_i)} \bar{p}_x(x, s_i) \delta u(x, s_i) dx ds + \int_{(V)} \frac{E}{1-\nu^2} \alpha_T \vartheta_i \delta u' dV \quad (5.48)$$

Der erste Anteil in dem Elementlastvektor (5.38) hat dann die Form:

$$\mathbf{P}_U = \ell \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{p}_U d\xi + \int_0^1 \mathbf{L}_U^T \mathbf{p}_{U,\vartheta} d\xi \quad \text{mit: } \mathbf{p}_{U,\vartheta} = \mathbf{Z}_U^T \bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta} \quad (5.49)$$

$$\text{wobei: } \bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta}^T = [\bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta,1}^T \bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta,2}^T \cdots \bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta,M}^T]$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{U,\vartheta,i} = \frac{E}{1-\nu^2} \alpha_T t_i \int_{(b)} \mathbf{f}(s_i) \vartheta(x, s_i) ds$$

Abschließende Bemerkung:

Die in diesem Abschnitt hergeleitete Lösungsstrategie wurde in dem Computerprogramm HIGH-RISE realisiert (Schmidts (1997)).

5.7 Elastische Lagerung der aussteifenden Bauteile

Eine anfangs getroffene Annahme war, daß die aussteifenden Bauteile im Gründungskörper starr eingespannt sind. Diese Annahme ist bei der Ermittlung der Lastverteilung von Horizontallasten im Tragwerksquerschnitt der aufgehenden Konstruktion i.d.R. auch gerechtfertigt. Bei den Verformungen wird eine Baugrund–Bauwerk Interaktion vereinfacht so berücksichtigt, daß das Bauwerk infolge Setzungen lediglich eine Starrkörperverdrehung ausführt (makroskopische Betrachtung). Für das Beispiel eines Hochhauskerns sind die entsprechenden Verformungsanteile in Bild 5.10 dargestellt.

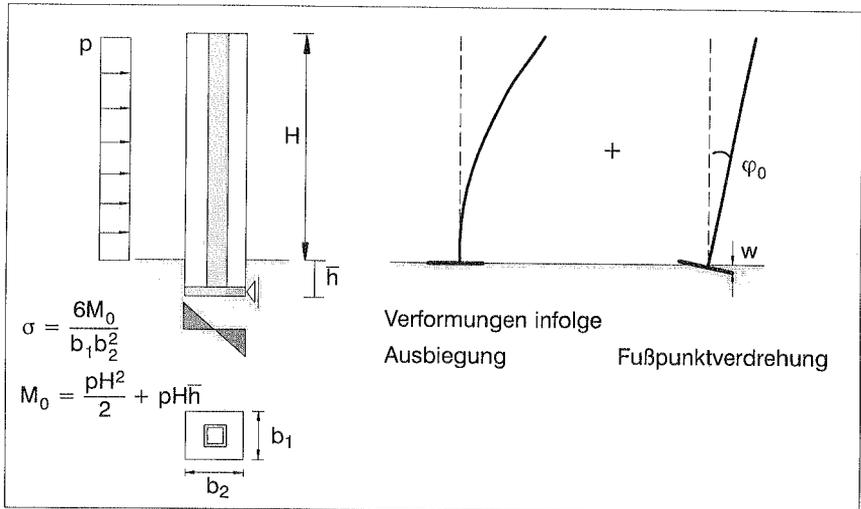


Bild 5.10: Verformungsanteile am Beispiel eines Hochhauskerns

Bei dem zugrundegelegten Baugrundmodell geht man davon aus, daß die durch Setzungen entstehenden Bodenpressungen proportional zu den entsprechenden Setzungen verlaufen (Winkler–Modell). Als Proportionalitätsfaktor dient hierbei die Bettungsziffer c [kN/m³] (Bettungsmodul). Netzel (1972) weist ausdrücklich darauf hin, daß der Bettungsmodul keine von der Bodenart abhängige Materialkenngröße ist, sondern vielmehr von der Belastungsart, den Abmessungen der Gründungsfläche und den Bodenkennwerten abhängt.

Es wird weiterhin angenommen, daß das aus der Belastung resultierende Biegemoment M_0 näherungsweise eine lineare Spannungsverteilung in der Gründungssohle bewirkt. Der aus dem passiven Erddruck auf die einbindenden Seitenwände resultierende Anteil wird hier vernachlässigt. Für die Verdrehung im Fußpunkt ergibt sich dann mit der Beziehung:

$$\sigma = c \cdot w \quad (5.50)$$

die Bestimmungsgleichung:

$$\varphi_0 = \frac{12 M_0}{b_1 b_2^3 c} \quad (5.51)$$

Aus dieser Schiefstellung resultieren Abtriebskräfte, die nach den Zusammenhängen aus Abschnitt 6 in Form einer Gleichlast:

$$\Delta q_{\text{TH,II}} = g \frac{v_{\text{TH,II}}(H)}{H} = g \varphi_0 \quad (5.52)$$

berücksichtigt werden.

Für eine möglichst genaue Berechnung von Spannungs- und Setzungsverteilungen in der Gründungssohle ist das zugrundegelegte Bodenmodell sicherlich von entscheidender Bedeutung für die zu erwartende Qualität der Ergebnisse. Beispielsweise ist beim Bettungsmodulverfahren (Winkler-Modell), bei dem der Baugrund durch ungekoppelte Federn ersetzt wird, die Ausbildung einer Setzungsmulde infolge einer auf die Baugrundoberfläche wirkenden Einzellast nicht möglich. Das Steifemodulverfahren oder Steifezahlverfahren, das von einem elastisch-isotropen Halbraum ausgeht, liefert hingegen für Böden ohne Kohäsion (Reibungsgesetz nach Coulomb) unbrauchbare Ergebnisse. Die gleiche Schwäche besitzt auch das Modell von Pasternak (z.B. in Cook (1983)), da es die ungekoppelten Federn mit Hilfe eines schubweichen Mediums miteinander koppelt (2-Parameter Modell). Hetenyi (z.B. in Valsangkar (1988)) hingegen geht in seiner Modellvorstellung von einem biegeweichen Medium aus; eine Modellvorstellung, die insbesondere für Böden ohne bzw. mit geringer Kohäsion geeignet ist.

Es stellt sich nun die Frage, welche Auswirkungen die Einspannung der aussteifenden Bauteile in einen nicht-starren Gründungskörper und bei zusätzlicher Wechselwirkung mit dem Baugrund auf das Tragverhalten der aufgehenden Konstruktion hat (mikroskopische Betrachtung). Die sicherlich einfachste Möglichkeit, eine elastische Bettung zu modellieren, ist die Lagerung der Bauteile über diskrete Federn (Nadjai (1996), Stafford Smith (1991)). In der Literatur konnten allerdings keine Aussagen zur Quantifizierung der Federsteifigkeiten gefunden werden. Es ist außerdem zu bedenken, daß die Federn miteinander gekoppelt sind. Die Steifigkeiten der Ersatzfedern sind, wie auch der Bettungsmodul, abhängig von den Bodenverhältnissen, der Gründungsart (Einzel- fundament, Bodenplatte, Pfahlgründung) und den Abmessungen der Gründung. Eine realistische Ermittlung dieser Steifigkeiten ist nur über eine aufwendige Modellierung

und Berechnung des gesamten, räumlichen Gründungskörpers, einschließlich des Baugrunds, möglich. Der Aufwand erscheint im Rahmen der Aufgabenstellung und im Hinblick auf die getroffenen Annahmen (Abschn. 3.1) außerdem als nicht gerechtfertigt.

Die makroskopische Betrachtungsweise hat damit den wesentlichen Vorteil, daß Aussagen bezüglich der Bettungsziffer für verschiedene Bodenarten nach Durchführung eines Lastplattenversuchs möglich sind.

Das Beispiel zweier, in der Ebene gekoppelter Scheiben mit gemeinsamer Gründung (Bild 5.11) wurde mit Hilfe eines Finite-Elemente Programms berechnet. Der Baugrund wurde dabei in Form von Scheibenelementen mit verschiedenen Steifigkeiten c modelliert und die Momentenverläufe für verschiedene "Plattendicken" d ermittelt. Die Momentenverläufe in den Einzelscheiben zeigen, daß sich bis unmittelbar vor der Änderung der Steifigkeitsverhältnisse im Gründungsbereich das resultierende Biegemoment im Verhältnis der Steifigkeiten aufteilt. Im Fußpunktquerschnitt teilt sich das Biegemoment im Verhältnis der dort herrschenden Steifigkeitsverteilung neu auf ("Lastumlagerung"), der Übergang ist kontinuierlich. Die Ausdehnung des "Störbereichs" ist abhängig vom Abstand h der durch dehnstarre Pendelstäbe ersetzten Deckenscheiben. In Analogie zu den Abklingzahlen (Verhältnisse aufeinanderfolgender Stützmente) beim Durchlaufträger wird dieser Bereich auf insgesamt $3h$ begrenzt (Weitere Berechnungsbeispiele haben diesen Wert bestätigt).

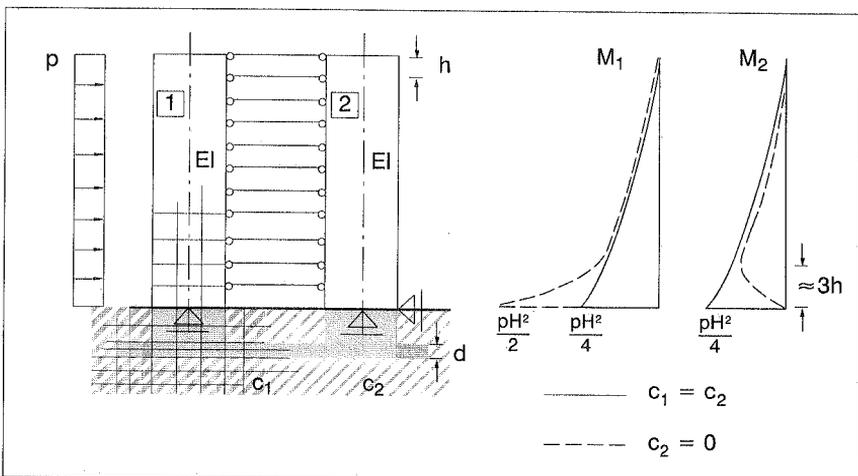


Bild 5.11: gekoppelte Wandscheiben mit flexibler Lagerung

5.8 Diskontinuitäten im Tragwerksaufbau

Die in Abschnitt 4 beschriebene analytische Methode basiert auf der Annahme eines kontinuierlichen Systems. Die in vorigen Abschnitt erarbeitete numerische Berechnung bietet allerdings für eine Tragwerksanalyse nicht nur den Vorteil einer einfachen Modellierung und Berechnung, die Erfassung von Unregelmäßigkeiten bezüglich des Tragwerksaufbaus ist außerdem möglich. Einschränkend muß jedoch gesagt werden, daß sich die Unregelmäßigkeiten auf einige wenige Änderungen in den Querschnittswerten der aussteifenden Bauteile und im Aufbau des Tragwerkquerschnitts beschränken sollten, da sonst der Vorteil dieser Methode gegenüber der Berechnung mit Hilfe von "klassischen" Balken- und Scheibenelementen nicht mehr gegeben ist.

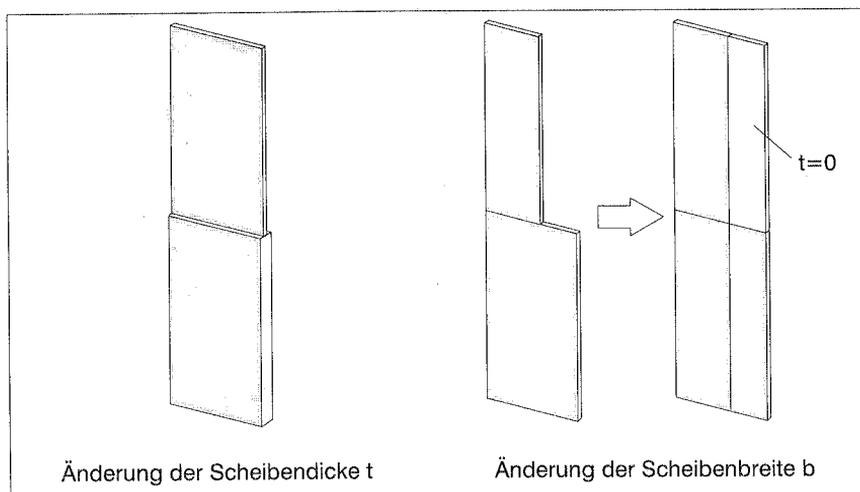


Bild 5.12

Änderungen bezüglich der Scheibendicke t (Bild 5.12) bereiten keine weiteren Schwierigkeiten, da die Verallgemeinerten Freiheitsgrade (vgl. Abschnitt 5.2) der beiden Scheiben in jedem Fall kompatibel sind. Bei Änderungen in der Scheibenbreite wird die Kontinuität dadurch wieder hergestellt, indem die breitere Scheibe in zwei, miteinander schubsteif verbundene Einzelscheiben unterteilt wird. Die andere Scheibe wird mit einer gedachten Scheibe der Dicke $t=0$ verbunden. Damit ist sichergestellt, daß die Matrizen **A**, **B**, **C** der Verallgemeinerten Querschnittswerte die gleiche Dimension haben und die Steifigkeiten der entsprechenden Verallgemeinerten Freiheitsgrade damit auch überlagert werden können. Ein Wechsel von Scheibentyp 1 oder 3 zu einer Scheibe des Typs 2 kann ebenfalls erfaßt werden. Dabei ist allerdings beim Zusammenbau der Elementmatrizen zu beachten, daß die Matrizen der angrenzenden Elemente unterschiedliche Dimensionen aufweisen (vgl. Abschnitt 5.3).

6. Berechnung der Abtriebskräfte nach Theorie II. Ordnung

6.1 Biegebeanspruchung

Eine anfangs getroffene Annahme war, daß Tragwerksberechnungen für Horizontal- und Vertikallasten getrennt durchgeführt werden können. Bei großer Nachgiebigkeit der haltenden Bauteile gegenüber horizontaler Querlasten muß die Formänderung bei der Ermittlung der Schnittgrößen aus Sicherheitsgründen allerdings berücksichtigt werden. Nach Empfehlung von Beck und König (1967) sollte der Einfluß aus der Theorie II. Ordnung auf die Schnittgrößen berücksichtigt werden, wenn sich dadurch die Schnittgrößen um mehr als 10% ändern. Ausgedrückt wird diese Forderung in Form einer Labilitätszahl λ (in der Literatur α), die auch in der DIN 1045/15.8.1 als Beurteilungskriterium für die Gebäudestabilität verankert ist. Danach besteht für ein Bauwerk mit mehr als 4 Geschossen (ein Hochhaus hat lt. Def. mindestens 10 Stockwerke) die Forderung:

$$\lambda_y = H \cdot \sqrt{\frac{g H}{EI_y}} \leq 0,6 \quad \text{bzw.:} \quad \lambda_z = H \cdot \sqrt{\frac{g H}{EI_z}} \leq 0,6 \quad (6.1)$$

In Gleichung (6.1) ist H die Bauwerkshöhe und g eine aus der konstanten Massenverteilung resultierende Vertikallast. EI_y bzw. EI_z ist die Summe der Biegesteifigkeiten aller vertikalen, aussteifenden Bauteile für Biegung um die y - (in xz -Ebene) bzw. z -Achse (in xy -Ebene). Der Grenzwert der Labilitätszahl wird unter der Annahme einer linearen Biegelinie für den Fall einer Gleichlast p_0 hergeleitet:

In Abschnitt 4.5 wurde für die Biegelinie infolge Gleichlast die Bestimmungsgleichung (4.47) hergeleitet. Dabei ist $K_1=1$ für $\alpha H=0$. Unter der idealisierende Annahme einer linear verlaufenden Biegelinie ergibt sich daraus bei Berücksichtigung der Einflüsse aus Theorie II. Ordnung die Gleichung in erweiterter Form:

$$v_{TH,II}(H) = \frac{(p_0 + \Delta q_{TH,II}) H^4}{8 EI} \quad \text{mit:} \quad \Delta q_{TH,II} = g \frac{v_{TH,II}(H)}{H} \quad (6.2)$$

$$\text{bzw. umgeformt:} \quad v_{TH,II}(H) = \frac{p_0 H^4}{8 EI} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{g H^3}{8 EI}\right)} \quad (6.3)$$

Dabei ist $\Delta q_{TH,II}$ die aus den Vertikallasten ($g(x)=\text{konst.}$) resultierende "Abtriebskraft" infolge der Querbiegung des Systems.

Aus der oben genannten Forderung $v_{Th,II} \leq 1,10v_{Th,I}$ folgt aus Gleichung (6.3) die Bedingung:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{g H^3}{8 EI}\right)} \leq 1,10 \quad (6.4)$$

Da der Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit zu führen ist, wird das resultierende Gesamtgewicht des Gebäudes mit dem Sicherheitsbeiwert 1,75 multipliziert. Es wird angenommen, daß aus der Querbewegung resultierende Biegezugspannungen durch das Eigengewicht überdrückt werden. Für Gleichung (6.4) ergibt sich damit:

$$\lambda = H \cdot \sqrt{\frac{g H}{EI}} \leq \sqrt{\frac{8}{1,75} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,10}\right)} = 0,64 \approx 0,6 \quad (6.5)$$

Die DIN 1045 empfiehlt für den Fall, daß die Forderung (6.1) nicht erfüllt ist eine rechnerisch zu berücksichtigende Lotabweichung mit $v_{Th,II}(H) = H/200$, mit der ein äquivalenter Lastfall näherungsweise mit Hilfe der Gleichung (6.2) ermittelt werden kann. Der Schwachpunkt dieser Vorgehensweise, wie auch des Beurteilungskriteriums (6.1), liegt sicherlich in der Annahme einer linearen Biegelinie. Die sich unter dem Einfluß der Theorie II. Ordnung ergebenden mechanischen Zusammenhänge werden deshalb hergeleitet:

Für die aus der Querbewegung hervorgerufene Transversalkraft $V_{Th,II}$ erhält man aus der Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimal kleinen Abschnitt der Länge dx (Bild 6.1) für kleine Winkel die Beziehung:

$$V_{Th,II} \approx Q_{Th,I} - N(\xi) \cdot v'(\xi) \quad (6.6)$$

Auf den Index Th.II bei den Verschiebungen v wird in den folgenden Ausführungen verzichtet. Mit der Differentialgleichung für die Biegelinie des Ersatzsystems nach Theorie I. Ordnung (vgl. Abschn. 4.5):

$$Q_{Th,I} = -EI v'''' + GA v' \quad \text{bzw.:} \quad p_0 = EI v'''' - GA v'' \quad (6.7)$$

erhält man aus einer Gleichgewichtsbetrachtung:

$$dV = -p_0 dx \quad (6.8)$$

und den Beziehungen (6.6) und (6.7) die Differentialgleichung für die Biegelinie nach Theorie II. Ordnung:

$$EI v^{IV}(\xi) - GA v''(\xi) - [N(\xi) v'(\xi)]' = p_0 \quad (6.9)$$

In einem regelmäßig aufgebauten Tragwerk kann der Verlauf der aus dem Eigengewicht resultierenden Normalkraft aufgrund der überwiegend gleichmäßigen Massenverteilung ($m=\text{konst.}$) als linear angenommen werden, so daß in (6.1) gH das Gesamtgewicht des Gebäudes einschließlich der Ausbaulasten und statischen Nutzlasten darstellt. Mit der Beziehung:

$$N(\xi) = -g H (1-\xi) \quad (6.10)$$

wird die Differentialgleichung (6.9) bei Anwendung der Produktregel umgeschrieben:

$$v^{IV}(\xi) - \alpha_V^2 v''(\xi) - \left[\frac{\lambda^2}{H^3} v'(\xi) - \left(\frac{\lambda}{H}\right)^2 (1-\xi) v'(\xi) \right] = \frac{p_0}{EI} \quad (6.11)$$

$$\text{mit: } \alpha_V^2 = \frac{GA}{EI}$$

Dabei ist λ die Stabkennzahl bzw. Labilitätszahl nach Gleichung (6.1).

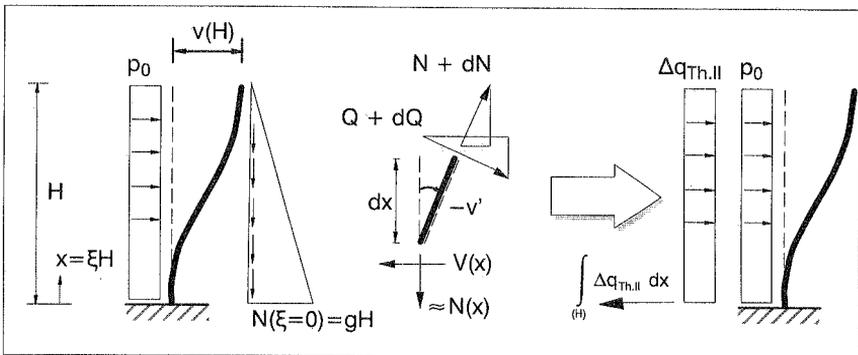


Bild 6.1: Abtriebskräfte $\Delta q_{Th,II}$ infolge Querbiegung v

Für die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (6.9) bringt man den Zusatzterm aus Th.II.O. auf die rechte Seite. Dadurch ergibt sich die Beziehung:

$$EI v^{IV}(\xi) - GA v''(\xi) = p_0(\xi) + \Delta q_{Th,II} \quad (6.12)$$

$$\text{mit: } \Delta q_{\text{Th,II}}(\xi) = [N(\xi) v'(\xi)]' = EI \left[\frac{\lambda^2}{H^3} v'(\xi) - \left(\frac{\lambda}{H}\right)^2 (1-\xi) v''(\xi) \right] \quad (6.13)$$

Der Einfluß aus Theorie II. Ordnung wird dadurch in Form einer horizontalen Ersatzlast berücksichtigt. Sie repräsentiert die durch die horizontale Ausbiegung hervorgerufenen, fiktiven Abtriebskräfte.

Bezüglich des Belastungsbildes wird angenommen, daß das qualitative Belastungsbild bei Überlagerung von p_0 und $\Delta q_{\text{Th,II}}$ im wesentlichen dem Verlauf von p_0 , d.h. einer Gleichlast bzw. einer Dreieckslast, entspricht. Da in (6.13) die zweite Ableitung der Verschiebung eingeht und ein Vergleich der Funktionen K_3 für Gleich- und Dreieckslast nur geringe Unterschiede zeigt (vgl. Anhang A-02 und A-04), ist diese Annahme durchaus gerechtfertigt. Mit (6.1) und (6.10) ergibt sich für Gleichung (6.13):

$$\Delta q_{\text{Th,II}} = gH \cdot v(H) \cdot \tilde{\beta}(\xi) \quad \text{mit: } \tilde{\beta}(\xi) = - \left[\frac{v''(1-\xi) - \frac{1}{H} v'}{v(H)} \right] \quad (6.14)$$

Der Verlauf der Funktion $\tilde{\beta}$ ist in Abhängigkeit von dem Systemparameter $\alpha_v H$ und der Belastungsart in den Bildern 6.2 und 6.3 dargestellt. Ein Vergleich zeigt, daß sich die unterschiedliche Belastungsart nur im Bereich der Einspannung auf den Verlauf der Lastfunktion $\Delta q_{\text{Th,II}}$ auswirkt.

