

Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke

von

Reiner Reitinger

Bericht Nr. 17 (1994)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.–Ing. E. Ramm
Stuttgart 1994

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Reiner Reitinger

geboren in Heimsheim

Hauptberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.–Ing. P. Wriggers

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1994

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1994

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Optimierung von Tragwerken unter Berücksichtigung der Stabilitätsgefährdung und der Imperfektionsempfindlichkeit. Dies wird wichtig bei Tragwerken und Bauteilen, die mit geringem Materialvolumen hohe Belastungen aufnehmen. Solche Strukturen haben meist dünnwandige und schlanke Formen und tragen die Lasten hauptsächlich über Membranwirkung ab.

Um diese Effekte erfassen zu können, werden geometrisch nichtlineare Tragwerksberechnungen durchgeführt. Die Beschreibung der dazu benötigten Methoden und Techniken beginnt mit der Pfadverfolgung. Daran schließt sich die direkte Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten, basierend auf der Formulierung erweiterter Systeme, an. Die Pfadwechselprozeduren und die asymptotischen Näherungen Koiters erlauben die Erfassung des Nachbeulbereichs. Die Behandlung der Imperfektionsempfindlichkeit bildet den Abschluß des ersten Teils der Arbeit.

Eine Einführung in die Strukturoptimierung steht am Anfang des zweiten Teils der Arbeit. Erste Stabilitätsprobleme finden dann Berücksichtigung über Eigenwertberechnungen. Schließlich wird eine Optimierungsmethode vorgestellt, die geometrisch nichtlineares Verhalten vollständig enthält und die Imperfektionsempfindlichkeit berücksichtigt. Die Methode basiert auf den im ersten Teil der Arbeit gemachten Ausführungen über die Lösungsverfahren bei geometrischer Nichtlinearität. Die Sensitivitätsanalyse nimmt eine wichtige Stellung ein und die Gemeinsamkeiten mit den Ausführungen bezüglich des Imperfektionsverhaltens werden aufgezeigt.

Die Arbeit schließt mit Beispielen der Dimensionierung und Formfindung von Tragwerken zur Steigerung der aufnehmbaren Belastung bei vorgegebenem Materialvolumen. Die Beispiele demonstrieren die Einsatzmöglichkeiten und die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Optimierungsmethode.

Abstract

The subject of this thesis is the optimization of buckling and imperfection sensitive structures. This becomes important if structures are designed to obtain a maximum load carrying capacity for a minimum of material. Such structures are thin and slender and the loads are carried mainly by membrane stresses rather than by bending action.

In order to be able to consider the buckling failure phenomena and the imperfection sensitivity geometrically nonlinear structural analyses have to be carried out. The presentation of the required methods and techniques starts with path-following schemes. Then, extended systems of equations are discussed to directly compute bifurcation and limit points. Branch switching techniques or the asymptotic approach by Koiter are used for the post-buckling range. The influence of imperfections is treated at the end of the first part of the thesis.

The second part starts with the introduction into structural optimization. Firstly, stability phenomena are approximated by eigenvalue analyses. Then, an optimization method is presented which contains fully geometrically nonlinear behavior and also considers the imperfection sensitivity. The method is based on the techniques for geometrically nonlinear analyses, discussed in the first part of the thesis. The sensitivity analysis is of great importance and its relation to the imperfection sensitivity is pointed out.

Finally, examples are demonstrating the sizing and shape optimization of structures to maximize the buckling load for a given volume of material. The examples show the capabilities of the proposed optimization method.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Ich bedanke mich ganz besonders bei Herrn Professor Dr.–Ing. E. Ramm für die Förderung dieser Arbeit und die Übernahme des Hauptberichtes. Sein reges wissenschaftliches Interesse, seine Unterstützung und sein Rat bilden das Fundament dieser Arbeit.

Dank gebührt des weiteren Herrn Professor Dr.–Ing. P. Wriggers für seine Bereitschaft zur Übernahme des Mitberichtes. Seine wertvollen Hinweise und Ratschläge waren sehr hilfreich.

Allen Mitarbeitern des Institutes, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen und für die freundliche Atmosphäre gesorgt haben, möchte ich ebenfalls danken.

Ich möchte an dieser Stelle auch meiner Frau Stefanie und meinem Sohn Philip für das stete Verständnis danken, wenn die Familie wegen der Anfertigung der Arbeit zurückstecken mußte.

Reiner Reitinger

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
1.1	Motivation	11
1.2	Ziele der Arbeit	13
1.3	Stand der Forschung und Literaturübersicht	15
1.3.1	Stabilitätsberechnungen	15
1.3.2	Optimierung	17
1.4	Begriffe und einführende Beispiele	18
1.4.1	Einführendes Beispiel: Verzweigungs- und Durchschlagspunkt	21
1.4.2	Einführendes Beispiel: Optimierung eines versteiften Paneels	28
1.5	Gliederung der Arbeit	31
2	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	34
2.1	Kinematik	34
2.2	Spannungen	35
2.3	Bilanzgleichungen	36
2.4	Materialgleichungen	36
2.5	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	38
2.6	Energiefunktional und Diskretisierung	38
3	Gleichgewicht und Pfadverfolgung	40
3.1	Gleichgewicht	41
3.2	Prädiktor	42
3.3	Korrektoriteration	43
3.3.1	Last- und Verschiebungssteuerung	44
3.3.2	Bogenlängenverfahren – drei Varianten	45
3.3.3	Alternative Lösungsstrategien	49
3.4	Anmerkungen zum Newton-Verfahren	50
3.5	Variable Schrittweite	51
3.5.1	Anzahl der Korrektoriterationen	51
3.5.2	"Steplength-Control" und Monotonietest	52
3.5.3	Anzahl der Korrektoriterationen und Monotonietest	54
3.5.4	Weitere Methoden	55
3.5.5	Beispiel	56

3.6	Vorzeichen des Lastinkrements beim Prädiktorschritt	61
3.7	Begleitende Maßnahmen	62
3.8	Zusammenfassung	63
4	Stabilitätsberechnungen	64
4.1	Identifikation und Klassifizierung kritischer Punkte	64
4.2	Direkte Berechnung kritischer Punkte mit erweiterten Systemen	66
4.3	Penalty–Formulierung unter Verwendung des Einheitsvektors \mathbf{e}_i	70
4.4	Penalty–Formulierung unter Verwendung des Singulärvektors	72
4.5	Penalty–Formulierung nach Wriggers und Simo	74
4.6	Erweitertes System nach Moore und weitere Alternativen	76
4.7	Gleichungslösung bei fast singulärer Matrix	77
4.7.1	Dämpfung	78
4.7.2	"Line–Search"–Techniken	80
4.7.3	Selektive Dämpfung	83
4.7.4	Implizite Deflationstechniken	86
4.8	Anmerkungen zu erweiterten Systemen	88
4.8.1	Einsatz innerhalb Pfadverfolgung und Wahl der Startwerte	88
4.8.2	Richtungsableitung	91
4.8.3	Strafterm bei Penalty–Verfahren	94
4.9	Alternative Berechnung von kritischen Punkten	99
5	Pfadwechsel	100
5.1	Primärpfad	100
5.2	Sekundärpfad	101
6	Nachbeulverhalten	104
6.1	Koitorsche Nachbeulanalyse	104
6.1.1	Beulformen höherer Ordnung	109
6.1.2	Asymptotische Näherung für den Primärpfad	109
6.2	Numerische Behandlung der Nachbeulanalyse	111
6.2.1	Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix	111
6.2.2	Steigung des Primär– und Sekundärpfades	112
6.2.3	Höhere Pfadableitungen	113

7 Imperfektionsverhalten	116
7.1 Koitersche Imperfektionsempfindlichkeit	116
7.1.1 Numerische Umsetzung	119
7.2 Gleichgewicht und Singularitätsbedingung als Basis für die Berechnung der Imperfektionsempfindlichkeit	119
7.2.1 liegt im Bild von K_T	121
7.2.2 liegt nicht im Bild von K_T	123
7.2.3 Durchschlagspunkt	128
7.3 Analyse imperfekter Strukturen	129
8 Strukturoptimierung	131
8.1 Optimierungsmodell	131
8.2 Geometriemodell	133
8.3 Strukturanalyse	135
8.4 Optimierungsverfahren	136
8.5 Sensitivitätsanalyse	138
8.5.1 Semi-analytische Gradientenberechnung	140
9 Optimierung mit Eigenwertberechnungen	142
9.1 Optimierungsmodell mit Eigenwerten	143
9.2 Sensitivitäten von Eigenwerten und Eigenvektoren	143
9.3 Eigenwertberechnung	145
9.4 Identifikation der Eigenformen bei Vertauschen der Reihenfolge	145
9.5 Beispiel: beidseitig eingespannter Druckstab	146
9.5.1 Bimodale Lösung mit unstetiger Ableitung der Zielfunktion	149
9.5.2 Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion	150
9.5.3 Bound–Formulierung	151
9.5.4 Abschließende Bewertung	152
9.6 Beispiel: Formoptimierung einer Glocke	152
10 Optimierung bei geometrischer Nichtlinearität unter Berücksichtigung von Imperfektionen	159
10.1 Formulierung der Optimierungsaufgabe	160
10.2 Optimierungsprozedur	162
10.2.1 Strukturanalyse 1	164
10.2.2 Sensitivitätsanalyse	165

10.2.3	Kopplung mit Optimierungsalgorithmus	170
10.2.4	Wiederberechnung bzw. Strukturanalyse 2	171
10.2.5	Imperfektionsformen	173
10.2.6	Frage nach der ungünstigsten oder maßgebenden Imperfektionsform	175
10.3	Alternative Verfahren zur Optimierung geometrisch nichtlinearer Strukturen	176
11	Beispiele	180
11.1	Versteiftes Paneel	180
11.2	Bogen	188
11.2.1	Bogen unter Einzellast	188
11.2.2	Bogen unter Gleichlast	193
11.3	Schale	195
11.4	Bewertung der Beispiele	202
12	Bewertung und Ausblick	204
12.1	Bewertung	204
12.2	Ausblick	205
13	Anhang	207
13.1	Methode nach Nelson bei singulärer Systemmatrix	207
13.2	Parametrisierung des Gleichgewichtspfades	208
13.3	Darstellung der Verschiebungen unter Verwendung der Eigenvektoren als Basisvektoren	209
14	Literatur	211

1 Einleitung

1.1 Motivation

- I.) *"Ein Ding wird weder größer noch kleiner, weder in seiner Masse noch seiner Zahl nach, solange es sich selbst gleich ist."*
- II.) *"Wozu nichts hingelegt und wovon nichts weggenommen wird, das kann weder wachsen noch abnehmen, sondern es bleibt immer sich selbst gleich."*
- III.) *"Was früher nicht war, das kann auch später unmöglich – ohne Entstehen und Werden – sein."*

Diese Sätze Platons, aus Szabó (1960), entstammen der Dialektik und klingen wie mathematische Axiome. Sie beschreiben aber auch auf ganz treffende Art die vorliegende Arbeit.

I.) Die zum Verständnis notwendigen Grundlagen stehen am Anfang, ohne daß sich dabei *"an seiner Masse noch seiner Zahl nach"* etwas ändert.

II.) Aus der Vielzahl der zur Lösung der auftretenden Problematiken existierenden Verfahren werden die vermeintlich wichtigsten beschrieben und analysiert. Einige werden noch verbessert, verfeinert oder verändert, andere nur erwähnt und nicht weiter berücksichtigt. Es werden also einige Dinge *"hingelegt"* und andere *"weggenommen"*.

III.) *"Was früher nicht war"*, aber während der Arbeit *"entsteht"*, ist eine Optimierungsmethode, die erlaubt, das Tragverhalten stabilitätsgefährdeter Tragwerke unter Berücksichtigung ihrer Imperfektionsempfindlichkeit zu verbessern. In Verbindung mit Methoden der mathematischen Optimierung, der grafischen Formbeschreibung, der Strukturanalyse mit finiten Elementen und einer effizienten und genauen Sensitivitätsanalyse entsteht im Vergleich zu bereits existierenden Verfahren ein robustes, effizientes und vielseitig einsetzbares Optimierungsverfahren.

Der Wunsch ein gutes, vielleicht sogar ein optimales, auf jeden Fall aber ein besseres Tragwerk als bisher existierende oder übliche zu entwerfen, steckt wohl in jedem Ingenieur, der sich mit Formfindung und Konstruieren von Tragwerken beschäftigt. Eine sehr typische Entwurfs- oder Optimierungsaufgabe diskutiert z.B. J.B. Keller (1960) in *"The Shape of the Strongest Column"*. *"The problem of determining that shape of co-*

lumn which has the largest critical buckling load, assuming that the length and volume are given" (das Problem der Formfindung für einen Druckstab mit einer maximalen kritischen Beullast bei gegebener Länge und Volumen) wurde von C. Truesdell an ihn und auch an H.F. Weinberger herangetragen. Den ermittelten und von Weinberger ebenfalls erhaltenen Querschnittsverlauf entlang der Längsachse zeigt Bild 1.1.

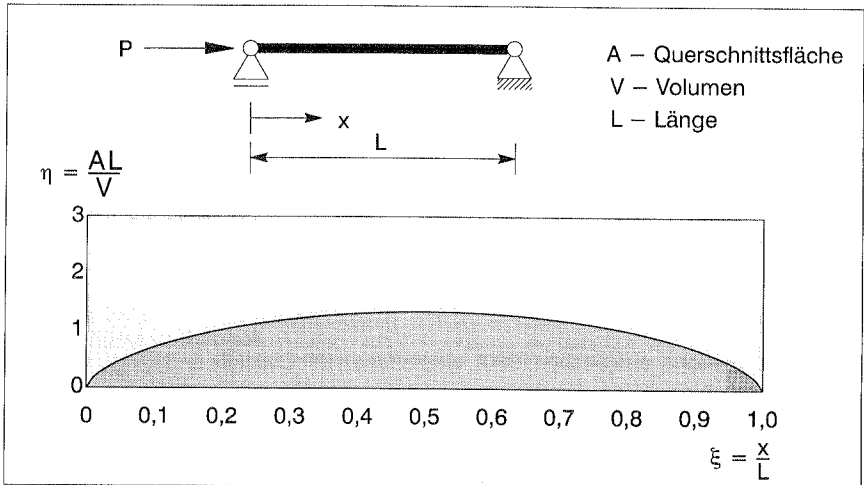


Bild 1.1: Querschnittsverteilung entlang der Längsachse

Zu dieser Zeit war dies aber keineswegs ein neues Problem. Keller (1960) gibt an, daß bereits Clausen im Jahr 1851 zu diesem Resultat gelangte. Sogar schon im Jahr 1773 hat sich auch Lagrange mit diesem Problem auseinandergesetzt. Er gelangte durch "computational errors" aber zu einem falschen Ergebnis.

Die Grundlage zur Behandlung solcher Probleme wurde von Euler 1744 in seinem Werk "methodus inventendi" (Variationsrechnung) gelegt. Er behandelte dort die Variationsprinzipien der Mechanik und löste Eigenwertprobleme, um die Knicklast von Stäben oder auch Eigenfrequenzen transversal schwingender Stäbe zu erhalten. Fasziniert von Glocken und der Idee mit theoretischen Betrachtungen diese zu analysieren und zu verbessern, versuchte er, die Kenntnisse an Stäben auf Flächentragwerke zu übertragen, und gelangte mit seiner Differentialgleichung zum ersten Versuch einer Schalentheorie (nachzulesen in Szabó (1979)). Die Beispiele der Formfindung einer optimalen Glocke und des sogenannten Euler-Druckstabes finden auch in der vorliegenden Arbeit Beachtung.

Die optimalen Tragwerke von Maxwell und Michell aus den Jahren 1869 und 1904 (siehe Wiedemann (1989)) müssen als Spezialtragwerke für einen ganz bestimmten Lastfall und zugehörige Randbedingungen verstanden werden. Für andere Lasten oder Rand-

bedingungen können diese Tragwerke jedoch gänzlich unbrauchbar sein. Womit nun die zweite wichtige Eigenschaft optimaler Tragwerke, nämlich die Empfindlichkeit gegenüber leichten Parameterabweichungen, Herstellungsfehlern, geänderten Lastsituationen oder sonstigen Imperfektionen, anzusprechen ist. Zu diesem Thema veröffentlichte Thompson (1972) seinen Beitrag "Optimization as a generator of structural instability". Thompson bemerkt: "*A mildly optimum structure with not too dramatic failure characteristics and modest imperfection – sensitivity might be quite safe and acceptable; a sharply optimum design with explosive failure and severe imperfection – sensitivity might be dangerous and unacceptable*". ("Ein nicht ganz optimales Tragwerk mit einer mäßigen Imperfektionsempfindlichkeit kann brauchbar und akzeptabel sein. Ein Tragwerk, das zwar die Optimalitätsanforderungen exakt erfüllt, kann einen abrupten Abfall im überkritischen Bereich und eine hohe Imperfektionsempfindlichkeit aufweisen und wäre somit gefährlich und nicht akzeptabel").

Die einzige richtige Antwort auf diese Kritik an der Optimierung von Tragwerken kann nur sein, die Optimalitätseigenschaften so zu formulieren, daß die Imperfektionsempfindlichkeit im Optimierungsprozeß enthalten ist.

Einige weitere Beispiele der Tragwerksfindung für möglichst hohe kritische Beullasten sind gegeben in Wu (1968), Budiansky, Frauenthal und Hutchinson (1969) und Amazigo (1978).

Auch Schweizer Ingenieur H. Isler, der sich mit der experimentellen Formfindung von Schalentragwerken befaßt, diskutiert in Isler (1982) die Tragfähigkeit hinsichtlich Instabilitätsproblemen und entwickelt diesbezüglich heuristische Konstruktionsregeln.

1.2 Ziele der Arbeit

Das Hauptziel der Arbeit läßt sich beschreiben als Optimierung von Tragwerken mit dem Ziel der Maximierung der kritischen Traglast bei gleichzeitigem minimalen bzw. vorgegebenen Materialvolumen oder vergleichbaren Rahmenbedingungen. Die Verbesserung der Tragwerke hinsichtlich ihres Instabilitätsverhaltens soll aber auch die Empfindlichkeit gegenüber Imperfektionen berücksichtigen. Um die Stabilitätsprobleme erfassen zu können, ist die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens innerhalb der Optimierung erforderlich. Neben der nichtlinearen Optimierungsaufgabe ist also auch gleichzeitig das nichtlineare Strukturanalyseproblem zu lösen. Daraus lassen sich dann viele Unterziele ableiten. Im Bereich der Strukturanalyse ist es absolut notwendig, stabile, weitgehendst automatisierte und leicht anwendbare Werkzeuge zur Hand zu haben. Da das Strukturverhalten sich während des Optimierungsfortschrittes stark ändern kann, sind Verfahren, die manche Strukturanalyseprobleme zwar äußerst effektiv bearbeiten, dafür aber auch manchmal versagen, äußerst ungeeignet.

Von den in riesiger Anzahl veröffentlichten Methoden der Pfadverfolgung, die immer wieder nur leicht verändert oder mit neuen Erklärungen versehen neu publiziert werden, werden die vermeintlich wichtigsten vorgestellt und diskutiert. Für diese Verfahren wird eine automatische Schrittweitenanpassung vorgestellt, die sich verantwortlich zeigt für die Zuverlässigkeit und Effizienz bei der Pfadverfolgung, auch gerade dann, wenn sich während der Optimierung immer wieder die Steifigkeitsverhältnisse, die Größe der aufnehmbaren Last, die Verformungscharakteristik usw. ändern.

Die Berechnung kritischer Punkte, an denen die Instabilitätsprobleme auftauchen, erfordert im Rahmen von Optimierungsverfahren hohe Genauigkeit. Dies wird durch den Einsatz direkter Methoden, also der Lösung von sogenannten "erweiterten Systemen" erreicht. Die dabei auftretenden Probleme, hervorgerufen durch das Singulärwerden der Systemmatrix, werden ausführlich diskutiert.

Um das Strukturverhalten vollständig, also auch im Nachbeulbereich, analysieren zu können, sind dann noch Pfadwechselprozeduren und Methoden zur Analyse des Imperfektionseinflusses zu erläutern.

Die zu präsentierende Optimierungsprozedur ist in das bestehende Optimierungskonzept, verwirklicht am Programmsystem CARAT (Computer Aided Research and Analysis Tool), zu integrieren. Die Strukturanalyse basiert auf der Methode der finiten Elemente. Zur Lösung der Optimierungsaufgabe kommen die Methoden der mathematischen Programmierung in Verbindung mit der Methode des Computer Aided Geometric Design (CAGD) und den Methoden der Sensitivitätsanalyse zum Einsatz. Die Sensitivitätsanalyse soll geometrisch nichtlineares Verhalten exakt enthalten und trotzdem effizient sein.

Als Übergang zur Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte sollen die Verwendung der Ergebnisse aus Eigenwertberechnungen als Zwischenstufe dienen. Die Eigenwertberechnung mit elastischer und geometrischer Steifigkeitsmatrix, auch klassische Beulanalyse genannt, schätzt die kritischen Lasten ab. Sie kann aber häufig deutlich daneben liegen und das Nachbeulverhalten überhaupt nicht abbilden. Unter Verwendung der Massenmatrix werden dann der Vollständigkeit halber auch Eigenfrequenzprobleme eingeführt. Damit lassen sich solch interessante Probleme wie Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz, was der Maximierung der Steifigkeiten entspricht, oder auch das hier diskutierte Problem der Frequenzabstimmung einer wohlklingenden Glocke behandeln.

Oberstes Ziel bei der Entwicklung der notwendigen Verfahren soll große Flexibilität, Einsatzbreite und Stabilität, verbunden mit anwendungsfreundlichem Gebrauch, sein. Um verschiedenartige Strukturprobleme lösen zu können, soll die Möglichkeit bestehen, verschiedene finite Elementformulierungen, z.B. für Platten, Scheiben, Schalen usw., zu verwenden. Dies hat zur Folge, daß manche Ableitungen auf numerischem Weg durch

Bildung von Differenzenquotienten erfolgen. Die Beschränkungen auf linear elastisches Material für kleine Verzerrungen und auf deformationsunabhängige Belastung bei konservativen Systemen liegen der Arbeit zu Grunde.

1.3 Stand der Forschung und Literaturübersicht

Die Literaturübersicht gliedert sich in die zwei Bereiche Stabilitätsberechnungen und Optimierung. Im Vordergrund sollen hier bedeutende Werke stehen, die die Entwicklung von den Ursprüngen an beschreiben. Neuere im unmittelbaren Bezug zu der vorliegenden Arbeit stehende Publikationen sind dann an der entsprechenden Stelle innerhalb der Arbeit zu finden. So beschränkt sich die Übersicht über die Optimierung auch auf die Entstehung solcher Programmsysteme wie z.B. CARAT (Computer Aided Research and Analysis Tool). Die Optimierungsprozeduren, die auch geometrische Nichtlinearitäten beinhalten, werden dann im Kapitel 10 gesondert erwähnt.

1.3.1 Stabilitätsberechnungen

Die folgende Übersicht entstand unter Zuhilfenahme der Arbeiten von Brendel (1979), Thompson (1982) und Wagner (1991).

Der Schweizer Mathematiker Leonard Euler untersuchte 1744 in seinem Werk über die Variationsrechnung das Ausknicken von druckbelasteten Stäben. Aufgrund dieser ersten Stabilitätsuntersuchungen finden heute die Begriffe "Euler–Stabknicken" und die Einteilung in die vier "Euler–Fälle" in der Ingenieurliteratur breite Anwendung. Der Franzose Joseph–Louis Lagrange, ein Freund Eulers, ist Begründer der Energieprinzipien in der Mechanik. Sein grundlegendes Energiethorem weist das Minimum der potentiellen Energie als hinreichend für die Stabilität aus. Als Vater der Verzweigungstheorie gilt der französische Mathematiker Henri Poincaré, der 1885 eine allgemeine Verzweigungstheorie entwickelte. Die Bibliographien der drei oben genannten sind in Thompson (1982) gegeben. Eine präzise Definition der Stabilität stammt von Liapunov aus dem Jahre 1892.

Die "klassischen Stabilitätstheorien" entstanden zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Die Verzweigungslasten von Zoelly (1915) für die Kugelschale, von Lorenz (1908), Timoshenko (1910) und Pflüger (1937) für die Zylinderschale und die Näherung von Pflüger (1937) für die Kegelschale deckten sich jedoch nicht mit den experimentell bestimmten Lasten. Zur Klärung dieser Diskrepanzen wurde dann auch der Nachbeulbereich, z.B. von Kármán, Tsien (1939,1941) untersucht, um bessere maßgebliche Versagenslasten zu erzielen.

Die grundlegende Arbeit von Koiter (1945) behandelt die asymptotische Näherung des Nachbeulverhaltens und des Einflusses von Imperfektionen bei kontinuierlichen elasti-

schen Strukturen. Die auf einem energetischen Konzept basierenden Formulierungen lassen sich jedoch auch leicht diskretisieren, was dazu führte, daß der Name Koiter auch in zahlreichen neueren Veröffentlichungen im Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente auftaucht. Die asymptotischen Näherungen bzw. Reihenentwicklungen beschreiben Steigung, Krümmung usw. des Sekundärpfades, wodurch sich die Verzweigungspunkte in verschiedene Kategorien einteilen lassen. Koiters Arbeit wurde dann 1967 ins Englische übersetzt. Zu dieser Zeit beschäftigten sich in den USA u.a. Budiansky und Hutchinson (1972) ebenfalls mit der Anfangsnachbeultheorie kontinuierlicher Systeme und in England u.a. Sewell (1965) und Thompson (1969) auch schon mit diskreten Problemen. Zwei noch nennenswerte Veröffentlichungen aus dieser Zeit stammen von Thompson und Hunt (1973) und Budiansky (1974).

Mit dem Aufkommen von Computern gewinnt in den sechziger Jahren der Einsatz numerischer Methoden an Bedeutung. Als erster behandelt Thurston (1969) im numerischen Bereich Verzweigungen und diskutiert eine numerische Pfadwechselprozedur. Parallel zur Entwicklung der Methode der finiten Elemente entstehen dann auch die Methoden zur Kurvenverfolgung bei nichtlinearen Problemen. Die grundlegenden Arbeiten im Ingenieurbereich stammen u.a. von Wempner (1971), Riks (1972,1979), Crisfield (1981), Ramm (1981), Schweizerhof, Wriggers (1986) und aus der Mathematik von Keller (1977), Menzel, Schwetlick (1978), Rheinboldt (1981) und Fried (1984).

Das Problem der Lokalisierung von Stabilitätspunkten findet bei den indirekten Methoden Berücksichtigung über begleitende Maßnahmen, z.B. Beobachtung der Determinante der Steifigkeitsmatrix oder begleitende Eigenwertberechnungen, siehe z.B. Brendel (1979) oder Brendel und Ramm (1982). Zur genaueren Lokalisierung von Stabilitätspunkten stehen dann Bisektionsverfahren zur Verfügung.

Zur direkten Berechnung von Stabilitätspunkten wurden in der mathematischen Literatur erweiterte Systeme formuliert, bestehend aus den nichtlinearen Gleichgewichtsbeziehungen und Bedingungen, die die kritischen Punkte charakterisieren. Zur Lösung werden iterative Newton-Verfahren herangezogen. Zu erwähnen sind u.a. die Arbeiten von Keener, Keller (1973), Abbott (1978), Seydel (1979), Moore, Spence (1980), Spence, Werner (1982), Spence, Jepson (1984) oder Deuffhard, Fiedler, Kunkel (1984).

Die Übertragung dieser Verfahren in den Ingenieurbereich gelang dann durch Wriggers, Wagner, Miehe (1988) und Wriggers, Simo (1990). Die Rahmenbedingungen im Ingenieurbereich unterscheiden sich im wesentlichen von denen in der Mathematik durch die Verwendung von sehr vielen Freiheitsgraden. Es werden andere Lösungstechniken notwendig, die am besten auch die numerischen Techniken, die sich bei der finiten Elementemethode etabliert haben, verwenden. Dies sind z.B. Gleichungslöser für symmetrische, schwach besetzte Systemmatrizen oder Verwendung besonderer Speichertechniken. Auch liegen die zu lösenden nichtlinearen Gleichungen nicht expli-

zit vor, so daß die nächsten Ableitungen der Steifigkeitsmatrix sehr aufwendig sind und daher approximiert werden. Die erweiterten Systeme finden in der Ingenieurliteratur zwar immer mehr Beachtung, jedoch fehlt es an jeglichen Weiterentwicklungen. In Reitinger, Ramm (1993) wird eine neue Penalty-Formulierung vorgestellt. In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere dazu kommen. Die Problematik der singulären Systemmatrix wird noch weiter untersucht und diese Methoden der erweiterten Systeme werden der Anwendung mehr zugänglich gemacht.

1.3.2 Optimierung

Die hier entstehende Optimierungsprozedur baut auf den von Bletzinger (1990) und Kimmich (1990) erarbeiteten Optimierungstechniken auf, und deshalb folgt die Literaturübersicht auch den dortigen Ausführungen und kann dort noch vertieft werden.

Erste Optimierungsprobleme wurden schon gelöst von Galilei im Jahre 1638, Lagrange 1744, Maxwell 1896 und Michell 1904. Lineare Programmierung in Verbindung mit dem Simplexverfahren präsentiert Dantzig 1940. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen zur Beschreibung der Optimalstellen bei nichtlinearen Optimierungsproblemen stammen aus dem Jahre 1951.

Ein Höhepunkt der Optimierung konnte aber erst in den sechziger Jahren durch den Einsatz von Computern und den entsprechenden numerischen Methoden erreicht werden. Nach der Einführung der finiten Elemente u.a. durch Clough im Jahre 1956 und der Lösung von Optimierungsproblemen mit Methoden der mathematischen Programmierung durch Schmit 1960 gelang es Gellatly 1964, die beiden Ansätze zu vereinen und die automatische Optimierung von Strukturen zu verwirklichen. Die Sensitivitätsanalyse für die diskretisierte Struktur wird von Fox 1965 zur Steigerung der Effizienz eingeführt.

Die Weiterentwicklungen stagnierten in den siebziger Jahren aus Mangel an leistungsstarken Rechnern zur Umsetzung der entwickelten Methoden. Vielmehr entstanden in dieser Zeit die Optimalitätskriterienmethoden nach ihrer Einführung durch Prager, Taylor 1968. Durch Verwendung von Rekursionsformeln, entwickelt aus den Optimalitätsbedingungen nach Kuhn-Tucker, konnten einige spezielle Optimierungsprobleme sehr effizient gelöst werden.

Erste Erfolge für die Formoptimierung mit Hilfe der mathematischen Programmierung konnten von Zienkiewicz und Campbell (1973) verzeichnet werden. Der im Rahmen der vorliegenden Arbeit bevorzugt verwendete Optimierungsalgorithmus der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) von Schittkowski (1981) stammt aus der Zeit um 1981. Das Konzept der Designelemente zur Formbeschreibung und somit zur Reduktion der Anzahl der Variablen bei der Formoptimierung wird durch Imam (1982) in die Strukturoptimierung eingeführt und von Botkin, Bennett (1982) auf flächige Strukturen

ausgedehnt. Die verwendeten Methoden des Computer Aided Geometric Design (CAGD) beschreiben u.a. Faux und Pratt (1979) und Böhm et al. (1984).

Die Integration der Methoden der mathematischen Programmierung, der Strukturanalyse mit finiten Elementen, der Sensitivitätsanalyse und der Methoden des CAGD wurde verwirklicht im Programmsystem CARAT (Computer Aided Research and Analysis Tool) und wird beschrieben in Bletzinger (1990), Kimmich (1990), Bletzinger, Kimmich, Ramm (1991) und Kimmich, Reitinger, Ramm (1992).

1.4 Begriffe und einführende Beispiele

Im folgenden werden einige Begriffe, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit von Bedeutung sind und folglich auch oft Verwendung finden, in anschaulicher Weise eingeführt.

Der Übergang von der vereinfachten **linearen** zur **nichtlinearen** Berechnung ist absolut notwendig, um Strukturversagen nicht nur durch Spannungs- oder Verformungsrestriktionen, sondern vielmehr durch **Stabilitätsversagen**, erfassen zu können.

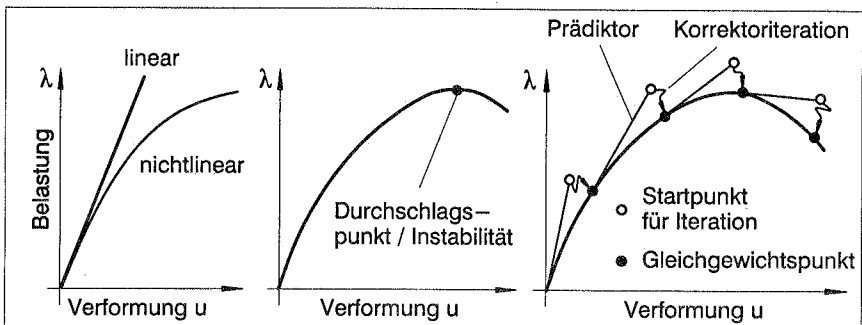


Bild 1.2: linear/nichtlinear – Instabilität – Pfadverfolgung

Die Methoden der **Pfadverfolgung**, zu denen die **inkrementell iterative Verfahren** oder auch die **tangentielle Fortsetzungsverfahren** zählen, berechnen einige diskrete **Gleichgewichtspunkte** auf dem **Gleichgewichtspfad** durch iterative Lösung der nichtlinearen Gleichgewichtsgleichungen (Bild 1.2).

Die **Liapunov**-Definition der **kinetischen Stabilität** lautet nach Thompson und Hunt (1984): *Wenn eine hinreichend kleine beliebige Störbewegung aus einer Gleichgewichtslage für alle Zeiten klein bleibt, gilt die Gleichgewichtslage als **stabil**.*

*Führt die beliebige Störbewegung aus einer Gleichgewichtslage zurück zur ursprünglichen Gleichgewichtslage, so gilt die Gleichgewichtslage als **asymptotisch stabil**.*

*Bleibt eine beliebige Störbewegung aus einer Gleichgewichtslage nicht für alle Zeiten klein, gilt die Gleichgewichtslage als **instabil**.*

Euler formulierte für die **statische Stabilität**:

Die Stabilitätsgrenze ist erreicht, wenn neben der ursprünglichen Gleichgewichtslage mindestens eine infinitesimal benachbarte Gleichgewichtslage bei gleicher Belastung existiert.

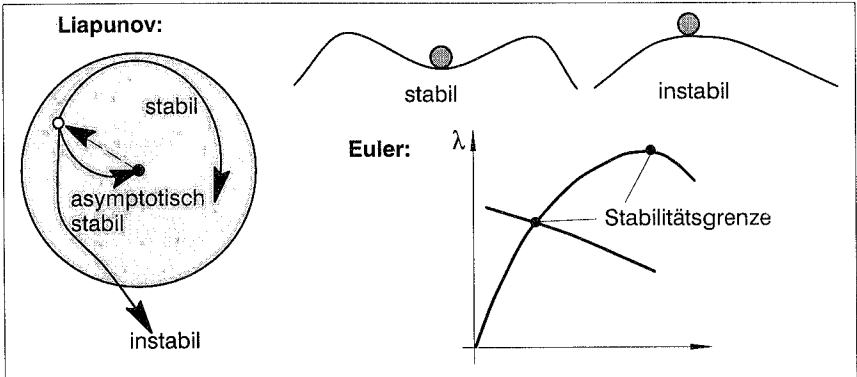


Bild 1.3: Stabilität – Liapunov / Euler

Das Überschreiten der Stabilitätsgrenze macht sich z.B. beim Druckstab durch Ausknicken oder beim dünnwandigen Zylinder durch Auftreten des typischen rautenförmigen Beulmusters bemerkbar (Bild 1.4 oder auch Bild 10.1).

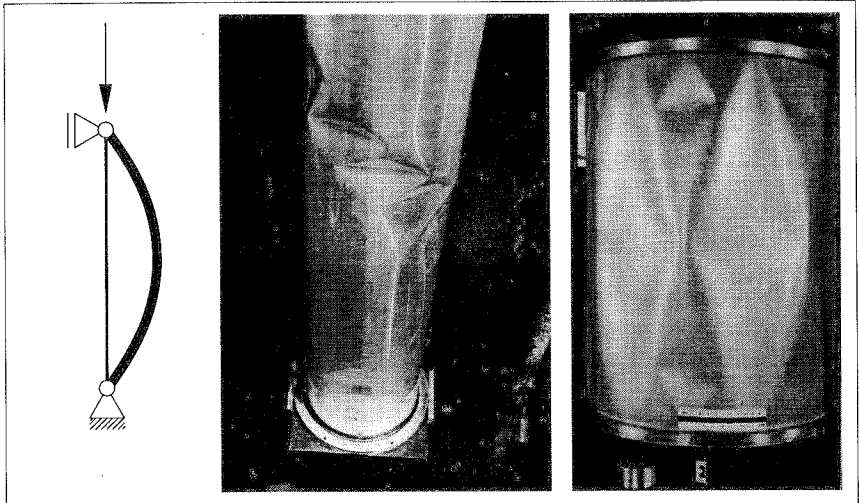


Bild 1.4: Eulerstabknicken – Zylinderbeulen (aus: Saal (1980) und Geier (1965))

Ein **kritischer Punkt** wird charakterisiert durch das Verschwinden der zweiten Variation des Potentials. Dies entspricht dem **Singulärwerden** oder dem Verlust der **positiven Definitheit** der **Tangentensteifigkeitsmatrix** am diskretisierten System. Die kritischen Punkte lassen sich unterteilen in **Durchschlagspunkte** und **Verzweigungspunkte**, dargestellt am Beispiel des Zweibocks in Bild 1.5.

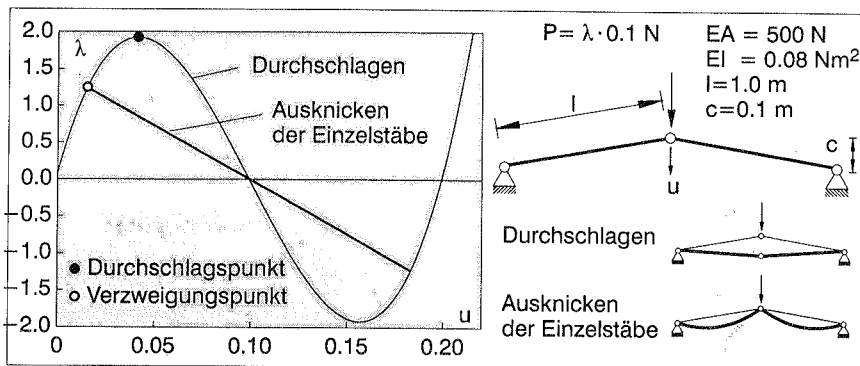


Bild 1.5: Durchschlags- und Verzweigungspunkt beim Zweibock

Die Verzweigungspunkte lassen sich nach Bild 1.6 weiter unterteilen in **symmetrisch stabile**, **symmetrisch instabil** und **asymmetrische Verzweigungspunkte**.

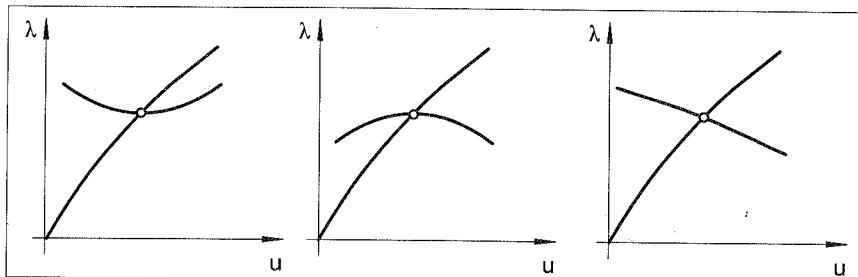


Bild 1.6: Verzweigungen: symmetrisch stabil / instabil – asymmetrisch

Die Auswirkungen von **Imperfektionen** auf die Lastverschiebungskurven und das Verhältnis von aufnehmbarer Belastung des imperfekten bezogen auf die des perfekten Tragwerks sind in Bild 1.7 skizziert.

Mit der Kenntnis des kritischen Punktes, also der Stelle des Stabilitätsversagens, läßt sich nun die **Optimierungsaufgabe** formulieren. Die zu **maximierende Zielfunktion** besteht aus der aufnehmbaren Last am niedrigsten kritischen Punkt. Um eine sinnvolle Optimierungsaufgabe zu erhalten, wird die **Nebenbedingung**, die das **Materialvolumen konstant** hält, verwendet. Die Berücksichtigung des **Imperfektionsverhaltens** er-

fordert die Kenntnis des niedrigsten kritischen Punktes der imperfekten Struktur. Die zugehörige aufnehmbare Last wird dann als Zielfunktion verwendet.

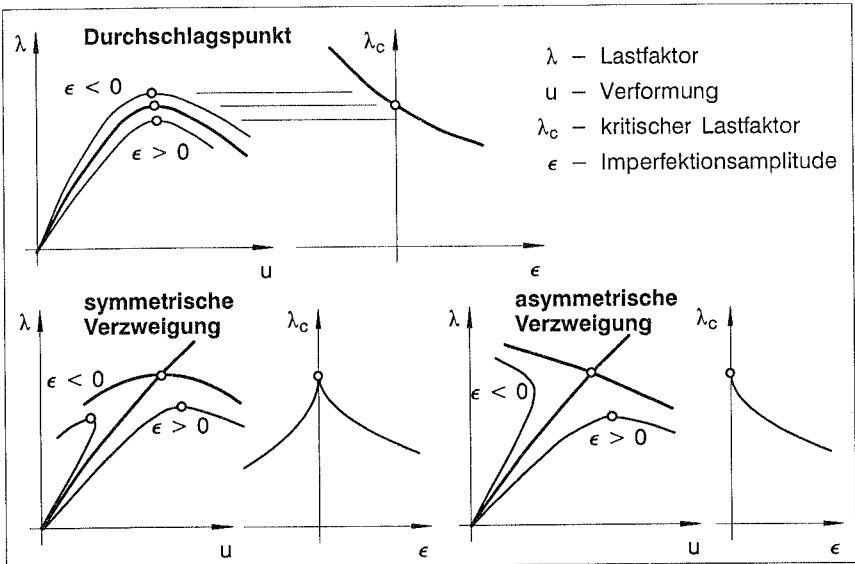


Bild 1.7: Einfluß von Imperfektionen mit Amplitude ϵ auf kritische Last λ_c

Von den nun folgenden einführenden Beispielen beschreibt das erste die Problematik der Verzweigungen und Durchschlagspunkte. Dieses Beispiel mit wenigen Unbekannten hat zwar keine mechanische Bedeutung, jedoch lassen sich für das Verständnis hilfreiche Beispielrechnungen sehr einfach durchführen. Die Herleitung der verwendeten Formeln wird später entwickelt.

Das zweite Beispiel skizziert die Optimierung eines versteiften Paneels hinsichtlich seines geometrisch nichtlinearen Verhaltens im Sinne der im Laufe der Arbeit entstehenden Optimierungsprozedur.

1.4.1 Einführendes Beispiel: Verzweigungs- und Durchschlagspunkt

Den Ausgangspunkt bildet das **Potential** π in diskretisierter Form

$$\pi = -\frac{1}{6}u_1^3 - u_1u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + 2u_2u_3 + \frac{1}{6}u_3^2 + \frac{5}{12}u_3 - \lambda \left(u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}u_3 \right) \quad (1.1)$$

In Analogie zur Strukturmechanik beschreiben die ersten Terme die **innere Arbeit** und die mit dem **Lastparameter** λ skalierten Terme die **äußere Arbeit**. Die **Stationaritätsbedingung** bezüglich den Verschiebungen u_1, u_2 und u_3 führt auf die **Gleichgewichtsgleichungen**:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_1} = 0 & : & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u_1^2 - u_2 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 \\ 2u_2 + \frac{u_3^2}{2} + \frac{5}{12} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_2} = 0 & : & \\
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u_3} = 0 & : & \\
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{u}} = 0 & : & \mathbf{G} - \lambda \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Die Vektoren \mathbf{G} und \mathbf{P} stellen das Analogon zu den **inneren Kräften** bzw. zum **Lastvektor** dar. Durch weitere Differentiation nach den Verschiebungen läßt sich die **Jacobi-Matrix** oder **Steifigkeitsmatrix** \mathbf{K}_T erzeugen

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} -u_1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & u_3 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

und das **Newton-Iterations-Schema** angeben:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{G} \quad ; \quad \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u} \tag{1.4}$$

An einem regulären Gleichgewichtspunkt beschreibt $(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \lambda)$ nach

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \lambda \cdot \mathbf{P} \tag{1.5}$$

die Tangente an den Gleichgewichtspfad. Die nächsten Ableitungen lassen sich angeben wie folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial u_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

oder als Richtungsableitung in Richtung des **Singulärvektors** ϕ , der gleich nochmal aufgegriffen wird (siehe Gleichung (1.11)):

$$\mathbf{K}_{T,u} \phi = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Bild 1.8 zeigt die **Lastverschiebungskurve** oder den **Gleichgewichtspfad** für den Lastparameter λ in Abhängigkeit von der Verschiebung u_3 , beschrieben durch Gleichungen (1.2).

Die **kritischen** bzw. **singulären Punkte** kennzeichnen sich durch das **Singulärwerden der Steifigkeitsmatrix**, was auch durch die Bedingung $\det \mathbf{K}_T = 0$ beschrieben werden kann:

$$\det \mathbf{K}_T = -u_1 u_3 + 4u_1 - u_3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{1.8}$$

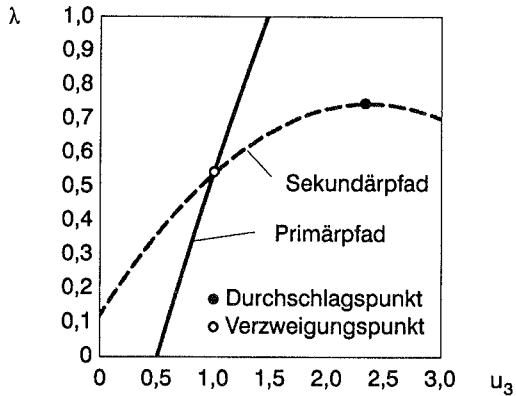


Bild 1.8: Gleichgewichtspfade

Diese Bedingung wird gemeinsam mit den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt an den Punkten

$$\text{a) } \lambda_c = 0.5370 ; \mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} 0.3333 \\ -0.5926 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \lambda_c = 0.7447 ; \mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} 1.4495 \\ -1.7959 \\ 2.3670 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Die Lösung a) beschreibt, wie aus Bild 1.8 ersichtlich, einen **Verzweigungspunkt** oder auch **Bifurkation** genannt. Dort kann ein **Pfadwechsel** vom **Primärpfad** auf den **Sekundärpfad** erfolgen. Die zweite Lösung b) zeigt einen **Durchschlagpunkt** auf dem Sekundärpfad. Die Ermittlung des Gleichgewichtspfades und der kritischen Punkte erfolgt mit den später angegebenen Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Strukturgleichungen oder mit anderen einfacheren numerischen Techniken.

1.4.1.1 Verzweigungspunkt

Am Verzweigungspunkt hat die Steifigkeitsmatrix die Form

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Der Singulärvektor ϕ , der die Bedingung

$$\mathbf{K}_T \phi = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \phi = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \omega = 0 \quad (1.11)$$

erfüllt, lautet

$$\phi = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\phi^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

kann der kritische Punkt als Verzweigungspunkt identifiziert werden. Diese Orthogonalitätsbedingung zwischen ϕ und \mathbf{P} , die auch bedeutet, daß \mathbf{P} im **Bild von \mathbf{K}_T** liegen beziehungsweise **orthogonal zum Nullraum von \mathbf{K}_T** , aufgespannt vom Singulärvektor, sein muß, ist die Voraussetzung für die Existenz einer Lösung der Gleichung (1.5) mit $\Delta\lambda = 1$ bzw. von

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (1.14)$$

Da alle Vektoren, zusammengesetzt aus einer speziellen Lösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ und einem Vielfachen von ϕ

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \phi \quad (1.15)$$

Lösungen von Gleichung (1.14) darstellen, wird eine weitere Bedingung, z.B. die Orthogonalitätsbedingung

$$1.) \quad \phi^T \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (1.16)$$

eingeführt, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Die spezielle Lösung erfüllt ebenfalls Gleichung (1.14) und eine beliebige weitere Bedingung. Die Berechnung erfolgt nach der Methode von Nelson (1976), der eine Verschiebungskomponente $\Delta \tilde{u}_i = 0$ für die spezielle Lösung vorgibt, wobei die entsprechende Komponente ϕ_i des Singulärvektors nicht Null sein darf. Dafür werden nun die entsprechende Spalte und Zeile der Steifigkeitsmatrix zu Null, das Hauptdiagonalglied auf 1 und die entsprechende Komponente des Lastvektors zu Null gesetzt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Die von ϕ bereinigte Lösung oder bezüglich ϕ orthogonalisierte Lösung $\Delta \mathbf{u}_\perp$ erhält man aus der speziellen Lösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ über den Ansatz (1.15) wie folgt

$$\phi^T \Delta \mathbf{u}_\perp = \phi^T (\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \phi) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{\phi^T \Delta \tilde{\mathbf{u}}}{\phi^T \phi} = -\frac{2}{7}$$

$$\Delta \mathbf{u}_\perp = \begin{bmatrix} -0.8571 \\ -0.7143 \\ 0.9286 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Eine Alternative zu Bedingung (1.16) bietet sich noch an, da die Tangente an den Primärpfad $\Delta \mathbf{u}^I$ sich auszeichnet durch die Bedingung (Herleitung siehe Gleichungen (6.3) bis (6.8) und (6.37) bis (6.39))

$$2.) \quad \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}^I \Delta \mathbf{u}^I = 0 \quad (1.19)$$

Anstelle des Ansatzes (1.15) kann auch der Ansatz

$$\Delta \mathbf{u}^I = \Delta \mathbf{u}_\perp + \alpha \phi \quad (1.20)$$

mit $\Delta \mathbf{u}_\perp$ als Partikulärlösung eingesetzt werden. Er liefert

$$\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \mathbf{u}_\perp \cdot \alpha + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_\perp \Delta \mathbf{u}_\perp = 0 \quad (1.21)$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi \\ b &= \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \mathbf{u}_\perp \\ c &= \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_\perp \Delta \mathbf{u}_\perp \end{aligned} \quad (1.22)$$

lautet die quadratische Gleichung

$$a \cdot \alpha^2 + 2b \cdot \alpha + c = 0 \quad (1.23)$$

bzw. bei Verwendung von $\mathbf{K}_{T,u} \phi$ nach Gleichung (1.7)

$$19 \cdot \alpha^2 + 22.86 \cdot \alpha - 0.4793 = 0 \quad (1.24)$$

Die betragsmäßig kleinere Lösung $\alpha_1 = 0.02135$ bewirkt, daß ϕ nur sehr wenig zur Gesamtlösung beiträgt, und führt auf die Tangente an den Primärpfad

$$\Delta \mathbf{u}^I = \begin{bmatrix} -0.8571 \\ -0.7143 \\ 0.9286 \end{bmatrix} + 0.02135 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7931 \\ -0.7356 \\ 0.9713 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Die zweite Lösung $\alpha_2 = 1.1816$ führt auf die Tangente an den Sekundärpfad

$$\Delta \mathbf{u}^{II} = \begin{bmatrix} 2.6878 \\ -1.8959 \\ 3.2919 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

die nachfolgend aber noch ausführlich diskutiert wird. Die beiden Tangenten, sowie die zu ϕ orthogonale Lösung $\Delta \mathbf{u}_\perp$ sind in Bild 1.9 im (u_3, λ) - und (u_1, u_3) -Raum dargestellt. Das zugehörige Lastinkrement beträgt $\Delta \lambda = 1$, das schon auf Gleichung (1.14) führte. Zur Überprüfung der Tangente an den Primärpfad oder auch zur vereinfachten Bestimmung beziehungsweise Näherung der Tangente wird die Gleichung

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}^I \approx \mathbf{P} \quad (1.27)$$

an der Stelle

$$\lambda = 0.53; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.3389 \\ -0.5874 \\ 0.9932 \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

also in der Nähe des singulären Punktes, gelöst (\mathbf{K}_T folgt aus Gleichung (1.3))

$$\begin{bmatrix} -0.3389 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0.9932 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^I \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \Delta \mathbf{u}^I \approx \begin{bmatrix} -0.7919 \\ -0.7316 \\ 0.9699 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

und dabei gute Übereinstimmung erzielt.

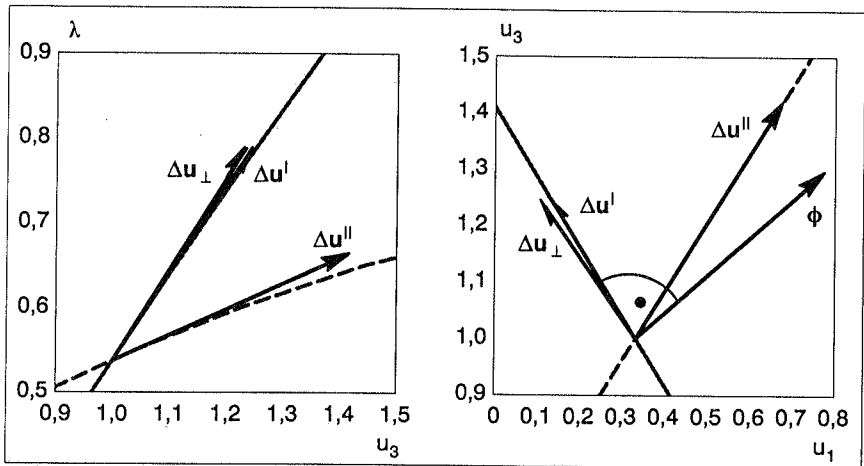


Bild 1.9: Tangenten im (u_3, λ) – und (u_1, u_3) – Raum

Nach **Koiter** lautet der Ansatz für den Sekundärpfad am Verzweigungspunkt

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1 \cdot \xi + \dots \quad (1.30)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda) + \boldsymbol{\phi} \cdot \xi + \dots = \mathbf{u}_c + \Delta \mathbf{u}^I \cdot \lambda_1 \cdot \xi + \boldsymbol{\phi} \cdot \xi + \dots \quad (1.31)$$

unter Verwendung der Tangente an den Primärpfad $\Delta \mathbf{u}^I$. Der Pfadparameter ξ für den Sekundärpfad beschreibt mit $\xi = 0$ den Verzweigungspunkt. Die Steigung für den Lastparameter ergibt sich aus (s. Gleichung (6.22))

$$\lambda_1 = - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}} \boldsymbol{\phi}}{2 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^I} = - \frac{-19}{22.046} = 0.8618 \quad (1.32)$$

Es handelt sich hierbei um einen **asymmetrischen Verzweigungspunkt**, während bei $\lambda_1 = 0$ von einem **symmetrischen Verzweigungspunkt** die Rede sein würde. Einen Zuwachs des Lastparameters um $\Delta \lambda = 1.0$ stellt sich ein für

$$\Delta \lambda = \lambda_1 \cdot \xi \stackrel{!}{=} 1 \quad \mapsto \quad \xi = \frac{1}{\lambda_1} = 1.1603 \quad (1.33)$$

und die Tangente an den Sekundärpfad lautet:

$$\Delta \mathbf{u}^{II} = \lambda_1 \cdot \xi \cdot \Delta \mathbf{u}^I + \xi \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (1.34)$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} -0.7931 \\ -0.7356 \\ 0.9713 \end{bmatrix} + 1.1603 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6879 \\ -1.8959 \\ 3.2920 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Diese Lösung liefert auch schon Gleichung (1.26). Bild 1.10 verdeutlicht die Lösung nach Koiter.

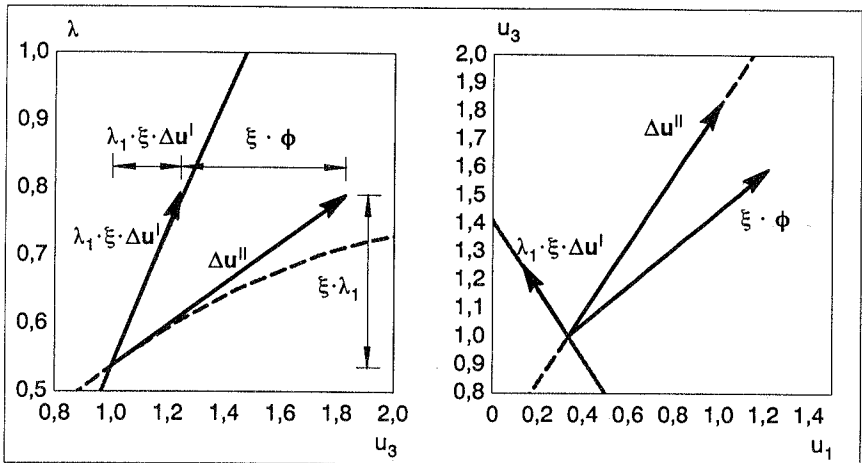


Bild 1.10: Tangente an Sekundärpfad nach Koiter

Bei Parametrisierung des Gleichgewichtspfades bezüglich eines Pfadparameters s und Verwendung des Ansatzes

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \phi \quad (1.36)$$

am singulären Punkt unter Verwendung der speziellen Lösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ lautet die **Verzweigungsgleichung** mit den in Gleichung (1.22) eingeführten skalaren Größen a, b und c (siehe Wagner(1991) oder Anhang 13.2)

$$a \alpha^2 + 2 b \alpha \dot{\lambda} + c \dot{\lambda}^2 = 0 \quad (1.37)$$

($\dot{}$) kennzeichnet die Ableitung nach dem Pfadparameter s . Die Verwendung von $\Delta \mathbf{u}_\perp$ als spezielle Lösung führt auf

$$a = -19.0 \quad (1.38)$$

$$b = 11.4283 \quad (1.39)$$

$$c = -0.4793 \quad (1.40)$$

und die Lösung der quadratischen Verzweigungsgleichung auf

$$\dot{\lambda}_1 = -46.841 \cdot \alpha \quad (1.41)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -0.8463 \cdot \alpha \quad (1.42)$$

Aus der Vorgabe für den Lastzuwachs $\Delta \dot{\lambda}_1 = \Delta \dot{\lambda}_2 = 1.0$ ergibt sich

$$\alpha_1 = 0.02135 \quad (1.43)$$

$$\alpha_2 = 1.18163 \quad (1.44)$$

Diese Werte sind schon bekannt aus Gleichung (1.24) und führen auf die bereits gezeigten Tangenten an Primärpfad und Sekundärpfad.

Die Verwendung der Tangente an den Primärpfad $\Delta \mathbf{u}^I$ von vornherein anstatt $\Delta \mathbf{u}_I$ führt auf $c=0$ und damit für die Lösung der Verzweigungsgleichung (1.37) mit

$$\dot{\lambda} = -\frac{a}{2b} \cdot \alpha \quad (1.45)$$

auf dieselben Ergebnisse wie bei Koiter nach Gleichung (1.30) bis (1.35).

1.4.1.2 Durchschlagspunkt

Am Durchschlagspunkt bei

$$\lambda_c = 0.7447 \quad \mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} 1.4495 \\ -1.7959 \\ 2.3670 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

lauten Steifigkeitsmatrix und Singulärvektor

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} -1.4495 & -1 & 0 \\ & -1 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 2.3670 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.4495 \\ 1.2248 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Das Skalarprodukt $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P}$, das noch normiert werden kann,

$$\frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P}}{\|\boldsymbol{\phi}\| \cdot \|\mathbf{P}\|} = -0.5110 \gg 0 \quad (1.48)$$

ist verschieden von Null und weist auf einen Durchschlagspunkt hin. Die Lösung mit der im Rahmen der Rechengenauigkeit nahezu "singulären" Steifigkeitsmatrix

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 122418 \\ -177446 \\ 149933 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

wird so skaliert, daß die erste Komponente gleich eins wird

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\Delta \tilde{\mathbf{u}}}{122418} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.4495 \\ 1.2248 \end{pmatrix} \approx \boldsymbol{\phi} \quad (1.50)$$

Es ergibt sich als Tangente der Singulärvektor $\boldsymbol{\phi}$ beim Lastzuwachs $\Delta \lambda = 0$. Jedoch ist diese Art der Tangentenbestimmung nicht praktikabel, da die erzielte Lösung sich nur infolge numerischer Ungenauigkeiten erzeugen läßt. Auch die Nelson-Regel ist hier nicht anwendbar, da die rechte Seite nicht senkrecht auf dem Kern von \mathbf{K}_T steht.

1.4.2 Einführendes Beispiel: Optimierung eines versteiften Paneels

Das folgende Beispiel wird in Kapitel 11 noch ausführlich beschrieben und dient hier nur der Darlegung einer für die Arbeit typischen Optimierungsaufgabe. Das in Bild 1.11 dargestellte versteifte Paneel unter Axialdruckbelastung besitzt unterschiedliche Dicken für das Paneel selbst und für die Steife. Diese beiden Dicken dienen dann auch als Optimierungsvariablen.

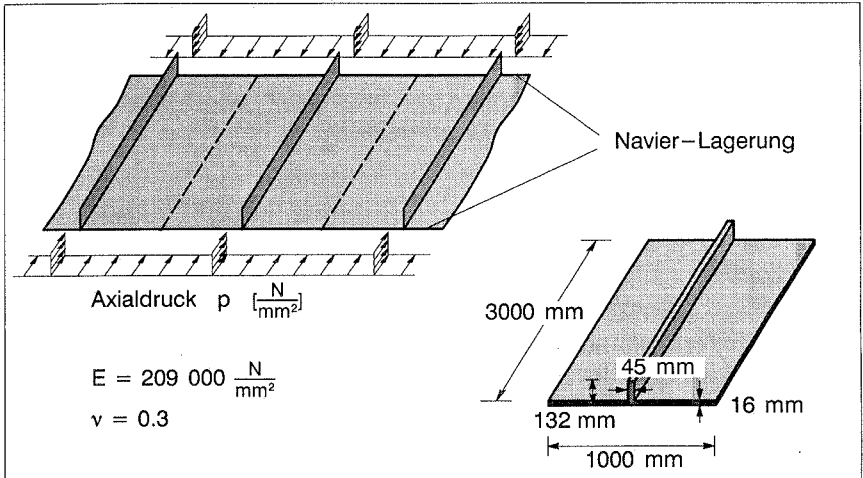


Bild 1.11: Beschreibung des versteiften Panels

Die Lastverschiebungskurve in Bild 1.12 für die Mittendurchbiegung u_m an der Steife weist einen Verzweigungspunkt für das Lastniveau $p_{\text{perf}}=256.6 \text{ N/mm}^2$ auf. Unter Verwendung der in Bild 1.12 dargestellten Imperfektionsform und einer Imperfektionsamplitude von $a=10 \text{ mm}$ ergibt sich die Lastverschiebungskurve des imperfekten Panels mit einem Durchschlagspunkt bei $p_{\text{imp}}=194.7 \text{ N/mm}^2$.

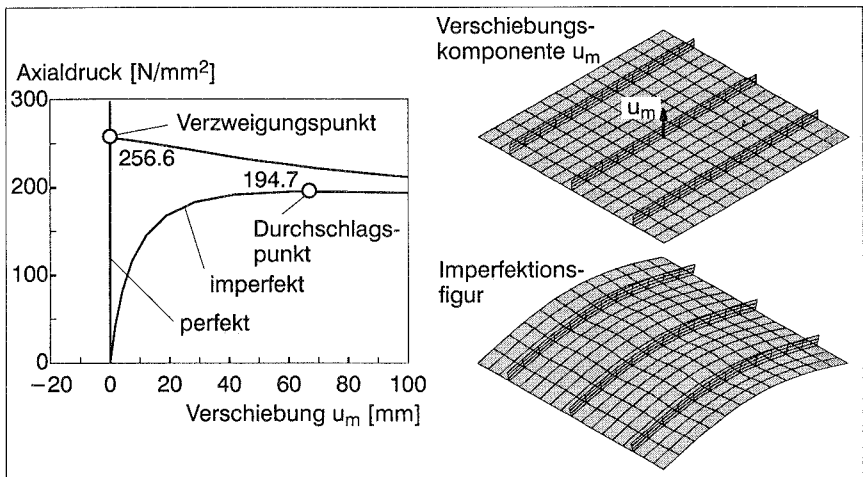


Bild 1.12: Lastverschiebungskurven für Ausgangsform

Die Maximierung der Traglast des perfekten Paneels unter der Nebenbedingung des konstanten Volumens ergibt am Optimum für die Wanddicken des Paneels bzw. der Steife $t_p = 14.94$ mm bzw. $t_s = 53.06$ mm. Die Lastverschiebungskurven in Bild 1.13 zeigen jetzt einen Verzweigungspunkt bei $p_{\text{perf}} = 282.2$ N/mm², jedoch bei einem starken Abfall infolge Imperfektionen auf $p_{\text{imp}} = 207.9$ N/mm².

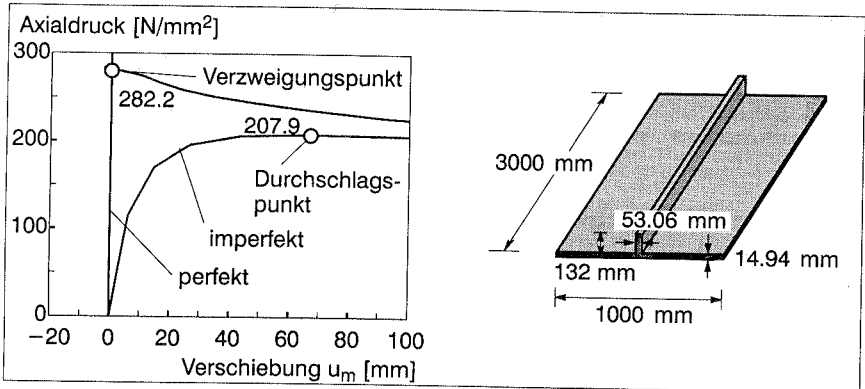


Bild 1.13: Keine Berücksichtigung von Imperfektionen während Optimierung

Die Berücksichtigung von Imperfektionen im Optimierungsprozeß, also Maximierung der kritischen Last der imperfekten Struktur, führt am Optimum auf $t_p = 12.96$ bzw. $t_s = 68.02$. Die Lastverschiebungskurven ergeben eine weitere Erhöhung der kritischen Last der imperfekten Struktur auf $p_{\text{imp}} = 226.5$ N/mm² bei gleichzeitiger Abnahme der kritischen Last am perfekten System auf ebenfalls $p_{\text{perf}} = 226.5$ N/mm². Daß die beiden Traglasten gerade auf gleicher Höhe liegen, ist kein Zufall und wird in Kapitel 11.1 noch ausführlich diskutiert.

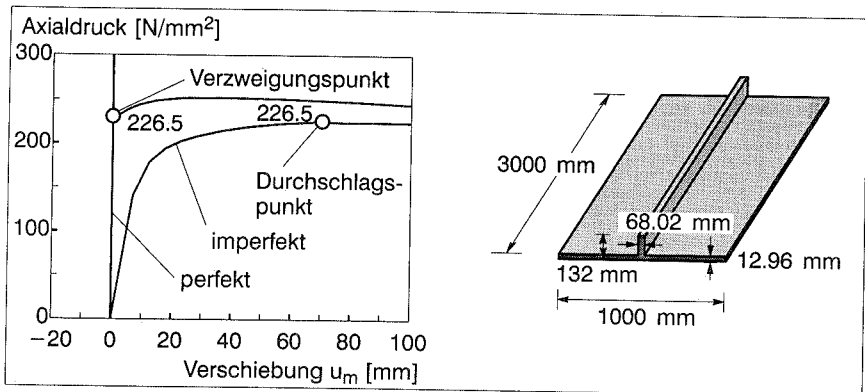


Bild 1.14: Optimierungsergebnis bei Berücksichtigung von Imperfektionen

Die für das Versagen maßgebende kritische Belastung des imperfekten Paneels kann bei gleichbleibendem Materialaufwand durch das Variieren des Verhältnisses von Paneeldicke zu Steifendicke von $p_{\text{imp}}=194.7 \text{ N/mm}^2$ auf $p_{\text{imp}}=226.5 \text{ N/mm}^2$ um 16% gesteigert werden. Bei Verwendung von mehr Optimierungsvariablen, wie dann in Kapitel 11 für drei Variablen gezeigt, wird der Gewinn noch deutlicher.

1.5 Gliederung der Arbeit

Wie sich schon in den vorangegangenen Ausführungen ankündigt, läßt sich die Arbeit in zwei wesentliche Bereiche aufteilen. Diese klare Trennung erfolgt, da der erste Teil, der sich mit Stabilitätsberechnungen beschäftigt, auch das Interesse wecken soll bei jemandem, der sich nicht mit Optimierung beschäftigt. In den Kapiteln zwei bis sieben wird ein vollständiges Werkzeug vorgestellt, das ermöglicht, auf möglichst komfortablem Wege, Gleichgewichtspfade zu durchlaufen, kritische Punkte zu lokalisieren, an Verzweigungen die Pfade zu wechseln und weiter zu verfolgen, Imperfektionen aufzubringen und deren Einflüsse zu erfassen.

Nach der Einleitung zeigt **Kapitel 2** die Grundlagen der Kontinuumsmechanik auf. Die Begriffe geometrisch nichtlinear und linear elastisches Material werden mit Gleichungen erfaßt. Die anschließende Diskretisierung des Energiefunktionals ermöglicht eine einfache und klare Darstellungsweise, ohne daß dadurch irgendwelche Einschränkungen entstehen.

Nach einer Übersicht über Veröffentlichungen zum Thema Pfadverfolgung von Gleichgewichtspfaden diskutiert **Kapitel 3** einige der wichtigsten Verfahren. Die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen werden iterativ mit Newton–Verfahren gelöst. Das Hauptaugenmerk gilt den Bogenlängenverfahren, zum einen in der Form der konsistenten Linearisierung oder der exakten Erfüllung der Bogenlängengleichung nach Crisfield und zum anderen als Iteration auf dem Weg des Minimums der residualen Änderungen, in der mathematischen Literatur auch als Gauß–Newton–Verfahren bekannt. Die vielen veröffentlichten Varianten und Modifikationen im Zusammenhang mit den Bogenlängenverfahren tragen wohl eher zur Verwirrung bei und verlieren bei einem geeigneten Verfahren zur automatischen Schrittweitenanpassung sofort ihre Bedeutung. Deshalb wird hier eine sehr praktikable Schrittweitenstrategie entwickelt, die dann auch bei den meisten Beispielrechnungen zum Einsatz kommt.

Die direkten Methoden zur Berechnung von kritischen Punkten basierend auf der Formulierung von erweiterten Systemen sind Gegenstand der Ausführungen des **Kapitels 4**. Die von Wriggers et al. (1988, 1990) vorgeschlagenen erweiterten Systeme, die bei der iterativen Lösung auf die Partitionierungsmethode zurückgreifen, können effizient gelöst werden, gerade auch bei großen Problemen mit vielen Freiheitsgraden. Die Sym-

metrie der Systemmatrix und besondere Speichertechniken zur Steigerung der Effizienz bei der Gleichungslösung finden Eingang. Viele in der mathematischen Literatur erschienene Verfahren lösen die erweiterten Systeme ohne besondere Techniken oder auf Wegen, die die Effizienz der hier favorisierten Verfahren nicht erreichen. Die Singularität der Steifigkeitsmatrix findet in diesem Kapitel besondere Beachtung. Aufgrund dieser Singularität wird ein Penalty–Verfahren von Wriggers erläutert und mit zwei anderen im Rahmen dieser Arbeit entstandenen verglichen. Die Penalty–Formulierung, die zur Verteilung des Strafterms den Eigenvektor verwendet, erweist sich als besonders stabil und leicht einsetzbar, so daß sie bevorzugt Verwendung findet. Auf die Singularität wird dann im Rahmen verschiedener Hilfstechniken für die Gleichungslösung noch näher eingegangen.

Die Pfadwechselprozeduren von **Kapitel 5** nutzen die Möglichkeit, daß mit den im vorhergehenden Kapitel geschilderten Methoden ein Verzweigungspunkt genau berechnet werden kann. Ganz simple Abzweigungstechniken werden verglichen mit der Berechnung der Tangenten nach Koiter oder durch Lösen der Verzweigungsgleichung. Diese Methoden machen die verschiedensten zum Teil komplizierten und undurchsichtigen anderen Techniken eigentlich überflüssig.

Die Behandlung des Nachbeulverhaltens erfolgt in **Kapitel 6**. Die Nachbeulanalyse von Koiter wird so aufbereitet, daß sie Eingang in finite Elementprogramme findet und beim Vergleich mit der Parametrisierung der Gleichgewichtsbeziehungen und Lösen der Verzweigungsgleichung weitgehendste Übereinstimmung aufzeigt.

In **Kapitel 7** wird die Koitersche Imperfektionsempfindlichkeit dargelegt und in die Methodik, ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen und der Singularitätsbedingung, eingeordnet und diskutiert. Dies erweist sich im Hinblick auf die später diskutierte Sensitivitätsanalyse als sehr wichtig.

Die Kapitel acht bis elf beschäftigen sich nun mit der Optimierung und der Integration der bisher gezeigten Methoden in eine Optimierungsprozedur.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit der vorhandenen Optimierungsstruktur und –modellbildung. Das Optimierungsmodell mit der Definition von Optimierungsfunktionen, Zielfunktion, Nebenbedingungen oder Restriktionen, das Geometriemodell mit Formfunktionen und wenigen Formparametern basierend auf den Methoden des Computer Aided Geometric Design, die Strukturanalyse basierend auf der Methode der finiten Elemente, die Optimierungsverfahren, allen voran die Sequentielle Quadratische Programmierung, und die Methoden der Sensitivitätsanalyse bilden die Grundlage.

In **Kapitel 9** finden Eigenwertberechnungen zur Abschätzung der kritischen Last oder zur Ermittlung von Eigenfrequenzen Eingang in die Optimierung. Dies kann als Vorstufe zur Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität verstanden werden, da einige Problemlösungen dann von hier übertragen werden können. Das Problem der Formfin-

dung für einen beidseitig eingespannten Druckstab und das Beispiel der Formfindung einer Glocke unter Verwendung ihrer Eigenfrequenzen dienen als anschauliche Beispiele.

In **Kapitel 10** münden dann die bisherigen Ausführungen. Es wird eine Optimierungsmethode vorgestellt, die das Instabilitätsverhalten und die Imperfektionsempfindlichkeit berücksichtigt. Im Vergleich zu anderen bereits existierenden Verfahren wird hier ganz klar die Maximierung der kritischen, gerade aufnehmbaren Last gefordert. Die Imperfektionsempfindlichkeit wird auf klare, leicht zu handhabende und leicht erweiterbare Weise eingebracht. Das Verfahren erlaubt die Optimierung von verschiedensten Tragwerken, z.B. Fachwerke, Scheiben, Platten, Schalen usw., so lange für die Strukturanalyse die entsprechende geometrisch nichtlineare finite Elementformulierung vorliegt. Die Prozedur behandelt Probleme mit vielen Freiheitsgraden, bis zu mehreren Tausend, und Optimierungsvariablen, im Bereich von mehr als 15. Die für den Aufwand maßgebenden Techniken sind die direkte Berechnung von kritischen Punkten mit der Methode der erweiterten Systeme und die Sensitivitätsanalyse.

Die Beispiele aus **Kapitel 11** beziehen sich auf die Optimierungsprozedur aus dem vorhergehenden Kapitel und demonstrieren deren Einsatzmöglichkeiten und Funktionstüchtigkeit.

2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden kurz die Grundlagen der Kontinuumsmechanik aufgezeigt. Dabei werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Voraussetzungen, geometrische Nichtlinearität, d.h. nichtlineare Beziehungen zwischen Verschiebungen und Verzerrungen, und Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Dehnungen bei kleinen Verzerrungen, ausgeleuchtet. Als Spannungs- und Dehnungsmaß werden die im Ingenieurbereich üblichen Piola–Kirchhoff–Spannungen 2. Art und die Green–Lagrange–Verzerrungen verwendet. Die zwischen diesen Größen formulierten hyperelastischen Materialgleichungen ermöglichen die Aufstellung eines Potentials, das im Hinblick auf die nächsten Kapitel mit der Methode der finiten Elemente diskretisiert wird. Bei den Beispielrechnungen wird zwar meist das von Büchter (1992) formulierte degenerierte isoparametrische Schalenelement für große Rotationen verwendet, jedoch schränken die Herleitungen weder die Wahl der finiten Elemente noch des Diskretisierungsverfahren ein.

Die ausgeführten Herleitungen sind eine Zusammenstellung aus den Werken von Becker und Bürger (1975), Bufler (1991), Leipholz (1968) und Ogden (1984) und können dort weiter vertieft werden.

2.1 Kinematik

Ein Punkt P des Körpers B in der Referenzkonfiguration wird beschrieben durch den Ortsvektor $\mathbf{X} = X_i \mathbf{i}_i$ in einem beliebigen Koordinatensystem mit den Lagrange–Koordinaten X_i .

Die Bewegungen des Körpers B werden beschrieben durch die zeitliche Änderung des Ortsvektors von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t mit der Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Bei der hier gewählten Lagrange–Formulierung ergibt sich der Verschiebungsvektor \mathbf{u} zu

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

Durch Differentiation des Ortsvektors \mathbf{x}

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.3)$$

erhält man den Deformationsgradienten \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{x}_{,X} = \mathbf{I} + \mathbf{u}_{,X} \quad (2.4)$$

mit dem zweistufigen Identitätstensor \mathbf{I} .

