

# Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen

von

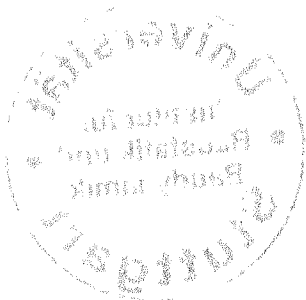
**Stefan Kimmich**



Bericht Nr. 12 (1990)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1990

*14.03.2008*

*Z*



---

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,  
Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

# **Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen**

von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Stefan Kimmich**

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Bufler

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Dezember 1990

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1990

## Zusammenfassung

In ihrem Wesen liegt der Strukturoptimierung immer eine interdisziplinäre Aufgabenstellung zugrunde. Bei der rechnerunterstützten Lösung von Strukturoptimierungsproblemen tritt diese Charakteristik in besonderer Weise hervor. Das Gesamtproblem gliedert sich für einen allgemeinen und direkten Lösungsansatz in die Teilaufgaben

- der Programmtechnik
- der Problemformulierung
- der Geometriebeschreibung
- der Struktur- und Sensibilitätsanalyse und
- der Mathematischen Programmierung.

Eine zufriedenstellende Lösung von Strukturoptimierungsproblemen setzt die Kenntnis der Prinzipien dieser unterschiedlichen Disziplinen voraus. Die gegenseitige Beeinflussung dieser Teilaufgaben muß ebenfalls berücksichtigt werden. Im konkreten Fall verlangt jedes Optimierungsproblem gleichermaßen einen Überblick über das generelle Vorgehen und detaillierteres Wissen über die verwendeten Lösungsstrategien. Deshalb stehen am Anfang dieser Arbeit (Kap.1-3) zunächst die eher grundlegenden Überlegungen zum Programmkonzept und der erforderlichen Programmtechnik. Für jede Optimierungsaufgabe stellt sich zuerst die elementare Frage nach der Art der Problemformulierung. Im 4. Kapitel sind auf dem Hintergrund der Leichtbauweisen verschiedene Möglichkeiten der Formulierung des Optimierungsproblems aufgezeigt. Die unterschiedliche Problemstellungen lassen sich in dieser Hinsicht grob durch die Auswahl des Zielkriteriums, der Nebenbedingungen und der eingeführten Variabilität den Fällen optimale Steifigkeit, minimales Gewicht und optimale Festigkeit zuordnen.

Für die direkte Lösung einer Optimierungsaufgabe mit den Verfahren der Mathematischen Programmierung muß ein geeignetes Optimierungsmodell aufgebaut werden. Auf dieser Ebene besteht ein Zusammenhang zwischen der Geometriebeschreibung (Entwurfsmodell) und der Struktur- bzw. Sensibilitätsanalyse (Strukturmodell). Alle drei Teilaufgaben sind durch das Optimierungsmodell eng miteinander verknüpft. In Kapitel 5 wird die besondere Abhängigkeit zwischen der Struktur- und Sensibilitätsanalyse behandelt. Die effiziente Problemformulierung und diskrete Sensibilitätsanalyse werden in Kapitel 6 für ein dreidimensionales Fachwerk und Schalenelement durchgeführt. In den ausgeführten Optimierungsproblemen zeigen sich die Vorteile der verwendeten integrierten Programmlösung. Dabei spielen die interaktive Kontrolle des Optimierungsvorgangs und die ständige Überprüfung der in den Modellen getroffenen Annahmen eine wichtige Rolle.

## Abstract

Structural optimization is always based on various disciplines. This characteristic becomes obvious when a computer is used for the solution of structural optimization problems. In a general and direct approach, several disciplines contribute to the solution of the entire problem, which can be distinguished in:

- programming techniques
- problem formulation
- geometric modelling
- structural and sensitivity analysis
- mathematical programming.

A satisfactory solution of structural optimization problems presumes the knowledge of the principles of the individual disciplines. Beyond this the interdependence of these disciplines in the optimization process has to be considered. Therefore an impression of the overall procedure as well as detailed knowledge of the individual solution strategies is required, when real optimization tasks are faced. Due to this, the chapters one to three are dedicated to some basic considerations of program concepts and programming techniques. For each individual optimization task the according optimization problem has to be formulated. This subject is considered in chapter four, where the principles of light weight constructions are suitably used. These principles finally lead to the characteristic problems of optimal stiffness, minimal weight and optimal strength. Here the introduction of variables, objective and constraint functions become important for the statement of the problem.

The direct solution of an optimization task with the strategies of mathematical programming requires the construction of an appropriate optimization model. On this level there exists a relation between geometric modelling (design model) and structural or sensitivity analysis respectively (structural model). All three disciplines are tightly joined together by the optimization model. Chapter five especially deals with the interdependence of structural and sensitivity analysis. The derivation of an efficient problem formulation and the discrete sensitivity analysis is done in chapter six for three dimensional truss and shell elements. Several numerical examples show the advantages of the underlying integrated program concept. The importance of an interactive program control is demonstrated for these examples. This program option can be useful for the verification of the assumptions introduced in the different modelling levels.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart und als Mitglied des Sonderforschungsbereichs 230 "Natürliche Konstruktionen – Leichtbau in Architektur und Natur".

Herrn Professor Dr.-Ing. E.Ramm danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine großzügige Unterstützung und die Übernahme des Hauptberichtes.

Bei Herrn Professor Dr.-Ing. H.Buffer bedanke ich mich für sein Interesse an der Arbeit, die wertvollen Diskussionen und die Übernahme des Mitberichtes.

Besonders dankbar bin ich über die gute Zusammenarbeit und Gesprächsbereitschaft meines langjährigen Kollegen K.-U. Bletzinger. Zusammen mit seinem Beitrag zur Strukturoptimierung konnte die hier vorgestellte Programmlösung entstehen. Ebenso gilt mein Dank allen anderen Mitarbeitern des Institutes sowie den Studenten, die als wissenschaftliche Hilfskräfte oder durch Diplomarbeiten mit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Familie für das entgegengebrachte Verständnis und die Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit.

Stefan Kimmich

# Inhaltsverzeichnis

<b>1.0 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2.0 Vorbemerkungen zur Problemstellung</b>	<b>3</b>
2.1 Motivation	3
2.2 Strukturoptimierung - eine interdisziplinäre Aufgabe	4
2.2.1 Entwicklung der unterschiedlichen Disziplinen	4
2.2.2 Integration der Teilaufgaben	6
2.2.3 Sequentielle Lösungsstrategie und Interaktion	7
2.2.4 Methoden zur Lösung großer Optimierungsprobleme	9
2.3 Anforderungen an das Programmkonzept und die Problemformulierung	9
2.4 Ziel und Aufbau der Arbeit	10
<b>3.0 Integrierte Konzepte für die Strukturoptimierung</b>	<b>13</b>
3.1 Entwicklung alternativer Lösungskonzepte	13
3.1.1 Integrierte Programmsysteme	14
3.1.2 Programminternes Lösungskonzept	16
3.1.3 Gegenüberstellung der unterschiedlichen Konzepte	18
3.2 CARAT und zugrunde liegendes Programmkonzept	19
3.2.1 Programmtechnische Voraussetzungen	20
3.2.2 Struktur und Funktion der Programmkomponenten	21
3.2.3 Bewertung des vorliegenden Programmkonzepts	32
3.3 Entwicklungen und Tendenzen in der Computertechnologie	33
<b>4.0 Formulierung des Optimierungsproblems</b>	<b>35</b>
4.1 Leichtbau als übergeordnetes Zielkriterium	35
4.1.1 Einschränkung und Klassifikation der Problemstellung	35
4.1.2 Kriterien für die Problemformulierung	37
4.2 Strukturoptimierung mit finiten Elementen	40
4.2.1 Bezeichnungen und Definitionen	41
4.2.2 Ausgangsgleichungen der finiten Elementmethode	43
4.2.3 Herleitung finiter Elemente aus Energieprinzipien	44
4.2.4 Definition der Optimierungsfunktionen	49
4.2.5 Einfluß der Diskretisierung auf das Optimierungsproblem	53
4.3 Definition der Optimierungsvariablen im Parameterraum	56
4.3.1 Identifikation der Variablen im Programmkontext	56
4.3.2 Variablen zur Beschreibung der Strukturgeometrie	58
4.3.3 Variablen für die simultane Strukturanalyse- und optimierung	59
4.4 Formulierung charakteristischer Strukturoptimierungsprobleme	63

4.4.1	Optimale Steifigkeit von Strukturen	64
4.4.2	Minimales Gewicht von Strukturen	69
4.4.3	Strukturauslegung für ein optimales Massenträgheitsmoment	71
4.4.4	Optimale Spannungsverteilung von Strukturen	71
4.5	Besondere Aspekte bei der Problemformulierung	75
4.5.1	Optimierung für mehrere Lastfälle	75
4.5.2	Abhängigkeit der Belastung von den Optimierungsvariablen	77
4.5.3	Optimierung von hybriden Tragwerken	79
4.5.4	Michellstrukturen	80
<b>5.0</b>	<b>Methoden der Sensibilitätsanalyse</b>	<b>82</b>
5.1	Übersicht	82
5.2	Anwendungsgebiete der Sensibilitätsanalyse	83
5.2.1	Gegenüberstellung verschiedener Methoden	84
5.2.2	Sensibilitätsanalyse aus praktischer Sicht	86
5.3	Diskrete Methoden der Sensibilitätsanalyse	88
5.3.1	Einfluß der Elementwahl	92
5.3.2	Differenzenmethoden	98
5.3.3	Semi-analytisches Verfahren	102
5.3.4	Analytische Verfahren	109
5.3.5	Programmtechnische Aspekte	110
5.4	Variationelle Methoden der Sensibilitätsanalyse	111
5.4.1	Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Querschnittsvariablen	113
5.4.2	Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Formvariablen	117
5.4.3	Vergleich von kontinuierlichen und diskreten Verfahren	122
5.5	Praktische Anwendung der Sensibilitätsanalyse	124
<b>6.0</b>	<b>Problemformulierung und diskrete Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen</b>	<b>127</b>
6.1	Isoparametrisches dreidimensionales Fachwerkelement	129
6.1.1	Ableitung der Elementgeometrie und Elementverschiebungen	129
6.1.2	Ableitung der Steifigkeitsmatrix und der Elementlastvektoren	132
6.1.3	Ableitungen der Spannungen und der Spannungsresultierenden	136
6.1.4	Formulierung der Optimierungsfunktionen	137
6.1.5	Elementspezifische Tragwerksantwort	140
6.2	Isoparametrisches degeneriertes Schalenelement	142
6.2.1	Ableitungen der Elementgeometrie und Elementverschiebungen	144
6.2.2	Steifigkeitsmatrix und konsistente Elementlastvektoren	150
6.2.3	Ableitungen der Spannungen und der Spannungsresultierenden	159
6.2.4	Formulierung der Optimierungsfunktionen	166
6.2.5	Elementverhalten und Tragwerksantwort	171



<b>7.0 Numerische Beispiele</b> .....	<b>178</b>
7.1 Auswahl der Beispiele .....	178
7.2 Sensibilitätsanalyse für eine Hochbauplatte .....	179
7.3 Optimierung freier Schalenformen .....	184
7.3.1 Problematik der Schalenoptimierung .....	184
7.3.2 Optimierung einer freigeformten Schale .....	188
7.4 Optimierung eines Schwungrads .....	192
<b>8.0 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen</b> .....	<b>198</b>
<b>9.0 Bibliographie</b> .....	<b>201</b>

## 1.0 Einleitung

Der Fortschritt in der Computertechnologie und die damit verbundene rasante Weiterentwicklung von Computeranwendungen haben in den vergangenen Jahren vor allem im Bereich der ingenieurmäßigen Problemlösung und -simulation eine enorme Umwälzung gebracht. Die rechnergestützte Beschreibung und Modellierung von Ingenieuraufgaben mit den Möglichkeiten des CAD ("Computer Aided Design") als auch deren Lösung mit entsprechenden Rechenprogrammen (z.B. Finite Elementmethode) haben in den Bereichen der Luft- und Raumfahrt, im Maschinen- und Fahrzeugbau und auch im Bauwesen am meisten von dieser Entwicklung profitiert. Durch den Einsatz des Rechners sind sich in diesen Anwendungsgebieten die Problemformulierung, die Problemlösung und die praktische Umsetzung der Ergebnisse im Sinne des CAM ("Computer Aided Manufacturing") in entscheidender Weise näher gekommen. In dieser Hinsicht ergeben sich für die industrielle Produktentwicklung neue Möglichkeiten in den Bereichen des Entwerfens, der Strukturanalyse und der Konstruktion.

Durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechner und Programmsysteme können Parameterstudien schnell und effizient durchgeführt werden. Damit lassen sich die Produkte in ihren Eigenschaften vielfach verbessern. Bei vielen geänderten Parametern oder widersprüchlichen Ergebnissen aus der Strukturberechnung wird die intuitive Verbesserung einer Struktur schwierig, wenn nicht sogar unmöglich. In manchen Fällen hilft hier eine Ermittlung der Parameterempfindlichkeit der Struktur mit Hilfe der Sensibilitätsanalyse weiter. Sie liefert für jede Parametervariation eine entsprechende Prognose für die zu erwartende Änderung der Struktureigenschaften. Ist die Struktur im vorliegenden Entwurf bereits hoch ausgenutzt, beeinflussen sich die Parameter häufig gegenseitig und eine entscheidende Verbesserung der Struktur kann über eine manuelle Veränderung des Entwurfmodells (CAD) nicht mehr erreicht werden. In diesem Fall bieten sich mathematische Optimierungsverfahren für den Entwurfs-, Analyse- und Konstruktionsprozeß an. Eine gleichmäßig ausgenutzte Struktur läßt sich praktisch nur über die Strukturoptimierung unter dem Einsatz mathematischer Verfahren erreichen, bei welcher Form und Materialverteilung in den zugelassenen Grenzen gleichzeitig variiert werden können.

Bei der Strukturoptimierung wird ein Prozeß in Gang gesetzt, welcher die einzelnen Aspekte aus dem Bereich des Entwerfens, der Strukturanalyse und konstruktive Gesichtspunkte miteinander in Verbindung bringt. Auf der einen Seite stellt sich hier die Frage, in welcher Form die unterschiedlichen Aufgaben im Optimierungsprozeß als einzeln vorliegende Programmsysteme oder -einheiten in ein integriertes Lösungskonzept für die Strukturoptimierung eingefügt werden können. Bei der Beantwortung dieser Frage stehen vor allem programmtechnische Aspek-

te und Überlegungen für die möglichst effiziente Integration der verschiedenen Teilaufgaben im Vordergrund. Auf der anderen Seite muß die Frage geklärt werden, welches generelle Ziel - also welche Art von Verbesserung - mit einer Strukturoptimierung verfolgt werden soll. Dies führt direkt zu der eigentlichen Formulierung des Optimierungsproblems. Zur Definition einiger grundlegender Optimierungsaufgaben kann auf Leichtbaukonstruktionen und ihre Gestaltungsprinzipien zurückgegriffen werden. Als die wesentlichen Zielkriterien für die Strukturauslegung ergeben sich damit Probleme optimaler Steifigkeit, minimalen Gewichts oder optimaler Festigkeit. Für alle diese Fragestellungen muß die interdisziplinäre Aufgabe der Strukturoptimierung in programmtechnischer Hinsicht und auf der Ebene der Problemformulierung konzeptionell gelöst werden.

Die Verwendung von effizienten mathematischen Optimierungsverfahren verlangt die Ermittlung der Parameterempfindlichkeit durch die Sensibilitätsanalyse. Bei einer am Computer ausgerichteten Verwirklichung der Strukturoptimierung zeigt sich, daß die Sensibilitätsanalyse in gewisser Weise vom gewählten Programmkonzept und der Problemformulierung abhängt. Darüber hinaus steht die Art der Strukturanalyse (z.B. Finite Elementmethode) häufig mit der Sensibilitätsanalyse direkt in Verbindung. Die Bestimmung der Parameterempfindlichkeit bringt eine zusätzliche Verknüpfung der Teilaufgaben mit sich, welche ebenfalls in die konzeptionellen Überlegungen für eine integrierte Programmlösung eingehen. Im verwendeten Konzept sind die verschiedenen Aspekte der Programmtechnik, der Problemformulierung und der Sensibilitätsanalyse berücksichtigt. Die entstandene Programmlösung kann als vielseitiges Werkzeug zur Strukturoptimierung im Entwurfs- und Konstruktionsprozeß eingesetzt werden.

## 2.0 Vorbemerkungen zur Problemstellung

### 2.1 Motivation

Einige grundsätzliche Fragen, welche in direkter Verbindung mit dem vorliegenden Thema stehen, sind im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 230 - "Natürliche Konstruktionen - Leichtbau in Architektur und Natur" - auf interdisziplinärer Ebene aufgegriffen und diskutiert worden. Im Projektbereich "Strukturoptimierung natürlicher Baukonstruktionen" ging es zunächst um die Erarbeitung der Grundlagen für die technische Optimierung /Bletzinger 1985/. Darauf aufbauend konnten Kriterien zur Beurteilung und Klassifikation von natürlichen und technischen Konstruktionen gefunden werden. Unter welchen Umständen solche Konstruktionen optimal sind, welche maßgebenden Zielkriterien in der Natur und Technik vorliegen, waren die zentralen Fragen für weiterführende Arbeiten /Ramm 1986a/.

Gewiß ist der Anspruch solcher Fragen hoch und kann erwartungsgemäß mit den heute zur Verfügung stehenden technischen Mitteln nur ansatzweise erfüllt werden. Für die Bestimmung der wesentlichen Zielkriterien und Konstruktionsprinzipien in der Natur und Technik ist eine so grundsätzliche Fragestellung jedoch immer wieder notwendig, denn durch die Festlegung dieser Merkmale wird die eigentliche Optimierungsaufgabe in ihrer Lösungsvielfalt bereits stark eingeschränkt. Aus der Frage, welcher Weg in der Natur eingeschlagen wird, um eine bestmögliche Anpassung an vorgegebene Anforderungen zu erreichen, wird in Umkehrung der Blickrichtung die Frage nach der Form und den Eigenschaften einer technischen Konstruktion, welche für eine bestimmte Zielvorstellung unter vorgegebenen Bedingungen bestmöglich erfüllt werden müssen. Nur diese duale Sichtweise, welche gleichzeitig Ausgangsbedingungen und Ergebnis der jeweiligen Problemstellung kritisch ins Auge fasst, garantiert schließlich eine sinnvolle und erfolgreiche Anwendung der Methoden für die Strukturoptimierung. Nur so lassen sich bessere Konstruktionen auf einer jeweils höheren und anspruchsvolleren Ebene des Entwerfens erreichen.

Im Rahmen dieser Arbeit steht das Prinzip des Leichtbaus /Wiedemann 1986/ als maßgebendes Zielkriterium im Mittelpunkt des Interesses. Viele Problemstellungen im Bereich der Strukturoptimierung gehören naturgemäß zu diesem Themenkreis. Es geht dabei vor allem um die optimale Auslegung von Flächentragwerken, insbesondere Schalen, für extreme Beanspruchungen oder große Spannweiten. Solche Leichtbaukonstruktionen können direkt durch eine Materialersparnis, indirekt über die Verbesserung ihrer Funktionalität durch Gewichtsreduktion oder ausschließlich funktional bedingt sein. Die Erhöhung der Steifigkeit einer Struktur bei gleichbleibendem Materialverbrauch führt gleichbedeutend zu einer Leichtbaukonstruktion. Statische Funktion, Festigkeit, Stabilität und dynamisches Ver-

halten der Struktur müssen als Randbedingungen eingehalten werden. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich beispielsweise für die oben genannten Tragwerke folgende Gestaltungsprinzipien:

- Verwirklichung eines möglichst reinen Membranzustandes durch die äußere Formgebung der Struktur,
- Optimierung der Form und/oder der Querschnitte für eine möglichst hohe Steifigkeit des Gesamtsystems und seiner Bauteilkomponenten und
- konstruktive Durchbildung (Formgebung) von Lasteinleitungsbereichen, Ausschnitten und Anschlüssen.

Für allgemeine Flächentragwerke und freie Schalenformen ist hier die simultane Form- und Querschnittsoptimierung versteifter und unverteifter Systeme gemeint. Die konsequente Anwendung dieser Gestaltungsprinzipien beeinflusst sowohl die Gestalt der Gesamtstruktur als auch die Auslegung der einzelnen Bauteilkomponenten. Für eindeutige Problemstellungen bilden Form und Funktion derart optimierter Strukturen eine Einheit, und es können sich dadurch ganz natürlich auch ästhetisch befriedigende Lösungen ergeben.

## **2.2 Strukturoptimierung - eine interdisziplinäre Aufgabe**

So einfach und logisch die Verwendung des Prinzips Leichtbau als maßgebendes Zielkriterium in der Strukturoptimierung erscheint, so schwierig und vielschichtig gestaltet sich seine Verwirklichung unter dem Gesichtspunkt der vorgenannten Gestaltungsprinzipien. Insbesondere die praktische Anwendung für allgemeine und freie Schalenformen zeigt, wie komplex die zuvor formulierte Aufgabe im Sinne der technischen Optimierung wirklich ist. In der Regel sind an der rechnergestützten Synthese solcher Tragwerke sehr unterschiedliche und unabhängige Disziplinen beteiligt wie z.B. Geometriebeschreibung, Strukturmechanik oder mathematische Optimierung. Für allgemeine Optimierungsprobleme müssen diese Disziplinen in geeigneter Weise zusammengeführt und in ein gemeinsames Lösungskonzept integriert werden. Für die Entwicklung dieses Konzeptes spielt die Koordination der unterschiedlichen Teilaufgaben die entscheidende Rolle.

### **2.2.1 Entwicklung der unterschiedlichen Disziplinen**

Eine allgemeingültige Unterteilung der Strukturoptimierungsprobleme in einzelne Teilaufgaben wurde von /Pedersen 1982/ vorgenommen. Die gesamte Optimierungsaufgabe setzt sich aus den Komponenten Entwurfsmodellierung, Strukturmodellierung und -analyse, Sensibilitätsanalyse der Strukturantwort und der Strategie zur Lösung des Optimierungsproblems zusammen. Diese Einteilung ist ei-

nerseits formal bedingt und andererseits stark von der Chronologie der Entwicklungsstadien in der Strukturoptimierung geprägt (Tab. 2-1).

	Gallei	(1638)	Kragbalken, Formoptimierung
	Lagrange	(1770)	Knickstab, Formoptimierung
	Maxwell	(1869)	Entwurfstheorie für gewichtsoptimale
	Michell	(1904)	Stab- und Netzwerke
	Heyman	(1951)	Fließgelenktheorie mit linearer Programmierung
	Clough	(1960)	Einführung der "finiten Elementmethode"
	Schmit	(1960)	Strukturoptimierung mit mathem. Programmierung
	Gellatly	(1964)	Programmsystem für Strukturoptimierung
	Fox	(1965)	Sensibilitätsanalyse (diskret)
	Prager, Taylor	(1968)	Optimalitätskriterienmethode
	Zienkiewicz, Campbell	(1973)	Formoptimierung mit linearer Programmierung
	Schmit, Miura	(1974)	Approximationsmethoden
	Fleury, Sander	(1977)	Duale Methoden
	Zolesio, Cea	(1981)	Sensibilitätsanalyse (variationell)
	Imam	(1982)	Formbeschreibung, "Design Elemente"
	Formbeschreibung und Entwurfsmodellierung		
	Sensibilitätsanalyse		
	Finite Elementmethode		
	Optimalitätskriterienmethode		
	Approximationsmethoden		
	Methoden der mathematischen Programmierung		
	Analytisch geschlossene Lösungen		

Tabelle 2-1: Entwicklungsstadien in der Strukturoptimierung

Die Entwicklung der einzelnen Disziplinen ist im folgenden nur in groben Zügen dargestellt (Tab. 2-1) und wurde aus den Literaturnachweisen einiger ausgewählter Veröffentlichungen zu diesem Thema zusammengestellt /Vanderplaats 1982, Schmit 1984, Knepe 1986, Haftka 1986/. Erste Formoptimierungsprobleme wurden bereits sehr früh von Galilei (1688) und Lagrange (1770) aufgegriffen und mit den zur Verfügung stehenden theoretischen Grundlagen auf analytisch geschlossene Weise gelöst. Erst sehr viel später konnten Maxwell (1869) und Michell (1904) für die Auslegung gewichtsoptimaler Stab- und Netzwerke die entsprechenden entwurfstheoretischen Grundsätze formulieren. Diese Arbeiten sind für die weitere Entwicklung der Strukturoptimierung von grundlegender Bedeutung.

Mit der Entwicklung der Computertechnologie in den fünfziger Jahren waren natürlicherweise vermehrt numerische Lösungsansätze auch in der Strukturoptimierung verbunden. Eine erste Anwendung der mathematischen Optimierung auf Strukturprobleme gelang Heyman (1951) für die Fließgelenktheorie mit der linearen Programmierung. Nach der Einführung der Methode der finiten Elemente für die Strukturanalyse und ihrer Benennung durch Clough (1960) und der funda-

mentalen Lösung von Strukturoptimierungsproblemen mit Hilfe der Mathematischen Programmierung durch Schmit (1960) konnte Gellatly (1964) erstmals beide Lösungsansätze für die automatische Optimierung von Strukturen in einem Programmsystem verwirklichen. Beiträge für die Steigerung der numerischen Effizienz wurden von Fox (1965) durch die Anwendung der Sensibilitätsanalyse für das diskretisierte Strukturproblem, aber vor allem von Prager und Taylor (1968) durch die Einführung der Optimalitätskriterienmethode geleistet. Anders als bei der Mathematischen Programmierung geht dieses Verfahren als indirekte und iterative Lösungsstrategie vor, indem die Optimalitätsbedingungen (Kuhn-Tucker) als Kriterium zur Herleitung geeigneter Rekursionsformeln für den Lösungsalgorithmus verwendet werden. Mit Hilfe der Variationsrechnung und durch eine Reihe von eher intuitiven Lösungsansätzen (z.B. "Stress Ratio Method") können so einige spezielle Optimierungsprobleme sehr effizient gelöst werden. Auf der anderen Seite werden von Zienkiewicz und Campbell (1973) mit den Methoden der mathematischen Programmierung erste Erfolge für die Formoptimierung bei ebenen Strukturproblemen erzielt. Schmit und Miura (1974) können mit den Approximationsverfahren diese Verfahren weiter verbessern. Schließlich werden sie durch die Anwendung dualer Lösungsstrategien von Fleury und Sander (1977) wieder auf der gemeinsamen Basis der mathematischen Verfahren mit der Optimalitätskriterienmethode zusammengeführt.

Für die Weiterentwicklung der Strukturoptimierung in den achtziger Jahren gewinnt die Problematik der Formoptimierung zunehmend an Bedeutung. Die Entwicklung variationeller Methoden zur Sensibilitätsanalyse durch Zolesio und Cea (1981) sowie die Formulierung der Geometriebeschreibung als eigenständige Disziplin im Entwurfsprozeß durch Imam (1982) sind wesentliche Beiträge zu dieser Problematik. Mit diesen wichtigen Komponenten im Entwurfsprozeß können mit der mathematischen Optimierung und der finiten Elementmethode in den folgenden Jahren eine Vielzahl von Problemen der Formoptimierung gelöst werden. Gerade hinsichtlich einer höheren Flexibilität hat sich der generelle und direkte Ansatz der mathematischen Programmierung in Verbindung mit der Methode der finiten Elemente gegenüber der eher problemorientierten Methode der Optimalitätskriterien durchgesetzt.

### **2.2.2 Integration der Teilaufgaben**

Heute liegen die Bemühungen im Bereich der Strukturoptimierung eindeutig darin, die unterschiedlichen am Entwurfsprozeß beteiligten Disziplinen in ein integriertes Konzept zusammenzufassen. Dabei geht es vor allem um programmtechnische Lösungen, welche im Sinne des rechnergestützten Entwerfens (CAD) in bestehenden Programmsystemen die Methoden der Strukturoptimierung adäquat anwenden. Der zeitgemäße Einsatz solcher Programme erfordert, als zusätzliche Programmkomponenten, eine interaktive Grafikunterstützung und eine kreative

Programmkontrolle, welche dem Ingenieur jederzeit das Eingreifen in den automatischen Entwurfsprozeß erlaubt /Schmit 1986/.

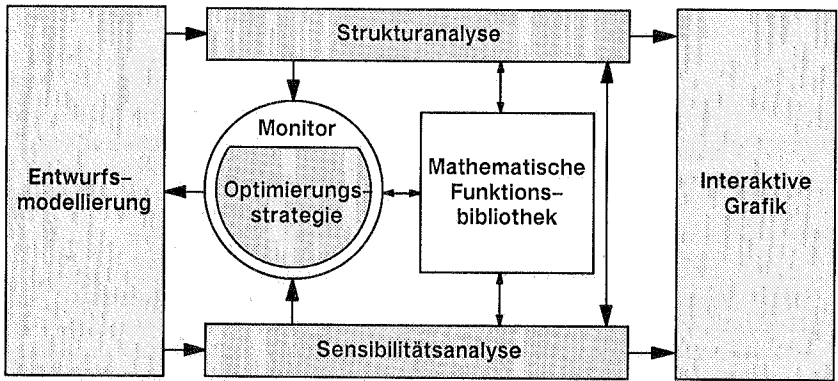


Bild 2-1: Komponenten im Entwurfsprozeß

Bild 2-1 zeigt die Zusammenwirkung der einzelnen Disziplinen als Programmkomponenten, wobei ihre Interaktionen mittels Datenaustausch durch Pfeile dargestellt sind. Der als Monitor bezeichnete Programmteil übernimmt die Kontrolle des Entwurfsprozesses durch die übergeordnete Steuerung der Optimierungsstrategie. Die Einrichtung einer zentralen mathematischen Funktionsbibliothek (mit Gleichungs- und Eigenwertlöser, linearer oder quadratischer Programmierung als Unterproblem für sequentielle Optimierungsstrategien) kann eine weitere sinnvolle Komponente für ein flexibles Programmsystem darstellen. Eine detaillierte Beschreibung der Programmkomponenten wird in Kapitel 3 vorgenommen.

### 2.2.3 Sequentielle Lösungsstrategie und Interaktion

Der Lösung eines Strukturoptimierungsproblems liegt immer ein iteratives Vorgehen zugrunde, d.h. die einzelnen Teilaufgaben sind über den Datenaustausch (Bild 2-1) hinaus auch durch ihre sequentielle Abfolge (Bild 2-2) miteinander verknüpft. Für die mathematische Formulierung der eigentlichen Optimierungsaufgabe können im Allgemeinen drei unterschiedliche, jedoch hierarchisch voneinander abhängige Ebenen der Modellbildung unterschieden werden. Die direkte Anwendung der mathematischen Optimierung verlangt in einem ersten Schritt eine Idealisierung der Struktur durch eine Reduktion auf ihre wesentlichen Eigenschaften. Darüber hinaus muß für die Geometrie der Struktur eine Beschreibung durch diskrete Parameter erfolgen, welche auch die Variabilität des Optimierungsmodells festlegt. Dafür werden geeigneterweise die Methoden des "Computer Aided Geometric Design" (CAGD) eingesetzt /Bletzinger 1990a/. Für eine ausreichende Be-



schreibung der Formvielfalt einerseits und eine möglichst gut konditionierte Optimierungsaufgabe andererseits gilt für diese Modellebene der Grundsatz: so einfach wie möglich und so variabel wie nötig.

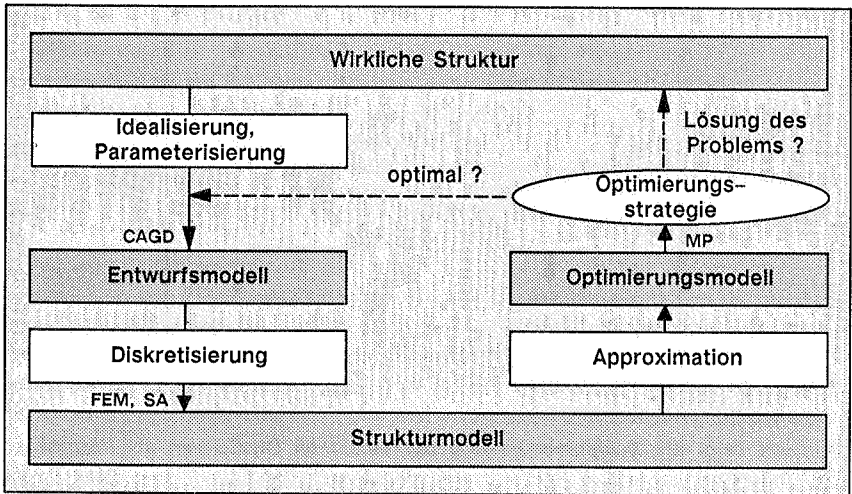


Bild 2-2: Iteratives Vorgehen bei der Strukturoptimierung

Die nächsten beiden Modellebenen befinden sich im automatischen und sequentiell ablaufenden Teil des Entwurfsprozesses (Bild 2-2). Hier geht es in einer weiteren Stufe um die Formulierung eines geeigneten Strukturmodells. Zur Beschreibung der physikalischen Eigenschaften einer Struktur werden dafür in der Regel die heute zur Verfügung stehenden Methoden eingesetzt (z.B. FEM, BEM, Übertragungsmatrizenverfahren etc.). Mit der Auswahl einer Methode für die Strukturanalyse ist in der Regel auch die Sensibilitätsanalyse (SA) der Strukturantwort (Bild 2-1) sehr eng verknüpft.

Eine letzte Modellierung der Optimierungsaufgabe kann schließlich durch die Approximation des Optimierungsproblems selbst erfolgen. Eine geeignete Umformung des Problems ist auf dieser Stufe vor allem durch die Transformation der Variablen möglich, womit auch der charakteristische Verlauf von Zielfunktion und Nebenbedingungen direkt beeinflusst werden. Mit den hier angewandten Approximationsmethoden wird die eigentliche Optimierungsaufgabe umgeformt, bevor ihre Lösung mit den Mitteln der mathematischen Programmierung (MP) erfolgt. Diese Manipulation des Optimierungsproblems kann den Optimierungsprozeß häufig beschleunigen, birgt jedoch ebenfalls die Gefahr unlösbarer Problemstellungen in sich.

Jede Stufe der Modellbildung trägt die Gefahr der Fehleranfälligkeit in sich. Eine mangelhafte Beschreibung der Struktur, Diskretisierungsfehler in der Struktur-

analyse oder eine falsch angewandte Approximationsvorschrift können sich nachhaltig auf das Endergebnis des Optimierungsprozesses auswirken. Durch die hierarchische Anordnung der Modelle können auch kleine Fehler im Einzelfall durch gegenseitige Beeinflussung eine große Auswirkung auf das Ergebnis haben. Deshalb kann der "automatische" Entwurfsprozess niemals die Urteilsfähigkeit, Erfahrung und Phantasie des praktischen Ingenieurs ersetzen. Die interaktive Kontrolle und Korrektur der verschiedenen Modellstufen liefern deshalb in Verbindung mit der Qualifikation des Ingenieurs den besten Beitrag zu qualitativ besseren und "intelligenteren" Problemlösungen.

#### **2.2.4 Methoden zur Lösung großer Optimierungsprobleme**

Von großen Problemen in der Strukturoptimierung soll hier gesprochen werden, wenn die Leistungsfähigkeit einer Rechenanlage (Kernspeicher, Rechenzeit etc.) besondere Maßnahmen zur Problemlösung erfordern. Die Größe des Strukturmodells (Systemfreiheitsgrade) sowie die des Optimierungsmodells (Variablen, Nebenbedingungen) oder eine Kombination von beiden kann selbst die Kapazität der heute zur Verfügung stehenden Hochleistungsrechner schnell erschöpfen. Häufig scheidet in der Praxis die generelle Anwendung mathematischer Optimierungsmethoden gerade aus diesem Grund /Sobieszcanski-Sobieski 1985/.

Verschiedene Dekompositionsstrategien, wie sie in /Bremiker 1989/ vorgestellt und angewandt werden, können zur Lösung dieser Problematik beitragen. Struktur- und Optimierungsproblem werden dabei unter der Berücksichtigung der gegenseitigen mechanischen und mathematischen Koppelungen zunächst in Unterprobleme (Substrukturen) aufgespalten und gelöst. Für das Gesamtproblem kann dann z.B. mit Hilfe übergeordneter mechanischer (Kompatibilität) und mathematischer (Kuhn-Tucker) Bedingungen ein geeigneter Lösungsalgorithmus hergeleitet werden. Sämtliche Ansätze zur Lösung großer Optimierungsprobleme gehen für die Lösung der Unterprobleme von modular aufgebauten Programmkomponenten aus. Durch die Verknüpfung dieser Komponenten (Bild 2-1 und 2-2) werden in diesem Zusammenhang an die Modularität der Entwurfs- und Strukturmodellierung sowie eine effektive Sensibilitätsanalyse besondere Ansprüche gestellt. Diese zusätzlichen Anforderungen an die interdisziplinäre Aufgabenstellung der Strukturoptimierung müssen in einem integrierten Lösungskonzept (Kap. 3) berücksichtigt werden.

### **2.3 Anforderungen an das Programmkonzept und die Problemformulierung**

Die interdisziplinäre Aufgabe der Strukturoptimierung, wie sie zuvor unter verschiedenen Gesichtspunkten umrissen wurde, stellt bei ihrer praktischen Verwirk-

lichung hohe Anforderungen an das zugrunde liegende Programmkonzept und die entsprechende Formulierung des Optimierungsproblems. Dies gilt zunächst unabhängig für die gewählte Optimierungsstrategie und das verwendete Verfahren zur Strukturanalyse. Aus programmtechnischer Sicht stehen vor allem folgende Aspekte für eine integrierte Programmlösung im Vordergrund:

- eine möglichst flexible und transparente Programmstruktur,
- eine übersichtliche Programmsteuerung und ein möglichst direkter Datenzugriff sowie
- eine einfache Erweiterbarkeit durch separierbare und modulare Programmsequenzen.

Aus den unterschiedlichen Ebenen der Modellierung ergibt sich für die Formulierung des Optimierungsproblems das entsprechende Anforderungsprofil, wobei

- eine einfache, jedoch genügend variable Beschreibung der Strukturgeometrie und -eigenschaften,
- eine effiziente und möglichst genaue Struktur- und Sensibilitätsanalyse sowie
- die direkte und einfach erweiterbare Formulierung der Optimierungsfunktionen (Zielfunktionen und Nebenbedingungen)

vorrangige Bedeutung haben. Ein Konzept für die Strukturoptimierung als praxisorientiertes Ingenieurwerkzeug im Bereich Entwicklung, Entwurf und Konstruktion stellt darüber hinaus auch Bedingungen an die Programmumgebung. Gemeint sind damit

- die kreative Kontrolle des Anwenders durch interaktive Eingriffsmöglichkeiten,
- die Unterstützung des Ingenieurs durch Entscheidungshilfen und Entwurfsprognosen ("Was-wäre-wenn"-Studien) sowie
- die Visualisierung der wesentlichen Entwurfskriterien durch eine umfangreiche graphische Unterstützung.

In diesem Sinne muß der innerhalb der Strukturoptimierung in der Regel automatisch ablaufende Entwurfsprozeß für die Entscheidungen des Anwenders offen bleiben.

## **2.4 Ziel und Aufbau der Arbeit**

In ihren wesentlichen Punkten soll die vorliegende Arbeit dazu beitragen, die Strukturoptimierung als eigenständiges und praxisorientiertes Ingenieurwerkzeug zu entwickeln und als solches in den Bereich des rechnergestützten Entwerfens und Konstruierens einzubringen. Ausgangspunkt für die vorgestellten Ansätze bildet ein finites Elementprogramm, das für diese interdisziplinäre Aufgabenstel-

lung und die sich daraus ergebenden Anforderungen in seiner Konzeption und im Bereich der Problemformulierung wesentlich erweitert wurde.

Die Diskussion unterschiedlicher Ansätze zur praktischen Strukturoptimierung und die Vorstellung des zugrundeliegenden Konzepts für das Programm CARAT (Computer Aided Research and Analysis Tool) /Bletzinger 1989/ sind im Kapitel 3 zusammengefasst. Auf einen möglichst generellen Lösungsweg durch die Verbindung von mathematischer Optimierung und die Anwendung der Methode der finiten Elemente wird im Besonderen eingegangen. Im 4. Kapitel steht die direkte Formulierung des Optimierungsproblems im Bereich der Methode der finiten Elemente im Vordergrund. Besondere Berücksichtigung findet hier die Frage, wie sich die vorgestellten Leichtbauprinzipien durch die Wahl geeigneter Optimierungsfunktionen am besten verwirklichen lassen.

Im direkten Zusammenhang mit der Problemformulierung stehen im Kapitel 5 die Methoden der Sensibilitätsanalyse, welche die Gradientenermittlung der Optimierungsfunktionen als hauptsächliches Ziel verfolgen. Darüberhinaus wird in diesem Kapitel auf die besondere Bedeutung der Sensibilitätsanalyse im Entwurfsprozess näher eingegangen. Die programmtechnische Umsetzung der Problemformulierung und der Sensibilitätsanalyse innerhalb der Methode der finiten Elemente wird im Kapitel 6 durchgeführt. Um einen möglichst weiten Anwendungsbereich für die Strukturoptimierung zu erschließen, wurde ein dreidimensionales Fachwerk- und ein Schalenelement verwendet.

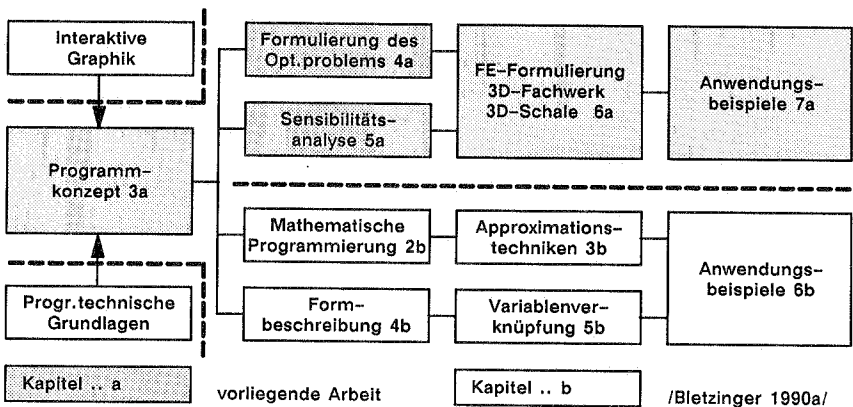


Bild 2-3: Aufteilung des Arbeitsgebietes

Die Anwendungsbeispiele in Kapitel 7 sind im wesentlichen auf Strukturen und Bauteile aus dem Gebiet des Bauwesens und der verwandten Fachrichtungen beschränkt. Besonderes Schwergewicht fällt dabei auf Schalenkonstruktionen, bei denen die interessante Fragestellung der Formfindung behandelt wird.

Die Verwirklichung der überaus differenzierten und komplexen Aufgabenstellung der Strukturoptimierung ist ein hohes Ziel, wenn sie - wie es hier der Fall ist - zunächst von Grund auf und ohne jegliche programmtechnische Voraussetzungen betrieben wird. Um dem gegenwärtigen Stand der Technik in diesem Themengebiet gerecht zu werden, war eine zweigeteilte Vorgehensweise vorteilhaft. Eine Aufteilung der verschiedenen Arbeitsgebiete ist in Bild 2-3 gegeben. Auf der Basis gemeinsam erarbeiteter programmtechnischen Grundlagen und eines interaktiven Graphiksystems konnten die vorab genannten Kapitel aufbauen (3a-7a).

Parallel dazu wurden in /Bletzinger 1990a/ die Methoden der Mathematischen Optimierung (2b), verschiedene Approximationstechniken (3b), Algorithmen zur Formbeschreibung (4b) und Möglichkeiten der Identifikation und Verknüpfung von Entwurfsvariablen (5b) entwickelt. Nur durch das gemeinsame Vorgehen konnte eine Programmstruktur entstehen, welche, ausgerichtet am gemeinsamen Ziel, das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten im Entwurfsprozeß in idealer Weise erfüllt.

### 3.0 Integrierte Konzepte für die Strukturoptimierung

#### 3.1 Entwicklung alternativer Lösungskonzepte

Bei der Verwirklichung einer integrierten Lösung im Sinne der Strukturoptimierung (Kap.2.2.2.) stehen für die Wahl eines geeigneten Konzepts vor allem programmtechnische Aspekte im Vordergrund. Dazu gehören im Wesentlichen die Problematik der Steuerung, Koppelung und Organisation von unabhängigen Programmen und Programmkomponenten, Fragen zur Datenverwaltung und zum Datenaustausch sowie die Entwicklung einer problemgerechten Benutzeroberfläche. In der Programmentwicklung haben sich, bedingt durch die Anforderungen in der Anwendung, im Bereich von Entwurf, Konstruktion und Berechnung festgefügte und weitgehend unabhängige Programm- und Arbeitsstrukturen herausgebildet.

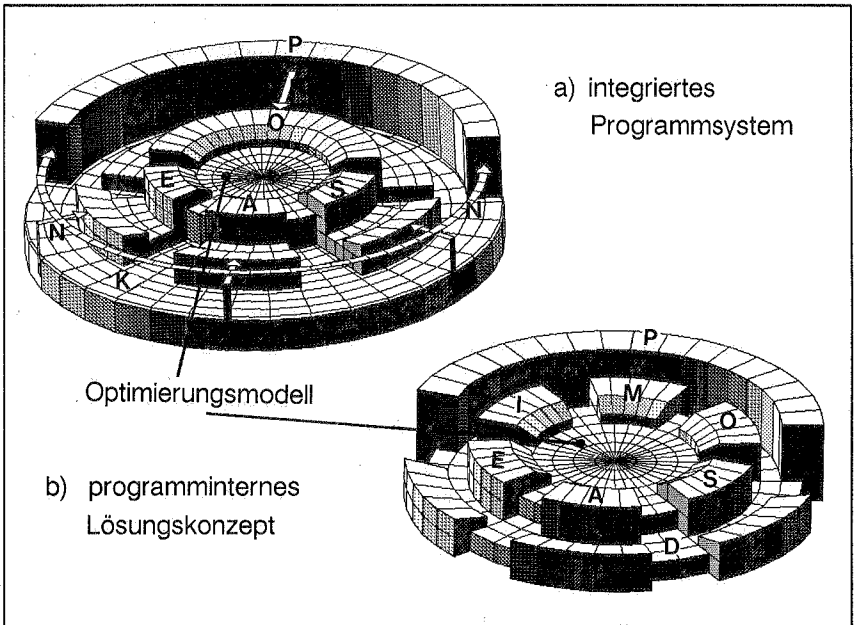


Bild 3-1: Gegenüberstellung unterschiedlicher Lösungskonzepte, Erläuterungen in den Bildern 3-2 und 3-3

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt läßt dieses Gefüge von CAD- und Strukturanalyseverfahren in der Praxis eine direkte Anwendung von Optimierungsverfahren in diesem Arbeitsbereich nur in seltenen Einzelfällen zu. Das zentrale Problem stellt

sich hier insbesondere in der Zusammenführung der hinsichtlich der Optimierungsaufgabe völlig unabhängig entwickelten Teilaufgaben zu einem einheitlichen Programmkonzept. Für eine programmtechnische Realisierung von Strukturoptimierungsproblemen gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Lösungsansätze /Kimmich 1988/.

Der klassische Einsatz von Optimierungsverfahren in der Luft- und Raumfahrtindustrie und in jüngster Zeit vermehrt auch in der Automobilbranche hat auf der einen Seite zur Entwicklung verschiedener integrierter Programmsysteme geführt. Das Hauptziel dieser Lösungen ist, die Optimierung auf der Basis der zur Verfügung stehenden und in bewährter Weise eingesetzten CAD- und Strukturanalyseverfahren zu betreiben /z.B. Eschenauer 1988b und Yang 1989/. Daneben soll der Anwendungsbereich im Blick auf die Optimierung so weit als möglich offen bleiben und einzelne Komponenten der Optimierungsaufgabe (z.B. CAD- oder FEM-Programm) austauschbar sein.

Auf der anderen Seite steht das hauptsächlich von Seiten der Programmentwickler bevorzugte Konzept, die Optimierung als wichtiges und übergeordnetes Verfahren für die Entwurfs- und Konstruktionsphase innerhalb der bestehenden Analyseprogramme zur Verfügung zu stellen. Bei diesem programminternen Lösungskonzept spielt häufig eine direkte und effiziente Problemformulierung in der jeweiligen Programmumgebung die entscheidende Rolle /z.B. Petiau 1982/. Deshalb steht hier die gezielte Koppelung von CAD- und Strukturanalyseverfahren innerhalb der vorliegenden Programmstruktur im Mittelpunkt des Interesses.

### **3.1.1 Integrierte Programmsysteme**

Beim Konzept der integrierten Programmsysteme (Bild 3-2) wird davon ausgegangen, daß die zur Verfügung stehenden Optimierungskomponenten unabhängige Module mit einer in sich geschlossenen Daten- und Programmstruktur sind /Sobieszczanski-Sobieski 1982/. Eine Programmarchitektur auf der Basis einer Hauptprogramm-Unterprogramm-Technik ist hier ausgeschlossen. Die Programmkontrolle (P) muß in diesem Fall so angelegt sein, daß die Interaktion der einzelnen Module für die sequentielle Lösungsstrategie gesteuert werden kann. Gleichzeitig muß ein Verbindungsnetz (N) für den entsprechenden Datentransfer (I/O) zwischen externem Speicher (Hard Disk) und den einzelnen, sequentiell im Kernspeicher (CPU) angelegten Modulen aufgebaut werden /Rajan 1986a/. Diese beiden zentralen Aufgaben werden in den meisten Systemen auf der rechner-spezifischen Betriebssystemebene (K) in der entsprechenden Kommandosprache (Job-Control-Language - JCL) gelöst.

Das der Optimierungsaufgabe zugrunde liegende Optimierungsmodell wird nun in Abfolge der einzelnen Module für die Entwurfsmodellierung (E), die Strukturanalyse (A) und die Sensibilitätsanalyse (S) zusammengebaut und der Optimierungsstrategie (O) zur schrittweisen Lösung übergeben /Rajan 1988/. Nur in wenigen

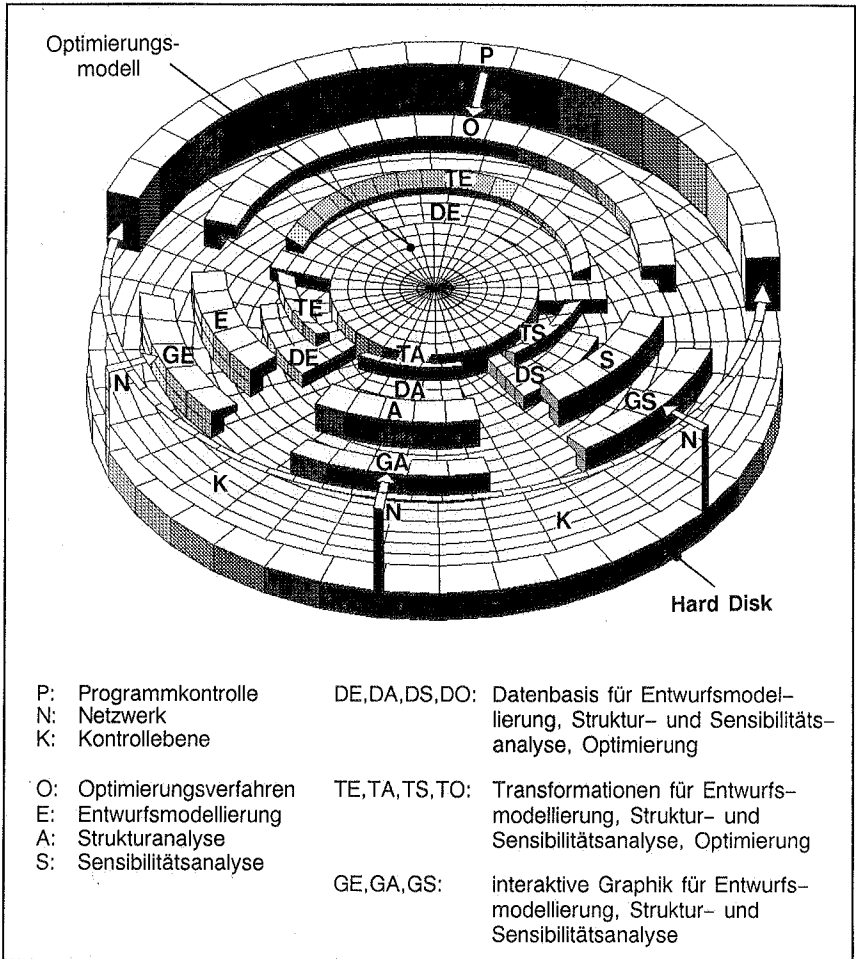


Bild 3-2: Komponenten eines integrierten Programmsystems

Systemen ist für diese wiederholt ablaufende Prozedur die Programmkontrolle (P) und Monitorfunktion von der Optimierungsstrategie (O) auch programmtechnisch getrennt. Die Datenübertragung zwischen den Datensystemen der individuellen Module (DE, DA, DS, DO) ist meistens das rechentechnisch aufwendigste Problem. Hier sind oft unterschiedliche Datenformate über zwischengeschaltete Übertragungsprogramme (in Bild 3-2 nicht dargestellt) einander anzupassen. Eine systeminterne einheitliche "Datenschiene" mit festgelegtem Datenformat kann sehr hilfreich sein, wenn einzelne Module gegeneinander ausgetauscht werden sollen.



In Zusammenhang mit der Sensibilitätsanalyse spielt auch die Stellengenauigkeit der übertragenen Daten eine größere Rolle (Anwendung von Differenzenverfahren), was den beachtlichen Anteil des Datentransfers an der Gesamtrechenzeit einer Problemstellung insbesondere bei Hochleistungsrechnern (z.B. CRAY) noch zusätzlich erhöhen kann.

In Ergänzung zu den generellen Funktionen der Optimierungskomponenten müssen noch geeignete Transformationen vor die eigentliche Erstellung des zentralen Optimierungsmodells gestellt werden. Dazu gehören, wie in /Bletzinger 1990a/ beschrieben, die Variablenverknüpfung (TE, TA, TS), die Skalierung von Variablen und Optimierungsfunktionen (TA, TS) und die Transformationen für die Approximation der Optimierungsfunktionen (TO). Aus diesen Transformationsvorschriften und ihrer Aufrechterhaltung während des iterativen Lösungsprozesses können sich aus rechentechnischer Sicht sehr aufwendige Formulierungen ergeben. Als Beispiele dafür seien hier stellvertretend die in /Bletzinger 1990a/ hergeleiteten Formbeschreibungsmethoden für G1-kontinuierliche Schalenflächen genannt. Bei komplexen Formoptimierungsproblemen müssen die verschiedenen Stufen der Modellbildung (Kap. 2) im iterativen Lösungsprozeß ständig kontrolliert werden. Interaktiv zur Verfügung stehende Grafikmodule (GE, GA, GS) tragen wesentlich zu einer problemgerechten Benutzeroberfläche bei. Leistungsfähige Programme (z.B. PATRAN, SUPERTAB, MOVIE.BYU, etc.) stehen für die Verifikation des Entwurfs- und Analysemodells zur Verfügung und können relativ problemlos über entsprechend definierte Schnittstellen in ein Programmsystem integriert werden.

### **3.1.2 Programminternes Lösungskonzept**

Eine grundsätzliche Voraussetzung für eine programminterne Formulierung des Optimierungsproblems ist eine durchgängige und offene Programm- und Datenstruktur (Bild 3-3). In der Regel wird bei diesem Lösungsansatz eine Programmarchitektur angestrebt, welche der Hauptprogramm-Unterprogramm-Struktur möglichst nahe kommt /Sobieszcanski-Sobieski 1982/.

Für eine direkte und effiziente Umsetzung dieses Konzepts müssen die einzelnen Teilaufgaben der Entwurfsmodellierung (E), der Struktur- (A) und Sensibilitätsanalyse (S) sowie die der Lösung des Optimierungsproblems (O) als Unterprogramme vorliegen. Eine weitere programmtechnische Voraussetzung ist in diesem Zusammenhang der direkte Datenzugriff dieser Programmkomponenten auf eine im Kernspeicher (CPU) angelegte Datenbasis (D). Die Programmkontrolle (P) erfolgt über eine ebenfalls im Kernspeicher angelegte Kontrollebene (K), wobei die Monitorfunktion zur Steuerung des iterativen Lösungsprozesses am besten durch eine programminterne Kommandosprache unterstützt wird. In der Regel wird die für die Problembeschreibung notwendige Eingabe (I) an zentraler Stelle vorgenommen und von der iterativen Lösungsprozedur weitgehend getrennt. Eine weitere Hilfe bei der Formulierung der programminternen Lösung kann eine mathemati-

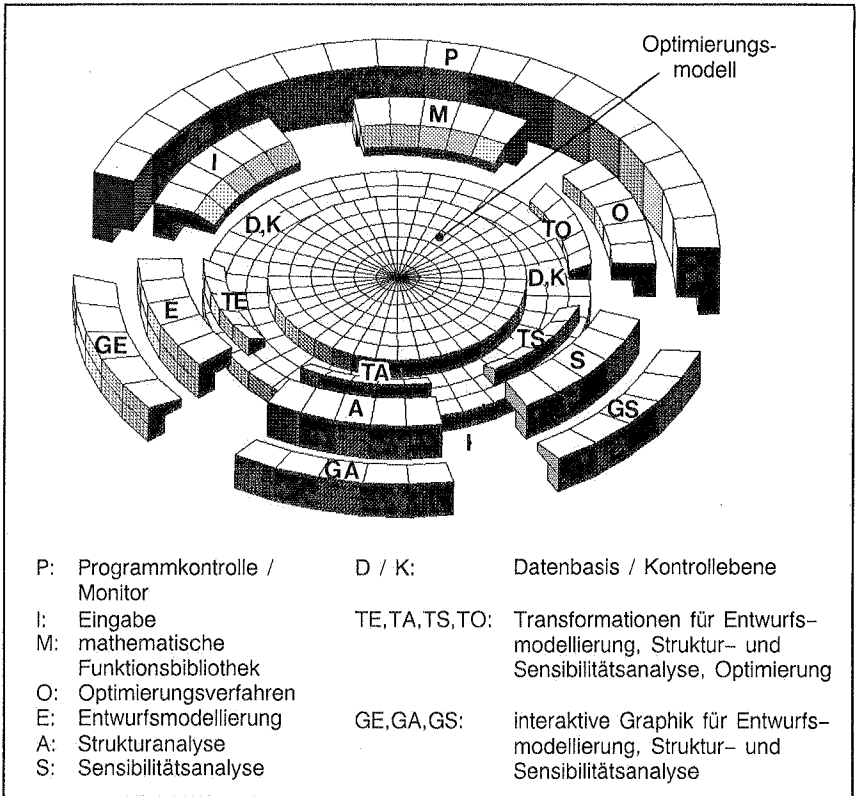


Bild 3-2: Programminternes Lösungskonzept (Beispiel CARAT)

sche Programmbibliothek (M) sein, welche in geeigneter Weise zur Unterstützung der rechenintensiven Programmkomponenten (A, S, O) beiträgt. Die programmspezifischen Funktionen der einzelnen Komponenten (E, A, S, O) und ihrer zugehörigen Transformationen (TE, TA, TS, TO) unterscheiden sich im Vergleich zum Konzept der integrierten Systemlösung lediglich durch ihren Zugang als Unterprogramme und dem direkten Datenzugriff. Insbesondere im Falle der programmtechnisch sehr aufwendigen interaktiven Grafikerunterstützung (GE, GA, GS) stellt die Aufrufbarkeit als Unterprogramm ein hohes und oft nicht realisierbares Ziel da. Einzelne interne Programmkonzepte greifen hier als Kompromißlösung auf externe Postprozessoren zu, welche über einen Datentransfer angesteuert werden. Dabei geht jedoch der durchgängig geschlossene Programmablauf für die Optimierung verloren, wenn nicht die Möglichkeit von parallel laufenden und

durch Datenaustausch miteinander kommunizierenden Rechnerprozessen gegeben ist.

### **3.1.3 Gegenüberstellung der unterschiedlichen Konzepte**

Im Ansatz zur Lösung der bei Aufgaben im Bereich der Strukturoptimierung zentralen Problematik von Datenverwaltung und Datentransfer liegt das eigentliche Unterscheidungsmerkmal der beiden Konzepte. Es soll hier nicht verschwiegen werden, daß eine Lösung auf System- oder Programmebene mit vollständig externer oder interner Datenstruktur eine jeweils extreme Position in der Praxis darstellt. Es ist eher eine philosophische Frage, ob ein hinsichtlich Anwendungsvielfalt offenes Programmsystem gegenüber einer direkten und möglichst effizienten programminternen Formulierung bevorzugt werden soll. Häufig liegen in der Praxis einzelne Programme als Systemkomponenten bereits vor und bilden somit die Entscheidungsgrundlage für eine systemübergreifende Lösung des Optimierungsproblems /Yang 1989/.

Die Übertragbarkeit von Programmen und Programmsystemen auf unterschiedliche Rechner und Betriebssysteme sind ein weiterer Gesichtspunkt in der Bewertung der Konzepte. Bei Programmsystemen handelt es sich häufig um langzeitige Vorhaben, wobei hinsichtlich Installation und Wartung der Programme von einer langfristig zur Verfügung stehenden Rechnerkonfiguration ausgegangen wird. Von Seiten der Programmentwickler wird dagegen unter diesem Aspekt eher die unabhängigere programminterne Lösung bevorzugt.

Die rasante Entwicklung der Computertechnologie erlaubt heute in zunehmendem Maße durch die Bereitstellung hoher Kernspeicherkapazitäten eine Behandlung von rechentechnisch aufwendigen Problemen. Hochleistungsrechner und moderne Arbeitsplatzrechner mit virtueller Speichertechnik sind heute speziell für eine "in-core" Verarbeitung von komplexen Rechenmodellen ausgelegt. Einen besonderen Vorzug haben in dieser Hinsicht programmintern formulierte Probleme, da externe Datenmanipulationen die Leistungsfähigkeit dieser Rechnerklassen stark herabsetzen.

### 3.2 CARAT und zugrunde liegendes Programmkonzept

Vorausgehende Überlegungen und Recherchen in der einschlägigen Literatur zur Anwendung von Optimierungsverfahren für die Formfindung von Schalenkonstruktionen /Morris 1982, Atrek 1984, Mota Soares 1986, Bennet 1986 und Eschenauer 1988a/ haben gezeigt, daß weder für eine allgemeine Problemformulierung noch für die praktische Verwirklichung realistische Lösungen vorliegen. Vor allem eine komplizierte Formbeschreibung und der hohe Rechenaufwand selbst bei einfachen Strukturmodellen sind wohl Gründe für eine verzögerte Entwicklung der Strukturoptimierung in diesem Anwendungsbereich. Darüber hinaus reagieren Schalenkonstruktionen hinsichtlich Tragverhalten und Tragwerksantwort überaus empfindlich bei einer Variation der formbeschreibenden Parameter, und es ergeben sich oft hochgradig nichtlineare Funktionen im Optimierungsmodell (Kap. 6). Dabei entstehen Optimierungsprobleme, welche durch ihre komplexe und differenzierte mathematische Formulierung an die zur Verfügung stehenden Lösungsstrategien besondere Ansprüche stellen.

Die vorgenannten Aspekte haben, zusammengenommen mit den in Kapitel 2 formulierten Anforderungen an die Problemformulierung und die Programmtechnik, schließlich dazu geführt, für das Programm CARAT ein möglichst geschlossenes und für die einzelnen Teilaufgaben durchgängiges Konzept zu erarbeiten. Diese ganzheitliche Konzeption, welche in besonderem Maße die gegenseitigen Einflüsse und Koppelungen der Optimierungskomponenten berücksichtigt, konnte auf der Grundlage einer internen Programmlösung verwirklicht werden.

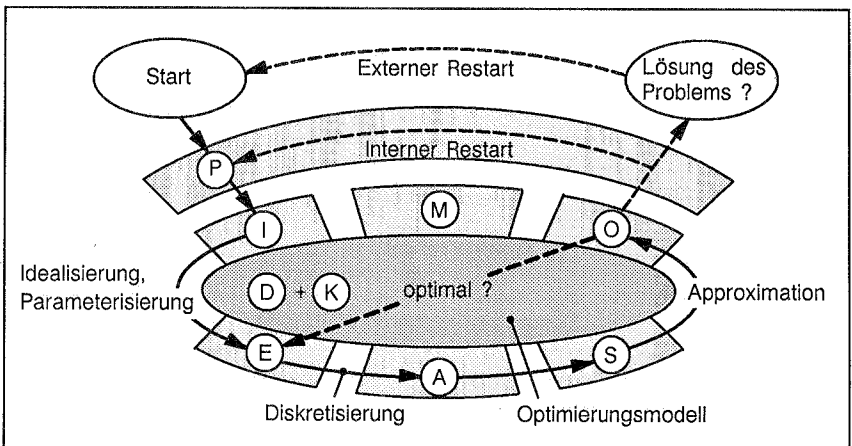


Bild 3-4: Iterativer Programmablauf (Beispiel CARAT)

Ausgehend von der finiten Elementmethode soll das dem Programm CARAT zugrunde liegende Konzept einer "In-core"-Lösung die direkte und effiziente Formulierung des gegebenen Optimierungsproblems in programmtechnisch idealer

Weise realisieren (Bilder 3-3 und 3-4). Durch die offene, im Kernspeicher angelegte Programm- und Datenstruktur, wird die interaktive und sequentiell ablaufende Optimierungsprozedur transparent und für die Anwendung durchschaubar. Schnittstellen- und datentechnische Probleme sind für alle Programmkomponenten durch die gemeinsame Datenbasis auf ein Minimum reduziert. In der Optimierungsschleife (E-A-S-O) stellt der Datenaustausch lediglich eine Kopie von Registerinhalten dar und ist im Vergleich zu einer externen Datenmanipulation äußerst effektiv. Besonders als Forschungs- und Entwicklungsprogramm erhält das Programm CARAT damit eine hohe Flexibilität und ist leicht erweiterbar. Die zentrale Dateneingabe (I) ist auf eine einzige Eingabedatei reduziert und erlaubt eine vollständige Trennung in wiederholbare und nichtwiederholbare Programmfunktionen. Ein externer und interner Programm-Restart läßt eine schnelle und anwendungsfreundliche Änderung des Entwurfs- und Analysemodells sowie der Optimierungsstrategie zu. Zusammen mit der interaktiven Graphikunterstützung ergibt sich so ein sehr wirkungsvolles Werkzeug für Optimierungsprobleme in der Entwurfs- und Konstruktionsphase.

### 3.2.1 Programmtechnische Voraussetzungen

#### 3.2.1.1 Grundsatz der Programmentwicklung

Im Sinne einer flexiblen, transparenten und erweiterbaren Programmstruktur müssen die einzelnen Programmkomponenten und deren untergeordneten Programmeinheiten streng modular aufgebaut sein /Jordan 1978, Kimm 1979/.

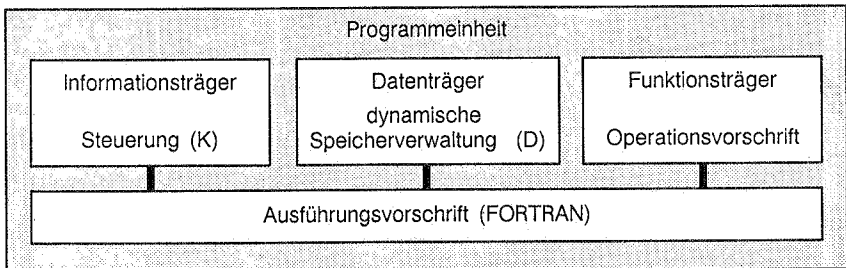


Bild 3-5: Aufbau einer Programmeinheit

Dieser Grundsatz der Programmentwicklung gilt im besonderen Maße für den iterativen Lösungsprozeß (E-A-S-O) mit seinem hohen Rechenaufwand und intensiven Datenfluß. Redundanzen zwischen Programmkomponenten und -einheiten sollen grundsätzlich vermieden werden, weil nur ohne gegenseitige Abhängigkeiten auch kleinster Programmeinheiten eine offene Programmstruktur erhalten

bleibt. Sämtliche Ausführungsprogramme (Bild 3-5) sind, streng genommen, in Informations-, Daten- und Funktionsträger aufgespalten und bilden umgesetzt in die Ausführungsvorschrift eine typische Programmeinheit. Bei "Multi"-Funktionsprogrammen (z.B. Mathematik-Bibliotheken) müssen Daten- und Funktionsträger der betreffenden Einheiten variabel und vollkommen problemunabhängig konzipiert werden.

### **3.2.1.2 Technische Grundlagen, Basisroutinen**

Ein wesentliches Ziel bei der Entwicklung des Programms CARAT war die Entlastung der teilweise sehr aufwendigen Optimierungskomponenten durch eine Programmtechnik an der Basis (Bild 3-6). Diese Idee einer Zusammenbindung wichtiger Funktionen ist nicht neu und wurde für eine programminterne, dynamische Datenverwaltung von /Wilson 1984/ vorgestellt. Dieses Konzept konnte gewinnbringend auf die Programmsteuerung (K) einer zentralen Datenverwaltung (D) mit erweiterten Funktionen, für die Eingabe (I) und Ausgabe von Daten übertragen werden. Zusätzlich sind noch vielfältige Matrizenoperationen (M) speziell für die in FORTRAN entwickelten Programmkomponenten als Basisprogramme vorhanden.

### **3.2.1.3 "Multi"-Funktionskomponenten, Serviceroutinen**

Diese Komponenten liegen im Programm CARAT in zwei verschiedenen Bibliotheken vor (Bild 3-6), sodaß sie für unterschiedliche Bedürfnisse mit jeweils gleicher Problemstellung genutzt werden können. In der mathematischen Programmbibliothek sind in dieser Hinsicht für die finite Elementemethode und einzelne Optimierungsstrategien jeweils die Grundmuster für die mathematische Problemlösung vorhanden. Dasselbe gilt für die Programme zur interaktiven Graphikunterstützung, welche für unterschiedliche graphische Ausgaben (z.B. Konturlinien von Spannungen) als Programmeinheiten angesteuert werden können.

## **3.2.2 Struktur und Funktion der Programmkomponenten**

Der prinzipielle Programmaufbau ist durch das in Bild 3-3 vorgestellte Konzept beschrieben. In Bild 3-6 sind die Funktionen der elementaren Programmkomponenten von CARAT und ihre Zuordnung zu den hierarchisch angeordneten Programmebenen (Basis-, Service- und Operationskomponenten) angegeben. Bei der weiteren Beschreibung der wichtigsten Programmkomponenten für die Strukturoptimierung sollen die theoretischen Aspekte zunächst im Hintergrund bleiben. Die entsprechenden Grundlagen für die Entwurfsmodellierung (E) und die Optimierungsstrategien (O) sind ausführlich in /Bletzinger 1990a/ behandelt worden.

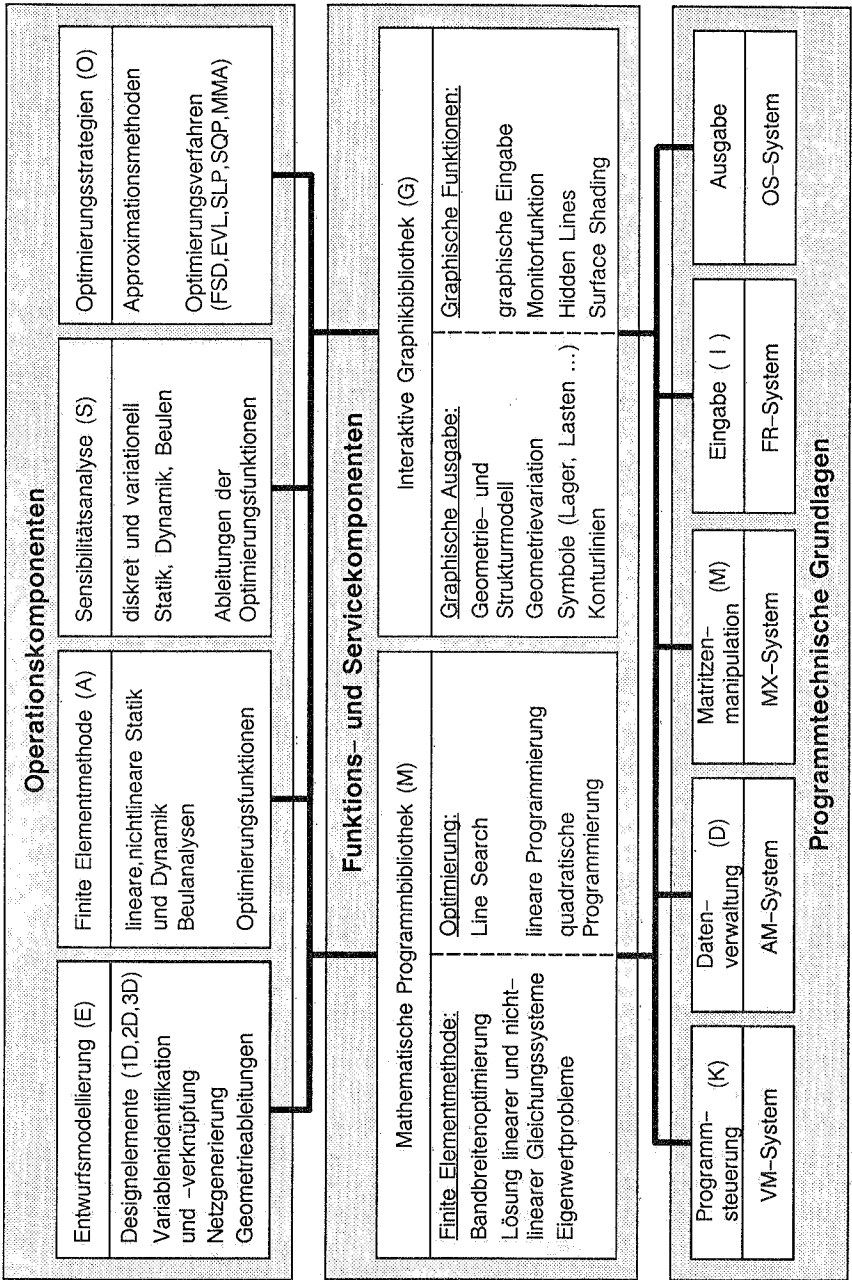


Bild 3-6: Struktur und Funktionen der Programmkomponenten in CARAT

Für die Struktur- (A) und Sensibilitätsanalyse (S) wird auf die folgenden Kapitel verwiesen.

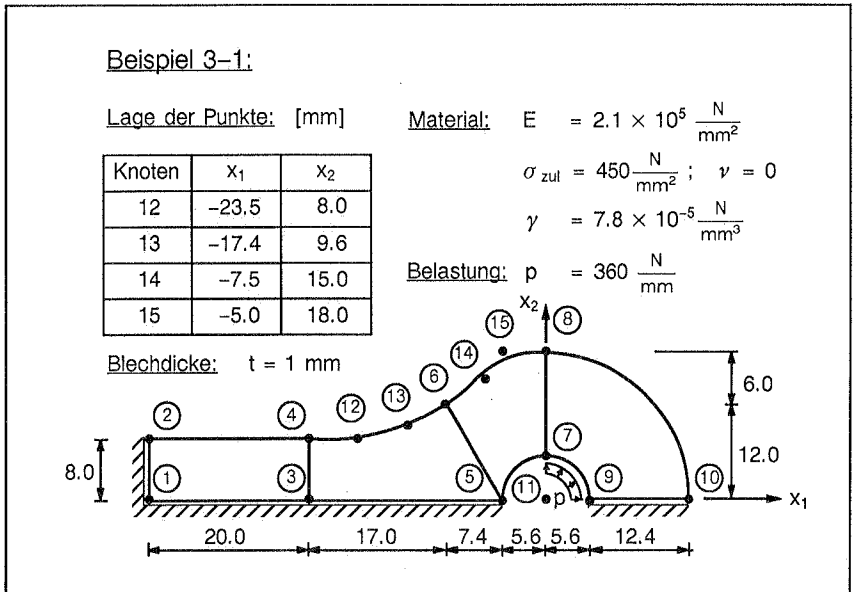


Bild 3-7: Begleitbeispiel, Formoptimierung einer Zuglasche

An dieser Stelle sollen vielmehr an dem einfachen, ebenen Problem einer Zuglasche (halbes System in Bild 3-7) die Funktionen der Optimierungskomponenten erläutert werden. Dieses Beispiel verdeutlicht das praktische Vorgehen bei Formoptimierungsproblemen und zeigt gleichzeitig die Bedeutung einer problemgerechten Grafikerunterstützung während des Optimierungsprozesses auf.

### 3.2.2.1 Modellierung und Variation der Entwurfsgeometrie

Gegenüber der üblichen Funktion der Geometriebeschreibung hat die Programmkomponente zur Entwurfsmodellierung im Programm CARAT eine wesentlich umfangreichere Aufgabe zu erfüllen. Die Geometriebeschreibung erfolgt durch die heute in vielfältiger Weise angewandten "Designelemente" /Imam 1982, Bennett 1985, Fleury 1986/. Auf der Grundlage dieser sehr flexiblen Methode der Formbeschreibung (Bild 3-8a) kann die Entwurfsgeometrie über die Kontrollknoten und die entsprechende Kanten- und Elementtopologie schnell erzeugt werden. Für eine kontinuierliche Beschreibung der Randkurven und der Mittelflächen bei Schalen- und Flächengeometrien stehen Bezier- und B-Splines, Kreissegmente sowie Bezier- und Coonselemente zur Verfügung /Bletzinger 1990a/.



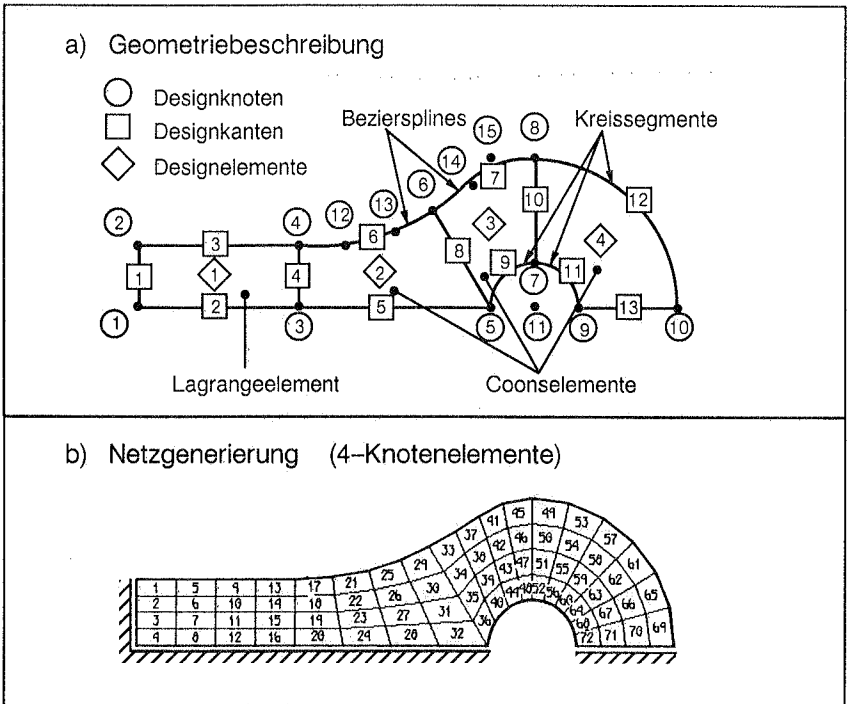


Bild 3-8: Begleitbeispiel, Geometriebeschreibung (a) und Netzgenerierung (b)

Die Netzgenerierung und -adaption (Bild 3-8b) ist eine weitere Funktion dieser Programmkomponente. Beliebige Elementnetze für drei- und viereckige finite Elemente können über vorgegebene Kanteneinteilungen erzeugt werden.

Im Blick auf die Formoptimierung bestehen zusätzliche Anforderungen, welche bei der Entwurfsmodellierung erfüllt werden müssen. Dazu gehört vor allem die Identifikation der variablen Entwurfsparameter  $s$  (z.B. Koordinaten der Designknoten) und deren Verknüpfung durch entsprechend formulierte Bedingungen (Bild 3-9a). Verknüpfungsvorschriften aus Kontinuitätsbedingungen an Geometrierändern (z.B. Tangentenbedingungen) und in Übergangsbereichen von Schalenflächen stellen dabei besonders hohe programmtechnische Anforderungen, weil sie für die sukzessiven Geometrieänderungen mitgeführt werden müssen.

Im Optimierungsprozeß müssen gegebenenfalls die Ableitungen der Optimierungsfunktionen bestimmt werden. Zur Ermittlung dieser Gradienten werden im Falle einer analytischen, diskret oder variationell formulierten Sensibilitätsanalyse die Sensibilitätskoeffizienten für eine Variation der Geometrie benötigt (Bild 3-9b). Für die vorliegende Methode zur Formbeschreibung können die Knotenkoordina-

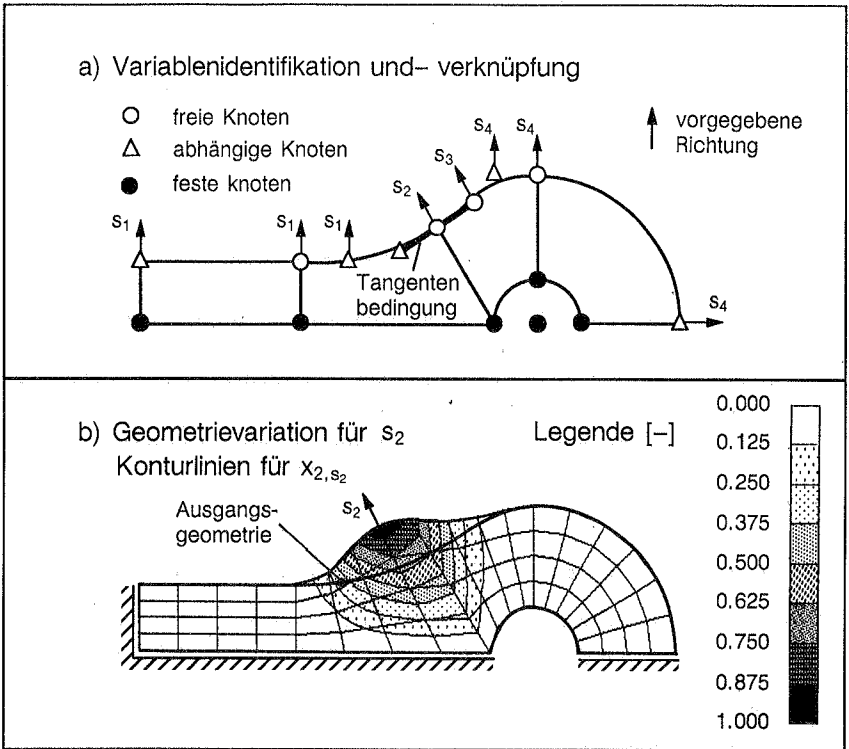


Bild 3-9: Begleitbeispiel, Variablenidentifikation und -verknüpfung (a) und Variation der Geometrie (b)

ten  $\mathbf{x}$  sowie eine eventuelle Dickenverteilung  $\mathbf{t}$  des FE-Netzes in Abhängigkeit der Koordinaten der Designknoten  $\mathbf{x}_D$  und der Dicken  $\mathbf{t}_D$  an diesen Knoten angegeben werden.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_D) \mathbf{x}_D \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_D = \sum_i \Phi_D^i(\xi, \eta) \mathbf{x}_D^i \quad (3-1a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}(\mathbf{t}_D) \mathbf{t}_D \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_D = \sum_i \Phi_D^i(\xi, \eta) \mathbf{t}_D^i \quad (3-1b)$$

Dabei ist  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_D)$  bzw.  $\mathbf{T}(\mathbf{t}_D)$  eine geometrieabhängige Koordinatentransformation, und  $\Phi_D^i(\xi, \eta)$  sind die jeweiligen Ansatzfunktionen der Designelemente in einem krummlinigen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ .

Die Generierungsvorschrift zur Ermittlung der geometrischen Sensibilitätskoeffizienten für eine beliebige Variable  $s$  ist

$$\mathbf{x}_{,s} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}_D)}{\partial \mathbf{x}_D} \mathbf{x}_{D,s} \mathbf{x}_D + \mathbf{T}(\mathbf{x}_D) \mathbf{x}_{D,s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{D,s} = \sum_i \Phi_D^i(\xi, \eta) \frac{d\mathbf{x}_D^i}{ds} \quad (3-2a)$$

$$\mathbf{t}_{,s} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{t}_D)}{\partial \mathbf{t}_D} \mathbf{t}_{D,s} \mathbf{t}_D + \mathbf{T}(\mathbf{t}_D) \mathbf{t}_{D,s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_{D,s} = \sum_i \Phi_D^i(\xi, \eta) \frac{d\mathbf{t}_D^i}{ds}, \quad (3-2b)$$

wobei die Koppelungen der Entwurfsvariablen entsprechend berücksichtigt werden müssen.

Die Entwurfskomponente übernimmt im Optimierungsprozeß mehrere wichtige Funktionen, welche direkten Einfluß auf die nachfolgende Struktur- und Sensibilitätsanalyse haben. Neben der gegenseitigen Beeinflussung auf der Ebene der Modellbildung (Entwurfs-, Struktur- und Optimierungsmodell) ergibt sich auch in programmtechnischer Hinsicht durch den intensiven Datenaustausch eine starke Verzahnung der drei beteiligten Programmkomponenten.

### 3.2.2.2 Strukturanalyse und Sensibilität der Tragwerksantwort

Die Programmkomponenten zur Struktur- und Sensibilitätsanalyse sind durch ihre gemeinsamen strukturmechanischen Grundlagen sehr eng miteinander verbunden. Die Ermittlung der Tragwerksantwort und der Tragwerksempfindlichkeit gegenüber einer Variation der Strukturgeometrie sind hier das Ziel der Analyse. In der Regel stehen bei Strukturoptimierungsproblemen die lineare Berechnung von Verschiebungen und Spannungen (Bild 3-10) sowie die Bestimmung von Eigenwerten und -formen bei linearer dynamischer Beanspruchung im Vordergrund.

Darüber hinaus besteht auch das Interesse, statisch und dynamisch nichtlineares Strukturverhalten in eine Optimierungsaufgabe einzubringen, was häufig zu sehr aufwendigen Formulierungen führt /Arora 1987,1989/. Derartig komplizierte Fragestellungen, wie sie insbesondere im Blick auf Schalenkonstruktionen entstehen, werden hier nicht weiter berücksichtigt.

Für die Strukturanalyse steht heute je nach Aufgabenstellung eine vielseitige Palette von Verfahren zur Verfügung. Die Methode der finiten Elemente und der Randelemente, finite Differenzenverfahren und Übertragungsmatrizenverfahren sind die bekanntesten Vertreter. Für allgemeine Aufgaben in der Strukturoptimierung hat sich wegen der weiten Verbreitung in vielen Anwendungsbereichen die finite Elementemethode (FEM) am stärksten durchgesetzt /Vanderplaats 1982/. Neben den gemischten, gemischt-hybriden und "assumed-strain"-Elementen werden die Verschiebungselemente heute am häufigsten in der Strukturanalyse eingesetzt. Die vielseitigen praktischen Erfahrungen, welche im Umgang mit Verschiebungselementen vorliegen, geben häufig den Ausschlag für ihre bevorzugte

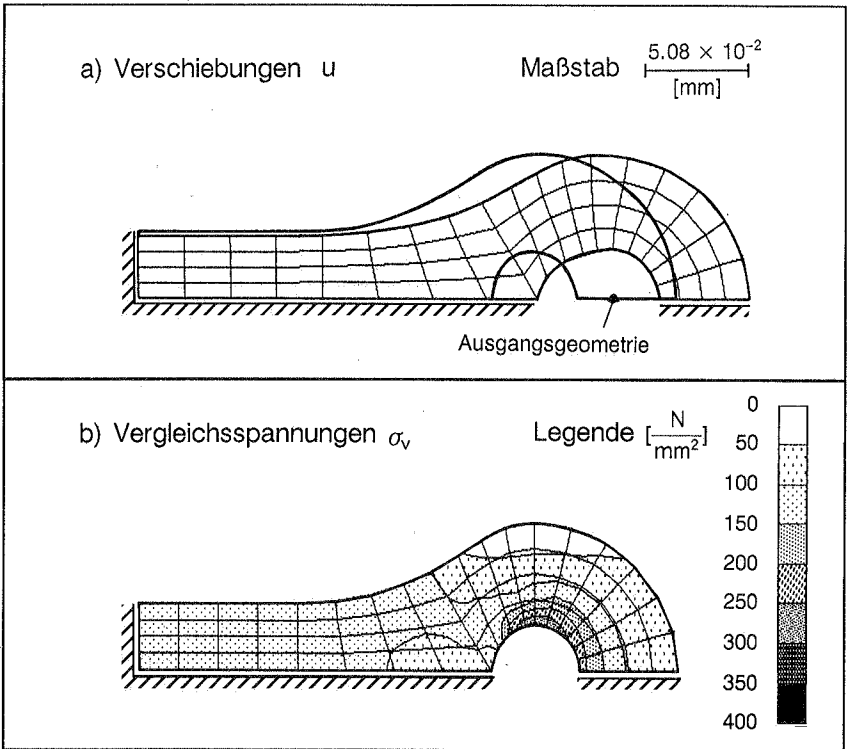


Bild 3-10: Begleitbeispiel, Verformungen (a) und Konturlinien der Vergleichsspannungen nach von Mises (b)

Anwendung, obwohl die Qualität der Ergebnisse im Vergleich zu alternativen Elementformulierungen oft nicht ganz befriedigend ausfällt. Für die Strukturoptimierung spielt insbesondere im Zusammenhang mit der diskreten Sensibilitätsanalyse die einfache Formulierung bei Verschiebungselementen eine entscheidende Rolle (Kap. 6). In der vorliegenden Arbeit wurde aus den vorgenannten Gründen das dreidimensionale Fachwerk- und ein Schalenelement für die Optimierung und die Sensibilitätsanalyse aufbereitet (Bild 3-11).

Nimmt man einen etwas höheren Rechenaufwand zur Lösung von Optimierungsaufgaben für Scheiben, Platten und Rotationsschalen in Kauf, kann das allgemeine 3D-Schalenelement vielseitig auch für diese Aufgabenstellungen eingesetzt werden.

Die Programmkomponente zur Sensibilitätsanalyse hat die Aufgabe, für Verschiebungen, Spannungen, Eigenfrequenzen und -formen sowie alle übrigen Optimierungsfunktionen die Parameterempfindlichkeit bei einer Geometrievariation zu er-

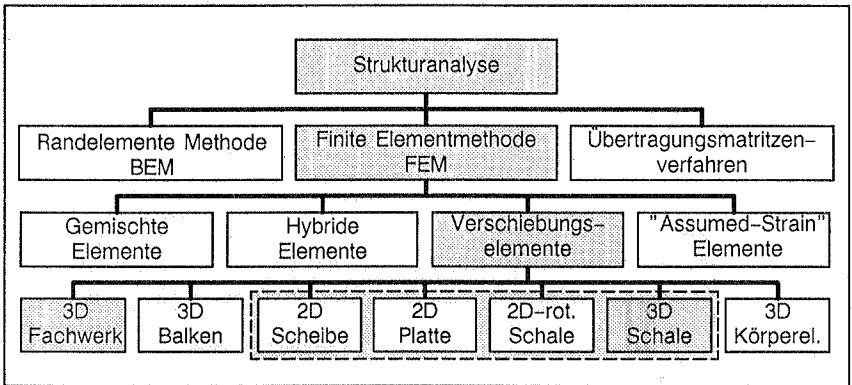


Bild 3-11: Strukturanalyse mit finiten Elementen

mitteln. Zur Lösung dieses aus strukturmechanischer Sicht oft recht aufwendigen Problems gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze (Bild 3-12).

Bei der ersten Möglichkeit werden in der Regel die Energie- und Optimierungsfunktionale, welche der finiten Elementemethode und den unterschiedlichen Optimierungsproblemen zugrunde liegen, nach den Entwurfsvariablen variiert. Mit Hilfe einer adjungierten Gleichung, welche die implizite Abhängigkeit der Zustandsvariablen (Verschiebungen, Spannungen) von den Optimierungsvariablen berücksichtigt und der Tragwerksantwort der diskretisierten Struktur werden dann die gewünschten Sensibilitätskoeffizienten bestimmt.

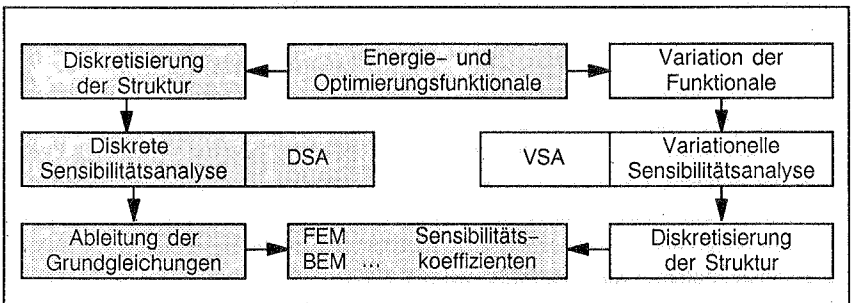


Bild 3-12: Unterschiedliche Ansätze für die Sensibilitätsanalyse

Die zweite Möglichkeit, welche ebenfalls zur Sensibilitätsanalyse im Programm CARAT verwendet wird, geht von einer systematischen Ableitung der Grundgleichungen für die finite Elementemethode und der Optimierungsfunktionen an der bereits diskretisierten Struktur aus (Kap. 5). Die konsequente Anwendung der

analytischen Ableitungsregeln führt dann schließlich zu den Sensibilitätskoeffizienten der Tragwerksantwort (Bild 3-13).

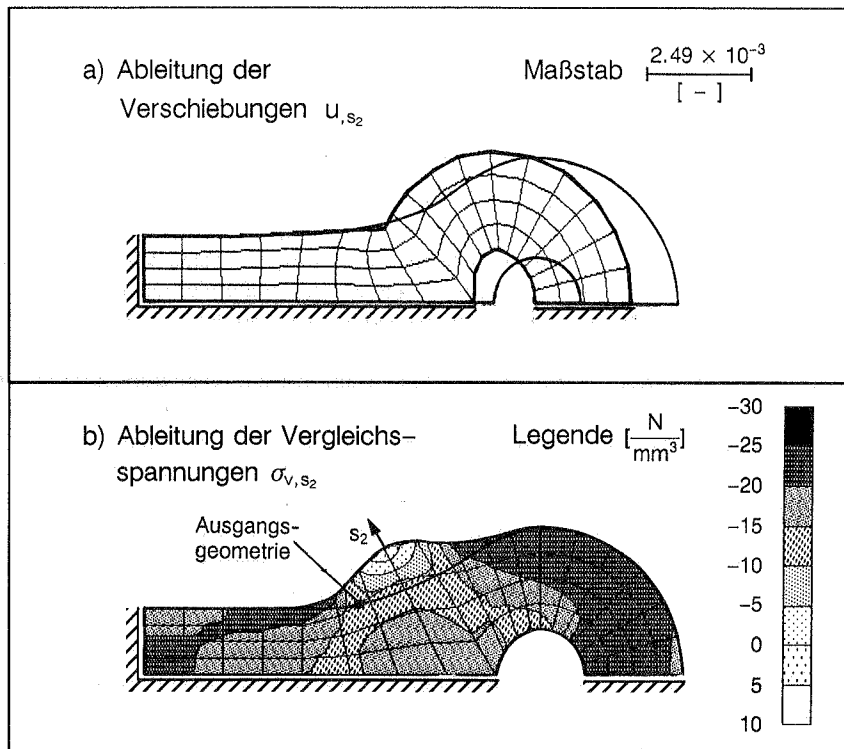


Bild 3-13: Begleitbeispiel, Ableitungen der Verformungen (a) und der Vergleichsspannungen nach von Mises (b)

### 3.2.2.3 Optimierung und interaktive Programmkontrolle

Durch die Verbindung der vielseitig anwendbaren Designelemente zur Entwurfsmodellierung und der Methode der finiten Elemente ergeben sich bei der Strukturoptimierung in der Regel sehr unterschiedliche mathematische Problemstellungen. Bei gleichzeitiger Form- und Querschnittsoptimierung wird zusätzlich die Charakteristik des mathematischen Problems über lineare bzw. nichtlineare Optimierungsfunktionen sehr stark beeinflusst. In jedem Fall muß für eine generelle Problemlösung bei der Optimierung als Programmkomponente von einem allge-

mein aufgestellten nichtlinearen Programmierungsproblem (NLP) ausgegangen werden:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \quad & f(\mathbf{s}) && (3 - 3) \\ \text{mit} \quad & h_j(\mathbf{s}) = 0 && ; \quad j = 1, \dots, m_e \\ & g_j(\mathbf{s}) \leq 0 && ; \quad j = m_e + 1, \dots, m \\ & \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U && ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

Die zugehörige Definition der jeweiligen Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  aus der Parametermenge des Entwurfs- bzw. Strukturmodells sowie die Formulierung von unterschiedlichen Zielfunktionen und Nebenbedingungen erfolgt im folgenden Kapitel.

Für eine wirtschaftliche Lösung von allgemeinen Strukturoptimierungsproblemen ist für die Entwicklung von mathematischen Verfahren eine möglichst hohe Konvergenzrate zum globalen Optimum von entscheidender Bedeutung. Daneben sollen diese Algorithmen eine Sequenz von verbesserten Lösungen erzeugen, welche im Idealfall alle im zulässigen Bereich liegen. Bei Verfahren mit derartigen Eigenschaften kann dann der iterative Lösungsprozeß mit der Garantie einer verbesserten zulässigen Lösung jederzeit abgebrochen werden. Bis heute existiert jedoch kein generelles Lösungsschema, welches alle genannten Eigenschaften gleichzeitig erfüllt. Es liegt daher nahe, unterschiedliche Strategien für die jeweils günstigste Problemlösung in einer Bibliothek zur Verfügung zu stellen. Für die treffende Auswahl der Verfahren braucht es dennoch viel Erfahrung und Expertenwissen, um zusammen mit einem gut konditionierten Optimierungsmodell die spezifische Problemstellung in geeigneter Weise zu lösen.

Die Lösungsstrategien mit der höchsten numerischen Effektivität verlangen Informationen über die ersten, und in Sonderfällen auch über die zweiten Ableitungen der Optimierungsfunktionen. Häufig müssen deshalb diese Funktionen bis zu den zweiten Ableitungen auch kontinuierlich sein. Diese Anforderungen haben einen entsprechenden Einfluß auf die Formulierung des Optimierungsproblems (z.B. Netzadaption, Kap. 4) und verlangen eine entsprechend effizient durchgeführte Ermittlung der Ableitungen (Kap. 5). Im Programm CARAT verfügt jede verwendete Lösungsstrategie über ein geeignetes Abbruchkriterium zur Überprüfung der Konvergenz (Kuhn-Tuckerbedingungen, max. Iterationen, etc.) sowie über entsprechende Fehlermeldungen für eine fehlerhafte Problemlösung.

In Tabelle 3-1 sind die in /Bletzinger 1990a/ ausführlich beschriebenen Optimierungsverfahren kurz zusammengefasst. Ein kombinierter Einsatz von Optimierungsstrategien kann häufig gewinnbringend angewandt werden /Rajan 1986b/. Dabei werden die Verfahren entsprechend ihren spezifischen Eigenschaften hin-

Methode	Beschreibung	Klassifikation / Literatur
<b>OPTFSD</b>	"Fully Stressed Design" Querschnittsoptimierung bei Fachwerken für zulässige Spannungen und Stabknicken.	"Stress Ratio Method" /Gellatly 1973, Gallagher 1973b/
<b>OPTEVL</b>	(1+1)-gliedrige Evolutionsstrategie Zufallsgesteuerte Barrieremethode, welche nach dem Prinzip der Mutation und Selektion vorgeht.	0.Ordn.,Suchmethode /Rechenberg 1973, Schwefel 1977/
<b>OPTSLP</b>	Sequentielle lineare Programmierung Sequentielle Linearisierung des NLP-Problems, Simplexmethode als Unterproblem, Konvergenzsteuerung durch "Move Limits".	1.Ordn.,primäres Grad.verf. /Pedersen 1982-83, Knepe 1986/
<b>OPTMMA</b>	"Method of Moving Asymptotes" Konvexe Approximation der linearisierten Opt.-funktionen, entkoppeltes primäres und duales Problem, Lösung des dualen Unterproblems (Fletcher-Reeves).	1.Ordn.,duales Grad.verf. /Svanberg 1987, (Fleury 1986)/
<b>OPTSQP</b>	Sequentielle quadratische Programmierung Sequentielle Linearisierung und quadratische Approximation des NLP-Problems durch BFGS-Update der Hessematrix, Lösung des QP-Problems für Suchrichtung, Schrittweitenbestimmung durch "Line Search".	2.Ordn.,Quasi-Newton /Schittkowski 1983/

Tabelle 3-1: Optimierungsverfahren im Program CARAT

tereinander zu einer übergeordneten, hybriden Lösungsstrategie verbunden. In Bild 3-14 ist für das Begleitbeispiel der Zuglasche ein solches Vorgehen dargestellt. Für dieses stark restringierte Problem wird zunächst OPTMMA eingesetzt, um in die Nähe der gewichtsoptimalen Lösung zu kommen. In der Nähe der Lösung ändert sich der aktive Satz der Nebenbedingungen nur wenig, und OPTSQP kann anschließend für eine Lösung mit hoher Genauigkeit gewinnbringend eingesetzt werden.

In Bild 3-14 zeigt sich ebenfalls der Vorzug einer interaktiven Programmkontrolle. Dazu gehört die übersichtliche Darstellung des Optimierungsverlaufs in entsprechenden Konvergenzdiagrammen für die Ziel- und evtl. die Lagrangefunktion, sowie ausgewählten Variablen und Nebenbedingungen. Bei Problemen im Bereich der simultanen Form- und Querschnittsoptimierung ergeben sich in den praktischen Anwendungen vielfach Schwierigkeiten in der Beurteilung des Optimierungsprozesses für eine mehrdimensionale Variation der Optimierungsvariablen. Die begleitende graphische Unterstützung (Formvariation, Spannungen, etc.) und die Monitorfunktion zur Überwachung des Fortschrittes im Optimierungsprozeß



können diese Barriere durchbrechen und helfen bei der kritischen Beurteilung schwieriger Problemstellungen.

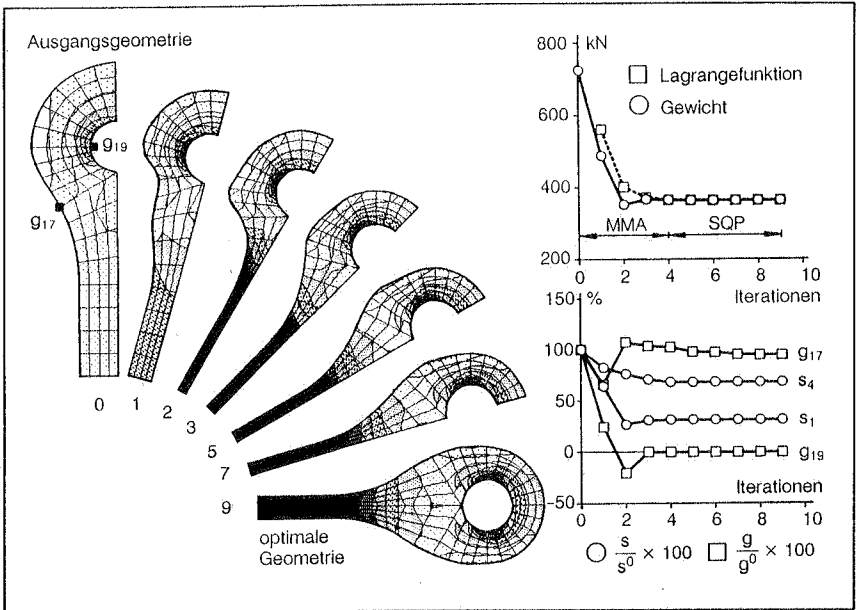


Bild 3-14: Begleitbeispiel, Optimierung und interaktive Programmkontrolle

### 3.2.3 Bewertung des vorliegenden Programmkonzepts

Die Beschreibung von Funktion und Struktur der Operationskomponenten zur Entwurfsmodellierung, Struktur- und Sensibilitätsanalyse sowie zur Optimierung zeigen, welche hohe gegenseitige Beeinflussung dieser Komponenten trotz getrennten Teilaufgaben dennoch bei der Verwirklichung eines integrierten Konzeptes für die Strukturoptimierung vorliegt. Auf der datentechnischen Ebene ergibt sich zusätzlich eine starke Verzahnung dieser Komponenten untereinander. In der Konzeption des Programms CARAT war gerade dieser Sachverhalt die Grundlage für die Entwicklung einer einheitlichen und durchgängigen Programmlösung. Durch die strenge Modularität des Programms und die Entlastung rechen- und datentechnisch schwieriger Programmteile an der Basis ergibt sich eine transparente und einfach erweiterbare Programmstruktur. Obwohl in diesem Fall eine reine programminterne Lösung vorliegt, liegt ein gleichzeitig effektiver und genereller Lösungsansatz für eine Vielfalt von Strukturoptimierungsproblemen vor. Stärkere Einschränkungen ergeben sich für das vorliegende Konzept, wenn es darum geht, einzelne Operationskomponenten gegen vorliegende Programmmodule

auszutauschen. Für die Entwurfsmodellierung und die Optimierungskomponente kann über eine geeignete Schnittstellendefinition auch für das hier verwendete programminterne Konzept eine einfache Lösung gefunden werden. Bei den Komponenten zur Struktur- bzw. Sensibilitätsanalyse gibt es keine vergleichbare Lösung, da diese Komponenten über die Optimierungsfunktionen stark miteinander verknüpft sind und in der Praxis keine Programmodule existieren, welche beide Aufgaben gemeinsam erfüllen. In jedem Fall geht bei der Verwendung von externen Programmodulen die durchgängige Datenstruktur verloren. Neue Aspekte aus dem Bereich der Strukturoptimierung sollten deshalb selbst bei einem zunächst hohen Programmieraufwand für die Problemformulierung immer zugunsten der effektiveren Problemlösung in das vorliegende Konzept eingebracht werden.

### 3.3 Entwicklungen und Tendenzen in der Computertechnologie

Nur wenige Themengebiete im Bereich der Ingenieurwissenschaften sind hinsichtlich der zukünftigen Entwicklung in der Computertechnologie so offen und anfällig wie die Strukturoptimierung.

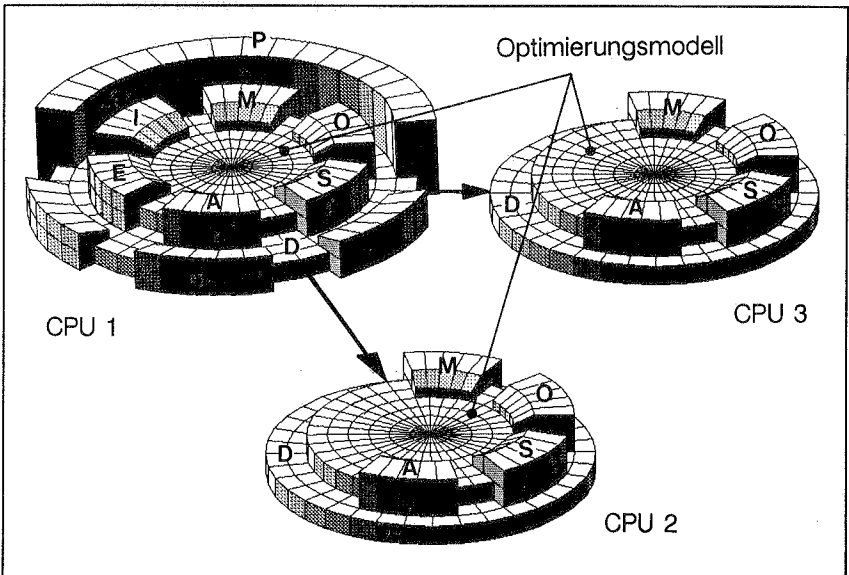


Bild 3-15: Paralleles und verteiltes Rechnen in der Strukturoptimierung

Die Gründe dafür liegen vor allem in dem vergleichsweise hohen numerischen Aufwand zur Lösung der mechanischen Aufgaben der Struktur- und gekoppelten Sensibilitätsanalyse und zur Lösung des mathematischen Optimierungsproblems. Aus der Sicht der Informatik kommen noch die Aspekte der interaktiven Pro-

grammkontrolle und Graphikunterstützung sowie die Problematik des Datenaustausches hinzu.

Für die Lösung großer Probleme in der Strukturoptimierung in Verbindung mit Dekompositionsverfahren ist dieses Anwendungsgebiet geradezu prädestiniert für die aufkommende Technologie des verteilten und parallelen Rechnens /Lootsma 1988, Herendeen 1988/. Für die Koordination solcher komplexer Aufgabenstellungen kann eine interne Programmstruktur mit einer durchgängigen Datenbasis sehr hilfreich sein (Bild 3-15). Insbesondere in Verbindung mit einer kombiniert eingesetzten Substrukturtechnik in der Strukturoptimierung /Arora 1977a,b/ ist hier eine elegante Lösung großer Probleme ( $n \geq 100$ ,  $\text{DOF} \geq 20000$ ) denkbar.

Die stark interdisziplinäre Charakteristik der Optimierungsaufgabe und der relativ hohe theoretische Aufwand bei der mechanischen und mathematischen Modellbildung (Kap. 2) legen es nahe, für die Anwendung der Programme zur Strukturoptimierung in der Praxis Entscheidungshilfen zu entwickeln. Dafür stehen heute entsprechende Möglichkeiten durch die Anwendung von Expertsystemen /Adeli 1988/ zur Verfügung. Voraussetzung für eine sinnvolle Anwendung dieser Technologie ist jedenfalls die vorausgehende Möglichkeit zur programminternen Fehlerdiagnose und -dokumentation. Die interne Programmsteuerung und die Fehlerdiagnose der Optimierungskomponenten halten das Programm CARAT auch für diese neuartige Entwicklung offen.

## **4.0 Formulierung des Optimierungsproblems**

### **4.1 Leichtbau als übergeordnetes Zielkriterium**

In der Praxis steht bei vielen Anwendungen der Strukturoptimierung die Frage nach der Auslegung einer Struktur mit optimaler Materialausnutzung im Vordergrund. Im einfachsten Fall geht über die Materialeinsparung und eine gewünschte Verringerung der Materialkosten das Gewicht der Konstruktion als Zielkriterium in direkter Weise in das Strukturoptimierungsproblem ein. Zur Erhöhung der Nutzlast eines Fahrzeuges oder der Verringerung seines Energiebedarfs kann das Gewicht beispielsweise aber auch indirekt bei der Problemformulierung eine Rolle spielen. Viele Strukturprobleme lassen sich in der Praxis nur unter der Voraussetzung der optimalen Materialausnutzung realisieren. Dies gilt zum Beispiel für Brückentragwerke mit sehr großen Spannweiten und einem hohen Eigenlastanteil. Bei dieser Klasse von Problemen ist die Funktionalität der Struktur in hohem Maße durch einen geringen Materialverbrauch bei gleichzeitig optimaler Anordnung des Materials bestimmt. Alle drei vorgenannten Fälle können zum klassischen Problemfeld der Leichtbaukonstruktionen gezählt werden /Wiedemann 1989/.

Ein vergleichbares Leitziel läßt sich bei der spannungsoptimalen Auslegung von Strukturen feststellen /Spörl 1985/. In diesen Fällen liegt das Schwergewicht eher auf einer möglichst günstigen Verteilung des Materials als auf seiner Einsparung. Eine ähnliche Problematik ergibt sich für Strukturen, welche über die Materialanordnung in gezielter Weise an eine gewünschte Eigenschaft angepasst werden sollen. Dies gilt zum Beispiel im Falle der optimalen Auslegung der Steifigkeit einer Rohkarosserie im Automobilbau /Spreng 1988/, wobei unterschiedliche Anforderungen (z.B. Crashverhalten, Formänderungsenergie) berücksichtigt werden müssen. Als verwandte Aufgaben können diese Problemstellungen den Leichtbaukonstruktionen zugeschlagen werden, wenn es vornehmlich darum geht, mit fest vorgegebenen Materialverhältnissen die Struktur in ihren Eigenschaften und ihrem Verhalten noch zu verbessern.

#### **4.1.1 Einschränkung und Klassifikation der Problemstellung**

Aus der Verbindung der direkten Verfahren der mathematischen Programmierung mit der vielseitig einsetzbaren Methode der finiten Elemente für die Strukturanalyse ergeben sich auf dem Hintergrund der Gestaltungsprinzipien des Leichtbaus (Kapitel 2) eine Vielzahl von Problemstellungen. Durch die Wahl der Optimierungsvariablen aus der Parametermenge des Entwurfs- und Analysemodells und durch die Definition entsprechender Optimierungsfunktionen läßt sich diese Anwendungsvielfalt noch beliebig steigern. Bevor das Optimierungsproblem formu-

liert werden kann, muß an dieser Stelle eine Einschränkung dieses breiten Anwendungsbereichs vorgenommen werden. Durch die Einteilung der vorgestellten Leichtbauprinzipien in geeignete Problemfälle läßt sich das vorliegende Aufgabengebiet auf einige konkretere Gesichtspunkte reduzieren.

Die Probleme der Strukturoptimierung können zunächst auf verschiedenen Ebenen nach der Variabilität im Parameterraum des Entwurfs- und Analysemodells charakterisiert werden /Ramm 1990/. Darüber hinaus beeinflussen die verschiedenen Parameter als Variablen die Charakteristik des Optimierungsproblems in sehr unterschiedlicher Weise. Durch die Wahl der Variablen können sich sowohl diskrete als auch kontinuierliche Optimierungsprobleme ergeben. In Bild 4-1 sind die verschiedenen Problemstellungen kurz wiedergegeben. In folgender Reihenfolge kann die Variabilität nach

- der Material- und Querschnittswahl (diskret und kontinuierlich),
- der Materialausrichtung und -anordnung (diskret und kontinuierlich) z.B. bei Laminaten,
- der Form der Struktur (kontinuierlich) und
- der Konfiguration bzw. Topologie (diskret) der Struktur

in aufsteigendem Schwierigkeitsgrad des Optimierungsproblems unterschieden werden.

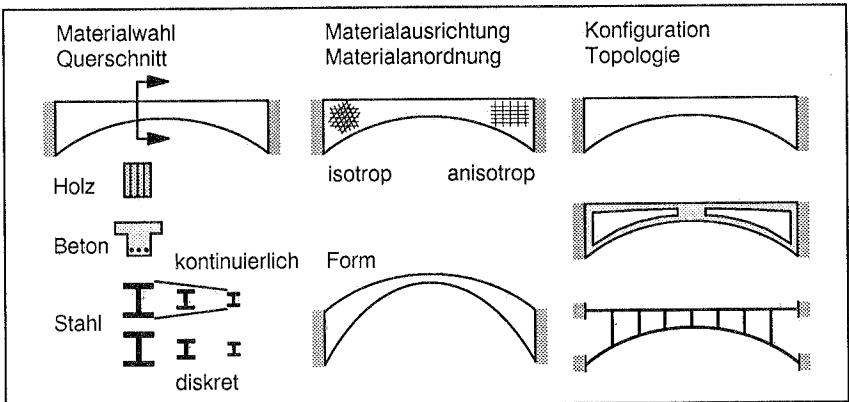


Bild 4-1: Unterschiedliche Variabilität bei der Strukturoptimierung

Mit der überaus komplizierten Frage nach der optimalen Auslegung der Struktur bei variabler Topologie /Wiedemann 1989, Bremicker 1990/ sind in der Regel besondere Lösungsmethoden (z.B. "integer programming") mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Dasselbe gilt für die Materialwahl, -anordnung und -ausrichtung, wenn sie über diskrete Variablen in das Optimierungsproblem eingebracht werden. Derartige Problemstellungen sollen hier von vorn herein aus-

geschlossen bleiben. Bei festliegender Wahl des Werkstoffes, der Bauweise und Topologie der Struktur sollen im folgenden nur die Querschnitte und die Form stetig variiert werden. In diesem Sinne muß also jeder Optimierung ein funktional und topologisch vorgegebener Entwurf (Idealisierung) mit einer definierten Variabilität (Parameterisierung) vorausgehen.

#### 4.1.2 Kriterien für die Problemformulierung

Im Vorfeld der Strukturoptimierung sind in /Wiedemann 1989/ einige Bewertungsmerkmale herausgearbeitet, nach welchen sich eine detailliertere Unterscheidung einzelner Problemfälle des Leichtbaus durchführen läßt. Bevor eine Struktur überhaupt optimiert werden kann, müssen Bewertungsmaßstäbe vorliegen, an welchen die verbesserte Struktur gemessen werden soll. In der vorgenannten Literaturstelle werden dafür verschiedene Kenngrößen angegeben.

Über einen Strukturkennwert  $k$ , der als Verhältnis der Last zur spezifischen Länge einer Struktur definiert ist, lassen sich geometrisch ähnliche Strukturen untereinander vergleichen und bewerten /Schaur 1979, Minke 1970/. Solche Vergleiche reduzieren sich im Allgemeinen auf einzelne Kenngrößen, wie die der Steifigkeit oder der Festigkeit einer Konstruktion (Bild 4-2). Für einen kleineren Strukturkennwert steht das Verformungsverhalten, die Stabilität oder das Schwingungsverhalten eines Tragwerks bei der Formulierung der Optimierungsaufgabe im Vordergrund. Bei eher gedungenen Strukturen mit einem großen Kennwert gewinnen jedoch die lokale Spannungsverteilung, sowie die Problematik der Lasteinleitung und der Materialermüdung vorrangige Bedeutung.

Für eine grobe Bewertung unterschiedlicher Tragwerksalternativen, welche sich in ihrer Variabilität lediglich in der Querschnitts- und Tragwerksgeometrie unterscheiden, läßt sich dieser Kennwert in geeigneter Weise anwenden. Damit können unter dem Gesichtspunkt der Leichtbaukonstruktionen zwei Grundprobleme unterschieden werden. Auf der einen Seite gilt für Strukturen mit kleinem Kennwert die Verbesserung der Steifigkeit als primäres Optimierungsziel. Bei Strukturen mit großem Kennwert kommt es dagegen auf eine günstige Spannungsverteilung an, und damit steht die Frage nach der Festigkeit einer Konstruktion als Zielkriterium im Mittelpunkt des Interesses.

Geht man für beide Grundprobleme vom Gewicht der Konstruktion als Basisgröße aus, so gehen die Steifigkeit bzw. Festigkeit der Struktur als direktes Zielkriterium in das Optimierungsproblem ein. Das kann zum Beispiel durch die Minimierung der Formänderungsenergie als Zielfunktion oder über eine Ausgleichsfunktion für die Spannungen geschehen (Bild 4-2). In beiden Fällen beeinflußt das Gewicht der Konstruktion höchstens als Nebenbedingung das Ergebnis des Optimierungsproblems. Eine zufriedenstellende Auslegung der Struktur läßt sich für beide Grundprobleme selten durch eine Querschnittsoptimierung alleine erreichen. Die möglichst freie und uneingeschränkte Variation der Form ist hier gewissermaßen eine

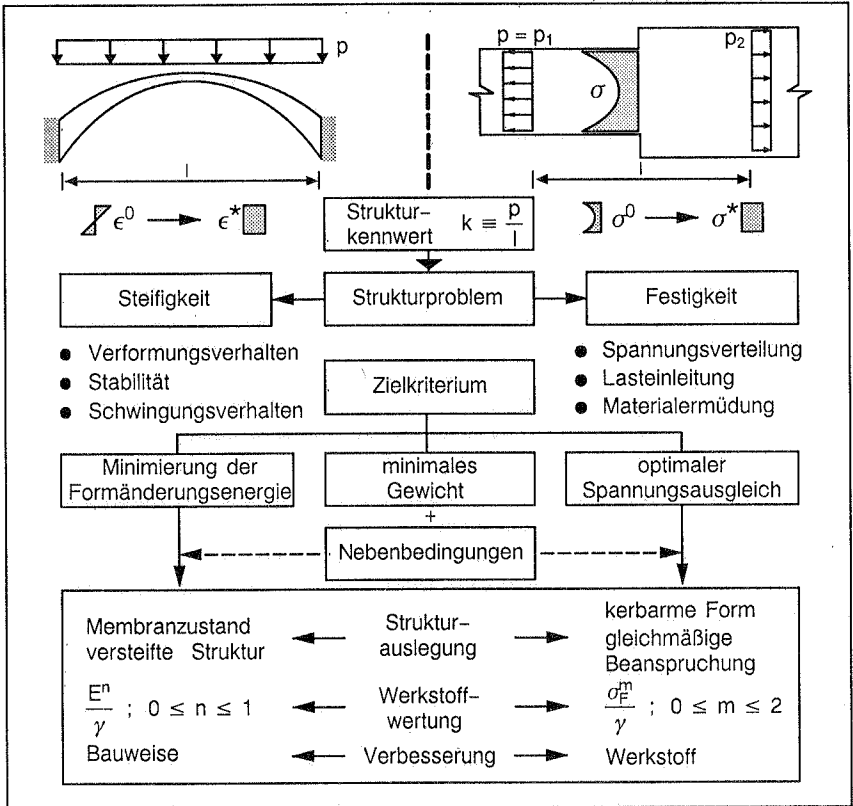


Bild 4-2: Grundprobleme in der Strukturoptimierung

Vorbedingung für einen erfolgreichen Einsatz der Strukturoptimierung. Im allgemeinen gehen aus einer derartigen Problemformulierung sehr schwach restriktierte Optimierungsaufgaben hervor.

Andererseits kann das Gewicht auch direkt als Zielgröße in das Optimierungsproblem eingebracht werden. In diesem Fall entscheidet dann die Formulierung der Nebenbedingungen zur Kontrolle der Spannungen, Verschiebungen oder Eigenwerte, darüber, ob die Optimierungsaufgabe eher als Auslegung für die optimale Steifigkeit oder Festigkeit der Konstruktion aufzufassen ist. In vielen Fällen wird sich in dieser Hinsicht a priori keine klare Trennlinie ziehen lassen. Erst die Lösung der Optimierungsaufgabe legt offen, welche Bedingungen das Endergebnis entscheidend beeinflusst haben. In diesem Sinne wird es sich bei Aufgaben mit dem Gewicht als Zielgröße immer auch um stark restringierte Optimierungsprobleme handeln.

Eine ganz eigene Klasse von Problemen ergibt sich bei der Optimierung von Strukturen, welche durch die Rotation um eine starre Achse beansprucht werden. Dazu gehören Aufgaben zur optimalen Auslegung von Schwungrädern, Turbinen oder Rotoren. Bei Schwungrädern liegt die primäre Aufgabe in der Speicherung der mechanischen Energie, welche ein möglichst großes Massenträgheitsmoment verlangt. Bei allen übrigen Strukturen wird die Optimierungsaufgabe eher durch die Beanspruchung, also Zentrifugalkräfte und die Kräfte aus Beschleunigen und Bremsen bestimmt. Im ersten Fall (Schwungrad) muß für die Optimierungsaufgabe die Minimierung der Gewichtsfunktion durch die Maximierung des Massenträgheitsmoments ausgetauscht werden oder gleichbedeutend, die Spannungsverteilung bzw. Steifigkeit bei gleichbleibendem Massenträgheitsmoment angepasst werden. Bei Turbinen und Rotoren wird demgegenüber die Charakteristik der Optimierungsaufgabe lediglich durch die Art der Beanspruchung geprägt, und die vorgenannten Zielkriterien des Leichtbaus (Steifigkeit - Gewicht - Festigkeit) können sinngemäß angewandt werden.

Die Formulierung des Optimierungsproblems innerhalb der finiten Elementmethode sollen im folgenden auf die beiden Grundprobleme der optimalen Steifigkeit bzw. Festigkeit mit der Gewichtsfunktion oder dem Massenträgheitsmoment als Basis- oder Zielgröße beschränkt bleiben. Zusammen mit der Variabilität in Form und Querschnitten, sowie entsprechend formulierten Nebenbedingungen ergibt sich insbesondere für Flächen- und Schalentragerwerke eine reichhaltige Palette von interessanten Strukturoptimierungsproblemen.

Über gewichtsbezogene Festigkeitskenngrößen  $\sigma^m/\gamma$  bzw. Steifigkeitswerte  $E^n/\gamma$  wird in /Wiedemann 1989/ eine Werkstoffwertung für unterschiedliche Beanspruchungen vorgenommen (Bild 4-2). Diese Kenngrößen werden dort für einen relativen Vergleich verschiedener Materialien eingesetzt, wobei die Exponenten  $n$  und  $m$  verschiedene Arten der Beanspruchung charakterisieren. Für einen fest vorgegebenen Werkstoff läßt sich in umgekehrter Weise aus dieser Wertung schließen, daß die beiden hier betrachteten Grundprobleme zusätzlich durch eine stark unterschiedliche "innere" Beanspruchung der Strukturen geprägt sein können. Eine kombinierte und mehrachsige Beanspruchung durch Zug, Druck, Schub, Biegung und Torsion beeinflußt zusammen mit lokalem und globalem Beulen über die Strukturantwort die Formulierung des Optimierungsproblems in entscheidendem Maße. Die Charakteristik der jeweiligen Optimierungsaufgabe wird nicht nur durch die Variabilität der Struktur und die gewählten Optimierungsfunktionen bestimmt, sondern wird ebenso durch die Strukturantwort geprägt. Jedes einzelne Optimierungsproblem muß deshalb in Kenntnis dieser vielfachen Einflüsse und der gegenseitigen Zusammenhänge formuliert werden.



## 4.2 Strukturoptimierung mit finiten Elementen

Die erste Anwendung der mathematischen Programmierung für Aufgaben der Strukturoptimierung und die Einführung der finiten Elementmethode haben zwar gleichzeitig, aber unabhängig voneinander stattgefunden (Tab. 2-1). Die Ursache für die zeitlich zusammenfallende Gründung beider Disziplinen ist vor allem im zügigen Fortschritt der Computertechnologie in diesem Zeitraum zu suchen, welche beide Entwicklungen in geeigneter Weise unterstützten. Die positiven Erfahrungen in der Anfangsphase beider Disziplinen bewirkte dann fast zwangsläufig ihre Verbindung unter der gemeinsamen Problemstellung der Strukturoptimierung. Seither ist die Weiterentwicklung der Strukturoptimierung maßgeblich von den Fortschritten in der Optimierungstheorie einerseits und der finiten Elementtechnologie andererseits geprägt.

Die Methode der finiten Elemente ist heute ein unverzichtbares Hilfsmittel zur Behandlung und Lösung einer Vielzahl von unterschiedlichen Problemen im Bereich der Strukturanalyse. Bei der Einführung dieser Methode stand die Beschreibung von strukturmechanischen Problemen im Mittelpunkt des Interesses. Durch die Aufarbeitung der theoretischen Grundlagen zeigte sich jedoch sehr schnell, daß sich die Methode in idealer Weise auch auf die rechnerische Simulation von vergleichbaren physikalischen Problemen anwenden läßt. Die Grundlage dieser relativ einfachen Übertragbarkeit bildet eine generelle Betrachtung des zugrundeliegenden Systems partieller und gekoppelter Differentialgleichungen /Bathe 1982/.

Aus theoretischer Sicht liefert die finite Elementmethode jedoch immer nur eine genäherte Lösung an die wirkliche Problemstellung. Nach der Idealisierung der wirklichen Struktur kann das Problem auf Elementebene, also lokal, durch diskrete Zustandsvariablen über Ansatzfunktionen beschrieben werden. Zunächst wird dadurch bei strukturmechanischen Problemen lediglich das Verhalten der Struktur auf Elementebene angenähert. In der Regel wird für eine allgemeine Problemformulierung ebenso die Geometrie der Struktur näherungsweise beschrieben. Hinzu kommen noch weitere Annahmen (z.B. zum Materialverhalten) und indirekte Abhängigkeiten von der Diskretisierung (z.B. Belastung). Die einzelnen Elemente sind untereinander durch die diskreten Zustandsvariablen verknüpft. Das Verhalten der gesamten Struktur ergibt sich nach dem Zusammenbau aus den einzelnen Elementen über die Lösung der entsprechenden Systemgleichungen. Die Qualität dieser Lösung ist demnach sehr stark von der Wiedergabe des wirklichen Strukturverhaltens abhängig, wobei global eine ausreichend genaue Diskretisierung und lokal das Elementverhalten die entscheidende Rolle spielen.

Als Leitziel der finiten Elementmethode kann die zuverlässige und möglichst genaue Lösung der jeweiligen Problemstellung unter dem geringsten numerischen Aufwand gelten. Insbesondere im klassischen Anwendungsbereich der Kontinuumsmechanik sind in diesem Zusammenhang einfache, effizient und robust formulierte finite Elemente wichtig. In dieser Hinsicht hat vor allem die Herleitung von

finiten Elementen aus Variationsprinzipien an Bedeutung gewonnen. Einerseits können durch eine variationelle Formulierung auch kompliziertere Probleme, zum Beispiel aus der Kontinuumsmechanik, einfacher und insgesamt übersichtlicher formuliert werden. Auf der anderen Seite läßt sich über die Energieprinzipien die Vollständigkeit der Elementformulierung besser kontrollieren und ihre Konvergenz zur theoretisch und energetisch richtigen Lösung überprüfen. Ein wesentlicher Vorteil dieses Vorgehens ergibt sich aus der zunächst aus dem Kontinuum abgeleiteten und von Ansatzfunktionen unabhängigen Elementformulierung. Erst für die Diskretisierung müssen die entsprechenden Ansätze für die Zustandsvariablen und die Elementgeometrie eingeführt werden. Diese zunächst von der Diskretisierung unabhängige Formulierung ist ebenso die Grundlage für eine variationelle Form der Sensibilitätsanalyse. In dieser Form ist die Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten der Strukturanalyse übergeordnet (Kapitel 5) und beruht auf der Variation der entsprechenden Funktionale nach den Optimierungsvariablen.

Im folgenden sollen für die Behandlung von Strukturoptimierungsproblemen mit der Methode der finiten Elemente zunächst für den allgemeinen Fall des dreidimensionalen Kontinuums die Grundgleichungen und -beziehungen hergeleitet werden. Für die Formulierung des Optimierungsproblems kommen dafür vor allem die weit verbreiteten Verschiebungselemente, aber auch gemischte und gemischt-hybride Elemente in Betracht. Die von der unterschiedlichen Elementformulierung stark abhängige diskrete Sensibilitätsanalyse findet nachfolgend im 5. Kapitel besondere Berücksichtigung. Liegen die Zustandsvariablen als Lösung der finiten Elementmethode vor, können die Optimierungsfunktionen für die entsprechende Formulierung des Optimierungsproblems definiert werden. Über die Zustandsvariablen sind auch die Optimierungsfunktionen direkt von der Diskretisierung und dem Elementverhalten abhängig. Diese Auswirkungen müssen bereits bei der Aufstellung des Optimierungsproblems berücksichtigt werden.

#### 4.2.1 Bezeichnungen und Definitionen

Der mechanischen Beschreibung des dreidimensionalen Kontinuums ist ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Der dreidimensionale Körper erstreckt sich über das Gebiet  $V$  und wird durch die Oberfläche  $\partial V$  begrenzt (Bild 4-3). Die Oberfläche  $\partial V$  ist weiter aufgeteilt in den Bereich  $\partial V_u$  mit vorgeschriebenen Verschiebungsgrößen und  $\partial V_r$  mit vorgeschriebenen Kraftgrößen. In der nachfolgenden Bezeichnungsweise werden vorgegebene Größen mit einem Dach ( $\wedge$ ) und Reaktionsgrößen mit einer Tilde ( $\sim$ ) versehen. Der Einheitsvektor  $n$  steht senkrecht zur Oberfläche  $\partial V$  und ist immer nach außen gerichtet. Auf eine Unterteilung des Gebiets  $V$  durch Innenränder  $\partial V_0$  und deren Beschreibung soll hier verzichtet werden. Bei der Wahl der Ansatzfunktionen müssen dafür also die wesentlichen (geometrischen) Übergangsbedingungen zwischen den Elementen durch konforme Ansätze auf  $\partial V_0$  erfüllt werden.

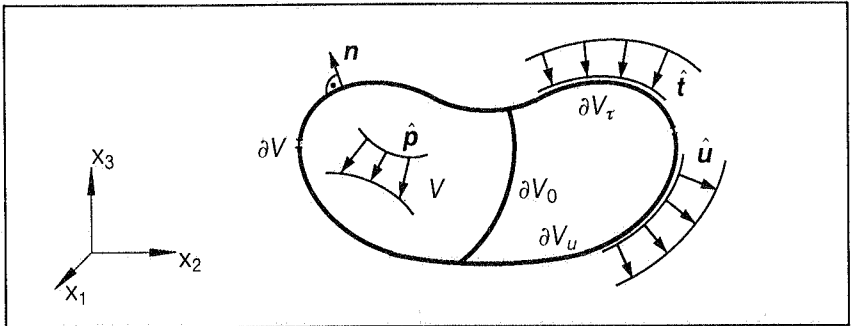


Bild 4-3: Beschreibung des dreidimensionalen Kontinuums

Für eine bessere Übersicht wird eine symbolische Schreibweise verwendet /Büfler 1983/. Die eingeführten Bezeichnungen lassen sich später für eine kompakte Beschreibung der variationellen Form der Sensibilitätsanalyse in Kapitel 5 weiterverwenden. Zunächst werden die Verschiebungs- und Belastungsgrößen in matrixieller, gegliederter Form eingeführt.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } \partial V_\tau \\ \text{auf } \partial V_u \end{array} \quad (4-1)$$

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } \partial V_\tau \\ \text{auf } \partial V_u \end{array} \quad (4-2)$$

Die einzelnen Elemente der Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{q}$  sind wiederum Vektoren mit Komponenten in den Richtungen des eingeführten Koordinatensystems ( $i=1,2,3$ ). Schließlich werden zur mechanischen Beschreibung des dreidimensionalen elastischen Kontinuums als Spannungsgröße  $\tau$  der Spannungstensor und als Verzerrungsgröße  $\varepsilon$  der Verzerrungstensor für kleine Verformungen herangezogen.

$$\tau^T = [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}] \quad (4-3)$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}] \quad (4-4)$$

mit  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$

Für eine variationelle Formulierung des Strukturproblems können nun die jeweils symmetrischen Bilinearformen eingeführt werden.

$$[\tau, \varepsilon] = \int_V \tau_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4-5)$$

$$\langle q, u \rangle = \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle + \langle \tilde{q}, \tilde{u} \rangle \quad (4-6)$$

$$\text{mit } \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle = \int_V \hat{p}_i u_i dV + \int_{\partial V_\tau} \hat{t}_i u_i dA$$

$$\text{und } \langle \tilde{q}, \tilde{u} \rangle = \int_{\partial V_u} \tilde{t}_i u_i dA$$

In den Gleichungen (4-5) und (4-6) kommt die Einstein'sche Summationskonvention über alle Indizes ( $i, j = 1, 2, 3$ ) zur Anwendung und wird auch für die weiteren Formeln des Abschnitts 4.2 beibehalten.

#### 4.2.2 Ausgangsgleichungen der finiten Elementmethode

Unter Verwendung der Spannungs- und Verzerrungsgrößen und der eingeführten Vektoren  $q$  und  $u$  lassen sich die statischen, kinematischen und konstitutiven Beziehungen als Ausgangsgleichungen für die finite Elementmethode in kurzer Form angeben.

$$\begin{aligned} \text{Statik:} \quad & -\tau_{ijj} = \hat{p}_i \\ & \tau_{ij} n_j = \hat{t}_i \\ & \tau_{ij} n_j = \tilde{t}_i \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} A\tau \\ na\tau \\ na\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{t} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } \partial V_\tau \\ \text{auf } \partial V_u \end{array}$$

$$\text{oder} \quad A\tau = \bar{q} + \tilde{q} \quad (4-7)$$

In Gl. (4-7) sind der statische Operator  $A$  für das Gebiet  $V$ , die statischen Randbedingungen auf  $\partial V_\tau$  und die Bestimmungsgleichung für die Reaktionskräfte auf  $\partial V_u$  enthalten.

$$\text{Kinematik:} \quad \varepsilon = B u \quad \text{in } V \quad (4-8)$$

$$\tilde{u} = \hat{u} \quad \text{auf } \partial V_u \quad (4-9)$$

Unter Verwendung von Gl. (4-1) und Gl. (4-4) lassen sich die kinematischen Feldgleichungen und Randbedingungen angeben, wobei  $B$  den kinematischen Operator bezeichnet. Beide Operatoren  $A$  und  $B$  sind lineare Operatoren und es gilt

$$A = B^*, \quad (4-10)$$

wobei die Operatoren  $B^*$  und  $B$  einander als adjungierte Operatoren zugeordnet werden können.

Werkstoff:  $\tau = C \varepsilon$  (4 - 11)

Unter der Voraussetzung von Hookeschem Materialverhalten bezeichnet  $C$  den symmetrischen Elastizitätstensor. Die in Gl. (4-11) eingeführte konstitutive Beziehung ist invertierbar.

### 4.2.3 Herleitung finiter Elemente aus Energieprinzipien

Die übersichtliche und allgemeine Herleitung der grundlegenden Gleichungssysteme für finite Elementberechnungen kann über Energieprinzipien in einer variationellen Formulierung vorgenommen werden. Für unterschiedliche Elementformulierungen liegen die verschiedenen Zustandsvariablen als Argumentfunktionen in diesen Funktionalen vor. Über die Variation der Funktione und die Extremal- oder Stationärbedingung ergeben sich dann nach der Diskretisierung der Funktione die entsprechenden Grundgleichungen für die finite Elementberechnung.

#### 4.2.3.1 Innere und äußere Potentiale

Mit der Voraussetzung von linear elastischem Materialverhalten müssen zunächst die in den Funktionalen enthaltenen Potentiale angegeben werden. Das gesamte innere Potential oder die gespeicherte Formänderungsenergie der Struktur ergibt sich zu

$$\Pi^{(i)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} [C \varepsilon, \varepsilon] = \int_V \pi^{(i)}(\varepsilon) dV \quad (4 - 12)$$

mit  $\pi^{(i)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$

In gleicher Weise kann das gesamte innere Komplementärpotential nach Gl. (4-13) angegeben werden

$$\tilde{\Pi}^{(i)}(\tau) = \frac{1}{2} [C^{-1} \tau, \tau] = \int_V \tilde{\pi}^{(i)}(\tau) dV \quad (4 - 13)$$

mit  $\tilde{\pi}^{(i)}(\tau) = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{-1} \tau_{ij} \tau_{kl}$

Schließlich wird noch das äußere mechanische Potential für die variationelle Formulierung benötigt, welches sich symbolisch für eine konfigurationsunabhängige Belastung mit

$$\Pi^{(a)}(\mathbf{u}) = - \langle \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (4 - 14)$$

oder ausführlich

$$\Pi^{(a)}(\mathbf{u}) = - \int_V \hat{p}_i u_i dV - \int_{\partial V_e} \hat{t}_i u_i dA \quad (4 - 15)$$

angeben läßt.

### 4.2.3.2 Energieprinzipien

Zur Herleitung der charakteristischen Elementmatrizen und Systemgleichung für Verschiebungselemente und gemischte sowie gemischt-hybride Elemente werden nun als die grundlegenden Funktionale das Gesamtpotential  $\Pi$  und das Funktional von Hellinger-Reissner  $\bar{\Pi}$  eingeführt /Bufler 1983/. Aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$[\boldsymbol{\tau}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] - \langle \bar{\mathbf{q}}, \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad (4 - 16)$$

oder gleichbedeutend aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \Pi^{(i)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi^{(a)}(\mathbf{u}) = \text{Min.} \quad (4 - 17)$$

mit den kinematischen Nebenbedingungen  $\mathbf{B} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0$  und  $\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}} = 0$  lassen sich die Grundgleichungen für Verschiebungselemente herleiten. Unter Anwendung der kinematischen Feldgleichungen Gl. (4-8) können die Verzerrungen eliminiert werden, so daß im verbleibenden Funktional lediglich die Verschiebungen als Zustandsvariable übrigbleiben.

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}) = \Pi^{(i)}(\mathbf{B} \mathbf{u}) + \Pi^{(a)}(\mathbf{u}) = \text{Min.} \quad (4 - 18)$$

$$\text{oder} \quad \delta \bar{\Pi}(\mathbf{u}) = \delta \Pi^{(i)}(\mathbf{B} \mathbf{u}) + \delta \Pi^{(a)}(\mathbf{u}) = 0$$

Die jeweiligen Grundgleichungen für gemischte und gemischt-hybride Elemente ergeben sich aus der Stationärbedingung für das Funktional von Hellinger-Reissner.

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = - \tilde{\Pi}^{(i)}(\boldsymbol{\tau}) + [\mathbf{B} \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}] + \Pi^{(a)}(\mathbf{u}) - \langle \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \text{stat.}$$

$$\text{oder} \quad \delta \bar{\Pi}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \langle \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \rangle + \left[ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \delta \boldsymbol{\tau} \right] = 0 \quad (4 - 19)$$

Hier handelt es sich um ein freies Variationsproblem ohne Nebenbedingungen.

### 4.2.3.3 Elementmatrizen und Systemgleichungen

Für die Erstellung der Elementmatrizen und Systemgleichungen werden die Funktionale über Ansatzfunktionen diskretisiert. Dabei wird das Gebiet  $V$  durch finite Elemente in Teilbereiche aufgeteilt. Für die freien Zustandsvariablen werden dann elementweise Ansätze eingeführt, welche in der Regel von diskreten Knotengrößen abhängen. Damit geht das Variationsproblem in ein Extremums- oder Stationaritätsproblem über. Für eine möglichst unabhängige und allgemeine parametrische Beschreibung der Geometrie und der Zustandsvariablen werden häufig isoparametrische Elementansätze gewählt, wobei Elementgeometrie und Zustandsvariablen mit denselben Funktionen approximiert werden. An dieser Stelle sollen zunächst unabhängig von der Geometrie für die Verschiebungen und die Spannungen verschiedene Ansätze eingeführt werden:

$$\mathbf{u}_e(\xi, \eta, \zeta) = \Phi \mathbf{u}_e \quad (4-20)$$

$$\boldsymbol{\tau}_e(\xi, \eta, \zeta) = \Psi \boldsymbol{\sigma}_e \quad (4-21)$$

Mit diesem Ansatz für das Verschiebungsfeld lassen sich jetzt aus dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials die Elementgleichungen für die Verschiebungselemente gewinnen. Dabei lautet das elementweise diskretisierte Funktional

$$\bar{\Pi}_D(\mathbf{u}) = \sum_e \left\{ \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e dV - \int_V \hat{\mathbf{p}}_e^T \Phi \mathbf{u}_e dV - \int_{\partial V_\sigma} \hat{\mathbf{t}}_e^T \Phi \mathbf{u}_e dA \right\}$$

Aus programmtechnischen Gründen wird das gesamte Gleichungssystem über Zuordnungsmatrizen aus den Elementgleichungen zusammengebaut. Bei diesem Vorgehen werden den Elementvariablen jeweils globale Gleichungsnummern zugeordnet ( $\mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{u}$ ). In der Fachliteratur /Bathe 1982/ wird diese Vorgehensweise auch als die direkte Steifigkeitsmethode bezeichnet. Die Extremalbedingung liefert nun für die so auf Systemebene zusammengebaute Gleichung (4-22) die Systemgleichung für Verschiebungselemente:

$$\delta \bar{\Pi}_D(\mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \underbrace{\sum_e \int_V \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e dV}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} - \underbrace{\int_V \hat{\mathbf{p}}_e^T \Phi dV + \int_{\partial V_\sigma} \hat{\mathbf{t}}_e^T \Phi dA}_{\mathbf{R}} = 0$$

$$\text{mit } \mathbf{K} = \sum_e \int_V \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e dV$$

$$\text{und } \mathbf{R} = \sum_e \left\{ \int_V \hat{\mathbf{p}}_e^T \Phi dV + \int_{\partial V_\sigma} \hat{\mathbf{t}}_e^T \Phi dA \right\}$$

Über die geometrischen Feldgleichungen und das Werkstoffgesetz kann aus den globalen Verschiebungen durch eine Umkehrung der Zuordnung ( $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_e$ ) zu den diskreten Elementspannungen zurückgerechnet werden

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C} \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad (4-24)$$

Wie die Bezeichnung dieses Elementtyps bereits aussagt, werden lediglich die Verschiebungen im Element durch Ansatzfunktionen beschrieben. Bedingt durch ihre Herleitung müssen die Ansatzfunktionen die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen und elementweise stetig, differenzierbar und integrierbar sein.

Dieselbe Vorgehensweise kann man auf die Diskretisierung des Funktional von Hellinger-Reissner zur Herleitung von gemischten und gemischt-hybriden Elementen übertragen. Für den Fall, daß die Verschiebungsansätze die geometrischen Randbedingungen erfüllen, lautet das elementweise diskretisierte Funktional

$$\begin{aligned} \bar{I}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & \sum_e \left\{ - \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{C}_e^{-1} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}_e \, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \, dV \right. \\ & \left. - \int_V \hat{\mathbf{p}}_e^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}_e \, dV - \int_{\partial V_e} \hat{\mathbf{t}}_e^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}_e \, dA \right\} \end{aligned} \quad (4-25)$$

Durch eine Zuordnung der globalen Variablen zu den Elementvariablen analog zur direkten Steifigkeitsmethode ( $\boldsymbol{\sigma}_e \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$ ;  $\mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{u}$ ) und mit der Stationaritätsbedingung ergibt sich das Gleichungssystem auf Systemebene:

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & \delta \boldsymbol{\sigma}^T \sum_e \left\{ - \int_V \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{C}_e^{-1} \boldsymbol{\Psi} \, dV \boldsymbol{\sigma} + \int_V \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_e \, dV \mathbf{u} \right\} \\ & + \delta \mathbf{u}^T \sum_e \left\{ \int_V \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\Psi} \, dV \boldsymbol{\sigma} - \int_V \boldsymbol{\Phi}^T \hat{\mathbf{p}}_e \, dV - \int_{\partial V_e} \boldsymbol{\Phi}^T \hat{\mathbf{t}}_e \, dA \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

oder 
$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{H} = \sum_e \int_V \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{C}_e^{-1} \boldsymbol{\Psi} \, dV$$

$$\text{und } \mathbf{G} = \sum_e \int_V \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_e \, dV$$

Die Ansätze für die Verschiebungen und Spannungen müssen bei den hier beschriebenen gemischten Elementen die geometrischen Übergangsbedingungen erfüllen, sowie den Grundanforderungen (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) genügen. Entsprechend der Unterscheidung in /Stumpfrock 1988/ erhält



man für gemischte Elemente in der Regel stetige Verschiebungs- und Spannungsverläufe. Nicht in jedem Fall kann bei dieser Elementformulierung, was für die Formulierung des Optimierungsproblems wichtig ist, die Ermittlung der Spannungen verbessert werden. Häufig treten bei diesen Elementen, bedingt durch eine restriktive Erfüllung der statischen Randbedingungen, eine Oszillation der Schnittgröße um die exakte Lösung auf. Zusammen mit dem gegenüber Verschiebungselementen wesentlich höheren numerischen Aufwand für die Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems Gl. (4-25) läßt sich die Anwendung solcher Elemente nur bei überragend guten Elementeigenschaften rechtfertigen.

Wesentlich weitere Verbreitung finden gemischt-hybride Elemente, welche aus einer gemischten Formulierung hergeleitet werden. Im Gegensatz zu den gemischten Elementansätzen dürfen bei gemischt-hybriden Elementen die Spannungen elementweise Sprünge aufweisen, falls für die Verschiebungen kontinuierliche Verläufe vorliegen. In diesem Fall können die unbekanntenen Größen für die Spannungen in jedem Element eliminiert werden. Ausgangspunkt für diese Elementformulierung ist das diskretisierte Funktional in Gl. (4-25). Die Variation dieses Funktionals ergibt auf Elementebene folgende Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{h}_e & \mathbf{g}_e \\ \mathbf{g}_e^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_e \\ \mathbf{u}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_e \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

mit  $\mathbf{h}_e = \int_V \Psi^T \mathbf{C}_e^{-1} \Psi \, dV$  ;  $\mathbf{g}_e = \int_V \Psi^T \mathbf{B}_e \, dV$

und  $\mathbf{r}_e = \left\{ \int_V \Phi^T \hat{\mathbf{p}}_e \, dV + \int_{\partial V_\sigma} \Phi^T \hat{\mathbf{t}}_e \, dA \right\}$

Durch die elementweise Elimination der Spannungsvariablen und die Zuordnung der lokalen zu den globalen Verschiebungen ( $\mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{u}$ ) ergibt sich das Gleichungssystem auf Systemebene.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{k}_e \quad ; \quad \mathbf{R} = \sum_e \mathbf{r}_e \quad (4-28)$$

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{g}_e^T \mathbf{h}_e^{-1} \mathbf{g}_e$$

Es liegt damit eine Steifigkeitsbeziehung auf Systemebene vor, welche global mit der über Verschiebungselemente aufgestellten Beziehung Gl. (4-23) vergleichbar ist. Diese Elementformulierung läßt sich deshalb ohne Schwierigkeiten in herkömmliche finite Elementprogramme einführen. Lediglich die Ermittlung der Elementspannungen ist unterschiedlich.

$$\tau_e = \Psi \sigma_e \quad \text{mit} \quad \sigma_e = \mathbf{h}_e^{-1} \mathbf{g}_e \mathbf{u}_e \quad (4-29)$$

Durch diese Vorgehensweise werden an die Kontinuität der Spannungsansätze bei diesen Elementen keine so hohen Anforderungen gestellt wie bei den gemischten Elementen. Damit unterscheiden sich beide auf demselben Funktional beruhenden Elementtypen prinzipiell durch den Verlauf der Spannungen /Stumpfrock 1988/. Gegenüber Verschiebungselementen weisen einige gemischt-hybride Elemente ein besseres Elementverhalten auf und werden deshalb trotz des höheren Aufwands bei der Formulierung der Elementmatrizen bevorzugt eingesetzt.

Für die Formulierung des Optimierungsproblems sind diese eher grundsätzlichen Fragen zum Verhalten finiter Elemente von entscheidender Bedeutung. Auf der einen Seite spielt die Zuverlässigkeit und numerische Stabilität der finiten Elemente für die Optimierung eine wichtige Rolle. Dabei geht es nicht nur darum, daß die Strukturanalyse für den Ausgangspunkt der Optimierungsaufgabe zuverlässige Ergebnisse liefert, sondern diese ebenfalls auch für eine stark veränderte und unter Umständen verzerrte Geometrie während des Optimierungsprozesses stabil bleiben. Dem steht auf der anderen Seite die Forderung nach einer möglichst effizient durchgeführten Strukturanalyse entgegen. Bei der Lösung von Optimierungsproblemen kommt es, bedingt durch das iterative Vorgehen, zu einer häufig wiederholten Strukturberechnung ("reanalysis"). Je nach Problemstellung geht dadurch der Aufwand einer einzelnen Strukturanalyse vielfach in den Gesamtaufwand zur Lösung des jeweiligen Optimierungsproblems ein. Dieselben Überlegungen gelten für die Durchführung der Sensibilitätsanalyse (Kapitel 5). Zumindest bei der diskreten Formulierung wird dort die Zuverlässigkeit und numerische Effizienz in der Elementformulierung ebenso wichtig. Bei der Strukturoptimierung werden daher auch an die Formulierung der finiten Elemente höhere Anforderungen gestellt.

#### **4.2.4 Definition der Optimierungsfunktionen**

Zur Formulierung der allgemeinen mathematischen Optimierungsaufgabe (Gl. 3-3) muß das Strukturproblem in einen funktionalen Zusammenhang mit den Optimierungsvariablen gebracht werden. Bei der Verwendung der finiten Elementmethode geschieht dies in geeigneter Weise über die Definition von Optimierungsfunktionen, welche verschiedene geometrische Größen, aber auch vor allem die Strukturantwort als Funktion der Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$ , wiedergeben. Diese Optimierungsfunktionen werden entweder global auf Systemebene oder lokal auf Elementebene definiert. Zu unterscheiden ist ebenfalls, ob die jeweiligen Funktionen als Zielkriterium, Gleichheits- oder Ungleichheitsnebenbedingung in das mathematische Optimierungsproblem Eingang finden.

#### 4.2.4.1 Zielfunktionen

Bei der Verwendung des Prinzips Leichtbau als übergeordnetes Zielkriterium gehen Formänderungsenergie, Gewicht (Volumen) bzw. Rotationsmasse oder das Quadrat der Abweichung von Spannungsgrößen gegenüber einem Mittelwert als Zielfunktion in die Problemstellung ein. Bei allen genannten Zielfunktionen handelt es sich um globale, systemübergreifende Größen und der jeweilige Funktionswert ergibt sich daher aus der Summe aller Elementgrößen über einen jeweils definierten Bereich der Struktur. Im einzelnen sind die Zielfunktionen folgendermaßen definiert:

Gewicht (Volumen):

$$f_W = \sum_e \int_V \gamma dV \quad ; \quad f_V = \sum_e \int_V dV \quad (4 - 30a,b)$$

mit  $\gamma$  = spezifisches Gewicht

Axiales Massenträgheitsmoment:

$$f_C = \sum_e \int_V \rho r^2 dV \quad (4 - 30c)$$

mit  $\rho$  = Dichte ;  $r$  = Abstand zur Rotationsachse

Formänderungsenergie:

$$f_E = \sum_e \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4 - 30d)$$

mit  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  = Elemente des Spannungs – bzw. Verzerrungstensors

Allgemeiner Spannungsausgleich:

$$f_S = \sum_e \int_V (S - S_a)^2 dV$$

oder  $f_S = \sum_e \int_a (S - S_a)^2 dA \quad (4 - 30e)$

$$f_S = \sum_e \int_L (S - S_a)^2 dL$$

mit  $S$  = elementbezogene Spannungsgrößen (Kapitel 6)

Die Formulierung einer allgemeinen Ausgleichsfunktion /Reitinger 1988/ ist elementabhängig und muß deshalb auch für das jeweilige Element unterschiedlich integriert werden. Darüber hinaus wird durch die Art der Integration die Problemstellung selbst für den Spannungsausgleich beeinflusst /Kühnemann 1989/. So

kann beispielsweise über die Integration der Ausgleich über das Volumen der Struktur, über eine ausgewählte Schicht oder einen vorgegebenen Rand erfolgen. Um für die Problemformulierung eine möglichst große Bandbreite zu erreichen und die Vielseitigkeit der Methode der finiten Elemente in vollem Umfang auch der Strukturoptimierung zugänglich zu machen, kann die eigentliche Zielfunktion aus unterschiedlich gewichteten Teilen zusammengesetzt werden.

$$f = \sum_i \text{fac}_i f_i \quad \text{mit } (i = E, W, V, C, S) \quad (4 - 30f)$$

Damit lassen sich verschiedene, unter Umständen auch konkurrierende, Zielfunktionen zusammenfassen. Eine Ausdehnung der Problemstellung auf Vektoroptimierungsprobleme /Eschenauer 1982b, Knepe 1986/ wird durch eine derartige Problemformulierung leicht ermöglicht. Die gewichtete Zusammensetzung der Zielfunktion ist besonders dann wichtig, wenn verschiedene Lastfälle gleichzeitig über die Funktionen  $f_E$  und  $f_S$  in das Zielkriterium eingebracht werden sollen (Kapitel 7). Durch den Zusammenbau der Zielfunktion aus unterschiedlich gewichteten Anteilen können die für das Zielkriterium besonders wichtigen Bereiche hervorgehoben werden. Im Einzelfall lassen sich damit für die Optimierungsaufgaben unwesentliche Strukturbereiche in ihrem Einfluß auf das Optimierungsproblem auch ganz ausschließen.

#### 4.2.4.2 Gleichheitsnebenbedingungen

Eine alternative Formulierung von Optimierungsaufgaben aus dem Problembe-  
reich des Leichtbaus macht es möglicherweise erforderlich, die zuvor definierten  
Zielgrößen als Basisgrößen zu formulieren. Damit werden diese Funktionen unter  
Umständen als Gleichheitsnebenbedingungen ( $h=0$ ) bei der Formulierung des  
Optimierungsproblems (Gl.3-3) benötigt. In der Regel genügt es, die rein geome-  
trieabhängigen Funktionen in folgender Weise als Nebenbedingungen einzufüh-  
ren:

Gewicht (Volumen):

$$h_W = \frac{W}{W^0} - 1 ; \quad h_V = \frac{V}{V^0} - 1 \quad (4 - 31a,b)$$

$$\text{mit } W = \sum_e \int_V \gamma dV ; \quad V = \sum_e \int_V dV$$

und  $W^0, V^0 =$  Ausgangswerte oder vorgegebene Werte

### Axiales Massenträgheitsmoment:

$$h_C = \frac{C}{C^0} - 1 \quad \text{mit} \quad C = \sum_e \int_V \rho r^2 dV \quad (4-31c)$$

und  $C^0 =$  Ausgangswert oder vorgegebener Wert

Für den Fall der simultanen Strukturanalyse und -optimierung müssen bei der Verwendung von Verschiebungselementen und gemischt-hybriden Elementen die Gleichgewichtsbedingungen als Gleichheitsnebenbedingungen in das Optimierungsproblem eingeführt werden. Im allgemeinen Fall entspricht dann jeder Gleichgewichtsbedingung des globalen Gleichungssystems (Gl. 4-23 bis 4-28) eine Nebenbedingung:

$$h_{EQi} = K_{ij} u_j - R_i \quad (j = 1, \text{NEQ}) \quad (4-32)$$

mit  $\text{NEQ} =$  Anzahl der Zustandsvariablen ( hier: Verschiebungen )

Es ergeben sich bei dieser Art der Problemformulierung sehr schnell große Optimierungsprobleme mit vielen gleichzeitig aktiven Gleichheitsnebenbedingungen ( $i = 1, \text{NEQ}$ ), welche für den optimalen Lösungspunkt mit möglichst hoher Genauigkeit erfüllt sein müssen. Im Abschnitt 4.3. wird auf diese Problematik näher eingegangen.

#### **4.2.4.3 Ungleichheitsnebenbedingungen**

Diese Art von Nebenbedingungen können auf System- bzw. Elementebene eingeführt sein und haben für die Formulierung des Optimierungsproblems eine eigene Charakteristik. Im anschaulichen Sinne geben diese Funktionen Werte von "Messpunkten" an, welche auf der Struktur verteilt sind. Liegen diese "Messpunkte" in zulässigen Grenzen, haben sie keine Auswirkung auf die Lösung des Optimierungsproblems. Erst wenn diese Funktionswerte unzulässig, d.h. die Nebenbedingungen "aktiv" werden, wirken sie sich über die Festlegung von Bereichsgrenzen im Variablenraum des Optimierungsproblems in entscheidender Weise aus. In die Formulierung von Nebenbedingungen können geometrische Größen, aber vor allem Größen zur Beschreibung der Strukturantwort, eingehen. Die wichtigsten Nebenbedingungen werden dabei über folgende Gleichung eingeführt:

Geometrie:

$$g_G = x_i^j - x_i^k + \Delta x_i \quad (4-33a)$$

mit  $x_i^j, x_i^k =$  Koordinaten  $x_{Ni}$  bzw.  $x_{Di}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

und  $\Delta x_i =$  Toleranzwert

Verschiebungen:

$$g_u = \frac{u}{u_{zul.}} - 1 \quad (4 - 33b)$$

mit  $u =$  Verschiebungen  $u_i$  bzw. Rotationen  $u_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

und  $u_{zul.} =$  zulässiger Wert

Spannungsgrößen:

$$g_S = \frac{S}{S_{zul.}} - 1 \quad (4 - 33c)$$

mit  $S =$  elementbezogene Spannungsgrößen (Kapitel 6)

Die Kontrolle der Spannungsgrößen im Optimierungsproblem ist von den elementspezifischen Formulierungen abhängig und wird daher als lokale Nebenbedingung auf Elementebene aufgestellt.

#### 4.2.5 Einfluß der Diskretisierung auf das Optimierungsproblem

Neben der Elementformulierung werden die eingeführten Optimierungsfunktionen über die Lösung des Strukturproblems in entscheidender Weise vom Grad der Diskretisierung beeinflusst. Da eine finite Elementberechnung immer nur einer Näherung an das wirkliche Strukturverhalten entspricht, bestimmen die Einteilung des finiten Elementnetzes und das Elementverhalten die Qualität der Lösung. Je nach Problemstellung werden im Blick auf die Strukturoptimierung an die Qualität dieser Lösung unterschiedliche Anforderungen gestellt. Geht es vornehmlich um die Beschreibung des globalen Strukturverhaltens, ist eine relativ grobe Element-einteilung und eine einfache Elementformulierung in vielen Fällen ausreichend. Liegt der Optimierungsaufgabe jedoch ein Festigkeitsproblem mit einer stark lokalen Beanspruchung (z.B. durch Kerben) zugrunde, muß die Modellierung des Tragwerkes wesentlich verfeinert werden. In jedem Fall hängt die Lösung des Optimierungsproblems entscheidend von der Qualität der Lösung des Strukturproblems ab /Liefoghe 1988/.

Alternativ zu einer Verwendung hochwertiger finiter Elemente für die zuverlässige und möglichst wirklichkeitsnahe Ermittlung der Strukturantwort werden in jüngster Zeit auch Methoden zur automatischen und adaptiven Anpassung oder Verfeinerung des Elementnetzes vorgeschlagen (vgl. Kapitel 6, /Botkin 1985, Pande 1990/). Die Verbesserung der Strukturantwort über höherwertige Elemente (p-Verfeinerung) oder über einen höheren Diskretisierungsgrad (h-Verfeinerung) führt im Blick auf die Strukturoptimierung zu einem Widerspruch. Einerseits bewirkt eine Verfeinerung die durchaus erwünschte Verbesserung der Ergebnisse für die Strukturoptimierung. Auf der anderen Seite geht jedoch der für viele Optimie-

Beispiel 4-1:

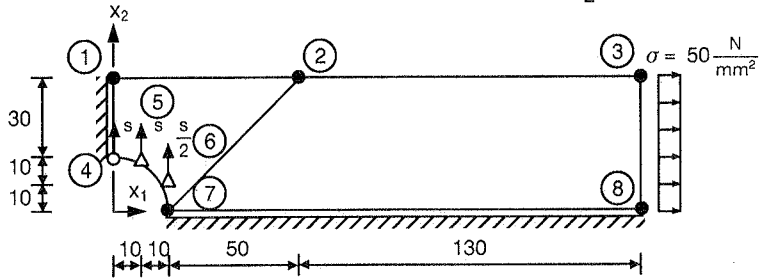
Material:  $E = 2.1 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}$ ;  $\nu = 0.30$

Blechdicke:  $t = 10 \text{ mm}$

$\sigma_{zul} = 240 \frac{N}{mm^2}$

Geometrie: [mm]

Variable:  $s = x_{24} = x_{25}$ ;  $x_{26} = \frac{s}{2}$



h-Verfeinerung

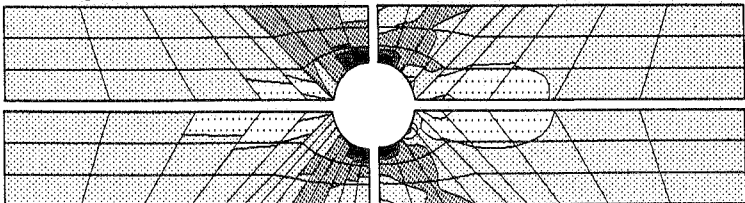
p-Verfeinerung

Lineare Elemente  
2x2 integriert

3x4 Elemente

3x4 Elemente

Quadr. Elemente  
2x2 integriert



Lineare Elemente  
2x2 integriert

3x8 Elemente

3x4 Elemente

Kub. Elemente  
3x3 integriert

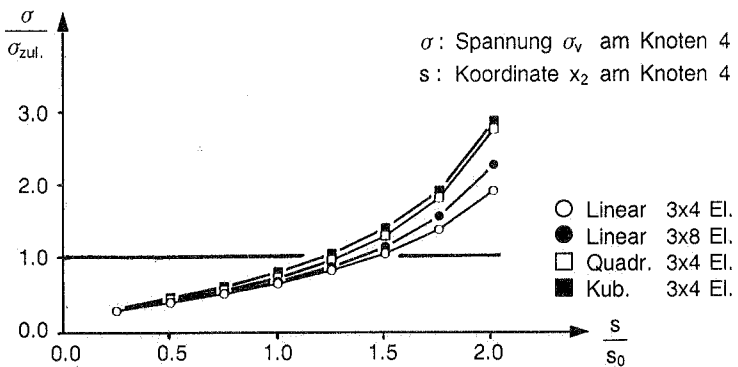


Bild 4-4: Einfluß der Diskretisierung auf eine Optimierungsfunktion

rungsalgorithmen erforderliche kontinuierliche Verlauf der Optimierungsfunktionen bis zu den 2. Ableitungen verloren.

Im Beispiel 4-1 wird dieser Konflikt für verschiedene Möglichkeiten der Verfeinerung am Verlauf von Spannungswerten bei einer Zuglasche unter Kerbwirkung aufgezeigt. Gezeigt wird die Veränderung der Spannungen bei unterschiedlichen Lochgeometrien, definiert durch die Variable  $s$ . Eine automatische und adaptive Anpassung des Elementnetzes während der Iteration im Optimierungsprozeß entspricht einem sprunghaften Umschalten zwischen dem in Bild 4-4 dargestellten Funktionsverläufen. Bei einer hohen, lokal in der Struktur auftretenden Gradienten in den kontrollierten Spannungswerten, kann die Kontinuität der Optimierungsfunktionen deutlich verletzt sein. Diese Eigenschaft macht sich besonders dann negativ bemerkbar, wenn ein Umschalten in der Nähe der optimalen Lösung erfolgt und damit die Störung der Optimierungsfunktionen im Toleranzbereich des Abbruchkriteriums für den Optimierungsprozeß liegt. Wie bereits in Kapitel 3 vorgeschlagen, soll deshalb während des iterativen Lösungsprozesses die Kontinuität der Optimierungsfunktionen möglichst erhalten bleiben. Damit können die besseren Konvergenzeigenschaften hochwertiger Optimierungsmethoden ausgenutzt werden. Eine externe Restartmöglichkeit und die entsprechende Netzanpassung geben im vorliegenden Programmkonzept eine insgesamt gute Lösung für diese Konfliktsituation.



## 4.3 Definition der Optimierungsvariablen im Parameterraum

Bei der Koppelung von Verfahren der mathematischen Programmierung und der Methode der finiten Elemente können zunächst alle im Entwurfs- und Analysemodell auftretenden Parameter als variabel betrachtet werden. Obwohl durch die vorliegende durchgängige Programmlösung und die leicht zugängliche Datenbasis eine einfache Identifikation aller strukturelevanten Parameter als Variablen theoretisch möglich ist, macht ein solches Vorgehen für die konkrete Formulierung von Optimierungsproblemen wenig Sinn. Wie in /Bletzinger 1990a/ bereits für das Entwurfsmodell eingeführt, wird hier ebenfalls über eine kontrollierte Dateneingabe (I) die Identifikation der Variablen für das Analysemodell vorgenommen. Durch diese Maßnahme ist die Menge der Optimierungsvariablen auf eine Teilmenge des gesamten Parameterraumes reduziert. Zusammen mit dem zuvor definierten übergeordneten Zielkriterium ergibt sich durch diese variable Form- und Querschnittsbeschreibung im Entwurfs- und Analysemodell eine überschaubare Klasse von Optimierungsproblemen.

### 4.3.1 Identifikation der Variablen im Programmkontext

Durch die gleichzeitige Einführung von Optimierungsvariablen im Entwurfs- und Strukturmodell können sich über die Strukturparameter und die Strukturantwort relativ komplizierte funktionelle Zusammenhänge für das Optimierungsmodell ergeben. Diese komplexe Abhängigkeit des Optimierungsmodells von den eingeführten Optimierungsvariablen liegt, wie in Bild 4-5 dargestellt, vor allem in den vielschichtigen Generierungs- und Verknüpfungsvorschriften /Bletzinger 1990b/ für die Entwurfs- und Strukturparameter begründet.

In Anlehnung an das zugrundeliegende programminterne Lösungskonzept (Kapitel 3), sind hier die Zusammenhänge auf Programmebene dargestellt, welche sich aus der Variablendefinition zwischen Entwurfs-, Struktur- und Optimierungsmodell ergeben. Die Variabilität des Optimierungsproblems wird zunächst in der äußeren Programmschleife, welche über die Programmkontrolle dem Benutzer zugänglich ist, fest eingestellt. Nach der vollzogenen Identifikation von Entwurfs- und Strukturparametern als Optimierungsvariablen wird die Lösung des Optimierungsproblems in einer internen Programmschleife durchgeführt. Auf dieser Programmebene wird anschließend das in seiner Dimension ( $n$  Variablen,  $m$  Nebenbedingungen) festgesetzte Optimierungsproblem (Gl.3-3) iterativ gelöst. Bis auf die interaktive graphische Darstellung der Variabilität im Strukturproblem bleibt dieser interne Prozeß mit seinen vielseitigen Verknüpfungen zwischen Variablen und Parametern dem Programmanwender verborgen. Die fest eingestellten Generierungs- und Verknüpfungsvorschriften werden in dieser Programmschleife wiederholt für die neuen Optimierungsvariablen ausgeführt. Nachfolgend werden dann die Strukturanalyse und die Sensibilitätsanalyse für das aktuelle Entwurfs- und

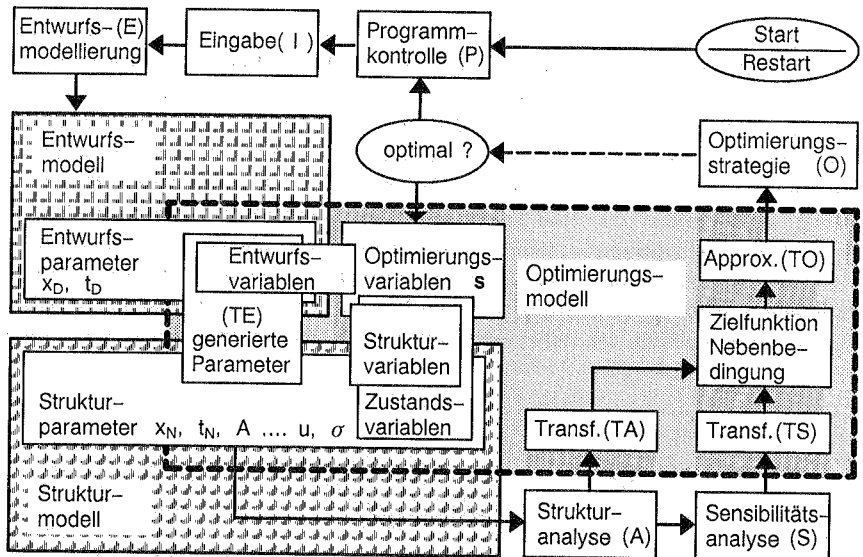


Bild 4-5: Definition der Optimierungsvariablen im Programmkontext

Strukturmodell durchgeführt. Über die Strukturantwort werden die von den Optimierungsvariablen vielfach abhängigen Optimierungsfunktionen ermittelt und für die schrittweise Lösung einer ausgewählten Optimierungsstrategie übergeben. An dieser Stelle zeigt sich deutlich, wie die Variablen die verschiedenen Modellebenen verbinden und voneinander abhängig machen.

Auf der Ebene des Strukturmodells liegen verschiedene Parameter vor, welche als Variable angesprochen werden können. Grundsätzlich zu unterscheiden ist an dieser Stelle zwischen den Strukturparametern zur Beschreibung der Topologie, des Materials, sowie der Geometrie und den Parametern, welche als Zustandsvariablen die Strukturantwort wiedergeben. Die oben bereits durchgeführte Einschränkung der Problemstellung (Abs. 4.1.1.) läßt im folgenden nur geometriebeschreibende Parameter (Koordinaten, Querschnittswerte) als Optimierungsvariablen zu. Unter dem Gesichtspunkt der simultanen Strukturanalyse und Optimierung /Haftka 1985/ können aber auch die Zustandsvariablen zur Beschreibung der Strukturantwort als Optimierungsvariablen behandelt werden. Beide Gruppen von Optimierungsproblemen sollen nachfolgend unter dem Aspekt der Variabilität näher betrachtet werden.

### 4.3.2 Variablen zur Beschreibung der Strukturgeometrie

Als geometriebeschreibende Optimierungsvariablen werden hier variabel gehaltene Parameter des Entwurfs- und Strukturmodells verstanden, welche über Koordinaten die äußere Form der Struktur festlegen oder als Querschnittswerte (Querschnittsabmessungen, Dicken) die lokale Materialverteilung bestimmen. Bei einem vollständig dreidimensional beschriebenen Strukturproblem liegt demnach nur die äußere Form als mögliche Variabilität vor. Reduziert sich die Beschreibung einer Struktur über eine weitere Idealisierung in seiner Dimensionalität, ergibt sich eine zunehmend komplexe Möglichkeit der lokalen Materialverteilung und deren Beschreibung über Querschnittswerte. Für ein vollständig dreidimensionales Strukturproblem ergibt sich vergleichbar zu seiner kontinuumsmechanischen Formulierung die reine Formoptimierung als einzig mögliches Optimierungsproblem (Bild 4-6).

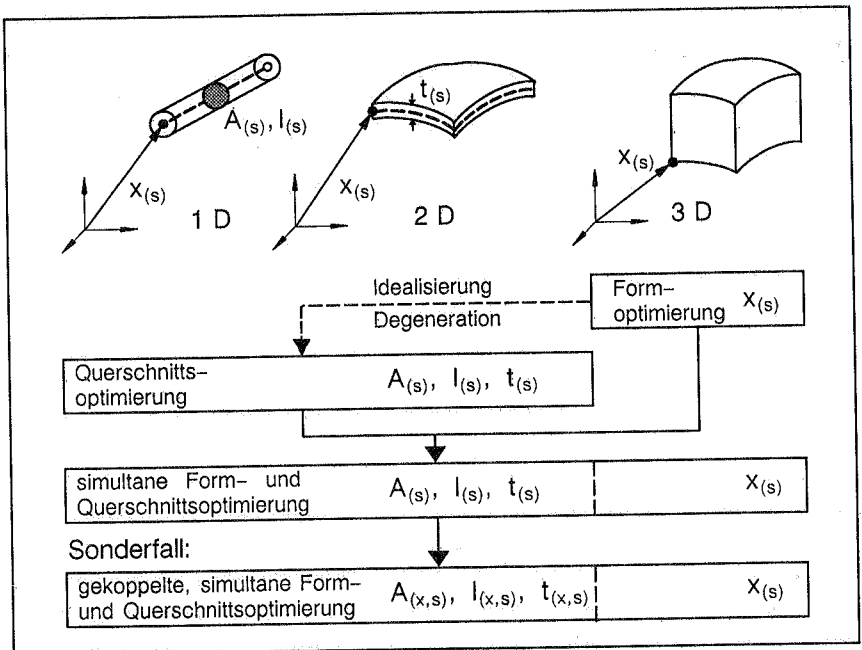


Bild 4-6: Variablen zur Beschreibung der Strukturgeometrie

Die äußere Form und die strukturmechanischen Zusammenhänge lassen sich für den dreidimensionalen Fall zwar theoretisch einfach beschreiben, müssen jedoch wegen des hohen numerischen Aufwands auf der Ebene des Entwurfs-, Struktur- und Optimierungsmodells zu den schwierigsten Problemen auf diesem Gebiet gezählt werden. Gleich in welcher Dimensionalität die Formoptimierung durchgeführt

wird, bringt sie die verschiedenen Modellebenen in vielschichtiger Weise über die Formvariablen (Koordinaten) miteinander in Verbindung und verursacht in jedem Fall einen höchgradig nichtlinearen Verlauf der Optimierungsfunktionen. Die Problematik der Formoptimierung gehört nicht zuletzt deswegen zu den jüngsten Forschungsschwerpunkten im Gebiet der Strukturoptimierung (Tabelle 2-1).

Auf der anderen Seite stellt die reine Querschnittsoptimierung den einfachsten Problemfall dar. Ausgehend von Strukturproblemen, welche die Querschnitte sowohl in ihrer mechanischen Beschreibung (z.B. Steifigkeit  $EA/l$ ) als auch in den Optimierungsfunktionen (z.B. Gewicht  $\gamma A l$ ) linear enthalten, können sehr einfache Optimierungsprobleme formuliert werden. Häufig sind diese Probleme Sonderfälle der mathematischen Programmierung oder können über entsprechende Approximationsvorschriften (z.B. als reziproke Variablen  $s \rightarrow 1/A$ ) sehr effizient gelöst werden. Wesentlich komplizierter wird die Querschnittsoptimierung, wenn wie in dieser Arbeit, Schalenträgerwerke optimiert werden. In diesem Fall gehen die Querschnittsabmessungen in verschieden nichtlinearer Form über die Steifigkeitsterme (Membran- und Biegesteifigkeit) in das Optimierungsproblem ein, so daß zumindest die von der Strukturantwort abhängigen Optimierungsfunktionen immer nichtlinear von den Optimierungsvariablen abhängig sind. Ein vergleichbar einfacher Lösungsweg bietet sich in diesem Fall auch bei der Anwendung differenzierter Approximationstechniken nicht an.

Grundsätzlich können die Problemkreise der Form- und Querschnittsoptimierung getrennt betrachtet und für sich als Optimierungsaufgaben gelöst werden (Bild 4-6). Bei vielen praktischen Aufgabenstellungen muß jedoch von gleichzeitig in das Optimierungsproblem eingeführten Form- und Querschnittsvariablen ausgegangen werden. Für diese Fälle gelten die vorausgehenden Feststellungen in kombinierter Form. Als Sonderfall kann die gekoppelte, gleichzeitige Form- und Querschnittsoptimierung gelten. Diese Variante von Strukturoptimierungsproblemen tritt dann auf, wenn die Materialverteilung beispielsweise bei Schalenträgerwerken in übergeordneter Form im Entwurfsmodell formuliert wurde. Eine Variation der Tragwerksform bewirkt dann ebenfalls eine Variation der Materialverteilung und ergibt überaus komplexe Zusammenhänge in der Geometriebeschreibung, welche sich weiterführend auch im Struktur- und Optimierungsproblem fortsetzen (vgl. Beispiel Schwungrad, Kapitel 7).

### 4.3.3 Variablen für die simultane Strukturanalyse- und optimierung

Für einige einfache Optimierungsaufgaben kann, wie bereits angedeutet (Tab. 2-1), eine analytisch geschlossene Lösung angegeben werden. Dieser klassische Lösungsansatz beruht meistens auf einer variationellen Formulierung des Optimierungsproblems. Bei der analytischen Lösung des Variationsproblems fallen die Euler-Lagrange-Gleichungen an, welche als Differentialgleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen die Grundgleichungen für die Optimalität und die

Strukturantwort enthalten. In vielen Fällen können diese Gleichungen für die Entwurfs- und Zustandsvariablen gleichzeitig gelöst werden /Haftka 1985, 1990/.

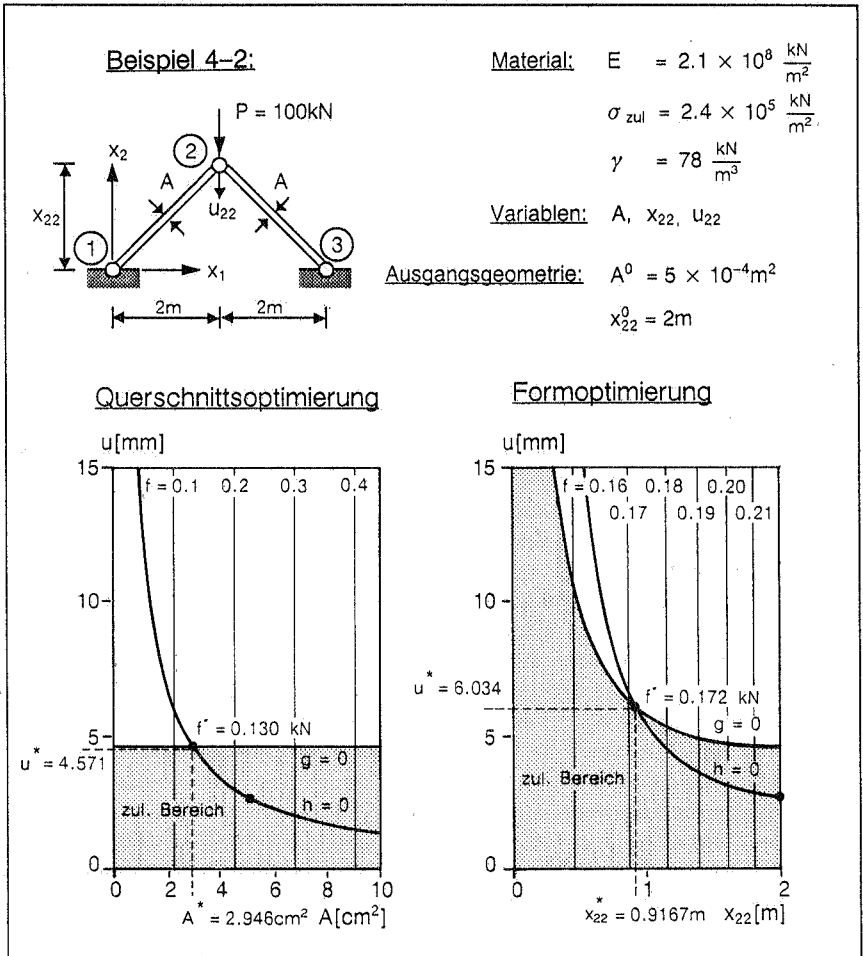


Bild 4-7: Simultane Analyse und Optimierung

Die simultane und gleichrangige Behandlung von Entwurfs- und Zustandsvariablen im Optimierungsproblem kann grundsätzlich auch am diskretisierten Problem erfolgen. Diese Vorgehensweise erscheint insbesondere in Verbindung mit der Methode der finiten Elemente zur Lösung des Strukturproblems unrealistisch, weil daraus sehr schnell durch die Einführung der Zustandsvariablen als Optimierungsvariablen das Problem der Lösung eines großen Optimierungsproblems re-

suliert. Durch den Einsatz einer besonderen Lösungstechnik (z.B. CG-Methoden in /Haftka 1985/) oder unter dem Gesichtspunkt der expliziten Problemformulierung /Reich 1989/ kann diese eher theoretisch interessante Problemformulierung auch für eine Anwendung an Bedeutung gewinnen. Die angeführten Literaturstellen beschränken sich auf die simultane Analyse und Querschnittsoptimierung, wobei in /Haftka 1985/ auch nichtlineares Strukturverhalten berücksichtigt wird. Für die allgemeine Formulierung von simultanen Analyse- und Optimierungsproblemen gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. An dieser Stelle sollen drei dieser Formulierungen knapp beschrieben werden, welche alle in ein allgemeines, nicht-lineares Optimierungsproblem eingebracht werden können. Im ersten Fall wurden die Grundgleichungen für Verschiebungselemente (Gleichgewichtsbedingungen) als Nebenbedingungen im Optimierungsproblem berücksichtigt. In der Anwendung für gewichtsoptimale Strukturen kann das folgende spezielle Optimierungsproblem formuliert werden:

$$\min_{\mathbf{s}} f_W(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \quad (4 - 34)$$

$$\text{mit } h_{EQ_j}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = 0 \quad j = 1, \dots, \text{NEQ} \quad (\text{NEQ aus Gl.4 - 32})$$

$$g_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad j = \text{NEQ} + 1, \dots, m$$

In Beispiel 4-2 ist diese Vorgehensweise getrennt für die Form- und Querschnittsoptimierung dargestellt. Für das zweiständige Fachwerk werden die Stichhöhe ( $x_{22}$ ), der Stabquerschnitt (A) sowie die Verschiebung ( $u_{22}$ ), als Optimierungsvariable behandelt. Die Nebenbedingungen werden für die Kontrolle der Stabspannung (g) und des Gleichgewichts (h) formuliert. Bei der Verwendung des Strukturgewichts als Zielfunktion ergeben sich für dieses einfache Optimierungsproblem als Lösung sowohl die Zustandsvariable (Verschiebung) als auch die Entwurfsvariablen (Querschnitt, Koordinate) gleichzeitig. Diese Art der Formulierung hat den Nachteil, daß sie das Optimierungsproblem in seiner Dimension über die Variablen und Nebenbedingungen in zweifacher Weise vergrößert. Als Vorteil kann eine programmtechnisch einfache Formulierung genannt werden, welche das unter Umständen schlecht konditionierte Gleichungssystem für die Zustandsvariablen durch individuelle Nebenbedingungen explizit und direkt im Optimierungsproblem löst. Eine Anwendung sollte jedoch in diesem Fall auf kleine Optimierungs- und Analyseprobleme beschränkt werden.

Zwei weitere, wesentlich effizientere Möglichkeiten dieser speziellen Problemformulierung bestehen über die Erweiterung der Zielfunktion. Dabei wird die Dimension des Optimierungsproblems lediglich um die Zustandsvariablen erweitert, und es ergeben sich folgende Formulierungen:

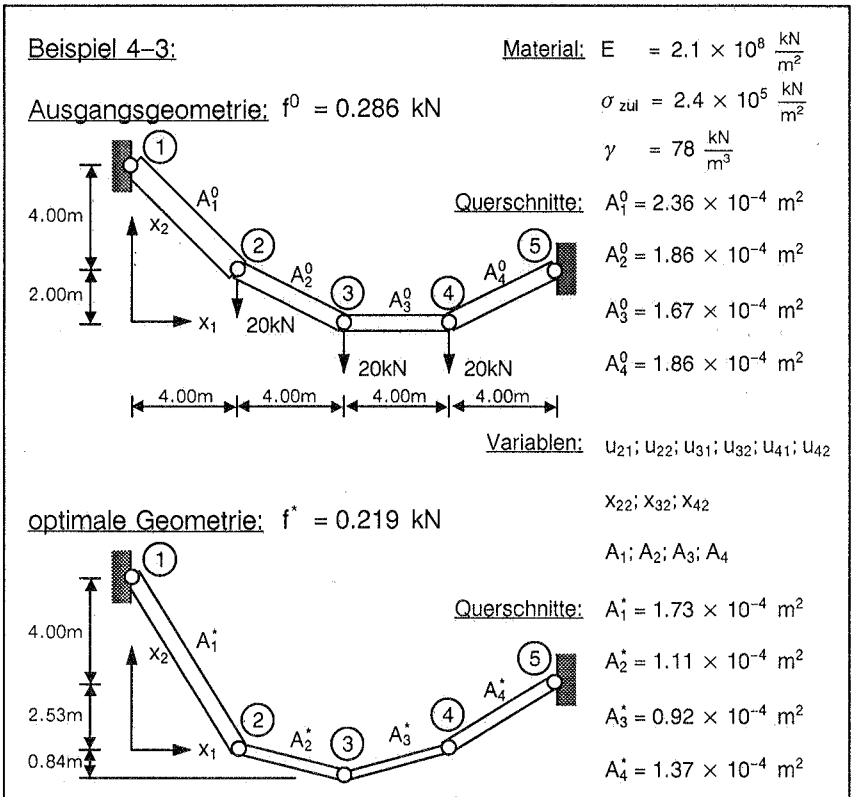


Bild 4-8: Optimierung eines kinematischen Systems

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} f(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = f_W(\mathbf{s}) + \tilde{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (4-35)$$

mit (a)  $\tilde{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{R})^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{R})$

oder (b)  $\tilde{f}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \tilde{\Pi}_D = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{u}$

$$g_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Die erste Form der Problemstellung (a) ist im Prinzip in /Haftka 1985/ verwirklicht und entspricht im Zusatzterm  $\tilde{f}$  einem Fehlerquadratminimumproblem in den Verschiebungsvariablen  $\mathbf{u}$ . Dort wird jedoch die Lösung des Optimierungsproblems unter der Anwendung einer inneren Straffunktion mit der CG-Methode vorgenommen. Die Konditionierung des Gleichungssystems für die Zustandsvariablen ist dabei für die erfolgreiche Problemlösung von entscheidender Bedeutung, wobei

sich im Fall (a) diese Problematik quadratisch und im Fall (b) linear bezüglich der Matrix  $K$  auswirkt. Abhilfe kann man nur durch eine Vorkonditionierung der Steifigkeitsmatrix schaffen, welche, wie in /Haftka 1985/ vorgeschlagen, elementweise durchgeführt werden kann.

Damit kann eine sehr effiziente Formulierung des simultanen Analyse- und Optimierungsproblems gewonnen werden, welche auf der anderen Seite nachteilig von seinem umfangreichen programmtechnischen Aufwand bestimmt wird. Hinzu kommt die Problematik der Stellengenauigkeit, die sich über das Abbruchkriterium der Optimierungsstrategie auch auf die Variablen überträgt. In beiden Formulierungen (a,b) gehen die Zustandsvariablen quadratisch in die Zielfunktion ein und bedürfen einer entsprechenden Skalierung.

Um eine einfache und direkt anwendbare Möglichkeit der simultanen Analyse und Optimierung zu verwirklichen, wurde hier die Formulierung in Gl. (4-34) bevorzugt. Damit sollen zunächst kleinere Probleme behandelt werden, welche eher von theoretischem Interesse sind. Eine besonders interessante Problemstellung ergibt sich für kinematische Tragwerke, für welche gleichzeitig eine Gleichgewichtslage und optimale Materialausnutzung gesucht werden. In Beispiel 4-3 ist eine derartige Optimierungsaufgabe für ein Seiltragwerk gelöst. Unter Verwendung von Fachwerkelementen wird die Seilkurve gesucht, welche gleichzeitig für einen minimalen Materialverbrauch mit der äußeren Belastung im Gleichgewicht steht. Es zeigt sich, daß selbst aus einem kleineren Strukturproblem (NEQ=6) schnell ein größeres Optimierungsproblem wird ( $n=11$ ,  $m=10$ ).

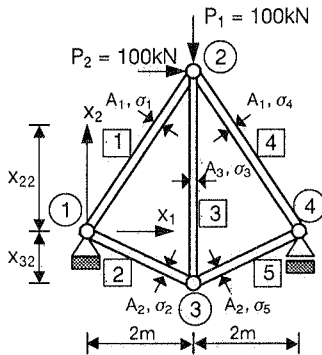
In dieser Art der Problemformulierung kann ebenfalls die Beschreibung für nicht-lineares Strukturverhalten eingebracht werden. Sie bleibt damit für weitere Forschungsaktivitäten offen.

#### **4.4 Formulierung charakteristischer Strukturoptimierungsprobleme**

Unter Verwendung der eingeführten Zielkriterien, Optimierungsvariablen und -funktionen sollen in diesem Abschnitt einige charakteristische Problemformulierungen aus dem Gebiet der Strukturoptimierung angegeben werden. Eine Übersicht für die Definition von solchen Grundproblemen in der Strukturoptimierung ist vor allem in /Ding 1986/, aber auch in /Bhavikatti 1980/ zu finden. Die dort angesprochenen Probleme der Form- und Querschnittsoptimierung gehören ausschließlich zum Themenbereich der gewichts- und spannungsoptimalen Auslegung von Strukturen. Die direkte Verwendung der Formänderungsenergie für die Formfindung von Strukturen ist in der Literatur bisher unbekannt. Für die Herleitung einiger Optimalitätskriterien zur Kontrolle von Verformungen wird die Formänderungsenergie allerdings in der Optimalitätskriterienmethode in indirekter Form verwendet. In /Bufler 1970/ wird die Formänderungsenergie zur Bestimmung optimaler Dickenverteilungen von Platten herangezogen.



### Beispiel 4-4: Fünfstabiges Fachwerk



Material:  $E = 2.1 \times 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$   
 $\sigma_{\text{zul}} = 2.4 \times 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$   
 $\gamma = 78 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

Ausgangsgeometrie:  $A_1^0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{m}^2$   
 Querschnitte sind  $A_2^0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{m}^2$   
 hier symmetrisch  $A_3^0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{m}^2$   
 angeordnet  $x_{22}^0 = 3.0 \text{m}$   
 $x_{32}^0 = -1.0 \text{m}$

Zielfunktionen:  $f_E, f_W, f_S$

Variablen:  $A_1, A_2, A_3, x_{22}, x_{32}$

Nebenbedingungen:  $h_W = \frac{W}{W^0} - 1$

$Z = \text{Zug} ; D = \text{Druck}$

$$\text{Lastfall } P_1 : g_{11} = \frac{\sigma_{1D}}{\sigma_{\text{zul}}} + 1 ; g_{21} = \frac{\sigma_{2Z}}{\sigma_{\text{zul}}} - 1 ; g_{31} = \frac{\sigma_{3D}}{\sigma_{\text{zul}}} + 1$$

$$\text{Lastfall } P_2 : g_{12} = \frac{\sigma_{1Z}}{\sigma_{\text{zul}}} - 1 ; g_{32} = \frac{\sigma_{3D}}{\sigma_{\text{zul}}} + 1 ; g_{42} = \frac{\sigma_{4D}}{\sigma_{\text{zul}}} + 1$$

Bild 4-9: Begleitbeispiel für die Problemformulierung

An einem einfachen Beispiel sollen im folgenden die charakteristischen Eigenschaften der drei hauptsächlich in der Strukturoptimierung vorkommenden Grundprobleme aufgezeigt werden. Die Auslegung von Strukturen nach der Steifigkeit, dem Gewicht oder der Festigkeit unter verschiedenen Kombinationen der Form- und Querschnittsoptimierungen stehen dabei im Mittelpunkt. Im Beispiel 4-4 (Bild 4-9) wird für diese drei Varianten (a-c) an einem fünfstabigen, statisch bestimmten Fachwerk gezeigt, welche, in ihrem Wesen unterschiedliche, Optimierungsaufgaben für eine Variabilität der Form und/oder der Querschnitte vorliegen können.

#### 4.4.1 Optimale Steifigkeit von Strukturen

Bei dieser Art der Problemstellung wird über die Einführung der Formänderungsenergie als Zielkriterium die Struktur mit der höchsten Steifigkeit gesucht. Im Falle der Formoptimierung geht es vor allem in der Anwendung dieses Zielkriteriums

auf Bogen- und Schalentragerwerken darum, eine Form mit einer möglichst günstigen Lastabtragung zu finden. Die Biegeanteile können durch die Änderung der globalen Tragwerksform aus dieser Zielfunktion "herausoptimiert" werden, so daß zu einer günstigen Abtragung der Lasten vorwiegend Membrankräfte beitragen. Bei einem Lastfall läßt sich durch dieses Vorgehen durchaus die Stützlinie ermitteln, welche gleichzeitig auch als gewichtsoptimale Lösung gelten kann. Bei mehreren Lastfällen kann mit dieser Methode wenigstens eine gute Kompromißlösung für die Tragwerksform gefunden werden, wenn die Energieanteile für die unterschiedlichen Lastfälle in der Zielfunktion entsprechend gewichtet werden. Für eine Querschnittsoptimierung kann mit dieser Zielfunktion die Materialverteilung so festgelegt werden, daß für einen oder mehrere Lastfälle eine optimale Steifigkeitsverteilung erzielt wird.

Das überaus interessante Problem der Formfindung bei Schalenkonstruktionen wird seit vielen Jahren von H. Isler durch Experimente auf natürlichem Wege erfolgreich gelöst /Ramm 1986b/. Dieser experimentelle Ansatz zur Tragwerkssynthese geht von einem formgebendsten Lastfall aus. Die in dieser Arbeit durchgeführte computerunterstützte Tragwerkssynthese kann eine sinnvolle Ergänzung zu dieser Methode sein, wenn es darum geht, Tragwerksformen unter der gleichzeitigen Berücksichtigung mehrerer Lastfälle "membrangerecht" auszulegen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß es selten eine einzige "optimale" Lösung bei der Formfindung von Schalentragerwerken aufgrund der komplexen strukturellen inneren Beanspruchung dieser Konstruktionen gibt. Auf dem Wege der rechnerischen Simulation der vorgenannten Experimente läßt sich die "absolute" Optimallösung nicht finden, sondern nur mit dem entsprechenden Rechenaufwand als wahrscheinlich angeben. In diesem Sinne muß hier also eher von verbesserten als von optimalen Lösungen gesprochen werden. Dennoch sind derart erzeugte Schalenformen von großem Interesse, weil sie sich auf experimentellen Wegen nicht mehr erschließen lassen.

Die entsprechende Formulierung des zugrundeliegenden Optimierungsproblems kann mit den definierten Optimierungsfunktionen (4-30 bis 33) vorgenommen werden. Hier wird die Formänderungsenergie als Zielfunktion verwendet, wobei das Ausgangsgewicht der Struktur als Basisgröße im Optimierungsproblem durch eine entsprechend formulierte Gleichheitsnebenbedingung einbezogen werden kann.

$$\min_{\mathbf{s}} f_E(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \quad (4-36)$$

$$\text{mit } (h_W = 0) \quad \begin{array}{ll} h_j = 0 & j = 1, \dots, m_e \\ g_j \leq 0 & j = m_e + 1, \dots, m \end{array}$$

Beispiel 4-4a zeigt für diese Problemformulierung anschaulich die sich daraus ergebenden Varianten für die Form- und Querschnittsoptimierung. Das Optimierungsproblem wird zuerst für alle fünf möglichen Variablen gelöst. Anschließend wird das Optimierungsproblem am Lösungspunkt in seiner Dimensionalität auf ei-

ne Ebene reduziert, so daß sich die reine Querschnittsoptimierung, die kombinierte Form- und Querschnittsoptimierung sowie die reine Formoptimierung für sich beurteilen lassen. Das Optimierungsproblem wird für jeweils zwei Variablen dargestellt, wobei die verbleibenden drei Variablen immer auf dem optimalen Wert der vorausgehenden Berechnungen gehalten werden.


In Bild 4-10 ist die optimale Steifigkeit des Systems ohne und mit ( $f_E$  und  $f_E^*$ ) dem Gewicht als Basisgröße ermittelt. Bei diesem Zielkriterium liegen die optimalen Querschnittswerte ( $A^{**}$ ) erwartungsgemäß immer am oberen zulässigen Rand, falls sie nicht durch das Gewicht als Basisgröße ( $h_w = 0$ ) auf eine Lösung ( $A^*$ ) im zulässigen Bereich gezwungen werden. Für die Tragwerksform ergibt sich demgegenüber auch für ein völlig unbeschränktes Optimierungsproblem immer eine Lösung ( $x^{**}$ ), welche im vorliegenden Beispiel jedoch die zulässigen Spannungen verletzt. Demnach kann davon ausgegangen werden, daß sich für eine variable Tragwerksform immer eine Lösung mit optimaler Steifigkeit finden läßt. Ein restringiertes Problem läßt sich in vielen Fällen besser lösen, weil für das unbeschränkte Problem die Zielfunktion im Bereich der Lösung häufig sehr flach und damit numerisch empfindlich wird.

Einige Begleiterscheinungen treten bei derartigen Optimierungsproblemen auf, welche einer besonderen Erwähnung bedürfen. Die Formänderungsenergie beinhaltet insbesondere bei Schalentragwerken die Optimierungsvariablen über die Strukturantwort in sehr differenzierter Form. Es ist aufgrund der strukturmechanischen Beanspruchung bei Schalentragwerken durchaus einsichtig, daß die Funktionen des Optimierungsproblems stark vom mechanischen Verhalten des Tragwerks beeinflußt werden. Dies gilt besonders dann, wenn ein Übergang vom Biege- in den Membranzustand erfolgt. In der Regel ändern sich die Verformungen und Spannungen in einem engen Bereich der Optimierungsvariablen um Größenordnungen. Bei zweifach gekrümmten Schalentragwerken kommen diese Übergänge im Beanspruchungszustand mehrfach im Optimierungsproblem vor. Die dadurch verursachte hochgradige Nichtlinearität in der Metrik des Optimierungsproblems kann selbst bei Optimierungsstrategien höherer Ordnung (z.B. Quasi-Newton-Verfahren) zu großen numerischen Problemen führen.

Da sich Form- und Querschnittsoptimierung für das vorliegende Zielkriterium in ihrer Bedeutung unterscheiden, wird hier ein sukzessives Vorgehen vorgeschlagen. Zuerst wird die Tragwerksform für die optimale Steifigkeit ermittelt. Daran anschließend kann z.B. über eine Gewichtsminimierung unter Spannungskontrolle die Verteilung der Querschnitte festgelegt werden. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht vor allem für unversteifte Schalen darin, daß beide Optimierungsprobleme für sich effizienter lösbar sind als die simultane Form- und Querschnittsoptimierung. Der Formfindungsprozeß und die Ausdimensionierung der Querschnitte können mehrfach hintereinander geschaltet werden, bis eine zufriedenstellende Lösung vorliegt. Im Sinne der Formfindung ist dieser eher pragmatische Lö-

**Beispiel 4-4a:** optimale Steifigkeit mit ( $f^{**}$ ) und ohne ( $f^*$ ) dem Gewicht als Basisgröße

Lastfall:  $P_1 = 100 \text{ kN}$

zul. Bereich: 

Optimale Geometrie:  $x_{22}^* = 2.8958 \text{ m}$  ;  $x_{32}^* = -1.2827 \text{ m}$

$A_1^* = 4.5000 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^* = 4.5000 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^* = 4.5000 \text{ cm}^2$

$x_{22}^{**} = 2.2678 \text{ m}$  ;  $x_{32}^{**} = -0.7560 \text{ m}$

$A_1^{**} = 3.7049 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^{**} = 2.6196 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^{**} = 1.8526 \text{ cm}^2$

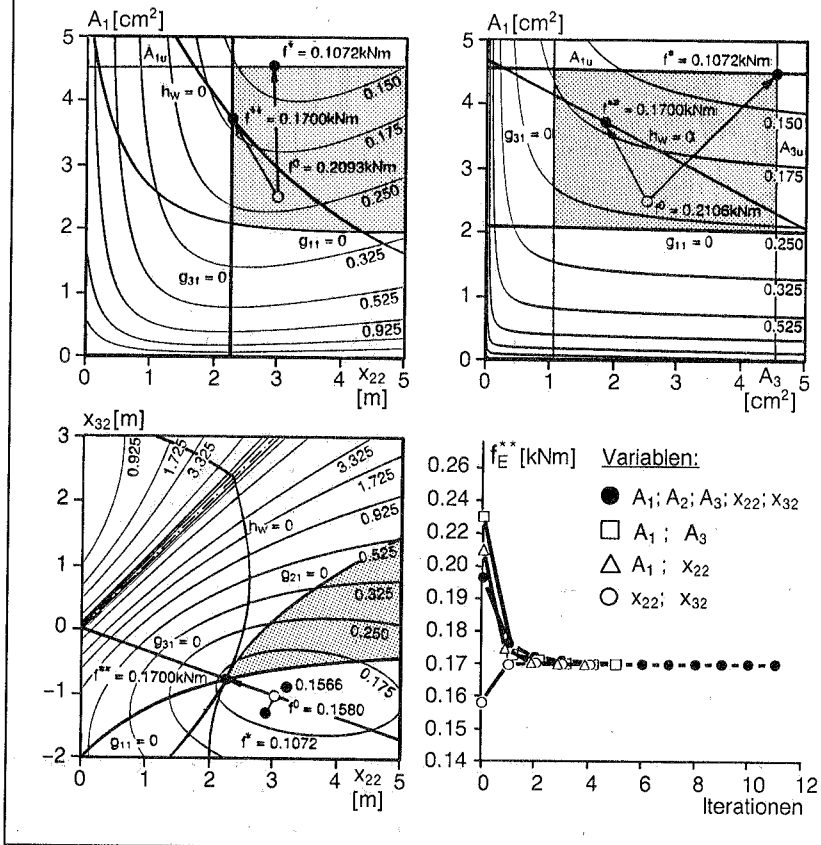


Bild 4-10: Optimale Steifigkeit für das fünfstäbige Fachwerk

sungsansatz gegenüber einer streng optimalen Lösung vertretbar, da "optimale" Schalenformen objektiv selten vorliegen.

Lassen sich auf dem vorgeschlagenen Weg "membrangerechte" Strukturen in ihrer Form bestimmen, kann in einigen Fällen ein günstigeres nichtlineares Strukturverhalten erwartet werden. Jedenfalls liegen die Traglasten von Tragwerken mit Membranbeanspruchung wesentlich höher als vergleichbare Strukturen mit Biegestörungen. Eine Ausnahme bilden Tragwerke, für welche Stabilitätsprobleme maßgebend werden.

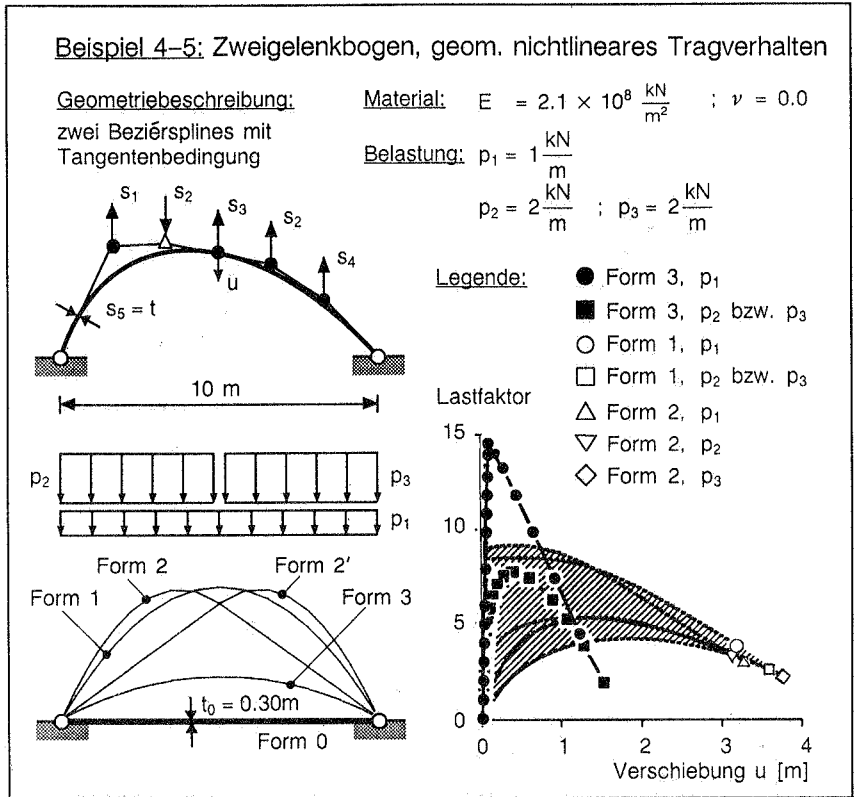


Bild 4-11: Einbeziehung des nichtlinearen Tragverhaltens in die Formoptimierung

Im Beispiel 4-5 ist ein für drei Lastfälle ( $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ) gleichzeitig optimierter Zweigelenbogen auf sein nichtlineares Verhalten hin untersucht worden. Für die drei Lastfälle wurden zuerst einzeln die jeweiligen Optimalformen (Form 1, 2 und 2') ermittelt. In der Form 3 sind alle drei Lastfälle gleichzeitig in der Optimalform enthalten. Nachfolgend wurden für alle möglichen Last- und Formkombinationen die Traglastkurven aufgestellt. Es zeigt sich, daß die Schar der Lastverformungskurven durch die vorgeschlagene Kompromißlösung deutlich angehoben werden

kann. Unter dem gleichen Materialaufwand lassen sich für das angegebene Beispiel die Traglasten um 60-80% steigern. Gleichzeitig muß jedoch beachtet werden, daß die Charakteristik des nichtlinearen Tragverhaltens verschärft wird und unter Umständen ein ursprüngliches Durchschlagsproblem nach der Formoptimierung ein reines Verzweigungsproblem werden kann. Zusätzlich kann das optimierte Tragwerk wesentlich imperfektionsempfindlicher sein als es im Ausgangsproblem der Fall war. Hier wird offensichtlich, welche Problematik bei Optimierungsproblemen unter Einbeziehung des nichtlinearen Strukturverhaltens vorliegt. Das von der Form und der Materialverteilung abhängige Verzweigen der Strukturantwort zu verschiedenen Versagenszuständen entspricht im mathematischen Optimierungsproblem einer Vielzahl von lokalen Lösungen. Ob mit den zur Verfügung stehenden Lösungsmethoden diese Aufgabenstellung geklärt werden kann, bleibt fraglich, denn die Konvergenz dieser Algorithmen zur globalen Lösung ist praktisch ausgeschlossen.

#### 4.4.2 Minimales Gewicht von Strukturen

Die Verwendung der Gewichtsfunktion als Zielkriterium ist im Bereich der Strukturoptimierung die wohl gebräuchlichste Art der Problemformulierung. In vielen Fällen von Leichtbaukonstruktionen läßt sich das Gewicht in direkter Weise in das Optimierungsproblem einbringen. Dies gilt auch für einige Probleme der Kostenoptimierung, wenn sich die Material- und Montagekosten über entsprechende Faktoren dieser Gewichtsfunktion zuschlagen lassen. In allgemeiner Form sieht das Optimierungsproblem wie folgt aus:

$$\min_{\mathbf{s}} f_w(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (4-37)$$

$$\text{mit } (h_C = 0)$$

$$g_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$


Durch die Ungleichheitsnebenbedingungen wird dabei in der Regel über die Verschiebungen und Spannungen die Strukturantwort kontrolliert. Gleichheitsnebenbedingungen können z.B. für ein konstantes axiales Massenträgheitsmoment eingeführt werden, sind aber bei dieser Art der Problemformulierung selten.

In derselben Weise wie bei der Formänderungsenergie als Zielkriterium, wird für diese Zielfunktion in Beispiel 4-4b die Optimierung für alle fünf möglichen Variablen vorgenommen. Übersichtlich lassen sich dann ebenfalls für das Gewicht die einzelnen Problemstellungen für eine Querschnitts- und/oder Formoptimierung darstellen. In jedem der drei angegebenen Fälle liegt das Optimum am Rand des zulässigen Bereichs und wird immer durch die Kontrolle der zulässigen Spannungen bestimmt. Der Fall der reinen Querschnittsoptimierung kann in diesem Zusammenhang auch als Bemessungsproblem verstanden werden, welches durch

die Anwendung von Optimierungsstrategien automatisch gelöst wird. Für das vorliegende statisch bestimmte Fachwerk als Strukturproblem wird die Lösung in einem Schritt erreicht. Eine entsprechend höhere Nichtlinearität der Optimierungsfunktionen benötigt einen jeweils größeren Rechenaufwand für die Problemlösung.

### Beispiel 4-4b: minimales Gewicht

Lastfall:  $P_1 = 100 \text{ kN}$

zul. Bereich: 

Optimale Geometrie:  $x_{22}^* = 2.2678 \text{ m}$  ;  $x_{32}^* = -0.7560 \text{ m}$

$A_1^* = 2.0833 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^* = 1.4731 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^* = 1.0417 \text{ cm}^2$

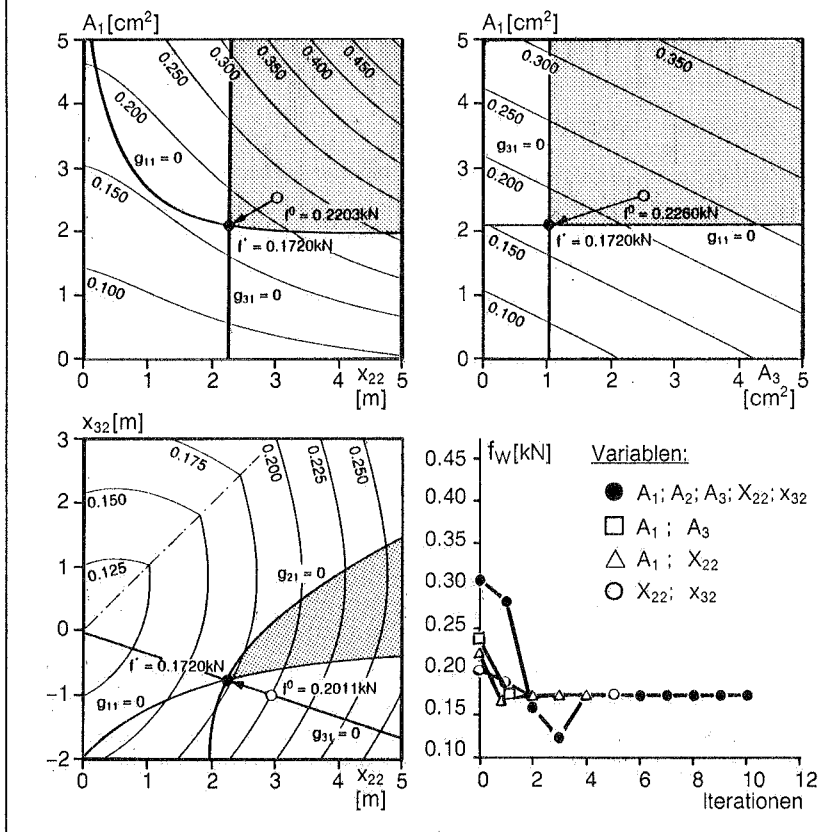


Bild 4-12: Minimales Gewicht für das fünfstäbige Fachwerk

Durch das Hinzufügen entsprechender Nebenbedingungen läßt sich mit dem Gewicht der Struktur als Zielkriterium ein breites Spektrum von Optimierungsproblemen erschließen. Da das Gewicht nur von der Geometrie der Struktur abhängt, kann die Ermittlung der Zielfunktion effizient und programmtechnisch recht einfach erfolgen. Dasselbe gilt für die zugehörigen Sensibilitätskoeffizienten, welche in diesem Fall nur von der Variation der Geometrie abhängen.

#### 4.4.3 Strukturauslegung für ein optimales Massenträgheitsmoment

Die Auslegung von Strukturen für ein optimales axiales Massenträgheitsmoment ist als Optimierungsproblem in seiner Charakteristik der Gewichtsoptimierung sehr ähnlich. In beiden Fällen liegen rein geometrieabhängige Zielfunktionen vor, welche sich recht einfach ermitteln lassen. Die Trägheit der Rotationsmasse und des Gewichts können für eine entsprechende Problemformulierung als Ziel- oder Basisgröße wechselseitig einbezogen werden. Für das axiale Massenträgheitsmoment als Zielgröße stellt sich das Optimierungsproblem folgendermaßen:

$$\max_{\mathbf{s}} f_G(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (4-38)$$

mit  $(h_W = 0 \quad \text{oder} \quad h_V = 0)$

$$g_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Die Kontrolle der Spannungen ist in derartigen Problemstellungen besonders wichtig, weil die optimalen Strukturen in ihrer Drehbewegung häufig einer zyklisch wechselnden Beanspruchung ausgesetzt sind und dabei die Gefahr der Materialermüdung besteht.

#### 4.4.4 Optimale Spannungsverteilung von Strukturen

Bei der spannungsoptimalen Auslegung von Strukturen geht es vornehmlich um die Erzielung einer gleichmäßigen und einheitlichen Spannungsverteilung über den Strukturbereich oder über dessen Berandung hinweg. Ausgangspunkt für die Formulierung der entsprechenden Optimierungsaufgaben sind Festigkeitsprobleme, welche z.B. aus einer zyklischen dynamischen Beanspruchung herrühren und häufig mit der Problematik der Materialermüdung oder Kerbspannungsproblemen zusammenhängen. Da die Dauerfestigkeit aller Werkstoffe wesentlich unter den Festigkeitswerten bei quasi-statischer Belastung liegen, wird in diesen Fällen für eine hohe Materialeinsparung die günstige Verteilung der Spannungen gegenüber der Materialeinsparung als vorrangiges Ziel verfolgt.

Die gewünschte Spannungsverteilung kann prinzipiell über die Gewichtsfunktion (Gl. 4-37) mit entsprechend durch Nebenbedingungen kontrollierte Spannungen erfolgen. Das Ziel einer ausgeglichenen Spannungsverteilung kann in diesem Fall nur durch viele kontrollierte Punkte erreicht werden, so daß in vielen Fällen die



direkte Formulierung eines Zielkriteriums für gleichmäßige Spannungen günstiger ist. Derartige Optimierungsprobleme für die spannungsoptimale Strukturauslegung wurden bereits von /Francavilla 1975/ formuliert und mit der Methode der sequentiellen linearen Programmierung gelöst. Als Zielkriterium wurde eine Optimierungsfunktion eingeführt, welche die maximalen Spannungen in einem vorgegebenen Bereich möglichst klein hält. Das zugehörige Optimierungsproblem läßt sich folgendermaßen angeben:

$$\min_{\mathbf{s}} \left( \max_i \sigma_i \right) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \quad (4 - 39)$$

$i =$  Anzahl der kontrollierten Spannungspunkte

mit  $h_j = 0 \quad j = 1, \dots, m_e$

$g_j \leq 0 \quad j = m_e + 1, \dots, m$

Auf der Grundlage dieser Problemformulierung kann durch die Verwendung von mechanischen Gesetzmäßigkeiten aus der Kerbspannungslehre /Schnack 1979/ in /Spörl 1985/ ein effizienter Optimierungsalgorithmus für die Minimierung von Spannungskonzentrationen hergeleitet werden. In dieser Form lassen sich viele Kerbspannungsprobleme über die Variation des Strukturrandes direkt als Optimierungsprobleme lösen.

Alternativ kann, wie in /Bhavikatti 1980/ vorgeschlagen, eine Ausgleichsfunktion (Gl. 4-30e) für die Problemlösung verwendet werden. Mit dieser Optimierungsfunktion wird zunächst das Ziel einer ausgeglichenen Spannungsverteilung direkt angegangen. Versteht man diese Ausgleichsfunktion in allgemeiner Weise so, daß die Kraftgrößen, Ausgleichswerte und Integrationsbereiche frei wählbar bleiben, können einschließlich der oben genannten Probleme der Spannungskonzentrationen eine Vielzahl von Problemen optimaler Festigkeit als allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem (Gl. 4-40) gelöst werden.

$$\min_{\mathbf{s}} f_S(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \quad (4 - 40)$$

mit  $(h_W = 0) \quad h_j = 0 \quad j = 1, \dots, m_e$

$g_j \leq 0 \quad j = m_e + 1, \dots, m$

Als allgemeine Problemstellung kann Gl.(4-40) jedoch nur dann verstanden werden, wenn der Niveauewert ( $S_a$ ) in Gl.4-30e selbst als Optimierungsvariable behandelt wird. Dieser Forderung wurde in der vorliegenden Arbeit nicht entsprochen, weil eine einfachere Formulierung gegenüber einer programmtechnisch schwierigeren Lösung vorgezogen wurde. Dennoch können entsprechenden Lösungen erreicht werden, wenn die Mittelwerte der Spannungsgrößen ( $S_a$ ) in Gl.(4-30e) mit der Restartmöglichkeit des Programms CARAT sukzessive angepaßt werden. Damit läßt sich mit einem etwas höheren Arbeitsaufwand ein optimal angepasstes Spannungsniveau erreichen.

**Beispiel 4-4c:** optimale Festigkeit mit ( $f^*$ ) und ohne ( $f^*$ ) dem Gewicht als Basisgröße

**Zielfunktion:**  $f_s = \int_V (\sigma_{11} - \sigma_a)^2 dv$  mit Volumenintegration,  $\sigma_a = -7.6515 \frac{kN}{cm^2}$

**Lastfall:**  $P_1 = 100 \text{ kN}$  **zul. Bereich:**

**Optimale Geometrie:**  $x_{22}^* = 4.5000 \text{ m}$  ;  $x_{32}^* = -0.4244 \text{ m}$

$A_1^* = 6.5347 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^* = 2.7131 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^* = 1.1264 \text{ cm}^2$

$x_{22}^{**} = 3.7203 \text{ m}$  ;  $x_{32}^{**} = -0.5035 \text{ m}$

$A_1^{**} = 3.4187 \text{ cm}^2$ ;  $A_2^{**} = 1.6693 \text{ cm}^2$ ;  $A_3^{**} = 0.8151 \text{ cm}^2$

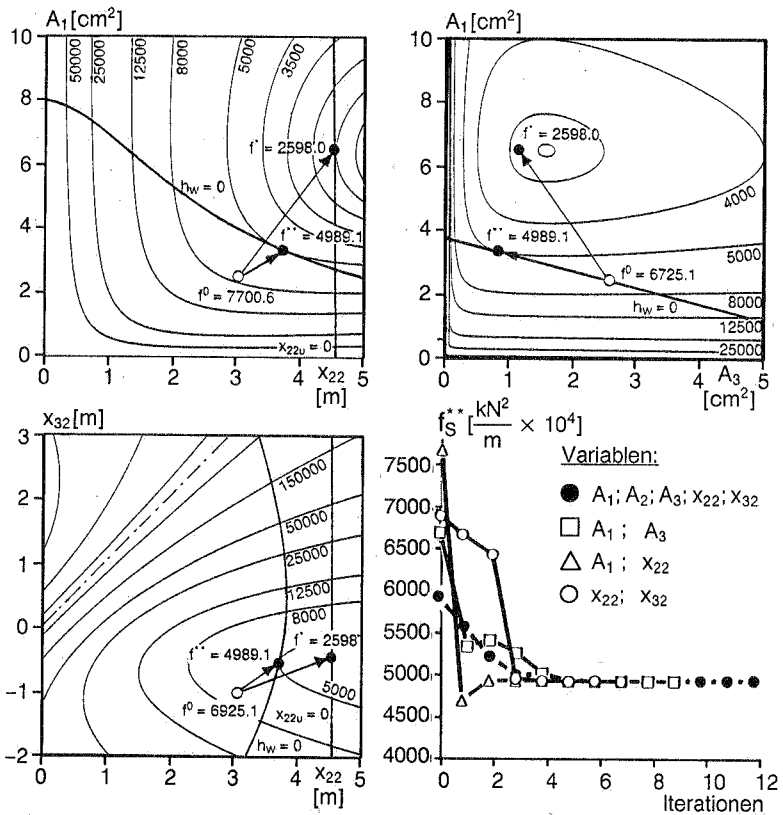


Bild 4-13: Optimaler Spannungsausgleich für das fünfstäbige Fachwerk

Vergleichbar mit den vorausgehend beschriebenen Zielkriterien lassen sich auch für den allgemeinen Spannungsausgleich als Zielfunktion am Beispiel 4-4c einige

Wesensmerkmale benennen. Der Ausgleich der Stabspannungen gegenüber dem Mittelwert der Ausgangsspannungen entspricht einem unbeschränkten Optimierungsproblem, wenn ausschließlich variable Querschnitte berücksichtigt werden. Das Optimierungsproblem läßt sich in diesem Fall anschaulich als Fehlerquadratminimumproblem deuten. Die Anpassung des Spannungszustandes an den vorgegebenen Ausgleichswert wird entscheidend eingeschränkt, wenn das Gewicht der Struktur als Basisgröße ( $h_w = 0$ ) beibehalten wird. Wie in den vorangegangenen Beispielen wurde die Optimierung zunächst für alle fünf möglichen Form- und Querschnittsvariablen durchgeführt. Für diesen Fall ist die Lösung des Optimierungsproblems jedoch nicht wie erwartet ein unbeschränktes Optimum, sondern ergibt sich unter Umständen aus den Restriktionen für die variable Formbeschreibung. Bei der vorliegenden Ausgleichsfunktion als Zielkriterium besteht die Optimierungsaufgabe also nicht immer in der Anpassung der Variablen an einen vorgegebenen, gewünschten Spannungszustand. Diese Auffassung des Optimierungsproblems ist nur dann richtig, wenn die eingeführte Variabilität ein eindeutiges Fehlerquadratminimumproblem zur Folge hat. Liegen jedoch wie im Falle des fünfstäbigen Fachwerks für die kombinierte Form- und Querschnittsoptimierung zu viele Variablen vor, kann eine eindeutige Lösung nur durch die Einschränkung des zulässigen Bereichs ( $x_{22u} = 4.50\text{m}$ ) oder durch die Einbeziehung des Strukturgewichts als Basisgröße ( $h_w = 0$ ) erhalten werden. Bei praktischen Problemstellungen liegen diese zusätzlichen Bedingungen aus konstruktiven Gründen in vielen Fällen bereits vor, so daß keine vergleichbaren Maßnahmen nötig werden. Bei der Anwendung dieses Zielkriteriums kommen der Wahl der Spannungsgrößen und Ausgleichswerte größere Bedeutung zu. Werden als Spannungsgrößen die Elemente des Spannungstensors oder entsprechende Spannungsergebnisse (z.B. Momente) herangezogen, erfolgt ein Ausgleich dieser Spannungsgrößen gegenüber dem vorgegebenen Niveau. Je nach Einstellung dieses Niveaueswertes und der Festlegung des Bereichs für den Ausgleich, können Spannungskonzentrationen mit der vorliegenden Optimierungsfunktion als Probleme der Form- und/oder Querschnittsoptimierung gelöst werden (vgl. Brückenpfeiler, /Ramm 1990/).

Ein besonderer Fall der Problemformulierung ergibt sich, wenn die skalare Größe der Vergleichsspannung nach von Mises als Spannungsgröße in diese Zielfunktion eingesetzt wird. Für den Fall einer reinen Querschnittsoptimierung folgt aus dieser Art der Zielfunktion das Problem optimal angepasster Spannungen ("Fully Stressed Design") direkt und ohne Nebenbedingungen. Im Falle der Formoptimierung läßt sich diese Vergleichsspannung vergleichbar zur Formänderungsenergie der Struktur als charakteristische Größe verwenden, welche den gesamten inneren mechanischen Beanspruchungszustand der Struktur wiedergibt. Dies gilt jedoch nur, wenn diese Größe über das gesamte Volumen der Struktur in die Ausgleichsfunktion eingeht. Es kann gezeigt werden, daß optimale Festigkeit und optimale Steifigkeit über die Spannungs- bzw. Dehnungsverteilung unter Umständen zu derselben Tragwerksform führt /Bufler 1970, Kühnemann 1989/.

## 4.5 Besondere Aspekte bei der Problemformulierung


### 4.5.1 Optimierung für mehrere Lastfälle

Bei vielen praktischen Optimierungsaufgaben geht es um die Auslegung einer Struktur für verschiedene Beanspruchungszustände, welche gleichzeitig oder unabhängig voneinander auftreten können. In der Regel werden solche Problemstellungen schnell unübersichtlich, so daß nur in seltenen Fällen eine Lösung über die Anschauung und eine Handrechnung oder durch Parameterstudien und Probieren ("trial and error") zufriedenstellend möglich ist. Die Strukturoptimierung gewinnt gerade in dieser Hinsicht an Bedeutung, denn häufig lassen sich Strukturen mit mehrfacher Beanspruchung nur unter dem Einsatz von Optimierungsverfahren in ihrem Tragverhalten entscheidend verbessern. Leichtbaukonstruktionen sind sinnvollerweise von vornherein so ausgelegt, daß sie als Mehrzweckstrukturen mehrere Funktionen gleichzeitig erfüllen. Die gleichzeitige Berücksichtigung von mehreren Lastfällen bei der Auslegung von Strukturen gehört deshalb zu den klassischen Themen der Strukturoptimierung. In der Regel werden mehrere Lastfälle in der Strukturoptimierung durch eine Erweiterung des Optimierungsproblems berücksichtigt. Dies kann auf einfache Weise durch Hinzufügen lastabhängiger Nebenbedingungen oder Zielfunktionskomponenten geschehen.

Der Aufwand zur Lösung von Optimierungsproblemen unter Berücksichtigung von mehreren Lastfällen liegt oftmals im Vergleich zur Problemlösung für nur einen Lastfall unwesentlich höher. Die Ursache dafür liegt darin, daß der numerische Aufwand bei der Lösung von größeren Strukturproblemen mit der finiten Elementmethode bei entsprechendem Vorgehen für jeden weiteren Lastfall nur geringfügig im Vergleich zur Lösung des Gesamtproblems ansteigt. Wird die Strukturoptimierung auf der Grundlage der mathematischen Programmierung und der finiten Elementmethode betrieben, spielt in diesem Zusammenhang die Anwendung von "Active-Set"-Strategien in den Optimierungsverfahren /Bletzinger 1990a/ eine wichtige Rolle. Damit kann das durch die Berücksichtigung mehrerer Lastfälle in den Nebenbedingungen wesentlich vergrößerte Optimierungsproblem auf den aktiven Satz der Nebenbedingungen reduziert werden. Das verbleibende Optimierungsproblem hat in dieser Form höchstens so viel aktive Nebenbedingungen wie Optimierungsvariablen und ist damit weitgehend unabhängig von der Anzahl der berücksichtigten Lastfälle.

Im Beispiel 4-4d ist dargestellt, wie sich im Falle der gewichtsoptimalen Strukturen eine Berücksichtigung mehrerer Lastfälle im Entwurfsraum bemerkbar macht. In allen drei Fällen der Form- und/oder Querschnittsoptimierung wird der zulässige Bereich gegenüber Beispiel 4-4b durch weitere Nebenbedingungen zusätzlich eingeschränkt und die optimale Lösung ergibt sich durch die verbleibenden akti-

### Beispiel 4-4d: minimales Gewicht bei mehreren Lastfällen

Lastfälle:  $P_1 = 100\text{kN}$  und  $P_2 = 100\text{kN}$  zul. Bereich: 

Optimale Geometrie:  $x_{22}^* = 2.0000\text{ m}$  ;  $x_{32}^* = 0.0000\text{ m}$

$A_1^* = 2.9463\text{ cm}^2$ ;  $A_2^* = 2.0833\text{ cm}^2$ ;  $A_3^* = 0.0000\text{ cm}^2$

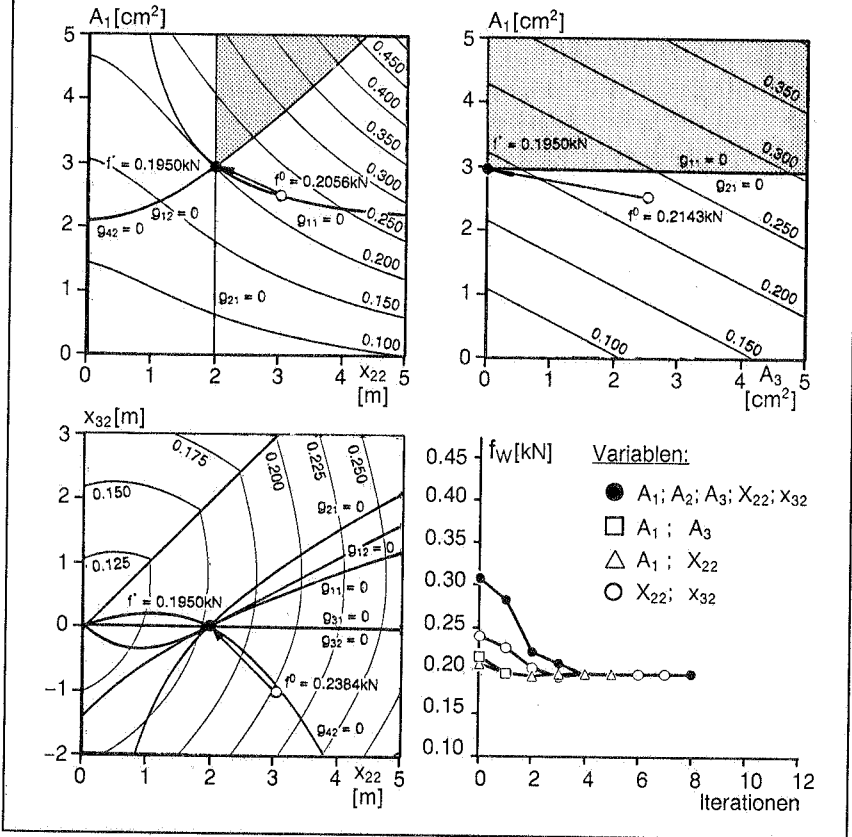


Bild 4-14: Minimales Gewicht bei der Berücksichtigung mehrer Lastfälle

ven Nebenbedingungen. Für den Entwurfsraum, welcher die reine Formoptimierung wiedergibt, reduziert sich der zulässige Bereich auf einen einzigen zulässigen Lösungspunkt. Bei diesem Fall handelt es sich um einen Ausnahmefall, der als Optimierungsproblem nicht immer einfach zu lösen ist. Der Grund ist darin zu suchen, daß die zur Verfügung stehenden Optimierungsverfahren eine sequen-

tielle Approximation des eigentlichen Optimierungsproblems vornehmen. Liegt ein sehr kleiner zulässiger Bereich, oder wie in diesem Fall, nur ein zulässiger Punkt vor, kann die Approximation dieses Bereichs leicht degenerieren. Die sequentiell zu lösenden Unterprobleme enthalten dann widersprüchliche und inkonsistente Nebenbedingungen, welche einer besonderen Behandlung bedürfen /Bletzinger 1990a/. Im vorliegenden Beispiel für das fünfstäbige Fachwerk können diese Schwierigkeiten mit einem SQP-Verfahren überwunden und zufriedenstellend gelöst werden. Der Iterationsverlauf zeigt auch für die Berücksichtigung mehrerer Lastfälle eine schnelle Konvergenz zur optimalen Lösung. Die beiden Beispiele 4-4b und 4-4d konnten mit annäherungsweise gleichem Aufwand gelöst werden. Im Falle der Auslegung von Strukturen für optimale Steifigkeit ( $f_e$ ) oder Festigkeit ( $f_s$ ) macht sich die Berücksichtigung von mehreren Lastfällen nicht in dieser Form im Entwurfsraum bemerkbar. Wie aus den Beispielen 4-4a und 4-4c deutlich wird, haben die Nebenbedingungen zur Kontrolle der Spannungen eigentlich keine Bedeutung. In beiden Fällen werden mehrere Lastfälle im Zielkriterium als additive Zielfunktionskomponenten berücksichtigt (vgl. Abs.4.2.4.1). Die Lösung dieses "überlagerten" Optimierungsproblems kann nur als Kompromiß der Optimallösungen der einzelnen Lastfälle gelten und ist stark von der Wichtung der Lastfälle untereinander abhängig.

#### 4.5.2 Abhängigkeit der Belastung von den Optimierungsvariablen

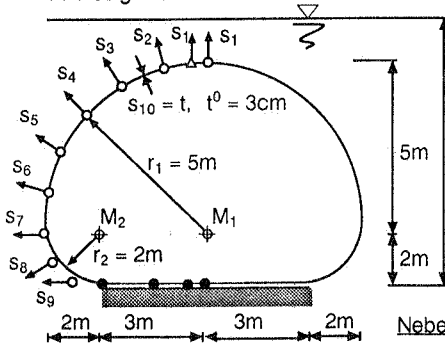
Bei vielen Optimierungsproblemen ist die Belastungsfunktion (Gl. 4-6) von der Geometrie des Tragwerks und damit direkt von den Optimierungsvariablen abhängig. Diese Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen tritt bei allen möglichen Arten der Belastung auf und macht sich insbesondere bei der Formoptimierung in einer stark nichtlinearen Form bemerkbar. Im allgemeinen Fall erfolgt die Beeinflussung des Optimierungsproblems durch eine variablenabhängige Belastung auf zweierlei Weise. Die geometriebeschreibenden Optimierungsvariablen bestimmen einerseits die Belastungsfunktion über die durchzuführende Integration über das Volumen und die Oberfläche einer Struktur. Eine Variation der Form macht sich dabei möglicherweise nichtlinear bei Volumens- und Oberflächenkräften bemerkbar und beeinflusst über die Integration ebenfalls die Lasten aus Anfangsspannungen und -dehnungen. Querschnittsvariable bewirken demgegenüber nur eine Abhängigkeit bei einer Volumenintegration und haben in den meisten Fällen auch nur einen linearen Einfluß auf die Belastungsfunktion.

Bei einigen besonderen Strukturproblemen tritt auf der anderen Seite noch zusätzlich der Einfluß der formbeschreibenden Optimierungsvariablen auf die Belastungsgrößen  $\hat{p}$  und  $\hat{t}$  auf. Bei Volumenskräften liegt ein solcher Fall vor, wenn beispielsweise eine Struktur bei der Rotation um eine Achse durch Zentrifugalkräfte beansprucht wird. Ändert sich dabei die Geometrie der Struktur gegenüber der Rotationsachse, so wird  $\hat{p}$  ebenso von den Optimierungsvariablen  $s$  abhängig. Ein vergleichbarer Fall liegt vor, wenn ein Tragwerk durch eine Wasserbelastung

### Beispiel 4-6: Tragwerk unter Wasserbelastung

**Geometriebeschreibung:**  
 B-Spline-Kurve mit  
 14 Designknoten

**Material:**  $E = 2.1 \times 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$  ;  $\nu = 0.0$   
 $\gamma_w = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

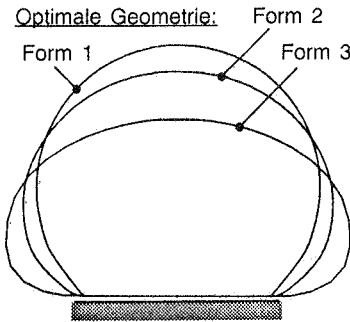


**Belastung:** Form 1 :  $h_w = \infty$   
 Form 2 :  $h_w = 14\text{m}$   
 Form 3 :  $h_w = 7\text{m}$

**Variablen:**  $s_1$  bis  $s_9$  Form  
 $s_{10}$  Querschnitt

**Nebenbedingung:**  $h_w = \frac{W}{W^0} - 1$

**Optimale Geometrie:**



**Zielfunktion:**  $f_E$

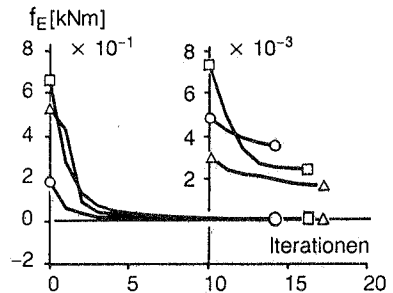


Bild 4-15: Variablenabhängige Belastung einer Struktur

beansprucht wird und die Belastungsgröße  $\hat{t}$  von der Geometrie der Struktur abhängt. Beide Belastungsarten sind für ein Schalelement in Kapitel 6 näher beschrieben und werden in ihrer Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen für die Sensibilitätsanalyse entsprechend aufbereitet.

In den meisten Fällen geht die nichtlineare Abhängigkeit der Belastungsfunktion von den Optimierungsvariablen in moderater Weise in das Optimierungsproblem ein. Obwohl häufig komplexe funktionelle Zusammenhänge zwischen den Optimierungsvariablen und der Belastung bestehen, können keine extrem nichtlineare Abhängigkeiten der Belastungsfunktion festgestellt werden, wie das im Vergleich bei einer Änderung im Beanspruchungszustand einer Struktur der Fall ist. Im Beispiel 4-6 (Bild 4-15) ist für ein Bogentragwerk die Auswirkung einer variablen-

nabhängigen Wasserbelastung aufgezeigt. Gegenüber der Ausgangsgeometrie unterscheiden sich die Optimalformen des Bogens für verschiedene Belastungshöhen ganz beachtlich. Dabei wurde die Formänderungsenergie als Zielfunktion verwendet, um optimal steife Tragwerke für jeweils gleiches Strukturgewicht zu erhalten.

#### 4.5.3 Optimierung von hybriden Tragwerken

Bei vielen praktischen Aufgaben aus dem Bereich der Strukturoptimierung sind die behandelten Tragwerke aus einzelnen Bauteilen zusammengesetzt. Die Beanspruchungszustände dieser Bauteile können sich stark unterscheiden, so daß sie im Einzelfall als ein-, zwei- oder dreidimensional wirkende Tragwerkskomponenten das Verhalten einer Struktur prägen. Solche, aus unterschiedlich beanspruchten Bauteilen zusammengesetzten Strukturen werden auch als hybride Tragwerke bezeichnet.

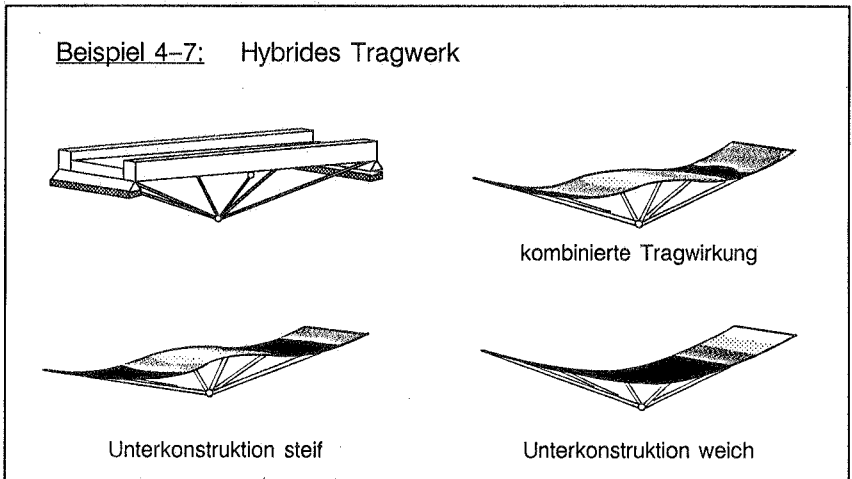


Bild 4-16: Strukturverhalten eines hybriden Tragwerks

Für die Strukturoptimierung bilden gerade zusammengesetzte Tragwerke die Grundlage für besonders interessante Problemstellungen unter dem Gesichtspunkt der Leichtbaukonstruktionen. Durch ihre unterschiedliche Beanspruchung können die einzelnen Bauteile sehr effizient zur Lastabtragung beitragen. Gleichzeitig wird durch eine feingliedrige und differenzierte Bauweise die Funktionalität solcher Strukturen erhöht, und der Materialaufwand kann gegenüber monolithischen und einförmig beanspruchten Tragwerken stark verringert werden. Ein Programmkonzept, welches in allgemeiner Weise mathematische Optimierungsverfahren mit der Methode der finiten Elemente verbindet, kann in idealer Weise zur



Lösung solcher Strukturoptimierungsprobleme bei hybriden Tragwerken beitragen. Der jeweilige Beanspruchungszustand der einzelnen Bauteile kann durch entsprechend formulierte finite Elemente wiedergegeben werden und bestimmt über die Definition der Optimierungsvariablen und -funktionen die Charakteristik des Optimierungsproblems.

Durch den stark unterschiedlichen inneren Beanspruchungszustand weisen hybride Tragwerke in der Regel auch ein sehr komplexes Strukturverhalten auf. Dies macht sich vor allem in einem stark nichtlinearen Verhalten der Optimierungsfunktion in Abhängigkeit von den eingeführten Optimierungsvariablen bemerkbar. Das Optimierungsproblem schließt häufig mehrfach die Möglichkeit einer Umlagerung im inneren Beanspruchungszustand der hybriden Struktur mit ein. Derartige Optimierungsprobleme lassen sich letztlich nur mit Hilfe von Optimierungsverfahren lösen, da selbst eingeschränkte Problemstellungen schnell unübersichtlich werden und sich kaum für eine Handrechnung oder eine geschlossene analytische Lösung eignen. In der vorliegenden Arbeit wurden sowohl Stab- als auch Schalenelemente für die Strukturoptimierung aufbereitet. Damit sind einige grundlegende Untersuchungen zur Strukturoptimierung bei hybriden Tragwerken möglich. In Bild 4-16 ist für ein unterspanntes Brückentragwerk qualitativ dargestellt, welche Arten der Umlagerung im Beanspruchungszustand bei der Optimierung eines solchen Systems bestehen. Das System setzt sich aus einem Randbalken, der Fahrbahnplatte und der Unterspannung zusammen. Alle drei Bauteilkomponenten beeinflussen sowohl die Längs- und Querbiegung als auch den einachsigen Spannungszustand der Unterkonstruktion gleichzeitig. Für eine Auslegung dieses Tragwerks für eine optimale Steifigkeit, Festigkeit oder ein minimales Gewicht ergeben sich in Konsequenz der verschiedenen Beanspruchungsmöglichkeiten sehr unterschiedliche Lösungen /Bothner 1989/.

#### **4.5.4 Michellstrukturen**

Eine kurze Ausführung zu den wesentlichen Eigenschaften der als optimal geltenden Michellstrukturen sollen das Kapitel zur Formulierung spezifischer Optimierungsprobleme abschließen. Am Beispiel dieser besonderen Art von optimalen Tragwerken lassen sich die zuvor formulierten Grundprobleme für die Strukturoptimierung (Steifigkeit-Gewicht-Festigkeit) in einen allgemeineren Zusammenhang bringen. In /Wiedemann 1989/ sind ausführliche Betrachtungen zum Wesen und den Grundsätzen von Michellstrukturen enthalten. Mit der Entwurfstheorie von Maxwell und Michell lassen sich unter einigen idealisierenden Annahmen für einfache Problemstellungen Lösungen finden, welche als absolute Optimalkonstruktionen gelten können. Diese Lösungen sind eher von theoretischem Interesse, da die Verwendung von Michellstrukturen in der Praxis in vielen Fällen nicht möglich ist. Dennoch lassen sich für diese Strukturen drei Grundsätze aufstellen, welche

mit Einschränkungen auch auf allgemeine Aufgaben der Strukturoptimierung übertragbar sind.

Michellstrukturen sind für einen optimalen Kraftfluß ausgelegt und übertragen im Sinne von Leichtbaukonstruktionen die Lasten unter dem geringsten Materialaufwand zu den Lagern. Für ideale Michellstrukturen kann die Optimallösung unter den Bedingungen angegeben werden, daß

- das Spannungs"volumen" minimiert wird,
- die Tragwerkssteifigkeit dafür einen Höchstwert erreicht und
- das Gewicht der Konstruktion gleichzeitig einen Minimalwert annimmt.

Mit diesen qualitativen Aussagen über die Eigenschaften von optimalen Leichtbaukonstruktionen lassen sich die zuvor formulierten Grundprobleme der Strukturoptimierung wieder auf einer gemeinsamen Basis zusammenführen. Geht aus der Lösung des Optimierungsproblems eine absolut optimale Konstruktion hervor, wie das bei einer Michellstruktur der Fall ist, so kann diese Lösung im Prinzip über alle drei Grundprobleme der Strukturoptimierung erreicht werden. Als Beispiel kann ein Parabelbogen gelten, welcher unter Gleichstreckenbelastung die Steifigkeit, die Festigkeit und das Gewicht optimal erfüllt /Kühnemann 1989/. In dieser Hinsicht liefern verschiedene Lösungsansätze mit jeweils gleichen Lösungen ein Indiz dafür, daß eine wirklich optimale Konstruktion vorliegt.

Bei der gleichzeitigen Form- und Querschnittsoptimierung von statisch bestimmten Fachwerken für nur einen maßgebenden Lastfall liegen in der Regel Michellstrukturen als Optimallösungen vor. Von besonderem Interesse sind dabei jene Lösungen, welche sich wie in /Bletzinger 1985/ unter der zusätzlichen Berücksichtigung des Einzelstabknickens einstellen. Alle diese Ergebnisse weisen ebenfalls die Eigenschaften von Michellstrukturen auf. Zu diesen Eigenschaften kann auch die Tatsache gerechnet werden, daß jene Strukturen die aufgebrachte Belastung zwar abtragen, ansonsten aber als an sich kinematische Systeme wirken. Die Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung solcher Optimierungsprobleme liegen vor allem darin begründet. Vielfach wird gerade in der Nähe des Optimums die Strukturanalyse durch numerisch bedingte "Kinematiken" unzuverlässig. Über die Optimierungsfunktionen werden die damit verbundenen Ungenauigkeiten der Strukturanalyse auf das Optimierungsproblem übertragen und verursachen dort unter Umständen weitere Probleme. In dieser Hinsicht haben sich besonders robuste Optimierungsstrategien (z.B. Evolutionsstrategie) bewährt und versprechen oft den meisten Erfolg. Will man dennoch Optimierungsverfahren höherer Ordnung für die Problemlösung ausnutzen, bietet sich die simultane Strukturanalyse und -optimierung an. Dabei spielen eventuelle Kinematiken im Strukturproblem keine Rolle mehr und die Lösung wird zwar mit mehr Aufwand, aber insgesamt doch problemgerechter erreicht.

## 5.0 Methoden der Sensibilitätsanalyse

### 5.1 Übersicht

Die Sensibilitätsanalyse hat in allgemeiner Form die möglichst einfache oder effiziente Ermittlung der Parameterempfindlichkeit einer Lösung zum Ziel. Im weitesten Sinne handelt es sich dabei um die Sensibilität analytischer oder numerischer Lösungen von mathematisch-physikalischen Problemstellungen, welche diese Parameter in einem komplexen funktionellen Zusammenhang beinhalten. Geht man von der vorliegenden Problemformulierung in Verbindung mit der finiten Elementmethode (Kapitel 4) aus, so liegt das Ziel der Sensibilitätsanalyse vor allem darin, die Änderung der Strukturantwort in Abhängigkeit eventuell variierteter Strukturparameter anzugeben. In diesem Falle spricht man von der Sensibilität der Strukturantwort ("behavioral response sensitivity"). Darüber hinaus ist in der Strukturoptimierung auch die Sensibilität der Optimallösung ("optimum design sensitivity") von Bedeutung. Diese Art der Sensibilitätsanalyse berücksichtigt die Änderung des Optimums in Abhängigkeit von zusätzlichen Problemparametern und muß grundsätzlich von der Sensibilität der Strukturantwort unterschieden werden /Schmit 1986/.

Obwohl die Sensibilitätsanalyse bei Strukturproblemen meistens in Zusammenhang mit Entwurfs- oder Optimierungsaufgaben steht, kommt diesem Themenbereich in seinem gegenwärtigen Entwicklungsstand die Bedeutung eines eigenen Forschungsgebietes zu. Unterschiedliche Ausgangspunkte und Betrachtungsweisen haben inzwischen zur Entwicklung einer Vielzahl von Lösungsansätzen beigetragen, welche übersichtlich in /Arora 1979, Adelman 1986/ und ausführlich in /Haug 1986/ beschrieben sind. Prinzipiell lassen sich die heute zur Verfügung stehenden Verfahren zur Sensibilitätsanalyse in ihrem Aufwand für die programmtechnische Realisierung einerseits und ihrer numerischen Effizienz andererseits unterscheiden. Zuverlässige Werte für die Parameterempfindlichkeit lassen sich in der Regel nur über eine aufwendige diskrete oder variationelle Formulierung der Sensibilitätsanalyse auch rechnerisch effizient bestimmen. Demgegenüber können die entsprechenden Sensibilitätskoeffizienten über Differenzenverfahren mit geringstem Formulierungsaufwand ermittelt werden. Vielfach sind diese Werte jedoch unzuverlässig und können nur durch einen hohen Rechenaufwand bestimmt werden. In jedem Fall hat die Sensibilitätsanalyse einen hohen Anteil (ca. 50-90%) am gesamten Aufwand zur Lösung des Optimierungsproblems. Eine effiziente Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten bewirkt deshalb auch immer eine erhebliche Reduktion des gesamten Rechenaufwandes.

An dieser Stelle wird bereits deutlich, welche zentrale Bedeutung der Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten im Gesamtproblem der Strukturoptimierung zu-

kommt. Eine wichtige Entscheidungsgrundlage für die Wahl eines speziellen Verfahrens zur Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten der Strukturantwort ist die Verfügbarkeit der Programmquellen für die Strukturanalyse. Ist kein direkter Zugang zu den Programmquellen möglich, oder will man diese Möglichkeit aus bestimmten Gründen nicht nutzen, so kommen nur variationelle Verfahren für eine zuverlässige Sensibilitätsanalyse in Betracht /Schmit 1986, Santos 1988/. Im anderen Fall können alle verfügbaren Methoden der Sensibilitätsanalyse angewandt werden. In dieser Hinsicht hat diese Entscheidung auch einen gewissen Einfluß auf die Wahl des Programmkonzepts.

Darüberhinaus ist die Auswahl von unterschiedlichen Verfahren zur Sensibilitätsanalyse abhängig von der Art der Strukturanalyse (z.B. FEM), vom Strukturproblem (z.B. Schale) und vom Optimierungsproblem (z.B. Form- und/oder Querschnittsoptimierung) selbst. Zusammenfassend betrachtet sind die numerischen Differenzenverfahren und die variationellen Methoden zur Sensibilitätsanalyse nahezu uneingeschränkt einsetzbar. Sie stellen jedoch im Blick auf den Formulierungs- und Rechenaufwand unter allen Möglichkeiten auch die beiden extremsten Gegensätze dar.

## 5.2 Anwendungsgebiete der Sensibilitätsanalyse

Die einfache Handhabung von CAD- und Analyseprogrammen weckt in vielerlei Hinsicht den Bedarf, die Struktur durch eine Veränderung der Parameter im Entwurfs- oder Strukturmodell noch zu verbessern. In vielen Fällen gelingt über eine entsprechende Parameterstudie ("trial-and-error") die Verbesserung der Struktureigenschaften in der gewünschten Form. Diese "Optimierung von Hand" kann in geeigneter Weise durch die Sensibilitätsanalyse unterstützt werden. Dabei können graphisch angezeigte Sensibilitätskoeffizienten hilfreich sein /Grierson 1983, Bletzinger 1990a/, welche dem Konstrukteur der Parameterempfindlichkeit der Struktur anzeigen und ihm so wenigstens den Weg in die gewünschte Richtung zeigen. Oft läßt sich mit der Sensibilitätsanalyse die Parameterstudie verkürzen und ziel-sicher abschließen /Poth 1988/.

Bei vielen Parametern, welche sich in der Beeinflussung der Strukturantwort auch gegenseitig widersprechen können, wird die Verbesserung einer Struktur durch eine Parametervariation auf intuitivem Wege selbst unter Verwendung der Sensibilitätsanalyse schwierig oder sogar unmöglich. In diesem Fall bieten sich Optimierungsverfahren an, welche die Prozedur der Parameterstudie automatisieren und durch die Anwendung von effizienten Optimierungsalgorithmen auf die Sensibilitätsanalyse zurückgreifen. In diesem automatisch ablaufenden Optimierungsprozeß müssen jedoch, wie bereits erwähnt (Kapitel 2 und 4), die Idealisierung, Parameterisierung, sowie die Variabilität des Problems festgelegt werden. Diese entscheidenden Schritte für die Bildung des richtigen Optimierungsmodells, welches die eigentliche Problemstellung wiedergeben soll, werden in idealer Weise

durch eine zuvor durchgeführte, graphisch unterstützte Sensibilitätsanalyse ergänzt. Nur damit kann sich der Konstrukteur ein Bild von der gestellten Optimierungsaufgabe machen und das Ergebnis auf die in das Optimierungsmodell eingebrachten Anforderungen hin überprüfen.

In einer weiterführenden Betrachtung der Problemstellung wird es unter Umständen darum gehen, das vorliegende Optimierungsergebnis selbst in seiner Parameterempfindlichkeit zu untersuchen. Im Gegensatz zur Sensibilitätsanalyse für die Strukturantwort geht es dann um die Sensibilität der Optimallösung, wobei der Einfluß bisher unberücksichtigter Parameter auf diese Lösung vorrangige Bedeutung hat /Vanderplaats 1985/. Für eine derartige Untersuchung der Optimallösung werden nicht nur die ersten, sondern möglicherweise auch die zweiten Ableitungen als zusätzliche Information über die Strukturantwort benötigt. Zusammen mit dem graphisch angezeigten Sensibilitätskoeffizienten ergibt die Sensibilitätsanalyse für die Optimallösung die beste Möglichkeit der Beurteilung des Optimierungsmodells und der gestellten Optimierungsaufgabe.

Bei der Anwendung von Approximationstechniken für die effiziente Lösung von Optimierungsproblemen werden vielfach die Gradienten der Optimierungsfunktionen verwendet /Fleury 1986, Schmit 1988/. In einigen Fällen kommen sogar die zweiten Ableitungen der Strukturantwort zur Anwendung, wenn eine solch hochwertige Approximation des Ausgangsproblems den entsprechenden Erfolg für die Lösung der Optimierungsaufgabe verspricht /Miura 1978, Haftka 1988/. In der Regel ist jedoch die Bestimmung von zuverlässigen, höheren Sensibilitätskoeffizienten so aufwendig, daß sich ihre Ermittlung nicht rechtfertigen läßt. Meistens ist die Verwendung von ersten Ableitungen in der Approximationsvorschrift ausreichend /Bletzinger 1990a/.

Darüber hinaus kann die Sensibilitätsanalyse in allen Bereichen der Strukturmechanik verwendet werden, welche auf eine zuverlässige Voraussage der Strukturantwort bei einer Parametervariation angewiesen sind. Beispielhaft seien hier Probleme aus der Bruchmechanik angesprochen. In diesem Problemfeld können Kriterien für die Ausbreitung von Rissen ("crack propagation") über die Parameterempfindlichkeit der potentiellen Energie einer Struktur gewonnen werden. Liegen die entsprechenden Sensibilitätskoeffizienten vor, kann die Rissausbreitung in Strukturen auf der Basis einer linear-elastischen Strukturanalyse /Lin 1988/ numerisch simuliert werden.

### **5.2.1 Gegenüberstellung verschiedener Methoden**

Die verfügbaren Methoden zur Sensibilitätsanalyse können zunächst nach ihrer grundsätzlich unterschiedlichen Art der Formulierung in diskrete und variationelle Verfahren unterteilt werden (Bild 3-12). Dabei geht die diskrete Sensibilitätsanalyse (DSA) bei der Ermittlung der Parameterempfindlichkeit von der idealisierten Struktur aus, welche auf der Ebene des Entwurfs- und Strukturmodells durch diskrete Parameter beschrieben wird. Die Systemgleichungen, wie sie beispielsweise

für die Methode der finiten Elemente vorliegen, und die damit verbundenen Optimierungsfunktionen für Zielkriterium und Nebenbedingungen ergeben sich damit als Funktionen der eingeführten Optimierungsvariablen. Die Ableitung dieser oft implizit abhängigen und hochgradig nichtlinearen Funktionen nach den Optimierungsvariablen ergibt dann schließlich die gewünschten Sensibilitätskoeffizienten.

Die Methoden der variationellen Sensibilitätsanalyse (VSA) gehen demgegenüber von einer idealisierten aber kontinuierlich beschriebenen Struktur aus. Die Struktur wird lediglich auf ihre wesentlichen Eigenschaften reduziert (z.B. Schalen, Balken, etc.) und auf der Ebene des Entwurfs- und Strukturmodells zunächst kontinuierlich beschrieben. Zustandsvariablen und Optimierungsvariablen bleiben in dieser Form also ortsabhängige Funktionen, und das Struktur- und Optimierungsproblem ist in entsprechender Weise durch Funktionale und Operatoren bestimmt. Die lineare Theorie zur Behandlung von Operatoren und die Variationsrechnung bilden in diesem Fall die mathematische Grundlage für die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten. Diese Koeffizienten lassen sich als Rand- oder Gebietsintegrale angeben, welche erst nach der Diskretisierung des Entwurfs- und Strukturmodells für die Bestimmung der Parameterempfindlichkeit der jeweiligen Optimierungsfunktionen durch die Anwendung entsprechender numerischer Integrationsverfahren ausgewertet werden.

Diskrete und variationelle Verfahren sind in der vorliegenden Beschreibung nur grob charakterisiert. Intern lassen sich diese beiden grundlegend verschiedenen Lösungsansätze für die Sensibilitätsanalyse noch weiter nach dem Strukturproblem, der Art der Strukturanalyse (z.B. FEM, BEM, etc.) und nach der Formulierung des Optimierungsproblems unterscheiden. Aus den vielfältigen Verknüpfungsmöglichkeiten lassen sich zahlreiche interessante und differenzierte Problemstellungen für die Sensibilitätsanalyse angeben und im Einzelfall auch mit besonderer numerischer Effizienz lösen. Der Umfang der Literatur zu diesem Themengebiet spiegelt deutlich die Vielseitigkeit in der konkreten Aufgabenstellung wider /Arora 1979, Adelman 1986, Haug 1986/. Eine bewertende Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren zur Sensibilitätsanalyse ist nur mit Einschränkungen möglich. Für die Strukturoptimierung ist zumindest für eine sichere Konvergenz zur optimalen Lösung die Zuverlässigkeit der Sensibilitätskoeffizienten von größerer Bedeutung. Eine über Differenzenverfahren ermittelte Parameterempfindlichkeit der Strukturantwort ist in dieser Hinsicht in vielen Fällen nicht zufriedenstellend, so daß eine quasi analytische Ermittlung der Koeffizienten mit diskreten oder variationellen Verfahren trotz des höheren Formulierungsaufwandes bevorzugt werden /Schmit 1986/.

Am schwersten ist die numerische Effizienz der einzelnen Verfahren zu beurteilen. Dies liegt nicht nur darin begründet, daß die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten auch von der Größe des Struktur- und Optimierungsproblems abhängt, sondern daß vor allem der Gesichtspunkt der programmtechnischen Verwirklichung berücksichtigt werden muß. In dieser Hinsicht ist es wesentlich, ob das

Verfahren der Sensibilitätsanalyse in einem programminternen oder einem systemübergreifenden Konzept zur Strukturoptimierung verwirklicht wurde. Im letzteren Fall spielen die rechner-spezifischen Eigenschaften beim Datentransfer eine große Rolle und machen damit eine Gegenüberstellung der Verfahren für die Beurteilung der numerischen Effizienz von vorn herein wertlos. Objektiv lassen sich die unterschiedlichen Methoden nur in einem programminternen Konzept vergleichen, weil der programmtechnische Aufwand des Datentransfers und der Datenhaltung keinen vergleichbaren Einfluß auf die Sensibilitätsanalyse ausübt. In der Literatur ist ein derartiger Vergleich von diskreten und variationellen Verfahren unbekannt, weil sie sich immer auch im Punkt ihrer programmtechnischen Verwirklichung unterscheiden.

### 5.2.2 Sensibilitätsanalyse aus praktischer Sicht

Die vorangehend beschriebenen Anwendungsgebiete weisen die Sensibilitätsanalyse bei der effizienten Lösung von Strukturoptimierungsproblemen als eine unumgängliche und zentrale Komponente im Optimierungsprozess aus. Durch diese bedeutende Stellung im gesamten Konzept der Strukturoptimierung werden aus praktischer Sicht besonders hohe Anforderungen an diese Programmkomponente gestellt. Von Seiten der Anwendung und der Programmentwicklung bestehen gegenüber der Sensibilitätsanalyse die Erwartungen für

- eine numerisch zuverlässige und effiziente Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten,
- eine programmtechnisch einfache Realisierung und
- eine möglichst allgemeingültige, vom Strukturproblem unabhängige Problemformulierung.

In den vergangenen Jahren war die Anwendung der Strukturoptimierung in kommerziellen Programmsystemen hauptsächlich auf die Querschnittsoptimierung ("sizing") beschränkt. In Konsequenz wurde die Sensibilitätsanalyse in den meisten Fällen auf der Grundlage von diskreten, semi-analytischen Verfahren betrieben. Mit diesen Methoden lassen sich gerade für die Querschnittsoptimierung die Sensibilitätskoeffizienten einfach, effizient und zuverlässig ermitteln /Eschenauer 1988b, Nagendra 1989, Kumar 1990/. Bei Formoptimierungsproblemen bietet sich für die zuverlässige Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten kein vergleichbar einfacher Weg an, weil sich mit der vorgenannten diskreten, semi-analytischen Sensibilitätsanalyse in vielen Fällen drastisch bemerkbare numerische Probleme einstellen (Abs. 5.2.3.). In kommerziellen Programmsystemen werden deshalb bei Formoptimierungsproblemen häufig variationelle Methoden eingesetzt /Arora 1989/. Falls es die finite Elementformulierung und Implementierung erlaubt, können aber auch diskrete analytische Methoden zur Anwendung kommen.

Aus den vorausgehenden Ausführungen wird ersichtlich, daß für die Formoptimierung keines der zur Verfügung stehenden Verfahren der Sensibilitätsanalyse den Erwartungen aus praktischer Sicht gleichzeitig gerecht wird. In der vorliegenden Arbeit kommen deshalb mehrere Methoden zur Anwendung, um die jeweiligen Anforderungen auf einer breiten Basis zu erfüllen. Da die Strukturoptimierung auf einem integrierten programminternen Lösungskonzept beruht und alle beteiligten Programmkomponenten als Quellprogramme zugänglich sind, wurden ausschließlich diskrete Methoden für die Sensibilitätsanalyse auch programmtechnisch verwirklicht. In besonderem Maße wurde darauf geachtet, daß die eingesetzten Verfahren den Anwendungen der finiten Elementmethode in der Strukturoptimierung entsprechen. Obwohl die variationellen Methoden zur Sensibilitätsanalyse den diskreten Verfahren übergeordnet sind, lassen sich zuverlässige Sensibilitätskoeffizienten auf dem hier eingeschlagenen Weg in den diskreten Systemgleichungen der finiten Elementmethode einfacher und vielseitiger formulieren. Dies gilt insbesondere für komplizierte kontinuumsmechanische Probleme, wie sie bei Schalenkonstruktionen vorliegen. In diesen Fällen wird die variationelle Formulierung von Sensibilitätskoeffizienten überaus umfangreich und schwierig. Für die diskrete Sensibilitätsanalyse konnten im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf diese Weise für alle in Kapitel 4 formulierten Optimierungsprobleme (Steifigkeit - Gewicht - Festigkeit) auch zuverlässige, analytisch ermittelte Sensibilitätskoeffizienten formuliert werden. Die weiteren Ausführungen zur Sensibilitätsanalyse beziehen sich immer auf lineare Probleme in der Strukturanalyse.



### 5.3 Diskrete Methoden der Sensibilitätsanalyse

Bei der Lösung von Strukturoptimierungsproblemen mit Hilfe der finiten Elementmethode müssen insbesondere bei der Formoptimierung alle Grundgleichungen für die Elementformulierung in ihrer Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen  $\mathbf{s}$  gesehen werden. Sowohl die in Kapitel 4 definierten Bilinearformen als auch darauf aufbauend das Funktional des Gesamtpotentials und das Funktional von Hellinger-Reissner sind in übergeordnetem Sinn von diesen Variablen abhängig. Dasselbe gilt für die Systemgleichungen, welche sich mit den Extremal- bzw. Stationaritätsbedingungen aus den diskretisierten Funktionalen ergeben

$$\delta \bar{\Pi}_D(\mathbf{u}) \rightarrow \delta \bar{\Pi}_D(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) \quad (5-1a)$$

$$\delta \bar{I}_D(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \rightarrow \delta \bar{I}_D(\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}), \mathbf{u}(\mathbf{s})) \quad (5-1b)$$

wobei die Veränderung der Struktur als Variation gegenüber dem aktuellen Entwurf mit

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{s}_a + \varepsilon_s \delta \mathbf{s} \\ \text{mit } \varepsilon_s &> 0 \end{aligned} \quad (5-2)$$

zu verstehen ist. Alle diskreten Verfahren der Sensibilitätsanalyse setzen voraus, daß sowohl die vorliegenden Bilinearformen als auch der inverse Zustandsoperator nach den Variablen  $\mathbf{s}$  differenzierbar sind und sich die Sensibilitätskoeffizienten für die Zustandsvariablen auch theoretisch begründen lassen. Für die entsprechende mathematische Beweisführung sei auf die umfangreichen Ausführungen in /Haug 1986/ hingewiesen. Dort ist für die Sensibilitätsanalyse mit Verschiebungselementen die Differenzierbarkeit für eine variable Form und variable Querschnitte der diskretisierten Gleichungen angegeben.

Unabhängig von der Wahl eines speziellen Elementtyps sollen hier die gängigen Verfahren zur diskreten Sensibilitätsanalyse angegeben werden. Ausgangspunkt für die Formulierung dieser Methoden sind die diskreten Systemgleichungen und die zugehörigen Optimierungsfunktionen, für welche bei Optimierungsverfahren höherer Ordnung die Gradienten nach den Optimierungsvariablen zu ermitteln sind. In Tabelle 5-1 sind die Systemgleichungen als allgemeines lineares Gleichungssystem angegeben, wobei  $\mathbf{z}$  als beliebige Zustandsvariablen zu verstehen sind. Stellvertretend für alle übrigen Optimierungsfunktionen werden die Ungleichheitsnebenbedingungen (g) betrachtet. Unter Beibehaltung der Matrixschreibweise lassen sich die totalen Ableitungen der Optimierungsfunktionen unter Anwendung der Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung angeben (Gl.5-3b und 5-4). In den Ableitungen der Optimierungsfunktionen (Gl.5-4) sind die Ableitungen der Systemantwort (Gl.5-3b) implizit enthalten.

Für die Auflösung der beiden Gleichungen bestehen zwei verschiedene Möglichkeiten. Zunächst wird in beiden Fällen aus den Ableitungen der Lastvektoren  $\mathbf{b}$  und der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  unter Verwendung der vorliegenden Strukturantwort  $\mathbf{z}$

Systemgleichung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) \mathbf{z}(\mathbf{s}) = \mathbf{b}(\mathbf{s}) \quad (5-3a) \quad \left| \frac{d}{ds_i} \longrightarrow \frac{d\mathbf{A}}{ds_i} \mathbf{z} + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{z}}{ds_i} = \frac{d\mathbf{b}}{ds_i} \quad (5-3b) \right.$$

Optimierungsfunktionen:

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{z}), h(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \text{ oder } g(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \quad \left| \frac{d}{ds_i} \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial s_i} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{ds_i} = \frac{dg}{ds_i} \quad (5-4) \right.$$

Formulierungsaufwand  
 Programmtechnik

Zuverlässigkeit  
 numerische Effizienz

Differenzenmethode	semi-analytisches Verfahren	analytisches Verfahren
	$\bar{\mathbf{b}}_1 \approx \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s_i} - \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta s_i} \mathbf{z} \quad (5-5a)$	$\bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{d\mathbf{b}}{ds_i} - \frac{d\mathbf{A}}{ds_i} \mathbf{z} \quad (5-5b)$
	$\frac{d\mathbf{z}}{ds_i} = \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{b}}_1 \quad (5-6)$	$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \quad (5-7a)$
$\frac{dg}{ds_i} \approx \frac{g(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}_i) - g(\mathbf{s})}{\Delta s_i} \quad (5-8)$	$\frac{dg}{ds_i} = \frac{\partial g}{\partial s_i} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{ds_i} \quad (5-4)$	$\frac{dg}{ds_i} = \frac{\partial g}{\partial s_i} + \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}}_1 \quad (5-7b)$
	direkte Methode	adjungierte Methode

Tabelle 5-1: Methoden der diskreten Sensibilitätsanalyse

der "Last"vektor  $\bar{\mathbf{b}}$  aufgestellt (Gl. 5-5b). Bei der direkten Methode werden nun die Ableitungen der Strukturantwort  $d\mathbf{z}/ds$  bestimmt, indem Gl. (5-3b) durch Rückwärtseinsetzen des "Last"vektors  $\bar{\mathbf{b}}$  in die faktorisierte Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  aufgelöst wird (Gl.5-6). Die Ableitungen der Strukturantwort liegen damit für jeden Lastfall vor und können in Gl.(5-4) eingesetzt werden. Bei der adjungierten Methode wird die Auflösung der Gleichungen (5-3b) und (5-4) in indirekter Form über die Einführung einer Hilfsvariablen  $\bar{\mathbf{z}}$  vorgenommen. Diese Hilfsvariable oder auch adjungierte Variable ergibt sich, wenn die Ableitung der Optimierungsfunktion nach den Systemfreiheitsgraden als transponierter "Pseudo-Lastvektor" in die faktorisierte Systemmatrix eingesetzt wird (Gl. 5-7a). Zusammen mit der partiellen Ableitung der Optimierungsfunktion nach den Optimierungsvariablen und dem Skalarprodukt zwischen der Hilfsvariablen  $\bar{\mathbf{z}}$  und dem "Last"vektor  $\bar{\mathbf{b}}$  läßt sich das totale Diffe-

rential der Optimierungsfunktion bilden (Gl.5-7b). Die physikalische Bedeutung der Hilfsvariablen kann als Sensibilität der Optimierungsfunktion gegenüber einer Belastungsänderung interpretiert werden. Als solche kann die adjungierte Variable in bestimmten Fällen auch zur direkten Bestimmung von Einflußlinien für die Optimierungsfunktionen verwendet werden /Belegundu 1986, 1989/.

Bei der Aufstellung der Gleichungen (5-3 bis 5-6) wurde davon ausgegangen, daß die Ableitungen der Systemmatrizen und Lastvektoren nach den Optimierungsvariablen für die Sensibilitätsanalyse zunächst in analytischer Form vorliegen und eine Erstellung des Pseudo-Lastvektors möglich ist. In vielen Fällen, vor allem bei einer Anwendung von kommerziellen Analyseprogrammen in der Strukturoptimierung, sind diese Voraussetzungen nicht gegeben. Geht aus der Strukturanalyse lediglich die Strukturantwort  $\mathbf{z}$  als Ergebnis hervor, so kann die diskrete Sensibilitätsanalyse nur auf der Grundlage von numerischen Differenzenverfahren durchgeführt werden (Gl.5-8). In diesem Fall müssen für eine vollständige Ermittlung der Gradienteninformation für die Strukturoptimierung mindestens  $n + 1$  ( $n$ =Anzahl der Optimierungsvariablen) wiederholte Strukturberechnungen durchgeführt werden. Einzelheiten dieser Art der Gradientenbestimmung werden im Abschnitt 5.2.2. behandelt. In manchen Fällen können die Ableitungen der Systemmatrizen und Lastvektoren über Differenzenverfahren ermittelt werden (Gl.5-5a). Dies gelingt vor allem dann, wenn die Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren der Struktur oder der einzelnen finiten Elemente über Datenfiles zugänglich sind und während des Optimierungsprozesses manipuliert werden können. Die Besonderheiten dieser Möglichkeit der semi-analytischen Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten werden im Abschnitt 5.2.3. näher betrachtet.

Bevor die verschiedenen Verfahren der diskreten Sensibilitätsanalyse im Einzelfall beschrieben werden, sollen an dieser Stelle direkte und adjungierte Methoden miteinander verglichen werden. In seinem formalen Zusammenhang erscheint dieser Unterschied lediglich in einer unterschiedlich durchgeführten Matrizenmanipulation /Arora 1979, Vanderplaats 1980/. Hinsichtlich der numerischen Effizienz können sich beide Algorithmen zur Bestimmung der Sensibilitätskoeffizienten deutlich unterscheiden. Zur Demonstration dieses Sachverhaltes wurden beide Methoden in Bild 5-1 einander gegenübergestellt. Der Unterschied ergibt sich aus der Dimension des Optimierungsproblems, welcher sich durch die Verknüpfung der jeweiligen Rechenoperationen auch auf die einzelnen Verfahren überträgt. Aus numerischer Sicht besteht dieser Unterschied im wesentlichen in der Anzahl des wiederholten Rückwärtseinsetzens in die faktorisierte Systemmatrix. Die direkte Methode benötigt  $n \times l$  Matrizenoperationen, wogegen die adjungierte Methode  $m$ -mal die Hilfsvariablen  $\bar{\mathbf{z}}$  durch Rückwärtseinsetzen bestimmt. Obwohl dieser Sachverhalt sehr engagierte Diskussionen über die jeweils effizienteste Form der Sensibilitätsanalyse hervorgerufen hat /Arora 1979, Vanderplaats 1980/, scheint die Bedeutung für die Lösung des Gesamtproblems weitaus geringer als ursprünglich angenommen. Bei sehr großen Strukturproblemen und vor allem bei

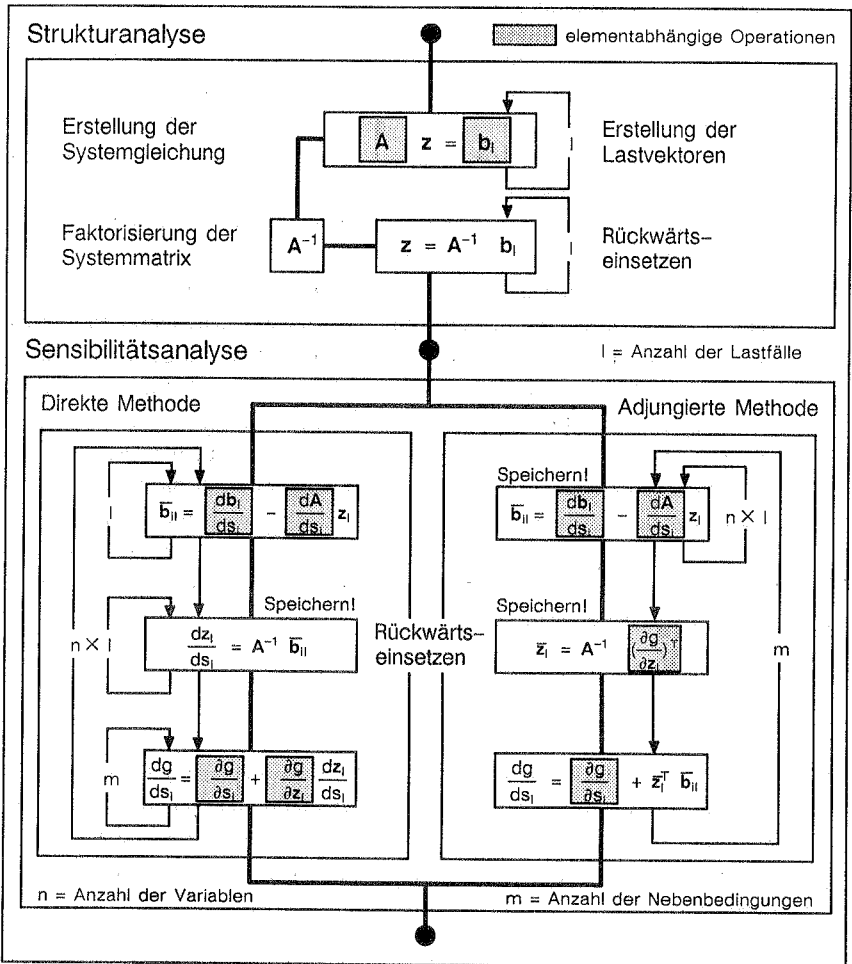


Bild 5-1: Vergleich der direkten und der adjungierten Methode

Formoptimierungsproblemen hat die Erstellung der Systemgleichung, durch die Matrix  $A$  und den Lastvektor  $b$ , ihre Ableitung  $\bar{b}$  und die Faktorisierung der Systemmatrix  $A^{-1}$  einen wesentlich höheren numerischen Aufwand zur Folge als das wiederholte Rückwärtseinsetzen für die jeweiligen Ersatzlasten. Für die Auswahl der einen oder anderen Methode müssen also eher programmtechnische Aspekte im Vordergrund stehen (Abs. 5.2.6.).

### 5.3.1 Einfluß der Elementwahl

Die Bedeutung der Elementwahl für die Strukturoptimierung wurde bereits in Kapitel 4 unter dem Aspekt der Formulierung des Optimierungsproblems herausgestellt. Die dort betrachteten Elementtypen unterscheiden sich nicht nur in der Ermittlung und der Wiedergabe der wirklichen Strukturantwort, sondern ganz wesentlich auch im numerischen Aufwand, der gegebenenfalls für eine diskrete Sensibilitätsanalyse zu berücksichtigen ist. Unter diesem Gesichtspunkt sollen hier die verschiedenen Elementformulierungen miteinander verglichen und die für die Sensibilitätsanalyse geeignetste Elementauswahl getroffen werden. Für die unterschiedlichen Elementformulierungen werden die Systemgleichungen und ihre Ableitungen nach der in Tabelle 5-1 eingeführten Benennung angegeben und die gegebenenfalls in den Optimierungsfunktionen  $f, h$  und  $g$  auftretenden Ableitungen der Verschiebungen und Spannungen nach den Optimierungsvariablen hergeleitet. Abkürzend wird dafür die Schreibweise  $A_s$  für die Ableitungen  $dA/ds$  verwendet. Der Vergleich der Elementtypen wird im folgenden nur für die direkte Methode der Sensibilitätsanalyse durchgeführt, um so den matriziellen Aufwand der jeweiligen Formulierungen besser darzustellen. Die adjungierte Methode kann in gleicher Weise zur Anwendung kommen, wobei die Rechenoperationen nach Tabelle 5-1 durchgeführt werden.

#### 5.3.1.1 Verschiebungselemente

Nach Gl.(4-20) und Gl.(4-23) lassen sich Ansatz, Systemgleichung und die wesentlichen Sensibilitätskoeffizienten für die Verschiebungen und Spannungen bei Verschiebungselementen in folgender Weise angeben. Der Index  $e$  zur Kennzeichnung der Elementmatrizen wird unter dem Summenzeichen der Einfachheit halber weggelassen.

Ansatz:

$$u_e = \Phi u_e \quad (5 - 9a)$$

Systemgleichung:

$$u = A^{-1} b \quad (5 - 9b)$$

$$\text{mit } A = \sum_e \int_V B^T C B dV \quad \text{und} \quad b = \sum_e \left( \int_V \Phi^T \hat{p} dV + \int_{\partial V_e} \Phi^T \hat{t} dA \right)$$

Sensibilitätskoeffizienten:

$$\mathbf{u}_{,s} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{b}_{,s} - \mathbf{A}_{,s} \mathbf{u}] \quad (5 - 9c)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_{,s} = \sum_e \left[ \int_V (\mathbf{B}_{,s}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{,s} \mathbf{B} dV + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{,s} dV) + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_{,s} \right]$$

$$\text{und } \mathbf{b}_{,s} = \sum_e \left[ \int_V \Phi^T \hat{\mathbf{p}}_{,s} dV + \int_V \Phi^T \hat{\mathbf{p}} dV_{,s} + \int_{\partial V_\sigma} \Phi^T \hat{\mathbf{t}}_{,s} dA + \int_{\partial V_\sigma} \Phi^T \hat{\mathbf{t}} dA_{,s} \right]$$

$$\sigma_e = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad \rightarrow \quad \sigma_{e,s} = \underbrace{\mathbf{C}_{,s}}_{\varepsilon} \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{u}_e}_{\varepsilon} + \underbrace{\mathbf{C} (\mathbf{B}_{,s} \mathbf{u}_e + \mathbf{B} \mathbf{u}_{e,s})}_{\varepsilon,s} \quad (5 - 9d)$$

Die Verschiebungen und ihre Ableitungen treten bei den Verschiebungselementen als primäre Zustandsvariablen auf und können mit der direkten bzw. adjungierten Methode der Sensibilitätsanalyse recht einfach ermittelt werden. Die Sensibilitätskoeffizienten für die Spannungen sind implizit von den primären Zustandsvariablen abhängig, und dementsprechend aufwendig ist auch die Ermittlung der totalen Ableitung der Spannungen nach den Optimierungsvariablen. An dieser Stelle unterscheiden sich auch die direkte und adjungierte Methode aus programmtechnischer Sicht (Abs. 5.2.6.).

### 5.3.1.2 Gemischte Elemente

Die Sensibilitätsanalyse für gemischte Elemente kann nach Tabelle 5-1 unter Verwendung von Gl. (4-20), Gl. (4-21) und Gl. (4-26) durchgeführt werden.

Ansatz:

$$\mathbf{u}_e = \Phi \mathbf{u}_e, \quad \tau_e = \Psi \sigma_e \quad (5 - 10a)$$

Systemgleichung:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{b} \quad (5 - 10b)$$

$$\text{mit } \mathbf{H} = \sum_e \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \Psi dV \quad \text{und} \quad \mathbf{G} = \sum_e \int_V \Psi^T \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{b} \triangleq \mathbf{b} \quad \text{aus Gl. (5 - 9b)}$$

Sensibilitätskoeffizienten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{,s} \\ \mathbf{u}_{,s} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \left[ \mathbf{b}_{,s} - \overbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{,s} & \mathbf{G}_{,s} \\ \mathbf{G}_{,s}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{,s}} \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \right] \quad (5-10c)$$

$$\text{mit } \mathbf{H}_{,s} = - \sum_e \left( \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,s} \mathbf{C}^{-1} \Psi dV + \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \Psi dV_{,s} \right)$$

$$\text{und } \mathbf{G}_{,s} = \sum_e \left( \int_V \Psi^T \mathbf{B}_{,s} dV + \int_V \Psi^T \mathbf{B} dV_{,s} \right)$$

$$\mathbf{b}_{,s} \triangleq \mathbf{b}_{,s} \quad \text{aus Gl. (5-9c)}$$

Im Falle der gemischten Elemente zeigt sich vorteilhaft, daß Verschiebungen und Spannungen gleichzeitig als primäre Zustandsvariablen behandelt werden. Die Sensibilitätskoeffizienten für beide Zustandsvariablen liegen bei der Anwendung der direkten Methode explizit vor und können direkt in die Ableitungen der Optimierungsfunktionen eingebracht werden. Bei der adjungierten Methode liegt ein Mehraufwand in der Ermittlung des Pseudo-Lastvektors vor. Bei dieser Variante ergeben sich z.B. für Nebenbedingungen zur Kontrolle der Vergleichsspannungen nach von Mises unter Umständen Elementlastvektoren, welche die Elemente der Matrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  in komplizierter Weise beinhalten.

### 5.3.1.3 Gemischt-hybride Elemente

Aus den Gleichungen (4-20), (4-21), (4-27) und (4-28) lassen sich die Systemgleichungen sowie die Sensibilitätskoeffizienten für die Verschiebungen und Spannungen bei gemischt-hybriden Elementen angeben.

Ansatz:

$$\mathbf{u}_e = \Phi \mathbf{u}_e, \quad \tau_e = \Psi \sigma_e \quad (5-11a)$$

Systemgleichung:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (5-11b)$$

$$\text{mit } \mathbf{A} = \sum_e \mathbf{g}^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \quad \mathbf{b} \triangleq \mathbf{b} \quad \text{aus Gl. (5-9b)}$$

$$\text{und } \mathbf{h} = \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \Psi dV \quad \mathbf{g} = \int_V \Psi^T \mathbf{B} dV$$

Sensibilitätskoeffizienten:

$$\mathbf{u}_{,s} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{b}_{,s} - \mathbf{A}_{,s} \mathbf{u}] \quad (5 - 11c)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_{,s} = \sum_e (\mathbf{g}_{,s}^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{g}^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{h}_{,s} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g}_{,s})$$

$$\mathbf{b}_{,s} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{b}_{,s} \quad \text{aus Gl. (5 - 9c)}$$

$$\text{und } \mathbf{h}_{,s} = - \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,s} \mathbf{C}^{-1} \Psi dV + \int_V \Psi^T \mathbf{C}^{-1} \Psi dV_{,s}$$

$$\mathbf{g}_{,s} = \int_V \Psi^T \mathbf{B}_{,s} dV + \int_V \Psi^T \mathbf{B} dV_{,s}$$

$$\sigma_e = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{u}_e \rightarrow \sigma_{e,s} = - \mathbf{h}^{-1} \mathbf{h}_{,s} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{u}_e + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{g}_{,s} \mathbf{u}_e + \mathbf{g} \mathbf{u}_{e,s}) \quad (5 - 11d)$$

$$\tau_e = \Psi \sigma_e \rightarrow \tau_{e,s} = \Psi \sigma_{e,s} \quad (5 - 11e)$$

Es zeigt sich, daß bei dieser Elementformulierung der matrizielle Aufwand zur Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten für die Verschiebungen und die Spannungen gegenüber den ursprünglichen, nicht abgeleiteten Gleichungen drastisch zunimmt. Dies gilt gleichermaßen für die direkte und die adjungierte Methode, wobei im letzteren Fall wie bei den gemischten Elementen die Pseudo-Lasten für die Sensibilitätskoeffizienten der Spannungen aus den Elementen der Matrizen hergeleitet werden müssen.

#### 5.3.1.4 Gegenüberstellung der verschiedenen Elemente

Eine Gegenüberstellung der zuvor beschriebenen Elementtypen soll hier nach den Kriterien der Elementformulierung, der numerischen Effizienz und dem Elementverhalten unter besonderer Berücksichtigung der diskreten Sensibilitätsanalyse erfolgen. Wie bei der reinen Strukturberechnung stehen alle drei genannten Aspekte auch bei der Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten in einem gewissen Zusammenhang und müssen daher als übergeordnete Qualitätsmerkmale betrachtet werden. Dazu gehören vor allem die bereits in Kapitel 4 angesprochene Zuverlässigkeit und numerische Stabilität, welche das Verhalten finiter Elemente charakterisieren. Darüber hinaus ergeben sich für die diskret durchgeführte analytische Sensibilitätsanalyse zusätzliche Aspekte.

Der Vergleich von Verschiebungselementen und gemischt-hybriden Elementen zeigt einen durch die Formulierung bedingten deutlichen Unterschied für den elementinternen, matriziellen Aufwand. Geht man bei diesem Vergleich von Schalenelementen aus, für welche bei sämtlichen Elementmatrizen in der Regel eine Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen besteht, so zeigt sich dieser Unterschied in verstärkter Form. Trotz des besseren Elementverhaltes der gemischt-



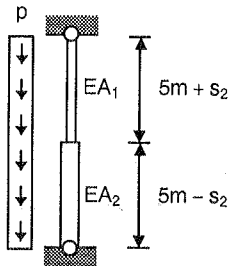
hybriden Elemente besteht ihr besonderer Nachteil im höheren Aufwand für die Formulierung und die notwendigen Rechenoperationen. Aus diese Grund sollten bei der Sensibilitätsanalyse die Verschiebungselemente bevorzugt eingesetzt werden.

Für die gemischten Elemente gilt das Elementverhalten für die Sensibilitätsanalyse in gleichsam verstärkter Form wie bei der regulären Strukturanalyse. Für manche Probleme wird das wirkliche Strukturverhalten selbst durch wenige Elemente gut abgebildet, und es können überraschend gute Ergebnisse erzielt werden /Leal 1988/. Es treten jedoch Fälle auf, in welchen dieses gutmütige Elementverhalten empfindlich gestört ist und stark verfälschte Ergebnisse vorliegen. Dieser Sachverhalt kann sich bei der Sensibilitätsanalyse noch deutlicher bemerkbar machen. An einem einfachen Beispiel sind in Bild 5-2 die verschiedenen Elementtypen aus dieser Sicht einander gegenübergestellt. Obwohl dieses Beispiel dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit keinesfalls gerecht wird, lassen sich die vermuteten Eigenschaften der Elemente deutlich machen. Verschlebungselemente und gemischt-hybride Elemente sind für das hier behandelte Problem eines Dehnstabes in ihren Ergebnissen identisch.

Die Verschiebungselemente zeigen erwartungsgemäß sowohl für die Verschiebungen als auch für die zugehörigen Sensibilitätskoeffizienten eine völlige Übereinstimmung mit der exakten Lösung. Die Kraftgrößen und ihre Gradienten für die jeweilige Querschnitts- und Formvariable werden elementweise in der für diesen Elementtyp charakteristischen Weise im Mittel erfüllt. Grundsätzlich anders verhalten sich demgegenüber die gemischten Elemente. Es zeigt sich, daß die Verschiebungen nur näherungsweise erfüllt werden und quasi ein einhüllendes Polygon zur exakten Lösung bilden. Dieser Effekt tritt für die Gradienten der Verschiebungen nach den Optimierungsvariablen in verstärkter Form auf, so daß der Fehler gegenüber der exakten Lösung bei den Sensibilitätskoeffizienten höher ausfällt als bei der unabgeleiteten Ausgangsgröße. Für die Kraftgrößen zeigt sich im vorliegenden Beispiel das typische Verhalten von gemischten Elementen. Wird das Strukturverhalten durch die Elementeinteilung nicht richtig beschrieben, so kommt es zu einer Oszillation der Lösung um die exakten Werte. Wiederum setzt sich diese Eigenschaft in verstärkter Form auch für die Ableitungen nach den Optimierungsvariablen fort, so daß sich die auf die exakte Lösung bezogenen Fehler gegenüber der Ausgangsgröße deutlich erhöhen.

Hinsichtlich Formulierung, numerischer Effizienz und Elementverhalten bieten die Verschiebungselemente eine zuverlässige und gute Kompromißlösung, wenn es um die diskrete Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten für die Strukturantwort geht. Treten bei diesem Elementtyp Fehler in der Strukturanalyse auf, so ist die analytisch durchgeführte Sensibilitätsanalyse in derselben Größenordnung fehlerbehaftet. Das Elementverhalten bei Verschiebungselementen läßt sich also durchaus auf das Fehlerverhalten bei der Sensibilitätsanalyse übertragen. Gemischte Elemente sind in dieser Hinsicht für eine derartige Sensibilitätsanalyse weniger

**Beispiel 5-1:**



**Material:**  $E = 2.0 \times 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

**Querschnitte:**  $A_1 = 10^{-4} \text{ m}^2 = s_1$

$A_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

**Belastung:**  $p = 10.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

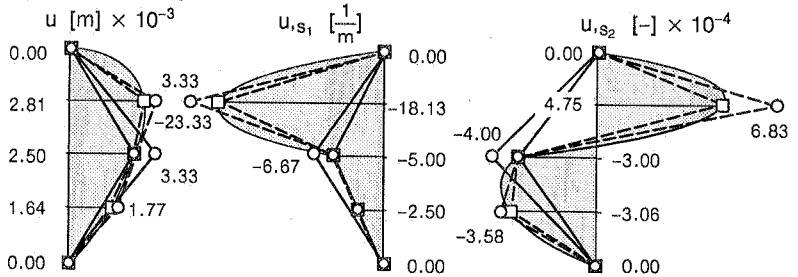
**Ansätze:**  $u_e = \Phi u_e = [1 - \xi, \xi] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$N_e = \Psi N_e = [1 - \xi, \xi] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$

□ Versch. Elemente    ○ Gemischte Elemente

—— 2 Elemente    - - - 4 Elemente

**Verschiebungen:**



**Stabkräfte:**

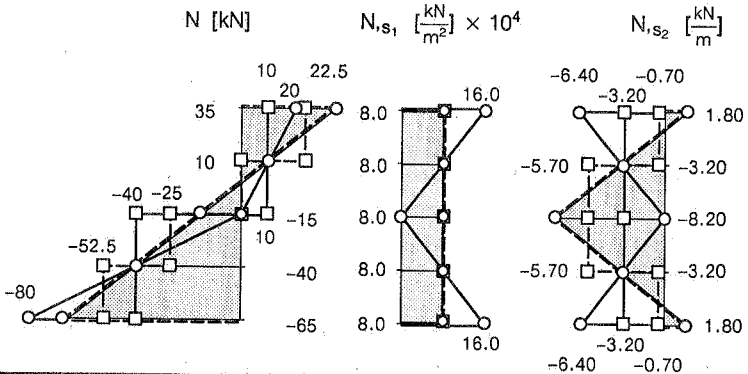


Bild 5-2: Diskrete Sensibilitätsanalyse mit verschiedenen Elementtypen

gut geeignet, weil sich der Fehler in der Strukturanalyse möglicherweise in viel stärkerer Form auf die Sensibilitätskoeffizienten überträgt. Obwohl gemischt-hy-

bride Elemente häufig gutes Elementverhalten zeigen, eignen sie sich wegen ihres hohen Formulierungsaufwands nur mit Einschränkungen für die Strukturoptimierung in Verbindung mit einer diskret durchgeführten Sensibilitätsanalyse. In diesem Fall sollte deshalb die Anwendung auf einfache Strukturprobleme (z.B. Balken, Scheiben, Platten) beschränkt bleiben.

### 5.3.2 Differenzenmethoden

Die Anwendung von Differenzenverfahren für die Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten der Optimierungsfunktionen ( $f$ ,  $h$  und  $g$ ) sind zu einem unverzichtbaren mathematischen Hilfsmittel in der Strukturoptimierung geworden. Der Grund liegt hauptsächlich darin, daß diese Verfahren mit geringstem Programmieraufwand eine Berechnung der Funktionsableitungen erlauben und für viele Optimierungsprobleme zufriedenstellende Ergebnisse liefern. Einen weiteren Vorteil bieten diese Verfahren, wenn neue und komplexe Optimierungsfunktionen versuchsweise in das Strukturoptimierungsproblem eingeführt werden und zuverlässige Ableitungen durch eine diskrete, analytische oder eine variationelle Sensibilitätsanalyse nicht vorliegen. In dieser Testphase sind die numerisch erzeugten Ableitungen oft die einzige Möglichkeit zur Berechnung der notwendigen Sensibilitätskoeffizienten. Haben sich die neu aus dem Optimierungsproblem eingeführten Funktionen bewährt, müssen die jeweiligen Ableitungen zuverlässiger formuliert werden und durch die aufwendigen diskreten oder variationellen Methoden bestimmt werden. Selbst in diesem Fall können die numerisch erzeugten Sensibilitätskoeffizienten wertvolle Dienste leisten, wenn es darum geht, die Richtigkeit und Zuverlässigkeit dieser Ableitungen zu verifizieren /Tseng 1989/. Falls sich für das Strukturproblem keine analytisch exakten Sensibilitätskoeffizienten angeben lassen, bieten letztlich die numerischen Differenzenverfahren die einzige Möglichkeit zur Fehlerdiagnose. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn vielfach verknüpfte Rechenoperationen bei der Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten anfallen. Die analytisch abgeleiteten, diskreten Grundgleichungen des hier verwendeten Schalenelements (Kapitel 6) konnten auf diese Weise sehr effektiv kontrolliert werden.

Leider wird die einfache Anwendbarkeit der numerischen Differenzenverfahren nicht im gleichen Maße von numerischer Robustheit und Stabilität begleitet. Die Optimierungsfunktionen sind in ihren Variablen in der Regel hochgradig nichtlinear. Bei ihrer numerischen Ableitung treten unter Umständen Fehler auf, welche in direktem Zusammenhang mit der Schrittweitensteuerung für die Differenzen bzw. der zur Verfügung stehenden Rechengenauigkeit zu sehen sind.

Dieses Phänomen ist in der einschlägigen Literatur /Gill 1981, Haftka 1990/ dokumentiert und soll hier lediglich an einem mathematischen Beispiel veranschaulicht werden. Der Einfachheit halber wird eine Funktion aus /Gill 1981/ verwendet, weil sich vergleichbare nichtlineare Funktionsverläufe (vgl. Bild 6.2-16) bei mechani-

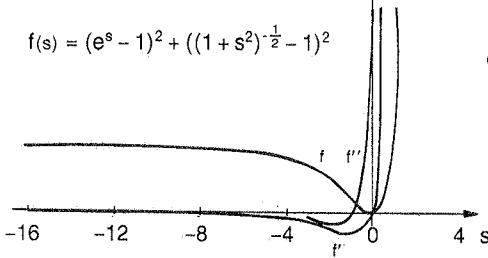
**Beispiel 5-2:**

$$f'(s) = 2(e^s - 1)e^s - 2 \frac{((1+s^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Funktionsverläufe:

$f, f', f''$

$$f(s) = (e^s - 1)^2 + ((1+s^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)^2$$



$$\bar{f}'(s) = \frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s}; \Delta s = e_s s$$

$$e_R = \frac{|f'(s) - \bar{f}'(s)|}{|f'(s)|}$$

$$e = \frac{\Delta s}{2} |f'''(s)| + \frac{2e_F}{\Delta s} = e_A + e_K$$

$$e_F \approx e_M (1 + |f(s)|)$$

"Schrittweiten-Dilemma"

Fehlerverhalten:

$e_R, \Delta s^*, e_s^*$

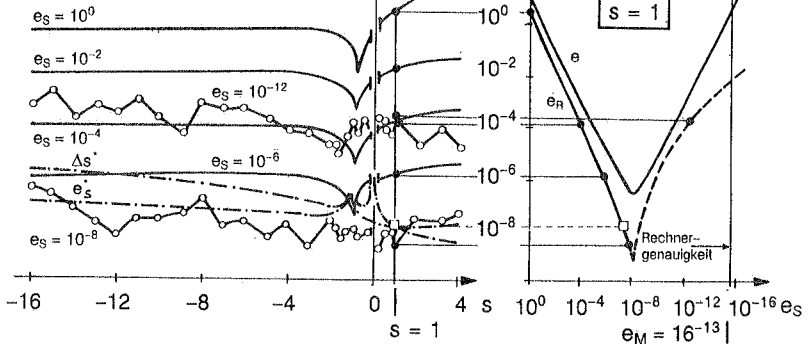


Bild 5-3: Fehlerverhalten des Vorwärtsdifferenzenverfahrens

schen Aufgaben selten in analytisch geschlossener Form wiedergeben und exakt ableiten lassen.

Im Beispiel 5-2 sind die Verläufe einer Funktion  $f$  und ihrer Ableitungen  $f'$  und  $f''$  dargestellt, wie sie etwa charakteristisch bei Formoptimierungsproblemen auftreten. Merkmale solcher transzendenter Funktionen sind häufig Bereiche mit sehr geringer aber auch außerordentlich hoher Steigung und einem engen Übergangsbereich. Die Ableitungen werden nun über Vorwärtsdifferenzen bestimmt und in ihrem relativen Fehler  $e_R$  mit den exakten Werten verglichen. Die Schrittweite wird dabei immer auf den Wert der Variablen selbst bezogen, so daß auch für sehr kleine Werte in den Variablen ein signifikanter Unterschied zum Vorwärtsschritt bleibt. Für kleiner werdende relative Schrittweiten  $e_s$  ergibt sich nun in charakteristischer Weise eine sukzessive Verbesserung der Ableitungen bis sich schließ-

lich die Rechengenauigkeit auf die Qualität des Ergebnisses auswirkt. Das äußert sich darin, daß der relative Fehler mehr oder weniger zufällig von der Schrittweite abhängt und eine Verringerung des Vorwärtsschritts die Ergebnisse weiter verschlechtert. Für den Variablenwert  $s = 1$  ist das typische Fehlerverhalten eines numerischen Differenzenverfahrens aufgezeigt, welches auch als "Schrittweiten-Dilemma" bekannt ist. Jeweils zu große und zu kleine Schrittweiten ergeben unzuverlässige Ableitungen, so daß die Bestimmung der Schrittweite als zentrales Problem gesehen werden muß. Zudem ist die erzielte Genauigkeit für eine vorgegebene relative Schrittweite  $e_s$  abhängig von den Funktionsverläufen  $f(s)$  und  $f'(s)$  und die numerisch ermittelten Ableitungen können sich in ihrem relativen Fehler  $e_r$  um Größenordnungen unterscheiden.

Die Ursachen für dieses Fehlerverhalten bei numerischen Differenzenverfahren sind zweifach. Eine entscheidende Fehlerquelle liegt in der Approximation der Ableitung durch eine abgebrochene Taylorreihenentwicklung. Geht man der Einfachheit halber von einer zweifach differenzierbaren Funktion aus, so kann diese Funktion an der Stelle  $s + \Delta s$  als Reihe entwickelt werden.

$$f(s + \Delta s) = f(s) + \Delta s f'(s) + \frac{\Delta s^2}{2} f''(s + \theta \Delta s) \quad (5-12)$$

mit  $0 \leq \theta \leq 1$

Durch Umstellung von Gleichung (5-12) erhält man die Approximation der Ableitungen durch die Vorwärtsdifferenz,

$$f'(s) = \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} - e_A(\Delta s) \quad (5-13)$$

wobei

$$e_A(\Delta s) = \frac{\Delta s}{2} f''(s + \theta \Delta s) \quad (5-14)$$

den Fehler bezeichnet, der durch einen vorzeitigen Abbruch der Taylorreihe entsteht. Es zeigt sich, daß dieser Fehler klein wird, wenn  $|\Delta s|$  gegenüber  $|f'(s)|$  und  $|f''(s + \theta \Delta s)|$  klein bleibt. Da  $\theta$  in der Regel unbekannt ist, kann durch  $e_A$  nur eine obere Grenze für den Abbruchfehler angegeben werden. Dieser Fehlereinfluß bleibt auch für höher nichtlineare Funktionen erhalten, so daß  $e_A$  ebenfalls als entscheidendes Fehlermaß verwendet werden kann.

Auf der anderen Seite werden die numerischen Differenzenverfahren in ihrem Fehlerverhalten in hohem Maße durch die Rechengenauigkeit selbst bestimmt. Ursache für diese Fehlerquelle sind Rundungsfehler in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit  $e_m$ , welche sich durch verkettete und unter Umständen ungünstige ("ill-conditioned") numerische Rechenoperationen in wesentlich höherer Größenordnung bemerkbar machen können. Dies gilt insbesondere für die numerische Ableitung von Optimierungsfunktionen, welche als Ergebnis einer finiten Elementberechnung für derartige Fehler besonders anfällig sind. Dieser

Fehlereinfluß ist sehr schwer abzuschätzen, da er sehr stark von der Maschinengenauigkeit  $e_M$  und den Funktionswerten von  $f(s)$  und  $f'(s)$  abhängt. Eine untere Grenze dieses Fehlers kann als standardisiertes Maß näherungsweise auf die Genauigkeit des Rechners bezogen werden.

$$e_F \simeq e_M (1 + |f(s)|) \quad (5 - 15)$$

Für eine genauere Ermittlung dieses Fehlers kann nach /Gill 1981/ der Differenzenoperator verwendet werden. Dafür sind jedoch für jeden Funktionswert eine Vielzahl von Vorwärtsdifferenzen zu ermitteln, so daß diese Möglichkeit selbst für die im Beispiel 5-2 verwendete Funktion mit einem hohen Rechenaufwand verbunden ist. Liegt eine Grenze für den Fehler der Funktionsauswertung fest, so kann der Konditionsfehler mit

$$e_K = \frac{2e_F}{\Delta s} \quad (5 - 16)$$

eingegrenzt werden.

Der gesamte Fehler setzt sich aus der Überlagerung des Abbruchfehlers und des Konditionsfehlers zusammen. Für  $e = e_A + e_K$  kann der Fehlereinfluß abgeschätzt werden, und es ergibt sich in Bild 5-3 die recht gute Übereinstimmung mit der tatsächlichen Fehlerbeobachtung  $e_R$ . Aus dieser Beobachtung geht auch der Wunsch hervor, die Schrittweite in geeigneter Weise vor der Differenzenbildung zu bestimmen, um so zuverlässige Ableitungswerte zu erhalten. Für die Schrittweite

$$\Delta s^* = 2 \sqrt{\frac{e_A}{|f'(s)|}} \quad (5 - 17)$$

wird der gesamte Fehler minimiert. Diese Schrittweitenbestimmung kann jedoch nicht ohne Abschätzung der zweiten Ableitungen erfolgen. Durch einen zusätzlichen Rückwärtsschritt kann diese Abschätzung erfolgen und eine zuverlässige Ableitung durchgeführt werden. Algorithmen zur automatischen Schrittweitenbestimmung /Gill 1983/ werden jedoch wegen des höheren Rechenaufwandes in der Strukturoptimierung nur bei einer besonders schwierigen numerischen Sensibilitätsanalyse eingesetzt. In Bild 5-3 zeigt sich jedoch, daß die mit den zweiten Ableitungen bestimmte optimale Schrittweite  $\Delta s^*$  und die zugehörige relative Schrittweite  $e_s^* = \Delta s^*/s$  eine insgesamt gute Kennzeichnung für das beobachtete Fehlerverhalten ergibt.

In der Übertragung auf multivariable Funktionen, wie sie in der Strukturoptimierung vorliegen, können die Differenzenverfahren sinngemäß angewandt werden. Die jeweiligen Richtungsableitungen werden gebildet, indem jede Variable für sich gestört wird und alle anderen konstant gehalten werden, so daß in der betrachteten Richtung das Differenzenverfahren für eine Funktion mit einer Variablen ein-

gesetzt werden kann. In Gleichung 5-8 (Tabelle 5-1) ist dann für einen absoluten Differenzenschritt

$$\Delta \mathbf{s}_i = e_s \mathbf{t}_i \quad (5 - 18)$$

und einen relativen Differenzenschritt

$$\Delta \mathbf{s}_i = e_S s_i \mathbf{t}_i \quad (5 - 19)$$

einzusetzen, wobei  $e_s$  die Schrittweite bezeichnet und  $\mathbf{t}_i$  einen n-dimensionalen Einheitsvariablenvektor bezeichnet, der nur in die Variablenrichtung  $i$  zeigt.

### 5.3.3 Semi-analytisches Verfahren

Unter einem Semi-analytischen Verfahren für die Sensibilitätsanalyse wird generell eine Vorgehensweise verstanden, die durch Differenzenverfahren numerisch abgeleitete Matrizen und Vektoren in den analytischen Ableitungen von Systemgleichungen und Optimierungsfunktionen verwendet (Gleichung 5-3b und 5-4). Durch diese Maßnahme kann die Sensibilitätsanalyse effizient durchgeführt werden, ohne daß die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und die Lastvektoren  $\mathbf{b}$  nach den Optimierungsfunktionen analytisch abgeleitet werden müssen. Gegenüber Gleichung (5-8) wird mit Gleichung (5-5a), also n-mal, die Erstellung und Faktorisierung der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  eingespart. Je nach Problemstellung kann Gleichung (5-5a) gegenüber dem analytisch hergeleiteten Pseudo-Lastvektor  $\bar{\mathbf{b}}$  in Gleichung (5-5b) sogar weniger aufwendig sein. Dies gilt insbesondere für Formoptimierungsprobleme, bei denen die analytische Ableitung der Systemmatrix bis zu vier mal aufwendiger sein kann als die Erstellung der Ausgangsmatrix. Die numerische Ableitung der Systemmatrix durch das Vorwärtsdifferenzenverfahren reduziert in diesem Fall den Aufwand gegenüber der analytischen Ableitung um die Hälfte. Umgekehrt gilt jedoch bei einer reinen Querschnittsoptimierung in der Regel, daß die semi-analytischen gegenüber den analytischen Verfahren immer etwa den doppelten Aufwand benötigen.

#### 5.3.3.1 Anwendung im Bereich der Querschnittsoptimierung

Die erfolgreiche und überaus beliebte Anwendung semi-analytischer Verfahren in der Sensibilitätsanalyse ist vor allem auf die Anwendungen im Bereich der Querschnittsoptimierung begründet. Für derartige Problemstellungen lassen sich die notwendigen Sensibilitätskoeffizienten gegenüber den Differenzenmethoden mit großer Zuverlässigkeit gleichzeitig effizient und einfach ermitteln. Vor allem die vergleichsweise einfache Möglichkeit der Implementierung hat gegenüber den analytischen Verfahren zu einer weiten Verbreitung dieser Methoden geführt, so daß sie heute in vielen Programmsystemen die Grundlage für die Sensibilitäts-

analyse bilden /z.B. Eschenauer 1988b, Nagendra 1989, Kumar 1990/. Die Gleichung (5-5a) läßt sich für die formale Anwendung der semi-analytischen Gradientenbildung noch weiter vereinfachen.

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \frac{\Delta \mathbf{b} - \Delta \mathbf{A} \mathbf{z}}{\Delta s_i} = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{s} + \Delta s_i) - \mathbf{b}(\mathbf{s}) - \mathbf{A}(\mathbf{s} + \Delta s_i) \mathbf{z} + \mathbf{A}(\mathbf{s}) \mathbf{z}}{\Delta s_i}$$

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{s} + \Delta s_i) - \mathbf{A}(\mathbf{s} + \Delta s_i) \mathbf{z}}{\Delta s_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{s}) \mathbf{z} - \mathbf{b}(\mathbf{s}) = 0 \quad (5-20)$$

Unter Verwendung der Systemgleichung (5-3a) kann damit die Vorwärtsdifferenzenbildung für die Systemmatrix und die Lastvektoren wesentlich einfacher vorgenommen werden. Um einen zusätzlichen Speicheraufwand für die abgeleiteten Matrizen zu vermeiden, wird der Pseudo-Lastvektor sinnvollerweise gleich auf Elementebene aufgebaut und die Rechenoperationen auch elementweise durchgeführt.

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \sum_e \bar{\mathbf{b}}_{ei} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{b}}_{ei} = \frac{\mathbf{b}_e(\mathbf{s} + \Delta s_i) - \mathbf{b}_e(\mathbf{s}) + [\mathbf{a}_e(\mathbf{s}) - \mathbf{a}_e(\mathbf{s} + \Delta s_i)] \mathbf{z}_e}{\Delta s_i} \quad (5-21)$$

und  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_e$

Für die Anwendung des Vorwärtsdifferenzenverfahrens auf die numerische Ableitung der Matrix  $\mathbf{A}$  und des Lastvektors  $\mathbf{b}$  gelten dieselben Bemerkungen wie im vorausgehenden Abschnitt 5.2.2. Die Schrittweite muß auch hier sorgfältig gewählt werden. Bei der Ermittlung von  $\bar{\mathbf{b}}$  nach Gleichung (5-20), bzw. Gleichung (5-21) mögen jedoch die Konditionsfehler  $e_k$  bei der numerischen Ableitung einen geringeren Einfluß haben, weil hier keine faktorisierte Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  die Rechenoperationen verbindet und unter Umständen numerisch sensibel macht, wie das in Gleichung (5-8) der Fall ist. Es können so also auch sehr kleine Schrittweiten verwendet werden.

In der Ableitung der jeweiligen Optimierungsfunktion unterscheidet sich die weitere Vorgehensweise bei der semi-analytischen Gradientenbildung für die direkte und die adjungierte Methode. Im Falle der direkten Methode bestehen zusätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten. Zunächst kann das formale Vorgehen nach Gl.(5-4) beibehalten und in Differenzenform angegeben werden.

$$\frac{dg}{ds_i} \approx \frac{g(\mathbf{s} + \Delta s_i, \mathbf{z}) - g(\mathbf{s}, \mathbf{z})}{\Delta s_i} + \sum_{i=1}^{neq} \frac{\partial g}{\partial z_i} \frac{dz_i}{ds_i} \quad (5-22)$$

mit  $\frac{\partial g}{\partial z_i} = \frac{g(\mathbf{s}, \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i) - g(\mathbf{s}, \mathbf{z})}{\Delta z_i}$  und  $\Delta \mathbf{z}_i = \mathbf{e}_z z_i y_i$

In Gl.(5-22) bezeichnet  $\mathbf{e}_z$  die absolute Schrittweite und der Vektor  $\mathbf{y}_i$  einen  $neq$ -dimensionalen Einheitsvektor, welcher lediglich in Richtung der Zustandsvariablen  $i$  zeigt. Eine zweite, wesentlich einfachere Methode ergibt sich jedoch mit



$$\frac{dg}{ds_i} \approx \frac{g(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}_i, \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i) - g(\mathbf{s}, \mathbf{z})}{\Delta s_i}, \quad (5 - 23)$$

wobei durch

$$\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i = \mathbf{z} + \frac{d\mathbf{z}}{ds_i} \Delta s_i \quad \text{mit} \quad \frac{d\mathbf{z}}{ds_i} \quad \text{aus Gl. (5 - 6)}$$

die Strukturantwort für den Vorwärtsschritt approximiert werden kann.

Im Falle der adjungierten Methode ist zunächst der Hilfsvariablenvektor  $\bar{\mathbf{z}}$  zu ermitteln. Dafür muß für den aktuellen Variablenvektor  $\mathbf{s}$  der Lastvektor  $(\partial g / \partial \mathbf{z})^T$  bestimmt werden, welcher sich aus den Elementen  $\partial g / \partial z_i$  aus Gleichung (5-22) zusammensetzen läßt. Die Ableitungen der Optimierungsfunktionen lassen sich dann mit

$$\frac{dg}{ds_i} \approx \frac{g(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}_i, \mathbf{z}) - g(\mathbf{s}, \mathbf{z})}{\Delta s_i} + \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (5 - 24)$$

angeben. Der Hilfsvariablenvektor  $\bar{\mathbf{z}}$  wird dafür nach Gleichung (5-7a) und der Pseudo-Lastvektor entsprechend  $\bar{\mathbf{b}}$  nach Gleichung (5-5a) ermittelt.

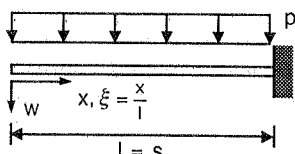
Für beide möglichen Vorgehensweisen der semi-analytischen Sensibilitätsanalyse nach der direkten und der adjungierten Methode bleibt der in Bild 5-1 festgestellte Unterschied im numerischen Aufwand bestehen. Es zeigt sich jedoch, daß der Aufwand für eine Implementierung dieser Art der Sensibilitätsanalyse für die direkte Methode geringer ausfällt, als dies im Vergleich zur adjungierten Methode der Fall ist. Für die direkte Methode ergibt sich eine jeweils klare Trennung zwischen elementsspezifischen und systemübergreifenden Rechenoperationen. Dadurch lassen sich die Programmkomponenten wesentlich besser strukturieren und insgesamt übersichtlicher programmieren.

### 5.3.3.2 Numerische Probleme bei der Formoptimierung

Durch die Vorzüge der semi-analytischen Verfahren in ihrer einfachen Realisierbarkeit und ihrer Effizienz wurde diese Art der Sensibilitätsanalyse in den vergangenen Jahren auch vielfach auf den Bereich der Formoptimierung übertragen. Die Vorgehensweise unterscheidet sich dabei in ihrem formalen Zusammenhang gegenüber der reinen Querschnittsoptimierung nicht, so daß die im vorausgehenden Abschnitt 5.3.3.1. aufgestellten Gleichungen in vollem Umfang auch für die formbeschreibenden Optimierungsvariablen verwendet werden können. Der Einsatz dieser Verfahren wird, wie bereits erwähnt, noch durch die Tatsache unterstützt, daß eine semi-analytische Gradientenermittlung für manche Problemstellungen im Bereich der Formoptimierung mit der höchst möglichen Effektivität durchgeführt werden kann. Leider haben jedoch die semi-analytischen Verfahren durch den Einsatz von Differenzenverfahren bei Formoptimierungsproblemen in

viel stärkerem Maße unter den damit verbundenen Genauigkeitsproblemen zu leiden, als dies vergleichsweise bei Problemen der Querschnittsoptimierung der Fall ist.

**Beispiel 5-3: Kragbalken**



**Schnittgrößen:**

$$Q = -q l \xi \quad ; \quad M = -\frac{q l^2}{2} \xi^2$$

**Verschiebungsgrößen:**

$$\phi = \frac{q l^3}{6EI} (1 - \xi^3)$$

$$w = \frac{q l^4}{24EI} (3 - 4\xi + \xi^4)$$

**Sensibilität der Schnittgrößen:**

$$Q_{,s} = -q \xi = \frac{Q}{l}$$

$$M_{,s} = -q l \xi^2 = 2 \frac{M}{l}$$

**Statik:**

$$Q = 1.0 \frac{dM}{dx}$$

$$Q_{,s} = \frac{1}{l} \frac{d}{dx} \left[ \frac{l}{2} M_{,s} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} M_{,s}$$

**Kinematik:**

$$\phi = -1.0 \frac{dw}{dx}$$

$$\phi_{,s} = \frac{3}{l} \frac{d}{dx} \left[ -\frac{l}{4} w_{,s} \right] = -\frac{3}{4} \frac{d}{dx} w_{,s}$$

**Werkstoff:**

$$M = EI \cdot 1.0 \frac{d\phi}{dx} = -EI \cdot 1.0 \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$M_{,s} = EI \frac{2}{l} \frac{d}{dx} \left[ \frac{l}{3} \phi_{,s} \right] = EI \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \phi_{,s} = -EI \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} w_{,s}$$

Bild 5-4: Grundgleichungen des Kragbalkens und ihre Ableitungen nach der Form

Im Gegensatz zu Querschnittsvariablen beeinflussen die formbeschreibenden Optimierungsvariablen die statischen, kinematischen und im Einzelfall auch die konstitutiven Beziehungen. Das hat zur Folge, daß sich problemabhängig auch ein unterschiedlicher Einfluß der Formvariablen auf die Grundgleichungen der finiten Elementformulierung ergibt. Bei einer Ableitung dieser Grundgleichungen nach den formbeschreibenden Optimierungsvariablen kann jedoch gegenüber den unabgeleiteten Ausgangsgleichungen eine gewisse "Störung" in dem Sinne eintreten, daß sich diese Ableitungen in ihrer Beziehung untereinander durch jeweils konstante Faktoren unterscheiden. Im Beispiel 5-3 ist dieser Effekt für einen Kragbalken angegeben. Es zeigt sich, wie sich die statische, kinematische und konsti-

tutive Beziehung in den Ausgangsgleichungen und den abgeleiteten Grundgleichungen unterscheiden. Für eine kontinuierliche Beschreibung der abgeleiteten Schnitt- und Verformungsgrößen bleibt dieser Sachverhalt ohne Belang. Bei einer analytisch, diskret durchgeführten Sensibilitätsanalyse können diese Unterschiede jedoch nur ausgeglichen werden, indem durch entsprechend aufgebraachte Pseudo-Lasten die statischen und kinematischen Feldgleichungen für die abgeleiteten Größen erzwungen werden. Nur so können die richtigen Ableitungen für die Schnitt- und Verformungsgrößen wenigstens an den Elementknoten richtig erzeugt werden. Im mechanischen Sinne bedeutet dieser erzwungene Zustand eine unter Umständen sehr ungünstige und hohe "innere" Beanspruchung der Struktur. Im Prinzip treten derartige Verhältnisse immer dann auf, wenn zur mechanischen Strukturbeschreibung Ableitungen von verschiedener Ordnung nötig sind (z.B. Kirchhoff-Theorie bei Balken, Platten oder Schalen).

Für eine analytisch, diskrete durchgeführte Sensibilitätsanalyse kommt diesem ungünstigen Beanspruchungszustand keine besondere Bedeutung zu, weil sich im analytischen Sinne die "inneren" Beanspruchungen und damit auch die abgeleiteten Knotengrößen trotzdem exakt wiedergeben lassen. Grundsätzlich anders verhält es sich, wenn dieser unter Umständen sehr ungünstig konditionierte "innere" Beanspruchungszustand mit Hilfe numerischer Differenzenverfahren abgeleitet wird. Bei der numerischen Ableitung der Systemmatrix **A** in Gleichung (5-5a) machen sich bereits für kleine Schrittweiten unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse sehr ungünstig bemerkbar. Es kann zu einer gleichzeitigen Überlagerung von Abbruch- und Konditionsfehlern kommen, welche die gewünschten Ableitungen der Schnitt- und Verformungsgrößen um Größenordnungen verfälschen. Ursache und Wirkung dieses Phänomens werden in /Barthelemy 1988a,b , Pedersen 1989/ untersucht. Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, daß mehrere Gründe gleichzeitig das Fehlerverhalten der semi-analytischen Verfahren verursachen und damit äußerste Vorsicht bei ihrer Anwendung für die Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten geboten ist. In einer groben Unterscheidung liegen die Fehlerquellen

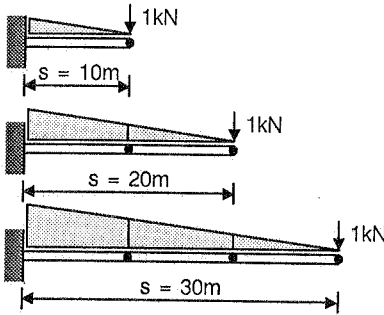
- in der Wahl der Schrittweite,
- im mechanischen inneren Beanspruchungszustand und
- im Strukturproblem und der Problemgröße

begründet. Für einfache Fälle (z.B. Kragbalken /Pedersen 1989/) kann gezeigt werden, daß die Fehler der abgeleiteten Verschiebungsgrößen zwar linear von der Schrittweite, aber quadratisch von der verwendeten Elementzahl abhängt. Damit steht das Fehlerverhalten einer derartigen Sensibilitätsanalyse in völligem Gegensatz zur grundlegenden Erfahrung aus der Strukturanalyse, daß ein feineres Elementnetz auch bessere Ergebnisse liefert. Gleichzeitig wird in /Barthelemy 1988a,b/ dokumentiert, daß ein Fehler auch ohne eine innere Zwangsbeanspruchung bei der Ableitung der Systemmatrix in annähernd quadratischer Form in

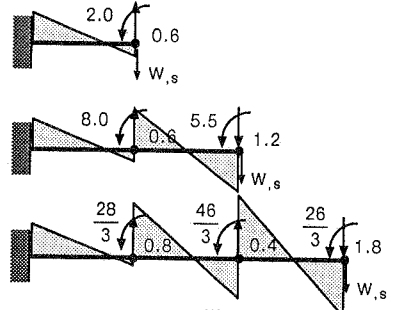
### Beispiel 5-4: Kragbalken

$$EI = 10.0 \text{ kNm}^2 ; \Delta s = 10^{-2} \text{ s}$$

Strukturproblem:



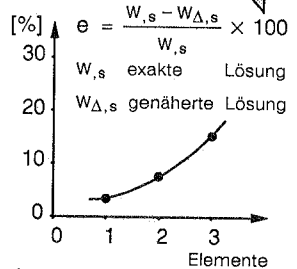
Ersatzproblem: (Pseudolasten)



1 Element:

$$u_{\Delta, s} = -K^{-1} \frac{\Delta K}{\Delta s} u$$

$$u_{\Delta, s} = \begin{bmatrix} 0.585 & -1.961 \\ 2.45 & (1.97) \\ 0.058 & -0.195 \\ 3.00 & (2.45) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33.3 \\ 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.707 \\ (2.93) \\ 0.965 \\ (3.55) \end{bmatrix} \leftarrow e$$



2 Elemente:

$$u_{\Delta, s} = \begin{bmatrix} 0.001 & -2.451 & 0.291 & -1.470 \\ (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.029 & -0.392 & 0.058 & -0.294 \\ (2.94) & (2.09) & (2.94) & (1.97) \\ -0.582 & -7.842 & 1.166 & -5.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.82) & (1.97) \\ -0.058 & -0.588 & 0.087 & -0.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.09) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83.3 \\ 15.0 \\ 266.7 \\ 20.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.6 \\ (3.33) \\ 1.3 \\ (10.0) \\ 37.0 \\ (7.55) \\ 1.8 \\ (10.7) \end{bmatrix} \leftarrow e$$

3 Elemente:

$$u_{\Delta, s} = \begin{bmatrix} 0.001 & -1.634 & 0.000 & -1.961 & 0.194 & -0.980 \\ (-) & (1.97) & (-) & (-) & (2.94) & (1.97) \\ -0.019 & -0.261 & 0.000 & -0.392 & 0.039 & -0.196 \\ (2.94) & (2.09) & (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.388 & -5.228 & 0.001 & -7.516 & 0.776 & -3.921 \\ (2.94) & (1.97) & (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.039 & -0.392 & -0.019 & -0.653 & 0.078 & -0.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.02) & (2.94) & (1.97) \\ -0.776 & -9.149 & -0.388 & -15.03 & 1.748 & -8.496 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (1.97) & (2.89) & (1.97) \\ -0.039 & -0.392 & -0.039 & -0.784 & 0.097 & -0.457 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.04) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 133.3 \\ 25.0 \\ 466.7 \\ 40.0 \\ 900.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.450 \\ (14.1) \\ 1.320 \\ (20.9) \\ 39.73 \\ (14.9) \\ 2.07 \\ (22.3) \\ 76.230 \\ (15.3) \\ 2.32 \\ (22.8) \end{bmatrix} \leftarrow e$$

Bild 5-5: Fehlerverhalten bei der semi-analytisch diskreten Sensibilitätsanalyse, Klammerwerte geben den Fehler zur analytischen Lösung in Prozent an

tive Beziehung in den Ausgangsgleichungen und den abgeleiteten Grundgleichungen unterscheiden. Für eine kontinuierliche Beschreibung der abgeleiteten Schnitt- und Verformungsgrößen bleibt dieser Sachverhalt ohne Belang. Bei einer analytisch, diskret durchgeführten Sensibilitätsanalyse können diese Unterschiede jedoch nur ausgeglichen werden, indem durch entsprechend aufgebrauchte Pseudo-Lasten die statischen und kinematischen Feldgleichungen für die abgeleiteten Größen erzwungen werden. Nur so können die richtigen Ableitungen für die Schnitt- und Verformungsgrößen wenigstens an den Elementknoten richtig erzeugt werden. Im mechanischen Sinne bedeutet dieser erzwungene Zustand eine unter Umständen sehr ungünstige und hohe "innere" Beanspruchung der Struktur. Im Prinzip treten derartige Verhältnisse immer dann auf, wenn zur mechanischen Strukturbeschreibung Ableitungen von verschiedener Ordnung nötig sind (z.B. Kirchhoff-Theorie bei Balken, Platten oder Schalen).

Für eine analytisch, diskrete durchgeführte Sensibilitätsanalyse kommt diesem ungünstigen Beanspruchungszustand keine besondere Bedeutung zu, weil sich im analytischen Sinne die "inneren" Beanspruchungen und damit auch die abgeleiteten Knotengrößen trotzdem exakt wiedergeben lassen. Grundsätzlich anders verhält es sich, wenn dieser unter Umständen sehr ungünstig konditionierte "innere" Beanspruchungszustand mit Hilfe numerischer Differenzenverfahren abgeleitet wird. Bei der numerischen Ableitung der Systemmatrix  $A$  in Gleichung (5-5a) machen sich bereits für kleine Schrittweiten unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse sehr ungünstig bemerkbar. Es kann zu einer gleichzeitigen Überlagerung von Abbruch- und Konditionsfehlern kommen, welche die gewünschten Ableitungen der Schnitt- und Verformungsgrößen um Größenordnungen verfälschen. Ursache und Wirkung dieses Phänomens werden in /Barthelemy 1988a,b , Pedersen 1989/ untersucht. Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, daß mehrere Gründe gleichzeitig das Fehlerverhalten der semi-analytischen Verfahren verursachen und damit äußerste Vorsicht bei ihrer Anwendung für die Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten geboten ist. In einer groben Unterscheidung liegen die Fehlerquellen

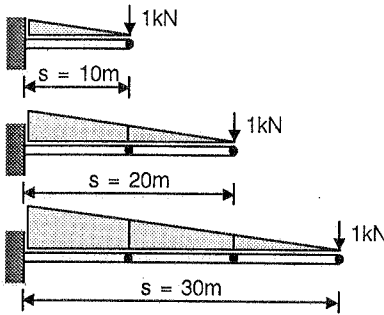
- in der Wahl der Schrittweite,
- im mechanischen inneren Beanspruchungszustand und
- im Strukturproblem und der Problemgröße

begründet. Für einfache Fälle (z.B. Kragbalken /Pedersen 1989/) kann gezeigt werden, daß die Fehler der abgeleiteten Verschiebungsgrößen zwar linear von der Schrittweite, aber quadratisch von der verwendeten Elementzahl abhängt. Damit steht das Fehlerverhalten einer derartigen Sensibilitätsanalyse in völligem Gegensatz zur grundlegenden Erfahrung aus der Strukturanalyse, daß ein feineres Elementnetz auch bessere Ergebnisse liefert. Gleichzeitig wird in /Barthelemy 1988a,b/ dokumentiert, daß ein Fehler auch ohne eine innere Zwangsbeanspruchung bei der Ableitung der Systemmatrix in annähernd quadratischer Form in

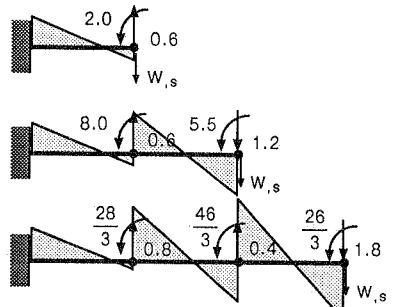
### Beispiel 5-4: Kragbalken

$$EI = 10.0 \text{ kNm}^2 ; \Delta s = 10^{-2} \text{ s}$$

Strukturproblem:



Ersatzproblem: (Pseudolasten)



1 Element:

$$u_{\Delta,s} = -K^{-1} \frac{\Delta K}{\Delta s} u$$

$$u_{\Delta,s} = \begin{bmatrix} 0.585 & -1.961 \\ (2.45) & (1.97) \\ 0.058 & -0.195 \\ (3.00) & (2.45) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33.3 \\ 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.707 \\ (2.93) \\ 0.965 \\ (3.55) \end{bmatrix} \leftarrow e$$

2 Elemente:

$$u_{\Delta,s} = \begin{bmatrix} 0.001 & -2.451 & 0.291 & -1.470 \\ (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.029 & -0.392 & 0.058 & -0.294 \\ (2.94) & (2.09) & (2.94) & (1.97) \\ -0.582 & -7.842 & 1.166 & -5.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.82) & (1.97) \\ -0.058 & -0.588 & 0.087 & -0.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.09) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83.3 \\ 15.0 \\ 266.7 \\ 20.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.6 \\ (3.33) \\ 1.3 \\ (10.0) \\ 37.0 \\ (7.55) \\ 1.8 \\ (10.7) \end{bmatrix} \leftarrow e$$

3 Elemente:

$$u_{\Delta,s} = \begin{bmatrix} 0.001 & -1.634 & 0.000 & -1.961 & 0.194 & -0.980 \\ (-) & (1.97) & (-) & (-) & (2.94) & (1.97) \\ -0.019 & -0.261 & 0.000 & -0.392 & 0.039 & -0.196 \\ (2.94) & (2.09) & (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.388 & -5.228 & 0.001 & -7.516 & 0.776 & -3.921 \\ (2.94) & (1.97) & (-) & (1.97) & (2.94) & (1.97) \\ -0.039 & -0.392 & -0.019 & -0.653 & 0.078 & -0.392 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.02) & (2.94) & (1.97) \\ -0.776 & -9.149 & -0.388 & -15.03 & 1.748 & -8.496 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (1.97) & (2.89) & (1.97) \\ -0.039 & -0.392 & -0.039 & -0.784 & 0.097 & -0.457 \\ (2.94) & (1.97) & (2.94) & (1.97) & (2.94) & (2.04) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 133.3 \\ 25.0 \\ 466.7 \\ 40.0 \\ 900.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.450 \\ (14.1) \\ 1.320 \\ (20.9) \\ 39.73 \\ (14.9) \\ 2.07 \\ (22.3) \\ 76.230 \\ (15.3) \\ 2.32 \\ (22.8) \end{bmatrix} \leftarrow e$$

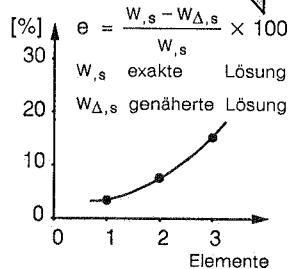


Bild 5-5: Fehlerverhalten bei der semi-analytisch diskreten Sensibilitätsanalyse, Klammerwerte geben den Fehler zur analytischen Lösung in Prozent an

Abhängigkeit der Problemgröße auftreten kann. Insgesamt betrachtet, ist es im konkreten Fall schwierig, die genaue Fehlerursache anzugeben oder die Auswirkungen im voraus zu prognostizieren.

Anschaulich läßt sich das Fehlerverhalten der semi-analytischen Verfahren am Beispiel 5-4 für einen einfachen Kragbalken zeigen. Aus Beispiel 5-3 ist ersichtlich, daß sich für das hier betrachtete Biegeproblem eine Störung in der kinematischen Beschreibung für die abgeleiteten Grundgleichungen einstellen muß. Dieser Sachverhalt wird im Beispiel 5-4 durch die extreme innere Beanspruchung des Ersatzproblems wiedergegeben, welche durch die Pseudo-Lasten erzeugt wird und das abgeleitete Verschiebungsfeld  $u_s$  hervorruft. Als Pseudo-Lasten sind in Bild 5-5 die exakten Werte angegeben. Durch die elementweise Verlängerung des Kragbalkens kommt jedoch zusätzlich die Problemgröße als zweite Fehlerquelle in diesem Beispiel hinzu. Dieser Fehler tritt dann in den Vordergrund, wenn jede Elementsteifigkeitsmatrix mit demselben Ableitungsfehler behaftet ist. Der Zusammenbau dieser Matrizen zur globalen, abgeleiteten Steifigkeitsmatrix kann, um diesen Fehlereinfluß zu zeigen, mit der inversen Steifigkeitsmatrix multipliziert werden. Damit ergibt sich eine unsymmetrische "Sensibilitätsmatrix"  $\bar{K}_i = -K^{-1}\Delta K/\Delta s_i$ , welche mit dem Verschiebungsvektor  $u$  multipliziert, direkt zu den abgeleiteten Verschiebungen führt. Für das Beispiel 5-4 wird deutlich, daß jedes Element in etwa mit demselben relativen Fehler gegenüber der exakten "Sensibilitätsmatrix" behaftet ist und daß sich dieser Fehler für die unterschiedlichen Steifigkeitsterme schachbrettartig über die Matrix verteilt. Der relative Fehler der einzelnen Matrixelemente von  $\bar{K}$  gegenüber der analytisch exakten Matrix ist in Bild 5-5 in Prozent (%) angegeben. Damit wird offensichtlich, wie sich die Ableitungsfehler in direkter Abhängigkeit von der Problemgröße (Anzahl der Elemente) auf den abgeleiteten Verschiebungsvektor übertragen. Je nach Problemstellung kann sich dieser Einfluß auf das Fehlerverhalten der semi-analytischen Sensibilitätsanalyse dramatisch auswirken /Barthelemy 1988/.

Abschließend soll jedoch erwähnt werden, daß sich für viele konkrete Problemstellungen keine derart großen Abweichungen der Sensibilitätskoeffizienten von der richtigen Lösung ergeben. Die Untersuchungen in den genannten Literaturstellen und die vorangehenden Beispiele stellen extreme Problemfälle dar. Bei mehreren Formvariablen ist unter Umständen nur ein Bruchteil der Systemmatrizen von der numerischen Ableitung betroffen, und die Ableitungsfehler übertragen sich auch weniger stark auf die Ableitungen der Verschiebungen. Ebenso kann durch eine kleinere Schrittweite der Fehler um Größenordnungen verringert werden, so daß das Fehlerverhalten zwar nicht beseitigt wird, aber doch insgesamt in vertretbaren Grenzen bleibt. Im Einzelfall sollte jedoch die aus einer semi-analytischen Sensibilitätsanalyse gewonnene Gradienteninformation immer überprüft werden /Tseng 1989/.

### 5.3.4 Analytische Verfahren

Die bisher beschriebenen numerischen und semi-analytischen Verfahren der diskreten Sensibilitätsanalyse haben den Vorteil einer einfachen und teilweise sogar sehr effizienten Anwendung. Zuverlässige Sensibilitätskoeffizienten, wie sie für eine praxisnahe Strukturoptimierung verlangt werden, können sie aber letztlich nicht liefern. Gerade in dieser Hinsicht wird der Blick auf die analytisch durchgeführte diskrete Sensibilitätsanalyse gelenkt. Abgesehen von einer variationellen Formulierung kann hier mit analytisch hergeleiteten Sensibilitätskoeffizienten die gewünschte Zuverlässigkeit erreicht werden, um die Sensibilitätsanalyse als potentiellen Risikofaktor im numerischen Optimierungsprozeß auszuschließen. Der Aufwand für die Herleitung von analytischen Sensibilitätskoeffizienten aus den diskretisierten Elementgleichungen ist daher aus praktischer Sicht immer gerechtfertigt und bedeutet aus theoretischer Sicht selten einen höheren Aufwand als die Elementformulierung selbst. Liegt die Einsicht in die Formulierung der jeweiligen Elemente vor und ist auch der Zugang zum entsprechenden Quellprogramm möglich, dann läßt sich diese Art der Sensibilitätsanalyse konsequent und mit zufriedenstellendem Ergebnis durchführen. Der Mehraufwand in der Herleitung und die höheren Anstrengungen in der Programmierung werden auch für kompliziertere Elemente (z.B. Schalen, Kapitel 6) in jedem Fall durch eine gute und zuverlässige Gradienteninformation belohnt. Auf der Systemebene unterscheiden sich die analytische und die semi-analytische Sensibilitätsanalyse nur wenig. Liegen die analytischen Ableitungen für die Elementsteifigkeitsmatrizen und die Elementlastvektoren vor, so erfolgt das weitere Vorgehen nach Tabelle 5-1 mit den Gleichungen (5-4), (5-5b) und (5-7b). Wie bei der semi-analytischen Vorgehensweise wird der Pseudo-Lastvektor  $\bar{\mathbf{b}}$  vorzugsweise auf Elementebene erstellt, um die Speicherung der abgeleiteten Systemmatrizen zu umgehen und den Speicherplatzbedarf im Rechner dadurch klein zu halten.

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \sum_e \bar{\mathbf{b}}_{ei} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{b}}_{ei} = \frac{d\mathbf{b}_e}{ds_i} - \frac{d\mathbf{a}_e}{ds_i} \mathbf{z}_e \quad (5-25)$$

und  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_e$

In Gleichung (5-25) werden die Zustandsvariablen des Systems denen im Element zugeordnet ("Zuordnungsmatrix") und durch die Matrizenoperation auf Elementebene der Element-Pseudo-Lastvektor  $\bar{\mathbf{b}}_{ei}$  erzeugt. Dieser Elementlastvektor läßt sich wiederum durch eine Umkehrung der Zuordnung auf den Pseudo-Lastvektor  $\bar{\mathbf{b}}_i$  des Systems aufaddieren. Weiterführend muß nach der Ermittlung der Verschiebungsableitungen  $dz/ds_i$  bei der direkten Methode bzw. der Hilfsvariablen  $\bar{\mathbf{z}}$  bei der adjungierten Methode das totale Differential der Optimierungsfunktion nach der Optimierungsvariablen  $s_i$  gebildet werden. Dafür sind dann nach Gl. (5-4) oder (5-7b) noch die entsprechenden partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach den Optimierungsvariablen und/oder den Zustandsvariablen herzuleiten.



Wenn die Optimierungsfunktionen implizit auch von den Zustandsvariablen abhängen, wie es beispielsweise bei Spannungsnebenbedingungen von Verschiebungselementen (Kapitel 6) der Fall ist, müssen die betroffenen Elementgleichungen ebenfalls analytisch exakt abgeleitet werden. Wie im Falle der semi-analytischen Ableitung der Optimierungsfunktionen unterscheiden sich die direkte und die adjungierte Methode in ihrer numerischen Effizienz nach der in Bild 5-1 durchgeführten Gegenüberstellung. Für eine komplizierte Elementformulierung tritt auch bei der analytischen Gradientenbildung insbesondere bei Formoptimierungsproblemen der Aspekt der numerischen Effizienz in den Hintergrund, weil ihm gegenüber den übrigen Rechenoperationen kein dominantes Gewicht zukommt. Auch hier spielen dann eher programmtechnische Gesichtspunkte für die Realisierung der Sensibilitätsanalyse eine bedeutendere Rolle.

### 5.3.5 Programmtechnische Aspekte

Aus der vorausgehenden Beschreibung der verschiedenen Verfahren zur diskreten Sensibilitätsanalyse geht hervor, wie sich die einzelnen Verfahren in ihrer numerischen Effizienz und ihrer Zuverlässigkeit einerseits und ihrem Formulierungsaufwand und in der Programmtechnik andererseits unterscheiden. Da die unterschiedlichen Eigenschaften dieser Verfahren bei einer praktischen Verwirklichung unvereinbar bleiben, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf alle drei zur Verfügung stehenden Verfahren zurückgegriffen. Damit kann bedarfsweise jeweils aus der Sicht einer einfachen Programmentwicklung oder einer effizienten und zuverlässigen Programmanwendung die vorteilhafteste Art der Sensibilitätsanalyse ausgewählt werden. Aus höherer Sicht sollten die vorausgehend beschriebenen Möglichkeiten der Sensibilitätsanalyse deshalb auch eher in ihrer gegenseitigen Ergänzung als in ihrer Konkurrenz gesehen werden.

Bei der Unterscheidung der direkten und der adjungierten Methode für die semi-analytisch oder vollständig analytisch durchgeführte diskrete Sensibilitätsanalyse können zusätzlich programmtechnische Aspekte wichtig werden. Die Gegenüberstellung der beiden Möglichkeiten in Bild 5-1 zeigt, daß die direkte Methode lediglich in zwei Rechenschritten elementabhängige Rechenoperationen enthält. Einer diskreten Formulierung der Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen kommt dieser Sachverhalt besonders entgegen, weil sich so die programmtechnische Trennung der Programmteile zur Erstellung der Elementmatrizen und Lastvektoren und zur eventuellen Rückrechnung zu den Spannungen auch für die Sensibilitätsanalyse aufrecht erhalten läßt. Damit können die Integrationsschleifen für die Elementmatrizen und Lastvektoren sehr effizient abgearbeitet werden. Im Falle der adjungierten Methode muß in drei Rechenschritten eine elementbezogene Rechenoperation durchgeführt werden, was einen zusätzlichen programmtechnischen Aufwand bedeutet. Dies läßt sich nur dann vermeiden, wenn die Ableitung der Elementmatrizen und Lastvektoren nach der Optimierungsvariablen  $s_i$  und die

Ableitung der Optimierungsfunktion nach allen Zustandsvariablen gleichzeitig durchgeführt wird. Im Sinne einer effizienten Elementformulierung ist dieses Vorgehen jedoch sehr ungünstig und läßt sich kaum in gemeinsam durchlaufenen Programmschleifen integrieren.

## 5.4 Variationelle Methoden der Sensibilitätsanalyse

Die Formulierung von variationellen Methoden für die Sensibilitätsanalyse hat mittlerweile eine weite Verbreitung gefunden. Sie werden gleichermaßen für die Problemlösung im Bereich der Form- und Querschnittsoptimierung eingesetzt. Der Schwerpunkt bei der Entwicklung dieser Methoden liegt allerdings im Bereich der Formoptimierung, weil für diesen Fall die effizienten diskreten Methoden entweder unzuverlässige Sensibilitätskoeffizienten liefern oder ihre Realisierung ohne Eingriffe in die Programmquellen nicht möglich ist (vgl. Abs. 5.3.). Das Ziel der variationellen Methoden für die Sensibilitätsanalyse ist dementsprechend die sowohl effiziente und zuverlässige, als auch unabhängige und programmexterne Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten. Im Vergleich zu diskreten Verfahren ist mit dieser Vorgehensweise jedoch immer ein relativ hoher theoretischer Formulierungsaufwand verbunden. In dieser Beziehung lassen sich diskrete Sensibilitätskoeffizienten analytisch häufig einfacher herleiten. Darüber hinaus müssen für eine programmtechnische Verwirklichung der variationellen Methoden umfangreiche und z.T. rechnerabhängige Programmarbeiten vorgenommen werden.

An dieser Stelle werden die Methoden zur variationellen Sensibilitätsanalyse lediglich kurz und in übersichtlicher Form beschrieben. Hier geht es vornehmlich darum, die Parallelen zu den entsprechenden diskreten Verfahren aufzuzeigen, um den qualitativen Vergleich mit diesen Verfahren zu ermöglichen. Auf die sehr umfangreiche und aufwendige Herleitung der Grundformeln für die variationellen Verfahren wird im folgenden verzichtet, weil eine programmtechnische Verwirklichung dieser Art der Sensibilitätsanalyse im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgt und daher die Detailfragen dieser Verfahren nur wenig interessieren. Die Gegenüberstellung der diskreten und variationellen Vorgehensweisen wird deshalb im wesentlichen nach ihren praktisch relevanten Unterschieden vorgenommen, wobei die mathematische und mechanische Theorie der Verfahren im Hintergrund bleibt. Die mathematischen Grundlagen für die variationelle Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten für variable Querschnitte und variable Form wurde in /Haug 1981/ vor allem von Cea, Haug, Rousselet und Zolesio in mehreren Beiträgen beschrieben. Eine übersichtliche Zusammenfassung dieser Methoden in Anwendung auf Formoptimierungsprobleme ist in /Haslinger 1988/ zu finden. Aufbauend auf diesen Grundlagen konnten viele Anwendungen der variationellen Sensibilitätsanalyse für verschiedene physikalische, aber vor allem für strukturmechanische Problemstellungen erfolgen. Eine erste Anwendung im Bereich der Querschnittsoptimierung ist unter anderem in /Dems 1983/ zu finden. Dort werden die adjungierte Methode und eine Bereichsintegration verwendet (Bild 5-6), um die gewünschten

Systemgleichung:

$$[\sigma, \epsilon] - \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \rightarrow \text{Querschnitte: } [\sigma, \epsilon]_{,s} - \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle_{,s} = 0 \\ \delta s_1 \rightarrow \text{Form: } [\sigma, \epsilon]_s - \langle \bar{q}, \bar{u} \rangle_s = 0 \end{array} \right.$$

Optimierungsfunktionen:

$$F(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \sigma), H(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \text{ oder } G(\mathbf{s}, \sigma) \quad \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \rightarrow \text{Querschnitte: } \delta F = F_{,s} \delta s_1 \\ \delta s_1 \rightarrow \text{Form: } \delta F = F_s \delta s_1 \end{array} \right.$$

mit  $F = \int_V f(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \sigma) dV$       Materialableitung:  $F_s = \frac{DF}{Ds_1}$       partielle Ableitung:  $F_{,s} = \frac{dF}{ds_1}$   
(vgl. Gl.5-39)

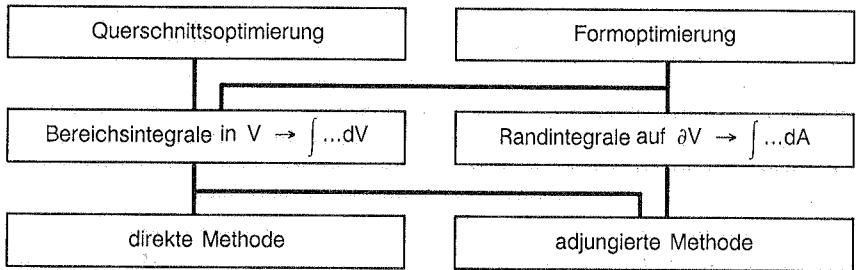


Bild 5-6: Methoden der variationellen Sensibilitätsanalyse

Sensibilitätskoeffizienten zu ermitteln. Im Gegensatz zur Sensibilitätsanalyse bei einer Variation der Querschnittswerte ist die Bestimmung von Sensibilitätskoeffizienten bei variabler Form weitaus schwieriger, weil sich mit der Form der Struktur auch der Integrationsbereich ändert. In diesem Fall kommt die Methode der Materialableitung /Zolesio 1981/ zur Anwendung, wie sie ebenfalls bei nichtlinearen kontinuumsmechanischen Problemen /Malvern 1969/ verwendet wird. Damit können z.B. in /Dems 1984/ unter Verwendung der adjungierten Methode und einer Bereichsintegration (Bild 5-6) die Sensibilitätskoeffizienten für eine variable Form angegeben werden. Durch diese Bereichsintegration wird die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten bei variabler Form der Struktur unter Umständen sehr aufwendig. Eine Reduktion des numerischen Aufwands ist durch die Einführung von Randintegralen möglich /Choi 1983/. Die so gewonnenen Sensibilitätskoeffizienten sind jedoch in hohem Maße von der Qualität der Strukturantwort am variierten Strukturrand abhängig, so daß die Anwendung der Methode der Randintegrale zumindest bei der Verwendung von finiten Elementen gewissen Einschränkungen unterliegt. Die Herleitung der bisher genannten Vorgehensweisen ist ausführlich in /Haug 1986/ dargestellt. Entsprechend zur Vorgehensweise bei der diskreten Sensibilitätsanalyse kann auch die direkte Methode und eine Bereichsintegration (Bild 5-6) zur Ermittlung der Parameterempfindlichkeit in der variationellen Formulierung eingesetzt werden /Braibant 1986/. In /Haftka 1990/ sind diese Methoden sowohl für Querschnitts- als auch Formoptimierungsprobleme in ihrer Herleitung beschrieben.

Im Folgenden werden die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten für variable Querschnitte und variable Form getrennt behandelt, weil sie sich sowohl in ihrer Herleitung als auch in ihrem formalen Zusammenhang prinzipiell unterscheiden. Genügen im ersten Fall die Regeln der Variations- und Differentialrechnung, so muß im Fall von Formvariablen noch das Konzept der Materialableitungen in die Formulierung mit einbezogen werden. Darüber hinaus sollen in den folgenden Ausführungen die variationellen Verfahren auf die Anwendung der finiten Elementmethode mit Verschiebungselementen beschränkt bleiben.

#### 5.4.1 Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Querschnittsvariablen

Ausgangspunkt für die variationelle Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten sind die Grundgleichungen (4-7 bis 4-11) der finiten Elementmethode aus Kapitel 4, sowie die dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen entsprechende Systemgleichung (4-16).

##### 5.4.1.1 Direkte Methode:

Für die direkte Methode kann für eine Variation der Systemparameter die Änderung der Grundgleichungen und der Systemgleichungen in folgender Weise angegeben werden /Haftka 1990/.

Kinematik:  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{,s} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{,s}$  (5 - 26)

Werkstoff:  $\sigma = \mathbf{C} (\varepsilon - \varepsilon^f) \quad \rightarrow \quad \sigma_{,s} = \mathbf{C} \varepsilon_{,s} + \mathbf{C}_{,s} (\varepsilon - \varepsilon^f)$

Gleichgewicht:  $[\sigma, \delta\varepsilon] = \langle \bar{q}, \delta\bar{u} \rangle \quad \rightarrow \quad [\sigma_{,s}, \delta\varepsilon] = \langle \bar{q}_{,s}, \delta\bar{u} \rangle$

In Ergänzung zu Kapitel 4 wird hier ein Ausgangsdehnungszustand ("initial strain") in die Betrachtung hinzugenommen, welcher jedoch von den Optimierungsvariablen unabhängig ist. Es wird wie bei der diskreten Sensibilitätsanalyse von der Differenzierbarkeit dieser Grundgleichungen und des inversen Zustandsoperators ausgegangen /Haug 1986/. Der virtuelle Verschiebungszustand ist von den Optimierungsvariablen unabhängig und muß lediglich die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Vergleicht man die abgeleiteten und unabgeleiteten Gleichungen, so wird deutlich, daß sich die abgeleiteten Größen aus der Lösung des Strukturproblems unter einer modifizierten Belastung mit

$$[\sigma_{,s}, \delta\varepsilon] = \langle (\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p), \delta\bar{u} \rangle \quad (5 - 29)$$

angeben lassen. Diese Belastung des Ausgangssystems entspricht einerseits einem Pseudo-Dehnungszustand ("pseudo-strain")  $\varepsilon^p$  und ergibt sich andererseits aus der direkten Ableitung der Volumenskräfte nach den Optimierungsvariablen.

$$\langle (\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p), \delta \bar{u} \rangle = \int_V \hat{p}_i^p \delta u_i dV + \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i^p \delta u_i dA + \int_V \hat{p}_{i,s} \delta u_i dV \quad (5 - 30)$$

mit  $\hat{p}_i^p = (C\varepsilon^p)_{ij}$  und  $\hat{t}_i^p = (C\varepsilon^p)_{ij}n_j$

Die Pseudo-Dehnungen erhält man durch Umstellen von Gl. (5-27), wobei  $\varepsilon_s \rightarrow \varepsilon^p$  zugeordnet wird.

$$\varepsilon^p = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,s} (\varepsilon - \varepsilon^f) \quad (5 - 31)$$

Nachdem die Pseudo-Belastung bestimmt wurde, können die Ableitungen sämtlicher Schnitt- und Verformungsgrößen durch eine wiederholte Strukturanalyse ermittelt werden. In Beispiel 5-4 ist die Vorgehensweise für die Problemstellung aus Beispiel 5-1 aufgezeigt. Der Einfachheit halber werden dabei nur zwei Verschiebungselemente verwendet. Es zeigt sich, daß die direkte variationelle und diskrete Methode jeweils identische Ergebnisse liefert. Für die diskrete und die variationelle Vorgehensweise ergeben sich sämtliche Ableitungen nach einer Optimierungsvariablen für eine wiederholte Strukturanalyse (Rückwärtseinsetzen!).

#### 5.4.1.2 Adjungierte Methode:

Die adjungierte Methode setzt zunächst voraus, daß die jeweiligen Optimierungsfunktionen durch Funktionale ersetzt sind. Zwei charakteristische Optimierungsfunktionale zur Kontrolle von Verschiebungen und Spannungen sollen im folgenden betrachtet werden.

$$H(s, u) = \int_V h(s, u) dV \quad (5 - 32a)$$

$$G(s, \sigma) = \int_V g(s, \sigma) dV \quad (5 - 32b)$$

Die Variation dieser Funktionale nach den Systemparametern kann in folgender Form angegeben werden:

$$H(s, u)_{,s} = \int_V h(s, u)_{,s} dV + h_{,u} \cdot u_{,s} \quad (5 - 33a)$$

$$G(s, \sigma)_{,s} = \int_V g(s, \sigma)_{,s} dV + g_{,\sigma} \cdot \sigma_{,s} \quad (5 - 33b)$$

In den Gleichungen (5-33) bezeichnet  $h_{,s}$  quasi eine Belastungsfunktion und  $g_{,s}$  einen Tensor, welcher dem Dehnungstensor entspricht. Der Punkt ( $\cdot$ ) kennzeichnet in beiden Gleichungen das Skalarprodukt und soll als Schreibweise ebenso wie die Einstein'sche Summationskonvention für den gesamten Abschnitt 5.4. gelten. Die explizite Berechnung von  $u_{,s}$  und  $\sigma_{,s}$  wird durch die Verwendung einer adjungierten Lösung umgangen. Diese Lösung muß den Bedingungen

$$\text{Kinematik:} \quad \varepsilon^a = \mathbf{B} u^a \quad (5-34)$$

$$\text{Werkstoff:} \quad \sigma^a = \mathbf{C} (\varepsilon^a) \quad \text{bzw.} \quad \sigma^a = \mathbf{C} (\varepsilon^a - g_{,s}) \quad (5-35)$$

$$\text{Gleichgewicht:} \quad [\sigma^a, \delta \varepsilon] = \int_V h_{,i} \delta \bar{u}_i \quad \text{bzw.} \quad [\sigma^a, \delta \varepsilon] = 0 \quad (5-36)$$

genügen. Nach einigen Rechenoperationen /Haftka 1990/ lassen sich die variierten Funktionale H und G unter Verwendung der adjungierten Strukturantwort angeben.

$$H_{,s} = \int_V h_{,s} dV + (\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p) \cdot u^a \quad (5-37a)$$

$$G_{,s} = \int_V g_{,s} dV + (\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p) \cdot u^a + (\mathbf{C}_{,s} \varepsilon) \cdot g_{,s} \quad (5-37b)$$

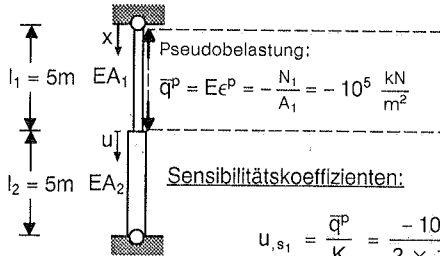
Die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten von Verschiebungsgrößen ist einfach und bedarf keiner besonderen Erläuterung. Bei der Verwendung der Dirac'schen Distribution  $\hat{\delta}$  in den Funktionalen zur Verschiebungskontrolle entfällt der erste Term in Gl. 5-37a und es bleibt lediglich das Skalarprodukt zwischen der Pseudolast  $(\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p)$  und dem adjungierten Verschiebungsvektor  $u^a$  übrig.

Demgegenüber treten bei der Bestimmung der Sensibilitätskoeffizienten von Spannungen Probleme auf, welche einer besonderen Bemerkung bedürfen. Sollen die Elementspannungen lokal im Element (z.B. punktförmig) kontrolliert werden, müssen die entsprechenden Funktionale G ebenfalls unter Verwendung der Distributionstheorie formuliert werden. Dadurch kann jedoch die Ermittlung der Pseudolasten  $\bar{q}^a$  aus den Pseudodehnungen  $g_{,s}$  nach Gl. (5-35) außerordentlich schwierig werden. Dasselbe gilt auch für Gl. (5-37b), in welcher die gegebenenfalls eingeführten Distributionen zweifach auftreten. Diese Tatsache hat dazu geführt, die kontrollierten Spannungswerte elementweise zu mitteln. In diesem Fall hebt sich der erste und dritte Term in Gl. (5-37b) gegenseitig auf. Diese Vorgehensweise ist auch in Beispiel 5-4 für die Bestimmung der Sensibilitätskoeffizienten der Spannungen  $\sigma_{1,s1}$  und  $\sigma_{2,s1}$  in den Elementen 1 und 2 vorgenommen worden. Da die Elementspannungen für die verwendeten Elemente abschnittsweise konstant sind, liegen in diesem Fall auch die exakten Ableitungen der Spannungen vor. Es ergibt sich deshalb eine völlige Übereinstimmung mit Beispiel 5-1, was sich mit den Ableitungen der Stabkräfte schnell überprüfen läßt. Die elementweise Mittelung der

Beispiel 5-4: (vgl. Beispiel 5-1 für 2 Verschiebungselemente)

Direkte Methode:

Dehnsteifigkeiten der Stäbe:



$$EA_1 = 2 \times 10^4 \text{ kN}$$

$$EA_2 = 8 \times 10^4 \text{ kN}$$

Systemsteifigkeit:

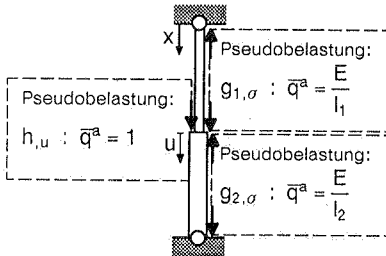
$$K = 2 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$N_{1,s_1} = EA_1 [\epsilon_{1,s_1} - \epsilon_1^p] = 2 \times 10^4 \text{ kN} \left[ -\frac{5}{5} \frac{1}{\text{m}^2} - \left( -\frac{5}{\text{m}^2} \right) \right] = 8 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$N_{2,s_1} = EA_2 [\epsilon_{2,s_1}] = 8 \times 10^4 \text{ kN} \left[ \frac{5}{5} \frac{1}{\text{m}^2} \right] = 8 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Adjungierte Methode:

Optimierungsfunktionale:



$$H = \int \delta(x-5\text{m}) u dx ; G_1 = \int \frac{N_1}{A_1 l_1} dl_1$$

Adjungierte Lösung:

$$u_u^a = \frac{1}{2 \times 10^4 \text{ kN/m}} = -5 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$u_{\sigma_1}^a = \frac{4 \times 10^7 \text{ kN/m}^3}{2 \times 10^4 \text{ kN/m}} = 2 \times 10^5 \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$u_{\sigma_2}^a = \frac{-4 \times 10^7 \text{ kN/m}^3}{2 \times 10^4 \text{ kN/m}} = -2 \times 10^5 \frac{1}{\text{m}^2}$$

Sensibilitätskoeffizienten:

$$H_{,s_1} = \int h_{,s_1} dx + \bar{q}^p u_u^a = 0 + (-10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}) (5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{kN}}) = -5.0 \frac{1}{\text{m}}$$

$$G_{1,s_1} = \int g_{,s_1} dl_1 + \bar{q}^p u_{\sigma_1}^a + \int \frac{N_1}{A_1 l_1} dl_1 = - \int \frac{N_1}{A_1^2 l_1} dl_1 + \bar{q}^p u_{\sigma_1}^a + \int \frac{N_1}{A_1 l_1} dl_1$$

$$= -10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 2 \times 10^3 \frac{1}{\text{m}^2} = -2 \times 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^4}$$

$$G_{2,s_1} = \bar{q}^p u_{\sigma_2}^a = -10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (-2 \times 10^3) \frac{1}{\text{m}^2} = 2 \times 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^4}$$

Bild 5-7: Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Querschnittsvariablen ( $s_1 = A_1$ )

kontrollierten Spannungswerte bleibt für viele praktische Problemstellungen fraglich. Treten in einer Struktur Spannungskonzentrationen mit hoher Gradiente auf

oder werden hochwertige finite Elemente eingesetzt, müssen die Spannungen auch lokal kontrolliert werden. Die diskreten Verfahren weisen diesbezüglich keine Probleme auf und können insbesondere für die lokale Spannungskontrolle einfacher formuliert werden.

Vergleicht man an dieser Stelle diskrete und variationelle sowie direkte und adjungierte Methoden zur Sensibilitätsanalyse, können viele Parallelen festgestellt werden. Auch in der variationellen Formulierung benötigt die direkte Methode zwei Elementoperationen (Pseudolasten  $\bar{q}^a$ , Spannungsberechnung), wogegen die adjungierte Methode drei Rechenoperationen auf Elementebene (Pseudolasten  $(\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p)$  und  $\bar{q}^a$ , Spannungsberechnung) benötigt. Diese Kennzeichnung der Verfahren stimmt mit den diskreten Verfahren überein (Bild 5-1), wobei die vorteilhafte Anwendung der variationellen Verfahren denselben Kriterien entspricht ( $n \times l$  – mal oder  $m$  – mal Rückwärtseinsetzen). Es muß auch erwähnt werden, daß die variationelle Sensibilitätsanalyse nicht völlig unabhängig vom für die Strukturanalyse verwendeten Programm bleibt. Zumindest für eine Spannungskontrolle müssen Elementoperationen durchgeführt werden, welche auf die Elementformulierung abgestimmt werden müssen. Im Fall der direkten Methode ist diese Abhängigkeit von der Elementformulierung jedoch wesentlich geringer als bei der adjungierten Methode.

#### 5.4.2 Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Formvariablen

Die grundlegende Voraussetzung der variationellen Sensibilitätsanalyse bei einer variablen Form der Struktur ist die Herstellung des Zusammenhangs zwischen der Variation der Form und der resultierenden Variation der Funktionale, welche das Formoptimierungsproblem beschreiben. Diese Funktionale ergeben sich sowohl für das Zielkriterium und die Nebenbedingungen, als auch für die Systemgleichungen, welche das mechanische Strukturverhalten selbst beschreiben. Da sich der Integrationsbereich  $V$  und dessen Berandung  $\partial V$  mit der Variation der Form ändert, stellt man sich die Struktur am besten als Kontinuum vor und verwendet die Methode der Materialableitungen aus dem Bereich der Kontinuumsmechanik /Malvern 1969/.

##### 5.4.2.1 Definition der Materialableitung

Während der Optimierung unterliegt die Struktur zwei unterschiedlichen Prozessen gleichzeitig, welche über das Strukturverhalten miteinander in Verbindung stehen. Zum einen führt die aufgebrachte Belastung zu einer Deformation der Struktur ( $U:\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ ). Gleichzeitig unterliegt die Struktur durch die Variation der Form auch einer Transformation ( $S:\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^s(\mathbf{x})$ ), welche die Ausgangsstruktur in die jeweils aktuelle Struktur abbildet (Bild 5-8).



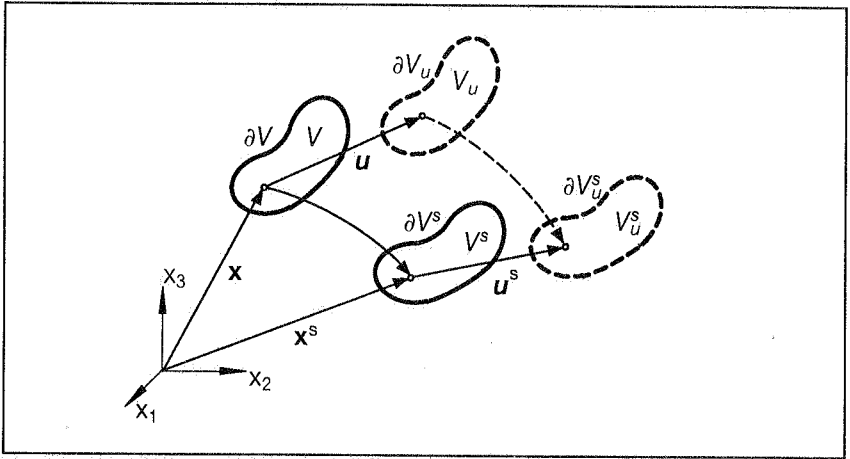


Bild 5-8: Deformation der Struktur bei einer Variation der Form

Der Optimierungsprozess kann in dieser Form auch als kontinuierlicher Entwurfsprozess verstanden werden, wobei die Entwurfsvariablen als Zeitvariable angesehen werden können. Damit läßt sich die Anwendung der Materialableitungen begründen, welche für ein zeitabhängig deformiertes Kontinuum gelten.

Im allgemeinen Fall ist die Transformation nichtlinear von der Entwurfsvariablen  $s$  abhängig. Eine Linearisierung dieser Transformation ergibt

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{x} + s \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (5-38)$$

wobei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}^s(\mathbf{x}, s)}{ds} \text{ für } s = 0$$

als Geschwindigkeitsfeld oder einfach als Entwurfsgeschwindigkeit bezeichnet wird /Haug 1986/. Bei vielen Formoptimierungsproblemen ist die Variation der Form lediglich linear von  $s$  abhängig und damit wird mit Gl. (5-38) die Abbildung exakt wiedergegeben /Bletzinger 1990a/. Für eine Funktion  $f(\mathbf{x}, s)$ , welche auf dem variierten Strukturbereich  $V$  definiert ist, kann nach /Haug 1986/ die Materialableitung angegeben werden.

$$f_s = \frac{Df}{Ds} = \frac{\partial f}{\partial s} + \nabla_x f^T \mathbf{v} = f_{,s} + \nabla_x f^T \mathbf{v} \quad (5-39)$$

In entsprechender Weise ist dort auch die Materialableitung eines Bereichsfunktionals formuliert.

$$F = \int_V f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) dV \quad (5 - 40a)$$

$$F_s = \int_V [f_s + f \operatorname{div} \mathbf{v}] dV = \int_V [f_{,s} + f \operatorname{div} (\mathbf{iv})] dV \quad (5 - 40b)$$

Mit diesen Voraussetzungen lassen sich nun die direkte und die adjungierte Methode für die variationelle Sensibilitätsanalyse bei einer Variation der Form einführen.

### 5.4.2.2 Direkte Methode

Wie bei der Bestimmung der Sensibilitätskoeffizienten für eine Variation der Querschnittswerte werden auch bei der Variation der Form einer Struktur für die kinematischen und konstitutiven Gleichungen sowie die Gleichgewichtsbedingung der finiten Elementmethode die entsprechenden Materialableitungen gebildet.

Kinematik:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B} \mathbf{u}_{,s} + \nabla_x \varepsilon \mathbf{v} \quad (5 - 41)$

$$= \mathbf{B} \mathbf{u}_s - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^s - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\text{mit } \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,k} v_{k,j} + u_{j,k} v_{k,i})$$

Werkstoff:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (5 - 42)$

Gleichgewicht:  $[\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] = \langle \bar{\mathbf{q}}, \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad \rightarrow \quad [\boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}]_s = \langle \bar{\mathbf{q}}, \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle_s$

Nach einigen Umformungen kann in /Haftka 1990/ schließlich Gl. (5-43) in eine Form gebracht werden, welche die gewünschten Sensibilitätskoeffizienten als Lösung des Ausgangsstrukturproblems unter einer Pseudo-Belastung angibt.

$$[\boldsymbol{\sigma}_s, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] = \langle (\bar{\mathbf{q}}^p + \Delta \bar{\mathbf{q}}^p), \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (5 - 44)$$

Darin bedeuten

$$\langle \bar{\mathbf{q}}^p, \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle = [\boldsymbol{\sigma}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] - [\boldsymbol{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{v}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] + [\mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (5 - 45)$$

den Belastungsanteil, der sich aus den Pseudo-Anfangsdehnungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  und den Spannungen des Ausgangszustands als Integral über den gesamten Strukturbereich  $V$  zusammensetzt. Ein zusätzlicher Lastanteil tritt dann auf, wenn die Volumenskräfte bzw. Oberflächenkräfte von den Optimierungsvariablen abhängen und/oder sich die zugehörigen Integrationsbereiche  $V$  bzw.  $\partial V$  ändern. Für diesen Fall ist diese zusätzliche Belastung durch Gl. (5-46) bestimmt /Haug 1986/.

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \bar{q}^p, \delta \bar{u} \rangle &= \int_V [\hat{p}_{i,s} \delta u_i + \nabla_x \hat{p}_i^T \delta u_i \mathbf{v} + \hat{p}_i \delta u_i \operatorname{div} \mathbf{v}] dV \\
&+ \int_{\partial V} [\hat{t}_{i,s} \delta u_i - \hat{t}_i \nabla_x \delta u_i^T \mathbf{v} + (\nabla_x (\hat{t}_i \delta u_i))^T \mathbf{n} + \kappa \hat{t}_i \delta u_i (\mathbf{v}^T \mathbf{n})] dA
\end{aligned}
\tag{5 - 46}$$

In Gl. (5-46) bezeichnet  $\kappa$  die Krümmung von  $\partial V$  in  $\mathbb{R}^2$  und die zweifache mittlere Krümmung von  $\partial V$  in  $\mathbb{R}^3$  sowie  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor auf  $\partial V$  (Bild 4-3). Die Ermittlung der Pseudolasten, welche sowohl für die direkte als auch die adjungierte Methode anfallen, bedeuten im allgemeinen Fall einen ganz beachtlichen Rechenaufwand. Die Ursache dafür liegt zum einen in den umfangreichen Rechenoperationen, aber vor allem in der numerisch auszuführenden Bereichsintegration begründet. In /Haug 1986/ werden deshalb die anfallenden Bereichsintegrale in  $V$  in Randintegrale auf  $\partial V$  unter Verwendung der variationellen Identität für das jeweilige Strukturproblem überführt. Die Ermittlung der Lastterme über Randintegrale ist aus numerischer Sicht sehr effizient, leidet aber unter dem Qualitätsverlust der Strukturantwort auf dem Strukturrand  $\partial V$  bei der Verwendung von finiten Elementen. Die Randintegralmethode bietet deshalb besonders in Kombination mit der Randelementemethode (BEM) Vorteile. Beim Einsatz finiter Elemente können nur über die Bereichsintegralmethode zuverlässige und genaue Sensibilitätskoeffizienten ermittelt werden.

Dennoch kann die Anwendung der direkten Methode bei der variationellen Ermittlung von Sensibilitätskoeffizienten bei variiertem Tragwerksform vergleichsweise einfach erfolgen. In Beispiel 5-5 wird das praktische Vorgehen in Anlehnung an Beispiel 5-1 deutlich gemacht. Zunächst muß die Geometrievariation und die Entwurfsgeschwindigkeit ermittelt werden. Mit der Strukturantwort aus Beispiel 5-1 liegen die Stabkräfte, Dehnungen und Pseudodehnungen vor, so daß die Pseudobelastung durch die entsprechende Bereichsintegration ermittelt werden kann. Aus der wiederholten Strukturanalyse gehen dann sämtliche gewünschten Sensibilitätskoeffizienten direkt hervor.

Beispiel 5-5: (vgl. Beispiel 5-1 für 2 Verschiebungselemente,  $s_2 =$  Formvariable für die Längenänderung )

Direkte Methode:  $\sigma \hat{=} N$  ;  $C \hat{=} EA$  ;  $[\sigma, \delta\epsilon] = \int N \delta\epsilon \, dx$

	Geometrievariation:	Stabkräfte:	Dehnungen:	Pseudodehnungen:
	$x_1^s = x + \frac{x}{5m} s_2$ $v_1 = \frac{x}{5m}$ ; $v_{1,1} = \frac{1}{5m}$	$N_1 = 10 \text{ kN}$	$\epsilon_1 = \frac{u}{5m}$ $\delta\epsilon_1 = \frac{\delta u}{5m}$	$\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 v_{1,1}$ $\delta\bar{\epsilon}_1 = \delta\epsilon_1 v_{1,1}$
	$x_2^s = x + \frac{10m-x}{5m} s_2$ $v_2 = \frac{10m-x}{5m}$ ; $v_{2,1} = -\frac{1}{5m}$	$N_2 = -40 \text{ kN}$	$\epsilon_2 = -\frac{u}{5m}$ $\delta\epsilon_2 = -\frac{\delta u}{5m}$	$\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 v_{2,1}$ $\delta\bar{\epsilon}_2 = \delta\epsilon_2 v_{2,1}$

Pseudobelastung:

$$[\sigma, \delta\bar{\epsilon}] = \int N \delta\bar{\epsilon} \, dx = \left[ \int_0^{5m} \frac{10 \text{ kN}}{5m} \frac{1}{5m} dx + \int_{5m}^{10m} \frac{-40 \text{ kN}}{(-5m)} \frac{1}{(-5m)} dx \right] \delta u = -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \delta u$$

$$[C\bar{\epsilon}, \delta\epsilon] = \int N v_{i,1} \delta\epsilon \, dx = -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \delta u = [\sigma v_{i,1}, \delta\epsilon]$$

$$\Delta \bar{q}^p \delta u = \int p v_{i,1} \delta u \, dx = \left[ \int_0^{5m} \frac{10 \text{ kN/m}}{5m} \frac{1}{2} dx + \int_{5m}^{10m} \frac{10 \text{ kN/m}}{(-5m)} \frac{1}{2} dx \right] \delta u = 0$$

$$\rightarrow (\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p) = -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Sensibilitätskoeffizienten:

Pseudobelastung:  
 $(\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p) = -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$$u_{,s_2} = \frac{(\bar{q}^p + \Delta \bar{q}^p)}{K} = \frac{-6 \text{ kN/m}}{2 \times 10^4 \text{ kN/m}} = -3 \times 10^{-4}$$

$$N_{1,s_2} = EA_1 [\epsilon_1^s - \bar{\epsilon}_1] = 2 \times 10^4 \text{ kN} \left[ \frac{-3 \times 10^{-4}}{5m} - \frac{5 \times 10^{-4}}{5m} \right] = -3.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$N_{2,s_2} = EA_2 [\epsilon_2^s - \bar{\epsilon}_2] = 8 \times 10^4 \text{ kN} \left[ \frac{3 \times 10^{-4}}{5m} - \frac{5 \times 10^{-4}}{5m} \right] = -3.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Bild 5-9a: Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Formvariablen

### 5.4.2.3 Adjungierte Methode

Bei der adjungierten Methode wird wieder von den vorausgehend definierten Funktionalen (Gl. 5-32a,b) zur Kontrolle von Verschiebungen und Spannungen ausgegangen. Bei einer Variation der Form müssen ihre Materialableitungen gebildet werden, welche mit

$$H_s = \int_V [h_{,s} + \text{div}(hv)]dV + h_{,u} \cdot u_{,s} \quad (5 - 47a)$$

$$G_s = \int_V [g_{,s} + \text{div}(gv)]dV + g_{,\sigma} \cdot \sigma_{,s} \quad (5 - 47b)$$

angegeben werden können. Die direkte Ermittlung der Materialableitungen für die Verschiebungen  $u_{,s}$  und Spannungen  $\sigma_{,s}$  wird durch die Einführung einer adjungierten Systemlösung umgangen /Dems 1988-89/. Die entsprechenden Rechenoperationen stimmen mit den Gleichungen (5-34) bis (5-36) überein. Damit lassen sich die Gleichungen (5-47a,b) in die folgende Form bringen:

$$H_s = \int_V [h_{,s} + \text{div}(hv)]dV + (\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p) \cdot u^p \quad (5 - 48a)$$

$$G_s = \int_V [g_{,s} + \text{div}(gv)]dV + (\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p) \cdot u^p \quad (5 - 48b)$$

Direkte und adjungierte Methode unterscheiden sich für eine variierte Form in derselben Art und Weise, wie es bereits in Abschnitt 5.4.1. für Querschnittsvariable festgestellt wurde. Dieser Sachverhalt spiegelt sich ebenfalls im Beispiel 5-5 für die Anwendung der adjungierten Methode wieder (Bild 5-9b). Die adjungierte Systemlösung wird aus Beispiel 5-4 übernommen und der Pseudolastvektor wurde bereits für die direkte Methode aufgestellt und kann direkt verwendet werden. Die Materialableitungen für die Verschiebungen und die beiden Elementspannungen können damit gebildet werden, und ein Überprüfen der Ergebnisse zeigt ebenfalls die völlige Übereinstimmung mit den diskret ermittelten Sensibilitätskoeffizienten aus Beispiel 5-1.

### 5.4.3 Vergleich von kontinuierlichen und diskreten Verfahren

Die Gegenüberstellung von kontinuierlichen (variationellen) und diskreten Verfahren in der Sensibilitätsanalyse kann an dieser Stelle nur qualitative Aussagen liefern und muß sich auch auf die in diesem Abschnitt behandelte kontinuierliche Problemstellung (ohne gekrümmte Geometrie der Struktur) beschränken. Hinter den vorausgehenden Ausführungen steht vor allem die Absicht, die zur Verfügung stehenden Verfahren nach ihren konzeptionellen und programmtechnischen Ei-

### Beispiel 5-5: (Fortsetzung)

Adjungierte Methode:

Optimierungsfunktionale:

$$H = \int \delta(x - 5m)u \, dx; \quad G_i = \int \frac{N_i}{A_i l_i} dl_i$$

Adjungierte Lösung:

Pseudobelastung:

$u^a$  aus Beispiel 5-4

$(\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p)$  aus der direkten Methode

Sensibilitätskoeffizienten:

$$H_{s_2} = \int [h_{,s_1} dx + d \operatorname{div}(hv)] dx + (\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p) u_0^a = 0 - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{kN}} = -3.0 \times 10^{-4}$$

$$G_{1 \, s_2} = \int [g_{,s_2} + d \operatorname{div}(gv)] dl_1 + (\bar{q}^p + \Delta\bar{q}^p) u_{0,1}^a =$$

$$= \int_{-5\text{m}}^{5\text{m}} \left[ \frac{-10\text{kN}}{25\text{m}^2 \times 10^{-4}\text{m}^2} + 0 \right] dx - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \times 10^3 \frac{1}{\text{m}^2} = -3.2 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$G_{2 \, s_2} = \int_{-5\text{m}}^{5\text{m}} \left[ \frac{-40\text{kN}}{25\text{m}^2 \times 10^{-4}\text{m}^2} + 0 \right] dx - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \times 10^3 \frac{1}{\text{m}^2}) = -0.8 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

Bild 5-9b: Variationelle Sensibilitätsanalyse bei Formvariablen

genschaften zu vergleichen. Wie bereits in den beiden vorausgehenden Abschnitten festgestellt wurde, weisen die diskreten und variationellen Verfahren jeweils für die direkte und die adjungierte Vorgehensweise viele Parallelen auf. Bei beiden Möglichkeiten der Sensibilitätsanalyse treten sowohl für variable Formen als auch variable Querschnitte vergleichbare Rechenoperationen (z.B. Pseudolasten, Rückwärtseinsetzen, Hilfsvariablen) auf, und die Verfahren sind in diesem Sinne auch vom Rechenaufwand her vergleichbar. Der konkrete Unterschied im matriziellen Aufwand liegt bei den diskreten Verfahren vor allem in der Ableitung der Systemmatrizen, Lastvektoren und Optimierungsfunktionen und bei den variationellen Verfahren in der aufwendigen Auswertung von Bereichs- und Randintegralen. Die numerische Effizienz der verschiedenen Lösungsansätze kann deshalb nur durch eine programminterne Verwirklichung ohne externen Datentransfer objektiv verglichen werden. Die Ausführungen in Abschnitt 5.3. und 5.4. lassen jedoch aufgrund der sehr ähnlichen Rechenschritte auch einen rechentechnisch vergleichbaren Aufwand für beide Möglichkeiten der Sensibilitätsanalyse vermuten.

Aus den einfachen Beispielen wird bereits ersichtlich, daß sich für eine gleich durchgeführte Diskretisierung für diskret und variationell ermittelte Sensibilitätskoeffizienten völlige Übereinstimmung ergibt. Dies muß auch so sein, wenn für beide Lösungsansätze die Variation bzw. Differentiation konsistent und vollständig durchgeführt wurde. Insofern hängt die Qualität der Ergebnisse weniger von

den Verfahren ab, sondern vielmehr von ihrer numerischen Realisierung. Darüber hinaus zeigen die verwendeten Beispiele deutlich, daß auch für die programmtechnische Verwirklichung der variationellen Methoden eine gewisse Abhängigkeit von der Elementformulierung bestehen bleibt. Die Erstellung der Pseudolasten verlangt in jedem Fall Kenntnisse über die Elementansätze und Integrations schemata, welche in vielen Fällen bei einer externen Anwendung von Analyseprogrammen nicht zur Verfügung stehen. Von einem vorbehaltlosen Einsatz der variationellen Verfahren mit übergeordneten Qualitäten kann daher nicht gesprochen werden. Beide Möglichkeiten der Sensibilitätsanalyse ergänzen sich gegenseitig und können als gleichwertige Verfahren angesehen werden.

## 5.5 Praktische Anwendung der Sensibilitätsanalyse

Der eigenständige Einsatz der Sensibilitätsanalyse für eine intuitive Auslegung von Strukturen wurde bereits in Abschnitt 5.2. angedeutet. Häufig werden Struktur- und Sensibilitätsanalyse in der Praxis kombiniert für Parameterstudien auf einer höheren Ebene verwendet. Die Sensibilitätsanalyse unterstützt dieses Vorgehen vor allem dadurch, daß sie zu den variierten Strukturparametern auch die Information der variierten Strukturantwort liefert und damit wertvolle Hinweise für die geeignete Durchführung der Parameterstudie zur Verfügung stellt. Die sonst ausschließlich auf der Grundlage der Erfahrung betriebene Auslegung einer Struktur ("trial and error") wird durch die Sensibilitätskoeffizienten ("was-wäre-wenn-Studien") aufgewertet, so daß eine Parameterstudie gegebenenfalls mit viel höherer Zielsicherheit betrieben werden kann.

Die unterstützende Anwendung von Sensibilitätskoeffizienten für eine intuitive Strukturauslegung oder eine Vorbemessung von Strukturen setzt jedoch die Kenntnis voraus, daß zwischen einer Parametervariation und der entsprechenden Variation der Strukturantwort unter Umständen ein hochgradig nichtlinearer Zusammenhang besteht. In dieser Hinsicht unterliegt eine derartige Anwendung der Sensibilitätsanalyse wieder gewissen Grenzen, deren man sich wohl bewußt sein sollte. Zunächst muß man sich vergegenwärtigen, daß die für einen bestimmten Parameter durchgeführte Sensibilitätsanalyse das wirkliche Strukturverhalten nur linear annähert und damit jede Extrapolation des Strukturverhaltens mit einem bestimmten Fehler behaftet ist. Darüber hinaus steht jeder einzelne Punkt einer Struktur in einem unterschiedlichen Zusammenhang mit der vorgenommenen Parametervariation. Geht man beispielsweise von dem in Kapitel 3 verwendeten Beispiel einer Zuglasche (Bild 3-10) aus, so ergibt sich für eine lineare Extrapolation der Vergleichsspannung für jeden Punkt der Struktur ein unterschiedliches Fehlermaß. Diese Fehler können sich um Größenordnungen unterscheiden, und die dabei entstehenden "Fehlerkarten" weisen die größten Abweichungen zur genauen Lösung oft in den hoch beanspruchten Strukturbereichen aus. Nur in

Kenntnis dieser Qualitätsmerkmale kann die Sensibilitätsanalyse sinnvoll in den Entwurfs- und Konstruktionsprozeß einbezogen werden.

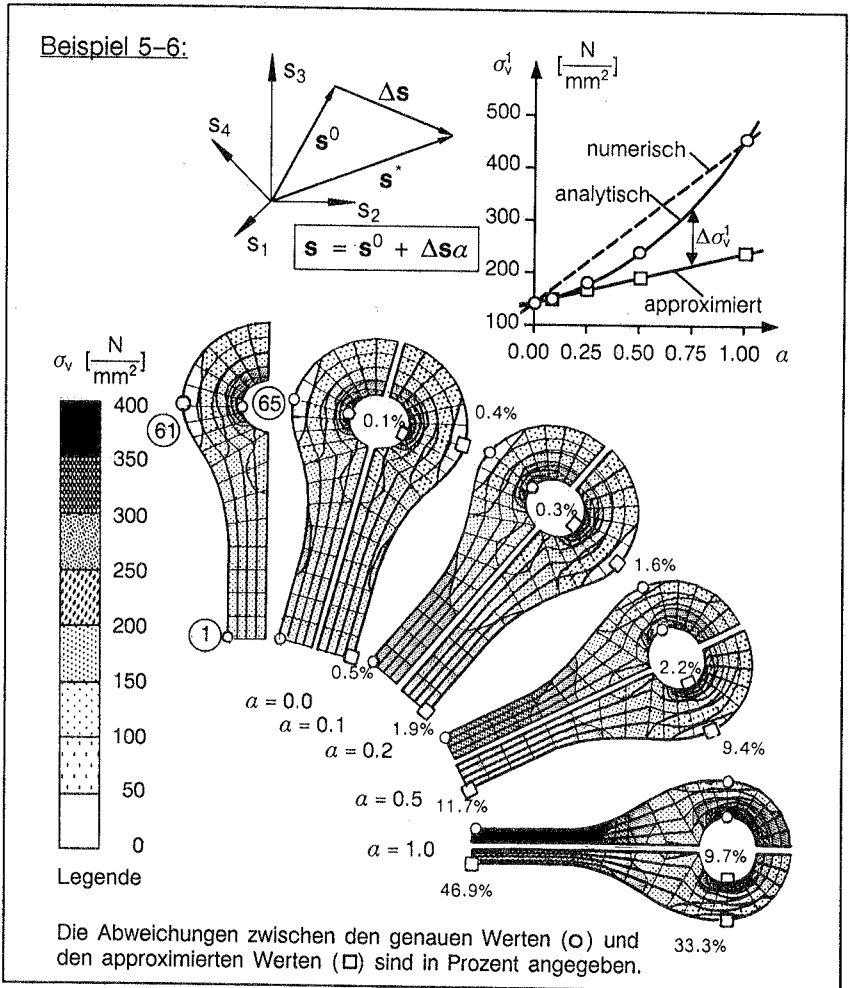


Bild 5-10: Approximation der Strukturantwort mit der Sensibilitätsanalyse

Zur Verdeutlichung dieser Tatsache wurde die Zugflasche aus Kapitel 3 (Bild 3-8) einer gewissen Parametervariation unterworfen und die exakte der mit Hilfe der Sensibilitätsanalyse approximateden Strukturantwort gegenübergestellt (Bild 5-10). Um die Unterschiede zwischen einer "intuitiven" und einer wirklichen Strukturoptimierung besser herauszustellen, wurden die vier formbeschreibenden Strukturparameter (Bild 3-9) gleichzeitig und linear zwischen der Ausgangs- ( $\mathbf{s}^0$ ) und der



Optimallösung ( $s^0 + \Delta s$ ) (Bild 3-14) variiert. In dem angegebenen Beispiel 5-6 wird sichtbar, wie stark nichtlinear das Strukturverhalten von einer Parametervariation (Punkt 1) abhängt und welcher prozentuale Fehler sich zwischen der exakten und angenäherten Strukturantwort einstellt. Bezeichnenderweise treten bei diesem und vielen anderen Beispielen in der Umgebung des Ausgangspunktes ( $0 \leq \alpha \leq 0.1$ ) nur geringe Abweichungen auf. Bei einer Änderung der Parameter in der Größenordnung der wirklichen Optimallösung ( $\alpha = 1.0$ ) verliert die Sensibilitätsanalyse für die Ausgangsstruktur ihre Aussagekraft beinahe vollständig. Die hier verwendeten Sensibilitätskoeffizienten wurden mit diskreten Verfahren analytisch exakt bestimmt. Das Diagramm für die Variation der Vergleichsspannung im Punkt 1 in Abhängigkeit von  $\alpha$  zeigt, daß die approximierten Vergleichsspannungen die Tangenten zur Ausgangslösung bilden ( $\alpha = 0$ ). Ein durch Vorwärtsdifferenzen gebildeter Gradient der Vergleichsspannungen (gestrichelte Linie) ist für eine Approximation ebenfalls geeignet und kann vor allem für große Schrittweiten (Interpolation mit der Sekante) vorteilhafter sein. An dieser Stelle wird jedoch ebenso deutlich, daß die genauen Ableitungen nur mit größter Vorsicht durch Differenzenverfahren überprüft werden dürfen. Analytisch gewonnene Gradienteninformationen müssen deshalb immer auch mit analytisch exakten und geschlossenen Lösungen zur Kontrolle überprüft werden /Schmid 1986/.

## 6.0 Problemformulierung und diskrete Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen

Von Anfang an bildeten die Entwicklungen im Bereich der Optimierungstheorie und der finiten Elementmethode die Grundlagen für die Strukturoptimierung (Tabelle 2-1). Vor allem in der historischen Entwicklung liegt die Tatsache begründet, daß heute die meisten Problemstellungen aus dem Bereich der Strukturoptimierung unter Verwendung von finiten Elementen gelöst werden. Die verschiedenen Möglichkeiten zur Elementformulierung (Abschnitt 4.2) und die vielseitig zur Verfügung stehenden Elementtypen (Bild 6-1) haben den Einsatz von finiten Elementen in diesem speziellen Anwendungsbereich noch weiter gefestigt.

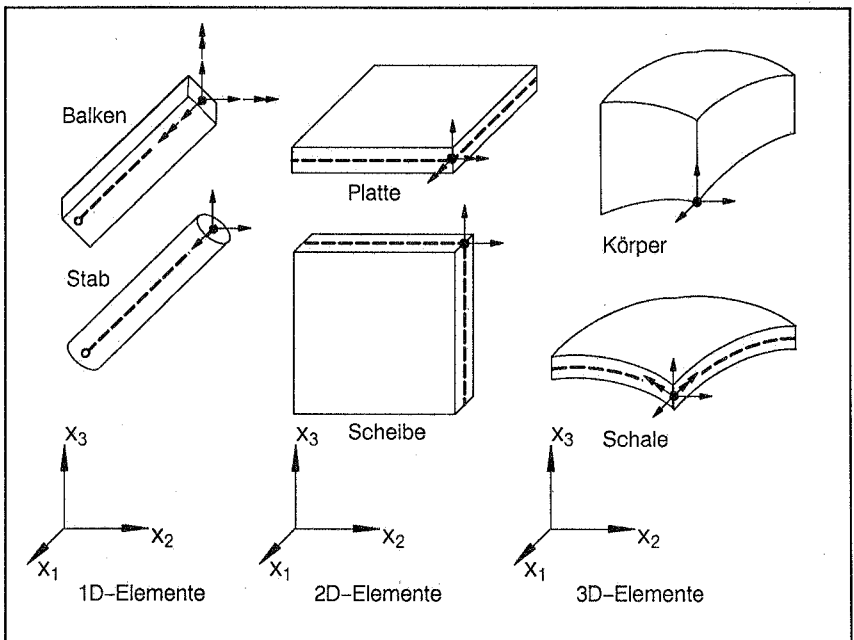


Bild 6-1: Finite Elemente in der Strukturanalyse

Bei der Verwendung der finiten Elementmethode in der Strukturoptimierung muß zunächst geklärt werden, wie dieses Verfahren zur Strukturanalyse konzeptionell und programmtechnisch in den Optimierungsprozeß integriert werden soll (Kapitel 3). Zu Gunsten einer direkten Formulierung des Optimierungsproblems (Kapitel 4) und einer effizienten und zuverlässigen Sensibilitätsanalyse (Kapitel 5)

wird im Rahmen dieser Arbeit eine integrierte und programminterne Lösung verwendet. Dies bedeutet, daß sämtliche vorausgehend definierten Optimierungsfunktionen, ihre Ableitungen und alle damit verbundenen Matrizenoperationen auf Elementebene formuliert und auch programmtechnisch realisiert werden müssen. Die Formulierung des Optimierungsproblems und die diskrete Sensibilitätsanalyse sind deshalb in ihrem Programmieraufwand direkt von der Elementformulierung und dem speziellen Elementtyp abhängig.

Für die Auswahl geeigneter finiter Elemente waren in dieser Hinsicht vor allem zwei Überlegungen maßgebend. Auf der einen Seite soll ein sehr einfaches Element vorliegen, welches für die Strukturoptimierung programmtechnisch transparent bleibt. Gleichzeitig muß dieses Element analytisch nachvollziehbare Optimierungsprobleme ermöglichen. Das ist in besonderem Maße für eine Formulierung neuer Optimierungsprobleme und -funktionen, die Überprüfung der Sensibilitätskoeffizienten und die Entwicklung von Optimierungsstrategien wichtig. Das isoparametrische dreidimensionale Fachwerkelement mit linearen Ansatzfunktionen konnte unter diesen Gesichtspunkten mit Erfolg als "Testelement" eingesetzt werden.

Auf der anderen Seite wurde unter dem Aspekt der möglichst breiten Erschließung von unterschiedlichen Optimierungsproblemen ein allgemeines dreidimensionales Schalenelement ausgewählt. Nachdem in der Anfangsphase der Strukturoptimierung vor allem die Querschnittsoptimierung von ein- und zweidimensionalen Strukturen /Gallagher 1973, Haug 1979/ interessierte, kommen in jüngster Zeit verstärkt auch zwei- und dreidimensionale Kontinuumselemente für Formoptimierungsprobleme zum Einsatz /Bennet 1986/. In diesem Anwendungsbereich standen zunächst noch Scheibenprobleme /Esping 1984, Bennet 1985, Braibant 1986 und Rajan 1987/ im Vordergrund. In der weitaus komplexeren und hinsichtlich der Geometriebeschreibung und Elementformulierung auch komplizierteren Optimierung der Formen von rotationssymmetrischen bzw. allgemeinen Schalen /Eschenauer 1985, Botkin 1985 und Brockmann 1988/ sowie dreidimensionalen Körpern /Imam 1982, Wassermann 1983-84, Wang 1985 und Botkin 1986/ wurden erst neuerdings wesentliche Fortschritte erzielt. Eine ausführliche Übersicht über den Stand der Entwicklung in der Optimierung von Schalen ist in /Kruzelcki 1985/ zu finden. Das hier verwendete, aus dem dreidimensionalen Kontinuum degenerierte, isoparametrische Schalenelement /Ahmad 1970/ erfüllt die entsprechenden Erwartungen für eine simultane Form- und Querschnittsoptimierung auf einer breiten Basis.

Beide verwendeten Elementtypen sind als Verschiebungselemente nach den in Kapitel 4 aufgestellten Ausgangsgleichungen formuliert. Die elementspezifische Definition der Optimierungsfunktionen folgt den jeweiligen Ausführungen aus Abschnitt 4.2.4. Die Identifikation der Strukturparameter als Optimierungsvariablen sowie deren Verknüpfung untereinander sei an dieser Stelle vorausgesetzt. Ebenso werden für die folgenden Herleitungen die Ableitungen von Koordinaten  $(x_s)$ ,

Dicken ( $t_s$ ) und Querschnitten ( $A_s$ ) von Elementknoten als bekannt angenommen. Dasselbe gilt für die Verschiebungen ( $u_s$ ) als Ergebnis der direkten, diskreten Sensibilitätsanalyse. Bei der Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten aller Elementgrößen wird der Übersicht halber immer von der gleichzeitigen Form- und Querschnittsoptimierung ausgegangen, obwohl dieser Fall nur als eine seltene Ausnahme vorkommt.

## 6.1 Isoparametrisches dreidimensionales Fachwerkelement

Der Wunsch nach einem einfachen und im Sinne des linear elastischen Tragverhaltens exakten Elements hat in dieser Arbeit zur Verwendung des isoparametrischen dreidimensionalen Fachwerkelements mit linearen Ansatzfunktionen geführt. An Hand der übersichtlichen Elementformulierung des Fachwerkstabes lassen sich einfache Optimierungsprobleme (vgl. Beispiele 4-4a bis 4-4c) auch in der Programmumgebung direkt verfolgen, und eine Überprüfung der Optimierungsergebnisse wird in solchen Fällen durch eine analytisch vorliegende Lösung möglich. Die in Gl.(4-23) eingeführten Größen sind in Tabelle 6.1-1 für das vorliegende Fachwerkelement definiert.

$\mathbf{u}_e^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \   \ u_1^? \ u_2^? \ u_3^? ]$	...	Elementverschiebungen
$\varepsilon_e = \varepsilon'_{11} \dots$ Längsdehnung	$\sigma_e = \sigma'_{11} \dots$	Längsspannung
$\varepsilon'_{11} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e$	...	Operatormatrix <b>B</b>
$\sigma'_{11} = E \varepsilon'_{11}$	E	...
$\Phi^K = [ \Phi^1, \Phi^2 ] = [ \frac{(1-\xi)}{2} \   \ \frac{(1+\xi)}{2} ]$	...	Ansatzfunktionen
$\hat{\mathbf{p}}^T = [ \hat{p}_1 \ \hat{p}_2 \ \hat{p}_3 ]$	...	Volumenkräfte
$\hat{\mathbf{t}}^T = [ \hat{t}_1 \ \hat{t}_2 \ \hat{t}_3 ]$	...	Oberflächenkräfte

Tabelle 6.1-1: Elementgrößen des isoparametrischen Fachwerkelements

### 6.1.1 Ableitung der Elementgeometrie und Elementverschiebungen

Die Verwendung eines isoparametrischen Ansatzes zur Beschreibung der Elementgeometrie und des Verschiebungsfeldes kann auch sinngemäß auf die entsprechenden abgeleiteten Elementgrößen übertragen werden. Die Ansatzfunktionen sind nicht von der Optimierungsvariablen abhängig. Damit lassen sich die Ableitungen der Elementgeometrie und -verschiebungen in Übereinstimmung zu den unabgeleiteten Elementansätzen angeben.

## Ansatzfunktionen für die Elementgeometrie

Für die Beschreibung der Elementgeometrie (Gl.6.1-1a) und ihrer Ableitung nach den variablen Koordinaten (Gl.6.1-1b) werden für das vorliegende Element lineare Ansatzfunktionen verwendet.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \Phi^i \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} = \frac{(1-\xi)}{2} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} + \frac{(1+\xi)}{2} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix} \quad (6.1 - 1a)$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \\ x_{3,s} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \Phi^i \begin{bmatrix} x_{1,s}^i \\ x_{2,s}^i \\ x_{3,s}^i \end{bmatrix} = \frac{(1-\xi)}{2} \begin{bmatrix} x_{1,s}^1 \\ x_{2,s}^1 \\ x_{3,s}^1 \end{bmatrix} + \frac{(1+\xi)}{2} \begin{bmatrix} x_{1,s}^2 \\ x_{2,s}^2 \\ x_{3,s}^2 \end{bmatrix} \quad (6.1 - 1b)$$

Die Abhängigkeit der Elementgeometrie von den Optimierungsvariablen wird hier in allgemeiner Form für sämtliche Elementknoten und Koordinatenrichtungen vorgenommen. Im konkreten Fall kann jedoch die Variabilität der Elementgeometrie stark eingeschränkt sein, so daß sich lediglich abgeleitete Knotenkoordinaten für bestimmte Werte  $x_{i,s}$  ergeben (z.B. bei vorgegebener Richtung einer Formvariablen).

## Volumenintegration

Über die Abhängigkeit der Elementgeometrie von den formbeschreibenden Variablen ist auch die durchzuführende Volumenintegration (Gl.4-23) von diesen Variablen abhängig. Das Volumenintegral wird in ein Linienintegral überführt. Für den speziellen Fall der hier vorliegenden linearen Ansatzfunktionen ist das differentielle Volumenelement von der lokalen Elementkoordinate unabhängig und kann mit Gl.(6.1-2a) entsprechend einfach angegeben werden.

$$\begin{aligned} dV &= A dL = A \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \\ &= \frac{AL}{2} d\xi \end{aligned} \quad (6.1 - 2a)$$

$$\text{mit } L = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}$$

Die Ableitung des differentiellen Volumenelements führt sinngemäß zu

$$dV_s = \frac{1}{2} (A_{,s} L + A L_{,s}) d\xi \quad (6.1 - 2b)$$

mit

$$L_{,s} = \frac{1}{L} [(x_1^2 - x_1^1)(x_{1,s}^2 - x_{1,s}^1) + (x_2^2 - x_2^1)(x_{2,s}^2 - x_{2,s}^1) + (x_3^2 - x_3^1)(x_{3,s}^2 - x_{3,s}^1)].$$

### Richtungsvektor des Elementes

Der Richtungsvektor des verwendeten Elementes mit linearen Ansatzfunktionen entspricht dem Tangenteneinheitsvektor der durch die Elementknoten definierten Geraden.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{L} \left[ \mathbf{e}_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \right] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^1 \\ x_2^2 - x_2^1 \\ x_3^2 - x_3^1 \end{bmatrix} \quad (6.1 - 3a)$$

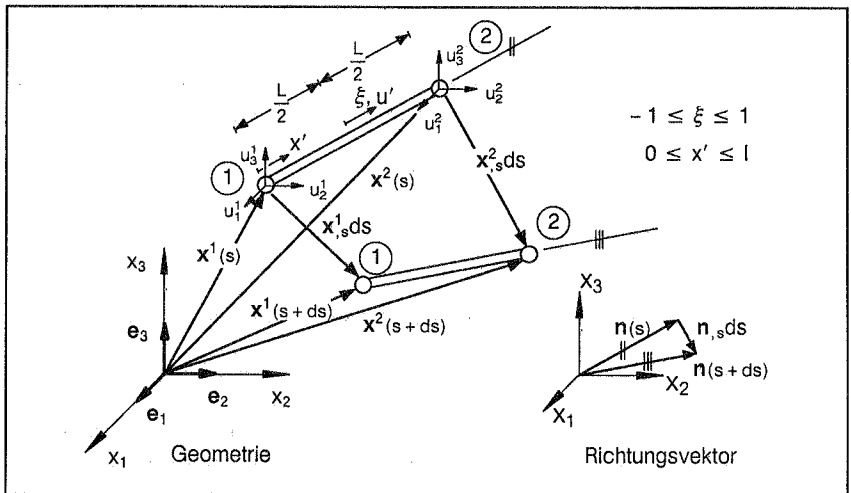


Bild 6.1-1: Elementgeometrie in Abhängigkeit der formbeschreibenden Variablen

Die Ableitung des Richtungsvektors (Bild 6.1-1) ergibt sich zu

$$\mathbf{n}_{,s} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_{1,s}^2 - x_{1,s}^1 \\ x_{2,s}^2 - x_{2,s}^1 \\ x_{3,s}^2 - x_{3,s}^1 \end{bmatrix} - \frac{L_{,s}}{L^2} \mathbf{n} \quad (6.1 - 3b)$$

unter Verwendung von Gl.(6.1-1a,b) mit den zugehörigen abgeleiteten Richtungs-cosinus. Hier ist besonders zu beachten, daß nicht die Änderung der Richtungswinkel selbst in Abhängigkeit der Entwurfsvariablen angegeben werden muß. Bei der Sensibilitätsanalyse auf Elementebene gehen lediglich die Ableitungen der Richtungs-cosinus in die Elementmatrizen ein.

### Ansatzfunktionen für die Verschiebungen

Bei der Darstellung des lokal orientierten Verschiebungsfeldes für das dreidimensionale Fachwerkelement mit linearen Ansatzfunktionen können die globalen Verschiebungsfreiheitsgrade durch die Einführung einer entsprechenden Transformation direkt in die Interpolationsformel für die Verschiebungen eingearbeitet werden.

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Phi^j n_j u_j^i \quad (6.1 - 4a)$$

Dies gilt für die Ableitung des Verschiebungsfeldes entsprechend, wobei, wie in Bild (6.1-1) angegeben, die Änderungen der Richtungs-cosinus des Richtungsvektors  $\mathbf{n}$  mit der formbeschreibenden Variablen berücksichtigt werden muß.

$$\mathbf{u}'_{,s} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Phi^j (n_{j,s} u_j^i + n_j u_{j,s}^i) \quad (6.1 - 4b)$$

### 6.1.2 Ableitung der Steifigkeitsmatrix und der Elementlastvektoren

Für die Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix und der konsistenten Elementlastvektoren des dreidimensionalen Fachwerkelements müssen die Integralausdrücke in Gl.(4-23) ausgewertet werden. Die Einfachheit dieser Ausdrücke erlaubt die direkte Ausführung der Integration. Damit lassen sich Steifigkeitsmatrix und Elementlastvektoren mit den zugehörigen Ableitungen nach den Entwurfsvariablen explizit angeben.

## B-Operator

Der Zusammenhang zwischen den globalen Knotenverschiebungen und der Dehnung im Element läßt sich aus dem Verschiebungsansatz (Gl.6.1-4) herleiten.

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{dx'}{d\xi} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (6.1-5a)$$

$$\text{mit } \mathbf{B} = \frac{1}{L} [-n_1 \mid -n_2 \mid -n_3 \mid n_1 \mid n_2 \mid n_3]$$

Die Ableitung des  $\mathbf{B}$ -Operators nach der Entwurfsvariablen ergibt sich zu

$$\mathbf{B}_{,s} = \frac{1}{L} [-n_{1,s} \mid -n_{2,s} \mid -n_{3,s} \mid n_{1,s} \mid n_{2,s} \mid n_{3,s}] - \frac{L_{,s}}{L^2} \mathbf{B} \quad (6.1-5b)$$

## Steifigkeitsmatrix

Mit einem linear-elastischen Materialgesetz, dem  $\mathbf{B}$ -Operator und dem zum Linienelement umgeformten differentiellen Volumenelement kann die Steifigkeitsmatrix aufgestellt werden.

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = EA \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{L}{2} d\xi = \frac{EA}{L} \bar{\mathbf{K}}_e \quad (6.1-6)$$

mit

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} & -\bar{\mathbf{N}} \\ -\bar{\mathbf{N}} & \bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \quad \bar{N}_{ij} = n_i n_j \quad i, j = 1,2,3$$

Die direkte Ableitung der Elementsteifigkeitsmatrix (Gl.6.1-7) für Form- und Querschnittsoptimierung kann durch die explizit vorliegende Steifigkeitsmatrix vermieden werden.

$$\mathbf{K}_{e,s} = \int_V [\mathbf{B}_{,s}^T \mathbf{C} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{,s} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{,s}] dV + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_{,s} \quad (6.1-7)$$

Es ist sinnvoll diese Matrizenoperationen durch die Ableitung der Matrix nach Gl.(6.1-6) in ausmultiplizierter Form vorzunehmen.

$$\mathbf{K}_{e,s} = \left[ \frac{EA_{,s}}{L} - \frac{EA}{L^2} L_{,s} \right] \bar{\mathbf{K}}_e + \frac{EA}{L} \bar{\mathbf{K}}_{e,s} \quad (6.1-8)$$

mit

$$\bar{\mathbf{K}}_{e,s} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{,s} & -\bar{N}_{,s} \\ -\bar{N}_{,s} & \bar{N}_{,s} \end{bmatrix} \quad \bar{N}_{ij,s} = n_i n_{j,s} + n_{i,s} n_j \quad i, j = 1,2,3$$



### Konsistente Elementlastvektoren

Mit dem Ausdruck der äußeren Arbeiten in Gl.(4-23) sind verschiedene Typen von Elementlasten für das Fachwerkelement angegeben, die im allgemeinen Fall von den Querschnitten und der räumlichen Lage des Elementes abhängen. Die Elementlastvektoren für das Eigengewicht ( $\mathbf{G}_e$ ), die Temperaturbelastung ( $\mathbf{T}_e$ ) und eine eingeprägte Vorspannkraft ( $\mathbf{V}_e$ ) werden im folgenden als konsistente Knotenlasten hergeleitet und in ihrer Abhängigkeit von den Entwurfsvariablen für die Sensibilitätsanalyse entsprechend abgeleitet.

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{G}_e + \mathbf{T}_e + \mathbf{V}_e \quad (6.1 - 9a)$$

$$\mathbf{R}_{e,s} = \mathbf{G}_{e,s} + \mathbf{T}_{e,s} + \mathbf{V}_{e,s} \quad (6.1 - 9b)$$

Für praktische Aufgaben der Strukturoptimierung können bei Fachwerken die Oberflächenlasten in der Regel durch Einzelkräfte ersetzt werden, wenn sie, wie hier angenommen, von den Entwurfsvariablen unabhängig sind.

### Gewichtslast

Die Gewichtslastung ist durch einen Lastvektor  $\mathbf{g}$  mit einer allgemeinen Wirkungsrichtung im Raum definiert, wobei die Komponenten dieses Vektors von den Entwurfsvariablen unabhängig sind. Der Knotenanteil dieser Elementbelastung kann mit

$$\mathbf{G}_e^i = \int_V \Phi^i \mathbf{g} \, dV = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi^i \mathbf{g} \, AL \, d\xi \quad (6.1 - 10)$$

angegeben werden. Der gesamte Gewichtslastvektor und der zugehörige abgeleitete Elementlastvektor lassen sich entsprechend unter Verwendung von Gl.(6.1-2) ermitteln.

$$\mathbf{G}_e^T = \frac{1}{2} [g_1 \mid g_2 \mid g_3 \mid g_1 \mid g_2 \mid g_3] AL \quad (6.1 - 11a)$$

$$\mathbf{G}_{e,s}^T = \frac{1}{2} [g_1 \mid g_2 \mid g_3 \mid g_1 \mid g_2 \mid g_3] (A_{,s}L + AL_{,s}) \quad (6.1 - 11b)$$

### Temperaturbelastung, Vorspannung

Im Sinne von Lasten aus Anfangsdehnungen und Anfangsspannungen können die beiden Lastfälle gemeinsam behandelt werden.

$$\mathbf{R}_e^i = \int_V \mathbf{B}^T (\mathbf{C} \varepsilon_{11}^0 - \sigma_{11}^0) \, dV = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T (E \alpha_T T - \frac{N^0}{A}) AL \, d\xi \quad (6.1 - 12)$$

- mit  $\alpha_T$  ... Temperatureausdehnungskoeffizient  
T ... Erwärmungstemperatur  
N<sup>0</sup> ... Vorspannkraft im Element

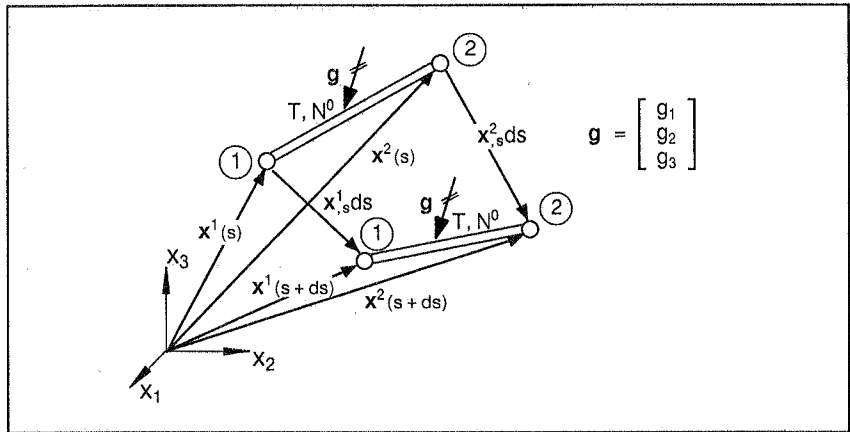


Bild 6.1-2: Elementlasten in Abhängigkeit der formbeschreibenden Variablen

Damit läßt sich der Lastvektor für die Temperaturbelastung mit der zugehörigen Ableitung bestimmen.

$$\mathbf{T}_e^T = [-n_1 \mid -n_2 \mid -n_3 \mid n_1 \mid n_2 \mid n_3] EA \alpha_T T \quad (6.1 - 13a)$$

$$\mathbf{T}_{e,s}^T = [-n_{1,s} \mid -n_{2,s} \mid -n_{3,s} \mid n_{1,s} \mid n_{2,s} \mid n_{3,s}] EA \alpha_T T + [-n_1 \mid -n_2 \mid -n_3 \mid n_1 \mid n_2 \mid n_3] EA_{,s} \alpha_T T \quad (6.1 - 13b)$$

Für Ermittlung des Lastvektors aus einer vorgegebenen Vorspannkraft kann die Herleitung sinngemäß durchgeführt werden.

$$\mathbf{V}_e^T = [n_1 \mid n_2 \mid n_3 \mid -n_1 \mid -n_2 \mid -n_3] N^0 \quad (6.1 - 14a)$$

$$\mathbf{V}_{e,s}^T = [n_{1,s} \mid n_{2,s} \mid n_{3,s} \mid -n_{1,s} \mid -n_{2,s} \mid -n_{3,s}] N^0 \quad (6.1 - 14b)$$

Die Gleichungen für die hergeleiteten Elementlasten des Fachwerkelements zeigen bei dem Lastfall aus Vorspannung nur eine Abhängigkeit von der formbeschreibenden Variablen. Dagegen sind alle anderen Lastfälle von den Querschnitts- und Formvariablen gleichzeitig abhängig.

### 6.1.3 Ableitungen der Spannungen und der Spannungsergebnierenden

Die Ermittlung der Spannungen und der resultierenden Stabkräfte erfolgt nach der üblichen Rückrechnung aus den Verschiebungen, wobei die Anfangsspannungen und Anfangsverschiebungen entsprechend berücksichtigt werden müssen.

$$\sigma'_{11} = E (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \varepsilon'_{11}^0) + \sigma'_{11}^0 \quad (6.1 - 15a)$$

$$N = EA (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \varepsilon'_{11}^0) + A\sigma'_{11}^0 \quad (6.1 - 15b)$$

Für die angegebenen Elementlasten aus dem vorhergehenden Abschnitt lassen sich die Spannungen und Stabkräfte entsprechend umformen.

$$\sigma'_{11} = E (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \alpha^T \mathbf{T}) + \frac{N^0}{A} \quad (6.1 - 16a)$$

$$N = EA (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \alpha^T \mathbf{T}) + N^0 \quad (6.1 - 16b)$$

Im Falle des hier verwendeten Elements mit linearen Ansatzfunktionen kann für eine Belastung aus Eigengewicht der Verschiebungsverlauf im Element nicht richtig abgebildet werden. Damit wird auch der Verlauf der Spannungen über die Elementgrenzen hinweg diskontinuierlich. Zur Korrektur der aus der Herleitung kommenden abschnittsweise konstanten Spannungen kann ein linearer Spannungsverlauf überlagert werden.

$$\sigma'_{11} = E (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \alpha^T \mathbf{T}) + \frac{N^0}{A} - \frac{\xi}{2} \mathbf{L} \mathbf{n}^T \mathbf{g} \quad (6.1 - 17a)$$

$$N = EA (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \alpha^T \mathbf{T}) + N^0 - \frac{\xi}{2} A \mathbf{L} \mathbf{n}^T \mathbf{g} \quad (6.1 - 17b)$$

Die Ableitungen der Spannungen und der resultierenden Stabkräfte lassen sich sinngemäß herleiten

$$\sigma'_{11,s} = E (\mathbf{B}_{,s} \mathbf{u}_e + \mathbf{B} \mathbf{u}_{e,s}) - \frac{A_{,s}}{A^2} N^0 - \frac{\xi}{2} (\mathbf{L}_{,s} \mathbf{n}^T + \mathbf{L} \mathbf{n}_{,s}^T) \mathbf{g} \quad (6.1 - 18a)$$

$$\begin{aligned} N_{,s} &= EA_{,s} (\mathbf{B} \mathbf{u}_e - \alpha^T \mathbf{T}) - \frac{\xi}{2} A_{,s} \mathbf{L} \mathbf{n}^T \mathbf{g} \\ &+ EA (\mathbf{B}_{,s} \mathbf{u}_e + \mathbf{B} \mathbf{u}_{e,s}) - \frac{\xi}{2} A (\mathbf{L}_{,s} \mathbf{n}^T + \mathbf{L} \mathbf{n}_{,s}^T) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (6.1 - 18b)$$

Aus Gl. (4.2-18) geht hervor, daß die Sensibilitätswerte für die Stabkräfte gegenüber denen der Spannungen mit einem höheren Aufwand ermittelt werden müssen.

### 6.1.4 Formulierung der Optimierungsfunktionen

Aus den vorhergehenden Abschnitten liegen die Elementgeometrie, Spannungen und Stabkräfte mit ihren Ableitungen nach den Optimierungsvariablen fest und können zur Formulierung der jeweiligen Funktionen für das Optimierungsproblem herangezogen werden.

#### Zielfunktion

Werden das Volumen oder Gewicht des Tragwerks als Zielfunktion in die Optimierungsaufgabe eingeführt, so gehen nur die Elementgeometrie und ihre Änderung mit der Entwurfsvariablen in diese Formulierung ein.

$$f_V = \sum_e \int_V dV = \sum_e A L = V \quad (6.1 - 19a)$$

$$f_W = \sum_e \int_V \gamma dV = \sum_e \gamma A L = W \quad (6.1 - 19b)$$

mit  $\gamma$  ... Spezifisches Gewicht

$$f_{V,s} = \sum_e \int_V dV_{,s} = \sum_e (A_{,s} L + A L_{,s}) = V_{,s} \quad (6.1 - 19c)$$

$$f_{W,s} = \sum_e \int_V \gamma dV_{,s} = \sum_e \gamma (A_{,s} L + A L_{,s}) = W_{,s} \quad (6.1 - 19d)$$

Bei der Spannungsausgleichsfunktion werden die Spannungen und Stabkräfte wie in Kapitel 4 eingeführt und im Sinne des Fehlerquadratminimums an einen vorgegebenen Wert angeglichen.

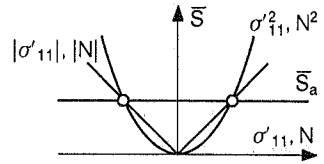
$$f_S = \sum_e \int_V (\bar{S} - \bar{S}_a)^2 dV = \sum_e A L (\bar{S} - \bar{S}_a)^2 \quad (6.1 - 20a)$$

$$f_{S,s} = \sum_e [(A_{,s} L + A L_{,s})(\bar{S} - \bar{S}_a)^2 + 2 A L (\bar{S} - \bar{S}_a) \bar{S}_{,s}] \quad (6.1 - 20b)$$

mit  $\bar{S} = \sigma'_{11}$ ,  $N$  bzw.  $\bar{S}_{,s} = \sigma'_{11,s}$ ,  $N_{,s}$

Eine Besonderheit bildet der Spannungsausgleich für den Fall, daß Stabspannungen bzw. Stabkräfte im Sinne von Vergleichsspannungen verwendet werden. Die Vergleichsspannungen errechnen sich für einen eindimensionalen Spannungszustand aus dem Betrag der Stabspannungen. Es ist leicht einzusehen, daß die Funktion für den Spannungsausgleich dann nicht mehr stetig ableitbar ist (vgl. Skizze). Diese unerwünschte Begleiterscheinung wird vermieden, indem in der Zielfunktion für den Spannungsausgleich die allgemeinen Spannungswerte  $\bar{S}$  und die zugehörigen Ausgleichswerte  $\bar{S}_a$  quadriert werden (Gl.6.1-20c,d).

$$\begin{aligned}
 f_s &= \sum_e \int_V (\bar{S}^2 - \bar{S}_a^2)^2 dV \\
 &= \sum_e A L (\bar{S}^2 - \bar{S}_a^2)^2
 \end{aligned} \quad (6.1 - 20c)$$



$$f_{s,s} = \sum_e [(A_{,s} L + A L_{,s}) (\bar{S}^2 - \bar{S}_a^2)^2 + 4 A L (\bar{S}^2 - \bar{S}_a^2) \bar{S} \bar{S}_{,s}] \quad (6.1 - 20d)$$

Diese modifizierte Spannungsausgleichsfunktion ist in einer höheren Form nicht-linear. Sie wird nur dann in Übereinstimmung mit den betragsmäßigen Vergleichsspannungen erfüllt, wenn sich für die optimale Lösung auch in jedem Stab die verlangten Ausgleichswerte ergeben. In der Regel ist in diesem Fall für eine Formoptimierung immer eine simultane Querschnittsoptimierung nötig.

Die Formulierung der Formänderungsenergie als Zielfunktion läßt sich unter Vernachlässigung von Temperaturdeformationen mit den vorliegenden Elementspannungen und deren Ableitung sehr einfach durchführen.

$$f_E = \frac{1}{2} \sum_e \int_V \sigma'_{11} \varepsilon'_{11} dV = \sum_e A L \frac{\sigma'^2_{11}}{2E} \quad (4.2 - 21a)$$

$$f_{E,s} = \sum_e [(A_{,s} L + A L_{,s}) \frac{\sigma'^2_{11}}{2E} + A L \frac{\sigma'_{11}}{E} \sigma'_{11,s}] \quad (4.2 - 21b)$$

### Gleichheitsnebenbedingung

Nachdem das Volumen und das Gewicht der Struktur bereits als Zielfunktion formuliert sind (Gl.6.1-19), lassen sich diese Funktionen und ihre Ableitungen auch für die Formulierung von Gleichheitsnebenbedingungen heranziehen, falls die Ausgangswerte durch die Optimierung nicht verändert werden sollen.

$$h_V = 1 - \frac{V}{V_0} \quad h_W = 1 - \frac{W}{W_0} \quad (6.1 - 22a,b)$$

$$h_{V,s} = - \frac{V_{,s}}{V_0} \quad h_{W,s} = - \frac{W_{,s}}{W_0} \quad (6.1 - 22c,d)$$

mit  $V_0, W_0$  ... Volumen bzw. Gewicht der Ausgangsstruktur

## Ungleichheitsnebenbedingungen

Die Kontrolle der Spannungen und Stabkräfte an den Elementknoten werden durch Ungleichheitsnebenbedingungen in allgemeiner Form definiert.

$$g_{\bar{S}} = 1 - \frac{\bar{S}}{\bar{S}_{zul.}} \geq 0 \quad (4.2 - 23a)$$

$$g_{\bar{S},s} = \frac{\bar{S} \bar{S}_{zul.,s}}{\bar{S}_{zul.}^2} - \frac{\bar{S}_{,s}}{\bar{S}_{zul.}} \quad (4.2 - 23b)$$

$$\text{mit } \bar{S} = \sigma'_{11}, N \quad \text{und} \quad \bar{S}_{,s} = \sigma'_{11,s}, N_{,s}$$

Für die zulässigen Spannungen werden zulässige Fließspannungen, die Knicklasten bzw. -spannungen für den perfekten Eulerstab, als auch verschiedene Knickspannungslinien aus DIN 18800 verwendet. Für die Kontrolle der Stabkräfte werden die entsprechenden Werte aus den zulässigen Spannungen ermittelt. Ein charakteristisches Merkmal dieser Nebenbedingung ist die zusätzliche Abhängigkeit der zulässigen Spannungen und Stabkräfte von der Geometrie des Elements, z.B. der Stablänge beim Knicken. Für den einfachen Fall des Euler'schen Knickstabs kann die Knickspannung durch die Einführung eines konstanten Formfaktors für bestimmte Profiltypen als Vergleichsspannung in die Nebenbedingung eingeführt werden.

$$\bar{S}_{zul.} = f \frac{\pi^2 EA}{L^2} \quad (6.1 - 24a)$$

$$\bar{S}_{zul.,s} = f \pi^2 E \left( \frac{A_{,s}}{L^2} - 2 \frac{A L_{,s}}{L^3} \right) \quad (6.1 - 24b)$$

$$\text{mit Formfaktor } f = \frac{I}{A^2} = \text{const.} \quad I \dots \text{Trägheitsmoment}$$

Aus Gl. (6.1-23) und Gl. (6.1-24) ist zu ersehen, daß eine Nebenbedingung zur Kontrolle des lokalen Versagens eines Elementes über Knickspannungen oder Knicklasten relativ aufwendige und hochgradig nichtlineare Funktionen für die Nebenbedingungen ergibt. Für die analytisch formulierten Ableitungen dieser Nebenbedingungen gilt das in besonderem Maße. Wirklichkeitsnahe Knickspannungslinien, wie sie z.B. in DIN 18800 angegeben sind, wurden in /Müller 1987/ ausführlich untersucht. Es zeigte sich dort, daß die Bildung der Ableitungen nach den Entwurfsvariablen eine besondere Schwierigkeit darstellen und eine Kontrolle des lokalen Versagens für einen Stab in der Regel nur durch zwei unabhängige Nebenbedingungen für Knicken und Fließen möglich ist. Dies ist vor allem auf diskontinuierliche Ableitungen der Knickspannungslinien zurückzuführen.

### 6.1.5 Elementspezifische Tragwerksantwort

Die Tragwerksantwort bei Fachwerken ist, von der strukturmechanischen Seite aus betrachtet, recht einfach, wenn es sich um linear-elastische Tragwerksberechnungen handelt. In der Strukturoptimierung muß dieses Tragverhalten jedoch in dem funktionalen Zusammenhang gesehen werden, wie er sich für allgemeine Optimierungsprobleme aus den variablen Form- und Querschnittsgrößen des Tragwerks ergibt. Im mathematischen Sinne sind die Optimierungsfunktionen bei Fachwerken irrationale Funktionen, welche auch Polstellen und Asymptoten beinhalten können.

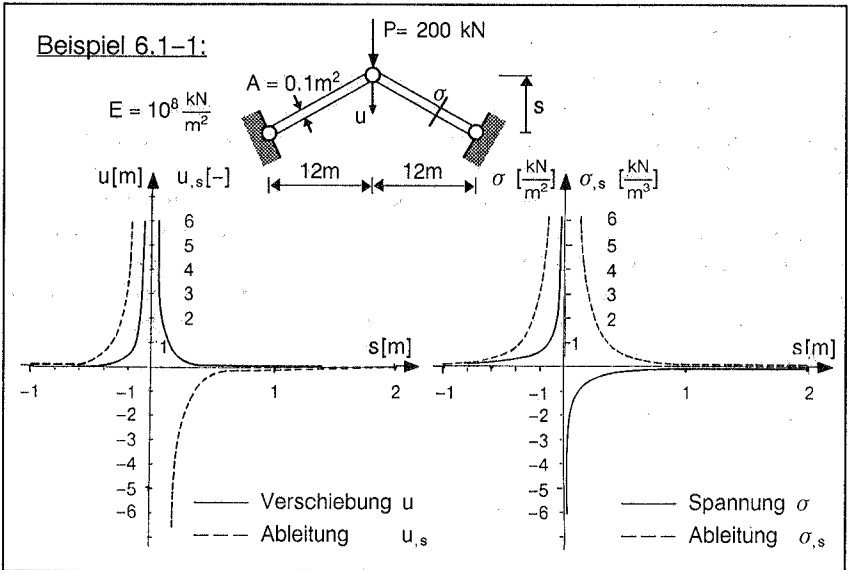


Bild 6.1-3: Dreigelenktragwerk mit nichtlinearer Tragwerksantwort

In Bild (6.1-3) ist das typische Tragverhalten eines Dreigelenktragwerks aus Fachwerkelementen dargestellt. Es zeigt sich hier anschaulich, daß Polstellen und Unstetigkeiten in den Optimierungsfunktionen und deren Ableitungen immer dann auftreten, wenn kinematische Systeme in der Formulierung der Optimierungsaufgabe zugelassen werden. Dieser Fall kommt dann zustande, wenn sich bei Fachwerken das gesamte Tragverhalten in der gestellten Optimierungsaufgabe ändern kann. Die Beanspruchung des Dreigelenktragwerks geht an der Unstetigkeitsstelle von einem druckbeanspruchten in ein zugbeanspruchtes Tragwerk über.

Bei der Form- und Querschnittsoptimierung von Fachwerken unter einem einzelnen Lastfall kann bei entsprechender Problemformulierung die Lösung aus einem annähernd kinematischen Tragwerk (z.B. Michell-Strukturen, /Reiner 1988/) be-

stehen. Solche Aufgaben sind unter dem Gesichtspunkt der numerischen Lösung der Optimierungsaufgabe sehr schwierig zu behandeln und resultieren in einem äußerst schlechten Konvergenzverhalten bei der iterativen Lösung des Optimierungsproblems. In der Regel ist eine sehr empfindliche Tragwerksantwort mit entsprechend hohen und sensiblen Funktions- und Ableitungswerten für dieses Verhalten verantwortlich. Dies gilt besonders dann, wenn die Nichtlinearität der Nebenbedingungen durch die Kontrolle der Knickspannungen erhöht wird.



## 6.2 Isoparametrisches degeneriertes Schalelement

Um den vielfachen Anforderungen der Strukturoptimierung und der Sensibilitätsanalyse Rechnung zu tragen, wurde im Rahmen dieser Arbeit die Familie der isoparametrischen degenerierten Schalelemente (Bild 6.2-1) verwendet. Die guten Ergebnisse, eine relativ einfache Formulierung hinsichtlich der direkten Sensibilitätsanalyse, sowie die Modellierung freier Schalenformen waren maßgebend für die Auswahl dieser Elemente.

Die Grundgleichungen der Schalelemente werden nach dem von Ahmad, Irons und Zienkiewicz /Ahmad 1970/ vorgestellten Konzept der Degeneration direkt aus dem dreidimensionalen Kontinuum hergeleitet. Die ausführliche Formulierung ist in /Ramm 1976/ angegeben, woraus teilweise die eingeführten Bezeichnungen übernommen wurden.

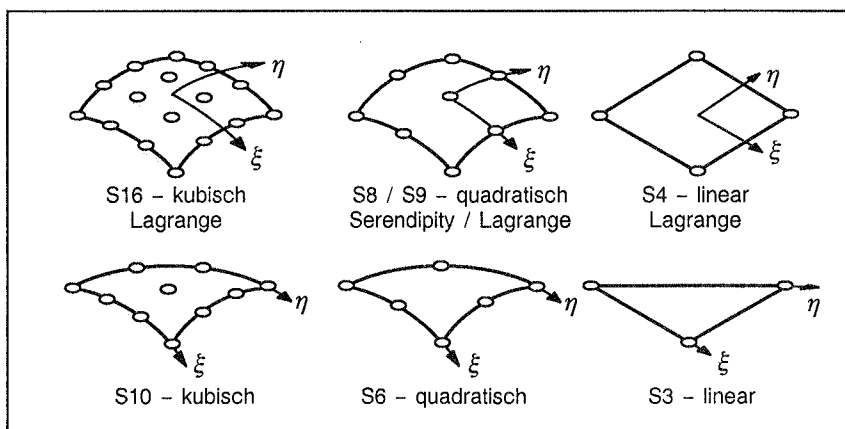


Bild 6.2-1: Familie der isoparametrischen degenerierten Schalelemente

Bei degenerierten Schalelementen wird der Rechenaufwand in hohem Maße durch die numerische Integration über das Elementvolumen bestimmt. Zur Verringerung dieses Aufwands kann vor allem die in /Zienkiewicz 1971/ beschriebene Vorabintegration über die Elementdicke beitragen. Die praktische Ausführung der Vorabintegration und ihre Auswirkung auf die Effizienz der Elementformulierung und das Elementverhalten sind in /Stegmüller 1985/ beschrieben. Aus dem Konzept der Degeneration und der eingeführten Vorabintegration über die Elementdicke des Schalelements ergeben sich folgende Annahmen:

- die Normale bleibt gerade und ändert bei der Verformung ihre Länge nicht und
- der Energieanteil aus den Normalspannungen in Richtung der Normalen wird durch ein anisotropes Werkstoffgesetz eliminiert.

Dadurch wird die Anwendung der betrachteten Elemente auf "mäßig" dicke Schalen eingeschränkt. Bei der simultanen Form- und Querschnittsoptimierung können sich Schlankheitsverhältnisse und Tragverhalten der Schalen während des Optimierungsprozesses wesentlich ändern, was eine Überprüfung der aus der Herleitung kommenden Einschränkungen immer wieder voraussetzt.

$\mathbf{u}_i^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \Delta\phi^1 \ \Delta\psi^1 \   \ u_1^2 \ u_2^2 \ u_3^2 \ \Delta\phi^2 \ \Delta\psi^2 \   \ \dots$	$u_1 \ u_2 \ u_3 \ \Delta\phi^1 \ \Delta\psi^1]$		
		$i = 1, k \dots$	Anzahl der Knoten
$\boldsymbol{\varepsilon}_e^T = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23}]$		$\varepsilon_{ij} \dots$	Elemente des Verzerrungstensors
$\boldsymbol{\sigma}_e^T = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}]$		$\sigma_{ij} \dots$	Elemente des Spannungstensors
$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e$			Operatormatrix <b>B</b>
$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_e$			Materialmatrix <b>C</b>
$\boldsymbol{\Phi}^K = [\Phi^1 \   \ \Phi^2 \   \ \dots \ \Phi^i]$			Ansatzfunktionen
$\hat{\mathbf{p}}^T = [\hat{p}_1 \ \hat{p}_2 \ \hat{p}_3]$			Volumenkräfte
$\hat{\mathbf{t}}^T = [\hat{t}_1 \ \hat{t}_2 \ \hat{t}_3]$			Oberflächenkräfte

Tabelle 6.2-1: Definition der Elementgrößen.

Eine direkte Formulierung der Sensibilität des Schalenelements in analytischer Form umfasst alle Operationen, die sich bei der Herleitung des Elements aus der Degeneration und Vorabintegration ergeben. Aufgrund der Herleitung des Schalenelements aus dem dreidimensionalen Kontinuum kann die Formulierung der elementbezogenen Sensibilitäten sinngemäß zu der in /Wang 1985/ für dreidimensionale Kontinuumselemente durchgeführten Weise erfolgen. Da die Ausgangsgrößen in die nach den Entwurfsvariablen abgeleiteten Gleichungen, Matrizen und Parameter immer wieder eingehen, ist die Elementformulierung entsprechend /Ramm 1976, Stegmüller 1985/ nur knapp wiedergegeben. Die in Gl. (4-23) eingeführten Größen sind für die hier verwendeten Schalenelemente in Tabelle 6.2-1 definiert.

Die Anwendung isoparametrischer degenerierter Schalenelemente in der Strukturoptimierung ist nicht völlig unproblematisch. Die einzelnen Elemente der isoparametrischen Elementfamilie weisen ein sehr unterschiedliches Elementverhalten auf. Insbesondere zeigen die niedrig interpolierten Elemente den unerwünschten Effekt des "shear"- und "membrane locking". Durch eine falsche strukturelle Modellierung kann das Ergebnis der gelösten Optimierungsaufgabe verfälscht oder sogar unbrauchbar werden. Diese Problematik wird auch hinsichtlich

der elementbezogenen Sensibilitätsanalyse im Abschnitt 6.2.5 zum Verhalten dieser Elemente genauer behandelt.

## 6.2.1 Ableitungen der Elementgeometrie und Elementverschiebungen

Bei der Beschreibung der Elementgeometrie und ihrer Änderung mit den Entwurfsvariablen wird von der in Kapitel 3 eingeführten Abbildung der Strukturgeometrie auf die Geometrie der Schalenelemente ausgegangen. Aus dieser Abbildung liegen die variablen Form- und Querschnittswerte des Elementes und ihre Ableitungen nach den übergeordneten Strukturvariablen vor und können elementweise zur Approximation der Schalengeometrie in die Ansatzfunktionen der verschiedenen Elementtypen (Bild 6.2-1) eingesetzt werden. Diese Funktionen werden im Sinne eines isoparametrischen Elementansatzes ebenfalls zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes und dessen Änderung mit den Entwurfsvariablen auf der Strukturebene verwendet.

### Ansatzfunktionen für die Schalengeometrie

Für die Beschreibung der Geometrie des Schalenelements wird in /Ramm 1976/ ein isoparametrischer Ansatz eingeführt (6.2-1a), und in Gl. (6.2-1b) nach den Form- und Querschnittsvariablen abgeleitet.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \Phi^i \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^k \Phi^i h^i \begin{bmatrix} \cos \psi_1^i \\ \cos \psi_2^i \\ \cos \psi_3^i \end{bmatrix} \quad (6.2-1a)$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \\ x_{3,s} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \Phi^i \begin{bmatrix} x_{1,s}^i \\ x_{2,s}^i \\ x_{3,s}^i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^k \Phi^i (h^i_{,s} \begin{bmatrix} \cos \psi_1^i \\ \cos \psi_2^i \\ \cos \psi_3^i \end{bmatrix} + h^i \begin{bmatrix} \cos \psi_1^i \\ \cos \psi_2^i \\ \cos \psi_3^i \end{bmatrix}_{,s}) \quad (6.2-1b)$$

Mit Gl. (6.2-1) wird deutlich, daß eine Änderung der Geometrie des Schalenelements in der Mittelfläche nur von den Ableitungen der Knotenkoordinaten abhängen. In Normalenrichtung ist die Schalengeometrie sowohl von der Änderung der Elementdicke als auch der Änderung der Normalen (Bild 6.2-2) abhängig. Zur Bestimmung der Normalen auf die Mittelfläche des Schalenelements sowie deren Änderungen mit der Entwurfsvariablen muß die Jacobi-Matrix und deren Ableitung in der Elementmittelfläche aufgestellt werden.

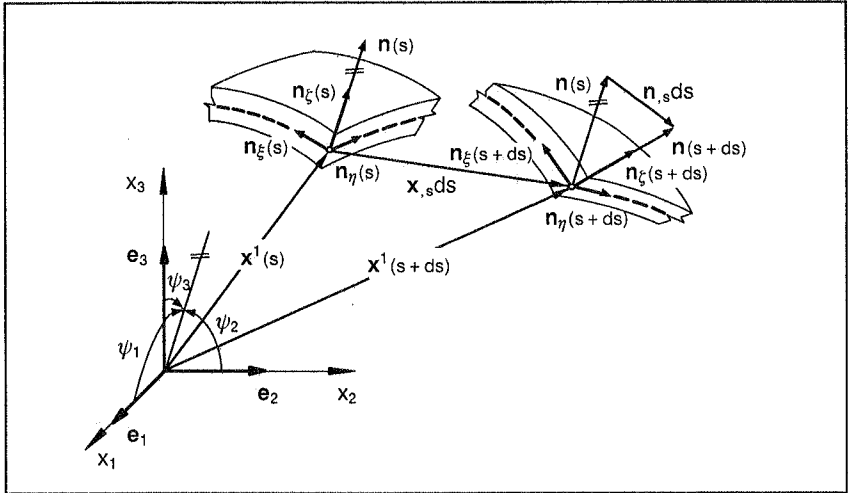


Bild 6.2-2: Änderung der Schallnormale mit der Entwurfsvariablen.

### Jacobi-Matrix

Durch die Jacobi-Matrix wird die Transformation zwischen den lokalen, krummlinigen und den globalen Koordinaten angegeben.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\xi^T \\ \mathbf{n}_\eta^T \\ \mathbf{n}_\zeta^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_1^i & \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_2^i & \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_3^i \\ \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_1^i & \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_2^i & \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_3^i \\ \frac{1}{2} \sum_i \Phi^i \tilde{f}_1^i & \frac{1}{2} \sum_i \Phi^i \tilde{f}_2^i & \frac{1}{2} \sum_i \Phi^i \tilde{f}_3^i \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } f_j^i = x_j^i + \frac{\zeta}{2} \tilde{f}_j^i \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (6.2 - 2a)$$

$$\text{und } \tilde{f}_j^i = h^i \cos \psi_j^i$$

Die Ableitung der Jacobi-Matrix nach den Entwurfsvariablen ergibt sich aus der Ableitung der einzelnen Matrixelemente.

$$\mathbf{J}_{,s} = \begin{bmatrix} J_{11,s} & J_{12,s} & J_{13,s} \\ J_{21,s} & J_{22,s} & J_{23,s} \\ J_{31,s} & J_{32,s} & J_{33,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\xi,s}^T \\ \mathbf{n}_{\eta,s}^T \\ \mathbf{n}_{\zeta,s}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_{1,s}^i & \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_{2,s}^i & \sum_i \Phi_{,\xi}^i f_{3,s}^i \\ \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_{1,s}^i & \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_{2,s}^i & \sum_i \Phi_{,\eta}^i f_{3,s}^i \\ \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{,\zeta}^i \tilde{f}_{1,s}^i & \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{,\zeta}^i \tilde{f}_{2,s}^i & \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{,\zeta}^i \tilde{f}_{3,s}^i \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } f_{j,s}^i = x_{j,s}^i + \frac{\zeta}{2} \tilde{f}_{j,s}^i \quad \text{für } j = 1,2,3 \quad (6.2 - 2b)$$

$$\text{und } \tilde{f}_{j,s}^i = h_{,s}^i \cos \psi_j^i + h^i (\cos \psi_j^i)_{,s}$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix gibt die Transformation des rechtwinkligen in das krummlinige Volumenelement für die Integration in den lokalen Koordinaten an.

$$dV = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (6.2 - 3a)$$

mit  $|\mathbf{J}| = [\mathbf{n}_{\xi}, \mathbf{n}_{\eta}, \mathbf{n}_{\zeta}]$  (Spatprodukt, s./Deszer 1975/)

Für die Änderung des Volumenelements infolge einer Änderung der Entwurfsvariablen ergibt sich sinngemäß:

$$dV_{,s} = |\mathbf{J}|_{,s} d\xi d\eta d\zeta \quad (6.2 - 3b)$$

$$\text{mit } |\mathbf{J}|_{,s} = [\mathbf{n}_{\xi,s}, \mathbf{n}_{\eta}, \mathbf{n}_{\zeta}] + [\mathbf{n}_{\xi}, \mathbf{n}_{\eta,s}, \mathbf{n}_{\zeta}] + [\mathbf{n}_{\xi}, \mathbf{n}_{\eta}, \mathbf{n}_{\zeta,s}]$$

Für die Erstellung des  $\mathbf{B}$ -Operators müssen die Elemente der inversen Jacobi-Matrix ermittelt werden. Da die Determinante  $|\mathbf{J}|$  bereits vorliegt, wird die Jacobi-Matrix am besten mit der Cramer'schen Regel invertiert.

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{23}J_{31} - J_{33}J_{21} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} = \frac{\bar{\mathbf{J}}^{-1}}{|\mathbf{J}|} \quad (6.2 - 4)$$

Die Ableitung der inversen Jacobi-Matrix läßt sich folgendermaßen ermitteln /Wang 1985/ :

$$(\mathbf{J}^{-1})_{,s} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_{,s} \mathbf{J}^{-1} \quad (6.2 - 5)$$

Am effektivsten läßt sich hier jedoch unter Vermeidung der aufwendigen Rechenoperationen in Gl.(6.2-5) die Gl.(6.2-4) direkt ableiten,

$$(\bar{\mathbf{J}}^{-1})_{,s} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \bar{\mathbf{J}}_{,s}^{-1} - \frac{|\mathbf{J}|_{,s}}{|\mathbf{J}|^2} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \quad (6.2-6)$$

wobei  $(\bar{\mathbf{J}}^{-1})_{,s}$  die nach der Produktregel und der Kettenregel partiell abgeleitete Matrix  $\bar{\mathbf{J}}^{-1}$  aus Gleichung (6.2-4) ist.

### Lokales Koordinatensystem

Durch die Gleichung (6.2-2a) sind die Richtungsvektoren der lokalen, krummlinigen Koordinaten bestimmt. Für die Ermittlung der Normalenwinkel und die Transformation der lokal formulierten Materialmatrix in das globale Koordinatensystem ist, wie in /Stegmüller 1985/ beschrieben, die Definition von normierten, orthogonalen Koordinaten auf Elementebene (Bild 6.2-3) und deren Änderung mit den Entwurfsvariablen notwendig.

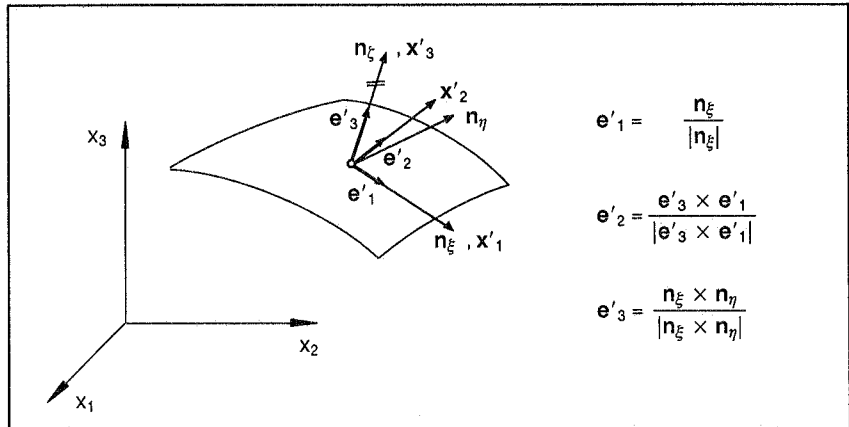


Bild 6.2-3: Definition des lokalen Koordinatensystems

Bei der Ermittlung der lokalen Koordinaten werden zuerst deren Richtungsvektoren aufgestellt und dann normiert. Dadurch läßt sich die Änderung dieser Koordinaten durch die Entwurfsvariable in Gleichung (6.2-7) einfacher ausdrücken.

$$\mathbf{e}'_i = \begin{bmatrix} e'_{i1} \\ e'_{i2} \\ e'_{i3} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ x'_{i2} \\ x'_{i3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x'_{i1} = J_{i1} \\ x'_{i2} = J_{i2} \\ x'_{i3} = J_{i3} \end{array} \quad (6.2-7a)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} e'_{21} \\ e'_{22} \\ e'_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} x'_{21} \\ x'_{22} \\ x'_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x'_{21} = x'_{13}x'_{32} - x'_{12}x'_{33} \\ x'_{22} = x'_{11}x'_{33} - x'_{11}x'_{31} \\ x'_{23} = x'_{12}x'_{31} - x'_{11}x'_{32} \end{array} \quad (6.2 - 7b)$$

$$\mathbf{e}'_3 = \begin{bmatrix} e'_{31} \\ e'_{32} \\ e'_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} x'_{31} \\ x'_{32} \\ x'_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x'_{31} = J_{23} J_{12} - J_{22} J_{13} \\ x'_{32} = J_{21} J_{13} - J_{23} J_{11} \\ x'_{33} = J_{22} J_{11} - J_{21} J_{12} \end{array} \quad (6.2 - 7c)$$

$$\text{mit } l_j = \sqrt{(x'_{j1})^2 + (x'_{j2})^2 + (x'_{j3})^2} \quad j = 1,2,3$$

Die Ableitung der lokalen Basisvektoren kann in folgender Form angegeben werden:

$$\mathbf{e}'_{j,s} = \frac{1}{l_j} \mathbf{x}'_{j,s} - \frac{l_{j,s}}{l_j^2} \mathbf{x}'_j \quad (6.2 - 8)$$

$$\text{mit } l_{j,s} = \frac{1}{l_j} (x'_{j1} x'_{j1,s} + x'_{j2} x'_{j2,s} + x'_{j3} x'_{j3,s}) \quad j = 1,2,3$$

### Normalenwinkel

Für die Ermittlung der Normalenwinkel und deren Ableitungen werden die Matrizen  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{J}_s$  nach den Gleichungen (6.2-2a) und (6.2-2b) in der Schalennittelfläche ( $\zeta = 0$ ) ausgewertet. Aus dem anschließend aufgestellten normierten, orthogonalen Koordinatensystem im betrachteten Punkt  $i$  des Elements lassen sich die Richtungscosinus der Normalen und die entsprechenden Ableitungen direkt angeben.

$$\cos \psi_j^i = e_{3j}^i \quad \text{für } j = 1,2,3 \quad (6.2 - 9a)$$

$$(\cos \psi_j^i)_s = e_{3j,s}^i \quad \text{für } j = 1,2,3 \quad (6.2 - 9b)$$

### Ansatzfunktion für die Verschiebungen

Das Verschiebungsfeld des Schalelementes wird entsprechend der Geometrie mit denselben Ansatzfunktionen dargestellt. Die drei Rotationen der Normalen werden, wie in /Ramm 1976/ angegeben, durch zwei unabhängige Rotationen ausgedrückt. Für die Erstellung der Steifigkeitsmatrix werden die trigonometrischen Funktionen bei der Herleitung der Elementgrößen linearisiert.

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  (Gl.6.2-10) ist so eingeführt, daß die unabhängigen Rotationen in den globalen Koordinaten (Bild 6.2-4) und die Verschiebungen di-

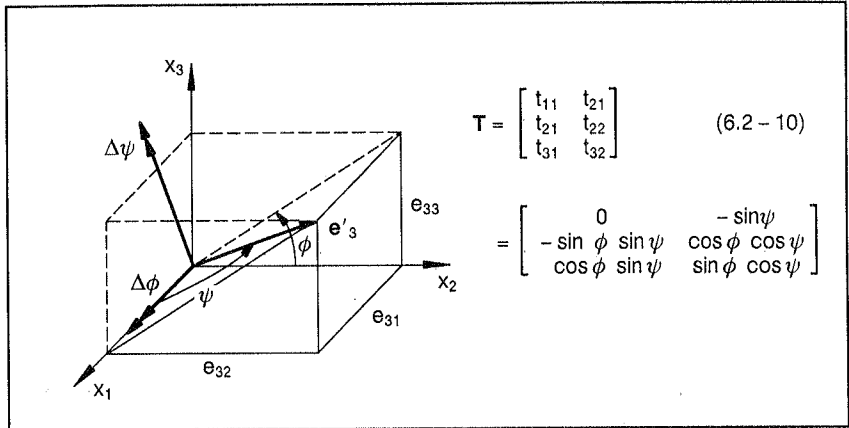


Bild 6.2-4: Unabhängige Rotationen der Schalennormalen

rekt, wie in den Gleichungen (6.2-11a,b) angegeben, durch fünf unabhängige Knotenverschiebungen ausgedrückt werden können.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \Phi^i \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^k \Phi^i h^i \mathbf{T}^i \begin{bmatrix} \Delta\phi^i \\ \Delta\psi^i \end{bmatrix} \quad (6.2-11a)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,s} \\ u_{2,s} \\ u_{3,s} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \Phi^i \begin{bmatrix} u_{1,s}^i \\ u_{2,s}^i \\ u_{3,s}^i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^k \Phi^i (h_{i,s}^i \mathbf{T}^i \begin{bmatrix} \Delta\phi^i \\ \Delta\psi^i \end{bmatrix} + h^i \mathbf{T}_{i,s}^i \begin{bmatrix} \Delta\phi^i \\ \Delta\psi^i \end{bmatrix} + h^i \mathbf{T}^i \begin{bmatrix} \Delta\phi_{i,s}^i \\ \Delta\psi_{i,s}^i \end{bmatrix}) \quad (6.2-11b)$$

Mit Gl.(6.2-11b) wird deutlich, daß eine Ableitung der Verschiebungen nach den Entwurfsvariablen neben den abgeleiteten Knotenverschiebungen auch die Ableitungen der Knotendicken enthalten. Darüber hinaus werden die abgeleiteten Elemente der in Gl.(6.2-10) definierten Transformationsmatrix benötigt. Da bei der Ableitung der trigonometrischen Ausdrücke die Winkel selbst nie vorliegen, müssen diese Größen in der Matrix  $\mathbf{T}$  durch die Richtungscosinus der Normalen ersetzt und entsprechend abgeleitet werden.



$$\cos \psi = e'_{31} \quad \sin \psi = \sqrt{1 - e'^2_{31}} \quad (6.2 - 12a)$$

$$\cos \varphi = \frac{e'_{32}}{\bar{l}} \quad \sin \varphi = \frac{e'_{33}}{\bar{l}} \quad \text{mit } \bar{l} = \sqrt{e'^2_{32} + e'^2_{33}}$$

$$(\cos \psi)_{,s} = e'_{31,s} \quad (\sin \psi)_{,s} = \frac{-e'_{31}e'_{31,s}}{\sin \psi} \quad (6.2 - 12b)$$

$$(\cos \varphi)_{,s} = \frac{1}{\bar{l}^2} (e'_{32,s}\bar{l} - e'_{32}\bar{l}_{,s}) \quad (\sin \varphi)_{,s} = \frac{1}{\bar{l}^2} (e'_{33,s}\bar{l} - e'_{33}\bar{l}_{,s})$$

$$\text{mit } \bar{l}_{,s} = \frac{1}{\bar{l}} (e'_{32,s}e'_{32} + e'_{33,s}e'_{33})$$

Damit kann die abgeleitete Form der Transformationsmatrix angegeben werden.

$$\mathbf{T}_{,s} = \begin{bmatrix} t_{11,s} & t_{12,s} \\ t_{21,s} & t_{22,s} \\ t_{31,s} & t_{32,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(\sin \psi)_{,s} \\ -(\sin \varphi)_{,s} \sin \psi & -(\cos \varphi)_{,s} \cos \psi \\ -\sin \varphi (\sin \psi)_{,s} & + \cos \varphi (\cos \psi)_{,s} \\ (\cos \varphi)_{,s} \sin \psi & (\sin \varphi)_{,s} \cos \psi \\ + \cos \varphi (\sin \psi)_{,s} & + \sin \varphi (\cos \psi)_{,s} \end{bmatrix} \quad (6.2 - 13)$$

## 6.2.2 Steifigkeitsmatrix und konsistente Elementlastvektoren

Durch die Integrale in Gl.(4.23) sind die Steifigkeitsmatrix und die konsistenten Lastvektoren des Schalenelements angegeben, welche durch eine numerische Volumenintegration über das Elementvolumen erstellt werden. Wie in /Stegmüller 1985/ eingeführt, werden die dickenabhängigen Integranden aus den Integralausdrücken eliminiert und analytisch durch eine Vorabintegration ausgewertet.

### Differentielles Volumenelement

Die für die Vorabintegration getroffenen Annahmen lassen eine Umformung des differentiellen Volumenelements zu. Nach der analytisch ausgeführten Dickenintegration bleibt dann nur noch eine numerisch ausgeführte Integration über die Elementmittelfläche übrig.

$$\int_V \dots dV = \int_V \dots |J| d\xi d\eta d\zeta \simeq \int_A \int_\zeta \dots \frac{h}{2} dAd\zeta = \int_s \int_\eta \dots h l_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 14a)$$

$$\text{mit } l_3 = \sqrt{(x'_{31})^2 + (x'_{32})^2 + (x'_{33})^2}$$

Die Änderung des differentiellen Volumenelements mit der Entwurfsvariablen geht aus der Ableitung von Gl.(6.2-15a) hervor.

$$\int_V \dots dV_{,s} = \int_V \dots |J|_{,s} d\xi d\eta d\zeta \simeq \int_{\xi} \int_{\eta} \dots [h_{,s} l_3 + h l_{3,s}] d\xi d\eta \quad (6.2 - 14b)$$

$$\text{mit } l_{3,s} = \frac{1}{l_3} (x_{31}' x_{31,s}' + x_{32}' x_{32,s}' + x_{33}' x_{33,s}')$$

### B-Operator

Für die formale Durchführung der Vorabintegration wird der **B**-Operator nach Gl.(6.2-16a) aufgespalten,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \frac{h}{2} \zeta \mathbf{B}_3 \quad (6.2 - 15a)$$

wobei die drei Teilmatrizen Ausschnitte aus der in Gl.(6.2-16a) definierten Operatormatrix  $\bar{\mathbf{B}}$  sind /Stegmüller 1985/. Die Ableitungen des **B**-Operators nach den Entwurfsvariablen können entsprechend aufgespalten (6.2-15b) werden.

$$\mathbf{B}_{,s} = \mathbf{B}_{1,s} + \mathbf{B}_{2,s} + \frac{h_{,s}}{2} \zeta \mathbf{B}_3 + \frac{h}{2} \zeta \mathbf{B}_{3,s} \quad (6.2 - 15b)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \begin{bmatrix} \Phi'_{,1} & 0 & 0 & \bar{\Phi}'_{,1t_{11}} & \bar{\Phi}'_{,1t_{12}} \\ 0 & \Phi'_{,2} & 0 & \bar{\Phi}'_{,2t_{21}} & \bar{\Phi}'_{,2t_{22}} \\ 0 & 0 & \Phi'_{,3} & \bar{\Phi}'_{,3t_{31}} & \bar{\Phi}'_{,3t_{32}} \\ \Phi'_{,2} & \Phi'_{,1} & 0 & \bar{\Phi}'_{,2t_{11}} + \bar{\Phi}'_{,1t_{21}} & \bar{\Phi}'_{,2t_{12}} + \bar{\Phi}'_{,1t_{22}} \\ \Phi'_{,3} & 0 & \Phi'_{,1} & \bar{\Phi}'_{,3t_{11}} + \bar{\Phi}'_{,1t_{31}} & \bar{\Phi}'_{,3t_{12}} + \bar{\Phi}'_{,1t_{32}} \\ 0 & \Phi'_{,3} & \Phi'_{,2} & \bar{\Phi}'_{,3t_{21}} + \bar{\Phi}'_{,2t_{31}} & \bar{\Phi}'_{,3t_{22}} + \bar{\Phi}'_{,2t_{32}} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{,j}^i = J_{j1}^{-1} \Phi_{,\xi}^i + J_{j2}^{-1} \Phi_{,\eta}^i \quad \bar{\Phi}_{,j}^i = \frac{h}{2} (J_{j3}^{-1} \Phi_{,\xi}^i + \zeta \Phi_{,j}^i) \quad (6.2 - 16a)$$

Dabei entsteht eine von der Dickenvariablen abhängige Teilmatrix, welche bei der Erstellung der Steifigkeitsmatrix besonders behandelt werden muß. Der Knotenanteil der Matrix  $\bar{\mathbf{B}}$  ist mit den entsprechenden Ableitungen in Gl.(6.2-16a) und Gl.(6.2-16b) angegeben. Die darin enthaltenen Größen  $J_{jk}^{-1}$  und  $J_{jk,s}^{-1}$  sind jeweils die Elemente der inversen bzw. der inversen, abgeleiteten Jacobi-Matrix.

$$\bar{\mathbf{B}}_{,s}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi'_{,1}}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{11} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{11,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{12} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{12,s} \\ 0 & \frac{\partial \Phi'_{,2}}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{21} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{21,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{22} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{22,s} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi'_{,3}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{31} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{31,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{32} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{32,s} \\ \frac{\partial \Phi'_{,2}}{\partial s} & \frac{\partial \Phi'_{,1}}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{11} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{11,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{21} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{21,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{12} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{12,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{22} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{22,s} \\ \frac{\partial \Phi'_{,3}}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \Phi'_{,1}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{11} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{11,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{31} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{31,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{12} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{12,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,1}}{\partial s} t_{32} + \bar{\Phi}'_{,1} t_{32,s} \\ 0 & \frac{\partial \Phi'_{,3}}{\partial s} & \frac{\partial \Phi'_{,2}}{\partial s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{21} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{21,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{31} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{31,s} & \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,3}}{\partial s} t_{22} + \bar{\Phi}'_{,3} t_{22,s} + \frac{\partial \bar{\Phi}'_{,2}}{\partial s} t_{32} + \bar{\Phi}'_{,2} t_{32,s} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi'_{,j}}{\partial s} = J_{j1,s}^{-1} \Phi'_{, \xi} + J_{j2,s}^{-1} \Phi'_{, \eta} \quad (6.2 - 16b)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}'_{,j}}{\partial s} = \frac{h_{,s}}{2} (J_{j3}^{-1} \Phi'_{, \xi} + \zeta \Phi'_{,j}) + \frac{h}{2} (J_{j3,s}^{-1} \Phi'_{, \xi} + \zeta \frac{\partial \Phi'_{,j}}{\partial s})$$

### Materialmatrix

Die konstitutive Gleichung wird nach /Ramm 1976/ durch die lokal aufgestellte Materialmatrix  $\mathbf{C}'$  angegeben Gl.(6.2-17) und durch eine Tensortransformation 4. Stufe Gl.(6.2-18) in die globalen Koordinaten transformiert.

$$\sigma'_e = \mathbf{C}' \varepsilon'_e \quad (6.2 - 17)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} \mathbf{C}' \mathbf{G}^T \quad (6.2 - 18)$$

Zur Definition der Transformationsmatrix  $\mathbf{G}$  (6.2-19) wird das bereits festgelegte lokale, normierte Koordinatensystem verwendet, wobei die Matrixelemente in  $\mathbf{G}$  durch die Richtungscosinus der Normalen ausgedrückt werden.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix}
 e_{11}^{\prime 2} & e_{12}^{\prime 2} & e_{13}^{\prime 2} & e_{11}^{\prime} e_{12}^{\prime} & e_{11}^{\prime} e_{13}^{\prime} & e_{12}^{\prime} e_{13}^{\prime} \\
 e_{21}^{\prime 2} & e_{22}^{\prime 2} & e_{23}^{\prime 2} & e_{21}^{\prime} e_{22}^{\prime} & e_{21}^{\prime} e_{23}^{\prime} & e_{22}^{\prime} e_{23}^{\prime} \\
 e_{31}^{\prime 2} & e_{32}^{\prime 2} & e_{33}^{\prime 2} & e_{31}^{\prime} e_{32}^{\prime} & e_{31}^{\prime} e_{33}^{\prime} & e_{32}^{\prime} e_{33}^{\prime} \\
 2e_{11}^{\prime} e_{21}^{\prime} & 2e_{12}^{\prime} e_{22}^{\prime} & 2e_{13}^{\prime} e_{23}^{\prime} & e_{11}^{\prime} e_{22}^{\prime} + e_{21}^{\prime} e_{12}^{\prime} & e_{11}^{\prime} e_{23}^{\prime} + e_{21}^{\prime} e_{13}^{\prime} & e_{12}^{\prime} e_{23}^{\prime} + e_{22}^{\prime} e_{13}^{\prime} \\
 2e_{11}^{\prime} e_{31}^{\prime} & 2e_{12}^{\prime} e_{32}^{\prime} & 2e_{13}^{\prime} e_{33}^{\prime} & e_{11}^{\prime} e_{32}^{\prime} + e_{31}^{\prime} e_{12}^{\prime} & e_{11}^{\prime} e_{33}^{\prime} + e_{31}^{\prime} e_{13}^{\prime} & e_{13}^{\prime} e_{33}^{\prime} + e_{32}^{\prime} e_{13}^{\prime} \\
 2e_{21}^{\prime} e_{31}^{\prime} & 2e_{22}^{\prime} e_{32}^{\prime} & 2e_{23}^{\prime} e_{33}^{\prime} & e_{21}^{\prime} e_{32}^{\prime} + e_{31}^{\prime} e_{22}^{\prime} & e_{21}^{\prime} e_{33}^{\prime} + e_{31}^{\prime} e_{23}^{\prime} & e_{22}^{\prime} e_{33}^{\prime} + e_{32}^{\prime} e_{23}^{\prime}
 \end{bmatrix}$$

(6.2 – 19)

Diese Transformationsmatrix ist bei der Optimierung der Tragwerksform über die Normalenwinkel von der Entwurfsvariablen abhängig und muß entsprechend abgeleitet werden. Die Matrix  $\mathbf{G}_s$  wird mit den bekannten Ableitungsregeln unter Verwendung der Normalenwinkel  $e_{ij}$  und deren Ableitungen  $e_{ij,s}$  aufgestellt. Damit ergibt sich auch die Ableitung der Materialmatrix in den globalen Koordinaten.

$$\mathbf{C}_{,s} = \mathbf{G}_{,s} \mathbf{C}' \mathbf{G}^T + \mathbf{G} \mathbf{C}' \mathbf{G}_{,s}^T$$

(6.2 – 20)

### Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix wird entsprechend Gl.(4-23) durch numerische Integration über das Elementvolumen aufgestellt. Die analytische Vorabintegration über die Elementdicke kann dabei durch entsprechend eingeführte Materialmatrizen durchgeführt werden.

$$\mathbf{D} = \mathbf{C} \mathbf{h} \qquad \mathbf{D}_{,s} = \mathbf{C}_{,s} \mathbf{h} + \mathbf{C} \mathbf{h}_{,s}$$

(6.2 – 21a,b)

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} \frac{h^3}{12} \qquad \mathbf{E}_{,s} = \mathbf{C}_{,s} \frac{h^3}{12} + \mathbf{C} \frac{h^2}{4} h_{,s}$$

(6.2 – 22a,b)

Die Matrizenmultiplikation zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix wird unter Berücksichtigung des aufgespaltenen  $\mathbf{B}$ -Operators in zerlegter Form durchgeführt. Der Knotenanteil der Elementsteifigkeitsmatrix setzt sich danach aus vier Teilmatrizen zusammen.

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{K}_4 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}_{ij} \quad (6.2 - 23a)$$

mit

$$\mathbf{K}_1 = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 l_3 d\xi d\eta \quad \mathbf{K}_2 = \int_A (\mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3) l_3 d\xi d\eta$$

$$\mathbf{K}_3 = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 l_3 d\xi d\eta \quad \mathbf{K}_4 = \int_A \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 l_3 d\xi d\eta = \mathbf{K}_3^T$$

Die Änderung der knotenbezogenen Elementsteifigkeitsmatrix mit den Entwurfsvariablen läßt sich entsprechend herleiten:

$$\mathbf{K}_{ij,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,s} & \mathbf{K}_{3,s} \\ \mathbf{K}_{4,s} & \mathbf{K}_{2,s} \end{bmatrix}_{ij} \quad (6.2 - 23b)$$

mit

$$\mathbf{K}_{1,s} = \int_A [(\mathbf{B}_{1,s}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_{,s} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{1,s}) l_3 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 l_{3,s}] d\xi d\eta$$

$$\mathbf{K}_{2,s} = \int_A [(\mathbf{B}_{2,s}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_{,s} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{2,s}) l_3 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 l_{3,s} + (\mathbf{B}_{3,s}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{E}_{,s} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{3,s}) l_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3 l_{3,s}] d\xi d\eta$$

$$\mathbf{K}_{3,s} = \int_A [(\mathbf{B}_{1,s}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_{,s} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{2,s}) l_3 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 l_{3,s}] d\xi d\eta$$

$$\mathbf{K}_{4,s} = \int_A [(\mathbf{B}_{2,s}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_{,s} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{1,s}) l_3 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 l_{3,s}] d\xi d\eta = \mathbf{K}_{3,s}^T$$

Sämtliche Matrizenoperationen in den Gleichungen (6.2-23a) und (6.2-23b) werden im Programm in ausmultiplizierter Form durchgeführt, um unnötige Nulloperationen bei der Erstellung der Steifigkeitsmatrizen zu vermeiden.

### Konsistente Elementlastvektoren

Durch den Ausdruck der äußeren Arbeiten in Gl.(4-23) sind die Lasten angegeben, welche nach der Integration über das Elementvolumen die Volumens- und Oberflächenkräfte ergeben. Im allgemeinen Fall der simultanen Form- und Querschnittsoptimierung sind beide Arten von Elementlasten von den Entwurfsvariablen abhängig. Bei der reinen Querschnittsoptimierung ergeben nur die Volumenskräfte einen Anteil für die abgeleitete rechte Seite des Gleichungssystems. Für

die in der Strukturoptimierung wichtigen Elementlasten wie Eigengewicht ( $\mathbf{G}_e$ ), Lasten aus Zentrifugalbeschleunigung ( $\mathbf{Z}_e$ ), Druck- ( $\mathbf{P}_e$ ) und projizierte Flächenbelastung ( $\mathbf{Q}_e$ ) werden die Elementlastvektoren hergeleitet und die Ableitungen nach den Entwurfsvariablen gebildet.

$$\mathbf{R}_e = \underbrace{\mathbf{G}_e + \mathbf{Z}_e}_{\text{Volumenskräfte}} + \underbrace{\mathbf{P}_e + \mathbf{Q}_e}_{\text{Oberflächenkräfte}} \quad (43 - 24a)$$

$$\mathbf{R}_{e,s} = \mathbf{G}_{e,s} + \mathbf{Z}_{e,s} + \mathbf{P}_{e,s} + \mathbf{Q}_{e,s} \quad (43 - 24b)$$

Entsprechend der Herleitung und konsistenten Ableitung der Größen für die Steifigkeitsmatrix werden hier der Einfachheit halber die Ausdrücke für die gleichzeitige Ableitung nach Koordinaten- und Querschnittsvariablen angegeben.

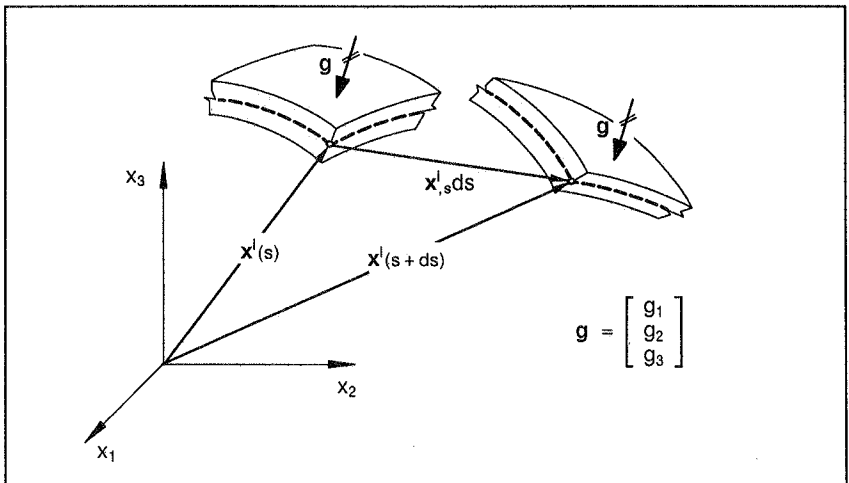


Bild 6.2-5: Elementbelastung aus Gewichtslast

### Gewichtslast

Für die Gewichtslastung des Elements wird eine konstante Wirkungsrichtung im Raum angenommen (Bild 6.2-5). Der Betrag dieser Belastung ist von der Entwurfsvariablen unabhängig. Der Vektor für die Elementbelastung kann mit

$$\mathbf{G}_e = \int_V \Phi^T \mathbf{g} dV \quad (6.2 - 25)$$

angegeben werden. Unter Berücksichtigung der Vorabintegration in Dickenrichtung kann der Knotenanteil  $\mathbf{G}_e$  dieser Belastung angegeben werden, welcher le-

diglich Kräfte in den Richtungen der Knotenverschiebungen  $u_1^i$ ,  $u_2^i$  und  $u_3^i$  hervorruft.

$$\mathbf{G}_e^i = \int_A \Phi^i \mathbf{g} h l_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 26a)$$

Die Ableitung dieses Knotenanteils nach der Variablen  $s$  kann entsprechend formuliert werden.

$$\mathbf{G}_{e,s}^i = \int_A \Phi^i \mathbf{g} (h_{,s} l_3 d\xi d\eta + h l_{3,s}) d\xi d\eta \quad (6.2 - 26b)$$

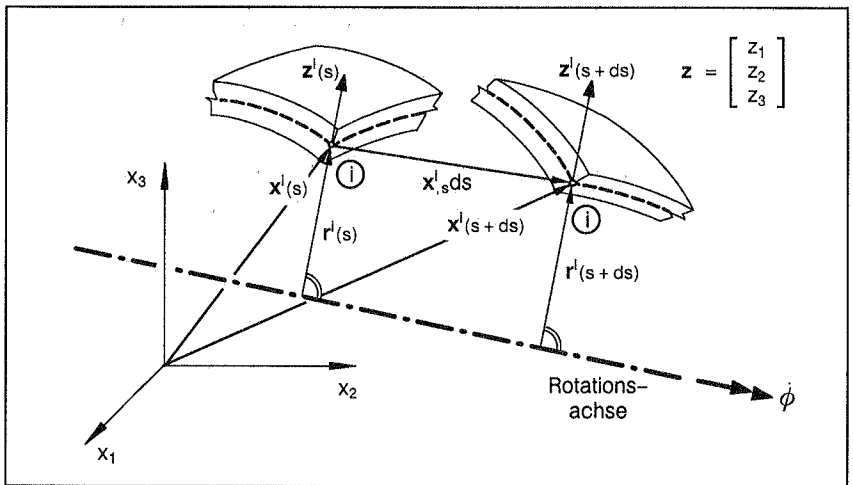


Bild 6.2-6: Elementbelastung aus Zentrifugalbeschleunigung

### Belastung aus Zentrifugalbeschleunigung

Die Elementbelastung aus einer Zentrifugalbeschleunigung wird auf eine Rotation des Elements um eine Achse im Raum (Bild 6.2-6) bezogen. Der Betrag dieser Belastung ist von der räumlichen Lage des Elements zur vorgegebenen Achse als auch von der Massenverteilung im Element selbst abhängig. Der entstehende Elementlastvektor ergibt sich bei dieser Belastung zu

$$\mathbf{Z}_e = \int_V \Phi^T \mathbf{z} dV \quad (6.2 - 27)$$

Die Vorabintegration über die Dicke und die Umformung des Volumenelements zum Flächenelement führt zu einem Knotenlastanteil mit

$$\mathbf{z}_e^i = \int_A \Phi^i \mathbf{z} h l_3 d\xi d\eta, \quad (6.2 - 28a)$$

dessen Ableitung wieder die Sensibilität des Lastvektors für die betreffende Optimierungsvariable  $s$  angibt.

$$\mathbf{z}_{e,s}^i = \int_A \Phi^i [(\mathbf{z}_{,s} h + \mathbf{z} h_{,s}) l_3 + \mathbf{z} h l_{3,s}] d\xi d\eta \quad (6.2 - 28b)$$

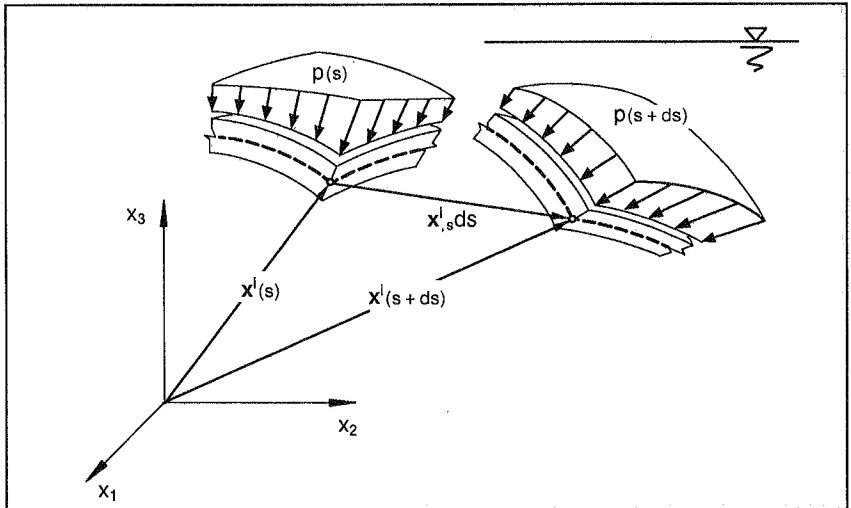


Bild 6.2-7: Körperfeste Druckbelastung des Elements

### Druckbelastung in Normalenrichtung

Die Druckbelastung wirkt in Normalenrichtung auf die Elementmittelfläche (körperfeste Belastung), wobei der Lastwert  $p$  von der Lage des Elements im Raum abhängt (Bild 6.2-7). Der Vektor dieser Flächenbelastung kann in folgender Weise angegeben werden.

$$\mathbf{P}_e = \int_A \Phi^T p dA \quad (6.2 - 29)$$

Der Knotenanteil dieses Lastvektors in der drei Koordinatenrichtungen ergibt sich damit zu

$$\mathbf{P}_e^i = \int_A \Phi^i p (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta) d\xi d\eta = \int_A \Phi^i p \mathbf{x}'_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 30a)$$

und dessen Änderung mit der Entwurfsvariablen zu



$$\mathbf{P}_{e,s}^i = \int_A \Phi^i (p_{,s} x'_3 + p x'_{3,s}) d\xi d\eta \quad (6.2 - 30b)$$

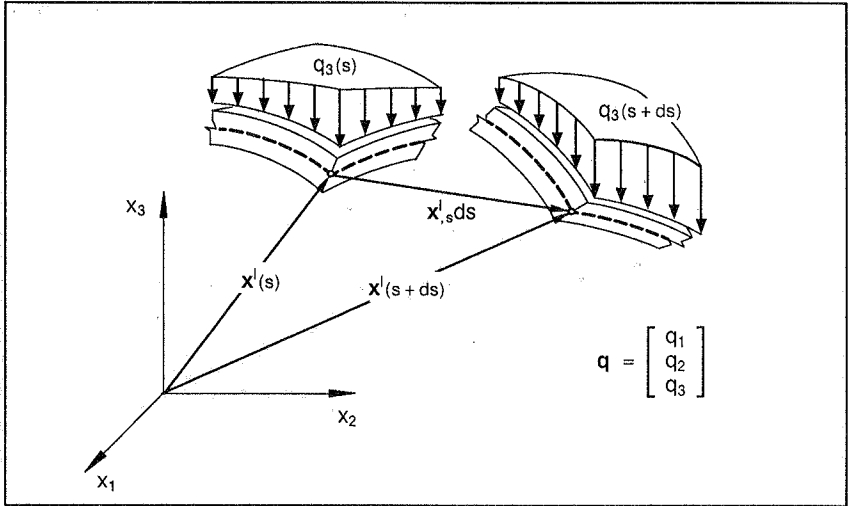


Bild 6.2-8: Raumfeste Belastung des Elements

### Projizierte Flächenlasten

Diese Belastung ist ebenfalls in ihrem Lastwert von der Lage des Elements abhängig, sie unterscheidet sich jedoch von der Druckbelastung durch eine raumfeste Belastungsrichtung (Bild 6.2-8). Im Gegensatz zu einer Druckbelastung in Normalenrichtung wirkt der Lastrichtungsvektor  $\mathbf{q}$  auf die jeweils projizierten Flächen des Elements in die globalen Koordinatenrichtungen. Der entstehende Elementlastvektor kann in der folgenden Form angegeben werden,

$$\mathbf{Q}_e = \int_A \Phi^T \mathbf{q} dA \quad (6.2 - 31)$$

wobei sich der Knotenanteil und seine Ableitung in entsprechender Weise ergeben.

$$\mathbf{Q}_e^i = \int_A \Phi^i \begin{bmatrix} q_1 x'_{31} \\ q_2 x'_{32} \\ q_3 x'_{33} \end{bmatrix} d\xi d\eta, \quad \mathbf{Q}_{e,s}^i = \int_A \Phi^i \begin{bmatrix} q_{1,s} x'_{31} + q_1 x'_{31,s} \\ q_{2,s} x'_{32} + q_2 x'_{32,s} \\ q_{3,s} x'_{33} + q_3 x'_{33,s} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (6.2 - 32a,b)$$

### 6.2.3 Ableitungen der Spannungen und der Spannungsergebnisse

Bei der Verwendung von isoparametrischen degenerierten Schalenelementen in der freien Form- und Querschnittsoptimierung werden vielseitigere und höhere Anforderungen an die spezifischen Eigenschaften der Elemente gestellt als dies beispielsweise bei der reinen Strukturanalyse oder bei nichtlinearen Tragwerksberechnungen der Fall ist. Die Lösungen der meisten Optimierungsaufgaben hängen direkt von den aus dem finiten Elementmodell gewonnenen Spannungswerten ab. Die Elementspannungen werden in den Zielfunktionen oft als integral über das ganze Tragwerk ausgewertete Größe oder in den Nebenbedingungen als punktuelle Kontrollwerte an einer beliebigen Stelle im Tragwerk gemessen.

Zusammen mit den Anforderungen des iterativen und interaktiven Optimierungsprozesses ergeben sich für die Elementspannungen folgende Forderungen:

- über das Tragwerk kontinuierliche Spannungsverteilung,
- hohe Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Spannungswerte,
- wirtschaftliche Rückrechnung aus den Verschiebungen und
- ein einfacher formaler Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Spannungen für eine möglichst effektive Sensibilitätsanalyse und eine einfache interaktive Spannungsdarstellung.

In diesem Zusammenhang kommt bei den hier verwendeten Verschiebungsmodellen den Spannungen als sekundäre Zustandsgrößen eine wesentlich höhere Bedeutung zu als den direkt angesetzten Verschiebungen.

Bei der Strukturoptimierung gehen so gerade die numerisch unzuverlässigen und ungenauen Werte der Tragwerksantwort als Kontrollwerte in die mathematische Problemformulierung ein. In der Regel sind die aus den Verschiebungen zurückgerechneten Spannungen diskontinuierlich (Bild 6.2-9a) und nur an einzelnen Stellen des Tragwerks genau /Zienkiewicz 1971, Hinton 1974/. Werden die Ergebnisse der Strukturanalyse in dieser Form in der Sensibilitätsanalyse verwendet, kann die Qualität der abgeleiteten Werte um Größenordnungen schlechter ausfallen (Bild 6.2-9b) und für die numerische Lösung der Optimierungsaufgabe unbrauchbar werden. Eine Verbesserung der im Optimierungsprozess kontrollierten Spannungen unter Einhaltung der oben genannten Bedingungen ist deshalb unablässig.

#### Verbesserung der Spannungen

Für die Ermittlung von geglätteten Spannungsverläufen im gesamten Tragwerk werden in der Literatur grundsätzlich unterschiedliche Ansätze angegeben.

Mit einer iterativen Vorgehensweise werden in /Loubignac 1977/ Verschiebungen und Spannungen einander so lange angeglichen, bis das geforderte Knotengleichgewicht in einer angegebenen Toleranzschranke erfüllt ist. Obwohl diese Methode bereits mit wenigen Iterationsschritten gute Ergebnisse aufweist, eignet

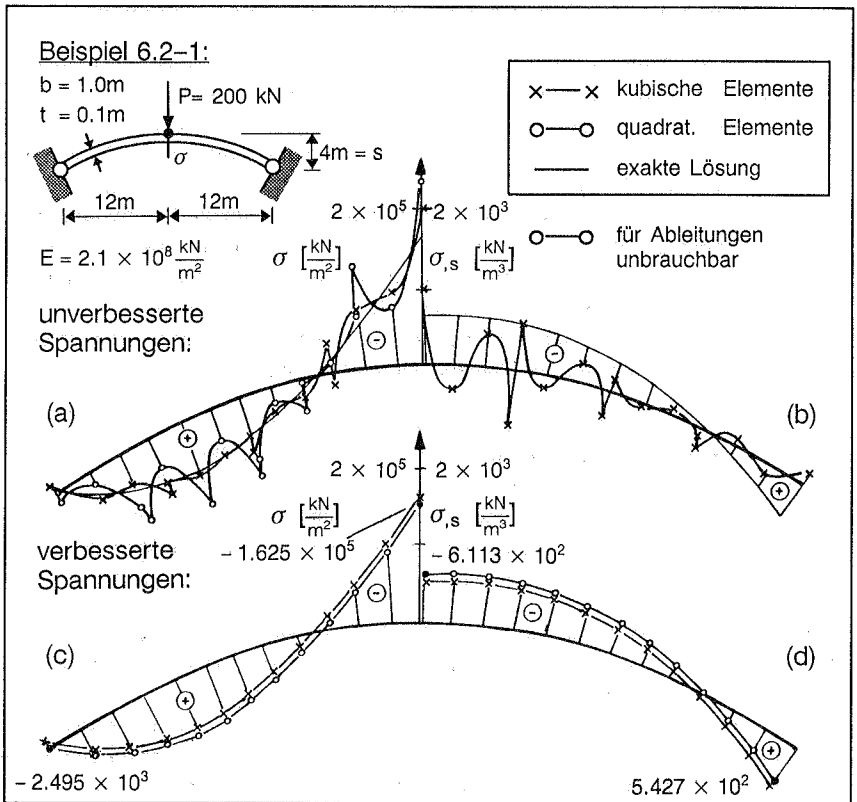


Bild 6.2-9: Zweigelenbogen, Spannungen (a,c) und ihre Ableitungen (b,d) an der Tragwerksoberseite

sie sich für die sehr häufig wiederkehrende Spannungsberechnung während des Optimierungsprozesses nicht. Außerdem geht bei der Iteration der für eine nachlaufende Sensibilitätsanalyse direkte und formale Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Spannungen verloren.

Ein weiterer Ansatz zur Verbesserung der Spannungen wird in /Hinton 1974/ für einen Ausgleich der diskontinuierlichen Spannungen  $\sigma$  nach dem Fehlerquadratminimum eingeführt. Für die Glättung der Spannungen auf Tragwerksebene werden die Spannungen abschnittsweise durch entsprechend kontinuierliche Ansatzfunktionen  $\Phi$  ausgedrückt. Nach der Minimierung des Fehlerquadrates in den Spannungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem (Gl.6.2-33), dessen Lösung  $\tilde{\sigma}$  zu einem gewichteten Ausgleich der diskontinuierlichen Spannungen führt.

$$\sum_e \int_A \tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} I_3 d\xi d\eta \tilde{\sigma}_e = \sum_e \int_A \tilde{\Phi}^T \sigma_e I_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 33)$$

$$\tilde{W} \tilde{\sigma} = \tilde{R}$$

Hierin sind  $\tilde{\sigma}$  die verbesserten Knotenwerte der Spannungen. Bei der Formoptimierung stellt sich ein komplizierter funktionaler Zusammenhang zwischen diesen geglätteten Spannungswerten und den Optimierungsvariablen ein, weil sich die verbesserten Spannungswerte gegenseitig über das gesamte Tragwerk beeinflussen. Dieser Sachverhalt kommt ganz besonders bei der Bildung der Sensibilitätskoeffizienten für die verbesserten Spannungswerte zum Tragen.

$$\tilde{\sigma}_{,s} = \tilde{W}^{-1} [\tilde{R}_{,s} - \tilde{W}_{,s} \tilde{\sigma}] \quad \text{mit} \quad \tilde{\sigma} = \tilde{W}^{-1} \tilde{R} \quad (6.2 - 34)$$

$$\tilde{W}_{,s} = \sum_e \int_A \tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} I_{3,s} d\xi d\eta$$

$$\tilde{R}_{,s} = \sum_e \int_A \tilde{\Phi}^T (\sigma_{e,s} I_3 + \sigma_e I_{3,s}) d\xi d\eta$$

Der Nachteil dieser Vorgehensweise liegt vor allem in der numerisch sehr aufwendigen Nachlaufrechnung zur Verbesserung des Spannungsfeldes. Für den einfachsten Fall des arithmetisch gemittelten Spannungsausgleichs entfällt die Faktorisierung und die Ableitung der Matrix  $\tilde{W}$ , jedoch bleibt die unerwünschte Koppelung der Spannungen über die Elementgrenzen hinweg erhalten.

Aus diesem Grund wird in /Hinton 1974/ eine zweite Methode vorgeschlagen, bei der ein Fehlerausgleich auf der Elementebene in Verbindung mit einer reduzierten Integrationstechnik /Zienkiewicz 1971/ am gesamten Tragwerk zur Anwendung kommt. Diese Art der Spannungsberechnung führt zu lokal formulierten Spannungsfunktionen, welche nach der Anwendung des Fehlerquadratminimums eine Spannungsermittlung über den gesamten Elementbereich zulassen. Für Rechteckelemente läßt sich zeigen, daß sich diese Spannungsfunktionen für die entsprechenden Schemata der Gaussintegration direkt als Lagrangepolynome angeben lassen (Bild 6.2-10a). Bei Dreieckselementen ist das Auffinden von geeigneten Spannungsfunktionen weitaus schwieriger. Wenn die Anzahl der Integrationspunkte mit dem entsprechenden vollständigen Polynomansatz des Pascal'schen Dreiecks übereinstimmt (Bild 6.2-11), lassen sich die Funktionen wie bei den Rechteckelementen direkt bestimmen.

Die über die Elementfläche unregelmäßige Verteilung der Integrationspunkte für die Gaussintegration lassen ein solches Vorgehen jedoch im allgemeinen nicht zu. Hier muß dann über einen echten Fehlerausgleich eine überzählige Anzahl von Punkten an den entsprechenden Polynomansatz angepasst werden. Es ist dabei zu beachten, daß mit den so aufgestellten Spannungsfunktionen über der Drei-

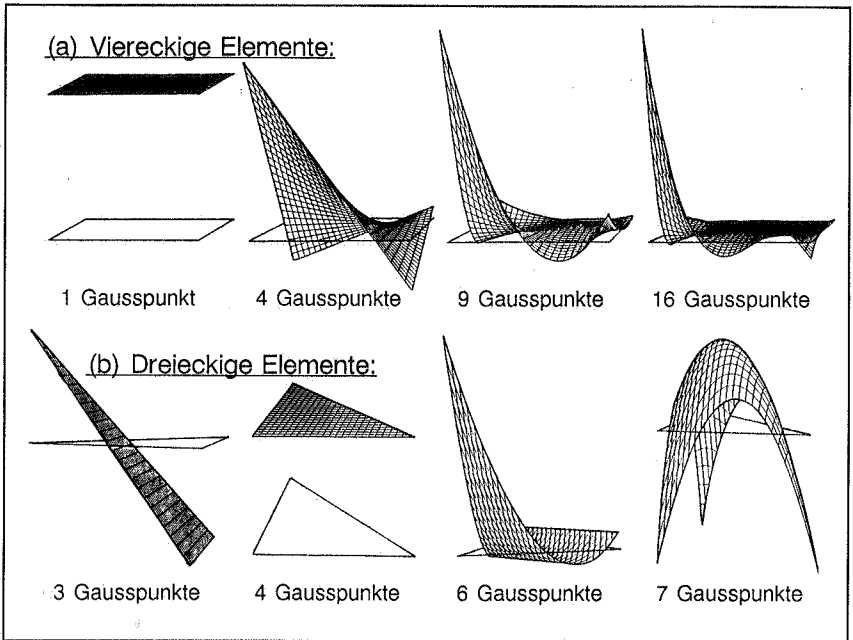


Bild 6.2-10: Spannungsfunktionen für (a) Rechteck- und (b) Dreieckelemente

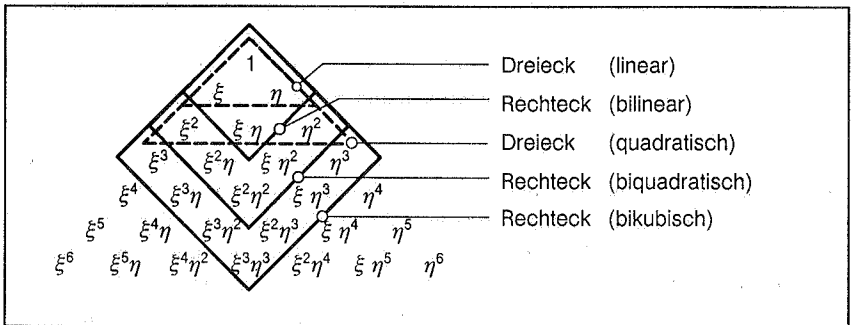


Bild 6.2-11: Polynomansätze für Spannungsfunktionen

ecksfläche vollständige und bezüglich des Flächenschwerpunktes punktsymmetrische Spannungsverläufe dargestellt werden können. Im Bild (6.2-10b) sind einzelne Spannungsfunktionen der Dreieckelemente dargestellt. Bei der Funktion für 4 und 7 Gausspunkte handelt es sich bei den dargestellten Funktionen jeweils um die des überzähligen Spannungswertes im Mittelpunkt des Elementes.

## Graphische Darstellung der Spannungen

Liegen die Spannungsverläufe oder der Verlauf ihrer Resultierenden als Funktionen in den lokalen Koordinaten des Elementes vor, läßt sich ihre graphische Darstellung auf Elementebene relativ einfach angeben. Für die linearen, bilinearen und quadratischen Funktionen können die Konturlinien für die Spannungen nach /Dreszer 1975/ als Kurven 2. Ordnung in Parameterform angegeben werden (Bild 6.2-12).

Konturlinien für biquadratische Funktionsansätze sind wesentlich hochwertiger für die Darstellung kontinuierlicher Spannungsverläufe ( $C_1$ -Kontinuität).

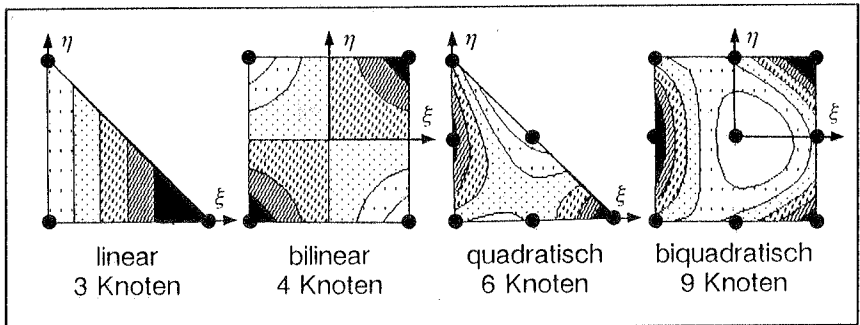


Bild 6.2-12: Konturlinien für Spannungsfunktionen

Die Darstellung dieser Funktionen nach der in /Stelzer 1987/ vorgeschlagenen Vorgehensweise ist relativ aufwendig, weil die Konturlinien nur durch eine entsprechende Rasterung der Elementfläche und des Funktionsverlaufes aufgestellt werden können. In /Stelzer 1987/ werden die Konturlinien für 8-knotige quadratische Elemente bestimmt. Um für hochwertige Elemente (z.B. S16) eine adäquate Darstellung von Spannungsfunktionen zu erreichen, wurde in dieser Arbeit auch für ein Element mit 9 Stützstellen die Konturlinien programmiert. Damit können dann für die anspruchsvolle graphische Ausgabe der Spannungen vollständig  $C_1$ -kontinuierliche Höhenlinien erzeugt werden. Im iterativen und interaktiv graphisch unterstützten Programmablauf können so die Ermittlung, Verbesserung und Darstellung der Elementspannungen eine sinnvolle, sich ergänzende und wirtschaftliche Einheit bilden.

### Rückrechnung zu den Spannungen

Für die Ermittlung der Spannungen und deren Ableitung im lokalen Koordinatensystem an einem beliebigen Punkt des Elements wird der Spannungstensor in der Mittelfläche ( $\zeta = 0$ ) und an der Oberseite ( $\zeta = 1$ ) für jeden Integrationspunkt  $k$  ausgewertet.

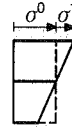
$$\sigma_{e'} = \mathbf{C}' \mathbf{G}^T \varepsilon_e \quad \varepsilon_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (6.2 - 35a)$$

$$\sigma_{e,s'} = \mathbf{C}' (\mathbf{G}_{,s}^T \varepsilon_e + \mathbf{G}^T \varepsilon_{e,s}) \quad \varepsilon_{e,s} = \mathbf{B}_{,s} \mathbf{u}_e + \mathbf{B} \mathbf{u}_{e,s} \quad (6.2 - 35b)$$

Die Spannungen werden in einen konstanten und einen linear über die Dicke veränderlichen Anteil aufgespalten

$$\sigma^0 = \sigma'(\zeta=0) \quad \sigma_{,s}^0 = \sigma'(\zeta=0)_{,s} \quad (6.2 - 36)$$

$$\sigma^1 = \sigma'(\zeta=1) - \sigma^0 \quad \sigma_{,s}^1 = \sigma'(\zeta=1)_{,s} - \sigma_{,s}^0$$



und zu den entsprechenden Spannungsergebnissen (Bild 6.2-13) aufintegriert.

$$n_{ij} = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma'_{ij} d\zeta = h \sigma_{ij}^0, \quad m_{ij} = \frac{h^2}{4} \int_{-1}^{+1} \sigma'_{ij} \zeta d\zeta = \frac{h^2}{6} \sigma_{ij}^1 \quad (6.2 - 37a,b)$$

$$n_{ij,s} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (h_{,s} \sigma'_{ij} + h \sigma'_{ij,s}) d\zeta = h_{,s} \sigma_{ij}^0 + h \sigma_{ij,s}^0 \quad (6.2 - 37c)$$

$$m_{ij,s} = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} (2h h_{,s} \sigma'_{ij} + h^2 \sigma'_{ij,s}) \zeta d\zeta = \frac{h}{3} h_{,s} \sigma_{ij}^1 + \frac{h^2}{6} \sigma_{ij,s}^1 \quad (6.2 - 37d)$$

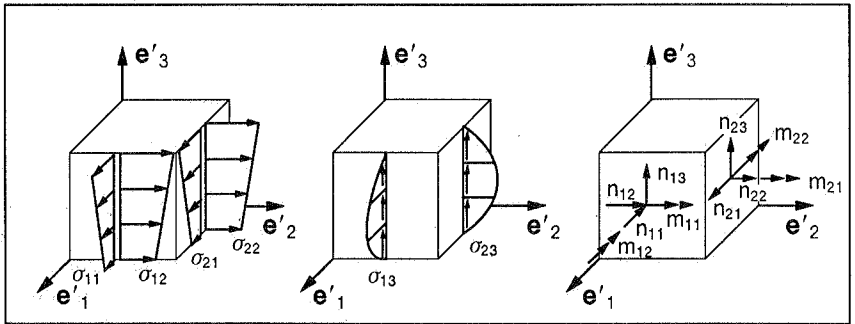


Bild 6.2-13: Elementspannungen und resultierende Größen

Mit Hilfe dieser resultierenden Größen und den Ansatzfunktionen für die Gausspunkte der verwendeten Integrationsordnung können nun die Spannungen und ihre Ableitungen an beliebiger Stelle im Element berechnet werden.

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{(\xi, \eta)}^k(\eta) \left( \frac{1}{h^k} \bar{n}_{ij(\xi)} n_{ij}^k + \frac{1}{(h^k)^2} \bar{m}_{ij(\xi)} m_{ij}^k \right) \quad (6.2 - 38a)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\xi, \eta, \zeta),s = - \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{(\xi, \eta)}^k(\eta) \left( \frac{h^k_s}{(h^k)^2} \bar{n}_{ij(\xi)} n_{ij}^k - \frac{1}{h^k} \bar{n}_{ij(\xi)} n_{ij,s}^k + \frac{2h^k_s}{(h^k)^3} \bar{m}_{ij(\xi)} m_{ij}^k - \frac{1}{(h^k)^2} \bar{m}_{ij(\xi)} m_{ij,s}^k \right)$$

mit (6.2 - 38b)

$$\bar{n} = [ 1 \mid 1 \mid 0 \mid 1 \mid \frac{3}{2}(1 - \xi^2) \mid \frac{3}{2}(1 - \zeta^2) ] = [ \bar{n}_{11} \mid \bar{n}_{22} \mid 0 \mid \bar{n}_{12} \mid \bar{n}_{13} \mid \bar{n}_{23} ]$$

$$\bar{m} = [ 6\zeta \mid 6\zeta \mid 0 \mid 6\zeta \mid 0 \mid 0 ] = [ \bar{m}_{11} \mid \bar{m}_{22} \mid 0 \mid \bar{m}_{12} \mid 0 \mid 0 ]$$

$$n^T = [ n_{11} \mid n_{22} \mid 0 \mid n_{12} \mid n_{13} \mid n_{23} ]$$

$$m^T = [ m_{11} \mid m_{22} \mid 0 \mid m_{12} \mid 0 \mid 0 ]$$

Durch die Aufstellung elementspezifischer Ansatzfunktionen für die Inter- bzw. Extrapolation der Spannungen und ihrer Resultierenden kann die Genauigkeit der Elementspannungen an den Integrationspunkten an jeder beliebigen Stelle des Elementes (Bild 6.2-9c) erreicht werden. Insbesondere können durch diese Vorgehensweise die Werte für die nach den Entwurfsvariablen abgeleiteten Spannungsgrößen entscheidend verbessert werden (Bild 6.2-9d). Die Formulierung von Spannungsnebenbedingungen bei der Strukturoptimierung stellt in dieser Hinsicht hohe Forderungen an die Qualität der Elementspannungen und deren Ableitungen. Bei der Verwendung von Gradienteninformation und einer Linearisierung der Nebenbedingung im Optimierungsprozeß müssen die Spannungen und die entsprechenden Ableitungen in ihrem funktionalen Zusammenhang unbedingt übereinstimmen.

Die Ermittlung von nahezu kontinuierlichen Spannungsfeldern kann mit der vorgestellten Spannungsermittlung entweder durch eine entsprechend feine Elemententeilung oder mit der Anwendung höherwertiger Elemente erreicht werden. In Bild 6.2-14 ist ein qualitativer Vergleich von Spannungsfeldern aus finiten Elementberechnungen mit etwa gleichwertigen Elementnetzen für lineare, quadratische (8-Knoten) und kubische (16-Knoten) Elemente angegeben. Es zeigt sich, daß durch eine Glättung der Spannungen bei höher interpolierten Elementen keine sichtbare Verbesserung des Spannungsfeldes mehr erzielt werden kann. Die Kontrolle von stark diskontinuierlichen Spannungsfeldern im Optimierungsprozeß ist schwierig, weil die Lösung der Optimierungsaufgabe durch zu hohe bzw. zu niedrige Spannungswerte beeinflusst wird. Eine Formulierung von Spannungsnebenbedingungen an jedem Elementknoten der kritischen Bereiche kann hier eine Abhilfe sein. Dabei muß jedoch beachtet werden, daß das Optimierungsproblem beachtlich vergrößert wird, wenn keine effiziente "active-set"-Strategie im Optimierungsalgorithmus angewandt wird und entsprechende Konvergenzprobleme



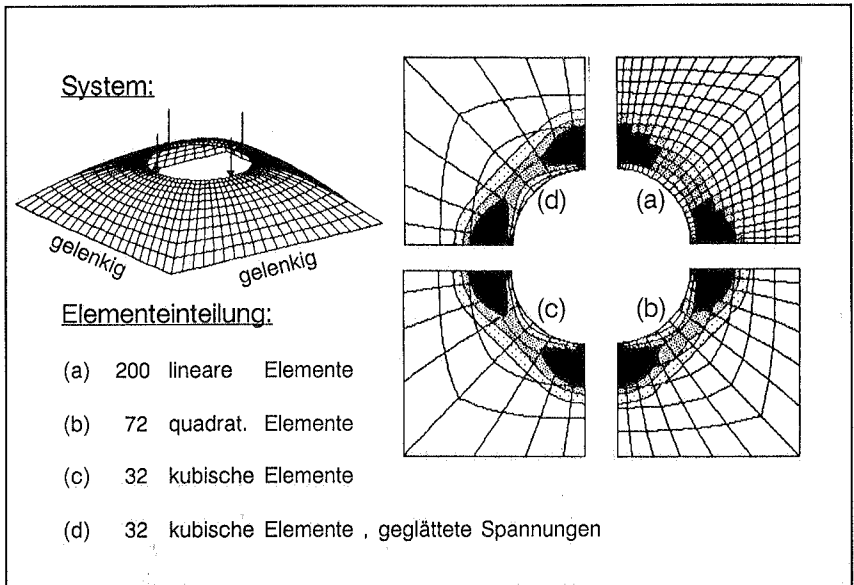


Bild 6.2-14: Spannungsermittlung mit verschiedenen finiten Elementen

durch fast identische, durch die Linearisierung möglicherweise inkonsistente Nebenbedingungen hervorgerufen werden können.

Die Anpassung der finiten Elementlösung an die Genauigkeitsanforderungen des Optimierungsproblems ist hier sinnvoll. So kann am Anfang des Optimierungsprozesses mit einer groben Elementeinteilung oder einfach formulierten Elementen gearbeitet werden. Bei zunehmenden Anforderungen an die Rechengenauigkeit wird dann das Elementnetz entweder verfeinert oder mit höher interpolierten Elementen gearbeitet, um für die Konvergenz des Optimierungsproblems die entsprechende Genauigkeit der Tragwerksantwort zu erreichen.

#### 6.2.4 Formulierung der Optimierungsfunktionen

Mit der aus dem Elementansatz bekannten Geometrie und den aus der Tragwerksantwort vorliegenden Spannungen und ihren Ableitungen nach den Optimierungsvariablen können die in Kapitel 4 eingeführten Funktionen des Optimierungsproblems für das Schalelement formuliert werden.

##### Zielfunktionen

Als einfachste Zielfunktionen, welche ausschließlich von der Elementgeometrie abhängig sind, lassen sich das Volumen, Gewicht oder das axiale Massenträgheitsmoment des Tragwerkes angeben.

$$f_V = \sum_e \int_V dV = \sum_e \int_A h l_3 d\xi d\eta = V \quad (6.2 - 39a)$$

$$f_W = \sum_e \int_V \gamma dV = \sum_e \int_A \gamma h l_3 d\xi d\eta = W \quad (6.2 - 39b)$$

mit  $\gamma$  = spezifisches Gewicht

$$f_C = \sum_e \int_V \rho r^2 dV = \sum_e \int_A \rho h r^2 l_3 d\xi d\eta = C \quad (6.2 - 39c)$$

mit  $\rho$  = Dichte und  $r$  = Abstand von der Rotationsachse

Entsprechend können die Ableitungen dieser Funktionen nach den Entwurfsvariablen ermittelt werden, wobei lediglich die Änderung der Elementgeometrie berücksichtigt werden muß.

$$f_{V,s} = \sum_e \int_V dV = \sum_e \int_A [h_{,s} l_3 + h l_{3,s}] d\xi d\eta = V_{,s} \quad (6.2 - 40a)$$

$$f_{W,s} = \sum_e \int_V \gamma dV = \sum_e \int_A \gamma [h_{,s} l_3 + h l_{3,s}] d\xi d\eta = W_{,s} \quad (6.2 - 40b)$$

$$f_{C,s} = \sum_e \int_V \rho r^2 dV = \sum_e \int_A \rho h_{,s} r^2 l_3 d\xi d\eta \\ + \sum_e \int_A \rho h [2 r r_{,s} l_3 + r^2 l_{3,s}] d\xi d\eta = C_{,s} \quad (6.2 - 40c)$$

Die Formulierung von Spannungsausgleichsfunktionen und der Formänderungsenergie des Elementes als Zielfunktion sind im Vergleich zu den vorgenannten Zielkriterien Volumen und Gewicht wesentlich kompliziertere und aufwendigere Funktionen. Hier muß die Berechnung der Spannungen und ihrer Ableitungen über das gesamte Tragwerk oder zumindest über vorab definierte Teilbereiche erfolgen. Die Spannungsausgleichsfunktion wird, wie in Kapitel 4 bereits definiert, in allgemeiner Form als Zielkriterium für den Ausgleich von Spannungen und den entsprechenden Resultierenden nach dem Fehlerquadratminimum gegenüber einem vorgegebenem Wert verstanden.

$$f_s = \sum_e \int_V (\bar{S} - \bar{S}_a)^2 dV = \sum_e \int_A h (\bar{S} - \bar{S}_a)^2 l_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 41a)$$

$$f_{s,s} = \sum_e \int_A \left[ [h_{,s}(\bar{S} - \bar{S}_a)^2 + 2h(\bar{S} - \bar{S}_a)\bar{S}_{,s}]l_3 + h(\bar{S} - \bar{S}_a)^2 l_{3,s} \right] d\xi d\eta$$

$$\text{mit } \bar{S} = \sigma'_{ij}, \sigma'_{v}, \sigma'_{1}, \sigma'_{2}, \tau'_{\max}, n_{ij}, m_{ij} \quad (6.2 - 41b)$$

$$\bar{S}_{,s} = \sigma'_{ij,s}, \sigma'_{v,s}, \sigma'_{1,s}, \sigma'_{2,s}, \tau'_{\max,s}, n_{ij,s}, m_{ij,s}$$

In Gl.(6.2-41) können alle Komponenten des Spannungstensors bezogen auf das lokale Koordinatensystems ( $\prime$ ), die Vergleichsspannungen nach von Mises, die Hauptspannungen unter Vernachlässigung der Querschubspannungen, die maximalen Schubspannungen sowie resultierende Kräfte und Momente eingehen. Der Ausgleich von Spannungswerten wird im Element für eine vorgegebene Koordinate in Dickenrichtung ( $\zeta = \bar{\zeta}$ ) durchgeführt. Bei der Verwendung von Haupt- und Vergleichsspannungen in den Gleichungen (6.2-41a und b) sollte der Ausgleich der Spannungen entweder über die Unter- oder die Oberseite ( $\bar{\zeta} = \pm 1$ ) der Schale erfolgen. Die Formulierung der maximalen bzw. minimalen Spannungen und der Vergleichsspannungen können in diesem Fall nach Gl.(6.2-42a bis f) ermittelt werden.

$$\sigma'_{1/2} = \frac{1}{2} (\sigma'_{11} + \sigma'_{22}) \pm \tau'_{\max} \quad (6.2 - 42a)$$

$$\tau'_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{12})^2} \quad (6.2 - 42b)$$

$$\sigma'_{1/2,s} = \frac{1}{2} (\sigma'_{11,s} + \sigma'_{22,s}) \pm \tau'_{\max,s} \quad (6.2 - 42c)$$

$$\tau'_{\max,s} = \frac{1}{2\tau'_{\max}} [(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})(\sigma'_{11,s} - \sigma'_{22,s}) + 2\sigma'_{12}\sigma'_{12,s}] \quad (6.2 - 42d)$$

$$\sigma'_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{12})^2 + (\sigma'_{21})^2]} \quad (6.2 - 42e)$$

$$\sigma'_{v,s} = \frac{1}{2\sigma'_v} [(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})(\sigma'_{1,s} - \sigma'_{2,s}) + \sigma'_{12}\sigma'_{1,s} + \sigma'_{21}\sigma'_{2,s}] \quad (6.2 - 42f)$$

Soll der Spannungsausgleich über das gesamte Volumen der Struktur im Sinne eines "Fully Stressed Design" vorgenommen werden, muß gegebenenfalls auch die Abhängigkeit der Spannungen von der Dickenkoordinate  $\zeta$  bei der Auswertung der Integrale (Gl.6.2-41) berücksichtigt werden.

$$f_s = \sum_e \int_V (\bar{S} - \bar{S}_a)^2 dV = \sum_e \int_A \left[ \int_{-1}^{+1} h(\bar{S}(\zeta) - \bar{S}_a)^2 d\zeta \right] l_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 43a)$$

$$f_{s,s} = \sum_e \int_A \left[ \int_{-1}^{+1} [h_{,s}(\bar{S}(\zeta) - \bar{S}_a)^2 + 2h(\bar{S}(\zeta) - \bar{S}_a)\bar{S}_{(\zeta),s}] d\zeta \right] l_3 d\xi d\eta \quad (6.2 - 43b)$$

$$+ \sum_e \int_A \left[ \int_{-1}^{+1} h(\bar{S}(\zeta) - \bar{S}_a)^2 d\zeta \right] l_{3,s} d\xi d\eta$$

Vernachlässigt man den Einfluß der Schalenkrümmung auf die Spannungsverteilung über die Elementdicke, wie das für das verwendete Element der Fall ist, dann lassen sich für die Elemente des Spannungstensors im Spannungsausgleich ( $\bar{S} = \sigma'_{ij}$ ) über das Strukturvolumen die Dickenintegrale vorab ausführen. Für die Haupt- und Vergleichsspannungen ist eine analytische Vorabintegration nicht möglich, weil sich diese Spannungswerte über die Dicke des Elementes stark ändern /Kühnemann 1989/. Deshalb kommt hier auch eine numerische Dickenintegration (Gauss oder Simpson) zum Einsatz. Einzelheiten zur Integration dieser Spannungen sind in /Kühnemann 1989/ zu finden. Ein zusätzliches Problem ergibt sich für die Ermittlung der Haupt- und Vergleichsspannungen aus dem dreidimensionalen Spannungszustand, der sich innerhalb der Schale durch die Schubspannungen in Dickenrichtung einstellt. Die Ermittlung der Hauptspannungen beruht auf der Lösung eines Eigenwertproblems 3. Ordnung.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.2 - 44)$$

Je nach Problemstellung können sich ein-, zwei- oder dreidimensionale Spannungszustände einstellen, so daß das Eigenwertproblem den in Bild (6.2-15) dargestellten Fällen zugeordnet werden kann. Die Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten für die Hauptspannungen entspricht der Sensibilitätsanalyse eines Eigenwertproblems und der Sensibilität seiner Eigenwerte. In der Arbeit von /Kühnemann 1989/ zeigte sich die besondere Schwierigkeit der Bestimmung dieser Sensibilitätskoeffizienten. Bei der Variation der Variablen  $s$  ist es für ein allgemeines Eigenwertproblem durchaus möglich, daß aus drei reellen Eigenwerten doppelte oder sogar imaginäre Eigenwerte werden (Bild 6.2-15). Durch eine Fallunterscheidung können die verschiedenen Problemfälle gegliedert und die gewünschten Sensibilitätskoeffizienten ermittelt werden. Die Formulierung der Vergleichsspannung und ihrer Ableitung nach den Optimierungsvariablen ist mit den vorliegenden Sensibilitätskoeffizienten der Hauptspannungen möglich.

$$\sigma'_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2]} \quad (6.2 - 45)$$

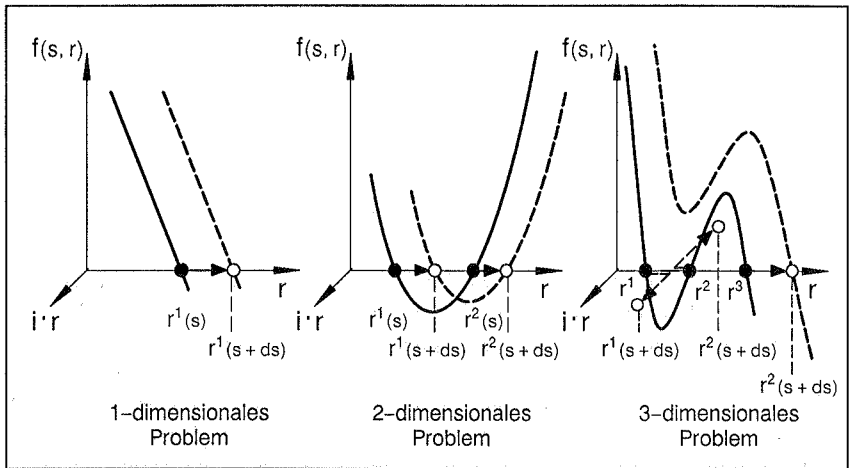


Bild 6.2-15: Sensibilität des Eigenwertproblems 3. Ordnung

Damit lassen sich die Integrale der Gl.(6.2-43a und b) für  $\bar{S} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und  $\sigma_v$  auswerten.

Die Formulierung der Formänderungsenergie wird in /Reitinger 1988/ ausführlich beschrieben und kann unter Vernachlässigung von Temperaturdeformationen wie folgt angegeben werden:

$$f_E = \sum_e \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (6.2 - 46)$$

$$= \sum_e \int_V \frac{h}{2E} \left[ \int_{-1}^{+1} [\sigma'_{\zeta 1} + \sigma'_{\zeta 2} - 2\nu\sigma'_{\zeta 1}\sigma'_{\zeta 2} + 2(1 + \nu)(\sigma'_{\zeta 2} + \sigma'_{\zeta 3} + \sigma'_{\zeta 3})] d\zeta \right] I_3 d\xi d\eta$$

mit  $E$  = Elastizitätsmodul

$\nu$  = Querdehnzahl

Aus Gl.(6.2-46) ist ersichtlich, daß eine Integration über die Elementdicke erfolgen muß. In /Reitinger 1988/ wurde für diesen Integralausdruck eine Vorabintegration in Dickenrichtung durchgeführt, um die Ermittlung der spezifischen Formänderungsenergie als Zielfunktion möglichst effektiv durchzuführen. Dies ist vor allem für die aufwendige Ableitung dieser Zielfunktion nach den Entwurfsvariablen von Bedeutung.

### Gleichheitsnebenbedingungen

Für verschiedene Optimierungsaufgaben ist es notwendig, das Volumen, das Gewicht oder das axiale Massenträgheitsmoment der Struktur (Kapitel 4) während des Iterationsprozesses konstant zu halten. Unter Verwendung der Gleichungen

(6.2-39) und (6.2-40) können diese Bedingungen als Gleichheitsnebenbedingungen mit ihren entsprechenden Ableitungen formuliert werden.

$$h_V = 1 - \frac{V}{V^0} = 0, \quad h_W = 1 - \frac{W}{W^0} = 0, \quad h_C = 1 - \frac{C}{C^0} = 0 \quad (6.2 - 47a,b,c)$$

$$h_{V,s} = - \frac{V_{,s}}{V^0}, \quad h_{W,s} = - \frac{W_{,s}}{W^0}, \quad h_{C,s} = - \frac{C_{,s}}{C^0} \quad (6.2 - 48a,b,c)$$

mit  $V^0, W^0, C^0 =$  Volumen, Gewicht bzw. axiales Massenträgheitsmoment der Ausgangsstruktur

### Ungleichheitsnebenbedingungen

Zur Kontrolle der Spannungen und ihrer Resultierenden während des Optimierungsprozesses werden Ungleichheitsnebenbedingungen in einer allgemeinen Form aufgestellt.

$$g_{\bar{S}} = 1 - \frac{\bar{S}_{(\xi, \eta, \zeta)}}{\bar{S}_{zul.}} \geq 0 \quad (6.2 - 49a)$$

$$g_{\bar{S},s} = - \frac{\bar{S}_{(\xi, \eta, \zeta),s}}{\bar{S}_{zul.}} \quad (6.2 - 49b)$$

$$\text{mit } \bar{S} = \sigma'_{ij}, \sigma'_{v}, \sigma'_{1}, \sigma'_{2}, \sigma'_{3}, \tau'_{max}, n_{ij}, m_{ij}$$

$$\bar{S}_{,s} = \sigma'_{ij,s}, \sigma'_{v,s}, \sigma'_{1,s}, \sigma'_{2,s}, \sigma'_{3,s}, \tau'_{max,s}, n_{ij,s}, m_{ij,s}$$

Die kontrollierten Werte  $\bar{S}$  können entweder direkt an der vorgegebenen Stelle im Element ermittelt oder aus den Werten an den Integrationspunkten über die Spannungsfunktion  $\tilde{\Phi}$  berechnet werden. Letztere Möglichkeit ergibt in der Regel bessere Spannungswerte, vor allem bei der Verwendung einer reduzierten Integration für das Element, ist jedoch mit einem erheblichen rechnerischen Mehraufwand verbunden. Dies gilt besonders bei der Ableitung der Nebenbedingungen, bei denen nach Gl.(6.2-38) die Spannungen zunächst an den Gausspunkten ermittelt und zu Resultierenden zusammengefasst werden. Die resultierenden Größen werden dann extrapoliert und an der entsprechenden Stelle im Element wieder in verbesserte Spannungen umgerechnet. Diese Vorgehensweise ist dann besonders angebracht, wenn einzelne Spannungswerte im Tragwerk kontrolliert werden und eine hohe Genauigkeit dieser Werte erreicht werden soll.

### 6.2.5 Elementverhalten und Tragwerksantwort

Gegenüber einfacheren Tragwerken wie z.B. Fachwerken (Bild 6.1-3) weisen die Optimierungsfunktionen, welche die Tragwerksantwort der Schalenträgerwerke beinhalten, häufig eine höhere Nichtlinearität auf. In der Regel handelt es sich um transzendente Funktionen, die, wie in Bild (6.2-16) für einen einfachen Zweige-

lenkbogen dargestellt, einen lokal begrenzten, hochgradig nichtlinearen Verlauf haben können. In den Ableitungen dieser Funktionen tritt diese Charakteristik meistens in noch stärkerer Form auf.

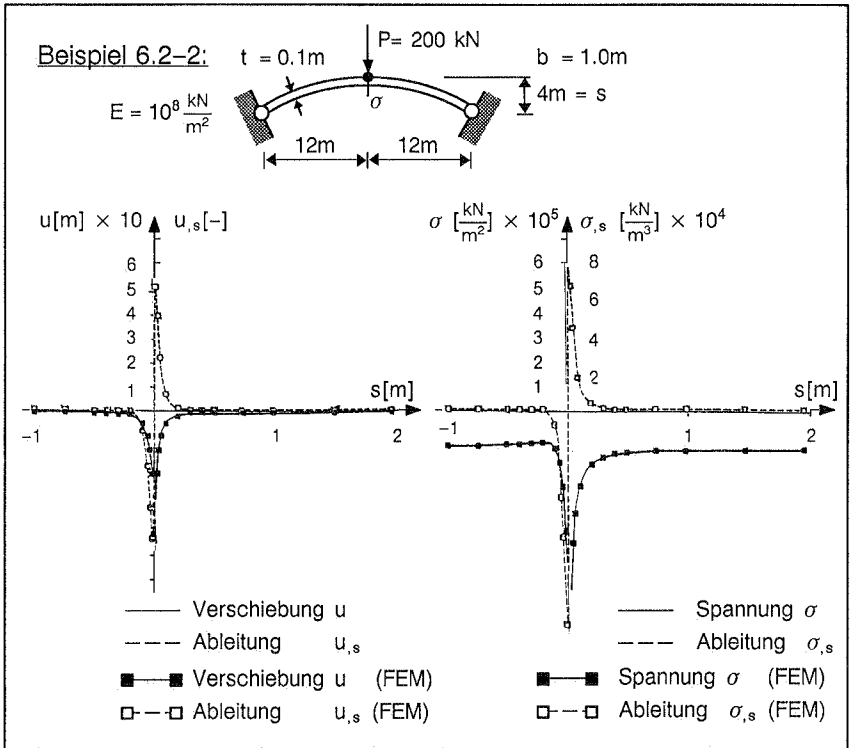


Bild 6.2-16: Zweigelenbogen mit von der Optimierungsvariablen nichtlinear abhängiger Tragwerksantwort

Bei der Ableitung dieser Funktionen mit Vorwärtsdifferenzenverfahren können - wir bereits im Kapitel 5 beschrieben - in den Bereichen mit stark nichtlinearem Verlauf Schwierigkeiten auftreten, die besondere Maßnahmen für die Schrittweitensteuerung notwendig machen. Es ist daher sinnvoll, diese Ableitungen wie hier analytisch und konsistent für die Methode der finiten Elemente herzuleiten, um derartige Probleme zu vermeiden.

Das vorgestellte Beispiel zeigt die Problematik eines sich stark veränderten Tragverhaltens. Mit der Änderung der Optimierungsvariablen wird das Tragwerk sehr unterschiedlich durch Druck und Biegung ( $s > 0$ ), reine Biegung ( $s = 0$ ) sowie Zug und Biegung ( $s < 0$ ) beansprucht. Der Übergang zwischen den unterschiedlichen Beanspruchungen erfolgt in einem lokal begrenzten Bereich und verursacht eine

entsprechend nichtlineare Tragwerksantwort in Abhängigkeit der variablen Form. Bei schlankeren Tragwerken kann mit einer Verstärkung dieses Verhaltens gerechnet werden.

Die Erfassung von derartig unterschiedlichen Tragverhaltensarten stellt einen dementsprechend hohen Anspruch an die Lösung des Strukturproblems mittels der Methode der finiten Elemente. Die Genauigkeit der finiten Elementlösung und die Konvergenz der Lösungen zur wirklichen Tragwerksantwort sind in diesem Zusammenhang von besonderem Interesse. Diese Thematik wurde in /Beck 1988/ für Schalenelemente insbesondere unter dem Aspekt der Sensibilitätsanalyse genauer untersucht. Wie in /Stegmüller 1985/ bereits ausführlich beschrieben, ist die Anwendung der hier behandelten Schalenelemente nicht unproblematisch. Dies gilt ganz besonders für das bei diesen Elementen auftretende Phänomen des "shear-" und "membrane-locking".

### "Shear-locking"

Hier liegt die Ursache für ein Blockieren der Elemente in der übermäßigen Zunahme der Anteile der Schubenergie gegenüber der Biegeenergie bei sehr dünnen Schalenträgwerken. Bei der Anwendung von isoparametrischen degenerierten Schalenelementen stellt sich die Frage, wie sich das Blockieren der Elemente auf die Sensibilität der Tragwerksantwort hinsichtlich der Entwurfsvariablen bemerkbar macht. Aus den Gleichungen (6.2-50) und (6.2-51) ist eine direkte Abhängigkeit der abgeleiteten Verschiebungen und damit auch der Spannungen der Elemente von der Versteifung des Tragwerks erkennbar. Darüber hinaus beinhaltet die abgeleitete Steifigkeitsmatrix denselben Effekt in einer höher nichtlinearen Form.

$$\mathbf{u}_{,s} = \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{R}_{,s} - \mathbf{K}_{,s} \mathbf{u}] \quad , \quad \sigma_{,s} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}_{,s} \quad (6.2 - 50 \text{ und } 51)$$

Eine entsprechende Parameterstudie an einer Quadratplatte unter Gleichlast (Bild 6.2-17) zeigt den Effekt des "shear-locking" für Verschiebungen, Spannungen und deren Ableitungen.

Es wird deutlich, daß die Ableitungen und Ausgangsgrößen der Zustandsvariablen das Blockieren der Elemente in gleicher Weise beinhalten. Dies gilt gleichermaßen für eine variable Dicke und eine variable Form. Eine reduzierte Integrationstechnik kann in der Regel das Verhalten der Elemente verbessern, beseitigt im Falle des 8-Knoten Elements das Versteifen nicht vollständig und führt im allgemeinen innere Kinematiken ("Zero-Energy-Modos") in das Tragwerk /Stegmüller 1985/ ein, welche besonders beachtet werden müssen. Bei der freien Formoptimierung ist zu beachten, daß eine Verzerrung der Elementgeometrie das Phänomen des "shear-locking" verstärkt und im Falle des 8-Knoten Elementes auch im reduziert integrierten Fall auftritt.



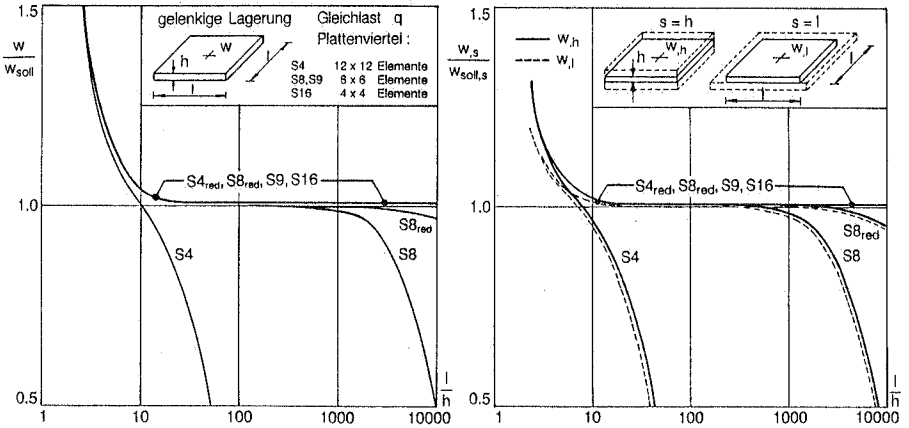


Bild 6.2-17a: Verschiebungen einer Quadratplatte, "shear-locking"

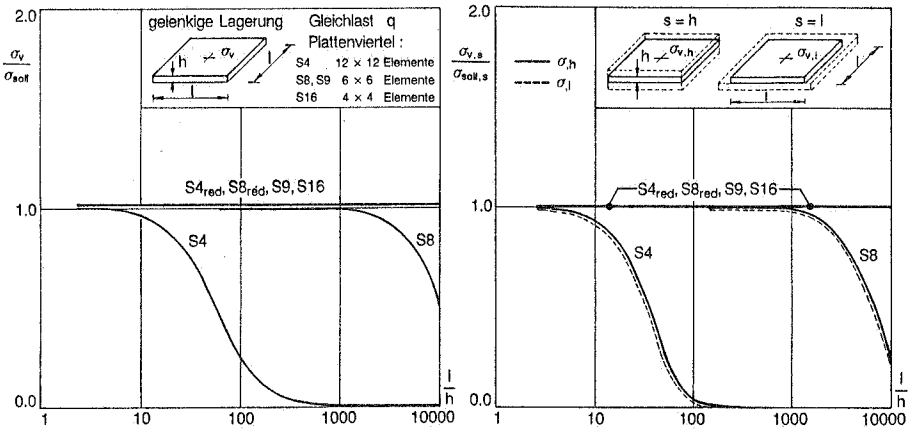


Bild 6.2-17b: Vergleichsspannungen nach von Mises einer Quadratplatte, "shear-locking"

### "Membrane-locking"

Bei der Verwendung von niedrig interpolierten Schalelementen tritt verstärkt der Effekt des "membrane-locking" auf. Dies äußert sich in einem äußerst schlechten Konvergenzverhalten der Elemente und liegt in einer falschen Abbildung von dehnungslosen Verformungen begründet, was ein unerwünschtes Versteifen der Elemente verursacht.

Auch in diesem Fall stellt sich die Frage nach dem Verhalten der abgeleiteten Größen, welche ebenfalls durch die Ausgangsgrößen nachhaltig beeinflusst werden.

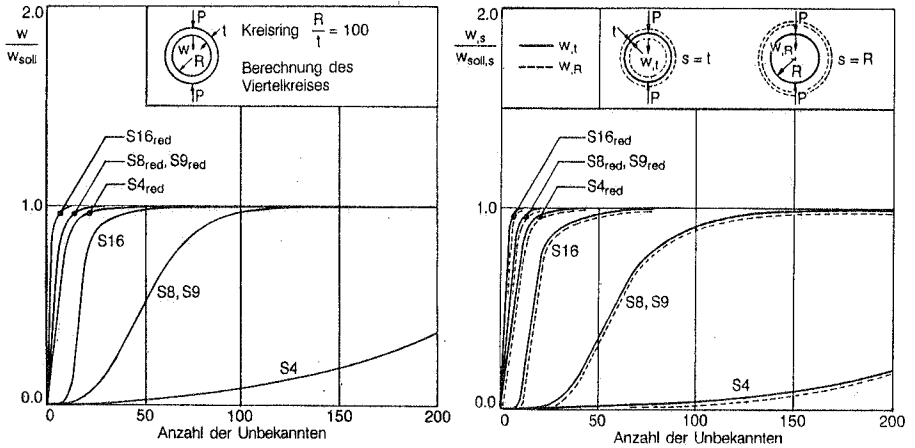


Bild 6.2-18a: Verschiebungen eines Zylinderausschnitts (Ring), "membrane-locking"

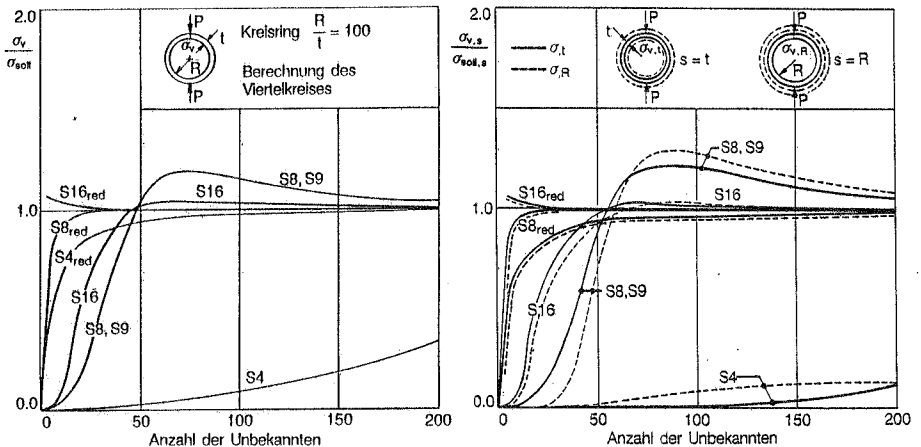


Bild 6.2-18b: Vergleichsspannungen nach von Mises eines Zylinderausschnitts (Ring), "membrane-locking"

Die Parameterstudie für einen Kreisring (Bild 6.2-18a) unter gegenseitig angreifenden Einzellasten zeigt ein deutliches Versteifen der Elemente gegenüber der exakten Lösung, wobei sich die Ableitungen der Verformungen entsprechend verhalten. Die Spannungen an der Stelle der Lasteinleitung (Bild 6.2-18b) sind für die einzelnen Elemente sehr unterschiedlich und nähern sich bei einer Verfeinerung

des Elementtrasters von verschiedenen Seiten an die exakte Lösung. Bei voller Integration ergibt sich bei den Spannungswerten zusätzlich eine Inkonsistenz zwischen den Ableitungen und den Ausgangsspannungen. Eine reduzierte Integration kann auch hier das Elementverhalten wesentlich verbessern, allerdings werden dabei wieder unerwünschte innere Kinematiken der Elemente ausgelöst, die im Einzelfall beachtet werden müssen.

### **Beurteilung der Elemente**

Hinsichtlich der hohen Anforderungen an die Qualität der Zustandgrößen aus der finiten Elementberechnung, welche für die Formulierung der Optimierungsaufgabe gefordert werden, ist es schwierig, ein robustes und vielseitig verwendbares Element aus der Familie der isoparametrischen degenerierten Schalenelemente zu benennen.

Die Auswahl eines Elements dieser Familie hängt im einzelnen von der Art der Beanspruchung (Platte, Scheibe, Schale), von der Geometrie (Grad der Verzerrung) der Elemente und nicht zuletzt von der geforderten Genauigkeit der Lösung ab:

- S4** Im allgemeinen nicht ohne "hourglass-control" /Stegmüller 1985/ anwendbares Element. Für Scheibenprobleme mit entsprechendem Elementtraster voll integriert verwendbar.
- S8** Dieses Element kann vielseitig angewandt werden, wenn reduziert integriert wird und die Elementgeometrie während des Optimierungsprozesses nicht zu stark verzerrt wird.
- S9** Für Plattenprobleme mit reduzierter Integration bei entsprechender Lagerung gut anwendbar. Sonst ist das Element wegen starker Versteifung bei voller Integration und unkontrollierbarem inneren Kinematiken bei reduzierter Integration ungeeignet.
- S16** Dieses Element ist im allgemeinen für die Strukturoptimierung zu aufwendig. Für eine unbekannte oder stark nichtlineare Tragwerksantwort bezüglich der Entwurfsvariablen ist es ein zuverlässiges Element und kann wegen seiner geringeren Neigung zu inneren Kinematiken auch vorteilhaft reduziert integriert werden.
- S3, S6, S10** Diese Elemente sind für allgemeine Probleme nicht ohne weiteres einsetzbar und können im herkömmlichen Sinn auch nicht reduziert integriert werden. Für Scheibenprobleme liefern sie mit Ausnahme des S3-Elements recht gute Lösungen. Sonst finden diese Elemente oft Anwendung bei der Modellierung komplizierter Tragwerksgeometrien und -ränder in Verbindung mit Rechteckelementen.

Vielversprechend für eine Anwendung im Bereich der Strukturoptimierung sind neuere Schalenelemente, welche auf der Grundlage von hybrid-gemischten oder "assumed-strain" Elementkonzepten formuliert sind /z.B. Stander 1989/. Diese Elemente haben in der Regel weniger Probleme mit den voraus beschriebenen "Locking"-Effekten. Insbesondere die "assumed-strain"-Elemente sind den Verschiebungselementen sehr ähnlich und eignen sich deshalb in besonderem Maße zur Aufbereitung für eine analytisch diskrete Sensibilitätsanalyse, wie sie in diesem Kapitel vorgestellt wurde.

## 7.0 Numerische Beispiele

### 7.1 Auswahl der Beispiele

Die nachfolgend beschriebenen numerischen Beispiele sollen das praktische Vorgehen bei Anwendungen der Sensibilitätsanalyse einerseits und bei der Lösung von Optimierungsaufgaben andererseits aufzeigen. Die einzelnen Problemfälle sind aus dem Anwendungsbereich des Bauwesens und des Maschinenbaus gewählt. Für diese Problemstellungen sollen die wesentlichen Aspekte und Prinzipien des Leichtbaus - optimale Steifigkeit, minimales Gewicht bzw. optimale Festigkeit - herausgestellt und ihre Umsetzung im Sinne der Strukturoptimierung beschrieben werden. Auf dem Hintergrund einer integrierten Programmlösung werden die wesentlichen Phasen für eine praktisch durchgeführte Strukturoptimierung gezeigt. Dazu gehören

- die Problemformulierung und Auswahl des Zielkriteriums und der Nebenbedingungen,
- die Modellbildung auf der Ebene des Entwurf-, Struktur- und Optimierungsmodells,
- die Auswahl einer geeigneten Sensibilitätsanalyse
- die Auswahl der Optimierungsstrategien und
- die interaktive Kontrolle des Optimierungsprozesses.

In den einzelnen Phasen der Lösung des Optimierungsproblems wird der interdisziplinäre Charakter der Strukturoptimierung deutlich, und es zeigt sich in den Beispielen, wie die verschiedenen Disziplinen der Geometriebeschreibung, Struktur- und Sensibilitätsanalyse sowie der mathematischen Programmierung miteinander verknüpft sind.

Das erste Beispiel ist darauf ausgerichtet, die Anwendungsmöglichkeiten der Sensibilitätsanalyse in der Praxis zu zeigen. Für eine Hochbauplatte werden die Sensibilitätskoeffizienten auf verschiedene Weise ermittelt und in ihrer numerischen Effizienz miteinander verglichen. Für die Schnittmomente sind die Sensibilitätskoeffizienten als Konturlinien angegeben. Diese können als Einflußflächen für die Entwurfsparameter interpretiert werden. Als solche bilden diese Einflußflächen eine wichtige Entscheidungsgrundlage für den Ingenieur in der Entwurfsphase, weil er sowohl eine qualitative Vorstellung von der Parameterempfindlichkeit der betrachteten Struktur als auch die Information über die quantitativen Auswirkungen einer Parameteränderung erhält.

Zwei weitere Beispiele sollen die Auslegung von Strukturen für die optimale Steifigkeit und Festigkeit dokumentieren. Im Beispiel 7.2. geht es um das Auffinden von möglichst freien Schalenformen, wie sie aus den Arbeiten von Heinz Isler

/Ramm 1986b/ bekannt sind. Für diesen Fall kommt die Formänderungsenergie als Zielkriterium zur Anwendung. In einer Vorstudie wird auf die besondere Charakteristik und Problematik derartiger Optimierungsprobleme eingegangen. Für die Schalenkonstruktion einer frei geformten Tennishalle wird dann der Formfindungsprozeß mit den Mitteln der Strukturoptimierung nachvollzogen. Im Vergleich zu Islers Schalenformen ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung.

Die Auslegung eines Schwungrads für seine optimale Festigkeit soll mit Beispiel 7.3. das Kapitel abschließen. In diesem Optimierungsproblem werden verschiedene Aspekte der Problemstellung gleichzeitig behandelt. Dazu gehören numerisch aufwendige Optimierungsfunktionen, eine gleichzeitige Variabilität der Form und Querschnittsverteilung, eine Berücksichtigung von Symmetriebedingungen mit Lastfallüberlagerung sowie ein empfindliches Strukturproblem mit sehr unterschiedlich wirkender Beanspruchung.

## 7.2 Sensibilitätsanalyse für eine Hochbauplatte

### Problemstellung

Als Aufgabenstellung wurde eine typische Deckenkonstruktion des Hochbaus gewählt, welche durch punktförmige Stützen, Wände und Randbalken über einem regelmäßigen Nutzungsraster gelagert ist (Bild 7.1-1). Die Punktsymmetrie erlaubt keine Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften für die Strukturanalyse bei einer vollen Belastung aus Eigengewicht ( $g$ ) und Verkehrslasten ( $p$ ), so daß sich ein recht großes Strukturproblem mit 169 Elementen (8-knotig) und insgesamt 1656 Freiheitsgraden ergibt. Die Geometriebeschreibung erfolgt durch 56 Entwurfsknoten und 25 lineare (Lagrange) Entwurfselemente. Damit kann eine unterschiedliche, kontinuierlich verteilte Dicke der Platte zwischen dem Rand und der Mitte erzeugt werden. Der Randbalken sei doppelt so dick wie die Platte an derselben Stelle und erzeugt einen Steifigkeitssprung. Die Geometrie des Ausgangsproblems und die Dickenverteilung ist in Bild 7.1-1 oben angegeben.

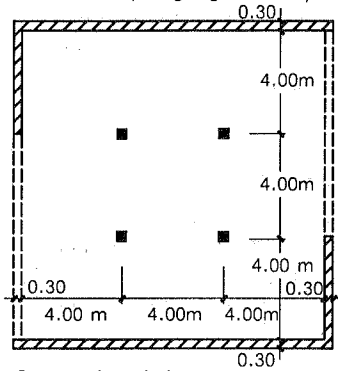
### Geometrievariation

In der Regel läßt sich über Entwurfselemente eine Parametervariation definieren, welche mit wenigen Variablen auskommt, aber gleichzeitig komplexe strukturelle Veränderungen bewirkt. Hier werden für die Parametervariation die Stützenpositionen in  $x$ -Richtung ( $s_1$ ) sowie die Dicke des Randbalkens ( $s_2$ ) und die Dicke der Platte am Rand ( $s_3$ ) und in der Mitte ( $s_4$ ) als Variablen ausgewählt. Für die Variablen  $s_2$  bis  $s_4$  ist in Bild 7.1-1 unten die Einheitsvariation  $h_s$  der Dickenverteilung graphisch dargestellt.

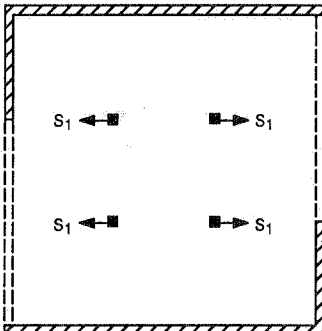
### Beispiel 7.1: Hochbauplatte (Flachdecke)

**Materialwerte:**  $E = 3 \times 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$  **Belastung:**  $p = 5.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$  und  $g$

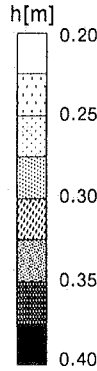
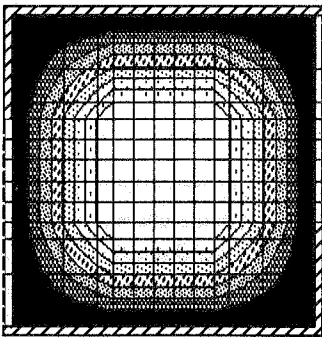
**Geometrie:** (Ausgangszustand)



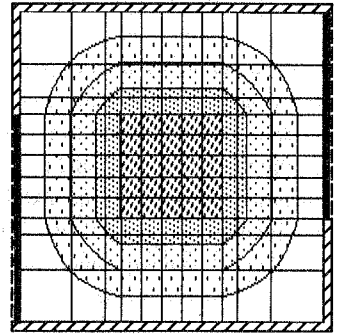
**Geometrievariation:**



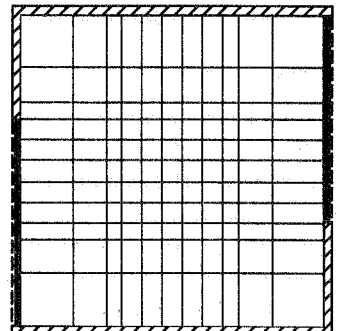
Stützenposition (Variable 1)  
Plattendicke am Rand (Variable 3)



**Plattendicke:** (Ausgangszustand)



Wand Stütze Randbalken



Dicke des Randbalkens (Variable 2)  
Plattendicke in der Mitte (Variable 4)

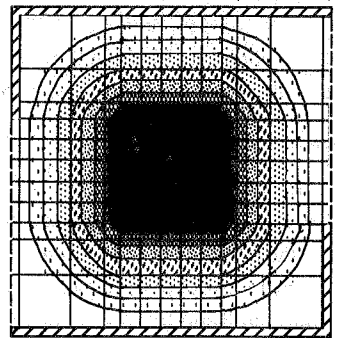
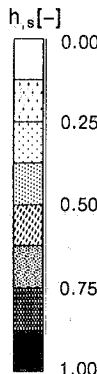
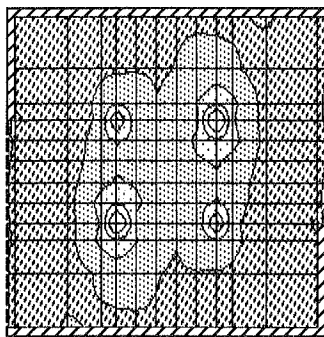


Bild 7.1-1: Hochbauplatte, Geometrie und Variation der Entwurfsparameter

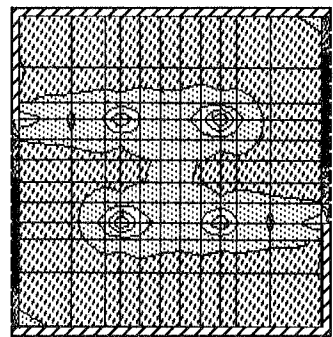
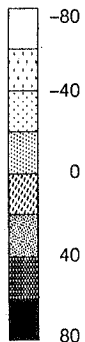
# Beispiel 7.1: Hochbauplatte – Struktur- und Sensibilitätsanalyse

**Biegemomente:**



$m_{xx} : -101 / +33$  (min/max)

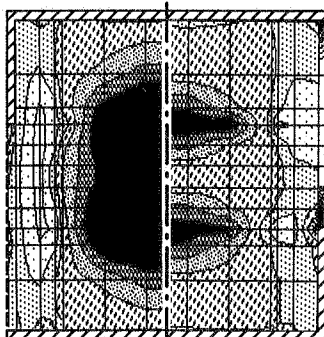
$m$  [ $\text{kN/m}^2$ ]



$m_{yy} : -160 / +108$  (min/max)

**Sensibilitätskoeffizienten:**

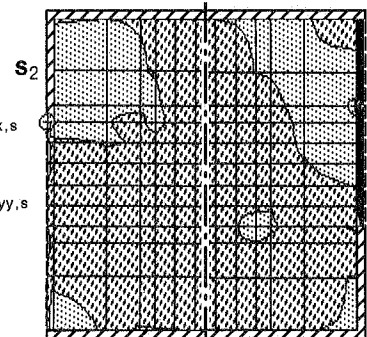
Legend: Wand Randbalken



$m_{xx,s} : (-12 / +31)$   $m_{yy,s} : (-50 / +71)$

$s_1$

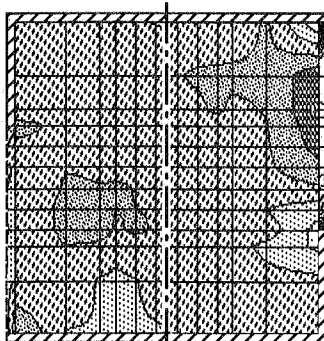
$m_{xx}, m_{xx,s}$   
 $m_{yy}, m_{yy,s}$



$m_{xx,s} : -95 / +52$   $m_{yy,s} : -677 / +611$

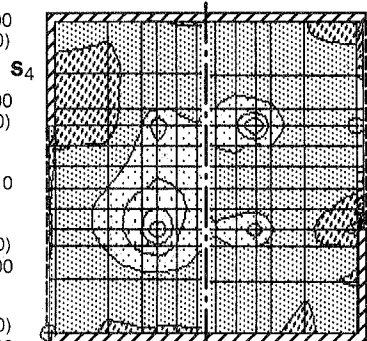
$s_2$

$m_s$  [ $\text{kN/m}^3$ ]



$m_{xx,s} : -142 / +109$   $m_{yy,s} : -380 / +330$

$s_3$



$m_{xx,s} : -305 / +62$   $m_{yy,s} : -275 / +342$

$s_4$

Bild 7.1-2: Hochbauplatte, Struktur- und Sensibilitätsanalyse



## Struktur- und Sensibilitätsanalyse

Die ermittelten Einflußflächen für die variierten Entwurfsparameter müssen immer auf dem Hintergrund der Ausgangsgrößen aus der herkömmlichen Strukturanalyse (Schnittmomente  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$ ) interpretiert werden. Dazu sind in Bild 7.1-2 oben die Konturlinien der Biegemomente für den Ausgangszustand angegeben.

Die Lastabtragung in x-Richtung erfolgt fast vollständig über die Plattenwirkung ( $m_{xx}$ ). In y-Richtung stellt sich demgegenüber eine kombinierte Tragwirkung zwischen der Platte und dem Randbalken ( $m_{yy}$ ) ein. Der Steifigkeitssprung zwischen Plattenrand und Randbalken bewirkt die entsprechend höhere Beanspruchung des Unterzugs.

Auf dem Hintergrund der Beanspruchung der Platte im Ausgangszustand können nun die Einflüsse der Parametervariation interpretiert werden. Die Beanspruchungsrichtung ist wegen der Symmetrie am halben System angegeben ( $m_{xx}$  – links,  $m_{yy}$  – rechts), und die Einflußflächen in Bild 7.1-2 unten sind der Geometrievariation ( $s_1$  bis  $s_4$ ) aus Bild 7.1-1 zuzuordnen. Eine Erhöhung des mittleren Stützabstandes in x-Richtung ( $s_1$ ) bewirkt eine Erhöhung der Stützmomente ( $m_{xx}$ ) und Feldmomente ( $m_{yy}$ ) in der Plattenmitte. Gleichzeitig wird der Randbalken durch die veränderte Stützenposition entlastet. In Bild 7.1-2 ist für die Variation dieses Parameters erkennbar, daß das Elementnetz mitgeführt wird. Sämtliche Parametervariationen werden in Einheitsgrößen und dimensionsecht durchgeführt, d.h. Stützenpositionen und Dicken werden um 1 m variiert. Damit sind auch die Unterschiede in der Größenordnung der Sensibilitätskoeffizienten erklärbar. Für die Sensibilitätskoeffizienten der Variable  $s_i$  gelten die eingeklammerten Werte der Legende  $m_{,s_i}$  in Bild 7.1-2. Die übrigen Dickenvariablen sind dem größeren Skalenbereich der Legende zugeordnet.

Für die Dickenvariation des Randbalkens ( $s_2$ ) und der Platte (Rand:  $s_3$ , Mitte:  $s_4$ ) gilt der aus dem Tragverhalten solcher Strukturen bekannte Grundsatz, daß Steifigkeit Kräfte anzieht. Beispielsweise erhöht eine Verstärkung des Randbalkens ( $s_2$ ) dessen Beanspruchung ( $m_{yy}$ ) und entlastet gleichzeitig die Platte. Umgekehrte Verhältnisse treten bei einer größeren Plattendicke am Rand auf ( $s_3$ ). Der Balken wird entlastet und die Platte am Rand ( $m_{yy}$ ) zusätzlich beansprucht.

Am Beispiel der Hochbauplatte wird deutlich, wie sich die Erfahrungen aus der Beurteilung des Tragverhaltens einer Struktur mit der Sensibilitätsanalyse decken. Dennoch sind die Ergebnisse der Sensibilitätsanalyse nicht trivial, denn sie liefern zusätzlich eine quantitative Aussage über die Parameterempfindlichkeit. Wie in Abschnitt 5.5. beschrieben, kann mit den Sensibilitätskoeffizienten in gewissen Grenzen vom vorliegenden Entwurf auf einen veränderten Entwurf extrapoliert werden. Damit lassen sich schnell und zielsicher quantitative Aussagen machen, welche Variablen den Entwurf maßgeblich beeinflussen.

## Rechenzeitvergleich

Ein weiterer Aspekt der vorliegenden Problemstellung ist der Vergleich der verschiedenen Methoden zur diskreten Sensibilitätsanalyse hinsichtlich ihrer numerischen Effizienz.

Obwohl die Sensibilitätsanalyse mit aufwendigen Schalenelementen durchgeführt wurde, läßt sich für dieses Beispiel der Rechenaufwand für die unterschiedlichen Methoden beurteilen. Bei der Gegenüberstellung der Verfahren wird zunächst von einer linearen Strukturanalyse ausgegangen. Die Erstellung und das Faktorisieren der Steifigkeitsmatrix haben mit 33 % und 64 % den entscheidenden Anteil an der Problemlösung. Der Aufwand einer Sensibilitätsanalyse ist von der Anzahl der Variablen und ihrem Einfluß auf die variierte Struktur abhängig. Der Beitrag einer Variablen zum gesamten Rechenaufwand der Sensibilitätsanalyse hängt zusätzlich von der Bandstruktur der Systemmatrix ab, so daß a priori keine Aussage über die Effizienz der einzelnen Verfahren möglich ist.

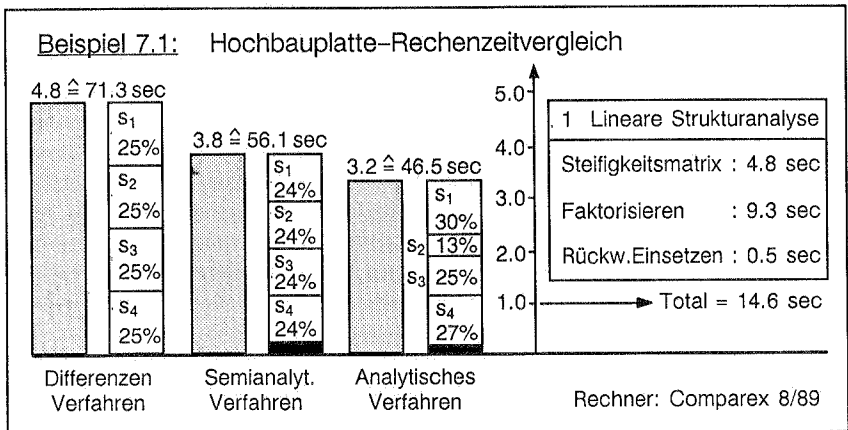


Bild 7.1-3: Hochbauplatte, Rechenzeiten für die Sensibilitätsanalyse

In Bild 7.1-3 sind die einzelnen Methoden der Sensibilitätsanalyse miteinander verglichen. In den Zahlen sind zusätzliche Auswertungen für Optimierungsfunktionen mit enthalten. Demnach ist das Vorwärtsdifferenzenverfahren 4,8-mal teurer als die reguläre lineare Strukturanalyse.

Für das semianalytische Verfahren ist der Aufwand 3,8-fach, wobei der unterschiedliche Einfluß der Variation einzelner Parameter bei der numerischen Ableitung von Steifigkeitsmatrix und Lastvektor nicht berücksichtigt wurde. Die analytische Methode liegt mit dem Faktor 3,2 sehr günstig. Dies resultiert vor allem aus dem geringen Variationseinfluß des Randbalkens (s<sub>2</sub>) mit 13 %. Im konkreten Fall kann die Effizienz der Sensibilitätsanalyse nur durch eine direkte Gegenüberstellung wie in Bild 7.1-3. beurteilt werden und muß für jedes Problem neu durchgeführt werden.

## 7.3 Optimierung freier Schalenformen

Die Formfindung von freien, beliebig belasteten Schalen wird hier mit den Mitteln der Strukturoptimierung durchgeführt. In diesem Fall kann die Optimierungsaufgabe als Auslegung der Struktur für eine optimale Steifigkeit formuliert werden, wobei das zur Verfügung stehende Material während des Optimierungsvorgangs konstant gehalten wird. Ziel dieser Problemstellung sind Schalenkonstruktionen, welche die aufgebrachte Belastung möglichst verformungsarm abtragen und zu einem günstigen Beanspruchungszustand führen.

### 7.3.1 Problematik der Schalenoptimierung

In einer Voruntersuchung soll das Problemfeld der Formfindung von Schalen näher beschrieben werden und einige Aspekte der Formulierung des Optimierungsproblems aufgezeigt werden. Im vorliegenden Fall liegt die eigentliche Schwierigkeit vor allem in der Art des Zielkriteriums. Durch die Formänderungsenergie als Zielfunktion wird das gesamte Strukturverhalten beschrieben. Das kann im Einzelfall zu stark nichtlinearen Funktionen führen, welche lokal einen sehr unterschiedlichen Charakter aufweisen. Sämtliche Probleme der Formfindung bei gekrümmten Tragwerken haben in dieser Hinsicht unter diesen besonderen Eigenarten des Zielkriteriums zu leiden. Viele Optimierungsstrategien sind nur mit Einschränkungen für die Lösung derartiger Optimierungsprobleme anwendbar. Aus der zur Verfügung stehenden Programmbibliothek kommt lediglich die sequentielle quadratische Programmierung (SQP) als Lösungsstrategie für den vorliegenden Fall in Frage. Die eingeführten Entwurfsvariablen bestimmen die Zielfunktion in sehr unterschiedlicher Weise. Es kommt während des Optimierungsprozesses zu starken Änderungen im Beanspruchungszustand der Schale. Dieser Effekt beeinflusst die Funktionen des Optimierungsproblems nachhaltig und bewirkt in der Regel eine sehr langsame Konvergenz zur optimalen Lösung.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \quad & f_E(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (7-1) \\ \text{mit} \quad & h_W = 0 \end{aligned}$$

#### Einfluß der Geometriebeschreibung

Im Beispiel 7.2a wird untersucht, welchen Einfluß die Geometriebeschreibung auf das Ergebnis der Formoptimierung hat. Die Schalenform wird mit nur einem 16-knotigen Bezierelement beschrieben. Zwei verschiedene Schalenformen werden untersucht, welche sich lediglich in der Form des Grundrisses unterscheiden. Die Schalenform 1 hat einen quadratischen Grundriß. Die zweite Schalenform ist in ihrem Grundriß einer von H. Isler /Ramm 1986a/ konstruierten Schale angepaßt. Als Optimierungsaufgabe wird für beide Schalen, wie in Gl.7-1 angegeben, die Minimierung der Formänderungsenergie unter Beibehaltung des Konstruktions-

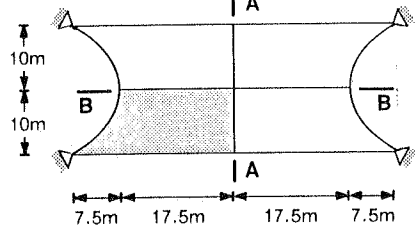
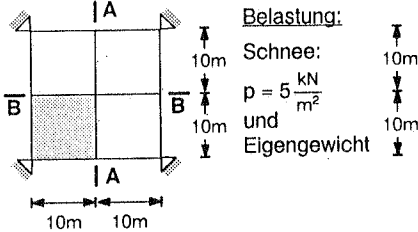
## Beispiel 7.2a: Formoptimierung

Grundriß und Seitenansichten:

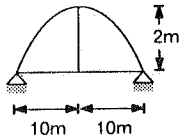
Materialwerte:  $E = 3.4 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ,  $\nu = 0.0$   
 $\gamma = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

Schalform 1

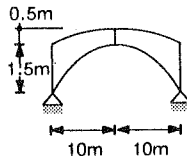
Schalform 2



A-A und B-B  
 $t = 10 \text{ cm}$

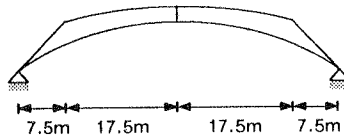


A-A



B-B

$t = 10 \text{ cm}$



Optimierungsergebnisse: (Volumen = const.)

Schalform 1

Schalform 2

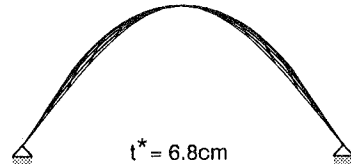
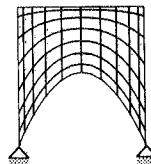
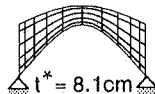
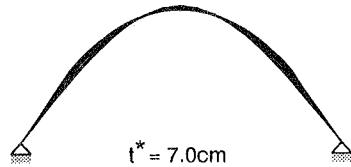
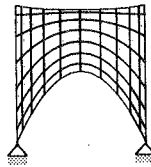
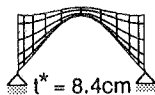
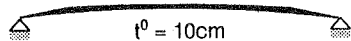
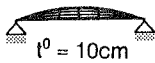


Bild 7.2-1: Einfluß der Geometriebeschreibung auf die Schalform

gewichts formuliert. In beiden Fällen sind die Ausgangsformen äußerst flache Schalen, welche in hohem Maße Biegeanteile in der Zielfunktion enthalten. Für

den Schalentyp 1 entsteht als optimale Form eine glatte Schalenfläche ohne Krempelränder ( $t^* = 8,1\text{cm}$ ). Bemerkenswert ist die Zwischenlösung ( $t^* = 8,4\text{cm}$ ), welche noch kurz vor der Optimallösung einen Schalenrand mit einer Gegenkrümmung aufweist. Für die Schalenform 2 zeigt sich für die Optimallösung ( $t^* = 7,0\text{cm}$ ) eine veränderliche Krümmung über das gesamte Tragwerk hinweg. Der Versuch, dieser Lösung Krempelränder durch geometrische Nebenbedingungen aufzuzwingen, scheitert. Es entsteht eine Lösung ( $t^* = 7,0\text{cm}$ ), welche die Last ohne Gegenkrümmung sozusagen als Kreuzgewölbe abträgt. Diese Untersuchung zeigt, daß durch diese Aufgabenstellung für nur einen maßgebenden Lastfall keine lokalen Aufbördelungen am Schalenrand entstehen, wie sie beispielsweise aus Versuchen an Hängemodellen bekannt sind.

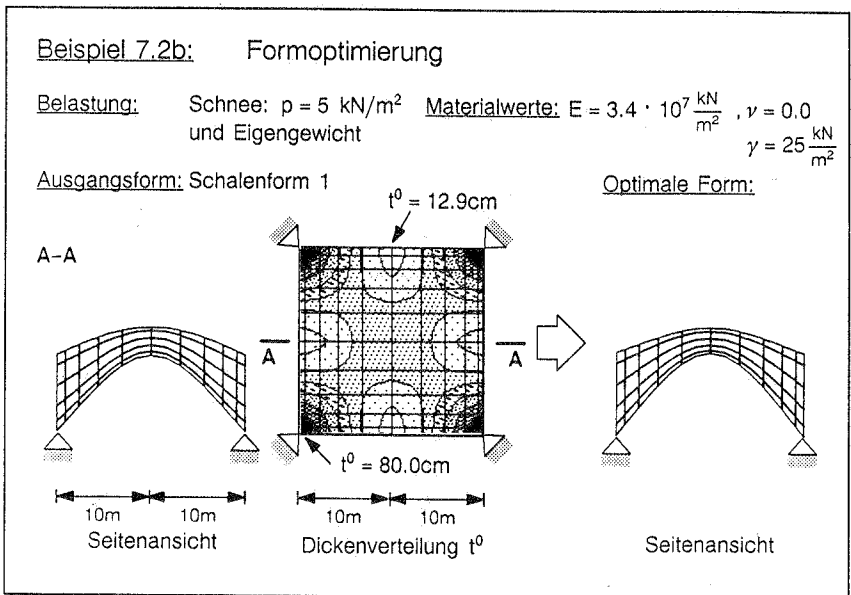


Bild 7.2-2: Einfluß der Dickenverteilung auf die Schalenform

### Einfluß der Dickenverteilung

Die vorausgehende Untersuchung wird als sequentiell hintereinander geschaltete Form- und Dickenoptimierung für die Schalenform 1 weitergeführt. Zunächst wird eine reguläre Gewichtsoptimierung durchgeführt ( $\sigma_{zul} = 2.1\text{MN/m}^2$ ), sodaß sich für vier Dickenvariablen pro Schalenviertel die angegebene Dickenverteilung ergibt.

$$\min_{\mathbf{s}} f_w(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n \quad (7-2)$$

$$\text{mit } g_{sj} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{zul}} - 1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Bei der anschließenden Formoptimierung nach Gl.7-1 weicht die Optimallösung kaum von der Ausgangsform in Bild 7.2-2 ab. Sollten Kreppeiränder für die vorliegende Schale in Frage kommen, würde diese Dickenverteilung die Ausbildung der Ränder in dieser Tendenz begünstigen. Diese Vermutung wird durch das Beispiel 7.2b jedoch nicht bestätigt.

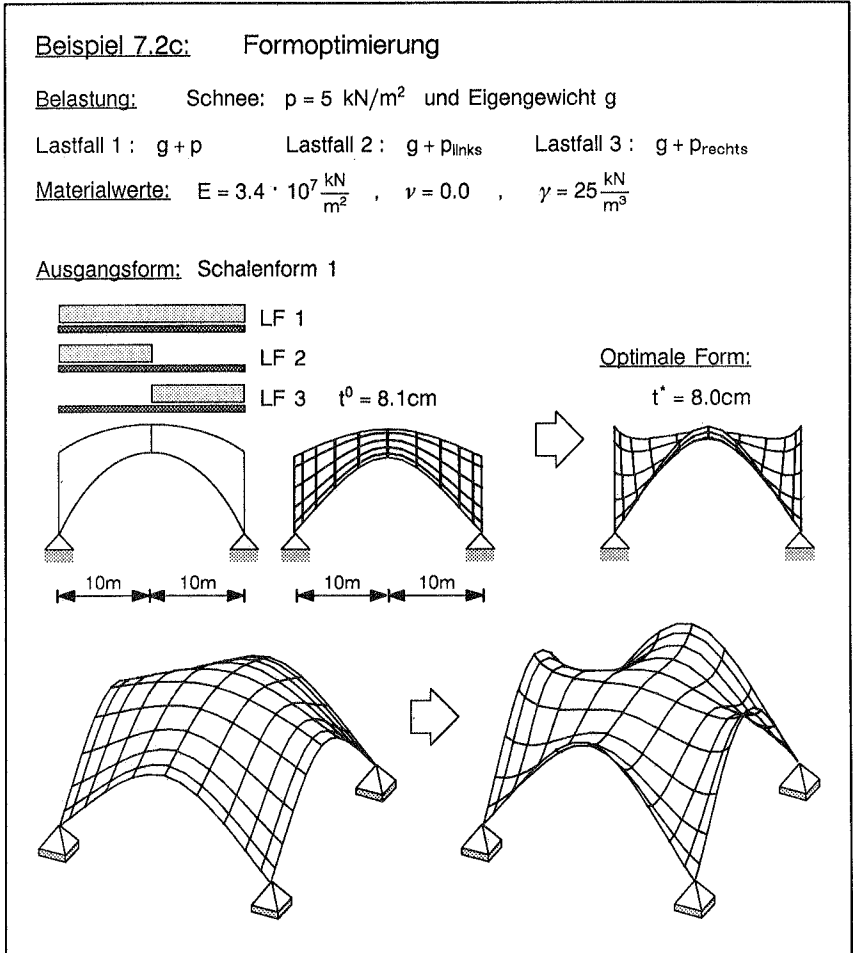


Bild 7.2-3: Einfluß der Belastung auf die Schalenform

### Berücksichtigung verschiedener Lastfälle

Ausgehend von der optimalen Schalenform 1 wird in Beispiel 7.2c der Einfluß von verschiedenen Lastfällen untersucht, welche über die Formänderungsenergie in das Zielkriterium als additive und gleichgewichtete Komponenten eingebracht

werden. Wegen der Symmetrie der Struktur und der symmetrisch verknüpften Entwurfsvariablen müssen nur zwei Lastfälle (LF1 und LF2) im Optimierungsproblem berücksichtigt werden.

$$\min_{\mathbf{s}} f_{\text{tot}}(\mathbf{s}) = f_E^{F1} + f_E^{F2} \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (7-3)$$

$$\text{mit } h_W = 0$$

Hier ergibt die optimale Form deutlich sichtbare Aufbördelungen der Schalenränder, wobei sich die konstant verteilte Dicke der Struktur nur wenig ändert ( $t^0 = 8,1\text{cm} \rightarrow t^* = 8,0\text{cm}$ ). Die erhaltene Optimallösung entsteht dadurch, daß hier kein biegefreier Beanspruchungszustand mehr möglich ist und deshalb die Schale durch die Ausbildung von Krempelrändern versteift wird. Die Lösung geht also vom optimalen Membranzustand für nur einen maßgebenden Lastfall über in einen optimalen, kombinierten Biege- und Membranzustand. Beide Lösungen liegen interessanterweise energetisch gesehen sehr nahe beieinander.

### 7.3.2 Optimierung einer freigeformten Schale

#### Geometriebeschreibung

Unter Verwendung der vorangehenden Untersuchungsergebnisse soll eine komplizierter aufgebaute Schalenform optimiert werden. In Beispiel 7.2d werden insgesamt vier Bezielemente für die Geometriebeschreibung verwendet /Kühnemann 1989/. Die geometrische Variation der Form wird mit 23 Entwurfsvariablen beschrieben. Im vorliegenden Beispiel ist nur ein Lastfall ( $g + p$ ) berücksichtigt worden, um so mit den Mitteln der Strukturoptimierung die Formfindungsmethoden H. Islers nachzuempfinden. Aus den Voruntersuchungen kann geschlossen werden, daß sich bei Berücksichtigung mehrerer Lastfälle Aufbördelungen der Schalenränder einstellen müssen. Für dieses Optimierungsproblem wird die Schalenform durch geometrische Nebenbedingungen in dieser Richtung beeinflußt.

$$\min_{\mathbf{s}} f_E(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (7-4)$$

$$\text{mit } h_W = 0$$

$$g_{Gj} = \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

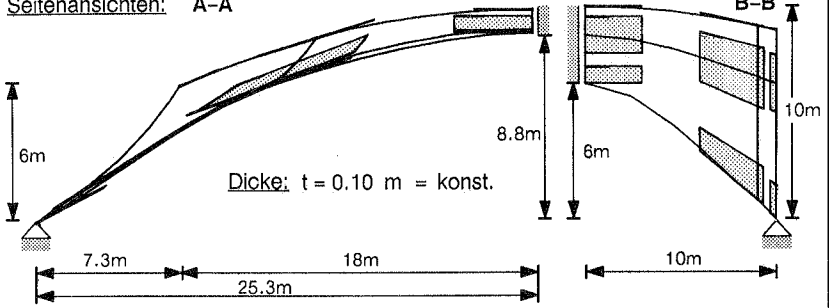
Diese Nebenbedingungen werden so formuliert, daß bei der Minimierung der Formänderungsenergie vorzugsweise aufgekrempelte Schalenränder entstehen. Das Optimierungsergebnis zeigt eine entsprechende Schalenform, wie sie aus den Isler'schen Arbeiten /Ramm 1986b/ bekannt ist.

**Beispiel 7.2d: Freie Schalenform – Entwurfsmodell und Optimierung**

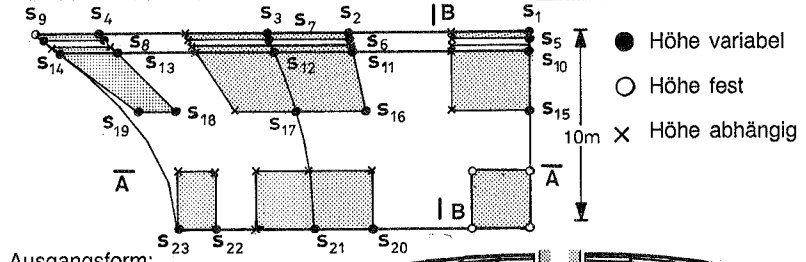
**Belastung:** Schnee  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  und Eigengewicht  $g$

**Materialwerte:**  $E = 3.0 \cdot 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\gamma = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

**Seitenansichten:** A-A

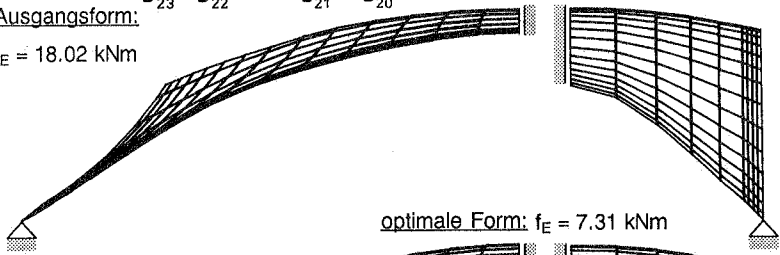


**Grundriß und Entwurfsmodell:** (23 Entwurfsvariablen)



**Ausgangsform:**

$f_E = 18.02 \text{ kNm}$



**optimale Form:**  $f_E = 7.31 \text{ kNm}$

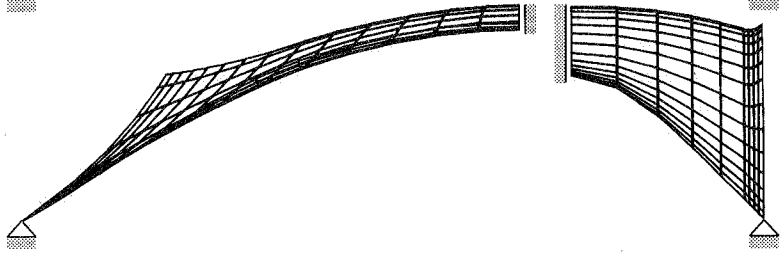


Bild 7.2-4: Optimierung einer freien Schalenform



## Rechenzeitvergleich

Für die Struktur- und Sensibilitätsanalyse werden in Beispiel 7.2d 4-knotige reduziert integrierte Schalenelemente verwendet. Es zeigten sich für diesen Anwendungsfall auch während des Optimierungsprozesses keine inneren Kinematiken ("Zero-Energy-Modes") in der Struktur, und eine Überprüfung der Berechnung am Optimum ergab eine gute Übereinstimmung mit einer Strukturanalyse unter Verwendung 8-knotiger, reduziert integrierter Schalenelemente. Insgesamt wurden 126 Schalenelemente verwendet, was einem Strukturproblem mit 675 Freiheitsgraden entspricht.

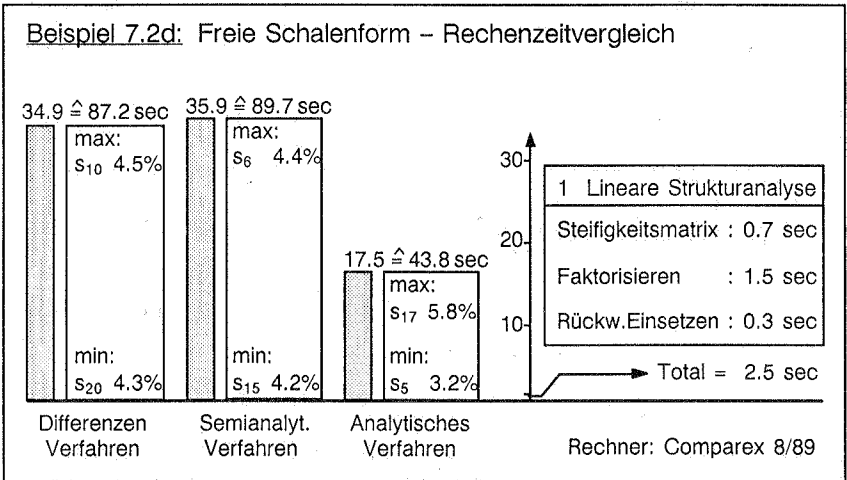


Bild 7.1-3: Freie Schalenform, Rechenzeiten für die Sensibilitätsanalyse

Der Rechenzeitvergleich (Bild 7.2-5) zwischen den unterschiedlichen Methoden der diskreten Sensibilitätsanalyse zeigt, daß gegenüber der numerischen Gradientenbildung die analytisch durchgeführte Sensibilitätsanalyse den Rechenaufwand etwa auf die Hälfte reduziert. Dies liegt vor allem in der starken Entkopplung der einzelnen Entwurfsvariablen begründet. Die minimale Rechenzeit der analytischen Gradientenermittlung liegt für die Variable  $s_5$  vor, welche die Variation des Schalenrandes beschreibt. Der anteilmäßig größte Rechenaufwand entsteht bei der Bestimmung der Sensibilitätskoeffizienten für die Variable  $s_{17}$ . Die Variation dieser Variablen bewirkt an zentraler Stelle eine Änderung der genannten Schengeometrie. Damit ist der entsprechend große Einfluß im Rechenaufwand zu erklären. Der Rechenzeitvergleich für das semianalytische Verfahren ist nicht repräsentativ, da wiederum die Entkopplung der Variablen bei der Gradientenbildung programmtechnisch nicht berücksichtigt wurde. Die semianalytische Gradientenermittlung ist für Formoptimierungsprobleme vor allem hinsicht-

lich ihrer Genauigkeit und Zuverlässigkeit von Interesse. Für das vorliegende Beispiel wurde eine relative Vorwärtsschrittweite von  $\epsilon_s = 10^{-7}$  für die numerische Ableitung der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors verwendet. Bei den Ableitungen der Zielfunktion kann eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytisch erzeugten Sensibilitätskoeffizienten festgestellt werden. Dies erstaunt um so mehr, als in der Zielfunktion (Formänderungsenergie) sämtliche Fehler der Sensibilitätskoeffizienten für Verschiebungen und Spannungen aufaddiert werden. Vergleichbare Genauigkeitsprobleme, wie sie in 5.3. dokumentiert sind, treten in diesem Fall also nicht auf.

## 7.4 Optimierung eines Schwungrads

### Problemstellung

In seiner Beanspruchung kann das in Bild 7.3-1 beschriebene Schwungrad vornehmlich als Festigkeitsproblem charakterisiert werden. Das Schwungrad soll im vorliegenden Fall in seiner Form und der Querschnittsverteilung nach der Festigkeit optimal ausgelegt werden. Es handelt sich hier um eine hybrid wirkende Struktur. Der Flansch des Schwungrads wird als Zugring und gleichzeitig über zweiachsige Biegung als Schale beansprucht. Die innere Scheibe des Schwungrads wirkt lediglich als Membrane. Eine Geometrievariation im Optimierungsprozeß erzeugt deshalb sehr unterschiedliche und kombiniert wirkende Beanspruchungszustände. Während des Optimierungsprozesses soll das axiale Massenträgheitsmoment des Ausgangszustandes über die Einführung einer entsprechenden Gleichheitsnebenbedingung beibehalten werden.

$$\min_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}) \quad ; \quad \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad ; \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (7-5)$$

$$\text{mit } h_C = 0$$

$$g_{sj} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{zul.}} - 1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

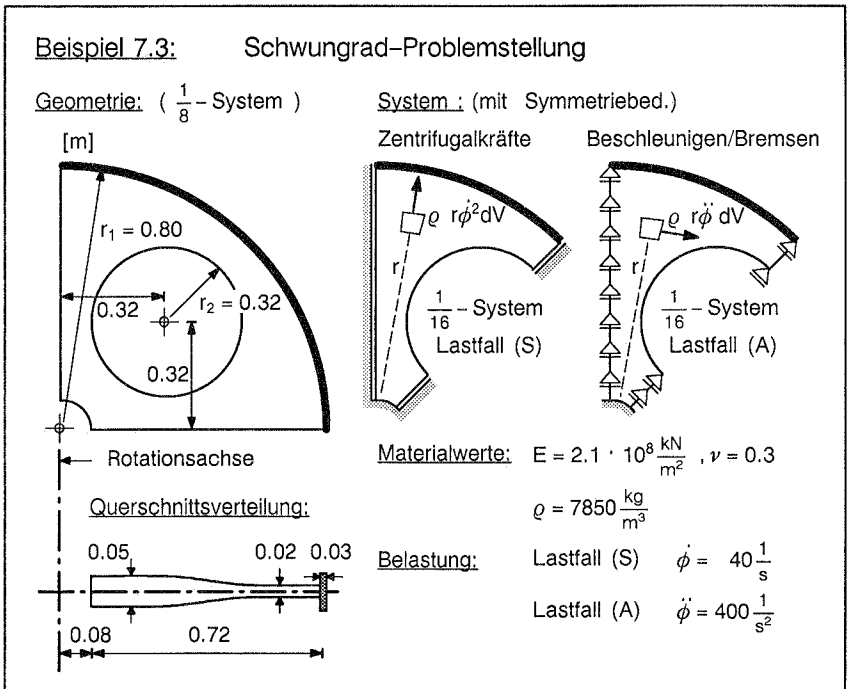


Bild 7.3-1: Problemstellung für die Optimierung eines Schwungrads

### Beispiel 7.3: Schwungrad–Lastfallüberlagerung/Beanspruchung

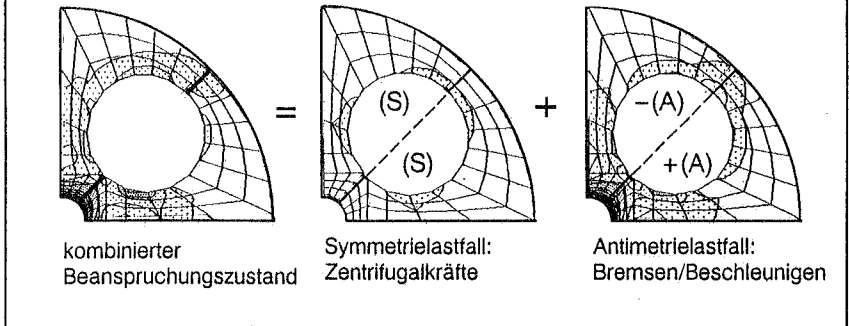


Bild 7.3-2: Lastfallüberlagerung für die Optimierung eines Schwungrads

#### Symmetrie und Lastfallüberlagerung

Sowohl die Struktur als auch die Variation der Geometrie sollen symmetrisch zur Rotationsachse und den beiden Symmetrieebenen sein. Die beiden gemeinsam auftretenden Lastfälle aus Zentrifugalkräften und Beschleunigen bzw. Bremsen (Stoß) können jeweils an einem 1/16-System mit unterschiedlicher Lagerung berechnet werden (Bild 7.3-2). Aus der Überlagerung des Symmetrielaufschlags (Zentrifugalkräfte) und des Antimetrielaufschlags (Beschleunigen/Bremsen) kann der Beanspruchungszustand des 1/8-Systems ermittelt werden. Diese Überlagerung der beiden Lastfälle muß so erfolgen, daß die durch Nebenbedingung kontrollierten Spannungen den kombiniert wirkenden Beanspruchungszustand im Optimierungsproblem berücksichtigen (Gl.7-5).

#### Geometrievariation

Ziel bei der Festlegung der Optimierungsvariablen ist es, mit wenigen Entwurfsvariablen auszukommen und gleichzeitig eine genügend hohe Variabilität im Optimierungsproblem zu erhalten. Dies ist vor allem für die formbeschreibenden Entwurfsvariablen wichtig. Das gewählte Entwurf- und Optimierungsmodell ist in Bild 7.3-3 dargestellt. Die gesamte Struktur wird mit 6 Design-Elementen beschrieben. Es kommen hier ausschließlich Coons-Elemente zur Anwendung, welche eine Kombination von Kreis-, Lagrange- und Bezierkanten erlauben. In diesem Entwurfsmodell ist es auch möglich, eine Tangentenbedingung für den Lochrand zu formulieren, welche während des Optimierungsprozesses aufrecht erhalten bleibt.

**Beispiel 7.3:** Schwungrad – Entwurfs- und Optimierungsmodell

Entwurfs-Modell:

Optimierungsmodell:

Querschnitte

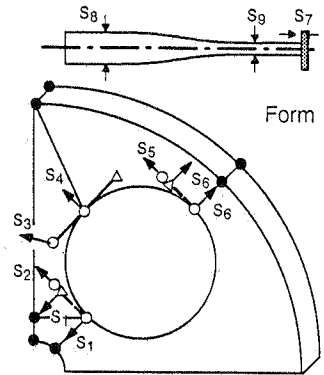
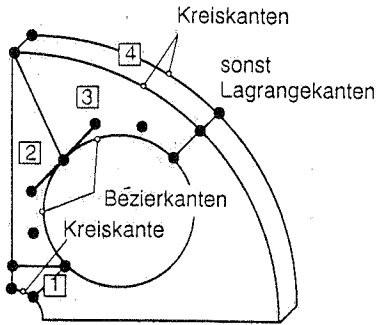


Bild 7.3-3: Entwurfs- und Optimierungsmodell des Schwungrads

**Beispiel 7.3:** Schwungrad-Variation der Form

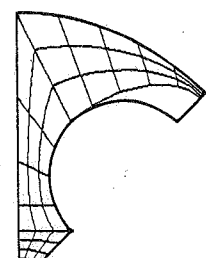
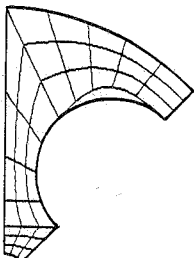
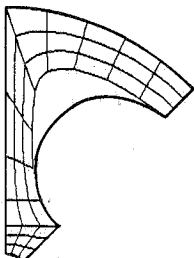
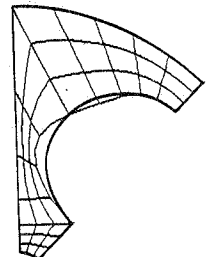
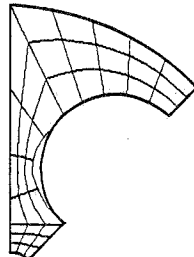
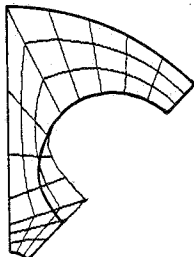


Bild 7.3-4: Variation des Lochrandes

In Bild 7.3-4 sind die Variationsmöglichkeiten der Lochform für die Variablen  $s_1$  bis  $s_6$  angegeben. Es zeigt sich, wie unterschiedlich die Form des Lochrandes durch die einzelnen Entwurfsvariablen beeinflusst werden. Richtungen und Verknüpfungen dieser Entwurfsvariablen sind in Bild 7.3-2 angegeben. Darüber hinaus werden für die Festlegung der Querschnittsverteilung drei weitere Optimierungsvariablen definiert (Bild 7.3-3). Die Dicke der Schwungradscheibe wird über zwei der Struktur übergeordnete Querschnittsvariable bestimmt. Durch eine definierte Benutzerschnittstelle kann diese Art der globalen, formabhängigen Querschnittsbeschreibung sehr einfach angegeben werden. Eine Variation der Entwurfsvariablen  $s_1$  bis  $s_6$  bewirkt so eine gleichzeitige Änderung der Knotendicken.

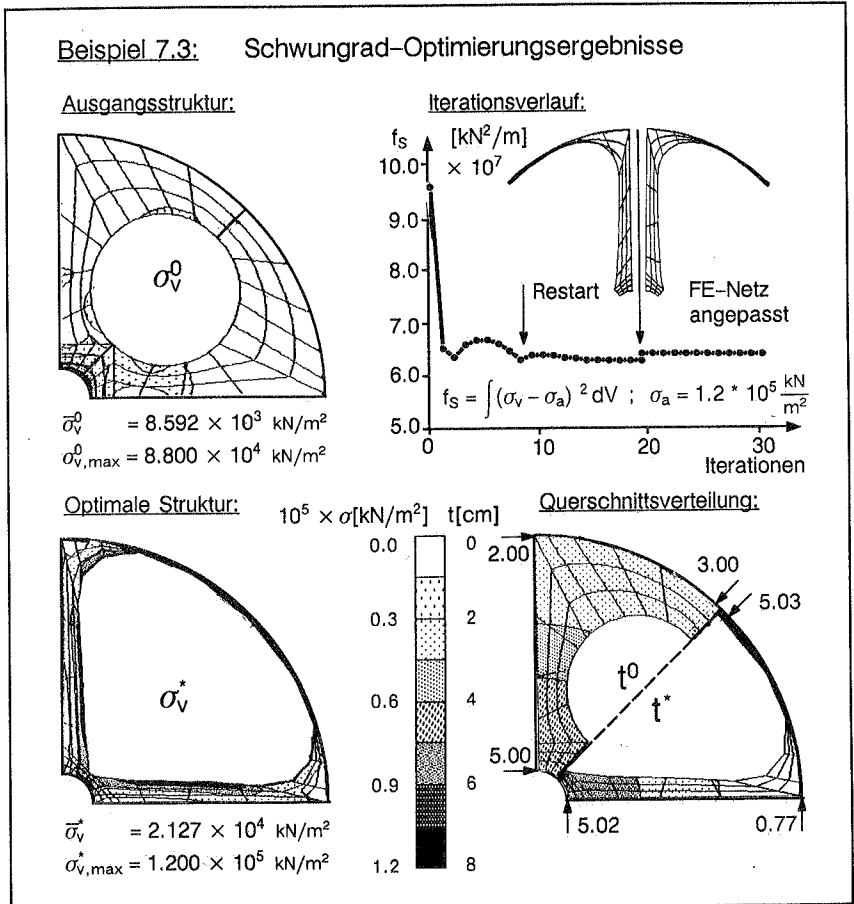


Bild 7.3-5: Ergebnisse für die Optimierung des Schwungrads

## Optimierungsergebnis

Die Charakteristik des allgemeinen Spannungsausgleichs für die Vergleichsspannungen, die Gleichheitsnebenbedingung für die Erhaltung des axialen Massenträgheitsmoments und die gleichzeitige Variation von Form- und Querschnitten haben einen entscheidenden Einfluß auf den Ablauf der Optimierung. Der allgemeine Spannungsausgleich wird über das Volumen der Struktur vorgenommen. Das Integral der Vergleichsspannungen in der Schwungradscheibe wird deshalb mit einem Integrationspunkt über die Dicke bestimmt. Im Flansch werden wegen der kombinierten Beanspruchung zehn Integrationspunkte über die Dicke verwendet. Insgesamt wird die Ermittlung der Zielfunktion und ihrer analytischen Ableitungen dadurch sehr aufwendig. Im Iterationsverlauf (Bild 7.3-5) ist für die ersten neun Iterationen erkennbar, wie schwierig die Erfüllung des Zielkriteriums unter Einhaltung der Gleichheitsnebenbedingung ist. Die Ursache dafür liegt vor allem in der gleichzeitigen Form- und Querschnittsvariation. Nach zwanzig Iterationen ist durch die interaktive Kontrolle des Optimierungsprozesses erkennbar, daß die Modellierung des Strukturproblems durch stark verzerrte Elemente mangelhaft wird.

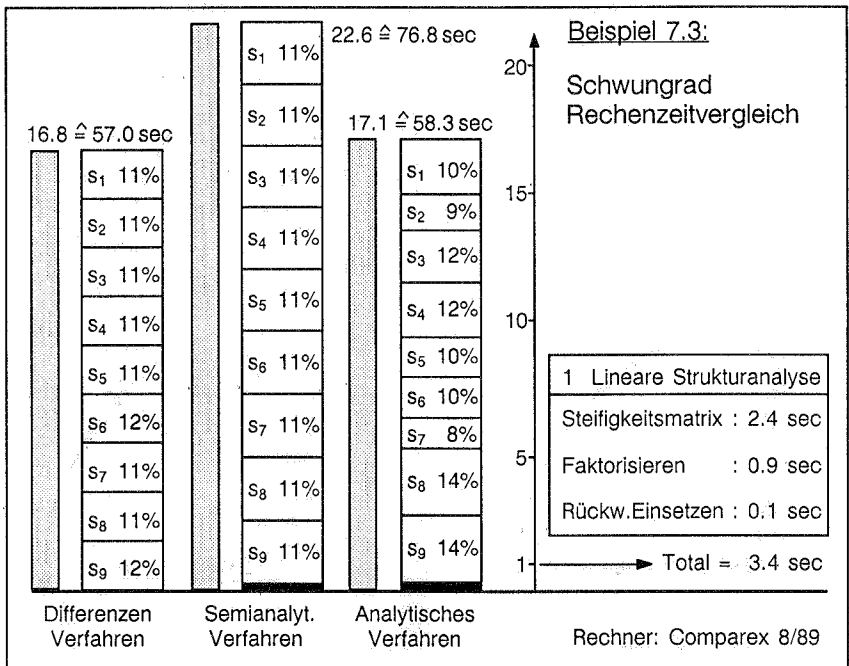


Bild 7.3-6: Schwungrad, Rechenzeitvergleich für die Sensibilitätsanalyse

Ohne das Strukturproblem zu ändern, wird das Elementnetz der Tragwerksform über eine Modifikation des Entwurfmodells neu angepasst. Nach etwa 30 Iterationen ergibt sich keine nennenswerte Verbesserung der Lösung mehr. Die optimale Struktur erfüllt die Spannungsnebenbedingung ( $\sigma_v \leq 1,2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ) an drei Stellen. An der Rotationsachse und an der Innenseite des Lochs (Steg, Übergang zum Flansch) werden die Spannungen kritisch. Gegenüber dem Ausgangszustand ( $\bar{\sigma}_v = 8592 \text{ kN/m}^2$ ) werden die Spannungen im Endzustand ( $\bar{\sigma}_v = 21270 \text{ kN/m}^2$ ) nur wenig an die zulässigen Spannungen angeglichen. Das liegt vor allem darin begründet, daß der Flansch wegen der Erhaltung der Massenträgheitsmoments dicker wird und zusätzlich als Zugring wirkt, also nur wenig beansprucht wird.

### **Rechenzeitvergleich**

Die Besonderheit der Problemstellung legt auch für das Beispiel 7.3. nahe, den Vergleich der Rechenzeiten (Bild 7.3-6) für die Sensibilitätsanalyse durchzuführen. Es zeigt sich in diesem Fall, daß die numerische Gradientenermittlung hier mit dem geringsten Rechenaufwand durchgeführt wird. Die Erklärung dafür liegt vor allem in der Kombination von Form- und Querschnittsvariablen, welche eine Variation großer Strukturbereiche bewirkt. Demnach haben die Dickenvariablen  $s_8$  und  $s_9$  auch den größten Einfluß auf die Sensibilitätsanalyse. Auch in diesem Fall ist die semianalytische Gradientenbildung im Rechenzeitvergleich nicht repräsentativ. Der zusätzliche Aufwand an Rechenzeit gegenüber dem Differenzenverfahren ergibt sich durch die aufwendige Integration über das Strukturvolumen bei der Gradientenermittlung aus dem abgeleiteten Verschiebungsfeld.



## 8.0 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

An der Lösung von Strukturoptimierungsproblemen sind grundsätzlich verschiedene Disziplinen beteiligt und müssen zu einem geeigneten Lösungskonzept zusammengeführt werden. Für eine rechnerunterstützte Strukturoptimierung ist es von Vorteil, bereits die Ausgangsbasis der Programmentwicklung auf die besonderen Bedürfnisse dieses integrierten Lösungsansatzes auszurichten. Mit dem vorliegenden internen Programmkonzept wurde eine Lösung verwirklicht, welche den Anforderungen der Strukturoptimierung als interdisziplinäre Aufgabe in hohem Maße gerecht wird. Die Koppelung der verschiedenen Teilaufgaben wie Geometriebeschreibung, Struktur- und Sensibilitätsanalyse und Mathematische Programmierung ist durch die durchgängige Programmlösung relativ einfach möglich. Dazu tragen vor allem ein direkter Datenzugriff und eine übersichtliche Programmsteuerung bei. Für Entwicklungen im Bereich der Strukturoptimierung ist es hilfreich, wenn die Verknüpfungen der Teilaufgaben im Programm transparent bleiben und einfach gesteuert werden können.

Auf dieser Basis baut die Formulierung unterschiedlicher Optimierungsprobleme auf. Die hier behandelten Aufgaben lassen sich der Strukturauslegung für optimale Steifigkeit, minimales Gewicht oder optimale Festigkeit zuordnen. Bei allen drei Problemstellungen handelt es sich um Aufgaben aus dem Bereich des Leichtbaus. Als Strukturen sollen hier vornehmlich Schalen oder hybride Strukturen in Betracht kommen. Für diese Tragwerke besteht für die gestellten Optimierungsaufgaben ein ganz natürlicher Zusammenhang mit den Prinzipien des Leichtbaus. Aus einer derart gestellten Optimierungsaufgabe können Tragwerke hervorgehen, welche die Einheit zwischen Funktion und Form in hohem Maße zum Ausdruck bringen. Die Art der Strukturanalyse und die Problemformulierung stehen bei dem hier eingeschlagenen direkten Lösungsweg in einer engen Verbindung. Die Strukturanalyse wird auf der Grundlage der finiten Elementmethode betrieben. Für eine effiziente Programmlösung wird deshalb die Formulierung der Optimierungsfunktionen ebenfalls direkt in den Elementprogrammen vorgenommen.

Im gesamten Optimierungsprozeß kommt der Sensibilitätsanalyse eine große Bedeutung zu. Bei der Lösung von vielen Optimierungsproblemen entfällt der höchste Anteil des Rechenaufwandes auf die Programmkomponente der Sensibilitätsanalyse. Die effiziente Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten ist deshalb ein maßgebliches Ziel bei der Lösung des Optimierungsproblems. Verschiedene Methoden der diskreten und variationellen Sensibilitätsanalyse können hier eingesetzt werden. Jedes einzelne Verfahren steht jedoch mit der Geometriebeschreibung, der Art der Strukturanalyse, der Problemformulierung und dem zugrundeliegenden Programmkonzept in Verbindung. Aus diesem Grund können die einzelnen Verfahren nicht vorbehaltlos in die Lösungen von Optimierungsaufgaben

integriert werden. Die effiziente und zuverlässige Ermittlung der Sensibilitätskoeffizienten ist immer mit einem entsprechenden Formulierungsaufwand oder programmtechnischen Schwierigkeiten verbunden.

Die Sensibilitätsanalyse liefert, für sich betrachtet, einen wesentlichen Beitrag zur Lösung der Optimierungsaufgabe. Die ermittelten Sensibilitätskoeffizienten stellen den Zusammenhang zwischen der Variation des Entwurfs, dem Tragverhalten der Struktur und der Verbesserung der Struktureigenschaften her. Als solche stellt sie immer auch die zentrale Aussage einer möglichen Strukturverbesserung zur Verfügung. Aus diesem Grund wird die Sensibilitätsanalyse häufig als Hilfsmittel im Entwurfs- und Konstruktionsprozeß direkt eingesetzt. Durch die zur Verfügung stehenden Möglichkeiten des rechnergestützten Entwerfens und Konstruierens ist die Urteilsfähigkeit des Ingenieurs in weitaus höherem Maße gefordert als bisher. Mit den Möglichkeiten des CAD lassen sich Strukturen schneller erfassen, variieren und wiederholt berechnen. Befasste man sich früher hauptsächlich mit der Erfassung des Strukturverhaltens, so geht es heute vielmehr um ein Vorstellungsvermögen auf der Ebene des Entwurfsmodells. Gerade an diesem Punkt setzen die Möglichkeiten der Sensibilitätsanalyse an. Sie liefert zur Variation des Entwurfsmodells eine umfassende Prognose der damit verbundenen Änderung der Struktureigenschaften. Die Visualisierung der Sensibilitätskoeffizienten liefert deshalb eine wesentliche Aussage für den Entwurfsprozeß. Als Vorstufe zur automatisch ablaufenden Strukturoptimierung kann sie auf diese Weise ebenfalls zur Bildung sinnvoller und aussagekräftiger Optimierungsmodelle beitragen.

Bei der Lösung konkreter Optimierungsaufgaben zeigt sich häufig, daß die Strukturoptimierung trotz der zur Verfügung stehenden Mittel und Möglichkeiten ein hohes Ziel bleibt. Drei hierarchisch aufeinander aufbauende Modellebenen müssen sorgfältig vor der Problemlösung aufeinander abgestimmt werden. Diese Modellbildung muß im Optimierungsprozeß ständig kontrolliert und gegebenenfalls angepaßt werden. Aus diesem Grund müssen im Optimierungsverlauf immer interaktive Eingriffe möglich sein. Nachdem ein aussagekräftiges Modell für den Entwurf, die Struktur und die Optimierung vorliegt, muß eine geeignete Lösungsstrategie ausgewählt werden. Viele praktische Problemstellungen verlangen einen kombinierten Einsatz von Optimierungsalgorithmen. Bei komplexen Problemstellungen zeigt sich oft, daß die mathematischen Anforderungen an die Optimierungsaufgabe (z.B. konvexes Optimierungsproblem) nicht erfüllt sind. In diesen Fällen treten numerische Schwierigkeiten bei der Problemlösung auf. Die Beurteilung der jeweiligen Problemstellung setzt deshalb auch detaillierte Kenntnisse über die angewandten Optimierungsstrategien und ihre Lösungseigenschaften voraus. Für die Beurteilung des Optimierungsfortschritts werden aus diesen Gründen an die Programmumgebung (Graphik, Monitor) besondere Anforderungen gestellt.

Die gelösten Aufgaben machen deutlich, wie ein interaktives Arbeiten im Sinne der Strukturoptimierung in der vorgestellten Programmlösung aussieht. Drei unter-

schiedliche Problemstellungen zeigen mögliche Anwendungen der Sensibilitätsanalyse sowie der neu eingeführten Zielfunktionen der Formänderungsenergie und des verallgemeinerten Spannungsausgleichs. Zusammen mit den übrigen angeführten Optimierungsfunktionen ergibt sich ein weiterer Anwendungsbereich für praktische Problemstellungen. Der Optimierung von frei geformten Schalen kommt hier eine größere Bedeutung zu. Die Formfindung von Schalen für verschiedene, gleichzeitig auftretende Lastfälle stellen ein überaus interessantes Optimierungsproblem dar. Entsprechende Anwendungen sind im Bereich der Luft- und Raumfahrt, im Fahrzeugbau, aber auch im Bauwesen denkbar. Weitere Forschungsarbeiten sind notwendig, um für die Optimierung frei geformter Schalen auch Stabilitätskriterien in das Optimierungsproblem einzubringen. Damit könnten die Optimierungsaufgaben auf den interessanten Bereich der Verbesserung des nichtlinearen Tragverhaltens ausgedehnt werden.

## 9.0 Bibliographie

- /Adeli 1988/** H.Adeli und K.V.Balasubramanyam. A Synergetic Man-Machine Approach to Shape Optimization of Structures. *Comp. & Struct.*, 30(3):553-561, 1988.
- /Adelman 1986/** H.M.Adelman und R.T.Haftka. Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems. *AIAA-Journal*, 24(5):823-832, 1988.
- /Ahmad 1970/** S.Ahmad, B.M.Irons und O.C. Zienkiewicz. Analysis of Thick Shell Structures by Curved Finite Elements. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 2:419-451, 1970.
- /Arora 1977a/** J.S.Arora und A.K.Govil. Design Sensitivity Analysis with Substructuring. *ASCE, J.Eng.Mech.*, 103(EM4):537-548, 1977.
- /Arora 1977b/** J.S.Arora und A.K.Govil. An Efficient Method for Optimal Structural Design by Substructuring. *Comp. & Struct.*, 7:507-515, 1977.
- /Arora 1979/** J.S.Arora und J.S.Haug. Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization. *AIAA-Journal*, 17(9):970-974, 1979.
- /Arora 1987/** J.S.Arora, M.Haririan und J.B.Cardoso. Use of ADINA for Design Optimization of Nonlinear Structures. *Comp. & Struct.*, 26(1/2):123-133, 1987.
- /Arora 1989/** J.S.Arora und J.E.B.Cardoso. A Design Sensitivity Analysis Principle and it's Implementenation into ADINA. *Comp. & Struct.*, 32(3/4):691-705, 1989.
- /Atrek 1984/** E.Atrek, R.H.Gallagher, K.M.Ragsdell und O.C.Zienkiewicz (ed.). *New Directions in Optimum Structural Design*, Wiley & Sons, Chichester, New York, 1984.
- /Barthelemy 1988a/** B.Barthelemy, C.T.Chon und R.T.Haftka. Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response. *Finite Elements Anal.Des.* 4:249-265, 1988.

- /Barthelemy 1988b/** B.Barthelemy und R.T.Haftka. Accuracy Problems of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity Calculations. In *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Williamsburg (USA,VA), 1988.
- /Bathe 1982/** K.-J.Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- /Beck 1988/** R.Beck. *Untersuchungen zur Sensibilität von Verschiebungen und Spannungen bei isoparametrischen degenerierten Schalenelementen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- /Belegundu 1986/** A.D.Belegundu. Interpreting Adjoint Equations in Structural Optimization. *Journ. Struct. Eng.*, 112(5):1971-1976, 1986.
- /Belegundu 1989/** A.D.Belegundu. Müller-Breslau's Principle in Adjoint Design Sensitivity Analysis. *Mech. Struct. & Mach.*, 17(3):333-347, 1989.
- /Bennett 1985/** J.A.Bennett und M.E.Botkin. Structural Shape Optimization with Geometric Description and Adaptive Mesh Refinement. *AIAA Journal*, 23(3):458-464, 1985.
- /Bennett 1986/** J.A.Bennett und M.E.Botkin. *The Optimum Shape*. Plenum Press, New York, 1986.
- /Bhavikatti 1980/** S.S.Bhavikatti und C.V.Ramakrishnan. Optimum Shape Design of Rotating Disks. *Comp. & Struct.*, 2:397-401, 1980.
- /Bletzinger 1985/** K.-U.Bletzinger und S.Kimmich. *Strukturoptimierung*. Konzeptheft 7, Sonderforschungsbereich 230: Natürliche Konstruktionen - Leichtbau in Architektur und Natur, Universität Stuttgart, 1985.
- /Bletzinger 1989/** K.-U.Bletzinger, S.Kimmich und H.Stegmüller. *Eingabebeschreibung zum Programmsystem CARAT*. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- /Bletzinger 1990a/** K.-U.Bletzinger. *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Diss., Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- /Bletzinger 1990b/** K.U.Bletzinger, S.Kimmich und E.Ramm. Interactive Shape Optimization of Shells. In */Pande 1990/*.

- /Bothner 1989/** K.-D.Bothner. *Die Modellierung von Problemen der Form- und Querschnittsoptimierung im Ingenieurbau*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- /Botkin 1985/** M.E.Botkin und J.A.Bennett. Shape Optimization of Three-Dimensional Folded-Plate Structures. *AIAA-Journal*, 23(11):1804-1810, 1985.
- /Botkin 1986/** M.E.Botkin. Shape Optimization of Three-Dimensional Stamped and Solid Automotive Components. In /Bennett 1986/.
- /Braibant 1986/** V.Braibant und C.Fleury. Shape Optimal Design - A CAD-Oriented Formulation. *Eng. with Computers*, 1:193-204, 1986.
- /Bremicker 1989/** M.Bremicker. *Dekompositionsstrategie in Anwendung auf Probleme der Gestaltoptimierung*. Diss., Universität Siegen, VDI-Verlag, Reihe 1, Nr. 173, Düsseldorf, 1989.
- /Bremicker 1990/** M.Bremicker. Ein Konzept zur Topologie- und Gestaltoptimierung von Bauteilen. In H.H.Müller-Slany (ed.), *Beiträge zur Maschinentechnik: Berichte aus Forschung und Praxis*. Siegen, 1990.
- /Brockman 1988/** R.A.Brockman und F.Y.Lung. Sensitivity Analysis with Plate and Shell Finite Elements. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 26:1129-1143, 1988.
- /Bufler 1970/** H.Bufler und V.Horak. Die inversen Variationsprinzipien der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Dicke, Schnittgrößen und Verschiebungsgrößen. *ACTA Technica CSAV.*, no.3:271-282, 1970.
- /Bufler 1983/** H.Bufler. On the Work Theorems for Finite and Incremental Elastic Deformations with Discontinuous Fields: a Unified Treatment of Different Versions. *Comput.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 36:95-124, 1983.
- /Choi 1983/** K.K.Choi und E.J.Haug. Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures. *J.Struct.Mech.*, 11(2):231-269, 1983.
- /Dems 1983/** K.Dems und Z.Mroz. Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis - I. *Int.J. Solids Structures*, 19(8):677-692, 1983.
- /Dems 1984/** K.Dems und Z.Mroz. Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis - II. *Int.J. Solids Structures*, 20(6):527-552, 1984.

- /Dems 1988-89/** K.Dems und R.T.Haftka. Two Approaches to Sensitivity Analysis for Shape Variation of Structures *Mech.Struct. & Mach.*, 16(4):501-522, 1988-89.
- /Ding 1986/** Y.Ding. Shape Optimization of Structures: a Literature Survey. *Comp. & Struct.*, 24:985-1004, 1986.
- /Dreszer 1975/** J.Dreszer. *Mathematik Handbuch*. Verlag Harry Deutsch, Zürich, 1975.
- /Eschenauer 1982a/** H.Eschenauer und N.Olhoff (ed.). *Optimization Methods in Structural Design*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1982.
- /Eschenauer 1982b/** H.Eschenauer. Vector-Optimization in Structural Design and its Application on Antenna Structures. In */Eschenauer 1982a/*
- /Eschenauer 1985/** H.Eschenauer et al. *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen*. Forschungslaboratorium für angewandte Strukturoptimierung, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, TU/GH Siegen, 1985.
- /Eschenauer 1988a/** H.Eschenauer und G.Thierauf (ed.). *Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications*, Proceedings of a GAMM-Seminar, University of Siegen (FRG), Oct.5-7, 1988, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- /Eschenauer 1988b/** H.Eschenauer, P.U.Post und M.Bremicker. Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten. *Bauingenieur*, 63(11):515-526, 1988.
- /Esping 1984/** B.J.D.Esping. Minimum Weight Design of Membrane Structures Using Eight Node Isoparametric Elements and Numerical Derivatives. *Comp. & Struct.*, 19:591-604, 1984.
- /Fleury 1986/** C.Fleury und V.Braibant. Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 23:409-428, 1986.
- /Francavilla 1975/** A.Francavilla, C.V.Ramakrishnan und O.C.Zienkiewicz. Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration. *J.Strain Anal.*, 10(2):63-70, 1975.
- /Gallagher 1973a/** R.H.Gallagher und O.C.Zienkiewicz. *Optimum Structural Design: Theory and Applications*. Wiley & Sons, Chichester, New York, 1973.

- /Gallagher 1973b/** R.H.Gallagher. Fully-Stressed Design. In /Gallagher 1973a/.
- /Gellatly 1973/** R.A.Gellatly und L.Berke. Optimality-Criterion Based Algorithms. In /Gallagher 1973a/.
- /Gill 1981/** P.E.Gill, W.Murray und M.H.Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- /Gill 1983/** P.E.Gill, W.Murray, M.A.Saunders und M.H.Wright. Computing Forward Differences for Numerical Optimization. *SIAM-Journ. on Scientific and Statistical Computing*, 4:310-321, 1983.
- /Grierson 1983/** D.E.Grierson. The Intelligent Use of Structural Analysis. *Perspectives in Computing*, 3(4):32-39, 1983.
- /Haftka 1985/** R.T.Haftka. Simultaneous Analysis and Design. *AIAA-Journal*, 23(7):1099-1103, 1985.
- /Haftka 1986/** R.T.Haftka und R.V.Grandhi. Structural Shape Optimization - A Survey. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 57:91-106, 1986.
- /Haftka 1988/** R.T.Haftka. First and Second Order Constraint Approximations in Structural Optimization. *Comp. Mech.*, 3:89-104, 1988.
- /Haftka 1990/** R.T.Haftka, Z.Gürdal und M.P.Kamat. *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- /Haslinger 1988/** J.Haslinger und P.Neittaanmäki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications*. Wiley & Sons, Chichester, New York, 1988.
- /Haug 1979/** E.J.Haug und J.S.Arora. *Applied Optimal Design*. Wiley & Sons, Chichester, New York, 1979.
- /Haug 1981/** E.J.Haug und J.Cea. *Distributed Parameter Structures. Vol.1,2*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- /Haug 1986/** E.J.Haug, K.K.Choi und U. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Vol.177*, Mathematics in Science and Eng., Academic Press, Orlando, 1986.
- /Herendeen 1988/** D.L.Herendeen. Parallel Processing and FEM: Fulfilling the Promise. *Finite Elements Anal.Des.*, 4:193-202, 1988.



- /Hinton 1974/** E.Hinton und R.V.Grandhi. Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 8:461-480, 1974.
- /Imam 1982/** M.H.Imam. Three-Dimensional Shape Optimization. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 18:661-673, 1982.
- /Jordan 1978/** W.Jordan und H.Urban. *Strukturierte Programmierung*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- /Kimm 1979/** R.Kimm, W.Koch, W.Simonsmeier und F.Tontsch. *Einführung in Software Engineering*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1979.
- /Kimmich 1988/** S.Kimmich und E.Ramm. Structural Optimization and Analysis with Program System CARAT. In /Eschenauer 1988a/.
- /Knepe 1986/** G.Knepe. *Direkte Lösungsstrategien zur Gestaltoptimierung von Flächentragwerken*. Diss., Universität Siegen, VDI-Verlag, Reihe 1, Nr. 135, Düsseldorf, 1986.
- /Kühnemann 1989/** E.Kühnemann. *Untersuchungen zur Form- und Querschnittsoptimierung mit Spannungs- und Energiefunktionen an ausgewählten Beispielen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- /Kumar 1990/** V.Kumar, S.-J.Lee und M.D.German. Finite Element Design Sensitivity Analysis and it's Integration with Numerical Optimization Techniques for Structural Design. *Comput. & Struct.*, 34(3/4):375-385, 1990.
- /Kruzelecki 1985/** J.Kruzelecki und M.Zyczkowski. Optimal Structural Design of Shells - A Survey. *SM Archives*, 10:101-170, 1985.
- /Leal 1988/** R.P.Leal und C.A.Mota Soares. Mixed Elements in Optimal Design of Plates. In /Eschenauer 1988a/.
- /Liefoghe 1988/** D.Liefoghe, Y.K.Shyy und C.Fleury. Shape Sensitivity Analysis Using Low- and High-Order Finite Elements. *Eng. with Computers*, 4:213-228, 1988.
- /Lin 1988/** S.-C.Lin und J.F.Abel. Variational Approach for a New Direct-Iteration Form of the Virtual Crack Extension Method. *Int.J. Frac.*, 38:217-235, 1988.

- /Lootsma 1988/** F.A.Lootsma und K.M.Ragsdell. State-of-the-Art in Parallel Nonlinear Optimization. *Parallel Computing*, 6:133-155, 1988.
- /Loubignac 1977/** G.Loubignac, G.Cantin und G.Touzot. An Iterative Algorithm to Build Continuous Stress and Displacement Fields. *AIAA-Journal*, 15:1645-1647, 1977.
- /Malvern 1969/** L.E.Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- /Minke 1970/** G.Minke. *Zur Effizienz von Tragwerken*. Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1970.
- /Miura 1978/** H.Miura und L.A.Schmit. Second Order Approximation of Natural Frequency Constraints in Structural Synthesis. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 13:337-351, 1978.
- /Morris 1982/** A.J.Morris (ed.). *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*. Wiley & Sons, Chichester, New York, 1982.
- /Mota Soares 1986/** C.A. Mota Soares (ed.). *Computer Aided Optimal Design - Structural and Mechanical Systems*. NATO-ASI Series F: Computer and System Sciences, Vol.27, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- /Müller 1987/** R.Müller. *Strukturoptimierung von Fachwerken*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1987.
- /Nagendra 1989/** G.K.Nagendra und C.Fleury. Sensitivity and Optimization of Composite Structures in MSC/NASTRAN. *Finite Elements Anal. Des.* 3, 5(3):223-236, 1989.
- /Pande 1990/** G.N.Pande und J.Middleton (ed.). *Proceedings of the Third Int. Conf. on Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications (NUMETA 90)*. Elsevier Applied Science, London, 1990.
- /Pedersen 1982/** P.Pedersen. A Unified Approach to Optimal Design. In /Eschenauer 1982a/.
- /Pedersen 1982-83/** P.Pedersen und C.L.Laurenson. Design for Minimum Stress Concentration by Finite Elements and Linear Programming. *J.Struct. Mech.*, 10(4):375-391, 1982-83.
- /Pedersen 1989/** P.Pedersen, G.Cheng und J.Rasmussen. On Accuracy Problems for Semi-Analytical Sensitivity Analysis. *Mech. Struct. & Mach.*, 17(3):373-384, 1989.

- /Petiau 1982/** M.C.Petiau und M.G.Lecina. Optimization of Aircraft Structures. In /Morris 1982/.
- /Poth 1988/** A.Poth, H.Stamm und J.Skoda. Steifigkeits- und Gewichtsoptimierung einer Karosseriestruktur mit Hilfe der Design Sensitivity Analysis. *VDI-Berichte*, No.699:699-712, 1988.
- /Rajan 1986a/** S.D.Rajan und M.A.Bhatti. SADDLE: A Computer-Aided Structural Analysis and Dynamic Design Language - Part II. Database Management System. *Comp. & Struct.*, 22(2):205-212, 1986.
- /Rajan 1986b/** S.D.Rajan. A Hybrid Nonlinear Programming Method for Design Optimization. *J.Struct.Mech.*, 14(4):455-474, 1986.
- /Rajan 1987/** S.D.Rajan und J.Budiman. A Study of Two-Dimensional Plane Elasticity Finite Elements for Optimal Design. *J.Struct. Mech.*, 15:185-207, 1987.
- /Rajan 1988/** S.D.Rajan, A.D.Belegundu und J.Budiman. An Integrated System for Shape Optimal Design. *Comp. & Struct.*, 30(1/2):337-346, 1988.
- /Ramm 1976/** E.Ramm. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Bericht 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- /Ramm 1986a/** E.Ramm. *Optimierung natürlicher und technischer Konstruktionen*. Konzeptheft 27, Kolloquium des Sonderforschungsbereichs 230: Natürliche Konstruktionen - Leichtbau in Architektur und Natur, Universität Stuttgart, 1986.
- /Ramm 1986b/** E.Ramm und E.Schunck. *Heinz Isler Schalen*. Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1986.
- /Ramm 1990/** E.Ramm, K.-U.Bletzinger und S.Kimmich. *Trimming of Structures by Shape Optimization*. Institut für Baustatik, University of Stuttgart, 1990.
- /Rechenberg 1973/** I.Rechenberg. *Evolutionsstrategie*. Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1973.
- /Reich 1989/** Y.Reich und M.B.Fuchs. A Comparison of Explicit Optimal Design Methods. *Comp. & Struct.*, 32(1):175-184, 1989.

- /Reiner 1988/** R.Reiner und S.Greiner. Maxwell-Theorem und Tra-Optimierung. *Natürliche Konstruktionen - Mitteilungen des SFB 230 Heft 1*. Sonderforschungsbereich 230: Natürliche Konstruktionen - Leichtbau in Architektur und Natur, Universität Stuttgart, 1988.
- /Reitinger 1988/** R.Reitinger. *Spannungsausgleichs- und Energiefunktionen als Zielfunktion in der Strukturoptimierung*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- /Santos 1988/** J.L.T.Santos und K.K.Choi. Integrated Computational Considerations for Large Scale Structural Design Sensitivity Analysis and Optimization. In /Eschenauer 1988a/.
- /Schaur 1979/** E.Schaur. *Grundlagen Basics: Form-Kraft-Masse*. Institut für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, 1979.
- /Schittkowski 1983/** K.Schittkowski. On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function. *Ser.Optimization*, 14(2),197-216, 1983.
- /Schmit 1984/** L.A.Schmit,jr. Structural Optimization - Some Key Ideas and Insights. In /Atrek 1984/.
- /Schmit 1986/** L.A.Schmit. Symposium Summary and Concluding Remarks. In /Bennett 1986/.
- /Schmit 1988/** L.A.Schmit und C.Fleury. Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods. *AIAA-Journal*, 18(10):1252-1260, 1988.
- /Schnack 1979/** E.Schnack. An Optimization Procedure for Stress concentrations by the Finite Element Technique. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 14:115-124, 1979.
- /Schwefel 1977/** H.P.Schwefel. *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie*. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1977.
- /Sobieszcanski-Sobieski 1982/** J.Sobieszcanski-Sobieski. From a 'Black Box' to a Programming System. In /Atrek 1984/.
- /Sobieszcanski-Sobieski 1985/** J.Sobieszcanski-Sobieski, B.B.James und A.R.Dovi. Structural Optimization by Multilevel Decomposition. *AIAA-Journal*, 23(11):1775-1782, 1985.

- /Spörl 1985/** U.Spörl. *Spannungsoptimale Auslegung elastischer Strukturen*. Diss., Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 1985.
- /Spreng 1988/** H.-P.Spreng und H.Pries. Einsatz numerischer Verfahren bei Entwicklung und Optimierung des neuen VW-PASSAT und ihre Auswirkungen. *VDI-Berichte*, No.699:655-676, 1988.
- /Stander 1989/** N.Stander, A.Matzenmiller und E.Ramm. An Assessment of Assumed Strain Methods in Finite Rotation Shell Analysis. *Eng.Computations.*, 6(1):58-66, 1989.
- /Stegmüller 1985/** H.Stegmüller. *Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit degenerierten Schalenelementen*. Bericht 85-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1985.
- /Stelzer 1987/** J.F.Stelzer und R.Wenzel. Plotting of Contours in a Natural Way. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 24:1757-1769, 1987.
- /Stumpfrock 1988/** L.Stumpfrock. *Über einige Besonderheiten gemischter finiter Elemente*. Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, 1988.
- /Svanberg 1987/** K.Svanberg. The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 13:359-373, 1987.
- /Tseng 1989/** C.S.Tseng und J.S.Arora. Numerical Verification of Design Sensitivity Analysis. *AIAA-Journal*, 27(1):117-119, 1989.
- /Vanderplaats 1980/** G.N.Vanderplaats. Comment on "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization". *AIAA-Journal*, 18(11):1406-1407, 1980.
- /Vanderplaats 1982/** G.N.Vanderplaats. Structural Optimization - Past, Present and Future. *AIAA-Journal*, 20:992-1000, 1982.
- /Vanderplaats 1985/** G.N.Vanderplaats. Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity. *AIAA-Journal*, 23(11):1798-1803, 1985.
- /Wang 1985/** S.-Y.Wang, Y.Sun und R.H.Gallagher. Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures. *Comp. & Struct.*, 20:855-867, 1985.

- /Wassermann 1983-84/** K.Wassermann. Three-Dimensional Shape Optimization of Arch Dams with Prescribed Shape Functions. *J.Struct.Mech.*, 11(4):465-489, 1983/84.
- /Wiedemann 1986/** J.Wiedemann. *Leichtbau, Bd.1: Elemente*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- /Wiedemann 1989/** J.Wiedemann. *Leichtbau, Bd.2: Konstruktion*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- /Yang 1989/** R.J.Yang. A Three-Dimensional Shape Optimization System - SHOP3D. *Comp. & Struct.*, 31(6):881-890, 1984.
- /Wilson 1984/** E.L.Wilson und M.I.Hoit. A Computer Adaptive Language for the Development of Structural Analysis Programs. *Comp. & Struct.*, 19(3):321-338, 1984.
- /Zienkiewicz 1971/** O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor und J.M.Too. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells. *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 3:275-290, 1971.
- /Zolesio 1981/** J.-P.Zolesio. The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization. In */Haug 1981/*.

## Lebenslauf von Stefan Kimmich

25. Juli 1958 geboren in Stuttgart-Hedelfingen  
Sohn des Dipl.-Ing. Walter Kimmich  
und dessen Ehefrau Esther, geb. Pflumm
- 1965 – 1968 Grundschule in Gomaringen
- 1968 – 1977 Besuch des Albert-Einstein-Gymnasiums  
in Reutlingen
10. Mai 1977 Abitur
- 1977 – 1983 Studium des Bauingenieurwesens an der  
Universität Stuttgart
- 1980 – 1981 zwei Semester Auslandsstudium an der  
University of Calgary, Kanada
1. Mai 1983 Abschluß Diplom-Ingenieur
- seit Oktober 1983 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für  
Baustatik der Universität Stuttgart
- seit 1984 verheiratet mit Dorothee geb. Manz  
zwei Kinder im Alter von 1 und 3 Jahren

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-  
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei  
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Platten-  
theorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Ber-  
ücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller,  
J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-  
zelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahl-  
betonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-  
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalenträgwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksich-  
tigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten  
Elemente.



- 80-3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:  
Grenzlasterberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:  
Formoptimierung von Flächentragwerken.