Die Querlast $\Delta q_{\text{Th,II}}$ erzeugt keine Lagerreaktion, d.h. keine Querkraft an der Einspannung des Kragträgers, da sie lediglich als Ersatzlast für die Ermittlung der Zusatzmomente dient. Somit gilt aus Gleichgewichtsgründen die Bedingungsgleichung:

$$\int_{(H)} \Delta q_{\text{Th,II}} dx = 0 \quad (6.15)$$

Diese Forderung wird von den Lastfunktionen $\Delta q_{\text{Th,II}}$ erfüllt.

Geht man vereinfacht davon aus, daß die Biegelinie linear verläuft, so erhält man nach (6.13) für die zusätzlich anzusetzende Gleichlast die Bestimmungsgleichung:

$$\Delta q_{\text{Th,II}} = \frac{g}{H} \cdot v(H) \quad (6.16)$$

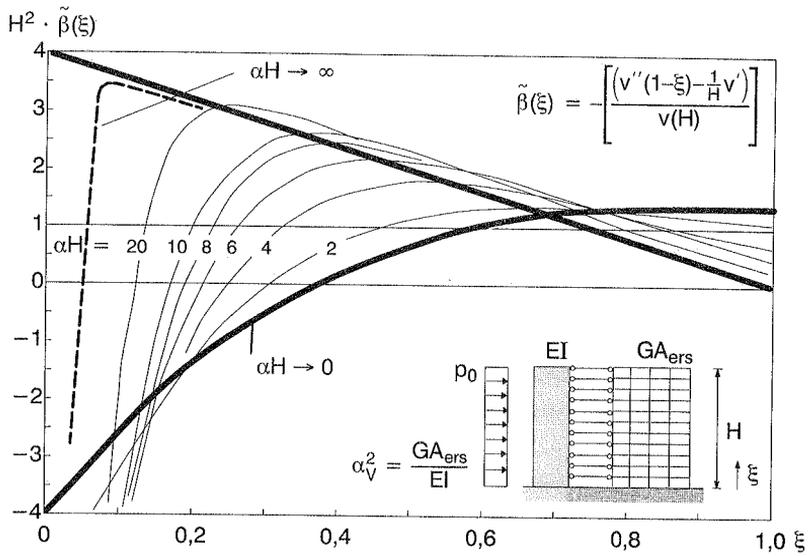


Bild 6.2: Funktion $\beta(\xi)$ zur Bestimmung der Lastfunktion $\Delta q_{Th,II}$ für Gleichlast

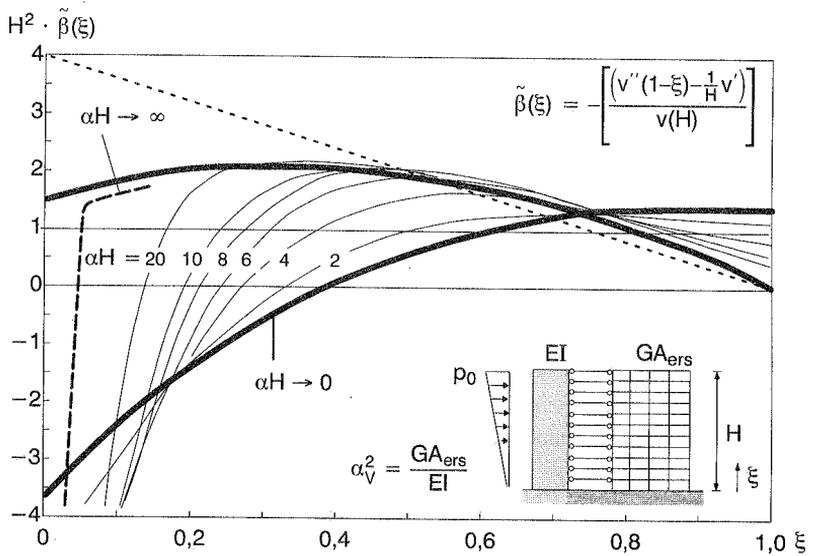
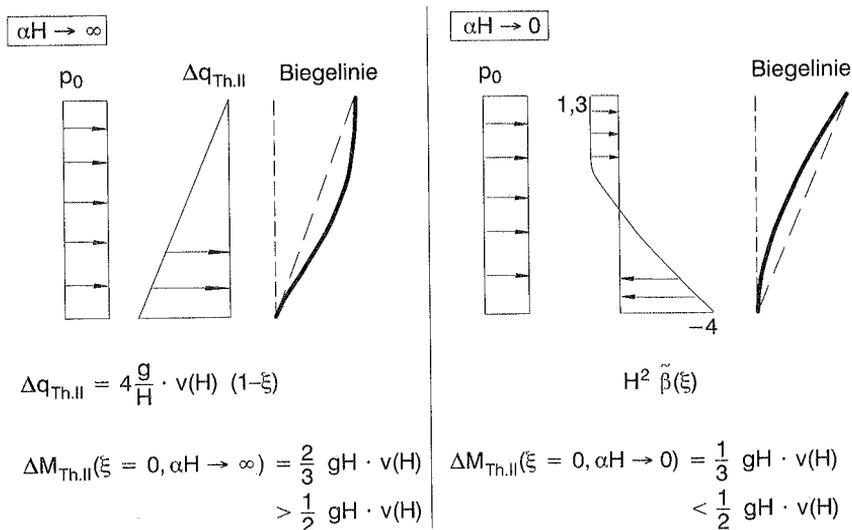


Bild 6.3: Funktion $\beta(\xi)$ zur Bestimmung der Lastfunktion $\Delta q_{Th,II}$ für Dreieckslast

Im Fußpunkt des Systems ist dann eine entgegenwirkende Einzellast anzusetzen um die Forderung (6.15) zu erfüllen. Für das zusätzliche Biegemoment an der Einspannung ergibt sich dann die Beziehung:

$$\Delta M_{Th,II} = \frac{1}{2} \cdot gH \cdot v(H) \quad (6.17)$$

Im Stahlbau (z.B. Petersen (1982)) wird die Querverschiebung v deshalb auch als "elastischer Hebelarm" bezeichnet, der iterativ ermittelt wird. Aus den Belastungsfunktionen nach Bild 6.2 ($p_0 = \text{konst.}$), für die beiden Grenzfälle näherungsweise ermittelten Einspannmomente, ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:



Eine Abschätzung der Zusatzbelastung aus einer angenommenen linearen Biegelinie führt bei vernachlässigten Krümmungsanteilen damit stets zu ungenauen Ergebnissen; eine wesentliche Unterschätzung des Einflusses aus Theorie II. Ordnung bei $\alpha H \rightarrow \infty$ und eine Überschätzung bei $\alpha H \rightarrow 0$.

Um vorab zu prüfen, ob durch den Einfluß aus Th. II Ordnung die Schnittgrößen wesentlich beeinflusst werden, wird die Kopfauslenkung $v(H)$ mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 hergeleiteten Beziehungen für allgemeine, gemischte Tragwerkssysteme in Abhängigkeit von dem Systemparameter αH ermittelt. Es wird empfohlen, die Belastungsbilder mit Hilfe der Gleichung (6.14) näherungsweise aufzustellen. Nur ein

qualitativer und quantitativer Vergleich der Zusatzbelastung zeigt, ob eine genauere Tragwerksberechnung nach Th. II.O. erforderlich ist. Außerdem ist aus dem Belastungsbild ersichtlich, ob eine Näherung in Form einer Gleichlast nach Gleichung (6.16) zulässig ist.

Ist eine genauere Berechnung aus Sicherheitsgründen erforderlich, so wird diese i.d.R. rechnerunterstützt durchgeführt. Als Startwert für die Iteration (Gesamtschrittiteration) wird die nach Theorie I. Ordnung ermittelte Kopfauslenkung zur Berechnung einer Lastfunktion $\Delta q_{Th,II}$ nach (6.14) herangezogen. Mit dieser Zusatzbelastung wird die Kopfauslenkung erneut ermittelt. Der Iterationsprozess nach Bild 6.4 wird abgebrochen, wenn die Verschiebungsänderung:

$$\Delta v_{Th,II,i}(H) = v_i(H) - v_{i-1}(H) \leq \Delta \bar{v}(H) \quad (6.18)$$

in einem Iterationsschritt i einen gewählten Grenzwert $\Delta \bar{v}$ unterschreitet.

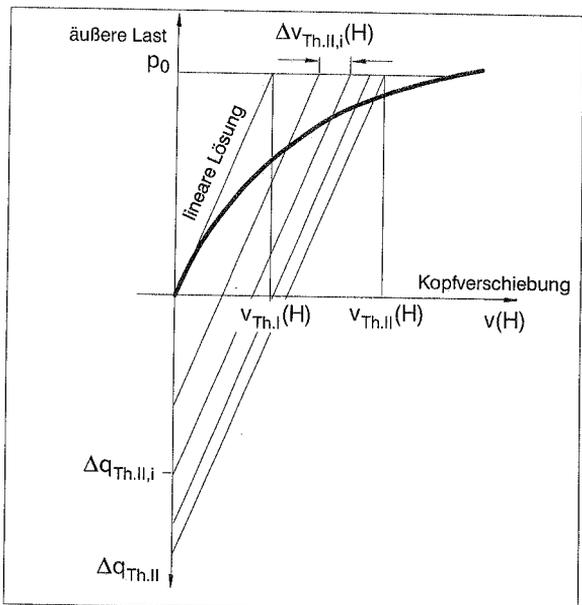


Bild 6.4:
Ablauf der Iteration
bei Korrektur der Lastseite

6.2 Torsionsbeanspruchung

Für allgemeine räumliche Scheibensysteme wird von Brandt (1976) eine zusätzliche Labilitätszahl für Torsionsbeanspruchung zur Beurteilung des Rotationseinflusses aus Theorie II. Ordnung angegeben. Jedoch besteht auch hier die Schwierigkeit einer allgemeinen Anwendungsmöglichkeit auf beliebige Tragwerksysteme, da er seine Zusammenhänge ausschließlich für Scheibensysteme herleitet.

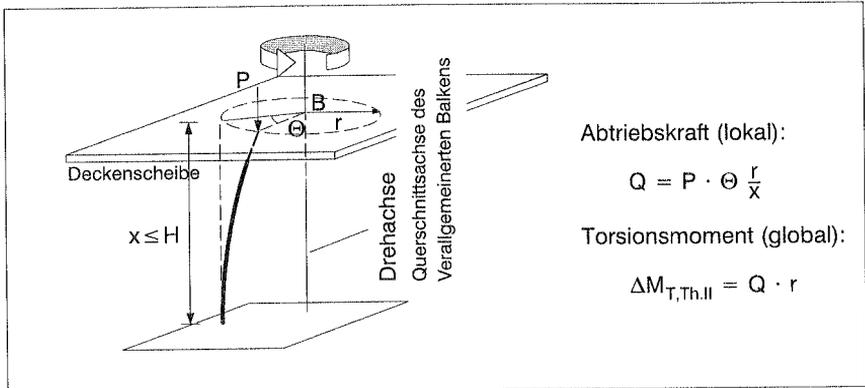


Bild 6.4: Wirkung einer exzentrischen Einzellast bei Querschnittsverdrehung

Für eine numerische Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit Hilfe des Verallgemeinerten Balkens, soll als Erweiterung von (6.14) der Lastvektor:

$$\Delta \mathbf{q}_{Th,II} = \begin{bmatrix} \Delta q_{y,Th,II} \\ \Delta q_{z,Th,II} \\ \Delta m_{T,Th,II} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

aufgestellt werden. Die drei globalen Freiheitsgrade der Deckenscheiben und der Lastvektor nach (5.32), (5.42) waren dabei auf einen beliebigen Bezugspunkt B im Querschnitt bzw. eine durch diesen Punkt gehende, senkrechte Achse bezogen. Eine bezüglich dieser Drehachse exzentrisch angreifende Einzellast P bewirkt damit aufgrund der hervorgerufenen Abtriebskraft $Q_{Th,II}$ (vgl. Abschn. 6.1) auch ein Torsionsmoment $\Delta M_{Th,II}$ (Bild 6.4).

Die Last P entspricht dabei dem Lastanteil aus dem Eigengewicht der Deckenplatten einschließlich statischer Nutzlasten und des aussteifenden Bauteils. Im kontinuierlichen Ersatzsystem werden diese diskreten Kräfte, bei einer angenommenen konstanten Massenverteilung, durch eine kontinuierliche Belastung $g(x) [kN/m] = \text{konst.}$ ersetzt.

Die aus dem Einfluß der Theorie II. Ordnung resultierenden Ersatzlasten $\Delta q_{Th,II,i}$ (Abtriebskräfte) bewirken damit auch eine zusätzliche Torsionsbeanspruchung $m_{T,Th,II}$ des Tragwerks bezüglich der Drehachse durch den Pkt. B.

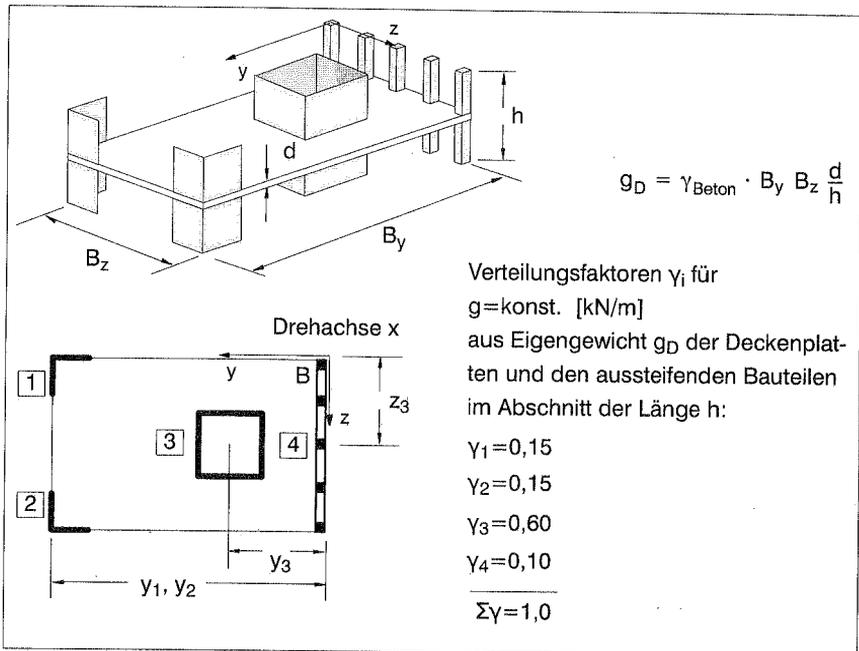


Bild 6.5: Beispiel für die Lastverteilung auf die einzelnen Bauteile eines Tragwerks

Die Verteilung der resultierenden Vertikallasten auf die einzelnen Bauteile wird über Lastverteilungsfaktoren γ_i geschätzt oder mit Hilfe einer Plattenberechnung vorab ermittelt. Die vertikalen Tragglieder werden dabei näherungsweise durch vertikal unverschiebbare Lager ersetzt (vgl. Bild (3.1)). Es wird außerdem angenommen, daß die Lastverteilung in allen Querschnitten eines Abschnitts gleich ist. Beispielsweise übernimmt der Kern (Bauteil 3) in dem in Bild 6.5, im Grundriß dargestellten Tragwerk näherungsweise 60% ($\gamma_3 = 0,60$) der gesamten Vertikallasten. Es ist zu beachten, daß hier alle vertikalen und damit auch nicht-aussteifende, stützende Bauteile (z.B. Einzelstützen und Stützenreihen) zu berücksichtigen sind.

Das aus der Translation der Deckenscheiben in y - und z -Richtung und aus der Verdrehung hervorgerufene zusätzliche Torsionsmoment nach Th. II. Ordnung ist:

$$\Delta m_{T,Th,II} = \sum \Delta q_{Th,II,i} \cdot r_i \quad \text{mit:} \quad r_i = \sqrt{y_i^2 + z_i^2} \quad (6.20)$$

Mit der Beziehung (6.14) für den Verlauf der Abtriebskräfte $\Delta q_{Th,II}$ und der geometrischen Beziehung:

$$v_{\Theta,i}(\alpha_{\Theta}H, H) = \Theta(\alpha_{\Theta}H, H) \cdot r_i \quad \text{mit:} \quad \alpha_{\Theta}^2 = \frac{GI_T}{EI_W} \quad (6.21)$$

erhält man für das Torsionsmoment die Bestimmungsgleichung:

$$\Delta m_{T,Th,II} = gH \sum \gamma_i (y_i^2 + z_i^2) \cdot \Theta(\alpha_{\Theta}H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_{\Theta}H, \xi) \quad (6.22)$$

mit:

$$\tilde{\beta}(\alpha_{\Theta}H, \xi) = - \left[\frac{(\Theta''(1-\xi) - \frac{1}{H} \Theta')}{\Theta(\alpha_{\Theta}H, H)} \right] \quad (6.23)$$

Für den Verlauf der Verdrehungen gelten ebenfalls die Zusammenhänge nach Abschnitt 4.5. Somit kann die Funktion (6.23) für den Verlauf der Verdrehung aus den Bildern (6.2) bzw. (6.3) ermittelt werden. Die Komponenten des Lastvektors (6.19) ergeben sich dann zu:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{y,Th,II} &= gH \cdot \left[v_y(\alpha_v H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_v H, \xi) - \sum \gamma_i z_i \cdot \Theta(\alpha_{\Theta} H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_{\Theta} H, \xi) \right] \\ \Delta q_{z,Th,II} &= gH \cdot \left[v_z(\alpha_v H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_v H, \xi) + \sum \gamma_i y_i \cdot \Theta(\alpha_{\Theta} H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_{\Theta} H, \xi) \right] \\ \Delta m_{T,Th,II} &= gH \cdot \sum \gamma_i (y_i^2 + z_i^2) \cdot \Theta(\alpha_{\Theta} H, H) \cdot \tilde{\beta}(\alpha_{\Theta} H, \xi) \end{aligned} \right\} (6.24)$$

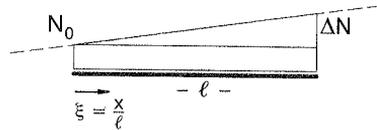
Da in allgemeinen Tragwerken Biegung und Torsion miteinander gekoppelt sind (vgl. Abschnitt 4.1), sind die Verschiebungen und die Verdrehung in (6.25) iterativ zu

ermitteln (vgl. Bild 6.4). Als Startwert für die Iteration werden auch hier die Kopfverschiebungen $v_{y,TH,I}(H)$, $v_{z,TH,I}(H)$ und $\Theta_{TH,I}(H)$ aus der Berechnung nach TH. I. O. zugrundegelegt. Ein Abbruchkriterium für die Iteration wird analog zu (6.18) formuliert.

6.3 Diskretisierung der Abtriebskräfte

Im Rahmen einer numerischen Berechnung werden die kontinuierlichen Abtriebskräfte aus dem Einfluß der Theorie II. Ordnung in Form diskreter Einzellasten angesetzt. Es wird davon ausgegangen, daß die Normalkraft im Verallgemeinerten–Balkenelement linear und kontinuierlich verläuft:

$$N(\xi) = N_0 + \Delta N \cdot \xi \quad (6.25)$$



Ausgehend von (6.13) bzw. (6.20) und (6.21) erhält man die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{y,TH,II}(\xi) &= \left[N(\xi) v'_y(\xi) \right]' = (N_0 + \Delta N \xi) v''_y + \frac{\Delta N}{\ell} v'_y \\ \Delta q_{z,TH,II}(\xi) &= \left[N(\xi) v'_z(\xi) \right]' = (N_0 + \Delta N \xi) v''_z + \frac{\Delta N}{\ell} v'_z \\ \Delta m_{T,TH,II}(\xi) &= \sum \gamma_i r_i^2 \left[N(\xi) \Theta'(\xi) \right]' = \sum \gamma_i r_i^2 \left[(N_0 + \Delta N \xi) \Theta'' + \frac{\Delta N}{\ell} \Theta' \right] \end{aligned} \right\} (6.26)$$

Entsprechend der Methode der Finiten Elemente wird ein Ansatz (vgl. Abschnitt 5.5) für die Verschiebungen nach (5.20), beispielsweise für v_y , eingebracht:

$$v_y(\xi) = \mathbf{L}(\xi) \cdot \mathbf{v}_y \quad (6.27)$$

Für den Lastvektor \mathbf{P}_y erhält man damit analog zu (5.38) mit (6.26) und (6.27) die allgemeine Bestimmungsgleichung:

$$\mathbf{P}_y = \int_{(\ell)} \left(N_0 \mathbf{L}^T \mathbf{L}'' + \Delta N \xi \mathbf{L}^T \mathbf{L}'' + \frac{\Delta N}{\ell} \mathbf{L}^T \mathbf{L}' \right) dx \mathbf{v}_y \quad (6.28)$$

Da in (6.26) bzw. (6.28) die zweiten Ableitungen eingehen, ist für die Verschiebungen mindestens ein quadratischer Ansatz erforderlich. Allerdings wird auch mit einem linea-

ren Ansatz bei feiner Elementierung des Systems der Fehler (Krümmungsanteil) entsprechend klein.