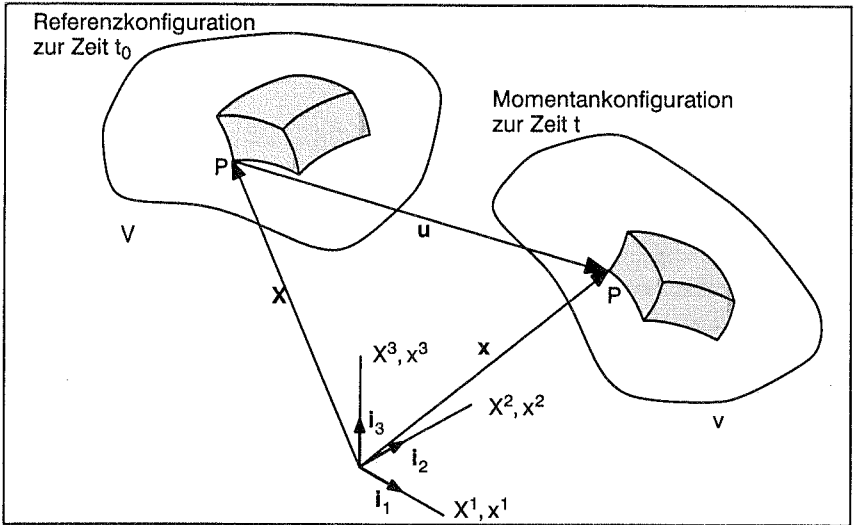


Bild 2.1: Kinematik des Kontinuums

Der Deformationsgradient transformiert nach Gleichung (2.3) das Linienelement $d\mathbf{x}$ in die Momentankonfiguration. Mit \mathbf{F} können auch das Flächenelement mit den Einheitsnormalen \mathbf{n} , \mathbf{N} durch

$$d\mathbf{a} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad ; \quad d\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{a} \quad ; \quad d\mathbf{A} = \mathbf{N} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.5)$$

oder das Volumenelement durch

$$d\mathbf{v} = \det \mathbf{F} \cdot d\mathbf{V} \quad (2.6)$$

transformiert werden. Dabei kommt die Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ zur Verwendung. Der Green–Lagrange–Verzerrungstensor \mathbf{E} läßt sich nun definieren zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.7)$$

Dieser objektive, d.h. von Starrkörperbewegungen unabhängige, Verzerrungstensor ist nichtlinear in den Verschiebungen \mathbf{u} .

2.2 Spannungen

Der Spannungsvektor \mathbf{t} auf der Momentankonfiguration läßt sich unter Verwendung des Cauchy–Theorems schreiben als

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.8)$$

mit dem Cauchy–Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} . Beim Übergang auf die Referenzkonfiguration muß die resultierende Kraft auf einem Flächen-

stück unabhängig von der Bezugskonfiguration sein, und es entsteht der unsymmetrische 1. Piola–Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (2.9)$$

Die Vormultiplikation mit dem inversen Deformationsgradienten führt zum symmetrischen 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (2.10)$$

Weitere Spannungsmaße können der Literatur entnommen werden. Hier sei noch bemerkt, daß der 2. Piola–Kirchhoffsche Spannungstensor das zum Green–Lagrange–Verzerrungsmaß energetisch konjugierte Spannungsmaß darstellt.

2.3 Bilanzgleichungen

Aus der Forderung nach der Massenerhaltung während des Deformationsprozesses folgt für die Dichte ρ der Momentankonfiguration bei gegebener Dichte ρ_R des Referenzzustandes

$$\rho = \frac{\rho_R}{\det \mathbf{F}} \quad (2.11)$$

Der Impulssatz führt unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes und des Cauchy–Theorems zum lokalen Kräftegleichgewicht

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \hat{\mathbf{b}} \quad (2.12)$$

oder mit den Größen der Referenzkonfiguration zu

$$\rho_R \ddot{\mathbf{X}} = \operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_R \hat{\mathbf{b}} \quad (2.13)$$

mit den über das Volumen verteilten Kräften $\rho \hat{\mathbf{b}}$ bzw. $\rho_R \hat{\mathbf{b}}$. Die Trägheitskräfte $\rho \ddot{\mathbf{x}}$ bzw. $\rho_R \ddot{\mathbf{X}}$ bleiben bei der Behandlung statischer Probleme unberücksichtigt.

Der Drallsatz bzw. das lokale Momentengleichgewicht fordert für den 1. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^{\text{T}} = \mathbf{F} \mathbf{P}^{\text{T}} \quad (2.14)$$

Dies ist erfüllt für den symmetrischen Cauchy–Spannungstensor und zeigt auch die Symmetrie des 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensors auf.

2.4 Materialgleichungen

Die Materialgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen und sollen beispielhaft als Beziehung zwischen dem 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} und den Green–Lagrange–Verzerrungen \mathbf{E} aufgestellt werden. Da hier im wesentlichen Probleme mit großen Verschiebungen, aber kleinen

Verzerrungen behandelt werden, soll ein lineares, hyperelastisches, homogenes, isotropes Material verwendet werden.

Bei hyperelastischem (oder auch Green–elastischem) Material ist die von den Spannungen geleistete Arbeit wegunabhängig und die Spannungen ergeben sich aus der Ableitung der spezifischen inneren Energie Ψ

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.15)$$

mit drei verbleibenden Materialkonstanten.

Die Verwendung des St. Venant–Kirchhoff–Materials formuliert einen linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{S} und \mathbf{E} und die spezifische innere Energie Ψ läßt sich als Funktion der Invarianten $I_1(\mathbf{E})$ und $I_2(\mathbf{E})$ formulieren.

$$\Psi = \alpha I_1(\mathbf{E})^2 + \beta I_2(\mathbf{E}) \quad (2.16)$$

$$I_1(\mathbf{E}) = \text{tr} \mathbf{E} \quad (2.17)$$

$$I_2(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)) \quad (2.18)$$

mit den beiden verbleibenden Elastizitätsgrößen α und β . Dieses linear hyperelastische homogene Materialgesetz erfüllt auch die Forderung nach der materiellen Objektivität, d.h. der Invarianz gegen Starrkörperbewegungen und Drehungen des Koordinatensystems.

Für den 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} folgt dann mit (2.16) und den Ableitungen für die Invarianten

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{I} \quad ; \quad \frac{\partial I_2(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = I_1(\mathbf{E})\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{S} = (2\alpha + \beta)I_1\mathbf{I} - \beta\mathbf{E} \quad (2.20)$$

Nochmaliges Ableiten der spezifischen inneren Energie bzw. des 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensors nach den Verzerrungen \mathbf{E} führt auf den vierstüfigen Werkstofftensor \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = (2\alpha + \beta)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \beta\mathbf{I} \quad (2.21)$$

und aus (2.20) ergibt sich

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \quad (2.22)$$

Für St. Venant–Kirchhoff–Material kann Gleichung (2.20) auch in Abhängigkeit der Lamé–Konstanten λ und μ geschrieben werden als

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} \quad (2.23)$$

Hier läßt sich auch der Zusammenhang zwischen den Konstanten α , β und den Lamé–Konstanten λ , μ erkennen.

$$\lambda = 2\alpha + \beta = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.24)$$

$$\mu = -\frac{\beta}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.25)$$

Die Konstanten können auch, wie angegeben, in Abhängigkeit von Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν formuliert werden.

2.5 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Außer den bisherigen Gleichungen müssen zur Lösung eines Problems der Kontinuumsmechanik auch Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen erfüllt werden. Auf der Referenzkonfiguration ist dann folgendes System von Gleichungen zu lösen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \left. \vphantom{\mathbf{E}} \right\} \text{Kinematik} \quad (2.26)$$

$$\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_R \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \left. \vphantom{\text{Div}} \right\} \text{Statik} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad \left. \vphantom{\mathbf{S}} \right\} \text{Werkstoff} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } A_u \quad \text{Verschiebungsrandbedingungen}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{auf } A_t \quad \text{Spannungsrandbedingungen}$$

Durch die Einführung einer zulässigen virtuellen Verschiebung bzw. Testfunktion $\delta \mathbf{u}$, die die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt, erhält man nach einigen Umformungen die schwache Form des Gleichgewichts, auch Prinzip der virtuellen Verschiebungen genannt

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \mathbf{u}^T (\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_R \hat{\mathbf{b}}) \, dV \\ &= \int_V \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho_R \hat{\mathbf{b}} \, dV - \int_{A_t} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die schwache Formulierung des Impulssatzes oder des Gleichgewichts bezieht sich hier auf die Referenz-Konfiguration. Sie kann entsprechend auch bezogen auf die Momentankonfiguration aufgestellt werden.

2.6 Energiefunktional und Diskretisierung

Das hier verwendete hyperelastische Material ermöglicht, daß sich die Spannungen durch Ableitungen eines Potentials berechnen lassen und das Funktional \mathcal{J} formulieren läßt

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_V (\Psi(\mathbf{E}) - \rho_R \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}) \, dV - \int_{A_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \quad (2.30)$$

Die Stationaritätsbedingung dieses Funktional, d.h. die Variation des Funktional soll verschwinden, führt dann wieder zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.29).

Durch die Einführung des skalaren Lastparameters λ , mit dem die Last bei geometrisch nichtlinearen Strukturanalysen skaliert wird, verändert sich das Funktional zu

$$\pi(\mathbf{u}, \bar{\lambda}) = \int_V \Psi(\mathbf{E}) \, dV - \bar{\lambda} \left(\int_V \rho_R \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{A_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \right) \quad (2.31)$$

Der mit Strich markierte Lastparameter $\bar{\lambda}$ soll bei der Variation des Potentials zur Gewinnung der Gleichgewichtsbedingungen nicht variiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Probleme, bei denen die Belastung unabhängig von den Verschiebungen ist, behandelt.

An dieser Stelle soll jetzt der Übergang zur Methode der finiten Elemente gezeigt werden. Die in dem Funktional auftauchenden Funktionen werden durch diskrete Knotenwerte und bereichsweise Elementansätze approximiert. Das Potential läßt sich dann schreiben als

$$\pi(\mathbf{u}, \bar{\lambda}) = \tilde{\pi}(\mathbf{u}) - \bar{\lambda} \mathbf{u}^T \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{P}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \quad (2.32)$$

Obwohl für die Verschiebungen der Einfachheit halber weiterhin die gleiche Notation verwendet wird, ergibt sich aus dem Verschiebungsfeld jetzt ein Vektor mit n diskreten Werten. Der Integralausdruck mit den Volumens- und Randkräften wird ersetzt durch den konsistenten Lastvektor \mathbf{P} , ebenfalls mit der Dimension n . Der Term $\tilde{\pi}$ beschreibt die von den Verschiebungen abhängige innere Energie.

Weitere Informationen zur Methode der finiten Elemente können den Lehrbüchern zu diesem Thema, z.B. Zienkiewicz und Taylor (1989,1991) oder Bathe (1986), entnommen werden.

3 Gleichgewicht und Pfadverfolgung

Im Gegensatz zur linearen Berechnung erfordert die geometrisch nichtlineare Analyse mehr als nur die Berechnung eines zu einem vorgegebenen Lastniveau gehörenden Verschiebungszustandes und eventuell der entsprechenden Spannungen. Dies wird insbesondere deutlich, wenn die direkte Berechnung eines Gleichgewichtszustandes auf einem gewünschten Lastniveau infolge zu großer Nichtlinearitäten nicht ohne weiteres möglich ist. Dasselbe gilt, wenn weitere Informationen, wie z.B. Lastverformungsverlauf bis zu einem vorgegebenen Lastniveau oder darüberhinaus bis zum Erreichen von kritischen Punkten oder sogar bis weit hinein in den Nachbeulbereich, gewünscht werden. In diesen Fällen kommt die Pfadverfolgung ins Spiel, um einzelne diskrete Punkte, die die nichtlinearen Gleichgewichtsbeziehungen abhängig vom sich ändernden Lastparameter erfüllen, zu Lastverschiebungspfaden zusammensetzen. Die zum Einsatz kommenden Fortsetzungsverfahren werden auch Prädiktor–Korrektor–Verfahren oder inkrementell iterative Methoden genannt. Bei Verwendung des Euler–Prädiktors, d.h. bei Gebrauch der Tangentensteifigkeitsbeziehung zur Bestimmung des Prädiktorschrittes, spricht man auch von tangentieller Fortsetzung. Die Lösung in der Korrektorphase erfolgt iterativ mit Hilfe von Newton–Verfahren, wofür die Gleichgewichtsbeziehungen linearisiert werden. Im folgenden wird ein vollständiger, stabiler, komfortabler und vielseitig einsetzbarer Algorithmus zur Pfadverfolgung vorgestellt. Nach einigen Ausführungen zum Prädiktor werden von den in vielen Publikationen immer wieder nur leicht abgeänderten Verfahren zur Korrektoriteration die vermeintlich wichtigsten herausgefiltert und dem Benutzer nahe gebracht. Neben klassischer Last– und Verformungskontrolle spielt die Bogenlängengleichung dabei die zentrale Rolle. Vorgestellt werden die konsistente Linearisierung und alternativ die exakte Erfüllung dieser Bogenlängengleichung während der Korrektorphase. Eine weitere Methode verwendet den Weg der minimalen residualen Änderungen bis zum Erreichen eines Gleichgewichtspunktes. Dies entspricht auch den Methoden mit angepassten Normalebenen oder dem in der mathematischen Literatur sehr gebräuchlichen Gauß–Newton–Verfahren. Einige weitere Alternativen und begleitende Maßnahmen werden mit dem Hinweis auf die entsprechende Literaturstelle angesprochen.

Die Entwicklung einer leistungsfähigen Strategie zur automatischen Schrittweitenanpassung nimmt einen weiteren wichtigen Platz ein. Dies scheint viel wichtiger zu sein als das weitere „Hochzüchten“ der Korrektoriterationsverfahren, meist doch nur für Spezialfälle ausgeführt. In Verbindung mit der Schrittweitenanpassung erlaubt die Verwendung des reinen Newton–Raphson–Verfahrens das mit dem am wenigsten Aufwand verbundene Durchlaufen komplizierterer Gleichgewichtspfade bis in den Nachbeulbereich hinein, da hierbei größere Inkrementierungen möglich werden.

Einige der wichtigsten Veröffentlichungen zum Thema lauten in chronologischer Reihenfolge: Wempner (1971), Rijs (1972, 1979, 1984), Wessels (1977), Keller (1977), Menzel, Schwetlick (1978), Batoz, Dhatt (1979), Crisfield (1981, 1983), Rheinboldt (1981), Ramm (1981), Fried (1984), Wriggers, Wagner (1985), Schweizerhof, Wriggers (1986).

3.1 Gleichgewicht

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich aus der Stationaritätsbedingung für das Potential (2.32). Bei gegebenem Lastparameter $\bar{\lambda}$ gilt

$$\delta\pi(\mathbf{u}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} - \bar{\lambda} \mathbf{P} \delta \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

für eine beliebige Testfunktion $\delta \mathbf{u}$, die die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt. Dies führt zu

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Dabei wird nach der Variation bezüglich der Verschiebungen der Lastparameter λ jetzt als freie Variable betrachtet. Die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{G} ergeben sich aus der Differenz der inneren Kräfte \mathbf{R} und der skalierten Belastung $\lambda \mathbf{P}$. Die von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängigen inneren Kräfte, die sich formal zu $\mathbf{R} = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \mathbf{u}}$ ergeben, sollen in dieser Arbeit mit der Methode der finiten Elemente bestimmt werden.

Das nichtlineare Gleichungssystem (3.2) beschreibt, bei n Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten, nämlich n Verschiebungen \mathbf{u} und dem skalaren Lastparameter λ , einen Gleichgewichtspfad. Um das Tragverhalten einer Struktur zu bestimmen, muß der Gleichgewichtspfad verfolgt werden. Dies geschieht, indem auf diesem Pfad einzelne Punkte berechnet werden. Dabei können Prädiktor-Korrektor-Verfahren (Bild 3.1) angewandt werden, die auf den um die Nebenbedingung f erweiterten Gleichungen (3.2) basieren:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ f(\mathbf{u}, \lambda) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Auf mögliche Nebenbedingungen f wird in Kapitel 3.3 näher eingegangen.

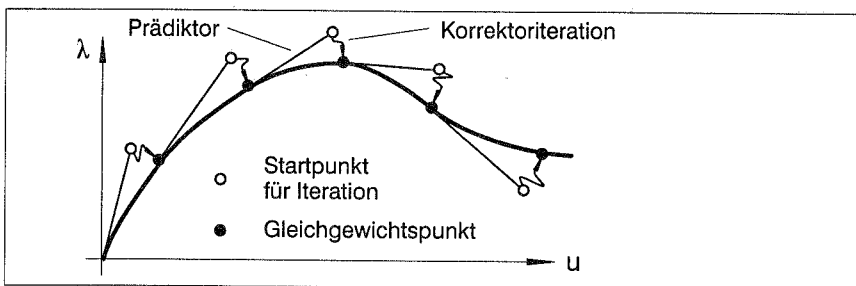


Bild 3.1: Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Während der Korrektoriteration wird das nichtlineare Gleichungssystem durch Newton–Verfahren gelöst. Dabei muß das durch konsistente Linearisierung aus Gleichung (3.3) entstehende Iterationsschema mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{,u} & \mathbf{G}_{,\lambda} \\ f_{,u} & f_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

oder

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ f_{,u} & f_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

durchlaufen werden, bis die iterative Verbesserung $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \lambda$ eine zu definierende Toleranzgrenze unterschreitet. Mit $(\)_{,u}$ und $(\)_{,\lambda}$ werden die partiellen Ableitungen nach den Verschiebungen \mathbf{u} bzw. nach dem Lastparameter λ bezeichnet. Die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T entsteht aus der Ableitung der inneren Kräfte oder der zweiten Ableitung des Potentials:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{I}}}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}_T = \mathbf{G}_{,u} = \tilde{\mathcal{I}}_{,uu} \quad (3.6)$$

3.2 Prädiktor

An einem bekannten Gleichgewichtspunkt $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda})$ wird die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T aufgestellt und das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_0 = \Delta \lambda_0 \mathbf{P} \quad , \quad \Delta \lambda_0 = 1 \quad (3.7)$$

gelöst. Die Lösung $(\Delta \mathbf{u}_0, \Delta \lambda_0)$ wird dann mit dem Faktor a skaliert, so daß eine der alternativen Möglichkeiten in Bild 3.2 erfüllt ist. Damit kann der Startpunkt $(\mathbf{u}_{Pr}, \lambda_{Pr})$

$$(\mathbf{u}_{Pr}, \lambda_{Pr}) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda}) + a (\Delta \mathbf{u}_0, \Delta \lambda_0) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda}) + (\Delta \mathbf{u}_{Pr}, \Delta \lambda_{Pr}) \quad (3.8)$$

für die Korrektoriteration gefunden werden. Diese Wahlmöglichkeit besteht bei den Bogenlängenverfahren nur für das erste Inkrement. Für die weiteren Inkremente werden konstante Bogenlängen s verwendet. In der Bogenlängengleichung in Bild 3.2 taucht der Skalierungsparameter ψ für den Lastparameter auf, der im Kapitel 3.3.2 näher erläutert wird. Im Kapitel 3.5 wird ein Verfahren vorgestellt, das in jedem Inkrement die Länge des Prädiktorschrittes durch Anpassung der Bogenlänge s variiert.

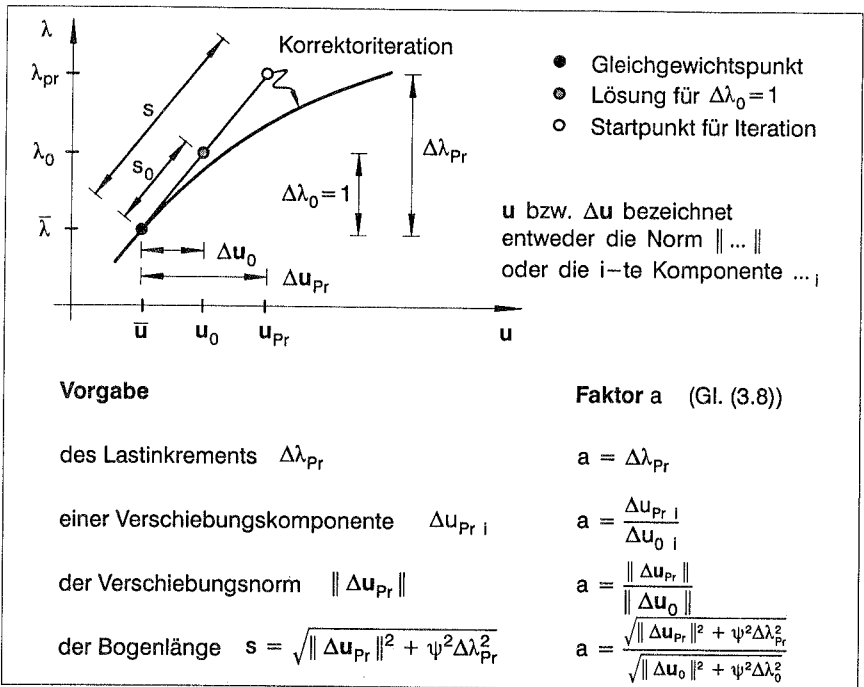


Bild 3.2: Länge des Prädiktorschrittes

In der Literatur, z.B. Wagner (1991) oder Eriksson (1993), findet man auch die Anwendung eines quadratischen Prädiktors. Auch wären noch höhere Ordnungen denkbar, da der numerische Aufwand zur Ermittlung der höheren Pfadableitungen sehr gering ist, siehe Wagner (1991), Cochelin et al. (1992) oder Kapitel 6. Diese Idee wird aber hier nicht weiterverfolgt.

3.3 Korrektoriteration

Um nach dem Prädiktorschritt wieder auf den Gleichgewichtspfad zu gelangen, wird die Korrektoriteration nach Gleichung (3.5) durchgeführt. Dabei ist es ratsam, nicht das gesamte Gleichungssystem direkt zu lösen, sondern die besonderen Eigenschaften der Tangentensteifigkeitsmatrix, nämlich Symmetrie und besondere Speichertechnik, resultierend z.B. aus Bandbreitenoptimierung bei schwach besetzter Matrix, auszunutzen. Es wird die von Batoz, Dhatt (1979) erstmalig vorgeschlagene Partitionierungsmethode angewandt.

Die erste Gleichung aus (3.5) wird umgeformt zu

$$\Delta u = K_T^{-1} (P \Delta \lambda - G) \quad (3.9)$$

Nach Einführung der beiden Teillösungen $\Delta \mathbf{u}_P$, $\Delta \mathbf{u}_G$ wird daraus

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_P &= \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{u}_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \quad (3.11)$$

In die zweite Gleichung von (3.5) eingesetzt, ergibt sich

$$\Delta \lambda = -\frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}_u^T \Delta \mathbf{u}_G}{\mathbf{f}_u^T \Delta \mathbf{u}_P + \mathbf{f}_{,\lambda}} \quad (3.12)$$

Mit dem Lastinkrement $\Delta \lambda$ und den beiden Teillösungen $\Delta \mathbf{u}_P, \Delta \mathbf{u}_G$ können das Verschiebungsinkrement nach Gleichung (3.11) aufgestellt und die Variablen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{\text{alt}} + \Delta \mathbf{u} \\ \lambda &= \lambda_{\text{alt}} + \Delta \lambda \end{aligned} \quad (3.13)$$

korrigiert werden. Die Iteration wird so lange wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist. Meist wird dafür das Verhältnis der Verschiebungsnormen der iterativen Verbesserung und der des gesamten Inkrements mit einer Toleranzschranke verglichen:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|} < \text{TOL} \quad \mapsto \quad \text{Abbruch} \quad (3.14)$$

Die Toleranzschranke für die Verschiebungen muß aber gewährleisten, daß die Ungleichgewichtskräfte mit ausreichender Genauigkeit verschwinden. Dazu kann auch ein Abbruchkriterium für die Ungleichgewichtskräfte verwendet werden.

3.3.1 Last- und Verschiebungssteuerung

Die allgemein formulierte Gleichung (3.5) beinhaltet als Sonderfall auch die klassischen Methoden der Last- und Verschiebungssteuerung. Bei Laststeuerung wird in jedem Inkrement ein neues Lastniveau $\hat{\lambda}$ vorgegeben und die Nebenbedingung $\mathbf{f} = \lambda - \hat{\lambda}$ für die Korrekteriteration verwendet. Die Verschiebungssteuerung verwendet $\mathbf{f} = \mathbf{u}_i - \hat{\mathbf{u}}_i$ mit der vorgeschriebenen Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_i$ für den i -ten Freiheitsgrad.

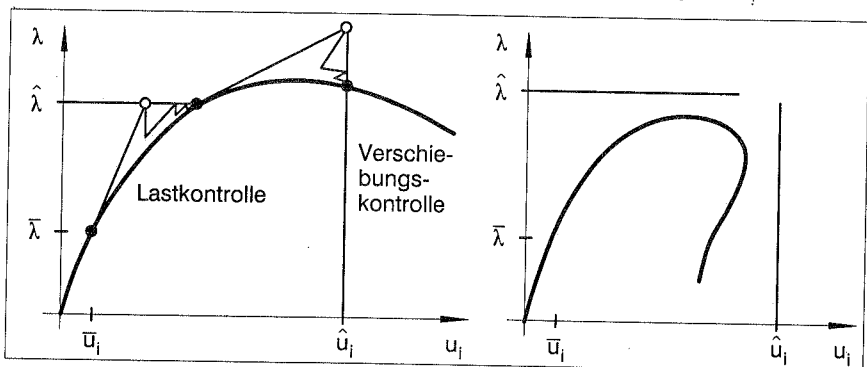


Bild 3.3: Last- und Verschiebungskontrolle

Treten Durchschlagspunkte oder Umkehrpunkte in der Lastverschiebungskurve auf, so versagen diese klassischen Methoden, weil kein Schnittpunkt zwischen Nebenbedingung und Gleichgewichtspfad existiert (Bild 3.3), oder mathematisch ausgedrückt, weil die Regularität des erweiterten Gleichungssystems (3.5) verloren geht. Es ist deshalb vorteilhaft, die in den nächsten Kapiteln beschriebenen Verfahren zu verwenden.

3.3.2 Bogenlängenverfahren – drei Varianten

Die Bogenlängenverfahren zeichnen sich dadurch aus, daß bei Durchschlags- bzw. Umkehrpunkten das erweiterte Gleichungssystem (3.5) regulär bleibt. Jedoch kann nicht verhindert werden, daß die für die Teillösungen (3.10) benötigte Steifigkeitsmatrix singular werden kann. Dieser Fall tritt aber nur dann ein, wenn während der Iteration der Durchschlagspunkt exakt getroffen wird, was aber bei praktischen Berechnungen eigentlich nie der Fall ist. Die von vielen Autoren, u.a. Wempner (1971), Rijs (1972, 1979), Ramm (1981), Crisfield (1981), vorgeschlagene Bogenlängengleichung lautet

$$f = \sqrt{\|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2} - s = 0 \quad (3.15)$$

Da hier Größen völlig unterschiedlicher Dimensionen vermischt werden, ist es notwendig, einen Skalierungsfaktor ψ für den Lastparameter einzuführen. Wird dieser Faktor zu null gesetzt, spricht man von einem zylindrischen Bogenlängenverfahren (Crisfield (1981)). Durch einen sehr großen Faktor bewegt man sich mehr in Richtung Lastkontrolle (Bild 3.4). Dazwischen liegt das sphärische Bogenlängenverfahren.

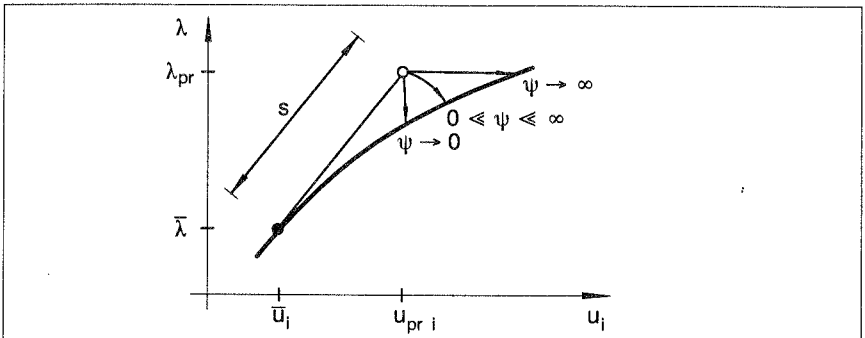


Bild 3.4: Skalierung für Lastparameter bei Bogenlängengleichung

Eine sehr gute Abschätzung für einen brauchbaren Skalierungswert erhält man, indem man mit den Ergebnissen des ersten Prädiktors einer Strukturanalyse den Lastparameter so skaliert, daß er in der Größenordnung der anderen Variablen, nämlich den Verschiebungskomponenten \mathbf{u} , liegt. Dabei bieten sich zwei Möglichkeiten an:

$$\psi = \frac{\|\mathbf{u}_{Pr}\|_{\infty}}{\lambda_{Pr}} \cdot 0.5 \quad , \quad \|\mathbf{u}_{Pr}\|_{\infty} \hat{=} \max_i u_{Pr i} \quad (3.16)$$

oder

$$\psi = \frac{\|\mathbf{u}_{Pr}\|^2}{n \cdot \lambda_{Pr}} \quad (3.17)$$

Die erste Variante orientiert sich am betragsmäßigen Maximalwert von \mathbf{u}_{Pr} , wobei der Faktor 0.5 heuristisch gewählt wurde, die zweite am Betrag von \mathbf{u}_{Pr} , bezogen auf die Anzahl der Freiheitsgrade.

Die in der Einführung dieses Kapitels angekündigten verschiedenen Korrektorstrategien finden nun unter den Punkten **a)** bis **c)** Beachtung:

a) Konsistente Linearisierung von $f = \sqrt{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2} - s = 0$

Bei konsistenter Linearisierung werden die Ableitungen

$$f_{,\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{f + s} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.18)$$

$$f_{,\lambda} = \frac{\psi^2}{\sqrt{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2}} (\lambda - \bar{\lambda}) = \frac{1}{f + s} (\lambda - \bar{\lambda}) \quad (3.19)$$

in das Iterationsschema eingesetzt und man gelangt über (3.10) bis (3.12) zur Verbesserung des Lastinkrements $\Delta\lambda$ mit

$$\Delta\lambda = - \frac{f(f + s) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{u}_G}{\psi^2(\lambda - \bar{\lambda}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{u}_P} \quad (3.20)$$

Anstatt der oben gezeigten Nebenbedingung kann auch die quadrierte Form $f = \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2 - s^2 = 0$ verwendet werden. Die Ableitungen verändern sich zu

$$f_{,\mathbf{u}} = 2(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.21)$$

$$f_{,\lambda} = 2\psi^2(\lambda - \bar{\lambda}) \quad (3.22)$$

und das Lastinkrement zu

$$\Delta\lambda = - \frac{\frac{1}{2}f + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{u}_G}{\psi^2(\lambda - \bar{\lambda}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta\mathbf{u}_P} \quad (3.23)$$

Die beiden Versionen sind sehr ähnlich. Auch zeigen numerische Beispiele fast keine Unterschiede.

b) exakte Erfüllung von $f = \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2 - s^2 = 0$

In Crisfield (1981) und Ramm (1981) wird vorgeschlagen, die aus den beiden Teillösungen zusammengesetzte Gleichung (3.11) direkt in die nicht linearisierte Nebenbedingung einzusetzen.

$$f = ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta\mathbf{u}_P \Delta\lambda + \Delta\mathbf{u}_G)^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta\mathbf{u}_P \Delta\lambda + \Delta\mathbf{u}_G) + \psi^2 ((\lambda - \bar{\lambda}) + \Delta\lambda)^2 - s^2 = 0 \quad (3.24)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \Delta \mathbf{u}_P^T \Delta \mathbf{u}_P + \psi^2 \\
 a_2 &= 2 \Delta \mathbf{u}_P^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u}_P) + 2 (\lambda - \bar{\lambda}) \psi^2 \\
 a_3 &= ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u}_G)^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u}_G) + (\lambda - \bar{\lambda})^2 \psi^2 - s^2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ergibt sich die quadratische Gleichung

$$a_1 \cdot \Delta \lambda^2 + a_2 \cdot \Delta \lambda + a_3 = 0 \tag{3.26}$$

und die beiden Lösungen

$$\Delta \lambda_{1/2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1} \tag{3.27}$$

Beim Auftreten einer negativen Diskriminante kann wie in Kapitel 3.5.3 verfahren werden.

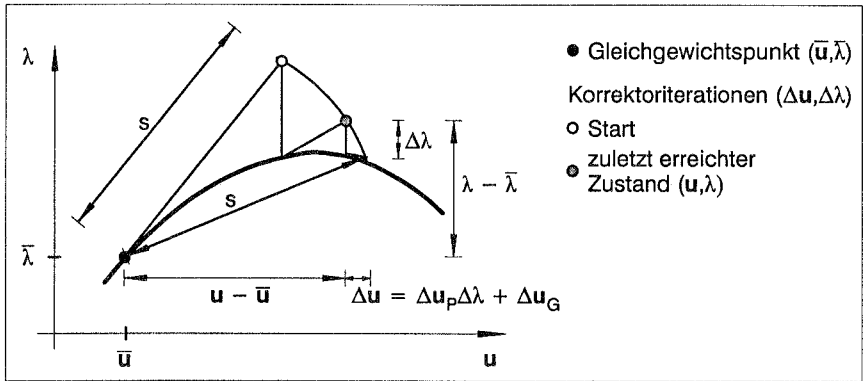


Bild 3.5: Erfüllung der Bogenlängengleichung nach Gleichung (3.24)

Die Frage nach der richtigen der beiden Lösungen $\Delta \lambda_{1/2}$ läßt sich beantworten, indem man den Winkel der bisherigen inkrementellen Verbesserung $(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})$ mit den jetzt entstehenden beiden Alternativen $(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda_{1/2} + \Delta \mathbf{u}_G)$ berechnet (Crisfield (1991)).

$$\cos \theta = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \left((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda_{1/2} + \Delta \mathbf{u}_G \right) \frac{1}{s^2} \tag{3.28}$$

$$\text{mit: } a_4 = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta \mathbf{u}_G \tag{3.29}$$

$$a_5 = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \Delta \mathbf{u}_P$$

$$\bar{\theta} = a_4 + a_5 \Delta \lambda_{1/2} \tag{3.30}$$

Die Lösung, für die $\bar{\theta}$ den größeren Wert annimmt, entspricht dann dem gesuchten Fall.

Hier muß noch angemerkt werden, daß bei der Berechnung der Werte a_1 bis a_5 nur Skalarprodukte von Vektoren anfallen, die bei der Rechenzeit im Vergleich zur Aufstellung der Tangentensteifigkeitsmatrix und Gleichungslösung kaum spürbar sind.

Der wesentliche Unterschied zwischen **a)** und **b)** liegt darin, daß bei **b)** jeder Lösungspunkt auf der Kugelfläche liegt und bei **a)** erst der ausiterierte Gleichgewichtspunkt (Bild 3.6).

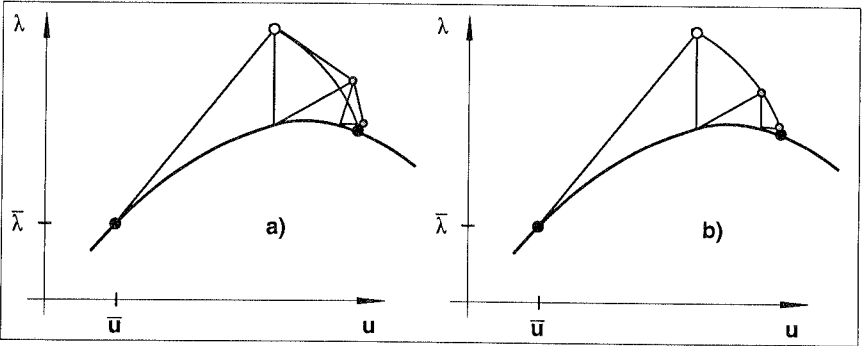


Bild 3.6: Vergleich: linearisierte / exakte Bogenlängengleichung

Am Beispiel des Zweibocks, schon beschrieben in Bild 1.5, läßt sich in Bild 3.7 zeigen, daß die Korrekteriteration nach **b)** unter Umständen deutlich besser abschneiden kann. Meist ist der Unterschied aber nicht so gravierend, auch können sich die Fälle umdrehen.

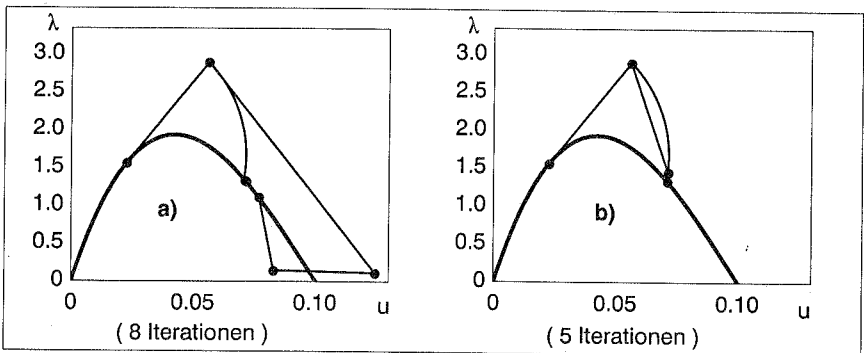


Bild 3.7: Zweibock – Vergleich: linearisierte / exakte Bogenlängengleichung

c) Minimum der residualen Änderungen

Die bisherigen Verfahren wurden durch eine zu Beginn festgelegte geometrische Bedingung, nämlich Iteration auf einer Kugelfläche, die während der Korrekteriteration konstant bleibt, charakterisiert. Eine alternative Möglichkeit sucht für jede iterative Verbesserung immer die mit der kleinsten Norm. Dabei wird der Vektor \mathbf{y} durch die Ergänzung der Verschiebungen \mathbf{u} mit dem durch ψ skalierten Lastparameter λ eingeführt, und es ergibt sich für $\Delta \mathbf{y}$ analog zu (3.11)

Anstatt der Bedingung minimaler iterativer Verschiebungskorrektur und der daraus resultierenden Gleichung (3.33) für den Lastzuwachs $\Delta\lambda$ können alternativ auch die nach Bild 3.9 verwendet werden (s.a. Clarke und Hancock (1990)).

Bedingung	$\Delta\lambda$	Literatur
constant external work	$-\frac{\mathbf{P}^T \Delta \mathbf{u}_G}{\mathbf{P}^T \Delta \mathbf{u}_P}$	Powell, Simons (1981)
minimum unbalanced force norm	$\frac{\mathbf{P}^T \mathbf{R}}{\mathbf{P}^T \mathbf{P}} - \lambda$	Bergan (1980)
work-incremental-control	Lösung von	Chen, Blandford (1993)
$\pm dW = ((\lambda - \bar{\lambda}) + \Delta\lambda) \mathbf{P}^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u})$	$a_1 \Delta\lambda^2 + a_2 \Delta\lambda + a_3 = 0$	
	mit $a_1 = \mathbf{P}^T \Delta \mathbf{u}_P$ $a_2 = \mathbf{P}^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\lambda - \bar{\lambda}) \Delta \mathbf{u}_P)$ $a_3 = \mathbf{P}^T ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathbf{u}_G) (\lambda - \bar{\lambda}) \mp dW$	

Bild 3.9: Alternative Korrekturverfahren

Diese Verfahren ergeben sich im wesentlichen aus dem oben gezeigten (vgl. Gleichung (3.33)) durch Ersetzen der Teillösungen $\Delta \mathbf{u}_P$, $\Delta \mathbf{u}_G$ durch die für die Teillösungen verwendeten Residuen und weisen wohl keine entscheidenden Vorteile auf.

Gierlinsky, Smith (1985) und Schweizerhof, Wriggers (1986) schlagen die Verwendung einer Skalierungsmatrix \mathbf{S} in der Bogenlängengleichung, z.B. in der Form

$$\mathbf{f} = \sqrt{(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})_T \mathbf{S} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2} - s = 0 \quad (3.34)$$

vor. Damit können Verschiebungen und Rotationen unterschiedliche Gewichtung bekommen, einzelne Verschiebungen selektiert werden oder alle Variablen mit Informationen aus der Steifigkeitsmatrix skaliert werden. Schweizerhof und Wriggers berichten von bescheidenem Erfolg für einige spezielle Beispiele. Vielleicht kann aber die Konditionierung des Gleichungssystems beim Auftreten von Variablen sehr unterschiedlicher Größenordnungen etwas verbessert werden.

3.4 Anmerkungen zum Newton-Verfahren

Innerhalb dieser Arbeit wurde zur Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen fast ausschließlich das reine Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Das modifizierte Newton-Verfahren mit konstant bleibender Tangentensteifigkeitsmatrix während der Korrekteriteration erweist sich als nicht sehr effektiv bei der möglichst schnellen Berechnung von ganzen Last-Verschiebungskurven mit großen Inkrementen. Bei den Quasi-Newton Verfahren, siehe z.B. Papadrakakis (1993), wird meistens der Rang 2-Update (BFGS-Update) in der vektorisierten Form nach Matthies, Strang (1979)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_i^{-1} &= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^t) \mathbf{K}_{i-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^t) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^t) (\mathbf{I} + \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{v}_{i-1}^t) \mathbf{K}_{i-2}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{v}_{i-1}^t) (\mathbf{I} + \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^t) \\
&= \dots
\end{aligned} \tag{3.35}$$

verwendet, um die Sekantengleichung zu erfüllen. Die Steifigkeitsmatrix muß also pro Inkrement nur einmal zerlegt werden. Während der Korrektoiteration mit dem Iterationszähler i wird die Inverse \mathbf{K}_i^{-1} dann direkt durch die während der Iteration entstehenden und abzuspeichernden Vektoren \mathbf{v}_i , \mathbf{w}_i verbessert. Die Quasi-Newton Verfahren sind aber erst in der Kombination mit Line-Search-Techniken effizient einsetzbar. Diese Techniken werden z.B. beschrieben in Crisfield (1983) und auch in Kapitel 4.7.2 aufgegriffen. Dort finden sie Anwendung, um auftretende Schwierigkeiten bei singular werdender Steifigkeitsmatrix zu bekämpfen.

An dieser Stelle lassen sich Parallelen zum in der Optimierung verwendeten SQP-Algorithmus mit BFGS-Update der Hessematrix in Verbindung mit Line-Search-Techniken entdecken (siehe auch Kapitel 8). Wesentliche Unterschiede bestehen darin, daß beim Optimierungsbeginn meist keine brauchbare Hessematrix, verglichen mit der Steifigkeitsmatrix, vorliegt und daß beim Optimierungsproblem Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen mit einfließen.

3.5 Variable Schrittweite

Ein robuster und effizienter Algorithmus, der es ermöglicht, Last-Verschiebungskurven schnell zu durchlaufen und singuläre Punkte anzuzeigen, muß in der Lage sein, die Schrittweite oder Bogenlänge s automatisch anzupassen. Die Inkremente sollen möglichst groß ausfallen und Konvergenzschwierigkeiten trotzdem vermieden oder abgefangen werden. Dafür wird die Länge des Prädiktorschrittes, die sich an der Bogenlänge nach Gleichung (3.8) und Bild 3.2 orientiert, mit dem Faktor α verändert zu

$$s = \alpha \cdot s_{i-1} \tag{3.36}$$

Darin markiert s_{i-1} die verwendete Bogenlänge des vorangegangenen Schrittes.

3.5.1 Anzahl der Korrektoiterationen

Ramm (1981) und Crisfield (1981) verwenden für den Faktor α in Gleichung (3.36) das Verhältnis

$$\alpha = \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^p \quad ; \quad 0.5 \leq p \leq 1 \tag{3.37}$$

Die gewünschte Anzahl der Korrektoiterationen pro Inkrement J_d liegt meist zwischen fünf und acht, J_{i-1} beschreibt die Anzahl der Iterationen des letzten Inkrements. Ramm schlägt vor, die Quadratwurzel mit $p=0,5$ und Crisfield den Quotienten selbst mit $p=1$ zu verwenden. Tauchen Schwierigkeiten während der Korrektoiteration auf, d.h. Diver-

genz oder zu hohe Iterationszahl, kann der aktuelle Prädiktorschritt immer wieder halbiert werden bis zum Erreichen einer zufriedenstellenden Konvergenz.

3.5.2 "Steplength-Control" und Monotonietest

Eine Alternative bietet die von Deuffhard, Fiedler, Kunkel (1984), bzw. Gatermann, Hohmann (1991) vorgeschlagene Methodik. Der Faktor zur Steuerung der Bogenlänge berechnet sich nach

$$\alpha = \left[\frac{\|\Delta \mathbf{y}_{i-1}^0\|}{\|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_{Pr\ i-1}\|} \cdot \frac{\bar{\theta}_P}{\theta_0 |c_0|} \right]^2 \quad (3.38)$$

Wie oben (vgl. Gleichung (3.31)) bezeichnet \mathbf{y} den Variablenvektor, bestehend aus den Verschiebungen und dem skalierten Lastparameter. Die verwendete Notation ist in Bild 3.10 erläutert und veranschaulicht:

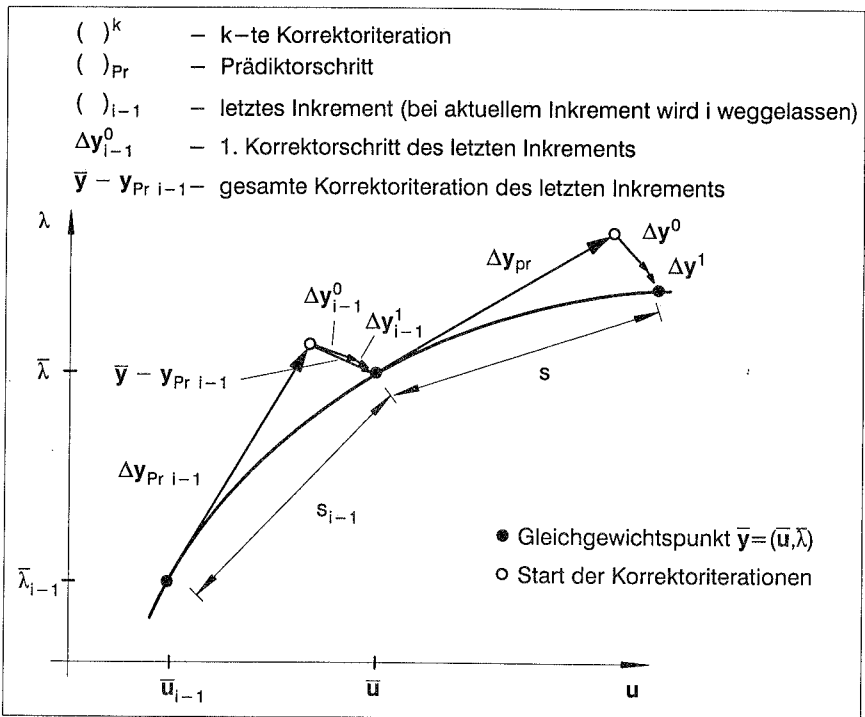


Bild 3.10: "Steplength-Control" nach Deuffhard et al. (1984)

Der Winkel c_0 zwischen den normierten Tangentenvektoren am Start- bzw. Gleichgewichtspunkt $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_{i-1})$ und am Prädiktorpunkt des letzten Inkrements $\mathbf{t}(\mathbf{y}_{Pr\ i-1})$ in Bild 3.11 berechnet sich zu

$$c_0 = \mathbf{t}^T(\bar{\mathbf{y}}_{i-1}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}_{Pr\ i-1}) \quad (3.39)$$

Der Vektor $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_{i-1})$ ergibt sich durch Normierung des letzten Prädiktorschrittes, während $\mathbf{t}(\mathbf{y}_{Pr\ i-1})$ sich aus der Teillösung $\Delta \mathbf{u}_p$ der ersten Korrektoiteration (Gleichung (3.10)) gewinnen läßt

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}_{Pr\ i-1}) = \frac{1}{\sqrt{\|\Delta \mathbf{u}_p\|^2 + \psi^2 \cdot 1}} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

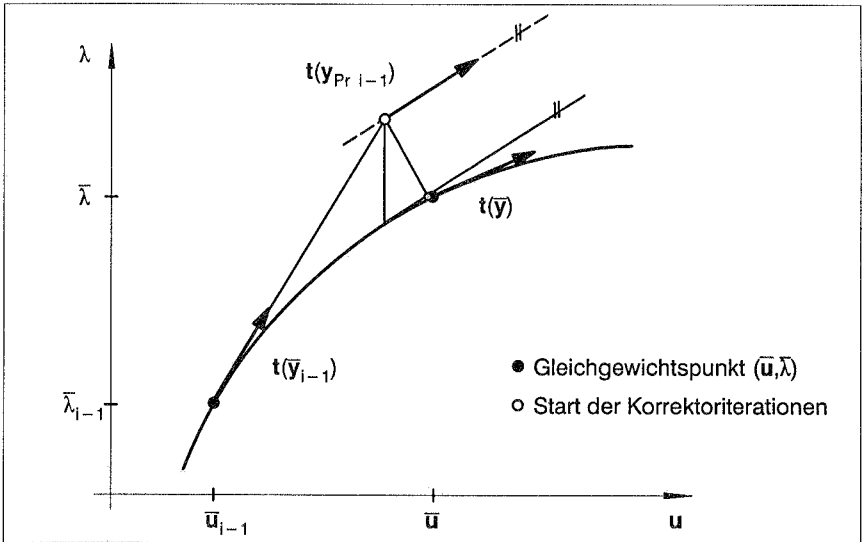


Bild 3.11: Tangenten für "Steplength-Control"

Der Faktor θ_0 errechnet sich aus dem Quotienten der Normen der zweiten und ersten Korrektoiteration des vorherigen Inkrements:

$$\theta_0 = \frac{\|\Delta \mathbf{y}_{i-1}^1\|}{\|\Delta \mathbf{y}_{i-1}^0\|} \left[\approx \frac{\|\Delta \hat{\mathbf{y}}_{i-1}^1\|}{\|\Delta \mathbf{y}_{i-1}^0\|} \right] \quad (3.41)$$

Anstatt der von Deuffhard vorgeschlagenen Verwendung von $\Delta \hat{\mathbf{y}}^1$ wird diese hier ersetzt durch $\Delta \mathbf{y}^1$ nach

$$\Delta \mathbf{y}^1 = \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{y}_{Pr} + \Delta \mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y}_{Pr} + \Delta \mathbf{y}^0) \quad (3.42)$$

$$\left[\Delta \hat{\mathbf{y}}^1 = \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{y}_{Pr}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y}_{Pr} + \Delta \mathbf{y}^0) \right] \quad (3.43)$$

Der andere Fall bedeutet erhöhte Rechenzeit und Speicherplatzbedarf, da die dreieckszerlegte Steifigkeitsmatrix am letzten Punkt gespeichert und für die Lösung nochmals verwendet wird, so daß hier vereinfachend $\Delta \mathbf{y}^1$ Verwendung findet. Die nächste Korrektur $\Delta \mathbf{y}^1$ wird sowieso berechnet, und deren Verwendung führt zu ähnlichen Ergebnissen. Bei zu kleinem θ_0 wird eine untere Schranke θ_{\min} verwendet, die bei Beispielrechnungen in Deuffhard et al. bei $\theta_{\min} = 0.01$ liegt. Der zusätzliche Faktor $\bar{\theta}_P = \rho_P \cdot \theta_{\max}$ in Gleichung (3.38) setzt sich zusammen aus einem Sicherheitsfaktor ρ_P und dem auch später noch benötigten θ_{\max} . Gatermann benutzt die Werte $\rho_P = 0.5$ und $\theta_{\max} = 0.5$. Für die Bewertung der Qualität der Korrektoiteration führen die oben genannten Autoren den natürlichen Monotonietest ein:

$$\theta_k = \frac{\|\Delta \mathbf{y}^{*k+1}\|}{\|\Delta \mathbf{y}^k\|} \leq \theta_{\max} \quad (3.44)$$

wobei hier wieder näherungsweise $\Delta \mathbf{y}^{*k+1} \approx \Delta \mathbf{y}^{k+1}$ (vgl. Gleichungen (3.42) und (3.43)) und der vorgeschlagene Wert $\theta_{\max} = 0.5$ verwendet werden. Es wird also kontrolliert, ob die Normen der aufeinanderfolgenden Korrektorschritte jeweils mindestens um den Faktor θ_{\max} kleiner werden. Bei Verletzung dieser Bedingung wird ein Neustart der Korrektoiteration mit verkürztem Prädiktorschritt vorgenommen. Der Faktor α für die Verkürzung ergibt sich zu:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_M \cdot \theta_{\max}}{\theta_k}} \quad (3.45)$$

wobei für den Sicherheitsfaktor $\rho_M = 0.5$ vorgeschlagen wird.

Die oben genannten Autoren schlagen diese Prozedur vor bei Verwendung eines Quasi-Newton-Verfahrens mit Rang-1-Korrektur in Verbindung mit Gauß-Newton-Korrektoriteration (vgl. Kapitel 3.3.2 c)). Ihre vorgeschlagenen Werte $\theta_{\max} = 0.5$, $\theta_{\min} = 0.01$, $\rho_M = 0.5$ und $\rho_P = 0.5$ führen auf sehr kleine Inkremente. Bei der effektiven Berechnung von Stabilitätspunkten im Rahmen dieser Arbeit mußten diese Werte angepaßt werden, um auf viel größere Inkremente zu gelangen. Es war sogar angebracht, mit $\theta_{\max} > 1.0$ zu arbeiten, also zuzulassen, daß die Norm der Korrektoiteration zwischenzeitlich zunehmen darf. Bei den Beispielrechnungen in Kapitel 3.5.5 finden sich einige Vorschläge für die Wahl dieser Parameter.

3.5.3 Anzahl der Korrektoiterationen und Monotonietest

An dieser Stelle wird eine Prozedur der automatischen Schrittweitenbestimmung vorgeschlagen, die sowohl bei feiner als auch bei grober Inkrementierung verwendet werden kann und sich durch leichte Handhabbarkeit auszeichnet. Sie entsteht aus einer Kombination der unter in Kapitel 3.5.1 und 3.5.2 vorgestellten Methoden. Für die Bestimmung der neuen Bogenlänge werden die Gleichungen (3.36) und (3.37)

$$s = \alpha \cdot s_{i-1}$$

$$\alpha = \left(\frac{J_d}{J_{i-1}} \right)^p \quad ; \quad 0.5 \leq p \leq 1$$

mit einem relativ großen Wert für J_d , z.B. $J_d \geq 8$, verwendet, um eine große Bogenlänge anzustreben. Hier spielt allerdings auch die erwünschte Abbruchgenauigkeit, die die Iterationsanzahl beeinflusst, eine Rolle.

Die Kontrolle der Korrekturiteration mit dem Monotonietest (vgl. Gleichung (3.44))

$$\theta_k = \frac{\|\Delta \mathbf{y}^{k+1}\|}{\|\Delta \mathbf{y}^k\|} \leq \theta_{\max}$$

verkürzt das Inkrement dann sofort wieder bei Konvergenzschwierigkeiten mit dem Faktor (vgl. (3.45))

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_M \cdot \theta_{\max}}{\theta_k}}$$

Die meisten Berechnungen (s.a. Beispiel in Kapitel 3.5.5) wurden unter Verwendung von $\rho_M = 0.5$ und $1 \leq \theta_{\max} \leq 5$ durchgeführt. Mit dem Wert $\theta_{\max} > 1.0$ wird also zugelassen, daß die Norm der Variablenänderung während der Korrekturiteration sogar wieder zunehmen darf. Das liegt daran, daß große Inkremente zwar in Bereiche führen, die weit außerhalb von Konvergenzbetrachtungen für das Newton-Verfahren liegen, die Korrekturprozedur aber trotzdem noch mit einer vernünftigen Anzahl von Iterationen zu Gleichgewichtspunkten führt. Dieses Arbeiten mit großen Inkrementen und Kürzen des Prädiktorschrittes bei Konvergenzschwierigkeiten, die in der Regel gleich zu Beginn der Korrekturiteration auftreten, führt zu einer Prozedur, die es erlaubt, Gleichgewichtspfade sehr effektiv und schnell zu durchlaufen. In kritischen Bereichen wird die Schrittweite automatisch gekürzt und bei Bedarf können Verzweigungs- oder Durchschlagspunkte mit den in Kapitel 4 beschriebenen Methoden genau lokalisiert werden.

Bei dem in Kapitel 3.3.2 b) beschriebenen Korrekturverfahren ergibt sich noch eine Besonderheit, da bei der Lösung der quadratischen Gleichung (3.27) die Diskriminante negativ werden kann. Innerhalb der automatischen Schrittweitenprozedur kann für diesen Fall die Diskriminante auf Null gesetzt werden, da der Prädiktor sofort verkürzt wird, wenn diese Maßnahme sich zu nachteilig auswirkt.

3.5.4 Weitere Methoden

Im Übersichtsaufsatz von Clarke, Hancock (1990) wird die Bogenlänge variiert mit Hilfe des Steifigkeitsparameters nach Bergan et al. (1978)

$$S_k = \frac{\Delta \lambda_{Pr1} \Delta \mathbf{u}_{Pr1}^T \mathbf{P}}{\Delta \lambda_{Prk} \Delta \mathbf{u}_{Prk}^T \mathbf{P}} \quad (3.46)$$

Damit kann der für die Bogenlängenänderung verwendete Faktor α berechnet werden

$$\alpha = \left| \frac{\Delta S_2}{\Delta S_k} \right| \quad (3.47)$$

Der Wert ΔS_2 wird vom Benutzer eingegeben oder berechnet sich aus der Differenz $\Delta S_2 = S_2 - S_1$ der ersten beiden Inkremente, und für das aktuelle Inkrement ergibt sich $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

Chan (1988) schlägt ebenfalls bei Verwendung des Steifigkeitsparameters S_k für den Faktor α vor:

$$\alpha = |S_k|^p \quad ; \quad p = 1 \quad (3.48)$$

In Bergan und Sørreide (1973) und Bergan et al. (1978) wird eine Methode beschrieben, die hier nur verbal erläutert wird. Der Gleichgewichtspfad wird am aktuellen Gleichgewichtspunkt parabolisch mit Hilfe der beiden letzten Gleichgewichtspunkte und der augenblicklichen Steigung approximiert. Damit läßt sich die Abweichung τ vom Prädiktor mit alter Bogenlänge zum approximierten Gleichgewichtspfad berechnen und der Quotient mit einer vorgegebenen Abweichung $\hat{\tau}$ verwenden, um den Prädiktorschritt zu skalieren (Bild 3.12). Angaben über die Vorgabe der Abweichung $\hat{\tau}$ finden sich in Bergan et al. (1978).

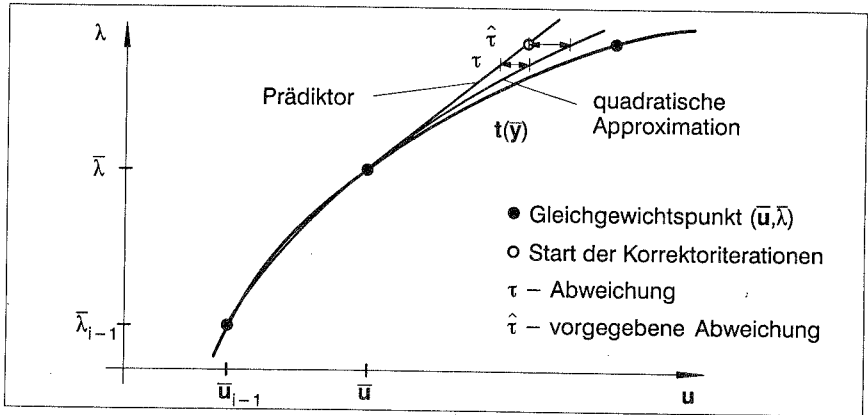


Bild 3.12: Schrittweitenstrategie nach Bergan

3.5.5 Beispiel

Das folgende, auch in Wagner (1991) beschriebene Beispiel, eignet sich hervorragend zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Pfadverfolgungsalgorithmus in Verbindung mit der automatischen Schrittweitenanpassung. Wie sich zeigt, treten in der Lastverschiebungskurve stark nichtlineare Bereiche mit extremen Krümmungsänderungen auf, die die ständige Schrittweitenanpassung unbedingt erfordern.

Bei dem in Bild 3.13 dargestellten Tragwerk handelt es sich um einen einseitig eingespannten Kreisbogen unter einer Einzellast.

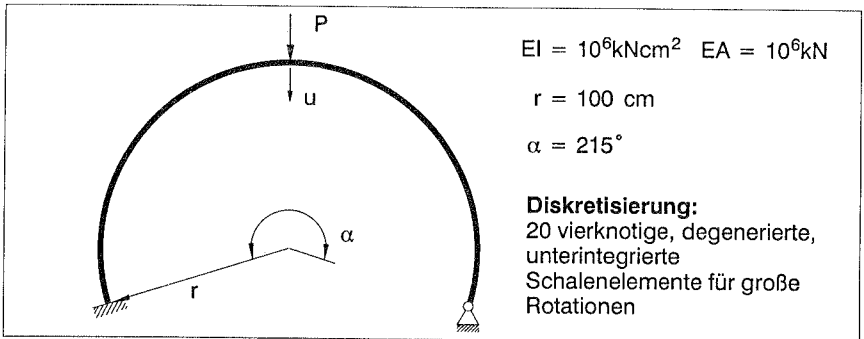


Bild 3.13: Einseitig eingespannter Bogen unter einer Einzellast

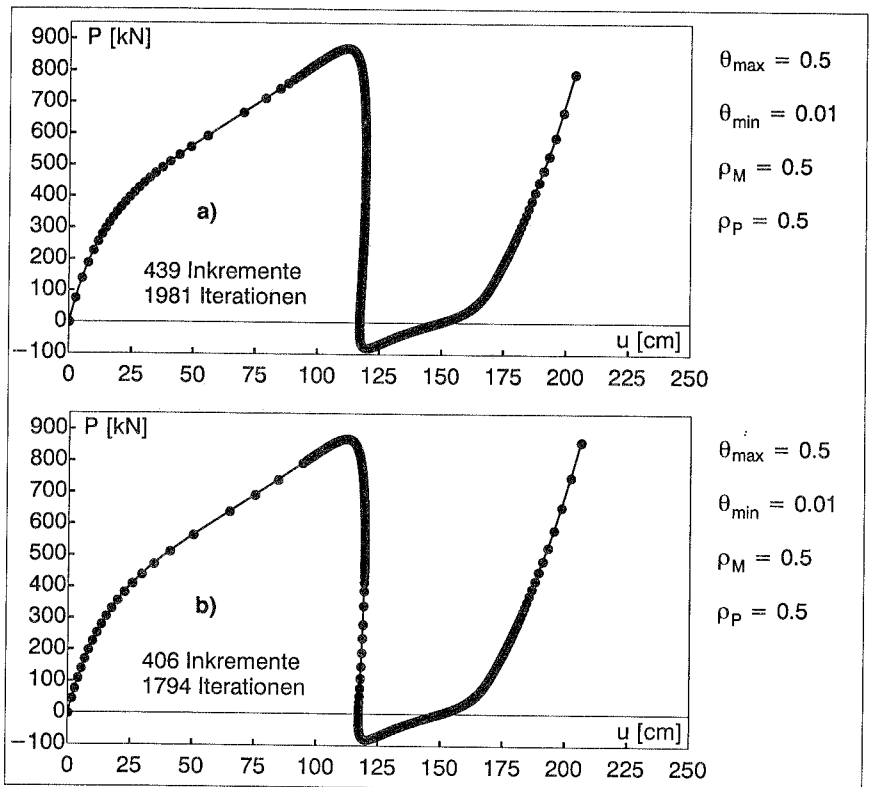


Bild 3.14: 'Steplength-Control' nach Deuffhard mit Literaturvorgaben
 a) Crisfield — b) Minimum der residualen Änderungen

Im folgenden wird die Schrittweitenstrategie von Deuffhard ('Steplength-Control') mit der hier vorgeschlagenen 'Schrittweitenanpassung' verglichen, angewandt auf die Korrektoiteration mit exakter Erfüllung der Bogenlängengleichung nach Crisfield bzw. auf dem Weg der minimalen residualen Änderungen. Die bei Deuffhard bzw. Gatermann angegebenen und in Bild 3.14 a) und b) aufgeführten Parameter führen auf eine viel zu feine Inkrementierung. Die Punkte in den Bildern Bild 3.14 a) und b) stellen die ausiterierten Gleichgewichtslagen dar.

Bei Erhöhung von θ_{\max} auf das Doppelte ergibt sich eine leicht verbesserte Situation (Bild 3.15 a) und b)), jedoch bleiben immer noch Bereiche mit sehr feiner Unterteilung.

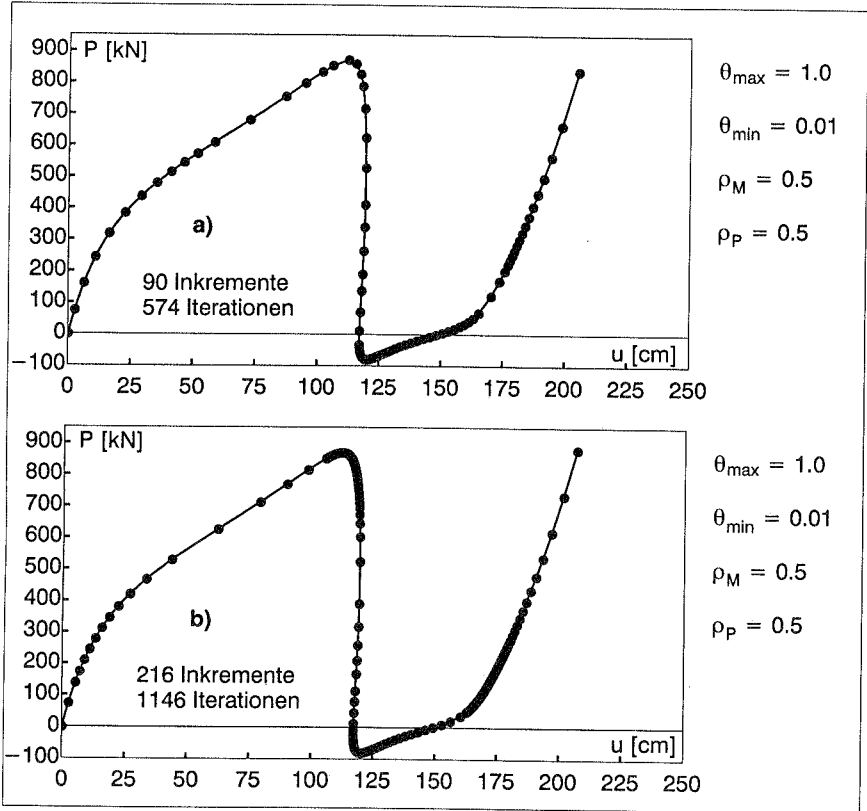


Bild 3.15: 'Steplength-Control' nach Deuffhard mit $\theta_{\max}=1.0$
a) Crisfield – b) Minimum der residualen Änderungen

Beim Versuch, die Parameter so zu variieren, daß der Pfad im dargestellten Bereich mit möglichst wenigen Iterationen durchlaufen wird, sollten ρ_M und ρ_P den gleichen Wert einnehmen. Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu variierenden Parameter auf drei.

Dies erweist sich schon als aufwendig genug. Für die Korrektoiteration nach Crisfield konnte eine brauchbare Einstellung gefunden werden (Bild 3.16 a). Für die zweite Art der Korrektoiteration in Bild 3.16 b) war dies kaum möglich, da die Parameter sich immer wieder in undurchsichtiger Weise gegenseitig beeinflussen.

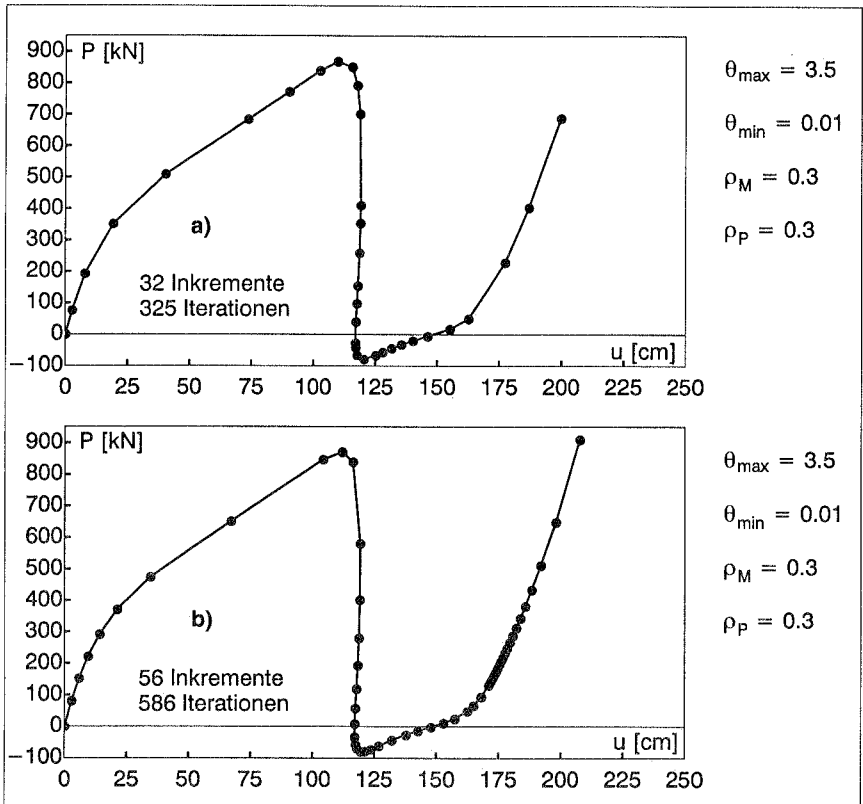


Bild 3.16: 'Steplength-Control' nach Deuffhard
a) Crisfield — b) Minimum der residualen Änderungen

Bei der hier vorgestellten Schrittweitenanpassung wird der Sicherheitsfaktor $\rho_M = 0.5$ festgehalten, so daß nur zwei Parameter verbleiben. Der Wert J_d sollte dabei, je nach gewünschter Feinheit eher etwas größer gewählt werden (hier meist: $6 < J_d < 10$), um nach Schrittweinkürzung an kritischen Stellen die Erhöhung wieder zu forcieren. Der Wert für θ_{\max} lag bei den berechneten Beispielen meist im Bereich $1 < \theta_{\max} < 5$, also deutlich über dem bei Deuffhard. Die Diagramme in Bild 3.17 zeigen für beide Korrektormethoden sehr brauchbare, genügend glatte Lastverformungskurven mit großen Inkre-

menten in linearen Bereichen und gekürzten Schrittweiten in den eher kritischen Bereichen mit hoher Krümmung.

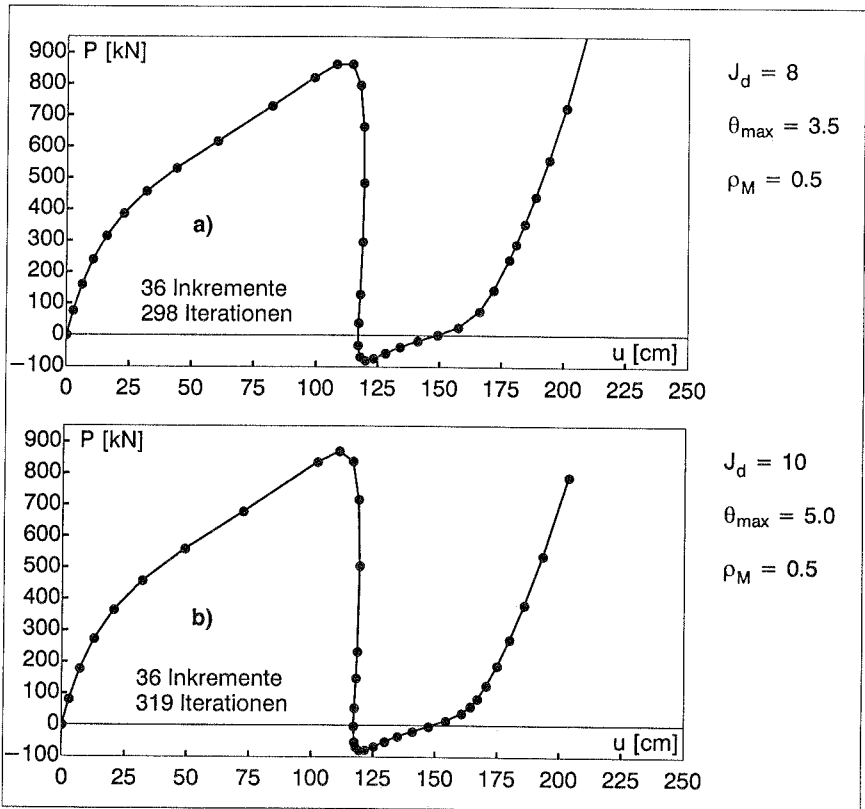


Bild 3.17: verbesserte Schrittweitenanpassung
 a) Crisfield – b) Minimum der residualen Änderungen

Für gewünschte feinere Inkrementierung werden beide Parameter etwas verkleinert, wie in Bild 3.18 angedeutet.

Diese Art der Schrittweitenanpassung zeigt sich auch bei vielen anderen Beispielen als äußerst leicht anwendbar und trotzdem sehr effektiv und zuverlässig. Der große Vorteil gegenüber der von Deuffhard gezeigten Anpassung besteht in der Möglichkeit, die Feinheit der Inkrementierung leicht zu verändern. Schon nach wenigen Berechnungen und Beobachtung von Iterationszahlen bzw. der Norm der residualen Änderungen, die ja mit den zu variierenden Parametern beeinflusst werden, fällt die Handhabung sehr leicht.

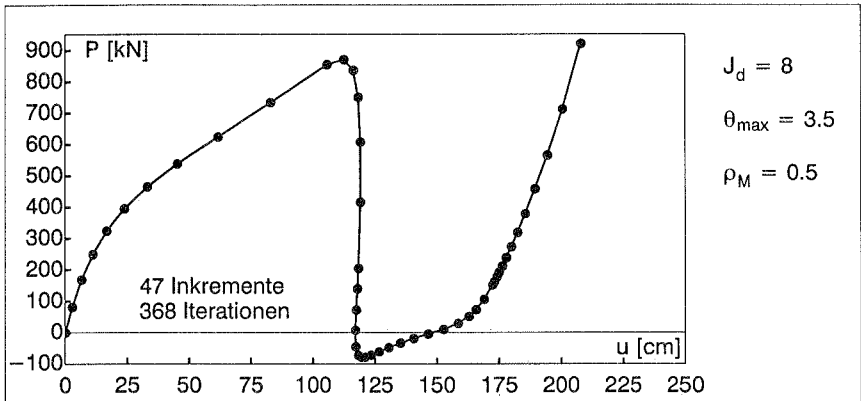


Bild 3.18: 'Schrittweitenanpassung' mit feinerer Inkrementierung (vgl. Bild 3.17 b)
 – Minimum der residualen Änderungen

3.6 Vorzeichen des Lastinkrements beim Prädiktorschritt

Die Verwendung der Tangentensteifigkeitsmatrix für den Prädiktorschritt erlaubt die Berechnung einer Tangentenrichtung. Es muß aber noch entschieden werden, in welcher Richtung der Pfad an dieser Stelle durchlaufen werden soll. Die Entscheidung, ob der Prädiktorschritt aufwärts oder abwärts angesetzt wird, kann auf jeden Fall über die Eingabe gesteuert werden. Damit kann dann z.B. an Verzweigungspunkten in Verbindung mit Pfadverfolgungstechniken jeder Pfad in beliebiger Richtung durchlaufen werden, auch wenn dazu eventuell ein Neustart am entsprechenden Verschiebungszustand mit verändertem Parameter zur Richtungssteuerung notwendig wird.

Nachfolgend werden einige Möglichkeiten aufgezählt, wie diese Entscheidung während der Pfadverfolgung automatisch getroffen werden kann:

- Tauchen auf der Diagonalen der faktorisierten Steifigkeitsmatrix bei der Gleichungslösung negative Glieder auf, so deutet das auf ein Überschreiten eines singulären Punktes, d.h. Verzweigungs- oder Durchschlagspunkt, hin, und es wird ein negativer Prädiktor angesetzt.
- Bei negativem Steifigkeitsparameter S_k (Gleichung (3.46)) wird ein negativer Prädiktor verwendet.
- In Anlehnung an Gleichung (3.39) wird der Winkel zwischen letztem und aktuellem Prädiktor jeweils mit positivem und negativem Vorzeichen berechnet. Der kleinere Winkel ergibt einen größeren Wert für c_0 und bedeutet dann das Durchlaufen des Pfades in gleicher Richtung.

Es kann kaum angegeben werden, wann welche Methode zu bevorzugen ist. Das hängt sehr von den Wünschen des Benutzers und von der Problemstellung ab. Die hier geschilderten Varianten der Richtungssteuerung in Verbindung mit der Möglichkeit eines Neustarts an einer beliebigen Stelle auf dem Lastverformungspfad ermöglicht auf jeden Fall die Verfolgung aller gewünschter Pfade.

