

# Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung

von  
**Rodolfo Luiz Martins Suanno**

Bericht Nr. 18 (1995)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Stuttgart 1995



2  
13.3.95

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Pfaferwaldring 7, Postfach 1140, 70550 Stuttgart, bezogen werden.

# **Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung**

von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
Rodolfo Luiz Martins Suanno  
geboren in Rio de Janeiro

Hauptberichter: Prof. Dr.–Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Prof. Dr.–Ing. H.–W. Reinhardt  
Tag der mündlichen Prüfung: 25. Januar 1995

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
1995

## Zusammenfassung

Die Analyse von Stahlbetontragwerken stellt immer noch eine Herausforderung für die Computermechanik dar. Trotz einer langen und erfolgreichen Tradition in der Anwendung dieses alten Materials in der Baupraxis bleiben noch mehrere ungeklärte Fragen zum mechanischen Verhalten offen. Verschiedene Simulationsmodelle wurden in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben, wobei ein Kompromiß zwischen Einfachheit und wirklichkeitsnaher Modellierung schwierig zu finden ist.

Die Schädigungsmechanik eines Kontinuums (SMK) hat einen neuen Horizont in der numerischen Beschreibung spröder Materialien eröffnet. Seit der bahnbrechenden Arbeit von Kachanov wurden verschiedene verbesserte Modelle vorgeschlagen. Die SMK allein ist für quasi-spröde Materialien bestimmten Restriktionen unterworfen. Die Kopplung der Plastizitätstheorie und der SMK läßt ein deutlich breiteres Spektrum zur Beschreibung verschiedener Phänomene von Betonstrukturen zu.

In der vorliegenden Arbeit wird ein plastisches CAP-Modell, das von Hofstetter et al. [38] im Rahmen der konsistenten Linearisierung und Projektionsverfahren vorgeschlagen wurde, mit einem skalaren Schädigungsmodell gekoppelt, das in der Lage ist, Zug- und Druckbeanspruchung zu unterscheiden. Für die lokale Integration wird ein verallgemeinertes Mittelpunktgesetz [107] angewendet, bei dem die Konsistenzbedingung im gewählten Zwischenpunkt des Zeitschrittes erfüllt wird. Dieses Schema erhält die Symmetrie des konsistenten konstitutiven elastoplastischen Tensors für einen beliebigen Zwischenpunkt in einer assoziierten Plastizitätsformulierung. Im Rahmen dieser Arbeit wird sowohl die assoziierte Version des CAP-Modells als auch die nichtassoziierte Version angewandt. Die Ermittlung der unbekanntenen Modellparameter wird als eine Optimierungsaufgabe betrachtet.

Die Modellierung der Bewehrung wird mittels der eingebetteten Vorgehensweise durchgeführt. Zwei Varianten werden betrachtet: (a) diskret eingebettete Stäbe und (b) eingebettete Schichten mit äquivalenten Flächen zu den diskreten Stäben. Die Variante (a) ist für Tragwerke mit niedrigem Bewehrungsgehalt von Vorteil, während Variante (b) gute Ergebnisse bei Tragwerken mit hohem Bewehrungsgehalt erzielt.

Die Annahmen des Werkstoffmodells werden durch numerische Beispielberechnungen überprüft.

## Abstract

The analysis of reinforced concrete structures is still a challenge in computational mechanics. Despite a long and successful tradition of this "old" material in the construction practice many obscure points in its mechanical behavior still exist. Several simulation models are described in an enormous amount of literature, but a compromise between simplicity and realistic modelling seems to be difficult to achieve.

The theory of continuum damage mechanics (CDM) has opened a new horizon in the numerical representation of brittle materials. Since the pioneering work of Kachanov, several improved models have been proposed. It is well known that CDM alone is somewhat restrictive if applied to quasi-brittle materials. Therefore the combination of the theory of plasticity with CDM is more appealing. It offers a broader spectrum to describe different phenomena of concrete structures.

In the present work an elasto-plastic CAP-model recently developed by Hofstetter et al. [38] in the framework of consistent algorithmic material tangent and closest-point return algorithms is combined with a scalar damage model. The local integration procedure is based on a generalized mid point rule satisfying the consistency condition at the mid point. As shown by Simo and Govindjee [107], this scheme is of second order accuracy for the true mid point, B-stable and retains a symmetric elastoplastic consistent tangent for associative plasticity. In this work the associative version of the CAP-Model as well as its nonassociative counterpart (nonassociative flow and hardening rules) are employed. The required material parameters for the analysis are obtained applying optimization procedures.

For the reinforcement the embedded approach is used. Two versions are implemented. In the first version the reinforcement is modelled by discrete bars; it is utilized for members with low reinforcement ratio. In the second version the reinforcement is smeared by embedded layers; this model is sufficiently accurate for highly reinforced members.

The proposed material model is applied to several examples of three-dimensional concrete structures.

## **Persönliches Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der wissenschaftlichen Forschung am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Herrn Professor Dr. –Ing. E. Ramm möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sein stetiges Interesse und die Übernahme des Hauptberichtes meinen herzlichsten Dank ausdrücken.

Bei Herrn Professor Dr. –Ing. H. –W. Reinhardt bedanke ich mich für sein Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Ebenso bedanke ich mich sehr herzlich bei Fr. U. Bletzinger und meinem Kollege Dipl. – Ing H. Menrath für die sorgfältige Korrektur und die Verbesserungsvorschläge bei der deutschen Fassung.

Die finanzielle Unterstützung durch die "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico" (CNPq) sei hier dankbar erwähnt.

Ebenfalls möchte ich die Gelegenheit wahrnehmen, mich bei meiner Ehefrau Deane für ihre breite Unterstützung besonders zu bedanken, mit der sie die Entstehung dieser Arbeit begleitete.

Rodolfo L. M. Suanno

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>EINLEITUNG</b> .....   | <b>12</b> |
| 1.1      | Problemstellung und Lösungsweg .....                                  | 12        |
| 1.2      | Ziele und Umfang der Arbeit im Überblick .....                        | 13        |
| <b>2</b> | <b>MECHANISCHES VERHALTEN DES BETONS</b> .....                        | <b>16</b> |
| 2.1      | Einführung .....  | 16        |
| 2.2      | Versuchsergebnisse zum Tragverhalten des Betons ....                  | 17        |
| 2.2.1    | Einachsiges Verhalten .....   | 17        |
|          | Einaxiale Druckversuche .....   | 17        |
|          | Einaxiale Zugversuche .....   | 18        |
|          | Ebener Scherversuch .....   | 21        |
| 2.2.2    | Zweiachsiges Verhalten .....  | 21        |
| 2.2.3    | Dreiachsiges Verhalten .....  | 23        |
| <b>3</b> | <b>KONTINUUMSMECHANIK</b> .....                                       | <b>28</b> |
| 3.1      | Einführung .....  | 28        |
| 3.2      | Definition des materiellen Körpers und grundlegende<br>Begriffe. .... | 28        |
| 3.3      | Bilanzgleichungen .....   | 30        |
| 3.3.1    | Massenerhaltung .....   | 30        |
| 3.3.2    | Impulsbilanz .....  | 31        |
| 3.3.3    | Drehimpulsbilanz .....  | 32        |
| 3.3.4    | Bilanz der kinetischen Energie .....                                  | 33        |
| 3.3.5    | Energiebilanz – Erster Hauptsatz der<br>Thermodynamik .....           | 34        |
| 3.4      | Das Prinzip der virtuellen Arbeit .....                               | 36        |
| <b>4</b> | <b>THERMODYNAMIK MIT INTERNEN VARIABLEN</b> .....                     | <b>37</b> |
| 4.1      | Einführung .....  | 37        |
| 4.2      | Formulierung der Thermodynamik .....                                  | 38        |
| <b>5</b> | <b>ZUR BESCHREIBUNG PLASTISCHER DEFORMATIONEN</b>                     | <b>42</b> |
| 5.1      | Motivation .....  | 42        |
| 5.2      | Fließbedingung .....  | 44        |
| 5.3      | Fließregel und Ent –/Verfestigungsgesetze .....                       | 48        |
| 5.4      | Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation .....                 | 50        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 5.5       | Mehrteilige Fließfläche mit nicht glatten Übergängen . . .                                    | 54        |
| 5.6       | Einbettung der Plastizität in der Thermodynamik . . . . .                                     | 56        |
| <b>6</b>  | <b>SCHÄDIGUNGSMECHANIK EINES KONTINUUMS . . . . .</b>   | <b>58</b> |
| 6.1       | Einleitung . . . . .  | 58        |
| 6.2       | Klassifizierung von Schädigungsmodellen . . . . .   | 59        |
| 6.3       | Schädigungsvariable . . . . .   | 61        |
| 6.3.1     | Skalare Darstellung . . . . .   | 62        |
| 6.3.2     | Vektorielle Darstellung . . . . .   | 63        |
| 6.3.3     | Höherstufige Tensordarstellung . . . . .  | 64        |
| 6.4       | Formänderungsenergie . . . . .  | 65        |
| 6.5       | Kinetische Gesetze . . . . .  | 65        |
| 6.6       | Effektives Spannungs– und Dehnungskonzept . . . . .   | 66        |
| <b>7</b>  | <b>EIN GEKOPPELTES MODELL FÜR BETON . . . . .</b>   | <b>69</b> |
| 7.1       | Das CAP–Modell der Plastizitätstheorie . . . . .  | 69        |
| 7.2       | Formulierung eines skalaren Schädigungsmodell . . . . .                                       | 73        |
| 7.2.1     | Einbettung des skalaren Schädigungsmodells in der<br>Thermodynamik . . . . .                  | 73        |
| 7.2.2     | Bestimmung des konstitutiven Tensors für<br>teilelastisch–teilgeschädigtes Material . . . . . | 76        |
| 7.3       | Erweiterung des Schädigungsmodells . . . . .  | 76        |
| <b>8</b>  | <b>FORMULIERUNG UND LÖSUNG DES NICHTLINEAREN<br/>RANDWERTPROBLEMS . . . . .</b>               | <b>79</b> |
| 8.1       | Einführung . . . . .  | 79        |
| 8.2       | Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit . . . . .                                   | 80        |
| 8.3       | Ortsdiskretisierung . . . . .   | 82        |
| <b>9</b>  | <b>NUMERISCHE BEHANDLUNG NICHTLINEARER<br/>MATERIALGESETZE . . . . .</b>                      | <b>86</b> |
| 9.1       | Einleitung . . . . .  | 86        |
| 9.2       | Integration von Materialgesetzen . . . . .  | 86        |
| 9.3       | Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen                                      | 92        |
| 9.4       | Bedingungen für eine symmetrische konsistente Tangente  | 93        |
| <b>10</b> | <b>NUMERISCHE BEHANDLUNG DES GEKOPPELTEN<br/>MODELLS . . . . .</b>                            | <b>96</b> |
| 10.1      | Numerische Behandlung mehrteiliger Fließflächen mit<br>nicht glatten Übergängen . . . . .     | 96        |

|  |            |
|--|------------|
| 10.1.1 Diskrete elastoplastische Formulierung .....                                      | 99         |
| 10.2 Numerische Behandlung des CAP-Modells .....   | 104        |
| 10.2.1 Projektionsverfahren ("Closest point projection") ...                             | 104        |
| 10.2.2 Konsistente Linearisierung der konstitutiven<br>Gleichung .....                   | 110        |
| 10.3 Numerische Behandlung des gekoppelten Modells .....                                 | 115        |
| 10.4 Parameteridentifikation .....   | 117        |
| 10.4.1 Motivation .....  | 117        |
| 10.4.2 Beschreibung der angewandten Strategie .....                                      | 118        |
| 10.4.3 Beispiele .....   | 119        |
| <b>11 FINITE ELEMENT DISKRETISIERUNG .....</b>   | <b>123</b> |
| 11.1 Dreidimensionale Elementfamilie .....   | 123        |
| 11.1.1 Modellierung der Bewehrung .....  | 126        |
| 11.2 Numerische Beispiele .....  | 128        |
| 11.2.1 Patch-Tests .....   | 128        |
| 11.2.2 Kragarm mit hoch verzerrten Elementen .....                                       | 129        |
| 11.2.3 Kragarm (elastische Inkompressibilität) .....                                     | 131        |
| 11.2.4 Vorverdrillter Kragarm ("Pretwisted Beam") .....                                  | 131        |
| 11.2.5 Einhäufiger Rahmen ("Lee Frame") .....  | 132        |
| 11.2.6 Nachgiebige Fundamentplatte (mit assoziiertem<br>Verfestigungsgesetz) .....       | 134        |
| 11.2.7 Nachgiebige Fundamentplatte (mit nicht assoziiertem<br>Verfestigungsgesetz) ..... | 135        |
| <b>12 NUMERISCHE BEISPIELE FÜR STAHLBETON .....</b>                                      | <b>137</b> |
| 12.1 Balken ohne Schubbewehrung .....  | 137        |
| 12.2 Stützenkonsole .....  | 142        |
| 12.3 Lieberum Versuch .....  | 145        |
| <b>13 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK .....</b>   | <b>149</b> |
| <b>LITERATUR .....</b>   | <b>151</b> |
| <b>A1 ANHANG 1 .....</b>   | <b>161</b> |
| VARIATIONELLE FORMULIERUNG ALS DREI FELD<br>FUNKTIONAL (HU-WASHIZU) .....                | 161        |
| A1.1 Variationelle Formulierung .....  | 161        |

## Bildsverzeichnis

|               |   |    |
|---------------|---|----|
| Bild 2.1 –    | Einaxiale Druckspannungs–Dehnungslinien und Volumenänderungskurve .....   | 17 |
| Bild 2.2 –    | Typischer verformungsgesteuerter einaxialer Zugversuch einer Betonprobe nach Reinhardt [88].                                  | 18 |
| zu Bild 2.3 – | Zyklische einaxiale Zugversuche ... , hier: Darstellung der Typen I bis IV .....  | 19 |
| Bild 2.3 –    | Zyklische einaxiale Zugversuche einer Betonprobe und Hüllkurve nach Yankelevsky et al. [135].                                 | 20 |
| Bild 2.4 –    | Steifigkeitsdegradation nach Reinhardt [88].  | 20 |
| Bild 2.5 –    | Spannungs–Verschiebungslinien zum Schubtragverhalten einer gerissenen Betonprobe (Anfangsrißbreite $w$ ) nach Walraven [129]. | 22 |
| Bild 2.6 –    | Biaxiale Versagenskurve von Beton nach Kupfer et al. [59].  | 22 |
| Bild 2.7 –    | Biaxiale Spannungs–Verzerrungskurven nach Kupfer et al. [59].   | 24 |
| Bild 2.8 –    | Volumenänderungskurve unter unterschiedlichen Spannungsverhältnissen $\sigma_1/\sigma_2$ nach Kupfer et al. [59].             | 25 |
| Bild 2.9 –    | Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses $\sigma_1/\sigma_2$ nach Nelissen [77].                              | 25 |
| Bild 2.10 –   | Triaxiale Versagenskurve und Spannungsverformungslinien nach van Mier [128].  | 26 |
| Bild 2.11 –   | Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$ nach van Mier [128].                    | 27 |
| Bild 4.1 –    | Kombination von universalen und individuellen Aussagen. ....  | 37 |
| Bild 5.1 –    | Haigh–Westergaardscher Spannungsraum und deviatorische Ebene. ....  | 46 |
| Bild 5.2 –    | (a) Sechsfache Symmetrie in der deviatorischen Ebene<br>(b) Meridiane Darstellung für ein druckabhängiges Material. ....      | 46 |
| Bild 5.3 –    | Mögliche Belastungszustände .....   | 49 |
| Bild 5.4 –    | (a) isotrope Verfestigung ;<br>(b) kinematische Verfestigung;<br>(c) Kombination von (a) und (b). ....                        | 50 |
| Bild 5.5 –    | Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation .....   | 51 |
| Bild 6.1 –    | Defekteigenschaften .....   | 61 |
| Bild 6.2 –    | Geschädigtes Volumenelement .....   | 62 |
| Bild 6.3 –    | Transformation zwischen physikalischem und effektivem Raum. ....  | 68 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Bild 7.1 –  | Cap–Model Darstellung in der Ebene ( $I_1, J_2$ ).   | 69  |
| Bild 7.2 –  | Kontraktion der Kappe. ....  | 72  |
| Bild 9.1 –  | Geometrische Darstellung der verallgemeinerten Trapezregel. ....   | 90  |
| Bild 9.2 –  | Geometrische Darstellung der verallgemeinerten Mittelpunktregel. ....  | 90  |
| Bild 10.3 – | Geometrische Veranschaulichung der kontravarianten Komponenten von .....   | 103 |
| Bild 10.4 – | Charakterisierung der plastischen Belastungsbereiche für das CAP–Modell. ....  | 105 |
| Bild 11.1 – | Pascalsche Pyramide. ....  | 123 |
| Bild 11.2 – | Dreidimensionale Elementfamilie .....  | 125 |
| Bild 11.3 – | (a) isoparametrische Koordinaten.<br>(b) in Schichten eingebettete verschmierte Bewehrung.<br>(c) als Stäbe eingebettete Bewehrung. .... | 128 |
| Bild 11.4 – | Patch–Tests für das 14 knotige Element ...   | 129 |
| Bild 11.5 – | Kragarm mit verzerrtem Elementnetz. ....   | 130 |
| Bild 11.6 – | Elastischer, inkompressibler Kragarm. ....   | 131 |
| Bild 11.7 – | Vorverdrillter Kragarm. ....   | 132 |
| Bild 11.8 – | Einhüftiger Rahmen ("Lee–Frame"). ....   | 133 |
| Bild 11.9 – | Einhüftiger Rahmen : Last–Verschiebungs–Diagramm. ....   | 133 |
| Bild 11.10– | Last–Verschiebungs–Diagramm für assoziiertes Verfestigungsgesetz. ....   | 134 |
| Bild 11.11– | Last–Verschiebungsdiagramm: Vergleich für assoziiertes und nicht assoziiertes Verfestigungsgesetz. ....                                  | 135 |
| Bild 11.12– | Geometrie und Isoverschiebungslinien beim letzten Lastschritt mit HEXA20–Elementen. ....   | 136 |
| Bild 12.1 – | Versuchsbalken .....   | 137 |
| Bild 12.2 – | Last–Verschiebungskurven auf die Balken 1 und 2. ....  | 139 |
| Bild 12.3 – | Einfluß von T auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1. ....   | 140 |
| Bild 12.4 – | Einfluß von Elementtyp und T auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1. ....  | 140 |
| Bild 12.5 – | Einfluß der Modellierung der Bewehrung auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1. ....  | 141 |
| Bild 12.6 – | Einfluß der Verfestigung der Bewehrung auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1. ....  | 141 |
| Bild 12.7 – | Verteilung der Schädigungsvariable d bei einer Mittendurchbiegung von 10 mm für Balken 1 und 2. ....                                     | 142 |

|   |     |
|---|-----|
| Bild 12.8 – Stützenkonsole von Mehmel und Freitag. . .                                | 143 |
| Bild 12.9 – Finite Element Diskretisierung. ....                                      | 144 |
| Bild 12.10 – Last–Verschiebungskurve. ....  | 144 |
| Bild 12.11 – Geometrie des Durchstanztestes<br>nach Lieberum. ....                    | 145 |
| Bild 12.12– Qualitatives Last–Verschiebungsdiagramm<br>eines typischen Versuchs. .... | 146 |
| Bild 12.13 – Finite Element Diskretisierung. ....                                     | 147 |
| Bild 12.14 – Last–Verschiebungskurve. ....  | 148 |
| Bild 12.15 – Last–Verschiebungskurve. ....  | 148 |

# Tabellenverzeichnis

|              |   |     |
|--------------|---|-----|
| Tafel – 3.1  | Arbeitskonforme Paarungen zwischen Spannungstensoren und Tensoren der Verzerrungsgeschwindigkeit. ....  | 34  |
| Tafel – 4.1  | Thermodynamische Potentiale. ....   | 40  |
| Tafel – 5.2  | Unterteilung der Theorie des einfachen Materials mit Gedächtnis ....  | 42  |
| Tafel – 2.1  | Klassifizierung von Schädigungsmodellen ....  | 59  |
| Tafel – 7.1  | Verschiedene Vorschläge für die Funktionen des Cap-Modells. ....  | 71  |
| Tafel – 9.1  | Explizite und Implizite Verfahren – FE ("Vorwärts-Euler"); BE ("Rückwärts-Euler"); VMR (Verallgemeinerte Mittelpunkregel); VTR (Verallgemeinerte Trapezregel). .... | 88  |
| Tafel – 9.2  | Eigenschaften verschiedener Integrationsalgorithmen. ....   | 95  |
| Tafel – 10.1 | Ent-/Belastungsbedingungen. ....  | 97  |
| Tafel – 10.2 | Struktur des algorithmischen elastoplastischen Problems. ....   | 99  |
| Tafel – 10.3 | Wesentliche Teilschritte des Prädiktor-Projektionsverfahren. ....   | 100 |
| Tafel – 10.4 | Hessematrix für den Fall von zwei aktiven Fließflächen. ....  | 103 |
| Tafel – 10.5 | Plastische Belastungsbereiche ....  | 105 |
| Tafel – 10.6 | Zweite Ableitung der Fließbedingungen $\phi_a$ nach dem Spannungstensor ....  | 113 |
| Tafel – 10.7 | Belastungsprogramm der für Beton an der Universität Colorado-Boulder durchgeführten Versuche. ...   | 119 |
| Tafel – 11.1 | Typen der 14-knotigen Volumenelemente. ....   | 124 |
| Tafel – 11.2 | Normierte vertikale Verschiebungen $W_A$ für Lastfall (1) ( $W_{A,exakt} = 100$ ) ....  | 129 |
| Tafel – 11.3 | Normierte vertikale Verschiebungen $W_A$ für Lastfall (2) ( $W_{A,exakt} = 102,6$ ) ....  | 131 |
| Tafel – 11.4 | Parameter für "McCormick Ranch Sand". ....  | 134 |
| Tafel – 12.1 | Materialparameter für das gekoppelte Modell. ...  | 138 |
| Tafel – 12.2 | Materialparameter für das gekoppelte Modell. ...  | 143 |
| Tafel – 12.3 | Materialparameter für das plastische Modell. ...  | 147 |

# 1 EINLEITUNG

## 1.1 Problemstellung und Lösungsweg

Das nichtlineare Verhalten ist bei Stahlbetonkonstruktionen von zentraler Bedeutung. Eine inkrementelle Analyse bis zum Bruch ermöglicht die Erfassung des Verformungs- und Spannungszustandes der geschädigten Bereiche und anderer wichtiger Merkmale, die zur Beurteilung der Tragwerkssicherheit und Gebrauchsfähigkeit hilfreich sind. Aus wirtschaftlichen Gründen ist eine vollständig nichtlineare Analyse aber immer noch für die übliche Ingenieurpraxis zu aufwendig. Trotzdem ist sie für manche Tragwerkskomponenten, wie z.B. Betondruckbehälter, Offshore-Bohrtürme, Sicherheits-hüllen von Kernkraftwerken u.s.w., die ein hohes Sicherheitsniveau aufweisen und für welche Laborversuche unvorstellbar sind, unentbehrlich. Auch ist die rechnerische Simulation wichtig zur Unterstützung der experimentellen Forschung und zur Entwicklung, Nachprüfung und Validation von technischen Normen und für den Vergleich verschiedener Berechnungsverfahren untereinander.

Die mechanische Modellierung von Materialien hat seit einiger Zeit eine starke Entwicklung erlebt, was auf den schnellen Fortschritt der elektronischen Datenverarbeitung und der numerischen Methoden zurückzuführen ist. Zuverlässige und wirklichkeitsnahe numerische Modelle müssen die beobachteten phänomenologischen Materialeigenschaften darstellen können.

Stoffgesetze beschreiben die Materialien in der Regel auf der Basis der Kontinuumsmechanik. Die Evolution der schon vor der Belastung verschmiert und vorhandenen Mikrorisse und Lücken wird in diesem Sinne nicht exakt, sondern phänomenologisch erfaßt. Trotzdem ist die Beschreibung der Defekte immer noch eine große Herausforderung, was sich mit dem zufälligen Charakter der Defektverteilung von einem Versuchskörper einerseits und Rechenbeschränkungen andererseits begründen läßt. Die Einführung eines kinematischen Variablensatzes, der die Materialschädigung in der Mesoebene oder Makroebene beschreibt, scheint für Strukturberechnungen am besten geeignet.

Zum ersten Mal taucht die Anwendung der Methode der finiten Elemente zur Berechnung von Stahlbetonstrukturen 1967 im Beitrag von Ngo und Scordelis [78] auf, in dem über die Berechnung eines Stahlbetonbalkens berichtet wurde. Für den Beton wurde bei der Berechnung ein linear-elastisches Werkstoffmodell mit beschränkter Zugfestigkeit verwendet; der Rißverlauf wurde vorgegeben.

Inzwischen ist eine Vielzahl von Veröffentlichungen erschienen, in denen das Problem der Modellierung von Stahlbetonstrukturen beschrieben wird. Dabei werden verschiedene Lösungswege bei der Erfassung des Werkstoffverhaltens beschrritten.

Aus dieser Vielfalt konstitutiver Modellierungen werden die folgenden am meisten angewandt : lineare und nichtlineare Elastizitätstheorie, z.B. [58], [28], [74], ver/entfest-

igende Plastizitätstheorie, z.B. [131], [12], [104], [31], endochrone Plastizitätstheorie, z.B. [4], [5], Bruchmechanik und Schädigungstheorie [70], [98], [99]. Für eine umfassende Beschreibung der verschiedenen Modelle sei auf das Buch von Chen [13], die Arbeit von Kompfner [50] und die gute Zusammenfassung von Eberhardsteiner et al. [24] verwiesen.

Keines der erwähnten Stoffgesetze eignet sich zur vollständigen Beschreibung des vielfältigen Antwortspektrums von Beton. Da die Beschreibung des gesamten Vor- und Nachbruchbereiches mit einem geschlossenen Konzept aber erwünscht ist, sind die meisten neueren Stoffmodelle auf diese Zielsetzung hin ausgerichtet. Hierzu werden mehrere Bestandteile der verschiedenen Formulierungen zur Beschreibung des unterschiedlichen Betonverhaltens im Zug- und Druckbereich gekoppelt.

## **1.2 Ziele und Umfang der Arbeit im Überblick**

Ziel dieser Arbeit ist es, die geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten von dreidimensionalen Stahlbetonkonstruktionen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente zu erfassen. Dafür wurde eine Familie von dreidimensionalen Elementen im Programmsystem CARAT [120] eingebracht. Unter den verschiedenen Möglichkeiten zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens von Beton wurde die Kopplung zwischen der Plastizitäts- und der Schädigungstheorie gewählt. Ein Vorteil dieses Vorgehens ist, daß sich das gekoppelte Modell im Rahmen der modernen Materialtheorie einordnen läßt, d.h. der dissipative Charakter beider Theorien kann durch die Thermodynamik mit internen Variablen begründet werden.

Zusätzlich hat diese Kopplung einen direkten physikalischen Hintergrund. Beide vorkommenden Arten von irreversiblen Änderungen, nämlich der plastische Anteil und die Evolution von Mikrodefekten, sind in einer phänomenologischen Weise enthalten.

In der vorliegenden Arbeit wird ein plastisches CAP-Modell, das von Hofstetter et al. [38] im Rahmen der konsistenten Linearisierung und Projektionsverfahren für die Rückkehr der zunächst elastischen angenommenen Spannungen vorgeschlagen wurde, mit einem skalaren Schädigungsmodell gekoppelt, das in der Lage ist, Zug- und Druckbeanspruchung zu unterscheiden. Für die lokale Integration wird ein verallgemeinertes Mittelpunktgesetz [107] angewendet, bei dem die Konsistenzbedingung im gewählten Zwischenpunkt des Zeitschrittes erfüllt wird. Dieses Schema erhält die Symmetrie des konsistenten konstitutiven elastoplastischen Tensors für einen beliebigen Zwischenpunkt und assoziierter Plastizitätsformulierung.

Die vorliegende Arbeit ist in folgende Kapitel gegliedert. Kapitel 2 befaßt sich mit den wesentlichen mechanischen Eigenschaften des Betons und seines Verhaltens unter verschiedenen Beanspruchungen.

In Kapitel 3 werden die kinematischen Grundlagen dargelegt und die Bilanzgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik aufbereitet. Es folgt in Kapitel 4 eine Übersicht der Thermodynamik mit inneren Variablen, welche das thermodynamische Verhalten eines Materials durch die momentane Änderung des Verzerrungszustandes, die Temperatur und einen Satz zusätzlicher innerer Variablen beschreiben kann. Diese Arbeit beschränkt sich auf isotherme und zeitunabhängige Prozesse.

Kapitel 5 gibt eine Übersicht über die phänomenologische Plastizitätstheorie und führt die notwendigen Begriffe mit einer aus der mathematischen Programmierung stammenden Schreibweise ein. Diese Begriffe werden dann für den Fall mehrteiliger Fließflächen mit nicht glatten Übergängen erweitert.

Kapitel 6 erweitert den im Kapitel 3 eingeführten Begriff eines Kontinuums zur Betrachtung der Schädigung. Dafür wird ein repräsentatives Volumenelement eingeführt, das groß genug ist, um repräsentative Materialfehler zu berücksichtigen, und klein genug, um als ein materieller Punkt betrachtet werden zu können. Die verschiedenen Möglichkeiten zur mathematischen Beschreibung der Schädigung werden diskutiert. Der wichtige Begriff der effektiven Spannung wird dargestellt.

Das angewandte gekoppelte Modell für Beton wird im siebten Teils der Arbeit vorgestellt. In diesem Kapitel werden das plastische Modell, das CAP-Modell in seiner assoziierten und nichtassoziierten Fassung, das angewandte skalare Schädigungsmodell und die Kopplung beider Modelle beschrieben.

In Abschnitt 8 werden die Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik unabhängig von der speziellen Diskretisierung für die Tangentensteifigkeit linearisiert. Als Ausgangspunkt dieser Herleitung wird das Prinzip der virtuellen Arbeit gewählt.

Die numerische Behandlung nichtlinearer Materialgesetze ist Thema des neunten Abschnittes der Arbeit. Die Diskretisierung des Anfangswertproblems in der "Zeit", die hier nur die Rolle eines inkrementellen Parameters einnimmt, spielt eine wesentliche Rolle bei einer inelastischen Analyse. Sie ermöglicht die Bestimmung einer approximativen Lösung durch Unterteilung der Prozeßgeschichte in finite Schritte. Zur wichtigen Thematik der Integration der Evolutionsgleichungen wird ein Überblick gegeben und die konsistenten Tangentenoperatoren werden für einfache Fließflächen formuliert.

Die im Kapitel 9 eingeführten Grundlagen werden auf den Fall mehrteiliger Fließflächen mit nicht glatten Übergängen in Kapitel 10 erweitert und auf das gekoppelte Modell übertragen. Die Ermittlung der unbekanntenen Modellparameter wird als eine Optimierungsaufgabe betrachtet.

Die Finite Elemente Diskretisierung und die Modellierung der Bewehrung wird in Kapitel 11 behandelt. Anschließend wird anhand numerischer Beispiele das Verhalten der 14-knotigen Elemente dargestellt.

Im Abschnitt 12 werden die Annahmen des Werkstoffmodells durch numerische Beispielberechnungen überprüft. Im nächsten Abschnitt werden Schlußfolgerungen aus dieser Arbeit gezogen und Anregungen für sinnvolle Erweiterungen gegeben.

Im Anhang werden eine variationelle Formulierung dargestellt und die entsprechenden Euler–Lagrange Gleichungen hergeleitet.

## 2 MECHANISCHES VERHALTEN DES BETONS

### 2.1 Einführung

Beton ist ohne Zweifel der am meisten benutzte Baustoff im Bauwesen, was auf seine hohe Druckfestigkeit und Formgestaltungsmöglichkeiten zurückzuführen ist. Allerdings sind die Kenntnisse bezüglich seiner physikalischen Eigenschaften und seines Verhaltens unter beliebiger Beanspruchung noch nicht ausreichend, was u.a. durch die Verschiedenheit der Versagensmechanismen, die Streuung der Versuchsergebnisse, die Abhängigkeit des Brucheintritts vom Belastungsprozess zu begründen ist.

Beton ist ein Konglomerat aus unterschiedlich großen Zuschlagskörnern, die in Zementmörtel eingebettet sind. Bereits im unbelasteten Zustand liegen Defekte vor, die das mechanische Verhalten des Betons wesentlich beeinflussen. Die wichtigsten Defekte sind :

- Eine große Anzahl von Mikrorissen, die infolge von Volumenänderungen während des Abbindens und Erhärtens auf der Grenzfläche zwischen den groben Zuschlagskörnern und dem Zementmörtel entstehen, wodurch der Haftverbund zwischen beiden Bestandteilen teilweise aufgehoben wird. Diese Grenzflächen stellen die schwächste Verbindung des Konglomerats dar. Die Mikrorisse sind ein wesentlicher Grund für die niedrige Betonzugfestigkeit.
- Der Zementmörtel hat eine hohe Porosität, die beim Normalbeton etwa 30% beträgt.
- Unter hohem hydrostatischen Druck spielen die winzigen Öffnungen im Zementmörtel (Poren) und die Lücken eine wesentliche Rolle auf das Verhalten und die Festigkeit des Betons.

Im Gegensatz zu Metallen ist Beton ein stark heterogenes Material, welches eine zufällige und "chaotische" Mikrostruktur aufweist, wodurch sehr unterschiedliche miteinander gekoppelte inelastische Verformungsmechanismen folgen, wie z.B. plastische Vorgänge und die Zunahme von Mikrorissen. Während sich aufgrund der gleichmäßigen kristallinen Struktur der Metalle Versetzungsmechanismen für eine brauchbare physikalische Theorie für das inelastische Verhalten der Metalle eignen (siehe Abschnitt 5.1), befindet sich dagegen die Formulierung einer vergleichbaren Theorie für quasi-spröde Materialien, bei denen sich inelastische Mechanismen gegenseitig beeinflussen, noch im Anfangsstadium.

Durch Betonversuche läßt sich ein Spektrum verschiedener, in der Regel komplizierter Phänomene beobachten, wie z.B. anisotrop elastische Degradation, ein nichtassoziierter plastischer Fließvorgang, das labile Nachversagensverhalten, hysteretische Entlastungsschleifen usw. Die Berücksichtigung dieses breiten phänomenologischen Spek-

trums in einem konstitutiven Modell bleibt eine Herausforderung für die Simulation des Materialverhaltens.

Ziel dieses Kapitels ist eine zusammenfassende Darstellung der wesentlichen mechanischen Eigenschaften des Betons. Sein Verhalten unter verschiedenen Beanspruchungen steht hier im Vordergrund. Der Maßstabseffekt, d.h. geometrisch ähnliche Bauteile verhalten sich bei unterschiedlicher Größe nicht ähnlich, und zeitabhängige Effekte, wie z.B. Kriechen und Schwinden, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

## 2.2 Versuchsergebnisse zum Tragverhalten des Betons

### 2.2.1 Einachsiges Verhalten

#### Einaxiale Druckversuche

Anhand der charakteristischen Spannungsdehnungslinie einaxialer Druckversuche und der Volumenänderungskurve (siehe Abbildung 2.1) wird der Einfluß der Evolution von Mikrorissen auf das Betonverhalten in qualitativer Weise veranschaulicht.

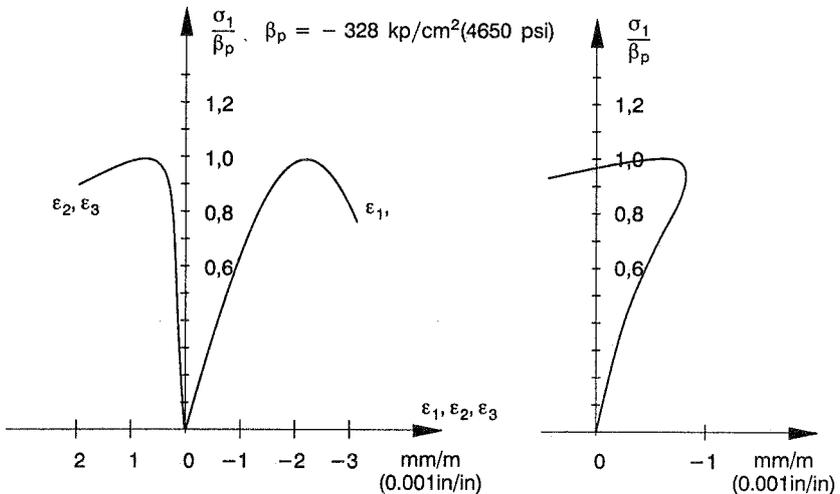


Abbildung 2.1 – Einaxiale Druckspannungs–Dehnungslinien und Volumenänderungskurve

Bis etwa ein Drittel der Prismendruckfestigkeit  $\beta_p$  verhält sich der Beton näherungsweise linear elastisch. Die vorhandenen Mikrorisse bleiben unverändert, d.h. die verfügbare innere Energie reicht nicht zur Neubildung der Rißoberflächen. Im Spannungsbereich von  $0.3\beta_p$  bis  $0.5\beta_p$  breiten sich die Verbundrisse entlang der Grenzflächen

zwischen Zuschlagskörnern und Zementmörtel aus. Für diesen Spannungsbereich sind die Risse im Zementmörtel noch vernachlässigbar. Ab einer Spannung von ca.  $0.8 \beta_p$  steigt die Anzahl der Mikrorisse beträchtlich und die Mikrostruktur im Beton wird zerstört; Mörtel- und Verbundrisse verbinden sich zu Makrorissen. Dieses Stadium wurde von Kotsovos und Newmann [51] als "*Beginn instabilen Ribfortschrittes*" bezeichnet. Der Bereich wird auch "*kritische Spannung*" genannt, da in diesem Zustand die kleinste volumetrische Dehnung auftritt.

### Einaxiale Zugversuche

Die Zugfestigkeit von Beton wurde lange Zeit als eine für Beton und Stahlbeton vernachlässigbare Größe angesehen, jedoch wird die Zugtragfähigkeit des Betons bei vielen Bauteilen und konstruktiven Details wie z.B. Verankerungen, unbewehrten Fundamenten usw. ausgenutzt.

Die Durchführung von Zugversuchen ist mit großen versuchstechnischen Problemen verbunden. Spezielle Entwicklungen, wie z.B. die elektrohydraulische Kontrolle der Versuchsmaschine (Cornelissen et al. [16], Reinhardt [88]), ermöglichen die vollständige Beschreibung der Spannungs-Verzerrungsgeschichte.

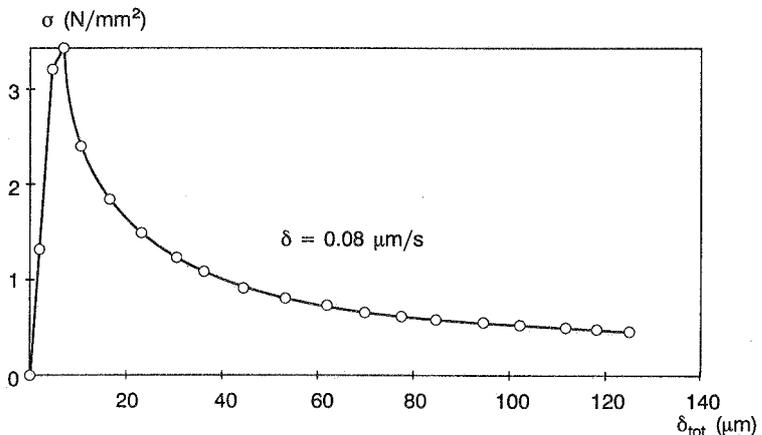


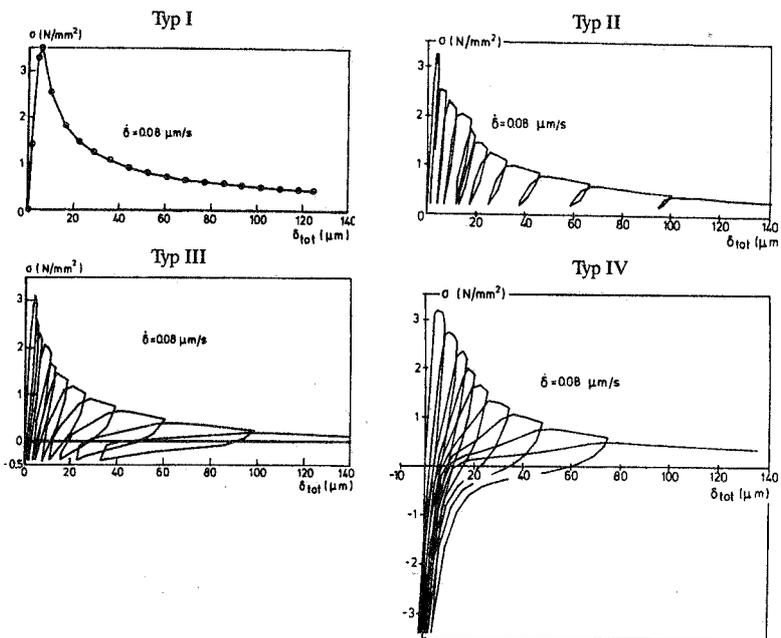
Abbildung 2.2 – Typischer verformungsgesteuerter einaxialer Zugversuch einer Betonprobe nach Reinhardt [88].

Abbildung 2.2 zeigt die vollständige Spannungs-Verformungslinie des Betons unter Zugbeanspruchung. Im Vorbruchbereich bis etwa  $0.8 \beta_t$  ( $\beta_t$  ist die Zugfestigkeit) verhält sich der Beton linear elastisch mit einem nahezu identischen Elastizitätsmodul wie im linear elastischen Druckbereich (siehe Gopalaratnam und Shah [32]). Bei weiterer

Laststeigerung wird das Verhalten allmählich nichtlinear. Im Bereich der Entlastung findet eine Zunahme der Mikrorisse im Zementmörtel und in der Grenzfläche an den groben Zuschlagskörnern statt. Ein makroskopischer Trennriß senkrecht zur Hauptspannung ist erst nach Überschreiten der maximal aufnehmbaren Spannung wahrnehmbar. Die vollständige Werkstofftrennung erfolgt erst nach großen Verformungen.

Der Vergleich des einachsigen Druck- und Zugverhaltens zeigt einen viel steileren Entfestigungsbereich unter Zug gegenüber Druck; zusätzlich ist unter Zug das Verhältnis zwischen maximal aufnehmbarer Dehnung und der zur maximal aufnehmbaren Spannung gehörenden Dehnung viel größer als unter Druck .

Das Betonverhalten im verformungsgesteuerten Zugversuch unter zyklischer Beanspruchung wurde von Reinhardt [88], Yankelevsky und Reinhardt [135], Van Mier et al. [128], Gopalaratnam und Shah [32], u.a., untersucht. Es wurde gezeigt, daß eine einzige Hüllkurve verschiedene zyklische Zugbelastungsvorgänge darstellt, wie es in Abbildung 2.3 wiedergegeben ist.



zu Abbildung 2.3 – Zyklische einaxiale Zugversuche ... ,  
hier: Darstellung der Typen I bis IV

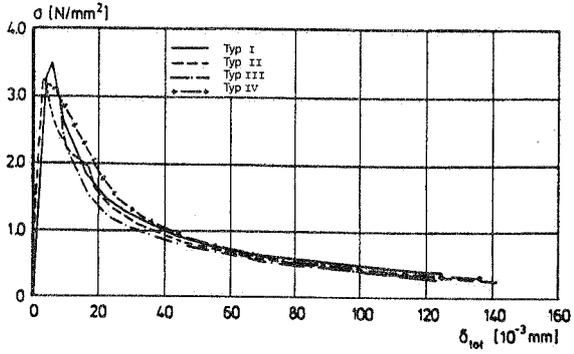


Abbildung 2.3 – Zyklische einaxiale Zugversuche einer Betonprobe und Hüllkurve nach Yankelevsky et al. [135].

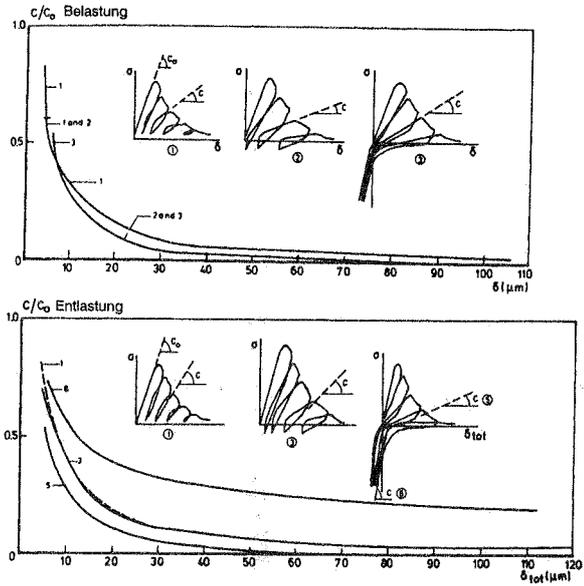


Abbildung 2.4 – Steifigkeitsdegradation nach Reinhardt [88].

Der Wert der Steifigkeit einer bereits geschädigten Probe, die entlastet wird, wird für jeden Belastungszyklus gegenüber dem ursprünglichen Wert kontinuierlich kleiner. Abbildung 2.4 zeigt dieses Phänomen, das als Steifigkeitsdegradation bekannt ist.

## **Ebener Scherversuch**

Die raue Oberfläche der Risse im Beton führt zu nennenswerten Schubspannungen im RiB, die durch Reibung übertragen werden können. Dadurch entstehen aus tangentialen RiBuferverschiebungen weitere RiBöffnungen.

Zur Schubübertragung im gerissenen Beton wurden ebene Schubversuche von Walraven [129] durchgeführt. Durch versuchstechnische Randbedingungen wird beim Aufbringen der Schubverformungen die Änderung der Verschiebung senkrecht zur RiBachse verhindert. Es wurden verschiedene Kombinationen der dabei entstehenden Normalspannung mit der eingesetzten Schubspannung untersucht. Es muß darauf hingewiesen werden, daß diese Untersuchungen nur das Verhalten des vollständig gerissenen Betons an einem diskreten RiB behandeln.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung bestätigen, daß die Schubübertragung entlang der Risse einen komplizierten Mechanismus darstellt, der durch eine direkte Schubspannung–Schubverformungs–Beziehung nicht formuliert werden kann. Vielmehr müssen Schubspannungen, Schubverformungen, Normalspannungen und RiBbreite in die Formulierung des Übertragungsmechanismus für Schub mit einbezogen werden. Abbildung 2.5 zeigt die von Walraven ermittelte Beziehung zwischen der RiBschubspannung  $\tau$  bzw. RiBnormalspannung  $\sigma$  und der RiBschubverformung.

### **2.2.2 Zweiachsiges Verhalten**

Eine grundlegende Arbeit zur Klärung des zweiachsigen Betonverhaltens wurde von Kupfer et al. [59] vorgelegt. Es wurden Biaxialversuche mit Betonproben unterschiedlicher Prismenfestigkeiten durchgeführt, wobei zur Lasteinleitung Stahlbürsten verwendet wurden. Diese Belastungsvorrichtung ermöglicht die Feststellung realistischer Versagenskurven, die in Abbildung 2.6 dargestellt sind.

Gegenüber dem einachsigen Druckspannungszustand folgt im Druck–Druck Bereich eine wesentliche Steigerung der Druckfestigkeit, deren Maximalwert von etwa  $1.28\beta_p$  für ein Spannungsverhältnis von ca.  $-\sigma_1 / -0.5\sigma_1$  erreicht wird. Andererseits setzt eine geringe Zugbeanspruchung die Druckfestigkeit der anderen Richtung erheblich herab.

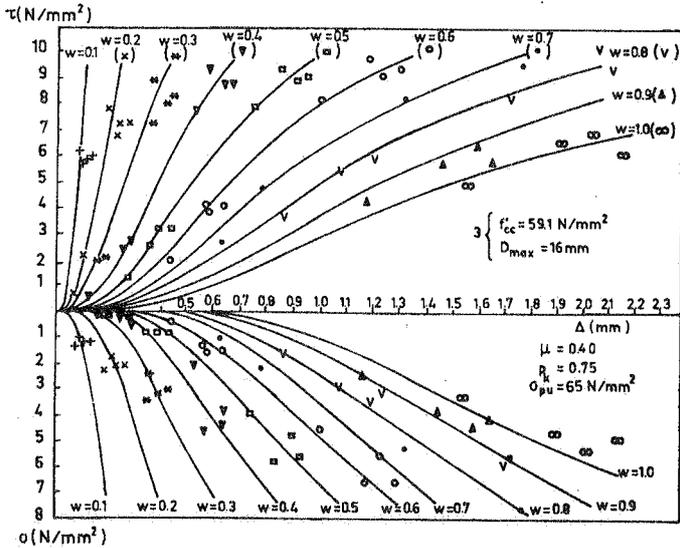


Abbildung 2.5 – Spannungs–Verschiebungslinien zum Schubtragverhalten einer gerissenen Betonprobe (Anfangsrißbreite  $w$ ) nach Walraven [129].

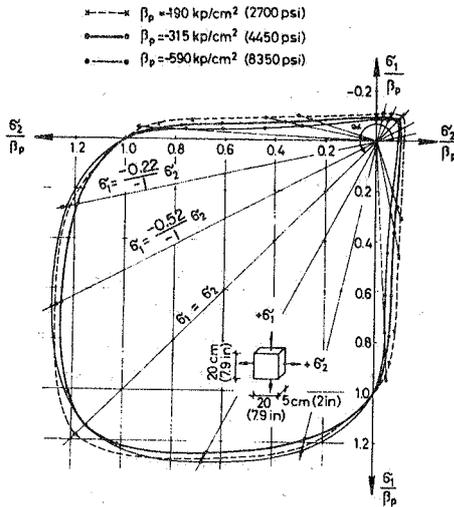


Abbildung 2.6 – Biaxiale Versagenskurve von Beton nach Kupfer et al. [59].

Abbildung 2.7 zeigt die Spannungs–Verzerrungskurven für verschiedene Hauptspannungsverhältnisse. Unter einer biaxialen Druckbeanspruchung erweist sich der Beton "duktiler". Im Zug–Druck Bereich nehmen die Hauptdehnungen in Bruchnähe mit zunehmender Zugspannung ab.

Nach Abbildung 2.8 wird bei einem abnehmenden Verhältnis  $\sigma_1/\sigma_2$  das Volumen kontinuierlich kleiner. Bei einer Spannung von ca. 80% der maximal aufnehmbaren Spannung sind Wendepunkte in den Volumenänderungskurven zu beobachten. Unmittelbar danach erreicht das Volumen seinen minimalen Wert, ab dann tritt eine plötzliche Vergrößerung des Volumens auf. Bei niedrigen bzw. hohen Druckspannungen spricht man von einem kontraktant bzw. dilatant inelastischen Material.

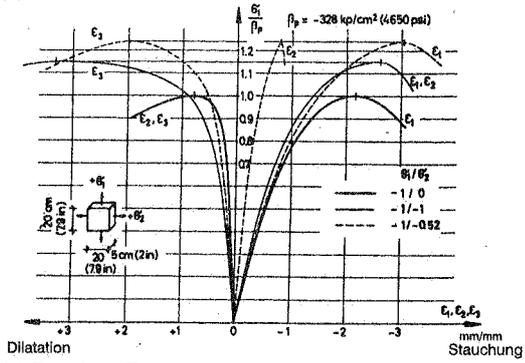
Wichtig ist auch die Art, in der das Versagen auftritt, worüber die Biaxialversuche an Betonproben von Nelissen [77] Auskunft geben. Abbildung 2.9 ist [77] entnommen und zeigt die verschiedenen Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses  $\sigma_1/\sigma_2$ .

### 2.2.3 Dreiachsiges Verhalten

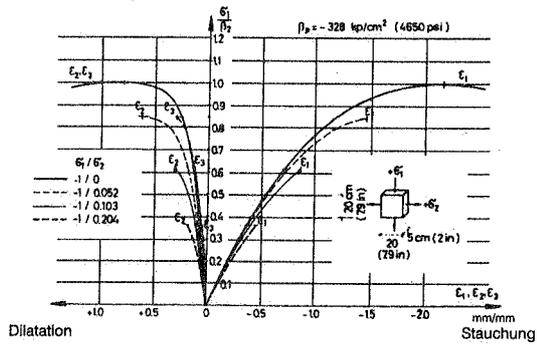
Triaxialversuche an Betonproben wurden von Richart et al. [93], Balmer [2], Green und Swanson [34], Kotsovos und Newmann [52], van Mier [128] u.a. durchgeführt. Man beobachtete, daß unter hoher hydrostatischer Spannung die Evolution der Mikrorisse verhindert wird. Die in Abbildung 2.10 dargestellten Versagenskurven und Spannungsverformungslinien zeigen, daß durch "confinement" die Festigkeit des Betons und die Verformungsfähigkeit wesentlich erhöht werden. In Abhängigkeit der hydrostatischen Spannung kann sich der Beton von quasi–spröde bis quasi–duktil verhalten, wobei sich die entsprechenden Versagensmodi von einem Trennbruch über die Entwicklung der Mikrorisse zu einem Makroriß bis hin zur Zerquetschung des Zementmörtels verändern.

Abbildung 2.11 zeigt eine Zusammenfassung der verschiedenen Brucharten. Im Zug–Druck–Druck Bereich geht der Trennbruch, der bei einer reinen Zugbelastung auftritt, in einen Gleitbruch über. Im triaxialen Druckbereich sind Gleitbrüche mit ausgeprägten Gleitflächen zu beobachten. van Mier et al. [128] haben außerdem den Einfluß der kleinsten und mittleren Hauptspannungen und einer wiederholten Belastung auf die Festigkeit und die Verformung des Betons untersucht.