Für ein zweiknotiges Element ergibt sich bei einem linearen Verschiebungsansatz der Lastvektor:

$$\mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,y} \\ v_{2,y} \end{bmatrix} \frac{\Delta N}{\ell} \quad (6.29)$$

Für ein dreiknotiges Element (quadratischer Verschiebungsansatz) ist:

$$\mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,y} \\ v_{2,y} \\ v_{3,y} \end{bmatrix} \frac{N_0}{\ell} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 2 \\ \frac{5}{6} & -2 & \frac{7}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,y} \\ v_{2,y} \\ v_{3,y} \end{bmatrix} \frac{\Delta N}{\ell} \quad (6.30)$$

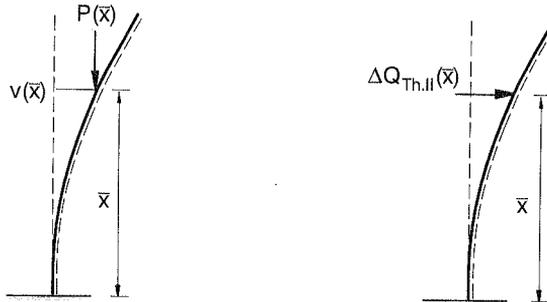
Für ein vierknotiges Element hat der Lastvektor die Form:

$$\mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} \frac{27}{8} & \frac{81}{8} & -\frac{81}{8} & \frac{27}{8} \\ \frac{81}{8} & \frac{243}{8} & -\frac{243}{8} & \frac{81}{8} \\ -\frac{81}{8} & \frac{243}{8} & -\frac{243}{8} & \frac{81}{8} \\ -\frac{27}{8} & \frac{81}{8} & -\frac{81}{8} & \frac{27}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,y} \\ v_{2,y} \\ v_{3,y} \\ v_{4,y} \end{bmatrix} \frac{N_0}{\ell} + \begin{bmatrix} \frac{17}{40} & \frac{51}{80} & -\frac{3}{8} & \frac{13}{80} \\ \frac{51}{80} & -\frac{27}{8} & \frac{297}{80} & -\frac{39}{40} \\ -\frac{3}{8} & \frac{297}{80} & -\frac{297}{40} & \frac{327}{80} \\ -\frac{67}{80} & \frac{141}{40} & -\frac{393}{80} & \frac{89}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,y} \\ v_{2,y} \\ v_{3,y} \\ v_{4,y} \end{bmatrix} \frac{\Delta N}{\ell} \quad (6.31)$$

Analog dazu werden die Lastvektoren \mathbf{P}_z und \mathbf{M}_T hergeleitet.

Mit Gleichung (6.13) und (6.26) können Einzellasten nicht erfaßt werden, da eine konti-

nuierliche Massenverteilung bzw. Normalkraftverlauf angenommen wurde. Im System angreifende vertikale Einzellasten werden durch horizontale, in der Wirkung äquivalente diskrete Einzelkräfte erfaßt:



$$\begin{aligned} \Delta M_{Th,II} &= P(\bar{x}) \cdot v(\bar{x}) &= & \Delta M_{Th,II} = \Delta Q_{Th,II}(\bar{x}) \cdot \bar{x} \\ & &\Rightarrow & \Delta Q_{Th,II}(\bar{x}) = P(\bar{x}) \cdot \frac{v(\bar{x})}{\bar{x}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

7. Erweiterung der Modellgleichungen für Eigenwertuntersuchung und dynamische Strukturanalyse mittels Ersatzkraftverfahren

7.1 Allgemeine Herleitung der Grundgleichungen

Die Grundgleichungen für den Verallgemeinerten Balken werden nach dem Prinzip von d'Alembert aus dem dynamischen Gleichgewicht hergeleitet. Bei der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte werden die virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte zusätzlich berücksichtigt. Für einen momentanen, zum Zeitpunkt t betrachteten Bewegungszustand eines allgemeinen mechanischen Systems erhält man ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.v.V.) die erweiterte Bedingungsgleichung:

$$\delta W^{int} + \delta W^{ext} + \delta W^{träg} = 0 \quad (7.1)$$

mit den virtuellen Arbeiten der Trägheitskräfte:

$$-\delta W^{träg} = \sum_{(i)} \delta W_i^{träg} = \rho \int_{(V)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v \, dA \, dx + \rho \int_{(V)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \, dA \, dx \quad (7.2)$$

der vertikalen Aussteifungselemente. Dabei ist ρ [kN/m³ · s²/m] die Dichte des Materials. Sind aussteifende Bauteile mit unterschiedlicher Dichte im System vorhan-

den, so werden die Integrale entsprechend aufgespalten. In dem Ausdruck (7.2) werden in, und auch quer zur Wirkungsrichtung der Einzelscheiben entstehende Trägheitskräfte berücksichtigt. Vertikale Beschleunigungen werden hier vernachlässigt.

Für die Verschiebungen v und w gelten analog die Produktansätze nach (5.6). Die Verallgemeinerten Verschiebungen \mathbf{V} sind allerdings auch zeitabhängig, d.h. abhängig von dem momentan betrachteten Zeitpunkt t . Durch Einsetzen von (5.6) erhält man für (7.2) den Ausdruck:

$$-\delta W^{\text{träg}} = \int_{(H)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{V}^T \left[\rho \int_{(A)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T dA \right] \delta \mathbf{V} dx + \int_{(H)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{V}^T \left[\rho \int_{(A)} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{g}}^T dA \right] \delta \mathbf{V} dx \quad (7.3)$$

Durch Auswerten der in den eckigen Klammern stehenden Integrale, ergeben sich dann mit den globalen Koordinatenfunktionen nach (5.13) bzw. Bild (5.9) die Matrizen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_M &= \sum_{(i)} \mathbf{D}_{M,i} = \rho \left[\int_{(A)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^T dA \right] = \sum_{(i)} \rho t_i b_i \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \\ \hat{\mathbf{D}}_M &= \sum_{(i)} \hat{\mathbf{D}}_{M,i} = \rho \left[\int_{(A)} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{g}}^T dA \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

mit den einzelnen Komponenten der Matrix $\mathbf{D}_{M,i}$:

$$D_{M,11} = \rho t_i b_i \sin^2 \psi_i ; \quad D_{M,12} = D_{M,21} = -\rho t_i b_i \sin \psi_i \cos \psi_i ;$$

$$D_{M,13} = D_{M,31} = -\rho t_i b_i c_i \sin \psi_i ; \quad D_{M,22} = \rho t_i b_i \cos^2 \psi_i ;$$

$$D_{M,23} = D_{M,32} = \rho t_i b_i c_i \cos \psi_i \quad \text{und:} \quad D_{M,33} = \rho t_i b_i c_i^2$$

sowie den Komponenten der Matrix $\hat{\mathbf{D}}_{M,i}$:

$$\hat{D}_{M,11} = \rho t_i b_i \cos^2 \psi_i ; \quad \hat{D}_{M,12} = \hat{D}_{M,21} = \rho t_i b_i \sin \psi_i \cos \psi_i ;$$

$$\hat{D}_{M,13} = \hat{D}_{M,31} = \frac{1}{2} \rho t_i b_i \cos \psi_i \cdot (y_D \sin \psi_i - z_D \cos \psi_i) ;$$

$$\hat{D}_{M,22} = \rho t_i b_i \sin^2 \psi_i ; \quad \hat{D}_{M,23} = \hat{D}_{M,32} = \frac{1}{2} \rho t_i b_i \sin \psi_i \cdot (y_D \sin \psi_i - z_D \cos \psi_i)$$

$$\text{und: } \hat{D}_{M,33} = \rho t_i b_i \cdot (y_D \sin \psi_i - z_D \cos \psi_i)^2$$

In einem diskreten Querschnitt konzentrierte Einzelmassen \tilde{M}_i [kN·s²/m] werden in Form einer Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_i$ erfaßt. Die einzelnen Komponenten der Matrix entsprechen diskreten Kräften bzw. Torsionsmomenten, die infolge einer Einheitsbeschleunigung, entsprechend den globalen Verschiebungen V_1, V_2, V_3 , hervorgerufen werden (Bild 7.1). Damit ist für eine Einzelmasse:

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{M,i} \\ & 1 & y_{M,i} \\ & & y_{M,i}^2 + z_{M,i}^2 \end{bmatrix} \tilde{M}_i \quad (7.5)$$

Der wesentliche Masseanteil eines Bauwerks ist sicherlich aus dem Eigengewicht der über die Geschosshöhe h verschmierten Deckenscheiben zu erwarten. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß auch vertikale statische Nutzlasten p_x in äquivalente Massen umzurechnen sind.

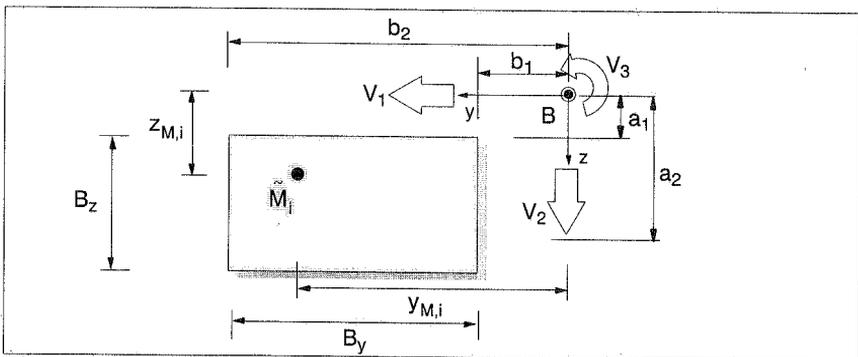


Bild 7.1: Einzelne Deckenscheibe mit Einzelmasse \tilde{M}_i^* .

Schneidet man ein Masseteilchen:

$$dm = \frac{1}{h} \left(\rho \cdot d + \frac{p_x}{9,81} \right) dy dz \quad (7.6)$$

aus der Deckenscheibe heraus, so kann dafür analog zu (7.5) eine differentielle Massenmatrix:

$$\mathbf{dm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ & 1 & y \\ & & y^2 + z^2 \end{bmatrix} dm \quad (7.7)$$

aufgestellt werden. Mit (7.6) und Integration über die gesamte Fläche einer rechteckigen Deckenscheibe erhält man daraus die symmetrische Matrix:

$$\tilde{\mathbf{D}}_M = \int_{(B_y)} \int_{(B_z)} \mathbf{dm} dy dz = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{M,11} & 0 & \tilde{D}_{M,13} \\ & \tilde{D}_{M,22} & \tilde{D}_{M,23} \\ & & \tilde{D}_{M,33} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

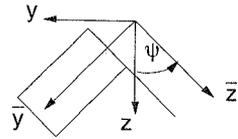
mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_{M,11} &= \tilde{D}_{M,22} = \frac{B_y B_z}{h} \left(\rho \cdot d + \frac{p_x}{9,81} \right) \\ \tilde{D}_{M,13} &= \frac{a_1^2 - a_2^2}{2h} \left(\rho \cdot d + \frac{p_x}{9,81} \right) \\ \tilde{D}_{M,23} &= \frac{b_2^2 - b_1^2}{2h} \left(\rho \cdot d + \frac{p_x}{9,81} \right) \\ \tilde{D}_{M,33} &= \frac{1}{3h} \left[(b_2^3 - b_1^3) B_z + (a_2^3 - a_1^3) B_y \right] \left(\rho \cdot d + \frac{p_x}{9,81} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{D}}_M$ erfaßt damit die über die Geschosshöhe h verteilten Trägheitskräfte, die durch Translation bzw. Rotation einer Deckenscheibe der Dicke d hervorgerufen werden.

Ist das globale Koordinatensystem um den Winkel ψ verdreht, so erhält man infolge Koordinatentransformation die Beziehung:

$$\tilde{\mathbf{D}}_M = \tilde{\mathbf{D}}_M \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Würde man die Gesamtmasse der Deckenscheibe auf einen einzigen Punkt in Scheibenmitte konzentrieren, so wäre der Faktor für $\tilde{\mathbf{D}}_{M,33}$ nicht $1/3$ sondern $1/4$. Für beliebige, komplexe Querschnittsformen wird empfohlen das Integral (7.8) näherungsweise durch Addition von Teilflächen auszuwerten.

Durch Einsetzen des Produktansatzes nach (5.20) für den Verlauf der Verallgemeinerten Verschiebungen entlang der Stabachse erhält man aus (7.3) für ein Einzelelement den Ausdruck:

$$-\delta W^{\text{träg}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \mathbf{v}_E \left[\int_0^\ell \mathbf{L}_V^T \left(\mathbf{D}_M + \hat{\mathbf{D}}_M + \tilde{\mathbf{D}}_M \right) \delta \mathbf{L}_V dx \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}_E \quad (7.10)$$

Die daraus abgeleitete Massenmatrix \mathbf{m} eines N-Knotenelements hat die allgemeine Form:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & \dots & \mathbf{m}_{1N} \\ \mathbf{m}_{12}^T & \mathbf{m}_{22} & & \\ \vdots & & & \\ \mathbf{m}_{1N}^T & & & \mathbf{m}_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

mit den Untermatrizen:

$$\mathbf{m}_{rs} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{D}_M + \hat{\mathbf{D}}_M + \tilde{\mathbf{D}}_M \right) \ell \int_0^1 L_r L_s d\xi + \delta_r^s \tilde{\mathbf{M}}_r \end{bmatrix} \quad \text{wobei: } \tilde{\mathbf{M}}_r = \sum_{(1)} \tilde{\mathbf{M}}_{r,i} \quad (7.12)$$

mit dem Kronecker-Symbol:

$$\delta_r^s = \begin{cases} 1 & \text{für } r=s \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases} \quad (7.13)$$

Analog zu (5.27) erhält man mit dem Zusammenbau der Elementmatrizen entsprechend den Regeln der Direkten Steifigkeitsmethode die Bewegungsgleichung für das System:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v} \right) + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{P}(t) \quad (7.14)$$

In diesem System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{v}(t)$ der Vektor der zeitabhängigen Verallgemeinerten Knotenverschiebungen. \mathbf{P} ist der zeitabhängige Lastvektor.

Mit dem Ansatz einer harmonischen Funktion für die Zeitabhängigkeit der Eigenschwingung ist:

$$\mathbf{v}(x, t) = \bar{\mathbf{v}}(x) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (7.15)$$

und:

$$\ddot{\mathbf{v}}(x, t) = -\omega^2 \bar{\mathbf{v}}(x) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\omega^2 \mathbf{v}(x, t) \quad (7.16)$$

Dabei beschreibt $\bar{\mathbf{v}}(x)$ die Schwingungsform, die normiert mit $\Phi(x)$ bezeichnet wird. Setzt man (7.16) in (7.14) ein, so erhält man für die homogene Form des Differentialgleichungssystems ($\mathbf{P}(t)=\mathbf{0}$):

$$-\mathbf{M} \omega^2 \mathbf{v} + \mathbf{K} \mathbf{v} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{v}} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \mathbf{0} \quad (7.17)$$

und für beliebige t das allgemeine Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (7.18)$$

In (7.18) ist $\bar{\mathbf{v}}(x)$ der Vektor der Knotenverschiebungen und ω die Kreisfrequenz der Eigenschwingung. Nichttriviale Lösungen für (7.18) ergeben sich aus der Bedingung:

$$\det |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad \text{mit: } \lambda = \omega^2 = 4 \pi^2 f^2 \quad (7.19)$$

Hieraus lassen sich sämtliche Eigenwerte λ_i bzw. die Eigenkreisfrequenzen ω_i ermitteln. Interessant sind dabei im wesentlichen die niederfrequenten Eigenformen, da sie das Schwingungsverhalten des Systems mit guter Näherung beschreiben können. Durch Einsetzen der ermittelten Werte ω_i in Gleichung (7.18), werden die Vektoren \bar{v}_i der entsprechenden Eigenschwingungsform bestimmt. Sinnvollerweise wird eine Normierung bezüglich der maximalen Ordinate $V_{i,max}$ vorgenommen. Die normierten Eigenvektoren werden in der Modalmatrix Φ zusammengefaßt:

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n] \quad \text{mit} \quad \Phi_i = \bar{v}_i \frac{1}{V_{i,max}} \quad (7.20)$$

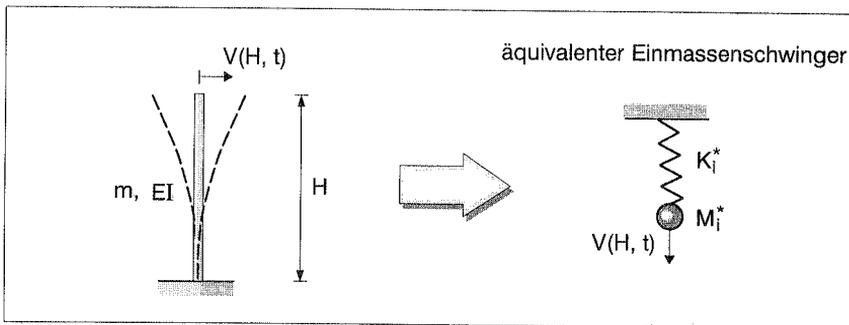


Bild 7.2: Grundschwingung eines Kragträgers, äquivalenter Einmassenschwinger

Die Eigenvektoren sind orthogonal bezüglich der Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix. Damit ist:

$$\mathbf{M}^* = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (7.21)$$

die Diagonalmatrix der modalen Massen M_i^* . Entsprechend erhält man mit:

$$\mathbf{K}^* = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (7.22)$$

die Diagonalmatrix mit den modalen Steifigkeiten K_i^* der äquivalenten Einmassenschwinger mit der modalen Masse M_i^* (Bild 7.2). Die bei der Schwingung entstehenden Schnittgrößen lassen sich beispielsweise mit Hilfe einer modalen Analyse berechnen. Bezüglich der theoretischen Grundlagen sei an dieser Stelle auch auf die Literatur verwiesen. Die mechanischen Zusammenhänge in der Dynamik und wirksame Maßnah-

men zur Erdbebensicherung von Hochbauten werden beispielsweise von Müller und Keintzel (1984), Waller (1989) oder Bachmann (1995) ausführlich diskutiert.

Mit Hilfe der ermittelten Eigenformen werden nach DIN 4149 horizontale "Erdbeben-Ersatzkräfte" ermittelt:

$$\mathbf{H}_{E,i} = \mathbf{M} \ddot{u}_{t,i,\max} = \mathbf{M} \Phi_i \frac{L_i}{M_i} S_{a,i} \quad , \quad (7.23)$$

Diese ermöglichen über eine statische Analyse dann die Berechnung von Bemessungsschnittgrößen. Der Lastvektor $\mathbf{H}_{E,i}$ gibt dabei die Verteilung der Trägheitskräfte wieder, die sich für die Eigenform Φ_i einstellt. In (7.23) ist:

$$L_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{1} \quad (7.24)$$

der Beteiligungsfaktor der Massen. In Abhängigkeit von der Gebäudecharakteristik (Bauwerksklasse), der Erdbebenzone und einem Baugrundfaktor wird anhand eines normierten Antwortspektrums der DIN 4149 der Spektralwert S_a der Beschleunigung in Abhängigkeit von der Schwingungsdauer T_i ermittelt.

7.2 Grundschwingungen symmetrischer Systeme

Zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens, insbesondere der Schwingungsanfälligkeit von Bauwerken nach DIN 1055, ist es erforderlich, die Eigenfrequenz der Grundschwingung zu ermitteln. Diese soll hier nicht auf numerischem Wege, sondern mit Hilfe vereinfachender Modellvorstellungen analytisch ermittelt werden.

In der Literatur diskutierte Beispiele (z.B. Peckau (1995), McCallen (1994), Swaddiwudhipong (1986)) haben gezeigt, daß die ersten drei Eigenschwingungen symmetrischer Systeme den Eigenschwingungen des Kragträgers entsprechen (Bild 7.3). Symmetrische Tragwerke haben zusätzlich den Vorteil, daß sich Biegebeanspruchung und Torsionsbeanspruchung entkoppeln lassen, da der Schubmittelpunkt als Querschnittswert festliegt. Die Symmetrieeigenschaft bezieht sich sowohl auf das Tragwerk und auf die Massenverteilung, so daß der Schubmittelpunkt gleichzeitig auch Massenschwerpunkt ist. Für die Biegung können dann zwei voneinander unabhängige ebene Ersatzsysteme gewählt werden.

Infolge Rißbildung muß bei allen Betrachtungen mit einer effektiven Steifigkeit gerechnet werden. Bachmann (1995) gibt dafür Abminderungsfaktoren an, die sich für Beton abhängig vom aussteifenden Bauteil zwischen 0,50 und 0,70 bewegen. Bei den folgenden Ausführungen wird auf den Index "eff" bei der Angabe von effektiven Biegesteifig-

keiten EI_{eff} von Wandscheiben bzw. Ersatzsteifigkeiten $GA_{\text{ers,eff}}$ von Rahmensystemen verzichtet.

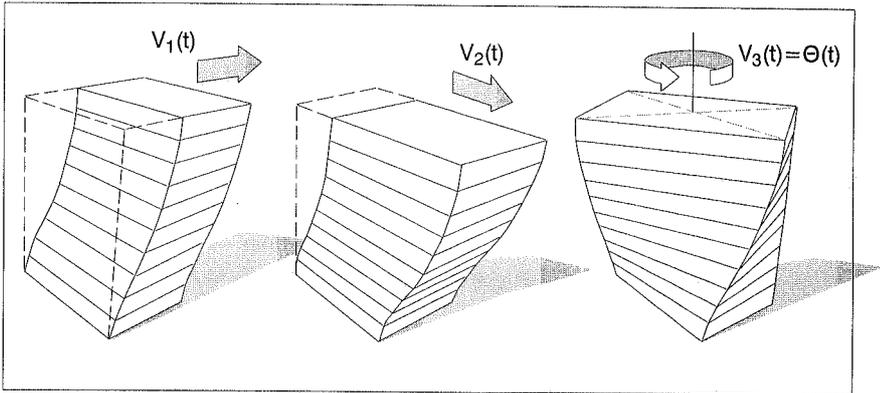


Bild 7.3: Erste Eigenschwingungsformen regelmäßiger, symmetrischer Tragwerke

Für räumliche, bezüglich der Steifigkeits- und Massenverteilung im Grundriß symmetrische Systeme wird angenommen, daß sich die ersten drei Eigenschwingungsformen mit den Verschiebungen $V_1(H)$, $V_2(H)$ bzw. der Verdrehung $V_3(H)$ des Kopfendes beschreiben lassen (Bild 7.3). In Abschnitt 4.5 hat sich außerdem gezeigt, daß der qualitative Verlauf der Biegelinie bei verteilten Lasten $p_0(x)$, und damit auch für verteilte Trägheitskräfte, in erster Linie von dem Systemwert (αH) abhängt. Da auch die ersten beiden Ableitungen der Funktion K_1 für Gleichlast und Dreiecklast qualitativ nahezu gleiche Verläufe aufweisen (vgl. Bild A-02 und A-04 im Anhang) werden hier näherungsweise die Funktionen K_1 bzw. \bar{K}_1 für Gleichlast angesetzt. Zur Ermittlung der zu diesen Grundschrwingungen konsistenten Massen wird deshalb ein Produktansatz der Form:

$$\mathbf{V}(\xi, t) = \Phi(\xi) \cdot \mathbf{V}(t) \quad \text{mit: } \xi = \frac{x}{H} \quad (7.25)$$

für die verallgemeinerten Verschiebungen V_i gewählt, wobei:

$$\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{und:} \quad \Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \Phi(\alpha_{V_1} \xi) & 0 & 0 \\ & \Phi(\alpha_{V_2} \xi) & 0 \\ & & \Phi(\alpha_{\Theta} \xi) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit: } \Phi(\alpha_{V_i} H, \xi) = \frac{K_{1,p}(\alpha_{V_i} H, \xi)}{K_{1,p}(\alpha_{V_i} H, 1)} = \frac{\bar{K}_{1,p}(\alpha_{V_i} H, \xi)}{\bar{K}_{1,p}(\alpha_{V_i} H, 1)} \quad (7.26)$$

Für die normierten Formfunktionen $\Phi(\alpha H, \xi)$ ergibt sich am Kopfende der Funktionswert $\Phi(\alpha_{Vi}H) = 1$. Für die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte erhält man mit dem Ansatz (7.25) analog zu (7.10) den Ausdruck:

$$-\delta W^{\text{träg}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \mathbf{V}^T H \int_0^1 \Phi^T(\xi) \left(\mathbf{D}_M + \hat{\mathbf{D}}_M + \tilde{\mathbf{D}}_M \right) \Phi(\xi) \delta \mathbf{V} dx \quad (7.27)$$

Dabei ist dann:

$$\mathbf{M}^* = H \int_0^1 \Phi^T(\xi) \left(\mathbf{D}_M + \hat{\mathbf{D}}_M + \tilde{\mathbf{D}}_M \right) \Phi(\xi) d\xi = \begin{bmatrix} M_{V1} & 0 & 0 \\ & M_{V2} & 0 \\ & & M_{V3} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

die Diagonalmatrix der modalen Massen der ersten Eigenschwingungsformen des Systems.