3.7 Begleitende Maßnahmen

Als begleitende Maßnahmen während der Pfadverfolgung können ohne großen Aufwand die Determinante der tangentiellen Steifigkeitsmatrix K_T , die Anzahl der negativen Eigenwerte von K_T oder der Steifigkeitsparameter S_K nach Bergan wichtige Informationen geben. Die Determinante D berechnet sich bei der LDL^T -Dreieckszerlegung von K_T einfach aus dem Produkt aller Diagonalglieder D_{ii}

$$D = \prod_{i=1}^n D_{ii} \quad (3.49)$$

Falls die Determinante, gerade bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden, sehr große Werte annimmt, die vom Rechner nicht mehr dargestellt werden können, müssen Skalierungen eingeführt werden. Das Vorzeichen der Determinante erlaubt nicht unbedingt eine Aussage, da bei einer geraden Anzahl von negativen Diagonalgliedern die Determinante positiv wird. Die Anzahl der negativen Eigenwerte hingegen entspricht genau der Anzahl der negativen Diagonalglieder D_{ii} . Der Steifigkeitsparameter S_K berechnet sich nach Gleichung (3.46).

Für die begleitende Eigenwertberechnung stehen u.a. folgende Alternativen zur Verfügung:

$$(K_T - \lambda I) \phi = 0$$

$$(K - \lambda K_g) \phi = 0$$

$$((K + K_u) - \lambda K_g) \phi = 0$$

$$(K - \lambda(K_u + K_g)) \phi = 0$$

$$(K_T - \lambda \Delta K_T) \phi = 0$$

$$(K - \lambda M) \phi = 0$$

K	– linearer Anteil von K_T
K_g	– Anfangsspannungsmatrix
K_u	– Anfangsverschiebungsmatrix
ΔK_T	– Änderung im letzten Inkrement
M	– Massenmatrix

Näheres dazu und auch die Möglichkeiten zur Interpretation dieser Techniken finden sich u.a. in Ramm (1976), Brendel (1979) oder Wagner (1991).

3.8 Zusammenfassung

Dieses Kapitel 3 beschreibt ein vollständiges und zuverlässiges Werkzeug zur effizienten Pfadverfolgung. Die erläuterten Techniken sind in Bild 3.19 nochmals zusammengetragen. Bei fast allen geometrisch nichtlinearen Berechnungen kam die beschriebene Schrittweitenanpassung in der Prädiktorphase zum Einsatz. In der Korrektorphase dominiert die Kombination von reinem Newton–Raphson–Verfahren in Verbindung mit den Bogenlängenverfahren in den drei angesprochenen Varianten. Die Konvergenz wird durch den Monotonietest überprüft und die Schrittweite bei Bedarf gekürzt. Die begleitenden Maßnahmen wirken unterstützend, wobei die begleitende Eigenwertberechnung ihren Aufwand nur bei speziellen Situationen rechtfertigt.

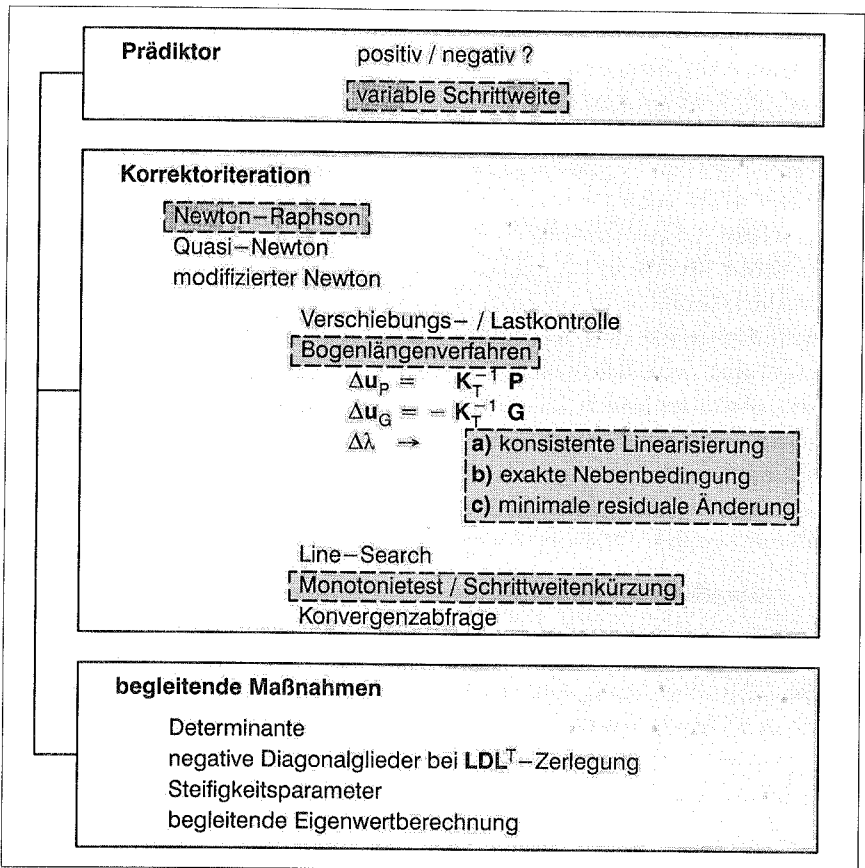


Bild 3.19: Pfadverfolgung

4 Stabilitätsberechnungen

Die in der Einleitung erwähnten Stabilitätsdefinitionen nach Liapunov bzw. Euler werden herangezogen, um kritische Punkte zu identifizieren. Ein Satz von Gleichungen wird formuliert, um Gleichgewicht an solch einem Punkt zu beschreiben. Diese erweiterten Systeme von Gleichungen, bestehend also aus den Gleichgewichtsbeziehungen und der Bedingung für einen singulären Punkt, gelten sowohl für Verzweigungs– als auch für Durchschlagspunkte, so daß ein Unterscheidungskriterium eingeführt wird. Die folgenden Ausführungen behandeln die direkte Berechnung der kritischen bzw. singulären Punkte durch konsistente Linearisierung und Lösung durch Newton–Verfahren mit quadratischer Konvergenz in der Nähe der Lösung. Analog zu den Pfadverfolgungsalgorithmen sollen hier möglichst effektive Lösungsstrategien, auch geeignet für große Systeme mit vielen Freiheitsgraden, im Rahmen der Methode der finiten Elemente zum Einsatz kommen. Ein zentrales Problem bei der Lösung mit den direkten Methoden entsteht durch das Singulärwerden der Tangentensteifigkeitsmatrix, die zur Gleichungslösung invertiert werden muß. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei neue, zuverlässige Penalty–Methoden vorgestellt und mit der von Wriggers, Simo (1990) verglichen. Der Vergleich zu alternativen Verfahren aus der mathematischen Literatur zeichnet die hier vorgestellten Penalty–Methoden als wesentlich weniger aufwendig aus. In einem weiteren Kapitel wird die Gleichungslösung mit singulär werdender Systemmatrix ohne Einsatz von Penalty–Verfahren diskutiert. Diese Methoden, auch angewandt an einem Beispiel, fördern zum einen das Verständnis und zum anderen ergeben sich auch hier Möglichkeiten, die direkte Berechnung von kritischen Punkten zu stabilisieren. Die Methoden zur direkten Berechnung von singulären Punkten werden dann eingebunden in den Strukturanalyseteil, bisher bestehend aus den Pfadverfolgungstechniken. In diesem Zusammenhang werden noch offene, meist numerische, Detailfragen analysiert. Abschließend folgen einige Literaturverweise auf Alternativen zu den direkten Methoden.

4.1 Identifikation und Klassifizierung kritischer Punkte

Ein kritischer oder auch singulärer Punkt zeichnet sich dadurch aus, daß auf gleichem Lastniveau in unmittelbarer Nähe zu einem Gleichgewichtspunkt eine Nachbarlage, die ebenfalls die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, existiert. Diese, u.a. bei Koiter (1945) und Budiansky (1974) verwendete, Bedingung läßt sich umsetzen durch die Formulierung des Gleichgewichts an einem kritischen Punkt $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ nach Gleichung (3.2):

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Auf gleichem Lastniveau soll ein Nachbarpunkt $(\mathbf{u}_c + \Delta\mathbf{u}, \lambda_c)$ existieren. Durch Linearisierung von Gleichung (4.1) läßt sich Gleichgewicht am Nachbarpunkt schreiben als

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_c + \Delta \mathbf{u}, \lambda_c) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c)_{,u} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

bei Verwendung der Fréchet–Ableitung $(\)_{,u} = \frac{\partial(\)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_c}$. Der erste Term von (4.2) verschwindet wegen (4.1) und es verbleibt

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c)_{,u} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

oder

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Die Fréchet–Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen führt also auf die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T , und die Richtung für die \mathbf{K}_T singulär wird, wird als Singulärvektor oder Beulform $\boldsymbol{\phi}$ bezeichnet. In den folgenden Kapiteln werden Probleme mit gleichzeitigem Auftreten mehrerer Eigenvektoren an einem singulären Punkt ausgeklammert. Die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T besitzt den Rangabfall 1 und der vom Eigenvektor aufgespannte Nullraum die Dimension 1. Ein stabiler Bereich der Lastverformungskurve zeichnet sich aus durch eine positiv definite Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T , was auch gleichbedeutend mit der Forderung nach einem lokalen Minimum für das Potential \mathcal{P} ist. Am kritischen Punkt wird \mathbf{K}_T dann positiv semi–definit bzw. singulär. Das System kann in Richtung $\boldsymbol{\phi}$ ohne Zuführung von Energie ausweichen.

Durch die Einführung eines Zeit– oder Pfadparameters s , wie er bei Budiansky (1974) oder auch in der mathematischen Literatur, z.B. Spence, Werner (1982) und Jepson, Spence (1985), verwendet wird, lassen sich die kritischen Punkte genauer untersuchen. Die parametrisierten Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(s), \lambda(s)) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

und Linearisierung bzgl. s führt zu

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

wobei $(\)_{,\lambda}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial(\)}{\partial \lambda}$ beschreibt. Durch Multiplikation mit dem Eigenvektor verschwindet der erste Term am singulären Punkt wegen (4.4) und es verbleibt:

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (4.7)$$

Das Ersetzen der partiellen Ableitung $\mathbf{G}_{,\lambda}$ durch den negativen Lastvektor $-\mathbf{P}$ gemäß Gleichung (3.2) führt zu

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (4.8)$$

Dies bedeutet, daß beim Auftreten von einfachen singulären Punkten folgende Klassifizierung gilt:

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \ ; \ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Durchschlagspunkt} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} \neq 0 \ ; \ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Verzweigungspunkt} \quad (4.10)$$

Bei bekanntem Eigenvektor ϕ kann durch die Bildung des Skalarprodukts $\phi^T P$ das Auftreten eines Durchschlags- oder Verzweigungspunktes festgestellt werden.

4.2 Direkte Berechnung kritischer Punkte mit erweiterten Systemen

Analog zur Vorgehensweise bei der Pfadverfolgung werden erweiterte Systeme, die auf dem Gleichgewichtspfad liegende kritische bzw. singuläre Punkte beschreiben, formuliert. Konsistente Linearisierung führt dann zu einem Iterationsverfahren mit quadratischem Konvergenzverhalten in der Nähe der Lösung. Diese Vorgehensweise taucht in der mathematischen Literatur schon seit vielen Jahren auf, z.B. in Keener, Keller (1973), Seydel (1979), Moore, Spence (1980) oder im Übersichtsaufsatz von Mittelman, Weber (1980). Auch in der Ingenieurliteratur findet die Verwendung solcher erweiterter Systeme immer mehr Bedeutung. Die Anwendung dieser Verfahren im Rahmen der Methode der finiten Elementen bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden wird in Wriggers, Wagner, Miehe (1988), Wriggers, Simo (1990), Wagner (1991) u.a. diskutiert.

Um einen kritischen Punkt zu beschreiben, müssen die Gleichgewichtsbedingungen erweitert werden mit Informationen, die diese Singularitätsstelle beschreiben. Bei Gültigkeit der Bedingung $K_T \phi = 0$ für das Singulärwerden der Steifigkeitsmatrix verschwindet auch die Determinante $\det K_T = 0$. Abbott (1978), Brendel (1979) u.a. verwenden die Bedingung für die Determinante zur Formulierung erweiterter Systeme. Da aber dabei die konsistente Linearisierung problematisch wird (Wagner (1991)), soll auf diese Vorgehensweise an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. In Kapitel 4.9 wird diese Idee in Verbindung mit Bisektionsverfahren nochmals angesprochen.

Bei Verwendung der Gleichung $K_T \phi = 0$ selbst läßt sich das folgende erweiterte System angeben.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) \phi \\ I(\phi) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Die Nebenbedingung $I(\phi)$ wird benötigt, um die Länge des Eigenvektors ϕ , z.B. nach

$$I(\phi) = \|\phi\| - \hat{1} = 0 \quad (4.12)$$

oder

$$I(\phi) = \mathbf{e}_i^T \phi - \hat{\phi} = \phi_i - \hat{\phi} = 0 \quad (4.13)$$

zu beschränken. Damit wird die triviale Lösung $\phi = 0$ ausgeschlossen. Gleichung (4.12) gibt für die euklidische Norm von ϕ den Wert $\hat{1}$ vor, während bei Gleichung (4.13) durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_i , der nur an der Stelle i einen von Null verschiedenen Wert besitzt, eine Komponente des Eigenvektors ϕ_i mit der Vorgabe $\hat{\phi}$ verglichen wird. Dieses erweiterte System hat $2n+1$ Unbekannte. Bei der Lösung ergibt sich zusätzlich zu

den Verschiebungen \mathbf{u}_c und dem Lastparameter λ_c auch der Eigenvektor ϕ . Bei der nun folgenden Beschreibung des Lösungsweges soll dann der Aufwand im Vergleich zur Pfadverfolgung abgeschätzt werden.

Die konsistente Linearisierung von (4.11) führt zum Iterationsschema.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \\ (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} & \mathbf{K}_T & (\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda} \\ \mathbf{0}^T & I_\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{K}_T \phi \\ I \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Dabei verschwindet die partielle Ableitung nach dem Lastparameter $(\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda}$ bei Annahme von verformungsunabhängiger Belastung. Die Richtungsableitung $(\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}$ wird durch Bildung eines Differenzenquotienten approximiert (Wriggers, Simo (1990)) und Moore, Spence (1980)):

$$(\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda) \Delta \mathbf{u} - \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) \Delta \mathbf{u}) \quad (4.15)$$

Im Gegensatz zu Wriggers, Simo (1990), die die Matrix $\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda)$ nur auf Elementebene aufstellen, wird hier der globale Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix durchgeführt, um unabhängig von der verwendeten finiten Elementformulierung zu bleiben.

Bei der Lösung von (4.14) wird analog zur Pfadverfolgung nicht die gesamte Matrix, die als Untermatrix zweimal die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T enthält, invertiert. Es wird vielmehr die Symmetrie und die besondere Speichertechnik von \mathbf{K}_T berücksichtigt, und mit der Partitionierungsmethode wird aus der ersten Gleichung

$$\Delta \mathbf{u}_P = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{u}_G = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \quad (4.17)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \quad (4.18)$$

Damit erhält man nach einigen Umformungen aus der zweiten Gleichung

$$\Delta \phi_P = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_P \quad (4.19)$$

$$\Delta \phi_G = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_G \quad (4.20)$$

$$\phi + \Delta \phi = \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G \quad (4.21)$$

Unter Verwendung des ersten Vorschlags (4.12) für die Nebenbedingung $I(\phi)$ ergibt sich aus der dritten Gleichung

$$\Delta \lambda = \frac{-\phi^T \Delta \phi_G + \|\phi\| \hat{I}}{\phi^T \Delta \phi_P} \quad (4.22)$$

Mit dem berechneten $\Delta \lambda$ können dann Verschiebungen, Eigenvektor und Lastparameter für die nächste Iteration, bezeichnet mit $(\)_{neu}$, angepaßt werden:

$$\mathbf{u}_{neu} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \quad (4.23)$$

$$\phi_{neu} = \phi + \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G \quad (4.24)$$

$$\lambda_{neu} = \lambda + \Delta \lambda \quad (4.25)$$

Die Berechnung von $\Delta \phi_P$ und $\Delta \phi_G$ verwendet die Approximation nach (4.15) in Verbindung mit (4.16) und (4.17):

$$\Delta \phi_P \approx -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda) \Delta \mathbf{u}_P - \mathbf{P}) \quad (4.26)$$

$$\Delta \phi_G \approx -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda) \Delta \mathbf{u}_G + \mathbf{G}) \quad (4.27)$$

Dies bedeutet, an der Stelle $(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda)$ wird eine neue Steifigkeitsmatrix aufgestellt und sofort mit $\Delta \mathbf{u}_P$ bzw. $\Delta \mathbf{u}_G$ multipliziert. Die Differenz der entstehenden Vektoren mit \mathbf{P} bzw. $-\mathbf{G}$ wird durch ϵ dividiert. Die Gleichungslösung für die Lösungen $\Delta \phi_P$, $\Delta \phi_G$ sowie für $\Delta \mathbf{u}_P$ und $\Delta \mathbf{u}_G$ nutzt jeweils die einmal invertierte oder faktorisierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T^{-1} . Der wesentliche Mehraufwand im Vergleich zur Pfadverfolgung besteht also im Aufstellen einer neuen Steifigkeitsmatrix, da sich die zusätzliche Gleichungslösung mit zwei neuen rechten Seiten, die Multiplikationen $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_P$, $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_G$, sowie die Ausführung einiger Vektoroperationen, bei der Gesamtrechenzeit kaum bemerkbar machen. Die Wahl der Startwerte für \mathbf{u} , ϕ , λ und des Parameters ϵ werden in Kapitel 4.8 ausführlich diskutiert.

Da bei der Lösung des erweiterten Systems (4.11) die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T singularär wird, kann sie eigentlich nicht mehr invertiert werden. Bei der Gleichungslösung für $\Delta \mathbf{u}_P$, $\Delta \mathbf{u}_G$, $\Delta \phi_P$ und $\Delta \phi_G$ können in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes große Fehler entstehen.

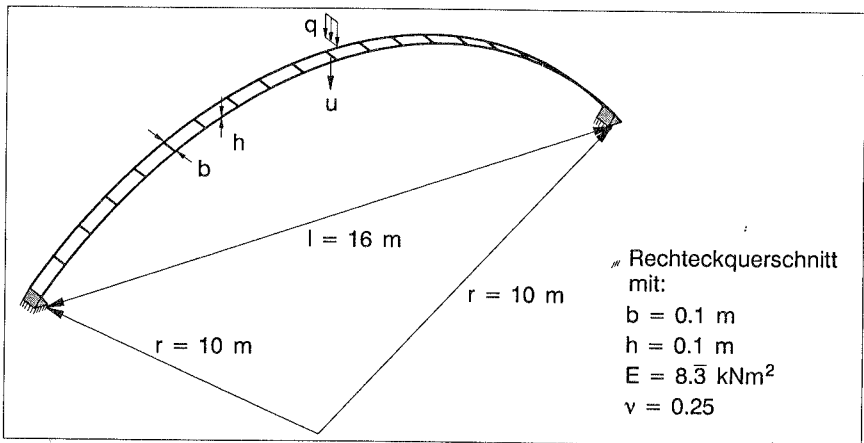


Bild 4.1: Flacher Bogen

Am Beispiel des flachen Bogens in Bild 4.1 (siehe auch Petersen (1992)) werden die damit verbundenen Probleme veranschaulicht. Bild 4.2 zeigt die zugehörige Lastverschiebungskurve mit den beiden Verzweigungspunkten für Torsionsversagen und asymmetrisches Versagen in der Ebene.

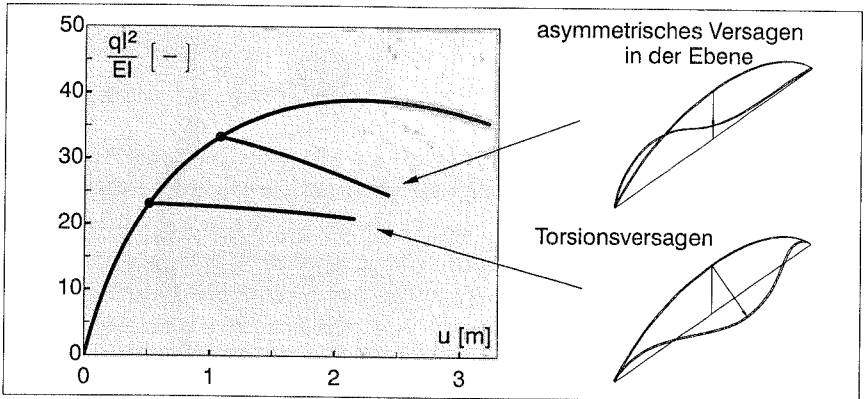


Bild 4.2: Kritische Punkte auf der Lastverformungskurve

Die Folge der iterativen Zwischenlösungen bei der Berechnung des zweiten kritischen Punktes ab dem Gleichgewichtspunkt auf dem Lastniveau $\lambda = 28.0$ führt in Bild 4.4 sehr schnell in die Nähe des kritischen Punktes bei $\lambda_c = 33.26$. Erst die genauere Betrachtung der Zwischenlösungen in unmittelbarer Nähe zum singulären Punkt zeigt Oszillationen gerade dann, wenn nahezu quadratische Konvergenz erreicht wird. In Bild 4.4 äußert sich dies durch das 'Wegspringen' der iterativen Zwischenlösungen vom Lösungspunkt. Das Auftragen des Betrages des kleinsten Diagonalglieds und des Skalarprodukts $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}$ aus den iterativen Verbesserungen $\Delta \mathbf{u}$ und den Ungleichgewichtskräften \mathbf{G} über dem Iterationszähler Bild 4.3 verdeutlicht diesen Sachverhalt. Dabei dient das Verschwinden des kleinsten Diagonalglieds als Indikator für das Erreichen des singulären Punktes und der verschwindende Energieausdruck $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}$ reflektiert das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes.

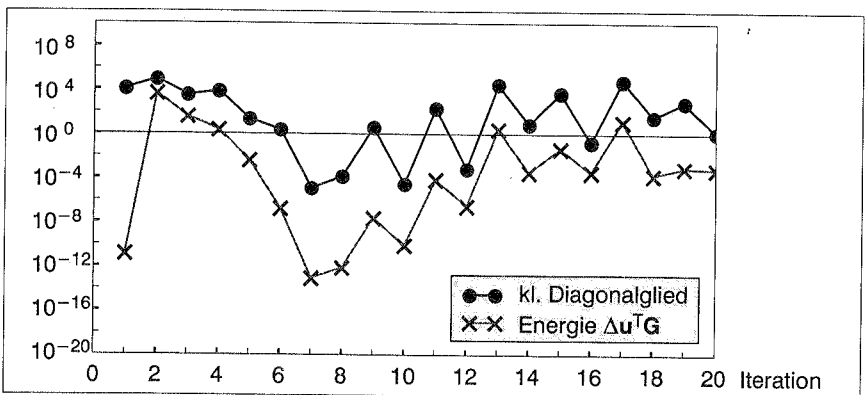


Bild 4.3: Einfluß der Singularität auf Konvergenzverhalten

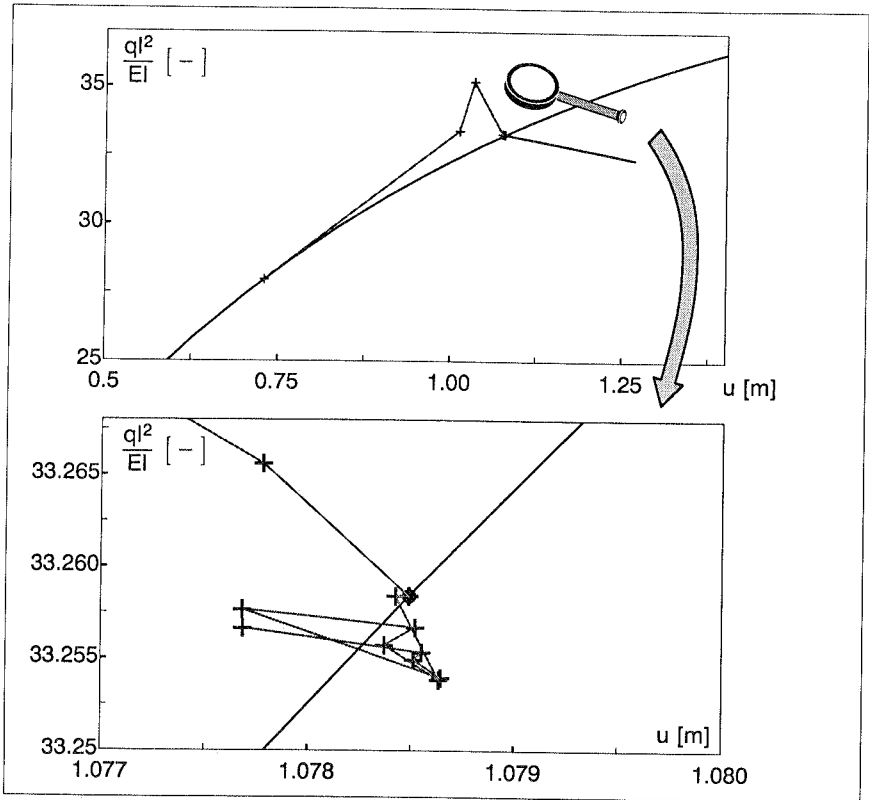


Bild 4.4: Einfluß der Singularität bei Iteration zum kritischen Punkt

Um diesen unerwünschten Effekten begegnen zu können, werden verschiedene Penalty-Formulierungen eingeführt. Die im Rahmen dieser Arbeit neu entstandenen Formulierungen werden mit der von Wriggers, Simo (1990), beschrieben in Kapitel 4.5, verglichen.

4.3 Penalty-Formulierung unter Verwendung des Einheitsvektors \mathbf{e}_i

Die erste Penalty-Formulierung geht von folgendem erweiterten System aus:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \phi - \hat{c} (\mathbf{e}_i^T \phi - \hat{\phi}) \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^T \phi - \hat{\phi} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

Die konsistente Linearisierung führt zu folgendem Iterationsschema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \\ (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u} & \mathbf{K}_T & (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,\lambda} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\phi} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ (\mathbf{K}_T + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \boldsymbol{\phi} - \hat{c} (\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi}) \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Die lineare Nebenbedingung $\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi}$ ist in jedem Iterationsschritt exakt erfüllt, so daß in der zweiten Gleichung von (4.28) der Term $(\mathbf{K}_T + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)$ übrig bleibt. Dieser zusammengesetzte Term wird an der Lösung singular, so daß die bei der Lösung von (4.29) zu verwendende Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T allein nicht singular wird. Mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_i , der nur an der Stelle i eine von Null verschiedene Komponente besitzt, wird die Penalty–Steifigkeit auf die Diagonale der i -ten Gleichung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T addiert. Die Stelle i ergibt sich aus der Stelle der Maximalkomponente des Singulärvektors. Näheres dazu findet sich in Kapitel 4.8.3.

Da die erste Gleichung von (4.28) auf jeden Fall Gleichgewicht fordert, beschreibt dieses erweiterte System also einen Gleichgewichtspunkt in der Nähe des singulären Punktes, abhängig von der Größe des gewählten Strafterms \hat{c} . Die Störung mit \hat{c} taucht nur in der rechten Seite von (4.29) auf. Der Wert für \hat{c} wird durch Testberechnungen so justiert, daß das erweiterte System sicher, ohne Oszillationen, konvergiert. Bei vielen Beispielrechnungen liegt er im Bereich $10^{-1} \leq \hat{c} \leq 10^{-6}$.

Die Technik zur Lösung des Iterationsschemas (4.29) folgt der in Kapitel 4.2 beschriebenen und fällt deshalb hier sehr knapp aus. Die Verwendung der Partitionierung und sukzessives Einsetzen der Gleichungen führt zu folgender Lösungsmethode:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_P &= \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{u}_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \\ \Delta \mathbf{u}_C &= -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{e}_i \\ \Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_P = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u} \Delta \mathbf{u}_P$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_G = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u} \Delta \mathbf{u}_G$$

$$\boldsymbol{\phi} + \Delta \boldsymbol{\phi} = \Delta \boldsymbol{\phi}_P \Delta \lambda + \Delta \boldsymbol{\phi}_G + \hat{c} \hat{\phi} \Delta \mathbf{u}_C \quad (4.31)$$

Bei Verwendung der skalaren Größen a_1 , a_2 und a_3 ergibt sich für den Lastfaktor:

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{e}_i^T \Delta \boldsymbol{\phi}_P \\ a_2 &= \mathbf{e}_i^T \Delta \boldsymbol{\phi}_G \\ a_3 &= \mathbf{e}_i^T \Delta \mathbf{u}_C \\ \Delta \lambda &= \frac{\hat{\phi} - a_2 - \hat{c} \hat{\phi} a_3}{a_1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{neu}} &= \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \\ \phi_{\text{neu}} &= \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G + \hat{\mathbf{c}} \hat{\phi} \Delta \mathbf{u}_c \\ \lambda_{\text{neu}} &= \lambda + \Delta \lambda \end{aligned}$$

Im Vergleich zum erweiterten System aus Kapitel 4.2 muß hier im wesentlichen nur eine weitere Gleichungslösung für $\Delta \mathbf{u}_c$ durchgeführt werden. Der zusätzliche Aufwand ist bei bereits invertiert vorliegender Steifigkeitsmatrix vernachlässigbar. Der Term $(\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda}$ entfällt bei der Annahme verformungsunabhängiger Belastung. Die skalaren Größen a_1 , a_2 und a_3 , die sich formal aus Skalarprodukten ergeben, entsprechen der i -ten Komponente der jeweiligen Vektoren $\Delta \phi_P$, $\Delta \phi_G$ und $\Delta \mathbf{u}_c$.

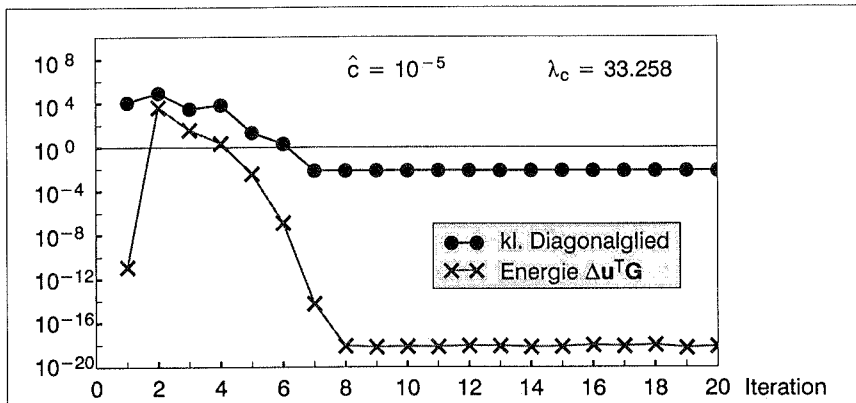


Bild 4.5: Penalty–Verfahren

Den Erfolg dieser Penalty–Formulierung für das Bogenbeispiel demonstriert Bild 4.5. Die Oszillationen aus Bild 4.4 verschwinden, und die iterative Verbesserung gemessen mit $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}$ geht an die Grenze der möglichen Rechengenauigkeit. Die Determinante konvergiert gegen einen kleinen, jedoch von null verschiedenen Wert. Es wird ein Gleichgewichtspunkt in der Nähe des kritischen Punktes erreicht. Der kritische Lastfaktor wird aber trotzdem mit sehr hoher Genauigkeit berechnet. Diese Frage nach dem Einfluß der Penalty–Steifigkeit auf die Genauigkeit von λ_c wird auch in Kapitel 4.8.3 nochmal aufgegriffen. Abschließend sei noch gesagt, daß hier die Iteration natürlich nach dem achten Schritt abgebrochen werden kann.

4.4 Penalty–Formulierung unter Verwendung des Singulärvektors

Bei der in Kapitel 4.3 gezeigten Penalty–Formulierung wird die Steifigkeitsmatrix an einer Diagonalstelle manipuliert. Die Stelle wird bestimmt durch die Maximalkomponente des Eigenvektors. Die in diesem Kapitel gezeigte Formulierung geht aus von der Überlegung, alle Diagonalwerte mit Hilfe des Singulärvektors zu verändern. Diese Idee resul-

tiert aus den in Kapitel 4.7 beschriebenen Methoden, bei denen der Rang–Update mit dem Dyadenprodukt des Singulärvektors $\phi \phi^T$ eine wichtige Rolle spielt. Dabei entsteht folgender erweiterter Satz von Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) + \hat{c} \phi \phi^T) \phi \\ \phi^T \phi - \hat{I} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Aus der Linearisierung dieser Gleichungen entsteht das folgende Iterationsschema, wobei durch die Vernachlässigung zweier "unbedeutender" Terme auf eine konsistente Linearisierung verzichtet wird, um die Effizienz der Iterationsprozedur zu erhöhen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \\ (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} & \mathbf{K}_T & (\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda} \\ \mathbf{0}^T & 2 \phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) + \hat{c} \phi \phi^T) \phi \\ \phi^T \phi - \hat{I} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Die geschilderte Vereinfachung bewirkt, daß auf der Hauptdiagonalen der zweiten Gleichung die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T selbst, an Stelle von $\mathbf{K}_T + 2\hat{c} \phi \phi^T + \hat{c} \phi^T \phi \mathbf{I}$, erscheint. Dies hat zwar Einfluß auf die gewünschte quadratische Konvergenz. Da die Singularität von \mathbf{K}_T die quadratische Konvergenz aber sowieso stört, macht sich diese Vereinfachung nicht bemerkbar. Unter Anwendung der Sherman–Morrison–Formel könnte das Verfahren durch Berücksichtigung des Terms $2\hat{c} \phi \phi^T$ verbessert werden; der andere Term würde aber die Invertierung einer zweiten Matrix der Größe von \mathbf{K}_T erfordern und wäre somit sehr aufwendig. Der Lösungsweg wird mit Verweis auf Kapitel 4.3 nur sehr kurz geschildert:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_P &= \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{u}_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \\ \Delta \mathbf{u}_C &= -\mathbf{K}_T^{-1} \phi \\ \Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi_P &= -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_P \\ \Delta \phi_G &= -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda} \Delta \mathbf{u}_G \\ \phi + \Delta \phi &= \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G - \hat{c} \phi^T \phi \Delta \mathbf{u}_C \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \phi^T \Delta \phi_P & a_3 &= \phi^T \Delta \mathbf{u}_C \\ a_2 &= \phi^T \Delta \phi_G & a_4 &= \phi^T \phi \end{aligned}$$

$$\Delta \lambda = - \frac{\hat{I} - 2a_2 + 2\hat{c} a_3 a_4 + a_4}{2a_1} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{u}_{\text{neu}} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G$$

$$\phi_{\text{neu}} = \phi + \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G - \hat{c} \phi^T \phi \Delta \mathbf{u}_C$$

$$\lambda_{\text{neu}} = \lambda + \Delta \lambda$$

Dieses erweiterte System konvergiert, wie schon in Kapitel 4.2 beschrieben, zu einem Gleichgewichtspunkt in der Nähe des kritischen Punktes. Die Stabilisierungsmaßnahme funktioniert meist schon bei recht kleinen Werten für \hat{c} , die dann Änderungen beim Lastparameter erst nach der vierten oder fünften Stelle ergeben. Die Auswirkungen entsprechen den in Bild 4.5 beschriebenen. Der Einfluß der Penalty–Steifigkeit wird in Kapitel 4.8.3 diskutiert. Der bei der Lösung entstandene Verschiebungszustand \mathbf{u} erzeugt auch bei nachfolgenden Berechnungen, z. B. Verzweigen, Abschätzen der Imperfektionsempfindlichkeit oder Sensitivitätsanalyse in der Optimierung, eine nicht singuläre Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T . Diese kann dann direkt zur Gleichungslösung ohne weitere Zusatzmaßnahmen verwendet werden.

Diese Formulierung erweist sich als sehr stabil und einfach anwendbar und wurde deshalb bei den meisten Beispielrechnungen auch verwendet.

4.5 Penalty–Formulierung nach Wriggers und Simo

Motiviert durch Felippa (1987) schlagen Wriggers und Simo (1990) ein Penalty–Funktional \mathcal{J}_p vor:

$$\mathcal{J}_p(\mathbf{u}, \lambda, \mu) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \lambda) + \frac{\hat{c}}{2} (\mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu)^2 \quad , \quad \hat{c} > 0 \quad (4.38)$$

Zusammen mit der neuen Nebenbedingung $\mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu$ und der darin enthaltenen Variablen μ läßt sich dann ein erweitertes System mit jetzt $2n+2$ Unbekannten formulieren.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) + \hat{c}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu) \mathbf{e}_i \\ (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) \boldsymbol{\phi} + \hat{c}(\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi}) \mathbf{e}_i \\ f = \mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu \\ g = \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

Konsistente Linearisierung führt auf:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{K}_T + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} & -\hat{c} \mathbf{e}_i & \Delta \mathbf{u} \\ (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u} & \mathbf{K}_T + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T & (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,\lambda} & \mathbf{0} & \Delta \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{e}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & \Delta \lambda \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \mu \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \mathbf{G} + \hat{c}(\mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu) \mathbf{e}_i \\ (\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} + \hat{c}(\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi}) \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^T \mathbf{u} - \mu \\ \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi} - \hat{\phi} \end{array} \right] \quad (4.40)$$

Eine Alternative zum Lösungsvorschlag von Wriggers, Simo (1990) wird hier kurz dargestellt, um diese Methode mit den oben gezeigten vergleichen zu können. Diese Lösungsalternative führt jedoch auf genau die gleichen iterativen Zwischenlösungen wie bei Wriggers, Simo. Es wird Gebrauch davon gemacht, daß die beiden linearen Nebenbedingungen f und g in (4.39) bei der iterativen Lösung nach (4.40) in jedem Iterationsschritt exakt erfüllt werden und somit auf der rechten Seite verschwinden. Die Startwerte

für die Iteration müssen f und g natürlich erfüllen, was insbesondere wichtig wird, wenn sich \mathbf{e}_i während der Iteration ändert. Orientiert sich nämlich die Stelle i an der Maximalkomponente des Eigenvektors, kann es während des Iterationsprozesses zu einem Wechsel kommen. Für die neue Stelle i müssen dann ϕ und μ so angepaßt werden, daß f und g erfüllt sind. Nach Einführung der um den Penaltyterm modifizierte Tangentensteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{TC} = \mathbf{K}_T + \hat{c} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \quad (4.41)$$

ergibt sich aus (4.40):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TC} & \mathbf{0} & -\mathbf{P} & -\hat{c} \mathbf{e}_i \\ (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} & \mathbf{K}_{TC} & (\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda} & 0 \\ \mathbf{e}_i^T & 0 & 0 & -1 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \\ \Delta \lambda \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{K}_T \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Unter Verwendung der Partitionierungsmethode und sukzessives Einsetzen erhält man:

$$\Delta \mathbf{u}_P = \mathbf{K}_{TC}^{-1} \mathbf{P}$$

$$\Delta \mathbf{u}_G = -\mathbf{K}_{TC}^{-1} \mathbf{G}$$

$$\Delta \mathbf{u}_C = -\mathbf{K}_{TC}^{-1} \mathbf{e}_i$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G + \hat{c} \Delta \mathbf{u}_C \Delta \mu \quad (4.43)$$

$$\Delta \phi_P = -\mathbf{K}_{TC}^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_P$$

$$\Delta \phi_G = -\mathbf{K}_{TC}^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_G$$

$$\Delta \phi_C = -\mathbf{K}_{TC}^{-1} (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} \Delta \mathbf{u}_C$$

$$\phi + \Delta \phi = \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G + \hat{c} \Delta \phi_C \Delta \mu + \hat{c} \mathbf{e}_i^T \phi \Delta \mathbf{u}_C \quad (4.44)$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_i^T \Delta \phi_P \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_i^T \Delta \mathbf{u}_P \quad \mathbf{e}_i^T \phi = \hat{\phi} \quad \text{bei } g = 0$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_i^T \Delta \phi_G \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{e}_i^T \Delta \mathbf{u}_G$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_i^T \Delta \phi_C \quad \mathbf{a}_6 = \mathbf{e}_i^T \Delta \mathbf{u}_C$$

$$\Delta \mu = - \frac{-\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_4 (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_6 \hat{c} \hat{\phi} - \hat{\phi})}{(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_6 - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4) \hat{c} - \mathbf{a}_1} \quad (4.45)$$

$$\Delta \lambda = - \frac{\hat{\phi} - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_6 \hat{c} \hat{\phi} - \mathbf{a}_3 \hat{c} \Delta \mu}{\mathbf{a}_1} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{u}_{\text{neu}} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G + \hat{c} \Delta \mathbf{u}_C \Delta \mu$$

$$\phi_{\text{neu}} = \Delta \phi_P \Delta \lambda + \Delta \phi_G + \hat{c} \Delta \phi_C \Delta \mu + \hat{c} \mathbf{e}_i^T \phi \Delta \mathbf{u}_C$$

$$\lambda_{\text{neu}} = \lambda + \Delta \lambda$$

$$\mu_{\text{neu}} = \mu + \Delta \mu$$

Dieses Verfahren ist vergleichbar mit dem in Kapitel 4.3 gezeigten. Der numerische Aufwand ist jedoch etwas größer, da eine Gleichungslösung für eine zusätzliche rechte Seite bei der Lösung für $\Delta\phi_C$ auftaucht. Die Berechnung der weiteren Größen a_4 , a_5 und a_6 , die sich jeweils aus einer Komponente der Vektoren $\Delta\mathbf{u}_P$, $\Delta\mathbf{u}_G$ und $\Delta\mathbf{u}_C$ ergeben, sowie die Berechnung der Änderung der zusätzlichen Variable $\Delta\mu$ bedeuten eigentlich keinen meßbaren Mehraufwand.

Für nachfolgende Berechnungen ist es wichtig, daß die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T für den aktuellen Verschiebungszustand nahezu singularär ist und deshalb eventuell die Manipulation nach Gleichung (4.41) notwendig wird. Das Konvergenzverhalten gleicht dem der beiden vorigen Penalty–Formulierungen. Der Einfluß der Penalty–Steifigkeit wird in Kapitel 4.8.3 studiert.

4.6 Erweitertes System nach Moore und weitere Alternativen

In der mathematischen Literatur, z.B. Mittelman, Weber (1980), Deuffhard et al. (1984), Seydel (1988) usw. wird sehr häufig das von Moore (1979) vorgeschlagene erweiterte System aufgeführt. Durch Hinzunahme der Bedingung $\phi^T \mathbf{P} = 0$, die nur für Verzweigungspunkte gilt, lautet der erweiterte Satz von Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) - \alpha \phi \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) \phi \\ \phi^T \mathbf{P} \\ \phi^T \phi - 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

Die Linearisierung führt auf folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\alpha \mathbf{I} & -\mathbf{P} & -\phi \\ (\mathbf{K}_T \phi)_{,u} & \mathbf{K}_T & (\mathbf{K}_T \phi)_{,\lambda} & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 2\phi^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\phi \\ \Delta\lambda \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) - \alpha \phi \\ (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda) \phi) \\ \phi^T \mathbf{P} \\ \phi^T \phi - 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Während Seydel (1979) vorschlägt, diese Matrix direkt zu invertieren, stellen Deuffhard, Fiedler, Kinkel (1984) eine etwas effektivere Möglichkeit vor. Dabei muß die Steifigkeitsmatrix dreieckszerlegt (QR–Zerlegung) und außerdem noch ein lineares Gleichungssystem der Dimension $(n-1, n-1)$ gelöst werden. Die Systemmatrix ist jedoch symmetrisch und es kann auch die Bandspeichertechnik der Steifigkeitsmatrix genutzt werden. Verglichen mit den oben erwähnten (Kapitel 4.3 bis 4.5) erweiterten Systemen und den verwendeten Lösungsprozeduren steigt hier der Aufwand trotzdem beträchtlich an.

In Mei (1990) wird die Lösung des folgenden erweiterten Systems diskutiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} + (\phi^T \mathbf{K}_T \phi) \phi \\ \mathbf{K}_T \phi + (\phi^T \phi - 1) \phi \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

Für die Anwendung des Newton–Verfahrens muß folgendes Iterationsschema gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T + \phi \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{T,u} \phi & \mathbf{K}_T + \phi \phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \phi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G} + (\phi^T \mathbf{K}_T \phi) \phi \\ \mathbf{K}_T \phi + (\phi^T \phi - 1) \phi \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Durch Umformung und Verwendung der Sherman–Morrison–Formel ist nur die Matrix $(\mathbf{K}_T + \phi \phi^T)$ zu invertieren. Durch die additive Matrix $\phi \phi^T$, die vollbesetzt ist, wird die Bandstruktur zunichte gemacht, so daß auch diese Möglichkeit nicht die Effektivität der oben gezeigten Verfahren erreichen kann.

In Mei (1989) und Hoy (1990) wird eine weitere Formulierung vorgeschlagen, deren Lösung ebenfalls auf der Inversen $(\mathbf{K}_T + \phi \phi^T)^{-1}$ basiert.

Wagner (1991) gibt noch Formulierungen an, die erlauben, nur Durchschlagspunkte oder alternativ nur Verzweigungspunkte zu berechnen. Auf diese Möglichkeit wird nicht näher eingegangen, da im Rahmen dieser Arbeit der niedrigste kritische Punkt, egal ob Durchschlags– oder Verzweigungspunkt, gefunden werden soll.

4.7 Gleichungslösung bei fast singulärer Matrix

Der Grund für die Entwicklung der Penalty–Formulierungen war das Singulärwerden der Tangentensteifigkeitsmatrix. Die Anwendung auf das Bogentragwerk, dargestellt in Bild 4.1 dient nun auch hier zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens verschiedener noch vorzustellender Techniken. Das in Bild 4.6 dargestellte Konvergenzverhalten wiederholt nochmal das schon in Bild 4.4 gezeigte Verhalten bei Anwendung des erweiterten Systems nach Kapitel 4.2. Das kleinste Diagonalglied wirkt als Indikator für das Erreichen eines kritischen Punktes und der Energieausdruck $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}$ als Indikator für das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes.

Das Verfahren zeigt zu Beginn ein brauchbares Konvergenzverhalten, das aber ab dem sechsten Iterationsschritt, durch die schlechte Konditionierung der mit annähernd quadratischer Konvergenz singulär werdenden Steifigkeitsmatrix, schlagartig gestört wird. Nach vielen Iterationen mit Oszillationen stabilisiert sich das Verfahren zwar wieder, jedoch kann kein brauchbares Konvergenzverhalten erreicht werden. In vielen Fällen stellt sich diese Stabilisierung nicht ein. Es bleibt dann bei Oszillationen oder führt sogar zu Divergenz. Obwohl man meinen könnte, daß beim sechsten Iterationsschritt schon das gewünschte Ziel erreicht ist, tauchen die unerwünschten Effekte verbunden mit dem Singulärwerden von \mathbf{K}_T oft schon auf, wenn die Konvergenzkriterien noch nicht ausreichend erfüllt sind.

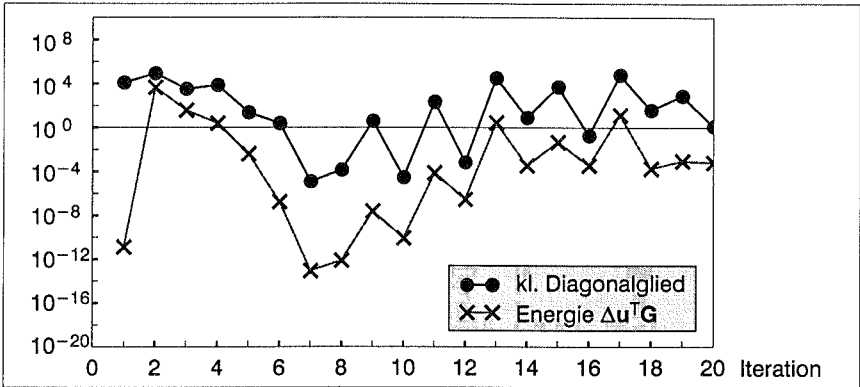


Bild 4.6: Einfluß der Singularität auf Konvergenzverhalten

Im folgenden werden einige Verfahren zur Behebung der erläuterten Schwierigkeiten vorgestellt und diese dann mit den oben gezeigten Penalty-Verfahren verglichen. Die ersten beiden Methoden bearbeiten am Ende der Iteration die Variablenkorrekturen, während die nächsten beiden bei jeder Gleichungslösung eingreifen. Das eigentliche Problem dabei ist nicht die singuläre Matrix selbst, sondern das allmähliche Singulärwerden. Bei singulärer Matrix existiert eine Lösung genau dann, wenn die rechte Seite im Bild der Matrix liegt. Die Lösung kann dann z.B. mit der Methode nach Nelson (1976) gefunden werden. Die singulär werdende Matrix bei der iterativen Lösung des erweiterten Systems erfordert jedoch etwas mehr Beachtung.

4.7.1 Dämpfung

Bei der Variablenkorrektur (Gleichungen (4.23) bis (4.25)) am Ende des Newton-Schrittes wird ein Dämpfungsfaktor α eingeführt:

$$\Delta \mathbf{u} = \alpha (\Delta \mathbf{u}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{u}_G) \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\phi} + \Delta \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} + \alpha (\Delta \boldsymbol{\phi}_P \Delta \lambda + \Delta \boldsymbol{\phi}_G - \boldsymbol{\phi}) \quad (4.52)$$

$$\Delta \lambda = \alpha \Delta \lambda \quad (4.53)$$

Dadurch wird die Konvergenz gestört. Die Steifigkeitsmatrix wird nur allmählich singulär und die Oszillationen schwächen sich ab. Die in Bild 4.7 dargestellten Iterationsverläufe für verschiedene Dämpfungsfaktoren zeigen, daß diese sehr einfache Methode eine Verbesserung bringen kann. Bei vielen Beispielen führt sie aber doch zu Schwierigkeiten, insbesondere auch bei der Wahl eines guten Dämpfungsfaktors.

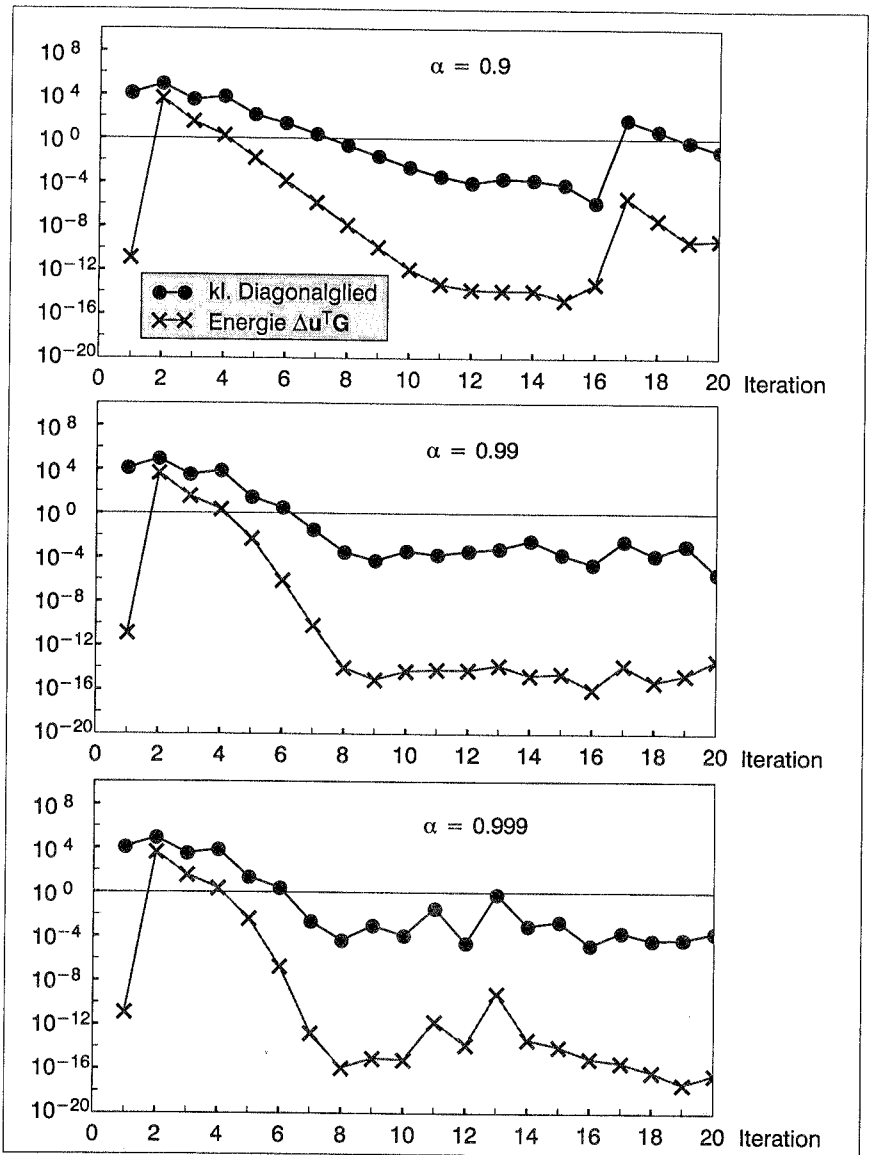


Bild 4.7: Dämpfung für verschiedene Faktoren α

4.7.2 "Line-Search"-Techniken

Hier wird eine Methode eingesetzt, die sich in der Optimierung oder bei den Quasi-Newton- bzw. modifizierten Newton-Verfahren der Pfadverfolgung (Crisfield (1983)) bewährt hat. Diese Techniken sind sehr wichtig, wenn die zweiten Ableitungen der Optimierungsfunktionen oder des Potentials nicht vorliegen, während der Iteration konstant gehalten oder mit Sekantenregeln (BFGS) angepaßt werden. Die approximierte Iterationsmatrix wird verwendet, um eine Suchrichtung zu erzeugen. Mit dem "Line-Search" wird dann die Schrittweite gesucht, die ein Minimum des Potentials oder der Optimierungsfunktionen liefert. Wenn also die schlecht konditionierte Steifigkeitsmatrix eine brauchbare Suchrichtung liefert, kann diese Methode erfolgreich eingesetzt werden, um die daraus resultierenden Oszillationen bzw. Konvergenzschwierigkeiten zu dämpfen. Unter den Punkten **a)** bis **c)** finden sich drei Alternativverfahren.

a) Ausgehend vom Entwicklungspunkt $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\lambda})$ wird mit dem Line-Search-Faktor α und der Suchrichtung $\Delta \mathbf{u}$ das gesuchte Linienminimum beschrieben

$$\mathbf{u}(\alpha) = \bar{\mathbf{u}} + \alpha \Delta \mathbf{u} \quad (4.54)$$

$$\lambda(\alpha) = \bar{\lambda} + \alpha \Delta \lambda \quad (4.55)$$

Die Bedingung für das Minimum des Potentials in Richtung von $\Delta \mathbf{u}$ lautet

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\alpha} = 0 \quad (4.56)$$

und läßt sich umformen zu

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\alpha} = \mathbf{G}(\mathbf{u} + \alpha \Delta \mathbf{u}, \lambda + \alpha \Delta \lambda)^T \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (4.57)$$

In Bletzinger (1990) finden sich mehrere Line-Search-Techniken. Hier wird nur kurz das Prinzip der linearen Interpolation bzw. Extrapolation erläutert. An den beiden Stellen α_0 und α_1 wird jeweils die Ableitung des Potentials ausgewertet

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{u}(\alpha_0), \lambda(\alpha_0))^T \Delta \mathbf{u} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{u}(\alpha_1), \lambda(\alpha_1))^T \Delta \mathbf{u} \quad (4.59)$$

Der neue Line-Search-Faktor α_2 berechnet sich dann zu

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\mathbf{s}_1(\alpha_1 - \alpha_0)}{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0} \quad (4.60)$$

Die Prozedur kann dann solange wiederholt werden, bis ausreichende Genauigkeit erreicht wird. Dabei wird z.B. immer interpoliert zwischen erstem positiven Wert für \mathbf{s}_1 und dem nächstliegenden negativen. Crisfield (1983) und Schweizerhof (1993) weisen darauf hin, daß sich innerhalb der Line-Search-Prozedur eigentlich die Suchrichtung $\Delta \mathbf{u}$ ändert, da nach Gleichung (4.18) diese den Lastparameter $\Delta \lambda$ enthält und dieser sich ja auch mit α ändert. Obwohl die Suchrichtung konstant gehalten wird, erhält man in Bild 4.8 ganz brauchbare Konvergenzverläufe.

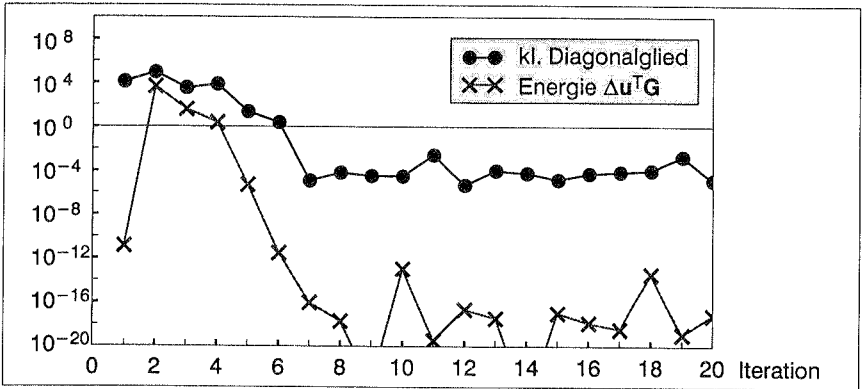


Bild 4.8: Line-Search-Verfahren a)

Jedoch ist zu bedenken, daß in jedem Line-Search-Schritt eine Elementschleife durchlaufen werden muß, um die inneren Kräfte zu berechnen. Einer Maximalzahl von drei bis fünf Line-Search-Schritten innerhalb einer Iteration mit dem erweiterten System (4.11) begrenzt den Aufwand. Diese Methode bleibt trotzdem noch sehr aufwendig.

b) Da beim Aufstellen der Ungleichgewichtskräfte der Mehraufwand für das Erstellen der Steifigkeitsmatrix nicht mehr so sehr ins Gewicht fällt, stellt sich die Frage, ob mit deren Hilfe nicht eine elegantere Line-Search-Technik entwickelt werden kann. Wenn für den gesuchten Line-Search-Faktor α die Forderung nach dem Minimum der Norm der Ungleichgewichtskräfte $\|G\|$ verwendet wird, ergibt sich die Ableitung zu:

$$\frac{d\|G\|}{d\alpha} = \frac{\partial\|G\|}{\partial u} \frac{du}{d\alpha} = 2 K_T(u + \alpha\Delta u) G(u + \alpha\Delta u) \Delta u \quad (4.61)$$

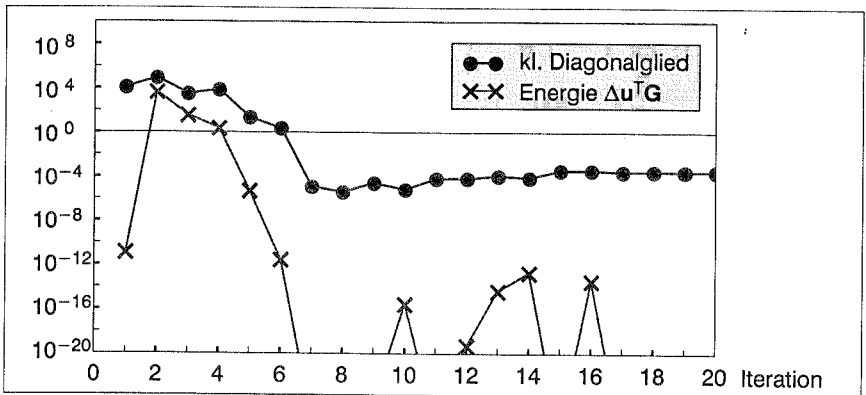


Bild 4.9: Line-Search-Verfahren b)

Da jetzt die Ungleichgewichtskräfte und die zugehörigen Ableitungen an den Stellen α_0 und α_1 berechnet werden können, läßt sich somit ein kubischer Line–Search verwenden. Mit dieser höherwertigen Technik kann das Linienminimum effektiver gefunden werden. Eine Konvergenzstudie liefert Bild 4.9. Die Methode ist aber immer noch sehr aufwendig.

c) Um den Aufwand in Grenzen zu halten, wird bei der Suche nach dem Linienminimum des Potentials die Prozedur nach einem Schritt abgebrochen. Dabei kann dann am Entwicklungspunkt die zweite Ableitung berechnet werden zu

$$s_0' = \frac{d^2\mathcal{T}}{d\alpha^2} = \Delta u \mathbf{K}_T \Delta u \quad (4.62)$$

Mit den Stützstellen s_0 , s_0' und s_1 nach Gleichungen (4.58), (4.59) und (4.62) kann dann die Bedingung $\frac{d\mathcal{T}}{d\alpha}$ quadratisch approximiert werden, und die Abschätzung für die Nullstelle liefert:

$$\alpha_{1/2} = \frac{-s_0' \pm \sqrt{s_0'^2 - 4(s_1 - s_0 - s_0')s_0}}{2(s_1 - s_0 - s_0')} \quad (4.63)$$

Für die Skalierung der Verschiebungen und des Lastparameters nach (4.54) und (4.55) wird der kleinere zwischen 0 und 1 liegende Wert von α verwendet. Für die Berechnung von s_0' kann die erste Gleichung der Linearisierung des erweiterten Systems (4.14) verwendet werden, so daß sich (4.62) vereinfacht zu

$$s_0' = \Delta u^T (-\mathbf{G} + \mathbf{P} \Delta \lambda) \quad (4.64)$$

Der Mehraufwand pro Iteration besteht dann im wesentlichen aus dem Berechnen der Ungleichgewichtskräfte an der Stelle $\alpha_1 = 1.0$. Das typische Verhalten dieser Technik ist in Bild 4.10 dargestellt.

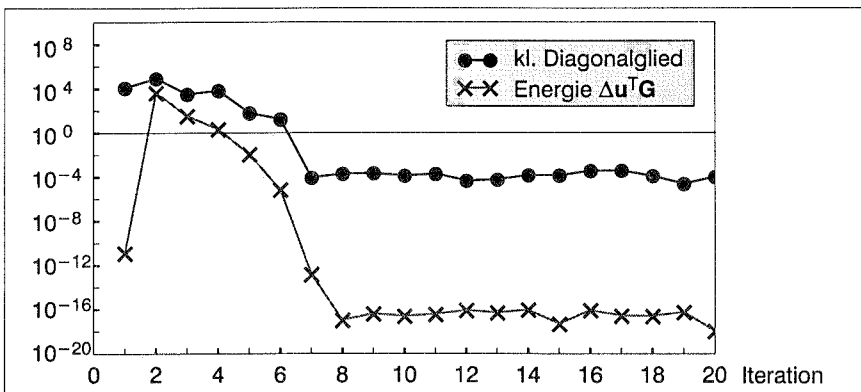


Bild 4.10: Line–Search–Verfahren c)

4.7.3 Selektive Dämpfung

In Eriksson (1987) wird eine Methode aufgegriffen, die Eigenvektorprojektionen benutzt, um die fast singulären Gleichungssysteme zu lösen. Als rechte Seite werden im folgenden exemplarisch die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{G} verwendet. Da bei der Lösung von

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{G} \quad (4.65)$$

bei singulär werdender Matrix \mathbf{K}_T die Anteile der rechten Seite \mathbf{G} in Richtung des Eigenvektors sehr große Verschiebungszuwächse $\Delta \mathbf{u}$ produzieren, wird \mathbf{G} bzgl. dem Eigenvektor orthogonalisiert

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{G} - c_s \frac{\mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\phi} \quad (4.66)$$

mit dem selektiven Dämpfungsfaktor c_s . Da der Eigenvektor $\boldsymbol{\phi}$ während der Iteration mit dem erweiterten System (4.11) sowieso vorliegt, benötigt die Orthogonalisierung nur einen sehr geringen Aufwand.

Um die Methode bewerten bzw. anwenden zu können, wird die Matrix \mathbf{K}_T spektral zerlegt

$$\mathbf{K}_T = \sum_{i=1}^n \omega_i \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T \quad (4.67)$$

mit den orthonormierten Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$ und den zugehörigen Eigenwerten ω_i . Das zu lösende Gleichungssystem (4.65) läßt sich dann umformulieren zu:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \boldsymbol{\phi}_i^T \Delta \mathbf{u} \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{G} \quad (4.68)$$

Vor- und Nachmultiplikation mit einem Eigenvektor $\boldsymbol{\phi}_j$ und Ausnutzung der Orthonormalitätseigenschaft der Eigenvektoren führt zu

$$\omega_j \Delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j \quad (4.69)$$

Diese Gleichung enthält die Komponente von $\Delta \mathbf{u}$ bzw. \mathbf{G} in Richtung des Basisvektors $\boldsymbol{\phi}_j$. Unter Verwendung der Eigenvektoren als Basis (siehe Anhang 13.3) läßt sich $\Delta \mathbf{u}$ auch schreiben als

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \Delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j \quad (4.70)$$

und unter Verwendung von (4.69) umformen zu

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j \quad \Leftrightarrow \quad \left(\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G} \right) \quad (4.71)$$

Durch Einführung der selektiven Dämpfung in Richtung des zum kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektors $\boldsymbol{\phi}_n$ gelangt man zu (vgl. Gleichung (4.66))

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_j} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j \right) + \frac{1}{\omega_n} (1 - c_s) \frac{\mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T \boldsymbol{\phi}_n} \boldsymbol{\phi}_n \quad (4.72)$$

oder

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\omega_j} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j \right) - \frac{c_s}{\omega_n} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n \quad (4.73)$$

Die Verwendung der Spektralzerlegung von \mathbf{K}_T (vgl. auch Gleichung (4.71)) führt zu

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}_T^{-1} - \frac{c_s}{\omega_n} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T) \mathbf{G} \quad (4.74)$$

Der Klammerausdruck wird mit Hilfe der Sherman–Morrison–Formel invertiert

$$(\mathbf{K}_T^{-1} - \frac{c_s}{\omega_n} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T)^{-1} = \mathbf{K}_T - \frac{\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K}_T}{-\frac{\omega_n}{c_s} + \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi}_n} \quad (4.75)$$

und mit $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n \boldsymbol{\phi}_n$ umgeformt zu

$$(\mathbf{K}_T^{-1} - \frac{c_s}{\omega_n} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T)^{-1} = \mathbf{K}_T + \frac{c_s \omega_n}{1 - c_s} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T \quad (4.76)$$

Gleichung (4.66) läßt sich dann schreiben als

$$(\mathbf{K}_T + \frac{c_s \omega_n}{1 - c_s} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{G} \quad , \quad \Delta \mathbf{K}_T = \frac{c_s \omega_n}{1 - c_s} \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T \quad (4.77)$$

Die Matrix \mathbf{K}_T wird also stabilisiert durch die Addition des Dyadenprodukts des maßgebenden Eigenvektors, multipliziert mit dem Faktor $\frac{c_s \omega_n}{1 - c_s}$. Dieser Faktor verringert sich bei kleiner werdendem ω_n in der Nähe des singulären Punktes. Deshalb muß der Dämpfungsfaktor c_s variabel sein, um dies auszugleichen. In Eriksson (1987) wird im Rahmen von Pfadverfolgungsalgorithmen für den variablen Dämpfungsfaktor

$$c_s = 1 - c' \frac{|\omega_n| \|\Delta \mathbf{u}^0\|}{\|\frac{\mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\phi}\|} \quad c_s \geq 0 \quad (4.78)$$

verwendet. Mit $\Delta \mathbf{u}^0$ wird der Prädiktorschritt (hier: der erste Korrektorschritt) und mit c' eine vorgegebene Konstante, die mit $c' \approx 0.1$ als effizient angegeben wird, bezeichnet. Damit ergibt sich für den additiven Anteil $\Delta \mathbf{K}_T$ zur Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T in Gleichung (4.77) die folgende Form

$$\Delta \mathbf{K}_T = \left[\frac{\|\frac{\mathbf{G}^T \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\phi}\| \|\boldsymbol{\phi}\|}{c' \|\Delta \mathbf{u}^0\|} - |\omega| \right] \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi}^T \quad (4.79)$$

Bei abnehmendem $|\omega|$ bestimmt dann die Projektion der rechten Seite auf den Eigenvektor die Stärke der Modifikation von \mathbf{K}_T .

Um analog zu den Penalty–Verfahren einen konstanten additiven Anteil $\Delta \mathbf{K}_T$ nach Gleichung (4.77) zu erhalten wird als Alternative der variable Dämpfungsfaktor

$$c_s = \frac{\hat{c}}{\hat{c} + \omega_n} \quad (4.80)$$

mit der einzugebenden Dämpfungskonstanten \hat{c} verwendet. Dies führt auf den gewünschten konstanten Anteil

$$\Delta K_T = \hat{c} \phi \phi^T \quad (4.81)$$

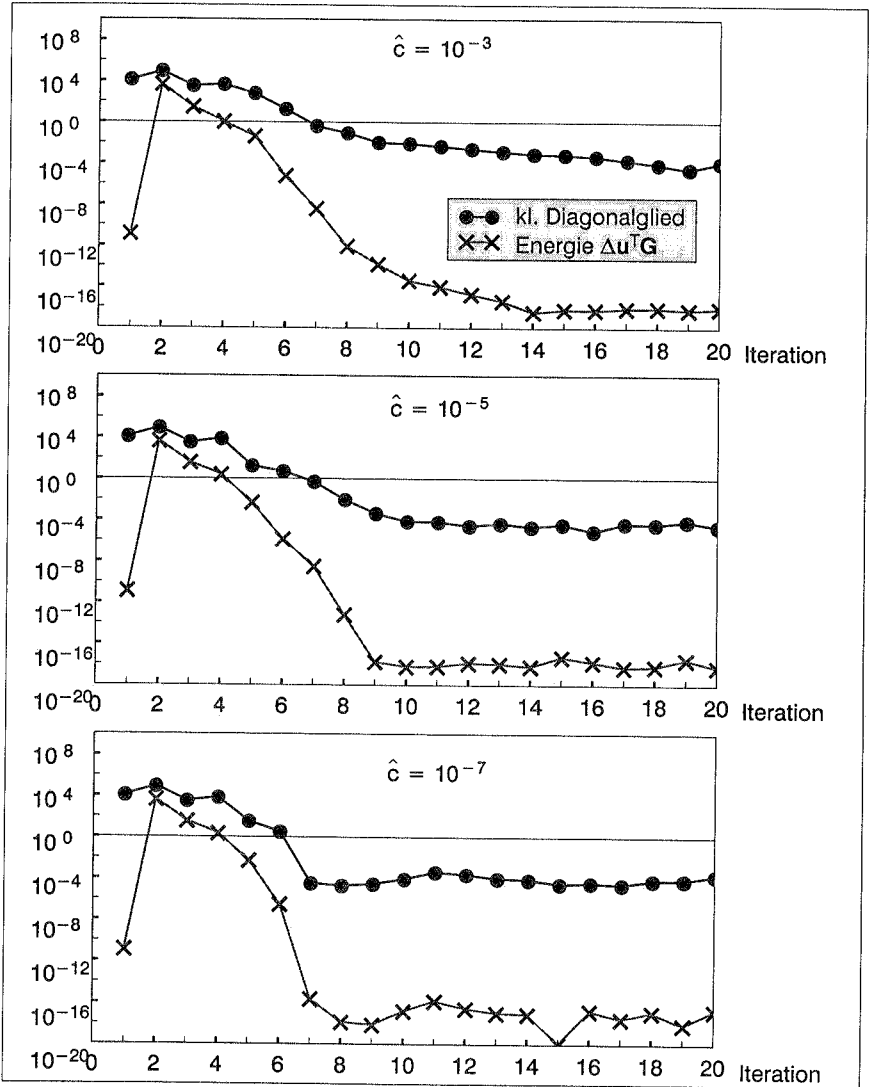


Bild 4.11: Selektive Dämpfung für verschiedene Konstanten \hat{c}

Diese Methode der selektiven Dämpfung mit dem in Gleichung (4.80) vorgeschlagenen variablen Dämpfungsfaktor erweist sich als äußerst stabil und kann als echte Alternative zu den Penalty-Verfahren eingesetzt werden. Die Konvergenzverläufe für verschiedene Konstanten \hat{c} in Bild 4.11 unterstreichen dies. Es muß noch angemerkt werden, daß die besten Ergebnisse erzielt werden, wenn bei der Gleichungslösung für $\Delta \phi_P$ nach Gleichung (4.19) auf die Dämpfung verzichtet wird. Im Anschluß an das nächste Kapitel findet ein Vergleich zu der dort erläuterten Deflationstechnik statt.

4.7.4 Implizite Deflationstechniken

In Chan (1984) wird eine Methode zur Lösung fast singulärer Gleichungssysteme vorgeschlagen, die auch Wagner (1991) aufgreift und die hier als Alternative zur selektiven Dämpfung (Kapitel 4.7.3) diskutiert werden soll.

Ausgangspunkt ist wieder das fast singuläre Gleichungssystem (Gleichung (4.65))

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{G} \quad (4.82)$$

Zur Vereinfachung wird die Symmetrieeigenschaft von \mathbf{K}_T genutzt. Bei einem singulären, konsistenten Gleichungssystem mit einem eindimensionalen Kern der Systemmatrix, aufgespannt vom Singulärvektor, sind auch alle zusammengesetzten Vektoren bestehend aus einer Partikulärlösung und einem beliebigen Vielfachen des Singulärvektors als Lösungen möglich. Nach Chan ist es vorteilhaft, die Lösung des fast singulären Gleichungssystems (4.82) ebenfalls in zerlegter Form mit dem noch zu bestimmenden Faktor α anzugeben:

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \phi \quad (4.83)$$

Der Vektor $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ wird auch als deflatierte Lösung bezeichnet. Bei der Deflation unter Verwendung des singulären Vektors ϕ läßt sich die Projektionsmatrix \mathbf{P}_ϕ formulieren.

$$\mathbf{P}_\phi = \mathbf{I} - \phi \phi^T \quad (4.84)$$

Aus (4.82) erhält man unter Verwendung des Projektors das folgende konsistente System

$$\mathbf{K}_{TS} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{P}_\phi \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \tilde{\mathbf{u}} \perp \phi \quad \text{oder} \quad \Delta \tilde{\mathbf{u}}^T \phi = 0 \quad (4.86)$$

Die Bedingung (4.86) filtert aus den möglichen Lösungen diejenige mit der kleinsten Norm heraus. Die Matrix $\mathbf{K}_{TS} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T$ ist die in der Frobenius Norm am nächsten gelegene singuläre Matrix zu \mathbf{K}_T . Die Rechtfertigung des Ansatzes von Chan

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\phi^T \mathbf{G}}{\omega} \phi - \frac{\phi^T \mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}}}{\omega} \phi \quad (4.87)$$

mit dem Eigenwert ω nach

$$\mathbf{K}_T \phi = \omega \phi \quad (4.88)$$

gelingt durch Einsetzen in Gleichung (4.82)

$$\mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_T \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}}{\omega} \boldsymbol{\phi} - \mathbf{K}_T \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}}}{\omega} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}}{\omega} \omega \boldsymbol{\phi} - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}}}{\omega} \omega \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \quad (4.91)$$

Die Verwendung von Gleichung (4.85) führt zu

$$\mathbf{P}_\phi \mathbf{G} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{G} - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G} \quad \checkmark \quad (4.93)$$

Somit kann Gleichung (4.82) durch den gewählten Ansatz erfüllt werden. Die noch benötigte deflatierte Lösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ wird von Chan angegeben als

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.94)$$

Diese Lösung eingesetzt in (4.85) führt zu

$$\mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.95)$$

$$\rightarrow \mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.96)$$

und in (4.86) eingesetzt liefert sie

$$\mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.97)$$

Wird bei (4.96) und (4.97) die Idempotenzeigenschaft des Projektors

$$\mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi = \mathbf{P}_\phi \mathbf{P}_\phi = \mathbf{P}_\phi \quad (4.98)$$

verwendet, so zeigt sich, daß (4.94) die Lösung von (4.85) mit der kleinsten Norm darstellt. Diese Deflationslösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ wird in den Ansatz (4.87) eingesetzt

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} + \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}}{\omega} \boldsymbol{\phi} - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_T \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G}}{\omega} \boldsymbol{\phi} \quad (4.99)$$

Der dritte Term auf der rechten Seite verschwindet wegen $\Delta \tilde{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi} = 0$ und es verbleibt:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{P}_\phi \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} + \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}}{\omega} \boldsymbol{\phi} \quad (4.100)$$

Das Vorgehen bei Anwendung der impliziten Deflationstechnik unter Verwendung des, im Rahmen der Berechnung des kritischen Punktes bekannten, Singulärvektors läßt sich wie folgt zusammenfassen:

(1) Berechne modifizierte rechte Seite und löse das Gleichungssystem

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{P}_\phi \mathbf{G} \quad (4.101)$$

$$\Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}^* \quad (4.102)$$

(2) Berechne Deflationslösung

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_\phi \Delta \mathbf{u}^* = \Delta \mathbf{u}^* - \boldsymbol{\phi}^T \Delta \mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi} \quad (4.103)$$

(3) Berechne zusammengesetzte Lösung unter Verwendung von ω

$$\omega = \phi^T K_T \phi \quad (4.104)$$

$$\Delta u = \Delta \tilde{u} + \frac{\phi^T G}{\omega} \phi = \Delta u^* + \left(\frac{\phi^T G}{\omega} - \phi^T \Delta u^* \right) \phi \quad (4.105)$$

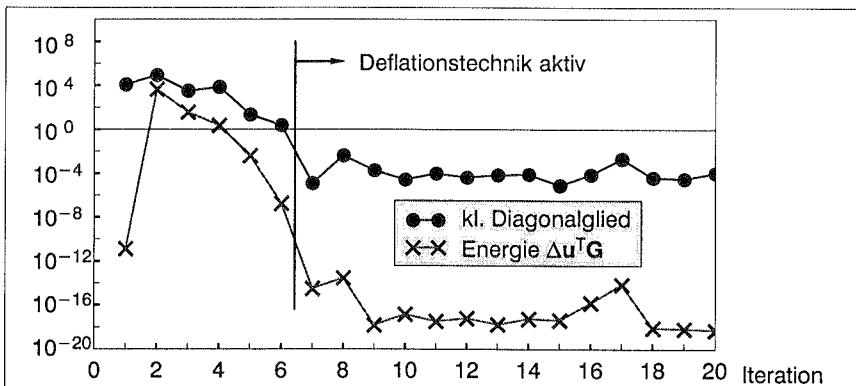


Bild 4.12: Deflationstechnik

Die Konvergenzstudien in Bild 4.12 demonstrieren ein ganz brauchbares Verhalten. Jedoch muß eine Schranke angegeben werden, ab der diese Technik aktiv wird. Da die Verwendung von $K_{TS} = P_\phi K_T$ und die Orthogonalisierung der rechten Seite nur in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes zulässig sein kann, wird dies sehr schwierig. Der Vorteil der oben erwähnten selektiven Dämpfung liegt darin, daß dort die Orthogonalisierung der rechten Seite vor der Gleichungslösung sich am kleiner werdenden niedrigsten Eigenwert orientiert. Die Dämpfung aktiviert sich dadurch von selbst. Es muß zwar die Dämpfungskonstante \hat{c} eingegeben werden. Jedoch läßt sich dafür wesentlich einfacher ein brauchbarer Wert finden als für die Schranke bei der impliziten Deflationstechnik.

