

Herrn Prof. Niordson mit freundlichen  
grüßen überreicht E. Stein

**THEORIE UND BERECHNUNG NICHTLINEARER SCHWINGUNGEN  
VORGESpanNTER MEMBRANE NACH DER METHODE DER  
FINITEN ELEMENTE**

Von der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs  
(Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Mahmoud El-Masri  
geboren zu Jaffa, Palästina

14.09.2000  
2



Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Erwin Stein  
Tag der Einreichung: 10. Januar 1973  
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1973

مُهْدَاةٌ إِلَى وَالِدَيْيَ وَأَخِي حَمْدَانَ  
تَقْدِيرًا وَعُرْفَانًا.

MEINEN ELTERN UND MEINEM BRUDER  
HAMDAN GEWIDMET.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer, möchte ich herzlich danken nicht nur für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Institut anzufertigen, sondern auch für die freundliche und tatkräftige Unterstützung, die er mir in jeder Hinsicht gewährt hat.

Mein besonderer Dank gilt ferner Herrn Professor Dr.-Ing. E. Stein, der diese Arbeit angeregt, betreut und durch zahlreiche Hinweise gefördert hat.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst danke ich für die gewährte finanzielle Unterstützung.

Mahmoud El-Masri



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Schrifttumsverzeichnis	7
Abkürzungsverzeichnis	18
1. Einleitung	23
2. Grundgleichungen der geometrisch nicht- linearen Elastizitätstheorie	27
2.1 Analyse des Verschiebungs- und Verzerrungszustandes	27
2.2 Die Bewegungsgleichungen für ein infinitesimales Parallelepipèd bei Berücksichtigung von Vorspannungen	31
2.3 Transformation des Spannungstensors bei Berücksichtigung von Vorspannungen	36
2.4 Das Elastizitätsgesetz	38
2.5 Zur Existenzfrage eines elastischen Potentials	41
3. Grundgleichungen der Dynamik	49
3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit	49
3.2 D'Alembert'sches Prinzip	50
3.3 Hamilton'sches Prinzip	53
3.4 Hamilton-Formalismus und Lagrange'sche Bewegungsgleichungen für das Kontinuum	60
3.5 Zur Erfassung der Dämpfung	66
3.5.1 Materialdämpfung	66
3.5.2 Dämpfung des umgebenden Mediums	68
3.6 Der Fall kleiner Schwingungen um eine Gleichgewichtslage	69
4. Anwendung der Methode der finiten Elemente	72
4.1 Allgemeines	72
4.2 Methode der finiten Elemente im Bereich der geometrisch nichtlinearen Aufgaben	74
4.3 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen für ein ebenes Dreieckelement bei einem linearen Verschiebungsansatz	78
4.3.1 Die Darstellung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in Index- Schreibweise	78

	Seite
4.3.2 Transformation, Diskussion und mögliche Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen	85
4.3.3 Die Darstellung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in Matrizen-Schreibweise	91
4.3.4 Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage	106
4.4 Dämpfungsterme aus Abschnitt 3.5 und nach der Elementmethode mit linearem Verschiebungsansatz	109
4.5 Übergang zu den räumlichen Fachwerken einschließlich Seilnetzen	111
4.6 Zusammenbau der finiten Elemente	115
5. Lösung der Gleichungssysteme	117
5.1 Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems	117
5.2 Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems	121
6. Rechenbeispiele	134
6.1 Vorbemerkungen	134
6.2 Ebener Streifen	135
6.3 Ebenes Zelt bei nichtsymmetrischer Belastung	142
6.4 Ebenes Zelt bei symmetrischer Belastung	150
6.5 Hyperbolisches Paraboloid (Ränder längs der Erzeugenden)	155
6.6 Hyperbolisches Paraboloid mit Binderrandbedingungen (Ränder längs der Hauptkrümmungslinien)	160
6.7 Hyperbolisches Paraboloid mit allseitig gehaltenen Rändern (Ränder längs der Hauptkrümmungslinien)	163
6.8 Schlußfolgerungen	166
7. Zusammenfassung	168

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Internationaler Kongreß für nichtlineare Schwingungen, Warschau, Bd. 5-9, Herausgegeben vom Institute of Basic Technical Problems of the Polish Academy of Sciences.
- [2] Tezcan, S.S.,  
Cherry, S.,  
Mahapatra, B.C.: Dynamic Analysis of Cable Structures, IASS Pacific Symposium - Part II on Tension Structures and Space Frames, Okt. 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.
- [3] Knudson, W.C.: 4-3 Response of Cable-Net Structures under Dynamic Loads. IASS Pacific Symposium - Part II on Tension Structures and Space Frames, Okt. 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.
- [4] Franchi, A.: On the Dynamics of Plane pre-tensioned Cable Structures, Theoretical and Experimental Research. IASS Pacific Symposium - Part II on Tension Structures and Space Frames, Okt. 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.
- [5] Jensen, J.: Eine statische und dynamische Untersuchung der Seil- und Membrantragwerke. Universität Trondheim, Norwegen, 1970.
- [6] Schleyer, F.: Über die Berechnung von Seilnetzen. Dissertation, Berlin 1960.
- [7] Møllmann, H.: A Study in the Theory of Suspension Structures. Akademisk Forlag, Kopenhagen 1965.

- [8] Kappus, R.: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen.  
Z. angew. Math. Mech., Bd. 19, Nr.5,  
Okt. 1939.
- [9] Novozhilov, V.V.: Foundations of the nonlinear Theory of Elasticity.  
Rochester, N.Y.: Grayloch Press, 1953.
- [10] Eringen, A.: Nonlinear Theory of Continuons Media.  
New York, London: McGraw-Hill, 1962.
- [11] Böhm, F.: Zur Mechanik des Luftreifens.  
Habilitationsschrift, Stuttgart, 1966.
- [12] Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik.  
Springer-Verlag, 1958.
- [13] Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.  
Cambridge, 1927.
- [14] Leipholz, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie.  
Karlsruhe: G. Braun, 1968.
- [15] Otto, F.: Zugbeanspruchte Konstruktionen.  
Bd. 1, Aufsatz von Trostel, R.  
Frankfurt, Berlin: Ullstein Fachverlag  
1962.
- [16] Frank, P.,  
v. Mises, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Erster mathematischer Teil.  
Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn,  
1930.
- [17] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity.

Oxford: Pergamon Press, 1968

- [18] Stein, E.: Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke.  
Dissertation, Stuttgart, 1965.
- [19] Frazer, R.A. Elementary Matrices.  
Duncan, W.J. Cambridge 1950.  
Collar, A.R.:
- [20] Budó, A.: Theoretische Mechanik.  
Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
- [21] Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics.  
Toronto: University of Toronto Press,  
4. Auflage, 1970.
- [22] Bland, D.R.: Lagrange's Equations for finite Elasticity, in: Recent Progress in Applied Mechanics, Brobery, B. und Hult, J.  
New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1967.
- [23] Vujanovic, B.: A Group-Variational Procedure for Finding First Integrals of Dynamical Systems.  
Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol.5,  
pp. 269 - 278, Pergamon Press 1970.
- [24] Bisplinghoff, R.: Principles of Aeroelasticity.  
New York, London: John Wiley and Sons,  
1962
- [25] Wissmann, J.W.: Numerische Berechnung nichtlinear elastischer Körper.  
Dissertation, Hannover, 1963.

- [26] Brinkmann, G.: Zur Verformungsmechanik der Kontinua. Habilitationsschrift, Stuttgart 1966.
- [27] Luz, E.: Gedämpfte Schwingungen kontinuierlicher Gebilde bei Annahme eines nicht-linearen viskoelastischen Stoffgesetzes. Dissertation, Stuttgart 1966.
- [28] Macvean, D.B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. ZAMP 19/1969, S. 157 - 184.
- [29] Zurmühl, R.: Matrizen. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 4. Auflage, 1964.
- [30] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. f. reine und angew. Math., Bd. 135 (1909), S. 1/61.
- [31] Hrennikoff, A.P.: Plane stress and bending of Plates by Method of Articulated Framework. D. Sc. Thesis, Dpt. of Civil and Sanitary Eng., M.I.T., Boston, USA, May 1940.
- [32] Turner, M.J.,  
Clough, R.W.,  
Martin, H.C.,  
Topp, L.J.: Stiffness and deflection analysis of Complex Structures. J. Aeronaut. Sc. 23 (1956), S. 174/192.
- [33] Müller, H.,  
Möller, B.: Übersicht zur Methode der finiten Elemente und zu deren Anwendung. Die Straße, 11. Jahrgang, Heft 2, Febr. 1971, S. 79/90.

- [34] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.  
London: McGraw-Hill, 1967.
- [35] Desai, C.S.,  
Abel, J.F.: Introduction to the Finite Element Method.  
New York: van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- [36] Buck, K.E.,  
Scharpf, D.W.,  
Stein, E.,  
Wunderlich, W.: Finite Elemente in der Statik.  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.
- [37] Oliveira, E.: Theoretical Foundations of the Finite Element Method.  
Int. J. Solids Structures, 1968,  
Vol.4, S. 929/952.
- [38] Prager, W.: Variational Principles of linear Elastostatics for Discontinuous Displacements, Strains and Stresses,  
in: Recent Progress in Applied Mechanics, by Broberg, B. and Hult, J.,  
Stockholm: Almquist & Wiksell, 1967,  
S. 463/474.
- [39] Bufler, H.: Die verallgemeinerten Variationsgleichungen der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Schnittkräfte und Verschiebungsgrößen.  
Ingenieur-Archiv, 39. Bd., 1970,  
S. 330 - 340.
- [40] Du Preez, R.J.: Die Berechnung allgemeiner Flächentragwerke mit Hilfe finiter Streifenelemente.

Dissertation, Stuttgart, 1972.

- [41] Fette, H.                    Finite Elemente für gekrümmte Flächen-  
May, B.:                    tragwerke.  
Konstruktiver Ingenieurbau, Berichte  
Heft 11.
- [42] Stein, E.:                    Die Methode der finiten Elemente in  
der Elastostatik.  
Umdruck zur Vorlesung im Winterseme-  
ster 1970/71 an der Universität Stutt-  
gart.
- [43] Martin, H.C.:                On the Derivation of Stiffness Matri-  
ces for the Analysis of large Deflec-  
tion and Stability Problems.  
Matrix Methods in Structural Mechanics,  
Konferenz von Ohio, 26 - 28. Okt. 1965,  
S. 697/715.
- [44] Oden, J.T.,                    Numerical Analysis of Nonlinear Pneu-  
Kubitza, W.K.:                matic Structures.  
Proceedings of the 1st International  
Colloquium on Pneumatic Structures,  
Stuttgart 1967, S. 87/107.
- [45] Turner, M.J.,                Large Deflections of Structures  
Dill, E.H.,                    Subjected to Heating and External  
Martin, H.C.,                Loads.  
Melos, R.J.:                    J. of the Aerospace Sciences, Vol. 27,  
Feb. 1960.
- [46] Argyris, J.H.,                Matrix Methods of Structural Analysis.  
Kelsey, S.,                    AGARDograph No. 72, Pergamon Press,  
Kamel, H.:                    1964.

- [47] Oden, J.T.: Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures. AIAA Journal, Vol. 4, No. 6, Aug. 1966, S. 1480/82.
- [48] Greene, B.C.: Stiffness Matrix for Bending of a Rectangular Plate Element with Initial Membrane Stresses. Structural Analysis Research Memorandum, No. 45, The Boeing Company, Seattle, Wash., Aug. 1962.
- [49] Lunder C.A.: Derivation of a Stiffness Matrix for a Right Triangular Plate in Bending and Subjected to Initial Stresses. MS Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, University of Washington, Seattle, Wash., Jan. 1962.
- [50] Argyris, J.H.,  
Buck, K.E.,  
Scharpf, D.W.,  
Hilber, H.M.,  
Mareczek, G.: Some New Elements for the Matrix Displacement Method. AFFDL - TR - 68 - 150.
- [51] Wissmann, J.W.: Nonlinear Structural Analysis Tensor Formulation, in: Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics at Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 26 - 28 Okt. 1965, Proceedings Dez. 1966.
- [52] Wempner, G.A.: Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. Int. J. Solids Structures, 1971, Vol. 7, S. 1588/99.

- [53] Argyris, J.H.: Continua and Discontinua.  
Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics at Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 26 - 28. Okt. 1965, Proceeding Dez. 1966.
- [54] Argyris, J.H.,  
Scharpf, D.W.: A Sequel to Technical Note 13: The Curved Tetrahedral and Triangular Elements TEC and TRIC for the Matrix Displacement Method.  
The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 73, No. 697, Jan. 1969, London.
- [55] Fette, H.: Gekrümmte finite Elemente zur Berechnung von Schalentragerwerken.  
Dissertation, Braunschweig, 1969.
- [56] Ang, A. H.-S.: Numerical Approach for Wave Motions in Nonlinear Solid Media.  
Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics at Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 26 - 28. Okt. 1965, Proceeding Dez. 1966.
- [57] Oden, J.T.: Finite Elements of Nonlinear Continua.  
New York: McGraw-Hill, 1972.
- [58] Wunderlich, W.: Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme.  
Habilitationsschrift, Braunschweig, 1969.

- [59] Remmler, K.L.,  
Cawood, D.W.,  
Staton, J.A.,  
Hill, R.: Solutions of Systems of Nonlinear  
Equations.  
Lockheed MSC/HREC, NASA 8 - 20178,  
Oktober 1966.
- [60] Spang, H.A.: A Review of Minimization Techniques  
for Nonlinear Funktionen.  
SIAM Review, Vol. 4, No. 4, Oktober  
1962, S. 343/365.
- [61] Law, V.T.: Solution of Systems of Nonlinear  
Equations  
NASA 8 - 21484, 1971.
- [62] Bulirsch, R.,  
Stoer, J.: Numerical Treatment of Ordinary  
Differential Equations by Extrapolation  
Methods.  
Z. Numerische Mathematik 8 (1966),  
S. 1/13.
- [63] Argyris, J.H.,  
Scharpf, D.W.: Finite Elements in Time and Space.  
The Aeronautical Journal Society,  
Vol. 73, No. 708, Dezember 1969,  
S. 1041 - 1044.
- [64] Falk, S.: Das Verfahren von Rayleigh - Ritz  
mit hermetischen Interpolationspoly-  
nomen.  
ZAMM 43 (1963), Heft 4/5, S. 149/166.
- [65] Collatz, L.: The Numerical Treatment of Differen-  
tial Equations.  
Berlin: Springer-Verlag, 3. Auflage,  
1960.
- [66] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure  
und Physiker.

Berlin: Springer-Verlag, 5. Auflage,  
1965.

- [67] Fehlberg, E.: Neue genauere Runge - Kutta - Formeln für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.  
ZAMM 40 (1960), Heft 5/6, S. 252/259.
- [68] Fehlberg, E.: Neue genauere Runge - Kutta - Formeln für Differentialgleichungen n-ter Ordnung.  
ZAMM 40 (1960), Heft 10/11, S. 440 - 455.
- [69] Fehlberg, E.: New High-Order Runge - Kutta - Formulas with Step Size Control for Systems of First- and Second-Order Differential Equations.  
ZAMM 44 (1964), S. T17/29.
- [70] Fehlberg, E.: New High-Order Runge - Kutta - Formulas with Arbitrarily Small Truncation Error.  
ZAMM 46 (1966), Heft 1, S. 1/16.
- [71] Filippi, S.: Zum Verfahren von Runge - Kutta - Fehlberg.  
MTW 11 (1963), S. 147/153.
- [72] Nickell, R.E.,  
Sackman, J.: Approximate Solutions in Linear Coupled Thermoelasticity.  
J. Appl. Mech., ser. E., Vol. 35, No. 2 (1968), S. 255/266.
- [73] Bronstein, I.,  
Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik.  
Zürich und Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 11. Auflage, 1971.

- [74] Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis.  
New York, London: McGraw-Hill Book  
Company, 1968.
- [75] Ludkovsky, I.G., Thin Sheet Membranes as Hanging Roofs.  
Ivanov, M.A., IASS Pacific Symposium - Part II on  
Usachey, T.A.: Tension Structures and Space Frames,  
Oct. 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.
- [76] Harris, C.M., Shock and Vibration Handbook,  
Crede, C.E.: Volume 1.  
New York, London: McGraw-Hill, 1961.

Abkürzungsverzeichnis

Alle Zeichen sind im Text erläutert. Die wichtigsten unter ihnen werden im folgenden nochmals angegeben, und zwar in der Reihenfolge wie sie im Text auftreten.

$x^i, \bar{x}^i$		Kartesische Koordinaten
$\underline{g}_i$	(cm)	Einheitsvektoren
$\underline{G}_i$	(cm)	Gittervektoren
$\underline{r}^{(0)}$	(cm)	Ortsvektor im unverformten Zustand
$\underline{r}$	(cm)	Ortsvektor im verformten Zustand
$ds^{(0)}$	(cm)	Unverformtes Linienelement
$ds$	(cm)	Verformtes Linienelement
$e_{ik}$	(1)	Lagrange'scher Verzerrungstensor
$\varepsilon_{ik}$	(1)	Verzerrungen in der linearen Elastizitätstheorie
$\underline{u}$	(cm)	Verschiebungsvektor
$u^i$	(cm)	Verschiebungskomponenten
$\delta_{ik}$	(1)	Kroneckersymbol
$\varphi_{ik}$	(1)	Rotationswinkel der Fasern
$\bar{p}$	(kp/cm <sup>3</sup> )	Vektor der Volumenkräfte pro Volumeneinheit des unverformten Kontinuums

$\bar{F}$	$(\text{kp/cm}^2)$	Vektor der Flächenkräfte pro Flächeneinheit der Oberfläche des unverformten Kontinuums
$\bar{\sigma}_V^{k(0)}$	$(\text{kp/cm}^2)$	Vorspannvektoren vor der Verformung
$\bar{\sigma}_N^{k(0)}$	$(\text{kp/cm}^2)$	Vorspannvektoren nach der Verformung
$\rho$	$(\text{kp sec}^2/\text{cm}^4)$	Spezifische Dichte des unverformten Kontinuums
$B^k$	$(\text{cm/sec}^2)$	Beschleunigungskomponenten
$\bar{\sigma}^{ik}$	$(\text{kp/cm}^2)$	Kappus'scher Spannungstensor <sup>1)</sup>
$E^{jkim}$	$(\text{kp/cm}^2)$	Allgemeiner Elastizitätstensor
$\underline{n}$	$(\text{cm})$	Einheitsvektor senkrecht zur Fläche
$W$	$(\text{kp/cm}^2)$	Elastisches Potential pro Volumeneinheit
$S_1$	$(\text{cm}^2)$	Teiloberfläche mit dynamischen Randbedingungen
$S_2$	$(\text{cm}^2)$	Teiloberfläche mit geometrischen Randbedingungen
$\underline{B}$	$(\text{cm/sec}^2)$	Beschleunigungsvektor
$R_j$	$(\text{kp})$	Verallgemeinerte Kräfte
$q_j$	$(\text{cm})$	Lagrange'sche Koordinaten
$L$	$(\text{kp cm})$	Lagrange'sche Funktion

<sup>1)</sup> Er wird häufig in der Literatur Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor 2. Art genannt.

$W^{(G)}$	(kp cm)	Das gesamte elastische Potential
$W^{(VS)}$	(kp cm)	Das elastische Potential infolge Vorspannung
$W^*$	(kp cm)	$W^* = W^{(G)} + W^{(VS)}$
$t$	(sec)	Zeit
$T$	(kp cm)	Kinetische Energie
$E_{jkim}^*$	(kp sec/cm <sup>2</sup> )	Allgemeiner Viskositätstensor
$D_j^{(MD)}$	(kp)	Allgemeine Materialdämpfung
$D_j^{(UD)}$	(kp)	Allgemeine Umgebungsdämpfung
$u_n^j$	(cm)	Verschiebung des Knotenpunktes n in Richtung der lokalen Koordinate j
$h$	(cm)	Dicke des Membranelements
$S_E$	(cm <sup>2</sup> )	Fläche eines unverformten finiten Dreieckelements
$V_O$	(cm <sup>3</sup> )	Volumen eines unverformten finiten Dreieckelements
$E$	(kp/cm <sup>2</sup> )	Elastizitätsmodul
$\nu$	(1)	Querdehnzahl
$M_{nm}, \underline{M}$	(kp sec <sup>2</sup> /cm)	Massen-Matrix
$R_n^j$	(kp)	Fiktive Kraft am Knotenpunkt n in Richtung der lokalen Koordinate j

$A_{jk}$	(1)	Transformationsmatrix
$\bar{u}_n^j$	(cm)	Verschiebung des Knotenpunktes n in Richtung der globalen Koordinate j
$\bar{R}_n^j$	(kp)	Fiktive Kraft am Knotenpunkt n in Richtung der globalen Koordinate j
$\underline{K}_G$	(kp/cm)	Geometrische Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_E^{(VA)}$	(kp/cm)	Verschiebungsabhängige elastische Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_E$	(kp/cm)	Elastische Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}$	(kp/cm)	$\underline{K} = \underline{K}_G + \underline{K}_E$
$\underline{J}$	(kp/cm)	Jacobi-Matrix, tangentielle Steifig- keitsmatrix
$\underline{\mathcal{E}}$		Vektor der Hermite'schen Interpola- tionspolynome für die Verschiebungen
$\underline{\mathcal{E}}^*$		Vektor der Hermite'schen Interpola- tionspolynome für die Kräfte

abkürzende Schreibweisen

$$(\ )_{,i} \quad \frac{\partial (\ )}{\partial x^i}$$

$$(\ )^{\cdot} \quad \frac{d (\ )}{dt}$$

$$(\ )^{\ddot{\phantom{}}} \quad \frac{d^2 (\ )}{dt^2}$$

$$\Delta (\ ) \quad \text{Finites Inkrement der Größe } (\ )$$

Abkürzungen häufig auftretender Begriffe

FEM	Methode der finiten Elemente
AGS	Algebraisches Gleichungssystem
DGS	Differentialgleichungssystem
GSM	Geometrische Steifigkeitsmatrix
ESM	Elastische Steifigkeitsmatrix
RKM	Runge-Kutta-Methode
HIP	Hermite'sches Interpolationspolynom

Summenkonvention

Es wird über alle Indizes summiert, die in einem Produkt zweimal vorkommen.

Wenn nicht anders angegeben, laufen die lateinischen Indizes von 1 bis 3 und die griechischen Indizes von 1 bis 2.

## 1. Einleitung

In der letzten Zeit sind zugbeanspruchte Konstruktionen wie Hängedächer, Zelte und Seilnetze in der Baupraxis wegen ihrer Zweckmäßigkeit und Wirtschaftlichkeit vorgedrungen. Diese Konstruktionen zeichnen sich besonders durch ihre Leichtigkeit und ihre Anpassungsfähigkeit an gewünschte Formen und Stützungen aus. Ihr Eigengewicht ist verhältnismäßig klein gegenüber den auftretenden dynamischen Windlasten. Gemäß der Beanspruchung der meist vorgespannten Netze oder Membrane ist bei der Konstruktion der Bauelemente die Dehnsteifigkeit ausschlaggebend. Die Biegesteifigkeit ist demgegenüber klein. Hierdurch ist einerseits die Gesamtkonstruktion zu großen Deformationen fähig, vor allem auch bei lokal konzentrierten Lasten, andererseits entsteht eine Verformungsempfindlichkeit gegenüber lokalen periodischen Lasten. In vielen Fällen ist auch die teilweise oder völlige Schubweichheit für das Verformungsvermögen wünschenswert. Eine unter Umständen vorhandene zu große Schubsteifigkeit bei kleiner Festigkeit kann bei großen Verschiebungen zu Bauschäden führen.

Die architektonisch erwünschte Form ist die Geometrie der Konstruktion unter der Wirkung der statischen Lasten; diese Form wird mit Hilfe von Vorspannungen erreicht. Um den Effekt der Vorspannung auf die anderen Lastfälle zu beschreiben, ist die Anwendung der Theorie 2. Ordnung notwendig, denn dieser Effekt ist nichtlinearer Natur (keine lineare Superponierbarkeit); in vielen Fällen hängt sogar das Erreichen einer stabilen Gleichgewichtslage primär von einer Gleichgewichtsbetrachtung am verformten System ab. Die Vorspannung solcher Konstruktionen dient auch weiteren Zwecken, nämlich um Faltenbildung der Membrane und Erschlaffen der Seile ganz zu vermeiden, oder genügend klein zu halten und außerdem um unzulässig große Schwingungen zu verhindern. Es sind in Bezug auf die Größe der Schwingungen und ihre Folgen vier Aspekte zu beachten:

1. Auftreten von Bauschäden an Bedachungselementen oder Einbauten, die auf Grund eines geringeren Verformungsvermögens als das

der Hauptkonstruktion an den Verbindungsstellen oder innerhalb dieser Bauteile versagen.

2. Versagen von Teilen der Hauptkonstruktion infolge Spannungskonzentrationen und damit Überbeanspruchungen. Diese Versagensursache ist im allgemeinen weniger zu befürchten.
3. Psychologische Wirkungen auf den Benutzer oder Besucher. Es können Angstgefühle aber auch Störungen durch akustische Nebeneffekte, etwa beim Flattern, entstehen.
4. Beeinträchtigung der Nutzungsfähigkeit, z.B. durch Bewegung der Luftmasse in einem völlig umschlossenen Raum.

Infolgedessen besteht ein großes Interesse, den Effekt des Vorspanngrades als wichtigen Faktor zur Verminderung der Deformationen infolge Schwingungen zu untersuchen. Aus Mangel an Kenntnissen auf diesem Gebiet mußte man bisjetzt mit überhöhten Winddrücken als zusätzliche statische Lasten rechnen und hat damit wahrscheinlich wesentlich höhere Vorspannkräfte benutzt als es bei genauerer dynamischer Analyse notwendig gewesen wäre. Wegen des nichtlinearen Verformungsverhaltens solcher Konstruktionen (verschiebungsabhängige Steifigkeit!) ist ihr Schwingungsverhalten nichtlinear; folglich besitzen ihre Schwingungen - auch bei harmonisch-periodischen Lasten - weder harmonischen noch i.a. periodischen Verlauf.

Die meisten klassischen Arbeiten über nichtlineare Schwingungen behandeln Ein- und Zwei-Massenschwinger, zum Beispiel [1]. Vor kurzem sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen das Schwingungsproblem der Seilnetze linearisiert wird; hierbei werden kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage angenommen, z.B. in [2], [3], [4]. Für diesen Fall bekommt man durch das Diskretisieren mit Hilfe der FEM<sup>1)</sup> ein lineares gewöhnliches DGS<sup>1)</sup>. In [5] sind Versuchsergebnisse von Seilnetzschwingungen mitgeteilt. Schleyer [6] und Møllman [7] geben theoretische Grundlagen zur dynamischen Untersuchung von Seilnetzen an.

---

1) Siehe Abkürzungsverzeichnis S. 22.

Das allgemein nichtlineare Schwingungsproblem (große Schwingungen um die Gleichgewichtslage) blieb, besonders für Membrane, praktisch unerforscht. Für dieses Problem bekommt man durch Diskretisieren der Fläche mit Hilfe der FEM ein nichtlineares gewöhnliches DGS in den Knotenverschiebungen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Vorspannungen schon von Anfang an in den Bewegungsgleichungen des infinitesimalen Teilchens berücksichtigt. Ausgangspunkt ist der Lagrange'sche Verzerrungstensor als nichtlineare Abhängigkeit zwischen den Verschiebungsableitungen und den Verzerrungen. Aufgrund der Variationsprinzipie der Mechanik werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen des Kontinuums mit Berücksichtigung der Vorspannungen aufgestellt. Mit Hilfe der FEM, d.h. unter Verwendung bereichsweiser Parameteransätze für die Verschiebungen, lassen sich die Verschiebungen in den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen durch die Knotenpunktverschiebungen ersetzen. Dadurch erhält man die Bewegungsgleichungen als nichtlineares gewöhnliches DGS 2. Ordnung. Zur Integration dieser Bewegungsgleichungen werden folgende Möglichkeiten vergleichend diskutiert:

- a) Algebraisierung des nichtlinearen DGS durch die Anwendung des Ritz'schen Verfahrens mit Hermiteschen Interpolationspolynomen in der Zeit. Für jeden Zeitschritt erhält man ein nichtlineares AGS. Wegen der schwer zu berechnenden auftretenden Integrale über die Zeit ist diese Methode wenig geeignet.
- b) Das gesamte elastische Potential wird innerhalb jedes Zeitschrittes durch eine Taylor-Reihe angenähert. Hierin berücksichtigt man nur die ersten drei Terme (einschließlich des quadratischen Gliedes). Mit Hilfe der unter a) genannten Ritz'schen Methode erhält man für jeden Zeitschritt ein lineares AGS. Auf Grund der neu entstandenen Geometrie müssen die Koeffizienten dieses AGS nach jedem Iterationsschritt neu berechnet werden. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß man durch Erhöhen des Grades der benutzten Hermiteschen Interpolationspolynome nicht entsprechend den Zeitschritt vergrößern kann. Die Näherung, nach der das gesamte

elastische Potential innerhalb des Zeitelements nur quadratisch von den Verschiebungen abhängt (damit kubische und biquadratische Terme der potentiellen Energie vernachlässigt), macht die Vergrößerung des Zeitschritts nur beschränkt möglich. Man muß also bei stark nichtlinearen Systemen mit sehr kleinen Zeitelementen rechnen.

- c) Die Methode von Runge-Kutta-Fehlberg, mit den für DGS 2. Ordnung von FEHLBERG [69] gegebenen vereinfachten Transformationen bietet diese Methode einige Vorteile. Man kann ihre Genauigkeit beliebig steigern bzw. die Zeitschritte vergrößern, indem man den Grad der totalen Differentiationen des DGS erhöht. Die totale Differentiation des vorliegenden DGS ist recht einfach. Bei dieser Methode ist eine automatische Schrittweitensteuerung möglich.

Weiterhin werden die Einflüsse des Vorspanngrades, der Form der Konstruktion, der Randbedingungen und der Näherung des Schwingungsproblems durch kleine Amplituden um die Gleichgewichtslage auf das Schwingungsverhalten im Rahmen der Rechenbeispiele untersucht.

## 2. Grundgleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie

---

Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet man in [8], [9] und in besonders gründlicher Form bei ERINGEN [10]. Weiterhin gibt BÖHM [11] eine einfache Formulierung dieser Theorie in krummlinigen Koordinaten an.

In der vorliegenden Arbeit soll die Vorspannung berücksichtigt werden. Es wird eine Lagrange'sche Darstellung in kartesischen Koordinaten gewählt.

### 2.1 Analyse des Verschiebungs- und Verzerrungszustandes

$(x^1, x^2, x^3)$  ist ein kartesisches Koordinatensystem, siehe Bild 2.1;  $\underline{r}^{(0)}$  ist der Ortsvektor des Punktes  $P^{(0)}$  im verformten Körper zum Zeitpunkt  $t^{(0)}$ .  $P^{(0)}$  ist der Mittelpunkt eines rechteckigen Parallelepeds, von dem ein Achtel im Bild 2.1 dargestellt ist.

Für die Einheitsvektoren  $\underline{g}_i$  gilt:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}^{(0)}}{\partial x^i} = \underline{r}_{,i}^{(0)} \quad ; \quad g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

Zum Zeitpunkt "t" hat sich der Punkt  $P^{(0)}$  zum Punkt P verschoben, der zugehörige Ortsvektor ist  $\underline{r}$ . Die Einheitsvektoren  $\underline{g}_i$  gehen durch die Verformung in die schiefwinkligen Gittervektoren  $\underline{G}_i$  über.

Für sie gilt:

$$\underline{G}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^i} = \underline{r}_{,i} \quad (2.2)$$

Man erhält den Metriktensor:

$$G_{ij} = \underline{G}_i \cdot \underline{G}_j \quad (2.3)$$

Die Komponenten des Tensors  $G_{ij}$  bestimmen die Verformung des infinitesimalen Parallelepipeds mit der Seitenlänge  $2 dx^i$ , Bild 2.1, zum Zeitpunkt  $t$ .

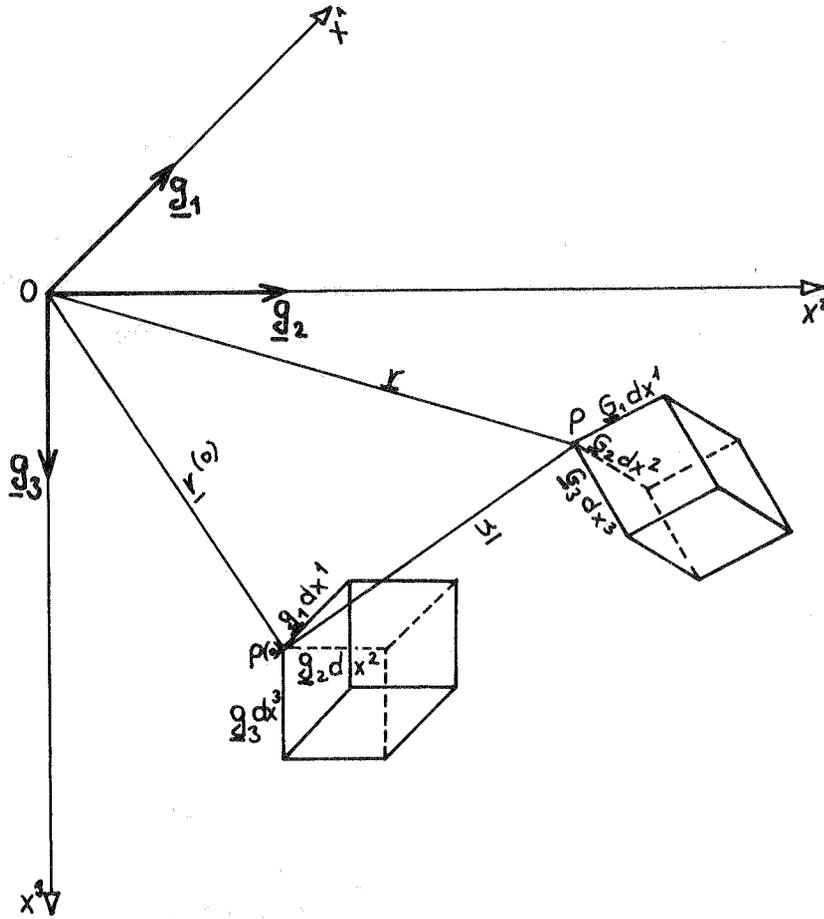


Bild 2.1: Ein Achtel des infinitesimalen Parallelepipeds vor und nach der Verformung.

Der Lagrange'sche (Greene'sche) Verzerrungstensor ist folgendermaßen definiert:

$$e_{jk} = \frac{1}{2} (G_{jk} - \delta_{jk}) = e_{kj} \quad (2.4)$$

Ansich enthält  $G_{jk}$  alle Angaben über die Verformung eines Teilchens,  $e_{jk}$  erlaubt jedoch eine einfachere Formulierung der Theorie.

Die tensorellen Eigenschaften von  $e_{jk}$  wurden z.B. von KAPPUS [8] erläutert.

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten von  $e_{jk}$  und den Ingenieur-Verzerrungen  $\mathcal{E}_{jk}$  ist im folgenden dargestellt:

$ds^{(0)}$  soll ein Linienelement in Richtung  $\underline{g}_1$  vor der Verformung sein.

$$ds^{(0)} = dx^1 \underline{g}_1 ; \quad (ds^{(0)})^2 = (dx^1)^2$$

Nach der Verformung gilt:

$$ds = dx^1 \underline{G}_1 ; \quad (ds)^2 = G_{11} (dx^1)^2$$

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{ds - ds^{(0)}}{ds^{(0)}} = \sqrt{G_{11}} - 1 \quad (2.5)$$

Aus Gl. (2.4) erhält man:

$$G_{11} = 2e_{11} + 1$$

Damit wird aus Gl. (2.5):

$$e_{11} = \mathcal{E}_{11} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{11}^2 \quad (2.6)$$

$e_{11}$  bzw.  $\mathcal{E}_{11}$  sind nicht in Richtung von  $ds^{(0)}$ , sondern in Richtung von dem Gittervektoren  $\underline{G}_1$  gemessen. Man bekommt für die Verzerrungen in Richtung der unverformten Faser  $ds^{(0)}$  kompliziertere Ausdrücke, die für die Darstellung der Verformungen wenig geeignet sind; vergleiche auch [9].

Bei kleinen Dehnungen  $\mathcal{E}_{ij}$  werden nur die linearen Glieder berücksichtigt:  $e_{ij} \approx \mathcal{E}_{ij}$ . Bei einem zulässigen Fehler in den Verzerrungen von 1 % ist diese Näherung möglich bis  $\mathcal{E}_{ii} = 0,14$  und  $\mathcal{E}_{ij} = 0,035$ ,  $i \neq j$ , [25].

Die Verzerrungen  $\mathcal{E}_{ij}$  bilden im allgemeinen keinen Tensor [8].

Um den Verzerrungstensor als Funktion der Verschiebungsableitungen schreiben zu können, führt man gemäß Bild 2.1 den Verschiebungsvektor  $\underline{u}$  des Punktes  $P^{(0)}$  ein.

$$\underline{r} = \underline{r}^{(0)} + \underline{u} \quad (2.7)$$

$$\underline{u} = u^i \underline{g}_i$$

Einsetzen von Gl. (2.7) in (2.2) ergibt

$$\underline{G}_j = (\sigma_j^k + u_{,j}^k) \underline{g}_k \quad (2.8)$$

Mit (2.4) ist dann

$$e_{jk} = \frac{1}{2} (u_{,k}^j + u_{,j}^k + u_{,j}^i u_{,k}^i) = e_{kj} \quad (2.9)$$

$e_{jk}$  stellt die Verzerrungen des Kontinuums in einem Punkt für große Verschiebungen und große Dehnungen ohne jegliche Näherung dar, wie z.B. KAUDERER [12] durch Reihenentwicklung eines verformten Linienelementes gezeigt hat.

Nun soll noch die Starrkörperdrehung des Parallelepipeds um die Bezugsachsen ermittelt werden. Die mittlere Rotation aller Fasern an einem Punkt  $P^{(0)}$  ist siehe [9].

$$\tan \varphi_{jk} = \frac{\frac{1}{2} (u_{,k}^j - u_{,j}^k)}{\sqrt{(1 + u_{,k}^k)(1 + u_{,j}^j) - \frac{1}{4} (u_{,j}^k + u_{,k}^j)^2}} = -\tan \varphi_{kj}$$

(2.10)

Die Komponenten  $\varphi_{jk}$  stellen eine antimetrische Matrix dar.

$\varphi_{jk}$  ist der mittlere Drehtensor der Fasern des Parallelepipedes um die Koordinate senkrecht zu der Ebene j-k mit dem Pol "P".

Wenn die Verschiebungsableitungen sehr klein gegen eins sind, dann ist  $\tan \varphi_{jk} = \varphi_{jk}$  und Gl. (2.10) wird zu

$$\varphi_{jk} = \frac{1}{2} (u_{,k}^j - u_{,j}^k) ;$$

dies ist die Rotation bei der linearen Theorie.

Man erkennt aus Gl. (2.10), daß die mittlere Rotation nur in dem Fall verschwindet, wenn die Verschiebungen von einem Potential  $\pi$  ableitbar sind, wenn also gilt:

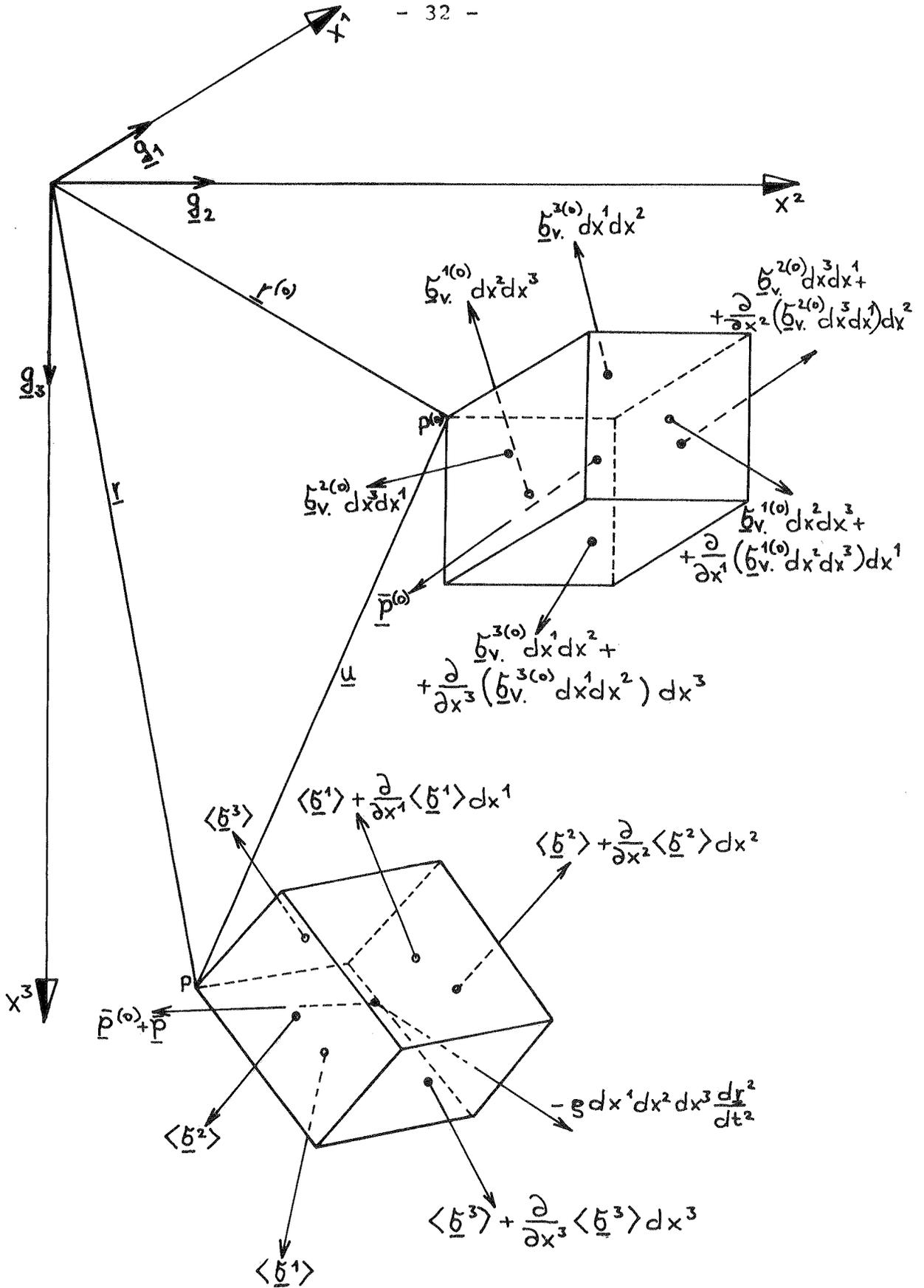
Dieses Potential hat in der Elastizitätstheorie keine praktische Bedeutung und darf nicht mit dem elastischen Potential verwechselt werden.

$$u^k = \pi_{,k} .$$

## 2.2 Die Bewegungsgleichungen für ein infinitesimales Parallelepiped bei Berücksichtigung von Vorspannungen

Es wird wieder nur ein Achtel des infinitesimalen Parallelepipedes betrachtet Bild 2.2. Im Ausgangszustand des Kontinuums herrscht die Vorspannung  $\underline{\underline{\sigma}}_v^{j^{(0)}}$ .

Als Ausgangsgeometrie des Systems wird die Geometrie im Vorspannzustand angenommen, d.h. alle Verschiebungen, die zu dem Spannungsfeld  $\underline{\underline{\sigma}}_v^{j^{(0)}}$  gehören, sind Null.



Mit:  $\langle \underline{b}^1 \rangle = \underline{b}^1 dx^2 dx^3 + \underline{b}_N^{(0)} dx^2 dx^3$ , u. s. w.

Bild 2.2

In Bild 2.2 sind die inneren Kräfte  $\underline{\sigma}_{v.}^{j(o)}$  und die Volumenkräfte  $\underline{\bar{p}}^{(o)}$  eines Achtels des Parallelepipeds vor der Verformung eingetragen. Es wird angenommen, daß die Vorspannungen durch ein system- bzw. verschiebungsunabhängiges Kräftefeld verursacht sind. Dieses Feld setzt sich aus Flächenkräften  $\underline{\bar{F}}^{(o)}$  und Volumenkräften  $\underline{\bar{p}}^{(o)}$  zusammen.

Die Gleichgewichtsbedingung - vor einer Bewegung - zum Zeitpunkt  $t^{(o)}$  lautet dann:

$$\underline{\sigma}_{v.,k}^{k(o)} + \underline{\bar{p}}^{(o)} = 0 \quad ; \quad (2.11)$$

$\underline{\bar{p}}^{(o)}$  ist die Volumenkraft pro Volumeneinheit für den Fall Vorspannung allein, wobei

$$\underline{\sigma}_{v.}^{k(o)} = \underline{\sigma}^{kj(o)} \underline{g}_j \quad (2.12)$$

Im Bild 2.2 sind Kräfte aus Vorspannung, die inneren Kräfte Volumen- und Trägheitskräfte eingetragen, die die Bewegung verursacht haben.

Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\underline{\sigma}_{,k}^k + \underline{\sigma}_{N.,k}^{k(o)} + \underline{\bar{p}} + \underline{\bar{p}}^{(o)} - \rho \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = 0 \quad (2.13)$$

$\underline{\bar{p}}$  und  $\rho$  sind die Volumenkraft bzw. die Masse pro Volumeneinheit des unverformten Körpers.

$\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}$  ist die substantielle Beschleunigung, die nicht mit der lokalen Beschleunigung  $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2}$  zu verwechseln ist; vergleiche dazu [20].

Weiterhin sind

$$\underline{\sigma}_N^{K^{(0)}} = \delta^{K_j^{(0)}} \underline{\sigma}_j \quad (2.14)$$

die unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen transformierten Vorspannungen nach der Verformung des Systems (Transformation auf die verformte Metrik).

Vergleicht man (2.12) und (2.14), dann stellt man fest, daß sich die Vorspannung infolge der Verschiebung von  $\underline{\sigma}_V^{K^{(0)}}$  in  $\underline{\sigma}_N^{K^{(0)}}$  geändert hat. Die Ursache hierfür ist, daß durch die Verschiebung ein neues Tragsystem entstanden ist, das unter dem Einfluß von den konstant gebliebenen Kräften  $\underline{\bar{p}}^{(0)}$  und  $\underline{\bar{F}}^{(0)}$  statt  $\underline{\sigma}_V^{K^{(0)}}$  die Vorspannungen  $\underline{\sigma}_N^{K^{(0)}}$  hat.

Man kann sich diese Änderung aus dem folgenden Beispiel klar machen:

Bild 2.3 a ist ein statisches System unter dem Einfluß von  $\underline{\bar{F}}$ , die Vorspannung in dem Element AB ist  $\delta^{11} \underline{g}_1$ .

Wir nehmen an, daß das System durch zusätzliche Kraft- und Wärmefelder in das System Bild 2.3 b übergeht.

Es ist ersichtlich, daß die Spannung in AB infolge  $\underline{\bar{F}}$  durch den Vektor  $\delta^{11} \underline{G}_1$  dargestellt wird.

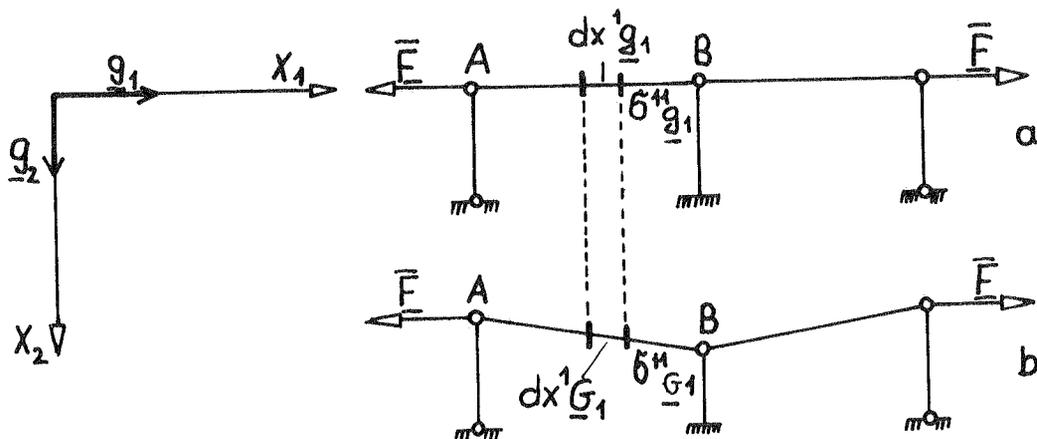


Bild 2.3

Setzt man Gl. (2.8) in (2.14), so erhält man

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_N^{k(0)} &= \underline{\sigma}^{kj(0)} (\underline{\sigma}_j^i + u_{,j}^i) \underline{g}_i \\ &= \underline{\sigma}^{kj(0)} \underline{g}_j + \underline{\sigma}^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \\ \underline{\sigma}_N^{k(0)} &= \underline{\sigma}_v^{k(0)} + \underline{\sigma}^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i\end{aligned}\quad (2.15)$$

Mit (2.11) und (2.15) wird aus (2.13)

$$\underline{\sigma}_{,k}^k + (\underline{\sigma}^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i)_{,k} + \bar{p} - \varrho \frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \quad (2.16)$$

(es wird über  $k, j, i$  summiert).

Gleichung (2.16) ist vom Werkstoffgesetz unabhängig, für ihre Lösung ist jedoch die Annahme eines solchen notwendig.

Man definiert die Spannungen nach Bild 2.4, so daß sie mit den Verzerrungen  $e_{kj}$  ein Potential bilden können, siehe Abschnitt 2.5

$$\underline{\sigma}^k = \underline{\sigma}^{kj} \underline{g}_j \quad (2.17)$$

Mit  $\bar{p} = \bar{p}^k \underline{g}_k$

und  $\varrho \frac{d^2 r}{dt^2} = \varrho B^k \underline{g}_k$

erhält man aus (2.16) die skalaren Bewegungsgleichungen des Parallelepipeds unter Berücksichtigung der Vorspannung:

$$\left[ (\underline{\sigma}_j^k + u_{,j}^k) \underline{\sigma}^{ij} \right]_{,i} + \underline{\sigma}^{ij(0)} u_{,j}^k \underline{g}_i + \bar{p}^k - \varrho B^k = 0 \quad (2.18)$$

(es wird über  $i, j$  summiert)

Der unterstrichene Term in Gl. (2.18) stellt die Kopplung zwischen Anfangs- und Endzustand dar. Es ist damit einleuchtend, daß das Superpositionsprinzip seine Gültigkeit verloren hat. Aus der dynamischen Gleichgewichtsbedingung für die Drehungen und unter der Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit kann man die Symmetrie des Spannungstensors beweisen, d.h.

$$\underline{\alpha}^{jk} = \underline{\alpha}^{kj} \quad (2.19)$$

Solange keine Volumen-Momente und/oder Momentenspannungen vorhanden sind, ist diese Symmetrie auch im Falle einer Bewegung gewährleistet [10].

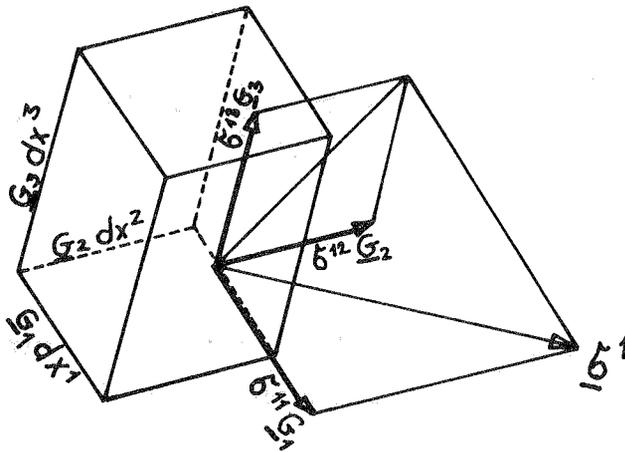


Bild 2.4: Definition der Spannungen

Die Transformationseigenschaften von  $\underline{b}^{kj}$  sind in [8] besprochen. Die  $\underline{b}^{kj}$  werden auch Kappus-Spannungen<sup>1)</sup> genannt; sie beschreiben den Spannungszustand mit Hilfe der verformten Basisvektoren und beziehen ihn auf die unverformten Flächen.

Die Komponenten des Tensors  $\underline{b}^{kj}$  sind keine physikalischen Spannungen im Punkt P, sondern mathematische Größen, womit die nichtlineare Theorie in einfacher Form darstellbar ist. Für die Beanspruchungen auf die verformte und unverformte Fläche siehe [9].

### 2.3 Transformation des Spannungstensors bei Berücksichtigung von Vorspannung

Mit Gl. (2.16) und nach Bild 2.5 ergibt das Gleichgewicht am infinitesimalen Tetraeder:

1) Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor 2. Art

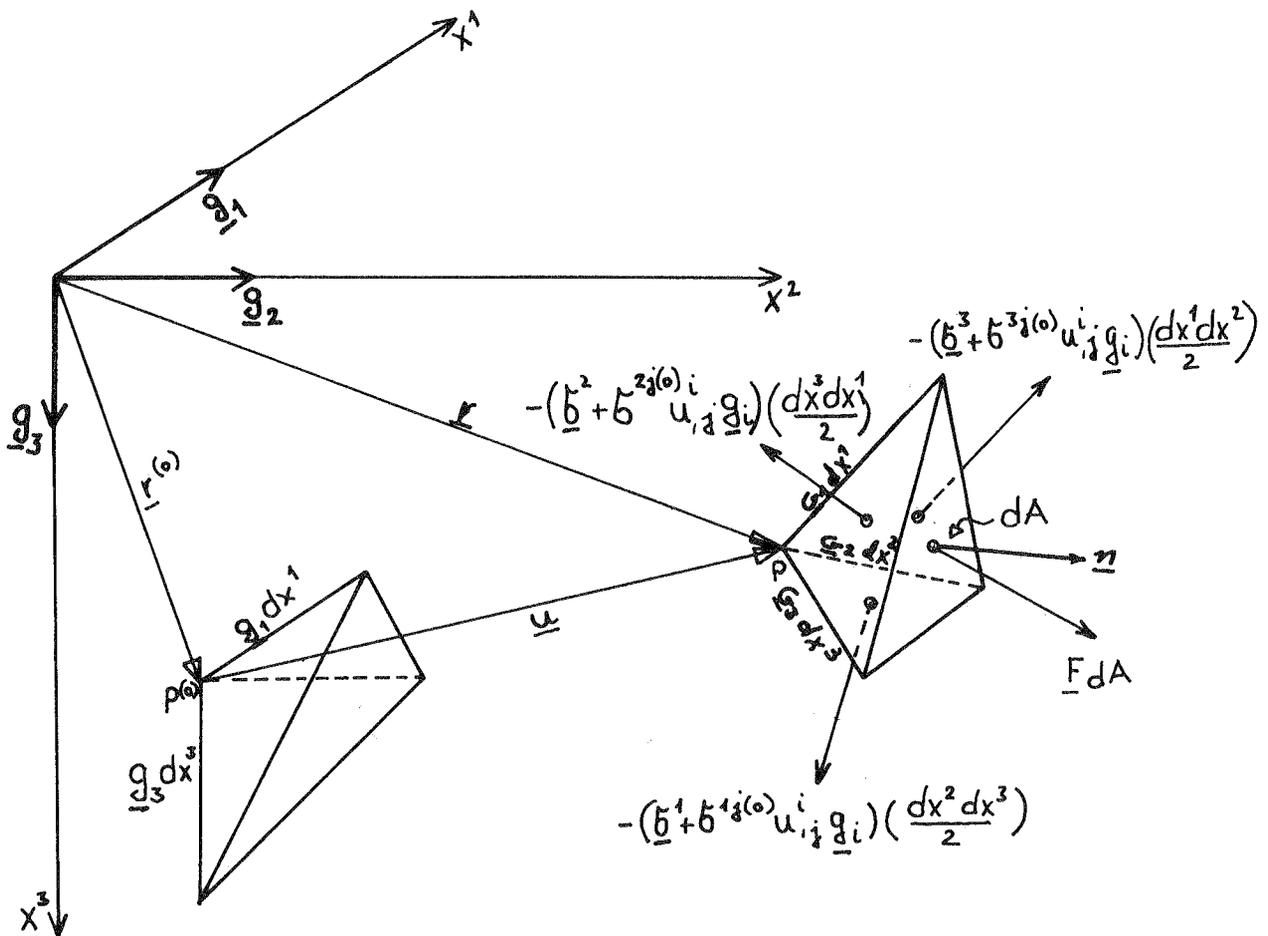


Bild 2.5: Gleichgewicht an einem Tetraeder

$$\begin{aligned}
 \underline{F}dA &= (\underline{b}^1 + b^{1j(0)} u^i_j \underline{g}_i) (dx^2 \frac{dx^3}{2}) + \\
 &+ (\underline{b}^2 + b^{2j(0)} u^i_j \underline{g}_i) (dx^3 \frac{dx^1}{2}) + \\
 &+ (\underline{b}^3 + b^{3j(0)} u^i_j \underline{g}_i) (dx^1 \frac{dx^2}{2})
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= (\underline{g}_i \cdot \underline{n}) \underline{\sigma}^i + \sigma^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) \\ &= (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) (\underline{\sigma}^k + \sigma^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\underline{n}$  ist der Einheitsvektor normal zu Fläche  $dA$ .

Mit

$$\underline{F} = F^j \underline{g}_j \quad (2.22)$$

und aus Gl. (2.8), (2.17) und (2.22) bekommt man Gl. (2.21) in skalarer Form:

$$F^i = (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) \left[ \sigma^{kj} (\sigma_j^i + u_{,j}^i) + \sigma^{kj(0)} u_{,j}^i \right] \quad (2.23)$$

(es wird über  $k, j$  summiert).

#### 2.4 Das Elastizitätsgesetz

Für die lineare Theorie findet man in [12] eine allgemeine Form des Werkstoffgesetzes.

Angesichts der komplizierten Formeln für "Ingenieur-Verzerrungen" und "Ingenieur-Spannungen" bei Systemen mit geometrischer Nichtlinearität ist es für die Vereinfachung des Problems entscheidend wichtig, das Werkstoffgesetz als Beziehung zwischen mathematisch geeigneten Größen, nämlich dem Kappus'schen Spannungstensor  $\sigma^{jk}$  und dem Lagrange'schen Verzerrungstensor  $e_{jk}$  zu wählen.

Voraussetzung dafür ist, daß die Spannungen  $\sigma^{jk}$  durch Funktionen der Verzerrungen  $e_{jk}$  ausgedrückt werden können; d.h.

$$\sigma^{jk} = \sigma^{jk}(e_{11}, e_{12}, e_{13}, \dots, e_{33}) \quad (2.24)$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß während der Verformung keine Temperaturänderung auftritt; d.h. die Formänderung sei isotherm.

Gl. (2.24) in Potenzen von  $e_{ij}$  dargestellt ergibt

$$\sigma^{jk} = E^{jkim} e_{im} + E^{jkimdn} e_{im} e_{dn} \quad (\text{höhere Terme sind nicht möglich!})$$

Man steht nun vor einer möglichen Einschränkung, nämlich: sind die Größen von  $e_{im}$  klein genug gegenüber "eins", dann kann man den zweiten Term der rechten Seite vernachlässigen, und damit bleibt eine lineare Beziehung zwischen  $\sigma^{jk}$  und  $e_{im}$ , die nur im Falle kleiner Verzerrungen anwendbar ist. Wenn dagegen die Verzerrungen groß sind, müssen nichtlineare Terme von  $e_{im}$  berücksichtigt werden.

Es ist zu bemerken, daß in der geometrischen Nichtlinearität - Verschiebungs- Verzerrungsbeziehungen - keine Einschränkung, weder für Verschiebungs- noch für Verzerrungsgrößen, gemacht wurden. Im Gegensatz hierzu wird im Sinne der gestellten Aufgabe eine physikalische Linearität vorausgesetzt.

Damit ist:

$$\sigma^{jk} = E^{jkim} e_{im} \quad (2.25)$$

$E^{jkim}$  ist der allgemeine Elastizitätstensor, der strenggenommen vom Temperaturzustand des Kontinuums abhängt [8]. Er hat im dreidimensionalen Kontinuum 81 Größen und für zweidimensionale Konstruktionen (Membrane und ähnliches) 16 Größen.

Wegen der Symmetrie der beiden Tensoren  $\delta^{jk}$  und  $e_{im}$  werden die 16 auf 9 Größen reduziert.

Wenn man weiterhin die Existenz eines elastischen Potentials voraussetzt - diese Frage wird später ausführlich behandelt - reduzieren sich die 9 auf 6 Größen.

Diese 6 Größen sind im Falle allgemein anisotroper Membrane tatsächlich voneinander unabhängig und müssen entsprechend angegeben werden. Ist die Membran isotrop, so hat der Werkstoff überall Symmetrieebenen, und die Elastizitätskonstanten sind von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Damit gehen die 6 Konstanten in 2 unabhängige Konstanten über, nämlich die Lamé - Konstanten [13] , [14] .

Es ist erwähnenswert, daß die lineare Beziehung (2.25) zwischen den Ingenieurdehnungen und Ingenieurspannungen ein überlineares Materialgesetz darstellt [15] . Das wird aus folgendem deutlich.

Aus (2.6) folgt für einachsige Beanspruchung:

$$e_{11} = \epsilon_{11} \left( 1 + \frac{\epsilon_{11}}{2} \right)$$

und mit

$$\tau^{11} = \delta^{11} (1 + \epsilon_{11}),$$

wobei die Spannung  $\tau^{11}$  auf die unverformte Fläche bezogen ist; daraus folgt:

$$\tau^{11} = E^{1111} \epsilon_{11} \left( 1 + \epsilon_{11} \right) \left( 1 + \frac{\epsilon_{11}}{2} \right).$$

Die Verzerrungen in den Richtungen  $\underline{G}_2$  und  $\underline{G}_3$  sind:

$$e_{22} = -\nu e_{11}$$

$$e_{33} = -\nu e_{11}; \nu \text{ ist die Querdehnzahl,}$$

davon ist:

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -1 + \sqrt{1 - 2\nu\epsilon_{11} \left(1 + \frac{\epsilon_{11}}{2}\right)}.$$

Die auf die verformte Fläche bezogene Spannung ist:

$$\mathfrak{J}^{11}(\nu) = \frac{\mathfrak{J}^{11}}{(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33}) \sin \varphi_{23}} \quad ; \quad \sin \varphi_{23} \approx 1$$

$\varphi_{23}$  ist der Winkel zwischen  $G_2$  und  $G_3$

$$\mathfrak{J}^{11}(\nu) = \frac{E^{1111} \epsilon_{11} \left(1 + \epsilon_{11}\right) \left(1 + \frac{\epsilon_{11}}{2}\right)}{1 - 2\nu \epsilon_{11} \left(1 + \frac{\epsilon_{11}}{2}\right)}$$

$\mathfrak{J}^{11}(\nu)$  ist die Spannung bezogen auf die verformte Fläche und hat als Funktion von  $\epsilon_{11}$  einen überlinearen Verlauf.

### 2.5. Zur Existenzfrage eines elastischen Potentials:

Die mathematische Potentialtheorie findet man z.B. in [16]. Danach ist das hier interessierende elastische Potential unter der Kategorie des Newton'schen Potentials eingeordnet.

Als Definition gilt:

Das bezogene elastische Potential  $W$  - wenn es existiert - ist die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um eine Volumeneinheit des Kontinuums vom unverzerrten in den verzerrten Zustand zu überführen. Seine Größe ist immer positiv, weil der verzerrungslose Zustand eine stabile Gleichgewichtslage darstellt. Es ist eine Zustandsgröße, die nur von den Endverzerrungen abhängt und deren partielle Differentiation nach den Verzerrungen ergibt:

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{jk}} = \sigma^{jk} \quad (2.26)$$

Die Existenz eines elastischen Potentials nach der vorherigen Definition ist an eine Reihe von Voraussetzungen geknüpft. Diese werden hier in Hauptzügen erläutert. Weitere Einzelheiten über die Verformung des Kontinuums findet man in [26] .

### 2.5.1. Zustand - Voraussetzungen:

Wenn alle anderen Bedingungen für die Existenz eines Potentials erfüllt sind, kann dieses Potential nur dann existieren, wenn die Verformung entweder isentrop oder isotherm verläuft.

Um dies zu erklären, benutzt man den ersten und zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie.

Aus dem ersten Satz kann man für eine Volumeneinheit ableiten:

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (2.27)$$

$dU$  ist der Zuwachs der inneren Energie

$\delta W$  ist der Zuwachs der Formänderungsenergie

$\delta Q$  ist der Zuwachs der Wärmeenergie

$\delta$  bedeutet, daß  $\delta W$  und  $\delta Q$  Differentialgrößen sind, sie bilden aber i.a kein vollständiges Differential.

Zur Vereinfachung wird keine kinetische Energie und keine weitere Energiezuführung (z.B. mechanische Energie) berücksichtigt.

Die innere Energie  $U$  ist eine Zustandsgröße, die von den Endverformungen und der Temperatur des Elements abhängt. Physikalisch ausgedrückt ist  $U$  eine eindeutige Zustandsfunktion, die von der Hauptlage der Moleküle unter den molekularen Kräften und der kinetischen Energie der Moleküle um ihre Hauptlage abhängt [17] .

Für umkehrbare Prozesse der Thermodynamik gilt weiterhin:

$$\delta Q = \theta ds \quad (2.28)$$

$\theta$  ist die absolute Temperatur des Elementes und  $S$  ist die spezifische Entropie.

Einsetzen von Gl. (2.28) in (2.27) ergibt:

$$\delta W = dU - \theta ds$$

$$\delta W = dU - d(\theta S) + Sd\theta \quad (2.29)$$

Es werden die beiden Fälle untersucht:

a)  $\delta Q = 0$ , d.h. isentrope Formänderung, dann ist:

$$\delta W = dU \quad (2.30)$$

damit ist  $\delta W = dW$  ein vollständiges Differential und  $W$  existiert.

b)  $d\theta = 0$ , d.h. isotherme Formänderung, dann ist:

$$\delta W = d(U - \theta S) \quad (2.31)$$

Die rechte Seite ist ein vollständiges Differential; damit ist die Existenz von  $W$  gewährleistet. Im Gegensatz zu den Fällen a) und b) ist die rechte Seite von Gl. (2.29) in ihrer allgemeinen Form kein vollständiges Differential.

Die praktischen Aufgaben sind in Wirklichkeit weder isentrop noch isotherm, sondern gemischt. Trotzdem wird für die langsame Verformung (bei Aufbringen von statischen Lasten und ähnlichem) isothermes Verhalten und für kleine und schnelle Verformungen (z.B. Schwingungen) isentropes Verhalten angenommen.

### 2.5.2 Physikalische Voraussetzungen

Das elastische Potential sei eine eindeutige Zustandsgröße in Abhängigkeit von den Endverzerrungen und damit unabhängig vom

Weg und der Art der Verformung.

Für eine Volumeneinheit lautet das spezifische Potential

$$W = \int dW = \int_{0,0,0,\dots}^{e_{11},e_{12},e_{13},\dots} \sigma^{jk} de_{jk} \quad (2.32)$$

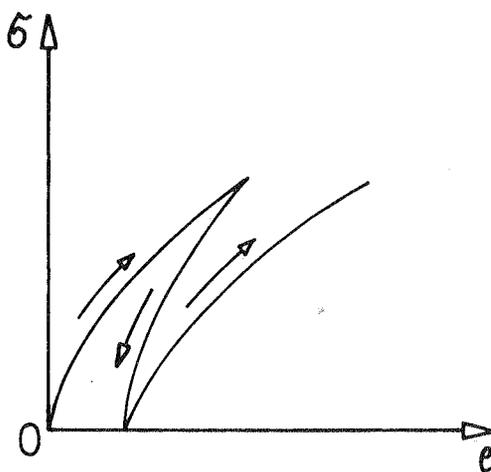
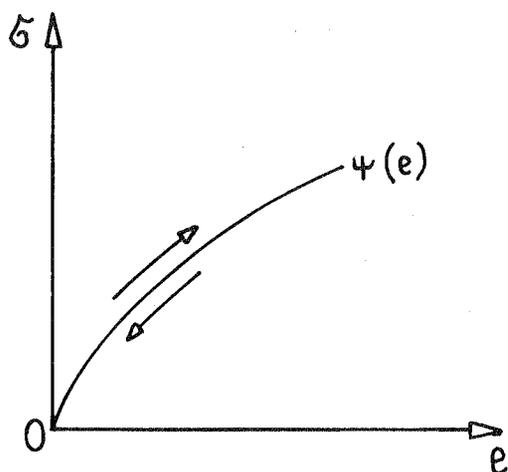
Es sei ein eindeutiges Integral.

Diese Eigenschaft ist von der Struktur der  $\sigma^{jk}$  abhängig.  $\sigma^{jk}$  muß eine eindeutige endliche Funktion von  $e_{jk}$  sein, d.h.

$$\sigma^{jk} = \psi(e_{jk}),$$

wobei  $\psi(e_{jk})$  eine eindeutige Funktion der Verzerrungen ist; sie kann nichtlinear sein.

Die Eindeutigkeit von  $\psi(e_{jk})$  ist nur bei vollkommen elastischen Stoffen gesichert; solche Medien ergeben bei Belastung und Entlastung dieselben Verformungslinien Bild 2.6 a). Dagegen stellt Bild 2.6 b) eine nicht eindeutige und nicht umkehrbare Verformung dar.



a) vollkommen elastische Verformung  
umkehrbarer Prozess

b) nicht elastische Verformung  
nicht umkehrbarer Prozess

Bild 2.6: Elastische und nicht elastische Verformungen

Ein vollkommen elastisches Verhalten ist bei einigen Baustoffen, z.B. Stahl, mit sehr guter Näherung vorhanden, d.h. die Material-Dämpfung ist sehr gering.

Dies bedeutet, daß die Reibungsenergie infolge von dissipativen (nicht konservativen) inneren Kräften im Vergleich mit der Formänderungsenergie der konservativen inneren Kräfte vernachlässigt wird, z.B. [9] .

Für einen allgemeinen anisotropen Stoff hängt das elastische Potential von den 6 Verzerrungsgrößen  $e_{jk}$  bzw. von den 3 Hauptverzerrungsgrößen  $e_1, e_2, e_3$  und ihren 3 Winkeln zu dem Koordinatensystem ab. Bei isotropem Material sind die Winkel belanglos. Damit ist  $W$  eine Zustandsgröße der Hauptverzerrungen oder der Verzerrungsinvarianten

$$W = W(e_1, e_2, e_3) \quad \text{oder} \quad W = W(I_1, I_2, I_3) ,$$

d.h. eine gegenüber Drehtransformationen invariante Funktion der Hauptverzerrungen.

$I_1, I_2, I_3$  sind die Verzerrungsinvarianten.

### 2.5.3 Mathematische Voraussetzungen

Die Eindeutigkeit des Integrals (2.32) fordert, daß die Funktion  $\delta^{jk} de_{jk}$  ein vollständiges Differential ist, d.h. die Spannungen die partiellen Ableitungen des spezifischen Potentials nach den Verzerrungsgrößen sind

$$\frac{\partial W}{\partial e_{jk}} = \delta^{jk}$$

Diese Forderung ist also ein Bestandteil der Definition eines elastischen Potentials (2.26). Für die Bildung des Potentials ist damit die Wahl eines geeigneten Tensorenpaares entscheidend. In der vorliegenden Arbeit werden der Lagrange-Green'sche Verzerrungstensor  $e_{jk}$  und der Kappus'sche Spannungstensor  $\sigma^{jk}$  als abhängige Größen des elastischen Potentials eingeführt. Die Zulässigkeit wird im folgenden bewiesen.

Das direkte Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Parallelepipèd ergibt sich aus Gl. (2.18) - zur Vereinfachung ohne Trägheits- und Vorspannkraften - zu

$$\left[ (\sigma_j^k + u_{,j}^k) \delta^{ij} \right]_{,i} + \bar{p}^k = 0 \quad (2.33)$$

Die Minimalbedingung für das gesamte Potential sowie das Prinzip der virtuellen Verschiebungen führen zu der Bedingungsgleichung (vergleiche auch [18])

$$-\iiint_V \delta W + \iiint_V \bar{p} \cdot \delta \underline{u} + \iint_S \bar{F} \cdot \delta \underline{u} = 0 \quad (2.34)$$

mit

$$W = W (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33})$$

Aus Gl. (2.9) ergibt sich:

$$W = W (u_{,i}^k) ; \quad (k, i = 1, 2, 3)$$

mit der Variation

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \delta u_{,i}^k$$

Partielles Integrieren unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert

$$-\iiint_V \delta W = \iiint_V \left( \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \right)_{,i} \delta u^k - \iint_S \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \delta u^k$$

Einsetzen in Gl. (2.34) ergibt

$$\iiint_V \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \right)_{,i} + \bar{p}^k \right] \cdot \delta u^k + \iint_S \left( \bar{F}^k - \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \right) \cdot \delta u^k = 0$$

Wegen der Willkür der  $\delta u^k$  muß gelten

$$\left( \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} \right)_{,i} + \bar{p}^k = 0 \quad (2.35)$$

und

$$\bar{F}^k - \frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} = 0 \text{ auf der Oberfläche } S \quad (2.35a)$$

Nun gilt

$$\frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} = \frac{\partial W}{\partial e_{rj}} \frac{\partial e_{rj}}{\partial u_{,i}^k}$$

Beim Einsetzen von Gl. (2.9) ist dann:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} = \frac{\partial W}{\partial e_{rj}} \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} (u_{,ij}^r + u_{,ir}^j + u_{,ir}^m u_{,j}^m) \right]}{\partial u_{,i}^k}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_{,i}^k} = (\delta_{,j}^k + u_{,j}^k) \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$$

Einführen in Gl. (2.35) liefert:

$$\left[ (\delta_{,j}^k + u_{,j}^k) \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \right]_{,i} + \bar{p}^k = 0 \quad (2.36)$$

Dies sind aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten abgeleitete Gleichgewichtsbedingungen; sie müssen mit Gl. (2.33) identisch sein, dann ist

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \delta^{ij}$$

Damit ist die mathematische Forderung in Gl. (2.26) bewiesen und man kann aus den beiden Tensoren  $e_{jk}$  und  $\delta^{jk}$  das elastische Potential bilden; dies ist in der nichtlinearen Theorie nicht selbstverständlich.

In ähnlicher Weise kann man feststellen, ob andere Tensorpaare von Spannungen und Verzerrungen für das Bilden eines elastischen Potentials geeignet sind, siehe hierzu [28].

Gl. (2.26) ist - unter der Voraussetzung, daß ein elastisches Potential vorliegt - die allgemeinste Form der Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen.

Die Art dieser Beziehung hängt von der Struktur des elastischen Potentials ab. Sie ist fundamentaler als das Werkstoffgesetz.

Aus Gl. (2.26) folgt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{km}} = \frac{\partial \delta^{ij}}{\partial e_{km}} = \frac{\partial \delta^{km}}{\partial e_{ij}} \quad (2.37)$$

Gl. (2.37) gibt i.a. 15 zusätzliche Beziehungen zwischen den Komponenten des Elastizitätstensors  $E^{jkim}$  und reduziert damit seine unabhängigen Größen von 36 auf 21 bzw. bei einem zweidimensionalen Kontinuum von 9 auf 6, siehe Abschnitt 2.4.

### 3. Grundgleichungen der Dynamik

#### 3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Im Rahmen der Statik lautet das Prinzip:

Für ein im Gleichgewicht befindliches System muß die virtuelle Arbeit aller inneren und äußeren Kräfte für ein beliebiges aber umkehrbares virtuelles Verschiebungsfeld, das mit den kinematischen Bindungen verträglich ist, verschwinden. Es gilt allgemein unabhängig von der Art des Gleichgewichts (stabil; instabil), dem Werkstoffgesetz und dem geometrischen Verhalten des Systems (linear; nichtlinear).

Die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte ist immer Null, weil keine Wege vorhanden sind.

Für ein elastisches Kontinuum im einfachen, statischen Belastungsfall kann man das Prinzip folgendermaßen angeben:

$$-\iiint_V (\underline{\sigma}_{,k}^k + \underline{\bar{p}}) \cdot \delta \underline{u} \, dV + \iint_{S_1} (\underline{E} - \underline{\bar{F}}) \cdot \delta \underline{u} \, dS = 0 \quad (3.1)$$

Wobei die Oberfläche des Kontinuums  $S_1 + S_2$  ist. Auf  $S_1$  gelten dynamische, auf  $S_2$  geometrische Randbedingungen.

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit ist die direkte statische Gleichgewichtsaussage, die das Nullwerden eines resultierenden Kraftvektors fordert, in das Nullsetzen einer skalaren Größe, nämlich der virtuellen Arbeit (skalares Produkt zweier Vektoren, "Kraft • Weg") verwandelt.

Dem Sinne nach tauchen in (3.1) nur die Kräfte auf, die virtuelle Arbeit leisten, bzw. virtuelle Verschiebungen erfahren.

Es leuchtet ein, daß für ein gebundenes System die Methode der virtuellen Arbeit zweierlei Vorteile bietet:

- a) Solche Kräfte, die bestimmte kinematische Bindungen aufrecht erhalten (z.B. Auflagerkräfte) sind von vorne herein eliminiert. Diese Vereinfachung hängt wesentlich von der Wahl des virtuellen Verschiebungsfeldes ab.
- b) Man arbeitet mit skalaren Größen (Arbeiten), die vom Koordinaten-System unabhängig sind. Dieser Vorteil wird ersichtlich, wenn ausgehend von P. d. v. A. das Variationsprinzip der Dynamik von Hamilton dargestellt wird. Dagegen bietet die direkte Anwendung des P. d. v. A. für ein freies Kräftesystem, bei dem auch die inneren Kräfte berücksichtigt werden sollen, keinen echten Vorteil [19], denn in Ermangelung der Bindungen ist jede virtuelle Verschiebung  $\delta \underline{u}$  völlig willkürlich. Deshalb kann die Integration in (3.1) nur dann null sein, wenn die Koeffizienten der  $\delta \underline{u}$  einzeln verschwinden. Dies ergibt die wohlbekanntenen Newton'schen Bewegungsgleichungen.

### 3.2 D'Alembert'sches Prinzip - Erweiterung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf der Dynamik

Ausgehend vom Grundaxiom der Dynamik von Newton

Masse x Beschleunigung = bewegende Kraft

$$\underline{M} \underline{B} = \underline{P} \quad (3.2)$$

hat D'Alembert das dynamische Gleichgewicht eines Systems mathematisch formuliert.

Die Newton'sche Gleichung (3.2) ist eine vektorielle Bewegungsgleichung, die mit den weiteren Newton'schen Gesetzen die Grundlage der vektoriellen Mechanik darstellt. Gl. (3.2) fordert kein Verschwinden wie es in der Statik üblich ist, sondern stellt einen Vergleich zwischen zwei Vektoren dar; nämlich den Kraftvektor  $\underline{P}$  und einen Vektor  $\underline{MB}$ , der die Maßeinheit einer Kraft hat.

Wenn man schreibt;

$$\underline{P} - \underline{M}\underline{B} = 0 \quad (3.3)$$

und nimmt  $-\underline{M}\underline{B} = \underline{H}$  als Kraft an, so ist dies mathematisch zulässig, solange  $\underline{H}$  ein Vektor ist und die Maßeinheit einer Kraft besitzt.  $\underline{H}$  wird die Trägheitskraft genannt. Sie ist charakteristisch für die Masse, weil sie sich überall befindet wo sich Massen in Beschleunigung befinden.

Aus (3.3) folgt dann

$$\underline{P} + \underline{H} = 0 \quad (3.4)$$

Gl. (3.4) ist mathematisch eine Gleichgewichtsgleichung, die sich auch für komplexe in Bewegung befindlicher Systeme verallgemeinern läßt. Man kann aus (3.4) dem ersten Teil des D'Alembert'schen Prinzips folgendermaßen formulieren:

"Jedes Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn man zu den bewegenden Kräften die Trägheitskräfte addiert."

Das D'Alembert'sche Prinzip wandelt das dynamische Problem formal in ein statisches Problem um, indem man die Bewegung des Systems zunächst einmal "vergibt" und die Betrachtung auf das formale Gleichgewicht der eingepprägten Kräfte, der Auflager- und der Trägheitskräfte konzentriert.

Diese Betrachtungsweise ermöglicht es, alle im Bereich der Statik gültigen Kriterien für im Gleichgewicht befindliche Kräfte auf die Kräfte der Dynamik zu übertragen.

Damit hat man nicht die Dynamik durch die Methoden der Statik bewältigt, sondern man kann die Grundgleichungen der Dynamik durch vom Ursprung her statische Überlegungen herleiten.

Der zweite Teil des D'Alembert'schen Prinzips besteht darin, daß man das Prinzip der virtuellen Arbeit - zunächst als Aussage für das statische Gleichgewicht - in Gl. (3.4) auf die Dynamik erweitert.

Es besagt:

"Die virtuelle Arbeit von inneren, äußeren und Trägheitskräften eines sich in Bewegung befindlichen Systems für ein beliebiges umkehrbares Verschiebungsfeld, das mit den kinematischen Bindungen verträglich ist, muß verschwinden".

Auch hier gilt: Die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für ein mit den kinematischen Bindungen verträgliches virtuelles Verschiebungsfeld ist immer null.

Folglich kann man (3.1) für die Dynamik folgendermaßen schreiben:

$$-\iiint_V (\underline{b}_{,k}^k + \underline{\bar{p}} + \underline{h}) \cdot \underline{d}u \, dV + \iint_{S_1} (\underline{F} - \underline{\bar{F}}) \cdot \underline{d}u \, dS = 0 \quad (3.5)^1$$

wobei  $\underline{h}$  die Trägheitskraft für die Volumeneinheit des unverformten Körpers ist.

Gl. (3.5) betrachtet einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung.

Weiterhin ergeben sich für das "Erzeugen" eines virtuellen Verschiebungsfelds während der Bewegung keine Bedenken. Solange die virtuelle Verrückung geometrisch möglich sein muß, aber nur ein rein mathematisches Experiment ist, kann man sich wohl vorstellen, daß ein dynamisches System zu einem bestimmten Zeitpunkt ein virtuelles Verschiebungsfeld erfährt.

Die virtuelle Verschiebung geschieht bei konstanter Zeit, d.h. mit unendlich großer Geschwindigkeit; dies aber stört die echte Dynamik des Systems auf keinen Fall, denn in diesem Moment wird nur das Auftreten der virtuellen Verrückungen berücksichtigt; weitere Größen (etwa Geschwindigkeit und Beschleunigung) tauchen in der Rechnung nicht auf.

Mit der Erweiterung auf die Dynamik ist das Prinzip der virtuellen Arbeit das allgemeinste Gleichgewichtsprinzip der Mechanik. Seine allgemeine Formulierung stammt von JOHANN BERNOULLI (1717), siehe z.B. [20].

---

1) Diese Form ist in [21] verwendet worden. Das Prinzip wird auch oft nach der Durchführung der Teilintegration geschrieben.

Seine D'Alembert'sche Form stellt die Grundlage für die fundamentalen Variationsprinzipien der Mechanik dar. So sind die Prinzipien von Euler, Lagrange, Jacobi und Hamilton nur eine andere mathematische Formulierung des D'Alembert'schen Prinzips [21].

### 3.3 Hamilton'sches Prinzip

Um das D'Alembert'sche Prinzip, das für einen bestimmten Zeitpunkt gilt, in ein Integralprinzip oder Variationsprinzip, in dem der Bewegungsvorgang als Ganzes berücksichtigt wird, zu überführen, benutzt man den Hamilton-Formalismus.

Der Hamilton-Formalismus wird hier abstrakt in allgemeiner Form dargestellt, und zwar zur Vereinfachung für ein Massensystem (keine Formänderungsenergie vorhanden!), um die verschiedenen Aspekte dieses Vorgehens zu zeigen.

Die eingepprägten Kräfte sollen ein Potential besitzen. Hier handelt es sich um ein Newton'sches Potential [16]. Dies bedingt das Verschwinden der Rotation der Kräfte; d.h.

$$\frac{\partial R_i}{\partial q_j} - \frac{\partial R_j}{\partial q_i} = 0 \quad \text{wobei } R_i, q_i \text{ die allgemeinen Kräfte}$$

und die allgemeinen Koordinaten sind

Man betrachtet ein System mit endlich vielen Freiheitsgraden  $n$ , die durch die Koordinaten des  $n$ -dimensionalen Raumes ausgedrückt sind.

Die allgemeine Form des Potentials der äußeren Kräfte (auch Arbeitsfunktion genannt) ist

$$U = U (q_i; \dot{q}_i; t) \tag{3.6}$$

$q_i, \dot{q}_i$  sind die allgemeinen Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten.  
Die potentielle Energie des Systems hat gemäß Definition die Form  
[21]

$$V = \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - U \quad (3.7)$$

Die generalisierten (allgemeinen) Kräfte sind [21]

$$R_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.8)$$

Wenn  $U$  von den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  nicht abhängt, so gilt

$$V = -U \quad (3.9)$$

und

$$R_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.10)$$

Für  $U$  wird gemäß (3.6) die 1. Variation gebildet

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \\ &= \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ \delta U &= \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \end{aligned}$$

Mit (3.8) ist dann

$$\delta U = R_i \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad (3.11)$$

Bei der Variation der Koordinaten  $q_i$  bleibt die Zeit konstant, da sie eine unabhängige Variable ist.

Das D'Alembert'sche Prinzip besagt für ein Massenpunktsystem im  $n$ -dimensionalen Raum:

$$\delta L = \left[ R_i - \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{q}_j) \right] \cdot \delta q_i = 0 \quad (3.12)$$

Voraussetzung für (3.12) ist: Die kinetische Energie  $T$  hängt nicht von den Koordinaten  $q_i$  ab.

Die Komponenten  $M_{ij}$  ersetzen die Masse im  $n$ -dimensionalen Raum; ihre Werte werden später erläutert.

Durch Einführen der allgemeinen Koordinaten ist die Bewegung eines Massenpunktsystems in die Bewegung eines einzigen Massenpunktes im  $n$ -dimensionalen Raum transformiert.

$\delta L$  ist nicht die Variation des Funktionals  $L$ , sondern eine allgemeine Variationsgröße.

Gl. (3.12) ist für jeden Zeitpunkt gültig, folglich gilt auch

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ R_i - \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{q}_j) \right] \cdot \delta q_i dt = 0. \quad (3.13)$$

Integration über die Zeit von Gl. (3.11) liefert

$$\int_{t_1}^{t_2} R_i \delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} R_i \delta q_i dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt - \left[ \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.14)$$

und

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{q}_j) \cdot \delta q_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{q}_j \cdot \delta q_i) dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} M_{ij} \dot{q}_j \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (M_{ij} \dot{q}_j) \cdot \delta q_i dt = - \left[ M_{ij} \dot{q}_j \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i dt \quad (3.15)$$

Aus Gl. (3.13), (3.14) und (3.15) folgt (3.16)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i + U \right) dt - \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + M_{ij} \dot{q}_j \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Der Term  $(\frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i)$  ist die kinetische Energie des Massensystems. Er lautet in kartesischen Koordinaten für N Massen, die sich von einander unabhängig bewegen

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \bar{M}_k (\dot{r}_k)^2 \quad (3.17)$$

mit

$$\dot{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad i$$

dann ist

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \bar{M}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Der Vergleich mit (3.16) ergibt

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \frac{\partial r_k}{\partial q_j}$$

Setzt man die Lagrange'sche Funktion

$$L = U + T \quad (3.18)$$

$$\text{mit } T = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \quad (3.19)$$

in Gl. (3.16) ein dann erhält man

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + M_{ij} \dot{q}_j \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.20)$$

Wie man aus diesen Ausführungen erkennt, besteht keine Einschränkung für die Gültigkeit von Gl. (3.20), allerdings nur dann, wenn die eingepprägten Kräfte ein Potential besitzen; d.h. monogenetische Kräfte sind, wie es häufig in der Literatur genannt wird.

Die Bezeichnung "monogenetische Kräfte" wird sehr oft mit "konservativen Kräften" verwechselt. Es gibt nämlich Kräfte, die ein zeitabhängiges Potential Gl. (3.6) besitzen (z. B. dynamische Kräfte); diese Kräfte erfüllen aber auf keinen Fall das Prinzip der Erhaltung der Energie. Deshalb ist es sinnvoll, die beiden folgenden Definitionen zu treffen:

Monogenetische Kräfte sind Kräfte, die von einem Potential  $U$  - auch Arbeitsfunktion genannt - ableitbar sind, dieses Potential kann zeitabhängig sein, d.h. nach der folgenden Definition nicht konservativ. Ihre allgemeinste Form ist Gl. (3.8).

Konservative Kräfte sind Kräfte, die im Sinne der Erhaltung der Energie des Systems konservativ sind, d.h. sie verursachen kein zeitabhängiges Zuführen oder Vernichten der Energie des Systems.

Um die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen herzuleiten, wird die Variation der allgemeinen Koordinaten an den Grenzen der Zeitspanne null gesetzt, d.h.

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (3.21)$$

Damit beschränkt man die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen mit den Funktionen auf die Bahnen, die die beiden Punkte  $t_1$ ,  $t_2$  passieren, Bild 3.1.

Damit ergibt sich aus Gl. (3.20)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (3.22)$$

Die Bedingungen für Gl. (3,22) sind die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.23)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$



Bild 3.1: — wirkliche Bewegung  
 --- mögliche virtuelle Bewegung

Die Gl. (3.23) werden in der Mechanik Lagrange'sche Bewegungsgleichungen zweiter Art genannt. Diese Gleichungen sind auch durch rein algebraische Behandlung der Newton'schen zweiten Bewegungsgleichung ableitbar [22]. Bedingungen für die Existenz eines ersten Integrals der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für konservative und nicht konservative Systeme findet man in [23].

Zur Erläuterung des Prinzips von der Erhaltung der Energie nimmt man an, daß die Variation des Lagrange'schen Funktionals mit seiner Änderung innerhalb eines Zeitinfinitesimals  $dt$  übereinstimmt. Geometrisch bedeutet dies die Verschiebung der

$q_i$ -Kurve parallel zu  $t$ -Achse um  $dt$  Bild 3.2.

In diesem Fall leuchtet es ein, daß die Variation an den Rändern der Zeitspanne unvermeidlich ist.

Mit  $L = L(\dot{q}_i; q_i; t)$  ist

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.24)$$

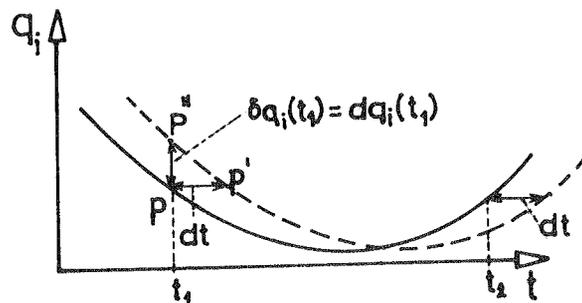


Bild 3.2: — wirkliche Bahn  
 --- variierte Bahn

und

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (3.25)$$

Für  $\delta q_i = dq_i$  und  $\delta \dot{q}_i = d\dot{q}_i$ , wie in Bild 3.2 erläutert, ist

$$\delta L = dL - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.26)$$

Führt man (3.26) in (3.20) ein, so erhält man

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} dL dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) dt - \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} \right\} dt = 0$$

und nach Umformung

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{dt} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt - \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} \right\} dt = 0$$

Wegen der Willkür der parallelen Verschiebung  $dt$  (siehe Bild 3.2)

ist dies nur möglich wenn gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{dt} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt - \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + M_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

d.h.

$$\left[ L - \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i - 2T \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Mit (3.7), (3.18) ist

$$\left[ T + V \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.27)$$

Gl. (3.27) stellt die allgemeine Energiegleichung eines sich in Bewegung befindlichen Systems dar.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie ist ein Spezialfall der

Gl. (3.27), das eintritt, wenn die Lagrange'sche Funktion  $L$

nicht explizit zeitabhängig ist,  
d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Einsetzen in Gl. (3.27) ergibt:

$$\left[ T + V \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.28)$$

Wegen der Willkür der Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  bedeutet dies, daß die gesamte Energie ( $T + V$ ) konstant ist während des Fortschreitens der Bewegung. Nur die Kräfte eines Systems, die Gl. (3.28) gewährleisten, werden in dieser Arbeit konservative Kräfte genannt; im Gegensatz dazu werden die Kräfte, die ein Potential besitzen, monogenetisch genannt.

### 3.4 Hamilton-Formalismus und Lagrange'sche Bewegungsgleichungen für das Kontinuum

---

Es wird ein schwingendes Kontinuum unter dem Einfluß von Volumenkräften und eingeprägten Kräften auf der Teiloberfläche  $S_1$  (dynamische Randbedingungen auf  $S_1$ ) betrachtet.

Auf der Teiloberfläche  $S_2$  gelten geometrische Randbedingungen. Das Kontinuum unterliegt im Anfangszustand einem Vorspannzustand.

Mit Gl. (2.16) lautet dann das Prinzip von D'Alembert zu einem bestimmten Zeitpunkt "t":

$$- \iiint_V \left[ \underline{\delta}_{,k}^k + (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i q_i)_{,k} + \bar{p} - \varrho \frac{dk^2}{dt^2} \right] \cdot \delta \underline{u} \, dV + \iint_{S_1} (\underline{F} - \bar{F}) \cdot \delta \underline{u} \, dS = 0 \quad (3.29)$$

Das Zeichen "." soll ein skalares Produkt bedeuten. Der zweite Term in (3.29) stellt die dynamischen Randbedingungen auf der Teiloberfläche  $S_1$  dar.

Teilintegration ergibt

$$\begin{aligned}
 - \int \int \int_V \underline{\delta}_{,k}^k \cdot \delta \underline{u} dV &= - \int \int_{S_1+S_2} (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) \delta^k \cdot \delta \underline{u} dS + \int \int \int_V \underline{\delta}^k \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV \\
 \text{und} \\
 - \int \int \int_V [(\delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i)_{,k}] \cdot \delta \underline{u} dV &= - \int \int_{S_1+S_2} (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i) \underline{g}_i \cdot \delta \underline{u} dS + \\
 &+ \int \int \int_V (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i) \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV
 \end{aligned}$$

Davon ist

$$\begin{aligned}
 - \int \int \int_V [\underline{\delta}_{,k}^k + (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i)_{,k}] \cdot \delta \underline{u} dV &= \int \int \int_V \underline{\delta}^k \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV + \\
 &+ \int \int \int_V (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i) \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV - \\
 &- \int \int_{S_1+S_2} (\underline{g}_k \cdot \underline{n}) (\underline{\delta}^k + \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i) \cdot \delta \underline{u} dS
 \end{aligned}$$

Mit Gl. (2.21) und  $\delta \underline{u} = 0$  auf der Teiloberfläche  $S_2$  ergibt sich, weil das virtuelle Verschiebungsfeld mit den geometrischen Randbedingungen verträglich sein soll

$$\begin{aligned}
 - \int \int \int_V [\underline{\delta}_{,k}^k + (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i)_{,k}] \cdot \delta \underline{u} dV &= \int \int \int_V \underline{\delta}^k \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV + \\
 &+ \int \int \int_V (\delta^{kj(0)} u_{,j}^i) \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} dV - \\
 &- \int \int_{S_1} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\delta}^k \cdot (\delta \underline{u})_{,k} &= \delta^{kj} \underline{G}_j \cdot (\delta \underline{u})_{,k} \\ &= \delta^{kj} \underline{G}_j \cdot \delta(\underline{r}_{,k}) \\ &= \delta^{kj} \underline{G}_j \cdot \delta \underline{G}_k \end{aligned}$$

$$\underline{\delta}^k \cdot (\delta \underline{u})_{,k} = \delta^{kj} \delta e_{kj} \quad (3.31)$$

(siehe Gl. (2.4))

und

$$\begin{aligned} \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} &= \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \cdot \delta \underline{G}_k \\ &= \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \cdot \delta [(\delta_k^m + u_{,k}^m) \underline{g}_m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} &= \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \delta u_{,k}^m \delta_m^i \\ &= \delta^{kj(0)} u_{,j}^i \delta u_{,k}^i \end{aligned}$$

$$\delta^{kj(0)} u_{,j}^i \underline{g}_i \cdot (\delta \underline{u})_{,k} = \delta \left( \frac{1}{2} \delta^{kj(0)} u_{,j}^i u_{,k}^i \right) \quad (3.32)$$

Einsetzen von (3.30), (3.31), (3.32) in (3.29) ergibt

$$\begin{aligned} &\iiint_V \delta^{kj} \delta e_{kj} dV + \iiint_V \delta \left( \frac{1}{2} \delta^{kj(0)} u_{,j}^i u_{,k}^i \right) dV + \\ &+ \iiint_V \varrho \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \cdot \delta \underline{u} dV - \iiint_V \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dV - \iint_{S_1} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nun integriert man Gl. (3.33) über die Zeitspanne  $\Delta t = t_2 - t_1$  und setzt voraus, daß Anfangs- und Endverschiebungsfeld bekannt sind, d.h.  $\delta \underline{u}(t_1) = \delta \underline{u}(t_2) = 0$ , weiterhin  $\delta \underline{r} = \delta \underline{u}$

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \delta^{kj} \delta e_{kj} dV + \iiint_V \delta \left( \frac{1}{2} \delta^{kj(0)} u_{,j}^i u_{,k}^i \right) dV + \right. \\ &\left. + \iiint_V \varrho \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} \cdot \delta \underline{u} dV - \iiint_V \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dV - \iint_{S_1} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS \right] dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \int_V \rho \left\{ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} dV + \right. \\
 & + \int_V \delta^{\kappa j} \delta e_{\kappa j} dV + \int_V \delta \left( \frac{1}{2} \delta^{\kappa j(0)} u_{,j}^i u_{,k}^i \right) dV - \\
 & \left. - \int_V \bar{p} \cdot \delta \underline{u} dV - \int_{S_1} \bar{F} \cdot \delta \underline{u} dS \right] dt = 0 \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Man definiert die kinetische Energie des Kontinuums mit:

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 dV \quad (3.35)$$

Es soll ein elastisches Potential nach Abschnitt (2.5) existieren mit

$$W^{(G)} = \frac{1}{2} \int_V \delta^{\kappa j} e_{\kappa j} dV \quad (3.36)$$

$$\delta W^{(G)} = \int_V \delta^{\kappa j} \delta e_{\kappa j} dV$$

$$W = \frac{1}{2} \delta^{\kappa j} e_{\kappa j} \quad (3.37)$$

$$\delta^{\kappa j} = E^{\kappa j i m} e_{i m} \quad (2.25)$$

$W^{(G)}$  ist das gesamte elastische Potential des Systems,  $W$  das bezogene elastische Potential und  $W^*$  ist das gesamte Potential einschließlich Berücksichtigung der Vorspannung.

$$W^* = W^{(G)} + W^{(VS)} \quad (3.38)$$

$$\text{wobei } W^{(VS)} = \frac{1}{2} \int_V \delta^{\kappa j(0)} u_{,j}^i u_{,k}^i dV. \quad (3.38a)$$

Einführen von (3.35), (3.36) und (3.38) in (3.34) liefert endgültige

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T - \delta W^* + \iiint_V \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dV + \iint_{S_1} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} ds \right] dt = 0 \quad (3.39)$$

Gl. (3.39) stellt den allgemeinen Hamilton-Formalismus für ein Kontinuum dar.

Um die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu erhalten, ist ein Diskretisieren des Kontinuums notwendig; denn sie sind eine endliche Anzahl von Differentialgleichungen, die der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems entsprechen.

Ein schwingendes Flächentragwerk (z.B. eine Membran) hat i.a. unendlich viele Freiheitsgrade. Angenähert durch Diskretisieren (z.B. mit der Ritz-, Galerkin- oder FEM) werden nur "n" gewählte Freiheitsgrade berücksichtigt [24]. Diese "n" Freiheitsgrade gelten auch als Koordinaten eines n-dimensionalen Raumes, in dem sich das ganze System als ein Massenpunkt bewegt. Als Nullpunkt dieses Raumes wird die Geometrie des unverformten Tragwerks gewählt.

Die Bewegung eines beliebigen Punktes des Kontinuums ist i.a. durch die Zeit "t" und die "n" Freiheitsgrade  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) beschreibbar, d.h.

$$u^k = u^k(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (3.40)$$

Die substantielle Ableitung nach der Zeit und die Variation sind

$$\frac{du^k}{dt} = \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial u^k}{\partial t} \quad (3.41)$$

$$\delta u^k = \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Man definiert die Lagrange'sche Funktion:

$$L = T - W^* \quad (3.42)$$

Die kinetische Energie  $T$  ist hier wegen der expliziten Abhängigkeit der Verschiebungskomponenten  $u^k$  von der Zeit in (3.40) nicht mehr eine quadratische Form, sondern ein allgemeines Polynom zweiten Grades in den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ .

$L$  ist eine Funktion der Freiheitsgrade  $q_j$ , der Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$  und der Zeit (solange  $u^k$  von der Zeit explizit abhängt). Damit ist das System im Sinne der Erhaltung der Energie (siehe 3.3) nicht konservativ.

Aus (3.42) ist dann

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta W^*] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \cdot \delta q_j dt + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Mit  $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$

ergibt sich daraus

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \cdot \delta q_j dt \quad (3.43)$$

weiter wird gesetzt

$$\iiint_V \underline{\bar{p}} \cdot \delta \underline{u} dV + \iint_{S_1} \underline{\bar{F}} \cdot \delta \underline{u} dS = R_j \delta q_j \quad (3.44)$$

(j = 1, 2, ..., n)

mit

$$R_j = \iiint_V \bar{p}^k \frac{\partial u^k}{\partial q_j} dV + \iint_{S_1} \bar{F}^k \frac{\partial u^k}{\partial q_j} dS \quad (3.45)$$

$\underline{R}$  ist die allgemeine Kraft, siehe auch Gl. (3.8), (3.10); sie kann zeitabhängig sein. Dadurch sind sämtliche Volumen- und eingepprägten Kräfte des Kontinuums durch die allgemeine Kraft  $\underline{R}$  mit "n" Komponenten dargestellt.

Einführen von (3.42), (3.43) und (3.44) in (3.39) ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - R_j \right] \delta q_j dt = 0 \quad (3.46)$$

Die Größen  $\delta q_j$  in (3.46) sind beliebig und voneinander unabhängig, dann muß für jeden Zeitpunkt gelten

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - R_j = 0 \quad (3.47)$$

Die Differentialgleichungen (3.47) sind die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum. Sie sind in der Form nicht anders als (3.23) für ein Massenpunktsystem. Dies kommt daher, daß durch das Diskretisieren des Kontinuums in etwa ein Ersatzsystem von Massenpunkten entstand, in dem die Massenpunkte miteinander durch "Flächenfedern" verbunden sind.

Der Term  $R_j$  geht in Gl. (3.47) ein, weil man die Lagrange'sche Funktion in (3.42) anders als in (3.18) definiert hat. Allerdings stellt (3.47) eine allgemeinere Formulierung dar, denn die eingepprägten Kräfte brauchen nicht monogen zu sein.

### 3.5 Zur Erfassung der Dämpfung

#### 3.5.1 Materialdämpfung

Im Falle eines Kontinuums stellt das Vorhandensein der dissipativen inneren Kräfte (s. Abschnitt 2.5.2), auch innere Reibung genannt, den Effekt der Materialdämpfung dar. Infolgedessen wird ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt und damit die Existenz eines elastischen Potentials nur angenähert gewährleistet. Diese Näherung kann teilweise korrigiert werden, wenn

man ein viskoelastisches Stoffgesetz zugrunde legt [27]. Zur Vereinfachung wird hier ein lineares viskoelastisches Stoffgesetz angenommen. Damit wird statt Gl. (2.25) Folgendes gelten:

$$\delta_{jk} = E^{jkim} e_{im} + {}^*E^{jkim} \dot{e}_{im} \quad (3.48)$$

mit

$E^{jkim}$  ist der Elastizitätstensor

${}^*E^{jkim}$  ist der Viskositätstensor

$\dot{e}_{im}$  ist der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten

Folglich gilt anstelle der auf Seite 63 aufgeführten Gleichungen Folgendes:

$$\overset{(G)}{W} = \frac{1}{2} \iiint_V E^{kjim} e_{im} e_{kj} dV \quad (3.36)$$

$$\delta \overset{(G)}{W} = \iiint_V E^{kjim} e_{im} \delta e_{kj} dV$$

$$W = \frac{1}{2} E^{kjim} e_{im} e_{kj} \quad (3.37)$$

Gl. (3.39) bekommt als Zusatzterm stellvertretend für die Viskosität:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V {}^*E^{kbim} \dot{e}_{im} \delta e_{kb} dV dt$$

mit der Abkürzung

$$\iiint_V {}^*E^{kbim} \dot{e}_{im} \delta e_{kb} dV = D_j^{(MD)} \delta q_j, \quad (3.49)$$

wobei

$$D_j^{(MD)} = \iiint_V^* E^{kbim} e_{im} \frac{\partial e_{kb}}{\partial q_j} dV \quad (3.50)$$

ist.

### 3.5.2 Dämpfung des umgebenden Mediums

Sie entsteht aus der viskosen Wirkung der zum schwingenden System gehörenden Umgebung (z.B. Luft).

Die Dämpfung wird proportional zu der Geschwindigkeitskomponente, die senkrecht zu der äußeren Fläche steht,<sup>1)</sup> angenommen; d.h. die Bewegung parallel zu der äußeren Fläche erfährt keine Dämpfung. Weiterhin wird der Energieverlust und damit die Dämpfung infolge von Wirbeln an Rändern und Kanten nicht berücksichtigt.

Folglich kann man bei linearer Dämpfung folgenden Zusatzterm zur Gl. (3.29) addieren:

$$- \iint_{S_1} C_{(UD)} (\underline{n} \cdot \underline{q}_k) \frac{du^k}{dt} \delta u^k dS$$

(es wird über  $K = 1, 2, 3$  summiert)

$C_{(UD)}$  ist eine physikalische Konstante, die von den Eigenschaften der Oberfläche und der Umgebung abhängt. In Gl. (3.39) ist dann der Zusatzterm vorhanden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} C_{(UD)} (\underline{n} \cdot \underline{q}_k) \frac{du^k}{dt} \delta u^k dS dt \quad (3.51)$$

mit

$$\iint_{S_1} C_{(UD)} (\underline{n} \cdot \underline{q}_k) \left( \frac{du^k}{dt} \right) \delta u^k dS = D_m^{(UD)} \delta q_m \quad (3.52)$$

wobei

$$D_m^{(UD)} = \iint_{S_1} C_{(UD)} (\underline{n} \cdot \underline{q}_k) \left( \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial u^k}{\partial t} \right) \frac{\partial u^k}{\partial q_m} ds \quad (3.53)$$

(es wird über  $K = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$  summiert)

1) Zur Vereinfachung wird hier die unverformte Fläche zugrunde gelegt.

Mit Gl. (3.49) und (3.52) nehmen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (3.47) folgende Gestalt an:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - R_j - D_j = 0, \quad (3.54)$$

wobei

$$D_j = D_j^{(MD)} + D_j^{(KD)} \quad \text{die allgemeine Dämpfung ist.}$$

Der Vorteil liegt darin, daß damit die Dämpfung nun von der Viskosität des Werkstoffs und der Ausgangsgeometrie des Systems abhängt. Die Gl. (3.54) ist Ausgangspunkt für die linearen Ansätze im Rahmen der FEM. Eine numerische Untersuchung, die im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt wird, und Vergleiche mit Versuchsergebnissen bzw. mit anderen Methoden sind für die Bestätigung dieser Vorgehensweise notwendig.

### 3.6 Der Fall kleiner Schwingungen um eine Gleichgewichtslage

Man erhält eine erhebliche Vereinfachung der Gl. (3.47), wenn die Amplituden der Schwingungen - um die Gleichgewichtslage mit großen statischen Verschiebungen - klein sind; man beschränkt sich hier zur Vereinfachung auf den Fall, daß die Verschiebungen  $u^K$  Gl. (3.40) von der Zeit nicht explizit abhängen. Das ist der übliche Fall im Bauwesen. Allerdings kann man im Prinzip den nicht konservativen Fall ähnlich behandeln. Damit ist die kinetische Energie  $T$  eine quadratische Form der allgemeinen Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ , und  $W^*$  (siehe Gl. (3.3')) hängt nur von den allgemeinen Koordinaten  $q_j$  ab. Damit ergibt sich aus Gl. (3.47):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial W^*}{\partial q_j} - R_j = 0 \quad (3.55)$$

Als Nullpunkt der allgemeinen Koordinaten wird die Gleichgewichtslage angenommen. Man entwickelt das gesamte Potential  $W^* = W^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$  in eine Taylorsche Reihe:

$$W^* = W_{(st.)}^* + \left( \frac{\partial W^*}{\partial q_i} \right)_{(st.)} q_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{(st.)} q_i q_j +$$

+ Terme in höherer Ordnung von  $q_i$  (3.56)

Die unterstrichenen Terme sind die kleinen Amplituden um die Gleichgewichtslage.

Die Kennzeichnung (st) bedeutet den Wert des Ausdrucks im statischen Gleichgewicht.

Im statischen Gleichgewicht gilt aus Gl. (3.47):

$$-\frac{\partial L(st.)}{\partial q_j} - R_j(st.) = 0$$

d.h.

$$\left( \frac{\partial W^*}{\partial q_j} \right)_{(st.)} - R_j(st.) = 0 \quad (3.57)$$

Aus (3.56) ist:

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_j} = \left( \frac{\partial W^*}{\partial q_j} \right)_{(st.)} + \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{(st.)} q_i +$$

(es wird über  $i = 1, 2, \dots, n$  summiert)

mit (3.57)

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_j} = R_j(st.) + \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{(st.)} q_i + \dots$$

Einsetzen in Gl. (3.55) ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{(st.)} q_i + R_j(st.) - R_j = 0 \quad (3.58)$$

$T = \frac{1}{2} b^{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$  ist eine homogene positiv definite quadratische Form der allgemeinen Geschwindigkeiten. Im allgemeinen Riemannschen Raum (n-dimensionaler Raum mit allgemein krummlinigen Koordinaten) sind die Koeffizienten  $b^{jk}$  von den Koordinaten abhängig, aber für kleine Amplituden  $q_j$  werden die  $b^{jk}$  konstant angenommen. Damit ist der Fehler in T von der Ordnung  $(\dot{q}_i^2 q_i)$ .

Gl. (58) liefert damit das folgende lineare DGS:

$$\begin{aligned} b^{11} \ddot{q}_1 + b^{12} \ddot{q}_2 + \dots + b^{1n} \ddot{q}_n + a^{11} q_1 + a^{12} q_2 + \dots + a^{1n} q_n + R_{1(st.)} - R_1 &= 0 \\ \vdots & \\ b^{n1} \ddot{q}_1 + b^{n2} \ddot{q}_2 + \dots + b^{nn} \ddot{q}_n + a^{n1} q_1 + a^{n2} q_2 + \dots + a^{nn} q_n + R_{n(st.)} - R_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Man kann weiterhin das DGS (3.59) vereinfachen, indem man es durch die Normalkoordinaten ausdrückt. Durch die Hauptachsentransformation zweier Quadratischer Formen kann man T und W in eine diagonale Form bringen, d.h.

$$b^{jk} = a^{jk} = 0 \quad \text{wenn } j \neq k$$

Damit wird (3.59) auf folgende Form transformiert:

$$b^{jj} \ddot{q}_j + a^{jj} q_j + R_{j(st.)} - R_j = 0 \quad (3.60)$$

Das DGS (3.60) ist linear und nicht mehr gekoppelt; seine Lösung durch Fourieransätze erhält man in bekannter Weise [29].

## 4. Anwendung der Methode der finiten Elemente

### 4.1 Allgemeines

Die Methode der finiten Elemente, auf die Kontinuumsmechanik angewandt, besteht in der Erstellung von zwei der gestellten physikalischen Aufgabe möglichst gut angepassten Modellen. Das erste ist das mechanische Modell, in dem man die Geometrie und damit auch das Tragverhalten und die Belastung des Systems idealisiert bzw. annähert. Das zweite Modell ist das mathematische, in dem man durch Ansätze (meistens Hermite'sche oder Lagrange'sche Interpolationspolynome) den Verlauf der Zustandsgrößen, z.B. primär der Verschiebungen, bereichsweise annähert.

Das mathematische Modell wurde im Rahmen der Variationsmethoden zum erstenmal von RITZ [30] vorgeschlagen. Der Verlauf des Verschiebungsfeldes des gesamten Tragwerks wird dabei durch Parameteransätze (meistens mit Polynomen) angenähert, der die geometrischen Randbedingungen und die geometrischen Feldgleichungen erfüllt. Das Variationsfunktional ergibt sich damit in Abhängigkeit von den freien Parametern des Ansatzes. Die natürlichen Bedingungen der Variationsaussage sind die statischen Rand- und Feldgleichungen, die im Mittel erfüllt werden. Weiterhin hat RITZ in seinem Originalaufsatz [30] die Anwendung dieses Vorgehens bereichsweise angedeutet; in diesem Fall müssen die Ansätze auch die geometrischen Übergangsbedingungen a priori erfüllen. Wegen der damaligen primitiven Rechenhilfsmittel wurde diese Erweiterung der Ritz'schen Methode nicht praktisch angewandt.

Ein mechanisches Modell für die Platte in Form eines Trägerrosts wurde in [31] 1940 angegeben. Im Sinne der heutigen Methode der finiten Elemente wurde zum erstenmal in [32] ein Modell mechanischer Natur aus rein ingenieurmäßigen Überlegungen entwickelt.

In den letzten Jahren sind sehr viele Beiträge zur Methode der finiten Elemente erschienen. Der Aufsatz von MÜLLER [33] bringt eine knappe Erläuterung der Methode und ihre Anwendung

sowie umfassende Schrifttumsangaben. Die Bücher [34] und [35] bringen eine Übersicht über die Anwendung der Methode in Theorie und Praxis.

Der theoretische Hintergrund der Methode ist als Anwendung der Variationsprinzipie der Mechanik weitgehend geklärt, siehe z.B. [36] und [37]. Aus der Sicht der numerischen Mathematik ist die FEM im engeren Sinne in ihrer ursprünglichen Form als reine Verschiebungsmethode als Ritz'sches Verfahren mit bereichsweisen Ansätzen zu verstehen. Damit und durch weitere Entwicklungen der FEM (z.B. gemischte Ansätze) hat man die Hauptnachteile der klassischen Ritzmethode beseitigt, nämlich: das Erfassen unregelmäßiger Geometrien und Randbedingungen bei strenger Erfüllung der geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen einerseits und zusätzlich das Problem vollständiger Funktionensysteme für die Ansätze. Ein verallgemeinertes Variationsprinzip für zusammenhängende Bereiche mit Unstetigkeiten findet man z.B. in [38] und für die Platte mit gleichzeitigen Diskontinuitäten der Verschiebungen und Schnittgrößen in [39].

Für zweidimensionale Flächentragwerke ist im Rahmen des mechanischen Modells die zweidimensionale Idealisierung (Viereckelemente, Dreieckelemente) und die eindimensionale Idealisierung (finite Streifenelemente) der Geometrie möglich. Die zweidimensionale Idealisierung ermöglicht bei der Statik eine volle Algebraisierung der Differentialgleichungen; man bekommt ein System von algebraischen Gleichungen, die zu lösen sind. Dagegen bekommt man bei Streifenelementen ein gewöhnliches DGS (teilweise Algebraisierung) [40], [58].

Bei der Wahl der Ansätze (mathematisches Modell) hat man eine Reihe von Eigenschaften zu beachten. Die wichtigsten sind Vollständigkeit, Symmetrie, Drehinvarianz und Konformität, die in [41] erläutert sind. Diese Forderungen können im allgemeinen nicht gleichzeitig erfüllt werden. Inwieweit sie übergangen werden können, ist eine Frage der Konvergenz und des Gesamtaufwands für die jeweilige Aufgabe. In [37] stellt OLIVEIRA fest, daß bei einem vollständigen Ansatz die energetische Konvergenz

mit Verdichtung der Elemente auf jeden Fall erreicht werden kann. Die anderen Eigenschaften fördern zwar die Genauigkeit der Ergebnisse bzw. die Schnelligkeit der Konvergenz, aber die energetische Konvergenz als solche wird durch ihr Fehlen nicht prinzipiell gehindert. Im Hinblick auf den Gesamtaufwand empfiehlt es sich, mit einfachen Ansätzen und enger Teilung statt mit komplizierten Ansätzen und grober Teilung zu arbeiten; vergleiche [42] und [41] .

#### 4.2 Methode der finiten Elemente im Bereich der geometrisch nichtlinearen Aufgaben

Hier wird nicht der Stand des Schrifttums auf diesem Gebiet im einzelnen besprochen, sondern es werden nur die Hauptrichtungen in der theoretischen Formulierung und praktischen Lösung solcher Aufgaben erläutert. In [43] und [44] findet man eine zusammengefaßte Diskussion der Literatur. ODEN gibt in [57] eine allgemeine Theorie der FEM bei nichtlinearen Effekten mit umfassenden Literaturangaben.

Auf dem Gebiet der Statik und der Stabilitätsuntersuchung wurde hauptsächlich die Methode der Lastinkremente angewandt, z.B. [45], [46] und [43]. Man stellt zwei Steifigkeitsmatrizen, die elastische und die geometrische Steifigkeitsmatrix, auf; letztere wird auch Steifigkeit der Anfangsspannungen genannt [43]. Die elastische Steifigkeitsmatrix ist in Wirklichkeit der lineare Teil der nichtlinearen Beziehung zwischen Kräften und Verschiebungen bei geometrisch nichtlinearen Systemen; sie ist nichts anderes als die normale Steifigkeitsmatrix im linearen Fall, jedoch wird sie nach jedem Schritt für die augenblickliche Geometrie neu aufgestellt; d.h. man nimmt, wie in Bild 4.1 dargestellt, eine stufenweise Änderung der Steifigkeit an.

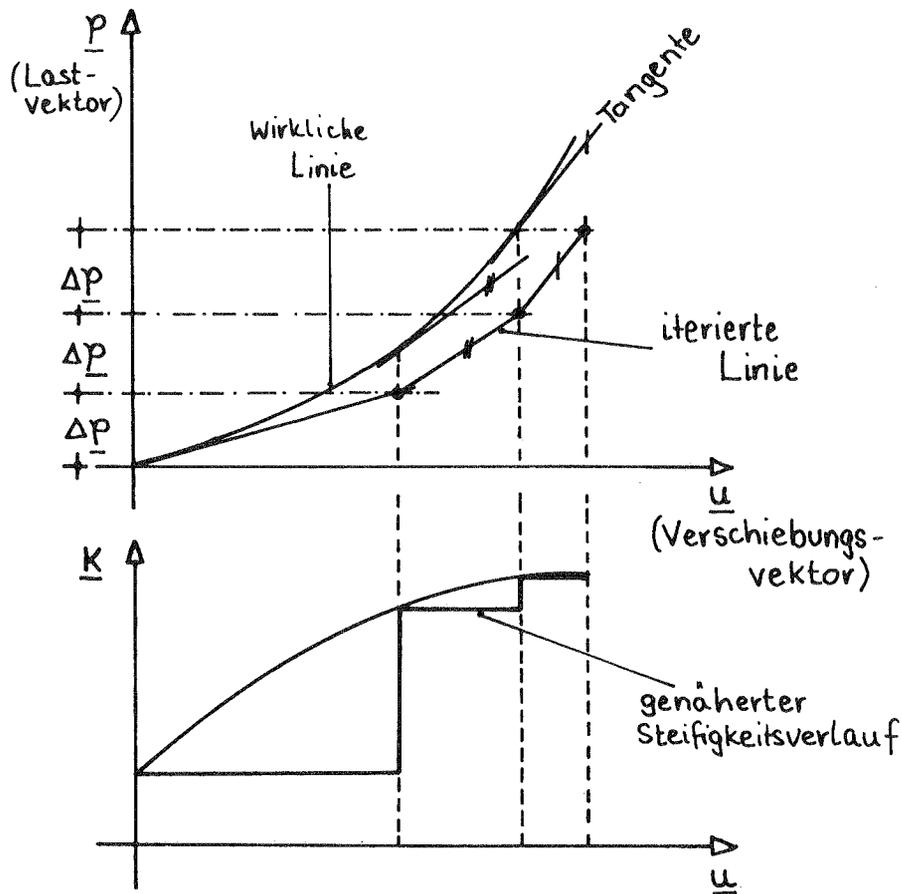


Bild 4.1: Genäherter und wirklicher Steifigkeitsverlauf

Die geometrische Steifigkeitsmatrix (GSM) stellt den Zusammenhang zwischen den augenblicklichen Spannungen und der folgenden Gleichgewichtslage dar; sie hängt direkt von diesen Spannungen ab. ODEN gibt in [47] eine allgemeine Formel für die Ermittlung der GSM an. Für die Plattenbiegung bei großen Verschiebungen findet man die GSM für Rechteckelemente in [48] und für Dreieckelemente in [49].

Die iterative Lösung mit Lastinkrementen ist eine Extrapolation, die im allgemeinen zur Fehleranhäufung führt, Bild 4.2. Dies erweist sich besonders störend bei Stabilitätsuntersuchungen [53]. Zur Verbesserung der Iteration wurden einige Vorschläge gemacht [50], [53]. WISSMANN schlägt in [51] vor, daß man vertikal (I)

zu der  $\underline{u}$ - $\underline{p}$ -Kurve zurück geht, indem man die richtigen Lastinkremente  $\Delta \underline{P}_{(r)}$  bei jedem Schritt aus den nichtlinearen Steifigkeitsbeziehungen ermittelt und von da aus den nächsten Iterationsschritt beginnt, Bild 4.2.

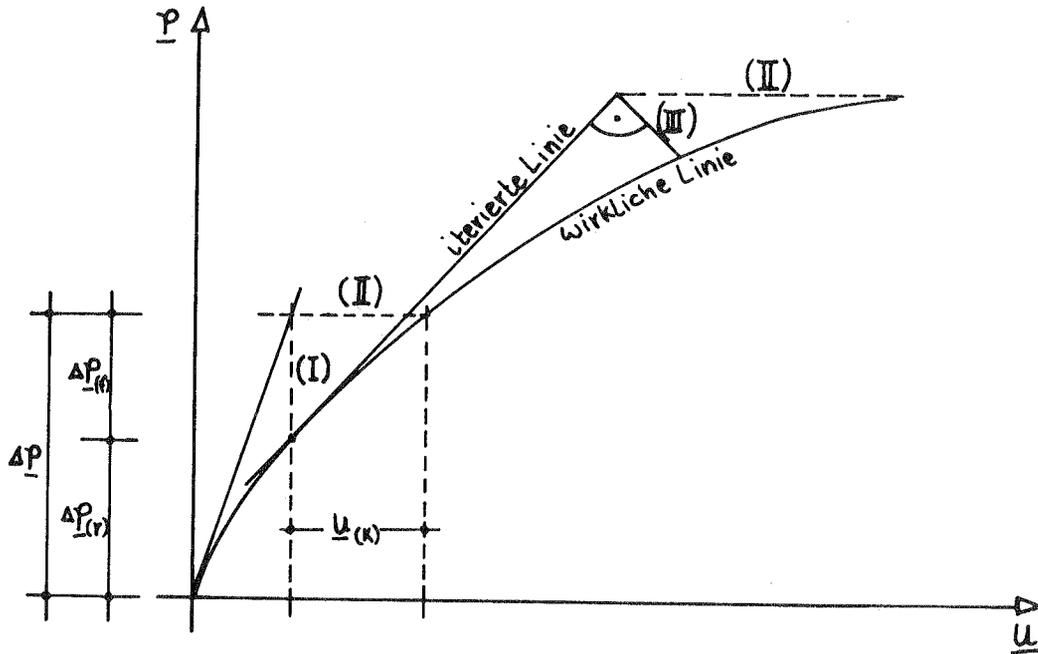


Bild 4.2: Mögliche Verbesserungen der Iteration

Für Stabilitätsuntersuchungen empfiehlt WISSMANN weiter, daß man das System nach jedem Schritt in Bezug auf Stabilität untersucht<sup>(1)</sup>. Wenn das System nichtstabil ist, so führt man negative Lastinkremente ein.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, in der Last-Verformungskurve, Bild 4.2, horizontal fortzuschreiten (II), indem man mit dem Fehler  $\Delta \underline{P}_{(f)}$  und mit Hilfe der Newton-Raphson-Methode

---

(1) Bei verschiebungsunabhängigen äußeren Kräften untersucht man z.B. das Vorzeichen der zweiten Variation des elastischen Potentials. Ein positives Vorzeichen ist ein Merkmal für stabile Lage.

die Korrekturen für die Verschiebungen  $\underline{u}_{(k)}$  ermittelt [52] und [53]. In [52] findet man einen weiteren Vorschlag, durch Einführen von generalisierten Linienelementen im Lastverschiebungsraum Korrekturen normal zu dem extrapolierten linearen Schritt zu gewinnen, siehe (III) in Bild 4.2. Dieses Vorgehen empfiehlt sich besonders bei Instabilitätsbereichen (z.B. Lastmaximum bei Durchschlagproblemen). Um die in [51], [50], [53] und [52] erwähnten Korrekturen durchführen zu können, benötigt man offensichtlich neben der geometrischen und elastischen Steifigkeitsmatrix im allgemeinen die nichtlinearen (nicht genäherten) Steifigkeitsbeziehungen zwischen den Verschiebungen und den Kräften. Für ein Seilnetzwerk kann man jedoch wegen der Einfachheit der Kräfteverhältnisse die obengeannten Korrekturen unmittelbar aus Gleichgewichtsbetrachtungen an den Knoten ermitteln, siehe z.B. [2].

Eine andere Formulierung der statischen Aufgabe gibt ODEN in [44]. Hier werden von vornherein die nichtlinearen Steifigkeitsbeziehungen aufgestellt, es sind kubische Gleichungen in den Verschiebungen. Das daraus sich ergebende nichtlineare AGS wurde durch einmalige direkte Iteration (z.B. mit der Newton-Raphson-Methode) gelöst. Auf diese Weise lassen sich auch Probleme mit großen Verzerrungen ( $\xi \geq 1$ ) mit gesicherter Konvergenz behandeln. Die Formulierung von ODEN [44] mittels Index-Schreibweise gibt WISSMANN [51] in Tensor-Schreibweise wieder.

Im Bereich der nichtlinearen Dynamik von Systemen mit vielen Freiheitsgraden ist noch wenig veröffentlicht worden. In einer Reihe von Arbeiten wurde die Dynamik der Seilnetze "quasi-nicht-linear" behandelt z.B. [2], [3] und [4]. Hierbei werden kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage mit großen Verschiebungen vorausgesetzt; d.h. man hat die tangentielle Steifigkeitsmatrix beim Gleichgewicht als konstant für die Bewegung vorausgesetzt. Die nichtlinearen Membranschwingungen allgemein sowie Schwingungen mit großen Amplituden blieben praktisch unerforscht.

#### 4.3 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen für ein ebenes Dreieckelement bei einem linearen Verschiebungsansatz

Im Folgenden werden nur die Schwingungen dünner Membrane behandelt. Die Membranmittelfläche wird hier durch ebene Dreieckelemente idealisiert. Die Anwendung von dreieckigen gekrümmten finiten Elementen für Membrane mit kleinen und großen Verschiebungen findet man in [54]. Gekrümmte finite Elemente für Schalen sind z.B. in [55] und [41] behandelt.

In Jedem Element hat man einen ebenen Spannungszustand. Weiter interessieren nur die Verzerrungsgrößen, die in der Membranebene wirken. Damit laufen die Indizes des Elastizitäts-, des Verzerrungs- und des Spannungstensors nur von 1 bis 2.

##### 4.3.1 Die Darstellung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in Index-Schreibweise

Die Matrizenschreibweise, eine der besten Darstellungsmöglichkeiten der linearen Analysis, erweist sich im allgemeinen als ungeeignet, um nichtlineare Ausdrücke zu beschreiben. Deshalb wird die gestellte Aufgabe in Index-Schreibweise formuliert. Jedoch wird in Abschnitt 4.3.3 ein Versuch unternommen, dasselbe in Matrizen darzustellen, um die Aufwendigkeit dieses Weges zu zeigen.

In Bild 4.3 wird ein dreieckiges ebenes Element betrachtet, das in der  $(x^1, x^2)$ -Ebene eines lokalen Koordinatensystems liegt und dessen Kante 1, 3 mit der  $x^2$ -Achse zusammenfällt. Der Koordinatenursprung liegt im Knoten 1. Diese besondere Wahl der lokalen Koordinaten verletzt nicht die allgemeine Gültigkeit der Formulierung. Das globale Koordinatensystem ist mit  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  bezeichnet, Bild 4.3.

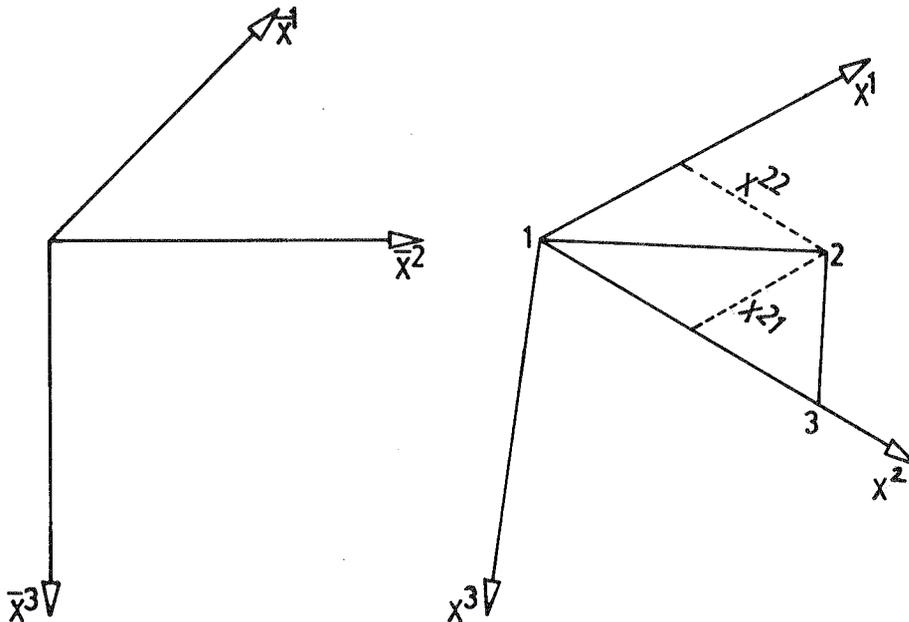


Bild 4.3: Ebenes Element mit globalen Koordinaten  $\bar{x}^i$  und lokalen Koordinaten  $x^i$

Zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes wird für das Dreieckselement ein linearer Ansatz gewählt.

$$u^j = b_j + c_{j\alpha} x^\alpha$$

$$j = 1, 2, 3 ; \alpha = 1, 2 \quad (4.1)$$

In Gl. (4.1) sind die  $x^\alpha$  Koordinaten im unverformten Zustand. Der Ansatz (4.1) hat neun Freiwerte, denen die neun unbekannt Verschiebungen an den drei Knotenpunkten entsprechen. Offensichtlich ist eine Anwendung höherer Ansätze mit der Einführung neuer unbekannter geometrischer Größen verbunden. Eine Möglichkeit wäre die Benutzung des folgenden quadratischen Verschiebungsansatzes:

$$u^j = b_j + c_{j\alpha} x^\alpha + d_{j\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (4.2)$$

Die Zahl der Freiwerte in (4.2) beträgt 18; man führt hierzu die Verschiebungsgrößen an den Mitten der Kanten 4, 5, 6 (Bild 4.4) als weitere Unbekannte ein.

Damit hat ein Element 18 Parameter. Die Anzahl der erforderlichen Elemente kann so auf ein Viertel der Elemente reduziert werden.

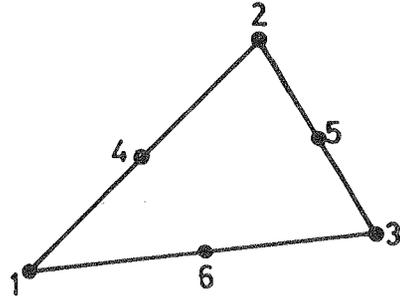
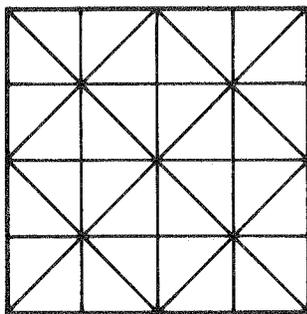
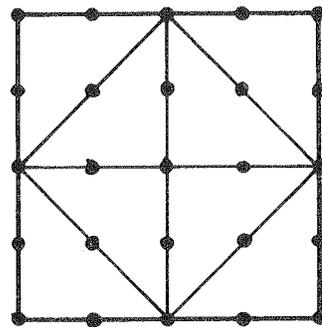


Bild 4.4: Zusätzliche Knotenpunkte 4, 5, 6



Teilung bei linearem Ansatz



entsprechende Teilung bei quadratischem Ansatz mit denselben Knotenpunkten

Bild 4.5: Teilung für linearen und quadratischen Ansatz

Sowohl die linearen Ansätze nach (4.1) als auch die quadratischen nach (4.2) erfüllen automatisch die Kontinuität der Verschiebungen entlang der Elementgrenzen, wenn man die geometrische Kontinuität an den Knotenpunkten fordert. Wegen der komplizierten Algebra bei nichtlinearen Aufgaben und der Vergrößerung der Bandbreite empfiehlt es sich, den linearen Ansatz (4.1) zu verwenden und eine feinere Elementeinteilung in Kauf zu nehmen.

Wertet man den Ansatz (4.1) für die Verschiebungen der Knoten 1, 2 und 3 des Dreieckelementes, Bild 4.3, aus, so erhält man

$$b_j = u_1^j$$

$$c_{j\alpha} = a_{\alpha n} u_n^j \quad (4.3)$$

In Gl. (4.3) ist:

$u_n^j$  die Verschiebung des Knotenpunktes  $n$  in Richtung von  $x^j$

$$a_{\alpha n} = \frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} (x^{22} - x^{32}) & x^{32} & -x^{22} \\ -x^{21} & 0 & x^{21} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$x^{n\alpha}$  ist die lokale Koordinate des Knotenpunktes  $n$  in Richtung von  $x^\alpha$  (Bild 4.3).

$A_0$  ist die Fläche des unverformten Elementes.

Setzt man (4.3) in (4.1) ein, so folgt:

$$u^j = u_1^j + a_{\alpha n} u_n^j x^\alpha \quad (4.5)$$

In [44] findet man eine Form der Gl. (4.5) für ein allgemeines lokales Koordinatensystem.

Der Verzerrungstensor für eine Membran und nach (2.9)

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( u_{,\beta}^\alpha + u_{,\alpha}^\beta + u_{,\alpha}^i u_{,\beta}^i \right) \quad (2.9)$$

erhält mit dem linearen Verschiebungssatz (4.5) die folgende Form:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( a_{\alpha n} u_n^\beta + a_{\beta n} u_n^\alpha \right) + \frac{1}{2} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_n^i u_m^i \quad (4.6)$$

(linearer Teil)                      (quadratischer Teil)

Durch die Differentiation von Gl. (4.5) nach der Zeit erhält man

$$\dot{u}^j = \dot{u}_1^j + a_{\alpha n} \dot{u}_n^j x^\alpha \quad (4.7)$$

Die Richtigkeit von Gl. (4.5) bzw. (4.7) ist für die Dynamik nicht selbstverständlich, da Gl. (4.5) nur für statische Vorgänge gilt. Sind aber die Knotenpunktverschiebungen  $u_n^j$  zeitabhängig, dann sind die momentanen Verschiebungen  $u^j$  beliebiger Punkte im Element prinzipiell nicht durch die Knotenpunktverschiebungen ausdrückbar. Die Verschiebungen  $u^j$  hängen von den Knotenpunktverschiebungen und der Geschichte der Bewegung bis zum jeweiligen Zeitpunkt ab. Nur für den Fall, daß die  $u_n^j$  harmonisch von der Zeit abhängen, gelten die Gleichungen (4.5) und (4.7) für die Dynamik ohne weitere Näherung. In Gl. (4.5) bzw. (4.7) steckt deshalb im allgemeinen eine weitere Näherung, die sich folglich auf die spätere Ermittlung der Massenmatrix auswirkt. Die Gl. (4.5) und (4.7) stellen jedoch in dieser Hinsicht bei einer dichten Elementteilung gut Näherungen dar, zur Diskussion dieser Frage siehe [74], S. 271/287.

Einsetzen von Gl. (2.25) und Gl. (4.6) in (3.36) ergibt:

$$\begin{aligned} W^{(G)} &= \frac{h}{2} \iint_{S_E} E^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} ds \\ W^{(G)} &= \frac{V_0}{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ \frac{1}{2} (a_{\alpha n} u_n^\beta + a_{\beta n} u_n^\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_n^i u_m^i \right] \left[ \frac{1}{2} (a_{\lambda k} u_k^\mu + a_{\mu k} u_k^\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a_{\lambda k} a_{\mu d} u_k^j u_d^j \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$V_0$  ist das Volumen des unverformten Elementes.  $W^{(G)}$  ist biquadratisch in den Verschiebungen.

Für eine isotrope Membran gilt das folgende Elastizitätsgesetz [14]

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \left( \frac{2\nu}{1-\nu} \right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} \right] \quad (4.9)$$

mit

E als Elastizitätsmodul und  
 $\nu$  als Querdehnzahl.

Aus Gl. (3.38) folgt für den Vorspannungsanteil des elast. Potentials:

$$W^{(VS)} = \frac{h}{2} \iint_{SE} \bar{\sigma}^{\alpha\beta(0)} u_{,\alpha}^i u_{,\beta}^i dS$$

$$W^{(VS)} = \frac{V_0}{2} \bar{\sigma}^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_n^i u_m^i \quad (4.10)$$

und aus Gl. (3.35) ergibt sich für die kinetische Energie:

$$T = \frac{h \rho}{2} \iint_{SE} (\dot{u}^j)^2 dS$$

Setzt man die Gl. (4.7) in die Gleichung für die kinetische Energie T ein, so folgt:

$$T = \frac{h \rho}{2} \iint_{SE} (\dot{u}_1^j + a_{\alpha n} \dot{u}_n^j x^\alpha) (\dot{u}_1^j + a_{\beta m} \dot{u}_m^j x^\beta) dS,$$

$$= \frac{h \rho}{2} \iint_{SE} (\delta_{n1} + a_{\alpha n} x^\alpha) (\delta_{m1} + a_{\beta m} x^\beta) \dot{u}_n^j \dot{u}_m^j dS$$

$$T = \frac{1}{2} M_{nm} \dot{u}_n^j \dot{u}_m^j. \quad (4.11)$$

In Gl. (4.11) ist:

$$M_{nm} = h \rho \iint_{SE} (\delta_{n1} + a_{\alpha n} x^\alpha) (\delta_{m1} + a_{\beta m} x^\beta) dS \quad (4.12)$$

$M_{nm}$  stellt die Massenmatrix des Elementes dar. Setzt man in (3.40) als allgemeine Freiheitsgrade eines Elementes die Knotenverschiebungen an, dann kann man die Lagrange'sche Bewegungsgleichung (3.47) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_n^j} - R_n^j = 0 \quad (4.13)$$

Wenn man die äußeren Lasten des Elementes näherungsweise durch fiktive einzelne Kräfte in den Knoten ersetzt, dann ist  $R_n^j$  - mit Berücksichtigung von (3.45) - die fiktive Kraft im Knoten "n" in Richtung von  $x^j$ . Weiterhin sollen die Verschiebungen Gl. (3.40) von der Zeit nicht explizit abhängen.

Aus den Gleichungen (3.42), (4.8), (4.10) und (4.11) folgt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n^j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_n^j} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n^j} \right) = M_{nm} \ddot{u}_m^j \quad (4.14)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial u_n^j} = \frac{\partial W^{(G)}}{\partial u_n^j} + \frac{\partial W^{(VS)}}{\partial u_n^j} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial W^{(G)}}{\partial u_n^j} = V_0 E^{\alpha\beta\gamma\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\gamma m} u_m^\mu +$$

$$+ V_0 E^{\alpha\beta\gamma\mu} a_{\alpha n} a_{\gamma m} \left( a_{\beta k} u_m^\mu u_k^j + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} u_m^i u_d^i \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\gamma\mu} a_{\alpha n} a_{\gamma m} a_{\beta k} a_{\mu d} u_m^i u_d^i u_k^j \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial W^{(VS)}}{\partial u_n^j} = V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_m^j \quad (4.17)$$

Beim Einsetzen von (4.14), (4.15), (4.16) und (4.17) in (4.13) erhält man endgültig die Bewegungsgleichungen für ein dreieckiges Membranelement mit Vorspannung unter Verwendung eines linearen Verschiebungsansatzes:

$$\begin{aligned}
 & \left[ h g \iint_{S_E} (\delta_{m1} + a_{\alpha n} x^\alpha) (\delta_{m1} + a_{\beta m} x^\beta) dS \right] u_m^j + \\
 & + V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_m^j + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} u_m^\mu + \\
 & + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} (a_{\beta k} u_m^\mu u_k^j + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} u_m^i u_d^i) + \\
 & + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} u_m^i u_d^i u_k^j = R_n^j \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Gl. (4.18) ist ein nichtlineares gewöhnliches DGS zweiter Ordnung. Es enthält kubische Terme in den Verschiebungen, da das elastische Potential  $\overset{(G)}{W}$  biquadratisch in den Verschiebungen ist.

Aus (2.25) und (4.6) erhält man die Kappus-Spannungen:

$$\overset{\sim}{\sigma}^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ \frac{1}{2} (a_{\lambda n} u_n^\mu + a_{\mu n} u_n^\lambda) + \frac{1}{2} a_{\lambda n} a_{\mu m} u_n^i u_m^i \right] \quad (4.19)$$

#### 4.3.2 Transformation, Diskussion und mögliche Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen

Für die Transformation der Elementgleichungen (4.18) in das globale Koordinatensystem  $\bar{x}^i$  gilt:

$$u_n^j = A_{jk} \bar{u}_n^k$$

$$\bar{u}_n^j = A_{kj} u_n^k \quad (4.20)$$

mit

$A_{jk}$  als Transformationsmatrix und

$\bar{u}_n^k$  als Knotenverschiebungen in dem globalen Koordinatensystem  $\bar{x}^1$ .

Für die Koordinatensysteme in Bild 4.3 gilt

$$A_{jk} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k = 1 & k = 2 & k = 3 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\bar{x}^{312}_C - \bar{x}^{313}_H}{Q} & \frac{\bar{x}^{313}_N - \bar{x}^{311}_C}{Q} & \frac{\bar{x}^{311}_H - \bar{x}^{312}_N}{Q} \\ Q & Q & Q \\ \frac{\bar{x}^{311}}{Q} & \frac{\bar{x}^{312}}{Q} & \frac{\bar{x}^{313}}{Q} \\ \frac{N}{Z} & \frac{H}{Z} & \frac{C}{Z} \end{array} \right] \begin{array}{l} j = 1 \\ j = 2 \\ j = 3 \end{array} \end{array}$$

wobei:

$$\bar{x}^{ijk} = \bar{x}^{ik} - \bar{x}^{jk} \quad (\bar{x}^{ik} \text{ ist die globale Koordinate des Knotens } i \text{ in Richtung } x^k)$$

$$Q = \sqrt{(\bar{x}^{311})^2 + (\bar{x}^{312})^2 + (\bar{x}^{313})^2}$$

$$C = \bar{x}^{211} \bar{x}^{312} - \bar{x}^{311} \bar{x}^{212}$$

$$H = \bar{x}^{311} \bar{x}^{213} - \bar{x}^{211} \bar{x}^{313}$$

$$N = \bar{x}^{212} \bar{x}^{313} - \bar{x}^{312} \bar{x}^{213}$$

und

$$Z = \sqrt{C^2 + H^2 + N^2} \quad \text{ist.}$$

Für  $A_{jk}$  gelten die folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} (A_{jk})^T &= A_{kj} = A_{jk}^{-1} \\ A_{kj} A_{ij} &= \delta_{ik} \\ A_{jk} A_{ji} &= \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Wenn man die einzelnen Werte der Massenmatrix  $M_{nm}$  aus Gl. (4.12) auswertet erhält man:

$$\left. \begin{aligned} M_{nm} &= 0 \text{ für } n \neq m \\ M_{nm} &= \frac{\rho_0 V_0}{3} \text{ für } n = m \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

D.h. die beiden Funktionen  $(\delta_{n1} + a_{\alpha n} x^\alpha)$  und  $(\delta_{m1} + a_{\beta m} x^\beta)$  sind zueinander orthogonal in Bezug auf die Indizes  $n$  und  $m$ .

Man sieht, daß die Masse eines Dreieckelementes zu je einem Drittel auf die Knotenpunkte verteilt ist. In Bezug auf die Massenverteilung ähnelt dies dem in [56] durch Einführen von Massenpunkten (lumped masses) angegebenen Modell. Die einfache Dreiteilung ist durch den linearen Verschiebungsansatz bedingt; bei höheren Ansätzen wird die Massenmatrix anders besetzt sein. Mit (4.20), (4.21) und (4.22) bekommt man das transformierte DGS für ein Element

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\rho V_0}{3}\right) \ddot{\bar{u}}_n^y + V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \bar{u}_m^y + \\ &+ V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} A_{\mu d} A_{\beta y} \bar{u}_m^d + \\ &+ V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} A_{\mu d} \bar{u}_m^d \bar{u}_k^y + \frac{1}{2} a_{\mu d} A_{\beta y} \bar{u}_m^i \bar{u}_d^i \right) + \\ &+ \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} \bar{u}_m^i \bar{u}_d^i \bar{u}_k^y = \bar{R}_n^y \end{aligned} \quad (4.23)$$

Gl. (4.23) kann beliebige geometrische Nichtlinearität - im Rahmen einer physikalischen Linearität - beschreiben. Sie stützt sich hinsichtlich der Nichtlinearität nur auf die nichtlinearen Terme in den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen.

Für statische Untersuchungen braucht man nur den Beschleunigungsterm in (4.23) zu vernachlässigen.

Der zweite Term auf der linken Seite von (4.23) stellt den Effekt der sogenannten geometrischen Steifigkeit bei der Methode der Lastinkremente dar, siehe z.B. [53] und [43]. Der dritte Term repräsentiert die elastische Steifigkeitsmatrix; offensichtlich kann man die Steifigkeitsbeziehung für die Methode der Lastinkremente in der Statik als Sonderfall aus (4.23) ableiten

$$V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \Delta \bar{u}_m^{\beta} + \\ + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} A_{\mu d} A_{\beta y} \Delta \bar{u}_m^d = \Delta \bar{R}_n^y \quad (4.24)$$

und in nichttransformierter Form:

$$V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \Delta \bar{u}_m^{\beta} + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} f_{\beta\gamma} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \Delta u_m^{\mu} = \Delta R_n^{\beta} \quad (4.25)$$

Man merkt weiterhin, daß die kubischen Glieder in (4.23) keine vollständige Struktur besitzen. Außerdem ergibt ein Vergleich von (4.18) und (4.23), daß die Koeffizienten des Vorspanneffekts (zweiter Term auf der linken Seite) und die Koeffizienten der kubischen Glieder bei einer Koordinatentransformation invariant sind. Dieses Erkenntnis ist wichtig für die praktische Rechnung.

Eine erhebliche Vereinfachung der nichtlinearen Terme in (4.18) bzw. (4.23) kann durch angenäherte Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen erzielt werden. Man kann nämlich bei kleinen Verzerrungen die quadratischen Glieder der Ableitungen der Verschiebungen, in der Ebene des finiten Elementes

vernachlässigen; somit erhält man aus Gl. (2.9) für eine Membran unter Berücksichtigung von nichtlinearen Rotations-  
termen

$$e_{\alpha, \beta} \approx \frac{1}{2} \left( u_{, \beta}^{\alpha} + u_{, \alpha}^{\beta} + u_{, \alpha}^3 u_{, \beta}^3 \right) \quad (4.26)$$

Damit hat man

$$u_{, \alpha}^{\mu} u_{, \beta}^{\mu} = 0$$

gesetzt und bekommt statt (4.6)

$$e_{\alpha \beta} = \frac{1}{2} \left( a_{\alpha n} u_n^{\beta} + a_{\beta n} u_n^{\alpha} \right) + \frac{1}{2} a_{\alpha n} a_{\beta n} u_n^3 u_m^3 \quad (4.27)$$

Mit (4.27) erhält man eine zu Gl. (4.18) parallele Steifigkeitsbeziehung folgender Form:

$$\begin{aligned} & \left( V_0 \frac{g}{3} \right) \ddot{u}_n^j + V_0 \delta^{\alpha \beta (0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \delta_{j3} u_m^3 + V_0 E^{\alpha \beta \lambda \mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} u_m^{\mu} + \\ & + V_0 E^{\alpha \beta \lambda \mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} \delta_{j3} u_m^{\mu} u_k^3 + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} u_m^3 u_d^3 \right) + \\ & + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha \beta \lambda \mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} \delta_{j3} u_m^3 u_d^3 u_k^3 = R_n^j \end{aligned} \quad (4.28)$$

Da der Effekt der Vorspannung aus der Nichtlinearität der e-u-Beziehung herrührt, wird dieser Effekt nunmehr nur noch vereinfacht erfaßt. Kubische Terme sind trotz der obigen Vereinfachung weiterhin vorhanden.

Gl. (4.28) lautet in transformierter Form:

$$\begin{aligned} & \left( V_0 \frac{g}{3} \right) \ddot{u}_n^y + V_0 \delta^{\alpha \beta (0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} A_{3d} A_{3y} \bar{u}_m^d + \\ & + V_0 E^{\alpha \beta \lambda \mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} A_{\mu d} A_{\beta y} \bar{u}_m^d + \quad \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} A_{\mu d} A_{zi} A_{zy} \bar{u}_m^d u_k^i + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} a_{\mu d} a_{\beta y} A_{zi} A_{zk} A_{zy} \bar{u}_m^i \bar{u}_d^k \right) + \\
 & + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} A_{zi} A_{zj} A_{zf} A_{zy} \bar{u}_m^i \bar{u}_d^j \bar{u}_k^f = \\
 & = \bar{R}_n^y \qquad (4.29)
 \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Auswertung von (4.29) im Vergleich zu (4.28) wesentlich aufwendiger ist. Deshalb empfiehlt es sich für die Ermittlung der fiktiven Kräfte  $\bar{R}_n^Y$  bei der Iteration den Schätz-Verschiebungsvektor, der meistens auf das globale Koordinatensystem bezogen ist, in die lokalen Koordinatensysteme der Elemente zu transformieren und  $R_n^Y$  aus (4.28) auszurechnen. Man transformiert dann die ausgerechneten Größen  $R_n^Y$  in  $\bar{R}_n^Y$ .

Für die Methode der Lastinkremente ergibt sich aus (4.28):

$$V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \delta_{jz}^3 \Delta u_m^z + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \Delta u_m^\mu = \Delta R_n^j \qquad (4.30)$$

(4.30) stimmt mit den in Matrixschreibweise in [43] angegebenen Steifigkeitsbeziehungen überein. In [43] stellt MARTIN beim Vergleich mit seiner früheren Arbeit 45 fest, daß die unter der Annahme von (4.27) entstandene genäherte Beziehung (4.30) im Falle kleiner Verzerrungen Ergebnisse liefert, die denen aus (4.25) gleichwertig sind.

### 4.3.3 Die Darstellung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in Matrizen-Schreibweise

---

Das Problem in Abschnitt 4.3.1 soll jetzt in Matrizen-Schreibweise formuliert werden.

Man unterteilt den Verzerrungsvektor in zwei Teile:

$$\underline{e} = \underline{e}^{(l.)} + \underline{e}^{(nl.)} \quad (4.31)$$

mit:

$\underline{e}^{(l.)}$  linearer Teil

$\underline{e}^{(nl.)}$  nichtlinearer Teil

$$\underline{e}^{(l.)} = \left\{ e_{11}^{(l.)} \quad e_{22}^{(l.)} \quad 2 e_{12}^{(l.)} \right\} = \left\{ u_{,1}^1 \quad u_{,2}^2 \quad u_{,2}^1 + u_{,1}^2 \right\}$$
$$\underline{e}^{(nl.)} = \begin{bmatrix} e_{11}^{(nl.)} \\ e_{22}^{(nl.)} \\ 2 e_{12}^{(nl.)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (u_{,1}^1)^2 + (u_{,1}^2)^2 + (u_{,1}^3)^2 \\ (u_{,2}^1)^2 + (u_{,2}^2)^2 + (u_{,2}^3)^2 \\ 2 u_{,1}^1 u_{,2}^1 + 2 u_{,1}^2 u_{,2}^2 + 2 u_{,1}^3 u_{,2}^3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Für die Verschiebungen werden nun Parameteransätze eingeführt

$$\underline{u} = \underline{\phi} \underline{q} \quad (4.33)$$

wobei gilt:

$$\underline{u} = \{ u^1 \quad u^2 \quad u^3 \}$$

und

$$\underline{q} = \{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \}$$

$\underline{q}$  ist der Vektor der allgemeinen Verschiebungen.

Bei linearem Verschiebungsansatz ist die Koordinatenfunktion

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1^T \\ \underline{\phi}_2^T \\ \underline{\phi}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & x^2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Man setzt weiterhin:

$$\underline{e}_{(l.)} = \underline{H}_1 \underline{q}$$

$$\underline{e}_{(nl.)} = \underline{H}_2 \underline{q} \quad (4.35)$$

Aus (4.33), (4.34) und (4.32) erhält man

$$\underline{H}_1 = \begin{bmatrix} (\underline{\phi}_1^T)_{,1} \\ (\underline{\phi}_2^T)_{,2} \\ (\underline{\phi}_1^T)_{,2} + (\underline{\phi}_2^T)_{,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\underline{H}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{q}^T \underline{H}_{11} \\ \underline{q}^T \underline{H}_{22} \\ \underline{q}^T \underline{H}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Dabei ist

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}_{11} &= (\underline{\phi}_1)_{,1} (\underline{\phi}_1)^T + (\underline{\phi}_2)_{,1} (\underline{\phi}_2)^T + (\underline{\phi}_3)_{,1} (\underline{\phi}_3)^T \\ \underline{H}_{22} &= (\underline{\phi}_1)_{,2} (\underline{\phi}_1)^T + (\underline{\phi}_2)_{,2} (\underline{\phi}_2)^T + (\underline{\phi}_3)_{,2} (\underline{\phi}_3)^T \\ \underline{H}_{33} &= [(\underline{\phi}_1)_{,1} (\underline{\phi}_1)^T + (\underline{\phi}_1)_{,2} (\underline{\phi}_1)^T] + [(\underline{\phi}_2)_{,1} (\underline{\phi}_2)^T + \\ &\quad + (\underline{\phi}_2)_{,2} (\underline{\phi}_2)^T] + [(\underline{\phi}_3)_{,1} (\underline{\phi}_3)^T + (\underline{\phi}_3)_{,2} (\underline{\phi}_3)^T] \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Einsetzen von (4.36) in (4.38) ergibt

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_{11} &= \begin{bmatrix} (2,2) \\ (5,5) \\ (8,8) \end{bmatrix} \\
 \underline{H}_{22} &= \begin{bmatrix} (3,3) \\ (6,6) \\ (9,9) \end{bmatrix} \\
 \underline{H}_{33} &= \begin{bmatrix} (3,2) & (2,3) \\ (6,5) & (5,6) \\ (9,8) & (8,9) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

In den angegebenen Adressen steht eins, sonst sind überall Nullen vorhanden.

Das gesamte elastische Potential eines vorgespannten Elements lautet

$$W^* = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\tilde{\sigma}}^T \underline{e} \, dV \quad ; \quad \underline{\tilde{\sigma}} = \{ \tilde{\sigma}^{11} \quad \tilde{\sigma}^{22} \quad \tilde{\sigma}^{12} \} .$$

Mit  $\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{E} \underline{e}$  ergibt sich

$$W^* = \frac{h}{2} \iint_{S_E} \underline{e}^T \underline{E} \underline{e} \, dS \tag{4.40}$$

die isotrope Elastizitätsmatrix  $\underline{E}$  ist

$$\underline{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} . \tag{4.41}$$

$E$  und  $\nu$  sind Elastizitätsmodul bzw. Querdehnzahl.

Mit

$$\underline{e} = \underline{e}^{(o)} + \underline{e}_{(l.)} + \underline{e}_{(nl.)}$$

erhält man aus (4.40):

$$W^* = \frac{h}{2} \iint_{S_E} (\underline{e}^{(o)} + \underline{e}_{(l.)} + \underline{e}_{(nl.)})^T \underline{E} (\underline{e}^{(o)} + \underline{e}_{(l.)} + \underline{e}_{(nl.)}) dS$$

$e^{(o)}$  ist der Verzerrungsvektor des Vorspannzustandes, dessen Komponenten Konstanten sind.

$$\begin{aligned} W^* = \frac{h}{2} \iint_{S_E} & \left[ \underline{e}^{(o)T} \underline{E} \underline{e}^{(o)} + \underline{e}_{(l.)}^T \underline{E} \underline{e}^{(o)} + \underline{e}^{(o)T} \underline{E} \underline{e}_{(l.)} + \right. \\ & + \underline{e}_{(l.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(l.)} + \underline{e}_{(l.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(l.)} + \\ & \left. + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}^{(o)} + \underline{e}^{(o)T} \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} \right] dS \end{aligned}$$

Die Konstanten und linearen Terme in  $W^*$  leisten keinen Beitrag zur Steifigkeitsmatrix. Die übrigen Terme werden zusammengefaßt in:

$$W^{(VS)} = \frac{h}{2} \iint_{S_E} (\underline{e}^{(o)T} \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}^{(o)}) dS \quad (4.42)$$

und

$$\begin{aligned} W^{(G)} = \frac{h}{2} \iint_{S_E} & \left( \underline{e}_{(l.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(l.)} + \underline{e}_{(l.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(l.)} + \right. \\ & \left. + \underline{e}_{(nl.)}^T \underline{E} \underline{e}_{(nl.)} \right) dS \quad (4.43) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (4.35) in (4.43) ergibt sich:

$$\begin{aligned} W^{(G)} = \frac{V_0}{2} & \left( \underline{q}^T \underline{H}_1^T \underline{E} \underline{H}_1 \underline{q} + \underline{q}^T \underline{H}_1^T \underline{E} \underline{H}_2 \underline{q} + \underline{q}^T \underline{H}_2^T \underline{E} \underline{H}_1 \underline{q} + \right. \\ & \left. + \underline{q}^T \underline{H}_2^T \underline{E} \underline{H}_2 \underline{q} \right) \quad (4.44) \end{aligned}$$

Für die Transformation von allgemeinen Verschiebungen in Knotenpunktverschiebungen gilt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}_{(n)} &= \underline{B}^* \underline{q} \\ \underline{q} &= \underline{B}^{*-1} \underline{u}_{(n)} = \underline{G}^* \underline{u}_{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

wobei

$$\underline{u}_{(n)} = \left\{ u_1^1 \quad u_1^2 \quad u_1^3 \quad u_2^1 \quad u_2^2 \quad u_2^3 \quad u_3^1 \quad u_3^2 \quad u_3^3 \right\} \quad (4.46)$$

der Vektor der Verschiebungen an den Knotenpunkten ist.  
Für den Fall der in Bild 4.3 eingeführten Koordinatensysteme erhält man

$$\underline{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x^{21} & x^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x^{21} & x^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^{21} & x^{22} \\ 1 & 0 & x^{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x^{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x^{32} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

und

$$\underline{G}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Die  $a_{\kappa\eta}$  sind die Elemente der Matrix in Gl. (4.4).

Aus (4.37) und (4.39) bekommt man:

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & q_2 & 0 & 0 & q_5 & 0 & 0 & q_8 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & q_6 & 0 & 0 & q_9 \\ 0 & q_3 & q_2 & 0 & q_6 & q_5 & 0 & q_9 & q_8 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Mit (4.45) lautet  $\underline{H}_2$  in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} u_1^1 + a_{12} u_2^1 + a_{13} u_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} u_1^1 + a_{22} u_2^1 + a_{23} u_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} u_1^2 + a_{12} u_2^2 + a_{13} u_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + a_{23} u_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} u_1^3 + a_{12} u_2^3 + a_{13} u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} u_1^3 + a_{22} u_2^3 + a_{23} u_3^3 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.49)

Einsetzen von (4.45) in (4.44) und Berücksichtigung von

$$\frac{\partial W^{(G)}}{\partial \underline{u}_{(n)}} = \underline{K}_E^{(VA)} \underline{u}_{(n)} \quad ; \quad \underline{K}_E^{(VA)} \text{ ist die verschiebungsabhängige Steifigkeitsmatrix}$$

ergibt sich

$$\underline{K}_E^{(VA)} = v_0 \left[ \underline{G}^{*T} (\underline{H}_1^T \underline{E} \underline{H}_1 + \underline{H}_1^T \underline{E} \underline{H}_2 + \underline{H}_2^T \underline{E} \underline{H}_1 + \underline{H}_2^T \underline{E} \underline{H}_2) \underline{G}^* + \frac{1}{2} (\underline{H}^I + \underline{H}^{II} + \underline{H}^{III} + \underline{H}^{IV}) \right]. \quad (4.50)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \underline{H}_{2,1} &= \frac{\partial H_2}{\partial u_1} ; \underline{H}_{2,2} = \frac{\partial H_{2,2}}{\partial u_1} ; \dots\dots\dots ; \underline{H}_{2,9} = \frac{\partial H_2}{\partial u_3} \\ \underline{H}_{(1)}^I &= \underline{u}_{(n)}^T \underline{G}^{*T} \underline{H}_1^T \underline{E} \underline{H}_{2,i} \underline{G}^* \\ \underline{H}_{(1)}^{II} &= \underline{u}_{(n)}^T \underline{G}^{*T} \underline{H}_{2,i}^T \underline{E} \underline{H}_1 \underline{G}^* \\ \underline{H}_{(1)}^{III} &= \underline{u}_{(n)}^T \underline{G}^{*T} \underline{H}_2^T \underline{E} \underline{H}_{2,i} \underline{G}^* \\ \underline{H}_{(1)}^{IV} &= \underline{u}_{(n)}^T \underline{G}^{*T} \underline{H}_{2,i}^T \underline{E} \underline{H}_2 \underline{G}^* \\ \underline{H}^I &= \left\{ \underline{H}_{(1)}^I \quad \underline{H}_{(2)}^I \quad \dots\dots\dots \quad \underline{H}_{(9)}^I \right\} \\ \underline{H}^{II} &= \left\{ \underline{H}_{(1)}^{II} \quad \underline{H}_{(2)}^{II} \quad \dots\dots\dots \quad \underline{H}_{(9)}^{II} \right\} \\ \underline{H}^{III} &= \left\{ \underline{H}_{(1)}^{III} \quad \underline{H}_{(2)}^{III} \quad \dots\dots\dots \quad \underline{H}_{(9)}^{III} \right\} \\ \underline{H}^{IV} &= \left\{ \underline{H}_{(1)}^{IV} \quad \underline{H}_{(2)}^{IV} \quad \dots\dots\dots \quad \underline{H}_{(9)}^{IV} \right\} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

$\underline{K}_E^{(VA)}$  ist die elastische (nicht genäherte) Steifigkeitsmatrix, in der Knotenverschiebungen bis zur zweiten Ordnung enthalten sind; sie ist nicht mit der elastischen Steifigkeit bei der Methode der Lastinkremente zu verwechseln.

Die Steifigkeit  $\underline{K}_E^{(VA)}$  aus Gl. (4.50) stellt eine symmetrische Matrix dar.

Mit Hilfe von (4.36), (4.41), (4.47) und (4.49) läßt sich  $\underline{K}_E^{(VA)}$  im Einzelnen ermitteln.

Um die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_G$  zu bestimmen, muß man das elastische Potential infolge Vorspannung Gl. (4.42) in folgender Form ausdrücken

$$W^{(VS)} = \frac{h}{2} \iint_{S_E} \left[ (u'_{,1} + u'_{,1} + u'_{,1}) (u'_{,2} + u'_{,2} + u'_{,2}) \right] \begin{bmatrix} \delta^{11(0)} & \delta^{12(0)} \\ \delta^{21(0)} & \delta^{22(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,1}^1 + u_{,1}^2 + u_{,1}^3 \\ u_{,2}^1 + u_{,2}^2 + u_{,2}^3 \end{bmatrix} dS \quad (4.52)$$

Durch Differentiation von (4.5) nach  $x$  ergibt sich:

$$u'_{,x}^j = a_{\alpha n} u_n^j \quad (4.53)$$

Setzt man (4.53) in (4.52) ein, so folgt:

$$W^{(VS)} = \frac{V_0}{2} \begin{bmatrix} a_{1n} u_n^j & a_{2n} u_n^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{11(0)} & \delta^{12(0)} \\ \delta^{21(0)} & \delta^{22(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} u_n^j \\ a_{2n} u_n^j \end{bmatrix}$$

$$W^{(VS)} = \frac{V_0}{2} \underline{u}_{(n)}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{11} & a_{21} \\ a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{11(0)} & \delta^{12(0)} \\ \delta^{21(0)} & \delta^{22(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{23} & a_{23} \end{bmatrix} \underline{u}_{(n)} \quad (4.54)$$

$$W^{(VS)} = \frac{V_0}{2} \underline{u}_{(n)}^T \underline{a} \underline{\delta}^{(0)} \underline{a}^T \underline{u}_{(n)} \quad (4.55)$$

Die Bedeutung von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}^{(0)}$  ist aus Gl. (4.54) ersichtlich.

Mit:

$$W^{(VS)} = \frac{1}{2} \underline{u}^T(n) \underline{K}_G \underline{u}(n) \text{ und da } W^{(VS)} \text{ nur quadratisch in den Verschiebungen ist,}$$

erhält man aus (4.55):

$$\underline{K}_G = V_0 \underline{a} \underline{b}^{(0)} \underline{a}^T \quad (4.56)$$

Die Massenmatrix läßt sich folgendermaßen ermitteln:

$$\underline{u} = \underline{\phi} \underline{q} \quad (4.32)$$

Die Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\underline{\dot{u}} = \underline{\phi} \underline{\dot{q}}$$

$$\underline{\ddot{u}} = \underline{\phi} \underline{\ddot{q}}$$

und

$$T = \frac{h}{2} \rho \iint_{S_E} \underline{\dot{u}}^T \underline{\dot{u}} \, dS$$

$$T = \frac{h}{2} \rho \iint_{S_E} \underline{\dot{q}}^T \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{\dot{q}} \, dS$$

Wenn die Verschiebungen (3.40) nicht explizit zeitabhängig sind, dann gelten:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \underline{\dot{q}}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) = \rho h \iint_{S_E} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{\ddot{q}} \, dS$$

Einsetzen von (4.45) ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \underline{S} \underline{V}_0 \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} \underline{\underline{G}}^* \ddot{\underline{u}}_{(n)}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \underline{M} \ddot{\underline{u}}_{(n)}$$

mit

$$\underline{M} = \underline{S} \underline{V}_0 \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} \underline{\underline{G}}^* \tag{4.57}$$

$\underline{M}$  ist die Massenmatrix des Elementes.

Danach lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (4.18) in Matrizenform:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{(n)} + \left( \underline{K}_G + \overset{(VA)}{\underline{K}_E} \right) \underline{u}_{(n)} = \underline{R} \tag{4.58}$$

wobei:

$$\underline{R} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ R_1 & R_1 & R_1 & R_2 & R_2 & R_2 & R_3 & R_3 & R_3 \end{matrix} \right\}$$

der Vektor der fiktiven Knotenkräfte ist.

$\overset{(VA)}{\underline{K}_E}$ ,  $\underline{K}_G$  und  $\underline{M}$  sind nach (4.50), (4.56) und (4.57) bestimmt.

Abschließend soll die sog. Jacobi - Matrix ermittelt werden,

$$\underline{J} = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \underline{u}_{(n)}^2} \tag{4.59}$$

Mit (3.38), (4.44), (4.45) und (4.55) erhält man

$$\underline{J} = \underline{K}_G + \underline{V}_0 \left[ \overset{*}{\underline{G}}^T \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\ (\underline{H}_1 & \underline{E} & \underline{H}_1 & + & \underline{H}_1 & \underline{E} & \underline{H}_2 & + & \underline{H}_2 & \underline{E} & \underline{H}_2) \end{matrix} \overset{*}{\underline{G}} + \right. \\ \left. + (\underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H}) + (\underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H}) \right]$$

$$\underline{J} = \underline{K}_G + \overset{(VA)}{\underline{K}_E} + \underline{V}_0 \left[ \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\ (\underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H}) & + \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\ + (\underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H} + \underline{H}) \end{matrix} \right] \tag{4.60}$$

$\underline{H}^I, \underline{H}^{II}, \underline{H}^{III}, \underline{H}^{IV}$  sind nach Gl. (4.51) definiert;

weiterhin ist

$$H_{(1,j)} = \underline{u}_{(n)}^T \underline{G}_{2,1}^T \underline{E} \underline{H}_{2,j} \underline{G}^* \underline{u}_{(n)}$$

$$\underline{H}^V = H_{(i,j)} \quad ; \quad i = 1, 2 \dots, 9; \quad j = 1, 2 \dots, 9 \quad (4.61)$$

Es ist aus (4.60) erkennbar, daß  $\underline{J}$  für jeden beliebigen Verschiebungsvektor  $\underline{u}_{(n)}$  eine symmetrische Matrix ist. Die Jacobi-Matrix  $\underline{J}$  stellt eine genaue Tangente der Verschiebungs-Belastungskurve dar, dagegen ergibt die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K} = \underline{K}_G + \underline{K}_E$  bei der Methode der Lastinkremente keine Tangente dieser Kurve. (Es ist daran zu erinnern, daß  $\underline{J}$  und  $\underline{K}$  aufgrund von zwei verschiedenen Elastizitätsgesetzen hergeleitet werden, zum Elastizitätsgesetz siehe Abschnitt 2.4.

Hierbei ist

$\underline{K}_G$  die GSM (Funktion der augenblicklichen Geometrie und des augenblicklichen Spannungszustandes)

$\underline{K}_E$  die ESM bei der Methode der Lastinkremente (Funktion der augenblicklichen Geometrie)

Man kann sich diesen Sachverhalt an folgendem eindimensionalem Problem klar machen (Bild 4.6).

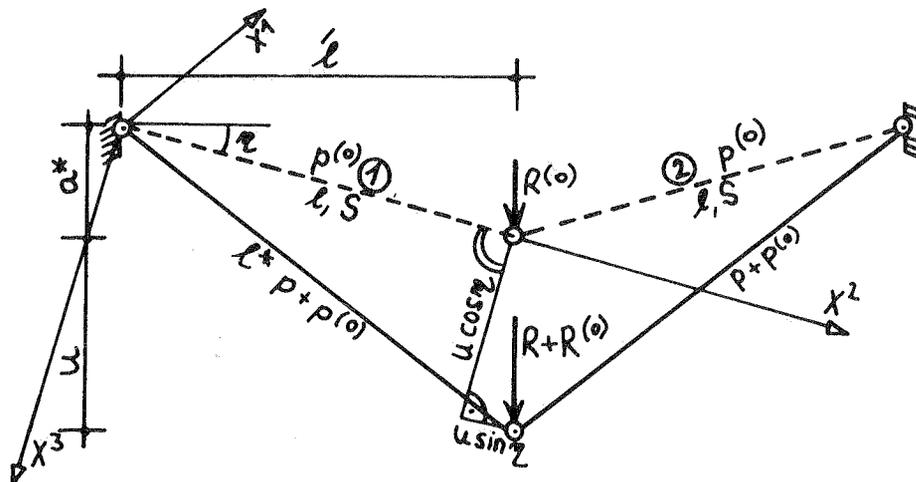


Bild 4.6: --- Ausgangsgeometrie mit Anfangskraftzustand  
 — Verformte Geometrie

Es ist das lokale Koordinatensystem des Elements ① dargestellt.

Für das Stabelement ① in Bild 4.6 gilt:

$$u_{1,2}^3 = \frac{u \cos \eta}{l} \quad ; \quad u_{1,2}^2 = \frac{u \sin \eta}{l} \quad (4.62)$$

(die übrigen Komponenten von  $u_{i,j}$  sind Null)

Mit Gl. (3.38a) ist die potentielle Energie infolge der Vorspannung (Anfangskraftzustand) für das Stabelement ①

$$W_{\textcircled{1}}^{(VS)} = \frac{S}{2} \int_l \delta^{22(0)} (u_{1,2}^2 u_{1,2}^2 + u_{1,2}^3 u_{1,2}^3) dl \quad (4.63)$$

S ist die Querschnittfläche des Stabes.

Nach Einsetzen von (4.62) in (4.63) und anschließendem Integrieren erhält man

$$W_{\textcircled{1}}^{(VS)} = \frac{p^{(0)} u^2}{2 l} \quad (u \text{ ist die Verschiebung in Bild 4.6}) \quad (4.64)$$

Für das System in Bild 4.6 bzw. für die Elemente ① + ② gilt:

$$W^{(VS)} = 2 W_{\textcircled{1}}^{(VS)} = \frac{p^{(0)} u^2}{l} \quad (4.65)$$

(4.62) in (2.9) eingesetzt, liefert

$$e_{22} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{u \sin \eta}{l} + \frac{u^2 \sin^2 \eta}{l^2} + \frac{u^2 \cos^2 \eta}{l^2} \right) \quad (4.66)$$

(die übrigen Komponenten des Tensors  $e_{ij}$  sind Null)

Einsetzen von (4.66) und (2.25) in (3.36) ergibt

$$W_{\textcircled{1}}^{(G)} = \frac{SE}{4} \left( \frac{2u^2 \sin^2 \eta}{l} + \frac{u^3 \sin \eta}{l^2} + \frac{u^4}{2 l^3} \right) \quad (4.67)$$

das elastische Potential für das gesamte System ist

$$W^{(G)} = \frac{SE}{2} \left( \frac{2u^2 \sin^2 \eta}{l} + \frac{u^3 \sin \eta}{l^2} + \frac{u^4}{2 l^3} \right) \quad (4.68)$$

mit E als Elastizitätsmodul

Das gesamte elastische Potential einschließlich dem Potential infolge Vorspannung ist:

$$W^* = W^{(VS)} + W^{(G)} \quad (3.38)$$

Für die Statik gilt

$$R = \frac{\partial W^*}{\partial u} \quad (R \text{ und } u \text{ nach Bild 4.6}) \quad (4.69)$$

aus (3.38), (4.65), (4.68) und (4.69) erhält man

$$R = \frac{\partial W^*}{\partial u} = \frac{2SE \sin^2 \eta u}{l} + \frac{3}{2} \frac{SE \sin \eta}{l^2} u^2 + \frac{SE u^3}{l^3} + \frac{2p^{(0)}}{l} u \quad (4.70)$$

Für die Jacobi - Matrix  $\underline{J}$  gilt

$$\underline{J} = \frac{\partial^2 W^*}{\partial u^2} = \frac{\partial R}{\partial u} \quad (4.71)$$

d.h.  $\underline{J}$  ist eine Tangente der R - u - Kurve.

Mit (4.71) und (4.70) erhält man

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial u^2} = \underline{J} = \frac{2SE \sin^2 \eta}{l} + \frac{3SE \sin \eta}{l^2} u + \frac{3SE}{l^3} u^2 + \frac{2p^{(0)}}{l} \quad (4.72)$$

Die Jacobi - Matrix besteht in diesem Fall aus einer einzigen Komponente.

Für die verformte Geometrie lauten die Steifigkeiten  $\underline{K}_E$  und  $\underline{K}_G$  für die Methode der Lastinkremente

$$\underline{K}_E = \frac{2 SE (a^* + u)^2}{l^3} \quad (4.73)$$

$$\underline{K}_G = \frac{R}{u}$$

Mit (4.70) ergibt sich

$$\underline{K}_{-G} = \frac{2SE \sin^2 \eta}{l} + \frac{3}{2} \frac{SE \sin \eta u}{l^2} + \frac{SE u^2}{l^3} + \frac{2p^{(0)}}{l} \quad (4.74)$$

Aus (4.73) und (4.74) erhält man

$$\underline{K} = \underline{K}_{-G} + \underline{K}_{-E} = \frac{2SE (a^* + u)^2}{l^{*3}} + \frac{2SE \sin^2 \eta}{l} + \frac{3}{2} \frac{SE \sin \eta u}{l^2} + \frac{SE u^2}{l^3} + \frac{2p^{(0)}}{l} \quad (4.75)$$

( $\underline{K}$  ist die eine einzige Komponente)

Es ist aus (4.75) und (4.72) erkennbar, daß die beiden Matrizen  $\underline{K}$  und  $\underline{J}$  nicht identisch sind. Dies wird klarer, wenn man den Grenzfall  $\eta = 0$  betrachtet; damit wird  $a^* = 0$  und  $l = \hat{l}$ .

Dieser Fall ist in Bild 4.7 dargestellt.

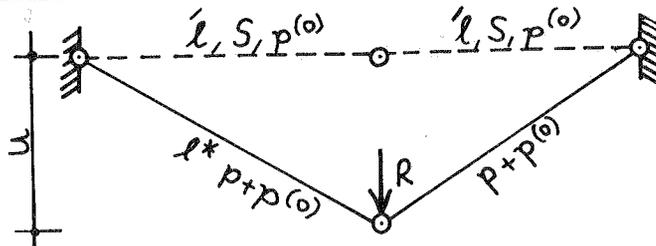


Bild 4.7: ---- Anfangsgeometrie  
 ——— verformte Geometrie

Danach ergibt sich aus (4.72) und (4.75):

$$\underline{J} = \frac{3 ES u^2}{l^3} + \frac{2 p^{(0)}}{l} \quad (4.76)$$

und

$$\underline{K} = \frac{ES u^2}{\hat{l}^3} + \frac{2 ES u^2}{l^{*3}} + \frac{2 p^{(0)}}{l} \quad (4.77)$$

Die Differenz zwischen  $\underline{K}$  und  $\underline{J}$  ist dann

$$\underline{J} - \underline{K} = \frac{2 ES u^2 (l^{*3} - \hat{l}^3)}{l^3 l^{*3}} \quad (4.78)$$

Es ist aus den vorherigen Ausführungen, insbesondere Gl. (4.50), Gl. (4.51) und Gl. (4.60) erkennbar, daß die Matrizen-Schreibweise für geometrisch nichtlineare Aufgaben (ohne Linearisierung!) schwerfällig und kompliziert ist. Deshalb wurde in dieser Arbeit mit den in Index-Schreibweise angegebenen Gleichungen (Abschnitt 4.3.1) weitergerechnet.

#### 4.3.4 Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage

Man wählt in Gl. (3.58) als allgemeine Verschiebungen die Verschiebungen der Knotenpunkte. Dann erhält man:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_n^j} \right) + \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_n^j \partial u_m^i} \right)_{(St.)} \Delta u_m^i = R_n^j(Dy.) \quad (4.79)$$

wobei

$$R_n^j(Dy.) = R_n^j - R_n^j(St.)$$

die dynamische Last darstellt. Dabei ist  $R_n^j$  im allgemeinen zeitabhängig, und  $\Delta u_m^i$  sind die Verschiebungen von der Gleichgewichtslage aus gemessen.

In Gl. (4.79) wird die tangentielle Steifigkeit - d.h. Jacobi -

Matrix -  $\left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_n^j \partial u_m^i} \right)_{(St.)}$  am statischen Gleichgewicht

als konstant während der Schwingungszeit des Systems angenommen.

Im Einzelnen erhält man aus (4.79) mit (4.11), (4.16), (4.17), (4.22) und (3.38):



$$\begin{aligned}
 & \left( \rho \frac{V_0}{3} \right) \ddot{u}_n^j + \left[ V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \delta_{j3} \delta_{i3} + V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} \delta_{\mu i} a_{\alpha n} a_{\lambda m} + \right. \\
 & + V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} \left( a_{\lambda m} a_{\beta k} \delta_{\mu i} \delta_{j3} u_k^3 + a_{\beta m} a_{\lambda k} \delta_{j3} \delta_{i3} u_k^\mu + \right. \\
 & + a_{\lambda m} a_{\mu k} \delta_{\beta j} \delta_{i3} u_k^3 \left. \right) + \frac{1}{2} V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda b} \left( a_{\mu k} a_{\beta m} \delta_{j3} \delta_{i3} u_b^3 u_k^3 + \right. \\
 & \left. \left. + 2 a_{\beta k} a_{\mu m} \delta_{j3} \delta_{i3} u_b^3 u_k^3 \right) \right] \Delta u_m^i \underset{(St.)}{=} R_n^j(\mathcal{D}y) \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

und in transformierter Form:

$$\begin{aligned}
 & \left( \rho \frac{V_0}{3} \right) \ddot{\bar{u}}_n^y + \left[ V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} A_{3d} A_{3y} + V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} A_{\mu d} A_{\beta y} + \right. \\
 & + V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} \left( a_{\lambda m} a_{\beta k} A_{\mu d} A_{3y} A_{3i} \bar{u}_k^i + a_{\beta m} a_{\lambda k} A_{3d} A_{3y} A_{\mu i} u_k^i + \right. \\
 & \left. + a_{\lambda m} a_{\mu k} A_{3d} A_{3i} A_{\beta y} \bar{u}_k^i \right) + \\
 & + \frac{1}{2} V_0 E^{\kappa\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda b} \left( a_{\mu k} a_{\beta m} A_{3d} A_{3y} A_{3i} A_{3j} \bar{u}_b^i u_k^j + \right. \\
 & \left. \left. + 2 a_{\beta k} a_{\mu m} A_{3d} A_{3y} A_{3i} A_{3j} \bar{u}_b^i \bar{u}_k^j \right) \right] \Delta \bar{u}_m^d \underset{(St.)}{=} \bar{R}_n^y(\mathcal{D}y) \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

Die Größen  $\frac{\partial^2 W^*}{\partial u_n^j \partial u_m^i}$  sind die Elemente der Jacobi-Matrix.

Man bekommt deshalb  $\left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_n^j \partial u_m^i} \right)$  im globalen Koordinatensystem nach Gl. (4.81) bzw. Gl. (4.83) als Nebenprodukt der statischen Lösung, wenn man die Methode von Newton-Raphson anwendet.

$\left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_n^j \partial u_m^i} \right)_{(St.)}$  ist die Jacobi-Matrix des letzten Iterationsschrittes.

4.4 Dämpfungsterme nach Abschnitt 3.5 und nach der Elementmethode mit linearem Verschiebungsansatz

Gl. (3.50) gibt die Materialdämpfung an, wenn die Verschiebungen der Knotenpunkte als allgemeine Verschiebungen gewählt werden. Für die Membranen erhält man:

$$D_n^j(MD) = V_0^* E^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\mu}^i \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial u_n^j} \quad (4.84)$$

Die Differentiation von Gl. (4.6) nach der Zeit  $t$  ergibt:

$$\dot{e}_{\lambda\mu}^i = \frac{1}{2} (a_{\lambda k} \dot{u}_k^\mu + a_{\mu k} \dot{u}_k^\lambda) + \frac{1}{2} a_{\lambda k} a_{\mu m} (\dot{u}_k^i \dot{u}_m^i + \dot{u}_k^i u_m^i) \quad (4.85)$$

Setzt man (4.6) und (4.85) in (4.84) ein so folgt:

$$D_n^j(MD) = V_0^* E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ a_{\lambda k} a_{\alpha n} \delta_j^\beta \dot{u}_k^\mu + a_{\lambda k} a_{\alpha d} a_{\beta n} \dot{u}_k^\mu u_d^j + \right. \\ \left. + a_{\lambda k} a_{\mu m} a_{\alpha n} \delta_j^\beta u_k^i \dot{u}_m^i + a_{\lambda k} a_{\mu m} a_{\alpha d} a_{\beta n} u_k^i \dot{u}_m^i u_d^j \right] \quad (4.86)$$

Bei isotropen Stoffen nimmt  $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  genau die selbe Struktur wie  $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  an; in  $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  treten die Viskosität bei Volumendilatation und die Newton'sche Viskositätskonstante statt der Lamé'schen Konstanten in  $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  auf [27].

Für die Dämpfung der Umgebung, wenn die Verschiebungen nicht explizit zeitabhängig sind, bekommt man aus (3.53)

$$D_n^j(UD) = \iint_{SE} C_{(UD)} (\underline{n} \cdot \underline{g}_k) \frac{\partial u^k}{\partial u_m^i} \frac{\partial u^k}{\partial u_n^j} \dot{u}_m^i \quad (4.87)$$

(über  $k, i, m = 1, 2, 3$  wird summiert)

Aus (4.5) erhält man:

$$\frac{\partial u^k}{\partial u_m^i} = \left( \delta_{m1} + a_{\alpha m} X^\alpha \right) \delta_{ik} \quad (4.88)$$

Einsetzen von (4.88) und (4.12) in (4.87) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} D_n^j(UD) &= C_{(UD)} \left( \underline{n} \cdot \underline{g}_j \right) \frac{M_{nm}}{g_h} \dot{u}_m^j \\ D_n^j(UD) &= C_{(UD)} \left( \underline{n} \cdot \underline{g}_j \right) \frac{V_0}{3h} \dot{u}_n^j \end{aligned} \right\} \quad (4.89)$$

Mit  $(\underline{n} \cdot \underline{g}_3) = 1$ ,  $(\underline{n} \cdot \underline{g}_1) = (\underline{n} \cdot \underline{g}_2) = 0$  erhält man aus (4.94)

$$D_n^j(UD) = C_{(UD)} \delta_{3j} \frac{V_0}{3h} \dot{u}_n^j \quad (4.90)$$

Einsetzen von (4.86) und (4.90) in (3.54) gibt z.B. eine zu Gl. (4.18) analoge Form:

$$\begin{aligned} M_{nm} \ddot{u}_m^j - C_{(UD)} \delta_{3j} \frac{V_0}{3h} \dot{u}_n^j - V_0^* E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ a_{\lambda k} a_{\alpha n} \delta_j^\beta \dot{u}_k^\mu + \right. \\ \left. + a_{\lambda k} a_{\alpha d} a_{\beta n} \dot{u}_k^\mu \dot{u}_d^j + a_{\lambda k} a_{\mu m} a_{\alpha n} \delta_j^\beta \dot{u}_k^i \dot{u}_m^i + \right. \\ \left. + a_{\lambda k} a_{\mu m} a_{\alpha d} a_{\beta n} \dot{u}_k^i \dot{u}_m^i \dot{u}_d^j \right] + V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} \dot{u}_m^j + \\ + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \dot{u}_m^\mu + \\ + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} \dot{u}_m^\mu \dot{u}_k^j + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} \dot{u}_m^i \dot{u}_d^i \right) + \\ + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} \dot{u}_m^i \dot{u}_d^i \dot{u}_k^j = R_n^j \end{aligned} \quad (4.91)$$

Gl. (4.91) ist ein nichtlineares geschwindigkeitsabhängiges DGS zweiter Ordnung.

#### 4.5 Übergang zu den räumlichen Fachwerken einschließlich Seilnetzen

Nach der Energiemethode sollen nachfolgend die nichtlinearen Steifigkeitsbeziehungen und die Jacobi-Matrix für ein Stabelement hergeleitet werden.

In Bild 4.8 ist ein Stab ① - ② im globalen Koordinatensystem dargestellt. Zur Vereinfachung wird der Stab ① - ② in der Ausgangsgeometrie ohne Vorspannkraft angenommen; folglich ist die potentielle Energie infolge Vorspannung  $W^{(VS)} = 0$ , siehe Gl. (3.38) und (3.38 a).

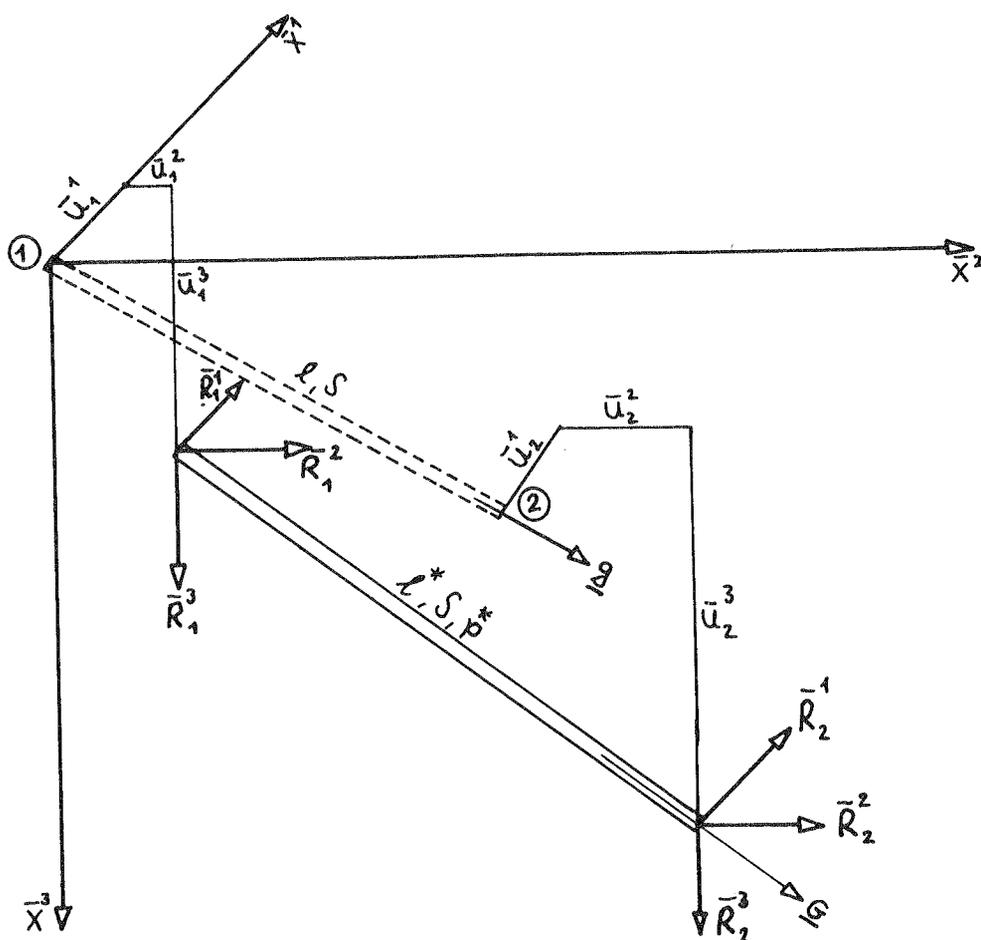


Bild 4.8: Stab ① - ②  
 --- vor der Verformung  
 — nach der Verformung

Weiterhin werden entlang des unverformten und verformten Stabes der Einheitsvektor  $\underline{g}$  und der Gittervektor  $\underline{G}$  definiert, Bild 4.8.

Bei einachsiger konstanter Beanspruchung und mit Gl. (3.36) lautet das gesamte elastische Potential des Stabes (1) - (2)

$$\frac{(G)}{W} = \frac{S l E e^2}{2} \quad (4.92)$$

Dabei ist

S Querschnittfläche des Stabes vor der Verformung

l Länge des Stabes vor der Verformung

E Elastizitätsmodul

e Lagrange'sche Verzerrung für ein Stabelement (in diesem Fall nur eine Komponente)

Ebenso gilt hier

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 ,$$

wobei die Ingenieurdehnung

$$\varepsilon = \frac{l^* - l}{l} \quad (4.93)$$

ist.

Man führt ein

$$u^{*k} = (\bar{u}_2^k - \bar{u}_1^k) \quad (4.94)$$

Aus Bild 4.8 ist abzulesen

$$l = \sqrt{(x^{21})^2 + (x^{22})^2 + (x^{23})^2} \quad (4.95)$$

$$l^* = \sqrt{(x^{21} + u^{*1})^2 + (x^{22} + u^{*2})^2 + (x^{23} + u^{*3})^2}$$

$$l^* = \sqrt{l^2 + u^{*k} (u^{*k} + 2 x^{2k})} \quad (4.96)$$

Einsetzen von (4.95), (4.96) in (4.93) ergibt

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2 + u^{*k} (u^{*k} + 2 x^{2k})}}{l} - 1 \quad (4.97)$$

Partielle Differentiation von  $\mathcal{E}$  nach den Knotenverschiebungen

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{u}_\alpha^j} = \frac{\Omega_\alpha (\bar{u}^{*j} + X^{2j})}{l^* l} \quad , \quad (4.98)$$

wobei

$$\Omega_1 = -1 \quad \text{und}$$

$$\Omega_2 = 1 \quad \text{ist.}$$

(2.6) in (4.92) eingesetzt liefert

$$\overset{(G)}{W} = \frac{lSE}{2} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^3 + \frac{1}{4} \mathcal{E}^4) \quad (4.99)$$

und

$$\frac{\partial \overset{(G)}{W}}{\partial \bar{u}_\alpha^j} = \frac{lSE}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{u}_\alpha^j} (2\mathcal{E} + 3\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^3) \quad . \quad (4.100)$$

Setzt man (4.93) und (4.98) in (4.100) ein, so erhält man

$$\frac{\partial \overset{(G)}{W}}{\partial \bar{u}_\alpha^j} = \frac{\Omega_\alpha SE}{2l^3} \bar{u}^{*k} (\bar{u}^{*k} + 2X^{2k}) (\bar{u}^{*j} + X^{2j}) = \bar{R}_\alpha^j \quad . \quad (4.101)$$

Gl. (4.101) ist die Steifigkeitsbeziehung zwischen den Knotenverschiebungen und den Knotenkräften eines Stabelementes. Sie ist ein nichtlineares AGS dritter Ordnung.

Die zweite Ableitung von  $\overset{(G)}{W}$  nach den Knotenverschiebungen gibt die Komponenten der tangentiellen Steifigkeitsmatrix (der Komponente der Jacobi-Matrix), es sind

$$\frac{\partial^2 \overset{(G)}{W}}{\partial \bar{u}_\alpha^j \partial \bar{u}_\beta^i} = \frac{lSE}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{u}_\alpha^j \partial \bar{u}_\beta^i} (2\mathcal{E} + 3\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^3) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{u}_\alpha^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{u}_\beta^i} (2 + 6\mathcal{E} + 3\mathcal{E}^2) \right] \quad . \quad (4.102)$$

Mit (4.98) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \bar{u}_\alpha^j \partial \bar{u}_\beta^i} = \frac{-\Omega_\alpha \Omega_\beta (\bar{u}^{*j} + X^{2j})(\bar{u}^{*i} + X^{2i})}{l^3 l} = \frac{f_{jki\beta}}{l^3 l} \quad (4.103)$$

und

$$\frac{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_\alpha^j \partial \bar{u}_\beta^i} = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta (\bar{u}^{*j} + X^{2j})(\bar{u}^{*i} + X^{2i})}{l^2 l^2} = \frac{f_{jki\beta}}{l^2 l^2}, \quad (4.104)$$

wobei

$$f_{jki\beta} = \Omega_\alpha \Omega_\beta (\bar{u}^{*j} + X^{2j})(\bar{u}^{*i} + X^{2i}) \quad (4.105)$$

ist.

Einsetzen von (4.93), (4.103) und (4.104) in (4.102) liefert

$$\frac{\partial^2 W^{(G)}}{\partial \bar{u}_\alpha^j \partial \bar{u}_\beta^i} = \frac{SE f_{jki\beta}}{l^3} \quad (4.106)$$

( $f_{jki\beta}$  ist nach (4.105) definiert)

Gl. (4.106) ergibt die Elemente der Jacobi-Matrix  $\underline{J}_{(6,6)}$  des Stabelements im Raum (hier für den Fall ohne Vorspannung im Anfangszustand).

Weiterhin ist die Kraft im Stabelement ① - ② zu ermitteln. Für einen Stab gilt

$$\bar{\sigma} = Ee \quad (4.107)$$

wobei  $\bar{\sigma}$  und  $e$  die Kappussche Spannung und die Lagrangesche Verzerrung sind, siehe Abschnitt 2.4.

Die skalare Größe ( $\bar{\sigma}$ ) der Kappusschen Spannung ist damit

$$(\bar{\sigma}) = EeG$$

( $\bar{\sigma}$ ) ist auf die unverformte Fläche  $S$  bezogen.

$G$  ist die skalare Größe des Gittervektors in Richtung des verformten Stabes, siehe Bild 4.8.

Für einachsige Beanspruchung gilt

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{G_{11}} - 1$$

$$G_{11} = \underline{G} \cdot \underline{G} = G^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{11} = \quad , \text{ damit erhält man aus (2.5)}$$

$$G = \varepsilon + 1 \tag{4.108}$$

Einsetzen von (2.6) und (4.108) in (4.107) ergibt

$$(\underline{\sigma}) = E \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) (1 + \varepsilon) \tag{4.109}$$

Die Stabkraft  $P^*$  ist damit

$$P^* = (\underline{\sigma}) S = SE \left( \varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{2} \right) \tag{4.110}$$

Die nichtlinearen Terme von  $\varepsilon$  in (4.110) sind durch das angenommene Elastizitätsgesetz bedingt. Hierfür wurde eine lineare Abhängigkeit zwischen dem Kappusschen Spannungstensor  $\sigma^{ik}$  und dem Lagrangeschen Verzerrungstensor  $e_{ik}$  zugrunde gelegt. Das Werkstoffgesetz ist in dieser Form ein nichtlineares Materialgesetz zwischen den Ingenieurspannungen und Ingenieurdehnungen, siehe Abschnitt 2.4.

#### 4.6 Zusammenbau der finiten Elemente

Wie vorher besprochen wurde, beschreiben die Gleichungen in den Abschnitten 4.3 und 4.4 das statische und dynamische Verhalten eines Elements. Der Zusammenbau der Elemente erfolgt in bekannter Weise durch ein Zusammenbauprogramm.

Bei der statischen Lösung, die in Abschnitt 5.1 behandelt ist, empfiehlt es sich, das Polynom z.B. die linke Seite von (4.23) ohne den Beschleunigungsterm und die Elemente der Jacobi-Matrix

(Abschnitt 5.1) für jeden Iterationsschritt vollständig neu zu berechnen. Dasselbe gilt auch für die Iterationsschritte der Berechnung der dynamischen Lösung (Abschnitt 5.2). Eine einmalige Auswertung der konstanten Koeffizienten (z.B. in der linken Seite von Gl. (4.23)) und ihre Multiplikation mit den entsprechenden Knotenverschiebungen bei jedem Iterationsschritt hat sich wegen der erheblichen Datenorganisation und des großen Speicherplatzbedarfs als ungünstig erwiesen.

## 5. Lösung der Gleichungssysteme

### 5.1 Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems

Zur Lösung des nichtlinearen Schwingungsproblems sowohl mit allgemeinen Amplituden als auch mit kleinen Amplituden braucht man die Lösung der nichtlinearen statischen Aufgabe. Nach dem Weglassen der Beschleunigungsglieder in den Bewegungsgleichungen der Abschnitte 4.3.1 und 4.3.2 bekommt man die entsprechenden statischen Gleichungen; man erhält für ein Element z.B. aus (4.18):

$$\begin{aligned}
 & V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_m^j + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \int_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} u_m^\mu + \\
 & + V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} u_m^\mu u_k^j + \frac{1}{2} \int_{\beta j} a_{\mu d} u_m^i u_d^i \right) + \\
 & + \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} u_m^i u_d^i u_k^j = R_n^j \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

(5.1) stellt ein nichtlineares AGS dritten Grades in den Verschiebungen der Knotenpunkte des Elements dar. Der Zusammenbau der Elemente, siehe Abschnitt 4.6, liefert ein nichtlineares AGS in den globalen Verschiebungen.

Es gibt mehrere Methoden und Techniken zur Lösung nichtlinearer AGS. Vergleiche der Theorien einiger Methoden einschließlich der numerischen Untersuchungen sind in [59] gegeben. Ausgehend von einigen Methoden zum Minimieren von nichtlinearen Funktionalen mit Nebenbedingungen gibt SPANG [60] die Grundlage verschiedener Techniken zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme. Man findet in [60] auch umfassende Literaturangaben. LAW gibt in [61] für die von ihm entwickelte Methode der "Diagonal Discrimination" ein Programmlisting mit Benutzer-Manual.

ODEN gibt in [44] an - aus den numerischen Experimenten von [59] entnommen -, daß die Newton-Raphson-Methode zu den besten der

vorhandenen Techniken dieser Art zählt. Diese Methode wurde auch in der vorliegenden Arbeit benutzt; sie stützt sich auf die Näherung einer Funktion in der Umgebung eines Ausgangspunktes durch eine Taylor-Reihe.

Es sei das Gleichungssystem

$$f_i(u_j) = P_i \quad (5.2)$$

gegeben.

Näherungsweise ist:

$$f_i(u_{j(0)} + \Delta u_j) \approx f_i(u_{j(0)}) + \left[ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right]_{(0)} \Delta u_k \quad (5.3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

n ist die Anzahl der Unbekannten bzw. der Gleichungen.

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$\underline{f} = \underline{f}_{(0)} + \underline{J}_{(0)} \Delta \underline{u} \quad (5.4)$$

damit

$$\Delta \underline{u} = \underline{J}_{(0)}^{-1} (\underline{f} - \underline{f}_{(0)}) = \underline{J}_{(0)}^{-1} (\underline{P} - \underline{f}_{(0)}) \quad (5.5)$$

wobei

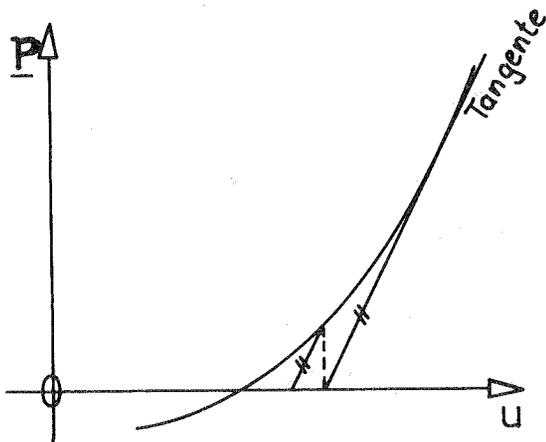
$$\underline{J} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right]_{(0)} \quad (5.6)$$

ist. Dabei darf  $\underline{J}$  (Jacobi-Matrix) nicht singulär sein (sie ist i.a. nicht positiv definit).

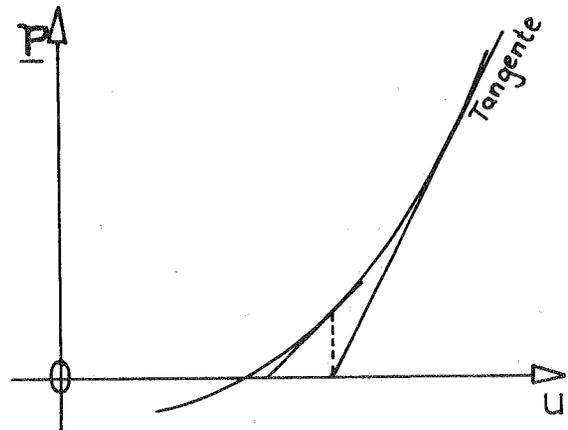
Damit kann man den Verschiebungsvektor des (m + 1)-ten Iterationsschrittes folgendermaßen berechnen

$$\underline{u}^{(m+1)} = \underline{u}^{(m)} + \underline{J}_{(\underline{u}^{(m)})}^{-1} \left[ \underline{P} - \underline{f}(\underline{u}^{(m)}) \right] \quad (5.7)$$

Aus (5.7) erkennt man, daß die Jacobi-Matrix  $\underline{J}$  für jeden Iterationsschritt neu zu ermitteln ist. Dies erweist sich in Fällen, in denen  $\underline{J}$  komplizierte Ausdrücke enthält, als aufwendig und erfordert verhältnismäßig große Rechenzeiten. Deshalb empfiehlt es sich, jede neu gerechnete Matrix  $\underline{J}$  für zwei oder drei Iterationsschritte zu benutzen. Den Unterschied zwischen den beiden Möglichkeiten kann man für das eindimensionale Problem aus Bild 5.1 ersehen.



$\underline{J}$  wird für mehr als einen Iterationsschritt benutzt



$\underline{J}$  wird für jeden Iterationsschritt ermittelt

Bild 5.1

Als numerische Erfahrung bei der Anwendung der Newton - Raphson - Methode gilt hier besonders zu erwähnen, daß man für die Elemente der  $\underline{J}$  - Matrix die entsprechende Funktion analytisch differenzieren muß. Wegen der meist großen numerischen Empfindlichkeit bei nichtlinearen Problemen hat kein mit numerischer Differentiation für  $\underline{J}$  gerechnetes Beispiel im Rahmen dieser Arbeit zum Erfolg geführt, dagegen hat die analytische Ermittlung von  $\underline{J}$  bei allen Beispielen zur Konvergenz geführt. Die möglichen Dämpfungsfaktoren bei der Iteration müßten sehr unterschiedliche Werte haben; deshalb ist ihre Anwendung nicht besonders empfehlenswert.

Weiterhin darf man die kubischen Glieder der nichtlinearen Gleichungen z.B. (5.1) nicht vernachlässigen; ihre Vernachlässigung führt zwar bei der Iteration oft zu endlichen Grenzwerten, die jedoch nicht mit der wirklichen Lösung übereinstimmen. Es entsteht also keine vollständige Lösung. Man kann diese Erscheinung folgendermaßen begründen: Ein Term kann i.a. vernachlässigt werden, wenn mindestens eine der folgenden Voraussetzungen zutrifft. 1) Die Vernachlässigung läßt sich durch physikalische oder ingenieurmäßige Überlegungen anhand der gestellten Aufgabe begründen und 2) Im Term  $d \cdot u^n$  ist sowohl der Koeffizient  $d$  als auch die Funktion  $u^n$  immer deutlich klein im Verhältnis zu den entsprechenden Ausdrücken in anderen Termen.

Dies trifft aber für die kubischen Terme nicht zu, denn selbst die in Gl. (4.26) über die physikalische Näherung kleiner Verzerrungen hinaus eingeführte Linearisierung führt nicht zum Verschwinden der kubischen Terme in Gl. (4.28). Auch die Koeffizienten der kubischen Glieder sind erfahrungsgemäß sehr groß. Dazu gibt es Systeme, die nur infolge der nichtlinearen Terme in Gl. (2.9) Verzerrungen erfahren, (weil die linearen Terme null sind!), d.h. infolge der kubischen Terme z.B. in Gl. (5.1). Infolgedessen kann man sagen, daß die Vernachlässigung der kubischen Terme "die physikalische Vollständigkeit" der Steifigkeitsbeziehungen verletzt und damit keine Konvergenz zur richtigen Lösung bringt.

## 5.2. Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

Im Falle von Schwingungen mit großen Amplituden erhält man ein nichtlineares gewöhnliches DGS, z.B. in der Form (4.18). Bei kleinen Amplituden um eine Gleichgewichtslage ergibt sich ein lineares gewöhnliches DGS gemäß (4.80). Im Prinzip können alle numerischen Methoden, die für die Lösung von nichtlinearen DGS anwendbar sind, für die Lösung von linearen DGS benutzt werden, umgekehrt jedoch nicht.

In [40] findet man eine Diskussion mehrerer Methoden zur Lösung von linearem DGS. In [62] wird eine numerische Methode mit der Bezeichnung "Rational Extrapolation" zur Lösung von Anfangswertaufgaben 1. Ordnung einschließlich des Programmlistings und numerischer Vergleiche mit anderen Methoden beschrieben.

Hier werden zwei Methoden zur Lösung vom nichtlinearen gewöhnlichen DGS kurz erläutert:

- a) Finite Übersetzung der Gleichungen durch die Anwendung von Zeit-Elementen:

Für lineare DGS wurde dieser Weg von [72] und [63] angegeben. Hierbei wird die Diskretisierungstechnik der Methode der finiten Elemente auch für die Zeit als weitere Dimension angewandt. Man kann von der Anwendung der Ritz'schen Methode im Zeitbereich mit Hilfe von Hermiteschen Interpolationspolynomen sprechen [64]. Dadurch läßt sich die vollständige Algebraisierung des Schwingungsproblems erreichen. Man erhält für jedes Zeitelement (Zeitelement) im Falle linearer bzw. nichtlinearer Aufgaben ein lineares bzw. nichtlineares Gleichungssystem.

Die Methode läßt sich wie folgt darstellen:

Die gesamte Zeit  $t$ , über die zu integrieren ist, wird in mehrere Zeitelemente  $\Delta t$  unterteilt, deren Größen verschieden sein können und nach der geforderten Genauigkeit gewählt werden. Für diese Methode wird eine allgemeinere Form des Hamilton - Formalismus benötigt, als in Gl. (3.39) dargestellt ist. Es wird näm-

lich nur das Verschiebungsfeld am Anfang der Zeitspanne

$\Delta t = t_2 - t_1$  als bekannt vorausgesetzt, und damit ist die Variation  $\delta \underline{u}(t_1) = 0$ . Dagegen ist die Variation  $\delta \underline{u}(t_2) \neq 0$ .

Von dem in Gl. (3.34) gestrichenen Term bleibt daher jetzt der Wert an der oberen Grenze  $t_2$  (Ende der Zeitspanne  $\Delta t$ ) in der Form

$$\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} \text{ erhalten.}$$

Daraufhin erhält man anstelle von Gl. (3.39) folgende Variationsgleichung

$$-\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T - \delta W^* + \iiint_V \bar{p} \cdot \delta \underline{u} dV + \iint_{S_1} \bar{F} \cdot \delta \underline{u} dS \right] dt = 0 \quad (5.8)$$

Wenn die Verschiebungen nicht explizit von der Zeit abhängen, ergibt sich aus (3.41)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^k}{dt} &= \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ \delta u^k &= \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Für den ersten Term in (5.8) gilt

$$\begin{aligned} -\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} &= -\left( \iiint_V \rho \frac{du}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} \\ -\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} &= -\left( \iiint_V \rho \frac{du^k}{dt} \delta u^k dV \right)_{(t_2)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Setzt man (5.9) in (5.10) ein, so erhält man:

$$-\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} = -\left( \iiint_V \rho \frac{\partial u^k}{\partial q_i} \frac{\partial u^k}{\partial q_j} \dot{q}_i \delta q_j dV \right)_{(t_2)} \quad (5.11)$$

Die Verschiebungen  $q_i$  in (5.11) werden nun durch die Knotenpunktverschiebungen  $u_m^i$  ersetzt.

Damit folgt

$$-\left( \iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV \right)_{(t_2)} = -\left( \iiint_V \rho \frac{\partial u^k}{\partial u_m^i} \frac{\partial u^k}{\partial u_n^j} \dot{u}_m^i \delta u_n^j dV \right)_{(t_2)} \quad (5.12)$$

Einsetzen von (4.68) und (4.12) in (5.12) ergibt

$$-\left(\iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV\right)_{(t_2)} = -\left(M_{nm} \dot{u}_m^y \delta u_n^y\right)_{(t_2)} \quad (5.13)$$

und mit (4.22) erhält man aus (5.13)

$$-\left(\iiint_V \rho \frac{dr}{dt} \cdot \delta \underline{u} dV\right)_{(t_2)} = -\frac{\rho V_0}{3} \dot{u}_{m(t_2)}^y \delta u_{m(t_2)}^y \quad (5.14)$$

Nun werden die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten innerhalb des Zeitelementes  $\Delta t = t_2 - t_1$  in Abhängigkeit von den Verschiebungen und ihren zeitlichen Ableitungen am Anfang ( $t_1$ ) und am Ende ( $t_2$ ) des Zeitelementes  $\Delta t$  ausgedrückt. Die äußeren Kräfte innerhalb der Zeit  $\Delta t$  werden auch in Abhängigkeit von ihren Werten und deren zeitlichen Ableitungen am Anfang und am Ende von  $\Delta t$  formuliert. Alle zeitlichen Verläufe werden nun mit Hilfe von Hermiteschen Interpolationspolynomen beschrieben.

Man führt ein

$$\underline{u}_d^j = \underline{\omega} \underline{\hat{u}}_d^j$$

$$\dot{\underline{u}}_d^j = \underline{\omega}^* \underline{\hat{u}}_d^j \quad (5.15)$$

$$R_d^j = \underline{\omega}^* \underline{\hat{u}}_d^j$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_{n+1}] \\ \underline{\hat{u}}_d^j &= \left\{ u_{d(t_1)}^j \ \dot{u}_{d(t_1)}^j \ \dots \ (u_{d(t_1)}^j)^{\left(\frac{n^{**}-1}{2}\right)} \ u_{d(t_2)}^j \ \dot{u}_{d(t_2)}^j \ \dots \ (u_{d(t_2)}^j)^{\left(\frac{n^{**}-1}{2}\right)} \right\} \\ \underline{\omega}^* &= [\omega_1^* \ \omega_2^* \ \dots \ \omega_{m+1}^*] \\ R_d^j &= \left\{ R_{d(t_1)}^j \ \dot{R}_{d(t_1)}^j \ \dots \ (R_{d(t_1)}^j)^{\left(\frac{m^{**}-1}{2}\right)} \ R_{d(t_2)}^j \ \dot{R}_{d(t_2)}^j \ \dots \ (R_{d(t_2)}^j)^{\left(\frac{m^{**}-1}{2}\right)} \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$n^{**}$  ist der Grad des HIP für Verschiebungen.

$m^{**}$  ist der Grad des HIP für äußere Kräfte.

$(u_d^j)^{\binom{n^{**}-1}{2}}$  und  $(R_d^j)^{\binom{n^{**}-1}{2}}$  ist die  $\binom{n^{**}-1}{2}$ -te zeitliche Ableitung von  $u_d^j$  bzw.  $R_d^j$ .

Zum Beispiel sind die Vektoren in (5.16) bei einem HIP 3. Grades für die Verschiebungen und die Kraft:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\omega} &= \underline{\omega}^* = \left[ \left( 1 - \frac{3t^2}{\Delta t^2} + \frac{2t^3}{\Delta t^3} \right) \left( t - \frac{2t^2}{\Delta t} + \frac{t^3}{\Delta t^2} \right) \left( \frac{3t^2}{\Delta t^2} - \frac{2t^3}{\Delta t^3} \right) \left( -\frac{t^2}{\Delta t} + \frac{t^3}{\Delta t^2} \right) \right] \\ \underline{\hat{u}}_d^j &= \left\{ u_d^j(t_1) \quad \dot{u}_d^j(t_1) \quad u_d^j(t_2) \quad \dot{u}_d^j(t_2) \right\} \\ \underline{R}_d^j &= \left\{ R_d^j(t_1) \quad \dot{R}_d^j(t_1) \quad R_d^j(t_2) \quad \dot{R}_d^j(t_2) \right\} \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Man kann natürlich für die äußeren Kräfte ein HIP mit anderem Grad als für die Verschiebungen wählen, wenn ihr zeitlicher Verlauf es erfordert.

Im Rahmen dieser Methode sind nun zwei Wege zur numerischen Rechnung möglich, nämlich:

- 1) In Gl. (5.8) wird das elastische Potential  $W^*$  in genauer Form, d.h. als biquadratischer Ausdruck in den Verschiebungen benutzt.
- 2) In Gl. (5.8) wird das elastische Potential  $W^*$  durch eine Taylorreihe innerhalb jedes Zeitelementes  $\Delta t$  angenähert. Hierin berücksichtigt man die ersten drei Terme (einschließlich der quadratischen Glieder).

Beschreibung des 1. Weges:

Setzt man (3.38), (4.8), (4.10), (4.11), (4.22), (5.14) und (5.15) in (5.8) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & - \frac{\rho V_0}{3} \dot{u}_{m(t_2)}^y \delta u_{m(t_2)}^y + \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{V_0 \rho}{6} (\hat{u}_n^j)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \hat{u}_n^j - \right. \\ & \left. - \frac{V_0}{2} b^{\alpha\beta(\sigma)} a_{\alpha n} a_{\beta m} (\hat{u}_n^i)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \hat{u}_m^i - \frac{V_0}{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ a_{\alpha n} a_{\lambda k} (\hat{u}_k^\mu)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \hat{u}_n^\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} a_{\alpha n} a_{\lambda k} a_{\mu d} \underline{\omega} \underline{\hat{u}}_n^{\beta} (\underline{\hat{u}}_k^j)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \underline{\hat{u}}_d^j + \\
 & + \frac{1}{4} a_{\alpha n} a_{\beta m} a_{\lambda k} a_{\mu d} (\underline{\hat{u}}_n^i)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \underline{\hat{u}}_m^i (\underline{\hat{u}}_k^j)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \underline{\hat{u}}_d^j \Big] + \\
 & + \left. (\underline{\hat{u}}_m^i)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \underline{\hat{R}}_m^i \right\} dt = 0 \qquad (5.18)
 \end{aligned}$$

In (5.18) sind die Verschiebungen und ihre zeitlichen Ableitungen am Ende des Zeitelementes  $t = t_2 - t_1$  zu variieren; diese Funktionen sind am Anfang des Zeitelementes bekannt. Man bekommt damit für jedes Zeitelement  $\left(\frac{n^{**}+1}{2}\right)k^*$  nichtlineare algebraische Gleichungen, wobei  $n^{**}$  der Grad des für die Verschiebungen gewählten HIP ist und  $k^*$  die Anzahl der Freiheitsgrade (unbekannten Verschiebungen) ist. Diese Möglichkeit ist wegen der offensichtlich komplizierten Integrale in (5.18) nicht besonders geeignet.

Beschreibung des 2. Weges:

Die gesamte Zeitspanne  $t$  wird in  $n$  Zeitelemente unterteilt. Man numeriert die Zeitelemente und die Zeitknoten nach Bild 5.2

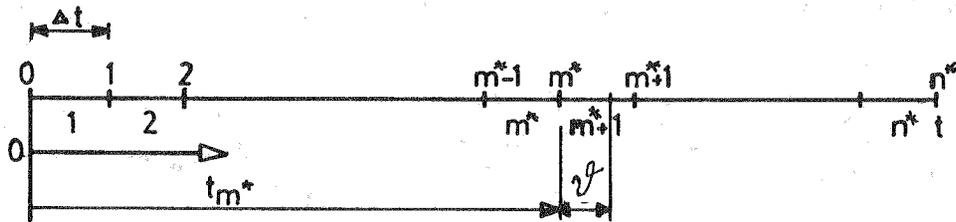


Bild 5.2 Unterteilung der gesamten Zeitspanne  $t$  in Zeitelemente  $\Delta t$ .

Das gesamte elastische Potential  $W^*$  wird innerhalb jedes Zeitelementes durch die ersten drei Glieder einer Taylorreihe angenähert. Folglich gilt für  $W^*$  innerhalb des Zeitelementes  $(m^* + 1)$ .

$$W_{(t_{m^*+\Delta t})}^* \approx W_{(m^*)}^* + \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} \Delta u_m^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} \Delta u_m^i \Delta u_n^j \qquad (5.19)$$

Die Kennzeichnung  $(m^*)$  bedeutet den Wert der Größe im Zeitknoten  $m^*$ , Bild 5.2.  $\Delta u_m^i$  ist der Zuwachs der Verschiebung, vom Zeitknoten  $m^*$  im Zeitelement  $m^* + 1$  an gemessen.

Für  $\Delta u_m^i$  und  $\Delta u_n^j$  gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_m^i &= u_m^i - u_{m(m^*)}^i \\ \Delta u_n^j &= u_n^j - u_{n(m^*)}^j \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Setzt man (5.20) in (5.19) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} W^* &= \underline{W}_{(m^*)}^* - \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i u_{n(m^*)}^j + \\ &+ \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} u_m^i - \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i u_n^j + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_m^i u_n^j \quad . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die unterstrichenen Terme in (5.21) sind Konstanten, und damit sind sie für das Variationsproblem belanglos. Folglich kann man schreiben

$$\begin{aligned} W^* &= \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} u_m^i - \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i u_n^j + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_m^i u_n^j \quad . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Setzt man (4.11), (4.22), (5.14), (5.22) und (5.15) in (5.8) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &-\frac{\delta V_0}{3} \dot{u}_{m(m^*)}^i \delta u_{m(m^*)}^j + \delta \int_0^{\Delta t} \left\{ \frac{\delta V_0}{6} (\hat{u}_n^j)^T \underline{\dot{\omega}}^T \underline{\dot{\omega}} \hat{u}_n^j - \right. \\ &-\left. \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} \underline{\omega} \hat{u}_m^i + \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i \underline{\omega} \hat{u}_n^j - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} (\hat{u}_m^i)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \hat{u}_n^j + (\hat{u}_n^j)^T \underline{\omega}^T \underline{\omega} \hat{u}_n^j \right\} dt = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Für das jeweilige Zeitelement mit der Größe  $\Delta t$  werden folgende Abkürzungen eingeführt

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{0}^{\Delta t} \underline{\dot{w}}^T \underline{\dot{w}} dt &= \underline{h}_{11} \\
 \int_{0}^{\Delta t} \underline{w}^T \underline{w} dt &= \underline{h}_{00} \\
 \int_{0}^{\Delta t} \underline{w} dt &= \underline{h}_0 \\
 \int_{0}^{\Delta t} \underline{w}^T \underline{w}^* dt &= \underline{h}_{11}^* \\
 \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_m^i} \right)_{(m^*)} &= C_{im(m^*)} \\
 \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} u_{m(m^*)}^i &= C_{jn(m^*)}^* \\
 \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial u_m^i \partial u_n^j} \right)_{(m^*)} &= \bar{C}_{imjn(m^*)}
 \end{aligned} \right\} (5.24)$$

Einsetzen von (5.24) in (5.23) ergibt

$$\begin{aligned}
 & -\frac{gV_0}{3} \dot{u}_{m(m^*+1)}^y \delta u_{m(m^*+1)}^y + \delta \left\{ \frac{gV_0}{6} (\hat{u}_n^j)^T \underline{h}_{11} \hat{u}_n^j - C_{im} \underline{h}_0 \hat{u}_m^i + \right. \\
 & \left. + C_{jn(m^*)}^* \underline{h}_0 \hat{u}_n^j - \frac{1}{2} \bar{C}_{imjn(m^*)} (\hat{u}_m^i)^T \underline{h}_{00} \hat{u}_n^j + (\hat{u}_n^j)^T \underline{h}_{11}^* \underline{R}_n^j \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Die zu variierenden Funktionen in (5.25) sind die Elemente des Spaltenvektors  $\hat{u}_n^j$ , d.h. die Verschiebungen und ihre zeitlichen Ableitungen am Ende des Zeitelementes  $\Delta t$ ; d.h. in diesem Fall die Größen  $u_{m(m^*+1)}^i$  und ihre Ableitungen. Die Verschiebungen am Anfang des Zeitelementes  $u_{m(m^*)}^i$  und ihre Ableitungen sind von dem vorherigen Zeitelement bekannt. Die Matrizen  $\underline{h}_{11}$  und  $\underline{h}_{00}$  und der Vektor  $\underline{h}_0$  sind mit normiertem Zeitelement  $t = 1$  und für HIP bis zum 7. Grad in [64] gegeben.

Führt man die Variation von (5.25) aus, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 & \underline{h} + \frac{2sV_0}{3} \widetilde{\underline{h}}_{11} \hat{\underline{u}}_n^j - C_{jn(m^*)} \widetilde{\underline{h}}_0 + C_{jn}^* \widetilde{\underline{h}}_0 - \\
 & - \bar{C}_{imjn(m^*)} \widetilde{\underline{h}}_{00} \hat{\underline{u}}_m^i = - \widetilde{\underline{h}}_{00} \hat{\underline{R}}_n^j \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

mit  $\underline{h} = \left\{ (1,1) \right\}_{(1, \frac{n^{**} + 1}{2})}$ ; die angegebene Adresse in  $\underline{h}$  ist

mit der Größe  $\left( -\frac{sV_0}{3} \hat{\underline{u}}_{n(m^*+1)}^j \right)$  besetzt, die übrigen Elemente von  $\underline{h}$  sind Nullen.  $n^{**}$  ist der Grad des HIP für die Verschiebungen. Hierin kennzeichnet die Schlange ( $\sim$ ) die Matrizen und Vektoren, bei denen man nur die untere Hälfte zu berücksichtigen hat.

Gl. (5.26) ist ein lineares AGS in den Verschiebungen und ihren zeitlichen Ableitungen am Ende des Zeitelementes  $\Delta t$ . Sie dienen als Anfangswerte für das nächste Zeitelement; die Felder  $C_{jn}$ ,  $C_{jn}^*$  und  $\bar{C}_{imjn}$  müssen für jedes Zeitelement neu ermittelt werden. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß man durch Erhöhen des Grades des benutzten HIP nicht entsprechend den Zeitschritt vergrößern kann. Die Näherung, nach der das gesamte elastische Potential innerhalb des Zeitelementes nur quadratisch von den Verschiebungen abhängt (damit kubische und biquadratische Terme der potentiellen Energie vernachlässigt), macht die Vergrößerung des Zeitschritts nur beschränkt möglich.

#### b) Die Methode von Runge - Kutta - Fehlberg

Die iterative Methode von Runge - Kutta zur Lösung von Anfangswertproblemen ermöglicht es, die Funktionen und ihre Ableitungen bis zum Term ( $h^4$ ) der Taylor'schen Reihe genau zu erfassen, wobei  $h$  die Schrittweite ist, d.h.

$$\underline{f}(t_0 + h) = \underline{f}(t_0) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} \underline{f}^{(i)}(t_0) h^i + \text{Terme höherer Ordnung von } h \quad (5.27)$$

Die unterstrichenen Terme werden genau erfaßt.

Den theoretischen Hintergrund dieser Methode, worauf hier nicht eingegangen wird, findet man in [65]. Für die Behandlung des vorliegenden Schwingungsproblems (nichtlineares gewöhnliches DGS 2.Ordnung ohne Terme mit ersten Ableitungen, d.h. ohne Geschwindigkeitsterme), wendet man die Methode nach Runge - Kutta - Nyström an. Für die praktische Rechnung benutzt man das Schema 1, das man in [66] findet. Es wurde hier für Gleichungen ohne Geschwindigkeitsterme spezialisiert.

Es sei das DGS

$$\ddot{u}_i = f_i (P_i(t), u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (5.28)$$

mit den Randbedingungen

$$u_i = u_i(0); \dot{u}_i = \dot{u}_i(0) \quad \text{für } t = 0$$

gegeben.

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Das Rechenschema lautet dann

t	$u_i$	$x_i = \dot{u}_i h$	$K_i = f_i \frac{h^2}{2}$
0	$u_i(0)$	$x_i(0)$	I $K_i$
h/2	$u_i(0) + \frac{1}{2}x_i(0) + \frac{1}{4}K_i^I$	$x_i(0) + K_i^I$	II $K_i$
h	$u_i(0) + x_i(0) + K_i^{II}$	$x_i(0) + 2K_i^{II}$	III $K_i$
h	$u_i = u_i(0) + x_i(0) + \bar{K}_i$	$x_i = x_i(0) + \bar{K}_i$	$\bar{K}_i = \frac{1}{2}(K_i^I + 2K_i^{II})$ $\bar{K}_i = \frac{1}{3}(K_i^I + 4K_i^{II} + K_i^{III})$

Schema 1

Das Schema 1 wurde programmiert; man erhält hiermit bei den meisten gerechneten Beispielen gute Ergebnisse. Bei verhältnismäßig steifen und gleichzeitig leichten Konstruktionen (z.B. Stahlzelt) muß man jedoch die Rechnung mit kleineren Zeitschritten durchführen, womit der Rechenaufwand erheblich steigt. Deshalb ist es wünschenswert, die Genauigkeit der Methode zu steigern. Dies ist Fehlberg durch eine Reihe von Arbeiten [67], [68], [69] und [70] gelungen. Durch  $m$ -malige Differentiation der Differentialgleichungen und eine darauf begründete Transformation hat man sowohl für die Lösungsfunktionen als auch für deren Ableitungen noch die Glieder der Taylorreihe mit der Ordnung  $(h^{m+5})$  genau erfaßt.

Für Systeme von Differentialgleichungen 2. Ordnung hat Fehlberg in [69] eine vereinfachte Transformation angegeben, die allerdings für geschwindigkeitsabhängige Gleichungen eine etwas kleinere Genauigkeit bis  $h^{m+4}$  ermöglicht.

Mit Hilfe der Transformation

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) + \sum_{j=1}^{m+2} \frac{1}{j!} u_i^{(j)}(t_0) (t - t_0)^j \quad (5.29)$$

geht (5.28) in das transformierte DGS

$$\ddot{\bar{u}}_i = \bar{f}_i(P(t); u) = f_i - \ddot{u}_i(t_0) - \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} u_i^{(j+2)}(t_0) (t - t_0)^j \quad (5.30)$$

über.

Die Anfangsbedingungen sind

$$\bar{u}_i(t_0) = \bar{u}_i(t_0) = u_i(t_0); \quad \bar{u}_i^{(j)}(t_0) = \bar{u}_i^{(j)}(t_0) = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, m + 2$$

$m$  ist die Anzahl der totalen Differentiationen des Gleichungssystems.

Für die Rechnung bedient man sich des Schemas 2, das aus [71] entnommen wurde.

t	$\bar{u}_i$	$\bar{u}_i$	$K_i = \bar{f}_i h$
$t_0 + h$	$\bar{u}_i(0)$	0	I $K_i$
$t_0 + \frac{m+2}{m+4}h$	$\bar{u}_i(0) + \frac{2}{(m+4)} \left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{m+1} K_i^{m+1}$	$\frac{1}{m+4} \left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{m+1} K_i$	II $K_i$
$t_0 + h$	$\bar{u}_i(0)$	$-\frac{1}{m+2} K_i^I + \frac{2}{m+2} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1} K_i^{II}$	III $K_i$
$t_0 + \frac{m+2}{m+5}h$	$\bar{u}_i(0) + \frac{3}{2} \frac{1}{(m+5)^2} \left(\frac{m+2}{m+5}\right)^{m+1} K_i^{III} h$	$\frac{1}{2} \frac{1}{m+5} \left(\frac{m+2}{m+5}\right)^{m+1} K_i^I + \frac{1}{4} \frac{5m+16}{(m+5)^2} \left(\frac{m+4}{m+5}\right)^{m+1} K_i^{II} - \frac{3}{4} \frac{m+2}{(m+5)^2} \left(\frac{m+2}{m+5}\right)^{m+1} K_i^{III}$	IV $K_i$
$t_0 + h$	$\bar{u}_i = \bar{u}_i(0) + K_i^{(0)}$	$\bar{u}_i = K_i^{(1)}$	$K_i^{(0)} = \frac{h}{(m+2)(m+3)} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1} K_i^{III}$

$$\bar{u}_i^+ \approx \bar{u}_i(0) + K_i^+$$

$$T_i \approx \bar{u}_i - \bar{u}_i^+$$

$m = j; j = 1, 2, \dots$

Schema 2

$$K_i^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{m+4}{(m+2)(m+3)} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1} K_i^{III} + \frac{1}{2} \frac{1}{m+3} K_i^{III}$$

$$K_i^+ = \frac{1}{3} \frac{h}{(m+3)(m+4)} K_i^{III} + \frac{2}{3} \frac{m+5}{(m+2)(m+3)(m+4)} \left(\frac{m+5}{m+2}\right)^{m+1} K_i^{IV} h$$

Schema 2 ist für beliebige Genauigkeit anwendbar, denn die Anzahl  $m$  der Differentiationen ist offen gelassen. Für die Lösung des Systems sind nur drei Durchgänge ( $K_i^I, K_i^{II}, K_i^{III}$ ) erforderlich; der vierte Durchgang mit  $K_i^{IV}$  dient zur automatischen Schrittweitensteuerung,  $T_i$  stellt einen angenäherten Fehlervektor dar. Durch Einführen von Genauigkeitsschranken kann man entsprechend den Iterationsschritt  $h$  verkleinern oder vergrößern. Weiterhin ist ersichtlich, daß bei geschwindigkeitsunabhängigen Gleichungen  $K_i^I = K_i^{III}$  ist. Nach jedem Iterationsschritt muß man die Rücktransformation nach Gl. (5.29) durchführen, um die Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems zu erhalten. Diese Lösung liefert die Anfangswerte für den nächsten Iterationsschritt.

Aus (5.29) und (5.30) ist erkennbar, daß die  $m$ -malige Differentiation von (5.28) sowohl für das Ausrechnen von  $\bar{f}_i$  als auch für das Durchführen der Rücktransformation (5.29) erforderlich ist. Im vorliegenden Fall läßt sich diese Differentiation ohne Schwierigkeiten durchführen. Hierfür werden an Hand von Gl. (4.18) Differentiations - Formeln abgeleitet. Dies läßt sich für die übrigen Bewegungsgleichungen von Abschnitt 4 ähnlich formulieren. Aus (4.18) und (4.22) erhält man

$$\ddot{u}_n^j = \frac{3}{V_0 g} \left\{ R_n^j - V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_m^j - V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} u_m^\mu - \right. \\ \left. - V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} u_m^\mu u_k^j + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} u_m^i u_d^i \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} u_m^i u_d^i u_k^j \right\} \quad (5.31)$$

Nach der Leibniz'schen Formel [73] ist

$$\frac{d^{n^*} (u_m^i u_k^j)}{dt^{n^*}} = \sum_{m=0}^{n^*} \binom{n^*}{m} u_m^{(m^*)} u_k^{j(n^*-m^*)}$$

$$\frac{d^{n^*}(u_m^i u_d^i)}{dt^{n^*}} = \sum_{m^*=0}^{n^*} \binom{n^*}{m^*} u_m^{i(m^*)} u_d^{i(n^*-m^*)}$$

und

$$\frac{d^{n^*}(u_m^i u_d^i u_k^j)}{dt^{n^*}} = \sum_{m^*=0}^{n^*} \left\{ \binom{n^*}{m^*} u_m^{i(n^*-m^*)} \left[ \sum_{s^*=0}^{m^*} \binom{m^*}{s^*} u_d^{i(s^*)} u_k^{j(m^*-s^*)} \right] \right\},$$

(5.32)

wobei gilt

$$u_m^{i(0)} = u_m^i, \quad \binom{n^*}{m^*} = \frac{n^*(n^*-1)\dots(n^*-m^*+1)}{m^*!} \quad \binom{n^*}{0} = 1.$$

Aus (5.31) in (5.32) erhält man

$$\begin{aligned} u_n^{j(n^*+2)} = & \frac{3}{V_0 \vartheta} \left\{ R^{j(n^*)} - V_0 \delta^{\alpha\beta(0)} a_{\alpha n} a_{\beta m} u_m^{j(n^*)} - \right. \\ & - V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\beta j} a_{\alpha n} a_{\lambda m} u_m^{\mu(n^*)} - V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} \left( a_{\beta k} \sum_{m^*=0}^{n^*} \binom{n^*}{m^*} u_m^{\mu(m^*)} u_k^{j(n^*-m^*)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \delta_{\beta j} a_{\mu d} \sum_{m^*=0}^{n^*} \binom{n^*}{m^*} u_m^{i(m^*)} u_d^{i(n^*-m^*)} \left. - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} V_0 E^{\alpha\beta\lambda\mu} a_{\alpha n} a_{\lambda m} a_{\beta k} a_{\mu d} \sum_{m^*=0}^{n^*} \left\{ \binom{n^*}{m^*} u_m^{i(n^*-m^*)} \left[ \sum_{s^*=0}^{m^*} \binom{m^*}{s^*} u_d^{i(s^*)} u_k^{j(m^*-s^*)} \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Es ist erwähnenswert, daß die erreichte Genauigkeit aus Schema 2 durch Reduzieren des Abbruchfehlers noch gesteigert werden kann, siehe hierzu [70].

## 6. Rechenbeispiele

### 6.1 Vorbemerkungen

Für die im folgenden angeführten Beispiele wurde ein Programm in Fortran IV geschrieben und die Rechnungen auf der Rechanlage CDC 6600 der Universität Stuttgart durchgeführt. Für die Integration des DGS wurde die Runge-Kutta-Methode<sup>(1)</sup> angewandt. Da es nicht Ziel der Arbeit war, den günstigsten Integrationsschritt zu suchen, wurde bei allen Beispielen mit konstanten Zeitschritten gerechnet. Zum Vergleich der Integrationsgenauigkeit sind die Beispiele mit den beiden Zeitschritten 0,001 Sec. und 0,0005 Sec. gerechnet worden. Ein nennenswerter Unterschied zwischen den beiden Rechnungen wurde nicht festgestellt. Die dargestellten Ergebnisse sind mit dem Zeitschritt 0,0005 Sec. gerechnet. Eine Dämpfung wurde nicht berücksichtigt. Für die schwingungserregenden Kräfte (dynamische Kräfte) sind in den Beispielen nur die folgenden beiden Schocklasten (Pulse)<sup>(2)</sup> berücksichtigt:

#### Fall 1: Entlastende dynamische Kräfte

Die statische Last nimmt innerhalb von 0,1 Sec. linear um 100 % ab (verschwindet) und wächst dann in 0,1 Sec. linear wieder auf die ursprüngliche Größe an, siehe Bild 6.1

#### Fall 2: Belastende dynamische Kräfte

Die statische Last wächst innerhalb von 0,1 Sec. linear um 100 % an und nimmt dann in 0,1 Sec. linear wieder auf die ursprüngliche Größe ab, siehe Bild 6.1.

In den Zeichnungen wird die allgemeine Lösung z.B. nach Gl. (4.18) als nichtlineare Lösung und die Lösung bei Annahme kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage z.B. nach Gl. (4.80) als lineare Lösung bezeichnet. In den Zeit-Weg Diagrammen werden die Ausschläge um die jeweilige Gleichgewichtslage gezeichnet.

---

(1) Fehler von der Ordnung  $(\Delta t)^5$

(2) Für einen linearen Ein-Massenschwinger bei dieser pulsartigen Belastung kann die Bewegungsgleichung geschlossen gelöst werden, siehe z.B. [76] .

## 6.2 Ebener Streifen

Der gelenkig gelagerte in der Ausgangsgeometrie ebene Streifen nach Bild 6.1 wird für in x-Richtung unterschiedliche Vorspannungen dynamisch untersucht. Bild 6.2 bis Bild 6.4 zeigen den zeitlichen Verlauf der Bewegung des Knotens 1 in z-Richtung ( $u_1^z$ ). Man sieht, daß die Verformung infolge des Laststoßes bei höheren Vorspannungen größer wird, was zunächst nicht zu erwarten ist. Dies ist auf die Form der Konstruktion zurückzuführen. Das vorliegende System gewinnt erst eine elastische Steifigkeit durch die Verformung unter den statischen Lasten. Eine Vorspannung vergrößert zwar die geometrische Steifigkeit des Systems, jedoch wird dadurch die elastische Steifigkeit kleiner. Dabei erreicht die gesamte tangentielle Steifigkeit des Systems (Jacobi-Matrix = elastische + geometrische Steifigkeit) einen Extremwert (minimum) bei einem bestimmten Vorspanngrad. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen:

Es wird das System nach Bild 6.1 näherungsweise als dreigelenkige Balken nach Bild 4.7 behandelt. Aus Gl. (4.70) ergibt sich für das System in Bild 4.7

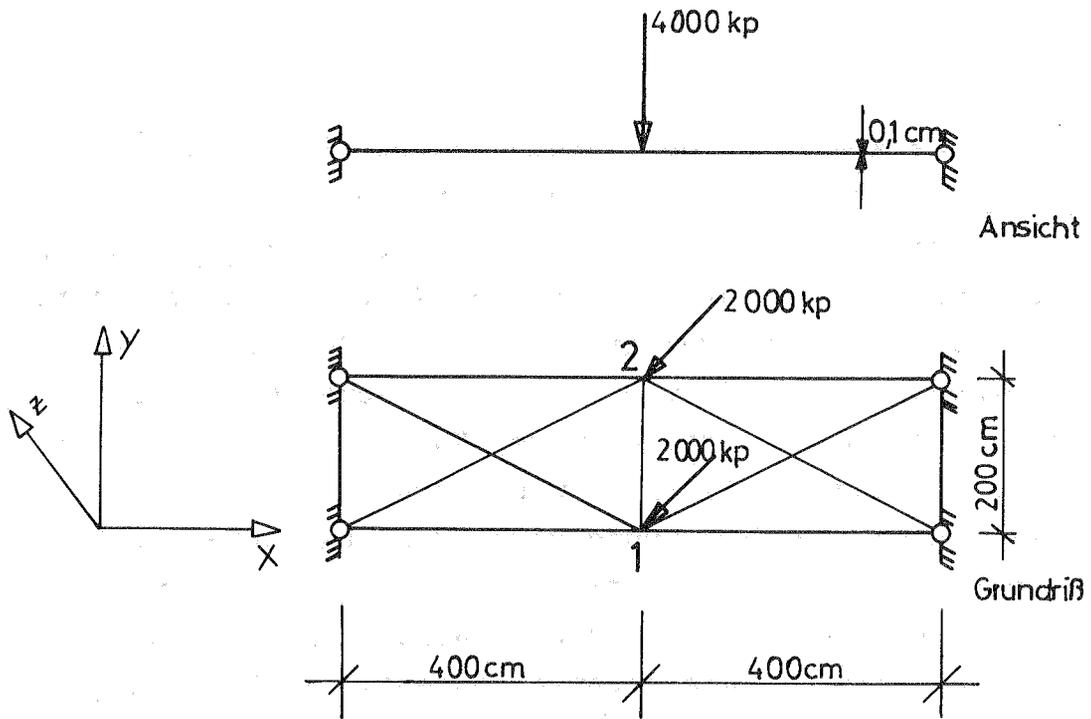
$$R = \frac{SEu^3}{l^3} + \frac{2p^{(0)}u}{l} \quad (6.1)$$

und die Jacobi-Matrix ist

$$\underline{J} = \frac{3SEu^2}{l^3} + \frac{2p^{(0)}}{l} \quad (4.76)$$

Die Vorspannkraft ist

$$p^{(0)} = s \delta^{(0)} \quad (6.2)$$



Vorspannung nur in  
x-Richtung und für  
Ausgangsgeometrie

Schwingende Masse  
= Eigenmasse der Membran

Dicke der Membran  
= 0,1 cm

Material (Stahl)

$$\mathcal{S} = 7,65 \cdot 10^{-6} \text{ kp sec}^2/\text{cm}^4$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu = 1/3$$

Last-Zeit-Diagramm:

- a = belastende dynamische Kräfte
- b = entlastende dynamische Kräfte

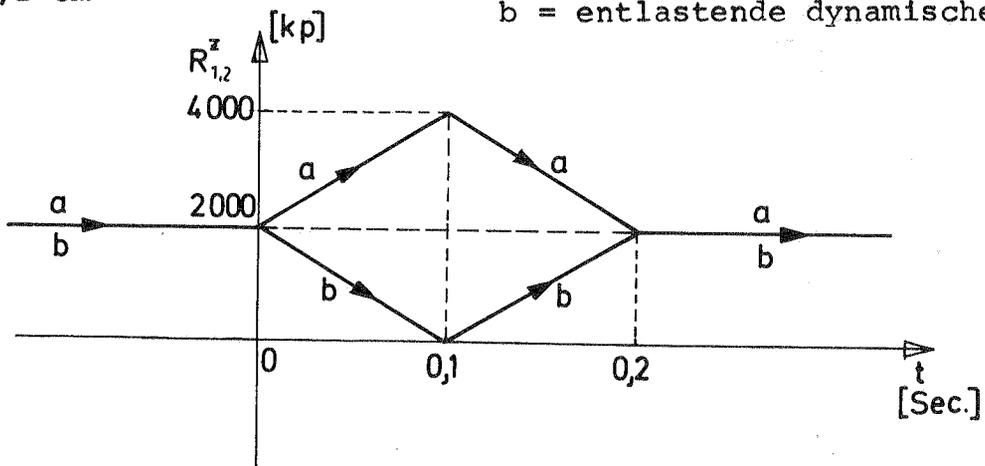


Bild 6.1: Ebener Streifen

Aus (6.1) und (6.2) und mit

$$\frac{SE}{l^3} = A^* \quad , \quad \frac{2S}{l} = B^* \quad (6.3)$$

ist die Vorspannung

$$\delta^{(0)} = \frac{R - A^* u^3}{B^* u} \quad (6.4)$$

(6.2), (6.3) und (6.4) in (4.76) eingesetzt liefert

$$\underline{J} = 2A^* u^2 + \frac{R}{u} \quad (6.5)$$

Der Extremwert (min.) von  $\underline{J}$  ist bei

$$\frac{\partial \underline{J}}{\partial u} = 0, \text{ d.h.}$$

$$4A^* u - \frac{R}{u^2} = 0$$

$$4A^* u^3 - R = 0$$

daraus ergibt sich für  $\underline{J} = \text{min.}$

$$u_{(\underline{J}=\text{min})} = \sqrt[3]{\frac{R}{4A^*}} \quad (6.6)$$

(6.6) in (6.4) ergibt

$$\delta_{(\underline{J}=\text{min})}^{(0)} = \frac{3R}{4B^* \sqrt[3]{\frac{R}{4A^*}}} \quad (6.7)$$

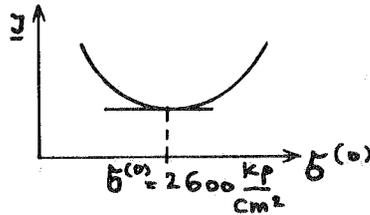
Gl. (6.7) gibt den Vorspanngrad für minimale Steifigkeit  $\underline{J}$ .

Für das System nach Bild 6.1 ist

$$A^* = \frac{200 \cdot 0,1 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{(400)^3} = 0,658$$

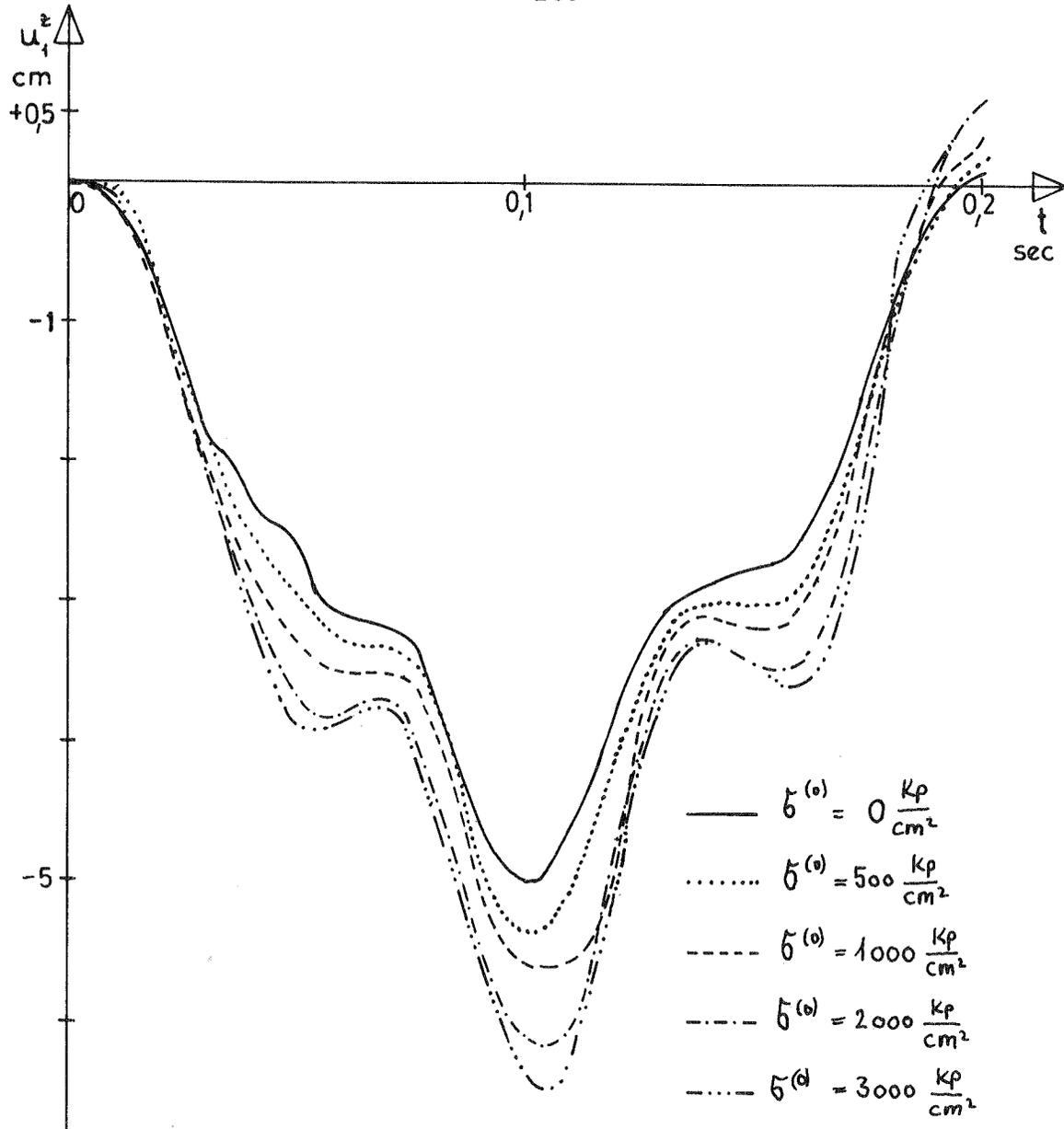
$$B^* = \frac{2 \cdot 200 \cdot 0,1}{400} = 0,10, \quad R = 4000 \text{ kp}$$

$$\begin{aligned} \underline{\delta}^{(0)} &= \underline{2600} \text{ kp/cm}^2 \\ (\underline{J}=\text{min}) \end{aligned}$$



Für das vorliegende System vergrößert die Vorspannung bis

$\delta^{(0)} = 2600 \text{ kp/cm}^2$  die Amplitude der Schwingungen; für höhere Vorspannungen als  $2600 \text{ kp/cm}^2$  wird die Amplitude wieder kleiner.



Verläufe der Bewegung sind auf eine gemeinsame horizontale Achse gezeichnet.  
Die Ausschläge sind von der jeweiligen Gleichgewichtslage ab gemessen.

Die Verschiebung  $u_1^z$  beträgt beim statischen Gleichgewicht:

$$\sigma^{(0)} = 0 \rightarrow u_1^z = -18,04 \text{ cm}, \quad \sigma^{(0)} = 500 \rightarrow u_1^z = -16,64 \text{ cm},$$

$$\sigma^{(0)} = 1000 \rightarrow u_1^z = -15,25 \text{ cm}$$

$$\sigma^{(0)} = 2000 \rightarrow u_1^z = -12,65 \text{ cm}, \quad \sigma^{(0)} = 3000 \rightarrow u_1^z = -10,40 \text{ cm}$$

Bild 6.2: Zeit-Weg Diagramm für  $u_1^z$  im Einschwingbereich (während der Wirkung der dynamischen Last) bei belastenden dynamischen Kräften <sup>1)</sup>

1) siehe Abschnitt 6.1

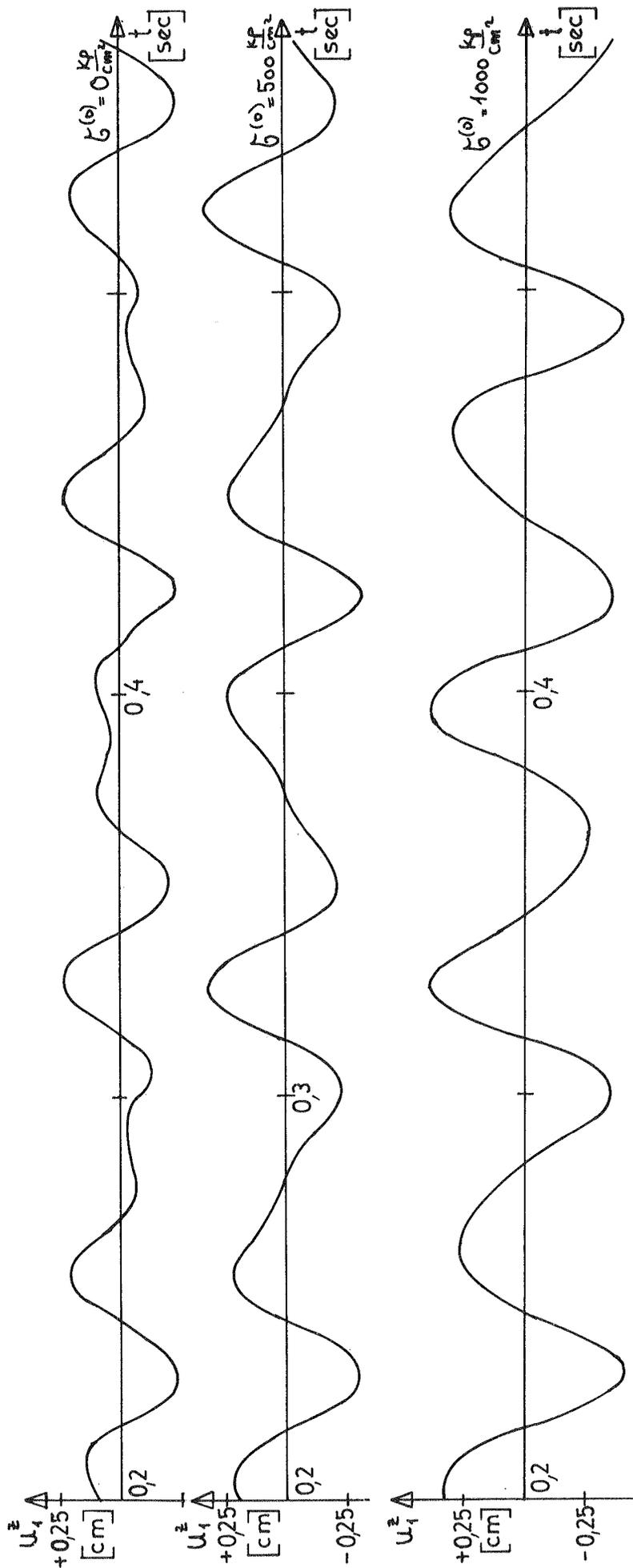


Bild 6.3: Zeit-Weg Diagramm für  $u_1^z$  (nach Ende der dynamischen Last) bei belastenden dynamischen Kräften I)

---

1) siehe Abschnitt 6.1

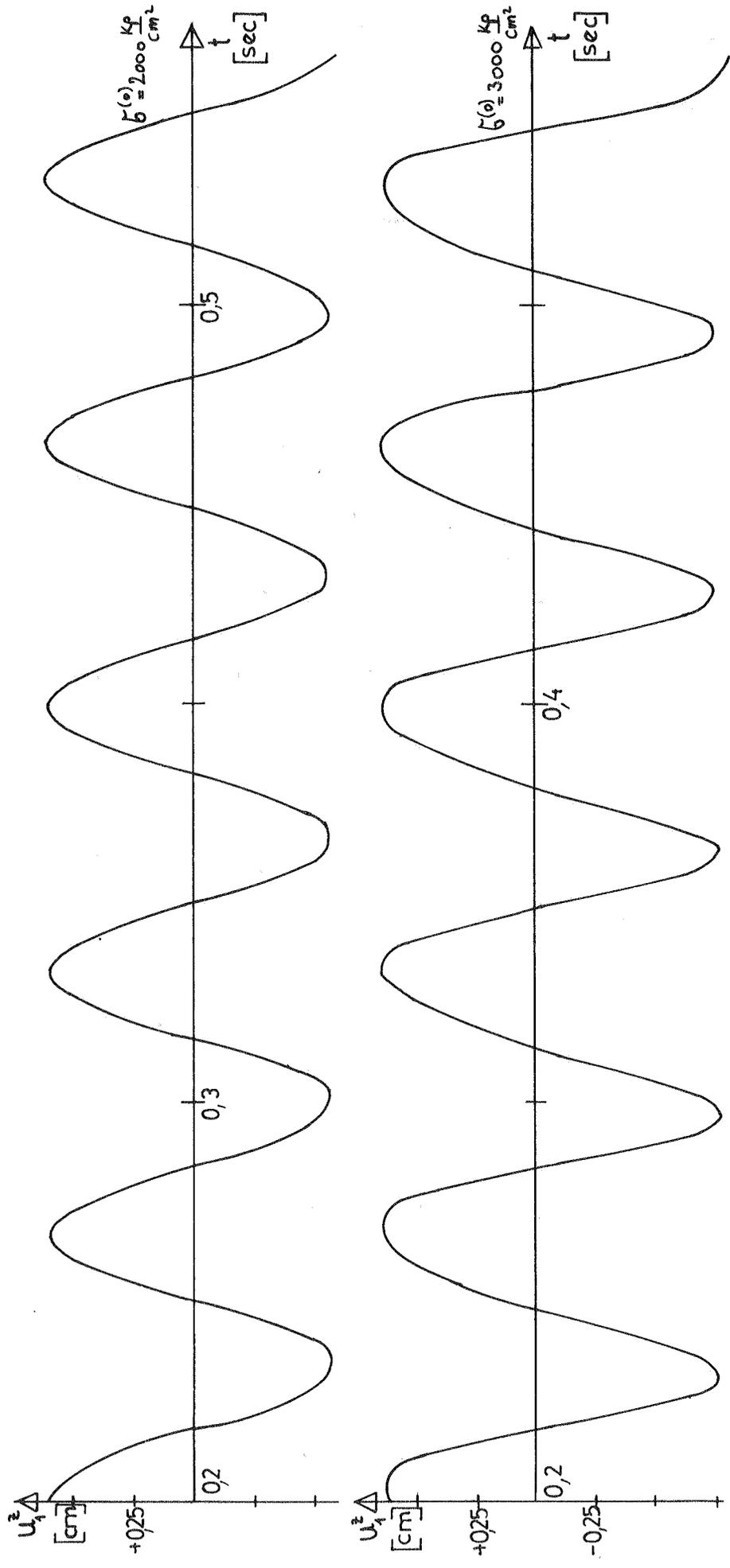


Bild 6.4: Zeit-Weg Diagramm für  $u_1^z$  bei belastenden dynamischen Kräften 1)

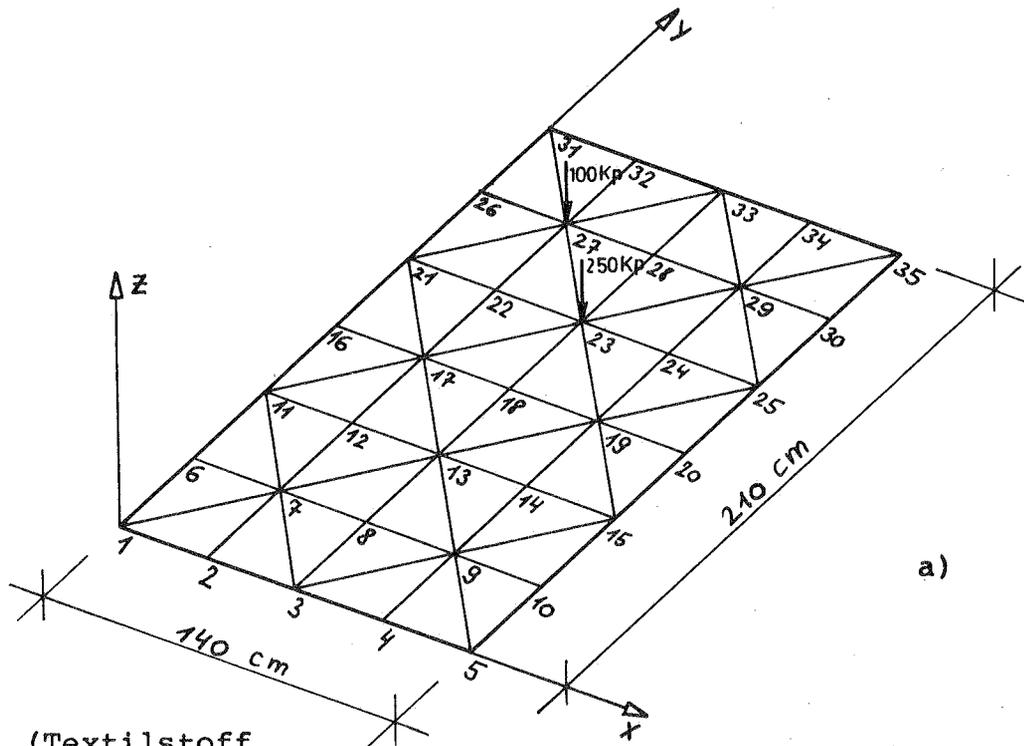
1) siehe Abschnitt 6.1

### 6,3 Ebenes Zelt bei nichtsymmetrischer Belastung

In der Ausgangsgeometrie ebene Membrandächer gewinnen wegen ihrer einfachen Form immer mehr an Interesse [75]. Das ebene Zelt (Bild 6.5 a) wurde mit 45 Freiheitsgraden behandelt. Die Ränder des Systems sind unverschieblich. Die statische Last besteht aus zwei Einzelkräften an den Knoten [23] und [27] in Richtung von  $-z$ , d.h.  $R_{23}^z = -250 \text{ kp}$

$$R_{27}^z = -100 \text{ kp} .$$

Bild 6.6 zeigt die Bewegung  $u_{23}^z$  während des Laststoßes, also im Einschwingbereich, bei verschiedenen Anfangsvorspannungen bei Annahme großer Schwingungen um die Gleichgewichtslage (nichtlineare Lösung) und bei Annahme kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage (lineare Lösung). Man sieht aus Bild 6.6, daß die lineare Lösung stark von der nichtlinearen abweicht und damit in diesem Fall unbrauchbar ist. Diese große Abweichung im Einschwingbereich beeinflußt stark den weiteren Verlauf der Schwingungen nach Ende der dynamischen Belastung (Bild 6.8 bis Bild 6.11). In Bild 6.7 ist der Einfluß der Vorspannung auf den Verlauf der Schwingungen in zwei verschiedenen Knotenpunkten ( $u_{23}^z$  und  $u_{13}^y$ ) dargestellt; es ist erkennbar, daß die Amplitude bei größerer Vorspannung stark abnimmt, insbesondere bei  $u_{13}^y$ . Man sieht weiterhin, daß die Frequenz bei höherer Vorspannung kleiner ist, was zunächst nicht erwartet wird; dies ist auf die Art der Belastung und das Seitenverhältnis des Systems ( $210 : 140 = 3 : 2$ ) zurückzuführen. Durch die einseitige Belastung des Zeltes ist ein großer Teil der Konstruktion fast spannungslos und entzieht sich damit der Mitwirkung bei der Abtragung der Spannungen in  $y$ -Richtung. Bei höherer Vorspannung wird infolge der größeren geometrischen Steifigkeit ein größerer Teil der Konstruktion mitschwingen. Daraus resultiert eine niedrigere Frequenz für  $u_{23}^z$  (größere Spannweite  $\rightarrow$  kleinere Frequenz). Aus den Bildern 6.8 bis 6.11 ersieht man die Entwicklung von  $u_{23}^z$  bei verschiedenen Vorspannungen.



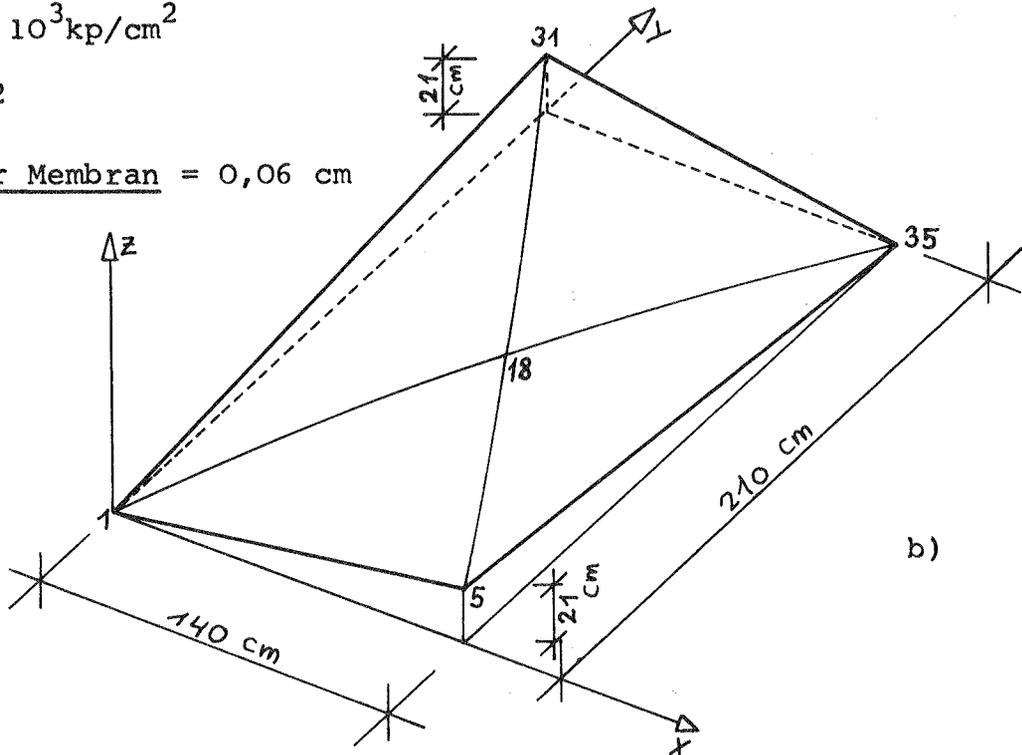
Material (Textilstoff  
"Trevira" isotrop  
angenommen)

$$\rho = 1,0204 \cdot 10^{-6} \text{ kp sec}^2/\text{cm}^4$$

$$E = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kp/cm}^2$$

$$\nu = 0,2$$

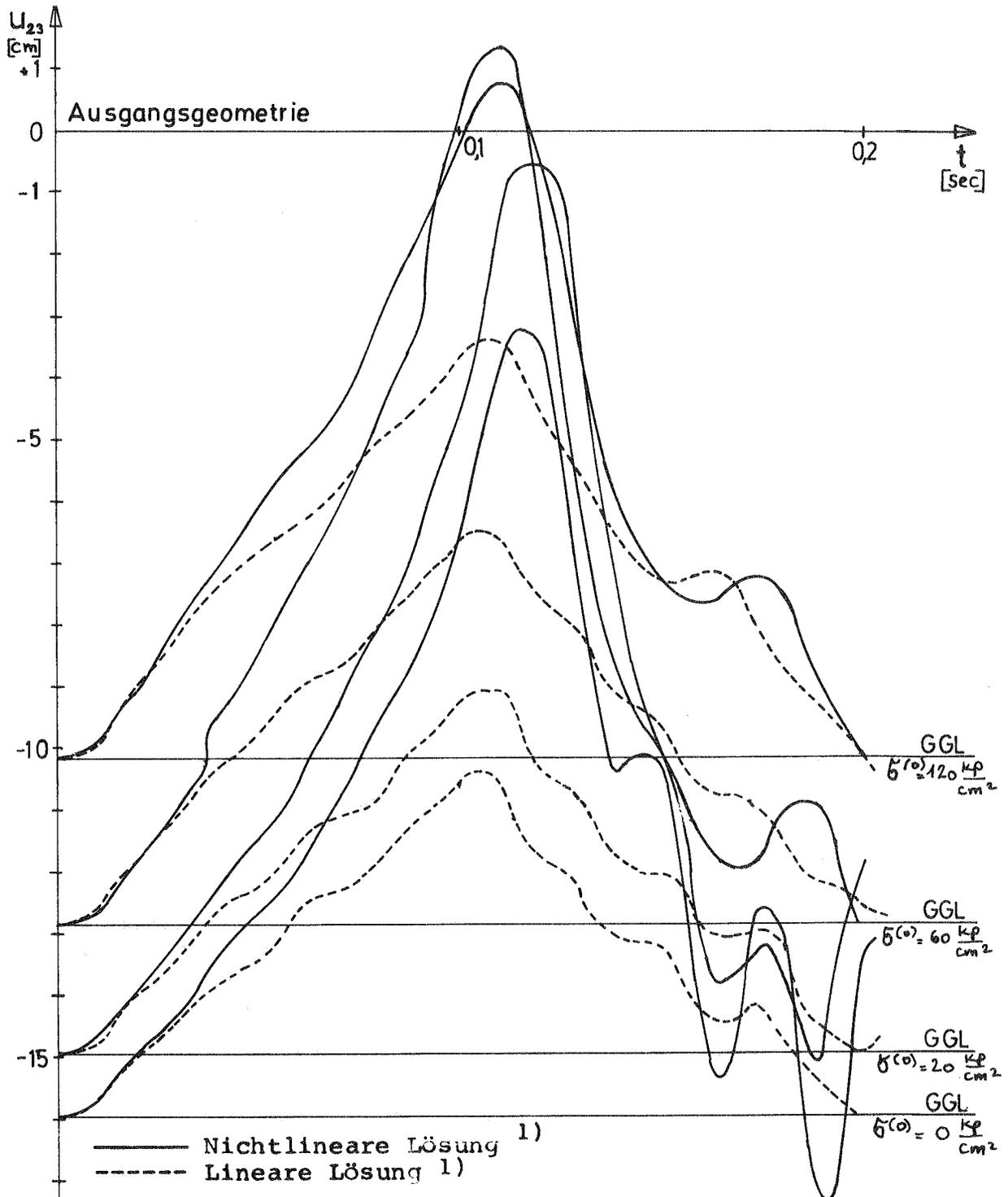
Dicke der Membran = 0,06 cm



Vorspannung: in x- und y-Richtung gleich groß

Schwingende Masse = 10fache Eigenmasse der Membran

Bild 6.5: Ebenes Zelt und Zelt in Form einer Sattelfläche  
(hyperbolische Paraboloidfläche)



$\sigma^{(0)x} = \sigma^{(0)y} = \sigma^{(0)}$  ;  $GGL \sigma^{(0)} = 120 \text{ kp/cm}^2$  bedeutet  
 Gleichgewichtslage bei einer Vorspannung in der Ausgangsgeometrie  
 $\sigma^{(0)x} = \sigma^{(0)y} = 120 \text{ kp/cm}^2$  usw.

Bild 6.6: Zeit-Weg Diagramm von  $u_{23}^z$  bei entlastenden dynamischen Kräften<sup>1)</sup> im Einschwingungsbereich.

1) siehe Abschnitt 6.1

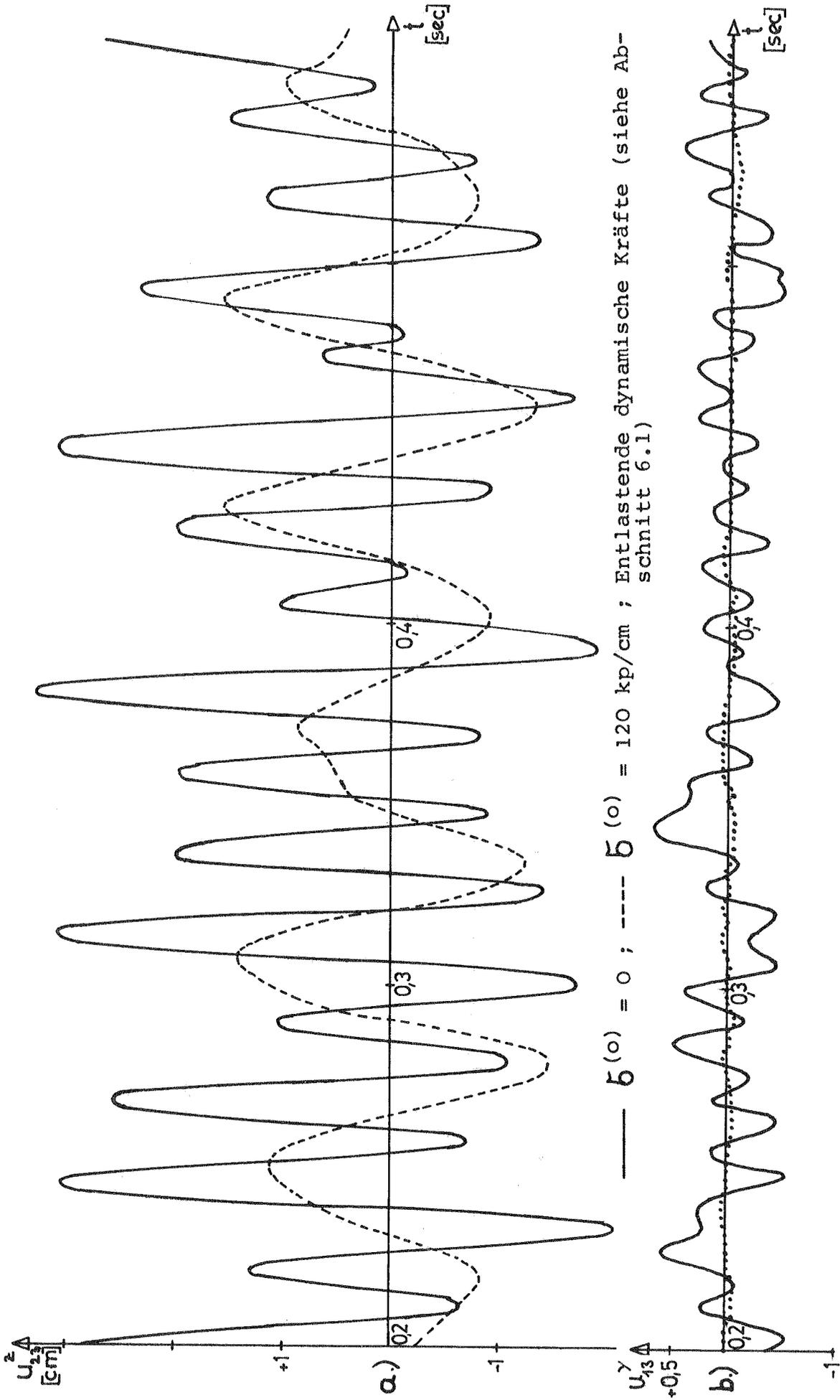
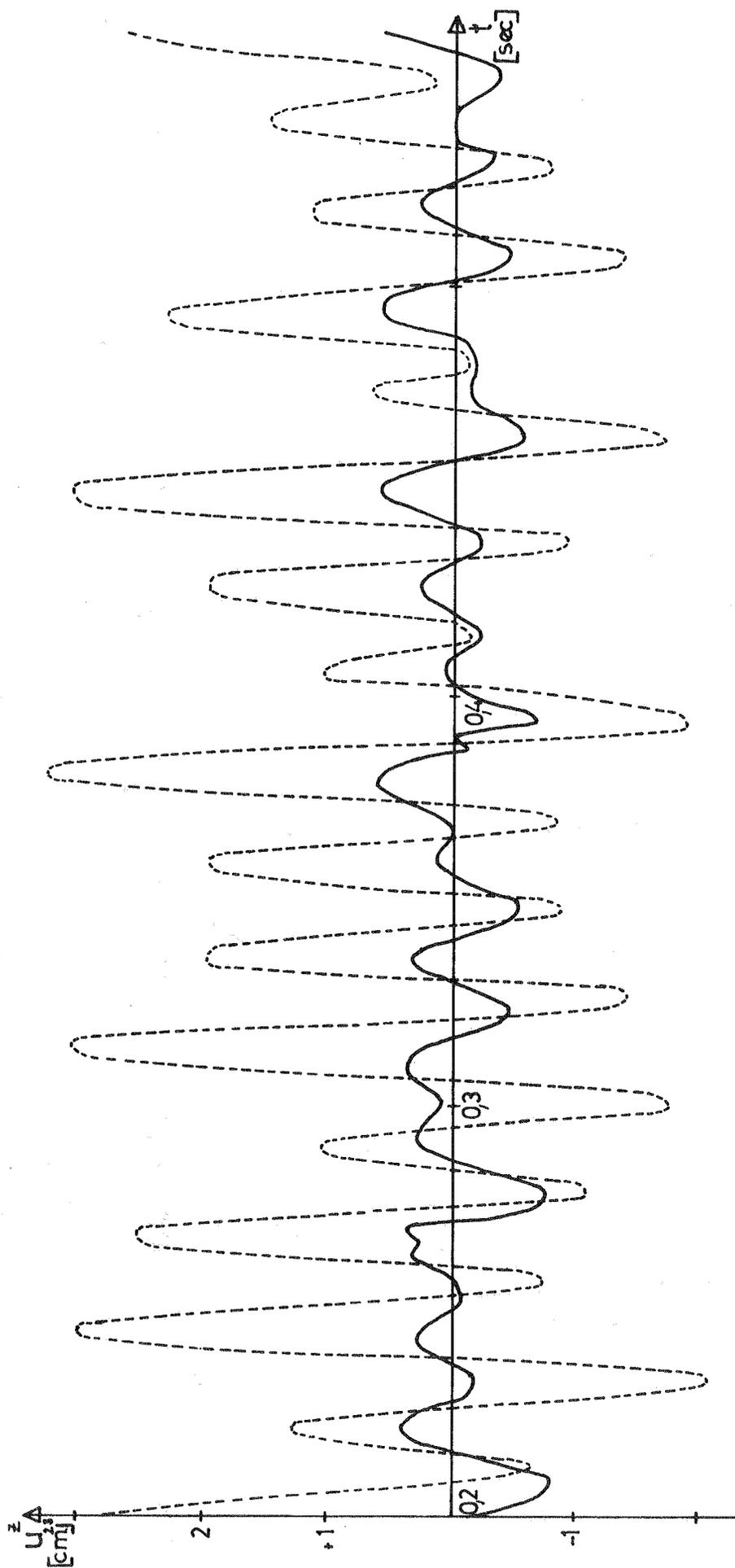


Bild 6.7: Zeit-Weg Diagramm ab Ende der dynamischen Kräfte

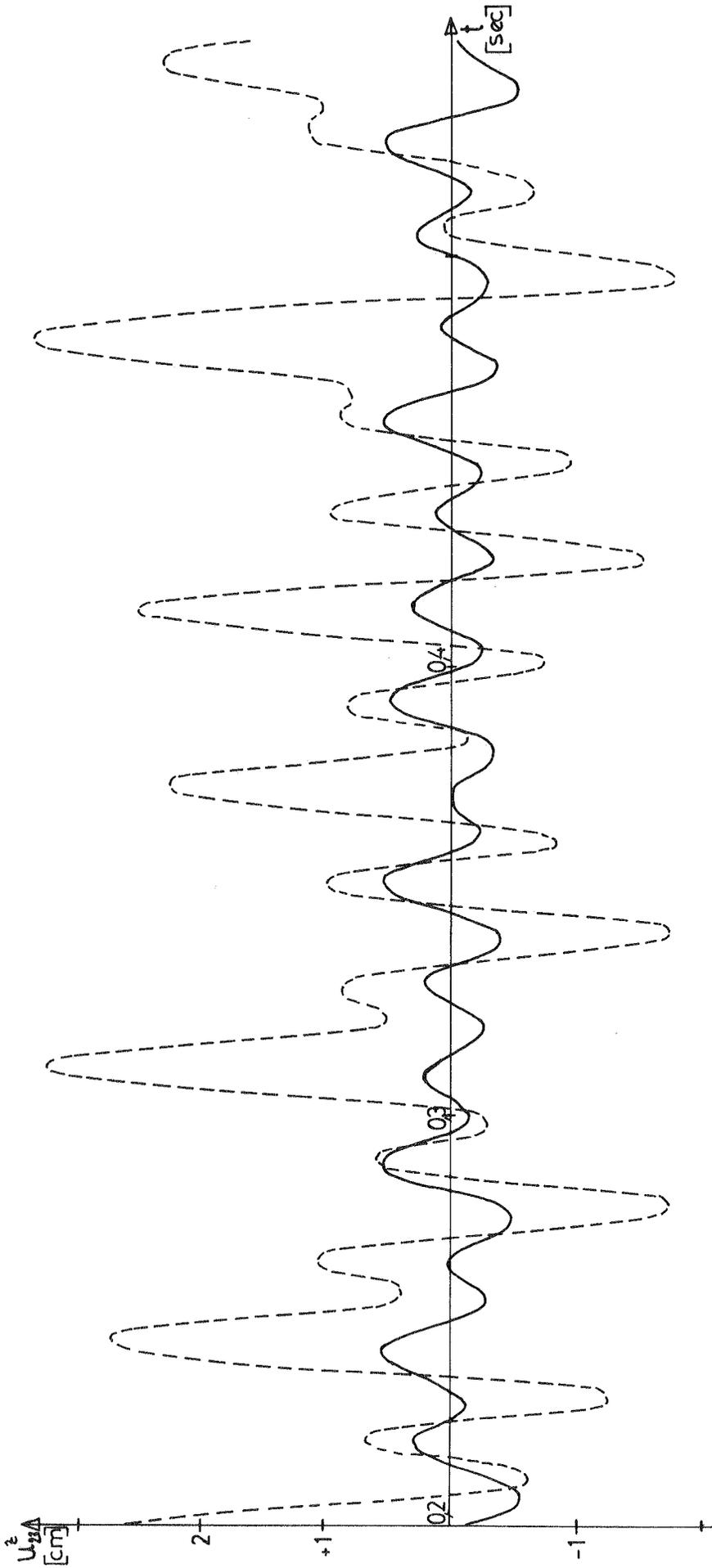
a) für  $u_{23}^z$     b) für  $u_{13}^y$



----- Nichtlineare Lösung 1)      ——— Lineare Lösung 1)      Entlastende dynamische Kräfte 1)

Bild 6.8: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{23}^z$  bei  $\bar{\sigma}(\sigma) = 0 \text{ kp/cm}^2$

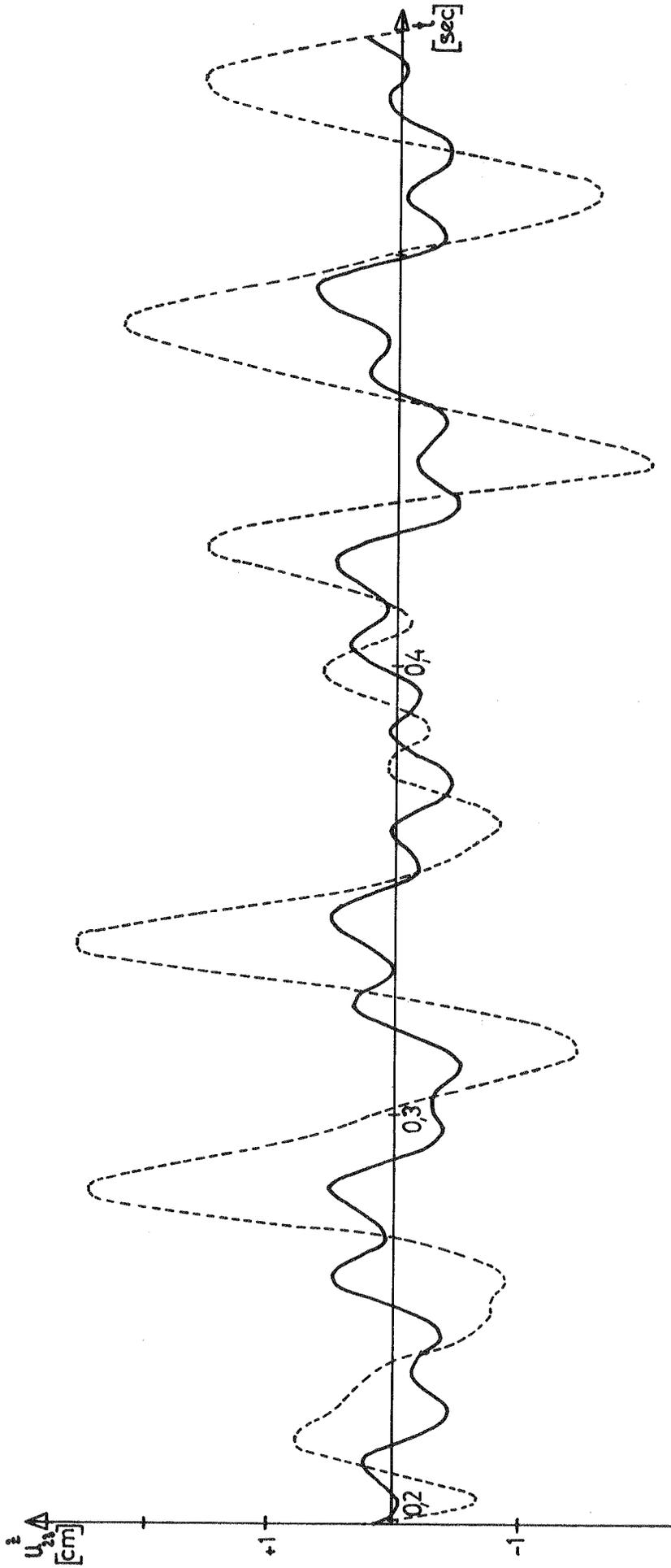
1) siehe Abschnitt 6.1



----- Nichtlineare Lösung 1)    ——— Lineare Lösung 1)    Entlastende dynamische Kräfte 1)

Bild 6.9: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{23}^z$  bei  $\bar{\sigma}(0) = 20 \text{ kp/cm}^2$

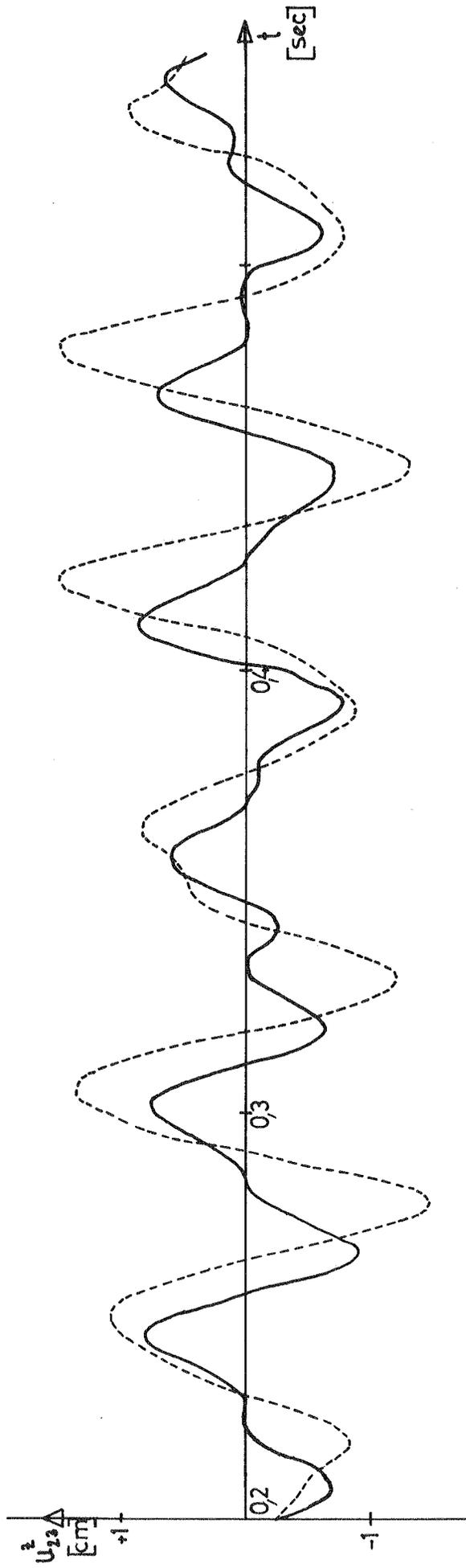
1) siehe Abschnitt 6.1



----- Nichtlineare Lösung 1)    ——— Lineare Lösung 1)    Entlastende dynamische Kräfte 1)

Bild 6.10: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{23}^z$  bei  $\bar{\sigma}^{(o)} = 60 \text{ kp/cm}^2$

1) siehe Abschnitt 6.1



----- Nichtlineare Lösung 1)    ——— Lineare Lösung 1)    Entlastende dynamische Kräfte 1)

Bild 6.11: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{23}^z$  bei  $\delta(0) = 120 \text{ kp/cm}^2$

1) siehe Abschnitt 6.1

#### 6.4 Ebenes Zelt bei symmetrischer Belastung

Das in Abschnitt 6.3 untersuchte ebene Zelt (Bild 6.5 a) soll bei gleichmäßiger statischer Last  $p^z = -250 \text{ kp/m}^2$  behandelt werden.

Der Verlauf von  $u_{18}^z$  in Abhängigkeit von der Zeit ist in Bild 6.12 bis 6.15 eingetragen.

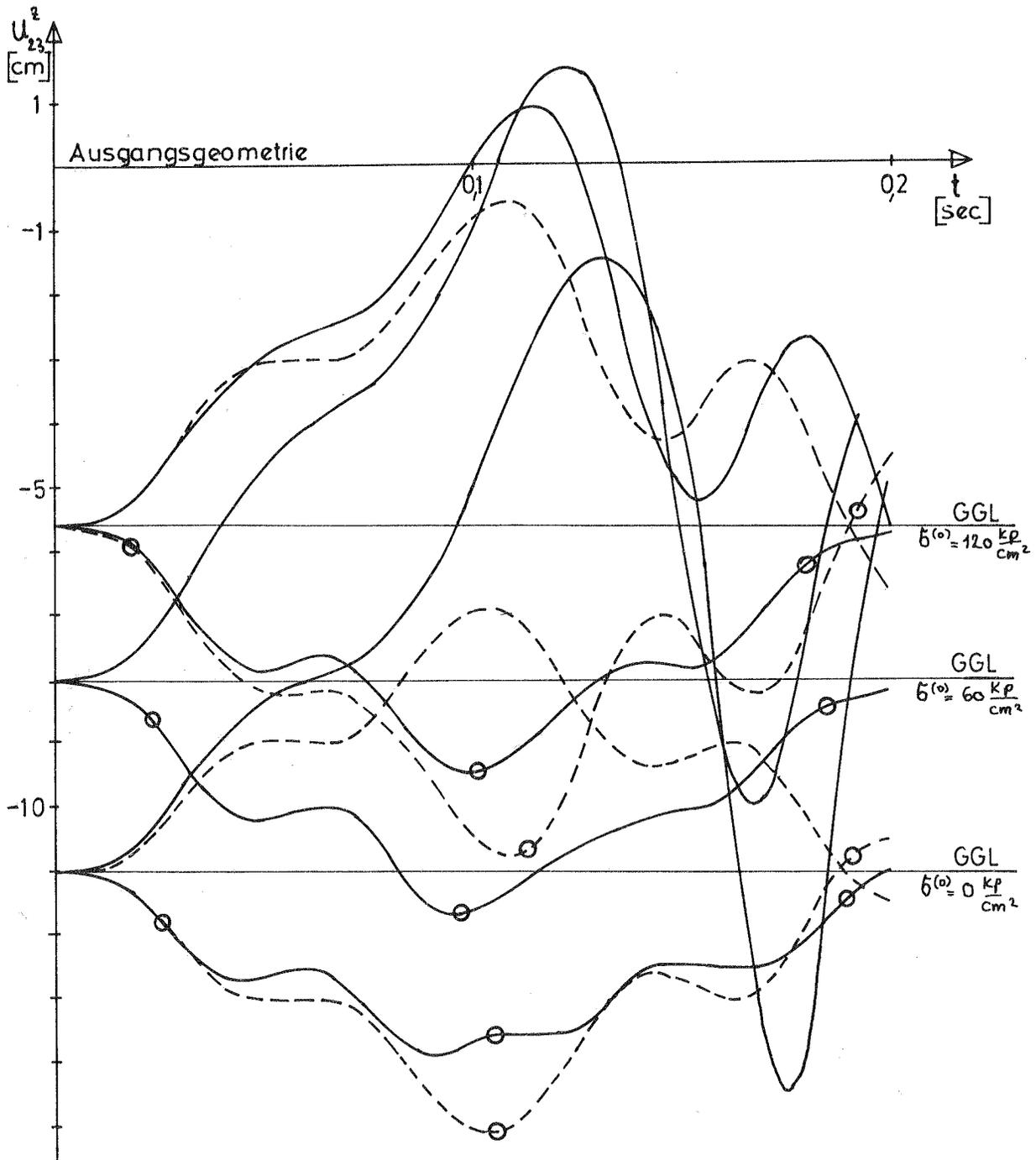
Bild 6.12 gibt die Bewegung von  $u_{18}^z$  während der Wirkung von entlastenden und belastenden dynamischen Kräften<sup>1)</sup> wieder und zwar für die lineare und die nichtlineare Lösung<sup>1)</sup>. Bei dieser Konstruktion, deren geometrische Steifigkeit GSM durch die Belastung vergrößert wird, bewirkt die Nichtlinearität eine Verkleinerung der Amplitude bei belastenden und eine Vergrößerung bei entlastenden dynamischen Kräften (siehe auch Bild 6.14 und Bild 6.15). Dagegen sind, wie erwartet, bei der linearen Lösung beide Amplituden betragsmäßig gleich groß.

In Bild 6.13 ist der Einfluß der Vorspannungen auf  $u_{18}^z$  dargestellt. Bei belastenden dynamischen Kräften führt dieser Einfluß nicht unbedingt zu Verminderung der Amplitude. Hier gelten wieder die Überlegungen von Abschnitt 6.2.

In Bild 6.14 und Bild 6.15 werden die lineare und nichtlineare Lösung verglichen. Man sieht, daß die lineare Lösung bei diesem System unbrauchbare Ergebnisse liefert.

---

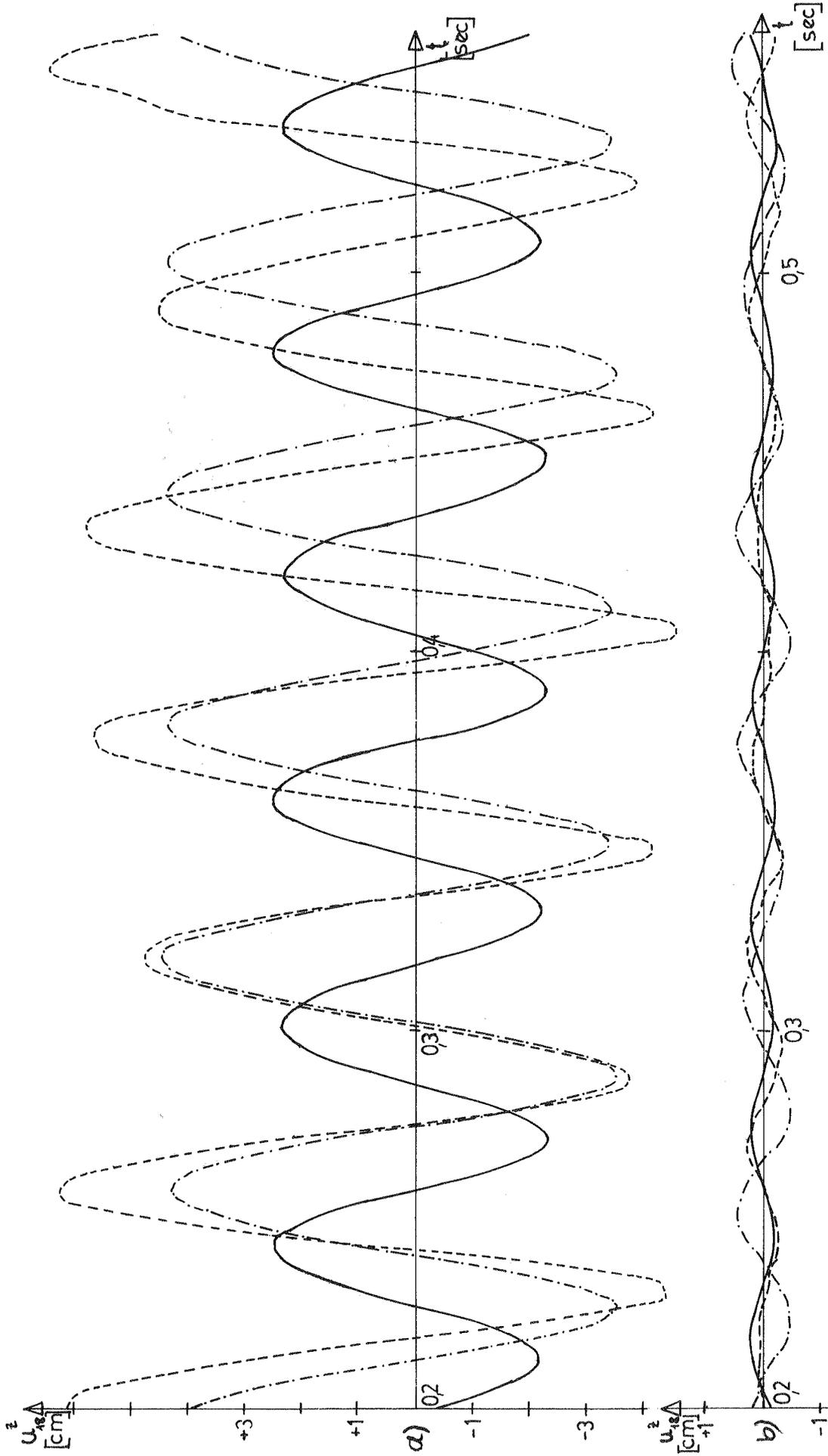
1) Siehe Abschnitt 6.1



- Nichtlineare Lösung bei entlastenden dynamischen Kräften <sup>1)</sup>
  - Nichtlineare Lösung bei belastenden dynamischen Kräften <sup>1)</sup>
  - Lineare Lösung bei entlastenden dynamischen Kräften <sup>1)</sup>
  - Lineare Lösung bei belastenden dynamischen Kräften <sup>1)</sup>
- GGL  $\bar{\sigma}^{(0)} = 120 \text{ kp/cm}^2$  bedeutet die Gleichgewichtslage mit Anfangsspannung  $\bar{\sigma}^{(0)} = 120 \text{ kp/cm}^2$  usw.

Bild 6.12: Zeit-Weg Diagramm von  $u_{18}^z$  im Einschwingungsbereich

1) siehe Abschnitt 6.1



-----  $b^{(0)} = 0$  kp/cm<sup>2</sup> ; - - - - -  $b^{(0)} = 60$  kp/cm<sup>2</sup> ; ———  $b^{(0)} = 120$  kp/cm<sup>2</sup>

Bild 6.13: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^2$   
 a) bei entlastenden dynamischen Kräften  
 b) bei belastenden dynamischen Kräften

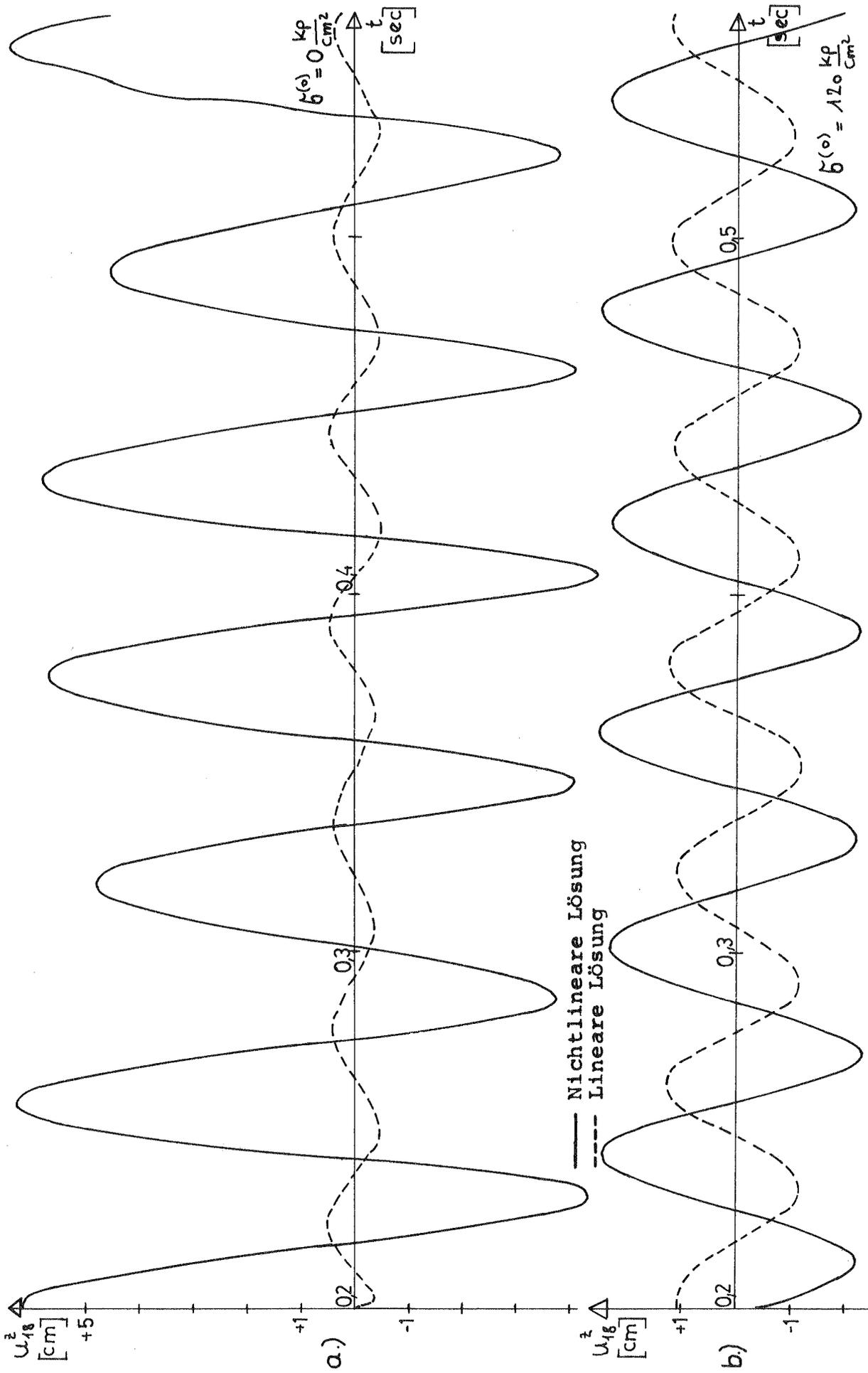


Bild 6.14: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^2$  bei entlastenden dynamischen Kräften

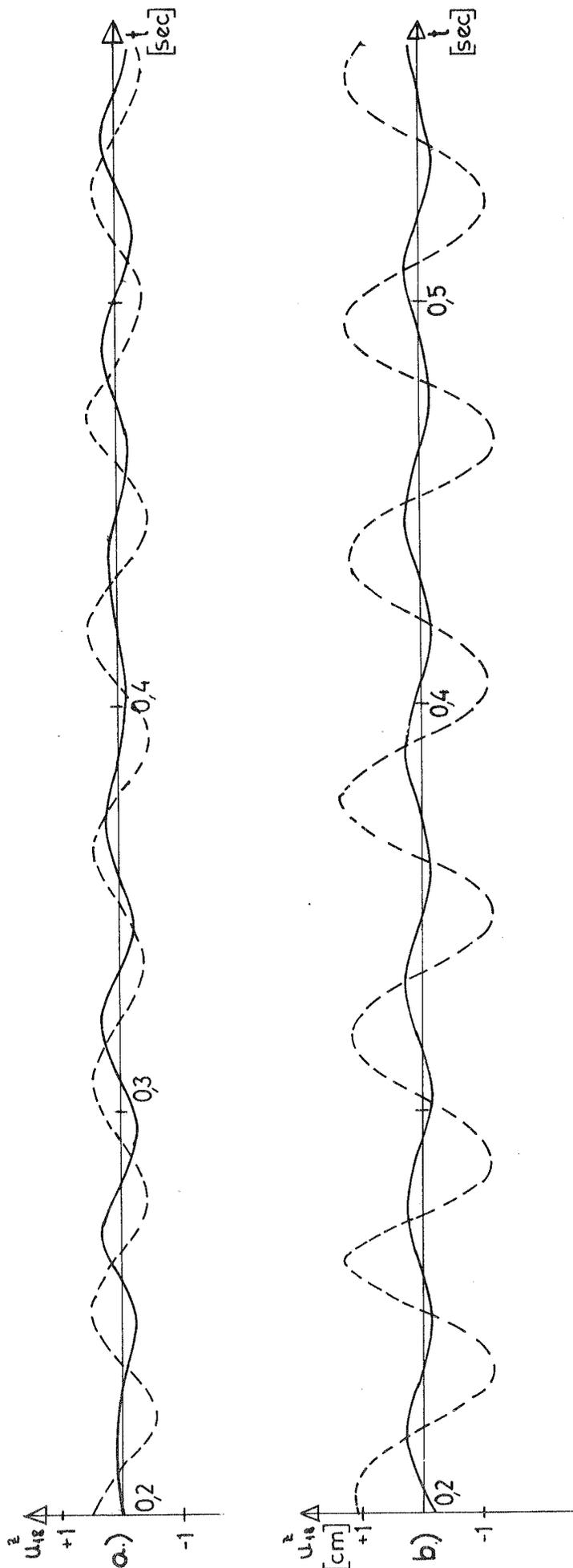


Bild 6.15: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^2$  bei belastenden dynamischen Kräften<sup>1)</sup>

a)  $b^{(0)} = 0 \text{ kp/cm}^2$

b)  $b^{(0)} = 120 \text{ kp/cm}^2$

<sup>1)</sup> siehe Abschnitt 6.1

### 6.5 Hyperbolisches Paraboloid (Ränder längs der Erzeugenden)

Um den Einfluß der Form zu untersuchen, wurde eine HP-Membran, Bild 6.5 b unter gleichmäßig verteilter Last  $p^z = -250 \text{ kp/m}^2$  ( $\text{m}^2$  Grundfläche) untersucht. Der Grundriß der Schale hat die Abmessungen des ebenen Zelts, Bild 6.5 a. Die Ränder sind unverschieblich.<sup>1)</sup> Die Vorspannung wurde durch Verschiebung der beiden Eckpunkte 1 und 35 in Richtung der Diagonale außen erzeugt. Dabei werden die Ränder 1 - 5, 1 - 31, 35 - 5, 35 - 31 entsprechend linear verschoben. Bild 6.5 b und Bild 6.16.

Es werden die beiden Fälle untersucht:

$$1. u_1^{(0)} = u_{35}^{(0)} = 0,448 \text{ cm}$$

$$2. u_1^{(0)} = u_{35}^{(0)} = 1,344 \text{ cm}$$

Daraus resultiert in beiden Fällen eine in x- und y-Richtung fast gleiche Vorspannung von

$$\sigma^{(0)x} \approx \sigma^{(0)y} = \sigma^{(0)} \approx 10 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma^{(0)x} \approx \sigma^{(0)y} = \sigma^{(0)} \approx 30 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

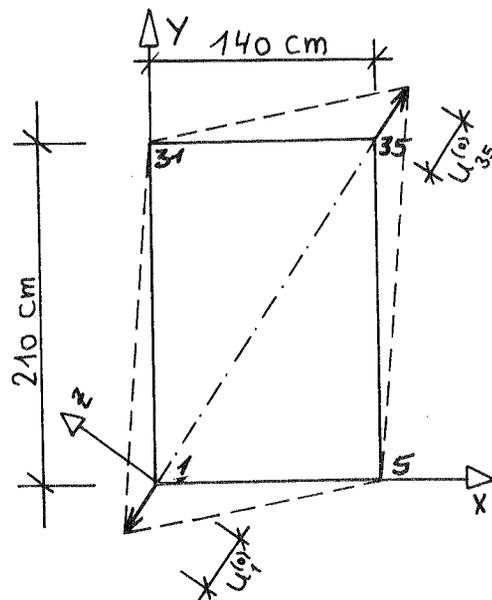


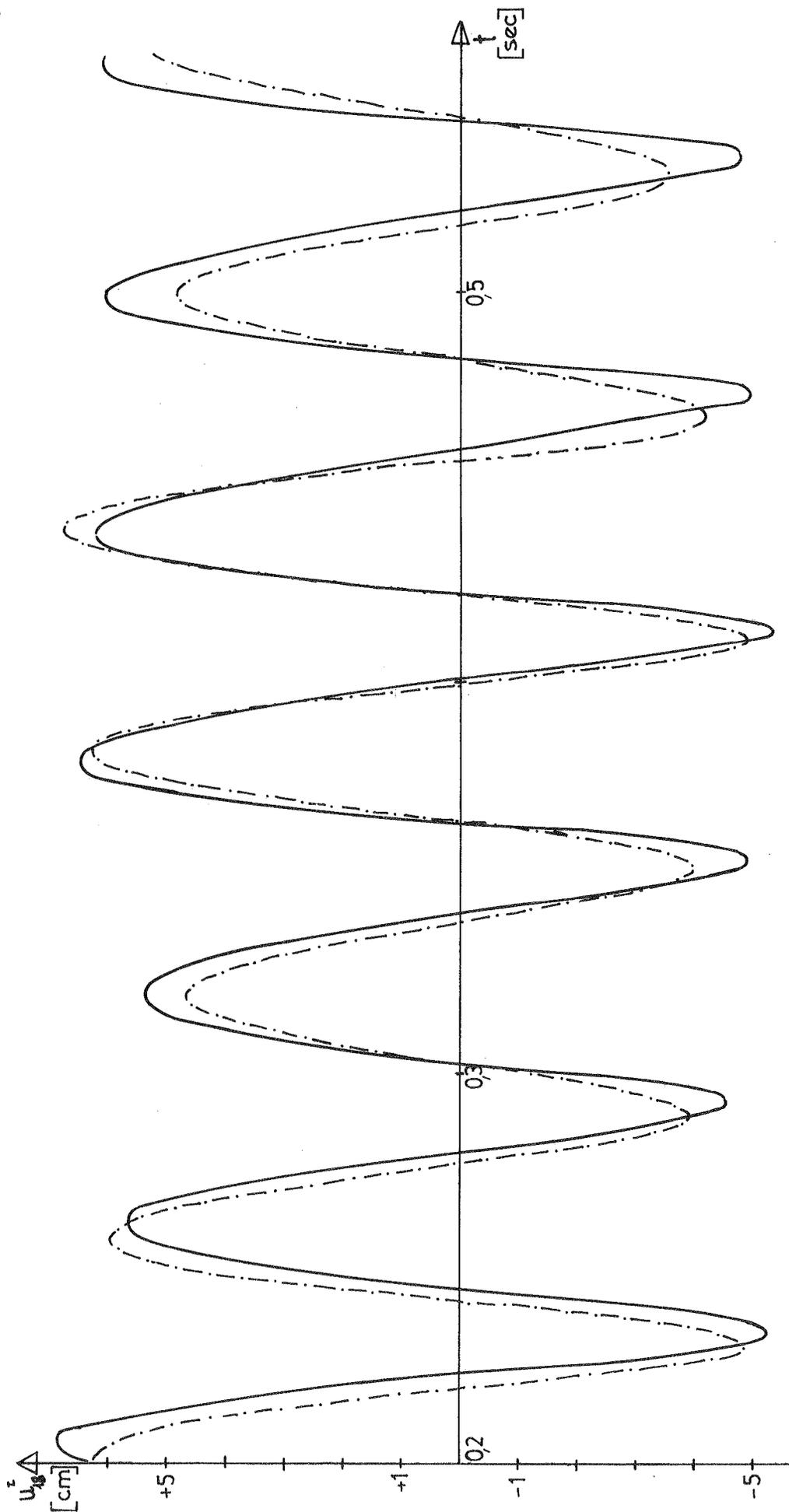
Bild 6.16: Zwangverschiebung zur Vorspannung der HP-Schale (Grundriß)

In Bild 6.17 und 6.18 wird der Verlauf von  $u_{18}^z$  im ebenen Zelt (symmetrische Last) und in der HP-Schale verglichen. Man erkennt daraus, daß durch eine geänderte geometrische Form der Bedachung (HP-Schale statt ebenes Zelt) die gleiche Amplitude bei nur der Hälfte der Vorspannung erreicht werden kann.

In Bild 6.19 ist ein Vergleich zwischen nichtlinearer und linearer Lösung dargestellt. Auch hier führt der Effekt der Nichtlinearität zu Vergrößerung bzw. Verminderung der Amplitude bei ent-

1) d.h. die Ränder sind nach der Vorspannung in den drei Richtungen unterschiedlich.

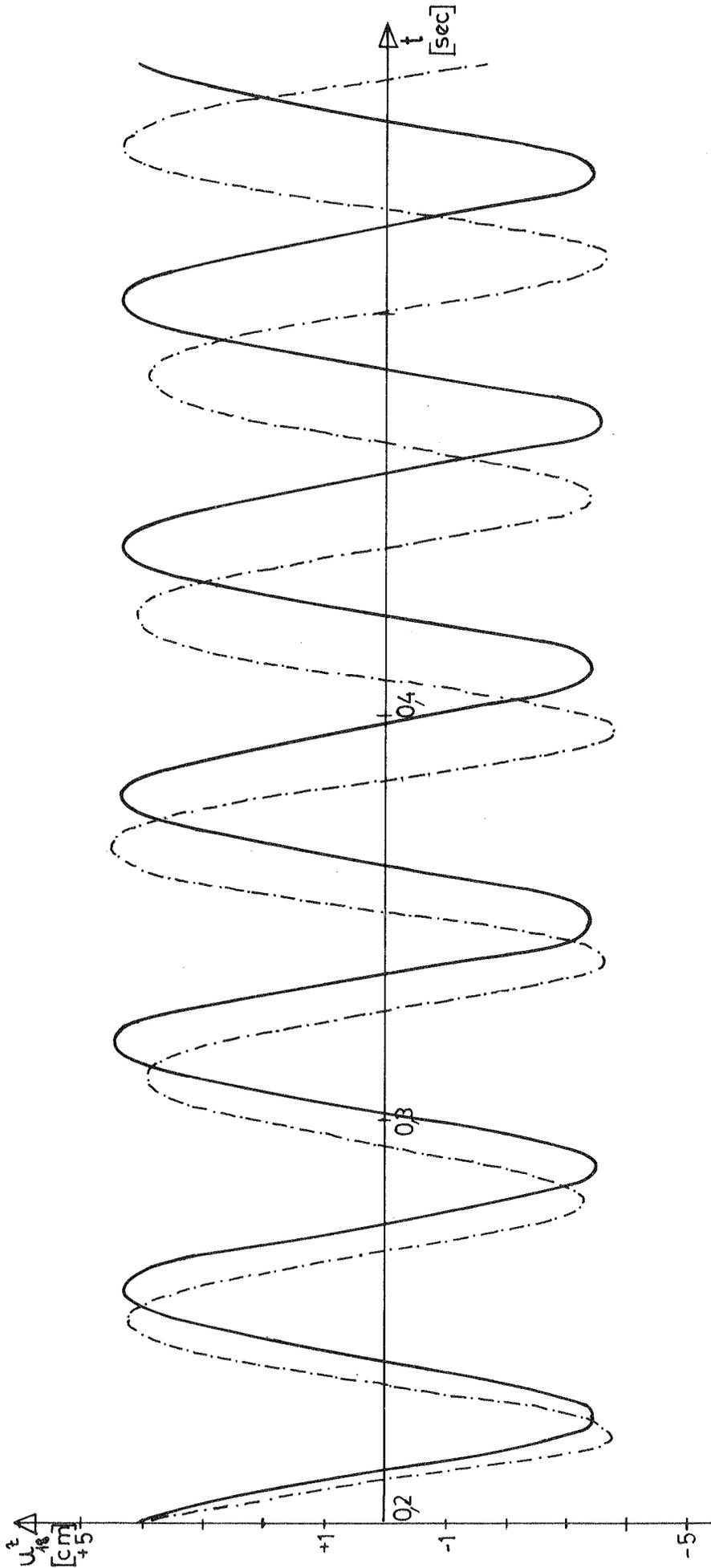
lastenden bzw. belastenden dynamischen Kräften. Die großen Unterschiede zwischen linearer und nichtlinearer Lösung machen die lineare Lösung unbrauchbar.



— Ebenes Zelt,  $\bar{b}^{(0)} = 20 \text{ kp/cm}^2$       - - - - - HP-Schale,  $\bar{b}^{(0)} \approx 10 \text{ kp/cm}^2$

Bild 6.17: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^z$  bei entlastenden dynamischen Kräften

1) siehe Abschnitt 6.1



— Ebenes Zeit  $\zeta^{(0)} = 60 \text{ kp/cm}^2$   
- - - - - HP-Schale  $\zeta^{(0)} \approx 30 \text{ kp/cm}^2$

Bild 6.18: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^z$  bei entlastenden dynamischen Kräften 1)

1) siehe Abschnitt 6.1

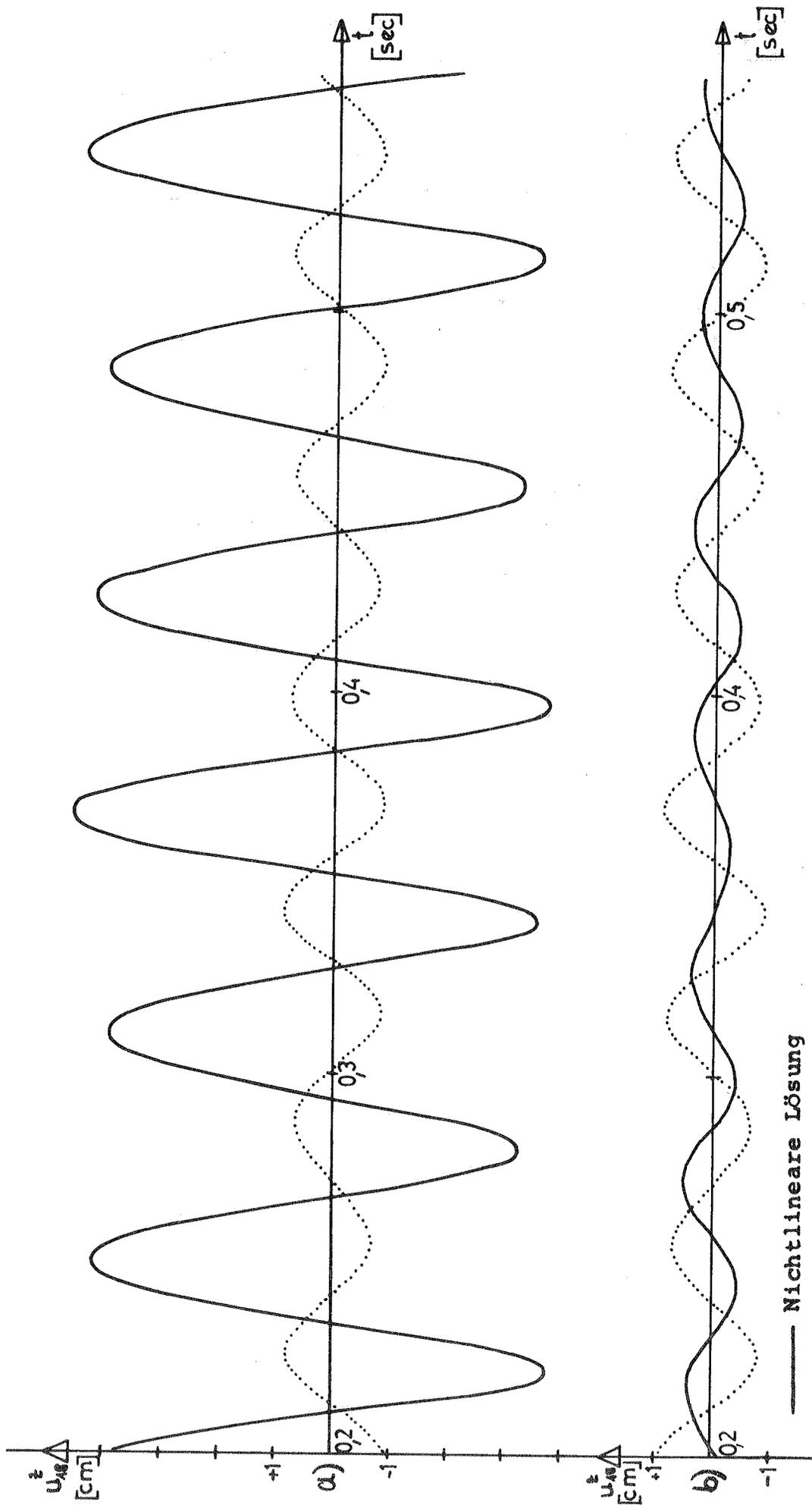


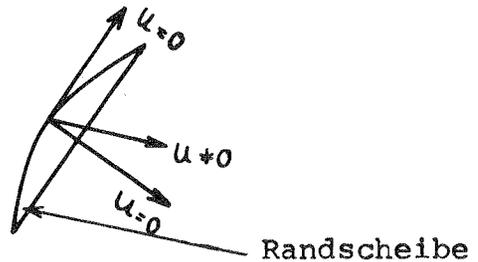
Bild 6.19: Zeit-Weg Diagramm für  $u_{18}^2$  mit  $\zeta^{(0)} \approx 30 \text{ kp/cm}^2$  a) bei entlastenden dyn. Kräften<sup>1)</sup>  
 b) bei belastenden dyn. Kräften<sup>1)</sup>

1) siehe Abschnitt 6.1

6.6 Hyperbolisches Paraboloid mit Binderrandbedingungen<sup>1)</sup>  
(Ränder längs der Hauptkrümmungslinie)

---

Es wurde die im Bild 6.20 dargestellte HP-Schale untersucht. An den Rändern ist eine Verschiebung normal zu den Randscheiben möglich. Bei diesen "Binderrandbedingungen" ist bereits die lineare statische Membranlösung singular. Eine reguläre Lösung ist nur bei Berücksichtigung der Verschiebungen in den Gleichgewichtsbedingungen möglich (nicht-lineare Lösung). Bild 6.21 gibt das Zeit-Weg-Diagramm für  $u_1^Z$ . Die Amplituden in Bild 6.21 sind wegen der ungünstigen Randbedingungen sehr groß (für das statische Verschiebungsfeld siehe Bild 6.22).



---

1) Um die Güte der Lösungsmethoden für die nichtlineare statische Membrantheorie zu testen, wurde das vorliegende System im Verlauf dieser Arbeit wiederholt gewählt, weil es einen stark nichtlinearen Anlauf hat.

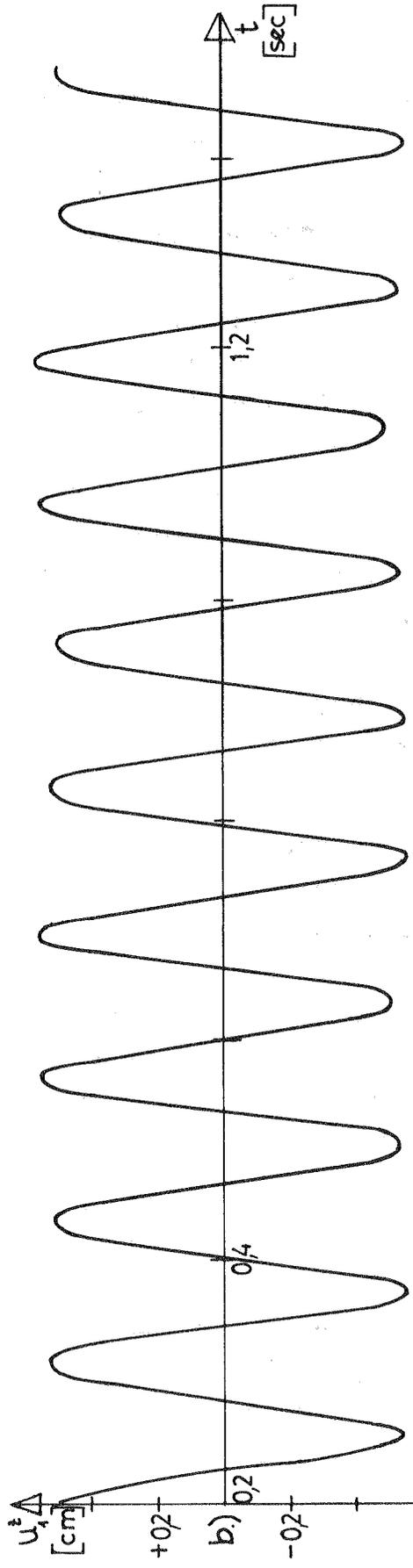
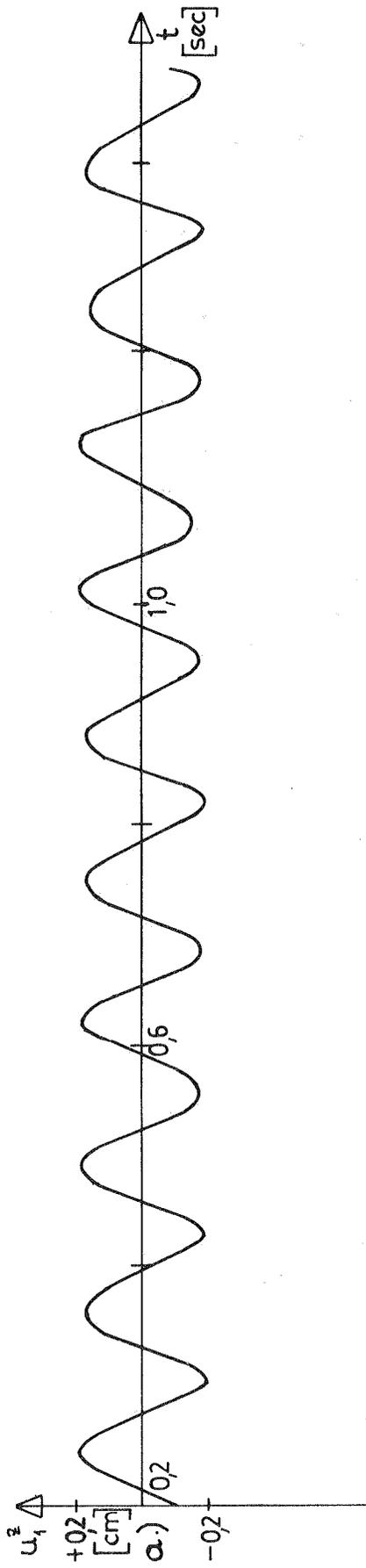


Bild 6.23: Zeit-Weg Diagramm für  $u_1^z$  bei belastenden dynamischen Kräften  
a) nichtlineare Lösung  
b) lineare Lösung 1)

1) siehe Abschnitt 6.1

## 6.8 Schlußfolgerungen

Aus den Zahlenbeispielen ist folgendes ersichtlich:

1. Für die Größe der Amplitude beim Schwingen eines Systems unter der Wirkung einer bestimmten dynamischen Last sind drei Faktoren maßgebend:

- a) Die Vorspannung. Sie vermindert erheblich die Verformung infolge Schwingungen (siehe Abschnitt 6.3 und 6.4). Jedoch kann es bei einigen Konstruktionsformen bis zu einem bestimmten Vorspanngrad zur Vergrößerung der Amplitude kommen, nämlich bei Systemen, die ihre elastische Steifigkeit durch die Verformung unter den statischen Lasten gewinnen. Die Vorspannung führt dann zur Verkleinerung der Verformung unter den statischen Lasten bzw. zur Verkleinerung der elastischen Steifigkeit beim statischen Gleichgewicht. In diesem Fall bringt eine wachsende Vorspannung bei einem Laststoß, der zur Vergrößerung der statischen Lasten führt (belastende dynamische Kräfte<sup>1)</sup>), zunächst eine Vergrößerung der Amplitude der Schwingungen (ausführliche Begründung siehe Abschnitt 6.2).
- b) Die Form der Konstruktion. Eine günstige Form mit genügender elastischer Steifigkeit bei der Ausgangsgeometrie wird das System befähigen, einen dynamischen Laststoß mit kleinen Verformungen zu absorbieren. Durch eine günstige Form kann man bei den weiteren Maßnahmen gegen Schwingungen z.B. der Vorspannung Ersparnisse erzielen (siehe den Vergleich zwischen Abschnitt 6.4 und 6.5, Bild 6.17 und 6.18).
- c) Die Randbedingungen. Eine zweckmäßige Wahl der Randbedingungen bzw. Randversteifungen (Randträger oder Randseile bei Membran- und Seilnetzkonstruktionen) stellt eine wichtige Maßnahme zur Verminderung der Amplitude dar. Die Randbedingungen in Abschnitt 6.6 und 6.7 können als unendlich schlaffes bzw. unendlich starres Randseil gedeutet werden. Die praktischen Fälle liegen dazwischen.

---

1) Siehe Abschnitt 6.1.

Aus Bild 6.21 und 6.23 kann man die großen Unterschiede zwischen den Amplituden in beiden Fällen sehen. Daraus folgt, daß die Amplitude bei einem starren Randseil (oder Randträger) stark abnimmt.

2. Die Annahme kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage (lineare Lösung) hat bei allen gerechneten Beispielen unbrauchbare Ergebnisse geliefert. Allerdings sind die berechneten Systeme stark nichtlinear.

## 7. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden vorgespannte Membrane mit geometrischer Nichtlinearität im Rahmen einer physikalischen Linearität zwischen dem Lagrange'schen (Green'schen) Verzerrungstensor und dem Kappus'schen Spannungstensor (Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor 2. Art) dynamisch behandelt.

Die Vorspannungen sind in den Bewegungsgleichungen des infinitesimalen Teilchens berücksichtigt. Aufgrund der Variationsprinzipie der Mechanik werden die Bewegungsgleichungen des Kontinuums aufgestellt.

Durch die Anwendung von bereichsweisen Parameteransätzen für die Verschiebungen (lineare Verschiebungsansätze) werden die Bewegungsgleichungen der Membran aufgestellt. Diese Gleichungen stellen ein nichtlineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung dar. Bei der Annahme kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage ergeben die Bewegungsgleichungen ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Die Bewegungsgleichungen wurden in Index-Schreibweise dargestellt. Um die Aufwendigkeit der Matrizen-Darstellung für nichtlineare Ausdrücke zu zeigen, wurden dieselben Gleichungen in Matrizen-Schreibweise formuliert.

Bei der Erfassung der Materialdämpfung wird ein lineares viskoelastisches Werkstoffgesetz zugrunde gelegt. Es wird angenommen, daß die Dämpfung der Umgebung linear von der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur äußeren Fläche der Membran abhängt.

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems werden zwei Methoden diskutiert. Die erste ist die vollständige Algebraisierung durch finite Übersetzung der Gleichungen mittels Anwendung von finiten Zeit-Elementen. Die zweite ist die Methode von Runge-Kutta-Fehlberg, die eine beliebige Genauigkeit bzw. beliebige Vergrößerung des Iterationsschritts erlaubt. Schließlich werden einige Beispiele für Schocklasten berechnet, die die numerische Stabilität der Methode zeigen. Dabei wird der Einfluß des Vorspanngrads, der Form der Konstruktion und der Randbedingungen auf das Schwingungsverhalten des Systems untersucht.

## LEBENS LAUF

**Persönliches:** Mahmoud El-Masri  
Geboren: 11. Juni 1944 in Jaffa/Palästina  
Eltern: Zaid El-Masri  
Fatma El-Masri, geb. El-Masri  
Eheschließung: mit Shukria, geb. El-Masri, 1970  
Kinder: Yarob, geb. am 3. Mai 1971

**Schulbildung:** 1950 - 1954 Volksschule in Khan-Yunis/  
Palästina  
1954 - 1958 Mittelschule in Khan-Yunis  
1958 - 1961 Gymnasium in Khan-Yunis  
Reifeprüfung: Juni 1961

**Studium:** 1961 - 1966 Studium des Bauingenieurwesens  
an der Universität Kairo/Ägypten  
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau  
Abschluß: Bachelor of Civil Engineering, Juni 1966  
1967 - 1970 Besuch eines viermonatigen Sprachkurses in der Bundesrepublik  
Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart  
Ablegung des Hauptdiploms  
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau  
Abschluß: März 1970

**Praktische Tätigkeit:** 1966 - 1967 Bauingenieur bei der Verwaltung des Gazastreifens/Palästina

Wissenschaftliche  
Tätigkeit:

Seit April 1970 Doktorand an der Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer

Seit August 1970 Geprüfte Wissenschaftliche Hilfskraft beim Sonderforschungsbereich 64, Projektgruppe A, Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer.