

**Ein Beitrag
zur praktischen Berechnung
prismatischer Faltwerke**

Von der Technischen Hochschule Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt
von

Paul E. Mast

geboren zu Kattowitz



14.03.2008

Z

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer
Mitberichter:	Prof. Dr. techn. A. Slibar
Tag der Einreichung:	19. Oktober 1964
Tag der mündlichen Prüfung:	18. Dezember 1964

1964

Herrn Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer und Herrn Prof. Dr. techn. A. Slibar möchte ich für die Förderung und die freundliche Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit sowie für die Übernahme der Referate herzlich danken.

Ferner gilt mein Dank der Portland Cement Association, welche mir gestattete, ihre elektronische Rechenanlage zur Bewältigung des numerischen Teiles zu benutzen.

Inhaltsverzeichnis

	Seiten
Schrifttumsverzeichnis	5 - 9
Abkürzungsverzeichnis	10
1. Einleitung	11 - 13
2. Ein Iterationsverfahren für die strenge Lösung prismatischer Faltwerke	14 - 28
3. Die Rechenbeispiele	29 - 92
4. Ein Schlusswort zu den Rechenbeispielen	93 - 94
5. Ein Vergleich des Iterationsverfahrens mit den bisher veröffentlichten Verfahren	95 - 99
6. Näherungslösungen des Verfahrens	100 - 104
7. Anhang	105 - 131
a. Die Grundaufgaben	106 - 127
b. Die Goldberg-Leve'schen Formeln	128 - 131
Lebenslauf und Studiengang	132

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

1. "Die Nebenspannungen der prismatischen Faltwerke",
Grüning, G., Ingenieurarchiv Band 3, No. 4, 1932
2. "Berechnung prismatischer Scheibenwerke",
Gruber, E., International Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band 1, 1932, Seite 225
3. "Scheiben und Schalen im Eisenbetonbau"
Petry, W., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Erster Kongress, 1932, Seiten 208 - 214
4. "Statik und Dynamik der Schalen",
Flügge, W., Springer Verlag, Berlin, 1934
5. "Die Berechnung äusserlich statisch unbestimmter,
prismatischer Scheibenwerke",
Gruber, E., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band 3, 1935, Seiten 134 - 150
6. "Theory of Plates and Shells",
Timoshenko, S., McGraw-Hill Book Company, Inc.
New York and London, 1940
7. "Hohlträger als Faltwerke",
Gruber, E., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band 7, 1943/44, Seiten 139 - 177
8. "Hipped Plate Construction",
Winter, G., und Pei, M., Journal of American Concrete
Institute, Vol. 43, No. 5, Januar 1947
9. "Die genaue Membranentheorie der prismatischen
Faltwerke",
Gruber, E., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band II, 1951, Seite 129
10. "Die durchlaufenden, prismatischen Faltwerke",
Gruber E., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band 12, 1952, Seiten 167 - 200
11. "Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs",
ASCE Manual No. 31, American Society of Civil
Engineers, New York, 1952
12. "Design of Prismatic Shells",
Craemer, H., Journal of the American Concrete Institute,
Band 24, No. 6, Februar 1953, Seite 549

13. "Prismatic Roof Slabs with Small Angular Change",
Ashdown, A.J., Concrete and Constructional Engineering,
Vol. 49, Januar und Februar 1954
14. "Faltwerke, Ihre Theorie und Anwendung",
Born, J., K.Wittwer Verlag, Stuttgart 1954
15. "Hipped Plate Analysis Considering Joint
Displacements",
Gaafar, I., Transaction American Society of Civil
Engineers, Band 119, 1954, Seite 743
16. "Die genaue Theorie der prismatischen Faltwerke",
Werfel, A., Internationale Vereinigung für Brückenbau
und Hochbau, Band 14, 1954, Seite 277
17. "Kreiszyinderschalön",
Rüdiger, D., und Urban, J., B.G. Teubner Verlags-
gesellschaft, Leipzig, 1955
18. "Die strenge Theorie anisotropischer prismatischer
Faltwerke",
Rüdiger, D., Ingenieur Archiv, Band 23, 1955
19. "The Design of Prismatic Roofs",
Gaafar, I., Concrete and Constructional Engineering,
Vol. 51, Oktober 1956
20. "Theorie der prismatischen Faltwerke",
Goldberg, J.E., und Leve, H.L., Internationale Vereini-
gung für Brückenbau und Hochbau, Band 17, 1957, Seite 59
21. "The Analysis of Hipped Plate Structures by Influence
Coefficients",
Thadani, B.N., Indian Concrete Journal, Vol.31, April 57
22. "The Design of Prismatic Structures",
Ashdown, A.J., Concrete Publications Ltd., London 1958
23. "The Analysis of Multiple and Continuous Folded Plate
Structures",
Doctoral Dissertation, Paulson, J.M.,
Michigan University, USA, 1958
24. "Design of Folded Plate Roofs",
Simpson, H., Proceedings American Society of Civil
Engineers, Paper 1508, Januar 1958
25. "Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der
Technik",
Wlassow, W.S., Akademie Verlag, Berlin 1958
26. "Prismatic and Cylindrical Shell Roofs",
Yitzhaki, D., Haifa Science Publishers, Haifa,
Israel, 1958

27. "Flächentragwerke",
Girkmann, K., 5.Auflage, Springer Verlag, Wien 1959,
Seite 557
28. "Test of a Reinforced Concrete Folded Plate Structure",
Syracuse University Research Institute, Final Report
C.E.335 - 5910F, Oktober 1959
29. "The Design of Folded Plates",
Traum, E., Proceedings of American Society of Civil
Engineers, Vol. 85, No ST 8, Oktober 1959
30. "Reinforced Concrete Folded Plate Construction",
Whitney, C.S., Anderson, B.G., Birnbaum, H.,
Proceedings American Society of Civil Engineers,
Structural Division, Band 85, Oktober 1959, Seite 15
31. "Stresses in Shells",
Flügge, W., Springer Verlag, Berlin 1960
32. "A Matrix Formulation of the Folded Plate Equations",
Scordelis, A.C., Proceedings American Society of Civil
Engineers, Structural Division, Band 86, Okt.1960, Seite 1
33. "Ultimate Strength of a Folded Plate Structure",
Chacos, G.P., und Scalzi, J.B., Journal of American
Concrete Institute, Proceedings Februar 1961, Seiten
965 - 971
34. "Direct Solution of Folded Plate Concrete Roofs",
Parme, A.L., und Sbarounis, J.A., Bulletin of the
International Association of Shell Structures,
No. 6, 1961, Seite 15
35. "Approximate Analysis of Cylindrical Shells as Folded
Plates",
Ramaswamy, G.S., Ramaiah, M., und Tamhankar, M.G.,
Internationale Association for Shell Structures,
Proceedings of the Colloquium on Simplified Calculation
Methods of Shell Structures, Brüssel, September 1961,
Seiten 339 - 355
36. "Experimental & Analytical Study of a Folded Plate",
Scordelis, A.C., und Croy, E.L., und Stubbs, I.R.,
Proceedings of American Society of Civil Engineers,
Vol 87, No. ST 8, Dezember 1961, Seiten 139 - 160
37. Diskussion über "Prismatic Folded Plates" (Hinweis
Nr. 38), Breen, J.E., und Furlong, R.W., Journal
American Concrete Institute, Proceedings September 1962,
Seiten 1353 - 1356
38. "Prismatic Folded Plates",
Brielmaier, A.A., Journal American Concrete Institute
Proceedings März 1962, Band 59, No. 3, Seiten 407 - 426

39. "Hipped-plate Structures, their Theory and Analysis",
Born, J., Crosby Lockwood & Sons Ltd., London 1962
40. "Folded Plate Analysis by Minimum Energy Principle",
Fialkow, M.N., Proceedings of American Society of Civil
Engineers, Vol. 88, No. ST 3, Juni 1962, Seiten 1 - 34
41. "Computer Investigation of Folded Slab Roofs",
Gibson, J., The Structural Engineer, Mai 1962,
Seiten 151 - 160
42. "Analysis of Folded Plates",
Yitzhaki, D., und Reiss, M., Proceedings of American
Society of Civil Engineers, Band 88, No. ST 5, Oktober
1962, Seiten 107 - 141
43. "An Iteration Method for Folded Plate Analysis",
Mast, P.E., Proceedings World Conference on Shell
Structures, San Francisco 1962, National Academy of
Sciences, Washington 1964
44. "Zur statischen Berechnung der prismatischen Faltdächer",
Gross, G., Beton- und Stahlbetonbau, 54. Jahrgang, 1959,
Heft 9, Seiten 215 - 223
45. "The Investigation of Ultimate Load Analysis of
Reinforced Concrete Prismatic Folded Plate Structures",
Enami, A., Proceedings World Conference on Shell
Structures, San Francisco 1962, National Academy of
Sciences, Washington 1964
46. "Matrix Derivation of the Folded Plate Equations",
Meek, J.L., Journal of the Structural Division,
American Society of Civil Engineers, Juni 1963
47. "The Analysis of Continuous Folded Plates. An Extension
of Whitney's Method", Sharma, S.P., und Goyal, B.K.,
The Indian Concrete Journal, Band 37, Dezember 1963
48. "Phase I Report on Folded Plate Construction",
Report of the Task Committee on Folded Plate Construction,
Journal of the Structural Division, American Society of
Civil Engineers, Dezember 1963
49. "Beitrag zur Berechnung prismatischer Faltdächer",
Reiffenstühl, H., Beton- und Stahlbetonbau, 59. Jahrgang,
1964, Heft 3, Seiten 60 - 69
50. "Analysis of Folded Plate Structures",
Goble, G., Journal of the Structural Division,
American Society of Civil Engineers, Februar 1964
51. "Analysis of Short Span Folded Plates",
Seetharamulu, K., und Kulkarni, M., Journal of the
Structural Division, American Society of Civil Engineers,
Juni 1964

52. "Direct Stiffness Solution for Folded Plates",
De Fries - Skene und Scordelis, A., Journal of the
Structural Division, American Society of Civil
Engineers, August 1964
53. "Prismatic Folded Plates - A Simplified Procedure
of Analysis",
Traum, E., Journal of the American Concrete Institute,
Oktober 1964

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

a, b, h	Länge, Breite und Dicke der Platten
E, G, ν	Elastizitätsmodul, Schubmodul und Poisson'sche Zahl
D	$Eh^3/12(1 - \nu^2) =$ Plattenkonstante
x, y, z	Rechtwinkelige Koordinaten, auf die jeweilig untersuchte Platte bezogen
u, v, w, θ	Formänderungen wie in Bild 1 erläutert (Indices bezeichnen die Orientierung der Formänderung)
m	Index zur Kennzeichnung des jeweils betrachteten Gliedes einer Fourier Reihe
β	Winkel zwischen einer Platte und der Horizontalen
γ	Von zwei Platten gebildeter Aussenwinkel
ϕ	Winkel zwischen einer Platte und der Vertikalen
σ	Faktor zum Drosseln unausgeglichener N-Kräfte
g, q, p	Totallast, und senkrechte und parallele Belastung der Platten
M_x, M_y, M_{xy} Q_x, Q_y, V_y N_x, N_y, N_{xy} M, V, N, S	Schnittgrößen der Platten und Scheiben wie in Bild 1 definiert
Q_m, A, Q'_m A', R N ^{Basis} , (N), N ^I N ^{II} , etc.	Schnittgrößen an den Kanten mit Richtungssinn wie in Bild 1 festgelegt
Q_m, A, Q'_m A', R N ^{Basis} , (N), N ^I N ^{II} , etc.	Querkräfte der zweiseitig gelagerten Platten und ihre Kombinationen (vgl. Bild 5)
Q_m, A, Q'_m A', R N ^{Basis} , (N), N ^I N ^{II} , etc.	Kantenkräfte am Ende bestimmter Rechnungsvorgänge und ihre Kombinationen
k, l, r, s	Indices zur Orientierung der betrachteten Kanten
n	Anzahl der Platten eines Faltwerkes
A, K, C	Integrationskonstanten, bzw. deren Zusammenfassung
ξ, η	Vertikale und horizontale Richtung an einer Kante
F_ξ, F_η	Summe aller vertikalen und horizontalen Kräfte an einer Kante

1. Einleitung

Die Berechnung von prismatischen *Faltwerken* begann in den dreissiger Jahren. Man fasste zunächst das *Tragwerk* in der *Längsrichtung* als ein System von *Balken* und in der *Querrichtung* als ein System von *durchlaufenden, zweiseitig gelagerten Platten* auf. Diese vereinfachenden Annahmen setzten voraus, dass die einzelnen Platten verhältnismässig lang und schmal waren, d.h. ein *Seitenverhältnis* von etwa eins zu fünf nicht unterschritten.

Die vielen für diese Voraussetzungen vorgeschlagenen Berechnungsverfahren können in drei Hauptgruppen eingeteilt werden:

- Die zweistufigen Verfahren,
- die geschlossenen Lösungen,
- die Iterationsverfahren.

Die zweistufigen Verfahren untersuchen das *Tragwerk* zunächst unter Vernachlässigung der *Querverformung* und berücksichtigen diese anschliessend durch Einführung unbekannter Momente oder Verschiebungen an den *Längskanten*. Sie erfordern also im allgemeinen zweimal die Lösung von etwa so viel simultanen Gleichungen wie *Innen-Längskanten* vorhanden sind.

Die geschlossenen Lösungen arbeiten mit etwa doppelt so viel simultanen Gleichungen wie die zweistufigen Verfahren, haben aber den Vorteil, dass sie für das *Endergebnis* nicht die Überlagerung einer *Grundlösung* mit mehreren *Zusatzlösungen* erfordern. Die Benutzung moderner Rechenanlagen und die damit verbundene billige Lösung grosser Gleichungssysteme liess die geschlossenen Lösungen in den letzten Jahren etwas in den *Vordergrund* treten.

Die *Iterationsverfahren* fanden bis vor kurzem nur bedingt Verwendung, weil für grössere *Spannweiten* die *Reihe* der

Teilergebnisse im allgemeinen divergierte [37], [38]. Der Verfasser schlug darum an anderer Stelle [43] ein gelenktes Iterationsverfahren vor, welches diese Schwäche nicht hat. Grundsätzlich ist zu sagen, dass Iterationsverfahren in der Praxis wegen ihrer Übersichtlichkeit beliebt sind. Ein anderer, nicht zu unterschätzender Vorteil ist ihre Eignung für den Rechenautomaten: Die sich ständig wiederholenden Rechenvorgänge brauchen nur einmal programmiert zu werden und nehmen im Automaten oft weniger Platz ein als ein gleichwertiges Lösungssystem mit simultanen Gleichungen.

Die Berechnung von prismatischen Faltwerken nach einer genaueren Theorie begann erst etwa vor zehn Jahren. Das Tragwerk wird dabei in der Längsrichtung als ein System von zweidimensionalen Scheiben im Sinne der Elastizitätstheorie erfasst. Ausserdem wird die Tragwirkung der Platten in der Längsrichtung berücksichtigt, indem man sie als ein System durchlaufender, vierseitig gelagerter, elastischer Platten auffasst. Gemäss diesen Voraussetzungen schlug Werfel [16] im Jahre 1954 ein Verfahren vor, das vor allem auch für die Berechnung kurzer Faltwerke Verwendung finden konnte, für welche bis dahin noch keine genaue Berechnungsmethode bestand. Der Aufbau des Verfahrens entspricht den zweistufigen Verfahren für die vereinfachte Theorie. Es erfordert die Überlagerung von $(2n)$ Teillösungen und die Auflösung doppelt so vieler Systeme von $(n - 1)$ simultanen Gleichungen, wobei n die Anzahl der Platten des Faltwerkes bedeutet.

Im Jahre 1955 veröffentlichte Rüdiger [18] und im Jahre 1957 Goldberg und Leve [20] je ein Verfahren zur Berechnung prismatischer Faltwerke, welche in ihrem Aufbau den geschlossenen Lösungen für die vereinfachte Theorie entsprechen. Sie erfordern die Lösung eines Systems von etwa $(4n)$ simultanen Gleichungen, wobei n die Anzahl der Platten bedeutet. Beide Verfahren beruhen wie das Werfel'sche auf der genauen Theorie und sind darum auch für beliebige Seitenverhältnisse der Platten verwendbar.

Die vorliegende Arbeit entwickelt erstmalig ein Iterationsverfahren für die Berechnung nach der genauen Theorie. Es ist wie die obigen Verfahren für Tragwerke beliebiger Abmessungen anwendbar. Es bietet den Vorteil, den Umfang der Berechnung der Gestalt des Tragwerks anpassen zu können und führt somit in praktisch allen Fällen zu erheblicher Arbeitsersparnis.

Die maximale Anzahl der bei diesem Verfahren zu lösenden simultanen Gleichungen beträgt $(n - 1)$, wobei n wieder die Anzahl der Platten bedeutet. Die hier angewandte Drosselung der Iteration ist doppelt so wirksam wie ein ähnliches vom Verfasser an anderer Stelle ^[43] vorgeschlagenes Prinzip, weil sie die nach der genauen Theorie an jeder Kante auftretenden zwei statisch Überzähligen gleichzeitig eliminiert. Dadurch wird die Anzahl der erforderlichen Iterationen, und damit auch der Berechnungsaufwand, nach der genauen Theorie praktisch nur ebenso gross wie bei einer Berechnung nach der vereinfachten Theorie.

Sowohl die theoretischen Grundlagen als auch die praktische Anwendung des Verfahrens eignen sich besonders für die Berechnung von kurzen Faltwerken.

2. Ein Iterationsverfahren für die strenge Lösung prismatischer Faltwerke

Das Verfahren basiert auf den üblichen Annahmen der Schalentheorie:

1. Die Kirchhoff-Bernoulli Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte, d.h. die Vernachlässigung der Schubverformungen.
2. Die Vernachlässigung der Spannungen senkrecht zur Mittelfläche.
3. Die Gleichsetzung der Verschiebungen senkrecht zur Mittelfläche für alle Punkte eines Normalschnittes.
4. Die Annahme kleiner Verformungen, welche erlaubt, die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Element aufzustellen.

Die Platten des Faltwerkes werden im Sinne der Theorie der elastischen Platten betrachtet, sofern es sich um Belastung und Verformungen senkrecht zur Plattenebene handelt. Die Platten werden als zwei-dimensionale Scheiben im Sinne der Elastizitätstheorie betrachtet, soweit es sich um Belastung und Verformungen parallel zur Plattenebene handelt.

Das Verfahren arbeitet, wie alle bisher nach dieser genaueren Theorie veröffentlichten Verfahren, mit einer Entwicklung der Belastung in eine Fourier Reihe. Die folgende Erklärung des Verfahrens ist in den Rechenbeispielen weitgehendst ergänzt.

Die Stützung des Faltwerkes bei $x = a$ und $x = 0$ entspricht der üblichen Annahme einer in ihrer Ebene starren Scheibe, welche in der Richtung der Spannweite keinen Widerstand ausübt. Auch setzen wir voraus, dass die Belastung in der y -Richtung platten-konstant ist, in der x -Richtung jedoch von beliebigem Verlauf sein kann. Diese Annahmen gestatten uns die in den Grundaufgaben (siehe Anhang) angegebene Entwicklung der Verformungen und Belastungen in einfache Fourier-Reihen.

Die einzigen in dem Verfahren durch Gleichungen zu lösenden Unbekannten sind die Verdrehungen, θ , der Kanten und die zwischen benachbarten Platten auftretenden Längsscherkräfte, S . Die Forderung, dass die Durchbiegungen der Platten und die Durchbiegungen der Scheiben miteinander verträglich sind, wird im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Verfahren nicht durch Gleichungssysteme, sondern durch Iterationen erfüllt.

Die Vorzeichen und Richtungssinne aller Schnittgrößen und Verformungen in dieser Arbeit sind in Bild 1 zusammengestellt. Die Vorzeichen stimmen mit Ausnahme der Kantenscherkräfte, S , mit denen der Arbeit von Goldberg und Leve [20] überein.

Die einzelnen Rechenvorgänge sind:

Vorgang 1:

In Vorgang 1 berechnen wir das Faltwerk für die Belastung senkrecht zu den Platten, d.h. für die q -Belastung, und zwar unter der Annahme, dass sich die gemeinsamen Kanten benachbarter Platten nicht durchbiegen. Das Faltwerk bildet somit also zunächst ein System durchlaufender Platten auf unnachgiebiger Stützung. Die Berechnung wird nach dem Formänderungsgrößen-Verfahren (Deformationsmethode) durchgeführt. Als Unbekannte treten nur die Verdrehungen der Innenkanten, θ , auf; dies ergibt ein System von $(n - 1)$ Gleichungen, wenn n die Anzahl der Platten des Faltwerkes ist, mit welchen man die längs der Kanten auftretenden Biegemomente M_y berechnet. Bei Symmetrie reduzieren sich die Gleichungen natürlich auf etwa die Hälfte (vgl. Bild 2).

Die Aussenplatten des Faltwerkes haben in den meisten der hier gewählten Rechenbeispiele einen freien Rand, an dem Moment und Auflagerkraft Null sind. Für diese Randbedingungen stehen die Grundaufgaben Nr. 10 und Nr. 11 (siehe Anhang) mit Integralen der Plattengleichung zur Verfügung. Sollten die Randbedingungen "Gelenkige Lagerung" oder "Volle Einspannung" lauten, so kann man ein entsprechendes Integral der Plattengleichung vorherbestimmen und in die Rechnung einsetzen. Die von Goldberg-Leve [20] angegebenen Integrale, zum Beispiel, entsprechen der Randbedingung "Volle Einspannung". Man könnte sie

B I L D 1 : Vorzeichenregeln

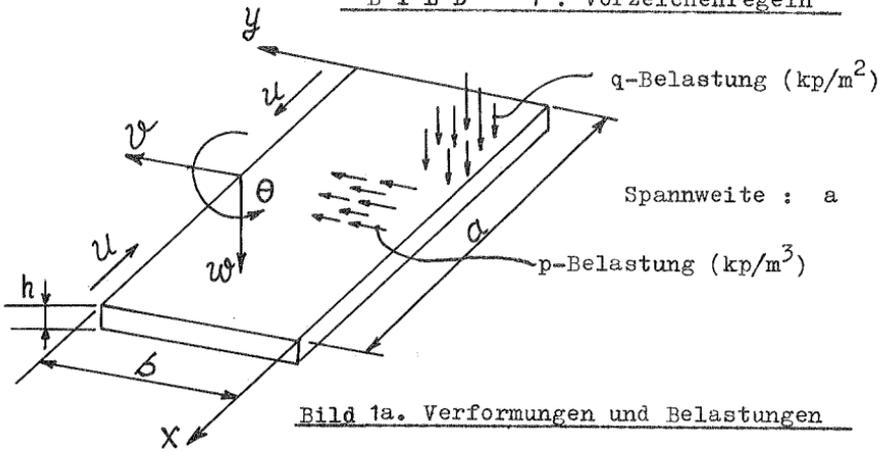


Bild 1a. Verformungen und Belastungen

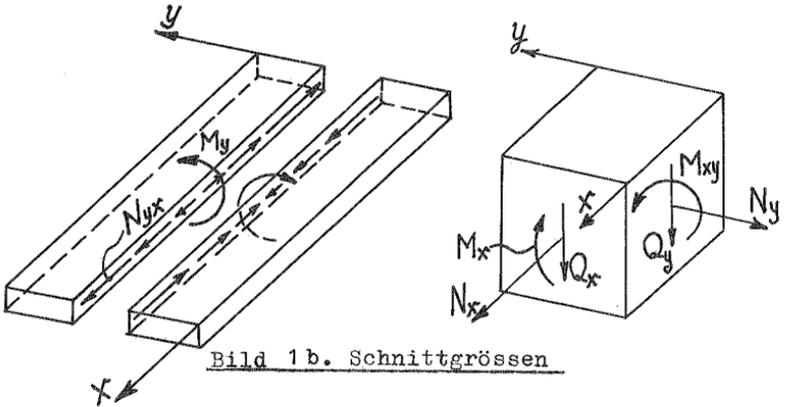


Bild 1 b. Schnittgrößen

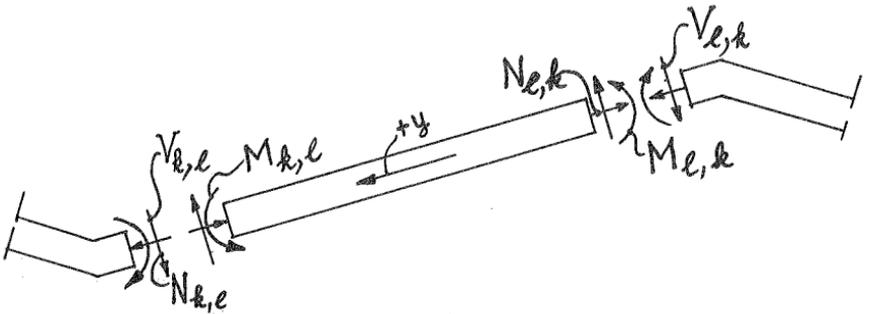


Bild 1c. Kantenkräfte und -momente

Anm.: Die Kantenscherkräfte S entsprechen für beide Plattenränder dem Richtungssinn von N_{yx} .

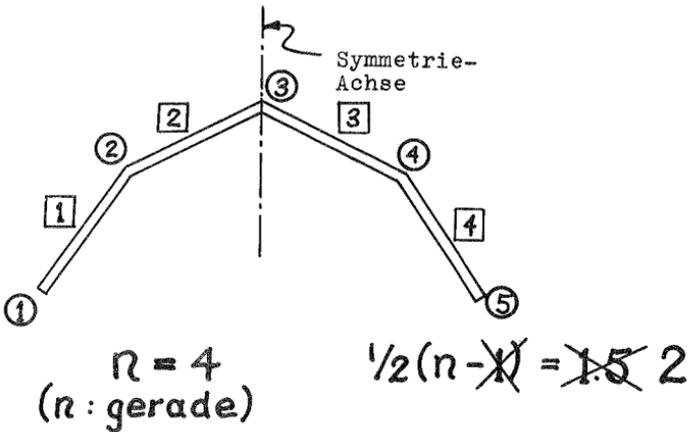
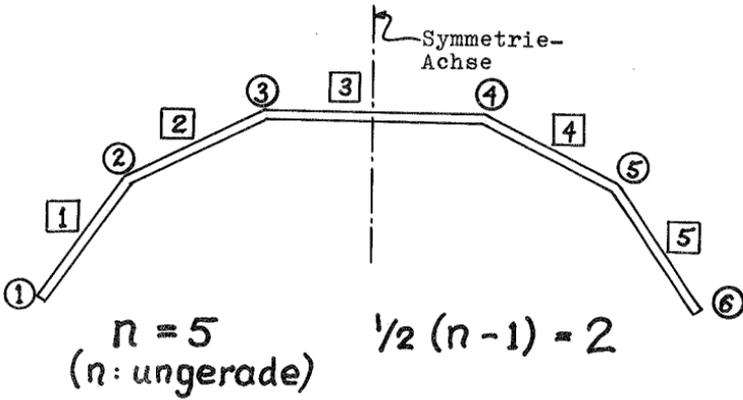
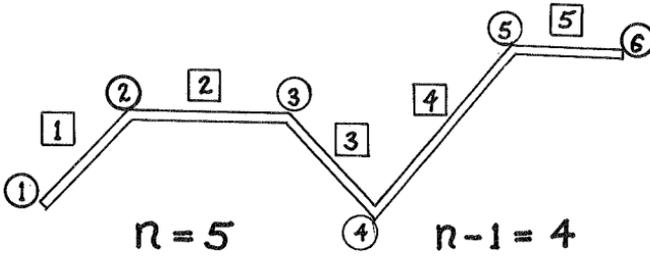


Bild 2 : Bezeichnung der Platten und Kanten

auch für "Gelenkige Lagerung" benutzen, indem man die Verdrehung der Aussenkante als weitere Unbekannte einführt, und sie mittels der zusätzlichen Bedingung ermittelt, dass an der Aussenkante kein Moment auftreten darf.

Ist das Faltenwerk durch gedrungene Randträger begrenzt, so werden diese Randträger eben die "Aussenplatten" des Faltenwerks, ohne dass an den Rechnungsvorgängen etwas Grundsätzliches zu ändern ist. Die Belastungs-Verformungs-Beziehungen für die Randträger ergeben sich aus der technischen Biegelehre.

Vorgang 1 liefert keine Schnittgrößen und Verformungen infolge Scheibenwirkung, weil die Platten zunächst in ihren Ebenen unverschieblich angenommen wurden, und weil nur die zu ihren Mittelflächen senkrechte Belastung, q , in Rechnung gestellt wurde. Wir notieren die Kantenreaktion, V , und alle interessierenden Schnittgrößen und Verformungen aus der Plattenwirkung von Vorgang 1 und gehen zu Vorgang 2 über.

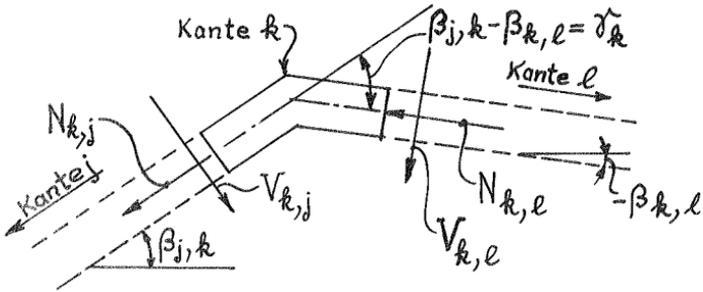
Vorgang 2:

In Vorgang 2 zerlegen wir die in Vorgang 1 ermittelten Auflagerreaktionen, V , in zu den Platten parallele Kräfte, N , (vgl. Bild 3).

Vorgang 3:

In Vorgang 3 berücksichtigen wir die zu den Platten-Mittelflächen parallele Belastung, ph , wobei wir wiederum unbiegsame Kanten voraussetzen; die Kanten sollen jedoch nicht an Dehnungen in der Längsrichtung gehindert sein. Wir ermitteln den Spannungszustand zunächst unter der Annahme, dass die Platten voneinander getrennt sind. Das Integral der Scheibengleichung für die Aussenplatte finden wir in Grundaufgabe Nr.9 und für die Innenplatten in Grundaufgabe Nr.7, (siehe Anhang).

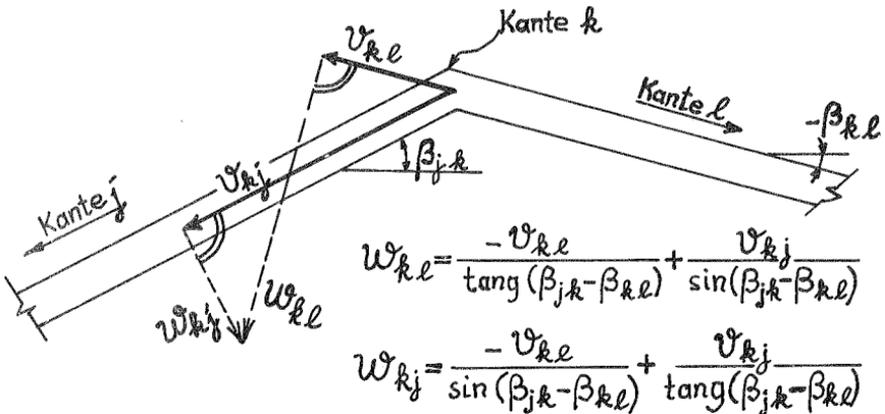
Da die Längsdehnungen an den gemeinsamen Kanten der Scheiben im allgemeinen nicht übereinstimmen werden, bringen wir zu ihrer Korrektur Längsscherkräfte, S , an. Dies resultiert in einem System von $(n - 1)$ Gleichungen, wobei n wieder die Anzahl der Platten (Scheiben) ist. Die zur Lösung des Gleichungssystems benötigten Integrale der Scheibengleichung finden wir für die Aussenplatte in Grundaufgabe Nr. 8 und für die Innenplatten in Nr. 5 und Nr. 6. Nach Ermittlung



$$N_{k,l} = \frac{V_{k,l}}{\tan(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})} + \frac{V_{k,j}}{\sin(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})}$$

$$N_{k,j} = \frac{-V_{k,l}}{\sin(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})} - \frac{V_{k,j}}{\tan(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})}$$

B I L D 3 : Zerlegung der Kantenkräfte



$$w_{kl} = \frac{-v_{kl}}{\tan(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})} + \frac{v_{kj}}{\sin(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})}$$

$$w_{kj} = \frac{-v_{kl}}{\sin(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})} + \frac{v_{kj}}{\tan(\beta_{j,k} - \beta_{k,l})}$$

B I L D 4 : Ermittlung der "w" aus den "v" nach Williot

der S-Kräfte ist der Spannungszustand für die p-Belastung erfasst. Wir notieren die Kantenkräfte N und alle anderen interessierenden Grössen und gehen zu Vorgang 4 über.

Vorgang 4:

In Vorgang 4 fassen wir die in Vorgang 2 erhaltenen N-Kräfte mit den in Vorgang 3 erhaltenen N-Kräften zusammen. Diese rein algebraische Operation ist in Rechenbeispiel Nr. 1 ausführlich beschrieben.

Vorgang 5:

In Vorgang 5 lassen wir die in Vorgang 4 ermittelten N-Kräfte auf die Scheiben einwirken, wobei wir zunächst wieder die Scheiben voneinander getrennt betrachten. Die zur Bestimmung des Spannungszustandes erforderlichen Integrale der Scheibengleichung finden wir in den Grundaufgaben Nr. 1 und Nr. 2. Anschließend machen wir die Längsdehnungen an den gemeinsamen Kanten durch Anbringen unbekannter Längsscherkräfte, S, wie in Vorgang 3 verträglich, wobei wir uns der Formeln der Grundaufgaben Nr. 3 und Nr. 4 bedienen. (Die Kanten sind nun nicht mehr unbiegsam gedacht, so dass die Randbedingungen der Grundaufgaben Nr. 5, Nr. 6 und Nr. 8 nicht zutreffen würden.) Mit der Ermittlung der S-Kräfte ist dieser Spannungszustand erfasst und wir notieren die interessierenden Ergebnisse.

Alle folgenden Rechnungen dienen nur noch der Erfassung der Querverformung des Tragwerkes, weil alle äusseren Lasten in den Vorgängen 1 bis 5 voll berücksichtigt wurden.

Vorgang 6:

In Vorgang 6 ermitteln wir die Durchbiegungen, w, aus den in Vorgang 5 ermittelten Verschiebungen, v, nach dem Williot'schen Verfahren. (Vgl. Bild 4).

Vorgang 7:

In Vorgang 7 wird der Spannungszustand aus der Plattenwirkung infolge der in Vorgang 6 ermittelten Verformungen, w, untersucht. Wir benutzen für die Aussenplatte die Grundaufgabe Nr. 12 und für die Innenplatten die von Goldberg-Leve entwickelten Formeln (siehe Anhang) für die Lösung mit eingespannten

Kanten. Wir gleichen die Kantenmomente wie in Vorgang 1 durch die Kantendrehungen aus, was wiederum die Lösung eines Systems von $(n - 1)$ Gleichungen erfordert. Die dazu erforderlichen Integrale der Plattengleichungen stehen uns in Grundaufgabe Nr. 11 und in den Goldberg-Leve'schen Formeln zur Verfügung.

Vorgang 8:

In Vorgang 8 ermitteln wir die zu den Platten parallelen N-Kräfte, indem wir die in Vorgang 7 ermittelten Auflagerkräfte V wie in Vorgang 2 zerlegen. Wir nennen diese unausgeglichenen N-Kräfte " N^{Basis} ".

Wir fassen Vorgänge 1 bis 4 unter dem Ausdruck Basis I und Vorgänge 5 bis 8 unter dem Ausdruck Basis II zusammen. Von nun an wiederholen sich nur noch die Vorgänge 5 bis 8, d.h. die folgenden Iterationen entsprechen den Rechnungen der Basis II.

1. Iteration:

Vorgang 9: Die N^{Basis} -Kräfte wirken auf das Tragwerk und verursachen die Verschiebungen, v , der Scheiben.
(wie 5)

Vorgang 10: Die Verschiebungen, v , ergeben Plattenbiegungen, w , nach Williot.
(wie 6)

Vorgang 11: Die Plattenbiegungen ergeben Auflagerkräfte, V , an den Kanten.
(wie 7)

Vorgang 12: Die V -Kräfte werden in unausgeglichene N-Kräfte zerlegt, welche wir N^{I} nennen wollen. Damit ist die erste Iteration abgeschlossen.

Wenn die N^{I} viel kleiner als die N^{Basis} sind, kann man damit rechnen, dass die unausgeglichene N-Kräfte nach ein paar weiteren Iterationen verschwinden. Das ist selten der Fall. In vielen Fällen sind die N^{I} sogar erheblich grösser als die N^{Basis} , so dass die Reihe der Teilergebnisse divergiert. Man muss daher die Iterationsprozesse lenken, was durch die im folgenden beschriebenen Drosseln erreicht wird.

Das Prinzip der Drossel

Die unausgeglichene N-Kräfte am Schluss von Basis II, N^{Basis} , verursachten die unausgeglichene N-Kräfte am Schluss des ersten Iterationsprozesses, N^I . Wenn man die letzten von den ersteren abzieht, erhält man einen Satz von N-Kräften, der bei seiner Anwendung auf das Tragwerk keine unausgeglichene N-Kräfte mehr nach sich zieht. Wir nennen diese Kräfte die $(N)^I$ -Kräfte,

$$(N_{k,l})^I = N_{k,l}^{Basis} - N_{k,l}^I$$

$$k = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$l = k-1, k+1$$

Vgl. Bild 2

wobei n die Anzahl der Platten des Tragwerks ist.

Wir kennen alle Schnittgrößen und Verformungen des Tragwerks infolge der $(N)^I$ -Kräfte, denn es sind die im ersten Iterationsprozess ermittelten. Es liegt also nahe, die $(N)^I$ -Kräfte von den unausgegliehenen N^I -Kräften abzuziehen, um dadurch im 2. Iterationsprozess kleinere Korrekturen der bisher gewonnenen Teilergebnisse zu erhalten. Es liegt ferner nahe, die $(N)^I$ -Kräfte mit dem Faktor \mathcal{Q}_1 zu multiplizieren, so dass eine N^I -Kraft an einer beliebigen Kante, $k = r$, der entsprechenden $(N)^I$ -Kraft gleich wird und somit beim Abziehen der $(N)^I$ -Kräfte von den N^I -Kräften verschwindet.

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{N_{r,s}^I}{N_{r,s}^{Basis} - N_{r,s}^I}$$

Wir geben dem Faktor \mathcal{Q} den Index "eins", weil er nach der ersten Iteration auftritt. Wir werden bei späteren Iterationen weitere \mathcal{Q} - Faktoren zur Drosselung der übrig bleibenden N-Kräfte erhalten. Der Index, s, kann r-1 oder r+1 sein.

Wenn wir die $\mathcal{Q}_1 \cdot (N)^I$ -Kräfte von den N^I -Kräften abgezogen haben, müssen wir natürlich die \mathcal{Q}_1 -fachen Schnittgrößen und Verformungen des ersten Iterationsprozesses dem am Schluss des ersten Iterationsprozesses gewonnenen Teilergebnis

zuschlagen. Dies ist in Rechenbeispiel Nr. 1 ausführlich beschrieben. Die nach der ersten Drossel verbleibenden N-Kräfte lauten:

$$\bar{N}_{k,1}^I = N_{k,1}^I - g_1 (N_{k,1})^I$$

wobei für $k = r$ und $l = s$ die Kraft $\bar{N}_{k,l}^I$ zu Null wird. Es ist im allgemeinen am zweckmässigsten, mit der ersten Drossel die Kraft an der ersten Innenkante, $\bar{N}_{2,1}^I$, zu Null zu machen, weil sich Kantenkräfte um so mehr auswirken, je näher sie dem freien Rand des Tragwerks sind. Auf Ausnahmen ist in den Rechenbeispielen hingewiesen.

Die verbleibenden Kräfte \bar{N}^I sind nun dem Tragwerk wie äussere Lasten zuzuweisen. Dies geschieht im zweiten Iterationsprozess.

Weitere Iterationsprozesse

Der zweite Iterationsprozess verläuft wie der erste; wir lassen die \bar{N}^I -Kräfte am Tragwerk angreifen und erhalten Verschiebungen, v , aus der Scheibenwirkung. Diese verwandeln wir nach Williot in Durchbiegungen, w , welche die Plattenwirkung hervorrufen. Die aus der Plattenwirkung resultierenden Auflagerkräfte V verwandeln wir in Scheibenrandkräfte N^{II} , welche wir mit Drossel 2 reduzieren, um sie, wenn es ihre Grössenordnung rechtfertigt, dem nächsten Iterationsprozess zuzuweisen.

Drossel 2

Wieder ziehen wir die verursachten Randkräfte N^{II} von den sie hervorrufenden \bar{N}^I -Kräften ab und erhalten einen Satz $(N)^{II}$ -Kräfte, dessen Wirkung wir kennen und der keine unausgeglichene Randkräfte mehr hervorruft. Wir können also durch die $(N)^{II}$ -Kräfte zusammen mit den $(N)^I$ -Kräften die N^{II} -Kräfte jetzt so reduzieren, dass zwei unausgeglichene Randkräfte, \bar{N}^{II} , fortfallen. Das ist in Rechenbeispiel Nr. 1 erläutert, so dass wir uns hier darauf beschränken wollen, die zweckmässigste Wahl für die zu eliminierenden N-Kräfte zu treffen. Dazu bedarf es einer Überlegung wie die unausgeglichene N-Kräfte zu Stande kommen.

Die unausgeglichene N-Kräfte entstehen durch die Querverformung des Tragwerks. Diese beruht auf der Tatsache, dass sich die Aussenplatten mehr durchbiegen als die Innenplatten. Wenn wir uns also die Querverformung als die Biegelinie eines Durchlaufträgers vorstellen, dessen Aussenstütze sich gesenkt hat, verstehen wir warum die Quermomente meistens von Falte zu Falte das Vorzeichen wechseln, d.h. längs des Querschnittes oszillieren. (Die inneren Falten entsprechen dabei den Innenstützen.) Die Momente rufen somit an den Innenkanten V-Kräfte mit abwechselndem Richtungssinn hervor. Wenn man diese V-Kräfte in einem Iterationsprozess dem Tragwerk als äussere Lasten zuweist, werden die resultierenden, unausgeglichene V-Kräfte den ersten im allgemeinen entgegengesetzt und etwa proportional sein, was der Anschauung von actio = reactio entspricht.

Wir machen uns dieses Verhalten beim Anwenden der Drossel in zweifacher Weise zu Nutze: Die gewisse Proportionalität zwischen hervorrufenden und verursachten, unausgeglichene V- oder N-Kräfte ist eine Grundlage für die Wirksamkeit der Drossel überhaupt. Wir sehen das am besten daraus, dass wir alle N^I -Kräfte mit Drossel 1 eliminiert hätten, wenn jede Kraft $N_{k,l}^I$ das gleiche Vielfache der Kraft $N_{k,l}^{Basis}$ gewesen wäre. Es wären dann alle verbleibenden \bar{N}^I -Kräfte zu Null geworden:

$$\bar{N}_{k,l}^I = N_{k,l}^I - \frac{N_{k,l}^I}{N_{k,l}^{Basis} - N_{k,l}^I} (N_{k,l}^{Basis} - N_{k,l}^I) = 0$$

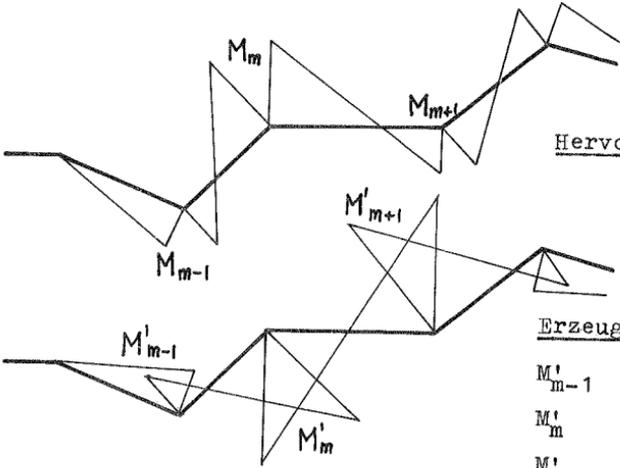
Die zweite Anwendung der obigen Beziehungen erfolgt bei der zweckmässigsten Wahl der zu eliminierenden N-Kräfte:

An jeder Innenkante treten zwei unausgeglichene N-Kräfte auf: $N_{r, r-1}$ und $N_{r, r+1}$. Wenn man, wie in Drossel 2 und den folgenden, die Möglichkeit hat, zwei oder mehr N-Kräfte gleichzeitig zu eliminieren, so sollte man nicht N-Kräfte von der gleichen Kante wählen, sondern je eine N-Kraft von verschiedenen Kanten, weil die zweiten N-Kräfte der betroffenen Kanten, $N_{r, r+1}$, automatisch fast vollständig mit verschwinden, wenn man die ersteren, $N_{r, r-1}$, eliminiert.

Warum dies so ist, geht aus Bild 5 hervor: Die unausgeglichene N-Kräfte entstanden aus der Zerlegung der V-Kräfte. Die V-Kräfte sind praktisch den Quermomenten proportional (für Seitenverhältnisse $a/b = 3$ und mehr). Der Vektor der V-Kräfte infolge des Momentes M_m , wir nennen ihn Q_m , hat somit immer die gleiche Wirkungslinie, ganz gleich wie gross M_m ist. Die Vektoren der V-Kräfte infolge der Momente M_{m-1} und M_{m+1} , Q_{m-1} und Q_{m+1} , ergeben mit Q_m den Vektor A. Da M_{m-1} und M_{m+1} praktisch immer das entgegengesetzte Vorzeichen von M_m haben, heben sich ihre zu Q_m senkrecht stehenden Komponenten teilweise auf, während ihre zu Q_m parallelen Komponenten dazu beitragen, den Vektor A in die Wirkungslinie von Q_m zu drehen. Die Wirkungslinie von A weicht somit wenig von der Wirkungslinie von Q_m ab. Dies trifft um so mehr zu, je kleiner der Winkel δ zwischen benachbarten Platten ist.

Wenn man im Iterationsprozess die Kraft, A, als äussere Kraft auf das Tragwerk einwirken lässt, erzeugt sie Verformungen, welche in einer Gegenkraft, A', resultieren. Wären die erzeugten Quermomente M'_m , M'_{m-1} und M'_{m+1} (welche die Kraft A' erzeugen) den hervorrufenden Quermomenten M_m , M_{m-1} und M_{m+1} paarweise genau proportional, so hätte die Kraft A' genau die gleiche Wirkungslinie wie A. In Wirklichkeit ist diese paarweise Proportionalität aber nur bedingt vorhanden.

Trotzdem zeigen viele Beispiele, dass der Vektor A' immer fast genau in die Wirkungslinie des Vektors A fällt, und zwar ganz gleich wie das Seitenverhältnis oder das Stärkeverhältnis der benachbarten Platten ist. Die Erklärung liegt in der Tatsache, dass sich wegen der alternierenden Vorzeichen der Momente die zu Q'_m senkrechten Komponenten von Q'_{m-1} und Q'_{m+1} teilweise gegenseitig aufheben, während ihre zu Q'_m parallelen Komponenten den Vektor A' immer mehr der Wirkungslinie von Q'_m angleichen. Die Wirkungslinie von A' weicht also wenig von der von Q'_m ab. Da aber die Wirkungslinien von Q'_m und Q_m genau übereinstimmen, weichen auch die Wirkungslinien von A' und A wenig voneinander ab.



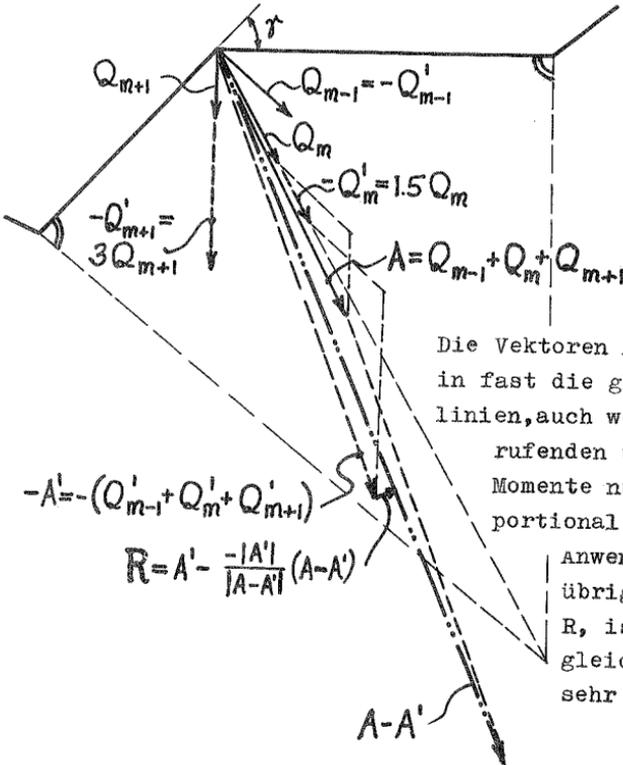
Hervorrufende Momente

Erzeugte Momente :

$$M'_{m-1} = - M_{m-1}$$

$$M'_m = - 1,5 M_m$$

$$M'_{m+1} = - 3,0 M_{m+1}$$



Die Vektoren A und A' fallen in fast die gleichen Wirkungslinien, auch wenn die hervorrufenden und die erzeugten Momente nur bedingt proportional sind. Der nach

Anwendung der Drossel übrigbleibende Vektor, R, ist darum im Vergleich zum Vektor A' sehr klein.

Bild 5 zeigt ein Beispiel, in dem die M' den M paarweise sehr wenig proportional sind. Trotzdem fällt A' fast genau in die Richtung von A . Wir wenden das Prinzip der Drossel an, um A' zu eliminieren: Dazu ziehen wir A' von A ab, multiplizieren den so gewonnenen Vektor $A-A'$ mit $Q = \frac{-|A'|}{|A-A'|}$ und ziehen das Ergebnis von A' ab. Das ist in Bild 5 graphisch dargestellt, und wir erkennen, dass die von A' übrig bleibende Komponente, R , im Vergleich zur ursprünglichen Grösse von A' sehr klein ist.

Wir stellen also fest, dass die vektorielle Summe der N -Kräfte an jeder Kante vor und nach dem Iterationsprozess etwa auf der gleichen Wirkungslinie liegt, und dass darum die Kraft $N_{r, r+1}$ fast vollständig mit verschwindet, wenn man mit einer Drossel die Kraft $N_{r, r-1}$ eliminiert. Dadurch wird es uns möglich, das Falzwerk nach der genaueren Theorie mit praktisch der gleichen Anzahl von Iterationen zu berechnen, wie nach der vereinfachten Theorie. Hierin liegt der hauptsächlichste Vorteil des Iterationsverfahrens im Vergleich zu den Verfahren, welche mit simultanen Gleichungen arbeiten. Bei den letzteren verdoppelt sich bekanntlich die Anzahl der erforderlichen Gleichungen, wenn man von der vereinfachten zur genaueren Theorie übergeht.

Es ist oben erwähnt, dass die Gleichrichtung der Vektoren A und A' um so vollkommener ist, je kleiner der Winkel γ an der betrachteten Kante wird. Das ist von Vorteil, denn wir werden später sehen, dass wir um so mehr auf die Wirksamkeit der Drossel angewiesen sind, je kleiner die Winkel γ eines Falzwerkes sind.

Die Fortsetzung des Verfahrens

Wenn das Falzwerk n Platten hat, gibt es $(2n - 2)$ unausgeglichene N -Kräfte. Die zu ihrer Eliminierung theoretisch maximal erforderliche Anzahl von Iterationsprozessen ist aber nur $(2n - 3)$, weil uns durch die Rechenoperation "Basis II" ein weiteres System von (N) -Kräften zur Verfügung steht, von dem wir alle Schnittgrößen und Verformungen kennen und welches

keine unausgeglichene N-Kräfte nach sich zieht. (Wir erhalten es, indem wir die N-Basis Kräfte am Schluss von Basis II von den N-Kräften am Schluss von Basis I abziehen.) Es empfiehlt sich meistens nicht, dieses (N)-Kräfte System gleich nach einer der ersten Iterationsprozesse zur Eliminierung von unausgegleichenen N-Kräften heranzuziehen, weil dadurch die Proportionalität zwischen Verformungen aufeinander folgender Iterationen gestört wird.

Wir betonen also, dass nach $(2n - 3)$ Iterationsprozessen und entsprechenden Drosseln die mathematisch genaue Lösung immer erreicht werden kann, weil dann sämtliche unausgegleichenen N-Kräfte eliminiert werden können. In Wirklichkeit wird das praktisch genaue Ergebnis schon viel früher erreicht. Wir erreichen es praktisch immer nach höchstens $(n - 3)$ Iterationsprozessen, wobei n wieder die Anzahl der Platten ist. Bei symmetrischen Faltenwerken reduziert sich die Zahl der maximal erforderlichen Iterationen auf etwa die Hälfte (vgl. Bild 2). Die Rechenbeispiele zeigen, dass wir in vielen Fällen das praktisch genaue Ergebnis sogar mit noch weniger oder gar keinen Iterationen erreichen.

Anm.: In Rechenbeispiel Nr. 1 wurden die maximal erforderlichen 4 Iterationsprozesse durchgeführt, um die rasche Konvergenz des Verfahrens zu veranschaulichen. Die praktisch genaue Lösung war nach zwei Iterationen erreicht.

3. DIE RECHENBEISPIELE

Vorbemerkungen:

Die in den folgenden Rechenbeispielen untersuchten *Faltwerke* unterscheiden sich in ihren Seitenverhältnissen, den Spannweiten und den zwischen den Platten eingeschlossenen Winkeln. Jedes Beispiel untersucht nur ein Glied der in eine *Fourierreihe* entwickelten Belastung. Der in den Formeln nicht mehr angeführte Index "m" ist somit für Beispiel Nr. 2 gleich drei, und für alle übrigen Beispiele gleich eins. Die *Poisson'sche Zahl* ist in allen Beispielen gleich Null gesetzt worden.

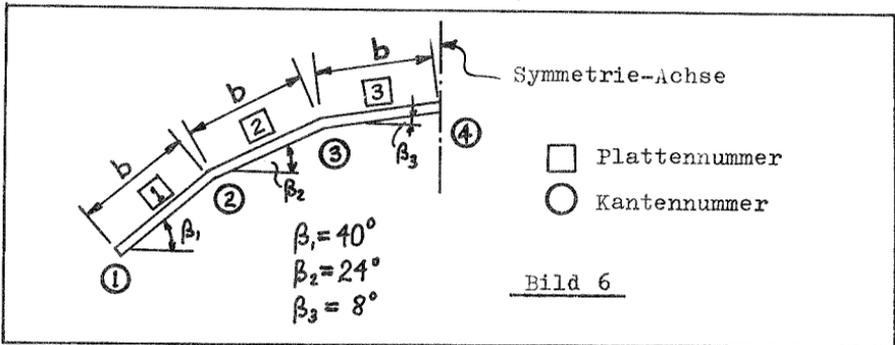
Da alle Verformungen und Schnittgrößen in der *x* - Richtung in reinen *Sinus-* oder *Cosinus - Funktionen* verlaufen, wurden in der Berechnung jeweils nur die *Maximalwerte* in *Feldmitte* bzw. am *Auflager* angegeben. Man muss sie mit $\sin \frac{m \pi x}{a}$ bzw. $\cos \frac{m \pi x}{a}$ multiplizieren, um die Werte an der Stelle *x* zu erhalten. Obwohl die angegebenen Werte somit die *Amplituden* darstellen, wurden für die *Verschiebungen* *u* und *v* kleine Buchstaben gewählt, um sie nicht mit den Bezeichnungen für die *Auflagerkräfte*, *V*, verwechseln zu können.

Es ist im Text wiederholt darauf hingewiesen, dass mit den $K = \frac{Eh \pi}{24 a(1 - \nu^2)}$ - fachen Verformung gerechnet wird, um die auftretenden Zahlenwerte handlicher zu machen. Deswegen erscheinen in den Beispielen die *Verschiebungen* in *kp/m* und die *Verdrehungen* in *kp/m²*.

Rechenbeispiel Nr. 1

Berechnet wird ein tonnenförmiges Faltwerk, wie in Bild 6 dargestellt. Die Spannweite ist gleich der 5-fachen Plattenbreite. Gesucht sind die Langskräfte, N_{xm} , und die Biegemomente, M_{ym} , an allen Kanten. Die Abmessungen des Tragwerks und der E-Modul sind:

- Plattenbreite $b = 3,904 \text{ m}$
- Plattenstärke $h = 0,08 \text{ m}$
- Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kp/m}^2$
- Freie Spannweite $a = 19,52 \text{ m}$



Die Berechnung erfolgt für Eigengewicht plus Dachdeckung, welche zusammen 196 kp/m^2 ausmachen. Wir spalten dieses auf in einen Lastanteil senkrecht zu den Platten:

$$q = g \cos \beta \text{ (kp/m}^2\text{)}$$

und einen Lastanteil parallel zu den Platten:

$$ph = g \sin \beta \text{ (kp/m}^2\text{)}$$

Anm.: "p" ist eine Volumenskraft (kp/m^3)

Tafel 1

Platte	Neigung β	$\sin \beta$	$\cos \beta$	q	ph
1	40°	0,64279	0,76604	150,14	125,99
2	24°	0,40674	0,91355	179,05	79,72
3	8°	0,13917	0,99027	194,09	27,28

Vorgang 1:

Ermittlung der Momente M_y infolge Belastung q

Das Moment an Kante 2 der Aussenplatte (Platte 1) wird mit Hilfe von Grundaufgabe Nr. 10 (siehe Anhang) gefunden. Demzufolge beträgt das Einspannmoment für $m = 1$ und $\nu = 0$:

$$M_y^q = -q \frac{4}{\pi} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \left[2 \frac{3 \cosh^2(2\alpha) - 1}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1} - 1 \right]$$

$$2\alpha = \frac{m \pi b}{a} = \frac{3,1416 \cdot 3,904}{19,52} = 0,62832$$

$\sinh(2\alpha) = 0,67048$	$\sinh^2(2\alpha) = 0,44952$	
$\cosh(2\alpha) = 1,20396$	$\cosh^2(2\alpha) = 1,44952$	<u>Tafel 2</u>
$\tanh(2\alpha) = 0,55689$	$\tanh^2(2\alpha) = 0,31013$	
$\operatorname{sech}(2\alpha) = 0,83059$	$\operatorname{sech}^2(2\alpha) = 0,68988$	

$$M_{21}^q = -150,14 \frac{4}{3,1416} \left(\frac{19,52}{3,1416}\right)^2 \left[2 \frac{3 \cdot 1,44952 - 1}{3 \cdot 1,44952 + (0,62832)^2 + 1,0} - 1 \right]$$

$$= -1225,5 \text{ mkp/m}$$

Die entsprechenden Einspannmomente für die anderen Platten werden mittels der Goldberg-Leve'schen Formeln (siehe Anhang) ermittelt.

$$-M_{23}^q = M_{32}^q = -q \frac{4}{\pi} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \left[\frac{2 \cosh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha} - 1 \right]$$

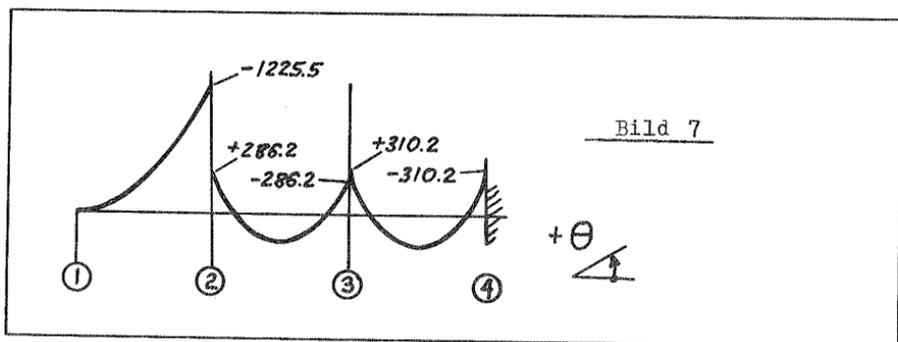
$$\alpha = \frac{m \pi b}{2 a} = \frac{3,1416 \cdot 3,904}{2 \cdot 19,52} = 0,31416$$

$\sinh \alpha = 0,31939$	
$\cosh \alpha = 1,04977$	
$\tanh \alpha = 0,30425$	<u>Tafel 3</u>
$\operatorname{csch} \alpha = 3,13092$	
$\operatorname{sech} \alpha = 0,95265$	
$\operatorname{coth} \alpha = 3,28680$	

Sie ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 -M_{23}^q &= M_{32}^q = -179,05 \frac{4}{3,1416} \left(\frac{19,52}{3,1416} \right)^2 \left[\frac{2 \cdot 1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} - 1 \right] \\
 &= -286,2 \text{ mkp/m} \\
 -M_{34}^q &= M_{43}^q = -310,2 \text{ mkp/m}
 \end{aligned}$$

Wenn man die Momente im Sinne eines Durchlaufträgers aufträgt, erkennt man die Notwendigkeit einer Kantendrehung, $\bar{\theta}$, um an den Kanten Gleichgewicht zu schaffen. Die Anwendung des Deformations Verfahrens geschieht wie folgt:



Um den Einfluss einer Drehung von Kante 2 auf die 3-seitig gelagerte Aussenplatte ① - ② festzustellen, bedienen wir uns der Grundaufgabe Nr.11 (siehe Anhang). Der dort angegebene Festwert für M_y infolge $\bar{\theta}$ lautet für $m = 1$ und $\nu = 0$

$$M_y^{\bar{\theta}} = \frac{E h^3}{12} 2 \frac{\pi}{a} \bar{\theta} \frac{3 \sinh(2\alpha) \cosh(2\alpha) + (2\alpha)}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1}$$

Wir rechnen mit den K-fachen Verformungen, zum Beispiel

$$\bar{\theta} = K \bar{\theta}, \text{ wobei } K = \frac{E h \pi}{24 a (1 - \nu^2)},$$

so dass sich die Formel für M_y reduziert auf

$$M_y^{\bar{\theta}} = 4 h^2 \bar{\theta} \frac{3 \sinh(2\alpha) \cosh(2\alpha) + (2\alpha)}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1}$$

und somit ergibt sich M_{21} zu

$$M_{21}^{\Theta} = 4 \theta_2 (0,08)^2 \frac{3 \cdot 0,67048 \cdot 1,20396 + 0,62832}{3 \cdot (1,20396)^2 + (0,62832)^2 + 1,0}$$

$$= 0,013595 \theta_2$$

Die Momente an den Kanten der Innenplatten können mit Hilfe der Goldberg-Leve'schen Formeln (siehe Anhang) bestimmt werden. Wir berechnen zum Beispiel:

$$M_{23}^{\Theta} = 2 h^2 \left[\left(\frac{\cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha + \sinh \alpha} - \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha - \cosh \alpha} \right) \theta_2 \right. \\ \left. - \left(\frac{\cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha + \sinh \alpha} + \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha - \cosh \alpha} \right) \theta_3 \right]$$

$$= 2 \cdot (0,08)^2 \left[\left(\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 0,95258 + 0,31939} - \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 3,13096 - 1,04977} \right) \theta_2 \right. \\ \left. - \left(\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 0,95258 + 0,31939} + \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 3,13096 - 1,04977} \right) \theta_3 \right]$$

$$= 0,083564 \theta_2 + 0,040124 \theta_3$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$M_{21} = -M_{23}$$

erhalten wir die erste Bestimmungsgleichung zur Ermittlung von θ_2 und θ_3 :

$$I.] M_{21}^q + M_{21}^{\Theta_2} \cdot \theta_2 = - (M_{23}^q + M_{23}^{\Theta_2} \cdot \theta_2 + M_{23}^{\Theta_3} \cdot \theta_3)$$

$$I.] - 1225,5 + 0,013595 \theta_2 =$$

$$- (286,2 + 0,083564 \theta_2 + 0,040124 \theta_3)$$

In ähnlicher Weise verfahren wir, wenn wir die Bestimmungsgleichung für Kante 3 anschreiben. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$M_{32} = - M_{34}$$

erhalten wir die zweite Bestimmungsgleichung zur Ermittlung von Θ_2 und Θ_3 :

$$\text{II] } M_{32}^q + M_{32}^{\Theta_2} \Theta_2 + M_{32}^{\Theta_3} \Theta_3 = - (M_{34}^q + M_{34}^{\Theta_3} \Theta_3)$$

Θ_4 ist Null, weil natürlich infolge Symmetrie die Mitte, Kante 4, keine Drehung erfährt. Ähnlich wie M_{23}^{Θ} ermitteln wir M_{32}^{Θ} und M_{34}^{Θ} :

$$M_{32}^{\Theta} = 0,040124 \Theta_2 + 0,083564 \Theta_3$$

$$M_{34}^{\Theta} = 0,083564 \Theta_3 + 0,040124 \Theta_4 \leftarrow (\text{Null})$$

woraus sich die Gleichung II ergibt zu:

$$\text{II] } - 286,2 + 0,040124 \Theta_2 + 0,083564 \Theta_3 = \\ - (310,2 + 0,083564 \Theta_3)$$

Die Auflösung der Gleichungen I und II ergibt:

$$\Theta_2 = 10797,7 \text{ kp/m}^2$$

$$\Theta_3 = -2735,8 \text{ kp/m}^2$$

Anm.: Die dimensionslose Drehung $\bar{\Theta}$ ist mit $K = \frac{E h \pi}{24 a (1 - \nu^2)}$ multipliziert und erhält somit die Dimension kp/m^2 .

Wenn wir die Werte für θ in die Gleichungen I] und II] einsetzen, erhalten wir die ausgeglichenen Kantenmomente wie folgt:

$$\begin{aligned} M_{21} = - M_{23} &= M_{21}^q + M_{21}^{\theta_1} \cdot \theta_2 \\ &= - 1225,5 + 0,013595 \cdot 10797,7 \\ &= \underline{- 1078,8 \text{ mkp/m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} &= - (M_{23}^q + M_{23}^{\theta_2} \theta_2 + M_{23}^{\theta_3} \theta_3) \\ &= - (286,2 + 0,083564 \cdot 10797,7 \\ &\quad - 0,040124 \cdot 2735,8) \\ &= \underline{- 1078,8 \text{ mkp/m}} \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ermitteln wir die Momente an Kante 3 und 4:

$$\begin{aligned} M_{32} = - M_{34} &= M_{32}^q + M_{32}^{\theta_2} \theta_2 + M_{32}^{\theta_3} \theta_3 \\ &= -286,2 + 0,040124 \cdot 10797,7 - 0,083564 \cdot 2735,8 \\ &= \underline{- 81,6 \text{ mkp/m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{43} &= M_{43}^q + M_{43}^{\theta_3} \theta_3 \\ &= - 310,2 - 0,040124 \cdot 2735,8 \\ &= \underline{- 420,0 \text{ mkp/m}} \end{aligned}$$

Die Momente sind nun wie bei einem Durchlaufträger ausgeglichen. Als nächstes ermitteln wir die Auflagerreaktionen. Diese werden für jede Platte und jeden Rand einzeln ermittelt, so dass wir insgesamt 5 Werte erhalten wie in Bild 8 gezeigt ist.

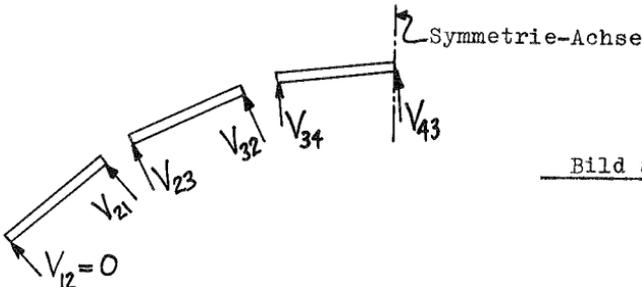


Bild 8

Die Auflagerkraft V_{21}^q ergibt sich aus dem Anteil V_{21}^q infolge der Belastung q auf der voll eingespannten Platte und aus dem Anteil $V_{21}^{\theta_2} \cdot \theta_2$ infolge der Verdrehung von Kante 2. Wir ermitteln den ersten Anteil mit Grundaufgabe Nr. 10 und den zweiten Anteil mit Grundaufgabe Nr. 11. Die dort angegebenen Formeln vereinfachen sich für $\nu = 0$ und $m = 1$ zu:

$$V_{21}^q = q \frac{8a}{\pi^2} \frac{3 \sinh(2\alpha) \cosh(2\alpha) - 2\alpha}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1}$$

$$\text{und } V_{21}^{\theta_2} = \frac{-E h^3}{12} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[2 \frac{3 \cosh^2(2\alpha) - 1}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1} - 1 \right] \theta_2$$

Wenn wir wieder mit den K -fachen Verdrehungen, θ , rechnen, ergibt sich die zweite Formel zu

$$V_{21}^{\theta_2} = -2 h^2 \frac{\pi}{a} \theta_2 \left[\dots \right]$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten wird:

$$V_{21}^q = 150,14 \frac{8 \cdot 19,52}{\pi^2} \left[\frac{3 \cdot 0,67048 \cdot 1,20396 - 0,62832}{3 \cdot 1,44962 + (0,62832)^2 + 1,0} \right]$$

$$= 741,8 \text{ kp/m}$$

$$V_{21}^{\theta_2} = 2 \cdot (0,08)^2 \frac{\pi}{19,52} \cdot 10797,7$$

$$\left[2 \frac{3 \cdot 1,44952 - 1,0}{3 \cdot 1,44952 + (0,62832)^2 + 1,0} - 1,0 \right]$$

$$= -0,00034219 \cdot 10797,7$$

$$= -3,7 \text{ kp/m}$$

Damit ergibt sich die Auflagerkraft, V_{21} , (der dreiseitig gelagerten, elastisch eingespannten Aussenplatte 1) zu:

$$V_{21} = V_{21}^q + V_{21}^{\theta_2} \theta_2$$

$$= 741,9 - 3,7$$

$$= \underline{738,1 \text{ kp/m}}$$

In ähnlicher Weise bestimmen wir die Auflagerreaktionen für die Innenplatten, wobei wir die Goldberg-Leve'schen (siehe Anhang) Formeln benutzen können. Sie lauten für $m = 1$ und $v = 0$:

$$v_{23}^q = v_{32}^q = q \cdot 8 \frac{a}{\pi^2} \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha}$$

$$= 179,05 \cdot 8 \frac{19,52}{\pi^2} \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977}$$

$$= \underline{445,0 \text{ kp/m}}$$

und entsprechend, mit $q = 194,09 \text{ kp/m}^2$, erhalten wir

$$v_{34}^q = v_{43}^q = \underline{482,4 \text{ kp/m}}$$

Die Anteile infolge Verdrehung der Kanten 2 und 3 sind

$$v_{23}^\theta = \frac{E h^3}{12a^2} (C_5 \bar{\theta}_2 + C_6 \bar{\theta}_3) = \frac{2 h^2}{\pi a} (C_5 \theta_2 + C_6 \theta_3)$$

$$v_{32}^\theta = \frac{-E h^3}{12a^2} (C_5 \bar{\theta}_3 + C_6 \bar{\theta}_2) = -\frac{2 h^2}{\pi a} (C_5 \theta_3 + C_6 \theta_2)$$

$$v_{34}^\theta = \frac{E h^3}{12a^2} C_5 \bar{\theta}_3 = \frac{2 h^2}{\pi a} C_5 \theta_3$$

$$v_{43}^\theta = \frac{-E h^3}{12a^2} C_6 \bar{\theta}_3 = -\frac{2 h^2}{\pi a} C_6 \theta_3$$

$\theta_4 = \text{Null, infolge Symmetrie}$

wobei

$$C_5 = \pi^2 \left[\frac{\cosh \alpha}{(\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha)} - \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} - 1 \right]$$

$$C_6 = -\pi^2 \left[\frac{\cosh \alpha}{(\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha)} + \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} \right]$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten werden

$$\frac{2 h^2}{\pi a} C_5 = 2 \pi \frac{0,08^2}{19,52}$$

$$\left[\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} - \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} - 1,0 \right]$$

$$= \underline{0,031714}$$

$$\frac{2 h^2}{\pi a} C_6 = -2 \pi \frac{0,08^2}{19,52}$$

$$\left[\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} + \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} \right]$$

$$= \underline{0,031647}$$

Die Auflagerreaktionen ergeben sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned}V_{23} &= V_{23}^q + V_{23}^{\theta_1} \theta_1 + V_{23}^{\theta_3} \theta_3 \\&= 445,0 + 0,031714 \cdot 10797,7 - 0,031647 \cdot 2735,8 \\&= \underline{701,0 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{32} &= V_{32}^q + V_{32}^{\theta_1} \theta_1 + V_{32}^{\theta_3} \theta_3 \\&= 445,0 + 0,031714 \cdot 2735,8 - 0,031647 \cdot 10797,7 \\&= \underline{189,9 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{34} &= V_{34}^q + V_{34}^{\theta_3} \theta_3 \\&= 482,4 - 0,031714 \cdot 2735,8 \\&= \underline{395,6 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{43} &= V_{43}^q + V_{43}^{\theta_3} \theta_3 \\&= 482,4 + 0,031647 \cdot 2735,8 \\&= \underline{569,0 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

Damit ist Vorgang 1 abgeschlossen. Wir haben den Einfluss der zu den Platten senkrechten Belastung berücksichtigt und wenden uns nun der zu den Platten parallelen Belastung zu. Zuvor wollen wir aber noch die obigen Auflagerreaktionen, V , in Scheibenrandkräfte, N , verwandeln, damit wir sie später den Scheibenrandkräften zuzählen können, welche wir bei Berücksichtigung der zu den Platten parallelen Belastung erhalten werden. Wir geben dieser Kräftezerlegung die Bezeichnung "Vorgang 2".

Vorgang 2: Zerlegung der Plattenauflagerkräfte

in Scheibenrandkräfte

$$N_{21} = - \frac{V_{23}}{\sin(\beta_{12} - \beta_{23})} - \frac{V_{21}}{\tan(\beta_{12} - \beta_{23})}$$

$$(\beta_{12} - \beta_{23}) = (\beta_{23} - \beta_{34}) = 2\beta_{34} = 16^\circ$$

$$\sin 16^\circ = 0,27564 \quad \tan 16^\circ = 0,28675$$

$$N_{21} = - \frac{701,0}{0,27564} - \frac{738,1}{0,28675} = - 5117,6 \text{ kp/m}$$

$$N_{23} = \frac{V_{23}}{\tan(\beta_{12} - \beta_{23})} + \frac{V_{21}}{\sinh(\beta_{12} - \beta_{23})}$$

$$= \frac{701,0}{0,28675} + \frac{738,1}{0,27564} = 5122,7 \text{ kp/m}$$

$$N_{32} = - \frac{V_{34}}{\sin(\beta_{23} - \beta_{34})} - \frac{V_{32}}{\tan(\beta_{23} - \beta_{34})}$$

$$= - \frac{395,6}{0,27564} - \frac{189,9}{0,28675} = - 2097,3 \text{ kp/m}$$

$$N_{34} = \frac{V_{34}}{\tan(\beta_{23} - \beta_{34})} + \frac{V_{32}}{\sin(\beta_{23} - \beta_{34})}$$

$$= \frac{395,6}{0,28675} + \frac{189,9}{0,27564} = 2068,7 \text{ kp/m}$$

$$N_{43} = - \frac{V_{43}}{\sin(2\beta_{34})} - \frac{V_{43}}{\tan(2\beta_{34})}$$

$$= - \frac{569,0}{0,27564} - \frac{569,0}{0,28675} = - 4048,8 \text{ kp/m}$$

Anm.: Die Formeln für N ergeben Werte im Sinne der Goldberg-Leve'schen Vorzeichen Definition für Kantenkräfte. Sie sind also Zugkräfte am rechten Scheibenrand, wenn sie positiv sind und am linken Scheibenrand wenn sie negativ sind, wobei links und rechts der Anschauung von Bild 1a entsprechen.

Vorgang 3: Belastung parallel zu den Scheiben

Wir denken uns die Scheiben an den Kanten so gestützt, dass sie sich zwar in der Längsrichtung dehnen, aber nicht in ihrer Ebene durchbiegen können. Die Scheiben sollen zunächst voneinander getrennt sein, so dass an ihren Rändern keine Scherkräfte auftreten können. Unter der Belastung p.h., das heisst unter der Volumenskraft p in der Scheibenebene, mal der Scheibendicke, h, stellt sich der im folgenden beschriebene Spannungszustand ein.

Der Spannungszustand für die Aussenplatte wird mit Hilfe der Grundaufgabe Nr. 9 bestimmt. Die Kantenkraft N_y an Kante 1 ist wegen des freien Randes Null. An Kante 2 beträgt sie für $m = 1$ und $\nu = 0$

$$N_{21}^p = - \frac{4}{\pi} p h \frac{1}{2} \frac{a}{\pi}$$

$$\frac{(2\alpha)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha) - 3 \tanh^2(2\alpha) - 2(2\alpha) \operatorname{sech}(2\alpha) \tanh(2\alpha)}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)}$$

$$= - \frac{4}{\pi} 125,99 \frac{1}{2} \frac{19,52}{\pi}$$

$$\frac{(0,62832)^2 \cdot 0,68988 - 3 \cdot 0,31013 - 2 \cdot 0,62832 \cdot 0,83059 \cdot 0,55689}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689}$$

$$= \underline{623,6 \text{ kp/m}}$$

Die mit $K = \frac{E h \pi}{24 (1 - \nu^2) a}$ multiplizierte Längsdehnung, \bar{u} , beträgt an Kante 2

$$u_{21}^p = - \frac{4}{\pi} p h \frac{1}{48} \frac{a}{\pi}$$

$$\frac{(2\alpha)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha) + 4[\operatorname{sech}(2\alpha) - 1] + 3 \tanh^2(2\alpha) - 2(2\alpha) \tanh(2\alpha) \operatorname{sech}(2\alpha)}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)}$$

$$= - \frac{4}{\pi} 125,99 \frac{19,52}{48 \pi}$$

$$\frac{(0,62832)^2 \cdot 0,68988 + 4(0,83059 - 1,0)}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689}$$

$$+ \frac{3 \cdot 0,31013 - 2 \cdot 0,62832 \cdot 0,83059 \cdot 0,55689}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689}$$

$$= \underline{+ 1,1771 \text{ kp/m}}$$

Der Spannungszustand für die Innenplatten wird mit Hilfe von Grundaufgabe Nr. 7 ermittelt. Die Schnittkraft N_y beträgt für Platte 2 an den beiden Rändern:

$$\begin{aligned} N_{23}^p &= -N_{32}^p = \frac{4}{\pi} ph \frac{1}{2} \frac{a}{\pi} \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \alpha - 3 \tanh \alpha \right] \\ &= \frac{4}{\pi} 79,72 \frac{19,52}{2 \pi} \left[0,31416 \cdot (0,95265)^2 - 3 \cdot 0,30425 \right] \\ &= \underline{-197,9 \text{ kp/m}} \end{aligned}$$

Die Längsverschiebungen an den Kanten 2 und 3 ergeben sich zu

$$\begin{aligned} u_{23}^p &= K \cdot \bar{u}_{23} = -u_{32}^p = -K \cdot \bar{u}_{32} \\ &= \frac{-4}{\pi} ph \frac{a}{48 \pi} \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \alpha - \tanh \alpha \right] \\ &= -\frac{4}{\pi} 79,72 \frac{19,52}{48 \pi} \left[0,31416 \cdot (0,95265)^2 - 0,30425 \right] \\ &= \underline{-0,25147 \text{ kp/m}} \end{aligned}$$

Wir finden die entsprechenden Werte der Schnittkräfte N_y und der Längsverschiebungen u für Platte 3 indem wir für ph den Wert $27,28 \text{ kp/m}^2$ einsetzen:

$$\begin{aligned} N_{34} &= -N_{43} = \underline{-67,7 \text{ kp/m}} \\ u_{34}^p &= -u_{43}^p = \underline{-0,08605 \text{ kp/m}} \end{aligned}$$

Als nächstes bringen wir zwischen den Platten statisch unbestimmte Scherkräfte an, um die Längsverschiebungen an den gemeinsamen Rändern verträglich zu machen. Auch für diesen Lastfall stellen wir uns die Scheiben in ihren Ebenen an den Kanten gestützt vor, so dass sie sich nicht durchbiegen können.

Der Spannungszustand in der Aussenplatte infolge einer unbekanntenen Scherkraft S_2 an Kante 2 ist durch die Grundaufgabe Nr. 8 bekannt. Wir ermitteln wieder die Schnittkraft N_y und die Längsverschiebung u_{21} . Sie sind für $m = 1$ und $\nu = 0$ durch die folgenden Formeln bestimmbar:

$$\begin{aligned} N_{21} &= -\frac{1}{2} S_2 \frac{(2\alpha)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh^2(2\alpha)}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)} \\ &= -\frac{1}{2} S_2 \frac{(0,62832)^2 \cdot 0,68988 + 0,31013}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689} \\ &= -0,29408 S_2 \quad (\text{Dimension wie } S_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{21} &= K \bar{u}_{21} = -\frac{1}{48} S_2 \frac{(2\alpha)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha) + 4 - \tanh^2(2\alpha)}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)} \\ &= -\frac{1}{48} S_2 \frac{(0,62832)^2 \cdot 0,68988 + 4,0 - 0,31013}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689} \\ &= -0,083345 S_2 \quad (\text{Dimension wie } S_2) \end{aligned}$$

Die entsprechenden Grössen für die Innenplatten können mittels der Grundaufgaben Nr. 5 und Nr. 6 ermittelt werden:

$$u_{23}^{S_3} = \frac{1}{96} S_3 (K_9 + K_{10})$$

$$u_{32}^{S_3} = \frac{1}{96} S_3 (K_9 - K_{10})$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } K_9 &= \operatorname{csch} \alpha (\alpha \operatorname{csch} \alpha - 3 \operatorname{cosh} \alpha) \\ &= 3,13092 (0,31416 \cdot 3,13092 - 3 \cdot 1,04977) \\ &= -6,7802 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } K_{10} &= \operatorname{sech} \alpha (\alpha \operatorname{sech} \alpha + 3 \operatorname{sinh} \alpha) \\ &= 0,95265 (0,31416 \cdot 0,95265 + 3 \cdot 0,31939) \\ &= 1,1979 \end{aligned}$$

so dass

$$u_{23}^{S_3} = \frac{1}{96} \quad (-6,7802 + 1,1979)$$

$$= - 0,058149 S_3$$

und

$$u_{32}^{S_3} = \frac{1}{96} \quad (-6,7802 - 1,1979)$$

$$= - 0,083105 S_3$$

und entsprechend werden

$$u_{23}^{S_2} = + 0,083105 S_2$$

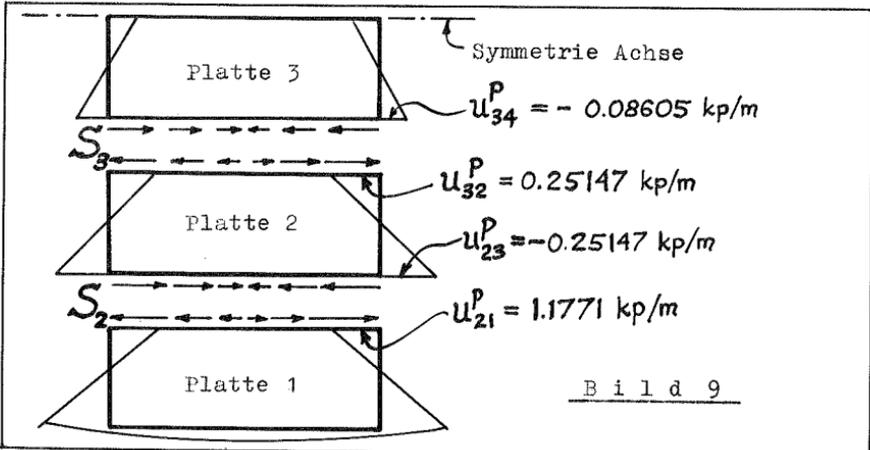
$$u_{32}^{S_2} = + 0,058149 S_2$$

$$u_{34}^{S_3} = + 0,083105 S_3$$

$$u_{43}^{S_3} = + 0,058149 S_3$$

Wir können nun 2 Gleichungen zur Bestimmung von S_2 und S_3 aufstellen, indem wir setzen:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} u_{21}^P + u_{21}^{S_2} S_2 = u_{23}^P + u_{23}^{S_2} S_2 + u_{23}^{S_3} S_3 \\ u_{32}^P + u_{32}^{S_2} S_2 + u_{32}^{S_3} S_3 = u_{34}^P + u_{34}^{S_3} S_3 \end{array} \right.$$



Mit eingesetzten Zahlenwerten lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I] } & 1,1771 \quad - 0,083345 S_2 = \\ & \quad - 0,25147 + 0,083105 S_2 - 0,058149 S_3 \\ \text{II] } & 0,25147 + 0,058149 S_2 - 0,083105 S_3 = \\ & \quad - 0,08605 + 0,083105 S_3 \end{aligned}$$

Die Lösung der 2 Gleichungen liefert:

$$S_2 = 10,59 \text{ kp/m}$$

$$S_3 = 5,74 \text{ kp/m}$$

Damit ist der Spannungszustand für den Lastfall "p.h" vollständig erfasst und wir können nun alle Schnittgrößen an jeder Stelle der Scheiben anschreiben. Wir begnügen uns im Rahmen dieses Beispiels mit der Berechnung der Längskräfte, N_{xm} , an den Kanten. Dies ist um so leichter, als wir mit der Poisson'schen Zahl $\nu = 0$ rechnen, wodurch die Spannung der Längsdehnung direkt proportional wird, so dass wir N_x durch Multiplikation der Werte für "u" mit einem Faktor F erhalten.

$$N_{xm} = \tilde{\sigma}_x \cdot h = E \cdot h \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x}, \text{ wobei } \bar{u}_m = \bar{U}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \text{ und}$$

$$\bar{U}_m \cdot K = \bar{U}_m \frac{E h \pi}{24 a} = U_m; \text{ somit wird}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x} = - \frac{m\pi}{a} \bar{U}_m \sin \frac{m\pi x}{a} = - \frac{24 m}{E h} U_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

so dass für $m = 1$ und $x = a/2$

$$N_{xm} = - 24 U_m$$

Wir erhalten also die Längskraft N_x an der Stelle $x = a/2$, indem wir die Längsverschiebung U (am Scheibenende) mit dem Faktor $F = -24$ multiplizieren.

wir hatten bisher bloss die Formeln für die Längsverschiebungen der Innenkanten benutzt, weil wir diese für die Ermittlung der Scherkräfte brauchten. Um die Kraft N_{xm} an Kante 1 zu ermitteln, müssen wir die Längsverschiebung u_{12} mittels Grundaufgabe Nr. 8 und Nr. 9 ermitteln.

$$u_{12} = u_{12}^p + S_2 u_{12}^s$$

$$u_{12}^p \text{ (von Grundaufgabe Nr. 9) =}$$

$$A_1 \cosh(2\alpha) + A_2 \sinh(2\alpha) + A_3 (2\alpha) \cosh(2\alpha) + A_4 (2\alpha) \sinh(2\alpha)$$

$$A_1 = u_{21}^p = 1,1771 \text{ kp/m}$$

$$A_2 = Q$$

$$A_3 = -Q$$

$$A_4 = Q \frac{3 \tanh^2(2\alpha) + 2 [\operatorname{sech}(2\alpha) - 1]}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)} \quad \text{für } m = 1$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } Q &= -\frac{4}{\pi} p h \frac{a}{48 \pi} && \text{und } \nu = 0 \\ &= -\frac{4}{\pi} 125,99 \frac{19,52}{48 \pi} \\ &= -20,764 \text{ kp/m} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} A_4 &= -20,764 \frac{3 \cdot 0,31013 + 2(0,83059 - 1,0)}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689} \\ &= -20,764 \cdot 0,59734 \end{aligned}$$

und damit wird

$$\begin{aligned} u_{12}^p &= 1,1771 \cdot 1,20396 - 20,764 (1,0 \cdot 0,67048 \\ &- 1,0 \cdot 0,62832 \cdot 1,20396 + 0,59734 \cdot 0,62832 \cdot 0,67048) \\ &= -2,0226 \text{ kp/m} \end{aligned}$$

Entsprechend finden wir u_{12}^S mittels Grundaufgabe Nr. 8:

$$u_{12}^S = A_1 \cosh(2\alpha) + A_2 \sinh(2\alpha) + A_3 (2\alpha) \cosh(2\alpha) + A_4 (2\alpha) \sinh(2\alpha)$$

$$A_1 = u_{21}^S = -0,083345 \quad (\text{Dimensionslos})$$

$$A_2 = 3 R$$

$$A_3 = R$$

wobei

$$R = \frac{1}{48}$$

$$A_4 = R \frac{\tanh^2(2\alpha) - 2}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)} \quad (\text{für } m = 1)$$

$$= \frac{1}{48} \frac{0,31013 - 2,0}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689}$$

$$= -\frac{1}{48} \cdot 1,7063$$

$$\begin{aligned} u_{12}^S &= -0,083345 \cdot 1,20396 + \frac{1}{48} (3 \cdot 0,67048 \\ &\quad + 1,0 \cdot 0,62832 \cdot 1,20396 - 1,70633 \cdot 0,62832 \cdot 0,67048) \\ &= -0,05764 \end{aligned}$$

Die Längsverschiebung an Kante 1 wird somit:

$$u_{12} = -2,0226 - 10,59 \cdot 0,05764$$

$$= -2,633 \text{ kp/m} \quad (\text{wobei } S_2 = 10,59 \text{ kp/m})$$

und die entsprechende Längskraft

$$N_{x1} = -24 U = 24 \cdot 2,633$$

$$= \underline{\underline{63,19 \text{ kp/m}}}$$

Die Ermittlung der Längskräfte an den übrigen Kanten ist wesentlich einfacher, weil die Ausdrücke für u von früheren Rechnungen bekannt sind. Die obige Berechnung von u_{12} zeigt jedoch, dass die Ermittlung irgendwelcher Schnittgrößen oder Verschiebungen an beliebiger Stelle mittels der in den Grundaufgaben angegebenen Integrationskonstanten ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Wir finden die Längskräfte N_{x2} , N_{x3} und N_{x4} mittels der in Bild 9 angegebenen u^P -Werte und der in den Gleichungen I und II angegebenen u^S -Werte durch Multiplikation mit $F = -24$ wie folgt:

$$N_{x2} = -24 (1,1771 - 0,083345 \cdot 10,59) = - 7,07 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = -24 (-0,08605 + 0,083105 \cdot 5,74) = - 9,38 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = -24 (+0,08605 + 0,058149 \cdot 5,74) = - 10,08 \text{ kp/m}$$

Als nächstes müssen wir die Schnittkräfte N_y an den Kanten ermitteln, welche in den starr gelagerten Scheiben durch die Scherkräfte S hervorgerufen werden.

Die Grundaufgaben geben für diese Anschnittswerte fertige Formeln an. Die Bezeichnung entspricht den Festsetzungen von Bild 1.

Aussenplatte (Platte 1): Mit Grundaufgabe Nr. 8 wird

$$\begin{aligned} N_{21}^S &= -\frac{1}{2} \frac{(2\alpha)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh^2(2\alpha)}{(2\alpha) \operatorname{sech}^2(2\alpha) + \tanh(2\alpha)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(0,62832)^2 \cdot 0,68988 + 0,31013}{0,62832 \cdot 0,68988 + 0,55689} \\ &= - 0,29408 \end{aligned}$$

Mit der zuvor ermittelten Kraft $N_{21}^P = 623,7$ kp/m und der Scherkraft $S_2 = 10,59$ kp/m wird also die von Platte 1 infolge der Belastung $p \cdot h$ auf Kante 1 ausgeübte Kraft

$$\begin{aligned} N_{21} &= N_{21}^P + N_{21}^S S_2 \\ &= 623,6 - 0,29408 \cdot 10,59 \\ &= 620,5 \text{ kp/m} \end{aligned}$$

Ähnlich ermitteln wir die Schnittkräfte von den übrigen Platten, wobei wir uns der Formeln von Grundaufgaben Nr. 5 und Nr. 6 bedienen:

$$N_{23}^{S_4} = 1/4 (K_{11} - K_{12})$$

$$N_{23}^{S_3} = 1/4 (K_{11} + K_{12})$$

wobei

$$K_{11} = \alpha \cdot \operatorname{sech}^2 \alpha + \tanh \alpha$$

$$K_{12} = \alpha \cdot \operatorname{csch}^2 \alpha - \operatorname{coth} \alpha$$

$$K_{11} = 0,31416 \cdot (0,95265)^2 + 0,30425 = 0,58936$$

$$K_{12} = 0,31416 \cdot (3,13092)^2 - 3,28680 = -0,20720$$

$$K_{11} - K_{12} = 0,79656$$

$$K_{11} + K_{12} = 0,38216$$

$$N_{23} = N_{23}^p + N_{23}^{S_2} S_2 + N_{23}^{S_3} S_3$$

$$= -197,9 + 1/4 \cdot 0,79656 \cdot 10,59 + 1/4 \cdot 0,38216 \cdot 5,74$$

$$= \underline{-195,3 \text{ kp/m}}$$

$$N_{32}^{S_2} = 1/4 (-K_{11} - K_{12}) = -1/4 \cdot 0,38216$$

$$N_{32}^{S_3} = 1/4 (-K_{11} + K_{12}) = -1/4 \cdot 0,79656$$

$$N_{32} = N_{32}^p + N_{32}^{S_2} S_2 + N_{32}^{S_3} S_3$$

$$= +197,9 - 1/4 \cdot 0,38216 \cdot 10,59 - 1/4 \cdot 0,79656 \cdot 5,74$$

$$= \underline{+195,7 \text{ kp/m}}$$

Entsprechend finden wir die Randschnittkräfte für Platte 3:

$$N_{34} = N_{34}^p + N_{34}^{S_3} S_3$$

$$= -67,7 + 1/4 \cdot 0,79656 \cdot 5,74$$

$$= \underline{-66,6 \text{ kp/m}}$$

$$N_{43} = N_{43}^p + N_{43}^{S_2} S_2$$

$$= +67,7 - 1/4 \cdot 0,38216 \cdot 5,74$$

$$= \underline{+67,2 \text{ kp/m}}$$

Bild 10 angezeigt. Die Kräfte N^{II} jedoch sind imaginäre Festhaltekräfte, um die Belastung p.h im Gleichgewicht zu halten. Um die Kanten von Kräften freizuhalten, müssen wir also diese Festhaltekräfte mit umgekehrtem Vorzeichen auf die Scheiben als Randlasten einwirken lassen, d.h. die N^{II} müssen von den N^I abgezogen werden, um die endgültigen Kantenkräfte N zu erhalten.

Kraft	N^I	N^{II}	$N = N^I - N^{II}$
N_{21}	-5117,6	620,5	-5738,1
N_{23}	+5122,7	+195,3*	+4927,4
N_{32}	-2097,3	195,7	-2293,0
N_{34}	+2068,7	+66,6*	+2002,1
N_{43}	-4048,8	67,2	-4116,0

Tafel 4

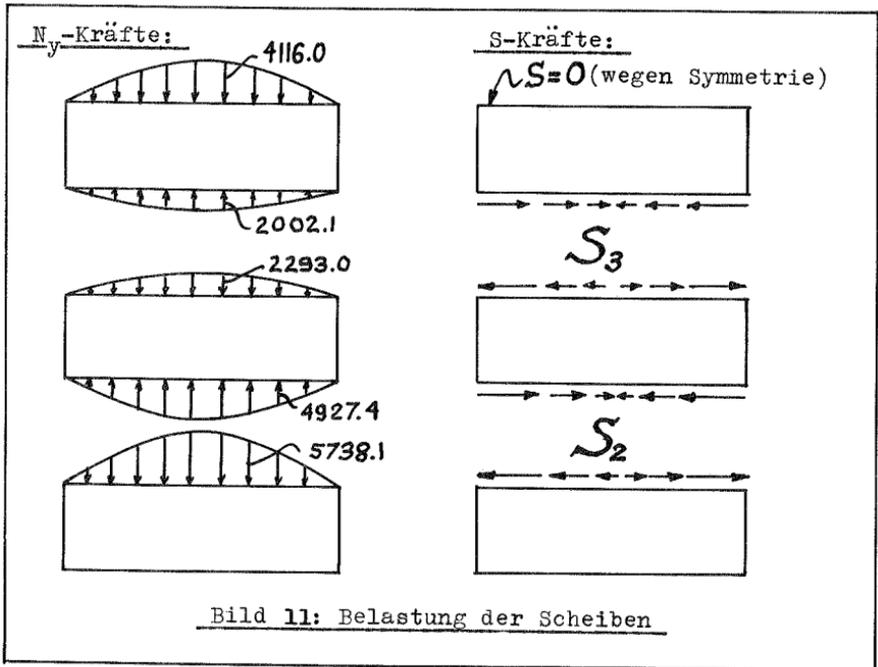
* Alle Vorzeichen entsprechen der Goldberg-Leve'schen Definition für Kantenkräfte was für Kräfte an linken Scheibenrändern einen Vorzeichenwechsel gegenüber den Werten der Grundaufgaben bedeutet.

Die obigen Kantenkräfte N werden nun der Längstragwirkung der Scheiben zugewiesen. Die von ihnen in den folgenden Rechnungen hervorgerufenen Schnittgrößen und Verformungen werden darum für das Endergebnis den bisherigen Teilergebnissen zugeschlagen werden. Wir fassen die bisher durchgeführten Rechnungen (Vorgänge 1 bis 4) unter dem Namen Basis I zusammen. Wir begnügten uns mit der Erfassung der Momente M_y und der Längsschnittkräfte N_x an den Kanten, welche im folgenden nochmals zusammengestellt sind. Selbstverständlich hätten auch alle anderen interessierenden Schnittgrößen für die verschiedenen Belastungsfälle ermittelt und in der Tafel 5 festgehalten werden können.

Tafel 5: Teilergebnisse für Basis I

Längsspannungen N_x	Biegemomente M_y	Übrigbleibende Kantenkräfte N_y
$N_{x1} = 63,2 \text{ kp/m}$	$M_2 = -1078,8 \text{ mkp/m}$	$N_{21} = -5738,1 \text{ kp/m}$
$N_{x2} = -7,1 \text{ kp/m}$	$M_3 = -81,6 \text{ mkp/m}$	$N_{23} = +4927,4 \text{ kp/m}$
$N_{x3} = -9,4 \text{ kp/m}$	$M_4 = -420,0 \text{ mkp/m}$	$N_{32} = -2293,0 \text{ kp/m}$
$N_{x4} = -10,1 \text{ kp/m}$		$N_{34} = 2002,1 \text{ kp/m}$
		$N_{43} = -4116,0 \text{ kp/m}$

Vorgang 5: Die Tragfähigkeit der Scheiben in der
Längsrichtung



Wir ermitteln zunächst die Verformung u und v der Scheiben infolge der bekannten Kantenkräfte N und zwar unter der Annahme, dass die Kanten der Scheiben vollkommen frei sind. Wir bringen später unbekannte Scherkräfte S_2 und S_3 an, um die Längsverschiebungen an den Innenkanten verträglich zu machen. Die u und v infolge N erhalten wir mittels der Grundaufgaben Nr. 1 und Nr. 2.

Platte 1: $u_{12} = 1/48 N_{21} (K_1 - K_2)$

$$u_{21} = 1/48 N_{21} (K_1 + K_2)$$

$$K_1 = \frac{\alpha \operatorname{csch} \alpha - \cosh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha}$$

$$= \frac{0,31416 \cdot 3,13092 - 1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977}$$

$$= -0,032537$$

$$K_2 = \frac{\alpha \operatorname{sech} \alpha + \sinh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} \quad (= \frac{1}{K_1} \text{ für } \nu = 0)$$

$$= \frac{0,31416 \cdot 0,95265 + 0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939}$$

$$= -30,759$$

$$u_{12} = 1/48 \cdot (-5738,1) (-0,032537 + 30,759)$$

$$= \underline{-3673,0 \text{ kp/m}}$$

$$u_{21} = 1/48 \cdot (-5738,1) (-0,032537 - 30,759)$$

$$= \underline{+3680,7 \text{ kp/m}}$$

$$v_{12} = 1/48 N_{21} (K_3 - K_4)$$

$$v_{21} = 1/48 N_{21} (-K_3 - K_4)$$

$$K_3 = \frac{2 \sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha}$$

$$= \frac{2 \cdot 0,31939}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} = 0,31416$$

$$\begin{aligned}K_4 &= \frac{-2 \cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} \\&= \frac{-2,0 \cdot 1,04977}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} \\&= 104,382\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{12} &= 1/48 \cdot (-5738,1) (0,31416 - 104,382) \\&= \underline{12440,9 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{21} &= 1/48 (-5738,1) (-0,31416 - 104,382) \\&= \underline{12515,4 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

Platte 2: Man kann die für Platte 1 ermittelten K-Werte als Einflusszahlen betrachten und der Anschauung entsprechend für Platten 2 und 3 benutzen.

$$\begin{aligned}u_{23} &= 1/48 \left[\begin{array}{l} (-2293,0) (-0,032548 + 30,757) + \\ (-4927,4) (-0,032548 - 30,757) \end{array} \right] \\&= \underline{+ 1692,8 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{32} &= 1/48 \left[\begin{array}{l} (-2293,0) (-0,032548 - 30,757) + \\ (-4927,4) (-0,032548 + 30,757) \end{array} \right] \\&= \underline{- 1683,2 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{23} &= 1/48 \left[\begin{array}{l} (-2293,0) (0,31416 - 104,382) \\ (-4927,4) (0,31416 + 104,382) \end{array} \right] \\&= \underline{- 5776,1 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{32} &= 1/48 \left[\begin{array}{l} (-2293,0) (-0,31416 - 104,382) \\ (-4927,4) (-0,31416 + 104,382) \end{array} \right] \\&= \underline{- 5681,6 \text{ kp/m}}\end{aligned}$$

Platte 3:

$$u_{34} = - 1351,1 \text{ kp/m}$$

$$u_{43} = + 1359,3 \text{ kp/m}$$

$$v_{34} = 4559,1 \text{ kp/m}$$

$$v_{43} = 4639,2 \text{ kp/m}$$

Wir bestimmen als nächstes die Verformungen infolge der zunächst unbekanntesten Scherkräfte S_2 und S_3 und benutzen dazu die Formeln der Grundaufgaben 3 und 4.

Platte 1:

$$u_{12} = 1/48 S_2 (-K_5 - K_6)$$

$$u_{21} = 1/48 S_2 (-K_5 + K_6)$$

$$\begin{aligned} K_5 &= \frac{2 \cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha + \sinh \alpha} \\ &= \frac{2 \cdot 1,04977}{0,31416 \cdot 0,95265 + 0,31939} \\ &= 3,3934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_6 &= \frac{2 \sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha - \cosh \alpha} \\ &= \frac{2 \cdot 0,31939}{0,31416 \cdot 3,13092 - 1,0497} \\ &= - 9,6632 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{12} &= 1/48 (-3,3934 + 9,6632) S_2 \\ &= + 0,13062 S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{21} &= 1/48 (-3,3934 - 9,6632) S_2 \\ &= - 0,27201 S_2 \end{aligned}$$

Platten 2 und 3:

$$u_{32}^{S_3} = u_{21}^{S_2} = 1/48 (-K_5 + K_6) \\ = - 0,27201$$

$$u_{23}^{S_3} = u_{12}^{S_2} = 1/48 (-K_5 - K_6) \\ = + 0,13062$$

$$u_{34}^{S_3} = u_{23}^{S_2} = - u_{21}^{S_2} = 1/48 (K_5 - K_6) \\ = 0,27201$$

$$u_{43}^{S_3} = u_{32}^{S_2} = - u_{12}^{S_2} = 1/48 (K_5 + K_6) \\ = - 0,13062$$

Wir schreiben wieder 2 Gleichungen, um die Längsdehnungen, u , an den gemeinsamen Kanten verträglich zu machen:

$$I \quad] \quad u_{34} + u_{34}^{S_3} S_3 = u_{32} + u_{32}^{S_3} S_3 + u_{32}^{S_2} S_2$$

$$II \quad] \quad u_{23} + u_{23}^{S_2} S_2 + u_{23}^{S_3} S_3 = u_{21} + u_{21}^{S_2} S_2$$

$$I \quad] \quad -1351,1 + 0,27201 S_3 = -1683,2 - 0,27201 S_3 - 0,13062 S_2$$

$$II \quad] \quad +1692,8 + 0,27201 S_2 + 0,13062 S_3 = +3680,7 - 0,27201 S_2$$

Die Lösung der Gleichungen lautet:

$$S_2 = 4033,1 \text{ kp/m}$$

$$S_3 = - 1578,8 \text{ kp/m}$$

Damit können wir sämtliche Schnittgrößen und Verschiebungen für den Vorgang 5 bestimmen. Wir begnügen uns mit der Ermittlung der Längsverschiebungen, u , an den Kanten (weil wir daraus leicht durch Multiplikation mit dem Faktor $F = -24$ die Längskräfte N_x ermitteln können) und mit der Ermittlung der Verschiebungen, v , in der Ebene der Scheiben, weil wir diese zur Berechnung der Querverformung in Vorgang 6 benötigen.

$$u_{12} = -3673,0 + 0,13062 \cdot 4033,1 = -3146,2 \text{ kp/m}$$

$$u_{21} = 3680,7 - 0,27201 \cdot 4033,1 = 2583,7 \text{ kp/m}$$

$$u_{34} = -1351,1 - 0,27201 \cdot 1578,8 = -1780,6 \text{ kp/m}$$

$$u_{43} = +1359,3 + 0,13062 \cdot 1578,8 = 1565,5 \text{ kp/m}$$

$$N_{x1} = -3146,2 \cdot (-24) = 75509 \text{ kp/m}$$

$$N_{x2} = 2583,7 \cdot (-24) = -62009 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = -1780,6 \cdot (-24) = 42735 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = 1565,5 \cdot (-24) = -37572 \text{ kp/m}$$

Die Ermittlung der v infolge S_2 und S_3 erfolgt mittels der Formeln in Grundaufgaben 3 und 4:

Platte 1:

$$v_{21} = 1/48 S_2 (K_7 + K_8)$$

$$K_7 = \frac{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha + \sinh \alpha} = K_1 \quad (= 1/K_8 \text{ für } \nu = 0)$$

$$= \frac{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 + 0,31939}$$

$$= -0,032537$$

$$K_8 = \frac{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha - \cosh \alpha} = K_2 \quad (= 1/K_7 \text{ für } \nu = 0)$$

$$= \frac{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 - 1,04977}$$

$$= -30,759$$

$$v_{21} = 1/48 (-0,0325 - 30,7595) S_2$$

$$= -0,64150 \cdot 4033,1$$

$$= -2587,3 \text{ kp/m}$$

Platte 2:

$$\begin{aligned}v_{23} &= 1/48 \left[S_2 (K_7 + K_8) + S_3 (-K_7 + K_8) \right] \\ &= -0,64150 \cdot 4033,1 + 0,64014 \cdot 1578,8 \\ &= -1576,6 \text{ kp/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{32} &= 1/48 \left[S_2 (-K_7 + K_8) + S_3 (K_7 + K_8) \right] \\ &= -0,64014 \cdot 4033,1 + 0,64150 \cdot 1578,8 \\ &= -1568,9 \text{ kp/m}\end{aligned}$$

Platte 3:

$$v_{34} = -0,64150 \cdot -1578,8 = 1012,8 \text{ kp/m}$$

$$v_{43} = -0,64014 \cdot -1578,8 = 1010,7 \text{ kp/m}$$

Wir addieren die v infolge der Normalkräfte N zu denen infolge der Scherkräfte und erhalten die endgültigen Verschiebungen in den Scheibenebenen:

$$v_{21} = 12515,4 - 2587,3 = 9928,1 \text{ kp/m}$$

$$v_{23} = -5776,1 - 1576,6 = -7352,7 \text{ kp/m}$$

$$v_{32} = -5681,6 - 1568,9 = -7250,5 \text{ kp/m}$$

$$v_{34} = 4559,1 + 1012,8 = 5571,9 \text{ kp/m}$$

$$v_{43} = 4639,2 + 1010,7 = 5649,9 \text{ kp/m}$$

Vorgang 6: Die Ermittlung der Querverschiebungen w
infolge der Verschiebungen v nach Williot.

$$\begin{aligned}w_{21} &= \frac{-v_{23}}{\sin(\beta_{12} - \beta_{23})} + \frac{v_{21}}{\tan(\beta_{12} - \beta_{23})} \\&= \frac{7352,7}{0,27564} + \frac{9928,1}{0,28675} \\&= 61297,7 \text{ kp/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{23} &= \frac{-v_{23}}{\tan(\beta_{12} - \beta_{23})} + \frac{v_{21}}{\sin(\beta_{12} - \beta_{23})} \\&= \frac{7352,7}{0,28675} + \frac{9928,1}{0,27564} \\&= 61659,7 \text{ kp/m}\end{aligned}$$

entsprechend erhalten wir für die anderen Kanten:

$$\begin{aligned}w_{32} &= \frac{-5571,9}{0,27564} - \frac{7250,5}{0,28675} \\&= \underline{\underline{-45499,7 \text{ kp/m}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{34} &= \frac{-5571,9}{0,28675} - \frac{7250,5}{0,27564} \\&= \underline{\underline{-45735,6 \text{ kp/m}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{43} &= \frac{5649,9}{0,27564} + \frac{5649,9}{0,28675} \\&= \underline{\underline{40200,3 \text{ kp/m}}}\end{aligned}$$

Vorgang 7: Ermittlung der Momente M_y und der
Auflagerreaktion V infolge der
Verschiebungen w .

Platte 1:

$$w_{21} = 61297,7 \text{ kp/m}$$

Wir erhalten M_{21} und V_{21} mittels der Formeln von Grundaufgabe 12 für $m = 1$ und $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 2 h^2 \frac{\pi}{a} w_{21} \left(2 \frac{3 \cosh^2(2\alpha) - 1}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1} - 1 \right) \\ &= 2 \cdot 0,08^2 \frac{\pi}{19,52} \cdot 61297,7 \\ &\quad \left(2 \frac{3 \cdot 1,44952 - 1,0}{3 \cdot 1,44952 + (0,62832)^2 + 1,0} - 1,0 \right) \\ &= 20,97 \text{ kp/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{21} &= -4 h^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 w_{21} \frac{3 \sinh(2\alpha) \cosh(2\alpha) - (2\alpha)}{3 \cosh^2(2\alpha) + (2\alpha)^2 + 1} \\ &= -4 \cdot 0,08^2 \left(\frac{\pi}{19,52} \right)^2 61297,7 \\ &\quad \frac{3 \cdot 0,67048 \cdot 1,20392 - 0,62832}{3 \cdot 1,44952 + (0,62832)^2 + 1,0} \\ &= -12,69 \text{ kp/m} \end{aligned}$$

Für die Innenplatten erhalten wir die M - und V Werte mittels der Goldberg-Leve'schen Formeln (siehe Anhang):

Platte 2:

$$\begin{aligned} M_{23} &= 2 h^2 \frac{1}{\pi} \left(-C_3 w_{23} + C_4 w_{32} \right) \\ M_{32} &= 2 h^2 \frac{1}{\pi} \left(+C_3 w_{32} - C_4 w_{23} \right) \end{aligned}$$

$$2 h^2 \frac{1}{\pi} C_3 = 2 h^2 \frac{\pi}{a}$$

$$\left[\frac{\cosh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha} - \frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} - 1,0 \right]$$

$$= 2 \cdot 0,08^2 \frac{\pi}{19,52}$$

$$\left[\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} - \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} - 1,0 \right]$$

$$= \underline{0,031714 \text{ (m)}}$$

$$2 h^2 \frac{1}{\pi} C_4 = -2 h^2 \frac{\pi}{a}$$

$$\left[\frac{\cosh \alpha}{(\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha)} + \frac{\sinh \alpha}{(\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha)} \right]$$

$$= -2 \cdot 0,08^2 \frac{\pi}{19,52}$$

$$\left[\frac{1,04977}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} + \frac{0,31939}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} \right]$$

$$= \underline{0,031647 \text{ (m)}}$$

$$M_{23} = -0,031714 \cdot 61659,7 - 0,031647 \cdot 45499,7$$

$$= \underline{-3395,4 \text{ mkp/m}}$$

$$M_{32} = -0,031714 \cdot 45499,7 - 0,031647 \cdot 61659,7$$

$$= \underline{-3394,3 \text{ mkp/m}}$$

$$V_{23} = 2 h^2 \frac{1}{\pi a} (-C_7 w_{23} + C_8 w_{32})$$

$$V_{32} = 2 h^2 \frac{1}{\pi a} (-C_7 w_{32} + C_8 w_{23})$$

$$2 h^2 \frac{1}{\pi a} C_7 = 2 \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2$$

$$\left[\frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha} - \frac{\cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} \right]$$

$$= 2 \left(\frac{\pi \cdot 0,08}{19,52} \right)^2$$

$$\left[\frac{0,31939}{0,31416 \cdot 3,13092 + 1,04977} - \frac{1,04977}{0,31416 \cdot 0,95265 - 0,31939} \right]$$

$$= \underline{0,017355}$$

$$2 h^2 \frac{1}{\pi a} C_8 = -2 \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2$$

$$\left[\frac{\sinh \alpha}{\alpha \operatorname{csch} \alpha + \cosh \alpha} + \frac{\cosh \alpha}{\alpha \operatorname{sech} \alpha - \sinh \alpha} \right]$$

$$= \underline{0,017251}$$

$$V_{23} = -0,017355 \cdot 61659,7 - 0,017251 \cdot 45499,7$$

$$= \underline{-1855,1 \text{ kp/m}}$$

$$V_{32} = +0,017355 \cdot 45499,7 + 0,017251 \cdot 61659,7$$

$$= \underline{+1853,4 \text{ kp/m}}$$

Platte 3: (unter Benutzung der Formeln wie für Platte 2)

$$M_{34} = 0,031714 \cdot 45735,6 + 0,031647 \cdot 40200,3$$

$$= \underline{2722,6 \text{ mkp/m}}$$

$$M_{43} = 0,031714 \cdot 40200,3 + 0,031647 \cdot 45735,6$$

$$= \underline{2722,3 \text{ mkp/m}}$$

$$V_{34} = 0,017355 \cdot 45735,6 + 0,017251 \cdot 40200,3$$

$$= \underline{1487,2 \text{ mkp/m}}$$

$$V_{43} = -0,017355 \cdot 40200,3 - 0,017251 \cdot 45735,6$$

$$= \underline{-1486,6 \text{ mkp/m}}$$

Dies sind die Randwerte der Platten für den Belastungsfall "Durchbiegung w". Dabei sind die Platten an allen Kanten (mit Ausnahme der freien Kante 1) an einer Verdrehung verhindert. Der nächste Schritt ist der gleiche wie bereits in Vorgang 1 beschrieben: Wir ermitteln die unbekanntenen Winkelverdrehungen θ_2 und θ_3 für Kanten 2 und 3 aus der Bedingung, dass sich die Kantenmomente benachbarter Platten das Gleichgewicht halten müssen. Mit den ermittelten Werten für θ erhalten wir dann die endgültigen Schnittkräfte und Verformungen infolge des Belastungsfalls "Durchbiegung w". Wir notieren diese dann als Teilergebnis zur späteren Addition für das Endergebnis. Die Auflagerreaktion V benutzen wir zur Weiterrechnung in Vorgang 8.

$$\text{I] } M_{21}^W + M_{21}^{\theta_2} \theta_2 = M_{23}^W + M_{23}^{\theta_2} \theta_2 + M_{23}^{\theta_3} \theta_3$$

$$\text{II] } M_{32}^W + M_{32}^{\theta_2} \theta_2 + M_{32}^{\theta_3} \theta_3 = M_{34}^W + M_{34}^{\theta_3} \theta_3$$

$$\text{I] } 20,97 + 0,013595 \theta_2 = - (-3395,4 + 0,083564 \theta_2 + 0,040124 \theta_3)$$

$$\text{II] } -3394,3 + 0,040124 \theta_2 + 0,083564 \theta_3 = - (2722,6 + 0,083564 \theta_3)$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$\underline{\theta_2 = 36713 \text{ kp/m}^2}$$

$$\underline{\theta_3 = -4795 \text{ kp/m}^2}$$

Damit ergeben sich die endgültigen Kantenmomente zu:

$$M_{21} = 21,0 + 0,013595 \cdot 36713 = \underline{520,1 \text{ mkp/m}}$$

$$M_{32} = -3394,3 + 0,040124 \cdot 36713 - 0,083564 \cdot 4795 = \underline{-2322,0 \text{ mkp/m}}$$

$$M_{43} = +2722,3 - 0,040124 \cdot 4795 = \underline{2529,9 \text{ mkp/m}}$$

Die endgültigen Auflagerreaktionen werden mit den in Vor-
gang 1 ermittelten Zahlenwerten:

$$V_{21} = -12,7 - 0,00034219 \cdot 36713 = \underline{-25,3 \text{ kp/m}}$$

$$V_{23} = -1855,1 + 0,031714 \cdot 36713 - 0,031647 \cdot 4795 = \underline{-842,6 \text{ kp/m}}$$

$$V_{32} = 1853,4 + 0,031714 \cdot 4795 - 0,031647 \cdot 36713 = \underline{843,7 \text{ kp/m}}$$

$$V_{34} = 1487,2 - 0,031714 \cdot 4795 = \underline{1335,1 \text{ kp/m}}$$

$$V_{43} = -1486,6 + 0,031647 \cdot 4795 = \underline{-1334,9 \text{ kp/m}}$$

Alle folgenden Rechenvorgänge sind Wiederholungen der oben beschriebenen. Wir verhandeln als nächstes die V-Kräfte in N-Kräfte (parallel zu den Scheiben). Das war bereits in Vorgang 2 ausführlich gezeigt worden, so dass wir uns hier mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse begnügen:

Vorgang 8: (= Vorgang 2)

	N ^{Basis} ₂₁	N ^{Basis} ₂₃	N ^{Basis} ₃₂	N ^{Basis} ₃₄	N ^{Basis} ₄₃
kp/m	3145,0	- 3030,1	- 7786,2	7717,1	9498,2

Wir fassen die Vorgänge 5 bis 8 unter dem Namen Basis II zusammen. Bis zu diesem Punkt müssen wir immer rechnen. Es kann sich ergeben, dass die obigen N^{Basis}-Kräfte sehr klein sind oder sich gegenseitig aufheben. In solchen Fällen können wir die Berechnung hier abbrechen.