4.8 Anmerkungen zu erweiterten Systemen

Auf den folgenden Seiten werden bisher noch offene Fragen diskutiert. Es finden sich dort einige ausgewählte Beispiele und Parameterstudien, um die Anwendung der erweiterten Systeme zu erleichtern und den Erfolg der Methode zu untermauern.

4.8.1 Einsatz innerhalb Pfadverfolgung und Wahl der Startwerte

Da im allgemeinen Fall ein kritischer Punkt nicht sofort ab dem unbelasteten, unverformten Zustand berechnet werden kann, wird die Suche nach kritischen Punkten in die Pfadverfolgungsprozedur eingebunden. Während der Pfadverfolgung wird die Diago-

nale der dreieckszerlegten Steifigkeitsmatrix K_T an Gleichgewichtspunkten untersucht. Tauchen dort negative Werte auf, so deutet dies auf einen Verlust der positiven Definitheit bzw. auf das Überschreiten eines kritischen Punktes hin. Die Suche nach dem kritischen Punkt kann dann an diesem Punkt oder in manchen Fällen besser am davor erreichten Gleichgewichtspunkt gestartet werden (Bild 4.13). Auch können Konvergenzschwierigkeiten auf die Nähe eines kritischen Punktes hinweisen. Eine weitere Möglichkeit, die Nähe zu einem kritischen Punkt festzustellen, bietet eine begleitende Eigenwertberechnung nach Kapitel 3.7.

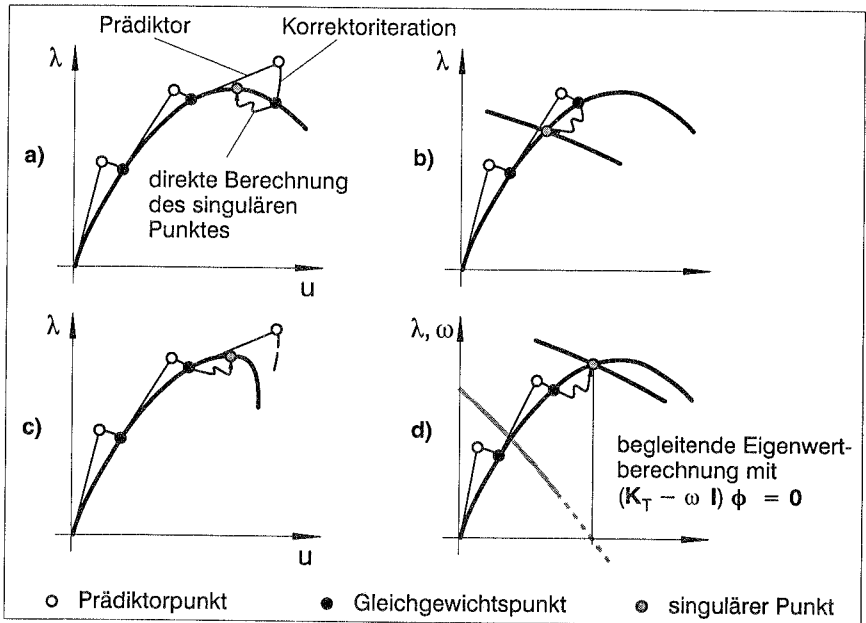


Bild 4.13: Wechsel von Pfadverfolgung zu Berechnung von singulären Punkten
a), b) Überschreiten von Durchschlags- bzw. Verzweigungspunkt
c) Konvergenzschwierigkeiten – d) Eigenwertberechnung

Nach Festlegung des Verschiebungszustandes u und des Lastniveaus λ braucht die Iteration mit einem erweiterten System jetzt noch einen Startvektor für den Singulärvektor ϕ . Dabei bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- a) Eins-Vektor
- b) skaliertes Verschiebungsvektor
- c) Eigenvektor aus Eigenwertberechnung

Die Startvektoren werden alle so skaliert, daß die Längenebenbedingung zu Beginn erfüllt ist. Bei der Verwendung des Eins-Vektors führt die Suche nach einem kritischen Punkt, wie auch bei der inversen Vektoriteration zur Bestimmung von Eigenwerten und

Eigenvektoren, in aller Regel zum nächst gelegenen. Der skalierte Verschiebungsvektor bietet sich an bei der Suche nach einem Durchschlagpunkt. Durch die Auswahl eines Eigenvektors einer Eigenwertberechnung ohne hohe Genauigkeitsanforderungen läßt sich der zu dieser Beulfigur gehörende Verzweigungspunkt berechnen.

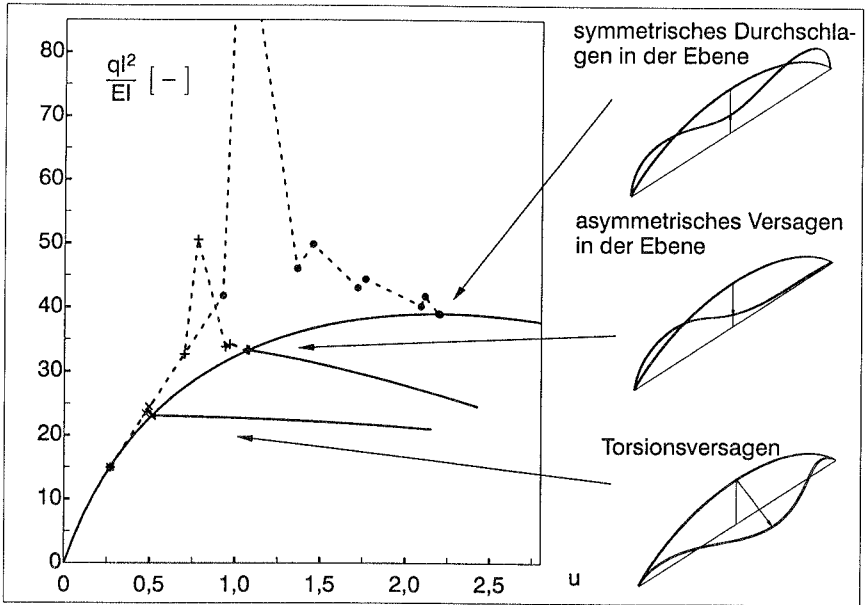


Bild 4.14: Kritische Punkte auf der Lastverformungskurve

In Bild 4.14 wurde, ausgehend von demselben Startpunkt, durch die Wahl des entsprechenden Eigenvektors als Startvektor der erste Verzweigungspunkt (Torsionsversagen), der zweite Verzweigungspunkt (asymmetrisches ebenes Versagen) und der Durchschlagpunkt berechnet (siehe auch Petersen (1992)). Da aber meist die Berechnung des auf dem Primärpfad niedrigst gelegenen kritischen Punktes von Interesse ist, bietet sich die Verwendung des zum kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektors an. Am erreichten kritischen Punkt kann dann kontrolliert werden, ob außer dem verschwindenden Diagonalglied, das eventuell auch leicht negativ sein kann, noch ein kleineres, negatives Diagonalglied der dreieckszerlegten Matrix \mathbf{K}_T vorliegt. Solch ein Fall ist in Bild 4.15 skizziert. Mit dem ersten Eigenvektor wird aus großer Entfernung der zweite Verzweigungspunkt berechnet. Am erreichten Punkt wird eine erneute Eigenwertberechnung durchgeführt. Der jetzt zum negativen Eigenwert gehörende Vektor wird als Startvektor verwendet. Es erweist sich in den meisten Fällen als günstiger, am vorigen Startpunkt mit der Iteration zu beginnen, da der Start an einem kritischen Punkt mit einem nicht zu diesem Punkt gehörenden Eigenvektor meist zu Konvergenzproblemen oder auch zur Rückkehr zu diesem Punkt führt.

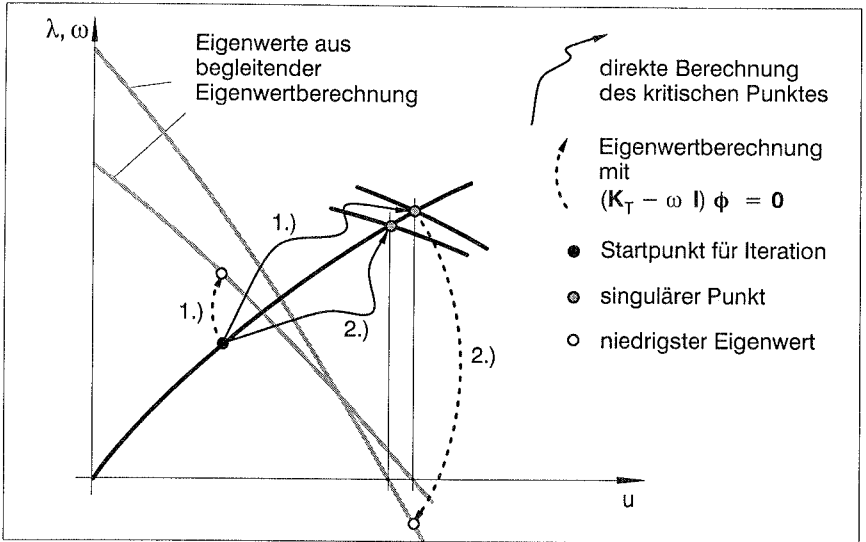


Bild 4.15: Berechnung des niedrigsten kritischen Punktes

Nach dem Erreichen können dann mit den in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren Primärpfad oder abzweigende Pfade weiter verfolgt, Einflüsse von Imperfektionen nach Kapitel 6 und 7 untersucht oder Ableitungen für die Optimierung nach Kapitel 10 berechnet werden.

4.8.2 Richtungsableitung

Für die Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix werden die in Kapitel 4.2 (Gleichungen (4.15), (4.26) und (4.27)) beschriebenen numerischen Approximationen verwendet. Die oben benötigten Terme, die die Richtungsableitung enthalten, lassen sich in folgender äquivalenter Form angeben (Wriggers, Simo (1990), Wagner (1991)):

$$(\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u} \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}_{T,u} \boldsymbol{\phi}) \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\phi} \quad (4.106)$$

Sinnvollerweise wird die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{\phi}$ gewählt. Damit wird die Berechnung nur einer neuen Steifigkeitsmatrix notwendig, um die in den vorangegangenen Kapiteln auftauchenden Terme zu approximieren.

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_P \approx -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}), \lambda) \Delta \mathbf{u}_P - \mathbf{P} \quad (4.107)$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_G \approx -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}), \lambda) \Delta \mathbf{u}_G + \mathbf{G} \quad (4.108)$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_C \approx -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}), \lambda) \Delta \mathbf{u}_C - \mathbf{e}_1 \quad (4.109)$$

Der Parameter ϵ regelt das Verhältnis zwischen den Verschiebungen und dem zu addierenden Anteil des Eigenvektors und wird meist in folgendem Bereich gewählt

$$10^{-8} < \frac{\epsilon \|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\mathbf{u}\|} < 10^{-3} \quad (4.110)$$

Mit dem eingegebenen Wert für $\epsilon \parallel \phi \parallel \| \mathbf{u} \|$ wird ϵ während der Iteration an die augenblickliche Lösung von \mathbf{u} und ϕ angepaßt. Die Untersuchung der Vektoren

$$h_1 = \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda) \Delta \mathbf{u}_P - \mathbf{P}) \quad (4.111)$$

$$h_2 = \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda) \Delta \mathbf{u}_G + \mathbf{G}) \quad (4.112)$$

am in Bild 4.16 beschriebenen Beispiel des Zylindersegments unter Axialdruck (siehe auch Wagner (1991) und Petersen (1991)) führt zu diesen Grenzen. Es werden die zu den beiden Verschiebungen u_1 und u_2 gehörenden Komponenten von h_1 bzw. h_2 abhängig von ϵ betrachtet.

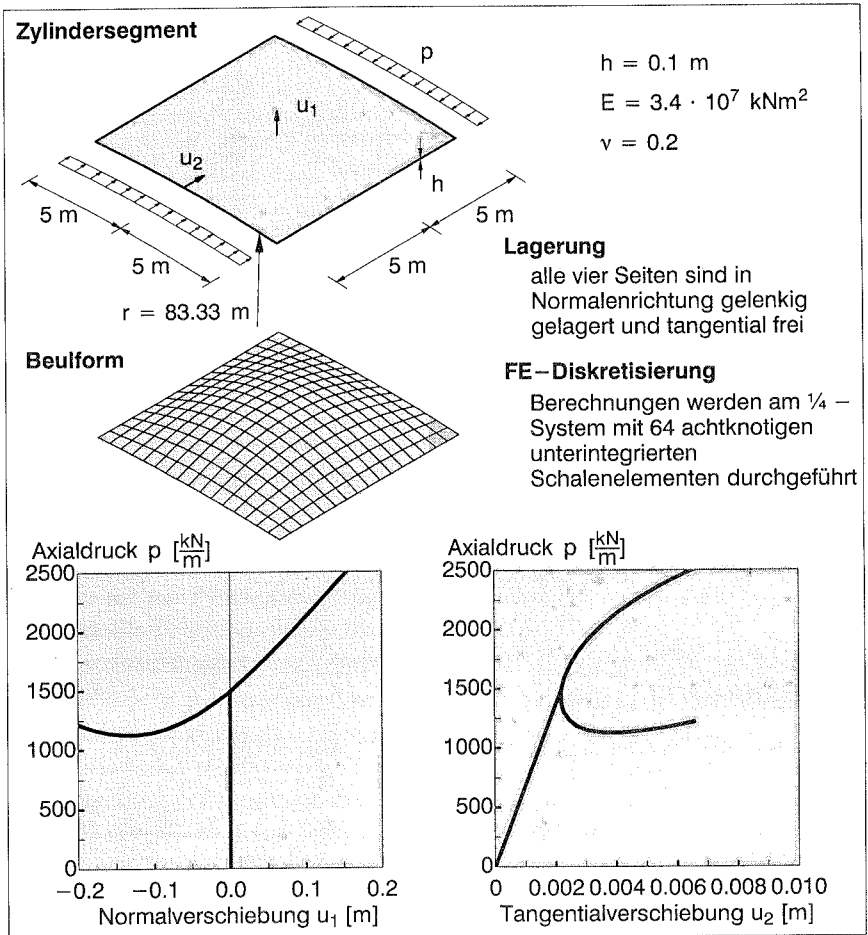


Bild 4.16: Zylindersegment unter Axialdruck

Die Untersuchung wurde zu Beginn der Iteration (Bild 4.17 und Bild 4.18) und kurz vor Erreichen des kritischen Punktes (Bild 4.19 und Bild 4.20) durchgeführt. Für die Wahl eines geeigneten Wertes für ϵ steht ein breiter Bereich zur Verfügung. Die Wahl von ϵ bleibt aber problemabhängig. Bei Beispielen mit sehr geringen Vorbeulverformungen verschiebt er sich nach oben. Der Abhängigkeit von Dimensionen und Diskretisierung wird versucht, durch die Verwendung des Quotienten $\frac{\|\phi\|}{\|u\|}$ entgegenzuwirken.

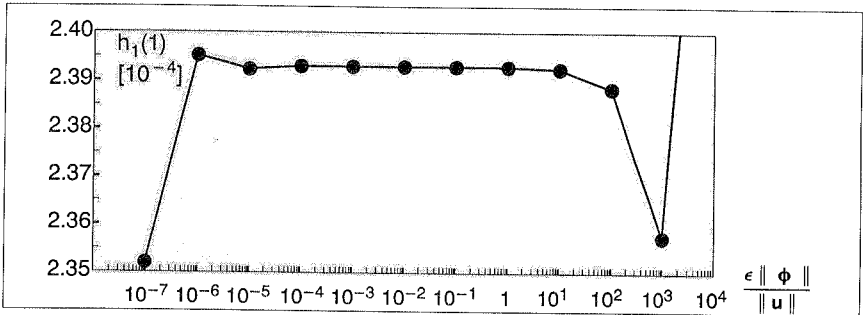


Bild 4.17: Genauigkeit bei Richtungsableitung zu Beginn der Iteration (u_1)

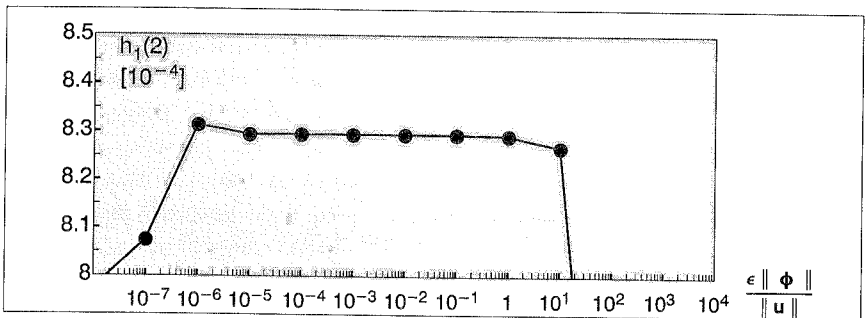


Bild 4.18: Genauigkeit bei Richtungsableitung zu Beginn der Iteration (u_2)

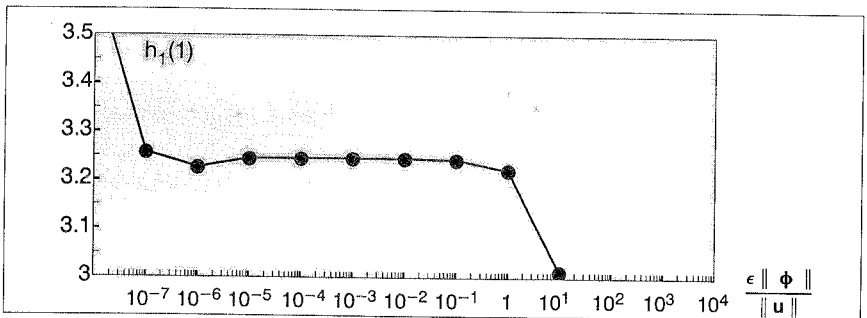


Bild 4.19: Genauigkeit bei Richtungsableitung nahe am kritischen Punkt (u_1)

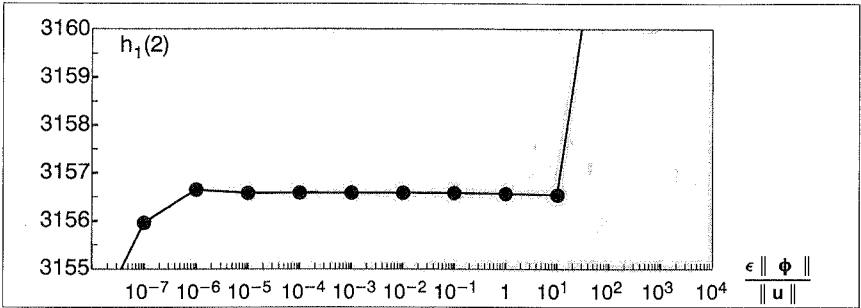


Bild 4.20: Genauigkeit bei Richtungsableitung nahe am kritischen Punkt (u_2)

4.8.3 Strafterm bei Penalty-Verfahren

Bei singular werdender Systemmatrix existiert eine Lösung des Gleichungssystems nur, wenn die rechte Seite bzw. das Residuum orthogonal zum Eigenvektor ist. In Kapitel 4.7.3 wurde gezeigt, daß eine Orthogonalisierung der rechten Seite gleichbedeutend mit einer Rangkorrektur der Systemmatrix durch die Addition des Dyadenprodukts des Eigenvektors $\phi \phi^T$ ist. Dies war auch die Motivation für die Formulierung von erweiterten Systemen unter Verwendung dieses Dyadenprodukts. Gleichzeitig bedeutet dies für die Rangkorrektur mit $e_i e_i^T$ in Kapitel 4.5, daß diese am wirksamsten erfolgt, wenn die Stelle des Strafterms mit der Stelle der Maximalkomponente des Eigenvektors übereinstimmt. Ähnliche Gedanken finden sich auch bei Nelson (1976) oder Felippa (1975,2). Im Widerspruch dazu steht die von Wriggers, Simo (1990) und Wagner (1991) beschriebene Strategie. Dort wird der Strafterm an die Stelle plaziert, an der bei der Dreieckszerlegung der Systemmatrix das Diagonalglied verschwindet. Diese gehört meist zur letzten Gleichungsnummer, die aber mit der Maximalstelle des Eigenvektors nicht übereinstimmen muß.

Nun muß noch die Frage nach der Größe der Penalty-Steifigkeit \hat{c} geklärt werden. Bei den meisten Berechnungen lag dieser Wert in der Größenordnung

$$10^{-6} < \hat{c} < 10^{-2} \quad (4.113)$$

Jedoch muß angemerkt werden, daß bei der Auswahl viele Komponenten einen Einfluß haben, z.B. Anzahl der Freiheitsgrade, Wahl der Dimensionen, mögliche Rechengenauigkeit. Eigentlich kann dieser Wert nur durch Testberechnungen festgelegt werden. Er sollte gerade so gewählt werden, daß keine numerischen Probleme, d.h. Oszillationen bei den Iterationen, mehr auftauchen. Wie schon bei der Herleitung der Penalty-Verfahren und bei den Verfahren in Kapitel 4.7 wird das Konvergenzverhalten am Beispiel des flachen Bogens (Bild 4.1 bis Bild 4.3) in Abhängigkeit von der Penalty-Steifigkeit \hat{c} untersucht. Die Bilder 4.21 bis 4.25 enthalten die Konvergenzver-

läufe bei Anwendung der Penalty-Formulierung unter Verwendung des Singulärvektors zur Verteilung der Strafterme nach Kapitel 4.4.

Das Verfahren konvergiert zwar auch schon bei einem Wert von $\hat{c} = 10^{+1}$, jedoch zeigt das relativ große kleinste Diagonalglied, daß die Entfernung zum kritischen Punkt doch sehr groß ist. Dies zeigt auch der angegebene kritische Lastfaktor $\lambda_c = 30.530$, der etwa 8% unter dem richtigen liegt. Für die Werte von $\hat{c} = 10^{-1}$ bis $\hat{c} = 10^{-6}$ stimmt der kritische Lastfaktor sehr gut, bevor dann wieder Oszillationen auftreten.

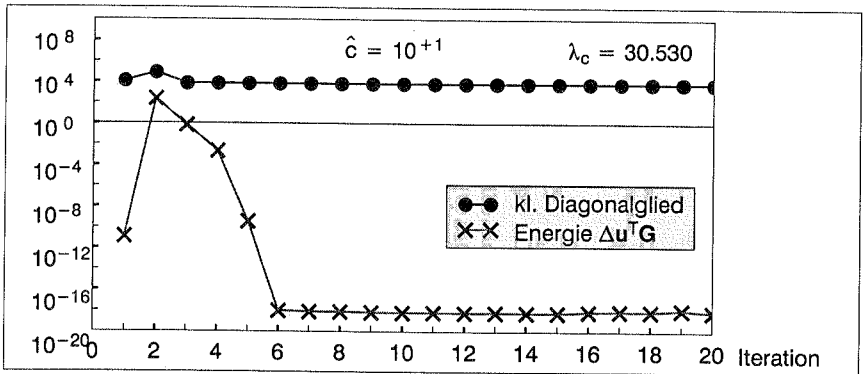


Bild 4.21: Penalty-Verfahren

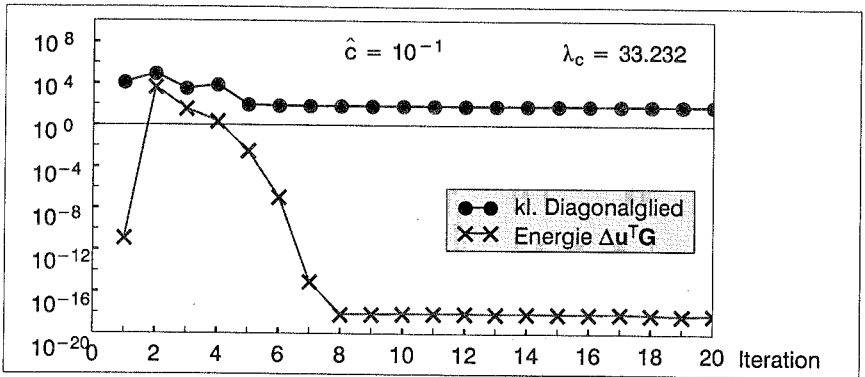


Bild 4.22: Penalty-Verfahren

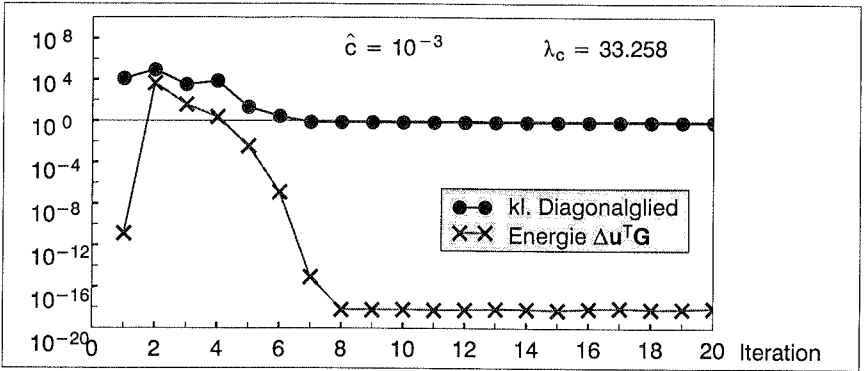


Bild 4.23: Penalty-Verfahren

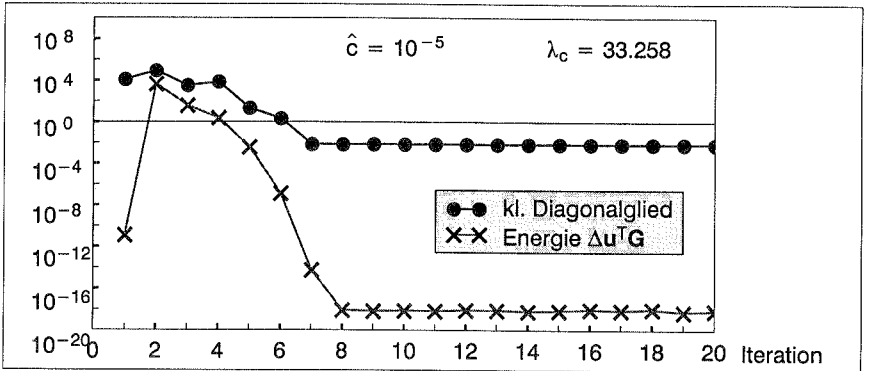


Bild 4.24: Penalty-Verfahren

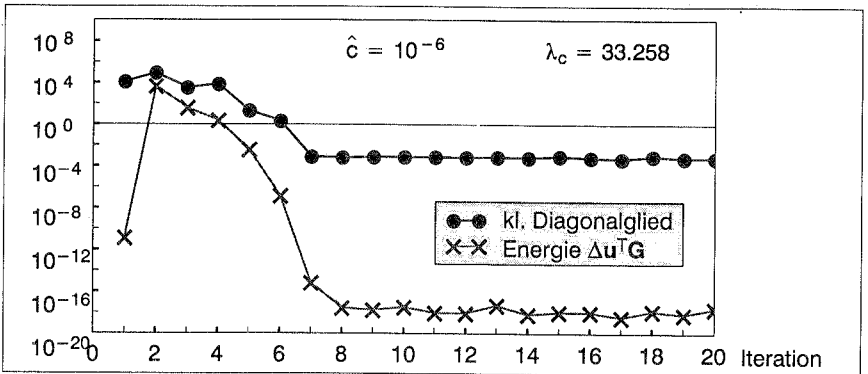


Bild 4.25: Penalty-Verfahren

Die gleiche Studie für die Penalty-Formulierung von Wriggers, Simo enthält zusätzlich zum Verlauf des kleinsten Diagonalglieds der Steifigkeitsmatrix auch den Verlauf des kleinsten Diagonalglieds der modifizierten nicht singulären Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{TC} nach Gleichung (4.41), die ja zur Gleichungslösung verwendet wird.

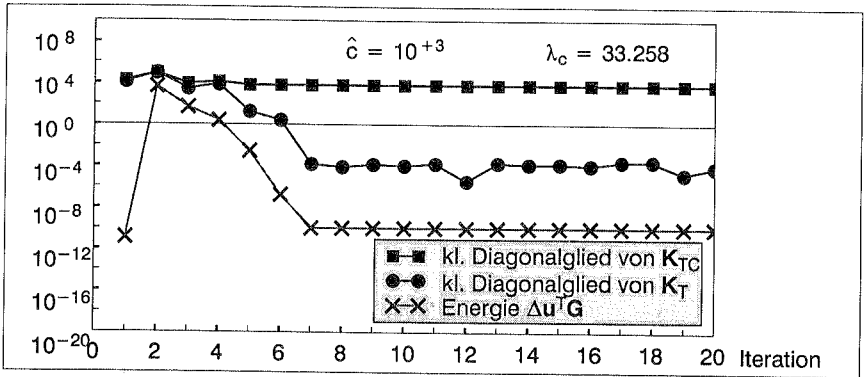


Bild 4.26: Penalty-Verfahren nach Wriggers, Simo

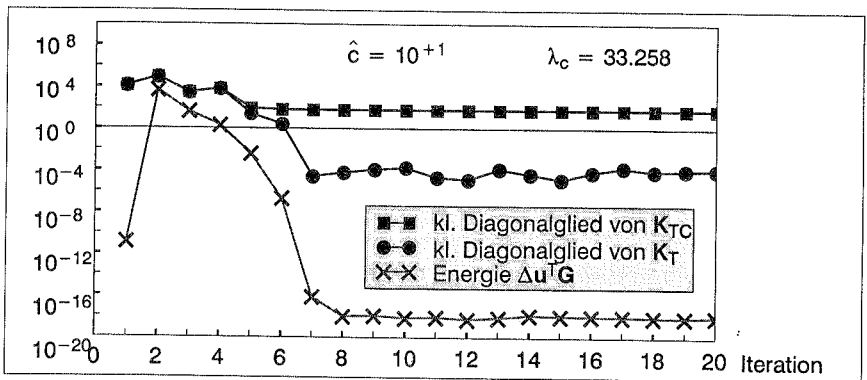


Bild 4.27: Penalty-Verfahren nach Wriggers, Simo

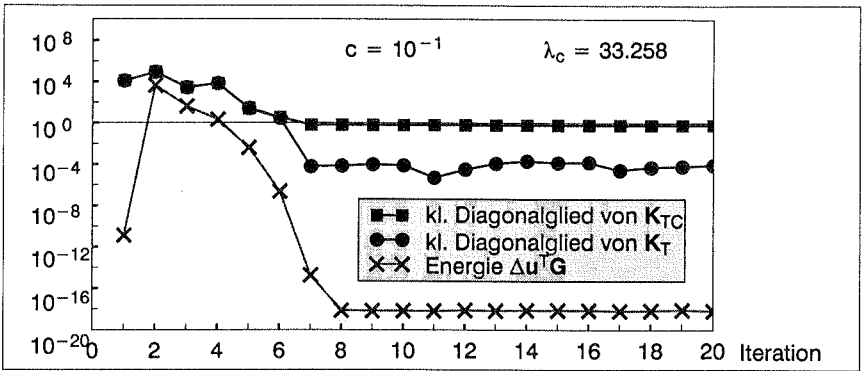


Bild 4.28: Penalty-Verfahren nach Wriggers, Simo

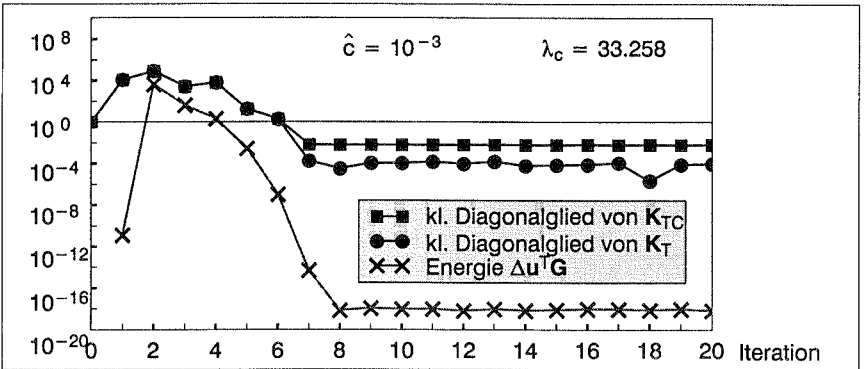


Bild 4.29: Penalty-Verfahren nach Wriggers, Simo

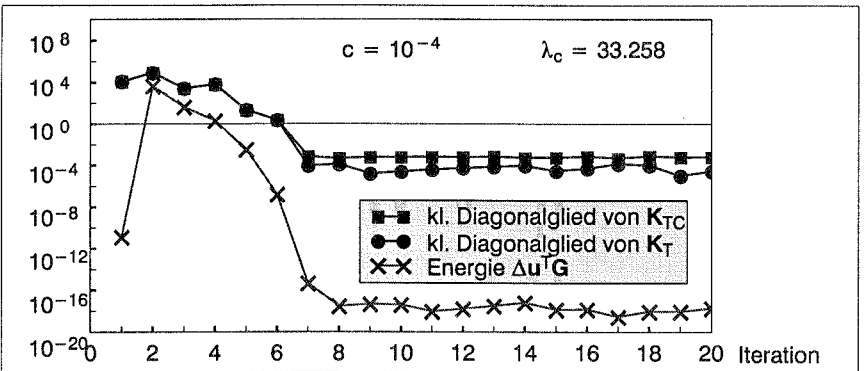


Bild 4.30: Penalty-Verfahren nach Wriggers, Simo

Diese Penalty–Formulierung erlaubt wie oben eine sehr breite Wahl für \hat{c} . Bei Konvergenz des Verfahrens wird auch bei sehr großem Wert für \hat{c} ein sehr genauer kritischer Lastfaktor berechnet, aber der etwas höhere Wert für $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}$ zeigt an, daß das Gleichgewicht dabei nicht so gut erfüllt wird. Bei kleiner werdendem \hat{c} nähert sich die Iterationsmatrix \mathbf{K}_{TC} immer mehr der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T , bis dann ab einem Wert von $\hat{c} < 10^{-4}$ wieder Oszillationen auftauchen.

4.9 Alternative Berechnung von kritischen Punkten

In diesem Abschnitt wird auf weitere Verfahren, nämlich auf die indirekten Verfahren, ohne weitere Erläuterungen hingewiesen. In Brendel (1979) und Wagner (1991) findet sich eine Übersicht über solche Methoden. Sie beruhen meist auf Extrapolation bzw. Interpolation begleitender Maßnahmen, z.B. Eigenwertberechnung, Berechnung von Determinante oder Steifigkeitsparameter. Keller (1977) schlägt an dieser Stelle Bisektionsverfahren vor, die durch Sekantenverfahren ('Regula Falsi') noch verbessert werden können. Abbott (1978) verwendet ein erweitertes System mit $\det \mathbf{K}_T = 0$, jedoch ohne konsistenter Linearisierung. Cohen (1968), Svalbanos, Balderes (1972), Bushnell (1970,1972) und Almroth, Brogan (1972) erwähnen eigenwertgesteuerte Iterationsverfahren zur Berechnung kritischer Punkte.

5 Pfadwechsel

Die bisherigen Ausführungen behandelten die Verfolgung von Gleichgewichtspfaden, egal ob Primär– oder Sekundärpfad, Tertiärpfad usw. und die genaue direkte Berechnung kritischer Punkte. Beim Erreichen eines Durchschlagspunktes kann der entsprechende Pfad problemlos weiterverfolgt werden. An einem einfachen Verzweigungspunkt dagegen muß man sich entscheiden, ob man den Primärpfad weiterverfolgen oder auf den Sekundärpfad abzweigen möchte. Vielfach wird dafür vorgeschlagen, die Verzweigungsgleichung zu lösen, um die Tangenten an Primärpfad und/oder Sekundärpfad zu erhalten (Wagner (1991), Riks (1984), Kouhia, Mikkola (1989), Choong, Hanghai (1993) u. a.). Dabei können dann auch höhere Ableitungen verwendet werden, um die Pfade quadratisch oder mit höherer Ordnung zu approximieren und damit bessere Prädiktorschritte für die Verfolgung der Pfade zu erhalten.

Im 6. Kapitel werden im Rahmen der Koiterschen Nachbeulanalyse die asymptotischen Näherungen für den Sekundärpfad

$$\mathbf{u}(\xi) = \xi \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (5.1)$$

$$\lambda(\xi) = \xi \lambda_1 + \xi^2 \lambda_2 + \dots \quad (5.2)$$

und die Taylorreihenentwicklung am Primärpfad diskutiert. Daraus können dann Prädiktoren für die Berechnung der sich kreuzenden Pfade gewonnen werden. Nachfolgend werden einfachere, eher den Ingenieurverfahren zuzuordnende, numerische Verfahren vorgestellt, die durchaus in der Lage sind, auf den gewünschten Pfad zu gelangen.

5.1 Primärpfad

Um den Prädiktor an den Primärpfad $\Delta \mathbf{u}^I$ zu erhalten, muß folgendes Gleichungssystem am Verzweigungspunkt gelöst werden:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}^I = \mathbf{P} \quad (5.3)$$

Die Systemmatrix ist dabei singulär und es gelten am Verzweigungspunkt die Orthogonalitätseigenschaften (vgl. Kapitel 6, Gleichungen (6.37) und (6.38))

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} = 0 \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}^I \Delta \mathbf{u}^I = 0 \quad (5.5)$$

Die zweite Gleichung beinhaltet die Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix und ihre Verwendung entspricht eigentlich dem Lösen der Verzweigungsgleichung, wie schon in der Einführung gezeigt wird. Aber auch die Orthogonalitätsbedingung

$$\boldsymbol{\phi}^T \Delta \mathbf{u}^I = 0 \quad (5.6)$$

führt schon zu einem guten Prädiktor als genäherte Tangente an den Primärpfad. Unter der Annahme einer singulären Matrix \mathbf{K}_T erhält man unter Anwendung der Nelson–Methode (vgl. Anhang 13.1) die Partikulärlösung $\Delta \tilde{\mathbf{u}}^I$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}^I = \tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \quad (5.7)$$

und durch Orthogonalisierung bzgl. des Eigenvektors ϕ (siehe auch Abschnitt 1.4.1)

$$\Delta \mathbf{u}^I = \Delta \tilde{\mathbf{u}}^I - \frac{\phi^T \Delta \tilde{\mathbf{u}}^I}{\phi^T \phi} \phi \quad (5.8)$$

Werden zur Berechnung des Verzweigungspunktes die oben erläuterten Penalty–Verfahren eingesetzt, bei denen die Steifigkeitsmatrix nicht singulär wird oder bei denen die singuläre Matrix durch einen Strafterm modifiziert wird, so kann die Partikulärlösung direkt mit der dort verwendeten Matrix berechnet werden. Dabei wird die nach Nelson zu modifizierende und dann zu invertierende Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ in Gleichung (5.7) durch die bereits invertiert vorliegende Tangentensteifigkeitsmatrix ersetzt.

5.2 Sekundärpfad

Ein häufig vorkommender ingenieurmäßiger Ansatz, Ramm, Stegmüller (1982) oder Wagner, Wriggers (1988), verwendet den Eigenvektor ϕ als Prädiktor. Der Startpunkt für die Korrekturiteration berechnet sich also zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \frac{\epsilon \|\phi\|}{\|\mathbf{u}_c\|} \phi \quad (5.9)$$

$$\lambda = \lambda_c \quad (5.10)$$

Mit \mathbf{u}_c und λ_c werden die Verschiebungen und der Lastparameter am kritischen Punkt bezeichnet; ϵ ist ein zu wählender Skalierungsfaktor.

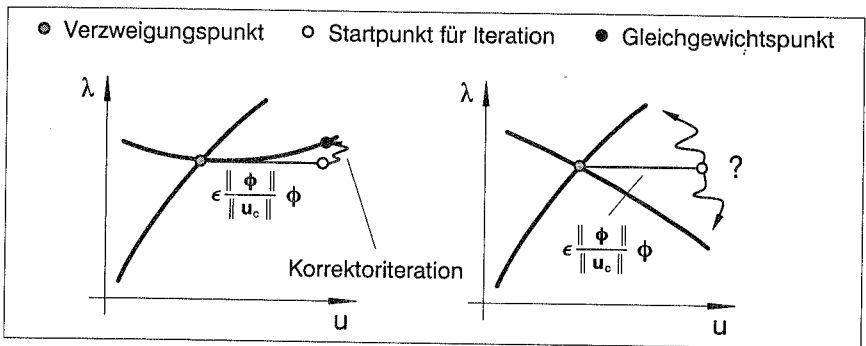


Bild 5.1: Pfadwechsel mit Eigenvektor bei symm. / asymm. Verzweigung

Da der Lastparameter konstant bleibt, eignet sich diese Methode eigentlich nicht für asymmetrische Abzweigungen (Bild 5.1). Bei Anwendung von Bogenlängenverfahren

muß für den Startpunkt die Bogenlänge s berechnet und dann während der Korrekturiteration konstant gehalten werden.

Eine viel bessere Technik läßt sich entwickeln, wenn die Modifikation der Verschiebungen nach (5.9) zur Erstellung einer neuen Steifigkeitsmatrix dient und mit dieser eine Prädiktorrichtung entlang des Sekundärpfades ermittelt wird. Die Prädiktorrichtung berechnet sich zu

$$\Delta \mathbf{u}_p^{\parallel} = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c + \frac{\epsilon \|\phi\|}{\|\mathbf{u}_c\|} \phi, \lambda_c)^{-1} \Delta \lambda_p^{\parallel} \mathbf{P} \quad (5.11)$$

$$\Delta \lambda_p^{\parallel} = 1 \quad (5.12)$$

Damit ergibt sich der Startpunkt für die Korrekturiteration aus der Addition der Anteile aus Eigenvektor und Prädiktorschritt zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \frac{\epsilon \|\phi\|}{\|\mathbf{u}_c\|} \phi + \alpha \Delta \mathbf{u}_p^{\parallel} \quad (5.13)$$

$$\lambda = \lambda_c + \alpha \Delta \lambda_p^{\parallel} \quad (5.14)$$

Dabei sollten die Anteile des Prädiktors überwiegen, wie aus Bild 5.2 a) ersichtlich wird. Die Skalierung von $\Delta \mathbf{u}_p^{\parallel}$ und $\Delta \lambda_p^{\parallel}$ mit α erfolgt so, daß die Bogenlängengleichung

$$\sqrt{\left\| \frac{\epsilon \|\phi\|}{\|\mathbf{u}_c\|} \phi + \alpha \Delta \mathbf{u}_p^{\parallel} \right\|^2 + \psi^2 \alpha^2 \Delta \lambda_p^{\parallel 2}} - s = 0 \quad (5.15)$$

gemessen ab dem Verzweigungspunkt, erfüllt ist. Die Gleichung vereinfacht sich, wenn die Bogenlänge erst ab der Störung durch den Eigenvektor gemessen wird:

$$\sqrt{\alpha^2 \|\Delta \mathbf{u}_p^{\parallel}\|^2 + \psi^2 \alpha^2 \Delta \lambda_p^{\parallel 2}} - s = 0 \quad (5.16)$$

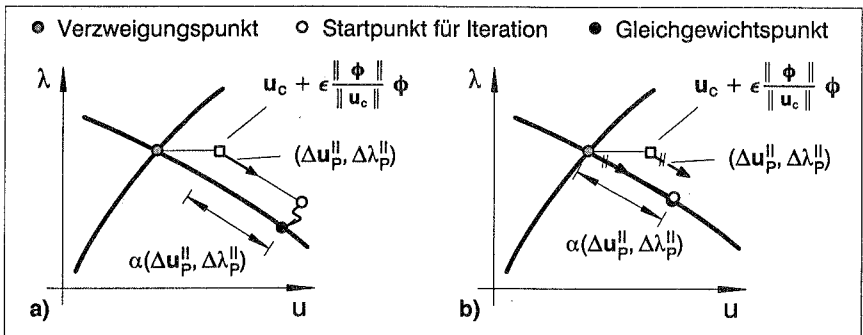


Bild 5.2: Prädiktor für Pfadwechsel

Eine weitere Verbesserung erhält man, indem man, wie in Bild 5.2 b) skizziert, nach dem Aufstellen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c + \frac{\epsilon \|\phi\|}{\|\mathbf{u}_c\|} \phi, \lambda_c)$ die Anteile des Eigenvektors wieder eliminiert und folgenden Startpunkt verwendet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \alpha \Delta \mathbf{u}_p^{\parallel} \quad (5.17)$$

$$\lambda = \lambda_c + \alpha \Delta \lambda_p^{\parallel} \quad (5.18)$$

Im Hinblick auf die Koitersche Nachbeulanalyse sei hier bereits darauf hingewiesen, daß auch dort die Berechnung der Steifigkeitsmatrix an der Stelle $(\mathbf{u} + \epsilon \phi, \lambda)$ eine entscheidende Rolle spielt.

Auf Beispiele wird an dieser Stelle verzichtet, da alle Pfadwechsel auf den Sekundärpfad im Rahmen dieser Arbeit mit den hier beschriebenen Techniken durchgeführt wurden.

6 Nachbeulverhalten

Um beim Erreichen eines kritischen Punktes eine Aussage machen zu können, ob das Tragwerk überhaupt bis nahe an die kritische Last gebrauchsfähig ist, muß das Nachbeulverhalten in Betracht gezogen werden. Ein starker Abfall der Belastung im Nachbeulbereich deutet auf eine potentielle Gefahr und eine hohe Imperfektionsempfindlichkeit hin. Ein Anwachsen des Lastfaktors auch im nachkritischen Bereich dagegen erlaubt unter Umständen eine Belastung sogar bis über den kritischen Wert hinaus.

Neben der bereits beschriebenen Methode zur Untersuchung des Nachbeulverhaltens mit Pfadwechsel- und Pfadverfolgungsprozeduren bis weit in den Nachbeulbereich hinein bietet sich noch eine weitere Methode für die nähere Umgebung des kritischen Punktes an. Die dabei entstehende asymptotische Näherung des Nachbeulpfades erlaubt auf jeden Fall eine qualitative Aussage über das Strukturverhalten im überkritischen Bereich. Gleichzeitig sind diese asymptotischen Ansätze auch geeignet für die Aufstellung von Prädiktoren an den Nachbeulpfad im Rahmen von Pfadwechselprozeduren und dienen weiterhin als Vorbereitung für das nächste Kapitel über die Imperfektionsempfindlichkeit. Diese hat dann wiederum direkten Bezug zur im Kapitel 10.2.2 diskutierten Sensitivitätsanalyse für kritische Lasten innerhalb der Optimierung geometrisch nichtlinearer Strukturen.

Die asymptotische Näherung des Nachbeulverhaltens ist untrennbar verbunden mit dem Namen Koiter und wird hier deshalb auch in Anlehnung an Koiter (1945) diskutiert. Es wird gezeigt, daß dieser Ansatz genau die gleichen Ergebnisse liefert wie auch die von anderen Autoren vorgeschlagene Parametrisierung des Gleichgewichtspfades bezüglich eines unabhängigen Pfadparameters (siehe dazu auch Anhang 13.2). Die Übertragung in den Bereich der Methode der finiten Elemente erfolgt in klar strukturierter und flexibler Art und Weise.

6.1 Koitersche Nachbeulanalyse

Der Ursprung dieser Nachbeulanalyse liegt in der Arbeit von Koiter (1945), die 1967 vom Holländischen ins Englische übersetzt wurde. Diese Ideen wurden dann von vielen Autoren aufgegriffen, z.B. Thompson, Hunt (1973), Budiansky (1974), Jürcke (1985), Arbocz (1989), Wagner (1991), Pignataro et al. (1991), Flores, Godoy (1992), Çirak (1993).

Meist wurden irgendwelche Einschränkungen und Annahmen, wie z.B. linearer Vorbeulpfad oder Verwendung bestimmter Elementtypen, bei denen die höheren Ableitungen des Potential verschwinden, gemacht. Hier soll im Rahmen der Methode der finiten Elemente eine allgemein einsetzbare Formulierung angegeben werden, die sich zwar vereinfachend auf einfache Verzweigungspunkte beschränkt, jedoch leicht erweitert

werden kann. Die Bildung der höheren Ableitungen, formuliert als Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix, geschieht durch numerische Differenzenquotienten. Dadurch erübrigen sich Eingriffe in den Strukturanalyseteil auf Elementebene der finiten Elementprogramme. Die folgenden Ausführungen basieren im wesentlichen auf den Arbeiten von Koiter (1945) und Budiansky (1974). Dabei wird eine Parametrisierung des Gleichgewichtspfades bezüglich des Lastparameters λ vorgenommen

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(\lambda), \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}(\lambda)) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (6.1)$$

Eine Taylorreihenentwicklung bei λ für Gleichgewicht an der Stelle $\lambda + \Delta\lambda$ hat folgende Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(\lambda + \Delta\lambda), \lambda + \Delta\lambda) = \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)}_{=0} + \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)}{d\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)}{d\lambda^3} \Delta\lambda^3 + \dots = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

Der erste Term entfällt wegen Gleichgewicht am Entwicklungspunkt. Für beliebiges $\Delta\lambda$ müssen dann die folgenden Terme einzeln verschwinden

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\lambda} = \mathbf{G}_{,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} - \mathbf{P} = \mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

$$\frac{d^2\mathbf{G}}{d\lambda^2} = \mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} + \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

$$\frac{d^3\mathbf{G}}{d\lambda^3} = \mathbf{K}_T \frac{d^3\mathbf{u}}{d\lambda^3} + 3\mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

...

Mit $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)$ und $\mathbf{K}_T \equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)_{,u}$ werden Ungleichgewichtskräfte und Tangentensteifigkeitsmatrix am Entwicklungspunkt bezeichnet. Die Tangente, Krümmung usw. an den primären Gleichgewichtspfad berechnen sich zu:

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = \mathbf{P} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} = - \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d^3\mathbf{u}}{d\lambda^3} = - 3 \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} - \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (6.8)$$

...

Die einmal invertierte Systemmatrix kann dabei mehrfach verwendet werden, und die ermittelten Lösungen werden sukzessive bei der Bildung von Richtungsableitungen auf der rechten Seite eingesetzt.

In der Nähe eines Verzweigungspunktes existiert nun ein zweiter Gleichgewichtspunkt auf gleichem Lastniveau, dargestellt in Bild 6.1, mit dem Differenzvektor $\Delta\mathbf{u}(\lambda)$ zwischen beiden Pfaden

$$\mathbf{G}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \lambda) = \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)}_{=0} + \mathbf{G}_{,u}(\mathbf{u}, \lambda) \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{G}_{,uu}(\mathbf{u}, \lambda) \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{6} \mathbf{G}_{,uuu}(\mathbf{u}, \lambda) \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} + \dots = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

Die beiden Pfade schneiden sich im kritischen Punkt (u_c, λ_c) und es gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_c} \Delta u(\lambda) = 0 \quad (6.10)$$

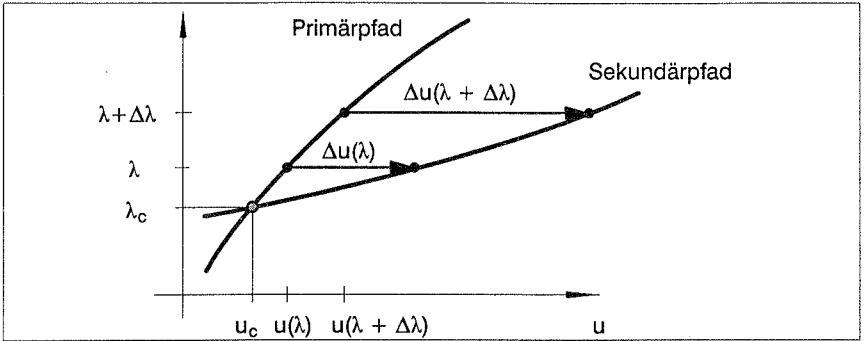


Bild 6.1: Taylorreihenentwicklung für Sekundärpfad

Die Taylorreihenentwicklung entlang dem Sekundärpfad hat die Form

$$\mathbf{G}(u+\Delta u, \lambda+\Delta\lambda) =$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}(u, \lambda) + \frac{d\mathbf{G}(u, \lambda)}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}(u, \lambda)}{d\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \mathbf{G}(u, \lambda)_{,u} \Delta u + \frac{d\mathbf{G}(u, \lambda)_{,u}}{d\lambda} \Delta u \Delta\lambda + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}(u, \lambda)_{,u}}{d\lambda^2} \Delta u \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{G}(u, \lambda)_{,uu} \Delta u \Delta u + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{G}(u, \lambda)_{,uu}}{d\lambda} \Delta u \Delta u \Delta\lambda + \frac{1}{4} \frac{d^2\mathbf{G}(u, \lambda)_{,uu}}{d\lambda^2} \Delta u \Delta u \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{6} \mathbf{G}(u, \lambda)_{,uuu} \Delta u \Delta u \Delta u + \dots + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Durch die Vereinfachungen in der Schreibweise $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(u, \lambda)$, $\mathbf{K}_T \equiv \mathbf{G}(u, \lambda)_{,u}$ und den Ableitungen

$$(\)_{,\lambda} = \frac{d(\)}{d\lambda} \quad - \text{totale Ableitung} \quad (\)_{,u} = \frac{\partial(\)}{\partial u} \quad - \text{partielle Ableitung}$$

mit dem ausdrücklichen Hinweis, daß die Ableitungen nach dem Lastparameter totale Ableitungen darstellen, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(u+\Delta u, \lambda+\Delta\lambda) = & \underline{\mathbf{G}} + \underline{\mathbf{G}_{,\lambda} \Delta\lambda} + \underline{\frac{1}{2} \mathbf{G}_{,\lambda\lambda} \Delta\lambda^2} + \dots \\ & + \mathbf{K}_T \Delta u + \mathbf{K}_{T,\lambda} \Delta u \Delta\lambda + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \Delta u \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u} \Delta u \Delta u + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u\lambda} \Delta u \Delta u \Delta\lambda + \frac{1}{4} \mathbf{K}_{T,u\lambda\lambda} \Delta u \Delta u \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{T,uu} \Delta u \Delta u \Delta u + \dots + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die in Gleichung (6.12) unterstrichenen Terme beschreiben den Primärpfad und entfallen, wenn die Gleichungen (6.6), (6.7), (6.8) usw. erfüllt sind. Fälschlicherweise wird

häufig behauptet, daß die Koiter–Formulierung den Primärpfad gar nicht enthält. Jedoch tauchen bei den Ableitungen nach dem Lastparameter, z.B.

$$\mathbf{K}_{T,\lambda} = \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}_{T,u\lambda} = \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} = \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} + \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \dots \quad (6.15)$$

Tangente, Krümmung usw. des Primärpfades auf, wenn die implizite Abhängigkeit von λ über die Verschiebungen \mathbf{u} berücksichtigt wird.

Unter Verwendung des singulären Punktes $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ als Entwicklungspunkt werden folgende asymptotische Ansätze eingeführt

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda) + \Delta\mathbf{u} \quad (6.16)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \xi \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (6.17)$$

$$\lambda = \lambda_c + \Delta\lambda \quad (6.18)$$

$$\Delta\lambda = \xi \lambda_1 + \xi^2 \lambda_2 + \dots \quad (6.19)$$

mit dem Pfadparameter ξ , der nach Budyanskiy die mechanische Bedeutung "Anteil der Beulfigur an den Verschiebungen von Primärpfad zu Sekundärpfad" bekommt. Für $\xi = 0$ befindet man sich dann am Verzweigungspunkt $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$. Diese asymptotischen Ansätze in Gleichung (6.12) eingesetzt und geordnet nach den Potenzen von ξ führt zu

$$\begin{aligned} & \xi (\mathbf{K}_T \mathbf{u}_1) + \\ & \xi^2 (\mathbf{K}_T \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,uu} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) + \\ & \xi^3 (\mathbf{K}_T \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{T,\lambda} (\mathbf{u}_1 \lambda_2 + \mathbf{u}_2 \lambda_1) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \mathbf{u}_1 \lambda_1^2 \\ & \quad \mathbf{K}_{T,u} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u\lambda} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{T,uuu} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) + \dots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Für beliebiges ξ müssen die Klammerterme einzeln verschwinden. Aus dem ersten Term

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

folgt, daß

$$\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\phi} \quad (6.21)$$

die Beulform darstellt. Wird der zweite Term von (6.20) mit $\boldsymbol{\phi}^T$ vorkontrahiert bzw. kontrahiert, erhält man unter Verwendung von $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ und Gleichung (6.21)

$$\lambda_1 = - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,u} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi}}{2 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \boldsymbol{\phi}} \quad (6.22)$$

Damit kann dann aus dem zweiten Term ohne Kontraktion die Beulfigur zweiter Ordnung bestimmt werden:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}_2 = - (\mathbf{K}_{T,\lambda} \boldsymbol{\phi} \lambda_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,uu} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi}) \quad (6.23)$$

Der gleiche Vorgang beim dritten Klammerterm von (6.20) ermöglicht die Berechnung der nächsten Glieder der asymptotischen Ansätze:

$$\lambda_2 = - \frac{\frac{1}{6} \phi^T \mathbf{K}_{T,uu} \phi \phi \phi + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \mathbf{u}_2 + (\phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \phi^T \mathbf{K}_{T,u\lambda} \phi \phi) \lambda_1 + \frac{1}{2} \phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \phi \lambda_1^2}{\phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \phi} \quad (6.24)$$

und bei Bedarf

$$\mathbf{K}_{T\mathbf{u}_3} = - \left(\mathbf{K}_{T,\lambda} (\phi \lambda_2 + \mathbf{u}_2 \lambda_1) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \phi \lambda_1^2 + \mathbf{K}_{T,u} \phi \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u\lambda} \phi \phi \lambda_1 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{T,uu} \phi \phi \phi \right) \quad (6.25)$$

Analog dazu können aus den nächsten Termen auch die höheren Reihenglieder noch bestimmt werden. Die kontraktierte Form der Gleichungen erlaubt die Berechnung des nächsten Gliedes des Ansatzes für den Lastparameter λ_3 , λ_4 usw. . Daran anschließend liefert die nicht kontraktierte Form ein Gleichungssystem für die Beulformen höherer Ordnung \mathbf{u}_4 , \mathbf{u}_5 usw. .

Für den Sonderfall der symmetrischen Verzweigung mit $\lambda_1 = 0$ vereinfacht sich die Berechnung der Krümmung zu

$$\lambda_2 = - \frac{\frac{1}{6} \phi^T \mathbf{K}_{T,uu} \phi \phi \phi + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \mathbf{u}_2}{\phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \phi} \quad (6.26)$$

Durch Einsetzen der Ableitung (6.13) in Gleichung (6.22) erhält man mit

$$\lambda_1 = - \frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi}{2 \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}} \quad (6.27)$$

unter Verwendung der Tangente am Primärpfad $\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$ genau dieselbe Form, die auch andere Autoren (Wagner (1991), Pignataro et al. (1991), Kouhia, Mikkola (1989) u.a.) auf-führen. Diese haben meist eine andere Parametrisierung gewählt und zum Teil die qua-dratische Verzweigungsgleichung mit diversen Fallunterscheidungen gelöst. Zur Veranschaulichung soll hier noch die Berechnung der Tangente an den Sekundärpfad, die für die Pfadwechselprozedur verwendet werden kann, gezeigt werden. Mit der Tan-gente an den Primärpfad $\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$ (siehe auch Kapitel 6.1.2) schreibt sich der asymptotische Ansatz:

$$\lambda = \lambda_c + \xi \lambda_1 \quad (6.28)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \xi \lambda_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \xi \phi \quad (6.29)$$

Die Wahl eines beliebigen ξ , z.B. $\xi = 1$ führt auf die Tangente (vgl. Beispiel in Einleitung)

$$\Delta \lambda = \lambda_1 \quad (6.30)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \lambda_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \phi \quad (6.31)$$

deren Länge noch skaliert werden kann, z.B. mit der Bogenlängengleichung nach (3.15).

6.1.1 Beulformen höherer Ordnung

Es sei hier noch bemerkt, daß für die Berechnung der Beulformen höherer Ordnung \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 usw. jeweils Gleichungssysteme mit singulärer Matrix \mathbf{K}_T gelöst werden müssen. Am Beispiel der Beulform zweiter Ordnung existiert eine Partikulärlösung $\tilde{\mathbf{u}}_2$ für

$$\mathbf{K}_T \tilde{\mathbf{u}}_2 = - \left(\mathbf{K}_{T,\lambda} \phi \lambda_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi \right) \quad (6.32)$$

nur dann, wenn die rechte Seite im Bild von \mathbf{K}_T bzw. orthogonal zum Nullraum von \mathbf{K}_T liegt. Diese Forderung wird mit der Berechnung von λ_1 nach Gleichung (6.22) erfüllt. Zur Bestimmung einer Partikulärlösung $\tilde{\mathbf{u}}_2$ können die Nelson–Methode (Anhang 13.1), die Deflationstechnik (Kapitel 4.7.4) oder die Rangkorrektur durch das Dyadenprodukt des Singulärvektors (Kapitel 4.7.3) angewandt werden. Eine weitere Möglichkeit bietet die Verwendung der nicht singulären Steifigkeitsmatrix aus den Penalty–Verfahren zur Bestimmung des kritischen Punktes. Aus allen möglichen Lösungen für \mathbf{u}_2

$$\mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2 + \alpha \phi \quad (6.33)$$

muß die gesuchte Beulform die Orthogonalitätseigenschaft

$$\phi^T \mathbf{u}_2 = 0 \quad (6.34)$$

besitzen. Dies erfordert die Orthogonalisierung bezüglich des Singulärvektors nach

$$\mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2 - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_2^T \phi}{\phi^T \phi} \phi \quad (6.35)$$

Das gezeigte Vorgehen wiederholt sich für die nächsten Beulformen unter Verwendung der Bedingungen

$$\phi^T \mathbf{u}_3 = \phi^T \mathbf{u}_4 = \phi^T \mathbf{u}_5 = \dots = 0 \quad (6.36)$$

6.1.2 Asymptotische Näherung für den Primärpfad

Die letzte noch offene Frage betrifft die Berechnung von Tangente, Krümmung usw. des Primärpfades. Es muß grundsätzlich unterschieden werden, ob diese akkurat berechnet werden sollen oder ob sie bereits bekannt sind bzw. sich leicht approximieren lassen. Zum Beispiel bei linearem Vorbeulverhalten, d.h. konstante Tangente und keine Krümmung, bei bekannten Gleichgewichtspunkten in der Umgebung des kritischen Punktes oder unter Verwendung der beinahe singulären Steifigkeitsmatrix aus den Penalty–Verfahren lassen sich einfach brauchbare Approximationen erzeugen. Für diese Fälle können die Koiter–Formeln sofort Anwendung finden.

Im Falle der akkuraten Berechnung wird eine quadratische Gleichung ähnlich der Verzweigungsgleichung bei Parametrisierung des Gleichgewichtspfades bezüglich eines zusätzlichen Pfadparameters, z.B. in Wagner (1991), gelöst. Den Ausgangspunkt bilden hier die Gleichungen (6.6) bis (6.8) usw., die beim Koiter–Ansatz, wie oben er-

wähnt, erfüllt sein müssen. Deren Kontraktion mit ϕ und Verwendung der Singularitätsbedingung $\mathbf{K}_T \phi = \mathbf{0}$ führt auf folgende Bedingungen:

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = \mathbf{P} \quad \text{Kontraktion} \quad \boxed{\phi^T \mathbf{P} = 0} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} = -\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad \text{Kontraktion} \quad \boxed{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0} \quad (6.38)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d^3\mathbf{u}}{d\lambda^3} = -3\mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} - \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (6.39)$$

$$\text{Kontraktion} \quad \boxed{3\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\lambda^2} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \phi^T \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0}$$

Die erste Bedingung dient schon als Unterscheidungskriterium für Verzweigungspunkte von Durchschlagspunkten. Die zweite Bedingung erlaubt nun die Bestimmung der Tangente an den Primärpfad. Aus der Schar der Lösungen für $\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$ aus

$$\mathbf{K}_T \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} = \mathbf{P} \quad \text{z.B. mit} \quad \frac{d\tilde{\mathbf{u}}^T}{d\lambda} \phi = 0 \quad (6.40)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} + \alpha \phi \quad (6.41)$$

wird genau die gesucht, die eben diese Gleichung erfüllt. Durch Einsetzen des Ansatzes (6.41) in diese Bedingung (6.38) ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \cdot \alpha^2 + 2\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} \cdot \alpha + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} = 0 \quad (6.42)$$

bzw.

$$a \cdot \alpha^2 + 2\tilde{b} \cdot \alpha + \tilde{c} = 0 \quad (6.43)$$

mit den Konstanten

$$a = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi \quad (6.44)$$

$$\tilde{b} = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} \quad (6.45)$$

$$\tilde{c} = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda} \quad (6.46)$$

Die Kennzeichnung mit ($\tilde{\quad}$) gibt an, daß die Konstante mit irgendeiner Partikulärlösung $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda}$ erzeugt wird und würde entfallen beim Einsetzen der Tangente an den Primärpfad $\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$. Die Verwendung der betragsmäßig kleineren Lösung von

$$\alpha_{1/2} = \frac{-\tilde{b} \pm \sqrt{\tilde{b}^2 - a\tilde{c}}}{a} \quad (6.47)$$

führt dann auf die gesuchte Tangente.

Das analoge Vorgehen für die Krümmung an den Primärpfad wählt aus der Lösungsschar

$$\mathbf{K}_T \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda^2} = -\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad \text{z.B. mit } \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda^2} \mathbf{T} \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (6.48)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda^2} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\lambda^2} + \alpha \boldsymbol{\phi} \quad (6.49)$$

bei Verwendung von Gleichung (6.39) die zu

$$\alpha = - \frac{3 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\lambda^2} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}}{3 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{T,u} \boldsymbol{\phi} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}} \quad (6.50)$$

gehörende Lösung für $\frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda^2}$ aus.

6.2 Numerische Behandlung der Nachbeulanalyse

Um dem Anspruch gerecht zu werden, die Nachbeulanalyse in effizienter und flexibler Art und Weise in den Bereich der finiten Elemente zu übertragen, werden nachfolgend noch einige numerische Gesichtspunkte angesprochen.

6.2.1 Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix

Die Richtungsableitungen werden numerisch approximiert durch ein Vorwärtsdifferenzenverfahren (vgl. Gleichung (4.15))

$$\mathbf{K}_{T,u} \boldsymbol{\phi} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{K}_T(\mathbf{u})) \quad (6.51)$$

oder falls die Steifigkeitsmatrix auch an der Stelle $(\mathbf{u} - \epsilon \boldsymbol{\phi})$ vorliegt mit dem zentralen Differenzenverfahren

$$\mathbf{K}_{T,u} \boldsymbol{\phi} \approx \frac{1}{2\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{K}_T(\mathbf{u} - \epsilon \boldsymbol{\phi})) \quad (6.52)$$

Für die nächst höhere Ableitung gilt dann

$$\mathbf{K}_{T,uu} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\phi} \approx \frac{1}{\epsilon^2} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}) - 2\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_T(\mathbf{u} - \epsilon \boldsymbol{\phi})) \quad (6.53)$$

Da diese Ableitungen immer gleich mit einem Vektor nachmultipliziert werden können, müssen nur Vektoren und nicht die Steifigkeitsmatrizen an den Stellen $(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi})$ und $(\mathbf{u} - \epsilon \boldsymbol{\phi})$ gespeichert werden. Um die Genauigkeit der Ableitungen zu erhöhen, bzw. die Empfindlichkeit bezüglich der Wahl des Parameters ϵ zu verringern, kann die Steifigkeitsmatrix noch an weiteren Stellen ausgewertet werden. Durch die Punkte wird dann eine Funktion gelegt, die analytisch abgeleitet werden kann. Çirak (1993) verwendet dazu die Interpolation in der Form von Lagrange (Bathe (1986) u.a.).

6.2.2 Steigung des Primär- und Sekundärpfades

Auf die Steigung des Sekundärpfades wird gesondert eingegangen, da diese sehr vorteilhaft für Pfadwechselprozeduren eingesetzt werden kann. Für deren Berechnung ist aber die Kenntnis der Steigung des Primärpfades Voraussetzung.

Für die Konstanten aus Gleichung (6.43) ergeben sich bei numerischer Approximation der Richtungsableitung von \mathbf{K}_T die folgenden Ausdrücke

$$a = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi \approx \phi^T \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(u + \epsilon \phi) \phi - \mathbf{K}_T(u) \phi) \quad (6.54)$$

$$b = \phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \phi = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{du}{d\lambda} \phi \approx \frac{du^T}{d\lambda} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(u + \epsilon \phi) \phi - \mathbf{K}_T(u) \phi) \quad (6.55)$$

$$c = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{du du}{d\lambda d\lambda} \approx \frac{du^T}{d\lambda} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(u + \epsilon \phi) \frac{du}{d\lambda} - \mathbf{K}_T(u) \frac{du}{d\lambda}) \quad (6.56)$$

Der Term $\mathbf{K}_T \phi$ entfällt, und es läßt sich dann die in Bild 6.2 beschriebene Methode zur gleichzeitigen Berechnung der Tangenten an Primär- und Sekundärpfad entwickeln.

Lösen	$\mathbf{K}_T \frac{d\tilde{u}}{d\lambda} = \mathbf{p}$ mit $\phi^T \frac{d\tilde{u}}{d\lambda} = 0$	
Hilfsvektoren	$\mathbf{h}_1^+ = \mathbf{K}_T(u + \epsilon \phi) \phi$ $\tilde{\mathbf{h}}_2^+ = \mathbf{K}_T(u + \epsilon \phi) \frac{du}{d\lambda}$	
Konstanten	$a = \frac{1}{\epsilon} \phi^T \mathbf{h}_1^+$ $\tilde{b} = \frac{1}{\epsilon} \frac{du^T}{d\lambda} \mathbf{h}_1^+$ $\tilde{c} = \frac{1}{\epsilon} \frac{du^T}{d\lambda} \tilde{\mathbf{h}}_2^+$	$b = \frac{1}{\epsilon} \frac{du^T}{d\lambda} \mathbf{h}_1^+$
Primärpfad	$\alpha_{1/2} = \frac{-\tilde{b} \pm \sqrt{\tilde{b}^2 - a\tilde{c}}}{a}$ $\frac{du}{d\lambda} = \frac{d\tilde{u}}{d\lambda} + \alpha \phi$	↓
Sekundärpfad	$\lambda_1 = -\frac{a}{2b}$ für $\xi = 1$ $\Delta\lambda = \lambda_1$ $\Delta u = \lambda_1 \frac{du}{d\lambda} + \phi$	

Bild 6.2: Tangenten an Primär- und Sekundärpfad

Natürlich kann für die Richtungsableitung von \mathbf{K}_T auch das zentrale Differenzenverfahren mit höherer Genauigkeit verwendet werden. Dies erfordert dann die Erstellung einer neuen Steifigkeitsmatrix an der Stelle $(u - \epsilon \phi)$ und die Bildung zweier zusätzlicher Hilfsvektoren, wie sie dann im nächsten Kapitel 6.2.3 verwendet werden.

Bei bekannter bzw. approximierter Tangente des Primärpfades vereinfacht sich die Berechnung der Tangente an den Sekundärpfad wie in Bild 6.3 dargestellt.

Hilfsvektor	$\mathbf{h}_1^+ = \mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{\phi}$
Konstanten	$\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{h}_1^+$
	$\mathbf{b} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d\mathbf{u}^T}{d\lambda} \mathbf{h}_1^+$
Sekundärpfad	$\lambda_1 = -\frac{\mathbf{a}}{2\mathbf{b}}$
für $\xi = 1$	$\Delta\lambda = \lambda_1$
	$\Delta\mathbf{u}^{\text{II}} = \lambda_1 \Delta\mathbf{u}^{\text{I}} + \boldsymbol{\phi}$

Bild 6.3: Tangente an Sekundärpfad bei bekanntem Primärpfad

6.2.3 Höhere Pfadableitungen

Bei der Berechnung höherer Ableitungen ist es angebracht, die Richtungsableitungen erster Ordnung mit zentralen Differenzen zu approximieren, da dies keinen zusätzlichen Aufwand bedeutet. Die benötigten totalen Ableitungen der Steifigkeitsmatrix nach dem Lastparameter λ lassen sich zunächst nach Gleichungen (6.13) bis (6.15) umformen. Anschließend werden die in Bild 6.4 aufgeführten Hilfsvektoren und Konstanten erstellt.

Bei Verwendung der Partikulärlösungen nach Gleichung (6.40) usw. werden die entsprechenden Hilfsvektoren und Konstanten mit ($\tilde{}$) gekennzeichnet, z.B.:

$$\tilde{\mathbf{h}}_2^+ = \mathbf{K}_T(\mathbf{u} + \epsilon \boldsymbol{\phi}) \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\lambda}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}^T (\mathbf{h}_1^+ - \mathbf{h}_1^-)$$

Die Steigungen von Primär- und Sekundärpfad ergeben sich, wie schon in Bild 6.2 aufgeführt, mit dem Unterschied, daß jetzt zentrale Differenzen für die Konstanten verwendet werden. Die Berechnung der Krümmungen ist aus Bild 6.5 ersichtlich.

$h_1^+ = K_T(u + \epsilon \phi) \phi$	$h_1^- = K_T(u - \epsilon \phi) \phi$
$h_2^+ = K_T(u + \epsilon \phi) \frac{du}{d\lambda}$	$h_2^- = K_T(u - \epsilon \phi) \frac{du}{d\lambda}$
$h_3^+ = K_T(u + \epsilon \frac{du}{d\lambda}) \phi$	$h_3^- = K_T(u - \epsilon \frac{du}{d\lambda}) \phi$
$h_4^+ = K_T(u + \epsilon \frac{du}{d\lambda}) \frac{du}{d\lambda}$	$h_4^- = K_T(u - \epsilon \frac{du}{d\lambda}) \frac{du}{d\lambda}$

$a = \phi^T K_{T,u} \phi \phi = \frac{1}{2\epsilon} \phi^T (h_1^+ - h_1^-)$	}	zentrales Differenzenverfahren
$b = \phi^T K_{T,u} \phi \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{du^T}{d\lambda} (h_1^+ - h_1^-)$		
$c = \phi^T K_{T,u} \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{du^T}{d\lambda} (h_2^+ - h_2^-)$		
$d = \phi^T K_{T,u} \phi u_2 = \frac{1}{2\epsilon} u_2^T (h_1^+ - h_1^-)$		
$e = \phi^T K_{T,u} \frac{du}{d\lambda} u_2 = \frac{1}{2\epsilon} u_2^T (h_2^+ - h_2^-)$		
$f = \phi^T K_{T,u} \phi \frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{d^2u^T}{d\lambda^2} (h_1^+ - h_1^-)$		
$g = \phi^T K_{T,u} \frac{du}{d\lambda} \frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{d^2u^T}{d\lambda^2} (h_2^+ - h_2^-)$		
$h = \phi^T K_{T,uu} \phi \phi \phi = \frac{1}{\epsilon^2} \phi^T (h_1^+ + h_1^-)$		
$i = \phi^T K_{T,uu} \phi \phi \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{du^T}{d\lambda} (h_1^+ + h_1^-)$		
$k = \phi^T K_{T,uu} \phi \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\epsilon^2} \phi^T (h_3^+ + h_3^-)$		
$l = \phi^T K_{T,uu} \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{du^T}{d\lambda} (h_3^+ + h_3^-)$		
...		

Bild 6.4: Hilfsvektoren und Konstanten

Primärpfad	
Lösen	$K_T \frac{d^2u}{d\lambda^2} = -K_{T,u} \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} \quad \text{mit} \quad \phi^T \frac{d^2u}{d\lambda^2} = 0$
	$\alpha = -\frac{3g + l}{3b}$
	$\frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2} + \alpha \phi$
Sekundärpfad	
Lösen	$K_T u_2 = -\frac{1}{2\epsilon} \left((h_2^+ - h_2^-) \lambda_1 + \frac{1}{2} (h_1^+ - h_1^-) \right) \quad \text{mit} \quad \phi^T u_2 = 0$
	$\lambda_2 = -\frac{\frac{1}{6} h + d + (e + \frac{1}{2} i) \lambda_1 + \frac{1}{2} (k + f) \lambda_1^2}{b}$

Bild 6.5: Krümmung von Primär- und Sekundärpfad

Das Vorgehen läßt sich für höhere Ableitungen beliebig fortsetzen. Weiterhin ergeben sich Vereinfachungen, wie schon erwähnt, bei bekannten oder approximierten Näherungen an den Primärpfad und auch für den Sonderfall der symmetrischen Verzweigung mit $\lambda_1 = 0$. Es müssen dann unter Umständen nicht alle Hilfsvektoren und Konstanten aus Bild 6.4 zur Verfügung gestellt werden.

Abschließend soll noch erwähnt werden, daß bei der Wahl bestimmter finiter Elementformulierungen die höheren Ableitungen des Potentials – die Ableitung $\mathbf{K}_{T,uu}$ bedeutet bereits die vierte Ableitung des Potentials – gar nicht existieren. Damit vereinfachen sich die gezeigten Herleitungen und vor allem die Fortführung für höhere Reihenglieder wesentlich. Bei der Verwendung von Schalenelementen existieren jedoch die höheren Ableitungen aufgrund der vorkommenden trigonometrischen Funktionen.

7 Imperfektionsverhalten

Dieses Kapitel erhält innerhalb der vorliegenden Arbeit große Bedeutung. Zum einen natürlich, weil die Imperfektionsempfindlichkeit selbst auch Thema der Arbeit ist. Darüberhinaus läßt sich aber eine weitgehende Übereinstimmung mit den in der Optimierung benötigten Ableitungen (Kapitel 10.2.2) feststellen. Hier werden Einflüsse auf die kritische Last beim Auftreten von Imperfektionen untersucht. Bei der Optimierung stellt sich die Frage, welche Auswirkungen die Strukturänderungen, verknüpft mit Optimierungsvariablen, auf die kritische Last haben.

Obwohl auch Abweichungen bei Laststellungen, bei Lagerbedingungen usw. eine wichtige Rolle spielen können, stehen hier die geometrischen Imperfektionen im Vordergrund. Als Formabweichungen können Verschiebungsfiguren, Eigenformen oder auch gemessene Formen, z.B. herstellungsbedingte Vorverformungen, Einfluß nehmen. Die meisten Beispielrechnungen dieser Arbeit arbeiten aber mit Imperfektionsformen, die aus Eigenformen selbst oder aus Kombinationen derselben entstehen. Andere Imperfektionsarten lassen sich jedoch leicht berücksichtigen, da die benötigten Ableitungen bezüglich der Imperfektionen durch numerische Differenzenschritte gewonnen werden und somit auch Änderungen der Laststellungen usw. keine prinzipiellen Schwierigkeiten erwarten lassen.

Die folgenden Ausführungen beginnen mit der Darstellung der asymptotischen Näherung des Imperfektionseinflusses nach Koiter (1945). Dessen grundlegende Arbeit und der Aufsatz von Budiansky (1974) liefern die Basis dafür. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht aber die Imperfektionsempfindlichkeit ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen und der Bedingung für einen kritischen Punkt, siehe z.B. auch Thompson, Hunt (1973), Flores, Godoy (1992) u.a.. Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich in Koiters Formeln überführen. Jedoch werden hier im Hinblick auf die Optimierungsableitungen noch einige wichtige Besonderheiten, u.a. auch die dabei anfallenden Formeln für Durchschlagspunkte, ausgeleuchtet.

Die numerische Umsetzung bzw. die Integration in ein finites Elementprogramm wird an entsprechenden Stellen aufgegriffen.

Für eine weitere Möglichkeit der Abschätzung des Imperfektionsverhaltens wird auf Croll (1975) und Wittek (1980), die das Konzept der reduzierten Membranbeulung verfolgen, verwiesen.

7.1 Koitersche Imperfektionsempfindlichkeit

Ausgangspunkt der Diskussion des Imperfektionseinflusses ist die Beschreibung der Imperfektion durch

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\xi} \hat{\mathbf{u}} \quad (7.1)$$

Wenn die Imperfektionsform skaliert wird, daß gilt

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\infty} = 1, \quad (7.2)$$

so beschreibt $\bar{\xi}$ die Imperfektionsamplitude. Mit $\bar{\mathbf{u}}$ wird die Ausgangsgeometrie der zu berechnenden Struktur modifiziert, was wiederum Auswirkungen auf die Verschiebungen hat.

Budiansky beschreibt das Potential einer imperfekten Struktur durch das der perfekten und einem zusätzlichen Anteil. Dies hat zur Folge, daß auch die Gleichgewichtsbedingungen

$$\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \lambda, \bar{\mathbf{u}}) \quad (7.3)$$

von den Imperfektionen $\bar{\mathbf{u}}$ abhängig sind. Die Taylorreihenentwicklung am perfekten Primärpfad mit

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{0}) \quad (7.4)$$

bezüglich der Amplitude $\bar{\xi}$ liefert die Gleichgewichtsbeziehungen der imperfekten Struktur:

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \lambda, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) + \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi} + \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)_{,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi}^2 + \dots \quad (7.5)$$

Die zu Kapitel 6.1 analoge Herleitung führt durch Ergänzung der Gleichung (6.12) um einige Terme auf die Beschreibung eines Gleichgewichtszustandes des imperfekten Systems, entwickelt am kritischen Punkt $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{T,\Delta\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} + \mathbf{K}_{T,\lambda} \Delta\mathbf{u} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \Delta\mathbf{u} \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}\lambda} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \Delta\lambda + \frac{1}{4} \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}\lambda\lambda} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \Delta\lambda^2 + \dots \\ & + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{T,\mathbf{u}\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} + \dots \\ & + \underline{\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi}} + \frac{1}{2} \mathbf{G}_{,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi}^2 + \dots \\ & + \mathbf{G}_{,\lambda\bar{u}} \Delta\lambda \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi} + \dots \\ & + \mathbf{G}_{,\mathbf{u}\lambda\bar{u}} \Delta\mathbf{u} \Delta\lambda \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi} + \dots + \dots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Der unterstrichene Term dominiert den Imperfektionseinfluß, so daß die anderen Terme mit $\bar{\xi}$ während der weiteren Herleitung hier zur Vereinfachung entfallen. Am kritischen Punkt $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ wird der asymptotische Ansatz:

$$\lambda = \lambda_c + \Delta\lambda \quad (7.7)$$

$$\Delta\lambda = \bar{\xi} \bar{\lambda}_1 + \bar{\xi}^2 \bar{\lambda}_2 + \dots + \bar{\xi} \bar{\lambda}_1 + \bar{\xi}^2 \bar{\lambda}_2 + \dots \quad (7.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda) + \Delta\mathbf{u} \quad (7.9)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \bar{\xi} \mathbf{u}_1 + \bar{\xi}^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (7.10)$$

eingeführt. Der Verschiebungszuwachs zum imperfekten Pfad wird wie oben durch die Beulformen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ usw. beschrieben. Bei der Änderung des Lastparameters $\Delta\lambda$ tauchen jetzt die Amplitude ξ und die zusätzlich zu bestimmenden Parameter $\bar{\lambda}_1$ und $\bar{\lambda}_2$ auf. Einsetzen in Gleichung (7.6) und Ordnen nach Potenzen von ξ und $\bar{\xi}$ resultiert in

$$\begin{aligned} & \xi(\mathbf{K}_T \mathbf{u}_1) + \xi^2(\mathbf{K}_T \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) \\ & \xi^3(\mathbf{K}_T \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{T,\lambda} (\mathbf{u}_1 \lambda_2 + \mathbf{u}_2 \lambda_1) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \mathbf{u}_1 \lambda_1^2 \\ & \quad \mathbf{K}_{T,u} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u\lambda} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \lambda_1 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_{T,uu} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) \\ & \bar{\xi}(\mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_1 \bar{\xi} \bar{\lambda}_1 + \mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_2 \bar{\xi}^2 \bar{\lambda}_1 + \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} \mathbf{u}_1 \lambda_1 \bar{\xi}^2 \bar{\lambda}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{T,u\lambda} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \bar{\xi}^2 \bar{\lambda}_1 + \mathbf{G}_{,u} \hat{\mathbf{u}}) \\ & + \dots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aus den Termen bei ξ, ξ^2, ξ^3 usw. ergeben sich nach Gleichungen (6.22), (6.24) ... die Parameter λ_1, λ_2 usw. und die Beulformen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ Durch die weitere Aufspaltung des Terms bei $\bar{\xi}$ erhält man

$$\bar{\xi}(\mathbf{K}_{T,\lambda} \mathbf{u}_1 \bar{\lambda}_1 + \mathbf{G}_{,u} \hat{\mathbf{u}} \frac{1}{\bar{\xi}}) \quad (7.12)$$

Das Verschwinden dieses Terms ermöglicht die Berechnung von

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{1}{\bar{\xi}} \frac{\Phi^T \mathbf{G}_{,u} \hat{\mathbf{u}}}{\Phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \Phi} = -\frac{1}{\bar{\xi}} \cdot \rho \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{\Phi^T \mathbf{G}_{,u} \hat{\mathbf{u}}}{\Phi^T \mathbf{K}_{T,\lambda} \Phi} \quad (7.13)$$

Die asymptotische Näherung für den Lastparameter läßt sich dann bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung angeben zu

$$\lambda = \lambda_c + \xi \lambda_1 + \xi^2 \lambda_2 - \frac{\bar{\xi}}{\xi} \cdot \rho \quad (7.14)$$

Den Durchschlagspunkt der imperfekten Struktur erhält man durch die Maximalwertbestimmung dieser Kurve. Die dabei zu lösende Gleichung aus $\frac{d\lambda}{d\xi} = 0$ für die Maximalstelle ξ_s lautet

$$\xi_s^3 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \xi_s^2 + \frac{\bar{\xi}}{2\lambda_2} \cdot \rho = 0 \quad (7.15)$$

Çirak (1993) schlägt zur Lösung die Cardinische Lösungsformel (Bronstein (1987)) vor. Auch läßt sich die Lösung sehr einfach iterativ finden.

In diesem Ansatz sind auch die beiden Sonderfälle, asymmetrische Verzweigung bei nicht gekrümmtem Sekundärpfad ($\lambda_2=0$) und symmetrische Verzweigung ($\lambda_1=0$), enthalten (vgl. z.B. Budiansky (1974)). Im ersten Fall mit $\lambda_2=0$ erhält man

$$\xi_s = \sqrt{-\frac{\bar{\xi}}{\lambda_1} \cdot \rho} \quad (7.16)$$

und für die maximal aufnehmbare Last

$$\lambda_s = \lambda_c - 2\sqrt{-\lambda_1 \bar{\xi} \rho} = \lambda_c \left[1 - 2\sqrt{\frac{\lambda_1 \bar{\xi} \rho}{\lambda_c^2}} \right] \quad (7.17)$$

Für die symmetrische Verzweigung mit $\lambda_1 = 0$ lauten die entsprechenden Gleichungen:

$$\bar{\xi}_s = \left(-\frac{\bar{\xi} \cdot \rho}{2\lambda_2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.18)$$

$$\lambda_s = \lambda_c \left[1 - 3 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_c} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{\xi} \rho}{\lambda_c} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (7.19)$$

Die hier gezeigten asymptotischen Näherungen lassen sich durch die Berücksichtigung weiterer Terme systematisch verbessern, jedoch sollten diese Terme für eine brauchbare erste Abschätzung des Imperfektionseinflusses ausreichen.

7.1.1 Numerische Umsetzung

Im Vergleich zu Kapitel 6 taucht hier zusätzlich die Richtungsableitung $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}$ auf, die mit

$$\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda, \epsilon \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{0})) \quad (7.20)$$

approximiert werden kann. Im Rahmen einer finiten Elementeberechnung werden also die Tragwerksgeometrie durch den Vektor $\epsilon \hat{\mathbf{u}}$ verändert und die Ungleichgewichtskräfte für den augenblicklichen Verformungszustand berechnet. Die Ungleichgewichtskräfte $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda, 0)$ am kritischen Punkt des perfekten Systems sollen bei ausreichend genau ermitteltem Verzweigungspunkt verschwinden. Bei dieser Art der Berechnung könnten also auch andere als geometrische Imperfektionen, zum Beispiel Abweichungen bei Lagerbedingungen, Belastungen, Materialparameter usw., Eingang finden.

7.2 Gleichgewicht und Singularitätsbedingung als Basis für die Berechnung der Imperfektionsempfindlichkeit

Wie im vorangegangenen Kapitel wird auch hier die Imperfektion beschrieben mit der normierten Imperfektionsform $\hat{\mathbf{u}}$ und dem Parameter $\bar{\xi}$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\xi} \hat{\mathbf{u}} \quad , \quad \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\infty} = 1 \quad \text{oder} \quad \|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$$

Die Folge der singulären Punkte beim Anwachsen des Imperfektionsparameters $\bar{\xi}$, ausgehend von einem kritischen Punkt wird beschrieben durch die Gleichgewichtsbedingungen und der Bedingung für einen singulären Punkt am perfekten System:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(\bar{\xi}), \lambda(\bar{\xi}), \bar{\xi}) = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}(\bar{\xi}), \lambda(\bar{\xi}), \bar{\xi}) \phi(\bar{\xi}) = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

Die entstehende und in Bild 7.1 gestrichelt dargestellte Kurve wird im folgenden Singulärpfad genannt.

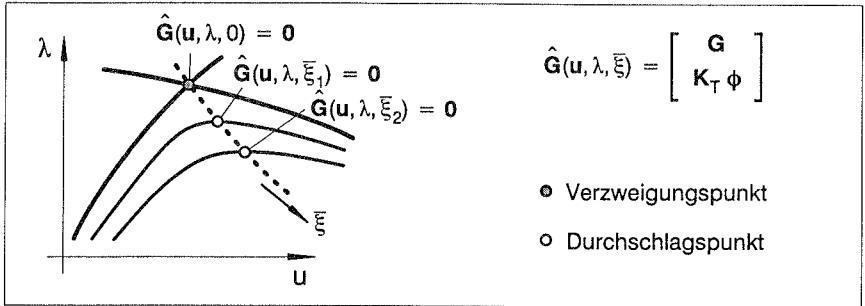


Bild 7.1: Singulärpfad

Die für eine asymptotische Näherung benötigten ersten Ableitungen von (7.21) und (7.22) bezüglich ξ an der Stelle $(\mathbf{u}, \lambda, 0)$ mit $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda, 0)$ und $\mathbf{K}_T \equiv \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda, 0)$ ergeben sich zu

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi = \mathbf{0} \quad (7.23)$$

$$(\mathbf{K}_{T,\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \mathbf{K}_{T,\lambda} \frac{d\lambda}{d\xi} + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi) \boldsymbol{\phi} + \mathbf{K}_T \frac{d\boldsymbol{\phi}}{d\xi} = \mathbf{0} \quad (7.24)$$

Achtung: Bei Verwendung der jetzt voneinander unabhängigen Variablen \mathbf{u} und λ beschreibt $(\cdot)_{,\lambda} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\lambda}$ die partielle Ableitung.

Durch Vormultiplikation bzw. Kontraktion der ersten Gleichung mit dem Eigenvektor $\boldsymbol{\phi}$ entsteht die folgende Gleichung, die für die weitere Herleitung von großer Bedeutung ist:

$$\underbrace{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}}_{=0} + \underbrace{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{d\xi} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi}_{\substack{=0 \text{ am Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 \text{ am Durchschlagspunkt}}} = \mathbf{0} \quad (7.25)$$

Der in Kapitel 7.2.3 diskutierte Sonderfall des Durchschlagspunktes erweist sich im Vergleich zum Verzweigungspunkt als stark vereinfacht, da der Term $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{,\lambda}$ in Gleichung (7.25) nicht verschwindet und damit sofort nach der gesuchten Ableitung $\frac{d\lambda}{d\xi}$ aufgelöst werden kann.

Am Verzweigungspunkt hingegen gilt neben $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ für den kritischen Punkt auch $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{,\lambda} = 0$. Bleibt also noch zu prüfen, ob der Term $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}$ im Bild von \mathbf{K}_T liegt, bzw. orthogonal zum Nullraum, aufgespannt vom Eigenvektor $\boldsymbol{\phi}$ (bei i -fachen Verzweigungspunkten aufgespannt von mehreren Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$) ist. Dies hat dann zur Folge, daß $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi = 0$ verschwindet und damit eine Lösung für $\frac{d\mathbf{u}}{d\xi}$ existiert. Die gesuchten Ableitungen können dann wie in Kapitel 7.2.1 gezeigt ermittelt werden.

Im Falle, daß $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi}$ nicht im Bild von \mathbf{K}_T liegt, steht als dritter Term in Gleichung (7.25) ein endlicher Wert. Die Gleichung kann dann mit $\mathbf{K}_T \phi = \mathbf{0}$ und $\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} = 0$ nur dann erfüllt werden für $\frac{d\lambda}{d\hat{\xi}} \rightarrow -\infty$. Dies wird in Kapitel 7.2.2 überprüft mit dem Hinweis, daß sich dort genau die Formeln der Koiterschen Imperfektionsempfindlichkeit ergeben. Eine phänomenologische Deutung der Bedingung $\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} = 0$ gelingt durch Betrachten des Pfades der singulären Punkte beim Anwachsen der Imperfektionsamplitude. Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn aus dem Verzweigungspunkt bei $\hat{\xi} = 0$ mit anwachsendem $\hat{\xi}$ wieder ein Verzweigungspunkt entsteht (Bild 7.2 a)). Erweist sich der Verzweigungspunkt $\hat{\xi} = 0$ als isolierter Punkt auf dem Singulärpfad umgeben von Durchschlagspunkten (Bild 7.2 b)), so liegt $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi}$ nicht im Bild von \mathbf{K}_T (siehe dazu auch Eriksson (1992)).

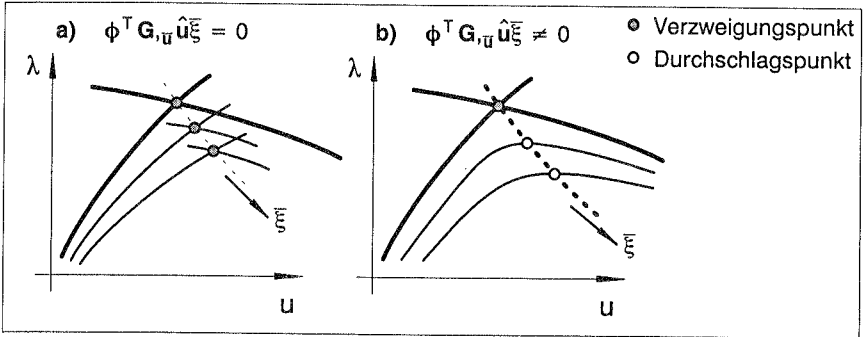


Bild 7.2: Charakteristik des Singulärpfades abhängig von $\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi}$

Diese Situation des isolierten Verzweigungspunktes tritt ein bei Verwendung von Imperfektionsformen affin zum Singulärvektor ϕ .

7.2.1 $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}$ liegt im Bild von \mathbf{K}_T

Zunächst soll aber auf den Fall $\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi} = 0$ eingegangen werden. Gleichzeitig wird an dieser Stelle vorgreifend auf die innerhalb der Optimierung (Kapitel 10.2.2) benötigten Ableitungen des Lastfaktors bezüglich den Optimierungsvariablen, die auch als Imperfektionsamplituden betrachtet werden können, hingewiesen. Dort ergibt sich im Regelfall die Bedingung $\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi} = 0$.

Die Ableitungen erster Ordnung (7.23), (7.24) dienen als Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen unter Berücksichtigung, daß die Terme $\mathbf{G}_{,\lambda\lambda} = \mathbf{K}_{T,\lambda\lambda} = \mathbf{K}_{T,\lambda\bar{u}} = \mathbf{K}_{T,\bar{u}\lambda} = \dots = 0$ verschwinden (Hinweis: $(\cdot)_{,\lambda} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\lambda}$ bezeichnen jetzt partielle Ableitungen):

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{d\hat{\xi}} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{d\hat{\xi}} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi} = \mathbf{0} \quad (7.26)$$

$$\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\hat{\xi}} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\xi} \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{d\hat{\xi}} = \mathbf{0} \quad (7.27)$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + 2\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{d\xi^2} \\ + 2\mathbf{G}_{,\lambda\bar{u}} \frac{d\lambda}{d\xi} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d^2\lambda}{d\xi^2} + \mathbf{G}_{,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi}^2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T,uu} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \phi + 2\mathbf{K}_{T,u\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} \phi + \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\xi^2} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi}^2 \phi \\ + 2\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\phi}{d\xi} + 2\mathbf{K}_{T,u} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Zunächst werden die beiden Teillösungen von Gleichung (7.26)

$$\Delta\mathbf{u}_p = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}_{,\lambda} \quad \text{mit} \quad \phi^T \Delta\mathbf{u}_p = 0 \quad (7.30)$$

$$\Delta\mathbf{u}_l = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} \quad \text{mit} \quad \phi^T \Delta\mathbf{u}_l = 0 \quad (7.31)$$

berechnet. Die Orthogonalitätsbedingungen $\phi^T \Delta\mathbf{u}_p = \phi^T \Delta\mathbf{u}_l = 0$ werden bei singularer Steifigkeitsmatrix notwendig, um aus der Lösungsschar für $\Delta\mathbf{u}_p$ und $\Delta\mathbf{u}_l$ (vgl. z.B. Kapitel 6, Gleichungen (6.40), (6.41)) eindeutige Lösungen zu erhalten. Diese Orthogonalitätsbedingungen bewirken, daß die asymptotische Näherung des Verzweigungspunktes der imperfekten Struktur frei von Anteilen des Eigenvektors bleibt, da die Verschiebungszuwächse $\Delta\mathbf{u}_p$ und $\Delta\mathbf{u}_l$ orthogonal zum Eigenvektor sind. Um numerischen Schwierigkeiten vorzubeugen, können die beiden rechten Seiten, die ja eigentlich orthogonal zum Singulärvektor ϕ sind, von Anteilen in Richtung des Singulärvektors bereinigt werden. Zur Lösung des singularen Gleichungssystems kann die Nelson–Methode, die Rangkorrektur mit dem Dyadenprodukt des Eigenvektors oder einfach die nicht–singularer Steifigkeitsmatrix aus den Penalty–Verfahren verwendet werden. Nach der Lösung kann dann nochmals eine Orthogonalisierung bezüglich ϕ erfolgen. Da in der Regel Penalty–Verfahren zur Berechnung des kritischen Punktes eingesetzt werden, kann die dort erstellte, nur fast singularer, Steifigkeitsmatrix ohne sonstige Maßnahmen problemlos verwendet werden.

Mit den beiden Teillösungen läßt sich Gleichung (7.26) umformen zu:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \Delta\mathbf{u}_p \frac{d\lambda}{d\xi} + \Delta\mathbf{u}_l \quad (7.32)$$

Diese dann eingesetzt in die Kontraktion von (7.27) mit ϕ ermöglicht die Berechnung der ersten Ableitung des Lastfaktors

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = - \frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta\mathbf{u}_l + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \hat{\mathbf{u}}\bar{\xi} \phi}{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta\mathbf{u}_p} \quad (7.33)$$

Aus Gleichung (7.27) läßt sich bei Bedarf die Ableitung des Eigenvektors unter Verwendung von (7.32) und (7.33) berechnen

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \phi + \mathbf{K}_{T,u} \hat{\mathbf{u}} \xi \phi \right) \quad (7.34)$$

Für die Berechnung der nächst höheren Ableitungen kommt die gleiche Vorgehensweise, Partialsösungen und Umformen der ersten Gleichung, Einsetzen in Kontraktion der zweiten Gleichung und Verwendung der zweiten Gleichung zur Berechnung der Ableitung des Eigenvektors, zum Einsatz. Sie ist für die Ableitungen zweiter Ordnung in Bild 7.3 zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{II} &= -\mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \hat{\mathbf{u}} \xi + 2\mathbf{G}_{,\lambda\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi \frac{d\lambda}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi^2 \right) \quad \text{mit } \phi^T \Delta \mathbf{u}_{II} = 0 \\ \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\xi^2} &= \Delta \mathbf{u}_P \frac{d^2 \lambda}{d\xi^2} + \Delta \mathbf{u}_{II} \\ \frac{d^2 \lambda}{d\xi^2} &= - \frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \phi + 2 \phi^T \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \hat{\mathbf{u}} \xi \phi + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_{II} \phi}{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \mathbf{u}_P} \\ &\quad - \frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi^2 \phi + 2 \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\phi}{d\xi} + 2 \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \hat{\mathbf{u}} \xi \frac{d\phi}{d\xi}}{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \mathbf{u}_P} \\ \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} &= -\mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \phi + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \hat{\mathbf{u}} \xi \phi + \mathbf{K}_{T,u} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\xi^2} \phi \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \xi^2 \phi + 2\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \frac{d\phi}{d\xi} + 2\mathbf{K}_{T,u} \hat{\mathbf{u}} \xi \frac{d\phi}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

Bild 7.3: Ableitungen zweiter Ordnung

Obwohl Vereinfachungen möglich sind (Kapitel 7.2.3), gelten diese Herleitungen auch für Durchschlagspunkte, da die Bedingung $\phi^T \mathbf{P} = 0$, die ja Verzweigungspunkte und Durchschlagspunkte separiert, keinen Eingang in die Herleitungen findet.

7.2.2 $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}$ liegt nicht im Bild von \mathbf{K}_T

Ausgehend von den Gleichungen

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(s), \lambda(s), \bar{\xi}(s)) = 0 \quad (7.35)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(s), \lambda(s), \bar{\xi}(s)) \phi(s) = 0 \quad (7.36)$$

wird der Pfadparameter s eingeführt und dadurch neben Lastparameter und Verschiebungen auch die Imperfektionsamplitude in einer Taylorreihe am kritischen Punkt entwickelt:

$$\lambda = \lambda_c + \frac{d\lambda}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.37)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \frac{d\mathbf{u}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.38)$$

$$\bar{\xi} = 0 + \frac{d\bar{\xi}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{\xi}}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.39)$$

Unter der Annahme einer von den Verschiebungen \mathbf{u} unabhängigen Last unterscheiden sich die Ableitungen erster Ordnung

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{ds} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} = \mathbf{0} \quad (7.40)$$

$$\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{ds} = \mathbf{0} \quad (7.41)$$

und die Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} \\ & + 2\mathbf{G}_{,\lambda\bar{u}} \frac{d\lambda}{ds} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda^2}{ds^2} + \mathbf{G}_{,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \frac{d\bar{\xi}}{ds} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \phi + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \phi \\ & + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\phi}{ds^2} + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \phi = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.43)$$

von den Gleichungen (7.26) bis (7.29) im wesentlichen nur durch die Terme mit $\frac{d\bar{\xi}}{ds}$ und $\frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2}$. Aus der Kontraktion der ersten Gleichung (7.40)

$$\underbrace{\phi^T \mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{ds}}_{=0} + \underbrace{\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{ds}}_{=0} + \underbrace{\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\xi}}{ds}}_{\neq 0} = \mathbf{0} \quad (7.44)$$

am Verzweigungspunkt

folgt $\frac{d\bar{\xi}}{ds} = 0$, wenn der Term $\mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}$ nicht im Bild von \mathbf{K}_T liegt. Die Ableitungen erster Ordnung vereinfachen sich dann zu

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \mathbf{0} \quad (7.45)$$

$$\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{ds} = \mathbf{0} \quad (7.46)$$

und die Ableitungen zweiter Ordnung zu

$$\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} + \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d^2\lambda}{ds^2} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} = \mathbf{0} \quad (7.47)$$

$$\mathbf{K}_{T,\bar{u}\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} \phi + 2\mathbf{K}_{T,\bar{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \mathbf{K}_T \frac{d^2\phi}{ds^2} + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \phi = \mathbf{0} \quad (7.48)$$

Eine Lösung für (7.45) läßt sich angeben mit

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \Delta \mathbf{u}_P \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \phi \quad (7.49)$$

Dabei beschreibt

$$\Delta \mathbf{u}_P = -\mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{G}_{,\lambda} = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad \text{mit} \quad \phi^T \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \Delta \mathbf{u}_P \Delta \mathbf{u}_P = 0 \quad (7.50)$$

die Tangente an den Primärpfad (vgl. Kapitel 6.2.1, Gleichung (6.38)). Der additive Anteil ϕ sorgt dafür, daß auch Anteile des Eigenvektors im Verschiebungszuwachs $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ ent-

halten sind, wie in Bild 7.4 gezeigt. Diese Lösung in die Kontraktion von (7.46) eingesetzt ermöglicht die Berechnung der Ableitung des Lastparameters nach s

$$\frac{d\lambda}{ds} = - \frac{\phi^T K_{T,u} \phi}{\phi^T K_{T,u} \Delta u_p} \quad (7.51)$$

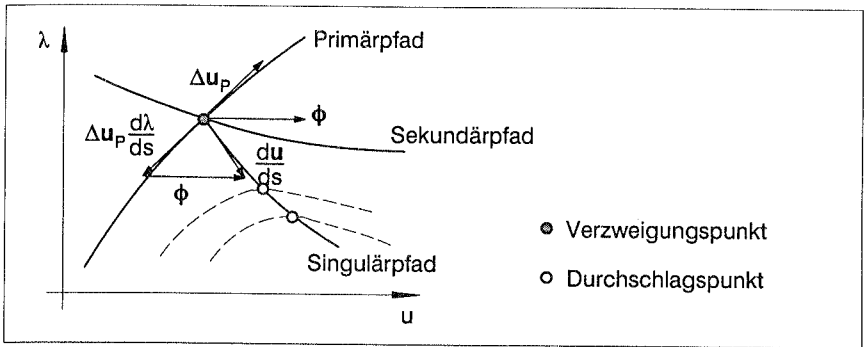


Bild 7.4: Tangente an Singulärpfad

Nun werden die Ableitungen nächster Ordnung herangezogen. Die Kontraktion der Gleichung (7.47) führt dann auf

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = - \frac{\phi^T K_{T,u} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds}}{\phi^T G_{,u} \hat{u}} \quad (7.52)$$

Einsetzen von (7.49) und Verwendung von $\phi^T K_{T,u} \Delta u_p \Delta u_p = 0$, wenn Δu_p den Primärpfad beschreibt, ermöglicht die Umformung zu

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = \frac{\phi^T K_{T,u} \phi}{\phi^T G_{,u} \hat{u}} \quad (7.53)$$

Mit den Partillösungen Δu_p und

$$\Delta u_i = - K_T^{-1} (K_{T,u} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + G_{,u} \hat{u} \frac{d^2 \xi}{ds^2}) \quad \text{mit} \quad \phi^T \Delta u_i = 0 \quad (7.54)$$

ergibt sich für (7.47) die Lösung

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \Delta u_p \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + \Delta u_i \quad (7.55)$$

Bei der Berechnung von $\frac{d^2 \xi}{ds^2}$ aus Kontraktion der Gleichung (7.47) wird dafür Sorge getragen, daß $K_{T,u} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} + G_{,u} \frac{d^2 \xi}{ds^2}$ im Bild von K_T liegt und somit eine Lösung für Δu_i existiert. Einsetzen in die Kontraktion und in die unveränderte Form der nächsten Gleichung (7.48) liefert

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = - \frac{\phi^T K_{T,uu} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} \phi + \phi^T K_{T,u} \Delta u_1 \phi + 2\phi^T K_{T,u} \frac{du}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \phi^T K_{T,u} \hat{u} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \phi}{\phi^T K_{T,u} \phi \Delta u_p} \quad (7.56)$$

und

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = - K_T^{-1} \left(K_{T,uu} \frac{du}{ds} \frac{du}{ds} \phi + K_{T,u} \frac{d^2u}{ds^2} \phi + 2K_{T,u} \frac{du}{ds} \frac{d\phi}{ds} + K_{T,u} \hat{u} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \phi \right) \quad (7.57)$$

Diese Vorgehensweise kann für beliebige höhere Ableitungen fortgesetzt werden.

Nachfolgend soll ein Vergleich zu der in Kapitel 7.1 gezeigten Methode von Koiter gezogen werden. Da beim asymptotischen Ansatz für die Imperfektionsamplitude $\bar{\xi}$ der Term erster Ordnung $\frac{d\bar{\xi}}{ds} = 0$ entfällt, wird dort der Term zweiter Ordnung verwendet, während für die Ansätze von Verschiebungen und Lastparameter die Terme erster Ordnung eingesetzt werden.

$$\lambda = \lambda_c + \frac{d\lambda}{ds} \Delta s \quad (7.58)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \frac{d\mathbf{u}}{ds} \Delta s \quad (7.59)$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \Delta s^2 \quad (7.60)$$

Die anderen Terme höherer Ordnung bleiben außer Betracht. Für die gegebene Imperfektionsamplitude $\bar{\xi}$ berechnet sich das zugehörige Δs aus Gleichung (7.39) zu

$$\Delta s = \sqrt{\frac{2\bar{\xi}}{\frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2}}} = \sqrt{\frac{2 \phi^T \mathbf{G}_{T,u} \hat{u} \bar{\xi}}{\phi^T K_{T,u} \phi \phi}} \quad (7.61)$$

Damit läßt sich aus Gleichung (7.37) der entsprechende Lastparameter unter Verwendung des ersten Reihengliedes (7.51) ermitteln

$$\lambda(\bar{\xi}) = \lambda_c - \frac{d\lambda}{ds} \Delta s = \lambda_c - \sqrt{\frac{2 \phi^T K_{T,u} \phi \phi \quad \phi^T \mathbf{G}_{T,u} \hat{u} \bar{\xi}}{\phi^T K_{T,u} \Delta u_p \phi \quad \phi^T K_{T,u} \Delta u_p \phi}} \quad (7.62)$$

Unter Einführung der in Kapitel 7.1 benutzten Abkürzungen

$$\lambda_1 = - \frac{\phi^T K_{T,u} \phi \phi}{2 \phi^T K_{T,\lambda} \phi} = - \frac{\phi^T K_{T,u} \phi \phi}{2 \phi^T K_{T,u} \Delta u_p \phi} \quad (7.63)$$

$$\rho = \frac{\phi^T \mathbf{G}_{T,u} \hat{u}}{\phi^T K_{T,\lambda} \phi} = \frac{\phi^T \mathbf{G}_{T,u} \hat{u}}{\phi^T K_{T,u} \Delta u_p \phi} \quad (7.64)$$

und Berücksichtigung der dortigen impliziten Abhängigkeit der Verschiebungen vom Lastparameter (vergleiche Gleichung (6.13)) gelangt man zu

$$\lambda(\bar{\xi}) = \lambda_c - 2\sqrt{-\lambda_1 \rho \bar{\xi}} \quad (7.65)$$

Dies entspricht exakt der von Koiter angegebenen Gleichung (7.17). Ein typischer Verlauf einer solchen Funktion für die Imperfektionsempfindlichkeit ist in Bild 7.5 dargestellt.

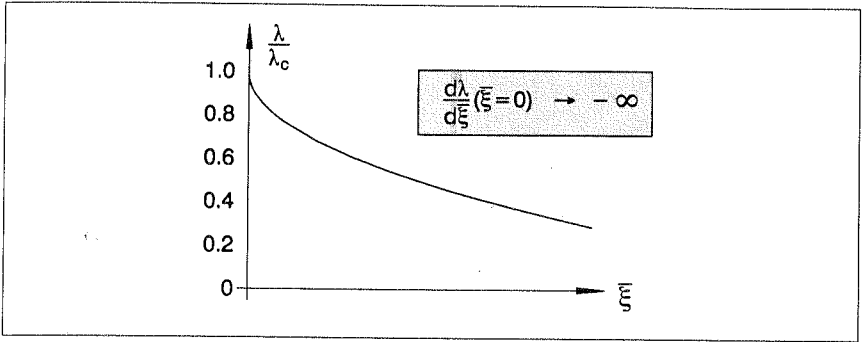


Bild 7.5: Imperfektionsempfindlichkeit nach Koiter

Die Ableitung des Lastparameters nach der Imperfektionsamplitude an der Stelle $\bar{\xi} = 0$ führt auf die auch in Bild 7.5 erkennbare Eigenschaft

$$\frac{d\lambda}{d\bar{\xi}}(\bar{\xi}=0) \rightarrow -\infty \quad (7.66)$$

Diese Tangente spielt für die Bildung der Optimierungsableitungen in Kapitel 10.2.2 eine wichtige Rolle.

Bis jetzt wurde angenommen, daß die Steigung $\frac{d\lambda}{ds}$ existiert. Da λ_1 nach Gleichung (7.63) bzw. (6.27) und $\frac{d\lambda}{ds}$ nach Gleichung (7.51) nur um den Faktor $\frac{1}{2}$ unterscheiden, liegt somit ein asymmetrischer Verzweigungspunkt vor. Verschwindet aber die Steigung $\frac{d\lambda}{ds} = 0$, so wird auch $\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$, und es müssen die Ableitungen nächster Ordnung herangezogen werden, um den Abfall des Lastparameters λ für gegebene Imperfektionsamplitude $\bar{\xi}$ bestimmen zu können. Die Herleitung erfolgt analog zu den bisher in diesem Kapitel gezeigten und führt auf die Koitersche Gleichung (7.19) für symmetrische Verzweigungen.

Ein Vergleich der Tangenten an Sekundär- und Singulärpfad liefert eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft. Aus den Gleichungen (6.28) und (6.29) ergibt sich mit der Forderung $\Delta\lambda = \xi \lambda_1 \stackrel{!}{=} 1$ für den Verschiebungszuwachs zum Sekundärpfad

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_p + \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\phi} \quad (7.67)$$

Sowohl $\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$ als auch $\Delta\mathbf{u}_p$ bezeichnen die Tangente an den Primärpfad.

Für den Singulärpfad berechnet sich aus den Gleichungen (7.58) und (7.59) mit der Forderung $\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{ds} \stackrel{!}{=} 1$ und der Eigenschaft $\frac{d\lambda}{ds} = 2\lambda_1$ der Verschiebungszuwachs nach

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_p + \frac{1}{2\lambda_1} \boldsymbol{\phi} \quad (7.68)$$

Wie in Bild 7.6 verdeutlicht weist der Singulärpfad gerade die doppelte Steigung des Sekundärpfades auf.

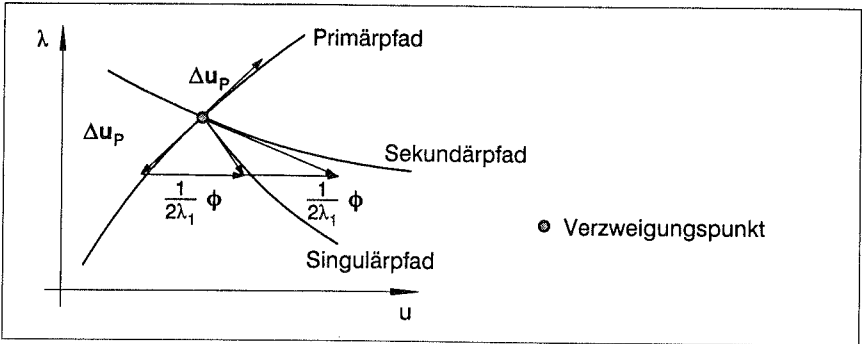


Bild 7.6: Tangente an Sekundär- und Singulärpfad

In Thompson und Hunt (1973) finden sich ähnliche Ergebnisse, jedoch ist zu beachten, daß dort die Verschiebungen abhängig vom Lastparameter λ dargestellt werden. Die Ausgangsgleichungen lauten

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(\lambda(s)), \lambda(s), \bar{\xi}(s)) = \mathbf{0} \quad (7.69)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\lambda(s)), \lambda(s), \bar{\xi}(s)) \phi(s) = \mathbf{0} \quad (7.70)$$

und die asymptotischen Näherungen

$$\lambda = \lambda_c + \frac{d\lambda}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\lambda}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.71)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda) + \frac{d\mathbf{u}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.72)$$

$$\bar{\xi} = \mathbf{0} + \frac{d\bar{\xi}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \Delta s^2 + \dots \quad (7.73)$$

Das eben gezeigte Vorgehen mit Kontraktionen, Teillösungen und Einsetzen führt unter Beachtung, daß die Ableitung nach dem Lastparameter λ jetzt totale Ableitungen (wegen $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\lambda)$) sind, auf die bereits bekannten Ergebnisse.

7.2.3 Durchschlagspunkt

Mit der Bedingung $\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} \neq 0$ am Durchschlagspunkt läßt sich aus Gleichung (7.25) durch Kontraktion die Ableitung des Lastparameters sofort angeben

$$\frac{d\lambda}{d\bar{\xi}} = - \frac{\phi^T \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi}}{\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda}} \quad (7.74)$$

Dieselbe Gleichung in nicht kontraktierter Form kann auch verwendet werden für die Änderung der Verschiebungen

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\bar{\xi}} = - \mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{d\bar{\xi}} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}} \bar{\xi} \right) \quad \text{mit} \quad \phi^T \frac{d\mathbf{u}}{d\bar{\xi}} = 0 \quad (7.75)$$

Die Orthogonalität von $\mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}_{\xi}$ zum Eigenvektor steckt in Gleichung (7.74), und somit existiert eine Lösung für (7.75). Die Gleichung für den kritischen Punkt (7.24) wird zur Berechnung der Ableitung des Eigenvektors herangezogen:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \phi + \mathbf{K}_{T,\bar{u}} \hat{\mathbf{u}}_{\xi} \phi \right) \quad (7.76)$$

Das Vorgehen kann für höhere Ableitungen beliebig fortgesetzt werden.

7.3 Analyse imperfekter Strukturen

Die bisherigen Verfahren starteten am kritischen Punkt des perfekten Tragwerks. Dort wurde durch asymptotische Näherungen abgeschätzt, wie sich Imperfektionen auf die Traglast auswirken.

Eine weitere, sehr verbreitete, Methode beschäftigt sich mit der Analyse imperfekter Strukturen. Dabei werden vor der Analyse das Tragwerk oder die Belastung durch Imperfektionen modifiziert. Diese Modifikationen alleine erzeugen keine Spannungen oder inneren Zwänge im Tragwerk. Beim Aufbringen von Imperfektionen in Form von Eigenvektoren bedeutet dies, daß die Verschiebungskomponenten des Eigenvektors in Knotenkoordinaten, wie sie zur Beschreibung des Tragwerkes verwendet werden, umgerechnet werden müssen. Mit diesen Werten kann dann die Tragwerksgeometrie modifiziert werden.

Die Analyse des imperfekten Tragwerks mit Hilfe der Pfadverfolgungsalgorithmen und den erweiterten Systemen zur genauen Berechnung der Versagenslast bereitet keine Schwierigkeiten. Sie erweist sich meist als weniger aufwendig als am perfekten Tragwerk, da mehrfache Verzweigungen und plötzliche Änderungen der Tragwirkungen nicht so häufig auftauchen.

Oft wird der kritische Punkt des perfekten Tragwerks bestimmt, um dort eine Eigenwertanalyse zur Generierung von Eigenvektoren als Imperfektionsformen auszuführen. Anstatt anschließend eine komplette nichtlineare Pfadverfolgung durchzulaufen, kann alternativ ein erweitertes System für das imperfekte Tragwerk

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda, \xi) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \lambda, \xi) \phi \\ I(\phi) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (7.77)$$

formuliert und gelöst werden.

Treten beim direkten Berechnen des kritischen Punktes der imperfekten Struktur, startend am kritischen Punkt der perfekten Struktur, Konvergenzschwierigkeiten infolge des großen Verschiebungszuwachses auf, so kann der Imperfektionsparameter ξ langsam bis zum Erreichen der Imperfektionsamplitude $\bar{\xi}$ gesteigert werden (Bild 7.7).

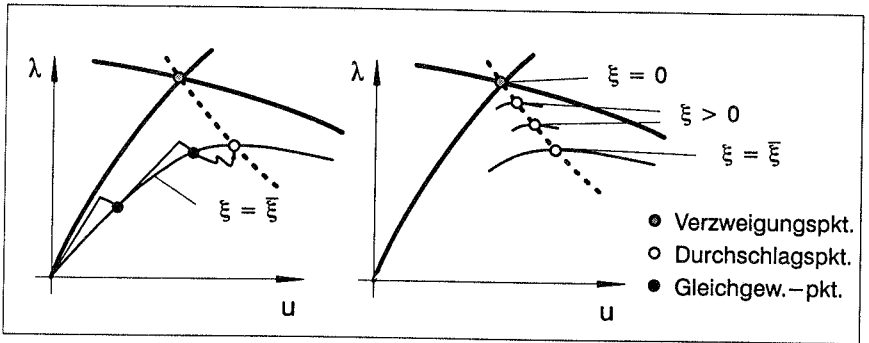


Bild 7.7: Pfadverfolgung am imperfekten System / Singulärpfadverfolgung

Die wiederholte Lösung von (7.77) ermöglicht also die Berechnung des Singulärpfades, der sich aus den kritischen Punkten bei anwachsender Imperfektion zusammensetzt. Der Singulärpfad wird in der englischen Literatur mit 'fold line' oder 'fold curve' bezeichnet.

Hier können nun Methoden zur Adaption des Pfadparameters ξ und Prädiktorstrategien für eine effiziente Singulärpfadverfolgung entwickelt werden.

8 Strukturoptimierung

In den letzten Jahren gewinnen die Strukturoptimierungsverfahren immer mehr an Bedeutung, vor allem auch im Ingenieurbereich für den Entwurf und die Dimensionierung von Tragwerken. Einen Überblick über die Vielfalt von Methoden, Verfahren, Teildisziplinen, Programmkonzepte usw. kann den folgenden Aufsätzen und Lehrbüchern entnommen werden: Schmit (1981), Gill et al. (1981), Vanderplaats (1982,1984), Atrek et. al. (1984), Haftka und Grandhi (1986), Bennett und Botkin (1986), Mota Soares (1987), Eschenauer und Thierauf (1989), Arora (1989), Haftka et al (1990), Rozvany (1993) u.v.a.. Aus der Vielzahl von Veröffentlichungen können an dieser Stelle nur einige wenige zitiert werden, die die Entwicklung von der ursprünglichen Tragwerksbemessung bis zur Formoptimierung, Topologieoptimierung, Berücksichtigung nichtlinearer Effekte, Verwendung besonderer Materialien usw. beschreiben. Einige weitere Literaturangaben finden sich in der Einleitung.

Mittlerweile nehmen die gestellten Optimierungsaufgaben derartig komplexe Formen an, daß geschlossene analytische Lösungen, einfache Parameterstudien oder "Trial and Error" des entwerfenden Ingenieurs wenig Erfolg versprechen. Der Einsatz automatischer Optimierungsprozeduren soll den Ingenieur unterstützen bei der Suche nach optimalen oder zumindest verbesserten Entwürfen. Die Strukturoptimierung wird dafür üblicherweise unterteilt in verschiedene Teildisziplinen (Schmit (1986)), welche jede für sich ein eigenständiges Forschungsgebiet darstellt. Um nun ein leistungsfähiges Werkzeug zu erhalten, müssen die Komponenten

- Geometriebeschreibung (Entwurfsmodell, Methoden des Computer Aided Geometric Design)
- Strukturanalyse (Methode der finiten Elemente)
- Optimierungsverfahren (Mathematische Programmierung)
- Sensitivitätsanalyse

in ein Gesamtoptimierungsmodell integriert werden. Die Leistungsfähigkeit solcher Programmkonzepte beschreiben z.B. Eschenauer et al. (1988), Bletzinger (1990), Kimmich (1990), Kimmich et al. (1992), Bletzinger et al. (1993). Die für die vorliegende Arbeit relevanten Techniken werden nachfolgend erläutert und diskutiert.

8.1 Optimierungsmodell

Die Basis für ein Strukturoptimierungsproblem bildet die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$, die ein Maß für Qualität, Kosten, Materialaufwand, Strukturverhalten usw. einer Struktur darstellt. Für diese Funktion läßt sich in sehr allgemeiner Form das Optimierungsproblem angeben:

Minimiere $f(\mathbf{x})$

unter Einhaltung von Ungleichheits- und Gleichheitsnebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

und den Schranken für die Variablen \mathbf{x}

$$\mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u$$

Die Variablen \mathbf{x} sind ausgewählte Parameter für die Strukturbeschreibung aus dem noch zu beschreibenden Geometriemodell. Darunter fallen zum Beispiel Knotenkoordinaten von Formfunktionen, Dicken-, Querschnitts- oder Materialwerte. Die aus der Wahl der Optimierungsvariablen resultierende Struktur und deren Verhalten bei Belastung finden über Zielfunktion und Nebenbedingungen Eingang in das Optimierungsproblem. Typische Variablen und Funktionen, die auch im Rahmen dieser Arbeit zur Verfügung standen, sind in Bild 8.1 zusammengefaßt.

<ul style="list-style-type: none"> • Designvariablen \mathbf{x} 	<ul style="list-style-type: none"> Koordinaten ausgewählter Knoten Dicken an ausgewählten Knoten andere Querschnittsparameter
<ul style="list-style-type: none"> • Zielfunktionen $f(\mathbf{x})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Nebenbedingungen
Gewicht oder Volumen $f_W = \int \rho \, dv$	Gewicht oder Volumen $h_W = \frac{W}{W_{zul}} - 1 = 0$
Formänderungsenergie $f_E = \frac{1}{2} \int \sigma \, \epsilon \, dv$	Verschiebungen $g_U = \frac{U}{U_{zul}} - 1 \leq 0$
Spannungsausgleich $f_S = \int (\sigma - \sigma_{avg})^2 \, dv$	Spannungen $g_S = \frac{\sigma}{\sigma_{zul}} - 1 \leq 0$

Bild 8.1: Zielfunktionen und Nebenbedingungen

Die unteren und oberen Schranken \mathbf{x}_l und \mathbf{x}_u für die Variablen \mathbf{x} werden notwendig, um unsinnige Entwürfe, mit z. B. negativen Querschnittswerten, zu vermeiden und um vorgegebene Anforderungen, z. B. Mindestkonstruktionsdicke, zu gewährleisten.

Selbst bei sehr einfachen Strukturproblemen entstehen für die Optimierung meist hochgradig nichtlineare Funktionen, so daß hier immer von nichtlinearer Optimierung gesprochen wird. Diese Nichtlinearitäten existieren auch schon, wenn wie meist üblich eine lineare Tragwerksanalyse durchgeführt wird. In Kapitel 10 kommt durch die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte eine weitere Art der Nichtlinearität ins Spiel.

8.2 Geometriemodell

Für die Formbeschreibung der zu analysierenden Strukturen kommen die Methoden des Computer Aided Geometric Design (CAGD), siehe u.a. Faux (1979), Böhm (1984), Bletzinger (1990), zum Einsatz. Ausgehend von Kontrollknoten werden über Formfunktionen Linien und Kanten und mit deren Hilfe schließlich Design-Elemente erzeugt. Eine Übersicht über verfügbare Design-Elemente gibt Bild 8.2. Die Gesamtstruktur wird aus einem oder mehreren Design-Elementen gebildet. In dieses übergeordnete Geometriemodell kann dann für die Strukturanalyse ein beliebig feines finites Elementnetz generiert werden.

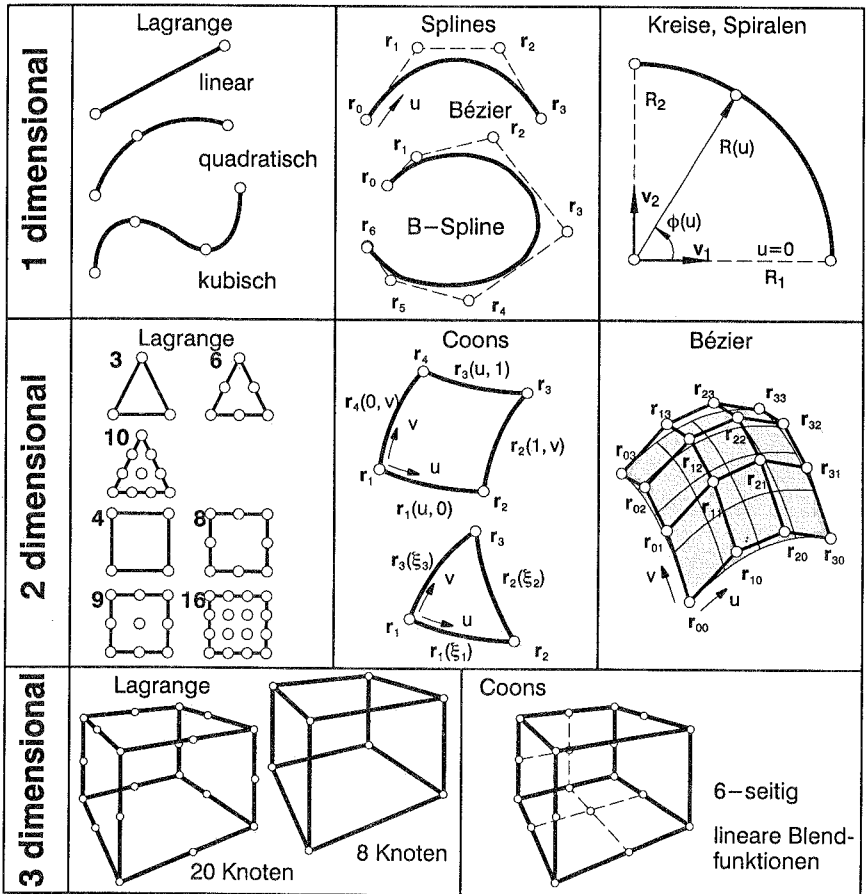


Bild 8.2: Designelemente (Bletzinger et al. (1991))

Die beschriebene Parametrisierung findet neben der Formbeschreibung auch Anwendung beim Generieren von Attributen, zum Beispiel Querschnittswerte an diskreten Knotenpunkten. Die Verwendung der Koordinaten und Attribute der Kontrollknoten als Optimierungsvariablen ermöglicht die Form- und Querschnittsoptimierung komplexer Strukturen mit wenigen, aber charakteristischen Formfreiheitsgraden. Eine Verwendung von Variablen aus dem finiten Elementenetz würde sofort zu einer sehr hohen Variablenzahl und außerdem zu einer unerwünschten Abhängigkeit von der Diskretisierung für das Berechnungsmodell führen.

Die Anzahl der Variablen, und somit eine größere Formfreiheit, kann beliebig gesteigert werden durch den Einsatz höherwertiger Ansatzfunktionen oder die Verdichtung des Design-Elementenetzes. Insbesondere bei der Formoptimierung von Flächentragwerken ist es wünschenswert, daß an den Design-Elementübergängen keine Knicke auftreten. Deshalb ist es notwendig, C_1 -kontinuierliche Übergänge auch für zweidimensionale Flächentragwerke sicherzustellen. Dafür kommt in dieser Arbeit meist das Bézier-Element zum Ansatz. Das nachfolgende Beispiel betont die Vorzüge dieses Konzepts.

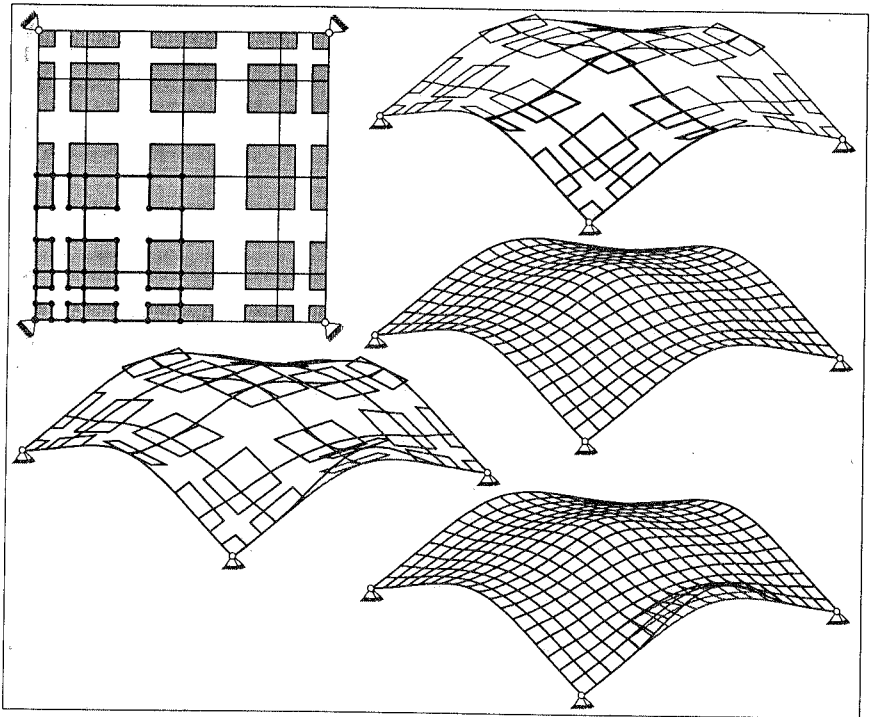


Bild 8.3: Schalentragswerk aus Bézier-Elementen

Die Form des Schalentragwerks von Bild 8.3 wird mit 16 Design-Elementen beschrieben. Bei Berücksichtigung der Symmetrien würde die Verwendung von 49 Design-Knoten, 12 Kanten und vier Design-Elementen ausreichen. Der Grundriß zeigt das Bézier-Elementenetz mit den grau unterlegten Kontinuitäts-elementen, die die C_1 -Kontinuität für die Design-Elementübergänge fordert. Das daraus erzeugte finite Elementenetz, die Auswirkungen der Änderung eines Formparameters sowohl auf das Design-Elementenetz als auch auf das finite Elementenetz können ebenfalls in Bild 8.3 beobachtet werden. Hier wird deutlich, daß das Design-Konzept für die Beschreibung der Formfreiheiten des Optimierungsproblems und gleichzeitig als Preprozessor zur Erzeugung von finiten Elementenetzen für das Berechnungsmodell Verwendung findet.

8.3 Strukturanalyse

Im Rahmen dieser Arbeit kommt für die Tragwerksanalyse die Methode der finiten Elemente zum Einsatz. Die Verwendung des Design-Elemente-Konzeptes ermöglicht die bequeme Generierung verschiedener finiter Elementenetze. Es kommt zwar überwiegend das von Büchter (1992) entwickelte Schalenelement zum Einsatz. Jedoch können aus der Elementbibliothek auch verschiedene andere Elementformulierungen für Stäbe, Balken, Platten und Schalen in verschiedenen feinen Diskretisierungsstufen ausgewählt werden (Bild 8.4).

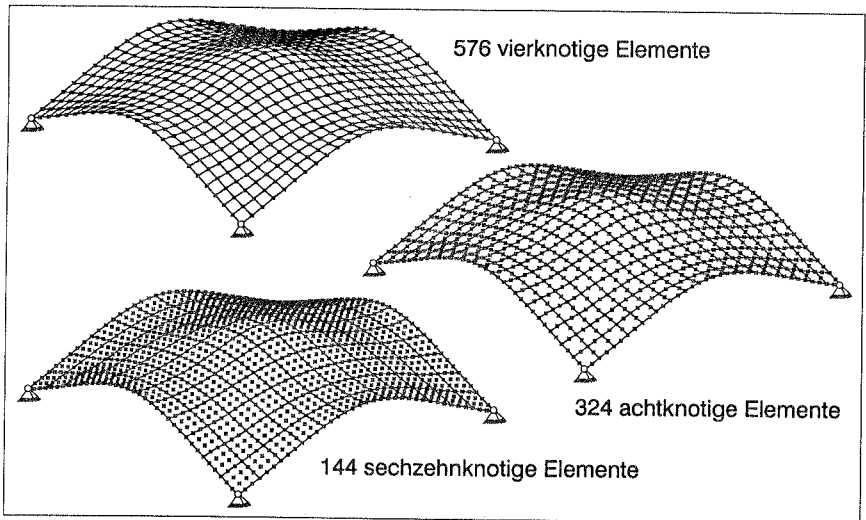


Bild 8.4: Finite Elementediskretisierungen mit Schalenelementen

Weitere Informationen zur Strukturanalyse mit der Methode der finiten Elemente können den Standardbüchern (z.B Zienkiewicz und Taylor (1989,1991) oder Bathe (1986)) und soweit es nichtlineare Verfahren betrifft auch den Kapiteln 3 bis 7 entnommen werden.

In dieser Arbeit wurde die Netzeinteilung während der Optimierung konstant gehalten, und wenn neue Formen entstanden, die eine Netzanpassung notwendig machten, so wurde mit verbessertem Netz ein Neustart durchgeführt.

Der Einfluß der Netzanpassung während der Optimierung muß in Zukunft sicherlich untersucht werden, jedoch soll an dieser Stelle nur bemerkt werden, daß die Netzanpassung bei den hier behandelten Stabilitätsproblemen noch erhebliche Schwierigkeiten macht. Da während der Optimierung häufig mehrere Beulformen zu beachten sind und diese somit in die Netzadaption einfließen müssen, liegt es nahe, daß ein gleichmäßiges, feines Netz eine gute Basis liefert.

8.4 Optimierungsverfahren

Eine Übersicht über die zur Verfügung stehenden Optimierungsverfahren der mathematischen Programmierung und verschiedener Approximationstechniken gibt Bletzinger (1990). Diese universell einsetzbaren und robusten Verfahren erweisen sich als äußerst günstig für die hier behandelten Probleme. Es wurde dabei fast ausschließlich ein Verfahren der "sequentiellen quadratischen Programmierung" (SQP) verwendet, auf das im folgenden, auch wegen der Analogie zu den Pfadverfolgungsalgorithmen bzw. Verfahren zur Berechnung von singulären Punkten in den Kapitel 3 und 4, näher eingegangen wird.

Das in Kapitel 8.1 formulierte Optimierungsproblem führt durch Einführung der Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (8.1)$$

auf die Kuhn-Tucker-Bedingungen (manchmal auch Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen genannt). Sie ergeben sich aus der Stationarität der Lagrange-Funktion

$$\nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla_{\boldsymbol{\mu}} L = \nabla_{\mathbf{v}} L = \mathbf{0} \quad (8.2)$$

und lauten

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (8.4)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (8.5)$$

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad (8.6)$$

Zu den Optimierungsvariablen \mathbf{x} , auch primäre Variablen genannt, kommen nun die Lagrange-Multiplikationen bzw. duale Variablen $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{v} noch dazu. Die durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen beschriebene Lösung entspricht einem Sattelpunkt der

Lagrange–Funktion, das heißt die Lagrange–Funktion besitzt an der Lösung für die primären Variablen ein Maximum und für die dualen ein Minimum. Die Ungleichheitsbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ werden in (8.4) mit den Lagrange–Multiplikatoren multipliziert, um eine Auswahl von aktiven Nebenbedingungen zu ermöglichen, die dann einen von Null verschiedenen Multiplikator erhalten.

Zur Lösung der Stationaritätsbedingungen wird ein Newton–Verfahren verwendet und die Linearisierung bezüglich primärer und dualer Variablen resultiert im folgenden Iterationsschema:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) \\ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Für die Lösung dieses Unterproblems wird das Verfahren NLPQL von Schittkowski (1981) verwendet. Da die Berechnung der zweiten Ableitungen der Lagrange–Funktion mit enormem Aufwand verbunden wäre, werden diese, auch Hesse–Matrix genannten, Ableitungen mit BFGS–Verfahren (siehe Matthies, Strang (1979) und Kapitel 3.4) approximiert. Dies erfordert dann unbedingt Line–Search–Verfahren mit denen die Schrittweite in Suchrichtung bestimmt wird, gerade auch deshalb, weil die Belegung der Hesse–Matrix zu Beginn des Optimierungsprozesses recht willkürlich passiert und durch Skalierung von Zielfunktion, Variablen und Nebenbedingungen beeinflusst wird. Durch die Sattelpunkteigenschaften der Lagrange–Funktion erweist sich diese als ungeeignet, um den Optimierungsfortschritt innerhalb des Line–Search–Verfahrens zu messen. Deshalb werden Abstiegsfunktionen bzw. Merit–, Penalty– oder Straffunktionen eingeführt, die bei verletzten Nebenbedingungen positive Zusatzanteile enthalten. Für weitere Details wird auf Schittkowski (1981) und Bletzinger (1990) verwiesen.

Nach dieser Kurzbeschreibung der SQP–Verfahren lassen sich diese mit den Verfahren zur Stabilitätsberechnung nach Kapitel 3 und 4 vergleichen. Dort ist die Minimierung des Potentials (2.32) der Ausgangspunkt. Die Stationarität führt auf die Gleichgewichtsbedingungen unter Beachtung von Nebenbedingungen, zum Beispiel (3.3) oder (4.11). Dies entspricht den hier verwendeten Kuhn–Tucker–Bedingungen. Die Linearisierung der erweiterten Gleichgewichtsbedingungen (3.5) und (4.14) führt auf ein Gleichung (8.7) ähnelndes Iterationsschema mit der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T als Hauptanteil. Diese zweiten Ableitungen des Potentials lassen sich im Gegensatz zu den zweiten Ableitungen der Lagrange–Funktion sehr effizient berechnen. Zwar wird bei Quasi–Newton–Verfahren auch die Steifigkeitsmatrix mit BFGS–Verfahren approximiert, jedoch existiert zu Beginn einer Iteration meist schon eine gute Matrix, während die Hesse–Matrix bei der Optimierung doch recht willkürlich initialisiert wird.

Trotz der angesprochenen Probleme erweisen sich die Methoden der mathematischen Programmierung und hier ganz speziell das SQP–Verfahren als äußerst robust und vielseitig einsetzbar. Es können mehrere Gleichheits– und Ungleichheitsnebenbedingungen, sowie Variablenrestriktionen eingebracht werden. Neue Zielfunktionen und Nebenbedingungen können außerhalb des Optimierungsmoduls formuliert werden, ohne daß das Optimierungsverfahren angepaßt wird.

8.5 Sensitivitätsanalyse

Das im vergangenen Kapitel beschriebene Optimierungsverfahren benötigt die ersten und zweiten Ableitungen von Zielfunktion und Nebenbedingungen. Die Hesse–Matrix der zweiten Ableitungen kann approximiert werden. Die ersten Ableitungen hingegen müssen höheren Genauigkeitsanforderungen genügen. Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse werden diese Gradienten, das heißt der lineare Einfluß der Entwurfparameter auf die Zielfunktion bzw. Nebenbedingungen, berechnet.

Im allgemeinen hängen die Optimierungsfunktionen sowohl explizit als auch implizit über die Strukturantwort, z.B. Verschiebungen, Spannungen usw., von den Entwurfsvariablen ab. Am Beispiel der Zielfunktion $f(x)$ läßt sich dies folgendermaßen darstellen

$$\frac{df(x, u(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} \quad (8.8)$$

Bei linear elastischer Strukturanalyse ergibt sich die Strukturantwort aus

$$\mathbf{K}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{P}(x) \quad (8.9)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich die Verschiebungen vorab eliminieren, so daß diese im Optimierungsproblem gar nicht erst als Variablen auftauchen. Die Ableitungen der Verschiebungen lassen sich ermitteln aus der Differentiation der Systemgleichung (8.9) nach den Entwurfsvariablen

$$\frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \frac{d\mathbf{P}}{dx} \quad (8.10)$$

und erhält bei Einführung des "Pseudo–Lastvektors" $\bar{\mathbf{P}}$ die Form

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \bar{\mathbf{P}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \quad (8.11)$$

Damit läßt sich (8.8) umformen zu

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}} \quad (8.12)$$

An dieser Stelle kann dann zwischen direkter und adjungierter Methode, abhängig von der Bearbeitung des Terms $\frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}}$, unterschieden werden. Die direkte Methode verwendet beim Rückwärtseinsetzen in die zerlegten Steifigkeitsmatrix den Pseudolastvektor, und danach findet die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial u}$ statt. Bei der adjungierten Methode wird $\frac{\partial f}{\partial u}$ rückwärts eingesetzt und mit $\bar{\mathbf{P}}$ multipliziert. Da das Rückwärtseinsetzen etwas

mehr Rechenzeit benötigt, ist also bei vielen Optimierungsvariablen und wenigen Nebenbedingungen und Lastfällen die direkte Methode vorzuziehen, wie die Anzahl der Gleichungslösungen mit verschiedenen rechten Seiten zeigt. Bei vielen Beispielen fällt dieser Unterschied aber kaum ins Gewicht, da die Berechnung von $\frac{d\mathbf{P}}{dx}$ und $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$ die Rechenzeit im wesentlichen bestimmt.

Eine viel wichtigere Unterscheidung bringt die Einteilung in finites Differenzenverfahren, semi-analytische und analytische Gradientenberechnung. Die Differenzenmethode approximiert die Funktionsableitung durch die Differenzenbildung zweier Funktionsauswertungen

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \approx \frac{f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} \quad (8.13)$$

Die Problematik der Wahl des geeigneten Vorwärtsschrittes $\Delta\mathbf{x}$ liegt sofort auf der Hand. Auch ist zu beachten, daß im allgemeinen an der neuen Stelle $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ eine komplette Strukturanalyse mit der sehr aufwendigen Zerlegung der Steifigkeitsmatrix durchgeführt werden muß. Der Programmieraufwand bleibt gering und Eingriffe in das finite Elemente-Modul werden vermieden.

Das semi-analytische Verfahren approximiert Steifigkeitsmatrix und Lastvektor durch Differenzenbildung und verarbeitet diese Information analytisch weiter:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \approx \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} \mathbf{u} \right) \quad (8.14)$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \mathbf{u}}{\Delta\mathbf{x}} \right) \quad (8.15)$$

Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die einmal zerlegte Steifigkeitsmatrix für alle Ableitungen verwendet werden kann und nur die rechte Seite für die Gleichungslösung rückwärts eingesetzt wird. Durch Differenzenbildung für \mathbf{K} und \mathbf{P} sind keine Eingriffe in den Analyseteil des finite Elementprogramms notwendig. Somit können neue Elementformulierungen und Verbesserungen auch für die Optimierung sofort verwendet werden. Die Anforderungen an die richtige Wahl des Differenzschrittes $\Delta\mathbf{x}$ und die Gefahr von Genauigkeitsproblemen sind hier am größten und werden in Kapitel 8.5.1 nochmals aufgegriffen.

Die höchste Genauigkeit und Zuverlässigkeit erreicht die analytische Gradientenberechnung. Ausgehend von den Formfunktionen der finiten Elemente werden alle weiteren Terme, im wesentlichen durch wiederholte Anwendung der Produkt- und Kettenregel, analytisch abgeleitet (Kimmich (1990)). Sie findet in dieser Arbeit keine Verwendung, da sie Eingriffe in den Strukturanalyseteil der Berechnungsprogramme erfordert und damit einen enormen Programmieraufwand nach sich zieht.

Zusammenfassend läßt sich also feststellen, daß die numerische Gradientenberechnung nicht in Frage kommt, da für jede Variable eine neue Steifigkeitsmatrix zerlegt werden muß und dies bei vielen Strukturfreiheitsgraden den dominierenden Teil der Rechenzeit ausmacht. Die analytische Methode verbietet sich deshalb, weil die Optimierung sonst den Entwicklungen in der finiten Elementetechnologie ständig hinterher hinkt. Jede Neuerung müßte dann analytisch abgeleitet werden, was zum Teil sehr aufwendig und kompliziert werden kann.

8.5.1 Semi-analytische Gradientenberechnung

Zahlreiche Aufsätze behandeln die hohe Fehleranfälligkeit und Sensibilität gegenüber der Größe des Differenzenschrittes der semi-analytischen Gradientenberechnung, zum Beispiel Barthemely, Haftka (1988), Olhoff, Rasmussen (1990), Cheng et al. (1990), Mlejnek (1992), Cheng, Olhoff (1993), Park (1993). Es wird sogar zum Teil, z.B. am Beispiel eines Kragbalkens, gezeigt, daß der Fehler bei feinerer Diskretisierung zunimmt, was nicht in das finite Elementekonzept paßt und deshalb diese Methode eigentlich verbietet. Jedoch werden dort bei der Verfeinerung gleichzeitig die Maße des Tragwerks so verändert, daß die Schlankheit sich erhöht. Eine Verfeinerung bei gleichbleibenden Tragwerksabmessungen und Belastung führt bei dem angesprochenen Beispiel zu keiner Verschlechterung der Sensitivitäten, und der Fehler ist wohl eher bei der zunehmenden Schlankheit zu suchen.

Die Ursache für Ungenauigkeiten und Verbesserungsvorschläge finden sich bei den folgenden Autoren. Olhoff, Rasmussen bestimmen Korrekturfaktoren durch Vorwärtsdifferenzen. Cheng, Olhoff erklären die Ursache durch Starrkörperverschiebungen und -rotationen und verwenden dies zur Korrektur. Mlejnek zerlegt die Steifigkeitsterme in seine Einzelteile, Operator-, Werkstoff- und nochmal Operatormatrix. Nach getrennter numerischer Differenzenbildung werden diese Anteile durch die Produktregel wieder zum differenzierten Steifigkeitsterm zusammengesetzt. Park stellt fest, daß das zentrale Differenzenverfahren bei vielen kritischen Fällen ausreichende Genauigkeit erzielt.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten diese extrem schlechten Ableitungen nicht beobachtet werden. Das liegt vor allem auch daran, daß ein so relativ großer Vorwärtsschritt, wie er manchmal in der Literatur auftaucht, keine Verwendung fand. Ein brauchbarer Schritt $\Delta \mathbf{x}$ liegt im Bereich

$$10^{-4} \leq \frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}_{\text{char.}}} \leq 10^{-8} \quad (8.16)$$

Mit $\mathbf{x}_{\text{char.}}$ wird ein zur entsprechenden Variable gehörendes charakteristisches Maß, zum Beispiel bei Formvariablen die Länge, Höhe oder Breite des Tragwerks oder bei Dickenvariablen die Maximaldicke, bezeichnet.

Da die Genauigkeitsanforderungen meist gar nicht so hoch sind – Fehler im Prozentbereich haben kaum negative Auswirkungen auf die Optimierungsprozedur – kommen die genannten Korrekturverfahren nicht zum Einsatz.

Für Vergleichsberechnungen, zur Kontrolle des Vorwärtsschrittes oder bei hohen Genauigkeitsanforderungen, erweist sich das zentrale Differenzenverfahren als geeignetes Instrument. Im Vergleich zu den anderen geschilderten Korrekturmethode ist der zusätzlich Programmieraufwand minimal und erfordert vor allem keine Eingriffe in den finiten Elemente–Analyseteil.

Dem Argument, doppelte Rechenzeit für die Sensitivitätsanalyse bei zweimaligem Aufstellen der Steifigkeitsmatrix, steht die bis zu vierfache Rechenzeit beim Aufstellen der analytisch abgeleiteten Steifigkeitsmatrix gegenüber (Kimmich (1990)). Dieser hohe Aufwand bei allgemeinen Formvariablen, also nicht nur Dicken–, bzw. Querschnittsvariablen, erklärt sich durch das wiederholte Anwenden von Produkt– und Kettenregel für die abgeleiteten Steifigkeitsterme.

Hier muß noch untersucht werden, ob und für welche Fälle das zentrale Differenzenverfahren gar weniger Rechenzeit als die analytische Methode benötigt. Für eine Steigerung der Genauigkeit der semi–analytischen Methode können auch noch mehr Stützstellen ausgewertet und Interpolationsfunktionen aufgebaut werden (vgl. Kapitel 7).

9 Optimierung mit Eigenwertberechnungen

In Ergänzung zur linearen Analyse für die Berechnung des Strukturverhaltens bieten Eigenwertberechnungen interessante Möglichkeiten, um Tragwerke zu konzipieren. Mit der Anfangsstabilitätsanalyse

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.1)$$

unter Verwendung der linearen und geometrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und \mathbf{K}_g , läßt sich die Beullast für lineares Vorbeulverhalten sehr gut abschätzen. Zur Einbringung geometrisch nichtlinearer Effekte kann die Eigenwertberechnung in Anlehnung an Kapitel 3.7 modifiziert werden:

$$(\mathbf{K}_T - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.2)$$

$$(\mathbf{K}_T - \lambda \Delta \mathbf{K}_T) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.3)$$

$$((\mathbf{K} + \mathbf{K}_u) - \lambda \mathbf{K}_g) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.4)$$

$$(\mathbf{K} - \lambda(\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g)) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.5)$$

Mit \mathbf{K}_T , \mathbf{K}_u und $\Delta \mathbf{K}_T$ werden die Tangenten-, die Anfangsverschiebungsmatrix und die Änderung der Steifigkeitsmatrix entlang des Gleichgewichtspfades bezeichnet. Die Matrizen \mathbf{K}_T , \mathbf{K}_u , \mathbf{K}_g bzw. $\Delta \mathbf{K}_T$ entstehen an einem ausgewählten Gleichgewichtszustand. Je näher dieser Gleichgewichtspunkt am Versagenspunkt liegt, umso besser funktioniert die Approximation der Versagenslast durch die Eigenwertberechnung. Becker (1992) schlägt für die Optimierung mit geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten die Eigenwertberechnung nach Gleichung (9.2) vor, wobei der Lastverformungszustand für die Aufstellung von \mathbf{K}_T durch die Optimierungsprozedur gesteuert wird und sich während des Optimierungsfortschrittes immer mehr dem Versagenspunkt annähert.

Weitere sinnvolle Kriterien zur Strukturoptimierung liefert eine Eigenfrequenzberechnung

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9.6)$$

mit der Massenmatrix \mathbf{M} . Die Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz bei vorgegebener Masse bedeutet gleichzeitig die Maximierung der Steifigkeit. Auch das Vermeiden von Resonanzen kann ein wichtiger Punkt für die Auslegung von Tragwerken sein.

Nachfolgend wird die Integration der Eigenwertberechnung in die Strukturoptimierung und deren Bedeutung auch im Hinblick auf die Optimierung mit geometrisch nichtlinearen Verhalten an einem Beispiel gezeigt. Auch für die Eigenfrequenzanalyse, die hier eigentlich nur der Vollständigkeit halber auftaucht, fand sich ein sehr anschauliches Beispiel.

9.1 Optimierungmodell mit Eigenwerten

Die Eigenwerte aus den Eigenwertberechnungen nach (9.1) bis (9.5) finden über die in Bild 9.1 aufgezeigten Funktionen Eingang in die Optimierung.

Zielfunktionen $f(\mathbf{x})$	
a) $f = \lambda$	Minimierung
b) $f = -\lambda$	Maximierung
c) $f = \sum_i (\lambda_i - \lambda_{i0})^2 \cdot w_i$	Ausgleichsfunktion / Tuning
d) $f = \frac{1}{p} \ln \sum_i e^{p \cdot \lambda_i}$	Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion
Nebenbedingungen $g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$	
$g = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i0}} - 1 \geq 0$	oder $g = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i0}} - 1 \leq 0$
$h = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i0}} - 1 = 0$	
Bound–Formulierung mit der Bound–Variablen β	
e) $f = \beta$	
und zusätzlichen Nebenbedingungen	
$g = \lambda_i - \beta \geq 0$	

Bild 9.1: Eigenwertberechnungen in der Strukturoptimierung

Die hier aufgeführten Funktionen werden an Beispielen in den Kapiteln 9.5 und 9.6 genauer erläutert. Vorab sei nur erwähnt, daß das Auftreten mehrerer Eigenformen und zugehöriger Eigenwerte im maßgebenden Bereich die Verwendung solcher Funktionen wie Ausgleichsfunktion, Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion (Kreisselmeier, Steinhauser (1983)) oder Bound–Formulierung notwendig macht.

9.2 Sensitivitäten von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die Kontraktion der Eigenwertgleichung (9.1) mit dem Eigenvektor ϕ

$$\phi^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g) \phi = 0 \quad (9.7)$$

führt durch Differentiation bezüglich der Designvariablen \mathbf{x} zu

$$\phi^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mathbf{K}_g \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\mathbf{K}_g}{dx} \lambda \right) \phi + \underbrace{2 \phi^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g)}_{=0} \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (9.8)$$

und durch Umformung zur Ableitung des Eigenwerts

$$\frac{d\lambda}{dx} = - \frac{\phi^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda \frac{d\mathbf{K}_g}{dx} \right) \phi}{\phi^T \mathbf{K}_g \phi} \quad (9.9)$$

Dieses Ergebnis, eingesetzt in die nicht kontraktierte Eigenwertgleichung, ermöglicht die Berechnung der Sensitivität des Eigenvektors

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g) \frac{d\phi}{dx} = - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mathbf{K}_g \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\mathbf{K}_g}{dx} \lambda \right) \phi \quad (9.10)$$

Die zu invertierende Systemmatrix $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g)$ ist nach Gleichung (9.1) singulär und es existiert eine Lösung für $\frac{d\phi}{dx}$ nur dann, wenn die rechte Seite von (9.10) im Bild der Systemmatrix liegt. Da dies nach Gleichung (9.9) die Bedingung für die Berechnung von $\frac{d\lambda}{dx}$ war, kann Gleichung (9.10) zum Beispiel durch die Anwendung der Methode nach Nelson (1976) (vgl. auch Anhang) gelöst werden.

In der Literatur werden zur Lösung der Eigenvektorsensitivität noch andere Wege beschritten, von denen hier nur einige wenige aufgezählt werden sollen. Fox, Kapoor (1968) schlagen eine Methode vor, die auf der Rangkorrektur durch das Dyadenprodukt $\phi \phi^T$ des Eigenvektors beruht. Whitesell, Jr. (1981) verwendet zur Lösung die verallgemeinerte Inverse. Weitere Übersichten und Ergänzungen finden sich in Adelman, Haftka (1986) und Dailey (1987).

Die Sensitivitäten für die Eigenwertberechnungen nach Gleichungen (9.2) bis (9.5) lassen sich durch analoges Vorgehen leicht herleiten. Bei Verwendung der Eigenfrequenzgleichung (9.6) muß für die Sensitivitätsanalyse nur \mathbf{K}_g gegen \mathbf{M} ausgetauscht werden:

$$\frac{d\lambda}{dx} = - \frac{\phi^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \lambda \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} \quad (9.11)$$

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \frac{d\phi}{dx} = - \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mathbf{M} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\mathbf{M}}{dx} \lambda \right) \phi \quad (9.12)$$

Bei entsprechender Normierung der Eigenvektoren, zum Beispiel $\phi^T \mathbf{M} \phi = 1$, lassen sich die Gleichungen noch etwas vereinfachen. Da die Berechnung von $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$, $\frac{d\mathbf{K}_g}{dx}$ beziehungsweise $\frac{d\mathbf{M}}{dx}$ durch numerische Differenzenbildung erfolgt (vgl. Kapitel 8.5), kommt hier also auch die semi-analytische Gradientenberechnung zum Einsatz. Es ist noch wichtig anzumerken, daß dies totale Ableitungen darstellt. Da die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nicht von den Verschiebungen abhängt, gilt $\frac{d\mathbf{K}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x}$. Die partielle Ableitung kann direkt durch den Differenzschritt gewonnen und verwendet werden. Die Matrix \mathbf{K}_g hängt aber von den Verschiebungen ab, und die totale Ableitung schreibt sich

$$\frac{d\mathbf{K}_g}{dx} = \mathbf{K}_{g,x} + \mathbf{K}_{g,u} \frac{du}{dx} \quad (9.13)$$

Die Änderung der Verschiebungen berechnet sich nach Gleichung (8.11), wird jedoch häufig vernachlässigt. Die Berechnung der Sensitivitäten der Zielfunktionen c) und d) in Bild 9.1 erfordert noch weitere Arbeit und führt durch Differentiation auf folgende Ausdrücke:

$$c) \quad \frac{df}{dx} = \sum_i \frac{p}{2} \left((\lambda_i - \lambda_{i0})^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \cdot 2(\lambda_i - \lambda_{i0}) \frac{d\lambda}{dx} \cdot w_i \quad (9.14)$$

$$d) \quad \frac{df}{dx} = \frac{\sum_i e^{\rho\lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{dx}}{\sum_i e^{\rho\lambda_i}} \quad (9.15)$$

in die die nach Gleichung (9.9) bzw. (9.11) berechneten Werte direkt eingesetzt werden.

9.3 Eigenwertberechnung

Nach der Aufstellung der notwendigen Matrizen innerhalb einer finiten Elementeanalyse stehen die in Bild 9.2 aufgeführten Eigenwertlöser zur Verfügung. Sie können u.a. in Bathe (1976) und Moler, Stewart (1973) vertieft werden.

<u>Vektoriterationsmethoden</u>	
inverse Vektoriteration	→ niedrigster Eigenwert / Eigenvektor
von Mises Vektoriteration	→ größter Eigenwert / Eigenvektor
<u>Transformationsverfahren</u>	
allgemeines Jacobi–Verfahren	→ alle Eigenwerte / Eigenvektoren
QZ–Algorithmus (Moler/Stewart)	→ alle Eigenwerte / Eigenvektoren, auch negative Eigenwerte

Bild 9.2: Eigenwertlöser

Da die meisten Optimierungsprobleme die Berechnung mehrerer Eigenwerte erfordern und die bei vielen Freiheitsgraden nicht vertretbare Berechnung aller Eigenwerte aber vermieden werden soll, findet der Subspace–Algorithmus nach Bathe (1976) Anwendung. Durch die zu wählende Anzahl der Iterationsvektoren wird eine Folge von Unterraumproblemen erzeugt, die dann jeweils mit dem allgemeinen Jacobi– oder dem QZ–Verfahren gelöst werden können. Da der QZ–Algorithmus keine Einschränkung bezüglich negativer Eigenwerte besitzt, wird er bevorzugt eingesetzt. Die Effizienz des Subspace–Algorithmus hängt sehr stark von der Qualität der Startvektoren für die Iteration ab. Der Aufwand kann demzufolge durch die Verwendung der Eigenvektoren aus einem vorhergehenden Optimierungsschritt beträchtlich reduziert werden.

9.4 Identifikation der Eigenformen bei Vertauschen der Reihenfolge

Während der Lösungsphase werden die Eigenwerte und Eigenvektoren nach aufsteigender Größe der Eigenwerte geordnet. Manche Optimierungsaufgaben machen es notwendig, das Vertauschen von Eigenformen in der vom Eigenwertlöser erzeugten Reihenfolge festzustellen und die zu bestimmten Eigenformen gehörenden Eigenwerte herauszufiltern. Die Eigenformen eines Optimierungsschrittes lassen sich sehr einfach denen des vorherigen durch Ausnutzen der Orthogonalitätseigenschaften zuordnen

(Pfeiffer (1991)). Für die Eigenfrequenzberechnung nach (9.6) und Normierung der Eigenformen bezüglich der Massenmatrix, daß gilt

$$(\phi^T)^k \mathbf{M} (\phi)^k = 1 \quad , \quad (9.16)$$

werden die Eigenformen des aktuellen Optimierungsschrittes k mit denen des vorherigen $k-1$ verglichen

$$\begin{aligned} (\phi_i^T)^k \mathbf{M} (\phi_j)^{k-1} &\approx 1 \quad \text{für äquivalente Eigenvektoren} \\ &\approx 0 \quad \text{für verschiedene Eigenvektoren} \end{aligned} \quad (9.17)$$

Der i -te Eigenvektor der aktuellen Iteration ist also dem i -ten Eigenvektor der vorhergehenden Iterationen, für den der skalare Wert nach (9.17) am größten wird (beziehungsweise nahe bei 1 liegt) zuzuordnen. Der Aufwand ist verschwindend gering bei Verwendung einer Lumped-Mass-Formulierung (Burmeister (1987)) für die Massenmatrix. Auch bei einer konsistenten Massenformulierung oder bei Verwendung der geometrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g bleibt der Aufwand gering.

9.5 Beispiel: beidseitig eingespannter Druckstab

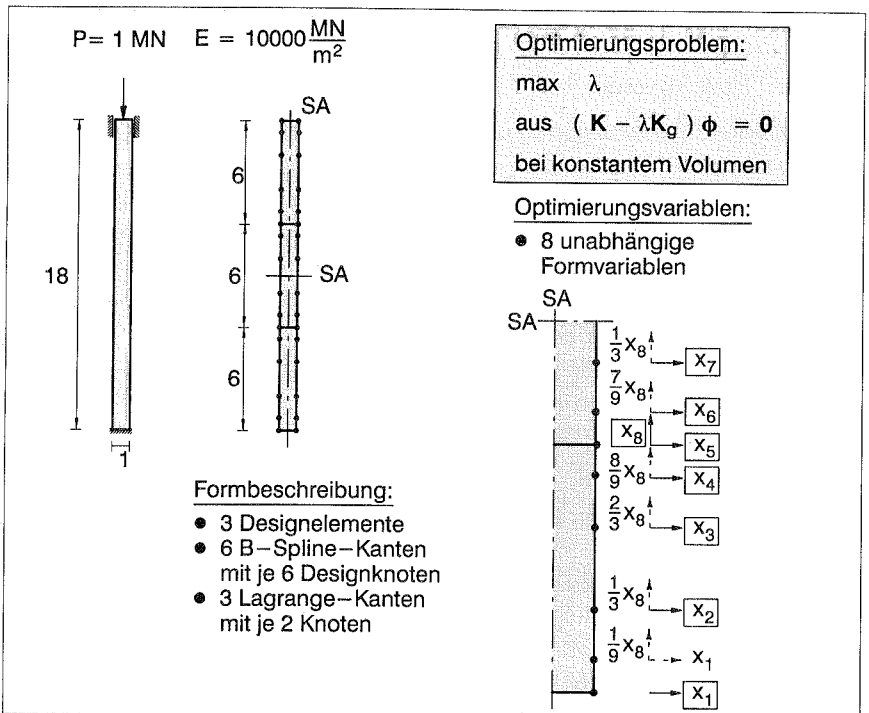


Bild 9.3: Beidseitig eingespannter Druckstab

Das Optimierungsproblem der Suche nach der Form des beidseitig eingespannten Druckstabes für eine maximale Knicklast erweist sich als weitaus komplizierter als man auf den ersten Blick erahnen kann. Der Grund dafür liegt beim Auftreten von zwei Beulformen, die maßgebend werden können. Das daher interessante Beispiel wurde auch schon u.a. von Tadjbaktish, Keller (1962), Olhoff, Rasmussen (1977) und Becker (1992) studiert.

Die Abmessungen, die Formbeschreibung und die Wahl der Optimierungsvariablen, die nur eine zweifach symmetrische Form zuläßt, können Bild 9.3 entnommen werden. Die Berechnungen mit 28 achtknotigen isoparametrischen 2x2 unterintegrierten Scheibenelementen liefern die in Bild 9.4 dargestellten ersten beiden Eigenformen und die zugehörigen Knicklasten $P_1 = \lambda_1 \cdot P$ und $P_2 = \lambda_2 \cdot P$. In Klammern sind die Euler-Knicklasten unter Verwendung der entsprechenden Knicklängen s_k angegeben.

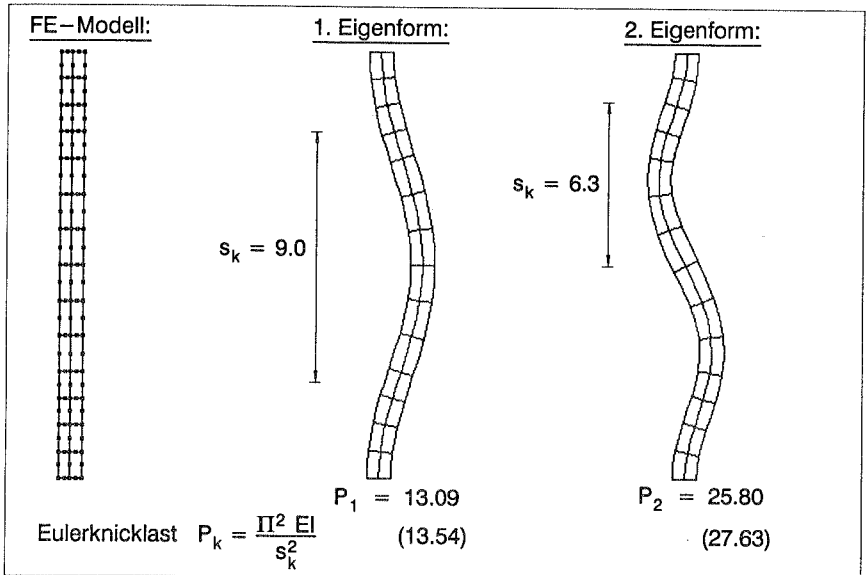


Bild 9.4: Eigenformen und Knicklasten

Die Maximierung der zur ersten Eigenform gehörenden Knicklast ohne Berücksichtigung der zweiten Eigenform resultiert in der in Bild 9.5 gezeigten unimodalen Lösung. Die Analyse der entstandenen Form zeigt, daß die Knicklast für die zweite Eigenform jetzt aber maßgebend wird. An dieser Stelle wird nun klar, wofür die in Kapitel 9.1 gezeigten Funktionen und Techniken benötigt werden.

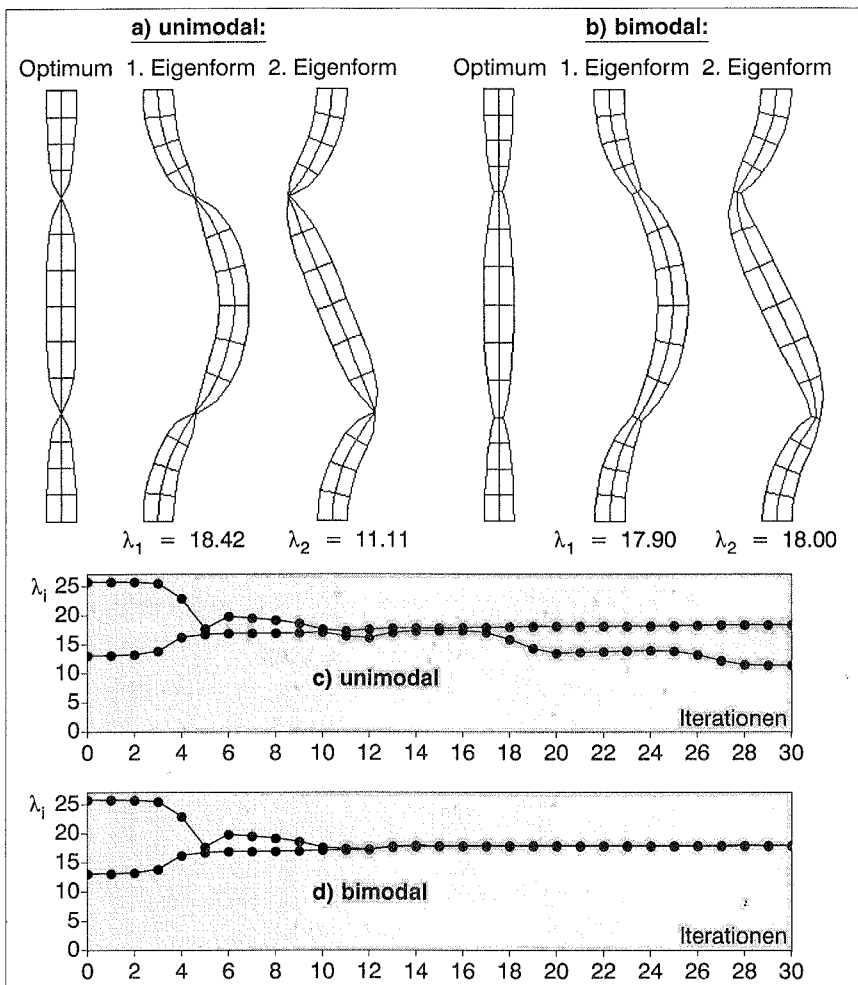


Bild 9.5: Optimierung – unimodale / bimodale Lösung

Um die unimodale Lösung zu erhalten, muß also das Vertauschen der Reihenfolge der Eigenformen mit der in Kapitel 9.4 gezeigten Technik während des Optimierungfortschrittes festgestellt werden. Dieses Vertauschen kann beim Auftragen der ersten beiden Knicklasten über den Optimierungsschritten in Bild 9.5 c) beobachtet werden. Beim Anwachsen der Knicklast der ersten Form wird die zweite Form zwar maßgebend, bleibt im Optimierungsproblem aber unberücksichtigt. Die Maximierung der jeweils kleinsten der beiden Knicklasten erzeugt die bimodale Lösung (Bild 9.5 d)). Wie der Verlauf der Eigenwerte während der Iteration deutlich macht, fallen die beiden ersten

Eigenwerte an der Lösung zusammen. Nachfolgend soll nun der Einsatz verschiedener Optimierungsmodelle studiert werden.

9.5.1 Bimodale Lösung mit unstetiger Ableitung der Zielfunktion

Die eigentliche Optimierungsaufgabe lautet

$$\max_x (\min (\lambda_1, \lambda_2))$$

bei konstantem Volumen. In Bild 9.6 ist diese Situation, allerdings vereinfachend nur für eine Optimierungsvariable x , dargestellt.

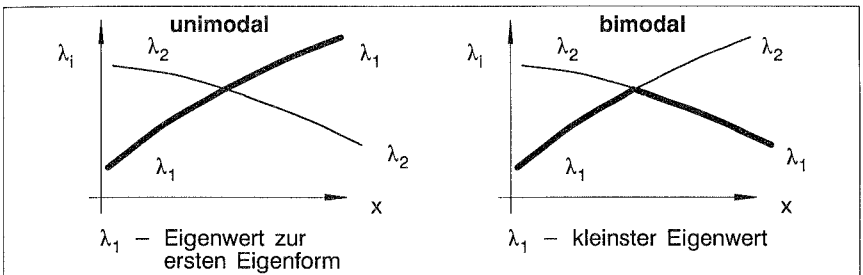


Bild 9.6: Unimodale / bimodale Lösung

Für die unimodale Lösung war es notwendig, die zur ersten Eigenform gehörende Knicklast herauszusuchen und als Zielfunktion zu verwenden. Im zweiten Fall wird einfach der kleinere Wert der Zielfunktion zugewiesen. Dies führt jedoch dazu, daß die Ableitungen der Zielfunktion unstetig werden, was wiederum zur Folge haben kann, daß Oszillationen auftreten. Bei der Gradientenberechnung mit der totalen Differenzenmethode ist noch zu beachten, daß beim Aufbringen des Vorwärtsschrittes und Zusammenfallen der Eigenwerte die Reihenfolge der Eigenformen überprüft werden muß. Ein Teil des in Bild 9.5 d) bereits gezeigten Iterationsverlaufs für die beiden Eigenwerte muß für den Vergleich der verschiedenen bimodalen Lösungswege herausvergrößert werden und führt hier zum Verlauf in Bild 9.7.

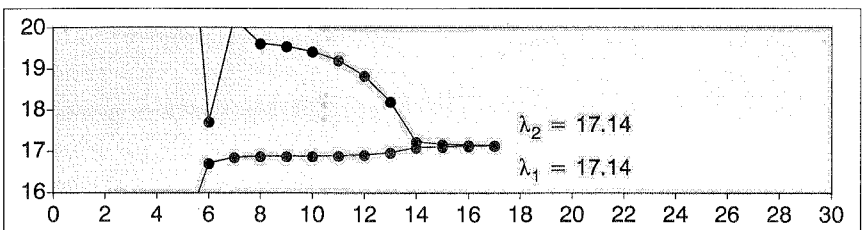


Bild 9.7: Iterationsverlauf bei unstetiger Ableitung

9.5.2 Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion

Unter Verwendung der Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion gestaltet sich das Optimierungsproblem folgendermaßen

$$\max_x \frac{1}{\rho} \ln(e^{\rho\lambda_1} + e^{\rho\lambda_2})$$

Bild 9.8 zeigt die Eigenwerte und die daraus resultierende Zielfunktion in Abhängigkeit von einer Variablen x .

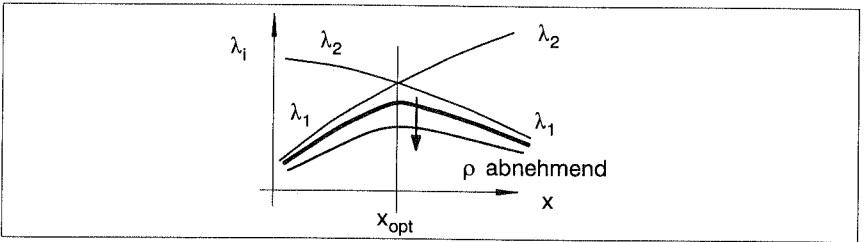


Bild 9.8: Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion

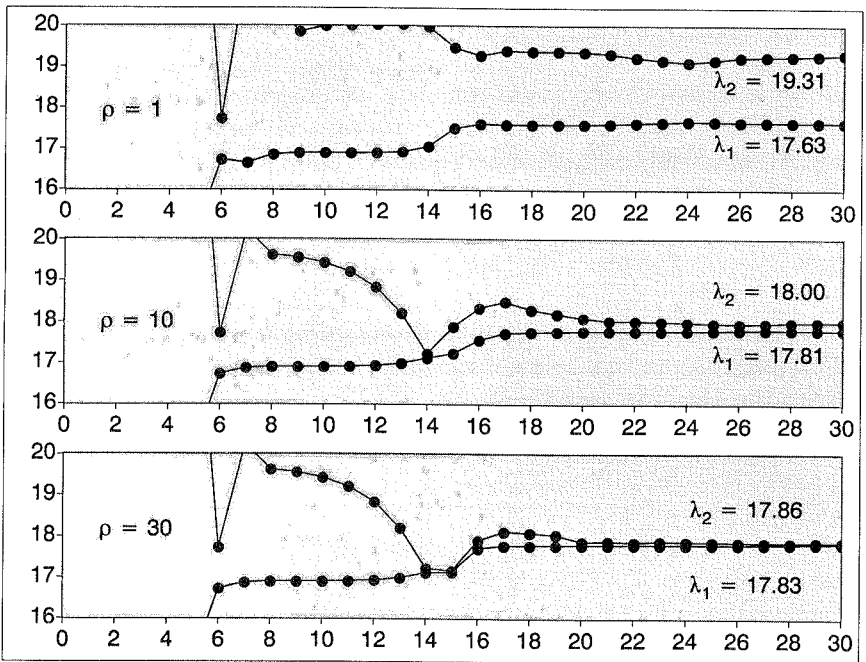


Bild 9.9: Iterationsverläufe bei Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion

Es entsteht eine C_1 -kontinuierliche Funktion, die genau am Schnittpunkt der Originalkurven das Optimum aufweist. Der Parameter ρ kontrolliert die Schärfe der Ausrundung (schärfer mit zunehmendem ρ). Die verschiedenen Iterationsverläufe bei variierendem ρ sind in Bild 9.9 zusammengetragen.

9.5.3 Bound-Formulierung

Für die Bound-Formulierung wird eine zusätzliche Variable β als untere Schranke eingeführt und gleichzeitig als Zielfunktionswert verwendet. Die Erweiterung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} & \max_{x, \beta} \beta \\ & \text{mit} \quad \lambda_1 - \beta \geq 0 \\ & \quad \quad \lambda_2 - \beta \geq 0 \end{aligned}$$

um die beiden Nebenbedingungen sorgt für die Maximierung der kleinsten Knicklast, ohne daß Unstetigkeiten in den Ableitungen von Zielfunktion oder Nebenbedingungen auftreten (Bild 9.10). Die Ableitungen der Zielfunktion bleiben konstant, für Formvariablen $\frac{df}{dx} = 0$ und für die Bound-Variable $\frac{df}{d\beta} = 1$.

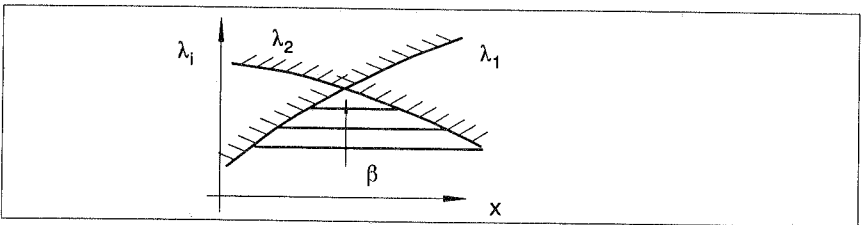


Bild 9.10: Bound-Formulierung

Durch die Bound-Formulierungen lassen sich die in Bild 9.11 dargestellten Verläufe erzeugen.

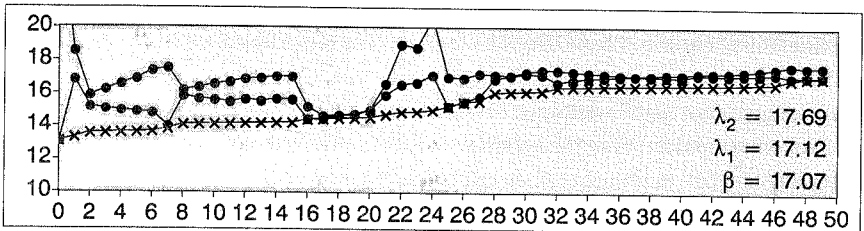


Bild 9.11: Iterationsverlauf bei Bound-Formulierung

Die Boundvariable nähert sich im Laufe des Iterationsprozesses von unten den beiden zusammenfallenden Eigenwerten an.

9.5.4 Abschließende Bewertung

Durch Zusatzmaßnahmen gelingt es, die Unstetigkeiten in den Ableitungen zu verhindern. Dadurch lassen sich für den Zielfunktionswert am Optimum kleine Verbesserungen erzielen. Die Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion erfordert jedoch die Einführung eines Parameters für die Schärfe der Ausrundung an der Unstetigkeit, der erst noch justiert werden muß. Der Zielfunktionsgewinn beträgt 4%, jedoch erfolgt die Verbesserung sehr langsam mit vielen Iterationen. Die Bound–Formulierung erreicht erst nach 50 Iterationen das Ergebnis aus Kapitel 9.5.1. Sie kann vielleicht noch Verbesserungen erzielen, jedoch erweist sie sich als sehr skalierungsempfindlich und aufwendig. Auch im Hinblick auf die Optimierung mit geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten ist diese Studie interessant. Dort wird die niedrigste kritische Last aus einer geometrisch nichtlinearen Berechnung maximiert. Es kann ebenfalls zu Situationen kommen, bei denen zwei oder mehrere Versagensformen sich vertauschen. Dort wird vorerst auf Zusatzmaßnahmen verzichtet und die Unstetigkeit in den Ableitungen in Kauf genommen, mit dem Wissen, daß in der Nähe des Optimums leichte Verbesserungen beim Iterationsverhalten möglich wären.

9.6 Beispiel: Formoptimierung einer Glocke

Dieses Beispiel behandelt die Modellierung einer wohlklingenden, gestimmten Glocke. Die Aufgabe erweist sich als ein sehr komplexes Problem, da sich der Glockenklang aus mehreren Teiltönen zusammensetzt. Das heißt, die Glocke schwingt nach dem Anschlagen in einer Form, die sich aus der Überlagerung mehrerer Resonanzschwingungsformen zusammensetzt (Schad, Warlimont (1973), Perrin et al. (1983), Walker (1984), Rossing, Perrin (1987), Lehr (1987) u.a.). Das Zusammenpassen der Teiltöne bestimmt die Qualität der Glocke. Neben den Tönen aus der harmonischen Reihe, d.h. Grund– und Oberschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind, tauchen auch noch andere Partialtöne auf. Bei einer gestimmten Glocke formen die Teiltöne einen Akkord, wobei eine Unterscheidung in Moll und Dur getroffen werden kann. Herkömmliche Glocken formen zwar meist einen Moll–Akkord, jedoch entstehen in jüngster Zeit vermehrt auch Durglocken. Der Grund dafür liegt bei der Anwendung solcher für Musikstücke in Dur. In der Literatur tauchen die Meinungen auf, daß die ersten sieben Partialtöne abgestimmt werden müssen (Roozen–Kroon (1992)). Dem steht jedoch auch gegenüber, daß wenn die ersten fünf stimmen, auch die nächsten automatisch sehr gut liegen (Perrin et al. (1983)). In das hier gezeigte Optimierungsproblem finden nur die ersten fünf Töne Eingang, jedoch bereitet die Berücksichtigung weiterer Teiltöne keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die Form der Glockenrippe soll so gestaltet werden, daß die in Bild 9.12 aufgeführten Frequenzanforderungen für die Moll– und Durglocke erfüllt sind. Als Ausgangspunkt dient die von Fleischer (1989)

ausgemessene Perner–Glocke, deren Querschnitt– und Materialkennwerte ebenfalls aus Bild 9.12 zu entnehmen sind.

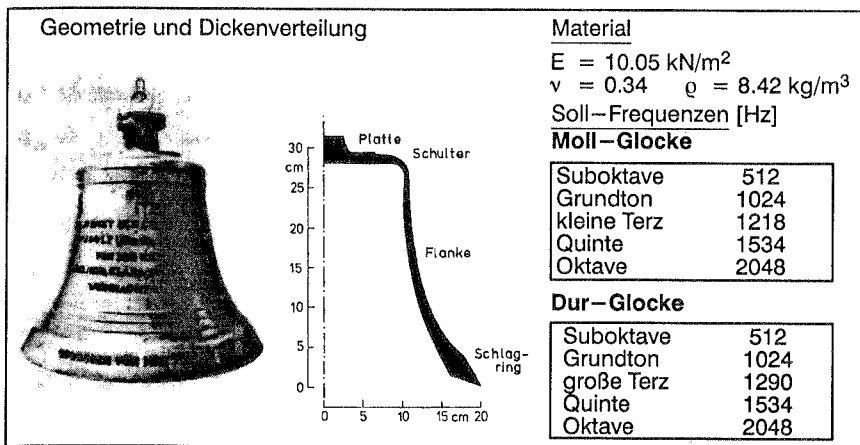


Bild 9.12: Ausgangsform (Fleischer (1989)) und Frequenzanforderungen

Zur Beschreibung der Optimierungsaufgabe kommt die in Bild 9.1 aufgeführte Ausgleichsfunktion als Zielfunktion zum Einsatz. Die Wichtungsfaktoren orientieren sich an den Sollfrequenzen, so daß es gilt, die Fehlerquadratfunktionen für die Eigenfrequenzen f_1 bis f_5

$$f_{\text{MOLL}} = \frac{(f_1 - 512)^2}{512^2} + \frac{(f_2 - 1024)^2}{1024^2} + \frac{(f_3 - 1290)^2}{1290^2} + \frac{(f_4 - 1534)^2}{1534^2} + \frac{(f_5 - 2048)^2}{2048^2}$$

$$f_{\text{DUR}} = \frac{(f_1 - 512)^2}{512^2} + \frac{(f_2 - 1024)^2}{1024^2} + \frac{(f_3 - 1218)^2}{1218^2} + \frac{(f_4 - 1534)^2}{1534^2} + \frac{(f_5 - 2048)^2}{2048^2}$$

zu minimieren. Auf die Berücksichtigung von Nebenbedingungen, z. B. konstantes Volumen oder Spannungsrestriktionen, wird verzichtet. Jedoch werden für die Glockenrippe Mindestdicken eingeführt, um sinnvolle Entwürfe zu gewährleisten. Diese Restriktionen sind am Optimum aber nicht aktiv.

Für die Beschreibung der rotationssymmetrischen Glockenform in Zylinderkoordinaten werden die z –Koordinaten, der Radius r und die Knotendicken an den in Bild 9.13 dargestellten Kontrollknoten eingeführt. Der Übergang vom Schlagring zur Flanke wird modelliert durch C_1 –Kontinuität der Mittelfläche und C_0 –Kontinuität für die Dickenverteilung an diesem Übergang. In den übrigen Bereichen liegen C_1 –kontinuierliche Mittelfläche und Dickenverteilung vor.

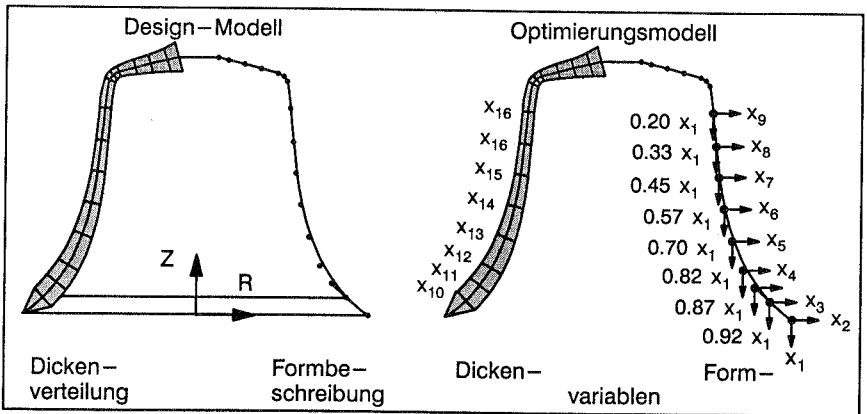


Bild 9.13: Form- und Dickenbeschreibung

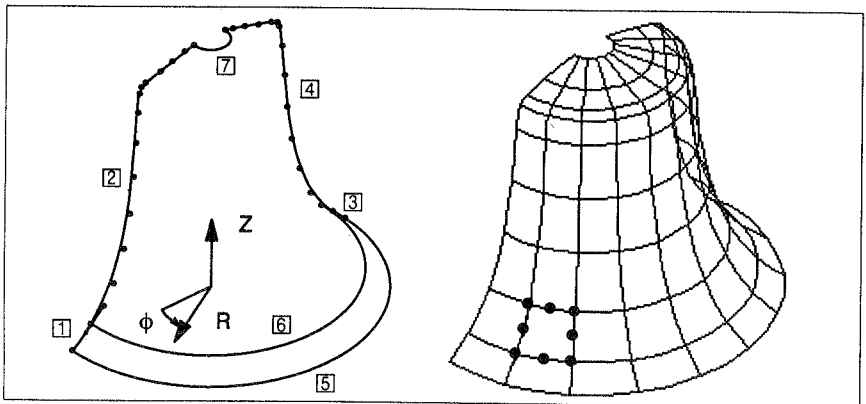


Bild 9.14: Räumliches Modell

Als Variablen finden ein Parameter für die Glockenhöhe, acht Radialwerte und sieben Dickenparameter Verwendung (s. Bild 9.13). Mit Hilfe dieser Knotendaten läßt sich das räumliche Glockenmodell in Bild 9.14 durch Einführung von Kanten und Design-Elementen erzeugen. Dieses räumliche Modell wird für jeden Optimierungsschritt erneuert und dann mit finiten Elementen vernetzt. Beim vorliegenden Beispiel kommt eine Diskretisierung mit 108 achtknotigen degenerierten isoparametrischen Schalelementen zum Einsatz. Die Berechnung kann am halben System mit Symmetriebedingungen durchgeführt werden, da die benötigten Eigenformen jeweils mindestens eine entsprechende Symmetrieebene aufweisen. Für die Massenmatrix wird eine Lumped-Mass-Formulierung eingesetzt. Sie hat dann Diagonalform, was sich sehr günstig auf die Rechenzeit auswirkt. Aus der Eigenwertberechnung mit dem Subspace-Algorithmus und

dem QZ-Löser (s. Kapitel 9.3) resultieren die in Bild 9.15 dargestellten ersten fünf Eigenformen. Sie werden auch in der oben genannten Literatur beschrieben und mit Messungen bestätigt. Die zugehörigen fünf Eigenfrequenzen f_1 bis f_5 gehen in die Zielfunktion ein.

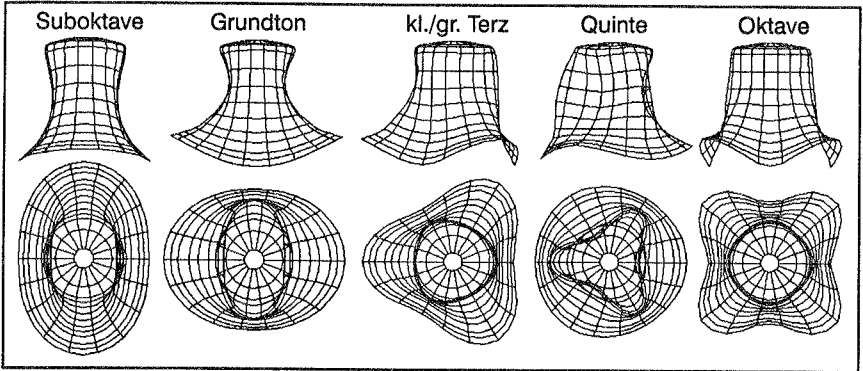


Bild 9.15: Eigenformen

Bei der nun durchgeführten Optimierung wurde von den in Kapitel 9.3 und 9.4 aufgeführten Optionen, Startvektoren für die Eigenwertberechnung aus dem vorherigen Optimierungsschritt und Identifikation der Eigenformen beim Vertauschen der Reihenfolge, Gebrauch gemacht. Als Optimierungsstrategie kommt das SQP-Verfahren mit BFGS-Update in Verbindung mit Line-Search-Strategien zum Einsatz. Die benötigten Ableitungen werden durch die Sensitivitätsanalyse, hier numerisches finites Differenzenverfahren, bereit gestellt.

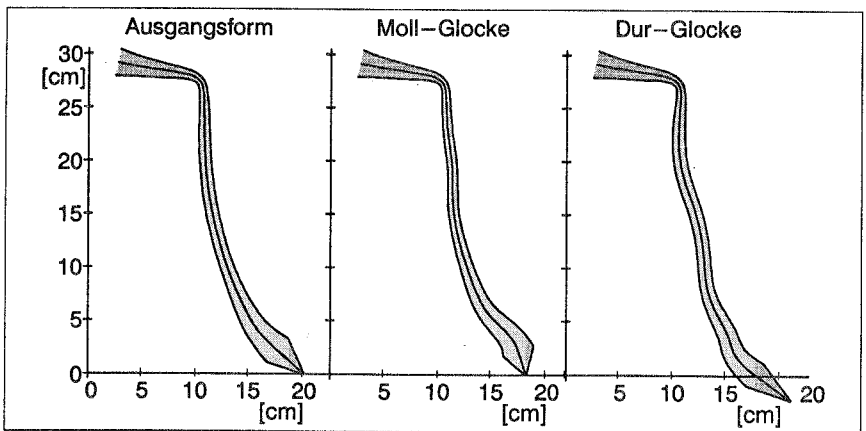


Bild 9.16: Formen für Moll- und Durglocke

Die Mollglocke in Bild 9.16 erfährt nur kleine Formänderungen, da ja die Ausgangsform auch schon eine Mollglocke war. Die Form der Durglocke weist als Hauptmerkmale eine Zunahme der Höhe und vor allem eine Ausbauchung auf halber Höhe auf (Bild 9.16). Ähnliche Formen wurden auch schon von Schoofs (1985), Schoofs et al (1987) und Roozen–Kroon (1992) veröffentlicht und experimentell bestätigt.

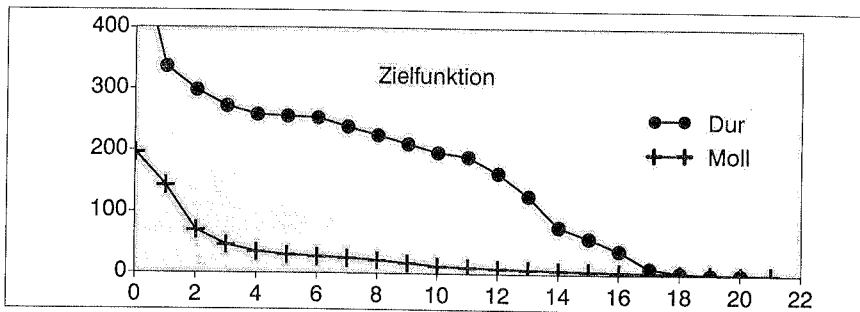


Bild 9.17: Zielfunktion

In Bild 9.17 und Bild 9.19 kann beobachtet werden, wie sich während des Optimierungsfortschrittes die Zielfunktion dem Wert 0 und die ersten drei Eigenfrequenzen ihrem Sollwert nähern. Den Unterschied zwischen Moll- und Durglocke verdeutlicht der Verlauf der dritten Eigenfrequenz, die sich im einen Fall dem Wert $f_3 = 1218$ Hz und im anderen Fall $f_3 = 1290$ Hz nähert. Die Tabelle in Bild 9.18 mit den Anfangsfrequenzen und den Ergebnissen verglichen mit den Sollfrequenzen verdeutlicht, mit welcher hoher Genauigkeit das Optimierungsziel erreicht wird. Daraus läßt sich ableiten, daß die Wichtung der einzelnen Frequenzen nicht so wichtig ist, wie es der Fall wäre, wenn nicht alle Frequenzanforderungen erfüllt werden könnten und nach einer Kompromißlösung gesucht werden müßte. Dieser Kompromiß wäre dann zu beeinflussen durch die Wahl von Wichtungsfaktoren, d.h. durch die Vorgabe, wie hoch die Bedeutung jeder einzelnen Frequenz für den Gesamtklang ist. Hier haben diese Wichtungen also nur Einfluß auf das Konvergenzverhalten und nicht auf die Einhaltung der Frequenzvorgaben am Optimum.

	Ausgangsform	Optimum	
		Moll	Dur
Suboktave	512.9	512.2	512.2
Grundton	1004.0	1023.8	1024.0
kl./gr. Terz	1239.0	1218.2	1289.6
Quinte	1534.2	1534.4	1533.9
Oktave	2064.8	2049.0	2046.5

Bild 9.18: Eigenfrequenzen am Optimum

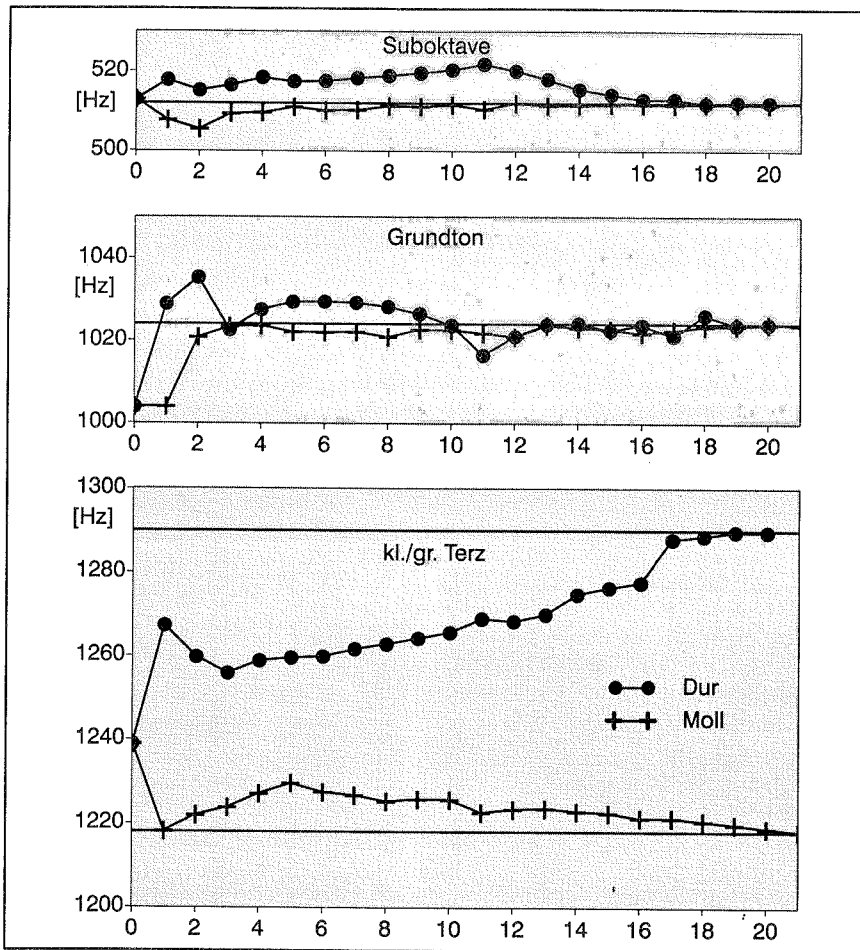


Bild 9.19: Eigenfrequenzen

Auch bei der Wahl anderer Optimierungsvariablen lassen sich mehr oder weniger unterschiedliche Formen erzeugen, die ebenfalls die Frequenzanforderungen sehr genau erfüllen. Diese Formen können dann noch bezüglich anderer Gesichtspunkte, z. B. Produktionsaspekte, Anschlag- und Abklingverhalten, analysiert werden. Weitere Untersuchungen zu diesem Thema finden sich in Roozen-Kroon (1992). Abschließend sei auf die Verwirklichung von Durglocken in einem Glockenspiel, beschrieben in Lehr (1987) und dargestellt in Bild 9.20, hingewiesen.

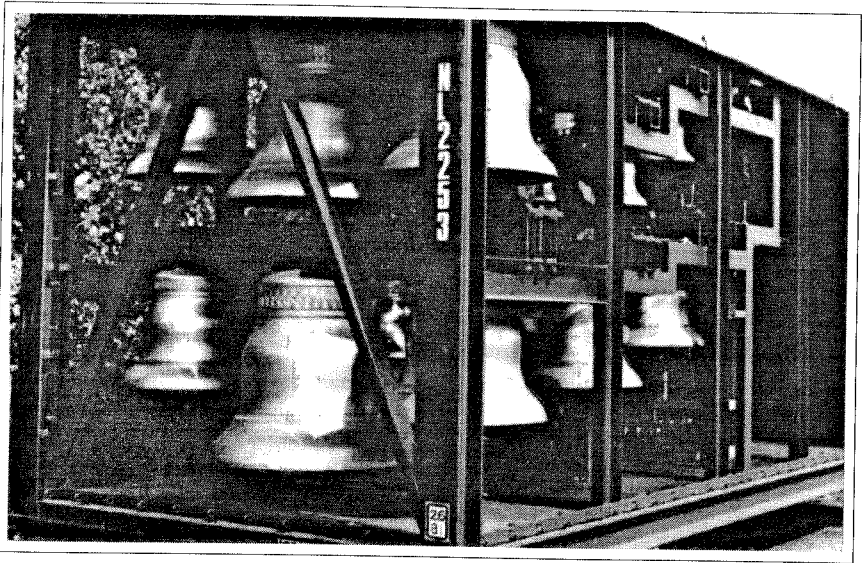


Bild 9.20: Glockenspiel mit Durglocken

10 Optimierung bei geometrischer Nichtlinearität unter Berücksichtigung von Imperfektionen

Gerade beim Einsatz der Optimierung zur Steigerung der Tragwerkseffizienz gelangt man sehr schnell in Bereiche, in denen auch das Stabilitätsverhalten der Tragwerke berücksichtigt werden muß. Solche Optimierungsaufgaben, wie z.B. Minimierung des Volumens, der Formänderungsenergie oder Maximierung der Steifigkeit, führen häufig zu dünnwandigen druckbeanspruchten oder fachwerkartigen Tragwerken oder Bauteilen. Sie tragen ihre Belastung hauptsächlich über Membran- bzw. Druck- und Zugbeanspruchungen ohne Biegung ab. Solche Strukturen zeigen meist ein ausgeprägtes geometrisch nichtlineares Verhalten, das bei Druckbeanspruchung zu Stabilitätsversagen führen kann. Solche Stabilitätsphänomene können beim Eulerstabknicken oder beim Schalenbeulen (Bild 10.1) beobachtet werden. Diese Tragwerke können auch äußerst empfindlich reagieren bei geringen Abweichungen von der Optimalform oder sonstigen Imperfektionen, z.B. leicht veränderter Laststellung oder Lagerbedingungen.

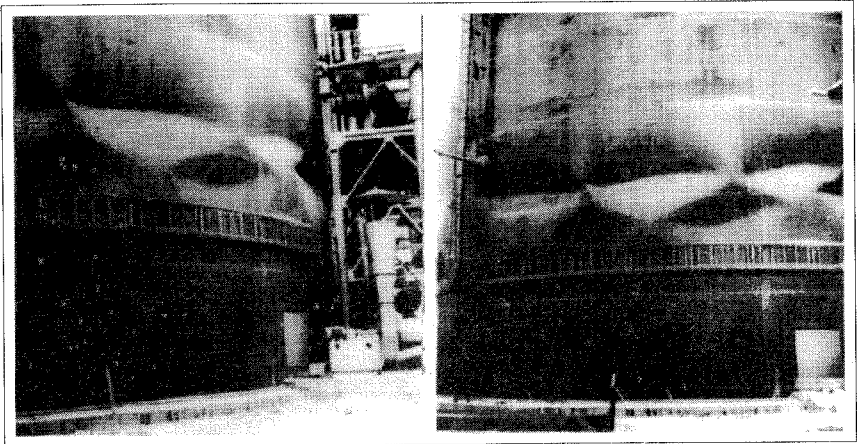


Bild 10.1: Gebeulte Standzarge einer Karbidsilo-Anlage (Bornscheuer (1976))

Die in der Optimierung meist verwendete lineare Strukturanalyse kann solche Effekte nicht beschreiben. Die lineare Anfangseigenwertberechnung mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix (Kapitel 9) kann als ein erster Ansatz eingesetzt werden. Komplexes Stabilitätsverhalten und vor allem auch die Imperfektionsempfindlichkeit können jedoch nur über vollständige geometrisch nichtlineare Strukturanalysen richtig erfaßt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die materiellen Nichtlinearitäten, die bei manchen nicht ganz so schlanken Tragwerken sicher auch eine wichtige Rolle spielen, vernachlässigt.

Dieses Kapitel behandelt nun die Einbindung der geometrischen Nichtlinearität bzw. des Stabilitätsverhaltens und auch der Imperfektionsanfälligkeit in das oben gezeigte Optimierungskonzept. Das bedeutet die Verwendung von Verfahren der mathematischen Programmierung unter Ausnutzung von Sensitivitätsanalysen zur iterativen Lösung der hochgradig nichtlinearen Optimierungsaufgaben. Schon jetzt läßt sich die entstehende Problematik, die im nächsten Kapitel dann ausführlich diskutiert wird, erkennen. Es sind nun zwei nichtlineare Gleichungssysteme, nämlich das nichtlineare Optimierungsproblem und die nichtlineare Strukturanalyse, gleichzeitig zu lösen.

Im folgenden wird eine Prozedur vorgestellt, die es ermöglicht, diese komplexe Aufgabe der Optimierung stabilitätsgefährdeter Strukturen zu lösen. Dabei kann auch die Empfindlichkeit gegenüber geometrischen Imperfektionen in das Optimierungsproblem integriert werden. Die Sensitivitätsanalyse erweist sich als besonders effizient, da sie, obwohl die geometrisch nichtlineare Strukturanalyse Iterationen erfordert, ohne Iterationen auskommt. Nach einer umfassenden Diskussion der Arbeitsweise und der Möglichkeiten der hier vorgestellten Methode wird diese mit anderen Verfahren verglichen, und es wird verdeutlicht, warum diese Strategie aufgegriffen wurde.

10.1 Formulierung der Optimierungsaufgabe

Die Aufgabe der Maximierung der aufnehmbaren Belastung bei gleichzeitig minimalem Materialaufwand (oder auch sonstiger Kosten) läßt sich formulieren als

$$1.) \quad \max \lambda_c$$

$$\frac{V}{V_0} - 1 = 0$$

mit λ_c als kritischem Lastfaktor, bei dem Versagen auftritt. Das Volumen V wird gleich dem vorgegebenen Volumen V_0 konstant gehalten. Das duale Problem lautet

$$2.) \quad \min V$$

$$\lambda \leq \lambda_c$$

d.h. bei Minimierung des Volumens muß die kritische aufnehmbare Last größer oder gleich der vorhandenen sein. Der kritische Lastfaktor λ_c stammt hierbei aus einer geometrisch nichtlinearen Beschreibung des Gleichgewichtszustandes und der Bedingung für einen kritischen Punkt (vgl. "Strukturgleichungen" in Bild 10.2).

In dieser Arbeit wurde die erste Problemformulierung der Maximierung der kritischen Last weiterverfolgt, weil es dabei möglich ist, die wiederholte Strukturanalyse bei leicht verändertem Entwurf sehr effizient auszuführen. Außerdem entfällt dann die Problematik der Auswahl des aktiven Satzes von Nebenbedingungen, die gegeben wäre, wenn die den kritischen Lastfaktor enthaltende Nebenbedingung während des Optimierungsfortschrittes dann irgendwann aktiv wird. Die Umsetzung der zweiten Möglichkeit

könnte prinzipiell durch Modifikation einiger Steuerprogramme auch verwirklicht werden. Nach der Entscheidung für die erste Variante gelangt man über

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \lambda_c \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \quad & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \quad & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad ; \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_{\text{opt}}} \end{aligned} \tag{10.1}$$

zur Lagrangefunktion (vgl. Kapitel 8)

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}) = -\lambda_c(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{10.2}$$

und zu den beiden in Bild 10.2 zusammengefaßten nichtlinearen Gleichungssystemen.

Kuhn–Tucker Bedingungen:	$-\nabla_{\mathbf{x}} \lambda_c + \boldsymbol{\mu}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g} + \mathbf{v}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h} = \mathbf{0}$
	$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g} = \mathbf{0}$
$\nabla_{\mathbf{x}}$ – Gradient	$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$
	$\mathbf{h} = \mathbf{0}$
Strukturgleichungen:	$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c, \lambda_c) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{K}_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c, \lambda_c) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$
	$l(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$

Bild 10.2: Optimierungsproblem

Hier kann nochmal die Verwandtschaft der Kuhn–Tucker–Bedingung mit den Gleichgewichtsgleichungen ergänzt durch Nebenbedingungen erkannt werden. In Kapitel 8.4. wird schon darauf hingewiesen, daß die bei der iterativen Lösung der Kuhn–Tucker–Bedingungen benötigten zweiten Ableitungen der Lagrangefunktion durch BFGS–Update erzeugt werden und dies auch unbedingt die Verwendung von Line–Search–Methoden erfordert. Die entsprechenden Ableitungen der Strukturgleichungen, d.h. die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T selbst und die Richtungsableitung der Tangentensteifigkeitsmatrix $(\mathbf{K}_T \boldsymbol{\phi})_{,u}$, können sehr effizient aufgestellt werden. Dies macht auch die Verwendung von Line–Search–Verfahren für die Lösung der Strukturgleichungen überflüssig. Deshalb wird hier eine hierarchische Trennung in Struktur– und Optimierungsvariablen vorgenommen. Innerhalb der Optimierungsiteration werden für den augenblicklichen Zustand die Strukturgleichungen vollständig gelöst und dann erst der nächste Optimierungsschritt durchgeführt. Bei Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit lautet das zu (10.1) analoge Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \lambda_{c,\text{imp}} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \quad & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \quad & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad ; \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_{\text{opt}}} \end{aligned} \tag{10.3}$$

mit der kritischen Last $\lambda_{c,imp}$ am Tragwerk, das mit Imperfektionen behaftet ist. Die Frage nach der maßgebenden Imperfektionsform diskutieren Kapitel 10.2.5 und 10.2.6.

10.2 Optimierungsprozedur

Die in Bild 10.3 dargestellte Optimierungsprozedur ermöglicht es, die Aufgabe der Maximierung der kritischen Traglast in Angriff zu nehmen. Die hier nur stichwortartig erläuterten Teilaufgaben werden in den nachfolgenden Kapiteln noch genauer erläutert.

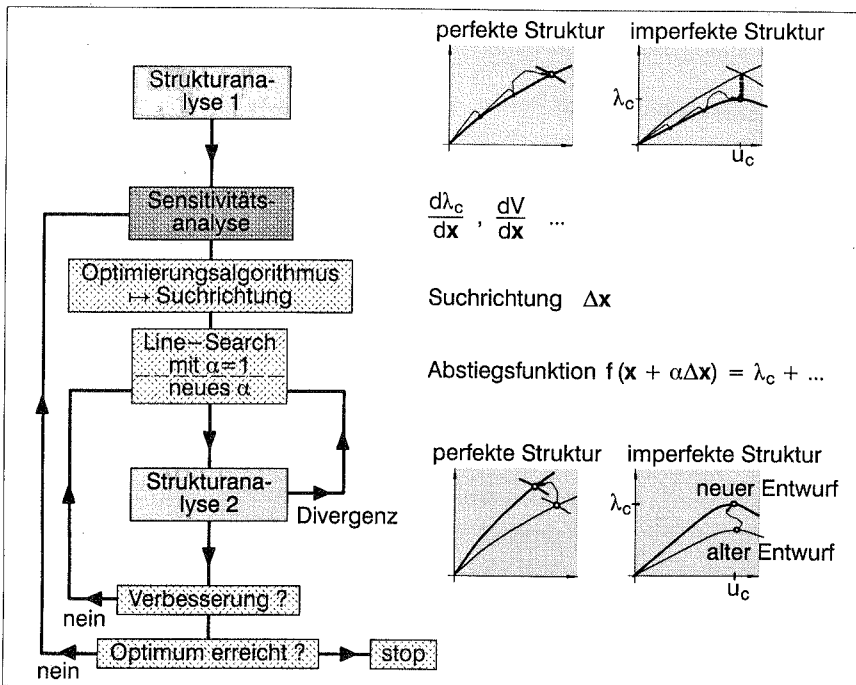


Bild 10.3: Optimierungsprozedur

Die Suche nach dem kritischen Punkt der Ausgangsform zu Beginn der Optimierung erfolgt durch eine nichtlineare Strukturanalyse. Mit den oben geschilderten Pfadverfolgungsalgorithmen wird eine Folge von Gleichgewichtspunkten erzeugt. Gelangt man in die Nähe eines kritischen Punktes, d.h. eines Verzweigungs- oder Durchschlagspunktes, so wird dieser mit den Methoden der erweiterten Systeme genau lokalisiert.

Bei Berücksichtigung von Imperfektionen kann nun an dieser Stelle die Imperfektionsempfindlichkeit nach Koiter (Kapitel 7) abgeschätzt werden. Weiterhin besteht die Möglichkeit, den kritischen Punkt der durch Imperfektionen modifizierte Struktur direkt zu

berechnen. Nach ein paar Schritten Pfadverfolgung beginnend beim unbelasteten Zustand findet der Wechsel zur direkten Berechnung des kritischen Punktes statt. Alternativ kann die Berechnung mit dem erweiterten System, formuliert für die imperfekte Struktur unter Verwendung der Beulamplitude nach Gleichung (7.77), gleich am kritischen Punkt der perfekten Struktur beginnen. Diese Idee der Singulärpfadverfolgung, bei der aus Konvergenzgründen die Berechnung einiger Zwischenzustände notwendig werden kann, wird auch schon in Kapitel 7.3 beschrieben. Werden bei der Erzeugung von Imperfektionsformen keine Informationen der perfekten Struktur, z.B. Eigenformen am kritischen Punkt oder Singulärvektor alleine, benötigt, kann die Analyse der perfekten Struktur auch entfallen.

Daran anschließend erfolgt die Sensitivitätsanalyse. Hier werden den Optimierungsalgorithmen neben den im ersten Punkt ermittelten Funktionswerten der Optimierungsfunktionen nun auch deren Ableitung, z.B. $\frac{d\lambda_c}{dx}$ oder $\frac{dV}{dx}$, zur Verfügung gestellt. Die Sensitivitätsanalyse kann semi-analytisch oder zu Vergleichszwecken auch numerisch, mit einem finiten Differenzenverfahren, ablaufen. Im Falle der Maximierung der Traglast $\lambda_{c,imp}$ der imperfekten Struktur findet die Sensitivitätsanalyse natürlich auch am kritischen Punkt des imperfekten Systems statt.

Mit den Informationen aus Struktur- und Sensitivitätsanalyse erzeugt nun der verwendete Optimierungsalgorithmus, hier meist die sequentielle quadratische Programmierung (SQP, Schittkowski (1981)), eine Suchrichtung. Diese Suchrichtung und die Anfangsschrittweite $\alpha = 1$ ermöglichen die Generierung eines neuen Tragwerksentwurfs innerhalb der Line-Search-Prozedur. An dieser Struktur wird der kritische Punkt berechnet und eine Abstiegsfunktion zur Beurteilung der Qualität dieses neuen Entwurfs aufgebaut. Diese Abstiegsfunktion wird notwendig, da außer dem kritischen Lastfaktor auch die Einhaltung verschiedener Nebenbedingungen, z.B. konstantes Volumen, die Güte des Entwurfs bestimmt. Die Lagrangefunktion eignet sich dazu nicht aufgrund ihrer Sattelpunkteigenschaften.

Wie später noch genauer ausgeführt wird, kann bei der Wiederberechnung der modifizierten Struktur (Strukturanalyse 2) auf den Einsatz von Pfadverfolgung verzichtet und die erweiterte System-Methode sofort angesetzt werden. Die Strukturanalyse wird an der perfekten und/oder, je nach Bedarf, auch an der imperfekten Struktur durchgeführt. Sollten bei der direkten Berechnung des kritischen Punktes Konvergenzschwierigkeiten oder Divergenz infolge einer zu großen Schrittweite auftreten, dann wird ein willkürlicher Zielfunktionswert gesetzt. Dieser Wert erzwingt dann bei gleicher Suchrichtung eine kleinere Schrittweite α innerhalb des Line-Searches. Zeigt die Abstiegsfunktion nach erfolgreicher Berechnung des kritischen Punktes keine ausreichende Verbesserung an, wird ebenfalls innerhalb der Line-Search-Prozedur die Schrittweite verändert.

Nach Feststellung eines Fortschrittes innerhalb der aktuellen Optimierungsiteration überprüft eine Konvergenzuntersuchung, ob das Optimum mit erforderlicher Genauigkeit erreicht wurde, oder ob mit der Sensitivitätsanalyse am jetzt verbesserten Struktur-entwurf der nächste Optimierungsschritt beginnt.

10.2.1 Strukturanalyse 1

Die Pfadverfolgungsstrategien in Verbindung mit automatischer Schrittweitenanpas-sung dienen der Bestimmung einiger Gleichgewichtspunkte auf dem Lastverschie-bungspfad. Ist die ungefähre Lage des kritischen Punktes durch Voruntersuchungen bereits bekannt, kann dann an irgendeinem Gleichgewichtspunkt die erweiterte Sys-tem–Methode gestartet werden, um den kritischen Punkt, der Verzweigungs– oder Durchschlagspunkt sein kann, zu berechnen. Vollständig automatisiert werden kann die Lokalisierung des kritischen Punktes, indem als Startpunkt dieser verwendet wird, bei dem die tangentielle Steifigkeitsmatrix zum ersten Mal ihre positive Definitheit verliert (Bild 10.4). Dies wird angezeigt durch das Auftreten negativer Glieder auf der Hauptdia-gonalen der bei der Gleichungslösung benötigten dreieckszerlegten Steifigkeitsmatrix.

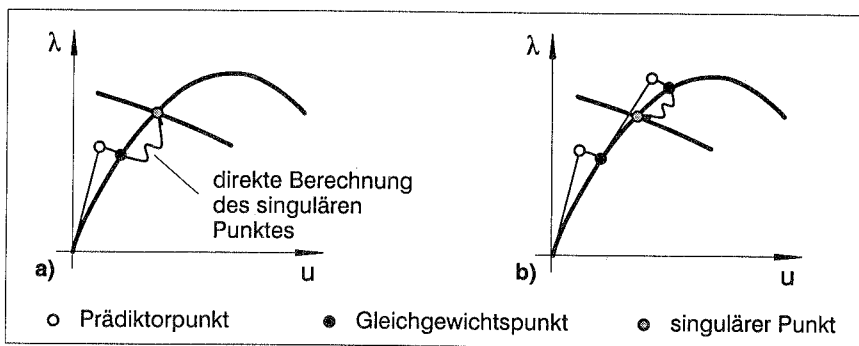


Bild 10.4: Wechsel von Pfadverfolgung zur Berechnung von singulären Punkten
a) benutzergesteuert – b) Überschreiten des Verzweigungspunktes

Die Verwendung des zum am Startpunkt niedrigsten Eigenwert gehörenden Eigenvek-tors als Initialisierung für den Singulärvektor (vgl. Startvektoren in Kapitel 4.8.1) erweist sich für die direkte Berechnung des kritischen Punktes als sehr praktikabel. Die Über-prüfung, ob das am kritischen Punkt verschwindende Hauptdiagonalglied der zerleg-ten Steifigkeitsmatrix auch wirklich das kleinste ist, zeigt an, ob eventuell gar nicht der niedrigste kritische Punkt gefunden wurde. An solch einem Punkt wird dann verfahren, wie in Kapitel 4.8.1 beschrieben, um den niedrigsten singulären Punkt zu erreichen.

Zur Berechnung des mit Imperfektionen versehenen Tragwerks stehen alternativ die komplette Strukturanalyse bestehend aus Pfadverfolgung und Methode der erweiterten Systeme oder die Singulärpfadverfolgung zur Verfügung (s.a. Kapitel 7.3 und Bild 7.7).

Da der kritische Punkt der imperfekten Struktur sehr häufig ein Durchschlagspunkt ist, bietet sich nun auch der Verschiebungsvektor als Startvektor für den Singulärvektor an. Die zweite Möglichkeit, Verfolgung des Singulärpfades, erweist sich bei kleinen Imperfektionen als sehr effizient, wenn also nicht so oft oder gar nur einmal das erweiterte System zu lösen ist. Muß bei großen Imperfektionen aus Konvergenzgründen die Amplitude langsam gesteigert werden, so erfordert dies unter Umständen die Berechnung vieler kritischer Punkte auf dem Singulärpfad, und die erste Methode ist vorzuziehen. Bei der Berechnung der kritischen Lastfaktoren für das perfekte und imperfekte Tragwerk besteht auch die Option, den kleineren der beiden Werte als Zielfunktionswert auszuwählen. Dies wird interessant bei stabilem Nachbeulverhalten, wie auch das Beispiel in Kapitel 11.1 demonstriert.

10.2.2 Sensitivitätsanalyse

Grundlegende Erläuterungen zur Sensitivitätsanalyse und zum hier verwendeten semi-analytischen Konzept, wie auch zu Sensitivitäten von Eigenwerten und -vektoren finden sich in den Kapiteln 8.5 und 9.2. Hier geht es nun in erster Linie um die bei der Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten benötigten Sensitivitäten, also insbesondere um $\frac{d\lambda_c}{dx}$, der Ableitung des kritischen Lastfaktors λ_c bzgl. der Optimierungsvariablen \mathbf{x} . Die Ableitungen der Verschiebungen $\frac{d\mathbf{u}_c}{dx}$ sowie des Eigenvektors $\frac{d\phi}{dx}$ werden ebenfalls angegeben, da diese unter Umständen, z.B. für die Sensitivitäten von Spannungen, gebraucht werden. Der Gedanke an die Imperfektionsempfindlichkeit, also die Frage: "wie ändert sich der kritische Lastfaktor bei kleinen Zunahmen der Imperfektionen?", zeigt auf, daß hier jetzt eigentlich genau die gleiche Fragestellung auftaucht. Sie lautet: "wie ändert sich der kritische Lastfaktor bei kleinen Änderungen des Entwurfs?". Bei der Imperfektionsempfindlichkeit wird die Formänderung durch die Imperfektionsform und -amplitude, hier dagegen durch Formfunktionen und den Optimierungsparametern \mathbf{x} , beschrieben. Die Herleitung erfolgt also analog zu Kapitel 7.2 und fällt deshalb hier sehr knapp aus.

Die den kritischen Punkt $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ beschreibenden Gleichungen

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_c(\mathbf{x}), \lambda_c(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (10.4)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c(\mathbf{x}), \lambda_c(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (10.5)$$

ergeben durch Ableitungen nach den Optimierungsvariablen \mathbf{x}

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}_c}{dx} + \mathbf{G}_{,\lambda} \cdot \frac{d\lambda_c}{dx} + \mathbf{G}_{,\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (10.6)$$

$$(\mathbf{K}_{T,\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}_c}{dx} + \mathbf{K}_{T,\lambda} \frac{d\lambda_c}{dx} + \mathbf{K}_{T,\mathbf{x}}) \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{dx} = \mathbf{0} \quad (10.7)$$

Die Kontraktion der Gleichung (10.6)

$$\underbrace{\phi^T \mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}}}_{=0} + \underbrace{\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} + \phi^T \mathbf{G}_{,x}}_{\begin{cases} \neq 0 \text{ am Durchschlagspunkt} \\ =0 \text{ am Verzweigungspunkt} \end{cases}} = 0 \quad (10.8)$$

zeigt, daß die Gültigkeit der folgenden Herleitung an Verzweigungspunkten mit $\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} = 0$ nur gegeben ist, wenn $\mathbf{G}_{,x}$ im Bild von \mathbf{K}_T liegt. Dies entspricht der Bedingung $\phi^T \mathbf{G}_{,x} = 0$ und ist meist erfüllt, außer wenn die durch die entsprechende Optimierungsvariable erzeugte Formänderung gerade affin zum Singulärvektor ist. Durch Kontraktion von (10.7) und Berücksichtigung von $\mathbf{K}_{T,\lambda} = \mathbf{0}$ bei verformungsunabhängiger Belastung ergeben sich die zu lösenden Gleichungen

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{,\lambda} \cdot \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{,x} = 0 \quad (10.9)$$

$$\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{T,x} \phi = 0 \quad (10.10)$$

Partitionierung von (10.9) führt zu

$$\Delta \mathbf{u}_P = -\mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{G}_{,\lambda} = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (10.11)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{Gx} = -\mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{G}_{,x} \quad (10.12)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{u}_P \cdot \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{u}_{Gx} \quad (10.13)$$

Die Ableitung des Lastfaktors ergibt sich dann durch Einsetzen von (10.13) in (10.10)

$$\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} = -\frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,x} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_{Gx} \phi}{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_P \phi} \quad (10.14)$$

Damit läßt sich bei Bedarf nach Gleichung (10.13) die Ableitung der Verschiebungen und aus Gleichung (10.7) die Ableitung des Eigenvektors wie folgt berechnen:

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{x}} = -\mathbf{K}_T^{-1} \left(\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} \phi + \mathbf{K}_{T,x} \phi \right) \quad (10.15)$$

Die bis jetzt gezeigte direkte Methode erfordert bei der Berechnung von $\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}}$ nach Gleichung (10.14) für jede Optimierungsvariable x_i das Rückwärtseinsetzen nach Gleichung (10.12) mit dem Vektor $\mathbf{G}_{,x_i}$. Die nun folgende adjungierte Methode braucht nur ein Rückwärtseinsetzen für die erste Variable

$$\Delta \mathbf{u}_h = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot (\mathbf{K}_{T,u} \phi \phi) \quad (10.16)$$

Aus Gleichung (10.14) wird dann

$$\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} = -\frac{\phi^T \mathbf{K}_{T,x} \phi + \Delta \mathbf{u}_h^T \mathbf{G}_{,x}}{\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_P \phi} \quad (10.17)$$

Das Skalarprodukt $\Delta \mathbf{u}_h^T \mathbf{G}_{,x_i}$, das jetzt für jede Variable x_i gebildet wird, ist zwar billiger als das Rückwärtseinsetzen der direkten Methode, jedoch ist die Zeitersparnis im ge-

samten Sensitivitätsanalyseprozeß nicht so gravierend. Die beiden Methoden sind in Bild 10.5 nochmals einander gegenübergestellt.

Für den sehr unwahrscheinlichen Fall, daß am Verzweigungspunkt $\mathbf{G}_{,x}$ nicht im Bild von \mathbf{K}_T liegt, wird auf Kapitel 7.2.2 und Reitinger, Ramm (1994,2) verwiesen. Für die Ableitung des kritischen Lastfaktors ergibt sich $\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} \rightarrow -\infty$. Die sinnvollste Methode zur Vermeidung daraus resultierender Probleme ist die Wahl einer anderen Tragwerksparametrisierung, so daß die mit einer Optimierungsvariablen verknüpfte Formänderung nicht mehr affin zum Singulärvektor ist. Alternativ kann die ins Unendliche gehende Sensitivität auch durch eine obere Schranke begrenzt oder durch einen Differenzenschritt

$$\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} \approx \frac{\lambda(0) - \lambda(\Delta\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} = \frac{\sqrt{\frac{2 \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi^T \mathbf{G}_{,x} \Delta\mathbf{x}}{(\phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta\mathbf{u}_p \phi)^2}}}{\Delta\mathbf{x}} \quad (10.18)$$

gewonnen werden. Den Einfluß des Schrittes $\Delta\mathbf{x}$ verdeutlicht Bild 7.5.

Die Berechnung der Ableitung nach (10.14) gilt zwar auch für Durchschlagspunkte, jedoch ergeben sich für diesen Sonderfall einige Vereinfachungen. Der Durchschlagspunkt korreliert mit $\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} \neq 0$ und somit kann aus Gleichung (10.6) direkt die Ableitung des Lastfaktors gewonnen werden:

$$\frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} = - \frac{\phi^T \mathbf{G}_{,x}}{\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda}} \quad (10.19)$$

Diese Form wird auch in Wu, Arora (1988) angegeben. Die Berechnung von $\frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}}$ bzw. $\frac{d\phi}{d\mathbf{x}}$ am Durchschlagspunkt erfolgt wie in Kapitel 7.2.3. angegeben.