Geht man davon aus, daß die Komponenten der Diagonalmatrizen \mathbf{D}_M , $\hat{\mathbf{D}}_M$, $\tilde{\mathbf{D}}_M$ über die gesamte Bauwerkshöhe konstant sind, so kann das Integral (7.28) für verschiedene Systemwerte αH ausgewertet werden (Bild 7.5). Dabei zeigt sich, daß für überwiegend durch Biegung geprägtes Verformungsverhalten ($\alpha H \rightarrow 0$) im Vergleich zu Systemen mit überwiegend durch Schub geprägtem Verformungsverhalten ($\alpha H \rightarrow \infty$) die modale Masse gerade halb so groß ist.

Die virtuelle Arbeit der Schnittkräfte in den biege- und schubweichen Einzelstäben ist mit den Beziehungen aus Abschnitt 4.1:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{int}} &= \int_0^H EI_z V_1'' \delta V_1'' dx + \int_0^H GA_{y,\text{ers}} V_1' \delta V_1' dx + \\ &+ \int_0^H EI_y V_2'' \delta V_2'' dx + \int_0^H GA_{z,\text{ers}} V_2' \delta V_2' dx + \\ &+ \int_0^H EI_w V_3'' \delta V_3'' dx + \int_0^H GI_T V_3' \delta V_3' dx \end{aligned} \quad (7.29)$$

mit: $EI_y = \sum EI_{y,i}$; $EI_z = \sum EI_{z,i}$; GI_T nach (4.9), (4.10); EI_w nach (4.7)

Mit dem Ansatz (7.25) lässt sich daraus bei konstanten Querschnittswerten die Matrix der modalen (d.h. diesen Eigenformen entsprechenden) Steifigkeiten herleiten:

$$\mathbf{K}^* = H \int_0^1 \Phi''^T \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix} \Phi'' d\xi + H \int_0^1 \Phi'^T \begin{bmatrix} GA_{y,ers} & 0 & 0 \\ 0 & GA_{z,ers} & 0 \\ 0 & 0 & GI_T \end{bmatrix} \Phi' d\xi \quad (7.30)$$

Die in (7.30) benötigten Integrale werden ausgewertet und sind in Abhängigkeit von αH in Bild 7.5 dargestellt. Für die Diagonalmatrix λ der ersten Eigenwerte der ersten Eigenschwingungen erhält man die Bestimmungsgleichungen:

$$\lambda = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{M}^{*-1} = \begin{bmatrix} \lambda_{V1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{V2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{V3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{V1}}{M_{V1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{V2}}{M_{V2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{\Theta}}{M_{\Theta}} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

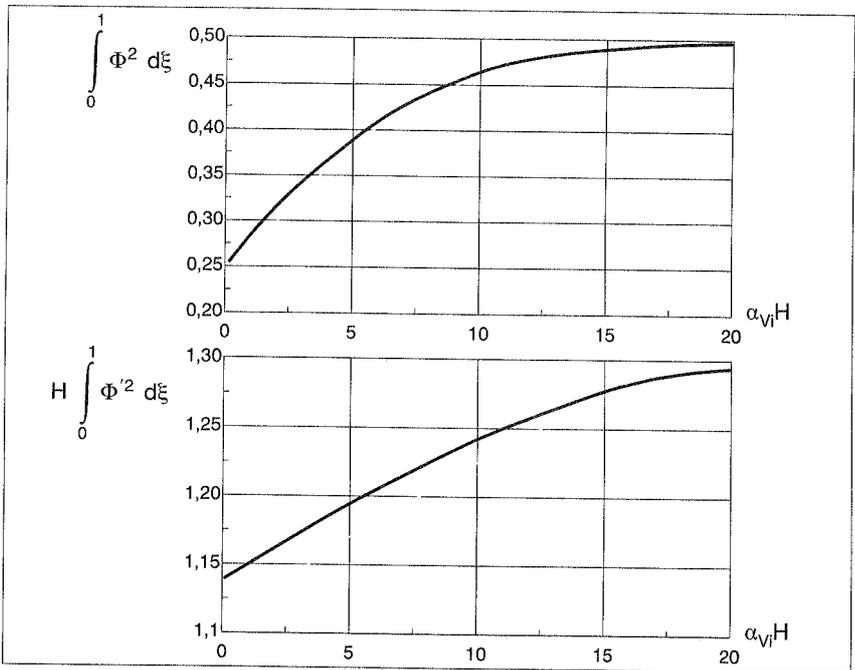
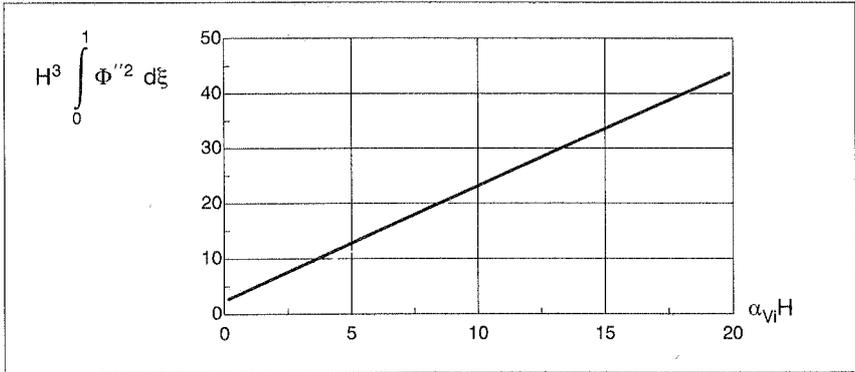


Bild 7.5: Integralwerte in Abhängigkeit von αH



zu Bild 7.5: Integralwerte in Abhängigkeit von αH

8. Berechnungsbeispiele

B–01

Symmetrisches Tragwerk, analytische Berechnung

B–02

Symmetrisches Tragwerk, numerische Berechnung

B–03

Nicht–symmetrisches Tragwerk, analytische Berechnung

B–04

Nicht–symmetrisches Tragwerk, numerische Berechnung

B–05

Gegliedertes Hohlkasten, numerische Berechnung

B-01 Symmetrischer Hohlkasten aus Stockwerkrahmen mit innerem Kern, Analytische Berechnung

Das in Bild 8.1 im Grundriß dargestellte Hochhaustragwerk wird infolge ausmittiger Windlasten auf Biegung und Torsion beansprucht. Dabei wird eine maximale Ausmitte mit $e=0,2 \cdot B=6,0$ m angesetzt. Die Windlast $w_z=50$ kN/m ergibt sich aus der additiven Wirkung von Druck und Sog nach DIN 1055 Teil 4. Aufgrund der Symmetrieigenschaften sind Biegung und Torsion entkoppelt, da als Bezugspunkt der Schubmittelpunkt (Drillruhepunkt) D im Querschnitt festliegt.

Für eine Vordimensionierung der Bauteile und die Beurteilung der Qualität des vorliegenden Tragwerkkonzepts wird die Verteilung der Last auf die aussteifenden Bauteile und die daraus resultierenden Schnittgrößen ermittelt. Einflüsse aus Theorie II. Ordnung sollen, wenn nach DIN 1045 erforderlich, berücksichtigt werden. Es wird außerdem überprüft, ob das Bauwerk nach DIN 1055 als schwingungsanfällig einzustufen ist.

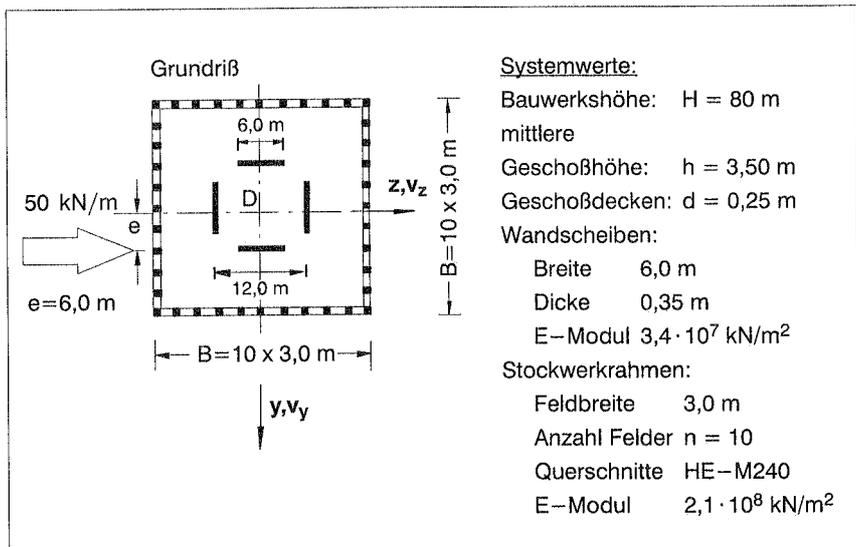


Bild 8.1: Berechnungsbeispiel B-01

Für den Stockwerkrahmen wird zunächst ein kontinuierliches Ersatzsystem in Form einer schubweichen Scheibe ermittelt. Einflüsse aus den Stieldehnungen werden im Rahmen der Aufgabenstellung vernachlässigt. Mit den nach Gleichung (3.23) ermittelten effektiven Trägheitsmomenten:

$$I_S^* = \frac{I_S}{(1 - \beta_2)^3} = \frac{2,429 \cdot 10^{-4}}{\left(1 - \frac{0,27}{3,5}\right)^3} = 3,09 \cdot 10^{-4}$$

und:

$$I_R^* = \frac{I_R}{\left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right)^3} = \frac{2,429 \cdot 10^{-4}}{\left(1 - \frac{0,27}{3,0}\right)^3} = 3,223 \cdot 10^{-4}$$

ergibt sich für die Ersatzschubsteifigkeit mit Beziehung (3.22):

$$GA_{\text{ers}} = Gnb_{\text{ers}} = 12 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{3,50} \cdot \frac{10(10+1) \cdot 3,223 \cdot 3,09}{(10+1) \cdot 3,0 \cdot 3,09 + 10 \cdot 3,5 \cdot 3,223} \cdot 10^{-4} \\ = 3,673 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

(Annahme: Beton im Zustand I) Die Biegesteifigkeit einer einzelnen Wandscheibe ist:

$$EI_B = (3,40 \cdot 10^7) \cdot \frac{0,35 \cdot 6^3}{12} = 2,142 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2$$

Daraus ergibt sich ein Systemwert für die Biegung:

$$\alpha_{\nu}H = \sqrt{\frac{2 GA_{\text{ers}}}{2 EI_B}} H = 3,31$$

Aus Bild A-05 wird damit ein Faktor $K_1(\alpha_{\nu}H, H) \approx 0,21$ ermittelt. Für die Kopfauslenkung ergibt sich daraus:

$$v(H) = \frac{p H^4}{8 EI_B} \cdot K_1(\alpha_{\nu}H) = \frac{50 \cdot 80^4}{8 \cdot 2 \cdot 2,142 \cdot 10^8} \cdot 0,20 = 0,126 \text{ m}$$

Das aus der ausmittigen Windlast resultierende Torsionsmoment ist:

$$m_T = 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6,0 \text{ m} = 300 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Die Kernzone setzt sich aus Einzelscheiben zusammen, deren Eigentorsionssteifigkeit GI_T vernachlässigt wird. Die Wölbsteifigkeit EI_W der Kernzone ist nach Gleichung (4.7):

$$EI_W = 4 \cdot (2,142 \cdot 10^8) \cdot 6,0^2 = 3,08 \cdot 10^{10} \text{ kNm}^4$$

Der quadratische Hohlkasten aus Stockwerkrahmen ist wölbfrei. Es ergeben sich deshalb bei reiner Torsionsbeanspruchung keine Normalkräfte in den Stielquerschnitten. Für den Hohlkasten wird eine St. Venantsche Torsionssteifigkeit nach (4.9) ermittelt:

$$GI_T = 4 \cdot 3,673 \cdot 10^5 \cdot 15,0^2 = 3,306 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2$$

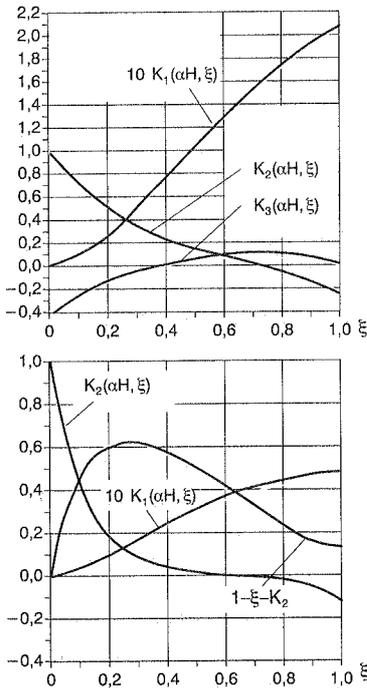
Daraus ergibt sich für die Torsionsbeanspruchung ein Systemwert:

$$\alpha_{\Theta} H = \sqrt{\frac{GI_T}{EI_W}} H = 8,29$$

Aus Bild A-05 kann ein Faktor $\bar{K}_1(\alpha_{\Theta} H, H) \approx 0,78$ abgelesen werden. Die Verdrehung des Querschnitts am Kopfende ist

$$\Theta(H) = \frac{m_T H^2}{2 GI_T} \cdot \bar{K}_1(\alpha_{\Theta} H, H) = \frac{300 \cdot 80^2}{2 \cdot 3,306 \cdot 10^8} \cdot 0,78 = 2,26 \cdot 10^{-3}$$

Die Berechnungsergebnisse sind für Biegung und Torsion in Bild 8.2 dargestellt. Der Verlauf des primären und des sekundären Torsionsmoments M_{Tp} und M_{Ts} wird mit den Gleichungen (4.59) und (4.60) ermittelt. Daraus ist ersichtlich, daß die Kernzone unmittelbar am Fußpunkt das resultierende Torsionsmoment aufgrund der Verwölbungsbe-
hinderung alleine abträgt.



Biegung
$v(\xi) = \frac{p}{8} \frac{H^4}{EI} \cdot K_1(\alpha_v H, \xi)$
$Q_{\text{kern}}(\xi) = p H \cdot K_2(\alpha_v H, \xi)$
$M_{\text{kern}}(\xi) = \frac{p}{2} \frac{H^2}{EI} \cdot K_3(\alpha_v H, \xi)$
Torsion
$\Theta(\xi) = \frac{m_T}{8} \frac{H^4}{EI_W} \cdot K_1(\alpha_{\Theta} H, H)$
$M_{Tp} = m_T H \cdot (1 - \xi - K_2)$
$M_{Ts} = m_T H \cdot K_2(\alpha_{\Theta} H, \xi)$

Bild 8.2: Verformungs- und Schnittgrößenverläufe

Aus dem Momentenverlauf in den Wandscheiben wird im Fußpunktquerschnitt eine Normalspannung:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{W} = \frac{\rho H^2}{2} \cdot K_2 \cdot \frac{6}{t b^2} \approx 1,65 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

ermittelt.

Für die Beurteilung des Schwingungsverhaltens des Systems kann man davon ausgehen, daß die Deckenplatten den größten Anteil an der Gesamtmasse des Bauwerks besitzen. Die Verkehrslasten werden mit $2,0 \text{ kN/m}^2$ angesetzt. Für die über die Höhe gleichmäßig verteilte Masse $M_V = \tilde{D}_{M,11}$ ergibt sich aus Gleichung (7.9):

$$\tilde{D}_{M,11} = \frac{B_y B_z}{h} \left(\rho \cdot d + \frac{\rho_x}{9,81} \right) = 216,3 \frac{\text{kN s}^2}{\text{m}}^2$$

Mit $\alpha_V H = 3,31$ erhält man für die Integralwerte nach Bild 7.5:

$$\int_0^1 \Phi^2 d\xi = 0,33 \quad ; \quad H^2 \int_0^1 \Phi'^2 d\xi = 1,15 \quad ; \quad H^4 \int_0^1 \Phi''^2 d\xi = 7,9$$

Mit der modalen Steifigkeit nach (7.30):

$$K_V = 2 \cdot 2,142 \cdot 10^8 \cdot \frac{7,9}{80^3} + 2 \cdot 3,673 \cdot 10^5 \cdot \frac{1,15}{80} = 17170 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

ist der erste Eigenwert der ersten Translationsschwingung:

$$\lambda_{1,v} = \frac{K_V}{M_V} = \frac{17170}{0,33 \cdot 216,3 \cdot 80} = 3,0$$

Mit der Beziehung (7.9) ist die auf den Drillruhepunkt bezogene Masse:

$$\tilde{D}_{M,33} = \frac{1}{3h} \left[(b_2^3 - b_1^3) B_z + (a_2^3 - a_1^3) B_y \right] \left(\rho \cdot d + \frac{\rho_x}{9,81} \right) = 3,24 \cdot 10^4 \text{ kNs}^2$$

Für die Rotationsschwingung erhält man aus Bild 7.5 für die Integralwerte mit $\alpha_\Theta H = 8,29$:

$$\int_0^1 \Phi^2 d\xi = 0,44 \quad ; \quad H^2 \int_0^1 \Phi'^2 d\xi = 1,21 \quad ; \quad H^4 \int_0^1 \Phi''^2 d\xi = 20$$

Mit der modalen Steifigkeit nach (7.30):

$$K_v = 3,08 \cdot 10^{10} \cdot \frac{20}{80^3} + 3,306 \cdot 10^8 \cdot \frac{1,21}{80} = 6,2 \cdot 10^6$$

ist der Eigenwert der ersten Rotationsschwingung:

$$\lambda_{1,\Theta} = \frac{K_\Theta}{M_\Theta} = \frac{6,2 \cdot 10^6}{0,44 \cdot 3,24 \cdot 10^4 \cdot 80} = 5,44$$

Für die Eigenfrequenz der ersten Eigenschwingung ergibt sich dann:

$$f = \sqrt{\frac{\lambda_{1,V}}{4\pi^2}} = 0,28 \frac{1}{s} \quad \rightarrow T = 3,63 s$$

Die Schwingungsanfälligkeit des Bauwerks wird nach DIN 1055 bewertet. Mit dem angenommenen mittleren Logarithmischen Dämpfungsdekrement $\delta=0,02$ für geschweißte Stahlkonstruktionen ist:

$$f' = f \cdot \sqrt{\frac{\delta}{0,10}} = 0,125 \frac{1}{s}$$

Mit einer auf die Schlankheit des Bauwerks bezogenen Höhe:

$$H' = \frac{H}{\sqrt{\frac{H}{20} + 1}} = 186,8m$$

ergibt sich nach DIN 1055 (Bild 4.4), daß das Bauwerk als schwingungsanfällig eingestuft werden muß. Nach Schlaich (1966) wird der Staudruck in einen statischen Anteil und einen dynamischen Anteil im Verhältnis 0,4/0,6 aufgespalten. Für den statischen Ersatzstaudruck wird in Abhängigkeit von einem Logarithmischen Dämpfungsdekrement und der Schwingungsdauer T ein Vergrößerungsfaktor $\eta=(0,4+0,6 \cdot \eta')=1,78$ ermittelt, der die dynamische Wirkung des Windes berücksichtigt. Dabei wurde aus der Grafik in Bild 4.5 ein Wert $\eta' =2,3$ abgelesen.

Mit der Labilitätszahl nach (6.1) für den Fall der Biegung:

$$\lambda = H \cdot \sqrt{\frac{g \cdot H}{EI}} = 80 \cdot \sqrt{\tilde{D}_{M,11} \cdot 9,81 \cdot \frac{80}{2 \cdot 2,142 \cdot 10^8}} = 1,6 > 0,60$$

muß der Einfluß aus Theorie II. Ordnung berücksichtigt werden. In dem Berechnungsbeispiel soll dieser Einfluß näherungsweise durch eine Gleichlast erfaßt werden.

Nach Gleichung (6.17) ist:

$$\Delta q_{\text{Th.II},0} = \frac{g}{H} \cdot v_{\text{Th.I}}(\alpha_v H, H) = \frac{9,81 \tilde{D}_{M,11}}{80} \cdot 0,126 = 3,342 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Die sich daraus ergebende Kopfauslenkung ist:

$$v_{\text{Th.II},1}(\alpha_v H, H) = v_{\text{Th.I}} \cdot \left(1 + \frac{3,34}{50} \right) = 1,067 \cdot v_{\text{Th.I}}$$

Daraus wird mit Gleichung (6.17) eine neue Last:

$$\Delta q_{\text{Th.II},1} = \frac{9,81 \tilde{D}_{M,11}}{80} \cdot (1,067 \cdot 0,126) = 3,566 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

und eine neue Kopfauslenkung:

$$v_{\text{Th.II},2}(\alpha_v H, H) = v_{\text{Th.I}} \cdot \left(1 + \frac{3,57}{50} \right) = \underline{1,071} \cdot v_{\text{Th.I}}$$

Die sich daraus ergebende Zusatzbelastung ist:

$$\Delta q_{\text{Th.II},2} = \frac{9,81 \tilde{D}_{M,11}}{80} \cdot (1,071 \cdot 0,126) = 3,579 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Sie bewirkt, verglichen mit dem letzten Iterationsschritt, praktisch keine Änderung mehr, so daß die Iteration abgebrochen wird. Der Einfluß aus Theorie II. Ordnung beträgt etwa 7%.

B–02 Symmetrischer Hohlkasten aus Stockwerkrahmen mit innerem Kern, numerische Berechnung

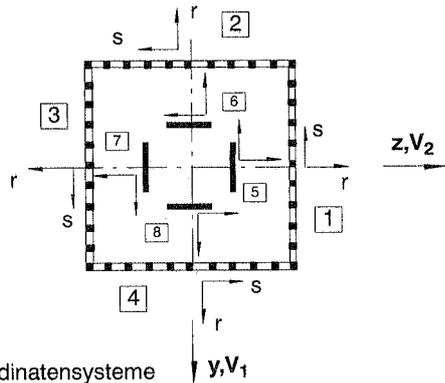


Bild 8.3: Festlegung der lokalen Koordinatensysteme

Das Berechnungsbeispiel B–01 wird mit Hilfe der erarbeiteten Lösungsstrategie numerisch berechnet. Der Eingabedatensatz ist in Bild 8.4 dargestellt.