1. Iteration

Vorgang 9 (wie Vorgang 5):

Im vorliegenden Beispiel sind die N^{Basis}-Kräfte nicht vernachlässigbar und werden darum dem System, wie in Vorgang 5 gezeigt, zugewiesen. Wir notieren in Vorgang 9 die Längsschnittkräfte N_x als Teilergebnis und die Querverschiebungen v zur Weiterrechnung in Vorgang 10:

$$N_{x1} = - 84367 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = - 197580 \text{ kp/m}$$

$$N_{x2} = + 123490 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = + 232550 \text{ kp/m}$$

$$v_{12} = - 14180 \text{ kp/m}$$

$$v_{21} = - 14236 \text{ kp/m}$$

$$v_{23} = 22704 \text{ kp/m}$$

$$v_{32} = 22796 \text{ kp/m}$$

$$v_{34} = - 30826 \text{ kp/m}$$

$$v_{43} = - 30863 \text{ kp/m}$$

Vorgang 10 (wie Vorgang 6):

$$w_{21} = - 132020 \text{ kp/m}$$

$$w_{32} = 191340 \text{ kp/m}$$

$$w_{23} = 130830 \text{ kp/m}$$

$$w_{43} = - 219600 \text{ kp/m}$$

$$w_{34} = 190210 \text{ kp/m}$$

Vorgang 11 (wie Vorgang 7):

$$M_{21} = -M_{23} = M_2 = - 1728,1 \text{ mkp/m}$$

$$M_{32} = -M_{34} = M_3 = 9114,3 \text{ mkp/m}$$

$$M_{43} = M_4 = -11127,0 \text{ mkp/m}$$

$$\theta_2 = - 123660 \text{ kp/m}^2, \quad \theta_3 = 46289 \text{ kp/m}^2$$

$$V_{21} = 69,7 \text{ kp/m}$$

$$V_{23} = 3114,2 \text{ kp/m}$$

$$V_{32} = - 3131,9 \text{ kp/m}$$

$$V_{34} = - 5621,4 \text{ kp/m}$$

$$V_{43} = 5627,6 \text{ kp/m}$$

Vorgang 12 (wie Vorgang 8):

$$N_{21}^I = - 11541 \text{ kp/m (Scheibe 1)}$$

$$N_{23}^I = 11113 \text{ kp/m}$$

$$N_{32}^I = 31316 \text{ kp/m (Scheibe 2)}$$

$$N_{34}^I = - 30966 \text{ kp/m}$$

$$N_{43}^I = -40042 \text{ kp/m (Scheibe 3)}$$

Ende der 1. Iteration

Drossel 1

Wir ziehen die N^I -Kräfte von Vorgang 12 (1. Iteration) von den N^{Basis} -Kräften von Vorgang 8 (Basis II) ab und schaffen damit ein System im Gleichgewicht, dessen Schnittgrößen und Verformungen uns bekannt sind.

$$(N_{21})^I = 3145 + 11541 = 14686 \text{ kp/m}$$

$$(N_{23})^I = -3030 - 11113 = -14143 \text{ kp/m}$$

$$(N_{32})^I = -7786 - 31316 = -39102 \text{ kp/m}$$

$$(N_{34})^I = 7717 + 30966 = 38683 \text{ kp/m}$$

$$(N_{43})^I = 9498 + 40042 = 49540 \text{ kp/m}$$

Wir multiplizieren diese $(N)^I$ -Kräfte mit dem Faktor \mathcal{S}_1 , der es zur Aufgabe hat, eine der Kräfte auszulöschen, wenn man die obigen Kräfte von den in der 1. Iteration gewonnenen abzieht.

Wir wählen dazu die Kraft N_{21} .

$$\mathcal{S}_1 = \frac{-11541}{14686} = -0,78585$$

Die für die nächste Iteration verbleibenden \bar{N}^I -Kräfte sind dann:

$$\bar{N}_{21}^I = -11541 + 0,78585 \cdot (14686) = 0$$

$$\bar{N}_{23}^I = 11113 + 0,78585 \cdot (-14143) = -1,4 \text{ kp/m}$$

$$\bar{N}_{32}^I = 31316 + 0,78585 \cdot (-39102) = +587,6 \text{ kp/m}$$

$$\bar{N}_{34}^I = -30966 + 0,78585 \cdot (38683) = -566,9 \text{ kp/m}$$

$$\bar{N}_{43}^I = -40042 + 0,78585 \cdot (49540) = -1110,8 \text{ kp/m}$$

Wir müssen nun noch die in der ersten Iteration gewonnenen Teilergebnisse für Verformungen und Schnittgrößen mit \mathcal{S}_1 multiplizieren und zu den bisher gewonnenen Teilergebnissen

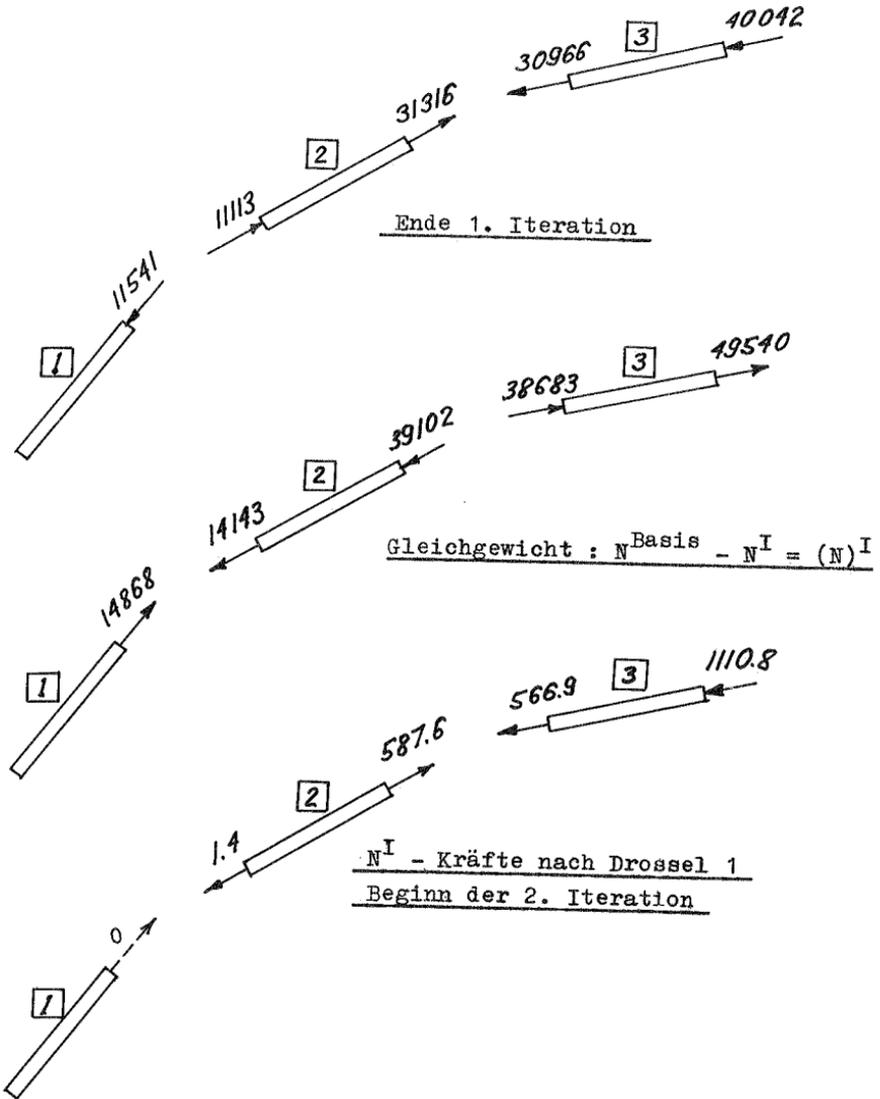


Bild 12 Reduktion der Kantenkräfte
(Zahlen in kp/m)

addieren, damit durch das Abziehen der $g_1(N)^I$ -Kräfte keine Werte verloren gehen. Die entsprechenden N_x -Kräfte und M_y -Momente sind:

$$N_{x1} = -0,78585 \cdot (-84367) = + 66300 \text{ kp/m}$$

$$N_{x2} = -0,78585 \cdot (+123490) = - 97045 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = -0,78585 \cdot (-197580) = +155268 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = -0,78585 \cdot (+232550) = -182749 \text{ kp/m}$$

Momente:

$$M_2 = -0,78585 \cdot (-1728,1) = 1358,0 \text{ mkp/m}$$

$$M_3 = -0,78585 \cdot (9114,3) = -7162,4 \text{ mkp/m}$$

$$M_4 = -0,78585 \cdot (-11127,0) = 8744,1 \text{ mkp/m}$$

2. Iteration

Vorgang 13 (wie Vorgang 5):

$$N_{x1} = + 3321 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = + 15751 \text{ kp/m}$$

$$N_{x2} = - 6916 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = - 20989 \text{ kp/m}$$

$$v_{12} = 678,2 \text{ kp/m}$$

$$v_{21} = 679,6 \text{ kp/m}$$

$$v_{23} = -1576,6 \text{ kp/m}$$

$$v_{32} = - 1587,8 \text{ kp/m}$$

$$v_{34} = 2657,9 \text{ kp/m}$$

$$v_{43} = 2667,1 \text{ kp/m}$$

Vorgang 14 (wie Vorgang 6):

$$w_{21} = 8089,7 \text{ kp/m}$$

$$w_{23} = 7963,6 \text{ kp/m}$$

$$w_{34} = -15030,0 \text{ kp/m}$$

$$w_{32} = - 15180,0 \text{ kp/m}$$

$$w_{43} = 18978,0 \text{ kp/m}$$

Vorgang 15 (wie Vorgang 7):

$$M_2 = 129,1 \text{ mkp/m}, M_3 = -719,1 \text{ mkp/m}, M_4 = 905,5 \text{ mkp/m}$$

$$\theta_2 = 9284,7 \text{ kp/m}^2, \theta_3 = -4286,4 \text{ kp/m}^2$$

$$V_{21} = - 4,9 \text{ kp/m}$$

$$V_{23} = - 241,3 \text{ kp/m}$$

$$V_{34} = 452,3 \text{ kp/m}$$

$$V_{32} = 242,9 \text{ kp/m}$$

$$V_{43} = - 453,0 \text{ kp/m}$$

Vorgang 16 (wie Vorgang 8):

$$N_{21}^{\text{II}} = 892,3 \text{ kp/m}$$

$$N_{23}^{\text{II}} = - 859,0 \text{ kp/m}$$

$$N_{34}^{\text{II}} = 2458,6 \text{ kp/m}$$

$$N_{32}^{\text{II}} = - 2488,1 \text{ kp/m}$$

$$N_{43}^{\text{II}} = 3223,1 \text{ kp/m}$$

Ende der 2. Iteration

Drossel 2

Wir ziehen die N^{II} -Kräfte von Vorgang 16 (2. Iteration) von den N^{I} -Kräften von Drossel 1 ab und schaffen damit wieder ein System im Gleichgewicht, dessen Schnittgrößen und Verformungen uns bekannt sind:

$$(N_{21})^{\text{II}} = 0 - 892,3 = - 892,3 \text{ kp/m}$$

$$(N_{23})^{\text{II}} = -1,4 + 859,0 = 857,6 \text{ kp/m}$$

$$(N_{32})^{\text{II}} = 587,6 + 2488,1 = 3075,7 \text{ kp/m}$$

$$(N_{34})^{\text{II}} = -566,9 - 2458,6 = -3025,5 \text{ kp/m}$$

$$(N_{43})^{\text{II}} = -1110,8 - 3223,1 = -4333,9 \text{ kp/m}$$

Wir multiplizieren diese $(N)^{\text{II}}$ -Kräfte mit g_2^{II} und die im Gleichgewicht befindlichen $(N)^{\text{I}}$ -Kräfte von Drossel 1 mit g_2^{I} , um die Kräfte N_{21}^{II} und N_{32}^{II} von der zweiten Iteration verschwinden zu lassen. Das führt zu den folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{I] } \quad \varrho_2^{\text{I}} \cdot 14686 - \varrho_2^{\text{II}} \cdot 892,3 = 892,3 \\ \text{II] } \quad -\varrho_2^{\text{I}} \cdot 39102 + \varrho_2^{\text{II}} \cdot 3075,7 = -2488,1 \end{array}$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$\begin{array}{l} \varrho_2^{\text{I}} = 0,050999 \\ \varrho_2^{\text{II}} = -0,160580 \end{array}$$

Die nach Anwendung der Drossel 2 übrigbleibenden \bar{N}^{II} -Kräfte sind somit:

$$\begin{array}{l} \bar{N}_{21}^{\text{II}} = 892,3 - (0,050999 \cdot 14686) - (0,160580 \cdot 892,3) = 0 \\ \bar{N}_{23}^{\text{II}} = -859,0 - (0,050999 \cdot 14143) - (-0,16058 \cdot 857,6) = -0,02 \text{ kp/m} \\ \bar{N}_{32}^{\text{II}} = -2488,1 + (0,050999 \cdot 39102) + (0,16058 \cdot 3075,7) = 0 \\ \bar{N}_{34}^{\text{II}} = 2458,6 - (0,050999 \cdot 38683) - (-0,16058 \cdot 3025,4) = -0,03 \text{ kp/m} \\ \bar{N}_{43}^{\text{II}} = 3223,1 - (0,050999 \cdot 49540) - (-0,16058 \cdot 4333,9) = +0,67 \text{ kp/m} \end{array}$$

Die zu dem bisherigen Teilergebnis zuzuschlagenden Momente M_y betragen:

$$\begin{array}{l} M_2 = 0,050999 \cdot (-1728,1) - (0,16058 \cdot 129,1) = -108,9 \text{ mkp/m} \\ M_3 = 0,050999 \cdot 9114,3 - (0,16058 \cdot 719,1) = 580,3 \text{ mkp/m} \\ M_4 = 0,050999 \cdot (-11127,0) - (0,16058 \cdot 905,5) = -712,9 \text{ mkp/m} \end{array}$$

Die zu dem bisherigen Teilergebnis zuzuschlagenden Längsschnittkräfte N_x betragen:

$$\begin{array}{l} N_{x1} = 0,050999 \cdot (-84367) - 0,16058 \cdot (+3321) = -4836 \text{ kp/m} \\ N_{x2} = 0,050999 \cdot (+123490) - 0,16058 \cdot (-6916) = +7409 \text{ kp/m} \\ N_{x3} = 0,050999 \cdot (-197580) - 0,16058 \cdot (+15751) = -12606 \text{ kp/m} \\ N_{x4} = 0,050999 \cdot (+232550) - 0,16058 \cdot (-20989) = +15230 \text{ kp/m} \end{array}$$

3. Iteration

Man sieht bereits, dass ein weiterer Iterationsprozess die Genauigkeit des Endergebnisses kaum noch steigern kann, weil die anzubringenden \bar{N}^{II} -Kräfte verschwindend klein sind.

Vorgang 17 (wie Vorgang 5):

$$N_{x1} = - 0,64 \text{ kp/m}, \quad N_{x2} = + 1,34 \text{ kp/m}, \quad N_{x3} = - 4,83 \text{ kp/m}$$

$$N_{x4} = + 7,65 \text{ kp/m}$$

$$v_{12} = - 0,131 \text{ kp/m}, \quad v_{21} = - 0,131 \text{ kp/m}, \quad v_{23} = 0,410 \text{ kp/m}$$

$$v_{32} = 0,411 \text{ kp/m}, \quad v_{34} = - 0,912 \text{ kp/m}, \quad v_{43} = - 0,922 \text{ kp/m}$$

Vorgang 18 (wie Vorgang 6):

$$w_{21} = - 1,945 \text{ kp/m}, \quad w_{23} = - 1,906 \text{ kp/m}, \quad w_{32} = 4,744 \text{ kp/m}$$

$$w_{34} = 4,674 \text{ kp/m}, \quad w_{43} = - 6,564 \text{ kp/m}$$

Vorgang 19 (wie Vorgang 7):

$$M_2 = - 0,038 \text{ mkp/m} \quad M_3 = 0,227 \text{ mkp/m}$$

$$M_4 = - 0,294 \text{ mkp/m}$$

$$\theta_2 = -2,7962 \text{ kp/m}^2, \quad \theta_3 = 1,5401 \text{ kp/m}^2$$

$$V_{21} = 0,0013 \text{ kp/m}, \quad V_{23} = 0,0749 \text{ kp/m}, \quad V_{32} = - 0,0755 \text{ kp/m}$$

$$V_{34} = -0,1455 \text{ kp/m}, \quad V_{43} = 0,1458 \text{ kp/m}$$

Vorgang 20 (wie Vorgang 8):

$$N_{21}^{III} = - 0,2767 \text{ kp/m}, \quad N_{23}^{III} = 0,2664 \text{ kp/m}$$

$$N_{32}^{III} = 0,7914 \text{ kp/m}, \quad N_{34}^{III} = - 0,7816 \text{ kp/m},$$

$$N_{43}^{III} = - 1,0374 \text{ kp/m}$$

Ende der 3. Iteration

Drossel 3:

Mit Drossel 3 eliminieren wir die N^{III} -Kräfte N_{21}^{III} , N_{32}^{III} und N_{43}^{III} . Die entsprechenden Q_3 Werte sind

$$Q_3^{\text{I}} = - 0,0000140 \qquad Q_3^{\text{II}} = 0,0000778$$

$$Q_3^{\text{III}} = - 0,0010813$$

Die zu dem Teilergebnis zuzuschlagenden Momente sind

$$M_2 = 0,034 \text{ mkp/m} \qquad M_3 = - 0,185 \text{ mkp/m}$$

$$M_4 = 0,227 \text{ mkp/m}$$

Die zu dem Teilergebnis zuzuschlagenden Langskräfte N_x sind

$$N_{x1} = + 1,45 \text{ kp/m} \qquad N_{x2} = - 2,28 \text{ kp/m}$$

$$N_{x3} = + 4,02 \text{ kp/m} \qquad N_{x4} = - 4,92 \text{ kp/m}$$

Wir sehen, dass die beim Iterationsprozess 3 hinzugekommenen Werte von den in Drossel 3 ermittelten Werten zum grossen Teil wieder aufgehoben werden. Es hat sich somit vom praktischen Standpunkt her gesehen nicht rentiert, die 3. Iteration durchzuführen. Die **Tafel 6** stellt die Teilergebnisse am Schluss jeden Rechenvorganges zusammen und drückt sie in Prozenten des Endergebnisses aus. Daraus ersehen wir, dass wir mit dem Ergebnis von Drossel 2 dem Endergebnis für alle wichtigen Schnittgrössen auf 0,04 Prozent nahe gekommen sind.

Es soll noch erwähnt werden, dass die bei einem etwaigen 4. Iterationsprozess entstehenden Momente den Wert 0,0000017 mkp/m nicht überschreiten. Die entsprechenden Werte für die Längsschnittkräfte bleiben unter dem Wert 0,00003 kp/m.

Rechenbeispiel Nr. 1

F A F F E L N 6

Tafel 6 A: Momente M_y (kp/m)

A	Kante 2		Kante 3		Kante 4		Rechnung
	B	%	A	B	A	B	
-1078,8	-558,7	61,5	-81,6	-2403,6	-420,0	2109,9	Basis I
520,1			-2322,0		2529,9		Basis II
-1728,1	-928,8	102,2	9114,3	-451,7	-11127,0	-273,0	1. Iteration
1358,0			-7162,4		8744,1		Drossel 1
129,1	-908,6	100,0	-719,1	-590,5	905,5	-80,4	2. Iteration
-108,9			580,3		-712,9		Drossel 2
-0,04	-908,6	100,0	0,23	-590,5	-0,29	-80,4	3. Iteration
0,03			0,18		0,23		Drossel 3

Tafel 6 B: Längskräfte N_x (kp/m)

A	Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4		Rechnungen wie oben
	B	%	A	B	A	B	A	B	
63	75572	135,3	-62009	-62016	42735	42726	-10	-37572	-586
75509			-7						
-84367	57505	102,9	123490	-35571	-197580	414	232550	12219	190,7
66300			-97045		155268		-182749		
3321	55990	100,0	-6916	-35078	15751	3559	-20989	6460	99,96
-4836			7409		-12606		15230		
-0,6	55991	100,0	1,3	-35079	-4,8	3558	-7,6	6462	100,0
1,4			2,3		4,0		4,9		

Spalte A: Teilergebnis jeden einzelnen Rechenganges, Spalte B: Summe der Teilergebnisse
 Spalte %: Verhältnis von Summe Teilergebnis zu Endergebnis in Prozent

Rechenbeispiel Nr. 2

In Rechenbeispiel Nr.2 berechnen wir das gleiche Tragwerk wie in Rechenbeispiel Nr. 1, aber für das zweite Lastglied. Wir setzen also in allen Formeln $m = 3$. Das bedeutet praktisch, dass wir das Tragwerk für ein Drittel seiner tatsächlichen Spannweite und in Feldmitte für ein Drittel (negativ) der Belastung von Rechenbeispiel Nr. 1 berechnen. Wie nicht anders zu erwarten, erhalten wir wegen der kurzen Spannweite praktisch bereits nach Berechnung der Basis I und II das genaue Ergebnis, brauchen also keine Iteration für unausgeglichene Kantenkräfte N vornehmen.

Die Tafel 7 der Ergebnisse gibt für die einzelnen Rechenstufen die Fehler der Teilergebnisse in Prozent des Gesamtergebnisses an. Unter Gesamtergebnis verstehen wir dabei die Summe der Ergebnisse für $m = 1$ und $m = 3$, d.h. die Summe der Ergebnisse der Rechenbeispiele Nr. 1 und Nr. 2 in Feldmitte.

Tafel 7 A: Momente M_y (kp/m)

Kante 2		Kante 3			Kante 4				
A	-767,3	-507,4			11,4				
	1	2	%	1	2	%			
B	148,3 - 7,8	140,5	0,104	76,7 7,9	84,6	0,296	97,7 - 7,5	90,2	14,0
C	0,9 - 0,1	141,3	0	- 1,8 0,2	83,0	0,020	2,0 - 0,2	92,0	1,75
D	- 0,05 0,01	141,3	0	0,1 - 0,02	83,1	0	- 0,17 0,03	91,8	0

Zeile A: Gesamtergebnis von Rechenbeispiel Nr. 1 und Nr. 2

Zeile B: Teilergebnis in Beispiel Nr. 2 nach Basis I und II

Zeile C: Teilergebnis in Beispiel Nr. 2 nach 1. Iteration und Drossel 1

Zeile D: Teilergebnis in Beispiel Nr. 2 nach 2. Iteration und Drossel 2

Spalte 1: Teilergebnisse

Spalte 2: Summe der Teilergebnisse

Spalte %: Fehler der Teilergebnisse in % des Gesamtergebnisses.

Längskräfte N_x (kp/m) (Tafel 7 B)

(Bedeutung der Spalten und Zeilen wie für Tafel 7 A der M_y)

Kante 1				Kante 2			
A	53 802			-33 388			
	1	2	o/o	1	2	o/o	
B	-87 -2198	-2285	0,18	+14 +1803	+1817	0,38	Basis I Basis II
C	+ 108 -11	-2188	0,002	- 146 +16	+1687	0,012	1.Iteration Drossel 1
D	-2 +1	-2189	0	+5 -1	+1691	0	2.Iteration Drossel 2

Kante 3				Kante 4			
A	3409			7062			
	1	2	o/o	1	2	o/o	
B	+5 -293	-288	4,08	+5 +734	+739	1,97	Basis I Basis II
C	+169 -18	-137	0,35	-171 +18	+586	0,20	1.Iteration Drossel 1
D	-14 +2	-149	0	+17 -3	+600	0	2.Iteration Drossel 2

Unausgeglichene Kantenkräfte N (kp/m) (Tafel 7 C)

	Basis I u. II	1. Iter.	Dros. 1	2. Iter.	Dros. 2
N_{21}	-53,299	+ 6,324	0	-0,355	0
N_{23}	+52,699	- 6,215	+0,042	+0,347	0
N_{32}	+41,939	-10,488	-4,920	+0,821	0
N_{34}	-42,119	+10,455	+4,871	-0,816	+0,001
N_{43}	-47,229	+11,448	+5,216	-1,008	-0,107

Rechenbeispiel Nr. 3

Im Rechenbeispiel Nr. 3 untersuchen wir ein Tragwerk mit den gleichen Daten wie in Rechenbeispiel Nr. 1. Lediglich die Spannweite ist doppelt so gross, beträgt also 39,04 m. Das Seitenverhältnis der Platten ist somit $a/b = 10$.

Ein so schlankes Faltwerk kann in Wirklichkeit nie bestehen: Seine vertikale Durchbiegung am Rande beträgt 53,18 cm und die horizontale 36,77 cm. Auch wird man bei der Berechnung für ein Seitenverhältnis von $a/b = 10$ wohl immer die vereinfachte Faltwerkstheorie unter Vernachlässigung der Längssteifigkeit der Platten vorziehen.

Wir berechnen hier das Tragwerk nach dem Iterationsverfahren, um seine Anwendbarkeit auch für scheinbar unüberwindliche Divergenz der unausgeglichene N-Kräfte zu zeigen. Es ist zu beachten, dass der Rechenautomat, mit dem das Beispiel berechnet wurde, nur auf 5 Stellen genau arbeitet. Da an manchen Stellen die stark divergierenden N-Kräfte 8-stellige Spannungen und Momente erzeugen, ehe sie von den Drosseln wieder auf kleinere Werte reduziert werden, können wir für die letzten Stellen keine Genauigkeit erwarten.

Die folgenden Zahlentafeln zeigen, dass die Genauigkeit des Verfahrens trotz dieser Schwierigkeiten sehr gut ist. Wir müssen wie in Rechenbeispiel Nr. 1 nur zwei Iterationen mit Drosseln durchführen. Nach Drossel 2 sind die Fehler kleiner als 1 Prozent.

Tafel 8A: Momente M_y (mkp/m)

Rechnung	Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	A	B	A	B	A	B
Basis I	-1333		0		- 465	
Basis II	2960	1627	- 40297	-40297	45939	45473
1.Iter.	-130850		2054700		-2573700	
Dros. 1	128290	-932	-2014400	3	2523300	-4926
2.Iter.	6578		- 107770		138030	
Dros. 2	-6641	-995	106240	-1527	-134410	-1306
3.Iter.	0		- 2		3	
Dros. 3	0	-995	+ 2	-1526	- 3	-1306

Spalte A: Teilergebnisse, Spalte B: Summe Teilergebnisse

L ä n g s k r ä f t e N_x (kp/m) (Tafel 8 B)

Rechn.	Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	A	B	A	B	A	B	A	B
Basis I	18		- 1		- 3		- 4	
Basis II	326 870	326888	- 279 990	-279 991	212 070	212 067	-191 180	-191 184
1. Iter.	-5031 900		7497 900		-12401 000		14838 000	
1. Dros.	4933 300	228288	-7351 000	-133 091	12158 000	-30 933	-14547 000	99 816
2. Iter.	145 380		- 293 050		656 020		- 871 280	
2. Dros.	- 208 310	165358	343 840	- 82 301	- 643 640	-18 553	808 200	36 036
3. Iter.	- 5		10		10		-36	
3. Dros.	3	165356	1	- 82 290	-13	-18 556	22	36 022

Spalte A: Teilergebnisse

Spalte B: Summe der Teilergebnisse

Uausgeglichene Kantenkräfte N (kp/m) am Schluss der jeweiligen Rechenvorgänge (Tafel 8 C)

Kraft N	Basis I u. II	1. Iter.	Drossel 1	2. Iter.	Drossel 2	3. Iter.	Drossel 3	4. Iter.
N_{21}	42 148	-2108 300	0	109 940	0	2,06	0	-0,00113
N_{23}	-40 524	2027 000	-4,0	-105 700	-0,75	-1,98	-0,00144	0,00109
N_{32}	-122 130	6418 600	6064	-339 120	0	-7,02	0	0,00246
N_{34}	120 590	-6329 900	-5832	334 330	-0,50	6,91	-0,00068	-0,00245
N_{43}	160 260	-8620 800	-11840	458 150	-0,50	9,88	0	-0,00270

Rechenbeispiel Nr. 4

Die Abmessungen und Belastungen des Faltwerks von Rechenbeispiel Nr. 4 sind die gleichen wie die der Rechenbeispiele Nr. 1 bis Nr. 3, mit Ausnahme der Spannweite. Die Spannweite beträgt 13,66 m, ist also gleich der $3\frac{1}{2}$ -fachen Plattenbreite. Wir erhalten, wie bei Beispiel Nr. 1, die praktisch genaue Antwort nach Anwendung der 2. Iteration und Drossel 2. Wir sehen aber, dass die Teilergebnisse nach Basis I und II und nach Drossel 1 bereits besser an das genaue Ergebnis herankommen als dies bei Beispiel Nr. 1 der Fall war. Beispiel Nr. 4 zeigt also, wie Beispiel Nr. 1 bis Nr. 3, dass die Konvergenz eine Funktion der Spannweite ist und dass wir mit um so weniger Iterationen auskommen, je kürzer das Faltwerk ist.