(a) Biaxialer Druck



(b) Druck + Zug



(c) Biaxialer Zug

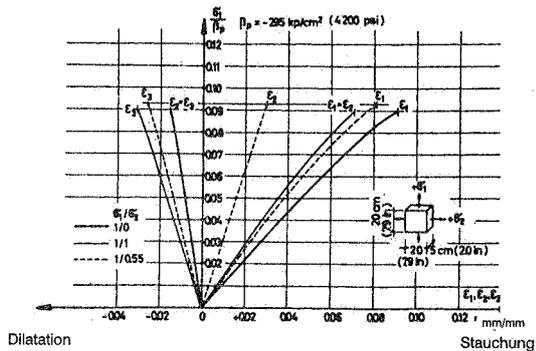


Abbildung 2.7 – Biaxiale Spannungs–Verzerrungskurven nach Kupfer et al. [59].

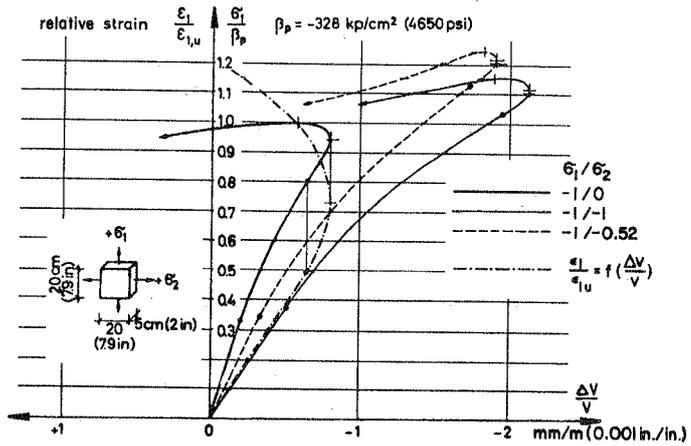


Abbildung 2.8 – Volumenänderungskurve unter unterschiedlichen Spannungsverhältnissen  $\sigma_1/\sigma_2$  nach Kupfer et al. [59].

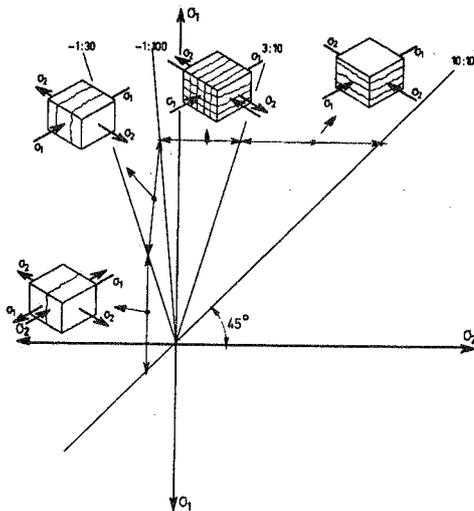


Abbildung 2.9 – Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses  $\sigma_1/\sigma_2$  nach Nelissen [77].

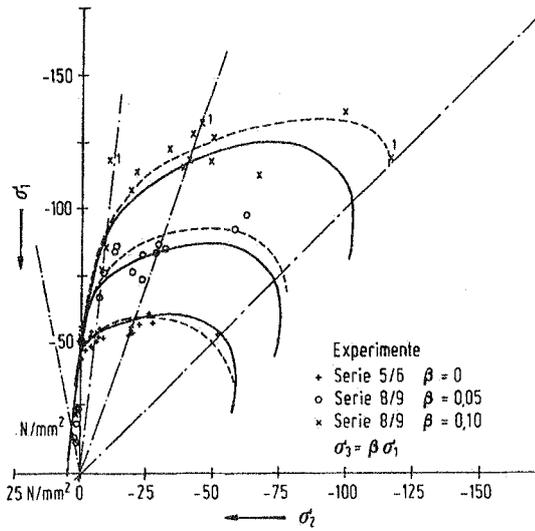
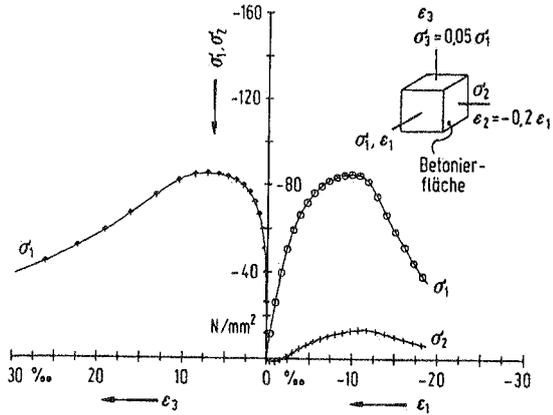


Abbildung 2.10 — Triaxiale Versagenskurve und Spannungsverformungslinien nach van Mier [128].

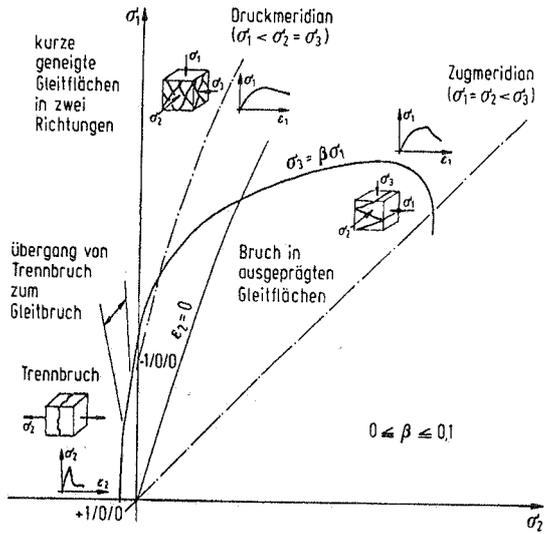


Abbildung 2.11 – Versagensmodi in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses  $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$  nach van Mier [128].

### 3 KONTINUUMSMECHANIK

#### 3.1 Einführung

Ein Ziel der Kontinuumsmechanik ist die Bestimmung von Spannungen, Dehnungen oder Versagensvorgängen, die in unterschiedlichen Materialien unter verschiedenen äußeren Bedingungen auftreten. Diese Arbeit wird sich auf die Kontinuumsmechanik fester Körper beschränken. Die grundlegende Annahme ist, daß der Körper als ein Kontinuum, d.h. ohne Lücken oder andere Defekte, betrachtet werden kann. Deshalb werden alle Größen durch stetige Funktionen beschrieben. Diese Annahme wird im Abschnitt 6.3 im Rahmen der Schädigungsmechanik des Kontinuums erweitert.

Der Begriff des Kontinuums erlaubt, alle Größen, die das Verhalten eines Körpers beschreiben, materiellen Punkten zuzuordnen. Diese Vorgehensweise ermöglicht die direkte Anwendung von mathematischen Werkzeugen, wie z.B. der Differential- und Integralrechnung.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Bilanzgleichungen, die als universale Aussage für alle Körper unabhängig von einem spezifischen Material gelten und führt damit auch die notwendigen Begriffe ein.

#### 3.2 Definition des materiellen Körpers und grundlegende Begriffe.

Die Begriffe des materiellen Punktes und Körpers sind grundlegend für die Abbildung in einem realen System im Rahmen der Kontinuumsmechanik.

##### Definition 3.2.1 :

Ein *materieller Körper*  $\mathfrak{B}$  (Kontinuum) wird durch eine zusammenhängende Menge *materieller Punkte*  $\{\mathcal{P}\}$  charakterisiert, wobei ein materieller Punkt  $\mathcal{P}$  mit einem geometrischen Punkt im Raum assoziiert werden kann, dem kein Volumen zuzuordnen ist.

Der materielle Körper ist eine physikalische Eigenschaft, die noch nicht mit einer mathematischen Struktur verbunden ist.

Eine bijektive Abbildung eines materiellen Körpers auf Bereiche des dreidimensionalen Euklidischen Raumes heißt *Konfiguration*  $\chi$ .

$$\chi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{3.1}$$

Die kontinuierliche Abfolge von Konfigurationen mit der Zeit  $t$  als Parameter wird *Bewegung* genannt.

$$\begin{aligned} \chi_t : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{P}, t) &\mapsto \mathbf{x} := \chi(\mathcal{P}, t) =: \chi_t(\mathcal{P}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Abbildung ordnet jedem Paar  $(\mathcal{P}, t)$  einen Raumpunkt  $\mathbf{x}$  zu.

Durch die Wahl eines Bezugssystems, bestehend aus einem Bezugspunkt  $O$  und einer Basis, beschreibt der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig einen Punkt des dreidimensionalen Raumes.

Für die numerische Kennzeichnung der Lage und Bewegung des materiellen Körpers ist die Einführung des Begriffes der *Referenzkonfiguration*  $\mathfrak{B}_0 = \chi(\mathfrak{B}, t_0)$  notwendig. Diese wird mit einem beliebig gewählten Zeitpunkt  $t_0$  festgelegt. Die Lage der materiellen Punkte  $\mathcal{P}$  in dieser Konfiguration wird durch den Vektor  $\mathbf{X}$  beschrieben.

$$\mathbf{X} := \chi(\mathcal{P}, t_0) =: \chi_0(\mathcal{P}) \quad (3.3)$$

Die *Momentankonfiguration*  $\mathfrak{B}_t = \chi(\mathfrak{B}, t)$  ist die Lage des materiellen Punktes im Raum zum aktuellen Zeitpunkt  $t$ , beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{x}$  in Gl. (3.2).

Da die Abbildung  $\chi_0$  bijektiv ist, können wir die inverse Beziehung zur Gl. (3.3) schreiben.

$$\mathcal{P} = \chi_0^{-1}(\mathbf{X}) \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.4) in (3.2) folgt

$$\mathbf{x} = \chi_t(\chi_0^{-1}(\mathbf{X})) = \chi_t \circ \chi_0^{-1}(\mathbf{X}) =: \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (3.5)$$

Die Abbildung  $\Phi$  ordnet jedem Paar  $(\mathbf{X}, t)$  einen Raumpunkt  $\mathbf{x}$  zu. Sie beschreibt somit die Bewegung des Punktes  $\mathcal{P}$ .

Aus Gl. (3.5) erkennt man, daß die Vektorfunktion  $\Phi$  sowohl vom Bezugssystem als auch von der Wahl der Referenzkonfiguration abhängt.

Der materielle Punkt  $\mathcal{P}$  kann der Zweckmäßigkeit entsprechend entweder durch den Vektor  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration oder durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  ausgedrückt werden. Betrachtet man eine beliebige Abbildung  $\mathcal{W}$  (beschreibt eine Eigenschaft des Körpers), die dem materiellen Körper  $\mathfrak{B}$  zum Zeitpunkt  $t$  eine beliebige Menge  $\mathcal{C}$  im physikalischen Anschauungsraum zuordnet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (\mathcal{P}, t) &\mapsto \mathcal{W}(\mathcal{P}, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Eine *materielle Darstellung* der Abbildung  $\mathcal{W}$  ist durch folgende Abbildung  $W$  gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} W : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (\mathcal{P}, t) &\mapsto \mathcal{W}(\mathcal{P}, t) = \mathcal{W}(\chi_0^{-1}(\mathbf{X}), t) =: W(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analog ist zu einem festen Zeitpunkt  $t$  die *räumliche Darstellung* der Abbildung  $\mathcal{W}$  durch die Abbildung  $w$  darstellbar.

$$\begin{aligned}
 w : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\
 (\mathcal{P}, t) &\mapsto \mathcal{W}(\mathcal{P}, t) = \mathcal{W}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) =: w(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Bildet man den Gradienten der Bewegung  $\Phi$  bezüglich der Referenzkonfiguration, entsteht der Deformationsgradient  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ . Der Deformationsgradient hängt sowohl von der Wahl des Bezugssystems als auch von der Bezugskonfiguration ab. Jedem materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  ist ein Deformationsgradient zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{A} \\
 (\mathcal{P}, t) &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei  $\mathcal{A}$  die Menge der Tensoren zweiter Stufe mit positiver Determinante darstellt. Der Deformationsgradient ermöglicht den vollständigen Überblick über die lokalen Eigenschaften der Bewegung. Er stellt die Beziehungen zwischen materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelementen in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration dar.

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \\
 da &= (\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^T)^{-1} dA \\
 dv &= \det \mathbf{F} dV
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.3 Bilanzgleichungen

#### 3.3.1 Massenerhaltung

Die Massenerhaltung kann als Postulat der klassischen Kontinuumsmechanik angesehen werden. Die auf  $\mathfrak{B}$  definierte Funktion  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet die Massendichte im Körper der Momentankonfiguration, wobei die Masse des Körpers durch die folgende Gleichung definiert wird.

$$M(\mathfrak{B}_t) := \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \, dv \quad \text{oder} \quad M(\mathfrak{B}_0) := \int_{\mathfrak{B}_0} \varrho_0 \, dV \tag{3.11}$$

Nach Anwendung der Beziehung der Gl. (3.10c) und Gleichsetzen beider Gleichungen (3.11) folgt :

$$\varrho_0 = \det \mathbf{F} \, \varrho \tag{3.12}$$

Da die Erhaltung der Masse postuliert wird, muß die materielle Zeitableitung der Gl. (3.11) gleich Null sein.

$$\frac{D}{Dt} M(\mathfrak{B}_t) \equiv 0 \tag{3.13}$$

Da sich das räumliche Volumen mit der Zeit ändert, wird an dieser Stelle vom Reynoldsschen Transportsatz Gebrauch (siehe z.B. Little [64]) gemacht.

$$\frac{DM}{Dt} = \int_{\mathfrak{B}_t} \left[ \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] dv \tag{3.14}$$

Hierbei ist  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit der Partikel  $\mathcal{P}$  in der räumlichen Darstellung. Da das Volumen willkürlich gewählt werden kann, muß der Integrand gleich Null gesetzt werden.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.15)$$

Definition 3.3.1 :

Materielle Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt}(\ast) = \frac{d}{dt}(\ast) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\ast) \quad (3.16)$$

wobei  $(\ast)$  eine beliebige Größe darstellt.

Durch die Definition der materiellen Zeitableitung wird Gl. (3.15) umgeschrieben

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (3.17)$$

Gl. (3.17) stellt den mathematischen Ausdruck des Prinzips der Massenerhaltung dar. Es ist einfach zu zeigen, daß diese Gleichung zu einer speziellen Form des Reynoldsschen Transportssatzes führt

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)}{Dt} dv \quad (3.18)$$

wobei  $\mathcal{G}$  eine beliebige räumliche Eigenschaft, z.B. die momentane Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , darstellt.

### 3.3.2 Impulsbilanz

Vor Einführung des Impulssatzes wird die Notation vereinbart, daß der Rand des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  mit  $\partial\mathcal{B}$  bezeichnet wird. Dieser Rand kann in Bereiche  $\partial\mathcal{B}_u$  mit vorgegebenen Verschiebungen sowie in Bereiche  $\partial\mathcal{B}_\sigma$  mit vorgegebenen Spannungen unterteilt werden. Diese Bereiche besitzen folgenden Eigenschaften :

$$\partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_\sigma = \partial\mathcal{B} \quad \partial\mathcal{B}_u \cap \partial\mathcal{B}_\sigma = \emptyset \quad (3.19)$$

Zusätzlich sind  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  die auf das aktuelle Volumen bzw. Oberfläche bezogenen Volumen- und Oberflächenkräfte.

Der Impuls eines materiellen Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, folgt aus der Gleichung

$$\mathbf{j} := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} dv \quad (3.20)$$

Da der Impuls eine Erhaltungsgröße ist, besagt die Impulsbilanz, daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe aller im materiellen Körper einwirkenden Lasten ist. Mathematisch wird die Impulsrate damit wie folgt beschrieben

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{j} = \int_{\partial \mathfrak{B}_t} \mathbf{t} \, da + \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \mathbf{b} \, dv \xrightarrow{\text{Gaußscher Integralsatz}} \frac{D}{Dt} \mathbf{j} = \int_{\mathfrak{B}_t} [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b}] \, dv \quad (3.21)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  ist der Cauchy Spannungstensor. Mit Gl. (3.18) kann die materielle Zeitableitung des Impulses bestimmt werden

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{j} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \, dv \quad (3.22)$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (3.22) und Gl. (3.21b) und dem Vergleich der Integranden folgt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b} = \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (3.23)$$

Für statische Probleme vereinfacht sich die Impulsbilanz zu

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b} = 0 \quad (3.24)$$

Gl. (3.23) ist auch als erste Cauchysche Bewegungsgleichung bekannt.

### 3.3.3 Drehimpulsbilanz

Der Drehimpuls bezüglich eines raumfesten Punktes  $\mathbf{x}_0$  in der räumlichen Darstellung eines materiellen Körpers  $\mathfrak{B}$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, ist für ein nicht polares Kontinuum definiert durch

$$\mathbf{d}_M := \int_{\mathfrak{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \varrho \mathbf{v} \, dv \quad (3.25)$$

Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, besagt die Drehimpulsbilanz, daß die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich aller auf den materiellen Körper einwirkenden Momente ist.

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{d}_M := \int_{\partial \mathfrak{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t} \, da + \int_{\mathfrak{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \varrho \mathbf{b} \, dv \quad (3.26)$$

Hier wird nochmals die spezielle Form des Reynoldsschen Transportsatzes Gl. (3.18) auf Gl. (3.25) angewandt.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{d}_M &= \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \varrho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \frac{D}{Dt} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}] \, dv = \\ &= \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \dot{\mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}_0] \, dv = \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \dot{\mathbf{v}} \, dv \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nach der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes für Kreuzprodukte und durch Gleichsetzen von Gl. (3.27) und Gl. (3.26) folgt

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b} - \varrho \dot{\mathbf{v}})}_{\text{aus Gl. (3.23)} = \mathbf{0}} + \nabla(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \boldsymbol{\sigma} \right\} dv = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

und mit  $\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\delta}$  ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\sigma} dv = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Da diese Gleichung auch für Teilkörper gilt, kann generell geschrieben werden

$$\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Aus der Definition des Kreuzprodukts zwischen zweistufigen Tensoren (siehe z.B. [10]) resultiert aus Gl. (3.30) die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (3.31)$$

Gl. (3.31) ist auch als zweite Cauchysche Bewegungsgleichung bekannt.

### 3.3.4 Bilanz der kinetischen Energie

Die kinetische Energie eines mechanischen Systems ist

$$K := \int_{\mathfrak{B}_1} \frac{1}{2} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \quad (3.32)$$

Der Bilanzsatz der kinetischen Energie besagt, daß die zeitliche Änderung der kinetischen Energie gleich der Differenz zwischen der Leistung aller im materiellen Körper einwirkenden Lasten und der Spannungsleistung ist. Damit kann der Bilanzsatz der kinetischen Energie in der Form

$$\frac{D}{Dt} K = \int_{\partial \mathfrak{B}_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathfrak{B}_1} \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\mathfrak{B}_1} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} dv \quad (3.33)$$

geschrieben werden. Das Skalarprodukt zwischen der Bewegungsgleichung Gl. (3.23) und dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  des aktuellen Bewegungszustandes wird über das aktuelle Volumen  $\mathfrak{B}_1$  integriert.

$$\int_{\mathfrak{B}_1} [ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \varrho(\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) ] \cdot \mathbf{v} dv = 0 \quad (3.34)$$

Einfachheitshalber werden hier die folgenden Abkürzungen benutzt

$$P := \int_{\partial \mathfrak{B}_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathfrak{B}_1} \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv \quad (3.35)$$

die für die äußere Leistung in der Momentankonfiguration steht, und

$$P_d := \int_{\mathfrak{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, dv \quad (3.36)$$

für die innere Spannungsleistung. Gl. (3.33) lautet damit vereinfacht

$$\dot{K} = P - P_d \quad (3.37)$$

Entsprechend Gl. (3.36) können arbeitskonforme Paarungen eines Spannungstensors mit einem entsprechenden Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit eingeführt werden. Folgende Paarungen sind gängig.

$$P_d := \int_{\mathfrak{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathfrak{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dv = \int_{\mathfrak{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV \quad (3.38)$$

| Elementarspannungsleistung         | Spannungstensor  | Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  |
|------------------------------------|--|--|
| $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ | $\boldsymbol{\sigma} = \text{Cauchy}$  | $\mathbf{d} = \text{symmetrische Anteile des Tensors } \nabla \mathbf{v}$                      |
| $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$    | $\mathbf{S} = \text{zweiter Piola-Kirchhoff}$<br>$\mathbf{S} := (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ | $\dot{\mathbf{E}} = \text{materielle Zeitableitung des Green - Lagrange - Verzerrungstensors}$ |

Tafel – 3.1 – Arbeitskonforme Paarungen zwischen Spannungstensoren und Tensoren der Verzerrungsgeschwindigkeit.

### 3.3.5 Energiebilanz – Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die Energieerhaltung führt in der Kontinuumsmechanik auf eine grundlegende Feldgleichung. Hier werden Probleme behandelt, die keinen zeitlichen thermischen Gradienten besitzen. Damit ist eine Aufspaltung der mechanischen und thermischen Energie möglich (thermo-mechanische Entkopplung).

Die Energie in einem beliebigen materiellen Volumen zu jedem Zeitpunkt  $t$  kann in zwei Anteile, die kinetische Energie  $K$  gemäß Gl. (3.32), und die innere Energie  $U$  zerlegt werden :

$$U = \int_{\mathfrak{B}_t} \rho u \, dv \quad (3.39)$$

$u$  stellt die spezifische innere Energie per Masseneinheit dar.

Da die Energie eine Erhaltungsgröße ist, besagt der Energieerhaltungssatz, daß die zeitliche Änderung der Energie gleich der Differenz zwischen der äußeren Leistung  $P$  gemäß Gl. (3.35) und der von außen zugeführten Wärme  $Q$  ist.

$$\frac{D}{Dt} [K + U] = P - Q \quad (3.40)$$

Für die von außen zugeführte Wärme Q gilt

$$Q := \int_{\mathfrak{B}_t} q r \, dv - \int_{\partial \mathfrak{B}_t} h(\mathbf{n}) \, da \quad (3.41)$$

r ist die volumenbezogene Wärmezufuhr und h(n) ist die Wärmezufuhr pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung der Normalen n. Der Cauchysche Tetraeder ermöglicht die Einführung des Wärmeflußvektors h :

$$h(\mathbf{n}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \quad (3.42)$$

Gl. (3.41) kann mit Gl. (3.42) wie folgt umgeschrieben werden

$$Q := \int_{\mathfrak{B}_t} q r \, dv - \int_{\partial \mathfrak{B}_t} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da \xrightarrow{\text{Gaußscher Integralsatz}} Q := \int_{\mathfrak{B}_t} [q r - \nabla \cdot \mathbf{h}] \, dv \quad (3.43)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.32) für K, (3.39) für U, (3.35) für P, (3.43) für Q in (3.40), unter Beachtung der Gl. (3.18) und unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den ersten Term von Gl. (3.35), folgt

$$\int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} - q r + \nabla \cdot \mathbf{h} \right\} dv = 0 \quad (3.44)$$

Die Anwendung der Produktregel führt auf

$$\int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ \underbrace{\rho [\rho \dot{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b}]}_{\text{aus Gl. (3.23)} = 0} + \rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v}) - q r + \nabla \cdot \mathbf{h} \right\} dv = 0 \quad (3.45)$$

Da die Gl. (3.45) auch für einen Teilkörper gilt, lautet die lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes

$$\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - q r + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (3.46)$$

Diese Gleichung stellt die lokale Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik in der räumlichen Darstellung dar. In der materiellen Darstellung folgt analog :

$$\rho_0 \dot{u} - \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 r + \nabla_0 \cdot \mathbf{h}_0 = 0 \quad (3.47)$$

wobei  $\nabla_0$  den Gradientenvektor bezüglich der Referenzkonfiguration bezeichnet. Gl. (3.46) reduziert sich für quasi-statische Prozesse auf

$$\rho \dot{u} - q r + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (3.48)$$

### 3.4 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Aus dem Skalarprodukt zwischen der lokalen Form der Bewegungsgleichung Gl. (3.23) und einem beliebigen virtuellen Vektorfeld  $\delta \mathbf{u}$  mit anschließender Integration über die Momentankonfiguration  $\mathfrak{B}_t$  ergibt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit (Verschiebung) als schwache Form des Gleichgewichts. Dieses Skalarprodukt führt auf die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}_t} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\mathfrak{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0 \quad (3.49)$$

Unter Verwendung der Gleichheit

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u}$$

erhält man

$$\int_{\mathfrak{B}_t} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \, dv - \int_{\mathfrak{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\mathfrak{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0 \quad (3.50)$$

Unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den ersten Summanden dieser Gleichung und unter Beachtung der Spannungsrandbedingung auf  $\partial \mathfrak{B}_t$  lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit in räumlicher Darstellung

$$\int_{\mathfrak{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathfrak{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial \mathfrak{B}_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da = 0 \quad (3.51)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in materieller Darstellung lautet analog

$$\int_{\mathfrak{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathfrak{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathfrak{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (3.52)$$

wobei  $\rho_0$ ,  $\mathbf{b}_0$  und  $\mathbf{t}_0$  die Massendichte und die eingepprägten Volumen- bzw. Oberflächenkräfte bezüglich der Referenzkonfiguration bezeichnen.

## 4 THERMODYNAMIK MIT INTERNEN VARIABLEN

### 4.1 Einführung

Die bereits erwähnten Prinzipien der Kontinuumsmechanik sind für alle Körper, unabhängig von ihren Materialien, gleichermaßen gültig. Die dadurch entstehenden Feldgleichungen – Massenerhaltung Gl. (3.17) (1 Gl.), Impulsbilanz Gl. (3.23) (3 Gln.) und Drehimpulsbilanz Gl. (3.31) (3 Gln.) – führen zu einem aus 7 gekoppelten Gleichungen bestehenden System, das jedoch insgesamt 13 Unbekannte ( $\rho$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ) enthält.

Durch die Beschreibung der individuellen Eigenschaften einzelner Körper über die Materialgleichungen oder konstitutiven Gleichungen wird das bisher unterbestimmte System von Differentialgleichungen bestimmt.

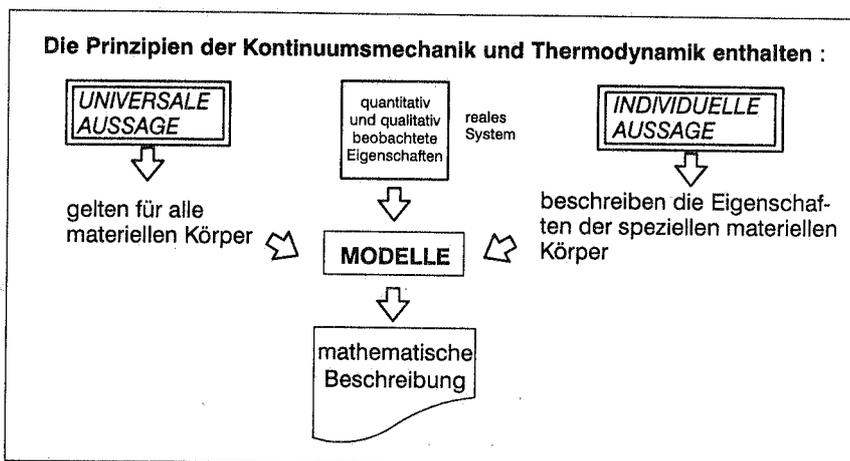


Abbildung 4.1 – Kombination von universalen und individuellen Aussagen.

Aus der Kombination von universalen und individuellen Aussagen werden Modelle gewonnen, deren Eigenschaften dem experimentell nachgewiesenen Verhalten eines realen Systems qualitativ und quantitativ entsprechen und zudem mathematisch beschreibbar sind.

Im Hinblick auf eine optimale Erfüllung der theoretischen und praktischen Anforderungen an die Materialbeschreibung ist es zweckmäßig, von einer möglichst allgemeinen Theorie auszugehen. Aus dieser kann man systematisch eine speziellere Theorie ableiten, die der jeweils gegebenen Aufgabe optimal angepaßt ist.

Die Auseinandersetzung zweier verschiedener Auffassungen der Thermodynamik (rationelle und klassische) konzentriert sich auf die Kontroverse, ob die Thermodynamik

ohne weiteres für irreversible Prozesse einsetzbar ist, oder ob eine völlige Reformulierung der Thermodynamik notwendig ist. Eine ausführliche Diskussion dieser Problematik findet man in [73], [30], [124], [133]. Das Ziel dieses Abschnitts ist, die thermodynamische Theorie mit internen Variablen als Grundstein zur Entwicklung von konstitutiven Gesetzen und zur Beschreibung von dissipativen Mechanismen darzulegen.

Der Begriff *interne Variablen* wurde von Onsager [80] eingeführt und von Kestin und Rice [48], Rice [91], Lubliner [65], Ziegler [137], u.a., im Rahmen der Kontinuumsmechanik angewandt. Ein endlicher Satz von internen Variablen dient der Beschreibung des lokalen Zustands in einem repräsentativen Volumen (z.B. Änderungen auf der Mikroskala).

Bei den internen Variablen kann man von zwei Gruppen sprechen: die einen geben physikalische Eigenschaften, wie z.B. die Dichte der strukturellen Defekte, wieder, die anderen beschreiben die beobachteten Phänomene durch mathematische Herleitung, wie z.B. die inelastische Dehnung.

## 4.2 Formulierung der Thermodynamik

Der Vollständigkeit halber wird in diesem Abschnitt zunächst der allgemeine Fall mit dem Wärmefluß in den Bilanzgleichungen betrachtet. Die Spezialisierung für isotherme Prozesse ist einfach nachzuvollziehen.

Hier wird angenommen, daß der lokale thermodynamische Zustand existiert und dieser eindeutig durch den Green–Lagrange Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , die Entropie per Volumeneinheit  $\eta$  und einem Satz von internen Variablen  $\mathbf{q}$  bestimmt ist.

Das erste thermodynamische Gesetz, die Energiebilanz nach Gl. (3.47), setzt die Existenz einer Zustandsvariablen  $u$  voraus, welche die Dichte der inneren Energie darstellt. Sie ist gekennzeichnet durch:

$$u = u(\mathbf{E}, \eta, \mathbf{q}) \quad (4.1)$$

Um die experimentelle Erfahrung über die Richtung des Flusses physikalischer Vorgänge festzulegen, benötigt man die mathematische Beschreibung des Prinzips der Dissipation oder Irreversibilität. Dieses Prinzip entspricht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Das Dissipationsprinzip besagt nach Truesdell [124]: "Die zeitliche Entropieänderung  $\dot{\eta}$  eines beliebigen materiellen Körpers  $\mathfrak{B}$  ist nicht kleiner als die auf  $\mathfrak{B}$  von außen einwirkende Entropiezufuhr."

Die mathematische Beschreibung dieses Prinzips lautet

$$\dot{\mathcal{J}}(\mathfrak{B}_0) \geq \int_{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{\varrho_0 r}{T} - \nabla_0 \cdot \frac{\mathbf{h}_0}{T} \right) dV \quad (4.2)$$

wobei die Größen  $r$  und  $\mathbf{h}$  im Abschnitt 3.3.5 eingeführt worden sind und  $T$  die absolute Temperatur bezeichnet.

Die entsprechende lokale Aussage zu dieser globalen Aussage heißt *Clausius–Duhemsche Ungleichung* (in der Truesdell–Toupin Form)

$$\varrho_0 \dot{\mathcal{J}} \geq \frac{1}{T} \varrho_0 r - \frac{1}{T} \nabla_0 \cdot \mathbf{h}_0 + \frac{1}{T^2} \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 T \quad (4.3)$$

Die Ableitung von  $u$  nach der Zeit kann aus Gl. (4.1) bestimmt werden.

$$\dot{u} = \partial_{\mathbf{E}} u : \dot{\mathbf{E}} + \partial_{\mathcal{J}} u \dot{\mathcal{J}} + \partial_{\mathbf{q}} u \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.4) in Gl. (3.47), der lokalen Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, ergibt sich

$$\varrho_0 [\partial_{\mathbf{E}} u : \dot{\mathbf{E}} + \partial_{\mathcal{J}} u \dot{\mathcal{J}} + \partial_{\mathbf{q}} u \cdot \dot{\mathbf{q}}] - \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \varrho_0 r + \nabla_0 \cdot \mathbf{h}_0 = 0 \quad (4.5)$$

Gl. (4.5) in (4.3) eingesetzt führt auf

$$[\varrho_0 T - \varrho_0 \partial_{\mathcal{J}} u] \dot{\mathcal{J}} + [\mathbf{S} - \varrho_0 \partial_{\mathbf{E}} u] : \dot{\mathbf{E}} - \varrho_0 \partial_{\mathbf{q}} u \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{T} \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 T \geq 0 \quad (4.6)$$

Da sowohl  $\dot{\mathcal{J}}$  als auch  $\dot{\mathbf{E}}$  in einem gegebenen thermodynamischen Zustand beliebige Werte annehmen können, erhält man

$$T = \partial_{\mathcal{J}} u$$

$$\mathbf{S} = \varrho_0 \partial_{\mathbf{E}} u \quad (4.7)$$

$$\varrho_0 \partial_{\mathbf{q}} u \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{T} \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 T \leq 0$$

Wegen der physikalischen Tatsache, daß die Wärme vom heißeren zum kälteren Teil des Körpers fließt, gilt :

$$\mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 T \geq 0 \quad (4.8)$$

Damit folgt aus Gl. (4.7c)

$$\partial_{\mathbf{q}} u \cdot \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (4.9)$$

d.h. die internen Prozesse vermindern die innere Energie. Die Variable  $\partial_{q_i} u$  kann als konjugierte thermodynamische Last der internen Variablen  $q_i$  bezeichnet werden.

Die Gleichungen (4.7) legen fest, daß die spezifische innere Energie  $u$  als ein Potential der Temperatur und der Spannung betrachtet werden kann. Sie setzen zusätzlich Beschränkungen in der Richtung des Wärmeflußvektors und in der Abhängigkeit der inneren Energie von den internen Variablen voraus.

Im Hinblick auf Gl. (4.7) ist es möglich, zwei zusätzliche Potentiale durch die Legendre–Fenchelsche Transformation ([106] Kapitel 2) der inneren Energie  $u$  einzuführen.

Definition 4.2.2 :

Freie Energie  $A$  per Volumeneinheit nach Helmholtz:

$$A = u - T\gamma = A(\mathbf{E}, T, \mathbf{q}) \quad (4.10)$$

Aus dieser Legendre–Fenchelschen Transformation für das Potential  $u$  ergeben sich die folgenden Eigenschaften :

$$\begin{aligned} \gamma &= -\partial_T A \\ \mathbf{S} &= \varrho_0 \partial_{\mathbf{E}} A \\ \partial_{\mathbf{q}} A \cdot \dot{\mathbf{q}} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Definition 4.2.3 :

Freie Energie  $G$  per Volumeneinheit nach Gibbs:

$$G = \mathbf{S} : \mathbf{E} - A = G(\mathbf{S}, T, \mathbf{q}) \quad (4.12)$$

Aus dieser Legendre–Fenchelschen Transformation für das Potential  $u$  ergeben sich die folgenden Eigenschaften :

$$\begin{aligned} \gamma &= \partial_T G \\ \mathbf{E} &= \varrho_0^{-1} \partial_{\mathbf{S}} G \\ \partial_{\mathbf{q}} G \cdot \dot{\mathbf{q}} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das Gibbsche Potential wird auch komplementäre freie Energie oder freie Enthalpie genannt. Tafel 4.1 stellt eine Zusammenfassung dieser Potentiale dar.

| Potential                        | Beziehung zur $u$                       | Unabhängige Variablen            | Konjugierte Größen  |
|----------------------------------|---|----------------------------------|---|
| Interne Energie $u$              | $u$                                     | $\mathbf{E}, \gamma, \mathbf{q}$ | $T = \partial_{\gamma} u  _{\mathbf{E}}$<br>$\mathbf{S} = \varrho_0 \partial_{\mathbf{E}} u  _{\gamma}$ |
| freie Energie nach Helmholtz $A$ | $u - T\gamma$                           | $\mathbf{E}, T, \mathbf{q}$      | $\gamma = -\partial_T A  _{\mathbf{E}}$<br>$\mathbf{S} = \varrho_0 \partial_{\mathbf{E}} A  _T$         |
| freie Energie nach Gibbs $G$     | $\mathbf{S} : \mathbf{E} - u + T\gamma$ | $\mathbf{S}, T, \mathbf{q}$      | $\gamma = \partial_T G  _{\mathbf{S}}$<br>$\mathbf{E} = \varrho_0^{-1} \partial_{\mathbf{S}} G  _T$     |

Tafel – 4.1 Thermodynamische Potentiale

Die Wahl eines Potentials ist mit der Wahl der unabhängigen Variablen verbunden. Anhand der vierten Spalte von der Tafel 4.1 können folgende Aussagen festgelegt werden :

- Jede Zeile in dieser Spalte stellt eine thermodynamische konstitutive Gleichung (oder *Colemansche Beziehung*) dar, die dem zugehörigen Potential entspricht.
- Das Potential  $u$  stellt die Beziehungen zwischen der konjugierten Größe  $\mathbf{S}$  und der unabhängigen Variablen  $\mathbf{E}$  eines isentropen Prozesses ( $\nu = \text{konst.}$ ) dar.
- Die Potentiale  $A$  und  $G$  geben die Beziehung zwischen den konjugierten Größen  $\mathbf{S}$  bzw.  $\mathbf{E}$  und den unabhängigen Variablen  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{S}$  eines isothermen Prozesses wieder.

Die einfachsten Stoffgesetze ergeben sich aus der Cauchyschen Definition des elastischen Körpers : "Ein materieller Körper wird elastisch genannt, wenn die Spannungen ausschließlich durch die momentane Verzerrung und Temperatur zu bestimmen sind". Offensichtlich wird in diesem Fall der Satz der internen Variablen überflüssig. Zusammen mit den Bilanzgleichungen definieren die thermodynamischen konstitutiven Gleichungen das gesamte Randwertproblem, das es zu lösen gilt.

Für den allgemeinsten Fall eines beliebigen Materials müssen jedoch noch Evolutionsgleichungen für die internen Variablen definiert werden. Hier dienen die Ungleichungen (4.9), (4.11c), (4.13c) als Einschränkungen der konstitutiven Gleichungen.

Es wird angenommen, daß die Zeitableitung aller internen Variablen  $q_i$  hinreichend durch alle beteiligten Zustandsgrößen beschrieben wird. Die Evolutionsgleichung einer internen Variablen  $q_i$  ist somit durch

$$\dot{q}_i = F_i(\mathbf{S}, T, \mathbf{q}) \quad i = 1, \dots, m \quad (4.14)$$

definiert.

Die Ableitung von Gleichung (4.13b) nach der Zeit führt auf

$$\dot{\mathbf{E}} = \partial_{\mathbf{S}} \mathbf{E} : \dot{\mathbf{S}} + \partial_T \mathbf{E} \dot{T} + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.15)$$

Der erste Term der rechten Seite dieser Gleichung stellt den momentanen Nachgiebigkeitstensor, der zweite Term den momentanen thermischen Dehnungstensor dar. Beide Tensoren können als tensorielle Funktionen der Zustandsvariablen  $(\dot{\mathbf{E}}, T)$  und der inneren Variablen  $\mathbf{q}$  betrachtet werden. Allerdings kann für manche Materialien die Abhängigkeit dieser Tensoren von den inneren Variablen vernachlässigt werden. Beispiele dafür sind kristalline Körper. Für diese wurde nachgewiesen, daß sowohl der momentane Nachgiebigkeitstensor als auch der momentane thermische Dehnungstensor nahezu unabhängig von den inneren Variablen sind.

## 5 ZUR BESCHREIBUNG PLASTISCHER DEFORMATIONEN

### 5.1 Motivation

Das Unvermögen eines Werkstoffes, beliebig großen Spannungen widerstehen zu können, weist darauf hin, daß das Modell des elastischen Körpers in vielen Fällen unrealistisch ist.

Ausgangspunkt zur Beschreibung nichtelastischen Materialverhaltens ist die Unterstellung eines Erinnerungsvermögens an ein materielles System. Damit kann der Begriff eines *einfachen Materials* eingeführt werden: "Der momentane Spannungszustand hängt in diesem Fall von der momentanen Verzerrungsgeschichte ab". Die mathematische Theorie, die solche Materialien beschreibt, heißt *Theorie des Materials mit Gedächtnis* [125]. Im Rahmen dieser Theorie kann man einem materiellen System entweder ein nachlassendes Gedächtnis oder ein perfektes Gedächtnis unterstellen. Um die Materialeigenschaften eines plastischen Körpers beschreiben zu können, muß man jedem materiellen Punkt im Körper ein perfektes Gedächtnis zuordnen.

| Theorie des einfachen Materials mit Gedächtnis |  |
|--|--|
| Perfektes Gedächtnis :<br>PLASTIZITÄT          | Nachlassendes Gedächtnis :<br>VISKOELASTIZITÄT |

Tafel – 5.2 – Unterteilung der Theorie des einfachen Materials mit Gedächtnis.

Folgende Phänomene sind Kennzeichen eines plastischen Materialverhaltens :

- bleibende sogenannte plastische Verformungen, die nach der Wegnahme der Belastung unabhängig von der Zeit erhalten bleiben;
- Verfestigungseffekte, die nach einer plastischen Belastung (d.h. die elastische Grenze wird überschritten) für die Zunahme der elastischen Grenze verantwortlich sind;
- Hystereseeffekte; diese Effekte werden durch einen Entlastungs– und Wiederbelastungszyklus gekennzeichnet, in dem Energie dissipiert wird. Das bedeutet, daß die Entlastungs– und Wiederbelastungspfade nicht übereinstimmen.

All diese Effekte sind durch Versuche nachgewiesen worden. Am Anfang der Entwicklung der Plastizitätstheorie beschränkte man sich bei der Beschreibung plastischer Phänomene auf Metalle, die in ihrer üblichen Zusammensetzung polykristallin sind. Sie bestehen aus einer großen Anzahl von Körnern, die wiederum kristalline Strukturen be-

sitzen. Wegen ihrer zufälligen Anordnung kann das globale Verhalten häufig als isotrop bezeichnet werden. Allerdings werden sekundäre Phänomene durch Inhomogenitäten in der mikroskopischen Ebene verursacht. Diese Inhomogenitäten entstehen entweder durch unterschiedliche Verfestigungen in verschieden orientierten Kristallen oder aus Defekten in der Mikrostruktur.

Der Bauschinger Effekt und Hystereseschleifen sind Beispiele der ersten Inhomogenitätsklasse, verursacht durch unterschiedliche plastische Verformungen der Körner mit unterschiedlicher Orientierung. Die Diskrepanz zwischen der theoretischen und der beobachteten Schubfestigkeit, sowie das Auftreten von Scherfugen sind Effekte, die mit der zweiten Inhomogenitätsklasse assoziiert werden können.

Die Defekte, die als Abweichungen von der idealen Kristallstruktur interpretiert werden müssen, können entsprechend der Geometrie der Abweichung als Punkt-, Linien- oder Ebenendefekte klassifiziert werden. Die Punktdefekte konzentrieren sich auf Gitterpunkte; wenige Atome sind dann betroffen. Die wichtigsten Linien oder Ebenendefekte in einer kristallinen Struktur sind die Versetzungen. Diesen Begriff führte V. Volterra im Rahmen der Kontinuumsmechanik ein. Grundlegende Arbeiten zu Versetzungsmechanismen im Rahmen der Kristallplastizität werden Taylor[1934] und Orowan[1934] zugeschrieben. Nach allgemeiner Überzeugung ist die plastische Verzerrung in Kristallen eine Folge dieser Versetzungsbewegung.

Ziel einer an der Kontinuumsmechanik orientierten Plastizitätstheorie ist weniger die Modellierung der mikroskopischen Prozesse im kristallinen Bereich des Werkstoffes als viel mehr die phänomenologische Erfassung der Deformationsevolution unter mechanischer Beanspruchung. Trotzdem sind solche Prozesse in der Entwicklung der phänomenologischen Theorie von großer Bedeutung.

Ein wichtiges Merkmal, mit welchem sich das elastoplastische von dem nichtlinear elastischen Kontinuumsverhalten unterscheidet, ist die Entlastung. Der Entlastungspfad entspricht im Spannungsraum eines nichtlinear-elastischen Materials dem Belastungspfad, während bei einem elastoplastischen Material beide Pfade nicht identisch sind. Das elastoplastische Materialverhalten ist zudem auch durch die Änderungen der bleibenden Verformungen gekennzeichnet. Wenn sich der Spannungszustand in einem elastischen Gebiet befindet, wird keine zusätzliche bleibende Verformung produziert. Plastische Verformungen finden dann statt, wenn der Spannungszustand auf der Grenze dieses elastischen Gebiets, der sogenannten Fließ- oder Belastungsfläche, liegt. Die Bewegung auf einer derartigen Fläche wird vom Ent-/Verfestigungsgesetz gesteuert, die Evolution der plastischen Verformung durch eine Fließregel beschrieben. Die Fließfläche, die Fließregel und das Ent-/Verfestigungsgesetz sind die Hauptbestandteile der phänomenologischen Plastizitätstheorie. Diese Begriffe werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

Die ersten Veröffentlichungen zur Plastizitätstheorie orientierten sich an der Bodenmechanik und gehen auf Coulomb(1773) und Rankine(1853) zurück. Die Weiterentwicklungen der Theorie dienen fast ausschließlich der Beschreibung polykristalliner Metalle. Dem modernen Begriff *Geomaterialien* werden aufgrund ihres ähnlichen Verhaltens Materialien wie Boden, Gestein und Beton zugeordnet. Die mechanischen Eigenschaften dieser Geomaterialien reagieren im Gegensatz zu den Metallen sehr sensibel auf Veränderungen unter Druckbeanspruchung. Entwicklungen plastischer Modelle für Geomaterialien haben in den siebziger Jahren einen enormen Impuls bekommen, was sicherlich mit der Entwicklung der rechnerischen Möglichkeiten verbunden ist. Aber die verbreitete Anwendung der Plastizitätstheorie für Geomaterialien ist umstritten. Krajcinovic [55] ist der Meinung, daß die Anwendung der Plastizitätstheorie zur Beschreibung solcher Materialien zweifelhaft ist. Er schreibt :

*"... Der Wechsel des vorherrschenden mikrostrukturellen Versagensmodus hat eine wesentliche Auswirkung auf das makrostrukturelle Verhalten in quantitativer und qualitativer Hinsicht. Es ist deshalb nicht überraschend, daß die Plastizitätstheorie, obwohl äußerst erfolgreich für duktile Prozesse, sich von zweifelhafter Nützlichkeit bei der Beschreibung von Phänomenen erwies, die Änderungen der Dichte und der Verteilung von Mikrorissen widerspiegeln ..."*

Die Modellierung solcher Materialien bleibt deswegen immer noch eine Herausforderung. Eine umfassende Darstellung solcher Modelle ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Hierzu wird lediglich auf zusammenfassende Darstellungen, wie z.B. von Desai und Sirdardane [19], Chen [13], u.a., hingewiesen.

im nächsten Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe einer phänomenologischen ratenunabhängigen Plastizitätstheorie im Rahmen kleiner Verzerrungen dargestellt.

**ANMERKUNG :**  $\sigma$  und  $\epsilon$  stehen in diesem und den folgenden Kapiteln für allgemeine Spannungs- und Verzerrungstensoren, d.h.  $\sigma$  und  $\epsilon$  bilden hier eine allgemeine, nicht spezifizierte arbeitskonforme Paarung ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) (siehe Tafel 3.1).

## 5.2 Fließbedingung

Durch eine Fließbedingung wird eine Materialcharakterisierung des Grenzverhaltens vom elastischen zum plastischen Zustand unter komplexen mehrdimensionalen Spannungszuständen beschrieben. Das hat zur Folge, daß die aus dem einachsigen Spannungszustand gewonnenen Erkenntnisse auf den sechsdimensionalen Raum der Spannungen oder Verzerrungen übertragen werden. Hier wird die Fließbedingung als eine Skalarfunktion definiert.

Definition 5.2.4 :

Die Fließbedingung  $\phi$  wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{F} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ \{ \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} \} &\rightarrow k = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

gekennzeichnet. Hier sei  $\mathcal{F}$  der Raum des beliebigen symmetrischen, zwei-stufigen Tensors  $\boldsymbol{\tau}$ ,

$$\mathcal{F} := \{ \boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T \} \quad (5.2)$$

$\mathbf{q}$  ist der Vektor der internen Variablen in einem  $m$  dimensionalen Raum und  $k$  eine Skalar.

Hier stellt sich die Frage, welche mögliche Form diese Fließbedingung haben kann. Da hier angenommen wird, daß das vorhandene Material isotrop ist, hängt die plastische Beanspruchung nur von den Größen der drei Hauptspannungen und nicht von deren Richtungen ab. Somit kann jede Fließbedingung im Hauptspannungsraum beschrieben werden.

$$\phi = \phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathbf{q}) \quad (5.3)$$

Die Hauptspannungen können durch die Invarianten des Spannungstensors oder durch die Koordinaten  $\{\xi, \varrho, \theta\}$  des Haigh–Westergaardschen Raums ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(I_1, I_2, I_3, \mathbf{q}) \\ \phi &= \phi(J_1, J_2, J_3, \mathbf{q}) \\ \phi &= \phi(\xi, \varrho, \theta, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$I_1, I_2, I_3$  sind die Invarianten des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $J_1, J_2, J_3$  die Invarianten des deviatorischen Spannungstensors  $\mathbf{s}$ .

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \quad (5.5)$$

$\boldsymbol{\delta}$  ist der Einheitstensor und enthält das Kronecker–Delta in indizierter Notation

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ 1 & \text{wenn } i = j \end{cases} \quad (5.6)$$

Die Tatsache, daß jeder Spannungszustand durch seine Hauptspannungen repräsentiert werden kann, ist der Ausgangspunkt zu einer anschaulichen Darstellung des Spannungszustandes in einem dreidimensionalen Spannungsraum (Haigh–Westergaard-scher Spannungsraum gemäß Abbildung 5.1).

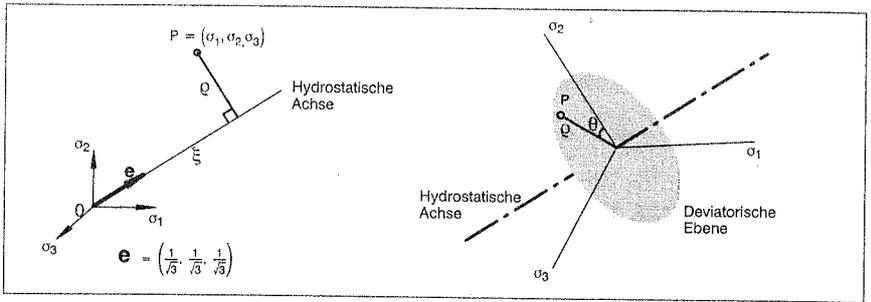


Abbildung 5.1 – Haigh–Westergaardscher Spannungsraum und deviatorische Ebene.

Um die Form einer Fließfläche für ein allgemeines isotropes aber auch druckabhängiges Material zu bestimmen, ist es nötig, sowohl die Meridiane als auch die Schnittkurve mit der deviatorischen Ebene in einem Sektor  $\theta \in [0^\circ, 60^\circ]$  zu definieren. In diesem Fall ist die Fließfläche durch eine sechsfache Symmetrie gekennzeichnet.

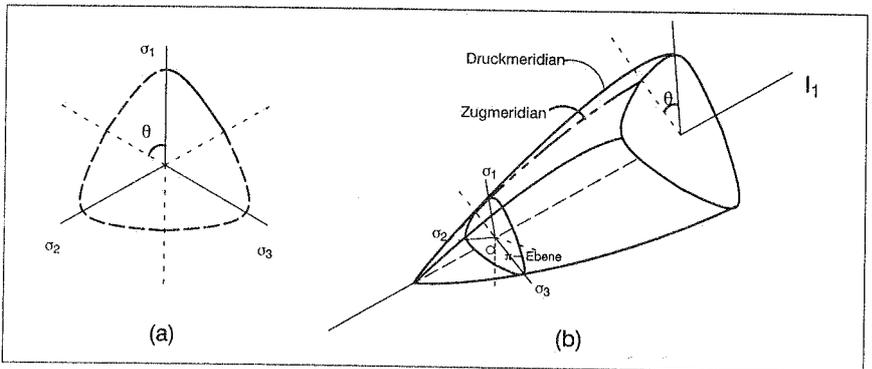


Abbildung 5.2 – (a) Sechsfache Symmetrie in der deviatorischen Ebene  
(b) Meridiane Darstellung für ein druckabhängiges Material.

Die Fließfunktion  $\phi$  ermöglicht die Einführung der Begriffe : *elastisches Gebiet* und *Fließfläche*.

Definition 5.2.5 :

Das Gebiet  $E_\sigma$  im Spannungsraum ist das durch  $\phi \leq 0$  abgeschlossene Gebiet, welches die Menge aller physikalisch zulässigen Zustände  $(\sigma, \mathbf{q})$  umschließt. Mathematisch wird es wie folgt definiert :

$$E_\sigma := \{(\sigma, \mathbf{q}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^m \mid \phi(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (5.7)$$

Von dieser Definition können die beiden Begriffe *elastisches Gebiet* und *Fließfläche* abgeleitet werden.

Definition 5.2.6 :

Elastisches Gebiet :

$$\text{int}(E_\sigma) := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R}^m \mid \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0\} \quad (5.8)$$

Fließfläche :

$$\partial(E_\sigma) := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R}^m \mid \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (5.9)$$

$$E_\sigma := \text{int}(E_\sigma) \cup \partial(E_\sigma) \quad ; \quad \text{int}(E_\sigma) \cap \partial(E_\sigma) = \emptyset \quad (5.10)$$

Ein stabiler Werkstoff wird durch folgende Bedingungen klassifiziert, die als Drucker-sche Stabilitätskriterien [Drucker 1951] bekannt sind :

- Die Arbeit, die durch eine langsam aufgebrachte äußere Last an der resultierenden inkrementellen Verschiebung geleistet wird, ist positiv.
- Die gesamte Arbeit, die durch einen Zyklus nach Aufbringen und Entfernen der inkrementellen äußeren Last an der resultierenden inkrementellen Verschiebung geleistet wird, darf nicht negativ sein.

$$\int \dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA + \int \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV > 0 \quad \xrightarrow{\text{Prinzip der virtuellen Arbeit}} \quad \int \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV > 0 \quad (5.11)$$

$$\oint \dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dA + \oint \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{Prinzip der virtuellen Arbeit}} \quad \oint \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV \geq 0 \quad (5.12)$$

Da hier nur kleine Verzerrungen betrachtet werden, kann der Verzerrungstensor und seine Rate additiv in einen elastischen und plastischen Anteil zerlegt werden.

$$\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} := \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (5.13)$$

Aus der additiven Zerlegung des Verzerrungstensors, die nur lokal zutrifft, folgt nicht, daß der Verschiebungsvektor auch in einen elastischen und plastischen Teil zerlegt werden kann.

Die Arbeit  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^e > 0$  ist immer positiv. Damit werden die Ungleichungen (5.11) und (5.12) wie folgt beschrieben.

$$\int \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \, dV > 0 \quad (5.14)$$

$$\oint \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \, dV \geq 0 \quad (5.15)$$

In der Plastizitätstheorie wird das erste Kriterium als Stabilitätskriterium des Werkstoffes "im Kleinen" und das zweite als Stabilitätskriterium des Werkstoffes "im Zyklus" bezeichnet.

Das Druckersche Stabilitätskriterium im Kleinen ist umfassender als es in (5.11) zum Ausdruck kommt. Zusätzliche Spannungen, die von einem differentiellen Lastzuwachs erzeugt werden, müssen nicht notwendigerweise differentiell klein bleiben. Es wird ein Anfangsspannungszustand  $\sigma^0$  im elastischen Gebiet oder auf der Fließfläche und ein weit entfernter Punkt  $\sigma$  auf der Fließfläche betrachtet, d.h.  $\sigma - \sigma^0$  ist kein differentieller Zuwachs. Es wird angenommen, daß der Zuwachs aus einer elastischen Beanspruchung entsteht. Es wird eine zusätzliche differentielle Spannung  $d\sigma$  aufgebracht, die auch durch einen plastischen Verzerrungsanteil hervorgerufen wird. Schließlich wird wieder auf  $\sigma^0$  elastisch entlastet. Unter Vernachlässigung der Arbeit der differentiellen Spannung  $d\sigma$  kann die bei diesem Zyklus geleistete Arbeit per Volumeneinheit wie folgt formuliert werden

$$\left( \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 \right) \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (5.16)$$

### 5.3 Fließregel und Ent-/Verfestigungsgesetze

Im Rahmen eines irreversiblen Prozesses wird der plastische Fluß durch die Evolution der Variablen  $\{\epsilon^P, \mathbf{q}\}$  charakterisiert. Die Evolutionsgleichungen werden als Ratengleichungen formuliert, die zunächst einen beliebigen Charakter besitzen.

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \mathbf{r} \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h} \quad (5.18)$$

$\mathbf{r} : \mathcal{Y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{Y}$  und  $\mathbf{h} : \mathcal{Y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind dabei tensorielle Funktionen, weisen in Richtung des plastischen Flusses und beschreiben den Typ des Ent-/Verfestigungsgesetzes. Der Parameter  $\dot{\lambda}$  wird als eine nicht negative Funktion betrachtet und als plastischer Multiplikator oder Konsistenzparameter bezeichnet.

Folgende Ent-/Belastungsbedingungen werden eingeführt

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) &\leq 0 \\ \dot{\lambda} &\geq 0 \\ \phi \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Im Abschnitt 5.4 wird gezeigt, daß diese Ent-/Belastungsbedingungen als Folge der Anwendung der Kuhn–Tuckerschen Bedingungen auf das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation zurückzuführen sind.

Die Konsistenzbedingung gewährleistet, daß nach einem Inkrement des gesamten Verzerrungstensors, der eine plastische Belastung bewirkt, der neue Zustand auf der nachfolgenden Fließfläche liegen muß. Diese Bedingung ist wie folgt zu formulieren :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) + d\phi \equiv 0 \Rightarrow d\phi = 0 \quad (5.20)$$

Mit Hilfe des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda} \geq 0$  kann Gleichung (5.20) auch in folgender Form geschrieben werden

$$\dot{\lambda} \dot{\phi} = 0 \quad (5.21)$$

Die Ent-/Belastungsbedingungen und Gleichung (5.21) erlauben die schematische Darstellung gemäß Abbildung 5.3.

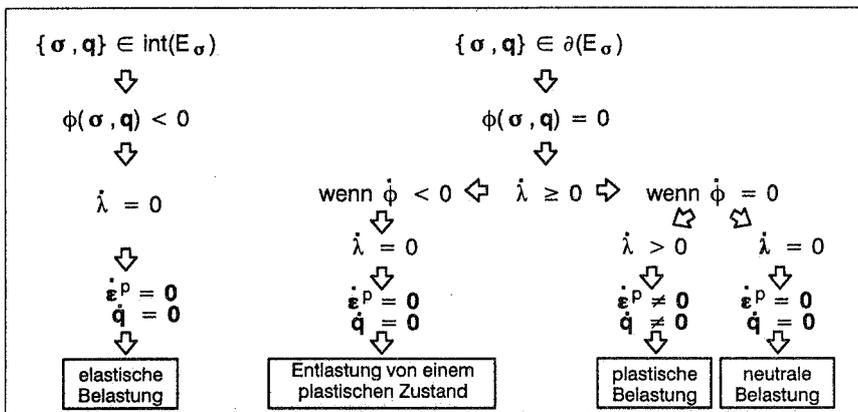


Abbildung 5.3 – Mögliche Belastungszustände

Gleichung (5.18) stellt die Abhängigkeit der Fließfläche von den internen Variablen dar. Das isotrope und das kinematische Verfestigungsgesetz bzw. ihre Kombination kommen am häufigsten zum Einsatz. Beide Verfestigungsgesetze werden in Abbildung 5.4 anschaulich gegenübergestellt. Die isotropen und kinematischen Verfestigungsgesetze können in der folgenden anschaulichen Weise dargestellt werden.

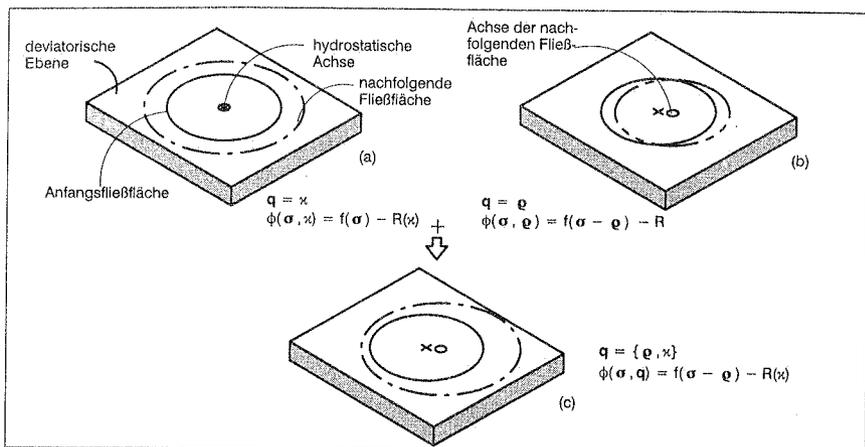


Abbildung 5.4 – (a) isotrope Verfestigung ;  
 (b) kinematische Verfestigung;  
 (c) Kombination von (a) und (b).

Die isotrope Verfestigung ist durch die Expansion der Fließfläche gekennzeichnet, weshalb in diesem Fall die hydrostatische und die Achse der Fließfläche zusammenfallen. Da die kinematische Verfestigung durch die Translation der Fließfläche gekennzeichnet ist, fallen diese Achsen nach der Evolution der Verfestigung nicht mehr zusammen. Dadurch wird eine ursprünglich isotrope Fließfunktion anisotrop. Dieses Phänomen wird *induzierte Anisotropie* genannt. Im Fall der kombinierten Verfestigung (siehe Abbildung 5.4c) liegt eine Expansion wie auch eine Translation der Fließfläche vor, die induzierte Anisotropie ist dann natürlich ebenfalls vorhanden.

#### 5.4 Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation

Das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation geht auf von Mises (1928), Taylor (1932) und Hill [35] zurück. Das Prinzip in seiner lokalen Form, formuliert in den internen Variablen, lautet: *"Für eine vorgegebene plastische Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}^P$  und eine vorgegebene Rate des internen Variablensatzes  $\dot{q}$ , ist unter allen möglichen zulässigen Zuständen  $\{\sigma', q'\}$  der Zustand  $\{\sigma, q\}$  der wahre Zustand, der ein Maximum an plastischer Dissipation hervorruft"*. Das Prinzip bildet die Basis für eine mathematische Formulierung der Plastizitätstheorie, wie sie heute vielfach angewandt wird, Johnson ([42],[43]), Simo und Honein [109]. Durch dieses Prinzip wird eine diskrete variationelle Formulierung gewonnen, welche die Euler–Lagrangeschen Gleichungen des entsprechenden diskreten Funktionals erzeugen, nämlich die Gleichgewichtsgleichungen, die kinematischen Gleichungen und Werkstoffbeziehungen einschließlich der diskreten Fließregel und des Ent-/–Verfestigungsgesetzes in der Form der sogenannten

"Closest Point Projection Algorithm" und die Ent-Belastungsbedingungen in der Kuhn-Tuckerschen Form. Außerdem führt dieses Prinzip auch zur Normalität der Fließregel im Spannungsraum und zur Konvexität der Fließfläche.

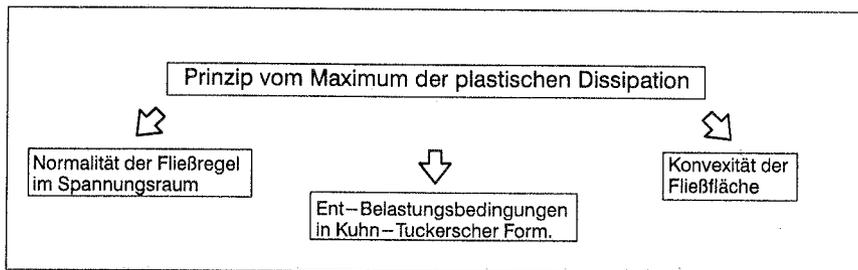


Abbildung 5.5 – Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation

Lubliner stellt in [65] fest, daß die additive Zerlegung des Verzerrungstensors (5.13) nur dann mit der Existenz der freien Energie  $A$  kompatibel sein wird, wenn eine derartige Zerlegung auch für die freie Energie durchführbar ist.

**Definition 5.4.1 :**

$$A : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^P, \mathbf{q}\} \rightarrow \rho A(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^P, \mathbf{q}) = W^e(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^P) + W^P(\mathbf{q}) \quad (5.22)$$

$$\text{wobei } W^e = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^P) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^P)$$

$$\text{und } W^P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q} \quad (5.23)$$

wobei die Gl. (5.18) für ein assoziiertes Verfestigungsgesetz festgelegt wurde.

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\lambda} \mathbf{D} \partial_{\mathbf{q}} \phi \Rightarrow \mathbf{h} = -\mathbf{D} \partial_{\mathbf{q}} \phi \quad (5.24)$$

$\mathbf{D}$  stellt dabei den Tensor der allgemeinen plastischen Moduln dar.

Das zweite Gesetz der Thermodynamik in der Form der Clausius-Duhemschen Ungleichung führt zu den thermodynamischen konjugierten Größen  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^P, \boldsymbol{\alpha})$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} A = \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} W^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^P)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^P = -\rho \partial_{\boldsymbol{\epsilon}^P} A = -\partial_{\boldsymbol{\epsilon}^P} W^e$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\rho \partial_{\mathbf{q}} A = -\partial_{\mathbf{q}} W^P = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}$$

$$\text{mit : } \mathbf{D}^{-1} = \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 W^P \quad (5.25)$$

und damit zur lokalen Dissipationsfunktion  $\mathfrak{D}^P$ .

Definition 5.4.2 :

$$\mathfrak{D}^P : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.26)$$

$$\{ \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\mathbf{q}} \} \rightarrow \mathfrak{D}^P(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathfrak{D}^P = - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^P} W^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - \partial_{\mathbf{q}} W^P \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5.27)$$

Verbunden mit der Wahl von  $W^e$  Gl. (5.23a) folgt :

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W^e = - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^P} W^P = \boldsymbol{\sigma}^P \quad (5.28)$$

Die Dissipation wird dann als Funktion von  $\{ \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{q}} \}$  geschrieben

$$\mathfrak{D}^P : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.29)$$

$$\{ \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{q}} \} \rightarrow \mathfrak{D}^P(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und die Variable  $\boldsymbol{\alpha}$  können als thermodynamische "Lasten" jeweils konjugiert zu  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  und zu  $\mathbf{q}$  verstanden werden.

Manchmal ist es vorteilhaft, im Dualraum zu arbeiten; das heißt, die freie Energie wird im  $\{ \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha} \}$  Variablenraum formuliert. Diese Umsetzung erfolgt durch eine Legendre-Fenchel Abbildung, die die duale Funktion  $\hat{W}$  erzeugt.

$$\varrho G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{W}^e(\boldsymbol{\sigma}) + \hat{W}^P(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \hat{W}^e(\boldsymbol{\sigma}) &= W^e + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P) \\ \text{und } \hat{W}^P(\boldsymbol{\alpha}) &= - W^P - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Beziehung zwischen den entsprechenden dualen Variablen  $\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^P$  und  $\boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{q}$  lautet

$$\boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{\varepsilon} - \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \hat{W}^e \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^P} W^e \quad (5.32)$$

$$\mathbf{q} = - \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \hat{W}^P \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = - \partial_{\mathbf{q}} W^P \quad (5.33)$$

Somit wird deutlich, daß die Bestimmung des wahren Zustandes  $\{ \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} \}$  im Rahmen des Prinzips vom Maximum der plastischen Dissipation eine beschränkte Optimierungsaufgabe darstellt :

Sind  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  gegeben, gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^P(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\mathbf{q}}) &\rightarrow \text{Max} \quad | \quad \boldsymbol{\sigma}' \in \mathcal{Y} \quad | \quad \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^m. \\ (\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}') \in E_{\boldsymbol{\sigma}} &\rightarrow \phi(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}') \leq 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Lösung dieser Optimierungsaufgabe entspricht dem wahren Zustand  $\{\sigma, \mathbf{q}\}$ . Die Notation  $(\bullet)'$  beschreibt einen beliebigen zulässigen Zustand.

Die Umwandlung der beschränkten Maximierungsaufgabe in eine unbeschränkte Minimierungsaufgabe erfolgt durch die Einführung der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}^P$ , in der die plastische Dissipation mit negativem Vorzeichen erscheint. Der Lagrange-Multiplikator  $\dot{\lambda}$  gewährleistet die Erfüllung der Nebenbedingung (Fließbedingung) bei dem wahren Zustand, d.h.  $(\sigma, \mathbf{q}) \in E_\sigma$ .

$$\mathcal{L}^P(\sigma', \mathbf{q}', \dot{\lambda}', \dot{\epsilon}^P, \dot{\mathbf{q}}) := -\mathcal{D}^P(\sigma', \mathbf{q}', \dot{\epsilon}^P, \dot{\mathbf{q}}) + \dot{\lambda}' \phi(\sigma', \mathbf{q}') \quad (5.35)$$

An dieser Stelle ist es wichtig, die Definition der Kuhn-Tuckerschen Bedingungen einzuführen.

**Definition 5.4.3 :**

Aufgabe ist es, das Minimum  $\mathbf{x}^*$  einer Funktion  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  zu finden, so daß die Gleichheits- und Ungleichheitsbedingungen  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  gleichzeitig erfüllt werden.

Minimiere  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$   
 beschränkt durch :  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$

Die Lagrange Funktion wird durch

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\mu}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.36)$$

beschrieben, wobei  $\boldsymbol{\mu}$  und  $\boldsymbol{\delta}$  die Vektoren der assoziierten Lagrange-Multiplikatoren darstellen.

Die Kuhn-Tuckerschen Bedingungen formulieren die notwendigen Bedingungen für eine Extremalstelle des beschränkten Problems. Sie lauten :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\delta}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \boldsymbol{\delta} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Kuhn-Tuckerschen Bedingungen (5.37) werden auf das Problem von Gl. (5.35) angewandt. In diesem Fall sind keine Gleichheitsbeschränkungen zu erfüllen und folgende Korrelation ergibt sich :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{\sigma', \mathbf{q}', \dot{\lambda}'\} \\ \mathcal{F}(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}^P(\sigma', \mathbf{q}', \dot{\lambda}') \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \phi(\sigma', \mathbf{q}') \end{aligned} \quad (5.38)$$

Als Ergebnisse erhält man :

$$\begin{aligned}
 \left. \partial_{\sigma'} \mathcal{L}^P \right|_{\substack{\sigma' = \sigma \\ \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \lambda' = \lambda}} &= - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \dot{\lambda} \partial_{\sigma} \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} && \text{Fließregel} \\
 \left. \partial_{\mathbf{q}'} \mathcal{L}^P \right|_{\substack{\sigma' = \sigma \\ \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \lambda' = \lambda}} &= - \mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} && \text{Ent–Verfestigungsgesetz} \\
 \left. \partial_{\lambda'} \mathcal{L}^P \right|_{\substack{\sigma' = \sigma \\ \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \lambda' = \lambda}} &= \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 && \text{Fließbedingung} \\
 \dot{\lambda} &\geq 0 && \text{Ent–Belastungsbedingungen} \\
 \dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) &= 0 &&
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Aus Gleichung (5.39a) folgt die Normalität der Fließregel und aus Gl. (5.39b) die assoziierte Ent–Verfestigungsgesetz.

### 5.5 Mehrteilige Fließfläche mit nicht glatten Übergängen

In diesem Abschnitt werden die vorherigen Begriffe auf den Fall einer mehrteiligen Fließfläche mit nicht glatten Übergängen erweitert. Plastische Modelle mit derartigen Eigenschaften werden oftmals zur Beschreibung von Geomaterialien ([19], [13]) herangezogen. Klassische Modelle, wie z.B. die von Mohr–Coulomb (Geomaterialien) oder Tresca (Metalle), sowie "moderne" Modelle, wie z.B. Cam–Clay oder Cap (Geomaterialien) besitzen diese Merkmale. Eine grundlegende Arbeit zu diesem Thema wird Koiter [49] zugeschrieben. Neuere Plastizitätsformulierungen im Rahmen der Konvexenanalyse, wie z.B. Moreau [72] und Temam [123], umfassen die klassische Vorgehensweise als Sonderfall.

Eine Besonderheit dieser Thematik ist, daß die Fließregel an den nicht glatten Übergängen nicht eindeutig zu bestimmen ist. Hier wird angenommen, daß eine Fließfläche aus  $z$  Teilflächen besteht, wobei jede Fließfläche durch eine Gleichung (5.1) dargestellt wird.

#### Definition 5.5.1 :

Hier wird die Menge aller möglichen Indizes der vorhandenen Teilflächen definiert :

$$P := \{ \alpha : \alpha \in [1, z] \wedge \alpha \in \mathbb{N}^+ \} \tag{5.40}$$

Somit sind auch die Definitionen 5.2.5 und 5.2.6 erweiterbar :

#### Definition 5.5.2 :

Das Gebiet  $E_{\sigma}$  im Spannungsraum ist das durch alle Teilfläche  $\phi_{\alpha} \leq 0$  ( $\alpha \in P$ ) definiert, abgeschlossene Gebiet, das die Menge aller physikalisch

zulässigen Zustände  $(\sigma, \mathbf{q})$  beinhaltet. Mathematisch wird es wie folgt definiert :

$$E_{\sigma} := \{(\sigma, \mathbf{q}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^m \wedge \forall \alpha \in P \mid \phi_{\alpha}(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (5.41)$$

Definition 5.5.3 :

elastisches Gebiet :

$$\text{int}(E_{\sigma}) := \{(\sigma, \mathbf{q}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^m \wedge \forall \alpha \in P \mid \phi_{\alpha}(\sigma, \mathbf{q}) < 0\} \quad (5.42)$$

Fließfläche :

$$\partial(E_{\sigma}) := \{(\sigma, \mathbf{q}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^m \wedge \exists \alpha \in P \mid \phi_{\alpha}(\sigma, \mathbf{q}) = 0\} \quad (5.43)$$

$$E_{\sigma} := \text{int}(E_{\sigma}) \cup \partial(E_{\sigma}) \quad ; \quad \text{int}(E_{\sigma}) \cap \partial(E_{\sigma}) = \emptyset \quad (5.44)$$

Koiter [49] hat die Fließregel als eine Kombination der Gradienten aller beteiligten (aktivierten) Teilflächen vorgeschlagen :

$$\dot{\epsilon}^P := \sum_{k=1}^Z \dot{\lambda}^k \partial_{\sigma} \phi_k \quad (5.45)$$

Diese Fließregel ist auch als *Koitersche Regel* bekannt. Gleichung (5.45) kann auch durch Einsetzen der Kuhn–Tuckerschen Bedingungen in das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation zurückgeführt werden. Die hierfür umformulierte Minimierungsaufgabe führt im diesem Fall auf :

$$\mathcal{L}^P(\sigma', \mathbf{q}', \dot{\lambda}', \dot{\epsilon}^P, \dot{\mathbf{q}}) := - \mathfrak{D}^P(\sigma', \mathbf{q}', \dot{\epsilon}^P, \dot{\mathbf{q}}) + \dot{\lambda}'^T \cdot \phi(\sigma', \mathbf{q}') \quad (5.46)$$

Der Unterschied zu Gleichung (5.35) ist, daß sowohl  $\dot{\lambda}'$  als auch  $\phi(\sigma', \mathbf{q}')$  als vektorielle Funktionen im  $z$ -dimensionalen Raum betrachtet werden müssen. Zusätzlich zur Fließregel werden auch die Ent-/Verfestigungsgesetze und die Ent-/Belastungsbedingungen durch die Kuhn–Tuckerschen Bedingungen erzeugt.

$$\partial_{\sigma'} \mathcal{L}^P \Big|_{\substack{\sigma' = \sigma \\ \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda}}} = - \dot{\epsilon}^P + \dot{\lambda} \partial_{\sigma} \phi(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \text{Fließregel}$$

$$\partial_{\mathbf{q}'} \mathcal{L}^P \Big|_{\substack{\sigma' = \sigma \\ \mathbf{q}' = \mathbf{q} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda}}} = - \mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} \phi(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \text{Ent-Verfestigungsgesetz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_{\dot{\lambda}'} \mathcal{L}^P | \\ \dot{\sigma}' = \sigma \\ \dot{\mathbf{q}}' = \mathbf{q} \\ \dot{\lambda}' = \dot{\lambda} \end{array} \right\} = \Phi(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad \text{Fließbedingungen} \quad (5.47)$$

$$\dot{\lambda}' \geq 0$$

Ent-Belastungsbedingungen

$$\dot{\lambda}' \cdot \Phi(\sigma, \mathbf{q}) = 0$$

## 5.6 Einbettung der Plastizität in der Thermodynamik

In diesem Abschnitt wird die Formulierung eines generellen plastischen Modells beschrieben. Ausgangspunkt zu dieser Überlegung ist die Einführung eines thermodynamischen Potentials  $A$  (vgl. Abschnitt 4.2, Gl. (4.10)).

$$A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}) \equiv A_0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}^P : \boldsymbol{\varepsilon} + \Lambda^P(\boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}) \quad (5.48)$$

wobei  $\mathbf{q}$  der Vektor der internen Variablen und  $\boldsymbol{\sigma}^P$  der plastische Relaxationsspannungstensor ist, der auch als interne Variable betrachtet werden kann.  $A_0$  ist die freie Energie des ungeschädigten materiellen Punktes, mit  $(\boldsymbol{\sigma}^P : \boldsymbol{\varepsilon})$  und  $(\Lambda^P)$  wird die freie Energie entsprechend der Plastizitätsevolution dargestellt. Aus Gl. (4.6) erhalten wir für einen rein mechanischen Prozeß die Gleichung

$$[\boldsymbol{\sigma} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \partial_{\boldsymbol{\sigma}^P} A : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P - \partial_{\mathbf{q}} A : \dot{\mathbf{q}} \geq 0 \quad (5.49)$$

Da  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  in einem gegebenen thermodynamischen Zustand einen beliebigen Wert annehmen kann, erhält man

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 - \boldsymbol{\sigma}^P \quad (5.50)$$

und die dissipative Gleichung

$$- \partial_{\boldsymbol{\sigma}^P} A : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P - \partial_{\mathbf{q}} A : \dot{\mathbf{q}} \geq 0 \quad (5.51)$$

Nach Einsetzen der Gl. (5.48) in Gl. (5.51) folgt:

$$- [\partial_{\boldsymbol{\sigma}^P} \Lambda^P - \boldsymbol{\varepsilon}] : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P - \partial_{\mathbf{q}} \Lambda^P : \dot{\mathbf{q}} \geq 0 \quad (5.52)$$

Gl. (5.52) stellt die Bedingungen für einen zulässigen Prozeß dar.

Es wird hier angenommen, daß die Fließfläche im Dehnungsraum formuliert wird, d.h.

$$\Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A - \boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (5.53)$$

weiterhin gelten folgende Evolutionsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P &= \dot{\lambda}' \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\lambda}' \mathbf{h} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Aus der plastischen Konsistenzbedingung  $\Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$  folgt

$$\partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} : \dot{\sigma} + \partial_{\mathbf{q}} \Phi_{\varepsilon} : \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (5.55)$$

Die Ableitung von Gl. (5.50) nach der Zeit führt auf

$$\dot{\sigma} = \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}^P \quad (5.56)$$

Aus der Evolutionsgleichung Gl. (5.54a) folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\dot{\sigma}^P = \dot{\lambda} \partial_{\varepsilon} \Phi_{\varepsilon} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} : \partial_{\varepsilon} \sigma = \dot{\lambda} \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} \quad (5.57)$$

Einsetzen der Gl. (5.57) in Gl. (5.56) führt auf :

$$\dot{\sigma} = \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon}) \quad (5.58)$$

Gl. (5.58) wird in die Konsistenzbedingung Gl. (5.55) eingesetzt und der plastische Multiplikator bestimmt :

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} : \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \dot{\varepsilon}}{\partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} : \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} - \partial_{\mathbf{q}} \Phi_{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}} \quad (5.59)$$

Wird Gl. (5.59) in Gl. (5.56) eingeführt, kann der elasto–plastische Materialtensor  $\mathbf{C}^{EP}$  ermittelt werden :

$$\mathbf{C}^{EP} = \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 - \frac{[\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon}] \otimes [\partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon}]}{\partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} : \partial_{\varepsilon\varepsilon}^2 A_0 : \partial_{\sigma} \Phi_{\varepsilon} - \partial_{\mathbf{q}} \Phi_{\varepsilon} \cdot \mathbf{h}} \quad (5.60)$$

### 6.1 Einleitung

Die Schädigungsmechanik eines Kontinuums (SMK) ist das Teilgebiet der Mechanik, welches den Einfluß der äußeren Bedingungen bei der Schädigung, die mit der Schädigung verbundenen Änderungen der mechanischen Materialeigenschaften, die Art der Schädigung und die weitere Schadensentwicklung diskutiert. Die SMK erlaubt, heterogene Mikroprozesse, die in einem Material durch die Belastungsgeschichte induziert werden, in der Makroskala zu beschreiben. Elastische und plastische Dehnungen, sowie entsprechende Verfestigungseffekte können im allgemeinen durch globale Variable eines Kontinuums beschrieben werden, auch wenn in Wirklichkeit Mikrodefekte vorhanden sind. Die verteilten Materialdefekte führen nicht nur zur Rissbildung und schließlich zum Materialversagen, sie induzieren zudem eine fortschreitende Materialschädigung, die durch eine Verminderung der Festigkeit, Steifigkeit und Stabilität gemessen werden kann.

Bedingt durch ihre geometrische Form können Materialdefekte als Punkt-, Linien-, Ebenen- und Volumendefekte klassifiziert werden. Diese Defekte sind bei einer pragmatischen Betrachtungsweise zwei weiteren großen Gruppen zuzuordnen: spröde und/oder duktile Materialien. Der Grad der Duktilität hängt davon ab, wie weit ein bestimmter Modus bei der Energiedissipation dominiert. Ein und dasselbe Material kann sich spröde oder duktil verhalten. Ein Betonprobenstück wird sich z.B. unter einaxialem Druck spröde verhalten, unter allseitigem Druck jedoch duktil und versagt dann durch Entwicklung von ausgeprägten Diskontinuitäten (Scherfugen). Zusätzlich nimmt die Dehnbarkeit mit der Temperatur, die Sprödigkeit mit der Belastungsgeschwindigkeit zu.

Die grundlegend unterschiedliche Weise, wie die zwei Klassen von Defekten in der Mikrostruktur die Antworten auf der Makroebene beeinflussen, stellt ernsthafte Zweifel an die alleinige Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie für Materialien wie z.B. Beton, Gestein, Keramik, die hauptsächlich eine Sprödeantwort zeigen (der größte Teil der Energie wird durch Nukleierung und Entwicklung von Mikrorissen dissipiert). Zusammenfassend kann man sagen, daß der Einsatz der SMK für die Analyse von Problemen dann sinnvoll ist, wenn die Energie dominant durch Mikrorissentwicklung dissipiert wird. Wenn die Materialantwort a priori spröde ist, wird die SMK allein ausreichen. Ist die Materialantwort weder rein spröde noch rein duktil, muß sie in Verbindung mit anderen Theorien, wie z.B. der Plastizitätstheorie, eingesetzt werden.

## 6.2 Klassifizierung von Schädigungsmodellen

Ein Modell wird als aktives Schädigungsmodell bezeichnet, wenn spezielle interne Variablen definiert sind, die die Mikrorissverteilung und –dichte qualitativ oder quantitativ lokal beschreiben und die Schädigungsentwicklung in Abhängigkeit der Zeit oder Lastgeschichte durch eine kinetische Gleichung (Evolutionsgleichung) dargestellt werden kann. Im Gegensatz dazu werden die passiven Schädigungsmodelle durch keine kinetische Gleichung beschrieben. Das Hauptaugenmerk gilt hierbei den Steifigkeitsänderungen, die durch ein vorgegebenes Defektmuster produziert werden. In Tafel 2.1 sind einige Beispiele beider Modelle gegenübergestellt :

| ● Aktive Schädigungsmodelle : | ● Passive Schädigungsmodelle :  |
|-------------------------------|---------------------------------|
| Kachanov 1958                 | Delameter und Herrmann 1974     |
| Lemaitre 1971                 | Salganik 1975                   |
| Davison und Stevens 1973      | Budianski und O'Connel 1976     |
| Yazdani und Schreyer 1988     | Horii und Nemat–Nasser 1983     |
|                               | Valliapan, Murti und Wohua 1990 |

Tafel 2.1 – Klassifizierung von Schädigungsmodellen

Es wurde bereits gezeigt (siehe Abschnitte 4.2 und 5.6), daß die Modellierung der Stoffantwort mit der örtlichen Beschreibung des thermodynamischen Zustandes und dessen Änderung verbunden ist. Die Formulierung des Stoffgesetzes kann zudem auf zwei verschiedene Weisen erfolgen, nämlich mikromechanisch und phänomenologisch.

Die mikromechanischen Schädigungsmodelle umfassen zwei Maßstäbe: die Mesoskala, die durch die Ungleichartigkeit und die lokale Diskontinuität des Materials gekennzeichnet wird, sowie die Makroskala, die aus einer Menge von statistisch verteilten und homogenisierten Elementen der Mesoskala entsteht.

Die Entwicklung von mikromechanischen Schädigungsmodellen kann mit folgenden Schritten grob charakterisiert werden :

- experimentelle Festlegung der Dissipationsmechanismen, die für das nichtlineare Verhalten verantwortlich sind;

- Entwicklung von einem analytischen Modell, das die Einflüsse der Dissipationsmechanismen auf den thermodynamischen Zustand berücksichtigt;
- analytische Beschreibung der thermodynamischen Zustandsänderung, die durch die Kinetik der Defektelevolution verursacht wird;
- Homogenisierung – die Felder, die auf der Mesoskala definiert sind, werden den entsprechenden Feldern auf der Makroskala zugeordnet.

Um diese Schritte nachvollziehen zu können, muß man vereinfachende Annahmen sowohl bei der Verteilung und Form des Materialfehlers, als auch beim Einsatz von Verfahren aus der Elastizitätstheorie oder der Bruchmechanik treffen. Die Analysen auf der Ebene der Mesoskala machen die Berücksichtigung von Zufallsparametern und deren Verteilung erforderlich. Die mikromechanischen Modelle zielen auf physikalischen Einzelphänomene. Die Durchsichtigkeit ihrer Formulierung, ihr wohldefiniertes Verhältnis zu den physikalischen Einzelphänomenen und die nicht notwendigen Hypothesen, die für eine phänomenologische Theorie typisch sind, werden die weitere Entwicklung von mikromechanischen Modellen anregen. Man kann sich vorstellen, daß diese Modelle unter dem hohen Aufwand bei der rechnerischen Implementierung leiden. Dieser Nachteil erklärt, warum solche Modelle immer noch keine große Beliebtheit in der computerorientierten Mechanik und den Ingenieurwissenschaften gewonnen haben.

Die phänomenologischen Modelle sind begrifflich nicht so genau und haben kein derart wohldefiniertes Verhältnis zu den einzelnen physikalischen Phänomenen. Trotz dieses Nachteils sind solche Modelle für die Betrachtungsweise der Ingenieure attraktiver. Zwei Gründe sprechen dafür :

- Sie stellen ein vernünftiges Werkzeug dar, das bereits im Entwurf von Bauteilen und ganzen Strukturen benutzt werden kann;
- Der Aufwand für die rechnerische Implementierung ist geringer.

Diese Modelle lassen sich im Rahmen der irreversiblen Thermodynamik mit internen Variablen entwickeln. Hierzu müssen drei Annahmen getroffen werden :

- eine mathematische Beschreibung für die internen Variablen, die die Schädigung darstellen;
- eine objektive Form für die Formänderungsenergie;
- eine geeignete Form für die kinetischen Gesetze (Evolutionsgleichungen), die die Materialflüsse mit den entsprechenden abgeleiteten Größen verknüpfen.

Diese drei Annahmen spielen eine sehr wichtige Rolle bei der Formulierung und Unterscheidung zwischen den verschiedenen Schädigungsmodellen. Deshalb wird vorab jeder Punkt ausführlich diskutiert.

Eine Formulierung, die von beiden genannten Materialbeschreibungen abweicht, baut auf der Mikromechanik auf, mündet aber in einem phänomenologischen Modell. Diese

Vorgehensweise beinhaltet die Vorteile beider Formulierungen und ist deshalb recht aussichtsreich. Dadurch kann ein Modell entwickelt werden, das die Einfachheit einerseits und gleichzeitig die wesentlichen Verbindungen zu den physikalischen Einzelphänomenen andererseits beibehält. Es muß darauf hingewiesen werden, daß das Verständnis der mikromechanischen Zusammenhänge beim Aufbau solcher phänomenologischen Modelle eine große Rolle spielt, die Analyse jedoch im Großen auf der Basis der beobachteten Phänomene durchgeführt wird. Die Parameter, die den thermodynamischen Zustand und dessen Änderungen beschreiben, sind nicht nur in ihrer Existenz nachzuweisen, sondern auch experimentell zu quantifizieren.

### 6.3 Schädigungsvariable

In der Literatur zur Schädigungsmechanik unterscheidet man skalare, vektorielle oder tensorielle Schädigungsmodelle. Diese Klassifizierung ist direkt mit der Abbildung (Wahl) der Schädigungsvariablen verbunden.

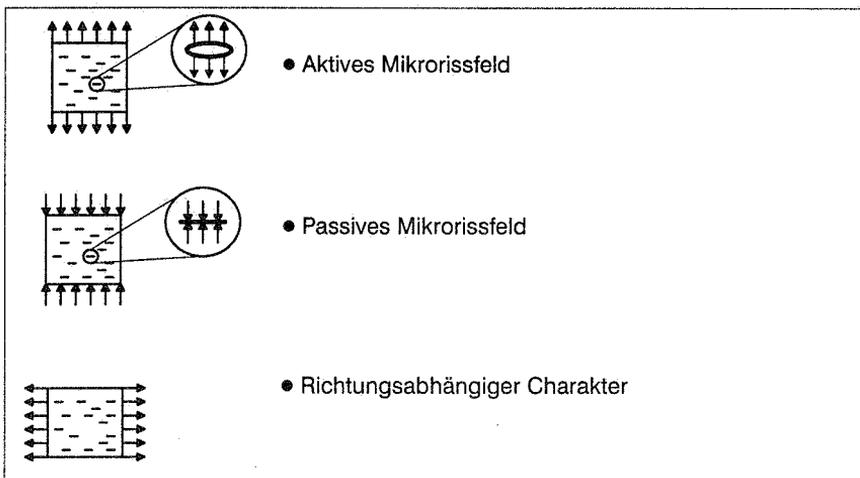


Abbildung 6.1 – Defekteigenschaften

Krajcinovic stellt in [55] fest, daß man sehr sorgfältig zwischen der Mikrorissverteilung und dem Schädigungsbegriff unterscheiden muß. Anhand eines einfachen Beispiels werden diese Unterschiede klar gemacht (siehe Abbildung 6.1). Gegeben sei ein aus einem spröden Material bestehendes Probenstück, das über ein Mikrorissfeld verfügt, welches sich in einer Ebene senkrecht zur Richtung der angelegten Last befindet. Wird angenommen, daß das Probenstück auf Zug belastet ist, wird das Mikrorissfeld aktiviert, und das Probenstück kann als beschädigt betrachtet werden, da die Zugspan-

nung nicht durch die Reißflächen übertragen werden kann. Wenn jedoch Druckspannungen durch die Reißflächen übertragen werden, wird das Mikrorissfeld passiv genannt und das Probenstück kann als unbeschädigt betrachtet werden. Im Gegensatz zur Mikrorisseausrichtung kann folglich die Schädigung als solche definitionsgemäß wegen des Einflusses auf den Spannungszustand nicht als interne Variable gewählt werden.

### 6.3.1 Skalare Darstellung

Von einem beschädigten Körper wird in der Makroskala ein Volumenelement (siehe Abbildung 6.2) genommen, das groß genug ist, um repräsentative Materialfehler zu berücksichtigen, und klein genug ist, um als ein materieller Punkt im Rahmen der Kontinuumsmechanik betrachtet werden zu können.  $\delta A$  sei der totale Querschnitt des Volumenelementes in der Ebene mit der Normalen  $\mathbf{n}$ , und  $\delta A_{\text{eff}}$  der effektive Querschnitt desselben Volumenelementes in der gleichen Richtung. Der effektive Querschnitt wird durch die Differenz zwischen dem totalen Querschnitt  $\delta A$  und dem Defektquerschnitt bestimmt; eine entsprechende Korrektur wird gemacht, um die Spannungskonzentration als Folge der Mikrorisse zu berücksichtigen. Es ist dann möglich, eine Schädigungsvariable  $d_n$  in dieser Richtung zu definieren.

$$d_n = \frac{\delta A - \delta A_{\text{eff}}}{\delta A} \quad \begin{array}{l} d_n = 0 \Rightarrow \text{ursprüngliches Material} \\ d_n = d_n^c \Rightarrow \text{kritischer Wert der Schädigung,} \\ \text{entspricht dem Elementversagen} \end{array} \quad (6.1)$$

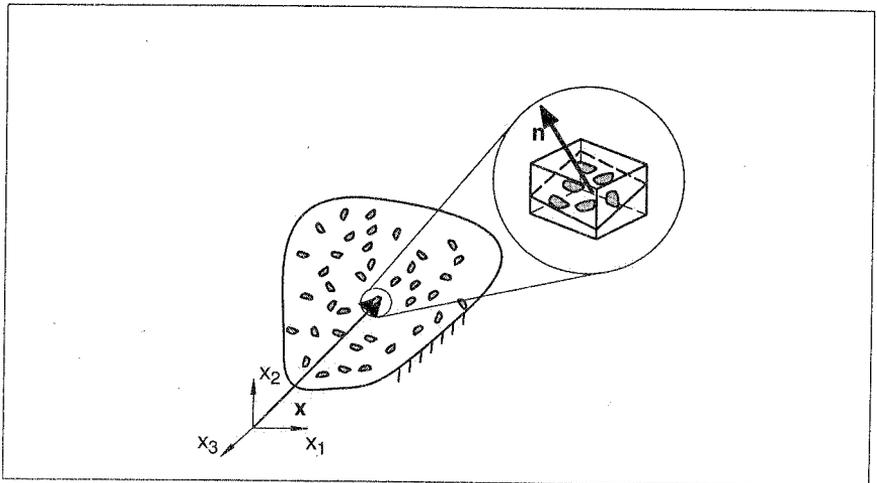


Abbildung 6.2 – Geschädigtes Volumenelement

Wenn man Gleichung (6.1) betrachtet und die Richtung  $\mathbf{n}$  ändert, wird der richtungsabhängige Charakter der Schädigung verdeutlicht (siehe auch Abbildung 6.1). Für den Fall, daß die Mikroriss- und Mikrolückenverteilungen zufällig in allen Richtungen homogen verteilt sind, ist ein isotropes Schädigungsmodell geeignet.

Das führt dazu, daß die Schädigungsvariable  $D_n$  unabhängig von der Richtung  $\mathbf{n}$  ist und durch eine einzige skalare Größe  $d=d(\mathbf{x},t) \in [0,d^c]$  dargestellt werden kann. Ju stellt in [45] fest, daß die isotrope Schädigungsdarstellung nicht unbedingt zu einer skalaren Darstellung führt, sondern zu einem isotropen Tensor 4. Stufe, der die Schädigung charakterisiert.

Die skalare Darstellung hat folgende Einschränkungen :

- Wie schon vorher anhand des einfachen Beispiels diskutiert wurde, erzeugen die flachen und sehr langen Risse eine Unstetigkeit des Verschiebungsfelds. Diese Restriktion drückt sich in völlig unterschiedlichem Verhalten bei Druck- und Zugbelastung aus.
- Nur für dreiaxialen Zug oder am Anfang der Schädigungsevolution kann man das Schädigungsfeld als isotrop betrachten.

Die Einfachheit in der mathematischen Formulierung und die rechnerische Leistungsfähigkeit sind die Hauptvorteile eines skalaren Modells.

### 6.3.2 Vektorielle Darstellung

Ein Riß kann durch seine Fläche, die Normale seiner Ebene und die Koordinaten des Rißmittelpunktes vollständig beschrieben werden (siehe Budianski und O'Connell [11]). Die Tatsache, daß die Geometrie von einem Vektor dargestellt werden kann, war die Anregung für die Entwicklung solcher Modelle.

Da die Anzahl der Mikrorisse zwar groß, aber immer noch endlich bleibt, und die Anzahl der sich schneidenden Ebenen in einem bestimmten materiellen Punkt aber unendlich ist, wurde festgestellt [55], daß die Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines Mikrorisses in einer bestimmten Ebene praktisch gleich Null ist. Um die Beziehung zwischen der Mikrorissverteilung und der Schädigung in einem materiellen Punkt herzustellen, ist es deshalb notwendig, den Begriff des repräsentativen Volumenelementes auch hier zu benutzen.

Gegeben sei eine verdünnte Mikrorisskonzentration in einem repräsentativen Volumenelement. Die Geometrie von jedem Riß wird durch zwei Variablen  $d^{(i)}$ ,  $\mathbf{n}^{(i)}$  vollständig charakterisiert. Die Variable  $d$  stellt den relativen Verlust der Integrität in der Ebene mit der Normalen  $\mathbf{n}$  dar. Diese skalare Variable wird auch durch Gl. (6.1) beschrieben. Es ist dann möglich, einen Vektor  $\mathbf{w}^{(i)}$  mit der Größe  $D^{(i)}$  in der Richtung  $\mathbf{n}^{(i)}$  einzuführen.

$$\mathbf{w}^{(i)} = d^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \quad (6.2)$$

Im Rahmen des selbstkonsistenten Verfahrens wird die Schädigung in einem materiellen Punkt  $\mathbf{x}$  durch eine Menge von Vektoren  $\mathbf{w}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) dargestellt, wobei  $N$  die Anzahl geöffneter Mikrorisse ist.

Ein Vorteil dieser Beschreibung ist die Unterscheidung zwischen Mikrorissverteilung und Schädigung.

### 6.3.3 Höherstufige Tensordarstellung

Wie die Tensoren 2. Stufe in der Kontinuumsmechanik kann auch die Schädigung durch solche Tensoren beschrieben werden. Ein erstes Modell geht auf Vakulenko und Kachanov (1971) zurück. Die Geometrie eines Materialdefekts wird in diesem Modell als zweistufiger Tensor über das dyadische Produkt zweier einstufiger Tensoren dargestellt :

$$w_{ij} = b_i n_j \delta(S) \quad (6.3)$$

$\mathbf{b}$  ist der unstetige Verschiebungsvektor  $\mathbf{b} = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$  in einer bestimmten Fläche  $S$ ,  $\mathbf{n}$  ist die Einheitsnormale zu  $S$ . Sind mehrere Defekte vorhanden, wird die Geometrie durch die folgende Gleichung beschrieben :

$$w_{ij} = \sum_k b_i^{(k)} n_j^{(k)} \delta(S^{(k)}) \quad \xrightarrow{\text{Homogenisierung}} \quad \langle w_{ij} \rangle_V = \frac{1}{V} \sum_k \int_{S^{(k)}} b_i^{(k)} n_j^{(k)} dS^{(k)} \quad (6.4)$$

Die Schwäche dieses Modells liegt darin, daß die Schädigung die Unstetigkeit des Verschiebungsvektors  $\mathbf{b}$  einerseits erst hervorruft, andererseits bereits durch diesen definiert wird. Diese Schwäche wird durch die Aufspaltung des Vektors  $\mathbf{b}$  in seinen tangentialen und senkrechten Teil gelöst, wie sie in [46] ausführlich hergeleitet wurde. Grundlegende Arbeiten zur Entwicklung und Anwendung des zweistufigen tensoriellen Modells sind in [55] diskutiert.

Wenn ein allgemeines Mikrorissystem vorhanden ist, verhält sich das Material anisotrop. Das ist die Motivation zur Entwicklung eines vierstufigen tensoriellen Schädigungsmodells. Der Nachgiebigkeitstensor wird in diesen Modellen als Schädigungsmaß genommen, was bedeutet, daß er als interne Zustandsvariable in Betracht gezogen wird. In Bezug auf die rechnerische Leistungsfähigkeit braucht man für solche Modelle einen geringeren Datenaufwand gegenüber anderen Theorien, die ebenfalls die induzierte Anisotropie charakterisieren.

Einige von diesen alternativen Theorien stellen die Schädigung durch das Wachsen der Mikrorisse entlang einer gewählten Richtung dar. Auf diesem Gebiet haben die Gruppe um Dougill [21],[22],[23] und andere Verfasser, z.B. Kachanov [46], Costin und Hal-

comb [17], Ortiz und Popov [82] u.a., viel Pionierarbeit geleistet. Rechnerisch sind solche Theorien allerdings zu aufwendig.

## 6.4 Formänderungsenergie

Die Formänderungsenergie ist für einen spröden Körper unter statischer Belastung und isothermen Bedingungen im Rahmen kleiner Verzerrungen eine Skalarfunktion, die vom Verzerrungstensor und den internen Schädigungsvariablen abhängt. Die rein mathematische Bestimmung einer solchen Funktion folgt der Invariantentheorie [118], um die Objektivität zu gewährleisten. Objektivität bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die Dehnungsenergiegedichte unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters sein muß (siehe Truesdell und Noll [125]; Green, Naghdi [33]).

Der erste Schritt zur Entwicklung eines phänomenologischen Modells ist die Wahl einer mathematischen Beschreibung für die Schädigungsvariable. Nach Einleitung dieses Schrittes, muß man die minimalen Integritätsbasen, für die Beschreibung der Dehnungsenergiegedichtefunktion bestimmen, die alle gewünschten Polynomterme besitzen und die alle Materialsymmetrien berücksichtigen [118]. Bekannte Vertreter dieser Lösungsstrategie sind Davison und Stevens [18], Krajcinovic und Fonseka [53], Krajcinovic [54],[55], Betten[6].

## 6.5 Kinetische Gesetze

In Rahmen der Thermodynamik mit internen Variablen können die kinetische Gesetze, die die Schädigungsevolution charakterisieren, in verschiedener Weise beschrieben werden:

- durch eine Evolutionsgleichung, die unabhängig von jeder internen Variablen ist;
- durch die Ableitung einer Potentialfunktion. In diesem Fall muß die Existenz der Potentialfunktion nachgewiesen werden.

Die Beschreibung durch eine Evolutionsgleichung hat den Hauptvorteil, daß die Quantifizierung einer solchen Gleichung, die sich einem aus einem Experiment her vorgegebenen Datensatz anpassen soll, einfacher ist. Zur Erfassung nichtproportionaler oder zyklischer Beanspruchungen ist die Beschreibung der Evolutionsgleichung nicht mehr so geeignet. Im Fall einer sich nicht stetig entwickelnden Schädigung in allen materiellen Punkten müssen Belastungskriterien zur klaren Unterscheidung zwischen Ent- und Belastungszustand während der Dehnungsgeschichte definiert werden. Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß durch die Mikrorissevolution häufig eine Entfestigung auftritt. Mathematisch gesehen kann das Anfangswertproblem damit keine eindeutige Lösung haben. Eine wichtige Arbeit zu diesem Thema wurde von Valanis [126] vorgelegt.

Der größte Vorteil dieser Beschreibung ist die Ähnlichkeit mit der Plastizitätstheorie, deren Evolutionsgleichung ebenfalls durch Ableitung einer Potentialfunktion entsteht. Wie bereits erwähnt wurde, muß in diesem Fall die Existenz der Potentialfunktion, die alle Punkte im Spannungsraum oder im Raum der thermodynamisch konjugierten Größen umhüllt, die ohne Änderungen der aufgenommenen Dehnungsgeschichte erreicht werden können, theoretisch oder zumindest experimentell nachgewiesen werden. Die Tatsache, daß die Entlastung immer von irgendeinem Niveau der Dehnungsgeschichte aus stattfinden kann, scheint ein heuristischer Nachweis für die Existenz des Potentials zu sein. Zur Zeit gibt es dazu allerdings noch keinen endgültigen experimentellen Beweis. Eine aktuelle Arbeit zu diesem Thema wurde von Holcomb und Costin [40] vorgelegt. Sie benutzten die akustische Emission, um die Schädigungsverteilung und Schädigungsfläche zu ermitteln. Die akustische Emission soll als die elastische, hochfrequente (0.2 bis 2 oder 3 MHz) Welle verstanden werden, die durch eine plötzliche lokale Spannungsänderung produziert wird.

Die Tatsache, daß eine phänomenologische Theorie sich mit einem homogenen Kontinuum befaßt, bringt einige Schwierigkeiten bei der Erfassung der irreversiblen Änderungen auf der Ebene der Mesoskala und die dafür verantwortlichen Mechanismen und Modi. Deshalb soll die Entwicklung auf diesem Gebiet auf Erfahrung, Beobachtungen und sorgfältige Auslegung von experimentellen Tendenzen aufgebaut werden.

## 6.6 Effektives Spannungs- und Dehnungskonzept

Durch die kontinuierliche Evolution der Schädigung und der damit verbundene Verlust der Materialintegrität werden die Spannung auf der Mesoebene größer. Diese Spannung wird auch *effektive Spannung* genannt. Die Einführung des effektiven Spannungskonzepts geht auf Kachanov (1958) zurück. Der effektive Spannungsvektor kann in einem repräsentativen Volumenelement bezüglich einer bestimmten Ebene (Normal  $\mathbf{n}$ ) als Flächenlast pro effektiver Flächeneinheit definiert werden [61].

Es wird dazu angenommen, daß von einem vierstufigen Schädigungstensor die vierstufige tensorielle Funktion bekannt ist, die die Schädigung beschreibt. Es ist dann möglich, die zwei Zustände in eine Beziehung zueinander zu bringen. Durch die Gleichung

$$\bar{\sigma} := \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{d}) : \sigma \quad (6.5)$$

wird die Abbildung zwischen der homogenisierten Spannung  $\sigma$  und der effektiven Spannung  $\bar{\sigma}$  beschrieben. Um den effektiven Spannungstensor zu bestimmen, muß man den effektiven Querschnitt  $\delta A_{\text{eff}}$  durch mathematische Homogenisierungsverfahren ermitteln. Allerdings erfordert dies Kenntnisse sowohl über die Form, als auch über die Größe des Defekts. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu vermeiden, ist die Betrachtung zweier Körper mit derselben Geometrie, von denen einer geschädigt ist

– hier wirkt die aktuelle Spannung – und der andere als ungeschädigt angenommen wird – hier wirkt die effektive Spannung. Alternativ kann die effektive Spannung  $\bar{\sigma}$  durch die Annahme einer *äquivalenten Dehnung* definiert werden. Diese Annahme lautet [60],[113] : *“Die Dehnung, die in einem geschädigten Zustand unter der homogenisierten Spannung vorhanden ist, ist äquivalent zur Dehnung, die in einem ungeschädigten Zustand desselben Materials unter der effektiven Spannung vorhanden ist”*, d.h., das effektive Materialverhalten wird im effektiven Spannung–aktuellen Verzerrungsraum beschrieben. Als Beispiel kann die skalare Schädigungsdarstellung herangezogen werden. In diesem Fall werden der vierstufige Schädigungstensor  $\mathbf{d}$  zu einer skalaren Variablen  $d$  und die vierstufige tensorielle Funktion  $\mathbf{M}$  zu einer skalaren Funktion  $M$  reduziert.

$$M = 1 - d \quad (6.6)$$

Die effektive Spannung wird durch folgende Gleichung ausgewertet

$$\bar{\sigma} := \frac{1}{1 - d} \sigma \quad (6.7)$$

In Gl. (6.7) kann der Nenner  $(1 - d)$  als ein Reduktionsfaktor interpretiert werden, der durch die enthaltene Schädigung entsteht.

In einer ähnlichen Form kann das effektive Dehnungskonzept definiert werden. Hier läßt sich wiederum die tensorielle Funktion  $\mathbf{M}$  verwenden

$$\bar{\epsilon} := \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \epsilon \quad (6.8)$$

Im Fall der skalaren Schädigungsdarstellung reduziert sich Gl. (6.8) zu

$$\bar{\epsilon} := (1 - d) \epsilon \quad (6.9)$$

Simo und Ju [111] haben die zu oben duale Annahme einer äquivalenten Spannung eingeführt : *“Die Spannung, die in einem geschädigten Zustand zur homogenisierten Dehnung führt, ist äquivalent zu der Spannung, die in einem ungeschädigten Zustand die effektive Dehnung hervorruft”*. In der Abbildung 6.3 ist die Transformation zwischen effektivem und physikalischem Raum abgebildet.

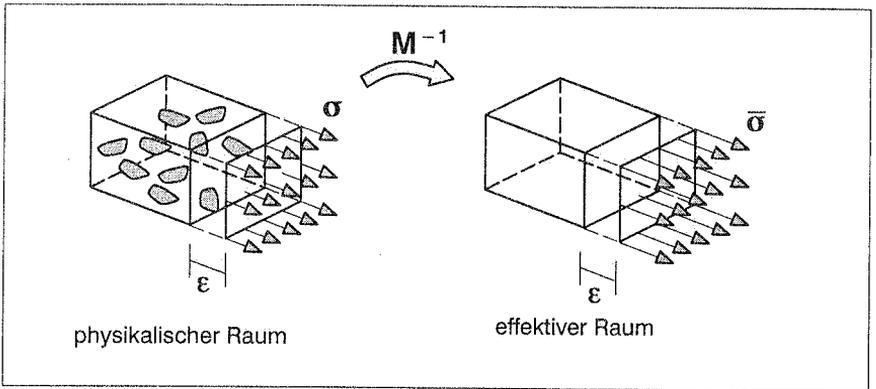


Abbildung 6.3 – Transformation zwischen physikalischem und effektivem Raum.

## 7 EIN GEKOPPELTES MODELL FÜR BETON

### 7.1 Das CAP–Modell der Plastizitätstheorie

Im folgenden wird das Cap–Modell vorgestellt. Das verwendete Werkstoffmodell ist stichwortartig mit folgenden Begriffen in Verbindung zu bringen : plastisch, isotrop, ratenunabhängig, druckabhängig, assoziiert entsprechend der Fließregel, nichtassoziert entsprechend dem Verfestigungsgesetz (im Rahmen einer konsistenten Linearisierung siehe Abschnitt 10.2.2), aus drei konvexen Teilflächen mit nicht glatten Übergängen bestehend und beschrieben durch zwei Invarianten  $(I_1, J_2)$  des Spannungstensors.

Charakteristisch für dieses Modell sind die drei Teilflächen und die entsprechenden Schnittstellen in der Ebene  $(I_1, J_2)$ . Diese Flächen bestehen aus

- einer Versaghüllkurve  $F_e$ , die fest im Spannungsraum liegt ( ohne Ent–Verfestigung);
- einer elliptischen Kappe  $F_c$ , die den hydrostatischen Druck begrenzt und die sich weiter verfestigen kann ;
- einer Fläche  $F_T$ , die den aufnehmbaren Zug beschränkt.

Diese drei Flächen trennen das elastische und plastische Gebiet, was aus Abbildung 7.1 ersichtlich ist.

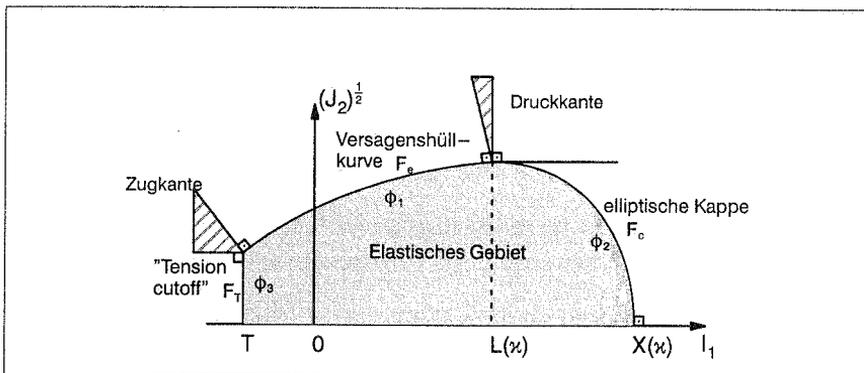


Abbildung 7.1 – Cap–Modell Darstellung in der Ebene  $(I_1, J_2)$ .

Die Versaghüllkurve  $F_e$  wurde im ursprünglichen Modell von DiMaggio und Sandler [20] durch

$$\sqrt{J_2} \equiv F_e(I_1) \quad (7.1)$$

und die elliptische Kappe durch

$$\sqrt{J_2} \equiv F_c(I_1, \kappa) \quad \text{gültig für} \quad L(\kappa) \geq I_1 \geq X(\kappa) \quad (7.2)$$

beschrieben. Die Variable  $\kappa$  kann als eine interne Variable verstanden werden, die die Verfestigung als eine Funktion der volumetrischen plastischen Verzerrungsgeschichte charakterisiert.  $L(\kappa)$  und  $X(\kappa)$  sind von  $\kappa$  abhängige Funktionen, die die Weite der Kappe limitieren. Die Variable  $\bar{\epsilon}_V^p$  stellt die effektive plastische volumetrische Dehnung dar und wird durch die folgende Gleichungen eingeführt :

$$\bar{\epsilon}_V^p(\kappa) \equiv W\{1 - e^{-DX(\kappa)}\} \quad (7.3)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}_V^p \equiv \begin{cases} \dot{\bar{I}}_1^p & \text{wenn } \bar{I}_1^p \geq 0, \quad \text{oder } \kappa > 0 \text{ und } \dot{\kappa} > I_1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (7.4)$$

wobei  $\bar{I}_1 = \bar{I}_1^e + \bar{I}_1^p$ , die erste Invariante des Dehnungstensors darstellt. Die Fließflächen sind durch die folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{\sigma}) &= |\mathbf{s}| - F_e(I_1) \\ \phi_2(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) &= F_c(\mathbf{S}, \kappa) - F_e(I_1) \\ \phi_3(\boldsymbol{\sigma}) &= T - I_1 \end{aligned} \quad (7.5)$$

**Anmerkung:** In dieser Arbeit wird folgende Notation für das Cap-Modell verwendet : für Druck ist  $I_1$  positiv und für Zug entsprechend negativ.

Um geeignete Funktionen für die Versagenshüllkurve  $F_e(I_1)$  und für die Kappe  $F_c(I_1, J_2)$  darstellen zu können, müssen noch einige Bedingungen erfüllt werden :

- In Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis, daß bei Geomaterialien die Festigkeit mit zunehmendem hydrostatischen Druck erhöht wird, muß die Versagenshüllkurve  $F_e(I_1)$  durch eine stetig zunehmende Funktion von  $I_1$  repräsentiert werden;
- die Funktionen  $L(\kappa)$  und  $X(\kappa)$  müssen kontinuierliche und stetig zunehmende Funktionen von  $\kappa$  sein, um eine Entfestigung zu vermeiden.

Eine Zusammenfassung von verschiedenen Funktionen, die von unterschiedlichen Verfassern vorgeschlagen wurden, ist in Tafel 7.1 angegeben.  $T$  ist ab hier die Grenze im Zugbereich ("tension cutoff") und nicht mit der Temperatur im Abschnitt 4.2 zu verwechseln.

DiMaggio und Sandler [20] :

$$F_e(I_1) = A - Ce^{-B I_1}$$

$$F_c(I_1, \varepsilon_V^P) = \frac{1}{R} \sqrt{(X(\varepsilon_V^P) - L(\varepsilon_V^P))^2 - (I_1(\varepsilon_V^P) - L(\varepsilon_V^P))^2} \quad R = \frac{X(\varepsilon_V^P) - L(\varepsilon_V^P)}{F_e(L(\varepsilon_V^P))}$$

$$X(\varepsilon_V^P) = L(\varepsilon_V^P) + RF_e(L(\varepsilon_V^P)) \quad (7.6)$$

$$\varepsilon_V^P = W[e^{(DX)} - 1.0] = W[1.0 - e^{(-DX)}] \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_V^P := \text{tr}(\varepsilon_V^P)$$

Materialparameter  $\rightarrow A; B; C; R; W; D; X_0$

Sandler und Rubin [97] :

$$F_e(I_1) = A - Ce^{-B I_1}$$

$$F_c(I_1, \kappa) = \frac{1}{R} \sqrt{(X(\kappa) - L(\kappa))^2 - (I_1(\kappa) - L(\kappa))^2} \quad R = \frac{X(\kappa) - L(\kappa)}{F_e(L(\kappa))}$$

$$L(\kappa) = \langle \kappa \rangle = \begin{cases} \kappa & \text{if } \kappa > 0 \\ 0 & \text{if } \kappa \leq 0 \end{cases}$$

$$X(\kappa) = L(\kappa) + RF_e(L(\kappa)) \quad (7.7)$$

$$\bar{\varepsilon}_V^P = W[1.0 - e^{(-DX(\kappa))}]$$

$$\bar{\varepsilon}_V^P = \langle \varepsilon_V^P \rangle = \begin{cases} \varepsilon_V^P & \text{wenn } \varepsilon_V^P \geq 0 \text{ oder } \kappa > 0 \text{ und } \kappa > 1, \\ 0 & \end{cases}$$

Materialparameter  $\rightarrow A; B; C; R; W; D; X_0; T$

Simo et. al. [113]:

$$F_e(I_1) = \alpha - \gamma e^{-\beta I_1} + \theta I_1 \quad \text{wobei} \quad \alpha = A; \gamma = C; \beta = B.$$

$$F_c(I_1, \kappa); L(\kappa); X(\kappa) \text{ und } \varepsilon_V^P \text{ wie in [20]}. \quad (7.8)$$

Materialparameter  $\rightarrow \alpha; \beta; \gamma; \theta; R; W; D; X_0; T$

Hofstetter et. al. [38]:

$F_e(I_1)$  gleich wie in [113]

$$F_c(|\mathbf{s}|, I_1, \kappa) = \left( |\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{R^2} [I_1 - L(\kappa)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.9)$$

$L(\kappa); X(\kappa)$  und  $\bar{\varepsilon}_V^P$  wie in [97].

Materialparameter  $\rightarrow \alpha; \beta; \gamma; \theta; R; W; D; X_0; T$

Tafel – 7.1 – Verschiedene Vorschläge für die Funktionen des Cap-Modells.

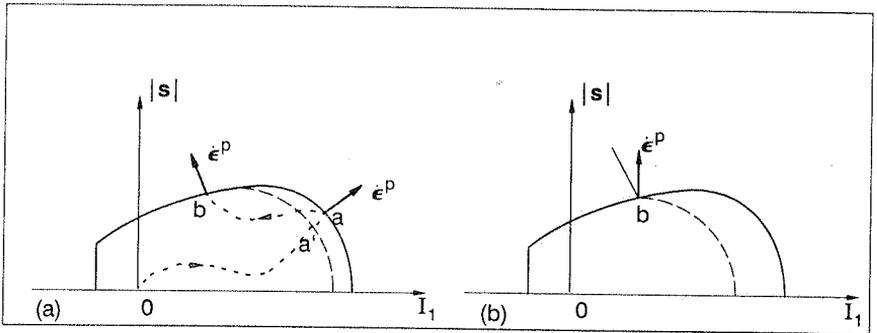


Abbildung 7.2 – Kontraktion der Kappe.

Im ursprünglichen Modell [20] wurde die volumetrische plastische Verzerrung als innere Variable  $\kappa$  gewählt (Gln. (7.6d)). Angenommen wird, daß ein bestimmter Spannungszustand auf der Kappe existiert, dem eine plastische Belastung (Verfestigung) zugeordnet ist (Punkt a' in Abbildung 7.2a). Die Annahme einer assoziierten Fließregel (Normalität des plastischen Dehnungsflusses) führt in diesem Fall zu der plastischen Verdichtung  $\dot{\epsilon}_v^p > 0$ . Von diesem Zustand (Punkt a in Abbildung 7.2a) aus wird beispielsweise bis zu einem neuen Spannungszustand, der sich auf der Versagenshüllkurve befindet (Punkt b in Abbildung 7.2a), elastisch entlastet. Hier tritt die plastische Dilatation  $\dot{\epsilon}_v^p < 0$  auf, die eine Kontraktion der Kappe solange produziert, bis die Druckkante auf dem Punkt b liegt. Um weitere Bewegungen der Kappe zu vermeiden, wird an dieser Kante die plastische Inkompressibilität vorausgesetzt, d.h. der Vektor  $\dot{\epsilon}^p$  ist parallel zu  $|s|$  ( $\dot{\epsilon}_v^p = 0$  Bild 7.2b).

Sandler und Rubin [97] haben eine interne Variable  $\kappa$  vorgeschlagen, die implizit als eine Funktion von  $\epsilon_v^p$  definiert wird. Damit wird die Kontraktion nicht ausgeschlossen und die Annahme der plastischen Inkompressibilität  $\dot{\epsilon}_v^p > 0$  muß nur noch an der Druckkante getroffen werden.

Hofstetter et al. stellen in [38] fest, daß die Funktion  $F_c$ , wie sie z.B. bei DiMaggio und Sandler [20] verwendet wurde, ungeeignet für die numerische Implementierung ist. Wenn in Gln. (7.6b) der erste Invariante  $I_1^*$  des elastischen Prädiktors des Spannungstensors größer als  $X(\kappa)$  ist, entsteht eine negative Zahl unter der Wurzel.

## 7.2 Formulierung eines skalaren Schädigungsmodell

### 7.2.1 Einbettung des skalaren Schädigungsmodells in der Thermodynamik

In diesem Abschnitt wird ein skalares Schädigungsmodell formuliert. Ausgangspunkt zur Beschreibung des Schädigungsprozesses ist die Einführung eines thermodynamischen Potentials. Es wird hier von der Helmholtzschen freien Energie  $A$ , Gl. (4.10), Gebrauch gemacht. Der interne Variablensatz  $\mathbf{q}$  reduziert sich in diesem Fall auf eine einzige skalare Variable  $d$ .

$$A(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \equiv (1 - d)A_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (7.10)$$

wobei  $A_0$  die freie Energie am Anfang des Prozesses vor der Schädigung ist, die hier der anfänglichen Formänderungsenergie entspricht. Für den linearen elastischen Fall folgt

$$A_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.11)$$

$\mathbf{C}_0$  stellt den konstitutiven Tensor des ungeschädigten Materials am Anfang dar. Da wir eine rein mechanische Theorie ( $u = A$ ) betrachten, reduziert sich die Clausius–Duhemsche Ungleichung (4.6) auf

$$[\boldsymbol{\sigma} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \partial_d A \dot{d} \geq 0 \quad (7.12)$$

oder mit  $\dot{A} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \partial_d A \dot{d}$

$$- \dot{A} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (7.13)$$

Wie schon erwähnt wurde, stellt Gl. (7.12) oder Gl. (7.13) die Beschänkung für einen zulässigen Prozeß dar.

Da  $\boldsymbol{\sigma}$  eine konjugierte Größe der Zustandsvariablen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (Gln. (4.11b)) ist, folgt

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 \quad (7.14)$$

und die dissipative Ungleichung

$$- \partial_d A \dot{d} \geq 0 \quad (7.15)$$

Die konjugierte Größe (thermodynamische "Last")  $Y$  der inneren Variablen  $d$  folgt aus

$$Y \equiv \partial_d A = -A_0 \quad (7.16)$$

Diese Gleichung identifiziert  $-Y$  als die anfängliche freie Energie.

Um die fortschreitende Schädigung darzustellen, wird hier eine ähnliche Vorgehensweise wie in Abschnitt 5.2 verwendet.

Definition 7.2.1 :

Die Schädigungsbedingung  $\Psi$  wird durch die Abbildung

$$\Psi : \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \{ \boldsymbol{\varepsilon}, d \} \mapsto k = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \quad (7.17)$$

gekennzeichnet.

Definition 7.2.2 :

Das Gebiet  $E_{\varepsilon}^d$  im Dehnungsraum ist das durch  $\Psi \leq 0$  abgeschlossene Gebiet, welche die Menge aller physikalisch zulässigen Zustände  $(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$  umschließt.

$$E_{\varepsilon}^d := \{ (\boldsymbol{\varepsilon}, d) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \mid \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq 0 \} \quad (7.18)$$

$$\text{elastisches Gebiet : } \text{int}(E_{\varepsilon}^d) := \{ (\boldsymbol{\varepsilon}, d) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \mid \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) < 0 \} \quad (7.19)$$

$$\text{Schädigungsfläche : } \partial(E_{\varepsilon}^d) := \{ (\boldsymbol{\varepsilon}, d) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \mid \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = 0 \}$$

Ebenfalls von der  $J_2$ -Plastizitätstheorie motiviert, wird die folgende funktionelle Form für  $\Psi$  vorgeschlagen

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \equiv \| f(\boldsymbol{\varepsilon}) \| - K(d) \quad (7.20)$$

wobei

$$\| f(\boldsymbol{\varepsilon}) \| := (2A_0(\boldsymbol{\varepsilon}))^{1/2} =: \tilde{\varepsilon} \quad \text{nach Simo et al. [111]} \\ \text{oder} \\ \| f(\boldsymbol{\varepsilon}) \| := (2I_2')^{1/2} =: \tilde{\varepsilon} \quad \text{mit } I_2' := \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{nach Mazars und Lemaitre [62],[70]} \quad (7.21)$$

Simo et al. haben in [111] festgestellt, daß die Wahl der Funktion  $\| f(\boldsymbol{\varepsilon}) \|$  in der Form (7.21b) zu einem nicht symmetrischen Materialtensor des teilelastischen, teilgeschädigten "Kontinuums" führt. Deshalb haben sie die Form (7.21a) vorgeschlagen, womit dieser pathologische Fall behoben wird. Die Funktion  $\| f(\boldsymbol{\varepsilon}) \|$  kann auch als eine dehnungs äquivalente Größe  $\tilde{\varepsilon}$  verstanden werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Form (7.21a) bevorzugt.

Die Gleichung (7.20) kann in  $\tilde{\varepsilon}$  formuliert werden :

$$\Psi(\tilde{\varepsilon}, K) = \tilde{\varepsilon} - K(d) \quad (7.22)$$

Die Funktion  $K(d)$  speichert den größten Wert der äquivalenten Dehnung  $\tilde{\varepsilon}$  im betrachteten materiellen Punkt,  $K(0) =: K_0$  stellt eine Schwelle für die Schädigungsevolution dar und kann als Materialeigenschaft betrachtet werden.

Eine Ratengleichung charakterisiert die Evolution der Schädigungsgröße  $d$  und der Funktion  $K$  :

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \dot{\mu} H(\tilde{\varepsilon}, d) \\ \dot{K} &= \dot{\mu} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Der Multiplikator  $\dot{\mu}$  in (7.23) spielt die gleiche Rolle wie  $\dot{\lambda}$  in Gln. (5.17) und (5.18), wobei  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion darstellt.

Das skalare Modell wird vervollständigt, wenn man die Ent/Belastungsbedingungen für die Schädigung einführt :

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad \Psi(\tilde{\varepsilon}, K) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} \Psi(\tilde{\varepsilon}, K) = 0 \quad (7.24)$$

Mit Hilfe der Konsistenzbedingung

$$\Psi(\tilde{\varepsilon} + d\tilde{\varepsilon}, K + dK) = \Psi(\tilde{\varepsilon}, K) + d\Psi \equiv 0 \Rightarrow d\Psi = 0 \quad (7.25)$$

und damit

$$\dot{\mu} \dot{\Psi} = 0 \quad (7.26)$$

kann der Multiplikator  $\dot{\mu}$  bestimmt werden

$$\dot{\Psi} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}} - \dot{K} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}} - \dot{\mu} = 0 \rightarrow \dot{\mu} \equiv \dot{K} = \dot{\tilde{\varepsilon}} \quad (7.27)$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die Funktion K die Geschichte des äquivalenten Verzerrungsmaßes  $\tilde{\varepsilon}$  beschreibt, d.h.

$$K = \max \{K_0, \max \tilde{\varepsilon}\} \quad (7.28)$$

Weiterhin wird eine assoziierte Schädigungs- Evolutionsregel angenommen :

$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \Rightarrow H = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \quad (7.29)$$

In diesem Fall wird vorausgesetzt, daß die Funktion H nur von  $\tilde{\varepsilon}$  abhängt. Die Funktion  $\hat{\Psi}$  kann dann analog zu  $\Psi$  definiert werden :

$$\hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}, K) := G(\tilde{\varepsilon}) - G(K) \leq 0 \quad (7.30)$$

Ferner gilt :

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}, K) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}, K) = 0 \quad (7.31)$$

Die skalare Funktion G bildet das äquivalente Verzerrungsmaß  $\tilde{\varepsilon}$  im Intervall [0.0, 1.0] ab. Die hier angewandte Funktion entspricht der von Mazars in [70] vorgeschlagenen Funktion:

$$G(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{K_0(1 - A)}{\tilde{\varepsilon}} - A e^{B(K_0 - \tilde{\varepsilon})} \quad (7.32)$$

### 7.2.2 Bestimmung des konstitutiven Tensors für teilelastisch–teilgeschädigtes Material

Wenn man Gl. (7.14) nach der Zeit ableitet, folgt

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 \dot{d} \quad (7.33)$$

Einsetzen von (7.23a) und (7.27d) in (7.33) führt auf :

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{H} \quad (7.34)$$

Aus Gl. (7.21a) folgt :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.35)$$

Einsetzen der Gl. (7.35) in (7.34) führt auf

$$\dot{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \underbrace{\left[ (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 - \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 \otimes \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 \right]}_{\mathbf{C}^{\text{Ed}}(\boldsymbol{\varepsilon}, d)} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.36)$$

Mit folgender Bezeichnung  $\sigma_0 := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0$  ist der symmetrische Materialtensor  $\mathbf{C}^{\text{Ed}}$  damit

$$\mathbf{C}^{\text{Ed}}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 - \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon} \sigma_0 \otimes \sigma_0 \quad (7.37)$$

Wenn man dagegen auf Gleichung (7.21b) zurückgreift, gilt

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} I_2' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{wobei} \quad \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} I_2' = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.38)$$

Als Materialtensor erhält man:

$$\mathbf{C}^{\text{Ed}}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 - \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon} \sigma_0 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7.39)$$

der offensichtlich nicht symmetrisch ist.

### 7.3 Erweiterung des Schädigungsmodells

In diesem Abschnitt wird eine geometrische Veranschaulichung der Schädigungsbedingung (7.20) gegeben und eine Erweiterung des Schädigungsmodells vorgeschlagen. Dafür wird zuerst die Schädigungsbedingung anders geschrieben

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \equiv \|f(\boldsymbol{\varepsilon})\| - K(d) = (2A_0(\boldsymbol{\varepsilon}))^{1/2} - K(d) = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}} - K(d) = 0 \quad (7.40)$$

Einfachheitshalber wird diese Gleichung im Hauptdehnungsraum betrachtet. Der konstitutive Tensor des ungeschädigten Materials  $\mathbf{C}_0$  wird spektral zerlegt

$$\mathbf{C}_0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} = \quad (7.41)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{1-2\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{Q}^T$$

Gl. (7.40) stellt im Hauptdehnungsraum eine Fläche zweiter Ordnung dar, deren Normalform in Matrixschreibweise mit Hilfe von Gl. (7.41) durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} - K^2(d) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{\Lambda}_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - K^2(d) = 0 \quad (7.42)$$

geschrieben werden kann. Die  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  sind die Koordinaten der Fläche zweiter Ordnung bezüglich der Transformation zur Normalform. Da alle Eigenwerte von  $\mathbf{C}_0$  positiv sind und  $K^2$  ein negatives Vorzeichen hat, stellt Gl. (7.42) ein Ellipsoid dar. Die Gleichung geht über in :

$$\frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{a^2} + \frac{\hat{\varepsilon}_2^2}{b^2} + \frac{\hat{\varepsilon}_3^2}{c^2} = 1 \quad (7.43)$$

a, b und c sind dabei die Halbachsen des Ellipsoids, gegeben durch :

$$a^2 = b^2 = \frac{K^2}{E}(1+\nu) \quad c^2 = \frac{K^2}{E}(1-2\nu) \quad (7.44)$$

und für  $\nu = 0$  wird  $a = b = c$  , und es ergibt sich eine Kugel.

Die geometrische Veranschaulichung ermöglicht eine wichtige Bemerkung über dieses Schädigungsmodell. Es ist nicht in der Lage, durch Zug- oder Druckbeanspruchung verursachte Schädigung zu unterscheiden. Diese Einschränkung ist zur Erfassung duktiler Prozesse nicht kritisch, aber für quasi-spröde Prozesse nicht geeignet.

Um diese Schwäche des Modells zu beheben, wird eine zu Oliver u.a. [79] ähnliche Formulierung eingeführt. Dazu wird ein zusätzlicher Parameter  $\eta$  definiert, welcher die Schädigungsbedingung skaliert. Die Skalierung erfolgt im äquivalenten Dehnungsdruck, d.h.

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \eta + \frac{1-\eta}{n} \right) \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.45)$$

wobei

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i|} \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2} \quad (7.46)$$

$\epsilon_i$  sind die Hauptdehnungen und die eckige Klammer symbolisiert den Macauleyschen Operator. Es ist ersichtlich, daß der Parameter  $\eta$  vom Dehnungszustand abhängt. Die Konstante  $n$  in Gl. (7.45) stellt die Beziehung von  $\tilde{\epsilon}$  zwischen dem Anfang der Schädigungsevolution für den dreidimensionalen dilatanten ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 > 0; \eta = 1$ ) und dem kontraktanten ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 < 0; \eta = 0$ ) Dehnungszustand her. Es gilt :

$$\begin{aligned} \eta = 1 &\Rightarrow \tilde{\epsilon} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}} \\ \eta = 0 &\Rightarrow \tilde{\epsilon} = \frac{1}{n} \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (7.47)$$

Für die Schädigung im vollständigen Druckbereich ist die  $n$ -fache Vergleichsdehnung  $\tilde{\epsilon}$  notwendig.

## 8 FORMULIERUNG UND LÖSUNG DES NICHTLINEAREN RANDWERTPROBLEMS

### 8.1 Einführung

Damit numerische Lösungsverfahren bei der Analyse von inelastischen Körpern eingesetzt werden können, ist eine zweifache Diskretisierung – hinsichtlich der Zeit und des Orts – notwendig.

Im diesem Kapitel wird die Diskretisierung des Orts eingeführt, welche das vorhandene Randwertproblem auf ein approximiertes mathematisches Modell, bestehend aus gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen, reduziert. Für die Lösung solcher Probleme kommt innerhalb der zur Verfügung stehenden Verfahren die Methode der Finiten Elemente am häufigsten zum Einsatz.

Für die numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Kontinuumsmechanik ist auf iterative Verfahren, wie z.B. das Newton–Raphson oder das Quasi-Newton Verfahren, zurückzugreifen. Häufig wird das Newton–Raphson Verfahren gewählt. Diese Bevorzugung ist auf die zumindest quadratische Konvergenzrate in der Nähe der Lösung ("attraction domain") zurückzuführen. Die Gleichungen für das Newton–Raphson Verfahren werden durch die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit gewonnen. Es wird angenommen, daß der Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t_n$  (nach dem Aufbringen des  $n$ -ten Lastinkrements) in Bezug auf die Zeitdiskretisierung und nach Anwendung des Newton–Raphson Iterationsverfahrens bekannt ist. Der gesuchte Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  wird durch die Lösung einer Abfolge linearisierter Probleme iterativ gewonnen.

Somit ist eine konsistente Linearisierung der nichtlinearen Größen vorzunehmen. Wesentlich ist hier der Begriff *konsistent*; er weist darauf hin, daß die Linearisierung aller Beziehungen im betrachteten nichtlinearen Problem bis zur gleichen Ordnung auszuführen ist [40],[134].

Bekannt ist, daß eine Funktion  $f(\phi)$  an der Stelle  $\bar{\phi} + \mathbf{u}$  durch eine Taylorreihenentwicklung approximiert werden kann. Folglich gilt :

$$f(\bar{\phi} + \mathbf{u}) = \text{LIN}[f(\bar{\phi} + \mathbf{u})] + R(|\mathbf{u}|)$$

$$\text{wobei } \text{LIN}[f(\bar{\phi} + \mathbf{u})] = f(\bar{\phi}) + Df(\bar{\phi}) \cdot \mathbf{u} \quad (8.1)$$

$$\text{und } \lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|R(|\mathbf{u}|)\|}{\|\mathbf{u}\|} = 0$$

$R(|\mathbf{u}|)$  charakterisiert das Restglied und  $Df(\bar{\phi})$  ist der Gradientenvektor von  $f$  bezüglich  $\phi$  an der Stelle  $\bar{\phi}$ . Unter Einführung des Begriffes der Richtungsableitung

(Gâteaux–Ableitung) kann der Term  $Df(\bar{\phi}) \cdot \mathbf{u}$  als die Änderung der Funktion  $f$  an der Stelle  $\bar{\phi}$  in Richtung von  $\mathbf{u}$  interpretiert werden :

$$\frac{d}{d\eta} [f(\bar{\phi} + \eta \mathbf{u})]_{\eta=0} = \left[ \frac{\partial f(\bar{\phi} + \eta \mathbf{u})}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial (\bar{\phi} + \eta \mathbf{u})}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = \frac{\partial f(\bar{\phi})}{\partial \phi} \cdot \mathbf{u} = Df(\bar{\phi}) \cdot \mathbf{u}$$

Das Konzept der Linearisierung läßt sich auf vektor– oder tensorwertige Größen verallgemeinern. Für eine ausführliche Betrachtung über Stetigkeit und Differenzierbarkeit des Gâteaux oder Frechet Differentials sei hier auf das Buch von Ortega und Rheinbold [81] (Kapitel 3) verwiesen.

## 8.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das Prinzip der virtuellen Arbeit in materieller Darstellung Gl. (3.52) (siehe Abschnitt 3.4), das auch als die schwache Form des Gleichgewichts interpretiert werden kann. Das Prinzip enthält keine Annahmen über die Erhaltung der Energie des Gesamtsystems, d.h. die Existenz eines Potentials ist nicht vorausgesetzt, deswegen kann es auch für dissipative Prozesse angewandt werden. Das Prinzip der virtuellen Arbeit zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  wird durch

$$-\int_{\mathfrak{B}_0} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E} \, dV + \int_{\mathfrak{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathfrak{B}_0} \mathbf{t}_{0,n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (8.2)$$

oder

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (8.3)$$

geschrieben, wobei  $\mathbf{S}$  den zweiten Piola–Kirchhoff Spannungstensor und  $\mathbf{E}$  den Green–Lagrange Verzerrungstensor bezeichnet. Für diese Darstellung wurde in [86] und [3] der Begriff *totale Lagrange–Formulierung* geprägt.

Die Spannung wird durch das Werkstoffgesetz berücksichtigt und ist eine von der Verzerrung abhängige Variable. Durch Einsetzen der Spannung stellt Gl. (8.2) eine Randwertaufgabe – im allgemeinen eine nichtlineare Randwertaufgabe – dar, in der das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  die gesuchte Größe (unabhängige Variable) ist.

Bei der Beschränkung auf eine vom Verschiebungsfeld unabhängige Belastung ist der zweite und der dritte Term in (8.2) als bekannt vorauszusetzen. Somit wird die Linearisierung des ersten Summanden von (8.2) bezüglich Gl. (8.1b) vorgenommen :

$$\text{LIN}[\mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E}] = \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E} + D(\mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (8.4)$$

mit

$$D(\mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}) \cdot \Delta \mathbf{u} = (D\mathbf{S}_n \cdot \Delta \mathbf{u}) : \delta \mathbf{E} + \mathbf{S}_n : (D\delta \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{u}) \quad (8.5)$$

wobei  $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}|_{t_n}$ .

An dieser Stelle sind einige Definitionen erforderlich. Der Green–Lagrange Verzerrentensor  $\mathbf{E}$  wird durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \delta] \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \quad (8.6)$$

definiert und die entsprechende Variation (virtuelle Verzerrung) durch die folgende Richtungsableitung bestimmt

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[ \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \delta \mathbf{u}) \right\} - \delta \right]_{\eta=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\} + \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\}^T \mathbf{F} \right] = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}] \end{aligned} \quad (8.7)$$

Die Richtungsableitung des Spannungstensors (inkrementelle Spannung) führt unter Anwendung der Kettenregel zur folgenden Gleichung

$$D\mathbf{S}_n \cdot \Delta \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{E}} : (D\mathbf{E}_n \cdot \Delta \mathbf{u}) \quad (8.8)$$

wobei analog zu Gl. (8.7)

$$\begin{aligned} D\mathbf{E}_n \cdot \Delta \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[ \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \Delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \Delta \mathbf{u}) \right\} - \delta \right]_{\eta=0} = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \partial_{\mathbf{X}} \Delta \mathbf{u} + \partial_{\mathbf{X}} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}] \end{aligned} \quad (8.9)$$

Zur Bestimmung des letzten Terms auf der rechten Seite von Gl. (8.5) wird die Ableitung von Gl. (8.7b) benötigt

$$\begin{aligned} D\delta \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[ \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \Delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\} + \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} + \eta \Delta \mathbf{u}) \right\} \right]_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\Delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\} + \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \right\}^T \left\{ \partial_{\mathbf{X}}(\Delta \mathbf{u}) \right\} \right]_{\eta=0} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Durch Einsetzen der Gln. (8.10), (8.9b), (8.8) und (8.7b) in Gl. (8.4) folgt in Komponentenschreibweise und unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Spannungs- und Verzerrungstensoren

$$\text{LIN}[\mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E}] = \left[ S_{Ij} F_{aJ} + \left( F_{aI} \frac{dS_{IJ}}{dE_{KL}} F_{bK} + S_{Lj} \delta_{ab} \right) \Delta u_{b,L} \right] \delta u_{a,J} \quad (8.11)$$

In Gl. (8.11) stellen die großen bzw. kleinen Indizes den Bezug zur Referenz- bzw. zur Momentankonfiguration dar (z.B.  $\Delta u_{b,L} = \partial_{X_L} \Delta u_b$ ).

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  ist hier noch nicht diskretisiert. Die Linearisierung des kontinuierlichen Problems stimmt nicht in allen Fällen mit der Linearisierung des diskreten Problems überein.

Im vorhandenen Fall einer FE-Formulierung mit stetigen Verschiebungsansätzen ist die Übereinstimmung gegeben. Allerdings wird im Abschnitt 9.3 gezeigt, daß die Linearisierung erst nach der Diskretisierung durchgeführt werden soll, da sie z.B. für die teilelastische-teilplastische Analyse von der Wahl des Integrationsalgorithmus abhängt.

### 8.3 Ortsdiskretisierung

Anschließend wird die Ortsdiskretisierung betrachtet.

$$\overline{\mathfrak{B}}^h = \bigcup_{e=1}^{NE} \overline{\mathfrak{B}}^e \quad (8.12)$$

und

$$\overline{\mathfrak{B}}^h \approx \mathfrak{B}_0$$

Gl. (8.12) stellt die finite Element Diskretisierung des betrachteten Körpers in der Referenzkonfiguration dar, wobei der Index NE für die Elementanzahl steht. Die üblichen Felder im Rahmen einer isoparametrischen Interpolation können wie folgt eingeführt werden

$$\begin{aligned} \text{Geometrie} & \quad \mathbf{x}_e^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{x}_k^e \\ \text{Verschiebungen} & \quad \mathbf{u}_e^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{d}_k^e \\ \text{virtuelle Verschiebungen} & \quad \delta \mathbf{u}_e^h = \sum_{k=1}^{NK} N^k(\xi) \mathbf{v}_k^e \end{aligned} \quad (8.13)$$

NK ist die Knotenanzahl der Elemente  $\overline{\mathfrak{B}}^e$ .  $\mathbf{x}_k^e$ ,  $\mathbf{d}_k^e$ ,  $\mathbf{v}_k^e$  sind Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ , die die Ortsvektoren der Bezugskonfiguration, die Verschiebungen und die Variation der Verschiebungen der Knoten  $k$  repräsentieren.  $N^k$  ist die Ansatzfunktion des Knotens  $k$ .

Im Hinblick auf die Implementierung in ein finites Element Programm ist es vorteilhaft, Gl. (8.2) bzw. (8.11) in einer Matrixschreibweise darzustellen:

Zuerst wird der Differentialoperator  $\mathbf{B}$  eingeführt, welcher die Ableitungen der Verschiebung bereitstellt.

$$\mathbf{B}^k := \left[ \mathbf{e}_1 N_{,1}^k \quad \mathbf{e}_2 N_{,2}^k \quad \mathbf{e}_3 N_{,3}^k \quad \mathbf{e}_1 N_{,2}^k \quad \mathbf{e}_2 N_{,1}^k \quad \mathbf{e}_1 N_{,3}^k \quad \mathbf{e}_3 N_{,1}^k \quad \mathbf{e}_2 N_{,3}^k \quad \mathbf{e}_3 N_{,2}^k \right]^T \quad (8.14)$$

wobei  $N_{,j}^k := \partial_{X_j} N^k$  und  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ ;  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ ;  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$

Die Ableitung der Ansatzfunktion  $N^k$  nach den globalen Koordinaten wird mit Hilfe der Kettenregel durch Ableitung nach den lokalen (isoparametrischen) Koordinaten beschrieben.

$$\left\{ N_{,j}^k \right\} = \nabla_{\mathbf{X}} N^k = \nabla_{\mathbf{X}} \xi \quad \nabla_{\xi} N^k = \mathbf{J}_0^{-1}(\xi) \left\{ N_{,i}^k \right\} \quad (8.15)$$

Hierbei ist  $\mathbf{J}_0$  die Jacobi-Matrix. Der gesamte  $\mathbf{B}$ -Operator eines Elementes wird durch

$$\mathbf{B}^e := \left[ \mathbf{B}^1 \quad \mathbf{B}^2 \quad \dots \quad \mathbf{B}^{NK} \right] \quad (8.16)$$

definiert. Mit Hilfe des  $\mathbf{B}$ -Operators wird die Finite Elemente Approximation für den Gradienten der Verschiebungsvariation und den Gradienten des Verschiebungsincrementes  $\delta \mathbf{u} \nabla^T$  bzw.  $\Delta \mathbf{u} \nabla^T$  für das Element  $\overline{\mathfrak{B}}^e$  ausgedrückt:

$$\delta \mathbf{u} \nabla^T \Big|_{\overline{\mathfrak{B}}^e} \approx \delta \mathbf{u}_e^h \nabla^T \Rightarrow \underline{\nabla \delta \mathbf{u}} = \mathbf{B}^e \mathbf{v}^e \quad (8.17)$$

$$\Delta \mathbf{u} \nabla^T \Big|_{\overline{\mathfrak{B}}^e} \approx \Delta \mathbf{u}_e^h \nabla^T \Rightarrow \underline{\nabla \Delta \mathbf{u}} = \mathbf{B}^e \Delta \mathbf{d}^e$$

wobei  $\nabla^T = \left[ \partial_{X_1}, \partial_{X_2}, \partial_{X_3} \right]$  und  $\underline{\nabla \delta \mathbf{u}}$ ,  $\underline{\nabla \Delta \mathbf{u}}$  neundimensionale Vektoren sind, deren Komponenten den Gradienten der Verschiebungsvariation bzw. des Verschiebungsincrementes gemäß Gl. (8.19) entsprechen.

An dieser Stelle wird von der Notation von Ramm [86] Gebrauch gemacht. Die Vorteile dieser Notation werden von Matzenmiller in [69] diskutiert.  $\underline{\mathbf{S}}$  und  $\underline{\mathbf{F}}$  seien Matrizen, bei denen die Komponenten des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors  $\mathbf{S}$  bzw. des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in folgender Weise angeordnet sind.

$$\underline{\mathbf{F}} := \begin{bmatrix} (F_{11}e_1 + F_{21}e_5 + F_{31}e_7)^T \\ (F_{22}e_2 + F_{12}e_4 + F_{32}e_9)^T \\ (F_{33}e_3 + F_{13}e_6 + F_{23}e_8)^T \\ (F_{21}e_2 + F_{11}e_4 + F_{31}e_9)^T \\ (F_{12}e_1 + F_{22}e_5 + F_{32}e_7)^T \\ (F_{31}e_3 + F_{11}e_6 + F_{21}e_8)^T \\ (F_{13}e_1 + F_{23}e_5 + F_{33}e_7)^T \\ (F_{32}e_3 + F_{12}e_6 + F_{22}e_8)^T \\ (F_{23}e_2 + F_{13}e_4 + F_{33}e_9)^T \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{S}} := \begin{bmatrix} (S_{11}e_1 + S_{12}e_4 + S_{13}e_6)^T \\ (S_{22}e_2 + S_{12}e_5 + S_{23}e_8)^T \\ (S_{33}e_3 + S_{13}e_7 + S_{23}e_9)^T \\ (S_{12}e_1 + S_{22}e_4 + S_{23}e_6)^T \\ (S_{12}e_2 + S_{11}e_5 + S_{13}e_8)^T \\ (S_{13}e_1 + S_{23}e_4 + S_{33}e_6)^T \\ (S_{13}e_3 + S_{11}e_7 + S_{12}e_9)^T \\ (S_{23}e_2 + S_{13}e_5 + S_{33}e_8)^T \\ (S_{23}e_3 + S_{12}e_7 + S_{22}e_9)^T \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

wobei  $e_k \in \mathbb{R}^9 | e_k = [0 \cdots \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}} \cdots 0]^T$

Zusätzlich werden die neundimensionalen Vektoren  $\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{e}}$  und  $\underline{\mathbf{i}}$  wie folgt definiert

$$\underline{\mathbf{g}} := [g_{11} \ g_{22} \ g_{33} \ g_{12} \ g_{21} \ g_{13} \ g_{31} \ g_{23} \ g_{32}]^T \quad (8.19)$$

$$\underline{\mathbf{i}} := e_1 + e_2 + e_3$$

wobei

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{s}} \text{ oder } \underline{\mathbf{f}} \text{ oder } \underline{\mathbf{e}}$$

$$g_{ij} = S_{ij} \text{ oder } F_{ij} \text{ oder } E_{ij}$$

Es ist einfach zu verifizieren, daß der Vektor  $\underline{\mathbf{e}}$ , welcher die Komponenten des Green-Lagrange Verzerrungstensors enthält, durch

$$\underline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{f}} - \underline{\mathbf{i}}] \quad (8.20)$$

geschrieben werden kann. Da zu dieser Notation die gewöhnliche Matrizenschreibweise des konstitutiven Tensors (6x6) nicht kompatibel ist, wird der passende konstitutive Tensor  $\underline{\mathbf{C}}$  (9x9) durch Duplizieren und unmittelbares Einfügen der vierten, fünften und sechsten Zeilen und Spalten gewonnen.

Anhand dieser Notation ist man in der Lage, Gl. (8.11) in Matrizenschreibweise umzuformulieren. Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (8.11) ist der Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{R}_{\text{int}}^e$  im Element  $\overline{\mathbb{B}}^e$  und kann durch

$$\mathbf{R}_{\text{int}}^e = \int_{\overline{\mathfrak{B}}^e} \mathbf{B}^{eT} \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{s}} \, dV \quad (8.21)$$

definiert werden. Der zweite und dritte Term auf der rechten Seite von Gl. (8.11) stellen die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^e$  des Elementes  $\overline{\mathfrak{B}}^e$  des linearisierten Problems dar, wobei diese Terme den elastischen und Anfangsverschiebungs-Anteil bzw. den Anfangsspannungsanteil der Tangentensteifigkeitsmatrix charakterisieren. Für die Steifigkeitsmatrix kann man schreiben

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{\overline{\mathfrak{B}}^e} \mathbf{B}^{eT} \left[ \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{F}} + \underline{\mathbf{S}} \right] \mathbf{B}^e \, dV \quad (8.22)$$

Der anschließende Zusammenbau aller Elemente, die den betrachteten Körper nachbilden, liefert die Systemgrößen für die finite Element Formulierung

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{e=1}^{\text{NE}} \mathfrak{G}^e \quad \text{wobei } \mathfrak{G}^e = \mathbf{R}_{\text{int}}^e ; \mathbf{R}_{\text{ext}}^e \text{ oder } \mathbf{K}_T^e \quad (8.23)$$

und  $\mathfrak{G} = \mathbf{R}_{\text{int}} ; \mathbf{R}_{\text{ext}} \text{ oder } \mathbf{K}_T$

Der inkrementelle, iterative Prozeß wird dann durchgeführt, wobei ein typisches Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  betrachtet wird. Die Lösung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  wird solange iterativ  $[1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, i_{\text{max}}]$  durchgeführt, bis eine vorgegebene Toleranz erreicht ist. Da angenommen wird, daß die Lösung des Iterationschrittes  $i-1$  bekannt ist, wird Gl. (8.2) für die nächste approximierte Lösung  $i$  an der Stelle  $i-1$  linearisiert.

In einer für finite Elemente geeigneten Matrixschreibweise läßt sich die linearisierte Form von Gl. (8.2) schreiben

$$\mathbf{K}_T^{(i-1)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{R}^{(i-1)} = \mathbf{0} \quad (8.24)$$

wobei

$$\mathbf{R}^{(i-1)} = \mathbf{R}_{\text{ext}} - \mathbf{R}_{\text{int}}^{(i-1)} \quad (8.25)$$

$$\Delta \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{d}^{(i-1)} \Rightarrow \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{d}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{d}^{(n)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)}$$

$\mathbf{R}^{(i-1)}$  ist als der Vektor der Ungleichgewichtskräfte bekannt. Die Notation  $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$  beschreibt das Inkrement der Knotenverschiebungen zwischen der aktuellen Iteration  $i$  und dem Anfang des iterativen Prozesses  $t_n$ .  $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$  ist sinngemäß die Differenz zwischen den Knotenverschiebungen zum Zeitpunkt  $i$  und  $i-1$ .

## 9 NUMERISCHE BEHANDLUNG NICHTLINEARER MATERIALGESETZE

### 9.1 Einleitung

Die Diskretisierung in der "Zeit" dient der Bestimmung einer approximativen Lösung der zuvor genannten Differentialgleichungen durch deren Reduktion auf eine Folge nichtlinearer algebraischer Probleme. Durch Unterteilung der Prozeßgeschichte (Belastungs- und/oder Zeitgeschichte) in finite Zeitschritte muß das pfadabhängige Problem durch geeignete pfadunabhängige Beziehungen ersetzt werden. Man spricht dann von einem approximativen Zeitintegrationsschema. Der pfadabhängige Charakter der konstitutiven Beziehung wird durch die Aktualisierung der Variablen zwischen den Schritten wenigstens näherungsweise gewährleistet.

Es folgt ein Überblick zur wichtigen Thematik der Integration der Ratengleichungen. Die konsistenten Tangentenoperatoren werden für einfache und mehrteilige Fließflächen formuliert und für das CAP-Modell, kombiniert mit einem skalaren Schädigungsmodell, eingesetzt.

**ANMERKUNG :**  $\sigma$  und  $\epsilon$  stehen in diesem Kapitel für allgemeine Spannungs- und Verzerrungstensoren, d.h.  $\sigma$  und  $\epsilon$  bilden hier keine spezifische arbeitskonforme Paarung ( $\sigma, \epsilon$ ) (siehe Tafel 3.1).

### 9.2 Integration von Materialgesetzen

Für eine elastoplastische Analyse ist die numerische Integration der konstitutiven Gleichungen erforderlich. Die Genauigkeit des Integrationsverfahrens hat einen direkten Einfluß auf die globale Rechengenauigkeit der elastoplastischen Analyse. Andere wesentliche Kriterien zur Beurteilung der Integrationsverfahren sind die numerische Stabilität und die inkrementelle Konsistenz mit dem wirklichen Problem.

Zur Durchführung der Integration stehen eine Fülle von numerischen Integrationsalgorithmen zur Verfügung, z.B. wird für die klassische dreidimensionale  $J_2$ -Plastizität die sogenannte *radiale Rückkehr* ("radial return") am häufigsten benutzt. Dieser Algorithmus wurde von Wilkins [132] vorgeschlagen und von anderen Verfassern wie z.B. Krieg und Key [56], Krieg und Krieg [57] sowie Schreyer et al. [103] erweitert. Die radiale Rückkehr kann dem allgemeinen Begriff *Projektionsverfahren* zugeordnet werden. Derartige Algorithmen benutzen ein *verzerrungsgesteuertes* ("strain driven") Format und gewährleisten in natürlicher Weise die inkrementelle Konsistenz. Verzerrungsgesteuerte Algorithmen bedeuten, daß das Inkrement des Verzerrungstensors  $\Delta \epsilon_{n+1}$  im betrachteten Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  und die Variablen am Anfang des Zeitinkrements  $t_n$   $:\{\sigma_n, \epsilon_n, \mathbf{q}_n, \lambda_n\}$  gegeben sind. Verzerrungsgesteuerte Algorithmen werden deshalb

bevorzugt, weil sie mit den üblicherweise eingesetzten Verschiebungsformulierungen der Methode der finiten Elemente kompatibel sind. Diese Verfahren arbeiten in zwei Schritten mit *elastischem Prädiktor/plastischem Korrektor*, d.h. eine elastische Prädiktorspannung eines ersten Schrittes, die die Fließbedingung verletzt, wird zurück auf die Fließfläche projiziert (plastischer Korrektor).

Grundsätzlich kann man die Integrationsalgorithmen in Einschnitt- und Mehrschrittverfahren, sowie implizite und explizite Verfahren unterteilen.

Definition 9.2.1 :

Explizites Verfahren

Die Richtung der plastischen Korrektur ist a priori festgelegt.

Implizites Verfahren

Die Richtung der plastischen Korrektur ist Teil des Lösungsalgorithmus und muß meistens iterativ bestimmt werden. Ausnahmen sind z.B. die Kriterien nach von Mises und Drucker-Prager.

Definition 9.2.2 :

Einschrittverfahren

Diese Verfahren verwenden zur Berechnung eines weiteren Näherungswertes nur einen vorangehenden Wert.

Mehrschrittverfahren

Die Mehrschrittverfahren verwenden  $k+1$  ( $k \geq 1$ ) vorangehende Werte zur Berechnung eines weiteren Näherungswertes.

Das Evolutionsproblem kann für das allgemeine Fließ- und Verfestigungsgesetz gemäß Gl. (5.17) für  $\dot{\epsilon}^p$ , Gl. (5.18) für  $\dot{q}$  und die Zeitableitung von Gl. (5.25a) für  $\dot{\sigma}$  durch

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C} : \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \mathbf{C} : \mathbf{r} \\ \dot{q} &= \dot{\lambda} \mathbf{h} \end{aligned} \tag{9.1}$$

geschrieben werden. Wird von der Notation von Simo und Govindjee [107] Gebrauch gemacht

$$\Sigma := [\sigma \quad q]^T \quad \dot{\mathbf{E}} := [\dot{\epsilon} \quad 0]^T \quad \mathbf{m} := [\mathbf{r} \quad \mathbf{h}]^T \tag{9.2}$$

und die Diagonalmatrix  $\mathbf{G}$  eingeführt

$$\mathbf{G} := \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{9.3}$$

wird aus dem assoziierten Fließ- bzw. Verfestigungsgesetz

$$\mathbf{m} \equiv \nabla\phi(\boldsymbol{\Sigma}) := [\partial_{\sigma}\phi \quad \partial_{\mathbf{q}}\phi]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{G} := \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Mit dieser Notation kann die Anfangswertaufgabe (9.1) umgeschrieben werden

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{G}[\dot{\mathbf{E}} - \dot{\lambda} \mathbf{m}] =: \boldsymbol{\Omega}(\dot{\mathbf{E}}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{m}) \quad (9.5)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\boldsymbol{\Sigma}(t_0) := \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (9.6)$$

Die allgemeine Rechenvorschrift für ein typisches Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  ist dann

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\Sigma}_n = \Delta t \boldsymbol{\Omega}(\dot{\mathbf{E}}, \boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}, \mathbf{m}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}) \quad (9.7)$$

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich in der Wahl der Rückkehrichtung  $\mathbf{m}$  (Richtung der plastischen Korrektur). Weiter werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^* &= \sigma_n + \underbrace{\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}_{\Delta \sigma^e} && \text{elastischer Prädiktor} \\ \sigma_n^K &= \sigma_n + \xi \Delta \sigma^e && \text{Kontaktspannung} \\ t_{n+\alpha} &= \alpha t_{n+1} + (1 - \alpha) t_n \\ \boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha} &= \alpha \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\Sigma}_n \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (9.8)$$

Einige Verfahren sind im Tafel 9.1 dargestellt

| Explizites Verfahren                           |    | Implizites Verfahren   |     |
|--|----|--|-----|
| $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\sigma_n^K)$          | FE | $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\sigma_{n+1})$  | BE  |
| $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\sigma_{n+1}^*)$      |    | $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\sigma_{n+\alpha})$                                       | VMR |
| $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\sigma_{n+\alpha}^*)$ |    | $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{m}(\sigma_{n+1}) + (1 - \alpha) \mathbf{m}(\sigma_n)$ | VTR |

Tafel – 9.1 – Explizite und Implizite Verfahren – FE ("Vorwärts–Euler"); BE ("Rückwärts–Euler"); VMR (Verallgemeinerte Mittelpunkregel); VTR (Verallgemeinerte Trapezregel).

Für die Bestimmung des elastischen Prädiktors  $\sigma^*$  Gl. (9.8a) wird das Verzerrungsincrement  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  elastisch angenommen. Verletzt der elastische Prädiktor  $\sigma^*$  die Fließbedingung ( $\sigma^* \notin E_{\sigma}$ ) ist diese Annahme falsch, d.h. der Verzerrungsincrement enthält

einen plastischen Anteil  $\Delta \varepsilon^P$ . Die Formulierung eines Prädiktorzustandes ist ein wesentlicher Bestandteil des Prädiktor–Korrektor–Verfahrens und wird auch zur Bestimmung der Rückkehrichtung einiger expliziter Algorithmen benutzt.

Sowohl implizite Verfahren (ausschließlich des "Rückwärts–Euler" Verfahrens) als auch der "Vorwärts–Euler" benötigen die Bestimmung der Kontaktspannung. Es wird angenommen, daß die Spannung  $\sigma_n$  bzw.  $\sigma_{n+1}^*$  innerhalb bzw. außerhalb des elastischen Gebietes liegen. Die Kontaktspannung  $\sigma_n^K$  ist dann die Spannung, welche den Übergang zwischen elastischem und plastischem Zustand in der Richtung  $\Delta \sigma^e = \sigma_{n+1}^* - \sigma_n$  charakterisiert.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den expliziten und impliziten Verfahren liegt in der numerischen Stabilität. Das "Vorwärts–Euler" Verfahren sollte aufgrund der bedingten numerischen Stabilität (d.h. das Stabilitätsverhalten hängt von der Schrittweite ab), der niedrigen Genauigkeit und aufgrund der Tatsache, daß für große Schrittweiten z.T. keine Lösung existiert, gemieden werden (siehe Runesson et al. [96]).

Dem gegenüber steht das "Rückwärts–Euler" Verfahren. Dieses Verfahren wird oft in der Plastizitätstheorie angewandt, da es unbedingt numerisch stabil ist, eine hohe Genauigkeit aufweist und große Schrittweiten vorgegeben werden können.

Eine umfassende Arbeit zum Stabilitätsverhalten und zur Genauigkeit von numerischen Integrationsalgorithmen wurde von Ortiz und Popov [83] veröffentlicht. Die Verfasser führten zudem zwei Familien von Algorithmen ein, welche die bekannten Trapez– und Mittelpunktregele verallgemeinern.

Die verallgemeinerte Trapezregel nach Ortiz und Popov [83] lautet

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbf{G}[\Delta \mathbf{E} - \Delta \lambda \{(1 - \alpha) \mathbf{m}_n + \alpha \mathbf{m}_{n+1}\}] \quad (9.9)$$

Die Umformung des Spannungsanteils dieser Gleichung

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \lambda \mathbf{C} : [(1 - \alpha) \mathbf{r}_n + \alpha \mathbf{r}_{n+1}] \quad (9.10)$$

läßt eine einfache geometrische Darstellung zu (siehe Abbildung 9.1, entnommen von Ortiz und Popov [83]).

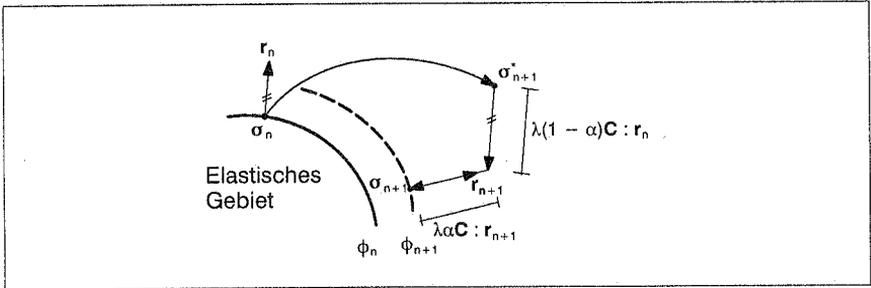


Abbildung 9.1 – Geometrische Darstellung der verallgemeinerten Trapezregel.

Aus dieser Abbildung entnimmt man, daß der plastische Korrektorteil des Algorithmus aus zwei Teilschritten besteht. Der Spannungstensor wird zuerst in Richtung des plastischen Flusses zum Zeitpunkt  $t_n$  projiziert, anschließend in Richtung des endgültigen plastischen Flusses zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ .

Die verallgemeinerte Mittelpunkregel lautet

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbf{G}[\Delta\mathbf{E} - \Delta\lambda\mathbf{m}_{n+\alpha}] \quad (9.11)$$

wobei  $\mathbf{m}_{n+\alpha} = \mathbf{m}(\Sigma_{n+\alpha})$

Abbildung 9.2 veranschaulicht den geometrischen Sachverhalt der verallgemeinerten Mittelpunkregel (aus [83] entnommen).

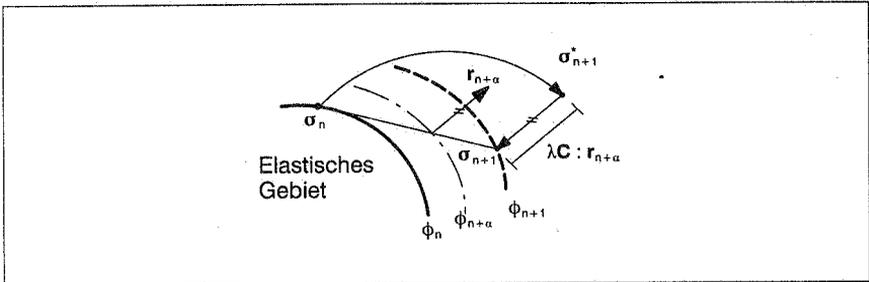


Abbildung 9.2 – Geometrische Darstellung der verallgemeinerten Mittelpunkregel.

In dieser Abbildung ist der plastische Korrektorteil des Algorithmus als eine Projektion in Richtung des plastischen Flusses zu einem Zwischenzeitpunkt (Mittelpunkt)  $t_{n+\alpha}$  dargestellt.

Es wird darauf hingewiesen, daß sowohl für die VMR als auch für die VTR die entsprechenden diskreten Kuhn–Tuckerschen Bedingungen durch

$$\phi(\Sigma_{n+1}) \leq 0 \quad \Delta\lambda \geq 0 \quad \text{und} \quad \Delta\lambda\phi(\Sigma_{n+1}) = 0 \quad (9.12)$$

beschrieben werden. Deutlich ist zu erkennen, daß die Konsistenzbedingung unabhängig von  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  erfüllt wird.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß beide Familien von Algorithmen das "Rückwärts–Euler" ( $\alpha = 1$ ) und das "Vorwärts–Euler" ( $\alpha = 0$ ) Verfahren als Sonderfälle beinhalten. Die von Ortiz und Popov [83] durchgeführte Stabilitätsanalyse zeigt, daß die VMR für  $\alpha = 0.5$  einem Verfahren zweiter Ordnung (im Sinne der Genauigkeit) entspricht und für  $\alpha \geq 0.5$  unabhängig von der Form der Fließfläche unbedingt stabil ist. Für die VTR ist allerdings nicht möglich, eine feste Grenze der unbedingten Stabilität für den Parameter  $\alpha$  zu setzen, da diese Algorithmenfamilie hohe Sensibilität gegen eine starke Krümmung der Fließfläche aufweist. Für Fließflächen mit konstanter Krümmung, wie z.B. die nach von Mises, kann jedoch das Minimum des Parameters  $\alpha$ , der die unbedingte Stabilität gewährleistet, auf  $\alpha = 0.5$  gesetzt werden.

Anders als bei der Formulierung auf Kontinuumsebene sind hier die numerisch integrierten Ratengleichungen mit dem angewandten Integrationsalgorithmus in konsistenter Weise zu linearisieren. Diese Vorgehensweise wurde von Nagtegaal [75], Simo und Taylor [115] vorgeschlagen und brachte einen wesentlichen Impuls in der numerischen Plastizitätstheorie mit sich, hauptsächlich aufgrund der mit ihr verbundenen schnelleren Konvergenzrate. Der Begriff *konsistente Linearisierung* der konstitutiven Gleichung oder kürzer *konsistente Tangente* entspricht dieser Vorgehensweise.

Ortiz und Martin stellen in [84] fest, daß das "Rückwärts–Euler" Verfahren als einziges Mitglied der zuvor genannten Familien von Algorithmen eine symmetrische konsistente Tangente für assoziierte Plastizität erzeugt. Ein symmetrischer konstitutiver Tensor spielt eine wesentliche Rolle für die Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie (siehe Kapiteln 21–22 von Martin [68]). Zusätzlich hat die Symmetrie des konstitutiven Tensors einen bedeutenden Einfluß auf die Materialstabilität und Lokalisierung, wie von Rice [92], Neilsen und Schreyer [76], Bigoni und Hueckel [7],[8], u.a. gezeigt wurde. Deswegen ist es erstrebenswert, die Bedingungen aufzustellen, unter denen eine symmetrische konsistente Tangente erzeugt wird.

Simo und Govindjee [107] schlagen eine Änderung in der Erfüllung der inkrementellen Konsistenzbedingung der verallgemeinerten Mittelpunkregel vor, welche die Symmetrie der konsistenten Tangente zum beliebigen Zwischenzeitpunkt  $t_{n+\alpha}$  mit  $\alpha \in (0, 1]$  beibehält. In dieser Vorgehensweise, die hier als modifizierte verallgemeinerte Mittelpunkregel bezeichnet wird, wird die inkrementelle Konsistenzbedingung zum Zeitpunkt  $t_{n+\alpha}$  erfüllt. Zusätzlich haben die Verfasser den Begriff B–Stabilität für Plastizität und Viskoplastizität angewandt. B–Stabilität ist ein Kriterium zum Nachweis der Stabilität von *nichtlinearen* Algorithmen.

Rencontre et al. stellen in [90] fest, daß eine geeignete Extrapolation das "Rückwärts–Euler" Verfahren entweder zur modifizierten verallgemeinerten Mittelpunkregel

(MVMR) oder zur modifizierten verallgemeinerten Trapezregel (MVTR) führen kann, welche die Symmetrie der konsistenten Tangente beibehalten.

### 9.3 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen

Die im Abschnitt 8.2 durchgeführte Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts Gl. (8.11) braucht die Formulierung der Tangentenbeziehung zwischen Spannung und Dehnung. Eine infinitesimale Beziehung Gl. (5.60) wurde schon im Abschnitt 5.6 hergeleitet, sie lautet :

$$d\sigma = \mathbf{C}^{EP} : d\epsilon \quad (9.13)$$

Im Rahmen einer numerischen Analyse, bei der endliche Schrittweiten betrachtet werden, stimmt der infinitesimale elastoplastische Tensor  $\mathbf{C}^{EP}$  i.a. nicht mit dem Spannungsgradienten des Algorithmus zur Spannungsermittlung überein. Die Verwendung des infinitesimalen elastoplastischen Tensors führt deshalb im Rahmen der Methode der finiten Elemente zu einer Steifigkeitsmatrix, welche die inkrementelle Tangentenbeziehung zwischen Last und Verschiebung nicht nachbildet. Die Anwendung einer falschen Tangentenbeziehung zeigt sich am Abfall der Konvergenzgeschwindigkeit des iterativen Verfahrens. Je größer die Schrittweite, desto größer wird die Abweichung zur algorithmischen Tangentenbeziehung.

Unter dem Begriff *konsistente elastoplastische Tangentensteifigkeit* versteht man die Bestimmung einer Tangentenbeziehung zwischen Spannung und Dehnung unter Beachtung des verwendeten Integrationsalgorithmus zur Spannungsermittlung.

Die Aufgabe eines Integrationsalgorithmus der konstitutiven Gleichungen ist das Aufstellen einer Beziehung (in der Regel in einer impliziten Form) zwischen dem Spannungstensor  $\sigma_{n+1}$  und den Anfangsvariablen  $\mathbf{V}_n := \{ \sigma_n, \mathbf{q}_n, \epsilon_n, \lambda_n \}$ , dem Inkrement des Verzerrungstensors  $\Delta \epsilon_{n+1}$ , der inneren Variablen  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}$  und des plastischen Multiplikators  $\Delta \lambda_{n+1}$ .

$$\sigma_{n+1} = \tilde{\sigma}(\mathbf{V}_n, \Delta \epsilon_{n+1}, \Delta \mathbf{q}_{n+1}(\Delta \epsilon_{n+1}), \Delta \lambda_{n+1}(\Delta \epsilon_{n+1})) \quad (9.14)$$

Gl. (8.24) im Abschnitt 8 definiert das inkrementelle Gleichungssystem, das für die primären Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}$  ( in einer Verschiebungsformulierung der Methode der finiten Elemente) gelöst werden muß. Es wird darauf hingewiesen, daß dieses Gleichungssystem zwei iterative Niveaus, nämlich eine globale und eine lokale Ebene enthält. Auf globaler Ebene wird eine Approximation  $\mathbf{d}_{n+1}^{(0)}$  für die primären Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}$  erzeugt und iterativ verbessert; auf lokaler Ebene wird die Konsistenzbedingung  $(\sigma_{n+1}^{(i)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(i)}) \in E_\sigma$  iterativ erfüllt. Ein Newton–Raphson Verfahren wird zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems herangezogen. Am Ende jeder lokalen Iteration

wird im Rahmen dieses Verfahrens (echter Newton–Raphson) eine neue Steifigkeitsmatrix aufgestellt (siehe Gl. (8.22)), die hier Einfachheit halber geometrisch linear betrachtet wird.

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(j)} = \bigcup_{e=1}^{NE} \int_{\mathbb{B}^e} \mathbf{B}^e \mathbf{C}_{n+1}^{K^{(j)}} \mathbf{B}^e dV \quad (9.15)$$

wobei  $\mathbf{C}_{n+1}^{K^{(j)}}$  dem konsistenten linearisierten konstitutiven Tensor [115] entspricht, der durch die Linearisierung von Gl. (9.14) gewonnen wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{K^{(j)}} &= \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \\ &= \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\Delta \mathbf{q}_{n+1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \Delta \mathbf{q}_{n+1} + \partial_{\Delta \lambda_{n+1}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \Delta \lambda_{n+1} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Sowohl Gl. (9.16) als auch Gl. (8.24) sind von der Wahl der Integrationsalgorithmen abhängig.

#### 9.4 Bedingungen für eine symmetrische konsistente Tangente

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen für eine symmetrische konsistente Tangente bei assoziierter Plastizität aufgestellt werden. Da Gl. (9.16) von der Wahl der Integrationsalgorithmen abhängt, wird die VMR exemplarisch als Ausgangspunkt dieser Betrachtung herangezogen:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \mathbf{G}[\Delta \mathbf{E} - \Delta \lambda \nabla \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha})] \quad (9.17)$$

Das Differential dieser Gleichung ist wie folgt darstellbar

$$d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \mathbf{G} \left[ d\mathbf{E}_{n+1} - d(\Delta \lambda) \nabla \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}) - \Delta \lambda \nabla^2 \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}) d\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha} \right] \quad (9.18)$$

Da  $d\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha} = \alpha d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$  ist, kann man Gl. (9.18) nach  $d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$  auflösen

$$d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM} \left[ d\mathbf{E}_{n+1} - d(\Delta \lambda) \nabla \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}) \right] \quad (9.19)$$

wobei  $\mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM}$  (algorithmische Modul) mit

$$\mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM} = \left[ \mathbf{G}^{-1} + \alpha \Delta \lambda \nabla^2 \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}) \right]^{-1} \quad (9.20)$$

bestimmt wird. Die Erfüllung der Konsistenzbedingung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$

$$\phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = \dot{\phi}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = 0 \quad \text{bedingt}$$

$$d\phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = \nabla \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = 0 \quad (9.21)$$

Aus der Vormultiplikation mit  $\nabla \phi(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1})$  in Gl. (9.19) folgt

$$d(\Delta\lambda) = \frac{\nabla\phi(\Sigma_{n+1})\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}d\mathbf{E}_{n+1}}{\nabla\phi(\Sigma_{n+1})\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})} \quad (9.22)$$

Durch Einsetzen von Gl. (9.22) in (9.19) folgt

$$d\Sigma_{n+1} = \mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{K}} d\mathbf{E}_{n+1} \quad (9.23)$$

wobei der konsistente Tensor  $\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{K}}$  durch

$$\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{K}} = \mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}} - \mathbf{N}_{n+\alpha}\mathbf{N}_{n+1}^{\text{T}} \quad (9.24)$$

mit

$$\mathbf{N}_{n+\theta} = \frac{\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}\nabla\phi(\Sigma_{n+\theta})}{\left(\nabla\phi(\Sigma_{n+1})\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})\right)^{1/2}} \quad \text{für } \theta = 1 \text{ und } \theta = \alpha \quad (9.25)$$

definiert ist. Gl. (9.24) verdeutlicht, daß der konsistente Tensor  $\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{K}}$  mit Hilfe der VMR nur für  $\alpha = 1$  ("Rückwärts-Euler") symmetrisch ist.

Um diese Problematik zu umgehen, haben Simo und Govindjee [107] die Erfüllung der Konsistenzbedingung zum Zwischenzeitpunkt  $t_{n+\alpha}$  eingebracht, d.h.

$$\phi(\Sigma_{n+\alpha}) = \dot{\phi}(\Sigma_{n+\alpha}) = 0$$

Analog kann Gl. (9.19) umgeschrieben werden:

$$d\Sigma_{n+\alpha} = \alpha \mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}} [d\mathbf{E}_{n+1} - d(\Delta\lambda)\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})] \quad (9.26)$$

Aus der Erfüllung der Konsistenzbedingung am Zwischenzeitpunkt  $t_{n+\alpha}$  folgt

$$d(\Delta\lambda) = \frac{\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}d\mathbf{E}_{n+1}}{\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}}\nabla\phi(\Sigma_{n+\alpha})} \quad (9.27)$$

Durch Einsetzen von Gl. (9.27) in (9.26) folgt

$$\mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{K}} = \mathbf{C}_{n+\alpha}^{\text{AM}} - \mathbf{N}_{n+\alpha}\mathbf{N}_{n+\alpha}^{\text{T}} \quad (9.28)$$

Unabhängig von der Wahl des Parameters  $\alpha \in (0, 1]$  ist der konsistente Tensor immer symmetrisch für die MVMR.

**Anmerkung:** Aus Gl. (9.22) oder Gl. (9.27) wird deutlich, daß der Nenner beider Gleichungen für jeden zulässigen beliebigen Zustand  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \partial E_{\sigma}$  positiv definit sein muß, da der Lagrange-Multiplikator  $\lambda \geq 0$  vorausgesetzt wird. Man kann den Nenner durch

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) := \nabla\phi(\Sigma) : \mathbf{C} : \nabla\phi(\Sigma) > 0 \quad (9.29)$$

ersetzen. Diese Gleichung schaltet die Existenz der Entfestigung nicht aus, sondern stellt den Betrag von zulässiger Entfestigung auf, wie für den eindimensionalen Fall in [110] gezeigt wurde.  $\square$

| Integrationsalgorithmus | Formel   | Eigenschaften   |
|-------------------------|--|---|
| VMR                     | $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbf{G}[\Delta \mathbf{E} - \Delta \lambda \nabla \phi(\Sigma_{n+\alpha})]$ $\Sigma_{n+\alpha} = \alpha \Sigma_{n+1} + (1-\alpha) \Sigma_n$ $\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \lambda \mathbf{r}_{n+\alpha}$ $\phi(\Sigma_{n+1}) = 0$      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha=0</math> explizit (FE) ; <math>\alpha&gt;0</math> implizit ; <math>\alpha=1</math> (BE)</li> <li>• erzeugt unsymmetrischen konsistenten konstitutiven Tensor (Ausnahme <math>\alpha=1</math>)</li> <li>• zeigt lokale Fehler zweiter Ordnung (Ausnahme <math>\alpha=1/2</math> dritter Ordnung), d.h. der Algorithmus ist exakt erster Ordnung (bzw. zweiter Ordnung)</li> <li>• der Algorithmus ist unbedingst stabil (A–Stabil) für <math>\alpha \geq 1/2</math></li> </ul>                                 |
| VTR                     | $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbf{G}[\Delta \mathbf{E} - \Delta \lambda (1 - \alpha) \mathbf{m}_n + \alpha \mathbf{m}_{n+1}]$ $\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \lambda [(1 - \alpha) \mathbf{r}_n + \alpha \mathbf{r}_{n+1}]$ $\phi(\Sigma_{n+1}) = 0$                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha=0</math> explizit (FE) ; <math>\alpha&gt;0</math> implizit ; <math>\alpha=1</math> (BE)</li> <li>• erzeugt unsymmetrischen konsistenten konstitutiven Tensor (Ausnahme <math>\alpha=1</math>)</li> <li>• zeigt lokale Fehler zweiter Ordnung (Ausnahme <math>\alpha=1/2</math> dritter Ordnung), d.h. der Algorithmus ist exakt erster Ordnung (bzw. zweiter Ordnung)</li> <li>• die Grenze der unbedingten Stabilität hängt von der Krümmung der Fließfläche ab</li> </ul>                                   |
| MVMR                    | $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbf{G}[\Delta \mathbf{E} - \Delta \lambda \nabla \phi(\Sigma_{n+\alpha})]$ $\Sigma_{n+\alpha} = \alpha \Sigma_{n+1} + (1-\alpha) \Sigma_n$ $\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \lambda \mathbf{r}_{n+\alpha}$ $\phi(\Sigma_{n+\alpha}) = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha&gt;0</math> implizit ; <math>\alpha=1</math> (BE)</li> <li>• erzeugt symmetrischen konsistenten konstitutiven Tensor für alle <math>\alpha \in (0,1)</math></li> <li>• zeigt lokale Abbruchfehler zweiter Ordnung (Ausnahme <math>\alpha=1/2</math> dritter Ordnung), d.h. der Algorithmus ist exakt erster Ordnung (bzw. zweiter Ordnung)</li> <li>• der Algorithmus ist unbedingst stabil (B–Stabil) für <math>\alpha \geq 1/2</math> für assoziierte Plastizität (Normalität ist vorausgesetzt)</li> </ul> |

Tafel – 9.2 – Eigenschaften verschiedener Integrationsalgorithmen.

## 10 NUMERISCHE BEHANDLUNG DES GEKOPPELTEN MODELLS

### 10.1 Numerische Behandlung mehrteiliger Fließflächen mit nicht glatten Übergängen

Ein wesentlicher Aspekt in der Formulierung eines rechnerisch effizienten Algorithmus für die Bestimmung des endgültigen Zustandes  $(\sigma_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$  ist die geeignete Betrachtung der Ent-/Belastungsbedingungen. Simo et al. [114] zeigten, daß die Optimalitätsbedingungen von Kuhn–Tucker die einzig anwendbare Charakterisierung der Ent-/Belastungsbedingungen darstellen.

Ein entscheidender Unterschied zwischen mehrteiligen Fließflächen mit nicht glatten Übergängen und einfacher Fließfläche besteht darin, daß bei der Verletzung einer einfachen Fließfläche durch den elastischen Prädiktor die Fließbedingung am Ende auf jeden Fall aktiv wird. Im anderen Fall, bei dem zunächst mehrere Fließflächenabschnitte durch den elastischen Prädiktor verletzt werden, ist nicht gewährleistet, daß alle verletzte Fließflächen am Ende des Fließprozesses aktiv sein werden. Die Kuhn–Tucker Bedingungen spielen eine wichtige Rolle in der systematischen Ermittlung der aktiven Fließflächen (oder Beschränkungen). Der angewandte Algorithmus ist eine Erweiterung des "Closest point projection"–Algorithmus, welcher die unbedingte Stabilität, die Fähigkeit der Betrachtung einer beliebigen Anzahl von Fließflächenabschnitten mit nicht glatten Übergängen und die Möglichkeit der exakten Linearisierung als Eigenschaften beinhaltet.

Für einen vorgegebenen Zustand  $(\sigma, \mathbf{q})$  wird die Teilmenge  $P_{zul}$  der potentiell aktiven Teilflächen bestimmt:

Definition 10.1.1 :

$$P_{zul} := \{b : b \in P \mid \phi_b(\sigma, \mathbf{q}) = 0\} \quad (10.1)$$

Die Menge  $P$  umfaßt alle Indizes der vorhandenen Teilflächen (siehe Definition 5.5.1 im Abschnitt 5.5). Die Fließregel und das Ver-/Entfestigungsgesetz (5.47a,b) (5.24) werden hier noch einmal wiedergegeben.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P &= \dot{\lambda} \partial_{\sigma} \phi(\sigma, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^z \dot{\lambda}^k \partial_{\sigma} \phi_k(\sigma, \mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{D} \dot{\lambda} \partial_{\mathbf{q}} \phi(\sigma, \mathbf{q}) = -\mathbf{D} \sum_{k=1}^z \dot{\lambda}^k \partial_{\mathbf{q}} \phi_k(\sigma, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.47a,b)$$

Der Tensor der allgemeinen plastischen Module  $\mathbf{D}$  wurde in Abschnitt 5.4 definiert. Die Ableitung des Spannungstensors nach der Zeit folgt durch

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) \quad (10.2)$$

Es wird angenommen, daß der Index  $a$  auf eine aktive Fließfläche hinweist, d.h.  $a \in P_{zul}$ . Das Differential der entsprechenden Fließbedingungen lautet dann

$$\dot{\phi}_a = \nabla \phi_a(\Sigma) : \dot{\Sigma} \quad (10.3)$$

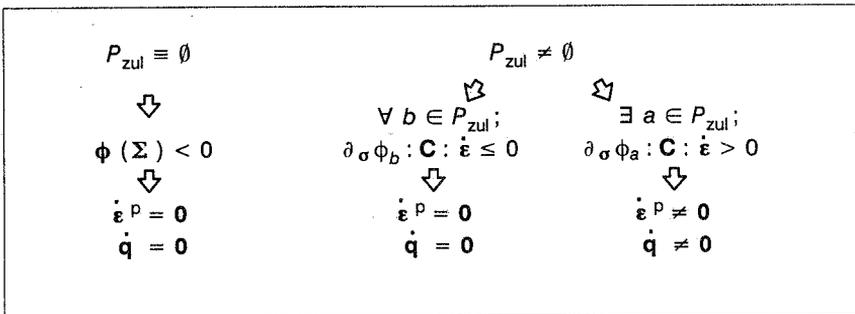
Nach Einsetzen von (5.47a,b) in (10.2) und dann in Gl. (10.3) erhält man

$$\dot{\phi}_a = \partial_\sigma \dot{\phi}_a : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} - \sum_{b \in P_{zul}} g_{ab} \dot{\lambda}^b \quad (10.4)$$

wobei  $g_{ab}$  eine Erweiterung der Funktion  $g(\Sigma)$ , Gl. (9.29), für mehrteilige Fließflächen ist

$$g_{ab}(\Sigma) := \nabla \phi_a(\Sigma) : \mathbf{C} : \nabla \phi_b(\Sigma) > 0 \quad (10.5)$$

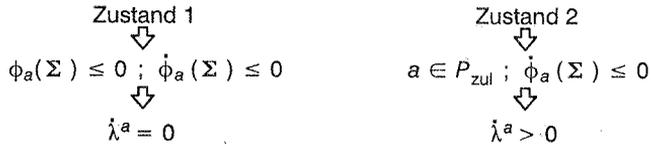
Wie in der Anmerkung des Abschnittes 9.4 schon erwähnt wurde, muß  $g_{ab}(\Sigma)$  auch positiv definit sein. Aus dieser Annahme und der Tatsache, daß  $\dot{\phi}_a(\Sigma) \leq 0$  erfüllt sein muß, kann man die Ent-/Belastungsbedingungen formulieren.



Tafel – 10.1 – Ent-/Belastungsbedingungen.

Es wird angenommen, daß eine plastische Beanspruchung aus  $\Sigma \in \partial E_\sigma$  stattfindet, wobei mehrere Fließflächen  $\phi_a$  aktiv werden. Es ist falsch zu denken, daß der endgültige aktive Zustand einer Fließfläche durch die Bedingung  $\partial_\sigma \phi_a : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} > 0$  gewährleistet wird.

Durch die Anwendung der Kuhn–Tucker Bedingungen (5.47c,d,e), zusammen mit der Konsistenzbedingung, können zwei mögliche Zustände definiert werden:



Definition 10.1.2 :

Alle Indizes, welche den aktiven Fließflächen (Zustand 2) entsprechen, werden in die Teilmenge  $P_{akt}$  aufgenommen

$$P_{akt} := \{a \in P_{zul} \mid \dot{\phi}_a(\Sigma) = 0\} \quad (10.6)$$

Gl. (10.4) kann unter Beachtung  $a \in P_{akt}$  wie folgt umgeschrieben werden

$$\partial_\sigma \phi_a : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \sum_{b \in P_{zul}} g_{ab} \dot{\lambda}^b = 0 \quad (10.7)$$

Wenn man eine solche Gleichung für jedes  $a \in P_{akt}$  aufstellt, erhält man ein möglicherweise unterbestimmtes Gleichungssystem, da die Anzahl  $z_{akt}$  der aktiven Fließflächen kleiner (maximal gleich) als die Anzahl  $z_{zul}$  der zulässigen Fließflächen sein kann. Das Gleichungssystem wird durch die zusätzlichen Bedingungen  $\dot{\lambda}^b = 0; b \in P_{zul}; b \notin P_{akt}$  bestimmbar. Da  $g_{ab}$  positiv definit angenommen wurde, existiert die Inverse  $g_{ab}^{-1} = g^{ab}$ . Die plastischen Multiplikatoren können dann durch die Umformulierung von Gl. (10.7) ermittelt werden.

$$\dot{\lambda}^a = \sum_{b \in P_{akt}} g^{ab} \partial_\sigma \dot{\phi}_b : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{für } a \in P_{akt}$$

und (10.8)

$$\dot{\lambda}^b = 0 \quad \text{für } b \notin P_{akt}$$

Durch Einsetzen von Gl. (10.8) in Gl. (10.2) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : \left[ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \sum_{a \in P_{akt}} \sum_{b \in P_{akt}} g^{ab} \partial_\sigma \phi_a [\partial_\sigma \phi_b : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}] \right] = \\ &= \left\{ \mathbf{C} - \sum_{a \in P_{akt}} \sum_{b \in P_{akt}} g^{ab} [\mathbf{C} : \partial_\sigma \phi_a] \otimes [\mathbf{C} : \partial_\sigma \phi_b] \right\} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{EP} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

wobei  $\mathbf{C}^{\text{EP}}$  den elastoplastischen konstitutiven Tensor des "Kontinuums" charakterisiert. Es ist offensichtlich, daß Gl. (10.9) den konstitutiven Tensor für einfache Fließflächen als Sonderfall beinhaltet.

### 10.1.1 Diskrete elastoplastische Formulierung

Die Grundsätze sind dieselben wie in Abschnitt 9.2. Ein verzerrungsgesteuerter Algorithmus wird angewandt und der plastische Zustand für den Prädiktorschritt wird am Zeitpunkt  $t_n$  als "eingefroren" betrachtet. Die folgende Tabelle faßt das zu lösende diskrete nichtlineare Gleichungssystem, die diskrete Entsprechung der Kuhn–Tucker Bedingungen und den elastischen Prädiktorzustand zusammen. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichungen, welche den elastischen Prädiktorzustand charakterisieren, nur Funktionsbestimmungen enthalten.

| Diskretes nichtlineares Gleichungssystem  | Diskretes Äquivalent der Kuhn–Tucker Bedingungen  | Elastischer Prädiktorzustand   |
|---|---|--|
| $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}})$ $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{p}} + \sum_{a=1}^z \Delta \lambda_{n+1}^a \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi_a$ $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \sum_{a=1}^z \Delta \lambda_{n+1}^a \partial_{\mathbf{q}} \phi_a$ $\mathbf{q}_{n+1} = -\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ | $\phi_a(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) \leq 0$ $\Delta \lambda_{n+1}^a \geq 0$ $\Delta \lambda_{n+1}^a \phi_a(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = 0$ | $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{e}*} := \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{p}}$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* := \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{e}*}$ $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}*} := \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{p}}$ $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^* := \boldsymbol{\alpha}_n$ $\mathbf{q}_{n+1}^* := -\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^*$ $\phi_{a,n+1}^* := \phi_a(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^*)$ |

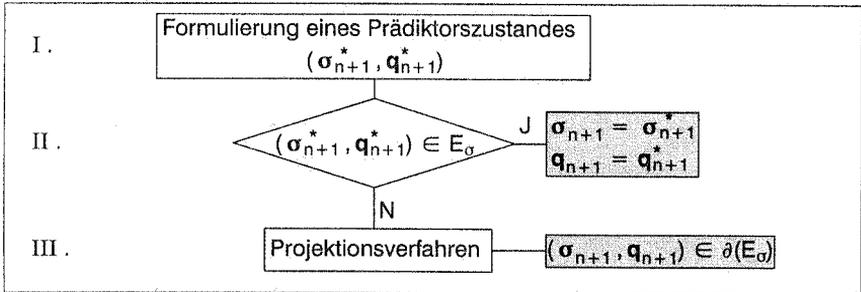
Tafel – 10.2 – Struktur des algorithmischen elastoplastischen Problems.

wobei die inneren Variablen  $\boldsymbol{\alpha}$  (und die konjugierten Variablen  $\mathbf{q}$ ) schon in Abschnitt 5.4 eingeführt worden sind.

Aus Tafel 10.2 entnimmt man die zu bestimmenden Größen  $(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \Delta \lambda_{n+1})$ , wobei die Größen  $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$  als abhängige Variablen betrachtet werden können. Im Fall elastischer Belastung bekommen die gesuchten Größen die Werte des Prädiktorzustandes. Wenn allerdings plastische Belastung stattfindet, wird der elasto–plastische Algorithmus durch eine rein plastische Relaxationsphase vervollständigt. Diese Phase ist durch die Erfüllung der Konsistenzbedingung am betrachteten Zeitpunkt gekennzeichnet. In der neueren numerischen Plastizitätstheorie werden zu diesem Zweck *Projektionsverfahren* bevorzugt. Solche Verfahren weisen daraufhin, daß ein nicht zulässiger Zustand  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* \notin E_{\sigma}$  durch eine Projektion auf die Fließfläche  $\partial(E_{\sigma})$  wieder

rückgebracht wird. Die Prädiktor–Projektionsverfahren können in drei wesentliche Teilschritte unterteilt werden; sie sind in Tafel 10.3 wiedergegeben.

Hier wird der "Closest Point–Algorithmus" als Projektionsverfahren angewandt. Man kann sich dieses Verfahren geometrisch als die Projektion des Prädiktorzustandes auf die Fließfläche als die kürzeste Entfernung vorstellen. Um eine Entfernung in einem Raum zu definieren, muß man eine Metrik einführen. Für die Plastizität mit Verfestigung wird die Metrik durch die Matrix  $\mathbf{G}$  von Gl. (9.4) definiert. Zu beachten ist, daß man sich bei diesem Algorithmus auf der lokalen Ebene befindet, d.h. am einzelnen Integrationspunkt innerhalb eines Elementes.



Tafel – 10.3 – Wesentliche Teilschritte des Prädiktor–Projektionsverfahren.

Nach einigen Zwischenrechnungen für die nichtlinearen Gleichungen (erste Spalte Tafel 10.2) unter Einbeziehung des Prädiktorzustandes erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\phi})|_{n+1} &= \mathbf{C}^{-1} : [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*] + \sum_{a=1}^Z \Delta \lambda_{n+1}^a \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi_a = 0 \\
 \mathbf{h}_2(\mathbf{q}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \partial_{\mathbf{q}} \boldsymbol{\phi})|_{n+1} &= \mathbf{D}^{-1} : [\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n] + \sum_{a=1}^Z \Delta \lambda_{n+1}^a \partial_{\mathbf{q}} \phi_a = 0
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

$$\mathbf{h}_3(\boldsymbol{\Sigma})|_{n+1} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) = 0$$

Es ist einfach zu zeigen, daß die Gleichungen (10.10) auch aus der entsprechenden diskreten Form  $\mathcal{L}_{n+1}^P$  der Lagrange Funktion Gl. (5.46) ermittelt werden können.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}_{n+1}^P(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}') &:= \frac{1}{2} [ [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \boldsymbol{\sigma}'] : \mathbf{C}^{-1} : [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \boldsymbol{\sigma}'] + \\
 &\quad + [\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}'] \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}'] ]
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

$$\mathcal{L}_{n+1}^P(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}', \Delta \boldsymbol{\lambda}') := \mathbb{D}_{n+1}^P(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}') + \Delta \boldsymbol{\lambda}'^T \cdot \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}')$$

Die Gl. (10.10) können mit Gl. (10.11) umgeschrieben werden:

$$\mathbf{h}_1(\boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi) |_{n+1} = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{L}_{n+1}^P$$

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{q}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \partial_{\mathbf{q}} \phi) |_{n+1} = \partial_{\mathbf{q}} \mathcal{L}_{n+1}^P \quad (10.12)$$

$$\mathbf{h}_3(\boldsymbol{\Sigma}) |_{n+1} = \partial_{\Delta \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}_{n+1}^P$$

Da die Bestimmung des endgültigen Zustandes  $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$  eine Minimierungsaufgabe darstellt, stehen die Algorithmen der nichtlinearen konvexen Programmierung zur Verfügung (siehe z.B. Kapitel 14 von Luenberger [66]). Mit den folgenden Bezeichnungen

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{wobei } \mathbf{x} = \{ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \} \quad (10.13)$$

und

$$\mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} = \mathcal{L}_{n+1}^P(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (10.14)$$

wird im Hinblick auf ein Newton–Raphson Verfahren eine quadratische Approximation für  $\mathcal{L}_{n+1}^P$  in Form von  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  vorgenommen

$$\mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k+1)}} = \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} + \nabla^T \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} \Delta \mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x}^{(k)})^T \nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} (\Delta \mathbf{x}^{(k)}) \quad (10.15)$$

Das Minimum von  $\mathcal{L}_{n+1}^P$  in Richtung von  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  wird aus den Richtungsableitungen gewonnen:

$$D \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k+1)}} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \nabla \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} + \nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (10.16)$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{x}^{(k)} = - \left[ \nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} \right]^{-1} \nabla \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[ \nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}} \right]^{-1} \nabla \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}}$$

Hierin ist  $\nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}}$  die Hessematrix von  $\mathcal{L}_{n+1}^{P^{(k)}}$ . Die Hessematrix ist eine quadratische Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen von  $\mathcal{L}_{n+1}^P$  in  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Für das betrachtete elastoplastische Problem wird die Hessematrix durch

$$\nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} = \begin{array}{c} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)-1} \quad \nabla \phi(\Sigma_{n+1}^{(k)}) \\ \left[ \begin{array}{cc|c} \partial_{\sigma\sigma}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\sigma\Delta\lambda}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \\ \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\mathbf{q}\Delta\lambda}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \\ \hline \partial_{\Delta\lambda\sigma}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\Delta\lambda\mathbf{q}}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} & \partial_{\Delta\lambda\Delta\lambda}^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \end{array} \right] \\ \left[ \nabla \phi(\Sigma_{n+1}^{(k)}) \right]^T \quad \mathbf{0} \end{array} \quad (10.17)$$

definiert und  $\mathbf{A}_{n+1}^{-1}$  und  $\nabla \phi(\Sigma_{n+1})$  werden durch die Ableitungen von Gl. (10.10)

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(k)-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} + \sum_{a=1}^Z \Delta\lambda_{n+1}^{a^{(k)}} \partial_{\sigma\sigma} \phi_{a_{n+1}}^{(k)} & \sum_{a=1}^Z \Delta\lambda_{n+1}^{a^{(k)}} \partial_{\sigma\mathbf{q}} \phi_{a_{n+1}}^{(k)} \\ \sum_{a=1}^Z \Delta\lambda_{n+1}^{a^{(k)}} \partial_{\mathbf{q}\sigma} \phi_{a_{n+1}}^{(k)} & \mathbf{D}^{-1} + \sum_{a=1}^Z \Delta\lambda_{n+1}^{a^{(k)}} \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}} \phi_{a_{n+1}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

$$\nabla \phi_{n+1}^{(k)} := \nabla \phi(\Sigma_{n+1}^{(k)}) := \begin{bmatrix} \partial_{b_{n+1}} \phi_{n+1}^{(k)} \\ \partial_{\mathbf{q}} \phi_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix}; \Delta \mathbf{V}^{(k)} := \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{n+1}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix}; \mathbf{R}^{(k)} := \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \\ \partial_{\mathbf{q}} \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \end{bmatrix}$$

gewonnen. Werden die obengenannten Definitionen in Gl. (10.16) eingesetzt, erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)-1} & \nabla \phi_{n+1}^{(k)T} \\ \nabla \phi_{n+1}^{(k)T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{(k)} \\ \partial_{\Delta\lambda} \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{(k)} \\ \Phi_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (10.19)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt zu

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(k)} = \left\{ (\nabla \phi^T \mathbf{A} \nabla \phi)^{-1} [\Phi - \nabla \phi^T \mathbf{A} \mathbf{R}] \right\}_{n+1}^{(k)} \quad (10.20)$$

Die plastischen Multiplikatoren können wie folgt aktualisiert werden

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \quad (10.21)$$

Dadurch werden die Variablen  $\epsilon_{n+1}^{p^{(k)}}$ ,  $\alpha_{n+1}^{(k)}$  und folglich  $\sigma_{n+1}^{(k)}$ ,  $\mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$  bestimmt.

Am Beispiel zweier aktiver Fließflächenabschnitte wird das linearisierte Problem durch

$$\nabla^2 \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{n+1}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \\ \Delta \lambda_{n+1}^{1(k)} \\ \Delta \lambda_{n+1}^{2(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \partial_{\sigma} \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \\ \partial_{\mathbf{q}} \mathcal{L}_{n+1}^{p^{(k)}} \\ \Phi_{1_{n+1}}^{(k)} \\ \Phi_{2_{n+1}}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (10.22)$$

beschrieben, wobei die Hessematrix in Tafel 10.4 wiedergegeben ist. Gl. (10.22) stellt eine Gleichungssystem mit  $6+m+2$  zu bestimmenden Variablen dar ( $m$  charakterisiert die Anzahl der internen Variablen). Die Lösung dieses Gleichungssystems für  $\Delta\lambda_{n+1}^{1(k)}, \Delta\lambda_{n+1}^{2(k)}$  lautet

$$\begin{Bmatrix} \Delta\lambda^1 \\ \Delta\lambda^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\sigma}^T \phi_1 & \partial_{\mathbf{q}}^T \phi_1 \\ \partial_{\sigma}^T \phi_2 & \partial_{\mathbf{q}}^T \phi_2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} \phi_1 & \partial_{\sigma} \phi_2 \\ \partial_{\mathbf{q}} \phi_1 & \partial_{\mathbf{q}} \phi_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_{\sigma}^T \phi_1 & \partial_{\mathbf{q}}^T \phi_1 \\ \partial_{\sigma}^T \phi_2 & \partial_{\mathbf{q}}^T \phi_2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \partial_{\sigma} \mathcal{L}^P \\ \partial_{\mathbf{q}} \mathcal{L}^P \end{Bmatrix} \Big|_{n+1}^{(k)} \quad (10.23)$$

Es wird angenommen, daß die durch den elastischen Prädiktor aktiven Fließflächen am Ende des iterativen Prozesses noch aktiv bleiben.

| $\frac{\partial^2 \mathcal{L}^P}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{X}} \Big _{n+1}^{(k)} = \text{Hessematrix}$ |   |   |                                |                                |
|---|---|---|--------------------------------|--------------------------------|
| X \ Y   | $\sigma^T$  | $\mathbf{q}^T$  | $\Delta\lambda^1$              | $\Delta\lambda^2$              |
| $\sigma$  | $\mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda^1 \partial_{\sigma\sigma}^2 \phi_1 + \Delta\lambda^2 \partial_{\sigma\sigma}^2 \phi_2$ | $\Delta\lambda^1 \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 \phi_1 + \Delta\lambda^2 \partial_{\sigma\mathbf{q}}^2 \phi_2$                           | $\partial_{\sigma} \phi_1$     | $\partial_{\sigma} \phi_2$     |
| $\mathbf{q}$  | $\Delta\lambda^1 \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2 \phi_1 + \Delta\lambda^2 \partial_{\mathbf{q}\sigma}^2 \phi_2$           | $\mathbf{D}^{-1} + \Delta\lambda^1 \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 \phi_1 + \Delta\lambda^2 \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 \phi_2$ | $\partial_{\mathbf{q}} \phi_1$ | $\partial_{\mathbf{q}} \phi_2$ |
| $\Delta\lambda^1$   | $\partial_{\sigma}^T \phi_1$  | $\partial_{\mathbf{q}}^T \phi_1$  | 0                              | 0                              |
| $\Delta\lambda^2$   | $\partial_{\sigma}^T \phi_2$  | $\partial_{\mathbf{q}}^T \phi_2$  | 0                              | 0                              |

Tafel – 10.4 – Hessematrix für den Fall von zwei aktiven Fließflächen.

Wie bereits erwähnt ist es nicht möglich, die endgültigen aktiven Fließflächenabschnitte im voraus zu bestimmen, d.h. die Teilmenge  $P_{\text{akt}}$  ist a priori nicht bekannt.

$$\phi_{a_{n+1}}^* > 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{a_{n+1}} = 0 \quad \wedge \quad \Delta\lambda_{n+1}^a > 0$$

Gl. (10.10a) weist darauf hin, daß  $\Delta\lambda_{n+1}^a$  die kontravarianten Komponenten des Vektors  $\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^*$  darstellen. Eine geometrische Darstellung für den Fall der perfekten Plastizität und  $z_{\text{zul}} = 2$  aus [114] wird hier abgebildet.

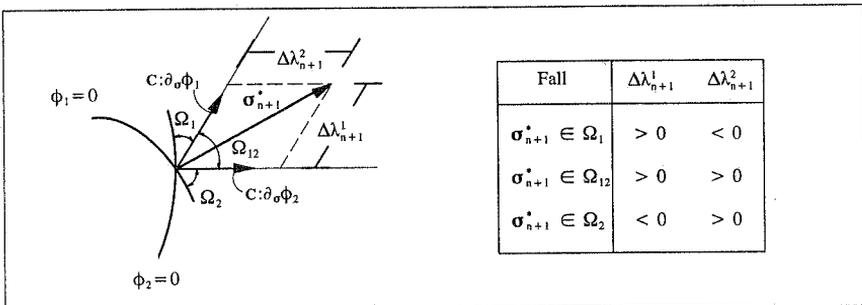


Abbildung 10.3 – Geometrische Veranschaulichung der kontravarianten Komponenten von  $\Delta\lambda_{n+1}^a$ .

Abbildung 10.3 zeigt den Übergang zwischen zwei Abschnitten der Fließfläche und die dabei entstehenden drei Gebiete ( $\Omega_1, \Omega_{12}, \Omega_2$ ). Der an dieser Stelle liegende elastische Prädiktor verletzt beide Fließflächen. Je nach Gebiet wechselt das Vorzeichen der entsprechenden Komponente des plastischen Multiplikators, der den endgültigen aktiven Zustand der Fließflächen charakterisiert.

Die Bestimmung des konsistent linearisierten konstitutiven Tensors erfolgt analog zur Herleitung an einer einfachen Fließfläche, wie sie in Abschnitt 9.4 gezeigt wurde. Die Bestimmung der konsistenten Tangente wird nur geringfügig abgeändert.

$$\mathbf{C}_{n+\alpha}^K = \mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM} - \sum_{a \in P_{\text{akt}}} \sum_{b \in P_{\text{akt}}} g_{ab}^{-1} \mathbf{N}_{a,n+\alpha} \mathbf{N}_{b,n+\alpha}^T \quad (10.24)$$

Hierbei ist der algorithmische Modul  $\mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM}$  gleich der Matrix  $\mathbf{A}$  von Gl. (10.18) zum Zwischenzeitpunkt  $t_{n+\alpha}$ .  $\mathbf{N}$  wird durch

$$\mathbf{N}_{a,n+\alpha} := \mathbf{C}_{n+\alpha}^{AM} : \nabla \phi_a(\boldsymbol{\Sigma}_{n+\alpha}) \quad (10.25)$$

beschrieben.

## 10.2 Numerische Behandlung des CAP-Modells

### 10.2.1 Projektionsverfahren ("Closest point projection")

Die Vorgehensweise von Abschnitt 10.1 wird auf das CAP-Modell (vgl. Abschnitt 7.1) angewandt. Die Abschnitte der Fließfläche dieses Modells werden durch die eingeführten Funktionen von Gl. (7.9) definiert.

$$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{\sigma}) &= |\mathbf{s}| - F_e(I_1) && \text{für } T \leq I_1 \leq \kappa \\ \phi_2(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) &= F_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) - F_e(\kappa) && \text{für } \kappa \leq I_1 \leq X(\kappa) \\ \phi_3(I_1) &= T - I_1 && \text{für } I_1 = T \end{aligned} \quad (10.26)$$

Spannungs- und Verzerrungstensoren werden in deviatorische und volumetrische Anteile aufgespalten.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{s} + \frac{1}{3} I_1 \boldsymbol{\delta} && \text{wobei } I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta} = \sigma_{kk} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{e} + \frac{1}{3} \bar{I}_1 \boldsymbol{\delta} && \text{wobei } \bar{I}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\delta} = \varepsilon_{kk} \end{aligned} \quad (10.27)$$

mit den konstitutiven Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \\ I_1 &= 3K(\bar{I}_1 - \bar{I}_1^p) \end{aligned} \quad (10.28)$$

Die Gl. (10.28) resultieren aus der Aufspaltung des Verzerrungstensors in elastische und plastische Anteile;  $K$  ist der Kompressions- und  $G$  der Schubmodul.

In Abbildung 10.4 sind fünf mögliche Bereiche außerhalb des elastischen Bereiches zu erkennen, in denen plastische Belastung stattfinden kann. Die plastische Belastung wird durch den elastischen Prädiktorschritt festgestellt. Tafel 10.5 zeigt eine Zusammenfassung der Bedingungen, welche die plastische Belastung in jedem einzelnen Bereich charakterisiert.

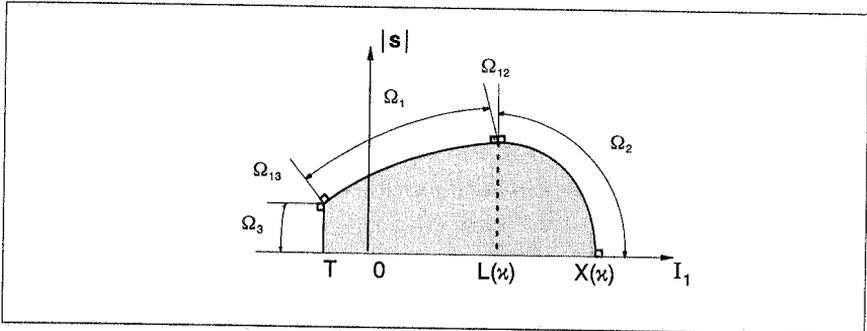


Abbildung 10.4 – Charakterisierung der plastischen Belastungsbereiche für das CAP-Modell.

| Bereich   | Charakterisierung der plastischen Belastung  |  |   |
|---|--|--|---|
| $\Omega_i$<br>$i = 1 \dots 3$                       | $\phi_{i_{n+1}}^* > 0$                       | $\Delta \lambda_{n+1}^i > 0$                             | $\Delta \lambda_{n+1}^k = 0$<br>$k = 1 \dots 3 \neq i$                |
| $\Omega_{ij}$<br>$i = 1$<br>$j = 2 \text{ oder } 3$ | $\phi_{i_{n+1}}^* > 0; \phi_{j_{n+1}}^* > 0$ | $\Delta \lambda_{n+1}^i > 0; \Delta \lambda_{n+1}^j > 0$ | $\Delta \lambda_{n+1}^k = 0$<br>$k = 3 \text{ oder } 2 \neq i \neq j$ |

Tafel – 10.5 – Plastische Belastungsbereiche

Jeder Bereich wird näher betrachtet.

### Bereich $\Omega_1$

Gl. (10.10a) und der Gradient der Fließfläche  $\partial_{\sigma} \phi_1$  werden in deviatorische und volumetrische Anteile aufgespalten

$$\mathbf{h}_{1_{n+1}} = \mathbf{h}_{1_{n+1}}^d + \mathbf{h}_{1_{n+1}}^v \delta \quad (10.29)$$

$$\partial_{\sigma} \phi_{1_{n+1}} = (\partial_{\sigma} \phi_1^d + \partial_{\sigma} \phi_1^v) |_{n+1} = \left( \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} - \frac{dF_e}{dI_1} \delta \right)_{n+1} \quad (10.30)$$

Das Einsetzen von Gl. (10.30) in Gl. (10.10a) ergibt

$$h_1^d(\mathbf{s}, \Delta\lambda^j)|_{n+1} = \frac{1}{2G}(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^*) + \Delta\lambda_{n+1}^j \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{|\mathbf{s}_{n+1}|} = 0 \quad (10.31)$$

und

$$h_1^y(I_1, \Delta\lambda^j)|_{n+1} = \frac{1}{9K}(I_{1n+1} - I_{1n+1}^*) - \Delta\lambda_{n+1}^j \frac{dF_e}{dI_1} = 0 \quad (10.32)$$

Die zusätzlich notwendige Gleichung wird durch

$$h_3(\mathbf{s}, I_1)|_{n+1} = \phi_1(\mathbf{s}, I_1)|_{n+1} = 0 \Rightarrow |\mathbf{s}_{n+1}| = F_e(I_{1n+1}) \quad (10.33)$$

beschrieben, und bildet mit Gln. (10.31), (10.32) ein nichtlineares Gleichungssystem, dessen Lösung den projizierten Zustand  $\sigma_{n+1} \in \partial E_\sigma$  charakterisiert.

Die vektorielle Gleichung (10.31) ( $\mathbf{s}$  wird als sechsdimensionaler Vektor betrachtet) kann in

$$\mathbf{s}_{n+1} \left[ 1 + \frac{2G\Delta\lambda_{n+1}^j}{|\mathbf{s}_{n+1}|} \right] = \mathbf{s}_{n+1}^* \quad (10.34)$$

umgeschrieben werden. Aus dieser Gleichung wird unmittelbar deutlich, daß sowohl  $\mathbf{s}_{n+1}$  als auch  $\mathbf{s}_{n+1}^*$  dieselbe Richtung aufweisen. Wird Gl. (10.34) durch  $\mathbf{s}_{n+1}^*$  vormultipliziert, erhält man

$$|\mathbf{s}_{n+1}| = |\mathbf{s}_{n+1}^*| - 2G\Delta\lambda_{n+1}^j \quad (10.35)$$

Gl. (10.35) wird in Gl. (10.33) eingesetzt und Gl. (10.32) umgeschrieben. Es folgt eine einzige skalare nichtlineare Gleichung für die Lösung des Projektionsschrittes im Bereich  $\Omega_1$ .

$$\Delta\lambda^j(I_{1n+1}) = \frac{|\mathbf{s}_{n+1}^*| - F_e(I_{1n+1})}{2G} \quad (10.36)$$

$$h(I_1)|_{n+1} = I_{1n+1}^* + 9K \Delta\lambda^j(I_{1n+1}) - I_{1n+1} = 0 \quad (10.37)$$

### Bereich $\Omega_2$

Die Fließfläche wird durch

$$\phi_2(\sigma, \kappa) = \underbrace{\left[ |\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{R^2}(I_1 - L(\kappa))^2 \right]^{\frac{1}{2}}}_{F_c(\sigma, \kappa)} - F_e(\kappa) \quad \text{für } \kappa \leq I_1 \leq \dot{X}(\kappa) \quad (10.38)$$

beschrieben. Der Gradient der Fließfläche  $\partial_\sigma \phi_2$  wird bestimmt durch

$$\partial_\sigma \phi_2 = \partial_s \phi_2 \partial_\sigma \mathbf{s} + \partial_{I_1} \phi_2 \partial_\sigma I_1 \quad (10.39)$$

Darin ist

$$\partial_s \phi_2 = \mathbf{s} F_c^{-1} \quad ; \quad \partial_{I_1} \phi_2 = \frac{1}{R^2} (I_1 - L(\kappa)) F_c^{-1} \quad (10.40)$$

Mit Hilfe der Indexschreibweise ergibt sich

$$\partial_{\sigma_{kl}} s_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} =: \mathbf{P}_{dev} \quad ; \quad \partial_{\sigma_{kl}} I_1 = \delta_{kl} \quad (10.41)$$

wobei der Tensor  $\mathbf{P}_{dev}$  einen beliebigen zweistufigen Tensor auf dessen Deviator abbildet.

Gl. (10.40) und Gl. (10.41) wird in Gl. (10.39) eingesetzt und es entsteht der Gradient

$$\partial_{\sigma} \phi_2 = F_c^{-1} \left\{ \mathbf{s} + \frac{1}{R^2} (I_1 - L(\kappa)) \delta \right\} \quad (10.42)$$

Dieselbe Aufspaltung wie in Gl. (10.29) wird durchgeführt

$$h_1^d(\mathbf{s}, \kappa, I_1, \Delta \lambda^2) |_{n+1} = \frac{1}{2G} (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^*) + \Delta \lambda_{n+1}^2 \mathbf{s}_{n+1} F_{cn+1}^{-1} = 0$$

$$h_1^y(|\mathbf{s}|, \kappa, I_1, \Delta \lambda^2) |_{n+1} = \frac{1}{9K} (I_{1n+1} - I_{1n+1}^*) + \frac{1}{R^2} \Delta \lambda_{n+1}^2 (I_1 - L(\kappa)) F_{cn+1}^{-1} = 0 \quad (10.43)$$

$$h_3(\mathbf{s}, \kappa, I_1) |_{n+1} = \phi_2(\mathbf{s}, \kappa, I_1) |_{n+1} = 0$$

Zur Vervollständigung des Gleichungssystems (10.43) (9 Unbekannte in 8 Gleichungen) ist eine zusätzliche Gleichung erforderlich, die aus der Verfestigungsevolution Gl. (7.7e,f) gewonnen wird.

$$X(\kappa) = L(\kappa) + R F_e(L(\kappa)) \quad (7.7d)$$

$$\bar{\varepsilon}_V^p = W[1.0 - \exp(-DX(\kappa))] \quad (7.7e)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_V^p = \begin{cases} \dot{I}_1^p & \text{wenn } \dot{I}_1^p \geq 0 \text{ oder } \kappa > 0 \text{ und } \kappa > I_1 \\ 0 & \end{cases} \quad (7.7f)$$

Durch Zeitintegration von Gl. (7.7f) und unter Anwendung von Gl. (7.7e) erhält man

$$h_2(\bar{I}_1^p, \kappa) |_{n+1} = \bar{I}_{1n+1}^p - \bar{I}_{1n}^p - W(\exp^{-DX(\kappa_n)} - \exp^{-DX(\kappa_{n+1})}) = 0 \quad (10.44)$$

Gl. (10.44) vervollständigt das Gleichungssystem (10.43). Die vektorielle Gleichung (10.43a) kann analog zur Herleitung von Gl. (10.35) auf eine skalare Gleichung reduziert werden

$$|\mathbf{s}_{n+1}| \left[ 1 + 2G \Delta \lambda_{n+1}^2 F_{cn+1}^{-1} \right] = |\mathbf{s}_{n+1}^*| \quad (10.45)$$

Aus Gl. (10.43c) folgt

$$F_e(\kappa_{n+1}) = \left[ |\mathbf{s}|^2 + \frac{1}{R^2} (I_1 - L(\kappa))^2 \right]_{n+1}^{\frac{1}{2}} \quad (10.46)$$

Wird Gl. (10.43b) umgeschrieben, Gl. (10.46) eingesetzt und Gl. (5.7c) berücksichtigt, ergibt sich

$$I_{1n+1} - \kappa_{n+1} = \frac{R^2 F_e(\kappa_{n+1}) [I_{1n+1}^* - \kappa_{n+1}]}{R^2 F_e(\kappa_{n+1}) + 9K\Delta\lambda_{n+1}^2} \quad (10.47)$$

Werden Gln. (10.45) und (10.47) in Gl. (10.46) eingesetzt, bekommt man eine nichtlineare Gleichung in Abhängigkeit von  $\kappa_{n+1}$  und  $\Delta\lambda_{n+1}^2$

$$h(\kappa, \Delta\lambda^2)|_{n+1} = \left[ \left( \frac{F_e(\kappa) |\mathbf{s}^*|}{F_e(\kappa) + 2G\Delta\lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{RF_e(\kappa)(I_1^* - \kappa)}{R^2 F_e(\kappa) + 9K\Delta\lambda^2} \right)^2 \right]_{n+1}^{\frac{1}{2}} - F_e(\kappa_{n+1}) = 0 \quad (10.48)$$

Da die erste Invariante des Spannungstensors durch

$$I_{1n+1} = I_{1n+1}^* - 3K(\bar{I}_{1n+1}^p - \bar{I}_{1n}^p) \quad (10.49)$$

beschrieben werden kann, erhält man nach dem Einsetzen von Gl. (10.49) in Gl. (10.43b) die Beziehung zwischen  $\kappa_{n+1}$  und  $\Delta\lambda_{n+1}^2$

$$\Delta\lambda_{n+1}^2 = \frac{R^2 F_e(\kappa_{n+1}) \Delta \bar{I}_{1n+1}^p}{3(I_{1n+1} - \kappa_{n+1})} = \frac{R^2 F_e(\kappa_{n+1}) \Delta \bar{I}_{1n+1}^p}{3(I_{1n+1}^* - 3K\Delta \bar{I}_{1n+1}^p - \kappa_{n+1})} \quad (10.50)$$

Gl. (10.48) stellt jetzt eine skalare nichtlineare Beziehung für  $\kappa_{n+1}$  dar

$$h(\kappa)|_{n+1} = \left[ \left( \frac{F_e(\kappa) |\mathbf{s}^*|}{F_e(\kappa) + 2G\Delta\lambda^2(\kappa)} \right)^2 + \left( \frac{RF_e(\kappa)(I_1^* - \kappa)}{R^2 F_e(\kappa) + 9K\Delta\lambda^2(\kappa)} \right)^2 \right]_{n+1}^{\frac{1}{2}} - F_e(\kappa_{n+1}) = 0 \quad (10.51)$$

### Bereich $\Omega_3$

Die Fließfläche ist durch

$$\phi_3(I_1) = T - I_1 \quad \text{für } I_1 = T \quad (10.26c)$$

beschrieben. Die Aufspaltung von Gl. (10.29) ergibt

$$h_1^d(\mathbf{s})|_{n+1} = \frac{1}{2G} (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^*) = \mathbf{0} \quad (10.52)$$

$$h_1^y(I_1, \Delta\lambda^3)|_{n+1} = \frac{1}{9K} (I_{1n+1} - I_{1n+1}^*) - \Delta\lambda_{n+1}^3 = 0$$

Da die Fließfläche  $\phi_3$  sich nicht verfestigen kann, muß folgende Bedingung erfüllt werden

$$I_{1n+1} = T \quad (10.53)$$

Gl. (10.53) wird in Gl. (10.52b) eingesetzt:

$$\Delta\lambda_{n+1}^3 = \frac{1}{9K}(T - I_{1n+1}^*) \quad (10.54)$$

### Kantenbereiche

#### Bereich $\Omega_{13}$ (Zugkante)

In diesem Fall muß der projizierte Zustand auf der Schnittkante beider Fließflächen liegen, da sie sich nicht verfestigen können. Diese Bedingung wird durch

$$I_{1n+1} = T \quad ; \quad |\mathbf{s}_{n+1}| = F_e(T) \quad (10.55)$$

erfüllt. Für diesen Bereich gilt

$$\begin{aligned} h_1^d(\mathbf{s}, \Delta\lambda^j)|_{n+1} &= \frac{1}{2G}(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^*) + \Delta\lambda_{n+1}^j \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{|\mathbf{s}_{n+1}|} = \mathbf{0} \\ h_1^y(I_1, \Delta\lambda^j)|_{n+1} &= \frac{1}{9K}(I_{1n+1} - I_{1n+1}^*) - \Delta\lambda_{n+1}^j \frac{dF_e}{dI_1} - \Delta\lambda_{n+1}^3 = 0 \end{aligned} \quad (10.56)$$

Aus Gl. (10.56a) folgt gemäß Gl. (10.36)

$$\Delta\lambda^j(I_{1n+1}) = \frac{|\mathbf{s}_{n+1}^*| - F_e(I_{1n+1}^*)}{2G} \quad (10.36)$$

Durch Einsetzen von Gl. (10.36) in Gl. (10.56b) folgt

$$\Delta\lambda_{n+1}^3 = \frac{1}{9K}(T - I_{1n+1}^*) - \frac{|\mathbf{s}_{n+1}^*| - F_e(I_{1n+1}^*)}{2G} \frac{dF_e}{dI_1} \quad (10.57)$$

Durch die Bedingungen  $\phi_{1n+1}^* > 0$  und  $\phi_{3n+1}^* > 0$  ist nicht gewährleistet, daß beide Fließflächen tatsächlich am Ende des Projektionsverfahrens aktiv werden. Aus den Bedingungen  $\Delta\lambda_{n+1}^j > 0$  und  $\Delta\lambda_{n+1}^3 > 0$  werden unter Anwendung von Gln. (10.36) und (10.57) zwei zusätzliche Ungleichungen gewonnen, die einen im Bereich  $\Omega_{13}$  liegenden Prädiktorzustand charakterisieren.

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}_{n+1}^*| &> F_e(T) \\ |\mathbf{s}_{n+1}^*| &< \frac{2G}{9K} \frac{T - I_{1n+1}^*}{dF_e/dI_1} + F_e(T) \end{aligned} \quad (10.58)$$

Ein im Bereich  $\Omega_{13}$  liegender Prädiktorzustand wird durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} I_{1n+1}^* &< T \\ F_e(T) &< |\mathbf{s}_{n+1}^*| < \frac{2G}{9K} \frac{T - I_{1n+1}^*}{dF_e/dI_1} + F_e(T) \end{aligned} \quad (10.59)$$

festgelegt.

**Bereich**  $\Omega_{12}$  (Druckkante)

Aus Abbildung 7.2 wird ersichtlich, daß in diesem Bereich ein Ent-/Verfestigungsprozeß zwangsläufig nicht stattfindet (perfekte Plastizität). Diese Restriktion setzt voraus, daß sich der projizierte Zustand auf der Schnittkante beider Fließflächen befinden muß. Diese Restriktion wird durch

$$I_{1n+1} = \kappa_{n+1} \quad ; \quad |\mathbf{s}_{n+1}| = F_e(\kappa_{n+1}) \quad \text{und} \quad \kappa_{n+1} \equiv \kappa_n \quad (10.60)$$

beschrieben. Aus ihr folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^d(\mathbf{s}, \Delta\lambda^1, \Delta\lambda^2)|_{n+1} &= \frac{1}{2G} (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1}^*) + \Delta\lambda_{n+1}^1 \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{|\mathbf{s}_{n+1}|} + \Delta\lambda_{n+1}^2 \mathbf{s}_{n+1} F_{cn+1}^{-1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_1^v(I_1, \Delta\lambda^1)|_{n+1} &= \frac{1}{9K} (I_{1n+1} - I_{1n+1}^*) - \Delta\lambda_{n+1}^1 \frac{dF_e}{dI_1} = 0 \end{aligned} \quad (10.61)$$

wobei

$$F_{cn+1}^{-1} = \left[ |\mathbf{s}_{n+1}|^2 + \frac{1}{R^2} (I_{1n+1} - \kappa_{n+1})^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = |\mathbf{s}_{n+1}|^{-1} \quad (10.62)$$

Gl. (10.61a) kann zur folgenden skalaren nichtlinearen Gleichung reduziert werden

$$|\mathbf{s}_{n+1}| = |\mathbf{s}_{n+1}^*| - 2G(\Delta\lambda_{n+1}^1 + \Delta\lambda_{n+1}^2) \quad (10.63)$$

Aus Gl. (10.61b) folgt

$$\Delta\lambda_{n+1}^1 = \frac{1}{9K} \frac{\kappa_n - I_{1n+1}^*}{dF_e/dI_1} \quad (10.64)$$

In Gl. (10.63) wird Gl. (10.64) eingesetzt:

$$\Delta\lambda_{n+1}^2 = \frac{|\mathbf{s}_{n+1}^*| - F_e(\kappa_n)}{2G} - \frac{1}{9K} \frac{\kappa_n - I_{1n+1}^*}{dF_e/dI_1} \quad (10.65)$$

Unter der Voraussetzung, daß  $\Delta\lambda_{n+1}^1 > 0$  und  $\Delta\lambda_{n+1}^2 > 0$  erfüllt werden müssen, ergeben sich zwei Ungleichungen, welche die plastische Belastung in der Druckkante gewährleisten.

$$I_{1n+1}^* < \kappa_n \quad ; \quad |\mathbf{s}_{n+1}^*| > \frac{2G}{9K} \frac{\kappa_n - I_{1n+1}^*}{dF_e/dI_1} + F_e(\kappa_n) \quad (10.66)$$

## 10.2.2 Konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichung

Die konsistente Linearisierung der konstitutiven Gleichungen für das CAP-Modell erfolgt analog zur Herleitung für einfache Fließflächen (Bereiche  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$ ) nach Abschnitt 9.4 und für die Kantenbereiche ( $\Omega_{12}$  und  $\Omega_{13}$ ) nach Abschnitt 10.1.1.

Da sich die Fließflächen  $\phi_1$  und  $\phi_3$  ideal plastisch (keine Verfestigung) verhalten, wird der konsistente konstitutive Tensor  $\mathbf{C}_{n+1}^K$ , Gl. (10.24), für  $\alpha = 1$  durch

$$\mathbf{C}_{n+1}^K = \mathbf{C}_{n+1}^{AM} - \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}^T \quad (10.67)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{AM} &= \left[ \mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda^a \partial_{\sigma\sigma} \phi_a(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \right]^{-1} \\ \mathbf{N}_{n+1} &= \frac{\mathbf{C}_{n+1}^{AM} \partial_{\sigma} \phi_a}{\left[ \partial_{\sigma} \phi_a^T \mathbf{C}_{n+1}^{AM} \partial_{\sigma} \phi_a \right]^{1/2}} \quad \text{für } a=1 \text{ oder } a=3 \end{aligned} \quad (10.68)$$

beschrieben. Wie erwähnt, kann sich die Kappe weiter verfestigen. Da die Änderungsrate des plastischen Anteils der ersten Invariante des Verzerrungstensors durch

$$\dot{\mathbf{I}}_1^p = 3\dot{\lambda}^2 \partial_{\mathbf{I}_1} \phi_2 \quad (10.69)$$

definiert ist, wird die Änderungsrate des Verfestigungsparameters  $\kappa$  aus dem Differential von Gl. (7.7e) gewonnen:

$$\dot{\kappa} = 3\dot{\lambda}^2 \frac{1}{WD \frac{dX(\kappa)}{d\kappa} e^{-DX(\kappa)}} \partial_{\mathbf{I}_1} \phi_2 = \dot{\lambda}^2 h \neq \dot{\lambda}^2 \partial_{\kappa} \phi_2 \quad (10.70)$$

Hierbei ist

$$h = \frac{3}{WD \frac{dX(\kappa)}{d\kappa} e^{-DX(\kappa)}} \partial_{\mathbf{I}_1} \phi_2 \quad (10.71)$$

Gl. (10.70) stellt ein nichtassoziertes Evolutionsgesetz für den Verfestigungsparameter dar. Der konsistente konstitutive Tensor  $\mathbf{C}_{n+1}^K$ , Gl. (10.24), für  $\alpha = 1$  wird wie folgt beschrieben

$$\mathbf{C}_{n+1}^K = \mathbf{C}_{n+1}^{AM} - \mathbf{M}_{n+1} \mathbf{M}_{n+1}^T \quad (10.72)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{AM} &= \left[ \mathbf{G}^{-1} + \Delta\lambda^2 \nabla \mathbf{m}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}) \right]^{-1} \\ \mathbf{M}_{n+1} &= \frac{\mathbf{C}_{n+1}^{AM} \nabla \phi_2}{\left[ \nabla \phi_2^T \mathbf{C}_{n+1}^{AM} \nabla \phi_2 \right]^{1/2}} ; \quad \mathbf{M}_{n+1} = \frac{\mathbf{C}_{n+1}^{AM} \mathbf{m}}{\left[ \nabla \phi_2^T \mathbf{C}_{n+1}^{AM} \mathbf{m} \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (10.73)$$

mit

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} \partial_{\sigma} \phi_2 \\ h \end{Bmatrix}; \quad \nabla \phi_2 = \begin{Bmatrix} \partial_{\sigma} \phi_2 \\ \partial_x \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (10.74)$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}; \quad \nabla \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \partial_{\sigma\sigma} \phi_2 & \partial_{\sigma x} \phi_2 \\ (\partial_{\sigma} h)^T & \partial_x h \end{bmatrix}$$

Durch Einsetzen von Gl. (10.74b) in Gl. (10.73a) folgt

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}} = \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} + \Delta\lambda^2 \begin{bmatrix} \partial_{\sigma\sigma} \phi_2 & \partial_{\sigma x} \phi_2 \\ (\partial_{\sigma} h)^T & \partial_x h \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (10.75)$$

Für den algorithmischen Modul  $\mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}}$  muß eine geränderte Matrix der folgenden Form invertiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda^2 \partial_{\sigma\sigma} \phi_2 \\ \mathbf{b} &= \Delta\lambda^2 \partial_{\sigma x} \phi_2 \\ \mathbf{c}^T &= (\Delta\lambda^2 \partial_{\sigma} h)^T \\ \mathbf{d} &= \Delta\lambda^2 \partial_x h \end{aligned}$$

$$\left[ \mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Die Inverse wird durch

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{22} &= \frac{1}{\mathbf{d} - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}} \\ \mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}} &= \mathbf{J}_{22} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{11} &= \frac{1}{\mathbf{J}_{22}} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{J}_{12} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{J}_{21} &= -\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (10.76)$$

gebildet. Die Tangentenbeziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor wird wie folgt hergeleitet

$$\mathbf{d} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{J}_{22} \left\{ \mathbf{J}_{11} - \frac{\mathbf{J}_{22}}{\mathbf{g}} \left[ \mathbf{J}_{11} \partial_{\sigma} \phi_2 + h \mathbf{J}_{12} \left[ \mathbf{J}_{11} \partial_{\sigma} \phi_2 + \partial_x \phi_2 \mathbf{J}_{12} \right]^T \right] \right\} \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (10.77)$$

wobei  $\mathbf{g} = \nabla \phi_2 \mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}} \mathbf{m}$

Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, daß die Nichtassoziativität des Verfestigungsgesetzes einen nicht symmetrischen konsistenten konstitutiven Tensor erzeugt. Im Rahmen der konsistenten Linearisierung des konstitutiven Tensors spricht man sowohl von einem nichtassoziierten Fließgesetz als auch von einem nichtassoziierten Verfestigungsgesetz. Der Charakter des Verfestigungsgesetzes spielt allerdings keine Rolle für den konstitutiven Tensor des "Kontinuums". Aus der Tatsache, daß der konstitutive

Tensor des Kontinuums vom konsistenten konstitutiven Tensor bestimmt werden kann (mit dem Streben von  $\Delta\lambda$  nach Null), erhält man

$$d\sigma = \underbrace{\left[ \mathbf{C} - \frac{1}{g} (\mathbf{C} : \partial_{\sigma} \phi_2) \otimes (\mathbf{C} : \partial_{\sigma} \phi_2) \right]}_{\mathbf{C}^{\text{ep}}} : d\epsilon \quad (10.78)$$

wobei  $g = \partial_{\sigma} \phi_2 : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} \phi_2$

Der Tensor  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  bleibt symmetrisch. Nur unter der Bedingung eines assoziierten Fließgesetzes und eines assoziierten Verfestigungsgesetzes bleibt der algorithmische Materialtensor symmetrisch. Eine Evolutionsregel für assoziierte Verfestigung beim CAP-Modell folgt aus

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}^2 D_2(\lambda) \partial_x \phi_2 \quad (10.79)$$

Gl. (10.79) wird zunächst in die Gln. (10.75), (10.76) und anschließend in Gl. (10.77) eingesetzt

$$\mathbf{C}_{n+1}^K = J_{22} \left\{ \mathbf{J}_{11} - \frac{J_{22}}{g} [\mathbf{J}_{11} \partial_{\sigma} \phi_2 + \partial_x \phi_2 \mathbf{J}_{12}] [\mathbf{J}_{11} \partial_{\sigma} \phi_2 + \partial_x \phi_2 \mathbf{J}_{12}]^T \right\} \quad (10.80)$$

wobei  $g = \nabla \phi_2 \mathbf{C}_{n+1}^{\text{AM}} \nabla \phi_2$

Gl. (10.80) stellt jetzt einen symmetrischen konstitutiven Tensor dar.

Da sowohl in Gl. (10.68a) als auch in Gl. (10.76a)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{C}^{-1} + \Delta\lambda^a \partial_{\sigma\sigma} \phi_a] \quad (10.81)$$

invertiert werden muß, und zwar für alle plastischen Gaußpunkte in jedem Element, sollte die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  möglichst explizit aufgestellt werden. Hierzu ist die zweite Ableitung der Fließbedingungen nach dem Spannungstensor (vgl. Tafel 10.6) aufzustellen.

| a | $\partial_{\sigma\sigma} \phi_a$   |
|---|--|
| 1 | $ \mathbf{s}_{n+1} ^{-1} (\mathbf{P}_{\text{dev}} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) - d_{I,I}^2 \mathbf{F}_e \delta \otimes \delta$ wobei $\mathbf{n} = \mathbf{s}  \mathbf{s} ^{-1}$ |
| 2 | $\mathbf{F}_e^{-1} (\lambda_{n+1}) (\mathbf{P}_{\text{dev}} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} + R^{-2} \delta \otimes \delta)$ wobei $\mathbf{n} = \partial_{\sigma} \phi_2$           |
| 3 | 0  |

Tafel – 10.6 – Zweite Ableitung der Fließbedingungen  $\phi_a$  nach dem Spannungstensor

Tafel 10.6 ist zu entnehmen, daß für  $a=1$  oder 2 eine gemeinsame Struktur für die Matrix  $\mathbf{A}$ , Gl. (10.81), gewonnen werden kann.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{H} - k_1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \quad (10.82)$$

wobei

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}^{-1} + k_1 \mathbf{P}_{\text{dev}} + k_2 \delta \otimes \delta$$

|       | $k_1$                     | $k_2$                        | $\mathbf{n}$                  |
|-------|---------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $a=1$ | $ \mathbf{s}_{n+1} ^{-1}$ | $-\text{d}_{I_1, I_1}^2 F_e$ | $\mathbf{s} \mathbf{s} ^{-1}$ |
| $a=2$ | $F_e^{-1}$                | $F_e^{-1} R^{-2}$            | $\partial_\sigma \phi_2$      |

Die inverse Matrix von  $\mathbf{A}$ , Gl. (10.81), kann mit der Sherman–Morrison Formel (siehe [140] Kap. IV) bestimmt werden

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{H}^{-1} : \mathbf{n}}{\mathbf{n} : \mathbf{H}^{-1} : \mathbf{n}} \quad (10.83)$$

Um  $\mathbf{A}^{-1}$  zu bestimmen, ist die Inverse von  $\mathbf{H}$  notwendig; hierzu werden die vierstufigen Tensoren  $\mathbf{P}_{\text{dev}}$  und  $\delta \otimes \delta$  in Matrixschreibweise dargestellt.

$$\delta \otimes \delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{\text{dev}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (10.84)$$

Mit Gl. (10.84) und nach einer Spektralzerlegung jeder auftretenden Matrix in Gl. (10.82b) kann  $\mathbf{H}$  umgeschrieben werden

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} [\Lambda_C^{-1} + k_1 \Lambda_{\text{dev}} + k_2 \Lambda_{\delta \otimes \delta}] \mathbf{Q}^T \quad (10.85)$$

wobei

$$(\Lambda_C^{-1})^T = \frac{1-\nu}{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad (10.86)$$

$$(\Lambda_{\text{dev}})^T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

$$(\Lambda_{\delta \otimes \delta})^T = [0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Die Spalten der Matrix  $\mathbf{Q}$  stellen die orthonormierten Eigenvektoren der Matrizen  $\mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{P}_{\text{dev}}$  und  $\delta \otimes \delta$  dar, wobei die Diagonalmatrizen  $\Lambda_{\mathbf{C}}^{-1}$ ,  $\Lambda_{\text{dev}}$  und  $\Lambda_{\delta \otimes \delta}$  die entsprechenden Eigenwerte als Elemente enthalten. Für eine ausführliche Beschreibung der hier durchgeführten Spektralzerlegung siehe [69]. Da die Eigenvektoren eine Orthogonalmatrix bilden, besitzen sie folgende Eigenschaft

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (10.87)$$

Somit wird die Inverse von  $\mathbf{H}$  durch

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{Q} \left[ \Lambda_{\mathbf{C}}^{-1} + k_1 \Lambda_{\text{dev}} + k_2 \Lambda_{\delta \otimes \delta} \right]^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (10.88)$$

bestimmt.

### 10.3 Numerische Behandlung des gekoppelten Modells

Ein thermodynamisches Potential wird für das gekoppelte Modell eingeführt, welches die bereits eingearbeiteten Potentiale der Abschnitte 5.6 und 7.2.1 koppelt.

$$A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}, d) = (1 - d)A_0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}^P : \boldsymbol{\varepsilon} + \Lambda^P(\boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}) \quad (10.89)$$

Den Überlegungen der erwähnten Abschnitte entsprechend ergibt sich folgende Beziehung für die Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 - \boldsymbol{\sigma}^P \quad (10.90)$$

An dieser Stelle wird von dem im Abschnitt 6.6 eingeführten effektiven Spannungstensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  Gebrauch gemacht. Nach unmittelbarer Erkenntnis kann man sagen, daß der plastische Fluß in einem bereits geschädigten Material auf die Mikrobindingen des ungeschädigten Materialanteils beschränkt ist. Aus diesem physikalischen Grund wird die Basis für die Beschreibung des teilelastischen–teilgeschädigten Bereiches auf effektive Größen ausgelegt. Folglich wird die Fließbedingung im  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q})$ -Raum beschrieben, wobei die effektive Spannung durch

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - d)} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0 - \boldsymbol{\sigma}^P \quad (10.91)$$

definiert ist.

Das lokale, inkrementelle, gekoppelt teilelastische–teilgeschädigte–teilplastische Problem wird hier zusammengefaßt (siehe Abschnitte 5.6 und 7.2.1) :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} &= \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}^2 A_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^P &= \dot{\lambda} \mathbf{r}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\lambda} \mathbf{h}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (10.92)$$

$$\dot{d} = \dot{\mu} H(\tilde{\varepsilon})$$

$$\dot{K} = \dot{\mu}$$

Das inkrementelle Problem kann in zwei Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil entspricht dem teilelastischen–teilgeschädigten Problem, der zweite dem teilplastischen Problem.

|                                 | teilelastischer<br>teilgeschädigter<br>Anteil                      | + | teilplastischer<br>Anteil                                      |
|---------------------------------|--|---|--|
| Gesamtes<br>Evolutionsproblem = | $\ddot{\sigma} = \partial_{\varepsilon}^2 A_0 : \dot{\varepsilon}$ |   | $\ddot{\sigma} = - \dot{\sigma}^P$                             |
|                                 | $\dot{d} = \dot{\tilde{\varepsilon}} H(\tilde{\varepsilon})$       |   | $\dot{d} = 0$  |
|                                 | $\dot{K} = \dot{\tilde{\varepsilon}}$                              |   | $\dot{K} = 0$  |
|                                 | $\dot{\sigma}^P = 0$   |   | $\dot{\sigma}^P = \dot{\lambda} r(\bar{\sigma}, \mathbf{q})$   |
|                                 | $\dot{\mathbf{q}} = 0$   |   | $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} h(\bar{\sigma}, \mathbf{q})$ |

(10.93)

Bezogen auf das gesamte Evolutionsproblem wird die Integration des inkrementellen Problems in zwei Phasen durchgeführt. Die erste Phase erfolgt durch die Formulierung eines teilelastischen–teilgeschädigten Prädiktors. In der zweiten Phase kommt ein plastischer Korrekturschritt im effektiven Raum zum Einsatz.

Die erste Phase fängt bei der Integration des teilgeschädigten Anteils an. Im Rahmen einer inkrementellen finiten Elemente Analyse wird der totale Dehnungstensor  $\varepsilon_{n+1}$  ohne zusätzliche Überlegungen aktualisiert. Die Formulierung der Schädigungsbedingung im Dehnungsraum führt zu einer einfachen Betrachtung der Schädigungsevolution. Die Überprüfung der Schädigungsbedingung ist direkt nachvollziehbar. Wird diese durch  $\hat{\Psi}_{n+1} > 0$  aktiviert, folgt die Integration der Evolutionsgleichung exakt aus (siehe Gln. (7.29), (7.30) und (7.32) für die Definition von G)

$$d_{n+1} = G(\tilde{\varepsilon}_{n+1}) \quad (10.94)$$

Die aktualisierte Schädigungsschwelle wird durch

$$K_{n+1} = \max\{K_n, \tilde{\varepsilon}_{n+1}\} \quad (10.95)$$

gegeben. Damit ist die Integration der teilgeschädigten Evolutionsgleichungen abgeschlossen. Die Prädiktorspannung wird dann im effektiven Raum durch

$$\bar{\sigma}_{n+1}^* = \mathbf{C}_0 : \varepsilon_{n+1} - \bar{\sigma}_n^P \quad (10.96)$$

formuliert und alle Fließbedingungen werden im  $(\bar{\sigma}_{n+1}^*, \mathbf{q}_n)$ –Raum verifiziert. Die Prozedur von Abschnitt 10.2 ist durch Ersetzen von  $\sigma$  durch  $\bar{\sigma}$  ohne Änderung nachzuvollziehen.

Ausgangspunkt zur Formulierung des teilelastischen–teilgeschädigten–teilplastischen konsistenten konstitutiven Tensors ist Gl. (10.91). Wird diese Gleichung abgeleitet, bekommt man die folgende Beziehung :

$$\dot{\bar{\sigma}}_{n+1} = \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{\text{Cep}} : \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1} \quad (10.97)$$

Der Tensor  $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{\text{Cep}}$  ist der teilelastische–teilplastische konsistente konstitutive Tensor im effektiven Raum. Die Beziehung zwischen der effektiven Spannung und der aktuellen Spannung folgt durch

$$\sigma_{n+1} = (1 - d_{n+1}) \bar{\sigma}_{n+1} \quad (10.98)$$

Werden Gl. (10.94) und (10.98) abgeleitet und in Gl. (10.97) eingesetzt, ergibt sich die gesuchte konsistente konstitutive Beziehung :

$$\dot{\sigma}_{n+1} = \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{\text{Codp}} : \dot{\epsilon}_{n+1} \quad (10.99)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{\text{Codp}} = \left\{ (1 - d) \bar{\mathbf{C}}^{\text{Cep}} - \frac{H}{\epsilon} \bar{\mathbf{C}}^{\text{Cep}} : \epsilon \otimes \mathbf{C}_0 : \epsilon \right\}_{n+1} \quad (10.100)$$

## 10.4 Parameteridentifikation

### 10.4.1 Motivation

Die mathematische Modellierung des Materialsverhaltens durch komplexe plastische Modelle bringt eine zusätzliche Schwierigkeit mit sich, nämlich die Identifikation der Materialparameter. In der hier verwendeten Fassung braucht das plastische Modell 9 Parameter (siehe Tafel 7.1), und für das gekoppelte Modell sind 12 Parameter (3 zusätzliche Parameter für den Schädigungsanteil, siehe Abschnitt 7.2.1: A; B;  $K_0$ ) notwendig. Für eine gute Anpassung sind mehrere Versuche erforderlich.

Die einfachste Möglichkeit zur Identifikation ist ein "trial and error" Verfahren. Es ist einsichtig, daß diese Vorgehensweise nicht effizient ist und auch zu groben Fehlern führen kann. Automatisierte Prozeduren, in Form von Kurvenanpassungsverfahren, z.B. mit dem Fehlerquadratminimumverfahren (siehe z.B. die Vorgehensweise von Zaman et. al [136]), werden demgegenüber bevorzugt. Auf Kurvenanpassung basierende Verfahren sind allerdings für komplizierte experimentelle Belastungsprogramme nicht geeignet. Beispiele dafür sind die an der Universität Colorado [100], [119], [101] durchgeführten Betonversuche.

Eine alternative Vorgehensweise ist die Anwendung von Algorithmen der mathematischen Programmierung, wobei eine zu minimierende Zielfunktion und die entsprechen-

den Schranken zu formulieren sind. Eine Fülle verschiedener Algorithmen [66], [9] steht zur Verfügung. Zur Parameteridentifikation hat Ju [44], u.a. auch für das CAP-Modell, den Marquardt-Levenberg Algorithmus angewandt; Wedemeier [130] verwendet auf Evolutionsstrategien basierende Algorithmen, die eine Analogie zur Darwinischen Evolutionstheorie [87] darstellen. Solche Algorithmen lassen sich einfach implementieren und brauchen nur die Kenntnis von wenigen statistischen Begriffen. Eine große Anzahl von Zielfunktionsauswertungen sind allerdings notwendig, um die Suchrichtung den weiteren Schritten anzupassen. Diese Algorithmen sind aber nur für gut konditionierte Probleme zu empfehlen.

#### 10.4.2 Beschreibung der angewandten Strategie

Zur Parameteridentifikation des vorliegenden plastischen Modells wurde ein Steuerprogramm entwickelt, das die Versuchsdaten – Spannungen und Dehnungen – für die plastischen Routinen bereitstellt. Durch die Anwendung eines SQP ("Sequentielle Quadratische Programmierung") Algorithmus und die mehrgliedrige Evolutionsstrategie [105] – getrennt oder zusammen – wird eine optimale Anpassung der Parameter gesucht.

Ausgangspunkt ist die Formulierung einer Zielfunktion und der entsprechenden Schranken und Nebenbedingungen für die Parameter. Eine mögliche Zielfunktion kann durch

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NP_i} \| \sigma_j(\mathbf{P}, \epsilon_j^{EXP}) - \alpha_j^{EXP} \|^2 \quad \text{wobei } f: \mathbb{R}^{6 \times NP_1 \times NV} \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.101)$$

$$\mathbf{P} = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta, R, W, D\}$$

definiert werden, wobei  $\mathbf{P}$  den Parametersatz,  $NV$  die Anzahl verschiedener Versuche und  $NP_i$  die Anzahl der experimentell ausgewerteten Spannungen  $\sigma_i^{EXP}$  und Dehnungen  $\epsilon_i^{EXP}$  im  $i$ -ten Versuch repräsentieren. Die Schranken und Nebenbedingungen stellen einen zulässigen Bereich  $\wp$  dar, den man sich als ein konvexes Hyperpolygon vorstellen kann. Das hier formulierte beschränkte Optimierungsproblem lautet :

$$\text{Gesucht sei } \mathbf{P} \rightarrow \min f(\mathbf{P})$$

$$\text{wobei } \mathbf{P} \in \wp \subset \mathbb{R}^7$$

Der zulässige Bereich  $\wp$  ist durch die folgenden Schranken

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^7 \quad (10.102)$$

und Nebenbedingungen definiert

$$\begin{aligned}
 F_e(0) &= \alpha - \gamma > 0 \rightarrow \alpha > \gamma \\
 F_e(T) &= \alpha - \gamma e^{-\beta T} + \theta T > 0 \\
 R < \frac{X(x) + T}{F_e(T)} &\rightarrow X(x) + T - R(\alpha - \gamma e^{-\beta T} + \theta T) > 0
 \end{aligned}
 \tag{10.103}$$

Die Bedingung von Gl. (10.103b) setzt voraus, daß die Zuggrenze T nach der Parameteridentifikation aktiv bleibt.

### 10.4.3 Beispiele

Die dargestellte Strategie zur Parameteridentifikation wird am Beispiel des an der Universität Colorado in Boulder durchgeführten und gut beschriebenen Versuchsprogramms für Beton angewandt. Im Rahmen dieses Programms wurden 67 Versuche gemacht, die in 6 Hauptserien geordnet sind. Eine kurze Beschreibung jeder Serie wird hier wiedergegeben. Für eine ausführliche Darstellung wird hier auf die Veröffentlichung von Scavuzzo et al. [101] verwiesen.

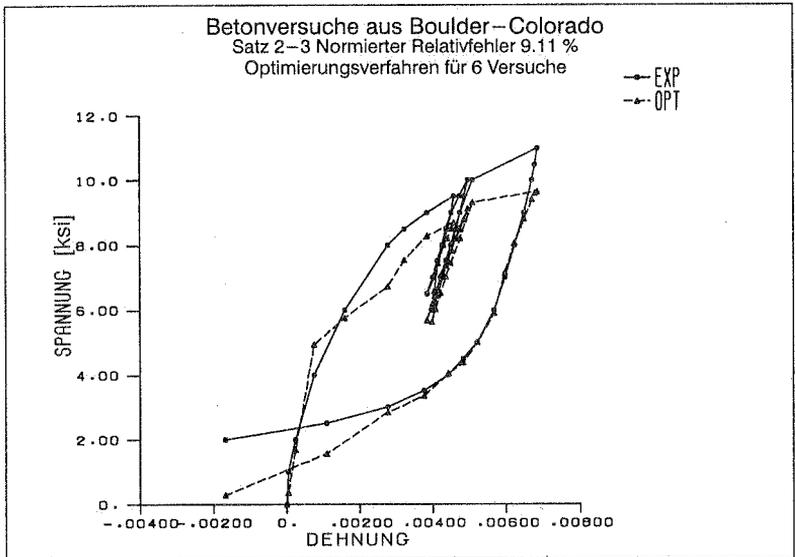
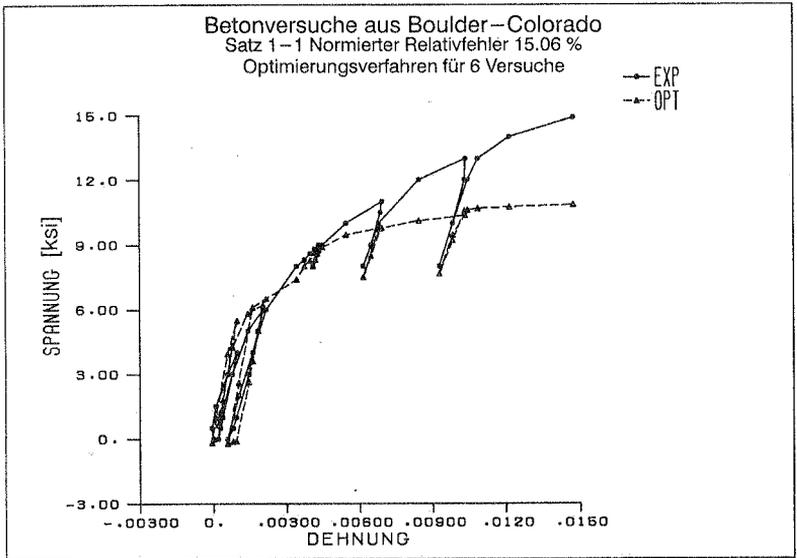
In Tafel 10.7 werden folgende Bezeichnungen für die Spannungspfade eingeführt:

- TC ... dreiachsiger Druckpfad ("triaxial compression")
- TE ... dreiachsiger Zugpfad ("triaxial tension")
- SS ... einfacher Schubpfad ("simple shear").

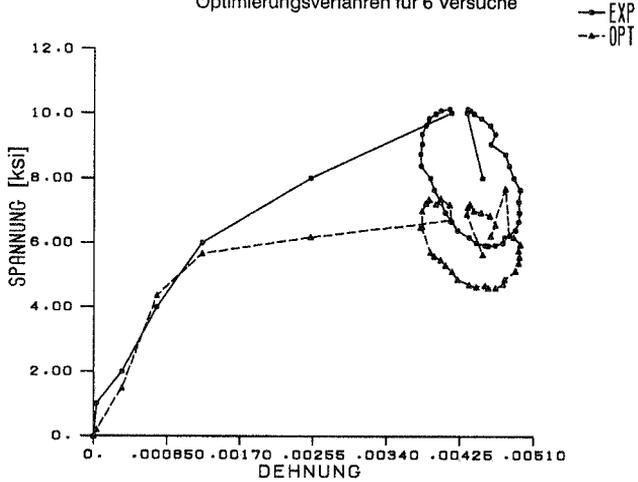
Diese Spannungspfade werden ausführlich von Desai und Siriwardane in [19] beschrieben.

| Serien | Anzahl | Vorbelastung           | Nachbelastung   |
|--------|--------|------------------------|---|
| 1      | 12     | zyklisch hydrostatisch | Zyklen in der deviatorischen Spannungsebene entlang der Pfade TC, SS oder TE <u>ohne</u> Spannungsumkehrung |
| 2      | 8      | monoton hydrostatisch  | Zyklen in der deviatorischen Spannungsebene entlang der Pfade TC, SS oder TE <u>mit</u> Spannungsumkehrung  |
| 3      | 17     | monoton hydrostatisch  | Belastung entlang "circular" Pfade in der deviatorischen Spannungsebene                                     |
| 4      | 22     | monoton hydrostatisch  | nicht konventionelle Pfade  |
| 5      | 6      | monoton hydrostatisch  | nicht proportional  |
| 6      | 2      | —                      | Stückweise einaxiale Schritte   |

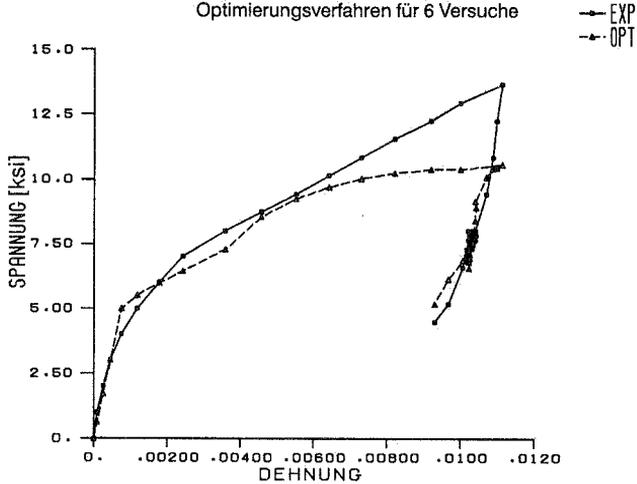
Tafel – 10.7 – Belastungsprogramm der für Beton an der Universität Colorado-Boulder durchgeführten Versuche.

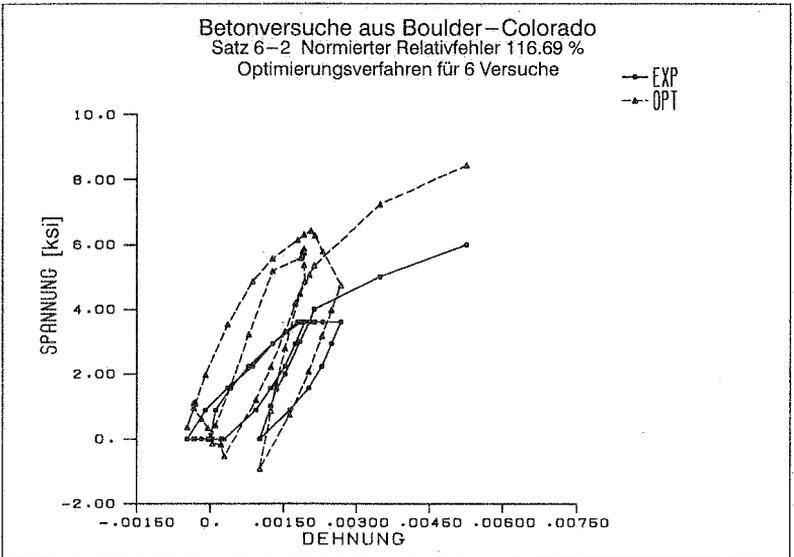
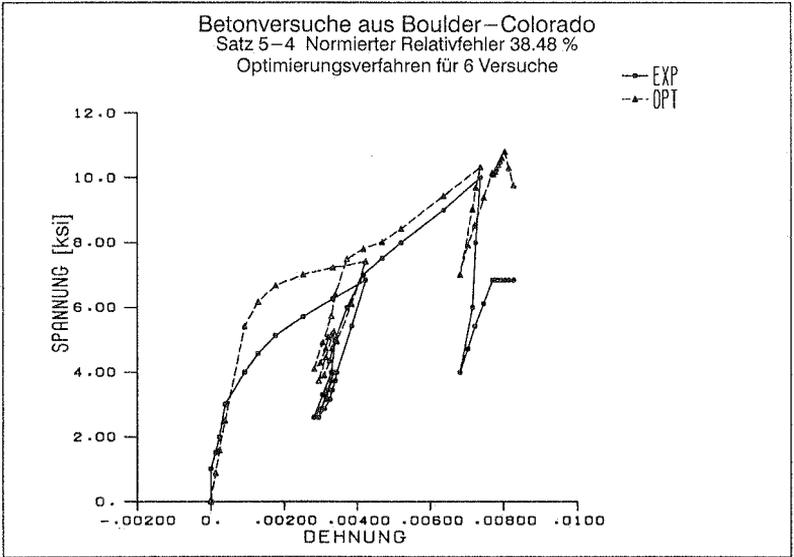


Betonversuche aus Boulder-Colorado  
 Satz 3-11 Normierter Relativfehler 26.28 %  
 Optimierungsverfahren für 6 Versuche



Betonversuche aus Boulder-Colorado  
 Satz 4-11 Normierter Relativfehler 11.77 %  
 Optimierungsverfahren für 6 Versuche





## 11 FINITE ELEMENT DISKRETISIERUNG

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Familie von dreidimensionalen Elementen im Programmsystem CARAT [120] implementiert. Diese Elemente sind für geometrisch (total oder mitgehende Lagrangesche Betrachtungsweise, Ramm [86], Bathe [3]) als auch physikalisch nichtlineare Analysen einsetzbar.

### 11.1 Dreidimensionale Elementfamilie

Die vorhandenen dreidimensionalen Elemente im Programmsystem CARAT [120] sind in Abbildung 11.2 dargestellt. Da diese Elemente sowie deren Konvergenzeigenschaften in der Literatur ausführlich behandelt sind, wird hier lediglich auf einige Bücher und Veröffentlichungen verwiesen, z.B. Clough [15], Zienkiewicz [138][139], Argyris [1]. Zusätzlich wird das 14-knotige Element (8 Eckknoten und 6 in der Mitte jeder Fläche) betrachtet, da dieses Element vor kurzem in [116] [117] vorgeschlagen wurde.

Den ersten Hinweis auf dieses Element findet man bei Irons und Ahmad [41] im Abschnitt IV unter der Überschrift "Speculations". Die Verfasser spekulieren, daß dieses Element den quadratischen Patch Test nicht erfüllen kann, ohne dabei auf die Ansatzfunktionen einzugehen.

Smith und Kidger [117] und Smith [116] haben einige Möglichkeiten zur Formulierung der Ansatzfunktionen vorgeschlagen. Die daraus entstehenden Elemente wurden als

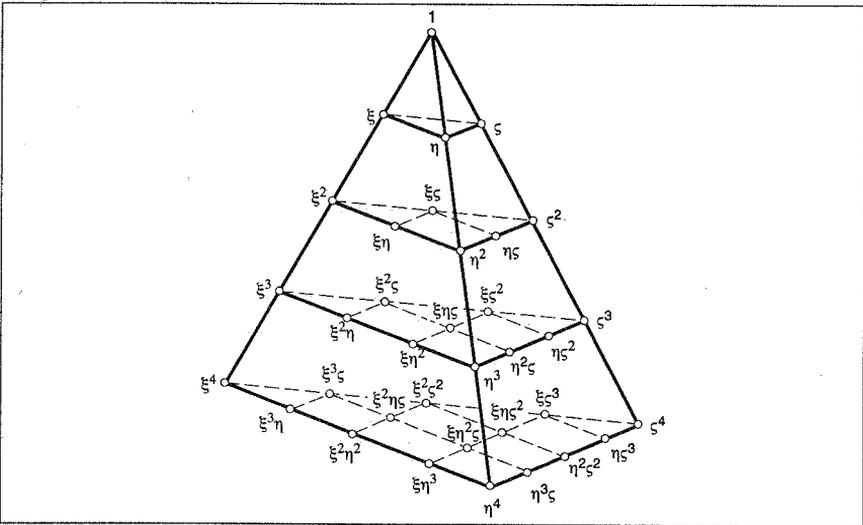


Abbildung 11.1 – Pascalsche Pyramide.

Typ 1,2,4,5 und 6 bezeichnet. Jeder dieser Elementtypen charakterisiert eine bestimmte Wahl des interpolierenden Polynoms. Da für die Formulierung der Ansatzfunk-

tionen 14 linear unabhängige Polynome notwendig sind, besteht eine gewisse Freiheit bei der Wahl. Dies ist aus der Pascalschen Pyramide gemäß Abbildung 11.1 ersichtlich.

| Typ der 14-knotigen Elemente | Zusätzliche Terme zu $(1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta\zeta)$ |
|------------------------------|--|
| 1                            | $\xi^2\eta \quad \eta^2\zeta \quad \zeta^2\xi$   |
| 2                            | $\xi\eta^2 \quad \eta\zeta^2 \quad \zeta\xi^2$   |
| 3                            | $\xi^3 \quad \eta^3 \quad \zeta^3$   |
| 4                            | $\xi^2\eta\zeta \quad \xi\eta^2\zeta \quad \xi\eta\zeta^2$   |

Tafel – 11.1 – Typen der 14-knotigen Volumenelemente.

Smith und Kidger stellen in [117] fest, daß die Polynomterme bis einschließlich zur zweiten Ebene und der zentrale Term der dritten Ebene als selbstverständliche Kandidaten betrachten werden müssen. Damit sind 11 Polynom Terme  $(1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta\zeta)$  für die Bestimmung der Ansatzfunktionen bereits vorhanden. Einige Möglichkeiten zur Ermittlung der drei fehlenden Terme sind in Tafel 11.1 dargestellt.

Zur Auswertung der auf die Knotenverschiebungen bezogenen Ansatzfunktionen ist in [116] ein algebraischer Manipulator angewandt worden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Programm MAPLE für diesen Zweck verwendet. Mit der Anwendung eines solchen algebraischen Manipulators ist nur die Eingabe der gewählten Polynomterme und der isoparametrischen Koordinaten zur Bestimmung der Ansatzfunktionen notwendig.

Der Elementtyp 3 in Tafel 11.1 ist nicht zulässig, da er einen Rangabfall in der Koeffizientenmatrix erzeugt. Die Elementtypen 1 und 2 sind richtungsabhängig, da ihre Ansatzfunktion unsymmetrische Terme bezüglich der Pascalschen Pyramide enthalten. Der Elementtyp 4 ist frei von dieser Pathologie.

Der Elementtyp 5 wird durch Kombination der zusätzlichen Terme der Elementtypen 1 und 2 formuliert. Dieser Elementtyp sollte keine richtungsabhängige Antwort zeigen, allerdings ist er nicht in der Lage, den Patch Test zu erfüllen.

Der Elementtyp 6 erfüllt den Patch Test, in dem die Ansatzfunktionen durch "bubble" Funktionen angereichert werden. Die Ansatzfunktionen für dieses Element werden in [117] bereitgestellt.

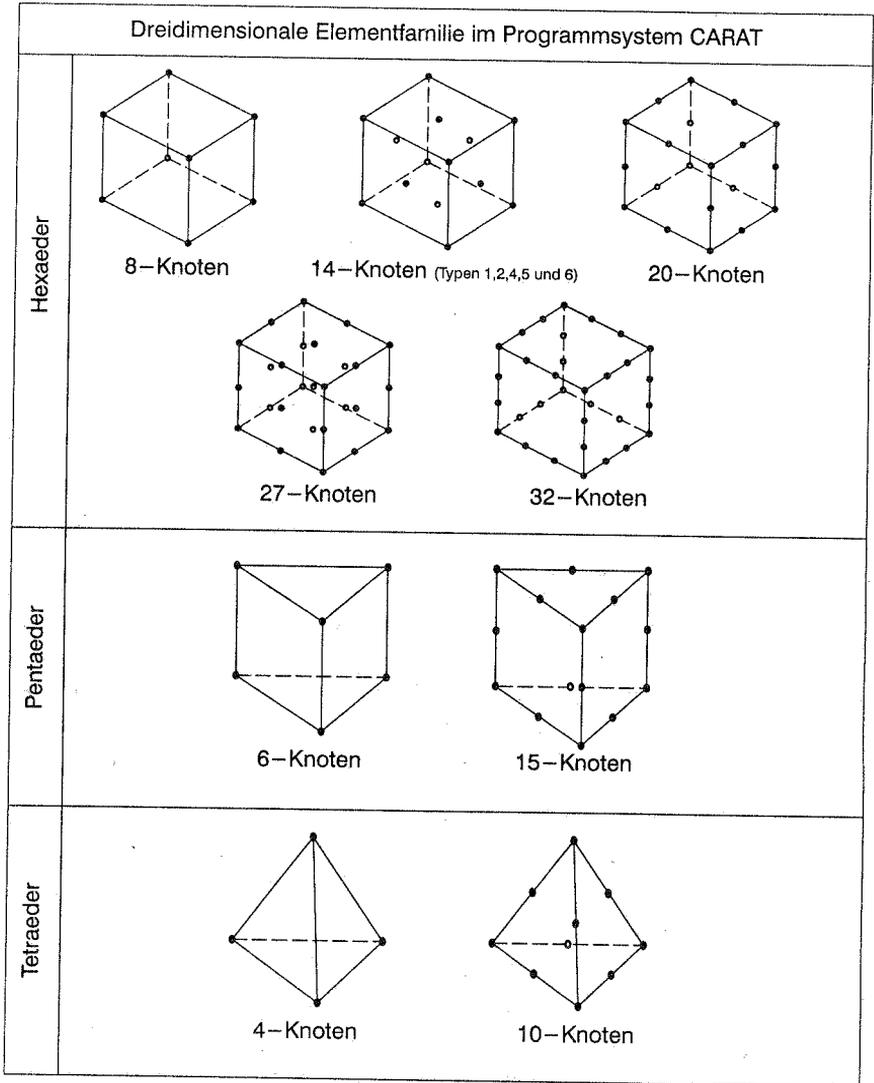


Abbildung 11.2 – Dreidimensionale Elementfamilie

Einige Beispiele ("Benchmarks") zur Verifizierung der Konvergenzeigenschaften solcher Elemente werden am Ende dieses Abschnitts durchgeführt.

### 11.1.1 Modellierung der Bewehrung

Die Wechselwirkung zwischen Beton und Stahlstäben ist immer noch ein schwieriges Thema, da die Mechanik dieser Wechselwirkung noch nicht ganz verstanden wird. Allerdings ist bekannt, daß die Kombination von Verbundwirkung und Reibung eine wesentliche Rolle spielt.

Die numerische Implementierung dieser Wechselwirkung hängt grundsätzlich vom geforderten Genauigkeitsniveau in der Analyse ab. Die erste und wohl genaueste Möglichkeit [95] stellt eine Modellierung des mikromechanischen Verhaltens der Wechselwirkung Bewehrung–Beton dar, wobei die *sekundären konischen Spannungen* und die Längsachsenrisse entscheidende Mechanismen sind [89]. Im Modell werden Gesetze für die Entfestigung vorgegeben, die durch sekundäre Querspannungen und primäre Längsspannungen ausgelöst wird. Das Modell enthält quantitative Aussagen über Zug–Schlupf Beziehungen.

Da dieses Modell vom Aufwand her erhebliche Schwierigkeiten für die Nachbildung wirklichkeitsgetreuer Tragwerke mit sich bringt, kann auf eine zweite Möglichkeit mit geringerem Aufwand, jedoch auch geringerer Genauigkeit zurückgegriffen werden. Hierbei konzentriert sich die Verbund–Schlupf Beziehung auf eine fiktive Wechselwirkung, in der im Sinne der Methode der finiten Elemente Zwischenelemente ("interface elements") [102] eingeführt werden. Diese Elemente unterteilen sich einerseits in kontinuierliche Zwischenelemente, bei denen die Zug–Schlupf Beziehungen durch ein interpoliertes Verschiebungsfeld beschrieben werden, andererseits in konzentrierte Zwischenelemente ("lumped interface"), bei denen sich die erwähnten Beziehungen auf diskrete Knoten beschränken. Der Beton wird durch zwei- oder dreidimensionale finite Elemente, die Bewehrung durch eindimensionale Elemente und der Wechselwirkungsbereich durch Zwischenelemente abgebildet. Die Zug–Schlupf Kurve ist für dieses Modell vorzugeben.

Bei der einfachsten Modellierung der Bewehrung wird die Wechselwirkung zwischen Beton und Bewehrung vernachlässigt, wobei die Bewehrung als diskretes eindimensionales Stabelement betrachtet wird. Trotz aller Vorteile dieses Modells, z.B. kann das numerische Integrationschema auf Elementebene wie bei einem unbewehrten Element unverändert übernommen werden, treten starke Einschränkungen in der Wahl des Elementnetzes auf. Da die Stabelemente zwischen den Knoten der Betonelemente liegen müssen, kann ein durch die Lage der Bewehrungselemente sehr verzerrtes und somit unbrauchbares Elementnetz entstehen.

Eine flexiblere Möglichkeit ist die Einbettung der Bewehrung [85] in das Betonelement. Für perfekten Verbund (Verbund–Schlupf Beziehung wird vernachlässigt) und einer nach den isoparametrischen Koordinaten ausgerichteten Bewehrung ist die Einführung von zusätzlichen Knoten oder neuen Freiheitsgraden nicht notwendig. Bei dieser relativ einfachen Vorgehensweise ([27], [85], u.a) müssen aber die oben genannten Einschränkungen beachtet werden. Aktuelle Arbeiten zu einer wirklichkeitsnäheren Tragwerksmodellierung [29], [95], [26], [14] betrachten deshalb sowohl die Verbund–Schlupf Beziehung als auch die willkürlich gerichtete Bewehrung im isoparametrischen Elementraum. Für die Bestimmung der Bewehrungslage sind allerdings zusätzliche Knoten notwendig, die an der Schnittstelle zwischen den Kanten der Betonelemente und der Bewehrung liegen. Zur Darstellung gekrümmter Bewehrungsführungen sind zusätzliche Knoten notwendig, die aber keine zusätzlichen Freiheitsgrade bewirken. Falls allerdings Schlupf–Mechanismen berücksichtigt werden, müssen zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden.

Die Schwierigkeit bei einer willkürlich orientierten Bewehrung besteht darin, daß die numerische Integration der Steifigkeitsanteile auf die Verzerrung in diskreten Punkten entlang der Bewehrung zurückgreift, die Bewehrungskordinaten im isoparametrischen Raum somit bekannt sein müssen. Eine Abbildung zwischen dem wirklichen und dem isoparametrischen Elementraum (inverse isoparametrische Abbildung) ist somit erforderlich, diese ist aber im allgemeinen nur numerisch durchführbar. Elwi und Hudrey [29] haben hier entweder die Lösung eines Anfangswert–Differentialgleichungssystems oder die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems vorgeschlagen.

In dieser Arbeit wird die eingebettete Modellierung mit perfektem Verbund und einer Bewehrung in Richtung der isoparametrischen Koordinaten angewandt. Zwei Varianten werden betrachtet : (a) diskret eingebettete Stäbe nach Abbildung 11.3c und (b) eingebettete Schichten mit äquivalenten Flächen zu den diskreten Stäben nach Abbildung 11.3b. Die Variante (a) ist für Tragwerke mit niedrigem Bewehrungsgehalt von Vorteil, während Variante (b) gute Ergebnisse bei Tragwerken mit hohem Bewehrungsgehalt erzielt. Es wird darauf hingewiesen, daß die eingebettete Modellierung der Bewehrung trotz der erforderlichen Ergänzung im Integrationsprozeß rechnerisch effizienter ist als die Modellierung mit Stabelementen.

Es wird hier darauf hingewiesen, daß eine teilelastische–teilplastische konstitutive Beziehung nach von Mises für die Bewehrung angenommen wurde.

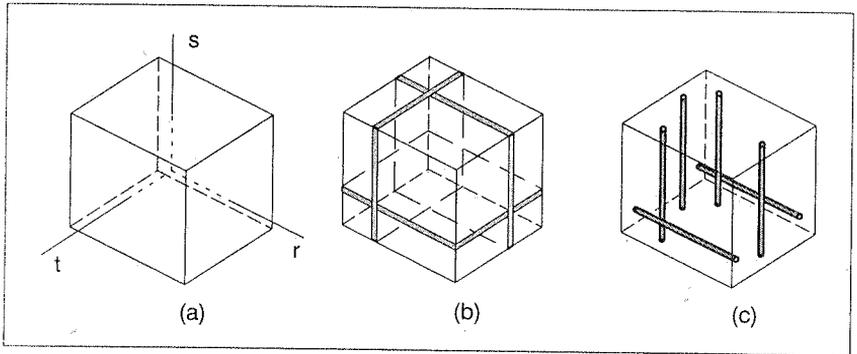


Abbildung 11.3 – (a) isoparametrische Koordinaten.  
 (b) in Schichten eingebettete verschmierte Bewehrung.  
 (c) als Stäbe eingebettete Bewehrung.

## 11.2 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt werden einige numerische Untersuchungen durchgeführt, um die Güte des Volumenelements mit 14 Knoten im Vergleich zu anderen Volumenelementen zu überprüfen. Dafür werden sowohl einige bekannte Benchmarks als auch einige Patch-Tests gewählt. Die folgenden Bezeichnungen gelten:

HEXA8 – 8 knotiges Verschiebungselement.

HEXA8-H# – 8 knotiges gemischtes EAS-Element ("Enhanced Assumed Strain", siehe [108],[94]) mit # inneren Parametern.

HEXA14t# – 14 knotiges Verschiebungselement des Typs #.

HEXA20 – 20 knotiges Verschiebungselement.

### 11.2.1 Patch-Tests

Durch den Patch-Test wird geprüft, ob in einem beliebig verzerrten Elementnetz ein Zustand konstanter Spannungen und Verzerrungen in den Elementen darstellbar ist. Für die 14 knotigen Elemente sind drei verschiedene Tests durchgeführt worden. In Abbildung 11.4 sind Geometrie und Randbedingungen der Tests dargestellt. Mit Ausnahme des Elements HEXA14t6 passieren alle im Abschnitt 11.1 eingeführten HEXA14 Elementen die Patch-Tests nicht.

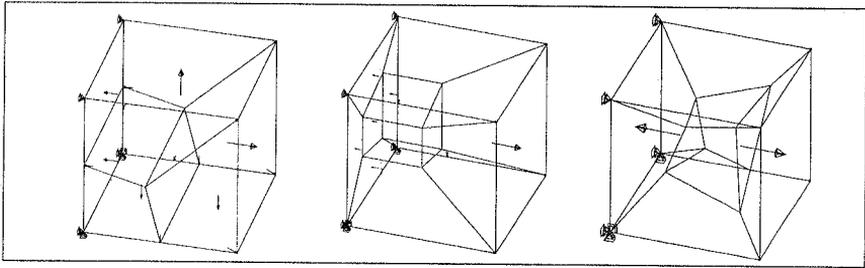


Abbildung 11.4 – Patch-Tests für das 14-knotige Element

### 11.2.2 Kragarm mit hoch verzerrten Elementen

An diesem bekannten Testbeispiel [122] wird bei den verschiedenen Volumenelementen der Effekt der Elementverzerrung untersucht. Dabei sind die in Abb. 11.5 gezeigten Elementnetze für zwei Lastfälle, reine Biegung und Endquerbelastung, zu berechnen. In den Tabellen 11KEIN MERKER und 11.3 sind jeweils die Durchbiegungen am Punkt A aus einer linearen Analyse, normiert zu den exakten Lösungen, angegeben. Das bekannte zu steife Verhalten des HEXA8-Elementes hat sich hier bestätigt. Eine Verbesserung der Ergebnisse wurde mit den EAS-Elementen erreicht, es sind aber noch Versteifungseffekte enthalten. Auffallend ist das hervorragende Verhalten der 14-Knoten-Elemente, die für alle Elementnetze außer (A6) sehr gute Ergebnisse liefern. Aus den drei verschiedenen 14-Knoten-Elementen zeigt das Element HEXA14t1 die besten Ergebnisse.

**Tafel 11.2** -- Normierte vertikale Verschiebungen  $w_A$  für Lastfall (1).  
( $w_{A, \text{exakt}} = 100$ )

|    | HEXA14t1 | HEXA14t2 | HEXA14t6 | HEXA8 | HEXA8-H3 | HEXA8-H6 |
|----|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
| A1 | 1,000    | 1,000    | 1,000    | 0,090 | 1,000    | 1,000    |
| A2 | 1,000    | 1,000    | 1,000    | 0,278 | 1,000    | 1,000    |
| A3 | 0,949    | 0,999    | 0,853    | 0,235 | 0,894    | 0,923    |
| A4 | 0,924    | 0,935    | 0,904    | 0,203 | 0,791    | 0,813    |
| A5 | 0,956    | 0,909    | 0,853    | 0,188 | 0,772    | 0,772    |
| A6 | 0,569    | 0,505    | 0,570    | 0,082 | 0,407    | 0,414    |
| A7 | 0,984    | 0,943    | 0,964    | 0,444 | 0,957    | 0,959    |

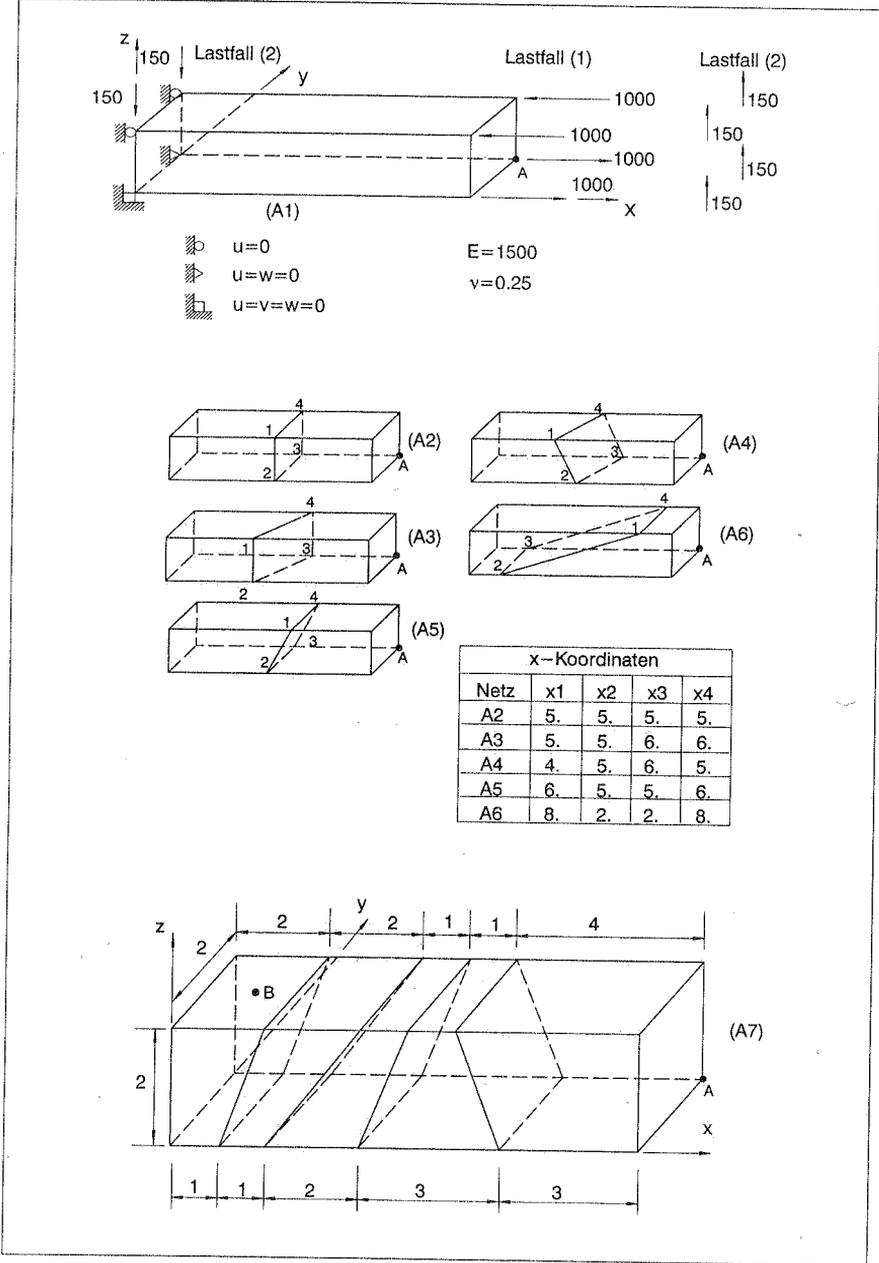


Abbildung 11.5 – Kragarm mit verzerrtem Elementnetz.

**Tafel 11.3 – Normierte vertikale Verschiebungen  $w_A$  für Lastfall (2).**  
 ( $w_{A, \text{exakt}} = 102,6$ )

|    | HEXA14t1 | HEXA14t2 | HEXA14t6 | HEXA8 | HEXA8-H3 | HEXA8-H6 |
|----|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
| A1 | 0,991    | 0,781    | 0,778    | 0,090 | 0,755    | 0,755    |
| A2 | 0,997    | 0,963    | 0,854    | 0,249 | 0,934    | 0,935    |
| A3 | 0,955    | 0,955    | 0,709    | 0,235 | 0,844    | 0,876    |
| A4 | 0,930    | 0,899    | 0,784    | 0,222 | 0,769    | 0,796    |
| A5 | 0,964    | 0,885    | 0,711    | 0,202 | 0,765    | 0,766    |
| A6 | 0,540    | 0,453    | 0,540    | 0,121 | 0,478    | 0,485    |
| A7 | 0,959    | 0,964    | 0,976    | 0,481 | 0,953    | 0,954    |

### 11.2.3 Kragarm (elastische Inkompressibilität)

Der Kragarm in Abb. 11.6 dient hier der Untersuchung der Volumenelemente für ein nahezu inkompressibles, elastisches Materialverhalten. Hierbei wird der Kragarm mit 5 Elementen diskretisiert. Die Endverschiebungen am Punkt A aus einer linearen Analyse, normiert zur Vergleichslösung [121], sind in Abb. 11.6 für die verschiedenen Volumenelemente dargestellt. Aus diesen Werten ist für alle Elemente außer für das HEXA8-Element eine gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung festzustellen.

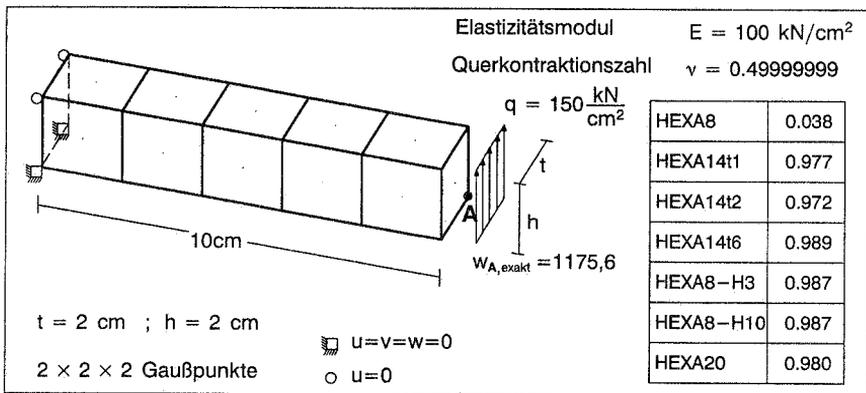


Abbildung 11.6 – Elastischer, inkompressibler Kragarm.

### 11.2.4 Vorverdrillter Kragarm ("Pretwisted Beam")

Anhand des in Abb. 11.7 gezeigten Kragarms soll das Verhalten verdrillter Elemente getestet werden. Dazu wird ein Netz von  $12 \times 12 \times 1$  Elementen benutzt. Die zu der exakten

Lösung [67] normierten Endverschiebungen sind auch in Abb.11.7 aufgelistet. Daraus ist zu erkennen, daß abgesehen von dem HEXA8–Element alle anderen Elementtypen eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung zeigen.

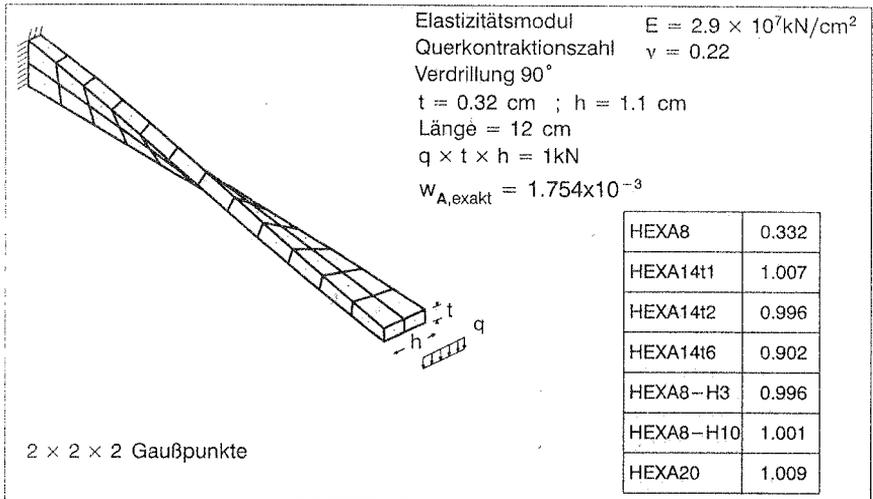


Abbildung 11.7 – Vorverdrillter Kragarm.

### 11.2.5 Einhäufiger Rahmen ("Lee Frame")

Als weiteres sehr bekanntes Testbeispiel dient hier der einhäufige Rahmen von Lee der Beurteilung des Elementverhaltens im geometrisch nichtlinearen Fall. Die Geometrie, Belastung und Materialdaten sind zusammen mit der FE–Diskretisierung in Abb.11.8 angegeben. Auch sind in Abb.11.8 die verformten Zustände für Lastschritt 4 und Lastschritt 11 dargestellt. Die Analyse wurde mit dem Bogenlängen–Verfahren durchgeführt. Hierbei wurden HEXA20–, HEXA8–H3– und HEXA14–Elemente eingesetzt. Aus den Last–Verschiebungs–Diagrammen in Abb.11.9 ist erkenntlich, daß die Ergebnisse mit der HEXA20 und HEXA14t1 nahezu identisch sind und nicht viel von denen der HEXA8–H3–Elemente abweichen.

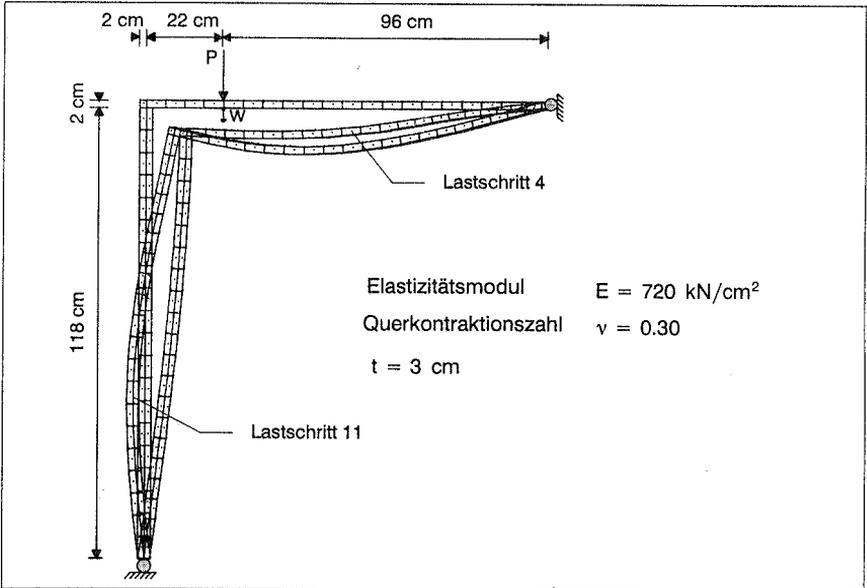


Abbildung 11.8 – Einhäufiger Rahmen ("Lee-Frame").

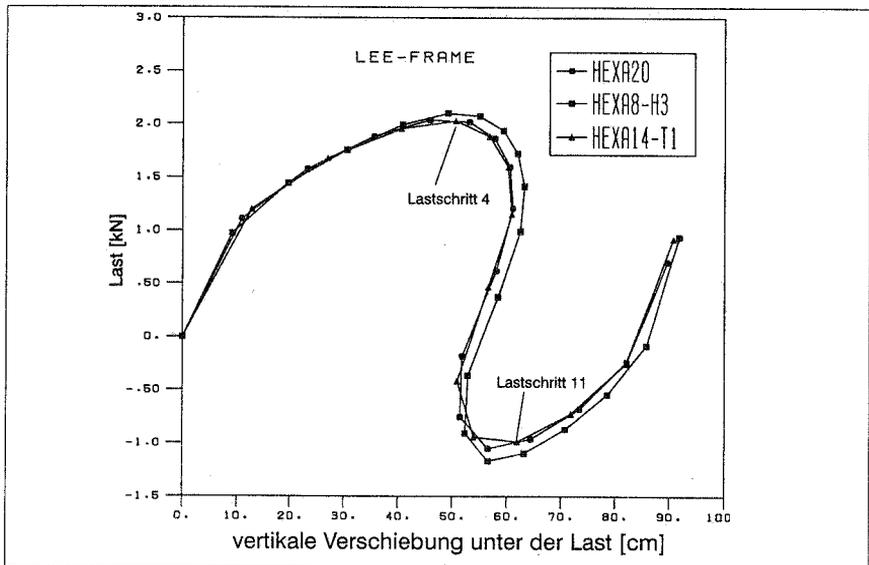


Abbildung 11.9 – Einhäufiger Rahmen : Last-Verschiebungs-Diagramm.

### 11.2.6 Nachgiebige Fundamentplatte (mit assoziiertem Verfestigungsgesetz)

Anhand der Fundamentplatte im ebenen Dehnungszustand wird die Implementierung und Effektivität des Plastizitätsalgorithmus getestet. Dieses Beispiel wurde auch in Hofstetter/Simo/Taylor [38] gerechnet, woraus die Geometrie entnommen wurde, siehe Abb. 11.12. Aus Symmetriegründen wird die Berechnung an dem Halbsystem durchgeführt, diskretisiert mit einem Netz von 12x6 HEXA-Elementen. Alle geometrischen und physikalischen Maße sind in *in* und *kips* angegeben.

Die Parameter für das Cap-Modell werden für den einaxialen Druckversuch (dehnungsgesteuert) für den "McCormick Ranch Sand", beschrieben in Sandler/Rubin [97], mittels einer Optimierungsprozedur bestimmt. Die errechneten Parameter sind in Tafel 11.4 angegeben. Für den Parameter  $X(x_0)$  wird der Wert 0,175 ksi angenommen. In [97] werden für den Kompressionsmodul  $K$  und den Schubmodul  $G$  die Werte 66,67 ksi bzw. 40,0 ksi angegeben.

|                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| $\alpha = 0.27$ ksi              | $R = 2.50$                   |
| $\theta = 0.02$                  | $D = 0.67$ ksi <sup>-1</sup> |
| $\gamma = 0.17$ ksi              | $W = 0.064$                  |
| $\beta = 0.67$ ksi <sup>-1</sup> | $T = -0.30$ ksi              |
| $X(x_0) = 0.175$ ksi             |                              |

Tafel – 11.4 – Parameter für "McCormick Ranch Sand".

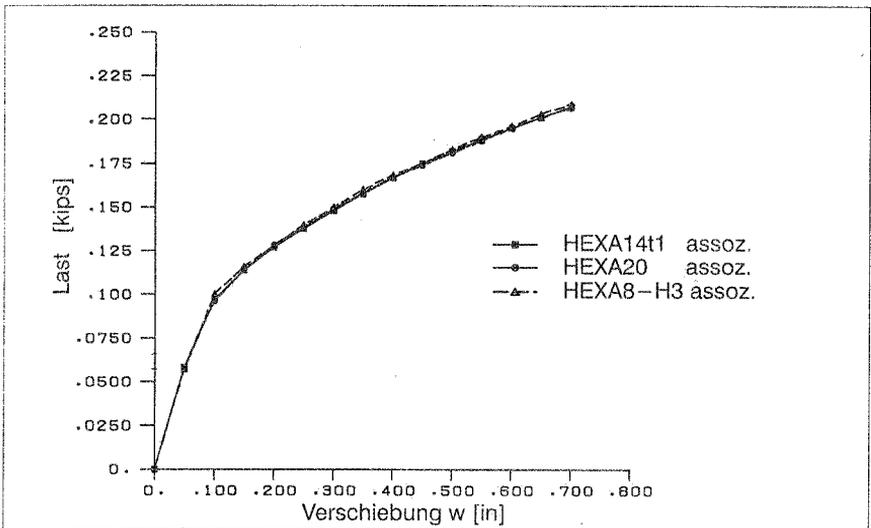


Abbildung 11.10 – Last-Verschiebungs-Diagramm für assoziiertes Verfestigungsgesetz.

Die Berechnung erfolgt mit dem Bogenlängen–Verfahren. Das Last–Verschiebungs–Diagramm (Verschiebung  $w$ ) auf der Symmetrieachse zeigt Abb. 11KEIN MERKER. Bei Anwendung des HEXA8–H3–Elementes zeigen die Ergebnisse keine Abweichungen gegenüber denen von Hofstetter u.a. in [38].

### 11.2.7 Nachgiebige Fundamentplatte (mit nicht assoziiertem Verfestigungsgesetz)

Für das nicht assoziierte Verfestigungsgesetz wird für den Parameter  $W$  der neue Wert  $W_a = 0.031$  errechnet. Alle anderen Parameter bleiben unverändert. Das entsprechende Last–Verschiebungs–Diagramm ist in Abb. 11.11 gezeigt. Daraus stellt man fest, daß keine großen Unterschiede auftreten.

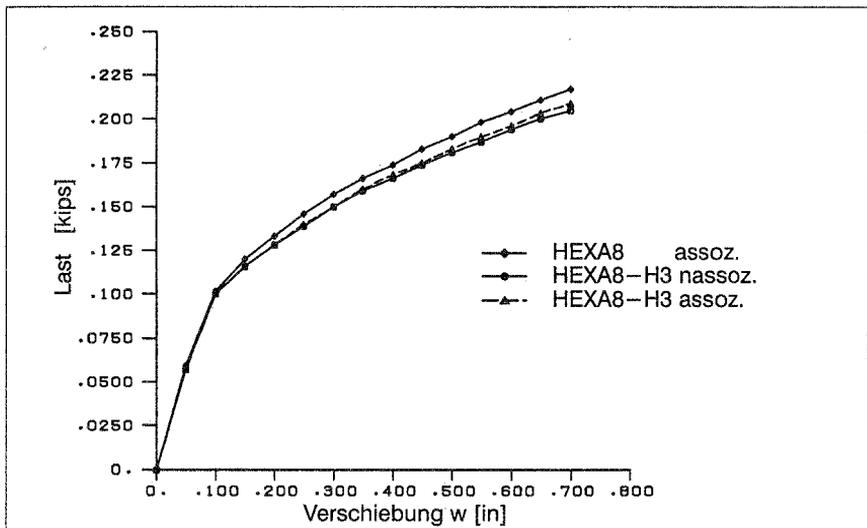


Abbildung 11.11 – Last–Verschiebungsdiagramm: Vergleich für assoziiertes und nicht assoziiertes Verfestigungsgesetz.

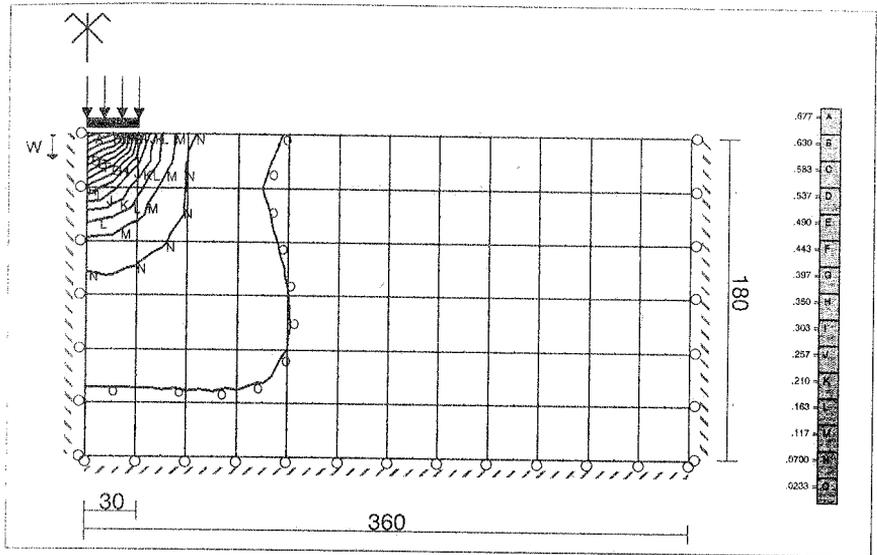


Abbildung 11.12 – Geometrie und Isoverschiebungslinien beim letzten Lastschritt mit HEXA20-Elementen.

## 12 NUMERISCHE BEISPIELE FÜR STAHLBETON

In diesem Abschnitt werden Tragwerke untersucht, um den Beweis der Brauchbarkeit des konstitutiven gekoppelten Modells zu führen. Bei der Analyse werden geometrische und physikalische Nichtlinearitäten betrachtet. Die Belastung erfolgt verschiebungsgesteuert. Die Parameteridentifikation kann nicht entsprechend Abschnitt 10.4 durchgeführt werden, da keine Versuche für die folgenden Beispiele vorliegen. Die Wahl der Parameter wurde durch Skalierung der für die Boulder–Betonversuche bestimmten Parameter mit dem Verhältnis der Zug– /Druckfestigkeiten des betrachteten Betons und des Boulder–Betons getroffen.

### 12.1 Balken ohne Schubbewehrung

Mit dem ersten Beispiel werden die von Karihaloo [47] durchgeführten Versuche an ausschließlich im Zugbereich bewehrten Balken simuliert. Zwei Balken mit gleicher Geometrie, aber mit unterschiedlichem Bewehrungsgrad wurden untersucht. Beim ersten (Balken 1) liegt der Bewehrungsgrad  $\rho=0.75\%$  ( $1\varnothing 12$  mm) vor – er versagt im Versuch infolge Stahlfließens – beim zweiten (Balken 2)  $\rho=1.50\%$  ( $2\varnothing 12$  mm) – er versagt durch das Entstehen von Schubrissen. Geometrie und Belastung des Karihaloo–Balkens sind in Bild 12.1 dargestellt. In Tafel 12.1 sind die Parameter für das Werkstoffmodell angegeben. Alle geometrischen und physikalischen Maße sind in *cm* und *kN* angegeben.

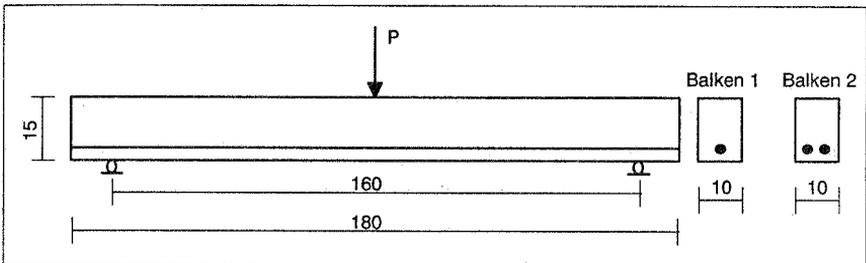


Abbildung 12.1 – Versuchsbalken

Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel des Systems untersucht. In einem ersten Schritt wird der Balken mit HEXA8 Elementen ( $2 \times 2 \times 2$  Gaußpunkte) und einem  $9 \times 2 \times 1$  Netz diskretisiert. Die Bewehrung wird durch eine verschmiert eingebettete Schicht idealisiert, alternativ wurde sie mit eingebetteten Stäben modelliert.

Die in Bild 12.2 dargestellten Last–Verschiebungskurven machen deutlich, daß die aus dem gekoppelten Modell (SPM–Schädigung+Plastizitätsmodell) ermittelte Bruchlast mit der experimentell bestimmten Bruchlast nahezu identisch ist. Insbesondere beim

Balken 2 zeigt das numerische Ergebnis, im Vergleich zum Versuchsergebnis, ein duktileres Tragverhalten. Dieses ist durch die Duktilität des Betons im Zugbereich bedingt, die vom "Tension cutoff" beeinflusst wird. Im nächsten Schritt wird der Einfluß dieses Parameters untersucht.

| Allgemeine Parameter                       | Plastische Parameter                   | Schädigungsparameter           |
|--|--|--------------------------------|
| $E_{\text{Beton}} = 3000 \text{ kN/cm}^2$  | $\alpha = 3.03 \text{ kN/cm}^2$        | $A = 0.96$                     |
| $\nu_{\text{Beton}} = 0.20$                | $\theta = 0.067$                       | $B = 15.0$                     |
| $\beta_c = 3.80 \text{ kN/cm}^2$           | $\gamma = 1.259 \text{ kN/cm}^2$       | $K_0 = 0.0025 \text{ kN/cm}^2$ |
| $\beta_t = 0.34 \text{ kN/cm}^2$           | $\beta = 0.771 \text{ cm}^2/\text{kN}$ |                                |
|  | $R = 2.89$                             |                                |
| $E_{\text{Stahl}} = 20000 \text{ kN/cm}^2$ | $D = 0.00151 \text{ cm}^2/\text{kN}$   |                                |
| $\sigma_y = 46.3 \text{ kN/cm}^2$          | $W = 0.42$                             |                                |
|  | $T = -0.30 \text{ kN/cm}^2$            |                                |
|  | $X_0(\kappa) = 11.2 \text{ kN/cm}^2$   |                                |

Tafel – 12.1 – Materialparameter für das gekoppelte Modell.

Die Ergebnisse sind in Bild 12.3 dargestellt und verdeutlichen, daß dieser Parameter hier zwar keinen Einfluß auf die Bruchlast hat, jedoch eine wesentliche Rolle beim duktilen Tragverhalten spielt.

Außerdem ist zu beachten, daß die mit den HEXA8–Elementen erzielten Ergebnisse gegebenenfalls von Versteifungseffekten ("locking") beeinflusst sind. Um diese Effekte zu überprüfen, wurde der Balken 1 bei gleicher Netzteilung mit HEXA20 Elemente (15 Punkte Integration) modelliert. Die Ergebnisse sind im Bild 12.4 dargestellt und zeigen eine niedrigere Traglast beim gleichen Materialparametersatz. Dieses Ergebnis bestätigt das zu steife Verhalten der HEXA8–Elemente und fordert eine neue Parameteridentifikation. Durch Modifikation werden die Schädigungsparameter zu  $A = 0.85$ ,  $B = 7.5$  und  $K_0 = 0.01$ . Die zugehörigen Ergebnisse zeigen Bild 12.5, wobei gleichzeitig das Bewehrungsmodell (B–St = eingebettete Stäbe, B–Sch = eingebettete Schicht) untersucht wurde. Die Abweichung beider Bewehrungsmodellierungen ist kaum zu erkennen.

Der Einfluß der Verfestigung der Bewehrung auf das Tragverhalten ist in Abbildung 12.6 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Einführung der Verfestigung zu einer wirklichkeitsnäheren Lösung führt. In Abbildung 12.7 ist die Verteilung der Schädigung bei einer Mittendurchbiegung von 10 mm für Balken 1 und 2 für die Modellierung mit HEXA20 Elementen dargestellt.

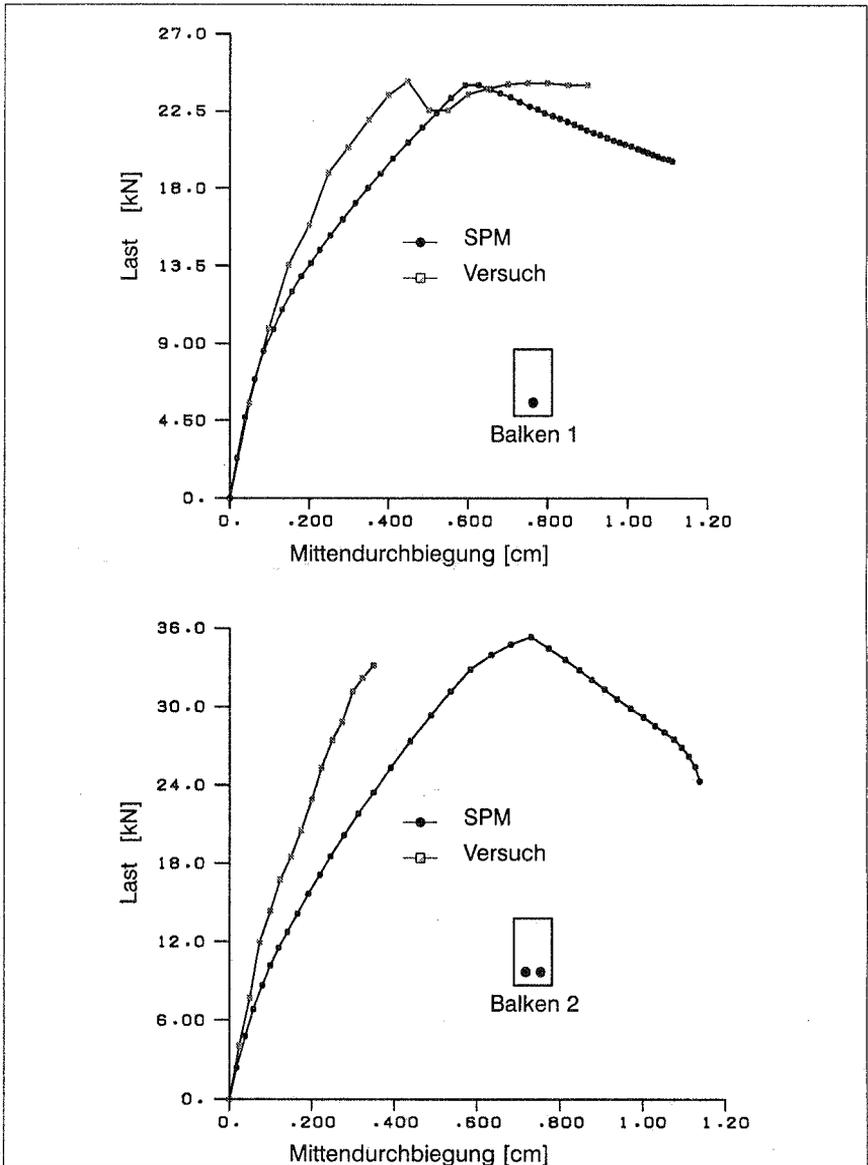


Abbildung 12.2 – Last–Verschiebungskurven auf die Balken 1 und 2.

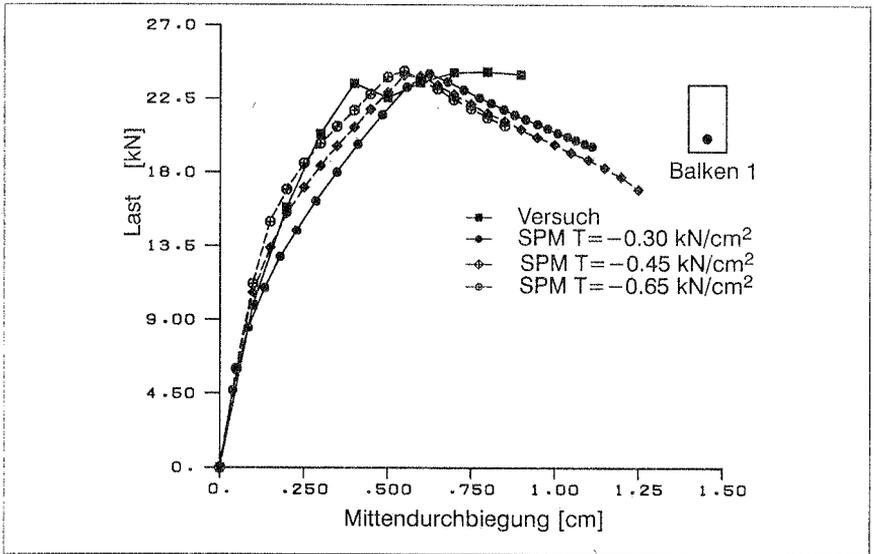


Abbildung 12.3 – Einfluß von  $T$  auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1.

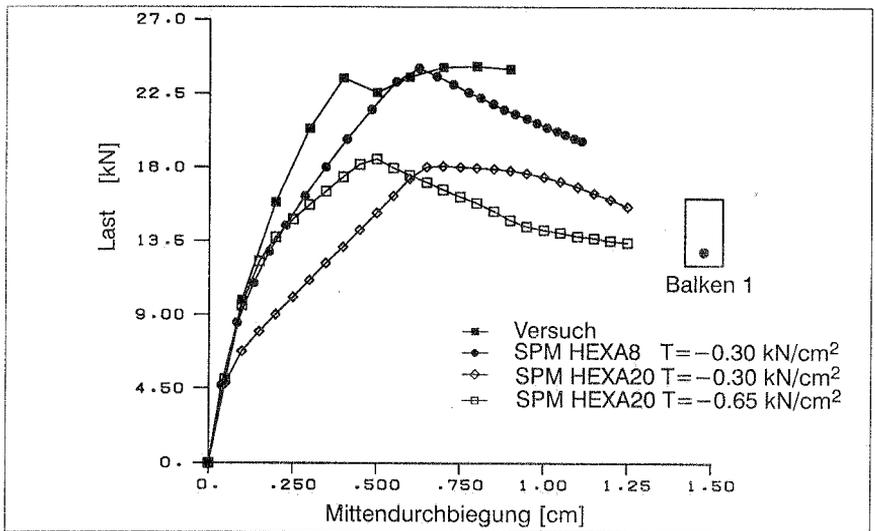


Abbildung 12.4 – Einfluß von Elementtyp und  $T$  auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1.

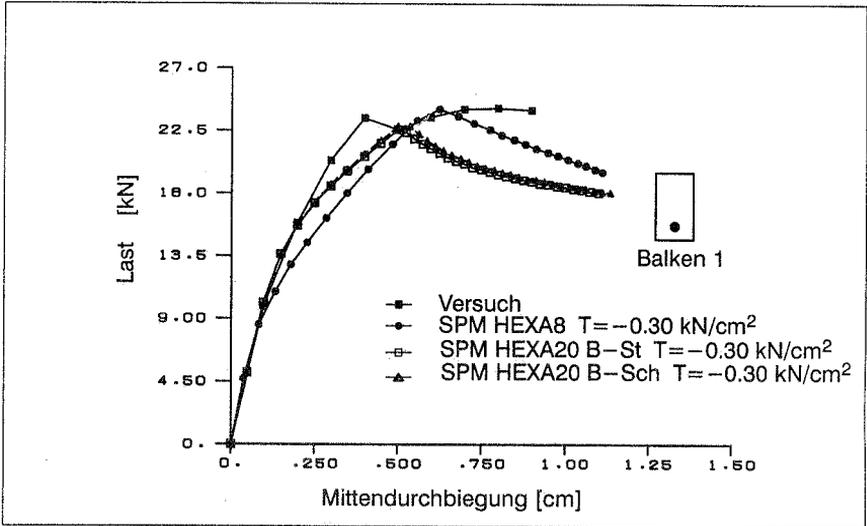


Abbildung 12.5 – Einfluß der Modellierung der Bewehrung auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1.

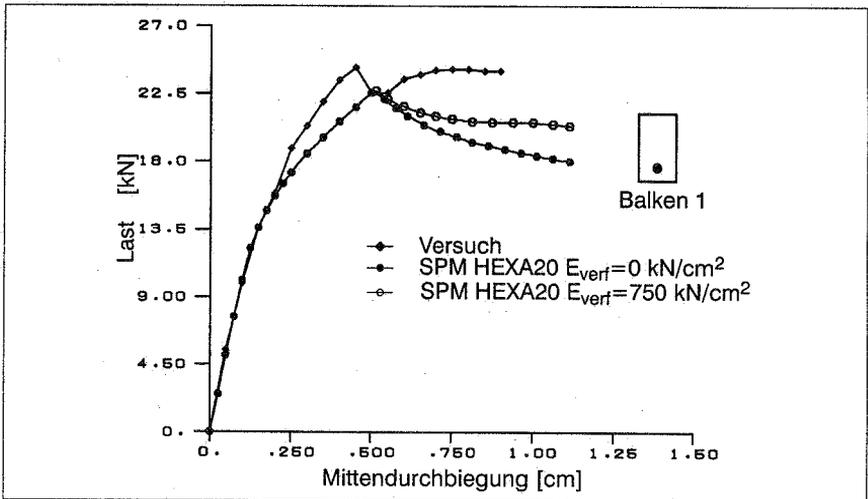


Abbildung 12.6 – Einfluß der Verfestigung der Bewehrung auf die Last–Verschiebungskurve für den Balken 1.

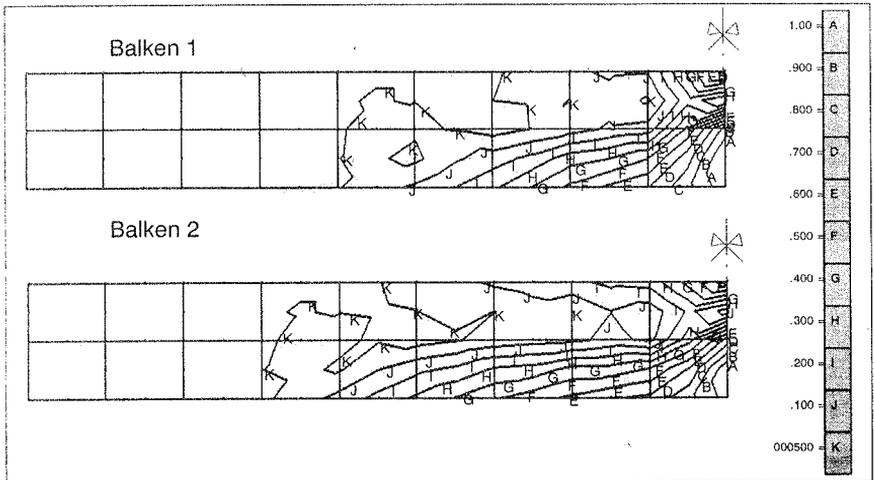


Abbildung 12.7 – Verteilung der Schädigungsvariable  $d$  bei einer Mittendurchbiegung von 10 mm für Balken 1 und 2.

## 12.2 Stützenkonsole

Das Tragverhalten einer Stützenkonsole ist als Beispiel für einen allgemeinen Spannungszustand ausgesucht worden. Die Traglast dieser Konsole wurde von Mehmel und Freitag [71] experimentell untersucht. Eberhardsteiner et al. [25] führten eine Finite Elemente Analyse durch, bei der verschiedene konstitutive Modelle für die Ermittlung der Traglast gegenübergestellt worden sind. Die Geometrie und Belastung der Konsole sowie die Bewehrungsführung sind in Bild 12.8 dargestellt. In Tafel 12.2 sind die Parameter für das Werkstoffmodell angegeben. Die Horizontal- und Vertikalbewehrung wurde alternativ mittels eingebetteten Schichten und über eingebettete Stäbe modelliert, die Schrägbewehrung mit Stabelementen. Das gewählte FE-Modell mit 144 HEXA8-Elementen und 16 zweiknotigen Stabelementen (für die Schrägbewehrung) ist in Abbildung 12.9 dargestellt. Die Elementwahl ist mit dem weitaus feineren Netz zu begründen, wodurch die Locking-Effekte dieses Elementes deutlich geringer werden. Zudem wird in [25] dieselbe Modellierung zugrunde gelegt. Da für dieses Beispiel keine experimentelle Last-Verschiebungskurve vorliegt, werden die Ergebnisse des gekoppelten Modells mit denen von Glemberg – entnommen aus [25] – verglichen (siehe Abbildung 12.10). Das Modell von Glemberg [31] ist charakterisiert durch ein gemischt-verfestigendes, assoziiertes Plastizitätsmodell mit elliptischen, geschlossenen Belastungsflächen. Alle geometrischen und physikalischen Maße sind in  $cm$  und  $kN$  angegeben.

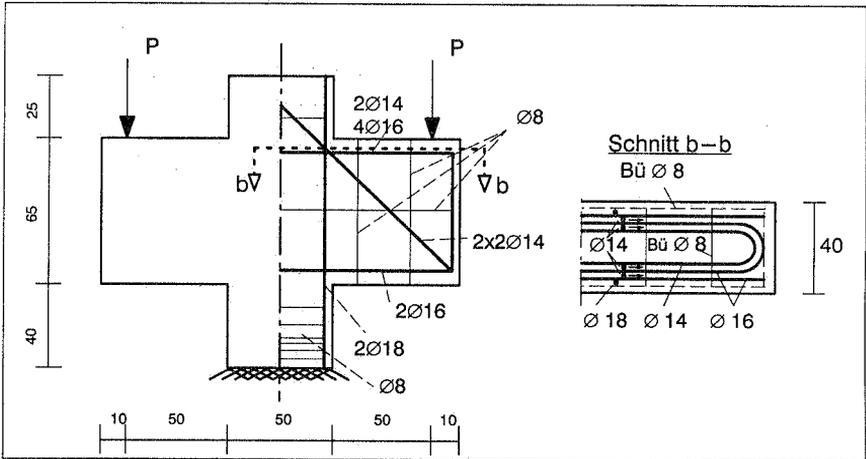


Abbildung 12.8 – Stützenkonsole von Mehmel und Freitag.

| Allgemeine Parameter                       | Plastische Parameter                  | Schädigungsparameter |
|--|---------------------------------------|----------------------|
| $E_{\text{Beton}} = 2187 \text{ kN/cm}^2$  | $\alpha = 1.62 \text{ kN/cm}^2$       | $A = 0.85$           |
| $\nu_{\text{Beton}} = 0.20$                | $\theta = 0.33$                       | $B = 5.0$            |
| $\beta_c = 2.26 \text{ kN/cm}^2$           | $\gamma = 0.69 \text{ kN/cm}^2$       | $K_0 = 0.01$         |
| $\beta_t = 0.23 \text{ kN/cm}^2$           | $\beta = 1.45 \text{ cm}^2/\text{kN}$ |                      |
|  | $R = 2.89$                            |                      |
| $E_{\text{Stahl}} = 20600 \text{ kN/cm}^2$ | $D = 0.0048 \text{ cm}^2/\text{kN}$   |                      |
| $\sigma_y = 43 \text{ kN/cm}^2$            | $W = 0.42$                            |                      |
|  | $T = -0.11 \text{ kN/cm}^2$           |                      |
|  | $X_0(x) = 7.2 \text{ kN/cm}^2$        |                      |

Tafel – 12.2 – Materialparameter für das gekoppelte Modell.