Um nun den Aufwand für die Berechnung der Ableitung des kritischen Lastfaktors zu beschreiben, werden die in Bild 10.5 zusammengetragenen Gleichungen herangezogen. Wie schon mehrfach erwähnt, werden im Rahmen der semi-analytischen Gradientenberechnung die elementspezifischen Ableitungen $\mathbf{K}_{T,x}$ und $\mathbf{G}_{,x}$ durch einen finiten Differenzenschritt gewonnen. Für die erste Variable müssen in einem Durchlauf über alle finiten Elemente die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{G} und die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T an der Stelle $(\mathbf{u}_c, \lambda_c, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ aufgestellt werden. Da gleich die skalare Größe a gebildet wird, entfällt die Abspeicherung von \mathbf{K}_T . Mit der einmal zerlegten Steifigkeitsmatrix ergeben sich $\Delta\mathbf{u}_p$ und $\Delta\mathbf{u}_h$ bzw. $\Delta\mathbf{u}_{Gx}$ durch zweimaliges Rückwärtseinsetzen. Mit der zusätzlichen Steifigkeitsmatrix an der Stelle $(\mathbf{u}_c + \epsilon \phi, \lambda_c, \mathbf{x})$ lassen sich der Vektor \mathbf{h} aufbauen und damit die Skalare b und c berechnen. Bei allen weiteren Variablen müssen jetzt nur noch jeweils \mathbf{G} und \mathbf{K}_T an der Stelle $(\mathbf{u}_c, \lambda_c, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ aufgestellt und die skalaren Größen a und b gebildet werden. Die direkte Methode benötigt noch zusätzlich ein Rückwärtseinsetzen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß bei großen Systemen die Zerlegung von \mathbf{K}_T am aufwendigsten ist. Das Rückwärtseinsetzen und die Matrix- und Vektoroperationen benötigen gerade im Vergleich zum Aufstellen von \mathbf{K}_T und \mathbf{G} sehr wenig Rechenzeit.

adjungierte Methode	direkte Methode
<p>1. Variable x_1:</p> $\mathbf{h} = \mathbf{K}_{T,u} \phi \quad \phi \approx \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c + \epsilon \phi, \lambda_c, \mathbf{x}) \phi - \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, \mathbf{x}) \phi)$ $\Delta \mathbf{u}_P = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}$ $\Delta \mathbf{u}_h = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{h}$ $\mathbf{G}_{,x_1} \approx \frac{1}{\Delta x_1} (\mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_1 + \Delta x_1) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_1))$ $\mathbf{K}_{T, x_1} \approx \frac{1}{\Delta x_1} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_1 + \Delta x_1) - \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_1))$ $\mathbf{a} = \phi^T \mathbf{K}_{T, x_1} \phi$ $\mathbf{b} = \Delta \mathbf{u}_h^T \mathbf{G}_{,x_1}$ $\mathbf{c} = \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{u}_P$	$\Delta \mathbf{u}_P = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}$ $\Delta \mathbf{u}_{Gx} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}_{,x_1}$ $\mathbf{a} = \phi^T \mathbf{K}_{T, x_1} \phi$ $\mathbf{b} = \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{u}_{Gx}$ $\mathbf{c} = \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{u}_P$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $\frac{d\lambda_c}{dx_1} = -\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{\mathbf{c}}$ </div>	
<p>nächste Variablen x_i:</p> $\mathbf{G}_{,x_i} \approx \frac{1}{\Delta x_i} (\mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_i + \Delta x_i) - \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_i))$ $\mathbf{K}_{T, x_i} \approx \frac{1}{\Delta x_i} (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_i + \Delta x_i) - \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, x_i))$ $\mathbf{a} = \phi^T \mathbf{K}_{T, x_i} \phi$ $\mathbf{b} = \Delta \mathbf{u}_h^T \mathbf{G}_{,x_i}$	$\Delta \mathbf{u}_{Gx} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}_{,x_i}$ $\mathbf{a} = \phi^T \mathbf{K}_{T, x_i} \phi$ $\mathbf{b} = \mathbf{h}^T \cdot \Delta \mathbf{u}_{Gx}$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: auto;"> $\frac{d\lambda_c}{dx_i} = -\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{\mathbf{c}}$ </div>	

Bild 10.5: Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse erweist sich als weniger empfindlich gegenüber dem Singulärwerden von \mathbf{K}_T , als dies beim Berechnen der kritischen Punkte mit den erweiterten Systemen der Fall war. Insbesondere bei Verwendung der in Kapitel 4 gezeigten Penalty-Verfahren, die ja gar nicht zulassen, daß \mathbf{K}_T echt singulär wird, tauchen keine Probleme auf. Wenn dann doch Probleme auftauchen sollten, können die in Kapitel 7.2.1 erwähnten Techniken angewandt werden.

In Reitinger, Ramm (1993) wird noch eine weitere Alternative zur Berechnung der Sensitivitäten angegeben, die hier in Bild 10.6 zusammengefaßt ist. Der wesentliche Unterschied zu oben liegt in der Kontraktion mit dem Vektor \mathbf{h}_1 anstatt mit dem Singulärvektor ϕ . Dies hat zur Folge, daß bei der Berechnung des kritischen Lastfaktors die Ableitung des Eigenvektors $\frac{d\phi}{dx}$ nicht entfällt. Da dieser Term aber in den meisten Fällen keine große Rolle spielt, kann er vernachlässigt oder, wie in Bild 10.6 (vgl. auch Kapitel 9.2) angegeben, approximiert werden. Ausgehend von der Eigenwertgleichung $(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \phi = \mathbf{0}$ läßt sich auf konstantem Lastniveau die Sensitivität des Eigenwerts $\frac{d\omega}{dx}$ und damit die Gleichung für $\frac{d\phi}{dx}$ aufstellen. Wie schon in Kapitel 9.2 (Gleichung

(9.13) wird auch hier der Einfluß der Verschiebungsänderungen auf $\frac{dK_T}{dx}$ über den Term $K_{T,u} \frac{du}{dx}$ vernachlässigt, so daß angenommen werden kann, daß $\frac{dK_T}{dx} \approx \frac{\partial K_T}{\partial x} = K_{T,x}$ gilt. Bei der Lösung der Gleichung für $\frac{d\phi}{dx}$ können wieder die Methoden bei singularer Systemmatrix, z.B. Nelson's Methode, Rangkorrektur, angewandt werden. Diese Formulierung beinhaltet gegenüber der oben gezeigten Sensitivitätsanalyse zwar eine Näherung bzgl. $\frac{d\phi}{dx}$, jedoch haben Vergleiche gezeigt, daß die Ableitungen beider Methoden sehr gut übereinstimmen. Es muß aber noch weiter geprüft werden, welches Verfahren sich numerisch stabiler verhält. Dies ist ein sehr wichtiger Punkt, da numerische Probleme infolge der Singularität von K_T , schlecht gewähltem Penaltyfaktor, zu geringe Genauigkeit bei der Berechnung des kritischen Punktes usw., zumindest überprüft werden sollten.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G}(\mathbf{u}_c, \lambda_c, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_c, \lambda_c, \mathbf{x}) \phi = \mathbf{0} \\
 \text{Ableitung bzgl. } \mathbf{x}: & \\
 & \mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{,\lambda} \cdot \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{,\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (I) \\
 & (\mathbf{K}_{T,u} \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{T,x}) \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (II) \\
 \text{aus (I):} & \quad \Delta \mathbf{u}_p = -\mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{G}_{,\lambda} = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{P} \\
 & \quad \Delta \mathbf{u}_{Gx} = -\mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{G}_{,\mathbf{x}} \\
 & \quad \frac{d\mathbf{u}_c}{d\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{u}_p \cdot \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{u}_{Gx} \\
 \text{mit:} & \quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_p \phi \\
 & \quad \mathbf{h}_2 = (\mathbf{K}_{T,x} + \mathbf{K}_{T,u} \Delta \mathbf{u}_{Gx}) \phi + \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{d\mathbf{x}} \\
 \text{aus (II):} & \quad \frac{d\lambda_c}{d\mathbf{x}} = - \frac{\mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2}{\|\mathbf{h}_1\|^2} \\
 \text{Abschätzung für } \frac{d\phi}{d\mathbf{x}}, & \text{ wenn nicht } \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{d\mathbf{x}} \approx \mathbf{0} \text{ gilt:} \\
 & (\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \phi = \mathbf{0} \mapsto \frac{d\omega}{d\mathbf{x}} = \phi^T \mathbf{K}_{T,x} \phi; \text{ wenn } \|\phi\| = 1 \\
 & \mathbf{K}_T \frac{d\phi}{d\mathbf{x}} \approx - (\mathbf{K}_{T,x} - \frac{d\omega}{d\mathbf{x}} \mathbf{I}) \phi \\
 \text{Annahme:} & \quad \frac{d\mathbf{K}_T}{d\mathbf{x}} \approx \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}_{T,x}
 \end{aligned}$$

Bild 10.6: Alternative zur Sensitivitätsanalyse

Zusammenfassend sei also gesagt, daß die Sensitivitätsanalyse sehr effizient durchgeführt werden kann. Es ist vor allem keine Iteration notwendig. Dies führt deutlich vor Augen, daß Verfahren ohne Verwendung von Ableitungen, die aber dann mehr Funktionswertberechnungen, also Gleichgewichtssiterationen, womöglich sogar komplett vom

unverformten Zustand bis hin zum kritischen Punkt, benötigen, mit hoher Wahrscheinlichkeit sehr schlecht abschneiden. Die Verwendung von semi-analytischen Techniken hält zudem den Programmieraufwand für die Sensitivitätsanalyse in Grenzen und liefert Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit. Die Verwendung einer zentralen Differenzmethode erlaubt die Überprüfung der Zuverlässigkeit der Gradientenberechnung.

10.2.3 Kopplung mit Optimierungsalgorithmus

Kapitel 8.4 beschreibt bereits, wie unter Verwendung eines SQP-Verfahrens, hier von Schittkowski (1981), die Suchrichtung für die Optimierungsvariablen \mathbf{x} und die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ nach Gleichung (8.7) erzeugt wird. Die Lagrangefunktion beinhaltet den kritischen Lastfaktor λ_c und eventuell noch einige Nebenbedingungen

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \lambda_c + \dots \quad (10.20)$$

so daß für die Berechnung der Suchrichtung die ersten und zweiten Ableitungen von λ_c benötigt werden. Die ersten Ableitungen berechnen sich, wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt, die zweiten werden durch BFGS-Verfahren approximiert. Auf die Notwendigkeit von Line-Search-Verfahren und Abstiegsfunktionen wird in Kapitel 8.4 schon hingewiesen. Hier sei nur noch dazu gefügt, daß die Abstiegsfunktion als Zielfunktionsanteil den Lastfaktor enthält

$$f_{\text{Merit}} = \lambda_c + \dots \quad (10.21)$$

und daß in die Line-Search-Prozedur eingegriffen wird, falls bei der Strukturanalyse Probleme auftauchen sollten. Und zwar kann es passieren, daß infolge schlechter Hessematrix der Suchschritt mit dem aktuellen α

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix}_{\text{alt}} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} \\ \Delta \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

zu große Formänderungen am Tragwerksentwurf erzeugen. Wenn bei der Berechnung des kritischen Lastfaktors am neuen Entwurf $\lambda_c(\mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x})$ mit dem erweiterten System (vgl. nächstes Kapitel) keine ausreichende Konvergenz festzustellen ist, wird abgebrochen und ein neuer Linesearchschritt mit kleinerem α erzwungen (Bild 10.3). Dafür wird beim Abbruch für den Lastfaktor nach

$$\lambda_c = \epsilon \cdot \lambda_{c,\text{alt}} \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (10.23)$$

ein willkürlicher Wert gesetzt. Dieser orientiert sich am zuletzt erreichten Lastfaktor und bewirkt mit Werten für ϵ , die bei 0.3 bis 0.8 liegen können, daß die Meritfunktion keinen Optimierungsfortschritt anzeigt und somit α neu berechnet wird. Bei Konvergenz der Strukturanalyse läuft dann die Linesearchprozedur wie gewohnt weiter.

10.2.4 Wiederberechnung bzw. Strukturanalyse 2

Die Verwendung der erweiterten Systeme zur direkten Berechnung des kritischen Punktes während des Optimierungsfortschrittes erlaubt es, auf die Methoden der Pfadverfolgung, die ja in die Nähe des kritischen Punktes führen sollen, zu verzichten. Als Startpunkt für die Iteration kann der zuletzt erreichte kritische Punkt, also aus der kompletten Strukturanalyse zu Beginn oder aus der Analyse im vorhergehenden Optimierungsschritt herangezogen werden (Bild 10.7).

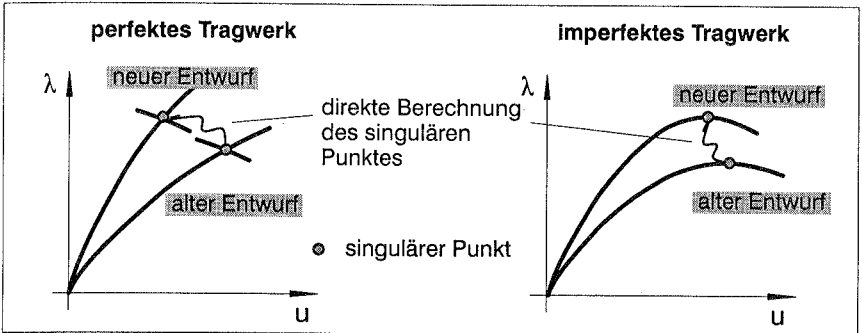


Bild 10.7: Wiederberechnung

Aus den Möglichkeiten für die Wahl des Startvektors für den Singulärvektor nach Kapitel 4.8.1 ist sicherlich der Eigenvektor aus einer Eigenwertberechnung nach $(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ vorzuziehen, da sich seine Verwendung meist positiv auf das Konvergenzverhalten auswirkt. Hier bietet sich noch zusätzlich eine weitere sehr gute Möglichkeit an. Der Singulärvektor des vorigen Optimierungsschrittes liegt ja bereits vor und kann ohne zusätzlichen Aufwand, den z.B. eine Eigenwertberechnung erfordert, als Startvektor verwendet werden. Jedoch besteht hierbei natürlich die Gefahr, daß beim Optimierungsfortschritt mehrere Verzweigungspunkte die Reihenfolge tauschen und somit eventuell nicht der tiefste Verzweigungspunkt erreicht wird (Bild 10.8).

Wird dies bei der Betrachtung der Hauptdiagonalglieder der \mathbf{LDL}^T -zerlegten Steifigkeitsmatrix festgestellt, so findet in Anlehnung an Kapitel 4.8.1 am erreichten Punkt B in Bild 10.8 eine Eigenwertanalyse statt. Der zum niedrigsten Eigenwert gehörende Eigenvektor gelangt als Startvektor zum Einsatz und die Iteration startet wieder am kritischen Punkt des alten Entwurfs (Punkt A in Bild 10.8). Am erreichten neuen kritischen Punkt (Punkt C) wird wieder überprüft, ob der niedrigste erreicht werden konnte.

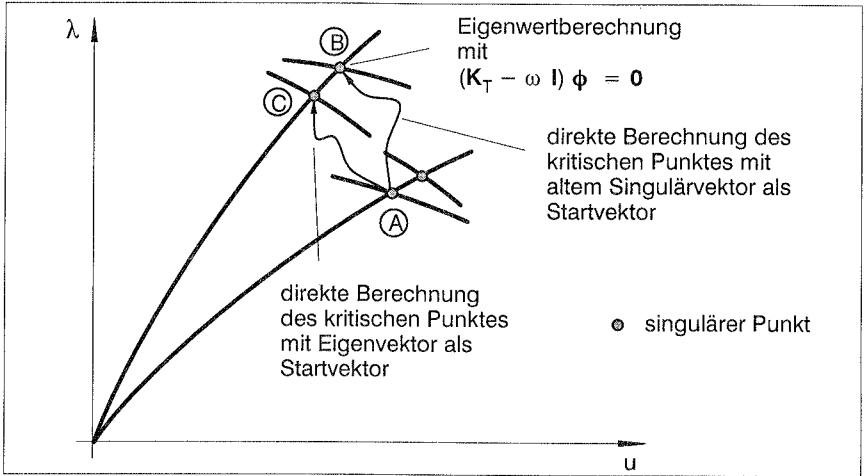


Bild 10.8: Wiederberechnung des niedrigsten kritischen Punktes

Kann bei der direkten Berechnung des kritischen Punktes mit dem erweiterten System keine ausreichende Konvergenz erreicht werden, wird so verfahren, wie im vorangegangenen Kapitel 10.2.3 beschrieben.

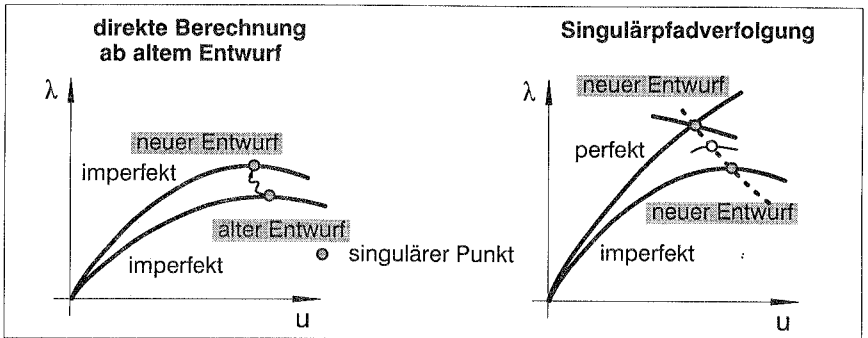


Bild 10.9: Wiederberechnung des imperfekten Tragwerks

Die Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit erfordert die Berechnung des kritischen Punktes der durch Imperfektionen behafteten Struktur. Dabei bieten sich zwei Möglichkeiten an. Die erste in Bild 10.9 startet am zuletzt erreichten imperfekten kritischen Punkt des vorigen Optimierungsschrittes, wiederum ohne den Einsatz von Pfadverfolgung. Die zweite Möglichkeit basiert auf der Singulärpfadverfolgung, startend am kritischen Punkt der perfekten Struktur des aktuellen Optimierungsschrittes. Für die Berechnung des kritischen Punktes kann der Verschiebungsvektor als Startvektor für den Singulärvektor Vorteile bringen, nämlich gerade dann, wenn der kritische Punkt ein

Durchschlagspunkt ist. Jedoch erweist sich die oben genannte Methode, Verwendung des Singulärvektors aus letztem Optimierungsschritt und Kontrolle, ob der niedrigste kritische Punkt erreicht ist, als sehr geeignet. Es sei noch angemerkt, daß bei Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit die Strukturanalyse der perfekten Struktur nur notwendig wird, um den Imperfektionsvektor anzupassen. Bei Verwendung fest vorgegebener Imperfektionsformen, bei denen keine Informationen des perfekten Systems, z.B. Singulärvektor oder aus Eigenwertberechnungen, notwendig sind, kann auf die Analyse der perfekten Struktur auch verzichtet werden.

10.2.5 Imperfektionsformen

Die Modifikation des Tragwerks durch geometrische Imperfektionen bildet die Grundlage der Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit. Dabei wird eine Maximalamplitude für die geometrische Störung vorgegeben. Dies entspringt dem Gedanken, daß bei Vorgabe bestimmter Fertigungstoleranzen diese Toleranz als Amplitude verwendet werden kann, um die negativen Einflüsse der Formabweichungen abzuprüfen. Die Amplitude orientiert sich häufig an der Wanddicke, z.B. 1.5-fache Wanddicke oder am Verhältnis von Radius und Wandstärke usw.. In der Regel sind die Amplituden relativ klein. Bei großen Amplituden ist auf jeden Fall zu überprüfen, ob der negative Einfluß bei kleineren Amplituden vielleicht sogar größer ausfällt (Bild 10.10). Bei dieser Situation wäre es unsinnig die Optimierung bei großen Imperfektionen durchzuführen, da dabei das kritische Imperfektionsverhalten gar nicht erfaßt werden würde.

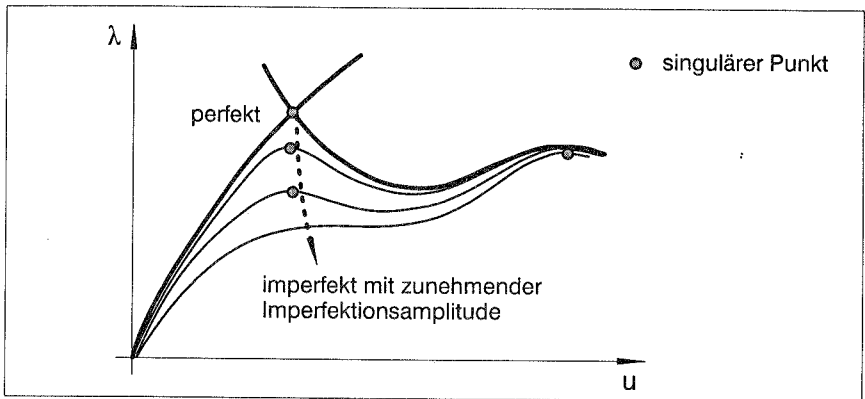


Bild 10.10: sehr große Imperfektionsamplituden

Nach der Diskussion der Größe der Imperfektionen ist die Frage nach der Erzeugung der Imperfektionsformen noch offen. Dafür stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

a) Singulärvektor: Der bei der direkten Berechnung des kritischen Punktes der perfekten Struktur anfallende Singulärvektor wird als Imperfektionsvektor verwendet.

b) Eigenvektor: Die Eigenvektoren aus einer Eigenwertberechnung im unbelasteten Zustand, am kritischen Punkt des perfekten Systems oder auch an anderen Stellen können zur Verfügung gestellt werden.

c) Verschiebungsvektoren: Aus vorab durchgeführten Berechnungen, z.B. mit Einzellasten an kritischen Imperfektionsstellen, abgespeicherte Verschiebungsvektoren bieten eine weitere Möglichkeit.

d) Überlagerung: Insbesondere bei Verwendung von Eigenvektoren erscheint es erforderlich zu sein, verschiedene Formen zu überlagern. Dabei werden die Einzelformen zuerst alle gleich skaliert, z.B. auf gleiche Norm oder gleiche Maximaltotalverschiebungskomponente, und dann mit Benutzerwichtungsfaktoren zu einem Imperfektionsvektor zusammengebaut. Bild 10.11 zeigt eine solche Überlagerung mit Eigenformen, die bzgl. ihrer Maximalkomponenten mit den Faktoren 2 und 1 skaliert wurden. Die Imperfektionsform besitzt als Maximalkomponente die Imperfektionsamplitude a .

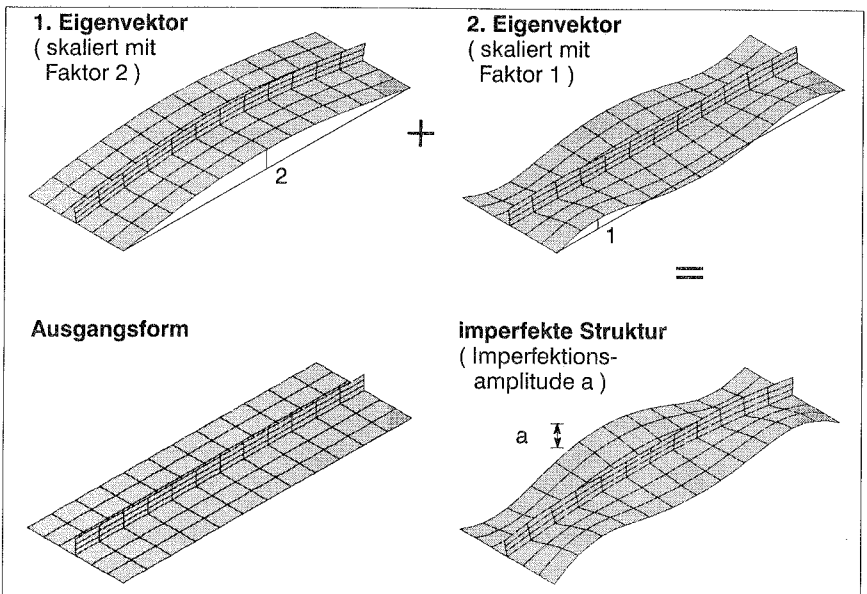


Bild 10.11: Überlagerung von Eigenformen als Imperfektionsvektor

Der Imperfektionsvektor liegt dann vor in Komponenten bzgl. der Systemfreiheitsgrade und muß umgerechnet werden in globale Knoten-Koordinaten, die auch der Struktur-

beschreibung dienen. Nach der Skalierung auf die Imperfektionsamplitude kann die Strukturgeometrie modifiziert werden.

Da bei fortschreitender Optimierung die Imperfektionsform, bestehend aus Eigenvektoren, immer wieder angepaßt wird und die Eigenvektoren ihre Reihenfolge ändern können, kann es wünschenswert werden, aus den zur Verfügung stehenden Formen ganz bestimmte herauszusuchen. Dies geschieht unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften zwischen den einzelnen Eigenformen. Die aktuellen Vektoren ϕ^i werden mit den zuletzt gespeicherten ϕ_s^i verglichen und mit

$$\begin{aligned} & \gg 0 \quad \mapsto \quad \text{gleich} \\ (\phi_s^i)^T \phi^i & \approx 0 \quad \mapsto \quad \text{verschieden} \\ & \ll 0 \quad \mapsto \quad \text{gleiche Form, umgekehrtes Vorzeichen} \end{aligned}$$

die zu verwendenden identifiziert. Damit kann auch das Vorzeichen, das sich ja sowohl bei den Eigenvektoren als auch beim Singulärvektor willkürlich ergibt, kontrolliert werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden zwar nur geometrische Imperfektionen eingesetzt, jedoch bereitet die Berücksichtigung anderer Arten, z.B. Abweichungen in der Laststellung, der Lagerung oder den Materialkennwerten, keine prinzipiellen Probleme.

10.2.6 Frage nach der ungünstigsten oder maßgebenden Imperfektionsform

Die verschiedenen Entwurfsphilosophien, die maßgebende Imperfektionsform betreffend, sollen hier nicht diskutiert werden. Ob die absolut ungünstigste Imperfektionsform berücksichtigt werden muß oder eine aus fertigungstechnischen Gründen resultierende, eine bei ähnlichen Tragwerken gemessene oder ob gar stochastische Methoden einfließen müssen, ist wohl bei jeder neuen Entwurfsaufgabe auch neu zu beleuchten.

Die hier in Bild 10.3 vorgestellte Orientierungsprozedur erlaubt es, all die verschiedenen Möglichkeiten, ungünstigste, gemessene oder sonstige maßgebende Formen, einfließen zu lassen. Das ist nur eine Frage des Aufwandes, der dann bei jeder Strukturberechnung betrieben werden soll, um die Imperfektionen zu erzeugen. Bei den später gezeigten Beispielen wurde als Imperfektionsform der Singulärvektor oder eine ungünstige Kombination aus Eigenvektoren verwendet. Die ungünstige Kombination wurde durch mehrere Testläufe vor Optimierungsbeginn verifiziert und eventuell während des Optimierungsfortschrittes manuell kontrolliert und bei Bedarf verändert.

Es wäre auch denkbar, das hier gezeigte Optimierungsverfahren nicht zur Maximierung der Traglast, sondern zur Minimierung derselben bei auftretenden Imperfektionen zu nutzen, um eben die ungünstigste Imperfektionsform zu finden. Dabei würden die Optimierungsvariablen den Imperfektionsvektor anstatt des Tragwerksentwurfs beschreiben. Die Lösung eines solchen Unteroptimierungsproblems innerhalb jeder Iteration

bei der Maximierung der Traglast würde jedoch zu einem immensen Rechenzeitzuwachs führen.

10.3 Alternative Verfahren zur Optimierung geometrisch nichtlinearer Strukturen

In der Literatur tauchen noch einige andere Optimierungsverfahren auf, die sich mit geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten auseinandersetzen. Jedoch bleiben dabei häufig die Imperfektionen unberücksichtigt oder das Stabilitätsverhalten wird nur approximativ erfaßt. Nachfolgend werden einige Verfahren und deren wesentliche Merkmale in chronologischer Reihenfolge kurz beleuchtet.

Rosen und Schmit (1979,1980,1981) beschreiben ein Verfahren zur Gewichtsminimierung von Fachwerken, wobei das geometrisch nichtlineare Verhalten für die Optimierung nur approximiert wird. Als Imperfektionen finden Vorverkrümmungen und –verdrehungen der Einzelstäbe Verwendung. Die Autoren räumen selbst ein, daß bei stark geometrisch nichtlinearem Verhalten die Approximation zu großen Schwierigkeiten führt.

Khot (1983) verfolgt die Idee, das Zusammenfallen von Eigenwerten durch ein vorgegebenes Intervall zu verhindern, um dadurch die Imperfektionsempfindlichkeit zu reduzieren. Die Nichtlinearitäten finden über die Eigenwertgleichung $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{K}_g) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ mit der geometrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g Eingang in ein Optimalitätskriterienverfahren. Geometrisch nichtlineare Analysen der optimierten Fachwerkstrukturen ergeben, daß die Berechnung der kritischen Last durch die Eigenwertgleichung oft viel zu hoch liegt. Die Trennung von Eigenwerten bringt nicht den gewünschten Erfolg bei der Vermeidung der Imperfektionsempfindlichkeit. Es wird darauf hingewiesen, daß ein solches Optimierungsverfahren unbedingt auf geometrisch nichtlinearen Analysen basieren sollte.

In Khot und Kamat (1985) wird für Fachwerke eine Rekursionsformel für ein Optimalitätskriterienverfahren basierend auf den Gleichungen

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \lambda\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (10.24)$$

$$\det \mathbf{K}_T = 0 \quad (10.25)$$

angegeben. Die Optimierungsprozedur verfolgt das Ziel, das Gewicht zu minimieren und am Optimum den kritischen Punkt nicht zu überschreiten. Die Imperfektionsempfindlichkeit soll reduziert werden, durch das Vermeiden von zusammenfallenden kritischen Punkten. Die Rekursionsformel, basierend auf einer gleichmäßig verteilten nichtlinearen Formänderungsenergiedichte, führt jedoch nicht immer zum optimalen Tragwerk, insbesondere dann, wenn Verzweigungsprobleme ins Spiel kommen.

Das Verfahren von Kamat und Ruangsilasingha (1985) kommt dem in dieser Arbeit beschriebenen schon näher. Die Berechnung der kritischen Belastung erfolgt über die Bedingung $\det \mathbf{K}_T = 0$ mit Nullstellensuche. Die Ableitungen basieren ebenfalls auf den Gleichungen (10.24) und (10.25) was sich dann als komplizierter erweist als bei Verwendung von $\mathbf{K}_T \phi = 0$ als Bedingung für einen kritischen Punkt. Das Verfahren zur Maximierung der kritischen Last unter Nebenbedingungen, z.B. konstantes Volumen, beschränkt sich dann auch nur auf Fachwerke, und die Imperfektionsempfindlichkeit bleibt unberücksichtigt. Eine wichtige Aussage in dieser Arbeit besagt, daß die kritische Last mit hoher Genauigkeit berechnet werden muß.

Wu und Arora (1987, 1988) beschreiben ein Verfahren, bei dem die kritische Last durch ein Eigenwertproblem näherungsweise oder durch ein Bisektionsverfahren genauer bestimmt wird. Da die Steifigkeitsmatrix singulär ist am kritischen Punkt, wird bei der Gleichungslösung mit \mathbf{K}_T nur deren linearer Anteil verwendet. Bei der Berechnung der Ableitung am kritischen Punkt wird aufgrund von Problemen mit der Singularität von \mathbf{K}_T von drei Alternativen eine favorisiert, die jedoch nur für Durchschlagspunkte gilt. In der Zusammenfassung wird betont, daß λ_c mit hoher Genauigkeit berechnet werden muß und daß für die volle nichtlineare Strukturanalyse in jedem Optimierungsschritt unbedingt automatische Schrittweitenanpassung erforderlich wird. Bei den Beispielen, die sich allerdings nur mit Fachwerken befassen, erweist sich die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP) als sehr robust.

Bei Smaoui und Schmit (1988) werden nur Fachwerke und infolge dessen Vorverformungen von Fachwerkstäben als Imperfektion behandelt. Die Optimierungsaufgabe und die Strukturanalyse werden hier simultan gelöst. Die unbekanntenen Verschiebungen werden also als unabhängige Optimierungsvariablen betrachtet und die Gleichgewichtsbedingungen finden als Gleichheitsnebenbedingungen Eingang in die Formulierung des Optimierungsproblems. Zur Lösung kommt ein "Generalized-Reduced-Gradient-Algorithmus" in Verbindung mit einer aktiven Satz-Strategie zum Einsatz. Die Variablen werden automatisch unterteilt in "basic"- und "non-basic"-Variablen. Durch Newton-Iterationen in Verbindung mit Sekanten-Update oder durch konjugierte Gradientenverfahren werden die "basic"-Variablen durch Erfüllen der aktiven Gleichheitsnebenbedingungen ermittelt. Die automatische Aufteilung der Variablen trennt wohl doch im wesentlichen die Strukturvariablen von den strukturbeschreibenden Optimierungsvariablen. Jedoch kann hierbei die Möglichkeit der effizienten Aufstellung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T nicht genutzt werden. Die Verwendung von Quasi-Newton-Verfahren mit Sekanten-Update oder von konjugierten Gradientenalgorithmus erweist sich bei der Strukturanalyse meist nicht als vorteilhaft. Um nun bei der Gewichtsminimierung Instabilitätserscheinungen zu vermeiden, wird eine Iterationszählung eingeführt und bei schlechter Konvergenz auf nahende Instabilitätsprobleme geschlos-

sen. In diesem Fall wird dann innerhalb einer Line–Search–Prozedur die Variablen–änderung verkleinert. Diese Methode ist sicherlich nicht geeignet, um komplexen Instabilitätsphänomenen zu begegnen.

Die Gewichtsm minimierung von Fachwerken lösen Levy und Perng (1988) durch Anwendung einer Rekursionsformel innerhalb einer Optimalitätskriterienmethode. Dabei wird für jeden Entwurf eine komplette Analyse bis zum Erreichen eines kritischen Punktes durchgeführt und dort dann die Rekursionsformel zur Verbesserung des Entwurfs angewandt.

Bei Park und Choi (1990) wird die Sensitivitätsanalyse der durch Eigenwertprobleme abgeschätzten kritischen Last gezeigt. Die Eigenwertprobleme werden an Gleichgewichtspunkten unterhalb des kritischen Lastniveaus aufgestellt. Je näher der Gleichgewichtspunkt am kritischen Punkt liegt, umso besser wird die Approximation durch die Eigenwertberechnung. Jedoch lassen sich für die Ableitungen der kritischen Last bei Annäherung an den kritischen Punkt nahezu beliebige Zahlen erzeugen. Dort kommt wohl die Singularität der Steifigkeitsmatrix ins Spiel und es müssen Gegenmaßnahmen ergriffen werden.

Ringertz (1991) beschreibt die Gewichtsm minimierung bei einer vorgegebenen Belastung mit der Nebenbedingung, daß die Eigenwerte der Tangentensteifigkeitsmatrix positiv sein sollen. Außer den Entwurfsvariablen werden die Verschiebungen als Variablen und Gleichgewichtsbedingungen als Gleichheitsbedingungen eingeführt. Um Unstetigkeiten in den Nebenbedingungen für mehrere in Frage kommende niedrigste Eigenwerte von K_T zu vermeiden, wird eine Transformation mit einer Barrieretechnik angewandt, die es ermöglicht, diese Nebenbedingungen der Zielfunktion zuzuschlagen. Bei den Beispielen finden sich Schalentragwerke, allerdings bei Verwendung von nur sehr wenigen Entwurfsvariablen. Die Imperfektionsempfindlichkeit bleibt unberücksichtigt.

Becker (1992) schlägt die Verwendung einer Bound–Formulierung, ähnlich dem in Kapitel 9.5.3 beschriebenen Verfahren, vor. Die Boundvariable stellt dabei das unter der kritischen Last liegende Lastniveau, an dem dann eine Eigenwertabschätzung der kritischen Last erfolgt, dar. Die Optimierung bedeutet also die Maximierung des zur Boundvariable gehörenden Lastniveaus unter den Nebenbedingungen, daß dieses Lastniveau unter dem aus der Eigenwertberechnung approximierten liegt. Bei der Sensitivitätsanalyse werden einige Näherungen eingeführt. Die Imperfektionsempfindlichkeit fließt über das Konzept der reduzierten Membranbeulung (Croll (1975), Wittek (1980)) ein.

In Pezeshk (1992) wird die Optimalitätskriterienmethode von Khot und Kamat (1985) nochmals aufgegriffen und erweitert. Bei den Beispielen findet sich neben Fachwerken jetzt auch ein Beispiel mit dreidimensionalen Balkenelementen.

Le Tallec und Halard (1993) zeigen eine Methode, bei der die Strukturvariablen den Optimierungsvariablen und die Gleichgewichtsbedingungen den Nebenbedingungen zugeschlagen werden. Das Optimierungsproblem, bei dem das Gleichgewicht erst am Optimum erfüllt ist, wird durch einen Newton-Algorithmus effektiv gelöst. Die Sensitivitätsanalyse erfolgt durch Differenzenbildung. Stabilitätsphänomene und Imperfektionsempfindlichkeit, die ja gerade mit geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten in Verbindung stehen, bleiben gänzlich unberücksichtigt.

Die in Polynkin et al. (1995) gezeigte Methode verzichtet auf eine direkte Sensitivitätsanalyse. Die Sensitivitäten fließen vielmehr über Funktionsauswertungen für mehrere Tastschritte ein. Dafür sind dann jeweils komplette nichtlineare Analysen bis zum kritischen Punkt notwendig. Da die Sensitivitätsanalyse im Vergleich zur kompletten Strukturanalyse sehr kostengünstig ist, erscheint die Methode als sehr aufwendig. Die kritischen Punkte selbst werden nur ungenau berechnet und die Autoren räumen selbst ein, daß dort verbesserte Methoden verwendet werden sollten.

11 Beispiele

Dieses Kapitel behandelt Beispiele, die mit der in Kapitel 10 vorgestellten Optimierungsmethode bearbeitet werden. Als Ziel soll die Steigerung der Tragwerkseffizienz im Vordergrund stehen. Ganz konkret bedeutet dies die Verbesserung des Stabilitäts- und Imperfektionsverhaltens bei gleichbleibendem Materialvolumen.

Das erste Beispiel beschäftigt sich mit einer Faltwerkstruktur, aus ebenen Teilen zusammengesetzt. Als Optimierungsvariablen dienen nur Querschnittswerte. Trotz der Verwendung nur sehr weniger Variablen kann das Tragwerk stark verbessert werden.

Das zweite Beispiel zeigt die Optimierung eines ebenen Bogentragwerks. Bei gleichzeitiger Verwendung von Form- und Querschnittsvariablen kann eine brauchbare und sinnvolle Bogenform gefunden werden.

Das dritte Beispiel handelt von der Formfindung eines Schalentragwerks. Das räumlich gekrümmte Flächentragwerk wird durch Form- und Querschnittsvariablen bzgl. seines Stabilitäts- und Imperfektionsverhaltens verbessert. Dieses Beispiel demonstriert die Tauglichkeit der vorgestellten Optimierungsprozedur auch für Beispiele mit vielen Variablen, d.h. Optimierungsvariablen und Strukturvariablen.

11.1 Versteiftes Paneel

Das in Bild 11.1 dargestellte versteifte Paneel wurde u.a. schon von Tveergard (1973,₁ und 1973,₂), Ise (1981) und Bernhardt (1985) analysiert. Es handelt sich um dasselbe Problem, das schon in der Einleitung (Kapitel 1.4.2) angesprochen wurde.

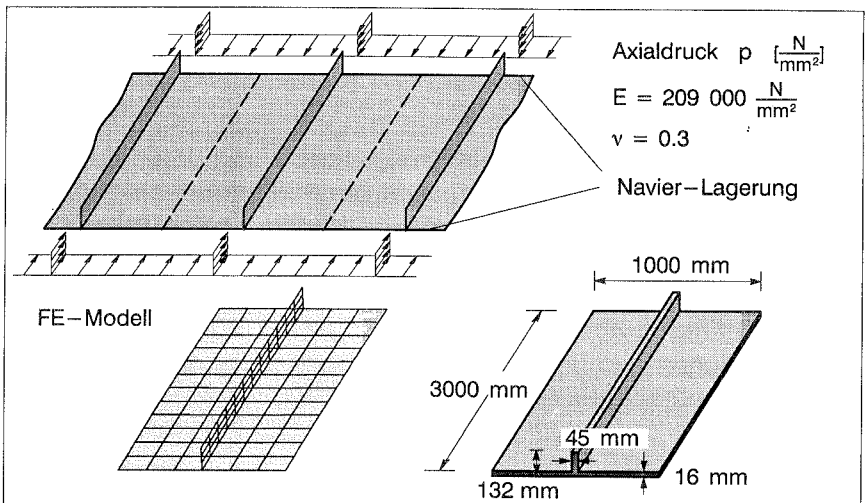


Bild 11.1: Beschreibung des versteiftes Paneels

Das Paneel hat in Querrichtung eine unendliche Ausdehnung und ist in Längsrichtung durch Axialdruck belastet. Die belasteten Ränder sind Navier–gelagert und die Querausdehnung bleibt unbehindert. Für die Berechnung wird nur ein Teil des Paneels mit entsprechenden Symmetrierandbedingungen verwendet. Die Maße und Materialdaten dafür sind in Bild 11.1 angegeben. Des weiteren findet sich dort die Diskretisierung mit finiten Elementen unter Verwendung des von Büchter (1992) formulierten isoparametrischen Schalenelementes für große Verschiebungen und Rotationen. Es arbeitet mit sechs Freiheitsgraden pro Knoten entlang der Kante zwischen Paneel und Steife, um die Falterkwerkswirkung zu modellieren. Das Schalenelement kommt achtknotig mit 2×2 Gaußpunkten unterintegriert zum Einsatz, um Versteifungseffekte ("Locking"), die bei 3×3 Vollintegration auftauchen können, zu vermeiden.

Die Lastverformungskurve des perfekten Paneels für die Mittendurchbiegung u_m an der Steife ist in Bild 11.2 aufgetragen. Bei einer Belastung von $p_{\text{perf}} = 256.6 \text{ N/mm}^2$ kann ein Verzweigungspunkt lokalisiert werden. Der Singulärvektor hat dort die Form des globalen Ausknickens der Gesamtstruktur (siehe Bild 11.2). Die gleichen Verformungen stellen sich ein beim Verfolgen des Sekundärpfades. Die Verwendung dieses Singulärvektors als Imperfektionsform mit einer Amplitude von $a = 10 \text{ mm}$ führt auf die Lastverschiebungskurve für die imperfekte Struktur mit einem Durchschlagspunkt bei $p_{\text{imp}} = 194.7 \text{ N/mm}^2$. Eine Verdoppelung der Anzahl finiter Elemente, führt auf eine Änderung der kritischen Last um weniger als 1 %. Das verwendete finite Elementmodell besitzt somit eine ausreichende Genauigkeit. Eine Vergleichsberechnung eines Paneels mit einer Steifenhöhe von $h_{\text{St}} = 140 \text{ mm}$ bei sonst gleichen Abmessungen führt mit $p_{\text{perf}} = 295 \text{ N/mm}^2$ auf genau die von Ise (1981) angegebene Last des entsprechenden Paneels.

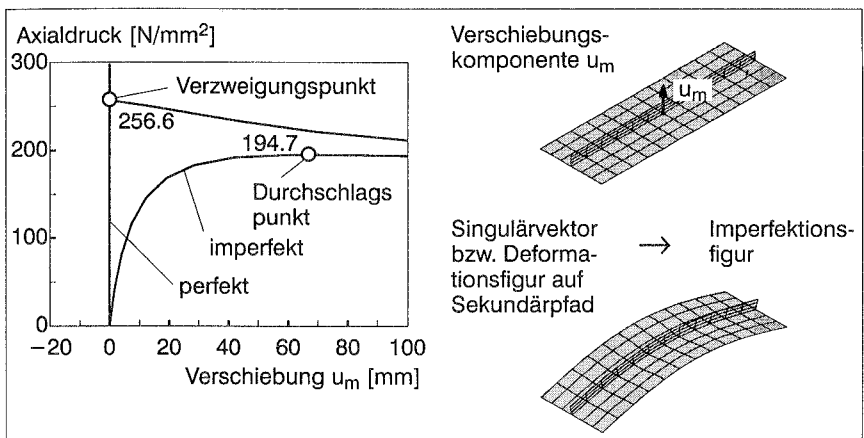


Bild 11.2: Lastverschiebungskurven für Ausgangsform

Außer dem Singulärvektor wurden auch noch andere Eigenformen und verschiedene Kombinationen von Eigenformen, alle skaliert auf die Maximalamplitude von $a=10$ mm, überprüft. Jedoch führt die Verwendung des Singulärvektors auf die niedrigste aufnehmbare Last, so daß dieser als maßgebende Imperfektionsform verwendet wurde.

Das Optimierungsproblem läßt sich wie folgt formulieren:

<u>Ziel:</u>	$\max p$	– maximale Versagenslast
<u>Nebenbedingung:</u>	$g = \frac{V}{V_0} - 1 = 0$	– konstantes Volumen
<u>Variablen:</u>	t_p	– Paneeldicke
	t_{St}	– Steifendicke
<u>Variablenrestriktionen:</u>	$12 \text{ mm} \leq t_p \leq 18 \text{ mm}$	

Die Verwendung der Nebenbedingung für konstantes Volumen hat zum einen zur Folge, daß die resultierende Kraft aus der Druckbelastung gleich bleibt. Weiter läßt sich für die erfüllte Nebenbedingung folgender Zusammenhang zwischen den Variablen angeben

$$\Delta t_{St} = -7.576 \cdot \Delta t_p \quad (11.1)$$

Das heißt, bei explizit erfüllter Nebenbedingung handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit nur einer Variablen. Somit läßt sich auch das Diagramm in Bild 11.3 erstellen.

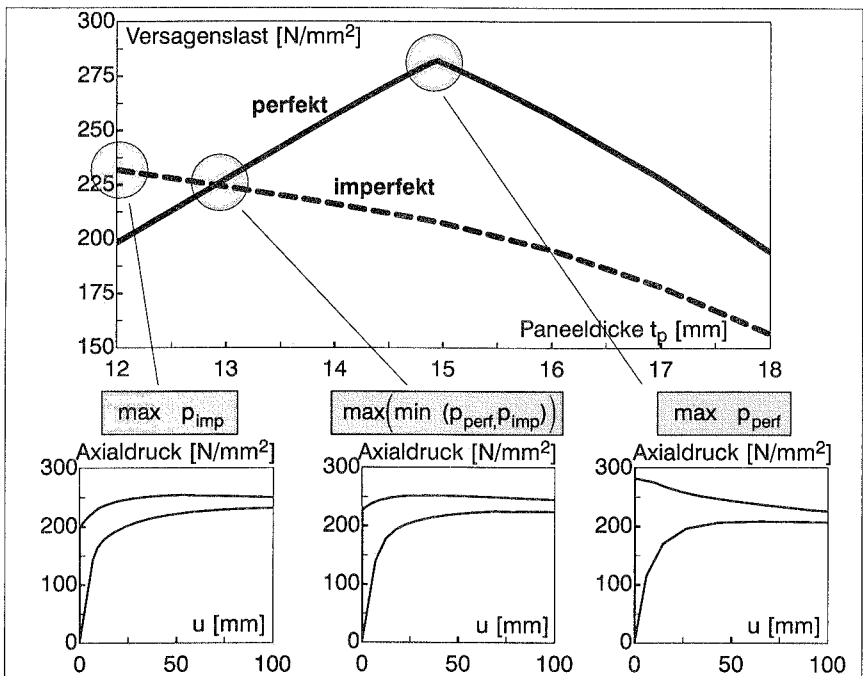


Bild 11.3: Zielfunktionsverlauf des Optimierungsproblems mit einer Variablen

Dort sind die kritischen Versagenslasten, sowohl für die perfekte als auch für die mit Imperfektionen behaftete Struktur, für die zwischen den Restriktionen variierende Paneeldicke aufgetragen. Es lassen sich drei markante Punkte erkennen:

- 1.) $\max p_{\text{perf}}$ – der Maximalpunkt der kritischen Last des perfekten Paneels
- 2.) $\max p_{\text{imp}}$ – der Maximalpunkt der kritischen Last des imperfekten Paneels an der unteren Schranke für t_p
- 3.) $\max(\min(p_{\text{perf}}, p_{\text{imp}}))$ – der Schnittpunkt der beiden Linien, also das Maximum bei Verwendung der kleineren der beiden Versagenslasten

Ziel der Optimierung soll nun sein, diese drei Punkte anzusteuern. Das bereits in Bild 11.3 angedeutete Lastverformungsverhalten an diesen Punkten wird dann später noch genauer diskutiert. Die Optimierungsprozedur arbeitet nun mit zwei Variablen und der Volumen Nebenbedingung, die erst am Optimum erfüllt ist. Bild 11.4 zeigt die iterativen Zwischenpunkte bei der Lösung der drei Optimierungsprobleme.

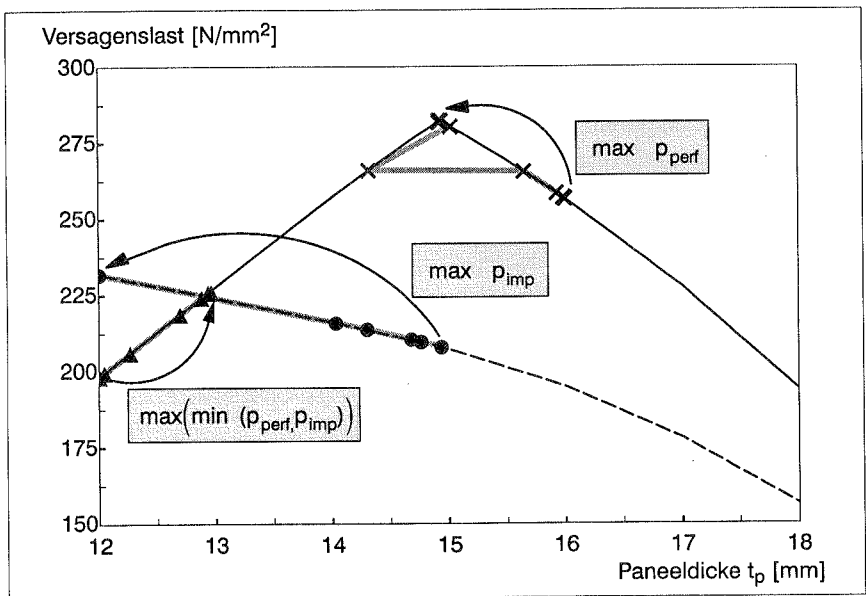


Bild 11.4: Iterationsverläufe

Die Maximierung der Traglast des perfekten Paneels hat eine Lösung bei $t_p = 14.94 \text{ mm}$ und $t_{\text{St}} = 53.06 \text{ mm}$. Das Lastverschiebungsverhalten in Bild 11.5 zeigt eine Erhöhung der aufnehmbaren Last um 10 % auf $p_{\text{perf}} = 282.2 \text{ N/mm}^2$ gegenüber der Ausgangs-

form. Die nun größere Imperfektionsempfindlichkeit erlaubt für die Versagenslast der imperfekten Struktur nur eine Steigerung um 6.8 % auf $p_{imp}=207.9 \text{ N/mm}^2$.

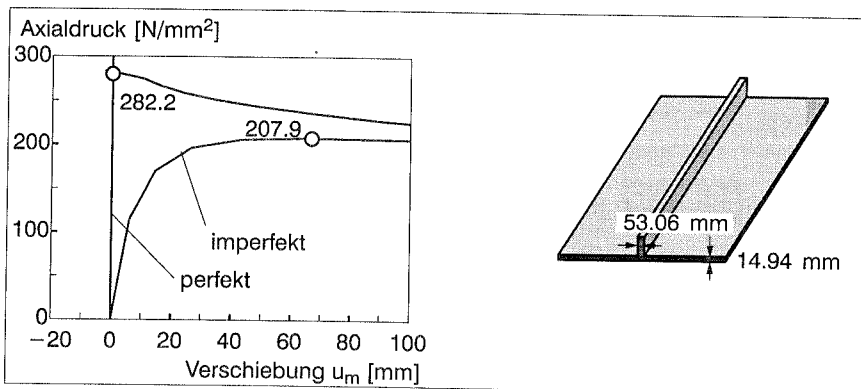


Bild 11.5: Keine Berücksichtigung von Imperfektionen während Optimierung

Die Traglast für das imperfekte Paneel (Bild 11.6) hat ein Optimum für $t_p=12 \text{ mm}$ an der unteren Schranke und $t_{St}=75.30 \text{ mm}$. Die Traglast für das imperfekte Paneel wächst zwar um 19 % an und liegt damit über der des perfekten Tagwerks. Jedoch treten dabei so große Verformungen auf, daß der kritische Punkt außerhalb des dargestellten Bereichs der Lastverschiebungskurve bis zu einer Verschiebung von $u_m=100 \text{ mm}$ liegt. Das Auftreten von großen Verformungen rechtfertigt kaum noch die alleinige Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten, da man sehr leicht in plastische Bereiche gelangen kann. Die Idee, Spannungs- oder Verformungsrestriktionen in die Formulierung des Optimierungsproblems aufzunehmen, wird hier nicht weiterverfolgt.

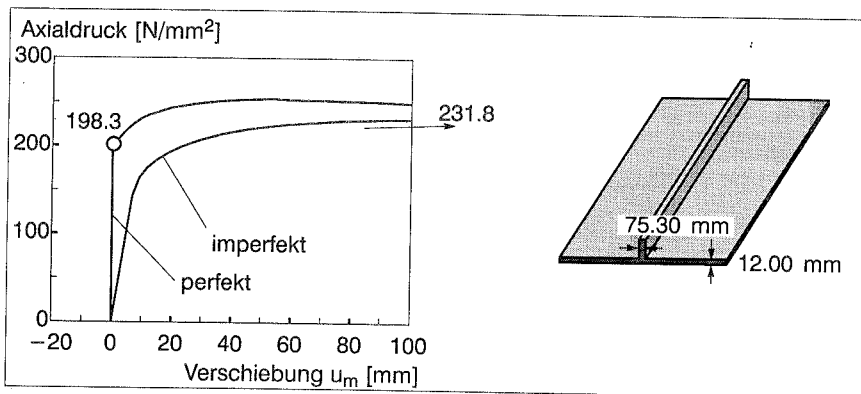


Bild 11.6: Berücksichtigung von Imperfektionen während Optimierung

Die Verwendung der kleineren der beiden kritischen Lasten aus der Analyse der perfekten und der imperfekten Struktur (vgl. auch Kapitel 10.2.2) führt zum Optimum bei $t_p=12.96$ mm und $t_{St}=68.02$ mm. Die beiden Versagenslasten haben den Wert $p_{perf}=p_{imp}=226.5$ N/mm². Die kritische Last der imperfekten Struktur kann um 16 % gesteigert werden. In diesem Fall reduziert sich die kritische Last des perfekten Tragwerks um 12%.

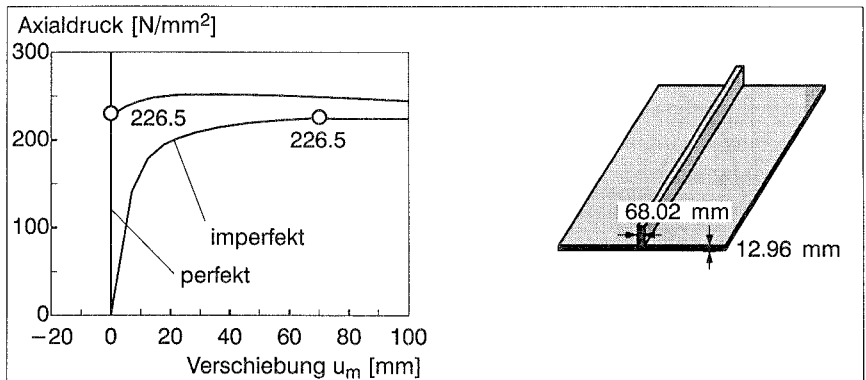


Bild 11.7: Optimierungsergebnis bei Berücksichtigung von Imperfektionen

Zusammenfassend läßt sich also feststellen, daß bei Vorgabe einer maximalen Imperfektionsamplitude von $a=10$ mm die aufnehmbare Last durch Variation der Dicken von Panel und Steife um 16% gesteigert werden kann unter Verwendung des gleichen Materialvolumens. Zweifelsohne kann dieses Optimierungsproblem auch ohne jegliche Optimierungstechniken nur durch Ausprobieren des entwerfenden Konstrukteurs sehr leicht gelöst werden. Es soll in dieser Form in erster Linie der Anschaulichkeit dienen.

Die Verwendung der Steifenhöhe als dritte Variable führt sofort zu einer relativ komplizierten Optimierungsaufgabe, da die Nebenbedingung nicht mehr so einfach explizit erfüllt werden kann. "Trial and Error"-Methoden versprechen kaum noch Erfolg. Die nun untersuchten Optimierungsprobleme lauten:

- | | | |
|--------------------------------|--|-------------------------------------|
| <u>Ziel:</u> | 1.) max p_{perf} | 2.) max min (p_{perf}, p_{imp}) |
| <u>Nebenbedingung:</u> | $g = \frac{V}{V_o} - 1 = 0$ – konstantes Volumen | |
| <u>Variablen:</u> | t_p | – Paneeldicke |
| | t_{St} | – Steifendicke |
| | h_{St} | – Steifenhöhe |
| <u>Variablenrestriktionen:</u> | $12 \text{ mm} \leq t_p \leq 18 \text{ mm}$ | |

Die Werte am Optimum für die Dicken von Paneel und Steife und die Steifenhöhe bei Maximierung der Traglast der perfekten Struktur finden sich in Bild 11.8 zusammen mit den Lastverschiebungskurven für das perfekte und das imperfekte Paneel. Die kritische Lasten sowohl des perfekten als auch des imperfekten Tragwerks können je um 15 % gesteigert werden.

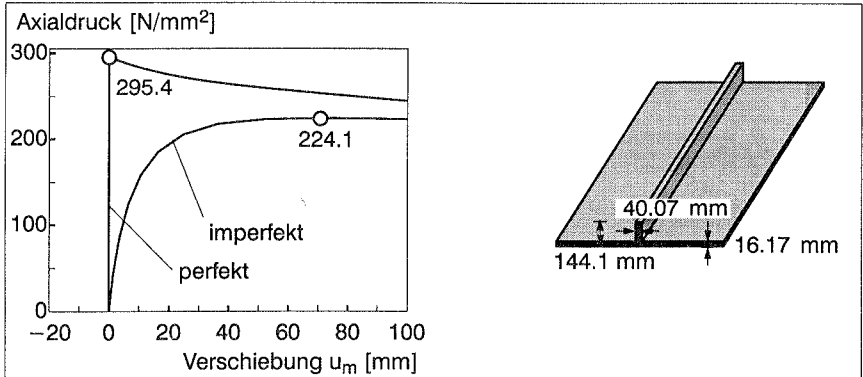


Bild 11.8: 3 Variablen / Optimierung ohne Imperfektionseinfluß

Das zweite Optimierungsproblem führt auf die Querschnittswerte in Bild 11.9. Der kritische Lastwert liegt mit $p_{\text{perf}} = p_{\text{imp}} = 273.4 \text{ N/mm}^2$ für das perfekte und das imperfekte Tragwerk auf gleicher Höhe.

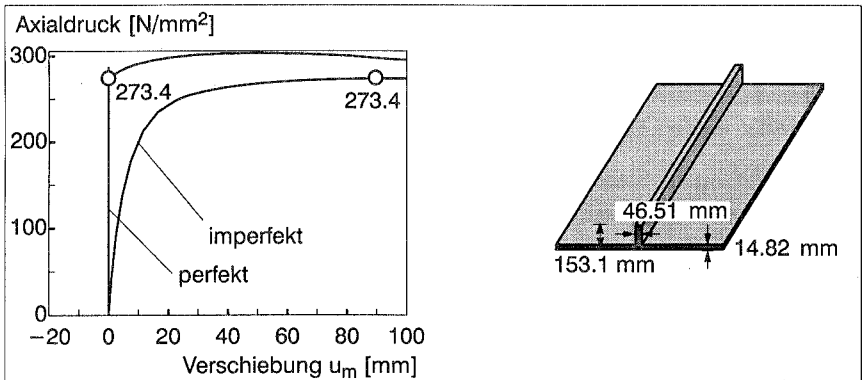


Bild 11.9: 3 Variablen / Optimierung mit Imperfektionsempfindlichkeit

Durch die nur leichte Veränderung der drei Querschnittswerte kann das Tragverhalten entscheidend verbessert werden. Die maßgebende Versagenslast der imperfekten Struktur kann bei gleichem Materialaufwand gegenüber der Ausgangsform um 40 % gesteigert werden.

Søreide (1977) dimensioniert sein optimales Paneel so, daß die Beullast für die durch die Stege fest eingespannte und in Querrichtung nicht behindert angenommene Platte zwischen den Stegen und des u.a. in Bild 11.1 herausgelösten Plattenbalkens (ohne Symmetrierandbedingungen) mit voll mittragendem Gurt gleich sind. Wie auch Ise (1981) kritisch bemerkt, wird dies sicher nicht zu dem hier gesuchten Paneel mit maximaler Beullast führen.

Tveergard (1973,₂) dagegen macht sehr ähnliche Studien. Jedoch verwendet er Variablenverknüpfungen unter Einarbeitung der Nebenbedingung für konstantes Volumen, die etwas undurchsichtiger als die in dieser Arbeit verwendeten sind. Außerdem beschränkt er sich auf nur eine freie Variable. Das Hauptaugenmerk gilt der Frage, ob bei simultanem Beulen, also dem Zusammenfallen mehrerer Beulversagensformen auf gleichem Lastniveau, auch die höchste Lastabtragungskapazität vorhanden ist. Dies wird ganz klar verneint bei Berücksichtigung des nachkritischen Verhaltens und der Imperfektionsempfindlichkeit. Die dort gemachten Aussagen und gezeigten Diagramme zeigen qualitativ gute Übereinstimmung mit dem hier analysierten Beispiel.

11.2 Bogen

11.2.1 Bogen unter Einzellast

Für ein konstantes Volumen wird die Bogenform gesucht, die eine maximale aufnehmbare Belastung ermöglicht. Eine ähnliche Aufgabe behandeln auch Plaut, Olhoff (1983). Das Versagen am Stabilitätspunkt bewirkt ein seitliches Ausknicken des Bogens, wie dann später Bild 11.16 noch genauer zeigt. Die Berechnung des kritischen Lastfaktors erfolgt zum einen mit der direkten Methode der erweiterten Systeme und zum anderen mit der Approximation der kritischen Last durch die Anfangsstabilitätsanalyse, basierend auf der Eigenwertberechnung mit elastischer und geometrischer Steifigkeitsmatrix. Die Verwendung der beiden Möglichkeiten und deren Einfluß auf das Optimum wird im folgenden diskutiert.

Die Ausgangsform des Tragwerks und die wichtigsten Daten sind in Bild 11.10 enthalten. Die Form wird beschrieben durch zwei B–Spline–Kurven mit je sieben Kontrollknoten für die Bogenmittellinie. Am Scheitel sind die Kontrollknoten derart angeordnet, daß ein C_1 –kontinuierlicher Übergang entsteht. Die vertikalen Positionen der Kontrollknoten dienen als Optimierungsvariablen. Dabei bleibt der C_1 –kontinuierliche Übergang am Scheitel erhalten. Dies führt zu einer Anzahl von fünf Formvariablen, wenn die Symmetrie des Tragwerks vorausgesetzt wird. Die Einführung der Dicke als weitere Variable erlaubt erst die Einhaltung der Nebenbedingung für konstantes Volumen auf sinnvoller Weise.

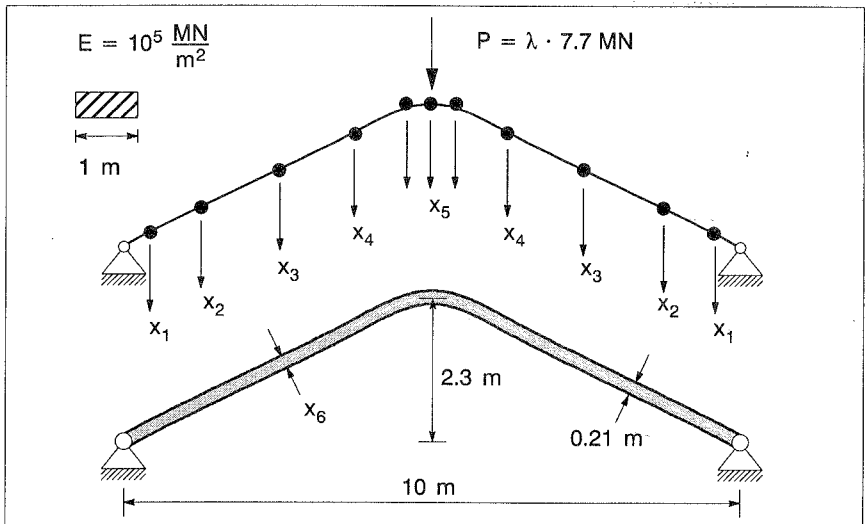


Bild 11.10: Ausgangsform

Es lassen sich somit die beiden Optimierungsprobleme in Bild 11.11 formulieren.

<p>a) $\max \lambda_c$ λ_c – kritischer Lastfaktor aus geom. nichtl. Berechnung</p>	<p>b) $\max \omega$ ω – niedrigster Eigenwert aus klassischer Stabilitätsanalyse $(\mathbf{K} + \omega_1 \mathbf{K}_g) \phi = \mathbf{0}$</p>
<p>Variablen : $x_1 \dots x_5$ – Formparameter x_6 – Dicke</p>	
<p>Nebenbedingung : $h = \frac{V}{V_0} - 1 = 0$; $V_0 = 2.3 \text{ m}^3$</p>	

Bild 11.11: Zwei Optimierungsprobleme

Die Diskretisierung mit finiten Elementen erfolgt, wie in Bild 11.12 gezeigt, für das Gesamttragwerk, da das Auftreten einer asymmetrischen Versagensform die Berechnung am halben System verbietet. Es werden achtknotnige, isoparametrische, 2×2 unterintegrierte Schalenelemente verwendet. Die Verschiebungsfreiheitsgrade aus der Ebene werden behindert.

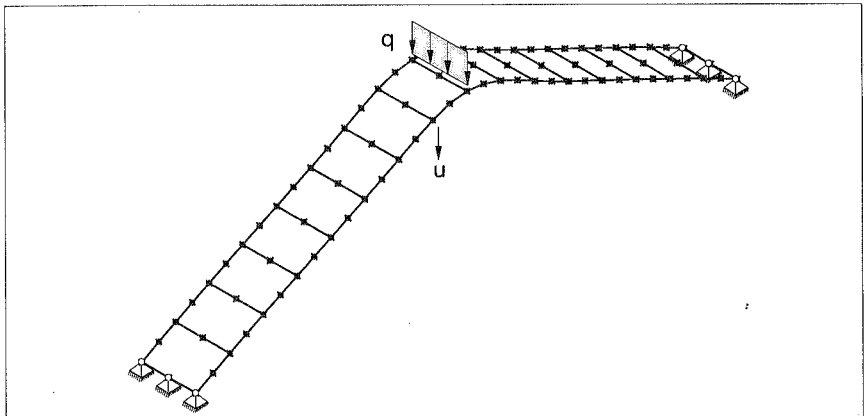


Bild 11.12: Diskretisierung

Die iterativen Verbesserungen der Zielfunktionswerte beider Optimierungsprobleme in Bild 11.13 verhalten sich bis zur zehnten Iteration sehr ähnlich. Auch weisen bis dahin die Bogenformen große Ähnlichkeiten auf. Während aber im Falle **a)** das Optimum bereits erreicht ist, kann im Falle **b)** noch eine weitere Erhöhung des als Zielfunktionswert verwendeten Eigenwertes erreicht werden. Die genaue Betrachtung der beiden Optimalformen in Bild 11.14 zeigt, daß dabei im Scheitelbereich eine Gegenkrümmung auftritt, während im Falle **a)** eine glatte und gefällige Form entsteht.

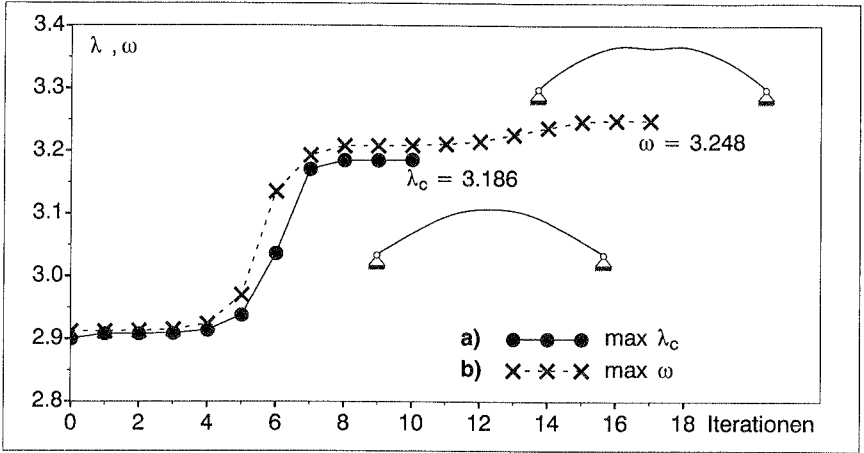


Bild 11.13: Zielfunktionsverläufe

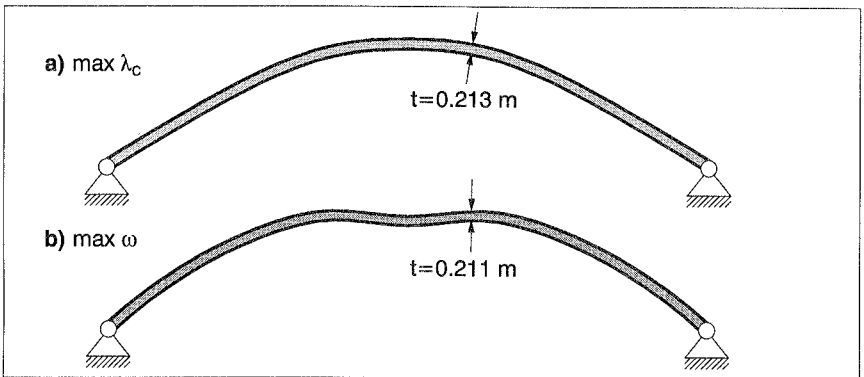


Bild 11.14: Optimalformen

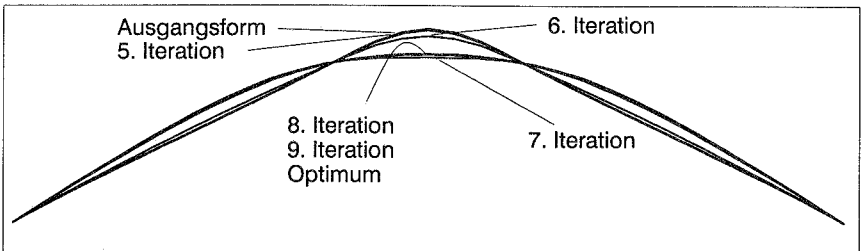


Bild 11.15: Formänderungen während des Optimierungfortschrittes

Bild 11.15 dokumentiert die Entstehung der Bogenform im Falle **a)**. Bis zur 5. Iteration passiert noch nicht sehr viel, und die 8. Iteration zeigt schon fast das Endergebnis. Diese entscheidende Verbesserung in den Schritten fünf bis acht kann auch in Bild 11.13 am Zielfunktionsverlauf beobachtet werden. Der geringe Optimierungsschritt zu Beginn ist bedingt durch die schlechte Approximation der Hessematrix, die erst nach einigen Schritten besser wird.

Zur Beurteilung der entstandenen Formen **a)** und **b)** werden nun beide einer geometrisch nichtlinearen Analyse bis zum Erreichen des kritischen Punktes und einiger Gleichgewichtszustände auf dem Sekundärpfad unterzogen. Zu den Lastverschiebungskurven in Bild 11.16 sind dann noch die Approximationen durch die Eigenwertberechnung für die Ausgangsform und das Optimum **b)** eingezeichnet. Weiterhin enthält Bild 11.16 die symmetrische Verformungsfigur am kritischen Punkt und das asymmetrische Ausknicken auf dem Sekundärpfad.

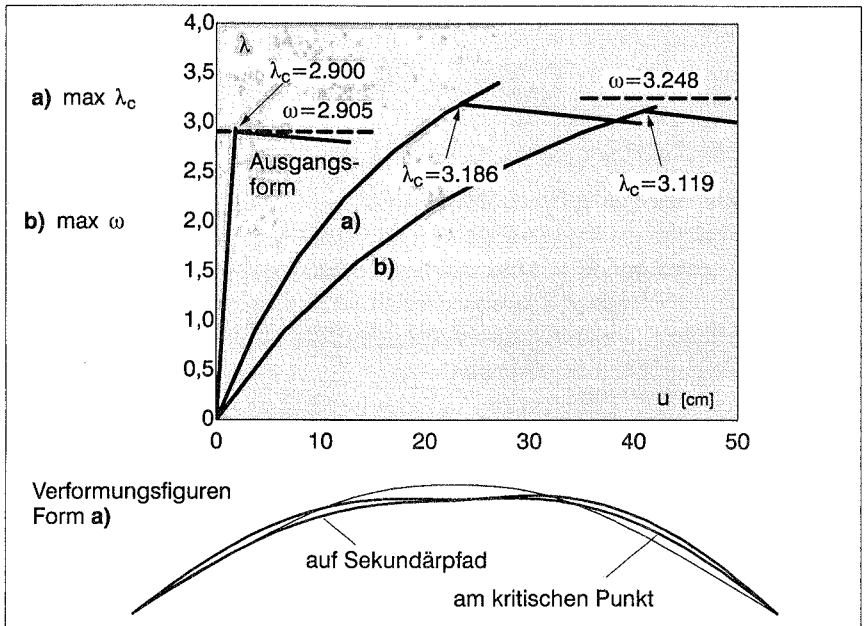


Bild 11.16: Lastverschiebungskurven

Wie sich hier erkennen läßt, liegt der Zielfunktionswert im Falle **b)** mit $\omega = 3.248$ zwar über dem des Falles **a)** mit $\lambda_c = 3.186$, jedoch liegt die genau berechnete kritische Last im Falle **b)** tiefer bei $\lambda_c = 3.119$. Die in der Form **b)** entstandene Gegenkrümmung im Scheitelbereich bewirkt also, daß die Eigenwertberechnung die kritische Last schlechter approximiert und somit eine Erhöhung der aufnehmbaren Last vortäuscht. Dieses

Beispiel führt also zur Erkenntnis, daß die Approximation der Versagenslast mit der Anfangseigenwertberechnung mit Vorsicht zu bewerten ist. Die exakte Berechnung der kritischen Last ist also auf jeden Fall zu bevorzugen.

Dieselbe Formfindungsaufgabe behandeln auch Plaut, Olhoff (1983). Die dort gezeigte analytische Ermittlung des Stabilitätsversagens basiert auf einer Differentialgleichung, gültig nur für flache Bögen mit geringer Querschnittshöhe. Die Bogenform ergibt sich aus einer Überlagerung von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Unter gleichen geometrischen Randbedingungen (Lagerabstand $l=10$ m, Materialvolumen $V=2,3$ m³, Querschnittsdicke $t=0,13$ m, Breite $b=1$ m), gleicher Lagerung und Belastung führt dies auf die in Bild 11.17 gestrichelt dargestellte Optimalform.

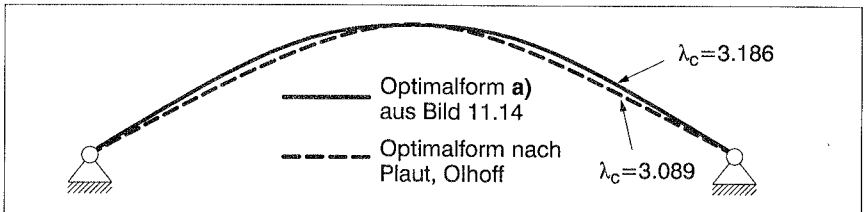


Bild 11.17: Vergleich der Optimalform mit Plaut, Olhoff (1983)

Der von Olhoff, Plaut (1983) errechnete kritische Lastfaktor liegt bei $\lambda_c = 3.607$. Eine geometrisch nichtlineare Analyse dieser Bogenform bestätigt mit einer deutlich niedrigeren Versagenslast von $\lambda_c = 3.089$, daß die in dieser Arbeit entwickelte Bogenform mit $\lambda_c = 3.186$ die höhere Versagenslast besitzt. Die hier berechneten Bögen liegen mit ihren großen Bogen- und Querschnittshöhen außerhalb des Gültigkeitsbereiches der in Plaut, Olhoff gemachten Herleitungen.

11.2.2 Bogen unter Gleichlast

Das zweite Beispiel der Suche nach der Optimalform eines Bogentragwerks studiert nun den Einfluß der Imperfektionsempfindlichkeit. Die gleiche Ausgangsform wie in Beispiel 11.2.1 wird in Bild 11.18 jetzt mit einer Gleichstreckenlast beansprucht. Es kommt die in Bild 11.12 dargestellte Diskretisierung erneut zum Einsatz. Als Optimierungsvariablen finden jetzt zu den fünf Formparametern auch fünf Parameter für die Dickenbeschreibung mit einer B-Spline-Interpolation Anwendung.

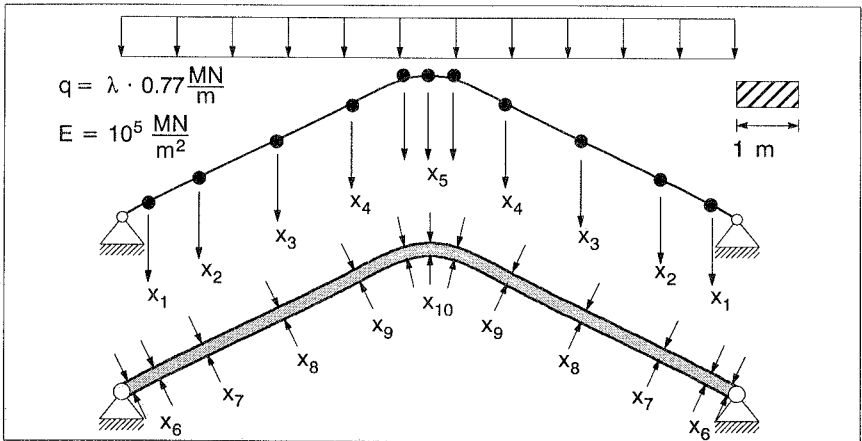


Bild 11.18: Ausgangsform

- a)** $\max \lambda_{c,\text{perf}}$ – perfekte Struktur **b)** $\max \lambda_{c,\text{imp}}$ – Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit
- Variablen : $x_1 \dots x_5$ – Formparameter
 $x_6 \dots x_{10}$ – Dickenparameter
- Nebenbedingung : $h = \frac{V}{V_0} - 1 = 0$; $V_0 = 2,3 \text{ m}^3$

Bild 11.19: Zwei Optimierungsprobleme

Es findet ein Vergleich zwischen den beiden in Bild 11.19 beschriebenen Optimierungsaufgaben statt. Im Fall **a)** dient die kritische Last des perfekten Systems als Zielfunktionswert und im Fall **b)** die des imperfekten Systems. Als Imperfektionsform kommt der Singulärvektor des perfekten Tragwerks, skaliert auf eine Imperfektionsamplitude von $a=0,10 \text{ m}$ zur Anwendung. Der Singulärvektor beschreibt hier das asymmetrische Ausknicken des Bogens.