Rechenbeispiel Nr. 4

T A F E L N O

M o m e n t e M_y (mkp/m) (Tafel 2 A)

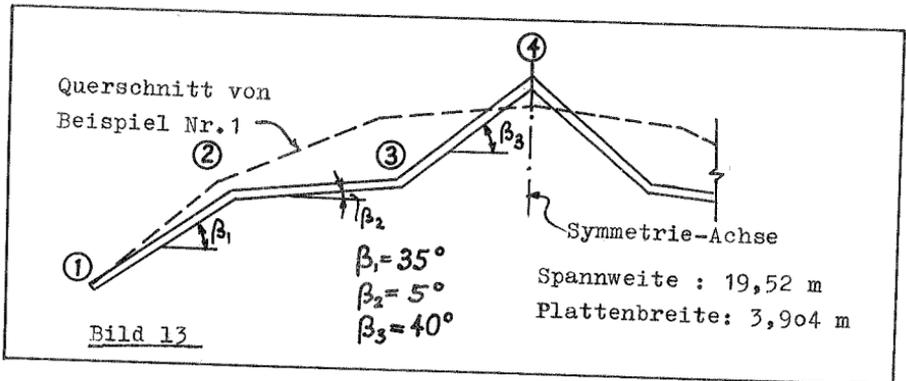
Kante 2		Kante 3		Kante 4		Rechnung
A	B	A	B	A	B	
-873,1	-685,6	-139,5	-670,2	-381,9	170,4	Basis I
187,5		-530,7		552,3		Basis II
-185,9	-775,4	644,9	-358,6	-771,0	-202,2	1. Iteration
96,1		-333,3		398,3		Drossel 1
14,7	-769,4	- 54,8	-382,8	68,3	-170,9	2. Iteration
- 8,7		30,6		- 36,9		Drossel 2
0,0	-769,4	0,1	-382,8	- 0,1	-170,9	3. Iteration
0,0		- 0,1		0,1		Drossel 3

Längskräfte (kp/m) (Tafel 2 B)

Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4		Rechnungen wie oben
A	B	A	B	A	B	A	B	
111	34949	-15	-27615	-12	16300	-12	-14714	687,0
34838		-27600		16912		-14702		
-11294	29496	16247	-19771	-25097	4771	29002	- 687	32,1
5841		- 8403		12968		-14975		
437	29464	- 939	-19995	2159	5737	- 2882	- 2143	100,0
- 469		715		- 1193		1426		
0	29464	0	-19995	- 1	5737	- 1	- 2142	100,0
0		0		1		1		

Spalte A: Teilergebnisse der Rechnungsgänge, Spalte B: Summe der Teilergebnisse
 Spalte C: Verhältnis von Summe Teilergebnisse zu Endergebnis in Prozent

Rechenbeispiel Nr. 5



Der Querschnitt für Rechenbeispiel Nr. 5 entstand durch eine Änderung des Neigungswinkels der Platten gegenüber den Beispielen Nr. 1 bis Nr. 4. Alle übrigen Abmessungen, wie Spannweite, Plattenbreite und Plattendicke, und damit natürlich auch das Seitenverhältnis und die Belastung pro Oberflächeneinheit, sind die gleichen wie für Rechenbeispiel Nr. 1.

Rechenbeispiel Nr. 5 wurde gewählt, um zu zeigen, wie gross der Einfluss der Winkel zwischen den Platten auf die Anzahl der erforderlichen Iterationen ist. Wir sehen aus der Tafel der Teil- und Endergebnisse, dass wir bei der Berechnung eines solchen Tragwerks praktisch gänzlich ohne Iteration auskommen, weil die Ergebnisse von Basis I und Basis II bereits innerhalb von nur 4 Prozent Abweichung von den Endergebnissen liegen.

Nach der 1. Iteration und Drossel 1 weichen die Ergebnisse weniger als 0,1 Prozent von dem genauen Ergebnis ab.

Es ist interessant, diesen Verlauf mit den Tafeln von Rechenbeispiel Nr. 1 zu vergleichen, wo eine ähnliche Genauigkeit erst nach der 2. Iteration und Drossel 2 erreicht wurde. Noch wichtiger ist es zu bemerken, dass die Ergebnisse von Basis I und Basis II bei Rechenbeispiel Nr. 1 als Endergebnisse völlig unbrauchbar gewesen wären, weil sie zum Teil das 25-fache der genauen Werte ausmachten.

Es soll noch erwähnt werden, dass Drossel 1 im vorliegenden Beispiel die N-Kraft N_{32} eliminierte, was ein bißchen vor-
 teilhafter war als die sonst übliche Eliminierung der
 Kraft N_{21} .

Tafel 10 A: Momente M_y (mkp/m)

Kante 2	Kante 3	Kante 4	
-1138,65	52,56	-587,81	% A
-1139,18	59,29	-598,20	1,7 B
-1138,63	52,52	-587,86	0,01 C

Tafel 10 B: Längskräfte N_x (kp/m)

Kante 1	Kante 2	Kante 3	Kante 4	
51829,5	-50177,4	41721,1	-35088,1	% A
52334,3	-51442,9	43357,1	-36316,6	3,5 B
51865,5	-50208,5	41729,9	-35079,5	0,02 C

- Zeile A: Genaue Ergebnisse
 Zeile B: Ergebnis am Schluss von Basis I und II
 Zeile C: Ergebnis nach 1. Iteration und Drossel 1
 Spalte %: Abweichung des Teilergebnisses vom genauen
 Ergebnis in Prozent

Tafel 10 C: Unausgeglichene Kantenkräfte N nach
verschiedenen Rechenabschnitten (kp/m)

	Basis I + II	1.Iteration	Drossel 1
N ₂₁	- 16,39	3,766	2,7272
N ₂₃	11,34	- 3,204	- 2,4545
N ₃₂	- 221,30	12,029	0
N ₃₄	191,67	-11,075	- 0,6225
N ₄₃	- 130,61	6,032	1,0125

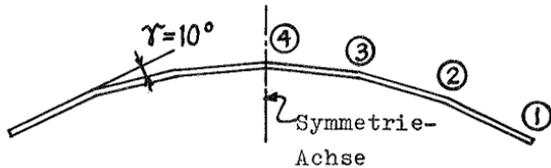
Anm.: Die unausgeglichene Kantenkräfte nach Anwendung von Drossel 1 sind praktisch vernachlässigbar.

Rechenbeispiel Nr. 6

In Rechenbeispiel Nr. 6 untersuchen wir ein schalenförmiges Tragwerk, dessen Platten gegeneinander unter einem Winkel von nur 10° geneigt sind, und dessen Platten ein Seitenverhältnis von $a/b = 5$ haben. Das Seitenverhältnis entspricht also dem der Rechenbeispiele Nr. 1 und Nr. 5.

Der sehr kleine Winkel zwischen den Platten ist für die Konvergenz der Iteration ungünstig, und doch zeigen die tabellarisierten Ergebnisse, dass nach der 2. Iteration und nach Drossel 2 die genauen Endergebnisse praktisch erreicht sind.

Bild 14



Plattenstärke : 0,08 m	Neigungswinkel:
Plattenbreite : 2,43 m	5°
Spannweite : 12,18 m	15°
Belastung : Eigengewicht = 196 kp/m ²	25°

Abmessungen und Belastung des Faltwerkes

Tafel 11 A: Momente M_y (mkp/m)

Rechnung	Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	A	B	A	B	A	B
Basis I	495		- 17		-171	
Basis II	1588	1093	-7118	-7135	7782	7610
1. Iter.	-35152		185540		-226610	
Dros. 1	33769	-289	-178240	164	217690	-1309
2. Iter.	3129		- 17451		21997	
Dros. 2	-3120	-280	16900	-386	-20957	-269
3. Iter.	- 3		20		- 27	
Dros. 3	3	-280	- 20	-386	25	-270

Spalte A: Teilergebnisse, Spalte B: Summe der Teilergebnisse

Tafel 11B: Längskräfte N_x (kp/m)

Rechnung	Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	A	B	A	B	A	B	A	B
Basis I	25		-3		-4		-4	
Basis II	84 194	84 219	-72 955	-72 958	52 473	52 469	-43 883	-43 887
1. Iter. Dros. 1	-662 760 636 680	58 139	973 650 -935 320	-34 628	-1562 000 1500 600	-8 931	1839 600 -1767 200	28 513
2. Iter. Dros. 2	31 010 -45 924	43 225	-64 860 76 368	-23 120	148 370 -142 950	-3 511	-198 100 179 130	9 543
3. Iter. Dros. 3	-23 41	43 243	48 -79	-23 151	-172 172	-3 511	273 -227	9 589

Spalte A: Teilergebnisse,

Spalte B: Summe der Teilergebnisse

Tafel 11 C:

Kraft N	Unausgeglichene Kantenkräfte N (kp/m) am Schluss der jeweiligen Rechenvorgänge							
	Basis I&II	1. Iter.	Dros. 1	2. Iter.	Dros. 2	3. Iter.	Dros. 3	4. Iter.
N ₂₁	24 494	-597 810	0	55 105	0	-64,73	0	-0,00306
N ₂₃	-24 143	589 120	-5	-54 301	-0,18	63,78	-0,000488	0,00302
N ₃₂	-61 327	1635 800	5 470	-154 960	0	186,66	0	0,00848
N ₃₄	61 114	-1628 600	-5 394	154 250	0	-185,76	0,000732	-0,00844
N ₄₃	75 120	-2099 100	-10 458	201 520	23,75	-245,71	0	-0,01095

Rechenbeispiel Nr. 7

In Rechenbeispiel Nr. 7 untersuchen wir ein sägeförmiges Faltwerk. Das Seitenverhältnis der Platten ist $a/b = 10$, was die praktisch ungünstigste Vorbedingung für rasche Konvergenz ist (denn Seitenverhältnisse von $a/b \geq 10$ würden wohl immer nach der vereinfachten Faltwerkstheorie berechnet werden).

Die tabellierte Ergebnisse zeigen uns jedoch, dass wir trotz des grossen Seitenverhältnisses die praktisch genauen Ergebnisse bereits nach der 1. Iteration und Drossel 1 erhalten:

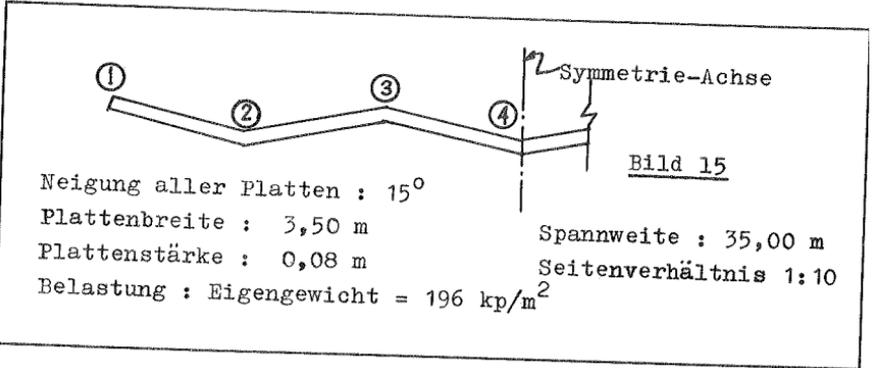
Die Momente M_y weichen dann vom genauen Ergebnis nur noch weniger als 0,1 Prozent ab, und die Abweichungen der Längsspannungen N_x betragen maximal 0,22 Prozent der genauen Ergebnisse.

Es ist interessant, diese Resultate mit denen von Rechenbeispiel Nr. 3 zu vergleichen, in welchem zwar das Seitenverhältnis ebenfalls $a/b = 10$ war, eine ähnliche Genauigkeit aber erst nach der 2. Iteration und Drossel 2 erzielt werden konnte.

Dies zeigt wieder den Einfluss der Winkel zwischen den Platten auf die Konvergenz der Ergebnisse nach den Iterationen. Es wurde in weiteren Beispielen ermittelt, dass man mit steileren Platten ganz ohne Iteration auskommen kann, und die praktisch genauen Ergebnisse am Schluss von Basis I und II erhält.

Rechenbeispiel Nr. 7 zeigt die Kraft der Drosseln durch einen Vergleich der Ergebnisse, welche man mit und ohne Anwendung der Drosseln erzielt (Tafeln 12 und 13). Man sieht aus den tabellierten Ergebnissen, dass die Annäherung an die genauen Resultate bei einem ungedrosselten Verfahren erst nach 4 Iterationen derjenigen nach Drossel 1 des gedrosselten Verfahrens gleich kommt.

Es soll bemerkt werden, dass Drossel 1 die Kraft N_{32} eliminierte, was für dieses Beispiel etwas günstiger war, als die sonst übliche Eliminierung von N_{21} .



Querschnitt des Tragwerks von Rechenbeispiel Nr. 7

Tafel 12:

Ergebnisse des gedrosselten Iterationsverfahrens

Momente M_y (mkp/m) (Tafel 12 A)

	Kante 2			Kante 3			Kante 4		
	1	2	o/o	1	2	o/o	1	2	o/o
A	-1326,1			103,2			-604,5		
B	-1348,6 27,0	-1321,6	0,34	67,5 48,9	116,4	12,80	-399,5 -284,1	-683,6	13,10
C	-6,3 1,7	-1326,2	0,00	-18,0 +4,8	103,2	0,00	+108,5 -29,1	-604,2	0,05

Längskräfte N_x (kp/m) (Tafel 12 B)

	Kante 1			Kante 2		
	1	2	o/o	1	2	o/o
A	207 446			-211 709		
B	- 5 -210 040	-210 045	1,25	+215 610	+215612	1,85
C	+2 926 - 783	-207 902	0,22	-4 795 +1 284	+212101	0,18

(Erklärung der Spalten und Zeilen umseitig)

Längskräfte N_x (kp/m) (Fortsetzung von Tafel 12 B)

Kante 3				Kante 4		
A	204 371			-192 905		
	①	②	o/o	①	②	o/o
B	0 -205 410	-205 410	0,51	+ 1 +189 700	+189 701	1,66
C	+ 859 - 230	-204 781	0,20	+4 952 -1 326	+193 327	0,22

Zeile A: Genaues Ergebnis (nach 2. Iteration und Drossel 2)

Zeile B: Ergebnis nach Basis I und II

Zeile C: Ergebnis nach 1. Iteration und Drossel 1

Spalte 1: Teilergebnisse

Spalte 2: Summe der Teilergebnisse

Spalte o/o: Abweichung der Summe der Teilergebnisse vom genauen Ergebnis in Prozent.

Unausgeglichene Kantenkräfte N (kp/m) (Tafel 12 C)

Rechnung	N_{21}	N_{23}	N_{32}	N_{34}	N_{43}
Basis I + II	-17,654	18,797	213,580	-186,990	361,200
1. Iteration	- 2,033	1,684	-78,079	68,224	-141,920
Drossel 1	- 6,215	6,265	0	- 0,095	- 7,240

Tafel 13

Ergebnisse des ungedrosselten Iterationsverfahrens

Momente M_y (mkp/m) (Tafel 13 A)

Rechnungs- gang	Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	①	②	①	②	①	②
Basis I	-1348,6		67,5		-399,5	
Basis II	27,0	-1321,6	48,9	116,4	-284,1	-683,6
1. Iter.	- 6,3	-1327,9	-18,0	98,4	108,5	-575,1
2. Iter.	+ 2,3	-1325,6	+ 6,5	104,9	-40,0	-615,1
3. Iter.	- 0,9	-1326,5	- 2,4	102,5	+14,9	-600,2
4. Iter.	+ 0,3	-1326,2	+ 0,9	103,4	- 5,5	-605,7

Spalte 1: Beiträge der Iterationsstufen

Spalte 2: Endergebnis am Ende der jeweiligen Iterationsstufe.

L ä n g s k r ä f t e N_x (kp/m) (Tafel 13 B)

Rechnung	Kante 1		Kante 2		Kante 3		Kante 4	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Basis Iu.II	-210 045	-210 045	215 612	215 612	-205 410	-205 410	189 701	189 701
1. Iteration	2 926	-207 119	- 4 795	210 817	859	-204 551	4 952	194 653
2. Iteration	- 543	-207 662	1 218	212 035	252	-204 299	-2 401	192 252
3. Iteration	201	-207 461	- 448	211 587	- 100	-204 399	896	193 148
4. Iteration	-75	-207 536	166	211 753	37	-204 362	-332	192 816

Spalte 1: Beitrag der Iterationsstufen

Spalte 2: Endergebnis am Ende der jeweiligen Iterationsstufen

Uausgeglichene Randkräfte, N , am Ende der jeweiligen Iterationsstufe (kp/m) (Tafel 13 C)

Rechnung	N_{21}	N_{23}	N_{32}	N_{34}	N_{43}
Basis Iu.II	-17,65	18,79	213,58	-186,99	361,20
1. Iteration	- 2,03	1,68	-78,08	68,22	-141,92
2. Iteration	0,71	-0,59	28,74	-25,09	52,48
3. Iteration	- 0,24	0,20	-10,62	9,27	-19,43
4. Iteration	0,08	-0,07	3,93	-3,43	7,20

Anm.: Ein Tragwerk gleichen Querschnittes aber mit einem Seitenverhältnis von $a/b = 5$ (anstatt $a/b = 10$) zeigt bedeutend bessere Konvergenz sowohl für das gedrosselte als auch für das ungedrosselte Iterationsverfahren. Beim ersteren betragen die Abweichungen vom genauen Ergebnis nach Basis I und II bereits weniger als ein Prozent.

Rechenbeispiel Nr. 8

In Rechenbeispiel Nr. 8 untersuchen wir eine Zylinderschale mit Randträgern, indem wir sie durch ein Faltwerk annähern. Die Gestalt des Ersatzpolygons ist dadurch festgelegt, dass die Schwerpunkte der Schalensegmente mit denen der Platten zusammenfallen. Die Abweichung der Mittelflächen beträgt dabei an keiner Stelle mehr als 2,5 cm.

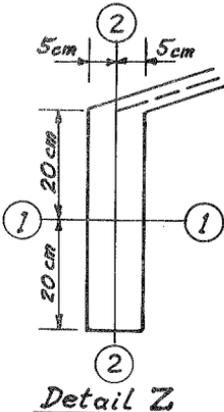
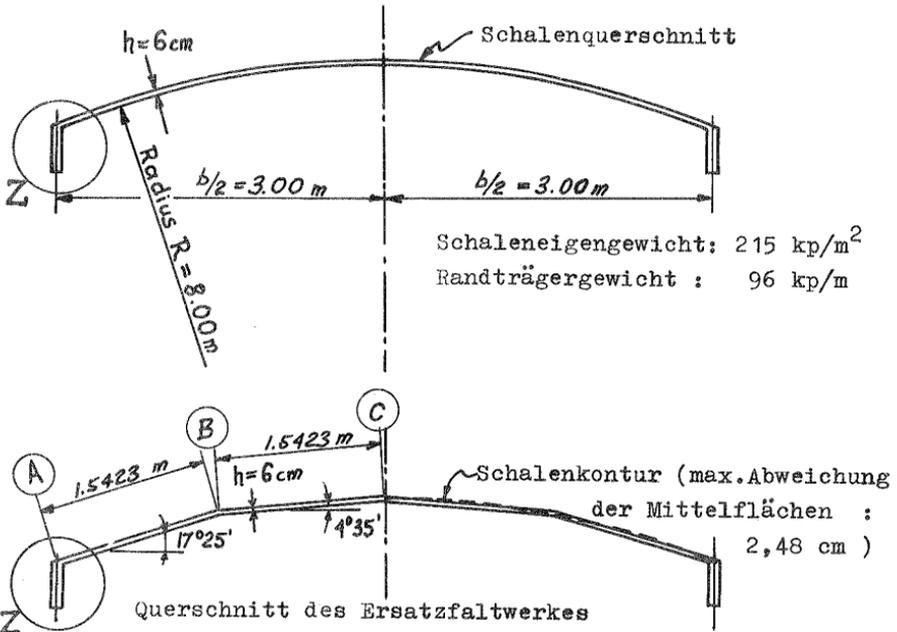
Die von benachbarten Platten gebildeten Winkel γ betragen nur etwa 13° und 9° . Das Seitenverhältnis a/b beträgt etwa 10. Das Tragwerk ist also sehr lang und flach, was auf ungünstige Konvergenz der Iteration schliessen lässt. Trotzdem liegen, wie Tafel 14 zeigt, die praktisch genauen Ergebnisse nach der 2. Iteration plus Drossel 2 vor. Nach der 3. Iteration plus Drossel 3 werden alle fünf unausgeglichene Kantenkräfte (im Rahmen der hier angewandten Genauigkeit von 0,01 kp/m) zu Null.

Die Berechnung der Zylinderschale erfolgte mittels der Tabellen von Rüdiger und Urban^[17]. Die dort angegebenen Beziehungen wurden auch der Erfassung der Randträger zu Grunde gelegt. Die Gegenüberstellung der Ergebnisse von Schale und Faltwerk zeigt gute Übereinstimmung der Membrankräfte, aber starke Abweichungen der Quermomente M_y .

Anm.: In diesem Rechenbeispiel wurde der Vorgang 3 des Verfahrens ausgelassen. Die Volumenskräfte, $p h$, wurden zu Kantenkräften zusammengefasst, wie im Abschnitt "Näherungslösungen des Verfahrens" beschrieben ist. Das grosse Seitenverhältnis der Platten rechtfertigt diese Näherung.

RECHENBEISPIEL NR. 8

Näherungsweise Berechnung einer Schale als Falwerk



Spannweite: $L = 15,00 \text{ m}$

Poisson'sche Zahl: $\nu = 0$

Randträgerwerte:

$$I_{11} = 5,3333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I_{22} = 0,3333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{tt} = 1,1233 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

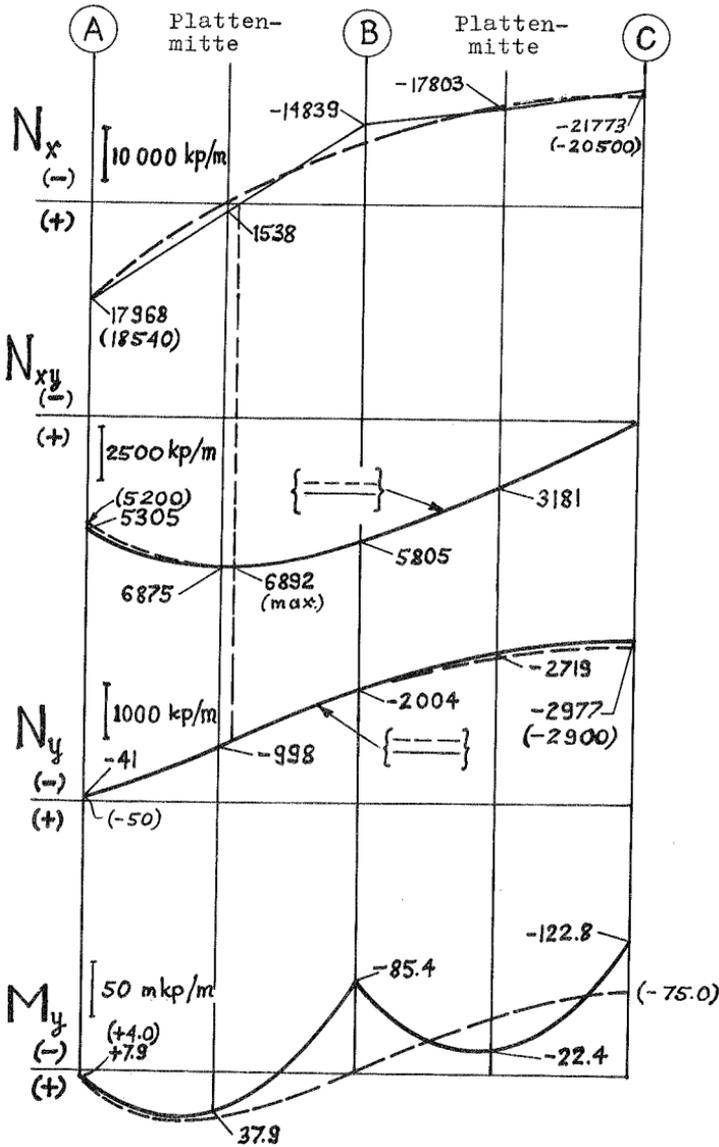
$$F = 0,0400 \text{ m}^2$$

Die Berechnung erfolgt für das erste

Lastglied der Fourierreihe:

$$p(x) = \frac{4}{\pi} p_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

B I L D 16



Faltwerksergebnisse: Volle Linien und Zahlen
 Schalenergebnisse: Gestrichelte Linien und geklammerte Zahlen
 Anm.: σ_x in Mitte an Unterkante Randträger : 96,71 kp/cm²

B I L D 17

Unausgeglichene Kantenkräfte (kp/m) (Tafel 14 A)

	Basis I	Basis II	1. Iter. + Dros. 1	2. Iter. + Dros. 2	3. Iter. + Dros. 3
N ₂₁	- 290,30	- 3419,07	+ 202,82	+ 2,82	0
N ₂₃	- 12,87	+ 1024,71	- 61,60	- 0,85	0
N ₃₂	-2129,11	+48964,75	- 833,52	0	0
N ₃₄	+2051,31	-48467,23	+ 855,12	+ 0,61	0
N ₄₃	-2491,74	-95942,45	0	0	0

Quermomente My (mkp/m) (Tafel 14 B)

	Basis I	Basis II	1. Iter. + Dros. 1	2. Iter. + Dros. 2	o/o	3. Iter. + Dros. 3
M ₂	- 2,87	- 243,09	+ 49,06	+ 8,37	6,2	+ 7,88
M ₃	- 66,26	+4633,23	-244,42	- 86,87	1,8	- 85,35
M ₄	- 47,69	-6892,75	-241,22	-124,86	1,7	-122,82

Wichtigste Verformungen und Schnittgrößen (Tafel 14 C)

Längsk.	Basis I+II	1. Iter. + Dros. 1	2. Iter. + Dros. 2	o/o	3. Iter. + Dros. 3
N _{x2}	+21590,88	+11117,58	+17938,59	0,163	17967,87
N _{x3}	-30743,76	-14754,27	-14878,63	0,268	-14838,94
N _{x4}	+2346,48	-17994,81	-21786,73	0,064	-21772,85
Durchb. Scherkr:	- 1,902	- 2,732	- 1,829	0,94	- 1,812
S ₂	5951,52	5766,67	5324,75	0,37	5305,29
S ₃	4501,55	5192,19	5813,46	0,15	5804,93

Zusammenstellung der Teilergebnisse

Die Prozentspalte zeigt, um wieviel Prozent sich das End-
ergebnis vom Ergebnis nach der 2. Iteration und Drossel 2
unterscheidet.

4. Ein Schlusswort zu den Rechenbeispielen

Die Rechenbeispiele zeigten uns, dass bestimmte Eigenschaften des Faltwerks den erforderlichen Arbeitsaufwand für die Lösung beeinflussen. Wir stellten fest, dass die Konvergenz der iterativ erhaltenen Resultate mit zunehmender Spannweite, bzw. dem Seitenverhältnis, und mit abnehmendem Winkel γ zwischen benachbarten Platten abnimmt.

Man kann sagen, dass man für nicht-zylinderförmige Faltwerke mit einem Seitenverhältnis von $a/b = 5$ und weniger im allgemeinen mit einer Iteration auskommt. Man kann auch feststellen, dass man bei der Berechnung des zweiten und der folgenden Lastglieder für alle Faltwerke von einem Seitenverhältnis $a/b = 5$ und weniger mit den Resultaten der Basis I und II genügend Genauigkeit erzielt, d.h. ohne jegliche Iteration auskommt. Es kann fernerhin gesagt werden, dass für alle hier diskutierten Faltwerke eine für praktische Zwecke genügende Genauigkeit nach der 2. Iteration erzielt wurde, und dass eine Fortsetzung der Rechnung nach der 2. Iteration nur dann Zweck hätte, wenn man von vorn herein mit 10- bis 12-stelliger Genauigkeit gerechnet hatte.

Der Verfasser untersuchte nach dem hier beschriebenen Verfahren eine Reihe von sägeförmigen Faltwerken (Plattenbreite und -stärke wie in Rechenbeispiel Nr. 7), um den Einfluss des Winkels γ auf die Konvergenz abzuschätzen. Dabei ergab sich bei gleicher Spannweite etwa der gleiche Divergenzquotient für $\gamma = 30^\circ$ und $\gamma = 150^\circ$. Für abnehmende Winkel γ (und natürlich auch für zunehmende Spannweite) stieg der Divergenzquotient rasch an:

Seitenverhältnis a/b	Spannweite (m)	Winkel γ	Verhältnis N_{32}^I zu N_{32}^{Basis}
15	52,50	30°	- 1,7 : 1
15	52,50	150°	- 1,6 : 1
10	35,00	30°	- 0,3 : 1
10	35,00	20°	- 0,8 : 1
10	35,00	14°	- 1,6 : 1
5	17,50	30°	- 0,03 : 1

Tafel 15

Man kann daraus schliessen, dass der Winkel \mathcal{J} auf die Konvergenz des hier beschriebenen Iterationsverfahrens einen ähnlichen Einfluss hat wie bei den Iterationsverfahren für die vereinfachte Theorie. Für die letztere ergab sich [37, 43] ein Optimum an Konvergenz für $\mathcal{J} = 90^\circ$.

Die Bedeutung der Drosseln zur Beschleunigung der Konvergenz ist leicht einzusehen. Es soll nochmals betont werden, dass die Reihenfolge der Eliminierung der N-Kräfte wechseln kann. Es ist nicht immer die Eliminierung der am weitesten aussen liegenden Kraft, welche beste Konvergenz bringt. Es ist meistens die Eliminierung der grössten N-Kraft, und zwar ganz besonders dann, wenn ihr Divergenzquotient den Divergenzquotienten der Mehrzahl der anderen N-Kräfte etwa gleich ist. Die Wahl der günstigsten N-Kraft für die Anwendung der Drossel kann meistens mit ein paar Rechenschieberstellungen getroffen werden.

Die Rechenbeispiele wurden (mit Ausnahme von Beispiel Nr. 8) mit einem auf fünf Stellen genau arbeitenden Rechenautomaten gelöst. Bei grossem Seitenverhältnis reduziert sich die Genauigkeit oft auf 4 Stellen, weil Ausdrücke wie ($\alpha \cdot \operatorname{csch} \alpha - \operatorname{cosh} \alpha$) die Differenz fast gleich grosser Zahlen darstellen.

5. EIN VERGLEICH DES ITERATIONSVERFAHRENS

MIT DEN BISHER VERÖFFENTLICHTEN VERFAHREN

Ausser dem oben beschriebenen Iterationsverfahren stehen uns das zweistufige Berechnungsverfahren nach Werfel^[16] und die geschlossenen Lösungen nach Rüdiger^[18] und nach Goldberg - Leve^[20] zur Verfügung. Alle entwickeln die Last in eine Fourier Reihe und berechnen das System gesondert und identisch für jedes Glied der Reihe.

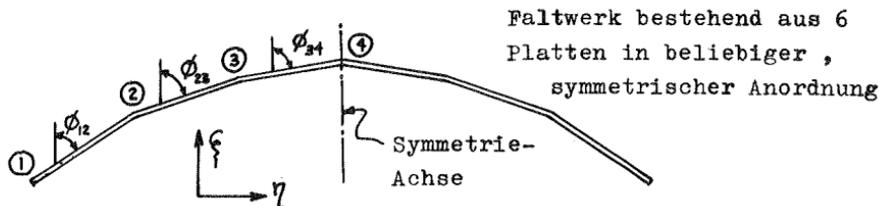
Das Verfahren von Werfel berechnet das Tragwerk für die q -Belastung wie einen Durchlaufträger auf starren Stützen, transformiert die entsprechenden Auflager-Reaktionen in Scheibenrandkräfte und schlägt diesen die als Randkräfte angenäherte p -Belastung zu. Das ergibt gewöhnlich ein System von $(2n - 2)$ unausgeglichene Randkräften, wobei n die Anzahl der Platten des Tragwerks ist. Werfel rechnet dann das Tragwerk für $(2n - 2)$ Verschiebungszustände infolge je einer Einheitsrandkraft $N = 1$ durch und eliminiert anschliessend die wirklichen $(2n - 2)$ unausgeglichene Kräfte mit einem System von $(2n - 2)$ Gleichungen.

Es ist leicht einzusehen, dass der Arbeitsaufwand nur unwesentlich ansteigt, wenn man das Tragwerk statt für je eine Randkraft $N = 1$ für $(2n - 2)$ Randkräfte gleichzeitig durchrechnet, weil natürlich auch durch $N = 1$ alle Platten des Systems Spannungen und Verformungen erleiden. Insofern ist jede Iteration des hier angegebenen Verfahrens etwa ebenso umfangreich wie ein Verschiebungszustand des Werfel'schen Verfahrens. Der Arbeitsaufwand für die Berechnung von Basis I und II des Iterationsverfahrens entspricht somit etwa dem Aufwand für die Ermittlung der Partikularlösung plus einem Verschiebungszustand des Werfel'schen Verfahrens. Wenn wir das Werfel'sche Verfahren auf die vorliegenden Rechenbeispiele anwenden würden, müssten wir jedesmal die Partikularlösung und 5 Verschiebungszustände ausrechnen, was also dem Arbeitsaufwand der Berechnung von Basis I und II und von 4 Iterationsprozessen entspräche.

Wir sahen jedoch, dass wir für die vorliegenden Beispiele mit höchstens 2 Iterationen für die praktisch genaue Lösung auskamen, dass die kurzen, die sägeförmigen und die scharfwinkligen Faltwerke nur eine Iteration brauchen, und dass für das zweite und alle folgenden Lastglieder die Berechnung der Basis I und II genügt. Das Werfel'sche Verfahren bietet keine solche, den Charakteristiken des Tragwerks anzupassende, Abkürzungsmöglichkeit.

Ein weiterer Vorteil des Iterationsverfahrens gegenüber dem Werfel'schen Verfahren liegt darin, dass es leicht in ein Programm für den Rechenautomaten entwickelt werden kann, weil die sich immer wiederholenden Rechengänge des Iterationsprozesses nur einmal programmiert werden müssen. Auch scheint die Benutzung der hier in den Grundaufgaben berechneten und der von Goldberg-Leve entwickelten Funktionen (siehe Anhang) einfacher zu sein als die Benutzung der Kalmanok'schen Hilfsfunktionen in der Werfel'schen Lösung.

Die Verfahren von Rüdiger und von Goldberg-Leve sind gedanklich leicht zu erfassen. Sie führen für jede Kante 4 Unbekannte ein. Das Goldberg-Leve'sche Verfahren arbeitet zum Beispiel mit den vertikalen und horizontalen Durchbiegungen, η und ζ , den Längsverschiebungen, u , und den Verdrehungen, θ . Das ergibt gewöhnlich ein System von $4(n + 1)$ Gleichungen mit $4(n + 1)$ Unbekannten, wobei n wieder die Anzahl der Platten des Faltwerks ist. Es ist schwierig, den Arbeitsaufwand für die Goldberg-Leve'sche Lösung mit dem für die anderen Verfahren zu vergleichen. Man kann zwar den Unterschied an Arbeitsaufwand für die Lösung von verschiedenen Gleichungssystemen ermitteln, doch würde ein solcher Vergleich für das Goldberg-Leve'sche Verfahren zu ungünstig ausfallen. Es soll darum hier nur darauf hingewiesen werden, dass die Lösung so vieler Gleichungen ohne Rechenautomaten praktisch kaum durchführbar ist, vor allem weil sich bei der routinemässigen Auflösung eines solchen Gleichungssystem keine Zwischenproben machen lassen. Ein weiterer Nachteil des Goldberg-Leve'schen Verfahrens besteht darin, dass es wie das Werfel'sche Verfahren



Geschlossene Lösungen:

Gleichungssystem nach Goldberg-Leve: 14 Gleichungen

B I L D 18
 =====
 Schematischer Vergleich von Berechnungsverfahren

No.	θ_1	η_1	ξ_1	u_1	θ_2	η_2	ξ_2	u_2	θ_3	η_3	ξ_3	u_3	ξ_4	u_4	
1	•	•	•	•	•	•	•								$M_1=0$
2	•	•	•	•	•	•	•								$V_1=0$
3	•	•	•	•	•	•	•								$N_1=0$
4	•	•	•	•	•	•	•								$S_1=0$
5	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			$\Sigma M_2=0$
6	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma F_{\eta 2}=0$
7	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma F_{\xi 2}=0$
8	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma S_2=0$
9					•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma M_3=0$
10					•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma F_{\eta 3}=0$
11					•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma F_{\xi 3}=0$
12					•	•	•		•	•	•	•	•	•	$\Sigma S_3=0$
13									•	•	•	•	•	•	$\Sigma F_{\eta 4}=0$
14									•	•	•	•	•	•	$\Sigma S_4=0$

Als Beispiel:

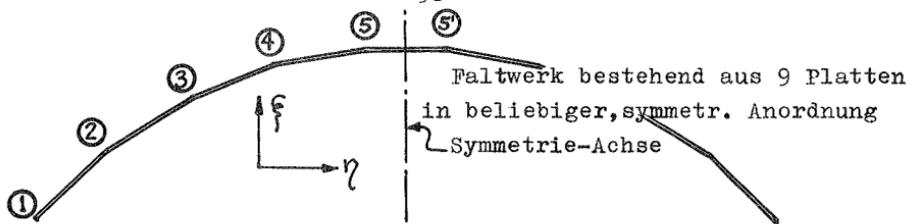
$$-C_7(\cos^2 \phi_{23} + \cos^2 \phi_{12}) \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 - C_9(\sin^2 \phi_{23} + \sin^2 \phi_{12}) \frac{Eh}{(1+\nu)^2} \frac{m}{\alpha}$$

$$C_7 = \frac{m}{\alpha} \pi^3 \left\{ \frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - \frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m} \right\}$$

$$C_9 = \pi \left\{ \frac{-\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m} + \frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m} \right\}$$

Die mehrstufigen Verfahren

Erforderl. Aufwand für Teil- und Endergebnisse	Iterationsverf. nach Mast	Zweistuf. Verfahren nach Werfel
Maximal erforderl. Anzahl simultaner Gleichungen pro Verschiebungszustd. bzw. pro Iterationsvorg. (θ, M od. S)	Zwei	Drei (od. e-Verfahren)
Aufwand zur Erreichung der praktisch genauen Lösung	Basis I+II, plus max. 2 Iterationen	Partikularlösg. + 5 Versch.-Zustd.
Aufwand zur Erreichung der mathem. genauen Lösung	Basis I+II, plus 4 Iterationen	wie oben



Geschlossene Lösungen :

Gleichungssystem nach Goldberg-Leve : 20 Gleichungen

wie in Bild 18

	θ_1	η_1	ξ_1	u_1	θ_2	η_2	ξ_2	u_2	θ_3	η_3	ξ_3	u_3	θ_4	η_4	ξ_4	u_4	θ_5	η_5	ξ_5	u_5		
1	•	•	•		•	•	•														$M_1 = 0$	
2	•	•	•		•	•	•															$V_1 = 0$
3		•	•	•		•	•	•														$N_1 = 0$
4		•	•	•		•	•	•														$S_1 = 0$
5	•	•	•		•	•	•		•	•	•											$\Sigma M_2 = 0$
6	•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•							$\Sigma F_{\eta_2} = 0$
7	•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•							$\Sigma F_{\xi_2} = 0$
8		•	•	•		•	•	•		•	•	•										$\Sigma S_2 = 0$
9					•	•	•		•	•	•		•	•	•							$\Sigma M_3 = 0$
10					•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\eta_3} = 0$
11					•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\xi_3} = 0$
12					•	•	•		•	•	•		•	•	•							$\Sigma S_3 = 0$
13									•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma M_4 = 0$
14									•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\eta_4} = 0$
15									•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\xi_4} = 0$
16									•	•	•		•	•	•		•	•	•			$\Sigma S_4 = 0$
17													•	•	•		•	•	•			$\Sigma M_5 = 0$
18													•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\eta_5} = 0$
19													•	•	•		•	•	•			$\Sigma F_{\xi_5} = 0$
20													•	•	•		•	•	•			$\Sigma S_5 = 0$

Die mehrstufigen Verfahren

Erforderl. Aufwand für Teil- und Endergebnisse	Iterationsverf. nach Mast	Zweistuf. Verfahren nach Werfel
Maximal erforderl. Anzahl simultaner Gleichungen pro Verschiebungszustd. bzw. pro Iterationsvorg. (θ, M od. S)	Vier	Vier (od. e-Verfahren)
Aufwand zur Erreichung der praktisch genauen Lösung	Basis I+II, plus max. 3 Iterationen	Partikularlösg. + 8 Versch.-Zustd.
Aufwand zur Erreichung der mathemat. genauen Lösung	Basis I+II, plus 7 Iterationen	wie oben

Bild 19 : Schematischer Vergleich von Berechnungsverfahren

keine Abkürzungsmöglichkeit vorsieht, wenn bei kurzen Spannweiten oder grossen Winkeln zwischen den Platten die Verschiebungen ξ und η keine grosse Rolle mehr spielen. Auch erlaubt es keine Vereinfachung bei der Berechnung des zweiten und der folgenden Lastglieder. Es darf hier für die letzteren vorgeschlagen werden, die unbekanntes vertikalen und horizontalen Verschiebungen der Innenkanten in der Goldberg-Leve'schen Lösung gleich Null zu setzen. Damit wird die Anzahl der Gleichungen auf fast die Hälfte reduziert. Diese Lastglieder verursachen praktisch nur Verdrehungen und Längsverschiebungen der Kanten, wie aus Rechenbeispiel Nr. 2 hervorgeht. Für das erste Lastglied wird man aber im allgemeinen diese Vereinfachung nicht machen können, weil man keine Möglichkeit zur Abschätzung des Fehlers hat, den man damit in die Berechnung einführt.

Ein schematischer Vergleich der uns jetzt zur Verfügung stehenden Verfahren ist in Bild 18 und 19 dargestellt. Das Faltwerk von Bild 18 besitzt sechs und das Faltwerk von Bild 19 besitzt neun Platten von beliebigen Abmessungen und Neigungswinkeln in symmetrischer Anordnung.

Rechenbeispiel Nr. 8 vergleicht die Berechnung einer Tonnen-schale nach der Schalentheorie mit einer Näherungslösung als Faltwerk. Die uns heute für die Berechnung von Kreiszy-linderschalen zur Verfügung stehenden Tabellenwerke [11],[17] et al. machen eine statische Annäherung der Schale als Faltwerk von vorn herein unwirtschaftlich. Es ist aber interessant fest-zustellen, dass die Ergebnisse zum Teil sehr gut und zum Teil recht schlecht übereinstimmen. Um eine bessere Näherung der Quermomente, M_y , zu erhalten, müsste man eine noch feinere polygonale Annäherung des Querschnittes vornehmen. Der damit verbundene Mehraufwand an Berechnung deutet an, dass die Nähe-rungsberechnung von Kreiszyinderschalen als Faltwerk nach der genaueren Theorie zu unwirtschaftlich ist.

6. NÄHERUNGSLÖSUNGEN DES VERFAHRENS

Wir haben uns bisher nur mit der genauen Lösung des Problems befasst. Zwar brachen wir die Iteration nach Erreichen einer bestimmten Rechengenauigkeit ab, doch wussten wir immer, in welcher Grössenordnung die verbleibenden, unausgeglichenen N-Kräfte und damit die vernachlässigten Schnittgrössen und Verformungen waren. Auch hätten wir jederzeit die Iterationen bis zur Eliminierung aller N-Kräfte fortsetzen und damit die mathematisch exakte Lösung erhalten können.

Im folgenden wollen wir Näherungen vorschlagen, die gleich bei Beginn der Rechnung eingeführt werden, und deren Auswirkung auf die Genauigkeit uns nur von Vergleichsrechnungen oder von theoretischen Überlegungen her bekannt ist.

Da ist zunächst die Möglichkeit, die Belastung in der Platten-ebene, p.h., in Randkräfte zusammenzufassen, indem man sich die aus Volumenskräften zusammengesetzte Gesamtlast bei dreiseitig gelagerten Scheiben an einer, und bei vierseitig gelagerten Scheiben je zur Hälfte an beiden, Längskanten als Linienlast angreifend denkt. (Diese Näherung ist übrigens in der Lösung nach Werfel bereits enthalten.) Die vorliegenden Rechenbeispiele zeigen, dass diese Näherung bei einem Seitenverhältnis von $a/b = 2$ und grösser tatsächlich das Endergebnis im Rahmen der hier angewandten Genauigkeit nicht beeinflusst. Wir sparen durch diese Näherung den recht umfangreichen Vorgang 3 bei der Berechnung von Basis I. Die Ersparnis tritt nur einmal auf, weil Vorgang 3 nicht in den Iterationsprozessen vorkommt.

Eine weitere Näherungsmöglichkeit besteht in der von Werfel vorgeschlagenen und in seinem Rechenbeispiel benutzten Anwendung der technischen Biegelehre an Stelle der Elastizitätstheorie für die Trägerwirkung der Platten in der Längsrichtung. Wir können diese Näherung natürlich auch auf das Iterationsverfahren anwenden, indem wir die an den beiden Raendern einer Platte angreifenden N-Kräfte zusammenfassen und mit dieser Gesamtlast die als Balken gedachten Scheiben

belasten. Rechenvorteile erzielen wir damit nur in Bezug auf die bequemeren Formeln der technischen Biegelehre im Vergleich zu den Formeln der Elastizitätstheorie. Die Anzahl der erforderlichen Iterationen wird sich kaum ändern, weil wir ja mit dem hier vorgeschlagenen Schema zur vorteilhaftesten Anwendung der Drossel sowieso praktisch immer 2 N-Kräfte gleichzeitig mit jeder Iteration eliminieren.

Das hier geschilderte Verfahren bietet noch eine weitere Näherungslösung, welche das Goldberg-Leve'sche Verfahren nicht und das Werfel'sche Verfahren nur bedingt ermöglichen:

Das Iterationsverfahren berechnet in Vorgang 1 bis 5 von Basis I und II das Verhalten des Tragwerks ohne Berücksichtigung der Querverformung und erfasst letztere anschliessend in Vorgang 6 bis 8 von Basis II und in den folgenden Iterationen. Es liegt somit nahe, von Vorgang 6 an nur noch die erste Harmonische zu berücksichtigen, weil die Querverformungen in der Längsrichtung einer Biegelinie proportional und somit der Sinus-Kurve ähnlich sind. Das bedeutet aber noch keine besondere Vereinfachung, weil auch bei der strengen Lösung die Rechnung für Lastglieder höherer Ordnung praktisch nach Basis I und II abgeschlossen ist. Es soll darum zur Vereinfachung noch die technische Biegetheorie herangezogen werden, welche für ein Seitenverhältnis von mehr als $a/b = 3$ praktisch immer der exakten Lösung gleichkommt. Die Näherungslösung lautet dann im einzelnen:

Schritt 1:

Berechne das Tragwerk für die volle, nicht in eine Fourierreihe entwickelte q -Belastung als System durchlaufender Platten unter der Annahme, dass sich die Innenkanten zwar verdrehen, aber nicht durchbiegen können. Dies entspricht dem ersten Schritt $\vartheta_j^{(q)} = \sum_m \vartheta_m^{(q)} j$, m der von Werfel vorgeschlagenen Näherung, wobei $\vartheta^{(q)}$ mit Hilfe von Zahlentafeln (oder durch Berücksichtigung von 2 oder 3 Lastgliedern) ermittelt wird.

Schritt 2:

Addiere die in Schritt 1 erhaltenen Kantenkräfte N (aus den Auflagerkräften V) und die als Randkräfte zusammengefasste volle p -Belastung. Die letztere ist über die Spannweite konstant. Die erstere wird als konstant angenommen, weil ihr wirklicher Verlauf (vgl. Bild 8a der Werfel'schen Lösung^[16]) fast geradlinig ist. Berechne die als Balken gedachten Scheiben für diese konstante Last unter der Annahme von Gelenken zwischen den Platten. Die an den gemeinsamen Kanten auftretenden Schubkräfte werden, wie bei der normalen Faltwerkstheorie, als geradlinig angenommen und entsprechend berechnet.

Bis hierher vernachlässigten wir die Querverformung und unser Ergebnis entspricht dem nach Vorgang 1 bis 5 von Basis I und II des Iterationsverfahrens.

Schritt 3:

Bestimme die zu den Platten senkrechten Verschiebungen, w , in der Mitte der Spannweite aus den "Balken"-Durchbiegungen, v , nach Williot. Nähere die Biegelinien der w durch eine Sinuskurve an, so dass sich alle Schnittgrößen, Verformungen und unausgeglichene Randkräfte infolge der Querverformung als reine sinus- bzw. cosinus Funktionen ergeben.

Schritt 4:

Setze die Rechnung beginnend mit Vorgang 7 von Basis II fort bis weitere Iterationen die Genauigkeit des Ergebnisses nicht mehr beeinflussen.

Dieses Näherungsverfahren bedarf also keiner Fortsetzung zur Berücksichtigung von Lastgliedern höherer Ordnung. Es hat gegenüber der von Werfel vorgeschlagenen Näherung folgende Vorteile:

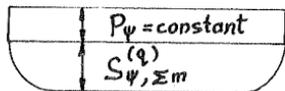
- 1.) Die p -Belastung wird voll, d.h. nicht nur durch ihr erstes Lastglied berücksichtigt.
- 2.) Die Korrekturen der Iterationsprozesse entsprechen gut den aus Verformungen entstandenen, unausgeglichene Randkräften, weil sich Sinuskurven und Biegelinien ähneln. Die

1. Schritt: Volle q -Belastung und unverschiebliche Konten: $\Theta_j^{(q)} = \sum_m \Theta_{j,m}^{(q)}$

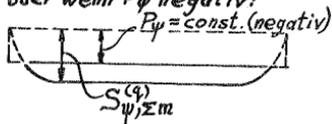


2. Schritt: Addiere die p -Belastung und erhalte Belastungsfunktion für die Scheiben, bzw. Balken

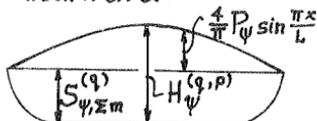
nach Mast:



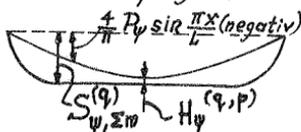
oder wenn P_{ψ} negativ:



nach Werfel:



oder wenn P_{ψ} negativ:



3. Schritt: Verlauf der unausgeglichene N-Kräfte

nach Mast:

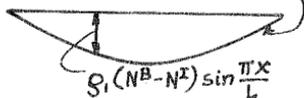


nach Werfel:

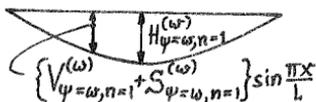
Wie obige Belastungsfunktionen

4. Schritt: Verlauf der ausgleichende N-Kräfte:

nach Mast: Sinuskurve



nach Werfel: Sinuskurve



5. Schritt: Ausgleich der N-Kräfte

nach Mast:



Sinuskurve deckt Biegelinie fast vollständig

Sinuskurve deckt die Belastungsfunktion nur unvollständig, da der Ausgleich nur Werte in Spannmittle gleichsetzt:

$$H_{\psi}^{(q,p)} + \sum_{\omega} \lambda_{n=1}^{(\omega)} H_{\psi, n=1}^{(\omega)} = 0$$

nach Werfel:

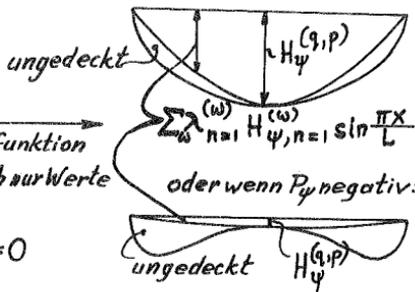


Bild 20: Schematischer Vergleich zweier Näherungslösungen

Anm.: Die Bezeichnungen entsprechen denen der Werfel'schen Arbeit [16]

sinusförmigen Verschiebungszustände nach Werfel entsprechen den auszugleichenden, fast geradlinig verlaufenden, Belastungen nur bedingt. Der Fehler wird um so grösser, je weniger die aus der q -Last entstandenen Randkräfte und die als Randkräfte zusammengefasste p -Last das gleiche Vorzeichen haben. Die Gegenüberstellung der zwei Näherungslösungen ist in Bild 20 näher erläutert.

Ann.: Es wird darauf hingewiesen, dass sich mehrere Autoren die Ähnlichkeit von Biegelinien und Sinuskurven für die Eliminierung der Berechnung von Lastgliedern höherer Ordnung bei der Anwendung der vereinfachten Faltwerkstheorie zu Nutze machten. Die Tatsache, dass Lastglieder höherer Ordnung kaum zu Verformungen in den Ebenen der Platten beitragen, ist für die vereinfachte Faltwerkstheorie bereits mehrfach^[27],^[34] festgestellt und vom Verfasser an anderer Stelle^[43] zu Rechnungsabkürzungen herangezogen worden.

7. A N H A N G
=====

- a. Die Grundaufgaben
- b. Die Goldberg-Leve'schen Formeln

Anhang

a. Die Grundaufgaben

Die im folgenden berechneten 12 Grundaufgaben sind Integrale der Scheibengleichung und der Plattengleichung. Sie wurden wie folgt ermittelt:

Die Scheiben:

Die Lösung der Scheibenaufgaben erfolgte mittels des Goldberg'schen [20] Ansatzes unter Umgehung der Airy'schen Spannungsfunktion:

$$\left. \begin{aligned} u_m(x, y) &= U_m(y) \cos \frac{m\pi x}{a} \\ v_m(x, y) &= V_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \text{vgl. Bild 1}$$

$$\sigma_{xm} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-\frac{m\pi}{a} U_m + \nu \frac{dV_m}{dy} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\sigma_{ym} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{dV_m}{dy} - \frac{m\pi}{a} \nu U_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\tau_{xym} = G \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{dU_m}{dy} + \frac{m\pi}{a} V_m \right) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die beiden Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes ein, wobei die Grösse Y eine am Scheibenelement angreifende Volumenskraft ist.*

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ 2. \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= -Y \end{aligned} \right\} \text{vgl. Bild 1}$$

Die sich daraus ergebenden Differentialgleichungen lauten:

$$1) \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \left[\frac{d^2 U_m}{dy^2} - \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 U_m \right] + \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{a} \frac{dV_m}{dy} \right] \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} = 0$$

$$2) \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{a} \frac{dU_m}{dy} + \left[\frac{2}{1-\nu} \frac{d^2 V_m}{dy^2} - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 V_m \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} = -Y$$

* Die in der y -Richtung wirkende Volumenskraft Y kann auch Null sein. Volumenskräfte in der x -Richtung müssen Null sein.

Bei gleichmässiger Belastung, P_0 , können wir setzen

$$Y = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\pi m} P_0 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Die Lösung der beiden Differentialgleichungen lautet dann für das m -te Glied der Belastungsfunktion

$$u_m(x,y) = \left\{ A_{1m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{3m} \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{4m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v_m(x,y) = \left\{ \left(A_{2m} - \frac{3-\nu}{1+\nu} A_{3m} \right) \cosh \frac{m\pi y}{a} + \left(A_{1m} - \frac{3-\nu}{1+\nu} A_{4m} \right) \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{1m} \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{3m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{\pi m} P_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \frac{2(1+\nu)}{E} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Die Grundaufgaben Nr. 1 bis Nr. 9 geben die Integrationskonstanten A_{1m} bis A_{4m} , sowie die wichtigsten Schnittgrössen und Verformungen für $p = p_0$ und $p_0 = 0$ für verschiedene Randbedingungen an.

Anmerkung: Die Schnittgrössen sind in Linienlasten angegeben und entstanden aus den Spannungen durch Multiplikation mit der Scheibendicke h .

Die Platten

Die gleichmässig verteilte Plattenlast q_0 wird in die Reihe

$$q = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi m} q_0 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

entwickelt. Für jedes m -te Glied der Reihe gilt dann

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_m}{\partial y^4} = \frac{4}{\pi m} \frac{q_0}{D} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

wobei
$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Das Integral dieser Plattengleichung ist

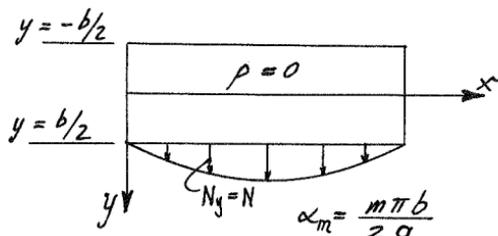
$$\begin{aligned} w_m(x,y) = & \left\{ A_{1m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & + A_{3m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{4m} \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \\ & \left. + \frac{4}{m\pi} q_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{1}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned}$$

Die Grundaufgaben Nr. 10 bis Nr. 12 geben die Integrationskonstanten A_{1m} bis A_{4m} sowie die wichtigsten Schnittgrößen und Verformungen für $q = q_0$ und $q = 0$ für verschiedene Randbedingungen an.

Anmerkung: Die Bilder zeigen schematisiert die Verhältnisse für das erste Lastglied. Es ist zu beachten, dass die Lage der x -Achse in den Grundaufgaben manchmal wechselt. Die Wahl des Koordinatenursprungs entsprach der einfachsten Ermittlung der Integrationskonstanten.

Grundaufgabe Nr. 1

Randbedingungen:



$$y = -b/2: N_y = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$y = b/2: N_y = N$$

$$N_{xy} = 0$$

$$A_{1m} = N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$A_{2m} = -N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

$$A_{3m} = N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

$$A_{4m} = -N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$N_{xm} = h \hat{\sigma}_x = -\frac{hE}{1+\nu} \frac{m\pi}{a} \left\{ A_{1m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + A_{3m} \left(\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\nu}{1+\nu} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \right. \\ \left. + A_{4m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2\nu}{1+\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_{xym} = h \hat{\tau}_{xy} = \frac{hE}{1+\nu} \frac{m\pi}{a} \left\{ A_{1m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + A_{3m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right. \\ \left. + A_{4m} \left(\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_{ym} = h \hat{\sigma}_y = \frac{hE}{1+\nu} \frac{m\pi}{a} \left\{ A_{1m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + A_{3m} \left(\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1+\nu} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \right. \\ \left. + A_{4m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1+\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$u(y=b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N(K_1 + K_2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u(y=-b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N(K_1 - K_2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v(y=b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N(K_3 + K_4) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$v(y=-b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N(-K_3 + K_4) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

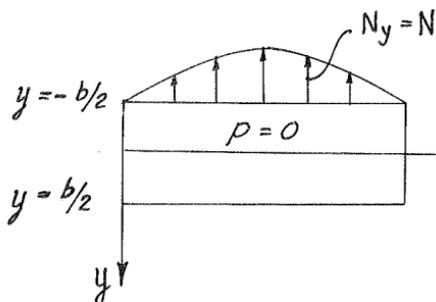
$$K_1 = \frac{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$K_2 = \frac{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

$$K_3 = \frac{2/1+\nu \sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$K_4 = \frac{-2/1+\nu \cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

Grundaufgabe Nr. 2



Randbedingungen:

$$y = -b/2 : N_y = N$$

$$N_{xy} = 0$$

$$y = b/2 : N_y = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

$$A_{1m} = N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \coth \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$A_{2m} = N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

$$A_{3m} = -N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m}$$

$$A_{4m} = -N \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

N_{xm} , N_{xym} und N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

$$u(y=b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N (K_1 - K_2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u(y=-b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N (K_1 + K_2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

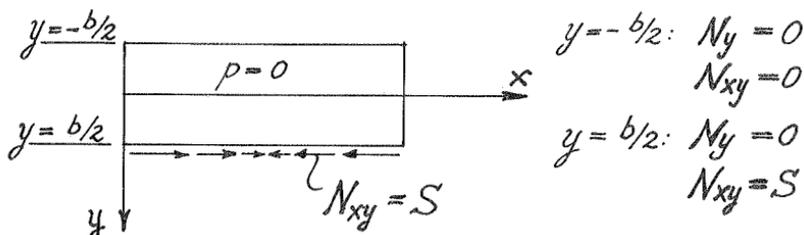
$$v(y=b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N (K_3 - K_4) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$v(y=-b/2) = \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} N (-K_3 - K_4) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

K_1 bis K_4 wie in Grundaufgabe Nr. 1

Grundaufgabe Nr. 3

Randbedingungen:



$$A_{1m} = -S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{2}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m}$$

$$A_{2m} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \coth \alpha_m - \frac{2}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m}$$

$$A_{3m} = -S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m}$$

$$A_{4m} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m}$$

N_{xm} , N_{xym} , N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

$$u_{(y=b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (K_5 - K_6) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u_{(y=-b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (K_5 + K_6) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v_{(y=b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (K_7 + K_8) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$v_{(y=-b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (-K_7 + K_8) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$K_5 = \frac{\frac{2}{1+\nu} \cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m}$$

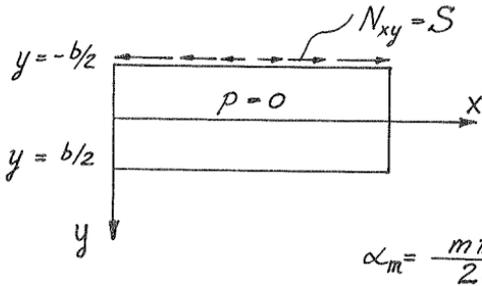
$$K_6 = \frac{\frac{2}{1+\nu} \sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m}$$

$$K_7 = \frac{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m} = K_1$$

$$K_8 = \frac{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m} = K_2$$

Grundaufgabe Nr. 4

Randbedingungen:



$$\begin{aligned}
 y = -b/2: \quad v &= 0 \\
 N_{xy} &= S \\
 y = b/2: \quad v &= 0 \\
 N_{xy} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

$$A_{1m} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{csch} \alpha_m \left(\alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

$$A_{2m} = -S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{sech} \alpha_m \left(\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

$$A_{3m} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{sech} \alpha_m$$

$$A_{4m} = -S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{csch} \alpha_m$$

N_{xm} , N_{xym} , N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

$$u(y=b/2) = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} (K_9 + K_{10}) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

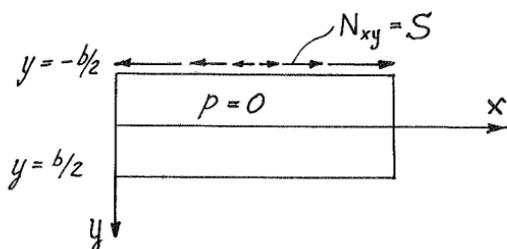
$$u(y=-b/2) = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} (K_9 - K_{10}) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_y(y=b/2) = S \frac{1+\nu}{4} (K_{11} + K_{12}) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_y(y=-b/2) = S \frac{1+\nu}{4} (-K_{11} + K_{12}) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

K_5 bis K_8 wie in Grundaufgabe Nr. 3

Grundaufgabe Nr. 5



Randbedingungen:

$$y = -b/2: N_y' = 0$$

$$N_{xy} = S$$

$$y = b/2: N_y = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$A_{1m} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{2}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m}$$

$$A_{2m} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\alpha_m \coth \alpha_m - \frac{2}{1+\nu}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m}$$

$$A_{3m} = -S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m}$$

$$A_{4m} = -S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m}$$

N_{xm} , N_{xym} , N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

$$u_{(y=b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (-K_5 - K_6) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u_{(y=-b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (-K_5 + K_6) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v_{(y=b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (-K_7 + K_8) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$v_{(y=-b/2)} = S \frac{1+\nu}{2hE} \frac{a}{m\pi} (K_7 + K_8) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$K_9 = \operatorname{csch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m)$$

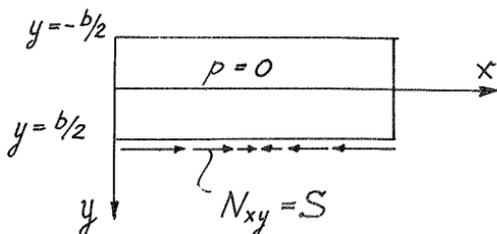
$$K_{10} = \operatorname{sech} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m)$$

$$K_{11} = \operatorname{sech} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \alpha_m)$$

$$K_{12} = \operatorname{csch} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \alpha_m)$$

Grundaufgabe Nr. 6

Randbedingungen:



$$y = -b/2: v = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$y = b/2: v = 0$$

$$N_{xy} = S$$

$$A_{1m} = -S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{csch} \alpha_m \left(\alpha_m \coth \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

$$A_{2m} = -S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{sech} \alpha_m \left(\alpha_m \tanh \alpha_m - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

$$A_{3m} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{sech} \alpha_m$$

$$A_{4m} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} \operatorname{csch} \alpha_m$$

$$u_{(y=b/2)} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} (-K_9 + K_{10}) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u_{(y=-b/2)} = S \left(\frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{a}{m\pi} \frac{1}{hE} (-K_9 - K_{10}) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

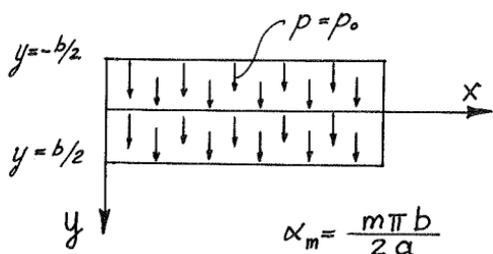
$$N_y(y=b/2) = S \frac{1+\nu}{4} (K_{11} - K_{12}) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_y(y=-b/2) = S \frac{1+\nu}{4} (-K_{11} - K_{12}) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

N_{xm} , N_{xym} , N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

K_9 bis K_{12} wie in Grundaufgabe Nr. 5.

Grundaufgabe Nr. 7



Randbedingungen:

$$y = -b/2 : \quad v = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$y = b/2 : \quad v = 0$$

$$N_{xy} = 0$$

$$A_{1m} = 0$$

$$A_{2m} = -\frac{4}{m\pi} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \operatorname{sech} \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m + 1)$$

$$A_{3m} = \frac{4}{m\pi} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \operatorname{sech} \alpha_m$$

$$A_{4m} = 0$$

$$N_{xy} = \frac{hE}{1+\nu} \frac{m\pi}{a} \left\{ A_{2m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{3m} \left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4}{m\pi} p_0 \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

N_{xm} und N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

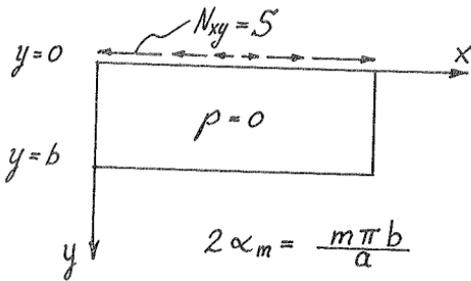
$$u_{(y=b/2)} = \frac{4}{\pi m} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 (\alpha_m \operatorname{sech}^2 \alpha_m - \tanh \alpha_m) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$u_{(y=-b/2)} = -u_{(y=b/2)}$$

$$N_{y(y=b/2)} = \frac{4}{\pi m} p_0 h \frac{1+\nu}{2} \frac{a}{m\pi} (\alpha_m \operatorname{sech}^2 \alpha_m - \frac{3+\nu}{1+\nu} \tanh \alpha_m) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_{y(y=-b/2)} = -N_{y(y=b/2)}$$

Grundaufgabe Nr. 8



Randbedingungen:

$$y=0: v=0$$

$$N_{xy}=S$$

$$y=b: N_y=0$$

$$N_{xy}=0$$

$$A_{1m} = -S \frac{(1+\nu)^2}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{(2\alpha_m)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \left(\frac{2}{1+\nu}\right)^2 - \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^2 \tanh^2(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)}$$

$$A_{2m} = S \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{2hE} \frac{a}{m\pi}$$

$$A_{3m} = S \frac{(1+\nu)^2}{2hE} \frac{a}{m\pi}$$

$$A_{4m} = S \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\tanh^2(2\alpha_m) - \frac{2}{(1-\nu)}}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)}$$

N_{xm}, N_{ym}, N_{xym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

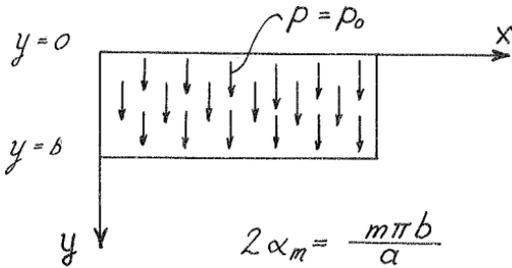
$$u(y=0) = A_{1m} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_y(y=0) = -S \frac{1+\nu}{2} \frac{(2\alpha_m)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \tanh^2(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$u(y=b) = -S \frac{(1+\nu)^2}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\left(\frac{2}{1+\nu}\right)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) - \frac{2}{1+\nu} (2\alpha_m) \operatorname{sech}(2\alpha_m) \tanh(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v(y=b) = -S \frac{(1+\nu)^2}{2hE} \frac{a}{m\pi} \frac{\frac{2}{1+\nu} (2\alpha_m) \operatorname{sech}(2\alpha_m) - \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)^2} \operatorname{sech}(2\alpha_m) \tanh(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Grundaufgabe Nr. 9



Randbedingungen:

$$y=0: \quad v=0$$

$$N_{xy}=0$$

$$y=b: \quad N_y=0$$

$$N_{xy}=0$$

$$A_{1m} = -\frac{4}{m\pi} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2$$

$$\left\{ \frac{(2\alpha_m)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \left(\frac{2}{1+\nu}\right)^2 [\operatorname{sech}(2\alpha_m) - 1] + \tanh^2(2\alpha_m) \left[\left(\frac{2}{1+\nu}\right)^2 - 1\right]}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} - \frac{\frac{2}{1+\nu} (2\alpha_m) \operatorname{sech}(2\alpha_m) \tanh(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} \right\}$$

$$A_{2m} = -\frac{4}{m\pi} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2$$

$$A_{3m} = -A_{2m}$$

$$A_{4m} = -\frac{4}{m\pi} p_0 \frac{(1+\nu)^2}{2E} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2$$

$$\frac{\frac{3+\nu}{1+\nu} \tanh^2(2\alpha_m) + \frac{2}{1+\nu} [\operatorname{sech}(2\alpha_m) - 1]}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)}$$

N_{xm} und N_{ym} wie in Grundaufgabe Nr. 1, aber mit obigen Integrationskonstanten.

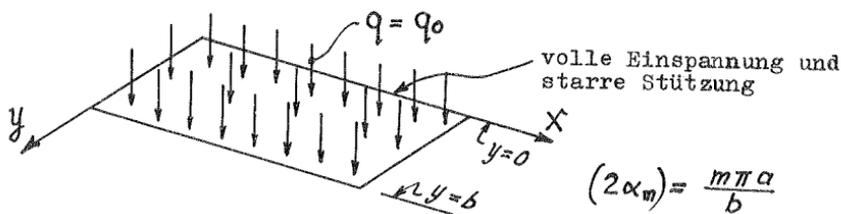
$$\begin{aligned}
 N_{xym} = & \frac{hE}{1+\nu} \frac{m\pi}{a} \left\{ A_{1m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & + A_{3m} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \\
 & + A_{4m} \left(\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \\
 & \left. + \frac{4}{m\pi} p_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \frac{1+\nu}{E} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$u(y=0) = A_{1m} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$N_y(y=0) = -\frac{4}{\pi m} p_0 h \frac{1+\nu}{2} \frac{a}{m\pi}$$

$$\left\{ \frac{(2\alpha_m)^2 \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) - \frac{2+\nu}{1+\nu} \tanh^2(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} - \frac{2}{1+\nu} \frac{(2\alpha_m) \operatorname{sech}(2\alpha_m) \tanh(2\alpha_m)}{(2\alpha_m) \operatorname{sech}^2(2\alpha_m) + \tanh(2\alpha_m)} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Grundaufgabe Nr. 10



Randbedingungen:

$$y = 0 : \quad w_m = 0$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial y} = 0$$

$$y = b : \quad M_{ym} = -D \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$V_{ym} = -D \left[\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0$$

$$A_{1m} = \frac{4}{m\pi} \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \left\{ \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)^2} \sinh(2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2} - \frac{\frac{\nu}{1-\nu} (2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2} \right\}$$

$$A_{2m} = -\frac{4}{m\pi} \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4$$

$$A_{3m} = \frac{4}{m\pi} \frac{q_0}{D} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \left\{ \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} \cosh(2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2} - \frac{\frac{\nu}{1-\nu} (2\alpha_m) \sinh(2\alpha_m) + \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2} \right\}$$

$$A_{4m} = -A_{1m}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ym} &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right) \\
 &= -D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left\{ -\nu \frac{4}{m\pi} q_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{1}{D} \right. \\
 &\quad + A_{1m} (1-\nu) \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} (1-\nu) \cosh \frac{m\pi y}{a} \\
 &\quad + A_{3m} \left[2 \cosh \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \\
 &\quad \left. + A_{4m} \left[2 \sinh \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xm} &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right) \\
 &= +D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left\{ \frac{4}{m\pi} q_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{1}{D} \right. \\
 &\quad + A_{1m} (1-\nu) \sinh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} (1-\nu) \cosh \frac{m\pi y}{a} \\
 &\quad + A_{3m} \left[-2\nu \cosh \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \\
 &\quad \left. + A_{4m} \left[-2\nu \sinh \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ym} &= -D \left(\frac{\partial^3 \omega_m}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 &= -D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \left\{ 2A_{3m} \sinh \frac{m\pi y}{a} + 2A_{4m} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xm} &= -D \left(\frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 &= -D \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \left\{ -\frac{4}{m\pi} q_0 \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{1}{D} \right. \\
 &\quad \left. + 2A_{3m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + 2A_{4m} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{yxm} &= -M_{xym} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \\
 &= -D(1-\nu) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left\{ A_{1m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + A_{2m} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 &\quad + A_{3m} \left[\sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \\
 &\quad \left. + A_{4m} \left[\cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

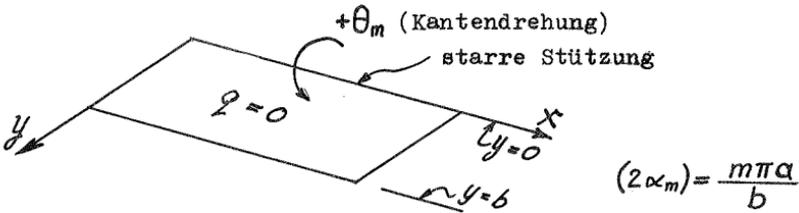
$$\begin{aligned}
 V_{ym} &= Q_{ym} + \frac{\partial M_{yxm}}{\partial x} = -D \left\{ \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x^2 \partial y} \right\} \\
 &= -D \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \left\{ -A_{1m} [(1-\nu) \cosh \frac{m\pi y}{a}] - A_{2m} [(1-\nu) \sinh \frac{m\pi y}{a}] \right. \\
 &\quad + A_{3m} \left[(1+\nu) \sinh \frac{m\pi y}{a} - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \\
 &\quad \left. + A_{4m} \left[(1+\nu) \cosh \frac{m\pi y}{a} - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

Anschnittswerte an der Innenkante:

$$\begin{aligned}
 M_y(y=0) &= -\frac{4}{m\pi} q_0 \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \left\{ 2 \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} \cosh(2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)^2}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\frac{\nu}{1-\nu} (2\alpha_m) \sinh(2\alpha_m) + \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)^2}} - 1 \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_y(y=0) &= \frac{4}{m\pi} q_0 \frac{a}{m\pi} \left\{ 2 \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)^2} \sinh(2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)^2}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\frac{\nu}{1-\nu} (2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)^2}} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

Grundaufgabe Nr. 11



Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 y=0: \quad & w_m = 0 \\
 & \frac{\partial w_m}{\partial y} = \theta_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 y=b: \quad & M_{ym} = 0 \\
 & V_{ym} = 0
 \end{aligned}$$

$$A_{1m} = \theta_m \frac{a}{m\pi} - A_{4m}$$

$$A_{2m} = 0$$

$$A_{3m} = -\theta_m \frac{a}{m\pi} \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2}$$

$$A_{4m} = \theta_m \frac{a}{m\pi} \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2}$$

M_{ym} , M_{xm} , Q_{ym} , Q_{xm} , V_{ym} etc. wie in Grundaufgabe Nr. 10, aber mit $q_0 = 0$ und mit obigen Integrationskonstanten A_{1m} bis A_{4m} .

Anschnittswerte an der Innenkante

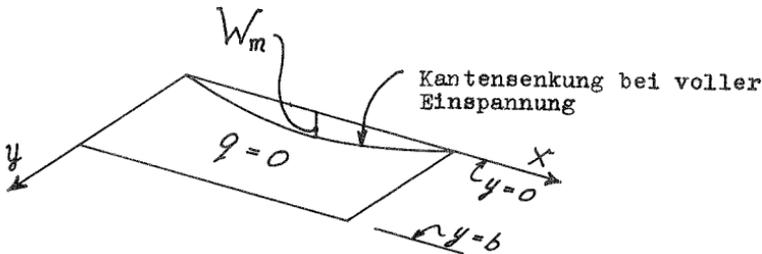
$$M_y(y=0) = D\theta_m \frac{m\pi}{\alpha} 2$$

$$\left[\frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) + (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$V_y(y=0) = -D\theta_m \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2$$

$$\left[2 \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2} (1-\nu) \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

Grundaufgabe Nr. 12



$$(2\alpha_m) = \frac{m\pi a}{b}$$

Randbedingungen:

$$y = 0: \quad w_m = W_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial y} = 0$$

$$y = b: \quad M_{ym} = 0$$

$$V_{ym} = 0$$

$$A_{1m} = -A_{4m}$$

$$A_{2m} = W_m$$

$$A_{3m} = -W_m \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2}$$

$$A_{4m} = W_m \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) - (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2}$$

M_{ym} , M_{xm} , Q_{ym} , Q_{xm} , V_{ym} etc. wie in Grundaufgabe Nr. 10,
aber mit $q_0 = 0$ und mit obigen Integrationskonstanten
 A_{1m} bis A_{4m} .

Anschnittswerte an der Innenkante

$$M_{ym} = DW_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$
$$\left[2 \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2} - (1-\nu) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$V_{ym} = -DW_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3$$
$$\left[2 \frac{\frac{3+\nu}{1-\nu} \sinh(2\alpha_m) \cosh(2\alpha_m) - (2\alpha_m)}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \cosh^2(2\alpha_m) + (2\alpha_m)^2 + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

b. Die Goldberg-Leve'schen Formeln

Fall A: Schnittgrößen infolge Verdrehungen der Kanten i u. j

$$y = b/2 : \omega_m = 0$$

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial y} = \bar{\Theta}_{im} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$y = -b/2 : \omega_m = 0$$

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial y} = \bar{\Theta}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\omega_m = 1/2 s_{-1m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [\lambda_{1m} [S_{1m}(y) - k_{tm} C_m(y)] - \lambda_{2m} [C_{1m}(y) - k_{cm} S_m(y)]] \right. \\ \left. - \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} [S_{1m}(y) - k_{tm} C_m(y)] + \lambda_{2m} [C_{1m}(y) - k_{cm} S_m(y)]] \right\}$$

$$M_{ym} = D_1 s_{1m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [-\lambda_{1m} [S_{1m}(y) + (\mu_1 - k_{tm}) C_m(y)] + \lambda_{2m} [C_{1m}(y) + (\mu_1 - k_{cm}) S_m(y)]] \right. \\ \left. + \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} [S_{1m}(y) + (\mu_1 - k_{tm}) C_m(y)] + \lambda_{2m} [C_{1m}(y) + (\mu_1 - k_{cm}) S_m(y)]] \right\}$$

$$M_{xm} = D_1 s_{1m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [\lambda_{1m} [S_{1m}(y) - (\mu_2 + k_{tm}) C_m(y)] - \lambda_{2m} [C_{1m}(y) - (\mu_2 + k_{cm}) S_m(y)]] \right. \\ \left. - \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} [S_{1m}(y) - (\mu_2 + k_{tm}) C_m(y)] + \lambda_{2m} [C_{1m}(y) - (\mu_2 + k_{cm}) S_m(y)]] \right\}$$

$$Q_{ym} = D_1 s_{2m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [-\lambda_{1m} S_m(y) + \lambda_{2m} C_m(y)] + \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} S_m(y) + \lambda_{2m} C_m(y)] \right\}$$

$$Q_{xm} = D_1 c_{2m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [-\lambda_{1m} C_m(y) + \lambda_{2m} S_m(y)] + \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} C_m(y) + \lambda_{2m} S_m(y)] \right\}$$

$$M_{yxm} = -M_{xy} = D_1 c_{1m}(x) \left\{ \bar{\Theta}_{im} [-\lambda_{1m} [C_{1m}(y) + (1 - k_{tm}) S_m(y)] \right. \\ \left. + \lambda_{2m} [S_{1m}(y) + (1 - k_{cm}) C_m(y)]] \right. \\ \left. + \bar{\Theta}_{jm} [\lambda_{1m} [C_{1m}(y) + (1 - k_{tm}) S_m(y)] + \lambda_{2m} [S_{1m}(y) + (1 - k_{cm}) C_m(y)]] \right\}$$

$$k_{tm} = \alpha_m \tanh \alpha_m$$

$$k_{cm} = \alpha_m \coth \alpha_m$$

$$\lambda_{1m} = (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m)^{-1}$$

$$\lambda_{2m} = (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m)^{-1}$$

$$\Delta_{2m}(x) = \frac{\alpha}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$\Delta_{1m}(x) = \frac{m\pi}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$\Delta_{2m}(x) = \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$S_m(y) = \sinh \frac{m\pi y}{\alpha}$$

$$C_m(y) = \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}$$

$$S_{1m}(y) = \frac{m\pi y}{\alpha} \sinh \frac{m\pi y}{\alpha}$$

$$C_{1m}(y) = \frac{m\pi y}{\alpha} \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}$$

$$C_{1m}(x) = \frac{m\pi}{\alpha} \cos \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$C_{2m}(x) = \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \cos \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} j$$

$$D_i = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} j$$

$$\mu_1 = \frac{2}{1-\nu} j \quad \mu_2 = \frac{2\nu}{1-\nu} j$$

Fall B: Schnittgrößen infolge Durchbiegungen der Kanten i u. j

$$y = b/2: \frac{\partial w_m}{\partial y} = 0$$

$$w_m = \bar{w}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$y = -b/2: \frac{\partial w_m}{\partial y} = 0$$

$$w_m = \bar{w}_{jm} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \Delta_{2m}(x) \left\{ \bar{w}_{jm} \left[-\lambda_{3m} [S_{1m}(y) - (1+k_{cm}) C_m(y)] + \lambda_{4m} [C_{1m}(y) - (1+k_{tm}) S_m(y)] \right] \right. \\ \left. - \bar{w}_{jm} \left[\lambda_{3m} [S_{1m}(y) - (1+k_{cm}) C_m(y)] + \lambda_{4m} [C_{1m}(y) - (1+k_{tm}) S_m(y)] \right] \right\}$$

$$M_{ym} = D_i \Delta_{2m}(x) \left\{ \bar{w}_{jm} \left[\lambda_{3m} [S_{1m}(y) + (\mu_3 - k_{cm}) C_m(y)] - \lambda_{4m} [C_{1m}(y) + (\mu_3 - k_{tm}) S_m(y)] \right] \right. \\ \left. + \bar{w}_{jm} \left[\lambda_{3m} [S_{1m}(y) + (\mu_3 - k_{cm}) C_m(y)] + \lambda_{4m} [C_{1m}(y) + (\mu_3 - k_{tm}) S_m(y)] \right] \right\}$$

$$M_{xm} = D_i \Delta_{2m}(x) \left\{ \bar{w}_{jm} \left[-\lambda_{3m} [S_{1m}(y) - (\mu_3 + k_{cm}) C_m(y)] + \lambda_{4m} [C_{1m}(y) - (\mu_3 + k_{tm}) S_m(y)] \right] \right. \\ \left. - \bar{w}_{jm} \left[\lambda_{3m} [S_{1m}(y) - (\mu_3 + k_{cm}) C_m(y)] + \lambda_{4m} [C_{1m}(y) - (\mu_3 + k_{tm}) S_m(y)] \right] \right\}$$

$$Q_{ym} = D \Delta_{3m}^{(x)} \left\{ \overline{\omega}_{ijm} [\lambda_{3m} S_m^{(y)} - \lambda_{4m} C_m^{(y)}] + \overline{\omega}_{jim} [\lambda_{3m} S_m^{(y)} + \lambda_{4m} C_m^{(y)}] \right\}$$

$$Q_{xm} = D C_{3m}^{(x)} \left\{ \overline{\omega}_{ijm} [\lambda_{3m} C_m^{(y)} - \lambda_{4m} S_m^{(y)}] + \overline{\omega}_{jim} [\lambda_{3m} C_m^{(y)} + \lambda_{4m} S_m^{(y)}] \right\}$$

$$M_{yxm} = -M_{xym} = D_1 C_{2m}^{(x)} \left[\overline{\omega}_{ijm} \left\{ \lambda_{3m} [C_{1m}^{(y)} - k_{cm} S_m^{(y)}] - \lambda_{4m} [S_{1m}^{(y)} - k_{tm} C_m^{(y)}] \right\} + \overline{\omega}_{jim} \left\{ \lambda_{3m} [C_{1m}^{(y)} - k_{cm} S_m^{(y)}] + \lambda_{4m} [S_{1m}^{(y)} - k_{tm} C_m^{(y)}] \right\} \right]$$

$$\lambda_{3m} = (\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \operatorname{cosh} \alpha_m)^{-1} \quad \lambda_{4m} = (\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \operatorname{sinh} \alpha_m)^{-1}$$

$$\Delta_m^{(x)} = \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\Delta_{3m}^{(x)} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\mu_3 = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$C_{3m}^{(x)} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Kantenreaktionen infolge Belastung und Verformung

$$M_{ijm} = M_{Fijm} + D \frac{m}{a} \Delta_m^{(x)} [C_1 \bar{\theta}_{im} + C_2 \bar{\theta}_{jm} - C_3 \bar{\omega}_{ijm} + C_4 \bar{\omega}_{jim}]$$

$$M_{jim} = M_{Fjim} + D \frac{m}{a} \Delta_m^{(x)} [C_1 \bar{\theta}_{jm} + C_2 \bar{\theta}_{im} + C_3 \bar{\omega}_{jim} - C_4 \bar{\omega}_{ijm}]$$

$$V_{ijm} = V_{Fijm} + D \left(\frac{m}{a}\right)^2 \Delta_m^{(x)} [C_5 \bar{\theta}_{im} + C_6 \bar{\theta}_{jm} - C_7 \bar{\omega}_{ijm} + C_8 \bar{\omega}_{jim}]$$

$$V_{jim} = V_{Fjim} + D \left(\frac{m}{a}\right)^2 \Delta_m^{(x)} [-C_5 \bar{\theta}_{jm} - C_6 \bar{\theta}_{im} - C_7 \bar{\omega}_{jim} + C_8 \bar{\omega}_{ijm}]$$

$$C_3 = \frac{m}{a} C_3^*$$

$$C_4 = \frac{m}{a} C_4^*$$

$$C_1 = \pi \left[\frac{\operatorname{cosh} \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \operatorname{sinh} \alpha_m} - \frac{\operatorname{sinh} \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \operatorname{cosh} \alpha_m} \right]$$

$$C_2 = -\pi \left[\frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m + \sinh \alpha_m} + \frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m - \cosh \alpha_m} \right]$$

$$C_3^* = C_5 = \pi^2 \left[\frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - \frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m} - (1-\nu) \right]$$

$$C_4^* = C_6 = -\pi^2 \left[\frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} + \frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m} \right]$$

$$C_7^* = \pi^3 \left[\frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - \frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m} \right]$$

$$C_8^* = -\pi^3 \left[\frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} + \frac{\cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{sech} \alpha_m - \sinh \alpha_m} \right]$$

Kantenreaktionen und Schnittgrößen infolge Belastung

bei voller Einspannung

$$M_{Fijm} = -M_{Fjim} = \frac{4qa^2}{m^3 \pi^3} \left[\frac{2 \cosh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - 1 \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$V_{Fijm} = V_{Fjim} = \frac{8qa}{m^2 \pi^2} \left[\frac{\sinh \alpha_m}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$M_{yFm} = -\frac{4qa^2(1-\nu)}{m^3 \pi^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \left\{ \frac{\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - \frac{\nu}{1-\nu} \right\}$$

$$M_{xFm} = \frac{4qa^2(1-\nu)}{m^3 \pi^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \left\{ \frac{\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} + \frac{1}{1-\nu} \right\}$$

$$y_{Fm} = -\frac{8qa}{m^2 \pi^2} \frac{\sinh \frac{m\pi y}{a}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$x_{Fm} = -\frac{4qa}{m^2 \pi^2} \left[\frac{2 \cosh \frac{m\pi y}{a}}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m} - 1 \right] \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$M_{yxFm} = -M_{xyFm} = -\frac{4qa^2(1-\nu)}{m^3 \pi^3} \frac{1}{\alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m + \cosh \alpha_m}$$

$$\left\{ \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{coth} \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

LEBENS LAUF UND STUDIENGANG:

Geboren: 7.11.1925 in Kattowitz (Polen)

Schul Ausbildung: 1933 - 1936 Vorschule Lehmann in Breslau
1936 - 1943 Maria Magdalena Oberschule in Breslau

Wehrdienst: 1943 - 1945 Deutsche Wehrmacht
1945 - 1947 Franz. Kriegsgefangenschaft

Studium: 1948 - 1952 Studium des Bauingenieurwesens an der T.H. Stuttgart mit der Erwerbung des Grades Diplomingenieur
1956 - 1958 Abendvorlesungen an der Columbia Universität in New York mit der Erwerbung des Grades Master of Science

Beruf l. Tätigkeit: 1953 Im Ingenieurbüro Prof. Kintzinger, Stuttgart: Entwurf u. Berechnung von Ingenieur-Hochbauten,
1954 - 1955 bei der Dyckerhoff & Widmann K.G., Niederlassung Hamburg: Berechnung u. Bauleitung von Schalen- u. Spannbetonbauten,
1956 - 1957 im Ingenieurbüro Abbott, Merkt & Co., New York, USA: Entwurf u. Berechnung von Ingenieur-Hochbauten,
1957 - 1959 im Ingenieurbüro Moran, Proctor Mueser & Rutledge, New York: Entwurf u. Berechnung des Trockendocks Nr. 6 für die U.S. Navy im Puget Sound,
1959 - 1960 im Ingenieurbüro Ammann & Whitney, New York, Entwurf u. Berechnung der Verrazano-Narrows Hängebrücke über die Narrows,
1960 bis jetzt im Hauptbüro der Portland Cement Association in Chicago: Ingenieurberatung im Massivbau, insbesondere auf den Gebieten der Flächentragwerke und des Spannbetonbaus.