

BEITRAG
ZUR BERECHNUNG ZWEISTEGIGER PLATTENBALKEN
MIT VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT
BEI TORSIONSBELASTUNG

Von der Technischen Hochschule Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Wolfhart Andrä
aus Stuttgart



14.03.2008

Z



Hauptberichter:

Mitberichter:

Tag der Einreichung:

Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr. - Ing. F. W. Bornscheuer

Prof. Dr. - Ing. W. Pelikan

1. Februar 1963

20. Juli 1963

Stuttgart 1963

Für die freundliche Unterstützung und die wertvollen Anregungen bei der Abfassung dieser Arbeit sage ich Herrn Professor Dr.Ing. F.W.Bornscheuer meinen herzlichen Dank.

Ebenso danke ich Herrn Professor Dr.Ing. W.Pelikan für die Übernahme des Korreferats und die damit verbundene Mühe.

Wolfhart Andrä

Inhalt

	Seite
1. <u>Einleitung</u>	
1.1 Zwei- oder mehrstegige Plattenbalken	11
1.2 Bisherige Berechnungsverfahren	13
2. <u>Voraussetzungen und Erläuterung des Berechnungsverfahrens</u>	
2.1 Lagerung, Belastung, Schnittkräfte	22
2.2 Einführung der ideellen Systeme I und II	29
2.3 Ersatz des Wölbsystems (I) durch das Biegesystem (I)	37
2.4 Beanspruchungen und Verformungen am System I (Wölbsystem)	46
2.5 Beanspruchungen und Verformungen am System II (Drillsystem)	52
3. <u>Ermittlung der Schnittkräfte bei v e r ä n - d e r l i c h e m , elastisch ausgesteiftem Querschnitt</u>	
3.1 Ableitung der Differentialgleichung 4. Ordnung für M_r und ihre Deutung, Schnittkräfte und Verformungen	54
3.2 Numerische Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung	70
3.2.1 Ableitung der Seilpolygongleichung	70
3.2.2 Umwandlung der Differentialgleichung in ein 5-Momenten-Gleichungssystem	74
3.2.3 Randbedingungen	80
3.2.4 Vereinfachungen für die praktische Rechnung	82
3.2.5 Ermittlung der Ableitungen M_r' und M_r''	85

4.	<u>Ermittlung der Schnittkräfte bzw. von M_r und seinen Ableitungen in Sonderfällen</u>	
4.1	Geschlossene Lösung der Differentialgleichung 4.Ordnung bei k o n s t a n t e m , e l a s t i s c h ausgesteiftem Querschnitt	91
4.1.1	Einzellasten $\pm P$ an beliebiger Stelle z	92
4.1.2	Einzellasten $\pm P$ in $0,5 \cdot \ell$	101
4.1.3	Gegengleiche Momente an einem Balken- ende	106
4.2	Numerische Lösung der Differentialgleichung bei v e r ä n d e r l i c h e m , s t a r r ausgesteiftem Querschnitt	108
4.3	Geschlossene Lösung der Differentialgleichung bei k o n s t a n t e m , s t a r r aus- gesteiftem Querschnitt	111
4.3.1	Einzellasten $\pm P$ an beliebiger Stelle z	112
4.3.2	Vergleiche mit den bisher bekannten Lösungen in [6]	114
4.4	Lösungen bei konstantem, e l a s t i s c h oder s t a r r ausgesteiftem Querschnitt und s i n u s - f ö r m i g e r Belastung	115
5.	<u>Berücksichtigung von Querträgern innerhalb der Spannweite</u>	
5.1	Allgemeine Angaben	120
5.2	Gleiche Feldquerträger in engen Abständen	121
5.3	Feldquerträger in beliebigen Abständen	123
5.4	Vereinfachungen bei sehr biegeweicher Platte	129
5.5	Einfluss der Drehsteifigkeit der Querträger	129
6.	<u>Berechnung durchlaufender Plattenbalken</u>	
6.1	Allgemeine Angaben	136
6.2	Ermittlung der statisch Unbestimmten	136

	Seite
7. <u>Berechnungsbeispiele und Vergleich der Ergebnisse mit Messungen an Modellen</u>	
7.1 Allgemeine Angaben	148
7.2 Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt, ohne Feldquerträger (Modell B1)	152
7.2.1 Abmessungen, Querschnittswerte, Materialkonstante	152
7.2.2 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ gemäss Abschnitt 3.2	156
7.2.3 Ableitungen $M'_{r,m}$ und $M''_{r,m}$	160
7.2.4 Zusammenstellung der Ergebnisse	166
7.2.5 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ gemäss Abschnitt 5.3	172
7.2.6 Vergleich der Ergebnisse der beiden Rechnungswege	176
7.2.7 Vergleich der Rechnung mit der Messung	180
7.3 Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt und Querträgern in den Viertelpunkten (Modell B2)	196
7.3.1 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ gemäss Abschnitt 5.3, starre Queraussteifung	196
7.3.2 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ entsprechend Abschnitt 7.3.1, elastische Querträger	199
7.3.3 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ entsprechend Abschnitt 7.3.1, starre Querträger	201
7.4 Plattenbalken mit konstantem Querschnitt, $h = 8,0$ cm, ohne Feldquerträger (Modell A1)	205
7.4.1 Querschnittswerte, Kennwerte	205
7.4.2 Gleichungen für M_{rz} , M'_{rz} und M''_{rz} , $\pm P$ in $z = 0,25 \ell$ und $0,50 \ell$	206
7.4.3 Schnittkräfte am System I und II	210
7.4.4 Längs- und Schubspannungen	210
7.4.5 Lotrechte Stegverschiebungen	211

	Seite
7.5 Plattenbalken mit konstantem Querschnitt, h = 4,0 cm, ohne Feldquerträger (Modell C1)	222
7.5.1 Querschnittswerte, Kennwerte	222
7.5.2 Gleichungen für M_{Rz} , M_{Rz}^I und M_{Rz}^{II} , $+P$ in $z = 0,25\ell$ und $0,50\ell$	223
7.5.3 Schnittkräfte am System I und II	225
7.5.4 Längs- und Schubspannungen	225
8. <u>Zusammenfassung</u>	
8.1 Berechnung zweistegiger Plattenbalken durch Zerlegung des Tragwerkes in ein Biege- und ein Drillsystem	237
8.2 Vergleich des durch Torsionslasten beanspruch- ten Plattenbalkens mit dem Balken auf elasti- scher Unterlage	243
8.3 Vergleich der Rechnungsergebnisse mit den Messungen	244
9. <u>Konstruktive Folgerungen</u>	248
10. <u>Schrifttum</u>	253
11. <u>Lebenslauf</u>	256

-
Bezei gen

a, b, c, d, h, t [cm]	= Que	ittsabmessungen des Platten-
l [cm]	bal	x-y Ebene, s.Bild 2.2
$\pm P_Z$ [kp/cm]	= Spe	te des Plattenbalkens
$\pm P_Z$ [kp]	(z-	ing)
u_z, v_z, w_z [cm]	ant	ische Belastungen in Steg-
	= ach	orsionsbelastung)
r_z [kp/cm]	= Ver	ungen in den drei Achsrich-
	tun	, y und z
s_z [kp/cm]	= Que	t im Plattenschnitt $\odot - \odot$
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_z$ [kp/cm ²]	bzw	ielkraft
τ_1 [kgcm ²]	= Sch	ft im Plattenschnitt $\odot - \odot$
σ_2, τ_2 [kg/cm ²]	= Bie	nungen in der Platte infol-
$J_{D,z}$ [cm ⁴]	ge	onsbelastung
J_z^* [cm ⁴]	= Sch	nungen infolge freier Tor-
\bar{J}_{Pl} [cm ⁴ /cm]	sic	.Venant)
φ_z [1]	= Nor	bzw. Schubspannungen infolge
$\varphi_z' = d\varphi/dz$ [cm ⁻¹]	Wöl	ttorsion
Ψ_z	= Tor	- bzw. Drillwiderstand einer
	Que	ittshälfte
	= Trä	smoment des einsteigigen, sym-
	met	en Plattenbalkens, System I
	= Trä	smoment der Platte je Längen-
	ein	in z-Richtung
	= Dre	el bzw. Verdrehung einer
	Que	ittshälfte
	= Ver	ng
	= Nei	der Tangente an die Steg-
	Bie	ie, System I

- $C_M = F_{ww} \quad [cm^6]$ = Wölbwiderstand bezogen auf den Schubmittelpunkt
 $E, G \quad [kp/cm^2]$ = Biege- bzw. Schubmodul
 $\mu \quad [1]$ = Querdehnzahl
 $B_Z = E \cdot J_Z^* \quad [kpcm^2]$ = Biegesteifigkeit des einsteigigen Plattenbalkens, System I
 $D_Z = G \cdot J_{D,Z} \quad [kpcm^2]$ = Drehsteifigkeit einer Querschnittshälfte, System II
 $\bar{B} = \frac{E \cdot \bar{J}_{Pl}}{1 - \mu^2} \quad [kpcm]$ = Biegesteifigkeit der Platte je Längeneinheit in z-Richtung
 $\bar{B}_i \quad [kpcm]$ = ideale Biegesteifigkeit der Platte
 $M_{I,z} = M_Z^0 + M_{r,z} \quad [cmkp]$ = Biegemoment am einsteigigen Plattenbalken, System I, infolge der Steglasten P_Z bzw. p_Z und infolge der Pendelkräfte r_Z (in z-Richtung veränderlich)
 $M_{T,z} \quad [cmkp]$ = Querschnitts-Torsionsmoment, Schnittkraft in z, je Querschnittshälfte infolge der Pendelkräfte r_Z
 $Q_{I,z} = Q_Z^0 + Q_{r,z} \quad [kp]$ = Querkraft am einsteigigen Plattenbalken System I, infolge P_Z , p_Z und r_Z
 $\bar{m}_{x,z} \quad [cmkp/cm]$ = Plattenbiegemoment in Querrichtung (x-Richtung)
 $b_z = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{B_Z \cdot D'_z}{D_z^2} \quad [cm]$
 $c_z = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{B_Z}{D_z} \quad [cm^2]$
 $d_z = \frac{a^3}{24} \cdot \frac{B_Z}{\bar{B}_i} \quad [cm^4]$
 $i_z = \frac{b_z}{c_z} \quad [cm^{-1}]$
 $k_z = \frac{1}{c_z} \quad [cm^{-2}]$
- } = Querschnittswerte im Schnitt z

$$K_m(p) \quad [kp]$$

= Knotenlast in m infolge der Belastung
p [kp/cm]

n

= Anzahl der Spannweiten-Teilstücke

$$\Delta \ell = \ell/n$$

= Spannweite der sekundären Längsträger

$$f_m^* = \frac{\Delta \ell^3}{12} \cdot \frac{b_m}{d_m} = \frac{\Delta \ell^3}{2a} \cdot \frac{\bar{B}_i \cdot D'_m}{D_m^2}$$

$$= i_m^* \cdot g_m^*$$

$$g_m^* = \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \frac{c_m}{d_m} = \frac{\Delta \ell^2}{a} \cdot \frac{\bar{B}_i}{D_m}$$

$$h_m^* = \frac{\Delta \ell^4}{36} \cdot \frac{1}{d_m} = \frac{2\Delta \ell^4}{3 a^3} \cdot \frac{\bar{B}_i}{B_m}$$

$$i_m^* = \frac{\Delta \ell}{2} \cdot i_m = \frac{J_{D,m+1} - J_{D,m-1}}{4 J_{D,m}}$$

$$k_m^* = \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot k_m = \frac{2 \cdot \Delta \ell^2}{3 a^2} \cdot \frac{D_m}{B_m}$$

} dimensionslose Verhältnisse der
Querschnittswerte im Knoten z = m.
m = 0 ... n

1. Einleitung

1.1 Zwei- oder mehrstegige Plattenbalken

Bei Strassenbrücken aus Stahl oder Beton werden vielfach mehrstegige, durch Querträger ausgesteifte Plattenbalken als Tragkonstruktion gewählt.

Die Platte des Plattenbalkens hat bekanntlich verschiedene Aufgaben zu erfüllen. Sie dient zur Übertragung der Verkehrslasten auf die sie unterstützenden Stege der Haupt- und Querträger (Plattenwirkung), gleichzeitig bildet sie aber auch deren Obergurte.

Bei Tragwerken aus Beton werden meist nur wenige Querträger angeordnet, so dass sich die Platte hauptsächlich in der Querrichtung spannt. Mehrere Hauptträgerstege werden in der Regel deshalb gewählt, um die Spannweite der Platte in Querrichtung zu verkürzen. Damit kann die aus Plattenwirkung erforderliche Dicke der Platte klein gehalten und das Eigengewicht der Tragkonstruktion verringert werden.

Bei Brücken mit grossen Hauptträger-Spannweiten zeigt sich jedoch oft, dass für die erforderliche Dicke nicht die Beanspruchungen der Platte aus der Plattenwirkung sondern aus der Wirkung als Hauptträger-Obergurt maßgebend sind.

In diesen Fällen ist ohne Änderung der Dicke eine grössere Spannweite der Platte möglich, d.h. die Anzahl der Hauptträgerstege kann unter Voraussetzung gleicher Gesamt-Stegdicke verringert werden. Die wegen der Obergurtwirkung erforderliche Plattendicke reicht vielfach schon bei z w e i S t e g e n für die Lastübertragung in Querrichtung aus. Die Platte wird oft auch auf den Querträgern nicht aufgelegt. Die Querträger dienen hier nur zur Aussteifung des Querschnittes bzw. zur Erhöhung des Einspanngrades der Platte in die Stege (Bild 1.1). Die so nur mit den beiden Hauptträgerstegen verbundene Platte wird in ihrer Tragrichtung durch die Querträger kaum beeinflusst, wodurch ungünstige Spannungsüberlagerungen in der Platte vermieden werden.

Wenn bei weitgespannten Betonbrücken die erforderliche Dicke der Platte im wesentlichen durch ihre Wirkung als Hauptträger-Obergurt bestimmt ist, so dass anstelle des mehrstegigen Plattenbalkens ein zweistegiger Plattenbalken mit gleicher Gesamtstegdicke gewählt werden kann, dann ergeben sich damit natürlich erhebliche Vereinfachungen in der Ausführung. Von Bedeutung ist jedoch auch das günstigere Tragverhalten des zweistegigen Plattenbalkens, wenn Verkehrslasten auf der Fahrbahn stark ausmittig stehen und somit zur Biegung noch eine Verdrehung des Tragwerkes hinzukommt. Während die Biegebeanspruchungen aus Hauptträgerwirkung - unter Voraussetzung gleicher mitwirkender Plattenbreite - von der Steganzahl nicht beeinflusst werden, da der Biege Widerstand gleich gross bleibt, verringern sich die aus der Torsion herrührenden Beanspruchungen beim Plattenbalken mit nur 2 Stegen entsprechend Bild 1.1 wegen des erhöhten Drehwiderstandes. Dabei wirkt sich sowohl der grössere Abstand der Stegflächen vom Drehpunkt als auch die grössere Einzel-Stegdicke für den zweistegigen Plattenbalken günstig aus.

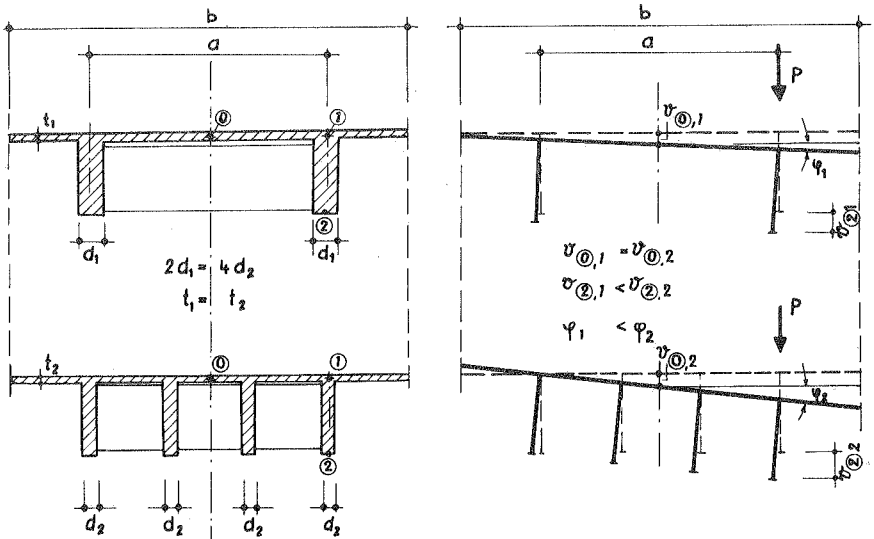


Bild 1.1 Zwei- und vierstegiger Plattenbalken, gleiche Plattendicke und gleiche Gesamt-Stegdicke. Vergleich der Verformungen bei ausmittiger Belastung.

Bei der Verdrehung des Plattenbalkens werden die Querträger auf Biegung und Torsion beansprucht. Da die Querträger meistens gleich hoch gewählt werden wie die Hauptträgerstege, ist ihre Steifigkeit gross genug, um auch ohne Verbindung mit der Fahrbahnplatte den Querschnitt praktisch formtreu auszusteiern.

Vielfach werden auch die Querträger ganz weggelassen und die beiden Hauptträgerstege lediglich über den Lagern durch biegesteife Querscheiben miteinander verbunden. In diesem Falle bleibt die Querschnittsform nicht erhalten, und es treten zusätzliche Beanspruchungen, vor allem in der Platte, auf. Sofern diese die Bemessung nicht wesentlich beeinflussen, werden sie mit Rücksicht auf die weitere Vereinfachung der Bauausführung, vor allem im Freivorbau, oft in Kauf genommen.

Eine möglichst wirklichkeitsnahe Berechnung zweistegiger Plattenbalken hinsichtlich ihrer Beanspruchung bei Torsionsbelastung hat also besondere praktische Bedeutung. Dabei muss vor allem die Veränderlichkeit des Gesamtquerschnittes in Längsrichtung und des Plattenquerschnittes in Querrichtung sowie der Einfluss der Querschnittsaussteifung erfasst werden können, während die Querschnittssymmetrie in den meisten praktischen Fällen gegeben ist.

1.2 Bisherige Berechnungsverfahren und ihre Voraussetzungen

Bei zur Querschnittsmitte *s y m m e t r i s c h e r* Belastung kann der zweistegige Plattenbalken wie ein auf Querkraft-Biegung beanspruchter prismatischer Stab berechnet werden. Dabei darf bei nicht zu grosser Plattenbreite im Verhältnis zur Stützweite volle Mitwirkung der Platte angenommen werden. Andernfalls lässt sich die mitwirkende Plattenbreite mit den in [1] zusammengestellten Untersuchungen genügend genau bestimmen.

Bei *a n t i m e t r i s c h e r* Belastung wird der zweistegige Plattenbalken auf Torsion beansprucht. Wegen des nicht wölbfreien Querschnittes kommen bei Wölbbehinderung zu den Wirkungen aus freier Torsion (St. Venant) noch die der Wölbkrafttorsion. Für formtreue, d.h. durch starre Querschotte in engen Abständen ausgesteierte dünnwandige Querschnitte lassen sich die Beanspruchungen

und Verformungen mit der von Wagner [2] und Kappus [3] angegebenen, elastostatischen Grundgleichung

$$M_T = G \cdot J_D \cdot \varphi' + E \cdot C_M (-\varphi''') \quad (1.1)$$

ermitteln, durch die der Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und dem Torsionsmoment M_T als Schnittkraft gegeben ist. Eine Zusammenstellung der vor allem aus dem Flugzeugbau stammenden Erkenntnisse über das Verhalten offener und geschlossener Querschnitte bei Torsionsbelastung gibt Wansleben 1948 in [4].

Durch die systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion von Bornscheuer, 1952 [5], konnten später von Lindenberger [6] fertige Ausdrücke angegeben werden, mit denen sich auch zweistegige Plattenbalkenquerschnitte für verschiedene Torsionsbelastungsfälle verhältnismässig einfach berechnen lassen. Die Ausdrücke sind aus den von Lie [7] angegebenen Formeln umgearbeitet, wobei von der Analogie des Hängebrücken- und des Torsionsproblems Gebrauch gemacht wird, die beide auf das Problem des querbelasteten Zugstabes zurückgeführt werden können.

In weiteren Arbeiten [8], [9] hat Bornscheuer die für die Torsionstheorie erforderlichen Querschnittskennwerte für übliche Stahlbau-Walzprofile in Tabellenform zusammengestellt, so dass damit der Rechenaufwand für diese dünnwandigen Stahlbauprofile bei Torsionsbelastung kaum grösser ist als bei Biegebelastung.

Für dicke wandige Plattenbalkenquerschnitte, wie sie im Betonbau vorkommen, ergeben sich mit diesen Formeln vielfach noch recht gute Näherungen.

Von Cornelius wurde in [10] etwa gleichzeitig mit den obengenannten Arbeiten ein anderer Weg zur Berechnung zwei- und mehrstegiger Plattenbalkenquerschnitte unter Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit angegeben. Wieder unter der Voraussetzung querschnittstreuer Verformung - d.h. starrer Querscheiben - wird der Querschnitt in eine Trägerschar und in eine Torsionsröhre zerlegt gedacht, die über unbekannte Reaktionskräfte X miteinander in Verbindung stehen. Zur Vereinfachung wird dabei angenommen, dass die in Längsrichtung zwischen Trägerschar und Torsions-

röhre wirkenden Reaktionskräfte denselben Verlauf haben wie die angreifenden Torsionslasten. Wie weit diese Annahme zutrifft, hängt natürlich wesentlich von den Steifigkeitsverhältnissen und der Art der Belastung ab. Da die Reaktionskräfte zwischen Röhre und Trägerschar in Längsrichtung stetig verteilt sein müssen, wird die Annahme bei Einzel-Belastungen weniger zutreffen als bei verteilten Belastungen.

Das Verfahren läuft darauf hinaus, aus der Gleichsetzung der Drehwinkel von Röhre und Trägerschar an einer bestimmten Stelle Querverteilungslinien zu ermitteln, mit deren Hilfe die Beanspruchungen in der gleichen Weise wie bei voneinander unabhängigen Biegeträgern bestimmt werden. Zur Ermittlung der Drehwinkel des wölbbehinderten Querschnittes werden für verschiedene Belastungsfälle geschlossene Ausdrücke angegeben. Sie entsprechen den in [5] und [6] veröffentlichten Ausdrücken für einen bestimmten Schnitt. Für die Ermittlung der Drehwinkel bei veränderlichem, ausgesteiftem Querschnitt wird ein gut konvergierendes Näherungsverfahren beschrieben.

Bekanntlich ist es jedoch nicht möglich, die Beanspruchungsverhältnisse eines ausmittig belasteten Plattenbalkens mit Hilfe von Querverteilungslinien genauer zu erfassen, da die Querverteilung nicht über die Spannweite des Balkens konstant ist, sondern vom betrachteten Schnitt, von Art und Stellung der Last und einer Anzahl weiterer Faktoren abhängt. Die Berechnung des mehrstegigen Plattenbalkens mit Querverteilungslinien ist deshalb immer nur eine mehr oder weniger gute *Näherung*, mit der der Einfluss der Torsionssteifigkeit auf die Biegebeanspruchungen der einzelnen Träger in einfacher Weise angegeben werden kann.

Interessant an diesem Verfahren ist die Trennung des Tragsystems in eine querausgesteifte Trägerschar und in eine Torsionsröhre. Ein ähnlicher Gedanke liegt auch den späteren Ableitungen für ein *genaues* Berechnungsverfahren von zweistegigen, elastisch oder starr ausgesteiften Plattenbalken zugrunde.

Über drillungssteife zweistegige Plattenbalkenbrücken erschien 1954 eine Abhandlung von Jäger [11]. Der *konstant* vorausgesetzte Plattenbalkenquerschnitt wird durch Trennschnitte zwischen Platte und Stegen in drei Teilquerschnitte zerlegt und die

Verträglichkeitsbedingungen in den Schnittlinien bei symmetrischer und antimetrischer Belastung unter gewissen Vernachlässigungen angeschrieben. Aus den so etwas vereinfachten Verträglichkeitsbedingungen werden drei unbekannte Schnittkräfte bestimmt, wobei die Lastfunktionen und entsprechend die Schnittkräfte in Form von Fourier-Reihen angesetzt sind. Die unbekannteren Reihenkoeffizienten ergeben sich bei antimetrischer Belastung aus je drei voneinander abhängigen Bestimmungsgleichungen.

Wegen des noch etwas hohen Rechenaufwandes schlägt Jäger vor, die waagerechte Biegesteifigkeit der Hauptträgerstege zu vernachlässigen. Weiter zeigt er, dass dann durch Zusammenfassen von 'Steg und mitwirkender Platte' lediglich noch das Einspannmoment der Platte im Steg als Unbekannte übrig bleibt, wodurch sich die Reihenkoeffizienten leicht bestimmen lassen. Dabei ist die Biegesteifigkeit bezogen auf eine Querschnittshälfte in lotrechter Richtung für symmetrische und antimetrische Belastung gleich gross angenommen. Das kann natürlich nicht allgemein gelten. Setzt man nämlich voll mitwirkende Plattenbreite bei beiden Belastungsarten voraus, dann wird die Biegesteifigkeit in lotrechter Richtung bei antimetrischer Belastung unter sonst gleichen Verhältnissen wesentlich vom gegenseitigen Abstand der Stege beeinflusst. Hierauf wird später noch näher eingegangen. Bei grosser Plattenbreite im Verhältnis zur Spannweite, die bei Jäger vorausgesetzt wird, dürfte die Annahme jedoch weitgehend zutreffen, sofern die 'mitwirkende Plattenbreite bei Torsionsbelastung' bekannt ist. Hierüber werden keine Angaben gemacht.

Von Beck wurde 1955 in [12] ein Berechnungsweg für ausmittig belastete zweistegige Plattenbalken unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Platte in Querrichtung angegeben. Hierbei ist die Platte zwischen den Stegen in schmale Querstreifen aufgeschnitten, so dass nur Biegemomente bzw. Querkräfte übertragen werden können. Die Wirkung der Schubkräfte in der Plattenebene und die damit verbundene horizontale Ausbiegung des Torsionsträgers werden vernachlässigt, wodurch die tatsächliche Längsspannungsverteilung vor allem in der Platte nur genähert erfasst wird. Dieser vereinfachte Berechnungsweg dürfte bei sehr drehsteifen Stegquerschnitten noch zu gut brauchbaren Ergebnissen führen, da

in diesem Falle die Längsspannungen aus Wölbkrafttorsion gering sind und die Abtragung der ausmittigen Lasten in der Hauptsache durch freie Torsion erfolgt. Die Ergebnisse werden umso weniger gut zutreffen, je drehweicher der Querschnitt wird, d.h. je mehr die Lasten durch Wölbkrafttorsion abgetragen werden müssen. Die sich bei Beck ergebende Differentialgleichung wird durch Umsetzen in Fünf- bzw. Sieben-Momenten-Gleichungen gelöst. Die Veränderlichkeit des Querschnitts lässt sich ohne Schwierigkeit mit erfassen.

Für einfach symmetrische Profile mit k o n s t a n t e m , a u s g e s t e i f t e m Querschnitt bei Torsionsbelastung gibt Resinger in [13] ein gutes Näherungsverfahren an. Es wird dabei die schon erwähnte Analogie zur Differentialgleichung des querbelasteten Zugstabes benutzt, um die Wölbsteifigkeit des Gesamtquerschnittes durch die Biegesteifigkeit von zwei Teilquerschnitten (Drillträger) darzustellen. Die Verwölbmomente werden iterativ als Biegemomente der Drillträger ermittelt, die ausser den Querlasten durch eine fiktive Längszugkraft beansprucht werden. Das Verfahren wird durch die Trennung des Gesamt-Querschnittes in zwei gleiche Teilquerschnitte (Drillträger) sehr anschaulich, die lotrechte Biegesteifigkeit wird unter Voraussetzung voll mitwirkender Platte im Gegensatz zu [11] genau erfasst.

Einen genaueren Weg für die Berechnung nicht ausgesteifter zweistegiger Plattenbalkentragwerke mit k o n s t a n t e m Querschnitt schlägt Köller in [14] vor. Ähnlich wie in [11] werden die Stege von der Platte abgetrennt und die unbekanntes Schnittkräfte aus den Formänderungsbedingungen längs der Schnittlinien ermittelt. Die horizontale Biegesteifigkeit der Stege und der Einfluss der Querdehnung auf die Platten- bzw. Scheiben-Wirkung werden zur Vereinfachung der Ausdrücke vernachlässigt. Die Schnittkräfte ergeben sich entsprechend der Fourier-Analyse als Reihensummen. Der Rechenaufwand hängt also von der Konvergenz der Reihen ab. Für Plattenbalken mit weit über die Stege auskragender Fahrbahnplatte dürfte sich die Vernachlässigung der horizontalen Biegesteifigkeit des dann aus Steg mit Auskragung bestehenden Randträgers bemerkbar machen.

Einen ähnlichen Weg wie Köller geht Sommerfeld in [15]. Durch die Berücksichtigung der Querbiegung der Randträger, die hier zusammen mit der auskragenden Platte als Winkelquerschnitte aufgefasst sind, erhöht sich die Zahl der unbekanntenen Schnittkräfte. Auch hier erfolgt die Lösung durch Fourier-Analyse.

Schliesslich ist 1961 eine umfangreiche Arbeit von Trost über die Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken erschienen [16]. Sie setzt Hauptträger mit konstantem Querschnitt voraus, die durch Platte und Querträger miteinander verbunden sind. Als Schnittgrössen sind nur Biegemomente und Querkräfte in Platten- bzw. Querträgermitte berücksichtigt, die Schubkräfte in Plattenlängsrichtung vernachlässigt. Wie weit diese Vernachlässigung ohne Bedeutung ist, hängt von den Abmessungsverhältnissen und der Belastung ab. Jedenfalls verschwindet durch diese Vernachlässigung wie in [12] der Einfluss aus der Biegeverformung in Querrichtung (Plattenebene). Belastung und Schnittkräfte werden wieder nach der Fourier-Analyse entwickelt.

Für die praktische Rechnung werden in den drei letztgenannten Veröffentlichungen [14], [15], [16] umfangreiche Zahlentafeln angegeben, mit denen die Schnittgrössen für verschiedene Biege- und Drillsteifigkeiten der einzelnen Tragglieder verhältnismässig einfach bestimmt werden können. Die Veröffentlichungen [14], [15] und [16] - soweit bei letzterer nur die Angaben über zweistufige Plattenbalken in Betracht gezogen werden - unterscheiden sich voneinander in der Hauptsache durch die Anzahl der vernachlässigten Schnittkräfte bei der Aufstellung der Verträglichkeitsbedingungen und damit natürlich in der Aufbereitung der Ausdrücke für die gesuchten Kräfte. Gemeinsam ist allen drei Arbeiten die Verwendung der Fourier-Analyse, die konstanten Verlauf der Querschnitts- bzw. Steifigkeitswerte in Längsrichtung voraussetzt.

Die Anwendung der Verfahren von [14] und [15] dürfte sich besonders in Fällen mit grosser Plattenbreite im Verhältnis zur Stützweite lohnen, da die Scheibenwirkung der Fahrbahnplatte mit erfasst ist, die hier nicht ohne weiteres vernachlässigt werden

darf. x)

Dagegen ist bei schmaleren Plattenbalken, d.h. kleiner Plattenbreite im Verhältnis zur Stützweite der Einfluss der Scheibenwirkung gering, so dass ohne grossen Fehler eine lineare Spannungsverteilung und die Platte als 'voll mittragend' angenommen werden kann.

Diese Verhältnisse liegen bei weitgespannten Brückentragwerken vielfach vor. Andererseits ist in diesen Fällen oft der Querschnitt der Plattenbalken nicht konstant, sondern infolge der dem Hauptträger-Momentenverlauf angepassten Steghöhe in Längsrichtung veränderlich, besonders bei über mehrere Öffnungen durchlaufenden oder an den Widerlagern eingespannten Tragwerken (Bild 2.1).

Eine in baustatischem Sinne genaue Berechnung dieser Tragwerke für Torsionsbelastung ist mit den bisher bekannt gewordenen Verfahren nicht ohne weiteres möglich, vor allem wenn auch Queraussteifungen mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Diese Lücke soll der folgende Beitrag schliessen. Mit den Berechnungsmethoden der Stabstatik für 'drillungsfreie Biegung' bzw. für 'biegungsfreie Drillung' (d.h. St.Venant'sche Torsion) wird ein einfaches und anschauliches Verfahren aufgezeigt, um die Beanspruchungen und Verformungen frei aufliegender oder durchlaufender, zweistegiger Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt und veränderlicher Queraussteifung bei beliebiger Torsionsbelastung zu ermitteln.

Mit dem Verfahren lassen sich ausserdem für konstante, elastisch ausgesteifte Querschnitte verhältnismässig einfache geschlossene Lösungen zur Ermittlung der Schnittkräfte angeben. Damit können z.B. die im Stahlbau üblichen, einfach symmetrischen

x) In der nach Abschluss dieser Arbeit erschienenen Veröffentlichung von Bieger [27] werden die Schnittkräfte ebenfalls nur für konstanten Querschnitt unter Verwendung der Fourier-Reihen ermittelt.

Profile für Torsionsbelastung auch unter Berücksichtigung der Stegbiegung berechnet werden. Das war bisher nur für doppelsymmetrische Profile in geschlossener Form durch die Arbeiten von Goodier und Barton [17] möglich.

Die Ergebnisse des im folgenden Abschnitt abgeleiteten Berechnungsverfahrens sind durch zahlreiche Messungen an Modellen überprüft worden, wobei sich für praktisch vorkommende Abmessungsverhältnisse gute Übereinstimmungen ergaben. Die Messungen wurden am Institut für Spannungsoptik und Modellmessung der Technischen Hochschule Stuttgart durchgeführt [26].

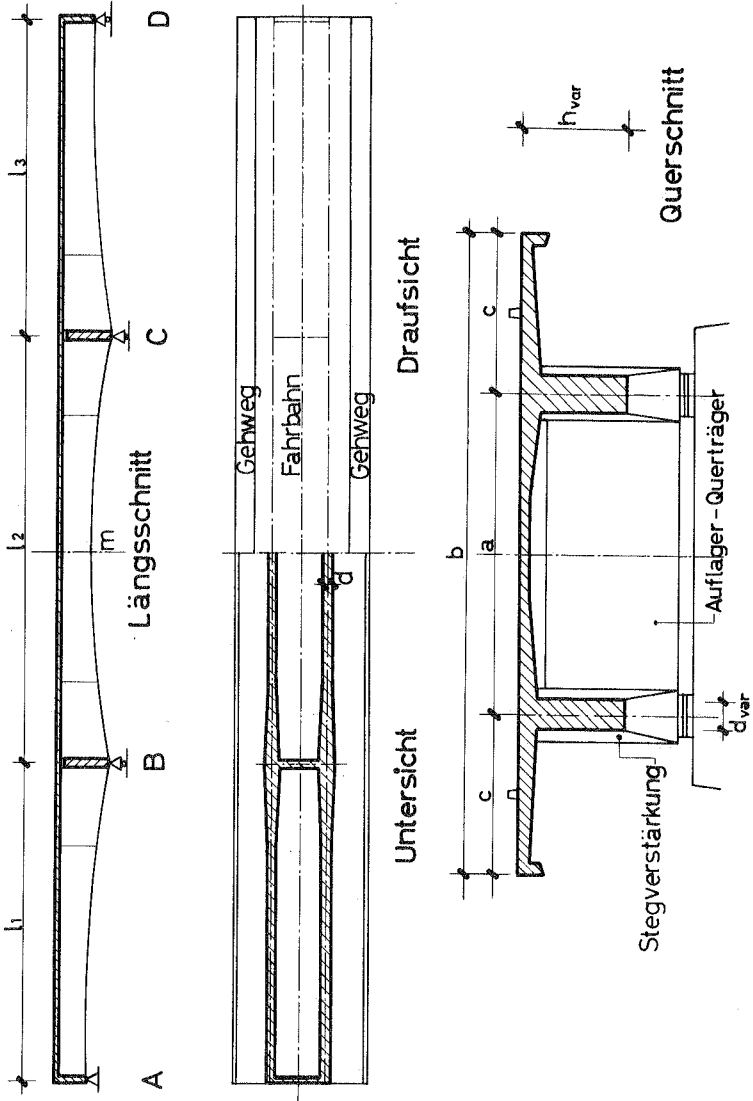


Bild 2.1 Brückentragwerk, zwei-steigiger, mittelsymmetrischer Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt.

2. Voraussetzungen und Erläuterung des Verfahrens

2.1 Lagerung, Belastung, Schnittkräfte

Den folgenden Betrachtungen ist zunächst ein einfeldriger Plattenbalken ohne Querträger zugrunde gelegt. Lediglich an den Balkenenden sind biegestarre, aber sehr torsionsweiche Querschotte angeordnet. Die Unterstützungen in den Stegachsen sind längsverschieblich (Bild 2.2a). Die Balkenenden sind damit in der x,y-Ebene unverschieblich gehalten, können sich aber in Längsrichtung z frei verformen. Der Querschnitt ist zur Hochachse y symmetrisch, die Steg- und Plattenabmessungen können dabei gemäss Bild 2.2b beliebig veränderlich sein.

Bei beliebiger Belastung kann sich der Plattenbalken verbiegen und verdrehen, wobei die Querschnittsform infolge der Querbiegung der Platte nicht erhalten bleibt. Es überlagern sich dabei die Verformungen aus verschiedenen Beanspruchungsarten. Um diese voneinander zu trennen, kann man sich in einem **e r s t e n** Zustand den Plattenbalken längs der Stegachsen auf ganze Länge stetig unterstützt denken. Es ergeben sich dann die in Bild 2.3a dargestellten Verformungen. Die Platte ist in den biege- und torsionssteifen Stegen elastisch eingespannt. Die Beanspruchungen σ_0 und τ_0 können nach der Plattentheorie ermittelt werden; man erhält damit auch die in Längsrichtung z veränderlichen Auflagerreaktionen q_z^{li} und q_z^{re} . Bei konstanter Plattendicke stehen hierfür verschiedene Tafelwerke zur Verfügung [19], [20], [21].

In einem **z w e i t e n** Zustand denkt man sich die stetigen Unterstützungen wieder entfernt und den Plattenbalken längs der Stegachsen mit den Auflager-Aktionen q_z^{li} und q_z^{re} belastet. Zerlegt man die Auflager-Aktionen noch in eine symmetrische Lastgruppe

$$+ p_z^s = (q_z^{li} + q_z^{re}) \cdot 0,5 \quad \left[\text{kg/m} \right] \quad (2.1a)$$

und in eine antimetrische Lastgruppe:

$$\pm p_z^a = (q_z^{li} - q_z^{re}) \cdot 0,5 \quad [\text{kg/m}] \quad (2.1b)$$

dann wird der Plattenbalken infolge der symmetrischen Belastung auf Biegung und infolge der antimetrischen Belastung auf Verdrehung beansprucht (Bild 2.3b und 2.3c). Für die Biegung können die Spannungen und Verformungen in bekannter Weise nach der Biegetheorie des geraden, prismatischen Stabes ermittelt werden. Man erhält damit die Längsspannungen σ_B und Schubspannungen τ_B bzw. die Durchbiegungen v_B (Bild 2.3b). Infolge Verdrehung treten die Spannungen σ_T und τ_T auf, die sich ihrerseits aus mehreren Anteilen zusammensetzen (St.Venant'sche oder freie Torsion, Wölbkrafttorsion, Plattenbiegung).

Da die Überlagerung der Belastungszustände nach Bild 2.3a bis 2.3c die tatsächliche Belastung des Plattenbalkens ergibt, ist auch die Summe der Beanspruchungen und Verformungen aus den drei Zuständen mit den tatsächlichen Beanspruchungen und Verformungen identisch.

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist nur der Zustand nach Bild 2.3c, bei welchem der Plattenbalken durch die **a n t i - m e t r i s c h e n** **S t e g l a s t e n** $\pm p_z^a$ verdreht wird. (Index a = antimetrisch, zur Vereinfachung weiterhin weggelassen). Anstelle der verteilten Lasten $\pm p_z$ können auch antimetrische Einzellasten $\pm P_z$ in den Stegachsen angreifen.

Wie bei Biegebeanspruchung üblich, wird auch für Torsionsbeanspruchung die tatsächliche Mitwirkung der Platte durch eine gedachte voll mitwirkende Platte von der Breite $b' < b$ erfasst. Dabei ist b' in Längsrichtung veränderlich und hängt von den Systemabmessungen und der Art und Stellung der Belastung ab. Die Ermittlung von b' ist auf iterativem Wege möglich. Bei den hier angenommenen Abmessungsverhältnissen $\ell : b > 4$ wirkt sich jedoch eine genauere Ermittlung von b' auf das Ergebnis praktisch nicht aus. Es genügt, die mitwirkende Breite b' nur überschläglich zu bestimmen und im übrigen mit einer abschnittsweise konstant angenommenen Plattenbreite zu rechnen.

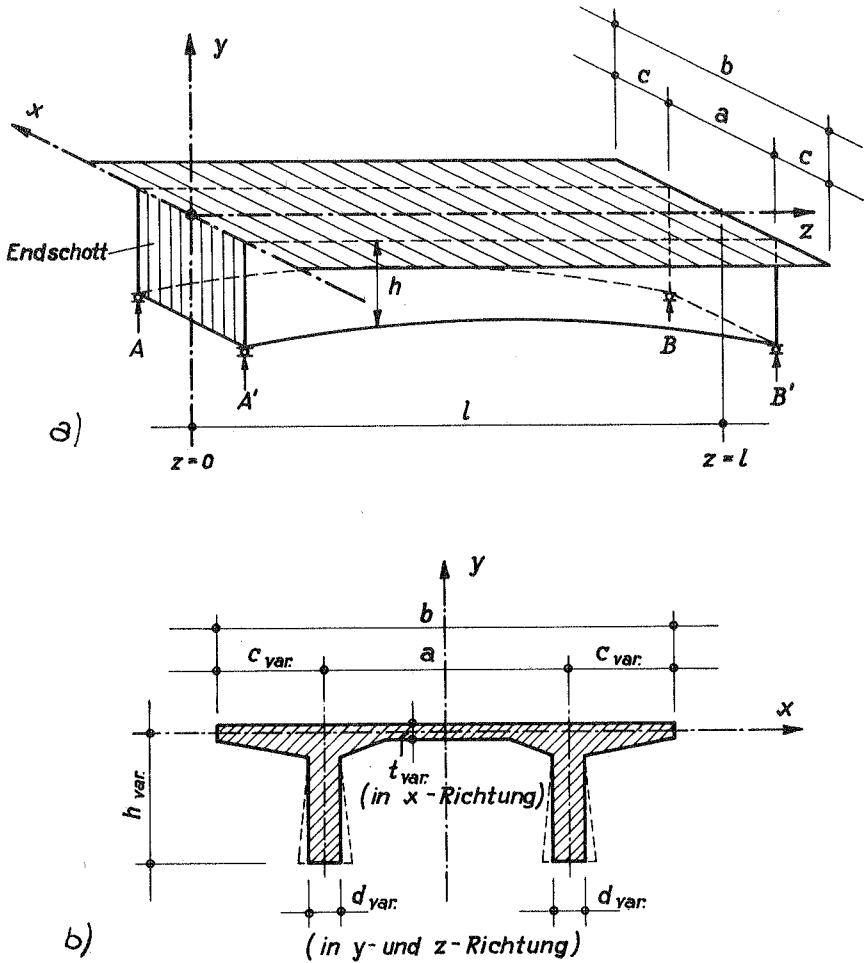


Bild 2.2 Bezeichnung der Querschnittsabmessungen und Lagerung des Einfeldbalkens (nur lotrechte Belastung vorausgesetzt).

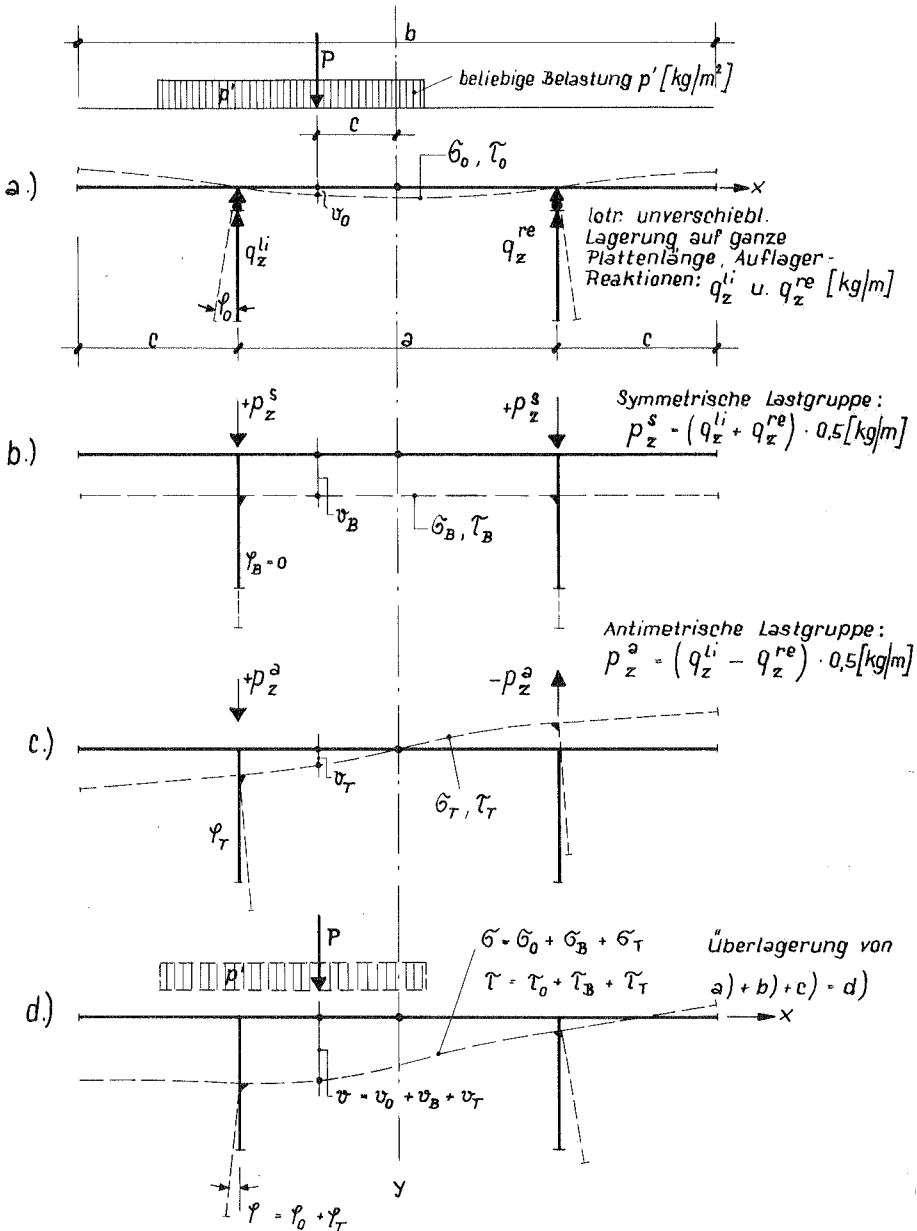


Bild 2.3 Beanspruchungen und Verformungen bei beliebig unsymmetrischer Belastung der Platte. (Horizontale Verschiebung bei c) und d) nicht dargestellt.)

Die Beanspruchungen und Verformungen des antimetrisch belasteten, zweistegigen Plattenbalkens können ermittelt werden, sobald die in z-Richtung veränderlichen, statisch unbestimmten Schnittkräfte am Anschluss zwischen Steg und Platte bekannt sind.

Wegen der Querschnitts-Symmetrie führt man jedoch zweckmässiger einen Trennschnitt in Plattenmitte und ermittelt hier die statisch unbestimmten Schnittkräfte aus den Verträglichkeitsbedingungen (Bild 2.4a).

Da die Plattendicke im allgemeinen klein ist im Verhältnis zu den übrigen Querschnittsabmessungen, genügt es, wenn die Verträglichkeitsbedingungen nur längs der Mittellinie $\odot - \odot$, d.h. in der Mitte der Plattendicke eingehalten sind. Die beiden T-förmigen Querschnittshälften passen offensichtlich dann längs $\odot - \odot$ zwangungsfrei aneinander, wenn in jedem Punkt z (z = 0 bis z = l):

- 1) die Verschiebungen u_z , v_z und w_z in den drei Achsrichtungen x, y und z und
- 2) die Drehwinkel φ_z der Schnittufer

übereinstimmen.

Die vier Verträglichkeitsbedingungen können durch die vier statisch unbestimmten Schnittkräfte h_z , r_z , s_z und m_z erfüllt werden. Aus der Antimetrie der Belastung folgt:

$$\begin{aligned} h_z &= 0 \\ m_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.2a)$$

Längs der Mittellinie $\odot - \odot$ wirken also nur die Schnittkräfte r_z und s_z . Die gleichen Schnittkräfte würden sich ergeben, wenn man sich die beiden T-förmigen Querschnittshälften längs der Linie $\odot - \odot$ durch ein Scharnier miteinander verbunden denkt.

Entsprechend werden in der Scharnierlinie wegen Antimetrie der Verformung (Bild 2.4b) die Verschiebungen

$$\begin{aligned} v_z &= 0 \quad \text{und} \\ w_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.2b)$$

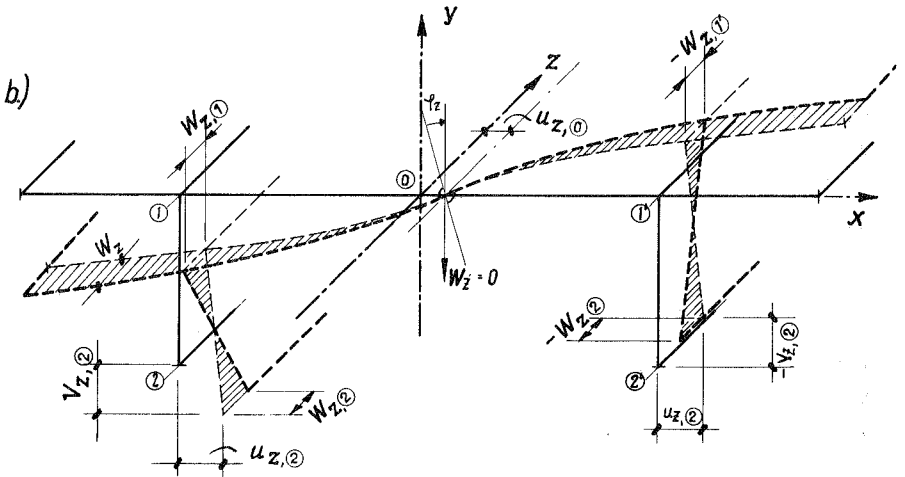
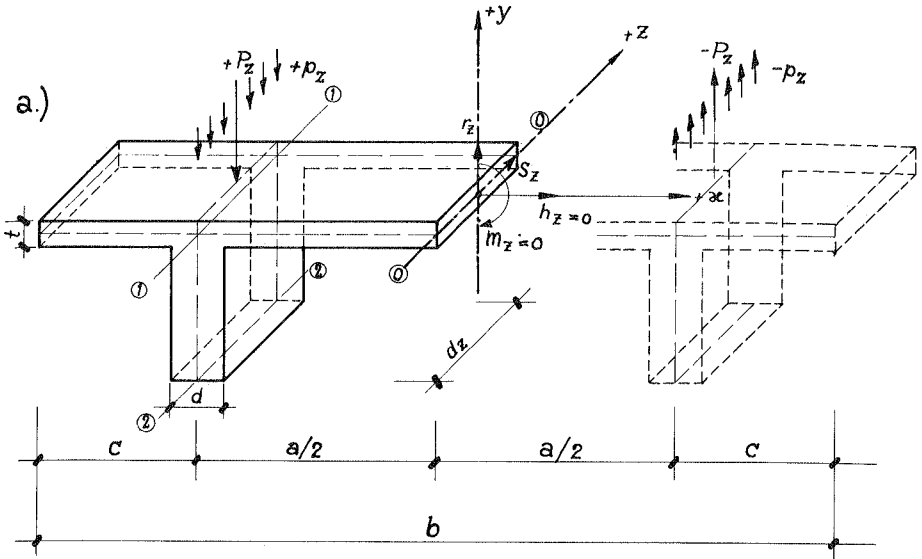


Bild 2.4 Schnittkräfte längs ①-① in Plattenmitte und Formänderungen bei antisymmetrischer Stegbelastung.

Aus $w_z = 0$ folgt aber, dass auch die Dehnungen ϵ_z und damit die Spannungen σ_z längs der Scharnierlinie in $\odot - \odot$ gleich Null sein müssen.

$$\epsilon_z = \frac{d w_z}{d z} = 0 ; \quad \sigma_z = E \cdot \epsilon_z = 0 \quad (2.3)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte r_z und s_z infolge der antimetrischen Steglasten $\pm P$ bzw. $\pm p$ sind also so zu bestimmen, dass für jede Querschnittshälfte die lotrechten Verschiebungen v_z und die Dehnungen ϵ_z längs der Linie $\odot - \odot$ verschwinden. Die Grösse und der Verlauf der voneinander abhängigen Schnittkräfte r_z und s_z können bei konstantem Querschnitt für beliebige Stegbelastungen ohne besondere Schwierigkeiten, und zwar mit Hilfe der Fourier-Analyse ermittelt werden. Die im Brückenbau häufig vorkommenden Fälle mit veränderlichem Querschnitt gemäss Bild 2.1 können damit nicht erfasst werden.

Wie weit zur Vereinfachung der Rechnung die eine oder die andere Schnittkraft ohne grossen Fehler vernachlässigt werden kann, hängt von den Abmessungsverhältnissen ab. Man erkennt, dass z.B. die Schnittkräfte r_z umso kleiner werden je geringer die Querbiegesteifigkeit der Platte oder die Drehsteifigkeit einer Querschnittshälfte ist. Für die Grösse der Schnittkräfte s_z ist u.a. das Verhältnis vom Stegabstand a zu Plattenbreite b von besonderer Bedeutung, worauf später noch eingegangen wird.

Im Folgenden wird nun die Lösung des Problems auf einem Weg gezeigt, der insbesondere bei veränderlichen Querschnitten eine einfache und übersichtliche Bestimmung der Schnittkräfte zulässt. Dabei wird die gegenseitige Abhängigkeit von r_z und s_z aufgehoben. Die Beanspruchungen und Verformungen werden an zwei gedachten Systemen ermittelt, die nur durch die inneren Kräfte r_z' miteinander verbunden sind. Das eine System wird dabei nur auf Querkraft-Biegung, das zweite auf St.Venant'sche Torsion beansprucht, wobei gleichzeitig Querbiegemomente in der Platte auftreten.

Aus der Überlagerung der Beanspruchungen der beiden gedachten Systeme ergeben sich dann die am Plattenbalken infolge Verdrehung

tatsächlich auftretenden Beanspruchungen σ_T und τ_T .

2.2 Einführung der ideellen Systeme I und II

Wie aus Bild 2.4 hervorgeht, werden die in den Stegachsen des Plattenbalkens angreifenden gegengleichen äusseren Lasten $\pm P_z$ bzw. $\pm p_z$ durch Biegung und Torsion in den beiden Querschnittshälften zu den Auflagern übertragen, wobei längs der Schnittlinie $\odot - \odot$ die unbekanntes inneren Kräfte r_z und s_z wirken. Die dabei auftretenden Beanspruchungen und Verformungen hängen von der Biegesteifigkeit $E \cdot J_B$ bzw. der Drehsteifigkeit $G \cdot J_D$ der beiden Querschnittshälften (in z-Richtung veränderlich) und von der Biegesteifigkeit der Platte zwischen den Stegen $E \cdot \bar{J}_{Pl}$ (in x-Richtung veränderlich) ab.

Man kann sich nun einen zweistegigen Plattenbalken vorstellen, bei dem die Drehsteifigkeit $G \cdot J_D$ sowie die Biegesteifigkeit der Platte $E \cdot \bar{J}_{Pl}$ unendlich klein sind, während die Biegesteifigkeit $E \cdot J_B$ der beiden Querschnittshälften unverändert bleibt (Bild 2.5a) :

$$\begin{aligned} G \cdot J_D &= 0 \\ E \cdot \bar{J}_{Pl} &= 0 \\ E \cdot J_B &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bei diesen Plattenbalken können längs der Linie $\odot - \odot$ nur die Schubkräfte s_z wirken, da wegen der fehlenden Dreh- bzw. Querbiegesteifigkeit die Querkkräfte r_z verschwinden (Bild 2.5b) :

$$\begin{aligned} s_z &\neq 0 \\ r_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Infolge der Steglasten $\pm P$ bzw. $\pm p$ und der Schnittkräfte s_z treten im Plattenbalken nur die Biegespannungen σ_z und die diesen zugeordneten Schubspannungen τ_z auf. Die Verteilung der Biegespannungen σ_z über den Querschnitt ist in Bild 2.5c dargestellt.

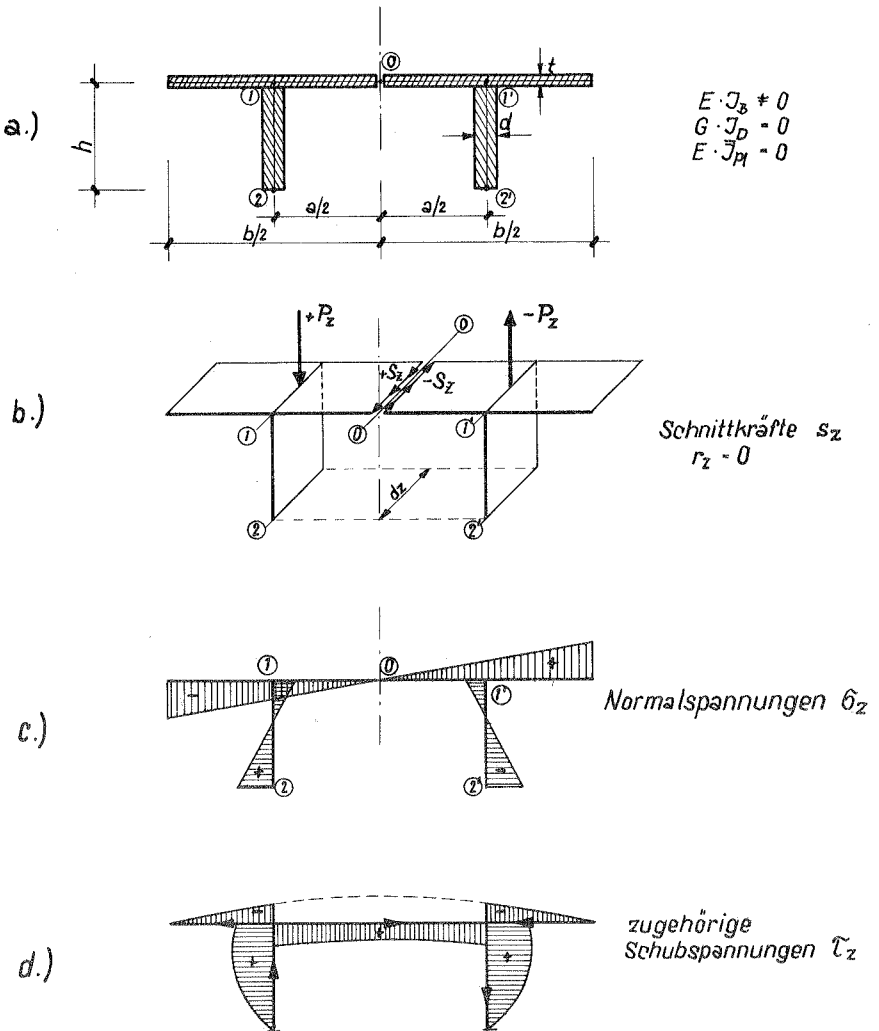


Bild 2.5 Wölbsystem (I)

- a) Steifigkeiten
- b) Belastung und Schnittkräfte
- c) Normalspannungen σ_z
- d) Schubspannungen τ_z

Sie ist identisch mit dem Verlauf der Normalspannungen $\sigma_{2,z}$ des zweistegigen Plattenbalkens infolge Torsionsbelastung bei behinderter Querschnitts-Verwölbung. Das gleiche gilt für den Verlauf der Schubspannungen (Bild 2.5d). Der Plattenbalken mit den Steifigkeiten gemäss (2.4) wird daher 'Wölbsystem' oder 'System I' genannt.

Analog hierzu kann man sich einen Plattenbalken denken, bei dem die Biege-steifigkeit $E.J_B$ unendlich klein ist, dagegen die Drehsteifigkeit $G.J_D$ und die Biegesteifigkeit der Platte $E.\bar{J}_{P1}$ unverändert bleibt (Bild 2.6a):

$$\begin{aligned} E \cdot J_B &= 0 \\ E \cdot \bar{J}_{P1} &\neq 0 \\ G \cdot J_D &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

An diesem Plattenbalken können längs der Linie $\odot - \odot$ nur die Querkräfte r_z wirken, da die Schubkräfte s_z wegen der fehlenden Biegesteifigkeit $E.J_B$ zu Null werden (vgl. Bild 2.6b):

$$\begin{aligned} s_z &= 0 \\ r_z &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dieses System wird im Folgenden mit 'Drillsystem' oder 'System II' bezeichnet.

Denkt man sich nun das 'Drillsystem' unter dem 'Wölbsystem' angeordnet, beide Systeme an den Enden gleich gelagert (Bild 2.7a und 2.7b) und durch zug- und druckfeste Pendel in den Stegachsen miteinander verbunden, dann treten bei Belastung des Wölbsystems in den Pendeln Kräfte auf, die an jedem Punkt z der beiden Systeme gleiche lotrechte Stegverschiebungen erzwingen: $v_{zI} = v_{zII}$.

Jede Querschnittshälfte des Drillsystems wird nur durch die Pendelkräfte und die Plattenquerkräfte r_z (Schnittkräfte) belastet. Wegen der fehlenden Biegesteifigkeit in Längsrichtung können hierbei jedoch keine Kräfte über Biegung zu den Auflagern abgetragen werden. Es treten also auch keine Querkräfte in den Stegen auf. Betrachtet man

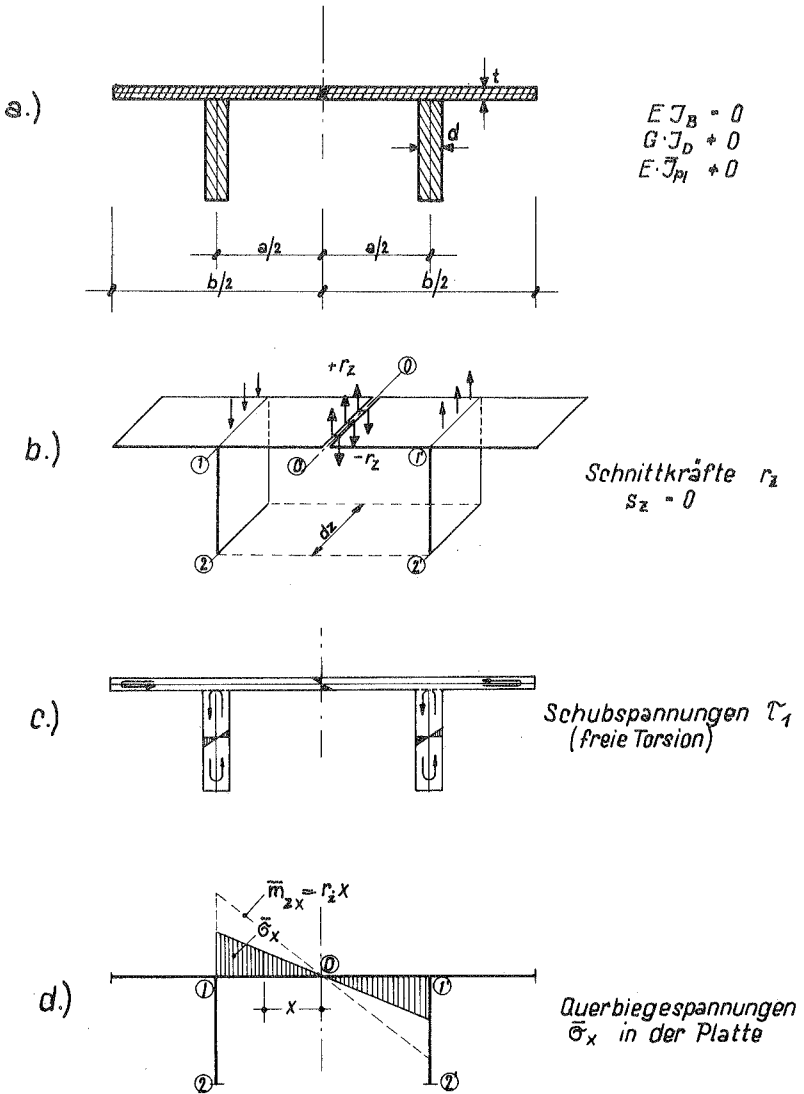


Bild 2.6 Drillsystem II

- a) Steifigkeiten
- b) Schnittkräfte
- c) Schubspannungen τ_1
- d) Querbiegespannungen in der Platte $\bar{\sigma}_x$

nun eine Querschnittshälfte von der Länge dz , so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$, dass die Pendelkräfte den Schnittkräften r_z entgegengesetzt gleich sein müssen (vergl. Bild 2.7b). Bei Belastung des Wölbsystems, z.B. mit den Steglasten $\pm P$ nach Bild 2.7, wirken also auf jede Querschnittshälfte des Drillsystems als Belastung nur die Torsionsmomente:

$$\bar{m}_z = r_z \cdot \frac{a}{2} \quad (\text{mt/m}) \quad (2.8)$$

(in z-Richtung veränderlich). Daraus folgen die Torsionsschubspannungen τ , gemäss Bild 2.6c. Ausserdem ergeben sich infolge der Schnittkräfte r_z in der Platte die Biegespannungen $\bar{\sigma}_x$ in Querrichtung und bei Berücksichtigung der Querdehnungszahl die Spannungen $\bar{\sigma}_z = \mu \cdot \bar{\sigma}_x$ in Längsrichtung

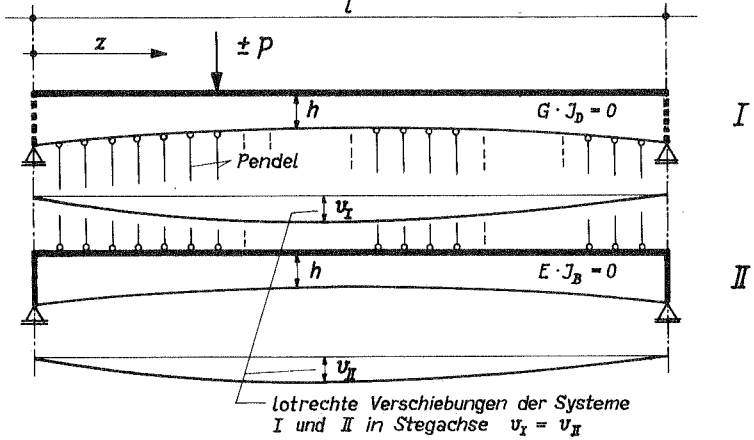
In Bild 2.8a sind nun die Formänderungen des biege- und drehsteifen Plattenbalkens und darunter (Bild 2.8b und c) die des Wölb- und Drillsystems dargestellt. Infolge der Steglasten P , der Pendelkräfte r_z und der Kräfte s_z verschiebt sich jede Querschnittshälfte des Wölbsystems in lotrechter und waagrechter Richtung ohne sich zu drehen, da die Kräfteebenen durch den Schubmittelpunkt gehen (Parallel-Verschiebung). Hierauf wird im folgenden Abschnitt noch näher eingegangen. Dagegen dreht sich jede Querschnittshälfte des Drillsystems infolge der Schnittkräfte r_z und der gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Pendelkräfte r_z um den Schubmittelpunkt, ohne sich zu verschieben. Gleichzeitig tritt eine Querbiegung der Platte zwischen den Stegen ein.

Die Kräfte s_z und r_z lassen sich nun aus folgenden Formänderungsbedingungen am Wölb- bzw. Drillsystem bestimmen:

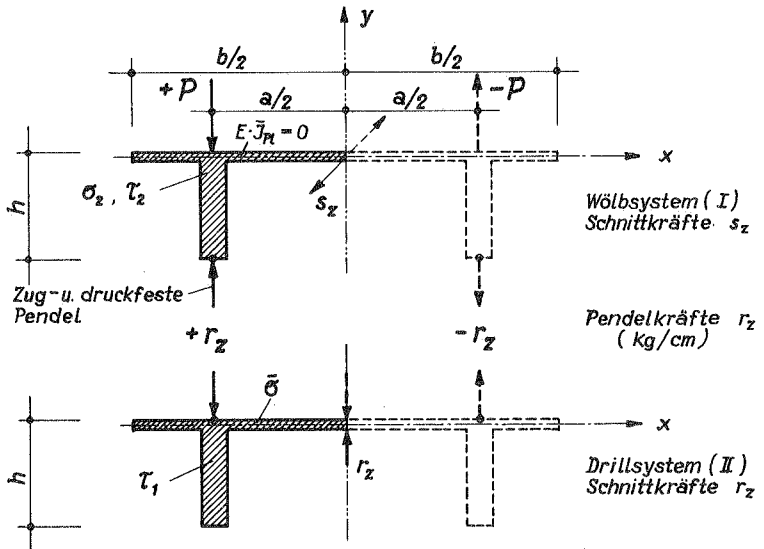
- a) Die Dehnungen am Wölbsystem längs der Linie $\odot - \odot$ müssen wegen Antimetrie zu Null werden (Normalspannungen $\sigma_{\odot} = 0$, vgl. Bild 2.5c), d.h.

$$\epsilon_{\odot\odot, I} = 0 \quad (2.9a)$$

- b) die lotrechten Verschiebungen $v_{z, I}$ der Stege des Wölbsystems müssen entgegengesetzt gleich sein



a) Längsschnitt



b) Querschnitt

Bild 2.7 Wölbsystem (I) und Drillsystem (II) durch zug- und druckfeste Pendel in den Stegachsen stetig miteinander verbunden.

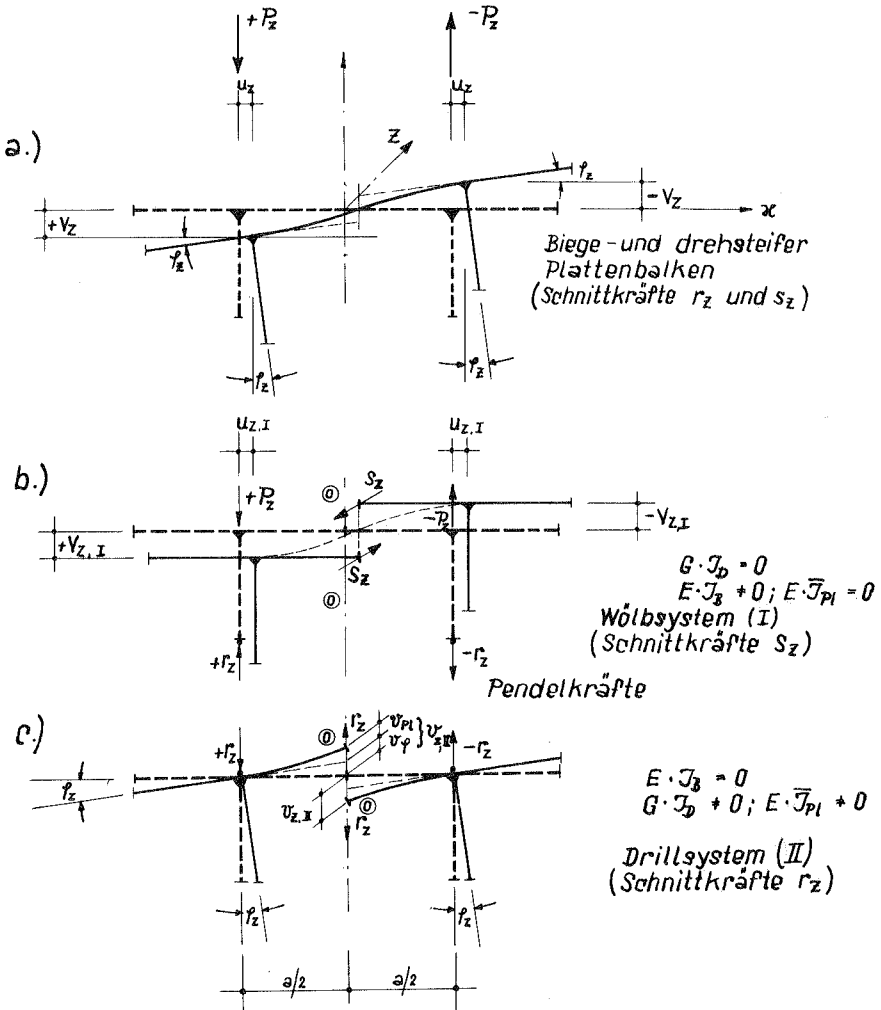


Bild 2.8 a) Formänderungen des zweistufigen Plattenbalkens infolge Torsionslast $\pm P$.
 b) Formänderungen am Wölbsystem (I) infolge $\pm P$, r_z und s_z .
 c) Formänderungen am Drillsystem (II) infolge $\pm r_z$.

den lotrechten Verschiebungen $v_{z,II}$ der Plattenränder der $\odot - \odot$ des Drillsystems (vgl. Bild 2.8b und 2.8c)

$$v_{z,I} = -v_{z,II} \quad (2.9b)$$

Sind diese beiden Bedingungen in allen Punkten z erfüllt, dann passen die Plattenränder längs $\odot - \odot$ am Wölb- und am Drillsystem zwangungsfrei aneinander. Man erkennt das sofort, wenn man beachtet, dass die Querschnittshälften des Wölbsystems wegen $G \cdot J_D = 0$ und $E \cdot \bar{J}_{Pl} = 0$ einer Drehung um den Schubmittelpunkt bzw. einer Biegung der Platte in Querrichtung keinen Widerstand entgegensetzen und dass die Querschnittshälften am Drillsystem wegen $E \cdot J_B = 0$ einer Verschiebung in lotrechter oder waagrechter Richtung keinen Widerstand entgegensetzen.

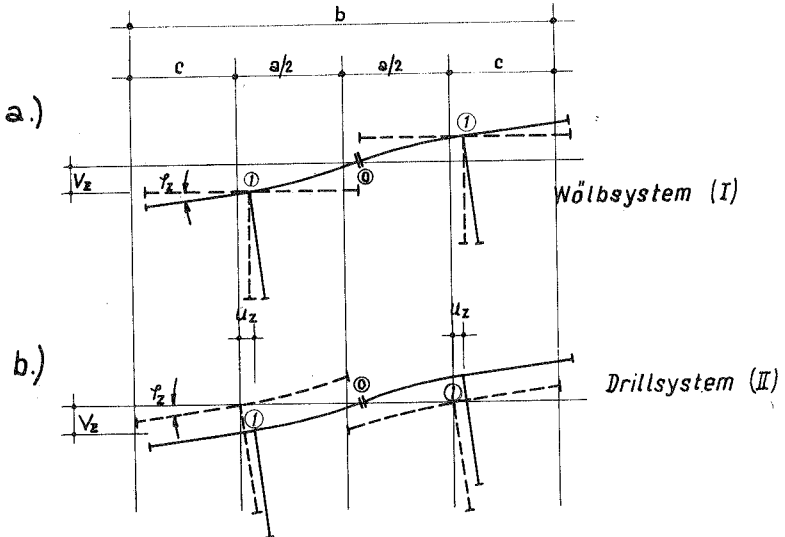


Bild 2.9 Zwängungsfreie Verformungen

- a) am Wölbsystem: Drehung jeder Querschnittshälfte um Punkt ①
Biegung der Platte zwischen den Stegen.
- b) am Drillsystem: Parallel-Verschiebung jeder Querschnittshälfte um $\pm v_z$ bzw. $+u_z$.

Damit lässt sich aber nicht nur der Plattenrand längs der Achse $\odot - \odot$, sondern auch die gesamte Querschnittsform der beiden Systeme an jeder Stelle z zur Deckung bringen. Wie in Bild 2.9a und 2.9b dargestellt ist, lässt sich die durch die Kräfte P_z , r_z und s_z parallel verschobene Querschnittshälfte des Wölbsystems zwanglos, entsprechend dem Drillsystem um den Winkel φ_z drehen. Weiter lässt sich die Platte zwischen den Stegen zwanglos der Quer-Biegelinie der Platte des Drillsystems anpassen. Entsprechend lässt sich die durch die Torsionsmomente $\bar{m} = r_z \cdot \frac{a}{2}$ gedrehte Querschnittshälfte des Drillsystems zwanglos entsprechend dem Wölbsystem um die Beträge u_z und v_z parallel verschieben. Damit passen aber die Querschnittshälften beider Systeme in jedem Querschnittspunkt z genau aufeinander.

Denkt man sich beide Systeme nun wieder ineinander geschoben und zu einem biege- und drehsteifen System mit

$$E \cdot J_B \neq 0$$

$$G \cdot J_D \neq 0 \quad (2.10)$$

$$E \cdot J_{Pl} \neq 0$$

vereinigt, dann sind für dieses biege- und drehsteife System alle Formänderungsbedingungen erfüllt. Aus der Überlagerung der Beanspruchungen am Wölb- und am Drillsystem, nachdem diese hinsichtlich ihrer Verformung in Übereinstimmung gebracht sind, ergeben sich also die tatsächlichen Beanspruchungen des biege- und drehsteifen Plattenbalkens.

2.3 Ersatz des Wölbsystems I durch das Biegesystem I

Setzt man voraus, dass jede Querschnittshälfte des Wölbsystems aus zwei schmalen Rechtecken gebildet wird, deren Mittellinien sich im Punkt ① bzw. ①' schneiden (vgl. Bild 2.5a), dann kann die Verwölbung in Richtung der Rechteckdicke vernachlässigt und der T-Querschnitt als praktisch wölbfrei angesehen werden. Der Schnittpunkt ① bzw. ①' ist dabei der Schubmittelpunkt.

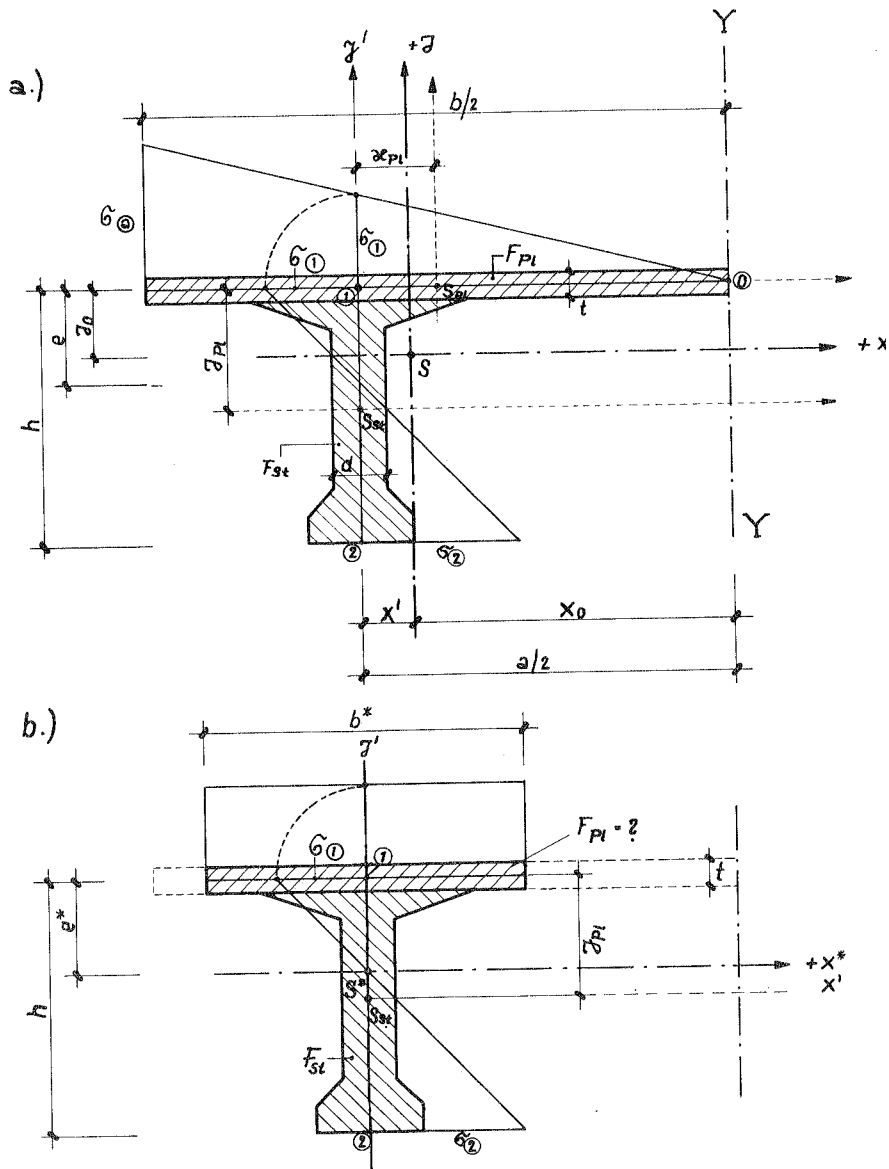


Bild 2.10 Verteilung der Normalspannungen $\sigma = \sigma_2$ entlang der Mittellinien

a) am System I (Wölbsystem)

b) am Ersatz-System (Biegesystem), Querschnitt symmetrisch zur Achse y' .

Bei grösserer Dicke der zwei Rechtecke oder bei Querschnitten wie in Bild 2.10a, die sich nur genähert aus zwei Rechtecken zusammensetzen, ist die Verwölbung in Richtung der Rechteckdicke wohl grösser, im Vergleich zur Verwölbung eines zweiseitigen Plattenbalkens jedoch noch immer vernachlässigbar gering.

Man kann deshalb auch einsteigige Plattenbalkenquerschnitte nach Bild 2.10a, die den üblichen Abmessungsverhältnissen im Betonbau entsprechen, noch ohne grossen Fehler für die folgenden Überlegungen als wölbfrei betrachten und den Punkt ① als Schubmittelpunkt annehmen.

Jede Querschnittshälfte des Wölbsystems wird nun gemäss Bild 2.11 durch die Kräfte P_z bzw. p_z und r_z in der Stegachse und die Längsschubkräfte s_z in der Plattenachse nur auf Biegung beansprucht, da die Kräfteebenen durch den Schubmittelpunkt ① gehen. Da der Biegemomenten-Vektor jedoch nicht mit einer der Hauptachsen des einsteigigen Plattenbalkenquerschnittes zusammenfällt, liegt der Fall der 'drillungsfreien, schiefen Biegung' vor. Die Biegemomente infolge P_z , p_z , r_z und s_z , bezogen auf ein rechtwinkeliges, durch den Flächenschwerpunkt S gehendes Achsenkreuz werden mit M_x (um die x-Achse drehend) und M_y (um die y-Achse drehend) bezeichnet. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ für den betrachteten Balkenabschnitt $z = z_1$ bis $z = l$ (Bild 2.11) folgt die in Punkt ② der Querschnittsfläche in z_1 resultierende Normalkraft:

$$N = \int_{z_1}^l s_z \cdot dz \quad (2.11)$$

Damit kann man für die Biegemomente schreiben:

$$\begin{aligned} M_x &= -M_I + N \cdot y_0 \\ M_y &= -N \cdot x_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierin ist M_I das um die x-Achse drehende Moment infolge der Steglasten P , p , r (Querlasten). Der Fusszeiger z ist bei den Querschnitts-Kräften M und N zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen. ($M_I > 0$ angenommen, d.h. unten Zug).

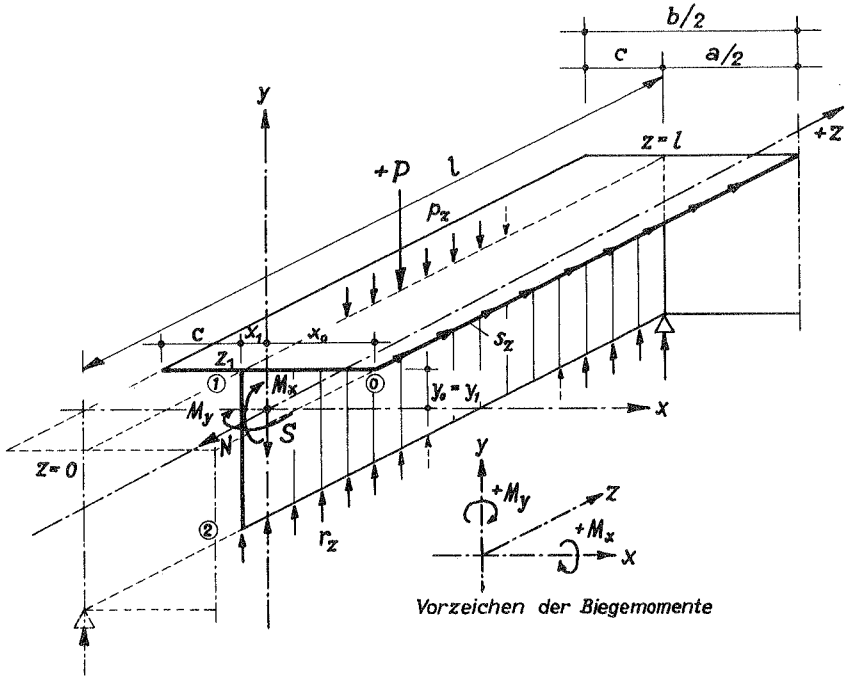


Bild 2.11 Biegemomente M_x und M_y , Normalkraft N bezogen auf ein rechtwinkeliges Achsenkreuz durch den Flächenschwerpunkt S einer Querschnittshälfte.

Bezeichnet man mit J_x und J_y die Trägheitsmomente in Bezug auf ein durch den Schwerpunkt S gehendes, beliebiges rechtwinkeliges Achsenkreuz und mit J_{xy} das zugehörige Zentrifugalmoment einer Querschnittshälfte in Schnitt z , dann kann die Längsspannung infolge Biegung in einem beliebigen Querschnittspunkt a bekanntlich ohne Kenntnis der Hauptachsen wie folgt bestimmt werden (vergl. z.B. [22])

$$\sigma_a = \frac{M'_x}{J_x} \cdot y_a - \frac{M'_y}{J_y} \cdot x_a \quad (2.13)$$

(Zugspannung positiv bezeichnet!)

Dabei ist:

$$M'_x = \frac{M_x + M_y \cdot J_{xy}/J_y}{1 - J_{xy}^2/J_x \cdot J_y} \quad (2.14)$$

und

$$M'_y = \frac{M_y + M_x \cdot J_{xy}/J_x}{1 - J_{xy}^2/J_x \cdot J_y} \quad (2.14)$$

Da die Spannungen im Punkt \odot des Querschnittes mit den Koordinaten x_0 und y_0 gemäss Bild 2.10a verschwinden müssen, gilt folgende Beziehung:

$$\sigma_{x_0, y_0} + \frac{N}{F} = 0 \quad (2.15)$$

oder mit (2.13)

$$\frac{M'_x}{J_x} \cdot y_0 - \frac{M'_y}{J_y} \cdot x_0 + \frac{N}{F} = 0 \quad (2.16)$$

Setzt man in die Gleichung (2.16) die Biegemomente M'_x und M'_y aus (2.14) unter Beachtung von (2.12) ein, dann erhält man eine Beziehung für die Normalkraft N :

$$N = M_I \cdot \frac{(y_0 \cdot J_y - x_0 \cdot J_{xy})}{(y_0^2 \cdot J_y + x_0^2 \cdot J_x - 2x_0 \cdot y_0 \cdot J_{xy} + J_x \cdot J_y / F - J_{xy}^2 / F)} \quad (2.17)$$

Die Längsspannungsverteilung über dem Querschnitt liegt geometrisch fest, sobald die Spannungen in Punkt $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ oder zumindest die Lage des Spannungs-Nullpunktes in der Stegachse bekannt sind. Bezeichnet man den Abstand des Spannungs-Nullpunktes von der Plattenachse entsprechend Bild 10a mit e , dann gilt entsprechend Gleichung (2.16) für die Spannung in diesem Punkt mit den Koordinaten $(x_0 - a/2)$ und $(y_0 - e)$:

$$\frac{M'_x}{J_x} \cdot (y_0 - e) - \frac{M'_y}{J_y} \cdot (x_0 - a/2) + \frac{N}{F} = 0 \quad (2.18)$$

Zieht man hiervon die Gleichung (2.16) ab, so bleibt die Beziehung:

$$\frac{M'_x}{J_x} \cdot e - \frac{M'_y}{J_y} \cdot \frac{a}{2} = 0$$

woraus der Abstand e des Spannungs-Nullpunktes folgt:

$$e = \frac{M'_y}{M'_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{a}{2} \quad (2.19)$$

Setzt man in (2.19) für M'_y und M'_x die Werte aus (2.14) ein, erhält man unter Beachtung von (2.12) und (2.17) für e die einfache, nur noch von den Querschnittswerten und nicht mehr von den Momenten abhängige Beziehung:

$$e = \frac{F \cdot x_o \cdot y_o + J_{xy}}{F \cdot x_o^2 + J_y} \cdot \frac{a}{2} \quad (2.20)$$

Trennt man den Querschnitt F einer Hälfte des Wölbsystems (Bild 10a) in die beiden Querschnittsteile Steg und Platte mit den Flächen F_{St} und F_{Pl} , dann kann der Zähler des Ausdruckes für e in Gleichung (2.20) noch umgeformt werden.

Man erhält mit den Bezeichnungen von Bild 2.10a für:

$$y_o = \frac{y_{Pl} \cdot F_{St}}{F_{St} + F_{Pl}} \quad (2.21a)$$

$$x_o = \frac{a}{2} - x' = \frac{a}{2} - \frac{x_{Pl} \cdot F_{Pl}}{F_{St} + F_{Pl}}$$

Das Zentrifugalmoment J_{xy} setzt sich aus den Anteilen zusammen:

$$J_{xy} = J_{xy,Pl} + J_{xy,St} + x_{Pl} \cdot y_{Pl} \cdot \frac{F_{St} \cdot F_{Pl}}{F_{St} + F_{Pl}} \quad (2.21b)$$

Hierbei bedeuten:

y_{Pl} = lotrechter Abstand des Plattenschwerpunktes S_{Pl}
vom Stegschwerpunkt S_{St}

x_{Pl} = waagerechter Abstand des Plattenschwerpunktes S_{Pl}
vom Stegschwerpunkt S_{St}

$J_{xy,Pl}$ = Zentrifugalmoment der Platte i.B. auf ihren Schwerpunkt S_{Pl}

$J_{xy,St}$ = Zentrifugalmoment des Steges i.B. auf seinen Schwerpunkt S_{St} .

(2.21a) und (2.21b) in den Zähler von (2.20) eingesetzt ergibt:

$$(F \cdot x_0 \cdot y_0 + J_{xy}) \cdot \frac{a}{2} = \quad (2.21c)$$

$$(y_{Pl} \cdot F_{St} \cdot \frac{a}{2} + J_{xy,St} + J_{xy,Pl}) \frac{a}{2}$$

Die Zentrifugalmomente $J_{xy,Pl}$ und $J_{xy,St}$ werden bei einfach symmetrischem Platten- bzw. Stegquerschnitt wie in Bild 2.10a zu Null. Bei unsymmetrischen Platten- bzw. Stegquerschnitten sind sie vernachlässigbar klein. Es ist also in allen praktischen Fällen:

$$(J_{xy,Pl} + J_{xy,St}) \cong 0 \quad (2.21d)$$

Damit erhält man für den Zähler von Gleichung (2.20) nur noch:

$$(F \cdot x_0 \cdot y_0 + J_{xy}) \cdot \frac{a}{2} = y_{Pl} \cdot F_{St} \cdot \frac{a^2}{4} \quad (2.21e)$$

Der Nenner von (2.20) stellt das Trägheitsmoment einer Querschnittshälfte in Bezug auf die durch \odot gehende lotrechte Symmetrieachse Y (Bild 2.10a) dar:

$$F \cdot x_0^2 + J_y = \frac{1}{2} \cdot J_Y \quad (2.22)$$

(J_Y = Trägheitsmoment des Gesamt-Querschnittes i.B. auf Y -Achse)

Mit Gleichung (2.21e) und Gleichung (2.22) kann man für den Abstand des Spannungsnulldpunktes also auch schreiben:

$$e = \frac{y_{Pl} \cdot F_{St} \cdot 0,5 \cdot a^2}{J_Y} \quad (2.23)$$

Mit diesem Ausdruck kann der Spannungsnulldpunkt am Wölbsystem sehr einfach bestimmt werden. Er ist im allgemeinen nicht mit dem Schwerlinienabstand y_0 identisch.

Mit dem Abstand e ist die Verteilung der Längsspannungen entlang der Mittellinie des Querschnittes bekannt. Die noch unbekanntem Absolutbeträge der Längsspannungen hängen von den Steglasten P_z bzw. p_z und den ebenfalls als Steglasten aufgefassten Kräften r_z ab.

Denkt man sich nun den Steg des Wölbsystems (Bild 2.10a) von der Platte abgetrennt, so greifen an ihm gemäss Bild 2.11 die Lasten P_z , p_z und r_z sowie die zwischen Steg und Platte wirkenden Schnittkräfte an. Die Steglängsspannungen σ_z hängen also ausser von den bekannten Stegabmessungen und Steglasten nur noch von diesen Schnittkräften ab. (In Bild 2.11 nicht dargestellt).

Man kann sich nunmehr einen einsteigigen, mittelsymmetrischen Plattenbalken vorstellen, dessen Steg hinsichtlich der Abmessungen und der Lasten dem Steg des Wölbsystems gleicht (Bild 2.10b), dessen Plattenquerschnitt F_{Pl}^* aber so bestimmt ist, dass sich Schnittkräfte zwischen Steg und Platte ergeben, die zusammen mit den Steglasten die gleichen Längsspannungen σ_z hervorrufen wie in der Stegachse des Wölbsystems. Da dieser mittelsymmetrische Plattenbalken - im Folgenden 'Ersatzsystem' genannt - durch die Steglasten P_z , p_z und r_z nur auf Biegung um seine horizontale Schwerachse x^* beansprucht wird, muss der Abstand e^* der Schwerlinie bzw. Spannungs-Null-Linie gleich dem Abstand e am Wölbsystem sein (vgl. Bild 2.10a und 2.10b).

Mit dem noch unbekanntem Plattenquerschnitt F_{Pl}^* des 'Ersatzsystems' kann der Schwerpunktsabstand e^* wie folgt ausgedrückt werden:

$$e^* = \frac{J_{Pl} \cdot F_{St}}{F_{St} + F_{Pl}^*} \quad (2.24)$$

Aus der Gleichsetzung von (2.23) und (2.24) folgt nun der gesuchte Plattenquerschnitt F_{Pl}^* des Ersatzsystems zu:

$$F_{Pl}^* = \frac{2 \cdot J_Y}{a^2} - F_{St} \quad (2.25)$$

Führt man für das Trägheitsmoment des Gesamt-Querschnittes J_Y in Bezug auf die lotrechte Symmetrieachse die beiden Anteile aus

Steg und Platte ein:

$$J_Y = J_{Y,Pl} + J_{Y,St}$$

und setzt für den Steganteil

$$J_{Y,St} = 2J_{y',St} + 2.F_{St} \cdot (0,5a)^2$$

wobei $J_{y',St}$ das Trägheitsmoment eines Steges in Bezug auf seine lotrechte Schwerachse bedeutet, dann kann für (2.25) auch geschrieben werden:

$$F_{Pl}^* = \frac{2 \cdot J_{Y,Pl} + 4 \cdot J_{y',St} + F_{St} \cdot a^2}{a^2} - F_{St}$$

oder

$$F_{Pl}^* = \frac{J_{Y,Pl} + 2J_{y',St}}{0,5 \cdot a^2} \quad (2.26)$$

Die ideelle Plattenfläche F_{Pl}^* am Ersatz-System I ergibt sich also aus den Trägheitsmomenten der ganzen Platte und der beiden Stege, jeweils bezogen auf ihre lotrechten Schwerachsen (bei Platte: Symmetrie-Achse Y , bei Stegen: lotrechte Schwerachse y') geteilt durch die Hälfte des Quadrates des Stegabstandes a . Aus $F_{Pl}^* = b^* \cdot t$ folgt dann (Bild 2.10b) :

$$b^* = \frac{J_{Y,Pl} + 2J_{y',St}}{0,5t \cdot a^2} \quad (2.27)$$

Bei nicht zu dicken Stegen wird das Trägheitsmoment eines Steges $J_{y',St}$ in Bezug auf seine lotrechte Schwerachse stets klein sein im Verhältnis zum Trägheitsmoment $J_{Y,Pl}$ der ganzen Platte i.B. auf die lotrechte Symmetrieachse. Vernachlässigt man daher $J_{y',St}$ gegenüber $J_{Y,Pl}$, dann wird noch einfacher:

$$b^* = \frac{J_{Y,Pl}}{0,5 \cdot a^2 t} \quad (2.27a)$$

Bei einer rechteckigen Platte mit der Breite b und der Dicke t ist $J_{Y,Pl} = b^3 \cdot t/12$. Damit folgt aus (2.27a) die ideelle

Plattenbreite am Ersatz-System:

$$b^* = b^3 / 6a^2 \quad (2.27b)$$

Auf diesen einfachen Zusammenhang wurde schon von Resinger [13] hingewiesen.

Mit b^* aus (2.27b) bzw. genauer aus (2.27) liegt der Querschnitt des Ersatz-Systems I fest. Mit dem Schwerpunktsabstand e^* aus (2.24) erhält man das Biege-Trägheitsmoment J^* am Ersatz-System, bezogen auf die horizontale Schwerachse x^* , am einfachsten aus:

$$J^* = J_{St} + e^* \cdot y_{P1} \cdot F_{P1}^* + J_{P1}^* \quad (2.28)$$

Hierbei ist $J_{P1}^* = b^* \cdot t^3 / 12$ in den meisten Fällen vernachlässigbar klein im Verhältnis zu den beiden ersten Summanden. (J_{St} bezogen auf horizontale Schwerachse x' des Steges!)

2.4 Beanspruchungen und Verformungen am System I (Wölbsystem)

Aus dem in z-Richtung veränderlichen Biegeträgheitsmoment J^* am Ersatz-System ergeben sich in bekannter Weise die Widerstandsmomente für die Querschnittspunkte ① und ②, Bild 2.10

$$W_{①}^* = J^* / e^* \quad \text{bzw.}$$

$$W_{②}^* = J^* / (h - e^*)$$

Daraus folgen die Normalspannungen σ_2 , die mit denen in den Punkten ① und ② des Wölbsystems identisch sind:

$$\begin{aligned} \sigma_{2,①} &= \sigma_{①} = - M_I / W_{①}^* \quad \text{bzw.} \\ \sigma_{2,②} &= \sigma_{②} = + M_I / W_{②}^* \end{aligned} \quad (2.29a)$$

(Der Index 2 zur Kennzeichnung der Wölbwirkung ist im Folgenden bei σ und τ weggelassen.)

wobei mit M_I wieder die Biegemomente infolge der Steglasten P_z bzw. p_z und r_z bezeichnet sind.

Die Ermittlung der Spannungen am Wölbsystem längs der Platten-

bzw. Stegmittellinie wird damit sehr einfach. Am Plattenrand ist wegen der geradlinigen Verteilung (Bild 2.10a) :

$$\sigma_{\text{a}} = \sigma_{\text{①}} \cdot \frac{b}{a} \quad (2.29b)$$

Mit den Spannungen $\sigma_{\text{③}} = 0$, $\sigma_{\text{①}}$ und $\sigma_{\text{②}}$ liegt das Spannungsgefälle in jeder Richtung des Querschnittes fest.

Bezeichnet man mit σ_{St} die Spannung in einem beliebigen Punkt der Stegachse, so folgen die Spannungen an den Stegrändern aus:

$$\sigma_{\text{St,R}} = \sigma_{\text{St}} \pm \sigma_{\text{①}} \cdot \frac{d}{a} \quad (2.29c)$$

Entsprechend folgen mit den Spannungen σ_{Pl} in einem beliebigen Punkt der Plattenachse die Spannungen an den Plattenrändern:

$$\sigma_{\text{Pl,R}} = \sigma_{\text{Pl}} \pm \sigma_{\text{①}} \cdot \frac{t}{2e^*} \quad (2.29d)$$

(Für den Bereich des Punktes ③ gilt die Ermittlung der Plattenrandspannungen nach (2.29d) nicht mehr, da hier die Verträglichkeitsbedingungen nur für die Punkte in der Plattenachse ③ - ③ erfüllt sind. Das ist jedoch praktisch ohne Bedeutung, da hier die Längsspannungen sowieso nahezu Null sind!).

Aus (2.27) ist zu ersehen, dass die Plattenbreite b^* am Ersatzsystem und damit auch die Spannungen $\sigma_{\text{①}}$ und $\sigma_{\text{②}}$ bei sonst gleichen Abmessungen wesentlich vom Abstand a der Stege abhängen. Für den grösstmöglichen Stegabstand, nämlich $a = b$ ist $b^* \cong b/6$. Wird der Stegabstand kleiner, so wächst die ideelle Plattenbreite und erreicht bei $a = b/\sqrt{3}$ den Wert $b^* = b/2$. In Bild 2.12 ist die ideelle Plattenbreite b^* in Abhängigkeit vom Verhältnis Plattenbreite b zu Stegabstand a dargestellt. Man erkennt, dass die ideelle Plattenbreite b^* bei den praktisch vorkommenden Verhältnissen zwischen $1/6 \cdot b$ und $4/6 \cdot b$ liegen kann.

Aus (2.27) folgt, dass sich bei einem Plattenbalken mit veränderlichem Stegquerschnitt, aber konstantem Plattenquerschnitt auch die ideelle Plattenbreite b^* ändert. Jedoch ist diese Änderung in den meisten Fällen ohne Bedeutung, da $2 \cdot J_{y',\text{St}} \ll J_{y,\text{Pl}}$ ist.

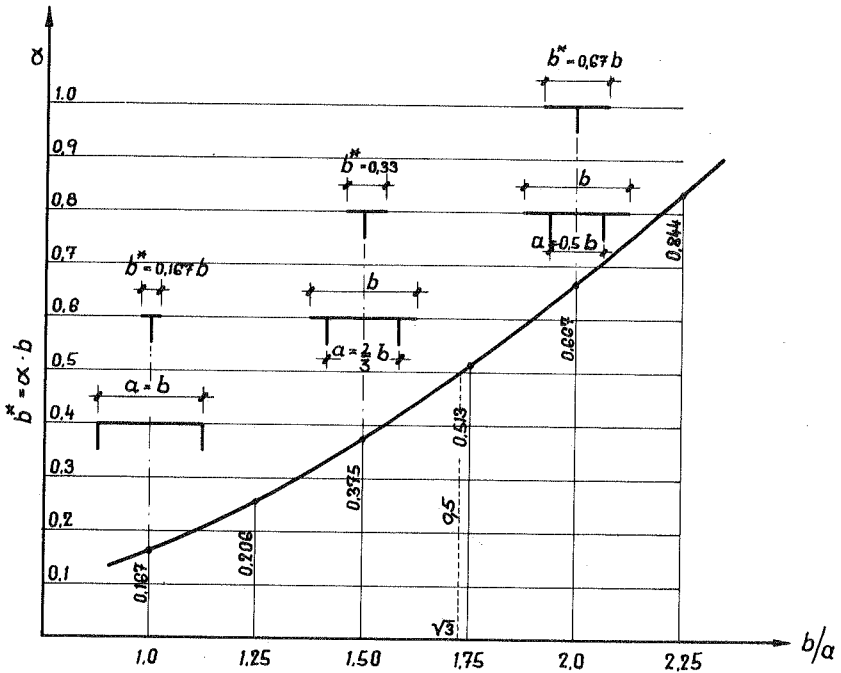


Bild 2.12 Abhängigkeit der ideellen Plattenbreite b^* des Ersatz-Systemes I vom Verhältnis Plattenbreite b zu Stegabstand a des zwei-stegigen Plattenbalkens

Obige Ableitungen haben gezeigt, dass die Längsspannungen σ am Wölbsystem mit den bekannten eingliedrigen Spannungsformeln des Biegebalkens (2.29a) bestimmt werden können und zwar für jede beliebige Stegbelastung, ohne dass hierzu die statisch unbestimmten Schnittkräfte s gemäss Bild 2.5b bekannt sein müssen. Das gleiche gilt auch für die den Längsspannungen σ zugeordneten Schubspannungen τ .

Für den Schubfluss im Steg gilt die bekannte Beziehung:

$$T_{St} = \frac{Q_I \cdot S_1^*}{J^*} \quad (2.30)$$

bzw. die Schubspannung

$$\tau_{St} = T_{St}/d \quad (2.30a)$$

Dabei ist Q_I die Querkraft am Ersatz-System I (Biegesystem) infolge der Steglasten P_Z , p_Z und r_Z , und S_1^* das statische Moment des abgeschnittenen Querschnittsteiles in Bezug auf die horizontale Schwerlinie (Bild 2.13a). Für die Ermittlung des Schubflusses T_{Pl} in der Platte wird diese allein - d.h. ohne die Stege, aber mit ihren tatsächlichen Abmessungen $b \cdot t$ betrachtet.

Bezeichnet man mit S_2 das statische Moment des durch den betrachteten Schnitt abgetrennten Plattenteils in Bezug auf die Y-Achse (Bild 2.13b) - ohne Berücksichtigung der Stege -, dann erhält man den Schubfluss bzw. die Schubspannungen für Plattenschnitte im Bereich der Auskragungen, also *a u s s e r h a l b* der Stege zu:

$$T_{Pl} = \frac{2 \cdot e^* \cdot Q_I}{a \cdot J^*} \cdot S_2 \quad (2.31)$$

bzw.

$$\tau_{Pl} = T_{Pl}/t \quad (2.31a)$$

Für Schnitte zwischen den Stegen muss noch der aus den Stegen abgegebene Schubfluss berücksichtigt werden. In diesem Falle wird:

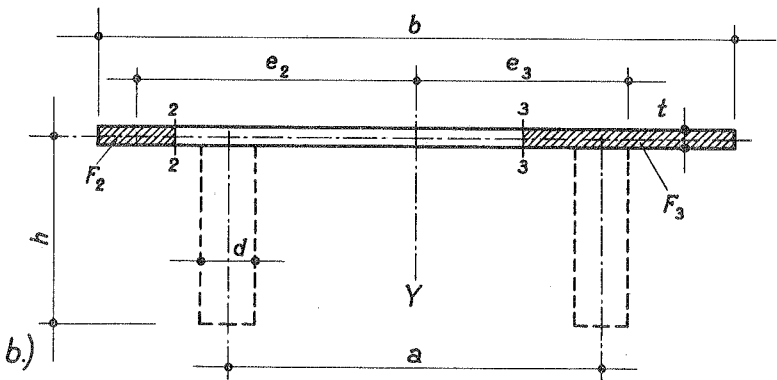
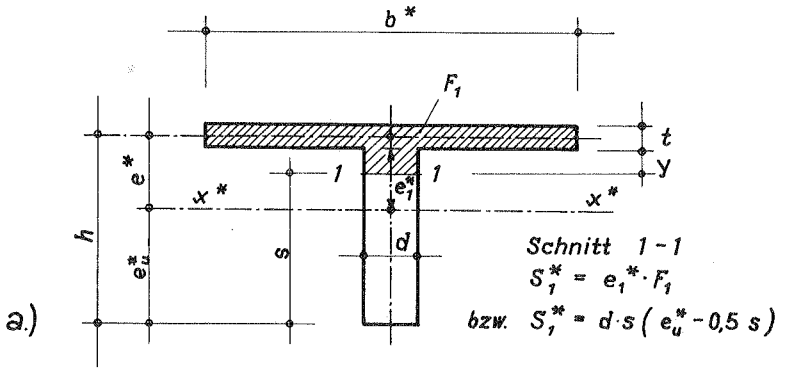
$$T_{Pl} = \frac{2 \cdot e^* \cdot Q_I}{a \cdot J^*} \left(S_3 - \frac{J_{Y,Pl}}{a} \right) \quad (2.32)$$

bzw.

$$\tau_{Pl} = T_{Pl}/t \quad (2.32a)$$

Die Schubspannungsverteilung ist in Bild 2.5d dargestellt.

Damit sind alle Beanspruchungen am Wölbsystem infolge von Steglasten P_Z , p_Z und r_Z bekannt.



Schnitt 2-2 $S_2 = F_2 \cdot e_2$ (außerhalb der Stege)

Schnitt 3-3 $S_3 = F_3 \cdot e_3$ (innerhalb der Stege)

Bild 2.13 Statisches Moment S^* zur Ermittlung der Schubspannung τ_2 im Steg (Schnitt 1-1) und statische Momente S zur Ermittlung der Schubspannungen τ_2 in der Platte (Schnitte 2-2 und 3-3).

Die lotrechten Stegverschiebungen v_I am Wölbsystem lassen sich nun ebenfalls am Ersatzsystem I bestimmen. Da die Steg-Längsspannungen σ_z am Ersatzsystem I (Biegesystem) die gleichen sind wie am System I (Wölbsystem) - gleiche Belastung vorausgesetzt - sind auch die Längs-Dehnungen und damit die lotrechten Ausbiegungen v_I der Stege am System I (Wölbsystem) dieselben wie am Ersatzsystem I (Biegesystem). Man ermittelt die Ausbiegungen v_I am Ersatzsystem zweckmässig nach Mohr als Momente eines Balkens, der mit den Streckenlasten $M_I/E \cdot J^*$ belastet ist. Hierauf wird in 3.1 noch näher eingegangen.

Mit den Spannungen am Ersatz-System I können auch die waagerechten Stegverschiebungen des Wölbsystems u_I (vgl. Bild 2.8) angegeben werden.

Gemäss (2.29a) ist die Längsspannung in Punkt ①

$$\sigma_{①} = M_I \cdot e^* / J^*$$

Betrachtet man die Platte für sich allein, dann ergibt sich in Punkt ① die Spannung:

$$\sigma_{①} = M_{Y,Pl} \cdot \frac{a}{2} / J_Y$$

Dabei ist $M_{Y,Pl}$ ein um die Y-Achse der Platte drehendes Moment und J_Y wieder das Trägheitsmoment der Platte in Bezug auf die Y-Achse.

Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $\sigma_{①}$ und Erweiterung mit $1/E$ folgt:

$$\frac{M_{Y,Pl}}{E J_Y} = \frac{M_I}{E \cdot J^*} \cdot \frac{2e^*}{a}$$

Fasst man $M_{Y,Pl}/E \cdot J_Y$ wieder als Streckenlast eines Balkens auf, so ergeben die hierdurch hervorgerufenen Balkenmomente die waagerechten Ausbiegungen der Platte u_I . Bei konstantem Querschnitt wird die waagerechte Ausbiegung der Platte der lotrechten Ausbiegung des Steges proportional. Man erhält

$$u_I = v_I \cdot \frac{2e^*}{a}$$

2.5 Beanspruchungen und Verformungen am System II (Drillsystem)

bei Steglasten $\pm P$ am Wölbsystem auf jede Querschnittshälfte des Drillsystems die in z-Richtung veränderlichen Torsionsmomente (gedachte Lastmomente) $\bar{m} = 0,5 \cdot a \cdot r_z$. Daraus folgen die Querschnitts-Torsionsmomente, wieder bezogen auf eine Querschnittshälfte:

$$M_T = M_{T0} - \int_0^z \bar{m} \cdot dz \quad (2.33)$$

(Bestimmung von M_{T0} siehe Bild 3.4)

Mit J_D als Torsions- oder Drillwiderstand einer Hälfte erhält man die Schubspannungen infolge freier (St.Venant'scher) Torsion am Drillsystem in bekannter Weise, z.B. nach Beyer [23] aus:

$$\tau_1 = \Psi_1 \frac{M_T}{J_D} \cdot d \quad (\text{Steg, Dicke } d) \quad \text{bzw.} \quad (2.34)$$

$$\tau_1 = \Psi_1 \frac{M_T}{J_D} \cdot t \quad (\text{Platte, Dicke } t)$$

Dabei sind mit Ψ_1 die von den Abmessungsverhältnissen abhängigen Korrekturbeiwerte bezeichnet, die bei Rechtecken zwischen 0,675 und 1,00 liegen. Der Drillwiderstand J_D kann bei Rechtecken oder aus Rechtecken zusammengesetzten Querschnitten ermittelt werden aus:

$$J_D = \sum \Psi_3 \cdot b^3 \cdot h \quad (2.35)$$

wobei der Beiwert Ψ_3 zwischen 0,14 (Quadrat, $h/b = 1$) und 0,333 (Rechteck, $h/b = \infty$) liegt.

Die Drehwinkel φ , um die sich jede Querschnittshälfte des Drillsystems um den Schubmittelpunkt dreht, ergeben sich aus

$$\varphi_z = \int_0^z \frac{M_T}{G \cdot J_D} dz$$

Die Querbiegespannungen in der Platte folgen aus

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\bar{m}_x}{\bar{J}_{Pl}} \cdot \frac{t}{2} \quad (2.36)$$

wobei \bar{m}_x das Biegemoment an der Stelle x infolge der Kräfte r_z am Plattenrand $\odot - \odot$ und \bar{J}_{Pl} das Biegeträgheitsmoment der Platte pro Längeneinheit i.B. auf die zur z -Achse parallele Mittellinie darstellt (Bild 2.6).

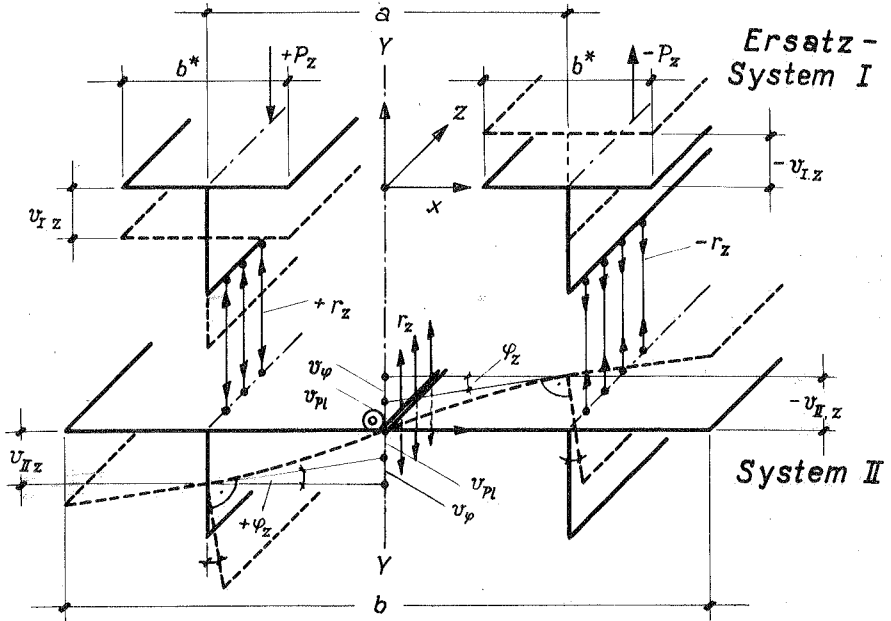
3. Ermittlung der Schnittkräfte bei veränderlichem, elastisch ausgesteiftem Querschnitt

3.1 Ableitung der Differentialgleichung 4.Ordnung für M_r und ihre Deutung, Schnittkräfte und Verformungen

Im vorstehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass alle Beanspruchungen eines zweistegigen biege- und drehsteifen Plattenbalkens, der durch die antimetrischen Steglasten $\pm P_z$ bzw. $\pm p_z$ belastet wird, ermittelt werden können als Beanspruchungen zweier gedachter Systeme, von denen das eine nur eine drillungsfreie schiefe Biegung (System I = Wölbsystem), das andere nur eine biegungsfreie Drillung (System II = Drillsystem) erfährt. Um die Beanspruchungen bei drillungsfreier schiefer Biegung möglichst einfach, nämlich wie bei einfacher Querkraftbiegung ermitteln zu können, wurde für das System I (Wölbsystem) ein Ersatz-System I (Biegesystem) eingeführt. Die Systeme I und II sind durch Pendel in den Stegachsen miteinander verbunden, in denen die statisch unbestimmten Kräfte r_z auftreten, wenn am System I die antimetrischen Steglasten angreifen. In Bild 3.1 sind die beiden Systeme nochmals übereinander im Querschnitt dargestellt, wobei oben das Ersatzsystem I (= Biegesystem) angenommen ist, bei dem unter Voraussetzung gleicher Belastung $\pm P_z$ bzw. $\pm p_z$ die gleichen Steg-Längsspannungen σ_2 auftreten wie in der Stegachse des Systems I (= Wölbsystem), vgl. Bild 2.10b.

Im Folgenden werden nun die Pendelkräfte r_z bzw. die hieraus resultierenden Momente unter Berücksichtigung veränderlicher Steg- und Plattenquerschnitte ermittelt.

Das Ersatz-System I ist an den Enden auf starren Stützen frei drehbar gelagert, das System II an den Enden durch die in Querrichtung biegestarren aber drehweichen Auflagerquerträger ausgesteift, die ebenfalls starr unterstützt sind (vgl. Bild 2.7).



Ersatz-System I = Biegesystem

Biegesteifigkeit des Ersatz-Querschnitts:

$$B_z = E \cdot J_z^*$$

keine Verdrehung

keine Querbiegung der Platte

System II = Drillsystem

Drehsteifigkeit einer Querschnittshälfte:

$$D_z = G \cdot J_{D,z}$$

Biegesteifigkeit der Platte (quer):

$$\bar{B} = E \cdot \frac{J_{Pl}}{(1 - \mu^2)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{B}_1$$

Bild 3.1 Belastung und Verformung der Systeme I und II infolge P_z und r_z in Stegachse.

Das Plattenmoment im Querschnitt z an der Stelle x wird also:

$$\bar{m}_{z,x} = r_{z,II} \cdot x = r_z \cdot x \quad (3.10)$$

Aus (3.8) folgt damit die lotrechte Verschiebung bei konstanter Plattensteifigkeit in x-Richtung:

$$v_{Pl} = - \frac{r_z \cdot a^3}{24 \cdot \bar{B}} \quad (3.11)$$

Bei in x-Richtung veränderlicher Plattensteifigkeit kann eine konstante 'ideelle' Biegesteifigkeit \bar{B}_1 eingeführt werden, bei welcher sich die gleiche Verschiebung v_{Pl} ergibt wie bei veränderlicher Steifigkeit, so dass man allgemein auch schreiben kann:

$$v_{Pl} = - \frac{r_z \cdot a^3}{\bar{B}_1 \cdot 24} \quad (3.11a)$$

Wenn die lotrechten Verschiebungen v_z der Systeme I und II gleich sein sollen, dann müssen auch ihre zweiten Ableitungen einander gleich sein. Es gilt also:

$$v''_{I,z} = - v''_{II,z} = - (v''_{\varphi} + v''_{Pl})_{II} \quad (3.12)$$

Nun ist gemäss (3.7)

$$v''_{\varphi} = - 0,5 a \cdot \varphi''_z \quad (3.13)$$

Bezeichnet man das Torsionsmoment am Drillsystem (II), hervorgerufen durch die Belastungsmomente $\bar{m}_z = r_z \cdot \frac{a}{2}$ mit $M_{T,z}$, so gilt bei freier Torsion:

$$\varphi'_z = \frac{M_{Tz}}{D_z} \quad (3.14)$$

Daraus folgt:

$$\varphi''_z = \frac{M'_{Tz}}{D_z} - \frac{M_{Tz} \cdot D'_z}{D_z^2} \quad (3.15)$$

und gemäss (3.13):

$$v''_{\varphi} = - 0,5a \left(\frac{M'_{Tz}}{D_z} - \frac{M_{Tz} \cdot D'_z}{D_z^2} \right) \quad (3.16)$$

Hierbei ist

$$M_{Tz} = C - \int_0^z \bar{m}_z \cdot dz$$

Schreibt man für $C = C_{II} \cdot \frac{a}{2}$ und für $\bar{m}_z = r_z \cdot \frac{a}{2}$, so erhält man

$$M_{Tz} = \frac{a}{2} \left(C_{II} - \int_0^z r_z \cdot dz \right) \quad (3.17)$$

Am Biegesystem (I) ergeben sich infolge der Pendelkräfte r_z die Querkräfte:

$$Q_{rz} = C_I - \int_0^z r_z \cdot dz \quad (3.18)$$

Wären die Integrationskonstanten in (3.17) und (3.18) einander gleich, also $C_{II} = C_I$, so könnte unter Beachtung von (3.9) für das Querschnittstorsionsmoment M_{Tz} auch geschrieben werden:

$$M_{Tz} = - \frac{a}{2} \cdot Q_{rz} \quad (3.19)$$

(II) (I)

Nun ist aber gemäss Bild 3.2(a) die Integrationskonstante C_I mit der Querkraft Q am linken Auflager des mit den Pendelkräften r_z belasteten Biegebalkens (I) identisch:

$$C_I = Q_{r,0} = M'_{r,0} \quad (z = 0) \quad (3.20)$$

Die Integrationskonstante C_{II} entspricht dagegen dem Querschnitt Torsionsmoment M_T am linken Auflager des Torsionsbalkens (II) infolge der Belastungsmomente \bar{m}_z . Wie in Bild 3.3 ausführlich dargestellt, folgt aus der Formänderungsbedingung, dass bei drehstarrem rechten Auflager der Drehwinkel am linken Auflage $\varphi = 0$ sein muss:

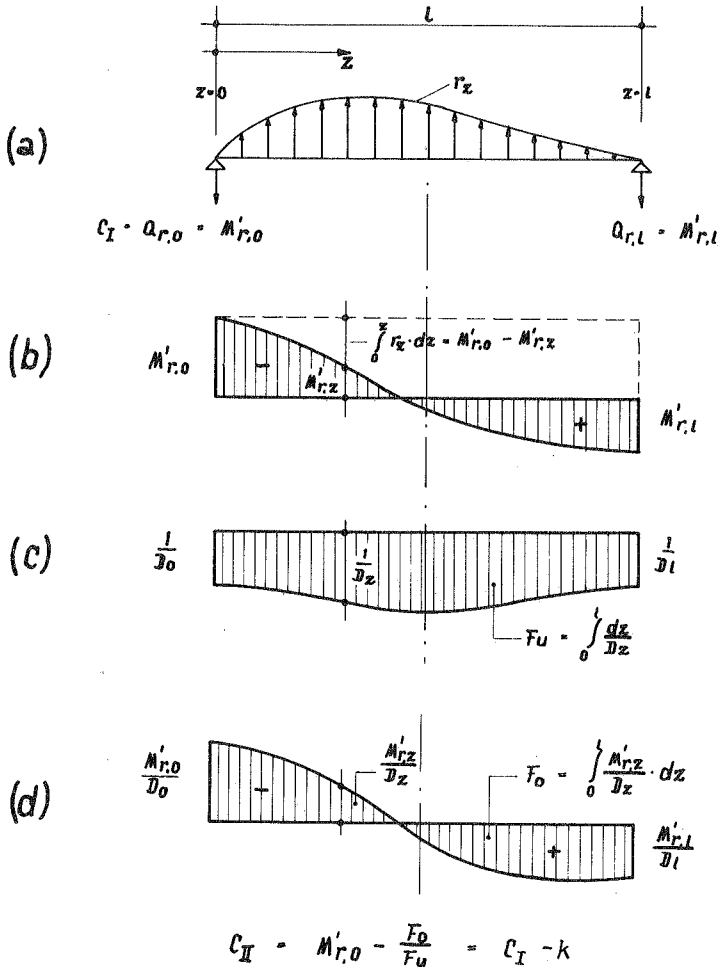


Bild 3.2 Zusammenhang zwischen den Integrationskonstanten C_I und C_{II} . Drillsteifigkeit D_z veränderlich.

$$C_{II} = \frac{2}{a} \cdot M_{T,0} = \frac{\int_0^{\ell} \int_0^z \frac{r_z}{D_z} \cdot dz}{\int_0^{\ell} \frac{dz}{D_z}} \cdot dz \quad (3.21)$$

Setzt man für $\int_0^z r_z dz$ gemäss Bild 3.2(b)

$$\int_0^z r_z \cdot dz = M'_{r,0} - M'_{r,z} \quad (3.22)$$

so kann man den Zähler von (3.21) in die beiden Integrale aufspalten:

$$\int_0^{\ell} \left(\frac{M'_{r,0}}{D_z} - \frac{M'_{r,z}}{D_z} \right) \cdot dz = M'_{r,0} \int_0^{\ell} \frac{dz}{D_z} - \int_0^{\ell} \frac{M'_{r,z}}{D_z} \cdot dz \quad (3.23)$$

Eingesetzt in (3.21) ergibt sich für

$$C_{II} = M'_{r,0} - \frac{\int_0^{\ell} \frac{M'_{r,z}}{D_z} \cdot dz}{\int_0^{\ell} \frac{dz}{D_z}} \quad (3.24)$$

Gemäss Bild 3.2(c) und (d) stellen die beiden Integrale die Flächen F_u und F_o dar:

$$F_u = \int_0^{\ell} \frac{dz}{D_z} ; \quad F_o = \int_0^{\ell} \frac{M'_{r,z}}{D_z} \cdot dz \quad (3.25)$$

Man kann somit unter Beachtung von (3.20) und (3.25) für C_{II} auch schreiben:

$$C_{II} = C_I - \left(\frac{F_o}{F_u} \right) = C_I - k \quad (3.26)$$

d.h. die beiden Integrationskonstanten unterscheiden sich voneinander nur durch das Korrekturglied: $k = F_o/F_u$.

Der Zähler des Korrekturgliedes ist im allgemeinen verhältnismässig klein, da sich die Fläche F_o als verzerrte Querkraftfläche (Verzerrungsfaktor $1/D_z$) stets aus zwei annähernd gleich grossen Teilflächen mit entgegengesetztem Vorzeichen zusammensetzt.

Belastungsmoment $\bar{m}_z = r_z \cdot \frac{\alpha}{2}$

Querschnitts-Torsions-Moment

$$M_z = \int_0^z \bar{m}_z \cdot dz = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^z r_z \cdot dz$$

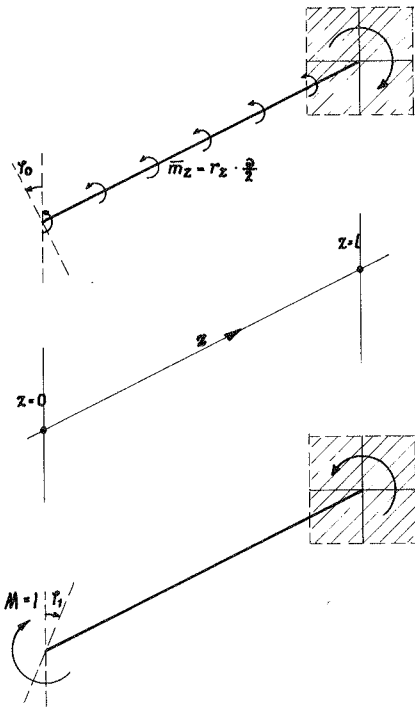
Drehwinkel bei $z=0$

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{M_z}{D_z} \cdot dz = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \left(\int_0^z \frac{r_z \cdot dz}{D_z} \right) dz$$

Drehwinkel bei $z=l$ inf.

$M=l$ in $z=0$

$$\varphi_1 = \int_0^l \frac{1}{D_z} \cdot dz$$



Formänderungsbedingung in $z=0$:

$$\varphi = \varphi_0 - M_{T,0} \cdot \varphi_1 = 0$$

$$\text{Daraus: } C = M_{T,0} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\int_0^l \left(\int_0^z \frac{r_z \cdot dz}{D_z} \right) dz}{\int_0^l \frac{dz}{D_z}}$$

$$C_x = C \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \right) = M_{T,0} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \right)$$

Bild 3.3 Bestimmung der Integrationskonstanten C_{II} bei veränderlicher Drillsteifigkeit D_z .

Bei konstanter Drehsteifigkeit $D_z = D$ heben sich die Teilflächen auf, so dass mit $F_0 = 0$ auch das Korrekturglied k zu Null wird. Weiter geht aus Bild 3.2(c) und (d) hervor, dass auch bei veränderlicher, aber zur Trägermitte symmetrischer Drehsteifigkeit D_z und symmetrischer Belastung r_z das Korrekturglied verschwindet.

Man kann daher bei den weiteren Ableitungen das Korrekturglied k ohne grossen Fehler vernachlässigen und somit $C_{II} \approx C_I$ setzen. Mit

$$Q_{rz} = \frac{d M_{rz}}{dz} = M'_{rz} \quad (3.27)$$

erhält man dann aus (3.19):

$$M_{Tz} \approx -\frac{a}{2} \cdot M'_{rz} \quad (3.28)$$

und weiter:

$$M'_{Tz} = -\frac{a}{2} \cdot M''_{rz} \quad (3.29)$$

Hierbei ist M_{rz} das Moment am Biegesystem infolge der Pendelkräfte r_{zI} .

(3.28) und (3.29) in (3.16) eingesetzt, ergibt für

$$v''_{\varphi} = -\frac{a^2}{4} \left\{ -\frac{M''_{rz}}{D_z} \approx M'_{rz} \cdot \frac{D'_z}{D_z^2} \right\} \quad (3.30)$$

Aus (3.11a) folgt unter Beachtung von

$$r_z = -r_{zI} = +M''_{rz} \quad \text{bzw.} \quad r''_z = M''''_{rz} :$$

$$v''_{Pl} = -\frac{a^3}{24} \cdot \frac{r''_z}{B_i} = -\frac{a^3}{24} \cdot \frac{M''''_{rz}}{B_i} \quad (3.31)$$

Mit (3.5), (3.30) und (3.31) ergibt sich aus (3.12) schliesslich die Beziehung:

$$+\frac{a^3}{24B_i} \cdot M''''_{rz} - \frac{a^2}{4D_z} \cdot M''_{rz} \approx \frac{a^2}{4} \cdot \frac{D'_z}{D_z^2} \cdot M'_{rz} + \frac{M_{rz}}{B_z} + \frac{M_z^0}{B_z} = 0$$

Führt man noch folgende nur von den Querschnittsabmessungen abhängigen Koeffizienten ein:

$$d_z = \frac{a^3 \cdot B_z}{24 \cdot \bar{B}_1} \quad ; \quad c_z = \frac{a^2 \cdot B_z}{4D_z} \quad ; \quad b_z = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{B_z \cdot D'_z}{D_z^2} \quad (3.32)$$

$$\left[\text{cm}^4 \right] \qquad \qquad \left[\text{cm}^2 \right] \qquad \qquad \left[\text{cm} \right]$$

so erhält man die Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten in der Form:

$$d_z \cdot M_{RZ}^{IV} - c_z \cdot M_{RZ}'' + b_z \cdot M_{RZ}' + M_{RZ} = -M_z^O \quad (3.33)$$

Die Gleichung besagt, dass die durch die unbekanntenen Pendelkräfte r_z am frei aufliegenden Biegebalken hervorgerufenen Momente M_{RZ} und ihre 1., 2. und 4. Ableitungen, multipliziert mit den Querschnitts-Koeffizienten $b_z [m]$, $c_z [m^2]$ und $d_z [m^4]$, gleich dem negativen Belastungsmoment M_z^O sein müssen (vgl. Bild 3.4).

Bei dem im Beispiel 7.2 angenommenen Querschnitt mit parabolisch veränderlicher Steghöhe ergibt sich der in Bild 3.4(a) dargestellte Verlauf der Koeffizienten.

In Bild 3.4(b) bis (e) sind die Glieder, aus denen sich das Belastungsmoment M_z^O bei Einzellast $\pm P$ in $z = \ell/4$ zusammensetzen, schematisch dargestellt.

Bei starr ausgesteiftem veränderlichem Querschnitt wird $\bar{B}_1 = \infty$ und damit der Querschnittswert $d_z = 0$ (vgl. (3.32)). Man erhält in diesem Fall also die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$-c_z \cdot M_{RZ}'' + b_z \cdot M_{RZ}' + M_{RZ} = -M_z^O \quad (3.34)$$

Bei konstanter Drehsteifigkeit $D_z = D$ wird $D'_z = 0$. Damit wird auch $b_z = 0$ und es ergibt sich die Differentialgleichung für den elastisch ausgesteiften Querschnitt

$$d_z \cdot M_{RZ}^{IV} - c_z \cdot M_{RZ}'' + M_{RZ} = -M_z^O \quad (3.35)$$

bzw. für den starr ausgesteiften Querschnitt

$$-c_z \cdot M_{RZ}'' + M_{RZ} = -M_z^O \quad (3.36)$$

Auf die Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung (3.34) und (3.36) wird in Abschnitt 4 noch näher eingegangen.

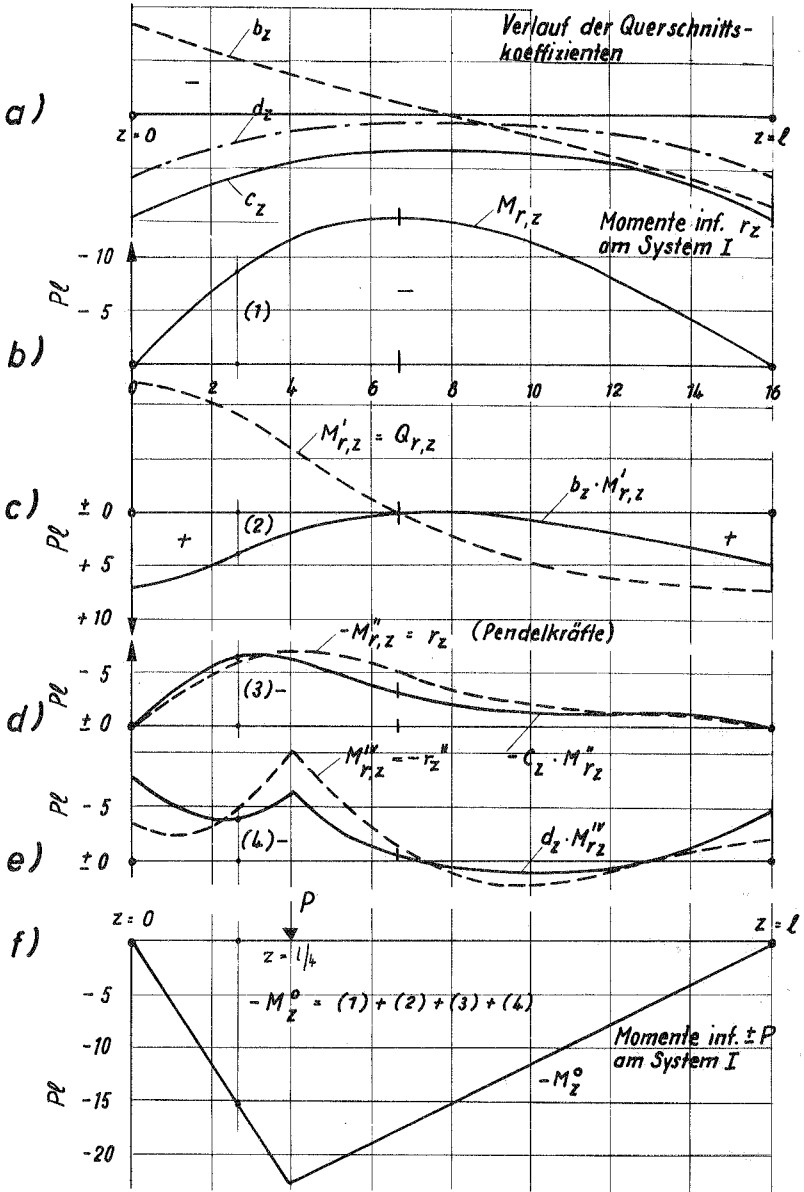


Bild 3.4 Verlauf der Querschnittskoeffizienten b_z , c_z , d_z und der Komponenten der Differential-Gleichung (3.33).

Zur Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung (3.33) werden 4 Randbedingungen benötigt. Diese folgen ohne weiteres aus der Anschauung. An den Trägerenden des Systems I können infolge der Kräfte r_z - frei drehbare Lagerung vorausgesetzt - keine Momente M_{rz} auftreten.

Es gilt also:

$$\text{für } z = 0 \text{ und } z = \ell : M_{rz} = 0 \quad (3.37)$$

Der Querschnitt des Systems II ist voraussetzungsgemäss an den Enden unterstützt und kann sich wegen der biegestarren Querschotte nicht drehen. Damit ist hier $v_{II} = 0$ und $\varphi = 0$, wodurch auch die Querbiegung der Platte $v_{Pl} = 0$ wird. Gemäss (3.11) kann v_{Pl} nur verschwinden, wenn $r_z = 0$ ist.

Man erhält also weiter für:

$$z = 0 \text{ und } z = \ell : r_z = 0$$

und damit unter Beachtung von $r_z = M''_{rz}$ die weiteren Randbedingungen:

$$\text{für } z = 0 \text{ und } z = \ell : M''_{rz} = 0 \quad (3.38)$$

Die Lösung der linearen Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten ist in geschlossener Form nur in besonderen Fällen möglich (s. Abschnitt 4).

Die numerische Lösung für beliebigen Belastungs- und Querschnittsverlauf wird in Abschnitt 3.2 behandelt.

Ist die Funktion M_{rz} und ihre Ableitungen M'_{rz} und M''_{rz} für eine gegebene Belastung durch Lösung der Differentialgleichung (3.33) gefunden, dann können alle Beanspruchungen und Verformungen in bekannter Weise angegeben werden.

Aus (3.4) folgt das Biegemoment M_I am Ersatz-System und damit die Längsspannungen σ_2 infolge Wölbkrafttorsion gemäss (2.29). Für die zugehörigen Wölbschubspannungen τ_2 wird entsprechend (2.30) bis (2.32) noch die Querkraft Q_I benötigt. Sie ergibt sich analog zu (3.4) aus:

$$Q_{I,z} = Q_z^0 + Q_{r,z}$$

oder wegen

$$Q_{r,z} = \frac{d M_{r,z}}{dz} = M'_{r,z} \quad (3.39)$$

$$Q_{I,z} = Q_z^0 + M'_{r,z}$$

Die Schubspannungen τ_1 infolge freier Torsion (St.Venant) folgen aus (2.34).

Für M_{Tz} ergibt sich aus (3.17) und (3.26):

$$M_{Tz} = \frac{a}{2} \left\{ \left(C_I - \int_0^z r_z \cdot dz \right) - k \right\}$$

und unter Beachtung von (3.18) und (3.27):

$$M_{Tz} = - \frac{a}{2} \left\{ M'_{rz} - k \right\} \quad (3.40)$$

Das Querschnittstorsionsmoment M_{Tz} ist also der 1. Ableitung von M_{rz} - vermindert um die Konstante k - proportional. Die Konstante k folgt aus dem Quotient der Flächen F_0 und F_u gemäss Bild 3.2 und 3.2d, die z.B. mit Hilfe der Simpson'schen Regel ermittelt werden können.

Die Querbiegemomente \bar{m}_z in der Platte sind der 2. Ableitung von M_{rz} proportional. Für das Einspannmoment der Platte im Steg erhält man:

$$\bar{m}_z = \frac{a}{2} \cdot M''_{rz} \quad (3.41)$$

Die Formänderungsgrössen, z.B. die Endtangentialwinkel ψ , die später für die Berechnung durchlaufender Träger benötigt werden, oder die Stegdurchbiegungen v werden in bekannter Weise am Ersatzsystem I ermittelt.

Hier ergeben sich die Tangentialwinkel ψ als Querkräfte Q^i bzw. die Biegeordinaten v als Biegemomente M^i eines Balkens mit der idealen Belastung $p^i = M_I/B$ gemäss Bild 3.5 :

$$\psi_I = Q^i \quad (3.42a)$$

$$v_I = M^i \quad (3.42b)$$

Mit der Stegdurchbiegung v_I ist auch der Stegdrehwinkel ϕ bekannt.

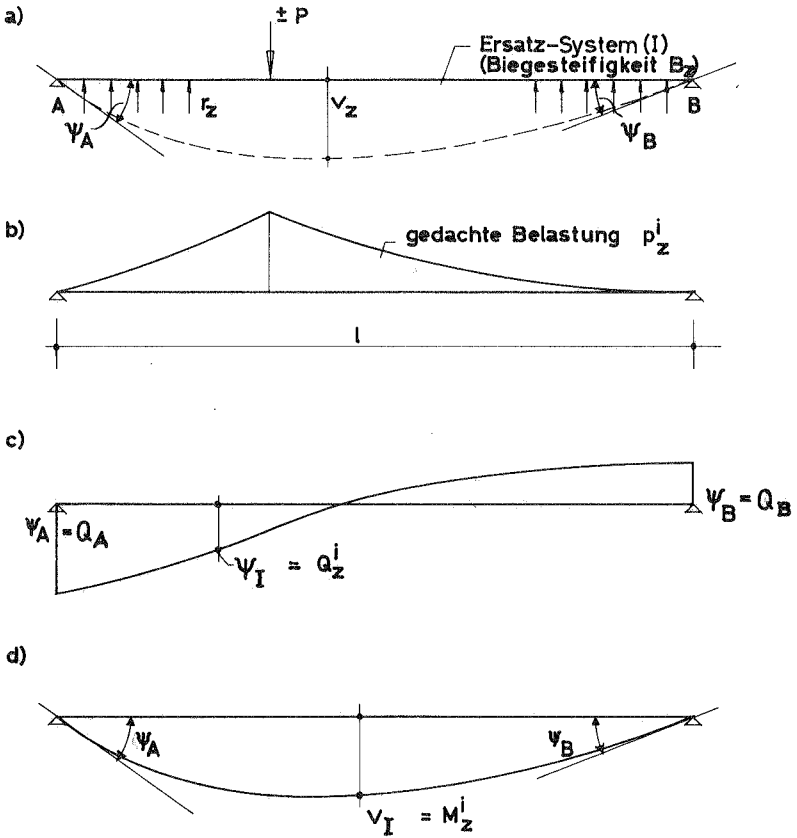


Bild 3.5 Tangentenwinkel ψ_z und Durchbiegungen v_z am Ersatz-System (I)

a) Kräfte am Ersatz-System (I): $\pm P$ und $\pm r_z$.

b) gedachte Belastung eines Biegebalkens:

$$p_z^i = \frac{M_z^0 + M_{rZ}}{B_z} = \frac{M_{I,z}}{B_z} \quad \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

c) Querkraftlinie infolge p_z^i $\left[1 \right]$

d) Momentenlinie infolge p_z^i $\left[\text{cm} \right]$

Aus $v_I = -v_{II}$ folgt mit (3.6)

$$v_\varphi + v_{Pl} = -v_I \quad (3.43)$$

Unter Beachtung von $r_z = M''_{rZ}$ wird gemäss (3.11a):

$$v_{Pl} = -\frac{a^3 \cdot M''_{rZ}}{24 B_i} \quad (3.44)$$

Mit (3.44) und v_φ aus (3.7) erhält man aus (3.43) den Stegdrehwinkel:

$$\varphi = \frac{2}{a} \left(v_I - \frac{a^3}{24} \cdot \frac{M''_{rZ}}{B_i} \right) \quad (3.45)$$

Bei konstanter Drehsteifigkeit $D_z = D$ können die Formänderungsgrössen noch einfacher am Drillsystem II ermittelt werden. Aus (3.30) erhält man wegen $D'_z = 0$:

$$v''_\varphi = +\frac{a^2 \cdot M''_{rZ}}{4 D} + 0 \quad (3.46)$$

oder nach zweimaliger Integration:

$$v_\varphi = +\frac{a^2}{4} \cdot \frac{M_{rZ}}{D} \quad (3.47)$$

Daraus folgt für v_I entsprechend (3.43) und (3.44):

$$v_I = -\frac{a^2}{4} \cdot \frac{M_{rZ}}{D} + \frac{a^3}{24} \cdot \frac{M''_{rZ}}{B_i} \quad (3.48)$$

Im allgemeinen ist bei konstanter Drehsteifigkeit $D_z = D$ auch die Biegesteifigkeit konstant, also $B_z = B$. Erweitert man (3.48) noch mit B , so erhält man für die lotrechte Stegverschiebung bzw. den Tangentenwinkel an die Biegelinie:

$$v_I = v = \frac{1}{B} (-c \cdot M_{rZ} + d \cdot M''_{rZ}) \quad (3.49a)$$

$$\Psi_I = \Psi = \frac{1}{B} (-c \cdot M'_{rZ} + d \cdot M'''_{rZ}) \quad (3.49b)$$

(Querschnittskoeffizienten c und d , s.(3.32), ohne Index z , da Querschnitt konstant).

Für den Stegdrehwinkel φ erhält man aus (3.47):

$$\varphi = -\frac{2}{a} \cdot v_{\varphi} = -\frac{a}{2} \cdot \frac{M_{rZ}}{D} \quad (3.50)$$

Bei konstantem Querschnitt des Plattenbalkens können also die lotrechten Stegverschiebungen und die Stegdrehwinkel direkt angeschrieben werden, da sie ausser von den Querschnittswerten nur von den Funktionen M_{rZ} und M''_{rZ} , d.h. nur von den Pendelkräften $r_z = -M''_{rZ}$ und den durch sie hervorgerufenen Biegemomenten M_{rZ} abhängen.

3.2 Numerische Lösung der Differentialgleichung 4.Ordnung

Die Lösung der Gleichung (3.33) erfolgt nach Stüssi [24] unter Verwendung der Seilpolygongleichung, deren Ableitung hier kurz wiederholt sei.

3.2.1 Ableitung der Seilpolygongleichung

Die Seilpolygongleichung gibt den Zusammenhang zwischen Momenten und Einzellasten am freiaufliegenden Balken. Bei beliebigen, stetig verteilten Lasten denkt man sich den Balken *i n d i r e k t* über sekundäre Längsträger gemäss Bild 3.6 belastet.

Je kleiner Δl , d.h. die Spannweite der sekundären Längsträger gewählt wird, umso besser passt sich das dem Seilpolygon entsprechende Momentenpolygon der stetigen Momentenlinie an. An den Auflagerpunkten der sekundären Längsträger, im Folgenden mit *K n o t e n p u n k t e n* bezeichnet, stimmt das Momentenpolygon mit der stetigen Momentenlinie überein (Seilpolygon = Sehnenpolygon der stetigen Momentenkurve).

Die Auflagerdrücke der sekundären Längsträger infolge der beliebigen stetigen Belastung p_z - d.h. die *K n o t e n l a s t e n* $K(p)$ - werden nach Stüssi so bestimmt, dass zwischen drei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten $z-1$, z und $z+1$ ein *p a r a b o l i s c h e r* Verlauf von p_z angenommen wird. Man erhält damit auch bei verhältnismässig grossen Abschnitten Δl recht genaue Werte

Andererseits sind, wenn die Belastung p_z nicht stetig verläuft, an den Unstetigkeitsstellen Korrekturglieder zu berücksichtigen. Da in der Praxis die numerische Lösung der Differentialgleichung zweckmässig mit elektronischen Rechengerten durchgeführt wird, bedeutet es keinen besonderen Mehraufwand, wenn man kleinere Abschnitte $\Delta \ell$ wählt und dafür *geradlinigen* Verlauf der Funktion p_z zwischen zwei Knotenpunkten annimmt. Damit kann man sich auch an unstetige Funktionen p_z ohne besondere Korrekturglieder genügend genau anpassen, was hier insofern von Bedeutung ist, als die zu integrierende Funktion r_z'' gemäss Bild 3.4 bei Belastung des Systems durch Einzelkräfte an der Laststelle unstetig ist.

Die Auflagerdrücke der sekundären Längsträger, d.h. die Knotenlasten K werden bei geradlinigem Verlauf von p zwischen zwei Knotenpunkten (Bild 3.6):

$$K_m(p) = \frac{\Delta \ell}{6} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) \quad (3.51)$$

Betrachtet man den Querkraftverlauf, dann ist an jedem Knoten die Differenz der Querkräfte rechts und links vom Knoten m gleich der Knotenlast K_m :

$$Q_{m-1,m} - Q_{m,m+1} = K_m(p) \quad (3.52)$$

Aus den Momenten dreier aufeinanderfolgender Knotenpunkte $m-1$, m und $m+1$ erhält man die Querkräfte rechts und links des mittleren Knotens zu:

$$Q_{m-1,m} = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta \ell} \quad (3.53)$$

$$Q_{m,m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{\Delta \ell} \quad (3.54)$$

Setzt man (3.51), (3.53) und (3.54) in die Gleichgewichtsbedingung (3.52) ein, dann erhält man die Beziehung zwischen Belastung und Moment in den Knotenpunkten:

$$(-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1}) = \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) \quad (3.55)$$

Unter Beachtung der für den Biegebalken bei stetiger Belastung geltenden Beziehung:

$$M_m'' = -p_m$$

(p_m positiv, wenn von oben nach unten wirkend;

M_m positiv, wenn an Balkenunterseite Zug)

kann für (3.55) auch geschrieben werden:

$$M_{m-1}'' - 2M_m'' + M_{m+1}'' = \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \left\{ M_{m-1}'' + 4M_m'' + M_{m+1}'' \right\} \quad (3.56)$$

Die Gleichung (3.56) stellt ganz allgemein den Zusammenhang zwischen der Funktion M_m mit ihrer zweiten Ableitung M_m'' dar, wobei M_m'' eine zwischen den Knotenpunkten geradlinig verlaufende Funktion ist.

Ist M_m'' eine stetige Funktion, dann gilt die Gleichung (3.56) als gute Näherung, die umso besser wird je kleiner die Intervalle $\Delta \ell$ gewählt werden. Die Gleichung (3.56) wird 'Seil-polyongleichung' genannt.

Für die $\Delta \ell$ -fache Knotenlast bei Belastung mit $-p = M''$ kann gemäß (3.51) und (3.56) auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta \ell \cdot K_m (M'') &= \frac{\Delta \ell^2}{6} (M_{m-1}'' + 4M_m'' + M_{m+1}'') \\ &= (M_{m-1}'' - 2M_m'' + M_{m+1}'') \end{aligned} \quad (3.57)$$

Für die folgenden Ableitungen wird noch eine Beziehung zwischen Querkräften $Q = M'$ und den Momenten M benötigt.

Bei direkter Belastung p_z ergibt sich ein stetiger Querkraftverlauf. Die Knotenkraft in m infolge $Q_z = M_z'$ als gedachte Lastfunktion ist in guter Näherung gemäß (3.51) :

$$K_m (M') = \frac{\Delta \ell}{6} (M_{m-1}' + 4M_m' + M_{m+1}') \quad (3.58)$$

Bei indirekter Belastung verläuft die Querkraft entsprechend der Treppenlinie in Bild 3.6. In diesem Fall ist die Knotenkraft:

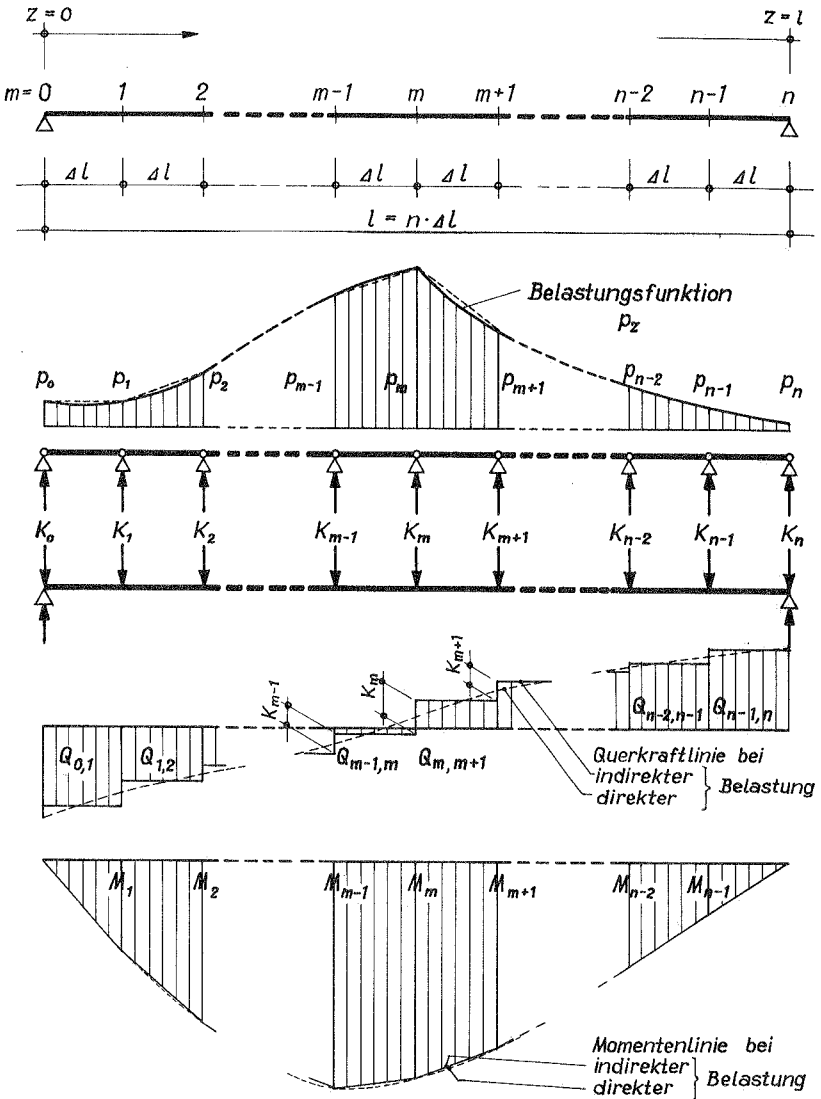


Bild 3.6 Bezeichnung der Knotenpunkte.
 Momente und Querkräfte bei indirekter Be-
 lastung (sekundäre Längsträger, Spannweite
 $\Delta l = l/n$).

$$K_m(Q) = K_m(M') = \frac{\Delta \ell}{2} (Q_{m-1,m} + Q_{m,m+1}) \quad (3.59)$$

Hieraus folgt mit (3.53) und (3.54):

$$K_m(Q) = K_m(M') = \frac{1}{2} (M_{m+1} - M_{m-1}) \quad (3.60)$$

Aus der Gleichsetzung von (3.58) und (3.60) erhält man die gesuchte Beziehung zwischen M' und M zu:

$$\frac{\Delta \ell}{6} (M'_{m-1} + 4M'_m + M'_{m+1}) = \frac{1}{2} (M_{m+1} - M_{m-1}) \quad (3.61)$$

x)

3.2.2 Umwandlung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung 4. Ordnung in ein 5-Momenten-Gleichungssystem

Die Differentialgleichung (3.33) wird zunächst so umgeformt, dass der variable Koeffizient bei M^{IV} verschwindet. Man erhält mit den neuen Koeffizienten:

$$g_z = \frac{c_z}{d_z} = \frac{6 \cdot \bar{B}_i}{a \cdot D_z} \quad [cm^{-2}] \quad (3.67a)$$

$$f_z = \frac{b_z}{d_z} = \frac{6}{a} \cdot \frac{D'_z \cdot \bar{B}_i}{D_z^2} \quad [cm^{-3}] \quad (3.67b)$$

$$h_z = \frac{1}{d_z} = \frac{24 \cdot \bar{B}_i}{a^3 \cdot B_z} \quad [cm^{-4}] \quad (3.67c)$$

die Differentialgleichung in der Form:

$$M_{rz}^{IV} - g_z \cdot M''_{rz} + f_z \cdot M'_{rz} + h_z \cdot M_{rz} = -h_z \cdot M_z^0 \quad (3.68)$$

x)

Anmerkung: Die Gleichungsnummern (3.62) bis (3.66) sind nicht besetzt.

Die Gleichung (3.68) gilt für jeden Punkt z. An Stelle der stetigen Funktionen können in guter Näherung auch deren Knotenkräfte gesetzt werden, wenn man die einzelnen Glieder der Gleichung (3.68) als gedachte Lastfunktionen auffasst, wobei die Lasten jeweils durch sekundäre Längsträger *i n d i r e k t* in den Knotenpunkten eines Biegeträgers abgegeben werden (Bild 3.7).

Die Knotenlasten ergeben sich genügend genau aus (3.51).

Die der Differentialgleichung (3.68) entsprechende Knotengleichung lautet also mit den Bezeichnungen von Bild 3.7 für den beliebigen Knotenpunkt m:

$$K_m(M^{IV}) - K_m(g.M'') + K_m(f.M') + K_m(h.M) = -K_m(h.M^0) \quad (3.69)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise ist bei den Momenten M_r und ihren Ableitungen der Index r weggelassen. Anstelle von z tritt die Bezeichnung des Knotenpunktes m (bzw. m-1 oder m+1).

Für $K_m(M^{IV})$, d.h. die Last im Knoten m infolge der gedachten Belastung M^{IV} , kann nun entsprechend (3.51) geschrieben werden:

$$K_m(M^{IV}) = \frac{\Delta \ell}{6} (M_{m-1}^{IV} + 4M_m^{IV} + M_{m+1}^{IV}) \quad (3.70)$$

Aus (3.56) geht der Zusammenhang zwischen der Funktion M und ihrer zweiten Ableitung M'' hervor. Die Gleichung gilt natürlich auch, wenn für M die zweiten Ableitungen M'' und für M'' die vierten Ableitungen M^{IV} gesetzt werden, d.h. es gilt die analoge Beziehung:

$$M_{m-1}'' - 2M_m'' + M_{m+1}'' = \frac{\Delta \ell^2}{6} \left\{ M_{m-1}^{IV} + 4M_m^{IV} + M_{m+1}^{IV} \right\} \quad (3.71)$$

Erweitert man (3.70) mit $\Delta \ell$, dann folgt aus (3.70) und (3.71):

$$\Delta \ell \cdot K_m(M^{IV}) = M_{m-1}'' - 2M_m'' + M_{m+1}'' \quad (3.72)$$

Erweitert man auch (3.69) mit $\Delta \ell$, dann kann dort das erste Glied durch die rechte Seite von (3.72) ersetzt werden und man erhält eine Gleichung, in welcher die 4. Ableitungen eliminiert sind:

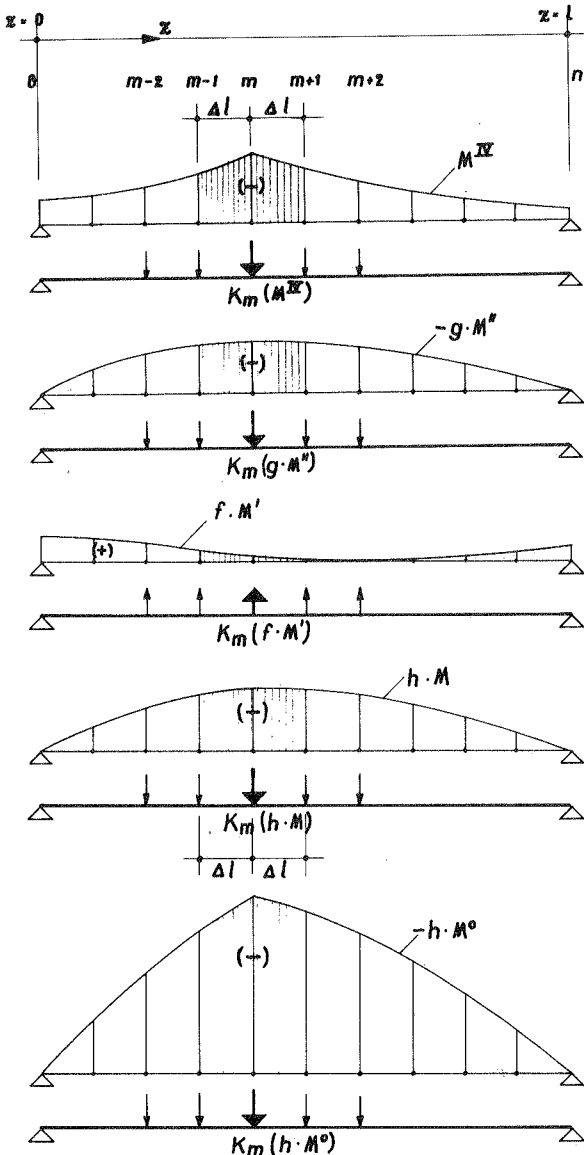


Bild 3.7 Knotenlasten K_m (...) im Punkt m infolge der gedachten Lastfunktionen: M^{IV} , $g \cdot M''$, $f \cdot M'$, $h \cdot M$ und $h \cdot M^0$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & & (4) & & (5) \\ (M''_{m-1} - 2M''_m + M''_{m+1}) & - \Delta \ell \cdot K_m (g \cdot M'') & + \Delta \ell \cdot K_m (f \cdot M') & & & & \end{matrix} \\
 & \hspace{15em} (6) \hspace{10em} (7) \hspace{15em} (3.73) \\
 & + \Delta \ell \cdot K_m (h \cdot M) = -K_m (h \cdot M^0) \cdot \Delta \ell
 \end{aligned}$$

Um auch die zweiten und ersten Ableitungen zu eliminieren, wird die Gleichung (3.73) mit $\Delta \ell^2/6$ erweitert und je ein mal für die Knoten m-1 und m+1 und vier mal für den Knoten m angeschrieben. Zur einfacheren Kennzeichnung sind die einzelnen Glieder der Gleichung (3.73) mit (1) bis (7) durchnummeriert.

Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man dann unter Beachtung der Seilpolygongleichung (3.56) für die Glieder (1), (2) und (3) von (3.73) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \left\{ (M''_{m-2} - 2M''_{m-1} + M''_m) + 4 (M''_{m-1} - 2M''_m + M''_{m+1}) \right. \\
 & \quad \left. + (M''_m - 2M''_{m+1} + M''_{m+2}) \right\} = \\
 & = M_{m-2} - 4M_{m-1} + 6M_m - 4M_{m+1} + M_{m+2}
 \end{aligned}
 \tag{3.74}$$

$$\tag{3.75}$$

Entsprechend ergibt sich für das (4).Glied von (3.73), wenn genähert für die Koeffizienten g in den Punkten m-1 und m+1 jeweils der dazwischen liegende Wert gesetzt wird, also :

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_{m-2} \\ \varepsilon_m \end{matrix} \right\} = \sim \varepsilon_{m-1} \quad \left. \begin{matrix} \varepsilon_{m-1} \\ \varepsilon_{m+1} \end{matrix} \right\} = \sim \varepsilon_m \quad \left. \begin{matrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_{m+2} \end{matrix} \right\} = \sim \varepsilon_{m+1} \tag{3.76}$$

und wenn ausserdem für

$$\varepsilon_m \cdot \frac{\Delta \ell^2}{6} = \varepsilon_m^* \quad (\text{dimensionslos}) \tag{3.77}$$

geschrieben wird:

$$\frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \Delta \ell \left\{ K_{m-1}(g \cdot M'') + 4K_m(g \cdot M'') + K_{m+1}(g \cdot M'') \right\} =$$

$$M_{m-2} \cdot g_{m-1}^* + M_{m-1} (4g_m^* - 2g_{m-1}^*)$$

$$+ M_m (g_{m-1}^* - 8g_m^* + g_{m+1}^*)$$

$$+ M_{m+1} (4g_m^* - 2g_{m+1}^*) + M_{m+2} \cdot g_{m+1}^* \quad (3.78)$$

Sinngemäß folgt für das (5).Glied von (3.73) unter Beachtung von (3.61) und mit

$$\left. \begin{matrix} f_{m-2} \\ f_m \end{matrix} \right\} \approx f_{m-1} \quad \left. \begin{matrix} f_{m-1} \\ f_{m+1} \end{matrix} \right\} \approx f_m \quad \left. \begin{matrix} f_m \\ f_{m+2} \end{matrix} \right\} \approx f_{m+1} \quad (3.79)$$

sowie mit

$$f_m \cdot \frac{\Delta \ell^3}{12} = f_m^* \quad (\text{dimensionslos}) \quad (3.80)$$

$$\frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \Delta \ell \left\{ K_{m-1}(f \cdot M') + 4K_m(f \cdot M') + K_{m+1}(f \cdot M') \right\} =$$

$$-M_{m-2} \cdot f_{m-1}^* - M_{m-1} \cdot 4f_m^*$$

$$+ M_m (f_{m-1}^* - f_{m+1}^*)$$

$$+ M_{m+1} \cdot 4f_m^* + M_{m+2} \cdot f_{m+1}^* \quad (3.81)$$

Für das (6).Glied erhält man mit:

$$h_m \cdot \frac{\Delta \ell^4}{36} = h_m^* \quad (\text{dimensionslos}) \quad (3.82)$$

$$\frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \Delta \ell \left\{ K_{m-1}(h \cdot M) + 4K_m(h \cdot M) + K_{m+1}(h \cdot M) \right\} =$$

$$M_{m-2} \cdot h_{m-2}^* + 8M_{m-1} \cdot h_{m-1}^*$$

$$+ 18M_m \cdot h_m^*$$

$$+ 8M_{m+1} \cdot h_{m+1}^* + M_{m+2} \cdot h_{m+2}^* \quad (3.83)$$

und analog für das (7).Glied:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot \Delta \ell \left\{ K_{m-1}(h \cdot M^0) + 4K_m(h \cdot M^0) + K_{m+1}(h \cdot M^0) \right\} = \\
 - \left\{ M_{m-2}^0 \cdot h_{m-2}^* + 8M_{m-1}^0 \cdot h_{m-1}^* \right. \\
 \left. + 18M_m^0 \cdot h_m^* \right. \\
 \left. + 8M_{m+1}^0 \cdot h_{m+1}^* + M_{m+2}^0 \cdot h_{m+2}^* \right\} \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

Aus (3.75), (3.78), (3.81), (3.83) und (3.84) folgt nach Ordnung der Glieder die Beziehung

$$\begin{aligned}
 &+M_{m-2} (1 - f_{m-1}^* - g_{m-1}^* + h_{m-2}^*) \\
 &-M_{m-1} (4 + 4f_m^* + 4g_m^* - 2g_{m-1}^* - 8h_{m-1}^*) \\
 &+M_m \cdot (6 + f_{m-1}^* - f_{m+1}^* - g_{m-1}^* + 8g_m^* - g_{m+1}^* + 18h_m^*) \\
 &-M_{m+1} (4 - 4f_m^* + 4g_m^* - 2g_{m+1}^* - 8h_{m+1}^*) \\
 &+M_{m+2} (1 + f_{m+1}^* - g_{m+1}^* + h_{m+2}^*) = \\
 &= - \left\{ h_{m-2}^* \cdot M_{m-2}^0 + 8h_{m-1}^* \cdot M_{m-1}^0 \right. \\
 &\quad \left. + 18h_m^* \cdot M_m^0 \right. \\
 &\quad \left. + 8h_{m+1}^* \cdot M_{m+1}^0 + h_{m+2}^* \cdot M_{m+2}^0 \right\} \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

Die Werte in den runden Klammern sind entsprechend (3.77), (3.80) und (3.82) dimensionslos und hängen nur von den Steifigkeitsverhältnissen, dem Stegabstand a und den Intervallen $\Delta \ell$ ab, vgl. (3.67a) bis (3.67c).

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung (3.68) wird also gemäss (3.85) in ein fünfgliedriges Gleichungssystem umgewandelt. Die veränderlichen Koeffizienten sind dabei in guter Näherung mit erfasst, vgl. (3.76) und (3.79).

3.2.3 Randbedingungen

Die Gleichung (3.85) kann nach Unterteilung der Spannweite ℓ in n Abschnitte von der Länge $\Delta \ell = \ell/n$ nur für die Innenknoten $m = 2$ bis $m = n-2$, - also insgesamt $(n-3)$ mal - angeschrieben werden (Bild 3.6).

Für die Knoten 0, 1 und $n-1, n$ müssen die 4 Randbedingungen (3.37) und (3.38) beachtet werden.

Es wird nun zunächst M'' in Abhängigkeit von M und M^0 ermittelt. Hierzu geht man von (3.73) aus, indem man zu dieser Gleichung die Seilpolygongleichung (3.56) addiert in der Form:

$$-(M''_{m-1} + 4M''_m + M''_{m+1}) + \frac{6}{\Delta \ell^2} (M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}) = 0 \quad (3.86)$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} -6M''_m + \frac{6}{\Delta \ell^2} (M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}) \\ (4) \qquad (5) \\ -\Delta \ell \cdot K_m(g \cdot M'') + \Delta \ell \cdot K_m(f \cdot M') \\ (6) \qquad (7) \\ + \Delta \ell \cdot K_m(h \cdot M) = -K_m(h \cdot M^0) \cdot \Delta \ell \end{aligned} \quad (3.87)$$

Weiter kann gemäss (3.57) und unter Berücksichtigung von (3.76) für das (4).Glied geschrieben werden:

$$\Delta \ell \cdot K_m(g \cdot M'') = \varepsilon_m (M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}) \quad (3.88)$$

Entsprechend gilt gemäss (3.60) und (3.79) für das (5).Glied:

$$\Delta \ell \cdot K_m(f \cdot M') = \frac{\Delta \ell}{2} \cdot f_m (M_{m+1} - M_{m-1}) \quad (3.89)$$

Das (6). und (7). Glied lautet ausgeschrieben gemäss (3.52):

$$\Delta \ell \cdot K_m(h \cdot M) = (h_{m-1} \cdot M_{m-1} + 4h_m \cdot M_m + h_{m+1} \cdot M_{m+1}) \frac{\Delta \ell^2}{6} \quad (3.90)$$

bzw.

$$\Delta \ell \cdot K_m(h \cdot M^0) = (h_{m-1} \cdot M_{m-1}^0 + 4h_m \cdot M_m^0 + h_{m+1} \cdot M_{m+1}^0) \frac{\Delta \ell^2}{6} \quad (3.91)$$

(3.88) bis (3.91) eingesetzt in (3.87) und erweitert mit $\Delta \ell^2/6$ ergibt nach Ordnung der Glieder die Hilfsgleichung:

$$\begin{aligned}
 & -M_m'' \cdot \Delta \ell^2 + M_{m-1} (1 - g_m^* - f_m^* + h_{m-1}^*) \\
 & \quad + M_m (-2 + 2g_m^* + 4h_m^*) \\
 & \quad + M_{m+1} (1 - g_m^* + f_m^* + h_{m+1}^*) = \\
 & = - \left\{ M_{m-1}^0 \cdot h_{m-1}^* + 4M_m^0 \cdot h_m^* + M_{m+1}^0 \cdot h_{m+1}^* \right\}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Hiermit kann M_m'' bestimmt werden, wenn die Funktionswerte M in den Knoten $m-1$, m und $m+1$ bekannt sind. Die Hilfsgleichung (3.92) gilt für die Knoten $m=1$ bis $m = n-1$.

Zur Einführung der Randbedingungen wird die Seilpolygongleichung (3.56) für den Knoten $m=1$ angeschrieben in der Form:

$$\Delta \ell^2 \cdot (M_0'' + 4M_1'' + M_2'') - 6 \cdot (M_0 - 2M_1 + M_2) = 0 \tag{3.93}$$

Entsprechend (3.37) und (3.38) ist für $m = 0$ und $m = n$:

$$\begin{aligned}
 & M_0 = 0 \quad \text{und} \quad M_0'' = 0 \\
 \text{bzw.} & \quad M_n = 0 \quad \text{und} \quad M_n'' = 0
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Damit folgt aus (3.93)

$$\Delta \ell^2 (4M_1'' + M_2'') - 6 \cdot (-2M_1 + M_2) = 0 \tag{3.95}$$

M_1'' und M_2'' in (3.95) kann mit der Hilfsgleichung (3.92) als Funktion von M ausgedrückt werden. Man erhält damit aus (3.95) für den Knoten $m=1$ die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 & +M_1 (5 - f_2^* + 8g_1^* - g_2^* + 17h_1^*) \\
 & -M_2 (4 - 4f_1^* + 4g_1^* - 2g_2^* - 8h_2^*) \\
 & +M_3 (1 + f_2^* - g_2^* + h_3^*) = \\
 & = - \left(4h_0^* \cdot M_0^0 + 17h_1^* \cdot M_1^0 + 8h_2^* \cdot M_2^0 + h_3^* \cdot M_3^0 \right)
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Die Beziehung gilt sinngemäss für den Knoten $m = n-1$.

3.2.4 Vereinfachungen für die praktische Rechnung

Mit (3.85) und (3.96) sind die (n-1) Gleichungen des fünfgliedrigen Gleichungssystems gefunden, aus denen die (n-1) unbekanntenen Momente $M = M_{r,m}$ ermittelt werden können.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden für die dimensionslosen Klammerwerte folgende Bezeichnungen eingeführt:

in (3.85), gültig für die Punkte $m = 2$ bis $m = n-2$:

$$\begin{aligned} \gamma_{m,m-2} &= 1 - f_{m-1}^* - g_{m-1}^* + h_{m-2}^* \\ \beta_{m,m-1} &= 4 + 4f_m^* + 4g_m^* - 2g_{m-1}^* - 8h_{m-1}^* \\ \alpha_{m,m} &= 6 + f_{m-1}^* - f_{m+1}^* - g_{m-1}^* + 8g_m^* - g_{m+1}^* + 18h_m^* \\ \beta_{m,m+1} &= 4 - 4f_m^* + 4g_m^* - 2g_{m+1}^* - 8h_{m+1}^* \\ \gamma_{m,m+2} &= 1 + f_{m+1}^* - g_{m+1}^* + h_{m+2}^* \end{aligned} \quad (3.97a)$$

in (3.96) gültig für den Punkt $m = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= 5 - f_2^* + 8g_1^* - g_2^* + 17h_1^* \\ \beta_{1,2} &= 4 - 4f_1^* + 4g_1^* - 2g_2^* - 8h_2^* \\ \gamma_{1,3} &= 1 + f_2^* - g_2^* + h_3^* \end{aligned} \quad (3.97b)$$

in (3.96), gültig für Punkt $m = n-1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1,n-3} &= 1 - f_{n-2}^* - g_{n-2}^* + h_{n-3}^* \\ \beta_{n-1,n-2} &= 4 + 4f_{n-1}^* + 4g_{n-1}^* - 2g_{n-2}^* - 8h_{n-2}^* \\ \alpha_{n-1,n-1} &= 5 + f_{n-2}^* + 8g_{n-1}^* - g_{n-2}^* + 17h_{n-1}^* \end{aligned} \quad (3.97c)$$

Für die von den M^0 -Momenten und den Abmessungsbeiwerten h^* abhängigen rechten Seiten der Gleichungen (3.85) und (3.96) wird gesetzt:

für die Punkte $m = 2$ bis $m = n-2$

$$L_m = - \left\{ \begin{aligned} &M_{m-2}^0 \cdot h_{m-2}^* + 8M_{m-1}^0 \cdot h_{m-1}^* \\ &+ 18M_m^0 \cdot h_m^* \\ &+ 8M_{m+1}^0 \cdot h_{m+1}^* + M_{m-2}^0 \cdot h_{m-2}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.98a)$$

für den Punkt $m = 1$

$$L_1 = - \left\{ \begin{aligned} &4M_0^0 \cdot h_0^* + 17M_1^0 \cdot h_1^* \\ &+ 8M_2^0 \cdot h_2^* + M_3^0 \cdot h_3^* \end{aligned} \right\} \quad (3.98b)$$

und entsprechend für Punkt $m = n-1$

$$L_{n-1} = - \left\{ \begin{aligned} &4M_n^0 \cdot h_m^* + 17M_{n-1}^0 \cdot h_{n-1}^* \\ &+ 8M_{n-2}^0 \cdot h_{n-2}^* + M_{n-3}^0 \cdot h_{n-3}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.98c)$$

Hierbei bedeuten gemäss (3.77) und (3.67a):

$$g_m^* = \frac{\Delta \ell^2}{6} \cdot g_m = \frac{\Delta \ell^2}{a} \cdot \frac{\bar{B}_i}{D_m} \quad [1] \quad (3.99a)$$

bzw. gemäss (3.80) und (3.67b):

$$f_m^* = \frac{\Delta \ell^3}{12} \cdot f_m = \frac{\Delta \ell^3}{2a} \cdot \frac{\bar{B}_i \cdot D_m'}{D_m^2} = \frac{\Delta \ell}{2} \cdot \frac{D_m'}{D_m} \cdot g_m^* \quad [1] \quad (3.99b)$$

bzw. gemäss (3.82) und (3.67c):

$$h_m^* = \frac{\Delta \ell^4}{36} \cdot h_m = \frac{2 \Delta \ell^4}{3a^3} \cdot \frac{\bar{B}_i}{B_m} \quad [1] \quad (3.99c)$$

In (3.99b) kann entsprechend (3.2) geschrieben werden für

$$\frac{D_m'}{D_m} = \frac{J_{D,m}'}{J_{D,m}} = i_m$$

$J_{D,m}'$ ist die Änderung des Drillwiderstandes je Längeneinheit an der Stelle $z = m$. Sind die Drillwiderstände in den Knotenpunkten $m = 0$ bis $m = n$ ermittelt, so erhält man damit genähert:

$$J_{D,m}^i = \frac{J_{D,m+1} - J_{D,m-1}}{2 \cdot \Delta \ell}$$

Damit kann für f_m^* auch gesetzt werden:

$$f_m^* = \left(\frac{J_{D,m+1} - J_{D,m-1}}{4 \cdot J_{D,m}} \right) \cdot g_m^* = i_m^* \cdot g_m^* \quad (3.99d)$$

Mit den Bezeichnungen gemäss (3.97a) bis (3.97c) bzw. (3.98a) bis (3.98c) erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Momente $M = M_r$ in den Knoten $m = 1$ bis $m = n-1$:

Für Punkt $m = 1$:

$$\alpha_{11} \cdot M_1 - \beta_{12} \cdot M_2 + \gamma_{13} \cdot M_3 = L_1 \quad (3.100a)$$

Für die Punkte $m = 2$ bis $m = n-2$:

$$\begin{aligned} \gamma_{m,m-2} \cdot M_{m-2} - \beta_{m,m-1} \cdot M_{m-1} \\ + \alpha_{m,m} \cdot M_m \end{aligned} \quad (3.100b)$$

$$- \beta_{m,m+1} \cdot M_{m+1} + \gamma_{m,m+2} \cdot M_{m+2} = L_m$$

Für den Punkt $m = n-1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1,n-3} \cdot M_{n-3} - \beta_{n-1,n-2} \cdot M_{n-2} \\ + \alpha_{n-1,n-1} \cdot M_{n-1} = L_{n-1} \end{aligned} \quad (3.100c)$$

Die Matrix dieses Fünf-Momenten-Gleichungssystems ist auf der Seite 86 angegeben. Sie ist nicht zur Diagonalen symmetrisch, da die sich entsprechenden Koeffizienten nicht gleich sind:

$$\beta_{m,m-1} \neq \beta_{m-1,m}$$

bzw.

$$\gamma_{m,m-2} \neq \gamma_{m-2,m}$$

Bei der zahlenmässigen Bestimmung der Beiwerte α , β und γ aus (3.97a) bis (3.97c) ist zu beachten, dass ihre zweiten Fusszeige:

mit den Fusszeigern von h^* stets, mit denen von f^* und g^* jedoch nur zum Teil übereinstimmen.

Bei den Lastwerten in (3.98a) bis (3.98c) stimmen die Fusszeiger der Momente M^0 und der h^* -Werte stets überein.

Für die Berechnung der Lastwerte kann man zuerst die Produkte bilden:

$$\ell_m = M_m^0 \cdot h_m \quad m = 0 \text{ bis } m = n \quad (3.101)$$

und Vielfachen dieser Produkte mit der Maschine nach dem auf Seite 87 dargestellten Schema addieren.

3.2.5 Ermittlung der Ableitungen M'_{rm} und M''_{rm}

Mit den Lösungen des Fünf-Momenten-Gleichungssystems (3.100):

$M_{r,1}$ bis $M_{r,n}$ ergeben sich die zweiten Ableitungen $M''_{r,1}$ bis $M''_{r,n-1}$ aus (3.92).

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden für die dimensionslosen Klammerwerte in (3.92) folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\delta_m = (2 - 2g_m^* - 4h_m^*) \quad (3.102a)$$

$$\epsilon_m = (1 - g_m^* - f_m^* + h_{m-1}^*) \quad (3.102b)$$

$$\zeta_m = (1 - g_m^* + f_m^* + h_{m+1}^*) \quad (3.102c)$$

Damit erhält man aus (3.92) für die zweite Ableitung:

$$M''_m = M''_{r,m} = \frac{1}{\Delta l^2} \cdot \left\{ \epsilon_m \cdot M_{m-1} - \delta_m \cdot M_m + \zeta_m \cdot M_{m+1} + \ell_{m-1} + 4\ell_m + \ell_{m+1} \right\} \quad (3.103)$$

Mit den Funktionswerten M_m und ihren zweiten Ableitungen M''_m können nunmehr auch die ersten Ableitungen M'_m bestimmt werden. Sie sind mit den Querkraften Q_m eines Balkens identisch, der indirekt d.h. über sekundäre Längsträger mit der Streckenlast r_m belastet ist.

	1	2	3	...	m-2	m-1	m	m+1	m+2	...	n-3	n-2	n-1	
0	M ₁	M ₂	M ₃	...	M _{m-2}	M _{m-1}	M _m	M _{m+1}	M _{m+2}	...	M _{n-3}	M _{n-2}	M _{n-1}	Lastwerte
1	+α ₁₁	-β ₁₂	+γ ₁₃											L ₁
2	-β ₂₁	+α ₂₂	-β ₂₃											L ₂
3	+γ ₃₁	-β ₃₂	+α ₃₃											L ₃
4	✓	+γ ₄₂	-β ₄₃											L ₄
...		✓	+γ ₅₃	✓					...
m			✓	...	+δ _{m,m-2}	-β _{m,m-1}	+α _{m,m}	-β _{m,m+1}	+δ _{m,m+2}					L _m
...				✓
n-3							✓	+δ _{n-3,n-5}	-β _{n-3,n-4}	+α _{n-3,n-3}	-β _{n-3,n-2}	γ _{n-3,n-1}		L _{n-3}
n-2							✓	+δ _{n-2,n-4}	-β _{n-2,n-3}	+α _{n-2,n-2}	-β _{n-2,n-1}	γ _{n-2,n-1}		L _{n-2}
n-1							✓	+δ _{n-1,n-3}	-β _{n-1,n-2}	+α _{n-1,n-1}	-β _{n-1,n-1}	γ _{n-1,n-1}		L _{n-1}

Matrix des Rüfpmomenten-Gleichungssystems für M_m
(Bei α, β und γ gibt erster Index die Zeile, zweiter Index die Spalte an, bei den Momenten in Zeile 0 ist der Index r weggelassen).

	0	1	2	3	m-1	m	m+1	m+2	...	n-2	n-1	n
0	l_0	l_1	l_2	l_3	l_{m-1}	l_m	l_{m+1}	l_{m+2}	...	l_{n-2}	l_{n-1}	l_n
1	4	17	8	1									
2	1	8	18	8	1								
3		1	8	18	8	1							
4													
...													
m					1	8	18	8	1				
...													
n-3								1	8	18	8	1	
n-2									1	8	18	8	1
n-1										1	8	17	4

$$\sum_0^0 = L_1$$

$$\sum_2^2 = L_2$$

$$\sum_1^3 = L_3$$

$$\sum_2^4 = L_4$$

...

$$\sum_{m-2}^{m+2} = L_m$$

...

$$\sum_{n-5}^{n-1} = L_{n-3}$$

$$\sum_{n-4}^n = L_{n-2}$$

$$\sum_{n-3}^n = L_{n-1}$$

Schema zur Bestimmung der Lastglieder $L_m = \sum_{m-2}^{m+2} h^*$. M
(In Zeile 0 ist $h_m^* = M_{0,m} \cdot h_m^*$, $m = 0$ bis $m = n$)

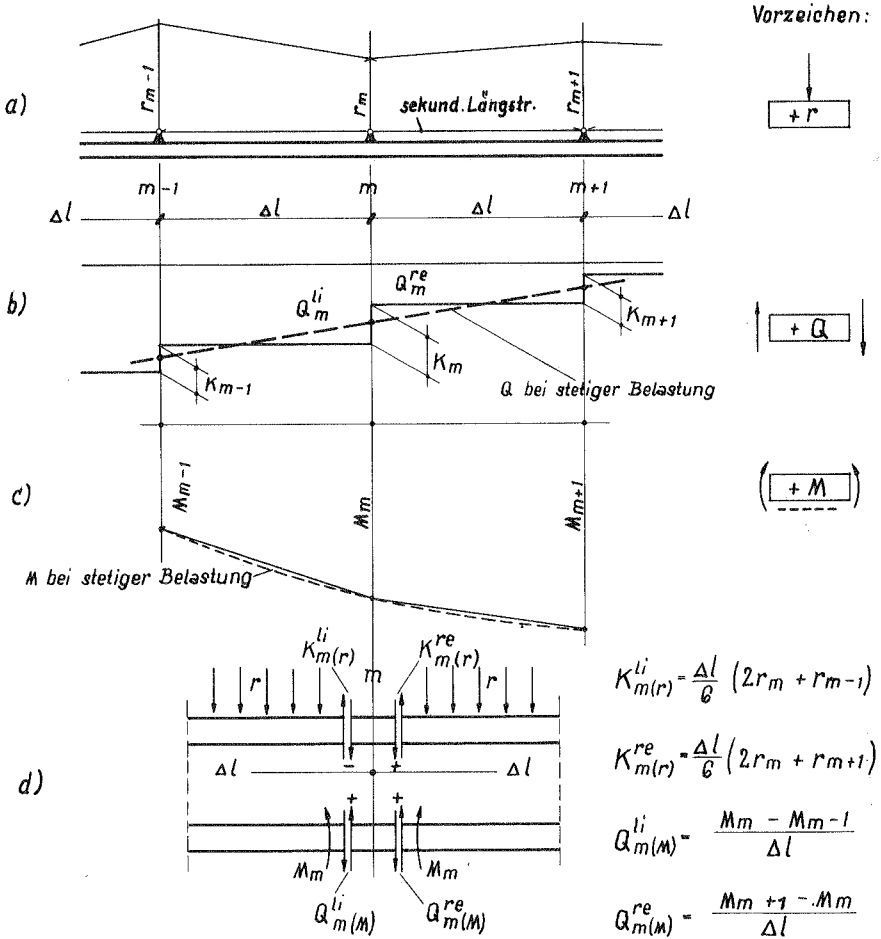


Bild 3.8 Querkräfte rechts und links vom Knoten m bei indirekter Belastung.

Mit den Bezeichnungen von Bild 3.8 beträgt die Querkraft links vom Knoten m:

$$Q_m^{li} = Q_{m(M)}^{li} - K_{m(r)}^{li} \quad (3.104)$$

$K_{m(r)}^{li}$ ist der Auflagerdruck des sekundären Längsträgers links von m:

$$K_{m(r)}^{li} = \frac{\Delta \ell}{6} (2r_m + r_{m-1}) \quad (3.105)$$

Die Querkraft links von m infolge der Knotenmomente M folgt aus:

$$Q_{m(M)}^{li} = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta \ell} \quad (3.106)$$

Mit (3.105) und (3.106) ergibt sich aus (3.104):

$$Q_m^{li} = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta \ell} - \frac{\Delta \ell}{6} (2r_m + r_{m-1}) \quad (3.107a)$$

Entsprechend wird rechts vom Knoten m:

$$Q_m^{re} = \frac{M_{m+1} - M_m}{\Delta \ell} + \frac{\Delta \ell}{6} (2r_m + r_{m+1}) \quad (3.107b)$$

Bei stetiger Belastung muss die Querkraft links und rechts von m gleich gross sein. Mit guter Genauigkeit kann deshalb hier der Mittelwert angenommen werden:

$$Q_m \approx \frac{Q_m^{li} + Q_m^{re}}{2} \quad (3.108)$$

oder mit (3.107a) und (3.107b):

$$Q_m \approx \frac{M_{r,m+1} - M_{r,m-1}}{2\Delta \ell} + \frac{\Delta \ell}{12} (r_{m+1} - r_{m-1})$$

Beachtet man, dass bei stetiger Belastung $r_m = -M_{r,m}''$ ist, so erhält man schliesslich für die Querkraft in m bzw. für M_m' :

$$\begin{aligned} M_m' = Q_m &= \frac{1}{2\Delta \ell} (M_{r,m+1} - M_{r,m-1}) - \frac{\Delta \ell}{12} (M_{r,m+1}'' - M_{r,m-1}'') \\ m &= 1 \text{ bis } m = n-1 \end{aligned} \quad (3.109)$$

(3.109) gilt für die Innenknoten $m = 1$ bis $m = n-1$. Für den Endknoten $m = 0$ erhält man aus (3.107b):

$$M_0' = Q_0 = Q_0^{re} = \frac{M_1 - M_0}{\Delta \ell} + \frac{\Delta \ell}{6} (2r_0 + r_1)$$

oder wegen $M_0 = 0$ und $r_0 = 0$ und $r_1 = -M_1''$:

$$M_0' = \frac{M_1}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{6} \cdot M_1'' \quad m = 0 \quad (3.110a)$$

Entsprechend für den Endknoten $m = n$

$$M_n' = -\frac{M_{n-1}}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{6} \cdot M_{n-1}'' \quad m = n \quad (3.110b)$$

4. Ermittlung der Schnittkräfte bzw. von M_r und seinen Ableitungen in Sonderfällen.

4.1 Geschlossene Lösung der Differentialgleichung 4.Ordnung bei konstantem, elastisch ausgesteiftem Querschnitt

Wie in Abschnitt 3 gezeigt, kann die Differentialgleichung (3.68) bei beliebigen, aber stetig veränderlichen Querschnittsabmessungen gelöst werden durch Umsetzen in ein lineares fünfgliedriges Gleichungssystem. Die Lösungen $M_{r,m}$ des linearen Systemes und seine Ableitungen stellen dabei Näherungen an die exakte Lösung dar, die bei genügender Unterteilung nur wenig von den genauen Werten abweichen.

Bei unveränderlichen Querschnittsabmessungen kann die Differentialgleichung (3.68) exakt gelöst werden. Die Koeffizienten g und h sind in diesem Falle konstant. Der Koeffizient f wird zu Null, da $D' = 0$ ist. Der Lösungsweg hängt von der Art der Belastung und dem Verhältnis $g : h$ ab.

Für die Belastung durch die gegengleichen Einzellasten $\pm P$ an beliebiger Stelle z und durch gegengleiche Momente an den Balkenenden sind die Lösungen bei beliebigen Verhältnissen $g : h$ im Folgenden angegeben. Für andere Belastungsfälle, z.B. Gleichstreckenlasten auf ganze oder nur einen Teil der Balkenlänge u.ä., ist die geschlossene Lösung ebenfalls möglich. Damit können die Beanspruchungen freiaufliegender oder durchlaufender Plattenbalken für die praktisch wichtigen, antimetrischen Belastungsfälle unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung in ähnlicher Weise berechnet werden wie mit den in Abschnitt 4.3 erwähnten Ausdrücken für den formtreuen, d.h. durch starre Querschotte ausgesteiften Querschnitt.

4.1.1 Einzellasten $\underline{+P}$ an beliebiger Stelle z

Obwohl der mathematische Berechnungsgang keine Schwierigkeiten bietet, wird er hier mit Rücksicht auf die Konstanten-Bestimmung ausführlich wiedergegeben.

Bei konstantem Querschnitt werden die beiden Koeffizienten g_z und h_z gemäss Gleichung (3.67) von z unabhängig. Die Differentialgleichung lautet in diesem Falle:

$$M_{rz}^{IV} - g \cdot M_{rz}'' + h \cdot M_{rz}' + h \cdot M_{oz} = 0 \quad (4.1)$$

Die Lösung der homogenen Form mit dem Ansatz $M_{rz} = e^{\alpha z}$ führt auf die charakteristische Gleichung 4. Grades

$$\alpha^4 - g\alpha^2 + h = 0 \quad (4.2)$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung heissen

$$\alpha_{1,2} = + \sqrt{0,5g \pm \sqrt{(0,5g)^2 - h}} \quad [\text{cm}^{-1}]$$

$$\alpha_{3,4} = - \alpha_{1,2}$$

Der weitere Lösungsweg hängt davon ab, ob die Wurzeln reell oder imaginär sind. Reelle Wurzeln ergeben sich nur, wenn

$$(0,5g)^2 > h \quad (4.4)$$

ist. Setzt man für g und h die Ausdrücke von (3.67) und (3.1) bis (3.3) ein, so erhält man folgende Bedingung für reelle Wurzeln in Abhängigkeit von den Querschnittsgrössen

$$a \cdot \bar{J}_{P1} \cdot J^* > \frac{2}{3} \cdot \frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \cdot J_D^2 \quad (4.5)$$

Bei verhältnismässig dünnen Stegen in grossem Abstand a wird die Bedingung meistens erfüllt sein (J_D klein). Bei dickeren Stegen in kleinerem Abstand oder geringer Plattendicke (\bar{J}_{P1} klein) wird die rechte Seite von (4.5) im allgemeinen grösser als die linke, so dass also in diesem Falle keine reellen Wurzeln auftreten.

Im Folgenden wird nun zunächst die Differentialgleichung für den Fall $(0,5g)^2 > h$ gelöst, wobei alle vier Wurzeln α_1 bis α_4 reell sind. Danach folgt die Lösung für $(0,5g)^2 < h$. Die vier Wurzeln sind dann alle imaginär und lassen sich in konjugiert komplexer Form darstellen. Schliesslich wird noch die Lösung für den Sonderfall $(0,5g)^2 = h$ angegeben.

a) $(0,5g)^2 > h$, Wurzeln reell

Die homogene Lösung lautet in diesem Falle:

$$M_{rz}^h = A \cdot e^{\alpha_1 z} + B \cdot e^{\alpha_2 z} + C \cdot e^{-\alpha_1 z} + D \cdot e^{-\alpha_2 z} \quad (4.6)$$

Bei einer Einzellast P an beliebiger Stelle a entsprechend Bild 4.1 ergibt sich als partikulares Integral:

$$M_{rz}^p = -M_z^o = -Q^o \cdot z \quad (4.7)$$

da die Ableitungen $M_{rz}^{p''}$ und $M_{rz}^{p''''}$ zu Null werden. Q^o ist dabei der Auflagerdruck des freiaufliegenden Balkens infolge der Last P in a.

Die allgemeine Lösung heisst also:

$$M_{rz} = M_{rz}^h + M_{rz}^p = A \cdot e^{\alpha_1 z} + B \cdot e^{\alpha_2 z} + C \cdot e^{-\alpha_1 z} + D \cdot e^{-\alpha_2 z} - Q^o \cdot z \quad (4.8)$$

Wegen der Unstetigkeit an der Laststelle wird die Spannweite ℓ in die beiden Bereiche gemäss Bild 4.1 unterteilt. Man erhält dann für den 1. bzw. 2. Bereich gemäss (4.8) :

$$\begin{aligned} M_{rz1} &= A_1 \cdot e^{\alpha_1 z_1} + B_1 \cdot e^{\alpha_2 z_1} + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 z_1} + \\ &+ D_1 \cdot e^{-\alpha_2 z_1} - Q_1^o \cdot z_1 \quad (1. \text{Bereich}) \\ M_{rz2} &= A_2 \cdot e^{\alpha_1 z_2} + B_2 \cdot e^{\alpha_2 z_2} + C_2 \cdot e^{-\alpha_1 z_2} + \\ &+ D_2 \cdot e^{-\alpha_2 z_2} - Q_2^o \cdot z_2 \quad (2. \text{Bereich}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

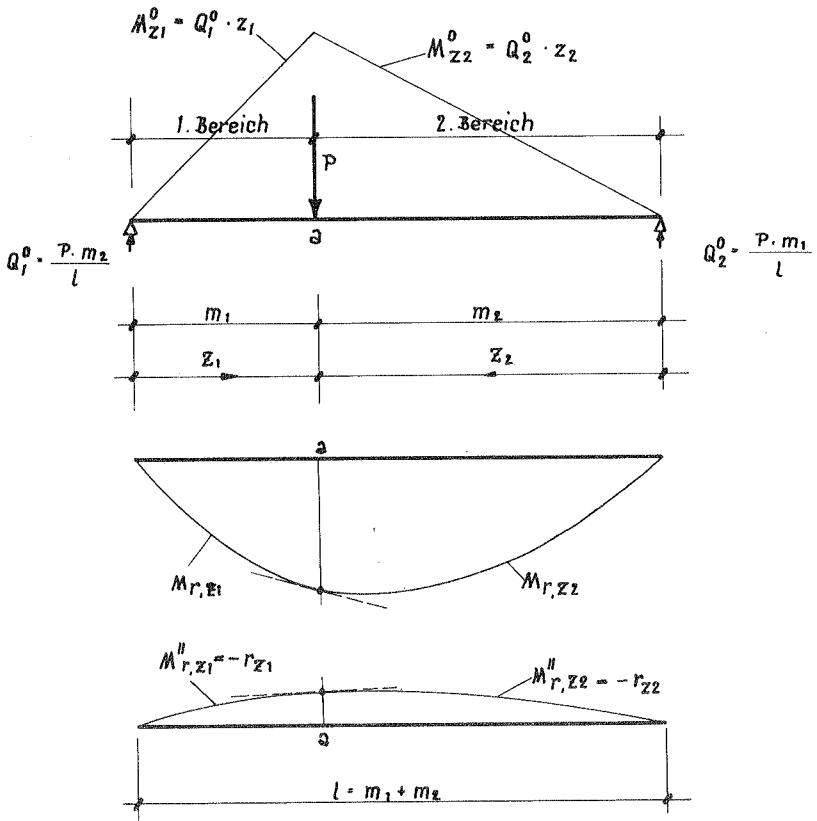


Bild 4.1 Unterteilung der Spannweite in 2 Bereiche bei Einzellast P in a .

Zur Bestimmung der Konstanten A_1 bis D_1 bzw. A_2 bis D_2 gelten folgende 8 Bedingungen:

1) für $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$ ist:

$$M_{r,z1} = 0 \quad \text{und} \quad M_{r,z2} = 0$$

(4.10)

und wegen $r_z = -M''_{rz}$

$$M''_{r,z1} = 0 \quad \text{und} \quad M''_{r,z2} = 0$$

2) für $z_1 = m_1$ bzw. $z_2 = m_2$, also an den Bereichsgrenzen in Punkt a, ist :

$$M_{rz1} = M_{rz2}$$

und wegen der Stetigkeit der Funktion M_{rz} in a:

$$M'_{rz1} = -M'_{rz2}$$

Weiter ist wegen $r_{z1} = r_{z2}$

$$M''_{rz1} = M''_{rz2} \quad (4.11)$$

Damit folgen aus (4.1) für die Bereichsgrenzen:

$$M_{rz1}^{IV} = M_{rz2}^{IV}$$

Aus den Randbedingungen unter 1) lassen sich für jeden Bereich zwei Konstante eliminieren. Man erhält z.B. für den 1. Bereich

$$\begin{aligned} C_1 &= -A_1 \\ D_1 &= -B_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

und (4.9) in der Form:

$$M_{rz1} = A_1(e^{\alpha_1 z_1} - e^{-\alpha_1 z_1}) + B_1(e^{\alpha_2 z_1} - e^{-\alpha_2 z_1}) - Q_1^0 \cdot z_1$$

oder mit den neuen Konstanten :

$$A_1 = \frac{F_1}{2} \quad \text{und} \quad B_1 = \frac{G_1}{2}$$

$$M_{rz1} = F_1 \cdot 0,5 \cdot (e^{\alpha_1 z_1} - e^{-\alpha_1 z_1}) + G_1 \cdot 0,5 \cdot (e^{\alpha_2 z_1} - e^{-\alpha_2 z_1}) - Q_1^0 \cdot z_1$$

Hierfür kann auch geschrieben werden:

für den 1. Bereich :

$$M_{rz1} = F_1 \cdot \text{Sin } \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot \text{Sin } \alpha_2 \cdot z_1 - Q_1^0 \cdot z_1$$

und entsprechend für den 2. Bereich :

$$M_{rz2} = F_2 \cdot \text{Sin } \alpha_1 \cdot z_2 + G_2 \cdot \text{Sin } \alpha_2 \cdot z_2 - Q_2^0 \cdot z_2$$

(4.13)

Die Ableitungen von M_{rz} , welche zur Ermittlung der Schnittkräfte gemäss (3.39) bis (3.41) benötigt werden, ergeben sich aus (4.13) für den 1. Bereich wie folgt:

$$M'_{rz1} = F_1 \cdot \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 + \alpha_2 \cdot G_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot z_1 - Q_1^0 \quad (4.13a)$$

$$M''_{rz1} = F_1 \cdot \alpha_1^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 + \alpha_2^2 \cdot G_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot z_1 \quad (4.13b)$$

Im 2. Bereich sind bei F , G , Q und z die Indices 2 anstelle der Indices 1 einzusetzen.

Die Konstanten F_1 und G_1 bzw. F_2 und G_2 folgen mit den 4 Randbedingungen unter 2) aus einem 4-gliedrigen Gleichungssystem in bekannter Weise.

b) $(0,5g)^2 < h$; Wurzeln nicht reell

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \alpha (+) \\ \beta (-) \end{aligned} = + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{h \pm \frac{g}{4}}} \quad \left[\text{cm}^{-1} \right] \quad (4.14)$$

wobei der Wurzelwert stets reell und positiv ist, erhält man die Lösungen der charakteristischen Gleichung in der konjugiert komplexen Form :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \alpha \pm \beta i \\ \alpha_{3,4} &= -\alpha_{1,2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

und das allgemeine Integral gemäss (4.8) mit k_1 bis k_4 als Konstante:

$$\begin{aligned} M_{rz} &= k_1 \cdot e^{(\alpha + \beta i)z} + k_2 \cdot e^{(\alpha - \beta i)z} + k_3 \cdot e^{-(\alpha + \beta i)z} + \\ &+ k_4 \cdot e^{-(\alpha - \beta i)z} - Q^0 \cdot z \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mit

$$e^{+i\beta z} = \cos \beta z + i \sin \beta z \quad (4.17)$$

und

$$e^{-i\beta z} = \cos \beta z - i \sin \beta z$$

wird daraus

$$M_{rz} = e^{\alpha z} \left\{ (k_1 + k_2) \cos \beta z + i (k_1 - k_2) \sin \beta z \right\} + \\ + \bar{e}^{\alpha z} \left\{ (k_3 + k_4) \cos \beta z - i (k_3 - k_4) \sin \beta z \right\} - \\ - Q^0 \cdot z \quad (4.18)$$

Führt man als neue Konstante ein:

$$k_1 + k_2 = A \\ i(k_1 - k_2) = B \\ k_3 + k_4 = C \\ -i(k_3 - k_4) = D \quad (4.19)$$

so ergibt sich die allgemeine Lösung in der Form:

$$M_{rz} = e^{\alpha z} \left\{ A \cdot \cos \beta z + B \cdot \sin \beta z \right\} + \\ + \bar{e}^{\alpha z} \left\{ C \cdot \cos \beta z + D \cdot \sin \beta z \right\} - Q^0 \cdot z \quad (4.20)$$

Für die Bestimmung der Konstanten A bis D gelten dieselben Überlegungen wie bei a).

Man erhält für die beiden Funktionsbereiche gemäss Bild 4.1 die Gleichungen:

$$M_{rz1} = e^{\alpha z_1} (A_1 \cdot \cos \beta z_1 + B_1 \cdot \sin \beta z_1) + \\ + \bar{e}^{\alpha z_1} (C_1 \cdot \cos \beta z_1 + D_1 \cdot \sin \beta z_1) - Q_1^0 \cdot z_1 \\ \text{und} \\ M_{rz2} = e^{\alpha z_2} (A_2 \cdot \cos \beta z_2 + B_2 \cdot \sin \beta z_2) + \\ + \bar{e}^{\alpha z_2} (C_2 \cdot \cos \beta z_2 + D_2 \cdot \sin \beta z_2) - Q_2^0 \cdot z_2 \quad (4.21)$$

Die 8 Konstanten können aus (4.10) und (4.11) bestimmt werden. Mit (4.10) lassen sich wieder für jeden Bereich unabhängig voneinander zwei Konstante eliminieren. Man erhält - ohne auf den Rechnungsgang näher einzugehen - die (4.12) entsprechenden Beziehungen:

$$C_1 = -A_1$$

und $D_1 = +B_1$ (4.22)

Damit kann man für M_{rz1} gemäss (4.21) schreiben:

$$M_{rz1} = A_1 \cos \beta z_1 (e^{\alpha z_1} - e^{-\alpha z_1}) + \\ + B_1 \cdot \sin \beta z_1 (e^{\alpha z_1} + e^{-\alpha z_1}) - Q_1^0 \cdot z_1$$

oder mit den neuen Konstanten

$$A_1 = \frac{F_1}{2} \text{ und } B_1 = \frac{G_1}{2}$$

für den 1. Bereich

$$M_{rz1} = F_1 \cos \beta z_1 \cdot \sin \alpha z_1 + \\ + G_1 \cdot \sin \beta z_1 \cdot \cos \alpha z_1 - Q_1^0 \cdot z_1$$

bzw. für den 2. Bereich (4.23)

$$M_{rz2} = F_2 \cos \beta z_2 \cdot \sin \alpha z_2 + \\ + G_2 \cdot \sin \beta z_2 \cdot \cos \alpha z_2 - Q_2^0 \cdot z_2$$

Die zugehörigen Ableitungen lauten für den 1. Bereich:

$$M'_{rz1} = (F_1 \alpha + G_1 \cdot \beta) \cdot \cos \beta z_1 \cdot \cos \alpha z_1 + \\ + (G_1 \cdot \alpha - F_1 \cdot \beta) \cdot \sin \beta z_1 \cdot \sin \alpha z_1 - Q_1^0$$
 (4.23a)

$$M''_{rz1} = \{F_1(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta G_1\} \cdot \cos \beta z_1 \cdot \sin \alpha z_1 + \\ + \{G_1(\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha\beta F_1\} \cdot \sin \beta z_1 \cdot \cos \alpha z_1$$
 (4.23b)

Für den 2. Bereich sind bei F, G, Q und z anstelle der Indices 1 die Indices 2 einzusetzen.

Die Konstanten F_1 und G_1 bzw. F_2 und G_2 folgen wieder in bekannter Weise aus den Randbedingungen (4.11) als Lösungen eines 4-gliedrigen Gleichungssystems.

c) $(0,5g)^2 = h$; Wurzeln reell und paarweise gleich

In diesem Falle erhält man aus (4.3) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = + \sqrt{0,5 \cdot g} \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = - \sqrt{0,5 \cdot g} \end{aligned} \quad (4.24)$$

und damit die homogene Lösung:

$$\begin{aligned} M_{rZ}^h &= e^{\alpha_1 z} (A+B \cdot z) + e^{\alpha_3 z} (C+D \cdot z) \\ &= e^{\alpha_1 z} (A+B \cdot z) + e^{-\alpha_1 z} (C+D \cdot z) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mit der partikulären Lösung (4.7) wird die allgemeine Lösung für die beiden Bereiche:

$$\begin{aligned} M_{rZ1} &= A_1 \cdot e^{\alpha_1 z_1} + B_1 \cdot z_1 e^{\alpha_1 z_1} + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 z_1} + \\ &+ D_1 \cdot z_1 \cdot e^{-\alpha_1 z_1} - Q_1^0 \cdot z_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

bzw.

$$\begin{aligned} M_{rZ2} &= A_2 \cdot e^{\alpha_1 z_2} + B_2 \cdot z_2 e^{\alpha_1 z_2} + C_2 \cdot e^{-\alpha_1 z_2} + \\ &+ D_2 \cdot z_2 \cdot e^{-\alpha_1 z_2} - Q_2^0 \cdot z_2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen gemäss (4.10) führen zu den Konstanten für den 1. Bereich:

$$\begin{aligned} C_1 &= -A_1 \\ B_1 &= +D_1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Damit wird

$$M_{rZ1} = A_1 (e^{\alpha_1 z_1} - e^{-\alpha_1 z_1}) + B_1 \cdot z_1 (e^{\alpha_1 z_1} + e^{-\alpha_1 z_1}) - Q_1^0 \cdot z_1$$

oder mit den neuen Konstanten :

$$0,5 \cdot F_1 = A_1 \quad \text{und} \quad 0,5 \cdot G_1 = B_1$$

für den 1. Bereich

$$M_{rz1} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 - Q_1^0 \cdot z_1$$

bzw. für den 2. Bereich

$$M_{rz2} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot z_2 + G_2 \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot z_2 - Q_2^0 \cdot z_2$$

(4.28)

Die Ableitungen von (4.28) heissen für den 1. Bereich :

$$M'_{rz1} = (F_1 \cdot \alpha_1 + G_1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot \alpha_1 \cdot z_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 - Q_1^0 \quad (4.28a)$$

$$M''_{rz1} = \alpha_1 (F_1 \cdot \alpha_1 + 2G_1) \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot \alpha_1^2 \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 \quad (4.28b)$$

Im 2. Bereich sind bei F, G, Q und z die Indices 2 anstelle der Indices 1 einzusetzen.

Die Konstanten F_1 und G_1 bzw. F_2 und G_2 folgen wieder aus den Randbedingungen gemäss (4.11) als Lösungen eines viergliedrigen Gleichungssystems.

Mit (4.13), (4.23) und (4.28) sind die Momente M_{rz} und ihre Ableitungen für alle Abmessungsverhältnisse $g : h$ bekannt.

Damit ergeben sich z.B. die Biegemomente am System I:

$M_{Iz} = M_z^0 + M_{rz}$ für den 1. Bereich zu :

$$M_{I,z1} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot z_1 \quad \text{für } (0,5g) \frac{z}{h}$$

bzw.

$$M_{I,z1} = F_1 \cdot \cos \beta \cdot z_1 \cdot \sin \alpha \cdot z_1 + G_1 \cdot \sin \beta \cdot z_1 \cdot \cos \alpha \cdot z_1 \quad (4.29)$$

bzw.

$$\text{für } (0,5g) \frac{z}{h}$$

$$M_{I,z1} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 + G_1 \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 \quad \text{für } (0,5g) \frac{z}{h}$$

Für den 2. Bereich sind bei F, G und z die Indices 2 einzusetzen.

Die Torsionsmomente $M_{T,z}$ am System II und die Querbiegemomente \bar{m}_z in der Platte erhält man aus den Ableitungen der Gleichungen für M_{rz} gemäss (3.40), wobei $k = 0$ ist, und (3.41). Die lotrechten Stegverschiebungen v , die Tangentenwinkel ψ und die Stegdrehwinkel φ folgen aus (3.49) und (3.50).

4.1.2 Einzellasten $\pm P$ in $0,5 \cdot \ell$

Die Konstantenbestimmung aus einem viergliedrigen Gleichungssystem macht eine geschlossene Lösung für beliebige Stellung der Last P zu umständlich.

Bei P in $0,5 \cdot \ell$ ergeben sich jedoch Vereinfachungen in der Konstantenbestimmung, da in diesem Falle wegen der horizontalen Tangenten im Punkt $z = 0,5 \cdot \ell$ gilt:

$$M'_{RZ} = 0$$

$$M'''_{RZ} = 0$$

Im Falle a) - $(0,5 \cdot g)^2 > h$, reelle Wurzeln - erhält man damit die Konstanten:

$$F = 0,5 \cdot P \cdot \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2^2 - \alpha_1^3) \cdot \cos 0,5 \cdot \alpha_1 \cdot \ell}$$

und

$$G = 0,5 \cdot P \cdot \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1^2 \cdot \alpha_2 - \alpha_2^3) \cdot \cos 0,5 \cdot \alpha_2 \cdot \ell}$$

(4.30)

Das Moment M_R und seine Ableitungen ergeben sich für den Bereich $z = 0$ bis $z = 0,5 \ell$ gemäss (4.13):

$$M_{RZ} = F \cdot \sin \alpha_1 \cdot z + G \cdot \sin \alpha_2 \cdot z - 0,5 \cdot P \cdot z$$

$$M'_{RZ} = F \cdot \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z + G \cdot \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot z - 0,5 \cdot P$$

$$M''_{RZ} = F \cdot \alpha_1^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z + G \cdot \alpha_2^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot z$$

Hierbei ist gemäss (4.3):

$$\alpha_1^{(+)} = \sqrt{0,5g \pm \sqrt{(0,5g)^2 - h}}$$

$$\alpha_2^{(-)}$$

oder mit (3.67a) und (3.67c):

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{B}i}{a \cdot D} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \bar{B}i}{a \cdot D}\right)^2 - \frac{24 \cdot \bar{B}i}{a^3 \cdot B}}}$$

$$\alpha_2$$

bzw. umgeformt:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{B}i}{a \cdot D} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3} \frac{D^2}{a \cdot \bar{B}i \cdot B}} \right)} \quad [cm^{-1}] \quad (4.31)$$

Im Falle b) - $(0,5 \cdot g)^2 \ll h$, konjugiert komplexe Wurzeln - werden die Konstanten:

$$\begin{aligned} F &= 0,25 \cdot P \cdot \ell \cdot k_1 \\ G &= -0,25 \cdot P \cdot \ell \cdot k_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Hierbei bedeutet:

$$\begin{aligned} k_1 &= Z_1/N \quad ; \quad k_2 = Z_2/N \quad (4.33) \\ Z_1 &= (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) \sin 0,5 \beta \ell \cdot \sin 0,5 \alpha \ell \\ &\quad - (\beta^3 - 3\alpha^2\beta) \cos 0,5 \beta \ell \cdot \cos 0,5 \alpha \ell \\ Z_2 &= (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) \cos 0,5 \beta \ell \cdot \cos 0,5 \alpha \ell \\ &\quad + (\beta^3 - 3\alpha^2\beta) \sin 0,5 \beta \ell \cdot \sin 0,5 \alpha \ell \\ N &= \ell \cdot (\alpha^3 \cdot \beta + \alpha \beta^3) (\cos^2 0,5 \alpha \ell - \sin^2 0,5 \beta \ell) \end{aligned}$$

Das Moment M_R und seine Ableitungen ergeben sich für den Bereich $z = 0$ bis $z = 0,5 \ell$ gemäss (4.23):

$$\left. \begin{aligned} M_{Rz} &= F \cdot \cos \beta z \cdot \sin \alpha z + G \cdot \sin \beta z \cdot \cos \alpha z - 0,5 P \cdot z \\ M'_{Rz} &= (\alpha \cdot F + \beta \cdot G) \cos \beta z \cdot \cos \alpha z + \\ &\quad + (\alpha \cdot G - \beta \cdot F) \sin \beta z \cdot \sin \alpha z - 0,5 P \\ M''_{Rz} &= \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) F + 2\alpha\beta \cdot G \right\} \cos \beta z \cdot \sin \alpha z + \\ &\quad + \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) G - 2\alpha\beta \cdot F \right\} \sin \beta z \cdot \cos \alpha z \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Hierbei ist gemäss (4.14)

$$\begin{aligned} \alpha(+), \beta(-) &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h} \pm \frac{g}{4}} \end{aligned}$$

oder mit (3.67a) und (3.67c) :

$$\alpha_B = \sqrt{\frac{2}{a} \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{B}i}{2a \cdot B} \pm \frac{3 \cdot \bar{B}i}{2a \cdot D}}} \quad \{ \text{cm}^{-1} \} \quad (4.34a)$$

Im Falle c) - $(0,5 \cdot g)^2 = h$, paarweise gleiche reelle Wurzeln - werden die Konstanten:

$$F = 0,25 P \frac{3+0,5 \alpha \cdot \ell \cdot \text{Tg } 0,5 \alpha \cdot \ell}{\alpha \cdot \text{Cos } 0,5 \alpha \cdot \ell} \quad (4.35)$$

$$G = -0,25 P \cdot \frac{1}{\text{Cos } 0,5 \alpha \cdot \ell}$$

Das Moment und seine Ableitungen ergeben sich für den Bereich $z = 0$ bis $z = 0,5 \ell$ gemäss (4.28):

$$M_{rZ} = F \cdot \text{Sin } \alpha \cdot z + G \cdot z \cdot \text{Cos } \alpha \cdot z - 0,5 P \cdot z$$

$$M'_{rZ} = \alpha \cdot G \cdot z \cdot \text{Sin } \alpha \cdot z + (\alpha \cdot F + G) \cdot \text{Cos } \alpha \cdot z - 0,5 P \quad (4.36)$$

$$M''_{rZ} = \alpha (F \cdot \alpha + 2G) \text{Sin } \alpha \cdot z + \alpha^2 \cdot G \cdot z \cdot \text{Cos } \alpha \cdot z$$

Hierbei ist gemäss (4.24):

$$\alpha = + \sqrt{0,5 g}$$

oder mit (3.67a):

$$\alpha = \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{B}i}{a \cdot D}} \quad \{ \text{cm}^{-1} \} \quad (4.36a)$$

Mit den Ausdrücken (4.31) bis (4.36) können für alle Abmessungsverhältnisse $g : h$ die Schnittkräfte in allen Schnitten für den Belastungsfall $\underline{+P}$ in $\ell/2$ bzw. infolge eines in $\ell/2$ angreifenden Torsionsmomentes ermittelt werden.

In Vorberechnungen genügt es oft, nur die Extremwerte zu kennen.

Die grössten L ä n g s s p a n n u n g e n treten unter der Last, also in $z = 0,5 \ell$, auf und folgen aus dem Moment M_I in $\ell/2$ am Biegesystem (I)

$$M_{I, z=0,5 \ell} = \frac{P \ell}{4} + M_{r, z=0,5 \ell} \quad (4.37)$$

Die grössten Schubspannungen infolge freier Torsion treten an den Balkenenden, also in $z = 0$ auf. Sie ergeben sich aus dem Torsionsmoment M_T in $z = 0$ am Drillsystem (II) :

$$M_{T,z=0} = - \frac{a}{2} \cdot M'_{T,z=0} \quad (4.38a)$$

Die grössten Schubspannungen infolge Wölbkraft-Torsion treten an der Laststelle, also in $z = \ell/2$, auf. Sie ergeben sich aus der Querkraft Q_I in $\ell/2$ am Biegesystem (I) :

$$Q_{I,z=\ell/2} = \pm 0,5 P \quad (4.38b)$$

Die grössten Querbiegespannungen in der Platte treten an der Laststelle auf und folgen aus dem Querbiegemoment \bar{m}_z am Drillsystem. Man erhält :

$$\bar{m}_{z=0,5\ell} = \frac{a}{2} \cdot M''_{Tz=0,5\ell} \quad (4.39)$$

Der Verlauf der Kurven von M_I , Q_I , M_T und \bar{m} kann damit leicht abgeschätzt werden.

Wie aus Bild 4.2 zu ersehen ist, ist der Knickwinkel γ_I der M_I -Linie in $\ell/2$ gleich gross wie der Knickwinkel γ_0 der M^0 -Linie. Mit den damit bekannten Tangentenrichtungen der M_I -Linie in $\ell/2$ kann die Form der Kurve also ungefähr angegeben werden.

Die M_T -Linie hat in $\ell/2$ einen Null-Punkt und verläuft zwischen $z = 0$ und $z = \ell$ etwa cosinus-förmig.

Die Q_I -Linie folgt aus der Differenz der Torsionsmomente infolge freier und Wölbkrafttorsion:

$$Q_I = (M_T^0 - M_T) \cdot \frac{2}{a}$$

Dabei ist :

$$M_T^0 = \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{P \cdot a}{4} = \text{Moment bei freier Torsion je Querschnittshälfte}$$

Die \bar{m} -Linie hat etwa sinus-förmigen Verlauf und geht in den Punkt $z = 0$ und $z = \ell$ durch Null.

Die Momentenlinien M_I und M_T geben im Vergleich zu den M^0 - und M_T^0 .Linien bereits einen guten Anhalt, wieviel von der in $l/2$ angreifenden Torsionslast über Längsbiegung (= Wölbkrafttorsion) bzw. freie Torsion (= St.Venant) zu den Lagern abgetragen wird.

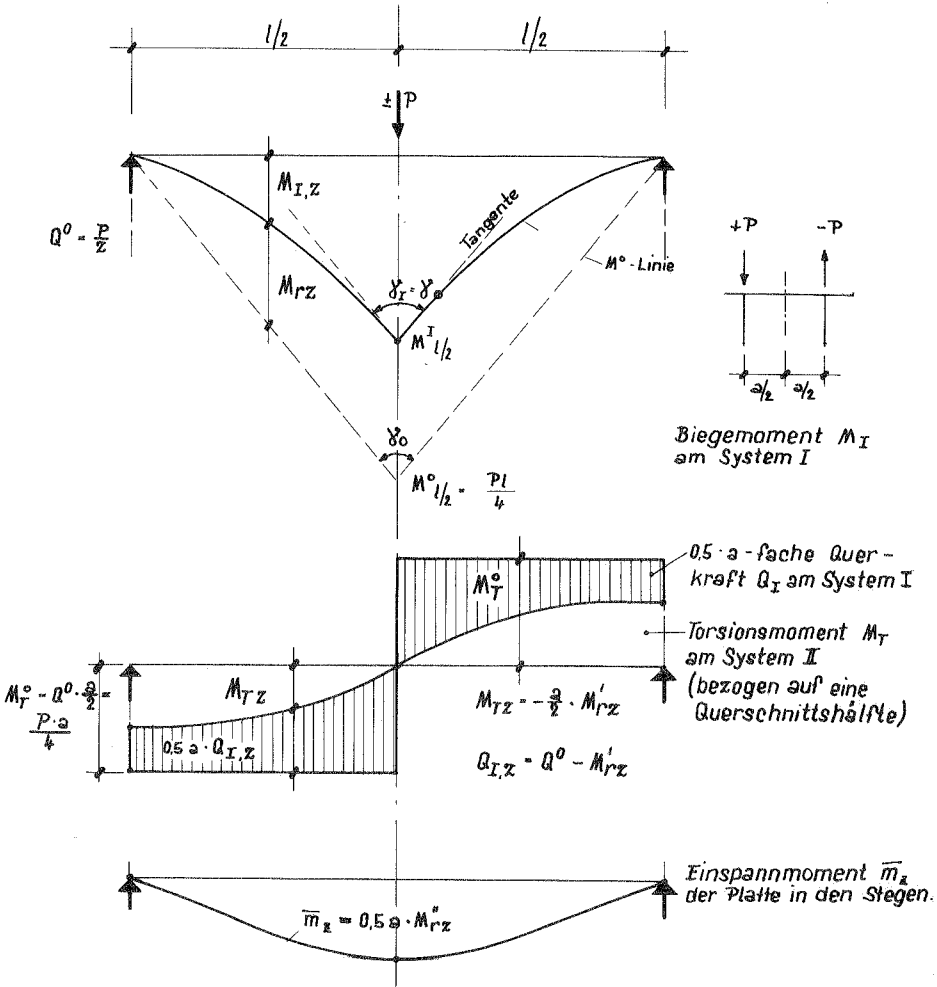


Bild 4.2 Verlauf von $M_{I,z}$, $Q_{I,z}$, $M_{T,z}$ und \bar{m}_z bei P in $l/2$

4.1.3 Gegengleiche Momente an einem Balkenende

Bei durchlaufenden Plattenbalken, auf die in Abschnitt 6 näher eingegangen wird, treten infolge antimetrischer Steglasten am System I gegengleiche Endmomente gemäss Bild 4.3 auf. Die Lösung der Differentialgleichung im Lastfall $\pm M^0$ an einem Balkenende kann aus den Lösungen des in 4.1.1 untersuchten Lastfalles abgeleitet werden. Für die verschiedenen Abmessungsverhältnisse, gekennzeichnet durch das Verhältnis $g : h$, erhält man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung wieder aus (4.3) bzw. (4.14) bzw. (4.24) und damit folgende Lösungen, wenn die gegengleichen Momente $\pm M^0$ z.B. am Balkenende B angreifen:

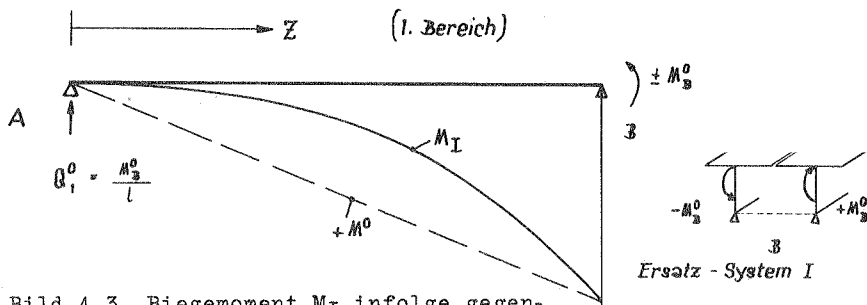


Bild 4.3 Biegemoment M_I infolge gegengleicher Endmomente $\pm M^0$ in B.

Fall a) $(0,5.g)^2 > h$, reelle Wurzeln

Es wird mit $z_1 = z$ und $Q_1^0 = M_B^0 / \ell$ aus (4.13), wobei die ganze Balkenlänge als Bereich 1 aufgefasst ist (vgl. Bild 4.3):

$$M_{r,z} = F \sin \alpha_1 \cdot z + G \cdot \sin \alpha_2 \cdot z - M_B^0 \cdot \frac{z}{\ell} \quad (4.40)$$

Die Konstanten F und G folgen aus den Randbedingungen (4.11) sinngemäss für $z = \ell$:

$$M_{r,\ell} = 0$$

$$M_{r,\ell}'' = 0$$

Man erhält:

$$F = - \frac{\alpha_2^2 \cdot M_B^0}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sin \alpha_1 \cdot \ell} \quad (4.41a)$$

$$G = \frac{\alpha_1^2 \cdot M_B^0}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cdot \sin \alpha_2 \cdot \ell} \quad (4.41b)$$

Fall b) $(0,5 \cdot g)^2 < h$, Wurzeln nicht reell

Entsprechend 4.1.1 erhält man mit $z_1 = z$ und $Q_1^0 = M_B^0 / \ell$ aus (4.23)

$$M_{rz} = F \cdot \cos \beta z \cdot \sin \alpha z + G \cdot \sin \beta z \cdot \cos \alpha z - M_B^0 \cdot \frac{z}{\ell} \quad (4.42)$$

Aus den Randbedingungen wie im Fall a) folgt:

$$F = M_B^0 \cdot k_1 / k_3 \quad (4.43a)$$

$$G = -M_B^0 \cdot k_2 / k_3 \quad (4.43b)$$

Hierbei bedeutet:

$$k_1 = (\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta \ell \cos \alpha \ell + 2\alpha \beta \cdot \cos \beta \ell \cdot \sin \alpha \ell$$

$$k_2 = (\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta \ell \cdot \sin \alpha \ell - 2\alpha \beta \cdot \sin \beta \ell \cdot \cos \alpha \ell$$

$$k_3 = 2\alpha \beta (\cos^2 \alpha \ell - \cos^2 \beta \ell)$$

Fall c) $(0,5 \cdot g)^2 = h$, paarweis gleiche Wurzeln

Entsprechend 4.1.1 erhält man aus (4.28) mit $z_1 = z$ und $Q_1^0 = M_B^0 / \ell$:

$$M_{rz} = F \cdot \sin \alpha z + G \cdot z \cdot \cos \alpha z - M_B^0 \cdot \frac{z}{\ell} \quad (4.44)$$

Aus den Randbedingungen wie im Fall a) folgt:

$$F = M_B^0 \left\{ \frac{\alpha \ell \cdot \cos \alpha \ell}{2 \sin^2 \alpha \cdot \ell} + \frac{1}{\sin \alpha \ell} \right\} \quad (4.45a)$$

$$G = - M_B^0 \frac{\alpha}{2 \cdot \sin \alpha \ell} \quad (4.45b)$$

4.2 Numerische Lösung der Differentialgleichung bei veränderten, starren ausgesteiftem Querschnitt

Wird der Plattenbalken in engen Abständen durch starre Querschnitt zwischen den Stegen ausgesteift, dann können in der Platte keine Querbiegemomente auftreten. Die Verschiebung v_{P1} am System II wird zu Null (vgl. Bild 3.1). Desgleichen verschwindet die Verschiebung v_{P1} , wenn die Biegesteifigkeit in Querrichtung \bar{B}_1 unendlich gross wird.

In beiden Fällen treten also die gleichen Verformungen und Beanspruchungen der Systeme I und II ein, vorausgesetzt, dass die Steifigkeiten B_z und D_z unverändert geblieben sind.

Für $\bar{B}_1 = \infty$ erhält man die Differentialgleichung (3.34). Die Lösung erfolgt wieder mit Hilfe der Seilpolygongleichung. Erweitert man (3.34) mit $1/c_z$ und setzt für :

$$\frac{b_z}{c_z} = \frac{D'_z}{D_z} = i_z \quad (4.46a)$$

und für

$$\frac{1}{c_z} = \frac{4 \cdot D_z}{a^2 \cdot B_z} = k_z \quad (4.46b)$$

so verschwindet der Koeffizient von M''_{RZ} und man erhält die Differentialgleichung in der Form:

$$-M''_{RZ} + i_z \cdot M'_{RZ} + k_z \cdot M_{RZ} = -k_z \cdot M_z^0 \quad (4.47)$$

Die 4 Glieder dieser Gleichung werden entsprechend Bild 3.7 als gedachte Belastungsfunktionen eines freiaufliegenden Trägers aufgefasst, wobei die Lasten indirekt durch sekundäre Längsträger mit der Stützweite $\Delta \ell = \ell/n$ an den Knotenpunkten m abgegeben werden. Anstelle von (4.47) kann dann die Knotengleichung geschrieben werden. Sie lautet für den beliebigen Knoten m :

$$-K_m(M'') + K_m(i \cdot M') + K_m(k \cdot M) = -K_m(k \cdot M^0) \quad (4.48)$$

Hierbei sind zur Vereinfachung der Schreibweise die Indices r und z weggelassen.

Nach (3.57) ist:

$$\begin{aligned} \Delta l \cdot K_m(M'') &= \frac{\Delta l^2}{6} (M''_{m-1} + 4M''_m + M''_{m+1}) = \\ &= M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Weiter ergibt sich nach (3.58) bzw. (3.60) mit $i_{m-1} \approx i_m \approx i_{m+1}$ für :

$$\begin{aligned} \Delta l \cdot K_m(i \cdot M') &= \frac{\Delta l^2}{6} \cdot i_m (M'_{m-1} + 4M'_m + M'_{m+1}) = \\ &= \frac{\Delta l}{2} \cdot i_m (M_{m+1} - M_{m-1}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Setzt man (4.49) und (4.50) in die mit Δl erweiterte Knotengleichung (4.48) ein, so erhält man die von den 2. und 1. Ableitungen freie Gleichung:

$$\begin{aligned} -M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} + \frac{\Delta l}{2} \cdot i_m (M_{m+1} - M_{m-1}) \\ + \frac{\Delta l^2}{6} \cdot (k_{m-1} \cdot M_{m-1} + 4k_m \cdot M_m + k_{m+1} \cdot M_{m+1}) = \\ = - \frac{\Delta l^2}{6} (k_{m-1} \cdot M_{m-1}^0 + 4k_m \cdot M_m^0 + k_{m+1} \cdot M_{m+1}^0) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Mit

$$\frac{\Delta l}{2} \cdot i_m = i_m^* \quad (4.52a)$$

und

$$\frac{\Delta l^2}{6} \cdot k_m = k_m^* \quad (4.52b)$$

ergibt sich aus (4.51) nach Ordnung der Glieder :

$$\begin{aligned} -M_{m-1} (+1 + i_m^* - k_{m-1}^*) + M_m (2 + 4k_m^*) \\ - M_{m+1} (+1 - i_m^* - k_{m+1}^*) = \\ = - \left\{ k_{m-1}^* \cdot M_{m-1}^0 + 4k_m^* \cdot M_m^0 + k_{m+1}^* \cdot M_{m+1}^0 \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die Dreimomentengleichung (4.53) gilt für alle Knoten mit Ausnahme der Endknoten $m = 0$ und $m = n$. Sie kann also für alle $(n-1)$ Innenknoten angeschrieben werden. Da an den Endknoten $m = 0$ und

$m = n$ das Moment infolge der Pendelkräfte verschwindet

$$M_0 = M_{r,0} = 0 \quad \text{und} \quad M_n = M_{r,n} = 0 \quad (4.54)$$

können mit Hilfe des Drei-Momenten-Gleichungssystems (4.53) die Momente M_r in allen Knotenpunkten bestimmt werden.

Ausser M_r werden noch die Ableitungen M_r' und M_r'' benötigt.

Genähert gilt für die erste Ableitung in allen Innenknoten $m = 1$ bis $m = n - 1$:

$$M_m' = \frac{1}{2 \cdot \Delta \ell} (M_{m+1} - M_{m-1}) \quad (4.55)$$

Damit ergibt sich aus (4.47) für die zweite Ableitung - ebenfalls in den Innenknoten - :

$$M_m'' = \frac{i_m}{2 \cdot \Delta \ell} (M_{m+1} - M_{m-1}) + k_m (M_m^0 + M_m)$$

oder mit (4.52a) und (4.52b)

$$M_m'' = \frac{1}{\Delta \ell^2} \left\{ 6k_m^* (M_m^0 + M_m) + i_m^* (M_{m+1} - M_{m-1}) \right\} \quad (4.56)$$

Für den Endknoten $m = 0$ (und sinngemäss für den Endknoten $m = n$) erhält man die erste Ableitung :

$$M_0' = M_1' - M_1'' \cdot \Delta \ell \quad (4.57)$$

und aus (4.47) mit $z = 0$ und M_0^0 und $M_0 = 0$ die zweite Ableitung:

$$M_0'' = i_0 \cdot M_0' \quad (4.58)$$

Sind die Werte $M_m = M_{r,m}$ und die Ableitungen $M_{r,m}'$ und $M_{r,m}''$ für alle Knoten ermittelt, dann folgen die Schnitt- und Verformungsgrössen wieder aus den Gleichungen (3.39) bis (3.45).

4.3 Geschlossene Lösung der Differentialgleichung bei konstantem, starrausgesteiftem Querschnitt

Bei konstantem Querschnitt ist $D_z = D$ und somit $D' = 0$. Weiter ist $B_z = B$. Aus (4.46a) folgt damit $i_z = 0$ bzw. aus (4.46b):

$$k_z = k = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{D}{B} = \frac{4 \cdot G \cdot J_D}{a^2 \cdot E \cdot J^*} \quad [m^{-2}] \quad (4.59)$$

Die Differentialgleichung 2.Ordnung (4.47) geht damit in die einfache Form über:

$$-M''_{Rz} + k \cdot M_{Rz} = -k M_z^0 \quad (4.60)$$

Die Lösung der Differentialgleichung hängt vom Verlauf der Belastungsfunktion M_z^0 und vom Querschnittswert k ab.

Sie wird - nur um sie auf die bekannten Ausdrücke in [6] zurückzuführen - im folgenden Abschnitt für den Belastungsfall $\pm P$ an beliebiger Stelle a des Plattenbalkens (vgl. Bild 4.1) ausführlicher angegeben.

Für andere Belastungsfälle wurden geschlossene Ausdrücke für die Schnittkräfte und Verformungen in Abhängigkeit von k bzw. dem dimensionslosen Kennwert

$$\mathcal{K} = \ell \sqrt{k} = \frac{2\ell}{a} \sqrt{\frac{D}{B}} \quad [1] \quad (4.59a)$$

ermittelt. Der Kennwert \mathcal{K} liegt für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle zwischen $\mathcal{K} = 0$ und $\mathcal{K} = 10$. Für die Werte $\mathcal{K} = 0, 1, 2 \dots 10$ wurden die Ausdrücke für die Schnittkräfte und Verformungsgrößen bereits ausgewertet und die Ergebnisse in Kurventafeln dargestellt. Damit können für die häufigsten Belastungsfälle die Schnittkräfte und Verformungsgrößen nach Ermittlung von \mathcal{K} ohne weitere Zwischenrechnung direkt den Tafeln entnommen werden.

(Die Ausdrücke für die Schnittkräfte und Verformungsgrößen sowie die Kurventafeln werden hier nicht wiedergegeben.)

4.3.1 Einzellasten $\underline{+P}$ an beliebiger Stelle a

Lösungsansatz:

$$M_{rZ} = e^{\alpha Z} \quad (4.61)$$

Charakteristische Gleichung:

$$-\alpha^2 + k = 0 \quad (4.62)$$

oder

$$\alpha_1 = + \sqrt{k} = -\alpha_2 \quad (4.63)$$

Da k stets reell und > 0 , sind auch die Wurzeln α_1 und α_2 stets reell.

Homogene Lösung:

$$M_r^h = A \cdot e^{\alpha_1 Z} + B \cdot e^{-\alpha_1 Z}$$

Partikuläre Lösung:

$$M_r^p = -M_z^o = -Q^o \cdot z$$

Allgemeine Lösung für den 1. bzw. 2. Bereich:

$$\begin{aligned} M_{rZ1} &= A_1 \cdot e^{\alpha_1 Z_1} + B_1 \cdot e^{-\alpha_1 Z_1} - M_{Z1}^o \\ M_{rZ2} &= A_2 \cdot e^{\alpha_1 Z_2} + B_2 \cdot e^{-\alpha_1 Z_2} - M_{Z2}^o \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die Konstantenbedingungen entsprechend (4.10) und (4.11) ergeben:

$$B_1 = -A_1 \quad (4.65)$$

bzw.

$$B_2 = -A_2$$

Damit wird

$$\begin{aligned} M_{rZ1} &= A_1 (e^{\alpha_1 Z_1} - e^{-\alpha_1 Z_1}) - M_{Z1}^o \\ M_{rZ2} &= A_2 (e^{\alpha_1 Z_2} - e^{-\alpha_1 Z_2}) - M_{Z2}^o \end{aligned}$$

oder mit $A_1 = \frac{C_1}{2}$ und $A_2 = \frac{C_2}{2}$

$$M_{rz1} = C_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 - M_{z1}^0 \quad (4.66)$$

$$M_{rz2} = C_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_2 - M_{z2}^0$$

$$M'_{rz1} = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 - Q_{z1}^0 \quad (4.67)$$

$$M'_{rz2} = C_2 \cdot \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_2 - Q_{z2}^0$$

Weiter folgen aus den Kontinuitätsbedingungen bei a:

$$M_{rz1} = M_{rz2} \text{ bzw. } M'_{rz1} = -M'_{rz2}$$

die Konstanten:

$$C_1 = \frac{P}{\alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_2}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \quad (4.68)$$

$$C_2 = \frac{P}{\alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_1}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \quad (4.69)$$

Eingesetzt in (4.66) wird

$$M_{rz1} = \frac{P}{\alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_2}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \sin(\alpha_1 \cdot z_1) - M_{z1}^0$$

$$M_{rz2} = \frac{P}{\alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_1}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \sin(\alpha_1 \cdot z_2) - M_{z2}^0 \quad (4.70)$$

bzw. in (4.67)

$$M'_{rz1} = P \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_2}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_1 - Q_{z1}^0 \quad (4.71)$$

$$M'_{rz2} = P \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_1}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \cos \alpha_1 \cdot z_2 - Q_{z2}^0$$

Das Biegemoment am System I infolge P in a wird damit gemäss (3.4) für den 1. Bereich:

$$M_{I,z1} = M_{z1}^0 + M_{r,z1} = \frac{P}{\alpha_1} \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_2}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 \quad (4.72)$$

bzw. für den 2. Bereich

$$M_{I,z2} = M_{z2}^0 + M_{r,z2} = \frac{P}{\alpha_1} \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_1}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_2 \quad (4.72)$$

4.3.2 Vergleiche mit den bisher bekannten Lösungen in [6]

Aus (4.59) und (4.63) folgt

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{4 G \cdot J_D}{a^2 \cdot E J^*}} \quad (4.73)$$

Setzt man:

$$J^* \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} C_M = \frac{1}{2} F_{ww} \quad (4.74)$$

(vgl. auch [13] Gleichung (6)), wobei zu beachten ist, dass sich J^* und ebenso J_D gemäss (3.1) und (3.2) nur auf eine Querschnittshälfte beziehen, dann wird

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{G \cdot 2 \cdot J_D}{E \cdot F_{ww}}} = \beta \quad (4.75)$$

Damit entspricht die Wurzel α_1 dem Wert β in [6] Seite 17, unten. Dort ist $G \cdot J_D$ die Drehsteifigkeit des Gesamtschnittes im Gegensatz zu (3.2).

Der Drehwinkel in z folgt aus (3.50) zu

$$\varphi_z = -\frac{a}{2} \cdot \frac{M_{rZ}}{D}$$

Mit $D = G \cdot J_D$ erhält man:

$$G \cdot 2 \cdot J_D \cdot \varphi_z = -a \cdot M_{rZ} \quad (4.76)$$

Setzt man für M_{rZ} den Ausdruck (4.70) ein, so wird:

$$G \cdot 2 \cdot J_D \cdot \varphi_z = M_{z1}^0 \cdot a - \frac{P \cdot a}{\alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot m_2}{\sin \alpha_1 \cdot \ell} \cdot \sin \alpha_1 \cdot z_1 \quad (4.77)$$

Da mit den Bezeichnungen von [6]

$$D = P \cdot a \quad (\text{angreifendes Torsionsmoment})$$

und

$$M_W^O = D \cdot \frac{b'}{\ell} \cdot x_1 = P \cdot a \cdot \frac{m_2}{\ell} \cdot z_1 = M_{z_1}^O \cdot a$$

ist, entspricht (4.77) genau der 1. Gleichung in [6] Seite 17, unten.

$$G \cdot J_D \cdot \phi = M_W^O - \frac{D}{\beta} \frac{\sin \beta \cdot b'}{\sin 2\alpha} \cdot \sin \beta \cdot x_1 ; \quad (4.78a)$$

$$(2\alpha = \beta \cdot \ell = \alpha_1 \cdot \ell)$$

Hinweis: In [6] bedeutet b sowohl Lastabstand vom rechten Auflager (Bild 5) als auch halber Stegabstand (Bild 4). Deshalb ist oben zur Unterscheidung für den Lastabstand b' geschrieben, $b' = m_2$ in Bild 4.1.

Ebenso entspricht das primäre St. Venant'sche Verdrehmoment $M_{DP} = G \cdot J_D \cdot \phi'$ in [6] dem doppelten Wert von M_{TZ} in (3.40), (wobei wegen des konstanten Querschnitts $k = 0$ ist) :

$$M_{DP} = 2 \cdot M_{TZ} = - a \cdot M_{rZ}' \quad (4.78b)$$

wenn für M_{rZ}' der Ausdruck (4.71) eingesetzt wird. Dasselbe gilt für das Wölbverdrehungs-Momenten-Integral M_W , welches dem a -fachen Biegemoment $M_{I,z}$ aus (4.72) entspricht.

$$M_W = a \cdot M_{I,z} \quad (4.78c)$$

4.4 Lösungen für konstanten, elastischen oder starr ausgesteiften Querschnitt bei sinus- förmiger Belastung

Bei sinus-förmigem Verlauf der Stegbelastung

$$\pm p_z = p_n \sin \frac{n\pi}{\ell} \cdot z, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.79)$$

wird die Lösung der Differentialgleichung (3.68) unter Voraus-

setzung konstanter Querschnittskoeffizienten $g_z = g$ und $h_z = h$, sowie $f_z = 0$ sehr einfach, da in diesem Falle auch die lotrechten Stegverschiebungen der beiden Systeme nach einer sinus-Linie verlaufen.

Aus (4.79) erhält man das äussere Moment

$$M_z^0 = \pm p_n \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \cdot z, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.80)$$

Das Moment M_{rz} ist in diesem Falle dem Moment M_z^0 entgegengesetzt proportional. Setzt man also für:

$$M_{rz} = -\alpha_n \cdot M_z^0 = \mp p_n \frac{\alpha_n \cdot \ell^2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \cdot z \quad (4.81)$$

dann erhält man aus Gleichung (3.68):

$$\alpha_n = \frac{h \cdot \ell^4}{n^4 \cdot \pi^4 + g n^2 \cdot \pi^2 \cdot \ell^2 + h \cdot \ell^4} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.82)$$

oder mit $g_z = g$ und $h_z = h$ aus (3.67) :

$$\alpha_n = 1/N_n; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.83a)$$

$$N_n = 1 + \left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot \ell} \right)^2 \cdot \frac{B}{D} + \left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{2 \ell} \right)^4 \cdot \frac{2 \cdot B}{3 \cdot a \cdot \bar{B}_1} \quad (4.83b)$$

Der Wert α_n ist stets < 1 und wird umso kleiner je grösser die Biegesteifigkeit B im Verhältnis zur Drehsteifigkeit D bzw. zur Querbiegesteifigkeit \bar{B}_1 der Platte ist. Für den Grenzwert $D = 0$ wird auch $\alpha_n = 0$ und damit $M_{rz} = 0$. Zwischen den beiden Systemen treten dann keine Pendelkräfte auf. Das gleiche ergibt sich für $\bar{B}_1 = 0$.

Das Biegemoment am System I wird gemäss (3.4) :

$$M_{Iz} = M_z^0 + M_{rz} = M_z^0 (1 - \alpha_n) \quad (4.84)$$

Weiter erhält man das Torsionsmoment am System II gemäss (3.40) mit $k = 0$:

$$M_{Tz} = -\frac{a}{2} \cdot M'_{rz}$$

oder mit $M'_{rZ} = -\alpha_n \cdot M_Z^{O'}$ zu

$$M_{rZ} = \frac{a}{2} \cdot \alpha_n \cdot M_Z^{O'} = \frac{a}{2} \cdot \alpha_n \cdot Q_Z^O \quad (4.85)$$

Weiter wird das Querbiegemoment der Platte in Stegachse gemäss (3.41):

$$\bar{m}_Z = \frac{a}{2} \cdot M''_{rZ} = -\frac{a}{2} \cdot \alpha_n \cdot M_Z^{O''}$$

oder mit $M_Z^{O''} = -p_Z$ zu :

$$\bar{m}_Z = +\frac{a}{2} \cdot p_Z \cdot \alpha_n \quad (4.86)$$

Schliesslich beträgt die Stegdurchbiegung gemäss (3.48):

$$v_{z,I} = -\frac{a^2}{4} \cdot \frac{M_{rZ}}{D} + \frac{a^3}{24 B_1} \cdot M''_{rZ}$$

oder

$$v_{z,I} = \alpha_n \cdot \frac{a^2}{4} \left(\frac{M_Z^O}{D_Z} + \frac{a \cdot p_Z}{6 \cdot B_1} \right) \quad (4.87)$$

Bei sin-förmiger Belastung der Stege hängen also alle für die Spannungsermittlung und Verformung erforderlichen Grössen linear von α_n ab.

Aus (4.83) erkennt man weiterhin, dass mit wachsendem n , d.h. mit wachsenden Oberschwingungen - wenn $\sin \frac{\pi \cdot z}{l}$ als Grundschwingung bezeichnet wird - der Wert α_n immer mehr gegen Null geht. Daraus folgt, dass die den Oberschwingungen entsprechenden Stegbelastungen $\pm p_Z$ ($n > 1$ bis $n = \infty$) immer mehr durch Biegung am System I übertragen werden:

$$M_{Iz} \cong M_Z^O \quad (\text{für grosses } n)$$

während die Übertragung durch Torsion immer geringer wird:

$$M_{rZ} \cong 0 \quad (\text{für grosses } n)$$

Ebenso werden die Querbiegemomente (4.86) und natürlich auch Durchbiegungen v_z mit wachsendem n immer kleiner.

Bei sin-Belastung ergeben sich also sehr einfache Zusammenhänge. Da jede beliebige Stegbelastung in beliebiger Annäherung durch eine Fourier-Entwicklung in sin-Belastungen aufgelöst werden kann, können mit den obigen Ausdrücken (4.84) bis (4.87) die Spannungen und Verformungen des auf Torsion beanspruchten Plattenbalkens auch bei allen anderen Belastungsformen bestimmt werden. Allerdings werden bei Einzellasten meistens verhältnismässig viele Reihenglieder benötigt, um eine genügend genaue Annäherung zu erzielen. Dagegen genügen z.B. bei gleichmässig verteilter Last schon wenige Werte.

Wird die Biegesteifigkeit der Platte unendlich gross bzw. ist der Querschnitt starr ausgesteift, dann verschwindet bei α_n (4.83b) das letzte Nennerglied und man erhält:

$$N_{n, \text{starr}} = 1 + \left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{2 \ell} \right)^2 \cdot \frac{B}{D} \quad (4.83c)$$

Aus der Beziehung (4.83b) erkennt man auch, dass man die Nachgiebigkeit der Platte hinsichtlich ihres Einflusses auf die Biege- und Torsionsmomente durch eine gedachte, geringere Drehsteifigkeit eines starr ausgesteiften Querschnittes ersetzen kann.

Bezeichnet man die gedachte Drehsteifigkeit am starr ausgesteiften Ersatzträger mit D_1 und setzt in (4.83c) für D die gedachte Drehsteifigkeit:

$$D_1 = \frac{3a \cdot \bar{B}_1}{3a \cdot \bar{B}_1 + 2 \left(\frac{n \pi a}{2 \ell} \right)^2 \cdot D} \cdot D \quad (4.88)$$

ein, dann wird (4.83c) gleich (4.83b).

Dieser Ausdruck für D_1 kann zur näherungsweise Erfassung der elastischen Aussteifung durch die Platte oder durch zusätzliche elastische Querschotte bei nicht sinus-förmiger Belastung dienen.

Man kann z.B. die Berechnung der Schnitt- und Verformungsgrössen mit den in 4.3 erwähnten Formeln bzw. Kurven für den *s t a r r* ausgesteiften Querschnitt durchführen und zur Berücksichtigung der Querschnittsverformung an Stelle der tatsächlichen Drehsteifigkeit D die gedachte Drehsteifigkeit D_1 gemäss (4.88) in die Formel (4.59a) für den Kennwert \mathcal{K} einsetzen.

Auf diese Möglichkeit ist auch in [12] hingewiesen, allerdings für den tordierten I-Querschnitt, wo die Verhältnisse wegen der Doppel-Symmetrie einfacher liegen.

5. Berücksichtigung von Querträgern innerhalb der Spannweite.

5.1 Allgemeine Angaben

Bisher wurde von der Voraussetzung ausgegangen, dass beide Stege auf ganze Feldlänge nur durch die biege- und schubfeste Platte miteinander in Verbindung stehen. Lediglich an den beiden Enden sind die Stege und die Platte zusätzlich durch die Auflagerquerträger miteinander verbunden. Dabei ist als Vereinfachung angenommen, dass die Auflagerquerträger praktisch biegestarr sind, so dass keine Drehung der Stegenden um eine zur z-Achse parallele Achse möglich ist (Gabellagerung) und weiter, dass die Auflagerquerträger so drehweich sind, dass sich die Stegenden frei um eine zur x-Achse parallele Achse drehen können (keine Endeinspannung).

Die Tragwirkung des Plattenbalkens bei antimetrischen Steglasten wurde in Abschnitt 2 ersetzt durch die Tragwirkungen von zwei gedachten Systemen I und II, von denen das System I (= Wölbsystem bzw. Biegesystem) Kräfte nur über 'schiefe Querkraftbiegung', das System II (= Drillsystem) Kräfte nur über 'freie Torsion' zu den Auflagern übertragen kann. Dabei sind beide Systeme durch zug- und druckfeste Pendel in den Stegachsen miteinander verbunden (vgl. Bild 2.7).

In welchem Verhältnis sich die beiden Systeme an der Übertragung der Lasten beteiligen, hängt wesentlich von der Biegesteifigkeit und der Spannweite der Platte ab. Bei einer verhältnismässig biegeweichen und weit gespannten Platte werden z.B. die Lasten auch bei sehr drehsteifen Stegen in der Hauptsache durch Längsbiegung - also durch das System I - übertragen, während das System II nur wenig Kräfte aufnimmt. Die Pendelkräfte r_z zwischen beiden Systemen, die mit den Plattenquerkräften identisch sind, und die hieraus resultierenden Querschnittstorsionsmomente M_T (vgl. Bild 2.6b) werden in diesem Fall sehr klein.

Um das System II stärker zur Kraftübertragung heranzuziehen, kann man die Biegesteifigkeit in Querrichtung erhöhen, was am wirkungs-

vollsten durch die Anordnung von Feldquerträgern erreicht wird.

Im allgemeinen genügen schon zwei bis drei biegesteife Feldquerträger, um die Torsionssteifigkeit des Systems II für die Kraftübertragung weitgehend auszunützen.

Für die Anzahl und die Abmessung der Feldquerträger ist jedoch nicht nur der Belastungszustand nach Bild 2.2c sondern auch nach Bild 2.2a maßgebend. Um bei Belastung der Platte einen hohen Einspanngrad der Platte in die Stege zu erzielen, können bei weit gespannten Platten oder grossen Auskragungen biegesteife Feldquerträger in engeren Abständen notwendig werden. Der Abstand der Feldquerträger richtet sich dabei hauptsächlich nach der Drehsteifigkeit der Stege und beträgt oft nur das Zwei- bis Dreifache der Plattenspannweite.

Im Folgenden wird nun gezeigt, wie der Einfluss der Feldquerträger rechnerisch erfasst werden kann.

5.2 Gleiche Feldquerträger in engen Abständen

Durch die Feldquerträger wird die Biegesteifigkeit in Querrichtung \bar{B} erhöht. Da die Querbiegesteifigkeit nur in die Verformungen am System II eingeht, ändern sich die Verschiebungswerte am System I durch die Anordnung von Feldquerträgern nicht. Die im Verhältnis zur Platte sehr geringe horizontale Schubsteifigkeit der Querträger kann vernachlässigt werden (vgl. Bild 5.1a und 5.1b). Ebenso ist die Drehsteifigkeit der Querträger bei den im allgemeinen üblichen Rechteckquerschnitten vernachlässigbar gering.

Durch einen Feldquerträger tritt also zusätzlich nur eine statisch unbestimmte Querkraft $Q = R$ am System II und - aus Gleichgewichtsgründen - die entsprechende Pendelkraft R gemäss Bild 5.1c auf.

Bei engen Querträgerabständen \bar{c} kann man die Pendelkräfte R auf die Länge \bar{c} gleichmässig verteilt annehmen und statt mit einzelnen Querträgern mit einer um die Querträgersteifigkeit vergrösserten Plattensteifigkeit rechnen (Bild 5.1e) :

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_{p1} + \bar{B}_Q/\bar{c} \quad (5.1)$$

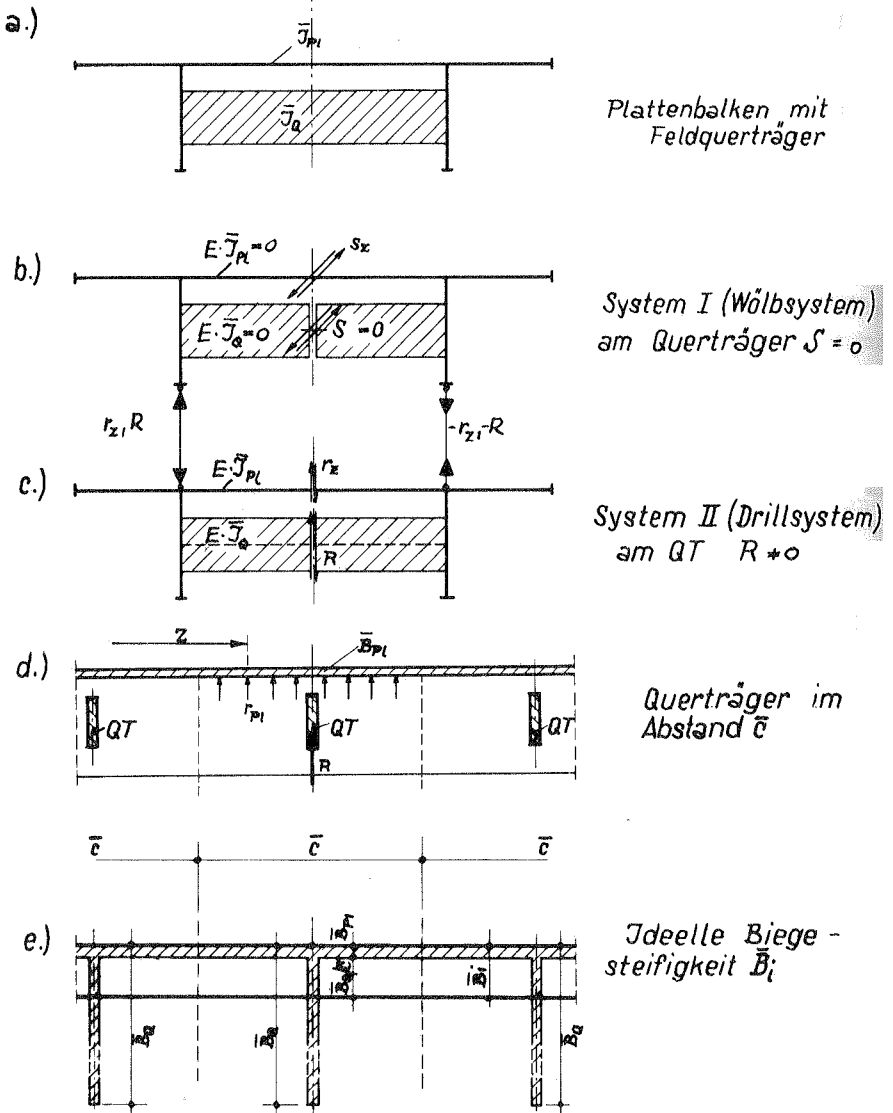


Bild 5.1 Schnittkräfte am Feldquerträger und Berücksichtigung der Biegesteifigkeit \bar{B}_Q

Der Rechnungsgang ist dann derselbe wie in Abschnitt 3.2. Man ermittelt die Momente M_r infolge der stetig verteilten Pendelkräfte und aus der 2. Ableitung $M_r'' = -r$ die Pendelkräfte selbst.

Daraus folgen die Querkräfte im Querträger bzw. in der Platte entsprechend den Querbiegesteifigkeiten. Man erhält

$$R = r \cdot \frac{\bar{B}_Q}{B_1} \quad [\text{kp}]$$

und (5.2)

$$r_{P1} = r \cdot \frac{\bar{B}_{P1}}{B_1} \quad [\text{kp/cm}]$$

Damit können die Schnittkräfte am System I und II in bekannter Weise bestimmt werden.

5.3 Feldquerträger in beliebigen Abständen

Bei grösseren oder unregelmässigen Querträgerabständen, insbesondere bei nur einem oder zwei Querträgern je Spannweite, trifft die Annahme einer in z-Richtung konstanten Quer-Biegesteifigkeit \bar{B}_1 entsprechend Abschnitt 5.2 nicht zu. Die Ermittlung der Momente M_{rz} am System I mit Hilfe der Differentialgleichung (3.33), die konstanten Verlauf der Biegesteifigkeit \bar{B}_1 voraussetzt, führt dann nicht zum Ziele. Man geht in diesen Fällen auf die Formänderungsbedingung (2.9b) zurück und bestimmt nicht die Biegemomente M_{rz} , sondern die Pendelkräfte zwischen den beiden Systemen, indem man wie bisher die Systeme in genügend enge Abschnitte $\Delta \ell$ in z-Richtung unterteilt und für jeden Abschnitt die lotrechten Verschiebungen v^I und v^{II} einander gleichsetzt anstelle deren zweiten Ableitungen gemäss (3.12).

Als statisch unbestimmte Grössen treten dann in einem Abschnitt $\Delta \ell$ ohne Querträger die Pendelkräfte

$$R = r \cdot \Delta \ell \quad (5.3)$$

zwischen den beiden Systemen auf, die aus Gleichgewichtsgründen den Schnittkräften am System II längs des Plattenrandes $\textcircled{O} - \textcircled{O}$ ent-

entsprechen.

Zweckmässig wird man die Abschnitte so einteilen, dass die Abschnittsmitten mit den Querträgerpunkten zusammenfallen (siehe Bild 5.2).

Liegt nun in einem Abschnitt $\Delta \ell$ ein Querträger, so ist R die vom Querträger und dem Plattenabschnitt gemeinsam zu übertragende Schnittkraft. Die auf den Querträger bzw. auf den Plattenabschnitt von der Länge $\Delta \ell$ entfallenden Anteile von R verhalten sich dann zueinander wie die zugehörigen Querbiegesteifigkeiten. Es ist also mit

$$\bar{B}_i = \bar{B}_Q + \bar{B}_{Pl} \cdot \Delta \ell \quad (5.4)$$

die Schnittkraft im Querträger

$$R_Q = R \cdot \frac{\bar{B}_Q}{\bar{B}_i} \quad (5.5a)$$

die Schnittkraft im Plattenabschnitt

$$R_{Pl} = R \cdot \frac{\bar{B}_{Pl} \cdot \Delta \ell}{\bar{B}_i} \quad (5.5b)$$

oder die Schnittkraft in der Platte je Längeneinheit

$$r_{Pl} = \frac{R_{Pl}}{\Delta \ell} = R \cdot \frac{\bar{B}_{Pl}}{\bar{B}_i} \quad (5.5c)$$

Da die Biegesteifigkeit der Querträger - vor allem wenn diese mit der Platte schubfest verbunden sind - wesentlich grösser ist als die der Platte allein, wird meistens bereits derjenige Grad der Querbiegesteifigkeit erreicht, wo eine wesentliche Steigerung der Mitwirkung des Systems II nicht mehr möglich ist. Die genaue Bestimmung der mitwirkenden Plattenbreite ist also ohne grosse Bedeutung. Es genügt, die mitwirkende Plattenbreite des Querträgers der Einfachheit halber zu $\frac{1}{2} \cdot a$ bis $\frac{2}{3} \cdot a$ anzunehmen.

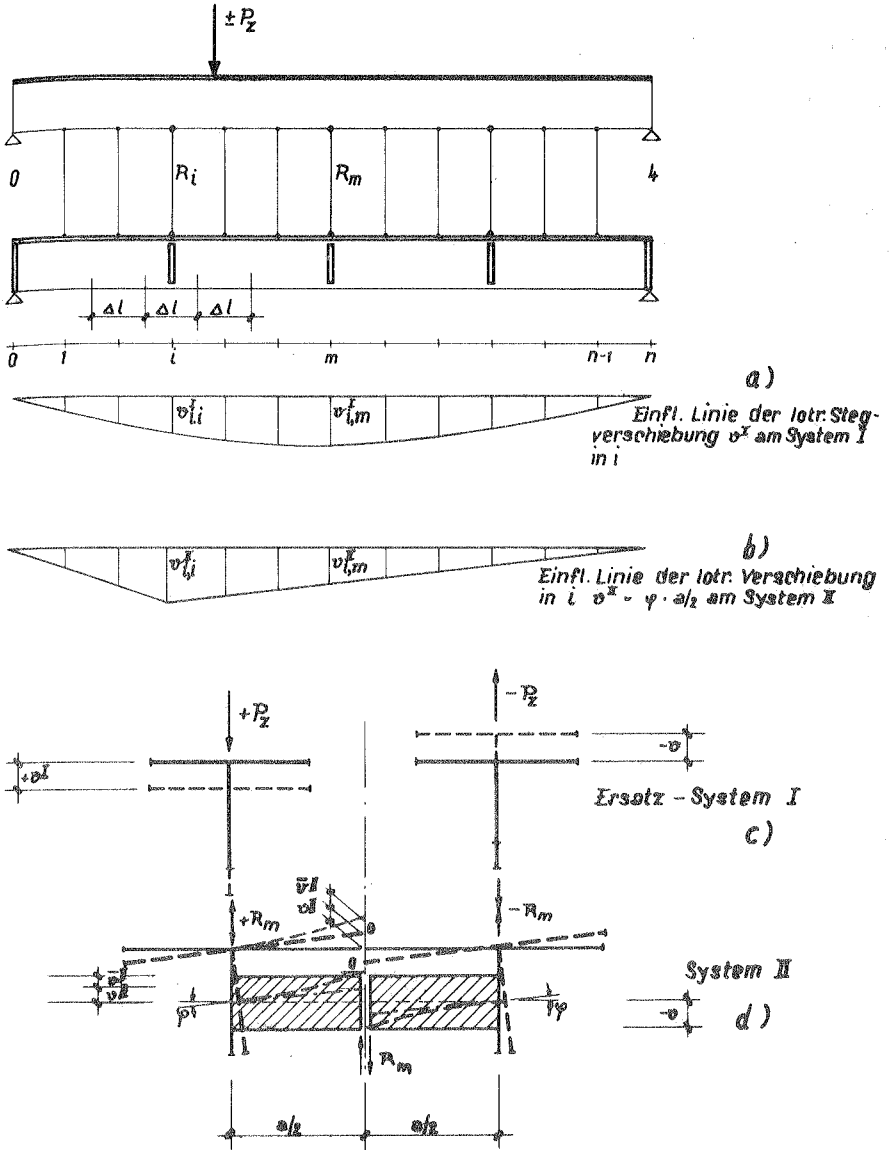


Bild 5.2 Plattenbalken mit Feldquertrager
 Unterteilung der Spannweite, Einflusslinien
 der Stegverschiebungen v_I und v_{II}

Der an sich bekannte Rechnungsgang zur Ermittlung der statisch unbestimmten Pendelkräfte R wird der Vollständigkeit halber im Folgenden kurz angegeben. Nach Unterteilung der Spannweite in die Abschnitte $\Delta \ell$, deren Mitten gemäss Bild 5.2a mit $m = 1$ bis $m = n - 1$ bezeichnet sind, werden zunächst die Einflusswerte der lotrechten Verschiebungen v in den Punkten $m = 1$ bis $m = n - 1$ am System I (Biegesystem, Einheitslast in den Punkten $m = 1, m = n - 1$) bestimmt (Bild 5.2a). Man erhält die Werte

$$\begin{aligned} v_{11}^I, & v_{12}^I, v_{13}^I \dots v_{1m}^I \dots v_{1n}^I \\ v_{21}^I, & v_{22}^I, v_{23}^I \dots v_{2m}^I \dots v_{2n}^I \\ v_{31}^I, & v_{32}^I, v_{33}^I \dots v_{3m}^I \dots v_{3n}^I \end{aligned} \quad (5.6)$$

usw.

Infolge einer beliebigen Stegbelastung $\pm P_z$ bzw. $\pm p_z$ am System I ergeben sich hier die Verschiebungswerte:

$$v_{1,0}^I, v_{2,0}^I, v_{3,0}^I \dots v_{m,0}^I \dots v_{n-1,0}^I \quad (5.7)$$

Weiter werden die Einflusswerte der Drehwinkel φ in den entsprechenden Punkten am System II (Drillsystem, Einheitstorsionsmoment $M_T = 1 \cdot 0,5 a$ in den Punkten $m = 1$ bis $m = n - 1$) und damit die Einflusswerte der lotrechten Verschiebungen in Platten- bzw. Querträgermitte (Punkt 0): $v^{II} = \varphi \cdot \frac{a}{2}$ bestimmt (Bild 5.2b). Sie werden bezeichnet mit :

$$\begin{aligned} v_{11}^{II}, & v_{12}^{II}, v_{13}^{II} \dots v_{1m}^{II} \dots v_{1,n-1}^{II} \\ v_{21}^{II}, & v_{22}^{II}, v_{23}^{II} \dots v_{2m}^{II} \dots v_{2,n-1}^{II} \end{aligned} \quad (5.8)$$

usw.

Schliesslich werden die lotrechten Verschiebungen \bar{v}^{II} im Querschnittspunkt o infolge Querbiegung der Platte bzw. der Querträger bestimmt (Bild 5.2d).

Infolge der Einheitslast in Punkt o, bezogen auf den Abschnitt $\Delta \ell$ ist entsprechend (3.11a): $\bar{v}^{II} = 1 \cdot a^3/24 \bar{B}_1$. Die Einheitsverschiebungen infolge Querbiegung werden bezeichnet mit:

$$\bar{v}_1^{II}, \bar{v}_2^{II}, \dots, \bar{v}_m^{II}, \dots, \bar{v}_{n-1}^{II} \quad (5.9)$$

Damit sind alle Verschiebungswerte bekannt. Man kann nun für die lotrechte Stegverschiebung in m am System I infolge der Belastung $\pm P_Z$ bzw. $\pm p_Z$ und infolge der statisch unbestimmten Pendelkräfte R_m wie folgt schreiben:

$$v_m^I = v_{m0}^I - R_1 \cdot v_{m1}^I - R_2 \cdot v_{m2}^I - \dots - R_{n-1} \cdot v_{m,n-1}^I \quad (5.10)$$

Entsprechend wird die lotrechte Verschiebung der Platte (Punkt o) bzw. der Querträgermitte am System II:

$$v_m^{II} = R_1 \cdot v_{m,1}^{II} + R_2 \cdot v_{m,2}^{II} + \dots + R_m \cdot v_{m,m}^{II} + \dots + R_{n-1} \cdot v_{m,n-1}^{II} + R_m \cdot \bar{v}_m^{II} \quad (5.11)$$

Aus der (2.9b) entsprechenden Formänderungsbedingung $v_m^I = -v_m^{II}$ erhält man mit (5.10) und (5.11) für den Punkt m die Gleichung:

$$R_1 (v_{m1}^I - v_{m1}^{II}) + R_2 (v_{m2}^I - v_{m2}^{II}) + \dots + R_m (v_{mm}^I - v_{mm}^{II} - \bar{v}_m^{II}) + \dots + R_{n-1} (v_{m,n-1}^I - v_{m,n-1}^{II}) = v_{m0}^I \quad (5.12)$$

Für die Klammerwerte werden die Abkürzungen gemäss (5.13) eingeführt. Zu beachten ist, dass die Verschiebungswerte v^{II} bei positiver Pendelkraft R (Druck) negativ sind (vgl. Bild 5.2d):

$$\begin{aligned}
 \alpha_{m1} &= v_{m1}^I - v_{m1}^{II} \\
 \alpha_{m2} &= v_{m2}^I - v_{m2}^{II} \\
 &\dots \\
 \alpha_{mm} &= v_{mm}^I - v_{mm}^{II} - \bar{v}_m^{II} \\
 &\dots \\
 \alpha_{m,n-1} &= v_{m,n-1}^I - v_{m,n-1}^{II}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Querkräfte R_1 bis R_{n-1} bzw. der diesen entsprechenden Pendelkräfte in der bekannten Form:

$$\begin{aligned}
 R_1 \cdot \alpha_{11} + R_2 \cdot \alpha_{12} + R_3 \cdot \alpha_{13} + \dots + R_{n-1} \cdot \alpha_{1,n-1} &= v_{1,0}^I \\
 R_1 \cdot \alpha_{21} + R_2 \cdot \alpha_{22} + R_3 \cdot \alpha_{23} + \dots + R_{n-1} \cdot \alpha_{2,n-2} &= v_{2,0}^I \\
 &\dots \\
 R_1 \cdot \alpha_{n-1,1} + R_2 \cdot \alpha_{n-1,2} + R_3 \cdot \alpha_{n-1,3} + \dots + R_{n-1} \cdot \alpha_{n-1,n-1} &= v_{n-1,0}^I
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

u. s. w.

Sind daraus die Kräfte R_1 bis R_{n-1} ermittelt, können die Schnittkräfte der beiden Systeme in bekannter Weise berechnet werden.

Der Berechnungsweg bei Querträgern in beliebigen Abschnitten bzw. bei in z-Richtung nicht konstanter Querbiegesteifigkeit unterscheidet sich von dem in Abschnitt 3 dargestellten Berechnungsweg, der eine konstante Querbiegesteifigkeit voraussetzt, also dadurch, dass anstelle des Fünf-Momenten-Gleichungssystems (3.100) ein Gleichungssystem mit voll besetzter Matrix (5.14) zu lösen ist, wenn in beiden Fällen die gleiche Unterteilung der Spannweite in n Abschnitte von der Länge Δl vorgenommen wird.

Als Lösung des Fünf-Momenten-Gleichungssystems (3.100) erhält man die Biegemomente M_{rm} am System I infolge der Pendelkräfte r_m , die in diesem Falle stetig verteilt sind, während man bei (5.14) als Lösung die Pendelkräfte selbst erhält,

welche zu Einzelkräften R_m je Abschnittslänge Δl zusammengefasst sind.

Der Rechenumfang ist unter Voraussetzung gleicher Unterteilung der Spannweite nach (5.14) grösser und nur dann sinnvoll, wenn durch den veränderlichen Verlauf der Querbiegesteifigkeit wesentliche Einflüsse auf das Tragverhalten zu erwarten sind. In den meisten Fällen genügt die Berücksichtigung des Querträgerinflusses nach Abschnitt 5.2 durch Annahme eines vermittelten konstanten Verlaufes der Querbiegesteifigkeit.

5.4 Vereinfachungen bei sehr biegeweicher Platte

Ist die Biegesteifigkeit \bar{B}_{Pl} der Platte in Querrichtung gering, dann treten die Pendelkräfte in der Hauptsache nur an den Querträgerpunkten auf. Bei $\bar{B}_{Pl} = 0$ erhält man unabhängig von der Unterteilung der Spannweite ein Gleichungssystem mit ebenso vielen Unbekannten R_m wie Querträger vorhanden sind. Die Verschiebungsgrössen sind in diesem Falle also nur für die Querträgerpunkte zu bestimmen. Bei nicht zu vielen Feldquerträgern wird die Rechnung also verhältnismässig einfach. Man kann ohne Schwierigkeiten auch den Einfluss der Plattensteifigkeit genähert mitberücksichtigen, wenn man diese an den Querträgerpunkten konzentriert und als ideelle Biegesteifigkeit der Querträger einsetzt:

$$\bar{B}_{Qi} = \bar{B}_Q + \bar{B}_{Pl} \cdot \bar{c} \quad (5.15)$$

wobei mit \bar{c} wieder der Querträgerabstand bezeichnet ist. Die Übertragung der Schubkräfte durch die Platte ist in jedem Fall durch das System I richtig erfasst.

5.5 Einfluss der Drehsteifigkeit der Querträger

Bisher wurde von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Drehsteifigkeit der Querträger, einschliesslich der Auflagerquerträger, als gering vernachlässigt werden kann.

Bei den Feldquerträgern wird diese Voraussetzung vielfach zutreffen, dagegen werden die Auflagerquerträger oft kräftiger ausgebildet, so dass sich Einfluss der Drehsteifigkeit hier bemerkbar macht.

Die Drehsteifigkeit der Querträger kann nun verhältnismässig einfach berücksichtigt werden. Man kann sich die Querträger in der Mitte durchschnitten und hier Gelenk-Bolzen angebracht denken, durch welche nur Querkräfte übertragen werden können. Damit entspricht dieses System den bisherigen Berechnungsannahmen, wo vorausgesetzt war, dass die Drehsteifigkeit der Querträger vernachlässigbar gering sei.

Das System mit Gelenk-Bolzen in den Querträger-Mitten wird als Grundsystem angenommen.

Die Verformungen am Grundsystem können nach den vorstehenden Ableitungen ermittelt werden aus den Verformungen der gedachten Systeme I und II. Dabei wird anstelle von System I (Wölbsystem) wieder das Ersatz-Biegesystem (I) betrachtet, wobei hier jedoch noch Querträger vorhanden sind, die in der Mitte durchschnitten sind und somit nicht mitwirken. Am System II denkt man sich - wie bisher - durchgehende Querträger angeordnet. Wenn die Querträger nun ausser ihrer Biegesteifigkeit \bar{B}_Q noch eine Drehsteifigkeit \bar{D}_Q besitzen, dann könnte man zunächst annehmen, dass bei Belastung des Systems I durch die gegengleichen Steglasten $\pm P$ in den Querträgern des Systems II ausser den Biegemomenten auch Torsionsmomente auftreten. Da das System II aber voraussetzungsgemäss keinen Biegewiderstand in Längsrichtung besitzt, ist keine Torsionseinspannung der Querträger an den Hauptträger-Stegen möglich, so dass die Querträger-Torsionsmomente verschwinden. Es können also am System II die Querträger unabhängig von ihrer Drehsteifigkeit nur auf Biegung beansprucht werden, wie es auch bisher schon vorausgesetzt war.

Infolge der Belastung $\pm P_z$ bzw. $\pm p_z$ verschieben und verdrehen sich die Schnittflächen der Querträger am Ersatzbiegesystem (I) gegeneinander. Um die Querschnitte wieder zur Deckung zu bringen, genügen hier jedoch nur statisch unbestimmte Torsionsmomente M_Q , da wegen des fehlenden Drehwiderstandes des Ersatzsystems (I) keine Querträgerbiegemomente, die auf das Ersatz-

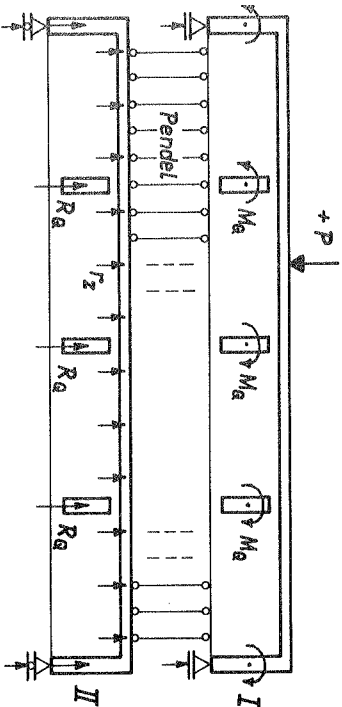
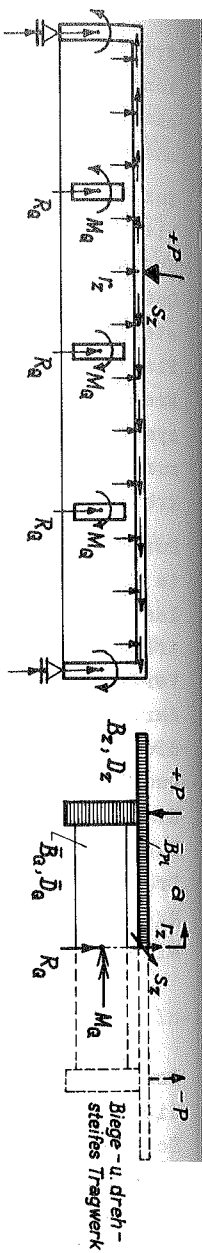
System (I) als Torsionsmomente wirken würden, aufgenommen werden können. Die Querträger am Ersatz-System (I) können also unabhängig von ihrer Biegesteifigkeit nur auf Torsion beansprucht werden.

Zur Vereinfachung der Vorstellung kann man auch sagen, dass bei biege- und drehsteifen Querträgern am System I bzw. am Ersatz-System I (= Biegesystem) nur die Drehsteifigkeit \bar{D}_Q der Querträger und am System II (= Drillsystem) nur die Biegesteifigkeit \bar{B}_Q der Querträger zu berücksichtigen ist. Die bei Plattenbalken mit biege- und drehsteifen Querträgern für das Ersatz-System I (= Biegesystem) bzw. für das System II (= Drillsystem) einzusetzenden Steifigkeiten sind in Bild 5.3 nochmals zusammengestellt. Ausserdem sind hier die zugehörigen Schnittkräfte angegeben.

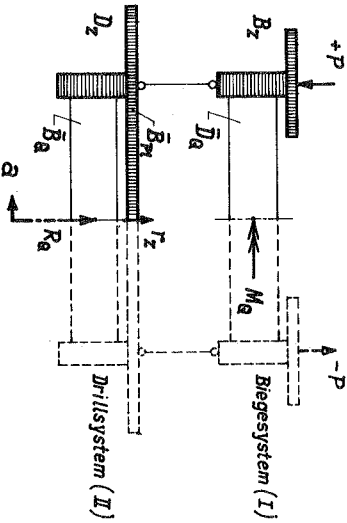
Zur Ermittlung der statisch unbestimmten Querträger-Torsionsmomente M_Q werden nun zunächst die Biegemomente M_I infolge der Belastung $\pm P_z$ bzw. infolge der Einheitsmomente $M_Q = 1$ in den Querträger-Punkten am System I nach Abschnitt 3 oder 5 bestimmt. Der Verlauf der Momente $M_I = M_z^0 + M_{rz}$ ist in Bild 5.4b, d, e und f dargestellt. Mit den Momenten M_I erhält man in bekannter Weise die Winkel ψ der Tangenten an die Biegelinien (z.B. nach Mohr als Querkräfte eines mit den verteilten Lasten $p_i = M_I/E \cdot J^*$ belasteten Einfeldträgers). Die Tangentenwinkel sind für die verschiedenen Lastfälle in Bild 5.5a bis d eingetragen. Weiter sind noch die Drehwinkel $\bar{\psi}$ zu bestimmen, um die sich die Querträger infolge $M_Q = 1$ gemäss Bild 5.5e verdrehen. Man erhält mit $J_{D,Q}$ als Drillwiderstand des Querträgers:

$$\bar{\psi} \approx \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{G \cdot J_{D,Q}} \quad (5.16)$$

Damit sind alle Verformungswerte bekannt. Aus der Bedingung, dass die Verdrehungen der Querträger des Ersatzbiegesystems I an der Schnittstelle QT-Mitte wegen Antimetrie gleich Null sein müssen, ergeben sich z.B. für den Plattenbalken mit 5 torsionssteifen Querträgern folgende 5 Gleichungen zur Bestimmung der Querträger-Torsionsmomente M_{Q1} bis M_{Q5} :



a.) Längsschnitte a - a



b.) Querschnitte

Steiifigkeiten	System I	System II
Ideelle Biegesteifigkeit des halben Plattenbalkenquerschnitts	$B_z = E \cdot J_z^*$	0
Drehsteifigkeit des halben Plattenbalkenquerschnitts	0	$D_z = G \cdot J_{Dz}$
Biegesteifigkeit der Platte	0	$\bar{B}_a = \frac{E \cdot \bar{J}_a}{1 - \nu^2}$
Biegesteifigkeit der Querträger	0	$\bar{B}_a = E \cdot J_a$
Drehsteifigkeit der Querträger	$\bar{D}_a = G \cdot J_{Da}$	0

Bild 5.3 Schnittkräfte und Steifigkeiten des Biege- und Drillsystems bei Plattenbalken mit biege- und drehsteifen Querträgern

$$(1) \psi_1^0 + M_{Q1} \cdot (\psi_{11} + \bar{\psi}_1) + M_{Q2} \cdot \psi_{12} + \dots + M_{Q5} \cdot \psi_{15} = 0$$

$$(2) \psi_2^0 + M_{Q1} \cdot \psi_{21} + M_{Q2} (\psi_{22} + \bar{\psi}_2) + \dots + M_{Q5} \cdot \psi_{25} = 0$$

... ..

$$(5) \psi_5^0 + M_{Q1} \cdot \psi_{51} + M_{Q2} \cdot \psi_{52} + \dots + M_{Q5} (\psi_{55} + \bar{\psi}_5) = 0$$

Mit den Lösungen dieses Gleichungssystemes kann der Einfluss der Torsionssteifigkeit der Querträger auf die Schnittkräfte in den beiden Systemen in bekannter Weise angegeben werden. Man erhält z.B. den Einfluss auf die Biegemomente M_I am System I aus :

$$\Delta M_I = M_{I,Q1} \cdot M_{Q1} + M_{I,Q2} \cdot M_{Q2} + \dots + M_{I,Q5} \cdot M_{Q5}$$

oder auf die Torsionsmomente M_T am System II aus:

$$\Delta M_T = M_{T,Q1} \cdot M_{Q1} + M_{T,Q2} \cdot M_{Q2} + \dots + M_{T,Q5} \cdot M_{Q5}$$

Aus den Schnittkräften folgen die Spannungen wieder entsprechend (2.29) bis (2.36).

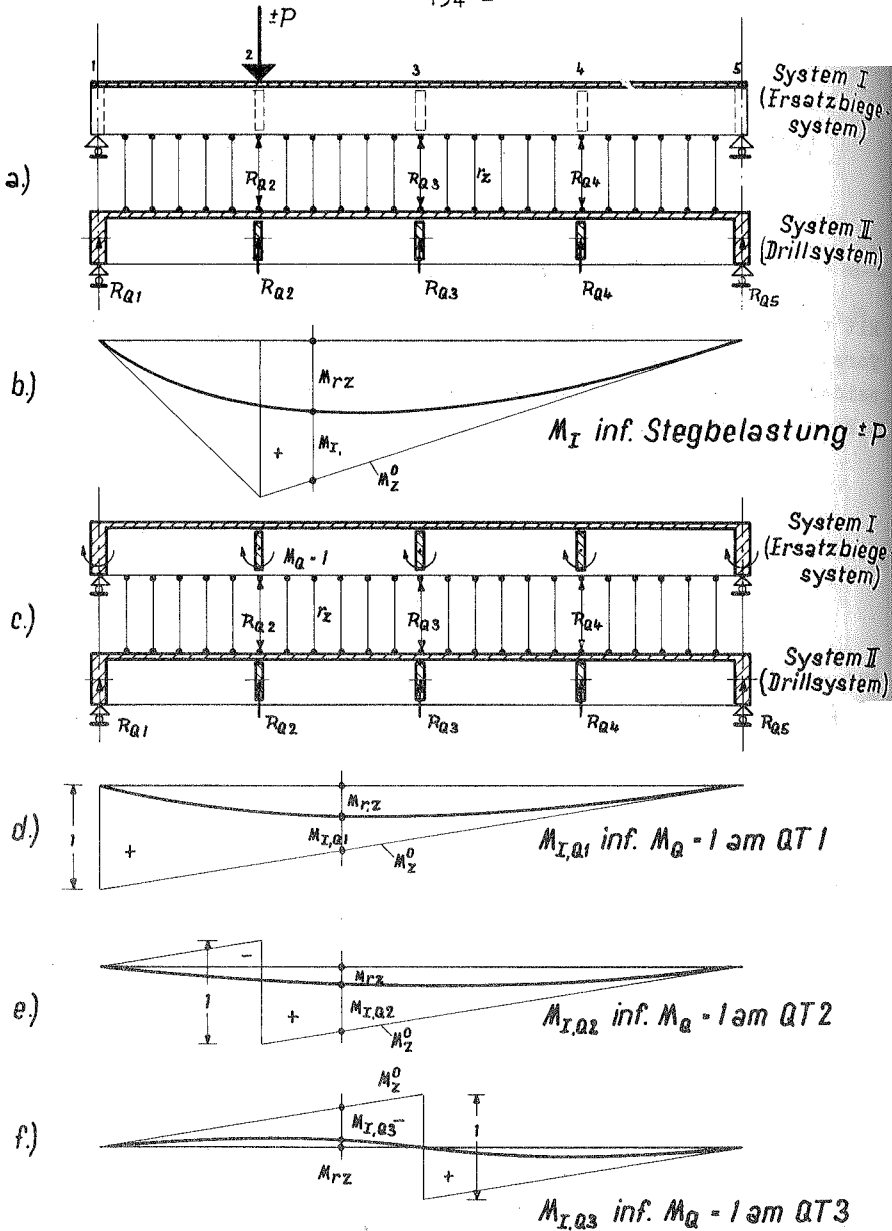


Bild 5.4 Momente M_I am Ersatzbiegesystem infolge der Steglasten $\pm P$ bzw. der Querträger-Torsionsmomente $M_Q = 1$

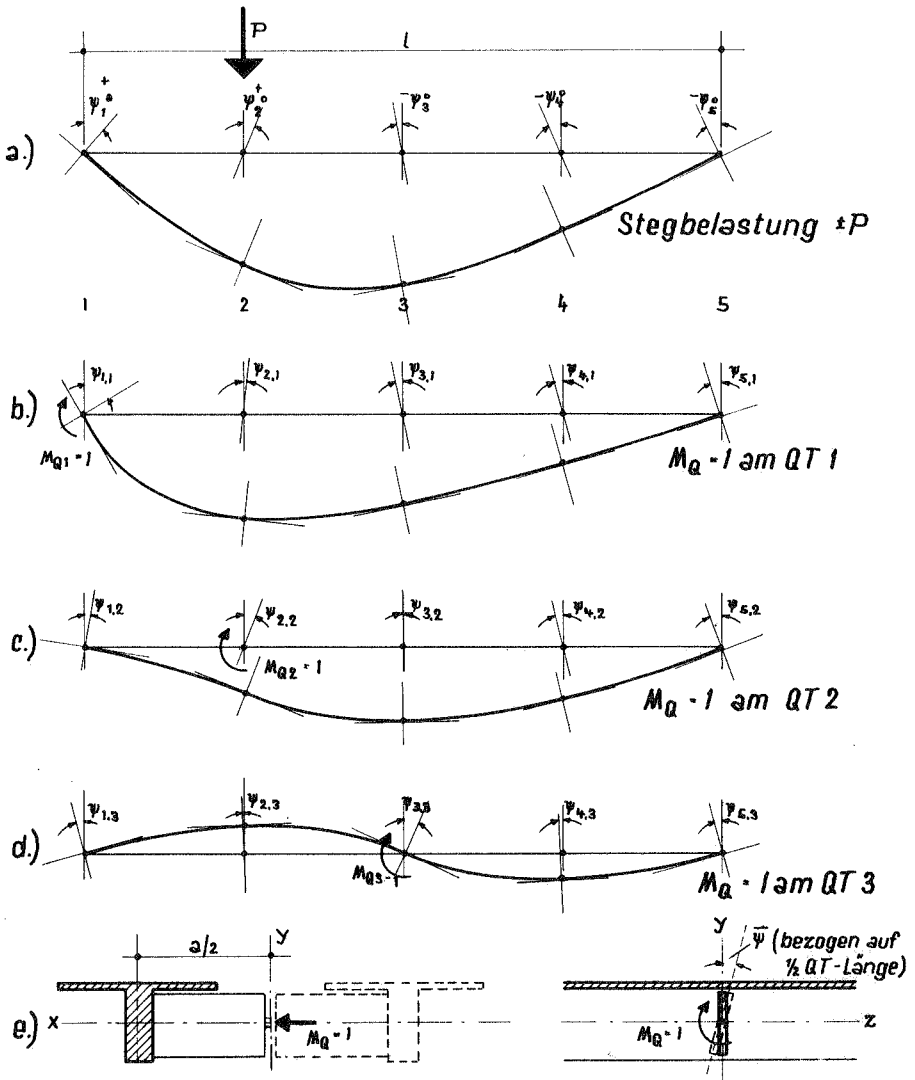


Bild 5.5 a) bis d) Winkel ψ der Tangenten an die Biegelinie, System I, infolge der Stegbelastung $\pm P$ bzw. infolge der Querträger-Drehmomente $M_Q = 1$; Drehwinkel $\bar{\psi}$ des Querträgers infolge $M_Q = 1$ in Querträger-Mitte

6. Berechnung durchlaufender Plattenbalken

6.1 Allgemeines

Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt, insbesondere mit veränderlicher Steghöhe kommen hauptsächlich bei über mehrere Felder kontinuierlich durchlaufenden Tragsystemen vor (Bild 2.1). Nachdem mit den in Abschnitt 3 und 5 angegebenen Beziehungen die Beanspruchungen und Verformungen infolge Torsionsbelastung für den f r e i a u f l i e g e n d e n, zweistegigen Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt ermittelt werden können, bietet auch die Berechnung d u r c h l a u f e n d e r Plattenbalken keine besonderen Schwierigkeiten.

Sie erfolgt wie bei einem nur auf Biegung beanspruchten durchlaufenden Balken durch Bestimmung der statisch unbestimmten Stützmente. Durch die Zerlegung des Plattenbalkens in ein Wölb- und in ein Drill-System ergeben sich jedoch einige Besonderheiten, auf die im Folgenden eingegangen wird.

6.2 Ermittlung der statisch Unbestimmten

Hierzu wird der durchlaufende Plattenbalken an den Zwischenstützen so durchschnitten, dass einzelne freiaufliegende Balkenstücke entstehen (Grundsystem), die jeweils an den Enden durch den ebenfalls in der Mittelebene durchschnitten gedachten Auflager-Querträger formtreu ausgesteift sind. Die Auflager-Querträger sind wieder biegesteif und torsionsweich angenommen. Durch die Lagerung an den Balkenenden, wie sie in Bild 6.1a dargestellt ist, ist keine Drehung der Querschnitte um die Balkenlängsachse möglich. Dagegen können sich die Schnittflächen am Grundsystem f r e i v e r w ö l b e n.

In den Schnittflächen sind nun statisch unbestimmte Kräfte so anzubringen, dass die Querschnittsverwölbungen der Balkenenden rechts und links vom Schnitt wieder zusammenpassen. Betrachtet man die beiden Stege und die Platte je für sich allein, so ge-

nügen hierfür an den Stegen die ausmittigen Normalkräfte N_{St} und an der Platte in Stegachse die umgekehrt gleich grossen Normalkräfte $N_{Pl} = -N_{St}$ (Bild 6.1b). Aus Gleichgewichtsgründen müssen dabei zwischen Steg und Platte Schubkräfte T wirken, die über die Trägerlänge summiert gleich der Normalkraft sind (Bild 6.2a), da an den Lagerpunkten keine Kräfte in Längsrichtung übertragen werden können:

$$N_{St} = \int_0^l T_z \cdot dz \quad (6.1)$$

Wegen der verschiedenen Wirkungslinien von N_{St} und T_z sind zur Herstellung des Gleichgewichts - am Steg allein - die lotrechten Auflagerreaktionen erforderlich:

$$V_{li} = \frac{N_{St} \cdot e}{l} = -V_{re} \quad (6.2)$$

Die Längsverschiebungen w_z aus der Querschnittsebene infolge dieser am Steg wirkenden Kräfte sind in Bild 6.2a gestrichelt eingetragen.

Entsprechend gilt auch bei der Platte, Bild 6.2b :

$$N_{Pl} = \int_0^l T_z \cdot dz \quad (6.1a)$$

Wegen der gleichen Wirkungslinien von N_{Pl} und T_z treten hier keine Auflagerreaktionen auf.

Die Längsverschiebungen w_z der Platte sind in Bild 6.2b gestrichelt eingetragen.

Die Bestimmung der Schubkräfte T_z und der Exzentrizität e folgt aus der Bedingung, dass die Dehnungen zwischen Steg und Platte an jeder Stelle z übereinstimmen müssen. Hierauf soll jedoch nicht weiter eingegangen werden. Es genügt die Feststellung, dass mit den Normalkräften $N_{St} = -N_{Pl}$ gemäss Bild 6.1b Verschiebungen w_z entstehen, die der **V e r w ö l b u n g** des freien Endquerschnittes eines durch Steglasten $\pm P$ tordierten Einfeldträgers entsprechen.

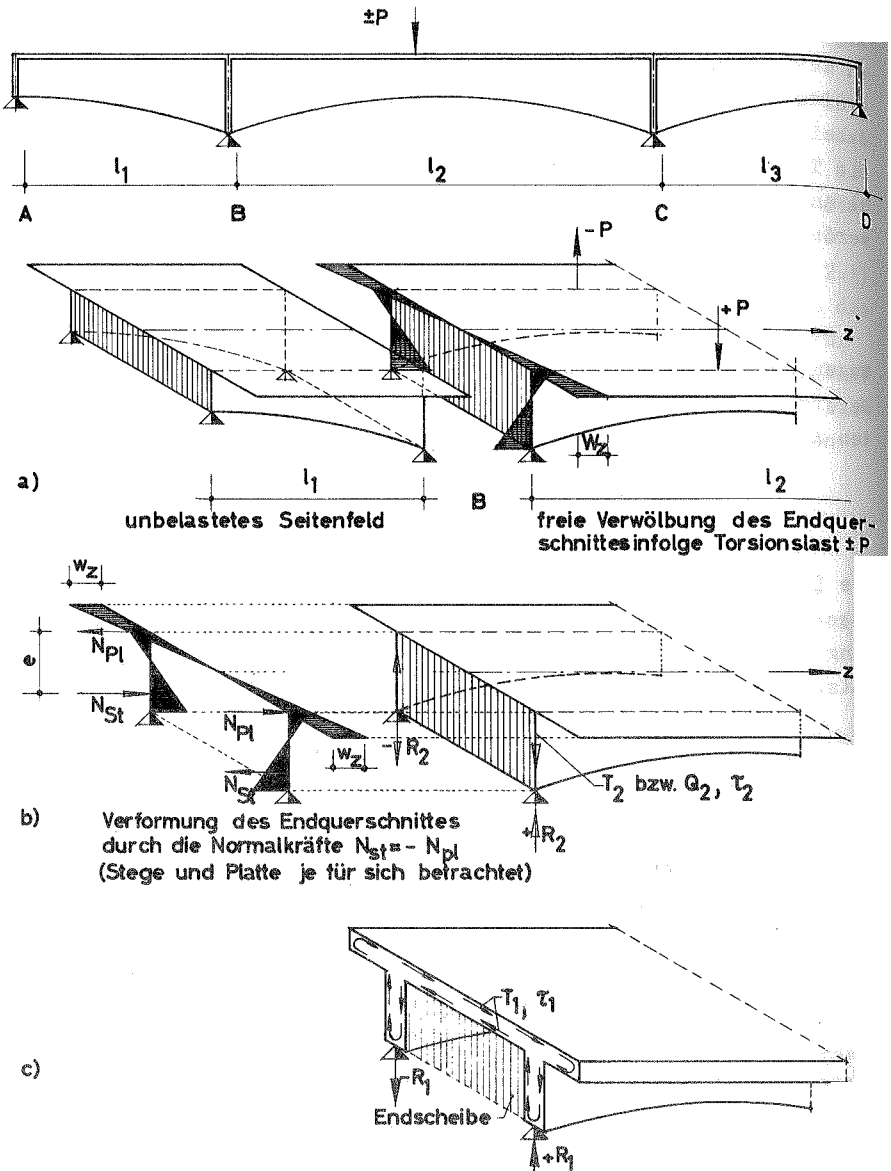


Bild 6.1 Freie Verwölbung der Endquerschnitte infolge Torsionslast im Feld und Verwölbung infolge der statisch unbestimmten Schnittkräfte N .

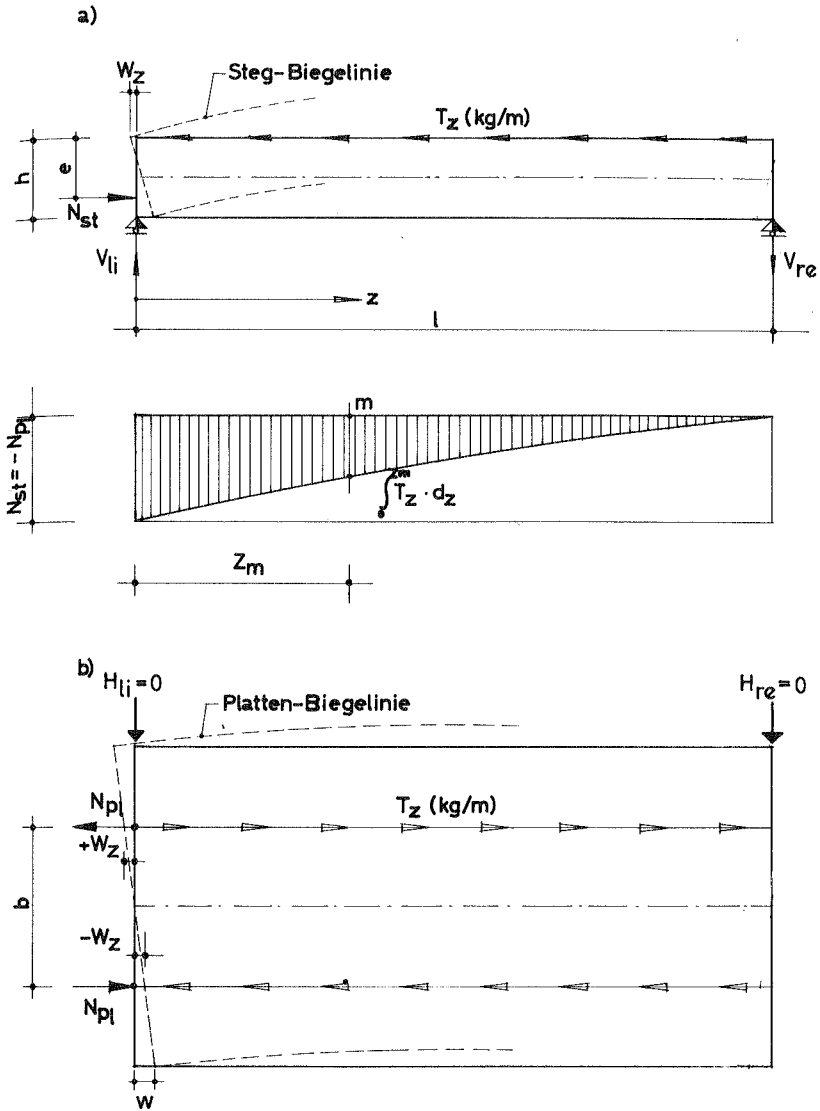


Bild 6.2 Reaktionskräfte an Steg und Platte infolge der Normalkräfte $N_{st} = -N_{pl}$ und zugehörige Verformungen (= Verwölbungen) des Endquerschnittes

Wie Bild 6.1b und 6.1c zeigen, werden die Schubspannungen aus St.Venant'scher Torsion (τ_1) bzw. aus Wölbkrafttorsion (τ_2) bzw. die hieraus resultierenden Schubkräfte durch die Endscheiben aufgenommen und auf die Lager übertragen. Zwischen den gedachten Querschnittsflächen über den Lagern treten also keine Schubspannungen auf sondern lediglich die den Normalkräften $N_{St} = -N_{Pl}$ entsprechenden Längsspannungen σ_2 .

Zerlegt man den durchlaufenden Plattenbalken entsprechend Abschnitt 2 wieder in ein Wölb- und ein Drillsystem, wobei die Spannungen σ_2 und τ_2 dem Wölbsystem (I) und die Schubspannungen τ_1 dem Drillsystem (II) zugewiesen sind, dann sind für die Kontinuität an den Stützen nur Längskräfte in den Schnittflächen des Wölbsystems erforderlich. Am Drillsystem können wegen der fehlenden Biegesteifigkeit in Längsrichtung ($EJ_B = 0$) keine Längskräfte auftreten. Man braucht also nur das Wölb-System als kontinuierlich betrachten, während das Drillsystem aus einzelnen frei aufliegenden Trägern besteht (Bild 6.3).

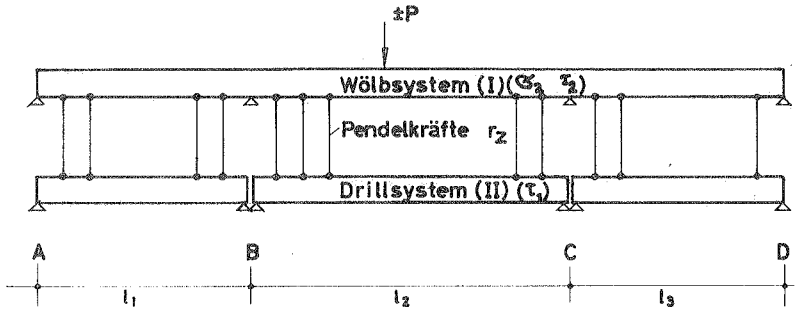


Bild 6.3 Lagerung der Systeme, nur Wölbsystem kontinuierlich

Setzt man anstelle des Wölbsystems wieder das Ersatzbiegesystem (d.h. die beiden voneinander unabhängigen Ersatzplattenbalken mit der Plattenbreite b^* gemäß Bild 3.1, dann ist nur die Kontinuität des Ersatzbiegesystems an den Stützen herzustellen. Hierzu genügt es, statisch unbestimmte Stützmomente M in bekannter Weise so zu ermitteln, dass die

Endtangentialwinkel der freiaufliegenden Einfeldträger rechts und links der Stütze entgegengesetzt gleich werden. Aus Bild 6.1b geht hervor, dass das statisch unbestimmte Stützmoment am Ersatzbiegesystem $M = \pm N_{St} \cdot e$ sein muss. Das Ersatzbiegesystem, d.h. die Plattenbreite b^* , wurde ja so bestimmt, dass die gleichen Schubkräfte T wie am Wölbsystem auftreten (vgl. Abschnitt 2.3).

Die Endtangentialwinkel ψ der freiaufliegenden Einfeldträger des Ersatz-Systems I infolge von gegengleichen Steglasten $\pm P$ bzw. $\pm p$ oder infolge von gegengleichen Endmomenten $\pm M^0 = 1$ werden nach (3.42a) ermittelt, (vgl. Bild 3.5).

Mit den Endtangentialwinkeln ψ folgen die statisch unbestimmten Stützmomente aus der Bedingung $\sum \psi = 0$ für jede Innenstütze. Für die Stützmomente M_B und M_C des Dreinfeldträgers gemäss Bild 6.1 erhält man z.B. mit den Bezeichnungen nach Bild 6.4 die bekannten Bestimmungsgleichungen:

$$M_B (\psi_{B,li}^{M_B} + \psi_{B,re}^{M_B}) + M_C (\psi_{B,re}^{M_C} + \psi_{B,li}^P) + \psi_{B,re}^P = 0$$

$$M_B \cdot \psi_{C,li}^{M_B} + M_C (\psi_{C,li}^{M_C} + \psi_{C,re}^{M_C}) + \psi_{C,li}^P + \psi_{C,re}^P = 0$$
(6.3)

Sind hieraus die beiden Momente M_B und M_C berechnet, dann erhält man die Biegemomente am statisch unbestimmten Ersatzbiegesystem (I) aus der Überlagerung der Momente am Grundsystem:

$$M_I = M_{I,P}^0 + \eta_{I,M_B}^0 \cdot M_B + \eta_{I,M_C}^0 \cdot M_C$$
(6.4)

Dabei bedeuten:

$M_{I,P}^0$	= Moment infolge der äusseren Lasten $\pm p$ bzw. $\pm P$	}	am statisch bestimmten Ersatzbiegesystem (Grundsystem)
η_{I,M_B}^0	= Moment infolge des Schnittmoments $M_B = 1$		
η_{I,M_C}^0	= Moment infolge des Schnittmoments $M_C = 1$		

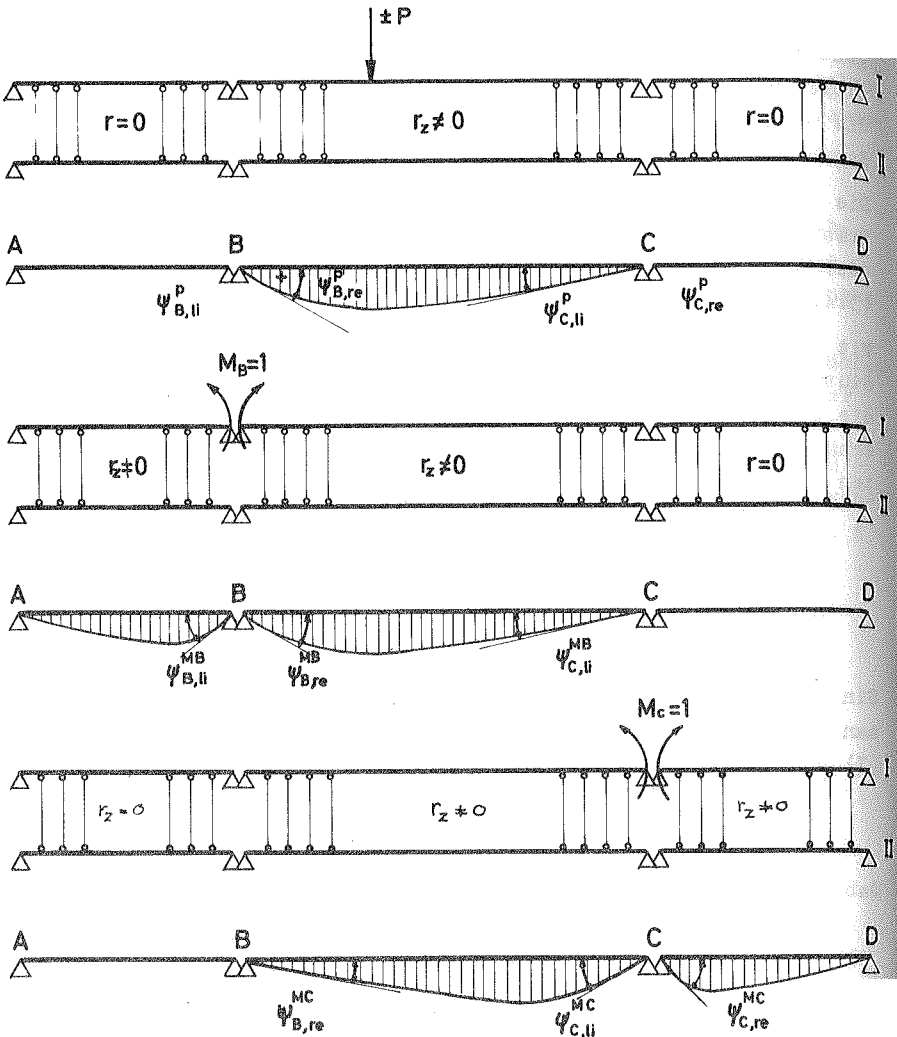


Bild 6.4 Ersatz-Biegesysteme (I) und Drillsysteme (II) der drei Einfeldträger (Grundsystem). Endtangentialwinkel am Ersatz-Biegesystem bei Belastung durch $+P$ bzw. $\pm M_B$ und $\pm M_C = 1$

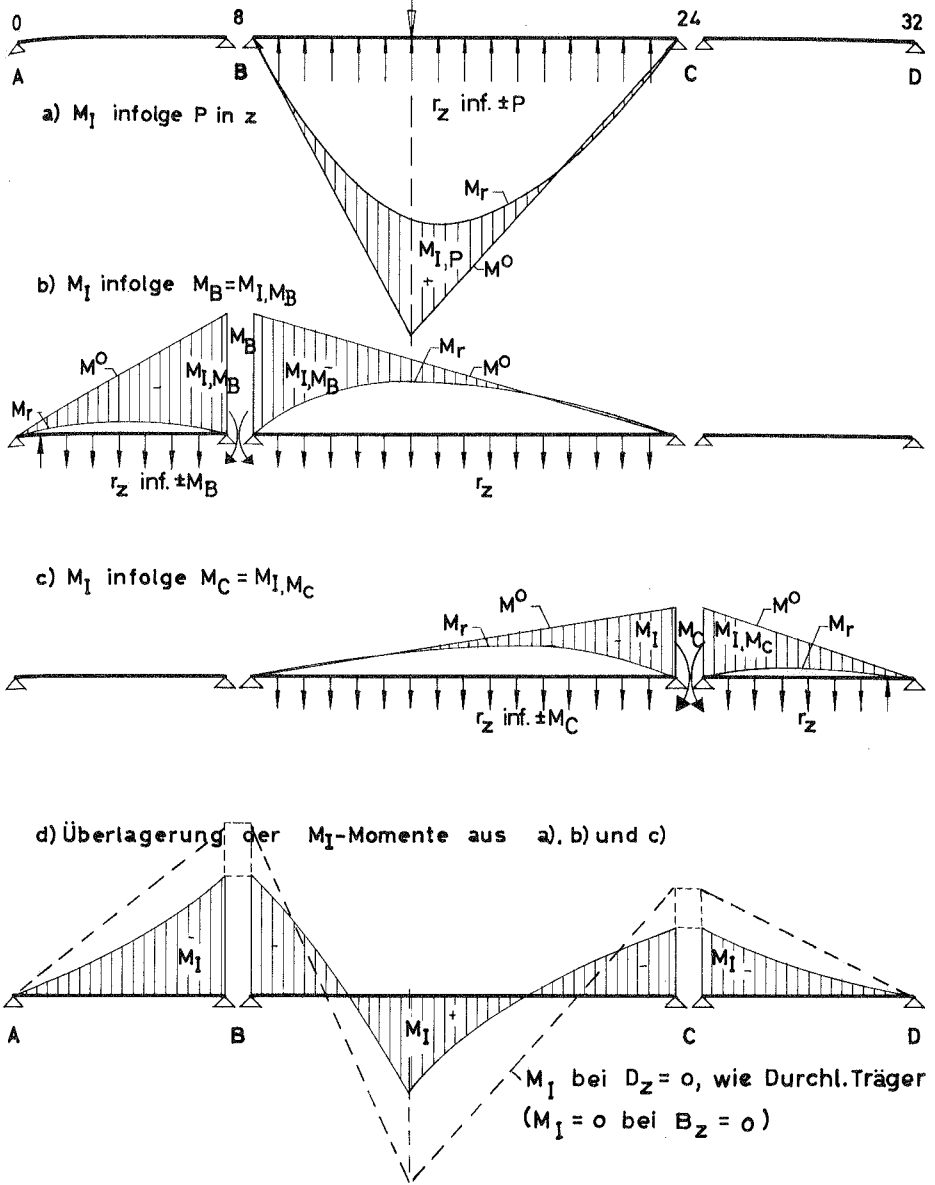


Bild 6.5 Biegemomente M_I am durchlaufenden Träger (Ersatz-Biegesystem I), Wölbnormalspannung $\sigma_2 = \frac{M_I}{W^*}$

Die Momente M_I am statisch bestimmten Ersatzbiegesystem infolge $\pm P$ bzw. infolge der Schnittmomente $\pm M_B$ und $\pm M_C$ sind in Bild 6.5 noch einmal dargestellt. Sie setzen sich stets aus den beiden Anteilen zusammen:

$$M_I = M^0 + M_r$$

wobei M^0 das Biegemoment infolge der Lasten $\pm P$ bzw. der Schnittmomente $\pm M_B$ und $\pm M_C$ und M_r das Biegemoment der jeweils zugehörigen Pendelkräfte r_z am freiaufliegenden Ersatzbiegebalken bedeuten (vgl. (3.4)).

Der Unterschied zum durchlaufenden Träger bei reiner Biegebelastung ($\pm P$) besteht also nur darin, dass bei Torsionsbelastung ($\pm P$) am Ersatzbiegebalken ausser den M^0 -Momenten der Einfluss der Momente M_r infolge der innerlich statisch unbestimmten Pendelkräfte r noch mit berücksichtigt werden muss. Sinngemäss erhält man für die Querkräfte am statisch unbestimmten Ersatzbiegesystem (I),

$$Q_I = Q_{I,P}^0 + \eta_{I,M_B}^0 \cdot M_B + \eta_{I,M_C}^0 \cdot M_C \quad (6.5)$$

Dabei bedeuten:

$Q_{I,P}^0$	= Querkräfte infolge der äusseren Lasten	} am statisch bestimmten Ersatzbiegesystem (Grundsystem)
η_{I,M_B}^0	= Querkräfte infolge des Schnittmomentes $M_B = 1$	
η_{I,M_C}^0	= Querkräfte infolge des Schnittmomentes $M_C = 1$	

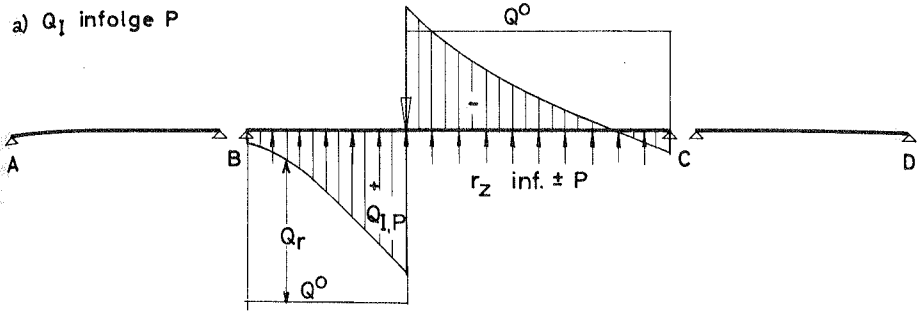
Die Querkräfte am statisch bestimmten Ersatzbiegesystem infolge $\pm P$ bzw. $\pm M_B$ und $\pm M_C$ sowie ihre Überlagerung sind in Bild 6.6 dargestellt. Entsprechend den Momenten setzen sich auch die Querkräfte stets aus den beiden Anteilen zusammen:

$$Q_I = Q^0 + Q_r = Q^0 + M_r' \quad (6.6)$$

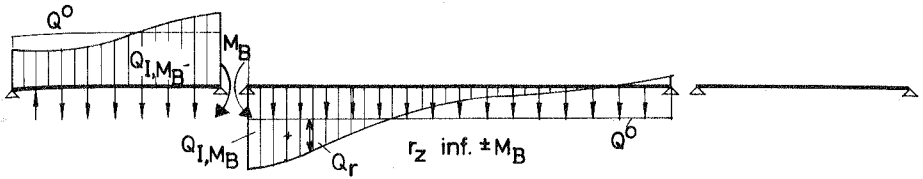
Q^0 = Querkraft infolge der Lasten $\pm P$ bzw. der Schnittmomente $\pm M_B$ und M_C

Q_r = Querkräfte infolge der zugehörigen Pendelkräfte am freiaufliegenden Ersatzbiegebalken.

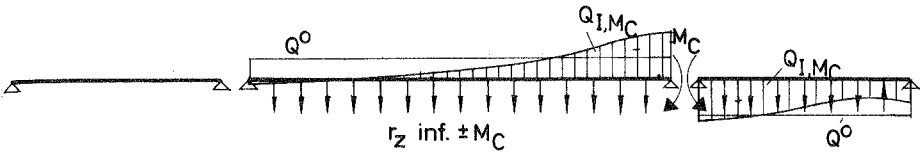
a) Q_I infolge P



b) Q_I infolge M_B



c) Q_I infolge M_C



d) Überlagerung der Querkräfte Q_I aus a), b) und c).

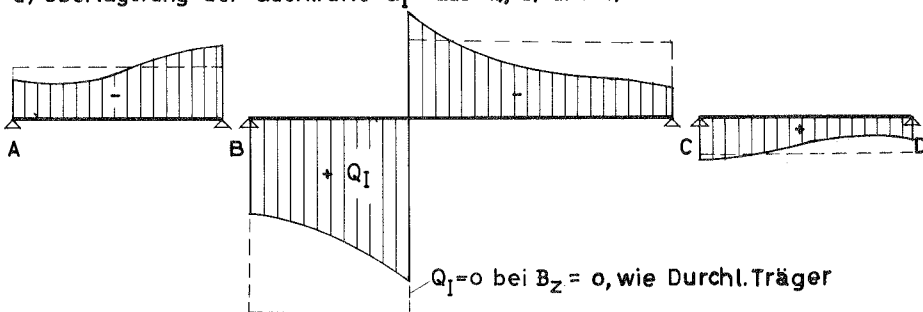


Bild 6.6 Querkräfte Q_I am durchlaufenden Träger (Ersatz-Biegesystem I) Wölbschubspannung $\tau_2 = \frac{Q_I \cdot S^*}{d \cdot J^*}$ (Steg)

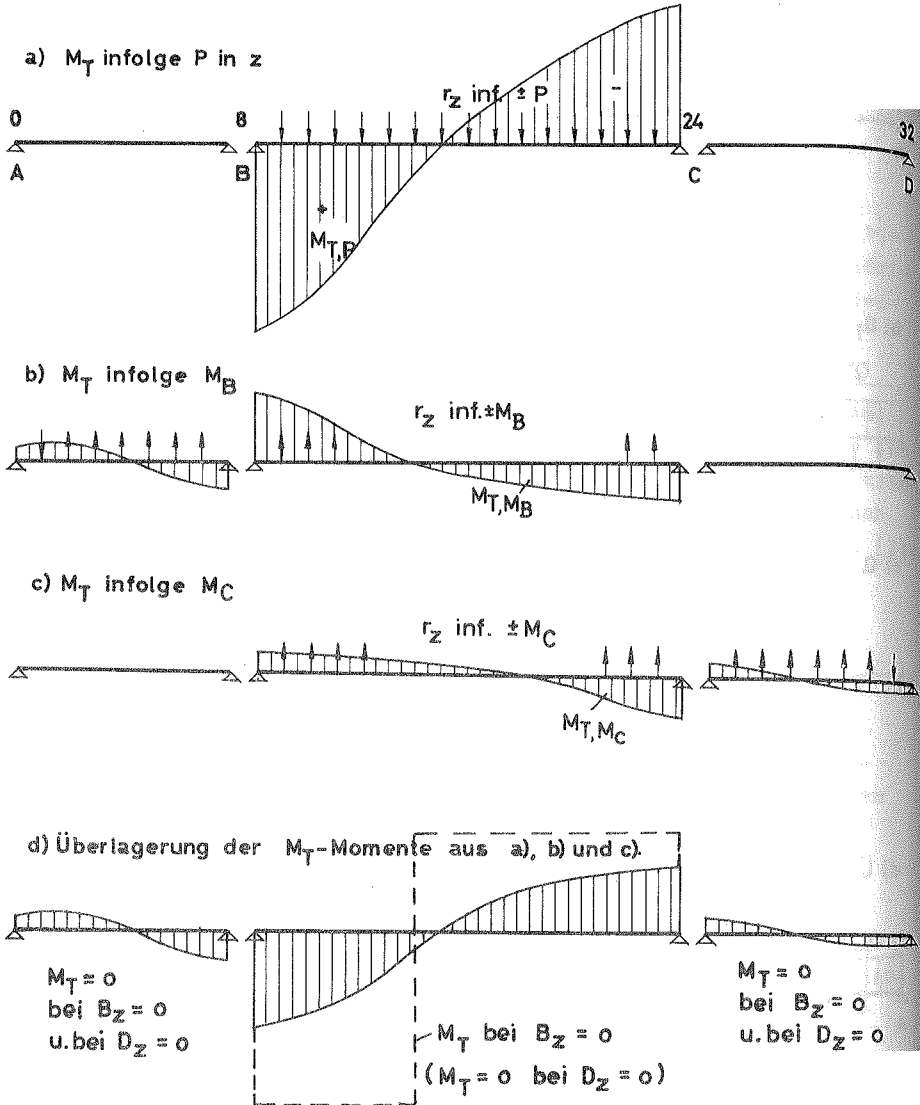


Bild 6.7 Torsionsmomente M_T am durchlaufenden Träger (Drillsystem II)
Torsionsschubspannung $\tau_1 = \psi_1 \cdot \frac{M_T}{J_D} \cdot d$ (Steg)
(ψ_1 s. Seite 52)

In Bild 6.7 sind schliesslich die Torsionsmomente M_T dargestellt. Sie ergeben sich aus den Querkräften eines mit den Pendelkräften r_z belasteten Balkens entsprechend (3.40):

$$M_T = -\frac{a}{2} \{Q_r - k\} \quad (6.7)$$

Interessant ist noch folgende Grenzbetrachtung:

Wenn die Torsionssteifigkeit D_z gegenüber der Biegesteifigkeit B_z immer kleiner wird, dann werden auch die Pendelkräfte r_z immer kleiner und für $r_z = 0$ ergibt sich die gleiche Momentenlinie wie bei einem normalen Durchlaufträger. Die Torsionsmomente M_T werden zu Null.

Umgekehrt verschwinden bei grosser Torsionssteifigkeit D_z im Verhältnis zur Biegesteifigkeit B_z die Biegemomente M_I am Ersatzsystem I immer mehr, da den Momenten M^0 infolge $\pm P$ fast gleich grosse Momente M_r infolge der Pendelkräfte r gegenüberstehen.

Die Torsionsmomente M_T verlaufen dabei genau so wie bei reiner St.Venant'scher Torsion, d.h. sie treten nur im belasteten Feld auf und werden in den unbelasteten Feldern zu Null ähnlich der Querkraftlinie eines freiaufliegenden Trägers. Die Biege- bzw. Torsionsmomente in den beiden Extremfällen:

- a) Torsionssteifigkeit, d.h. $D_z = 0$ und
- b) Biegesteifigkeit, d.h. $B_z = 0$

sind in Bild 6.5 bis 6.7 gestrichelt dargestellt.

7. Berechnungsbeispiele und Vergleich der Ergebnisse mit Messungen an Modellen

7.1 Allgemeine Angaben

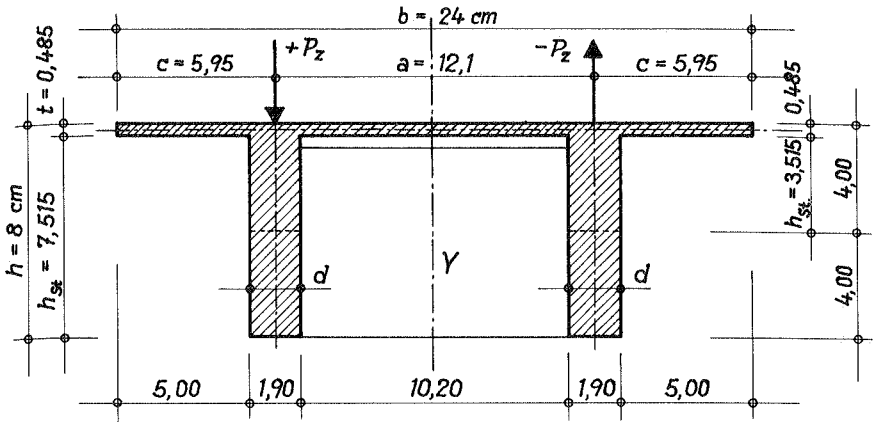
Im folgenden Abschnitt werden die Beanspruchungen und Verformungen von zweistegigen Plattenbalken mit veränderlichem oder konstantem Querschnitt, sowie mit oder ohne Queraussteifungen nach dem vorstehend abgeleiteten Berechnungsverfahren ermittelt. Dabei ist entsprechend Abschnitt 2.1 angenommen, dass der Plattenbalken an beliebiger Stelle z durch zwei gegengleiche Stegkräfte $\pm P_z$ bzw. durch das Torsionsmoment $M_{T,z} = P_z \cdot a$ belastet wird.

Für die Berechnungsbeispiele werden die Querschnittsabmessungen und Spannweiten von Plattenbalkenmodellen aus Kunststoff zugrunde gelegt, an denen vom Institut für Spannungsoptik und Modellmessung der Technischen Hochschule Stuttgart sehr genaue Dehnungs- und Durchbiegungsmessungen durchgeführt wurden [26]. Die Ergebnisse der Rechnung können somit den Messwerten direkt gegenübergestellt und aus dem Vergleich wertvolle Aufschlüsse über die Genauigkeit des Verfahrens bzw. über den Einfluss von vereinfachenden Berechnungsannahmen gezogen werden.

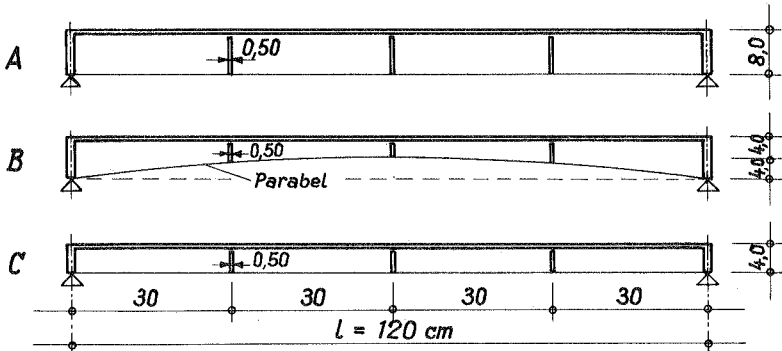
Die Plattenbalkenmodelle entsprechen Brückentragwerken aus Stahlbeton oder Spannbeton etwa im Maßstab 1 : 33. Der Grundquerschnitt ist in Bild 7.1a dargestellt. Die Stegdicke wurde mit $d = 1,9$ cm absichtlich verhältnismässig gross gewählt, so dass sich im Gegensatz zum Stahlbau ein ausgesprochen dickwandiger, offener Querschnitt ergibt. Die Spannweite der Modellbalken beträgt $\ell = 120$ cm.

Bekanntlich hängt das Tragverhalten von Plattenbalken, die durch Torsionslasten beansprucht werden, wesentlich vom Verhältnis der Biege- und Drehsteifigkeiten ab.

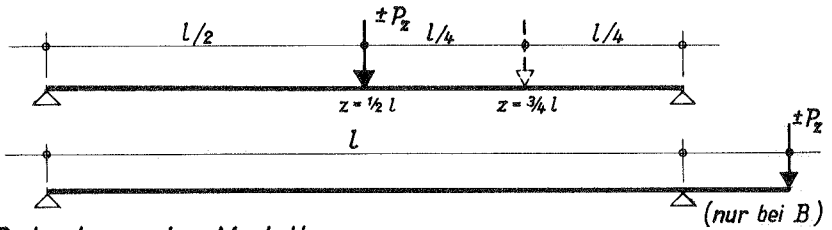
Um mit den Messungen einen möglichst grossen Bereich der praktisch vorkommenden Steifigkeitsverhältnisse zu erfassen, wurden aus einem Grundmodell A weitere Modelle B und C mit verschiedenen Steghöhen und verschiedenen Queraussteifungen hergestellt (vgl. Bild 7.1b).



a. Grundquerschnitt $h = 8,0 \text{ cm}$



b. Längsschnitte der Modelle A, B und C



c. Belastung der Modelle

Bild 7.1 Abmessungen und Belastungen der Modelle

Die Modelle sind wie folgt bezeichnet:

Kurzbezeichnung der Modelle	Konstruktionshöhe cm	Queraussteifung
A1	8,0	} nur durch die Platte
B1	8,0 - 4,0	
C1	4,0	
A2	8,0	} durch Platte und Querträger in den Viertelpunkten
B2	8,0 - 4,0	
C2	4,0	

Bei den Modellen A1 und A2 ist die Konstruktionshöhe $h = 8$ cm auf ganze Balkenlänge konstant. Die Biegesteifigkeit ist wesentlich grösser als die Drehsteifigkeit. Mit $h : l = 1 : 15$ ergibt sich ein verhältnismässig biegesteifer Balken. Die Torsionslasten werden mehr durch Wölbkrafttorsion als durch St.Venant'sche Torsion übertragen.

Die Modelle B1 und B2 wurden aus den Modellen A1 und A2 hergestellt und unterscheiden sich von diesen nur durch die veränderliche Konstruktionshöhe. Sie beträgt in Feldmitte $h = 4,0$ cm und nimmt nach den Balkenenden parabolisch auf $h = 8,0$ cm zu. Die Biege- und Drehsteifigkeit ist also in Längsrichtung veränderlich. Wegen der verhältnismässig geringen Biegesteifigkeit im mittleren Bereich der Spannweite werden hier angreifende Torsionslasten mehr als bei den Modellen A1 und B1 durch St.Venant'sche Torsion übertragen. Plattenbalken entsprechend Modell B1 und B2 kommen in der Praxis meist als eingespannte Träger oder als Teile von durchlaufenden Trägern vor. Infolgedessen sind hier auch diejenigen Beanspruchungen und Verformungen von Interesse, die durch an den Balkenenden angreifende Wölbmomente entstehen. Am Modell konnten diese Momente nicht genau nachgeahmt werden. Es wurden statt dessen nur gegengleiche Kragmomente durch die über das Auflager hinaus verlängerten Stege eingeleitet (Bild 7.1c). Über die Mess- und Berechnungsergebnisse bei diesem Belastungsfall wird später berichtet.

Die Modelle C1 und C2 gehen aus den Modellen B1 und B2 hervor durch weiteres Abarbeiten der Stege auf eine konstante Konstruktionshöhe $h = 4$ cm. Damit entsprechen diese Modelle verhältnismässig biegeweichen Plattenbalken ($h : \ell = 1 : 30$). Durch die Verkürzung der Stege hat die Biegesteifigkeit in Längsrichtung gegenüber den Modellen A wesentlich mehr abgenommen als die Drehsteifigkeit; deshalb werden hier die Torsionslasten stärker durch St.Venant'sche Torsion übertragen, während die Wölbkrafttorsion nur im Bereich an der Lasteinleitung von Bedeutung ist.

In der Querrichtung sind die Modelle A1, B1 und C1 nur durch die Platte elastisch ausgesteift. Die Querschnittsform bleibt also bei Torsionsbelastung nicht erhalten.

Bei den Modellen A2, B2 und C2 sind in den Viertelpunkten der Spannweite zusätzlich Querträger angeordnet. Sie sind 5 mm dick und ungefähr gleich hoch wie die Stege. Die Querträger sind nur an den Stegen angeschlossen, haben also keine Verbindung mit der Platte. Die Drehsteifigkeit der Querträger ist im Verhältnis zur Biegesteifigkeit sehr gering. Damit wäre die Voraussetzung, dass die Drehsteifigkeit der Querträger vernachlässigt werden kann (Abschnitt 5.1), erfüllt. Zur Vereinfachung des Modellumbaus wurden jedoch schon bei den Modellen der Reihe A1 bis C1 Querträger mit eingebaut, aber in der Mitte durchgetrennt, so dass sie auf die Biegesteifigkeit in Querrichtung ohne Einfluss waren. Die Modelle A1 bis C1 konnten nun durch Verbindung der Querträgermitten in die Modelle der Reihe A2 bis C2 verwandelt werden. Zur Verbindung dienten auf die Querträger beidseitig aufgeschraubte kräftige Messinglaschen. Hierdurch wurde jedoch die Drehsteifigkeit der Querträger im Bereich der Laschen wesentlich erhöht, so dass die rechnerischen Voraussetzungen nicht mehr ganz erfüllt sind. Zwar kann der Einfluss der Drehsteifigkeit der Querträger zusätzlich nach Abschnitt 5.5 verhältnismässig einfach erfasst werden, jedoch wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Im Folgenden wird nun zunächst die Berechnung des Plattenbalkens mit veränderlichem Querschnitt entsprechend Modell B1 durchgeführt. Dabei werden die Schnittkräfte sowohl durch die numerische Lösung der Differentialgleichung gemäss Abschnitt 3.2 als auch durch Lösung des Elastizitätsgleichungs-Systemes gemäss

Abschnitt 5.3 ermittelt. Mit den Ansätzen gemäss Abschnitt 5.3 werden dann auch die Querträger in den Viertelpunkten entsprechend Modell B2 berücksichtigt.

Weiter werden die Plattenbalken mit konstantem Querschnitt entsprechend Modell A1 und C1 berechnet, wobei die geschlossenen Lösungen der Differentialgleichung entsprechend Abschnitt 4.1 zur Anwendung kommen.

Bei den Plattenbalken entsprechend Modell A2 und C2 kann annähernd starre Queraussteifung vorausgesetzt werden. Die Schnittkräfte werden deshalb mit Hilfe der in Abschnitt 4.3 erwähnten Kurventafeln für starr ausgesteifte Querschnitte bestimmt.^{*)} Die Ergebnisse der Rechnung, nämlich der Verlauf der Normal- und Schubspannungen sowie die Durchbiegungen sind für verschiedene Belastungsfälle in den Bildern 7.8 bis 7.15 und 7.17 bis 7.34 den aus den gemessenen Dehnungen ermittelten Spannungen bzw. den gemessenen Durchbiegungen gegenübergestellt.

7.2 Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt ohne Feldquerträger (Modell B1)

7.2.1 Abmessungen, Querschnittswerte, Materialkonstante

Die Abmessungen des Plattenbalkens im Längs- und Querschnitt zeigen Bild 7.2a und 7.2b.

a) Querschnittswerte des Ersatz-Systemes I (Biegesystem)

Der einsteigige Plattenbalken Bild 7.2c hat die gleichen Stegabmessungen wie in Bild 7.2b. Die ideelle Plattenbreite folgt genau aus (2.27) zu:

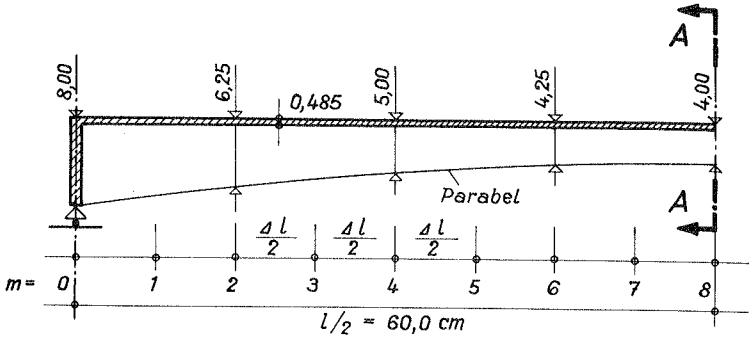
$$b^* = 15,94 \text{ cm} \quad \text{bei } m = 0 \text{ bzw.}$$

$$b^* = 15,82 \text{ cm} \quad \text{bei } m = 8$$

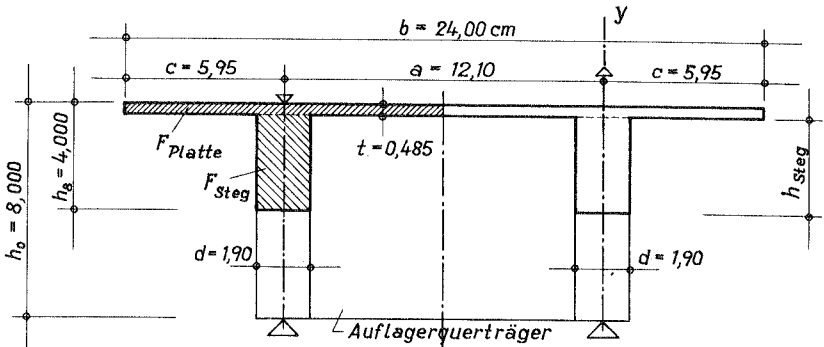
Gerechnet wird mit dem genäherten Wert aus (2.27b):

$$b^* \approx \frac{b^3}{6 \cdot a^2} = \frac{24,0^3}{6 \cdot 12,1^2} = 15,75 \text{ cm}$$

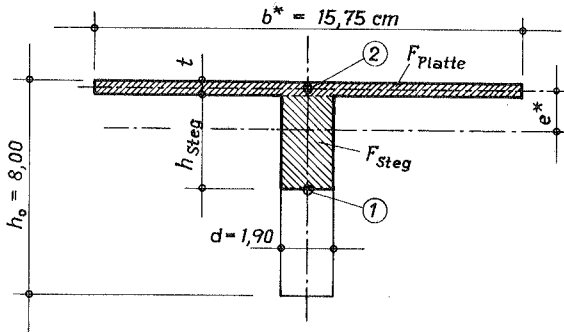
*) Hier nicht wiedergegeben.



a) Längsschnitt



b) Querschnitt A-A



c) Ideeller Querschnitt (System I)

Bild 7.2 Plattenbalken Modell B1
mit veränderlichem Querschnitt

Tabelle 1: Querschnittswerte des Biegesystems (I)

Schnitt m	h _{St} cm	$F_{St} =$ cm ²	F_{Pl} cm	F cm ²	$J_{St} =$ cm ⁴	$J_{Pl} =$ cm ⁴	$F_{Pl}^* \cdot Y_{Pl} \cdot e^* =$ vgl. cm ⁴ (2,28)	J_m^* cm ⁴	$W_{(2)}^* =$ cm ³	$W_{(1)}^* =$ cm ³
0	7,515	14,28	7,64	21,92	67,20	0,15	79,64	146,99	28,5	56,4
2	5,765	10,95	"	18,59	30,32	"	43,81	74,28	17,8	40,3
4	4,515	8,58	"	16,22	14,58	"	25,25	39,98	11,62	30,2
6	3,765	7,15	"	14,79	8,44	"	16,60	25,19	8,44	24,6
8	3,515	6,68	"	14,32	6,88	"	14,24	21,27	7,53	22,8

Damit ergeben sich die in Tabelle 1 ermittelten Querschnittswerte für die Punkte $m = 0, 2, 4, 6$ und 8 ($= \frac{1}{8}$ -Punkte der Spannweite)

b) Querschnittswerte des Systems II (Drillsystem)

Es werden die Drillwiderstände J_D einer Querschnittshälfte des in Bild 7.2b dargestellten Plattenbalkens in den Punkten $m = 0, 2, 4, 6$ und 8 ermittelt gemäss (2.35):

$$J_{D,m} = \psi_{St} \cdot d^3 \cdot h_m + \psi_{Pl} \cdot 0,5 \cdot t^3 \cdot b$$

Für die Beiwerte ψ_3 gilt genähert nach [23]:

$$\psi_{3,St} = \frac{1}{3} (1 - 0,63 \cdot \frac{d}{h_m}) \quad \text{bzw.}$$

$$\psi_{3,Pl} = \frac{1}{3} (1 - 0,63 \cdot \frac{t}{b}) \approx 0,33$$

Es ergeben sich damit die Drillwiderstände gemäss Tabelle 2.

Tabelle 2

0	1	2	3	4	5	6
$m =$	$\frac{h_m}{d}$	$\psi_{3,St}$	$d^3 \cdot h$ cm ⁴	$\psi_{3,St} \cdot d^3 \cdot h$ cm ⁴	$\psi_{3,Pl} \cdot 0,5 \cdot t^3 \cdot b$ cm ⁴	$J_{D,m}$ cm ⁴
0	4,21	0,284	54,87	15,58	~ 0,46	16,04
2	3,29	0,270	42,87	11,57	0,46	12,03
4	2,63	0,254	34,29	8,71	0,46	9,17
6	2,24	0,240	29,15	7,00	0,46	7,46
8	2,11	0,233	27,43	6,39	0,46	6,85

c) Materialkonstante nach [26]:

Modell-Werkstoff: Araldit

Biege-Modul $E = 35\,600 \text{ kg/cm}^2$

Schub-Modul $G = 12\,800 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{G}{E} = 0,36$$

Querdehnzahl $\mu = 0,39$

d) Steifigkeiten gemäss (3.1), (3.2) und (3.3)

Biegesteifigkeiten des Ersatzsystems I :

$$B_m = E \cdot J_m^*, \quad m = 0, 2, 4, 6 \text{ und } 8$$

Drehsteifigkeiten des Systems II :

$$D_m = G \cdot J_{D,m}$$

Mit $G = 0,36 E$ wird:

$$D_m = 0,36 \cdot E \cdot J_{D,m}, \quad m = 0, 2, 4, 6 \text{ und } 8$$

Ideelle Biegesteifigkeit der Platte: Plattendicke $t = \text{konstant}$.
im Bereich der Stege $t = \infty$ angenommen

$$\bar{B}_1 = \left(\frac{a}{a-d}\right)^3 \cdot \bar{B}$$

$$\bar{B} = \frac{E \cdot \bar{J}_{P1}}{1 - \mu^2} \quad \text{gemäss (3.3)}$$

$$\bar{J}_{P1} = 0,485^3 \cdot \frac{1}{12} = 0,951 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^4/\text{cm}$$

$$1 - \mu^2 = 1 - 0,39^2 = 0,85$$

$$\left(\frac{a}{a-d}\right)^3 = \left(\frac{12,1}{12,1-1,9}\right)^3 = 1,67$$

Damit wird:

$$\bar{B}_1 = \frac{1,67 \cdot 0,951 \cdot 10^{-2}}{0,85} \cdot E = 0,0187 E \text{ (kg cm}^2/\text{cm)}$$

7.2.2 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ gemäss Abschnitt 3.2

Die Momente $M_{r,m}$ sind die Biegemomente am System I infolge der Pendelkräfte r_m . Die Spannweite l wird in 8 gleiche Teilstücke unterteilt: $\Delta l = 0,125 \cdot l$. Die Grenzen der Teilstücke sind mit $m = 0, 2, 4, 6 \dots 16$ bezeichnet. Die Momente $M_{r,m}$ ergeben sich als Lösungen des 5-gliedrigen Gleichungssystems gemäss (3.100a) bis 3.100c). Zur Ermittlung der Matrix-Werte α , β und γ gemäss

(3.97a) bis (3.97c) sind zuvor die Verhältniswerte f^* , g^* und h^* zu bestimmen.

a) Verhältniswerte f^* , g^* und h^* gemäss (3.99)

$$g_m^* = \frac{\Delta \ell^2}{a} \cdot \frac{\bar{B}_i}{D_m} \quad [1]$$

$$f_m^* = i_m^* \cdot g_m^* \quad [1]$$

$$h_m^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta \ell^4}{a^3} \cdot \frac{\bar{B}_i}{B_m} \quad [1]$$

Mit $a = 12,1 \text{ cm}$, $\Delta \ell = 0,125 \cdot 120 = 15,0 \text{ cm}$ und $\bar{B}_i = 0,0187 \text{ E}$ (vgl. Abschnitt 7.2.1d) wird:

$$g_m^* = \frac{0,9659}{J_{D_m}} ; \quad i_m^* = \frac{J_{D_m+1}^{-J_{D_m-1}}}{4J_{D_m}}$$

$$h_m^* = \frac{0,3563}{J_m^*} ;$$

Diese Werte sind in den Spalten 1 bis 4 der Tabelle 3 ausgerechnet.

b) Matrix-Werte α , β und γ

Sie können mit den Werten g_m^* , f_m^* und h_m^* der Tabelle 3 direkt angeschrieben werden. Für die Werte α , β und γ in Zeile $m = 2$ gelten die Beziehungen (3.97b), sonst (3.97a).

Da die Punkte mit $m = 0, 2, 4 \dots$ statt mit $m = 0, 1, 2 \dots$ bezeichnet wurden, sind die Zahlen-Indices der Matrix-Werte in der Kopfzeile doppelt so gross als in (3.97).

c) Lastwerte L_m , $m = 0, 2, 4 \dots 16$ für $+P$ in $m = 8$ und $m = 4$

Sie werden nach dem Rechenschema in Abschnitt 3.2.4 bestimmt. Für P in $m = 4$ bzw. $m = 8$ ergeben sich die in der Tabelle 4, Zeilen 1 und 2 angegebenen M^0 -Momente. Mit den Verhältniswerten $10 \cdot h_m^*$ der Tabelle 3, Spalte 4, erhält man die in den Zeilen 4 und 5 angegebenen Zwischenwerte $\ell_m = M_m^0 \cdot h_m^* \left(\frac{10^3}{PI} \right)$ -fach, welche in die Kopfzeile des Rechenschemas einzusetzen sind. Nach Multipli-

Matrix - Werte

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i_m^*		$10 \cdot g_m^*$	$10 \cdot f_m^*$	$10 \cdot h_m^*$	$\beta_{m,m-4}$	$\beta_{m,m-2}$	α_{mm}	$\beta_{m,m+2}$	$\beta_{m,m+4}$
0	—	0,6022	—	0,0262	—	—	—	—	—
2	- 0,143	0,8029	- 0,1148	0,0479	—	—	5,632	4,085	0,896
4	- 0,125	1,0533	- 0,1316	0,0891	—	4,170	6,792	4,102	0,877
6	- 0,078	1,2947	- 0,1010	0,1414	0,913	4,196	7,031	4,142	0,873
8	± 0	1,4101	± 0	0,1675	0,889	4,192	7,171	4,192	0,889

Da die Querschnitte zur Trägermitte (Punkt $m = 8$) symmetrisch sind, ist die Bestimmung der Matrix-Werte nur für die Punkte $m = 2$ bis $m = 8$ erforderlich.

Tabelle 4: Zwischenwerte λ_m gemäss (3.61) für P in m = 4 und m = 8

	m	0	2	4	6	8	1C	12	14	16
1	$\frac{M^0}{P \cdot I}$ (P in m=4)	0,0000	0,09375	0,18750	0,15625	0,12500	0,09375	0,06250	0,03125	0,0000
2	$\frac{M^0}{P \cdot I}$ (P in m=8)	0,000	0,06250	0,12500	0,18750	0,25000	0,18750	0,12500	0,06250	0,0000
3	1000 h_m^*	2,424	4,797	8,912	14,144	16,751	14,144	8,912	4,797	2,424
4	$\frac{10^3}{P \cdot I} \cdot \lambda_m$ (P in m=4)	0	0,4497	1,6710	2,2100	2,0939	1,3260	0,5570	0,1499	0
5	$\frac{10^3}{P \cdot I} \cdot \lambda_m$ (P in m=8)	0	0,3118	1,1140	2,6520	4,1877	2,6520	1,1140	0,3118	0

Da mit den $\frac{1}{P \cdot I}$ -fachen Momenten M^0 und mit den 1000-fachen h_m^* -Werten gerechnet wurde, sind die Lastwerte L_m mit dem Faktor $c = \frac{P \cdot L}{1000}$ zu multiplizieren.

kation mit den Zahlenwerten und Addition ergeben sich folgende Lastwerte:

Lastwerte für P in $m = 4$ und $m = 8$

m	$L_m \cdot \frac{1}{c} =$	
	P in $m = 4$	P in $m = 8$
0	0	0
2	-23,22	-16,67
4	-53,45	-47,95
6	-71,58	-93,11
8	-68,21	-120,04
10	-47,43	-93,11
12	-23,92	-47,95
14	-8,33	-16,67
16	0	0

d) Gleichungssystem zur Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ infolge P in $m = 4$ bzw. $m = 8$

Das Fünf-Momenten-Gleichungssystem ist auf der folgenden Seite vollständig angeschrieben. Es können daraus die sieben Unbekannten $M_{r,2}$ bis $M_{r,14}$ ermittelt werden. Bei P in $m = 8$ ergeben sich wegen Symmetrie die bekannten Vereinfachungen (4 Unbekannte).

7.2.3 Ableitungen $M'_{r,m}$ und $M''_{r,m}$

Die Ableitungen $M'_{r,m}$ werden für die Bestimmung der Querkräfte am System I bzw. der Torsionsmomente am System II benötigt. Aus $M''_{r,m}$ folgen die Querbiegemomente in der Platte. Es werden zunächst die Werte M''_m nach Gleichung (3.103) bestimmt. Damit ergeben sich die Werte M'_m aus Gleichung (3.109). Den Berechnungsgang zeigen die Tabellen 5a und 5b für $\pm P$ in $m = 8$ bzw. die Tabellen 6a und 6b für $\pm P$ in $m = 4$.

Die Ergebnisse sind in Abschnitt 7.2.4 zusammengestellt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	M_2	M_4	M_6	M_8	M_{10}	M_{12}	M_{14}	P in 8	P in 4
2	+ 5,632	- 4,085	+ 0,896					- 16,67	- 23,22
4	- 4,170	+ 6,792	- 4,102	+ 0,877				- 47,95	- 53,45
6	+ 0,913	- 4,196	+ 7,031	- 4,142	+ 0,873			- 93,11	- 71,58
8		+ 0,889	- 4,192	+ 7,171	- 4,192	+ 0,889		- 120,04	- 68,21
10			+ 0,873	- 4,142	+ 7,031	- 4,196	+ 0,913	- 93,11	- 47,43
12				+ 0,877	- 4,102	+ 6,792	- 4,170	- 47,95	- 23,92
14					+ 0,896	- 4,085	+ 5,632	- 16,67	- 8,33

Lösungen: $\frac{1}{p \cdot l}$ -fache Momente $M_m = M_r, m$

	- 0,0567	- 0,0977	- 0,1147	- 0,1106	- 0,0933	- 0,0674	- 0,0355	P in $m = 4$
	- 0,0052	- 0,1204	- 0,1582	- 0,1719	- 0,1582	- 0,1204	- 0,0652	P in $m = 8$

Fünfmomenten-Gleichungssystem,

Lastwerte und Lösungen für \underline{P} in $m = 4$ und $m = 8$. (vgl. Abschnitt 7.2.2d).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0										
$m =$	\mathcal{E}_m (3.102 b)	d_m (3.102 a)	\mathcal{E}_m (3.102 c)	$\frac{1}{pl} M_m$ s. S. 161	$\mathcal{E}_m \cdot \frac{M_m - z}{pl}$	$-d_m \cdot \frac{M_m}{pl}$	$\mathcal{E}_m \cdot \frac{M_m + z}{pl}$	$\frac{1}{pl} (\mathcal{E}_m - z + L \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_m + z)$	$(5)+(6)+(9) + (8) = \frac{\mathcal{E}_m^2}{pl} \cdot M_m$	$M_m^2 \frac{m}{p}$
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
2	0,93336	1,8202	0,91771	- 0,0652	+ 0	+ 0,1187	- 0,1104	+ 0,0023	+ 0,0106	+ 0,0057
4	0,9126	1,7537	0,8956	- 0,1204	- 0,0595	+ 0,2111	- 0,1417	+ 0,0074	+ 0,0173	+ 0,0092
6	0,8896	1,6845	0,8772	- 0,1582	- 0,1071	+ 0,2665	- 0,1508	+ 0,0159	+ 0,0245	+ 0,0131
8	0,8731	1,6510	0,8731	- 0,1719	- 0,1381	+ 0,2838	- 0,1381	+ 0,0220	+ 0,0296	+ 0,0158

Tabelle 5a: Ermittlung der 2. Abteilung M_m^m für $\pm P$ in $m = 8$ Gemäss (3.103).

Tabelle 5b: Ermittlung der 1. Ableitung M''_m
für $\underline{+P}$ in $m = 8$ gemäss (3.109)

0	1	2	3	4	5
	aus Tab. 5a.4 $\frac{M''_m}{P}$	aus Tab. 5a.10 $\frac{M''_m}{P}$	$\frac{1}{30P} \cdot (M''_{m+1} - M''_{m-1})$	$\frac{1,25}{P} (M''_{m+1} - M''_{m-1})$	$M''_m/P = (3) - (4)$
0	± 0	± 0	$-0,5216 \ x)$	$+0,0142 \ x)$	$-0,5358$
2	$-7,824$	$+0,0057$	$-0,4816$	$+0,0115$	$-0,4931$
4	$-14,448$	$+0,0092$	$-0,3720$	$+0,0093$	$-0,3813$
6	$-18,984$	$+0,0131$	$-0,2060$	$+0,0082$	$-0,2142$
8	$-20,628$	$+0,0158$	± 0	± 0	± 0

$\frac{1}{2\Delta x} = \frac{1}{30}$ $\frac{\Delta x}{12} = 1,25$ $x) \text{ vgl. (3.110a)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0										
$m =$	ξ_m (3.102 b)	δ_m (3.102 a)	ζ_m (3.102 c)	$\frac{1}{Pl} \cdot M_m$ s.S. 161	$\xi_m \cdot \frac{M_{m-2}}{Pl}$	$-\delta_m \cdot \frac{M_m}{Pl}$	$\zeta_m \cdot \frac{M_{m+2}}{Pl}$	$\frac{1}{Pl} (\xi_{m-2} + 4 \cdot \xi_m + \xi_{m+2})$	$(5) + (6) + (7) + (8) = \frac{AE^2}{Pl^2} \cdot M_m$	$\frac{M_m}{P}$
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
2	0,9336	1,8202	0,9171	- 0,0567	± 0	+ 0,1032	- 0,0896	+ 0,0035	+ 0,0171	+ 0,0091
4	0,9126	1,7537	0,8956	- 0,0977	- 0,0517	+ 0,1713	- 0,1027	+ 0,0093	+ 0,0262	+ 0,0139
6	0,8896	1,6865	0,8772	- 0,1147	- 0,0669	+ 0,1932	- 0,0970	+ 0,0126	+ 0,0219	+ 0,0116
8	0,8731	1,6510	0,8731	- 0,1106	- 0,1001	+ 0,1826	- 0,0815	+ 0,0119	+ 0,0129	+ 0,0068
10	0,8772	1,6645	0,8896	- 0,0933	- 0,0970	+ 0,1572	- 0,0599	+ 0,0080	+ 0,0083	+ 0,0064
12	0,8956	1,7537	0,9126	- 0,0674	- 0,0836	+ 0,1182	- 0,0324	+ 0,0030	+ 0,0052	+ 0,0027
14	0,9171	1,8202	0,9336	- 0,0355	- 0,0618	+ 0,0646	± 0	+ 0,0012	+ 0,0040	+ 0,0021
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0

Tabelle 6a: Ermittlung der 2. Abteilung M_m für $\pm P$ in $m = 4$ gemäss (5.103).

Tabelle 6b: Ermittlung der 1. Ableitung M'_m
für $\pm P$ in $m = 4$ gemäss (3.109)

0	1	2	3	4	5
	aus Tab. 6a. 4 $\frac{M_m}{P}$	aus Tab. 6a. 10 $\frac{M''_m}{P}$	$\frac{1}{30P} \cdot (M_{m+1} - M_{m-1})$	$\frac{1,25}{P} (M''_{m+1} - M''_{m-1})$	$M'_m/P = (3) - (4)$
0	± 0	± 0	$-0,4536 \ x)$	$+0,0227 \ x)$	$-0,4763$
2	$- 6,804$	$+0,0091$	$-0,3908$	$+0,0175$	$-0,4083$
4	$-11,724$	$+0,0140$	$-0,2320$	$+0,0032$	$-0,2352$
6	$-13,764$	$+0,0117$	$-0,0516$	$-0,0089$	$-0,0427$
8	$-13,272$	$+0,0069$	$+0,0856$	$-0,0091$	$+0,0947$
10	$-11,196$	$+0,0044$	$+0,1728$	$-0,0051$	$+0,1779$
12	$- 8,088$	$+0,0028$	$+0,2312$	$-0,0029$	$+0,2341$
14	$- 4,260$	$+0,0021$	$+0,2696$	$-0,0035$	$+0,2731$
16	± 0	± 0	$+0,2840$	$-0,0053$	$+0,2893$

$$\frac{1}{24\lambda} = \frac{1}{30} \qquad \frac{4\lambda}{12} = 1,25 \qquad x) \text{ vgl. (3.110a)}$$

7.2.4 Zusammenstellung der Ergebnisse

+P in $m = 8$

m =	0	2	4	6	8	Dim
$M_{r,m}/P$	± 0	-7,824	-14,448	-18,984	-20,628	cm
$M'_{r,m}/P$	-0,5358	-0,4931	-0,3813	-0,2142	± 0	1
$M''_{r,m}/P$	± 0	+0,0057	+0,0092	+0,0131	+0,0158	cm ⁻¹

+P in $m = 4$

m =	0	2	4	6	8	Dim
$M_{r,m}/P$	± 0	-6,804	-11,724	-13,764	-13,272	cm
$M'_{r,m}/P$	-0,4763	-0,4083	-0,2352	-0,0427	-0,0947	1
$M''_{r,m}/P$	± 0	+0,0091	+0,0140	+0,0117	+0,0069	cm ⁻¹

m =	16	14	12	10	8	Dim
$M_{r,m}/P$	± 0	-4,260	-8,088	-11,196	-13,272	cm
$M'_{r,m}/P$	+0,2893	+0,2731	+0,2341	+0,1779	+0,0947	1
$M''_{r,m}/P$	± 0	+0,0021	+0,0028	+0,044	+0,0069	cm ⁻¹

Mit den Momenten $M_{r,m}$ und den Ableitungen $M'_{r,m}$ und $M''_{r,m}$ erhält man alle erforderlichen Schnittkräfte gemäss (3.4), (3.39), (3.40) und (3.41)

Für das Torsionsmoment M_{Tz} , vgl. (3.40), ist jedoch noch das Korrekturglied k zu bestimmen. Es ergibt sich aus den Flächen F_0 und F_u , Bild 3.2c und d, gemäss (3.26):

$$k = \frac{F_0}{F_u}$$

Für +P in $m = 8$ ist $F_0 = 0$ und damit $k = 0$. k ist also nur für +P in $m = 4$ zu ermitteln.

setzt man die Drillsteifigkeit D in $m = 8$

$$D_8 = 1$$

dann erhält man zur Bestimmung von F_u und F_o die Ordinaten gemäss Spalte 2 und 4 der folgenden Zusammenstellung :

0	1	2	3	4
$m =$	$J_{D,m}$ s.Tab.2	$\frac{D_8 = 1}{D_m}$	$\frac{M'_{r,m}}{P}$	$\frac{M'_{r,m}}{P \cdot D_m}$
0	16,04	0,427	-0,4763	-0,2033
2	12,03	0,569	-0,4083	-0,2323
4	9,17	0,747	-0,2352	-0,1757
6	7,46	0,918	-0,0427	-0,0392
8	6,85	1,000	+0,0947	+0,0947
10	7,46	0,918	+0,1779	+0,1633
12	9,17	0,747	+0,2341	+0,1749
14	12,03	0,569	+0,2731	+0,1554
16	16,04	0,427	+0,2893	+0,1235

Aus den Ordinaten ergeben sich mit Hilfe der Simpsonregel die Flächen $F_u = +17,738$ und $F_o = +0,2968/P$, wobei $\frac{\Delta l}{6} = 1$ gesetzt werden kann. Daraus folgt für das Korrekturglied

$$k = \frac{0,2968}{17,738 \cdot P} = + 0,0167/P$$

Die Schnittkräfte sind für $+P$ in $m = 8$ und $m = 4$ in den Tabellen 7 und 8 ermittelt und in den Bildern 7.3, 7.4 und 7.5 graphisch dargestellt.

Damit können die Beanspruchungen und Verformungen für jeden beliebigen Schnitt gemäss Abschnitt 2.4 und 2.5 bestimmt werden.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m =$	$\frac{M_m^0}{Pl} +$ <small>s. Tab. 4</small>	$\frac{M_{r,m}}{Pl} =$	$\frac{M_{l,m}}{Pl}$	$\frac{\beta_m^0}{P} +$	$\frac{M'_{r,m}}{P} =$	$\frac{Q_I}{P}$	$\frac{M_{l,m}}{Pl} =$ $-\frac{a}{2l} \cdot \frac{M'_{r,m}}{P}$	$\frac{\bar{m}_m}{P} =$ $-\frac{a}{2} \cdot \frac{M''_{r,m}}{P}$
0	0,0	0,0	0,0	+ 0,500	- 0,536	- 0,036	+ 0,0268	± 0
2	+ 0,0625	- 0,0652	- 0,0027	"	- 0,493	+ 0,007	+ 0,0246	+ 0,0342
4	+ 0,1250	- 0,1204	+ 0,0046	"	- 0,381	+ 0,119	+ 0,0191	+ 0,0552
6	+ 0,1875	- 0,1582	+ 0,0293	"	- 0,214	+ 0,286	+ 0,0107	+ 0,0786
8	+ 0,2500	- 0,1719	+ 0,0784	"	+ 0	+ 0,500	0	+ 0,0948

Tabellie 7: Schnittkräfte für Laststellung $\pm P$ in $m = 8$ ($l = 120$ cm, $a \approx 12$ cm).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m =$	$\frac{M_0^0}{PL}$	$\frac{M_{r,m}}{P \cdot \ell}$	$\frac{M_{T,m}}{P \ell}$	$\frac{\beta_m^0}{P}$	$\frac{M'_{r,m}}{P}$ <small>s. Tab. 6b</small>	$\frac{\beta_{I,m}}{P}$	$\frac{M'_{r,m} - k}{P}$ <small>k = 0,017</small>	$(7) \cdot \left(-\frac{a}{2PE}\right) =$ M_T / PL	$\frac{\bar{m}_m}{P} =$ $-\left(\frac{a}{L}\right) \cdot \frac{M''_{T,m}}{P}$
0	± 0	± 0	± 0	0,750	- 0,476	+ 0,274	- 0,493	+ 0,0246	± 0
2	+ 0,09375	- 0,0567	+ 0,0371	"	- 0,408	+ 0,342	- 0,425	+ 0,0214	+ 0,0546
4	+ 0,18750	- 0,0977	+ 0,0898	0,75 / - 0,25	- 0,235	+ 0,515 / - 0,485	- 0,252	+ 0,0126	+ 0,0840
6	+ 0,15625	- 0,1147	+ 0,0416	- 0,250	- 0,043	- 0,293	- 0,060	+ 0,0030	+ 0,0702
8	+ 0,12500	- 0,1106	+ 0,0144	"	+ 0,095	- 0,155	+ 0,078	- 0,0039	+ 0,0414
10	+ 0,09375	- 0,0933	+ 0,0004	"	+ 0,178	- 0,072	+ 0,161	- 0,0081	+ 0,0264
12	+ 0,06250	- 0,0874	- 0,0049	"	+ 0,234	- 0,016	+ 0,217	- 0,0108	+ 0,0168
14	+ 0,03125	- 0,0355	- 0,0043	"	+ 0,273	+ 0,023	+ 0,256	- 0,0128	+ 0,126
16	± 0	± 0	± 0	"	+ 0,289	+ 0,039	+ 0,272	- 0,0136	± 0

Tabelle 8: Schnittkräfte für Laststellung $\pm P$ in $m = 4$ ($\ell = 120$ cm, $a = 12$ cm).

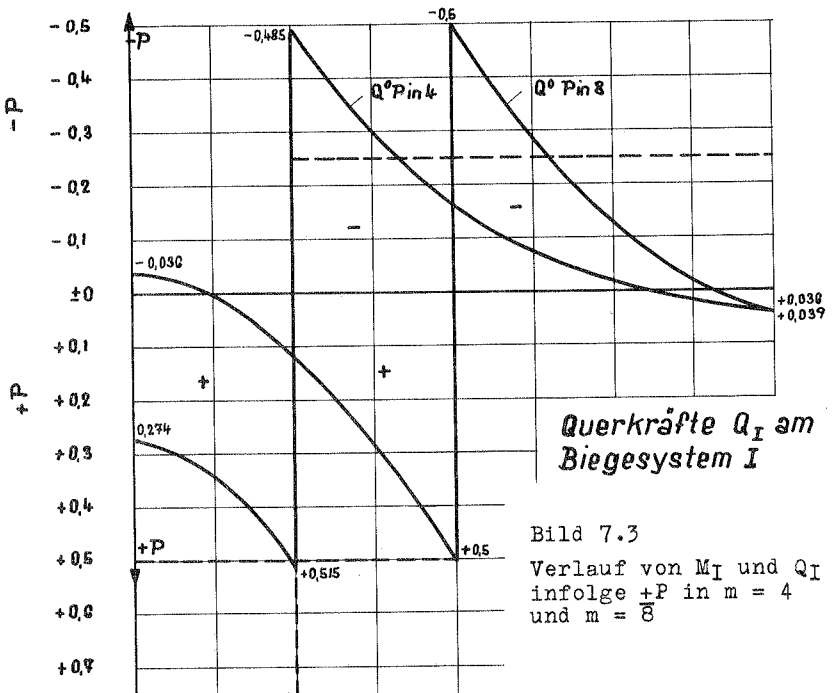
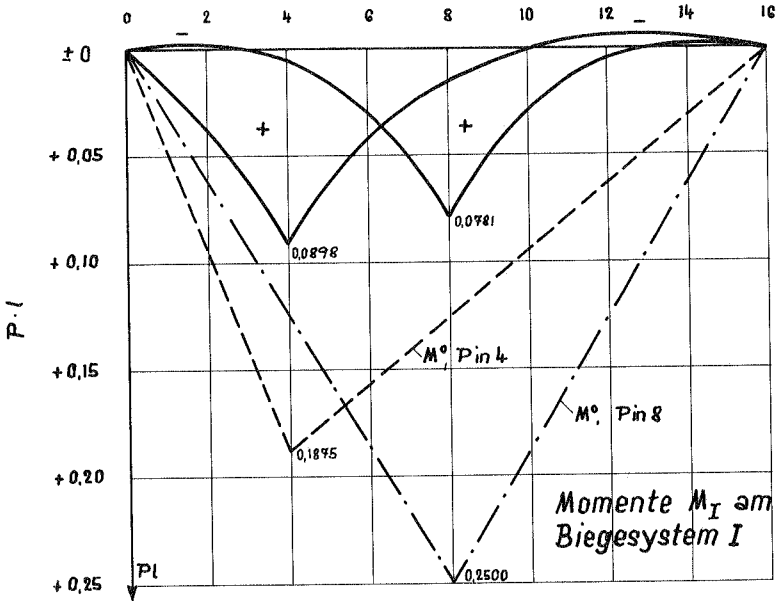


Bild 7.3
Verlauf von M_I und Q_I
infolge $+P$ in $m = 4$
und $m = 8$

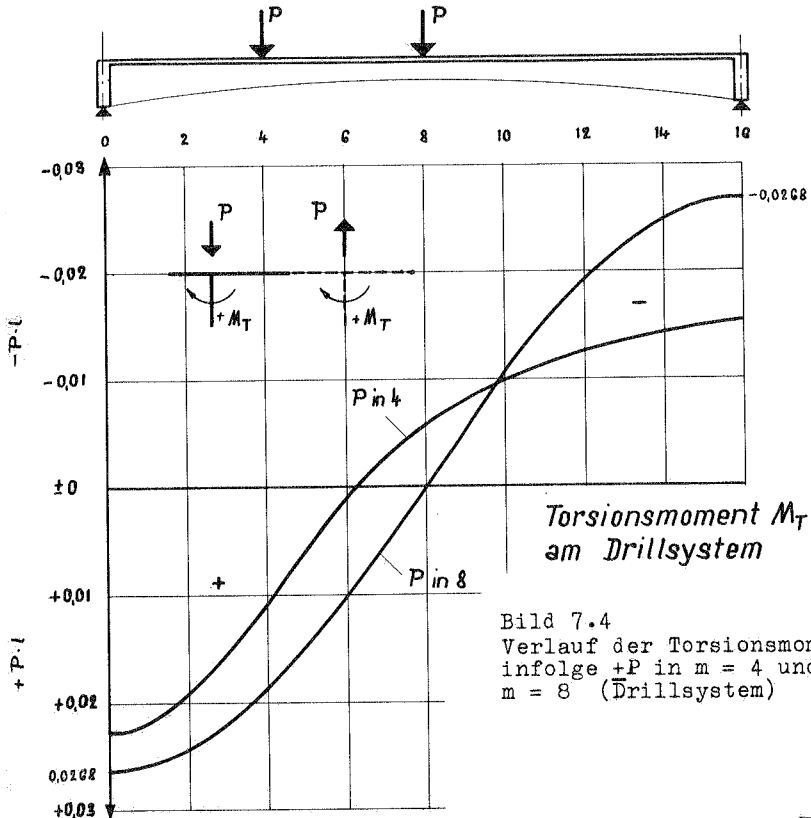


Bild 7.4
Verlauf der Torsionsmomente M_T
infolge $+P$ in $m = 4$ und
 $m = 8$ (Drillsystem)

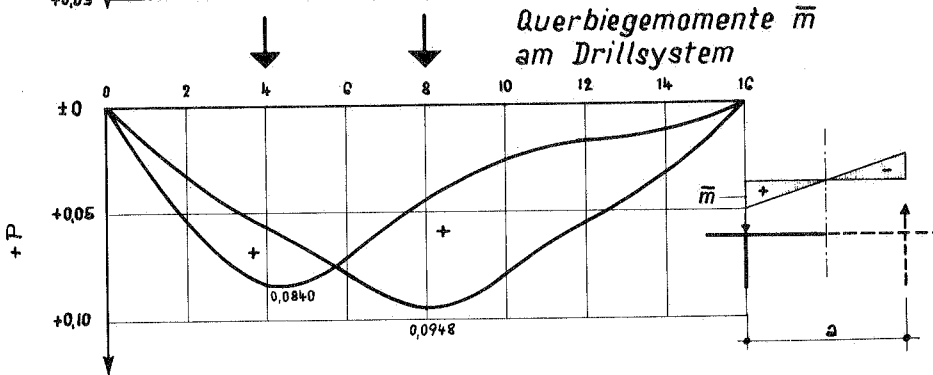


Bild 7.5 Verlauf der Querbiegemomente \bar{m}
 $+P$ in $m = 4$ und $m = 8$ (Drillsystem)

7.2.5 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ gemäss Abschnitt 5.3

Die Spannweite wird wie in 7.22 in 8 gleiche Teilstücke $\Delta l = 0,125l$ unterteilt. Die Verschiebungen werden an den Teilstück-Grenzen $m = 2, 4, 6 \dots 14$ ermittelt.

a) Lotrechte Stegverschiebungen v^I am System I

Die lotrechten Stegverschiebungen bzw. Durchbiegungen des einsteigigen Plattenbalkens (Querschnitt, Bild 7.2c) werden in bekannter Weise ermittelt. Man erhält die in Tabelle 9a zusammengestellten E-fachen Einflusswerte der Durchbiegung in $m = 2$ bis 8

Tabelle 9a: Einflusswerte der lotrechten Stegverschiebungen v^I
(in cm, E-fach)

0	1	2	3	4
$E \cdot v^I$ in $m =$	P = 1 in $m =$			
	2	4	6	8
2	<u>195</u>	351	446	459
4	351	<u>660</u>	856	891
6	446	856	<u>1159</u>	1233
8	459	891	1233	<u>1374</u>
10	395	768	1078	1233
12	279	544	768	891
14	143	279	395	459

b) Lotrechte Verschiebungen v^{II} am System II

Auf e i n e Querschnittshälfte des Drillsystems wirkt das Torsionsmoment infolge Steglasten $\pm P = 1$ in m :

$$M_T^0 = 1 \cdot \frac{a}{2} \quad (\text{Lastmoment})$$

Hierdurch verdreht sich der Querschnitt in den Punkten $z = 2, 4 \dots 14$ um den Winkel $\varphi_{z,m}$ und die Querschnittspunkte O (Bild 5.2) verschieben sich dabei in lotrechter Richtung (ohne Querbiegung der Platte) um:

$$v_{z,m}^{II} = \varphi_{z,m} \cdot \frac{a}{2} .$$

Die Ermittlung der Winkel $\varphi_{z,m}$ ist bei konstantem J_D sehr einfach. Das Querschnittstorsionsmoment $M_{T,m}$ entspricht der Querkraft $Q_{z,m}^0$ eines freiaufliegenden Balkens infolge einer Einzelast $P = 1$ in m :

$$M_{T,m} = \frac{a}{2} \cdot Q_{z,m}^0$$

Der Drehwinkel $\varphi_{z,m}$ ergibt sich daraus zu:

$$\varphi_{z,m} = \int_0^z \frac{M_{T,m}}{G \cdot J_D} \cdot dz = \frac{a}{2G \cdot J_D} \cdot \int_0^z Q_{z,m}^0 \cdot dz$$

oder

$$= \frac{a}{2G \cdot J_D} \cdot M_{z,m}^0$$

wenn mit $M_{z,m}^0$ das Biegemoment des freiaufliegenden Balkens an der Stelle z infolge der Einzellast P in m bezeichnet wird.

Bei veränderlichem J_D sind die Querschnittstorsionsmomente $M_{T,m}$ ausser vom Lastangriffspunkt auch vom Verlauf von J_D abhängig.

Es ist für jede Laststellung noch eine Konstante k zu berücksichtigen, die entsprechend (3.25) und (3.26) berechnet wird. Bei $P = 1$ in m ist

$$k_m = \frac{F_o}{F_u} \quad F_o = \int_0^l \frac{Q_{zm}^0}{J_{Dz}} \quad ; \quad F_u = \int_0^l \frac{dz}{J_{Dz}}$$

und somit

$$M_{T,m} = (Q_{z,m}^0 \cdot \bar{k}_m) \cdot \frac{a}{2}$$

Der Drehwinkel in z infolge $\pm P$ in m folgt dann wieder aus:

$$\varphi_{z,m} = \int_0^z \frac{M_{T,m}}{G \cdot J_{Dz}} \cdot dz$$

Die Ermittlung von $\varphi_{z,m}$ für die Laststellungen P in $m = 2, 4 \dots 8$ wird hier nicht wiedergegeben. Das Ergebnis, nämlich die lotrechten Stegverschiebungen v_{II} in den Punkten $z = m$ infolge $\pm P = 1$ in $m = 2, 4 \dots 8$ ist in Tabelle 9b zusammengestellt.

Tabelle 9b: Einflusswerte der lotrechten Verschiebungen \bar{v}^{II} (Hebung = -)
(in cm, E-fach)

0	1	2	3	4
$E \cdot \bar{v}^{II}$ in m =	P = 1 in m			
	2	4	6	8
2	<u>-100</u>	-88	-72	-54
4	-88	<u>-204</u>	-168	-127
6	-72	-168	<u>-289</u>	-218
8	-54	-127	-218	<u>-323</u>
10	-37	-85	-147	-218
12	-21	-50	-85	-127
14	-9	-21	-37	-54

c) Lotrechte Verschiebungen \bar{v}^{II} am System II

\bar{v}^{II} ist die lotrechte Verschiebung des Querschnittspunktes 0 (Bild 5.2) infolge Querbiegung der Platte, wobei die Einheitslast in Punkt 0 auf die Breite $\Delta \ell$ bezogen ist. Man erhält entsprechend (3.11a) für alle Punkte $m = 2 - 14$

$$\bar{v}^{II} = - \frac{1}{\Delta \ell} \cdot \frac{a^3}{24 \bar{B}_1} \quad (\text{Hebung})$$

Mit $\bar{B}_1 = 0,0187 E$ gemäss Abschnitt 7.21 ist die E-fache Verschiebung:

$$E \cdot \bar{v}^{II} = \frac{12,1^3}{15 \cdot 24 \cdot 0,0187} = - 262 \cdot E[\text{cm}]$$

d) Gleichungs-System zur Ermittlung der Pendelkräfte R_m

Gemäss (5.13) ergeben sich die Werte der Matrix aus der Addition der sich entsprechenden Werte der Tabellen 9a und 9b, wobei der Diagonal-Gliedern noch der Wert $E \cdot \bar{v}^{II}$ hinzuzufügen ist. Die Matrix ist zur Diagonalen symmetrisch. Sie ist auf der folgende Seite vollständig angeschrieben. Die Lastwerte sind die E-fache

Gleichungs-System zur Ermittlung der Pendelkräfte R_m
 für Laststellung $\pm P$ in $m = 4$ und $m = 8$

m	Lastwerte													
	R_2	R_4	R_6	R_8	R_{10}	R_{12}	R_{14}	$\pm P$ in 4	$\pm P$ in 8					
2	<u>557</u>	439	518	513	432	300	152	351	459					
4	439	<u>1126</u>	1024	1018	853	594	300	660	891					
6	518	1024	<u>1710</u>	1451	1225	853	432	856	1233					
8	513	1018	1451	<u>1959</u>	1451	1018	513	891	1374					
10	432	853	1225	1451	<u>1710</u>	1024	518	768	1233					
12	300	594	853	1018	1024	<u>1126</u>	439	544	891					
14	152	300	432	513	518	<u>439</u>	<u>557</u>	279	459					

Lösungen des Systems: $\frac{1}{P}$ -fache Werte R_m

0,1290	0,1980	0,1725	0,1140	0,0643	0,0411	0,0280	$\pm P$ in $m = 4$
0,0791	0,1364	0,1909	0,2354	0,1909	0,1364	0,0791	$\pm P$ in $m = 8$

lotrechten Stegverschiebungen am System I gemäss (5.7). Sie sind also für $\pm P$ in $m = 4$ bzw. $m = 8$ mit den Werten der Tabelle 9a, Spalte 2 und 4, identisch. Die Lösungen des 7-gliedrigen Systems sind unter der Matrix angegeben.

e) Ermittlung der Querkräfte und Momente am System I infolge der Pendelkräfte R_m

Die Querkräfte und Momente infolge der Pendelkräfte R_m in den Punkten $m = 2$ bis 14 sind in den folgenden Tabellen 10a und 10b in bekannter Weise ermittelt. (Spalten 2 und 4).

Die Einzelkräfte R_m ergeben einen polygonalen Momentenverlauf $M_{R,m}$. Denkt man sich die Einzellasten R_m auf die Abschnittslänge $\Delta \ell$ gleichmässig verteilt, so erhält man eine stetige Momentenlinie $M_{r,m}$. Die Ordinaten der stetigen Linie $M_{r,m}$ können unter Voraussetzung einer parabolischen Ausrundung auf die Länge $\Delta \ell$ ermittelt werden aus folgender Beziehung:

$$M_{r,m} = \frac{1}{8} (M_{R,m-1} + 6 M_{R,m} + M_{R,m+1})$$

Diese Werte sind in den Tabellen, Spalte 5 eingetragen.

7.2.6 Vergleich der Ergebnisse der beiden Rechnungswege

Der Verlauf der nach 7.2.5 ermittelten Werte für R_m , Q_m und M_m ist in den Bildern 7.6 und 7.7 dargestellt.

Zum Vergleich ist in diesen Bildern auch der Verlauf von $r_m = -M''_{rm}$, $Q_{rm} = M'_{rm}$ und M_{rm} eingetragen, wie er sich aus der Lösung der Differentialgleichung gemäss 7.2.2 ergibt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Bei den Momenten M_{rm} liegen die Differenzen um 1%, wie aus den Spalten 5, 6 und 7 der Tabellen 11a und 11b zu ersehen ist. Damit wird bestätigt, dass die Vernachlässigung des Korrekturgliedes k (vgl. (3.26)) bei der Ableitung der Differentialgleichung (3.33) praktisch keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

0	1	2	3	4	5	6	7
m -	$\frac{R_m}{P}$	$\frac{Q_{R,m}}{P}$	$\frac{M_{R,m}}{\Delta l}$	$\frac{M_{R,m}}{Pl}$	$\frac{M_{r,m}}{Pl}$	nach Tab. 6 $\frac{M_{r,m}}{Pl}$	Δ 10^{-4}
0	0		0	0	0	0	
2	-0,1290	-0,4641	-0,4641	-0,05801	-0,0560	-0,0567	+ 7
4	-0,1980	-0,3351	-0,7992	-0,09989	-0,0968	-0,0977	+ 9
6	-0,1725	-0,1371	-0,9362	-0,11703	-0,1143	-0,1147	+ 4
8	-0,1140	+0,0354	-0,9008	-0,11260	-0,1108	-0,1106	- 2
10	-0,0643	+0,1494	-0,7514	-0,09392	-0,0929	-0,0933	+ 4
12	-0,0411	+0,2137	-0,5376	-0,06721	-0,0666	-0,0674	+ 8
14	-0,0280	+0,2548	-0,2828	-0,03535	-0,0349	-0,0355	+ 6
16	0	+0,2828	0	0		0	

Tabelle 10a: Querkräfte und Momente infolge der
Pendelkräfte R_m , $\pm P$ in $m = 4$

m -	$\frac{R_m}{P}$	$\frac{Q_{R,m}}{P}$	$\frac{M_{R,m}}{\Delta l}$	$\frac{M_{R,m}}{Pl}$	$\frac{M_{r,m}}{Pl}$	nach Tab. 7 $\frac{M_{r,m}}{Pl}$	Δ 10^{-4}
0	0		0	0	0	0	
2	-0,0791	-0,5241	-0,5241	-0,0655	-0,0643	-0,0651	+ 8
4	-0,1364	-0,4450	-0,9691	-0,1211	-0,1190	-0,1204	+ 14
6	-0,1909	-0,3086	-1,2777	-0,1597	-0,1567	-0,1582	+ 15
8	-0,2354	-0,1177	-1,3954	-0,1744	-0,1707	-0,1719	+ 12

Tabelle 10b: Querkräfte und Momente infolge der
Pendelkräfte R_m , $\pm P$ in $m = 8$

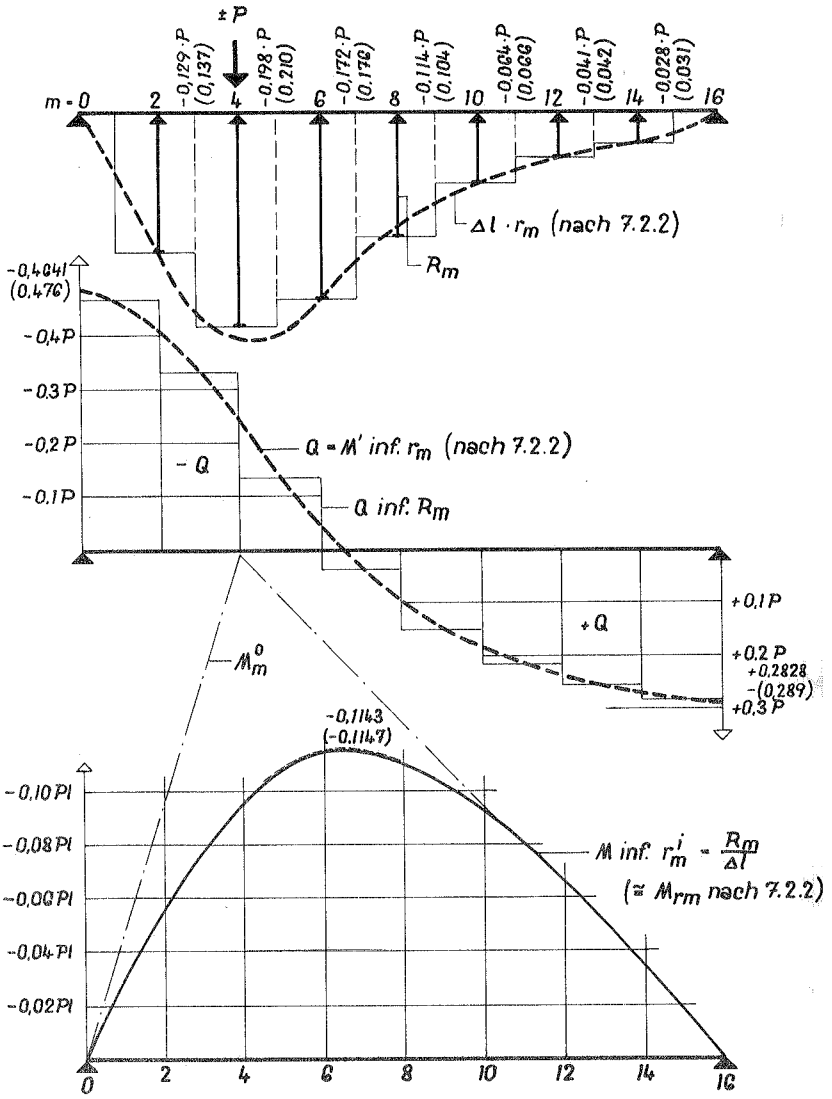


Bild 7.6 Verlauf der Pendelkräfte R_m bzw. r_m und der zugehörigen Querkräfte und Momente nach 7.2.2 und 7.2.5
Belastung $\pm P$ in $m = 4$

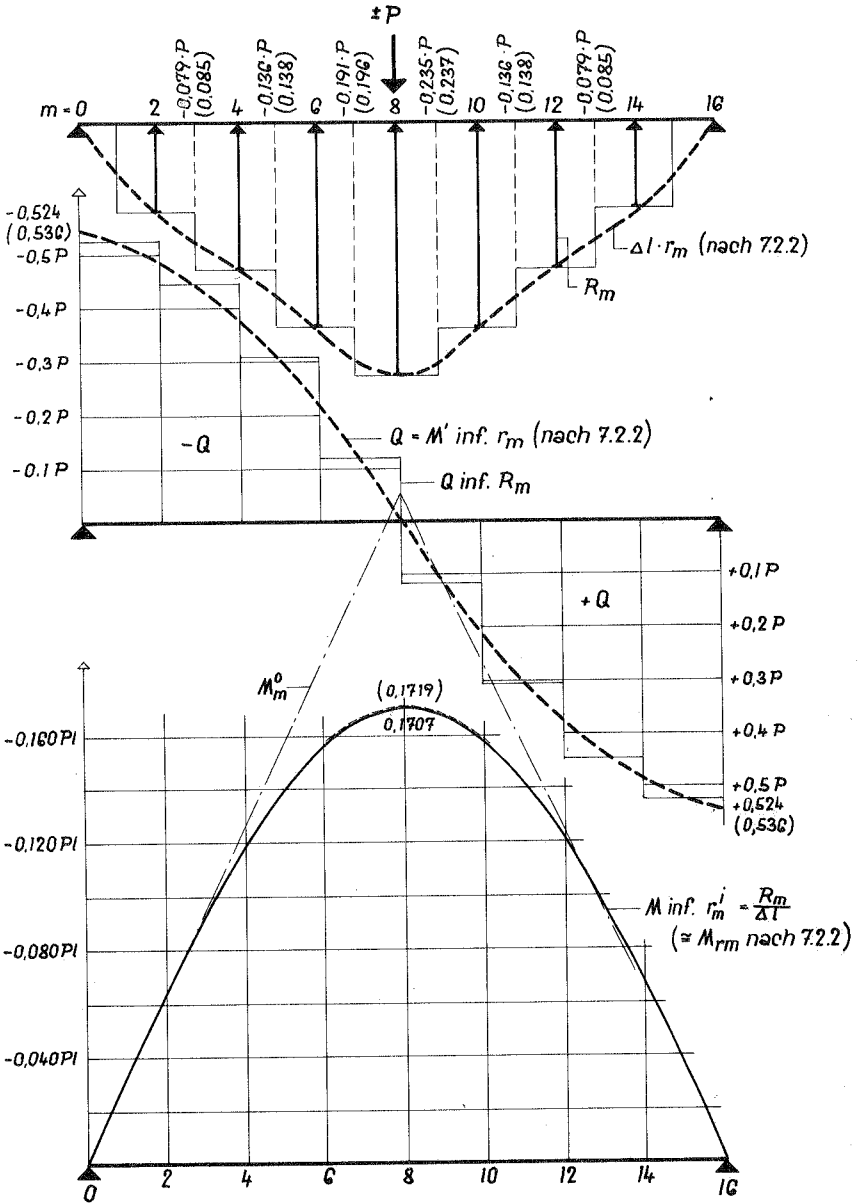


Bild 7.7 Verlauf der Pendelkräfte R_m bzw. r_m und der zugehörigen Querkräfte und Momente nach 7.2.2 und 7.2.5. $\pm P$ in $m = 8$

7.2.7 Vergleich der Rechnung mit der Messung

a) Längsspannungen $\sigma_{\textcircled{2}}^*$ und $\sigma_{\textcircled{a}}^*$

Es werden die Längsspannungen für U n t e r k a n t e S t e g (Achse), Punkt $\textcircled{2}$, und A u s s e n k a n t e P l a t t e (Achse), Punkt \textcircled{a} , für die Schnitte $m = 2$ bis 14 ermittelt (vgl. Bild 2.10).

Man erhält sie gemäss (2.29a):

$$\sigma_{2, \textcircled{2}} = \sigma_{\textcircled{2}}^* = M_I / W_{\textcircled{2}}^*$$

bzw. gemäss (2.29b)

$$\sigma_{2, \textcircled{a}} = \sigma_{\textcircled{a}}^* = \frac{b}{a} \cdot \sigma_{\textcircled{1}}^* = \frac{b}{a} \cdot M_I / W_{\textcircled{1}}^*$$

Der Fusszeiger 2 zur Kennzeichnung der Wölbkrafttorsion wird bei σ weiterhin durch den Kopfzeiger * ersetzt.

Die Längsspannungen sind in den folgenden Tabellen 11a bis 11d für $\pm P$ in $m = 4$ und $m = 8$ zusammengestellt; dabei ist M_m^0 den Tabellen 7 und 8, Spalte 1, $M_{r,m}$ den Tabellen 10a und 10b, Spalte 5, und $W_{\textcircled{2}}^*$ bzw. $W_{\textcircled{1}}^*$ der Tabelle 1, Spalten 9 und 10, entnommen.

Die Spannweite ist mit $\ell = 120$ cm, die Belastung mit $P = \pm 10$ kg eingesetzt.

Der Spannungsverlauf ist in den Bildern 7.8 bis 7.11 dargestellt, wo auch die gemessenen Spannungswerte eingetragen sind. Die Übereinstimmung mit der Messung ist sehr gut, auch im Bereich der kleinen Ordinaten. Lediglich am Lastpunkt sind die für $\sigma_{\textcircled{2}}^*$ gemessenen Werte grösser - bzw. die für $\sigma_{\textcircled{a}}^*$ gemessenen Werte kleiner - was auf die in der Rechnung nicht berücksichtigte Verringerung der mitwirkenden Plattenbreite zurückzuführen ist. Hierauf soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen werden.

0	1	2	3	4	5	6	7
$m =$	$\frac{M_{0,m}}{P \cdot l}$	$+$ $\frac{M_{r,m}}{P \cdot l}$	$=$ $\frac{M_{I,m}}{P \cdot l}$	$M_{I,m}$	$W^*_{(2)}$	$\sigma^*_{(2)}$	Messung $\sigma^*_{(2)}$
2	0,09375	0,0560	+ 0,0378	+ 45,36	17,80	(2,49) + 2,54	+ 2,29
4	0,18750	- 0,0968	+ 0,0907	+ 108,84	11,62	(9,27) + 9,36	+ 10,08
6	0,15625	- 0,1143	+ 0,0419	+ 50,28	8,44	(5,91) + 5,95	+ 5,91
8	0,12500	- 0,1108	+ 0,0142	+ 17,04	7,53	(2,29) + 2,26	+ 2,29
10	0,09375	- 0,0929	+ 0,0009	+ 1,08	8,44	(0,07) + 0,13	+ 0,18
12	0,06250	- 0,0666	- 0,0041	- 4,92	11,62	(0,50) - 0,42	- 0,50
14	0,03125	- 0,0349	- 0,0037	- 4,44	17,80	(0,18) - 0,25	- 0,27

Tabelle 11a: Längsspannungen $\sigma^*_{(2)}$
 infolge $\underline{+P}$ in $m = 4$. $\ell = 120$ cm; $P = 10$ kg.

$m =$	$\frac{M_{0,m}}{P \cdot l}$	$+$ $\frac{M_{r,m}}{P \cdot l}$	$=$ $\frac{M_{I,m}}{P \cdot l}$	$M_{I,m}$	$W^*_{(2)}$	$\sigma^*_{(2)}$	Messung $\sigma^*_{(2)}$
2	0,0625	0,0643	- 0,0018	- 2,16	17,80	(0,17) - 0,12	- 0,15
4	0,1250	0,1190	+ 0,0060	+ 7,20	11,62	(0,48) + 0,62	+ 0,45
6	0,1875	0,1567	+ 0,0308	+ 36,96	8,44	(4,16) + 4,37	+ 4,28
8	0,2500	0,1707	+ 0,0793	+ 95,16	7,53	(12,44) + 12,65	+ 13,84

Tabelle 11b: Längsspannungen $\sigma^*_{(2)}$
 infolge $\underline{+P}$ in $m = 8$

(Klammerwerte ergeben sich bei Berücksichtigung von $M_{r,m}$ aus Tab.7 und 8).

0	1	2	3	4	5
$m =$	$M_{I,m}$ s. Tab. 11a	$W_{\textcircled{1}}^*$ s. Tab. 1	$\sigma_{\textcircled{1}}^*$	$\sigma_{\textcircled{2}}^* =$ $\sigma_{\textcircled{1}}^* \cdot \frac{b}{a}$	Messung $\sigma_{\textcircled{2}}^*$
2	+ 45,36	40,3	- 1,12	- 2,22	- 2,29
4	108,84	30,2	- 3,61	- 7,15	- 4,66 ^{x)}
6	50,28	24,6	- 2,04	- 4,04	- 3,76
8	17,04	22,8	- 0,75	- 1,48	- 1,50
10	+ 1,08	24,6	- 0,04	- 0,08	- 0,17
12	- 4,92	30,2	- 0,16	+ 0,32	+ 0,27
14	- 4,44	40,3	- 0,11	+ 0,22	+ 0,22

Tabelle 11c: Längsspannungen $\sigma_{\textcircled{a}}^*$

inf. +P in $m = 4$; $l = 120$ cm, $P = 10$ kg
 $\frac{b}{a} = \frac{24,0}{12,1} = 1,98$

0	1	2	3	4	5
$m =$	$M_{I,m}$ s. Tab. 11b	$W_{\textcircled{1}}^*$ s. Tab. 1	$\sigma_{\textcircled{1}}^*$	$\sigma_{\textcircled{2}}^*$	Messung $\sigma_{\textcircled{2}}^*$
2	- 2,16	40,3	+ 0,05	+ 0,10	+ 0,05
4	+ 7,20	30,2	- 0,24	- 0,48	- 0,63
6	36,96	24,6	- 1,50	- 2,97	- 3,06
8	95,16	22,8	- 4,17	- 8,25	- 5,38 ^{x)}

Tabelle 11d: Längsspannungen $\sigma_{\textcircled{a}}^*$

inf. +P in $m = 8$; $l = 120$ cm, $P = 10$ kg

x) wesentlich kleinere Werte als Rechnung, da Platte nicht voll mitwirkt.

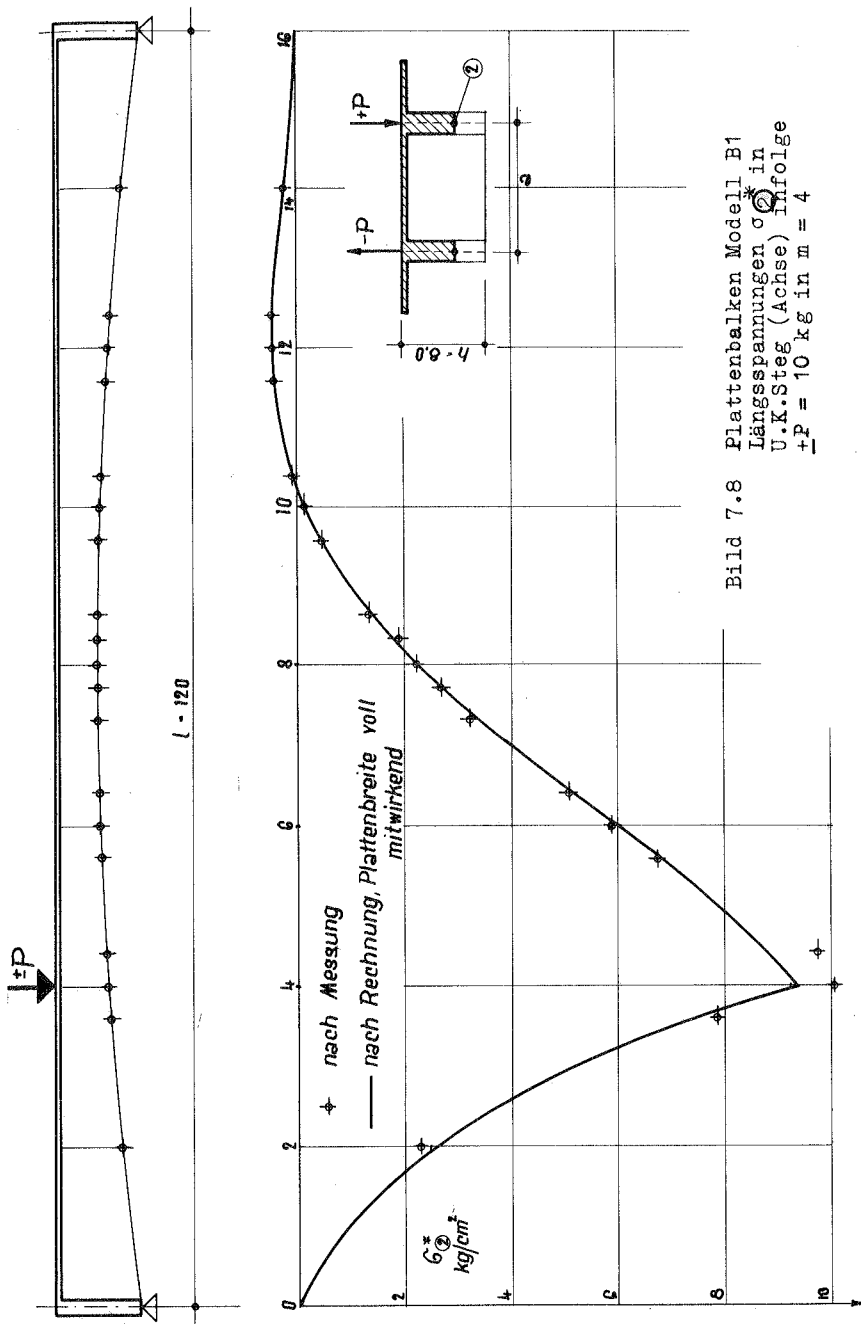


Bild 7.8 Plattenbalken Modell B1
 Längsspannungen σ_x in
 U.K.Steg (Achse) Infolge
 $+P = 10 \text{ kg}$ in $m = 4$

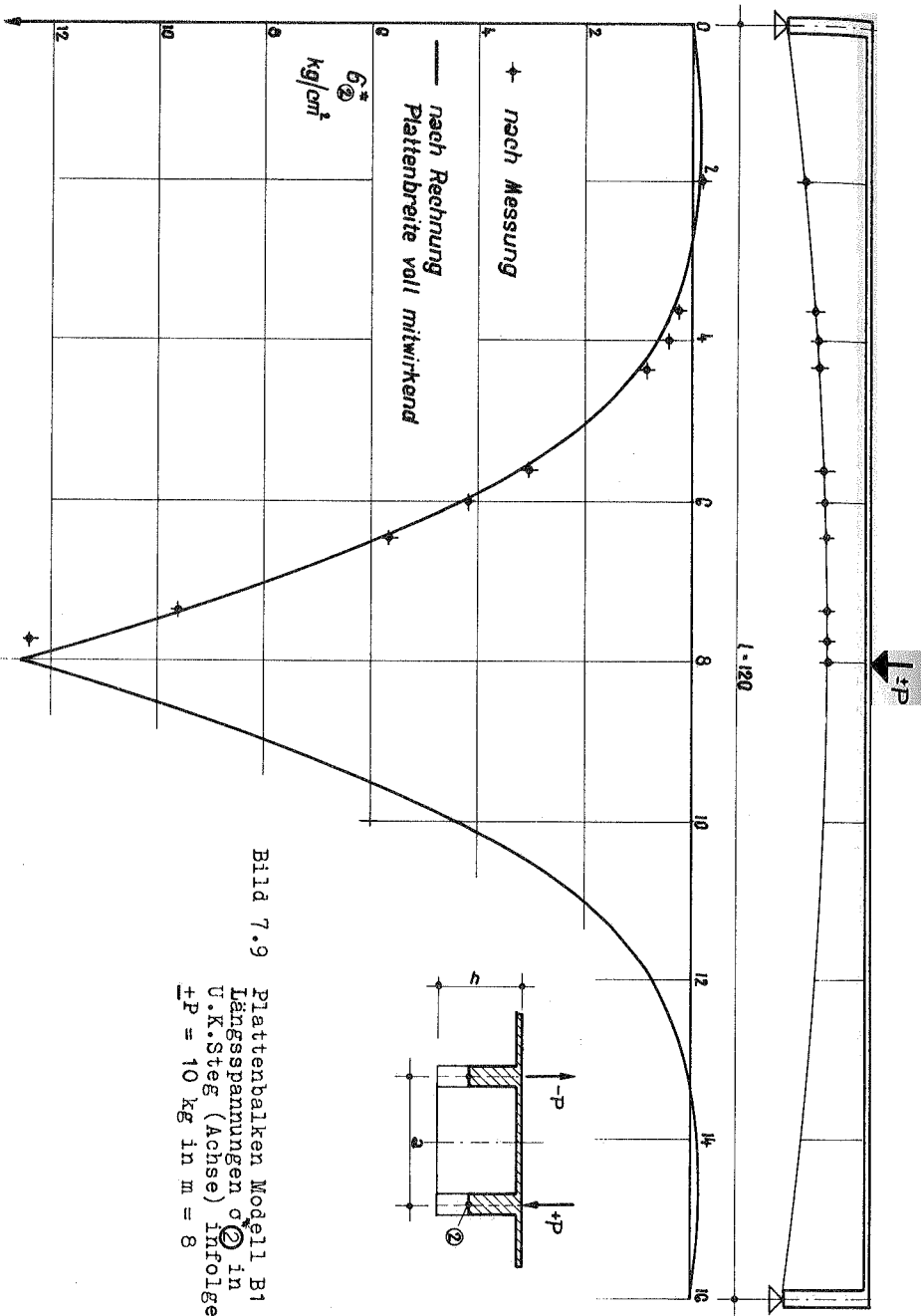


Bild 7.9 Plattenbalken Modell B1
 Längsspannungen σ_x in
 U.K.Steif (Achse) infolge
 $+P = 10 \text{ kg}$ in $m = 8$

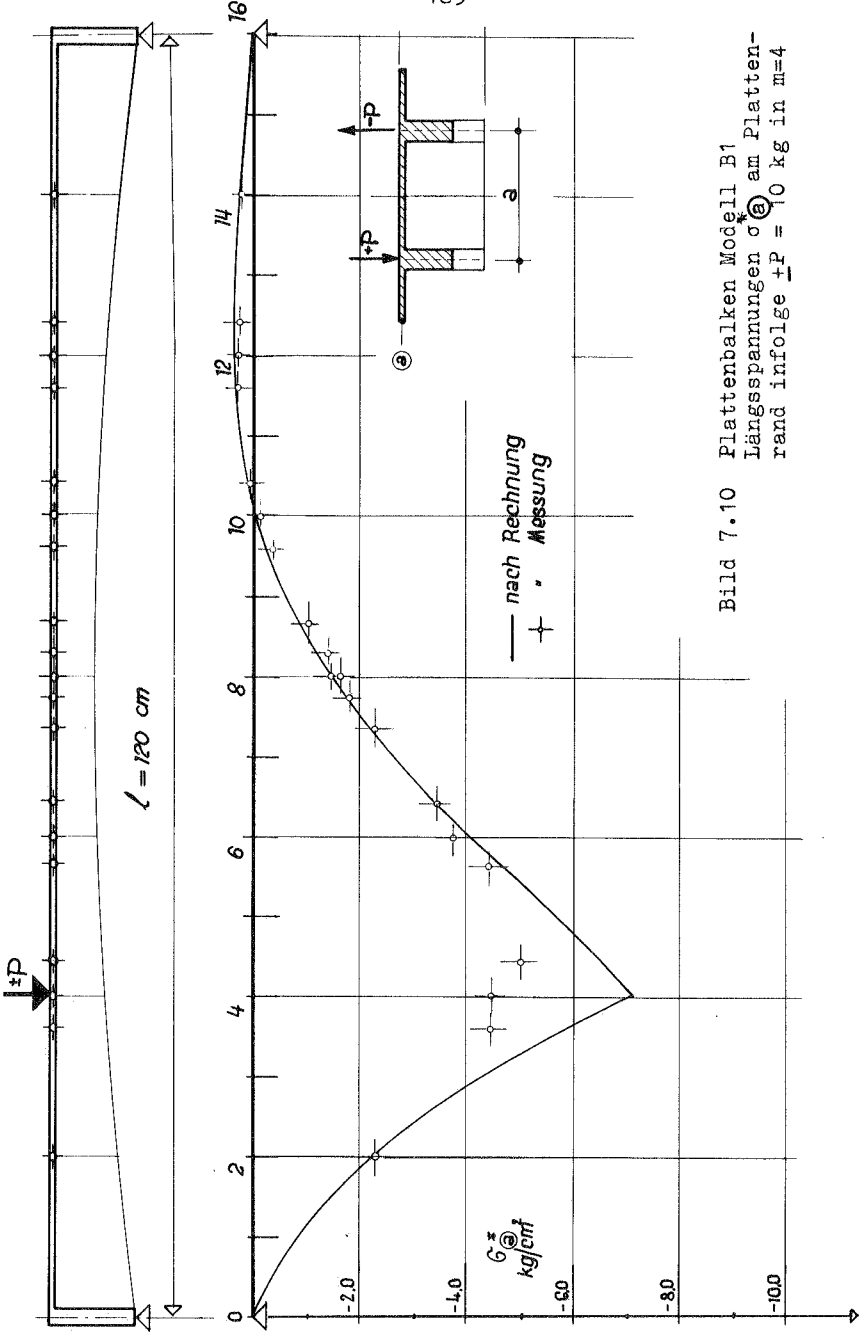


Bild 7.10 Plattenbalken Modell B1
 Längsspannungen σ_x am Platten-
 rand infolge $+P = 10 \text{ kg}$ in $m=4$

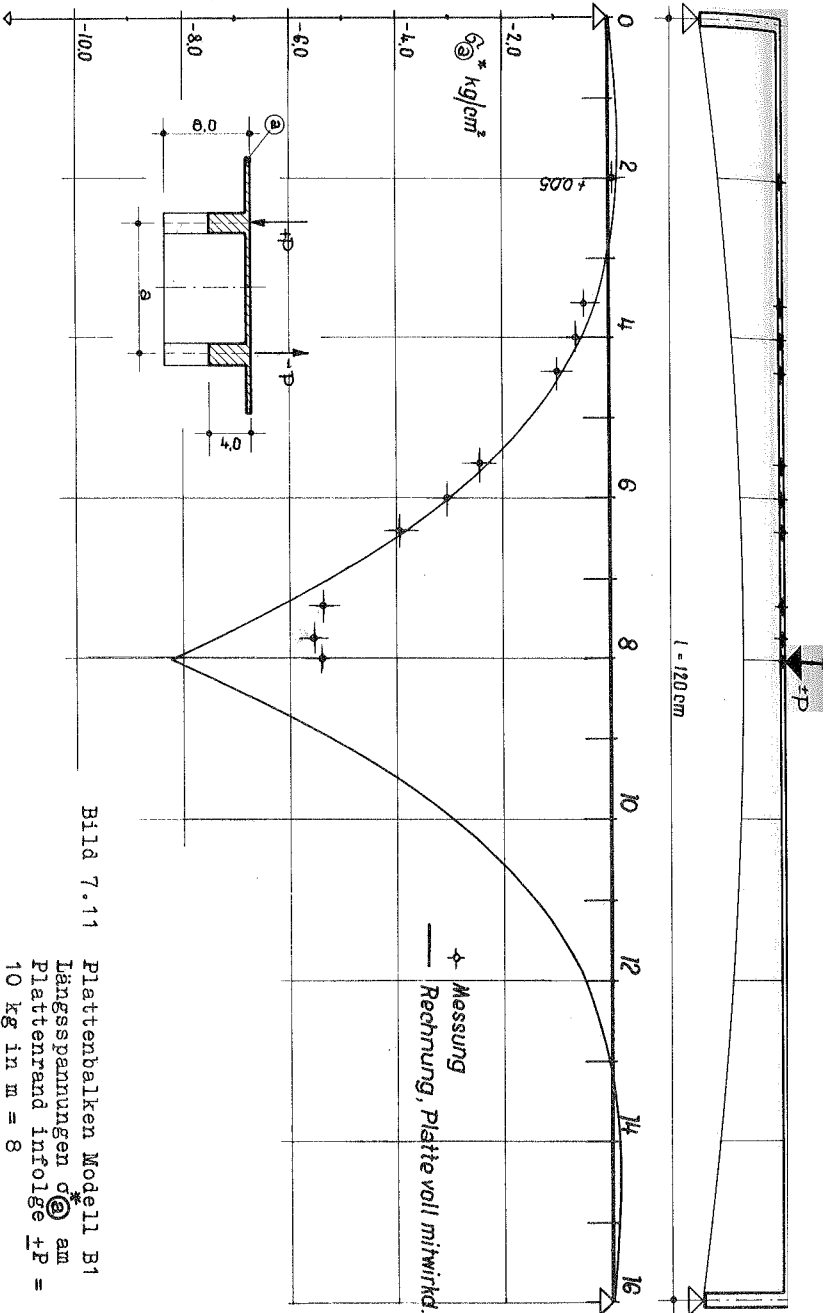


Bild 7.11

Plattenbalken Modell B1
 Längsspannungen σ_x am
 Plattenrand infolge P =
 10 kg in m = 8

b) Schubspannungen

Es werden die Schubspannungen im Steg, und zwar für einen Schnitt in $y = 12$ mm Abstand von Unterkante Platte ermittelt. Der Schnitt liegt ungefähr in der Höhe des Längsspannungs-Nullpunktes. In dieser Höhe wurden auch die Dehnungen an der Steg-Aussen- bzw. Innenfläche in 3 Richtungen gemessen (Messpunkte (13) und (14)).

Schubspannungen τ_1 infolge freier Torsion gemäss (2.34)

$$\tau_1 = \Psi_1 \cdot \frac{M_T}{J_D} \cdot d$$

Für Ψ_1 gilt genügend genau (vgl. z.B. [23]):

$$\Psi_1 = 1 - \frac{0,65}{1+n^3}; \quad n = h/d$$

Die Ermittlung von τ_1 für $\pm P$ in $m = 8$ erfolgt in Tabelle 12a. Die Werte J_D sind Tabelle 2 entnommen. Die Torsionsmomente M_T sind in Tabelle 7 und 8 (Abschnitt 7.2.3) angegeben.

Schubspannung τ_2 infolge Wölbkrafttorsion gemäss (2.30)
und (2.30a)

$$\tau_2 = Q_I \cdot \frac{S^*}{J^*} \cdot \frac{1}{d}$$

Ermittlung nach Tabelle 12b. Die Querkraft Q_I folgt aus Tabelle 7 und 8.

Das statische Moment S^* der unterhalb des horizontalen Stegschnittes liegenden Querschnittsfläche in Bezug auf die Schwerachse ist mit $s = h-t-y$ (vgl. Bild 2.13):

$$S^* = s \cdot d \left(e_u^* - \frac{s}{2} \right) \quad \text{vgl. Spalte 3, 4 und 5, Tabelle 12b}$$

J^* siehe Tabelle 1, Spalte 8.

Tabelle 12a: Ermittlung von τ_1 (freie Torsion) für Stegschnitt
 $y = 12$ mm, Punkt (13) und (14)
 $\pm P = 10$ kg in $m = 8$; $\ell = 120$ cm; $a = 12,1$ cm

0	1	2	3	4	5
m	M_T/Pl s.Tab.7.7	M_T cmkg	J_D s.Tab.2 cm ⁴	$\Psi_1 \cdot d$	$\tau_1 =$ (2)·(4) : (3) kg/cm ²
0	+0,0268	32,2	16,04	1,89	$\pm 3,79$
2	+0,0246	29,5	12,03	1,87	$\pm 4,58$
4	+0,0191	22,9	9,17	1,84	$\pm 4,58$
6	+0,0107	12,8	7,46	1,80	$\pm 3,09$
8	± 0	0	6,85	1,78	0

Tabelle 12b: Ermittlung von τ_2 (Wölbkrafttorsion) für Steg-
schnitt $y = 12$ mm, Pkt. (13) u. (14)
 $\pm P = 10$ kg in $m = 8$; $\ell = 120$ cm; $a = 12,1$ cm

0	1	2	3	4	5	6
	Q_I Tab.7.6	$s=h-t-1,20$ cm	$e_u^* - \frac{s}{2}$	$\frac{S}{d}^* =$ $s(e_u^* - \frac{s}{2})$	J^* cm ⁴	$\tau_2 =$ (1)·(4) : (5) kg/cm ²
0	-0,36	6,315	1,993	12,58	146,99	-0,02
2	+0,07	4,565	1,886	8,61	74,28	+0,01
4	+1,19	3,315	1,777	5,89	39,98	+0,18
6	+2,86	2,565	1,699	4,36	25,19	+0,50
8	+5,00	2,315	1,667	3,86	21,27	+0,91

Die Schubspannungen τ in Aussenkante bzw. Innenkante Steg in Höhe $y = 12$ cm unter Unterkante Platte (Punkte (13) und (14)) ergeben sich aus der Summe der Schubspannungen τ_1 und τ_2 , wobei für Aussenkante Steg das obere, für Innenkante Steg das untere Vorzeichen von τ_1 zu berücksichtigen ist.

Sie sind in der folgenden Tabelle 12c zusammengestellt. In den Spalten 5 und 6 sind die gemessenen Werte angegeben. Bild 7.12 zeigt den rechnerischen Verlauf der Schubspannungen und die Meßwerte.

Tabelle 12c: Schubspannungen $\tau = \tau_1 + \tau_2$ in Punkt ⑬ und ⑭ infolge $\pm P$ in $m = 8$

0	1	2	3	4	5	6
m	$\pm \tau_1$ Tab.12a	τ_2 Tab.12b	$\tau_{AK} =$ $+\tau_1 + \tau_2$ Pkt. ⑬	$\tau_{IK} =$ $-\tau_1 + \tau_2$ Pkt. ⑭	Messung Pkt. ⑬	Messung Pkt. ⑭
0	3,79	-0,02	+3,77	-3,81	-	-
2	4,58	+0,01	+4,59	-4,57	+4,48	-4,52
4	4,58	+0,18	+4,76	-4,40	+4,75	-4,45
6	3,09	+0,50	+3,59	-2,59	+3,93	-2,69
8	0	+0,91	+0,91	+0,91	-	-

In entsprechender Weise sind die Schubspannungen in den Punkten ⑬ und ⑭ infolge der Belastung $\pm P$ in $m = 4$ ermittelt (Tabellen 13a, b und c). Das Ergebnis der Rechnung und die entsprechenden Meßwerte zeigt Bild 7.13

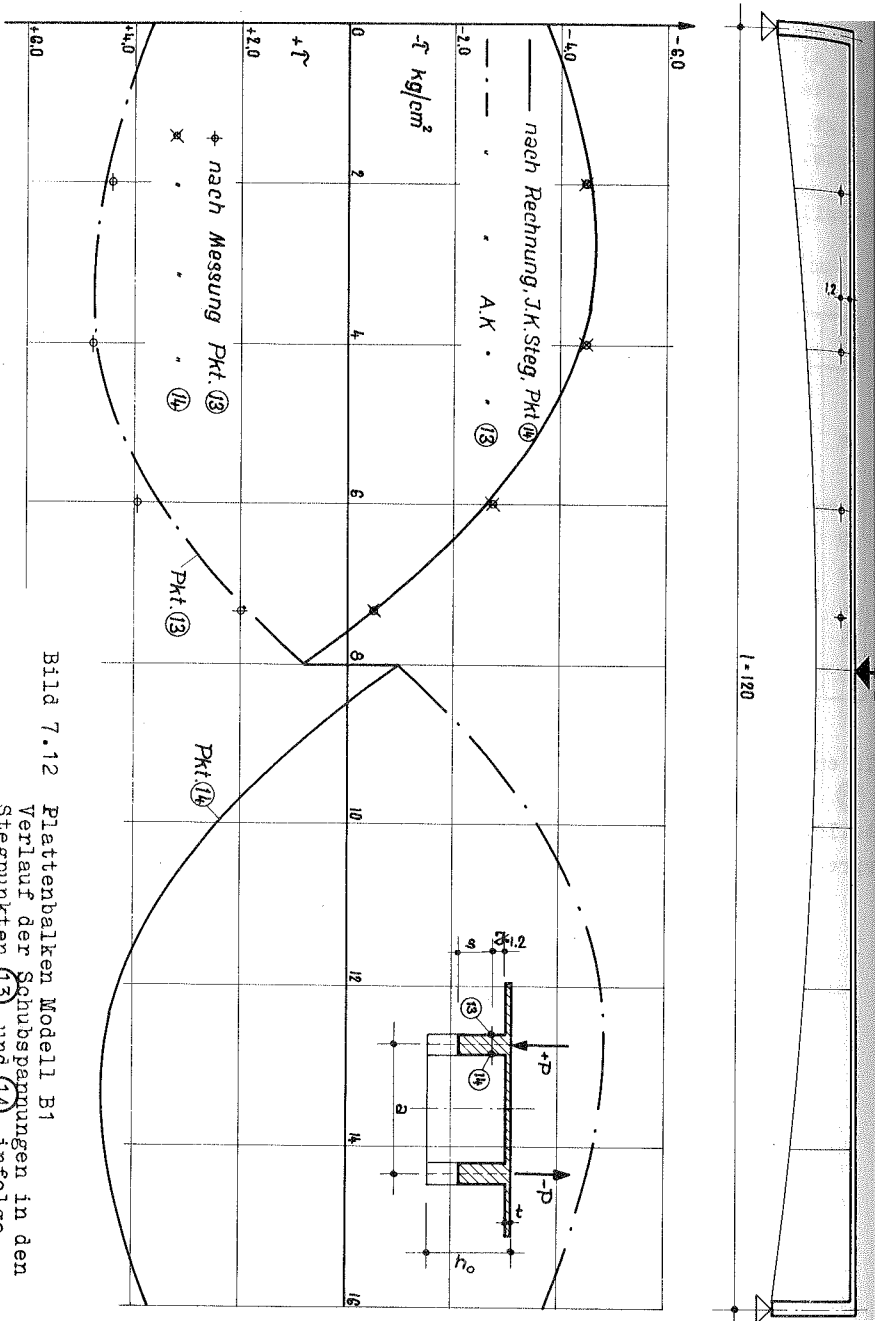


Bild 7.12 Plattenbalken Modell B1

Verlauf der Schubspannungen in den Stegpunkten (13) und (14) infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m = 8$

Tabelle 13a: Ermittlung von τ_1 (freie Torsion) für Stegschnitt

$y = 12 \text{ mm}$ infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m = 4$, Pkt. (13) u. (14)

0	1	2	3	4	5
m	$M_T/P1$ s.Tab.8.8	M_T cmkg	J_D s.Tab.2	$\Psi_1 \cdot d$	$\tau_1 = (2) \cdot (4) : (3)$
0	+0,0246	+29,5	16,4	1,89	$\pm 3,40$
2	+0,0214	+25,7	12,3	1,87	$\pm 3,91$
4	+0,0126	+15,1	9,17	1,84	$\pm 3,03$
6	+0,0030	+ 3,60	7,46	1,80	$\pm 0,87$
8	-0,0039	- 4,58	6,85	1,78	$\mp 1,21$
10	-0,0081	- 9,72	7,46	1,80	$\mp 2,34$
12	-0,0108	-12,96	9,17	1,84	$\mp 2,60$
14	-0,0128	-15,4	12,3	1,87	$\mp 2,34$
16	-0,0136	-16,3	16,4	1,89	$\mp 1,88$

Tabelle 13b: Ermittlung von τ_2 (Wölbkrafttorsion) Pkt. (13) u. (14)

0	1	2	3	4	5	6
	Q_I Tab.8.6	s	$e_u^* / 2$	$\frac{S^*}{d}$	J^* cm ⁴	$\tau_2 = (1) \cdot (4) : (5)$ kg/cm ²
0	+2,74			12,58	146,99	+0,23
2	+3,42			8,61	74,28	+0,40
4	+5,15 -4,85	wie Tabelle 12b	wie Tabelle 12b	5,89	39,98	+0,76
6	-2,93			4,36	25,19	-0,57
8	-1,55			3,86	21,27	-0,29
10	-0,72			4,36	25,19	-0,12
12	-0,16			5,89	39,98	-0,02
14	+0,23			8,61	74,28	+0,02
16	+0,39			12,58	146,99	+0,03

Tabelle 13c: Schubspannungen $\tau = \tau_1 + \tau_2$ in Punkt ⑬ und ⑭ infolge $\pm P$ in $m = 4$

0	1	2	3	4	5	6
m	$\pm \tau_1$ Tab.13a	τ_2 Tab.13b	$\tau_{AK} =$ $+\tau_1 + \tau_2$ Pkt. ⑬	$\tau_{IK} =$ $-\tau_1 + \tau_2$ Pkt. ⑭	Messung Pkt. ⑬	Messung Pkt. ⑭
0	$\pm 3,40$	$+0,23$	$+3,63$	$-3,17$	-	-
2	$\pm 3,91$	$+0,40$	$+4,31$	$-3,51$	$+4,38$	$-3,45$
4	$\pm 3,03$	$+0,76$ $-0,71$	$+3,79$ $+2,32$	$-2,27$ $-3,74$	$+4,21$	$-2,45$
6	$\pm 0,87$	$-0,57$	$+0,30$	$-1,44$	$+0,37$	$-1,25$
8	$\mp 1,21$	$-0,29$	$-1,50$	$+0,92$	-	-
10	$\mp 2,34$	$-0,12$	$-2,46$	$+2,22$	$-2,58$	$+2,20$
12	$\mp 2,60$	$-0,02$	$-2,62$	$+2,58$	$-2,56$	$+2,54$
14	$\mp 2,34$	$+0,02$	$-2,32$	$+2,36$	$-2,29$	$+2,42$
16	$\mp 1,88$	$+0,03$	$-1,85$	$+1,92$	-	-

c) Lotrechte Stegverschiebungen

Mit den Einflusswerten der lotrechten Stegverschiebungen v^I erhält man z.B. für den Punkt m infolge $\pm P$ in 4 :

$$v_{m,4} = (v_{m,4}^I - v_{m,2}^I \cdot R_{2,4} - v_{m,4}^I R_{4,4} - \dots - v_{m,14}^I \cdot R_{14,4}) \cdot \frac{P}{E}$$

Die Einflusswerte $E \cdot v^I$ sind in Tabelle 9a, die Pendelkräfte R in 7.2.5d angegeben. In der Tabelle 14 sind die Verschiebungen infolge P in $m = 4$ bzw. $m = 8$ zusammengestellt. Die Biegelinien $v_{m,4}$ und $v_{m,8}$ zeigt Bild 7.14. Hier sind auch die gemessenen Werte eingetragen. Auch hier stimmen Rechnung und Messung sehr gut überein. Die gemessenen Werte sind im Lastbereich etwas grösser als die gerechneten, was auch so sein muss, da in der Rechnung die Verringerung der mitwirkenden Plattenbreite an der Laststelle nicht berücksichtigt ist.

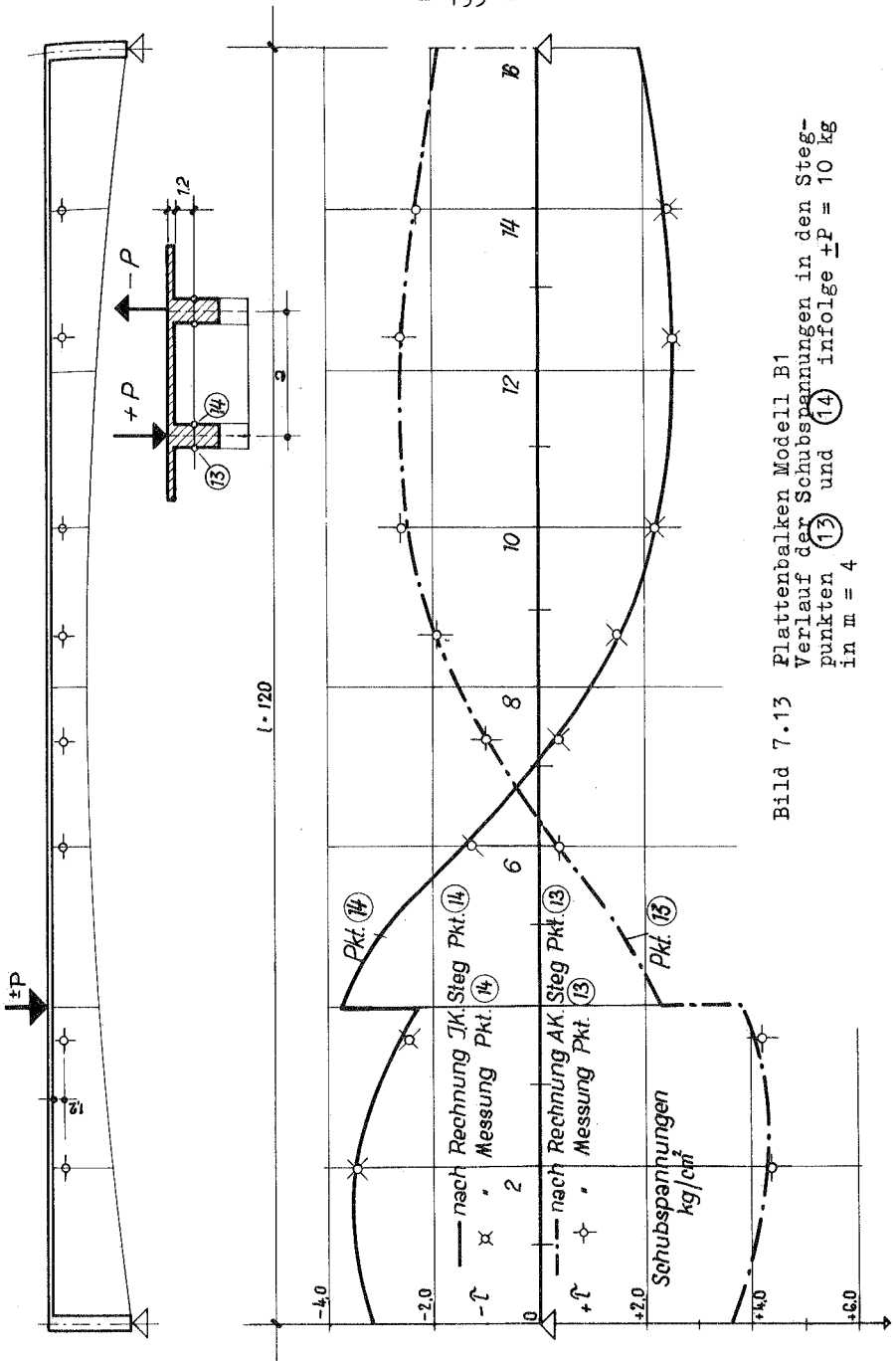


Bild 7.13 Plattenbalken Modell B1
 Verlauf der Schubspannungen in den Steg-
 punkten 13 und 14 infolge $\pm P = 10$ kg
 in $m = 4$

Der Unterschied ist geringer als bei den Spannungen in Bild 7.8 und 7.9, da die örtliche Verringerung des mittragenden Querschnitts an der Laststelle sich auf die Durchbiegungen weniger auswirkt als auf die Spannungen.

Tabelle 14: Lotrechte Stegverschiebungen in den Punkten $m = 2$ bis

14 infolge $\pm P = 10$ kg in $m = 4$ bzw. 8;

Spannweite $\ell = 120$ cm; $E = 35\,600$ kg/cm², v in mm. 10^{-3}

0	1	2	3	4
$m =$	v infolge $\pm P$ in 4		v infolge $\pm P$ in 8	
	Rechnung	Messung ^{x)}	Rechnung	Messung ^{x)}
2	242	240	218	215
4	436	436	441	450
6	496	505	639	640
8	441	430	742	750
10	327	330	639	650
12	208	210	441	440
14	102	100	218	220

x) Da die Abszissen der Meßstellen nicht mit denen der Rechnung zusammenfallen, sind in den Spalten 2 und 4 die Mittel aus den Meßwerten rechts und links der Punkte $m = 2 - 14$ angegeben.

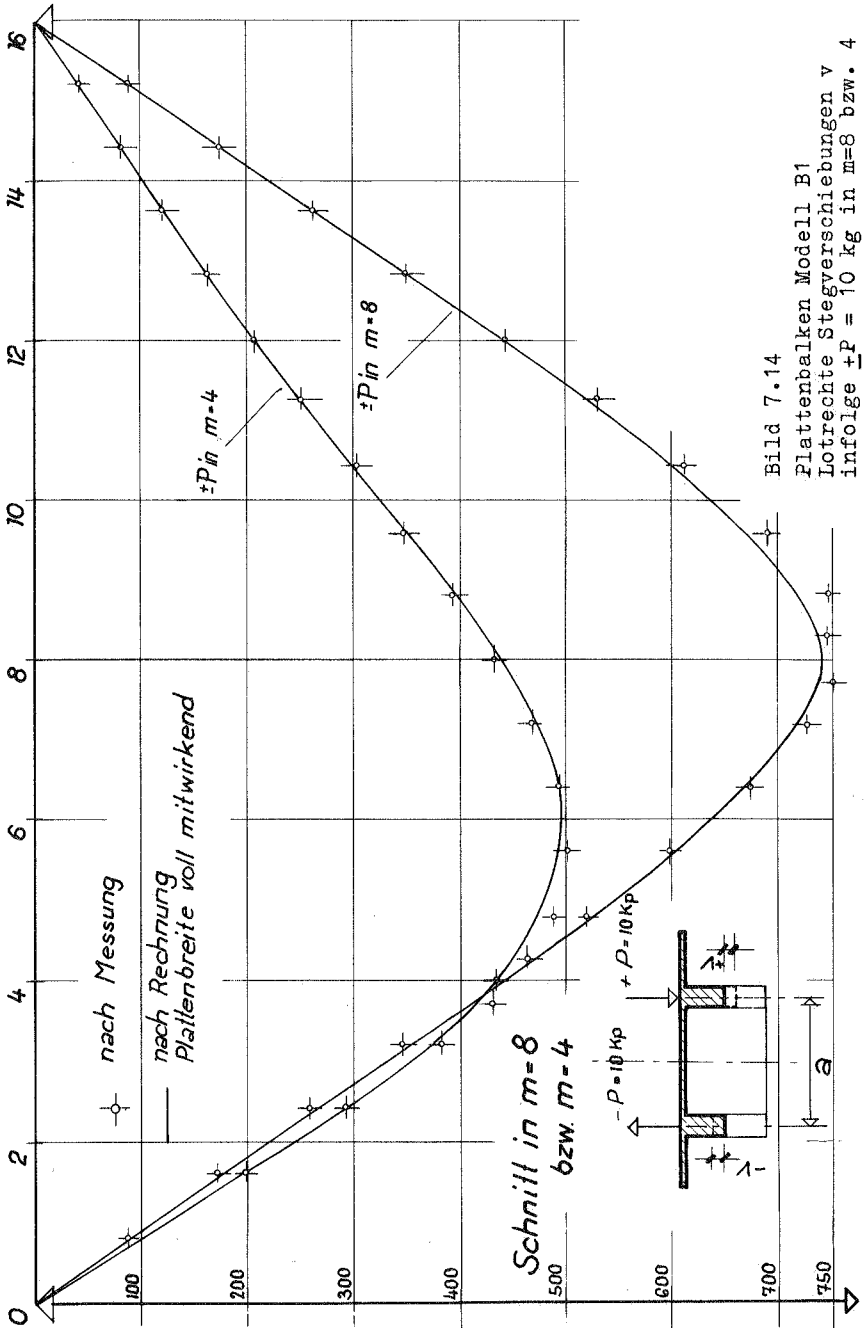


Bild 7.14
Plattenbalken Modell B1
Lotrechte Stegverschiebungen v
infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m=8$ bzw. 4

7.3 Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt und Querträgern in den Viertelpunkten (Modell B2)

7.3.1 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ aus den Stegverschiebungen gemäss Abschnitt 5.3, starre Queraussteifung

a) Gleichungssystem für R_m , Momente infolge $R_m, \pm P$ in $m=8$

Der Rechnungsgang ist der gleiche wie in Abschnitt 7.2.5. Lediglich die Verschiebungswerte \bar{v}^{II} (vgl. Abschnitt 7.2.5c) werden zu Null, da bei starrer Queraussteifung für die Plattensteifigkeit in der Querrichtung $\bar{B}_1 = \infty$ gesetzt werden kann. Durch die Unterteilung der Spannweite in die Abschnitte $\Delta \ell$ gemäss Bild 7.15 gelten die Formänderungsbedingungen nur in den Querschnitten $m = 2, 4, 6 \dots 14$. Der Rechnungsgang ist also derselbe wie wenn die Querschnitte in $m = 2, 4, \dots 14$ durch biegestarke Querträger ausgesteift wären.

Wegen $\bar{v}^{II} = 0$ sind nur die Verschiebungswerte der Tabellen 9a und 9b zu überlagern, um die Matrix des Gleichungssystems zu erhalten.

Die Lastwerte sind dieselben wie in Abschnitt 7.2.5d. Das Gleichungssystem unterscheidet sich von dem System in Abschnitt 7.2.5a also nur durch die kleineren Diagonal-Glieder.

Man erhält damit bei $\pm P$ in $m = 8$ die in Tabelle 15, Spalte 1, angegebenen $\frac{1}{P}$ -fachen Pendelkräfte R_m . Daraus werden die Querkräfte und Momente ermittelt (Spalte 2 und 4). Die Momente in Spalte 5 ergeben sich, wenn die Einzellasten auf die Länge $\Delta \ell$ gleichmässig verteilt werden (vgl. Abschnitt 7.2.5).

b) Momente M_I , Längsspannungen $\sigma_{(2)}^*$ und lotrechte Stegverschiebungen v^I

In Tabelle 16 sind die Momente M_I infolge $\pm P$ in $m = 8$ zusammengestellt und damit die Längsspannungen $\sigma_{(2)}^*$ in Unterkante Steg in bekannter Weise ermittelt. Der Verlauf der Längsspannungen ist in Bild 7.15 (gestrichelte Linie) dargestellt.

Tabelle 15: Querkräfte und Momente infolge der Pendel-
kräfte R_m , $\pm P$ in $m = 8$

0	1	2	3	4	5
m	$\frac{R_m}{P}$	$\frac{Q_{R,m}}{P}$	$\frac{M_{R,m}}{P \cdot \Delta l}$	$\frac{M_{R,m}}{Pl}$	$\frac{M_{r,m}}{Pl}$ x)
0	0		0	0	0
2	-0,1175	-0,5605	-0,5605	-0,0701	-0,0682
4	-0,1215	-0,4430	-1,0035	-0,1254	-0,1235
6	-0,1728	-0,3215	-1,3250	-0,1656	-0,1629
8	-0,2974	-0,1487	-1,4737	-0,1842	-0,1795

x) Ausgerundet entsprechend Abschnitt 7.2.5

Tabelle 16: Längsspannungen $\sigma_{(2)}^*$ infolge $\pm P$ in $m = 8$

0	1	2	3	4	5	6
	$\frac{M_m^0}{Pl}$	$\frac{M_{r,m}}{Pl}$	$\frac{M_{I,m}}{Pl}$	$M_{I,m}$	$W_{(2)}^*$ s.Tab.1	$\sigma_{(2)}^*$
2	+0,0625	-0,0682	-0,0057	- 6,84	17,8	-0,38
4	0,1250	0,1235	+0,0015	+ 1,80	11,62	+0,15
6	0,1875	0,1629	+0,0246	+29,52	8,44	+3,50
8	0,2500	0,1795	+0,0705	+84,60	7,53	+11,25

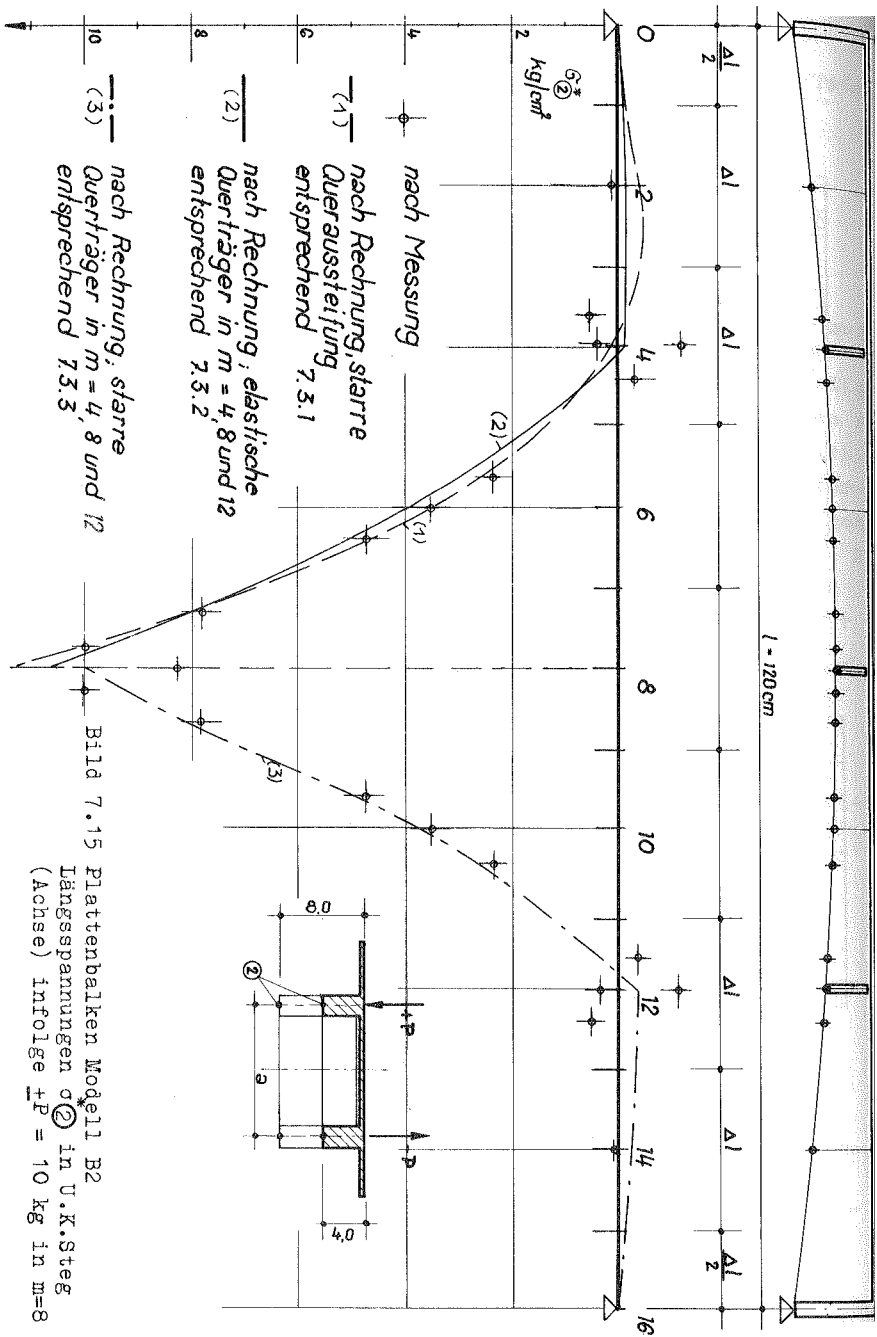


Bild 7.15 Plattenbalken Modell B2
 Längsspannungen σ ② in U.K.Steg
 (Achse) infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m=8$

7.3.2 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ entsprechend Abschnitt 7.3.1;
elastische Querträger in den Viertelpunkten

a) Abmessungen, Querschnittswerte, Verschiebungen \bar{v}^{II}

Die Abmessungen sind dieselben wie in Bild 7.2. Lediglich in den Viertelpunkten der Spannweite sind jetzt Querträger angeordnet. Die 3 Querträger haben einen Querschnitt von ca $3,5 \times 0,5$ cm. Sie sind nur an die Stege angeschlossen. Zwischen Platte und Oberkante Querträger ist ein Spalt.

Die Berechnung erfolgt nach Abschnitt 5.3. Die Querschnittswerte der Systeme I und II sind dieselben wie in Abschnitt 7.2.1. Die Spannweite wird wieder in Abschnitte von $\Delta \ell = 15$ cm aufgeteilt (siehe Bild 7.15).

Die Querbiegesteifigkeit der Platte beträgt gemäss Abschnitt 7.2.1d:

$$\bar{B}_{Pl} = \bar{B}_I = 0,0187 E \quad [\text{kg cm}^2/\text{cm}]$$

Die Querbiegesteifigkeit des Querträgers wird mit obigen Abmessungen:

$$\bar{B}_Q = E \cdot \bar{J}_Q = \frac{3,5^3 \cdot 0,5}{12} \cdot E = 1,786 E \quad [\text{kg cm}^2]$$

Damit erhält man für einen Abschnitt $\Delta \ell$ mit Querträgern gemäss (5.4):

$$\bar{B}_{I,Q} = \bar{B}_Q + \bar{B}_{Pl} \cdot \Delta \ell = E (1,786 + 0,0187 \cdot 15) = 2,067 \cdot E \quad [\text{kg cm}^2]$$

und für einen Abschnitt $\Delta \ell$ ohne Querträger:

$$\bar{B}_{I,Pl} = \bar{B}_{Pl} \cdot \Delta \ell = 0,0187 \cdot 15 E = 0,281 E \quad [\text{kg cm}^2]$$

Die lotrechte Verschiebung \bar{v}^{II} infolge der Einheitslast in den Punkten ohne Querträger, $m = 2, 6, 10$ und 14 wird:

$$E \cdot \bar{v}^{II} = - \frac{1 \cdot a^3}{24 \cdot \bar{B}_{I,Pl}} = - \frac{12,1^3}{24 \cdot 0,281} = - 262 \quad [E \cdot \text{cm}]$$

Entsprechend wird die lotrechte Verschiebung in den Punkten mit Querträgern, $m = 4, 8, 12$:

$$E \cdot \bar{v}^{II} = - \frac{1 \cdot a^3}{24 \cdot \bar{B}_{i,Q}} = - \frac{12,1^3}{24 \cdot 2,067} \approx -36 \quad [E \cdot \text{cm}]$$

b) Gleichungs-System zur Ermittlung der Pendelkräfte R_m

Die Werte der Matrix ergeben sich gemäss (5.13) aus der Addition der Verschiebungswerte der Tabellen 9a und 9b, wobei den Diagonalgliedern in den Zeilen 2, 6, 10 und 14 noch der Wert $E \cdot \bar{v}^{II} = 262$ bzw. in den Zeilen 4, 8, 12 der Wert $E \cdot \bar{v}^{II} = 36$ hinzuzufügen ist.

Die Lastwerte sind wieder die E-fachen Verschiebungswerte am System I infolge P in $m = 8$.

c) Querkräfte und Momente am System I infolge der Pendelkräfte

Die Lösungen des Gleichungs-Systemes sind die Pendelkräfte R_m in den Punkten $m = 2$ bis 14.

Die Pendelkräfte in den Punkten $m = 4, 8$ und 12 werden nun entsprechend den Querbiegesteifigkeiten auf Querträger und Plattenabschnitt aufgeteilt, vgl. (5.5a) und (5.5b):

$$R_{Q,m} = R_m \cdot \frac{\bar{B}_Q}{\bar{B}_{i,Q}} = 0,864 \cdot R_m$$

$$R_{Pl,m} = R_m \cdot \frac{\bar{B}_{Pl}}{\bar{B}_{i,Q}} = 0,136 \cdot R_m$$

Man erhält damit folgende Werte:

1/P-fache Werte

$m =$	2	4	6	8
R_m	0,0376	0,2164	0,0829	0,3776
$R_{Q,m}$	-	0,1870	-	0,3262
$R_{Pl,m}$	0,0376	0,0294	0,0829	0,0514

Die Querkräfte und Momente infolge R_Q bzw. R_{P1} sind in Tabelle 17 und 18 ermittelt. Setzt man anstelle der Einzelkräfte R_{P1} in den Knoten die über die Abschnitte $\Delta \ell$ gleichmässig verteilt angenommenen Pendelkräfte:

$$r_{P1} = \frac{R_{P1}}{\Delta \ell}$$

dann ergeben sich die in Spalte 5 der Tabelle 17 angegebenen Momentenanteile $M_{r,P1}/P \cdot \ell$

Die Überlagerung der Momente von Spalte 5, Tabelle 17, und Spalte 4, Tabelle 18, ist in Bild 7.16 dargestellt.

d) Längsspannungen σ^* infolge $\pm P$ in $m = 8$

Die Längsspannungen ergeben sich in der gleichen Weise wie in Tabelle 16, wobei für $M_I = M^0 + M_{r,P1} + M_{r,Q}$ einzusetzen ist. Der Spannungsverlauf ist in Bild 7.14 dargestellt (ausgezogene Linie). Infolge der Querträger ist die Linie auch bei $m = 4$ und 12 geknickt.

7.3.3 Ermittlung der Momente $M_{r,m}$ entsprechend 7.3.1, starre Querträger

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Rechnung angegeben für einen Plattenbalken wie in Abschnitt 7.3.2, wobei jedoch in den Viertelpunkten biegestarke Querträger angeordnet sind. Der Torsionswiderstand der Querträger ist wie bisher vernachlässigt.

Die biege - s t a r r e n Querträger entsprechen ungefähr den Verhältnissen am Modell. Wie in 7.1 erwähnt, wurden die in der Mitte durchgeschnittenen Querträger aus Araldit durch kräftige Messinglaschen schubfest miteinander verbunden, wodurch die Biegesteifigkeit und besonders die Drehsteifigkeit ganz erheblich vergrössert wurde, so dass das Modell in dieser Hinsicht den Voraussetzungen der Rechnung (drehweiche Querträger) weniger gut entspricht. Auf den Einfluss der Drehsteifigkeit der Querträger wurde in Abschnitt 5.5 bereits hingewiesen.

Tabelle 17: Querkräfte und Momente

infolge $R_{Pl} = R_{Pl,m}$; $\pm P$ in $m = 8$

0	1	2	3	4	5
	$\frac{R_{Pl}}{P}$	$\frac{Q_{Pl}}{P}$	$\frac{M_{RPl}}{\Delta L \cdot P}$	$\frac{M_{RPl}}{Pl}$	$\frac{M_{r,Pl}}{Pl}$ x)
0	0	- 0,1756	0	0	0
2	- 0,0336	- 0,1380	- 0,1756	- 0,0219	- 0,0213
4	- 0,0294	- 0,1086	- 0,3136	- 0,0392	- 0,0387
6	- 0,0829	- 0,0257	- 0,4222	- 0,0528	- 0,0515
8	- 0,0514		- 0,4479	- 0,0560	- 0,0552

x) Momentenlinie ausgerundet entsprechend Seite 176

Tabelle 18: Querkräfte und Momente

infolge $R_Q = R_{Q,m}$; $\pm P$ in $m = 8$

0	1	2	3	4
	$\frac{R_Q}{P}$	$\frac{Q_Q}{P}$	$\frac{M_{RQ}}{\Delta L \cdot P}$	$\frac{M_{RQ}}{Pl}$
0	—		0	0
2	—	- 0,3501	- 0,3501	- 0,0437
4	0,1870	- 0,3501	- 0,7002	- 0,0875
6	—	- 0,1631	- 0,8633	- 0,1079
8	0,3262	- 0,1631	- 1,0264	- 0,1283

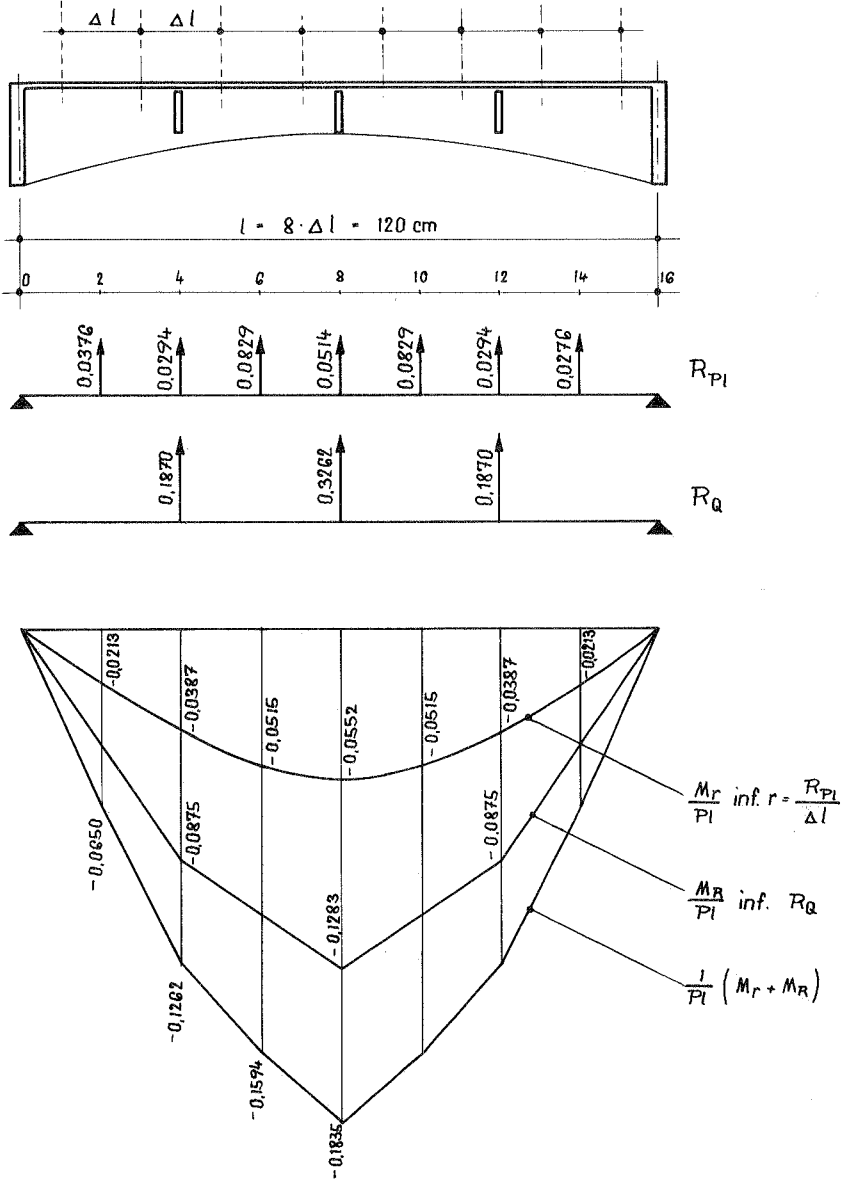


Bild 7.16 Pendelkräfte R_{P1} und R_Q und zugehörige Momente M_r bzw. M_R

Entsprechend Abschnitt 7.3.2a wird wegen der biegestarren Querträger:

$$E \cdot \bar{v}^{II} = -262 \quad [E \cdot \text{cm}] \quad \text{für } m = 2, 6, 10 \text{ und } 14$$

$$E \cdot \bar{v}^{II} = 0 \quad \text{für } m = 4, 8, 12.$$

Hierdurch ändern sich nur die Diagonalglieder des Gleichungssystems von Abschnitt 7.3.2 in den Zeilen 4, 8 und 12.

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt folgende Werte:

1/P-fache Werte

m =	2	4	6	8
R_m	0,0260	0,2383	0,0526	0,4182
$R_{Q,m=1,0 \cdot R_m}$	0	0,2383	0	0,4182
$R_{Pl,m=0 \cdot R_m}$	0,0260	0	0,0526	0

in $m=4$
und 8

Die Querkräfte und Momente infolge der Pendelkräfte R sind wie in Tabelle 17 und 18 ermittelt. Da der Anteil der Pendelkräfte R_{Pl} an den Momenten M_R gering ist, kann die Verteilung von R_{Pl} auf die Abschnittslänge Δl vernachlässigt werden. Die Momentenlinie verläuft also praktisch polygonal. Die Randspannungen σ^* ergeben sich wie in Abschnitt 7.3.2.

Der Verlauf der Randspannungen σ^* (2) ist in Bild 7.15 (rechte Hälfte) eingetragen.

Die Werte σ^* (2), wie sie an der linken Hälfte des Plattenbalken gemessen wurden, sind zum Vergleich angegeben. Messung und Rechnung stimmen bis auf die Querträgeranschlusspunkte gut überein. Hier lassen die Messwerte infolge der örtlichen Störung durch die Querträger keinen ganz eindeutigen Schluss auf die Spannungsverteilung zu. Weiter sind Abweichungen in der Vernachlässigung der Torsionssteifigkeit der Querträger zu suchen (vergl. Abschnitt 5.5).

7.4 Plattenbalken mit konstantem Querschnitt, h = 8,0 cm,
ohne Feldquerträger (Modell A1)

7.4.1 Querschnittswerte, Kennwerte

Der konstante Querschnitt, der nur durch die Platte in Querrichtung elastisch ausgesteift ist, ermöglicht die Ermittlung der Momente M_r durch die exakte Lösung der Differentialgleichung 4.Ordnung gemäss Abschnitt 4.1.

Die Querschnittswerte des Ersatz-Systems I und des Systems II sind dieselben wie im Schnitt $m = 0$ des in Abschnitt 7.2 untersuchten Plattenbalkens mit veränderlichem Querschnitt. Man erhält also nach Abschnitt 7.2.1 folgende Werte:

$$\text{Biegesteifigkeit } B_{m=0} = E \cdot J_{m=0}^* = \underline{146,99 \cdot E}$$

$$\begin{aligned} \text{Drehsteifigkeit } D_{m=0} &= G \cdot J_{D,m=0} = 0,36 \cdot E \cdot J_{D,m=0} \\ &= 0,36 \cdot 16,04 \cdot E = \underline{5,77 \cdot E} \end{aligned}$$

$$\text{Biegesteifigkeit der Platte: } \bar{B}_i = \underline{0,0187 \cdot E}$$

Damit werden die Koeffizienten g und h der Differentialgleichung (4.1) entsprechend (3.67a) und (3.67c):

$$g = \frac{6 \cdot \bar{B}_i}{a \cdot D} = \frac{6 \cdot 0,0187 \cdot E}{12,1 \cdot 5,77 \cdot E} = 1,61 \cdot 10^{-3} \quad [\text{cm}^2]$$

$$h = \frac{24 \cdot \bar{B}_i}{a^3 \cdot B} = \frac{24 \cdot 0,0187 \cdot E}{12,1^3 \cdot 146,99 \cdot E} = 1,72 \cdot 10^{-6} \quad [\text{cm}^4]$$

Die Lösung der Differentialgleichung hängt entsprechend (4.4) davon ab, ob $(0,5g)^2 \stackrel{?}{>} h$ ist:

$$(0,5g)^2 = (0,5 \cdot 1,61 \cdot 10^{-3})^2 = 0,649 \cdot 10^{-6} < h$$

Bei $(0,5g)^2 < h$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4.3) nicht reell. Man ermittelt deshalb die Werte α und β

gemäss (4.14):

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{h} + \frac{g}{4}} = \sqrt{0,655 \cdot 10^{-3} + 0,402 \cdot 10^{-3}} = 3,25 \cdot 10^{-2} \text{ [cm}^{-1}\text{]}^x$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{h} - \frac{g}{4}} = \sqrt{0,655 \cdot 10^{-3} - 0,402 \cdot 10^{-3}} = 1,59 \cdot 10^{-2} \text{ [cm}^{-1}\text{]}^x$$

7.4.2 Gleichung für $M_{r,z}$ und der Ableitungen $M'_{r,z}$ und $M''_{r,z}$,
 $\pm P$ in $z = 0,25 \ell$ und $0,50 \ell$

Wird die Spannweite gemäss Bild 4.1 in die beiden Bereiche rechts und links der Last $\pm P$ unterteilt, dann erhält man für das Biegemoment $M_{r,z}$ gemäss (4.23) im:

$$\begin{aligned} 1. \text{Bereich } M_{r,z_1} &= F_1 \cdot \cos \beta z_1 \cdot \sin \alpha z_1 + G_1 \cdot \sin \beta z_1 \cdot \\ &\quad \cdot \cos \alpha z_1 - Q_1^0 \cdot z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{Bereich } M_{r,z_2} &= F_2 \cdot \cos \beta z_2 \cdot \sin \alpha z_2 + G_2 \cdot \sin \beta z_2 \cdot \\ &\quad \cdot \cos \alpha z_2 - Q_2^0 \cdot z_2 \end{aligned}$$

Die Konstanten F_1 , G_1 , F_2 und G_2 folgen aus den 4 Randbedingungen bzw. den Ableitungen von $M_{r,z}$ gemäss (4.11):

a) Laststellung $\pm P$ in $z_1 = 0,25 \ell = 0,25 \cdot 120 = 30 \text{ cm}$

Man erhält mit $\alpha \cdot z_1 = 0,996$ und $\beta \cdot z_1 = 0,468$ im 1. Bereich:

$$M_{r,z_1} = 1,4033 \cdot F_1 + 0,6940 \cdot G_1 - 0,75 \cdot 30 \cdot P$$

$$10 \cdot M'_{r,z_1} = 0,3736 \cdot F_1 + 0,3892 \cdot G_1 - 7,5 \cdot P$$

$$10^3 \cdot M''_{r,z_1} = 0,1741 \cdot F_1 + 1,6749 \cdot G_1 \pm 0$$

$$10^6 \cdot M'''_{r,z_1} = -1,5849 \cdot F_1 + 1,6236 \cdot G_1 \pm 0$$

x) In der folgenden Zahlenrechnung ist wegen ursprünglich etwas anderer Annahme von β_1 mit $\alpha = 3,32 \cdot 10^{-2}$ und $\beta = 1,56 \cdot 10^{-2}$ gerechnet.

entsprechend mit $z_2 = 0,75 \cdot 120 = 90$ cm und $\alpha \cdot z_2 = 2,988$ bzw.
 $\beta \cdot z_2 = 1,404$ im 2. Bereich:

$$M_{r,z_2} = 1,6430 \cdot F_2 + 9,8099 \cdot G_2 - 0,25 \cdot 90 \cdot P$$

$$10 \cdot M'_{r,z_2} = -0,9743 \cdot F_2 + 3,4980 \cdot G_2 - 2,5 \cdot P$$

$$10^3 \cdot M''_{r,z_2} = -8,7566 \cdot F_2 + 10,0994 \cdot G_2 \pm 0$$

$$10^6 \cdot M'''_{r,z_2} = -18,0066 \cdot F_2 - 0,3677 \cdot G_2 \pm 0$$

Nach (4.11) ergeben damit folgende 4 Bestimmungsgleichungen für die Konstanten:

$$1,043 \cdot F_1 + 0,694 \cdot G_1 - 1,643 \cdot F_2 - 9,810 \cdot G_2 = 0$$

$$0,374 \cdot F_1 + 0,389 \cdot G_1 - 0,974 \cdot F_2 + 3,498 \cdot G_2 = 10 \cdot P$$

$$0,174 \cdot F_1 + 1,675 \cdot G_1 + 8,756 \cdot F_2 - 10,099 \cdot G_2 = 0$$

$$-1,585 \cdot F_1 + 1,624 \cdot G_1 + 18,007 \cdot F_2 + 0,368 \cdot G_2 = 0$$

Die Lösungen sind:

$$F_1 = 12,85 \cdot P \quad ; \quad G_1 = 2,79 \cdot P$$

$$F_2 = 0,86 \cdot P \quad ; \quad G_2 = 1,43 \cdot P$$

Damit können die Gleichungen für $M_{r,z}$ und die Ableitungen entsprechend (4.23), (4.23a) und (4.23b) angeschrieben werden.

Zur Abkürzung der Schreibweise wird gesetzt:

$$c.S = \cos \beta z \cdot \sin \alpha z$$

$$s.C = \sin \beta z \cdot \cos \alpha z$$

$$s.S = \sin \beta z \cdot \sin \alpha z$$

$$c.C = \cos \beta z \cdot \cos \alpha z$$

Man erhält für den 1. Bereich, $z_1 = 0$ bis $z_1 = 0,25 \ell$, folgende Funktionen:

$$M_{r,z_1} = (12,85 \cdot c.S + 2,79 \cdot s.C - 0,75 \cdot z_1) \cdot P$$

$$M'_{r,z_1} = (0,470 \cdot c.C - 0,108 \cdot s.S - 0,75) \cdot P$$

$$M''_{r,z_1} = (1,392 \cdot c.S - 1,087 \cdot s.C) \cdot P \cdot 10^{-2}$$

und entsprechend für den 2. Bereich, $z_2 = 0$ bis $z_2 = 0,75 \cdot \ell$:

$$M_{r,z_2} = (0,86 \cdot c \cdot S + 1,43 \cdot s \cdot C - 0,25 \cdot z_2) \cdot P$$

$$M'_{r,z_2} = (0,0507 \cdot c \cdot C + 0,0341 \cdot s \cdot S - 0,25) \cdot P$$

$$M''_{r,z_2} = (0,2229 \cdot c \cdot S + 0,0343 \cdot s \cdot C) \cdot P \cdot 10^{-2}$$

Die Funktionswerte für $M_{r,z}$ und die Ableitungen sind für die 1/8 Punkte der Spannweite in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 19: Momente $M_{r,z}$ und Ableitungen für Laststellung $\pm P$
in $z = 0,25$.

m=	0	2	4	6	8	10	12	14	16
z= cm	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$\frac{M_{r,z}}{P}$	0	-4,04	-7,12	-8,75	-8,87	-7,70	-5,61	-2,95	0
$\frac{M'_{r,z}}{P}$	-0,280	-0,248	-0,162	-0,058	+0,039	+0,113	+0,162	+0,190	+0,1
$\frac{M''_{r,z}}{P \cdot 10^{-2}}$	0	+0,418	+0,697	+0,713	+0,578	+0,416	+0,256	+0,121	0
$z_1 \rightarrow$	0	15	30	75	60	45	30	15	$z_2 \leftarrow$

b) Laststellung $\pm P$ in $z_1 = z_2 = 0,5 \cdot \ell$

Es treten wegen Symmetrie nur 2 Konstante F und G auf, die nach (4.32) und (4.33) zu bestimmen sind:

$$F = 0,25 \cdot P \cdot \ell \cdot K_1$$

$$G = -0,25 \cdot P \cdot \ell \cdot K_2$$

Mit $\alpha = 3,32 \cdot 10^{-2}$ und $\beta = 1,56 \cdot 10^{-2}$ (vgl. Abschn. 7.4.1) bzw. mit

$$0,5 \cdot \alpha \cdot \ell = 0,5 \cdot 3,32 \cdot 10^{-2} \cdot 120 = 1,992 \quad [1]$$

$$0,5 \cdot \beta \cdot \ell = 0,5 \cdot 1,56 \cdot 10^{-2} \cdot 120 = 0,936 \quad [1]$$

erhält man aus (4.33):

$$Z_1 = (+0,1215 \cdot 2,896 + 0,4770 \cdot 2,214) \cdot 10^{-4} = 1,4079 \cdot 10^{-4} \quad [\text{cm}^{-3}]$$

$$Z_2 = (+0,1215 \cdot 2,214 - 0,4770 \cdot 2,896) \cdot 10^{-4} = -1,1124 \cdot 10^{-4} \quad [\text{cm}^{-3}]$$

$$N = 120 \cdot 0,006971 (13,935 - 0,648) \cdot 10^{-4} = +11,115 \cdot 10^{-4} \quad [\text{cm}^{-3}]$$

und damit:

$$K_1 = \frac{1,4079}{11,115} = + 0,12667 \quad [1]$$

$$K_2 = \frac{1,1124}{11,115} = - 0,10008 \quad [1]$$

bzw.

$$F = 0,25 \cdot 120 \cdot 0,12667 \cdot P = + 3,800 \cdot P \quad [\text{cm}]$$

$$G = 0,25 \cdot 120 \cdot 0,10008 \cdot P = + 3,002 \cdot P \quad [\text{cm}]$$

Die Gleichungen für $M_{r,z}$ und die Ableitungen lauten somit entsprechend (4.34) bzw. (4.23) ff:

$$M_{r,z} = (+3,800 \cdot c \cdot S + 3,002 \cdot s \cdot C - 0,5 \cdot z) \cdot P$$

$$M'_{r,z} = (0,1730 \cdot c \cdot C + 0,0404 \cdot s \cdot S - 0,50) \cdot P$$

$$M''_{r,z} = (0,6362 \cdot c \cdot S - 0,1368 \cdot s \cdot C) \cdot P \cdot 10^{-2}$$

Die Werte für $M_{r,z}$ und die Ableitungen sind in Tabelle 20 zusammengestellt.

Tabelle 20: Momente $M_{r,z}$ und Ableitungen für Laststellung $\underline{+P}$ in $z = 0,5 \ell$.

0	1	2	3	4	5	6
m =	0	2	4	6	8	
z=cm	0	15	30	45	60	
$M_{r,z}$	0	-4,80	-8,95	-11,83	-12,87	.P
$M'_{r,z}$	-0,327	-0,306	-0,241	-0,136	± 0	.P
$M''_{r,z}$	0	+0,285	+0,569	+0,821	+ 0,946	$\cdot 10^{-2} \cdot P$

7.4.3 Schnittkräfte am System I und II

Die Schnittkräfte werden in den Tabellen 21 und 22 ermittelt.

Es ist:

$$M_{I,z} = M^0 + M_{r,z} \quad \text{vergl. (3.4)}$$

$$Q_{I,z} = Q^0 + M'_{r,z} \quad \text{" (3.39)}$$

$$M_{T,z} = -\frac{a}{2} \cdot M'_{r,z} \quad \text{" (3.40)}$$

$$\bar{m}_z = + M''_{r,z} \cdot \frac{a}{2} \quad \text{" (3.41)}$$

7.4.4 Längs- und Schubspannungen

Die Längsspannungen in Unterkante Steg bzw. Aussenkante Platte ergeben sich aus:

$$\sigma_{\textcircled{2}}^* = \frac{M_I}{W_{\textcircled{2}}^*} = \frac{0,0351 \cdot M_I}{W_{\textcircled{2}}^*} \quad \text{s.Tab.1, Sp.9} \quad m = 0$$

bzw.

$$\sigma_{\textcircled{a}}^* = -\frac{M_I}{W_{\textcircled{1}}^*} \cdot \frac{b}{a} \approx -0,0355 \cdot M_I \quad \text{s.Tab.1, Sp.10} \quad m = 0$$

Die Schubspannungen werden für die Punkte $\textcircled{13}$ und $\textcircled{14}$ in Aussenkante Steg, $y = 12$ mm von Unterkante Platte ermittelt.

Man erhält für den Anteil aus freier Torsion gemäss (2.34):

$$\tau_1 = \pm \psi_1 \cdot \frac{d}{J_D} \cdot M_T$$

oder mit

$$\psi_1 \cdot \frac{d}{J_D} = \frac{1,89}{16,04} = 0,118, \quad \text{vgl.Tab.12a, } m = 0$$

und

$$M_T = -M'_{r,z} \cdot \frac{a}{2} = -6,0 \cdot M'_{r,z}$$

$$\tau_1 = -0,118 \cdot 6,0 \cdot M'_{r,z} = \underline{\underline{-0,708 \cdot M'_{r,z}}}$$

Entsprechend wird der Anteil aus Wölbkrafttorsion:

$$\tau_2 = Q_I \cdot \frac{S^*}{d \cdot J^*} \quad \text{vgl. (2.30) und (2.30a)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder mit } \frac{S^*}{d} = 12,58 \text{ cm}^3 \\ \text{und } J^* = 146,99 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} \text{aus Tabelle 12b, Zeile } m = 0$$

$$\tau_2 = \frac{12,58}{146,99} \cdot Q_I = \underline{\underline{0,0857 \cdot Q_I}}$$

Die Spannungen sind in Tabelle 21 für $\underline{+P}$ in $z = 0,25 \ell$ und in Tabelle 22 für $\underline{+P}$ in $z = 0,5 \ell$ zusammengestellt.

Die Bilder 7.17 und 7.22 zeigen den rechnerischen Verlauf der Spannungen und die gemessenen Werte.

7.4.5 Lotrechte Stegverschiebungen

Aus (3.49a) folgt für die lotrechte Stegverschiebung:

$$v_z = \frac{1}{B} (-c \cdot M_{rz} + d \cdot M''_{rz}) = -\frac{a^2}{4D} \cdot M_{rz} + \frac{a^3}{24 B_i} \cdot M''_{rz}$$

oder mit den oben ermittelten Zahlenwerten:

$$v_z = -\frac{12,1^2}{4 \cdot 5,77} \cdot \frac{M_{rz}}{E} + \frac{12,1^3}{0,0187 \cdot 24} \cdot \frac{M''_{rz}}{E}$$

Für $E = 35\,600 \text{ kg/cm}^2$ erhält man daraus die Verschiebungen in $\frac{1}{1000} \text{ mm}$:

$$\underline{\underline{v_z = -1,782 \cdot M_{rz} + 1108 \cdot M''_{rz}}}$$

Die Verschiebungswerte sind in den Tabellen 23 und 24 für $\underline{+P}$ = 10 bzw. in $z = 0,25 \ell$ bzw. $0,5 \ell$ ermittelt und in Bild 7.23 dargestellt (entsprechende Messungen wurden nicht durchgeführt).

Tabelle 21: Schnittkräfte, Längsspannungen und Schubspannungen

infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $z = 0,25 \text{ l}$

z	$\frac{M_0}{Pl}$	$\frac{M_r}{Pl}$	$\frac{M_I}{Pl}$	$\frac{Q_0}{P}$	$\frac{M'_r}{P}$	M_I cmkg	Q_I kg	\bar{m} cmkg/l
0	0	0	0	0,75	-0,280	0	+ 4,70	0
0,125 l	0,09375	-0,0330	+0,0602	0,75	-0,248	+ 72,1	+ 5,02	+ 0,251
0,250 l	0,18750	-0,0593	+0,1285	0,75/-0,25	-0,162	154,2	+ 5,88 - 4,12	+ 0,418
0,375 l	0,15625	-0,0729	+0,0834	-0,25	-0,058	100,0	- 3,08	+ 0,421
0,500 l	0,12500	-0,0730	+0,0514	-0,25	+ 0,039	61,6	- 2,11	+ 0,344
0,625 l	0,09375	-0,0641	+0,0297	-0,25	+ 0,113	35,6	- 1,37	+ 0,251
0,750 l	0,06250	-0,0460	+0,0159	-0,25	+ 0,162	19,1	- 0,88	+ 0,154
0,875 l	0,03125	-0,0246	+0,0067	-0,25	+ 0,190	8,0	- 0,60	+ 0,071
1,000 l	0	0	0	-0,25	+ 0,199	0	- 0,51	0

σ_{I}^x kg/cm ²	σ_{II}^x kg/cm ²	τ_1 kg/cm ²	τ_2 kg/cm ²	$\tau =$ (11) + (12)
± 0	± 0	$\pm 1,98$	+ 0,40	+2,38 - 1,58
+ 2,54	- 2,56	$\pm 1,76$	+ 0,43	+2,19 - 1,33
+ 5,41	- 5,49	$\pm 1,14$	+ 0,50 - 0,35	+1,64 - 0,64 +0,79 - 1,46
+ 3,51	- 3,55	$\pm 0,41$	- 0,26	+0,15 - 0,67
+ 2,16	- 2,18	$\mp 0,28$	- 0,18	-0,46 + 0,10
+ 1,25	- 1,20	$\mp 0,80$	- 0,12	-0,92 + 0,68
+ 0,67	- 0,68	$\mp 1,14$	- 0,075	- 1,21 + 1,07
+ 0,28	- 0,28	$\mp 1,34$	- 0,051	- 1,39 + 1,29
± 0	± 0	$\mp 1,41$	- 0,044	- 1,45 + 1,37

Tabelle 22: Schnittkräfte, Längsspannungen und Schubspannungen
infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $z = 0,50 \text{ l}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z =	$\frac{M_0}{Pl}$	$\frac{M_r}{Pl}$	$\frac{M_I}{Pl}$	$\frac{Q_0}{P}$	$\frac{M'_r}{P}$	M_I cmkg	Q_I kg	\bar{m} cmkg/cm
0	0	0	0	0,50	-0,327	0	+ 1,73	0
0,125 l	0,0625	-0,0400	+0,0225	"	-0,300	+ 27,0	+ 1,94	+ 0,171
0,250 l	0,1250	-0,0740	+0,0504	"	-0,241	+ 60,5	+ 2,59	+ 0,340
0,375 l	0,1875	-0,0980	+0,0889	"	-0,130	+100,8	+ 3,64	+ 0,495
0,500 l	0,2500	-0,1172	+0,1328	"	± 0	+159,2	+ 5,00	+ 0,508

9	10	11	12	13
$\sigma_{\text{②}}^*$ kg/cm ²	$\sigma_{\text{③}}^*$ kg/cm ²	τ_1 kg/cm ²	τ_2 kg/cm ²	$\tau =$ (11)+(12)
0	0	$\pm 2,31$	+ 0,15	+246 -2,10
+0,95	- 0,96	$\pm 2,16$	+ 0,17	+233 -1,99
+ 2,12	- 2,15	$\pm 1,71$	+ 0,22	+1,93 -1,49
+3,75	- 3,80	$\pm 0,90$	+ 0,31	+1,27 -0,65
+5,59	- 5,65	± 0	+ 0,43	+0,43

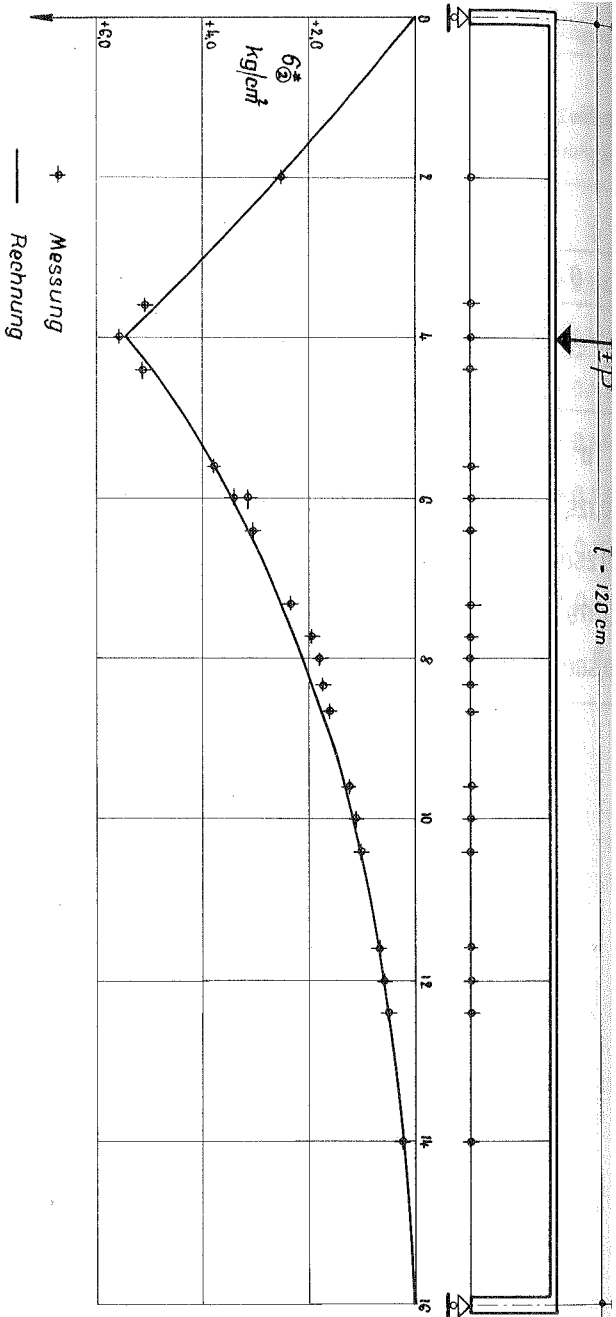


Bild 7.17 Plattenbalken Modell A1
 Längsspannungen ② in U.K.Steg (Achse)
 infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m = 4$

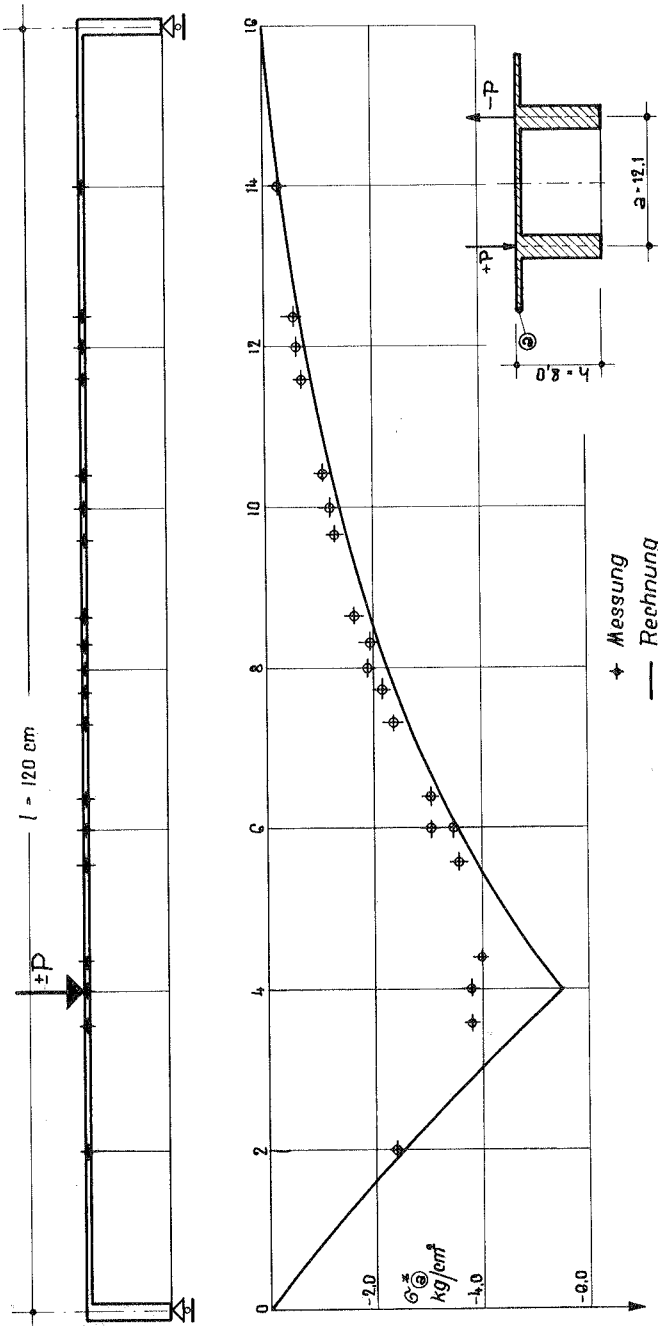


Bild 7.18 Plattenbalken Modell A1
Längsspannungen σ_x in A.K.Platte (Achse)
infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m = 4$

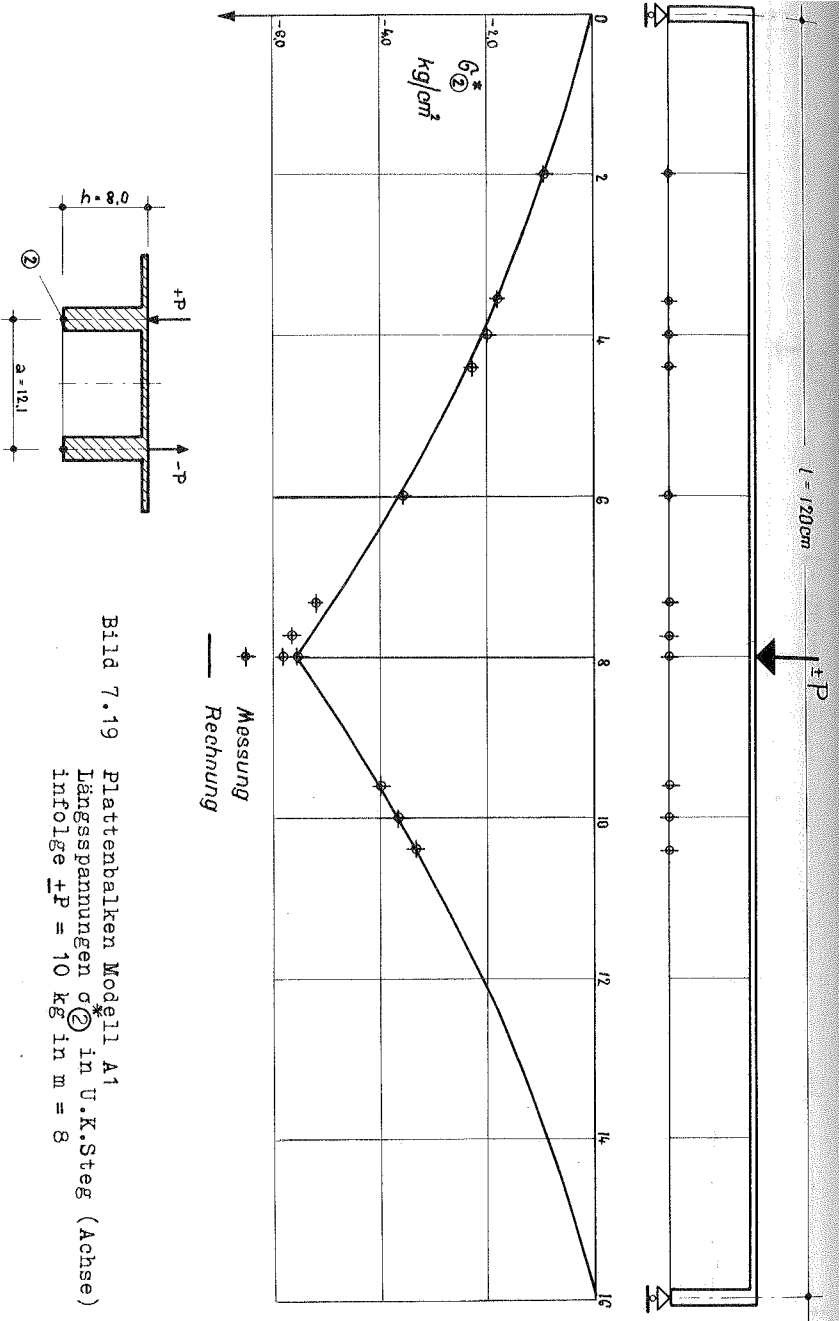


Bild 7.19 Plattenbalken Modell A1
 Längsspannungen σ_x in U.K.Steg (Achse)
 infolge $\pm P = 10\text{ kg}$ in $m = 8$

◆ Messung
 — Rechnung

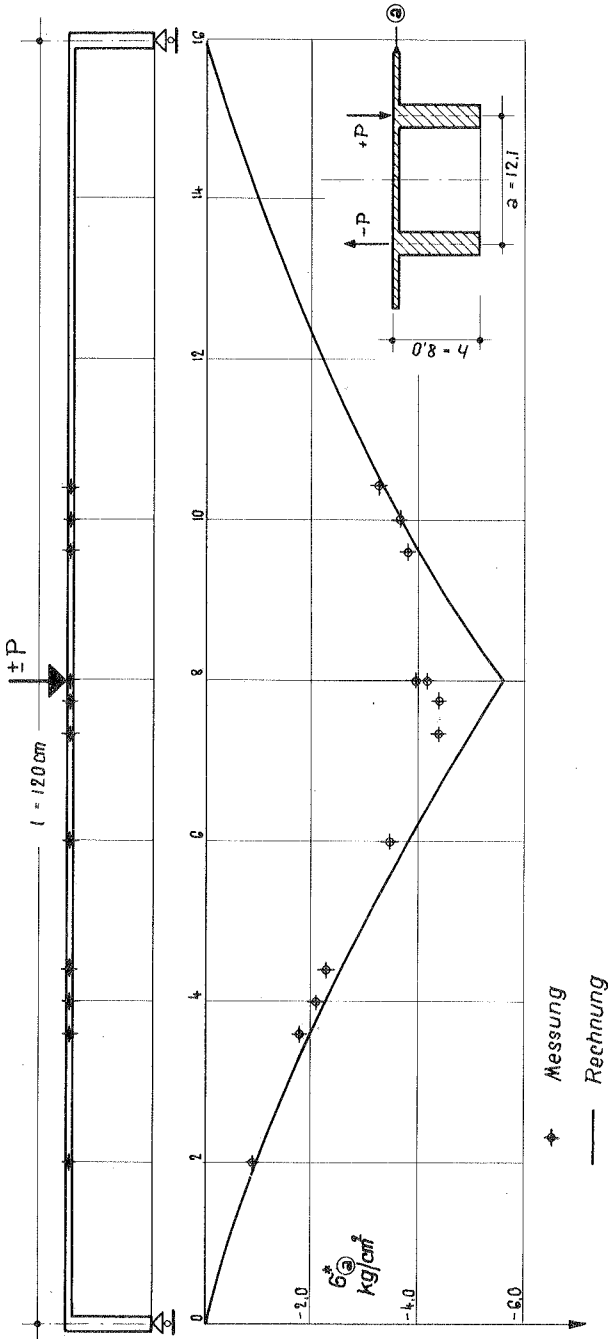


Bild 7.20 Plattenbalken Modell A1
 Längsspannungen σ in A.K.Platte (Achse)
 infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m = 8$

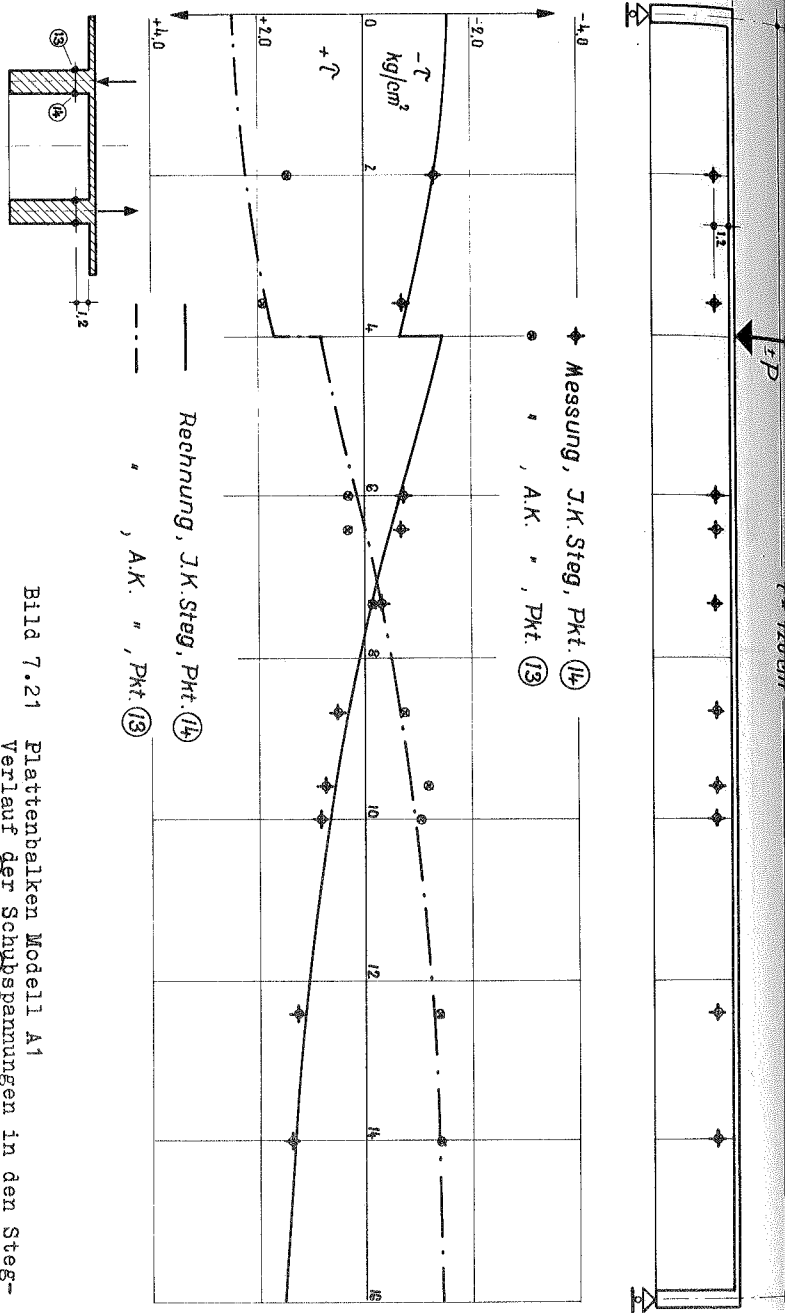


Bild 7.21 Plattenbalken Modell A1
 Verlauf der Schubspannungen in den Steg-
 punkten 13 und 14 inf. $+P = 10 \text{ kg}$ in $m = 4$

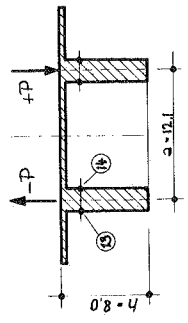
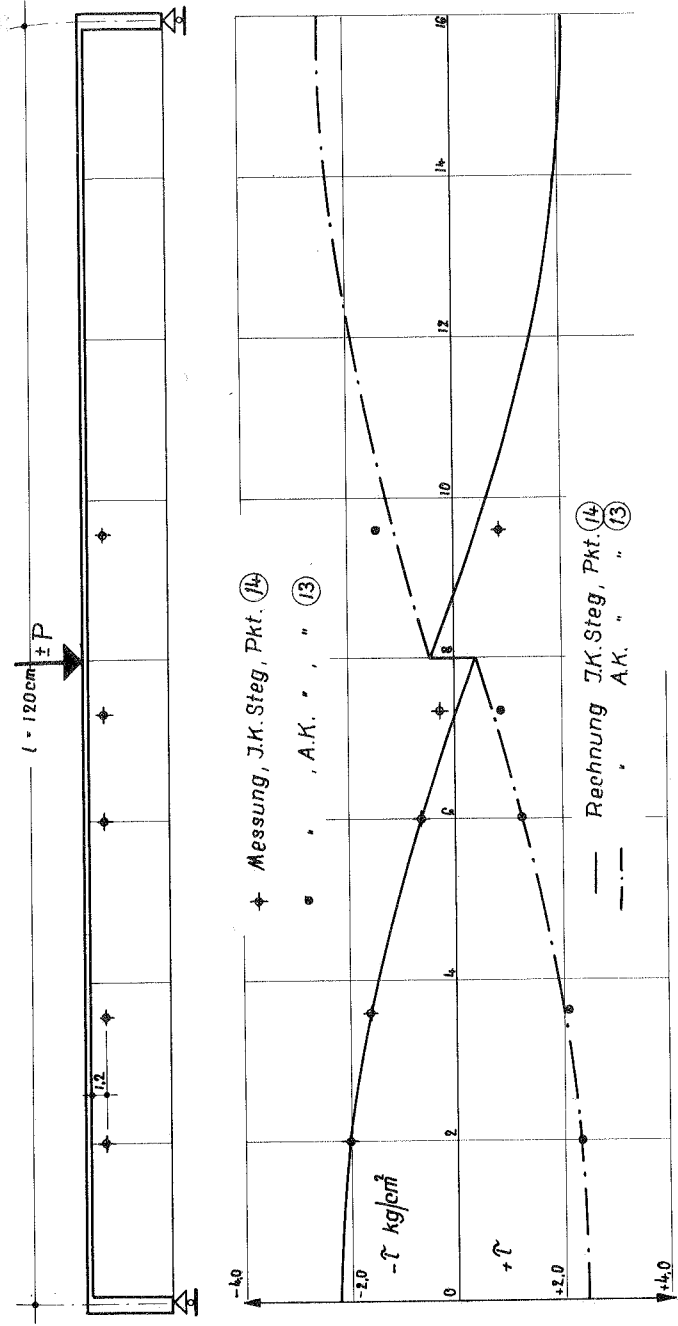


Bild 7.22 Plattenbalken Modell A1
 Verlauf der Schubspannungen in den Steg-
 punkten 13 und 14 inf. $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $m=8$

Tabelle 23 und 24: Lotrechte Stegverschiebungen (in $\frac{1}{1000}$ mm)

Inf.+P = 10 kg in z = 0,25 und z = 0,50 L. E = 35 600 kg/cm²

0	1	2	3	4	5	6	7
Z =	0,125 l	0,250 l	0,375 l	0,500 l	0,625 l	0,750 l	0,875 l
^{*)} -1,782 · M · z +1108 · M · z ²	+72 +46	+127 +77	+156 +79	+158 +84	+138 +46	+101 +29	+53 +13
z	+118	+204	+235	+222	+184	+130	+66

*) s. Tabelle 19

* P in z - 0,25 l

0	1	2	3	4	5	6	7
^{*)} -1,782 · M · z +1108 · M · z ²	+86 +31	+159 +63	+211 +91	+230 +104	symmetrisch		
z	+117	+222	+302	+334			

* P in z - 0,50 l

*) s. Tabelle 20

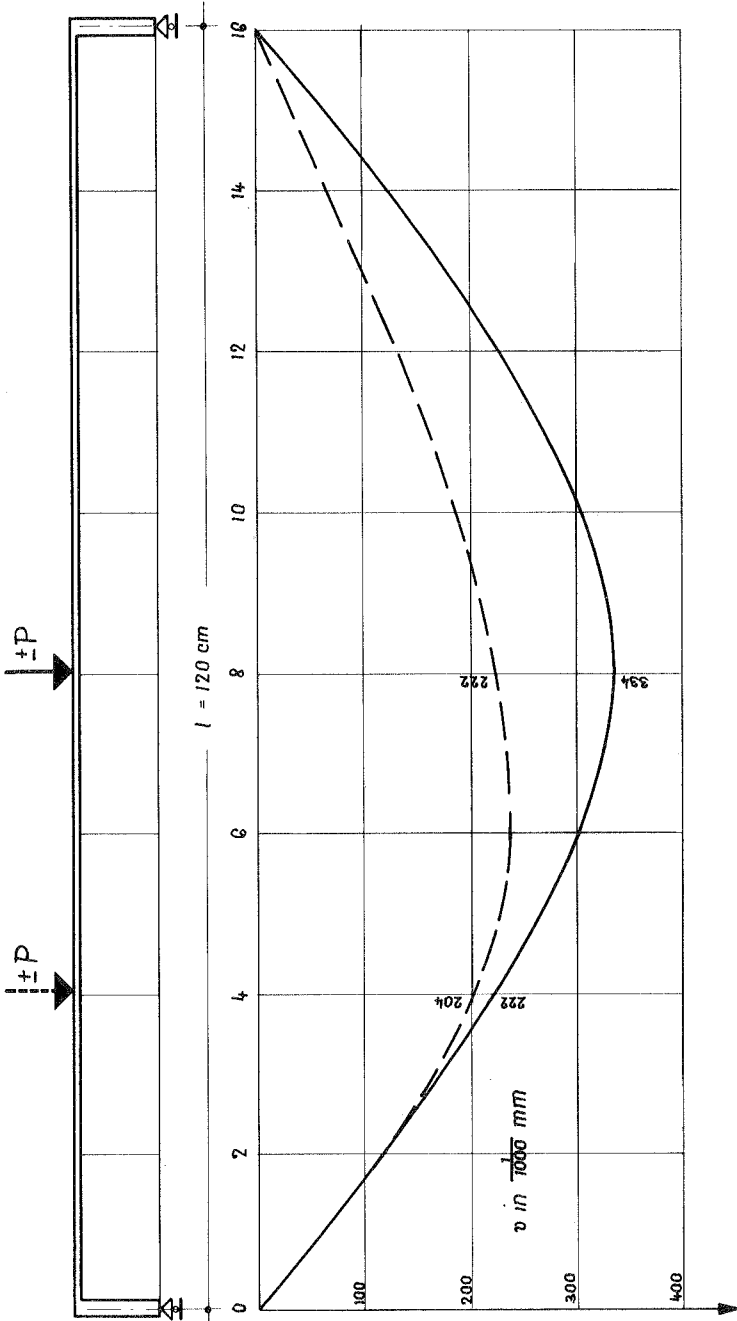


Bild 7.23 Plattenbalken Modell A1
Lotrechte Stegverschiebungen v
infolge $\pm P = 10\text{ kg}$ in $= 4$ bzw. $m = 8$

7.5 Plattenbalken mit konstantem Querschnitt, h = 4 cm, ohne Feldquerträger (Modell C1)

7.5.1 Querschnittswerte, Kennwerte

Rechnungsgang wie bei 7.4. Der Querschnitt entspricht dem Mittelquerschnitt des in 7.2 untersuchten Plattenbalkens mit veränderlichem Querschnitt. Man erhält also mit $m = 8$ ($l/2$) aus 7.2.1:

$$B_{m=8} = E \cdot J_{m=8} = \underline{21,27 \text{ E}}$$

$$D_{m=8} = G \cdot J_{D,m=8} = 0,36 \text{ E} \cdot J_{D,m=8} = \underline{2,47 \text{ E}}$$

$$\bar{B}_i = \underline{0,0187 \text{ E}}$$

Koeffizienten der Differentialgleichung gemäss (3.67a) und (3.67c):

$$g = \frac{6 \cdot \bar{B}_i}{a \cdot D} = \frac{6 \cdot 0,0187 \text{ E}}{12,1 \cdot 2,47 \text{ E}} = 3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$h = \frac{24 \cdot \bar{B}_i}{a^3 \cdot B} = \frac{24 \cdot 0,0187 \text{ E}}{12,1^3 \cdot 21,27 \text{ E}} = 11,91 \cdot 10^{-6}$$

Kriterium gemäss Abschnitt 4.1.1b:

$$(0,5g)^2 = (0,5 \cdot 3,76 \cdot 10^{-3})^2 = 3,54 \cdot 10^{-6} h,$$

also keine reellen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Substitution gemäss (4.14):

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{h} + \frac{g}{4}} = \sqrt{(1,73+0,94) \cdot 10^{-3}} = 5,16^x \cdot 10^{-2} \text{ [cm}^{-1}\text{]}$$
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{h} - \frac{g}{4}} = \sqrt{(1,73-0,94) \cdot 10^{-3}} = 2,81^x \cdot 10^{-2} \text{ [cm}^{-1}\text{]}$$

x) In der folgenden Zahlenrechnung ist wegen der ursprünglich etwas anderen Annahme von \bar{B}_i mit $\alpha = 5,263 \cdot 10^{-2}$ und $\beta = 2,782 \cdot 10^{-2}$ gerechnet. Die Abweichungen sind ohne Einfluss auf die Ergebnisse.

7.5.2 Gleichungen für M_{rZ} und der beiden Ableitungen M'_{rZ} und

M''_{rZ} ; $\pm P$ in $z_1 = 0,25\ell$ und $0,50\ell$

a) Laststellung $\pm P$ in $z_1 = 0,25\ell$ bzw. $z_2 = 0,75\ell$

Die Momente M_{rZ} und ihre Ableitungen ergeben sich für die beiden Bereiche aus (4.23)ff. analog zur Abschnitt 7.4.2a.

Aus den Randbedingungen gemäss (4.11) folgen die 4 Konstanten:

$$\begin{aligned} F_1 &= + 3,1398 P & F_2 &= - 0,1258 P \\ G_1 &= + 2,7756 P & G_2 &= + 0,1273 P \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen für die Funktionswerte von Abschnitt 7.4.2a erhält man für den 1.Bereich $z_1 = 0$ bis $z_1 = 0,25\ell$ folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} M_{r,z_1} &= (3,140.c.S + 2,776.s.C - 0,75.z_1) \cdot P \\ M'_{r,z_1} &= (0,2424.c.C + 0,0588.s.S - 0,75) \cdot P \\ M''_{r,z_1} &= (+1,4393.c.S - 0,3652.s.C) \cdot P \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

und entsprechend für den 2.Bereich $z_2 = 0$ bis $z_2 = 0,75\ell$:

$$\begin{aligned} M_{r,z_2} &= (-0,1258.c.S + 0,1273.s.C - 0,25.z_2) \cdot P \\ M'_{r,z_2} &= (-0,3080.c.C + 1,0200.s.S - 0,25) \cdot P \cdot 10^{-2} \\ M''_{r,z_2} &= (+0,1216.c.S + 0,6224.s.C) \cdot P \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Die Werte für M_{rZ} und die beiden Ableitungen sind in Tabelle 25 zusammengestellt.

b) Laststellung $\pm P$ in $z = 0,5\ell$

Konstante F und G aus (4.32).

Mit $\alpha = 5,263 \cdot 10^{-2}$ und $\beta = 2,782 \cdot 10^{-2}$ sowie den Funktionswerten für $z = 0,5\ell = 60$ erhält man analog zu 7.4.2b:

$$\begin{aligned} F &= 0,25 \cdot 120 \cdot 0,38973 \cdot 10^{-3} \cdot P = 0,01169 \cdot P \quad [\text{cm}] \\ G &= -0,25 \cdot 120 \cdot (-0,28853 \cdot 10^{-1}) \cdot P = 0,8656 P \quad [\text{cm}] \end{aligned}$$

Tabelle 25: M_{rz} [cmkg] und Ableitungen für Laststellung $\pm P$ [kg] in $z = 0,25 \ell$

	1	2	3	
z_1 (cm) =	0	15	30	
M_{rz1}	0	-7,251	-12,405	.P
M'_{rz1}	-0,5076	-0,4350	-0,2375	.P
M''_{rz1}	0	+0,953	+1,559	$10^{-2} \cdot P$

	4	5	6	7	8	9	10	
z_2 (cm) =	90	75	60	45	30	15	0	
M_{rz2}	-12,411	-14,277	-13,364	-10,807	-7,458	-3,782	0	.P
M'_{rz2}	-0,2376	-0,0190	+0,1273	+0,2040	+0,2377	+0,2501	+0,2501	.P
M''_{rz2}	+1,557	+1,248	+0,716	+0,338	+0,136	+0,043	0	$10^{-2} \cdot P$

Gleichung für M_{rZ} und Ableitungen gemäss (4.34) :

$$M_{rZ} = (0,01169.c.S + 0,8656.s.C - 0,5 z) \cdot P$$

$$M'_{rZ} = (0,02470.c.C + 0,04523.s.S - 0,5) \cdot P$$

$$M''_{rZ} = (0,2558.c.S + 0,1693.s.C) \cdot P$$

Die Werte für M_{rZ} und die Ableitungen sind in Tabelle 26 zusammengestellt.

Tabelle 26: M_{rZ} [cmkg] und Ableitungen für Laststellung $\pm P$ [kg]
in $z = 0,5\ell$.

0	1	2	3	4	5	6
z cm	0	15	30	45	60	
M_{rZ}	0	-7,026	-13,360	-18,055	-19,863	.P
M'_{rZ}	-0,4753	-0,4541	-0,3803	-0,2311	~ 0 -0,0001	.P
M''_{rZ}	0	+0,2952	+0,7160	+1,2899	+1,6909	$\cdot 10^2 \cdot P$

7.5.3 Schnittkräfte am System I und II

Ermittlung tabellarisch entsprechend 7.4.3, siehe Tabelle 27 und 28.

7.5.4 Längs- und Schubspannungen

Entsprechend 7.4.4 sind die Längsspannungen:

$$\sigma_{(2)}^* = \frac{M_I}{W_{(2)}^*} = + 0,133 M_I$$

$$W_{(2)}^* = 7,53 \text{ cm}^3, \text{ vgl. Tabelle 1, Zeile 8}$$

$$\sigma_{(a)}^* = \frac{M_I}{W_{(1)}^*} \cdot \frac{b}{a} = - 0,0870 \cdot M_I$$

$$W_{(1)}^* = 22,8 \text{ cm}^3, b = 24 \text{ cm} ; a = 12,1 \text{ cm.}$$

Schubspannungen:

Anteil aus freier Torsion: $\tau_1 = \pm \psi_1 \cdot \frac{d}{J_D} \cdot M_T$

$$J_D = 6,85 \text{ cm}^4 ; \quad \psi_1 \cdot d = 1,78 \text{ cm} \quad \text{vgl. Tab. 12a, Zeile 8}$$

$$\pm \tau_1 = \frac{1,78}{6,85} \cdot M_T = \underline{0,260 \cdot M_T}$$

Anteil aus Wölbkrafttorsion: $\tau_2 = Q_I \cdot \frac{S^*}{d \cdot J^*}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S^*}{d} = 3,86 \text{ cm}^2 \\ J^* = 21,27 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} \text{vgl. Tabelle 12b, Zeile 8}$$

$$\tau_2 = \frac{3,86}{21,27} \cdot Q_I = \underline{0,181 \cdot Q_I}$$

Die Spannungen sind in Tabelle 29a für $\underline{+P} = 10 \text{ kg}$ in $z = 0,25 \text{ l}$ und in Tabelle 29b für $\underline{+P} = 10 \text{ kg}$ in $z = 0,50 \text{ l}$ zusammengestellt.

Die Bilder 7.24 bis 7.29 zeigen den rechnerischen Verlauf der Spannungen und die gemessenen Werte.

Tabelle 27: Schnittkräfte infolge $\pm P$ in 0,25 l

0	1	2	3	4	5	6	7	8
z cm	M^0 $\frac{PI}{l}$	M_T^x $\frac{PI}{l}$	M_I $\frac{PI}{l}$	Q^0 $\frac{P}{l}$	M_T^y $\frac{P}{l}$	Q_I $\frac{P}{l}$	M_T^z $\frac{P \cdot l}{l}$	\bar{m} \bar{P}
0	0	0	0	+0,75	-0,5076	+0,2424	+0,02538	0
15	0,09375	-0,06043	+0,03332	+0,75	-0,4350	+0,3150	+0,02175	+0,0572
30	0,18750	-0,10340	+0,08410	+0,75 -0,25	-0,2375	+0,5125 -0,4875	+0,01187	+0,0931
45	0,15625	-0,11897	+0,03728	-0,25	-0,0190	-0,2690	+0,00095	+0,0750
60	0,12500	-0,11137	+0,01363	-0,25	+0,1273	-0,1227	-0,00636	+0,0430
75	0,09375	-0,09005	+0,00370	-0,25	+0,2040	-0,0460	-0,01020	0,0203
90	0,06250	-0,06215	+0,00035	-0,25	+0,2377	-0,0123	-0,01188	0,0082
105	0,03125	-0,03152	-0,00027	-0,25	+0,2501	+0,0001	-0,01251	0,0026
120	0	0	0	-0,25	+0,2531	+0,0031	-0,01266	0

x) aus Tabelle 25: $P \cdot l = 10 \cdot 120 = 1200$ cmkg +) $\frac{M_T}{PI} = \frac{-M_T^y \cdot a}{P \cdot 2l} = \frac{-M_T^y}{20 P}$

Tabelle 28: Schnittkräfte infolge $\pm P$ in 0,50 ℓ

0	1	2	3	4	5	6	7	8
z cm	M^0 $\frac{PI}{l}$	M_T^x $\frac{PI}{l}$	M_I^x $\frac{PI}{l}$	Q^0 P	M_T^{xx} $\frac{PI}{l}$	Q_I^x P	M_T^+ $\frac{PI}{l}$	M_I^{++} P
0	0	0	0	+0,50	-0,475	+0,025	-0,0257	0
15	0,0625	-0,0585	+0,0040	+0,50	-0,454	+0,046	-0,0227	0,0177
30	0,1250	-0,1113	+0,0137	+0,50	-0,380	+0,120	-0,0190	0,0430
45	0,1875	-0,1505	+0,0370	+0,50	-0,231	+0,268	-0,0115	0,0774
60	0,2500	-0,1655	-0,0845	+0,50	+0,000	+0,500	0	0,1015

x) aus Tabelle 26, $P \cdot \ell = 10 \cdot 120 = 1200$ cmkg

xx) aus Tabelle 26

$$+) M_T^+ = -M_T^x \cdot \frac{\ell}{2}; \quad M_I^+ = -M_T^x \cdot \frac{\ell}{2} \cdot P \cdot \ell =$$

$$\approx - \frac{M_T^x}{20 \cdot P}$$

$$++) \frac{M_I^+}{P} = \frac{M_T^x}{P} \cdot \frac{\ell}{2} \approx 6 \cdot \frac{M_T^x}{P}, \quad M_I^+ \text{ aus Tab. 26}$$

Tabelle 29a: Längsspannungen $\sigma_{(2)}^*$, $\sigma_{(a)}^*$ und Schubspannungen $\tau_{(13)}$ und $\tau_{(14)}$

infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $0,25 \ell$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	M_I cmkg	$\sigma_{(2)}^*$	$\sigma_{(a)}^*$	M_T	$\pm \tau_1$	Q _I	τ_2	$\tau_{(13)} =$ $\tau_1 + \tau_2$	$\tau_{(14)} =$ $-\tau_1 + \tau_2$
0	0	0	0	+31,0	+8,08	+2,42	+0,44	8,52	-7,64
15	39,98	+ 5,31	-3,48	+26,1	+6,80	+3,15	+0,57	7,37	-6,23
30	100,92	+13,42	-8,79	+14,2	+3,70	+5,12 -4,88	+0,93 -0,88	4,63 +2,82	-2,77 -4,58
45	44,73	+ 5,95	-3,89	+ 1,1	+0,29	-2,69	-0,49	-0,29	-0,78
60	16,35	+ 2,18	-1,42	- 7,6	-1,98	-1,23	-0,22	-2,20	+1,76
75	4,44	+ 0,59	-0,39	-12,2	-3,16	-0,46	-0,08	-3,24	+3,08
90	0,42	+ 0,05	-0,03	-14,2	-3,70	-0,12	-0,02	-3,72	+3,68
105	-0,32	- 0,04	+0,02	-15,0	-3,90	+0,00	0	-3,90	+3,90
120	0	0	0	-15,2	-3,95	+0,03	~ 0	-3,95	+3,95

Tabelle 29h: Längsspannungen $\sigma_{(2)}^*$, $\sigma_{(a)}^*$ und Schubspannungen
infolge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $0,5L$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	M_I cmkg	$\sigma_{(2)}^*$ kg/cm ²	$\sigma_{(a)}^*$ kg/cm ²	M_{II} cmkg	$\pm \tau_1$ kg/cm ²	Q_I kg	τ_2 kg/cm ²	$\tau_{(13)}$ $\tau_1 + \tau_2$	$\tau_{(14)}$ $\tau_1 + \tau_2$
0	0	0	0	+28,4	+7,35	+0,25	+0,04	+7,39	-7,31
15	+4,8	+0,64	-0,42	+27,2	+7,10	+0,46	+0,08	+7,18	-7,02
30	+16,4	+2,18	-1,43	+22,8	+5,91	+1,20	+0,22	+6,13	-5,69
45	+44,4	+5,90	-3,87	+13,8	+3,59	+2,68	+0,49	+4,08	-3,10
60	+101,5	+13,50	-8,85	0	0	+5,00	+0,91	+0,91	+0,91

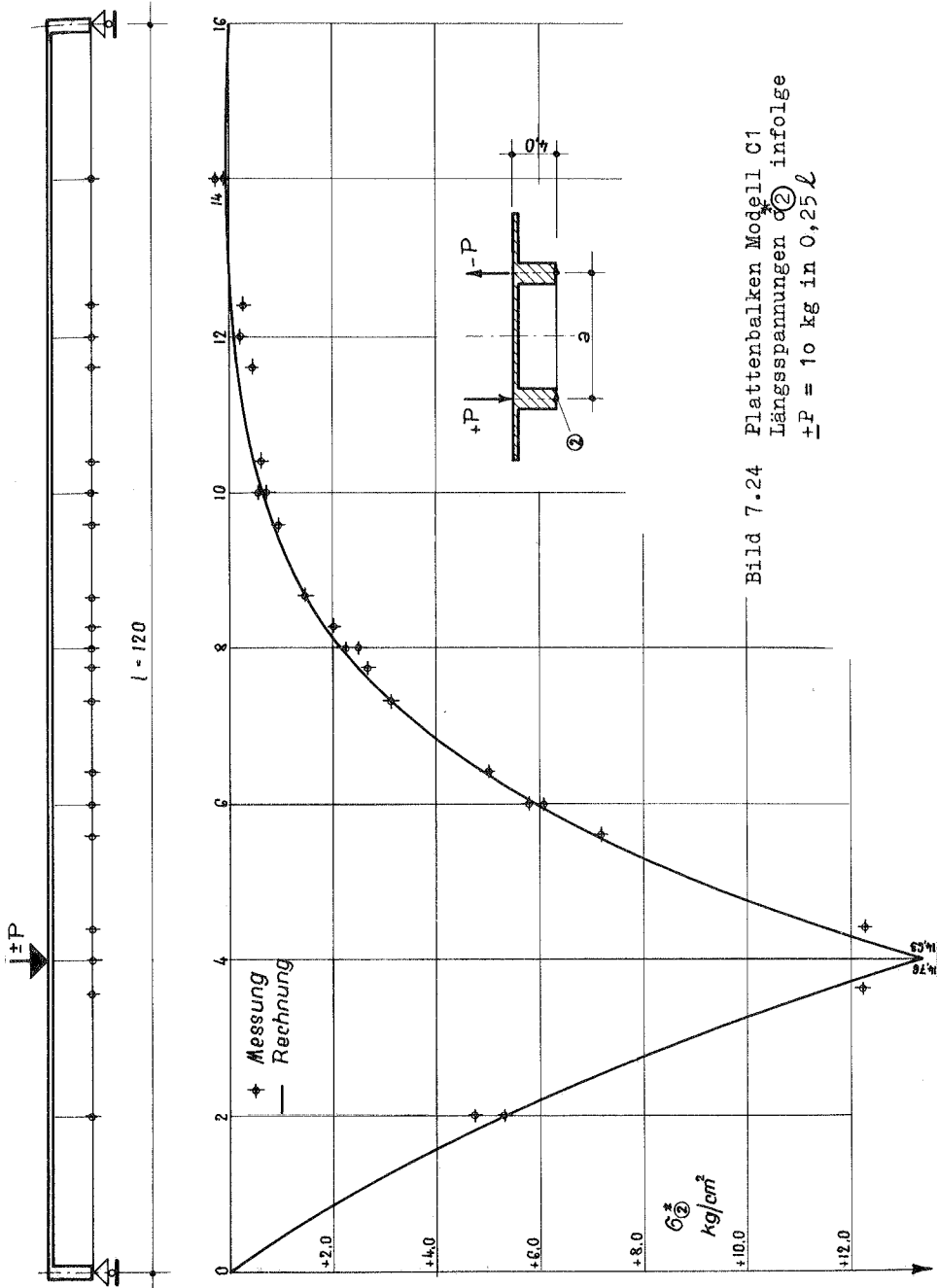


Bild 7.24 Plattenbalken Modell C1
 Längsspannungen σ_{II} infolge
 $\pm P = 10 \text{ kg in } 0,25 \ell$

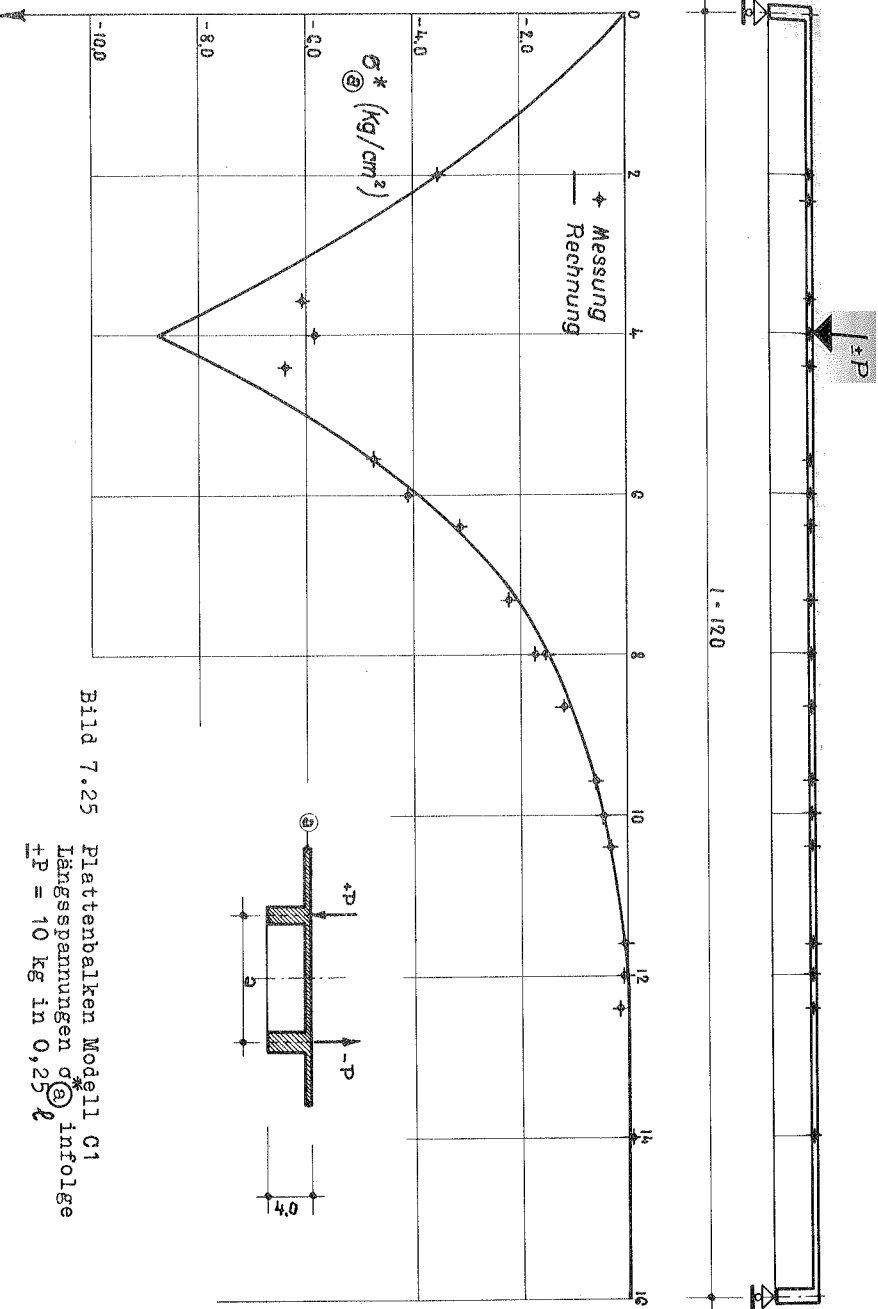


Bild 7.25 Plattenbalken Modell C1
 Längsspannungen σ^* infolge
 $+P = 10 \text{ kg}$ in 0,25

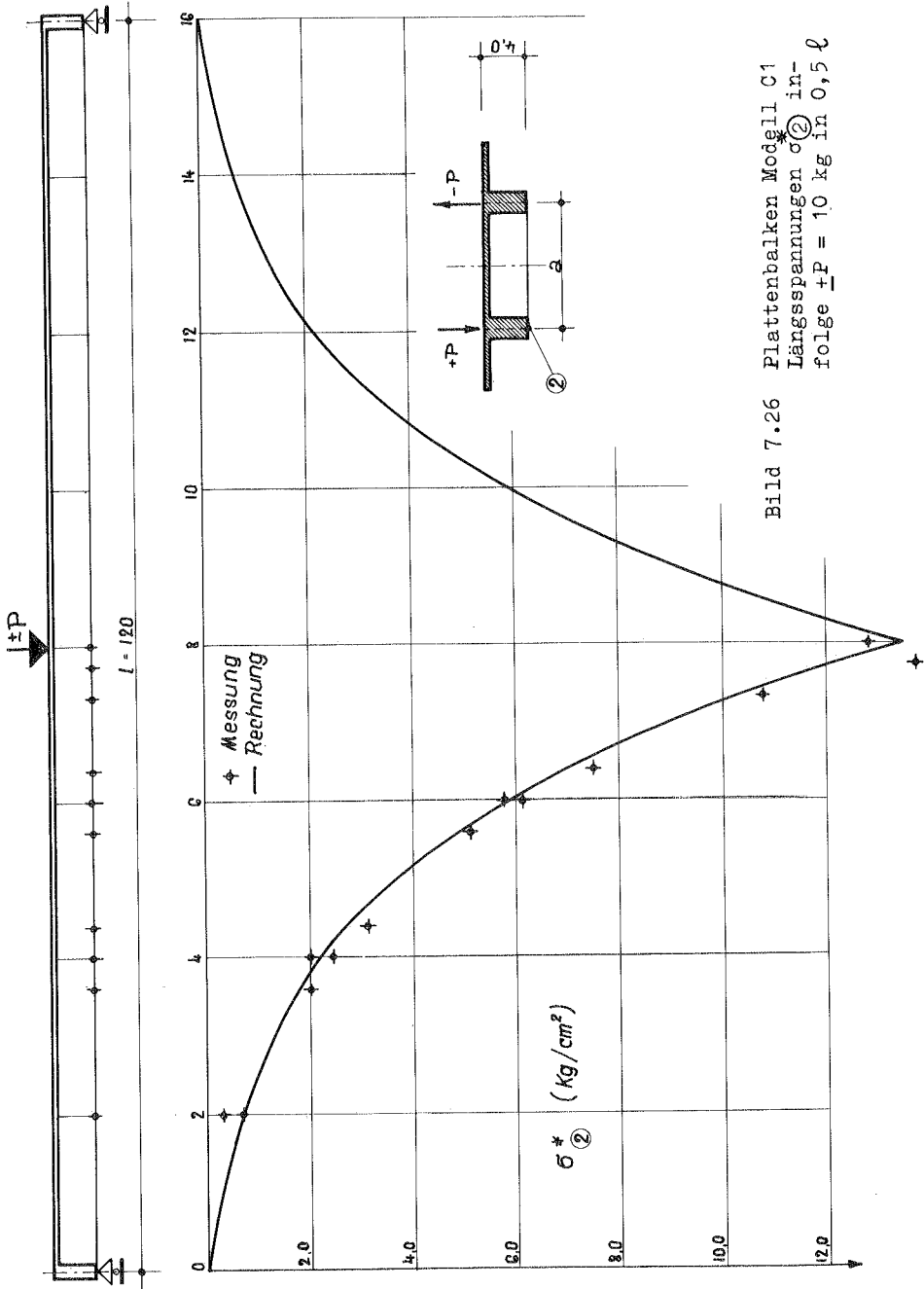


Bild 7.26 Plattenbalken Modell C1
 Längsspannungen σ^* in-
 folge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $0,5 \ell$

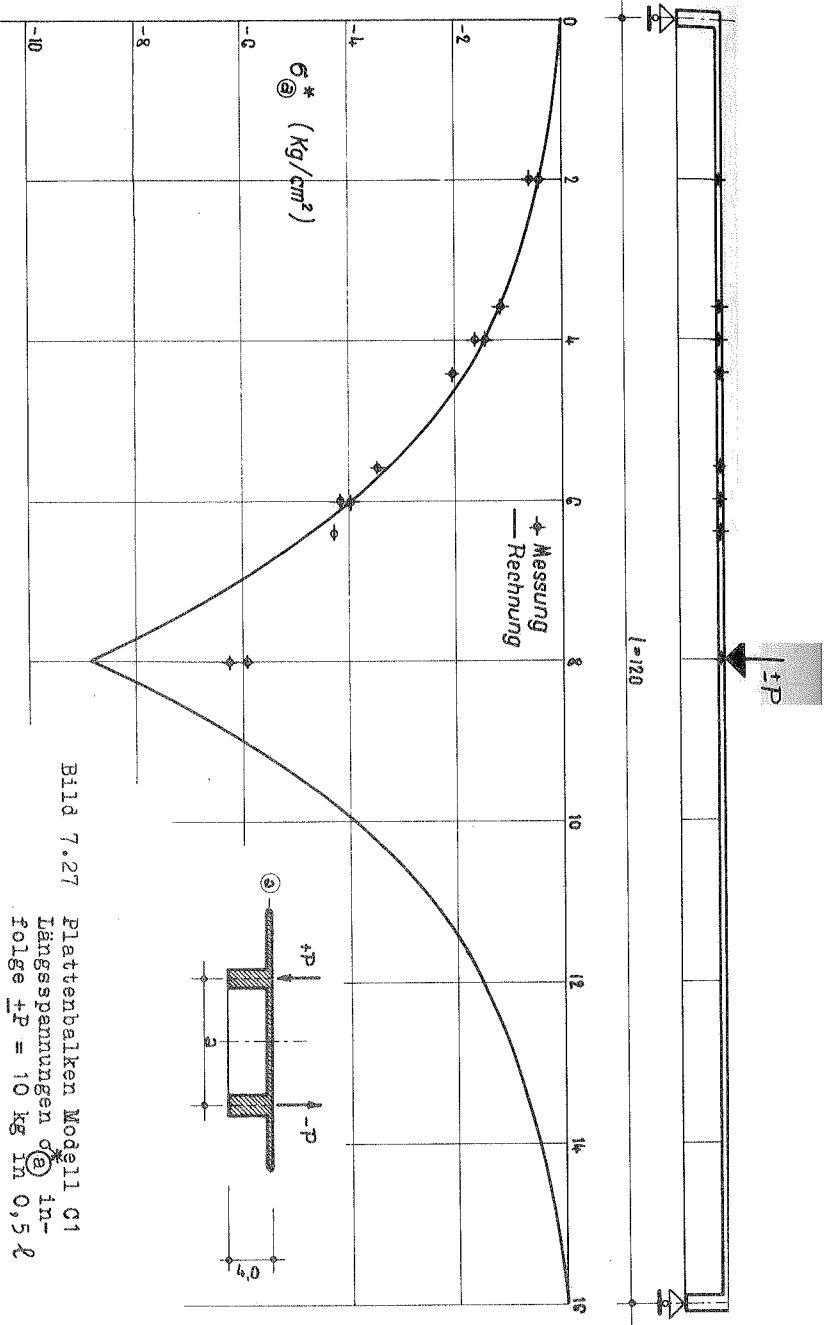


Bild 7.27

Plattenbalken Modell C1
 Längsspannungen σ_x^* in-
 folge $\pm P = 10 \text{ kg}$ in $0,5 \ell$

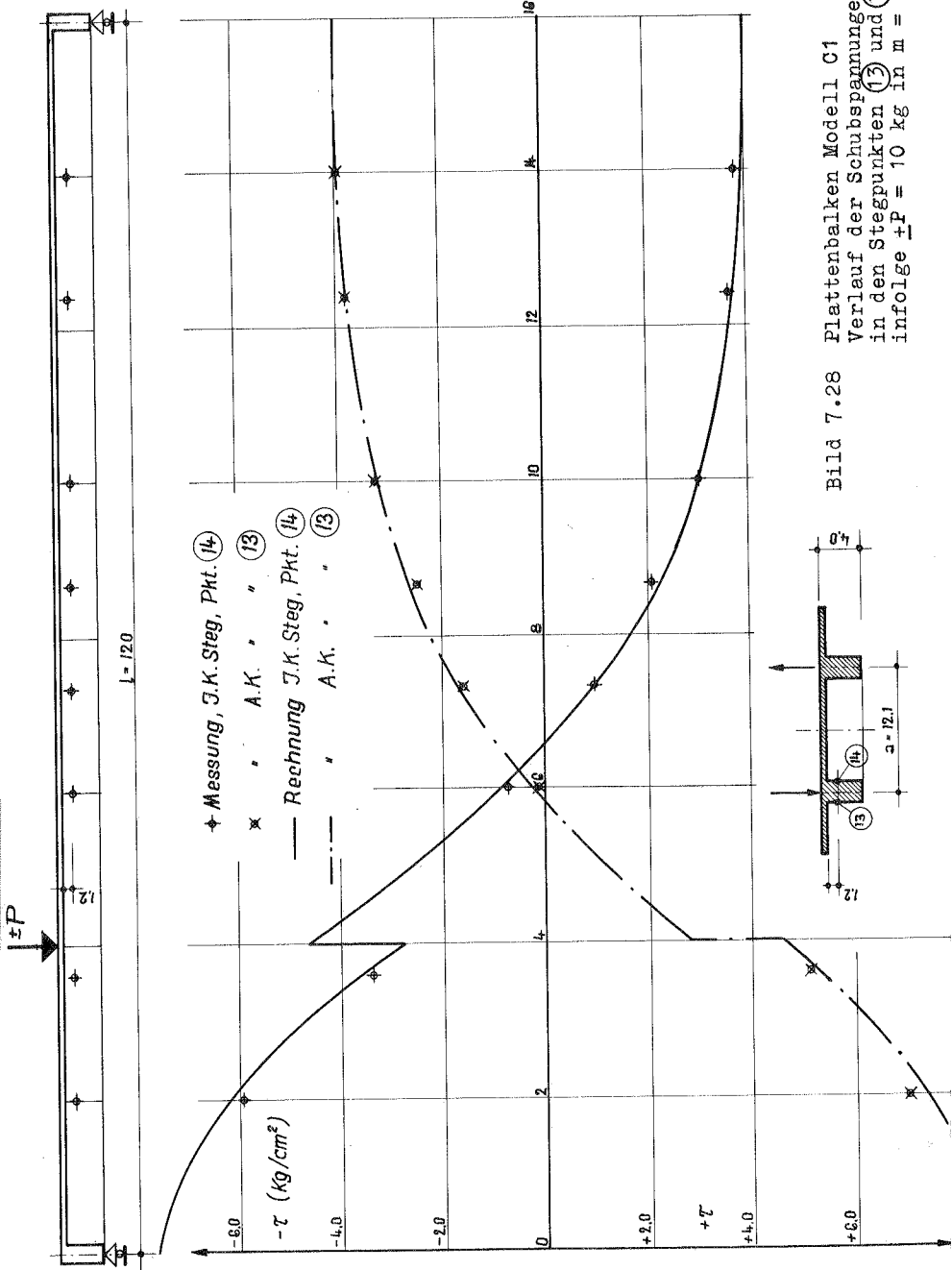
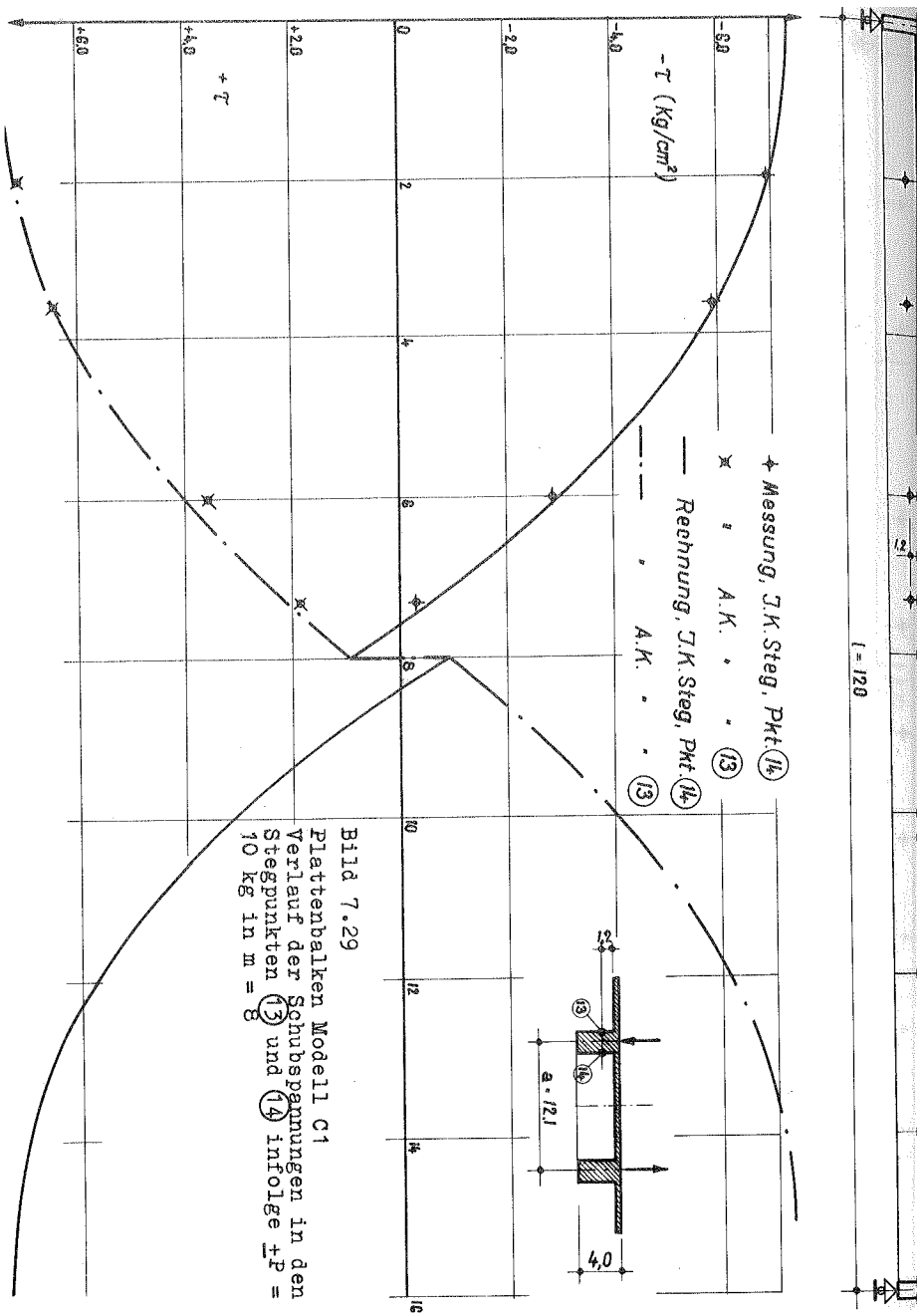


Bild 7.28 Plattenbalken Modell C1
 Verlauf der Schubspannungen
 in den Stegpunkten (13) und (14)
 infolge $P = 10 \text{ kg}$ in $m = 8$



8. Zusammenfassung

8.1. Berechnung zweistegiger Plattenbalken durch Zerlegung des Tragwerkes in ein Biege- und ein Drillsystem

Es wird ein Verfahren zur Berechnung zweistegiger, zur Querschnittsmitte symmetrischer Plattenbalken bei Torsionsbelastung abgeleitet. Dabei sind als Torsionsbelastung gegengleiche lotrechte Einzel- oder Linienlasten in den Stegachsen vorausgesetzt. Bei beliebiger lotrechter Belastung des Plattenbalkens wird die Belastung in eine symmetrische und eine antimetrische Lastgruppe zerlegt, deren Lasten in den Stegachsen wirken (Bild 2.3). Die antimetrische Lastgruppe entspricht dann der obigen Voraussetzung.

Ausser Symmetrie zur Querschnittsmitte und konstanter Plattendicke in Längsrichtung (z-Richtung) sind an die Querschnittsausbildung keine Voraussetzungen geknüpft. (Grundsätzlich ist das Verfahren auch bei stetig veränderlicher Plattendicke in Längsrichtung anwendbar. Praktisch hat dieser Fall jedoch wenig Bedeutung und ist deshalb hier nicht untersucht.)

Die Plattendicke in Querrichtung und die Plattenbreite können also beliebig veränderlich sein, ebenso die Stegdicke und die Steghöhe.

Das Verfahren wird für den frei gelagerten Einfeldbalken abgeleitet. Die Berechnung durchlaufender oder eingespannter Plattenbalken bei Torsionsbelastung ist damit in der gleichen Weise möglich wie bei Biegebelastung. Der Einfluss von Feldquerträgern an beliebigen Stellen kann sowohl hinsichtlich ihrer Biege- als auch ihrer Drehsteifigkeit berücksichtigt werden.

Die Querschnitte an den Auflagern sind umdrehbar angenommen, was bei unverschieblich gelagerten, biegesteifen Auflager-Querträgern praktisch gegeben ist. Die Drehsteifigkeit der Auflager-Querträger kann wie bei den Feldquerträgern mit erfasst werden.

Für die Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen des durch eine antimetrische Lastgruppe verdrehten Plattenbalkens werden die für drillungsfreie Querkraftbiegung bzw. für zwängungsfreie Verdrehung am geraden Steg geltenden vereinfachten Gesetze der Baustatik zugrunde gelegt.

Das Verfahren ist für die Berechnung von Plattenbalken mit grosser Spannweite im Verhältnis zur Plattenbreite im baustatischen Sinne genau. In diesen Fällen kann angenommen werden, dass die Platte auf ganze Breite voll mitwirkt bzw. dass die veränderliche mitwirkende Plattenbreite das Ergebnis der Rechnung nur unwesentlich beeinflusst.

Bei kleinen Spannweiten und damit grösserer Plattenbreite im Verhältnis zur Spannweite kann die mitwirkende Plattenbreite überschläglich bestimmt und die Rechnung als gute Näherung wie bei einem Plattenbalken mit veränderlichem Plattenquerschnitt durchgeführt werden.

Es wird gezeigt, dass unter den obigen Voraussetzungen jeder zweistegige Plattenbalken durch zwei gedachte Tragsysteme ersetzt werden kann. Die Tragsysteme I und II sind hinsichtlich ihrer Abmessungen und Lagerung dem untersuchten zweistegigen Plattenbalken völlig gleich, besitzen jedoch besondere Steifigkeits-Eigenschaften. Denkt man sich die beiden Tragsysteme in der Querschnittsmitte aufgeschnitten, so sollen die sich damit ergebenden beiden e i n -stegigen Plattenbalken beim Tragsystem I keine Drehsteifigkeit besitzen, ausserdem soll die Platte in Querrichtung keine Biegesteifigkeit haben. Sowohl wegen der fehlenden Drehsteifigkeit als auch wegen der fehlenden Biegesteifigkeit können bei antimetrischer Steg-Belastung am Schnittufer keine Querkräfte, sondern nur in Längsrichtung wirkende S c h u b k r ä f t e auftreten (Bild 2.5). Genau genommen wirken am Schnittufer noch Drillmomente. Ihr Einfluss ist jedoch vernachlässigbar klein.

Die Drehsteifigkeit der einstegigen Plattenbalken wird allein dem System II zugewiesen, ebenso die Biegesteifigkeit der Platte in Querrichtung. Dafür besitzen hier die einstegigen Plattenbalken keine Biegesteifigkeit. Bei antimetrischer Belastung der

Stege treten am Schnittufer nur **Q u e r k r ä f t e** auf, die aus Gleichgewichtsgründen den Stegbelastungen umgekehrt gleich sein müssen (Bild 2.6). Schubkräfte können wegen der fehlenden Biegesteifigkeit der einsteigigen Plattenbalken nicht auftreten.

Besitzt der zweistellige Plattenbalken noch biege- und drehsteife Feldquerträger, so haben die beiden gedachten Tragsysteme I und II die gleichen Querträger, jedoch ebenfalls mit besonderen Steifigkeits-Eigenschaften. Die Querträger am System I haben keine Biegesteifigkeit, die Querträger am System II keine Drehsteifigkeit. Die an den Querträgern auftretenden Schnittkräfte können dann am System I nur Torsionsmomente, am System II nur Querkräfte sein (Bild 5.3).

Die Berechnung der Beanspruchungen und Verformungen der beiden einsteigigen Plattenbalken des Systems I und des Systems II ist nunmehr sehr einfach. Am System I wird der einsteigige Plattenbalken durch Steglasten und Schubkräfte (als Schnittkräfte) auf schiefe Biegung beansprucht. Da bei antimetrischen Steglasten eine Verwölbung des Gesamtquerschnittes eintritt, wird das System I auch Wölb-System genannt.

Die Längs- und Schubspannungen sowie die lotrechten Stegverschiebungen v_I infolge **s c h i e f e r** Biegung können mit Hilfe eines auf **e i n f a c h e** Biegung um seine horizontale Schwerachse beanspruchten, einfach-symmetrischen, einsteigigen Plattenbalkens ermittelt werden. Der Stegquerschnitt dieses Plattenbalkens ist der gleiche wie am System I, der zur Stegachse symmetrische, ideale Plattenquerschnitt folgt direkt aus den Abmessungen des Gesamtquerschnittes (Bild 2.10).

Die beiden einfach symmetrischen, nicht miteinander verbundenen Plattenbalken, welche zur Ermittlung der Spannungen und lotrechten Stegverschiebungen v_I des Systems I (= Wölb-System) dienen, heissen **E r s a t z - S y s t e m I** oder **B i e g e s y - s t e m**.

Analog hierzu ist das System II **D r i l l - S y s t e m** genannt, da hier die Belastungen nur zwängungsfreie Drillung hervorrufen können. Hierdurch treten lotrechte Verschiebungen v_{II} der Stege ein, die sich durch die Querbiegung der Platte noch vergrössern.

Die Beanspruchungen des zweistegigen Plattenbalkens infolge antisymmetrischer Steglasten ergeben sich nun aus den Biegebeanspruchungen des Systems I und den Drillbeanspruchungen des Systems II, wenn die lotrechten Stegverschiebungen der beiden Systeme einander gleich gemacht werden: $v_I = v_{II}$. Hierzu denkt man sich zwischen den beiden Systemen in Stegachse zug- und drucksteife Pendel angebracht, in denen die Pendelkräfte r_z auftreten. Dabei sind die Plattenquerkräfte des Systems II den Pendelkräften r_z aus Gleichgewichtsgründen umgekehrt gleich. Wegen der gleichen lotrechten Stegverschiebungen v_I kann das Wölbsystem (I) durch das Biegesystem (I) ersetzt werden (Bild 3.1). Das ganze Problem der Berechnung des zweistegigen Plattenbalkens bei antisymmetrischer Stegbelastung besteht nun nur noch darin, diejenigen Pendelkräfte r_z zu finden, durch die die lotrechten Stegverschiebungen v_I eines mit den Steglasten belasteten einsteigigen mittelsymmetrischen Plattenbalkens infolge einfacher Biegung gleich gross werden wie die lotrechten Verschiebungen v_{II} eines einsteigigen Plattenbalkens infolge zwängungsfreier Drillung und Querbiegung der Platte.

Die Ermittlung der Verschiebungen v_I und v_{II} für eine gegebene Belastung bietet auch bei veränderlichen Plattenbalkenquerschnitten keinerlei Schwierigkeiten. Jedoch können die Verschiebungen im allgemeinen nicht in geschlossener Form, sondern nur für beliebige Zwischenpunkte der Spannweite angegeben werden. Daher wird die Spannweite l in n gleiche Teile unterteilt. An den $(n-1)$ Zwischenpunkten werden die Pendelkräfte als Unbekannte eingeführt. Aus der Gleichsetzung der Verschiebungen $v_I = v_{II}$ an jedem Zwischenpunkt ergibt sich ein lineares $(n-1)$ -gliedriges Gleichungssystem, aus dem die $(n-1)$ Pendelkräfte ermittelt werden können. Man erhält in diesem Fall die Pendelkräfte als Einzelkräfte R_z , während sie in Wirklichkeit stetig verteilte Kräfte r_z sind.

Anstelle der Bedingung gleicher lotrechter Verschiebungen $v_I = v_{II}$ kann man auch fordern, dass die Krümmungen, d.h. die zweiten Ableitungen der lotrechten Verschiebungen $v_I'' = v_{II}''$ der beiden Systeme gleich gross sein sollen. In diesem Falle erhält man bei in Längs- und Quer-

richtung veränderlichen Querschnittsabmessungen zur Bestimmung der Pendelkräfte eine Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten. Die durch diese Differentialgleichung ausgedrückte Bedingung ist in Bild 3.4 anschaulich gedeutet.

Die Differentialgleichung wird zur numerischen Lösung mit Hilfe der Seilpolyongleichung in ein fünfgliedriges lineares Gleichungssystem umgesetzt, wozu die Spannweite wieder in n gleiche Teile Δl zu unterteilen ist. Man erhält dann $(n-1)$ Gleichungen, aus denen sich die Momente M_r - d.h. die Momente am Biegesystem infolge der Pendelkräfte r_z - in allen Zwischenpunkten ergeben. Die Pendelkräfte selbst werden daraus durch zweimaliges Differenzieren gefunden.

Vergleicht man die beiden Rechnungswege miteinander, so besteht der Unterschied darin, dass sich - unter Voraussetzung gleicher Unterteilung der Spannweite in n Abschnitte - bei Gleichsetzung der Verschiebungen $v_I = v_{II}$ ein $(n-1)$ -gliedriges Gleichungssystem, bei Gleichsetzung der Krümmungen $v_I'' = v_{II}''$ nur ein $(n-1)$ -gliedriges Gleichungssystem mit jeweils $(n-1)$ Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten an den $(n-1)$ Zwischenpunkten ergibt. Dabei folgen die Werte der Matrix des Fünf-Momenten-Gleichungssystems direkt aus den veränderlichen Querschnittswerten. Dagegen setzen sich die Matrixwerte des $(n-1)$ -gliedrigen Gleichungssystems aus den Einheitsverschiebungen eines Biegebalkens bzw. den Einheitsverdrehungen eines Torsionsbalkens und der Querbiegung der Platte zusammen, die bei veränderlichen Querschnitten etwas umständlicher zu ermitteln sind. Der Rechenaufwand ist also bei Bestimmung der Unbekannten aus der Gleichsetzung der Krümmungen $v_I'' = v_{II}''$ wesentlich geringer als aus der Gleichsetzung der Verschiebungen $v_I = v_{II}$.

Bei konstantem Querschnitt ergibt die Gleichsetzung der Krümmungen eine Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die verhältnismässig einfach zu lösen ist. Für verschiedene Belastungsfälle, z.B. gegengleiche Steglasten $\pm P$ an beliebiger Stelle der Spannweite, sind in Abschnitt 4.1 die Lösungen bereits gebrauchsfertig angegeben. Bei diesen geschlossenen Lösungen wird wegen der Gleichsetzung der Krümmungen in jedem Punkt natürlich auch die Bedingung gleicher lotrechter Ver-

schiebungen genau erfüllt.

Bei in Querrichtung unendlich steifer Platte - d.h. bei formtreu ausgesteiftem veränderlichem Querschnitt - ergeben sich wesentliche Vereinfachungen, wenn von der Gleichsetzung der Krümmungen ausgegangen wird. Man erhält nur noch eine Differentialgleichung 2.Ordnung mit veränderlichem Koeffizienten, die mit Hilfe der Seilpolyongleichung in eine Drei-Momenten-Gleichung umgesetzt wird.

Bei konstantem, formtreu ausgesteiftem Querschnitt ist die geschlossene Lösung der Differentialgleichung sehr einfach. Die Schnittkräfte zur Ermittlung der Beanspruchungen sind nur noch von einem dimensionslosen Querschnittskennwert α abhängig. Damit können die Schnittkräfte für die praktisch vorkommenden Querschnittskennwerte $\alpha = 0$ bis 10 mit Hilfe von Kurventafeln ohne weitere Zwischenrechnung bestimmt werden.

Schliesslich wird noch eine Näherungslösung für den konstanten, elastisch ausgesteiften Querschnitt angegeben, womit Schnittkräfte wie bei starrer Queraussteifung, aber entsprechend verringert Drehsteifigkeit berechnet werden können (s.Abschnitt 4.4).

Ist der zweistegige Plattenbalken mit gleichen Querträgern in engen Abständen ausgesteift, so ist die Berechnung wie bei einem Plattenbalken ohne Querträger, aber mit entsprechend biegesteiferer Platte durchzuführen. Man kann also die Pendelkräfte aus der Bedingung gleicher Krümmungen, d.h. mit Hilfe der Fünf-Momenten-Gleichungen ermitteln. Bei Querträgern in grösseren Abständen bzw. bei stark wechselnder Quersteifigkeit führt jedoch nur die Bedingung gleicher lotrechter Verschiebung zum Ziele, da die Anwendung der Fünf-Momenten-Gleichungen in Längsrichtung konstante Querbiegesteifigkeit voraussetzt. Wie dabei hinsichtlich der Unterteilung der Spannweite vorzugehen ist, wird im Einzelnen beschrieben und an einem Beispiel erläutert. Soll ausser der Biegesteifigkeit der Querträger auch deren Drehsteifigkeit mit erfasst werden, so wird zweckmässig das System mit nur biegesteifen Querträgern als Grundsystem aufgefasst und die unbekanntenen Querträger-torsionsmomente aus der Gleichsetzung der Querträger-Drehwinkel am Biegesystem ermittelt (Abschnitt 5.5).

Auch bei der Behandlung durchlaufender Plattenbalken erweist sich die Trennung in die beiden Systeme als vorteilhaft. Das Biegesystem entspricht in diesem Falle einem durchlaufenden Balken, während für das Drillsystem einzelne Einfeldbalken angenommen werden können, da an den starren Auflagern keine Kräfte von einem Feld in das benachbarte weitergeleitet werden können. Bei der Berechnung ist also nur die Kontinuität am Biegesystem durch statisch unbestimmte Stützmomente wiederherzustellen (Bild 6.3).

8.2 Vergleich des durch Torsionslasten beanspruchten Plattenbalkens mit einem Balken auf elastischer Bettung

Der Verlauf der Beanspruchungen eines zweistegigen Plattenbalkens in Längsrichtung infolge Wölbkrafttorsion ist den Beanspruchungen eines Biegebalkens auf elastischer Unterlage ähnlich. Aus der Trennung des zweistegigen Plattenbalkens in die beiden Systeme erkennt man, dass das System I, welches nur auf Biegung beansprucht wird, tatsächlich auch als Balken auf elastischer Unterlage aufgefasst werden kann. Die elastische Unterlage wird durch das System II gebildet, welches einer lotrechten Verschiebung der Stege des Systems I über die Pendelkräfte seinen Verformungswiderstand entgegensetzt. Der Verformungswiderstand bzw. die Bettungsziffer ist jedoch in Längsrichtung veränderlich und hängt nicht nur von den Abmessungen, sondern auch von der Art und Stellung der Belastung ab. Es ergeben sich also bei verschiedenen Belastungen auch verschiedene Bettungsziffern. Um den tordierten Plattenbalken hinsichtlich seiner Wölbbeanspruchungen als elastisch gestützten Balken zu berechnen, könnte man daran denken, feste Bettungsziffern für bestimmte Lastgruppen zu ermitteln, die übereinander gelagert die tatsächlich vorhandene Belastung ergeben. Die Beanspruchungen des Balkens auf elastischer Unterlage infolge der Lastgruppen entsprechen dann den Beanspruchungen am System I, wobei für jede Lastgruppe die zugehörigen Bettungsziffern berücksichtigt werden müssen. Dieser Berechnungsweg bringt jedoch bei veränderlichen Querschnittsabmessungen keine Vorteile. Bei konstanten Querschnittsabmessungen lassen sich dagegen die

Lastgruppen sehr einfach bestimmen. Es ergeben sich bei Einzel-lasten $\pm P$ Lastgruppen mit sin-förmigem Verlauf: $\pm P_z = P_0 \cdot \frac{\sin \alpha_n z}{l}$, $n = 1, 2, 3 \dots$. In diesem Falle sind die Pendelkräfte R_z den Lasten P_z der Lastgruppen proportional, sie haben also denselben sin-förmigen Verlauf. Die Bettungszahl α_n ist für jede der n Lastgruppen auf ganze Balkenlänge konstant und nur mehr von den Abmessungsverhältnissen des Plattenbalkens abhängig. Sie entspricht bei genügend enger Unterteilung der Spannweite bzw. genügend vielen Einzellasten je Lastgruppe dem Wert α_n , der in Abschnitt 4.4 für sin-förmige Belastungen auf andere Weise gefunden wurde.

8.3 Vergleich der Rechnungsergebnisse mit den Messungen

Mit dem geschilderten Verfahren wurden in Abschnitt 7 verschiedene Plattenbalken - und zwar mit veränderlichem und konstantem Querschnitt sowie mit und ohne Querträger - durchgerechnet und die ermittelten Spannungen und lotrechten Stegverschiebungen den vom Institut für Spannungsoptik und Modellmessung der Technischen Hochschule Stuttgart auf Grund von Messungen ermittelten Werten gegenübergestellt. Die umfangreichen und sehr sorgfältigen Messungen wurden an Plattenbalken-Modellen mit 1,2 m Spannweite durchgeführt.

Untersucht wurde zunächst ein Plattenbalken mit veränderlicher Steghöhe ohne Querträger (Modell B1). Die Spannungen sind in 4 Querschnittspunkten, nämlich in U.K.Steg (Punkt ②), in A.K.Platte (Punkt ①), an A.K. und I.K.Steg - jeweils 12 mm unter der Plattenunterkante (Punkt ⑬ und ⑭) - für die Achtelspunkte der Spannweite ermittelt. In den Bildern 7.8 bis 7.13 ist oben jeweils der Längsschnitt des Plattenbalkens mit Angabe der Messpunkte, darunter der rechnerische Verlauf der Spannungen dargestellt. Die gemessenen Werte sind durch kleine Kreise gekennzeichnet. Die gegengleichen Steglasten $\pm P$ greifen in 0,5 l bzw. 0,25 l an.

Man erkennt aus Bild 7.8 bis 7.11, dass die gerechneten Längsspannungen $\sigma_{②}^*$ und $\sigma_{①}^*$ sehr genau mit den gemessenen übereinstimmen. Die Abweichungen liegen vielfach im Bereich der Messgenauig-

keit, die mit etwa $\pm 0,1$ kg/cm² angenommen werden kann. Lediglich an den Last-Einleitungsstellen sind die Abweichungen grösser, und zwar ergibt die Messung an der Stegunterkante (Punkt ②) grössere, an der Plattenaussenkante (Punkt ①) kleinere Werte als die Rechnung. Der Grund hierfür liegt in der Einschnürung der mitwirkenden Plattenbreite an der Last-Einleitungsstelle, was in der Rechnung nicht berücksichtigt wurde. Tatsächlich verringert sich durch die Einschnürung das ideale Widerstands-Moment, so dass sich höhere Stegspannungen ergeben. Andererseits ist die Längsspannungszunahme in der Platte nach dem Plattenrand hin nicht mehr linear, da sie sich der Mitwirkung entzieht, wodurch am Plattenrand kleinere Spannungen auftreten.

Auffällig ist der Vorzeichenwechsel der Spannungen in den lastfernen Bereichen. Er ist auf die stark veränderlichen Querschnittswerte zurückzuführen, wodurch nach dem Rand zu das Biegesystem durch das Drillsystem stärker unterstützt wird. Dieser Vorzeichenwechsel konnte bei konstantem Querschnitt mit elastischer Queraussteifung nicht oder in nur ganz unbedeutendem Maße festgestellt werden (vgl. Bild 7.17 und Bild 7.25)^{x)}

Von besonderem Interesse sind die Schubspannungen in den Stegpunkten ③ und ④ (Bild 7.12 und 7.13). Hier überlagern sich die Wirkungen aus Wölbkraft- und freier Torsion bzw. die Schubspannungen von System I und II. Die Rechnung zeigt auch hier sehr gute Übereinstimmung mit der Messung. Der Sprung in der Spannungslinie folgt aus der sprungweisen Änderung der Querkraft an der Laststelle am Wölbssystem. Man kann daraus den Anteil der Schubspannung infolge Wölbkrafttorsion (τ_2) an der Laststelle ablesen. Er ist im Verhältnis zu den Schubspannungen aus freier Torsion (τ_1) klein.

Aus der guten Übereinstimmung der Spannungen folgt, dass auch die gerechneten lotrechten Stegverschiebungen mit der Messung übereinstimmen müssen (Bild 7.14). Man erkennt aber auch hier noch den Einfluss der geringeren mitwirkenden Plattenbreite an den etwas

^{x)} Bei konstantem Querschnitt mit starrer Queraussteifung tritt der Vorzeichenwechsel nicht ein.

grösseren Verschiebungswerten im Bereich der Last-Einleitungsstellen. Im übrigen Bereich stimmen Messung und Rechnung praktisch genau überein. Die Umkehrung des Krümmungssinnes der Kurven in der Nähe der Lager entsprechend dem Vorzeichenwechsel der Längsspannungen (vgl. Bild 7.8 und 7.9) wird besonders bei der Laststellung $\pm P$ in $0,25 \ell$ deutlich.

Für den gleichen Plattenbalken wurde auch der Einfluss von verschiedenen Queraussteifungen auf die Längsspannungen in Punkt ② (U.K.Steg) ermittelt. Das Ergebnis der Rechnung zeigen die Linien in Bild 7.15. Setzt man starre Queraussteifungen in engen Abständen bzw. eine in Querrichtung starre Platte voraus, dann erhält man die Linie (1), die bis auf die Laststelle stetig verläuft. Berücksichtigt man elastische oder starre Querträger nur in den Viertelpunkten der Spannweite, so ergeben sich die Linien (2) und (3) mit Knicken an den Querträgerpunkten. Die rechnerischen Längsspannungen sind in den drei untersuchten Fällen nur wenig voneinander verschieden. Den am Modell B2 gemessenen Werten kommt die für starre Queraussteifung gerechnete Linie (1) im mittleren Bereich der Spannweite am nächsten. An den Querträgerstellen in $0,25 \ell$ und $0,75 \ell$ und weiter bis zu den Lagern ergibt die Messung deutlich andere Werte. Die Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass die Drehsteifigkeit der Querträger in der Rechnung nicht berücksichtigt wurde. Diese wirkt sich nur an den Querträgern in $0,25 \ell$ und $0,75 \ell$ aus - der Querschnitt des Querträgers in $0,5 \ell$ erfährt bei $\pm P$ in $0,5 \ell$ wegen Symmetrie keine Verdrehung. Die Torsionsmomente in den Querträgern bei $0,25 \ell$ und $0,75 \ell$ ergeben im Anschluss an den Steg des Plattenbalkens einen Sprung in der Momentenlinie des Biegesystems entsprechend Bild 5.4. Ähnlich verlaufen die hier gemessenen Längsspannungen. Der Einfluss der Querträger-Torsion musste bei den Messungen insofern besonders deutlich werden, als die Querträger der Kunststoffmodelle durch seitlich aufgeschraubte kräftige Stossflaschen aus Metall sehr drehsteif waren.

Ausser dem Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt wurden noch zwei Plattenbalken mit konstantem Querschnitt ohne Aussteifung durch Querträger untersucht. (Modelle A1 und C1). Die Querschnitte der beiden Plattenbalken waren dieselben wie am Auflage

bzw. in $0,5\ell$ des Plattenbalkens mit veränderlichem Querschnitt. Der Schlankheitsgrad h/ℓ der beiden Plattenbalken ergab sich damit zu $1 : 15$ bei Balken A und zu $1 : 30$ bei Balken C. Diese Schlankheitsgrade entsprechen den im Spannbeton-Brückenbau üblichen Grenzwerten.

In den Bildern 7.17 bis 7.20 sind für den Balken A1 der Verlauf der rechnerischen Längsspannungen in U.K.Steg (Punkt (2)) und am Plattenrand (Punkt (a)) bei Laststellungen $\pm P$ in $0,25\ell$ und $0,5\ell$ und die entsprechenden Meßwerte dargestellt. Bild 7.21 und 7.22 zeigen wieder die Schubspannungen in den Stegpunkten (13) und (14).

In den Bildern 7.24 bis 7.29 sind Spannungen an den entsprechenden Punkten des Balkens C1 wiedergegeben.

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist auch hier wieder sehr gut.

Die Rechnung konnte in diesem Fall wegen des konstanten Querschnitts mit den in Abschnitt 4.1.1 angegebenen geschlossenen Lösungen der Differentialgleichung 4.Ordnung durchgeführt werden.

Aus dem Vergleich der Ergebnisse der Rechnung mit den Messungen an Modellen mit veränderlichem und konstantem Querschnitt, mit und ohne Queraussteifung und mit verschiedenen Schlankheitsverhältnissen geht hervor, dass das Berechnungsverfahren in allen praktisch vorkommenden Fällen Werte liefert, die den tatsächlichen Spannungs- und Verformungszustand infolge Torsionsbelastung an jeder beliebigen Stelle mit grosser Genauigkeit beschreiben.

An dieser Stelle möchte der Verfasser den mit den Modell-Messungen betrauten Ingenieuren, insbesondere Herrn Dipl.Ing.Weber, bestens danken für ihre mit grosser Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit durchgeführten Arbeiten.

9. Konstruktive Folgerungen

Vergleicht man bei den hier untersuchten Plattenbalken die Längsspannungen infolge Wölbkrafttorsion mit und ohne Aussteifungen durch die Querträger miteinander, z.B. Bild 7.9 und 7.15, so fällt auf, dass sich die Längsspannungen durch den Einbau der Querträger nur verhältnismässig wenig verringern, obwohl hierdurch die Biegesteifigkeit in Querrichtung ganz erheblich vergrössert wird. Die Längsspannungen werden z.B. an der Laststelle, wo die Maximalwerte auftreten, nur um ca 10% kleiner. Der Grund hierfür ergibt sich leicht aus der Betrachtung der beiden gedachten Systeme. Die Längsspannungen infolge Wölbkrafttorsion entsprechen den Längsspannungen am Biegesystem (I), welches durch das Drillsystem (II) elastisch unterstützt wird (vgl. 8.2). Bei den hier untersuchten Fällen ist nun die Biegesteifigkeit der Platte \bar{B}_1 in Querrichtung schon so gross, dass eine weitere Vergrösserung durch den Einbau von Querträgern keine wesentliche Erhöhung der 'Bettungsziffer' ergibt. Infolge der somit nur wenig härteren, elastischen Stützung des Biegesystems (I) können die Längsspannungen auch nur unbedeutend kleiner werden.

Den geringeren Längsspannungen entsprechen höhere Schubspannungen aus freier Torsion am Drillsystem. Die Schubspannungen nehmen durch den Einbau der Querträger unterschiedlich zu. An den massgebenden Schnitten in Auflagernähe beträgt die Zunahme nur wenig Prozente. Bei wesentlich geringerer Plattensteifigkeit \bar{B}_1 würde sich der Einbau von Querträgern natürlich viel stärker auswirken. Jedoch entspricht eine geringere Plattensteifigkeit selten den Verhältnissen in der Praxis. Bei einem Modellmassstab von $1 : 33 \frac{1}{3}$ wäre die Platte in Wirklichkeit nur 16,6 cm dick bei einem Stegabstand von 4,0m und einer Spannweite des Plattenbalkens von 40 m. Die Plattensteifigkeit am Modell stellt also vergleichsweise schon die untere Grenze der praktisch vorkommenden Fälle dar.

Die Änderung der Längs- bzw. Schubspannungen durch Anordnung von steifen Querträgern wird also nur selten von Bedeutung sein. Man könnte daraus schliessen, dass sich der Einbau von Querträgern

wenig lohnt, vor allem, wenn die Bemessung der Plattenbalken durch die Höhe der Schubspannungen beeinflusst wird. Es ist jedoch zu bedenken, dass durch die Querträger die Biegebeanspruchungen in der Platte ganz erheblich verringert werden. Das gilt besonders bei schlanken bzw. biegeweichen Plattenbalken mit dicken Stegen, zum Beispiel entsprechend Modell C. Ohne Querträger (Modell C 1) beträgt hier das Biegemoment in der Platte am Steganschluss infolge der antimetrischen Steglasten $\pm P$ in der Mitte der Spannweite: $m_x \sim \pm 0,08 P$ (cmkg/cm).

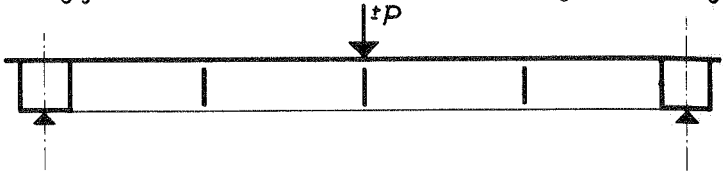
Zum Vergleich erhält man bei starrer Einspannung der Platte in den Stegen und P in Plattenmitte das Moment am Steganschluss: $m_x \sim - 0,16 P$. Das aus der Torsionsbelastung herrührende Plattenmoment kann also erheblichen Einfluss auf die Bemessung, insbesondere des Anschlusses der Platte an die Stege, haben.

Dieses Plattenmoment wird jedoch bei Anordnung von steifen Querträgern auf einen praktisch bedeutungslosen Wert herabgedrückt. Dabei genügen in den meisten Fällen schon 2 bis 3 Querträger je Spannweite. Für die Anzahl der Querträger ist jedoch nicht nur die hier untersuchte antimetrische Belastung von Bedeutung. Um bei Belastung der Platte (ausserhalb der Stege) einen hohen Einspanngrad der Platte in die Stege zu erzielen, können biegesteife Querträger auch in engeren Abständen notwendig werden.

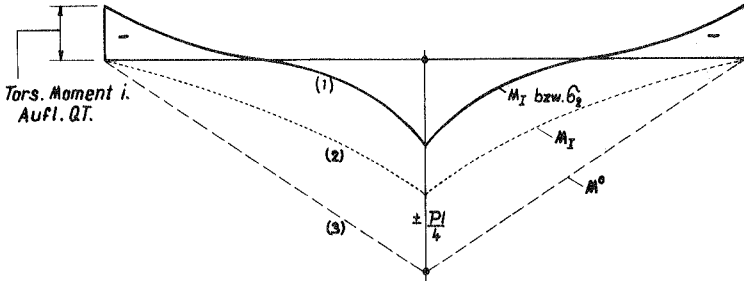
Der Einbau biegesteifer Querträger wirkt sich also immer günstig auf die Beanspruchungen in der Platte aus, dagegen hat er bei den hier in Betracht gezogenen Querschnittsverhältnissen auf die Längs- bzw. Schubspannungen des Plattenbalkens infolge antimetrischer Belastung nur geringen Einfluss.

Um diese Spannungen günstig zu beeinflussen, ist es notwendig, die Querträger auch noch **d r e h s t e i f** auszubilden. Am besten würden sich Querträger mit Hohlquerschnitten eignen. Werden die drehsteifen Querträger z.B. entsprechend Bild 9.1a nur über den Auflagern angeordnet, so erhält man auch beim Einfeldbalken eine hohe Einspannung für Torsionsbelastung. Betrachtet man wieder die beiden gedachten Tragsysteme, so ist gemäss Bild 5.3 die Drehsteifigkeit der Querträger nur am Biegesystem (I) zu berücksichtigen. Die Balkenenden werden durch die drehsteifen

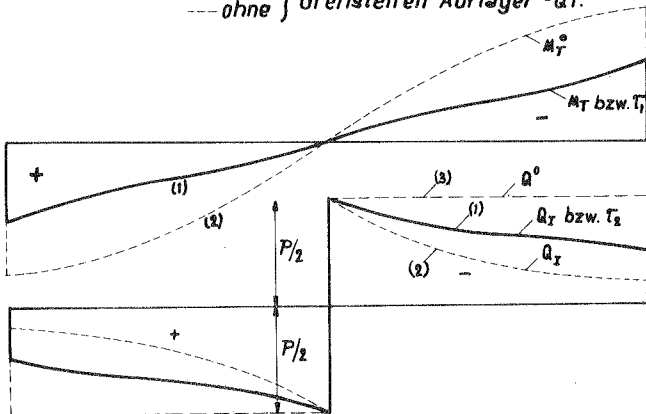
a.) Zweistegiger Plattenbalken mit drehsteifen Auflager - Querträgern



b.) Verlauf der Biegemomente M_I bzw. Längsspannungen σ_2 aus Wölbkrafttorsion: — mit } drehsteifen Auflager-QT.
 ohne }



c.) Verlauf der Torsionsmomente M_T bzw. Schubspannungen τ_1 aus freier Torsion: — mit } drehsteifen Auflager-QT.
 ohne }



d.) Verlauf der Querkräfte Q_T bzw. Schubspannungen τ_2 aus Wölbkrafttorsion: — mit } drehsteifen Auflager-QT.
 ohne }

Bild 9.1 Einfluss drehsteifer Endquerträger auf die Spannungen infolge Wölbkraft- und freier Torsion

Querträger elastisch eingespannt, wobei wegen der im Verhältnis zur Spannweite kurzen Querträger stets ein hoher Einspanngrad erreicht werden kann. Die lotrechten Stegverschiebungen infolge der Lasten am Biegesystem (I) werden damit kleiner, so dass vor allem bei schlanken Plattenbalken das darunter angeordnete Drillsystem (II) wesentlich geringer beansprucht wird.

Das ist insofern von Bedeutung, als bei schlanken Plattenbalken ohne drehsteife Auflager-Querträger die Schubspannungen (bzw. Hauptspannungen) am Drillsystem - also aus freier Torsion - fast die gleiche Grössenordnung erreichen wie die Längsspannungen (bzw. Hauptspannungen) am Biegesystem - also aus Wölbkrafttorsion.

In Bild 9.1b bis 9.1d ist der Einfluss drehsteifer Endquerträger auf die Längs- bzw. Schubspannungen bei $\pm P$ in $l/2$ schematisch dargestellt. Der Vergleich der Linien (1) und (2) zeigt, dass durch die Endeinspannung sowohl die Längsspannungen σ_2 aus Wölbkrafttorsion, als auch die Schubspannungen τ_1 aus freier Torsion geringer werden. Dagegen erhöhen sich die Schubspannungen τ_2 aus Wölbkrafttorsion. Diese Erhöhung ist jedoch ohne grosse Bedeutung, da $\max \tau_2$ meist erheblich kleiner als $\max \tau_1$ ist.

Weiter werden auch die Biegemomente in der Platte bzw. in den Feld-Querträgern durch die drehsteifen Auflager-Querträger verringert, da bei sonst gleichen Abmessungsverhältnissen die lotrechten Stegverschiebungen und damit die Biegeverformungen der Platte bzw. der Querträger kleiner sind.

Um die Beanspruchungen infolge Torsionsbelastung noch weiter zu verringern, können auch die Feldquerträger torsionssteif ausgebildet werden. In Bild 9.2a sind Feldquerträger mit verschiedenen geformten Hohlquerschnitten dargestellt. Eine günstige Lösung dürfte der Dreieck-Querschnitt gemäss Bild 9.2b sein. Der gegenüber einem Querträger mit nur biegesteifem Rechteckquerschnitt erforderliche Mehrbedarf an Material ist besonders gering, wenn die Platte zugleich die obere Dreieck-Seite bildet.

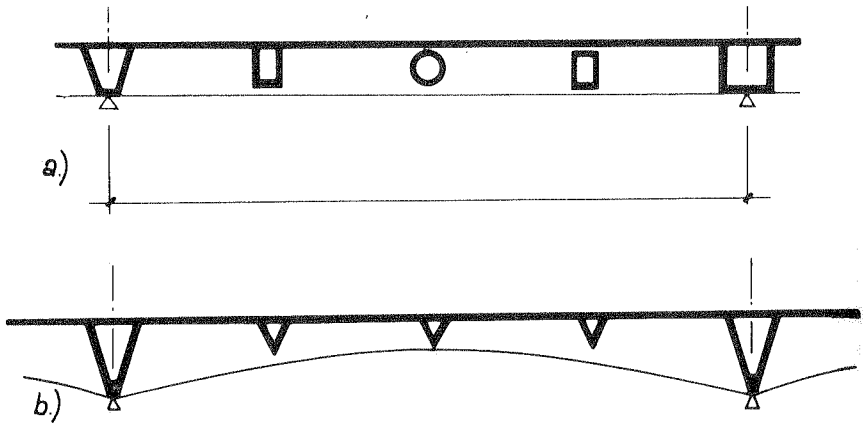


Bild 9.2 Zweistegige Plattenbalken mit biege- und drehsteifen Querträgern

- a) Verschiedene Querschnittsmöglichkeiten für drehsteife Querträger
- b) Querträger mit Dreieck-Querschnitt

Auflager-Querträger mit Dreiecks-Querschnitten haben gegenüber runden oder rechteckigen Querschnitten noch den Vorteil, dass die Lager ohne besondere Maßnahme auch unter dem Querträger angeordnet werden können, wenn die Breite der Hauptträgerstege hierfür nicht ausreicht.

Die Anordnung nicht nur biege- sondern auch drehsteifer Querträger bei zweistegigen Plattenbalken kann also dann zweckmässig sein, wenn wesentliche Torsionslasten zu übertragen sind, wie zum Beispiel bei durch Verkehr stark ausmittig belasteten Brücken. Es besteht damit die Möglichkeit, den Plattenbalkenquerschnitt auch in den Fällen anzuwenden, die bislang nur dem Hohlquerschnitt vorbehalten waren. Die wesentlich einfachere Herstellung des Plattenbalkens gegenüber dem Hohlkasten im Betonbrückenbau wird sich dabei in wirtschaftlicher Hinsicht günstig auswirken.

10. Schrifttum

- [1] Brendel, G.: Die 'mitwirkende Plattenbreite' nach Theorie und Versuch. Beton- und Stahlbetonbau 1960, Jahrgang 55, Heft 8.
- [2] Wagner und Pretschner: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Luftfahrtforschung 1934, S.174 ff.
- [3] Kappus: Luftfahrtforschung 1937, S.444.
- [4] Wansleben: Die Theorie der Drehsteifigkeit von Stahlbauteilen. Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 3, 1948, Stahlbauverband.
- [5] Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Stahlbau 21 (1952) Heft 1.
- [6] Lindenberger: Vergleich und Analogiebetrachtung der Lösungen für biegebeanspruchte und verdrehbeanspruchte Stabwerke. Stahlbau 22 (1953) Heft 1.
- [7] Lie: Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II.Ordnung. Stahlbau 14 (1941).
- [8] Bornscheuer, F.W.: Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit vollbehindertem Querschnitt. Stahlbau 21 (1952) Heft 12
- [9] Bornscheuer, F.W. und Anheuser, L.: Tafeln der Torsionskenngrößen für die Walzprofile der DIN 1025 - 1927 - , Stahlbau 3/1961
- [10] Cornelius: Über den Einfluss der Torsionssteifigkeit auf die Verdrehung von Tragwerken. MAN-Forschungsheft 1951
- [11] Jäger: Drillungssteife, zweistegige Plattenbrücken. Österr.Bauzeitschrift, 9.Jahrg.,H.2/1954
- [12] Beck, H.: Ein Beitrag zum Problem des zweistegigen Plattenbalkens unter einseitiger Belastung. Dissertation der Techn.Hochschule Darmstadt, 1953.

- [13] Resinger: Ermittlung der Wölbspannungen an einfach symmetrischen Profilen nach dem Drillträgerverfahren. Stahlbau 26 (1957) Heft 11.
- [14] Köller: Einflussfelder für die Hauptträger-Schnittkräfte zweistegiger Plattenbalken. Bautechnik-Archiv, Heft 16, 1958.
- [15] Sommerfeld, W.: Beitrag zur Theorie der Plattenbalkenbrücke. Dissertation, Berlin 1960.
- [16] Trost: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken. Mitteilungen aus dem Institut für Mas-sivbau der TH Hannover, Werner-Verlag Düsseldorf, 1961.
- [17] Goodier und Barton: The Effects of Web Deformation on the Torsion of I-Beams. Journal of Applied Mechanics, Vol.11 (1944) Nr.1
- [18] Scheer, J.: Zusammenfassender Bericht über [17] in Stahlbau 24 (1955) Heft 11.
- [19] Fucher, A.: Einflussfelder elastischer Platten. Springer-Verlag Wien, 1958.
- [20] Bittner, E.: Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Springer-Verlag Wien, 1938.
- [21] Cerny, F.: Tafeln für gleichmässig vollbelastete Rechteckplatten. Bautechnik-Archiv, Heft 11, Verlag Ernst und Sohn, Berlin, 1955.
- [22] Chwalla, E.: Einführung in die Baustatik. Veröffentlichung vom Deutschen Stahlbauverband, 1941, S.142.
- [23] Beyer, K.: Die Statik im Stahlbetonbau. Springer-Verlag 1948, Seite 30.
- [24] Stüssi, F.: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Springer-Verlag 1958, Seite 180 ff.
- [25] Ebner, H.: Die Beanspruchung dünnwandiger Kasten-träger bei behinderter Querschnitts-verwölbung. DVL-Jahrbuch 1933 und ZFM 1933.

- 6] Institut für Spannungs-optik und Modellmessung der TH Stuttgart: Tragwirkung symmetrischer Plattenbalken bei Torsionsbelastung. Unveröffentlichter Versuchsbericht und Messprotokolle 1960 - 1962.
- 7] Bieger, K.W.: Vorberechnung zweistegiger Plattenbalken. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 8/1962. Verlag Ernst und Sohn, Berlin.
- 8] Gruber, E.: Die Querverteilung von Lasten bei Brücken mit zwei Hauptträgern. Der Bauingenieur, Heft 45/46 1942, Springer-Verlag, Berlin
- 9] Stiglat, K.: Rechteckige und schiefe Platten mit Randbalken. Verlag Ernst und Sohn, Berlin, 1962.
- 0] Bechert, H.: Einflussflächen zweistegiger Plattenbalken. Beton- und Stahlbetonbau 1957, S.17/21. Verlag Ernst und Sohn, Berlin

Lebenslauf

Wolfhart A n d r ä

- 23.Juli 1914 geboren in Gera/Thüringen.
Eltern: Studienrat Dr.Ernst Andrä und Frau Anna
geb.Lässig.
- 1921 - 1925 Besuch der Volksschule und
- 1925 - 1934 des Gymnasiums Rheteneum bis zum Abitur in Gera,
Arbeitsdienst.
- 1934 - 1939 Studium an der Techn.Hochschule Stuttgart und
München. Diplom-Hauptprüfung an der TH Stuttgart
- 1939 - 1945 Statiker und Konstrukteur bei der Obersten Bau-
leitung der Reichsautobahnen in Köln; Kriegs-
dienst; ab 1943 bei OT-Bauleitungen in Estland,
Oberschlesien und München.
- 1946 - 1953 Statiker und Konstrukteur für Brücken und Hoch-
bauten im Ingenieurbüro Dr.Ing. F.Leonhardt in
Stuttgart.
- nach 1953 Beratender Ingenieur für Brücken- und Hochbau,
Prüfingenieur für Baustatik.