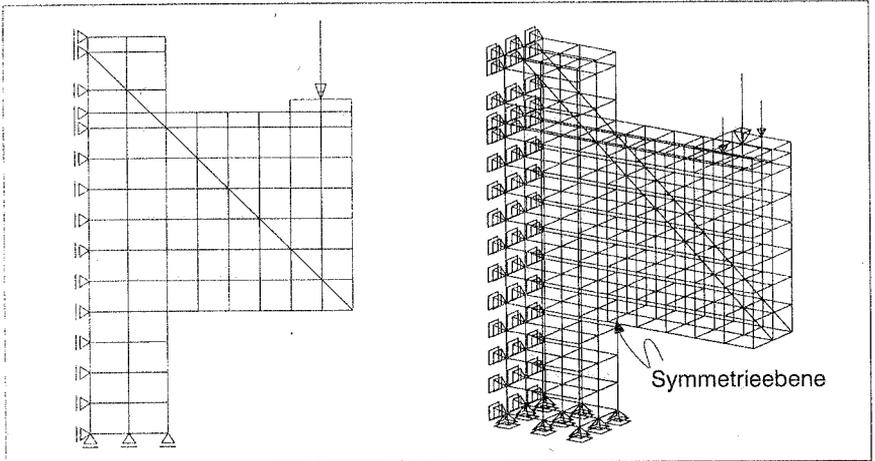


Abbildung 12.9 -- Finite Element Diskretisierung.

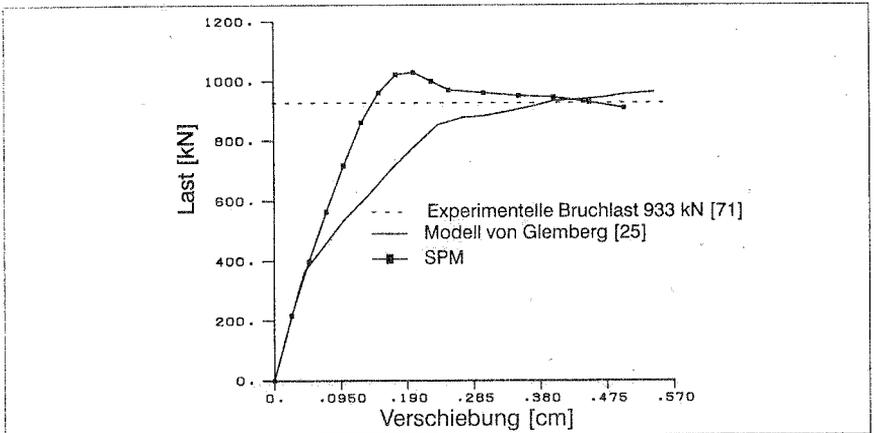


Abbildung 12.10 -- Last-Verschiebungskurve.

### 12.3 Lieberum Versuch

Das dritte Beispiel simuliert einen von Lieberum [63] durchgeführten Versuch am Betonzylinder. Das Ziel dieses Versuchs ist die Untersuchung des Tragverhaltens von Beton bei extremer Teilflächenbelastung. Hierfür wurde ein zylindrischer Stahlstempel in einen Betonzylinder mit 40 cm Durchmesser und 45 cm Höhe eingedrückt (siehe Abbildung 12.11). Unterschiedliche Verhältnisse der Durchmesser von Stahlstempel und Betonzylinder wurden von Lieberum untersucht (maximales Verhältnis 8%). Dieses Verhältnis soll klein genug sein, um lokale Phänomene unabhängig von den Randbedingungen des Betonzylinders zu erzeugen. Ein frühzeitiger Bruch wurde mit  $6\varnothing 8\text{mm}$  Bügelbewehrung verhindert.

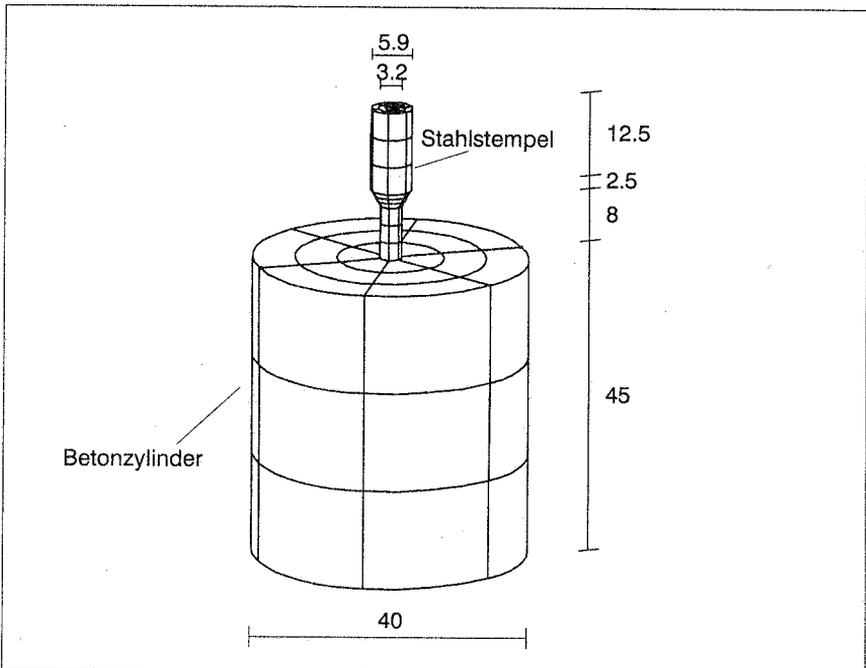


Abbildung 12.11 – Geometrie des Durchstanztestes nach Lieberum.

Beim Versuchsprogramm von Lieberum wurde der Einfluß der folgenden Parameter auf das Tragverhalten untersucht: Maximale Größe des Zuschlagskorns, Druckfestigkeit des Betons, Durchmesser des Stahlstempels und die Betonmischung. Qualitativ sind die Ergebnisse (Last–Verschiebungsdiagramm) in drei Bereiche zu unterteilen (siehe Abbildung 12.12): Im ersten Bereich bleiben die Umfangsdehnungen klein und das Last–Verschiebungsdiagramm wird zum zweiten Bereich hin durch lokale Zerstörung

gen stark nichtlinear. Im zweiten Bereich nehmen die Umfangsdehnungen zu, der Zylinder reißt radial. Durch die radialen Risse und Abplatzen der oberen Schichten des Betonzylinders tritt ein lokales Versagen auf (Bereich  $II$ ), wobei die Last während des Durchdringungsprozesses auf einen bestimmten Wert abnimmt. Danach findet eine Zunahme des Tragvermögens statt.

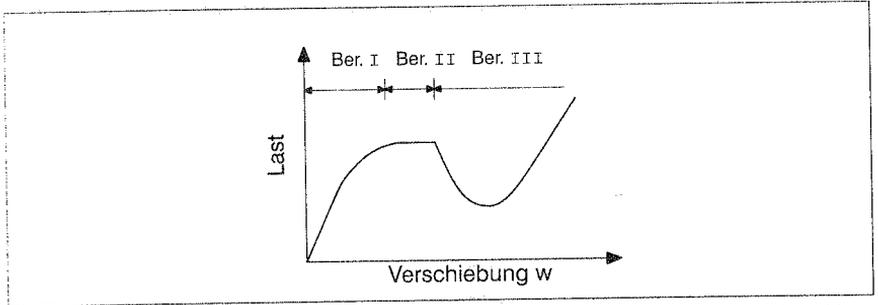


Abbildung 12.12 – Qualitatives Last–Verschiebungsdiagramm eines typischen Versuchs.

Bei der numerischen Modellierung wird lediglich der Bereich  $I$  betrachtet. Abbildung 12.13 zeigt das gewählte FE–Modell, das auch in [37] axialsymmetrisch verwendet wurde. Aus Symmetriegründen wird nur ein Sektor von 5 Grad modelliert. Im Kontaktbereich zwischen Stahlstempel und Betonzylinder wird ideale Haftung angenommen. Die Bewehrung wurde als eingebettete Schicht diskretisiert (siehe Abbildung 12.13). In Tafel 12.3 sind die Parameter für das plastische CAP–Modell dargestellt, Schädigung wurde zunächst nicht angenommen. Alle geometrischen und physikalischen Maße sind in  $cm$  und  $kN$  angegeben.

Es ist bekannt, daß der Elastizitätsmodul  $E$  in den oberen Schichten einer Betonprobe kleiner ist als im Kern. Dieser Effekt entsteht durch die unterschiedliche Dichte der groben Zuschlagskörner entlang der Probe, als Folge des Betonierens. In der Literatur wird dieser Effekt "wall effect" genannt und in der numerischen Modellierung durch die Reduktion des Elastizitätsmodul  $E$  berücksichtigt, was in Abbildung 12.13 dargestellt ist.

Verschiedene Elemente wurden benutzt: HEXA20, HEXA8, HEXA8–E3 (EAS–3 Parameter [94]). Die Ergebnisse sind in Bild 12.14 dargestellt. Sie zeigen zwar am Anfang zu steife Ergebnisse, das gesamte Verhalten des Modells gegenüber dem Versuch wird einigermaßen wiedergegeben. Allerdings ist die Schwäche der FE–Diskretisierung nicht zu übersehen. Auch muß darauf hingewiesen werden, daß das plastische Modell allein mit den angewandten Parametern nicht in der Lage ist, die im Versuch auftretende Entfestigung wiederzugeben. Deshalb wird das gekoppelte Modell eingesetzt, um auch die Entfestigung im Bereich  $II$  abzubilden. Die plastischen Parameter bleiben unverän-

dert. Die Schädigungsparameter sind:  $A=0.85$ ,  $B=2.5$ ,  $K_0=0.030$ . Das Ergebnis ist in Abbildung 12.15 dargestellt und gibt das Verhalten deutlich besser wieder.

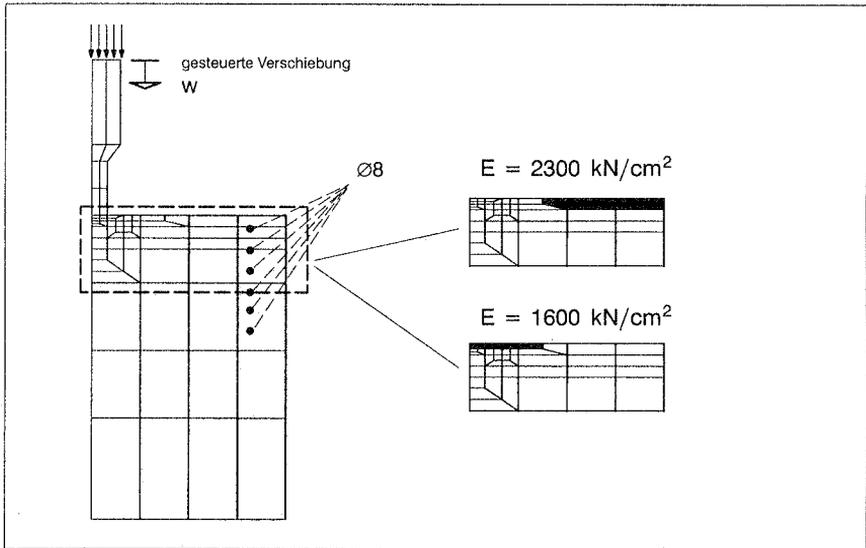


Abbildung 12.13 – Finite Element Diskretisierung.

| Allgemeine Parameter                       | Plastische Parameter                  |
|--|---------------------------------------|
| $E_{\text{Beton}} = 3000 \text{ kN/cm}^2$  | $\alpha = 4.22 \text{ kN/cm}^2$       |
| $\nu_{\text{Beton}} = 0.18$                | $\theta = 0.33$                       |
| $\beta_c = 3.90 \text{ kN/cm}^2$           | $\gamma = 1.76 \text{ kN/cm}^2$       |
| $\beta_t = 0.30 \text{ kN/cm}^2$           | $\beta = 0.55 \text{ cm}^2/\text{kN}$ |
|  | $R = 2.89$                            |
| $E_{\text{Stahl}} = 19374 \text{ kN/cm}^2$ | $D = 0.0033 \text{ cm}^2/\text{kN}$   |
| $\sigma_y = 37.4 \text{ kN/cm}^2$          | $W = 0.42$                            |
|  | $T = -0.29 \text{ kN/cm}^2$           |
|  | $X_0(x) = 15.6 \text{ kN/cm}^2$       |

Tafel – 12.3 – Materialparameter für das plastische Modell.

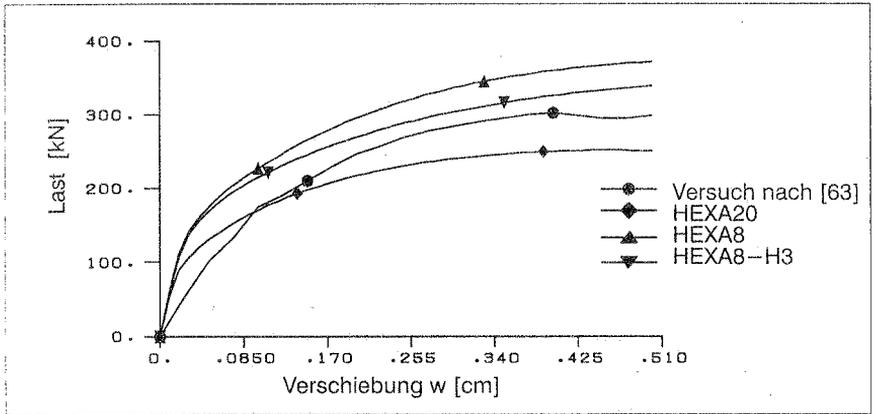


Abbildung 12.14 – Last–Verschiebungskurve.

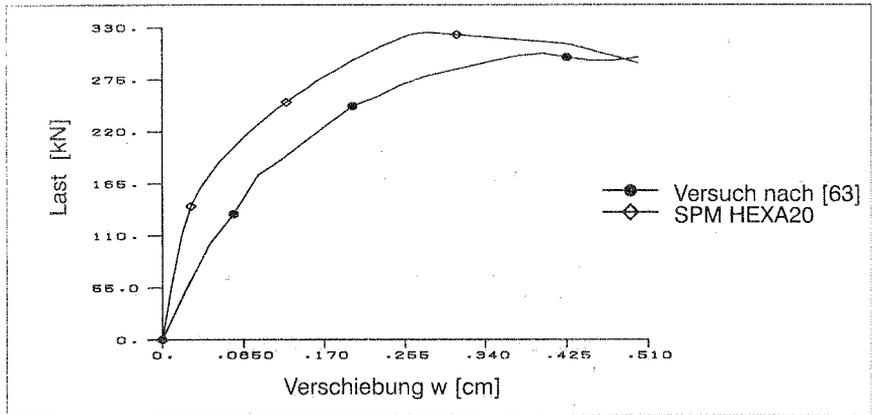


Abbildung 12.15 – Last–Verschiebungskurve.

### 13 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit wird ein gekoppeltes Modell für die Analyse von dreidimensionalen Stahlbetonstrukturen mittels des Finite Element Verfahrens vorgestellt, das den gesamten Vor- und Nachbruchbereich ohne Unterscheidung der Belastungsart mit einem geschlossenen Konzept beschreibt. Das Modell hat die Fähigkeit, die zwei herrschenden Typen von irreversiblen Änderungen, den plastischen Fluß und die Evolution von Mikrodefekten, zu repräsentieren. Dies erfolgt durch die Kopplung der Plastizitäts- mit der Schädigungstheorie.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das CAP-Modell als plastisches Modell mit einem skalaren Schädigungsmodell kombiniert. Das angewandte "zwei Invarianten ( $I_1, J_2$ ) CAP-Modell" besteht aus drei Teilflächen, die keine glatten Übergänge besitzen. Eine assoziierte und nichtassoziierte Fassung entsprechend dem Verfestigungsgesetz werden dargestellt.

Das angewandte Schädigungsmodell beschreibt die Evolution der Schädigung durch eine einzige skalare Variable. Zur Erfassung der unterschiedlichen Festigkeit von Beton auf Druck und Zug wird ein Parameter eingeführt, der vom Dehnungszustand abhängt und eine Skalierung der Schädigungsfläche beschreibt.

Das gekoppelte Modell wird im Rahmen der Projektionsverfahren und der konsistenten Linearisierung des konstitutiven Tensors numerisch behandelt. Die Integration der Evolutionsgleichungen erfolgt nach einer verallgemeinerten Mittelpunktsregel, welche die Konsistenzbedingung am Mittelpunkt erfüllt. Durch die Anwendung des konsistenten konstitutiven Tensors ist die erwünschte quadratische Konvergenz des Newton-Raphson Verfahrens in der Nähe der Lösung gewährleistet.

Ein wichtiger Aspekt in der Materialmodellierung ist die Bestimmung der notwendigen Materialparameter. Dieses Problem kann als eine Optimierungsaufgabe betrachtet werden, wobei letztendlich ein Minimum des Quadrats der Differenz zwischen Modellantwort und Versuchsergebnis gesucht wird. Verschiedene Verfahren können an dieser Stelle angewandt werden. Zwei Möglichkeiten, der SQP ("Sequential Quadratic Programming") Algorithmus und die mehrgliedrige Evolutionsstrategie, werden hier getrennt oder zusammen untersucht.

Wie bei den numerischen Beispielen gezeigt wurde, ist das Modell in der Lage, das allgemeine Tragverhalten von dreidimensionalen Strukturen unter monotoner Belastung zu repräsentieren. Allerdings sollte für allgemeine zyklische Belastungen der Schädigungsanteil des gekoppelten Modells modifiziert werden. Die skalare Variable, welche die Evolution der Schädigung beschreibt, sollte durch mehrere skalare Variablen oder sogar durch tensorielle Variablen höherer Ordnung ersetzt werden. Damit kann der ausgeprägte richtungsabhängige Charakter der Schädigung besser erfaßt werden,

und es können andere Effekte, wie z.B. Öffnung und Schließen von Rissen und die entsprechende Abminderung und Wiederzunahme der Steifigkeit, modelliert werden.

Die Anwendungen eines tensoriellen Schädigungsmodells spielt auch bei monotoner Belastung eine wichtige Rolle, z.B. bei der Erfassung der Anisotropie, die durch die Schädigung induziert wird. Allerdings wird die Kopplung eines solchen Modells mit anderen Theorien (Plastizität, Viskoplastizität oder Bruchmechanik) komplizierter und deswegen auch aufwendiger bei der Analyse wirklicher Tragwerke.

Die numerische Umsetzung der Betrachtung eines heterogenen Materials wie z.B. Beton als einem "statistisch homogenen" Material, beschrieben durch lokale Theorien des Kontinuums, führt im Rahmen der Finite Elemente Methode zu einer starken Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzteilung, die sich bei entfestigenden Werkstoffen besonders stark auswirkt. Hierzu wurden in den letzten Jahren verschiedene Lösungswege vorgeschlagen, wie z.B. Begrenzung der Größe der angewandten finiten Elemente, die Einführung von zeitabhängigen konstitutiven Beziehungen ("viscoplastic regularisation"), das Ergänzen der Definition des Verzerrungs- oder Spannungstensors durch Gradienten höherer Ordnung, Anwendung von einer Spannungs-Verschiebungs- statt Spannungs-Verzerrungsbeziehung oder die Einführung nichtlokaler Formulierungen für die konstitutive Beziehung bzw. für das Schädigungsevolutionsgesetz. Leider kann keine dieser Maßnahmen als eine endgültige Lösung betrachtet werden; dies bleibt sicherlich ein offenes Thema für weitere Forschungsarbeiten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein perfektes Verbundverhalten zwischen Beton und Bewehrung angenommen. Um das Modell wirklichkeitstreuer zu machen, sollte die Verbundwirkung erweitert werden. Auch wäre die Verallgemeinerung der eingebetteten Bewehrung auf beliebige Richtungen und die Einführung von Schlupffreiheitsgraden wünschenswert.

## LITERATUR

- [1] Argyris, J.H.; Mlejnek, H. – P. – Die Methode der Finiten Elemente, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1986.
- [2] Balmer, G.G. – "Shearing strength of concrete under high triaxial stress – computation of Mohr's envelope as a curve", Structural Research Laboratory, Report No. SP-23, Bureau of Reclamation, United States Department of the Interior, 1949.
- [3] Bathe, K. – J.; Ramm, E.; Wilson, E.L. – "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9, pp. 353–386, 1975.
- [4] Bazant, Z.P.; Bhat, P.D. – "Endochronic Theory of inelasticity and failure of concrete", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, EM4, Vol. 102*, pp. 701–722, 1976.
- [5] Bazant, Z.P. – "Endochronic inelasticity and incremental plasticity", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 14, pp. 691–714, 1978.
- [6] Betten, J. – "Damage tensors in continuum mechanics", *Jour. Mech. Theor. Appl.*, Vol. 2, pp. 13–32, 1983.
- [7] Bigoni, D.; Hueckel, T. – "Uniqueness and localization – I. Associative and non-associative elastoplasticity", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 28, No. 2, pp. 197–213, 1991.
- [8] Bigoni, D.; Hueckel, T. – "Uniqueness and localization – II. Coupled elastoplasticity", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 28, No. 2, pp. 215–224, 1991.
- [9] Bletzinger, K. – U. – Formoptimierung von Flächentragwerken, Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1990.
- [10] de Boer, R. – Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982
- [11] Buidianski, B.; O'Connell, R.J. – "Elastic moduli of a cracked solid", *Int. Jour. Solids and Struct.*, Vol. 12, pp. 81–97, 1976.
- [12] Chen, A.C.T.; Chen, W.F. – "Constitutive relations for concrete", *Jour. of Eng. Mech. Div., ASCE, EM4, Vol. 202*, pp. 465–481, 1975.
- [13] Chen, W.F. – Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, 1982.
- [14] Cheng, Y.M.; Fan, Y. – "Modeling of reinforcement in concrete and reinforcement confinement coefficient", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 13, pp. 271–284, 1993.
- [15] Clough, R.W. – "Comparison of three dimensional finite elements", Proceedings Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tenn., (published by ASCE), pp. 1–26, 1969.

- [16] Cornelissen, H.A.W.; Hordijk, D.A.; Reinhardt, H.W. — "Experiments and theory for the application of fracture mechanics to normal and lightweight concrete", Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete, Ed. F.H. Wittman, Elsevier, Amsterdam, 1985.
- [17] Costin, L.S.; Holcomb, D.J. — "A continuum model of inelastically deformed brittle rock based on the mechanics of microcracks", in Proc. Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials, eds: Desai, C.S., Gallagher, R.H., Tucson, Arizona, 1983.
- [18] Davison, L.; Stevens, A.L. — "Thermodynamic constitution of spalling elastic bodies", *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 44, pp. 668–674, 1973.
- [19] Desai, C.S.; Siriwardane, H.J. — *Constitutive Laws for Engineering Material with emphasis on geologic materials*, Prentice–Hall, 1984.
- [20] DiMaggio, F.L.; Sandler, I.S. — "Material model for granular soils", *Jour. Eng. Mech. Div.*, EM3, pp. 935–950, 1971.
- [21] Dougill, J.W. — "On stable progressively fracturing solids", *ZAMP*, Vol. 27, pp. 423–437, 1976.
- [22] Dougill, J.W.; Lau, J.C.; Burt, N.J. — "Towards a theoretical model for progressive failure and softening in rock, concrete and similar materials", in *Mechanics in Engineering*, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, Canada, pp. 335–355, 1977.
- [23] Dougill, J.W.; Rida, M.A.M. — "Further consideration on progressively fracturing solids", *Jour. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 106, EM5, pp. 1021–1038, 1980.
- [24] Eberhardsteiner, J.; Meschke, G.; Mang, H. — *Triaxiales konstitutives Modellieren von Beton zum Zwecke der Durchführung vergleichender Traglastanalysen dickwandiger Stahlbetonstrukturen mittels der Methode der finiten Elemente*, Abschlussbericht, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien, 1987.
- [25] Eberhardsteiner, J.; Hofstetter, G.; Mang, H.; Meschke, G.; Walter, H. — "Traglastanalyse von (a) schlaff bewehrten, dickwandigen Konstruktionselementen und (b) vorgespannten, dünnwandigen Schalen aus Beton", in: *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau*, ed. E. Stein, Springer–Verlag, pp. 303–323 1989.
- [26] El–Mezaini, N.; Citipitioglu, E. — "Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, No. 10 1991, pp. 2851–2864.
- [27] Elwi, A.E.; Murray, D.W. — "Nonlinear analysis of axisymmetric reinforced concrete structures", *Structural Engineering Report No. 87*, University of Alberta, Canada 1980.

- [28] Elwi, A.E.; Murray, D.W. — "A 3D-Hypoelastic concrete constitutive relationship", *Jour. Eng. Mech. Div.*, Vol. 105, pp. 623–641, 1979.
- [29] Elwi, A.E.; Hrudehy, T.M. — "Finite element model for curved embedded reinforcement", *Jour. Eng. Mech. Div.*, Vol. 115, No. 4, pp. 740–754, 1989.
- [30] Germain, P.; Nguyen, Q.S.; Suquet, P. — "Continuum Thermodynamics", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 1010–1020, 1983.
- [31] Glemberg, R.; Oldenburg, M.; Nilsson, L.; Samuelsson, A. — "A general constitutive model for concrete structures", *Computational Modeling of reinforced concrete structures*, eds. Hinton, E. and Owen, R., Pineridge Press, pp. 84–100, 1986.
- [32] Gopalaratnam, V.S.; Shah, S.P. — "Softening response of plain concrete in direct tension", *ACI Journal*, 82(3), pp. 310–323, 1985.
- [33] Green, A.E.; Naghdi, P.M. — "A note on invariance under superimposed rigid body motions", *Jour. of Elasticity*, Vol. 9, No. 1, pp. 1–8, 1979.
- [34] Green, S.J.; Swanson, S.R. — "Static constitutive relations for concrete", Air Force Weapons Laboratory, Technical Report No. AFWL-TR-72-2, Kirtland Air Force Base, 1973.
- [35] Hill, R. — "A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol.1, pp. 18–25, 1948.
- [36] Hill, R. — "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, 1950.
- [37] Hofstetter, G.; Mang, H.A.; Meschke, G. — "3D Inelastic constitutive modeling for FE Analysis of concrete structures", in *Nonlinear Computational Mechanics—State of the Art*, eds. Wriggers, P.; Wagner, W., Springer Verlag, pp. 606–626, 1991.
- [38] Hofstetter, G.; Simo, J.C.; Taylor, R.L. — "A modified cap model : closest point solution algorithms", *Computer & Structures*, Vol. 46, No. 2, pp. 203–214, 1993.
- [39] Holcomb, D.J.; Costin, L.S. — "Detecting damage surfaces in brittle materials using acoustic emissions", *Jour. Appl. Mech.*, Vol. 53, pp. 536–544, 1986.
- [40] Hughes, T.J.R.; Pister, K.S. — "Consistent linearization in mechanics of solids and structures", *Comp. & Struct.*, Vol. 8, pp. 391–397, 1978.
- [41] Irons, B.; Ahmad, S. — *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, 1980.
- [42] Johnson, C. — "Existency theorems for plasticity problems", *Journal de Mathematiques Pures et Appliques*, Vol. 55, pp. 431–444, 1976.
- [43] Johnson, C. — "On plasticity with hardening", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 62, pp. 325–326, 1978.

- [44] Ju, J. — "A parameter estimation algorithm and extensive numerical simulations for the cap-model", Technical Report, DNA-TR-86-127, Director Defense Nuclear Agency, Washington, 1985.
- [45] Ju, J. — "Isotropic and anisotropic damage variables in continuum mechanics", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 116, No. 12, pp. 2765-2770, 1990.
- [46] Kachanov, M. — "A continuum model of medium with cracks", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 106, pp. 1039-1051, 1980.
- [47] Karihaloo, B.L. — "Failure modes of longitudinally reinforced beams, ed. A. Carpinteri, Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete, Elsevier Applied Science, pp. 523-546, 1992.
- [48] Kestin, J.; Rice, J.R. — "Paradoxes in the application of thermodynamics to strained rods", A Critical Review of Thermodynamics, ed. Stuart. E.B. et al., Mono Book Corp, Baltimore, 1970.
- [49] Koiter, W.T. — "Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 350-354, 1953.
- [50] Kompfner, T.A. — Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen, Bericht Nr. 2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [51] Kotsovos, M.D.; Newmann, J.B. — "Behavior of concrete under multiaxial stress", *ACI Journal*, Vol. 74, No. 9, pp. 443-446, 1977.
- [52] Kotsovos, M.D.; Newmann, J.B. — "Generalized stress-strain relations for concrete", *J. Eng. Mech*, Vol. 104, No. EM4, pp. 845-856, 1978.
- [53] Krajcinovic, D.; Fonseka, G.U. — "The continuous damage mechanics of brittle materials—Part I and II", *Journ. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 355-360, 1983.
- [54] Krajcinovic, D. — "Constitutive equations of damaging materials", *Journ. Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 809-815 and 816-824, 1981.
- [55] Krajcinovic, D. — "Continuum damage mechanics revisited : Basic concepts and definitions", *Journ. Appl. Mech.*, Vol. 52, pp. 829-834, 1985.
- [56] Krieg, R.D; Key, S.W. — "Implementation of a time dependent plasticity theory into structural computer programs", Constitutive Equations in Viscoplasticity : Computational and Engineering Aspects, Ed. Stricklin, J.A; Saczlski, K.J., AMD-20, ASME, New York, 1976.
- [57] Krieg, R.D; Krieg, D.B. — "Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model", *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 99, 1977.

- [58] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H. — "Behavior of concrete under biaxial stresses", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, EM4*, pp. 853–866, 1973.
- [59] Kupfer, H.; Hilsdorf, H.K.; Rüschi, H. — "Behavior of concrete under biaxial stress", *ACI Journal*, pp. 656–666, 1969.
- [60] Lemaitre, J. — "Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loads", *Proc. I.C.M., Kyoto, Japan*, 1971.
- [61] Lemaitre, J. — "How to use damage mechanics", *Nucl. Eng. and Design*, Vol. 80, pp. 233–245, 1984.
- [62] Lemaitre, J. — "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", *Jour. Engng. Mater. Tech.*, 107, pp. 83–89, 1985.
- [63] Lieberum, K.H.; Reinhardt, H.W. — "Strength of concrete on an extremely small bearing area", *ACI Struct. Journ.*, pp. 67–76, 1989.
- [64] Little, R.W. — *Elasticity*, Prentice–Hall, New–Jersey, 1973.
- [65] Lubliner, J. — "On the thermodynamic foundations of non–linear solid mechanics", *Int. J. Non–Linear Mech.*, Vol.7, pp.237–254, 1972.
- [66] Luenberger, D.G. — *Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley Publishing Company, 1984.
- [67] MacNeal, R.H.; Harder, R.L. — "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Fin. Elem. Analys. Des.*, Vol. 11, pp. 3–20, 1985.
- [68] Martin, J.B. — *Plasticity – Fundamentals and General Results*, MIT Press, Cambridge, 1975.
- [69] Matzenmiller, A. — Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen, Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- [70] Mazars, J.; Lemaitre, J. — "Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete", in: *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO Advanced Research Workshop, ed. : Shah, S.P. , pp. 375–388, 1984.
- [71] Mehmel, A.; Freitag, W. — "Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsole", *Der Bauingenieur* 42, pp. 362–369, 1967.
- [72] Moreau, J.J. — "Application of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems", in: *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, Eds. P. Germain and B. Nayroles, Springer–Verlag, Berlin, pp. 56–89, 1976.
- [73] Müller, I. — "Entropy in non–equilibrium. A challenge to mathematicians.", *Trends and Applications of Pure Mathematic to Mechanics*, Vol. II, pp. 281–295, 1979.

- [74] Murray, D.W. — "Octahedral based incremental stress–strain matrices", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, EM 4*, Vol. 105, pp. 501–513, 1979.
- [75] Nagtegaal, J.C. — "On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems.", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 33, pp. 469–484, 1982.
- [76] Neilsen, M. K.; Schreyer, H. L. — "Bifurcations in elasto–plastic materials.", *Int. J. Solids and Structures* **30**, 521–544 (1993).
- [77] Nelissen, L.J.M. — Biaxial testing of normal concrete, *Heron*, Vol. 18, No. 1, 1972.
- [78] Ngo, D.; Scordelis, A.C. — "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", *ACI–Journal*, Vol. 64, pp. 152–163, 1967.
- [79] Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S.; Lubliner, J. — "Isotropic damage models and smeared crackanalysis of concrete", in: *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, ed. Bicanic, N.; Mang, H., Pineridge Presse, pp. 945–957, 1990.
- [80] Onsager, L. — "Reciprocal relations in irreversible process", *Phys. Rev.*, Vol. 37, 1931.
- [81] Ortega, J.M.; Rheinbolt, W.C. — Iterative solution of nonlinear equations in several variables — Series on Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1970.
- [82] Ortiz, M.; Popov, E. — "A physical model for inelasticity of concrete", *Proc. Royal Soc. of London*, A383, pp. 101–125, 1982.
- [83] Ortiz, M.; Popov, E. — "Accuracy and stability of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 1561–1576, 1985.
- [84] Ortiz, M.; Martin, J.B. — "Symmetry–preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 1839–1853, 1989.
- [85] Phillips, D.V.; Zienkiewicz, O.C. — "Finite element nonlinear analysis of concrete structures", *Proc. Instit. Civ. Engrs.*, Part 2, Vol. 61 (3), 1976, pp.59–88.
- [86] Ramm, E. — Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente, Bericht Nr. 76–2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [87] Rechenberg, I. — "Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution", Frommann–Holzboog, Stuttgart, 1973.
- [88] Reinhardt, H.W. — Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete, *Heron*, Vol. 29, No. 2, 1984.

- [89] Rehm, G. – "On the essentials of bond between concrete and reinforcement", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Vol. 138, 1961.
- [90] Rencontre, L.J.; Caddemi, S.; Martin, J.B. – "The relationship between the generalised mid–point rule and trapezoidal rules in incremental elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 96, pp. 201–212, 1992.
- [91] Rice, J.R. – "Inelastic constitutive relations for solids : an internal–variable theory and its application to metal plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 19, pp. 433–455, 1971.
- [92] Rice, J.R. – "The localization of plastic deformation", in: *Theoretical and Applied Mechanics*, W.T. Koiter (Ed.), North–Holland, Amsterdam, pp. 207, 1976.
- [93] Richart, F.E.; Brandtzaeg, A.; Brown, R.L. – "A study of the failure of concrete under combined compressive stresses", University of Illinois, Bulletin No. 185, 1928.
- [94] Roehl, D. M. – Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua, Bericht Nr. 16, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1994.
- [95] Rots, J.G. – "Computational bond models: three levels of accuracy", IABSE Colloquium Stuttgart – Structural Concrete, 1991, pp.327–336.
- [96] Runesson, K.; Sture, S.; Willam, K. – "Integration in computational plasticity", *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 119–130, 1988.
- [97] Sandler, I.S.; Rubin, D. – "An algorithm and a modular subroutine for the cap model", *int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. 3, pp. 173–186, 1979.
- [98] Saroudis, C.; Mazars, J. – "A multiscale approach to distributed damage and its usefulness for capturing structural size effect, in *Damage and Cracking, Localization and Size Effect*, Eds. Mazars, J., Bazant, Z.P., Elsevier, Amsterdam, pp. 391–403, 1989.
- [99] Saroudis, C.; Mazars, J. – "Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi–scale damage approach", *Eng. Computations*, Vol. 9, pp. 329–344, 1992.
- [100] Scavuzzo, R. – "Behavior of concrete under multiaxial load histories", Department of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, M.Sc. Thesis, 1982.
- [101] Scavuzzo, R.; Stankowski, T.; Gerstle, K.H.; Ko, H.Y. – "Stress–strain curves for concrete under multiaxial load histories". NSF CME–80–01508, Department of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, 1983.
- [102] Schellekens, J.C.J. – Interface Elements in Finite Element Analysis, Delft University of Technology, Report nr. 25–2–90–5–17, October 1990.

- [103]Schreyer, H.L.; Kulak, R.L; Kramer, J.M. – "Accurate numerical solutions for elastic–plastic models", *Journal Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 101, pp. 226–234, 1979.
- [104]Schreyer, H.L.; Babcock, S. – "Third invariant plasticity theory for low–strength concrete", *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, EM4*, Vol. 111, pp. 545–558, 1985.
- [105]Schwefel, H.P. – "Evolutionstrategie", Interner Bericht KFA–STE–IB–2/80, Kernforschungsanlage Jülich, 1980.
- [106]Sewell, M.J. – Maximum and Minimum Principles. A unified approach with applications, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1987.
- [107]Simo, J.C.; Govindjee, S. – "Non–linear B–stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity", *Int. J. Num. Meth Eng.*, Vol. 31, pp. 151–176, 1991.
- [108]Simo, J. C.; Rifai, M.S. – "A class of assumed strain methods and the method of incompatible modes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, 1595–1638 (1990).
- [109]Simo, J.C.; Honein, T. – "Variational formulation, discrete conservation laws, and path–domain independent integrals for elasto–viscoplasticity", *J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 488–497, 1990.
- [110]Simo, J.C; Hughes, T.J.R. – Elastoplasticity and Viscoplasticity; Computational Aspects, Stanford–University (Vorabdruck), 1988.
- [111]Simo, J.C.; Ju, J.–W. – "Strain– and stress–based continuum damage models– I. Formulation", *Int. Jour. Solids and Struct.*, Vol. 23, No. 7, pp. 821–840, 1987.
- [112]Simo, J.C.; Ju, J.–W. – "Strain– and stress–based continuum damage models– II. Computational Aspects", *Int. Jour. Solids and Struct.*, Vol. 23, No. 7, pp. 841–869, 1987.
- [113]Simo, J.C.; Ju, J.–W.; Pister, K.S.; Taylor, R.L. – "Assessment of cap model : consistent return algorithms and rate–dependent extension", *Jour. Eng. Mech*, Vol. 114, No. 2, pp. 191–218, 1988.
- [114]Simo, J.C.; Kennedy, J.G.; Govindjee, S. – "Non–smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms", *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 2161–2185, 1988.
- [115]Simo, J.C.; Taylor, R.L – "Consistent tangent operators for rate–independent elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 48, pp. 101–118, 1985.
- [116]Smith, I.M. – "Are there any new elements?", Finite elements in the 90's, E. Onate, J. Periaux, A. Samuelson (Eds.), Springer–Verlag/CIMNE, Barcelona, 1991.

- [117]Smith, I.M.; Kidger, D.J. – "Elastoplastic analysis using the 14–node brick element family", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 1263–1275, 1992.
- [118]Spencer, A.J.M. – Theory of Invariants, Continuum Physics, ed. A.C. Eringen, Vol I–Mathematics, Academic Press, 1971.
- [119]Stankowski, T. – "Concrete under multiaxial load histories", Department of Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, M.Sc. Thesis, 1983.
- [120]Stegmüller, H.; Bletzinger, K.U.; Kimmich, S. – Finite Element Programmsystem CARAT – Eingabebeschreibung, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1989.
- [121]Sze, K.Y.; Chow, C.L.; Chen, W.J. – "A rational formulation of isoparametric hybrid stress elements for three–dimensional stress analysis", *Fin. Elem. Analys. Des.*, Vol. 7, pp. 61–72, 1990.
- [122]Sze, K.Y.; Ghali, A. – "Hybrid hexaedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp.1519–1540, 1993.
- [123]Temam, R. – Mathematical Problems in Plasticity, Gauthier–Villars, Paris, 1985.
- [124]Truesdell, C. – Rational Thermodynamics, Springer–Verlag, New–York, 1984.
- [125]Truesdell, C.; Noll, W. – The Non–linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer–Verlag 1965.
- [126]Valanis, K.C. – "On the uniqueness of the solution of the initial value problem in strain softening materials", *Jour. Appl. Mech.*, Vol. 52, pp. 649–653, 1985.
- [127]Valliapan, S.; Murti, V.; Wohua, Z. – "Finite element analysis of anisotropic mechanics problems", *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 35, No. 6, pp. 1061–1071, 1990.
- [128]van Mier, J.G.M.; Reinhardt, H.W.; van der Vlugt, B.W. – "Ergebnisse dreiachsiger verformungsgesteuerter Belastungsversuche an Beton", *Bauingenieur*, 62, pp. 353–361, 1987.
- [129]Walraven, J.C.; Reinhardt, H.W. – Theory and experiments on the mechanical behavior of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading, Heron, Vol. 26, No. 1A, 1981.
- [130]Wedemeier, T. – "Beiträge zur Theorie und Numerik von Materialien mit innerer Reibung am Beispiel des Werkstoffes Beton", Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht Nr. F90/5
- [131]Willam, K.J.; Warnke, E.P. – "Constitutive Model for the triaxial behavior of concrete", *Int. Assoc. for Bridge and Structural Engineering, Proceedings*, Vol. 19, pp. 1–30, 1974.
- [132]Wilkins, M.L. – "Calculation of elastic plastic flow", *Methods of Computational Physics 3*", Ed. Alder, B. et al., Academic Press, New York, 1964.

- [133] Woods, L.C. – "Thermodynamics inequalities in continuum mechanics", *IMA J. of Appl. Math.*, Vol. 29, pp. 221–246, 1982.
- [134] Wriggers, P. – Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite–Element–Methode, Habilitation, Bericht–Nr. F 88/4, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1988.
- [135] Yankelevsky, D.Z.; Reinhardt, H.W. – "Uniaxial behavior of concrete in cyclic tension", *Journal of Struc. Eng.*, Vol. 115, No. 1, pp. 166–182, 1989.
- [136] Zaman, M.M.; Desai, C.S.; Faruque, M.O. – "An algorithm for determining parameters for cap model from raw laboratory test data", Proc. 4th Int. Conf. Numer. Meth. In Geomech., Edmonton, Canada, 1982.
- [137] Ziegler, H. – "Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics", *Progress in Solid Mechanics*, ed. Sneddon, and Hill, Vol. IV, pp. 93–193, 1963.
- [138] Zienkiewicz, O.C. – *The Finite Element Method*, McGraw–Hill, third edition, 1985.
- [139] Zienkiewicz, O.C.; Irons, B.M.; Ergatoudis, J.; Ahmad, S.; Scott, F. – "Iso–parametric and associated element family for two– and three–dimensional analysis", Chapter 13 of *Finite Element Methods in Stress Analysis*, (Holand, I., Bell, K. editors), Tapir, 1969.
- [140] Zurmühl, R.; Falk, S. – *Matrizen und ihre Anwendungen*, Springer–Verlag, 5. Auflage, 1984.

## A1 ANHANG 1

### VARIATIONELLE FORMULIERUNG ALS DREI FELD FUNKTIONAL (HU–WASHIZU)

In diesem Anhang wird eine variationelle Formulierung entwickelt, die auf einem Hu–Washizu Funktional basiert. Es wird gezeigt, daß als entsprechende Euler–Lagrange Gleichungen zusätzlich zu den Gleichgewichtsgleichungen und den kinematischen Verzerrungs–Verschiebungs–Beziehungen auch das plastische Fließgesetz, die Gleichungen der Schädigungsevolution, die Ent–/Belastungsbedingungen und die Dissipationsungleichungen für Schädigung und Plastizität erzeugt werden.

#### A1.1 Variationelle Formulierung

In diesem Abschnitt wird eine variationelle Formulierung aus Ausgangsbasis für das diskrete Problem diskutiert. Da im Rahmen dieser Arbeit nur statische und ratenunabhängige Probleme (im Sinne der wirklichen Zeit) betrachtet werden, stellt die Zeit  $t$  kein reelles Zeitmaß dar, sondern ein Maß für die Ordnung der Evolution von Ereignissen.

Ein zu betrachtender Zeitraum  $[0, t] \subset \mathbb{R}^+$  wird in sich nicht überschneidende Intervalle unterteilt.

$$[0, t] = \bigcup_{i=1} [t_i, t_{i+1}]$$

In einem typischen Intervall  $[t_n, t_{n+1}]$  wird vorausgesetzt, daß die Variablen, die das Problem beschreiben, am Anfang bekannt sind. Die gesamte Energie zur Zeit  $t$  wird in der Form eines Hu–Washizu Funktionals eingeführt.

$$\Pi \equiv \int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ (1 - D) [A_0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^P] + \boldsymbol{\sigma} : [\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}] + \Lambda^P(\boldsymbol{\sigma}^P, \mathbf{q}) \right\} dv + \Pi_{\text{ext}} \quad (\text{A1.1})$$

wobei

$$\Pi_{\text{ext}} := - \int_{\mathfrak{B}_t} \varrho \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{u}_t dv - \int_{\partial \mathfrak{B}_t} \varrho \mathbf{t}_t \cdot \mathbf{u}_t da \quad (\text{A1.2})$$

In Gln. (A1.1) kann der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  als ein Lagrangescher Multiplikator betrachtet werden, der die Dehnungs–Verschiebungsbeziehung  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$  schwach erfüllt.

Zwei weitere Funktionale ("Lagrangian") werden eingeführt, wobei der untere Index  $\tau$  die Werte der Variablen zum Zeitpunkt  $\tau \in [0, t]$  bezeichnet. Das Funktional  $\mathbb{L}^P$  beschreibt die plastische Dissipation im ganzem Körper bis zur aktuellen Zeit  $t$ .

$$\mathbb{L}_t^p := \int_0^t \int_{\mathfrak{B}_t} \left[ -\dot{\lambda}_\tau \Phi^E(\bar{\sigma}_\tau, \mathbf{q}_\tau) + \varepsilon_\tau : \dot{\bar{\sigma}}_\tau^p \right] dv - \int_0^t \int_{\mathfrak{B}_t} \dot{\Lambda}^p(\mathbf{q}_\tau, \dot{\bar{\sigma}}_\tau^p) dv \quad (\text{A1.3})$$

Das Funktional  $\mathbb{L}^d$  beschreibt die Dissipation im ganzem Körper bis zu der aktuellen Zeit  $t$ , die der Schädigungsprozeß verursacht.

$$\mathbb{L}_t^d := \int_0^t \int_{\mathfrak{B}_t} \left[ -\dot{\mu}_\tau \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}_\tau, K_\tau) - \mathbf{Y}_\tau \dot{D}_\tau \right] dv = \int_0^t \int_{\mathfrak{B}_t} \left[ -\dot{\mu}_\tau \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}_\tau, K_\tau) + A_{0\tau} \dot{D}_\tau \right] dv \quad (\text{A1.4})$$

Die aktuelle Zeit ist  $t = t_{n+1}$ , wobei  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  und  $\Delta t > 0$ . Die zusammengenommenen Einzelfunktionale (A1.3) und (A1.4) sind überzuführen in

$$\mathbb{L}_{n+1}^{dp} := \mathbb{L}_n^{dp} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ \left[ -\dot{\lambda}_\tau \Phi^E(\bar{\sigma}_\tau, \mathbf{q}_\tau) + \varepsilon_\tau : \dot{\bar{\sigma}}_\tau^p \right] + \left[ -\dot{\mu}_\tau \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}_\tau, K_\tau) + A_{0\tau} \dot{D}_\tau \right] - \left( \partial_{\mathbf{q}_\tau} \Lambda^p \cdot \dot{\mathbf{q}}_\tau + \partial_{\bar{\sigma}_\tau^p} \Lambda^p \cdot \dot{\bar{\sigma}}_\tau^p \right) \right\} dv \quad (\text{A1.5})$$

wobei  $\mathbb{L}^{dp} = \mathbb{L}^d + \mathbb{L}^p$  und  $\dot{\Lambda}^p$  ausgeschrieben wurde.

Folgende Bezeichnung für alle Zustandsvariablen wird eingeführt :

$$\boldsymbol{\kappa}_\tau := \left\{ \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^p, \mathbf{q}, D, \lambda, \mu \right\}_t \quad (\text{A1.6})$$

Es wird angenommen, daß die Geschichte  $\boldsymbol{\kappa}_\tau$  ( $\tau \in [0, t_n]$ ) bis zum Zeitpunkt  $t_n$  gegeben und festgehalten ist. Durch ein implizites Integrationsschema (z.B. "Rückwärts-Euler") wird das entsprechende, in der Zeit diskrete Dissipationsfunktional bestimmt. Dann kann das algorithmische Äquivalent von Gleichung (A1.5) mittels des impliziten Schemas bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{n+1}^{dp}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) := & \mathbb{L}_n^{dp} + \int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ \left[ -\lambda_{n+1} \Phi^E(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} : (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n^p) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ -\mu_{n+1} \hat{\Psi}(\tilde{\varepsilon}_{n+1}, K_{n+1}) + A_{0n+1} (D_{n+1} - D_n) \right] - \right. \\ & \left. - \left( \partial_{\mathbf{q}_{n+1}} \Lambda^p \cdot (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) + \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^p} \Lambda^p \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n^p) \right) \right\} dv \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

wobei  $\lambda_{n+1} := \dot{\lambda} \Delta t$ ;  $\mu_{n+1} := \dot{\mu} \Delta t$ .

Die gesamte verfügbare Energie zur Zeit  $t_{n+1}$  kann durch die Zustandsvariablen zur Zeit  $t_{n+1}$  als die Summe der potentiellen Energie zur Zeit  $t_{n+1}$  und der inkrementellen Dissipation im Zeitraum  $[t_n, t_{n+1}]$  beschrieben werden.

$$\hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) := \Pi_{n+1}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) + (\mathbb{L}_{n+1}^{dp} - \mathbb{L}_n^{dp}) \quad (\text{A1.8})$$

mit Gl. (A1.1)

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) := & \int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ (1 - D_{n+1}) [A_{0n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^p] + \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : [\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}] + \Lambda^p(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^p, \mathbf{q}_{n+1}) \right\} dv + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

Unter Anwendung der Gateaux-Ableitung ergeben sich die stationären Gleichungen für das diskrete Funktional

$$\delta \hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathfrak{B}_t} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla^s \boldsymbol{\eta} - \varrho \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial \mathfrak{B}_t} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = \mathbf{0}$$

$$\delta \hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \delta \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\mathfrak{B}_t} \delta \boldsymbol{\sigma} : [\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}] dv = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}) = & \int_{\mathfrak{B}_t} \left\{ \left[ -\lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \boldsymbol{\varepsilon} A_0|_{n+1} : \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \Phi^\varepsilon|_{n+1} + (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n^p) \right] + \right. \\ & \left[ (1 - D_{n+1}) - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0|_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^p - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right] + \\ & \left. \left[ -\mu_{n+1} \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\Psi}|_{n+1} + (D_{n+1} - D_n) \right] \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0|_{n+1} \right\} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

$$\delta \hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \delta \lambda) = \int_{\mathfrak{B}_t} \Phi^\varepsilon|_{n+1} \delta \lambda dv = 0$$

$$\delta \hat{\Pi}_n(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \delta \mu) = \int_{\mathfrak{B}_t} \hat{\Psi}|_{n+1} \delta \mu dv = 0$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen des diskreten Funktionals werden durch

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \varrho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{in } \partial \mathfrak{B}_t$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} A_0|_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^p \quad (\text{A1.11})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^p = \boldsymbol{\sigma}_n^p + \lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \boldsymbol{\varepsilon} A_0|_{n+1} : \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \Phi^\varepsilon|_{n+1}$$

$$D_{n+1} = D_n + \mu_{n+1} \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\Psi}|_{n+1}$$

beschrieben.

## Lebenslauf

### Zur Person:

06.01.63 geboren in Rio de Janeiro, Brasilien  
Sohn von Rodolfo Suanno  
und dessen Ehefrau Aryn ea Martins Suanno, geb. Almeida Martins  
Ehefrau Deane de Mesquita Roehl  
Sohn Mateus Roehl Suanno

### Schule, Ausbildung und Beruf:

1968 – 1970 Grundschule in Rio de Janeiro  
1971 – 1979 Gymnasium in Rio de Janeiro  
Colegio Sto. Inácio  
Dez. 1979 Abitur  
1980 – 1984 Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Fachrichtung Bauingenieurwesen  
Dez. 1984 Diplom  
1985 – 1987 Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Master of Science – Fachrichtung Bauingenieurwesen  
m ndliche Prüfung  
M rz 1988 Statiker an der NUCLEN–Engenharia e Serviços S.A.,  
1987 – 1989 Rio de Janeiro  
Okt. 1989 – Stipendiat der brasilianischen Forschungsgesellschaft – CNPq –  
Juni 1994 am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
seit Juli 1994 Statiker an der NUCLEN–Engenharia e Serviços S.A.,  
Rio de Janeiro

Folgende Berichte sind erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des  
Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Quer-  
schnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung  
bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wiss-  
mann:  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattent-  
heorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter  
Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,  
K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem  
mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von  
Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-  
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher  
Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berück-

- sichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. André:  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:  
Formoptimierung von Flächentragwerken.

- 12 (1990) S. Kimmich:  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:  
Zur Berechnung von großen elasto-plastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.