Die beiden Optimalformen in Bild 11.20 unterscheiden sich hauptsächlich im Scheitelbereich. Die Form **b)**, entstanden bei Berücksichtigung von Imperfektionen, fällt etwas höher aus.

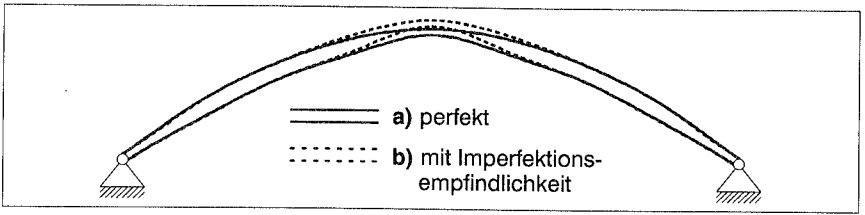


Bild 11.20: Optimalformen

Um den Gewinn bei Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit im Optimierungsprozess darzulegen, werden beide Formen nochmals perfekt und imperfekt, wieder mit dem Singulärvektor und der Amplitude $a=0.10$ m als Imperfektionsform modifiziert, analysiert. Die Form **a)** weist mit dem Abfall um 27 % von $\lambda_{c,perf} = 6.691$ auf $\lambda_{c,imp} = 4.783$ eine hohe Imperfektionsempfindlichkeit auf. Im Fall **b)** kann die maßgebende Traglast der imperfekten Struktur gegenüber **a)** gesteigert werden auf $\lambda_{c,imp} = 5.515$ bei einer gleichzeitigen Abminderung der Traglast der perfekten Struktur auf $\lambda_{c,perf} = 6.348$. Der Abfall infolge von Imperfektionen reduziert sich also auf 12 %. Da die Traglast des imperfekten Tragwerks als maßgebend gilt, kann der Gewinn bei Berücksichtigung der Imperfektionen im Optimierungsprozess im Fall **b)** gegenüber Fall **a)** mit 13 % angegeben werden.

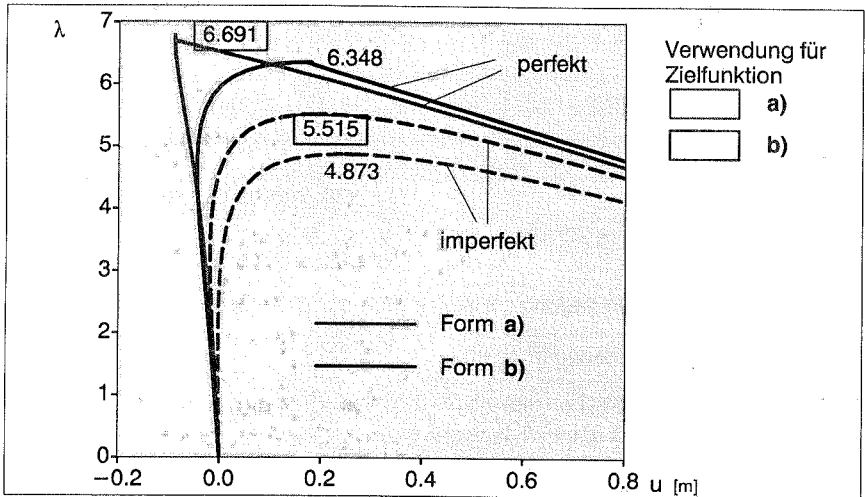


Bild 11.21: Lastverschiebungskurven

Ein Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur scheidert, da die hier vorgestellte, sehr flexible, Optimierungsmethode die Möglichkeit besitzt, auch Dickenvariablen einzuführen und die Imperfektionsempfindlichkeit zu integrieren. Dies findet z.B. bei Plaut und Olhoff (1983) keine Berücksichtigung.

11.3 Schale

Die Formfindung freigeformter Schalenträgerwerke gelingt u.a. dem Schweizer Schalenbauer H. Isler durch experimentelle Methoden. Die Erzeugung seiner Formen z.B. durch hängende Tücher, deren Formen dann umgedreht Verwendung als Schalenträgerwerke finden, beschreiben Ramm, Schunck (1986). Ziel der Experimente ist es, Formen zu erhalten, die die Belastung mehr durch Membranbeanspruchung als durch Biegebeanspruchung abtragen. Kimmich (1990) setzt die Methoden der Strukturoptimierung ein, um eben solche Formen auf anderem Wege zu erzeugen. Um genauso membranbeanspruchte Formen zu gewinnen, gilt es, die Formänderungsenergie, beschrieben in Reitinger (1988), zu minimieren. Einen Vergleich der experimentellen und computerunterstützten Methoden ziehen auch Ramm, Reitinger (1992). Gegenstand der Untersuchungen dort ist das Schalenträgerwerk des Kresge Auditoriums des Massachusetts Institute of Technology, das sich in der Bauphase schon als problematisch erweist. Die Formverbesserungen durch die Strukturoptimierung mit der Formänderungsenergie als Zielfunktion wirken sich auch bei einer nachträglichen geometrisch und materiell nichtlinearen Berechnung unter Berücksichtigung von Stahlbetonverhalten sehr vorteilhaft aus.

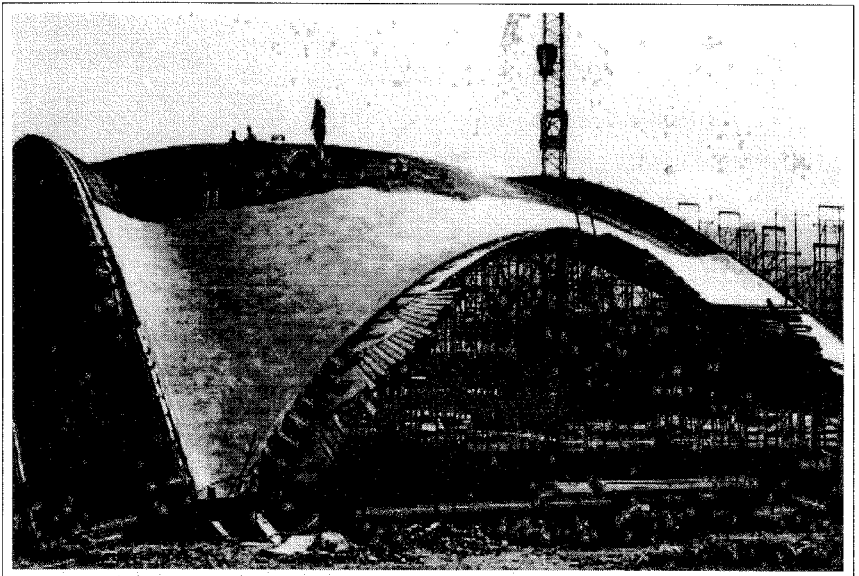


Bild 11.22: Freiformschale von H. Isler (Isler (1981))

Doch gerade solche hauptsächlich membran- und druckbeanspruchte Konstruktionen können auch Stabilitätsprobleme aufweisen. So bemerkt Isler (1981), daß solche Schalenträgerwerke in den Problembereichen, z.B. am freien Rand, eine ausreichende

doppelte Krümmung aufweisen müssen, um nicht stabilitätsgefährdet zu sein. Die Verwendung heuristischer Konstruktionsregeln führt z.B. auf die in Bild 11.22 gezeigte Schalenform von H. Isler.

Auch die Methoden der Strukturoptimierung unter Verwendung der Formänderungsenergie, die ja aus einer linearen Strukturanalyse stammt, können die Stabilitätsprobleme nicht erfassen. Daher wird die in dieser Arbeit vorgestellte Optimierungsmethode, basierend auf geometrisch nichtlinearen Analysen, eingesetzt, die Formfindung für ein Schalentragwerk mit einem vorgegebenen Volumen über einem quadratischen Grundriß durchzuführen. Die entstandenen Formen werden der bei Verwendung der Energiefunktion gewonnenen gegenübergestellt.

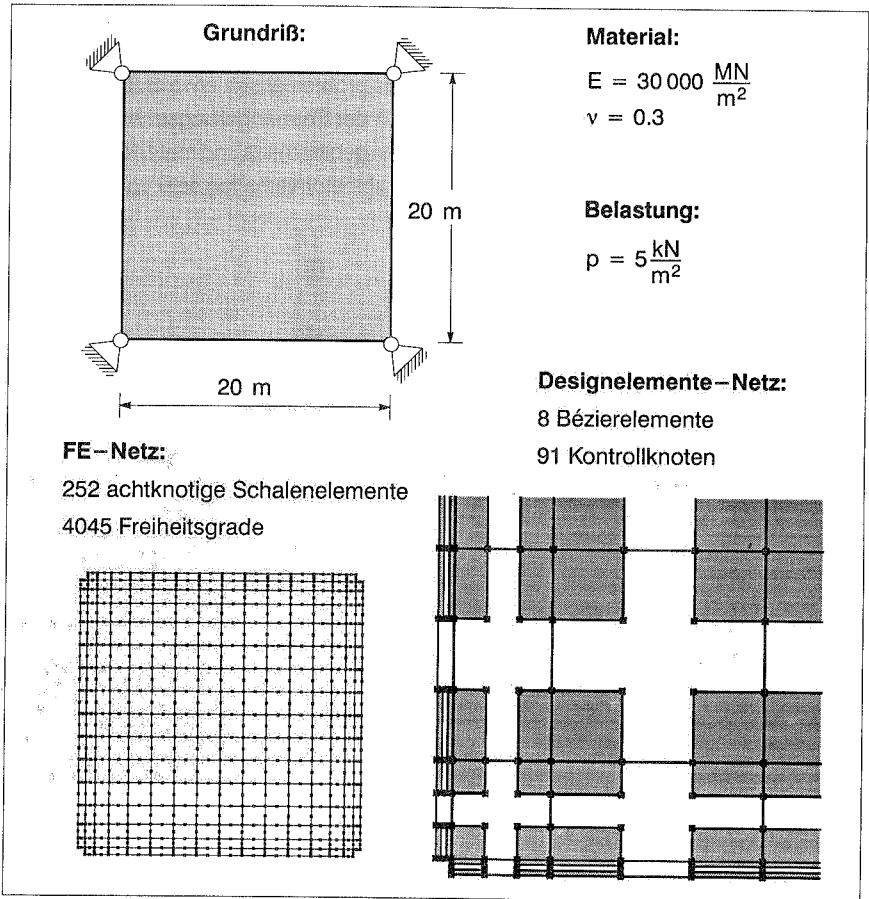


Bild 11.23: Beschreibung des Schalentragwerks

Bild 11.23 enthält die wichtigsten Daten des an den Eckpunkten gelenkig gelagerten Tragwerks über quadratischem Grundriß. Es wird belastet durch eine Flächenlast von $p=5 \text{ N/mm}^2$, skaliert mit dem Lastparameter λ . Die Formbeschreibung beruht auf acht Bézier–Designelementen mit 91 Kontrollknoten an den Kontinuitätspatches zur Beschreibung eines Viertels der symmetrischen Konstruktion. Die vertikalen Positionen der Kontrollknoten dienen als Optimierungsvariablen. Durch die Verwendung verschiedener Variablenverknüpfungen bleiben 13 Formparameter als Optimierungsvariablen. Dazu kommen noch zwei Dickenparameter, der eine für die Dicke im Auflagerbereich, der andere für den Rest der Schale. Aufgrund der verschiedenen auftretenden Verschiebungs-, Versagens-, Eigen- und Imperfektionsformen findet die Berechnung am Gesamtsystem mit der in Bild 11.23 gezeigten Diskretisierung statt. Der Einsatz von 252 achtknotigen, 2×2 unterintegrierten, degenerierten, isoparametrischen Schalenelementen für große Verschiebungen und Rotationen führt auf 4045 Freiheitsgrade für die Strukturanalyse. Im Eckbereich wird ein Element ausgeschnitten und das Tragwerk liniengelagert, um die sehr hohen Spannungsspitzen bei sonstiger Punktlagerung zu reduzieren und um in diesem Bereich durch das gewählte Designelementenetz genügend Formfreiheiten zu gewährleisten.

Im folgenden findet nun die Untersuchung der drei in Bild 11.24 formulierten Optimierungsprobleme statt.

<u>Zielfunktion:</u>	
a) $\min f_E$	– Formänderungsenergie aus linearer Strukturanalyse
b) $\max \lambda_{c,perf}$	– kritischer Lastfaktor der perfekter Struktur
c) $\max \lambda_{c,imp}$	– kritischer Lastfaktor der imperfekten Struktur
<u>Variablen:</u>	
13 Formparameter	
2 Dickenparameter	
<u>Nebenbedingung:</u>	
$h = \frac{V}{V_0} - 1 = 0$	– konstantes Volumen $V_0 = 60 \text{ m}^3$

Bild 11.24: Formulierung der Optimierungsaufgaben

Die Minimierung der Formänderungsenergie aus einer linearen Strukturanalyse, in diesem Fall am Viertelsystem mit Symmetrierandbedingungen durchgeführt, resultiert in der Form in Bild 11.25. Die Dickenvariable für den Auflagerbereich läuft auf ihre obere Schranke, wie die Dickenverteilungen entlang den Schnitten A–A und B–B zeigt. Eine geometrische Nebenbedingung am freien Rand verhindert ein Abknicken nach unten und sorgt für eine ausreichend große Öffnung am freien Rand. Diese zusätzlichen Bedingungen, obere Schranke für die Dickenvariable und die geometrische Nebenbedin-

gung, finden bei den nächsten Optimierungsproblemen keine Berücksichtigung mehr. Die entstandene Form wird zu Vergleichszwecken später noch hinsichtlich ihres Stabilitäts- und Imperfektionsverhaltens untersucht (Bild 11.28).

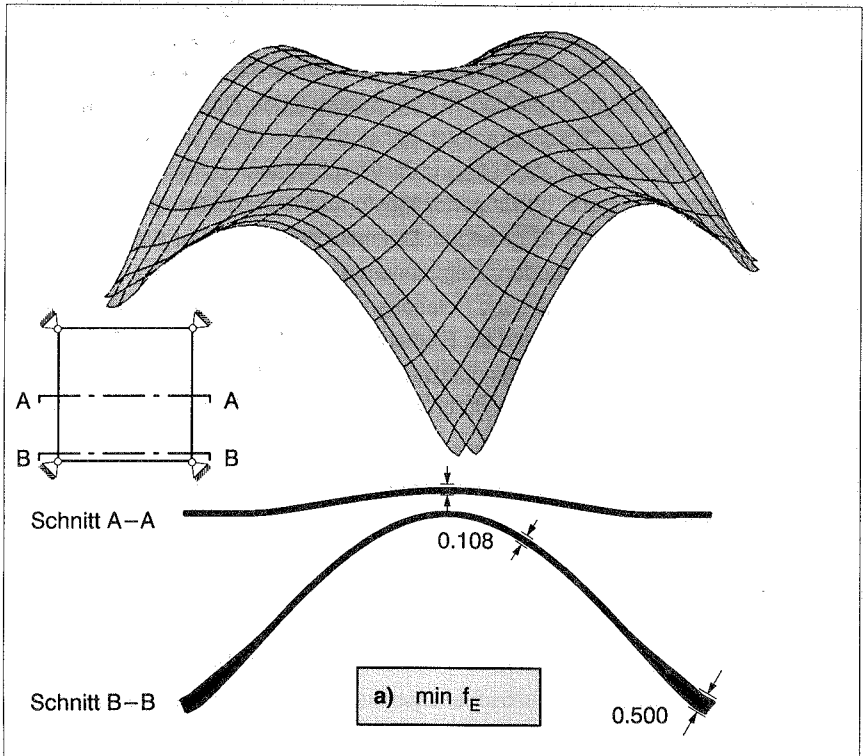


Bild 11.25: Form **a**) – Minimierung der Formänderungsenergie

Die Maximierung der kritischen Traglast aus der geometrisch nichtlinearen Berechnung im Fall **b**) startet nun an der bereits erreichten Form **a**). Die geometrisch nichtlineare Analyse dieser Form liefert einen kritischen Lastfaktor von $\lambda_{c,perf}=44.4$. Imperfektionen bleiben noch unberücksichtigt. Die entstehende Form beschreibt Bild 11.26. Der wesentliche Unterschied zu Form **a**) besteht in der doppelten Krümmung am freien Rand bis hinunter zum Auflager. Der kritische Lastfaktor kann auf $\lambda_{c,perf}=84.3$ gesteigert werden. Die anschließende Untersuchung des Imperfektionsverhaltens läßt aber einen deutlichen Abfall infolge von Imperfektionen feststellen. Als Imperfektionsformen stehen Kombinationen aus Eigenvektoren, berechnet am kritischen Punkt des perfekten Tragwerks, zur Verfügung (Bild 11.27). Einige Lastverschiebungskurven für solche Imperfektionsformen, die alle auf eine Imperfektionsamplitude von $a=0.1\text{m}$ skaliert wer-

den, sind in Bild 11.28 dargestellt. Die ungünstigste der hier getesteten führt auf einen kritischen Lastfaktor von $\lambda_{c,imp}=54.3$. Dies bedeutet also einen Abfall um 34 %.

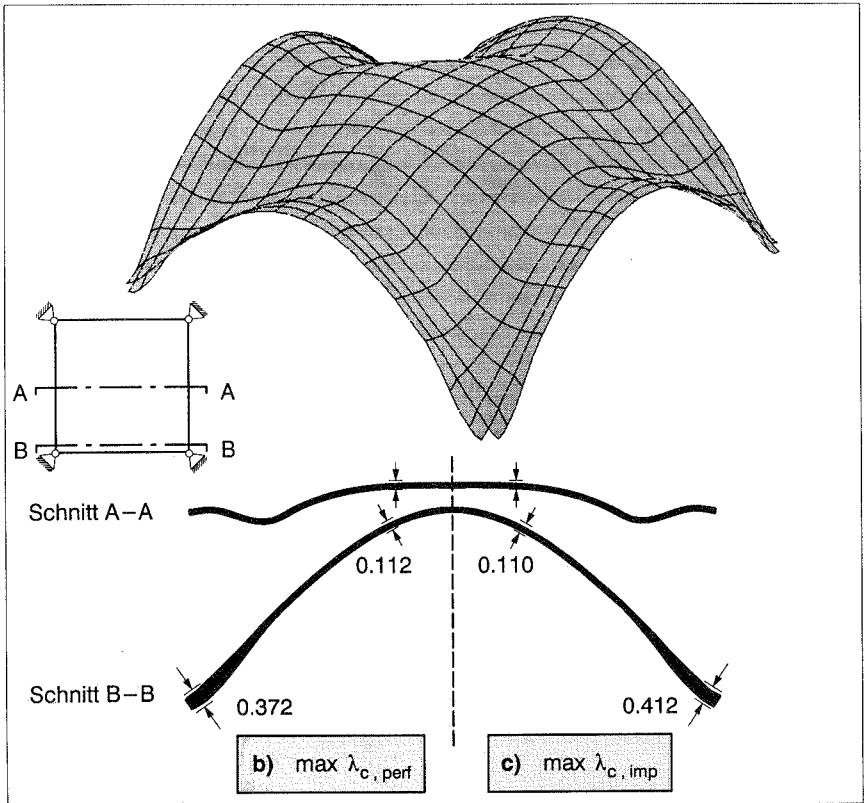


Bild 11.26: Formen **b)** und **c)** – Maximierung der kritischen Lastfaktoren

Die Optimierungsaufgabe **c)** maximiert nun diese kritische Last der imperfekten Struktur. Das Optimum aus **b)** bildet die Ausgangsform. Die ungünstigste Imperfektionsform, die zum niedrigsten Lastfaktor $\lambda_{c,imp}=54.3$ führt, besteht aus dem vierten Eigenvektor der Eigenwertanalyse $(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{I}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ am kritischen Punkt der perfekten Struktur. Während des Optimierungsfortschrittes wird für jede Schalenform am kritischen Punkt des perfekten Systems eine Eigenwertberechnung durchgeführt. Die dem ursprünglich vierten Eigenvektor entsprechende Form wird aus den jetzt berechneten Eigenformen herausgesucht, mit dem richtigen Vorzeichen versehen auf die Imperfektionsamplitude $a=0.1\text{m}$ skaliert (vgl. Kapitel 10.2.5) und zur Modifikation des Schalentragswerks verwendet. Die entstehende Form ist ebenfalls in Bild 11.26 eingezeichnet. Die Unterschiede zu **b)** fallen bei den Formparametern so gering aus, daß sie sich kaum grafisch

darstellen lassen. Der entscheidende Unterschied liegt bei der Dickenverteilung. Im Fall **c)** konzentriert sich etwas mehr Konstruktionsvolumen im Auflagerbereich und führt damit zu entscheidenden Verbesserungen. Das gleiche Ergebnis kann übrigens auch erreicht werden, wenn das Optimum aus **a)** als Startform für die Optimierungsaufgabe **c)** dient, ist jedoch mit mehr Aufwand verbunden. Der als Zielfunktion eingesetzte kritische Lastfaktor läßt sich bei der hier verwendeten maßgebenden Imperfektionsform steigern von $\lambda_{c,imp}=54.3$ auf $\lambda_{c,imp}=78.9$ bei einem gleichzeitigen geringen Abfall des Lastfaktors der perfekten Struktur von $\lambda_{c,perf}=84.3$ auf $\lambda_{c,perf}=83.1$. Auch diese Form wird bezüglich seines Imperfektionsverhaltens noch genauer untersucht. Es stellt sich heraus, daß nun eine andere maßgebende Imperfektionsform existiert, die auf eine etwas niedrigere kritische Last von $\lambda_{c,imp}=74.0$ führt. Eine weitere Verbesserung könnte noch erreicht werden, wenn also jetzt die Imperfektionsform als neue Kombination aus Eigenvektoren angepaßt werden würde. Doch auch so konnte schon eine enorme Verbesserung erreicht werden.

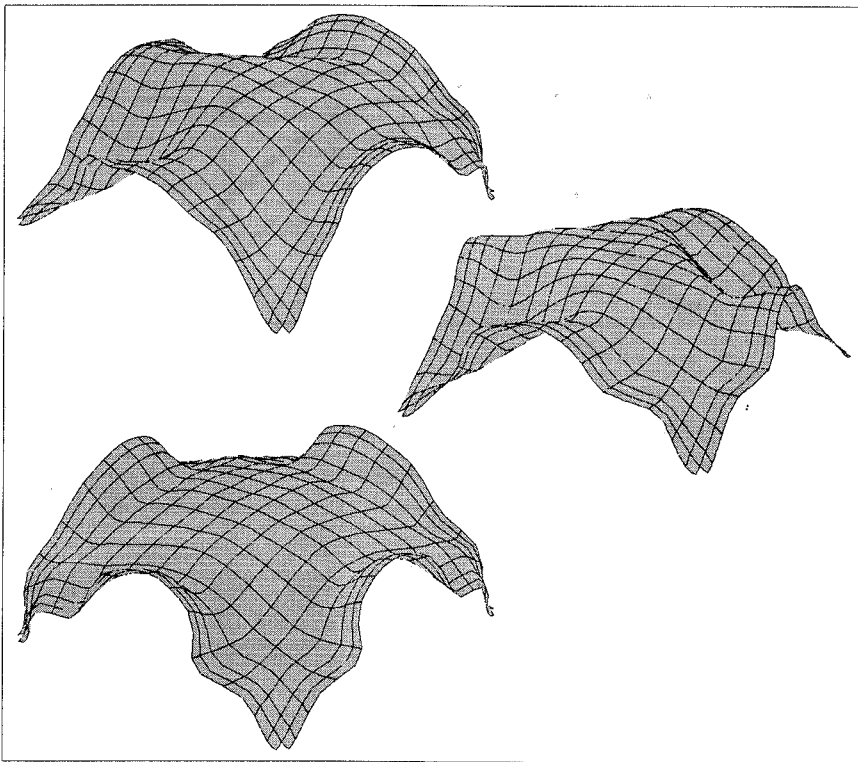


Bild 11.27: Beispiele für Eigenformen

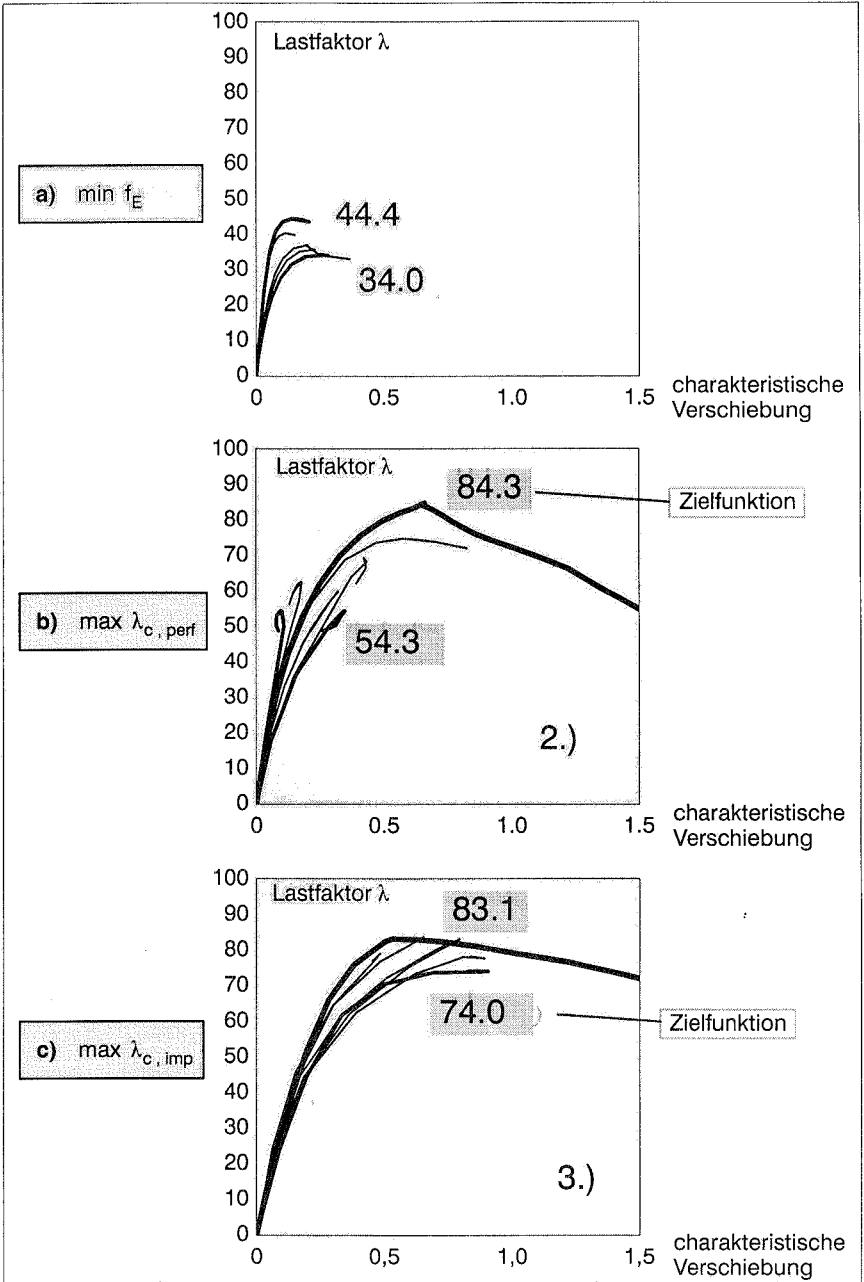


Bild 11.28: Lastverformungsverhalten der drei Optimalformen

Die entstandenen drei Formen der Optimierungsprobleme **a)**, **b)** und **c)** können anhand ihres Lastverformungsverhaltens in Bild 11.28 verglichen werden. Die Beurteilung erfolgt infolge der Berechnung am perfekten und am durch verschiedene Imperpektionsformen modifizierten Tragwerk.

Die Form **a)** führt im Vergleich zu **b)** und **c)** auf relativ niedrige Versagenslasten, da ja das Stabilitäts- und Imperpektionsverhalten gar nicht in den Entwurfsprozeß mit einfließt.

Im Fall **b)** kann die perfekte Struktur enorm verbessert werden, jedoch steigt dabei auch die Imperpektionsempfindlichkeit stark an.

Die Form **c)** zeigt auch beim Auftreten von Imperpektionen ein ganz erfreuliches Verhalten. Die kritische Last der maßgebenden imperfekten Struktur kann gegenüber **a)** von $\lambda_{c,imp}=34.0$ auf $\lambda_{c,imp}=74.0$ um 118 % und gegenüber **b)** von $\lambda_{c,imp}=54.3$ um 36 % gesteigert werden.

Durch die Einbindung der geometrischen Nichtlinearitäten und Imperpektionen in den Optimierungsprozeß können bezüglich dem Stabilitäts- und Imperpektionsverhalten beachtliche Verbesserungen erzielt werden. Bedingt durch das Anwachsen der aufnehmbaren kritischen Belastung steigen für den kritischen Zustand auch die Spannungen und zum Teil auch die Verformungen an, so daß jetzt auch materielle Nichtlinearitäten eine Rolle spielen können. Es bleibt also noch zu prüfen, ob und in welcher Art sich die hier gezeigten Strukturverbesserungen auch bei Berücksichtigung materiell nichtlinearem, wirklichkeitsnäherem Materialverhalten, z.B. für Stahlbeton, auswirken. Weiter gilt es zu untersuchen, ob die Optimierung für eine gleichmäßige Vollbelastung sich auch bei Teilbelastungen, z.B. am freien Rand, positiv bemerkbar machen. Die Frage nach der ungünstigsten Imperpektionsform wird hier durch die Verwendung einer beschränkten Anzahl von Kombinationen aus Eigenformen angegangen. Es ist durchaus denkbar, daß es noch ungünstigere Formen gibt. Die vorgestellte Optimierungsmethode ist offen für solche Problematiken, die leicht eingebracht werden können.

11.4 Bewertung der Beispiele

Die Beispiele zeigen, was die vorgestellte Optimierungsmethode zu leisten vermag. Sie wurde auf verschiedenartige Tragwerke angewandt und lieferte überzeugende Ergebnisse. Es kam zwar nur das Schalenelement zur Anwendung, jedoch sollte die Verwendung anderer geometrisch nichtlinearer finite Elementformulierungen keine Probleme bereiten. Die Imperpektionen finden auf klare und einfache Weise Eingang. Der damit verbundene Aufwand kann beliebig gesteigert werden. Es wäre durchaus auch denkbar, bei jeder Strukturanalyse zuerst die ungünstigste oder maßgebende Form, z.B. durch Optimierungsverfahren oder gar stochastische Verfahren, zu gewinnen.

Nach der Überprüfung der Tauglichkeit der Optimierungsmethode an den ausgewählten Beispielen, müssen noch weitere folgen, z.B. der axial gedrückte Zylinder evtl. mit Aussteifungen, der neben dem Auftreten vieler verschiedener Beulmuster, Zusammenfallen und Anhäufung von kritischen Punkten und kompliziertem Nachbeulverhalten auch ein topologisches Problem für die Steifenanordnung in sich birgt.

12 Bewertung und Ausblick

12.1 Bewertung

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit der Aufbereitung der Pfadverfolgungsstrategien. Im Rahmen der Bogenlängenverfahren erlaubt der gezeigte Algorithmus insbesondere in Verbindung mit der vorgestellten Schrittweitenanpassung die weitestgehende automatische, effiziente und robuste Verfolgung der Gleichgewichtspfade.

Die Einbettung der direkten Berechnung singularer Punkte mit erweiterten Systemen in die nichtlineare Strukturanalyse bildet einen weiteren Schwerpunkt. Die auftretenden Probleme mit der singular werdenden Tangentensteifigkeitsmatrix erfordern besondere Aufmerksamkeit. Es werden Verfahren zur Überwindung der damit verbundenen Schwierigkeiten vorgestellt. Besonders zu erwähnen sind zwei neue Penalty-Formulierungen, die mit der von Wriggers, Simo vorgeschlagenen verglichen werden. Die eine Formulierung arbeitet mit dem Singularvektor zur Verteilung der Penalty-Steifigkeit und erweist sich als besonders stabil. Es liegt die Vermutung nahe, daß diese Formulierung auch bei zusammenfallenden kritischen Punkten zufriedenstellend arbeitet, da durch den Singularvektor ein Separieren stattfindet. Die gezeigten Verfahren erweisen sich durch die Verwendung spezieller Lösungstechniken als überlegen gegenüber einigen anderen aus der mathematischen Literatur. Der Aufwand übertrifft kaum den der Pfadverfolgung.

Zur Vervollständigung der nichtlinearen Strukturanalysemöglichkeiten erhalten die Pfadwechselprozeduren, die asymptotischen Näherungen des Nachbeulverhaltens und der Imperfektionsempfindlichkeit noch Beachtung. Es werden sehr einfache Pfadwechseltechniken erwähnt, die durch Verwendung der asymptotischen Näherungen der verzweigenden Pfade bzw. das Lösen der Verzweigungsgleichung verbessert werden können. Die Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit liefert bereits wichtige Erkenntnisse für die später beschriebene Sensitivitätsanalyse. Bei den Ausführungen spielt auch immer die numerische Umsetzung eine wichtige Rolle.

Der zweite Teil befaßt sich mit der Optimierung stabilitätsgefährdeter und imperfektionsempfindlicher Tragwerke. Als eine erste Stufe werden Eigenwertberechnungen, die das Stabilitätsverhalten approximieren und außerdem das Eigenschwingungsverhalten beschreiben, eingebracht. Es finden wichtige Vorstudien über das Zusammenfallen von Eigenwerten, was später dem Zusammenfallen von kritischen Punkten entspricht, über die Möglichkeiten der Identifikation von Eigenformen und über die Sensitivitätsanalyse statt.

Die dann vorgestellte Optimierungsmethode basiert auf der direkten Berechnung singularer Punkte mit erweiterten Systemen in Verbindung mit Pfadverfolgung. Sie weist

als besondere Merkmale die Verwendung einer exakten und effizienten Sensitivitätsanalyse für geometrisch nichtlineares Verhalten, eine effiziente Neuberechnung der Strukturen innerhalb der Optimierungsiterationen ohne Pfadverfolgung unter Ausnutzung der Liniensearchtechnik und die Einbringung von Imperfektionen über Analysen an durch Imperfektionen modifizierten Strukturen auf. Die gezeigten Beispiele und der Vergleich mit anderen Verfahren aus der Literatur deuten darauf hin, daß dies ein richtiger Weg ist, die geometrischen Nichtlinearitäten und die Imperfektionsempfindlichkeit in die Strukturoptimierung einzubinden. Die verschiedene Verwendung von Approximationen bei Alternativverfahren erweist sich meist als problematisch.

12.2 Ausblick

Die hier vorgestellte sehr umfassenden Möglichkeiten zur geometrisch nichtlinearen Analyse linear elastischer Tragwerke benötigen kaum noch Änderungen oder Erweiterungen. Die Verwendung bei nichtlinearem Materialverhalten, bei Plastizität, bei wirklichkeitsnahem Stahlbetonverhalten usw., bedarf noch einiger Erweiterungen und Anpassungen. Die direkte Berechnung kritischer Punkte muß für die Fälle, bei denen die Eindeutigkeit der Lösung verlorengeht, überdacht werden.

Weiter besteht die Möglichkeit, neue erweiterte Systeme, z.B. mit zulässigen Spannungen oder Verformungen anstatt der Singularitätsbedingung für die Tangentensteifigkeitsmatrix, zu formulieren.

Die Problematik der mehrfachen Verzweigungen oder der Anhäufung (Clustering) von Verzweigungspunkten verdient weitere Aufmerksamkeit.

Um das Versagen bezüglich materieller Nichtlinearitäten in die Strukturoptimierung einzubringen, können als erstes Spannungs- und Verformungsrestriktionen oder die Formänderungsenergie Eingang in die Optimierungsaufgabe finden, um große Verzerrungen zu verhindern. Die Einführung kompletter geometrisch und materiell nichtlinearer Strukturanalysen in die vorgestellte Optimierungsmethode bedarf doch einiger Veränderungen. Die Sensitivitätsanalyse muß angepaßt werden. Die Neuberechnung ohne Pfadverfolgung muß aufgegeben werden, wenn Schädigungen und die Belastungsgeschichte eine Rolle spielen.

Das Problem des Zusammenfallen kritischer Punkte hat außer dem Einfluß auf die direkte Berechnung von kritischen Punkten auch Einfluß auf die Optimierungsmethode. Das mögliche Zusammenfallen und Vertauschen der kritischen Punkte kann zu Unstetigkeiten in den Optimierungsfunktionen und zu Oszillationen führen. Durch Verwendung geeigneter Methoden ist es sicherlich möglich, die Effektivität an kritischen Stellen, vorwiegend in der Nähe des Optimums oder an Stellen des Vertauschens von Versagensformen, zu steigern. Als Beispiel dient die Optimierung bei zusammenfallen-

den Eigenwerten unter Verwendung z.B. der Kreisselmeier–Steinhauser–Funktion. Jedoch bleibt fraglich, ob der zusätzliche Aufwand sich lohnt.

Die häufig diskutierte Suche nach der ungünstigsten Imperpektionsform für ein Tragwerk kann durch leichte Änderungen ebenfalls mit der hier vorgestellten Optimierungsmethode angegangen werden. Die Zielfunktion wäre dann das Erreichen eines minimalen kritischen Lastfaktors bei Variation eines durch die Optimierungsvariablen beschriebenen Imperpektionsvektors.

Abschließend sei noch gesagt, daß weitere Beispiele den Erfolg der vorgestellten Optimierungsmethode zur Verbesserung des Stabilitäts– und Imperpektionsverhaltens untermauern müssen. Sie ermöglicht die Behandlung noch vieler interessanter Stabilitätsprobleme.

13 Anhang

13.1 Methode nach Nelson bei singulärer Systemmatrix

Die folgende Herleitung stammt aus Nelson (1976) und wird hier nur äußerst knapp in der in dieser Arbeit verwendeten Notation aufgeführt.

Das singuläre Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (13.1)$$

hat den Rangabfall 1 und mit

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (13.2)$$

beschreibt $\boldsymbol{\phi}$ den Singulärvektor. Der vom Singulärvektor aufgespannte Nullraum hat die Dimension 1. Eine Lösung für (13.1) existiert nur dann, wenn \mathbf{P} orthogonal zum Nullraum liegt, also

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{P} = 0 \quad (13.3)$$

gilt. Aus der Lösungsschar für \mathbf{u} unter Verwendung der partikulären Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \boldsymbol{\phi} \quad (13.4)$$

muß nun eine Lösung ausgewählt werden, z.B. mit

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u} = 0 \quad (13.5)$$

Die partikuläre Lösung kann gewonnen werden aus

- Setze j für $|\phi_j| = \max_i |\phi_i|$
- Setze $P_j = 0 \quad \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}$
- Setze $K_{jj} = 1$, $K_{ij} = 0$ für $i \neq j \quad \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}$
- Löse $\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{P}}$

Die Konstante im Ansatz (13.4) berechnet sich aus Bedingung (13.5)

$$\boldsymbol{\phi}^T (\tilde{\mathbf{u}} + \alpha \boldsymbol{\phi}) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \tilde{\mathbf{u}}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}} \quad (13.6)$$

und führt auf die Lösung

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\boldsymbol{\phi}^T \tilde{\mathbf{u}}}{\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\phi} \quad (13.7)$$

13.2 Parametrisierung des Gleichgewichtspfades

Viele Autoren schlagen die Parametrisierung der Gleichgewichtsbeziehungen unter Verwendung eines Parameters s vor, um zur Verzweigungsgleichung zu gelangen. Die hier gezeigten Ausführungen folgen der Arbeit von Wagner (1991) und können dort weiter vertieft werden.

Unter Verwendung des Bahnparameters s lauten die Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(s), \lambda(s)) = \mathbf{0} \quad (13.8)$$

Die Ableitungen nach dem Bahnparameter s werden mit $(\dot{\quad})$ gekennzeichnet. Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Gleichgewichtsbeziehungen schreiben sich

$$\dot{\mathbf{G}}: \quad \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{,\lambda} \dot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (13.9)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}: \quad \mathbf{K}_T \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{T,u} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{,\lambda} \ddot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (13.10)$$

Es wird schon davon Gebrauch gemacht, daß die partiellen Ableitungen $\mathbf{K}_{T,\lambda} = \mathbf{G}_{,\lambda\lambda} = \mathbf{G}_{,u\lambda} = \mathbf{0}$ bei verformungsunabhängiger Belastung verschwinden.

Ein singulärer Punkt zeichnet sich aus durch die Bedingung

$$\mathbf{K}_T \phi = \mathbf{0} \quad (13.11)$$

Die Erfüllung von (13.9) am singulären Punkt erfordert die Lösung von

$$\mathbf{K}_T \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{G}_{,\lambda} \dot{\lambda} \quad (13.12)$$

Für $\dot{\lambda} = 0$ am Durchschlagspunkt folgt aus

$$\mathbf{K}_T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \phi \quad (13.13)$$

Die zweite Möglichkeit der Existenz einer Lösung für (13.12) erfordert, daß $\mathbf{G}_{,\lambda}$ orthogonal zum Nullraum von \mathbf{K}_T mit $\phi^T \mathbf{G}_{,\lambda} = 0$ liegt. Dies ist auch das Unterscheidungsmerkmal von Verzweigungspunkten zu Durchschlagspunkten. Mit irgendeiner speziellen Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$ für

$$\mathbf{K}_T \Delta \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{G}_{,\lambda} \quad (13.14)$$

läßt sich für die Lösung von (13.12) der Ansatz

$$\dot{\mathbf{u}} = \Delta \tilde{\mathbf{u}} \dot{\lambda} + \alpha \phi \quad (13.15)$$

angeben. Einsetzen dieses Ansatzes in die mit ϕ kontraktierte Ableitung zweiter Ordnung (13.10) führt auf die Verzweigungsgleichung

$$\alpha^2 \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi + 2\alpha \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \tilde{\mathbf{u}} \dot{\lambda} + \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \ddot{\lambda} = 0 \quad (13.16)$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{a} = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \phi \quad (13.17)$$

$$\mathbf{b} = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \phi \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (13.18)$$

$$\mathbf{c} = \phi^T \mathbf{K}_{T,u} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (13.19)$$

bekommt die Verzweigungsgleichung die Form

$$\alpha^2 \cdot a + 2\alpha \cdot b \cdot \dot{\lambda} + c \cdot \ddot{\lambda} = 0 \quad , \quad (13.20)$$

die auch schon in der Einleitung (Gleichung (1.37)) Anwendung findet. Nach Gleichung (6.38) ergibt sich übrigens, daß bei Verwendung der Tangente an den Primärpfad als spezielle Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$ die Konstante $c=0$ verschwindet.

Weitere Ausführungen und diverse Fallunterscheidungen bei der Lösung der Verzweigungsgleichung können Wagner (1991) entnommen werden.

13.3 Darstellung der Verschiebungen unter Verwendung der Eigenvektoren als Basisvektoren

In Kapitel 4.7.3 wird die Tangentensteifigkeitsmatrix spektral zerlegt

$$\mathbf{K}_T = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \phi_i^T \quad (13.21)$$

unter Verwendung der orthonormierten Eigenvektoren ϕ_i und den zugehörigen Eigenwerten ω_i . Die bei der Gleichungslösung

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{G} \quad (13.22)$$

erhaltenen Verschiebungen sollen im folgenden unter Verwendung der Eigenvektoren als Basisvektoren dargestellt werden. Dazu wird zunächst der Vektor $\Delta \mathbf{u}$ im zweidimensionalen Fall, wie in Bild 13.1 gezeigt, mit Hilfe der beiden Basisvektoren ϕ_1 und ϕ_2 beschrieben. Für die Winkel zwischen $\Delta \mathbf{u}$ und den Basisvektoren gilt

$$\cos \theta_1 = \frac{\Delta \mathbf{u}^T \phi_1}{\|\Delta \mathbf{u}\| \|\phi_1\|} \quad \cos \theta_2 = \frac{\Delta \mathbf{u}^T \phi_2}{\|\Delta \mathbf{u}\| \|\phi_2\|} \quad (13.23)$$

Unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Basisvektoren mit $\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1$ haben die Vektoren ϕ_1^* und ϕ_2^* die Längen

$$\|\phi_1^*\| = \|\Delta \mathbf{u}\| \cos \theta_1 = \|\Delta \mathbf{u}\| \frac{\Delta \mathbf{u}^T \phi_1}{\|\Delta \mathbf{u}\| \|\phi_1\|} = \Delta \mathbf{u}^T \phi_1 \quad (13.24)$$

$$\|\phi_2^*\| = \Delta \mathbf{u}^T \phi_2 \quad (13.25)$$

Aus der Summe der beiden Vektoren ergibt sich dann

$$\Delta \mathbf{u} = \phi_1^* + \phi_2^* = \Delta \mathbf{u}^T \phi_1 \phi_1 + \Delta \mathbf{u}^T \phi_2 \phi_2 \quad (13.26)$$

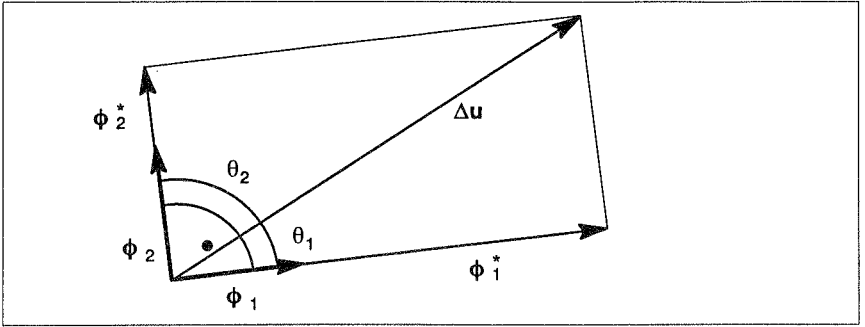


Bild 13.1: Zerlegung in Richtung der Basisvektoren

Bei n Basisvektoren erhält Gleichung (13.26) dann folgendes Aussehen

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \Delta \mathbf{u}^T \phi_j \phi_j \quad , \quad (13.27)$$

wovon im Kapitel 4.7.3 Gebrauch gemacht wird.

14 Literatur

- Abbott, J.P. (1978):** An Efficient Algorithm for the Determination of Certain Bifurcation Points. *J. Comp. Appl. Math.* **4**, 19–27.
- Adelman, H.M., Haftka, R.T. (1986):** Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems. *AIAA–J.* **24**, 823–832.
- Almroth, B.O., Brogan, F.A. (1972):** Bifurcation Analysis as an Approximation for the Collapse Load for General Shells. *AIAA–J.* **10**, 463–467.
- Amazigo, J.C. (1978):** Optimal Shape of Shallow Circular Arches against Snap–buckling. *J. Appl. Mech.* **45**, 591–594.
- Arbocz, J., Hol, J.M.A.M (1989):** ANLISA – Computational Module for Koiter's Imperfection Sensitivity Theory. Report LR–582, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Arora, J.S. (1989):** Introduction to Optimum Design. McGraw–Hill. New York.
- Atrek, E. Gallagher, R.H. Ragsdell, K.M., Zienkiewicz, O.C. (1984):** New Directions in Optimum Structural Design. Wiley & sons, Chichester, New York.
- Barthemely, B., Haftka, R.T., (1988):** Accuracy Analysis of the Semi–Analytical Method for Shape Sensitivity Calculation. In: *Proc. AIAA/ASME/ASCE/ASC 29th Structures, Structural Dynamics and Material Conf., Part 1*, 562–581. Also (1990): *Mech. Struct. Mach.* **18**, 407–432.
- Bathe, K.–J. (1986):** Finite–Elemente–Methoden. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo oder: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall, New Jersey (1982).
- Bathe, K.–J., Wilson, E.L. (1976):** Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Batoz, J.L., Dhatt, G. (1979):** Incremental Displacement Algorithm for Nonlinear problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **14**, 1262–1267.
- Becker, A., (1992):** Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung. Bericht–Nr. F 92/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Becker, E., Bürger, W. (1975):** Kontinuumsmechanik. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Bennett, J.A., Botkin, M.E. (1986):** The Optimum Shape–Automated Structural Design. Plenum Press, New York, London.
- Bergan, P.G. (1980):** Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems. *Comp. & Struct.* **12**, 497–509.

- Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., Søreide, T.H. (1978):** Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **12**, 1677-1696.
- Bergan, P.G., B., Søreide, T.H. (1973):** A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **2**, 185-201.
- Bernhardi, O. (1985):** Eine geometrisch nichtlineare Finite-Elemente-Formulierung für die Idealisierung exzentrischer Aussteifungen. Dissertation, Lehrstuhl für Schiffbau, Konstruktion und Statik, RWTH Aachen.
- Bletzinger, K.-U. (1990):** Formoptimierung von Flächentragwerken. Dissertation, Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bletzinger, K.-U., Kimmich, S., Ramm, E. (1991):** Efficient Modeling in Shape Optimal Design. *Comp. Systems in Eng.* **2**, 483-495.
- Bletzinger, K.-U., Kimmich, S., Reitinger, R., Ramm, E. (1994):** Formoptimierung und Formfindung von Schalen mit Methoden der Strukturoptimierung. In: *Evolution und Optimierung – Strategien in Natur und Technik*, ed. U. Kull, E. Ramm, R. Reiner, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart.
- Bletzinger, K.-U., Reitinger, R. (1991):** Shape Optimization of Shells. In: *Natural Structures, Proceedings of the 2. Int. Symp. of SFB 230, Mitteilung des Sonderforschungsbereichs 230, Heft 6*, 125.131.
- Bletzinger, K.-U., Reitinger, R., Kimmich, S., Ramm, E., (1993):** Shape Optimization with Program CARAT. In: *Software Systems for Structural Optimization*, ed. Schittkowski, Hörnlein, Mota Soares, *Int. Series of Numerical Mathematics* **110**, Birkhäuser, Basel, 97-124.
- Böhm, W., Farin, G., Kahmann, J. (1984):** A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD. *Comp. Aided Geom.* **1**, 1-60.
- Bornscheuer, F.W. (1976):** Zur Erarbeitung bautechnischer Bestimmungen für das Schalenbeulen. Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten am 30.1.76 an der Technischen Hochschule Darmstadt.
- Botkin, M.E., Bennett, J.A. (1985):** Shape Optimization of Three-Dimensional Folded-Plate Structures. *AIAA Journal* **23**, 1804-1820.
- Brendel, B. (1979):** Zur geometrisch nichtlinearen Elastostatik. Dissertation, Bericht Nr. 79-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Brendel, B., Ramm, E. (1982):** Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der finiten Elemente. *Ing. Archiv* **51**, 337-362.

- Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A. (1987):** Taschenbuch der Mathematik. 23. Auflage, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (Main).
- Budiansky, B. (1974):** Theory of Buckling and Post–buckling of Elastic Structures. *Adv. Appl. Mech.* **14**, 2–63.
- Budiansky, B., Frauenthal, J.C., Hutchinson, J.W. (1969):** On Optimal Arches. *J. Appl. Mech.* **36**, 880–882.
- Budiansky, B., Hutchinson, J.W. (1972):** Buckling of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression. *Van der Neut Anniversary Vol.*, Delft, 239–360.
- Büchter, N. (1992):** Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Dissertation, Bericht Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bufler, H. (1991):** Elastizitätstheorie. Vorlesungsmanuskript, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Burmeister, A. (1987):** Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen. Dissertation, Bericht Nr. 6, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bushnell, D. (1970):** Analysis of Buckling and Vibration of Ring–Stiffened, Segmented Shells of Revolution. *Int. J. Solids Structures* **6**, 157–181.
- Bushnell, D. (1972):** Stress, Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution: Analysis and User's Manual for BOSOR 4. NASA CR–2116.
- Chan, S.L. (1988):** Geometric and Material Non–Linear Analysis of Beam–Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **26**, 2657–2669.
- Chan, T.F. (1984):** Deflated Decomposition of Solutions of Nearly Singular Systems. *SIAM J. Numer. Anal.* **21**, 738–754.
- Chen, H., Blandford, G.E. (1993):** Work–Increment–Control Method for Non–Linear Analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36**, 909–930.
- Cheng, G., Gu, Y., Wang, X. (1990):** Improvement of Semi–Analytic Sensitivity Analysis and MCADS. In: *Proc. Int. Conf. Eng. Opt. in Design in Processes*, ed. Eschenauer, H.A., Mattheck, C., Olhoff, N., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 193–200.
- Cheng, G., Olhoff, N. (1993):** New Method of Error Analysis and Detection in Semi–Analytical Sensitivity Analysis. In: *Optimization of Large Structural Systems*, ed. G.I.N. Rozvany, NATO ASI Series, Series E: Applied Sciences **231–I**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- Choong, K.K., Hangai, Y. (1993):** Review on Methods of Bifurcation Analysis for Geometrically Nonlinear Structures, *IASS–Bulletin* **34** n.2, 133–149.

- Çirak, F. (1993):** Koiter'sche Anfangsnachbeulanalyse und Abschätzung der Imperfektionsempfindlichkeit mit der Methode der finiten Elemente. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Clarke, M.J., Hancock, G.J. (1990):** A Study of Incremental–Iterative Strategies for Nonlinear Analyses. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **29**, 1365–1391.
- Cochelin, B., Damil, N., Potier–Ferry, M. (1992):** Asymptotic–Numerical Methods for Computing Nonlinear Elastic Structures. In: *Numerical Methods in Engineering '92*, ed. Ch. Hirsch et al., Elsevier Science Publishers B.V.
- Cohen, G.A. (1968):** Computer Analysis of Asymmetric Buckling of Ring–Stiffened Orthotropic Shells of Revolution. *AIAA–J.* **6**, 141–149.
- Crisfield, M.A. (1981):** A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap Through. *Comp. & Struct.* **13**, 55–62.
- Crisfield, M.A. (1983):** An Arc–Length–Method including Line Searches and Accelerations. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **19**, 1269–1289.
- Crisfield, M.A. (1991):** *Non–Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Croll, J.G.A. (1975):** Towards Simple Estimates of Shell Buckling Loads. *Der Stahlbau* **8**, 243–248 und *Der Stahlbau* **9**, 283–285.
- Dailey, R.L. (1989):** Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. *AIAA–J.* **27**, 486–491.
- Deuffhard, P., Fiedler, B., Kunkel, P. (1984):** Efficient Numerical Path–Following beyond Critical Points. Univ. Heidelberg, SFB 123: Tech. Report 278 oder: *SIAM J. Numer. Anal.* **24**, 912–927 (1987).
- Deuffhard, P., Hohmann, A. (1991):** *Numerische Mathematik.* Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Eriksson, A. (1987):** Using Eigenvector Projections to Improve Convergence in Non–Linear Finite Element Equilibrium Iterations. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **24**, 497–512.
- Eriksson, A. (1992):** Fold Lines for Imperfection Analyses at Critical Equilibrium. In: *Numerical Methods in Engineering*, ed. Ch. Hirsch et al. Elsevier Science Publishers B.V., 749–756.
- Eriksson, A. (1993):** On Improved Predictions for Structural Equilibrium Path Evaluations. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36**, 201–220.
- Eschenauer, H.A., Post, U., Bremicker, M. (1988):** Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten. *Bauingenieur* **63**, 513–526.
- Eschenauer, H.A., Thierauf, G. (1989):** *Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications.* Springer, Berlin, Heidelberg.

- Faux, I.D., Pratt, M.J. (1979):** Computational Geometry for Design and Manufacture. Ellis Horwood Publishers, Chichester.
- Felippa, C.A. (1987):** Traversing Critical Points with Penalty Springs. In: Transient/Dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials, ed. Pande and Middleton, Nijhoff, Dodrecht, C2/1 – C2/8.
- Felippa, C.A. (1987,₂):** Penalty Spring Stabilization of Singular Jacobians. Transactions of the ASME **54**, 728–729.
- Fleischer, H. (1989):** Die Glocke, Teil 1 und Teil 2. Forschungsbericht 02/89 und 04/89, Institut für Mechanik, Fakultät für Luft– und Raumfahrttechnik, Universität der Bundeswehr München.
- Flores, F.G., Godoy, L.A. (1992):** Elastic Postbuckling Analysis via Finite Element and Perturbation Techniques, Part 1: Formulation. Int. J. Num. Meth. Engng. **33**, 1775–1794.
- Fox, R.L., Kapoor, M.P. (1968):** Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. AIAA–J. **6**, 2426–2429.
- Fried, I., (1984):** Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **47**, 283–297.
- Forde, B.W.R., Stiemer, S.F. (1987):** Improved Arclength Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis. Comp. & Struct. **27**, 625–630.
- Gatermann, K., Hohmann, A. (1991):** Symbolic Exploitation of Symmetrie in Numerical Pathfollowing. Impact of Comp. in Science and Eng. **3**, 330–365.
- Geier, B., Thielemann, W. (1965):** Versuche über das Nachbeulverhalten dünnwandiger isotroper Kreiszyinderschalen unter allseitigem Außendruck. DFL–Bericht 65 – 13, Deutsche Forschungsanstalt für Luft– und Raumfahrt, Braunschweig.
- Gierlinsky, J.T., Graves Smith, T.R. (1985):** A Variable Load Iteration Procedure for Thin–Walled Structures. Comp. & Struct. **21**, 1085–1094.
- Gill, P.E., Murray, W., Wright, M.H. (1981):** Practical Optimization. Academic Press, London.
- Haftka, R.T., Grandhi, R.V. (1986):** Structural Shape Optimization – A Survey. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **57**, 91–106.
- Haftka, R.T., Gürdal, Z., Kamat, M.P. (1990):** Elements of Structural Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.
- Hoy, A. (1990):** A Remark Concerning Mei Zhens Paper on Singular Nonlinear Equations. Computing **44**, 357–364.
- Imam, M.H. (1982):** Three–Dimensional Shape Optimization. Int J. Num. Meth. Engng. **18**, 661–673.

- Ise, G. (1981):** Zur nichtlinearen Festigkeitsanalyse exzentrisch versteifter Plattentragwerke. Dissertation, Lehrstuhl für Schiffbau, Konstruktion und Statik, RWTH Aachen.
- Isler, H. (1982):** The stability of Thin Concrete Shells. In: Buckling of Shells, ed. E. Ramm, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 645–672.
- Jepson, A., Spence, A. (1985):** Folds in Solutions of Two Parameter Systems and their Calculation, Part 1. *SIAM J. Numer. Anal.* **22**, 347–368.
- Jürcke, R.K. (1985):** Zur Stabilität und Imperfektionsempfindlichkeit elastischer Schalentragwerke – Finite Element Formulierung der Anfangs–Nachbeul–Theorie. Tech. Rep. No. 85–5, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr–Universität Bochum.
- Kamat, M.P., Ruangsilasingha, P. (1985):** Optimization of Space Trusses Against Instability Using Design Sensitivity Derivatives. *Engng. Optimization* **8**, 177–188.
- v. Kármán, T.V., Tsien, H.S. (1939):** The Buckling of Spherical Shells by External Pressure. *J. Aeronaut. Sciences* **7**, 43–50.
- v. Kármán, T.V., Tsien, H.S. (1941):** Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression. *J. Aeronaut. Sciences* **8**, 303–312.
- Keener, J.P., Keller, H.B. (1973):** Perturbed Bifurcation Theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **50**, 159–175.
- Keller, J.B. (1960):** The Shape of the Strongest Column. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **5**, 275–285.
- Keller, H.B. (1977):** Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems. In: *Application of Bifurcation Theory*, ed. Rabinowitz, P., Academic Press, New York, 359–384.
- Khot, N.S. (1983):** Nonlinear Analysis of Optimized Structures with Constraints on System Stability. *AIAA–J.* **21**, 1181–1186.
- Khot, N.S., Kamat, M.P. (1985):** Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior. *AIAA J.* **23**, 139–144.
- Kimmich, S. (1990):** Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen. Dissertation, Bericht Nr. 12, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kimmich, S., Reitinger, R., Ramm, E. (1992):** Integration of different numerical techniques in shape optimization. *Struct. Opt.* **4**, 149–155.
- Koiter, W.T. (1945):** On the Stability of Elastic Equilibrium. Translation of 'Over de Stabi-
liteit van het Elastisch Evenwicht', Polytechnic Institute Delft, H.J. Paris Publisher Amsterdam, NASA TT F–10,833, (1967).
- Kouhia, R., Mikkola, M. (1989):** Tracing the Equilibrium Path beyond Simple Critical Points. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **28**, 2923–2941.

- Kreisselmeier, G., Steinhauser, R. (1983):** Application of Vector Performance Optimization to a Robust Control Loop Design for a Fighter Aircraft. *Int. J. of Control* **37**, 251–284.
- Kröplin, B., Dinkler, D., Hillmann, H. (1986):** Global Constraints in Nonlinear Solution Strategies. In: *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, ed. Bergan, Bathe, Wunderlich, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 409–424.
- Lehr, A. (1987):** *The Designing of Swinging Bells and Carillon Bells in the Past and Present*. Athanasius Kircher Foundation, Asten, The Netherlands.
- Leipholtz, H. (1968):** *Einführung in die Elastizitätstheorie*. G. Braun, Karlsruhe.
- Levy, R., Perng, H.S. (1988):** Optimization for Nonlinear Stability. *Computers & Structures* **30**, 529–535.
- Lorenz, R. (1908):** Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern. *Zeitschr. Verein deutscher Ingenieure* **52**, 1706–1713.
- Matthies, H., Strang, G. (1979):** The solution of nonlinear finite element equations. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **14**, 1613–1626.
- Mei, Z. (1989):** Splitting Iteration Method for Simple Singular Points and Simple Bifurcation Points. *Computing* **41**, 87–96.
- Mei, Z. (1990):** A Special Extended System and a Newton–Like Method for Simple Singular Nonlinear Equations. *Computing* **45**, 157–167.
- Menzel, R., Schwetlick, H. (1978):** Zur Lösung parameterabhängiger nichtlinearer Gleichungen mit singulären Jacobi–Matrizen. *Numer. Math.* **30**, 65–79.
- Mittelmann, H.–D., Weber, H. (1980):** Numerical Methods for Bifurcation Problems – a Survey and Classification. In: *Bifurcation problems and their numerical solution*, ed. Mittelmann und Weber, Birkhäuser, Basel, 1–45.
- Mlejnek, H.P. (1992):** Accuracy of Semi–Analytical Sensitivities and its Improvement by the Natural Method. *Structural Optimization* **4**, 128–131.
- Moler, C.B., Stewart, G.W. (1973):** An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, 241–256.
- Moore, G. (1979):** *The Application of Newton's Method to Simple Bifurcation and Turning Point Problems*. Ph.D. thesis, Univ. of Bath, England.
- Moore, G., Spence, A., (1980):** The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 567–576.
- Mota Soares, C.A. (1987):** *Computer Aided Optimal Design – Structural and Mechanical Systems*. NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences **27**, Springer, Heidelberg, New York.

- Nelson, R.B. (1976):** Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives. *AIAA J.* **14**, 1201–1205.
- Ogden, R.W. (1984):** Non–Linear Elastic Deformations. Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, Chichester.
- Olhoff, N., Rasmussen, J. (1990):** Method of Error Elimination for a Class of Semi–Analytical Sensitivity Analysis Problems. In: *Proc. Int. Conf. Eng. Opt. in Design in Processes*, ed. Eschenauer, H.A., Mattheck, C., Olhoff, N., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 193–200.
- Olhoff, N., Rasmussen, S.H. (1977):** On Single and Bimodal Optimum Buckling Loads of Clamped Columns. *Int. J. Solids & Structures* **13**, 605–614.
- Papadrakakis, M., Pantazopoulos, G. (1993):** A Survey of Quasi–Newton Methods with Reduced Storage. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **36**, 1573–1596.
- Park, G.–J. (1993):** Accuracy Tests for Various Sensitivity Analysis Methods with respect to Shape Variables in Planar Cantilever Beams. *Computers & Structures* **47**, 1057–1063.
- Park, J.S., Choi, K.K. (1990):** Design Sensitivity Analysis of Critical Load Factor for Nonlinear Structural Systems. *Computers & Structures* **36**, 823–838.
- Perrin, P., Charnley, T., de Pont, J. (1983):** Normal Modes of the Modern English Church Bell. *J. Sound and Vibration* **90**, 29–49.
- Petersen, O. (1992):** Stabilitätsberechnungen mit der Methode der finiten Elemente. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Pezezhk, S. (1992):** Optimal Design of Structures with Kinematic Nonlinear Behavior. *J. of Eng. Mech.* **118**, 702–720.
- Pfeiffer, F., Roß, C. (1991):** Zur Formulierung von Eigenfrequenznebenbedingungen in Strukturoptimierungsproblemen. *Z. angew. Math. Mech* **71**, T729–T731.
- Pflüger, A. (1937):** Stabilität dünner Kegelschalen. *Ing. Archiv* **8**, 151.
- Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. (1991):** Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures. Elsevier, Amsterdam, London, New York, Tokyo.
- Plaut, R.H., Olhoff, N. (1983):** Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability. *J. Struct. Mech.* **11**, 81–100.
- Polynkin, A.A., van Keulen, F., Toropov, V.V. (1995):** Optimization of Geometrically Nonlinear Thin–Walled Structures Using the Multipoint Approximation Method. To be published in *Structural Optimization* (1995).
- Powell, G., Simons, J. (1981):** Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **17**, 1455–1467.

Ramm, E. (1976): Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Ramm, E. (1981): Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. In: Nonlinear finite element analysis in structural mechanics, ed. W. Wunderlich, E. Stein, K.–J. Bathe, 63–89, Springer, Berlin, Heidelberg, New–York.

Ramm, E., Bletzinger, K.–U., Reitinger, R. (1993): Shape Optimization of Shell Structures. Seiken–IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures, Tokyo, Japan, Oktober 1993, IASS–Bulletin **34** n.2, 103–121.
Oder: Revue européenne des éléments finis **2** (1993), 377–398.

Ramm, E., Bletzinger, K.–U., Reitinger, R., Maute, K. (1994): The Challenge of Structural Optimization. In: Advances in Structural Optimization, ed. B.H.V Topping, M. Papadrakakis, The Second International Conference on Computational Structures Technology, Athen, August 1994, Civil–Comp Press, 27–52.

Ramm, E., Reitinger, R. (1992): Force Follows Form in Shell Design. In: Proceedings of IASS–CSCE Int. Congress on Innovative Large Span Structures, Toronto, Canada, July 1992, ed. N.K. Srivastava et al., CSCE–Publication, 11–27.

Ramm, E., Schunck, E., (1986): Heinz Isler – Schalen. Karl Krämer, Stuttgart.

Ramm, E., Stegmüller, H. (1982): The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells. In: Buckling of Shells, ed. E. Ramm, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 201–235.

Reitinger, R. (1988): Spannungsausgleichs– und Energiefunktionen als Zielfunktion in der Strukturoptimierung. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Reitinger, R., Bletzinger, K.–U., Ramm, E. (1993): Shape Optimization of Buckling Sensitive Structures. Computing Systems in Engineering **5**, 65–75.
Beitrag zum: 2nd US Congress on Computational Mechanics, Washington, USA, August 1993.

Reitinger, R., Ramm, E. (1993): Optimization of Geometrically Nonlinear Buckling Sensitive Structures. In: Computer Aided Optimum Design of Structures III, ed. S. Hernández, C.A. Brebbia, Elsevier Applied Science, London, New York, 525–540.

Reitinger, R., Ramm, E. (1994,₁): Buckling and Imperfection Sensitivity in Optimization of Shell Structures. Euromech Colloquium 317, Liverpool, März 1994, erscheint in: Thin–Walled Structures.

Reitinger, R., Ramm, E. (1994,₂): Maximizing Structural Efficiency Including Buckling and Imperfection Sensitivity. In: Proceedings of the 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, September 7–9, Panama City Beach, Florida, 1228–1238.

- Rheinboldt, W.C. (1981):** Numerical Analysis of Continuation Methods for Nonlinear Structural Problems. *Comp. & Struct.* **13**, 103–113.
- Riks, E. (1972):** The Application of Newtons Method to the Problem of Elastic Stability. *J. Appl. Mech* **39**, 1060–1066.
- Riks, E. (1979):** An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. *Int J. Solids & Struct.* **15**, 529–551.
- Riks, E. (1984):** Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **47**, 219–259.
- Ringertz, U.T. (1991):** Optimal Design of Nonlinear Shell Structures”, Report FFA TN 1991–18, The Aeronautical Research Institute of Sweden, Structures Department.
- Roozen–Kroon, P.J.M. (1992):** Structural Optimization of Bells. PhD–thesis, Technische Universität Eindhoven.
- Rosen, A., Schmit, L.A. (1979):** Design Oriented Analysis of Imperfect Truss Structures – Part II – Accurate Analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **14**, 1309–1321.
- Rosen, A., Schmit, L.A. (1980):** Design Oriented Analysis of Imperfect Truss Structures – Part II – Approximate Analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **15**, 483–494.
- Rosen, A., Schmit, L.A. (1981):** Optimization of Truss Structures Having Local and System Geometric Imperfections. *AIAA–J.* **19**, 626–633.
- Rossing, T.D., Perrin, R. (1987):** Vibration of Bells. *Applied Acoustics* **20**, 41–70.
- Rozvany, G.I.N. (1993):** Optimization of Large Structural Systems. NATO ASI Series, Series E: Applied Sciences **231–I**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- Saal, H., Reif, A. (1980):** Experimentelle und theoretische Bestimmung der Beullasten von kreiszylindrischen, liegenden Rohren mit Flüssigkeitsfüllungen. Abschlußbericht zum DFG–Forschungsvorhaben Sa 241/3 – Flüssigkeitsrohrbeulen, Darmstadt.
- Schad, C.–R., Warlimont, H. (1973):** Akustische Untersuchungen zum Einfluß des Werkstoffs auf den Klang von Glocken. *Acustica* **29**, 1–14.
- Schittkowski, K., (1981):** The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. *Numerische Mathematik* **38**, 83–114.
- Schmit, L.A. (1981):** Structural Synthesis – Its Genesis and Development. *AIAA–J.* **19**, 1249–1263.
- Schmit, L.A. (1986):** Symposium Summary and Concluding Remarks. In: *The Optimum Shape*, ed. J.A Bennett, M.E. Botkin, Plenum Press, New York London, 385–397.
- Schoofs, A.J.G. (1987):** Experimental Design and Structural Optimization. PhD–thesis, Technische Universität Eindhoven.

- Schoofs, A., van Asperen, F., Maas, P., Lehr, A. (1987):** Computation of Bell Profiles Using Structural Optimization. *Music Perception*, **4**, 245–254 und 255–266.
- Schweizerhof, K.H. (1993):** Consistent Concept for Line Search Algorithms in Combination with Arc–Length Constraints. *Comm. Num. Meth. Eng.* **9**, 773–784.
- Schweizerhof, K.H. and Wriggers, P. (1986):** Consistent Linearization for Path–Following Methods in Nonlinear FE Analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **59**, 261–279.
- Sewell, M.J. (1965):** The Static Perturbation Technique in Buckling Problems. *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 247–265.
- Seydel, R., (1979):** Numerical Computation of Branch Points in Nonlinear Equations. *Numer. Math.* **33**, 339–352.
- Seydel, R., (1988):** From Equilibrium to Chaos, Practical Bifurcation and Stability Analysis. Elsevier, New York, Amsterdam, London.
- Smaoui, H., Schmit, L.A. (1988):** An Integrated Approach to the Synthesis of Geometrically Non–Linear Structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **26**, 555–570.
- Sørdeide, T.H. (1977):** Collapse Behaviour of Stiffened Panels using Alternative Finite Element Formulations. Report No. 77–3, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim.
- Spence, A., Werner, B. (1982):** Non–Simple Turning Points and Cusps. *IMA J. Num: Anal.* **2**, 413–427.
- Spence, A., Jepson, A.D. (1984):** The Numerical Calculation of Cusps, Bifurcation Points and Isola Formation Points in Two Parameter Problems. In: *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, ed. Küpper, Mittelman, Weber, ISNM 70, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 502–514.
- Svalbanos, V., Balderes, T. (1972):** Buckling and Vibration Analysis for Stiffened Orthotropic Shells of Revolution. *AIAA–J.* **10**, 944–946.
- Szabó, Á. (1960):** Anfänge des euklidischen Axiomensystems. *Archive for History of Exact Sciences I*, 38–106 oder in: *Zur griechischen Mathematik*, ed. O. Becker, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1965).
- Szabó, I. (1979):** Geschichte der mechanischen Prinzipien. Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart.
- Tadibakhsh, I, Keller, J.B. (1962):** Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues. *J. Appl. Mech.* **29**, 159–164.
- Le Tallec, P., Halard, M. (1993):** A Second Order Methods for the Optimal Design of Nonlinear Structures”. In: *Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, ed. J. Herskovits, Rio de Janeiro, August 1993, 223–230.

- Thompson, J.M.T. (1969):** A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **20**, 797–846.
- Thompson, J.M.T. (1972):** Optimization as a Generator of Structural Instability. *Int. J. Mech. Sci.* **14**, 627–629.
- Thompson, J.M.T. (1982):** *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering.* John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. (1973):** *A General Theory of Elastic Stability.* John Wiley & Sons Ltd., London, New York, Sydney, Toronto.
- Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. (1984):** *Elastic Instability Phenomena.* John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Thurston, G.A. (1969):** Continuation of Newton's Method Through Bifurcation Points. *J. Appl. Mech.* **36**, *Trans. ASME* **91**, 425–430.
- Timoshenko, S.P. (1910):** Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. *Z. Math. Physik* **58**, 337–385 oder in: *The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko*, McGraw–Hill Publishing Company Ltd., New York, London Toronto, (1953).
- Tveergard, V. (1973,₁):** Imperfection–Sensitivity of a Wide Integrally Stiffened Panel under Compression. *Int. J. Solids Structures* **9**, 177–192.
- Tveergard, V. (1973,₂):** Influence of Post–Buckling Behavior on Optimum Design of Stiffened Panels. *Int. J. Solids Structures* **9**, 1519–1534.
- Vanderplaats, G.N. (1982):** Structural Optimization – Past, Present, Future. *AIAA–J.* **20**, 992–1000.
- Vanderplaats, G.N. (1984):** *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications.* McGraw–Hill, New York.
- Wagner, W. (1991):** Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente. *Habilitationsschrift, Bericht–Nr. F 91/1*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Wagner, W., Wriggers, P. (1988):** A Simple Method for the Calculation of Postcritical Branches. *Engineering Computations* **5**, 103–109.
- Walker, J. (1985):** Experiment des Monats. *Spektrum der Wissenschaft*, Oktober 1984, 156–161.
- Wempner, G.A. (1971):** Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1581–1599.
- Wessels, M. (1971):** Das statische und dynamische Durchschlagsproblem der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung. *Dissertation, Mitteilung Nr. 23*, Institut für Statik, Technische Universität Hannover.

- Whitesell Jr., J.E. (1981):** Computing Eigenvector Derivatives with Generalized Inverses. In: Distributed Parameter Structures, Vol. 1, 2, ed. E.J. Haug, J. Cea, Sijthoff & Nordhoff, Alphen aan den Rijn.
- Wiedemann, J. (1989):** Leichtbau, Band 2: Konstruktion. Springer, Berlin, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo.
- Wittek, U. (1980):** Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlichen Verformungen unter besonderer Beachtung des Nachbeulmechanismus dünner Flächentragwerke. Bericht 80–1, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr–Universität Bochum.
- Wriggers, P., Simo J.C. (1990):** A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **30**, 155–176.
- Wriggers, P., Wagner, W. (1985):** Kurvenverfolgungsalgorithmen in der Strukturmechanik. Tech. Rep. No. 85/3. Institut für Baumechanik, Universität Hannover.
- Wriggers, P., Wagner, W., Miehe, C. (1988):** A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **70**, 329–347.
- Wu, C.C., Arora, J.S. (1987):** Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure. *AIAA–J.* **25**, 1118–1125.
- Wu, C.C., Arora, J.S. (1988):** Design Sensitivity Analysis of Non–Linear Buckling Load. *Computational Mech.* **3**, 129–140.
- Wu, C.H. (1968):** The Strongest Circular Arch – a Perturbation Solution. *J. Appl. Mech.* **35**, 476–480.
- Zienkiewicz, O.C., Campbell, J.S. (1973):** Shape Optimization and Sequential Linear Programming. In: *Optimum Structural Design—Theory and Applications*, ed. Gallagher, R.H., Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, London, New York, 109–126.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1989):** The Finite Element Method, Volume 1. McGraw–Hill, London.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991):** The Finite Element Method, Volume 2. McGraw–Hill, London.
- Zoelly, R. (1915):** Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Dissertation, Technische Hochschule Zürich, Buchdr. Zürcher & Furrer.

Lebenslauf

Name: Reiner Reitingner

Geburtsdatum: 22.12.1964 in Heimsheim

Familienstand: seit 29.9.1989 verheiratet mit Stefanie Reitingner, geb. Hopf
seit 16.9.1991 ein Kind

Eltern: Johann Reitingner und Ehefrau Gudrun Anna Reitingner,
geb. Kappler

1970 – 1974 Grundschnle in Heimsheim

1974 – 1983 Besuch des Johannes–Kepler–Gymnasiums in Weil der
Stadt

10.6.1983 Abitur

Okt. 1983 – März 1989 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität
Stuttgart

31. März 1989 Abschluß Diplom–Ingenieur

1984 – 1985 17 Wochen Baustellenpraktikum bei der Firma Essig,
Weissach

1988 wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Baustatik
der Universität Stuttgart

seit März 1989 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der
Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79–3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80–1 R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80–2 R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80–3 J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82–1 L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82–2 K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82–3 H.–P. André:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlasterberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.

- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Elementberechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.–U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid–gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elasto–plastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1994) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.