Da aufgrund der biegeweichen Deckenplatten die Matrizen **A**, **B** und **C** von dem äußeren Hohlkasten und der inneren Kernzone voneinander entkoppelt sind, können die Steifigkeitsmatrizen für die Teilsysteme "Kernzone" und "Hohlkasten aus Stockwerkrahmen" jeweils getrennt aufgestellt und durch statische Kondensation reduziert werden. Die auf die Verallgemeinerten Verschiebungen **V** reduzierten Steifigkeitsmatrizen werden dann additiv überlagert.

Zur Verdeutlichung soll gezeigt werden, wie die Steifigkeitsmatrix für den äußeren Hohlkasten aus Stockwerkrahmen aufgestellt wird. Die Festlegung der lokalen Koordinatensysteme und die Diskretisierung im Querschnitt ist in Bild 8.3 ersichtlich. Für die Stockwerkrahmen wird mit Gleichung (3.22) eine mechanisch äquivalente, schubweiche Scheibe mit der Dicke:

$$t_{\text{ers}} = 12 \frac{E}{G} \cdot \frac{1}{h n b} \cdot \frac{n(n+1)}{(n+1)b I_S^* + n h I_R^*} = 1,516 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

mit: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

eingeführt, wobei eine Querdehnzahl $\nu=0,30$ gewählt wurde. Zusätzlich können auch die Stiele über die Breite der Scheibe verschmiert werden (vgl. Bild 3.4). Die Dicke der kontinuierlichen Wandscheibe (Typ ③) ist:

$$t = \frac{n A_S}{n b} = 6,667 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

INPUT

Projektname: B-02

Systemdaten:

Höhe des Bauwerks	80,0
Anzahl der Stockwerke	23
Höhe der Einzelgeschosse	3,50
Anzahl der Querschnittsknoten	12
Anzahl der Teilsysteme	2
Anzahl der Einzelscheiben	8
Anzahl der Scheibentypen	2
Anzahl der Materialtypen	2
Anzahl der Lastfälle	1
Anzahl der Elemente	10
Elementansatz (2=linear, 3=quadratisch)	2

Querschnittsknoten:

Kn. Nr.	y-Koor.	z-Koor.
1	15,0	15,0
2	-15,0	15,0
3	-15,0	-15,0
4	15,0	-15,0
5	3,0	6,0
6	-3,0	6,0
7	-6,0	3,0
8	-6,0	-3,0
9	-3,0	-6,0
10	3,0	-6,0
11	6,0	-3,0
12	6,0	3,0

Materialdaten:

Nr.	Bezeichnung	E-Modul	Querdehnzahl
1	B-35	34000000	0,2
2	ST-52	210000000	0,3

Einzelscheiben:

Nr.	Kn.i	Kn.k	Breite	Typ	R1	R2	R3	Mat
1	1	2	30,0	2.1	-1,0	0,0	15,0	2
2	2	3	30,0	2.1	0,0	-1,0	15,0	2
3	3	4	30,0	2.1	1,0	0,0	15,0	2
4	4	1	30,0	2.1	0,0	1,0	15,0	2
5	5	6	6,0	1.1	-1,0	0,0	6,0	1
6	7	8	6,0	1.1	0,0	-1,0	6,0	1
7	9	10	6,0	1.1	1,0	0,0	6,0	1
8	11	12	6,0	1.1	0,0	1,0	6,0	1

Scheibendicke:

Nr.	t/n	b	beta1	beta2	l-Stiel	l-Riegel	AS
1.1	0,35						
2.1	10	3,0	0,09	0,0771	$0,2429 \cdot 10^3$	$0,2429 \cdot 10^3$	0,02

Teilsysteme:

T-01 Hohlkasten	4	1	2	3	4
location		1	2	3	4
		2	5	6	7
		5	8	9	10
		8	1	11	12
T-02 Kernzone	4	5	6	7	8
location		1	2	3	4
		5	6	7	8
		9	10	11	12
		13	14	15	16

Belastung:

Lastfall	py	pz	mt	Faktor
1	0,0	50,0	300,0	1,0

END OF INPUT

Bild 8.4: Eingabedatensatz für das Programm HIGH-RISE (Beispiel B-02)

Es ergeben sich die Elementmatrizen für den Scheibentyp 3 entsprechend Abschnitt 6.3. Mit den Elementmatrizen:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & & \frac{18}{35} & 0 \\ & & & \frac{9}{14} \end{bmatrix} \text{ n b t}; \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \frac{108}{5} & 0 \\ & & & \frac{36}{5} \end{bmatrix} \frac{1}{\text{nb}} t_{\text{ers}}; \quad \bar{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t_{\text{ers}}$$

und: $\bar{\mathbf{D}}_i = \text{n b } t_{\text{ers}}$

erhält man mit den Transformationsbeziehungen (5.14) sowie der Zuordnungs- bzw. Transformationsmatrix:

$$\mathbf{Z}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und:} \quad \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 15,0 \\ 0 & -1 & 15,0 \\ 1 & 0 & 15,0 \\ 0 & 1 & 15,0 \end{bmatrix}$$

die Systemmatrizen zu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{18}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{9}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{18}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{9}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{8} \\ & & & & & & & & \frac{18}{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{9}{14} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{18}{35} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{9}{14} \end{bmatrix} \text{ nbt}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{108}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{36}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{108}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{36}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{108}{5} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{36}{5} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{108}{5} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{36}{5} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{nb} t_{\text{ers}} ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t_{\text{ers}}$$

und:

$$\mathbf{D} = \sum \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{D}}_i \mathbf{R}_i^T = \underbrace{4,55 \cdot 10^{-3}}_{nb t_{\text{ers}}} \cdot \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 15,0 \\ -1 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15,0 & -15 & 0 & 225 \end{bmatrix} + \\
 + 4,55 \cdot 10^{-3} \cdot \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 15,0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & -15 & 225 \end{bmatrix} + 4,55 \cdot 10^{-3} \cdot \mathbf{R}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 15,0 \\ 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 225 \end{bmatrix} + \\
 + 4,55 \cdot 10^{-3} \cdot \mathbf{R}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 15,0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 15 & 225 \end{bmatrix} = 4,55 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}$$

Die Teilsysteme "Hohlkasten aus Stockwerkrahmen" und "Kernzone" sollen in Längsrichtung mit insgesamt 10 bzw. 50 **zweiknotigen Elementen** (Bild 8.5) diskretisiert werden. Für die Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich mit den Beziehungen (5.25) und (5.26) der Aufbau:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{3} G \ell B & -\frac{1}{2} G C & -\frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{6} G \ell B & \frac{1}{2} G C \\ \frac{G D}{\ell} & -\frac{1}{2} G C & \frac{G D}{\ell} & \\ \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{3} G \ell B & & \frac{1}{2} G C & \\ & & \frac{G D}{\ell} & \end{bmatrix}$$

Der Zusammenbau der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix erfolgt entsprechend der Direkten Steifigkeitsmethode. Nach dem Umsortieren der Freiheitsgrade hat die Systemsteifigkeitsmatrix den schematischen Aufbau:

$$K = \begin{bmatrix} K_{AB} & K_C \\ K_C^T & K_D \end{bmatrix}$$

mit den Abkürzungen:

$$k_{11,ab} = \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{3} G \ell B \quad , \quad k_{12,ab} = -\frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{6} G \ell B \quad ,$$

$$k_{11,c} = -\frac{1}{2} G C \quad \text{und} \quad k_{11,d} = \frac{G D}{\ell}$$

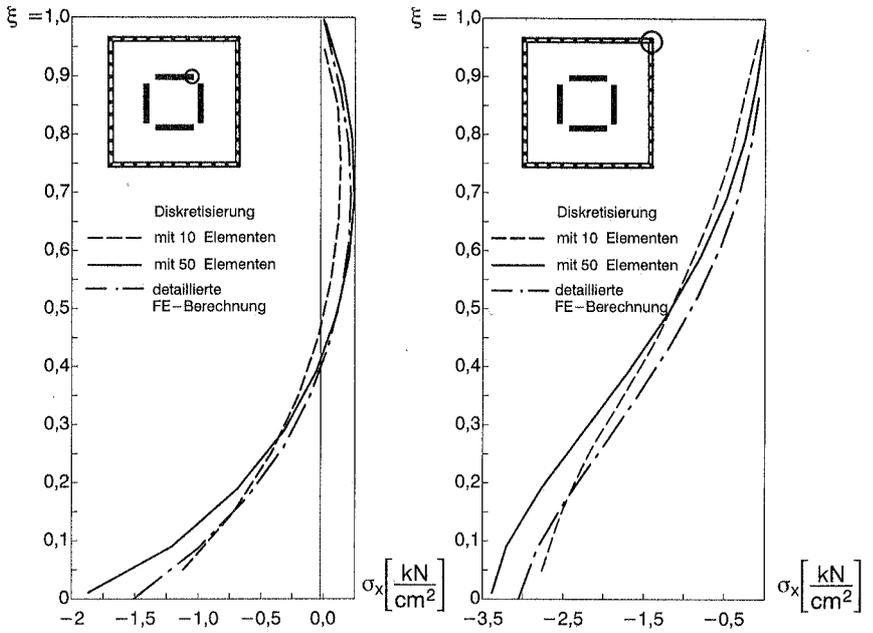


Bild 8.6: Verlauf der geglätteten Normalspannungen bei 10 bzw. 50 Elementen mit linearen Verschiebungsansätzen im Lastfall Biegung

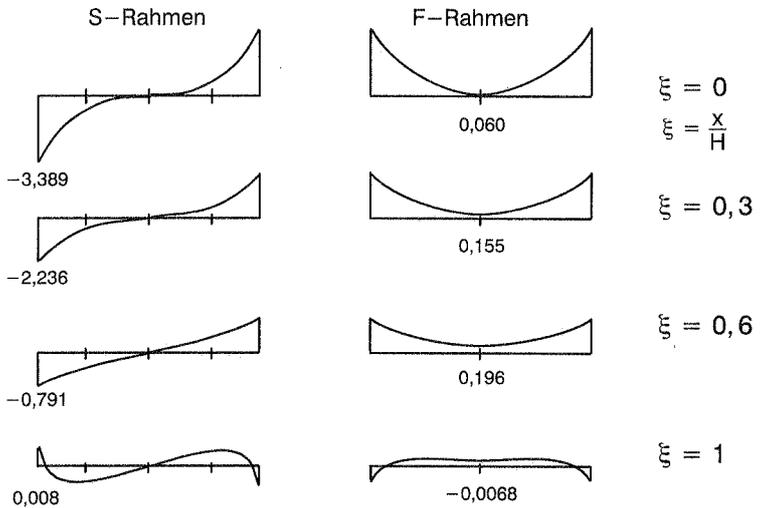


Bild 8.7: Normalspannungsverlauf im Querschnitt der S- und F-Rahmen für den Lastfall Biegung (Diskr. mit 50 Elementen)

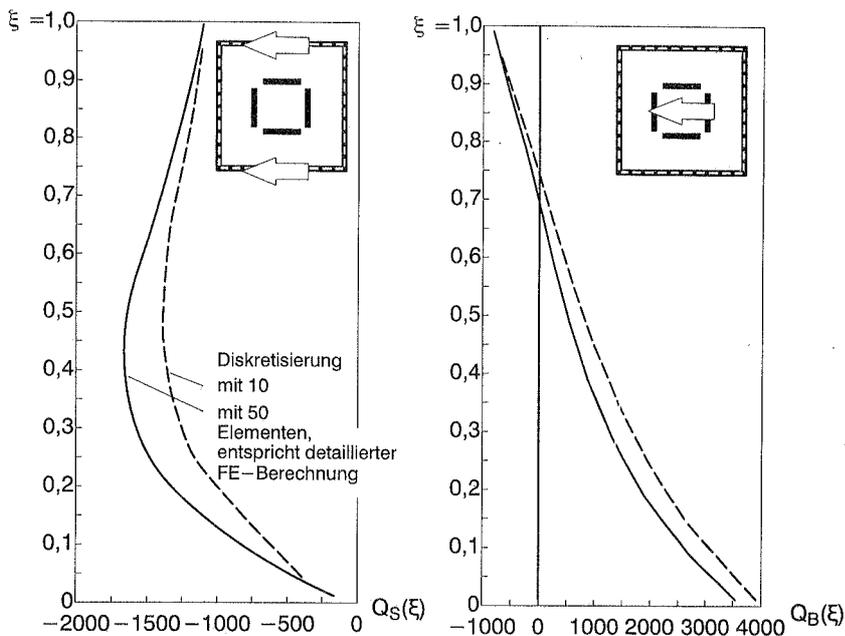


Bild 8.8: geglättete Querkraftverläufe in den Teilsystemen (nur Biegung)

Die Ränder der Wandscheiben sind aufgrund des nichtlinearen (kubischen) Verschiebungsansatzes schubspannungsfrei. Die Schubspannungen werden über den Querschnitt der Teilsysteme integriert, die daraus resultierenden Querkraftverläufe sind in Bild 8.8 dargestellt. Vergleichsberechnungen, bei einer detaillierten Modellierung mit Balken- und Scheibenelementen (FE-Programm TRIMAS), bestätigen diese Ergebnisse. Da die Schubspannungen im Querschnitt der S-Rahmen innerhalb des Elements konstant verlaufen (vgl. (5.28)), werden die linear verlaufenden Schubspannungen in den Querschnitten der Kernzone über das Element geglättet (nicht an den gemeinsamen Knoten). Die ermittelten Querkraftverläufe in den Teilsystemen zeigen, daß bei grober Elementierung ein linearer Verschiebungsansatz die "Lastumlagerung" im Bereich des Wendepunkts der Biegelinie nicht genau genug erfassen kann.

Eine Diskretisierung mit zweiknotigen Elementen und den damit zusammenhängenden linearen Verschiebungsansätzen erfordert bekanntermaßen eine entsprechend feine Elemententeilung, um brauchbare Ergebnisse zu erhalten, insbesondere für die Schnittgrößen, da hier die Ableitungen der Verschiebungsansätze eingehen. Vergleichsrechnungen mit unterschiedlicher Elementierung haben gezeigt, daß bei einer Diskretisierung des Systems mit 50 zweiknotigen Elementen, der zu erwartende

Fehler für die Normalspannungen im Fußpunkt der Wandscheibe bei etwa 10% liegt (Vergleich mit analytischer Lösung).

Infolge der Torsionsbeanspruchung ergeben sich die in Bild 8.9 dargestellten Verläufe für die Querschnittsverdrehung bzw. den Verlauf von primärem und sekundärem Torsionsmoment. Auch hier zeigt sich, daß eine grobe Diskretisierung die Verschiebungen zwar sehr gut wiedergeben kann, bei den Schnittgrößen ergeben sich dagegen im Bereich von Lastumlagerungen die zu erwartenden Ungenauigkeiten.

Die analytische Berechnung des Tragwerks (B-01) hat anhand der Labilitätszahl gezeigt, daß der Einfluß aus Theorie II. Ordnung zu berücksichtigen ist. Nach Gleichung (6.26) ergibt sich für die Biegebeanspruchung des Tragwerks mit einem linearen Elementansatz für die Verschiebungen die Gleichlast im Element mit der Bestimmungsgleichung:

$$\Delta q_{Th,II}(\xi) = [N(\xi)v'(\xi)]' = (N_0 + \Delta N \xi) v'' + \Delta N v' = \Delta N \cdot \frac{(w_k - w_l)}{\ell^2}$$

Der Verlauf der elementweise konstanten Abtriebskräfte $\Delta q_{Th,II}$ und der Iterationsverlauf bei den Verschiebungen sind in Bild 8.10 für eine Diskretisierung in Längsrichtung mit 10 Verallgemeinerten-Balkenelementen dargestellt.

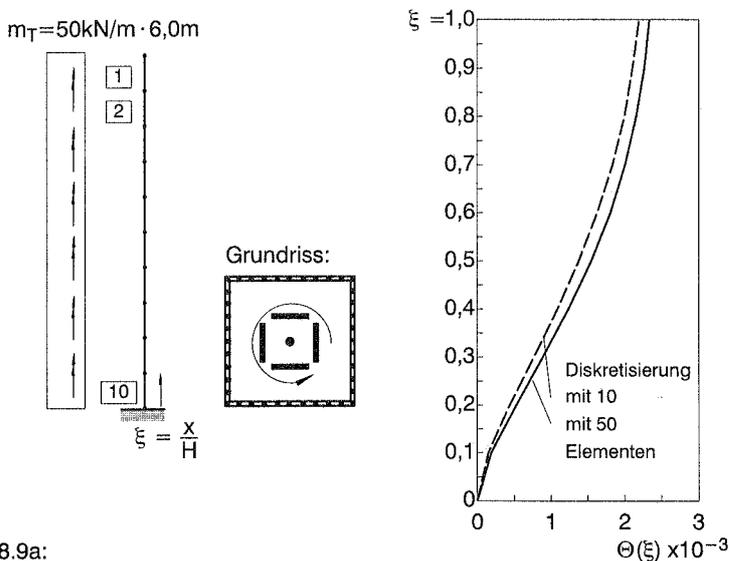


Bild 8.9a:

Verlauf der Querschnittsverdrehung bei Torsionsbeanspruchung

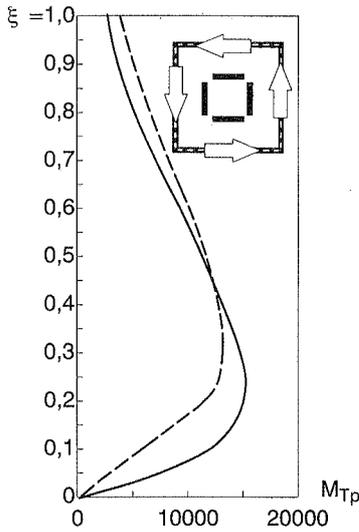


Bild 8.9b:
Verlauf des primären
Torsionsmoments M_{Tp}

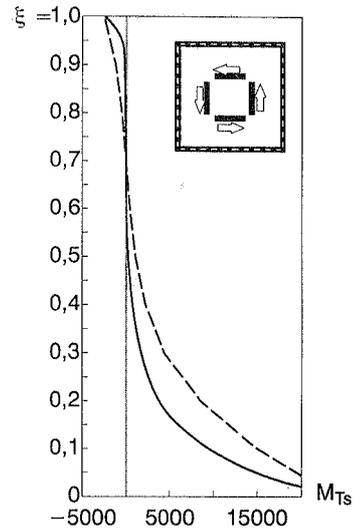


Bild 8.9c:
Verlauf des sekundären
Torsionsmoments M_{Ts}

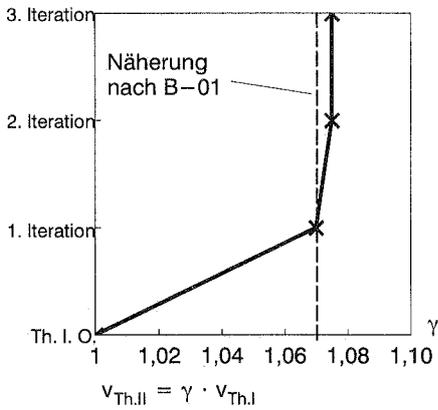
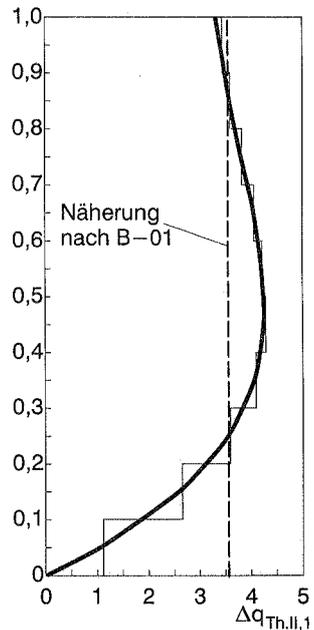


Bild 8.10:
Einfluß aus Theorie II. Ordnung,
Verlauf der Abtriebskräfte, Iterationsverlauf



B-03 Nicht-symmetrisches Tragwerk aus Stockwerkrahmen und Wandscheiben, analytische Berechnung

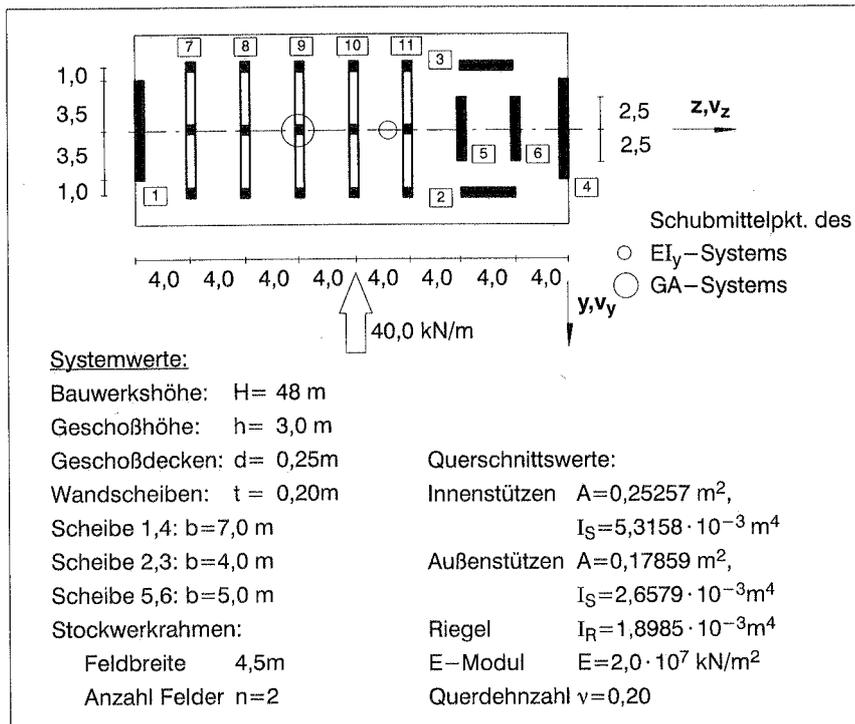


Bild 8.11: Berechnungsbeispiel B-03

Das Berechnungsbeispiel eines nicht-symmetrischen Hochhaustragwerks wurde erstmals von Glück (1970) bearbeitet. Allerdings wird auch bei seiner analytischen Methode der Einfluß aus den Stieldehnungen auf das Trag- und Verformungsverhalten nicht berücksichtigt ($EA_{\text{Stiel}} = \infty$). Dadurch sind über die Matrix T_B alle biegeweichen Wandscheiben und über T_S alle schubweichen Rahmenscheiben jeweils zu einem Teilsystem zusammengefaßt.

Das Gebäude besitzt eine Höhe von 48m bei einer Anzahl von 16 Stockwerken. Unter der Annahme gerissener Betonquerschnitte, wird mit einem effektiven E-Modul von $2,0 \cdot 10^7\text{ kN/m}^2$ gerechnet. Die resultierende, sich aus Druck- und Sogwirkung zusammensetzende Windlast beträgt $40,0\text{ kN/m}$. Die Abmessungen und die Systemwerte sind der Abbildung 8.11 zu entnehmen.

Für die schubweiche Ersatzscheibe der Stockwerkrahmen (Scheiben 7 bis 11) ergibt sich mit den wirksamen Trägheitsmomenten für Stiel und Riegel nach (3.23):

$$I_S^* \approx \frac{I_S}{(1-\beta_2)^3} = \frac{I_S}{\left(1-\frac{0,4}{3,0}\right)^3} = 1,54 \cdot I_S$$

und:

$$I_R^* \approx \frac{I_R}{\left(1-\frac{\beta_1}{2}\right)^3} = \frac{I_R}{\left(1-\frac{0,5}{4,5}\right)^3} = 1,42 \cdot I_R$$

eine Ersatzsteifigkeit der schubweichen Scheiben mit Hilfe von (3.22):

$$GA_{\text{ers}} = G n b t_{\text{ers}} = 12 \cdot \frac{E}{h} \cdot \frac{n(n+1) I_R^* I_S^*}{(n+1) b I_S^* + n h I_R^*} = 78525 \text{ kN}$$

Dabei wird ein mittleres Trägheitsmoment der Stiele von $I_S = 3,544 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ angesetzt, das sich aus der Summe der Einzelwerte, dividiert durch die Anzahl der Stiele, ergibt. Die Torsionssteifigkeiten $GI_{T,i}$ und $EI_{W,i}$ der Einzelscheiben werden vernachlässigt. Nach Gleichung (4.7) ist die Wölbsteifigkeit des Systems:

$$EI_W = \sum (EI_{y,i} y_i^2 + EI_{z,i} z_i^2) = 1,213 \cdot 10^{11} \text{ kNm}^4$$

Für die Torsionssteifigkeit ergibt sich nach den Gleichungen (4.9) und (4.10):

$$GI_T = \sum GA_{\text{ers},i} \cdot z_i^2 = 1,696 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2$$

Mit den Beziehungen (4.6) und (4.8) erhält man die Systemmatrizen:

$$\mathbf{T_B} = \begin{bmatrix} 0 & 4,267 \cdot 10^7 & 0 \\ 3,12 \cdot 10^8 & 0 & 4,159 \cdot 10^9 \\ 4,159 \cdot 10^9 & 0 & 1,213 \cdot 10^{11} \end{bmatrix} \quad \text{und:} \quad \mathbf{T_S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3,926 \cdot 10^5 & 0 & 7,853 \cdot 10^6 \\ 7,853 \cdot 10^6 & 0 & 1,696 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der vorhandenen Symmetrie bezüglich der z-Achse ist die erste der beiden Differentialgleichungen entkoppelt. Da keine Belastung in dieser Richtung vorhanden

ist, ist die Verschiebung in z-Richtung Null. Das reduzierte Problem stellt sich damit folgendermaßen dar:

$$\mathbf{T}_B \mathbf{V}'''' - \mathbf{T}_S \mathbf{V}'' = \mathbf{p}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{bmatrix} 3,12 \cdot 10^8 & 4,159 \cdot 10^9 \\ 4,159 \cdot 10^9 & 1,213 \cdot 10^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y'''' \\ \Theta_x'''' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,926 \cdot 10^5 & 7,853 \cdot 10^6 \\ 7,853 \cdot 10^6 & 1,696 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y'' \\ \Theta_x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -640 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der Beziehung (4.18) erhält man für die Eigenwerte des Differentialgleichungssystems:

$$\lambda_1^2 = 1,54 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = 1,56 \cdot 10^{-3}$$

Einsetzen der Eigenwerte in (4.17) und Anpassen an die Bedingungen (4.14) und (4.15) liefert die Eigenvektoren:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ -0,0478 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1,902 \cdot 10^8}} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,07032 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1,494 \cdot 10^9}}$$

Das System entkoppelter Differentialgleichungen hat nach Beziehung (4.13) die Form:

$$\Phi^T \mathbf{T}_B \Phi \hat{\mathbf{V}}'''' - \Phi^T \mathbf{T}_S \Phi \hat{\mathbf{V}}'' = \Phi^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1'''' \\ \hat{v}_2'''' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,544 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 1,563 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1'' \\ \hat{v}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,82 \cdot 10^{-4} \\ -2,2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Mit den in Abschnitt 4.5 hergeleiteten Zusammenhängen werden mit:

$$\alpha_{\hat{v}_1} H = \lambda_1 H = 0,596 \quad \text{und} \quad \alpha_{\hat{v}_2} H = \lambda_2 H = 1,898$$

die Faktoren:

$$K_1(\alpha_{\hat{v}_1}, H) = 0,87 \quad \text{und} : \quad K_1(\alpha_{\hat{v}_2}, H) = 0,42$$

aus dem Bild A–05 im Anhang abgelesen. Daraus ergeben sich die Verschiebungen:

$$\hat{v}_1(H) = \frac{p_1 H^4}{8} \cdot K_1(\alpha_{\hat{v}_1}, H) = -393,7$$

$$\text{und:} \quad \hat{v}_2(H) = \frac{p_2 H^4}{8} \cdot K_1(\alpha_{\hat{v}_2}, H) = -613,1$$

Mit der Beziehung (4.12) werden schließlich die Verschiebung bzw. die Verdrehung am Kopfende ermittelt:

$$\mathbf{v} = \Phi \cdot \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_y(H) \\ \Theta_x(H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,044 \\ 2,49 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Die Verschiebungsverläufe sind in Bild 8.12 dargestellt. Mit den Zusammenhängen aus Abschnitt 4 lassen sich auch die Schnittgrößen in den Einzelscheiben ermitteln. Beispielsweise ergibt sich für die Querkraft (nicht dargestellt) in den Wandscheiben:

$$Q_{b,y} = \begin{bmatrix} -EI_{z,i} & EI_{z,i}z_i \end{bmatrix} \Phi \cdot \hat{\mathbf{v}}'''$$

wobei:

$$\hat{v}_1'''(\xi) = p_1 H \cdot K_2(\alpha_{\hat{v}_1}, H, \xi)$$

$$\hat{v}_2'''(\xi) = p_2 H \cdot K_2(\alpha_{\hat{v}_2}, H, \xi)$$

Ein Vergleich mit den Berechnungsergebnissen aus einer detaillierten FE–Berechnung (Programm TRIMAS) zeigt bei der Lastverteilung im Querschnitt eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der analytischen Berechnung. Die analytische Lösung zeigt sich bezüglich den Querverschiebungen allerdings etwas zu steif, da die Flexibilitäten aus den Stieldehnungen nicht berücksichtigt wurden. Die Querschnittsverdrehungen sind deshalb auch zu groß.

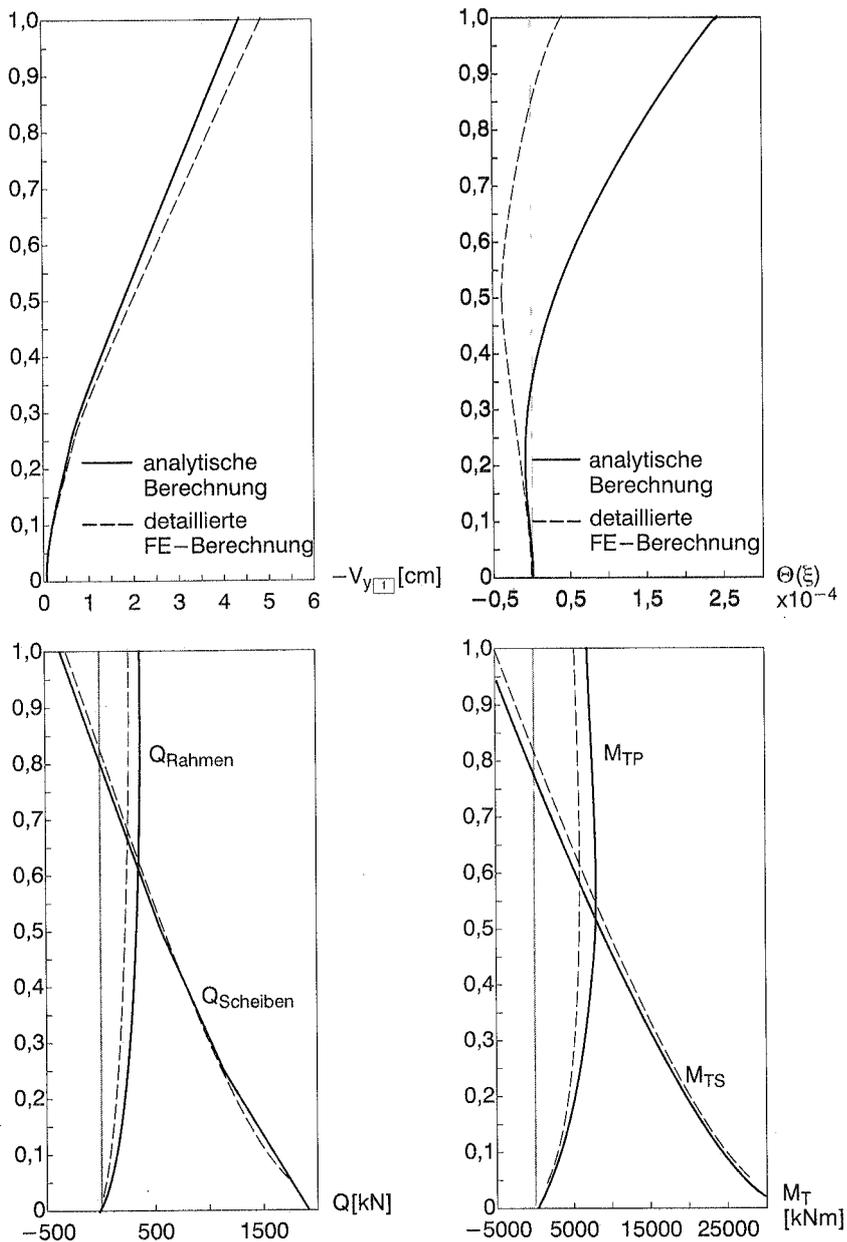


Bild 8.12: Berechnungsergebnisse

B-04 Nicht-symmetrisches Tragwerk aus Stockwerkrahmen und Wandscheiben, numerische Berechnung

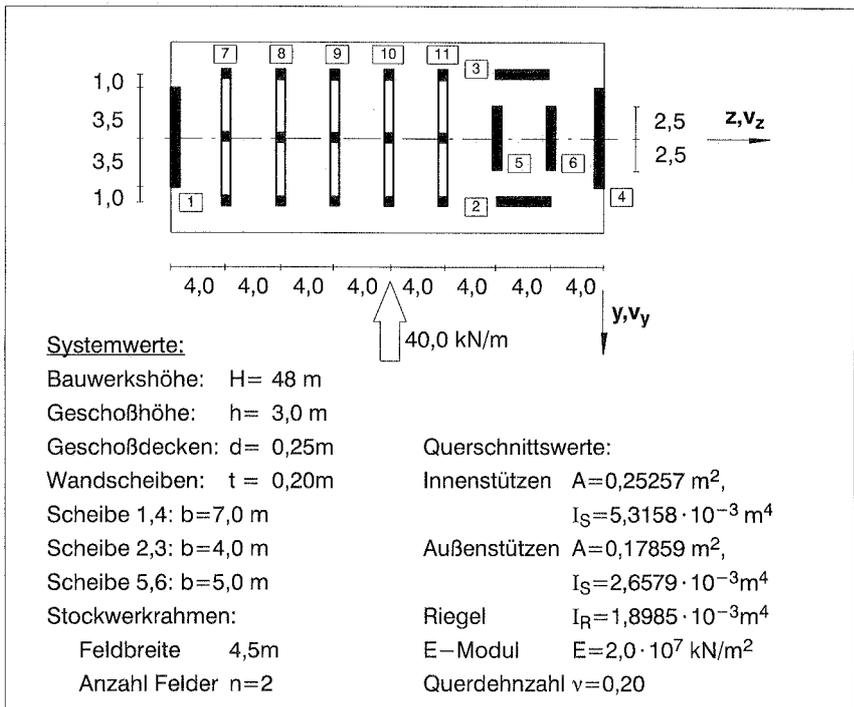


Bild 8.13: Berechnungsbeispiel B-04

Für die numerische Berechnung des Tragwerks (Bild 8.13) werden die Stockwerkrahmen (Scheibentyp ③) und die Wandscheiben jeweils zu einem Teilsystem zusammengefaßt. Sinnvoll ist diese Vorgehensweise allein deshalb, da bei bekannter Lasteinwirkung auf das gesamte Teilsystem aufgrund der Affinität im Verformungsverhalten der Einzelscheiben auch die Lastverteilung auf die Einzelscheiben bekannt ist. Analog dazu werden auch alle biegeweichen Wandscheiben zu einem Teilsystem zusammengefaßt. Der Schubanteil an der Gesamtverformung wird bei den Wandscheiben zwar berücksichtigt, wird sich aber sicherlich unerheblich auf die Lastverteilung auswirken.

Für die schubweiche Ersatzscheibe der Stockwerkrahmen ergibt sich mit den wirksamen Trägheitsmomenten für Stiel und Riegel nach (3.23):

$$I_S^* = \frac{I_S}{(1-\beta_2)^3} = \frac{I_S}{\left(1-\frac{0,4}{3,0}\right)^3} = 1,536 \cdot I_S \quad \text{und:} \quad I_R^* = \frac{I_R}{\left(1-\frac{\beta_1}{2}\right)^3} = \frac{I_R}{\left(1-\frac{0,5}{4,5}\right)^3} = 1,42 \cdot I_R$$

eine Ersatzdicke nach (3.22) mit:

$$t_{\text{ers}} = 1,047 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Dabei wird ein mittleres Trägheitsmoment der Stiele von $I_S = 3,544 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ angesetzt, das sich aus der Summe der Einzelwerte, dividiert durch die Anzahl der Stiele, ergibt.

Für die numerische Berechnung werden dreiknotige Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz gewählt. Das Tragwerk wird mit 10 Elementen diskretisiert. Für die Steifigkeitsmatrix der Balkenelemente ergibt sich der Aufbau:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{2}{15} G \ell B & -\frac{1}{2} G C & -\frac{8}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{15} G \ell B & \frac{2}{3} G C & \frac{1}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A - \frac{1}{30} G \ell B & -\frac{1}{6} G C \\ \frac{7}{3} \frac{G}{\ell} D & -\frac{2}{3} G C^T & -\frac{8}{3} \frac{G}{\ell} D & \frac{1}{6} G C^T & \frac{1}{3} \frac{G}{\ell} D & \\ \frac{16}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{8}{15} G \ell B & 0 & -\frac{8}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{15} G \ell B & \frac{2}{3} G C & \frac{2}{3} G C & \\ \frac{16}{3} \frac{G}{\ell} D & -\frac{2}{3} G C^T & -\frac{8}{3} \frac{G}{\ell} D & -\frac{8}{3} G C & -\frac{8}{3} G C & \\ \frac{7}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{2}{15} G \ell B & \frac{1}{2} G C & \frac{1}{2} G C & \frac{1}{2} G C & \frac{1}{2} G C & \\ & & & & & \frac{7}{3} \frac{G}{\ell} D \end{bmatrix}$$

Für die Stockwerkrahmen (Scheibentyp 3, $n < 5$) ergibt sich die Matrix \bar{A} der verallgemeinerten Querschnittswerte zu:

$$\bar{A}_{7-11} = \sum_{(5)} A_{\text{St.}} \mathbf{f}(\bar{s}) \mathbf{f}^T(\bar{s}) = \begin{bmatrix} 0,24173 & 0,06314 & 0 & 0,12628 \\ & 0,24173 & 0 & 0,12628 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0,25257 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

Für den Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix erhält man mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
 k_{11,ab} &= \frac{7}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{2}{15} G \ell B, & k_{12,ab} &= -\frac{8}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{1}{15} G \ell B, \\
 k_{13,ab} &= \frac{1}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A - \frac{1}{30} G \ell B, & k_{22,ab} &= \frac{16}{3} \frac{E}{\ell(1-\nu^2)} A + \frac{8}{15} G \ell B, \\
 k_{11,c} &= -\frac{1}{2} G C, & k_{12,c} &= \frac{2}{3} G C, & k_{13,c} &= -\frac{1}{6} G C, \\
 k_{11,d} &= \frac{7}{3} \frac{G}{\ell} D, & k_{12,d} &= -\frac{8}{3} \frac{G}{\ell} D, & k_{13,d} &= \frac{1}{3} \frac{G}{\ell} D, & k_{22,d} &= \frac{16}{3} \frac{G}{\ell} D
 \end{aligned}$$

nach Umsortieren der Freiheitsgrade die Form: $\mathbf{K} =$

$k_{11,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{22,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $2k_{11,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{22,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $2k_{11,ab}$		$k_{11,c}$ $k_{12,c}$ $k_{13,c}$ $-k_{12,c}$ $k_{12,c}$ $-k_{13,c}$ $-k_{12,c}$ $k_{12,c}$ $k_{13,c}$ $-k_{12,c}$ $k_{12,c}$	
	$2k_{11,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{22,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{13,ab}$ $k_{12,ab}$ $2k_{11,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{12,ab}$ $k_{22,ab}$		$k_{12,c}$ $k_{13,c}$ $-k_{12,c}$ $k_{12,c}$ $k_{13,c}$ $-k_{13,c}$ $k_{12,c}$ $k_{12,c}$
		$k_{11,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $k_{22,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $2k_{11,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $k_{22,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $2k_{11,d}$	
			$2k_{11,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $k_{22,d}$ $k_{12,d}$ $k_{13,d}$ $k_{12,d}$ $2k_{11,d}$ $k_{12,d}$ $k_{12,d}$ $k_{22,d}$ $k_{12,d}$

Ein Vergleich mit der analytischen Berechnung (B-03) zeigt eine gute Übereinstimmung bei den Verschiebungen des Kopfquerschnitts. Da dort die Einflüsse aus den Stieldehnungen allerdings vernachlässigt wurden, ist das Rechenmodell der analytischen Lösung etwas zu steif. Vergleichsrechnungen mit einer feineren Elementierung (50 Elemente) zeigten Abweichungen um maximal 5% bei der Lastverteilung Q. In Bild 8.14 sind die Biegelinie und der Verlauf der Querschnittsverdrehung dargestellt. Eine Vernachlässigung der Flexibilitäten ($EA_S = \infty$) aus den Stieldehnungen hat in diesem Beispiel einen wesentlichen Einfluß auf die Verformungen und auf die Verteilung des resultierenden Torsionsmoments M_t bzw. der Querkraft Q im Querschnitt des Tragwerks (Abweichungen ca 20%). Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus einer detaillierten FE-Berechnung (vgl. Bild 8.12) unterstreicht die Qualität des Rechenmodells.

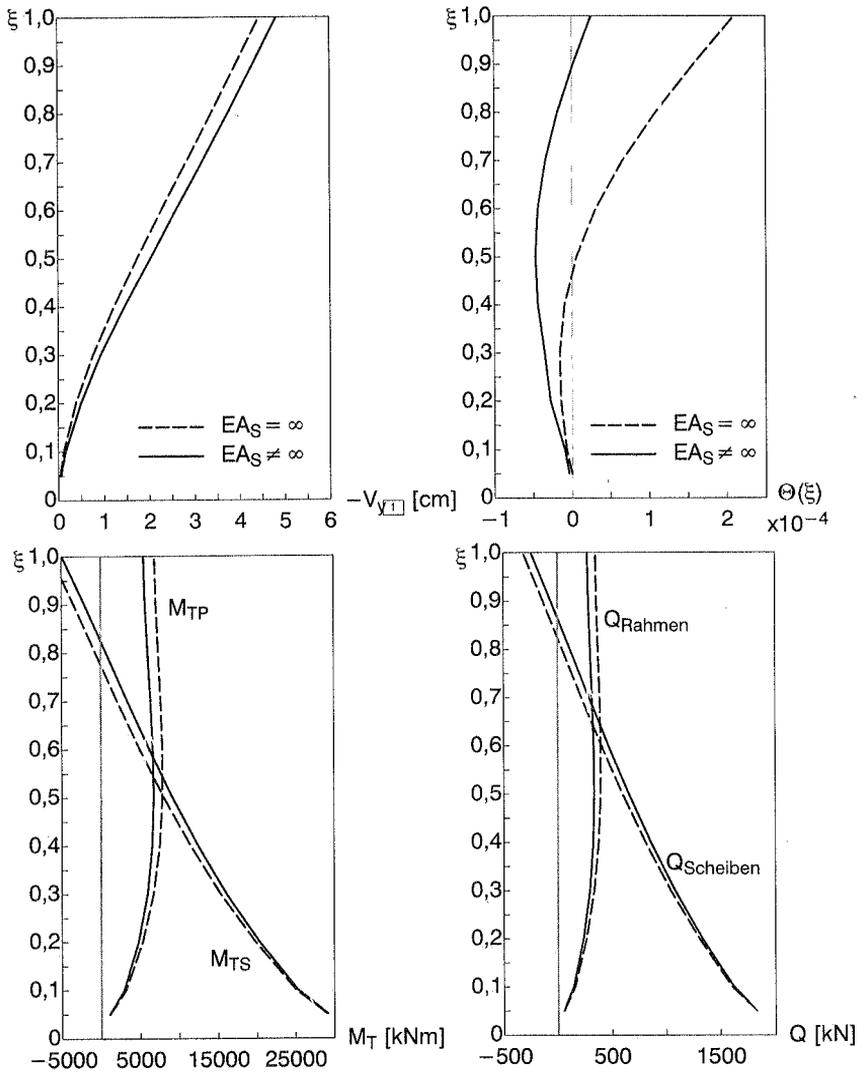


Bild 8.14: Berechnungsergebnisse:
 Verschiebung in y -Richtung, Querschnittsverdrehung, Aufteilung des
 Torsionsmoments, Aufteilung der resultierenden Querkraft

B–05 Gegliederter Hohlkasten, numerische Berechnung

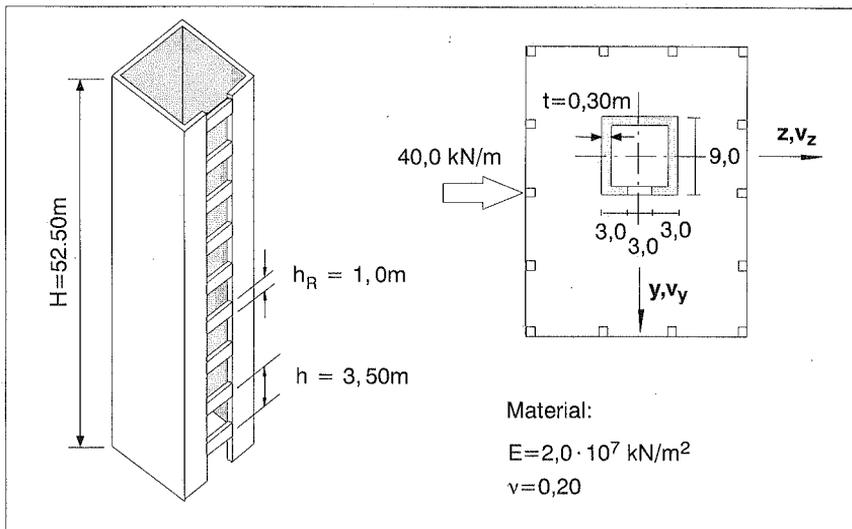


Bild 8.15: Berechnungsbeispiel eines gegliederten Hohlkastens

Ein 15-geschossiges Hochhaus (Bild 8.15) ist mit einem einzelnen zentrisch angeordneten Kern ausgesteift. Die vertikalen Stützen werden dabei zur Aussteifung des Bauwerks gegen horizontale Lasten nicht herangezogen. Die Riegel werden in ihrer Wirkungsweise durch eine kontinuierliche schubweiche Scheibe (Typ 2) ersetzt. Für die Dicke der schubweichen Ersatzscheibe ergibt sich aus der Beziehung (3.21) mit $\nu = 0,20$:

$$t_{\text{ers}} = 0,076 \cdot t$$

Die Beziehungen (3.11) ergeben einen nahezu biegesteifen Anschluß für die Riegel ($c_a = c_b = \infty$). Der Hochhauskern wird mit insgesamt 10 dreiknotigen Elementen (quadratischer Verschiebungsansatz) diskretisiert. Vergleichsrechnungen mit einer feineren Elementierung ergaben Abweichungen bei den Normalspannungen um maximal 5%, so daß diese Elementierung als angemessen erscheint.

In den Bildern (8.16a) bis (8.16e) sind die Verformungsverläufe, die Lage des Drillruhepunkts und die Spannungsverläufe dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Normalspannungen innerhalb der Einzelscheiben nahezu linear verlaufen. Der Einfluß aus den nicht-linearen Anteilen (Koordinatenfunktionen f_3 und f_4) macht sich bei den Wandscheiben

praktisch nicht bemerkbar. Die Zugspannungen im Kernquerschnitt werden durch die Vertikallasten aus dem Eigengewicht der Deckenplatten überdrückt.

Die Lage des Drillruhepunkts y_M wurde ermittelt, indem das System mit einem konstanten Torsionsmoment $m_T(x)$ beansprucht wurde. Die bezogene Lage des Drillruhepunkts ergibt sich dann aus der Beziehung:

$$\frac{y_M}{b} = \frac{v_z}{\Theta b}$$

Die Ergebnisse zeigen, daß die Annahme eines geschlossenen oder offenen Querschnitts keinesfalls gerechtfertigt wäre. Eine so durchgeführte Näherungsberechnung führt mit Sicherheit zu einer falschen Abbildung des Trag- und Verformungsverhalten. Der Schubmittelpunkt kann als Querschnittswert nicht herangezogen werden, so daß Biege- und Torsionsbeanspruchung immer miteinander gekoppelt sind. Aufgrund des unterschiedlichen Trag- und Verformungsverhalten von Wandscheiben und gegliederten Scheiben liegt der Drillruhepunkt auf einer räumlich gekrümmten Achse.

Die diskreten Riegelquerkräfte werden vereinfacht über die Beziehung:

$$Q_R(\bar{x}) = \tau_R(\bar{x}) \cdot h \cdot t_{\text{ers}}$$

ermittelt. Die maximale Riegelquerkraft findet sich im 4. und 5. Stockwerk:

$$Q_{R,\text{max}} = 0,49 \cdot 3,50 \cdot (0,076 \cdot 0,30) \cdot 10^4 \approx 390 \text{ kN}$$

Eine Vergleichsberechnung mit Hilfe eines Finite-Elemente Programms (TRIMAS) liefert eine maximale Querkraft $Q_{R,\text{max}}=350 \text{ kN}$ im 4. Riegel. Das sich aus der Querkraft ergebende maximale Biegemoment in diesem Riegel beträgt:

$$M_{R,\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot Q_{R,\text{max}} \cdot \ell_R \approx 585 \text{ kNm}$$

Dieses führt auf eine Biegedruckspannung im Riegel von $\sigma_{b,\text{max}}=M/W=1,17 \text{ KN/cm}^2$. Die mit einem FE-Programm bei Verwendung von Scheibenelementen durchgeführte Rechnung zeigt im Vergleich, daß die gegliederte Scheibe etwas zu steif ist, so daß die Lage des Schubmittelpunkts nicht richtig erfaßt wird (Bild 8.16c). Dies ist offensichtlich darauf zurückzuführen, daß bei der Ermittlung der Ersatzdicke t_{ers} der Einfluß aus den Stieldehnungen und des flexiblen Anschlusses vernachlässigt wurden. Als Folge davon ist auch die Torsionsbeanspruchung aufgrund des zu kleinen Hebelarms zu klein. Die Spannungsverteilung im Querschnitt wird dagegen sehr gut wiedergegeben (Bild 8.16 d,e).

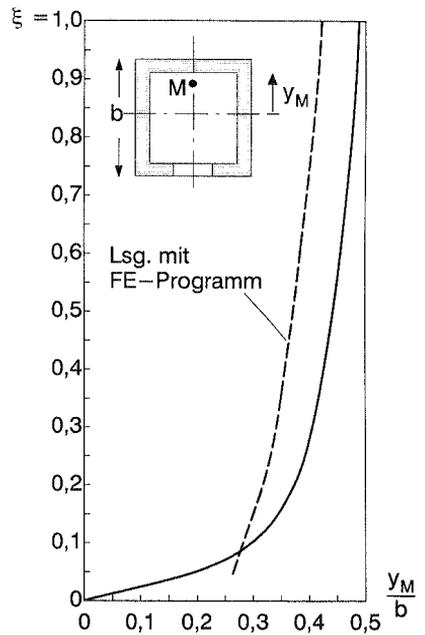
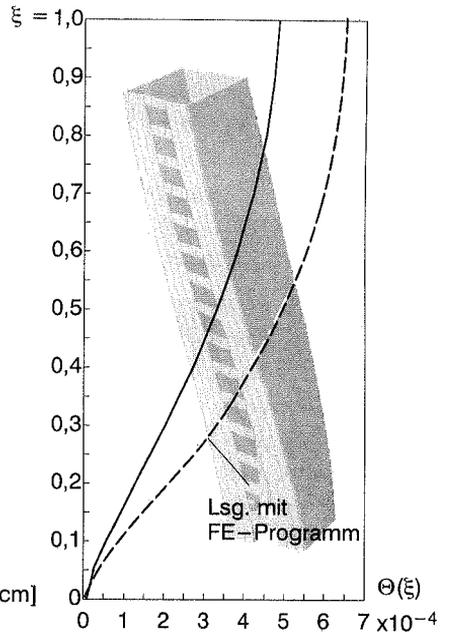
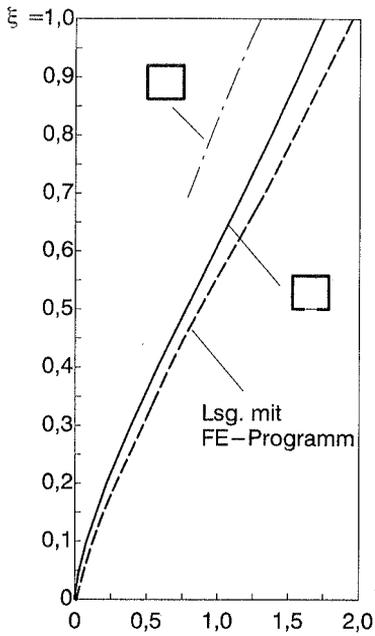


Bild 8.16a:
Verlauf der Verschiebungen

Bild 8.16b:
Verlauf der Verdrehungen

Bild 8.16c:
Lage des Drillruhepunkts

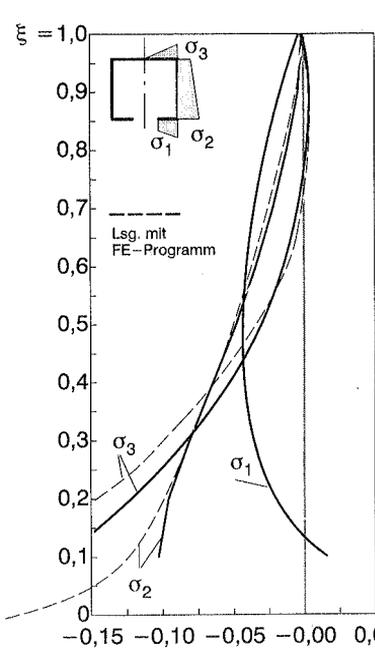


Bild 8.16d: Normalspannungen

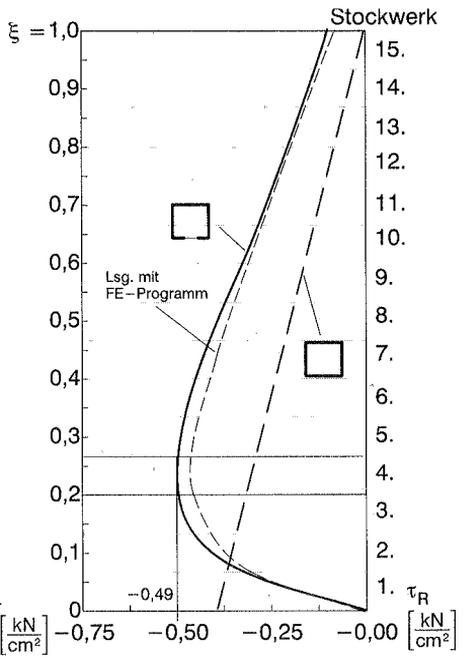


Bild 8.16e: Schubspannungen in der schubweichen Scheibe

9. Schlußbemerkung

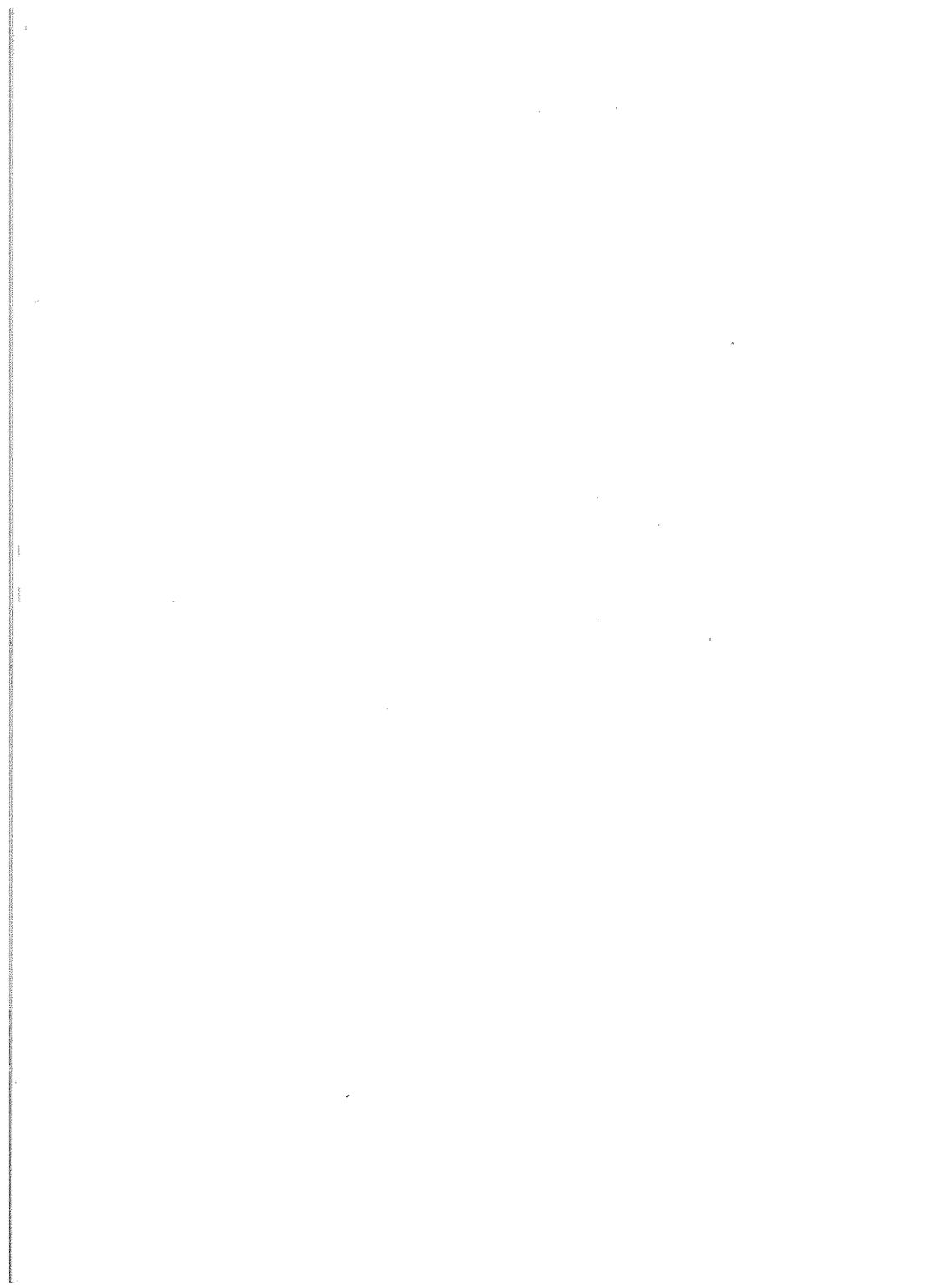
Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer Lösungsstrategie, die hinsichtlich der Modellierung und der Berechnung von regelmäßigen Hochhaustragwerken sowie der Ergebnisauswertung eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der "klassischen" Finite–Elemente–Methode (bei Verwendung von Balken– und Scheibenelementen) darstellt. Das in seinem Aufbau regelmäßige Tragwerk wird dabei durch Zusammenfassen aller aussteifenden Bauteile, in Anlehnung an die "Verallgemeinerte Technische Biegetheorie" (VTB) von Schardt, als Verallgemeinerter Balken betrachtet.

Wirklichkeitsnahe Ansätze bezüglich der Verschiebungsverläufe im Querschnitt, die sich wesentlich an dem Trag– und Verformungsverhalten der aussteifenden Bauteile orientieren, ermöglichen die Herleitung von "Verallgemeinerten Querschnittswerten". Eine Kopplung von abhängigen Freiheitsgraden wird in Form von Verallgemeinerten Koordinatenfunktionen bereits im Ansatz erfaßt. Dabei werden auch ebene, in ihrem Aufbau regelmäßige Stockwerkrahmen als kontinuierliche Scheiben betrachtet.

Die Herleitung kontinuierlicher Ersatzsysteme bietet insbesondere für regelmäßige Rahmentragwerke und gegliederte Scheiben den Vorteil, eine "freie", d.h. von der Geschößzahl und –höhe unabhängige Diskretisierung des Tragwerks in seiner Längsachse vornehmen zu können. Berechnungsbeispiele unterstreichen die Effizienz der dargestellten Lösungsstrategie. Diese zeigt sich insbesondere in der einfachen Modellierung des Tragwerks, da Informationen, die den Querschnittsaufbau betreffen, hierbei ausreichen. Einflüsse aus Theorie II. Ordnung werden in Form von "Abtriebskräften" berücksichtigt.

Der Einfluß des nichtlinearen Materialverhaltens des Werkstoffes "Stahlbeton" auf das Tragverhalten der aussteifenden Bauteile wurde in dieser Arbeit nicht diskutiert und liefert sicherlich Ansätze für weitere Arbeiten.

Die in dieser Arbeit hergeleitete Lösungsstrategie wurde in dem Computerprogramm HIGH–RISE realisiert.



Literatur

- Altenbach (1994) Altenbach J., Kissing W., Altenbach H., Dünnwandige Stab- und Stabschalentragwerke, Vieweg-Verlag, 1994
- Ambos (1977) Ambos G., Zur wirklichkeitsnahen Berechnung aussteifender Bauteile von Hochhäusern, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, Verlag Ernst & Sohn, 1977
- Bachmann (1995) Bachmann H., Erdbebensicherung von Bauwerken, Birkhäuser Verlag Basel, 1995
- Barnard (1967) Barnard P. R., Schwaighofer J., The interaction of shear walls connected solely through slabs, proceedings, Symposium on Tall Buildings, Pergamon Press, New York, 1967, pp. 157–173
- Beck (1962) Beck H., Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls, Journal of the American Concrete Institute, 1962
- Beck (1967) Beck H., König G., Haltekräfte im Skelettbau, Beton- und Stahlbetonbau, 1/1967, S 7–42
- Beck (1968) Beck H., König G., Reeh H., Kenngrößen zur Beurteilung der Torsionssteifigkeit von Hochhäusern, Beton- und Stahlbetonbau 12/1968, S 268–277
- Beck (1969) Beck H., Schäfer H. G., Die Berechnung von Hochhäusern durch Zusammenfassung aller aussteifenden Bauteile zu einem Balken, Der Bauingenieur 3/1969, S 80–87
- Beck (1971) Beck H., Eisert H. D., Zur Berechnung mehrfeldriger Windrahmen, Der Bauingenieur 8/1971, S 290–299
- Becker (1974) Becker G., Die Berechnung gegliederter Hohlkästen, Diss. TH Darmstadt, 1974
- Brandt (1976) Brandt B., Zur Berechnung der haltenden Bauteile von Hochhäusern, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, Ernst & Sohn, 1976
- Cheung (1976) Cheung Y.K., Finite Strip Method in Structural Analysis, Oxford Pergamon Press, 1976
- Cook (1983) Cook R.D., Zhaohua F., Beam elements on two-parameter elastic foundations, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, 6/1983, pp. 1390–1402

- Coull (1983) Coull A., Wong Y. C., Design of floor slabs coupling shear walls, Journal of Structural Engineering, Vol. 109, 1/1983, pp. 109–125
- Coull (1993) Coull A., Wahab A. F., Lateral load distribution in asymmetrical tall building structures, Journal of Structural Engineering, Vol. 119, 4/1993, pp. 1032–1047
- Eisert (1967) Eisert H. D., Ein Beitrag zur Berechnung mehrfeldriger Windrahmen als gegliederte Scheiben, Dissertation, TH Darmstadt, 1967
- Eschenauer (1993) Eschenauer H., Schnell W., Elastizitätstheorie, BI Wissenschaftsverlag, 1993
- Fey (1966) Fey T., Vereinfachte Berechnung von Rahmensystemen des Stahlbetonbaus nach der Theorie 2. Ordnung, Der Bauingenieur 41, 1966, S 231–238
- Franzmann (1983) Franzmann G., Liphardt S., Programm HHAUS, Benutzerhandbuch–, CAD–Berichte, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Januar 1983
- Gluck (1970) Gluck J., Lateral–load analysis of asymmetric multistory structures, Journal of Structural Division, Vol. 96, 2/1970, pp. 317–333
- Grasser (1979) Grasser E., Bemessung von Beton– und Stahlbetonbauteilen nach DIN 1045, 2. Auflage, DAfStb, Heft 220, Tafel 1.11a S 30, Ernst & Sohn, 1979
- Hampe (1985) Hampe E., Büttner O., Bauwerk Tragwerk Tragstruktur, Ernst & Sohn, 1985
- Hees (1988) Hees G., Pohlmann G., Baustatik, HÜTTE Bautechnik IV Teil B, Konstruktiver Ingenieurbau 1, S 98–108, Springer–Verlag, 1988
- Hock (1986) Hock B., Schäfer K., Schlaich J., Fugen und Aussteifungen in Stahlbetonskelettbauten, DAfStb H. 368, 1986
- Hoenderkamp (1995) Hoenderkamp H., Approximate deflection analysis of non–symmetric high–rise structures, Habitat and the High–Rise, proceedings of the fifth world congress, Amsterdam, May 1995, pp. 1185–1210,
- Hofmann (1992) Hofmann T. J., Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie, Bericht Nr. 15/(1992), Dissertation Universität Stuttgart, 1992

- Kantorovich (1956) Kantorovich L.W., Krylow W. I., Näherungsmethoden der höheren Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
- König (1966) König G., Ein Beitrag zur Berechnung aussteifender Bauteile von Skelettbauten, Dissertation, TH Darmstadt, 1966
- König (1970) König G., Zilch K., Ein Beitrag zur Berechnung von Bauwerken im böigen Wind, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Ernst & Sohn, 1970
- König (1972) König G., Zilch K., Zur Windwirkung auf Gebäude, Beton– und Stahlbetonbau, 2/1972, S 32–42
- König (1990) König G., Liphardt S., Hochhäuser aus Stahlbeton, Betonkalender Teil II, Verlag Ernst & Sohn, 1990
- Kristek (1991) Kristek V., Studnicka J., Negative shear lag in flanges of plated structures, Journal of Structural Engineering, Vol. 117, 12/1991, pp 3553–3569
- Kristek (1993) Kristek V., Bauer K., Stress Distribution in Front Columns of High–Rise Buildings, Journal of Structural Engineering, Vol. 119 No. 5, Mai 1993, pp. 1464–1483
- Kwan (1992) Kwan A. K. H., Analysis of buildings using a strain–based element with rotational d.o.f., Journal of Structural Engineering 5/1992, pp. 1191–1212
- Ladberg (1996) Ladberg W., Commerzbank–Hochhaus in Frankfurt/Main, Planung, Fertigung und Montage der Stahlkonstruktion, Stahlbau 10/1996, pp. 356–367
- Liphardt (1977) Liphardt S., Berechnung von Hohlkästen aus Rahmen ohne und mit Wandscheiben als Aussteifung von Hochhäusern, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt Heft 21, Ernst & Sohn 1977
- Luz (1981) Luz E., Gurr S., Berechnung von Hochhausschwingungen im Hinblick auf die Beanspruchung durch Erdbeben, Ingenieur–Archiv 51, 1981, S 75–88
- McCallen (1994) McCallen D. B., Large–Scale Computations in Analysis of Structures, Analysis and Computation, proceedings of the eleventh conference of the ASCE in Atlanta, 1994

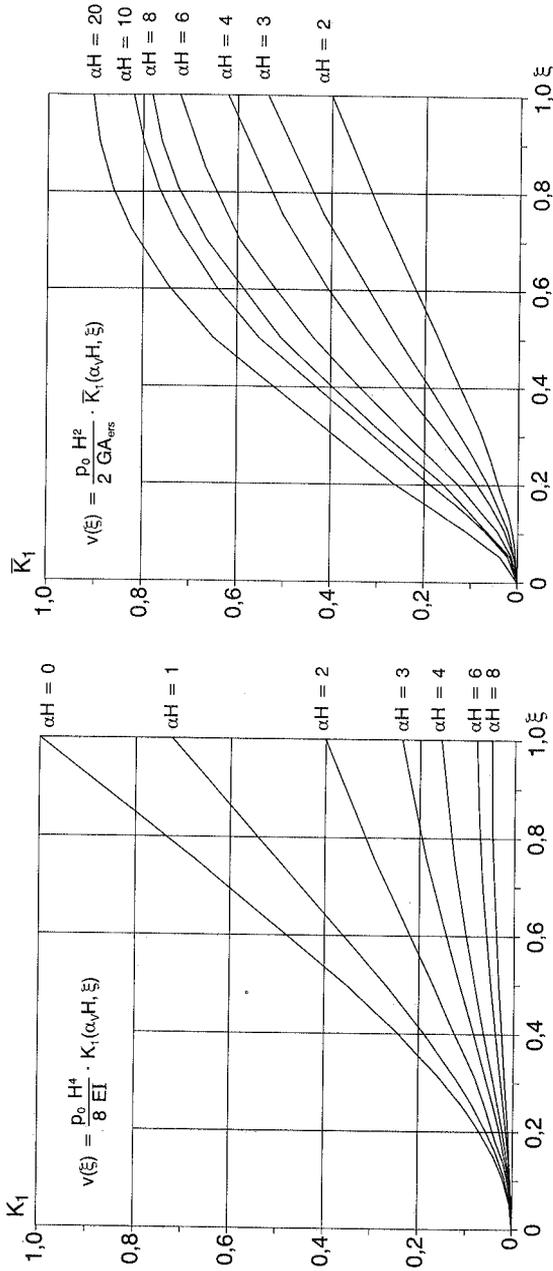
- Müller, Keintzel (1984) Müller F. P., Keintzel E., Erdbebensicherung von Hochbauten, Ernst & Sohn, 1984
- Nadjai (1996) Nadjai A., Johnson D., Elastic Analysis of Spatial Shear Wall Systems with Flexible Bases, The Structural Design of Tall Buildings, Vol. 5, 1/1996, pp. 55–72
- Netzel (1972) Netzel D., Beitrag zur wirklichkeitsnahen Berechnung und Bemessung einachsig ausgesteifter, schlanker Gründungsplatten, Dissertation, Universität Stuttgart, 1972
- Obst (1974) Obst E., Die Berechnung der aussteifenden Bauteile von Hochhäusern unter Berücksichtigung eines nichtlinear-elastischen Werkstoffverhaltens, Dissertation, TH Darmstadt, 1974
- Pecknold (1975) Pecknold D. A., Slab Effective Width for Equivalent Frame Analysis, Journal of the American Concrete Institute, 1975
- Pekau (1995) Pekau O. A., Zielinski Z. A., Lin L., Displacement and natural frequencies of tall building structures by Finite Story Method, Computers & Structures Vol. 54 No.1, 1995, pp. 1–13
- Pekau (1996) Pekau O. A., Zielinski Z. A., Lin L., Static and dynamic analysis of tall tube-in-tube structures by finite story method, Engineering Structures Vol. 18 No.7, 1996, pp. 515–527
- Petersen (1982) Petersen C., Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, Vieweg, 1982, S 157 ff
- du Preez (1972) du Preez R., Berechnung prismatischer Flächentragwerke mit Hilfe von finiten Streifenelementen, Die Bautechnik 5/1972, S 102–106
- Przemieniecki (1968) Przemieniecki J.S., Theorie of matrix structural analysis, Mc-Graw-Hill Book Co. 1968, New York, N. Y.
- Qadeer (1969) Qadeer A., Stafford Smith B., The bending stiffness of slabs connecting shear walls, ACI Journal, Juni 1969, pp. 464–472
- Reeh (1970) Reeh H., Ein Beitrag zur Berechnung aussteifender auf Biegung und Torsion beanspruchter Bauteile von Hochhäusern unter Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung, Dissertation, TH Darmstadt, 1970

- Rosman (1964) Rosman R., Approximate analysis of shear walls subjected to lateral loads, Journal A.C.I., Vol. 61 No. 6, Juni 1964
- Rosman (1965) Rosman R., Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen, Bauingenieur–Praxis H. 65, 1965
- Rosman (1966) Rosman R., Windscheiben mit beliebig vielen Öffnungsreihen, Deutsche Bauzeitschrift H. 7, 1966
- Rosman (1967) Rosman R., Faltwerke als aussteifende Systeme bei Hochbauten, Bauingenieur 42, 1967, S 55–66
- Rosman (1968) Rosman R., Statik und Dynamik der Scheibensysteme des Hochbaues, Springer–Verlag, 1968
- Rosman (1969/1) Rosman R., Numerisches Verfahren zur exakten Untersuchung mehrparametrischer Scheibensysteme des Hochbaues, Die Bautechnik 4/1969, S 119–126
- Rosman (1969/2) Rosman R., Faltwerke mit gegliederten Scheiben, Der Bauingenieur 44, 11/1969, S 208–214 u. 397–406
- Rosman (1969/3) Rosman R., Untersuchung von Hochhäusern mit Tragsystemen aus einem mittigen Kern und raumabschließenden Stockwerkrahmen, Beton– und Stahlbetonbau 12/1969, S 284–291
- Rosman (1993) Rosman R., Beitrag zur Untersuchung von Windscheiben bei beliebiger Last, Beton– und Stahlbetonbau 88, 8/1993
- Rovnak (1996) Rovnak M., Rovnakova L., Negative shear lag in framed–tube buildings (discussion), Journal of Structural Engineering, Vol 122, 6/1996
- Schäfer (1969) Schäfer H. G., Die Berechnung von Hochhäusern als räumlicher Verband von Scheiben, Kernen und Rahmen, Dissertation, TH Darmstadt, 1969
- Schardt (1989) Schardt R., Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Berlin u.a., Springer 1989
- Schlaich (1966) Schlaich J., Beitrag zur Frage der Wirkung von Windstößen auf Bauwerke, Der Bauingenieur, 3/1966
- Schmidts (1996) Schmidts H., Berechnungsmethoden für Hochhaustragwerke aus Stahl, Stahlbau im Detail, Teil 2, Abschn. 9/12.2, Weka–Verlag, 1996
- Schmidts (1997) Schmidts H., Programm HIGH–RISE zur Berechnung von allgemeinen, aus Scheiben und Rahmen zusammengesetzten

- Hochhaustragwerken, Benutzerhandbuch, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, 1997
- Schrefler (1971) Schrefler B., Zur Berechnung aussteifender Systeme allgemeiner Art von Hochhäusern, Beton- und Stahlbetonbau 9/1971, S 213–219
- Schwaighofer (1977) Schwaighofer J., Collins M. P., Experimental study of the behavior of reinforced concrete coupling slabs, American Concrete Institute Journal, Vol. 74, 3/1977
- Singh (1994) Singh Y., Nagpal A.K., Negative shear lag in framed-tube buildings, Journal of Structural Engineering, Vol. 120, Nov. 1994, pp. 3105–3121
- Song (1993) Song J., Sause R., Object-Oriented Structural Analysis Using Substructures, ATLSS Report No. 93–16, ATLSS Center, Lehigh University, Bethlehem, PA, 1993
- Stafford Smith (1981) Stafford Smith B., Kuster M., Hoenderkamp J. C. D., A generalized approach to the deflection of braced frame, rigid frame and coupled wall structures, Canadian Journal of Civil Engineering, 2/1981
- Stafford Smith (1991) Stafford Smith B., Coull A., Tall Building Structures, Analysis and Design, John Wiley & Sons, 1991
- Sternik (1993) Sternik M., Gluck J., Decoupling of lateral equilibrium equations for asymmetrical multistory structures, Journal of Structural engineering, Vol. 119, No. 10, October 1993, pp. 2871–2882
- Stiller (1961) Stiller M., Beitrag zur Berechnung von Scheibensystemen bei Hochhäusern unter Horizontalbelastung, Dissertation TU Berlin, 1961
- Stiller (1965) Stiller M., Verteilung der Horizontalkräfte auf die aussteifenden Scheibensysteme von Hochhäusern, Beton- und Stahlbetonbau, 2/1965, S 42–45
- Swaddiwudhipong (1986) Swaddiwudhipong S., Balendra P., Quek S. T., Lee S. L.,

- Computer Program for the Analysis of Asymmetric Frame–Shear Wall Structures, Computers & Structures, Vol. 22, 1986
- TRIMAS Handbuch zum Finite–Elemente–Programm TRIMAS, RIB Bausoftware GmbH, Stuttgart
- Valsangkar (1988) Valsangkar A.J., Chiwanga M., Generalized beam element on two–parameter elastic foundation, Journal of Structural Engineering, Vol 114, 6/1988, pp. 1414–1427
- Vlasov (1965) Vlasov W.S., Dünnewandige elastische Stäbe (Bd. 1 und 2), Berlin, Verlag für Bauwesen 1964, 1965
- Waller (1989) Waller H., Schmidt R., Schwingungslehre für Ingenieure, BI–Wissenschaftsverlag, 1989
- Wilson (1974) Wilson E. L., The static condensation algorithm, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 8/1974, pp. 198–203
- Xin (1994) Xin K.G., Bao S.H., Li W.Y., A semi–diskrete method for analysis of tube–in–tube structures, Computers & Structures Vol. 53, 2/1994, pp. 319–325
- Zurmühl (1984) Zurmühl R., Falk S., Matrizen und ihre Anwendung, Springer Verlag, 1984





$$K_{1,p0} = \frac{8}{(\alpha_v H)^4} \left[\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H) + 1}{\cosh(\alpha_v H)} (\cosh(\alpha_v H \xi) - 1) - (\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H \xi) + (\alpha_v H)^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \right]$$

$$\bar{K}_{1,p0} = \frac{(\alpha_v H)^2}{4} \cdot K_1(\alpha_v H, \xi) ; \quad \alpha_v^2 = \frac{GA_{ers}}{EI}$$

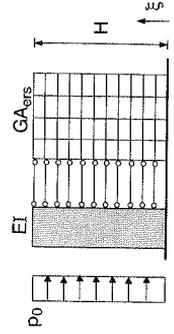
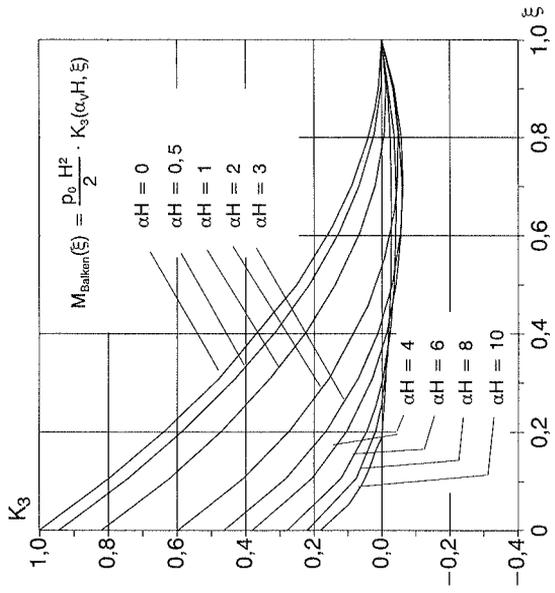
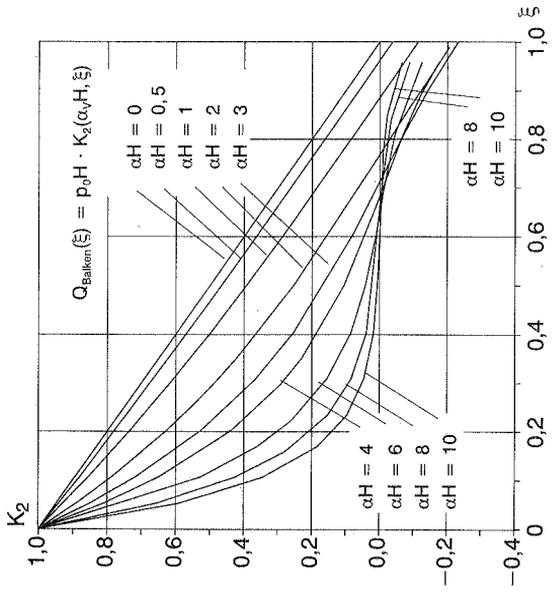


Bild A-01: Funktionsverläufe von $K_{1,p0}$ und $\bar{K}_{1,p0}$ zur Ermittlung der Durchbiegung $v(\xi)$



$$K_{2,p_0} = -\frac{1}{(\alpha_v H)} \left[\left(\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H) + 1}{\cosh(\alpha_v H)} \right) \sinh(\alpha_v H \xi) - (\alpha_v H) \cosh(\alpha_v H \xi) \right]$$

$$K_{3,p_0} = -\frac{2}{(\alpha_v H)^2} \left[\left(\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H) + 1}{\cosh(\alpha_v H)} \right) \cosh(\alpha_v H \xi) - (\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H \xi) - 1 \right]; \quad \alpha_v^2 = \frac{GA_{\text{BFS}}}{EI}$$

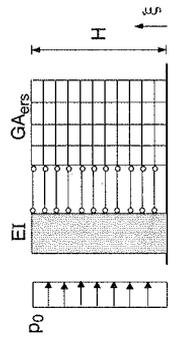
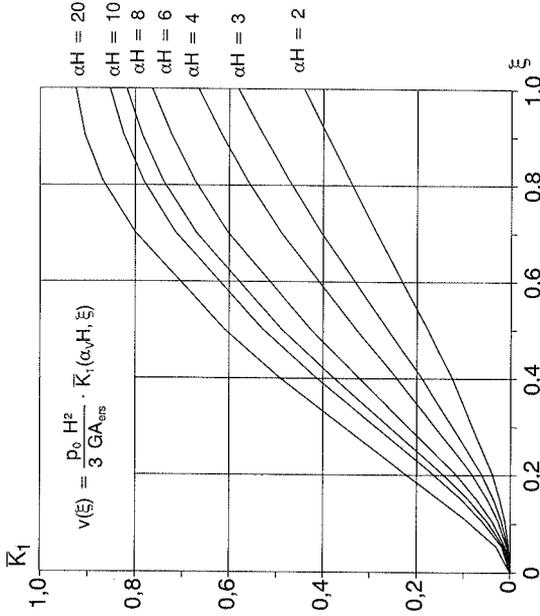
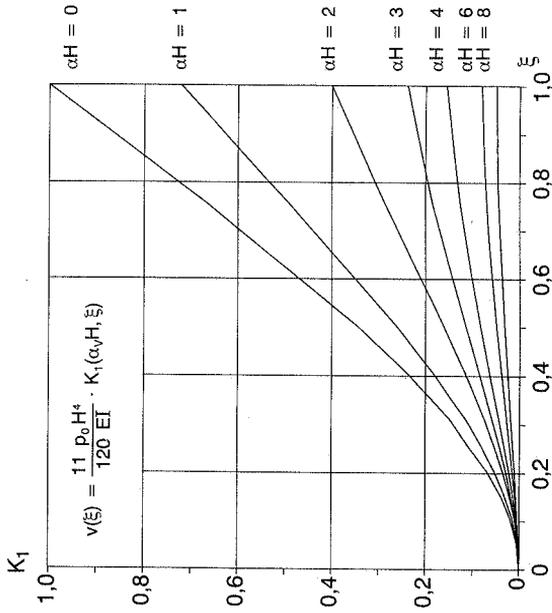


Bild A-02: Funktionsverläufe von K_{2,p_0} und K_{3,p_0} zur Ermittlung der Querkraft $Q(\xi)$ und des Biegemoments $M(\xi)$ in der Scheibe



$$K_{1,p_0} = \frac{120}{11(\alpha_v H)^4} \left[\left(\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H)}{2} - \frac{\sinh(\alpha_v H)}{\alpha_v H} + 1 \right) \frac{(\cosh(\alpha_v H \xi) - 1)}{\cosh \alpha_v H} + \left(\xi - \frac{\sinh(\alpha_v H \xi)}{\alpha_v H} \right) \left(\frac{(\alpha_v H)^2}{2} - 1 \right) - \frac{(\alpha_v H)^2}{6} \xi^3 \right]$$

$$K_{1,p_0} = \frac{11 (\alpha_v H)^2}{40} \cdot K_1(\alpha_v H, \xi) ; \quad \alpha_v^2 = \frac{GA_{srs}}{EI}$$

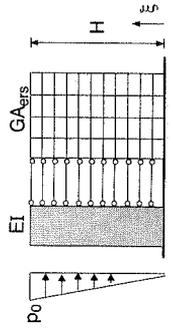
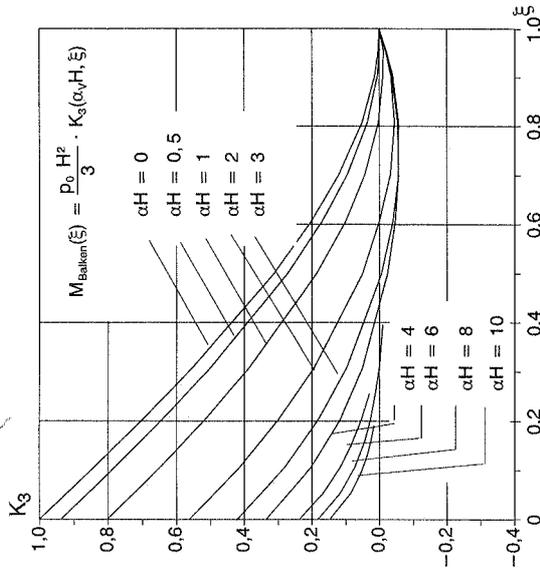
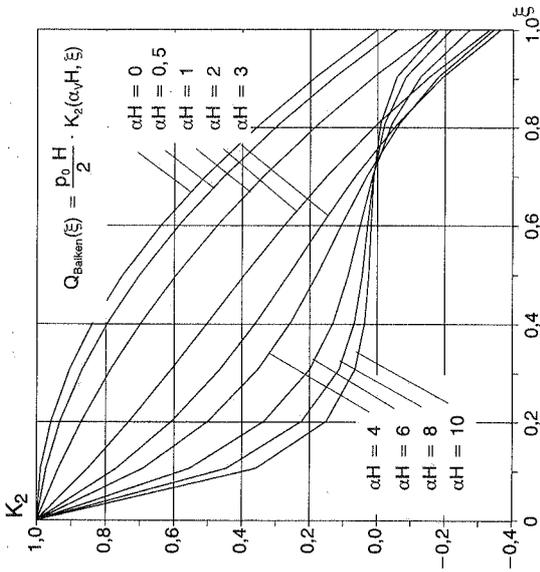


Bild A-03: Funktionsverläufe von K_{1,p_0} und \bar{K}_{1,p_0} zur Ermittlung der Durchbiegung $v(\xi)$



$$K_{2,p_0} = \frac{2}{(\alpha_v H)} \left[\left(\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H)}{2} - \frac{\sinh(\alpha_v H)}{\alpha_v H} + 1 \right) \frac{\sinh(\alpha_v H \xi)}{\cosh(\alpha_v H)} - \frac{\cosh(\alpha_v H \xi)}{\cosh(\alpha_v H)} \left(\frac{(\alpha_v H)^2}{2} - 1 \right) - \frac{1}{\alpha_v H} \right]$$

$$K_{3,p_0} = \frac{3}{(\alpha_v H)^2} \left[\left(\frac{(\alpha_v H) \sinh(\alpha_v H)}{2} - \frac{\sinh(\alpha_v H)}{\alpha_v H} + 1 \right) \frac{\sinh(\alpha_v H \xi)}{\cosh(\alpha_v H)} - \frac{\cosh(\alpha_v H \xi)}{\cosh(\alpha_v H)} \left(\frac{(\alpha_v H)^2}{2} - 1 \right) - \xi \right] ; \alpha_v^2 = \frac{GA_{\text{BIS}}}{EI}$$

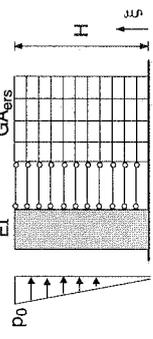


Bild A-04: Funktionsverläufe von K_{2,p_0} und K_{3,p_0} zur Ermittlung der Querkraft $Q(\xi)$ und des Biegemoments $M(\xi)$ in der Scheibe

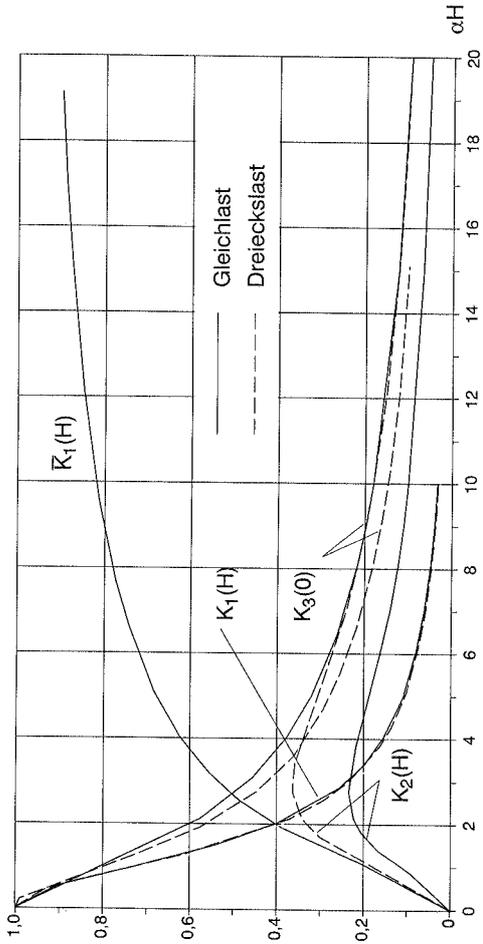


Bild A-05: Funktionsverläufe von $K_1(H)$, $K_2(H)$ und $K_3(0)$

Lebenslauf

Name: Helmut Schmidts

Geburtsdatum: 19.02.1964 in Lahr/Schw.

Eltern: Erhard und Hermine Schmidts, geb. Tontsch

1970 – 1974 Besuch der Friedrich–Grundschule in Lahr

1974 – 1980 Besuch des Max–Planck Gymnasiums in Lahr

1980 – 1983 Besuch des Technischen Gymnasiums in Lahr

Juni 1983 Abitur

1983 – 1984 Grundwehrdienst

1985 – 1992 Studium an der Universität Stuttgart,
Fachrichtung: Bauingenieurwesen (konstruktiv)

März 1992 Abschluß Diplom–Ingenieur

1992 – 1997 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik
der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 **R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.

- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Bücher:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke